



**HAL**  
open science

# Approche expérimentale de la dynamique non-linéaire d'ondes internes en rotation

Paco Maurer

► **To cite this version:**

Paco Maurer. Approche expérimentale de la dynamique non-linéaire d'ondes internes en rotation. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université de Lyon, 2017. Français. NNT : 2017LYSEN014 . tel-01563324

**HAL Id: tel-01563324**

**<https://theses.hal.science/tel-01563324v1>**

Submitted on 17 Jul 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Numéro National de Thèse : 2017LYSEN014

**THÈSE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON**  
opérée par  
**l'École Normale Supérieure de Lyon**

**École Doctorale N°52**  
**Physique et Astrophysique de Lyon (PHAST)**

**Spécialité de doctorat : Physique**

Soutenue publiquement le 22/06/2017, par :

**Paco MAURER**

---

**Approche expérimentale de la dynamique  
non-linéaire d'ondes internes en rotation.**

---

Devant le jury composé de :

LE GAL, Patrice	DR CNRS	IRPHE	Rapporteur
BILLANT, Paul	Professeur	LADHYX	Rapporteur
BOURUET-AUBERTOT, Pascale	Professeur	LOCEAN	Examinatrice
NASO, Aurore	CR CNRS	LMFA	Examinatrice
PEACOCK, Thomas	Professor	MIT MECHE	Examineur
ODIER, Philippe	Maître de conférence	LabPHYS	Directeur de thèse
JOUBAUD, Sylvain	Maître de conférence	LabPHYS	Co-encadrant de thèse





Nuage lenticulaire, Walsenburg, Colorado, USA.

## REMERCIEMENTS

---

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Remerciements</b>	<b>3</b>
<b>Notations</b>	<b>9</b>
<b>Introduction</b>	<b>11</b>
<b>I Ondes gravito-inertielles</b>	<b>15</b>
Introduction . . . . .	15
1 Théorie des ondes gravito-inertielles . . . . .	16
1.a Physique d'un fluide stratifié . . . . .	16
1.b Physique d'un fluide en rotation . . . . .	17
1.c Equations de propagation . . . . .	19
1.d Onde plane monochromatique . . . . .	20
1.e Instabilité triadique résonante (TRI) . . . . .	26
2 Ondes gravito-inertielles dans les fluides géophysiques . . . . .	28
2.a Stratification et rotation de l'océan et de l'atmosphère . . . . .	28
2.b Génération d'ondes internes . . . . .	31
2.c Dynamique océanique . . . . .	32
2.d Latitude critique . . . . .	33
3 Ondes gravito-inertielles au laboratoire . . . . .	35
3.a Cuves . . . . .	35
3.b Stratification . . . . .	36
3.c Rotation . . . . .	41
3.d Génération d'ondes internes . . . . .	43
3.e Visualisation des ondes . . . . .	45
Conclusion . . . . .	49
<b>II Ondes internes en rotation</b>	<b>51</b>
Introduction . . . . .	51
1 Génération d'ondes internes en rotation . . . . .	52
1.a Visualisation des ondes . . . . .	52
1.b Effets de bords . . . . .	53
2 Transformée de Hilbert . . . . .	55
2.a Principe . . . . .	55
2.b Application . . . . .	56
3 Relation de dispersion . . . . .	57
Conclusion . . . . .	59

<b>III</b>	<b>Instabilité triadique en stratifié tournant</b>	<b>61</b>
	Introduction . . . . .	61
1	Conditions de résonance . . . . .	63
	1.a Première approche de la TRI . . . . .	63
	1.b Influence de la rotation sur les paramètres accessibles . . . . .	63
	1.c Mesures expérimentales . . . . .	64
2	Taux de croissance de la TRI . . . . .	67
	2.a Théorie . . . . .	67
	2.b Seuil d'instabilité . . . . .	72
	2.c Critère de sélection . . . . .	73
3	Effet de taille finie . . . . .	73
	3.a Importance de l'effet de taille finie . . . . .	73
	3.b Modèle . . . . .	74
	3.c Prévion du seuil d'instabilité . . . . .	76
4	Propriétés des ondes secondaires . . . . .	78
	4.a Evolution de la pulsation . . . . .	78
	4.b Ondes sous-inertielles . . . . .	79
	Conclusion et perspectives . . . . .	83
<b>IV</b>	<b>Ondes gravito-inertielles axisymétriques</b>	<b>85</b>
	Introduction . . . . .	85
1	Nouveau générateur d'onde . . . . .	87
2	Modèle analytique . . . . .	88
	2.a Equation de propagation . . . . .	88
	2.b Solution non-visqueuse . . . . .	90
	2.c Solution faiblement visqueuse . . . . .	91
	2.d Solution générale . . . . .	92
3	Propagation d'une fonction de Bessel tronquée . . . . .	92
	3.a Mesures expérimentales . . . . .	93
	3.b Comparaison à la solution numérique . . . . .	95
4	Observation de non-linéarités . . . . .	97
	4.a Equation de propagation non-linéaire . . . . .	97
	4.b Observation de non-linéarités résonantes . . . . .	102
5	Propagation d'un bourrelet . . . . .	104
	Conclusion et perspectives . . . . .	106
<b>V</b>	<b>Focalisation d'ondes internes</b>	<b>107</b>
	Introduction . . . . .	107
1	Démarche expérimentale . . . . .	109
	1.a Profil du générateur . . . . .	109
	1.b Stratification non-linéaire . . . . .	109
	1.c Trajectoire des ondes . . . . .	111
	1.d Modélisation de l'amplification . . . . .	112
2	Amplification . . . . .	114
	2.a Mesures expérimentales . . . . .	115
	2.b Caractéristiques de l'amplification . . . . .	115
3	Instabilités au maximum d'amplification . . . . .	118
	3.a Évolution des instabilités en fonction de l'amplitude du forçage . . . . .	118
	3.b Contenus spectraux . . . . .	120
	3.c Caractéristiques des ondes secondaires . . . . .	121
4	Vers plus d'instabilité . . . . .	122
	4.a Profil du générateur . . . . .	122
	4.b Problèmes rencontrés et à résoudre . . . . .	122

Conclusion . . . . .	124
<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>127</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>131</b>
<b>Résumé - Abstract</b>	<b>137</b>



## TABLE DES MATIÈRES

---

## NOTATIONS

Symbole	Signification
$a$	Amplitude des oscillations des cames/cylindres
$A$	Amplitude du déplacement lors de l'oscillations des ondes
$\beta$	Angle de propagation
$d$	Distance de l'écran strioscopie à la cuve
$D$	Distance du plan d'observation à la caméra
$e$	Énergie volumique
$e_c$	Énergie cinétique volumique
$e_p$	Énergie potentielle volumique
$f$	Pulsation de Coriolis
$f'$	Focale de la caméra
$g$	Accélération de la pesanteur
$\gamma$	Atténuation visqueuse
$J$	Jacobien
$J_n$	Fonction de Bessel d'ordre $n$
$\mathbf{k}$	Vecteur d'onde
$k$	Nombre d'onde radial
$\kappa$	Module du vecteur d'onde
$\ell$	Nombre d'onde horizontal selon $x$
$L$	Largeur de la petite cuve
$m$	Nombre d'onde vertical selon $z$
$N$	Pulsation de flottabilité (stratification linéaire ou non-linéaire)
$N_h$	Pulsation de flottabilité (stratification linéaire)
$\nu$	Viscosité cinématique de l'eau
$p$	Pression
$\mathbf{\Pi}$	Vecteur Poynting
$\Psi$	Fonction courant
$q$	Facteur d'amplification de la vitesse verticale
$Q_i$	Débit de la pompe $i$ .

Symbole	Signification
$\rho(z)$	Masse volumique du fluide en $z$
$\rho_0$	Masse volumique moyenne dans le fluide
$\bar{\rho}(z)$	Masse volumique du fluide à l'équilibre en $z$
$\rho'(z)$	Ecart à la masse volumique tel que $\rho(z) = \bar{\rho}(z) + \rho'(z)$
$s(z)$	Surface effective lors de la propagation conique
$S$	Surface de la cuve
$S_z(\omega, t)$	Amplitude du diagramme temps-fréquence associé à la composante verticale du champ
$S_z^*$	Moyenne de $\langle S_z(\omega_0, t) \rangle$ hors du maximum d'amplification.
$\sigma$	Taux de croissance de la TRI pour des ondes planes infinies
$\Sigma$	Taux de croissance de la TRI dans le modèle de taille finie
$\mathbf{v}$	Vitesse d'une particule fluide.
$v_x, v_y, v_z, v_r, v_\theta$	Vitesse selon $(x, y, z, r, \theta)$
$V_i$	Volume de la cuve de remplissage $i$
$\mathbf{v}_g$	Vitesse de groupe
$v_{\text{gen}}$	Vitesse verticale sous le générateur
$\mathbf{v}_\phi$	Vitesse de phase
$V_z$	Amplitude de la vitesse verticale
$W$	Largeur du faisceau
$\Omega$	Vitesse de rotation angulaire
$\omega$	Pulsation de l'onde
$\omega_{\text{max}}$	Pulsation du maximum d'amplification
$z_F$	Profondeur de focalisation
$z_T$	Profondeur de rebroussement
$\zeta$	Taille d'un pixel



Photographie d'un *morning glory*, golfe de Carpentarie, Australie.

Les océans et l'atmosphère sont des fluides géophysiques permettant la propagation d'ondes gravito-inertielles. En effet, dans des fluides stratifiés en densité et en rotation, la poussée d'Archimède et la force de Coriolis agissent comme des forces de rappel et permettent ainsi la propagation de phénomènes ondulatoires. L'étude de ces ondes dans un contexte géophysique est par exemple motivée par la compréhension des mécanismes d'instabilités qui permettent le maintien de la circulation thermohaline, qui est la circulation océanique à l'échelle planétaire.

La modélisation la plus simple de cette circulation est la suivante. Au niveau des pôles, les eaux se refroidissent et se chargent en sel. Sous l'effet de la gravité, celles-ci finissent par tomber puis elles s'écoulent le long du plancher océanique. Elles vont ensuite progressivement remonter à la surface, être réchauffées par le soleil et finir par être ramenées vers les pôles. La dynamique de cette circulation, véritable "tapis roulant" à l'échelle planétaire, est particulièrement étudiée puisqu'elle régule le climat en assurant des échanges importants de chaleur et de  $\text{CO}_2$  entre l'atmosphère et les océans et elle favorise aussi la remontée des nutriments. Avec une source chaude et une source froide, il est *a priori* possible de construire une machine thermique que entretiendrait cette circulation. Cependant, Sandstrom (1908) a montré que si les sources chaudes et froides se trouvent à la même altitude (la surface de l'océan dans le cas qui nous intéresse), il n'est pas possible de générer un mouvement global. Avec ces deux seules sources d'énergie, on obtiendrait un état d'équilibre avec de l'eau chaude en surface et froide au fond. Pour rendre compte de cette différence, Munk (1966) introduisit un mécanisme supplémentaire dans la dynamique océanique. L'idée est que l'eau dense des profondeurs remonte grâce à la turbulence, qui mélange les couches d'eaux de différentes températures et salinités. Pour rendre compte de ce gain d'énergie potentielle, Munk (1966) invoqua la diffusivité turbulente. À partir des profils océaniques de densité, on a pu estimer que cette diffusivité est 1000 fois supérieure à la diffusivité thermique moléculaire sur l'ensemble des océans. Ainsi, il existe une troisième source d'énergie qui transfère de l'énergie potentielle aux océans et qui entretient aussi la circulation thermohaline via la diffusivité turbulente.

Des études et des observations satellites (Egbert, 2003; Egbert et Ray, 2001) ont en effet montré qu'une part non-négligeable de l'énergie nécessaire à entretenir la diffusivité provient des ondes gravito-inertielles générées elles-mêmes par les forces de marée. L'énergie de ces ondes peut être ensuite transférée aux petites échelles et engendrer de la turbulence via des interactions avec les topographies sous-marines, des structures méso-échelles, comme les tourbillons ou les courants, ou encore par le développement d'instabilités. L'amélioration des techniques de mesures *in situ* a montré que ces phénomènes conduisent à une répartition inhomogène de valeur de la diffusivité turbulente (Polzin *et al.*, 1997), certains endroits étant plus propices que d'autres au mélange. L'étude de ces ondes et de leur interaction avec leur environnement est donc nécessaire pour comprendre leur répartition et leur rôle dans le maintien de la circulation thermohaline.

Les travaux menés pendant cette thèse portent principalement sur l'étude expérimentale d'instabilité des ondes gravito-inertielles et sur les mécanismes conduisant à du transfert d'énergie à différentes échelles. Pour étudier ces ondes, nous reproduisons un océan idéalisé grâce à une cuve remplie de fluide stratifié et mise en rotation. Les ondes seront, quant à elles, créées par un générateur permettant de contrôler à la fois l'amplitude, la pulsation ainsi que le profil de l'onde émise. J'ai aussi mené des expériences sur l'interaction entre une colonne de grains en sédimentation et un faisceau d'ondes internes, dans la continuité des résultats obtenus lors de la thèse d'Ernesto Horne Iribarne (Iribarne *et al.*, 2015). Les résultats n'étant pas suffisamment concluants, j'ai choisi de ne pas en parler dans ce manuscrit.

Ce manuscrit est organisé en trois parties :

➤ **Généralités :**

La première partie correspond au premier chapitre. Nous y discutons l'origine et les propriétés générales des ondes gravito-inertielles et de l'instabilité triadique résonante (TRI). Dans un second temps, nous présentons les caractéristiques de deux fluides géophysiques stratifiés et en rotation, les océans et l'atmosphère. Après avoir discuté des caractéristiques des ondes dans ces deux milieux, nous présentons leur rôle dans le maintien de la circulation thermohaline. Pour finir, ce chapitre aborde les techniques expérimentales utilisées pour réaliser un fluide stratifié en rotation, pour générer des ondes gravito-inertielles et pour finalement les observer.

➤ **Ondes gravito-inertielles à deux dimensions :**

La seconde partie recouvre le deuxième et troisième chapitre. Dans le deuxième chapitre, nous reprenons le dispositif expérimental existant pour la génération d'ondes internes et nous l'utilisons pour générer des ondes internes en rotation. Les caractéristiques des ondes émises sont mesurées et comparées à celles démontrées dans la première partie. Nous caractérisons notamment la plage de fonctionnement du dispositif. Dans le troisième chapitre, nous étudions une instabilité du faisceau d'onde que l'on identifie comme étant de l'interaction triadique résonante. Nous expliquons ensuite par un modèle comment la rotation change les propriétés de cette instabilité, comme son seuil ou les caractéristiques des ondes secondaires. Les résultats de cette partie sont publiés dans :

P. MAURER, S. JOUBAUD, P. ODIER (2016). Generation and stability of inertia-gravity waves. *Journal of Fluid Mechanics* 808(1) :539-561.

➤ **Ondes gravito-inertielles axisymétriques :**

Cette dernière partie contient les chapitres IV et V. Le chapitre IV est consacré à l'étude d'un nouveau générateur d'onde axisymétrique développé pendant la thèse. Nous l'utilisons dans deux configurations, un mode de Bessel et un *bourrelet* consistant en une excitation localisée qui se propage sur un cône. Une étude analytique linéaire permet de comparer le profil du faisceau expérimental à celui attendu. Dans le dernier chapitre, nous étudions

---

la focalisation de ce faisceau d'onde conique, la pointe du cône jouant le rôle de point de focalisation. L'utilisation d'une stratification non-linéaire permet par ailleurs de changer la vitesse de groupe de l'onde. Si le point de focalisation coïncide avec la profondeur d'annulation de la vitesse de groupe, l'amplitude de l'onde est considérablement amplifiée et celle-ci devient instable. Les résultats de cette partie font l'objet d'un article soumis :

P. MAURER, S. J. GHAEMSAIDI, S. JOUBAUD, T. PEACOCK, P. ODIER (2017). An axisymmetric inertia-gravity wave generator. *Submitted to Experiments in Fluids*.





Ondes gravito-inertielles orographiques créées par l'île d'Amsterdam dans l'océan indien.

## Introduction

Les ondes gravito-inertielles sont des ondes dont les propriétés couplent à la fois celles des ondes internes de gravité et celles des ondes inertielles. Les premières sont des ondes se propageant dans des fluides stratifiés en densité, c'est-à-dire des fluides dont la densité va dépendre d'une direction. Ainsi, les océans, les lacs, l'atmosphère ou encore les étoiles sont des exemples de fluides stratifiés où la densité évolue avec la profondeur ou avec l'altitude. Cette évolution de la densité est causée par la variation de paramètres physico-chimiques comme la température ou encore la salinité dans le cas océanique. Les ondes internes sont donc naturellement présentes dans ces milieux, générées par exemple dans le cas des océans par les oscillations des masses d'eau provoquées par les marées et leur interaction avec les topographies sous-marines, ou encore par le vent. Ces ondes peuvent ensuite se propager et se dissiper loin de leurs sources. Ce mécanisme participe au transfert d'énergie sur de grandes distances et à différentes échelles au travers de phénomènes non-linéaires.

D'autre part, les fluides géophysiques sont également soumis à la force de Coriolis du fait de la rotation de la Terre (ou des étoiles). Dans les milieux en rotation sans stratification se propage un autre type d'onde, les ondes inertielles. Ces ondes se retrouvent naturellement dans les milieux géophysiques. Les ondes inertielles atmosphériques peuvent par exemple être générées par les cyclones.

Lorsqu'un milieu est à la fois stratifié en densité et en rotation, les ondes qui se propagent ont des propriétés à mi-chemin entre celles des ondes internes et celles des ondes inertielles. L'étude des ondes gravito-inertielles constitue le coeur du travail présenté dans ce manuscrit.

Dans ce chapitre, nous allons caractériser des propriétés des fluides stratifiés en densité et en rotation. Nous discuterons ensuite des propriétés des ondes gravito-inertielles qui se propagent dans de tels milieux. Après avoir détaillé la génération, la propagation et le rôle de ces ondes dans les océans et l'atmosphère, nous décrirons les dispositifs expérimentaux permettant de les étudier au laboratoire.



# 1 Théorie des ondes gravito-inertielles

## 1.a Physique d'un fluide stratifié

Considérons un fluide stratifié, dont la densité évolue avec la verticale. Pour que cette stratification soit stable, il faut que la densité augmente avec la profondeur (cas océanique) ou diminue avec l'altitude (cas atmosphérique). L'équilibre mécanique d'un tel fluide s'établit entre la force de pesanteur et la force de pression :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\bar{\rho}(z)g, \quad (\text{I.1})$$

où  $g$  est l'accélération de la gravité,  $\bar{\rho}$  la densité du fluide à l'équilibre et  $p$  la pression. L'axe ( $Oz$ ) est dirigé selon la verticale ascendante, opposé à l'accélération de la gravité.

Une particule fluide, dont la taille est suffisamment petite devant l'échelle typique de variation de la densité, est soumise à la poussée d'Archimède

$$\mathbf{\Pi} = \bar{\rho}(z)g\mathbf{e}_z, \quad (\text{I.2})$$

ainsi qu'à la force volumique de pesanteur  $-\rho_p g\mathbf{e}_z$ , où  $\rho_p$  est la masse volumique de la particule fluide. La résultante de ces deux forces s'écrit donc

$$\mathbf{R} = (\bar{\rho}(z) - \rho_p)g\mathbf{e}_z. \quad (\text{I.3})$$

Cette équation montre que la particule fluide subit une force verticale, dirigée vers le haut si le fluide environnant est plus dense que la particule fluide et dirigée vers le bas si le fluide environnant est moins dense. Ainsi, si l'on déplace une particule fluide initialement à l'équilibre, celle-ci va subir une force qui va la ramener vers sa position initiale. À cause de son inertie, celle-ci va dépasser cette position d'équilibre et osciller verticalement autour de cette position.

Pour un petit déplacement  $\delta z$  autour de la position d'équilibre  $z_p$  (défini par  $\rho_p = \bar{\rho}(z_p)$ ), le principe fondamental de la dynamique donne

$$\bar{\rho}(z_p) \frac{d^2(z_p + \delta z)}{dt^2} = \bar{\rho}(z_p + \delta z) - \bar{\rho}(z_p)g, \quad (\text{I.4})$$

$$\frac{d^2\delta z}{dt^2} = \frac{g}{\bar{\rho}(z_p)} \left. \frac{\partial \bar{\rho}(z)}{\partial z} \right|_{z_p} \delta z, \quad (\text{I.5})$$

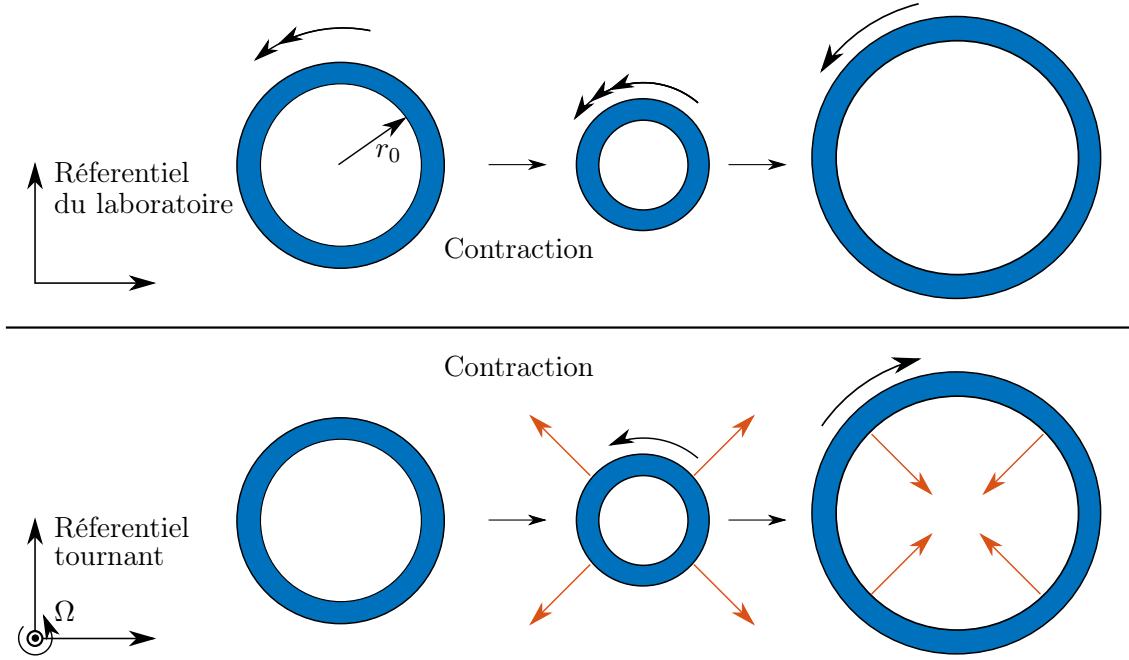
$$\equiv -N^2(z_p)\delta z. \quad (\text{I.6})$$

Cette équation est équivalente à l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation  $N(z_p)$ . Cette pulsation est appelée pulsation de flottabilité ou de Brünt-Väisälä et vaut

$$N(z) = \sqrt{\frac{-g}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z}}. \quad (\text{I.7})$$

$N(z)$  prend des valeurs réelles seulement pour des stratifications stables, c'est-à-dire lorsque la densité augmente avec la profondeur. Cette pulsation permet aussi de caractériser facilement la stratification. Plus  $N$  est important, plus la stratification est élevée. À l'inverse, dans le cas d'un fluide homogène, le gradient de densité est nul et  $N = 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Nous avons montré que dans un fluide stratifié, des petites perturbations verticales peuvent générer des mouvements d'oscillation dont la force de rappel est la résultante entre la poussée d'Archimède et la pesanteur. Ces mouvements d'oscillation vont pouvoir se propager de proche



**FIGURE I.1** – Schématisation des oscillations inertielles à la pulsation  $f$ . La conservation du moment cinétique après contraction d’un anneau de fluide dans le référentiel du laboratoire induit un mouvement de rotation dans le référentiel tournant et l’apparition d’une force de Coriolis. Cette force s’oppose à la contraction initiale et induit une expansion de l’anneau et par suite une oscillation.

en proche et donner naissance à des ondes internes de gravité. Celles-ci sont appelées internes car au lieu de se propager en surface (comme les ondes à l’interface entre deux fluides de densité différente), elles se propagent à l’intérieur même du fluide. Dans les fluides réels, ces oscillations vont finalement être dissipées par les phénomènes diffusifs, comme la viscosité ou la diffusion des agents stratifiants.

### 1.b Physique d’un fluide en rotation

Considérons maintenant un fluide en rotation solide uniforme dont le vecteur rotation, vertical et constant, vaut  $\Omega \mathbf{e}_z$ . Dans le référentiel du laboratoire non-tournant, la vitesse en tout point du fluide est alors donnée par :

$$\mathbf{v} = \Omega r \mathbf{e}_\theta, \quad (\text{I.8})$$

où  $r$  est la distance à l’axe de rotation ( $Oz$ ). Considérons maintenant la situation décrite dans la figure I.1 qui représente un anneau de fluide centré sur l’axe de rotation de rayon  $r_0$ . Dans le référentiel du laboratoire, celui-ci tourne donc à la vitesse  $\Omega$  qui est représentée par deux flèches noires sur la figure I.1. Si l’on contracte cet anneau de fluide en faisant diminuer son rayon, celui-ci va se mettre à tourner plus rapidement par conservation du moment cinétique (trois flèches noires). Dans le référentiel tournant attaché au fluide, cela se traduit de la façon suivante : l’anneau, initialement immobile, se met à tourner dans le même sens que le vecteur rotation une fois contracté. Cette vitesse va se traduire par l’apparition d’une force de Coriolis (flèches oranges), centripète et dirigée vers l’extérieur de l’anneau. Son rayon va donc augmenter jusqu’à dépasser  $r_0$  à cause de l’inertie du fluide. Comme le rayon de l’anneau fluide est supérieur à  $r_0$ , la vitesse de rotation va alors être inférieure à  $\Omega$  (une seule flèche noire), par conservation du moment cinétique. Dans le référentiel tournant, l’anneau de fluide va donc tourner dans l’autre sens, créant une force de

Coriolis dirigée vers l'intérieur (flèches oranges). Finalement le rayon de l'anneau va osciller autour du rayon initial  $r_0$ , entraînement des mouvements de contractions et de dilatations successifs.

Procédons à la même analyse que celle faite pour les fluides stratifiés. Considérons un anneau de largeur infinitésimale et de rayon  $r_0$ , centré sur l'axe de rotation. Pour ne pas mélanger les notations, nous notons  $\Omega$  la vitesse de rotation angulaire du référentiel tournant par rapport au référentiel du laboratoire et  $\Omega_L(r)$  (respectivement  $\Omega_T(r)$ ) la vitesse de rotation angulaire de l'anneau de fluide de rayon  $r$  dans le référentiel du laboratoire (respectivement tournant).

Pour des petites variations de rayon  $\delta r$  autour du rayon d'équilibre  $r_0$ , la conservation du moment cinétique dans le référentiel du laboratoire impose :

$$r_0^2 \Omega_L(r_0) = (r_0 + \delta r)^2 \Omega_L(r_0 + \delta r), \quad (\text{I.9})$$

or comme  $\Omega_L(r_0) = \Omega$ , on obtient

$$r_0^2 \Omega = (r_0 + \delta r)^2 \Omega_L(r_0 + \delta r). \quad (\text{I.10})$$

Ainsi pour des variations  $\delta r$  petites devant  $r_0$  :

$$\Omega_L(r_0 + \delta r) = \Omega \left( 1 - 2 \frac{\delta r}{r_0} \right). \quad (\text{I.11})$$

Dans le référentiel tournant la vitesse de rotation angulaire de l'anneau est donc

$$\Omega_T(r_0 + \delta r) = \Omega_L(r_0 + \delta r) - \Omega \quad (\text{I.12})$$

$$= -2\Omega \frac{\delta r}{r_0}. \quad (\text{I.13})$$

Ainsi dans le référentiel tournant, en tout point de l'anneau, la vitesse est donnée à l'ordre 1 en  $\delta r/r_0$  par

$$\mathbf{v}_a = -2\Omega \delta r \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial \delta r}{\partial t} \mathbf{e}_r. \quad (\text{I.14})$$

Appliquons maintenant le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel tournant projeté selon  $\mathbf{e}_r$  :

$$\frac{d^2 \delta r}{dt^2} = \left( -2\Omega \mathbf{e}_z \wedge \left( -2\Omega \delta r \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial \delta r}{\partial t} \mathbf{e}_r \right) \right) \cdot \mathbf{e}_r \quad (\text{I.15})$$

$$= -4\Omega^2 \delta r \quad (\text{I.16})$$

$$\equiv -f^2 \delta r. \quad (\text{I.17})$$

À nouveau cette équation est équivalente à celle d'un oscillateur harmonique de pulsation  $f = 2\Omega$ . Cette pulsation, appelée pulsation de Coriolis, est directement proportionnelle à la vitesse de rotation de fluide dans le référentiel du laboratoire.

Dans un fluide en rotation, des petites perturbations horizontales peuvent générer des mouvements d'oscillation dont la force de rappel est la force de Coriolis. Comme dans le cas des fluides stratifiés, ces oscillations vont pouvoir se propager de proche en proche et donner naissance à des ondes appelées ondes inertielles, qui vont être finalement dissipées par la viscosité.

Lorsque le fluide est stratifié et en rotation solide, les deux phénomènes vont se coupler. Le milieu va posséder deux pulsations caractéristiques. Dans tout ce manuscrit, nous nous placerons dans le cas où  $\mathbf{g}$  et  $\boldsymbol{\Omega}$  ont la même direction, qui définit la verticale. La pulsation de flottabilité caractérise alors les oscillations verticales, alors que la pulsation de Coriolis caractérise les oscillations horizontales. Dans la section suivante, nous allons caractériser la forme et les propriétés des ondes qui se propagent dans les milieux stratifiés tournants, appelées ondes gravito-inertielles.

### 1.c Equations de propagation

Cette partie expose les principales caractéristiques des ondes gravito-inertielles et explique comment les oscillations décrites précédemment se propagent de proche en proche. Pour cela, considérons un milieu en rotation uniforme selon l'axe  $z$  dirigé verticalement vers le haut et stratifié en densité verticalement. Dans la suite, nous séparerons la densité en deux termes. Un terme lié à la stratification  $\bar{\rho}$ , ne dépendant que de la profondeur  $z$  et indépendant du temps, et un terme lié aux fluctuations de densité  $\rho'$ , tel que  $\rho(x, y, z, t) = \bar{\rho}(z) + \rho'(x, y, z, t)$ . Nous noterons également  $\rho_0$ , la densité moyenne dans la cuve.

Dans les expériences, on utilise des densité moyennes  $\rho_0$  proches de  $1025 \text{ g}\cdot\text{L}^{-1}$  avec des variations maximales de  $25 \text{ g}\cdot\text{L}^{-1}$ . Ainsi  $\rho_0$  est proche de  $\bar{\rho}(z)$  dans toute la cuve. De plus les variations typiques de densité  $\rho'$  sont faible devant  $\rho_0$ . Les deux conditions  $\bar{\rho} \approx \rho_0$  et  $\rho' \ll \bar{\rho}$  permettent d'utiliser l'approximation de Boussinesq. Dans cette approximation, les variations de densité  $\rho'$  peuvent être négligées dans tous les termes des équations de la dynamique sauf dans le terme de flottabilité qui, comme nous l'avons vu précédemment, est une force de rappel nécessaire à la propagation des ondes gravito-inertielles. En pratique, dans les équations de la dynamique, on remplacera toute les occurrences de  $\rho$  par  $\rho_0$  et on conservera  $\rho'$  uniquement dans le terme de flottabilité et dans l'équation de conservation de la masse. Ainsi, la dynamique du fluide est donnée par l'équation de Navier et Stokes (Kundu et Cohen, 2012; Sutherland, 2010) :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + f \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p - g \frac{\rho'}{\rho_0} \mathbf{e}_z + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad (\text{I.18})$$

par l'hypothèse d'incompressibilité

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{I.19})$$

et par l'équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla (\bar{\rho} + \rho') = 0, \quad (\text{I.20})$$

$\mathbf{v}$  étant la vitesse,  $p$  la pression et  $\nu$  la viscosité cinématique du fluide définie comme la viscosité dynamique divisée par la densité moyenne de la cuve  $\rho_0$ . Dans l'équation (I.20) nous avons négligé les effets de diffusion de l'agent stratifiant qui est, dans nos expériences, le chlorure de sodium. Le nombre de Schmidt, calculé comme le rapport du coefficient de viscosité sur celui de la diffusion particulaire, étant de l'ordre de 700, les effets de diffusion particulaire sont négligeables devant les effets de diffusion visqueux.

Par la suite, nous supposerons l'écoulement invariant dans la dimension  $y$ . Cette hypothèse permet d'introduire la fonction courant  $\psi$  telle que  $\mathbf{v} = (\partial_z \psi, v_y, -\partial_x \psi)$ , qui assure l'hypothèse d'incompressibilité de l'écoulement (I.19). On peut alors réécrire les équations précédentes :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial z} + J(\partial_z \psi, \psi) - f v_y = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (\text{I.21})$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + J(v_y, \psi) + f \frac{\partial \psi}{\partial z} = \nu \nabla^2 v_y, \quad (\text{I.22})$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x} + J(\partial_x \psi, \psi) = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + g \frac{\rho'}{\rho_0} + \nu \Delta \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (\text{I.23})$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + J(\rho', \psi) = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (\text{I.24})$$

où le Jacobien est défini comme  $J(f_1, f_2) = \partial_x f_1 \partial_z f_2 - \partial_z f_1 \partial_x f_2$ .

En combinant  $\partial_z$ (I.21) et  $\partial_x$ (I.23), la pression s'élimine et on obtient le système de trois équations suivantes :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + J(\rho', \psi) = -\frac{g}{\rho_0} N^2(z) \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (\text{I.25})$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + J(v_y, \psi) + f \frac{\partial \psi}{\partial z} = \nu \nabla^2 v_y, \quad (\text{I.26})$$

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + J(\nabla^2 \psi, \psi) - f \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\rho_0}{g} \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \nu \nabla^2 \cdot \nabla^2 \psi, \quad (\text{I.27})$$

Dans l'approximation de Boussinesq,  $N$  s'exprime comme :

$$N(z) = \sqrt{\frac{-g}{\rho_0} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z}} \quad (\text{I.28})$$

Pour plus de simplicité, nous supposons  $N$  homogène dans la suite de ce chapitre. Cela signifie que  $\bar{\rho}$  évolue linéairement avec la profondeur. Nous aurons l'occasion de discuter de stratifications non-linéaires au chapitre V.

### 1.d Onde plane monochromatique

Nous allons pour le moment négliger les termes non-linéaires et visqueux dans ces équations, pour nous concentrer sur les principaux aspects des ondes gravito-inertielles. Nous reviendrons sur ces termes par la suite. On cherche une solution sous la forme d'onde plane monochromatique :

$$\psi = \Psi \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)) + \text{c.c.}, \quad (\text{I.29})$$

$$v_y = V_y \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)) + \text{c.c.}, \quad (\text{I.30})$$

$$\rho' = X \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)) + \text{c.c.}, \quad (\text{I.31})$$

avec  $\mathbf{k} = (\ell, 0, m)$  le vecteur d'onde de norme  $\kappa$  et c.c. le complexe conjugué. En insérant ces expressions dans les équations (I.25) à (I.27), obtient alors la relation

$$m^2(\omega^2 - f^2) = (N^2 - \omega^2)\ell^2. \quad (\text{I.32})$$

Si on note  $\beta$  l'angle entre la verticale et le vecteur  $\mathbf{k}$ , tel que  $\mathbf{k} = \kappa(\sin \beta, 0, \cos \beta)$ , alors :

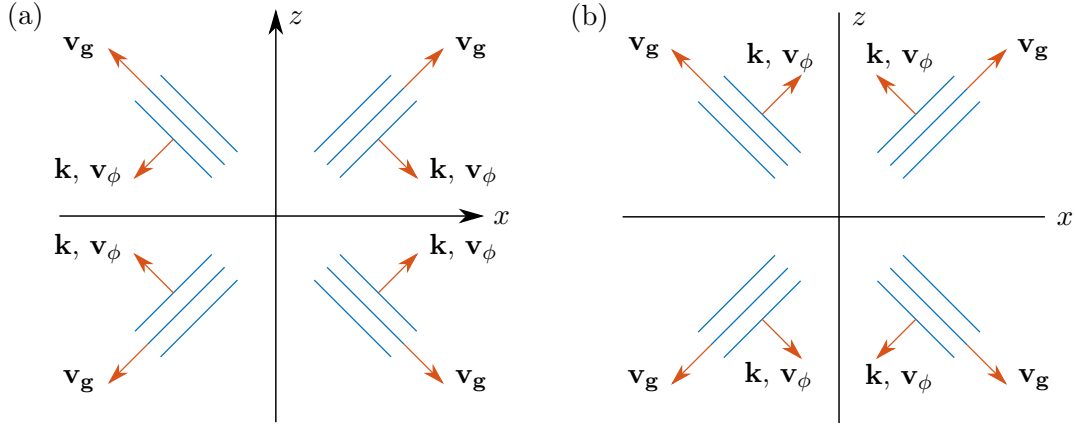
$$\omega^2 = N^2 \frac{\ell^2}{\kappa^2} + f^2 \frac{m^2}{\kappa^2}, \quad (\text{I.33})$$

$$\omega^2 = N^2 \sin^2 \beta + f^2 \cos^2 \beta. \quad (\text{I.34})$$

Ces équations définissent la relation de dispersion des ondes gravito-inertielles. Discutons maintenant plus en détail des conséquences de cette relation.

### Conséquences de la relation de dispersion

La relation de dispersion est donnée par l'équation (I.34). Cette relation est différente de celle intervenant dans le cas des ondes de surface et explique certaines caractéristiques inhabituelles des ondes gravito-inertielles. Pour que  $\omega$  soit réel, il faut que  $\omega$  soit borné ( $f < \omega < N$  ou  $N < \omega < f$ ). Ainsi on ne pourra pas observer toutes les pulsations dans un milieu donné,  $f$  et  $N$  jouant le rôle de pulsations de coupure, ce qui imposera en partie les conditions expérimentales. Une autre particularité est qu'il n'existe pas de lien entre pulsation et norme du vecteur d'onde ; la pulsation n'impose que l'angle de propagation  $\beta$ , soit encore le rapport  $\ell/m$ . Ce sera donc la géométrie



**FIGURE I.2** – Schéma des quatre directions de propagation possibles pour une pulsation  $\omega$  donnée. Les lignes bleues représentent les plans isophases des ondes dans le plan  $xOz$ . Le vecteur d’onde  $\mathbf{k}$ , la vitesse de phase  $\mathbf{v}_\phi$  et la vitesse de groupe  $\mathbf{v}_g$  sont représentés en orange dans le cas (a)  $f < \omega < N$  et dans le cas (b)  $N < \omega < f$ .

de la source d’excitation qui fixera soit la longueur d’onde dans le cas d’une onde plane ou plus généralement les dimensions spatiales de l’onde. En réécrivant la relation de dispersion on obtient :

$$\sin \beta = \pm \sqrt{\frac{\omega^2 - f^2}{N^2 - f^2}}. \quad (\text{I.35})$$

Cette relation montre que pour une même pulsation  $\omega$ , quatre vecteurs d’ondes sont possibles :  $(\ell, 0, m)$ ,  $(-\ell, 0, m)$ ,  $(\ell, 0, -m)$  et  $(-\ell, 0, -m)$  avec  $\ell > 0$  et  $m > 0$ . Ainsi une source oscillante va générer quatre faisceaux d’ondes qui auront 4 vecteurs d’ondes distincts comme le montrent les schémas de la figure I.2.

### Vitesses de l’onde

Une dernière conséquence de la relation de dispersion porte sur la direction de la vitesse de groupe et de la vitesse de phase. La phase se propage selon  $\mathbf{k}$ . Ainsi la vitesse de phase  $\mathbf{v}_\phi$  se met sous la forme :

$$\mathbf{v}_\phi = \frac{\omega}{\kappa^2} \mathbf{k} \quad (\text{I.36})$$

$$= \sqrt{N^2 \ell^2 + f^2 m^2} \frac{\mathbf{k}}{\kappa^3}. \quad (\text{I.37})$$

Pour déterminer la vitesse de groupe, il suffit de différencier la relation de dispersion par rapport à  $\ell$  et par rapport à  $m$ . Les composantes de la vitesse de groupe  $\mathbf{v}_g$  valent :

$$v_{g_x} = \frac{\ell}{\omega} \frac{N^2 - \omega^2}{\kappa^2}, \quad (\text{I.38})$$

$$v_{g_y} = 0, \quad (\text{I.39})$$

$$v_{g_z} = \frac{m}{\omega} \frac{f^2 - \omega^2}{\kappa^2}. \quad (\text{I.40})$$

On peut donc écrire la vitesse de groupe sous la forme :

$$\mathbf{v}_g = \frac{m\ell}{\omega \kappa^4} (N^2 - f^2) (m\mathbf{e}_x - \ell\mathbf{e}_z). \quad (\text{I.41})$$

Comme le montre la figure I.2 la vitesse de phase et la vitesse de groupe sont perpendiculaires, en effet :

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_g = 0. \quad (\text{I.42})$$

Pour une pulsation  $\omega$  donnée, nous avons vu qu'il y a quatre directions de propagation. Pour chacune de ces directions de propagation, la figure I.2 montre la vitesse de groupe et la vitesse de phase. Celles-ci sont toujours orthogonales entre elles. On remarque que dans le cas  $f < \omega < N$ , la direction horizontale des deux vecteurs est la même et la direction verticale est opposée. Tandis que dans le cas  $N < \omega < f$ , c'est l'inverse.

Dans le paragraphe qui suit, nous allons décrire le mouvement des particules fluides lors du passage d'une onde gravito-inertielle en commençant par deux cas limites où la dynamique est simple à visualiser, le cas sans rotation et le cas où  $\omega = f$ .

### Description de la forme de l'onde

En utilisant la définition de  $\psi$  et pour  $v_y$ , l'équation (I.26) linéarisée et sans viscosité, on peut écrire en notation réelle :

$$v_x = -A\omega \cos(\ell x + mz - \omega t), \quad (\text{I.43})$$

$$v_y = -Af \sin(\ell x + mz - \omega t), \quad (\text{I.44})$$

$$v_z = A\omega \tan \beta \cos(\ell x + mz - \omega t), \quad (\text{I.45})$$

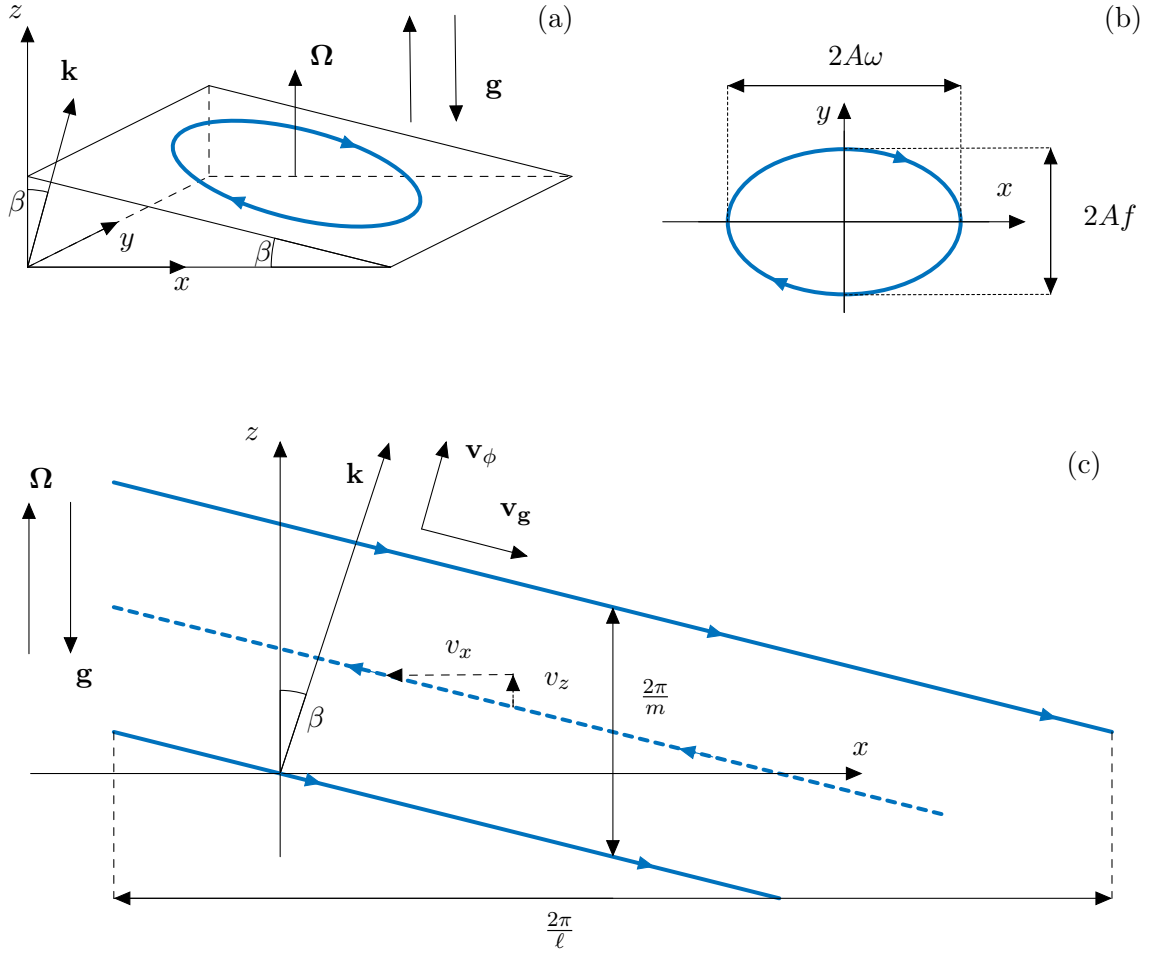
où  $A$  désigne l'amplitude des déplacement selon  $x$ . Notons qu'ici nous avons choisi une direction du vecteur d'onde particulière. Pour les trois autres directions qui vérifient la relation de dispersion, les résultats qui suivent sont identiques. La seule différence étant l'orientation des différents vecteurs comme indiqué sur la figure (I.2).

**Cas  $f = 0$ .** Dans ce cas, la vitesse de rotation est nulle, le milieu est uniquement stratifié, on parlera alors d'onde interne de gravité. L'équation (I.44) montre que l'onde n'a pas de vitesse selon  $y$ . Toutes les particules fluides oscillent à la pulsation  $\omega$  dans le plan  $(x0z)$  selon un angle  $\beta$  avec l'horizontale.

**Cas  $\omega = f$ .** Dans ce cas  $\beta = 0$ , la stratification n'intervient plus et la dynamique est entièrement guidée par la rotation et le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  est vertical ( $\ell = 0$ ). L'équation (I.45) montre que l'onde n'a pas de vitesse selon  $z$ . Toutes les particules fluides décrivent des cercles dans le plan  $(xOy)$  à la pulsation  $\omega = f$ . Un plan normal à  $\mathbf{k}$  définit un plan d'onde, ainsi le mouvement général est compris dans des plans horizontaux dans lesquels toutes les particules fluides décrivent les mêmes cercles déphasés entre eux de  $\phi = mz$ .

**Cas général.** La figure I.3 présente le mouvement général de l'onde donné par les équations (I.43), (I.44) et (I.45). Les particules fluides parcourent des ellipses, de demi-axes  $A\omega$  et  $Af$ , inclinées d'un angle  $\beta$  avec l'horizontale défini par la relation de dispersion. Les ellipses sont orientées selon le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  et déphasées entre elles de  $\phi = \ell x + mz$ .

Nous allons maintenant nous intéresser à l'énergie des ondes gravito-inertielles. Les résultats que nous développons ici seront notamment utilisés dans le dernier chapitre.



**FIGURE I.3** – (a) Vue en trois dimensions de la trajectoire d’une particule fluide (en bleu) mise en mouvement par une onde gravito-inertielle dans le cas  $f < \omega < N$ . Cette trajectoire est une ellipse orientée selon le vecteur  $\mathbf{k} = (\ell, 0, m)$  (b) Projection de la trajectoire (en bleu) selon le plan horizontal. (c) Coupe verticale d’une onde gravito-inertielle. Les trois lignes parallèles sont des lignes d’isophase séparées d’une phase  $\pi$ , la ligne pointillée étant en opposition de phase avec les lignes continues. Les flèches indiquent le mouvement du fluide (en bleu) dans le plan  $(x, z)$ . La vitesse de phase  $\mathbf{v}_\phi$  est orthogonale à ces lignes et parallèle à  $\mathbf{k}$ , tandis que la vitesse de groupe  $\mathbf{v}_g$  est perpendiculaire à  $\mathbf{k}$ .

### Aspects énergétiques

Les ondes gravito-inertielles possèdent deux types d’énergie. De l’énergie cinétique associée au mouvement du fluide et de l’énergie potentielle associée à l’élévation des particules fluides dans la stratification. La force de Coriolis ne fournissant pas de travail, il n’y a pas d’énergie potentielle associée. Nous allons maintenant retrouver ces résultats par le calcul ce qui permettra notamment de préciser le flux d’énergie associé à la propagation de ces ondes.

Pour cela multiplions respectivement les équations (I.21) et (I.23), où l’on a négligé les termes



non-linéaires et visqueux, par respectivement  $\frac{\partial\psi}{\partial z}$  et  $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ . La somme des deux équations ainsi obtenues donne :

$$\frac{\rho_0}{2} \frac{\partial((\partial_x\psi)^2 + (\partial_z\psi)^2)}{\partial t} = J(\psi, p) + g \frac{\partial\psi}{\partial x} \rho' + \rho_0 f \frac{\partial\psi}{\partial z} v_y. \quad (\text{I.46})$$

En utilisant l'expression, issue de l'équation (I.22) :

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = -\frac{1}{f} \frac{\partial v_y}{\partial t}, \quad (\text{I.47})$$

on obtient finalement l'équation :

$$\frac{\rho_0}{2} \frac{\partial((\partial_x\psi)^2 + (\partial_z\psi)^2 + v_y^2)}{\partial t} = J(\psi, p) + g \frac{\partial\psi}{\partial x} \rho \quad (\text{I.48})$$

$$\frac{\rho_0}{2} \frac{\partial(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{\partial t} = J(\psi, p) + g \frac{\partial\psi}{\partial x} \rho'. \quad (\text{I.49})$$

Le membre de gauche correspond à la variation temporelle de l'énergie cinétique volumique  $e_c$ , tandis que le membre de droite est constitué de 2 termes. Le premier vaut :

$$J(\psi, p) = -\nabla \cdot (p\mathbf{v}) \quad (\text{I.50})$$

et correspond au travail des forces de pression par unité de volume. Le second terme représente le travail de la poussée d'Archimède par unité de volume et peut donc s'exprimer, en utilisant l'équation de conservation de la masse dans laquelle on a négligé le terme non-linéaire, comme l'opposée de la dérivée temporelle d'une énergie potentielle volumique  $e_p$ , telle que :

$$e_p = \frac{1}{2} \frac{g^2 \rho'^2}{\rho_0 N^2}. \quad (\text{I.51})$$

Le bilan d'énergie des ondes internes s'écrit donc comme :

$$\frac{\partial(e_c + e_p)}{\partial t} + \nabla \cdot (p\mathbf{v}) = 0. \quad (\text{I.52})$$

On peut montrer que :

$$p\mathbf{v} = \langle e_c + e_p \rangle \mathbf{v}_g, \quad (\text{I.53})$$

où  $\langle \rangle$  signifie moyenne temporelle. Cette quantité est le vecteur de Poynting,  $\mathbf{\Pi}$ , traduisant le flux d'énergie surfacique transporté par l'onde.  $\mathbf{v}_g$  s'assimile donc bien à la vitesse de déplacement de l'énergie d'une onde interne. L'équation de conservation de l'énergie, moyennée temporellement et en l'absence de source, s'écrit donc :

$$\frac{\partial\langle e \rangle}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{\Pi}) = 0, \quad (\text{I.54})$$

où  $e$  est l'énergie totale volumique.

Nous allons maintenant revenir sur le terme visqueux que nous avons négligé jusqu'ici et discuter de ses effets sur la propagation des ondes gravito-inertielles.

### Correction visqueuse

La prise en compte de la viscosité dans les équations de la dynamique modifie la relation de dispersion en

$$\kappa^2 \omega^2 - N^2 \ell^2 - f^2 m^2 = i \nu \left( 2\omega \kappa^4 - \frac{N^2 \ell^2 \kappa^2}{\omega} \right) \quad (\text{I.55})$$

Pour résoudre cette équation, nous allons supposer la viscosité faible. Ainsi  $\omega$  peut s'écrire sous la somme :

$$\omega = \omega^I + \omega^\nu, \quad (\text{I.56})$$

où  $\omega^\nu$  va être la correction à l'ordre 1 en viscosité de  $\omega^I$ , ce dernier vérifiant la relation de dispersion non visqueuse donnée par l'équation (I.33). En insérant ce développement au premier ordre de  $\omega$  dans l'équation (I.55) et en ne gardant que les termes d'ordre 1, on obtient :

$$\omega^\nu = \frac{i \nu \kappa^2}{2} \left[ 1 + \left( \frac{f}{\omega^I} \right)^2 \left( \frac{N^2 - (\omega^I)^2}{N^2 - f^2} \right) \right]. \quad (\text{I.57})$$

$\omega^\nu$  est un imaginaire pur et va traduire une atténuation de l'onde lors de sa propagation. Remarquons que la rotation, au travers du terme proportionnel à  $f^2$ , augmente la viscosité effective du milieu. En effet, pendant une période, les particules fluides parcourent, à cause de leur mouvement elliptique, une plus grande distance lorsqu'il y a de la rotation que lorsqu'il n'y en a pas.

L'atténuation de l'onde dans la direction de propagation  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{v}_g t$ , donne un coefficient d'atténuation visqueuse spatiale  $\exp(-\gamma \xi)$ , avec

$$\gamma = \left| \frac{\mathbf{v}_g}{\omega^\nu} \right| \quad (\text{I.58})$$

$$= \frac{2\sqrt{(N^2 - \omega^2)(\omega^2 - f^2)}}{\nu \kappa^3 \omega \left( (N^2 - f^2)(\omega^I)^2 + f^2 (N^2 - (\omega^I)^2) \right)}. \quad (\text{I.59})$$

Plus le nombre d'onde est grand, plus l'atténuation va être importante. La pulsation de l'onde va aussi jouer sur la distance typique d'atténuation visqueuse. Cette distance tend vers 0 lorsque  $\omega$  tend vers  $f$  ou  $N$ . Les ordres de grandeurs de l'atténuation seront discutés au chapitre II.

Le développement à l'ordre 2 en viscosité amènerait une correction à la partie réelle de  $\omega$ . Pour toutes les expériences que nous mènerons, la viscosité modifie de moins de 0.1% cette partie réelle. Nous ne la prendrons donc pas en compte dans la relation de dispersion.

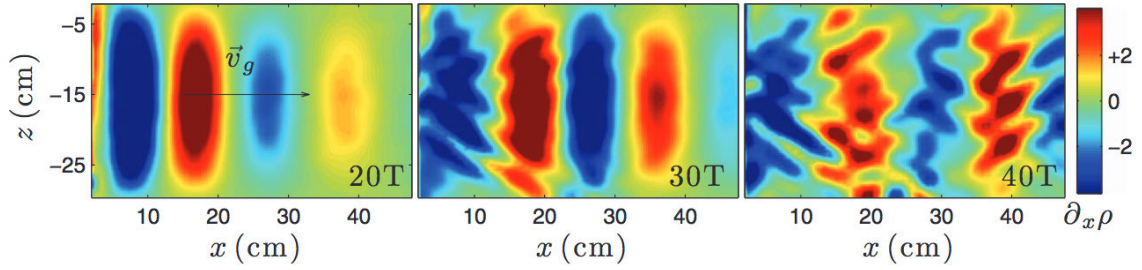
Nous avons vu que la viscosité modifie les propriétés d'une onde plane en ajoutant un terme à la relation de dispersion et en l'atténuant au cours de sa propagation. Dans la partie suivante, nous allons considérer les termes non-linéaires et détailler leur influence sur l'onde.

### Du linéaire au non-linéaire

Dans cette partie, nous reprenons les équations (I.21), (I.22), (I.23) et (I.24) en négligeant la viscosité mais en prenant en compte les termes non-linéaires. Pour une onde plane, on peut facilement les calculer. Par exemple dans l'équation (I.21), ce terme vaut :

$$J(\partial_z \psi, \psi) = J(im\psi, \psi) \quad (\text{I.60})$$

$$= imJ(\psi, \psi) \quad (\text{I.61})$$



**FIGURE I.4** – Image du gradient horizontal de densité (en  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-4}$ ) obtenu après 20, 30 et 40 périodes d’oscillation de l’onde primaire (mode généré à  $\omega/N = 0.95$ ). Image extraite de Joubaud *et al.* (2012).

Ce terme est, par définition du Jacobien, nul. Il en va de même pour les autres termes non-linéaires. Les ondes planes monochromatiques sont donc solutions des équations de la dynamique même à grande amplitude. Les ondes planes ne sont pas les seules solutions de ce type. En effet, on peut montrer que toute onde monochromatique constituée d’une somme d’ondes planes de même pulsation se propageant dans la même direction est solution du problème non-linéaire (McEwan, 1973; Tabaei et Akylas, 2003). Cette combinaison d’ondes planes définit un faisceau d’onde qui se propage dans une seule des 4 directions définies par la relation de dispersion.

Considérons maintenant trois ondes. Si celles-ci ne se propagent pas dans la même direction ou si leurs pulsations sont différentes, alors le terme non-linéaire ne s’annule pas. Sous certaines conditions, que nous allons détailler dans le paragraphe suivant, ces ondes peuvent se transférer de l’énergie. On appelle ce mécanisme, qui sera au coeur du chapitre III, l’interaction triadique résonante (TRI). Nous allons la présenter dans le paragraphe suivant.

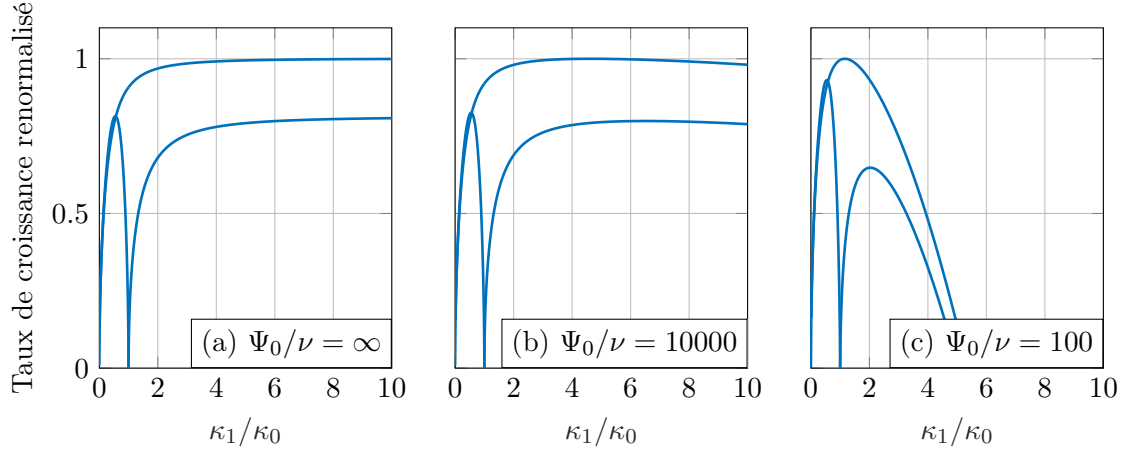
### 1.e Instabilité triadique résonante (TRI)

Une onde interne plane monochromatique de pulsation  $\omega_0$  et de vecteur d’onde  $\mathbf{k}_0$  est en fait instable vis-à-vis de perturbations infinitésimales. La TRI transfère de l’énergie de l’onde interne primaire vers deux ondes internes secondaires, de vecteurs d’ondes  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$  différents et de pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  différentes. Pour que ce transfert ait lieu, les ondes secondaires doivent respecter des conditions de résonance spatiales et temporelles (Davis et Acrivos, 1967; Mied, 1976)

$$\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \quad (\text{I.62})$$

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2 \quad (\text{I.63})$$

Cette instabilité a été observée expérimentalement en laboratoire (Benielli et Sommeria, 1998; Clark et Sutherland, 2010; Joubaud *et al.*, 2012), dont un exemple est montré sur la figure I.4 pour un mode, qui est une onde guidée par les conditions aux limites en surface et au fond de la cuve. Dans le cas particulier du mode de la figure I.4, celui-ci est équivalent à la superposition de deux ondes planes monochromatiques dont les vitesses de groupe sont dirigées vers le haut et la droite pour l’une et vers le bas et la droite pour l’autre. Les deux vitesses de groupe se moyennent pour obtenir une vitesse de groupe moyenne horizontale et dirigée vers la droite. On observe que l’onde primaire, sous forme de mode, se propage vers la droite selon la vitesse de groupe puis se déstabilise. La déstabilisation du mode se traduit par une modulation de l’onde primaire par des faisceaux de plus petite longueur d’onde, ce qui prouve que le transfert d’énergie se fait vers des échelles spatiales et temporelles différentes (la direction de propagation étant liée à la fréquence de l’onde).



**FIGURE I.5** – Taux de croissance divisé par le maximum du taux de croissance en fonction de la norme du vecteur d’onde de l’onde secondaire renormalisé  $\kappa_1/\kappa_0$  dans le cas (a) non visqueux et (b) et (c) visqueux (l’amplitude de de la fonction courant  $\Psi_0$  étant 10000 fois supérieure à la viscosité  $\nu$  pour (b) et 100 fois pour (c)). Le cas (a) s’identifie à de la PSI et les cas (b) et (c) à un phénomène de TRI plus général. Remarquons qu’à une valeur de  $\kappa_1/\kappa_0$ , sont associés deux taux de croissance. Cela est dû aux différentes directions que peut prendre  $\mathbf{k}_1$  par rapport à  $\mathbf{k}_0$ ,  $\kappa_1$  ne caractérisant que la norme du vecteur d’onde.

Bien que les conditions d’apparition de la TRI soit relativement bien comprises, le lien entre cette instabilité et le mélange est toujours le sujet de recherche (Staquet et Sommeria, 2002a). Plusieurs questions restent en suspens comme le rapport de la quantité d’énergie potentielle transmise au fluide à l’occasion du mélange sur la quantité d’énergie injectée dans l’onde (Dossmann *et al.*, 2016) ou encore l’évolution de la TRI dans le temps une fois que les ondes secondaires possèdent des amplitudes importantes. Des TRI multiples ont également été observées (Brouzet *et al.*, 2016) permettant une cascade d’énergie vers des petites échelles ainsi que de la turbulence d’ondes, favorisant alors le mélange. La TRI existe également dans le cas d’ondes inertielles (Bordes *et al.*, 2012) avec des propriétés proches de celles des ondes internes.

### L’effet de taille finie

Les ondes planes sont une idéalisation des faisceaux d’onde que l’on retrouve dans les contextes géophysiques (Sutherland, 2013). En effet, comme nous le décrirons dans la deuxième partie de ce chapitre, ceux-ci sont plutôt très étroits et font rarement plus d’une longueur d’onde de large (Cole *et al.*, 2009; Johnston *et al.*, 2011; Lien et Gregg, 2001). Comme les ondes secondaires ont une pulsation différente de l’onde primaire, elles se propagent à un angle différent. De fait, elle peuvent quitter le faisceau de l’onde primaire et ne plus interagir avec celle-ci. On comprend aisément que ce phénomène va être d’autant plus marqué que le faisceau de l’onde mère est étroit. Des études expérimentales (Bourget *et al.*, 2014), théoriques (Karimi et Akylas, 2014; Young *et al.*, 2008) et numériques (Hazewinkel et Winters, 2011) ont montré l’importance de cet effet autant sur le seuil d’apparition de l’instabilité que sur les caractéristiques des ondes secondaires. Cependant aucune étude expérimentale n’a été menée sur l’influence de la rotation sur l’instabilité d’un faisceau de taille finie.

### TRI ou PSI ?

L’interaction résonante triadique (TRI) et la résonance paramétrique subharmonique (PSI) sont deux phénomènes proches, la PSI étant un cas particulier de la TRI que l’on retrouve plutôt

dans un contexte géophysique. Pour les ondes gravito-inertielles océaniques, les ondes secondaires possèdent des grands nombres d'onde devant  $\kappa_0$ . Ainsi la condition de résonance spatiale peut être approximée par :

$$\mathbf{k}_1 \approx -\mathbf{k}_2 \quad \text{et} \quad |\mathbf{k}_1| \simeq |\mathbf{k}_2| \gg |\mathbf{k}_0| \quad (\text{I.64})$$

Une conséquence directe de cette relation est que

$$\omega_1 \approx \omega_2 \approx \omega_0/2 \quad (\text{I.65})$$

On retrouve l'analogie d'un oscillateur paramétrique excité à deux fois sa pulsation propre. Les deux vecteurs d'ondes secondaires peuvent prendre toute valeur arbitrairement grande (en module) et les ondes secondaires peuvent donc avoir une longueur d'onde très faible.

Cette *catastrophe ultraviolette* est en fait limitée par la taille de la plus grande échelle de dissipation, par exemple la longueur typique visqueuse (Hazewinkel et Winters, 2011). Sur la figure I.5(a), dans le cas non-visqueux, le taux de croissance de l'instabilité croît asymptotiquement vers sa plus grande valeur lorsque  $\kappa_1/\kappa_0$  tend vers l'infini. Ainsi ce sont les ondes avec une longueur d'onde infiniment petite qui devraient être sélectionnées par le taux de croissance de la PSI. Par contre, lorsque l'on introduit une faible dissipation visqueuse, proche de celle présente dans l'océan (figure I.5(b)), ce taux de croissance finit par atteindre un maximum pour une valeur du nombre d'onde plus petit autour de  $\kappa_1/\kappa_0 = 5$ . Finalement dans un cas correspondant à des paramètres expérimentaux typiques de nos expériences (figure I.5(c)), on a un maximum du taux de croissance pour lequel  $\kappa_1$  est proche de  $\kappa_0$ . On ne se trouve plus, pour le dernier cas, dans les conditions de la PSI où les vecteurs d'ondes des ondes secondaires sont très grands devant celui de l'onde primaire. Bien que les termes PSI et TRI soient souvent substitués l'un à l'autre, dans cette thèse nous utiliserons TRI pour le phénomène général et PSI dans le cas spécifique paramétrique lorsque l'on fera référence aux phénomènes géophysiques.

La TRI est un phénomène complexe, avec un nombre important de paramètres à prendre en compte pour se rapprocher de conditions géophysiques qui peuvent venir compliquer le problème comme la largeur du faisceau, la présence d'un écoulement moyen, des rebonds dans des stratifications non-linéaires (Gayen et Sarkar, 2014) ou encore l'évolution vers de la turbulence. Pour plus de détail, l'article de revue Dauxois *et al.* (2017) présente l'influence de ces paramètres sur la stabilité d'un faisceau d'onde interne. Dans le chapitre III, nous aurons l'occasion de rediscuter de l'effet de taille finie et de voir comment la rotation modifie l'importance de la largeur du faisceau sur la sélection d'ondes secondaires.

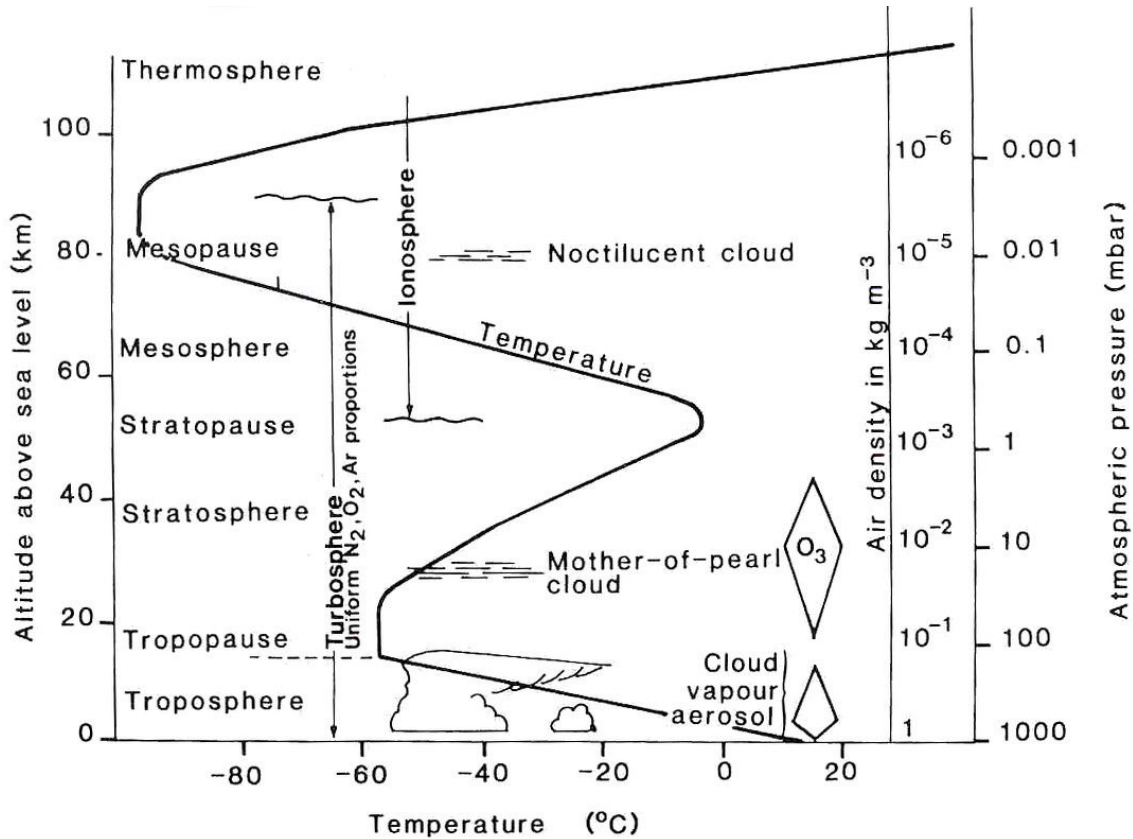
## 2 Ondes gravito-inertielles dans les fluides géophysiques

Les océans et l'atmosphère sont des systèmes naturels qui sont stratifiés et en rotation (du fait de la rotation terrestre) et permettent ainsi la propagation d'ondes gravito-inertielles. Nous allons détailler dans cette partie les principales caractéristiques de ces fluides ainsi que des ondes qui s'y propagent.

### 2.a Stratification et rotation de l'océan et de l'atmosphère

#### Stratification

Les mesures des propriétés de l'atmosphère se font par des relevés soit au sol, la topographie terrestre permettant alors de mesurer les caractéristiques de la basse atmosphère, ou alors par des ballons sondes. Ses propriétés varient en fonction de la journée, de l'endroit, de la saison ainsi que du cycle solaire (notamment pour la haute atmosphère), nécessitant la définition d'une

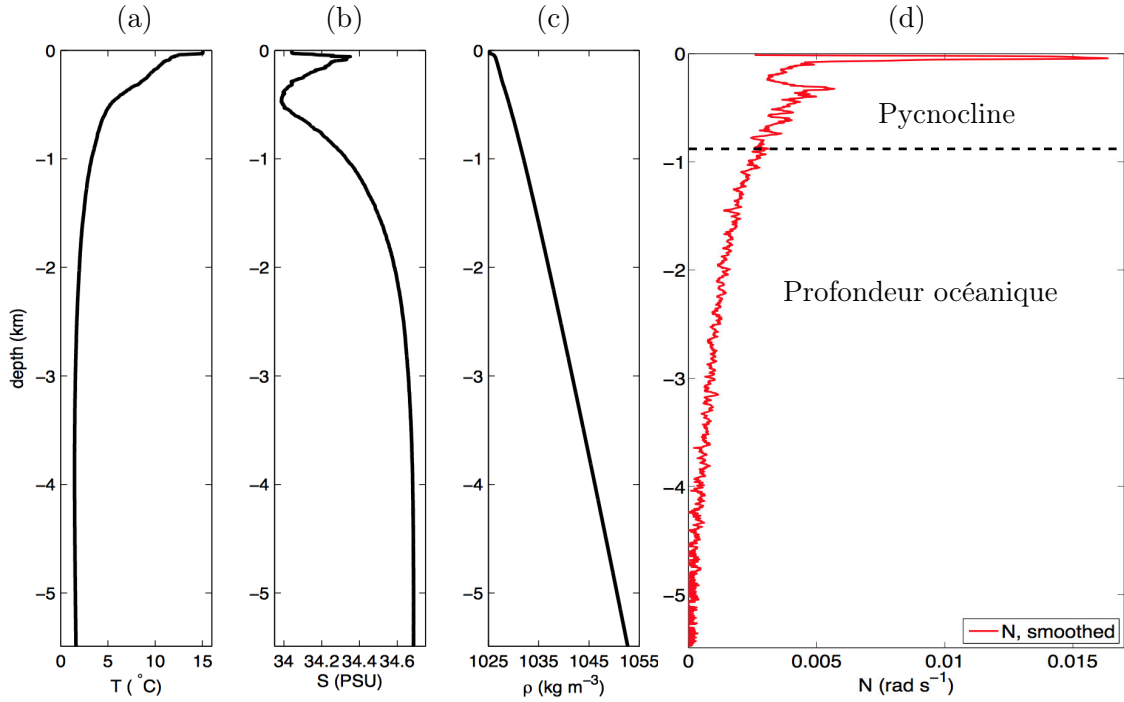


**FIGURE I.6** – Structure verticale de l'atmosphère (U.S. standard atmosphere) d'après National Geophysical Data Center (1992). Le profil de température en fonction de l'altitude, de la pression et de la densité est présenté ainsi que les noms des différentes couches de l'atmosphère associés.

atmosphère standard. Cette atmosphère standard est notamment définie par l'évolution de ses grandeurs thermodynamiques avec l'altitude. Cette évolution est représentée en figure I.6 pour le cas de la température. On peut identifier des régions où le gradient de température est relativement constant (troposphère, stratosphère, mésosphère et thermosphère), entrecoupées de régions (tropopause, stratopause et mésopause) où le gradient s'inverse.

Ce n'est pas la température à elle seule qui définit la stratification, la densité dépend également de la pression qui varie sur six ordres de grandeurs dans l'atmosphère. Ainsi, pour pouvoir définir une grandeur qui ne dépend pas de l'évolution de la pression et qui rend compte de la stratification, on définit la température potentielle. Cette valeur est calculée comme la température qu'aurait le fluide après une détente ou compression adiabatique vers une pression de référence. Lorsque le gradient de température potentielle est positif, cela définit une stratification stable et permet de calculer la pulsation de Brünt-Väisälä. Dans la troposphère, cette pulsation est de l'ordre de  $10^{-2} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , soit une période de l'ordre de la dizaine de minutes.

Les mesures de profils océaniques sont plus compliquées à réaliser. L'océan étant imperméable aux ondes électromagnétiques, il a fallu attendre le développement de sondes de densité, de température et de salinité pour obtenir des informations sur ses propriétés. Bien que dépendant également de la localisation géographique de la mesure et de la saison, la structure océanique montrée en figure I.7 est assez générale et peut se décomposer en trois parties. La première couche, située sous la surface, fait moins d'une centaine de mètres. Elle est relativement homogène en température

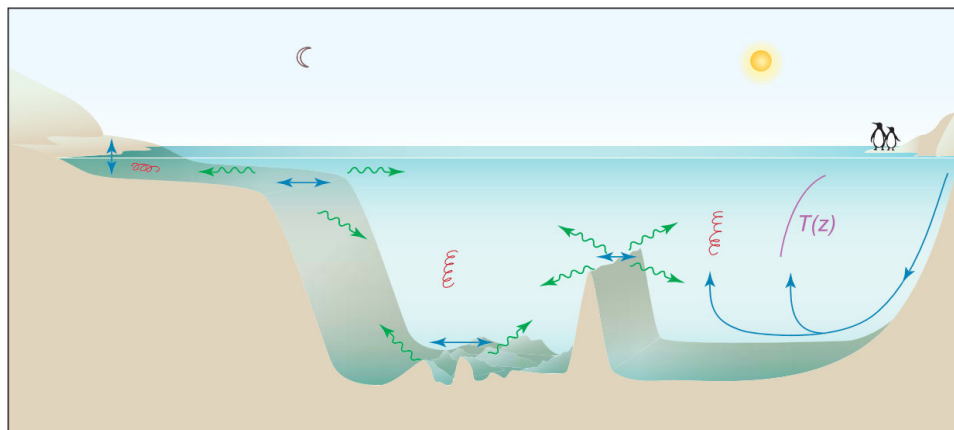


**FIGURE I.7** – Profils de (a) température, (b) salinité, (c) densité et (d) pulsation de flottabilité en fonction de la profondeur de l’océan. Les données sont extraites de Gerkema et Zimmerman (2008). Les profils ont été mesurés à  $40^\circ\text{N}$  dans l’océan Pacifique. Notons que la couche superficielle de mélange est difficilement visible dû à l’échelle utilisée.

et en densité car elle subit un mélange important par les vents de surface et échange de l’énergie avec l’atmosphère. Sous cette couche, se trouve la pycnocline qui est une zone de forte stratification d’environ 1 km d’épaisseur où  $N$  prend des valeurs élevées. Cette couche va interdire les mouvements verticaux puisque  $N$  est grand et elle va donc agir comme un filtre entre la surface et les fonds abyssaux. Sous la pycnocline, se trouve la dernière couche qui représente la majorité de l’océan. Dans cette couche, la densité varie à peu près linéairement avec la profondeur. La pulsation de flottabilité est typiquement comprise entre  $10^{-4}$  et  $10^{-3}$   $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

## Rotation

Comme la Terre tourne sur elle-même, les océans et l’atmosphère sont des fluides en rotation. Ces fluides ont un rapport d’aspect très faible. L’océan Atlantique, par exemple, a une largeur minimale de 3000 km et une profondeur moyenne de 3 km. Vu le rapport d’échelle, ces fluides peuvent être considérés comme un film fin. Ainsi, les mouvements majoritaires vont principalement être parallèles à la surface de la Terre. Dans ces conditions, la composante du vecteur rotation à prendre en compte est la projection sur la normale à la surface terrestre. La pulsation de Coriolis associée dépend alors de la latitude selon  $f = 2\Omega_T \sin \Lambda$ , où  $\Omega_T$  est la vitesse angulaire de rotation de la Terre et  $\Lambda$  la latitude. Ainsi, l’effet de la rotation de la Terre est nul à l’équateur et maximal aux pôles où il vaut  $f = 1.45 \cdot 10^{-4}$   $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Pour exciter des ondes inertielles il faut que le phénomène possède une pulsation proche de  $f$ . C’est le cas des cyclones tropicaux dont la rotation contrôle justement leur dynamique. Ces phénomènes météorologiques sont des sources importantes d’ondes inertielles pour l’atmosphère et l’océan (Chan et Kepert, 2010). Il est important de noter que la pulsation de Coriolis est presque toujours inférieure à la pulsation de Brünt-Väisälä dans un contexte géophysique.



**FIGURE I.8** – À gauche de l’image, mouvements de va-et-vient des courants de marées qui génèrent des ondes internes au niveau du talus continental et sur les topographies dans l’océan profond. Ces ondes peuvent conduire à de la turbulence et à du mélange. À droite de l’image, ce mélange participe à la remontée des eaux froides et denses du fond de l’océan qui s’écoulent sur le plancher océanique depuis les hautes latitudes. Il assure ainsi le maintien d’une transition graduelle de température entre le fond de l’océan et la surface réchauffée par le soleil. Extrait de (Garrett, 2003)

Même si les ondes gravito-inertielles se propagent dans tout les fluides stratifiés et en rotation, j’ai décidé de ne présenter que brièvement leur génération dans l’atmosphère pour me concentrer sur les ondes gravito-inertielles dans un contexte océanique.

## 2.b Génération d’ondes internes

### Génération d’ondes dans l’atmosphère

Pour l’atmosphère nous avons vu que la pulsation de flottabilité typique est de  $10^{-2} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Il n’existe pas de phénomène naturel pouvant forcer cette valeur de pulsation. Les seuls mécanismes pouvant générer des ondes internes proche de cette pulsation sont des événements rapides comme un écoulement sur une topographie. En effet, pour un vent de  $60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  et une taille caractéristique de  $10 \text{ km}$  on obtient une période de l’ordre de  $10 \text{ min}$ . De telles ondes sont appelées ondes orographiques, une illustration est proposée sur l’image d’introduction au chapitre. Les bandes blanches et les bandes noires s’expliquent par les mouvements verticaux de l’air provoqués par ces ondes. Un air humide qui s’élève va subir une chute de température, provoquant la condensation de gouttes d’eau et l’apparition d’un nuage blanc. À l’inverse, un nuage dans une couche d’air qui redescend va subir une hausse de température, provoquant une évaporation des gouttelettes et sa disparition. Bien que ces ondes soient très étudiées dans le cas atmosphérique pour leur impact sur la structure, la circulation et la variabilité de l’atmosphère (Fritts et Alexander, 2003), nous limiterons notre description à ce court paragraphe pour nous concentrer sur les ondes gravito-inertielles dans le cas océanique.

### Génération d’ondes dans l’océan

Dans l’océan il existe deux mécanismes principaux qui peuvent générer des ondes. Le premier mécanisme est un forçage de la pycnocline par l’atmosphère. En effet, des phénomènes violents comme les tempêtes peuvent agiter fortement la pycnocline par l’intermédiaire de surpressions et dépressions et générer ainsi des ondes internes (Price, 1983).





**FIGURE I.9** – Représentation schématique de la circulation thermohaline. Wikimedia Commons.

Le second mécanisme est une émission d’ondes par les topographies sous marines. En effet, de façon analogue à la formation des ondes orographiques, lorsqu’un courant, généré par exemple par le déplacement des masses d’eau par les forces de marée, passe au-dessus d’une topographie, celui-ci peut engendrer des ondes. On peut caractériser cette émission par le nombre de Froude,  $Fr$ , défini comme :

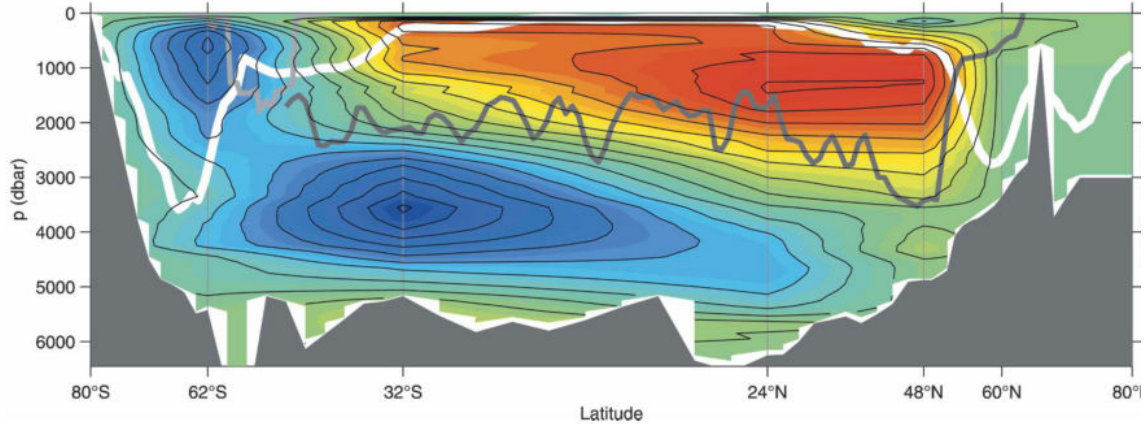
$$Fr = \frac{U}{Nh}, \quad (\text{I.66})$$

où  $U$  est la vitesse typique et  $h$  la hauteur de l’obstacle. Ce nombre sans dimension mesure le rapport entre l’énergie cinétique et l’énergie potentielle de l’écoulement. Pour des nombres de Froude inférieurs à 1, l’énergie cinétique est trop faible pour surmonter la stratification, lorsqu’il y a un obstacle, le fluide va en faire le tour, il n’y aura pas d’onde générée. À l’inverse, lorsque le Froude est grand devant 1, l’écoulement a assez d’énergie pour s’élever et passer au-dessus de l’obstacle. On va alors élever une particule fluide dans un fluide moins dense. Une fois l’obstacle passé, celle-ci va redescendre et osciller autour de sa position d’équilibre, comme nous l’avons décrit en début de chapitre et déclencher la propagation d’une onde. Si l’on considère une topographie de 100 m et une pulsation de flottabilité de  $N = 10^{-3} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , il faudra des vitesses au moins supérieures à  $10 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$  pour vaincre l’énergie potentielle et créer des ondes. L’illustration par Garrett (2003), reprise en figure I.8, illustre ce phénomène.

La génération d’ondes gravito-inertielles est un sujet de recherche très actif, l’importance exacte des ces ondes sur le budget énergétique de l’océan est encore controversée. Cependant, nous allons dans la sous-partie suivante donner l’image généralement admise du rôle de ces ondes dans le maintien de la circulation océanique.

## 2.c Dynamique océanique

Pour bien comprendre les enjeux et le problème, commençons par décrire la circulation océanique à grande échelle appelée circulation thermohaline. Cette circulation est schématisée sur la figure I.9, on y voit les eaux froides et salées, donc denses, plonger au niveau des hautes latitudes dans l’Atlantique Nord. Ces eaux descendent ensuite et s’écoulent dans le fond de l’océan à des profondeurs comprises entre 1 et 3 km et forment deux cellules de circulations (voir figure I.10), l’une descendante depuis le pôle nord et la seconde émise du pôle sud (Lumpkin et Speer, 2007). La question est alors de savoir comment les eaux plus denses des profondeurs font pour remonter et fermer la boucle, sachant que les phénomènes de diffusion sont bien trop faibles pour expliquer ce phénomène (Munk, 1966).



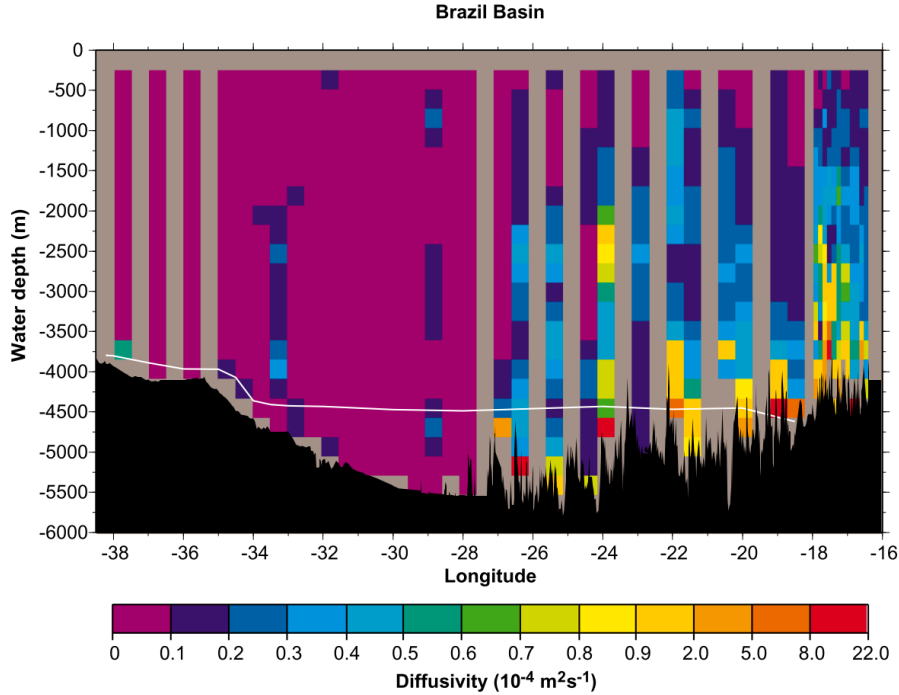
**FIGURE I.10** – Fonction courant de la circulation méridionale de retournement moyennée dans la direction zonale. En bleu (respectivement rouge) sont représentées les zones de circulation horaire (respectivement anti-horaire). Extrait de Lumpkin et Speer (2007).

La puissance nécessaire pour remonter les eaux froides est estimée à entre 1 et 2 TW (Munk et Wunsch, 1998). Or on estime que sur les 3 TW fournis par les marées du système Terre-Lune, environ 1 TW est dissipé sur les topographies des fonds océaniques (Egbert et Ray, 2001). Sur cette énergie dissipée une partie non négligeable est transformée en ondes gravito-inertielles (Wunsch et Ferrari, 2004). Ces ondes possèdent donc l'énergie nécessaire à la remontée des eaux. Comme le suggère la figure I.8, les ondes gravito-inertielles sont un moteur essentiel du mélange des eaux de densités différentes et favorisent ainsi la remontée d'eaux froides. La communauté scientifique préfère d'ailleurs le nom de circulation méridienne de retournement (MOC) pour mettre en avant que les mécanismes thermique et halin à eux seuls ne peuvent pas expliquer la remontée des eaux froides. Cette hypothèse est corroborée par les mesures de diffusivité turbulente, représentant une manière d'estimer le mélange. Polzin *et al.* (1997) ont mesuré cette grandeur dans le bassin du Brésil au dessus de deux types de topographies différentes (voir figure I.11). On observe une diffusivité au moins 10 fois plus élevée au-dessus du côté où le relief est irrégulier par rapport au côté où le relief est lisse. Comme les ondes gravito-inertielles sont générées par ces topographies, il semble raisonnable de penser que celles-ci soient également responsables de la diffusivité turbulente élevée.

La distance de dissipation visqueuse de ces ondes est élevée (voir équation (I.59)), de l'ordre de 50 000 km. Les ondes gravito-inertielles peuvent donc voyager sur de grandes distances, se faire ressentir dans tout l'océan et avoir un effet global sur la stratification. Bien que les ondes gravito-inertielles semblent être un moteur du MOC, les observations *in situ* n'ont pas encore permis de mettre en lumière un mécanisme particulier qui expliquerait le mélange. De nombreux phénomènes peuvent participer à une augmentation locale de l'amplitude des ondes : réflexion critique (Dauxois et Young, 1999), focalisation d'onde (Bühler et Muller, 2007), phénomène d'interférence constructive lorsque les ondes sont émises par des topographies complexes (à la manière d'un réseau) (Echeverri *et al.*, 2011), cycle attracteur (Brouzet *et al.*, 2016), ondes de Lee (Nikurashin et Ferrari, 2013). Ces grandes amplitudes vont naturellement conduire à des instabilités comme de la PSI, des instabilités de retournement, de cisaillement, ... qui transfèrent de l'énergie entre échelles et participent au mélange. Il est tout à fait probable que ces mécanismes jouent tous un rôle plus ou moins important en fonction de la région observée.

## 2.d Latitude critique

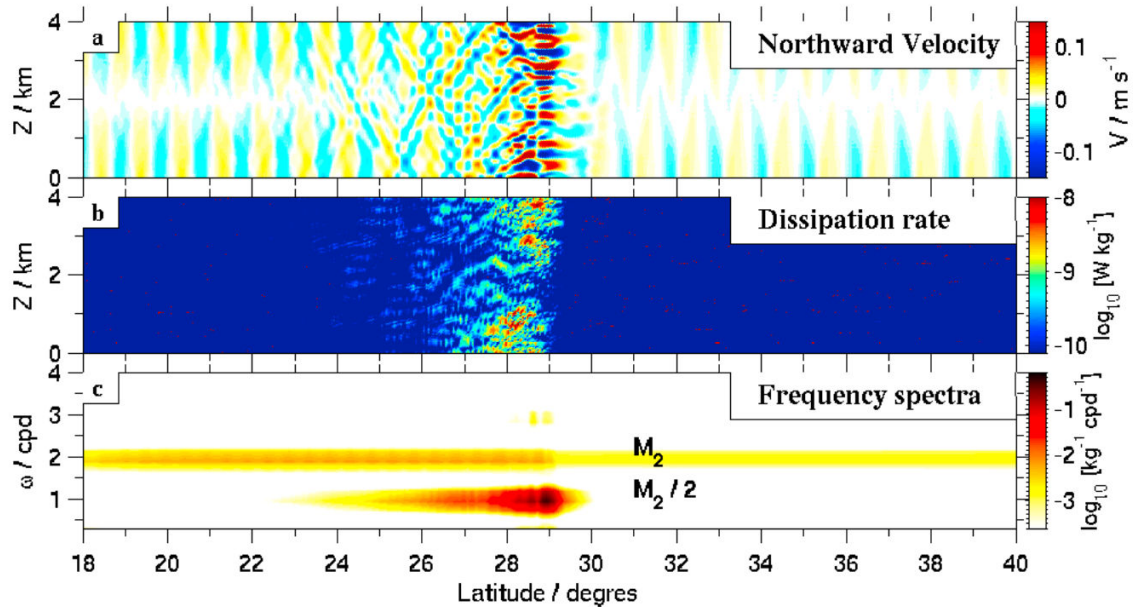
Parmi les inhomogénéités de l'océan, une des plus flagrantes est l'évolution de la pulsation de Coriolis  $f$  avec la latitude. La figure I.12 montre une simulation numérique d'une onde gravito-



**FIGURE I.11** – Coefficient de diffusivité turbulente dans une section longitudinale du bassin du Brésil au-dessus de deux topographies. À gauche, la topographie est lisse et la diffusivité est faible tandis qu'à droite, la topographie est très irrégulière et la diffusivité est élevée. Extrait de Polzin *et al.* (1997)

inertielle forcée par la marée ( $M_2$ ), de période une demi-journée, se propageant depuis l'équateur vers les hautes latitudes. Vers une latitude de  $29^\circ$ , cette onde transfère la majeure partie de son énergie vers deux ondes de pulsation deux fois plus faible, et plus horizontales (MacKinnon, 2005), d'après les mesures de vitesse horizontale de la figure I.12(a). Ce phénomène a également été observé *in situ* (MacKinnon *et al.*, 2013a,b). La latitude particulière à laquelle ce processus se produit s'appelle la "latitude critique", elle correspond à la position où la pulsation de Coriolis vaut la moitié de la pulsation de l'onde primaire. Les caractéristiques de l'instabilité permettent d'identifier le phénomène comme étant de la PSI. Ce transfert d'énergie s'accompagne d'une dissipation très importante de l'onde primaire sur toute la colonne d'eau (figure I.12(b)). MacKinnon (2005) a estimé que 70% de l'énergie de l'onde primaire est transférée aux ondes secondaires. D'après Alford *et al.* (2007) ce taux est surévalué et n'est en fait que de 12%. La différence entre ces deux estimations a été expliquée par Hazewinkel et Winters (2011), qui ont montré que la résolution de la simulation joue un rôle important pour calculer le transfert d'énergie. En effet, la résolution de la simulation va donner l'échelle typique de dissipation. Or si cette échelle est plus grande que celle des autres phénomènes dissipatifs, cela va changer l'échelle de transfert de l'énergie lors de la PSI (voir figure I.5). Ainsi, pour des simulations à grande échelle, où il n'est pas possible de simuler les échelles dissipatives il est nécessaire d'étudier et de paramétrer ces taux de transfert d'énergie. Dans le chapitre III, nous aurons l'occasion d'expliquer l'instabilité particulière du faisceau à cette latitude ainsi que le taux de transfert important d'énergie vers les ondes secondaires.

La variété des mécanismes de génération des ondes internes, ainsi que la complexité des conditions océaniques qui ne sont connues que de façon partielle, rendent les instabilités et le mélange compliqués à étudier. Au laboratoire, nous recréons un océan modèle dont on peut contrôler les caractéristiques. La prochaine partie expliquera comment réaliser une stratification linéaire ou non-linéaire, imposer la pulsation de Coriolis, générer les ondes avec un profil contrôlé et finalement les



**FIGURE I.12** – Simulations numériques d’ondes gravito-inertielles se propageant depuis l’équateur vers le pôle Nord. (a) Vitesse horizontale dirigée vers le Nord (b) taux de dissipation et (c) spectre fréquentiel de densité d’énergie en fonction de la latitude. Extrait de MacKinnon (2005)

observer.

### 3 Ondes gravito-inertielles au laboratoire

Depuis le début de ce chapitre, nous avons détaillé les propriétés des ondes gravito-inertielles et discuté de leur existence dans un contexte géophysique. Cette partie est consacrée aux techniques expérimentales permettant de créer un milieu propice à la propagation de ces ondes. Lors de mes travaux de thèse, j’ai pu travailler dans deux cuves différentes que nous allons décrire. Les techniques expérimentales, détaillées dans la suite, peuvent être utilisées, sauf mention contraire, dans les deux cuves et seront illustrées sur l’une ou l’autre des cuves.

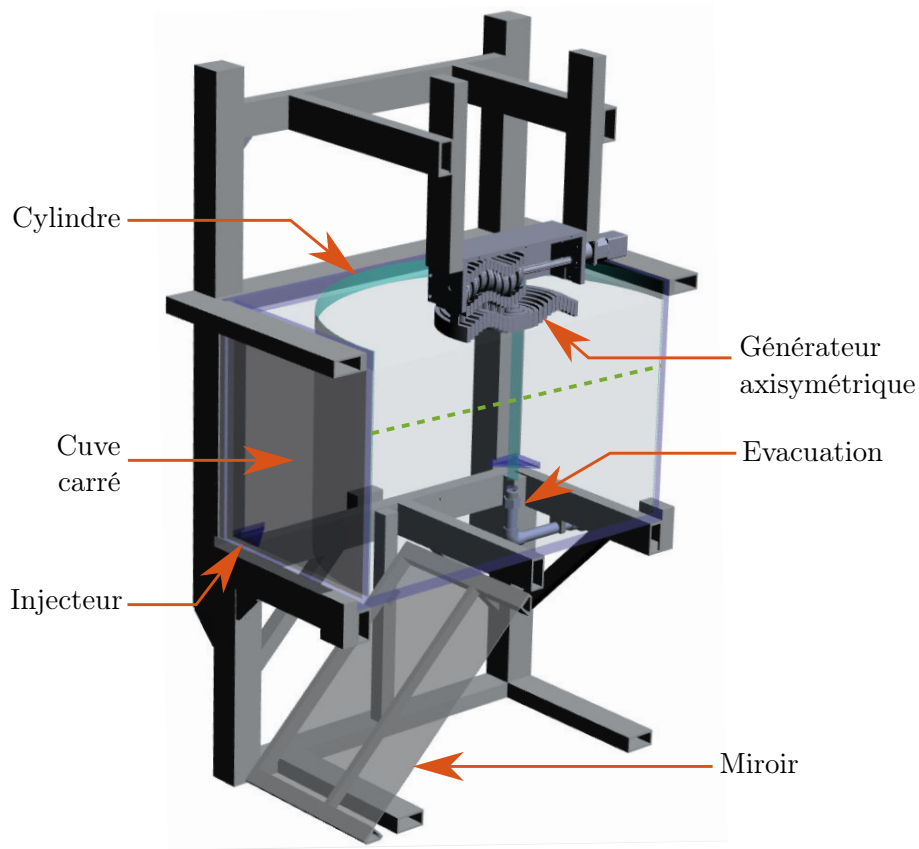
#### 3.a Cuves

##### Petite cuve à deux dimensions

La première cuve utilisée est un parallélépipède rectangle en plexiglas transparent de 72 cm de long, 40 cm de haut et 18 cm de large. Cette cuve est celle utilisée habituellement dans l’équipe et notamment dans la thèse de Bourget (2014). Elle sera utilisée dans les chapitres II et III. Un injecteur à sa base permet de la remplir de fluide. Pour le lecteur impatient d’en savoir plus, une photographie est montrée sur les figures I.20(c) et II.1.

##### Grande cuve axisymétrique

La deuxième cuve, réalisée par Denis Le Tourneau de l’atelier de mécanique, sera utilisée dans les chapitres IV et V et est représentée sur la figure I.13. J’ai participé à sa conception et à son dimensionnement. Celle-ci est à base carrée de 1 m de côté et fait 60 cm de hauteur. À l’intérieur de celle-ci est placé un cylindre transparent. Pour limiter les effets de dissipation visqueuse, qui

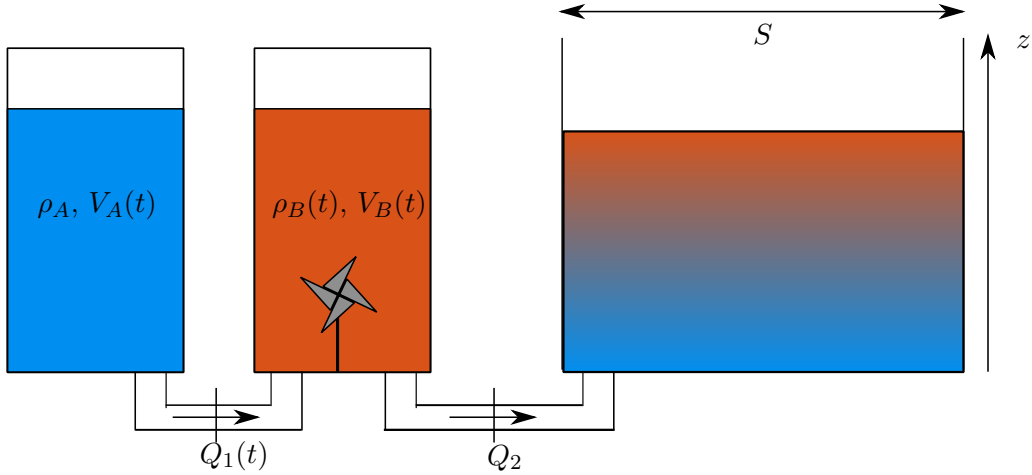


**FIGURE I.13** – Schéma de la grande cuve d’observation. Un cylindre en plexiglas transparent de 1 m de diamètre et de 2 mm d’épaisseur est inséré dans une cuve à base carrée ( $1 \times 1 \times 0.6 \text{ m}^3$ ) en plexiglas transparent de 1 cm d’épaisseur. Le cylindre est centré sur l’axe de rotation de la plateforme tournante et est inscrit dans la cuve carrée. Le générateur d’onde (décrit au chapitre IV) est positionné, centré, en haut de la cuve. La ligne verte pointillée correspond approximativement à la position de la nappe laser lors des mesures des vitesses horizontales par PIV, visualisées grâce au miroir positionné à  $45^\circ$  et placé sous la cuve. Des injecteurs et une évacuation permettent le remplissage et le vidage. Pour plus de clarté, seule la moitié du dispositif expérimental est représentée.

évoluent, d’après l’équation (I.59), comme le cube du nombre d’onde, la taille de l’expérience a été choisie la plus grande possible compte-tenu de la charge maximale acceptée par la plateforme tournante (1000 kg). Les quatre injecteurs situés au fond et aux quatre coins de la cuve permettent de la remplir de fluide stratifié. Lors du remplissage, celui-ci peut s’écouler librement sur le fond de la cuve grâce à des ouvertures usinées à la base du cylindre. Ainsi, une fois la stratification réalisée, il y a du fluide stratifié à l’intérieur et à l’extérieur du cylindre, ce qui permet de limiter fortement les aberrations optiques tout en conservant l’axisymétrie du dispositif expérimental. L’ensemble du dispositif est vissé sur la plateforme tournante PERPET (voir plus loin dans ce chapitre la sous-partie 3.c) de telle façon à aligner l’axe du cylindre avec l’axe de rotation.

### 3.b Stratification

La propagation des ondes gravito-inertielles se fait dans un milieu stratifié et en rotation uniforme, caractérisé par les deux paramètres  $N$  et  $f$ . Nous allons maintenant décrire comment



**FIGURE I.14** – Schéma de la méthode des deux bacs utilisée pour la réalisation d’une stratification.  $V_A, V_B, \rho_B$  et  $Q_1$  dépendent du temps.

créer expérimentalement un milieu possédant ces deux pulsations.

### Méthode des deux bacs

Dans le cas des océans, la stratification est réalisée par la variation de salinité et par la variation de température comme montré dans la figure I.7. Pour deux raisons, dans les expériences, nous nous limiterons à une stratification réalisée par la variation de la salinité. La première est que le sel utilisé (NaCl) diffuse 100 fois moins rapidement que la chaleur dans l’eau. Cela permet d’avoir des stratifications beaucoup plus stables dans le temps. La deuxième raison est qu’il est plus délicat de contrôler la température que la salinité. Notamment, les pertes thermiques lors du remplissage et par rayonnement au niveau des parois des cuves ne sont pas négligeables.

Nous utilisons donc du sel (NaCl) dissous dans de l’eau pour obtenir des masses volumiques comprises entre  $998 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$  (eau douce à  $25^\circ\text{C}$ ) et  $1030 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ , pour la petite cuve, et  $998 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$  et  $1060 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$  pour la grande cuve. La variation maximale de densité est donc inférieure à 5% de la densité moyenne. Ainsi la valeur de la masse volumique moyenne est proche de la masse volumique de l’eau douce  $\rho_0$ . Cette échelle de densité permet d’obtenir des valeurs de la pulsation de flottabilité  $N$  proche de  $1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , la hauteur du fluide étant de l’ordre de 30 cm dans la petite cuve et 60 cm dans la grande. Les phénomènes ondulatoires auront donc une période minimale de  $2\pi/N \simeq 6 \text{ s}$ . Pour l’acquisition par caméra, une fréquence de 4 Hz suffit donc à obtenir une bonne résolution temporelle. On retiendra qu’une acquisition de 10 minutes permettra donc d’obtenir au maximum 100 périodes d’oscillations.

Deux stratifications vont être envisagées par la suite. La première est une stratification linéaire, c’est la stratification la plus simple,  $N$  étant homogène dans la cuve. La deuxième, plus complexe, où  $N$  dépendra de  $z$  sera alors qualifiée de stratification non-linéaire. Pour réaliser une telle stratification, nous utiliserons deux bacs de remplissage et des débits qui varient dans le temps et qui seront contrôlés par ordinateur. Pour réaliser une stratification linéaire, les débits seront fixes. On retrouve alors la méthode des deux bacs simple (Fortuin, 1960; Oster et Yamamoto, 1963), schématisée dans la figure I.14.

Un bac A, de volume  $V_A(t)$  et de densité  $\rho_A$  constante se déverse dans un bac B d’un volume  $V_B(t)$  avec un débit  $Q_1(t)$  variable. Le bac B, soumis à une agitation permettant d’homogénéiser sa densité  $\rho_B(t)$ , se déverse dans la cuve d’observation à un débit constant  $Q_2$ . La conservation de

la masse et du volume s'écrivent :

$$\frac{d\rho_B(t)V_B(t)}{dt} = \rho_A Q_1(t) - \rho_B(t)Q_2, \quad (\text{I.67})$$

$$\frac{dV_B(t)}{dt} = Q_1(t) - Q_2. \quad (\text{I.68})$$

Ainsi on peut écrire :

$$V_B(t) = V_B(0) - Q_2 t + \Phi_1(t), \quad (\text{I.69})$$

où  $\Phi_1(t)$  défini comme :

$$\Phi_1(t) = \int_0^t Q_1(u) du. \quad (\text{I.70})$$

En combinant (I.67) et (I.69), on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d\rho_B(t)}{dt} (V_B(0) - Q_2 t + \Phi_1) = (\rho_A - \rho_B(t)) \frac{d\Phi_1}{dt} \quad (\text{I.71})$$

### Stratification linéaire

Pour obtenir une stratification linéaire, le plus simple est de choisir un débit  $Q_1$  constant, soit  $\Phi_1 = Q_1 t$ . L'équation différentielle précédente devient alors simplement :

$$\frac{d\rho_B(t)}{dt} = \frac{\rho_A - \rho_B(t)}{V_B(0) + (Q_1 - Q_2)t} Q_1 \quad (\text{I.72})$$

Si l'on effectue le remplissage de la cuve par le bas, comme dans le cas de la grande cuve grâce aux injecteurs (voir figure I.13), le fluide à un instant  $t$  est à une hauteur :

$$z(t) = h - \frac{Q_2}{S} t, \quad (\text{I.73})$$

où  $h$  est la hauteur finale de la stratification. En utilisant cette expression pour  $z$  et en intégrant l'équation sur  $\rho_B(t)$  on obtient simplement que :

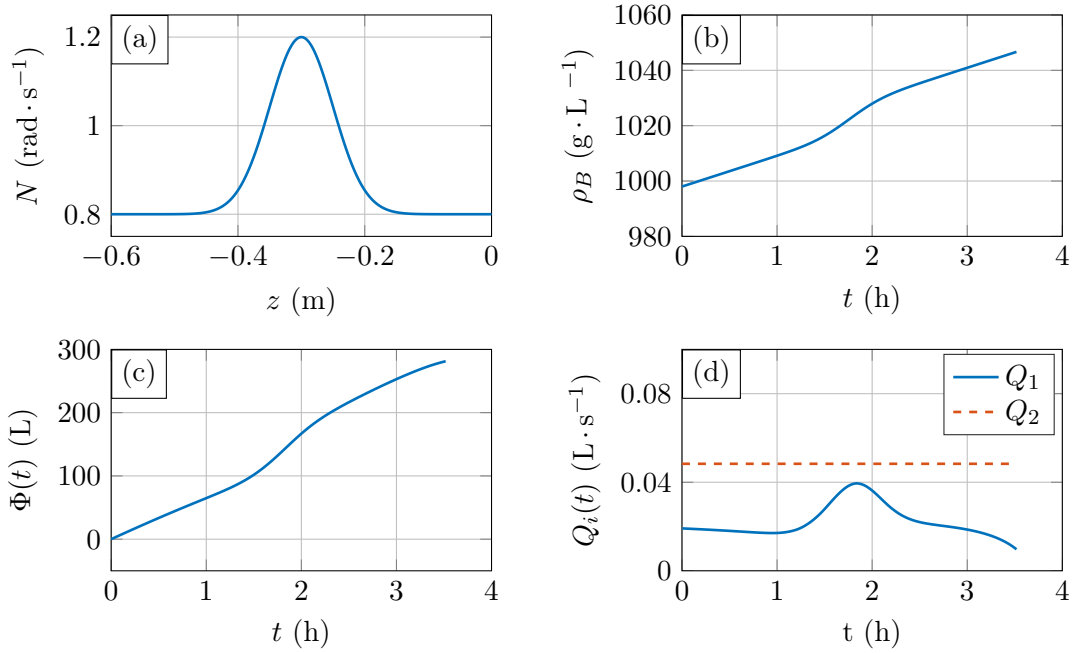
$$\rho_B(z) = \rho_A - (\rho_A - \rho_B(0)) \left( 1 + \frac{Q_1 - Q_2}{Q_2} \frac{S}{V_B(0)} (h - z) \right)^{Q_1/(Q_2 - Q_1)}. \quad (\text{I.74})$$

D'après cette expression, une stratification linéaire est obtenue si  $Q_1 = Q_2/2$ . Expérimentalement, pour contrôler les débits, nous utiliserons deux pompes péristaltiques étalonnées. La stratification ainsi obtenue est :

$$\rho_B(z) = \rho_B(0) - (\rho_A - \rho_B(0)) \frac{1}{2} \frac{S(h - z)}{V_B(0)}. \quad (\text{I.75})$$

Il est également possible de remplir la cuve d'observation par le haut grâce à un flotteur qui dépose le fluide à la surface. Les calculs sont similaires et l'on obtient toujours une stratification linéaire dans le cas où  $Q_1 = Q_2/2$ .

Ainsi les densités des bacs A et B doivent être ajustées en fonction du type de remplissage (par le haut ou par le bas). Dans le cas d'un remplissage par le haut, il suffit de choisir  $\rho_A < \rho_B(0)$  et dans le cas d'une stratification par le bas  $\rho_A > \rho_B(0)$ . Dans le cas de la petite cuve une stratification de 30 cm est obtenue en 2 heures avec un débit typique de  $250 \text{ mL} \cdot \text{min}^{-1}$ . Pour la grande cuve, les débits utilisés sont bien plus importants (typiquement  $3 \text{ L} \cdot \text{min}^{-1}$ ) et la stratification est obtenue en 5 heures. Ces temps de remplissage peuvent paraître long mais il faut éviter d'avoir une vitesse



**FIGURE I.15** – Exemple de stratification non-linéaire utilisant la méthode des deux bacs à débit variable. (a) représente la stratification désirée, (b) la masse volumique correspondante obtenue par intégration du profil de  $N$  montré en figure (a). (c) Solution correspondante de l'équation différentielle (I.71). (d) Débits correspondants pour réaliser cette stratification non-linéaire avec  $Q_2$  constant et  $Q_1$  donné par la dérivée de  $\Phi(t)$ . Pour cet exemple, nous avons choisi un remplissage par le bas dans la grande cuve de 600 L (section de 1 m<sup>2</sup>, 60 cm de hauteur) avec  $\rho_A=1056 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ ,  $\rho_B=998 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$  et des volumes initiaux des cuves de remplissage ( $V_A(0)$  et  $V_B(0)$ ) de 360 L.

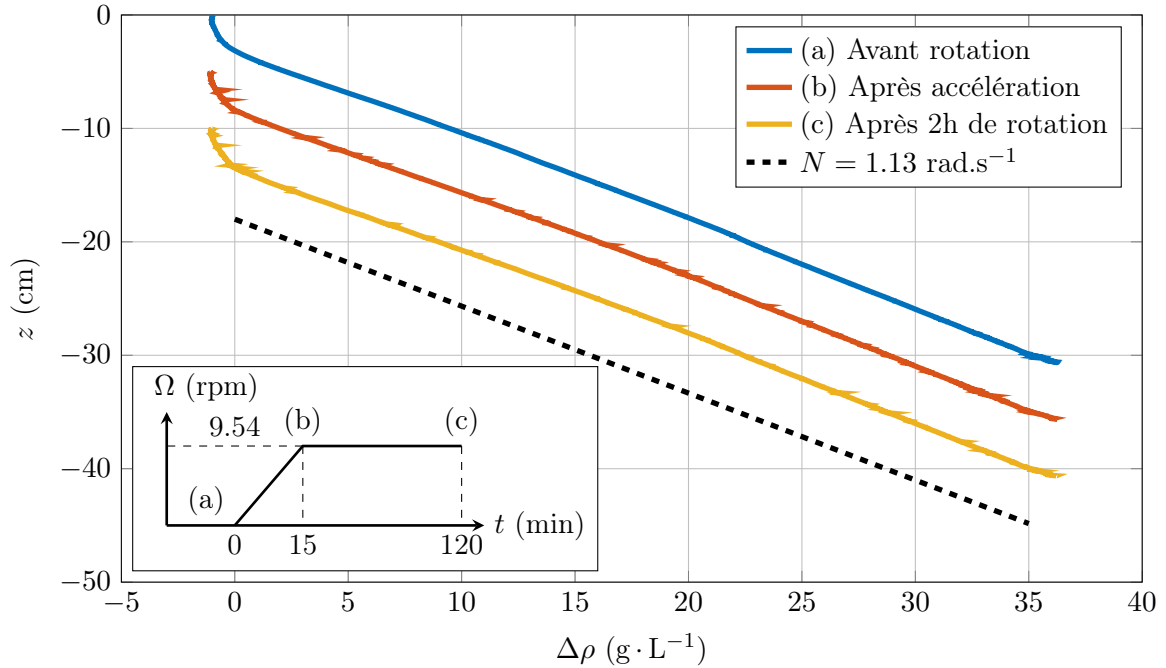
ascensionnelle du fluide dans la cuve trop élevée pour ne pas le mélanger lors du remplissage. En effet, les couches de fluides doivent avoir le temps de glisser les unes sur les autres. Bien que la grande cuve soit plus de 10 fois plus volumineuse que la petite, le temps de remplissage n'est que 2 fois plus grand. Cela s'explique par la géométrie de la grande cuve et la technique de remplissage. Le fluide est moins contraint par les parois dans la grande cuve et plusieurs injecteurs sont utilisés, ce qui permet de mieux répartir le fluide. On est également limité par le débit maximal des pompes. Il est sûrement possible de remplir la grande cuve plus rapidement mais le débit  $Q_2$  est fixée à la valeur maximale que peut atteindre le matériel.

### Stratification non-linéaire

Pour réaliser une stratification non-linéaire, il va falloir faire varier  $Q_1(t)$  en fonction du temps en accord avec l'équation différentielle (I.71). En pratique, nous choisissons de faire varier  $Q_1$  et non pas  $Q_2$  de façon à maximiser le débit de remplissage de la cuve en choisissant la plus grande valeur de  $Q_2$  accessible avec les pompes. La figure I.15 montre la solution de l'équation différentielle dans le cas d'une stratification de 60 cm en cloche qui approche ce que l'on pourrait observer au niveau de la thermocline d'un océan lorsqu'elle est réalisée dans la grande cuve.

Présentée ainsi, la réalisation d'une stratification non-linéaire semble aisée. Cependant, il y a plusieurs paramètres à prendre en compte. Pour la réalisation en elle-même de la stratification, il faut veiller à ce que la solution trouvée soit plausible physiquement ( $Q_1$  positif et inférieur à la valeur maximale accessible avec la pompe,  $\Phi$  inférieur au volume totale  $V_A(0)$ ). En pratique, on choisit la stratification et on raisonne par essai-erreur,  $\rho_A$  étant un paramètre d'ajustement. On





**FIGURE I.16** – Mesure en fonction de la profondeur de l'évolution de la densité du fluide stratifié,  $\Delta\rho$ , exprimée comme la différence entre la densité mesurée et la densité de l'eau douce ( $998 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ ), lors de la rotation du dispositif à  $9.54 \text{ tour} \cdot \text{min}^{-1}$  ( $f = 2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ). (a) est une mesure avant rotation, (b) après les 15 minutes d'accélération de la table et (c) après deux heures à rotation constante (d) valeur théorique pour une stratification à  $N = 1.13 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Pour plus de clarté, les ordonnées sont décalées de 5 cm entre chaque courbe. Les mesures présentées ici ont été faites dans la petite cuve.

fera également attention à ne pas faire varier trop brutalement la densité avec la profondeur dans la cuve d'observation, la diffusion ayant tendance à lisser les profils de densité.

Nous considérerons dans la suite des stratifications linéaires avec  $N$  homogène et constant, sauf pour le chapitre V qui utilisera des stratifications non-linéaires. Nous reviendrons d'ailleurs sur la mesure de ces stratifications dans ce chapitre.

### Mesure de la stratification

Pour connaître la pulsation de flottabilité, il faut pouvoir mesurer avec précision la densité du fluide. Pour mesurer la densité des fluides des bacs A et B, nous utilisons un densimètre Anton-Paar DMA 35. Ce densimètre est constitué d'un capillaire en forme de U qui est rempli du fluide dont on veut connaître la densité. La mesure de la fréquence de résonance du système capillaire-fluide permet de remonter à la densité de ce dernier. Cet appareil fournit des mesures de densité comprises entre 0 et  $3 \text{ kg} \cdot \text{L}^{-1}$  avec une précision de  $0.001 \text{ kg} \cdot \text{L}^{-1}$ .

Pour pouvoir connaître  $N$  à l'intérieur de la cuve, il faut pouvoir mesurer la densité de façon continue puisque la pulsation  $N$  est liée à la dérivée de la densité. On pourrait prélever du fluide à différentes profondeurs et en déduire le profil. Mais cela est fastidieux et ne permet pas d'avoir une bonne résolution spatiale. À la place, on utilise une sonde conductimétrique qui mesure la résistivité du fluide entre deux plaques conductrices. La conductivité dépend de la concentration en sel et donc de la densité du fluide. Un étalonnage permet d'associer une densité à une conductivité.

Lors de l'étalonnage, on mesure également la température des solutions étalons. Cela permet de compenser les variations de densité et de résistivité dues aux variations de température entre les solutions étalons et le fluide dont on veut connaître la densité ou de compenser la possible existence d'un faible gradient thermique dans la cuve.

En pratique la sonde est fixée au bout d'une tige en acier inoxydable qui est plongée progressivement dans le fluide stratifié grâce à un moteur pas à pas. La mesure en continu de la résistivité et de la température permet de connaître la densité. Pour une stratification linéaire, on obtient alors un profil de densité similaire à ceux présentés en figure I.16 où  $\rho$  évolue linéairement avec la profondeur. La modélisation de  $\rho$  par une droite permet alors de remonter à la valeur de  $N$ .

Comme on peut l'observer sur la figure I.16, la partie supérieure de la colonne d'eau est moins stratifiée. Ce phénomène, analogue à celui que l'on observe dans les océans, est provoqué par les mouvements d'air qui tendent à mélanger la surface du fluide. L'évaporation, la diffusion et les mouvements du fluide lors du remplissage peuvent aussi expliquer ce phénomène. À première vue, on peut être surpris par des évolutions aussi lisses de la densité avec la profondeur. Une stratification linéaire est solution de l'équation de diffusion. Ainsi, loin des bords, toute perturbation à l'évolution linéaire de la densité avec la profondeur va être gommée par diffusion.

Le fluide étant stratifié, il possède maintenant une pulsation de flottabilité  $N$  non-nulle. Reste à le mettre en rotation de façon à imposer la pulsation de Coriolis  $f$ . Il faudra notamment s'assurer que la rotation ne perturbe pas la stratification.

### 3.c Rotation

#### Plateforme PERPET

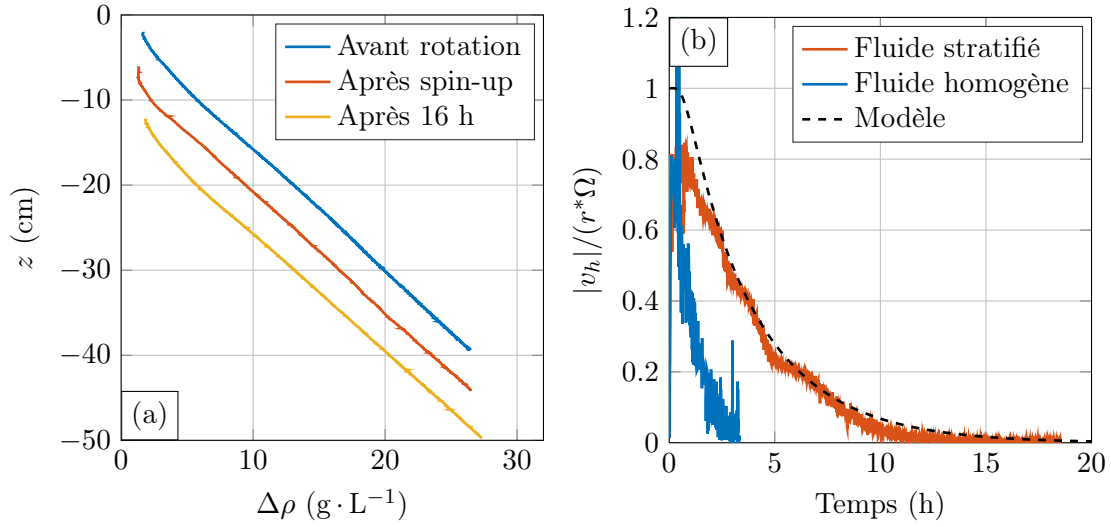
Pour mettre le fluide en rotation on fixe l'ensemble du dispositif expérimental sur la plateforme tournante PERPET (Plateforme d'Etudes en Rotation de Phénomènes et Ecoulements de la Terre), construite par GP Concept et acquise par le laboratoire en 2012. Cette plateforme de 1.92 m de diamètre peut tourner de 0 à 60 rpm, ce qui permet de faire varier le paramètre de Coriolis,  $f = 2\Omega$ , de 0 à  $12.5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  avec une précision de 0.1%. L'axe de rotation est aligné avec la gravité avec une erreur de  $2 \text{ mm} \cdot \text{m}^{-1}$ . Une fois la plateforme en rotation, le fluide va être entraîné par les parois et va finir par tourner à la même vitesse que l'ensemble du dispositif.

Des trous taraudés disposés en nids d'abeilles ainsi que deux caissons permettent de fixer les dispositifs expérimentaux sur la plateforme. Ainsi l'ordinateur qui permet de contrôler l'ensemble des instruments est lui aussi en rotation. Son contrôle peut se faire par un accès internet soit grâce à un contacteur tournant soit par wifi. En pratique, nous avons préféré l'accès par wifi qui est plus stable que celui par le contacteur tournant. Ce dernier servant plutôt à envoyer les données depuis l'ordinateur vers le centre de calculs une fois les expériences terminées.

#### Influence de la rotation sur la stratification

La rotation peut bien évidemment influencer la stratification. Si l'on tourne trop rapidement, les isopycnes (surface de même densité) vont se déformer sous l'effet de la force centrifuge et la surface du fluide va se courber pour prendre la forme d'une parabole. Pour les expériences menées lors de la thèse, les vitesses de rotation sont suffisamment faibles pour négliger cet effet, l'élévation du fluide au bord de la cuve étant inférieure à 5 mm, aux plus grandes vitesses de rotation.

La mise en rotation va entraîner des mouvements dans le fluide. Pour limiter le mélange du fluide stratifié, l'accélération angulaire de la table est limitée à  $10^{-3} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$ . Des mesures de densité dans la petite cuve sont présentées en figure I.16. Trois mesures sont présentées. Une avant



**FIGURE I.17** – (a) Mesure en fonction de la profondeur de l'évolution de la densité du fluide stratifié,  $\Delta\rho$ , exprimée comme la différence entre la densité mesurée et la densité de l'eau douce ( $998 \text{ g}\cdot\text{L}^{-1}$ ) avant la mise en rotation, après la fin de la phase d'accélération de la table jusqu'à sa vitesse angulaire nominale  $\Omega = 0.125 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  en 240 s et après 16 heures de rotation à vitesse angulaire constante  $\Omega = 0.125 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ . Un décalage vertical de 5 cm à été introduit entre les courbes pour plus de visibilité. Les mesures présentées ici ont été faites dans la grande cuve. (b) Valeur absolue de la vitesse horizontale du fluide,  $|v_h|$  (dans le cas stratifié  $v_h \approx v_\theta$ ), mesurée par PIV à  $r^* = 29 \text{ cm}$  du centre pendant que la plateforme est mise en rotation à une vitesse de  $\Omega = 0.125 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  dans le cas d'un fluide homogène et dans le cas d'un fluide stratifié. Dans le cas du fluide stratifié, les mesures réalisées sont en accord avec la solution de l'équation (I.76) (ligne pointillée) qui suppose un entraînement du fluide par viscosité depuis les bords.

la rotation du dispositif, une après que la plateforme ait atteint sa vitesse nominale, et la dernière après 2 heures de rotation à vitesse constante. On constate que la stratification n'est pas perturbée par la rotation sur l'échelle typique de la durée d'une expérience (20 min). Des mesures identiques ont été menées sur la grande cuve (voir figure I.17(a)) avant rotation, après accélération, puis 16 heures après rotation à vitesse constante. On constate également que la stratification n'est pas modifiée par la rotation.

Le problème de la mise en rotation du fluide a, pour le moment, été éludé. La prochaine partie étudie le temps nécessaire pour atteindre le régime de rotation uniforme.

### Temps de mise en rotation

Lorsque la cuve est mise en rotation le fluide va mettre un certain temps avant d'atteindre la même vitesse que la cuve. Comme le gradient vertical de densité supprime les mouvements verticaux, le temps typique de mise en rotation du fluide est plus long pour un fluide stratifié que pour un fluide homogène. En effet, pour un fluide homogène, des mouvement à trois dimensions, comme le pompage d'Ekman, distribuent la vitesse depuis le bas de la cuve vers le reste du fluide qui est initialement au repos. Considérons le fluide dans le cylindre de la grande cuve axisymétrique et supposons qu'il est mis en rotation uniquement par des effets d'entraînement par viscosité. Dans ce cas, en supposant que le mouvement est purement orthoradial et qu'il y a invariance selon  $z$

(cas d'un cylindre infiniment haut), la vitesse orthoradiale  $v_\theta$  est solution de :

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} = \nu \nabla^2 v_\theta, \quad (\text{I.76})$$

où  $\nu$  est la viscosité cinématique.

Dans le cas stratifié, la vitesse radiale mesurée est négligeable comparée à la vitesse orthoradiale. Nous nous intéresserons donc dans la suite à la vitesse horizontale qui s'identifie à la vitesse orthoradiale, dans le cas d'un mouvement purement orthoradial. La figure I.17(b) est un enregistrement de la vitesse horizontale réalisée par PIV (technique que nous détaillerons dans la partie suivante) à l'intérieur du cylindre à  $r = 29$  cm lors de la mise en rotation du dispositif. Lorsque le moment cinétique induit par la rotation a complètement diffusé à l'intérieur du cylindre, la vitesse devient nulle dans le référentiel tournant. Comme on peut s'y attendre, le temps nécessaire pour atteindre ce régime est plus court dans le cas d'un fluide homogène ( $\sim 2.5$  heures) que dans le cas d'un fluide stratifié ( $\sim 15$  heures). La solution de l'équation (I.76), qui suppose une condition de non-glissement aux parois, est tracée en figure I.17(b) et est en accord avec la mesure dans le cas du fluide stratifié. C'est donc bien la viscosité qui met le fluide en rotation dans ce cas du fait de l'absence de mouvements verticaux.

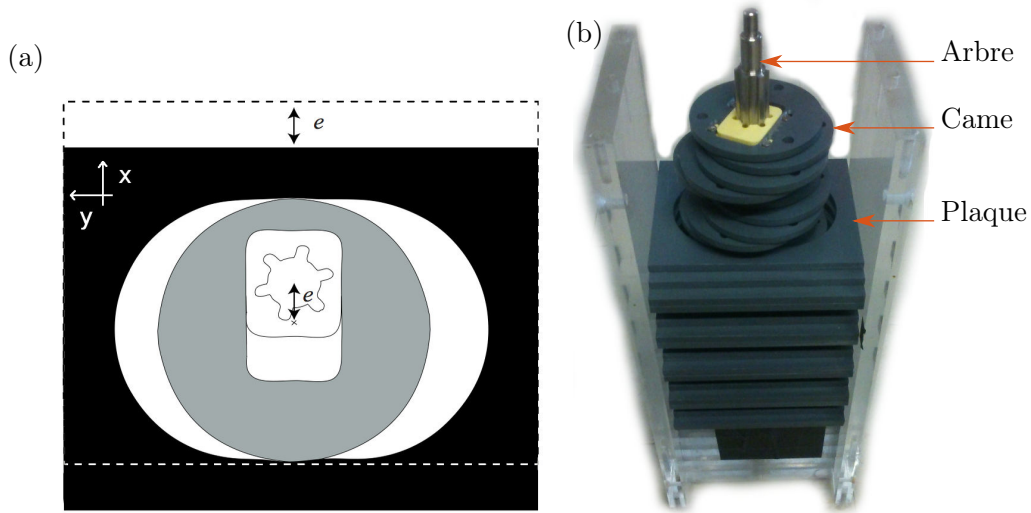
Des mesures similaires ont été menées dans la petite cuve mais sans modélisation du champ de vitesse. Ces mesures permettent de savoir quand le régime de rotation uniforme est atteint dans le cas stratifié : après deux heures de rotation pour la petite cuve et après 15 heures de rotation pour la grande cuve. Les expériences en rotation menées par la suite sont systématiquement faites après avoir atteint le régime de rotation uniforme.

### 3.d Génération d'ondes internes

#### Principe de fonctionnement

Nous avons vu comment obtenir un milieu dont les deux pulsations caractéristiques,  $N$  et  $f$ , peuvent être contrôlées pour réaliser les expériences dans les conditions désirées. Il reste encore à générer les ondes gravito-inertielles. Historiquement, la première génération d'ondes internes repose sur l'oscillation d'un cylindre à l'intérieur d'un fluide stratifié. Cette méthode a permis les premières observations des 4 faisceaux d'ondes internes associées à une pulsation et la première vérification expérimentale de la relation de dispersion (Gortler, 1943; Mowbray et Rarity, 1967). Depuis, les techniques ont considérablement évolué, avec par l'exemple l'utilisation d'une pale simple pour exciter des modes verticaux (Cacchione et Wunsch, 1974), une pale à trois composantes pour générer un faisceau localisé (Delisi et Orlanski, 1975), des topographies oscillantes découpées dans de la mousse pour exciter des modes basses fréquences (Echeverri *et al.*, 2009) ou l'oscillation de l'ensemble de la cuve d'observation pour simuler l'excitation par les forces de marées (Maas *et al.*, 1997).

Au cours de cette thèse, nous avons utilisé deux générateurs d'ondes. Dans ce chapitre nous ne décrirons que le premier générateur. Le second étant une nouvelle conception, sa caractérisation sera l'objet du chapitre IV. Le générateur présenté maintenant a été développé au Laboratoire de Physique de l'ENS de Lyon et au LEGI à Grenoble par Gostiaux *et al.* (2006). La caractérisation du générateur et des ondes émises a ensuite été faite par Mercier *et al.* (2010) à l'ENS Lyon ainsi qu'au MIT de Boston. Bordes (2012) a finalement amélioré le dispositif en modifiant les cames de façon à pouvoir choisir librement leur excentricité. À l'inverse des expériences décrites dans le paragraphe précédent, ce dispositif permet de contrôler précisément la fréquence, l'amplitude et la forme des ondes. Le principe du générateur est le suivant : un arbre mis en rotation par un moteur entraîne des cames qui vont tourner avec une certaine excentricité. Chaque came va à son tour entraîner une plaque dans un mouvement translationnel sinusoïdal. L'excentricité et

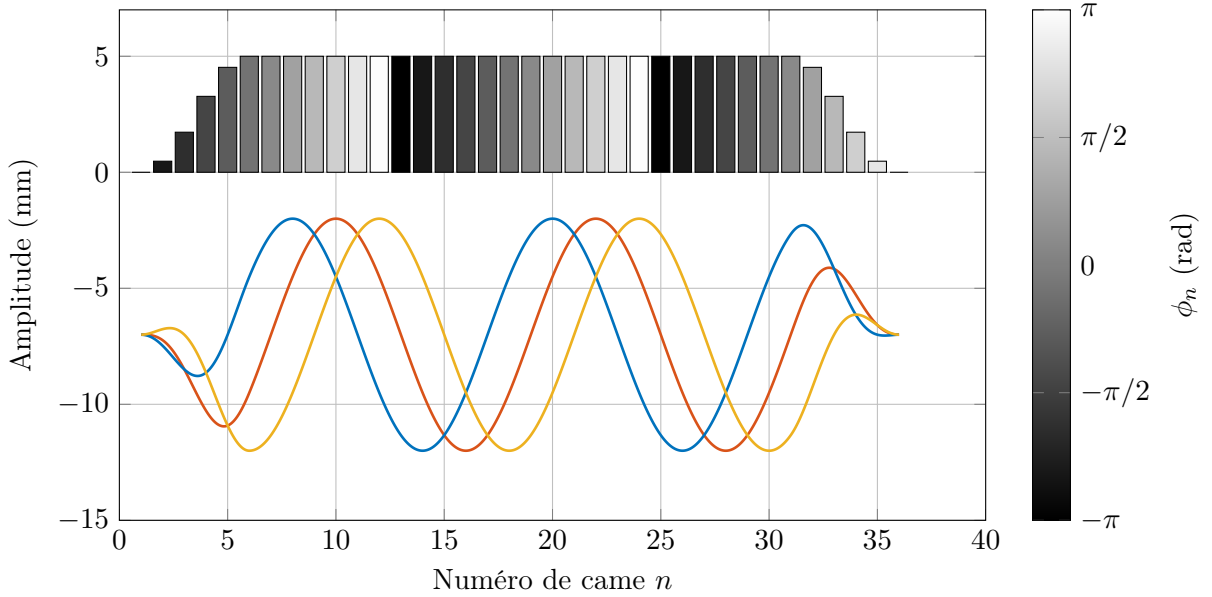


**FIGURE I.18** – (a) Schéma d'une plaque et d'une came d'excentricité  $e$  ajustable permettant de transformer un mouvement rotationnel en mouvement translationnel sinusoïdal d'amplitude  $e$  selon  $x$  limité par les deux lignes pointillées. (b) Plaques et cames empilées du générateur formant une onde sinusoïdale. Toutes les cames possèdent ici la même excentricité mais leur déphasage change la position relative de chaque plaque permettant ainsi de former un profil sinusoïdal.

la phase de chaque came peuvent être réglées indépendamment, pour faire varier les mouvements de translation d'une plaque à l'autre. Ces plaques vont ensuite imposer des conditions limites de vitesse au fluide. Selon la configuration expérimentale, la condition de vitesse limite portera soit sur la composante verticale de la vitesse, si le générateur est positionné horizontalement, soit sur la composante horizontale, si le générateur est positionné verticalement.

La figure I.18(a) montre une came qui est insérée sur l'arbre de rotation. Cette came peut être décentrée, grâce à la partie blanche à encoches, d'une excentricité  $e$  variant entre 0 et 15 mm. Lorsque l'arbre va tourner, cette came va effectuer des rotations qui vont pousser la plaque noire de 6 mm d'épaisseur alternativement vers l'avant et vers l'arrière selon  $x$ . La came n'ayant pas de contrainte latérale il n'y a pas de mouvement de la plaque selon  $y$ . Les cames peuvent ensuite être déphasées entre elles grâce aux 6 ergots de la partie blanche. Comme on le voit sur la figure I.18(b), ce déphasage des cames va se répercuter en un déphasage sur l'oscillation des plaques. En gardant l'amplitude de chaque came identique, mais en les déphasant, on peut par exemple créer des profils sinusoïdaux. Sur la figure I.18(a), on voit que la phase de chaque came peut être réglée par incrément de  $60^\circ$  puisque la pièce blanche possède 6 ergots. Cette discrétisation n'est pas forcément suffisante pour recréer l'ensemble des profils voulus. Pour cela on dispose de 4 types de cames différentes. Les premières ont une encoche alignée avec l'axe de translation ce qui permet un déphasage de  $0^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $120^\circ$ , ... Le deuxième type, décalée de  $15^\circ$  permet un déphasage de  $15^\circ$ ,  $75^\circ$ ,  $135^\circ$ , ... Les deux autres types de cames sont décalés de  $30^\circ$  et  $45^\circ$ . Au final cela permet de choisir le déphasage par incrément de  $15^\circ$  en utilisant des cames de types différents.

Pour plus de clarté nous allons maintenant illustrer le principe en expliquant comment régler le générateur tel qu'il sera utilisé dans les chapitres II et III.



**FIGURE I.19** – Déphasages et amplitudes des cames pour le forçage d’une onde plane de longueur d’onde horizontale correspondant à 12 plaques ( $\ell \approx 72 \text{ m}^{-1}$ ) avec une atténuation sur les bords sur une demi-longueur d’onde et une amplitude de 5 mm. Des profils à trois instants différents sont représentés par des courbes en couleur. Pour plus de clarté, les amplitudes de ces profils sont décalées de 7 mm vers le bas.

### Exemple de profil - onde plane

Le but est de forcer la propagation d’une onde plane en imposant la vitesse verticale, le long du générateur positionné horizontalement<sup>1</sup>. Remarquons que l’on force ici le nombre d’onde horizontal  $\ell$  ainsi que la pulsation  $\omega$ , le nombre d’onde vertical s’ajustera pour satisfaire la relation de dispersion (I.33). La composante de la vitesse verticale en  $z = 0$  est ainsi donnée par

$$v_z(x, z = 0, t) = a(x)\omega \cos(\ell x - \omega t). \quad (\text{I.77})$$

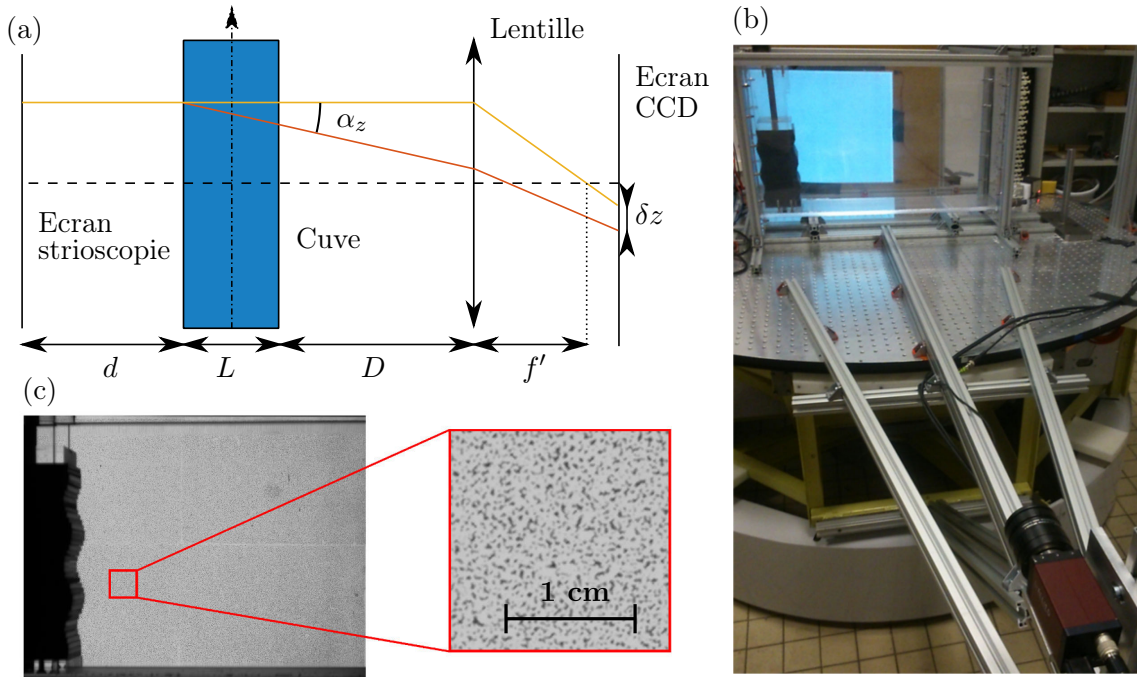
En tout  $x$ , on obtient un mouvement oscillatoire de pulsation  $\omega$  et d’amplitude  $a(x)$ . Comme le générateur est de taille finie, on ne peut forcer l’onde plane que sur la taille du générateur. Ainsi  $a(x)$  est nul en dehors du générateur. Par suite, pour éviter une variation d’amplitude trop brusque et une possible émission d’onde non contrôlée, l’amplitude du générateur diminue graduellement sur les bords sur une demi-longueur d’onde comme cela est montré figure I.19. Pour obtenir une longueur d’onde horizontale de 12 plaques, chaque came va être déphasée de  $\pi/6$  par rapport à la précédente. On obtient alors le profil présenté en figure I.19.

Nous avons détaillé ici un exemple de profil d’excitation qui va émettre une onde plane, profil que nous avons principalement utilisé. On peut noter que le générateur d’onde permet d’obtenir d’autres types d’ondes comme des modes (Mercier *et al.*, 2010).

### 3.e Visualisation des ondes

Les conditions de propagation des ondes gravito-inertielles étant réunies, nous avons vu comment créer ces ondes en imposant les conditions limites adéquates. Il reste donc à les observer.

1. La description faite ici est transposable à un générateur qui force une onde plane en imposant la vitesse horizontale s’il est placé verticalement comme sur la figure I.20(c)



**FIGURE I.20** – (a) Schéma du dispositif expérimental pour l’acquisition des images de strioscopie sur la plate-forme tournante. (b) Photographie du dispositif. (c) Image enregistrée par la caméra avec un agrandissement de l’écran sur lequel est imprimé le motif permettant de faire de la strioscopie synthétique. Sur (a), le trait arrivant perpendiculairement à la lentille symbolise le rayon lumineux non dévié, tandis que le second trait émergeant de la cuve symbolise le rayon lumineux dévié d’un angle  $\alpha_z$  par un gradient d’indice vertical. Sur l’écran CCD de la caméra, l’image apparaît alors décalée de  $\Delta z$ . Comme on peut le voir sur (b), la caméra et l’écran sont placés le plus loin possible de la cuve.

Contrairement à la propagation des ondes de surface, les ondes gravito-inertielles se propagent au sein du fluide. Elles ne vont donc pas être immédiatement visibles car à l’inverse des ondes de surface elles ne vont pas déplacer deux milieux différents l’un par rapport à l’autre (comme l’eau et l’air) mais un milieu dont les propriétés varient continûment. Pour les voir, on va utiliser deux techniques différentes basées sur de l’analyse d’image. La première, la strioscopie synthétique, repose sur les variations d’indice optique d’un fluide stratifié, la deuxième, la vélocimétrie par imagerie de particules (PIV), sur le déplacement de particules réfléchissantes engendrées par le mouvement du fluide.

### Strioscopie synthétique

Le fluide étant stratifié en densité, il l’est aussi en indice optique. La strioscopie (ou Schlieren) synthétique va utiliser la déviation des rayons lumineux par cette variation d’indice optique (Daziel *et al.*, 2000; Sutherland, 1999). Nous supposons notre système bi-dimensionnel, c’est à dire sans variation selon la direction transverse. Ainsi, on n’appliquera pas cette technique aux ondes tridimensionnelles des chapitres IV et V, bien que sous certaines conditions elle permet d’observer des ondes internes axisymétriques (Onu *et al.*, 2003; Riedinger *et al.*, 2010). En mesurant l’angle de déviation des rayons, on va pouvoir calculer les gradients d’indice optique.

La figure I.20(a) et (c) montre le dispositif expérimental. À l’aide d’une caméra, modélisée par une lentille et un écran CCD, on filme un motif de points disposés de façon aléatoire sur un écran

lumineux qui constitue l'écran de strioscopie (figure I.20(a)). Les rayons lumineux issus de cet écran vont ensuite traverser la cuve de fluide stratifié et être déviés d'un angle  $\alpha$ . Nous raisonnerons par la suite sur la composante verticale de cette déviation  $\alpha_z$ , le même raisonnement peut être mené sur la déviation horizontale  $\alpha_x$ .  $\alpha_z$  peut être relié au gradient vertical de densité par :

$$\alpha_z = \frac{L}{n} \frac{\partial n}{\partial z}, \quad (\text{I.78})$$

$$= \frac{L}{n} \frac{\partial n}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z}, \quad (\text{I.79})$$

où  $n$  est l'indice optique et  $L$  la largeur de la cuve. Sur la gamme de concentration en sel considérée, l'indice optique est une fonction affine de la densité avec  $\frac{\partial n}{\partial \rho} = 4.1 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$  (Bass *et al.*, 2009). Le déplacement apparent  $\delta z$  sur l'écran CCD est donné par :

$$\delta z = \alpha_z f' \frac{d + L/2}{d + L + D - f'}, \quad (\text{I.80})$$

les grandeurs géométriques étant définies sur la figure I.20(a). Finalement, la mesure du déplacement en pixels  $\delta p = \delta z / \zeta$ , où  $\zeta$  est la taille d'un pixel, permet de calculer le gradient vertical de densité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = \zeta \delta p \frac{\partial \rho}{\partial n} \frac{n}{L} \frac{d + L + D - f'}{f'(d + L/2)} \quad (\text{I.81})$$

Lorsque des ondes gravito-inertielles vont se propager dans le fluide, le gradient de densité va être modifié localement. Cela va entraîner une modification de l'indice optique et ainsi une déformation de l'image sur la caméra. Si l'on compare une image prise sans onde à une image prise avec ondes, on peut remonter aux gradients de perturbations de densité :

$$\nabla \rho'(x, z, t) = \nabla \rho(x, z, t) - \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} \quad (\text{I.82})$$

Pour obtenir une bonne résolution des gradients de densité il est nécessaire d'avoir une bonne résolution spatiale dans les déplacements apparents du motif de l'écran de strioscopie. Pour cela nous utilisons une caméra (AVT Pike F-505C) de résolution  $2452 \times 2054$ . La fréquence typique d'acquisition est de 2 ou 4 Hz, ce qui permet d'avoir au moins 10 images par période de l'onde. Cette méthode ne fonctionne bien que pour des expériences où il n'y a pas trop de mélange. Cette technique est donc à proscrire pour des expériences longues et à grandes amplitudes. L'algorithme permettant de remonter au déplacement apparent des points est identique à celui utilisé en PIV et est décrit plus bas.

### Vélocimétrie par Imagerie de Particules (PIV)

La vélocimétrie par imagerie de particules (PIV) est une technique qui permet de mesurer le champ de vitesse d'un écoulement. Le fluide estensemencé de particules passives réfléchissantes puis illuminé par une nappe laser de 2 mm d'épaisseur réalisée à partir d'une lentille cylindrique et d'un laser 2 watts Ti:Sapphire (Laser Quantum) de 532 nm de longueur d'onde. Les particules vont diffuser la lumière du laser et leur position va être enregistrée par la caméra. Deux types de particules ont été utilisés dans cette thèse. Les premières sont des particules de borosilicate de  $1.1 \text{ kg} \cdot \text{L}^{-1}$  de densité et de  $10 \text{ }\mu\text{m}$  de diamètre moyen (Sphericell). Ces particules sont utilisées lors des mesures par PIV dans la petite cuve et dans la grande cuve lorsque la nappe laser est verticale. Bien qu'elles soient plus denses que le fluide, du fait de leur petite taille, le temps de sédimentation typique est de plusieurs jours. Cette vitesse de sédimentation est de fait négligeable



sur la mesure de la vitesse des ondes. Les secondes particules (Dantec dynamics) sont de même diamètre mais elles sont recouvertes d'argent et sont donc plus denses ( $1.4 \text{ kg} \cdot \text{L}^{-1}$ ). L'enveloppe d'argent permet de mieux réfléchir la lumière. Ces particules seront utilisées dans la grande cuve avec la nappe laser horizontale (voir figure I.13), car on a besoin de plus de lumière. En effet, non seulement le plan laser est plus loin de la caméra mais la lumière doit traverser une plus grande distance dans l'eau et dans le plexiglas ainsi qu'une couche de sédimentation au fond de la cuve ce qui atténue considérablement le signal lumineux. Ces particules sont plus denses que les précédentes et sédimentent plus vite. Elles sont donc plus délicates à utiliser.

Pour réaliser la mesure de vitesse, on compare la position des particules entre deux images successives. De façon générale, on acquiert les images à 2 ou 4 Hz. Pour des expériences où le forçage est plus important, il est également possible d'enregistrer deux images très proches temporellement pour réduire le déplacement entre deux images puis d'attendre un certain temps et recommencer l'opération.

### **Algorithme de corrélation d'image**

Les deux techniques présentées demandent de connaître le déplacement des particules d'une image à l'autre ou la déformation apparente d'une image à l'autre. Pour cela on utilise l'algorithme de corrélation CIVx (Fincham et Delerce, 2000) au sein de l'interface graphique *uvmat* développée par J. Sommeria. Cet algorithme divise chaque image en boîtes de taille réglable, le but étant de trouver où se trouve le motif contenu dans cette boîte sur l'image suivante. La boîte doit être suffisamment grande pour que le motif soit reconnaissable d'une image à l'autre (au moins une dizaine de particules en PIV ou de points noirs en strioscopie) mais plus petite que la taille typique de l'écoulement (dans le cas d'une onde, sa longueur d'onde) pour qu'il ne soit pas déformé d'une image à l'autre. L'algorithme calcule ensuite la corrélation sur le motif de cette boîte pour deux images successives. Le déplacement du motif d'une image à l'autre est alors défini par le maximum de corrélation. On obtient une résolution typique d'un dixième de pixel sur le déplacement.

## Conclusion

Dans ce chapitre nous avons expliqué les mécanismes permettant la propagation des ondes gravito-inertielles et discuté leurs principales caractéristiques. L'anisotropie du milieu dans lequel elles se propagent leur confère une relation de dispersion particulière qui relie non pas pulsation et longueur d'onde mais pulsation et angle de propagation. Une conséquence de cette relation est l'orthogonalité entre la vitesse de phase et la vitesse de groupe. Pour s'approcher des conditions réelles de propagation, nous avons calculé l'influence de la viscosité ainsi que des non-linéarités. La viscosité joue un rôle mineur sur les caractéristiques de l'onde issue du générateur, les non-linéarités expliquent quant-à-elles les instabilités des ondes gravito-inertielles. Parmi ces instabilités, nous en avons détaillé une, la TRI (ou PSI dans le cas océanique), qui se caractérise par l'interdépendance de la dynamique de 3 ondes en résonance spatiale et temporelle. Nous aurons l'occasion de revenir en détail sur cette instabilité et sur le rôle de la rotation sur cette instabilité dans le chapitre III.

Dans une deuxième partie, nous nous sommes intéressés aux motivations géophysiques. L'océan, l'atmosphère ou même des corps célestes comme les étoiles sont des fluides stratifiés en rotation et ont donc les caractéristiques idéales pour permettre la propagation des ondes gravito-inertielles. Celles-ci sont omniprésentes dans l'océan et peuvent être générées soit par le vent soit par l'interaction entre les courants et la topographie sous-marine. Ces ondes sont particulièrement importantes puisque qu'elles mélangent les différentes couches de l'océan, entretenant ainsi la circulation méridionale de retournement. Des mesures et des simulations numériques ont également permis de mettre en lumière une latitude, appelée "latitude critique", où l'instabilité des ondes est particulièrement forte.

Pour finir, nous avons détaillé les techniques expérimentales permettant de recréer les conditions adéquates de rotation et de stratification, de générer des ondes gravito-inertielles et de les observer. Dans la suite nous étudierons les ondes dans deux géométries différentes, une géométrie cartésienne à deux dimensions dans une petite cuve et une géométrie axisymétrique dans une plus grande cuve. Pour respecter la symétrie de la seconde cuve, un nouveau générateur a été construit et caractérisé.





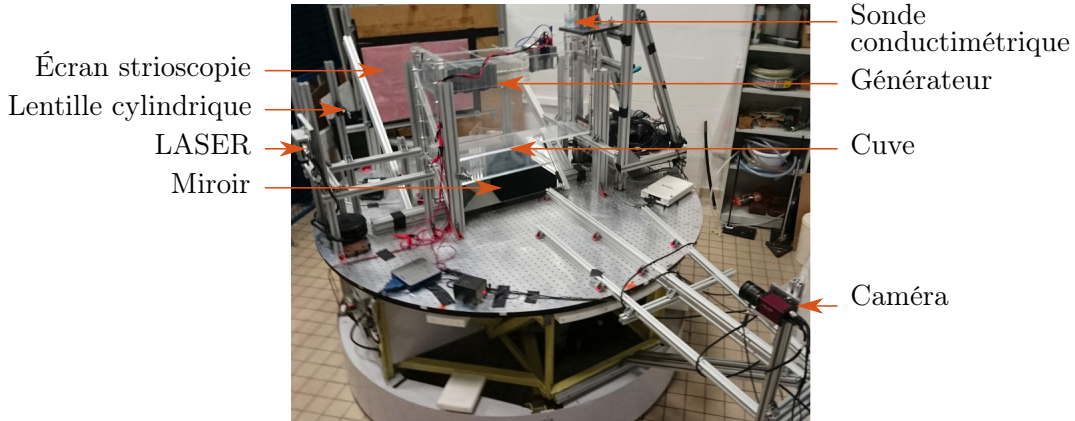
Cyclone au-dessus de l'Islande tournant dans le sens trigonométrique.

## Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de la génération des ondes internes en rotation. Les générateurs existants (voir chapitre I) ont pour le moment été utilisés pour créer soit des ondes internes (Bourget *et al.*, 2013; Gostiaux *et al.*, 2006; Mercier *et al.*, 2010) soit des ondes inertielles (Bordes *et al.*, 2012), mais jamais dans des conditions de stratification et de rotation explorées dans cette thèse. Ainsi, avant toute étude des mécanismes d'instabilité des ondes gravito-inertielles, il faut s'assurer de la capacité du générateur à créer de telles ondes dans cette configuration. Notamment il faut pouvoir imposer avec précision le profil de l'onde mais également sa pulsation et son amplitude. Comme la rotation modifie la structure des ondes, on s'attend à ce que le générateur ne fonctionne pas de façon optimale pour toutes les vitesses de rotation. De plus, la géométrie quasi bidimensionnelle du dispositif expérimental impose une invariance selon l'axe transverse. Or les ondes en rotation possédant une composante non-nulle selon cette direction, on peut ainsi se demander si les conditions limites sur les bords de la cuve modifient la structure à deux dimensions de l'onde.

Ce court chapitre, plutôt technique, répond à ces questions grâce à deux méthodes d'analyse. La strioscopie synthétique, basée sur les variations des gradients d'indice optique, permettra d'observer la propagation des ondes dans un plan vertical et d'analyser en fréquence et en longueur d'onde le faisceau émis. L'invariance du problème selon la direction transverse  $y$  sera vérifiée en utilisant de la PIV dans un plan horizontal. Finalement nous vérifierons les propriétés de propagation des ondes en confrontant nos mesures, traitées par transformée de Hilbert, avec la relation de dispersion des ondes gravito-inertielles.

Les résultats présentés dans ce chapitre ont été publiés dans *Journal of Fluid Mechanics* (Maurer *et al.*, 2016)



**FIGURE II.1** – Photographie du dispositif expérimental permettant de générer des ondes gravito-inertielles. Leur visualisation peut se faire soit par strioscopie (Schlieren) synthétique, grâce à l'écran rose au fond à gauche, dans le plan vertical, soit par PIV à l'aide d'un laser dans un plan horizontal.

## 1 Génération d'ondes internes en rotation

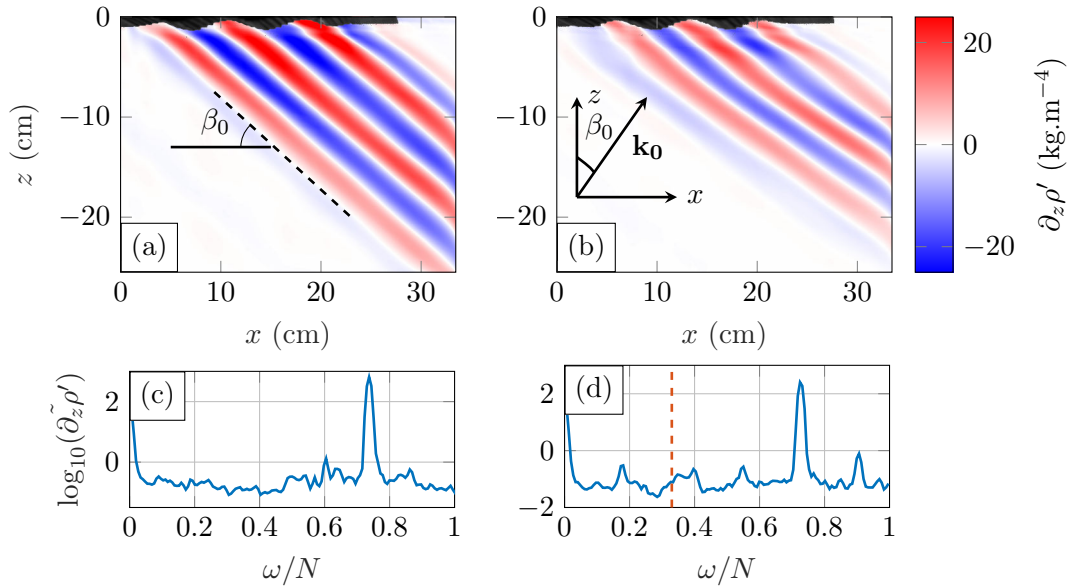
Dans tout ce chapitre et le chapitre suivant, le générateur utilisé est celui décrit dans le chapitre I avec un profil d'onde plane monochromatique de pulsation  $\omega_0$ , de nombre d'onde horizontal  $\ell_0$  voisin de  $\ell_0 = 72 \text{ m}^{-1}$  et d'amplitude  $a$ , égale à 5 mm sur deux longueurs d'ondes et atténuée sur une demi-longueur d'onde de chaque côté (voir figure I.19), avec une phase se propageant vers les  $x$  positifs. Pour tous les prochains chapitres, nous utiliserons systématiquement l'indice 0 pour l'onde (primaire) issue du générateur.

### 1.a Visualisation des ondes

Le générateur est installé horizontalement à la surface de la cuve, comme montré sur la figure II.1. La cuve est ensuite remplie de fluide stratifié à une pulsation de Brünt-Väisälä,  $N$ , proche de  $1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  et l'ensemble du dispositif expérimental est mis en rotation à la vitesse  $\Omega$  (voir chapitre I). Une fois le régime de rotation uniforme atteint, la pulsation de Coriolis est fixée par  $f = 2\Omega$ . On allume alors le générateur qui va émettre une onde. Cette onde va se propager dans le milieu stratifié tournant et créer des perturbations de l'indice optique. La strioscopie synthétique (voir chapitre I) va permettre de remonter aux gradients de densité  $\partial_x \rho'$  et  $\partial_z \rho'$  et ainsi de "voir" l'onde se propager. Deux exemples de résultat expérimental utilisant cette technique sont présentés figure II.2. Dans les deux cas, on observe une onde qui vient du générateur et qui se propage de façon rectiligne vers le bas à droite à un angle  $\beta_0$  avec l'horizontal conformément à la relation de dispersion:

$$\omega_0^2 = N^2 \sin^2 \beta_0 + f^2 \cos^2 \beta_0. \quad (\text{II.1})$$

Une première conséquence de cette relation est que l'onde se propageant dans le milieu stratifié en rotation est plus horizontale ( $\beta_0$  plus petit) que l'onde se propageant dans le milieu purement stratifié. La propagation à un angle bien défini est un signe de la monochromaticité temporelle de l'onde. En effet, sur les figures II.2(c) et (d), les transformées de Fourier temporelles montrent chacune deux pics qui ressortent du bruit. Le pic autour de  $\omega/N = 0.7$  est celui associé à l'onde. Le pic à  $\omega/N = 0$  provient du mélange sous le générateur, qui crée un gradient vertical d'indice par rapport à l'image initiale prise lorsque le générateur est éteint. On constate également que l'intensité de l'onde générée en rotation est moins importante que celle de l'onde générée sans rotation.



**FIGURE II.2** – (a) et (b) Exemple de champs de gradient vertical de densité,  $\partial_z \rho'$ , lors de la génération d'une onde gravito-inertielle à (a) [  $\omega_0/N = 0.74$ ,  $f/N = 0.0$ ,  $a = 5$  mm et  $\ell_0 = 72$   $\text{m}^{-1}$  ] et à (b) [  $\omega_0/N = 0.73$ ,  $f/N = 0.33$ ,  $a = 5$  mm et  $\ell_0 = 72$   $\text{m}^{-1}$  ]. L'émission se fait à un angle  $\beta_0$  depuis le générateur vers le bas de la cuve. (c) et (d) Transformée de Fourier temporelle du gradient vertical de densité moyennée sur le champ d'observation de l'expérience,  $\tilde{\partial}_z \rho'$ , correspondant respectivement aux conditions de (a) et de (b). Sur (d), la ligne pointillée indique la valeur de  $f/N$ .

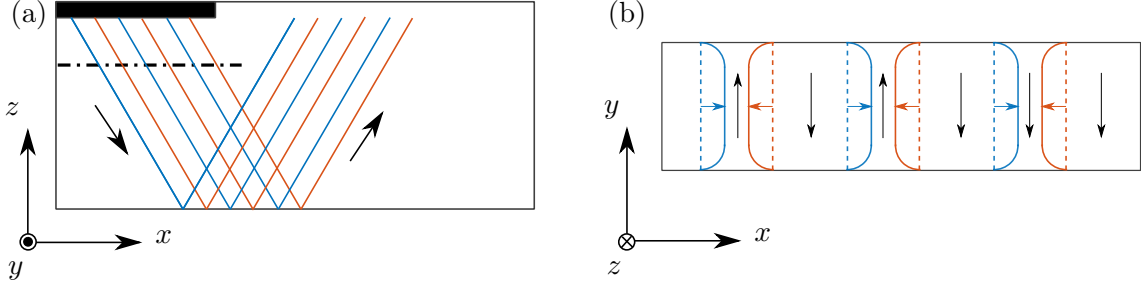
L'explication est qu'il existe sous le générateur une zone de transition dans laquelle les mouvements verticaux du générateur se transforment en mouvements obliques d'onde gravito-inertielle. Sans rotation, seule une vitesse selon  $x$  doit être générée, alors que dans le cas avec rotation une vitesse selon  $y$  existe également rendant la génération de l'onde moins efficace. De plus, comme les ondes générées en rotation pour un même  $\omega_0$  sont plus horizontales que celles générées sans, l'efficacité va en être d'autant plus réduite.

### 1.b Effets de bords

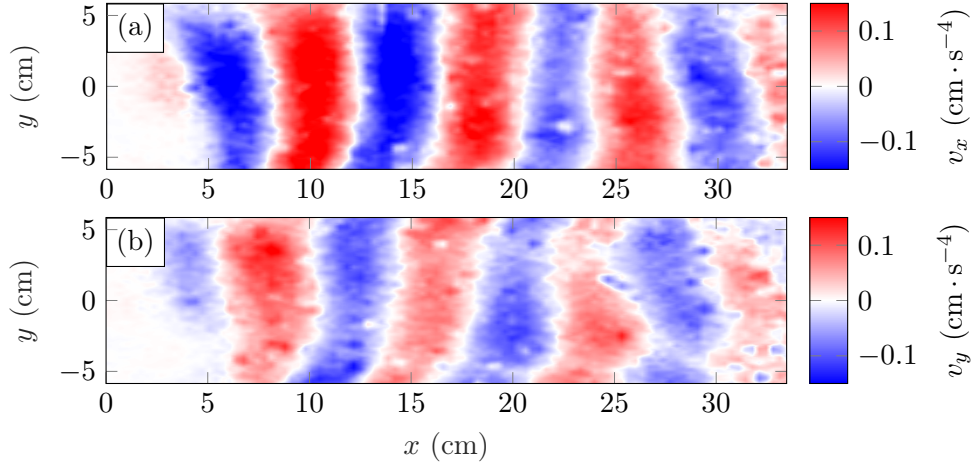
Le milieu dans lequel les ondes se propagent est bien évidemment limité par les bords de la cuve. Une première conséquence est l'existence de réflexions sur le fond et à la surface libre. La figure II.3(a) schématise le problème des réflexions pouvant gêner la visualisation ou interférer si l'onde, après plusieurs rebonds, se retrouve sous le générateur ou dans la zone d'observation. L'atténuation visqueuse  $\gamma$  le long de la propagation, donnée par l'équation (I.59), permet de calculer l'amplitude de l'onde après une propagation verticale sur 50 cm soit environ un aller-retour sur toute la hauteur d'eau. Pour  $\omega_0 = 0.8$   $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$  et  $N = 1$   $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ , on trouve une atténuation d'environ 50%. Ainsi pour une onde réelle, qui subit en plus de l'atténuation visqueuse des instabilités mais également une perte d'énergie au niveau des réflexions, le faisceau réfléchi a une amplitude faible devant l'amplitude de l'onde initiale et ne gêne pas la visualisation de cette dernière s'il revient dans le champ d'observation.<sup>1</sup>

La deuxième conséquence des effets de bord est que le milieu n'est pas invariant par translation

1. L'amplitude de l'onde décroît même beaucoup plus vite dans le cas d'un faisceau, voir figure II.5(a).



**FIGURE II.3** – Schématisation des effets de bords. (a) Effets de bord longitudinaux: lorsque l'onde rencontre une paroi elle se réfléchit. (b) Vitesses  $v_x$  et  $v_z$  dans un plan horizontal schématisé par la ligne pointillée en (a). Les maxima de  $v_x$  sont représentés en couleur conformément à (a), Les maxima de  $v_y$  sont représentés en noir. La condition de vitesse nulle à la paroi impose une variation de la vitesse dans la direction transverse.



**FIGURE II.4** – (a) Vitesse  $v_x$  et (b) vitesse  $v_y$  d'une onde gravito-inertielle générée à  $[\omega_0/N = 0.8, f/N = 0.2, a = 5 \text{ mm}$  et  $\ell_0 = 72 \text{ m}^{-1}]$ . La visualisation se fait par PIV dans un plan horizontal 8 cm sous le générateur. Le plan d'observation est similaire à celui de la figure II.3(b).

selon  $y$ . En effet, les parois latérales imposent une vitesse nulle. La figure II.3(b) schématise le problème des conditions limites transverses, avec une modification de la vitesse près des bords. Lors de sa thèse, (Brouzet, 2016) a vérifié expérimentalement dans des cas uniquement stratifiés que l'onde est quasiment bidimensionnelle sur toute la largeur de la cuve et cela même dans le cas de TRI (voir chapitre III pour plus de détail sur la TRI). Dans un cas en rotation, des mesures PIV dans un plan horizontal permettent de vérifier l'influence des bords. Ces mesures de  $v_x$  et  $v_y$  sont présentées sur la figure II.4. On remarque que les champs de vitesse observés sont globalement invariants selon  $y$  avec une variation majoritaire dans la direction  $x$ . Comme cela est attendu d'après les équations (I.43) et (I.44),  $v_x$  et  $v_y$  sont en quadrature de phase. Il est étonnant que la vitesse transverse soit si peu affectée par les parois. Pour comprendre ce phénomène, on peut évaluer le déplacement transverse maximal. D'après les équations (I.44) et (I.45), l'amplitude du déplacement selon  $y$  est donné par:

$$d_y = d_z \frac{f}{\omega_0 \tan \beta_0}, \quad (\text{II.2})$$

$$\approx a \frac{f}{\omega_0 \tan \beta_0}, \quad (\text{II.3})$$

où  $d_z$  est l'amplitude du déplacement selon  $z$ ,  $a$  l'amplitude du générateur. Pour une onde dont les caractéristiques sont celles de la figure II.4,  $\tan \beta_0 \approx 1$  et  $d_y \approx 1$  mm. On obtient donc un déplacement transverse très faible devant la dimension transverse de la cuve. Ainsi l'onde n'est que très peu perturbée par la présence de paroi.

On peut donc conclure dans une première approche que l'onde se comporte comme une onde à deux dimensions, quasi invariante selon  $y$ , avec un vecteur d'onde contenu dans le plan  $(O,x,z)$ .

## 2 Transformée de Hilbert

Afin d'extraire le maximum d'information sur l'onde produite par le générateur, nous utilisons une transformée de Hilbert. Les parties suivantes vont décrire l'opération réalisée et nous l'appliquerons à un cas concret.

### 2.a Principe

Le principe de la transformée de Hilbert est d'associer à un champ réel,  $\varphi(x, z, t)$ , un champ complexe  $\tilde{\varphi}(x, z, t)$  tel que  $\varphi(x, z, t) = \text{Re}(\tilde{\varphi}(x, z, t))$  (Mercier *et al.*, 2008). Pour comprendre la transformée et son utilité, considérons un champ constitué de la superposition de deux ondes planes de même pulsation mais se propageant dans des directions opposées avec le même nombre d'onde  $\ell$ :

$$\varphi(x, t) = A \cos(\omega_0 t - \ell_0 x) + B \cos(\omega_0 t + \ell_0 x). \quad (\text{II.4})$$

Nous avons supposé pour simplifier que la propagation se fait selon un unique axe  $x$  et que  $A$  et  $B$  sont constants. En utilisant une décomposition par transformée de Fourier temporelle, on peut réécrire ce signal sous la forme:

$$\varphi(x, t) = C(x) \exp(i\omega_0 t) + D(x) \exp(-i\omega_0 t), \quad (\text{II.5})$$

où  $C(x) = A/2 \exp(-i\ell_0 x) + B/2 \exp(i\ell_0 x)$  et  $D(x)$  est le complexe conjugué de  $C(x)$ . En supprimant les fréquences temporelles négatives et en multipliant par deux le signal restant pour conserver l'énergie, on obtient:

$$\tilde{\varphi}(x, z, t) = A \exp(i(\omega_0 t - \ell_0 x)) + B \exp(i(\omega_0 t + \ell_0 x)) \quad (\text{II.6})$$

Le signal réel  $\varphi(x, z, t)$  a été transformé en signal complexe  $\tilde{\varphi}(x, z, t)$  tel que  $\varphi(x, z, t) = \text{Re}(\tilde{\varphi}(x, z, t))$ . Comme  $\tilde{\varphi}(x, z, t)$  est complexe on peut isoler les valeurs positives et négatives des fréquences spatiales et ainsi ne garder que la direction de propagation souhaitée.

### En pratique

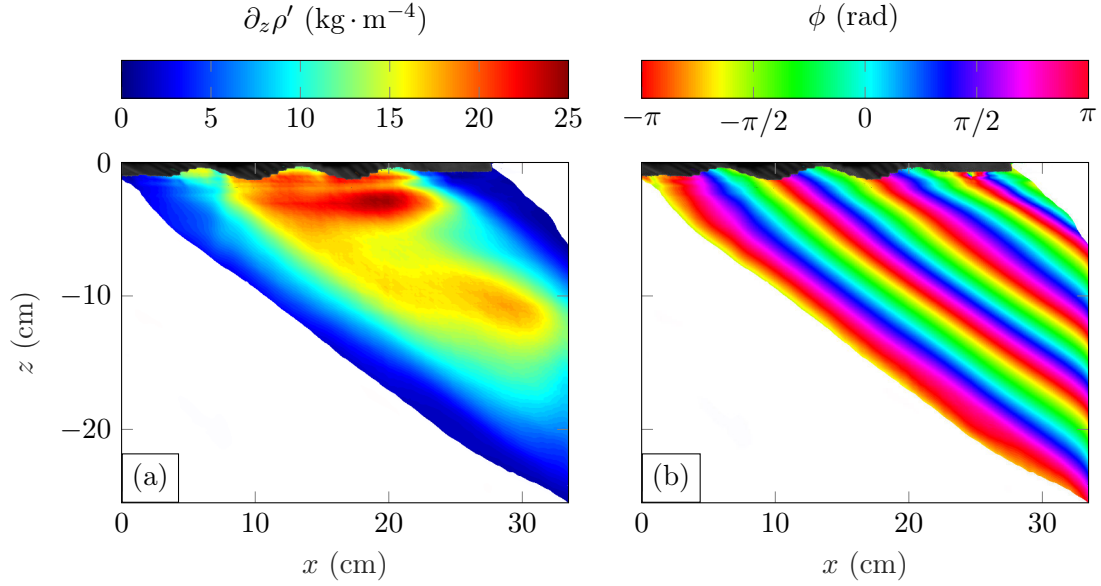
Une onde gravito-inertielle de pulsation donnée peut avoir quatre directions de propagation telles que (voir figure I.2):

$$\sin \beta_0 = \pm \sqrt{\frac{\omega_0^2 - f^2}{N^2 - \omega_0^2}}. \quad (\text{II.7})$$

Pour ne sélectionner qu'une pulsation et une direction de propagation, on procède comme suit:

- Transformée de Fourier temporelle sur le champ réel (qui est le gradient de densité dans une direction en strioscopie synthétique ou le champ de vitesse dans une direction en PIV).
- Sélection de la pulsation de l'onde par filtrage de la transformée de Fourier.
- Transformée de Fourier temporelle inverse pour associer le champ complexe de la même façon que dans le paragraphe précédent.





**FIGURE II.5** – (a) Module et (b) phase de la résultante d’une transformée de Hilbert  $H$  après filtrage temporel et spatial (pour ne garder qu’une direction de propagation) du gradient vertical de densité,  $\partial_z \rho'$ , correspondant à l’onde de la figure II.2(b) [  $\omega_0/N = 0.73$ ,  $f/N = 0.33$ ,  $a = 5$  mm et  $\ell_0 = 72$  m<sup>-1</sup> ]. Pour plus de clarté, l’amplitude et la phase ne sont montrées qu’aux endroits où l’onde a une amplitude significative ( $|\partial_z \rho'| > 1$  kg · m<sup>-4</sup>).

➤ Transformée de Fourier spatiale et filtrage pour ne garder qu’une direction de propagation.

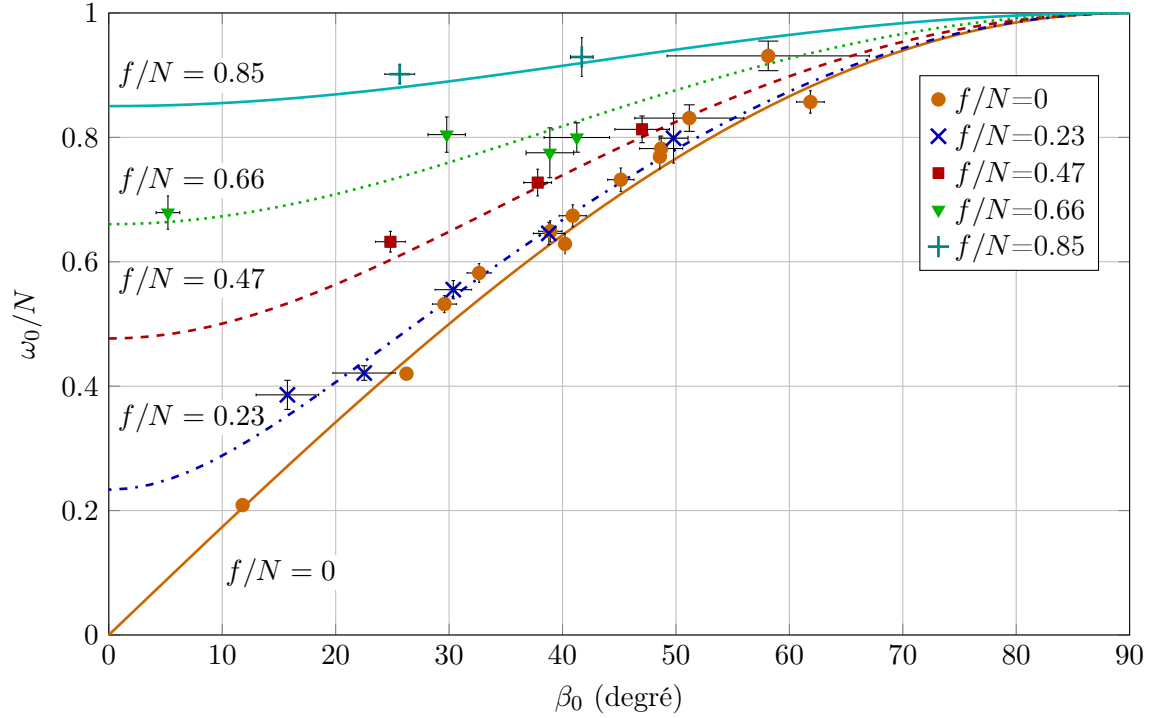
De façon pragmatique, pour une onde issue du générateur dans un cas  $f < \omega_0 < N$ , on va filtrer temporellement autour de la pulsation du générateur. On choisira  $\ell_0 > 0$  car le générateur impose une phase se propageant vers les  $x$  positifs. Comme le générateur est à la surface de la cuve, l’énergie ne peut se propager que vers le bas ainsi la phase ne peut se propager que vers les  $z$  positifs. Ainsi on choisira  $m_0 > 0$ . L’onde générée est schématisée dans le quadrant inférieur droit de la figure I.2(a). Bien que le générateur envoie une onde dans une seule direction, nous choisissons tout de même de filtrer spatialement l’onde pour filtrer une partie du bruit et les possibles réflexions parasites. Ce filtrage sera nécessaire dans le chapitre suivant lorsque l’on s’intéressera aux ondes secondaires.

Remarquons que dans le cas où  $N < \omega_0 < f$ , le générateur crée une onde avec  $\ell_0 > 0$  et  $m_0 < 0$  pour avoir une vitesse de groupe dirigée vers le bas, comme schématisé sur le quadrant inférieur gauche de la figure I.2(b).

Cette transformation va être notamment utilisé pour séparer les ondes filles de l’onde primaire lors de la TRI (voir chapitre III) et pour mesurer leur direction de propagation.

## 2.b Application

La transformation de Hilbert et le filtrage associé permettent non seulement de séparer les ondes les unes des autres mais également d’accéder à l’amplitude de ces ondes et à leur phase, qui ne sont rien d’autre que l’amplitude et la phase de la transformée de Hilbert. Une telle procédure a été réalisée sur l’onde de la figure II.2(b) et le résultat est montré sur la figure II.5. On constate que l’onde possède une amplitude localisée qui décroît avec la propagation, avec un maximum situé sous le générateur. On remarque que la phase décroît selon  $x$  et  $z$  ce qui est cohérent avec le



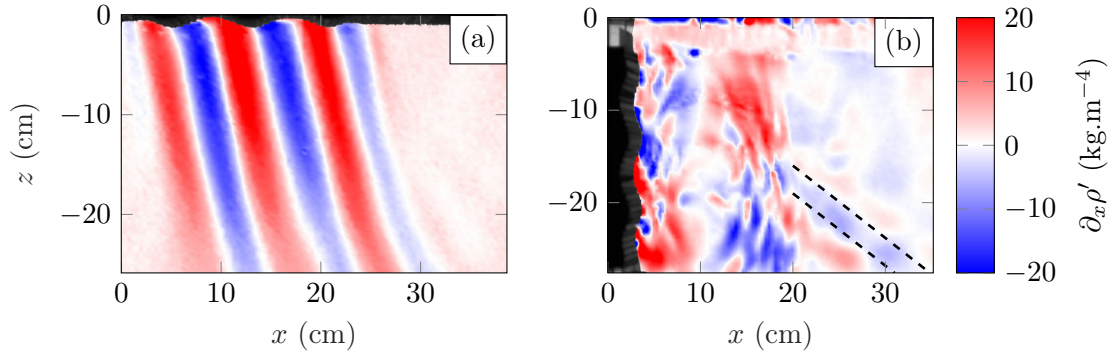
**FIGURE II.6** – Pulsation adimensionnée  $\omega_0/N$  d’une onde gravito-inertielle en fonction de son angle de propagation  $\beta_0$  pour différentes valeurs du paramètre de Coriolis  $f/N$  allant de 0 à 0.85. Les lignes sont les prédictions théoriques issues de la relation de dispersion (II.7), auxquelles sont comparées les mesures expérimentales représentées par des marqueurs de différentes formes. Pour toutes les expériences,  $N$  est proche de  $1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

filtrage ( $\ell_0 > 0, m_0 > 0$ ) lors de la transformée de Hilbert et la description de l’onde sous la forme  $\cos(\omega_0 t - \ell_0 x - m_0 z)$ . Il est important de noter que les isophases sont des droites inclinées d’un angle fixe. Dans la partie suivante nous allons nous intéresser à la phase de l’onde et vérifier si les ondes se propagent en accord avec la relation de dispersion.

### 3 Relation de dispersion

La phase obtenue par transformée de Hilbert comme sur la figure II.5(b) peut être exploitée pour la mesure de  $\ell_0$  et  $m_0$ . En effet, comme on le voit sur la figure, pour une onde plane, la phase  $\phi$  évolue linéairement avec  $x$  et  $z$ , selon  $\phi = \phi_0 - \ell_0 x - m_0 z$ . Ainsi un ajustement linéaire de l’évolution de la phase permet de trouver ces deux grandeurs. Les erreurs sur ces mesures étant alors données par l’erreur quadratique moyenne entre l’ajustement et les mesures. De ces mesures on peut déduire l’angle de propagation de l’onde  $\beta_0 = \arctan(\ell_0/m_0)$ . La figure II.6 montre le résultat de la mesure de cet angle pour différentes expériences où l’on a fait varier les rapports  $\omega_0/N$  et  $f/N$  en gardant  $N$  proche de  $1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . La pulsation de l’onde étant mesurée grâce à un spectre temporel similaire à celui des figures II.2(c) et (d).

La mesure de l’angle est en accord avec la relation de dispersion (II.1) sur une large plage de valeurs de  $\omega_0/N$  et  $f/N$ . Cela montre que le générateur est non seulement apte à émettre des ondes sur tout ce domaine mais que les ondes monochromatiques générées sont bien des ondes gravito-inertielles. Nous nous sommes relativement peu intéressé à la génération d’onde dans les conditions  $f > N$ . Les quelques expériences menées dans cette gamme de paramètres montrent



**FIGURE II.7** – Gradient horizontal de densité,  $\partial_x \rho'$ , lors de la génération d'une onde gravito-inertielle à (a) [  $\omega_0/N = 1.09$ ,  $f/N = 1.93$ ,  $a = 5$  mm et  $\ell_0 = 72$  m $^{-1}$  ] et (b) à [  $\omega_0/N = 1.8$ ,  $f/N = 2$ ,  $a = 5$  mm et  $m_0 = 72$  m $^{-1}$  ]. Dans le cas (b), le générateur a été installé verticalement pour favoriser l'émission d'ondes horizontales lorsque  $\omega_0$  est voisin de  $f$ . Des lignes tiretées indiquent la direction de propagation de l'énergie.

que lorsque l'on reste dans un cas plus gravitaire qu'inertiel (figure II.7(a)), c'est-à-dire que  $\omega_0$  est plus proche de  $N$  que de  $f$ , les ondes sont semblables aux ondes présentées dans ce chapitre. Quand, on se place dans un cas plus inertiel (figure II.7(b)), les ondes sont moins bien définies. Le problème provient sûrement des conditions limites imposées par le générateur d'onde. Pour  $f$  proche de  $\omega_0$ ,  $v_y$  est du même ordre de grandeur que  $v_x$  et il y a une perte de l'efficacité du générateur, qui n'impose pas  $v_y = 0$ . Par la suite, nos expériences se situeront sur la plage  $0 < f/N < 0.45$ .

## Conclusion

Ce chapitre a montré que le générateur d'ondes internes est un outil efficace pour générer des ondes gravito-inertielles qui possèdent toutes les caractéristiques attendues sur une plage étendue des valeurs du paramètre de Coriolis  $f/N$  et de la pulsation  $\omega_0/N$ . Ces ondes peuvent notamment être facilement analysées par la transformée de Hilbert qui permet non seulement de séparer les ondes les unes des autres, par leur pulsation et leur direction de propagation, mais aussi d'accéder à leur phase et à leur amplitude. L'intérêt de ce générateur à propriétés ajustables est que l'on va maintenant pouvoir explorer le devenir des ondes lorsque l'on fait évoluer leur amplitude et leur fréquence. Par exemple, passé un certain seuil d'amplitude, nous nous attendons à ce que des effets non-linéaires entrent en jeu, comme des retournements des ondes ou encore des instabilités triadiques résonantes. Ces instabilités triadiques vont être étudiées en détail dans le prochain chapitre.



## Chapitre III

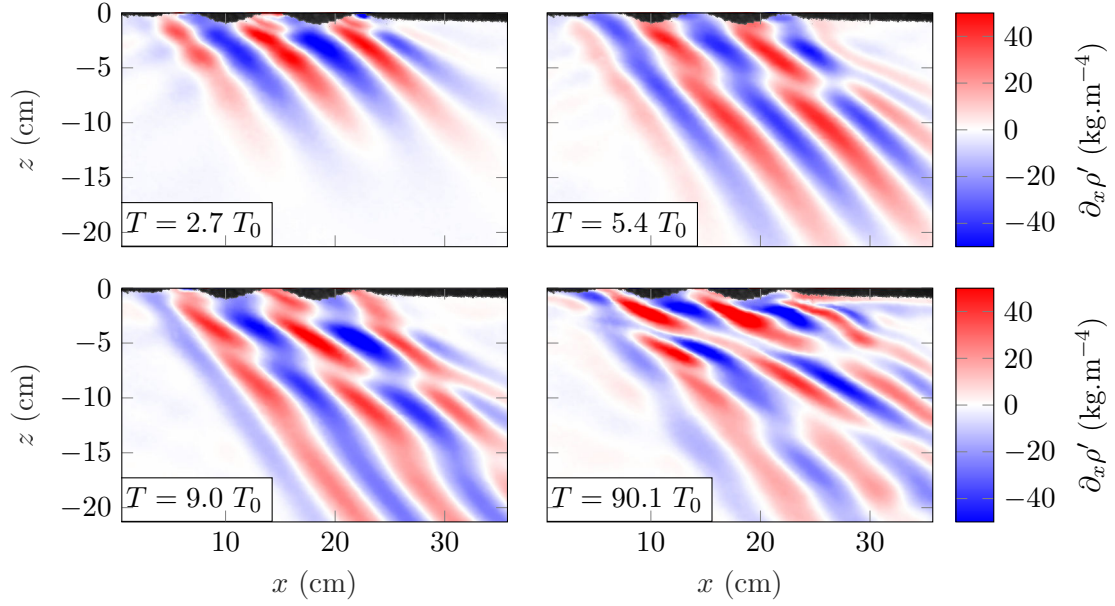
# INSTABILITÉ TRIADIQUE EN STRATIFIÉ TOURNANT

Ondes internes en mer de Chine.

## Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que le générateur d'onde interne permet d'obtenir des faisceaux d'ondes gravito-inertielles bien contrôlés. Dans certains cas, comme celui décrit sur la figure III.1, le faisceau ne reste pas rectiligne. En effet, on constate, après quelques périodes, que l'onde émise par le générateur est brouillée par des modulations à des échelles plus petites que celle de l'onde primaire. Comme nous le verrons par la suite, ce brouillage provient d'une instabilité triadique résonante (TRI) de l'onde primaire, similaire à celle décrite dans le chapitre I mais dans le cas d'un milieu stratifié et tournant. L'étude présentée dans cette partie prolonge les travaux théoriques et expérimentaux menés sur les instabilités des ondes internes et présentés dans la revue de Staquet et Sommeria (2002b) et celle de Dauxois *et al.* (2017).

Si l'on compare l'onde de la figure III.1 avec les ondes du chapitre précédent, plusieurs questions peuvent se poser. Pourquoi certaines ondes sont instables alors que d'autres ne le sont pas? Lorsqu'il y a une instabilité, existe-t-il des critères de sélection des ondes secondaires? Ces critères évoluent-ils avec la vitesse de rotation? Existe-t-il un seuil d'instabilité? Comment celui-ci évolue-t-il avec la rotation? L'instabilité semble évoluer dans le temps si l'on compare les figures III.1(c) et (d), existe-t-il alors un comportement à long terme différent du comportement à court terme? Un phénomène intéressant dans le contexte océanique est la présence d'une latitude critique (voir chapitre I) dans les observations *in situ* et numériques (MacKinnon, 2005; MacKinnon *et al.*, 2013a,b). Sachant que les ondes gravito-inertielles océaniques sont très étroites (Gostiaux et Dauxois, 2007; Lien et Gregg, 2001), est-ce que la taille finie du faisceau joue un rôle sur cette latitude critique? Peut-on retrouver au laboratoire un équivalent de cette latitude critique en changeant la vitesse de rotation du système?



**FIGURE III.1** – Gradient horizontal de densité,  $\partial_x \rho'$ , qui montre l'apparition progressive de la TRI pour une onde primaire générée à  $a = 5 \text{ mm}$ ,  $\ell_0 = 72 \text{ m}^{-1}$ ,  $\omega_0/N = 0.8$ ,  $f/N = 0.2$ .

Pour répondre à ces questions, nous allons générer des ondes avec le dispositif expérimental décrit dans le chapitre précédent. Lorsque le brouillage sera observé, il sera identifié comme étant de la TRI. Nous étendrons ensuite une théorie existante permettant de calculer le taux de croissance de cette instabilité dans le cas d'ondes planes monochromatiques, en considérant la rotation comme un paramètre qui modifie les propriétés de la TRI des ondes internes. Par la suite, nous nous attacherons à caractériser le rôle de la rotation sur l'effet de taille finie du faisceau. Cette caractérisation permettra de discuter de l'importance de la rotation sur la TRI dans l'océan. Nous verrons également comment cet effet joue sur le seuil d'instabilité. Pour compléter cette étude nous analyserons l'évolution des propriétés des ondes secondaires avec la rotation ainsi que l'accord entre la théorie et les observations expérimentales.

Les résultats présentés dans ce chapitre ont été publiés dans *Journal of Fluid Mechanics* (Maurer *et al.*, 2016).

## 1 Conditions de résonance

Dans cette première partie, nous allons détailler les conditions minimales que doivent remplir l'onde primaire et les ondes secondaires pour que la TRI ait lieu. Puis nous verrons comment la TRI se manifeste expérimentalement et si l'on peut retrouver ces conditions dans les observations.

### 1.a Première approche de la TRI

La dynamique à deux dimensions  $(x, z)$  d'un fluide incompressible dans l'approximation de Boussinesq est décrite, d'après les équations du chapitre I, par les trois équations suivantes:

$$\frac{\partial b}{\partial t} + J(b, \psi) = N^2 \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (\text{III.1})$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + J(v_y, \psi) + f \frac{\partial \psi}{\partial z} = \nu \nabla^2 v_y, \quad (\text{III.2})$$

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + J(\nabla^2 \psi, \psi) - f \frac{\partial v_y}{\partial z} = -\frac{\partial b}{\partial x} + \nu \nabla^2 \cdot \nabla^2 \psi, \quad (\text{III.3})$$

où  $b = -g\rho'/\rho_0$ ,  $\psi$  est la fonction courant dans le plan  $(x, z)$  telle que  $\mathbf{v} = (\partial_z \psi, v_y, -\partial_x \psi)$  et  $J$  est le Jacobien défini par  $J(f_1, f_2) = \partial_x f_1 \partial_z f_2 - \partial_z f_1 \partial_x f_2$ . Pour simplifier nous supposons dans ce chapitre que les quantités sont invariantes dans la direction transverse  $y$ . Cette hypothèse vient de la géométrie utilisée pour générer les ondes (voir chapitre II) et des mesures expérimentales des champs de vitesse dans un plan horizontal qui montrent l'invariance selon  $y$  (figure II.4).

Dans les trois équations précédentes, les Jacobiens se comportent comme des termes de forçage. Si l'on considère une onde qui oscille à la pulsation  $\omega_0$ , le Jacobien ne va forcer cette pulsation qu'à la condition d'osciller à la même pulsation. Celui-ci est constitué de produits de deux grandeurs. Imaginons que ces deux grandeurs oscillent comme un sinus à deux pulsations différentes  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , le Jacobien sera alors constitué d'un sinus oscillant à  $\omega_1 - \omega_2$  et un sinus oscillant à  $\omega_1 + \omega_2$ . Ainsi il y aura forçage si la condition de résonance temporelle suivante est vérifiée:

$$\omega_0 = \omega_1 \pm \omega_2. \quad (\text{III.4})$$

Nous appellerons onde primaire ou mère, l'onde 0 émise par le générateur et ondes secondaires ou filles, les ondes 1 et 2 émises par TRI. Comme l'a prouvé Hasselmann (1967), une condition nécessaire pour obtenir cette instabilité est que les fréquences des ondes secondaires, supposées positives, soient inférieures à celle de l'onde primaire. Dans le cas inverse, c'est-à-dire si  $\omega_0 = \omega_1 - \omega_2$ , la partie réelle du taux de croissance est soit nulle soit négative. Nous supposons donc que  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont plus petits que  $\omega_0$  et que l'instabilité est subharmonique.

La condition de résonance temporelle peut être vue comme une condition de conservation de l'énergie entre l'onde mère et les ondes filles. Dans le cas de la conservation de l'impulsion, l'équivalent est la condition de résonance spatiale. Un raisonnement analogue à celui que nous avons fait précédemment permet de trouver cette condition:

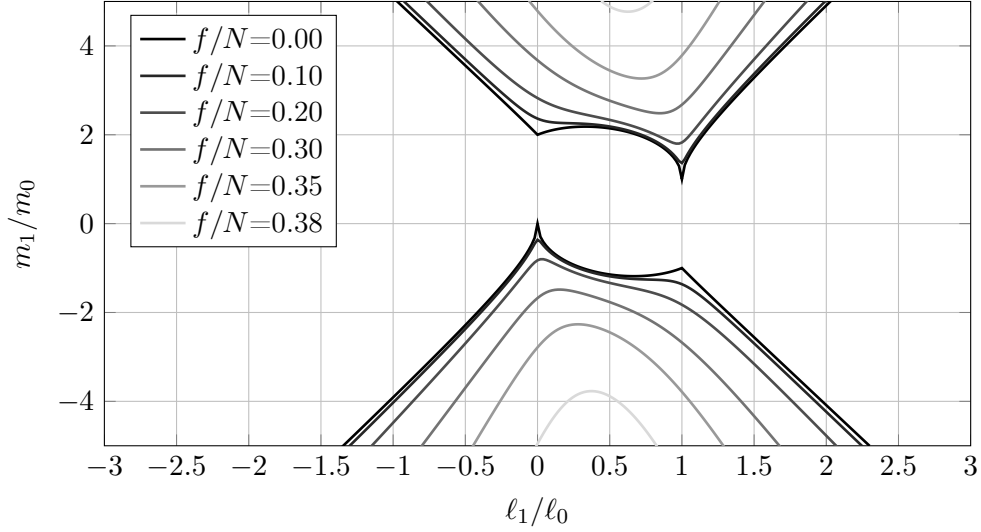
$$\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2. \quad (\text{III.5})$$

On retrouve finalement les mêmes conditions que celles associées à la TRI des ondes internes décrites dans le chapitre I.

### 1.b Influence de la rotation sur les paramètres accessibles

Ces conditions de résonance permettent de dresser une première image de l'influence de la rotation sur la TRI. En effet, si l'on suppose les pulsations  $N$  et  $f$  fixées par les conditions expérimentales, les 9 paramètres des ondes ( $m_0, m_1, m_2, \ell_0, \ell_1, \ell_2, \omega_0, \omega_1$  et  $\omega_2$ ) sont liés entre eux par



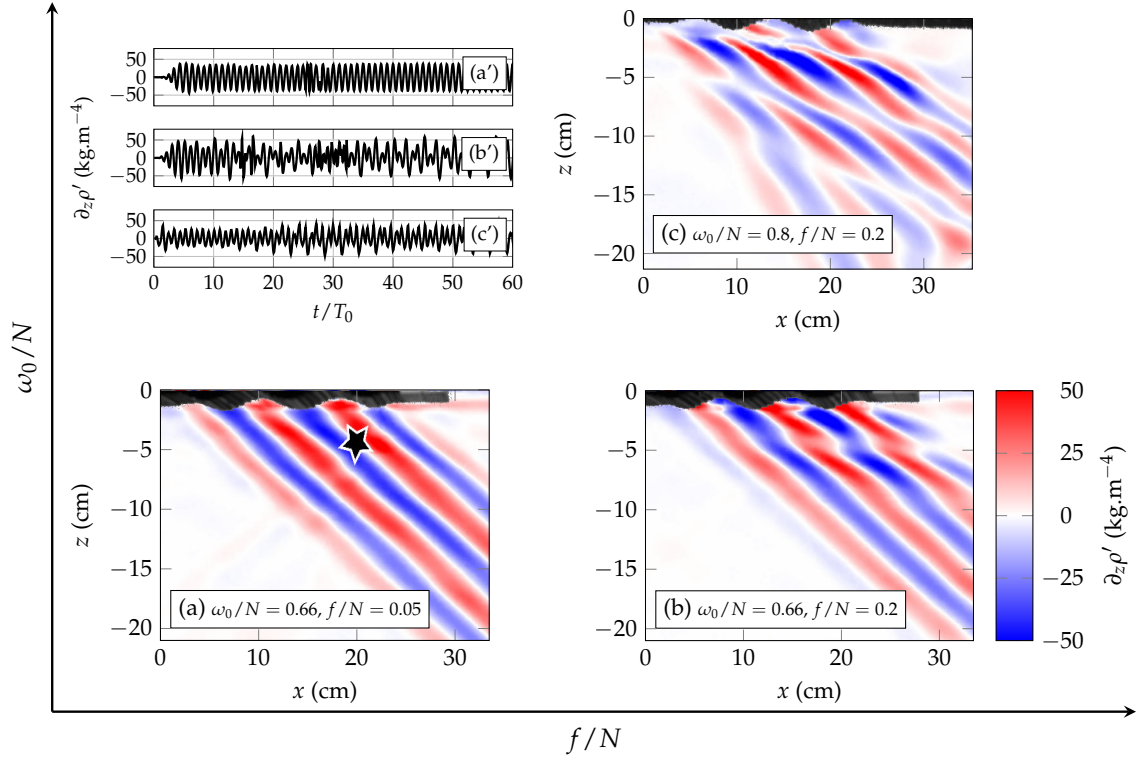


**FIGURE III.2** – Ensemble des solutions vérifiant les conditions de résonance triadique exprimées en fonction des paramètres adimensionnés de la première onde fille ( $\ell_1/\ell_0, m_1/m_0$ ) pour  $\omega_0/N = 0.8$  et  $\ell_0 = 80 \text{ m}^{-1}$ . Il n'y a pas de solution pour  $f/N > \omega_0/2N = 0.4$ .

6 équations (les 3 relations de dispersion pour chacune des ondes 0, 1 et 2, la condition de résonance spatiale vectorielle, comptant pour deux relations, et la condition de résonance temporelle). Dans nos expériences, la pulsation et le nombre d'onde horizontal de l'onde primaire sont fixés. Notre système ne possède donc plus qu'un seul degré de liberté. Autrement dit, les solutions vérifiant les conditions de résonance décrivent une ligne dans l'espace des paramètres à 7 dimensions ( $m_0, m_1, m_2, \ell_1, \ell_2, \omega_1$  et  $\omega_2$ ). La figure III.2, identique à celle de McComas et Bretherton (1977), montre une projection de ces solutions dans le plan ( $\ell_1/\ell_0, m_1/m_0$ ). On remarque que la rotation sélectionne des plus grands nombres d'ondes verticaux, c'est à dire que les ondes secondaires se propagent dans des directions de plus en plus horizontales lorsque  $f$  augmente (la vitesse de groupe étant orthogonale au vecteur d'onde). Il faut également noter l'absence de solution pour  $f > \omega_0/2$ , en effet comme chacune des ondes filles doit respecter la condition  $\omega_{1,2} > f$ , on doit avoir  $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2 > 2f$  pour avoir de la TRI.

### 1.c Mesures expérimentales

Le premier indice de l'apparition de la TRI est la déstabilisation du faisceau de l'onde primaire (voir figure III.1). On constate qu'au bout de quelques périodes, on passe d'un faisceau rectiligne à un faisceau "brouillé". La figure III.3 montre différents champs d'ondes dans leur régime stationnaire, qui sont soit stables pour le cas (a) soit instables pour les cas (b) et (c). Le relevé temporel (a') montre la monochromaticité temporelle de l'onde dans le cas (a). Par contre, dans le cas (b) on voit que, au bout d'un certain temps, ce signal est modulé, ce qui est le signe de l'apparition de nouvelles fréquences. Lorsque l'on augmente  $\omega_0/N$  (cas (c)), la TRI est délocalisée sur une bonne partie du champ d'observation, car, comme nous le verrons par la suite, on s'éloigne du seuil d'instabilité. En s'appuyant sur l'exemple de la figure III.3(c), nous allons vérifier que ce brouillage correspond bien à de la TRI en s'intéressant au spectre temporel et au spectre spatial.



**FIGURE III.3** – Gradient vertical de densité,  $\partial_z \rho'$ , à  $t = 50 T_0$  pour 3 expériences menées avec une amplitude du générateur de  $a = 5$  mm et un nombre d'onde  $\ell_0 = 72$  m $^{-1}$ . Ces images sont disposées dans un plan  $(f/N, \omega_0/N)$ , de façon à montrer l'importance relative de  $f/N$  et  $\omega_0/N$ : (a)  $(\omega_0/N, f/N) = (0.66, 0.05)$ , (b)  $(\omega_0/N, f/N) = (0.66, 0.2)$ , (c)  $(\omega_0/N, f/N) = (0.8, 0.2)$ . L'encart en haut à gauche (a'), (b') et (c') montre des relevés temporels pris dans les expériences (a), (b) et (c) en un point localisé à 5 cm sous le générateur et situé au voisinage du milieu du faisceau. Ce point est indiqué par une étoile sur (a).

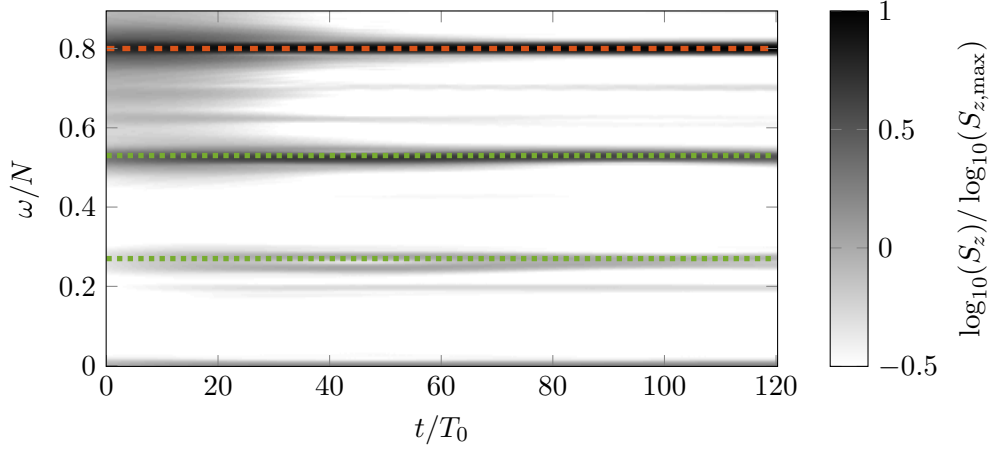
### Vérification de la résonance temporelle

Pour obtenir plus d'information sur l'émergence de la TRI, on peut calculer le diagramme temps-fréquence  $S_z(\omega, t)$  associé (Flandrin, 1999):

$$S_z(\omega, t) = \left\langle \left| \int_{-\infty}^{+\infty} du \partial_z \rho'(x, z, u) e^{i\omega u} h(t - u) \right|^2 \right\rangle, \quad (\text{III.6})$$

où  $h$  est une fenêtre de Hamming de largeur choisie. Cette technique réalise une transformée de Fourier temporelle sur une certaine fenêtre qui se déplace temporellement. Ainsi on peut suivre l'évolution du spectre en fonction du temps. La taille de cette fenêtre n'est pas anodine, une large fenêtre permettra d'obtenir une bonne résolution fréquentielle mais une pauvre résolution temporelle, à l'inverse une fenêtre étroite permettra de bien résoudre temporellement les phénomènes mais pas spectralement. Cela est une conséquence directe du principe d'incertitude.

La figure III.4 montre le diagramme temps-fréquence de l'expérience présentée dans la figure III.3(c). On constate l'apparition de deux fréquences,  $\omega_1$  et  $\omega_2$  qui semblent se renforcer au cours du temps et qui vérifient bien  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_0$ ; nous prendrons comme convention que  $\omega_2 < \omega_1$ . Cette première analyse a permis de vérifier que les fréquences secondaires sont bien en accord avec la condition de résonance temporelle. Dans l'ensemble des expériences réalisées, cela a toujours été



**FIGURE III.4** – Diagramme temps-fréquence correspondant à l’onde instable présentée dans la figure III.3(c) [ $\omega_0/N = 0.8$ ,  $f/N = 0.2$ ,  $a = 5$  mm et  $\ell_0 = 72$  m $^{-1}$ ]. Le spectre est réalisé sur le gradient de densité vertical,  $\partial_z \rho'$  et calculé sur une fenêtre glissante de largeur  $30 T_0$  de large. Les maxima de pulsation se trouvent à  $\omega_0/N = 0.8$  (ligne tiretée orange),  $\omega_1/N = 0.53$  et  $\omega_2/N = 0.27$  (lignes pointillées vertes) avec  $\omega_2 < \omega_1$ .

le cas.

### Vérification de la résonance spatiale

La condition de résonance temporelle étant vérifiée, passons maintenant à la condition de résonance spatiale. C’est ici que la transformée de Hilbert va être utile. Non seulement elle permet de filtrer et de visualiser indépendamment les différentes ondes, mais elle permet aussi d’accéder à la phase qui va conduire la mesure des vecteurs d’onde. À l’issue du filtrage on obtient donc trois champs correspondant aux trois pics en fréquence de la figure III.4. Les trois ondes associées sont représentées sur la figure III.5(a), (b) et (c) où l’on vérifie que leurs angles de propagation, et donc leurs fréquences, sont différents. On remarque également que les longueurs d’ondes sont différentes, permettant ainsi un transfert d’énergie entre différentes échelles. Sur la figure III.5, les extrémités des vecteurs d’onde  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$  sont localisées sur la courbe qui indique l’ensemble des solutions vérifiant les conditions de résonance pour le paramètre de Coriolis  $f/N = 0.2$  (courbe extraite de la figure III.2) et les vecteurs d’ondes vérifient  $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ . Les ondes secondaires vérifient donc les conditions de résonance spatiale et leur caractéristiques sont en accord avec l’ensemble des solutions accessibles pour la TRI.

Les observations réalisées ont montré que les faisceaux d’ondes peuvent être ou ne pas être instables par TRI. On a observé que le paramètre de rotation  $f$  joue un rôle sur cette instabilité. En effet, la rotation change les conditions de résonance et favorise les ondes secondaires plus horizontales. De plus, elle limite la plage de pulsation  $\omega_0$  sur laquelle cette instabilité est possible à  $2f < \omega_0 < N$ . Pour finir, elle semble favoriser les instabilités si l’on compare les figures III.4(a) et (b) où l’instabilité n’apparaît que dans le cas à haute vitesse de rotation. Dans la partie suivante, nous allons clarifier le rôle de la rotation sur l’instabilité en calculant le taux de croissance de cette instabilité dans un cas faiblement non-linéaire pour une onde plane monochromatique faiblement visqueuse.

## 2 Taux de croissance de la TRI

Cette partie s'intéresse à l'établissement des équations qui régissent la dynamique de la TRI. Pour cela, les calculs faits par Bourget *et al.* (2013) dans le cas d'un fluide uniquement stratifié sont étendus au cas d'un fluide stratifié et tournant. Nous allons décomposer la dynamique du fluide en trois contributions qui constitueront les trois ondes de l'instabilité triadique. La décomposition en trois contributions est motivée par une constatation expérimentale d'une part, mais également par le fait que les termes non-linéaires font intervenir des produits de deux grandeurs ce qui est propice à une interaction à trois ondes. Dans les calculs qui suivent, nous supposons le problème faiblement non-linéaire et faiblement visqueux et que ces deux effets ont le même ordre de grandeur. Nous obtiendrons notamment une expression du taux de croissance qui va permettre de donner un critère de sélection de la TRI.

### 2.a Théorie

Nous avons vu que la TRI fait intervenir une dynamique à trois ondes. Ainsi, chacun des champs peut s'écrire sous la forme d'une somme de trois contributions:

$$b = \sum_{j=0}^2 R_j(t) \exp[i(\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r} - \omega_j t)] + \text{c.c.}, \quad (\text{III.7})$$

$$v_y = \sum_{j=0}^2 V_j(t) \exp[i(\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r} - \omega_j t)] + \text{c.c.}, \quad (\text{III.8})$$

$$\psi = \sum_{j=0}^2 \Psi_j(t) \exp[i(\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r} - \omega_j t)] + \text{c.c.}, \quad (\text{III.9})$$

où  $\mathbf{k}_j = (\ell_j, 0, m_j)$  n'a pas de composante transverse et c.c. signifie complexe conjugué. En substituant ces solutions dans les équations (III.1), (III.2) et (III.3), on obtient que:

$$\sum_{j=0}^2 [\dot{R}_j - i\omega_j R_j - iN^2 \ell_j \Psi_j] \exp(i(\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r} - \omega_j t)) + \text{c.c.} = -J(b, \psi), \quad (\text{III.10})$$

$$\sum_{j=0}^2 [\dot{V}_j - i\omega_j V_j + \nu \kappa_j^2 V_j + i f m_j \Psi_j] \exp(i(\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r} - \omega_j t)) + \text{c.c.} = -J(v_y, \psi), \quad (\text{III.11})$$

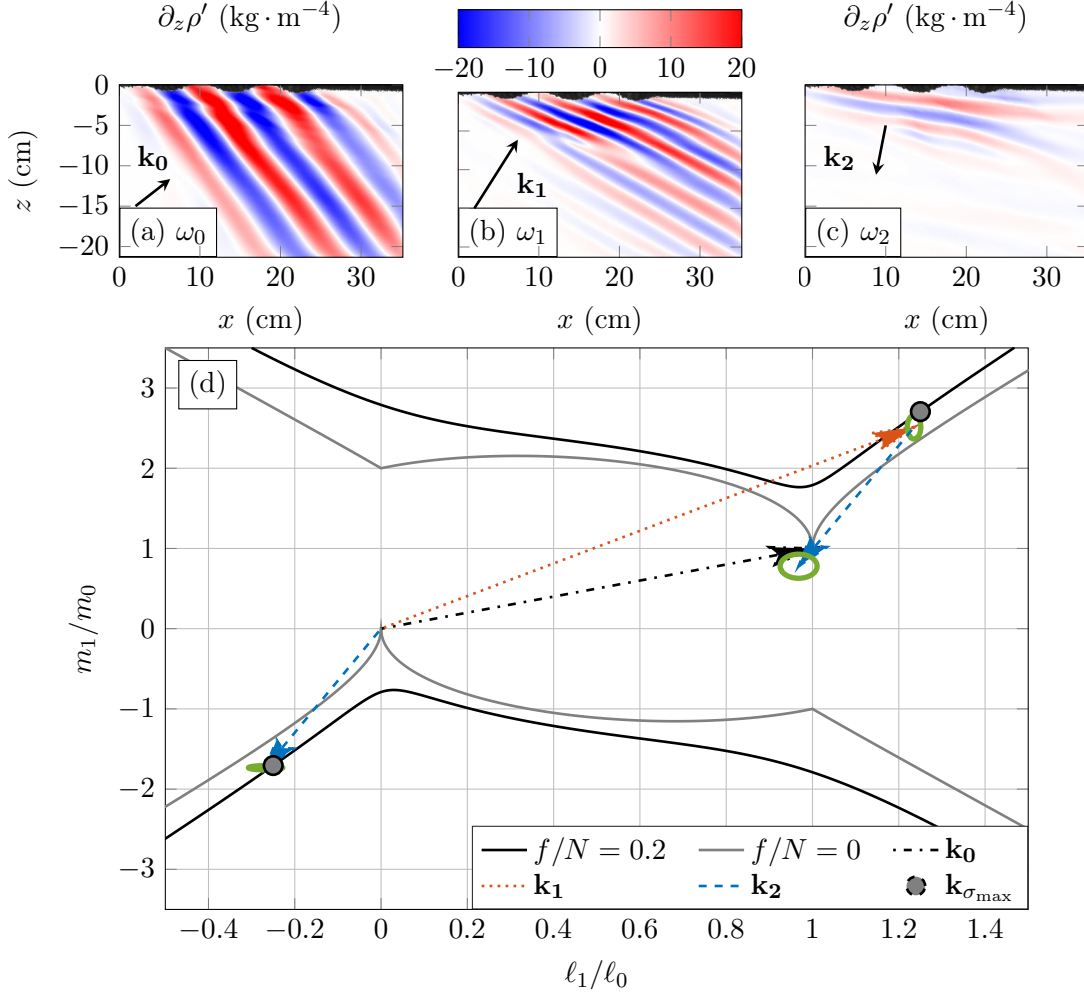
$$\sum_{j=0}^2 [-\kappa_j^2 (\dot{\Psi}_j - i\omega_j \Psi_j) + i \ell_j R_j - \nu \kappa_j^4 \Psi_j - i f m_j V_j] \exp(i(\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r} - \omega_j t)) + \text{c.c.} = -J(\nabla^2 \psi, \psi), \quad (\text{III.12})$$

où pour toute variable  $u$ ,  $\dot{u}$  est la dérivée temporelle de  $u$ .

### Conditions de résonance

Les Jacobiens des équations (III.10), (III.11) et (III.12) peuvent être écrits comme:

$$J(b, \psi) = \sum_{p=0}^2 \sum_{q \neq p}^2 [(-\ell_p m_q + m_p \ell_q) R_p \Psi_q] \exp(i((\mathbf{k}_p + \mathbf{k}_q) \cdot \mathbf{r} - (\omega_p + \omega_q)t)) - [(-\ell_p m_q + m_p \ell_q) R_p \Psi_q^*] \exp(i((\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_q) \cdot \mathbf{r} - (\omega_p - \omega_q)t)) + \text{c.c.}, \quad (\text{III.13})$$



**FIGURE III.5** – Filtrage par transformée de Hilbert de l'onde instable présentée dans la figure III.3(c) [ $\omega_0/N = 0.8$ ,  $f/N = 0.2$ ,  $a = 5$  mm et  $\ell_0 = 72$  m $^{-1}$ ]. (a) Filtrage temporel à  $\omega_0/N = 0.8$  et spatial pour garder le vecteur d'onde tel que  $\ell_0 > 0$  et  $m_0 > 0$ . (b) Filtrage temporel à  $\omega_1/N = 0.53$  et spatial pour garder le vecteur d'onde tel que  $\ell_1 > 0$  et  $m_1 > 0$ . (c) Filtrage temporel à  $\omega_2/N = 0.27$  et spatial pour garder le vecteur d'onde  $\ell_2 < 0$  et  $m_2 < 0$ . (d) Mesures expérimentales des vecteurs d'onde correspondants, par la méthode décrite précédemment d'ajustement de la phase. Les ellipses représentent les erreurs expérimentales données par l'erreur quadratique moyenne. La ligne noire (respectivement grise) représente l'ensemble des solutions vérifiant les conditions de résonance (voir figure III.2) pour  $f/N = 0.2$  (respectivement  $f/N = 0$ ). Les positions correspondante au taux de croissance maximum sont indiquées par des cercles gris.

$$\begin{aligned}
 J(v_y, \psi) = & \sum_{p=0}^2 \sum_{q \neq p} [(-\ell_p m_q + m_p \ell_q) V_p \Psi_q] \exp(i((\mathbf{k}_p + \mathbf{k}_q) \cdot \mathbf{r} - (\omega_p + \omega_q)t)) \\
 & - [(-\ell_p m_q + m_p \ell_q) V_p \Psi_q^*] \exp(i((\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_q) \cdot \mathbf{r} - (\omega_p - \omega_q)t)) + \text{c.c.},
 \end{aligned} \tag{III.14}$$

$$\begin{aligned}
 J(\nabla^2 \psi, \psi) = & \sum_{p=0}^2 \sum_{q \neq p} [(\ell_p m_q - m_p \ell_q) \kappa_p^2 \Psi_p \Psi_q] \exp(i((\mathbf{k}_p + \mathbf{k}_q) \cdot \mathbf{r} - (\omega_p + \omega_q)t)) \\
 & - [(\ell_p m_q - m_p \ell_q) \kappa_p^2 \Psi_p \Psi_p^*] \exp(i((\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_q) \cdot \mathbf{r} - (\omega_p - \omega_q)t)) + \text{c.c.}
 \end{aligned} \tag{III.15}$$

En moyennant les équations (III.10), (III.11) et (III.12) sur la période d'une onde, on obtient l'évolution d'une onde particulière  $(\mathbf{k}_r, \omega_r)$  associée à la fonction courant  $\Psi_r$ , où  $r = 0, 1$  ou  $2$ . Les termes résonants de la partie droite de l'équation équilibrent ceux de gauche seulement si les ondes remplissent deux conditions. Une condition de résonance spatiale:

$$\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \quad (\text{III.16})$$

et une condition de résonance temporelle:

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2. \quad (\text{III.17})$$

### Relations à l'ordre zéro

En négligeant la viscosité, la dynamique d'un fluide dans le régime linéaire, donnée par (III.10) et (III.11), permet d'écrire, à l'ordre zéro ( $\dot{R}_j \ll \omega_j R_j$  et  $\dot{V}_j \ll \omega_j V_j$ ), les équations de polarisation suivantes:

$$R_j = -\frac{N^2 \ell_j}{\omega_j} \Psi_j, \quad (\text{III.18})$$

$$V_j = \frac{f m_j}{\omega_j} \Psi_j, \quad (\text{III.19})$$

où  $j = (0, 1, 2)$ . À l'ordre zéro,  $\dot{\Psi}_j \ll \omega_j \Psi_j$  et l'équation (III.12) permet de retrouver la relation de dispersion:

$$\omega_j^2 = N^2 \frac{\ell_j^2}{\kappa_j^2} + f^2 \frac{m_j^2}{\kappa_j^2}. \quad (\text{III.20})$$

En ne gardant que les termes résonants et en utilisant les équations de polarisation (III.18) et (III.19), les Jacobiens peuvent s'écrire comme:

$$\begin{aligned} J(b, \psi) = & (\ell_1 m_2 - m_1 \ell_2) N^2 \left( \frac{\ell_1}{\omega_1} - \frac{\ell_2}{\omega_2} \right) \Psi_1 \Psi_2 \exp(i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega_0 t)) \\ & - (\ell_0 m_2 - m_0 \ell_2) N^2 \left( \frac{\ell_0}{\omega_0} - \frac{\ell_2}{\omega_2} \right) \Psi_0 \Psi_2^* \exp(i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega_1 t)) \\ & - (\ell_0 m_1 - m_0 \ell_1) N^2 \left( \frac{\ell_0}{\omega_0} - \frac{\ell_1}{\omega_1} \right) \Psi_0 \Psi_1^* \exp(i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega_2 t)) + \text{NRT}, \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

$$\begin{aligned} J(v_y, \psi) = & -(\ell_1 m_2 - m_1 \ell_2) f \left( \frac{m_1}{\omega_1} - \frac{m_2}{\omega_2} \right) \Psi_1 \Psi_2 \exp(i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega_0 t)) \\ & + (\ell_0 m_2 - m_0 \ell_2) f \left( \frac{m_0}{\omega_0} - \frac{m_2}{\omega_2} \right) \Psi_0 \Psi_2^* \exp(i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega_1 t)) \\ & + (\ell_0 m_1 - m_0 \ell_1) f \left( \frac{m_0}{\omega_0} - \frac{m_1}{\omega_1} \right) \Psi_0 \Psi_1^* \exp(i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega_2 t)) + \text{NRT}, \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

$$\begin{aligned} J(\nabla^2 \psi, \psi) = & (\ell_1 m_2 - m_1 \ell_2) (\kappa_1^2 - \kappa_2^2) \Psi_1 \Psi_2 \exp(i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega_0 t)) \\ & - (\ell_0 m_2 - m_0 \ell_2) (\kappa_0^2 - \kappa_2^2) \Psi_0 \Psi_2^* \exp(i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega_1 t)) \\ & - (\ell_0 m_1 - m_0 \ell_1) (\kappa_0^2 - \kappa_1^2) \Psi_0 \Psi_1^* \exp(i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega_2 t)) + \text{NRT}, \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

où NRT signifie termes non-résonants, qui n'interviennent pas dans le problème car leur contribution moyenne est nulle.

### Étude au premier ordre: faible variation d'amplitude

Dans la suite, nous ferons l'hypothèse de séparation d'échelles temporelles en supposant que l'amplitude  $\Psi_j$  varie peu sur la période d'une onde. Ainsi on peut négliger  $\dot{\Psi}_j$  devant  $\omega_j \Psi_j$ . En utilisant cette hypothèse dans la dérivée des équations (III.18) et (III.19), on obtient:

$$\dot{R}_j = -\frac{N^2 \ell_j}{\omega_j} \dot{\Psi}_j, \quad (\text{III.24})$$

$$\dot{V}_j = \frac{f m_j}{\omega_j} \dot{\Psi}_j. \quad (\text{III.25})$$

En substituant ces équations dans (III.11), il vient:

$$V_0 = \frac{-\gamma_0 f \xi_0 \Psi_1 \Psi_2 + i f m_0 \Psi_0 + f \frac{m_0}{\omega_0} \dot{\Psi}_0}{i \omega_0 - \nu \kappa_0^2}, \quad (\text{III.26})$$

$$V_1 = \frac{-\gamma_1 f \xi_1 \Psi_0 \Psi_2^* + i f m_1 \Psi_1 + f \frac{m_1}{\omega_1} \dot{\Psi}_1}{i \omega_1 - \nu \kappa_1^2}, \quad (\text{III.27})$$

$$V_2 = \frac{-\gamma_2 f \xi_2 \Psi_0 \Psi_1^* + i f m_2 \Psi_2 + f \frac{m_2}{\omega_2} \dot{\Psi}_2}{i \omega_2 - \nu \kappa_2^2}, \quad (\text{III.28})$$

où  $\gamma_0 = 1$ ,  $\gamma_{1,2} = -1$  et

$$\xi_r = (\ell_p m_q - m_p \ell_q) \left( \frac{m_p}{\omega_p} - \frac{m_q}{\omega_q} \right), \quad (\text{III.29})$$

avec  $(p, q, r) = (0, 1, 2)$  ou toute autre permutation circulaire. On obtient alors pour (III.12):

$$R_0 = -\frac{i}{\ell_0} [\kappa_0^2 (\dot{\Psi}_0 - i \omega_0 \Psi_0) + \nu \kappa_0^4 \Psi_0 - \gamma_0 \alpha_0 \Psi_1 \Psi_2 + i f m_0 V_0], \quad (\text{III.30})$$

$$R_1 = -\frac{i}{\ell_1} [\kappa_1^2 (\dot{\Psi}_1 - i \omega_1 \Psi_1) + \nu \kappa_1^4 \Psi_1 - \gamma_1 \alpha_1 \Psi_0 \Psi_2^* + i f m_1 V_1], \quad (\text{III.31})$$

$$R_2 = -\frac{i}{\ell_2} [\kappa_2^2 (\dot{\Psi}_2 - i \omega_2 \Psi_2) + \nu \kappa_2^4 \Psi_2 - \gamma_2 \alpha_2 \Psi_0 \Psi_1^* + i f m_2 V_2], \quad (\text{III.32})$$

où

$$\alpha_r = (\ell_p m_q - m_p \ell_q) (\kappa_p^2 - \kappa_q^2). \quad (\text{III.33})$$

Ainsi, (III.10) donne:

$$\frac{N^2 \ell_0}{\omega_0} \dot{\Psi}_0 + i \omega_0 R_0 + i N^2 \ell_0 \Psi_0 = \gamma_0 \delta_0 N^2 \Psi_1 \Psi_2, \quad (\text{III.34})$$

où

$$\delta_r = (\ell_p m_q - m_p \ell_q) \left( \frac{\ell_p}{\omega_p} - \frac{\ell_q}{\omega_q} \right). \quad (\text{III.35})$$

L'équation (III.34) peut alors être développée au premier ordre en  $\dot{\Psi}_0$ ,  $\nu$  et  $\Psi_1 \Psi_2$ . Ce développement signifie que la viscosité et les termes non-linéaires ont des effets d'amplitudes comparables sur l'évolution dans le temps de  $\Psi_0$ . Ainsi:

$$\dot{\Psi}_0 = \frac{\gamma_0}{2 \kappa_0^2} \left( \alpha_0 + \frac{\delta_0 N^2 \ell_0}{\omega_0} + \frac{f^2 m_0 \xi_0}{\omega_0} \right) \Psi_1 \Psi_2 - \frac{1}{2} \nu \left( \kappa_0^2 + \frac{f^2 m_0^2}{\omega_0^2} \right) \Psi_0. \quad (\text{III.36})$$

L'évolution de  $\Psi_0$  est contrôlée par deux termes. Le premier est un terme d'interaction entre deux ondes résonantes. Le deuxième est un terme de viscosité renforcé par la rotation. En effet, la rotation transforme le mouvement d'aller-retour bi-dimensionnel associé aux ondes purement gravitaires en un mouvement tri-dimensionnel qui est une ellipse penchée, ce qui augmente le parcours d'une particule fluide pendant une période et augmente ainsi l'atténuation visqueuse.

En généralisant cette procédure à l'onde 1 et à l'onde 2, on obtient:

$$\dot{\Psi}_0 = I_0 \Psi_1 \Psi_2 - \frac{1}{2} \nu \kappa_0^2 \left( 1 + \frac{f^2 m_0^2}{\kappa_0^2 \omega_0^2} \right) \Psi_0, \quad (\text{III.37})$$

$$\dot{\Psi}_1 = I_1 \Psi_0 \Psi_2^* - \frac{1}{2} \nu \kappa_1^2 \left( 1 + \frac{f^2 m_1^2}{\kappa_1^2 \omega_1^2} \right) \Psi_1, \quad (\text{III.38})$$

$$\dot{\Psi}_2 = I_2 \Psi_0 \Psi_1^* - \frac{1}{2} \nu \kappa_2^2 \left( 1 + \frac{f^2 m_2^2}{\kappa_2^2 \omega_2^2} \right) \Psi_2, \quad (\text{III.39})$$

où  $I_r$  est

$$I_r = \frac{\gamma_r}{2\kappa_r^2} \left( \alpha_r + \frac{\delta_r N^2 \ell_r}{\omega_r} + \frac{f^2 m_r \xi_r}{\omega_r} \right) \quad (\text{III.40})$$

$$= \gamma_r \frac{\ell_p m_q - m_p \ell_q}{2\omega_r \kappa_r^2} \left[ \omega_r (\kappa_p^2 - \kappa_q^2) + \ell_r N^2 \left( \frac{\ell_p}{\omega_p} - \frac{\ell_q}{\omega_q} \right) + m_r f^2 \left( \frac{m_p}{\omega_p} - \frac{m_q}{\omega_q} \right) \right]. \quad (\text{III.41})$$

$I_r$  est le coefficient d'interaction entre une onde primaire et deux ondes secondaires. Il provient des termes non-linéaires de l'équation de Navier Stokes et de l'équation d'incompressibilité. Dans la relation de dispersion (III.20) et dans le coefficient d'interaction (III.41), le produit  $N\ell$  et le produit  $fm$  apparaissent, cela souligne le rôle symétrique joué par la stratification et le vecteur d'onde horizontal d'un côté et la rotation et le vecteur d'onde vertical d'un autre côté.

## Taux de croissance

Dans les mesures expérimentales, nous avons observé que la rotation possède un effet sur le développement de l'instabilité. Pour comprendre cet effet, nous allons calculer le taux de croissance de cette instabilité, grâce aux équations (III.38) et (III.39), et en supposant que l'amplitude de l'onde primaire est constante, ce qui est vrai tant que l'instabilité n'est pas encore développée. En insérant (III.38) dans (III.39), on obtient:

$$\begin{aligned} \ddot{\Psi}_1 + \frac{1}{2} \nu \left( \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \frac{f^2 m_1^2}{\omega_1^2} + \frac{f^2 m_2^2}{\omega_2^2} \right) \dot{\Psi}_1 + \frac{1}{4} \nu^2 \left( \kappa_1^2 + \frac{f^2 m_1^2}{\omega_1^2} \right) \left( \kappa_2^2 + \frac{f^2 m_2^2}{\omega_2^2} \right) \Psi_1 \\ - 4I_1 I_2 |\Psi_0|^2 \Psi_1 = 0, \end{aligned} \quad (\text{III.42})$$

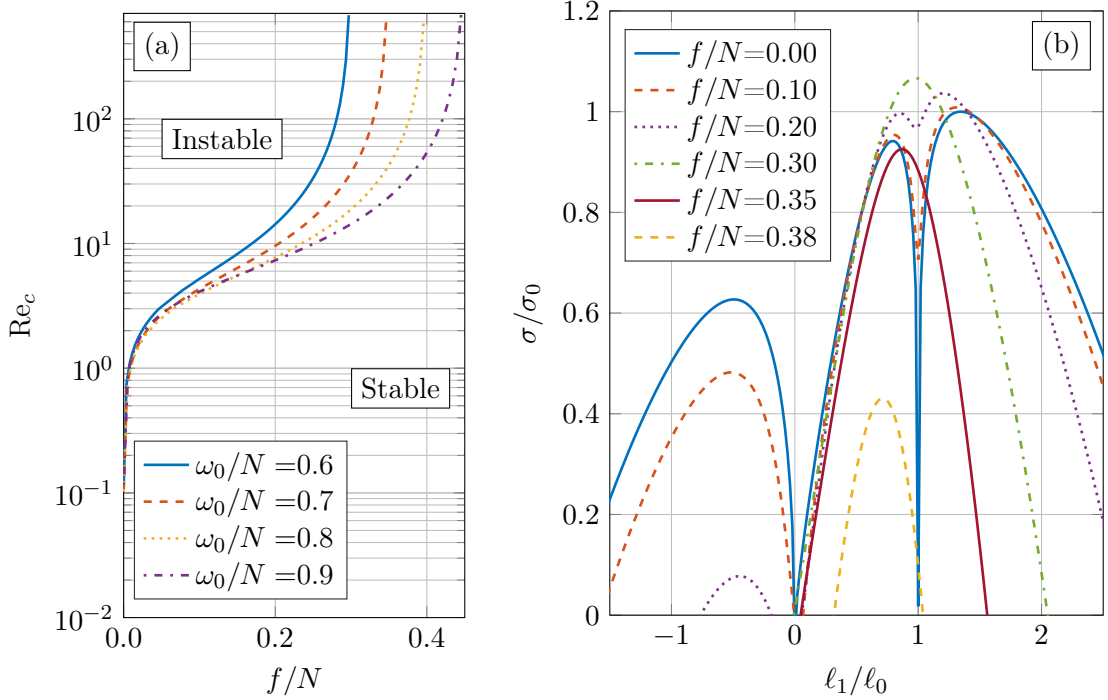
Les solutions de cette équation sont données par:

$$\Psi_{1,2}(t) = A_{1,2} \exp(\sigma_+ t) + B_{1,2} \exp(\sigma_- t), \quad (\text{III.43})$$

où le taux de croissance  $\sigma_+$  est:

$$\begin{aligned} \sigma_+ = -\frac{1}{4} \nu \left( \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \frac{f^2 m_1^2}{\omega_1^2} + \frac{f^2 m_2^2}{\omega_2^2} \right) \\ + \sqrt{\frac{1}{16} \nu^2 \left( \kappa_1^2 - \kappa_2^2 + \frac{f^2 m_1^2}{\omega_1^2} - \frac{f^2 m_2^2}{\omega_2^2} \right)^2 + I_1 I_2 |\Psi_0|^2}. \end{aligned} \quad (\text{III.44})$$





**FIGURE III.6** – (a) Evolution du seuil théorique de TRI dans le cas d’une onde gravito-inertielle plane infinie de vecteur d’onde horizontal  $\ell_0 = 80 \text{ m}^{-1}$ . Ce seuil est représenté par le nombre de Reynolds critique  $Re_c = 2\pi\Psi_{0,c}/\nu$  qui est tracé en fonction de  $f/N$  à  $\omega_0/N$  constant. (b) Taux de croissance à différentes valeurs du paramètre de Coriolis  $f/N$ , renormalisé par le taux de croissance maximum à  $f/N = 0$  ( $\sigma_0 = 0.11 \text{ s}^{-1}$ ) en fonction du vecteur d’onde horizontal adimensionné  $l_1/l_0$  d’une des deux ondes secondaires. Pour ce graphe, l’onde primaire a des paramètres proches des paramètres expérimentaux [ $\ell_0 = 80 \text{ m}^{-1}$ ,  $\omega_0/N = 0.8$ ,  $Re = 188$ ].

Cette expression est en accord avec celle de Bourget *et al.* (2013) dans la limite  $f = 0$  et avec celle de Bordes *et al.* (2012) dans la limite  $N = 0$ . Compte-tenu des différents ordres de grandeur, cette expression peut être approchée sous la forme:

$$\sigma_+ \simeq -\frac{1}{4}\nu \left( \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \frac{f^2 m_1^2}{\omega_1^2} + \frac{f^2 m_2^2}{\omega_2^2} \right) + \sqrt{I_1 I_2} |\Psi_0| + \mathcal{O}(\nu^2 \kappa_{1,2}^4). \quad (\text{III.45})$$

La solution  $\sigma_-$  n’a pas d’intérêt pour cette étude car sa valeur est négative et ne permet donc pas la croissance de l’instabilité.

## 2.b Seuil d’instabilité

Le faisceau d’onde primaire est alors instable s’il existe une combinaison  $(\ell_1, m_1, \omega_1, \ell_2, m_2, \omega_2)$  qui respecte les conditions de résonance et les relations de dispersion, et telle que le taux de croissance  $\sigma = \sigma_+$  est positif. Le seuil théorique d’instabilité en amplitude est défini comme la valeur minimale  $\Psi_{0,c}$  telle que la valeur maximale de  $\sigma$  est nulle. On peut remarquer que ce seuil dépend de la fréquence de l’onde primaire mais en aucun cas de sa longueur d’onde. En effet, si  $\mathbf{k}_0$ ,  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$  sont tous multipliés par le même coefficient  $K$ , le taux de croissance (III.45) est multiplié par  $K^2$ , ce qui ne change rien à la valeur seuil. Ainsi des études en laboratoire sont particulièrement pertinentes pour étudier des phénomènes à grande échelle. La figure III.6(a), montre la valeur de l’amplitude seuil, définie par le nombre de Reynolds critique,  $Re_c = 2\pi\Psi_{0,c}/\nu$ , en fonction de  $f/N$ ,

pour plusieurs valeurs de  $\omega_0/N$ . Comme il a été souligné par Bourget *et al.* (2014), si  $f = 0$ , il n’y a pas de seuil d’instabilité ( $\text{Re}_c = 0$ ), c’est-à-dire que toute onde plane monochromatique est nécessairement instable par TRI. Cependant lorsque l’on ajoute de la rotation, celle-ci introduit un seuil d’amplitude fini pour la TRI. Cela reflète le fait que lorsque l’amplitude de l’onde primaire diminue, les fréquences des ondes secondaires tendent vers zéro pour l’une et  $\omega_0$  pour l’autre. Lorsque l’on ajoute de la rotation, l’onde subharmonique de fréquence nulle ne peut se propager, car  $f < \omega < N$ , ce qui se traduit par l’apparition d’un seuil en amplitude qui croît avec  $f/N$ . On peut également constater que ce seuil tend vers l’infini lorsque  $f$  se rapproche de  $\omega_0/2$ . En effet, pour que  $\omega_{1,2} > f$  et que les conditions de résonance soient vérifiées,  $f$  doit être plus petit que  $\omega_0/2$ .

## 2.c Critère de sélection

La figure III.6(b) montre le taux de croissance (III.45) associé à une onde primaire particulière en fonction de  $\ell_1/\ell_0$  pour l’ensemble des solutions vérifiant les conditions de résonance. Pour chaque courbe correspondant à une valeur de  $f/N$  donnée, le taux de croissance atteint un maximum. En dehors de la région présentée sur la figure, le taux de croissance décroît de façon monotone vers des valeurs négatives. Dans le modèle, pour les basses valeurs de  $f/N$ , la rotation n’a que peu d’impact sur le taux de croissance maximal. Pour les plus grandes valeurs de  $f/N$ , ce taux de croissance décroît fortement lorsque  $f$  augmente. C’est une caractéristique générale, liée à la divergence du seuil lorsque  $f$  tend vers  $\omega_0/2$  (figure III.6(a)).

On peut calculer quels sont les vecteurs d’ondes  $\mathbf{k}_{\sigma_{\max}}$  qui correspondent au taux de croissance maximum pour l’expérience de la figure III.3(c). Les extrémités de ces vecteurs sont représentées par des cercles gris dans la figure III.5(d). Les vecteurs d’ondes mesurés sont en accord, dans la limite des erreurs expérimentales, avec cette prédiction théorique.

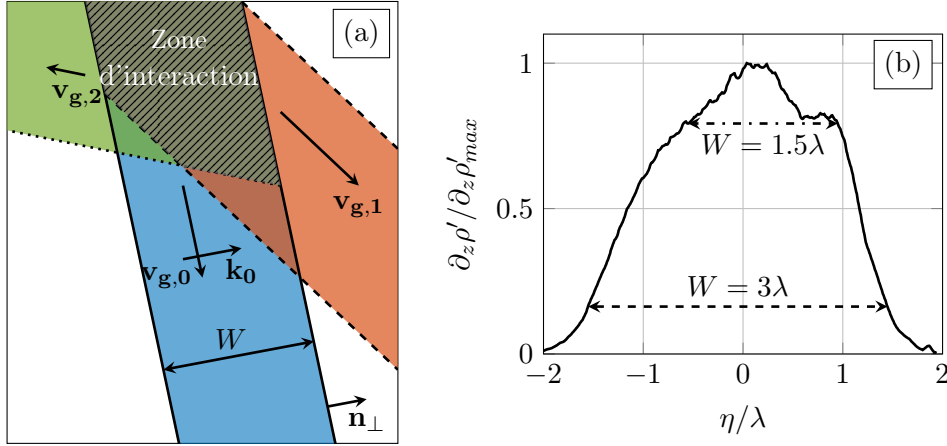
## 3 Effet de taille finie

Dans le développement théorique précédent, nous avons étudié les propriétés de la TRI dans le cas d’une onde plane monochromatique. En faisant cela, nous avons négligé une propriété importante du faisceau expérimental, sa largeur  $W$ . Dans cette partie, nous allons tout d’abord montrer l’importance de ce paramètre, puis nous intégrerons ce paramètre au taux de croissance calculé précédemment. Pour finir, nous discuterons du seuil d’instabilité et nous le comparerons à des mesures expérimentales.

### 3.a Importance de l’effet de taille finie

Dans le cas des ondes planes infinies, nous avons montré que le seuil d’instabilité augmentait continuellement avec le paramètre de Coriolis  $f/N$ . D’un point de vue océanique, cela signifie que les ondes gravito-inertielles à l’équateur seraient plus sujettes à la TRI que des ondes à de plus hautes latitudes, car la pulsation de Coriolis dépend de la latitude  $f = 2\Omega_{\text{Earth}} \sin \eta$  avec  $\eta$  la latitude. Mais cela ne correspond pas aux observations océaniques existantes, que ce soit dans le cas de simulations numériques (MacKinnon, 2005; MacKinnon *et al.*, 2013b) ou bien d’études *in situ* (MacKinnon *et al.*, 2013a) qui mettent en lumière l’existence d’une latitude critique à  $f = \omega_0/2$  où la TRI est fortement renforcée.

De plus, les expériences (a) et (b) présentées dans la figure III.3 montrent que la TRI apparaît seulement lorsque la rotation est suffisamment forte, tous les autres paramètres étant gardés identiques. Les prédictions faites dans la partie précédente ne sont pas à même d’expliquer ce comportement et montrent même que la rotation semble empêcher l’apparition de la TRI. La différence majeure entre l’expérience et la théorie est dans la forme des faisceaux considérés. Dans la



**FIGURE III.7** – (a) Schéma de l'interaction résonante triadique, soulignant l'existence d'une zone d'interaction de largeur  $W$  correspondant à la largeur du faisceau de l'onde mère. (b) Profil transverse typique de l'amplitude d'une onde en fonction de la distance transverse  $\eta$  normalisée par la longueur d'onde  $\lambda$ , extrait de la transformée de Hilbert de l'onde de la figure III.3(a).

théorie, ils sont infiniment larges, alors que dans l'expérience, ils ont une largeur finie. L'effet de taille finie pour des ondes purement gravitaires ( $f = 0$ ) a été étudié théoriquement par Karimi et Akylas (2014). Des expériences sur ce phénomène ont aussi été menées par Bourget *et al.* (2014), qui a proposé un modèle simple pour prendre en compte cet effet de largeur finie du faisceau. La théorie de Karimi et Akylas (2014) et le modèle de Bourget *et al.* (2014) sont basés sur la même idée: l'interaction triadique doit être suffisamment forte pendant le temps limité où les perturbations subharmoniques se superposent à l'onde primaire. Le processus est schématisé dans la figure III.7(a), où l'on voit les ondes secondaires s'éloigner de la région d'interaction de largeur  $W$  avec une vitesse égale à la projection de leur vitesse de groupe sur la direction  $\mathbf{n}_\perp = \mathbf{k}_0/\kappa_0$ , perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde primaire.

### 3.b Modèle

Dans l'approche de Bourget *et al.* (2014), l'évolution de l'amplitude des ondes secondaires est dictée par la vitesse à laquelle ces ondes quittent la région d'interaction qui est  $|\mathbf{v}_{g,i} \cdot \mathbf{n}_\perp|$ . Par la suite, nous appellerons cette vitesse le *taux d'advection*. Ce taux peut être calculé comme le rapport de la vitesse de sortie des ondes divisé par la largeur  $W$  du faisceau d'onde primaire. Les équations d'amplitude (III.38) et (III.39) des ondes secondaires deviennent alors:

$$\dot{\Psi}_1 = I_1 \Psi_0 \Psi_2^* - \frac{1}{2} \left[ \nu \kappa_1^2 \left( 1 + \frac{f^2 m_1^2}{\kappa_1^2 \omega_1^2} \right) + \frac{|\mathbf{v}_{g,1} \cdot \mathbf{n}_\perp|}{W} \right] \Psi_1, \quad (\text{III.46})$$

$$\dot{\Psi}_2 = I_2 \Psi_0 \Psi_1^* - \frac{1}{2} \left[ \nu \kappa_2^2 \left( 1 + \frac{f^2 m_2^2}{\kappa_2^2 \omega_2^2} \right) + \frac{|\mathbf{v}_{g,2} \cdot \mathbf{n}_\perp|}{W} \right] \Psi_2. \quad (\text{III.47})$$

L'existence de la rotation change le temps que passent les ondes secondaires dans le faisceau de deux façons différentes. D'une part, lorsque  $f$  augmente, la vitesse de groupe varie, et devient même nulle lorsque  $f = \omega$ . D'autre part, la direction de propagation des ondes change, puisqu'elle dépend directement de la valeur de  $f$ ; si les deux ondes étaient colinéaires alors l'onde secondaire ne quitterait jamais l'onde primaire. À l'inverse, lorsque la vitesse de groupe des ondes secondaires  $\mathbf{v}_{g,(1,2)}$  n'est pas parallèle à  $\mathbf{v}_{g,0}$ , ou autrement dit lorsque  $\mathbf{v}_{g,(1,2)}$  n'est pas perpendiculaire à  $\mathbf{k}_0$ , les ondes secondaires vont quitter le faisceau primaire. Les équations (III.46) et (III.47), permettent

de calculer un taux de croissance modifié,  $\Sigma$ , pour une onde primaire de largeur finie, de la même façon que cela a été fait pour  $\sigma$  dans le cas des ondes planes infinies:

$$\begin{aligned} \Sigma = & -\frac{1}{4} \left( \nu \left( \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \frac{f^2 m_1^2}{\omega_1^2} + \frac{f^2 m_2^2}{\omega_2^2} \right) + \frac{|\mathbf{v}_{g,1} \cdot \mathbf{n}_\perp|}{W} + \frac{|\mathbf{v}_{g,2} \cdot \mathbf{n}_\perp|}{W} \right) \\ & + \sqrt{\frac{1}{16} \left( \nu \left( \kappa_1^2 - \kappa_2^2 + \frac{f^2 m_1^2}{\omega_1^2} - \frac{f^2 m_2^2}{\omega_2^2} \right) + \frac{|\mathbf{v}_{g,1} \cdot \mathbf{n}_\perp|}{W} - \frac{|\mathbf{v}_{g,2} \cdot \mathbf{n}_\perp|}{W} \right)^2 + I_1 I_2 |\Psi_0|^2} \end{aligned} \quad (\text{III.48})$$

En prenant en compte les valeurs expérimentales typiques,  $I_1 I_2 |\Psi_0|^2$  est le terme dominant dans la racine de cette équation, ainsi on peut faire l'approximation:

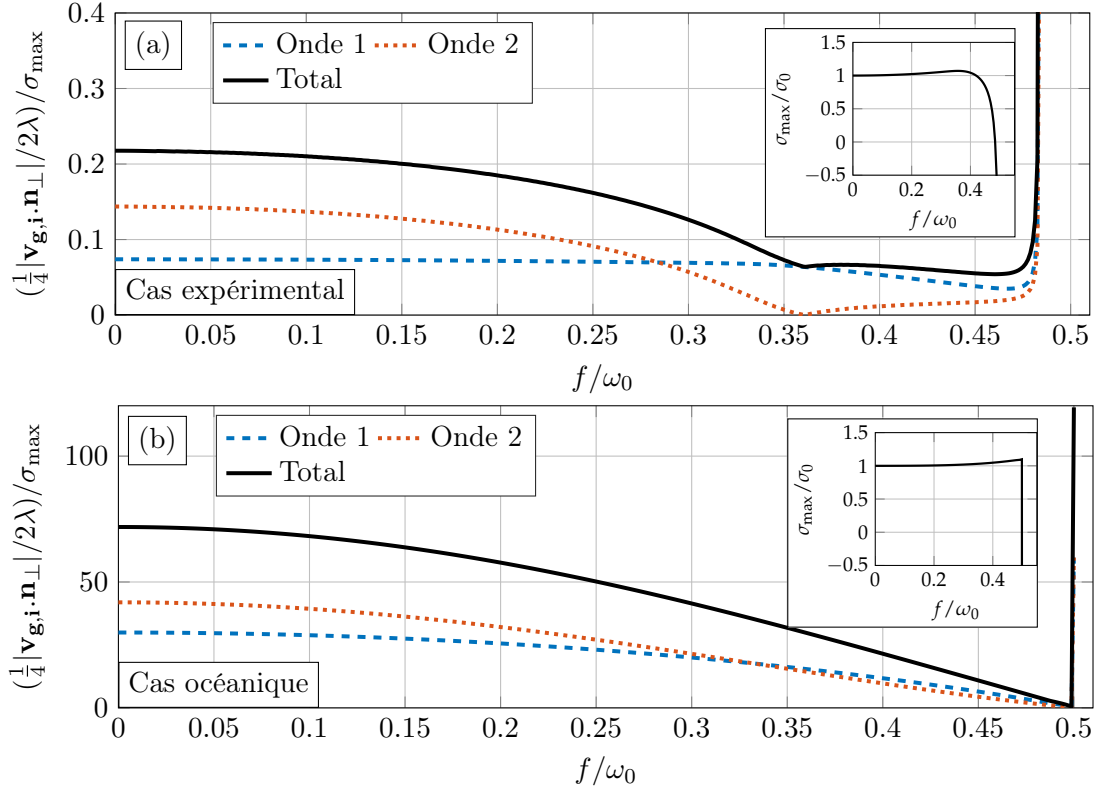
$$\Sigma = \sigma - \frac{1}{4W} (|\mathbf{v}_{g,1} \cdot \mathbf{n}_\perp| + |\mathbf{v}_{g,2} \cdot \mathbf{n}_\perp|) + \mathcal{O}(\nu^2 \kappa_{1,2}^4) + \mathcal{O} \left( \frac{|\mathbf{v}_{g,1,2} \cdot \mathbf{n}_\perp|^2}{W} \right). \quad (\text{III.49})$$

Un faisceau va donc être considéré comme large quand sa largeur  $W$  est grande devant une longueur d'onde. Dans ce cas, on retrouve bien  $\Sigma = \sigma$ . Pour se donner une idée de la largeur typique des faisceaux dans nos expériences, la figure III.7(b) montre le profil typique d'un faisceau mesuré perpendiculairement à la direction de propagation. La largeur effective du faisceau est comprise entre  $1.5\lambda$  et  $3\lambda$ .

L'importance relative du taux d'advection de chaque onde secondaire,  $1/4W|\mathbf{v}_{g,i} \cdot \mathbf{n}_\perp|$ , vis-à-vis du taux de croissance,  $\sigma$ , est tracée sur la figure III.8 en fonction de  $f/\omega_0$ . En se basant sur la figure III.7(b), la largeur choisie pour le faisceau est  $W = 2\lambda$ . Des faibles valeurs de ce rapport indiqueront des cas où la taille finie n'est pas un paramètre limitant pour l'instabilité, car dans ce cas, les ondes secondaires resteront suffisamment longtemps dans le faisceau primaire. D'après les données de la figure III.8(a), qui n'a été tracé avec les paramètres typiques des expériences, on constate que le terme d'advection ne soit pas dominant (ce qui justifie d'ailleurs l'approximation au premier ordre faite dans l'équation (III.49)), mais qu'il n'est pas négligeable. De plus, on observe l'existence d'une plage de  $f/\omega_0$  où la TRI est plus susceptible d'apparaître. Sur la plage  $0 < f/\omega_0 < 0.45$ ,  $\sigma_{max}$  est relativement constant (voir encart de la figure III.8(a)), mais, sur la plage  $0.35 < f/\omega_0 < 0.45$  le temps d'interaction est plus grand (taux d'advection petit), ce qui favorise l'instabilité.

La figure III.8(b) montre le même rapport mais pour des ondes gravito-inertielles typiques des océans (caractéristiques extraites de Sun et Pinkel (2013) et Gayen et Sarkar (2013)). Dans ce cas, le taux d'advection est dominant et la plage de  $f/\omega_0$  favorisant la TRI est grossièrement réduite à une seule valeur proche de  $f/\omega_0 = 0.5$ . Dans l'océan, les faisceaux d'ondes peuvent être extrêmement étroits (Cole *et al.*, 2009; Johnston *et al.*, 2011; Lien et Gregg, 2001). Dans ces cas, on peut faire la supposition que l'effet de taille finie est primordial et que la TRI n'apparaîtra que dans le cas le plus favorable, *i.e.*  $f \simeq \omega_0/2$  d'après la figure III.8(b). Ce résultat est en accord avec l'existence de la TRI à une latitude critique correspondant à  $f = \omega_0/2$  et non pas à l'équateur. MacKinnon (2005) évoque le ralentissement de la vitesse de groupe pour expliquer cette latitude. Cependant l'étude que nous avons présentée explique clairement l'influence de la rotation sur cette vitesse pour toute une plage de valeurs de  $f$  et pour deux cas à deux échelles différentes.

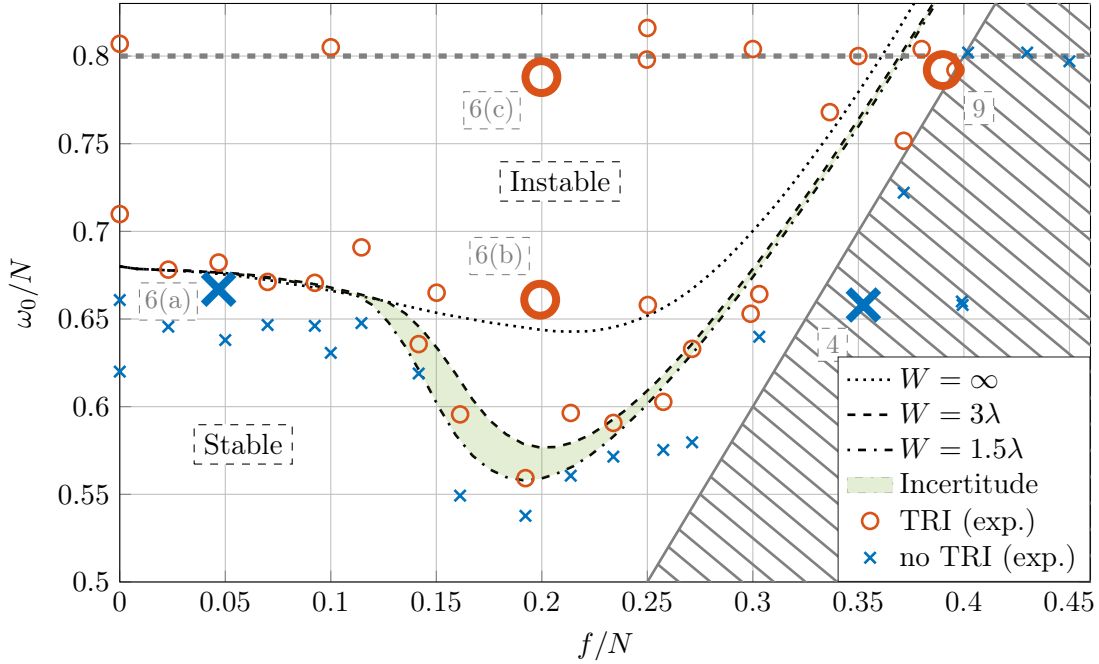
Le modèle présenté dans cette partie montre que la TRI est favorisée pour certaines valeurs du paramètre de Coriolis. Nous allons maintenant nous intéresser aux expériences et voir si l'on peut retrouver cette caractéristique sur l'instabilité.



**FIGURE III.8** – Rapport entre le taux d’advection des ondes secondaires hors du faisceau de l’onde primaire et le maximum du taux de croissance de l’instabilité, en fonction de  $f/\omega_0$ . Ce rapport est tracé séparément pour chacune des ondes secondaires ainsi que pour la somme des taux d’advection, ce qui permet de comparer les deux termes de l’équation (III.49):  $\frac{1}{4}(|\mathbf{v}_{g,1} \cdot \mathbf{n}_\perp| + |\mathbf{v}_{g,2} \cdot \mathbf{n}_\perp|)/2\lambda\sigma_{\max}$ . Encart: Maximum du taux de croissance  $\sigma_{\max}$  (normalisé par le taux de croissance maximal à  $f = 0$ ,  $\sigma_0$ ). Deux ensembles de paramètres sont considérés; (a) Cas expérimental [ $\omega_0/N = 0.8$ ,  $\ell_0 = 80 \text{ m}^{-1}$  et  $\text{Re} = 188$ ]. (b) Cas océanique, où les paramètres sont tirés de Sun et Pinkel (2013) et Gayen et Sarkar (2013) [ $\omega_0/N = 0.1$ ,  $\ell_0 = 6.3 \cdot 10^{-2} \text{ m}^{-1}$  et  $\text{Re} = 3.9 \cdot 10^5$ ].

### 3.c Prédiction du seuil d’instabilité

Dans cette partie, nous allons nous focaliser sur la prédiction du seuil expérimental d’instabilité. Pour cela nous allons tout d’abord générer des ondes gravito-inertielles à différentes fréquences  $\omega_0$  et différents paramètres de Coriolis  $f$  tout en gardant l’amplitude des oscillations constante. Garder l’amplitude constante pose problème dans les expériences qui vont suivre. En effet, on constate que le nombre de Reynolds  $\text{Re}$  diminue si l’on diminue  $\omega_0/N$ . Cela est tout simplement dû au fait que la vitesse du générateur,  $a\omega_0$ , est proportionnelle à  $\omega_0$  et que, de plus, à basses fréquences, les ondes deviennent plus horizontales et le générateur moins efficace (Mercier *et al.*, 2010). Une bonne modélisation de cet effet est de supposer que le nombre de Reynolds est simplement proportionnel à  $(\omega_0/N)^2$ , ce qui est en accord avec les mesures expérimentales. Ainsi, dans ces expériences, puisque  $\ell_0$  est fixé par le générateur, les ondes peuvent être entièrement décrites par seulement deux paramètres,  $(\omega_0/N, f/N)$ . Pour cette raison, le seuil sera un seuil en fréquence et non pas un seuil en amplitude. Dans la figure III.9, on montre les nombreuses expériences réalisées dans l’espace des paramètres. Les cas stables et instables sont indiqués par des symboles différents. Par exemple, pour  $f/N = 0$  l’onde primaire est stable pour  $\omega_0/N = 0.66$ , mais instable pour  $\omega_0/N = 0.71$ , ce qui est en accord avec les études précédentes (Bourget *et al.*, 2014). Ces mesures permettent de localiser le seuil d’instabilité en fréquence, qui se situe entre la plus haute fréquence pour laquelle



**FIGURE III.9** – Observations expérimentales du caractère stable ou instable par TRI d’ondes primaires de pulsation adimensionnée  $\omega_0/N$ . Les paramètres fixés sont  $\ell_0 = 80 \text{ m}^{-1}$ ,  $a = 5 \text{ mm}$ , ce qui correspond à  $\text{Re} > 100$  dans chaque expérience. Le seuil prédit est tracé en ligne pointillée, dans le cas d’une onde de largeur infinie, en ligne tiretée, dans le cas d’un faisceau fini de trois longueurs d’onde de large et en ligne point-tiretée, dans le cas d’un faisceau fini d’une longueur d’onde et demie de large. La zone d’incertitude sur notre prédiction (colorée en vert clair) est liée à l’incertitude sur la taille du faisceau. La zone hachurée correspond à la zone interdite pour la TRI: si  $f > \omega_0/2$  et s’il y a TRI on aurait alors  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_0 < 2f$ , ce qui implique que  $\omega_1 < f$  ou  $\omega_2 < f$ . Les symboles plus larges, avec des étiquettes, aident à localiser sur ce graphique les expériences décrites dans les autres figures de ce chapitre. La ligne horizontale indique  $\omega_0/N = 0.8$  ce qui correspond aux expériences présentées dans la figure III.10.

la TRI n’est pas observée et la plus basse fréquence pour laquelle la TRI est observée. Nous avons expliqué précédemment que le nombre de Reynolds varie expérimentalement en  $(\omega_0/N)^2$ . Ainsi, il est important de noter que l’abaissement du seuil observé entre  $f/N = 0.12$  et  $f/N = 0.28$ , devrait être encore plus important si l’on arrivait à maintenir le nombre de Reynolds constant.

Pour les basses valeurs du paramètre de Coriolis ( $f/N < 0.12$ ), le seuil reste à peu près constant. Ensuite, il diminue pour atteindre une valeur minimale autour de  $f/N = 0.2$ . Pour des plus grandes valeurs de ce paramètre, le seuil suit une limite définie par la ligne  $\omega_0 = 2f$ . En dessous de cette ligne (zone hachurée), la TRI n’est pas autorisée, car alors les deux fréquences secondaires ne peuvent à la fois être plus grandes que  $f$  et satisfaire la condition de résonance temporelle.

Dans la partie précédente, on a pu écrire une expression simplifiée de  $\Sigma$ , le taux de croissance de l’instabilité, qui prend en compte les effets de taille finie. Ce taux de croissance va servir à estimer le seuil d’instabilité qui va par la suite être comparé aux observations expérimentales. Un critère expérimental est nécessaire pour déterminer si la fréquence est ou n’est pas au-dessus du seuil d’instabilité. Pour trouver ce critère, on considère le cas  $f/N = 0$ . Grâce à la figure III.9, on estime que le seuil est dans ce cas localisé autour de  $\omega_0/N = 0.68$ . Pour ces valeurs de  $f$  et  $\omega_0$ ,

on peut calculer la valeur maximale de  $\Sigma(\ell_1)$  (vis à vis des variations de  $\ell_1$ ) que l'on appellera par la suite  $\Sigma^0$ . Dans ce qui suit, on va supposer que pour une onde primaire dans l'espace des paramètres  $(\omega_0/N, f/N)$  toute valeur du taux de croissance  $\Sigma$  plus grande que  $\Sigma^0$  va conduire à un cas instable, alors que toute valeur en-dessous de ce seuil donne une onde primaire stable. Pour estimer l'évolution du seuil avec  $f/N$  on procède comme suit:

- On choisit une valeur de  $f/N$
- À  $\omega_0/N = 0.8$  (une région où l'onde est toujours instable expérimentalement pour toute valeur de  $f$ , sauf dans zone hachurée), la valeur maximum de  $\Sigma(\ell_1)$ , que l'on appellera par la suite  $\Sigma^{\max}$ , est calculée.
- Si  $\Sigma^{\max} > \Sigma^0$ ,  $\omega_0/N$  est diminué d'un pas choisi (dans notre étude le pas choisi est  $\Delta(\omega_0/N) = 0.02$ ).
- Pour la nouvelle pulsation et pour l'amplitude correspondante, le nouveau  $\Sigma^{\max}$  est calculé.
- Cette procédure est répétée jusqu'à ce que  $\Sigma^{\max} < \Sigma^0$ . Le seuil est alors déterminé avec une erreur donnée, correspondant au pas, soit dans notre étude à environ 2% sur  $\omega_0/N$ .

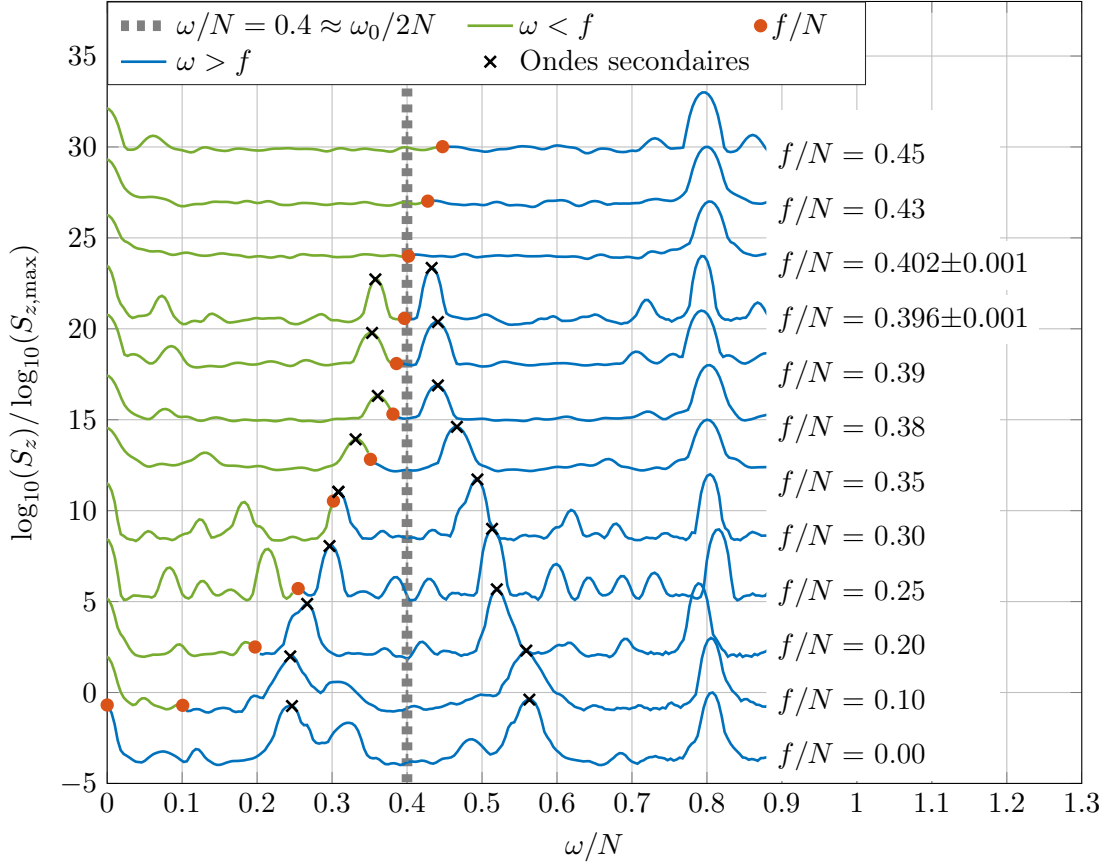
Comme discuté précédemment, la largeur exacte  $W$  du faisceau n'est pas connue, ce qui introduit une erreur supplémentaire. Pour cette raison, on a indiqué sur la figure III.9, la courbe de seuil dans deux cas,  $W = 1.5\lambda$  et  $W = 3\lambda$ , qui sont deux valeurs limites pour  $W$  d'après la figure III.7(b). La bande entre ces deux seuils représente l'erreur marginale dans l'estimation du seuil d'instabilité. On remarque que cette bande se situe dans la région qui sépare les points expérimentaux où la TRI apparaît, des points expérimentaux où la TRI n'apparaît pas. Afin de montrer l'importance de l'effet de taille finie, le seuil correspondant à des faisceaux de largeur infinie est tracé.

## 4 Propriétés des ondes secondaires

### 4.a Evolution de la pulsation

Dans la figure III.9, le modèle et les mesures expérimentales sont en accord jusqu'à  $f/N \approx 0.3$ . Au-dessus de cette valeur, des instabilités sont observées en-dessous du seuil prévu par le modèle. Pour mieux comprendre ce phénomène, nous allons nous focaliser sur une valeur particulière de la fréquence de l'onde primaire,  $\omega_0/N = 0.8$ , et cela pour différentes valeurs de  $f/N$ . Pour chaque expérience, une transformée de Fourier du gradient vertical de densité,  $\partial_z \rho'$ , est calculée sur un signal enregistré lorsque l'état stationnaire est atteint ( $t = 90 T_0$ ) en utilisant une fenêtre temporelle de  $30 T_0$ . Dans la figure III.10, qui montre les spectres correspondants, il y a un pic prononcé en  $\omega_0/N = 0.8$  qui correspond à la pulsation de forçage et une paire de pics qui correspondent aux ondes secondaires de fréquence  $\omega_1$  et  $\omega_2$  toutes les deux plus petites que  $\omega_0$ . Comme attendu, au delà de  $f/N = 0.4$ , l'onde primaire est stable. Pour chaque valeur de  $f/N$ , il y a une symétrie autour de la valeur  $\omega_0/2N$  et la condition de résonance temporelle est remplie:  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_0$ . La relation de dispersion contraint la pulsation des ondes à être supérieure à  $f$ . Ainsi, lorsque  $f/N$  augmente, on observe que les pics secondaires se rapprochent de  $\omega_0/2N$ , ce qui fait converger la TRI sur ce qui est appelé habituellement PSI (Parametric Subharmonic Instability) et que l'on retrouve dans le cas de la TRI océanique (voir chapitre I).

Il est intéressant de remarquer que non seulement la rotation influence les caractéristiques des pics secondaires mais elle favorise également l'instabilité. Cela est particulièrement vrai pour le cas  $f/N = 0.25$ . Dans ce cas, on constate que l'instabilité est particulièrement forte avec des multiples fréquences secondaires. Dans les cas  $f/N = 0.2$  et  $f/N = 0.3$ , ces instabilités secondaires sont moins prononcées, et celle-ci n'apparaissent pas pour les autres cas étudiés. Cette cascade d'instabilités peut être expliquée en considérant l'onde secondaire 1. Sa pulsation ( $\omega_1/N \simeq 0.51$ )



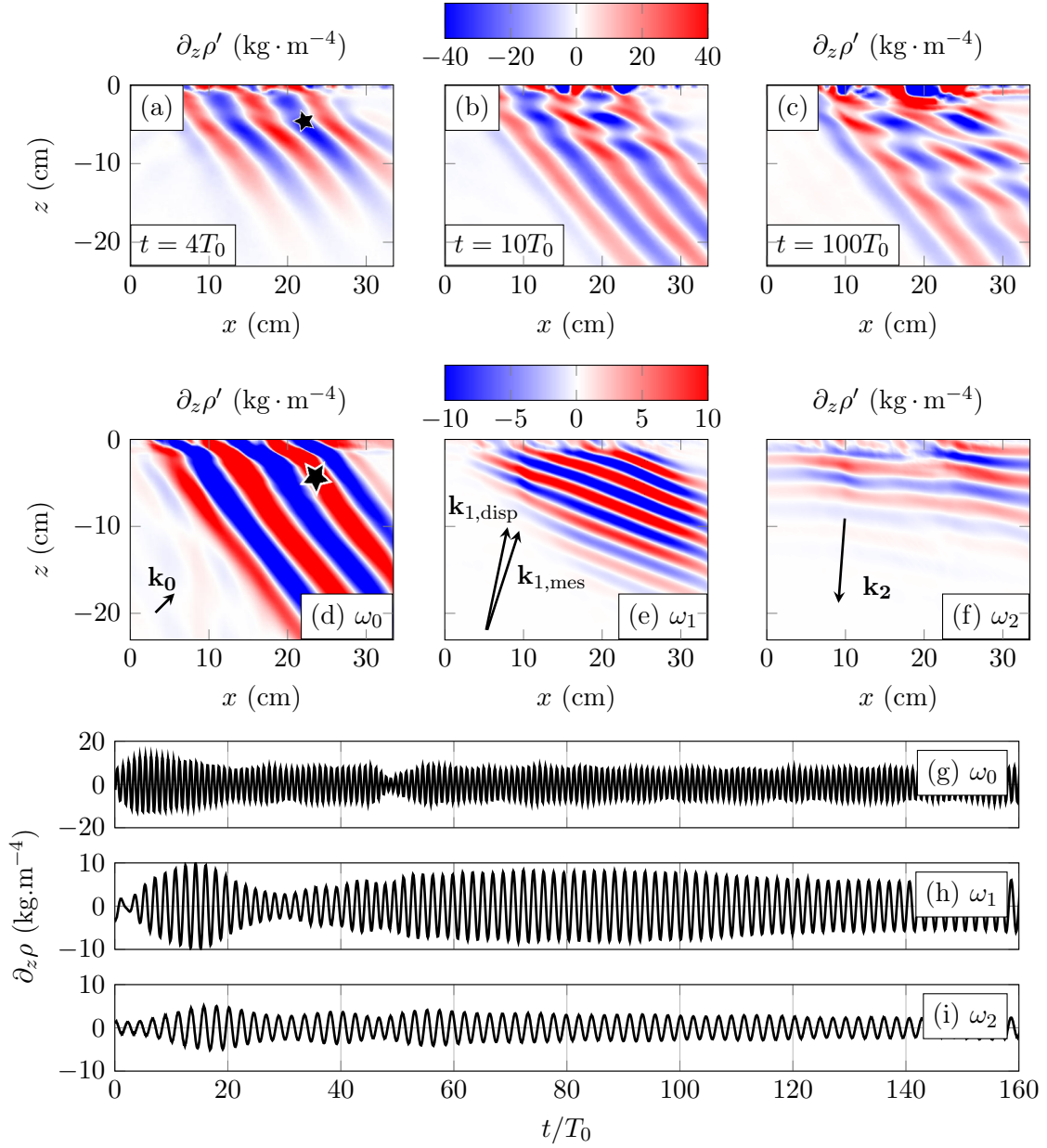
**FIGURE III.10** – Amplitude renormalisée de la transformée de Fourier du gradient vertical de densité,  $\partial_z \rho'$ , sur une fenêtre temporelle de  $30 T_0$  autour de  $t \approx 90 T_0$ , pour une onde primaire générée à  $\omega_0/N \simeq 0.8$  et pour différentes valeurs de  $f/N$ , ce qui correspond à  $63.2^\circ < \beta < 68.9^\circ$ . Pour plus de clarté, les spectres ont chacun été décalés d'un multiple de 3 verticalement par rapport au cas  $f/N = 0$ . Sur chaque spectre, le point rouge indique la valeur  $f/N$  et sépare le spectre en deux parties. La partie verte, à gauche, où  $\omega < f$  et la partie bleue, à droite, où  $\omega > f$ . Une ligne verticale tirée indique  $\omega/N = 0.4$ , ce qui correspond à peu près à  $\frac{1}{2}\omega_0/N$ . Sur chaque spectre le pic de droite correspond à l'onde primaire, les autres correspondent aux ondes secondaires. Les deux ondes secondaires principales sont signalées par une croix. La valeur de  $f/N$  est également affichée à côté de chaque spectre, avec tous les chiffres significatifs lorsque cela est nécessaire, c'est-à-dire pour les expériences juste au-dessus ou juste en-dessous du seuil.

est proche de  $2f$ . Or nous avons montré dans la partie précédente que l'effet de taille finie favorise l'instabilité d'une onde à cette fréquence particulière. Ainsi, l'onde initialement secondaire devient onde primaire dans une configuration particulièrement favorable à la TRI, créant une cascade d'instabilités.

#### 4.b Ondes sous-inertielles

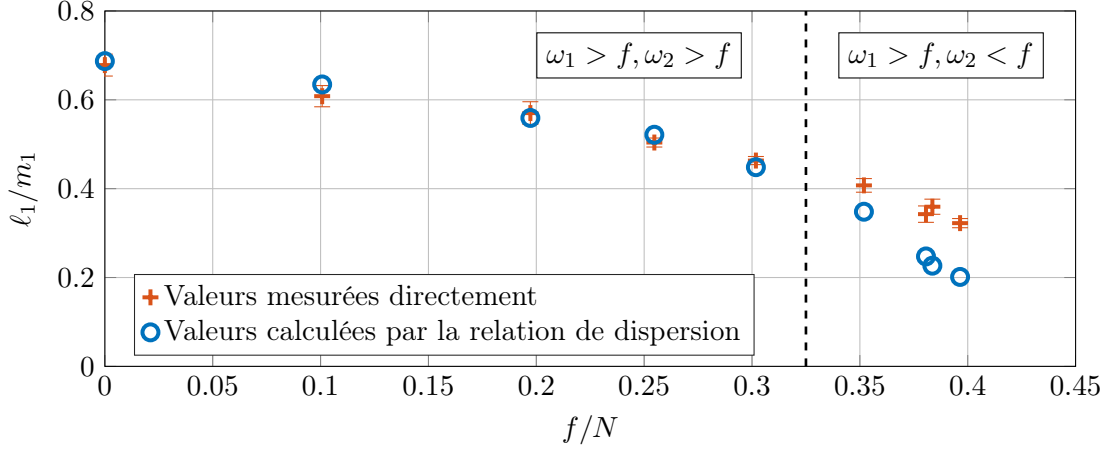
Intéressons-nous plus particulièrement aux cas  $0.35 < f/N < 0.4$ . On observe dans la figure III.10 que l'onde secondaire 1 a une pulsation plus grande que  $f$  et que l'onde secondaire 2 a une pulsation plus petite que  $f$ . L'onde 2 sera alors une onde sous-inertielle et son existence n'est pas prise en compte dans notre modèle qui suppose que  $f < \omega_i < N$  pour  $i = (0, 1, 2)$ . C'est aussi sur cette plage,  $0.35 < f/N < 0.4$ , que l'on observe une différence entre nos prévisions et les





**FIGURE III.11** – (Haut) Images du gradient vertical de densité,  $\partial_z \rho'$ , pour (a)  $t = 4 T_0$ , (b)  $t = 10 T_0$  et (c)  $t = 100 T_0$ , avec  $T_0$  la période de l'onde primaire. Le paramètre de Coriolis est  $f/N = 0.396$  et la pulsation de l'onde mère est  $\omega_0/N = 0.8$ . Cette onde correspond à l'onde à  $f/N = 0.396$  de la figure III.10. (Milieu) Filtrage du gradient vertical de densité,  $\partial_z \rho'$ , à (d)  $\omega_0$ , (e)  $\omega_1$  et (f)  $\omega_2$ . Sur chaque image les vecteurs d'ondes sont indiqués. Sur la figure (e), deux vecteurs d'onde sont indiqués correspondant au vecteur d'onde mesuré directement,  $\mathbf{k}_{1,\text{mes}}$ , et à celui trouvé grâce à  $\omega_1$  et à la relation de dispersion,  $\mathbf{k}_{1,\text{disp}}$ . (Bas) Gradient vertical de densité,  $\partial_z \rho'$ , en fonction du temps pour un point situé 5 cm sous le générateur (indiqué par une étoile sur (a)) filtré à  $\omega_0$  (g),  $\omega_1$  (h),  $\omega_2$  (i).

mesures expérimentales dans la figure III.9. L'erreur de prédiction sur le seuil d'apparition de la



**FIGURE III.12** – Rapport des nombres d’ondes  $\ell_1/m_1$  de l’onde secondaire 1 en fonction de la pulsation de  $f/N$  pour les ondes de la figure III.10. Ces rapports sont soit mesurés directement sur l’onde, soit calculés grâce à la mesure de  $\omega_1/N$  et à la relation de dispersion. Le graphique est séparé en deux zones par une ligne pointillée. À gauche de cette ligne,  $\omega_2 > f$ , le rapport mesuré et le rapport calculé sont égaux. À droite de cette ligne,  $\omega_2 < f$ , les rapports sont différents, l’onde secondaire 1 ne respecte plus la relation de dispersion.

TRI pourrait donc être reliée à l’existence de ces ondes sous-inertielles.

Dans le cas particulier  $f/N = 0.396$ , des champs de gradients verticaux de densité expérimentaux mesurés à différents instants sont présentés sur la figure III.11. Au début, l’onde plane se propage depuis le haut vers le bas (figure III.11(a)). Après quelques oscillations, des perturbations du champ d’onde apparaissent sous le générateur d’onde (figure III.11(b)). Ces perturbations se développent pour finir par atteindre une amplitude constante (figure III.11(c)). Ce comportement est similaire (même aux temps longs) à ce que l’on observe lorsque  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont plus grands que  $f$  (par exemple, figure III.3(c)). De plus les filtrages réalisés autour de la pulsation de l’onde mère et des deux pulsations des ondes secondaires (figure III.11(d), (e) et (f)) révèlent bien que chacun des champs associés possède une structure d’onde avec des longueurs d’onde bien définies. Des mesures expérimentales du gradient vertical de densité,  $\partial_z \rho'$ , en un point, prises 5 cm sous le générateur, et respectivement filtrées à  $\omega_0$ ,  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , sont montrées en figure III.11(g), (h) et (i). Ces mesures prouvent que le phénomène observé ne vient pas d’un régime transitoire, où les ondes secondaires pourraient être émises à l’allumage du générateur par exemple. Ces ondes sont présentes dans le régime stationnaire.

D’un point de vue théorique, l’existence de ces ondes sous-inertielles dans le cas de la TRI a été prédite pour  $\omega_0$  légèrement plus petit que  $2f$  par Young *et al.* (2008). La comparaison entre cette théorie et nos expériences n’est pas possible à cause de la viscosité et de la taille finie du faisceau d’onde qui sont des paramètres importants dans notre expérience et qui ne sont pas pris en compte dans cette théorie. Une explication possible pour l’apparition de ce type d’ondes sous-inertielles pourrait-être un mauvais alignement entre l’axe de rotation et la verticale. Mais, comme il est mentionné dans le chapitre I, cet alignement a été précisément contrôlé lors de la construction de la plateforme tournante PERPET et l’erreur maximum sur l’angle a été estimée à  $0.1^\circ$ , trop petit pour expliquer le phénomène observé.

Pour comprendre l’apparition des ondes sous-inertielles, nous nous sommes intéressés au rap-

port des nombres d'ondes  $\ell_1/m_1$  qui peut être calculé par la relation de dispersion:

$$\frac{\ell_1}{m_1} = \sqrt{\frac{\omega_1^2 - f^2}{N^2 - \omega_1^2}}. \quad (\text{III.50})$$

D'un autre côté, on peut également mesurer cette quantité par la méthode décrite dans le chapitre II d'ajustement de la phase. La figure III.12 montre ces deux estimations de la même quantité pour les expériences de la figure III.11. Par exemple sur la figure III.11(e), qui correspond à l'onde secondaire 1 de l'expérience à  $f/N = 0.396$  de la figure III.10, on voit que les deux vecteurs, celui mesuré et celui calculé, ne sont pas alignés.<sup>1</sup> Ces deux estimations, sur l'onde secondaire 1, sont identiques tant que l'onde secondaire 2 reste sur-inertielle. Dès que cette dernière devient sous-inertielle, les deux estimations ne sont plus en accord, la relation de dispersion n'est plus vérifiée pour l'onde secondaire 1. Pour l'onde secondaire 2,  $\omega_2 < f < N$  ce qui est contraire à la relation de dispersion. Pour pallier ce problème, une solution naïve est d'utiliser des vecteurs d'ondes complexes au lieu de vecteurs d'ondes réels. Introduire ces vecteurs complexes modifie la relation de dispersion, ce qui pourrait expliquer l'écart observé sur la figure III.12. L'introduction de vecteurs d'ondes complexes donnerait aux ondes une structure ondulatoire dans une direction (partie réelle des vecteurs d'onde) et une direction dans laquelle l'onde s'atténuerait (partie imaginaire des vecteurs d'onde). Mais alors un certain nombre de questions restent en suspens. Que deviennent les conditions de résonance? Comment est fixée la partie imaginaire des vecteurs d'onde?

Pour éclaircir ces résultats, nous avons collaboré avec Triantaphyllos Akylas et Hussain Karimi. Au cours de sa thèse, H. Karimi a réalisé une étude théorique de la TRI pour des faisceaux de taille finie (Karimi et Akylas, 2014). Dans un second temps, il a ajouté l'influence de la rotation à cette même théorie (Karimi et Akylas, 2017). Celle-ci suppose notamment que le fluide est très faiblement visqueux et que les ondes secondaires sont de pulsations proches de  $\omega_0/2$ , ce qui n'est pas tout à fait le cas dans nos conditions expérimentales. Cependant, en introduisant nos paramètres expérimentaux dans leur théorie, ils trouvent que l'onde associée au spectre à  $f/N = 0.396$  de la figure III.11 est instable avec des ondes filles à  $\omega_1 = 0.5$  et  $\omega_2 = 0.3$  et des vecteurs d'onde secondaires à peu près deux fois plus grands que le vecteur d'onde de l'onde mère. Ces résultats sont très encourageants car les pulsations secondaires sont proches des pulsations observées expérimentalement (figure III.11) et ils prévoient l'existence d'une onde secondaire sous-inertielle, ce qui semble confirmer que ce que l'on observe n'est pas un artefact mais bien de la TRI. Cependant, compte tenu des différences entre leurs hypothèses et les paramètres expérimentaux, cela ne permet pas de confirmer de manière certaine nos résultats. Leur analyse concorde également avec nos observations sur le paramètre clef qu'est la taille du faisceau de l'onde primaire sur le seuil d'apparition de la TRI ainsi que sur l'existence des ondes sous-inertielles. Pour se rapprocher de ce cadre théorique, une solution serait de mener les mêmes expériences sur la plateforme Coriolis. Les longueurs d'onde que l'on peut atteindre sur ce dispositif (Gostiaux, 2006) permettent de diminuer l'atténuation visqueuse d'un facteur 30 par rapport à nos expériences.

---

1. Par la relation de dispersion, on ne peut pas obtenir le module du vecteur mais uniquement sa direction. Sur la figure III.11(e), le module de  $\mathbf{k}_{1,\text{disp}}$  est choisi arbitrairement.

## Conclusion et perspectives

Nous avons étudié expérimentalement le rôle de la rotation sur la TRI. En utilisant le même dispositif expérimental que celui de Bourget *et al.* (2013) placé sur une plateforme tournante, nous avons généré des ondes gravito-inertielles, de caractéristiques bien contrôlées (pulsation, amplitude, longueur d'onde et taille de faisceau) et nous avons pu les caractériser au travers de leur relation de dispersion. Dans ces expériences, nous avons également pu vérifier les conditions de résonance pour la TRI. En généralisant les calculs de Bourget *et al.* (2013) pour tenir compte de la rotation, nous avons pu établir une expression pour le taux de croissance de cette instabilité. Les pulsations et les longueurs d'onde trouvées sont en accord avec le maximum de ce taux de croissance.

Cependant cette approche ne fonctionne que dans le cas d'ondes planes infinies et ne peut pas expliquer l'évolution du seuil d'instabilité avec la rotation. Pour des faisceaux de taille finie, il faut prendre en compte la possibilité pour les ondes secondaires de s'échapper de la zone d'interaction, ce qui diminue le taux de croissance effectif. En suivant Bourget *et al.* (2014), nous avons modélisé cet effet grâce à un taux d'advection. En utilisant ce modèle, nous avons pu prévoir l'évolution du seuil d'instabilité en fréquence avec la rotation et nous avons montré que la rotation pouvait favoriser l'apparition de la TRI. Cette caractéristique dépend fortement de la taille du faisceau de l'onde primaire. Dans l'océan, la viscosité joue un rôle bien moins important que dans nos expériences, à cause du nombre de Reynolds élevé. Pour cette raison, des comparaisons directes entre notre expérience et l'océan sont toujours délicates. Cependant, dans le cas où l'on a une instabilité favorisée par la rotation, la projection de nos résultats au cas océanique donne une explication du phénomène de latitude critique observé *in situ* par Alford *et al.* (2007); MacKinnon *et al.* (2013a,b). De plus, pour certaines valeurs de rotation, le spectre temporel observé dans nos expériences montre de nombreux pics, qui correspondent à des triades multiples. Cette caractéristique ouvre des perspectives intéressantes en ce qui concerne le mélange dans la dynamique océanique mais aussi pour comprendre le contenu spectral des ondes internes dans l'océan loin des sources de ces ondes (Garrett et Munk, 1972).

À des plus grandes vitesses de rotation, il existe une différence entre nos observations et notre modèle. Cette différence s'explique probablement par la présence d'ondes sous-inertielles qui ne sont ni transitoires ni évanescentes. Ce type d'ondes n'est pas pris en compte dans notre modèle. De telles ondes existent théoriquement et numériquement, mais pour des cas non-visqueux (Young *et al.*, 2008). L'observation de ces ondes questionne et il serait intéressant de les étudier théoriquement. Plusieurs interrogations peuvent être posées: est-ce-que les critères de résonance temporelle et spatiale sont les mêmes dans le cas d'ondes secondaires sous-inertielles que dans le cas de la TRI classique? Comment est choisie la direction de propagation de ces ondes sous-inertielles? Comment se fait-il que ces ondes disparaissent dès que l'on atteint le régime  $2f > \omega_0$  (région hachurée de la figure III.10)?



## Chapitre IV

# ONDES GRAVITO-INERTIELLES AXISYMÉTRIQUES

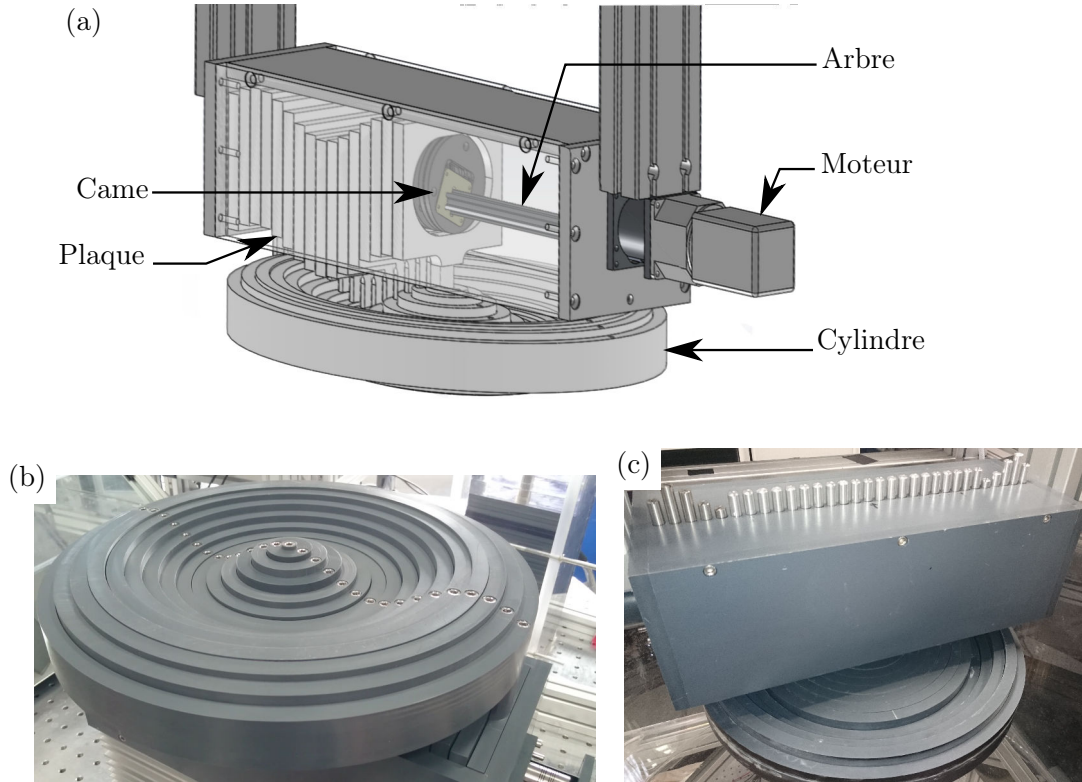
Cuve d'observation des ondes axisymétrique éclairée par une nappe laser.

## Introduction

Les expériences réalisées dans les chapitres précédents mêlent rotation et stratification. Bien que la cuve et le générateur soient bien adaptés à la dynamique des ondes internes de gravité, les bords de la cuve peuvent poser un problème lorsque la rotation devient importante. En effet, la géométrie cartésienne à deux dimensions n'est pas la géométrie "naturelle" associée à la rotation, dans le sens où cette géométrie brise l'invariance par rotation des équations de la dynamique. Pour pallier ce problème, il faut réaliser les expériences dans une configuration où à la fois la cuve et le générateur sont axisymétriques. De telles expériences ont déjà été menées : Peacock et Weidman (2005) et Ghaemsaidi et Peacock (2013) ont regardé la génération d'un faisceau conique par l'oscillation d'une sphère, Duran-Matute *et al.* (2013) ont utilisé un tore et Messio *et al.* (2008) un disque oscillant pour générer des ondes axisymétriques inertielles. King *et al.* (2010) ont observé numériquement le champ émis par l'oscillation d'une topographie gaussienne. Cependant, si l'on compare ces expériences à celles qui ont été menées dans le chapitre précédent, on constate deux différences majeures, d'une part l'absence de rotation ou de stratification et d'autre part le peu de contrôle sur le profil de l'onde générée. En effet, on a vu que le générateur décrit dans le chapitre I permet un contrôle sur l'amplitude, la pulsation et la forme du profil. Ce chapitre présente les premières expériences réalisées avec un nouveau générateur qui non seulement respecte l'axisymétrie mais qui permet également un contrôle des caractéristiques de l'onde émise. Ce nouveau générateur, inspiré du générateur développé par Gostiaux *et al.* (2006) et amélioré par Mercier *et al.* (2010), utilise toujours le système de cames à excentricité variable. Ces cames vont faire osciller des cylindres creux emboîtés les uns dans les autres. Comme avec le générateur précédent, le réglage de l'amplitude des oscillations et de leur déphasage donne une grande liberté sur le type de profils émis.

Ce chapitre se concentre sur la description et l'analyse du champ d'onde émis. Après avoir expliqué le principe de fonctionnement de ce nouveau générateur, nous décrirons analytiquement le faisceau émis sous la forme de modes propres axisymétriques. Nous nous intéresserons ensuite à la génération d'ondes dans deux configurations différentes. Dans la première, le générateur sera réglé pour émettre un mode de Bessel qui est l'équivalent d'une onde plane dans une symétrie cylindrique. Dans la deuxième configuration appelée "bourrelet", le générateur émettra une onde localisée sur ses parties externes, qui comme nous le verrons, possède des propriétés intéressantes pour étudier les interactions non-linéaires qui seront l'objet du chapitre V.

Les résultats présentés dans ce chapitre sont le fruit d'une collaboration avec Tom Peacock du Massachusetts Institute of Technology (MIT). Un article reprenant ces résultats est soumis à *Experiments in Fluids*.



**FIGURE IV.1** – (a) Schéma du générateur d'onde axisymétrique. Pour un souci de clarté, seulement la moitié des cames et des plaques sont représentées. Le mouvement vertical des cylindres est assuré par les cames qui oscillent sinusoïdalement à la pulsation  $\omega_0$  imposée par le moteur. (b) Photographie du générateur d'onde vue du dessous. (c) Photographie des tiges en aluminium qui assurent un mouvement vertical des cylindres (tiges non représentées en (a)).

## 1 Nouveau générateur d'onde

Ce générateur d'onde axisymétrique, conçu par Marc Moulin de l'atelier de mécanique, repose sur le même principe de fonctionnement que celui développé par (Gostiaux *et al.*, 2006) puis amélioré par (Mercier *et al.*, 2010). Un arbre entraîne des cames excentrées qui font osciller des plaques. Ce nouveau générateur, schématisé en figure IV.1, est constitué de 16 cylindres creux en PVC de 12 mm d'épaisseur (le cylindre du milieu est plein et fait 12 mm de diamètre) et de 38 mm de haut. Un jeu de 1 mm entre chaque cylindre leur permet d'osciller sans frottement. Le générateur fait donc un diamètre total de 20 cm.

Contrairement au générateur à deux dimensions des chapitres précédents (voir figure I.18), dont le mouvement de chaque plaque est contrôlé par une seule came, chaque cylindre (à l'exception du cylindre central) est mis en mouvement par deux cames, situées à équidistance du centre du générateur (voir figure IV.1(a)) et oscillant en phase. Ce dispositif est nécessaire pour assurer un mouvement équilibré et vertical de chaque cylindre. Pour éviter que les cylindres ne s'entrechoquent, des guides en aluminium (voir figure IV.1(c)) contraignent les plaques à bouger parallèlement entre-elles. En numérotant les plaques de 1 à 16 en commençant par le centre et en allant vers les cylindres extérieurs, leur mouvement vertical est décrit par:

$$z_n(t) = z_{0,n} \cos(\omega_0 t + \phi_n) \quad (\text{IV.1})$$



où  $z_{0,n}$  est l'amplitude du déplacement sinusoïdal du cylindre  $n$ , qui peut être choisie sur la plage 0-15 mm,  $\omega_0$  la pulsation de rotation de l'arbre à cames et  $\phi_n$  la phase du cylindre  $n$ , qui peut être choisie par incrément de  $\pi/6$ . Par exemple, si l'on veut forcer une onde sinusoïdale radiale  $z(r, t) = a \cos(\omega_0 t - k_0 r)$  d'amplitude  $a$  et de longueur d'onde radiale  $2\pi/k_0$ , correspondant à la largeur de 6 cylindres, avec une phase se propageant du centre vers les bords, la configuration sera alors:

$$z_{0,n} = a \quad \forall n \in \llbracket 1, 16 \rrbracket, \quad (\text{IV.2})$$

$$\phi_n = k_0 r_n = 2n\pi/6 \quad \forall n \in \llbracket 1, 16 \rrbracket, \quad (\text{IV.3})$$

où  $r_n$  est la position radiale du cylindre  $n$ .

Cette nouvelle géométrie ouvre des perspectives très intéressantes concernant l'excitation d'onde interne, inertielle ou gravito-inertielle. Par exemple, on peut exciter des modes stationnaires si toutes les plaques sont en phase ou en opposition de phase. Si les phases des cames augmentent ou diminuent avec  $n$ , on forcera alors des ondes qui se propageront vers l'extérieur ou vers l'intérieur du générateur. En changeant l'amplitude d'oscillation des cames, on peut imaginer différents scénarios: une perturbation importante au centre, qui s'atténue radialement ou encore des excitations uniquement sur les cylindres périphériques, qui, lors de leur propagation dans la cuve, vont se rencontrer.

Le générateur est ensuite inséré, centré, à la surface de la cuve axisymétrique de 600 L décrite dans le chapitre I. Une fois mis en marche, il va émettre des ondes gravito-inertielles à l'intérieur de la cuve. Avant de s'intéresser aux mesures expérimentales, nous allons présenter un formalisme permettant de décrire l'onde émise ainsi que sa propagation dans le régime linéaire.

## 2 Modèle analytique

Dans cette partie, nous nous intéressons à la propagation d'une onde gravito-inertielle axisymétrique dans un milieu stratifié en rotation uniforme  $\Omega = f/2$  dans l'approximation de Boussinesq. Contrairement à ce que l'on a fait dans les chapitres précédents, la stratification, caractérisée par la pulsation  $N(z) = \sqrt{-g\partial_z \bar{\rho}/\rho_0}$ , peut varier avec la profondeur  $z$ . Dans le cas particulier d'un milieu stratifié linéairement, où  $N$  est homogène, on notera  $N_h$  la pulsation de flottabilité. Dans un référentiel cylindrique  $(r, \theta, z)$ , les équivalents des modes de Fourier, qui sont une base de fonctions naturelle pour une propagation en géométrie cartésienne, sont les modes de Bessel.

La figure IV.2 présente un schéma d'un faisceau d'onde typique émis par un générateur axisymétrique, oscillant à une pulsation  $\omega_0$  constante, dans une stratification linéaire et en rotation uniforme. Dans cette configuration, les ondes gravito-inertielles sont émises à un angle  $\beta_0$  défini par rapport à l'horizontale en accord avec la relation de dispersion des ondes gravito-inertielles:

$$\omega_0^2 = N_h^2 \sin^2 \beta_0 + f^2 \cos^2 \beta_0. \quad (\text{IV.4})$$

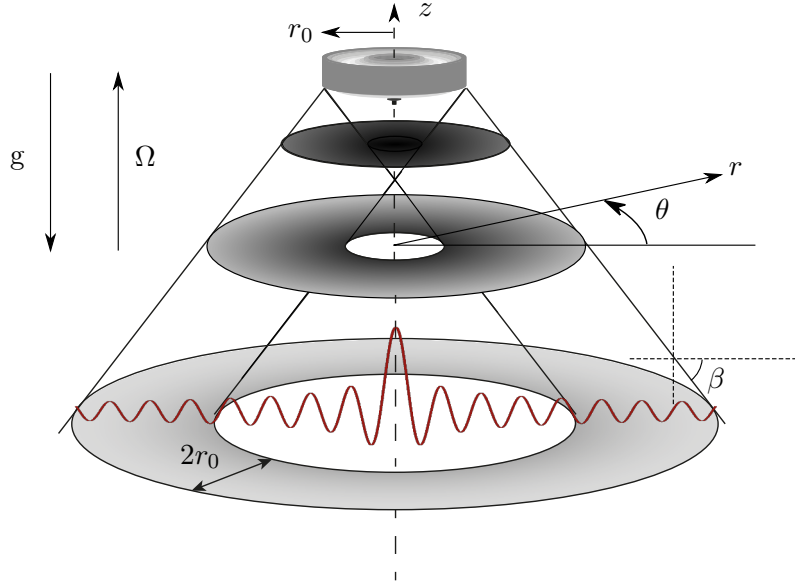
Le schéma de la figure IV.2 montre que l'onde va s'étaler au fur et à mesure de sa propagation. Par conservation de l'énergie, on s'attend à ce que son amplitude diminue au cours de la propagation. Nous allons maintenant décrire cette propagation en termes de modes de Bessel.

### 2.a Equation de propagation

Dans cette approche, nous supposons que la dynamique est axisymétrique. Ainsi aucune des grandeurs de ces équations ne dépend de  $\theta$ . Pour autant il peut y avoir une vitesse orthoradiale  $v_\theta$ <sup>1</sup>.

---

1. De la même façon que les ondes à deux dimensions en rotation des chapitres précédents n'avaient pas de dépendance en  $y$  mais une possédaient une vitesse  $v_y$ .



**FIGURE IV.2** – Schéma illustrant la forme du champ de vitesse verticale d’une onde gravito-inertielle émise à pulsation constante  $\omega_0$  dans un milieu en rotation uniforme ( $f$ ) et stratifié linéairement ( $N_h$ ) en accord avec la relation de dispersion (IV.4). En rouge est présenté un exemple de champ de vitesse verticale (mode de Bessel) qui montre la décroissance en  $1/\sqrt{r}$  de l’amplitude au fur et à mesure que l’onde se propage vers le bas.

La dynamique linéaire d’un fluide visqueux incompressible dans un milieu stratifié et en rotation est décrite, dans l’approximation de Boussinesq, d’après les équations du chapitre I, par les équations suivantes:

$$\partial_t v_r = f v_\theta - \frac{1}{\rho_0} \partial_r p + \nu \Delta_h v_r, \quad (\text{IV.5})$$

$$\partial_t v_\theta = -f v_r + \nu \Delta_h v_\theta, \quad (\text{IV.6})$$

$$\partial_t v_z = -\frac{\rho'}{\rho_0} g - \frac{1}{\rho_0} \partial_z p + \nu \Delta_z v_z, \quad (\text{IV.7})$$

$$\partial_t \rho' = \frac{v_z N(z)^2 \rho_0}{g}, \quad (\text{IV.8})$$

$$0 = \frac{1}{r} \partial_r (r v_r) + \partial_z v_z, \quad (\text{IV.9})$$

où  $\rho_0$  et  $\rho'$  sont respectivement la densité moyenne et l’écart à la densité au repos. L’invariance selon  $\theta$ , permet de remplacer les Laplaciens vectoriels par le Laplacien projeté horizontalement  $\Delta_h$  et verticalement  $\Delta_z$ , qui valent:

$$\Delta_h U = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r^2}, \quad (\text{IV.10})$$

$$\Delta_z U = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r}, \quad (\text{IV.11})$$

$$(\text{IV.12})$$

où  $U$  représente un champ scalaire ( $v_z, v_\theta, v_r, \rho, \dots$ ). Dans le cas où la dynamique ne serait pas axisymétrique, on aurait des couplages entre  $v_r$  et  $v_\theta$  dans le terme visqueux. En combinant les

équations  $\partial_t \partial_z$ (IV.5), (IV.6),  $\partial_t \partial_r$ (IV.7) et (IV.8), on obtient<sup>2</sup>:

$$\partial_z \partial_t^2 v_r - \partial_r \partial_t^2 v_z = N^2 \partial_r v_z - f^2 \partial_z v_r + \nu \Delta_h (\partial_z \partial_t v_r - \partial_r \partial_t v_z + f \partial_z v_\theta). \quad (\text{IV.13})$$

De plus, en introduisant un équivalent axisymétrique à la fonction courant,  $\Psi$ , qui satisfait l'équation (IV.9), telle que

$$v_r = -\frac{1}{r} \partial_z (r \Psi), \quad (\text{IV.14})$$

$$v_z = \frac{1}{r} \partial_r (r \Psi), \quad (\text{IV.15})$$

l'équation (IV.13) devient

$$\begin{aligned} -\partial_t^2 \left[ \partial_z^2 \Psi + \partial_r \left( \frac{1}{r} \partial_r (r \Psi) \right) \right] = & N^2 \partial_r \left( \frac{1}{r} \partial_r (r \Psi) \right) + f^2 \partial_z^2 \Psi \\ & + \nu \Delta_h \left[ -\partial_t \partial_z^2 \Psi - \partial_t \partial_r \left( \frac{1}{r} \partial_r (r \Psi) \right) + f \partial_z v_\theta \right]. \end{aligned} \quad (\text{IV.16})$$

Toute onde axisymétrique peut être décomposée comme une somme de produits entre une fonction de Bessel selon  $r$  et un cosinus selon  $z$ . La linéarité des équations permet d'étudier chacun de ces modes indépendamment. Dans la suite, nous allons supposer que  $\Psi$  est une solution harmonique donnée par une fonction de Bessel de premier ordre,  $J_1$ , telle que:

$$\Psi(z, r, t) = \psi(z) J_1(k_0 r) \exp(-i\omega_0 t) + \text{c.c.} \quad (\text{IV.17})$$

La décomposition de  $\Psi$  sur des fonctions de Bessel d'ordre 1 est imposée par la nullité de la vitesse radiale  $v_r$  en  $r = 0$  pour assurer la conservation de la masse. Cette décomposition est pratique dans le sens où les fonctions de Bessel d'ordre 1 réduisent l'opérateur Laplacien,  $\Delta_h$ , à:

$$\Delta_h \Psi = -k_0^2 \Psi + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}. \quad (\text{IV.18})$$

En utilisant les relations entre les fonctions de Bessel d'ordre 1 et d'ordre 0 ainsi qu'entre leurs dérivées, les vitesses peuvent s'exprimer sous la forme:

$$v_r = -\psi'(z) J_1(k_0 r) \exp(-i\omega_0 t) + \text{c.c.}, \quad (\text{IV.19})$$

$$v_z = k_0 \psi(z) J_0(k_0 r) \exp(-i\omega_0 t) + \text{c.c.} \quad (\text{IV.20})$$

Dans les deux sous-parties suivantes, nous allons étudier les solutions analytiques à l'équation (IV.16) en négligeant la viscosité dans un premier temps puis en supposant la viscosité faible.

## 2.b Solution non-visqueuse

Dans le cas non-visqueux, la vitesse azimuthale  $v_\theta$  est donnée par l'équation (IV.6):

$$v_\theta = \frac{-if}{\omega_0} \psi'(z) J_1(k_0 r) \exp(-i\omega_0 t) + \text{c.c.}, \quad (\text{IV.21})$$

et l'équation (IV.16) devient simplement

$$\psi''(z)(-\omega_0^2 + f^2) + \psi(z) k_0^2 (\omega_0^2 - N(z)^2) = 0. \quad (\text{IV.22})$$

---

2. Car on a l'égalité  $\partial_r \Delta_z U = \Delta_h \partial_r U$ , si  $U$  ne dépend pas de  $\theta$ .

Pour une stratification linéaire  $N_h$ , la solution de cette équation est  $\exp(im_0z)$ , où  $m_0$  est le nombre d'onde vertical vérifiant la relation de dispersion:

$$m_0(k_0, \omega_0) = \pm k_0 \left( \frac{N_h^2 - \omega_0^2}{\omega_0^2 - f^2} \right)^{1/2}. \quad (\text{IV.23})$$

Cette équation est la même que l'équation (IV.4), où  $\beta_0 = \arctan(k_0/m_0)$ . Dans une géométrie axisymétrique, une fonction de Bessel d'ordre 1 est équivalente à une onde sinusoïdale dans une géométrie cartésienne à deux dimensions. La solution générale à l'équation (IV.16) est de la forme modale:

$$\Psi = \Psi_0 \exp(im_0z) J_1(k_0r) \exp(-i\omega_0t) + \text{c.c.} \quad (\text{IV.24})$$

C'est une fonction de Bessel d'ordre en 1 selon  $r$  modulée verticalement et temporellement.

## 2.c Solution faiblement visqueuse

Comme nous le verrons par un calcul d'ordre de grandeur, nous avons fixé les dimensions de notre expérience de telle façon que la viscosité joue un faible rôle. Ainsi, les calculs de cette partie considèrent l'effet de la viscosité au premier ordre en  $\epsilon = \nu k_0^2/\omega_0 \ll 1$ . Dans l'équation de propagation (IV.16),  $v_\theta$  apparaît uniquement comme une correction au premier ordre en viscosité. Ainsi, il n'est pas nécessaire de prendre en compte les corrections visqueuses à l'expression à l'ordre 0 de  $v_\theta$  (IV.21).

En insérant l'équation (IV.17) dans l'équation (IV.16) et en utilisant l'expression de  $v_\theta$  discutée précédemment, on obtient une équation différentielle de degré 4:

$$\begin{aligned} \psi''''(z) i\nu \left[ \omega_0 - \frac{f^2}{\omega_0} \right] + \psi''(z) \left[ -\omega_0^2 + f^2 - i\nu k_0^2 (2\omega_0 - \frac{f^2}{\omega_0}) \right] \\ + \psi(z) k_0^2 [\omega_0^2 - N(z)^2 + i\nu \omega_0 k_0^2] = 0. \end{aligned} \quad (\text{IV.25})$$

On observe que l'équation (IV.22) est comme attendu le cas limite à  $\nu = 0$  de l'équation (IV.25).

Pour une stratification linéaire  $N_h$  et en présence de faible viscosité, les solutions modales ont la forme suivante:

$$\Psi = \Psi_0 \exp(i\mathcal{M}_0z) J_1(k_0r) \exp(-i\omega_0t), \quad (\text{IV.26})$$

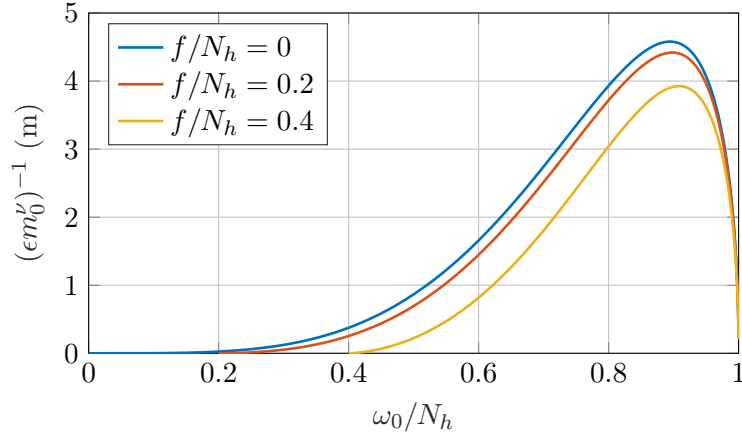
où

$$\mathcal{M}_0(k_0, \omega_0) = m_0(k_0, \omega_0) + \epsilon i m_0^\nu(k_0, \omega_0), \quad (\text{IV.27})$$

$m_0$  étant le nombre d'onde du cas non visqueux donné par l'équation (IV.23) et  $m_0^\nu$  une correction à viscosité faible donnée par:

$$m_0^\nu = \pm \frac{k_0}{2} \frac{N_h^2(N_h^2 - f^2)}{(\omega_0^2 - f^2)(N_h^2 - \omega_0^2)} \sqrt{\frac{N_h^2 - \omega_0^2}{\omega_0^2 - f^2}} \quad (\text{IV.28})$$

Pour un nombre d'onde horizontal typique dans nos expériences ( $k = 50 \text{ m}^{-1}$ ), la figure IV.3 représente la longueur d'atténuation verticale  $(\epsilon m_0^\nu)^{-1}$ . Tant que  $\omega_0$  n'est pas trop proche ni de  $f$  ni de  $N_h$ , cette longueur est largement supérieure au mètre. Sur une distance correspondant à la hauteur de la cuve (0.6 m), on peut donc négliger les effets visqueux qui ne jouent pas un rôle prépondérant dans la propagation linéaire des ondes. Pour cette raison, on utilisera le modèle non-visqueux dans ce qui suit. Pour de plus petites échelles spatiales, cette dissipation visqueuse peut devenir importante car la longueur de dissipation visqueuse est directement proportionnelle au cube de la longueur d'onde horizontale. Il est intéressant de constater que la rotation augmente la dissipation visqueuse. En effet, celle-ci augmente la distance parcourue par les particules fluides pendant une période augmentant ainsi les frottements effectifs.



**FIGURE IV.3** – Longueur d’atténuation visqueuse  $(\epsilon m_0^\nu)^{-1}$  en fonction de  $\omega_0/N_h$  pour le nombre d’onde horizontal principal de la fonction de Bessel tronquée  $k_0 = 50 \text{ m}^{-1}$  (voir plus loin figure IV.8) pour différentes valeurs de  $f/N_h$ .

## 2.d Solution générale

Les solutions modales permettent de trouver le champ dans l’ensemble de l’espace si on connaît sa structure à une profondeur donnée. À cette profondeur, considérée comme  $z = 0$  dans ce qui suit, on mesure la vitesse verticale en fonction du temps. Une transformée de Fourier en  $t$  puis de Hankel<sup>3</sup> en  $r$  permet d’obtenir l’amplitude de chacun des modes spatiaux-temporels  $\tilde{\Psi}_{k_0, \omega_0}(z = 0)$ . Nous utilisons la mesure du champ de vitesse verticale plutôt que du champ de vitesse radiale, car  $v_z$  donne une mesure directe de  $\Psi$  (voir équation (IV.20)).

Pour une stratification linéaire,  $N_h$ , la solution est donnée par la propagation de chacun des modes  $\tilde{\Psi}_{k_0, \omega_0}$  conformément à l’équation (IV.26). Ainsi:

$$\Psi(z, r, t) = \sum_{k_0, \omega_0} \tilde{\Psi}_{k_0, \omega_0}(z = 0) \exp[i\mathcal{M}_0(k_0, \omega_0)z] J_1(k_0 r) \exp(-i\omega_0 t). \quad (\text{IV.29})$$

$\mathcal{M}_0$  peut être donné par l’équation (IV.23) (cas non-visqueux) ou par l’équation (IV.27) (cas faiblement visqueux). Comme nous avons vu que la viscosité est négligeable dans notre expérience, nous considérerons le cas non visqueux dans la suite. De façon générale, pour une stratification arbitraire, la solution générale est donnée par:

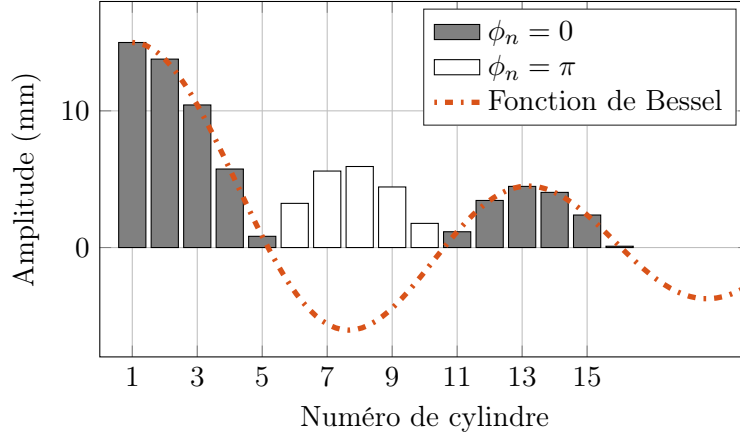
$$\Psi(z, r, t) = \sum_{k_0, \omega_0} \tilde{\Psi}_{k_0, \omega_0}(z) J_1(k_0 r) \exp(-i\omega_0 t), \quad (\text{IV.30})$$

où  $\tilde{\Psi}_{k_0, \omega_0}(z)$  est solution de l’équation (IV.22) (ou de l’équation (IV.25) dans le cas faiblement visqueux). Cette analyse permet finalement d’obtenir la dynamique du faisceau d’onde une fois sa structure connue à une profondeur. Cela reste bien évidemment vrai tant que l’on reste dans le régime linéaire.

## 3 Propagation d’une fonction de Bessel tronquée

Le cadre analytique posé, nous allons nous concentrer sur deux types de forçage différents. Le premier, décrit dans cette partie, sera naturellement une fonction de Bessel, ou tout du moins une

3. La transformée de Hankel est l’équivalent de la transformée de Fourier mais avec une projection sur les fonctions de Bessel et non sur les exponentielles complexes



**FIGURE IV.4** – Amplitudes et phases des cylindres pour un générateur fonctionnant en mode de Bessel. La ligne pointillée orange représente la fonction de Bessel utilisée pour calculer les amplitudes avec un nombre d'onde  $k_{\text{gen}} = 42 \text{ m}^{-1}$ .

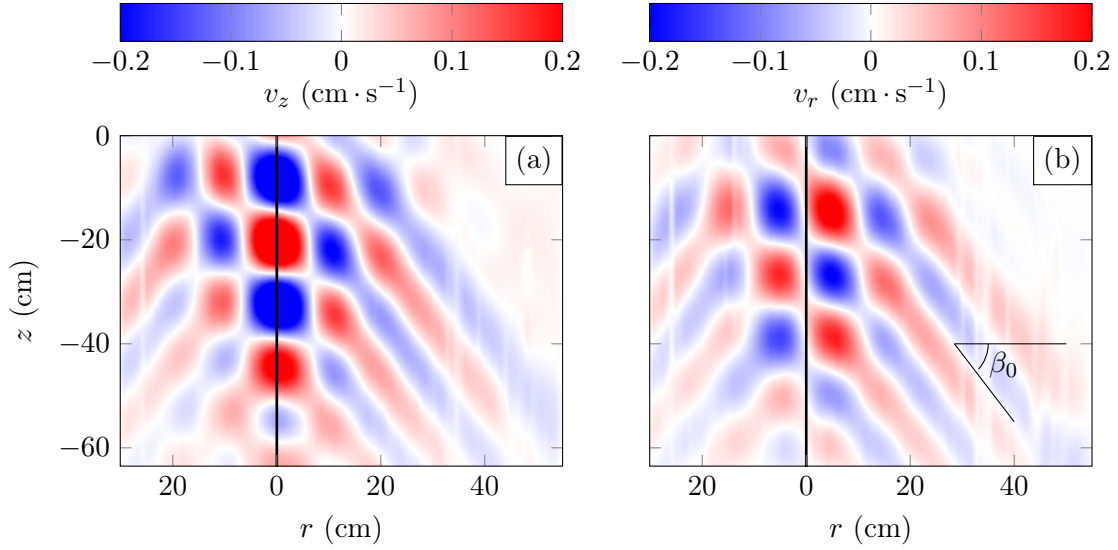
fonction de Bessel tronquée puisque le générateur est de largeur finie. Bien que le modèle développé précédemment prenne en compte des stratifications non-linéaires, les expériences considérées dans ce chapitre seront toutes menées en stratification linéaire. Un exemple de propagation dans une stratification non-linéaire sera présenté au chapitre V.

### 3.a Mesures expérimentales

Le but de cette configuration est de forcer un mode de Bessel d'ordre zéro pour la vitesse verticale. Compte-tenu de la taille du générateur et pour garder l'échelle spatiale suffisamment grande pour que la viscosité ne soit pas trop importante, nous avons choisi de reproduire une fonction de Bessel sur une "longueur d'onde" et demie. La figure IV.4 montre l'amplitude de chaque came ainsi que leur phase relative. Les amplitudes ont été choisies de telle façon que le cylindre central ait une amplitude de 15 mm.

Des coupes des champs de vitesses verticale et radiale, obtenues dans un plan vertical passant par l'axe central du générateur ( $r = 0$ ) sont présentées figure IV.5. Les résultats obtenus présentent les caractéristiques attendues avec une symétrie (respectivement une antisymétrie) par rapport à l'axe  $r = 0$  du champ de vitesse verticale (respectivement radiale). On observe que le long de la ligne  $r = 0$  la vitesse verticale est une sinusoïde qui s'atténue avec la profondeur. En dehors de cette région, le champ de vitesse verticale est orienté par rapport à l'horizontale d'un angle bien défini  $\beta_0$ , signe de la monochromaticité temporelle du signal, ce qui est confirmé par le spectre temporel de la figure IV.6(a).

Pour les ondes générées, les images du champ d'onde confirment la relation de dispersion (IV.4). En effet,  $N_h$  et  $f$  étant connus, l'angle  $\beta_0$  peut être extrait directement des mesures de vitesses en traçant les isophases (comme dans le chapitre II) et la pulsation  $\omega_0$  peut-être mesurée par transformée de Fourier temporelle, de façon analogue à la procédure utilisée pour obtenir la figure III.12. Comme le montre la figure IV.6(b), la quantité  $\tan \beta_0$  mesurée directement sur les images et la même quantité calculée par la relation de dispersion concordent pour une large gamme de paramètres  $f/N_h$ . On peut donc conclure, comme attendu, que l'onde produite par le générateur se propage selon la relation de dispersion des ondes gravito-inertielles.

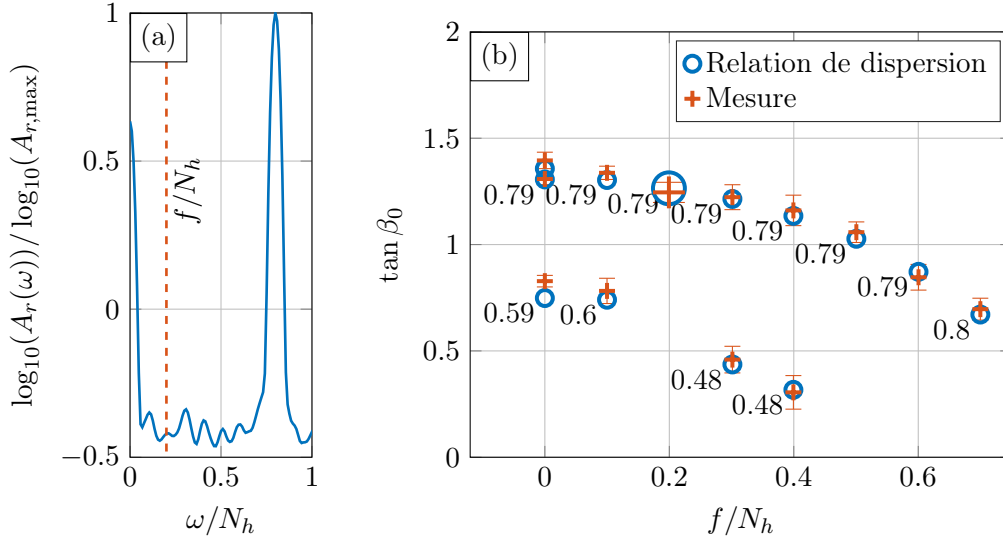


**FIGURE IV.5** – Vitesses (a) verticale et (b) radiale (comptée positivement si la vitesse est dirigée vers la droite de l’image) obtenues par PIV pour une onde se propageant depuis le générateur configuré comme un mode de Bessel (voir figure IV.4) situé en  $z = 0$ :  $k_{\text{gen}} = 42 \text{ m}^{-1}$ ,  $a = 15 \text{ mm}$  pour le cylindre central,  $\omega_0/N_h = 0.79$  et  $f/N_h = 0.2$ . Les ondes se propagent à un angle  $\beta_0$  avec l’horizontale.

Nous allons maintenant nous intéresser aux vitesses horizontales obtenues par PIV dans un plan horizontal grâce au miroir incliné à  $45^\circ$  sous la cuve d’observation. La figure IV.7 montre les mesures de vitesses radiale et orthoradiale effectuées dans un plan horizontal localisé 10 cm sous le générateur. Le champ de vitesse est relativement axisymétrique malgré quelques petites imperfections. Dans le cas sans rotation, la vitesse orthoradiale est négligeable, alors que dans le cas en rotation elle est d’un ordre de grandeur comparable à  $v_r$ , comme cela est prévu par l’équation (IV.21). En comparant les figures IV.7(a) et (c), on constate aussi que l’atténuation radiale semble plus importante dans le cas sans rotation. Cela est simplement dû à une propagation plus horizontale dans le cas avec rotation qui conduit à un plus large diamètre de l’intersection entre le cône d’émission et le plan laser de mesure. Ces mesures rappellent celles obtenues par Messio *et al.* (2008) dans le cas d’ondes purement inertielles.

Le champ d’onde émis n’est pas complètement une fonction de Bessel à cause de la troncature à  $r > 20 \text{ cm}$ . Pour analyser l’enrichissement spectral, nous utilisons une transformée de Hankel. Cette transformée, appliquée aux données du problème, est présentée sur la figure IV.8. On remarque que la transformée de Hankel d’une fonction tronquée présente des différences notables avec le pic isolé qui correspond à une fonction de Bessel non tronquée de même nombre d’onde. Des pics avec des plus grands et des plus petits nombres d’onde sont observés. La transformée de Hankel du profil de vitesse verticale pris 10 cm sous le générateur a les mêmes caractéristiques, avec deux pics importants à petits nombres d’onde et plusieurs pics moins importants à grands nombres d’onde. Ces pics possèdent une amplitude légèrement réduite par rapport à la courbe théorique. La transformée de Hankel du profil expérimental est nulle pour  $k > 200 \text{ m}^{-1}$ . Notamment il n’y a pas de signal, à l’échelle de discrétisation de la fonction de Bessel,  $k_{\text{cy1}} \approx 500 \text{ m}^{-1}$ , correspondant à la largeur des cylindres (non montrée sur la figure IV.8). Pour le fluide, le générateur est donc lisse.

Dans cette partie nous avons vu que le générateur crée un faisceau d’onde avec les propriétés attendues de symétrie. Les vitesses ont été étudiées dans un plan vertical et dans un plan horizontal. Les harmoniques composant le signal 10 cm sous le générateur sont proches de celles imposées



**FIGURE IV.6** – (a) Transformée de Fourier temporelle de la vitesse radiale moyennée sur le champ d’observation et mesurée dans un plan vertical (pour la même onde que celle présentée en figure IV.5) sur 500 images, correspondant à une fenêtre temporelle de 250 s. La ligne tiretée représente la valeur  $\omega_0/N_h = f/N_h = 0.2$ . (b) Comparaison de la valeur  $\tan \beta_0$ , mesurée directement sur les images comme celle de la figure IV.5, à celle trouvée grâce à la relation de dispersion (IV.23). La valeur de  $\omega_0/N_h$  correspondante est indiquée à côté de chaque mesure. Les symboles plus larges à  $f/N_h = 0.2$  correspondent à l’expérience de la figure IV.6 et de la figure IV.9.

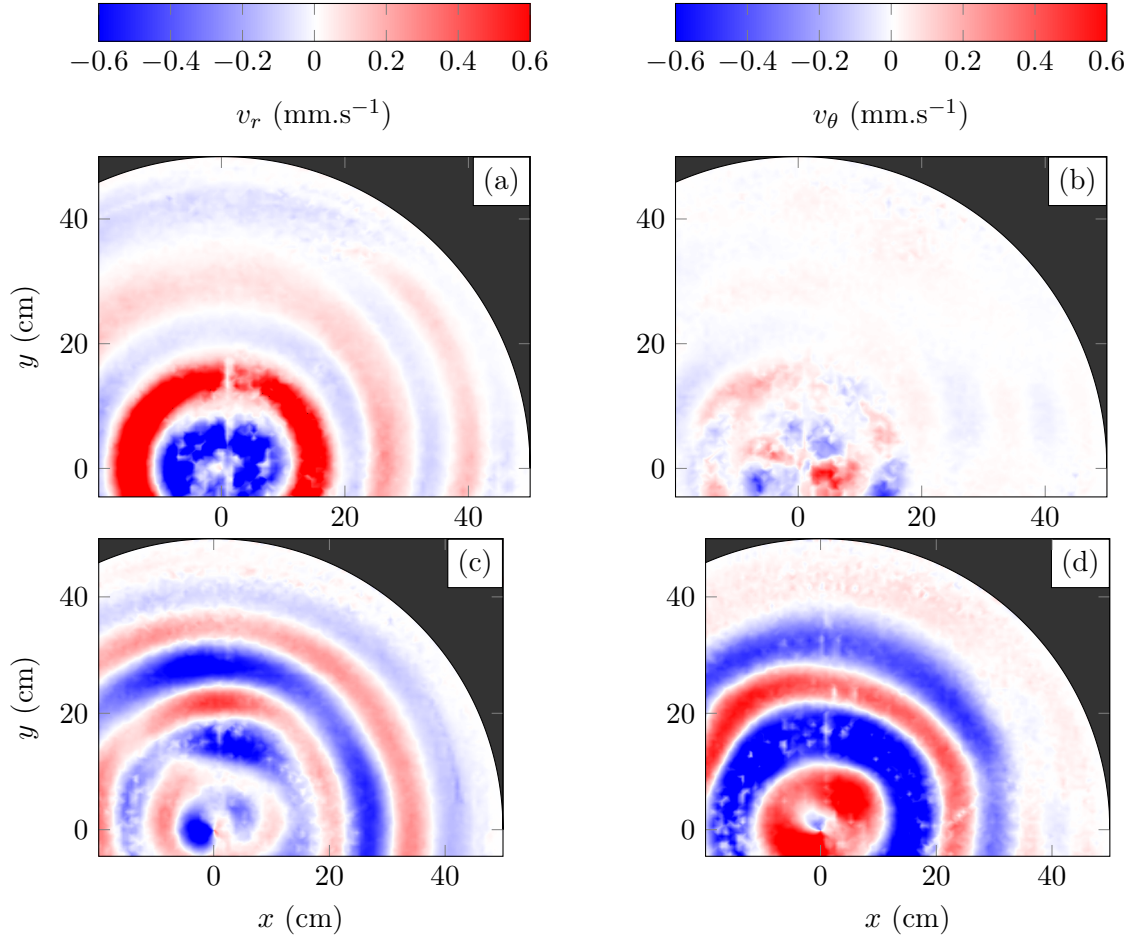
théoriquement par le générateur. Dans ce qui suit, nous allons comparer les champs de vitesse expérimentaux avec celui obtenu par propagation de la solution donnée par l’équation (IV.29).

### 3.b Comparaison à la solution numérique

Pour faire cette comparaison, nous utilisons la vitesse verticale 10 cm sous le générateur comme condition de surface pour la solution analytique. Nous avons choisi cette position car elle n’est pas trop éloignée du générateur et elle permet d’obtenir des mesures utilisables pour notre analyse. En effet, plus proche du générateur, le faisceau est moins propre à cause du mélange et du courant moyen induit par le forçage. Dans les solutions qui suivent, la profondeur relative à la condition de surface est notée  $z^*$ . Ainsi  $z^* = z + 10$  cm. La figure IV.9 montre les champs de vitesse verticale et radiale obtenus grâce au modèle et mesurés directement sur les expériences pour des profondeurs  $z^* < 0$ . Globalement les solutions analytiques sont en accord avec les observations expérimentales, sauf pour des structures à petites échelles dues au bruit de mesure dans les données expérimentales. Des comparaisons plus détaillées portant sur les profils de vitesse sont proposées en figure IV.10. Les graphiques montrent les vitesses radiale et verticale obtenues à une profondeur donnée le long du rayon de la cuve. Sans trop de surprise, on observe que les résultats sont similaires en  $z^* = -10$  cm, ce qui est la position la plus proche du forçage. Pour chaque profondeur, les profils se ressemblent, la différence la plus notable est la valeur de la vitesse verticale proche du centre en  $z^* = -20$  cm. Plusieurs raisons peuvent expliquer cette différence, comme un léger défaut d’axisymétrie du générateur ou encore la présence d’un courant moyen. Ce courant pourrait être créé par la mise en rotation du dispositif ou encore par le générateur d’onde.

Une autre caractéristique essentielle de la génération est l’efficacité du générateur. On a vu dans le chapitre II que l’angle d’émission  $\beta_0$  et la présence ou non de rotation change l’amplitude de l’onde émise. Cette efficacité peut être calculée comme le rapport entre l’amplitude de

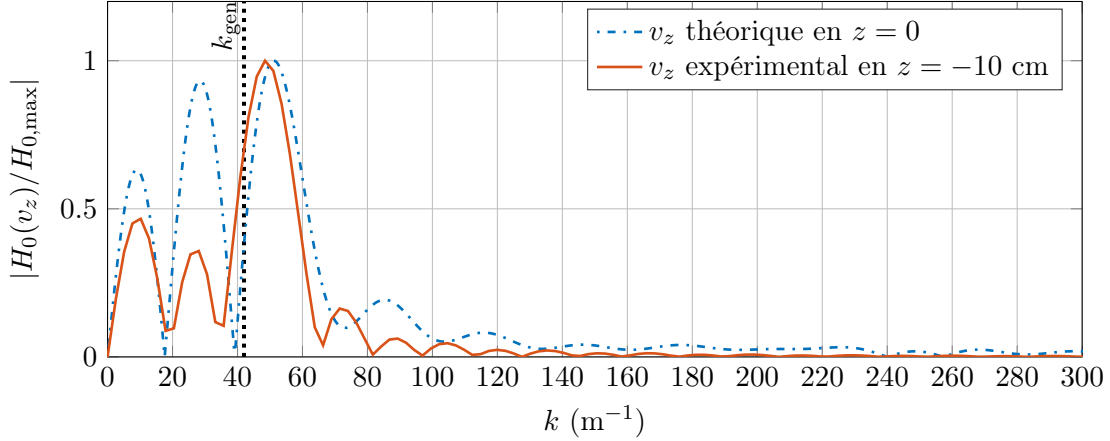




**FIGURE IV.7** – Champs de vitesse dans un plan horizontal localisé 10 cm sous le générateur centré en  $(x, y) = (0, 0)$  et générant une onde à  $\omega_0/N_h = 0.5$ . Les colonnes de gauche et de droite montrent respectivement la vitesse radiale et la vitesse orthoradiale. (a) et (b) sont des expériences menées sans rotation tandis que (c) et (d) sont menées à  $f/N_h = 0.3$ . La zone noire est extérieure au cylindre de la cuve d’observation et n’a donc pas de signification.

la vitesse verticale effective  $v_z(z_0)$  de l’onde mesurée à une profondeur  $z_0$ , et l’amplitude de la vitesse verticale du générateur  $a\omega_0$ , où  $a$  est l’amplitude de la fonction de Bessel correspondant à l’amplitude du cylindre central. Pour pouvoir négliger la propagation, les mesures sont prises en  $z^* = 0$ , la position la plus proche du générateur où l’on peut obtenir des vitesses fiables par PIV. Nos résultats sont présentés dans la figure IV.11 pour trois vitesses de rotation différentes. Pour un  $f$  constant, l’efficacité augmente avec  $\omega_0$ . En effet, lorsque  $\omega_0$  augmente, les ondes deviennent plus verticales et leurs mouvements s’alignent sur le mouvement du générateur. À  $\omega_0$  constant, l’efficacité diminue avec la rotation. En rotation, une partie de l’énergie injectée est transformée en vitesse orthoradiale. En plus d’une vitesse selon  $z$  et  $r$ , il existe une vitesse selon  $\theta$  (comme on le voit sur la figure IV.7(d)), il doit donc y avoir sous le générateur une zone de transition qui diminue son efficacité. Cela est d’autant plus vrai que  $f$  est important.

Pour une vitesse de forçage  $a\omega_0$ , on peut estimer le maximum de la vitesse verticale en fonction de  $f$  et  $\omega_0$ . Pour cela, on considère que le cylindre central pousse le fluide d’une distance  $a$ . Si l’on suppose maintenant que le fluide est poussé dans la direction définie par l’angle de propagation des ondes gravito-inertielles  $\beta_0$  (voir équation (IV.4)), le mouvement vertical effectif sera alors  $a \sin \beta_0$ .



**FIGURE IV.8** – Transformée de Hankel de la fonction de Bessel tronquée utilisée pour régler les amplitudes des cames du générateur d’onde et transformée de Hankel de la vitesse verticale mesurée 10 cm sous le générateur. La ligne pointillée noire représente la valeur  $k_{\text{gen}}$  de la fonction de Bessel utilisée pour régler les amplitudes.

Ainsi la vitesse verticale maximale possible est donnée par:

$$v_{z,max} = a\omega_0 \sin \beta_0 \quad (\text{IV.31})$$

$$= a\omega_0 \sqrt{\frac{\omega_0^2 - f^2}{N_h^2 - f^2}}. \quad (\text{IV.32})$$

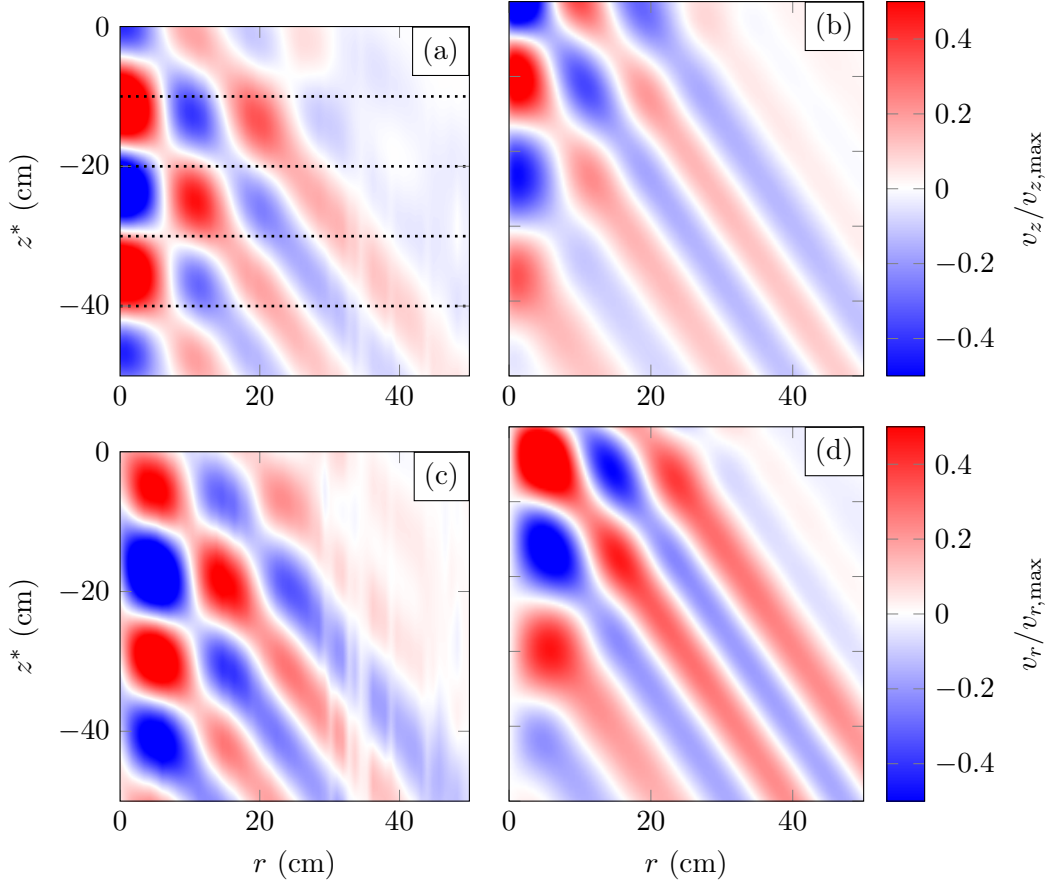
Cette vitesse permet de définir une efficacité maximale,  $v_{z,max}/(a\omega_0)$ , qui est aussi représentée sur la figure IV.11 par des lignes continues pour les différentes vitesses de rotation. Comme attendu, les efficacités mesurées sont toujours situées sous ces lignes. Plus la rotation augmente, plus l’efficacité mesurée s’éloigne de l’efficacité maximale ce qui montre bien le rôle que joue la vitesse orthoradiale, qui augmente avec  $f$ , dans la perte d’efficacité du générateur. On observe une chute importante de l’efficacité pour les valeurs les plus élevées de  $\omega_0/N_h$  cette caractéristique est probablement liée à la diminution de l’échelle visqueuse dans le régime  $\omega_0$  proche de  $N_h$  (voir figure IV.3).

## 4 Observation de non-linéarités

Pour le moment, nous nous sommes intéressés uniquement à la dynamique linéaire des ondes axisymétriques. Dans le chapitre précédent les ondes gravito-inertielles pouvaient être instables par TRI. Une question légitime est donc de savoir s’il existe un analogue de la TRI dans une configuration axisymétrique. Pour cela nous proposons deux approches. La première, une approche analytique pour comprendre si les termes non-linéaires permettent d’obtenir des conditions de résonance. La deuxième, une approche expérimentale où l’on cherchera le signe de l’apparition de la TRI grâce aux spectres temps-fréquence.

### 4.a Equation de propagation non-linéaire

Dans le chapitre I, nous avons vu que les ondes planes sont solutions des équations de la dynamique linéaire et non-linéaire. De façon similaire, nous allons détailler les équations non-linéaires régissant la dynamique des ondes axisymétriques et nous discuterons des solutions. Nous nous limiterons ici au cas  $f = 0$  et  $N_h$  homogène dans le fluide mais les calculs peuvent être étendus aux



**FIGURE IV.9** – (a), (c) Mesures de la vitesse verticale (a) et radiale (c) dans un plan vertical passant par l’axe central du générateur. Le générateur est réglé en fonction de Bessel comme sur la figure IV.4 et fonctionne à  $\omega_0/N_h = 0.79$  et  $f/N_h = 0.2$ . (b), (d) Prédiction correspondante en utilisant l’équation (IV.29). Les lignes pointillées sur (a) représentent les profondeurs utilisées pour tracer les amplitudes des vitesses présentées en figure (IV.10). L’abscisse de l’axe vertical est  $z^* = z + 10$  cm, ainsi le générateur est situé en  $z^* = 10$  cm.

cas avec rotation et en stratification non-linéaire. On supposera de plus une invariance selon  $\theta$ .

L’équation de Navier Stokes donne:

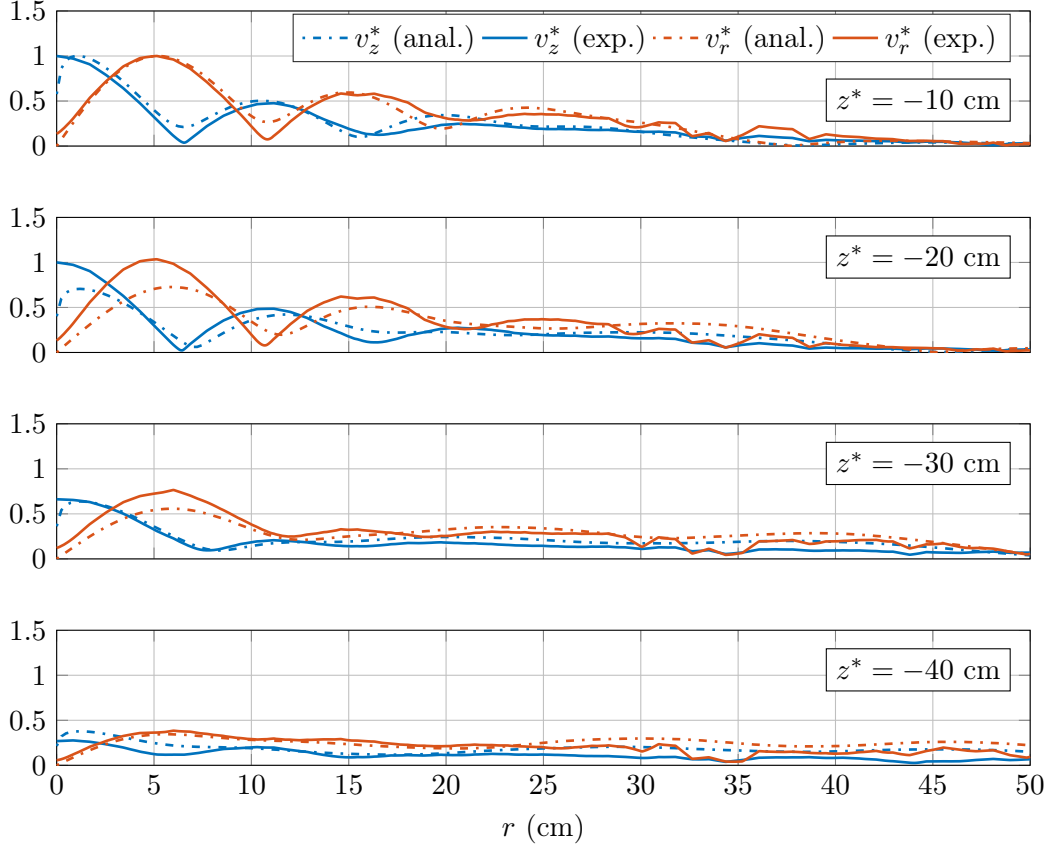
$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p - b \mathbf{e}_z, \quad (\text{IV.33})$$

où  $b$  est la flottabilité définie par  $b = -g\rho'/\rho_0$ . En notant le rotationnel comme:

$$\mathbf{c} = \nabla \wedge \mathbf{v}. \quad (\text{IV.34})$$

L’équation de vorticit e s’écrit:

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{c} = (\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nabla \wedge (b \mathbf{e}_z) \quad (\text{IV.35})$$



**FIGURE IV.10** – Comparaison des amplitudes expérimentales et théoriques des champs de vitesses verticale et radiale,  $v_z^*$  et  $v_r^*$ , aux profondeurs indiquées dans la figure IV.9. Les données ont été normalisées par l'amplitude maximale à  $z^* = -10$  cm. Les lignes pleines représentent les vitesses obtenues par la solution analytique de l'équation de propagation (IV.29) et les lignes tiretées représentent les vitesses mesurées.

### Fonction courant

En introduisant  $\Psi = \psi \mathbf{e}_\theta$  telle que<sup>4</sup>:

$$\mathbf{v} = \nabla \wedge (\Psi). \quad (\text{IV.36})$$

Notons qu'il n'y a pas de vitesse selon  $\theta$  car  $f = 0$ . Avec cette définition on retrouve les équations (IV.14) et (IV.15) de la partie précédente:

$$v_r = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (\text{IV.37})$$

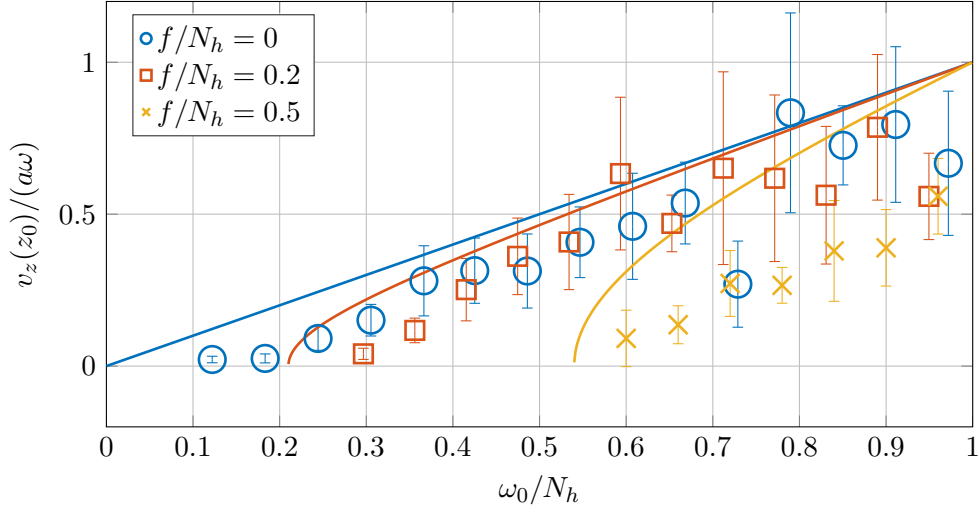
$$v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial r \psi}{\partial r}. \quad (\text{IV.38})$$

En utilisant

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \Psi) = \nabla \cdot (\nabla \Psi) - \nabla^2 \Psi \quad (\text{IV.39})$$

$$= -\nabla^2 \Psi, \quad (\text{IV.40})$$

4. La fonction courant est une grandeur vectorielle. Cette propriété est capitale car les opérateurs s'appliquent aussi à  $\mathbf{e}_\theta$ .



**FIGURE IV.11** – Mesures de l’efficacité du générateur d’onde,  $v_z(z_0)/a\omega_0$ , en fonction de la pulsation pour trois vitesses de rotation différentes. Les lignes représentent l’efficacité maximale  $v_{z,max}/(a\omega_0)$ .

l’équation (IV.35) devient

$$\frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial t} - ((\nabla \wedge \Psi) \cdot \nabla)(\nabla^2 \Psi) = -(\nabla^2 \Psi \cdot \nabla) \cdot (\nabla \wedge \Psi) - \nabla \wedge (b \mathbf{e}_z). \quad (\text{IV.41})$$

Compte tenu de l’hypothèse d’invariance selon  $\theta$ ,  $\nabla^2 \Psi$  est orienté selon  $\mathbf{e}_\theta$ , ainsi

$$(\nabla^2 \Psi \cdot \nabla) \cdot (\nabla \wedge \Psi) = (\nabla^2 \Psi \cdot \nabla) \cdot \mathbf{v} \quad (\text{IV.42})$$

$$= 0. \quad (\text{IV.43})$$

On obtient alors

$$\frac{\partial \nabla^2 \Psi}{\partial t} - ((\nabla \wedge \Psi) \cdot \nabla)(\nabla^2 \Psi) = -\nabla \wedge (b \mathbf{e}_z) \quad (\text{IV.44})$$

En introduisant  $\psi$  dans cette équation et en sachant que

$$(\nabla \wedge \Psi) \cdot \nabla U \mathbf{e}_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \left( \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial r \psi}{\partial r} \frac{\partial U}{\partial z} \quad (\text{IV.45})$$

$$= -\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{1}{r} \frac{\partial r U}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \psi}{\partial r} \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (\text{IV.46})$$

on obtient

$$\frac{\partial \Delta_h \psi}{\partial t} - J(\psi, \Delta_h \psi) = \frac{\partial b}{\partial r}, \quad (\text{IV.47})$$

où  $\Delta_h$  est la projection horizontale du Laplacien définie précédemment et  $J$  le jacobien défini comme

$$J(f_1, f_2) = \frac{1}{r} \frac{\partial r f_1}{\partial r} \frac{\partial f_2}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial r f_2}{\partial r} \frac{\partial f_1}{\partial z}. \quad (\text{IV.48})$$

### Equations couplées

La conservation de la masse donne la deuxième équation couplée

$$\frac{\partial b}{\partial t} + J^*(\psi, b) = N_h^2 \frac{1}{r} \frac{\partial r \psi}{\partial r}, \quad (\text{IV.49})$$

$$(\text{IV.50})$$

avec

$$J^*(\psi, b) = \frac{1}{r} \frac{\partial r \psi}{\partial r} \frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial b}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (\text{IV.51})$$

Nous obtenons ainsi deux équations couplées possédant chacune un terme non-linéaire. Nous allons maintenant calculer la valeur de ces termes dans le cas d'un mode de Bessel.

### Termes non-linéaires d'un mode de Bessel

Supposons que  $\psi = \psi_0 J_1(k_0 r) \exp(i(m_0 z - \omega_0 t))$ .  $\psi$  vérifie alors:

$$r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + r \frac{\partial \psi}{\partial r} + (k_0^2 r^2 - 1)\psi = 0. \quad (\text{IV.52})$$

Alors le Laplacien vectoriel horizontal  $\theta$ ,  $\Delta_h$ , s'écrit comme

$$\Delta_h \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (\text{IV.53})$$

$$= \left( \frac{1 - k_0^2 r^2}{r^2} - \frac{1}{r^2} \right) \psi - m_0^2 \psi \quad (\text{IV.54})$$

$$= -(k_0^2 + m_0^2)\psi. \quad (\text{IV.55})$$

Dans ce cas

$$J(\psi, \Delta_h \psi) = -(k_0^2 + m_0^2)J(\psi, \psi), \quad (\text{IV.56})$$

$$= 0 \quad (\text{IV.57})$$

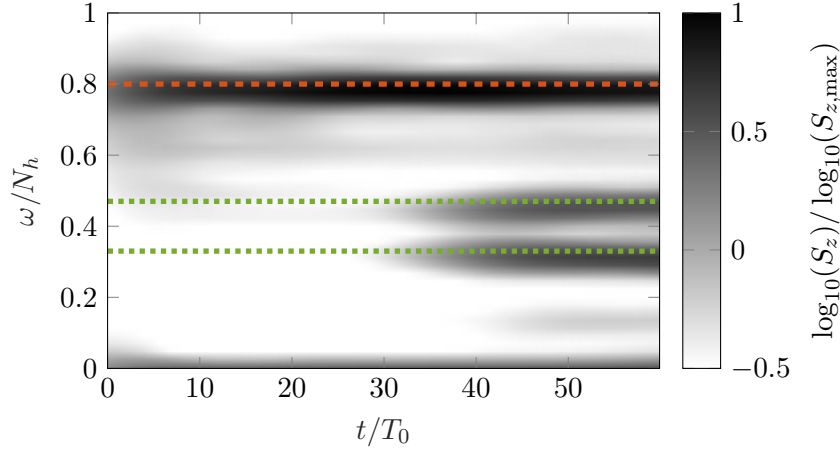
le terme non-linéaire de l'équation (IV.48) est nul. En utilisant les expressions (IV.20) et (IV.9),  $b = -g\rho'/\rho_0$  s'exprime comme

$$b = \psi_0 \frac{i k_0 N_h^2}{\omega_0} J_0(k_0 r) \exp(i(m_0 z - \omega_0 t)). \quad (\text{IV.58})$$

Le terme non-linéaire de l'équation (IV.49) vaut alors

$$J^*(\psi, b) = -\psi_0^2 \frac{i k_0^2 N_h^2 m_0}{\omega_0} [J_0^2(k_0 r) + J_1^2(k_0 r)] \exp(2i(m_0 z - \omega_0 t)). \quad (\text{IV.59})$$

Ce terme est non nul. Les modes de Bessel ne sont donc pas solutions des équations non-linéaires. La différence avec le cas cartésien réside dans la relation entre  $b$  et  $\psi$ . En effet, dans le cas des ondes planes monochromatiques,  $b$  et  $\psi$  sont proportionnels alors que dans le cas des modes de Bessel ils ne le sont pas. L'un est une fonction de Bessel d'ordre 0, l'autre une fonction de Bessel d'ordre 1. On peut cependant évaluer l'importance relative de ce terme. Pour cela, il faut le comparer au terme de droite de l'équation (IV.49). Le rapport du terme non linéaire à ce dernier terme est de l'ordre de  $d_z m_0$ , où  $d_z$  est le déplacement vertical typique et  $m_0$  le nombre d'onde vertical. D'après la figure IV.5, le déplacement vertical maximal vaut 15 mm (amplitude du mouvement du cylindre central) et la longueur d'onde verticale vaut environ 20 cm soit  $m_0 \approx 30 \text{ m}^{-1}$ . Ce rapport vaut 0.5.



**FIGURE IV.12** – Diagramme temps-fréquence d’un mode de Bessel généré à  $\omega_0/N_h = 0.8$ ,  $f/N_h = 0.3$  avec une amplitude du cylindre central de 15 mm. Le spectre est réalisé sur le champ de vitesse horizontale. Les maxima de pulsation se trouvent à  $\omega_0/N_h = 0.8$  (ligne tiretée orange),  $\omega_1/N_h = 0.47$  et  $\omega_2/N_h = 0.33$  (lignes pointillées vertes).

Le terme non-linéaire est donc responsable de près d’un tiers de l’évolution temporelle de  $b$  dans notre système. Ce terme non-linéaire peut également expliquer une partie de la différence entre les mesures et la solution analytique (voir figure IV.10).

Nous obtenons donc deux équations couplées. Les modes de Bessel sont solutions de ces deux équations dans le domaine linéaire mais ne sont solutions que d’une de ces équations lorsque l’on prend en compte les non-linéarités.

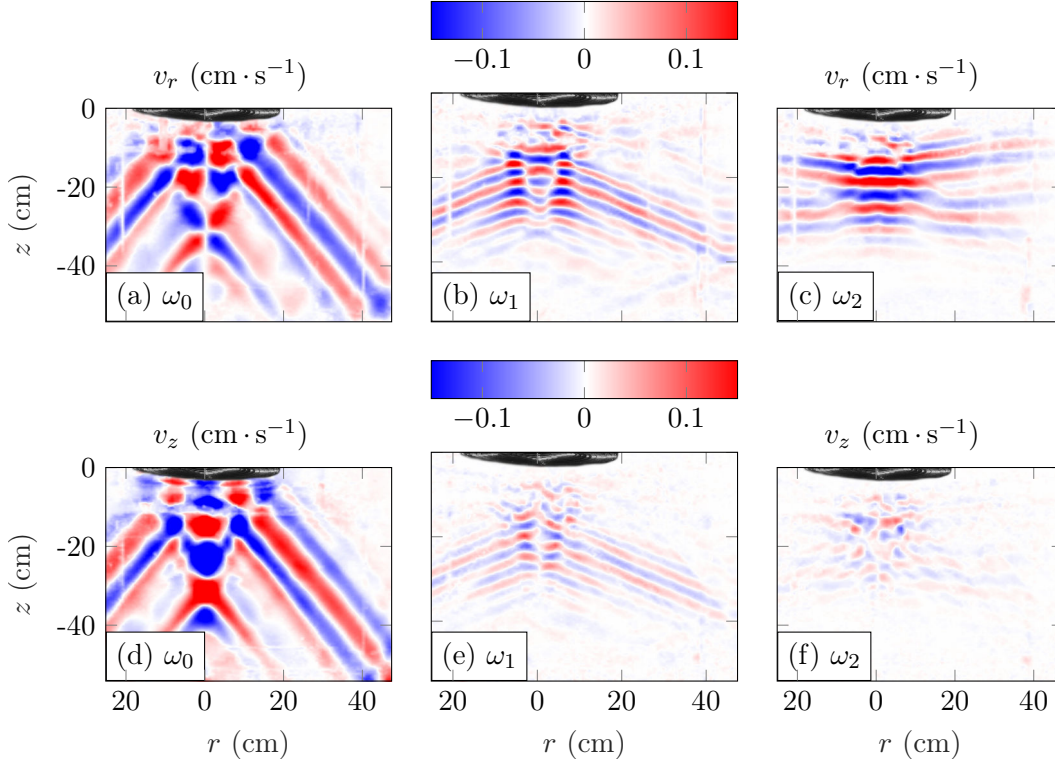
### A propos de la TRI

Un calcul analogue à celui mené sur la TRI en géométrie cartésienne peut être fait jusqu’aux équivalents des équations (III.13), (III.14), (III.15). On obtient toujours des produits d’exponentielles selon  $z$  et  $t$  mais des produits de fonctions de Bessel d’ordre 0 et 1 selon  $z$ . Les conditions de résonance temporelle  $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$  et de résonance spatiale selon la verticale  $m_0 = m_1 + m_2$  restent donc vérifiées mais il est impossible d’obtenir l’équivalent selon  $r$ . En effet, contrairement aux exponentielles, un produit de fonction de Bessel  $J_q(k_1 r)J_s(k_2 r)$  ne peut être égal à une fonction de Bessel  $J_p(k_0 r)$ , quels que soit  $p$ ,  $q$  et  $s$  égaux à 0 ou 1.

L’approche analytique proposée ne permet donc pas de prévoir les propriétés de la TRI en géométrie axisymétrique. Dans la partie suivante nous allons détailler les résultats d’une expérience qui rappellent fortement la TRI et qui explique pourquoi le modèle décrit ci-dessus ne permet pas de conclure quant aux conditions de résonance.

### 4.b Observation de non-linéarités résonantes

De façon similaire aux expériences précédentes (voir par exemple figure IV.5), une onde est générée à  $\omega_0/N_h = 0.8$  et  $f/N_h = 0.3$ . Un spectre temps-fréquence, présenté en figure IV.12, est réalisé qui rappelle fortement la figure III.4 faite dans le cas de la TRI en géométrie à deux dimensions. Ce spectre présente trois pulsations principales qui vérifient la condition de résonance temporelle  $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$ . Des images du champ de vitesse filtré autour de ces trois pulsations sont montrées sur la figure IV.13. Il semble que l’onde primaire donne bien naissance à deux ondes secondaires. Les nombres d’onde verticaux vérifient la condition de résonance  $m_0 = m_1 + m_2$  (si

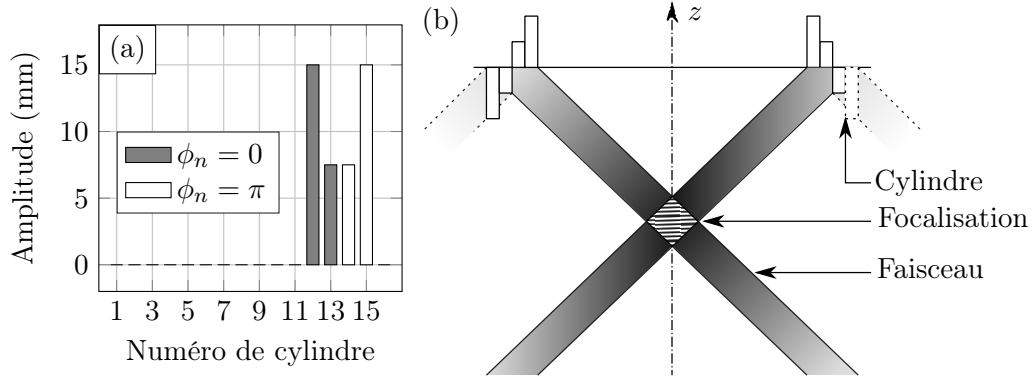


**FIGURE IV.13** – Champs de vitesse radiale ((a), (b) et (c) compté positivement si la vitesse est dirigée vers la droite de l'image) et verticale ((d), (e) et (f)) émis par le générateur fonctionnant en mode de Bessel à  $\omega_0/N_h = 0.8$ ,  $f/N_h = 0.3$  avec une amplitude du cylindre central de 15 mm et filtrés temporellement autour des 3 pulsations principales de la figure IV.12. (a) et (d) correspondent à un filtrage autour de la fréquence de fonctionnement du générateur. (b) et (e) correspondent à un filtrage autour de  $\omega_1/N_h = 0.47$ . (c) et (f) correspondent à un filtrage autour de  $\omega_2/N_h = 0.33$ . Les nombres d'onde verticaux mesurés sont  $|m_0| = 32 \text{ m}^{-1}$ ,  $|m_1| = 109 \text{ m}^{-1}$  et  $|m_2| = 76 \text{ m}^{-1}$ .

l'on prend  $m_0$  et  $m_1$  positif et  $m_2$  négatif). La mesure d'un nombre d'onde horizontal ne donne pas de résultat concluant sur la relation pouvant exister entre ceux-ci. Il est intéressant de remarquer que cette instabilité brise l'invariance par  $\theta$ . En effet pour avoir une telle invariance, la vitesse radiale doit être nulle en  $r = 0$ . C'est ce que l'on voit pour l'onde primaire (figure IV.12(a)) mais pas sur les ondes secondaires (figure IV.12(b) et (c)), la vitesse radiale étant maximum en  $r = 0$ . À l'inverse, c'est la vitesse verticale qui présente une antisymétrie par rapport à l'axe  $r = 0$ . C'est une brisure spontanée de la symétrie du problème

Nous avons observé une instabilité résonante temporellement et spatialement selon  $z$ , mais les mesures ne permettent pas de conclure sur les conditions de résonance spatiale selon  $r$ . Elles montrent que le modèle analytique n'est pas adapté à la description de ce phénomène. En effet, nous supposons le champ de vitesse axisymétrique avec comme conséquence directe une vitesse radiale nulle en  $r = 0$ . Or, la vitesse radiale de l'onde secondaire 2 est justement maximale en  $r = 0$ . Pour une solution qui respecte les observations il faudrait une dépendance de la structure de l'onde avec  $\theta$ , avec une modulation de la vitesse radiale par  $\cos \theta$  par exemple. Une étude plus complète prenant en compte une structure azimutale est donc nécessaire pour expliquer les observations. On peut par exemple imaginer une modulation du champ selon  $\theta$  par  $\cos(n\theta)$  où  $n$  est une quantification de la dépendance azimutale. Dans ce cas, il est probable qu'il existe également une condition de résonance spatiale selon  $\theta$ . Nous avons commencé à discuter de ces résultats avec Leo





**FIGURE IV.14** – (a) Amplitudes et phases des cylindres pour le générateur configuré en bourrelet. (b) Schéma de l’onde émise à pulsation constante depuis le bourrelet. Dans la zone de focalisation, l’amplitude de l’onde doit augmenter fortement.

Maas, un spécialiste de l’analyse des ondes internes, mais je n’ai pas eu le temps d’approfondir cette hypothèse au cours de ma thèse.

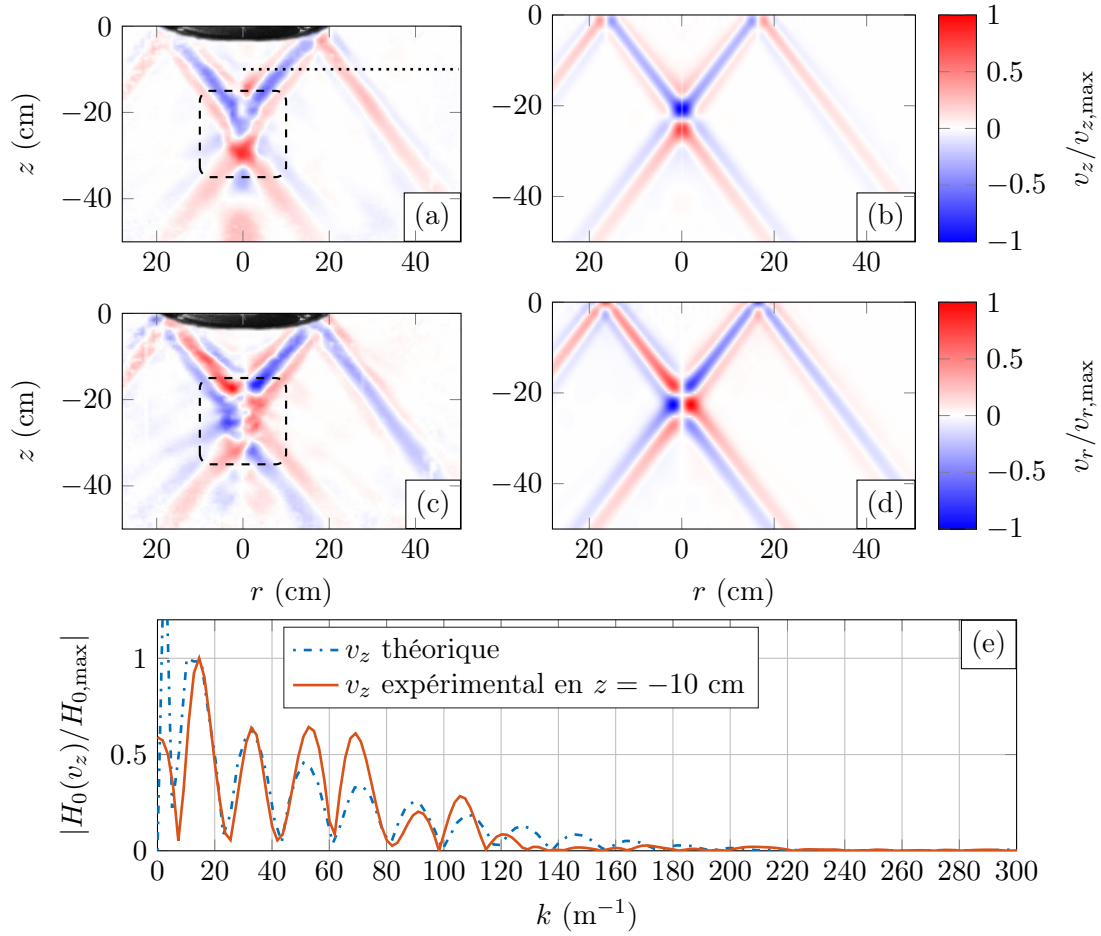
Nous avons vu que les modes de Bessel sont adaptés à la description d’une onde axisymétrique dans le régime linéaire, mais ne permettent pas de conclure quant aux conditions de la TRI dans cette géométrie. Expérimentalement, lorsque l’onde atteint un régime non-linéaire, on observe des instabilités partiellement résonantes qui rompent spontanément la symétrie du système. Nous allons maintenant utiliser le générateur dans une toute autre configuration où les ondes seront beaucoup plus localisées spatialement, pour démontrer la polyvalence de ce générateur mais également pour introduire le chapitre suivant où cette configuration sera utilisée pour étudier des effets de focalisation.

## 5 Propagation d’un bourrelet

Pour cette deuxième série d’expériences, on règle le générateur dans la configuration décrite dans la figure IV.14(a). Dans cette configuration, que nous nommons "bourrelet", l’excitation est localisée sur 4 des cylindres les plus externes, le dernier étant immobile pour éviter une émission non contrôlée par les bords. Le but est de générer un faisceau en forme de cône qui se focalise sur l’axe central. La figure IV.14(b) montre que lorsque le faisceau se propage vers le centre, il va se renforcer par un effet de focalisation géométrique. C’est un phénomène intéressant pour émettre un faisceau contrôlé, intense et localisé. On peut voir ce dispositif comme un analogue axisymétrique de l’expérience de collision de faisceaux d’onde interne de Teoh *et al.* (1997). Des expériences en géométrie axisymétrique ont été menées par Duran-Matute *et al.* (2013), mais leur dispositif expérimental, à l’inverse du nôtre, ne permet pas un contrôle sur la forme et l’amplitude de l’onde.

Les figures IV.15(a) et (c) présentent les vitesses verticale et radiale de l’onde conique émise depuis le bourrelet. Les solutions analytiques correspondantes, obtenues par la même procédure que celle décrite dans la partie sur le mode de Bessel, sont présentées sur les figures IV.15(b) et (d). Les champs de vitesse se ressemblent lorsque l’on est pas trop proche de  $r = 0$ . Sur la figure IV.15(e), qui montre les fréquences spatiales horizontales contenues dans un bourrelet, on voit que les fréquences théoriques calculées à partir de la forme du générateur (voir figure IV.14(a)) sont en assez bon accord avec les fréquences mesurées expérimentalement 10 cm sous le générateur. Comme dans le cas du mode de Bessel, le générateur d’onde transmet relativement bien la structure de l’onde.

À cause de l’effet de focalisation, on s’attend à ce que des effets non-linéaires apparaissent.



**FIGURE IV.15** – (a), (c) Mesure des vitesses verticale (a) et radiale (c) (comptée positivement si la vitesse est dirigée vers la droite de l'image) dans un plan vertical passant par l'axe central du générateur. Le générateur est centré en (0,0) et est réglé en mode bourrelet à  $\omega_0/N_h = 0.85$  et  $f/N_h = 0.2$ . Le carré pointillé souligne la zone où les effets non-linéaires apparaissent. (b), (d) Prédiction correspondante en utilisant l'équation (IV.29). (e) Transformée de Hankel d'ordre 0 de la vitesse verticale 10 cm sous le générateur le long d'une coupe horizontale représentée dans (b) par une ligne pointillée et transformée de Hankel de la vitesse verticale théorique calculée à partir de la forme du générateur.

En effet, dans la zone entourée, la solution théorique, qui ne prend pas en compte les effets non linéaires, diffère de façon significative de champ expérimental. Ceci est particulièrement marqué dans la figure IV.15(c) où des structures à petites échelles sont observées dans la zone de focalisation. Nous reviendrons sur ces instabilités dans le chapitre suivant avec un contexte expérimental légèrement différent qui permettra d'augmenter la focalisation de l'énergie.

## Conclusion et perspectives

Ce chapitre a présenté un nouveau générateur d'onde, d'une conception inspirée de celui de Gostiaux *et al.* (2006), sur lequel des cylindres génèrent des mouvements verticaux qui produisent des ondes gravito-inertielles. À l'inverse d'autres générateurs d'ondes axisymétriques (Duran-Matute *et al.*, 2013; Le Dizès, 2015), ce générateur a la particularité de générer des ondes dont la forme peut être contrôlée finement en ajustant l'amplitude et la phase de chaque cylindre. Nous avons montré que les modes de Bessel conviennent à la décomposition du champ d'onde et permettent de modéliser sa propagation linéaire. Ce générateur peut être utilisé pour générer des champs d'onde dans différentes configurations, nous en avons étudié deux. La première, un mode de Bessel tronqué, pour lequel les mesures de vitesses effectuées dans un plan vertical et dans un plan horizontal ont montré la qualité de la génération des ondes dans un milieu stratifié avec et sans rotation. De plus, nous avons vérifié la relation de dispersion pour plusieurs fréquences et différents paramètres de Coriolis. Le champ de vitesse mesuré est en accord avec la solution analytique. La deuxième configuration, appelée *bourrelet*, montre la polyvalence du générateur d'onde et les possibilités offertes pour la génération d'ondes axisymétriques. Une propriété intéressante est la possibilité de focaliser des ondes.

Ce nouveau générateur offre de nombreuses possibilités permettant de mieux comprendre la dynamique des ondes gravito-inertielles dans cette géométrie. À notre connaissance il n'existe pas de description de la TRI axisymétrique, nous avons vu que dans ce cas les conditions de résonance semblent plus complexes avec des modes de Bessel qu'avec des ondes planes. Un projet futur serait d'utiliser ce générateur pour reproduire des mouvements de surface non périodiques et simuler l'excitation induite par les tempêtes dans les océans. Le but serait de voir comment les ondes ainsi émises se propagent et mélangent le fluide à différentes profondeurs. La rotation permet quant à elle de se rapprocher des conditions géophysiques.

On a montré expérimentalement que, lorsque la focalisation est établie, l'amplitude augmente localement, ce qui entraîne une instabilité. Dans le chapitre suivant, nous nous intéresserons de plus près à la génération d'instabilités par le bourrelet. Pour cela nous utiliserons de concert deux mécanismes permettant d'augmenter localement l'énergie de l'onde: la focalisation géométrique que nous avons déjà étudiée et le ralentissement de la vitesse de groupe par l'utilisation d'une stratification non-linéaire.

## Chapitre V



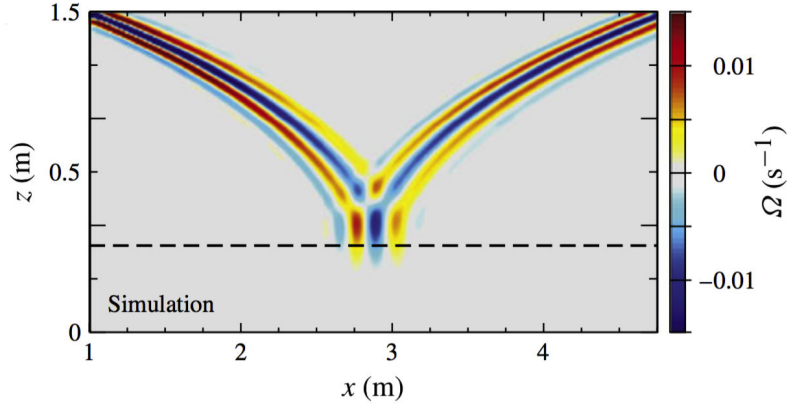
Perturbations de surface induites par une onde gravito-inertielle, Cape Cod Bay, USA.

### Introduction

Le générateur axisymétrique présenté dans le chapitre précédent est un outil polyvalent pour l'émission d'ondes gravito-inertielles. Il permet en effet de changer facilement les profils des ondes émises ainsi que leur pulsation. Parmi les deux profils utilisés, le "bourrelet" montre une caractéristique intéressante, celle de pouvoir focaliser l'énergie au sommet du cône de propagation des ondes. Pour l'expérience menée dans la figure IV.15, au sommet du cône d'émission l'onde est instable. Cette expérience rappelle Teoh *et al.* (1997) où deux ondes planes de mêmes caractéristiques mais de direction de propagation horizontale opposée interagissent. L'avantage de notre configuration est de pouvoir focaliser plus d'énergie grâce à une focalisation à trois dimensions.

De plus, dans ce chapitre, nous allons jouer sur la stratification pour favoriser l'apparition de ces instabilités. En utilisant une stratification non-linéaire, où  $N(z)$  diminue avec la profondeur, il va exister une profondeur de rebroussement,  $z_T$ , telle que  $N(z_T) = \omega_0$ . La figure V.1 issue de Paoletti *et al.* (2012) montre l'effet d'une telle stratification sur la propagation d'un faisceau d'onde monochromatique. Celle-ci courbe la trajectoire de l'onde et à la profondeur de rebroussement, l'onde se réfléchit.

La propagation d'ondes internes dans les stratifications non-linéaires est notamment étudiée pour reproduire des conditions océaniques. En effet comme nous l'avons vu dans la figure I.7(d), l'océan possède des zones où la stratification est plus marquée que dans les profondeurs. Ces variations de la pulsation de flottabilité avec la profondeur peuvent créer des réflexions et du mélange sur la pycnocline (Gayen et Sarkar, 2014) ou des réflexions sur la couche homogène superficielle de l'océan (Delisi et Orlanski, 1975; Thorpe, 1998). Les stratifications non-linéaires jouent également sur le facteur de transmission de l'onde (Ghaemsaïdi *et al.*, 2016; Mathur et Peacock, 2009; Nault et Sutherland, 2007).



**FIGURE V.1** – Vorticité d’une onde émise à  $(x = 1 \text{ m et } z = 1.5 \text{ m})$  après 40 oscillations, qui se propage dans une stratification exponentielle. La stratification possède un point de rebroussement pour l’onde à  $z_T = 0.424 \text{ m}$  (ligne pointillée). Dans cette simulation, la stratification varie exponentiellement d’un facteur 12 entre la surface et le fond. Tirée de Paoletti *et al.* (2012).

Dans ce chapitre, nous utiliserons une autre propriété des stratifications non-linéaires : celles-ci modifient la vitesse de groupe des ondes internes. En effet, à la profondeur de rebroussement  $z_T$ , non seulement l’onde se réfléchit mais sa vitesse de groupe s’annule. Si la focalisation de l’onde apparaît à la même profondeur  $z_T$ , on s’attend alors à une augmentation importante de l’énergie volumique. Trois mécanismes vont en effet participer à une accumulation de l’énergie. La focalisation du faisceau qui concentre géométriquement l’énergie au sommet du cône, la réflexion sur la barrière  $N(z_T) = \omega_0$ , qui va multiplier par deux l’énergie, et l’annulation de la vitesse de groupe, qui devrait théoriquement faire diverger l’énergie volumique. Expérimentalement, l’énergie volumique reste finie mais on s’attend tout de même à une forte amplification à cette profondeur.

La focalisation des ondes rappelle les expériences menées par Brouzet *et al.* (2016) dans une tout autre configuration sur les attracteurs d’ondes internes dont le but est de focaliser de l’énergie sur un cycle limite. En fonction de l’amplitude du forçage, on observe une transition graduelle d’une onde stable vers une onde instable avec des instabilités secondaires se répartissant sur un spectre discret, pour finir, à la plus grande amplitude par des instabilités présentes sur tout le spectre. Ce genre d’évènement est une signature de la transition vers la turbulence d’onde. Dans notre dispositif expérimental, on peut se demander s’il est possible d’observer ce phénomène. Comment vont évoluer les instabilités en fonction de l’amplitude du forçage? Quelle va être la sensibilité de ce phénomène à la pulsation du forçage? Est-ce-que l’on va transmettre de l’énergie à différentes fréquences via une cascade d’instabilités? Quelles vont être les échelles spatiales sélectionnées?

## 1 Démarche expérimentale

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que la focalisation associée à la propagation de l'onde sur un cône est un mécanisme pouvant créer des instabilités. Pour atteindre des régimes fortement non-linéaires, nous allons chercher à augmenter l'amplitude de la vitesse du fluide dans cette zone. Si on peut empêcher l'énergie de ressortir de cette zone de focalisation, en annulant la vitesse de groupe, alors l'énergie volumique locale devrait diverger. Dans la partie suivante, nous allons détailler comment réaliser cette annulation grâce à une stratification non-linéaire. Les expériences menées dans ce chapitre se font sans rotation ce qui constitue une première approche du problème. Je n'ai pas eu le temps au cours de ma thèse d'ajouter la rotation à la dynamique de ce système.

### 1.a Profil du générateur

Comme nous nous intéressons à la focalisation d'un faisceau d'ondes coniques, nous reprendrons le profil du bourrelet décrit dans le chapitre précédent avec une différence. On va changer légèrement le profil de l'excitation décrite dans la figure IV.14(a), afin d'éviter un pompage global du fluide. En effet, si on intègre la quantité de fluide déplacé par les cylindres :

$$\int_0^{+\infty} a(r) \cos(\omega_0 t + \phi_n) 2\pi r dr = 2\pi \int_0^{r_{\max}} a(r) \cos(\omega_0 t + \phi_n) r dr, \quad (\text{V.1})$$

cette quantité n'est pas nulle pour le profil proposé dans la figure IV.14(a). L'excitation créée par le générateur n'est alors pas localisée. Expérimentalement on observe des mouvements, faibles certes mais mesurables, sous le générateur alors que l'on voudrait une vitesse nulle en cet endroit. Pour cela, on choisira l'amplitude des cylindres comme:

$$a_{15} = 2.36a, \quad (\text{V.2})$$

$$a_{14} = a, \quad (\text{V.3})$$

$$a_{13} = 1.3a, \quad (\text{V.4})$$

$$a_{12} = 2.56a, \quad (\text{V.5})$$

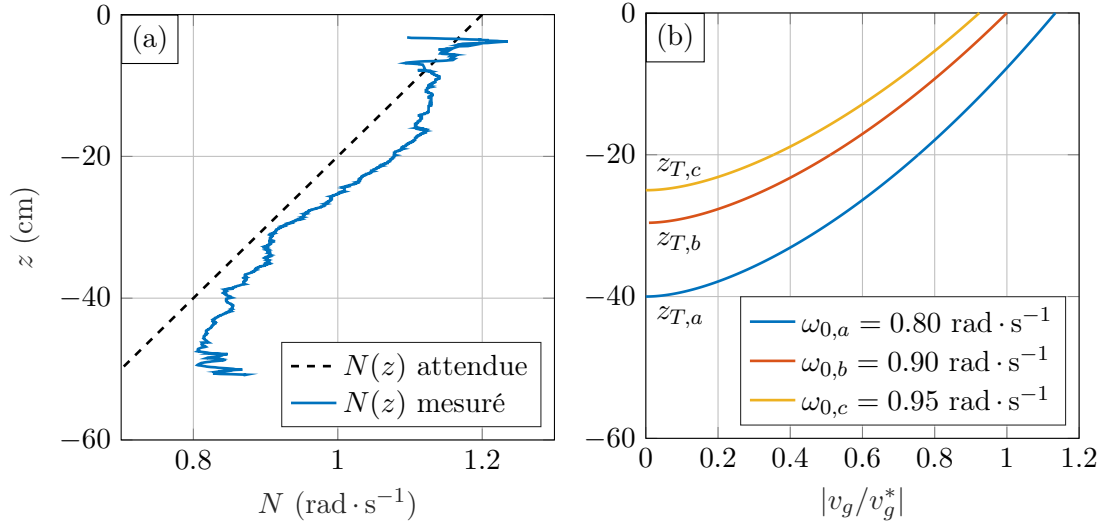
où  $a$  peut être choisi librement sur l'intervalle  $[0, 5.8]$  mm et l'amplitude des autres cylindres est nulle. Ce choix permet d'annuler l'intégrale de l'équation (V.1). Dans la suite nous réaliserons des expériences pour diverses valeurs de  $a$ , pour observer l'influence de l'amplitude du forçage sur l'apparition des instabilités.

### 1.b Stratification non-linéaire

Le but des expériences est donc d'annuler la vitesse de groupe au moment où le faisceau conique se focalise à la profondeur  $z_F$ . Pour cela, on va utiliser une stratification non-linéaire où  $N$  dépendra de la profondeur  $z$ . La réalisation d'une telle stratification est détaillée au chapitre I. La vitesse de groupe des ondes internes dépend de la pulsation de flottabilité  $N(z)$  selon:

$$|\mathbf{v}_g(\mathbf{z})| = \frac{\omega_0}{k_0 N(z)} \left( N(z)^2 - \omega_0^2 \right)^{1/2}. \quad (\text{V.6})$$

Cette vitesse s'annule lorsque  $\omega_0 = 0$  ou lorsque  $\omega_0 = N$ . Le premier cas n'est pas intéressant, car il ne correspond pas à une onde et le forçage est nul dans ce cas, nous allons donc nous intéresser au second. Pour que l'onde issue du générateur puisse se propager, la stratification doit tout d'abord vérifier  $N(z) > \omega_0$  jusqu'à une certaine profondeur, sinon l'onde générée serait évanescence dès  $z = 0$ .  $N(z)$  doit donc être une fonction décroissante avec la profondeur. Toutes sortes de stratifications sont alors envisageables. Paoletti *et al.* (2012) ont choisi une stratification exponentielle pour pouvoir faire varier sur un ordre de grandeur la valeur de  $N$  et se rapprocher ainsi de conditions océaniques. Nous avons choisi la stratification non-linéaire la plus simple, une stratification



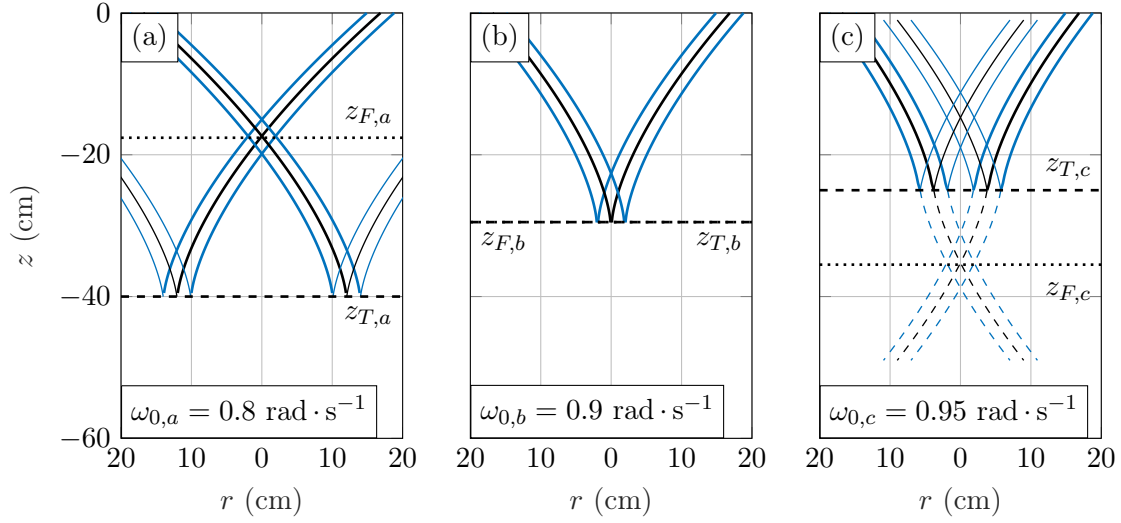
**FIGURE V.2** – (a) Pulsation de flottabilité attendue (identique à la figure I.15(a)) et pulsation de flottabilité mesurée en fonction de la profondeur. (b) Vitesses de groupe pour trois ondes se propageant à  $\omega_{0,a} = 0.80$ ,  $\omega_{0,b} = 0.9$  et  $\omega_{0,c} = 0.95$  dans une stratification donnée par  $N(z)$  attendue de la figure (a),  $v_g^*$  étant la vitesse de groupe en  $z = 0$  de l’onde se propageant à  $\omega_{0,b}$ . Pour des profondeurs supérieures à  $z_T$ , l’onde devient évanescence.

où  $N$  évolue de façon affine avec la profondeur.

Cette stratification affine choisie pour réaliser nos expériences est représentée par une ligne pointillée sur la figure V.2(a). Celle-ci varie de  $1.2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  en surface à  $0.6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  au fond. Cette gamme de pulsation a été choisie pour travailler dans le domaine de pulsation où le générateur a été caractérisé dans le chapitre précédent. De plus, les stratifications avec des valeurs de  $N$  proches de  $1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  sont facilement réalisées avec le matériel disponible au laboratoire. Nous avons essayé de mesurer les profils de densité avec la sonde conductimétrique de la même façon que ce qui a été fait dans les chapitres précédents. Pour le moment, les profils obtenus ne sont pas satisfaisants. Lors de la mesure avec la sonde conductimétrique, la vitesse de descente de la sonde semble jouer un rôle important sur la mesure. Il est possible que la mesure en stratification non-linéaire soit plus sensible à l’écoulement créé autour de la sonde lorsque celle-ci descend. Pour remédier à ce problème, nous avons mesuré indirectement  $N(z)$  grâce à l’angle de propagation d’une onde interne. La mesure ainsi obtenue est représentée par une courbe bleue continue sur la figure V.2(a). Cette mesure n’est pas idéale mais suffisante pour s’assurer que la stratification est bien non-linéaire, la connaissance précise de la stratification n’est de toute façon pas nécessaire dans les expériences présentées dans ce chapitre.

Dans une telle stratification, la vitesse de groupe va donc varier avec la profondeur. Sur la figure V.2(b), où sont représentées en fonction de la profondeur les valeurs des vitesses de groupe pour trois pulsations différentes, on observe qu’au cours de sa propagation, la vitesse de groupe de l’onde va diminuer jusqu’à s’annuler en  $z_T$  tel que  $N(z_T) = \omega_0$ . À cette profondeur, l’onde incidente crée une onde transmise évanescence et une onde réfléchie. Une fois l’état stationnaire atteint, l’onde évanescence ne transmet pas d’énergie. Ainsi, l’onde réfléchie aura la même énergie que l’onde incidente, avec la même pulsation mais une vitesse de groupe dirigée vers le haut.

Nous nous sommes jusqu’à présent intéressés à l’évolution de la vitesse de groupe avec la profondeur. Cependant, la stratification non-linéaire va également changer la relation de dispersion



**FIGURE V.3** – Coupes verticales de la trajectoire d’une onde interne se propageant respectivement à (a)  $\omega_{0,a} = 0.8$ , (b)  $\omega_{0,b} = 0.9$  et (c)  $\omega_{0,c} = 0.95$  dans une stratification modèle représentée en pointillés dans la figure V.2(a) et pour un générateur en profil bourrelet. Les ondes représentées correspondent à celles de la figure V.2(b). La trajectoire de l’onde générée en surface est en traits gras, la trajectoire de l’onde réfléchi en  $z = z_T$  est en traits fins. Pour chacun des cas la profondeur du point de rebroussement  $z_T$  est indiquée par une ligne tiretée et la profondeur de focalisation  $z_F$  est indiquée par une ligne pointillée. Dans le cas de la figure (b) l’onde générée et l’onde réfléchi se confondent et  $z_F$  correspond à  $z_T$ . Dans le cas de la figure (c), l’onde réfléchi a été symétrisée en pointillés dans la zone où elle est évanescence, pour pouvoir définir une profondeur de focalisation effective.

locale et va de ce fait courber la trajectoire des rayons. La partie suivante est consacrée à ce phénomène.

### 1.c Trajectoire des ondes

La relation des ondes internes peut-être réécrite comme:

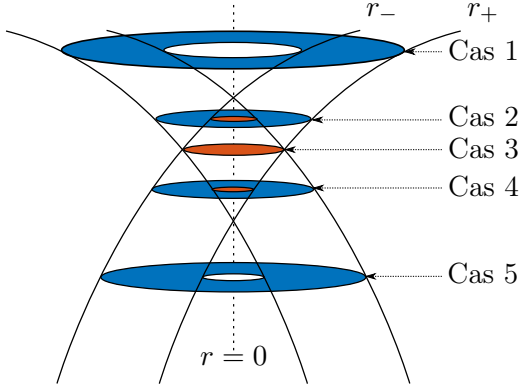
$$\sin^2 \beta_0(z) = \frac{\omega_0^2}{N^2(z)}. \quad (\text{V.7})$$

Pour que l’onde se propage effectivement de cette façon il faut que les variations de  $N(z)$  ne soient pas trop brutales sur une longueur d’onde verticale et respectent ainsi l’approximation WKB suivante (Broutman *et al.*, 2004):

$$m_0 \gg \left( \frac{k_0^2 N(z) \partial_z N(z)}{\omega_0^2 - f^2} \right)^{1/3}, \quad (\text{V.8})$$

où  $m_0$  est le nombre d’onde vertical et  $k_0$  le nombre d’onde horizontal. En pratique, pour un nombre d’onde horizontal typique de  $k_0 = 50 \text{ m}^{-1}$ , il faut que la longueur d’onde verticale,  $2\pi/m_0$ , soit très petite devant 40 cm. Cela reste vrai pour la majeure partie de la propagation. Cependant près de  $z_T$ , la longueur d’onde verticale diverge, la condition (V.8) n’est plus vérifiée et la trajectoire de l’onde n’obéit plus à la relation de dispersion (V.7). Par exemple, lors d’une variation brusque de la stratification devant la longueur d’onde verticale, une partie de l’onde se réfléchit. Ce phénomène





Cas	$r_+$	$r_-$	Condition	$s/\pi^2$
1	+	+	$\emptyset$	$r_+^2 - r_-^2$
2	+	-	$ r_+  >  r_- $	$r_+^2 - r_-^2/2$
3	+	-	$ r_+  =  r_- $	$r_+^2/2$
4	+	-	$ r_+  <  r_- $	$r_-^2 - r_+^2/2$
5	-	-	$\emptyset$	$r_-^2 - r_+^2$

**FIGURE V.4** – Schématisation du croisement du faisceau axisymétrique. Lorsque la coupe transversale est bleue il n’y a pas de croisement du faisceau. Lorsque la coupe transversale est orange, le faisceau se recouvre et la surface effective est divisée par deux. En suivant les bords interne et externe du faisceau,  $r_-$  et  $r_+$  le long de sa propagation, on constate que ceux-ci peuvent traverser l’axe central. On définira alors comme positif le rayon associé à un bord n’ayant pas traversé l’axe central et négatif le rayon d’un bord ayant traversé l’axe. 5 cas peuvent alors être distingués. Le tableau décrit ces cas en fonction du signe de  $r_+$  et  $r_-$  ainsi que d’une condition sur leur norme si nécessaire et donne la valeur de la surface effective de la section horizontale du cône de propagation.

restreint la validité de notre analyse au voisinage de  $z_T$ .

L’angle  $\beta_0(z)$  permet de reconstruire la trajectoire de l’onde, en supposant que celle-ci ne provient que des cylindres mis en mouvement. Ainsi, au fur et à mesure que l’onde va se propager vers le bas, celle-ci va se raidir puisque  $N(z)$  diminue, pour finir par être totalement verticale à la profondeur de rebroussement  $z_T$ . La figure V.3 montre les trajectoires de ces ondes pour 3 pulsations différentes. Trois cas peuvent alors apparaître. L’onde peut se focaliser avant d’atteindre le point de rebroussement (cas (a)  $z_{F,a} < z_{T,a}$ ), l’onde peut atteindre le point de rebroussement puis se focaliser (cas (c)  $z_{F,c} > z_{T,c}$ ) ou la focalisation et le rebroussement peuvent se faire à la même profondeur (cas (b)  $z_{F,b} = z_{T,b}$ ).

Nous allons maintenant estimer à l’aide d’un modèle simple l’importance de l’effet de la focalisation et du ralentissement de la vitesse de groupe sur l’amplitude de la vitesse verticale d’une onde interne lors de sa propagation dans une stratification non-linéaire.

### 1.d Modélisation de l’amplification

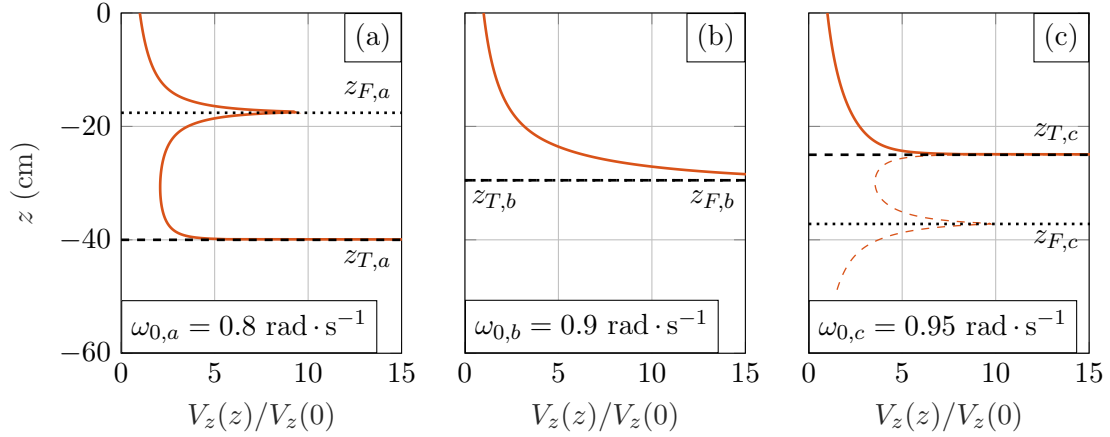
Nous allons supposer dans le modèle qui suit que l’état stationnaire est atteint. Ainsi à toute profondeur  $z$ , le flux d’énergie vertical entrant est égal au flux d’énergie vertical sortant donné par

$$\mathbf{\Pi}(z) \cdot \mathbf{e}_z s(z) = p(z) v_z(z) s(z), \quad (\text{V.9})$$

où  $\mathbf{\Pi}(z)$  est le vecteur de Poynting (voir chapitre I) et  $s(z)$  la surface effective de la section horizontale du cône de propagation à la profondeur  $z$ . Ainsi, cette quantité, exprimée par l’équation (V.9), est constante en moyenne sur une période sur toute la hauteur de propagation de l’onde. Localement on peut assimiler la forme de  $v_z(z, r, t)$  et  $p(z, r, t)$  à celle d’une onde plane monochromatique décrite par les équations du chapitre I

$$v_z(z, r, t) = A(z) \omega_0 \tan \beta(z) \exp(i(k_0 r + m_0 z - \omega_0 t)), \quad (\text{V.10})$$

$$p(z, r, t) = A(z) \frac{\omega_0^2 \rho_0}{k_0} \exp(i(k_0 r + m_0 z - \omega_0 t)). \quad (\text{V.11})$$



**FIGURE V.5** – Évolution de la vitesse verticale avec la profondeur donnée par l'équation (V.16) pour les trois ondes présentées en figure V.3(a), (b) et (c). Les profondeurs de focalisation  $z_F$  et de rebroussement  $z_T$  sont représentées respectivement par une ligne tiretée et par une ligne pointillée.

On peut alors écrire

$$|\langle \mathbf{\Pi}(z) \cdot \mathbf{e}_z s(z) \rangle| = \frac{A(z)^2 \omega_0^3 \rho_0}{2k_0} \tan \beta(z) s(z), \quad (\text{V.12})$$

les notations étant celles utilisées dans le chapitre I et reportées sur la table au début de ce manuscrit et  $\langle \rangle$  signifiant moyenne temporelle sur une période. L'amplitude de la vitesse verticale,  $V_z(z)$ , définie par  $v_z(z, r, t) = V_z(z) \exp(i(k_0 r + m_0 z - \omega_0 t))$ , peut alors s'exprimer dans notre approximation comme

$$V_z(z) = A(z) \omega_0 \tan \beta(z), \quad (\text{V.13})$$

$$(\text{V.14})$$

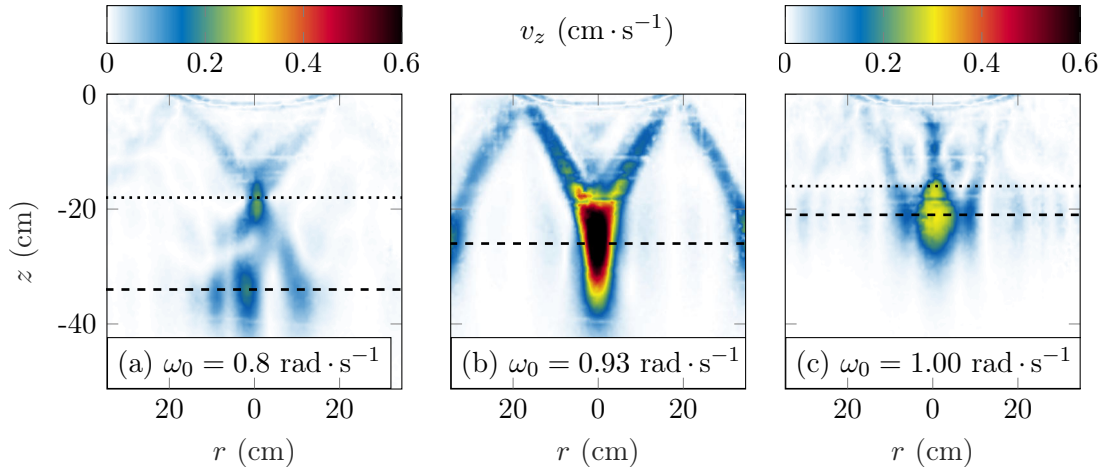
La quantité définie dans l'équation (V.12) étant constante,  $V_z(z)$  s'exprime comme

$$V_z(z) = \sqrt{2k_0 \frac{|\langle \mathbf{\Pi}(z) \cdot \mathbf{e}_z s(z) \rangle|}{\omega_0 \bar{\rho}}} \sqrt{\frac{\tan \beta(z)}{s(z)}}, \quad (\text{V.15})$$

$$\equiv \mathcal{C} \sqrt{\frac{\tan \beta(z)}{s(z)}}, \quad (\text{V.16})$$

où  $\mathcal{C}$  est une constante indépendante de  $z$ , regroupant des caractéristiques de l'onde et de la stratification. Pour calculer  $s(z)$ , considérons le faisceau d'une onde semblable à celui de la figure V.3(a) que nous avons à nouveau représenté en figure V.4. On observe deux situations différentes. Dans la première situation (cas 1 et cas 5 sur la figure V.4), le faisceau axisymétrique ne se recouvre pas et  $s$  s'exprime comme la différence entre la surface du cercle de plus grand rayon et la surface du cercle de plus petit rayon. Cependant lorsque le faisceau se recouvre, la situation est différente. Il y a un effet d'amplification (cas 2, 3 et 4 schématisés par un cercle orange sur la figure V.4), l'amplitude mesurée sera alors deux fois plus importante sur la partie où le faisceau se recouvre. Pour prendre en compte cet effet, la surface effective est comptée comme deux fois plus petite lorsqu'il y a recouvrement. Le tableau de la figure V.4 donne l'expression de  $s$  pour les différents cas discutés.

Cette expression permet notamment de tracer l'évolution de la vitesse verticale au cours de la propagation de l'onde. Bien que ce modèle n'intègre pas tous les détails de la dynamique de l'onde, il est quand même révélateur. Sur la figure V.5(a), (b) et (c), on a tracé l'évolution de



**FIGURE V.6** – Module de l’amplitude de la vitesse verticale obtenue après transformée de Hilbert et filtrage autour de la fréquence d’excitation pour un forçage à  $a = 0.5$  mm. Les trois cas présentés ici correspondent typiquement aux trois cas présentés dans la figure V.3. L’amplitude maximale de la vitesse verticale de (a), (b) et (c) vaut respectivement 0.23, 0.85 et 0.30  $\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$ . L’amplitude de la vitesse verticale typique sous le générateur vaut entre 0.02 et 0.03  $\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$ . La ligne pointillée (respectivement tiretée) représente la position approximative du point de focalisation (respectivement rebroussement).

l’amplitude de la vitesse verticale renormalisée par l’amplitude de la vitesse verticale en  $z = 0$ . L’amplitude de la vitesse verticale est amplifiée à deux profondeurs. En  $z_F$ , on attend une amplification d’un facteur 10 environ pour les cas des figures (a) et (c). Ce facteur d’amplification est un facteur géométrique et ne dépend pas de la valeur de  $z_F$  tant que  $z_F$  n’est pas trop proche de  $z_T$ . L’amplitude de la vitesse est aussi amplifiée au point de rebroussement  $z_T$  et tend vers l’infini mais très localement. Cette divergence ne sera bien évidemment pas observée car à cette profondeur l’approximation de WKB n’est plus vérifiée et la viscosité, non prise en compte dans le modèle, va limiter ce processus. Lorsque  $z_T$  et  $z_F$  sont confondus (figure V.5(b)), on observe une augmentation de la largeur de la zone de divergence de la vitesse. Bien qu’impossible à chiffrer dans le cadre de ce modèle, l’amplification de l’onde en cet endroit doit être la plus importante.

En conclusion, nous disposons d’un système, à notre connaissance jamais décrit dans la littérature, permettant de focaliser l’énergie des ondes internes dans une seule zone grâce à l’utilisation d’un faisceau de forme conique et d’une stratification non-linéaire. Cette focalisation provient de la somme de trois mécanismes distincts: la focalisation géométrique au sommet du cône de propagation, le ralentissement puis l’annulation de la vitesse de groupe et la réflexion sur la barrière  $z_T$  qui va renvoyer l’énergie dans la zone où  $V_z(z)$  est déjà amplifiée. Ce dernier mécanisme n’est d’ailleurs pas pris en compte dans le modèle qui a été présenté. La partie suivante est consacrée aux mesures expérimentales de cette amplification. Nous comparerons également ces mesures au modèle que nous venons de développer.

## 2 Amplification

Les expériences de cette partie et de la partie suivante ont été en partie réalisées par Samuel Boury, stagiaire de Master 2 que j’ai encadré et qui prendra la suite de ces expériences lors de sa thèse qui débutera en septembre 2017.

## 2.a Mesures expérimentales

Les mesures de vitesse sont réalisées par PIV dans un plan vertical passant par l'axe de symétrie du générateur. Dans un premier temps, nous avons réalisé des mesures pour une amplitude d'excitation minimale techniquement telle que  $a = 0.5$  mm avec une pulsation variant de 0.8 à  $1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  par pas de  $0.01 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Comme nous le verrons par la suite, à cette amplitude il n'y a pas de phénomènes non-linéaires. La figure V.6 montre le module de la vitesse verticale de l'onde interne en fonction de la profondeur pour 3 pulsations d'excitation différentes dans une stratification non-linéaire correspondant à la courbe de la figure V.2(a). Ces trois pulsations ont été choisies afin de se placer dans trois exemples semblables à ceux de la figure V.3. Les trajectoires des ondes ressemblent à celles prédites théoriquement et elles semblent relativement symétriques par rapport à l'axe  $r = 0$ .

Pour le cas de la figure V.6(a), on observe deux profondeurs où l'amplitude de la vitesse verticale est amplifiée. Ces deux profondeurs correspondent à  $z_F$  et  $z_T$ . On peut définir le facteur d'amplification de la vitesse verticale comme

$$q = \frac{\max(v_z)}{v_{\text{gen}}}, \quad (\text{V.17})$$

où le maximum est pris sur l'ensemble du champ de mesure de l'amplitude de la vitesse verticale et  $v_{\text{gen}}$  est la vitesse verticale typique sous le générateur. En étudiant, pour commencer, le cas de la figure V.6(a), et compte tenu des valeurs mesurées de l'amplitude de la vitesse verticale, on trouve des valeurs de  $q$  comprises entre 7 et 12, ce qui encadre la valeur trouvée dans le cadre du modèle présenté en figure V.5(a). Sur la figure V.6(c), on observe une plus large zone d'amplification car à la pulsation correspondant à cette figure, les deux positions  $z_F$  et  $z_T$  sont proches et les deux effets se superposent partiellement. Enfin, c'est dans le cas de la figure V.6(b) qu'on observe le plus grand facteur d'amplification. On constate que  $q$  est compris entre 30 et 40 et est donc bien plus important dans ce cas que pour les cas (a) et (c).

Nous avons vu que la pulsation de l'onde joue un rôle important sur le facteur d'amplification  $q$ , nous reviendrons dans la partie suivante sur l'évolution de ce facteur avec cette pulsation. Ce système expérimental permet d'obtenir des vitesses verticales très élevées à partir d'une excitation très faible ( $a = 0.5$  mm dans les exemples présentés). Nous étudierons également comment évolue ce facteur d'amplification avec l'amplitude initiale du forçage. Pour finir nous nous intéresserons à l'évolution de cette amplification avec le temps.

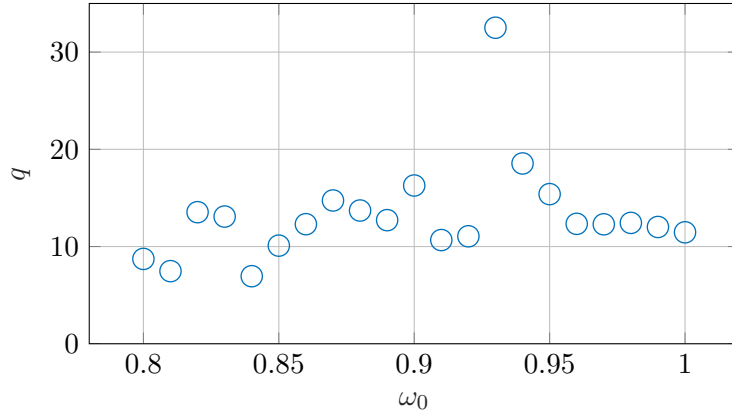
## 2.b Caractéristiques de l'amplification

### Évolution avec la fréquence de forçage

La figure V.6 montre que la forme du champ de vitesse et l'amplification résultante sont très sensibles à la fréquence de forçage de l'onde. Pour caractériser ce phénomène, nous avons mesuré le facteur d'amplification  $q$  de l'onde en fonction de sa pulsation. Ces mesures sont reportées dans la figure V.7. On observe un facteur d'amplification maximal en  $\omega_0 = 0.93 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  qui correspond à la figure V.6(b), pour laquelle  $z_T = z_F$ . Cette valeur est très localisée en pulsation. L'annulation de la vitesse de groupe va donc avoir un effet important sur l'amplification de la vitesse verticale mais sur une gamme restreinte de pulsation. Dans le paragraphe suivant, nous allons discuter plus en détail de la forme de la courbe d'amplification et de son évolution avec l'amplitude du forçage.

### Influence de l'amplitude du forçage

Avant de comparer les courbes d'amplification à différentes amplitude de forçage, nous allons discuter d'une autre mesure de l'amplification et de l'adimensionnement de certains paramètres.

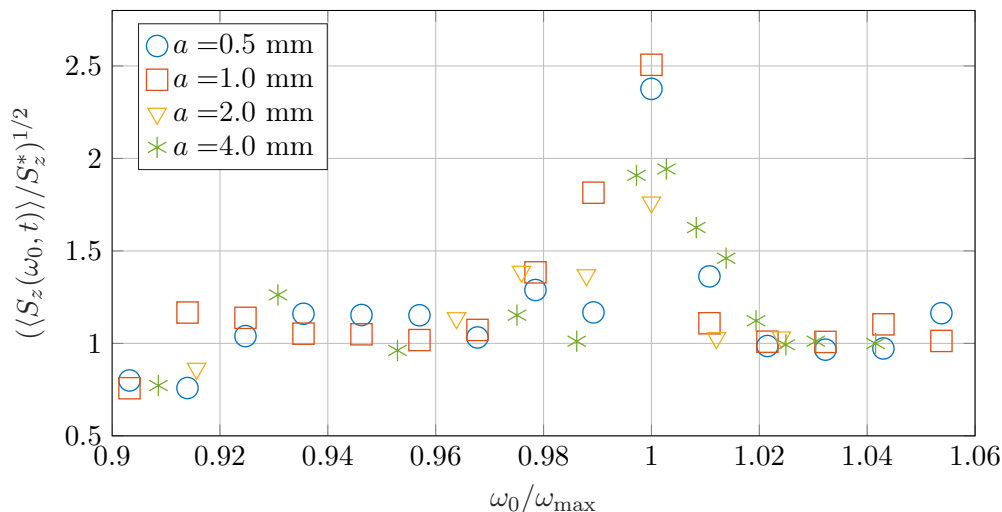


**FIGURE V.7** – Facteur d’amplification  $q$  pour une amplitude de forçage  $a = 0.5$  mm. Notons que la vitesse typique mesurée sous le générateur  $v_{\text{gen}} = 0.025 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$  varie peu avec la pulsation de forçage  $\omega_0$ . En effet, dans le chapitre II, nous avons vu que sur cette gamme de pulsations, l’efficacité évolue peu. Cette évolution est négligeable par rapport aux variations de  $v_{\text{gen}}$  mesurées pour une même expérience (entre  $0.02$  et  $0.03 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ ).

La mesure directe du facteur d’amplification  $q$  est très bruitée. En effet, sur la figure V.7, on observe par exemple que  $q$  est multiplié par 2 lorsque l’on passe de  $\omega_0 = 0.81 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  à  $\omega_0 = 0.82 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , ce qui ne semble pas très raisonnable par rapport au modèle d’amplification présenté précédemment. Pour minimiser ce bruit, nous allons évaluer cette amplification d’une autre manière. Pour cela, nous réalisons un diagramme temps-fréquence,  $S_z(\omega, t)$ , moyenné sur une zone de  $3.6 \times 3.6 \text{ cm}^2$  centré sur le maximum de vitesse. Nous utilisons ensuite la valeur  $S_z(\omega_0, t)$ , moyennée sur les 100 dernières secondes de l’enregistrement,  $\langle S_z(\omega_0) \rangle$ , pour estimer l’amplification de la vitesse verticale. Puis, nous normalisons la valeur ainsi obtenue par sa valeur moyenne,  $S_z^*$ , hors du pic d’amplification. Finalement nous utiliserons la racine de cette valeur afin d’obtenir une valeur proportionnelle à la vitesse verticale et non pas à son carré.

Les pulsations ont quant à elles été renormalisées par la pulsation correspondant au maximum d’amplification,  $\omega_{\text{max}}$ . D’une série d’expériences à amplitude fixée à une autre série, la valeur de cette pulsation optimale change. En effet, entre ces deux séries, il faut sortir le générateur, le démonter et régler les cames, le réinstaller puis refaire une stratification. Comme il est impossible de refaire deux fois exactement la même stratification non-linéaire et que, comme nous l’avons vu précédemment, le phénomène d’amplification est très sensible à la pulsation, on a un décalage de la pulsation optimale d’une série d’expériences à une autre. Dans les expériences menées on a observé un décalage de 5% de  $\omega_{\text{max}}$  au maximum.

Ces mesures adimensionnées sont présentées dans la figure V.8 pour différentes amplitudes de forçage  $a$ . Pour les points correspondants à  $a = 0.5$  mm, on observe que les mesures hors résonance possèdent des valeurs d’amplification normalisée toutes au voisinage de 1. Cela est cohérent avec les figures V.5(a) et (c), où on remarque que l’amplification en  $z_F$  due à la focalisation géométrique ne dépend pas de la pulsation de l’onde  $\omega_0$ . Les courbes d’amplification ont la même forme pour toutes les amplitudes  $a$ . On peut notamment observer que la largeur relative du pic est à peu près constante et vaut environ 1%. Cependant, la valeur de l’amplification maximale est affectée par l’amplitude du forçage. Pour un forçage faible, on obtient une plus forte amplification que pour un forçage plus élevé. Nous verrons par la suite que ce sont les non-linéarités présentes aux plus grandes amplitudes qui sont responsables de cette saturation de l’amplification.



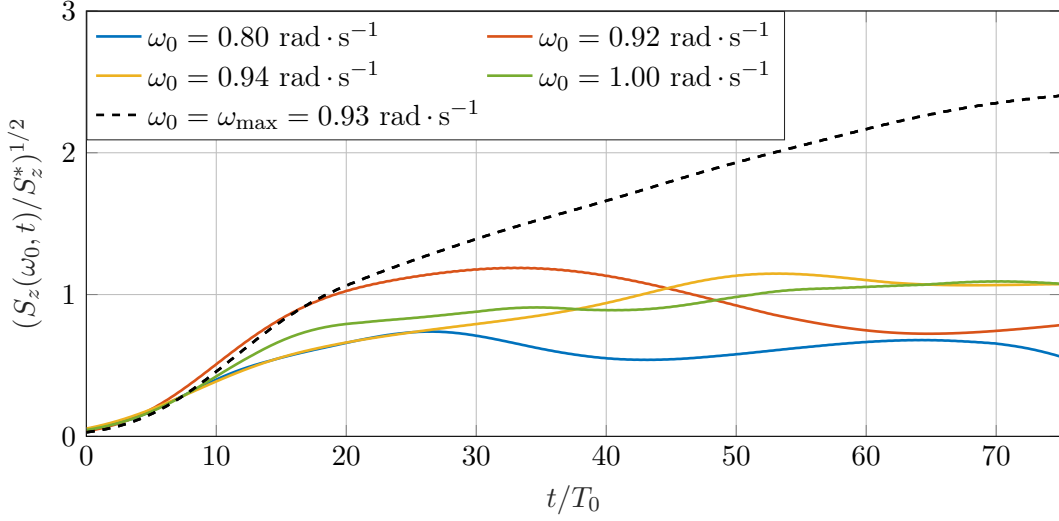
**FIGURE V.8** – Mesures de la composante spectrale  $S_z(\omega_0, t)$ , moyennée temporellement sur les 100 dernières secondes de l’acquisition, pour différentes valeurs de pulsation de forçage  $\omega_0$  et pour 4 amplitudes  $a$  du générateur. Pour renormaliser les mesures, les pulsations ont été adimensionnées par  $\omega_{\max}$ , la pulsation correspondant au pic pour chaque amplitude de forçage.  $S_z(\omega_0, t)$  est adimensionnée par sa valeur moyenne hors du pic,  $S_z^*$ . Notons que les grandeurs représentées en abscisse sont la racine de  $\langle S_z(\omega_0, t) \rangle / S_z^*$  afin de pouvoir les comparer à celles de la figure V.7. En effet, d’après l’équation (III.6),  $S_z(\omega_0, t)$  est proportionnel à  $v_z^2$ .

### Évolution temporelle

Nous avons pour le moment étudié la valeur moyenne de l’amplification sur les 100 dernières secondes. Nous allons maintenant voir comment cette amplification dépend du temps pour les expériences des figures V.6 et V.7 correspondant à un forçage à  $a = 0.5$  mm. Le champ de vitesse verticale a été enregistré pendant 10 minutes et  $S_z(\omega_0, t)$  est représenté sur la figure V.9, en fonction du temps adimensionné par la période de l’onde  $t/T_0$ . Lorsque que l’on se place à  $\omega_0 \neq \omega_{\max}$ ,  $S_z(\omega_0, t)$  atteint une valeur quasi-stationnaire après quelques dizaines de périodes.

Cependant, pour la pulsation correspondant à l’amplification maximale,  $\omega_{\max}$ , ce temps est bien plus long. Il est même supérieur à la durée d’enregistrement. Après les 10 minutes d’expérience, le plateau d’amplification n’est toujours pas atteint. Ainsi, le champ de vitesse verticale de la figure V.6 ne correspond qu’à une situation transitoire et l’amplification en  $\omega_{\max}$  de la figure V.8 est a priori sous-évaluée. Cette dynamique différente, pour  $\omega_0 = \omega_{\max}$ , par rapport aux autres pulsations, est vraisemblablement liée à l’annulation de la vitesse de groupe en  $z_F = z_T$ . Le temps caractéristique associé à l’arrivée de l’onde et donc à l’amplification devient alors beaucoup plus long. On remarque également une différence entre l’amplitude du plateau de la courbe bleue correspondant à  $\omega_0 = 0.80 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  et de la courbe verte correspondant à  $\omega_0 = 1.00 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Cela s’explique par le champ de vitesse verticale qui a une valeur proche de son maximum sur une plus grande zone pour  $\omega_0 = 1.00 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  que pour  $\omega_0 = 0.80 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  (voir figure V.6), ce qui fait augmenter  $S_z(\omega_0, t)$ , lors de la moyenne spatiale.

En conclusion, les mesures expérimentales montrent que le maximum d’amplification est atteint lorsque  $z_F = z_T$ , ce qui correspond à la situation où la vitesse verticale de l’onde est maximum lorsque sa vitesse de groupe s’annule. En corollaire, ce maximum correspond aussi au moment où le temps caractéristique d’établissement du maximum de vitesse verticale est le plus long. La prochaine partie se concentre sur l’apparition d’instabilités lorsque  $\omega_0 = \omega_{\max}$  pour différentes amplitudes de forçage.



**FIGURE V.9** – Évolution temporelle de l'amplitude de la composante spectrale associée à la pulsation de forçage du générateur  $\omega_0$ ,  $S_z(\omega_0, t)$  moyennée sur une zone de  $3.6 \times 3.6 \text{ cm}^2$  autour du maximum de vitesse verticale pour 5 valeurs de  $\omega_0$ . L'amplitude du forçage est  $a = 0.5 \text{ mm}$ . Les trois pulsations  $\omega_0 = 0.80, 0.93$  et  $1.00 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  correspondent respectivement aux expériences (a), (b) et (c) de la figure V.6.

### 3 Instabilités au maximum d'amplification

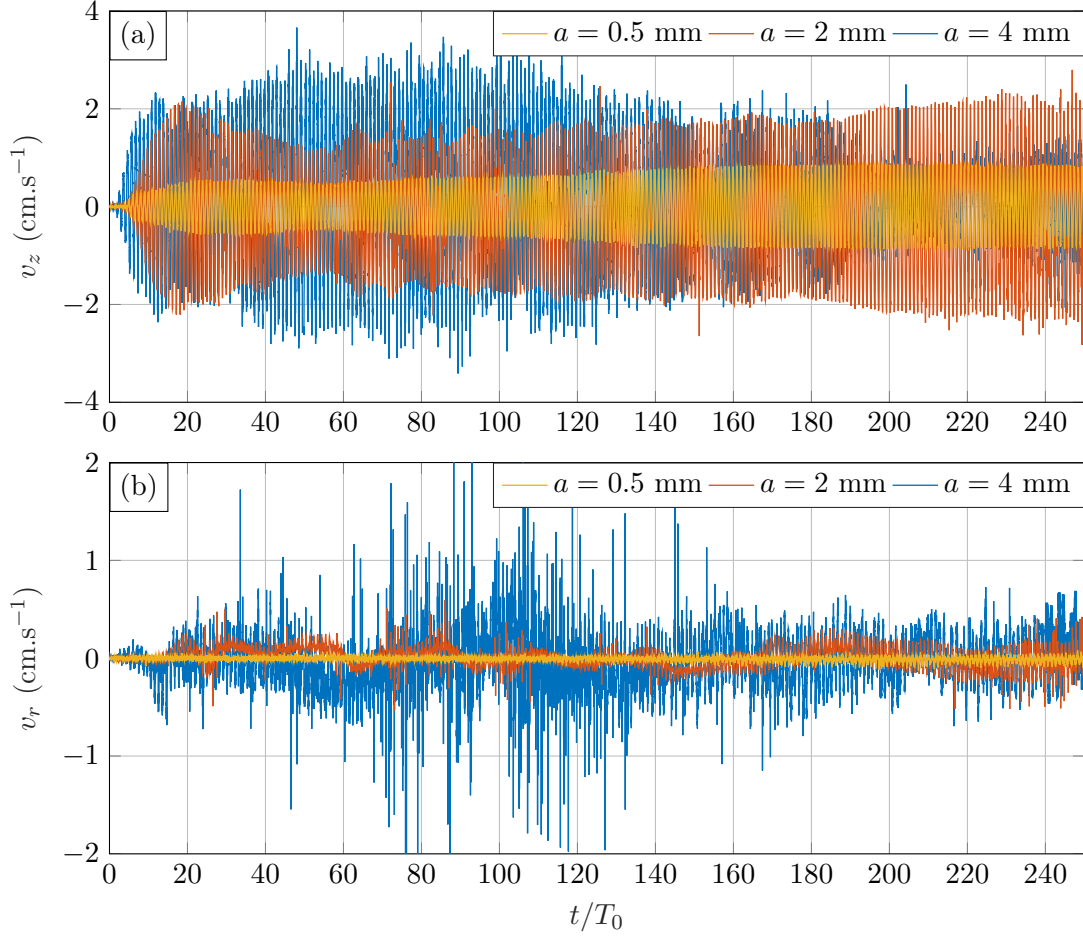
Dans la partie précédente, nous avons vu sur la figure V.8 que l'amplification dépend très fortement de la valeur de  $\omega_0$ . Ainsi, avant de mener l'étude de l'instabilité au maximum d'amplification, il faut trouver expérimentalement la valeur  $\omega_{\max}$  correspondante. Pour cela, nous raisonnons par essai-erreur, en mesurant à chaque fois le maximum de la vitesse verticale, jusqu'à trouver la pulsation correspondant au maximum d'amplification. À cette pulsation, des mesures du champ de vitesse sont ensuite effectuées pendant au moins 2 heures afin de pouvoir dépasser la régime transitoire observé dans la figure V.9.

#### 3.a Évolution des instabilités en fonction de l'amplitude du forçage

La symétrie du dispositif expérimental impose que, dans le régime linéaire, la vitesse radiale en  $r = 0$  soit nulle. L'observation d'une vitesse radiale en  $r = 0$  va donc être un premier indice de l'apparition de non-linéarités. Pour trois expériences à trois amplitudes différentes,  $a = 0.5 \text{ mm}$ ,  $a = 2 \text{ mm}$  et  $a = 4 \text{ mm}$ , nous avons mesuré les vitesses radiale et verticale en  $r = 0$  et  $z = z_F = z_T$  lorsque  $\omega_0 = \omega_{\max}$ . Pour les 250 premières périodes, ces mesures sont reportées sur la figure V.10.

On constate, comme on peut s'y attendre, que la vitesse verticale est d'autant plus importante (au moins pendant les 100 premières périodes de l'onde) que l'amplitude de forçage,  $a$ , est grande. Pour l'amplitude de forçage la plus faible,  $a = 0.5 \text{ mm}$ , on observe que le temps d'établissement du régime permanent est d'au moins 200 périodes. Ce résultat est en accord avec l'observation faite sur la figure V.9, où on avait constaté que l'amplitude continuait d'augmenter après 70 périodes. Sur les 250 premières périodes, on reste dans le régime linéaire, la vitesse radiale étant quasi-nulle pour cette amplitude.

Pour  $a = 2 \text{ mm}$ , on observe que la vitesse radiale est rapidement non nulle. L'amplitude de celle-ci augmente au fur et à mesure que l'amplitude de la vitesse verticale  $v_z$  augmente. Dans ce



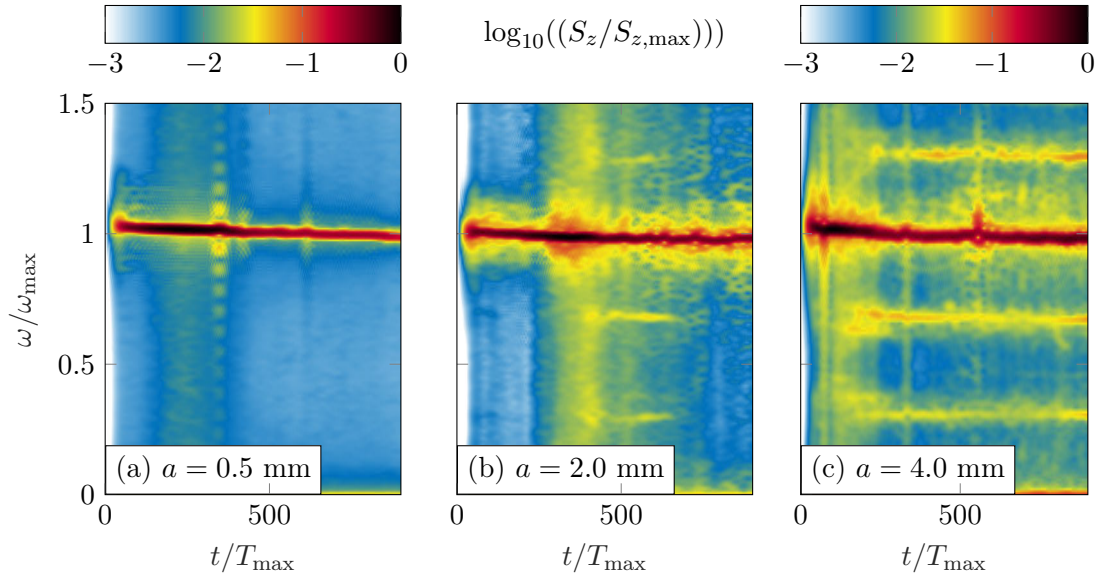
**FIGURE V.10** – (a) Vitesse verticale et (b) vitesse radiale en  $z = z_F = z_T$  et  $r = 0$  pour 3 amplitudes de forçage lorsque  $\omega_0 = \omega_{\max}$ .

cas l'amplitude du forçage est 4 fois plus importante que dans le cas  $a = 2$  mm. Pour autant, à part dans les premières dizaines de périodes, il n'y a qu'un rapport deux entre les amplitudes des vitesses verticales. L'onde primaire a donc déjà cédé une partie de son énergie à des instabilités, diminuant ainsi son amplitude. Après  $250 T_0$ , le régime stationnaire n'est pas atteint, les vitesses radiale et verticale continuent à légèrement augmenter.

À  $a = 4$  mm, l'amplitude de la vitesse verticale croît très rapidement, puis fini par décroître pour atteindre une valeur presque stationnaire valant environ  $1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$  vers  $t = 200 T_0$ . Cette décroissance s'accompagne d'une vitesse radiale beaucoup plus intense que pour  $a = 2$  mm, dont l'amplitude devient comparable à l'amplitude de la vitesse verticale, signe de fortes non-linéarités. Pour finir, remarquons que la vitesse verticale de l'expérience à  $a = 2$  mm et  $t = 250 T_0$  atteint une valeur comparable au maximum de vitesse verticale à  $a = 4$  mm. On s'attend donc à ce que des instabilités viennent augmenter fortement la vitesse radiale dans la suite de l'expérience et diminuent, comme c'est le cas de la courbe à  $a = 4$  mm, l'amplitude de la vitesse verticale, puis que cette dernière atteigne une valeur quasi-stationnaire.

Ce comportement est similaire à celui des courbes de la figure V.9 pour  $\omega \neq \omega_{\max}$ . L'augmentation de la vitesse verticale suivie par une diminution pour atteindre un plateau est donc un comportement relativement générique et ne dépend ni de la pulsation  $\omega_0$  ni de l'amplitude





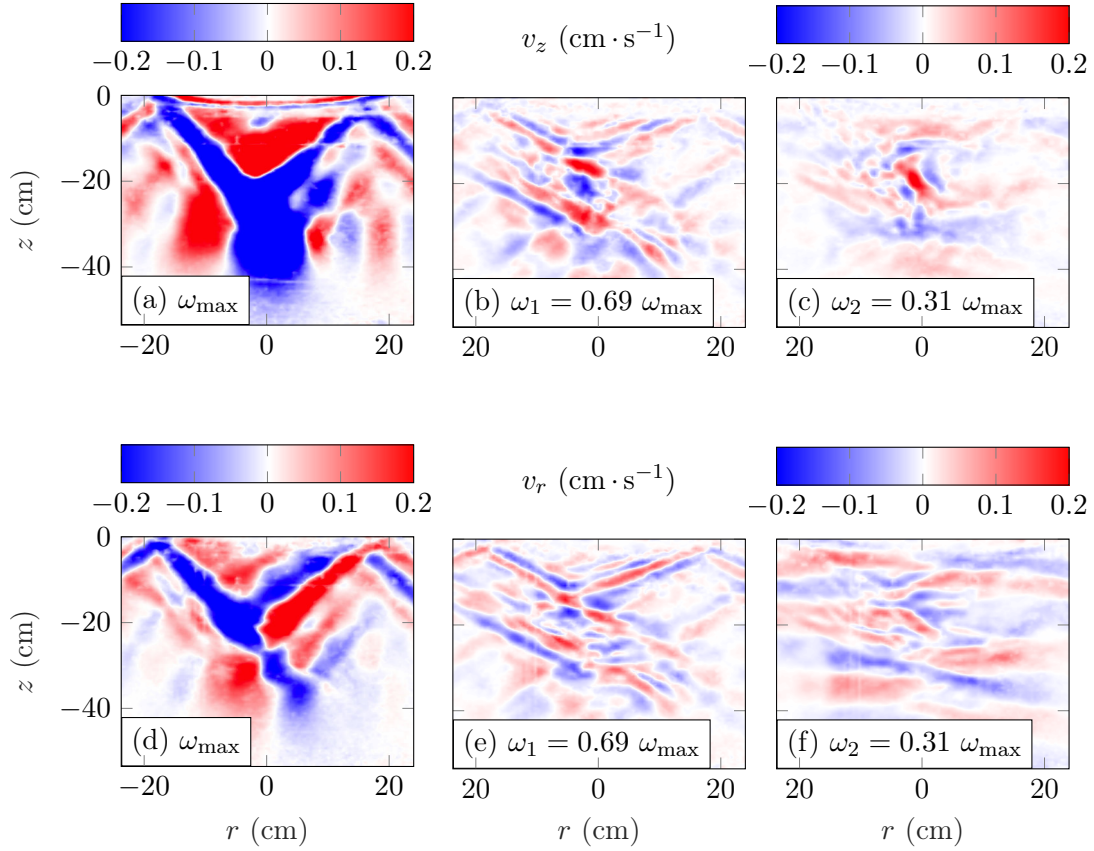
**FIGURE V.11** – Diagramme temps-fréquence du champ de vitesse verticale pour 3 amplitudes de forçage différents,  $a = 0.5, 2$  et  $4$  mm, et à la pulsation correspondant au maximum d’amplification  $\omega_{\max}$ . Pour (c) les deux instabilités principales ont des pulsations égales à  $\omega_1 = 0.69 \omega_{\max}$  et  $\omega_2 = 0.31 \omega_{\max}$ .

d’excitation  $a$ . Nous allons maintenant nous intéresser aux contenus spectraux des instabilités.

### 3.b Contenus spectraux

Trois diagrammes temps-fréquence sont présentés en figure V.11 pour trois amplitudes du générateur différentes et pour les 900 premières périodes de l’expérience. Pour chaque diagramme,  $\omega_{\max}$  correspond à la pulsation de forçage. Dans la figure V.11(a), on observe que l’amplitude associée au forçage a un régime transitoire: elle augmente jusqu’à  $t \simeq 300 T_0$ , puis diminue pour atteindre une valeur constante. Cela est par ailleurs confirmé sur la série temporelle de la vitesse verticale pour  $t > 300 T_0$  (non montré sur la figure V.10). Cela confirme par ailleurs notre analyse sur l’augmentation importante du temps caractéristique lorsque la pulsation se rapproche de  $\omega_0 = \omega_{\max}$ .

La diminution de l’amplitude de la fréquence associée au forçage dans la figure V.11 s’accompagne d’une légère génération d’autres fréquences qui se répartissent sur tout le spectre. Lorsque l’amplitude du forçage est multipliée par 4 (figure (b)), on constate le même genre de processus. Il existe cependant deux différences. Tout d’abord les instabilités sont plus marquées et après 400 périodes environ, deux fréquences principales finissent par être sélectionnées puis disparaissent une fois le régime transitoire de l’onde primaire terminé. Ce régime transitoire correspond à celui de la courbe orange de la figure V.10(a) à  $a = 2$  mm. L’explication la plus probable est que lorsque l’onde primaire atteint son maximum d’amplitude, elle possède suffisamment d’énergie pour en transférer à d’autres fréquences. Faisant cela, elle perd de l’énergie. On finit alors par atteindre un régime où l’onde primaire n’est plus suffisamment intense pour maintenir des instabilités. Dans le cas (c), l’amplitude est doublée par rapport au cas (b). On observe alors, comme dans la figure V.10(a) que le régime transitoire est beaucoup plus court. Deux fréquences sont sélectionnées et celles-ci perdurent pendant le reste de l’expérience. Notons que les deux fréquences sélectionnées vérifient la condition de résonance temporelle avec la fréquence de l’onde mère. Dans la partie suivante, nous allons discuter de ces ondes secondaires.

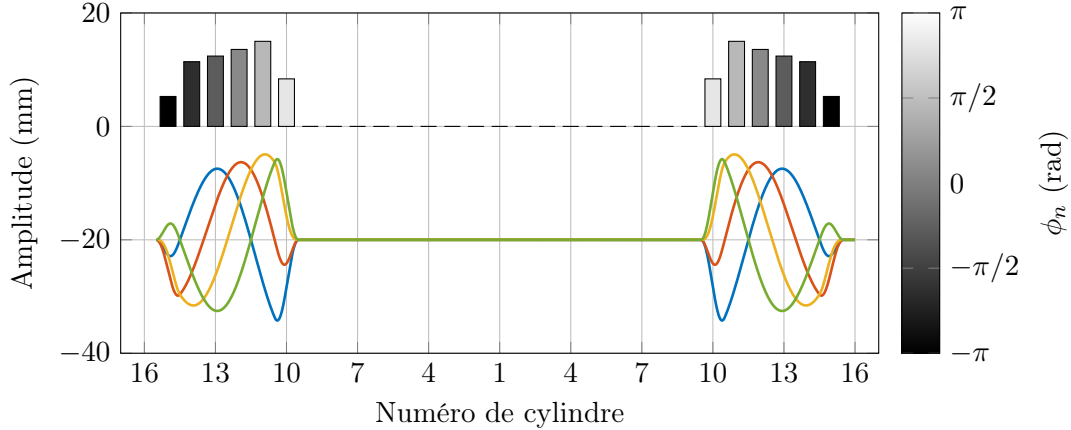


**FIGURE V.12** – Champs de vitesses verticale ((a), (b) et (c)) et radiale ((d), (e) et (f)) obtenus par filtrage temporel à (a), (d)  $\omega_{\max}$ , (b), (e)  $0.69\omega_{\max}$  et (c), (f)  $0.31\omega_{\max}$ . Les pulsations de filtrage correspondent à la pulsation de forçage et aux deux pulsations secondaires observées dans le diagramme temps-fréquence de la figure V.11(c) avec  $a = 4.0$  mm.

### 3.c Caractéristiques des ondes secondaires

Le filtrage temporel du champ de vitesse verticale de l'expérience correspondant à la figure V.11(c) est présenté en figure V.12. Ce filtrage est réalisé pour trois pulsations différentes correspondant aux pulsations de l'onde primaire et des deux fréquences secondaires principales observées. L'onde issue du générateur en figure V.12(a) ressemble à celle de la figure V.6, à ceci près qu'elle n'est plus tout à fait symétrique. On note, comme on pouvait s'y attendre d'après la figure V.10, une vitesse radiale non-nulle en  $r = 0$ . Les champs de vitesses verticale et radiale correspondant aux ondes secondaires présentent plusieurs caractéristiques intéressantes. Tout d'abord ils brisent complètement la symétrie du problème, avec, dans le cas présenté, une intensité plus marquée à gauche de l'image qu'à droite. De plus, on observe que le transfert d'énergie se fait effectivement vers les petites échelles pour la première onde secondaire. La deuxième présente une structure horizontale sous forme de bandes. Il est par contre difficile de dire si la condition de résonance spatiale est vérifiée pour les nombres d'onde verticaux comme cela était le cas dans le chapitre précédent.

Cette configuration expérimentale est intéressante mais ne permet pas pour le moment d'obtenir un régime permanent où les fréquences secondaires se répartissent sur l'ensemble du spectre, ce qui serait un indice d'une transition vers de la turbulence. Ce régime n'est pour le moment qu'au mieux transitoire. Comme il n'est presque plus possible d'augmenter l'amplitude des cames pour



**FIGURE V.13** – Déphasages et amplitudes des cylindres pour une onde propagative vers le centre du générateur avec une "longueur d'onde" correspondant à la largeur de 6 cylindres. Des profils à quatre instants différents sont représentés par des courbes en couleur. Pour plus de clarté, ceux-ci sont décalés de 20 mm vers le bas.

des contraintes mécaniques ( $a$  ne pouvant pas être plus grand que 5.8 mm), nous avons choisi un nouveau profil pour le générateur. Celui-ci est décrit dans la partie suivante.

## 4 Vers plus d'instabilité

### 4.a Profil du générateur

Les expériences conduites sur le générateur précédent nous ont mené à deux conclusions. Tout d'abord, les instabilités n'existent que dans la zone où l'onde primaire existe. Nous avons donc décidé d'élargir le faisceau conique afin d'obtenir une plus grande zone d'interaction, ce qui permettra *a priori* aux ondes secondaires de croître plus fortement avant de quitter la zone d'interaction. De plus, dans la configuration précédente, la moitié du mouvement vertical transmis par le générateur au fluide est envoyée vers l'extérieur du cylindre. En effet, sur la figure IV.15(a) à (d), on voit une partie de l'onde partir vers les  $r$  croissants. Pour remédier à ce problème nous allons utiliser une excitation propagative plutôt qu'une excitation stationnaire. La figure V.13 montre la forme du générateur choisie. Les comes sont toutes déphasées de  $\pi/3$  les unes par rapport à leurs voisines, ce qui permet de reproduire une "longueur d'onde" sur 6 cylindres. L'amplitude des cylindres a été ajustée de façon à prendre en compte la variation de fluide déplacé avec le rayon comme nous l'avons fait auparavant pour éviter des phénomènes de pompage. De plus les amplitudes du mouvement du cylindre numéro 15 et numéro 10 ont été diminuées de moitié pour éviter une variation trop brusque du mouvement du fluide entre les cylindres immobiles et ceux oscillants. Finalement nous avons fixé l'amplitude globale du profil de façon à ce qu'elle soit la plus grande possible, l'amplitude du cylindre 11 est alors fixé à 15 mm. La résultante est une onde propagative vers l'intérieur du cylindre, représentée à différents instants par des courbes de couleurs sur la figure V.13. Ce profil force une onde interne dont la vitesse de groupe est dirigée vers le bas et le centre.

### 4.b Problèmes rencontrés et à résoudre

Des premières expériences ont, à ce jour, été menées avec ce générateur. Nous avons pour le moment rencontré un certain nombre de problèmes. Le premier problème est inhérent au générateur. Le moteur qui fait tourner l'arbre (voir figure IV.1), est le même que celui utilisé pour le

générateur du chapitre II et III. La puissance maximale qu'il peut fournir est à la limite de la puissance nécessaire pour déplacer les cylindres. Cela a causé un certain nombre d'arrêts complets du moteur pendant les expériences, qui ont dû être recommencées, ainsi qu'une surchauffe du moteur. Cette surchauffe explique peut-être la dérive de la fréquence de forçage observée sur la figure V.11. Ce problème est d'autant plus marqué que dans cette dernière configuration, on fait osciller les 6 plus larges cylindres (donc les plus lourds) avec une grande amplitude.

Les mesures préliminaires du champ de vitesse dans un plan horizontal (vitesses radiales et orthoradiales) montrent que les instabilités s'accompagnent de vitesses orthoradiales dont les valeurs sont comparables aux valeurs des vitesses radiales. Le deuxième problème est alors que les particules utilisées pour la PIV sortent d'une image à l'autre du plan laser utilisé pour les éclairer. Dans les prochaines expériences, il serait donc idéal de pouvoir élargir l'épaisseur du plan laser et éventuellement d'utiliser une caméra qui possède une fréquence d'acquisition plus élevée.

## Conclusion

Nous avons utilisé le nouveau générateur axisymétrique avec le profil *bourrelet*, décrit dans le chapitre précédent, pour générer une onde conique se focalisant au centre de la cuve à une profondeur  $z_F$  de pulsation  $\omega_0$ . Au lieu d'utiliser une stratification linéaire, nous avons utilisé une stratification non-linéaire qui permet de modifier la vitesse de groupe des ondes. Dans notre configuration expérimentale,  $N(z)$  décroît avec  $z$ . Il existe donc une profondeur,  $z_T$ , où  $N(z_T) = \omega_0$ . À cette profondeur, l'onde se réfléchit et sa vitesse de groupe s'annule. Trois mécanismes participent alors à son amplification: la focalisation géométrique du faisceau conique, le rebond en  $z = z_T$  et l'accumulation d'énergie liée à l'annulation de la vitesse de groupe.

Dans un premier temps, nous avons décrit à l'aide d'un modèle simple l'amplification de la vitesse verticale attendue. Celui-ci permet de confirmer qu'il va exister deux profondeurs,  $z_T$  et  $z_F$  où la vitesse verticale va être amplifiée. Cette amplification sera maximale lorsque  $z = z_T = z_F$ . Des mesures menées à faible amplitude de forçage et donc en régime linéaire ont montré que l'amplification mesurée est en accord avec l'amplification prédite par le modèle lorsque  $z = z_F \neq z_T$ . Lorsque  $z = z_T = z_F$ , l'amplification prédite par le modèle est infinie. On mesure expérimentalement une amplification d'un facteur au moins 40, qui démontre les capacités offertes par ce système.

Nous avons par la suite caractérisé l'amplification de la vitesse verticale en fonction de la pulsation et/ou de l'amplitude du forçage imposée par le générateur. On observe que la forme de la courbe du facteur d'amplification ne dépend peu de l'amplitude du forçage. Le facteur d'amplification est relativement constant pour toutes les valeurs de  $\omega_0$ , à part en  $\omega_{\max}$  lorsque  $z_T = z_F$ . Le maximum du facteur d'amplification dépend, lui, de la valeur du forçage. Pour les plus grandes valeurs de forçage, ce facteur est plus faible car une partie de l'énergie de l'onde est perdue par instabilités. Le suivi temporel du maximum de vitesse verticale en fonction du temps a montré un comportement très différent lorsque  $\omega_0 \neq \omega_{\max}$  et lorsque  $\omega_0 = \omega_{\max}$ . Dans le premier cas, on observe que la vitesse verticale maximale est atteinte au bout d'une trentaine de périodes, tandis que dans le deuxième cas, on a montré que le temps caractéristique est bien plus long et vaut au moins 200 périodes.

Nous nous sommes également intéressés aux caractéristiques des instabilités à  $\omega_0 = \omega_{\max}$  pour trois amplitudes de forçage différentes. Au fur et à mesure que l'amplitude de forçage augmente, on observe la transition d'une dynamique linéaire vers une dynamique non-linéaire. Les instabilités observées rompent la symétrie axisymétrique du champ d'onde. Lorsque le faisceau d'onde est instable, on observe une première phase où les instabilités se répartissent sur tout le spectre temporel, puis, deux ondes secondaires émergent de ce continuum fréquentiel. Ces ondes peuvent ou non se maintenir en fonction de l'amplitude du forçage. Leur pulsation vérifient la condition de résonance temporelle avec l'onde-mère. Les champs de vitesse filtrés temporellement autour des deux fréquences des instabilités secondaires montrent que ces ondes ne sont pas axisymétriques et qu'il n'est pas possible, pour le moment, de conclure sur une possible condition de résonance spatiale.

Finalement, pour augmenter encore l'énergie au point de focalisation, nous avons envisagé d'utiliser un autre profil pour le générateur. Pour le moment, nous avons uniquement mené des études préliminaires. Lorsque les problèmes techniques seront résolus, on pourra alors mener une étude plus systématique des instabilités et notamment du spectre spatial et temporel des ondes. La question d'une transition vers la turbulence reste encore ouverte. Il serait également intéressant de quantifier le mélange, par une étude PIV/LIF par exemple, si le régime turbulent est atteint. Une suite logique à donner à ces expériences serait bien évidemment d'ajouter de la rotation. On disposerait alors d'un quatrième mécanisme qui permettrait de concentrer de l'énergie, en empêchant les ondes secondaires de sortir de la zone d'interaction en ralentissant leur vitesse de groupe, comme nous l'avons expliqué dans le chapitre III.

Une modélisation est nécessaire pour comprendre les instabilités observées. Leurs observations soulève un certain nombre de questions. Peut-on décrire ces instabilités sous forme de modes, avec une éventuel composante azimutale, comme le laissait présager le chapitre précédent lors de l'observation d'une instabilité résonante temporellement et spatialement selon  $z$ ? Si cela est possible, pourquoi voit-on alors d'abord apparaître un continuum fréquentiel sur les diagrammes temps-fréquences puis deux fréquences bien définies? Pourquoi toutes les fréquences ne se maintiennent-elles pas?





Ondulation d'un stratocumulus marin causée par une onde interne, océan indien.

L'objectif principal de ma thèse est de comprendre comment des phénomènes physiques peuvent conduire les ondes internes à produire du mélange. Deux aspects ont été envisagés, le premier l'influence de la rotation sur l'instabilité résonante triadique (TRI) des ondes internes dans une géométrie à deux dimensions, le deuxième le rôle joué par l'aspect tridimensionnel sur la stabilité d'un faisceau d'onde.

### Ondes gravito-inertielles à deux dimensions

- Nous avons repris le dispositif expérimental existant pour générer et observer des ondes internes en l'adaptant à l'étude des ondes gravito-inertielles. Pour cela le dispositif a été mis sur la plateforme tournante PERPET. Nous avons vérifié, grâce à des mesures strioscopique et de PIV, que les ondes émises sont bien des ondes gravito-inertielles à deux dimensions et qu'elles vérifient la relation de dispersion.
- Nous avons observé une instabilité qui implique trois ondes, l'onde-mère forcée par le générateur et deux ondes-filles. Ces ondes vérifient entre elles des conditions de résonance spatiale et temporelle, cette instabilité a donc été identifiée comme étant de la TRI. Un modèle, basé sur un développement asymptotique de la TRI, permet de prédire correctement les caractéristiques (fréquences, longueurs d'onde) des ondes-filles mesurées et de calculer un taux de croissance.
- En incluant une modélisation de l'effet de taille finie du faisceau d'onde sur le taux de croissance, la prédiction de l'évolution du seuil de la TRI avec la rotation est en excellent accord avec les mesures expérimentales. Ce modèle, transposé au cas océanique, permet d'expliquer l'existence d'une latitude critique, confirmée par des mesures *in situ*. Lorsque la pulsation de Coriolis, qui dépend de la latitude, est égale à la moitié de la pulsation de l'onde primaire, les ondes gravito-inertielles océaniques sont particulièrement instables. Pour finir, nous observons dans un certain régime l'émission inattendue d'ondes secondaires sous-inertielles.



## Ondes gravito-inertielles axisymétriques

Dans la deuxième partie de ma thèse, j'ai étudié des ondes gravito-inertielles axisymétriques en collaboration avec Thomas Peacock, professeur au MIT.

- Un nouveau système expérimental a été développé, à partir du générateur à deux dimensions existant. Il permet la génération d'ondes gravito-inertielles axisymétriques à trois dimensions qui respectent la symétrie naturelle associée à la rotation. Ce dispositif est constitué d'un arbre qui entraîne des cylindres concentriques dans des mouvements d'oscillations verticales. Tout comme le générateur à deux dimensions, l'amplitude et la phase de chacun de ces mouvements peuvent être réglées indépendamment. Les profils radiaux peuvent alors être librement choisis, permettant à ce générateur d'émettre une grande variété d'ondes axisymétriques. À cette occasion, une nouvelle cuve axisymétrique de 600 L a également été conçue afin de pouvoir s'affranchir au maximum des effets visqueux et respecter la symétrie du générateur.
- Le premier profil d'onde étudié est un mode de Bessel axisymétrique, qui est la décomposition naturelle en géométrie axisymétrique, comme le sont les modes de Fourier en géométrie cartésienne. Cette étude préliminaire a permis tout d'abord de s'assurer du bon fonctionnement du dispositif expérimental et de vérifier que la propagation de ces ondes est en accord avec les solutions numériques linéaires, ainsi que de mesurer l'efficacité du générateur et de connaître la gamme de fonctionnement optimal. L'observation d'un phénomène d'instabilité résonant temporellement et spatialement mais uniquement selon l'axe vertical, a soulevé la question de la TRI dans cette configuration.
- Le deuxième profil étudié, appelé *bourrelet*, est une excitation annulaire qui génère un faisceau conique. Au point de focalisation l'amplitude de l'onde est amplifiée. De plus nous utilisons une stratification non-linéaire qui permet d'augmenter efficacement la vitesse verticale de l'onde avec deux mécanismes supplémentaires. Tout d'abord elle crée un rebond à la profondeur où la pulsation de flottabilité est égale à la pulsation de l'onde et une annulation concomitante de la vitesse de groupe qui assurent une accumulation de l'énergie. On mesure une amplification d'un facteur 40 de la vitesse verticale de l'onde. Les instabilités observées à cette profondeur ont un spectre et une dynamique qui dépendent de l'amplitude du forçage.

## Perspectives

Ces deux études laissent certaines questions en suspens, que ce soit sur l'étude de l'influence de la rotation sur la TRI ou sur la propagation d'ondes internes axisymétriques en stratification non-linéaire.

- La correspondance avec Triantaphyllos Akylas et Hussain Karimi, a laissé entendre que les ondes sous-inertielles observées lors de la TRI d'ondes gravito-inertielles en géométrie à deux dimensions peuvent être théoriquement prédites. Cependant, en l'état actuel, leur théorie ne permet pas de rendre compte totalement, notamment à cause de la viscosité, de nos résultats. Si l'on peut décrire l'onde secondaire sous-inertielle avec un vecteur d'onde complexe, ce n'est pas évident de savoir s'il existe une condition de résonance spatiale sur les composantes imaginaires. La question est alors de comprendre comment cette partie imaginaire, et donc la direction d'atténuation de l'onde, est choisie. Un travail de modélisation supplémentaire est donc nécessaire pour comprendre ce phénomène.
- Dans le chapitre IV, nous avons montré un cas d'instabilité d'un mode de Bessel. Cette instabilité respecte partiellement les conditions de la TRI, en temps et selon la verticale

---

mais pas selon la direction radiale. Nous avons également observé que les ondes secondaires brisent la symétrie du problème. On peut donc se demander s'il est possible de décrire ces ondes secondaires à l'aide d'un formalisme à base de fonctions de Bessel en incluant éventuellement une modulation azimutale qui permettrait de rendre compte des observations. Pourrait-on alors trouver des conditions de résonance et calculer, comme nous l'avons fait dans les chapitres précédents, un taux de croissance?

- Nous avons montré la possibilité de faire des stratifications non-linéaires où la pulsation de flottabilité varie linéairement avec la profondeur. L'étape suivante serait alors de pouvoir recréer une stratification dont l'évolution ressemble à celle de l'océan. Dans cette configuration, on pourrait voir le générateur d'onde comme une excitation de la couche superficielle homogène, créée par des phénomènes météorologiques comme des tempêtes. Ces ondes, en se propageant, mélangeraient la stratification, modifiant ainsi les conditions de leur propagation. Ce mécanisme de rétroaction est notamment étudié dans l'océan Arctique, où la stratification change avec la fréquence des tempêtes et les saisons.
- Par ailleurs, les stratifications océaniques peuvent piéger les ondes dans certaines couches et en laisser passer d'autres par des phénomènes d'interférences. Ces interférences ont uniquement été étudiées expérimentalement dans une géométrie à deux dimensions (Ghaemsaïdi *et al.*, 2016), mais aucun travail expérimental n'a été mené en géométrie axisymétrique ou en rotation.
- Une suite logique aux expériences du dernier chapitre menées sur la focalisation d'ondes internes serait d'ajouter de la rotation au système. En effet, nous avons constaté dans la première partie de ce manuscrit qu'il existe une gamme de rotation qui favorise les instabilités en "piégeant" les ondes secondaires dans le faisceau d'onde primaire. Pour favoriser les instabilités, on pourrait donc se placer dans cette même gamme et piéger les instabilités au point de focalisation. On bénéficierait ainsi de non plus trois mécanismes de focalisation de l'énergie mais de quatre.
- Ce dispositif expérimental permet aussi d'imaginer d'autres expériences. On pourrait par exemple créer un attracteur d'ondes axisymétriques à trois dimensions en utilisant les conditions de réflexion particulières des ondes internes. Il serait alors intéressant de vérifier l'existence de tels attracteurs et de comparer le mélange créé par rapport à celui créé par un attracteur d'ondes internes à deux dimensions.



## BIBLIOGRAPHIE

- ALFORD, M. H., MACKINNON, J. a., ZHAO, Z., PINKEL, R., KLYMAK, J. et PEACOCK, T. (2007). Internal waves across the Pacific. *Geophysical Research Letters*, 34(24):L24601.
- BASS, M., DECUSATIS, C., ENOCH, J., LAKSHMINARAYANAN, V., LI, G., MACDONALD, C., MAHAJAN, V. et VAN STRYLAND, E. (2009). *Handbook of Optics, Third Edition Volume IV: Optical Properties of Materials, Nonlinear Optics, Quantum Optics*. Handbook of Optics. McGraw-Hill Education.
- BENIELLI, D. et SOMMERIA, J. (1998). Excitation and breaking of internal gravity waves by parametric instability. *Journal of Fluid Mechanics*, 374:117–144.
- BORDES, G. (2012). *Interactions non-linéaires d’ondes et tourbillons en milieu stratifié ou tournant*. Thèse de doctorat, ENS de Lyon, Université Lyon 1.
- BORDES, G., MOISY, F., DAUXOIS, T. et CORTET, P.-P. (2012). Experimental evidence of a triadic resonance of plane inertial waves in a rotating fluid. *Physics of Fluids*, 24(1):014105.
- BOURGET, B. (2014). *De l’instabilité au mélange . Étude expérimentale de la cascade des ondes internes de gravité*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Lyon.
- BOURGET, B., DAUXOIS, T., JOUBAUD, S. et ODIER, P. (2013). Experimental study of parametric subharmonic instability for internal plane waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 723:1–20.
- BOURGET, B., SCOLAN, H., DAUXOIS, T., LE BARS, M., ODIER, P. et JOUBAUD, S. (2014). Finite-size effects in parametric subharmonic instability. *Journal of Fluid Mechanics*, 759(2013):739–750.
- BROUTMAN, D., ROTTMAN, J. W. et ECKERMANN, S. D. (2004). Ray methods for internal waves in the atmosphere and ocean. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 36(1):233–253.
- BROUZET, C. (2016). *Internal-wave attractors : from geometrical focusing to non-linear energy cascade and mixing*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Lyon.
- BROUZET, C., ERMANYUK, E., JOUBAUD, S., SIBGATULLIN, I. et DAUXOIS, T. (2016). Energy cascade in internal wave attractors. *Europhysics Letters*, 113(4):1–6.
- BÜHLER, O. et MULLER, C. J. (2007). Instability and focusing of internal tides in the deep ocean. *Journal of Fluid Mechanics*, 588:1–28.
- CACCHIONE, D. et WUNSCH, C. (1974). Experimental study of internal waves over a slope. *Journal of Fluid Mechanics*, 66(02):223.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- CHAN, J. C. L. et KEPERT, J. D. (2010). Global Perspectives On Tropical Cyclones. 4.
- CLARK, H. A. et SUTHERLAND, B. R. (2010). Generation, propagation, and breaking of an internal wave beam. *Physics of Fluids*, 22(7):076601.
- COLE, S. T., RUDNICK, D. L., HODGES, B. A. et MARTIN, J. P. (2009). Observations of Tidal Internal Wave Beams at Kauai Channel, Hawaii. *Journal of Physical Oceanography*, 39(2):421–436.
- DALZIEL, S. B., HUGHES, G. O. et SUTHERLAND, B. R. (2000). Whole-field density measurements by 'synthetic schlieren'. *Experiments in Fluids*, 28(4):322–335.
- DAUXOIS, T., JOUBAUD, S., ODIER, P. et VENAILLE, A. (2017). Instabilities of Internal Gravity Wave Beams. *Annual Review of Fluid Mechanics*, submitted.
- DAUXOIS, T. et YOUNG, W. R. (1999). Near-critical reflection of internal waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 390:S0022112099005108.
- DAVIS, R. E. et ACRIVOS, A. (1967). The stability of oscillatory internal waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 30(4):723–736.
- DELISI, D. P. et ORLANSKI, I. (1975). On the role of density jumps in the reflexion and breaking of internal gravity waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 69(3):445–464.
- DOSSMANN, Y., BOURGET, B., BROUZET, C., DAUXOIS, T., JOUBAUD, S. et ODIER, P. (2016). Mixing by internal waves quantified using combined PIV/PLIF technique. *Experiments in Fluids*, 57(8):132.
- DURAN-MATUTE, M., FLÓR, J. B., GODEFERD, F. S. et JAUSE-LABERT, C. (2013). Turbulence and columnar vortex formation through inertial-wave focusing. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 87(4):1–4.
- ECHEVERRI, P., FLYNN, M. R., WINTERS, K. B. et PEACOCK, T. (2009). Low-mode internal tide generation by topography: an experimental and numerical investigation. *Journal of Fluid Mechanics*, 636(6):91.
- ECHEVERRI, P., YOKOSHI, T., BALMFORTH, N. J. et PEACOCK, T. (2011). Tidally generated internal-wave attractors between double ridges. *Journal of Fluid Mechanics*, 669(10):354–374.
- EGBERT, G. D. (2003). Semi-diurnal and diurnal tidal dissipation from TOPEX/Poseidon altimetry. *Geophysical Research Letters*, 30(17):1907.
- EGBERT, G. D. et RAY, R. D. (2001). Estimates of M<sub>2</sub> tidal energy dissipation from TOPEX/Poseidon altimeter data. *Journal of Geophysical Research*, 106(C10):22475.
- FINCHAM, A. et DELERCE, G. (2000). Advanced optimization of correlation imaging velocimetry algorithms. *Experiments in Fluids*, 29(7):S013–S022.
- FLANDRIN, P. (1999). *Time-frequency/time-scale analysis*, volume 10. Academic Press.
- FORTUIN, J. M. H. (1960). Theory and application of two supplementary methods of constructing density gradient columns. *Journal of Polymer Science*, 44(144):505–515.
- FRITTS, D. C. et ALEXANDER, M. J. (2003). Gravity Wave Dynamics and Effects in the Middle Atmosphere. *Reviews of Geophysics*, 41(1):1–64.
- GARRETT, C. (2003). Ocean science. Enhanced: internal tides and ocean mixing. *Science (New York, N.Y.)*, 301(5641):1858–9.

- GARRETT, C. et MUNK, W. (1972). Space-Time scales of internal waves. *Geophysical Fluid Dynamics*, 3(1):225–264.
- GAYEN, B. et SARKAR, S. (2013). Degradation of an internal wave beam by parametric subharmonic instability in an upper ocean pycnocline. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 118(9):4689–4698.
- GAYEN, B. et SARKAR, S. (2014). PSI to turbulence during internal wave beam refraction through the upper ocean pycnocline. *Geophysical Research Letters*, 41(24):8953–8960.
- GERKEMA, T. et ZIMMERMAN, J. (2008). An introduction to internal waves. *Lecture Notes, Royal NIOZ, Texel*, page 207.
- GHAEMSAIDI, S. J., DOSSER, H. V., RAINVILLE, L. et PEACOCK, T. (2016). The impact of multiple layering on internal wave transmission. *Journal of Fluid Mechanics*, 789(2004):617–629.
- GHAEMSAIDI, S. J. et PEACOCK, T. (2013). 3D Stereoscopic PIV visualization of the axisymmetric conical internal wave field generated by an oscillating sphere. *Experiments in Fluids*, 54(2):1454.
- GORTLER, H. (1943). Über eine Schwingungserscheinung in Flüssigkeiten mit stabiler Dichteschichtung. *ZAMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 23(2):65–71.
- GOSTIAUX, L. (2006). *Etude expérimentale des ondes internes de gravité en présence de topographie. Emission, propagation, réflexion*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Lyon.
- GOSTIAUX, L. et DAUXOIS, T. (2007). Laboratory experiments on the generation of internal tidal beams over steep slopes. *Physics of Fluids*, 19(2):028102.
- GOSTIAUX, L., DIDELLE, H., MERCIER, S. et DAUXOIS, T. (2006). A novel internal waves generator. *Experiments in Fluids*, 42(1):123–130.
- HASSELMANN, K. (1967). A criterion for nonlinear wave stability. *Journal of Fluid Mechanics*, 30(04):737.
- HAZEWINKEL, J. et WINTERS, K. B. (2011). PSI of the Internal Tide on a  $\beta$  Plane: Flux Divergence and Near-Inertial Wave Propagation. *Journal of Physical Oceanography*, 41(9):1673–1682.
- IRIBARNE, E. H., HORNE, E. et TRANSPORT, I. (2015). *Transport properties of internal gravity waves*. Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Lyon.
- JOHNSTON, T. M. S., RUDNICK, D. L., CARTER, G. S., TODD, R. E. et COLE, S. T. (2011). Internal tidal beams and mixing near Monterey Bay. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 116(3):C03017.
- JOUBAUD, S., MUNROE, J., ODIER, P. et DAUXOIS, T. (2012). Experimental parametric subharmonic instability in stratified fluids. *Physics of Fluids*, 24(4).
- KARIMI, H. H. et AKYLAS, T. R. (2014). Parametric subharmonic instability of internal waves: locally confined beams versus monochromatic wavetrains. *Journal of Fluid Mechanics*, 757:381–402.
- KARIMI, H. H. et AKYLAS, T. R. (2017). Parametric subharmonic instability of internal gravity wave beams.
- KING, B., ZHANG, H. P. et SWINNEY, H. L. (2010). Tidal flow over three-dimensional topography generates out-of-forcing-plane harmonics. *Geophysical Research Letters*, 37(14):777–780.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- KUNDU, R. K. et COHEN, I. M. (2012). *Fluid Dynamics, Fifth Edition*. Academic p édition.
- LE DIZÈS, S. (2015). Wave field and zonal flow of a librating disk. *Journal of Fluid Mechanics*, 782(2015):178–208.
- LIEN, R.-C. et GREGG, M. C. (2001). Observations of turbulence in a tidal beam and across a coastal ridge. *Journal of Geophysical Research*, 106(C3):4575.
- LUMPKIN, R. et SPEER, K. (2007). Global Ocean Meridional Overturning. *Journal of Physical Oceanography*, 37(10):2550–2562.
- MAAS, L. R. M., BENIELLI, D., SOMMERIA, J. et LAM, F. P. a. (1997). Observation of an internal wave attractor in a confined, stably stratified fluid. *Nature*, 388(6642):557–561.
- MACKINNON, J. a. (2005). Subtropical catastrophe: Significant loss of low-mode tidal energy at 28.9°. *Geophysical Research Letters*, 32(15):L15605.
- MACKINNON, J. a., ALFORD, M. H., PINKEL, R., KLYMAK, J. et ZHAO, Z. (2013a). The Latitudinal Dependence of Shear and Mixing in the Pacific Transiting the Critical Latitude for PSI. *Journal of Physical Oceanography*, 43(1):3–16.
- MACKINNON, J. a., ALFORD, M. H., SUN, O., PINKEL, R., ZHAO, Z. et KLYMAK, J. (2013b). Parametric Subharmonic Instability of the Internal Tide at 29°N. *Journal of Physical Oceanography*, 43(1):17–28.
- MATHUR, M. et PEACOCK, T. (2009). Internal wave beam propagation in non-uniform stratifications. *Journal of Fluid Mechanics*, 639:133.
- MAURER, P., JOUBAUD, S. et ODIER, P. (2016). Generation and stability of inertia-gravity waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 808(1):539–561.
- MCCOMAS, C. H. et BRETHERTON, F. P. (1977). Resonant interaction of oceanic internal waves. *Journal of Geophysical Research*, 82(9):1397–1412.
- MCEWAN, A. D. (1973). Interactions between internal gravity waves and their traumatic effect on a continuous stratification. *Boundary-layer meteorology*, 5:159–175.
- MERCIER, M. J., GARNIER, N. B. et DAUXOIS, T. (2008). Reflection and diffraction of internal waves analyzed with the Hilbert transform. *Physics of Fluids*, 20(8):086601.
- MERCIER, M. J., MARTINAND, D., MATHUR, M., GOSTIAUX, L., PEACOCK, T. et DAUXOIS, T. (2010). New wave generation. *Journal of Fluid Mechanics*, 657:308–334.
- MESSIO, L., MORIZE, C., RABAUD, M. et MOISY, F. (2008). Experimental observation using particle image velocimetry of inertial waves in a rotating fluid. *Experiments in Fluids*, 44(4):519–528.
- MIED, R. P. (1976). The occurrence of parametric instabilities in finite-amplitude internal gravity waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 78:763–784.
- MOWBRAY, D. E. et RARITY, B. S. H. (1967). The internal wave pattern produced by a sphere moving vertically in a density stratified liquid. *Journal of Fluid Mechanics*, 30(03):489.
- MUNK, W. et WUNSCH, C. (1998). Abyssal recipes II: Energetics of tidal and wind mixing. *Deep-Sea Research Part I: Oceanographic Research Papers*, 45(12):1977–2010.
- MUNK, W. H. (1966). Abyssal recipes. *Deep Sea Research and Oceanographic Abstracts*, 13(4):707–730.

- NATIONAL GEOPHYSICAL DATA CENTER (1992). U.S. standard atmosphere (1976).
- NAULT, J. T. et SUTHERLAND, B. R. (2007). Internal wave transmission in nonuniform flows. *Physics of Fluids*, 19(1).
- NIKURASHIN, M. et FERRARI, R. (2013). Overturning circulation driven by breaking internal waves in the deep ocean. *Geophysical Research Letters*, 40(12):3133–3137.
- ONU, K., FLYNN, M. R. et SUTHERLAND, B. R. (2003). Schlieren measurement of axisymmetric internal wave amplitudes. *Experiments in Fluids*, 35(1):24–31.
- OSTER, G. et YAMAMOTO, M. (1963). Density Gradient Techniques. *Chemical Reviews*, 63(3):257–268.
- PAOLETTI, M. S., SWINNEY, H. L. et MECHANICS, F. (2012). Propagating and evanescent internal waves in a deep ocean model. *Journal of Fluid Mechanics*, 706(7):571–583.
- PEACOCK, T. et WEIDMAN, P. (2005). The effect of rotation on conical wave beams in a stratified fluid. *Experiments in Fluids*, 39(1):32–37.
- POLZIN, K. L., TOOLE, J. M., LEDWELL, J. R. et SCHMITT, R. W. (1997). Spatial Variability of Turbulent Mixing in the Abyssal Ocean. *Science*, 276(5309):93–96.
- PRICE, J. (1983). Internal wave wake of a moving storm. Part I. Scales, energy budget and observations. *Journal of Physical Oceanography*, 13:949–965.
- RIEDINGER, X., MEUNIER, P. et LE DIZÈS, S. (2010). Instability of a vertical columnar vortex in a stratified fluid. *Experiments in Fluids*, 49(3):673–681.
- SANDSTROM, J. (1908). Dynamische Versuche mit Meerwasser.
- STAQUET, C. et SOMMERIA, J. (2002a). Internal Gravity Waves: From Instabilities to Turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 34(1):559–593.
- STAQUET, C. et SOMMERIA, J. (2002b). Internal Gravity Waves: From Instabilities to Turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 34(1):559–593.
- SUN, O. M. et PINKEL, R. (2013). Subharmonic Energy Transfer from the Semidiurnal Internal Tide to Near-Diurnal Motions over Kaena Ridge, Hawaii. *Journal of Physical Oceanography*, 43(4):766–789.
- SUTHERLAND, B. (1999). Visualization and measurement of internal waves by 'synthetic schlieren'. Part 1. Vertically oscillating cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 390:93–126.
- SUTHERLAND, B. (2013). The wave instability pathway to turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 724:1–4.
- SUTHERLAND, B. R. (2010). *Internal gravity waves*. Cambridge édition.
- TABAEI, A. et AKYLAS, T. R. (2003). Nonlinear internal gravity wave beams. *Journal of Fluid Mechanics*, 482:141–161.
- TEOH, S., IVEY, G. et IMBERGER, J. (1997). Laboratory study of the interaction between two internal wave rays. *Journal of Fluid Mechanics*, 336(01):91–122.
- THORPE, S. (1998). Nonlinear reflection of internal waves at a density discontinuity at the base of the mixed layer. *Journal of Physical Oceanography*, 28(9):1853–1860.



## BIBLIOGRAPHIE

---

- WUNSCH, C. et FERRARI, R. (2004). Vertical mixing, energy, and the general circulation of the oceans. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 36(1):281–314.
- YOUNG, W. R., TSANG, Y.-K. et BALMFORTH, N. J. (2008). Near-inertial parametric subharmonic instability. *Journal of Fluid Mechanics*, 607:25–49.

---

## RÉSUMÉ

Au travers de leurs instabilités, les ondes internes de gravité, qui se propagent dans les fluides stratifiés, jouent un rôle crucial dans la dynamique océanique. En effet, ces instabilités transfèrent de l'énergie vers les petites échelles et créent ainsi du mélange. Parmi ces mécanismes, nous avons étudié l'instabilité triadique résonante (TRI). Ce processus se caractérise par l'émission à partir d'une onde-mère de deux ondes-filles, dont les fréquences et vecteurs d'onde vérifient avec l'onde-mère des conditions de résonance temporelle et spatiale. Dans le cas où une rotation globale du fluide (cas général en géophysique) s'ajoute à la rotation, celle-ci va changer les propriétés non seulement des ondes internes, on les appellera alors ondes gravito-inertielles, mais aussi de la TRI. L'étude expérimentale sur table tournante de l'instabilité d'un faisceau de forme contrôlée d'onde gravito-inertielle a mis en évidence l'importance de la rotation sur les caractéristiques de la TRI, comme le seuil d'instabilité ou les caractéristiques des ondes secondaires. En outre, ces résultats sont en très bon accord avec un développement asymptotique de cette instabilité qui prend en compte la taille finie du faisceau, paramètre déterminant au laboratoire et dans un contexte océanique. Cet effet est responsable notamment de l'existence d'une latitude critique dans l'océan.

Dans un second temps, la réalisation d'un nouveau type de générateur d'onde axisymétrique a permis d'étudier la propagation d'ondes axisymétriques à trois dimensions. Les modes axisymétriques générés par ce nouveau dispositif ont été caractérisés et comparés aux solutions analytiques. Ce dispositif permet également de créer une excitation annulaire localisée qui focalise les ondes internes au centre de la cuve. En changeant la vitesse de groupe de ces ondes, au travers d'une stratification non-linéaire, nous pouvons créer une forte accumulation d'énergie au point de focalisation. En fonction de l'amplitude de l'excitation, on observe la transition entre un état stable vers un état fortement instable.

---

## ABSTRACT

Through their instabilities, internal gravity waves, which propagate in stratified fluids, play a paramount role in the oceanic dynamics. Indeed, their instabilities transfer energy to small scales and lead to mixing. Among these instabilities, we studied the triadic resonant instability (TRI). This process is characterized by the generation from a primary wave of two secondary internal waves, whose frequencies and wave vectors fulfill the spatial and time resonance conditions. If the fluid is also rotating (which is in generally the case in geophysics), rotation changes not only the properties of internal waves, which, in this case, are named inertia-gravity waves, but also the properties of the TRI. The experimental study on a rotating platform of the instability of a controlled internal wave beam highlighted the role played by rotation on TRI features, such as the instability threshold or the characteristics of the secondary waves. Moreover, these results are in excellent agreement with an asymptotic development of the instability that takes into account the finite width of the wave beam, key parameter in a laboratory and oceanic context. this effect is responsible for the existence of a critical latitude in the ocean.

In a second part of this work, we built a new wave generator, which allowed for the study of tridimensional axisymmetric waves. The axisymmetric modes generated by this new set-up were characterized and compared to analytical solutions. The generator can also produce a localized axisymmetric bump which focalises the wave in the center of the tank. By changing the group velocity of the waves, through a non-linear stratification, we are able to create a large energy build-up at the point of focalisation. Depending on the amplitude of the wave, we observe the transition from a stable state to a strongly unstable one.