



HAL
open science

Simulation des Grandes Echelles en maillage adaptatif

Sébastien Leonard

► **To cite this version:**

Sébastien Leonard. Simulation des Grandes Echelles en maillage adaptatif. Mécanique [physics]. Paris 6, 2006. Français. NNT: . tel-01570183

HAL Id: tel-01570183

<https://theses.hal.science/tel-01570183>

Submitted on 6 Aug 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License



**THESE de DOCTORAT de L'UNIVERSITE
PARIS VI**

Spécialité

Mécanique

Présentée par

M. LEONARD Sébastien

Pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS VI

Sujet de la thèse :

**SIMULATION DES GRANDES ECHELLES
EN MAILLAGE ADAPTATIF**

Soutenue le 07 Novembre 2006 devant le jury composé de

M. CALTAGIRONE	Jean-Paul	(Rapporteur)
M. GERMANO	Massimo	(Rapporteur)
M. GEROLYMOS	Georges	(Examineur)
M. LAMBALLAIS	Eric	(Examineur)
M. SGAUT	Pierre	(Directeur de thèse)
M. TERRACOL	Marc	(Examineur)

Remerciements

Ces travaux de thèse ont été réalisés à l'Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales, dans le Département de Simulation Numérique des écoulements et Aéroacoustique et l'unité Ecoulements Turbulents Réactifs Instationnaires.

Je remercie Monsieur Morice, directeur du DSNA, et Monsieur Lê, chef de l'unité ETRI, de m'avoir accueilli dans leurs équipes pendant ces trois années.

J'exprime ma gratitude à Monsieur le Professeur Pierre Sagaut d'avoir accepté de diriger cette thèse et de m'avoir communiqué ses conseils avisés et sa rigueur scientifique.

Je remercie tout particulièrement Marc Terracol qui a encadré cette thèse. Sa grande disponibilité à mon égard, sa motivation et sa grande connaissance physique et scientifique m'ont permis de me sortir de nombreuses difficultés au cours de ces trois années.

J'adresse mes remerciements à Messieurs les Professeurs Massimo Germano et Jean-Paul Caltagirone d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Je remercie également les professeurs Eric Lamballais et Georges Gerolymos d'avoir accepté de faire partie du jury et pour leurs remarques pertinentes sur mes travaux. De même, j'adresse mes remerciements à Frédéric Ducros pour avoir fait partie de mon jury en tant qu'invité.

Je remercie également la Délégation Générale pour l'Armement qui a financé mes travaux et, en particulier, Monsieur Lerouge qui a bien voulu participer à mon jury de thèse.

Je remercie l'ensemble des ingénieurs et doctorant(e)s que j'ai pu côtoyer au cours de ces trois années au DSNA. J'adresse un salut particulier à tous les doctorant(e)s de l'aile F ainsi qu'à ceux (celles) délocalisé(e)s dans l'aile E : Elisa la touche féminine de l'aile, Chichi son collègue de bureau et malheureux supporter caennais, François notre buteur maison, Lutz notre Guert Muller des temps modernes, Guigui2 mon collègue au Canada et dont la saison a été gachée par de nombreux problèmes aux adducteurs, Guigui3 et ses dribbles déroutants, Fred le tacticien et grande bible du football et du sport en général, Olivier trop souvent perturbé par nos sorties nocturnes du WE pour être aligné sur la feuille de match, Casifab danseur à la ville comme sur le terrain et Sonic notre Zinédine Platini maison. Un grand merci également aux anciens, Bruno dit "Chibre", Noël expert es Kirchhoff, Ronan notre breton et ailier gauche très assidu, Matthieu et Erik mes voisins de bureau, le second ayant poussé le vice jusqu'à poursuivre notre cohabitation à EADS après la thèse.

Un gros coucou à mes proches, à commencer par ma famille qui fut d'un grand soutien pendant ces trois années et pour la préparation de la soutenance. Merci donc à mes parents, mes grands parents, à Nath et Francky. Une grosse pensée à tous mes amis icaunais pour tous les bons moments passés en leur compagnie et bonne chance à eux et leurs enfants, j'espère que tous leurs projets se réaliseront. Une pensée également aux ensmatiques Ed et Seb, et bon courage au second pour sa soutenance.

Enfin plein de gros bisous à Laetitia, merci à elle pour son soutien à l'approche de la soutenance et pour tous les moments magiques que l'on a passé ensemble... et d'avance pour tous ceux qui suivront.

Table des matières

Introduction	2
I Aspects théoriques de la Simulation des Grandes Echelles en maillage variable	11
1 La Simulation des Grandes Echelles	13
1.1 Notion de filtrage	15
1.2 Les équations de Navier-Stokes filtrées	17
1.2.1 Equations filtrées pour un fluide compressible	17
1.2.2 Equations filtrées pour un fluide incompressible	22
2 Fermetures sous-maille	25
2.1 Notion de modèles sous-maille	25
2.1.1 Le principe de la modélisation	25
2.1.2 Les interactions entre échelles résolues et échelles sous-maille	26
2.2 Principaux modèles	27
2.2.1 La modélisation fonctionnelle	27
2.2.2 La modélisation structurale	32
2.2.3 Les autres approches pour la modélisation	32
2.3 Modèles retenus pour l'étude	33
3 Analyse théorique de l'erreur de commutation	37
3.1 Erreur de commutation en espace	37
3.2 Erreur de commutation en temps	40
4 Etude numérique de l'erreur de commutation	45
4.1 Turbulence Homogène Isotrope en décroissance libre	45
4.1.1 Description générale de la simulation	45
4.1.2 Mise en évidence de l'erreur de commutation	49
4.2 Turbulence Homogène Isotrope forcée	53
4.2.1 Le terme de forçage	53
4.2.2 Mise en évidence de l'erreur de commutation	56
4.2.3 Evaluation <i>a priori</i> de l'erreur de commutation	57

II	Simulation des Grandes Echelles en maillage adaptatif	61
5	Les différentes techniques de raffinement local	63
5.1	Intérêt du raffinement local en turbulence	63
5.2	Redistribution ou enrichissement de maillage ?	64
5.3	Techniques de raffinement local par enrichissement	65
5.3.1	Enrichissement d'un maillage unique	65
5.3.2	Enrichissement à l'aide d'une structure hiérarchisée	66
6	Méthode de raffinement automatique développée	69
6.1	Formalisme multiniveau	69
6.2	Couplage intergrilles	72
6.2.1	Opérateurs de restriction et de projection	72
6.2.2	Enrichissement aux frontières	74
7	Critère de raffinement pour la LES	79
7.1	Les critères de raffinement classiques	79
7.1.1	Critères numériques	79
7.1.2	Critères physiques	80
7.1.3	Limites de ces critères	80
7.2	Senseur en ondelettes élaboré	81
7.2.1	Les ondelettes	81
7.2.2	Critère de raffinement utilisé	84
7.2.3	Méthode de <i>grouping / clustering</i>	88
8	Application de la méthode	93
8.1	Couche de mélange en développement temporel	93
8.1.1	Physique de l'écoulement	93
8.1.2	Description de la simulation	95
8.1.3	Calculs de référence	97
8.1.4	Validation du senseur	100
8.1.5	Adaptation de maillage	102
8.1.6	Conclusion partielle	122
8.2	Canal plan	123
8.2.1	Physique de l'écoulement	124
8.2.2	Description de la simulation	126
8.2.3	Adaptation de maillage	129
8.2.4	Conclusion partielle	143
8.3	Culot	146
8.3.1	Physique de l'écoulement	147
8.3.2	Description de la simulation	147
8.3.3	Adaptation de maillage	154
8.3.4	Conclusion partielle	164
III	Annexes	169
A	Outils numériques	171

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	5
B Modèles sous-maille dynamiques	175
C Terme de forçage	179
D Commutation error in LES with time-dependent filter width	183
E A Wavelet-based Adaptive Mesh Refinement Criterion for Large-Eddy Simulation	201

Introduction

Du fait des performances croissantes des outils informatiques, l'approche numérique en mécanique des fluides ne cesse de se développer et se présente comme un complément précieux à l'étude expérimentale. Elle permet d'obtenir un nombre considérable d'informations sur la nature de phénomènes qui ne sont pas toujours accessibles aisément de manière expérimentale sous peine d'influer sur la dynamique de l'écoulement. Par ailleurs, on peut aisément mener des études paramétriques pour des coûts moindres que dans le cadre de l'approche expérimentale.

Par conséquent, la simulation numérique des phénomènes turbulents constitue, de nos jours, un enjeu important en mécanique des fluides. Ainsi, de nombreuses études visant à développer des méthodes numériques permettant de disposer de simulations précises tout en réduisant leurs coûts ont été réalisées au cours de ces dernières décennies. Cependant, la simulation numérique instationnaire d'écoulements turbulents reste pour le moment limitée à des configurations relativement simples. En effet, les mécanismes qui entrent en jeu dans ce type d'écoulement font intervenir une gamme importante d'échelles caractéristiques, tant d'un point de vue spatial que temporel. La turbulence se décrit ainsi comme un état chaotique et par définition imprévisible. Pour étudier les écoulements turbulents, il convient donc de faire une sélection parmi les échelles afin de n'en calculer qu'une partie et de réduire le nombre de degrés de liberté nécessaires pour que la simulation soit réalisable. La non-linéarité des équations implique un couplage entre les différentes échelles, ce qui rend impossible leur résolution de manière indépendante. Il faut donc tenir compte de l'interaction entre ces échelles par des modèles. Afin de simuler au mieux la physique complexe de ce type d'écoulement, il existe ainsi deux approches distinctes.

Tout d'abord, on peut décider de prendre en compte l'ensemble des interactions entre ces différentes gammes d'échelles, ce qui a pour conséquence d'aboutir à des coûts de calcul prohibitifs. En effet, la prise en compte d'un ensemble de structures de tailles plus ou moins fines nécessite un nombre important de points de discrétisation. On parlera alors de Simulation Numérique Directe (S.N.D. ou D.N.S. en anglais pour *Direct Numerical Simulation*). Afin de limiter les désagréments de l'approche directe, on a généralement recours à des outils de modélisation dans le but de réduire la quantité d'échelles explicitement résolues.

C'est notamment dans cette optique que la S.G.E. (Simulation des Grandes Echelles, ou L.E.S. en anglais pour *Large Eddy Simulation*), a été élaborée. Elle repose sur une décomposition fréquentielle des variables de l'écoulement par l'application d'un filtre passe-bas en fréquence. L'intérêt de ce filtrage est qu'il permet de distinguer deux gammes d'échelles : d'une part, la partie basse fréquence contient les grosses structures de l'écoulement, lesquelles constituent sa partie motrice et sont calculées directement par résolution des équations.

tions de Navier-Stokes filtrées ; d'autre part, les petites échelles, qui correspondent à la partie haute fréquence, sont prises en compte par l'introduction d'un modèle. Cette modélisation s'appuie sur des caractéristiques particulières de ces petites structures (isotropie, homogénéité, universalité, ...). Pour une revue plus complète des techniques Simulation des Grandes Echelles, le lecteur pourra se reporter à l'ouvrage de P. Sagaut [122].

Cependant, ces hypothèses portant sur les petites échelles ne sont pas vérifiées pour toutes les configurations de calcul. Par exemple, on ne retrouve pas nécessairement les conditions d'isotropie des petites échelles dans les zones de proche paroi. Par ailleurs, la proportion de petites échelles peut varier de manière significative spatialement et temporellement, du fait du caractère intermittent de la turbulence. Ceci nécessite alors d'adapter la modélisation en conséquence, de manière à diminuer les erreurs de modélisation dans les zones de l'écoulement critiques pour l'approche SGE.

Une idée couramment envisagée, afin de limiter les erreurs de modélisation engendrées dans de telles circonstances, est alors de diminuer la quantité d'échelles à modéliser. La solution est ainsi d'adapter le maillage afin de le rendre plus fin dans les zones à risques, au regard des hypothèses nécessaires à la modélisation. En effet, la notion de filtrage introduite dans le cadre de la SGE est directement liée à la résolution de la grille de calcul : plus le maillage est grossier, et plus la quantité d'échelles à modéliser est importante.

La notion d'adaptation de maillage est déjà couramment employée dans le cadre de la résolution numérique d'équations différentielles. On peut citer les méthodes A.M.R. (Adaptive Mesh Refinement [9, 8, 117]) dont l'objectif est d'adapter localement et de manière automatique le maillage à l'échelle des mécanismes mis en jeu. L'objectif commun des méthodes adaptatives est ainsi d'ajuster la résolution du maillage de telle manière qu'il soit possible d'obtenir une bonne discrétisation de l'ensemble des structures de l'écoulement. Ces méthodes adaptatives peuvent alors être combinées avec différentes approches portant sur la simulation des phénomènes turbulents. C'est le cas des études concernant le problème de couplage entre les méthodes moyennées de type RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes [114]) et SGE, chacune de ces méthodes nécessitant une précision de grille de calcul qui lui est propre. On parle alors de *méthodes hybrides* [115, 136, 68].

Face au problème du coût excessif que représente la prise en compte déterministe de structures de petites tailles, il est ici envisagé de traiter chaque gamme d'échelle indépendamment par une décomposition multi-niveaux. Pour cela, on cherche à réduire l'étendue des grilles de calcul de haute résolution et à limiter ces grilles aux zones particulières de l'écoulement qui nécessitent la prise en compte déterministe de petites structures, comme c'est par exemple le cas des écoulements de couche limite. Un outil d'adaptation de maillage est ainsi proposé dans cette étude. Cependant, une telle décomposition multi-niveaux n'est pas sans poser un certain nombre de problèmes. En particulier, une attention toute particulière doit être prêtée au problème du couplage et du transport d'informations entre les différents niveaux de résolution. Ainsi, s'il semble intuitivement simple de transférer l'information résolue à un niveau donné vers des niveaux de résolution plus grossiers, l'opération inverse se révèle plus délicate. Dans ce cas, il est nécessaire de procéder à un enrichissement en fréquence de la solution afin de lui donner le bon niveau fréquentiel. L'approche introduite dans ces travaux traite de manière explicite de la discontinuité fréquentielle qui existe entre les différents niveaux de filtrage. Plus précisément, cette dernière sera traitée par un enrichissement direct par extrapolation pour

le couplage grossier/fin nécessaire à la définition des conditions aux limites d'une grille fine.

Le recours à l'adaptation de maillage en Simulation des Grandes Echelles n'est par ailleurs pas un problème simple à traiter. En effet, un grand nombre d'études a permis de mettre en évidence les éventuelles complications numériques qui peuvent survenir lorsque l'on applique des calculs de SGE sur un maillage non uniforme en espace en accord avec la répartition spatiale des structures turbulentes (voir, par exemple, [50, 143, 142, 63]). L'influence de cette erreur, dite erreur de commutation, engendrée par ce type de maillage, y est discutée.

Mais l'impact réel des méthodes d'adaptation de maillages sur la SGE n'a pas été détaillé d'avantage. L'objectif des travaux effectués a donc été d'étudier l'apport des méthodes d'adaptation en terme de précision de calcul, lorsque l'on veut appliquer la SGE à des écoulements pour lesquels les hypothèses de modélisation ne sont pas nécessairement vérifiées.

Ce mémoire s'articule autour de deux grandes parties. La première commence par décrire les grands concepts de la Simulation des Grandes Echelles. Ainsi le chapitre 1 expose la problématique liée à cette méthodologie en introduisant la notion de séparation d'échelles qui lui est propre. Les équations de base de la Simulation des Grandes Echelles sont également présentées dans ce premier chapitre, introduisant par la même occasion le problème de fermeture sous-maille. Les différentes fermetures sous-mailles utilisées dans la suite de l'étude sont ensuite décrites dans le chapitre 2. Le chapitre 3 introduit alors le problème que représente le couplage de la Simulation des Grandes Echelles avec des méthodes d'adaptation de maillage. La démarche a plus particulièrement visé à donner une estimation de l'erreur introduite par une adaptation temporelle du maillage. Une approche théorique, inspirée des travaux portant sur l'erreur de commutation due à une inhomogénéité en espace du maillage, a visé à mettre en évidence des critères numériques à respecter afin de limiter l'erreur introduite (chapitre 3). Une étude numérique sur un cas de Turbulence Homogène Isotrope (THI) a également été menée en parallèle pour valider l'approche théorique (chapitre 4).

La deuxième partie du mémoire vise à évaluer plus concrètement l'apport des méthodes d'adaptation de maillage sur des calculs de Simulation des Grandes Echelles. Ainsi, afin de confronter la méthode d'adaptation à des écoulements concrets, il a d'abord été nécessaire d'élaborer une stratégie automatique d'adaptation de maillage. Après une étude bibliographique des différentes méthodes de raffinement local de maillage existantes (chapitre 5), la méthode retenue dans ces travaux est détaillée dans le chapitre 6. On y décrit en particulier le formalisme multi-niveaux, en détaillant la séparation multi-échelles considérée ainsi que les équations à résoudre à chaque niveau de filtrage. Le problème du traitement aux interfaces de couplage grossier/fin est également détaillé dans ce chapitre. L'étape d'adaptation automatique de maillage nécessite l'élaboration d'un indicateur de raffinement adapté à la SGE et, de manière plus générale, à tout écoulement pleinement turbulent. Ainsi, afin de détecter de manière automatique les zones à raffiner, il a été choisi d'utiliser une méthode basée sur les ondelettes (chapitre 7) ; le principe est alors de déterminer les zones critiques pour la SGE en recherchant un éventuel caractère anisotrope des petites structures. La gestion du raffinement a également été mise au point afin de limiter les erreurs numériques engendrées. Après avoir validé la démarche sur un

cas simple, elle a été étendue à des cas plus complexes d'écoulements, pour lesquels une stratégie d'adaptation semble nécessaire à la SGE (chapitre 8). Dans un premier temps, il s'agit de valider l'algorithme multi-niveaux sur un écoulement de couche de mélange. Les deux autres cas de calcul envisagés concernent le cas du canal plan, qui doit permettre de confronter la méthode aux écoulements pariétaux, puis l'écoulement se formant en aval d'un objet au bord de fuite tronqué.

Enfin, une conclusion et des perspectives viennent achever ce mémoire, complété par des annexes et les publications associées.

Première partie

Aspects théoriques de la Simulation des Grandes Echelles en maillage variable

Chapitre 1

La Simulation des Grandes Echelles

La simulation d'un écoulement nécessite l'utilisation de méthodes numériques dans le but de résoudre les équations de Navier-Stokes. On comprend aisément que les contraintes à imposer aux outils numériques seront d'autant plus importantes que la configuration de l'écoulement étudié sera complexe. En particulier, le cas des écoulements turbulents nécessite la prise en compte de la dynamique de l'ensemble des échelles spatio-temporelles caractéristiques de l'écoulement. Par exemple, dans le cas d'un écoulement de dimension caractéristique donnée L , il faudra utiliser une discrétisation spatiale qui permettra de prendre en compte à la fois des structures tourbillonnaires dont la taille est du même ordre de grandeur que le domaine de calcul (*i.e.* L) et les plus petites structures présentes dans l'écoulement caractérisées par l'échelle dissipative de Kolmogorov η . Ces deux échelles sont reliées au nombre de Reynolds de l'écoulement par :

$$\frac{L}{\eta} = O\left(Re_L^{3/4}\right) \quad (1.1)$$

De cette manière, la résolution totale des équations de Navier-Stokes pour un domaine tridimensionnel de dimension L^3 nécessitera d'utiliser une discrétisation en espace avec $O(Re_L^{9/4})$ degrés de liberté. En ajoutant à cela la prise en compte du rapport des temps caractéristiques qui est de l'ordre de $O(Re_L^{3/4})$, on obtient au total Re_L^3 degrés de liberté. Sachant que les nombres de Reynolds employés dans des applications aéronautiques varient généralement entre 10^6 et 10^8 , on comprend qu'il est très difficile d'utiliser des simulations numériques directes qui prendraient en compte toutes les échelles présentes dans le spectre d'énergie cinétique turbulente. De telles simulations nécessiteraient des ressources informatiques bien supérieures à celles actuellement disponibles sur les super-calculateurs.

De manière générale, il n'est pas indispensable d'avoir recours à une simulation complète de la dynamique de l'écoulement. En effet, en vue d'applications industrielles éventuelles de ces calculs, seules les grandeurs moyennes et les grosses structures présentent un réel intérêt. En pratique, le caractère chaotique de la turbulence ne permet pas de reproduire exactement, et de façon déterministe, un écoulement, les conditions initiales ne pouvant être connues avec une précision infinie.

Afin de limiter les coûts de calculs lors de ces simulations d'écoulements turbulents, il existe des techniques de modélisation qui offrent un substitut à la simulation numérique directe, en faisant une sélection parmi les échelles pour n'en calculer qu'une partie et réduire ainsi le nombre de degrés de liberté nécessaires pour réaliser cette simulation. Ces

méthodes reposent sur une décomposition des variables étudiées dans l'écoulement en sa partie résolue, notée $\bar{\phi}$, et sa partie non résolue et donc modélisée, notée ϕ' :

$$\phi = \bar{\phi} + \phi' \quad (1.2)$$

La partie résolue $\bar{\phi}$ représente le niveau de description le plus grossier de la solution dont la résolution nécessite l'emploi de moins de degré de liberté que pour la variable physique ϕ . Néanmoins, la non-linéarité des équations de Navier-Stokes traduit le couplage qu'il existe entre les différentes échelles de la solution, ce qui implique que celles-ci ne peuvent pas être calculées indépendamment les unes des autres. Il est donc nécessaire de prendre en compte les interactions entre le champ résolu $\bar{\phi}$ et le champ non résolu ϕ' . Ainsi, les méthodes de modélisation de la turbulence que nous allons aborder par la suite ont pour fonction d'introduire un modèle permettant de rendre compte de ces interactions. Par ailleurs, ce modèle servant à représenter l'action d'un très grand nombre d'échelles avec le champ résolu, il sera caractérisé de modèle statistique dans le sens où il ne rend compte que d'une action globale de ces échelles.

Il existe différentes méthodes de modélisation de la turbulence qui se différencient par la définition donnée au champ résolu $\bar{\phi}$; les deux méthodes les plus fréquemment employées sont la méthode RANS (pour Reynolds Averaged Numerical Simulation) et la méthode SGE (pour Simulation des Grandes Echelles, ou LES en anglais pour Large-Eddy Simulation), que nous allons évoquer successivement dans les paragraphes suivants. On peut également citer des approches moins répandues, comme les méthodes C.V.S. (Coherent Vortex Simulation, [37]) et S.C.A.L.E.S. (Stochastic Coherent Adaptive Large Eddy Simulation, [51]), pour lesquelles on ne résout explicitement que les structures cohérentes de l'écoulement, ou encore les méthodes P.O.D. (Proper Orthogonal Decomposition, [12]) pour lesquelles on ne conserve que les structures les plus énergétiques.

L'approche RANS consiste à définir le champ résolu $\bar{\phi}$ comme étant la moyenne statistique de la solution : $\bar{\phi} = \langle \phi \rangle$, la notation $\langle \cdot \rangle$ représentant l'opérateur de moyenne statistique. La partie modélisée ϕ' représente, pour sa part, les fluctuations de la grandeur étudiée par rapport à cette moyenne. Cette moyenne statistique est généralement associée directement à une moyenne temporelle de la solution, mais ceci limite les situations envisageables avec cette méthode aux seuls cas stationnaires. Pour les cas instationnaires, il existe néanmoins les méthodes URANS (pour Unsteady Reynolds Average Numerical Simulation) pour lesquelles la moyenne statistique est considérée, cette fois-ci, comme une moyenne d'ensemble.

L'approche moyennée permet en règle générale une réduction considérable du nombre de degrés de liberté utilisés pour la simulation, ce qui la rend plus attractive que les simulations directes pour les applications industrielles. Elle entraîne cependant des problèmes de modélisation de certains termes non linéaires qui apparaissent dans les équations de Navier-Stokes moyennées. Ces termes faisant intervenir les variables non résolues, ils ne sont effectivement pas directement calculables et nécessitent un recours à une modélisation, dont la complexité dépend de la quantité d'informations non-résolues. Cette modélisation est très complexe car elle doit rendre compte de la totalité du spectre turbulent. Par conséquent, les modèles de turbulence RANS sont généralement calibrés en fonction de la configuration de calcul rencontrée. Spalart *et al.* [133] en déduisent qu'il est difficilement concevable d'appliquer l'approche RANS sur une configuration d'avion complète.

Par ailleurs, de nombreuses études semblent confirmer que les méthodes RANS aboutissent à des résultats erronés lorsqu'il s'agit de simuler des écoulements présentant des interactions entre des instabilités et des phénomènes turbulents aléatoires [7]. Il semble en effet que les méthodes RANS sont trop dissipatives en présence de phénomènes turbulents, ce qui empêche de rendre compte de tout couplage de ces derniers avec d'éventuelles instabilités naturelles de l'écoulement. Par conséquent, l'application de méthodes RANS à des configurations de calcul de plus en plus complexes s'avère limitée. Une solution intermédiaire entre les approches directe et moyennée est la Simulation des Grandes Echelles.

La démarche de la simulation des grandes échelles est totalement différente, puisqu'il s'agit ici de distinguer les différentes échelles présentes dans la solution. En effet, elle propose de ne résoudre directement que les plus grandes échelles de l'écoulement, qui constituent "sa partie motrice". L'emploi de telles méthodes fait également apparaître des termes non-linéaires dans les équations de Navier-Stokes, traduisant l'interaction entre les petites échelles non résolues et les grandes échelles contenant la majeure partie de l'énergie cinétique. Ces termes supplémentaires faisant intervenir le champ non résolu, on a recours à un modèle appelé modèle sous-maille pour prendre en compte les échelles non résolues. On peut ainsi faire le rapprochement entre cette méthode et d'autres démarches classiques en mécanique, pour lesquelles nous avons également recours à des distinctions de différents niveaux de description des phénomènes ; l'exemple le plus connu est l'intégration de la mécanique particulaire statistique à plus grande échelle dans le cadre de la mécanique des milieux continus.

La SGE s'en tient donc à ne résoudre réellement que les grosses structures de l'écoulement dont les caractéristiques varient énormément en fonction du type d'écoulement considéré, les petites échelles ayant, pour leur part, un caractère beaucoup plus universel. Parmi les avantages de cette démarche de simulation, on peut mentionner le fait qu'en appliquant cette méthode, on peut réduire deux principaux défauts des autres méthodes mentionnées : d'une part, l'exigence en puissance de calcul requise par la Simulation Numérique Directe, et d'autre part, l'empirisme des fermetures en un point des équations moyennées temporellement.

La simulation des grandes échelles représente donc un bon compromis entre la Simulation Numérique Directe et les méthodes RANS.

1.1 Notion de filtrage

L'objectif de la Simulation des Grandes Echelles est donc de réaliser des simulations à partir de maillages plus grossiers que ceux employés en simulation directe, pour réduire le coût des calculs. Cela revient à appliquer un filtrage spatial à la solution, ce qui se traduit mathématiquement par l'introduction d'une fonction $\bar{\phi}$ obtenue par convolution de la solution exacte et d'une fonction filtre. Ce filtre aura des propriétés liées au maillage ainsi qu'à la taille de maille employée dans la simulation $\bar{\Delta}$, dite échelle de coupure. On associe à cette échelle de coupure $\bar{\Delta}$ un nombre d'onde de coupure vérifiant $k_c = \pi/\bar{\Delta}$. La variable filtrée est donc définie formellement de la manière suivante :

$$\bar{\phi}(x, t) = G \star \phi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(y, t) G(x - y, \bar{\Delta}(x, t)) dy \quad (1.3)$$

Les propriétés communément admises pour la fonction filtre sont les suivantes :

- Conservation des constantes : soit a une constante,

$$\bar{a} = a \iff \int G(y)dy = 1 \quad (1.4)$$

- Linéarité (facilement vérifiée par la linéarité du produit de convolution)

$$\overline{\phi + \psi} = \bar{\phi} + \bar{\psi} \quad (1.5)$$

- Commutativité avec les dérivations

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial s} = \bar{\frac{\partial \phi}{\partial s}}, \quad s = x, t \quad (1.6)$$

Ces propriétés apparaissent, en effet, nécessaires pour obtenir une application simple du filtrage aux équations de Navier-Stokes. Il est cependant important de souligner que les filtres vérifiant ces trois propriétés n'ont à priori aucune raison d'être des opérateurs de Reynolds, c'est à dire :

$$\bar{\bar{\phi}} = G \star G \star \phi \neq \bar{\phi} = G \star \phi \quad (1.7)$$

$$\overline{\phi'} = G \star (Id - G) \star \phi \neq 0 \quad (1.8)$$

Ainsi, on peut affirmer que G n'est pas un projecteur mais peut être interprété plutôt comme un changement de variable, d'où la possibilité d'inverser l'opération de filtrage. Par conséquent, il n'y a pas de perte d'information du fait du filtre employé. Au contraire, un opérateur de Reynolds ne pouvant être inversé [43], il y aurait une perte inévitable d'information en employant un tel opérateur comme filtre.

Par ailleurs, il existe également des nuances en ce qui concerne les conditions de validité de la troisième propriété. En effet, nous verrons par la suite que l'utilisation d'échelles de coupure variables (dans le temps ou l'espace) peut entraîner l'apparition de termes supplémentaires dans les équations de Navier-Stokes. Ces termes peuvent alors perturber la simulation si on ne prend pas un soin particulier dans le choix du filtre employé afin de pouvoir les négliger ou pour les modéliser convenablement (cf chapitre 3).

En pratique, on considère généralement trois principaux filtres en SGE pour réaliser la séparation des échelles de la turbulence. Pour le cas monodimensionnel, on peut écrire les noyaux de convolution G et les fonctions de transfert associées \hat{G} pour ces filtres de la manière suivante :

1. Le filtre boîte :

$$G(x - \xi) = \begin{cases} \frac{1}{\bar{\Delta}} & \text{si } |x - \xi| \leq \frac{\bar{\Delta}}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.9)$$

$$\hat{G}(k) = \frac{\sin(k\bar{\Delta}/2)}{k\bar{\Delta}/2} \quad (1.10)$$

2. Le filtre Gaussien :

$$G(x - \xi) = \left(\frac{\gamma}{\pi\bar{\Delta}^2}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{-\gamma|x - \xi|^2}{\bar{\Delta}^2}\right) \quad (1.11)$$

$$\hat{G}(k) = \exp\left(\frac{-\bar{\Delta}^2 k^2}{4\gamma}\right) \quad (1.12)$$

où γ est une constante, prise généralement égale à 4.

3. Le filtre porte, ou *sharp cut-off* :

$$G(x - \xi) = \frac{\sin(k_c(x - \xi))}{k_c(x - \xi)}, \text{ avec } k_c = \frac{\pi}{\bar{\Delta}} \quad (1.13)$$

$$\hat{G}(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } |k| \leq k_c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.14)$$

Il peut être intéressant de noter ici que seul le filtre porte est un opérateur de Reynolds. Par ailleurs, on vérifie facilement que les deux premiers filtres sont positifs, ce qui n'est pas le cas du filtre porte. Pour comprendre l'intérêt de l'utilisation d'un filtre positif, on introduit le tenseur sous-maille τ (cette notion sera détaillée par la suite, cf relation (1.37)) :

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$$

où u_i représente la i -ième composante du vecteur vitesse.

Par analogie avec le tenseur de Reynolds dans l'approche statistique, on introduit la condition de réalisabilité ; le tenseur τ est dit réalisable, ou défini semi-positif, s'il vérifie les conditions suivantes :

$$\tau_{ii} \geq 0 \quad (1.15)$$

$$|\tau_{ij}| \leq \sqrt{\tau_{ii} \tau_{jj}} \quad (1.16)$$

$$\det(\tau) \geq 0 \quad (1.17)$$

La positivité du filtre est alors une condition nécessaire et suffisante pour assurer la réalisabilité du tenseur sous maille τ .

1.2 Les équations de Navier-Stokes filtrées

1.2.1 Equations filtrées pour un fluide compressible

Ce chapitre est consacré à l'obtention des équations constitutives de la technique de simulation des grandes échelles, soit les équations de Navier-Stokes filtrées. On rappelle tout d'abord la forme générale des équations de Navier-Stokes, avant de rentrer en détails dans l'obtention des équations filtrées et l'introduction des éventuels termes de commutation.

Les équations de Navier-Stokes expriment des principes simples de la mécanique des fluides, que sont la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale du fluide considéré. En l'absence de forces extérieures, dans le cas d'un fluide Newtonien, visqueux et compressible, les équations de Navier-Stokes, dans l'espace physique, peuvent s'exprimer de la manière suivante, en suivant la convention d'Einstein sur les sommations :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0 \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij}) \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} ((\rho E + p) u_i) = -\frac{\partial}{\partial x_i} (q_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} u_i) \quad (1.20)$$

Les variables x_i et t designent, respectivement, les variables d'espaces et le temps, ρ la densité du fluide et on note u_i la composante du vecteur vitesse dans la direction i . La loi des gaz parfaits permet de relier la pression statique p à la densité et la température du fluide :

$$p = \rho R T \quad (1.21)$$

où $R = \mathcal{R}/M$, \mathcal{R} étant la constante des gaz parfaits et M la masse molaire du fluide étudié. De la même façon, l'énergie totale du fluide considéré ρE peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\rho E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho u_i u_j \quad (1.22)$$

Le terme $\rho e = p/(\gamma - 1)$ décrit l'énergie interne du fluide, γ étant le rapport des capacités calorifiques à pression constante (C_p) et volume constant (C_v) : $\gamma = C_p/C_v$.

La composante q_j du flux de chaleur et la composante σ_{ij} du tenseur des contraintes visqueuses vérifient les relations suivantes :

$$q_j = -\mathcal{K} \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (1.23)$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu \left(S_{ij} - \frac{1}{3} S_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (1.24)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker et S le tenseur des vitesses de déformation :

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.25)$$

La loi de Sutherland nous permet de déterminer la viscosité dynamique μ en fonction de la température du fluide :

$$\mu(T) = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \frac{T_0 + C}{T + C}$$

T_0 étant une température de référence¹ et μ_0 et C des constantes qui varient en fonction du fluide étudié².

Le coefficient de conductibilité thermique \mathcal{K} est, pour sa part, lié à la viscosité dynamique par l'intermédiaire du nombre de Prandtl³, noté Pr :

$$\mathcal{K}(T) = \frac{C_p \mu(T)}{Pr}$$

On trouve généralement le système formé par les équations (1.18-1.20) sous une forme simplifiée ; on peut en effet substituer ce système par la notation compacte suivante :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{N}(V) = 0 \quad (1.26)$$

¹ $T_0 = 273K$

² $\mu_0 = 1,711 \times 10^{-5} Pl$ et $C = 110,4K$ pour l'air

³ $Pr = 0.7$ généralement admis pour l'air

Le vecteur V est ainsi constitué des variables conservatives de l'écoulement $V^T = (\rho, \rho U^T, \rho E)$, U étant le vecteur vitesse $U^T = (u_1, u_2, u_3)$. L'opérateur \mathcal{N} s'écrit :

$$\mathcal{N}(V) = \begin{pmatrix} \nabla \cdot (\rho U) \\ \nabla \cdot (\rho U \otimes U) + \nabla p - \nabla \cdot \sigma \\ \nabla \cdot ((\rho E + p)U) - \nabla \cdot (\sigma : U) + \nabla \cdot q \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

Les notations ∇ et $\nabla \cdot$ désignent respectivement le gradient et la divergence.

Le système (1.26) constitue la formulation générale des équations de base de la mécanique des fluides. L'approche de la Simulation des Grandes Echelles va alors constituer à ne les résoudre que pour les structures les plus volumineuses de l'écoulement. Pour cela, nous avons mentionné la notion de filtrage de la solution afin de distinguer ces grosses structures. En appliquant ce filtre noté $\bar{\cdot}$ ou G à l'équation compacte (1.26), nous obtenons les équations filtrées à résoudre :

$$G \star \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{N}(V) \right) = 0 \quad (1.28)$$

L'objectif est alors de se ramener à un système d'équations portant sur les variables filtrées \bar{V} . En supposant, dans un premier temps, que les opérateurs de différentiation commutent avec la notion de filtrage (voir chapitre 3 pour une discussion autour de cette hypothèse), le système (1.28) peut être reformulé de la manière suivante :

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \mathcal{N}(\bar{V}) = -[G \star, \mathcal{N}](V) \quad (1.29)$$

Le membre de gauche est directement calculable car il ne fait intervenir que le champ résolu \bar{V} . Le second membre provient de la non-linéarité de l'opérateur de Navier-Stokes \mathcal{N} et ne peut être calculé simplement puisqu'il fait intervenir les variables non filtrées V . Le membre de droite fait intervenir *le commutateur* défini de la manière suivante :

$$[a, b](\phi) = a \circ b(\phi) - b \circ a(\phi) \quad (1.30)$$

Par ailleurs, l'application du filtre SGE aux équations de Navier-Stokes va aboutir à des équations filtrées portant sur des quantités à résoudre de la forme $\overline{\rho\phi}$, où ϕ représente soit une grandeur thermodynamique de l'écoulement, soit une grandeur cinématique. Or seules les quantités $\bar{\rho}$ et $\bar{\phi}$ sont calculées explicitement, ce qui entraîne un nouveau problème de fermeture. Afin d'éviter cela, on va réécrire les équations filtrées en introduisant le changement de variables de Favre, qui consiste à pondérer les quantités $\overline{\rho\phi}$ par la masse volumique $\bar{\rho}$. Les nouvelles variables sont ainsi obtenues par :

$$\tilde{\phi} = \frac{\overline{\rho\phi}}{\bar{\rho}} \quad (1.31)$$

et on utilise le même type de décomposition des variables que celle définie par (1.2) :

$$\phi = \tilde{\phi} + \phi'' \quad (1.32)$$

La première conséquence de l'introduction de ces nouvelles variables filtrées apparaît au niveau de l'énergie résolue. En effet, en appliquant ce filtrage à la relation (1.22) liant

l'énergie à la pression, on obtient une nouvelle relation portant sur les variables filtrées qui est non-linéaire. On introduit alors l'énergie résolue $\widehat{\rho E}$:

$$\widehat{\rho E} = \frac{\bar{p}}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \frac{\overline{\rho U \cdot \rho U}}{\bar{\rho}} \neq \overline{\rho E} \quad (1.33)$$

On peut alors réécrire les équations de Navier-Stokes en introduisant les variables de Favre, différentes formulations du système d'équations filtrées étant néanmoins disponibles dans la littérature. Pour une présentation détaillée des diverses formulations existantes pour les équations filtrées, on pourra se reporter à la thèse de Lenormand [71]. On se contentera ici de donner la formulation retenue dans nos travaux.

L'équation de conservation de la masse filtrée est commune à l'ensemble des approches et devient :

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \tilde{u}_i) = 0 \quad (1.34)$$

Par ailleurs, il existe une importante similitude entre les différentes approches pour l'écriture de l'équation de quantité de mouvement filtrée, que l'on peut écrire de manière générale :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{u}_i \tilde{u}_j) + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial \widehat{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} = - \frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{\rho} (\widetilde{u_i u_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j)] + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\sigma}_{ij} - \widehat{\sigma}_{ij}) \quad (1.35)$$

La partie résolue du tenseur des contraintes visqueuses $\widehat{\sigma}_{ij}$ est définie par :

$$\widehat{\sigma}_{ij} = 2\mu \left(\widetilde{T} \right) \left(\widetilde{S}_{ij} - \frac{1}{3} \widetilde{S}_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (1.36)$$

Le membre de droite de (1.35) fait intervenir deux termes sous-maille. Le premier d'entre eux est le tenseur des contraintes sous-mailles et est généralement noté τ_{ij} . C'est par l'intermédiaire de ce terme que l'on va modéliser l'action des petites échelles de la turbulence sur les échelles résolues. En s'appuyant sur les travaux de Leonard [74], on peut décomposer ce tenseur de la manière suivante :

$$\underbrace{\bar{\rho} (\widetilde{u_i u_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j)}_{\tau_{ij}} = \underbrace{\bar{\rho} (\widetilde{\widetilde{u_i u_j}} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j)}_{L_{ij}} + \underbrace{\bar{\rho} (\widetilde{u_i'' \tilde{u}_j} + \widetilde{\tilde{u}_i u_j''})}_{C_{ij}} + \underbrace{\bar{\rho} (\widetilde{u_i'' u_j''})}_{R_{ij}} \quad (1.37)$$

où L_{ij} , C_{ij} et R_{ij} sont respectivement les tenseurs de Leonard, des termes croisés et de Reynolds. Seul le tenseur de Leonard est directement calculable puisqu'il ne fait intervenir que les échelles résolues dont il traduit les interactions.

Le second terme sous-maille fait intervenir le tenseur $\overline{\sigma}_{ij}$ obtenu par filtrage du tenseur σ_{ij} . En règle générale, on admet que la viscosité et la partie déviatrice du tenseur des taux de déformations sont décorélées, ce qui permet de réécrire le tenseur $\overline{\sigma}_{ij}$ de la manière suivante :

$$\overline{\sigma}_{ij} = 2\bar{\mu} \left(\overline{S_{ij} - \frac{1}{3} S_{kk} \delta_{ij}} \right) \quad (1.38)$$

On note généralement A_1 et A_2 les deux termes présents dans le membre de droite de la relation (1.35) :

$$A_1 = - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (1.39)$$

$$A_2 = \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\sigma}_{ij} - \widehat{\sigma}_{ij}) \quad (1.40)$$

Enfin, de nombreuses formulations existent pour l'équation de conservation de l'énergie filtrée. La formulation retenue ici est celle proposée par Vreman [145, 147] qui est la forme la plus générale rencontrée dans la littérature, et pour laquelle aucune hypothèse simplificatrice n'a été appliquée. L'équation traduisant la conservation de l'énergie totale résolue $\widehat{\rho E}$ s'écrit :

$$\frac{\partial \widehat{\rho E}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\widehat{\rho E} + \bar{p}) \tilde{u}_j \right) + \frac{\partial \widehat{Q}_j}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\widehat{\sigma}_{ij} \tilde{u}_i) = -B_1 - B_2 - B_3 + B_4 + B_5 + B_6 - B_7 \quad (1.41)$$

avec \widehat{Q}_j le flux de chaleur résolu :

$$\widehat{Q}_j = -\kappa(\tilde{T}) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \quad (1.42)$$

Les termes B_1 à B_7 , qui représentent les termes sous-maille selon la décomposition de Vreman *et al.* [147], sont donnés par :

$$B_1 = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{p u_j} - \bar{p} \tilde{u}_j) \quad (1.43)$$

$$B_2 = \overline{p \frac{\partial u_j}{\partial x_j}} - \bar{p} \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_j} \quad (1.44)$$

$$B_3 = \frac{\partial \tau_{ij} \tilde{u}_i}{\partial x_j} \quad (1.45)$$

$$B_4 = \tau_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \quad (1.46)$$

$$B_5 = \overline{\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} - \overline{\sigma_{ij}} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \quad (1.47)$$

$$B_6 = \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\sigma_{ij} \tilde{u}_i} - \widehat{\sigma}_{ij} \tilde{u}_i) \quad (1.48)$$

$$B_7 = \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{Q_j} - \widehat{Q}_j) \quad (1.49)$$

On dispose dans la littérature d'un certain nombre d'hypothèses visant à simplifier le système d'équations filtrées. En particulier, l'analyse de Vreman *et al.* [147] permet de déterminer l'importance relative de chacun des termes sous-mailles apparaissant dans l'équation de quantité de mouvement filtrée et l'équation d'énergie filtrée par des évaluations *a priori* de ces termes dans le cas de la couche de mélange. Ainsi, cette étude montre que les termes A_2 , B_6 et B_7 sont négligeables devant les autres termes présents dans ces équations. Par ailleurs, les termes B_3 et A_1 sont évalués de manière immédiate dès lors que le tenseur sous-maille τ_{ij} a été convenablement modélisé. Le terme B_4 , bien que calculable directement, est ignoré du fait de son faible ordre de grandeur. Enfin, le terme B_5 a fait l'objet de nombreuses études par le passé. En tenant compte des conclusions de Vreman *et al.* montrant que l'ordre de grandeur de ce terme est faible devant les autres termes sous-maille, et du fait de la complexité ou de la trop grande approximation des modèles existants pour ce terme, il a été fait le choix de ne pas en tenir compte dans la suite de ces travaux.

Il est intéressant de noter que les conclusions de Vreman ne se limitent pas au cas de la couche de mélange, puisqu'elles ont été confirmées par la suite par Lenormand *et al.* [72, 73] sur une configuration de canal plan. Plus généralement, les travaux de Cote *et al.* [24] montrent que ces conclusions semblent pouvoir s'appliquer à la majorité des écoulements homogènes cisailés.

Ainsi, seuls les termes A_1 , B_1 , B_2 et B_3 seront retenus dans ces travaux et leur modélisation sera donnée dans un prochain paragraphe (cf chapitre 2).

1.2.2 Equations filtrées pour un fluide incompressible

L'écriture des équations de Navier-Stokes filtrées dans le paragraphe précédent nous a contraint à considérer que l'opération de filtrage commute avec les différentes dérivées partielles présentes dans les équations de Navier-Stokes. Or, nous allons voir que dans certaines conditions de calcul, cette hypothèse est remise en cause et qu'une attention toute particulière doit être portée au terme d'erreur engendré. Afin de simplifier les notations, nous allons ici considérer les équations de Navier-Stokes incompressibles comme point de départ et réécrire les équations filtrées pour un fluide incompressible en mettant l'accent sur les termes d'erreur dus à la non-commutation éventuelle des opérateurs de filtrage et de dérivation.

On se place ici dans le cas simplifié d'un fluide newtonien, visqueux, incompressible et à masse volumique et température constantes. Les équations suivantes sont ainsi utilisées dans le cadre de l'étude de la Turbulence Homogène Isotrope et pour l'approche théorique du problème de commutation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (u \otimes u) + \frac{1}{\rho} \nabla p - \nu \nabla^2 u = 0 \quad (1.50)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (1.51)$$

où u , p , ρ et ν représentent respectivement la vitesse, la pression statique, la masse volumique et la viscosité cinématique du fluide étudié.

Afin de se ramener aux équations filtrées employées en Simulation des Grandes Echelles, on applique ensuite un opérateur de filtrage aux équations précédentes. En se servant de l'hypothèse de conservation des constantes, on obtient le système d'équations filtrées suivant :

$$G \star \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (u \otimes u) + \frac{1}{\rho} \nabla p - \nu \nabla^2 u \right) = 0 \quad (1.52)$$

$$G \star (\nabla \cdot u) = 0 \quad (1.53)$$

On cherche à obtenir des équations portant sur les variables filtrées \bar{u} et \bar{p} , il faut donc inverser l'ordre des opérations de filtrage et de dérivation présentes dans ces équations :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{u} \otimes \bar{u}) + \frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} - \nu \nabla^2 \bar{u} = \nabla \cdot \tau \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial t}, G \star \right] (u) + [\nabla \cdot, G \star] \circ B(u, u) + \frac{1}{\rho} [\nabla, G \star](p) - \nu [\nabla^2, G \star](u) \end{aligned} \quad (1.54)$$

$$\nabla \cdot \bar{u} = [\nabla \cdot, G \star](u) \quad (1.55)$$

Il apparaît de nouveaux termes dans ce système d'équations filtrées ; tout d'abord, on rappelle la notion de commutateur entre deux opérateurs a et b , appliqués à un champ u , et qui s'exprime de la manière suivante :

$$[a, b](u) = a \circ b(u) - b \circ a(u)$$

L'opérateur $B(u, v)$ est, pour sa part, défini par :

$$B(u, v) = u \otimes v$$

Enfin, le tenseur sous-maille τ qui traduit l'interaction entre les échelles résolues et les échelles modélisées, peut s'écrire :

$$\tau = [B(., .), G\star](u, u)$$

Dans la plupart des études menées à ce jour, on s'affranchit des problèmes de commutation et on néglige les termes correspondant dans les équations précédentes ; on retrouve ainsi la forme usuelle des équations de la Simulation des Grandes Echelles.

Remarque : Une première conséquence de ces erreurs de commutation est que le champ filtré n'est pas incompressible d'après l'équation (1.55). Ainsi, le champ filtré ne pourra pas être décrit comme solénoïdal, au contraire du champ réel étudié et vérifiant (1.51).

Par la suite, la résolution de ce système d'équations pour un fluide incompressible sera réalisée à l'aide d'un code spectral. Il apparaît donc nécessaire de réécrire ces équations dans l'espace de Fourier.

Dans l'espace physique, on rappelle que le champ de vitesse $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$, exprimé dans le repère cartésien $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, est solution du système formé par les équations de continuité et de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.56)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.57)$$

où p désigne la pression statique et ν la viscosité cinématique supposée constante et uniforme. On adjoint à cela des conditions initiales et des conditions aux limites pour obtenir un problème bien posé.

Le système équivalent dans l'espace spectral est obtenu en appliquant une transformée de Fourier à ces équations.

La contrainte d'incompressibilité (équation de continuité) se traduit par l'orthogonalité du vecteur d'onde \mathbf{k} avec le mode $\hat{u}(\mathbf{k}, t)$ défini comme suit :

$$\hat{u}(\mathbf{k}, t) = \mathcal{F}[u(\mathbf{x}, t)] = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int u(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad \text{avec } i^2 = -1 \quad (1.58)$$

La transformée de Fourier, à laquelle on associe l'opérateur \mathcal{F} , vérifie les propriétés suivantes :

$$\mathcal{F} \left[\frac{\partial u_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} \right] = ik_j \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) \quad (1.59)$$

$$\mathcal{F}[u_i(\mathbf{x}, t)u_j(\mathbf{x}, t)] = [\hat{u}_i \star \hat{u}_j](\mathbf{k}, t) \quad (1.60)$$

Le système à résoudre constitué par les équations de Navier-Stokes se réduit ainsi à une étude de l'évolution du mode \mathbf{k} :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2\right) \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) = t_i(\mathbf{k}, t) \quad (1.61)$$

Le terme non linéaire $t_i(\mathbf{k}, t)$ peut s'écrire de la manière suivante :

$$t_i(\mathbf{k}, t) = M_{ijm}(\mathbf{k}) \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \hat{u}_j(\mathbf{p}, t) \hat{u}_m(\mathbf{q}, t) d^3p d^3q \quad (1.62)$$

avec,

$$M_{ijm}(\mathbf{k}) = -\frac{\imath}{2} (k_m P_{ij}(\mathbf{k}) + k_j P_{im}(\mathbf{k})) \quad (1.63)$$

On introduit ici l'opérateur de projection sur le plan perpendiculaire au vecteur \mathbf{k} :

$$P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \quad (1.64)$$

Le principal intérêt dans l'utilisation de l'espace spectral pour résoudre le système d'équations de Navier-Stokes vient de la transformation du problème de convolution entraîné par l'introduction du filtrage en un simple produit ; en effet, on a :

$$\mathcal{F}[G(\mathbf{x}) \star u(\mathbf{x}, t)] = \hat{G}(\mathbf{k}) \hat{u}(\mathbf{k}, t) \quad (1.65)$$

La fonction \hat{G} est la fonction de transfert associée au noyau de convolution du filtre, G . L'équation de quantité de mouvement filtrée s'obtient ainsi en multipliant l'équation (1.61) par la fonction de transfert \hat{G} :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2\right) \hat{G}(\mathbf{k}) \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) = \hat{G}(\mathbf{k}) t_i(\mathbf{k}, t) \quad (1.66)$$

avec

$$\hat{G}(\mathbf{k}) t_i(\mathbf{k}, t) = M_{ijm}(\mathbf{k}) \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \hat{G}(\mathbf{k}) \hat{u}_j(\mathbf{p}, t) \hat{u}_m(\mathbf{q}, t) d^3p d^3q \quad (1.67)$$

Par la suite, le champ filtré, écrit dans l'espace spectral, sera noté $\overline{\hat{u}_i}(\mathbf{k}, t) = \hat{G}(\mathbf{k}) \hat{u}_i(\mathbf{k}, t)$. En faisant le rapprochement entre le terme $\hat{G}(\mathbf{k}) t_i(\mathbf{k}, t)$ et le terme $\overline{u_i u_j}$ de l'espace physique, on va pouvoir décomposer le terme écrit dans l'espace spectral de la même manière que l'on a procédé dans l'espace physique ; on réécrit ainsi l'équation (1.66) de la manière suivante :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2\right) \overline{\hat{u}_i}(\mathbf{k}, t) = t_{<k_c}(\mathbf{k}, t) + t_{SGS}(\mathbf{k}, t) \quad (1.68)$$

où $t_{<k_c}(\mathbf{k}, t)$ est l'équivalent du terme $\overline{u_i u_j}$ de l'espace physique et désigne donc les interactions directement calculables à partir des modes résolus ; le terme $t_{SGS}(\mathbf{k}, t)$, quant à lui, représente les autres termes non-linéaires à prendre en compte, c'est à dire les interactions sous-maille à rapprocher du terme τ_{ij} de l'espace physique. Chacun de ces termes peut s'exprimer de la manière suivante :

$$t_{<k_c}(\mathbf{k}, t) = M_{ijm}(\mathbf{k}) \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}}^{p, q < k_c} \hat{G}(\mathbf{k}) \hat{u}_j(\mathbf{p}, t) \hat{u}_m(\mathbf{q}, t) d^3p d^3q \quad (1.69)$$

et

$$t_{SGS}(\mathbf{k}, t) = M_{ijm}(\mathbf{k}) \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}}^{p, q > k_c} \hat{G}(\mathbf{k}) \hat{u}_j(\mathbf{p}, t) \hat{u}_m(\mathbf{q}, t) d^3p d^3q \quad (1.70)$$

Chapitre 2

Fermetures sous-maille

2.1 Notion de modèles sous-maille

2.1.1 Le principe de la modélisation

Le principe de séparation des échelles de la turbulence employé en LES permet donc de réduire le degré de complexité de la solution, mais va introduire le problème de fermeture des équations ; en effet, il va falloir tenir compte de l'influence des petites échelles de l'écoulement, qui ne sont donc pas résolues de manière directe, mais qui vont, par conséquent, devoir être modélisées. La modélisation consiste ainsi à approcher les termes de couplage entre les échelles résolues et les échelles sous-mailles uniquement à partir des informations contenues dans ces échelles résolues.

Le problème de la modélisation sous-maille consiste donc à prendre en compte, dans l'équation d'évolution du champ filtré \bar{u} , les effets d'interaction avec le champ fluctuant u' représentés par le terme $\nabla \cdot \tau$. On peut alors avoir recours à deux stratégies de modélisation,

- la *modélisation structurelle* du terme sous-maille, qui consiste à approcher au mieux le tenseur τ en le construisant à partir d'une évaluation de u' ou d'un développement formel en série. L'hypothèse de modélisation consiste donc à se donner une relation de la forme $u' = \mathcal{K}(\bar{u})$ ou $\tau = \mathcal{K}(\bar{u})$;
- la *modélisation fonctionnelle*, qui consiste à modéliser uniquement l'action des termes sous-maille sur le champ résolu, et non plus directement le tenseur sous-maille. L'hypothèse de fermeture peut alors s'écrire sous la forme $\nabla \cdot \tau = \mathcal{K}(\bar{u})$.

Chacune de ces voies de modélisation requiert ses propres connaissances préalables sur la dynamique des équations traitées. Par exemple, l'approche structurelle ne nécessite pas de connaître les interactions inter-échelles, mais elle demande une connaissance suffisante de la structure des petites échelles nécessaires pour déterminer le tenseur sous-maille. Pour cela, on doit supposer que la dynamique de l'équation traitée mène à une forme universelle des petites échelles, et que la corrélation entre les échelles est suffisamment forte et simple pour ce problème pour pouvoir déduire la structure des échelles sous-maille à partir du champ résolu. Pour l'approche fonctionnelle, il faudra connaître la nature des interactions inter-échelles et s'assurer que l'effet des petites échelles sur les plus grosses a un caractère universel.

2.1.2 Les interactions entre échelles résolues et échelles sous-maille

On peut décrire les transferts inter-échelles de la manière suivante. Les grands tourbillons extraient de l'énergie de l'écoulement moyen. Ces grands tourbillons sont à l'origine de la formation de zones de cisaillement relativement épaisses ("pancakelike") qui tendent à s'aplatir pour donner naissance à des nappes de vorticité. Ces dernières, de par leur instabilité, vont s'enrouler pour donner des tubes de vorticité qui, en s'étirant, vont former des structures filamenteuses. D'un point de vue énergétique, ces transformations successives vont se traduire par un transfert direct de l'énergie des grandes échelles vers les plus petites, jusqu'à ce que la viscosité moléculaire ait totalement dissipé cette énergie cinétique en énergie interne. On peut visualiser ce phénomène en regardant le spectre suivant correspondant à une turbulence homogène et isotrope (figure 2.1), où l'on distingue une zone de production (aux faibles nombres d'onde), une zone de transfert d'énergie des grandes échelles vers les petites échelles (appelée zone inertielle) dans laquelle la densité spectrale d'énergie décroit suivant la loi de Kolmogorov, et enfin une zone de dissipation aux grands nombres d'onde.

En réalité, il existe aussi un transfert d'énergie des petites échelles vers les grandes (ph -

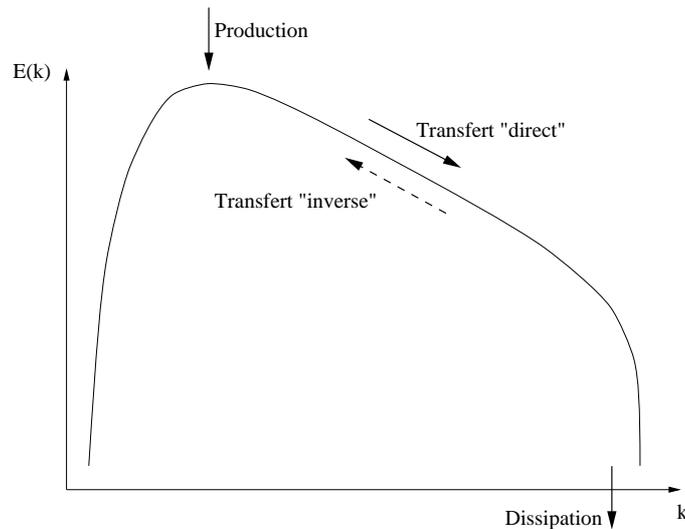


FIG. 2.1 – Spectre d'énergie en turbulence homogène isotrope et mécanismes énergétiques.

nom ne de cascade inverse ou "backscatter" en anglais) mais son intensité est bien plus faible que celle correspondant à la cascade directe, sauf pour les plus petits nombres d'onde (pente du spectre en k^4). Cependant, son influence s'avère non négligeable pour des écoulements complexes (couche-limite, canal plan, etc...) et il apparaît nécessaire d'en tenir compte dans la modélisation sous-maille afin de bien représenter la physique de l'écoulement.

Le paragraphe suivant va introduire une liste non exhaustive des modèles sous-mailles existants. Les avantages et inconvénients de chacun d'entre eux sont discutés, en particulier leur capacité à décrire la cascade inverse d'énergie.

2.2 Principaux modèles

2.2.1 La modélisation fonctionnelle

Dans cette partie, on étudie en détails quelques exemples de modèles dits “fonctionnels”, pour lesquels on fait l’hypothèse que l’action des échelles sous-maille sur les échelles résolues est essentiellement énergétique, et que, par conséquent, la connaissance du bilan des transferts entre ces gammes d’échelles suffit à décrire l’action des échelles sous-maille. Par ailleurs, ces modèles sont basés sur l’idée que les mécanismes de transfert d’énergie sont similaires aux mécanismes de diffusion liés à la viscosité moléculaire. Tous les modèles présentés ici ne tiennent compte que du transfert direct des grandes échelles vers les petites. Ceci conduit à l’utilisation d’une hypothèse de Boussinesq pour la modélisation du tenseur sous-maille, dont les axes principaux sont supposés alignés avec ceux du tenseur des taux de déformation résolu :

$$\tau_{ij}^d = -2\bar{\rho}\nu_t\tilde{S}_{ij}^d \quad (2.1)$$

la notation d décrivant la partie déviatoire du tenseur considéré.

La partie isotrope du tenseur sous-maille est, quant à elle, généralement prise en compte de manière implicite. En effet, à l’aide d’un changement de variable comme celui proposé par Comte et Lesieur [21], on ajoute cette quantité à la pression filtrée. L’intérêt de ce changement de variable est qu’il n’entraîne pas de modification des équations filtrées.

En ce qui concerne la fermeture de l’équation d’énergie, il reste à modéliser les termes B_1 , B_2 et B_3 de l’équation (1.41). Le terme B_3 est directement calculable dès lors que le tenseur sous-maille τ est connu, alors que les termes B_1 et B_2 nécessitent une modélisation. Ces deux derniers sont généralement regroupés en un seul terme et leur modélisation repose sur l’hypothèse d’une proportionnalité entre les transferts sous-maille d’énergie et le gradient de température résolu :

$$\begin{aligned} B_3 &= \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij}\tilde{u}_i) \\ B_1 + B_2 &= -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\kappa_t \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \right) \end{aligned}$$

où le coefficient de conductivité thermique sous-maille κ_t est lié à la viscosité sous-maille par l’introduction du nombre de Prandtl turbulent :

$$\kappa_t = \frac{\bar{\rho}\nu_t C_p}{Pr_t} \quad (2.2)$$

Il reste alors à déterminer la viscosité sous-maille, ce qui s’effectue par l’introduction d’un modèle sous-maille. Il est cependant intéressant de souligner que les modèles présentés ci-dessous ont généralement été développés dans le cadre d’écoulements incompressibles, et étendus par la suite directement au cas compressible sans modification spécifique.

Modèle de Smagorinsky

Le modèle de Smagorinsky est, historiquement, un des premiers modèles à viscosité turbulente à avoir été employé. Il a été élaboré et utilisé par Smagorinsky en 1963 [132] afin de simuler les mouvements à grande échelle de l’atmosphère. Il repose sur une hypothèse

de longueur de mélange locale, la viscosité turbulente étant alors supposée proportionnelle à l'échelle de longueur caractéristique sous-maille $\overline{\Delta}$ et à une vitesse caractéristique turbulente $v = \overline{\Delta}|\tilde{S}|$:

$$\nu_t = (C_s \overline{\Delta})^2 |\tilde{S}| \quad (2.3)$$

où le gradient de vitesse caractéristique $|\tilde{S}|$ s'obtient à partir du tenseur de déformation du champ résolu S_{ij} :

$$|\tilde{S}| = \sqrt{2\tilde{S}_{ij}\tilde{S}_{ij}} \quad (2.4)$$

Afin de déterminer la valeur de la constante C_s , on fait l'hypothèse que les petites échelles sont en équilibre, c'est à dire que la production et la dissipation d'énergie se compensent, ce qui revient à dire que l'on se situe en turbulence homogène isotrope. On obtient ainsi une valeur théorique pour cette constante :

$$C_s \simeq \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{3C_k} \right)^{3/4} \quad (2.5)$$

où C_k représente la constante de Kolmogorov. Avec $C_k = 1.41$, on obtient $C_s \simeq 0.18$; cependant, en fonction des écoulements considérés pour lesquels l'hypothèse d'isotropie peut s'avérer fautive, des valeurs de C_s dans l'intervalle $[0,1; 0,2]$ sont couramment admises.

Enfin, afin de prendre en compte au mieux les structures locales de l'écoulement (présence d'obstacles, zones laminares, etc.), ce modèle est souvent combiné soit avec des senseurs structurels comme celui présenté plus loin dans ce paragraphe, soit avec une procédure dynamique pour l'évaluation de cette constante C_s comme présenté en annexe B.

L'intérêt de ce modèle réside dans son faible coût numérique, mais il présente néanmoins un certain nombre d'inconvénients. Tout d'abord, il apparaît nécessaire de procéder à une modification de la valeur attribuée à la constante C_s en fonction de l'écoulement considéré; en particulier, on devra l'atténuer pour des simulations de proche paroi. De plus, le modèle ne tend pas à s'annuler en l'absence d'énergie sous-maille, ce qui va entraîner des erreurs non négligeables si l'on cherche à étudier des écoulements transitionnels sans modification de ce modèle. Enfin ce modèle est purement dissipatif et interdit tout retour d'énergie des petites échelles vers les grandes. Or ce phénomène peut représenter localement jusqu'à la moitié des transferts d'énergie dans le cas du canal plan par exemple [110].

Modèle d'échelles mixtes

Afin de s'affranchir du principal défaut du modèle de Smagorinsky évoqué précédemment, à savoir son incapacité à s'annuler dans les zones résolues de l'écoulement, Sagaut *et al.* [124] ont mis au point un modèle également basé sur la modélisation fonctionnelle, et qui utilise l'énergie cinétique à la coupure " q_c " comme un senseur additionnel qui permet d'évaluer le caractère résolu ou non d'un écoulement. Ce modèle repose sur une triple dépendance à la longueur de coupure du filtre $\overline{\Delta}$, au taux de déformation de l'écoulement étudié et à l'énergie cinétique à la coupure, et fait intervenir un paramètre de pondération α :

$$\nu_t = C_m \left| \tilde{S} \right|^\alpha (q_c)^{\frac{1-\alpha}{2}} (\bar{\Delta})^{1+\alpha} \quad (2.6)$$

où l'énergie cinétique q_c est évaluée à l'aide d'un double filtrage de la solution comme étant égale à l'énergie cinétique des plus petites échelles résolues :

$$q_c = \frac{1}{2} \left(\tilde{u}_k - \hat{u}_k \right)^2 \quad (2.7)$$

La notation $\hat{\cdot}$ désigne ici un second niveau de filtrage, la longueur de coupure $\hat{\Delta} = \pi/k'_c$ de ce filtre test étant supérieure à celle du filtre de la simulation $\bar{\Delta} = \pi/k_c$.

L'énergie cinétique q_c correspond en fait à l'énergie portée par les échelles résolues de plus

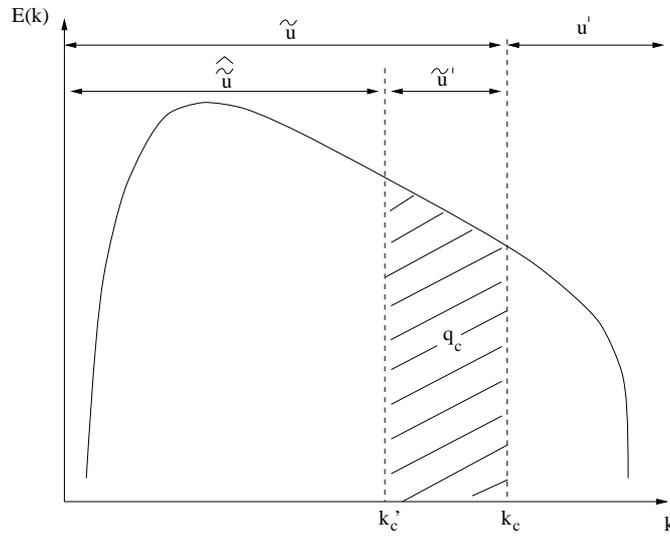


FIG. 2.2 – Découpage du spectre d'énergie associé à un double filtrage de la solution.

haute fréquence (Figure 2.2), et sous certaines hypothèses, sa valeur est comparable au niveau énergétique q_{sm} des échelles sous-mailles. En effet, en considérant que les fréquences de coupure correspondant aux deux niveaux de filtrage agissent dans la zone inertielle d'un spectre d'énergie de Kolmogorov en $k^{-5/3}$, l'approximation $q_c \approx q_{sm}$ est exacte pour $\hat{\Delta} = \sqrt{8}\bar{\Delta}$. Le tenseur de sous-maille ainsi défini tend donc à s'annuler pour les écoulements résolus.

Le paramètre α permet de faire dégénérer le modèle vers le modèle de Smagorinsky quand α tend vers 1, ou vers le modèle à énergie cinétique de sous-maille [128, 150] pour $\alpha = 0$. Nous fixerons sa valeur à 0,5 dans notre étude. L'approche EDQNM [2] nous donne alors la valeur de la constante : $C_m = 0,06$.

Senseurs structurels

La majorité des modèles relevant de la modélisation structurelle ont pour principal défaut de ne pas s'annuler dans les zones résolues de l'écoulement, ce qui les rend surdissipatifs pour les écoulements transitionnels, dans des zones laminares, ou encore près de parois solides.

Afin de gérer au mieux le caractère intermittent des écoulements turbulents, on peut être

amené à faire appel à un senseur basé sur une information structurelle dans le but d'annuler les termes sous-maille dans les zones laminaires. Ceci est réalisé en incorporant au modèle une fonction de sélection basée sur les fluctuations angulaires de la vorticité [27]. David propose ainsi de considérer qu'un écoulement est turbulent et contient des échelles sous-maille lorsque les valeurs de la variation angulaire locale de la vorticité pour les plus hautes fréquences résolues sont supérieures à la valeur seuil $\theta_0 = 20^\circ$. En notant θ l'angle entre le vecteur vorticité ω et le vecteur vorticité filtré $\hat{\omega}$ obtenu à l'aide d'un filtre test $\hat{\cdot}$, le senseur f_{θ_0} est l'opérateur booléen :

$$f_{\theta_0}(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \geq \theta_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.8)$$

On multiplie alors l'expression classique du ν_t par cet opérateur pour obtenir la forme exacte de la viscosité sous-maille.

Néanmoins, des variations aussi brutales du senseur peuvent entraîner des instabilités numériques, ce qui a amené Sagaut [121] à proposer une version continue de la fonction de sélection :

$$f_{\theta_0}(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \geq \theta_0 \\ r(\theta)^n & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.9)$$

avec généralement $n = 2$, et la fonction $r(\theta)$ définie par :

$$r(\theta) = \frac{\tan^2(\theta/2)}{\tan^2(\theta_0/2)} \quad (2.10)$$

Ce dernier rapport est évalué facilement en introduisant la vorticité fluctuante $\omega' = \omega - \hat{\omega}$ et en utilisant la relation :

$$\tan^2(\theta/2) = \frac{2\hat{\omega}\omega - \hat{\omega}^2 - \omega^2 + \omega'^2}{2\hat{\omega}\omega + \hat{\omega}^2 - \omega^2 - \omega'^2} \quad (2.11)$$

Enfin, un facteur correctif de 1,65 est généralement appliqué à la fonction f_{θ_0} comme recommandé par David. Finalement, l'expression de la viscosité sous-maille est donnée par :

$$\mu_t^{final} = 1,65 \cdot f_{\theta_0}(\theta) \cdot \mu_t \quad (2.12)$$

Il existe d'autres modélisations fonctionnelles (voir par exemple [122] pour un aperçu des modèles existants) mais ce modèle est souvent retenu pour son comportement asymptotique, sa stabilité et son faible coût numérique du fait de sa localisation en temps et en espace.

Modèles spectraux

Pour l'étude de la Turbulence Homogène Isotrope, les calculs ont été menés dans l'espace spectral, et il faut par conséquent employer des modèles de turbulence tirant leurs informations de ce même espace et non plus de l'espace physique comme peuvent le faire les modèles présentés précédemment.

Afin de modéliser les transferts d'énergie, Kraichnan [67] introduit une viscosité effective qui inclut le phénomène de cascade inverse. La viscosité $\nu_t(k|k_c, t)$ qui représente les

interactions entre le nombre d'onde k et les échelles sous-mailles ($k > k_c$) est ainsi définie par :

$$\nu_t(k|k_c, t) = -\frac{T_{SGS}(\mathbf{k}, t)}{2k^2 \overline{E}(\mathbf{k}, t)} \quad (2.13)$$

où T_{SGS} est l'équivalent, en terme de bilan d'énergie, du terme t_{SGS} de l'équation (1.68). En introduisant cette viscosité effective dans l'équation d'évolution du spectre d'énergie turbulente, dérivée de l'équation (1.68), on obtient la relation suivante :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + 2k^2 (\nu + \nu_t(k|k_c, t)) \right] \overline{E}(\mathbf{k}, t) = T_{<k_c}(\mathbf{k}, t) \quad (2.14)$$

où $\overline{E}(\mathbf{k}, t) = G^2(\mathbf{k})E(\mathbf{k}, t)$ représente le spectre d'énergie turbulente des échelles résolues. La modélisation permet alors d'exprimer la viscosité effective en fonction des échelles résolues de l'écoulement, afin de fermer le système d'équations filtrées.

L'expression la plus simplifiée pour la viscosité turbulente a été introduite par Métais et Lesieur [77]. La viscosité ν est indépendante du nombre d'onde et représente donc une expression moyenne sur l'ensemble des nombres d'ondes considérés. La viscosité effective est alors définie par :

$$\nu_t(k|k_c, t) = \frac{2}{3} C_k^{-3/2} \left[\frac{E(k_c)}{k_c} \right]^{1/2} \quad (2.15)$$

Par la suite, des modèles plus précis ont été étudiés. Afin de représenter au mieux les mécanismes énergétiques constatés par l'approche EDQNM, il a en effet été nécessaire de rendre compte de la distribution spectrale à imposer pour la viscosité turbulente. Pour cela, on définit la viscosité effective par un produit de deux contributions :

$$\nu_t(k|k_c, t) = \nu_e^\infty \nu_t^*(k|k_c, t) \quad (2.16)$$

Le terme constant ν_e^∞ est la valeur asymptotique de la viscosité effective pour les nombres d'onde petits devant le nombre d'onde à la coupure. On évalue sa valeur en utilisant l'énergie à la coupure et le nombre d'onde correspondant :

$$\nu_e^\infty = 0,441 C_k^{-3/2} \left[\frac{E(k_c)}{k_c} \right]^{1/2} \quad (2.17)$$

Une extension a été proposée par Métais et Lesieur [100]. En partant du principe que la pente du spectre ne suit pas nécessairement la loi de Kolmogorov en $k^{-5/3}$, ils s'appuient de nouveau sur l'approche EDQNM afin de modifier le terme ν_e^∞ pour un spectre de pente $-m$. Pour des valeurs $m < 3$, le premier facteur de la viscosité effective devient alors :

$$\nu_e^\infty = 0,31 \frac{5-m}{m+1} \sqrt{3-m} C_k^{-3/2} \left[\frac{E(k_c)}{k_c} \right]^{1/2} \quad (2.18)$$

Pour des spectres tels que $m \geq 3$, le transfert d'énergie s'annule ce qui entraîne la nullité de la viscosité effective.

Le second facteur intervenant dans (2.16) décrit le comportement de la viscosité effective à proximité de la coupure. On utilise généralement la définition décrivant un comportement exponentiel de la viscosité effective quand on s'approche de la coupure :

$$\nu_t^*(k|k_c, t) = 1 + 34,5 e^{-3,03 \left(\frac{k_c}{k} \right)} \quad (2.19)$$

Cette formule permet ainsi d’obtenir une viscosité effective quasiment indépendante du nombre d’onde pour des valeurs de k très petites devant k_c , et une augmentation de cette viscosité à l’approche de la coupure.

Les viscosités obtenues dans les différentes expressions dans l’espace spectral restent purement positives. Il est donc de nouveau impossible de rendre compte convenablement du phénomène de cascade inverse avec ce type de modèle sous-maille.

Il faut également souligner que le nombre d’onde de coupure k_c ne peut être choisi au hasard. En effet, il doit appartenir à la zone inertielle du spectre d’énergie afin de s’assurer que les hypothèses classiques telles que l’homogénéité des échelles sous-maille sont vérifiées.

2.2.2 La modélisation structurelle

Le principe de cette deuxième famille de modèles est d’approcher au mieux du tenseur sous-maille τ , et plus uniquement de modéliser son influence sur les échelles résolues. Afin de modéliser la structure mathématique de ce tenseur, on va donc devoir estimer les échelles non résolues à partir des échelles résolues. Pour cela, on fait généralement appel à des extrapolations des caractéristiques des échelles résolues les plus fines pour estimer les échelles sous-mailles. Pour cela on fait appel à des hypothèses de type similarité d’échelles, comme proposé par Bardina *et al.* [3], qui consiste à rapprocher le comportement des échelles résolues de plus hautes fréquences de celui des échelles non-résolues de plus basses fréquences.

Les atouts de ce type de modélisation sont nombreux. Tout d’abord, cette modélisation fait appel à moins d’hypothèses que la modélisation fonctionnelle ; en particulier, on ne suppose pas ici que le tenseur sous-maille est aligné avec le tenseur des déformations résolu, et les modèles entrant dans cette catégorie ne font pas appel à des hypothèses portant sur l’homogénéité ou l’isotropie de l’écoulement. Dans ces conditions, on obtient un niveau de corrélation intéressant avec le “vrai” tenseur sous-maille, évalué de manière *a priori* par filtrage d’une DNS pour une turbulence homogène isotrope [82] et dans le cadre d’écoulements anisotropes [59]. Enfin, le fait de se dispenser de l’introduction d’une viscosité sous-maille permet de représenter les éventuels phénomènes de backscatter. Néanmoins, ce type de modèle s’avère sous-dissipatif pour des résultats *a posteriori*.

Afin de limiter ce désagrément, on choisit généralement de coupler les deux types de modélisation et d’employer un *modèle mixte*, comme introduit par Zang *et al.* [151]. Il s’agit d’un modèle plus complexe à mettre en oeuvre et plus coûteux, qui repose à la fois sur un modèle de viscosité sous-maille (avec évaluation dynamique des coefficients par exemple, cf annexe B) issu de l’approche fonctionnelle et un modèle de type similarité d’échelles issu de la modélisation structurelle. Ce type de modèle tire parti du caractère plus universel de l’approche structurelle, tout en conservant un niveau de dissipation suffisant par l’introduction d’une viscosité sous-maille. En outre, il est alors possible de restituer les phénomènes de cascade inverse.

2.2.3 Les autres approches pour la modélisation

Les sections précédentes ont mis en place les outils nécessaires pour le traitement explicite des termes sous-maille dans la résolution du système. Il existe cependant une alternative à cette prise en compte explicite, appelée approche MILES (pour *Monotonically*

Integrated Large-Eddy Simulation [17]). Le point crucial de cette approche est de considérer que la dissipation numérique de certains schémas de discrétisation suffit à représenter les transferts d'énergie des échelles résolues vers les échelles sous-maille. Les schémas de type décentré, en particulier les schémas de capture de choc, jouent en effet un rôle similaire à celui d'une dissipation sous-maille, du fait du filtrage non-linéaire haute-fréquence qu'ils induisent.

Parmi les avantages de cette approche, on retiendra son faible coup de calcul puisqu'il n'y a alors plus aucune évaluation de viscosité turbulente. De plus, il n'y a plus recours à l'hypothèse d'isotropie des petites échelles dans la modélisation implicite du terme sous-maille, ce qui est intéressant puisque cette hypothèse est controversée pour des écoulements complexes.

Néanmoins, Garnier *et al.* [40] ont montré que l'emploi de schémas dissipatifs introduit, de manière générale, une dissipation dont la contribution est supérieure à celle d'un modèle sous-maille. Ainsi, Garnier *et al.* [41] prônent l'utilisation de schémas non-dissipatifs avec un modèle sous-maille, ou l'emploi de schémas dissipatifs seuls dans les zones où ils sont indispensables (chocs, ...). Nous verrons en annexe que l'outil numérique utilisé dans cette étude permet effectivement de limiter la dissipation numérique aux zones où elle est indispensable (cf annexe A).

Enfin, dans le cadre des écoulements en présence de parois solides, un certain nombre de modèles visant à améliorer les modélisations existantes dans les zones de proche paroi ont été envisagés. En effet, le principal problème avec les modèles classiques est qu'il ne vérifient pas le comportement asymptotique espéré dans ces zones de l'écoulement. L'idée est alors d'ajouter un terme d'amortissement dans l'expression de la viscosité sous-maille afin de la faire tendre vers zéro à la paroi. On pourra ainsi citer les travaux de Van Driest [140] et ceux Piomelli *et al.* [111]. Cependant, la fonction d'amortissement utilisée dans ces modèles est basée sur la distance à la paroi z^+ . Cela n'est pas sans poser de nouveaux problèmes. Tout d'abord, le fait que ces modèles soient basés sur la distance à la paroi leur confère un caractère empirique. Par ailleurs, la question de la valeur à donner à cette distance en présence de plusieurs parois solides, pour des configurations complexes, n'est pas triviale.

2.3 Modèles retenus pour l'étude

En résumé, il existe un très grand nombre de modèles sous-maille présentant chacun des intérêts et des inconvénients, en fonction du type d'écoulement considéré. Des études antérieures permettent de déterminer l'ordre de précision attendu pour ces modèles dans nos cas d'étude.

Tout d'abord, dans le cadre de l'approche spectrale de la Turbulence Homogène Isotrope, plusieurs modèles ont été étudiés : le modèle de Smagorinsky et les modèles spectraux basés sur l'introduction d'une viscosité effective dans le cas "simple" (2.17) ou dans le cas dynamique avec évaluation de la pente m (2.18). Les résultats ont montré que le modèle de Smagorinsky ne permettait pas d'obtenir correctement la pente en $k^{-5/3}$ près de la coupure que l'on doit retrouver dans la limite d'un nombre de Reynolds infini. Une accumulation d'énergie est alors observé au niveau de la coupure (cf figure 2.3). Ceci peut

s'expliquer théoriquement (voir, par exemple, [122] page 372) et s'avère être un défaut du modèle de Smagorinsky. Les deux autres modèles permettent de retrouver des spectres similaires, avec une légère préférence pour le modèle dynamique de Métails et Lesieur, au niveau de la pente près de la coupure. Par conséquent, le modèle de viscosité effective avec évaluation dynamique de la pente (2.18) a été conservé pour les simulations de Turbulence Homogène Isotrope.

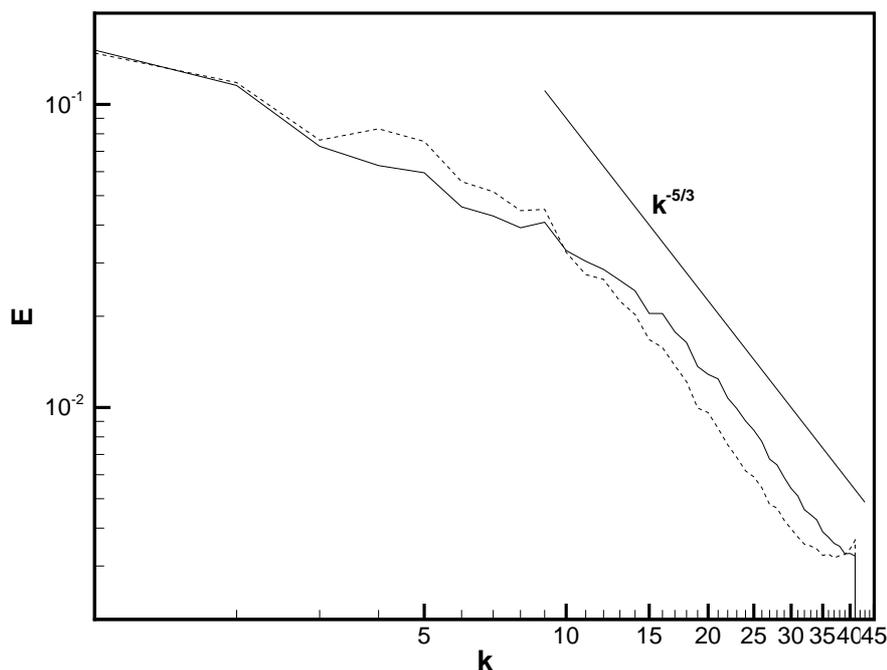


FIG. 2.3 – Spectres d'énergie obtenus avec le modèle dynamique de Métails et Lesieur (—) et le modèle de Smagorinsky (--).

Pour les calculs en volumes finis, de nombreuses études antérieures ont mis en avant les faiblesses et les atouts des différents modèles existants. Par exemple, Vreman *et al.* [146] ont évalué le comportement de plusieurs modèles sous-maille pour le cas de la couche de mélange turbulente. Leurs conclusions peuvent être résumées comme suit :

- **pour de faibles valeurs du nombre de Reynolds**, les différents modèles étudiés présentent des résultats comparables, qu'ils soient basés sur une évaluation dynamique de leurs coefficients ou non ; néanmoins, le meilleur modèle semble être le modèle mixte dynamique, le modèle dynamique de Clark et le modèle de Smagorinsky dynamique donnant également des résultats très intéressants.
- **pour de fortes valeurs du nombre de Reynolds**, Vreman *et al.* ont constaté que certains modèles sans évaluation dynamique de leurs coefficients s'avèrent instables ; le modèle de Smagorinsky se montre pour sa part surdissipatif dans le régime laminaire, retardant la transition vers la turbulence, alors que dans le régime turbulent

ce modèle n'est pas assez dissipatif. Les meilleurs résultats sont obtenus avec des modèles dynamiques, le plus précis étant le modèle de Smagorinsky dynamique.

Il semble ainsi qu'une procédure d'évaluation dynamique des coefficients soit recommandée pour l'étude des phénomènes à hauts nombres de Reynolds.

Cependant, les modèles dynamiques classiques, s'appuyant sur la relation de Germano, nécessitent une attention particulière du fait de leur tendance à être numériquement instables (voir en annexe B). Afin d'éviter tout phénomène de ce type, le modèle d'échelle mixte a finalement été retenu ici. Ce modèle peut être considéré comme un modèle dynamique (au sens large du terme) dans la mesure où il vise à s'adapter à la structure locale de l'écoulement et ne requiert aucun traitement particulier en vue de sa stabilité.

Ce modèle a été validé par Sagaut *et al.* [123] sur le cas du canal plan, ainsi que dans de nombreuses autres études comme les thèses de Lenormand [71], Quéméré [115] et Terracol [136]. Les résultats obtenus avec ce modèle sont alors comparables à ceux d'un modèle dynamique pour l'ensemble des écoulements étudiés dans ces différentes références. Les modèles dynamiques nécessitent, pour leur part, une procédure de stabilisation numérique, ce que le modèle sélectif ne requiert pas.

Le modèle d'échelle mixte sélectif a donc été retenu pour sa stabilité, son aptitude à représenter convenablement les phénomènes liés à la cascade inverse ainsi que pour sa capacité à capturer la transition vers la turbulence.

Chapitre 3

Analyse théorique de l'erreur de commutation

Parmi les hypothèses couramment employées en Simulation des Grandes Echelles, la commutativité entre les dérivées partielles intervenant dans les équations de Navier-Stokes et la notion de filtrage, liée à la décomposition du champ en grandes et petites échelles, a été remise en cause dans de nombreuses études. Dans certaines situations, en effet, il s'avère nécessaire de tenir compte de l'erreur numérique introduite en utilisant ce type d'hypothèse. En particulier, de nombreuses références traitent de la non-commutativité entre dérivées spatiales et filtrage dans le cadre d'une simulation réalisée sur un maillage à pas variable en espace. Un tel raffinement en espace s'avère tout particulièrement intéressant pour l'étude de phénomènes en proche paroi. En effet, il n'est possible d'appliquer les conditions aux limites physiques au champ filtré sans risque de détérioration des résultats qu'à la condition que le pas d'espace du maillage tende à s'annuler à la paroi [13, 31].

3.1 Erreur de commutation en espace

Les premières études mettant en évidence ce phénomène ont été effectuées par Ghosal et Moin [50]. Ils se placent dans une situation où la longueur de coupure liée au filtre varie en espace dans le but de mieux s'adapter à la variation spatiale des échelles caractéristiques de l'écoulement. Dans une telle situation, ils montrent que, sans traitement particulier du filtre, les équations couramment employées en Simulation des Grandes Echelles sont inconsistantes. Une extension particulière du filtre est alors proposée (SOCF pour "Second-Order Commuting Filter") afin de pallier ce problème ; avec ce type de filtre, l'erreur introduite en utilisant les équations classiques de la LES, appelée erreur de commutation (souvent notée SCE pour "Spatial Commutation Error"), est d'ordre 2 et peut facilement devenir plus importante que les erreurs couramment admises pour les méthodes numériques, que ce soit l'erreur de troncature du schéma de discrétisation ou celle induite par le modèle sous-maille employé. Afin de limiter l'influence de l'erreur de commutation sur la simulation, Ghosal et Moin préconisent d'introduire des termes d'ordre supérieur dans les équations filtrées afin de tenir compte explicitement de l'erreur de commutation qui peut intervenir et qui agit de manière purement diffusive sur la solution. On a en effet la relation suivante :

$$\overline{\frac{\partial \psi}{\partial x}} = \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial x} - M^2 \left(\frac{\delta'}{\delta} \right) \frac{\partial^2 \overline{\psi}}{\partial x^2} + O(k\delta)^4 \quad (3.1)$$

où $\delta(x)$ est le pas de grille local, $\delta'(x) = \frac{\partial \delta}{\partial x}$, k le nombre d'onde et $M = \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta^2 G(\zeta) d\zeta$ qui définit le moment d'ordre 2 du filtre.

On peut ainsi jouer sur l'ordre de grandeur de l'erreur numérique due à la non-commutation. Cependant, cette méthode nécessite soit la définition de conditions aux limites supplémentaires, soit le recours à une méthode des perturbations complexe à traiter numériquement. Par ailleurs, Piomelli [108] souligne que l'utilisation d'un maillage variant de manière non monotone risque d'aboutir à des instabilités numériques en traitant ainsi le problème de commutation.

De son côté, Van der Ven [143] propose une famille particulière de filtres adaptés à la LES. L'intérêt de ces filtres réside dans leur commutation avec les dérivées partielles en espace à un ordre défini par le filtre lui-même. La formulation dans l'espace de Fourier des filtres proposés par Van der Ven est :

$$\hat{G}_m(\zeta, \alpha) = \exp\left(\frac{-\alpha}{2m} \zeta^{2m}\right) \quad (3.2)$$

où $\alpha > 0$ est un paramètre caractéristique du filtre et m un entier positif. En particulier, les valeurs $\alpha = 1$ et $m = 1$ nous conduisent au filtre gaussien.

L'approche de Van der Ven permet de diminuer d'avantage l'erreur introduite, sans prise en compte de termes supplémentaires contrairement à Ghosal et Moin, mais il se limite à des filtres bien spécifiques, et ne fait pas référence aux problèmes qui pourraient survenir près des frontières, l'étude étant menée uniquement dans le cadre d'un domaine de calcul non borné.

Vasilyev *et al.* [142] ont ensuite montré qu'on diminue d'autant l'erreur de commutation que l'on emploie un filtre ayant ses premiers moments nuls. En effet, pour un filtre ayant ses $p - 1$ premiers moments nuls, on montre que l'erreur de commutation devient négligeable devant l'erreur de discrétisation si le schéma numérique adopté est d'ordre p , au plus. Vasilyev *et al.* ont également proposé des filtres discrets répondant au critère de commutation ainsi formulé ; on retrouve entre autres les filtres décrits par Van der Ven, ainsi que les fonctions de Daubechies [26]. De cette manière, on obtient une généralisation des méthodes précédentes, les études de Ghosal *et al.* et Van der Ven apparaissant comme des cas particuliers de ce type de filtres. Le traitement des conditions aux limites a également été abordé. Ils montrent en effet que l'on peut appliquer les conditions aux limites physiques au champ filtré sans risque de détérioration des résultats à condition que le pas du maillage soit suffisamment fin près des frontières pour résoudre l'ensemble des échelles locales et que le filtre employé vérifie les propriétés de commutation évoquées précédemment.

Une prise en compte explicite des termes engendrés par la non-commutation entre dérivées en espace et filtrage a été proposée par Iovieno et Tordella [62]. Ils montrent qu'en appliquant deux niveaux successifs de filtrage au champ étudié, on peut approximer le terme d'erreur avec une précision d'ordre 4 :

$$C_i(\langle f \rangle_\delta) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle_\delta - \frac{\partial}{\partial x_i} \langle f \rangle_\delta = -\frac{\partial \delta}{\partial x_i} \frac{1}{2\delta} (\langle \langle f \rangle_\delta \rangle_{2\delta} - \langle f \rangle_\delta) + O(\Delta^4) \quad (3.3)$$

où Δ est une longueur de référence du filtre telle que $\delta(x) = \Delta \times \phi(x)$ avec $\phi(x) \in [\delta_{min}/\Delta, 1]$. La notation $\langle \cdot \rangle_\delta$ désigne l'opération de filtrage de longueur de coupure δ . On peut ainsi réduire considérablement l'erreur numérique introduite dans ce contexte, qui

est, rappelons-le, d'ordre 2 sans aucune modélisation ni considération sur le filtre employé [50]. Cette méthode est particulièrement intéressante, en particulier car elle n'entraîne pas d'augmentation au niveau de l'ordre du schéma et permet donc de s'affranchir des éventuels problèmes liés aux conditions limites évoqués précédemment.

Berselli *et al.* [13] se sont également penchés sur le terme d'erreur engendré par la non-commutativité. Tout d'abord, ils ont cherché à étendre les études antérieures à des cas plus concrets de simulations. Pour cela, ils ont développé de nouvelles expressions pour le terme d'erreur, en limitant le nombre d'hypothèses effectuées au cours de ces recherches. Ils ont ainsi pu déterminer une formule qui se généralise à l'ensemble des fonctions dont les hypothèses de régularité sont cohérentes avec celles rencontrées dans les phénomènes turbulents, et pour les filtres couramment employés en LES. En particulier, une estimation analytique de l'erreur de commutation a été décrite pour les fonctions continues au sens de Hölder et les fonctions ayant des singularités rationnelles au niveau de leurs dérivées. Ces fonctions sont choisies car elles entrent tout à fait dans le cadre mathématique des équations de Navier-Stokes. Le cas des fonctions vérifiant la loi de puissance en $1/\alpha$, qui apparaissent dans la théorie sur la couche limite, a également été étudié. Ces dernières sont particulièrement intéressantes car elles caractérisent des écoulements de proches paroi et des études ont montré que ces écoulements sont particulièrement affectés par les erreurs de commutation du fait du raffinement progressif des tailles de mailles [39, 62]. L'étude de Berselli *et al.* montre qu'il est nécessaire d'adapter la longueur de coupure du filtre à la régularité de l'écoulement si on veut éliminer les erreurs de commutation. Ainsi, pour des fonctions fortement singulières, cela se traduit par des tailles de mailles très fines afin de résoudre entièrement l'écoulement.

Par ailleurs, Berselli *et al.* [14] ont également étudié l'influence relative de l'erreur de commutation par rapport aux tensions de Reynolds. Ils constatent, par exemple, que l'erreur de commutation a une influence aussi importante (si ce n'est plus) que le terme sous-maille dans les écoulements de proche-paroi. Les solutions qui consistent à diminuer le terme dû à la non-commutation en jouant sur l'ordre du filtre employé ne semblent alors pas appropriées. En effet, de cette façon on diminue également l'importance du terme sous-maille et l'erreur relative reste ainsi du même ordre. De cette façon, il semble impossible de contrôler l'erreur de commutation indépendamment du terme sous-maille, ce qui confirme la difficulté que constitue l'application de maillages à pas variables dans le cadre de la SGE.

Vasilyev et Goldstein [141] ont étudié le comportement spectral de l'erreur de commutation. En effet, en introduisant la notion de spectre local, ils ont examiné la répartition spectrale du terme d'erreur pour différents filtres. Ils montrent ainsi que cette erreur est concentrée au niveau des nombres d'onde proches de la coupure pour des filtres se rapprochant du filtre porte, alors qu'elle est répartie sur l'ensemble du spectre étudié pour des filtres réguliers tels que le filtre gaussien. Ils comparent également cette répartition spectrale de l'erreur avec celle du terme sous-maille. On vérifie ainsi que la prise en compte de l'erreur de commutation est tout aussi importante que la modélisation sous-maille. Enfin, le fait que l'erreur de commutation agisse principalement près de la coupure est également un problème considérable, car la modélisation sous-maille fait généralement appel à des informations provenant de cette gamme d'échelles.

Geurts *et al.* [47, 46] soulignent également le fait qu'on ne peut pas diminuer l'influence de l'erreur de commutation uniquement en jouant sur l'ordre du filtre puisque l'on modifie, par la même occasion, le terme sous-maille. Par conséquent, ils cherchent à déterminer l'er-

reur relative de commutation au regard du tenseur sous-maille. Ils montrent que la seule manière de diminuer réellement le terme de non-commutativité est de limiter les études à des variations faibles de la longueur de coupure liée au filtre. Dans le cas contraire, ils proposent de reformuler les équations filtrées par l'intermédiaire de la régularisation de Leray.

Par ailleurs, un certain nombre d'études se sont penchées plus spécifiquement sur les erreurs de commutation survenant sur des configurations complexes, en particulier pour des maillages non structurés [54, 63, 89].

3.2 Erreur de commutation en temps

La deuxième source d'erreur provient d'une possible variation temporelle de la longueur de coupure du filtre. En particulier, dans le cadre de cette étude, le suivi de l'évolution des structures turbulentes au cours de la simulation peut s'accompagner de modifications locales du maillage au cours du calcul. Le pas de discrétisation de ce maillage étant lié à la longueur de coupure du filtre, cette dernière est donc amenée à varier au cours du temps. Or, de la même manière qu'évoqué précédemment pour une variation spatiale de cette longueur de coupure, sa dépendance temporelle est à l'origine de l'apparition d'une erreur de commutation entre les opérations de filtrage et de dérivées en temps. Contrairement à l'erreur de commutation en espace, peu d'études se sont penchées sur l'erreur de commutation en temps. Cela peut s'expliquer par une plus grande utilisation de maillages variant spatialement, comme par exemple en proche paroi, alors que le raffinement en cours de calcul est moins répandu.

Néanmoins, dans certaines situations, il apparaît nécessaire d'envisager un remaillage en fonction de l'évolution de l'écoulement. En particulier, lorsque l'on se trouve en présence d'éléments mobiles, la prise en compte de ces éléments va entraîner une modification du maillage (méthodes ALE pour *Arbitrary Lagrangian-Eulerian*). Il en sera de même si l'on fait appel à des approches de type AMR (*Adaptive Mesh Refinement*) dont l'objectif est d'adapter le maillage à la physique de l'écoulement.

Dans le but d'étendre la Simulation des Grandes Echelles à des cas concrets pour l'industrie, il semble donc nécessaire d'étudier le comportement de ce type de calcul en présence de maillages dont le pas varie au cours du calcul. Ce problème a servi de cadre à la première partie des travaux présentés dans ce mémoire. Ainsi, le premier objectif fut de déterminer une expression théorique de l'erreur introduite dans une telle situation. On rappelle que ce terme d'erreur peut se mettre sous la forme :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}, G\star \right] (\phi)(x, t) = \left[\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} - \overline{\frac{\partial \phi}{\partial t}} \right] (x, t) \quad (3.4)$$

Pour cela, il faut repartir de la définition du filtre en Simulation des Grandes Echelles. On rappelle que ce filtrage est défini par :

$$\bar{\phi}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x - y, \Delta(x, t)) \phi(y, t) dy \quad (3.5)$$

On peut également réécrire cette relation en faisant appel à un filtre *réduit*, c'est à dire en introduisant le filtre g défini par $G(x, \Delta) = \frac{1}{\Delta} g\left(\frac{x}{\Delta}\right)$. Les variables filtrées s'obtiennent

alors de la manière suivante :

$$\bar{\phi}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Delta(x, t)} g\left(\frac{x-y}{\Delta(x, t)}\right) \phi(y, t) dy \quad (3.6)$$

Afin d'alléger les notations, la dépendance de la longueur de coupure vis à vis des variables d'espace et de temps ne sera plus notée par la suite. Il faut cependant garder à l'esprit cette dépendance qui est à l'origine de l'apparition des erreurs de commutation : $\Delta = \Delta(x, t)$. Enfin, on procède à un changement de variable en introduisant une nouvelle variable ξ définie par $\xi = \frac{x-y}{\Delta}$. La relation (3.6) devient alors :

$$\bar{\phi}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) \phi(x - \Delta \xi, t) d\xi \quad (3.7)$$

L'objectif de cette étude étant de déterminer l'ordre d'importance de l'erreur introduite, la suite du développement va s'inspirer des travaux de Ghosal et Moin [50]. Ils procèdent à un développement en série de Taylor de la fonction étudiée :

$$\phi(x - \Delta \xi, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \Delta^k \xi^k D_x^k \phi(x, t) \quad (3.8)$$

L'opérateur D_x^k désigne la dérivée d'ordre k en espace : $D_x^k \equiv \frac{\partial^k}{\partial x^k}$.

On injecte ensuite cette décomposition en série de Taylor dans la définition de la variable filtrée (3.7), donnant lieu à une nouvelle définition de celle-ci :

$$\bar{\phi}(x, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \Delta^k D_x^k \phi(x) M_g^k \quad (3.9)$$

Il apparaît dans cette expression les moments d'ordre k du filtre g , notés M_g^k et définis de la manière suivante :

$$M_g^k = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^k g(\xi) d\xi \quad (3.10)$$

A partir de l'expression des moments liés au filtre, on peut exprimer l'erreur de commutation en réécrivant chacun des termes du membre de droite de l'équation (3.4) à l'aide de (3.9) ; on obtient alors l'approximation suivante pour l'erreur de commutation en temps :

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t}, G^\star \right] (\phi)(x, t) &= \left[\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] (x, t) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} D_x^k \phi(x, t) M_g^k \frac{\partial \Delta^k}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Remarque : Le développement en série de Taylor nécessite néanmoins d'imposer un certain nombre de contraintes sur le filtre et la variable étudiée pour être applicable. Ainsi, l'expression théorique précédente n'est valable que si on emploie un filtre qui décroît suffisamment rapidement afin de vérifier $M_G^k < \infty$. Cette condition est vérifiée pour les filtres à support compact ainsi que les filtres pour lesquels les moments ne croissent pas trop

rapidement. En particulier, le filtre gaussien (et ses dérivées) vérifie parfaitement ces hypothèses, au contraire, par exemple, du filtre porte pour lequel le développement en série de Taylor ne peut pas s'appliquer. Par ailleurs, la fonction étudiée ϕ doit être continûment dérivable.

Afin de faire apparaître explicitement l'ordre de grandeur en Δ de l'erreur de commutation, l'expression précédente est transformée en utilisant cette fois les moments $M_{\frac{\partial g}{\partial \Delta} - \frac{1}{\Delta}g}^k$, ce qui aboutit à :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}, G\star \right] (\phi)(x, t) = \frac{\partial \Delta}{\partial t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \Delta^k D_x^k \phi(x, t) M_{\frac{\partial g}{\partial \Delta} - \frac{1}{\Delta}g}^k \quad (3.12)$$

Sous cette forme, on distingue deux contributions à l'erreur de commutation. D'une part, on vérifie l'influence de la vitesse de variation de la longueur de coupure $\frac{\partial \Delta}{\partial t}$, ce que l'on pouvait facilement imaginer intuitivement, permettant par ailleurs de vérifier que l'erreur de commutation est nulle si cette longueur de coupure est constante. D'autre part, il apparaît une somme de termes qui dépendent à la fois des dérivées de la fonction étudiée et des moments liés au filtre.

L'objectif est alors de diminuer cette erreur, ou tout du moins de déterminer l'influence qu'elle va avoir sur les simulations. Si l'on cherche à diminuer l'importance de cette erreur, on voit qu'il va falloir soit limiter la vitesse de variation de la longueur de coupure ce qui revient à agir sur $\frac{\partial \Delta}{\partial t}$, soit utiliser un filtre qui va permettre d'annuler les termes dominants dans la somme, c'est à dire les termes liés aux premiers indices k . Comme évoqué par plusieurs auteurs pour l'erreur de commutation en espace, le fait d'agir sur le filtre afin d'annuler ses premiers moments pour diminuer l'erreur de commutation risque de se montrer inefficace. En effet, augmenter l'ordre du filtre va également entraîner une diminution du terme sous-maille, et par conséquent l'erreur relative de commutation rapportée au terme sous-maille ne va pas diminuer de manière conséquente. Par ailleurs, le filtre est, en règle générale, donné de manière implicite par le schéma numérique employé dans la simulation et demeure donc inconnu de manière exacte. Pour ces différentes raisons, l'étude présentée va plutôt chercher à montrer l'influence de la vitesse d'adaptation sur un calcul de Simulation des Grandes Echelles.

Dans un premier temps, l'exemple du filtre gaussien a été étudié [76]. D'un point de vue théorique, l'erreur de commutation qui risque d'apparaître est la suivante :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}, G\star \right] (\phi)(x, t) = \frac{\partial \Delta}{\partial t} \left(\frac{\Delta}{12} D_x^2 \phi(x, t) + o(\Delta^3) \right) \quad (3.13)$$

Cette expression peut être assimilée à un terme dissipatif en introduisant une nouvelle forme de dissipation engendrée par les problèmes de commutation et notée $\nu_t^{new} = \frac{\partial \Delta}{\partial t} \frac{\Delta}{12}$. On réécrit alors la relation (3.13) de la manière suivante :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}, G\star \right] (\phi)(x, t) = \nu_t^{new} D_x^2 \phi(x, t) + \frac{\partial \Delta}{\partial t} o(\Delta^3) \quad (3.14)$$

Cette viscosité ν_t^{new} est positive lorsque Δ augmente et négative dans le cas contraire. Ainsi, lorsque l'on va étirer le maillage, on s'attend à observer une augmentation de la viscosité totale de la simulation, alors que lorsque le maillage est comprimé, cette quantité

va être amenée à diminuer. Par ailleurs, toujours d'après la relation (3.13), il est intéressant de noter que plus la variation de la longueur de coupure est rapide, et plus le terme d'erreur est important.

Indépendamment de cette étude, Moureau *et al.* [99] se sont également penchés sur l'erreur de commutation en temps ("Temporal Commutation Error" ou TCE en anglais). Leur objectif est d'étendre la Simulation des Grandes Echelles à des écoulements complexes, et plus particulièrement les écoulements se développant à l'intérieur des moteurs à piston. Tout d'abord, leurs résultats théoriques sont tout à fait comparables à ceux évoqués dans ce mémoire. De la même façon, ils estiment l'erreur de commutation à l'aide d'un développement en série de Taylor. En considérant une longueur de coupure variant également spatialement : $G = G(x, t, \Delta(x, t))$, ils évaluent l'erreur de commutation grâce à l'introduction des coordonnées issues des méthodes de type ALE. Ils expriment ainsi l'erreur de commutation sous la forme d'une triple contribution : un terme d'erreur lié à la modification temporelle du pas de discrétisation (TCE), un second terme provenant du "stretching" éventuel du maillage en espace (SCE) et un dernier terme issu d'une éventuelle modification du filtre lui-même (par exemple, passage d'un filtre porte à un filtre gaussien). Par la suite, ils se concentrent sur le premier terme à savoir l'erreur de commutation temporelle et négligent les autres contributions et se retrouvent ainsi avec les mêmes hypothèses que celles exposées dans ce mémoire.

En outre, ils expriment l'erreur de commutation temporelle dans le cadre d'une étude tridimensionnelle, en extrapolant simplement la relation obtenue dans le cadre monodimensionnel. En rapportant la relation trouvée aux notations de nos travaux, on obtient :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}, G^\star \right] (\phi)(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{i+j+k}}{i!j!k!} M_g^{(ijk)} \frac{\partial}{\partial t} [\Delta_x^i \Delta_y^j \Delta_z^k] D_x^i D_y^j D_z^k \phi(\mathbf{x}, t) \quad (3.15)$$

où les moments tridimensionnels sont définis de la manière suivante :

$$M_F^{(ijk)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_x^i \xi_y^j \xi_z^k F(\xi) d\xi^3 \quad (3.16)$$

Enfin, Franke et Frank [38] ont également étudié l'erreur de commutation temporelle et ont suggéré de la modéliser ou de travailler avec des grilles curvilignes comme évoqué par Jordan [63] afin de ne pas faire apparaître cette erreur. Un exemple de simulation monodimensionnelle leur a permis, en outre, de démontrer l'existence de ce terme d'erreur et d'évaluer son influence sur la solution filtrée.

Chapitre 4

Etude numérique de l'erreur de commutation en temps

4.1 Turbulence Homogène Isotrope en décroissance libre

4.1.1 Description générale de la simulation

Nous allons maintenant nous intéresser au problème de la Turbulence Homogène Isotrope en décroissance libre, abrégé en THI dans la suite de ce document. Ce problème représente un cas test assez intéressant pour le développement de modèles sous-maille ou de nouvelles méthodes numériques. En effet, les hypothèses d'isotropie locale à petites échelles, généralement admises lors de l'élaboration des modèles sous-maille, sont vérifiées dans le cas de la THI ; on est donc, en principe, en mesure de reproduire fidèlement les phénomènes caractéristiques de cet écoulement à l'aide des outils numériques à notre disposition.

D'un point de vue expérimental, la THI est généralement comparée aux phénomènes turbulents qui apparaissent en aval d'une grille placée à l'intérieur d'une veine d'essai [23]. Un champ de turbulence homogène isotrope peut être défini comme un domaine infini de l'espace dans lequel les propriétés statistiques de la turbulence sont indépendantes de la position du point dans le domaine. L'homogénéité se traduit par la stationnarité dans l'espace de toute moyenne statistique de quantité fluctuante, ce qui revient à une condition d'invariance par translation. L'hypothèse d'isotropie implique qu'à tout instant, les propriétés statistiques du champ turbulent sont invariantes par rotation et symétrie plane en chaque point du champ. Ainsi, tout champ isotrope est nécessairement homogène puisque l'on peut obtenir la translation en combinant deux rotations. La dénomination *THI* est donc conservée uniquement pour des raisons historiques.

Le domaine de calcul employé dans la simulation numérique de ce phénomène est une boîte cubique, de côté 2π , prolongée par continuité dans toutes les directions. Cette configuration présente l'intérêt d'être simple à discrétiser. Par ailleurs, les conditions de périodicité permettent d'employer un code spectral pour simuler l'écoulement. Ceci est particulièrement intéressant du fait de la précision des méthodes spectrales qui permettent de s'affranchir des erreurs de discrétisation du schéma numérique. En effet, les termes de dérivation présents dans les équations filtrées sont calculés de manière exacte dans l'espace spectral par l'introduction du vecteur d'onde \mathbf{k} , annihilant ainsi les erreurs d'approximation présentes dans les méthodes de volumes finis par exemple. On espère ainsi parvenir à

isoler les erreurs engendrées par la modélisation du terme sous-maille de celles provoquées par la non-commutation.

Le maillage de référence comporte 192^3 points ; il est homogène dans chacune des directions. En terme de nombre d'onde, cela revient à évaluer 64 modes de Fourier du fait de la méthode permettant d'éviter les erreurs d'aliasing (voir le principe en annexe A).

Le principe de la simulation numérique de la THI en décroissance libre est d'imposer, en entrée de calcul, un champ de vitesse initial, auquel est associé un spectre d'énergie cinétique turbulente. Dans la suite du calcul, plus aucune énergie ne sera injectée, on étudiera uniquement la décroissance de l'énergie cinétique initiale, résultant de phénomènes de dissipation.

Le champ initial présente une distribution gaussienne conduisant à un spectre d'énergie, dit spectre de Passot-Pouquet [105], de la forme :

$$E(k) = C \left(\frac{k}{k_0} \right)^4 \exp \left(-2 \left(\frac{k}{k_0} \right)^2 \right) \quad (4.1)$$

On choisit la valeur $k_0 = 4$ qui permet de fixer le nombre d'onde pour lequel le spectre d'énergie atteint son maximum ; la constante C est, quant à elle, calculée afin de vérifier :

$$\int_0^\infty E(k) dk = \frac{3}{2} u_{rms}^2 \quad (4.2)$$

d'où

$$C = \frac{u_{rms}^2}{3k_0\sqrt{2\pi}} \quad (4.3)$$

Il convient également de définir les grandeurs caractéristiques classiquement étudiées dans le cadre de la THI. Tout d'abord, l'énergie cinétique E_c et l'enstrophie D correspondantes sont définies respectivement par :

$$E_c(t) = \frac{1}{2} \langle \vec{u} \cdot \vec{u} \rangle = \int_0^{+\infty} E(k) dk \quad (4.4)$$

$$D(t) = \frac{1}{2} \langle |\vec{\nabla} \wedge \vec{u}|^2 \rangle \quad (4.5)$$

Le fait d'utiliser un spectre avec une distribution gaussienne conduit à un champ de vitesse dont les corrélations triples sont nulles initialement. On désigne par corrélations triples, dans l'espace spectral, les corrélations de la forme $\langle u_i(\mathbf{p}, t) u_j(\mathbf{q}, t) u_l(-\mathbf{k}, t) \rangle$. Ainsi, les premiers instants de la simulation vont traduire l'établissement de ces corrélations triples, caractérisé par une conservation de l'énergie cinétique totale et une augmentation de l'enstrophie. Les interactions non-linéaires, traduites par ces corrélations triples, vont ainsi redistribuer l'énergie sur l'ensemble des modes de Fourier jusqu'à l'obtention d'un spectre de Kolmogorov et jusqu'à ce que les nombres d'onde excités soient suffisamment élevés pour permettre à la viscosité de dissiper l'énergie en fin de spectre. Pendant cette première phase, les effets visqueux sont négligeables, on peut observer des phénomènes fortement anisotropes et l'augmentation de l'enstrophie s'explique par l'étirement des structures tourbillonnaires.

Dans un deuxième temps, les effets visqueux vont donc devenir non négligeables et entraîner l'apparition de structures dissipatives. Le phénomène de cascade d'énergie va ainsi se traduire par la décroissance de l'énergie cinétique et de l'enstrophie au cours du temps (Figure 4.1). La figure 4.2 donne un exemple d'écoulement de THI une fois le régime

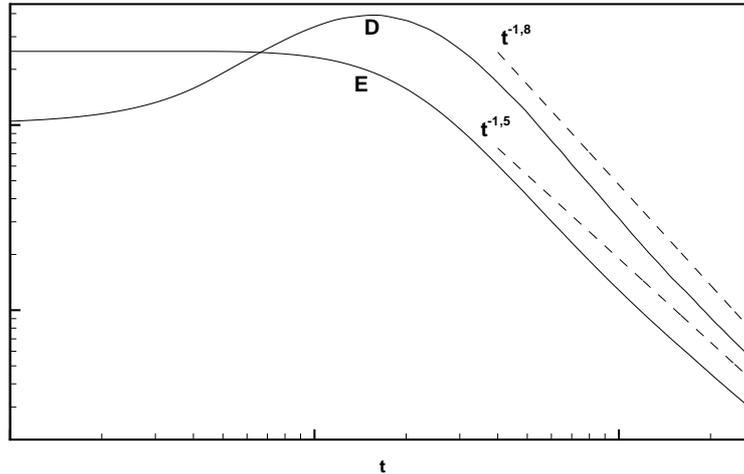


FIG. 4.1 – Evolution de l'énergie et de l'enstrophie résolues au cours des simulations de Turbulence Homogène Isotrope.

turbulent établi. On considère généralement que l'on se trouve en présence d'une Turbulence Homogène Isotrope lorsque le spectre présente une pente en accord avec la théorie de Kolmogorov, avec l'apparition d'une zone inertielle, et lorsque le coefficient de dissymétrie de la dérivé de la vitesse, ou *skewness*, atteint une valeur d'équilibre négative. Ce coefficient est défini par $Sk = (Sk_{11} + Sk_{22} + Sk_{33})/3$ où Sk désigne un tenseur dont les composantes sont données par :

$$Sk_{ij} = \frac{\left\langle \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^3 \right\rangle}{\left\langle \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 \right\rangle^{\frac{3}{2}}} \quad (4.6)$$

Il traduit l'étirement des structures tourbillonnaires.

Sa valeur initiale est proche de zéro, le champ étant alors donné par une répartition gaussienne. Les valeurs de ce coefficient à l'équilibre varient en fonction de l'approche adoptée et il tend à diminuer, en valeur algébrique, avec la résolution. Ainsi, Seror [129] obtient un coefficient de dissymétrie compris entre -0.4 et -0.5 pour ses simulations numériques directes, ce qui est en accord avec les résultats antérieurs comme ceux présentés par Samtaney *et al.* [125]. Une valeur proche de -0.5 est également calculée dans les DNS incompressibles de Vincent *et al.* [144] et Erlebacher *et al.* [33]. Les résultats expérimentaux de turbulence de grille de Batchelor *et al.* [6] donnent des skewness plus proches de -0.4 . En LES, on retrouve des valeurs plus faibles, comprises entre -0.3 et -0.4 pour Mossi [98] ou Basu *et al.* [5] par exemple. Il est également intéressant de comparer les résultats numériques avec l'expression obtenue en s'appuyant sur les hypothèses de Kolmogorov $Sk = -\frac{4}{5}C_k^{-3/2}$ [94] qui aboutit à $Sk = -0.48$ avec la valeur choisie dans notre

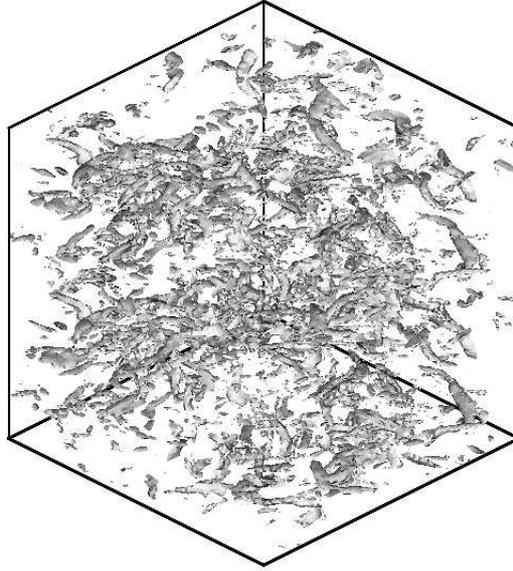


FIG. 4.2 – Iso-contours de vorticité ω pour l'écoulement de Turbulence Homogène Isotrope.

 tude, à savoir $C_k = 1.41$. Ces derniers travaux confortent nos résultats nous donnant des skewness autour de -0.35 dans les différents cas étudiés.

Les transferts d'énergie se font principalement des grandes échelles vers les petites, où l'énergie est dissipée. Néanmoins, la pente à l'origine du spectre étant $s_0 = 4$, l'approche EDQNM de Lesieur et Schertzer [79] prévoit un phénomène de *backscatter* important dans les petits nombres d'onde.

La pente du spectre aux petits nombres d'onde permet également de déterminer, par l'approche EDQNM, les evolutions temporelles des grandeurs caractéristiques de la turbulence telles que l'énergie cinétique ou l'enstrophie. Lesieur et Schertzer montrent ainsi que l'emploi d'un spectre présentant une pente aux grandes échelles $s_0 \geq 4$ va donner place à une loi de décroissance en énergie en $t^{-1.38}$, et non plus $t^{-10/7}$ comme proposé par Kolmogorov. Lesieur et Ossia [78] ont, pour leur part, relevé une décroissance de l'énergie en $t^{-1.384}$ pour une pente à l'origine en k^4 , ce qui est en très bon accord avec les travaux de Lesieur et Schertzer et nos relevés ($t^{-1.5}$ d'après la figure 4.1).

Dans le même temps, l'enstrophie varie en $t^{-2.38}$. Cependant, nous n'avons accès qu'aux valeurs filtrées de ces grandeurs. Une partie des informations issues des grands nombres d'onde est ainsi non représentée. Pour l'énergie cinétique, les échelles qui contribuent à son évaluation sont principalement les échelles résolues, on peut donc se permettre de confondre énergie cinétique totale et énergie cinétique filtrée. Par contre, ce n'est pas le cas pour l'enstrophie, une part importante des échelles y contribuant étant filtrées. Ackerman [1] montre que l'enstrophie filtrée suit une décroissance en $t^{-1.6}$ ce qui se rapproche des relevés effectués ($t^{-1.8}$ d'après la figure 4.1).

Pour évaluer le caractère compressible de l'écoulement, on peut procéder à une décomposition de Helmholtz du champ de vitesse. Cette décomposition est précise dans l'espace

de Fourier, la partie compressible de la vitesse étant donnée par $\mathbf{u}_k^c = [\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_k] \mathbf{k} / k^2$ et la partie solénoïdale (ou incompressible) par $\mathbf{u}_k^s = \mathbf{u}_k - \mathbf{u}_k^c$. La notation u_k désigne le mode de Fourier du champ de vitesse associé au vecteur d'onde \mathbf{k} . On définit alors le facteur de compressibilité $\chi = u_{rms}^c / u_{rms}$, où u_{rms}^c désigne la valeur *rms* de la composante compressible de la vitesse. Dans les différentes simulations effectuées, ce facteur est initialement nul $\chi_0 = 0$, c'est à dire que le champ initial choisi est incompressible.

Les autres paramètres importants des simulations à venir sont rappelés dans le tableau

M	Re	Δt
0.2	10^{10}	0.1 s

TAB. 4.1 – THI : Paramètres de calcul

4.1, à savoir le nombre de Mach, le nombre de Reynolds et le pas de temps utilisés. Il est intéressant de noter que le nombre de Reynolds est très élevé, ce qui permet de se rapprocher d'une situation présentant une dissipation moléculaire nulle. Seules les dissipations liées au schéma numérique et au modèle sous-mailles sont alors présentes, ce qui constitue un cas extrême de validation de l'approche LES.

4.1.2 Mise en évidence de l'erreur de commutation

L'objectif des simulations étant de mettre en évidence les erreurs engendrées par une variation de la longueur de coupure du filtre au cours du temps, les calculs vont s'effectuer sur une grille comportant un nombre variable de points de discrétisation. Dans le code spectral, cela consiste en une modification dynamique de la valeur du nombre d'onde de coupure au cours de la simulation et une visualisation de l'évolution de l'écoulement qui s'en suit. Pour cela, la coupure va évoluer au cours du temps suivant une loi sinusoïdale de la forme :

$$k_c(t) = \frac{k_{c,min} + k_{c,max}}{2} + \frac{k_{c,max} - k_{c,min}}{2} \cos(\omega t) \quad (4.7)$$

On fixe les nombres d'onde extrêmes considérés dans les simulations $k_{c,min} = 23$ et $k_{c,max} = 63$. Physiquement, cela revient à étirer et comprimer successivement le maillage, en passant d'un maillage en 96^3 qui correspond à $k_c = k_{c,max}$ soit 32 modes de Fourier après désaliasing, à un maillage en 48^3 pour $k_c = k_{c,min}$ soit 16 modes de Fourier après désaliasing.

La pulsation ω permet de fixer la vitesse de variation du pas du maillage. En effet, la vitesse d'adaptation est alors :

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} = \frac{\partial \Delta}{\partial k_c} \frac{\partial k_c}{\partial t} = \frac{\Delta^2}{\pi} \frac{k_{c,max} - k_{c,min}}{2} \omega \sin(\omega t) \quad (4.8)$$

Il va ainsi être possible de mettre en évidence l'influence de ce paramètre sur la qualité de la simulation. Pour cela, plusieurs calculs correspondant à plusieurs valeurs de la pulsation ω ont été menés. Les cas d'études sont détaillés dans le tableau 4.2. Afin de quantifier plus physiquement les périodes d'oscillation considérées, on les compare au temps de retournement des grosses structures à l'instant initial. On obtient ainsi des périodes d'oscillation allant de 92% de ce temps de retournement à 5%.

ω	$\frac{T}{T_{L_0}}$
0.6	0.92
1	0.55
4	0.14
10	0.05

TAB. 4.2 – Oscillations étudiées en décroissance libre : Valeurs des pulsations et périodes correspondantes adimensionnées par le temps de retournement initial des grosses structures.

L'étude étant menée dans l'espace spectral, nous allons étudier l'influence de l'oscillation du nombre d'onde de coupure sur le spectre et son évolution temporelle. Plus précisément, il paraît intéressant d'étudier le comportement de quelques modes particuliers choisis dans la bande spectrale étudiée ici. Le filtre utilisé sera un filtre sharp cut-off généralement utilisé dans l'espace spectral.

La figure 4.3 présente l'évolution des modes 3, 6, 10, 14 et 18 au cours de la simulation, pour quatre pulsations d'oscillation. On compare ces évolutions à celles obtenues en décroissance libre sans oscillation de la longueur de coupure. En comparant ces différentes courbes, plusieurs constatations peuvent être effectuées.

Tout d'abord, pour les petits nombres d'onde, à savoir les modes 3 et 6, il apparaît une légère augmentation de l'énergie contenue dans ces modes, et ce d'autant plus que la pulsation est faible. Il ne s'agit cependant pas de lier directement ce phénomène au problème de commutation évoqué. En effet, la cause de cette modification du spectre aux petits nombres d'onde semble d'avantage être la valeur choisie pour $k_{c,min}$. En effet, lorsque le nombre d'onde de coupure est à son minimum, la simulation est fortement sous-résolue et la coupure se situe à l'extrême limite de la zone inertielle, ce qui n'assure pas nécessairement un bon comportement du modèle sous-maille. Or, plus la pulsation est faible, plus la période pendant laquelle la simulation se trouve dans cette situation est conséquente, ce qui justifie que ce phénomène soit plus marqué pour les oscillations lentes.

Ensuite, on s'intéresse aux nombres d'onde 10 et 14, c'est à dire des nombres d'onde proche de $k_{c,min}$ (après désaliasing) mais tout de même inférieurs à cette valeur. Une augmentation globale de la quantité d'énergie contenue dans ces modes est également observée. Cependant, pour ces modes, l'accumulation d'énergie augmente avec la pulsation, au contraire des précédentes constatations pour les modes plus faibles. Par ailleurs, dans la phase de décroissance du nombre d'onde de coupure, l'énergie contenue dans ces modes tend à décroître et à compenser l'accumulation qui provient de l'augmentation de k_c , et ce quelque soit la pulsation. Mathématiquement, on peut interpréter ce phénomène à l'aide de la relation (3.14) qui introduit une viscosité supplémentaire engendrée par l'oscillation de la longueur de coupure du filtre. Cette viscosité est positive quand Δ augmente, c'est à dire quand k_c diminue et tend donc bien à faire diminuer la quantité d'énergie près de la coupure pendant la décroissance de k_c . Enfin, pour les nombres d'onde compris entre $k_{c,min}$ et $k_{c,max}$, les informations issues de cette bande de nombres d'onde n'ont pas le temps d'être restituées pendant la phase d'augmentation de k_c si une pulsation trop importante est employée. Cela se visualise très rapidement sur les courbes obtenues pour $\omega = 4$ et $\omega = 10$ pour lesquelles l'énergie correspondant au mode $k = 18$ est quasi-nulle tout au

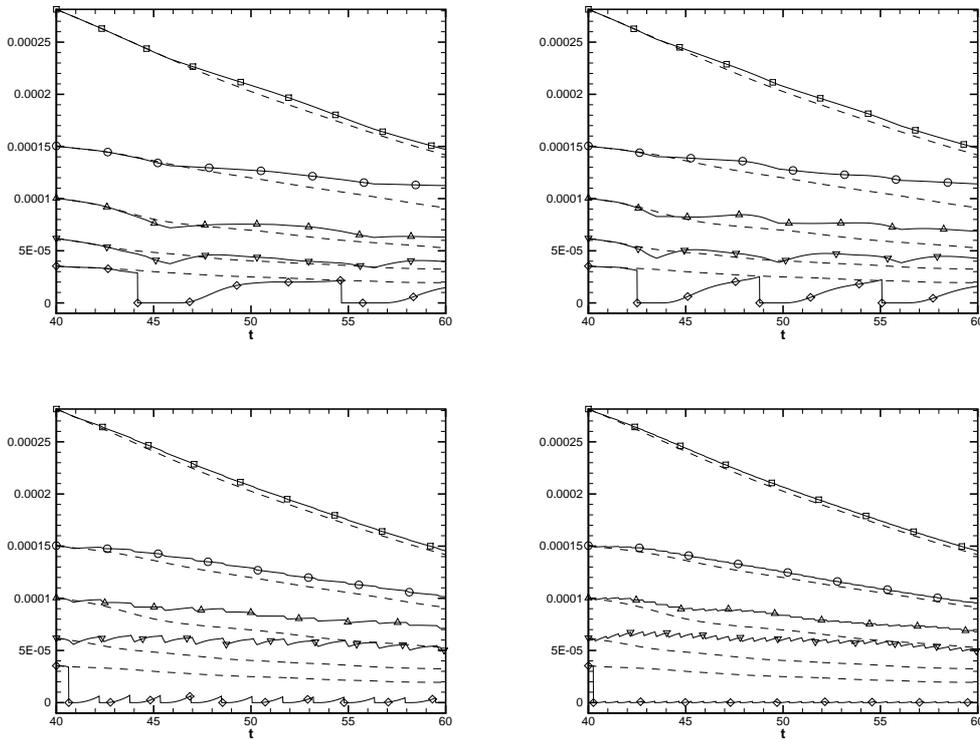


FIG. 4.3 – THI en décroissance libre : évolution de la densité spectrale d'énergie $E(k)$ de cinq modes particuliers pour des pulsations d'oscillations, de haut en bas et de gauche à droite, $\omega = 0.6$, $\omega = 1$, $\omega = 4$ et $\omega = 10$. - - : décroissance sans oscillation ($\omega = 0$) ; \square : $k = 3$; \circ : $k = 6$; \triangle : $k = 10$; ∇ : $k = 14$; \diamond : $k = 18$.

long de la simulation. Pour des oscillations moins rapides, l'énergie de ce mode est retrouvée correctement à la fin de la période d'oscillation. Ainsi, pour des pulsations lentes, le modèle sous-maille dispose d'un temps suffisant pour restituer les petites échelles de l'écoulement, modélisant ainsi convenablement la cascade d'énergie. Pour des pulsations plus rapides, le modèle ne permet pas une bonne description des échelles de l'écoulement. On peut récapituler l'ensemble des observations effectuées à l'aide d'une figure présentant l'évolution de la répartition spectrale de l'énergie au cours du calcul. Plus précisément, la figure 4.4 décrit l'évolution au cours du temps de la quantité dE définie par :

$$dE(k, t, \omega) = E(k, t, \omega) - E(k, t, \omega = 0) \quad (4.9)$$

Cette quantité traduit l'influence de l'oscillation sur le spectre d'énergie puisqu'il s'agit de la différence entre le spectre d'énergie obtenu sans oscillation et celui obtenu avec un nombre d'onde de coupure oscillant. Ainsi, on retrouve les phénomènes d'accumulation ($dE > 0$) et de perte ($dE < 0$) d'énergie comme précédemment. Pour les oscillations lentes, les nombres d'ondes amplifiés se situent principalement dans les très grandes échelles alors que pour des oscillations plus rapides, l'accumulation se déplace vers des nombres d'onde proche de la coupure. De plus, les petites échelles sont convenablement restituées uniquement si la période d'oscillation est suffisamment importante pour permettre au modèle sous-maille et au phénomène de cascade d'énergie associé d'agir efficacement.

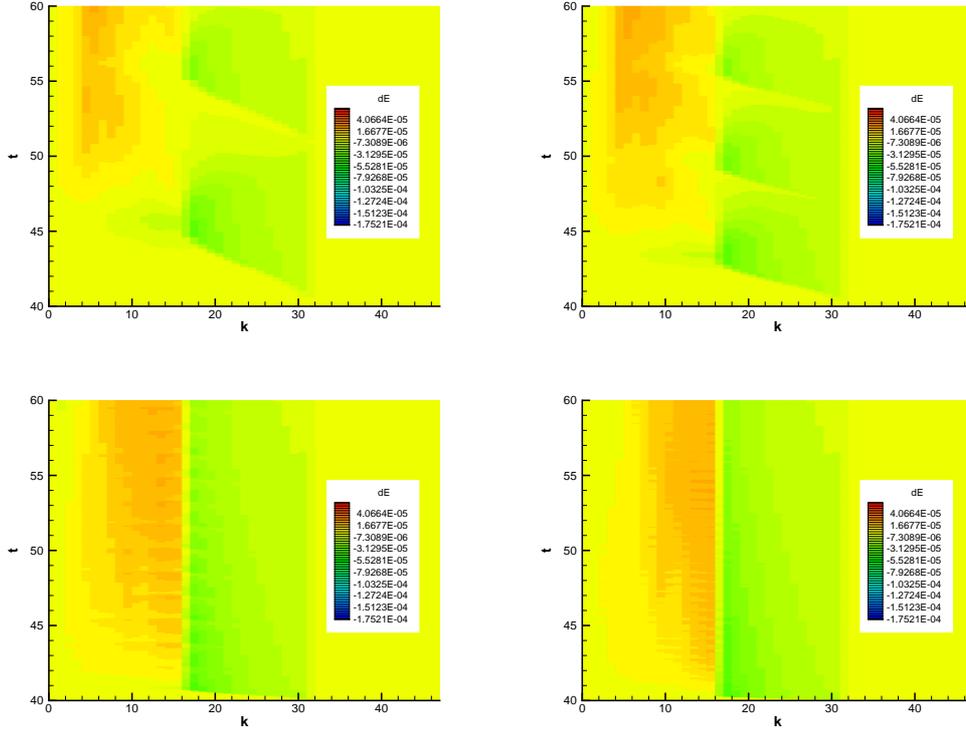


FIG. 4.4 – THI en décroissance libre : évolution de la répartition spectrale de l'énergie pour différentes pulsations d'oscillation : de haut en bas et de gauche à droite, $\omega = 0.6$ ($T \sim 10, 5s$), $\omega = 1$ ($T \sim 6, 3s$), $\omega = 4$ ($T \sim 1, 6s$) et $\omega = 10$ ($T \sim 0, 6s$). Iso-valeurs de dE .

Les simulations montrent principalement que l'utilisation de variations trop rapides de la longueur du coupure du filtre va altérer les petites échelles. Ceci provient d'une mauvaise représentation du phénomène de cascade d'énergie, les petites échelles n'ayant pas le temps d'atteindre un état d'équilibre. Par ailleurs, pour des oscillations lentes, des erreurs sont visibles dans les petits nombres d'onde. Celles-ci peuvent provenir du manque d'efficacité du modèle sous-maille lorsque le nombre d'onde de coupure atteint sa valeur minimale $k_c = k_{c,min}$

Il est cependant difficile de distinguer réellement l'impact des erreurs de type erreurs de commutation des autres sources d'erreur. En effet, le fait que l'énergie totale du système diminue au cours de la simulation ne permet pas d'étudier en détail l'influence de l'oscillation du pas de discrétisation sur la physique de l'écoulement. En effet, au fur et à mesure que le calcul avance en temps, la turbulence tend alors à s'atténuer et le modèle sous-maille a un rôle de moins en moins important. Un système conservatif serait plus intéressant afin de réellement juger de l'aptitude de la Simulation des Grandes Echelles à modéliser un phénomène turbulent en présence d'une modification du pas du maillage. Ainsi, la deuxième partie de cette étude de THI va concerner un écoulement entretenu par l'ajout d'un terme de forçage aux équations dans le but de conserver l'énergie cinétique totale du système.

4.2 Turbulence Homogène Isotrope forcée

4.2.1 Le terme de forçage

En l'absence de force extérieure, l'énergie cinétique de la turbulence homogène isotrope décroît suivant une loi en t^{-1} ,³⁸ d'après les prédictions issues de l'approche EDQNM (pour *Eddy-Damped Quasi-Normal Markovian*, voir par exemple [1] pour la détermination de cette loi). L'objectif de l'étude étant de mettre en évidence les conséquences d'une modification du maillage sur la simulation, il apparaît utile de se baser sur un écoulement statistiquement stationnaire afin de pouvoir comparer quantitativement les informations entre les différents instants. Il s'agit donc de s'assurer que l'énergie cinétique totale et, par la même occasion, les autres grandeurs caractéristiques de la THI, restent constantes au cours du temps. Une méthode couramment employée consiste à injecter artificiellement de l'énergie aux grands nombres d'onde afin de compenser l'énergie dissipée par les petites structures. La technique employée ici a été proposée par Witkowska [148] qui préconise de réinjecter la quantité d'énergie perdue par les effets visqueux dans une bande de nombre d'ondes $[k_1, k_2]$ situés en amont de la zone inertielle. En pratique, cela se traduit par l'introduction d'un coefficient multiplicateur β qui va agir sur les modes de Fourier de la simulation :

$$\hat{u}(k, t + \Delta t) = \beta \hat{u}(k, t) \quad (4.10)$$

Ce coefficient va permettre d'amplifier les modes basse fréquence du spectre et, par conséquent, il est différent de un pour les seuls modes compris dans l'intervalle $[k_1, k_2]$. Son but étant d'assurer la conservation de l'énergie cinétique aux différents instants, il dépend à la fois de la quantité d'énergie dissipée entre deux pas de temps ΔE_{tot} et de l'énergie contenue dans la bande $[k_1, k_2]$:

$$\beta = \begin{cases} \sqrt{1 + \frac{\Delta E_{tot}}{\int_{k_1}^{k_2} E(k) dk}} & \text{pour } k \in [k_1, k_2] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.11)$$

On pourrait craindre que l'ajout de ce terme de forçage ne vienne perturber la simulation, en altérant inexorablement la turbulence. Cependant, Witkowska *et al.* [149] montrent que cette méthode de forçage n'a pas une influence significative sur le développement de la turbulence.

On a pu toutefois noter une influence non négligeable de l'intervalle de forçage $[k_1, k_2]$. Dans les travaux de Seror [129], le forçage est appliqué dans l'intervalle de nombres d'onde $[1, 5]$. Witkowska, pour sa part, obtenait les meilleurs résultats sur ses simulations avec un intervalle de forçage $[3, 20]$. Cependant, le spectre initial était différent avec un pic dans des plus hauts nombres d'onde que pour nos simulations ($k_0 = 7$).

Afin de s'assurer que l'influence du forçage ne viendrait pas perturber les simulations, trois intervalles de forçage ont été testés comme répertoriés dans le tableau 4.3. Le premier est celui employé par Seror, le second $[2, 6]$ est choisi de manière à être centré autour du nombre k_0 , enfin le troisième est légèrement plus restreint avec un forçage pour les nombres d'onde $3 \leq k \leq 6$. Dans tous les cas, le forçage est appliqué lorsque l'écoulement a atteint un régime auto-similaire avec un spectre proche des hypothèses de Kolmogorov, c'est à dire ici dès l'instant $t = 10$. Le maillage utilisé pour tester l'influence du forçage

contient 64^3 points.

cas	$[k_{min}, k_{max}]$
forçage A	[1, 5]
forçage B	[2, 6]
forçage C	[3, 6]

TAB. 4.3 – Intervalles de forçage considérés

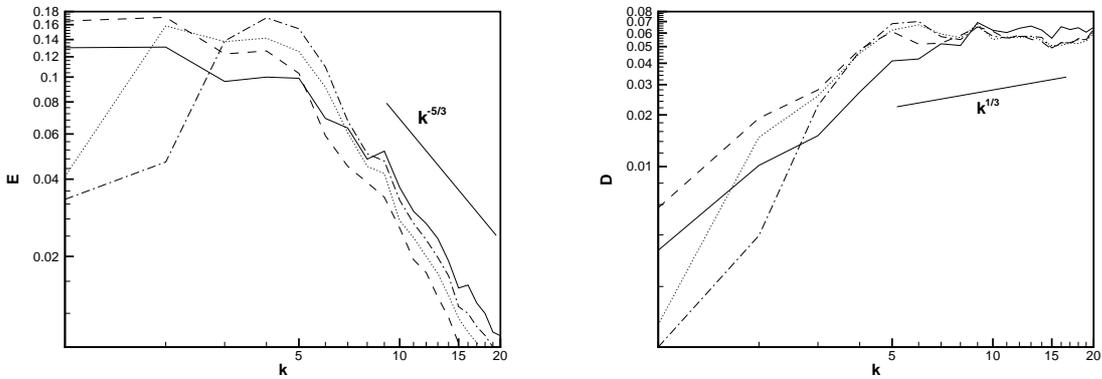


FIG. 4.5 – Influence de l'intervalle de forçage sur les spectres d'énergie (gauche) et d'entrophie (droite) à $t=20$. — : pas de forçage ; - - : forçage A ; · · · : forçage B ; - · - : forçage C

La figure 4.5 donne un aperçu du comportement spectral de la simulation pour les différents intervalles de forçage. Ainsi, on vérifie que l'énergie contenue dans la bande de nombres d'onde forcée est accrue, alors que l'énergie de part et d'autre de cet intervalle est diminuée pour assurer une conservation de l'énergie totale de l'écoulement. Dans le cas du forçage C, on observe un pic d'énergie qui se retrouve décalé vers les petites échelles par rapport aux autres simulations, présentant un pic d'énergie proche de celui du spectre initial k_0 . Or, on reporte généralement, dans la littérature, un déplacement du maximum d'énergie au cours du temps par rapport au spectre initial en direction des petits nombres d'onde. Ainsi, pour les calculs avec $k_0 = 4$, on s'attend à avoir un spectre qui présente un maximum autour de $k = 2$ une fois le régime turbulent établi, que ce soit en décroissance libre ou en présence d'un terme de forçage. On vérifie bien ce phénomène pour l'étude en décroissance libre ainsi que pour les forçages A et B, mais pas pour le troisième forçage. Cela va conduire à une modification de la physique de l'écoulement puisque le maximum d'énergie intervient à des échelles plus petites que dans les autres cas d'étude. Pour cette raison, ce forçage est d'hors et déjà exclu pour la suite de ces travaux.

Au niveau du comportement des simulations aux petites échelles, on observe des spectres très proches pour les différents forçages. Une différence existe cependant entre les forçages A et B, à savoir que le premier agit d'avantage dans les petits nombres d'onde que le second. Ainsi, le spectre forcé correspondant au cas A présente un comportement similaire

au spectre de référence au niveau des grandes échelles de l'écoulement. Dans le cas B, le forçage se fait d'avantage ressentir dans les grands nombres d'ondes.

L'influence du forçage sur les grandeurs caractéristiques de la Turbulence Homogène Isotrope a également été mis en évidence. Ainsi, la figure 4.6 présente l'évolution de la micro-échelle de Taylor, de l'échelle intégrale, du skewness (cf. définition 4.6) et de l'ensrophie totale en fonction du forçage employé. La micro-échelle de Taylor et l'échelle intégrale sont deux échelles caractéristiques de ce type d'écoulement et sont définies respectivement par :

$$\lambda = u_{rms} \sqrt{\frac{15/Re}{\epsilon}} \quad (4.12)$$

et

$$L = \frac{\pi}{2 u_{rms}^2} \int_0^{\infty} \frac{E(k)}{k} dk \quad (4.13)$$

Le forçage A entraîne une augmentation de l'échelle de Taylor et de l'échelle intégrale

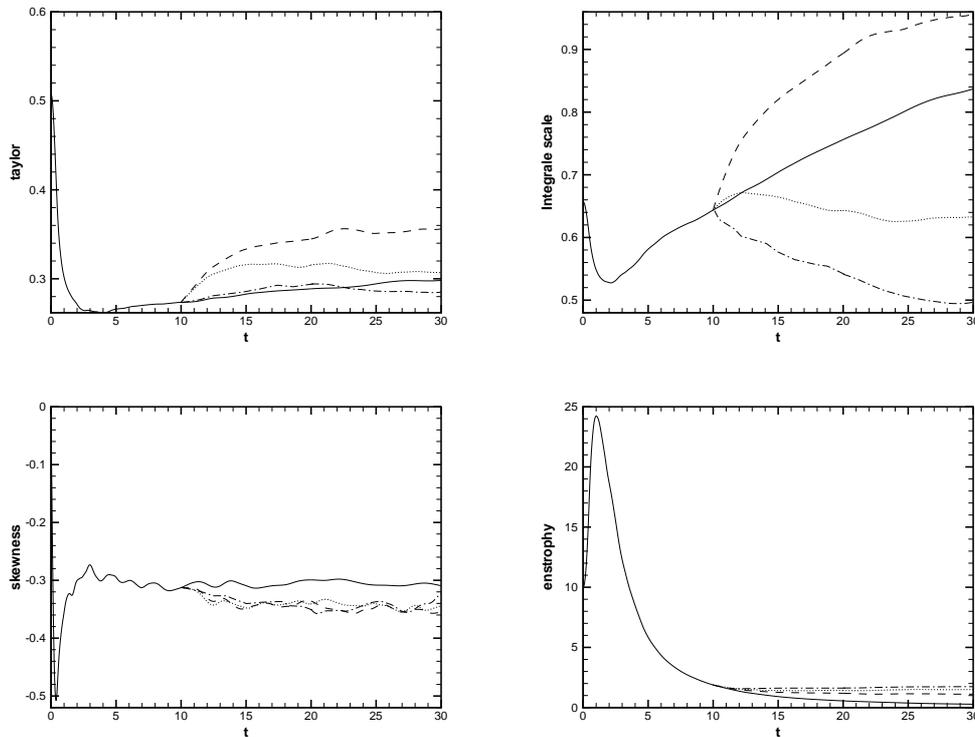


FIG. 4.6 – Influence de l'intervalle de forçage sur l'évolution de l'échelle de Taylor (haut-gauche), de l'échelle intégrale (haut-droite), du skewness (bas-gauche) et de l'ensrophie (bas-droite). — : pas de forçage ; - - : forçage A ; . . . : forçage B ; - . - : forçage C

alors que le forçage B permet de conserver des valeurs plus stables pour ces deux grandeurs. Les trois forçages donnent le même comportement pour le facteur de dissymétrie et l'ensrophie, cette dernière tendant à se stabiliser du fait de l'apport artificiel d'énergie. Le choix final s'est porté sur le forçage B, qui correspond à l'intervalle de forçage [2, 6], du fait tout d'abord de sa symétrie par rapport au pic du spectre initial d'énergie, et pour son meilleur comportement au niveau des plus petites échelles résolues.

4.2.2 Mise en évidence de l'erreur de commutation

Comme pour le cas non forcé, la variation de la longueur de coupure est ici régie par une loi sinusoïdale (4.7). Une telle modification dynamique de la valeur attribuée à k_c va entraîner une modification de la quantité d'échelles résolues. En outre, la quantité d'énergie résolue va fluctuer au cours du temps et il va donc falloir en tenir compte au niveau de la quantité notée ΔE_{tot} dans la relation (4.11). En effet, cette quantité désigne l'énergie perdue entre deux pas de temps de simulation. Cette perte provient de la dissipation d'énergie dans le cadre de la THI en décroissance libre et est calculée de la manière suivante :

$$\Delta E_{tot} = \int_0^{k_c} E(k, t) dk - \int_0^{k_c} E(k, t + \Delta t) dk \quad (4.14)$$

Dans la présente étude, le nombre d'onde de coupure est amené à varier au cours de la simulation : $k_c = k_c(t)$. Par conséquent, une diminution de k_c va entraîner une perte d'information au niveau de la bande spectrale $[k_c(t + \Delta t), k_c(t)]$, et par conséquent une diminution de l'énergie totale résolue $\int_0^{k_c} E(k, t) dk$ qui n'est en aucune manière liée à un phénomène de type dissipatif. Il n'y a donc aucune raison de réinjecter l'énergie correspondant à cette diminution de k_c par l'intermédiaire du terme de forçage.

Afin de résoudre ce problème, l'évaluation de la quantité d'énergie dissipée entre deux instants est, par la suite, réalisée dans la bande spectrale $[0, k_{c,min}]$ uniquement. L'énergie correspondante n'est en effet pas directement affectée par les modifications de k_c et ΔE_{tot} est alors calculé de la manière suivante :

$$\Delta E_{tot} = \int_0^{k_{c,min}} E(k, t) dk - \int_0^{k_{c,min}} E(k, t + \Delta t) dk \quad (4.15)$$

Une autre possibilité a été envisagée. Elle consiste à évaluer la quantité d'énergie résolue perdue (ou gagnée) en diminuant (ou augmentant) k_c . Cette démarche s'appuie sur les hypothèses de type Kolmogorov pour déterminer cette quantité, mais elle a été rapidement abandonnée car ces hypothèses restent discutables, en particulier dans le contexte d'un nombre d'onde de coupure variable.

Afin de tester l'influence de l'erreur de commutation sur les simulations, on relève de nouveau l'évolution de la quantité d'énergie contenue dans certains modes de la même manière que dans le cas de décroissance libre. Les pulsations utilisées cette fois-ci sont $\omega = 1$, $\omega = 2$ et $\omega = 10$. Les premières constatations sont similaires à celles effectuées pour la THI en décroissance libre. Ainsi, on observe une accumulation d'énergie pour les nombres d'ondes situés près du nombre d'onde de coupure minimum $k_{c,min}$, et ce d'autant plus que la vitesse de variation du maillage, et par conséquent la pulsation d'oscillation, sont importantes. L'interprétation de ce phénomène est identique à celle effectuée dans le cadre de la décroissance libre. Par contre, le comportement aux petits nombres d'onde est différent de celui observé en l'absence de forçage. En effet, alors qu'en décroissance libre on observe une légère augmentation de l'énergie contenue dans le mode $k = 3$, on obtient en présence du terme de forçage une diminution de cette même quantité.

La figure 4.8 décrit l'évolution au cours du temps des phénomènes d'accumulation et de perte d'énergie pour la THI forcée. On vérifie que pour les faibles pulsations, les petites échelles sont bien restituées pendant la phase de croissance du nombre d'onde de coupure, alors que pour des oscillations plus rapides, la simulation ne dispose pas

d'un temps suffisant pour restituer les petites échelles et on obtient une accumulation importante d'énergie proche du nombre d'onde $k_{c,min}$. Au niveau des grosses structures de l'écoulement, on observe le comportement inverse, c'est à dire qu'elles sont altérées pour les oscillations lentes. On obtient ainsi des phénomènes d'accumulation et de perte d'énergie pour les petits nombres d'onde qui tendent à croître avec le temps. Au contraire, pour les oscillations rapides, les grandes échelles sont peu modifiées au cours du temps. On peut de nouveau expliquer ce phénomène par la faible valeur choisie pour $k_{c,min}$ qui ne permet pas un bon comportement du modèle lorsque l'on s'en approche, ce qui est d'autant plus néfaste que l'oscillation est lente.

4.2.3 Evaluation *a priori* de l'erreur de commutation

Cette partie a fait l'objet d'une publication dans *Computers & Fluids* [76], intitulée "Commutation error in LES with time-dependent filter width", et reportée en annexe D. Le principe de cette partie de l'étude est d'utiliser une simulation de THI hautement résolue comme référence, et de lui appliquer un filtre dont la longueur de coupure va varier au cours du temps comme dans les paragraphes précédents. On étudie alors les différents termes présents dans les équations de Navier-Stokes. L'intérêt de cette étude *a priori* est la possibilité d'évaluer explicitement l'erreur de commutation et ainsi la comparer aux autres termes des équations filtrées.

De nouveau, il est montré qu'en faisant varier trop rapidement la longueur de coupure du filtre, le terme d'erreur peut devenir non négligeable par rapport aux termes convectif et sous-maille des équations filtrées. L'erreur de commutation peut ainsi devenir jusqu'à sept fois plus important que le terme sous-maille pour une pulsation $\omega = 10$ ce qui correspond à vingt oscillations de Δ pendant une période de retournement des grosses structures. Une étude spectrale de l'erreur de commutation a par ailleurs démontré que son influence se concentre essentiellement au niveau des grands nombres d'onde, c'est à dire au niveau des nombres d'onde proches de la coupure oscillante. Enfin, il a été vérifié que le terme $\|C(u)\|^* = \frac{\|C(u)\|}{\frac{\partial \Delta}{\partial t} \|D_x^2 u\|}$ varie linéairement avec Δ en accord avec l'étude théorique et la relation (3.12). Ceci permet de valider le développement effectué à l'aide de la série de Taylor et d'affirmer que le premier terme de cette série est à l'origine de la majeure partie de l'erreur de commutation.

En conclusion de ces simulations de Turbulence Homogène Isotrope, la nécessité de contrôler la vitesse de variation de la longueur de coupure du filtre LES a été mise en évidence. En effet, une modification trop rapide de cette longueur va entraîner des pertes irrémédiables d'information qui vont se traduire par une modification de la turbulence de l'écoulement. Au contraire, si la vitesse de variation du maillage (et, par voie de conséquence, la vitesse de variation de la longueur de coupure du filtre) est suffisamment faible, les phénomènes liés à la cascade d'énergie vont permettre de restituer la dynamique des différentes structures présentes dans l'écoulement.

Dans la suite des travaux, il faudra donc prêter une attention toute particulière à ce phénomène et chercher le meilleur compromis au niveau de la fréquence de raffinement de maillage : elle doit être suffisamment élevée pour bien suivre l'évolution de l'écoulement et des structures qui le composent, mais ce raffinement ne doit pas se faire au détriment de la qualité de la solution qui pourrait être altérée par des modifications trop fréquentes de

la précision locale du maillage.

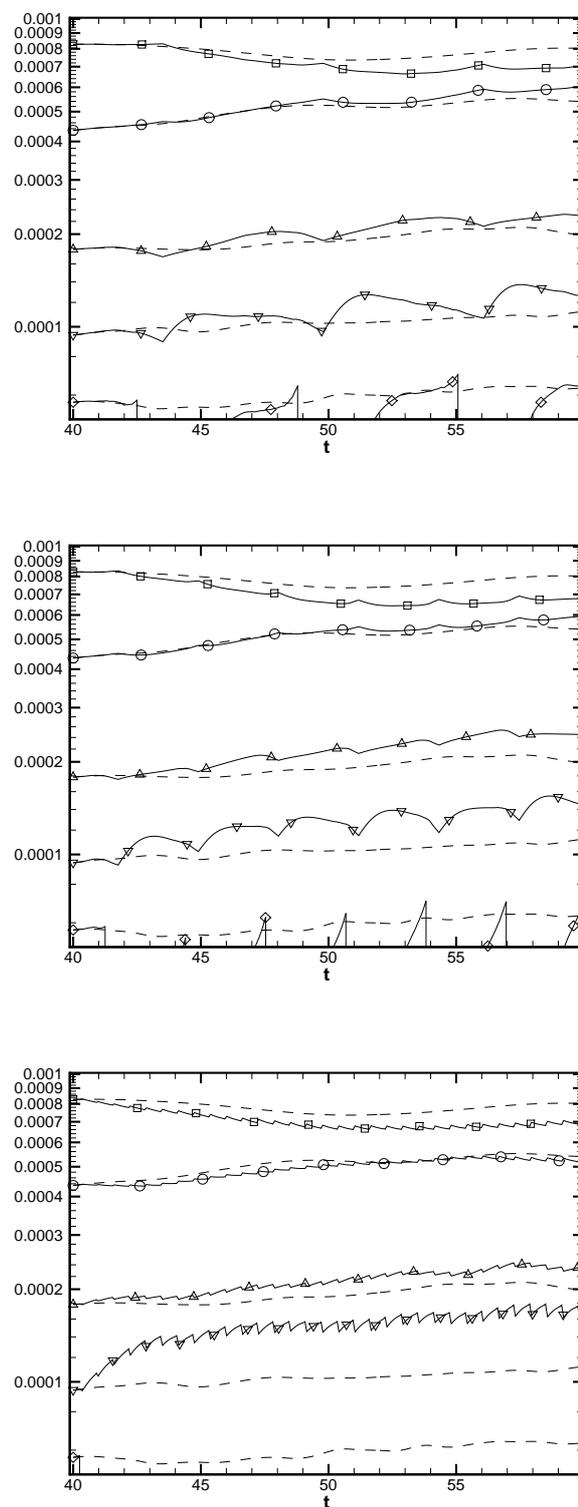


FIG. 4.7 – THI forcée : évolution de la densité spectrale d'énergie $E(k)$ de cinq modes particuliers pour des pulsations d'oscillations, $\omega = 1$ (haut), $\omega = 2$ (centre) et $\omega = 10$ (bas). - - : évolution sans oscillation ($\omega = 0$); \square : $k = 3$; \circ : $k = 6$; Δ : $k = 10$; ∇ : $k = 14$; \diamond : $k = 18$.

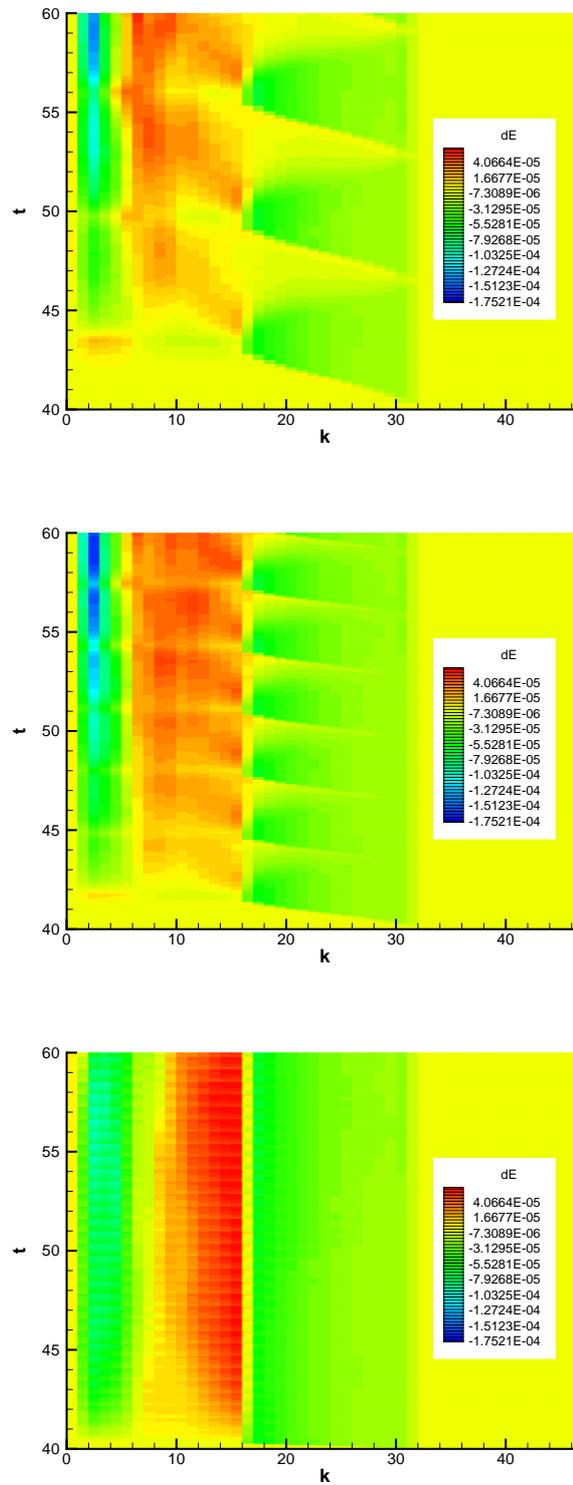


FIG. 4.8 – THI forcée : évolution de la répartition spectrale de l'énergie pour différentes pulsations d'oscillation : $\omega = 1$ (haut), $\omega = 2$ (centre) et $\omega = 10$ (bas). Iso-valeurs de dE .

Deuxième partie

Simulation des Grandes Echelles en maillage adaptatif

Chapitre 5

Les différentes techniques de raffinement local

5.1 Intérêt du raffinement local en turbulence

La caractéristique principale d'un phénomène turbulent est son *Intermittence* Spatio-Temporelle. L'intermittence est associée à des fluctuations locales de l'activité des petites échelles présentes dans l'écoulement. Les vortex, ou zones tourbillonnaires, ou concentrations de vorticité, sont classiquement associés à l'intermittence.

L'intermittence d'un écoulement est ainsi associée directement à la dynamique des petites échelles.

Ce phénomène peut être appréhendé de deux façons différentes :

-   l'aide d'une *approche statistique* pour laquelle on mesure l'écart à la gaussianité des densités de probabilités des mesures turbulentes.
- au moyen d'une *approche plus heuristique* qui traduit une alternance spatio-temporelle aléatoire de régions laminaires et de régions fortement désordonnées ou tourbillonnaires.

En 1959, Landau et Lifshitz [69]  mirent l'hypothèse que la dissipation de l'énergie cinétique de la turbulence n'était pas homogène mais concentrée dans l'espace et dans le temps au sein de régions associées à de forts cisaillements du champ de vitesse. De telles régions particulières existent à toutes les échelles et leur intermittence spatiale et temporelle a été depuis prouvée expérimentalement. Elle apparaît aujourd'hui dans les simulations numériques de turbulence compressible ou incompressible. Les signatures statistiques de l'intermittence montrent que cet effet est d'autant plus prononcé que l'on s'approche des échelles dissipatives.

Plus précisément, Farge *et al.* [35] montrent que l'intermittence est principalement liée à la dynamique des petites structures cohérentes, à savoir les phénomènes d'éclatement tourbillonnaire ("bursts" en anglais, voir paragraphe 8.2.1) dans le cas du canal plan, ou les "vortex core" pour la couche de mélange. Pour cela, ils s'appuient sur une analyse en ondelettes du champ turbulent et l'introduction d'un coefficient d'intermittence et d'un nombre de Reynolds local, tous deux basés sur les coefficients en ondelettes.

D'un point de vue numérique, le caractère intermittent de la turbulence peut se constater de différentes manières. Plusieurs auteurs dont Farge *et al.* [35] et Perrier *et al.* [106] montrent ainsi que le phénomène d'intermittence se traduit par une légère augmentation de la pente du spectre dans la zone inertielle. De même, Farge *et al.* [36]

rapportent des résultats expérimentaux en contradiction avec la théorie de Kolmogorov. En effet, dans le cadre des travaux de Kolmogorov, la fonction de structure d'ordre p , $S_p(r) = \frac{1}{L} \int_0^L |f(x) - f(x+r)|^p dx$, est amenée à varier selon une loi en puissance en fonction de l'indice p :

$$S_p(r) = r^{\zeta(p)} = r^{p/3} \quad (5.1)$$

Or, on s'aperçoit que ce n'est pas le cas lorsque l'on s'intéresse à ces résultats expérimentaux. On explique généralement ce phénomène par le fait que la dissipation ε , supposée constante dans la zone inertielle du spectre selon les hypothèses de Kolmogorov, est en fait intermittent en espace, rejoignant les conclusions de Landau et Lifshitz. Enfin, un moyen simple d'évaluer numériquement le caractère intermittent d'un écoulement est de calculer son facteur de skewness défini par la relation (4.6).

Cette répartition spatio-temporelle des structures turbulentes doit être prise en compte dans la Simulation des Grandes Echelles. En effet, plus la quantité de petites échelles est importante et plus les risques d'erreur de modélisation sont conséquentes. Ceci est d'autant plus vrai dans les régions ne vérifiant pas les hypothèses de cette modélisation, typiquement l'hypothèse d'isotropie des petites échelles. Par exemple, les "bursts" en proche paroi sont des structures de petite taille dont on sait qu'elles ne vérifient pas le retour à l'isotropie. La solution la plus rapide pour diminuer les erreurs engendrées est ainsi de diminuer la quantité d'informations à modéliser dans les zones sensibles de l'écoulement. C'est dans cette optique que nous avons voulu appliquer la Simulation des Grandes Echelles sur des maillages s'adaptant dynamiquement à la configuration de l'écoulement.

5.2 Redistribution ou enrichissement de maillage ?

Nous venons d'évoquer l'intérêt d'adapter localement le maillage en fonction de la taille des structures turbulentes présentes dans les différentes zones de l'écoulement. Il semble ainsi possible de contrôler l'erreur locale de la solution sans alourdir inutilement les calculs. L'adaptation de maillage regroupe plusieurs familles et on se propose ici d'en faire une étude bibliographique (non exhaustive) dans le but de justifier les choix que nous avons fait pour notre étude.

Tout d'abord, on peut distinguer deux grandes classes de méthodes adaptatives : on peut choisir d'optimiser la répartition des points du maillage sur le domaine étudié ou bien enrichir le maillage dans les régions présentant des risques d'erreurs importantes.

La première catégorie consiste donc à redistribuer les points de discrétisation. L'algorithme de redistribution est généralement découplé de la résolution des équations. Par évaluations successives de la précision de la solution, on va ainsi densifier plus ou moins le maillage en fonction des caractéristiques locales de l'écoulement en déplaçant les points de la grille. Le nombre total de points du maillage étant constant, on cherche à répartir les noeuds du maillage de manière à minimiser l'erreur globale. On se fixe donc comme objectif d'obtenir une solution la plus précise possible en fixant les coûts de calcul. On parle généralement de *méthodes d'adaptation et d'optimisation de maillages*. L'inconvénient majeur de ces méthodes reste qu'elles sont inadaptées aux écoulements fortement instationnaires puisqu'elles ne permettent pas un suivi dynamique des structures. Il existe cependant certaines études qui visent à déplacer dynamiquement les noeuds du maillage, mais les nouveaux maillages obtenus sont souvent très irréguliers et donc inadaptés aux

schémas numériques classiquement employés [107]. De plus, cette méthode va enrichir certaines régions du domaine de calcul mais dans le même temps on diminue la quantité de points dans d'autres régions, ce qui risque de déplacer l'erreur numérique due au schéma sans pour autant diminuer son influence sur le calcul.

La deuxième catégorie repose sur un enrichissement de maillage. La méthode de raffinement est ici couplée avec la résolution du système d'équations par l'emploi d'un senseur (cf chapitre 7). Celui-ci a pour but de déterminer automatiquement les régions à raffiner en s'appuyant sur la solution obtenue. On parle donc de *techniques automatiques de raffinement local*. A la différence des méthodes de redistribution des points, le nombre total de points de discrétisation va ici varier au cours du calcul, l'objectif étant d'obtenir localement la précision souhaitée tout en limitant les coûts de calcul. Les avantages de cette méthode sont nombreux, ce qui nous a motivé dans le choix de cette approche.

Il est possible de subdiviser cette catégorie en deux sous-catégories : la première consiste à enrichir un maillage unique alors que la seconde est fondée sur l'enrichissement d'un maillage fixe par l'emploi de plusieurs niveaux de grilles. Nous allons maintenant détailler chacune de ces approches et conclure sur la méthode employée dans la suite de ce mémoire.

5.3 Techniques de raffinement local par enrichissement

5.3.1 Enrichissement d'un maillage unique

Le principe général de cette approche est de construire des mailles de niveau fin par découpage des mailles grossières du maillage de base. On distingue deux étapes successives, la déstructuration et la restructuration de maillage, ce qui revient à faire disparaître les mailles grossières qui ont été raffinées au profit de mailles de niveau fin.

Ce type de raffinement est adapté à l'étude de maillages de base de type structurés ou non-structurés. Dans le cadre de notre étude, nous adoptons une approche volumes finis et nous allons donc nous restreindre à des maillages de base structurés.

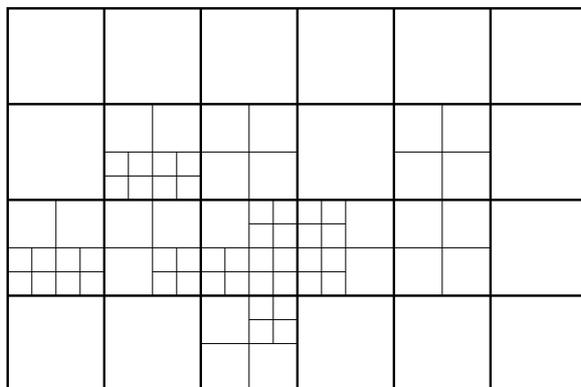


FIG. 5.1 – Enrichissement d'un maillage unique, cas cartésien structuré, avec trois niveaux de raffinement

L'enrichissement d'un maillage unique structuré conduit à une approche non-structurée

avec raccords non-conformes entre les cellules du maillage raffiné. En effet, les mailles de ce nouveau maillage ont un nombre variable de voisins à chacune de leurs interfaces (figure 5.1). Néanmoins, afin d'éviter des irrégularités trop importantes de la résolution du maillage fin, on limite généralement le nombre maximal de voisins de chaque cellule. L'inconvénient principal de cette approche est le recours à des maillages non structurés dont le traitement est plus exigeant que celui des maillages structurés.

5.3.2 Enrichissement à l'aide d'une structure hiérarchisée

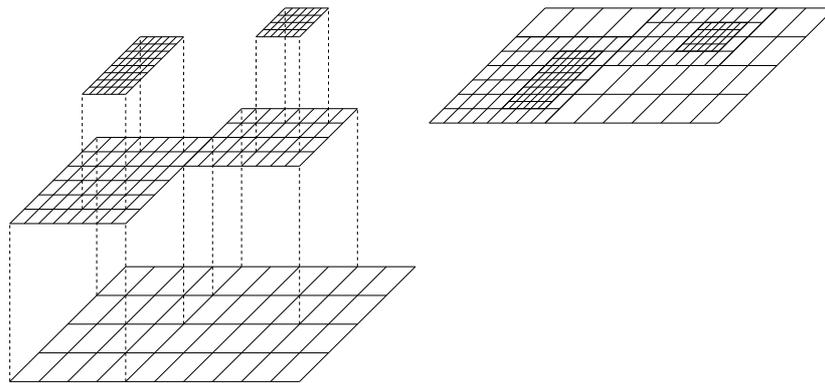


FIG. 5.2 – Enrichissement à l'aide d'une structure hiérarchisée

La deuxième technique d'enrichissement de maillage va s'appuyer sur l'emploi de plusieurs grilles de différents niveaux de résolution. Disposant initialement d'un maillage de base qui recouvre l'ensemble du domaine de calcul, on crée ensuite d'autres grilles de résolutions plus fines dans les zones détectées comme étant à raffiner. Ces nouvelles grilles viennent se superposer au dessus de la grille grossière comme indiqué sur la figure 5.2. Cette approche repose ainsi sur une structure comportant plusieurs maillages emboîtés, on parle de *structure hiérarchisée*. Bien que ce type d'approche soit adapté aux maillages structurés comme aux maillages non-structurés, seule l'approche structurée va être développée par la suite dans le cadre de nos travaux.

Dans le cadre de maillages structurés, les maillages emboîtés sont généralement répertoriés en trois catégories, en fonction de leur orientation et de leur forme générale. En effet, ils peuvent être *alignés* (figure 5.3), *en rotation* (figure 5.4) ou *topologiquement similaires* (figure 5.5) par rapport au maillage de base. En fonction du type de maillages auxquels on a recours, on parlera de méthode AMR (pour *Adaptive Mesh Refinement* en anglais) si les maillages sont alignés ou en rotation et d'approche de type M.L.A.T. (pour *Multi-Level Adaptive Techniques*) si les grilles sont topologiquement similaires. Dans notre cas, les maillages seront alignés ce qui correspond aux méthodes de type AMR que nous allons maintenant détailler.

Cette approche a été développée initialement par Berger et Colella dans les années 80 [9]. Leur premier objectif était d'assurer un bon suivi des ondes stationnaires qui apparaissent en détonique. Pour cela, ils utilisaient plusieurs niveaux de raffinement, en fonction d'une estimation locale de l'erreur de troncature. Ils travaillaient alors avec des maillages raffinés en rotation vis à vis du maillage de base, ce qui leur permettait d'ali-

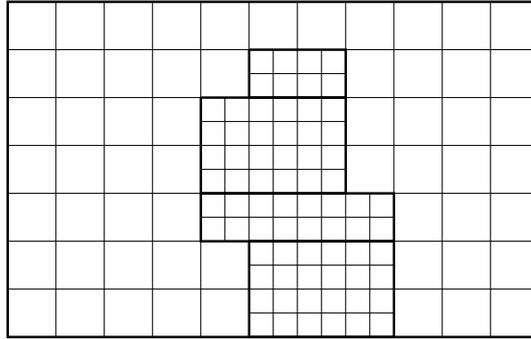


FIG. 5.3 – Maillages alignés par rapport au maillage de base

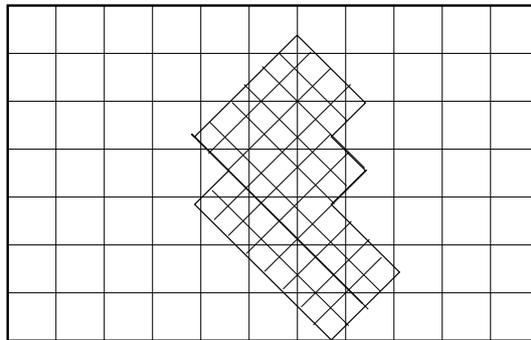


FIG. 5.4 – Maillages en rotation par rapport au maillage de base

gner ces maillages fins avec les discontinuités. Cependant, la difficulté de traitement aux interfaces entre les différents niveaux en présence de maillages en rotation explique que la majorité des auteurs faisant appel à la méthode AMR préfèrent s'appuyer sur des maillages alignés.

Parmi les auteurs qui ont contribué à l'amélioration de l'approche AMR, on pourra citer en particulier Quirk [117], qui a donné un aperçu détaillé de l'algorithme AMR pour les équations d'Euler instationnaires.

L'enrichissement à l'aide d'une structure hiérarchisée présente des atouts non négligeables. Le principal atout réside dans la régularité des maillages obtenus, ce qui en terme de précision doit apporter un plus par rapport à un raffinement s'appuyant sur un maillage unique. Par la suite, on pourra également envisager de paralléliser les calculs avec une telle approche multi-grille, ainsi qu'une approche multi-résolution dans certaines situations complexes. Pour ces différentes raisons, la méthode de raffinement à l'aide d'une structure hiérarchisée a été retenue dans cette étude.

Par ailleurs, du fait de la complexité de l'utilisation de maillage en rotation, il reste à choisir entre des maillages topologiquement similaires ou des maillages alignés. Les maillages topologiquement similaires ont un défaut majeur dans le cadre de nos travaux : l'ensemble des cellules à raffiner doivent être incluses dans un seul domaine de calcul. En présence d'écoulements turbulents faisant intervenir des structures fines plus ou moins complexes, réparties aléatoirement dans le domaine de calcul, le raffinement obtenu risque d'être trop important. Les maillages topologiquement similaires sont plutôt employés afin de prendre en compte un seul phénomène physique local comme une couche limite ou un choc. Les

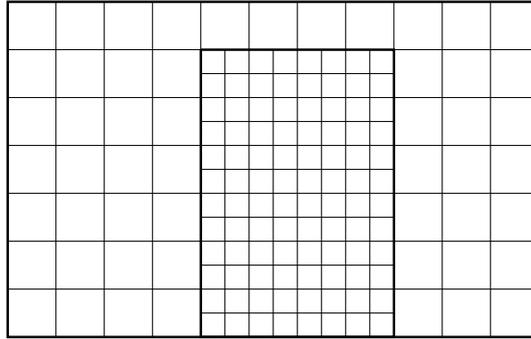


FIG. 5.5 – Maillages topologiquement similaires au maillage de base

maillages alignés aboutissent, quant à eux, à un découpage du domaine de calcul, permettant d'encadrer avec précision chacune des structures présentes dans l'écoulement. En résumé, l'approche adoptée dans cette étude s'appuie sur des maillages structurés emboîtés, le raffinement étant réalisé à l'aide d'une structure hiérarchisée de maillages alignés.

Chapitre 6

Méthode de raffinement automatique développée

La première partie du mémoire a permis d'introduire la notion de séparation d'échelles du champ turbulent utilisée dans la Simulation des Grandes Echelles. Cette approche permet ainsi de distinguer les grandes échelles présentes dans l'écoulement des petites échelles. Cette décomposition a pour objectif principal de réduire les temps de calcul puisque seules les grandes échelles sont explicitement résolues, tandis que les plus petites sont modélisées par l'introduction d'un modèle sous-maille. Ces derniers reposent sur un certain nombre d'hypothèses, lesquelles ne sont pas systématiquement vérifiées pour des écoulements complexes. Dans un tel contexte, une méthode intéressante pour réduire les erreurs de modélisation consiste à utiliser des maillages fins dans les zones à risques. Cette utilisation locale de maillages fins est traitée dans ces travaux à l'aide d'une approche multiniveau. Ainsi, à chaque niveau est associée une résolution plus ou moins importante de l'écoulement. Ce chapitre a pour but d'introduire le formalisme général multiniveau utilisé dans une telle approche.

6.1 Formalisme multiniveau

Dans un premier temps, il va s'agir d'introduire les notations employées par la suite pour la représentation multidomaine/multirésolution d'un champ turbulent. L'utilisation d'une hiérarchie de grilles va en effet nécessiter de distinguer le degré de résolution des variables étudiées sur ces différents niveaux de grilles. Soit ϕ une fonction quelconque de $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, à valeurs dans \mathbb{R} . La représentation multiniveau de cette variable va nécessiter l'emploi d'une famille d'opérateurs de restriction notée G_k , $k = 1, N$. On définit alors un ensemble d'opérateurs hiérarchiques \mathcal{G} , $k = 1, N$, de la manière suivante :

$$\mathcal{G}_1^k = G_k \circ G_{k-1} \circ \dots \circ G_1 = G_k \circ \mathcal{G}_1^{k-1} \quad (6.1)$$

Les différents niveaux de représentation de la fonction ϕ sont obtenus en appliquant un opérateur \mathcal{G}_1^k . La représentation de ϕ au niveau $n \in [1, N]$, notée $\overline{\phi}^n$, est évaluée à l'aide de :

$$\overline{\phi}^n = \mathcal{G}_1^n(\phi) = G_n \circ \dots \circ G_1(\phi) \quad (6.2)$$

L'utilisation d'une famille d'opérateurs de restriction pour G_k va aboutir à des représentations $\overline{\phi}^k$ de la fonction ϕ qui vont être de plus en plus grossière au fur et à mesure que

k croît. Ainsi, le niveau le plus fin de représentation est $\bar{\phi}^1$ et le plus grossier $\bar{\phi}^N$.

Pour chaque niveau de résolution n , la fonction ϕ est alors décomposée à l'aide de deux contributions : on distingue d'une part la partie représentée sur ce niveau $\bar{\phi}^n$ et de l'autre la partie non représentée ϕ'_n :

$$\phi = \bar{\phi}^n + \phi'_n \quad (6.3)$$

Par référence aux travaux de Harten et au formalisme multirésolution qu'il propose, on introduit la notion de *détails*. On note $\delta\phi^n$ le détail de la fonction ϕ au niveau n ; il caractérise l'ajout d'information obtenu sur la fonction ϕ en passant du niveau de représentation $n + 1$ au niveau plus fin n ou réciproquement la perte d'information lorsque l'on passe d'un niveau n à un niveau $n + 1$:

$$\delta\phi^n = \bar{\phi}^n - \bar{\phi}^{n+1} = \phi'_{n+1} - \phi'_n \quad (6.4)$$

A l'aide de ces notations, la décomposition de ϕ donnée par (6.3) peut se reformuler par récurrence de la manière suivante :

$$\phi = \bar{\phi}^n + \sum_{l=0}^{n-1} \delta\phi^l \quad (6.5)$$

Plus généralement, les détails permettent de faire le lien entre des différents niveaux de représentations de la fonction ϕ :

$$\bar{\phi}^m = \bar{\phi}^n + \sum_{l=m}^{n-1} \delta\phi^l \quad (6.6)$$

On peut ainsi déterminer la représentation de ϕ , sur un niveau m donné, en connaissant sa décomposition sur un niveau plus grossier n et les détails traduisant la perte d'information entre ces deux niveaux.

Dans le cadre de la Simulation des Grandes échelles, on imagine aisément que l'on peut rapprocher les opérateurs G_k de la notion de filtrage évoquée dans le premier chapitre de ce mémoire. L'opérateur G_k va ainsi être assimilé à un filtre passe-bas en fréquence, de longueur de coupure Δ_k . De cette manière, l'utilisation de l'opérateur G_k sur une fonction ϕ va se traduire par un produit de convolution du type :

$$G_n(\phi)(x, t) = (G_n \star \phi)(x, t) = \int_{\Omega} G_n(\Delta_n, x - \xi) \phi(\xi, t) d\xi \quad (6.7)$$

La hiérarchie adoptée précédemment pour ces opérateurs G_k indique un choix de longueurs de coupure Δ_k croissantes avec k , c'est à dire $\Delta_{k+1} > \Delta_k$.

Par ailleurs, la combinaison de ces filtres G_k , par exemple pour $k = m..n$, va aboutir à un nouvel opérateur de filtrage \mathcal{G}_m^n défini comme précédemment :

$$\mathcal{G}_m^n(\cdot) = G_n \star G_{n-1} \star \dots \star G_{m+1} \star G_m \star (\cdot) \quad (6.8)$$

On peut alors définir pour le champ aérodynamique différents niveaux de filtrage. La variable filtrée au niveau n d'une fonction ϕ est donnée par :

$$\bar{\phi}^n = \mathcal{G}_1^n(\phi) = G_n \star G_{n-1} \star \dots \star G_1 \star \phi \quad (6.9)$$

On note $\overline{\Delta}_n$ la longueur de coupure liée au filtre \mathcal{G}_1^n . A chaque longueur de coupure $\overline{\Delta}_n$ on peut associer un nombre d'onde de coupure $k_n = \pi/\overline{\Delta}_n$. La variable filtrée $\overline{\phi}^n$ correspond alors aux nombres d'onde $k < k_n$. Les détails entre deux niveaux successifs l et $l+1$ sont calculés comme précédemment :

$$\delta\phi^l = \overline{\phi}^l - \overline{\phi}^{l+1} = (\mathcal{G}_1^l - \mathcal{G}_1^{l+1})(\phi) \quad (6.10)$$

Dans le contexte de la Simulation des Grandes Echelles, les détails décrivent le complément fréquentiel de la fonction ϕ entre les niveaux de filtrage l et $l+1$, et sont par conséquent liés aux échelles de fréquence comprises dans l'intervalle $[k_{l+1}, k_l]$.

Comme évoqué précédemment, les équations de la Simulation des Grandes Echelles portent généralement sur les variables de Favre définies par la relation (1.31). Pour cela, un nouvel opérateur de filtrage noté \mathcal{F}_1^n permet de définir la variable de Favre filtrée au niveau n par :

$$\tilde{\phi}^n = \mathcal{F}_1^n(\phi) = \frac{\overline{\rho\phi}^n}{\overline{\rho}^n} = \frac{\mathcal{G}_1^n(\rho\phi)}{\mathcal{G}_1^n(\rho)} \quad (6.11)$$

On peut également écrire :

$$\tilde{\phi}^n = G_n^F(\tilde{\phi}^{n-1}) \quad (6.12)$$

en définissant l'opérateur G_n^F de la manière suivante :

$$G_n^F(\phi) = \frac{G_n \star (\overline{\rho}^{n-1}\phi)}{G_n \star \overline{\rho}^{n-1}} \quad (6.13)$$

On notera qu'il n'y a pas nécessairement égalité entre les longueurs de coupure $\overline{\Delta}^n$ liée au filtre \mathcal{G}_1^n et Δ^n liée au filtre primaire G_n . En effet, il n'y a égalité que lorsque les filtres primaires utilisés sont des filtres porte, pour lesquels on vérifie aisément $\mathcal{G}_1^n = G_n$. Dans le cas général, l'égalité n'est pas vérifiée : $\overline{\Delta}^n \neq \Delta^n$.

Dans le cadre de la résolution des équations de Navier-Stokes, la décomposition multi-échelles va s'appliquer aux variables aérodynamiques. Pour un fluide compressible, les équations filtrées au niveau n , sous leur forme compact, s'écrivent :

$$\frac{\partial}{\partial t} \widehat{V}^{(n)} + \mathcal{N}(\widehat{V}^{(n)}) = -\mathcal{T}^{(n)} - \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{K}^{(n)} \quad (6.14)$$

Le vecteur $\widehat{V}^{(n)}$ définit un nouveau jeu de variables filtrées faisant intervenir l'énergie résolue au niveau n :

$$\widehat{V}^{(n)} = \begin{pmatrix} \overline{\rho}^{(n)} \\ \overline{\rho U}^{(n)} \\ \overline{\rho E}^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\rho}^{(n)} \\ \overline{\rho U}^{(n)} \\ \frac{\overline{\rho}}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\overline{\rho}^{(n)}\widetilde{u}_k^{(n)}\widetilde{u}_k^{(n)} \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

Le vecteur $\mathcal{K}^{(n)}$ est défini à l'aide de l'énergie cinétique sous-maille généralisée du niveau n , $k^{(n)}$, de la manière suivante :

$$\mathcal{K}^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}\overline{\rho}^{(n)} \left(\widetilde{u}_k \widetilde{u}_k^{(n)} - \widetilde{u}_k^{(n)} \widetilde{u}_k^{(n)} \right) \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

Le terme sous-maille de niveau n , noté $\mathcal{T}^{(n)}$, est alors donné par :

$$\mathcal{T}^{(n)} = \overline{\mathcal{N}(V)}^{(n)} - \mathcal{N}(\widehat{V}^{(n)}) \quad (6.17)$$

6.2 Couplage intergrilles

6.2.1 Opérateurs de restriction et de projection

Les opérateurs intergrilles sont de deux natures : projection et restriction. Leur objectif est de faire le lien entre les champs obtenus sur les différents niveaux de grilles. Dans notre étude, nous avons opté pour un opérateur de restriction d'ordre deux en espace et un opérateur de projection d'ordre trois, proches de ceux évoqués par Terracol [136, 138]. L'opérateur de projection est néanmoins modifié avec une prise en compte de d'avantage de points du maillage grossier dans le but d'annihiler tous les termes en $\Delta_x^i \Delta_y^j \Delta_z^k$ pour lesquels $i + j + k = 2$.

Afin de distinguer les points de niveau fin de ceux de niveau grossier, on note (i, j, k) les coordonnées des cellules du niveau fin et (I, J, K) les cellules de la grille grossière. Dans notre cas, le rapport entre deux niveaux de grilles successifs étant de deux, les relations suivantes permettent de relier ces coordonnées : $i = 2(I - 1) + 1$, $j = 2(J - 1) + 1$ and $k = 2(K - 1) + 1$.

L'opérateur de projection permet de calculer le champ étudié sur une grille fine en partant des informations données par une grille plus grossière. Ainsi en reprenant les notations du paragraphe 6.1, on va évaluer $\phi^{(l-1)}$ en connaissant le champ sur la grille de niveau supérieur $\phi^{(l)}$. On utilise pour cela quinze points de la grille grossière, l'opérateur s'écrivant finalement :

$$\begin{aligned}
\bar{\phi}_{i,j,k}^{(l-1)} &= \left(P_l^{l-1}(\bar{\phi}^{(l)}) \right)_{i,j,k} \\
&= \frac{1125}{784} \sum_{(\xi,\eta,\psi) \in \Omega_P^A} \bar{\phi}_{I+\xi, J+\eta, K+\psi}^l - \frac{825}{6272} \sum_{(\xi,\eta,\psi) \in \Omega_P^B} \bar{\phi}_{I+\xi, J+\eta, K+\psi}^l \\
&\quad - \frac{2295}{6272} \sum_{(\xi,\eta,\psi) \in \Omega_P^C} \bar{\phi}_{I+\xi, J+\eta, K+\psi}^l + \frac{195}{784} \sum_{(\xi,\eta,\psi) \in \Omega_P^D} \bar{\phi}_{I+\xi, J+\eta, K+\psi}^l \\
&\quad + \frac{195}{784} \sum_{(\xi,\eta,\psi) \in \Omega_P^E} \bar{\phi}_{I+\xi, J+\eta, K+\psi}^l - \frac{3945}{18816} \sum_{(\xi,\eta,\psi) \in \Omega_P^F} \bar{\phi}_{I+\xi, J+\eta, K+\psi}^l \\
&\quad - \frac{1413}{6272} \sum_{(\xi,\eta,\psi) \in \Omega_P^G} \bar{\phi}_{I+\xi, J+\eta, K+\psi}^l
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\Omega_P^A &= \{(0, 0, 0)\} \\
\Omega_P^B &= \{(-1, 0, 0); (0, -1, 0); (0, 0, -1)\} \\
\Omega_P^C &= \{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\} \\
\Omega_P^D &= \{(-1, -1, 0); (0, -1, -1); (-1, 0, -1)\} \\
\Omega_P^E &= \{(1, 1, 0); (0, 1, 1); (1, 0, 1)\} \\
\Omega_P^F &= \{(-1, -1, -1)\} \\
\Omega_P^G &= \{(1, 1, 1)\}
\end{aligned}$$

Afin de corriger la solution calculée sur la grille grossière en fonction des informations

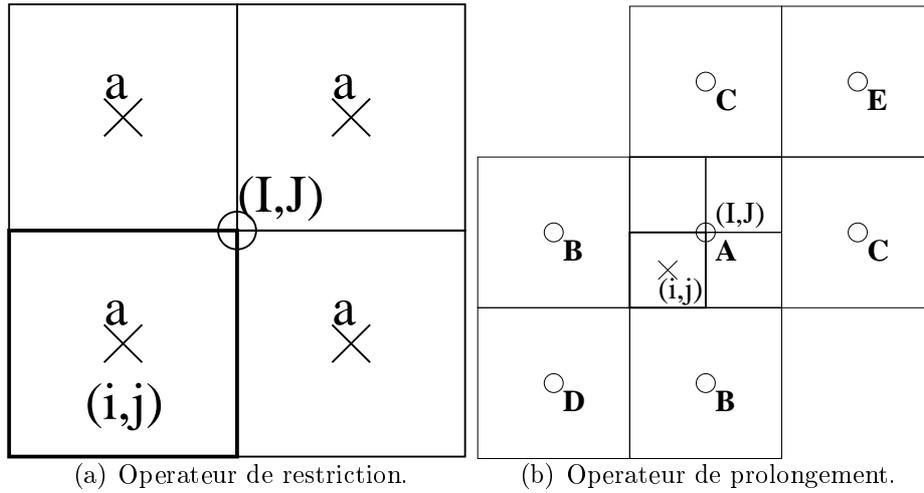


FIG. 6.1 – Cellules utilisées par les opérateurs de transfert inter-grilles (cas 2D).

complémentaires obtenues sur les grilles fines la recouvrant, on a recours à un second opérateur appelé opérateur de restriction. Il permet de calculer le champ sur la grille grossière $\phi^{(l)}$ à partir de celui calculé sur les grilles fines $\phi^{(l-1)}$:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{I,J,K}^l &= \left(R_{l-1}^l(\bar{\phi}^{l-1}) \right)_{I,J,K} \\ &= \frac{1}{8} \sum_{(\xi,\eta,\psi) \in \Omega_R^a} \bar{\phi}_{i+\xi,j+\eta,k+\psi}^{l-1} \end{aligned}$$

avec

$$\Omega_R^a = \left\{ \begin{array}{l} (0, 0, 0); (0, 0, 1); (0, 1, 0); (0, 1, 1); \\ (1, 0, 0); (1, 0, 1); (1, 1, 0); (1, 1, 1) \end{array} \right\}$$

Afin d'évaluer la précision de ces opérateurs, la stratégie de raffinement va être appliquée à un écoulement dont on connaît parfaitement la solution. L'objectif est de valider ces opérateurs, tout d'abord sur une configuration simple présentant un maillage uniforme dans toutes les directions, puis d'étendre cette étude à un maillage qui serait déformé dans une direction. Pour cela, les variables de l'écoulement sont initialisées de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \sin(2\pi \frac{y}{L_y}) \\ u_2 = u_3 = 0 \\ \rho = 1 \\ T = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 (1 - u_1)^2 \end{array} \right. \quad (6.18)$$

Le vecteur des variables conservatives varie ainsi dans une unique direction y . On peut alors simplifier les opérateurs intergrilles et les réécrire comme des opérateurs monodimensionnels suivant cette direction. Cela permettra ensuite d'évaluer facilement l'erreur théorique de cet opérateur, tout du moins pour un maillage uniforme. En utilisant les simplifications du type $\bar{\phi}_{I+\xi,J,K+\psi}^l = \bar{\phi}_{I,J,K}^l$ et $\bar{\phi}_{i+\xi,j,k+\psi}^{l-1} = \bar{\phi}_{i,j,k}^{l-1}$ pour tout (ξ, ψ) , on réécrit

les opérateurs de la manière suivante :

$$\left(P_l^{l-1}(\bar{\phi}^{(l)})\right)_{i,j,k} = \frac{15}{16} \bar{\phi}_{I,J,K}^l - \frac{3}{32} \bar{\phi}_{I,J+1,K}^l + \frac{5}{32} \bar{\phi}_{I,J-1,K}^l \quad (6.19)$$

$$\left(R_{l-1}^l(\bar{\phi}^{l-1})\right)_{I,J,K} = \frac{1}{2} \bar{\phi}_{i,j,k}^{l-1} + \frac{1}{2} \bar{\phi}_{i,j+1,k}^{l-1} \quad (6.20)$$

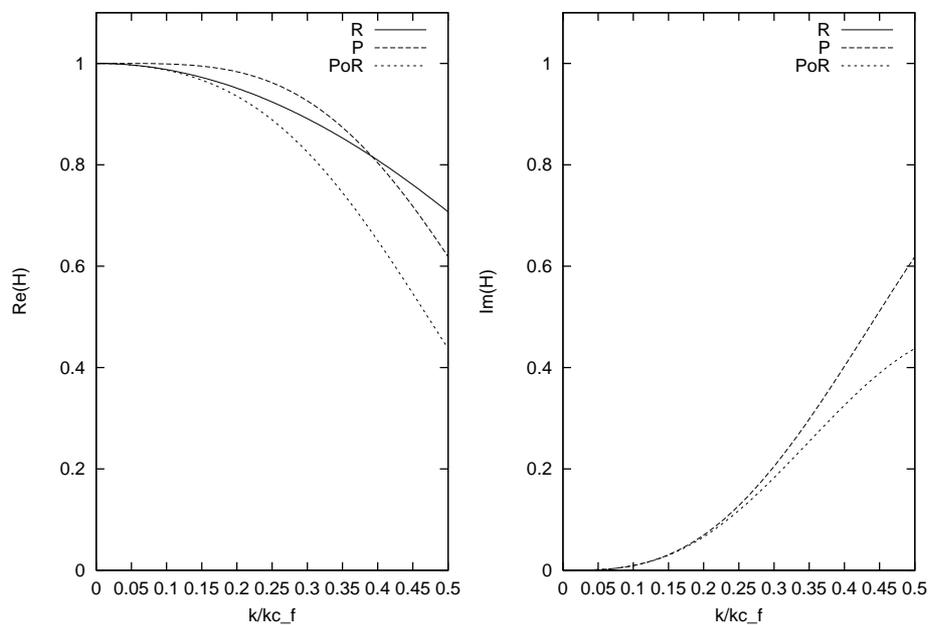
La figure 6.2 décrit les fonctions de transfert des opérateurs utilisés dans cette étude pour le transfert d'informations entre deux niveaux de grille successifs, en se limitant toutefois à l'étude d'un opérateur monodimensionnel (relations (6.19) et (6.20)). Les modules de ces fonctions de transfert (fig. 6.2(c)) montrent une tendance à atténuer les plus hautes fréquences du signal. Cette caractéristique permet d'éviter tout phénomène d'accumulation d'énergie au niveau de la longueur d'onde de coupure sur les niveaux grossiers [136] qui pourrait se traduire par l'introduction d'erreurs numériques sur les fluctuations turbulentes. Par ailleurs, le fait que la partie imaginaire de l'opérateur de prolongement soit non nulle vient de l'utilisation de schémas cell-centered. Ce type de schéma entraîne nécessairement l'emploi d'opérateurs décentrés au niveau du prolongement et donc l'apparition d'un déphasage. La partie imaginaire de l'opérateur de restriction, quant à elle, est nulle car il s'agit d'un opérateur centré.

En présence de maillages non uniformes, un léger gain est constaté au niveau des simulations lorsque l'on pondère les coefficients de l'opérateur de restriction par les volumes des cellules considérées. Ainsi, un opérateur de restriction avec pondération par le volume a été retenu dans la suite des travaux. Cette pondération n'est en revanche pas utilisée pour l'opérateur de projection, puisque, d'une part, un tel opérateur serait compliqué à construire du fait du nombre conséquent de points d'interpolation employés ; d'autre part, la projection est utilisée moins fréquemment que la restriction puisqu'elle intervient seulement quand un raffinement est demandé et uniquement si la zone en question n'a pas été raffinée auparavant, alors que l'écrasement du champ grossier par le champ fin est utilisé à chaque pas de temps.

6.2.2 Enrichissement aux frontières

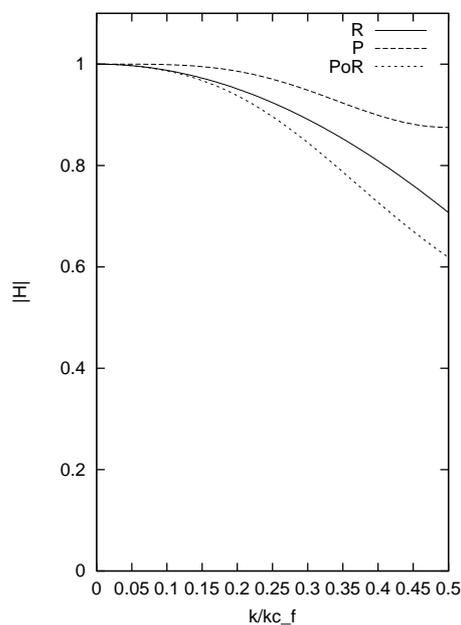
Le fait de recourir à une approche multirésolution nécessite un traitement particulier au niveau des interfaces de raccord entre deux domaines de niveaux distincts. En effet, l'une des principales caractéristiques de cette approche réside dans la discontinuité brutale de la taille des mailles au niveau de ce type d'interface. Cela entraîne une discontinuité en fréquence de la solution obtenue sur chacun des niveaux. En effet, comme chaque niveau de grille est associé à un filtre LES dont la longueur de coupure est proportionnelle à la taille de maille, il est possible de représenter d'avantage d'informations correspondant aux petites échelles sur la grille fine. Afin de conserver une précision suffisante sur le niveau fin, il est alors nécessaire de tenir compte de manière explicite de cette discontinuité à l'interface.

Cependant, la plupart des études antérieures menées sur des configurations multidomaines ou multigrilles locales utilisent un traitement continu aux interfaces. Ainsi, Simons et Pletcher [130] ont recours à un traitement conservatif des flux et des variables aux interfaces pour leur approche multidomaine. Manhart et Friedrich [86] proposent également



(a) Parties réelles.

(b) Parties imaginaires.



(c) Modules

FIG. 6.2 – Fonctions de transferts des opérateurs de restriction, prolongement et de leur association en fonction du nombre d'onde adimensionné par le nombre d'onde de coupure du niveau fin (noté kc_f).

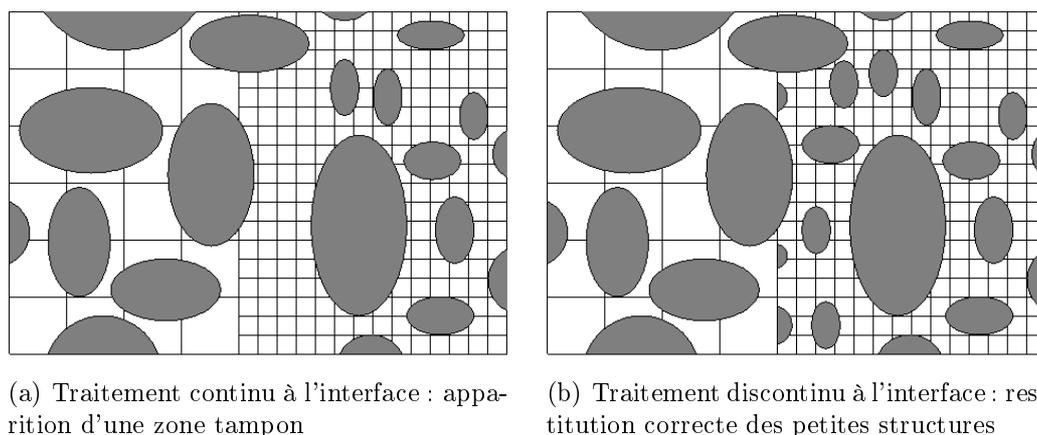


FIG. 6.3 – Traitement à l'interface fin/grossier.

un traitement continu aux interfaces dans leur méthode s'appuyant sur des grilles emboîtées. Enfin, Sullivan *et al.* [135] et Boersma *et al.* [16] imposent également la continuité du champ et des flux aux interfaces dans l'utilisation de leur algorithme multigrille local sur la Simulation des Grandes Echelles. Cependant, dans le cas de l'étude de Sullivan, le traitement continu aux interfaces se justifie par le fait qu'il prend soin de faire tendre les longueurs caractéristiques des deux maillages situés de part et d'autre de l'interface vers une même valeur en s'approchant de cette frontière.

Ces méthodes classiques, consistant à imposer une conservation des flux (voire des variables) à l'interface entre deux niveaux de grilles, ne peuvent ainsi remédier à ce problème de discontinuité fréquentielle. En effet, si aucun traitement particulier en terme de fréquence n'est effectué au niveau de l'interface, il risque de se développer une zone dite *tampon* dans les premières mailles de la grille fine, comme évoqué par Quéméré [115] et comme représenté sur l'image de gauche de la figure 6.3. Dans cette zone, les modes hautes fréquences sont mal représentés, ceux-ci étant seulement régénérés au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la frontière. Or cela revient à supposer que le domaine fin est suffisamment étendu afin de régénérer l'ensemble de ces modes. Bien entendu, dans de nombreux calculs, on s'attend à recourir à des grilles fines de faible étendue qui ne permettront donc pas de bien restituer les petites structures.

Afin d'éviter l'apparition de la zone tampon, Quéméré *et al.* [116] ont proposé d'employer une méthode d'enrichissement en fréquence de la solution obtenue dans les mailles fictives de la grille fine par simple interpolation de la solution grossière. Ainsi, la méthode choisie pour évaluer l'enrichissement à apporter au niveau de ces mailles fictives est la suivante : dans un premier temps, la stratégie consiste à extraire le détail entre la solution fine et la solution grossière au niveau des mailles réelles directement voisines de l'interface ; puis dans un deuxième temps, on injecte cette quantité dans les cellules fictives en l'ajoutant à la valeur interpolée directement à partir du champ grossier. Cependant, il convient de pondérer le complément fréquentiel par une constante C avant de l'appliquer dans les cellules fictives. En effet, Quéméré [115] montre que ce coefficient permet de stabiliser le calcul à condition que sa valeur soit inférieure à un, la valeur $C = 1$ pouvant aboutir à des instabilités numériques. De manière intuitive, on peut justifier le choix d'une valeur

inférieure à un pour le coefficient d'enrichissement par le fait qu'en s'éloignant du domaine fin, on s'attend à obtenir des termes hautes fréquences de plus en plus atténués.

La stratégie d'enrichissement se déroule ainsi en deux étapes et peut se résumer de la

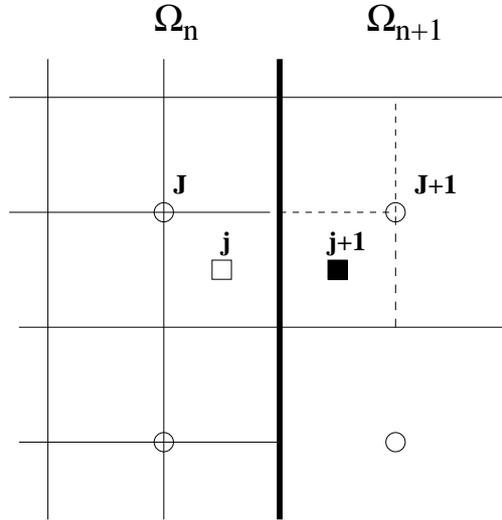


FIG. 6.4 – Procédure d'enrichissement aux frontières. — : frontière fin/grossier ; \circ : cellule du maillage grossier ; \square : cellule réelle du maillage fin ; \blacksquare : cellule fictive du maillage fin.

manière suivante (voir notations sur la figure 6.4) :

$$\delta\phi^{(n)}(j) = \bar{\phi}^{(n)}(j) - P_{n+1}^n \circ R_n^{n+1}(\bar{\phi}^{(n)}(j)) \quad (6.21)$$

$$\bar{\phi}^{(n)}(j+1) = P_{n+1}^n(\bar{\phi}^{(n+1)}(J+1)) + C^{(n)} \times \delta\phi^{(n)}(j) \quad (6.22)$$

La valeur exacte attribuée à la constante d'enrichissement $C^{(n)}$ demeure une inconnue du problème. Quéméré [115] propose des valeurs de l'ordre de 0,95 dans le cadre du couplage RANS/LES, alors qu'une valeur de 0,7 est appliquée pour le couplage entre deux domaines LES. Terracol [136], pour sa part, évalue la valeur à donner à cette constante en faisant l'hypothèse de l'existence d'une loi en puissance pour l'énergie résolue aux plus hautes fréquences résolues afin de déterminer le complément fréquentiel à imposer dans la cellule fictive. Terracol obtient ainsi des valeurs proches de 0,95 dans le cadre d'une approche LES multiniveau. Nous avons noté cependant une grande dépendance des résultats vis à vis de la valeur attribuée à cette constante. Aussi, les futures simulations numériques auront pour premier objectif de déterminer une valeur optimale à attribuer à ce paramètre.

Chapitre 7

Critère de raffinement pour la Simulation des Grandes Echelles

7.1 Les critères de raffinement classiques

Le critère de raffinement est un complément indissociable de toute stratégie de raffinement. En effet, l'objectif des méthodes de raffinement local est d'accroître ou de réduire la densité de points du domaine de calcul afin d'assurer une répartition la plus uniforme possible de l'erreur numérique - définie comme étant l'écart entre la solution exacte et le résultat de la simulation. Pour ce faire, il est nécessaire de déterminer un indicateur de raffinement qui permette de tester si la précision du maillage est localement cohérente avec les besoins du calcul et de l'outil numérique. Ce critère est communément appelé *senseur*. Dans la littérature, ces senseurs sont généralement basés sur des critères de deux natures distinctes. Tout d'abord, on peut étudier la précision numérique de la méthode employée pour vérifier, par exemple, que l'erreur de troncature liée au schéma de discrétisation ne va pas être trop importante. D'autre part, on peut s'appuyer sur des contraintes physiques de l'écoulement, comme par exemple les gradients des grandeurs physiques ou les valeurs du tenseur des contraintes visqueuses. Nous allons rappeler les grands principes de ces deux approches, ainsi que leurs limites de validité.

7.1.1 Critères numériques

La majorité des critères entrant dans cette catégorie est fondée sur des estimations *a posteriori* de l'erreur de troncature. Pour cela, les auteurs ont généralement recours à une méthode basée sur l'extrapolation de Richardson. Le principe est de comparer la solution obtenue avec celle qui proviendrait d'un calcul sur un maillage deux fois plus grossier et avec un pas de temps deux fois plus important. On a alors une estimation de la qualité de la solution obtenue, et on peut être amené à modifier la résolution du calcul en conséquence. Pour une description détaillée de la méthode, on pourra se référer aux travaux de Berger et ses coauteurs [8, 9, 10].

D'autres études tirent leur principe de l'introduction d'un problème dual et une approche de type Galerkin [57, 58], et présentent l'intérêt de ne pas se limiter à l'étude de l'erreur de troncature du schéma mais tiennent compte à la fois de cette erreur de discrétisation et de l'erreur de modélisation des termes sous-maille

7.1.2 Critères physiques

Les senseurs basés sur des considérations physiques sont les plus couramment employés dans la littérature. Le recours à ce type de critère nécessite une bonne connaissance de la physique du phénomène afin de s'assurer que l'on s'intéresse à une grandeur critique pour ce type de configuration et ainsi détecter les régions pour lesquelles l'erreur risque d'être conséquente. Dans la majorité des cas, on considère que les zones pour lesquelles la perte de précision va être la plus importante correspondent aux endroits où la variation de la solution est la plus grande. Les senseurs "physiques" sont ainsi le plus souvent fondés sur des estimations de gradients de grandeurs physiques. Par exemple, dans le cadre d'écoulements compressibles, pour lesquels les discontinuités (chocs, discontinuités de contact) nécessitent une attention particulière au niveau de la résolution du maillage, le raffinement est réalisé dans les zones de forts gradients de pression ou de masse volumique (Hentschel et Hirschel [55], Canonne [19]). Dans le cadre d'études d'écoulements transsoniques autour d'un profil d'aile, Coirier et Powell [20] utilisent des critères fondés sur la divergence et le rotationnel de la vitesse. La détection de couches limites est réalisée par Quirk [117] à l'aide de la norme du tenseur des contraintes visqueuses. Il s'agit d'une liste non exhaustive de grandeurs physiques utilisées afin de mesurer la résolution locale du maillage par rapport aux phénomènes que l'on souhaite observer.

7.1.3 Limites de ces critères

On dispose ainsi, dans la littérature, d'un nombre conséquent de critères de raffinement qui sont choisis en fonction des besoins particuliers de l'étude et de la simulation effectuée. En effet, on peut constater que les grandeurs physiques adoptées pour déterminer les zones de raffinement vont dépendre essentiellement du type d'écoulement considéré. On ne distingue évidemment pas de la même façon une couche limite et une onde de choc. Cet aspect "empirique" des senseurs physiques leur enlève de leur intérêt, alors qu'ils sont numériquement très attractifs, reposant uniquement sur les variables calculées numériquement. Le critère d'arrêt (*threshold* en anglais), c'est à dire la valeur au-delà de laquelle on considère qu'une cellule de maillage doit être raffinée, reste également à fixer de manière arbitraire par l'utilisateur, ce choix n'étant pas toujours instinctif et pouvant nécessiter un calcul préalable afin de l'évaluer. De plus, dans le cadre de l'étude des écoulements turbulents, il semble difficile de déterminer une grandeur physique qui permette de caractériser l'ensemble des phénomènes qui entrent en jeu.

Les critères numériques se révèlent beaucoup plus universels, ne comportant aucune considération sur la physique de l'écoulement. Cela peut néanmoins s'avérer imprécis, en particulier lorsque l'on va employer une modélisation des échelles non résolues, comme c'est le cas en Simulation des Grandes Echelles, puisqu'aucune évaluation particulière de la précision locale de cette modélisation n'est menée. Mitran [93] montre en effet que ce type de critère, appliqué à une Simulation des Grandes Echelles de canal plan, aboutit à un raffinement sur presque la totalité du domaine grossier. Or ce n'est évidemment pas ce à quoi on s'attend, puisque le senseur détecte alors des zones propices à la Simulation des Grandes Echelles, avec un retour à l'isotropie des échelles sous-maille, et qui n'ont donc pas besoin d'être raffinées. Afin d'éviter un raffinement excessif, Mitran couple alors le senseur basé sur l'extrapolation de Richardson avec un critère portant sur la physique

de l'écoulement. Il choisit d'étudier la répartition spatiale de l'enstrophie ainsi que celle du produit scalaire entre le champ de vitesse et le champ de vorticité. Cela aboutit alors aux mêmes contraintes portant sur les critères physiques, en particulier la valeur du seuil de raffinement qu'il faut évaluer "au cas par cas".

7.2 Senseur en ondelettes élaboré

Dans l'optique de l'emploi de maillages adaptatifs sur des calculs de Simulation des Grandes Echelles, nous allons, par la suite, chercher à raffiner les zones du maillage pour lesquelles la modélisation des échelles sous-maillages risque de se montrer inefficace. Il s'agit donc de détecter précisément les régions pour lesquelles les hypothèses utilisées pour cette modélisation vont s'avérer inexactes. L'hypothèse qui est le plus souvent sujet à controverse est l'hypothèse d'isotropie des petites échelles. On sait, par exemple, que les écoulements confinés, en présence de parois solides, ne vérifient pas cette hypothèse, aboutissant à des erreurs de modélisation non négligeable quand on applique la Simulation des Grandes Echelles en proche paroi. On va donc chercher un critère permettant de tester le caractère isotropique des petites structures. Les senseurs évoqués précédemment ne permettant pas aisément de mesurer une éventuelle anisotropie, on va devoir mettre au point un nouveau critère. Celui-ci devra à la fois rendre compte de la structure locale de l'écoulement, mais aussi donner des informations concernant la taille des structures rencontrées en chaque région du domaine de calcul. En effet, les approches statistiques classiques de la turbulence entrent généralement dans le cadre d'étude propre aux hypothèses de Kolmogorov. En outre, le caractère intermittent de la turbulence n'est que rarement considéré et le développement de nouveaux outils prenant en compte ce phénomène serait intéressant. Mais cela nécessite de trouver un outil statistique qui traite de l'intermittence, le caractère statistique de l'outil étant indispensable du fait du caractère chaotique de la turbulence et de sa dépendance vis-à-vis des conditions initiales. Un outil répondant à ces critères et qui présente à la fois une localisation spatiale et une localisation en terme d'échelles est la *décomposition en ondelettes*.

7.2.1 Les ondelettes

La méthode en ondelettes est une approche mathématique récente et reste un sujet d'études important de nos jours. Cette technique a pour intérêt principal de fournir une décomposition d'un signal à la fois localisé en espace et en nombre d'onde. Pour cela, on se donne une famille d'ondelettes sur laquelle va reposer cette décomposition. Cette famille est obtenue par dilatation ou contraction d'une fonction choisie, appelée *ondelette mère* notée $\psi(x)$ par la suite. Nous allons nous limiter, dans le cadre de ces travaux, aux ondelettes réelles, mais il est possible de travailler avec des ondelettes complexes. Une ondelette est une fonction $\psi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ de moyenne nulle :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx = 0. \quad (7.1)$$

Plus généralement, l'ondelette mère est souvent choisie pour sa bonne localisation dans l'espace physique et l'espace de Fourier ; or cela nécessite que la fonction ψ choisie soit

suffisamment régulière et décroisse suffisamment vite dans ces deux espaces. Par ailleurs, les ondelettes utilisées en pratique ont généralement leurs M premiers moments nuls :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^m \psi(x) dx = 0 \text{ pour } m = 0, M \quad (7.2)$$

La famille d'ondelettes, ici normalisée pour la norme $L^2(\mathbb{R})$, est alors obtenue par dilatation et translation de l'ondelette mère. Cette famille est ainsi définie de la manière suivante :

$$\psi_{r,x}(x') = r^{-1/2} \psi\left(\frac{x' - x}{r}\right) \quad (7.3)$$

où x décrit le centre de l'ondelette $\psi_{r,x}$ et r son échelle.

La transformée en ondelettes continue de $f \in L^2(\mathbb{R})$ à l'échelle r et à la position x se calcule en corrélant f avec l'ondelette correspondante :

$$\tilde{f}(r, x) = Wf(x, r) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \psi_{r,x}(x') dx' \quad (7.4)$$

Le coefficient ainsi défini $\tilde{f}(r, x)$ permet de mesurer les fluctuations de la fonction f autour de la position x et à l'échelle r . Par la suite, on peut reconstruire toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ par combinaison linéaire de ses coefficients en ondelettes, i.e. :

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(r, x) \psi_{r,x}(x') r^{-2} dx dr \quad (7.5)$$

La constante C_ψ dépend de la famille d'ondelettes considérée :

$$C_\psi = \int_{-\infty}^0 \left| \hat{\psi}(k) \right|^2 \frac{dk}{|k|} = \int_0^{+\infty} \left| \hat{\psi}(k) \right|^2 \frac{dk}{k} \quad (7.6)$$

la notation $\hat{\cdot}$ désignant la transformée de Fourier.

Une condition nécessaire afin de valider la décomposition est que l'ondelette vérifie la condition d'admissibilité $C_\psi < +\infty$. Pour que l'intégrale soit finie, il faut s'assurer que $\hat{\psi}(0) = 0$, ce qui explique pourquoi les ondelettes doivent être de moyenne nulle.

On vérifie également la relation suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}(r, x)|^2 r^{-2} dx dr \quad (7.7)$$

Dans le cadre de l'application des outils de décomposition en ondelettes à l'étude numérique, on s'appuie sur une *formulation discrète* de cette décomposition. En effet, dans cette situation, on utilise généralement comme échelle discrète $r = 2^m$ ce qui aboutit à une nouvelle formulation de (7.3) :

$$\psi_{m,n}(x') = 2^{-m/2} \psi(2^{-m}x' - n) \quad (7.8)$$

Un choix judicieux de l'ondelette mère $\psi(x)$ permet d'obtenir une base *orthonormale* en ondelettes. L'intérêt de ce type de base réside dans leur aptitude à bien représenter la

fonction étudiée en connaissant un nombre optimal de coefficients en ondelettes. En effet, ce type de base ne nécessite pas d'évaluer les coefficients pour les différentes échelles en chaque point du domaine d'étude tout en permettant de caractériser convenablement le contenu multi-échelles de la fonction analysée.

Les exemples d'ondelettes orthonormales sont nombreux. On peut citer les ondelettes de Daubechies [26] ainsi que celles de Mallat [85].

Les ondelettes n'appartenant pas à la catégorie *orthonormale* sont dites *redondantes*. Dans ce cas, l'expression (7.8) est couramment remplacée par :

$$\psi_{m,n}(x') = 2^{-m} \psi\left(\frac{x' - n}{2^m}\right) \quad (7.9)$$

Ce type d'ondelette ne permet pas une représentation optimale de la fonction étudiée contrairement aux bases orthonormales. En effet, les ondelettes redondantes ont pour but d'évaluer en chaque point du domaine l'ensemble des coefficients en ondelettes de la fonction aux différentes échelles. Par conséquent, le recours à ce type d'ondelettes s'avère être plus coûteux que l'utilisation d'une base orthonormée. Néanmoins, l'intérêt des ondelettes redondantes réside dans leur capacité à apporter une analyse fine du signal étudié. En particulier, elles se montrent plus précises lorsque l'on cherche à évaluer la régularité d'une fonction.

Par ailleurs, les ondelettes sont généralement définies à l'aide de fonctions d'interpolation qui agissent dans chacune des directions de l'espace. Par la suite, on notera $w_{m,(i,j,k)}^x$ le coefficient en ondelettes discret dans la direction x défini par :

$$w_{m,(i,j,k)}^x = \langle f, \psi_{m,(i,j,k)}^x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \psi_{m,(i,j,k)}^x(x) dx \quad (7.10)$$

où $\psi_{m,(i,j,k)}^x$ désigne la fonction ondelette dans la direction x au point (i, j, k) et à l'échelle m .

Dans le cadre de nos travaux, on cherche à déterminer le spectre local en ondelettes en chaque point du domaine d'étude. Dans cette optique, la redondance est appréhendée comme un avantage car elle permet de déterminer les coefficients en chaque point avec la même précision. Ainsi, la base d'ondelette employée dans ces travaux est choisie redondante.

Plus précisément, la base utilisée ici est identique à la base redondante employée par Sjögren et Yee [131]. En effet, dans leur étude visant à contrôler la dissipation numérique à l'aide d'un critère fondé sur la décomposition en ondelettes, plusieurs familles d'ondelettes ont été envisagées. L'une d'entre elles découle des travaux de Harten [53] portant sur une approche multirésolution (cf relation (3.24) de [131]). C'est cette base qui a été retenue dans notre étude. Les coefficients en ondelettes sont alors estimés à l'aide des relations suivantes (ici dans la direction x) :

$$w_{m,(i,j,k)}^x = f_{i,j,k}^{m-1} - (f_{i+1,j,k}^{m-1} + f_{i-1,j,k}^{m-1})/2 \quad (7.11)$$

et

$$f_{i,j,k}^m = (f_{i+1,j,k}^{m-1} + f_{i-1,j,k}^{m-1})/2 \quad (7.12)$$

Il s'agit ici d'un coefficient unidirectionnel, qui est évalué dans chacune des directions de l'espace. Le coefficient tridimensionnel est alors obtenu en sommant les normes de ces coefficients dans chacune des directions :

$$w_{m,(i,j,k)} = \sqrt{(w_{m,(i,j,k)}^x)^2 + (w_{m,(i,j,k)}^y)^2 + (w_{m,(i,j,k)}^z)^2} \quad (7.13)$$

De plus, à l'aide d'un développement en série de Taylor de la relation (7.11), on montre que (on omet temporairement les indices m dans un souci de lisibilité) :

$$w_{(i,j,k)}^x = -\frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{(i,j,k)} + o(\Delta x^3) \quad (7.14)$$

Ainsi, on est en mesure de déterminer la fonction de transfert correspondant à la décomposition en ondelettes :

$$\hat{H}(kx) = \frac{\Delta x^2 kx^2}{2} = \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{kx}{kx_c} \right)^2, \quad (7.15)$$

avec $kx_c = \frac{\pi}{\Delta x}$ qui définit un nombre d'onde de coupure monodimensionnel.

La transformée en ondelettes correspond bien à une notion de petites échelles puisqu'elle agit comme un filtre passe-haut sur la solution (cf figure 7.1).

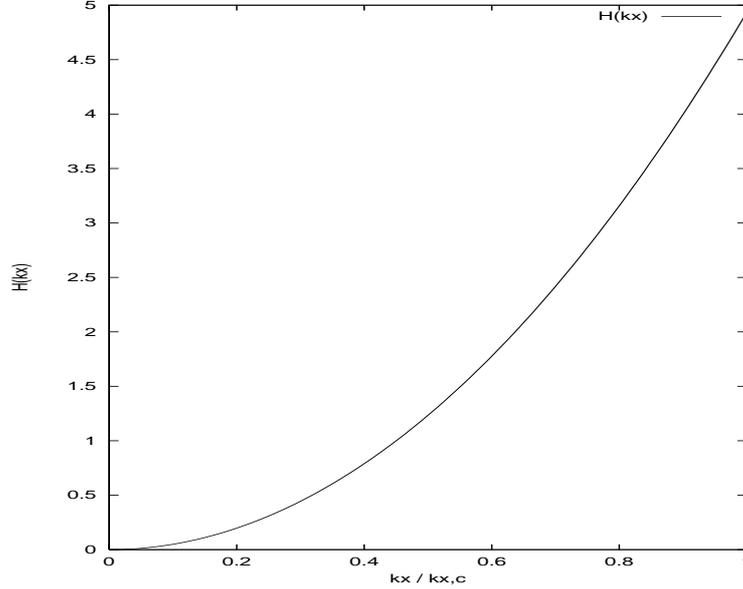


FIG. 7.1 – Fonction de transfert associée à la base d'ondelettes choisie.

7.2.2 Critère de raffinement utilisé

Une fois les coefficients en ondelettes calculés, il va s'agir d'en tirer un critère de raffinement qui soit adapté à la LES, c'est à dire dont le but est de déterminer les zones pour lesquelles les hypothèses propre à la LES (retour à l'isotropie des petites structures,

etc...) risquent de ne pas être vérifiées. Pour cela, il est tout d'abord nécessaire d'introduire l'exposant de Lipschitz (ou de Hölder). Ce paramètre est généralement utilisé pour tester la régularité d'une fonction. En effet, dans le cadre de l'analyse multirésolution en ondelettes, plusieurs théorèmes permettent de relier la régularité d'une fonction et ses coefficients en ondelettes [25, 34, 84, 106]. Par exemple, Daubechies [25] montre que si une fonction $f(x) \in C^1$ est à support compact et que ses coefficients en ondelettes vérifient

$$\max_{j \in S(x_0, m, \epsilon)} |\langle f, \psi_{m, (i, j, k)} \rangle| \leq C 2^{m\alpha} \quad (7.16)$$

pour tout m et pour $\epsilon > 0$, alors la fonction f a un exposant de Lipschitz α au point $x = x_0$:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq C |x - x_0|^\alpha \quad (7.17)$$

pour tout x proche de x_0 . $S(x_0, m, \epsilon)$ désigne le domaine de dépendance de la fonction ondelette :

$$S(x_0, m, \epsilon) = \{(i, j, k) : \psi_{m, (i, j, k)} \neq 0 \quad \forall x \in [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]\} \quad (7.18)$$

Bien que ce théorème ait été initialement formulé pour des ondelettes non-redondantes, il reste valable pour les ondelettes redondantes, l'intérêt étant qu'avec les ondelettes redondantes, le théorème ne se limite plus aux seules fonctions de classe C^1 [25].

Malheureusement, il n'est bien évidemment pas possible de déterminer exactement ce coefficient α . Plusieurs méthodes consistant à approximer α existent dans la littérature. La démarche employée dans cette étude consiste à évaluer le paramètre α à partir des maxima locaux des coefficients en ondelettes, comme proposé par Daubechies [25]. Ainsi, après avoir déterminé les coefficients en ondelettes, la valeur maximale dans le domaine de dépendance est calculé :

$$r_{m, (i, j, k)} = \max_{(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) \in [-2^m p, 2^m q]^3} |\langle f, \psi_{m, (i+\epsilon_1, j+\epsilon_2, k+\epsilon_3)} \rangle| \quad (7.19)$$

où p et q désignent le stencil de l'ondelette mère. L'exposant de Lipschitz s'obtient alors grâce à une approximation des moindres carrés de la droite d'équation :

$$\log_2 r_{m, (i, j, k)} = \alpha_{i, j, k} m + c \quad (7.20)$$

La pente de cette droite donne en effet une valeur approximative de α au point $x = (i, j, k)$, notée $\alpha_{i, j, k}$.

Afin de faire le lien entre le coefficient α et les hypothèses de modélisation de la Simulation des Grandes Echelles, ce coefficient va tout d'abord être rapporté à la pente du spectre de Fourier. En effet, Farge *et al.* [36] et Perrier *et al.* [106] ont montré qu'il est possible de relier la pente du spectre en ondelettes à celle du spectre de Fourier. On suppose que le spectre d'énergie évolue en $k^{-\beta}$ dans la zone inertielle. Dans la suite, le senseur sera appliqué au champ du rotationnel de la vitesse et par conséquent il est intéressant de se référer au spectre correspondant qui est le spectre d'entrophie :

$$\Omega(k) \sim \Omega_0 k^{2-\beta}$$

En considérant deux bandes spectrales voisines $[k_3; k_2]$ et $[k_2; k_1]$, avec $k_1 = rk_2$ et $k_2 = rk_3$ ($r > 1$), il est possible de déterminer la quantité d'entrophie contenue dans chacune d'elles

par intégration :

$$\Omega_1 = \int_{k_2}^{k_1} \Omega(k) dk = \frac{\Omega_0}{3-\beta} \left(1 - \frac{1}{r^{3-\beta}}\right) k_1^{3-\beta}$$

$$\Omega_2 = \int_{k_3}^{k_2} \Omega(k) dk = \frac{\Omega_0}{3-\beta} \left(1 - \frac{1}{r^{3-\beta}}\right) k_2^{3-\beta}$$

Ainsi, il est possible d'exprimer le rapport entre les quantités Ω_1 et Ω_2 à l'aide de :

$$\log \frac{\Omega_1}{\Omega_2} = (3-\beta) \log r \quad (7.21)$$

Dans la présente étude, le rapport entre deux bandes successives est fixé à $r = 2$ afin de pouvoir comparer le spectre en ondelettes à celui dans l'espace de Fourier.

En raisonnant dans l'espace des ondelettes, et en appliquant la base en ondelettes au rotationnel de la vitesse, les quantités Ω_1 et Ω_2 peuvent s'exprimer à l'aide des coefficients en ondelettes : $\Omega_1 = r_1^2$ et $\Omega_2 = r_2^2$. Le rapport entre ces deux quantités est alors :

$$\log \frac{\Omega_1}{\Omega_2} = -2\alpha \log 2 \quad (7.22)$$

Les indices d'espace (i, j, k) ont été volontairement omis pour une meilleure lisibilité. En comparant les relations (7.21) et (7.22), la relation entre les pentes β et α est donnée par :

$$\alpha = \frac{\beta - 3}{2} \quad (7.23)$$

La valeur seuil est alors choisie en s'appuyant sur les hypothèses de Kolmogorov. Celui-ci prédit (hypothèse "K41") une décroissance du spectre en $k^{-5/3}$, ce qui fixe la valeur de référence pour la pente du spectre d'énergie : $\beta_0 = \frac{5}{3}$. Ainsi, les cellules pour lesquelles le paramètre $\alpha_{i,j,k}$ est inférieur à $\alpha_0 = -\frac{2}{3}$ constituent des mailles à raffiner.

Afin d'interpréter les valeurs calculées pour le coefficient α , il peut également être intéressant de reprendre le cas test monodimensionnel utilisé par Sjögren et Yee [131]. La même décomposition en ondelettes a été réalisée et les résultats sont présentés sur la figure 7.2. On observe que pour chaque variation "brusque" de la fonction étudiée f , le coefficient α prend une valeur négative. Ainsi, dans une étude mono-dimensionnelle, une variation haute fréquence de f est détectée par le signe de α . Dans notre étude, c'est une comparation de α avec la valeur seuil qui permet de se prononcer.

Finalement, le critère de raffinement peut se résumer à l'aide de sa fonction moniteur f_{ijk} qui est alors définie de la manière suivante :

$$f_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha_{i,j,k} \leq -\frac{2}{3} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (7.24)$$

Les cellules pour lesquelles la fonction f_{ijk} est non nulle sont des cellules à prendre en compte dans l'établissement des zones à raffiner.

Cependant, un tel critère basé uniquement sur l'évaluation de la pente locale du spectre d'énergie s'est rapidement montré limité lorsqu'il est appliqué à des écoulements turbulents. En effet, il détecte alors des cellules couvrant une grande partie du domaine de

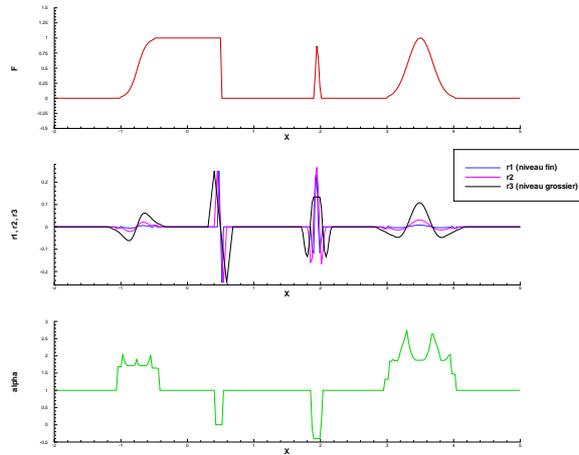


FIG. 7.2 – Interprétation du coefficient α dans le cadre de l'étude d'une fonction monodimensionnelle.

calcul alors que ce n'est pas ce à quoi on pouvait s'attendre intuitivement. Le fait que ce critère ne tienne pas compte de la quantité réelle d'énergie contenue dans les différentes échelles de la décomposition en ondelettes mais uniquement de la pente du spectre semble en être la raison. En effet, dans des zones bien résolues de l'écoulement, des oscillations des variables de l'écoulement persistent. Celles-ci n'ont pas de signification physique et peuvent, par exemple, être engendrées par les erreurs d'interpolation des schémas numériques. Or rien ne permet d'affirmer que la pente du spectre dans de telles zones va (et doit) respecter les hypothèses de Kolmogorov. Afin de ne pas tenir compte de ces structures très faiblement énergétiques aux grands nombres d'ondes, il est apparu nécessaire d'introduire une valeur seuil ϵ pour les coefficients en ondelettes en dessous de laquelle la valeur de la pente du spectre en ondelettes n'est pas considérée. Bien que ce paramètre ϵ soit empirique, il semble cohérent de considérer une structure anisotrope mais très faiblement énergétique comme ayant une influence faible sur la solution et l'erreur de modélisation.

La valeur attribuée à $\epsilon = 6.10^{-3} \times \Omega_0$ dépend de l'écoulement considéré et des grandeurs qui le caractérisent. Le paramètre Ω_0 doit ainsi représenter une vorticité caractéristique de l'écoulement. Tout d'abord, dans le cas de la couche de mélange, la quantité Ω_0 s'obtient à l'aide du rapport entre la vitesse longitudinale à l'infini U_∞ et l'épaisseur de vorticité δ_ω : $\Omega_0 = \frac{U_\infty}{\delta_\omega}$. Pour le canal plan, on utilise le cisaillement à la paroi : $\Omega_0 = \left(\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial z}\right) (z = 0)$. Enfin, pour l'écoulement de culot, Ω_0 a été fixé arbitrairement à la valeur $\Omega = 0,5$ pour les premiers calculs réalisés à la fin de ces travaux.

Enfin, un des problèmes couramment rencontré lorsqu'il s'agit d'appliquer une base en ondelettes à une simulation numérique réside dans le traitement des conditions aux limites à imposer pour cette base. Dans cette étude, la base en ondelettes s'applique au champ de vitesse pour lequel on connait le comportement au niveau des limites du domaine de calcul et dans les mailles fictives. On en déduit ensuite un rotationnel pour chaque niveau de décomposition en ondelettes utilisé.

7.2.3 Méthode de *grouping* / *clustering*

La mise au point de l'outil d'adaptation automatique de maillage va nécessiter une gestion automatique de la disposition des sous-domaines de niveau fin. Cela repose tout d'abord sur la détection des cellules du maillage grossier pour lesquelles un raffinement s'avère intéressant. Pour cela, un senseur dont la fonction est de sélectionner un nuage de points à raffiner vient d'être introduit. La deuxième étape est alors de regrouper ces points en un ensemble de sous-maillages de manière optimale. Le découpage en sous-maillages est réalisé à l'aide d'un algorithme dit de *grouping/clustering*. Ce type d'algorithme est inspiré des travaux de Berger *et al.* [11] et fut repris dans de nombreux travaux sur l'adaptation de maillages [64, 103, 117]. Cet algorithme a été choisi afin de regrouper les cellules sélectionnées en sous-domaines structurés, favorisant ainsi la vectorisation du calcul. Cet outil évite de traiter directement chaque cellule indépendamment à l'aide d'une structure en arbre qui serait plutôt privilégiée en vue de l'utilisation de calculateurs scalaires.

On dispose initialement de la grille grossière G_{l-1} que l'on souhaite raffiner en un ensemble de sous-domaines $\{G_{l,k}\}$. Le senseur permet de se limiter à l'étude d'un maillage $\hat{G}_l \in G_l$ qui contient la totalité des points à raffiner mais également des cellules qui n'ont pas été désignées par le senseur. Or, on peut vouloir exclure ces dernières des sous-domaines de niveau fin dans le but de limiter la taille de ces sous-domaines et par conséquent les coûts de calcul. Afin de déterminer s'il est nécessaire de procéder à un découpage en sous-domaines du maillage \hat{G}_l , on introduit son *taux d'occupation*, ou *taux de remplissage*, noté λ_l , défini de la manière suivante, pour un domaine contenant n mailles dont m ont été désignées par le critère de raffinement :

$$\lambda_l = \frac{m}{n} \quad (7.25)$$

On va alors comparer le taux d'occupation du maillage \hat{G}_l avec une valeur fixée par l'utilisateur. On considère alors que si ce taux de remplissage est inférieur à la valeur seuil, on doit découper le maillage \hat{G}_l en un ensemble de sous-domaines notés $G_{l,k}$. Le maillage \hat{G}_l (cf figure 7.3(a)) est alors soumis à l'algorithme de *grouping/clustering*.

La première étape de l'algorithme va permettre de détecter les éventuels plans du domaine \hat{G}_l ne contenant pas de cellules à raffiner. Dans cette optique, on calcule les *signatures* de ce maillage dans chacune des directions (cf figure 7.3(b)). La signature Σ_i représente le nombre de cellules désignées par le senseur dans le $i^{\text{ème}}$ plan du maillage pour une étude 3D (la $i^{\text{ème}}$ ligne pour un maillage 2D) :

$$\Sigma_i = \sum_j \sum_k f_{ijk} \quad (7.26)$$

où la fonction moniteur f_{ijk} est définie par la relation (7.24).

Ainsi chaque valeur nulle de la signature dans une direction désigne un plan (une ligne en 2D) perpendiculaire à cet axe et ne contenant aucune cellule à raffiner. Il s'agit ainsi d'un indice potentiel pour le découpage du domaine \hat{G}_l . On va évaluer successivement les signatures dans chacune des directions, en commençant par la direction correspondant au plus grand côté du domaine \hat{G}_l . Une fois toutes les signatures calculées dans une direction, on s'intéresse aux indices donnant lieu à des valeurs nulles ; on a alors plusieurs cas de figure :

- S’il n’y a aucune signature nulle dans cette direction, on passe à la direction de maillage suivante.
- Si on détecte un unique indice i pour lequel $\Sigma_i = 0$, on découpe le domaine \hat{G}_l en deux domaines $G_{l,1}$ et $G_{l,2}$ au niveau de cet indice.
- Enfin, si plusieurs indices i correspondent à des valeurs nulles de la signature, on conserve l’indice le plus proche du centre du domaine \hat{G}_l comme indice de découpage.

Dans des cas plus complexes, il peut arriver que l’on ne trouve aucune valeur nulle pour les signatures dans chacune des directions bien que le domaine contienne un nombre non négligeable de cellules à exclure de la stratégie de raffinement. Dans une telle situation, on introduit le Laplacien de la signature (cf figure 7.3(c)) :

$$\Delta_i = \Sigma_{i+1} - 2 \Sigma_i + \Sigma_{i-1} \quad (7.27)$$

Les indices i pour lesquels Δ_i change de signe sont des clients potentiels pour le découpage du maillage. On conserve l’indice donnant lieu au maximum de la fonction $Z_{i+\frac{1}{2}} = |\Delta_{i+1} - \Delta_i|$.

Une fois le découpage de \hat{G}_l en deux sous-domaines $G_{l,1}$ et $G_{l,2}$ effectué, on va travailler successivement sur chacun de ces sous-domaines. Tout d’abord, on se ramène à des domaines $\hat{G}_{l,k}$ contenus dans les sous-domaines $G_{l,k}$ en regroupant l’ensemble des cellules à raffiner, c’est à dire qu’on exclu les éventuels plans (ou lignes en 2D) dont la signature est nulle à chaque extrémité de $G_{l,k}$.

On procède alors de manière récursive sur chaque domaine obtenu par découpage du domaine \hat{G}_l (cf figure 7.3(d)). Le critère d’arrêt de l’algorithme est la condition évoquée précédemment pour le taux d’occupation, cette condition devant être vérifiée cette fois-ci pour l’ensemble des domaines $\hat{G}_{l,k}$.

Enfin, le recours à des sous-domaines de taille trop faible risquant de porter préjudice à la qualité de la solution, un paramètre de contrôle permet de fixer la taille minimale d’un sous-domaine au-delà de laquelle on ne cherchera plus à le découper, même si le critère d’arrêt n’est pas encore respecté.

A la fin de cet algorithme, on dispose d’un ensemble de sous-domaines de niveau fin (cf figure 7.3(e)). Une dernière étape nous permet de procéder à d’éventuels regroupements de sous-domaines adjacents (figures 7.4(a) et 7.4(b)). Dans notre cas, on préférera disposer de peu de domaines de tailles importantes, ce qui revient à regrouper au maximum les sous-domaines, mais pour d’autres architectures de machines, on pourra souhaiter avoir un maximum de domaines de petites tailles, ou on pourra également chercher à obtenir un bon compromis entre la taille moyenne des sous-domaines et leur nombre. Ainsi, Jouhaud et Borrel [65] préconisent d’ajouter une étape de restructuration à la fin de cet algorithme. L’objectif de cette étape est alors de trouver le meilleur compromis entre la taille et le nombre de sous-domaines, étape particulièrement importante si l’on veut tirer profit de calculs parallèles. Nous n’avons cependant pas choisi de retenir cette technique, notre objectif premier étant de limiter le nombre de sous-domaines du fait de la machine dont nous disposons pour les calculs.

Cet algorithme assure directement la cohérence de la structure multigrille, on parle de structure *properly-nested*. En effet, la structure de maillages obtenue vérifie nécessairement trois règles fondamentales :

- *Inclusion* des maillages les uns dans les autres $G_l \subset G_{l-1} \quad \forall l$: cette règle traduit l’emboîtement successif des maillages associé à l’enrichissement progressif du

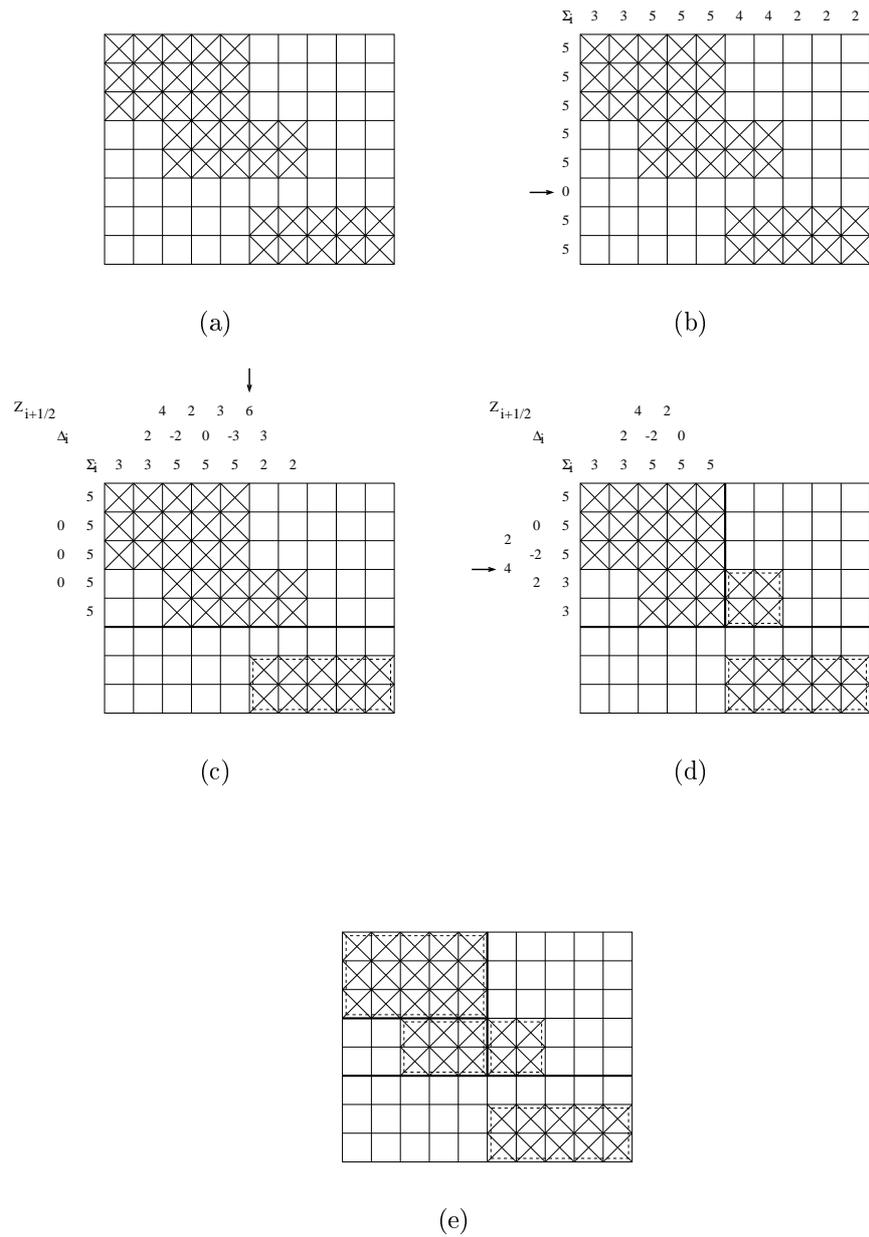


FIG. 7.3 – Algorithme de grouping/clustering.

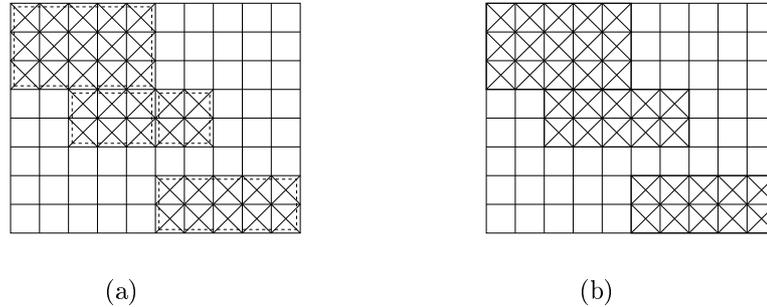


FIG. 7.4 – Etape éventuelle de regroupement des domaines fins.

maillage initial par niveau de raffinement.

- Pas de recouvrement des sous-maillages d'un même niveau $G_{l,j} \cap G_{l,k} = \emptyset$ si $k \neq j$.
- Les mailles adjacentes au maillage G_l doivent obligatoirement appartenir au maillage G_{l-1} , sauf si ces mailles sont voisines des limites du domaine de calcul : cette dernière règle impose une inclusion au sens strict qui entraîne un étalement progressif des zones de raffinement, des plus grossières aux plus fines ; cette règle permet néanmoins un raffinement de plus en plus fin au voisinage des parois solides.

Afin de tenir compte de l'évolution des structures de l'écoulement entre deux raffinements successifs, il a été envisagé de recourir à des *mailles de sécurité* [117]. L'objectif est ainsi d'ajouter des cellules de niveau fin aux frontières des domaines fins créés à partir du critère de raffinement. Ces cellules supplémentaires sont ajoutées afin de s'assurer que les structures détectées par le senseur resteront bien dans le domaine fin jusqu'au prochain raffinement. Pour cela, on calcule une vitesse moyenne d'advection du fluide contenu dans un sous-domaine de niveau fin, et on en déduit une évaluation de la distance parcourue par ces structures d'ici au prochain raffinement. Cette démarche peut s'avérer particulièrement intéressante lorsque l'on va chercher à suivre des structures évoluant dans l'espace. Enfin, une fois déterminées les limites à attribuer aux domaines fins, il reste à construire le maillage de chacun d'entre eux. Pour cela, les mailles fines sont obtenues à l'aide de polynômes de Lagrange appliqués au maillage grossier. Ces opérateurs permettent ainsi de prendre en compte les variations spatiales du maillage grossier dans le calcul des coordonnées des mailles de niveau fin. La figure 7.5 donne une description du problème rencontré. Le but est alors de déterminer la coordonnée du maillage fin notée $y_{1,5}$. Il s'agit alors d'utiliser les coordonnées correspondant au maillage grossier (y_0 à y_3) qui sont à disposition. On trace alors la fonction $f(x)$ (figure 7.6) qui à chaque valeur de x fait correspondre une valeur y_i , ce qui permettra ensuite de déterminer la valeur correspondante à l'indice $x = 1, 5$.

L'équation de la courbe reliant ce nuage de points est alors évaluée à l'aide des polynômes de Lagrange $P_i(x)$. Ceux-ci doivent vérifier la relation $P_i(j) = \delta_{ij}$ où δ_{ij} désigne le symbole

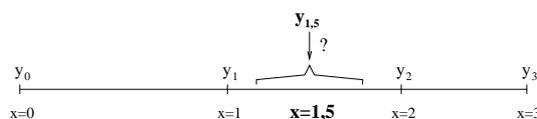


FIG. 7.5 – Calcul des coordonnées du niveau fin : inconnues du problème.

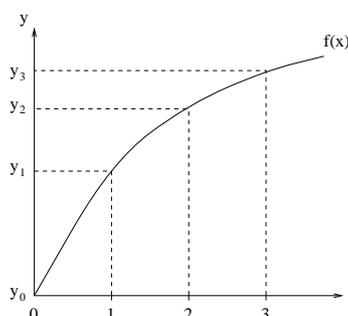


FIG. 7.6 – Introduction des polynômes de Lagrange.

de Kronecker. Leur expression est la suivante :

$$P_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^3 \frac{x-k}{i-k} \quad (7.28)$$

et l'équation de la courbe $y = f(x)$ est alors :

$$f(x) = \sum_{i=0}^3 y_i P_i(x) \quad (7.29)$$

Après résolution du système d'inconnues $P_i(x)$, on trouve l'expression suivante pour la fonction d'interpolation permettant de déterminer les points du maillage fin en fonction de ceux du maillage de base :

$$y_{i+\frac{1}{2}} = f(1,5) = -0,0625 \times (y_{i-1} + y_{i+2}) + 0,5625 \times (y_i + y_{i+1}) \quad (7.30)$$

Remarque 1 : dans toute notre étude, le rapport d'aspect entre deux niveaux successifs est fixé à deux dans chacune des directions. Si on souhaite modifier ce rapport, il faudra bien entendu changer en conséquence les polynômes de Lagrange employés.

Remarque 2 : comme les simulations utilisent une résolution explicite des équations, il est nécessaire de vérifier que la valeur du nombre de CFL (Courant-Friedrich-Levy) convectif reste inférieure à $\sqrt{3}$ pour stabiliser le calcul. La définition de ce nombre étant $CFL = \frac{\Delta t}{\Delta x} (|u_1| + c)$, il s'avère nécessaire de modifier le pas de temps de la simulation lorsqu'un nouveau niveau de résolution est créé. Ainsi, le pas de temps est divisé par deux afin de conserver un CFL convenable sur le niveau le plus fin lors de l'apparition d'un nouveau niveau de grille.

Chapitre 8

Application de la méthode

8.1 Couche de mélange en développement temporel

Le premier cas d'étude abordé concerne la couche de mélange compressible en développement temporel. Cette configuration est un cas classique d'écoulement purement instationnaire, siège d'instabilités donnant lieu à une grande variété de régimes spatio-temporels. Par ailleurs, les écoulements compressibles cisailés libres, dont fait partie la couche de mélange, se retrouvent dans de nombreux problèmes complexes. C'est par exemple le cas du sillage en aval d'une aile d'avion, où deux fluides ayant des vitesses différentes se rejoignent, donnant lieu à un écoulement turbulent indésirable étant source de traînée. On cherchera alors à réduire la turbulence. Dans d'autres situations, on peut vouloir tirer profit de la turbulence, comme par exemple pour assurer un mélange efficace entre un combustible et un oxydant dans les moteurs à propulsion. De ce fait, la compréhension des phénomènes qui entrent en jeu dans ce type d'écoulement représente un réel intérêt pour les industriels.

Dans les études expérimentales, la couche de mélange est obtenue à l'aide d'une lame qui permet de séparer deux fluides qui se déplacent à des vitesses différentes. À l'extrémité de cette lame, les deux fluides se rejoignent, entraînant le développement d'une couche de mélange. Lorsque l'on suit son évolution en aval de ce point de rencontre, la couche voit son épaisseur croître avec la coordonnée longitudinale. On parle alors d'un développement *spatial* de la couche de mélange.

La résolution numérique d'une couche de mélange en développement spatial est très coûteuse, car elle nécessite l'utilisation d'un domaine de calcul conséquent. Les simulations se limitent alors, la plupart du temps, à une approximation temporelle de l'écoulement réel. Elle permet de représenter les mêmes phénomènes physiques pour des coûts de calcul moins importants. Pour cela, on utilise une *fenêtre* de calcul que l'on prolonge par continuité dans la direction de l'écoulement. En se représentant un déplacement de la fenêtre dans cette direction, à la vitesse du fluide, on comprend qu'un suivi de l'évolution temporelle de la couche de mélange à l'intérieur de cette fenêtre permet de bien représenter la physique de l'écoulement réel et son évolution spatiale.

8.1.1 Physique de l'écoulement

Dans le cadre de la couche de mélange en développement temporel, les instabilités qui se développent sont absolues, c'est à dire qu'elles croissent au cours du temps en tout

point de l'écoulement, et non visqueuses puisque l'écoulement est instable même dans le cas d'un fluide parfait. Une étude théorique des instabilités présentes dans la couche de mélange a été menée par Ho et Huerre [56]. Par ailleurs, la longueur d'onde du mode le plus instable est donnée par l'analyse de stabilité linéaire de Michalke [92] et vaut (dans le cas d'un fluide parfait) $\lambda_a \sim 7\delta_0$, où δ_0 désigne l'épaisseur initiale de vorticité de la couche de mélange. Le fait d'avoir un nombre de Mach convectif inférieur à 0,6 montre que nos simulations sont menées dans un régime quasi-incompressible pour lequel l'instabilité la plus amplifiée est bidimensionnelle [126].

Classiquement, on distingue deux principales organisations qui coexistent dans un écoulement de couche de mélange. Tout d'abord, il s'agit de tourbillons cylindriques bidimensionnels alignés suivant l'envergure (z), appelés *tourbillons primaires*. Le deuxième type de structures cohérentes que l'on retrouve dans le cadre de la couche de mélange est un ensemble de tourbillons longitudinaux contrarotatifs appelés *tourbillons secondaires* et superposés aux tourbillons primaires qui les relie entre eux. Les structures primaires sont des instabilités de type Kelvin-Helmholtz, initiées par le cisaillement entre les deux flux. Le phénomène de production de cette instabilité, à tendance bidimensionnelle, est entretenu par un profil initial de vitesse qui présente un point d'inflexion. Ces structures correspondent au mode le plus instable et sont donc caractérisées par la longueur d'onde λ_a définie ci-dessus. Au cours de l'évolution de la couche de mélange, ces structures sont amenées à s'apparier avec les structures voisines. Ce sont donc ces structures qui sont responsables de l'épanouissement de la couche de mélange.

Une fois l'instabilité primaire développée, une seconde instabilité, tridimensionnelle, se développe également, produisant des filets longitudinaux de vorticité entre les rouleaux. Les premières visualisations des structures secondaires sont réalisées par Konrad [66] et Breidenthal [18]. L'instabilité à l'origine de ces tourbillons longitudinaux correspond à une ondulation des tourbillons primaires dans la direction transverse. Plus précisément, l'origine de cette vorticité longitudinale est localisée au niveau de la zone de stagnation (*braids* en anglais) située entre deux structures primaires. Ces tourbillons secondaires sont ensuite étirés par le champ de déformation crée entre les structures primaires. Ces filaments tourbillonnaires en épingle à cheveux (*hairpins* en anglais, également appelés *ribs* dans certaines références) ont une longueur d'onde caractéristique, dans la direction transverse, notée λ_t , qui est liée directement à la longueur d'onde des structures primaires dans la direction de l'écoulement. En effet, toujours en notant λ_a la longueur d'onde caractéristique des tourbillons de type Kelvin-Helmholtz, on montre que $\lambda_t = \frac{2}{3}\lambda_a$.

Enfin, certains travaux ont permis de mettre en évidence un mécanisme de transition vers la turbulence, appelé *appariement hélicoïdal*. Ce mécanisme traduit la réorganisation des tourbillons de Kelvin-Helmholtz en opposition de phase formant une topologie appelée *treillis* (*vortex lattice structure* en anglais) qui résulte de l'apparition d'ondes obliques dès le déclenchement de l'instabilité primaire. On parle également de tourbillons en λ Λ .

Cependant, il est important de noter que l'évolution des instabilités de la couche de mélange ainsi que la topologie de l'écoulement dépendent fortement des conditions initiales et des conditions limites, notamment sur les fluctuations de vitesse, que ce soit expérimentalement [70] ou en simulation numérique [22]. Après la période de développement, l'écoulement transite vers la turbulence ; on parle de transition de petites échelles (*small-scale transition*), ou transition de mélange (*mixing transition*). Cela se traduit expérimentalement par une brusque production de petites échelles, avec en particulier l'établissement

d'un spectre de Kolmogorov en $k^{-5/3}$. La couche de mélange atteint ainsi son régime auto-similaire, qui se traduit par une croissance linéaire de l'épaisseur de la couche de mélange et des vitesses moyennes, et des statistiques turbulentes indépendantes du temps, lorsque les longueurs et les vitesses sont adimensionnées par les échelles appropriées - épaisseur de quantité de mouvement pour les longueurs et vitesse à l'infini pour les vitesses. Dans ce régime autosimilaire, la topologie de l'écoulement dépend également des paramètres de la simulation ou de l'expérience, à savoir les conditions initiales, la taille du domaine de calcul, et les conditions imposées en terme de perturbations. Ainsi, Rogers et Moser [119] montrent que des perturbations initiales fortement bidimensionnelles aboutissent à un régime à peu près autosimilaire dans lequel on distingue des appariements de structures organisées, des régions d'étirement et des tourbillons longitudinaux. En revanche, si la perturbation est faiblement bidimensionnelle, on ne retrouve pas toute cette organisation et les statistiques turbulentes sont en meilleur accord avec les résultats expérimentaux.

8.1.2 Description de la simulation

La figure 8.1 décrit la configuration de calcul. On y distingue deux flux de vitesse opposés et de même amplitude U_∞ . Un paramètre important de ce type d'écoulement est le nombre de Mach convectif, dont le but est de déterminer les effets de compressibilité du fluide. Dans notre situation, le fluide est identique de part et d'autre de la zone de mélange. Dans ce cas, les chaleurs spécifiques sont identiques, et la définition du Mach convectif est la suivante :

$$M_c = \frac{U_1 - U_2}{c_1 + c_2} \quad (8.1)$$

U_1 et U_2 désignent les vitesses des deux courants parallèles, et c_1 et c_2 les vitesses du son dans chacun de ces fluides. Dans notre situation, les fluides étant identiques ($c_1 = c_2 = c_0$) et l'amplitude de la vitesse étant la même de part et d'autre ($U_1 = -U_2 = U_\infty$), le Mach convectif se résume au rapport $\frac{U_\infty}{c_0}$. Le nombre de Mach convectif retenu pour cette étude est $M_c = 0,2$, ce qui caractérise un comportement faiblement compressible de l'écoulement. Comme évoqué plus tôt, des conditions limites de périodicité sont imposées dans les directions longitudinale (x) et transverse (z). Dans la direction verticale (y), une condition de sortie s'appuyant sur les variables caractéristiques est employée.

Le champ initial, qui doit présenter un point d'inflexion, est régi par un profil de vitesse longitudinale en tangente hyperbolique :

$$u_1(y, t = 0) = U_\infty \tanh\left(\frac{2y}{\delta_0}\right) \quad (8.2)$$

On choisit de normaliser la vitesse à l'infini $U_\infty = 1$. Si on note N_{rol} le nombre de tourbillons de Kelvin-Helmholtz que l'on souhaite représenter en début de simulation, il va falloir fixer l'épaisseur initiale de vorticit   à la valeur $\delta_0 = (7N_{rol})^{-1}$; en effet, comme évoqué précédemment, la longueur d'onde du mode le plus instable est de l'ordre de sept fois la longueur initiale de vorticit  .

Les autres composantes du champ de vitesse sont initialement nulles, alors que la densit   initiale est uniforme $\rho(t = 0) = 1$. Le profil de temp  rature est choisi conform  ment à la loi de Busemann-Crocco :

$$T = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_c^2 (1 - u_1)^2 \quad (8.3)$$

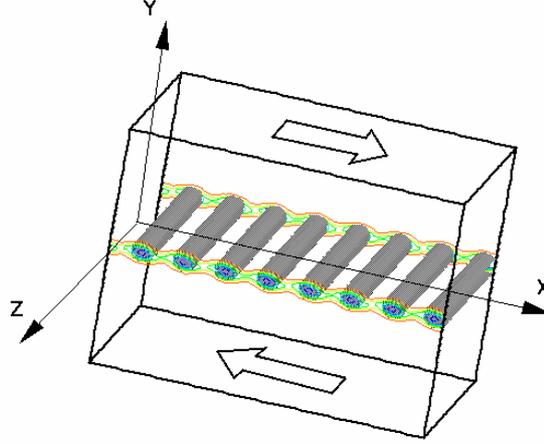


FIG. 8.1 – Couche de mélange : configuration de calcul.

A ces profils laminaires initiaux sont ajoutées des perturbations de faibles amplitudes dont le but est d'enclencher les instabilités qui sont à l'origine de la physique de la couche de mélange, c'est à dire le caractère tridimensionnel de l'écoulement et les appariements successifs entre les gros tourbillons. Pour cela, on va exciter certains nombres d'onde indiqués par l'analyse de stabilité, en fonction des phénomènes que l'on souhaite engendrer. Ainsi, on pourra n'utiliser que des perturbations bidimensionnelles, ou au contraire utiliser également les modes obliques, voire appliquer un bruit blanc au profil moyen pour s'assurer de la tridimensionnalité de l'écoulement. Afin de n'appliquer les perturbations qu'à la zone rotationnelle initiale, elles sont pondérées en espace par l'introduction d'une gaussienne :

$$f(y) = \exp\left(-0.5\left(\frac{y}{\delta_0}\right)^2\right) \quad (8.4)$$

Par la suite, les perturbations initiales bi- et tri-dimensionnelles seront considérées. Chacune d'elles correspond à un mode spécifique noté (α, β) , où α et β représentent respectivement les nombres d'ondes longitudinal et transverse associés à la perturbation. Les modes bi-dimensionnels considérés ici seront $(8, 0)$, $(4, 0)$, $(2, 0)$ et $(1, 0)$, le mode $(8, 0)$ étant le mode le plus instable et les modes $(4, 0)$, $(2, 0)$ et $(1, 0)$ ses harmoniques. Des modes obliques sont également utilisés afin d'introduire le caractère tridimensionnel de l'écoulement : $(8, 8)$, $(8, -8)$, $(4, 4)$, $(4, -4)$, $(2, 2)$, $(2, -2)$, $(1, 1)$ et $(1, -1)$. Les perturbations initiales prendront la forme $\epsilon \times f(y) \times \cos(\alpha x + \beta z + \phi)$ où ϵ désigne l'amplitude de ces perturbations fixée à $\epsilon = 5 \times 10^{-2}$ dans cette étude. Le déphasage ϕ est introduit afin de détruire la symétrie des perturbations initiales.

Dans les simulations effectuées, il a été choisi de faire apparaître initialement huit tourbillons, ce qui conduit à fixer $\delta_0 = 1/56$. Les tailles du domaine de calcul ont été déterminées en conséquence afin de ne pas avoir un effet de bord trop important sur les résultats. Ainsi les dimensions dans chacune des directions sont fixées à $L_x = 1$, $L_y = 40\delta_0$ et $L_z = \frac{2}{3}L_x$. Le maillage de base est uniforme dans les directions longitudinale et transverse. Dans la direction verticale, le maillage se compose d'une zone uniforme dans la

région $[-L_y/8; L_y/8]$ qui contient la moitié des points du maillage, alors que le maillage en dehors de cette zone connaît un relâchement en tangente hyperbolique au fur et à mesure que l'on s'éloigne de cette zone d'enroulement des tourbillons.

L'utilisation de huit tourbillons initiaux a pour principal objectif de réaliser une Simulation des Grandes Echelles sur un écoulement pleinement turbulent. En effet, Huang et Ho [60] ont montré que ce régime n'est atteint qu'après le second appariement, l'écoulement avant ce second appariement étant assez fortement influencé par les conditions initiales. Il faut donc permettre plus de deux appariements pour atteindre l'état pleinement turbulent. Ainsi, avec quatre tourbillons initiaux, on ne pourrait pas obtenir réellement toute la physique de la turbulence.

Dans cette étude, le nombre de Reynolds est choisi quasi-infini ($Re = 10^{10}$), c'est à dire que le cas abordé concerne la couche de mélange dans la limite non-visqueuse. Les motivations qui poussent à se placer dans cette situation sont multiples : tout d'abord, cela représente un cas particulièrement orienté vers la validation de l'approche Simulation des Grandes Echelles, à la fois car aucune simulation directe ne pourra s'appliquer sur une telle configuration, mais aussi car cet exemple va permettre de tester véritablement le fonctionnement de la modélisation sous-maille. En effet, aucune dissipation moléculaire n'est alors présente et le seul terme dissipatif provient du terme sous-maille. Enfin, le choix d'une valeur élevée pour le nombre de Reynolds permet de se placer dans une situation propice à l'établissement progressif d'un régime autosimilaire à la suite d'une transition à petite échelle [97]. L'autosimilarité doit alors être observée entre les deuxième et troisième appariements.

8.1.3 Calculs de référence

Afin de valider les calculs multi-grilles, deux premiers calculs de référence ont été réalisés. Les maillages correspondant à ces calculs sont monoblocs, l'un correspondant à la solution dite "grossière" et l'autre à la solution "fine". Ces deux maillages sont construits comme évoqué ci-dessus avec un pas constant dans la zone centrale du domaine de calcul et un relâchement du pas de discrétisation en s'éloignant de cette zone. Le nombre de cellules employées pour chacun de ces calculs est donné dans le tableau 8.1, où on constate que le rapport d'aspect entre ces deux maillages est de deux dans chacune des directions.

maillage	$N_x \times N_y \times N_z$	Nombre total de cellules
grossier	$60 \times 52 \times 30$	93600
fin	$120 \times 104 \times 60$	748800

TAB. 8.1 – Maillages fin et grossier

La figure 8.2 donne un aperçu des structures primaires obtenues avec chacune de ces grilles. Plus précisément, on trace ici un iso-contour du second invariant du tenseur des contraintes, noté Q :

$$Q = \frac{1}{2} (\Omega : \Omega - S : S) \quad (8.5)$$

où $\Omega = \frac{1}{2}(\nabla u - \nabla^T u)$. Le critère Q est ainsi couramment utilisé pour isoler les structures cohérentes contenues dans un écoulement turbulent [61].

Cette figure est obtenue quelques instants après la formation des structures primaires, et avant que le premier appariement n'intervienne. On distingue dans les deux cas les huit tourbillons initiaux. Cependant, sur la grille fine, on voit apparaître des structures longitudinales reliant les tourbillons de Kelvin-Helmholtz entre eux. On distingue ainsi les prémices de la structure en treillis, ce phénomène n'étant pas encore appaissant sur le maillage grossier. Pour des temps plus avancés, les tourbillons en lambda sont observables pour les deux simulations de référence (figure 8.3).

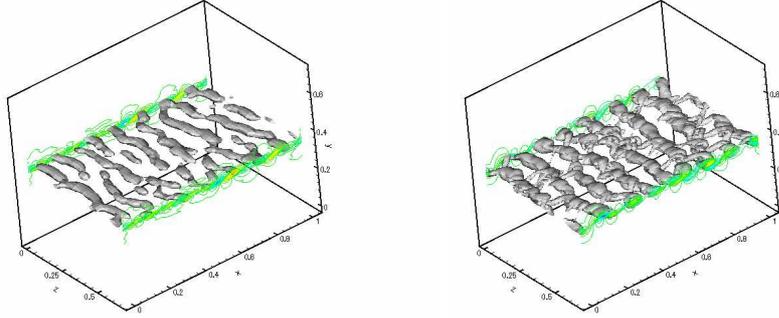


FIG. 8.2 – Visualisation de l'écoulement dans les premiers instants ($t=20$); représentation des iso-surfaces $Q = 50$ et isocontours de la composante transversale de la vorticité. **Gauche** : Maillage grossier ; **Droite** : Maillage fin.

Une quantité couramment employée afin de caractériser la couche de mélange et son évolution est l'épaisseur de quantité de mouvement. Celle-ci est déterminée en intégrant suivant la direction verticale la vitesse longitudinale moyennée par plan :

$$\delta_m(t) = \int_{-L_y/2}^{L_y/2} \left(\frac{1}{4} - \frac{\langle u_1 \rangle_{xz}^2(t)}{\Delta U^2} \right) dy \quad (8.6)$$

Une autre quantité est souvent utilisée : l'épaisseur de vorticité δ_ω . Cette épaisseur est donnée par :

$$\delta_\omega(t) = \frac{\Delta U}{\max \left| \frac{\partial u_1(t)}{\partial y} \right|} \quad (8.7)$$

Néanmoins, on pr f rera étudier δ_m , en particulier parce que cette quantité s'évalue à l'aide d'une intégrale et est par conséquent plus régulière que l'épaisseur de vorticité qui repose sur un terme dérivé.

La figure 8.4 décrit l'évolution de δ_m ainsi que celle de l'énergie cinétique de l'écoulement. En comparant les courbes obtenues sur chacune des grilles, on s'aperçoit que les résultats sont très proches jusqu'au temps $t \sim 60$ et qu'ensuite seulement les courbes divergent. Ainsi, les deux calculs permettent de bien représenter le régime transitoire qui s'étend de la formation des structures primaires ($t \sim 10$) au second appariement ($t \sim 60$) en passant par le premier appariement ($t \sim 20$). Lorsque le second appariement est atteint, la couche de mélange bascule dans un état pleinement turbulent qui se traduit par la présence de structures de taille réduite. Ce phénomène semble alors être difficile à capter sur la grille grossière pour laquelle l'épaisseur de quantité de mouvement croît plus

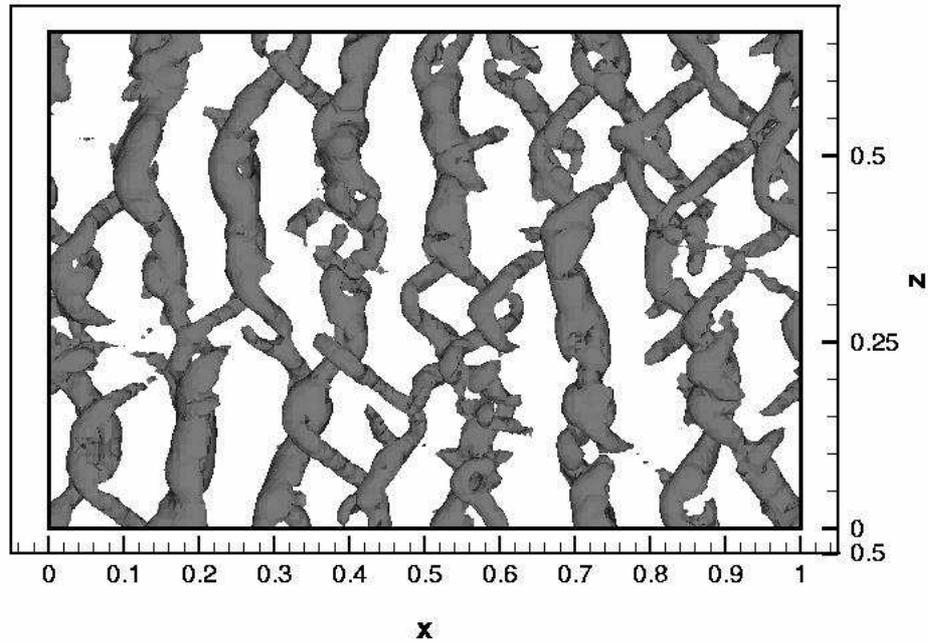
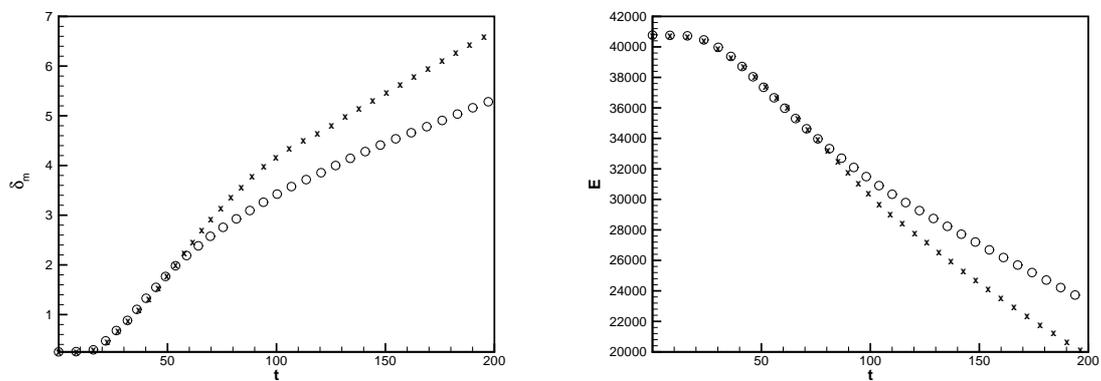


FIG. 8.3 – Structure en treillis observée, ici, sur le maillage fin.

FIG. 8.4 – **Gauche** : Evolution de l'épaisseur de quantité de mouvement ; **Droite** : Evolution de l'énergie cinétique totale. x : grille grossière ; o : grille fine.

rapidement et l'énergie décroît plus vite que pour le maillage fin de référence.

La figure 8.5 présente les profils de vitesse obtenus sur chacun des maillages, aux instants $t = 20, 60, 100$ et 140 . La colonne de gauche présente l'évolution de la vitesse longitudinale, alors que la colonne de droite s'intéresse aux profils des fluctuations de cette même vitesse longitudinale. Ces courbes sont obtenues en moyennant la vitesse longitudinale suivant les directions prolongées par continuité (x et z) :

$$\langle u_i \rangle = \langle u_i \rangle_{xz} \quad (8.8)$$

$$u'_{i\ RMS} = \sqrt{\langle (u_i - \langle u_i \rangle_{xz})^2 \rangle_{xz}} \quad (8.9)$$

Dans les premiers instants de la simulation, les résultats obtenus sur les deux grilles sont similaires. Ensuite, plus la couche de mélange est amenée à se développer, plus les différences se font sentir entre les deux simulations. On constate alors que la couche de mélange est plus étendue sur la grille grossière que sur la grille fine ($t \sim 100$ par exemple), ce que l'on pouvait déjà suggérer à l'aide des évolutions des épaisseurs de quantité de mouvement. Pour des instants plus avancés ($t \sim 140$), la différence est encore plus marquée. Cependant, on estime que les différents calculs sont difficilement exploitables dans des temps supérieurs à $t \sim 100$. En effet, un examen des champs instantanés obtenus pour des temps supérieurs à cette valeur montre que l'écoulement turbulent recouvre l'ensemble du domaine. Par conséquent, les conditions aux limites dans la direction (y) risquent alors d'avoir une influence non négligeable sur la solution. Par la suite, les exploitations de résultats se limiteront donc à des temps $t \leq 100$.

8.1.4 Validation du senseur

Afin de valider le critère de raffinement utilisé, les premiers calculs ont consisté à l'appliquer sur une configuration simplifiée de l'écoulement, à savoir la couche de mélange bidimensionnelle. Elle est obtenue en utilisant une perturbation initiale uniquement composée des modes bidimensionnels évoqués ci-dessus. Le fait de considérer la couche de mélange bidimensionnelle permet alors de comparer le critère de raffinement avec des considérations portant sur la physique des phénomènes observés. La figure 8.6 présente un exemple de configuration 2D étudiée. On distingue sur la figure de gauche, à l'aide du tracé d'isocontours de vorticité, deux structures tourbillonnaires bidimensionnelles de type Kelvin-Helmholtz, reliées entre elles par des structures filamenteuses. Lorsqu'on applique le senseur en ondelettes sur cet écoulement, on obtient des cellules à raffiner réparties comme indiqué sur la figure de droite. Il s'agit essentiellement de zones situées au niveau des structures filamenteuses et au niveau de leurs raccords avec les structures primaires. Ces tourbillons longitudinaux peuvent être caractérisés d'anisotropiques du fait de leur allongement dans la direction de l'écoulement. Le fait que le senseur préconise de raffiner au niveau de telles structures semble cohérent puisqu'on peut penser que leur anisotropie risque de les rendre délicates à modéliser à l'aide des modèles sous-maille classiques. Par ailleurs, Bockhorn *et al.* [15] décrivent ces structures allongées et situées entre les structures transverses comme étant les petites structures les plus actives de l'écoulement. En effet, ils montrent que le spectre d'énergie au niveau de ces zones présente une quantité importante de petites échelles, ce qui traduit la présence de petites structures fortement énergétiques et donc fortement actives dans ces zones.

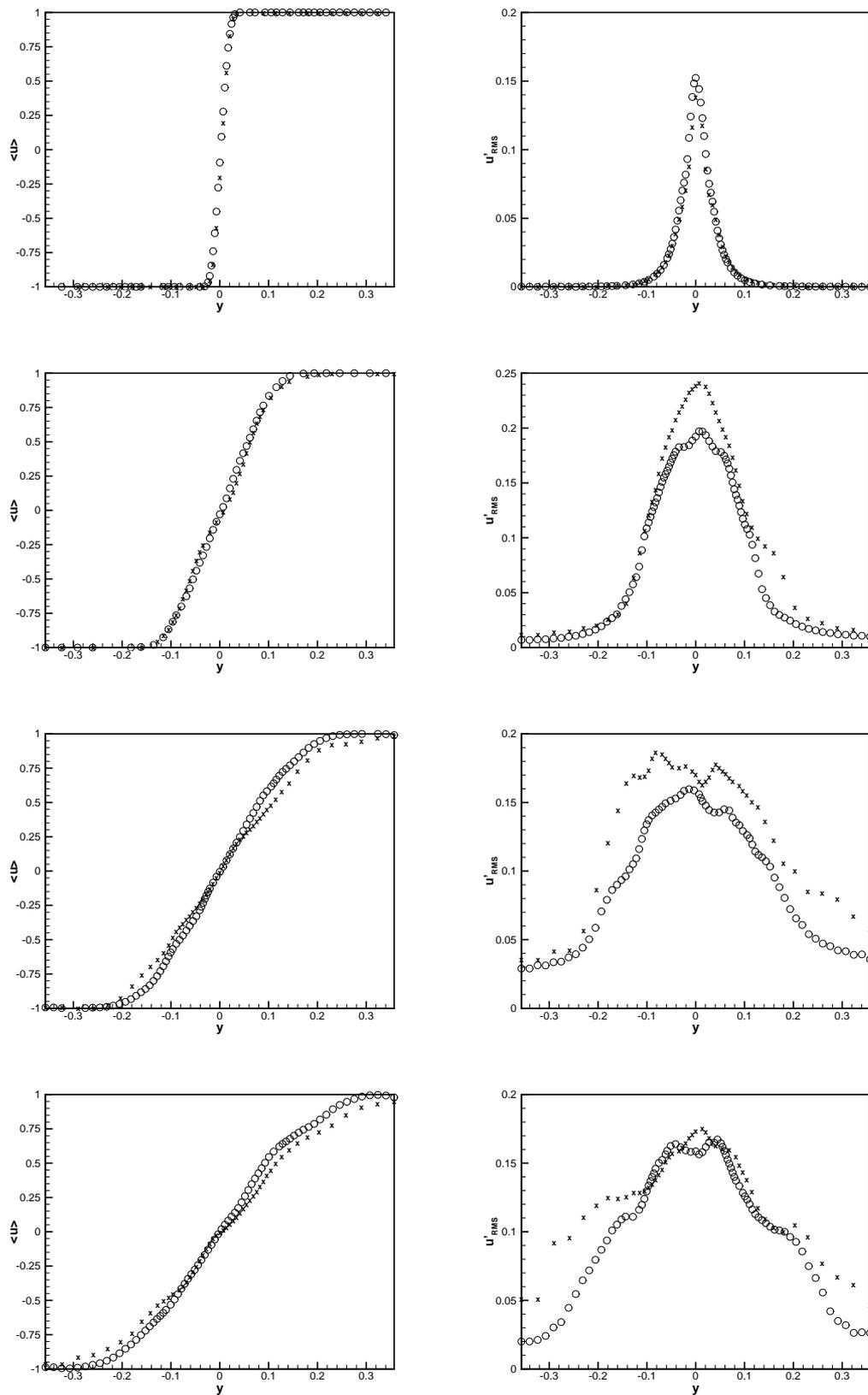


FIG. 8.5 – **Gauche** : Profils de vitesse longitudinale ; **Droite** : Profils de fluctuations de vitesse longitudinale ; de haut en bas : $t = 20, 60, 100, 140$. x : grille grossière ; o : grille fine.

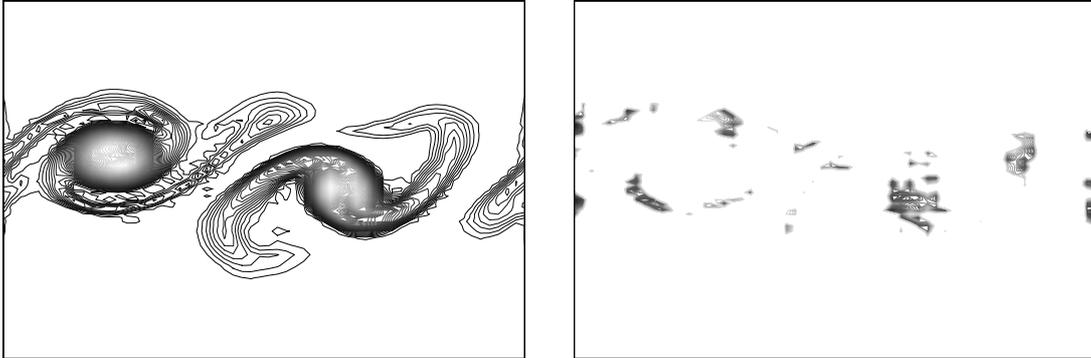


FIG. 8.6 – **Gauche** : iso-contours de vorticité ; **Droite** : iso-valeurs du critère de raffinement $\alpha < \alpha_0$; .

Dans le cas tridimensionnel et pleinement turbulent, il est plus délicat d'extraire des informations concernant la physique de l'écoulement en se basant sur une visualisation du champ instantané. Il est ainsi difficilement envisageable de comparer réellement le critère de raffinement et l'organisation des structures présentes dans l'écoulement. Cependant, on vérifie que dans le régime transitoire, les zones à raffiner sont situées dans la zone de mélange qui ne couvre pas encore l'ensemble du domaine de calcul. Plus tard, les cellules à raffiner sont réparties sur l'ensemble du domaine mais l'écoulement n'est alors plus physique comme mentionné plus haut. La figure 8.7 donne un exemple de remaillage obtenu dans le cas d'un écoulement de couche de mélange pleinement turbulent. Il est effectivement difficilement envisageable de comparer ce remaillage à des considérations physiques. Cependant, les prochains paragraphes vont montrer que les simulations utilisant la méthode d'adaptation de maillage présentent un gain non négligeable de précision par rapport au calcul grossier. Ceci tenderait donc à confirmer la cohérence du critère de raffinement.

8.1.5 Adaptation de maillage

Le critère de raffinement semblant en accord avec la physique de l'écoulement, il reste maintenant à valider la stratégie de raffinement dans son ensemble. Pour cela, on applique la procédure de raffinement automatique à intervalles réguliers et on visualise les résultats obtenus en s'intéressant, en particulier, à l'influence éventuelle des paramètres propres à la méthode adoptée.

Une remarque importante concerne la façon dont est évaluée la qualité de la solution multigrille. En effet, comme la méthode d'adaptation se veut automatique et optimale, rien ne permet de prévoir quelle portion du domaine grossier va être concernée par le raffinement. Hors la plupart des grandeurs qui sont étudiées pour la couche de mélange, dans le but d'évaluer la précision de la solution, s'appuie sur des moyennes portant sur l'ensemble du domaine dans les directions homogènes de l'écoulement. Dans le calcul multigrille, il est donc nécessaire d'évaluer les variables caractéristiques de ce type d'écoulement en se

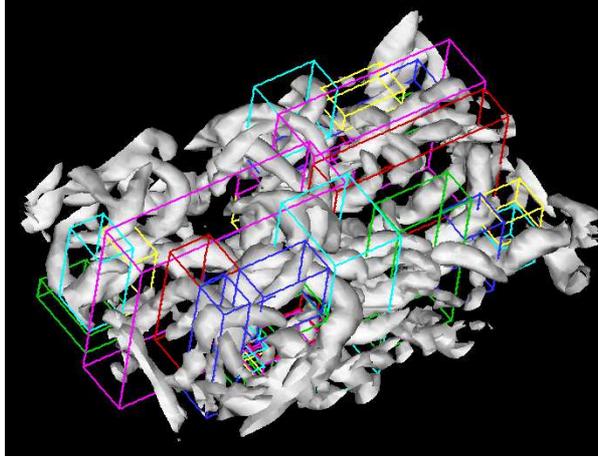


FIG. 8.7 – Exemple de remaillage obtenu pour la couche de mélange pleinement turbulente : iso-contour du critère Q en gris et maillages de niveau fin créés.

basant sur des informations issues du maillage de base. Celui-ci couvrant la totalité du domaine de calcul, il est effectivement possible de comparer les résultats avec les calculs de référence.

Influence de la constante d'enrichissement

Une partie de ces résultats a fait l'objet d'une publication [75] reportée en annexe (annexe E). Il y est, entre autres, discuté de l'influence de la valeur choisie pour la constante d'enrichissement au niveau des interfaces fin/grossier. La valeur permettant d'atteindre la solution la plus proche de la solution fine de référence est ainsi fixée dynamiquement pour chaque cellule à :

$$C = \begin{cases} 0,95 & \text{si l'écoulement va du domaine fin vers le domaine grossier,} \\ 0 & \text{si le fluide entre dans le domaine fin.} \end{cases} \quad (8.10)$$

Par ailleurs, deux modèles sous-maille ont été testés : hormis le modèle d'échelle mixte sélectif qui a été choisi dans cette thèse, le modèle de Smagorinsky a en effet été appliqué pour étudier l'influence du modèle sous-maille sur des calculs multi-niveaux. Pour chacun de ces modèles, l'adaptation de maillage permet de trouver une solution proche de la solution fine. On retrouve ainsi une bonne représentation de la transition vers la turbulence, avec cependant une différence non négligeable avec le modèle de Smagorinsky entre le calcul fin et le calcul avec raffinement. Cette différence provient probablement du caractère sur-dissipatif du modèle de Smagorinsky. En effet, les études antérieures avec ce modèle ont généralement montré un retard au niveau de la transition [146], sans doute du fait d'une trop grande atténuation des perturbations initiales. Ceci n'est donc pas directement lié à la stratégie de raffinement adoptée. Par ailleurs, la simulation multi-niveaux permet également l'obtention du régime autosimilaire et une bonne prévision de la zone inertielle du spectre dans le régime turbulent. On observe cependant, une nouvelle fois, un meilleur rendu du caractère autosimilaire pour les simulation réalisées à l'aide du modèle d'échelle mixte sélectif. Les profils de fluctuations obtenus avec le modèle de Smagorinsky présentent en effet de légères divergences sur les bords, ce qui pourrait indiquer que l'influence des frontières se fait d'avantage ressentir avec ce modèle pour lequel

l'établissement du régime autosimilaire est plus tardif.

Les figures 8.8 à 8.13 donnent un aperçu des profils des variables de l'écoulement qui n'ont pas été mentionnées dans l'article, que ce soit pour le modèle d'échelle mixte sélectif ou le modèle de Smagorinsky. On retrouve tout d'abord les variables p (figure 8.8) et ρ (figure 8.9). Le calcul multigrille présente une légère altération pour ces deux variables en comparaison des deux calculs de référence. Celle-ci intervient essentiellement au niveau des limites du domaine de calcul. Il est difficile de donner une explication à ce phénomène, qui avait déjà été observé par Quéméré dans son étude du canal plan par couplage RANS/LES [115]. Comme dans l'étude de Quéméré, l'erreur par rapport aux calculs de référence étant de l'ordre de 0,1%, elle n'est pas considérée comme suffisamment significative pour remettre en cause la stratégie de raffinement. Par ailleurs, un gain non négligeable de précision est obtenu pour le calcul multigrille avec le modèle de Smagorinsky par rapport au calcul grossier, au niveau de la zone centrale de la couche.

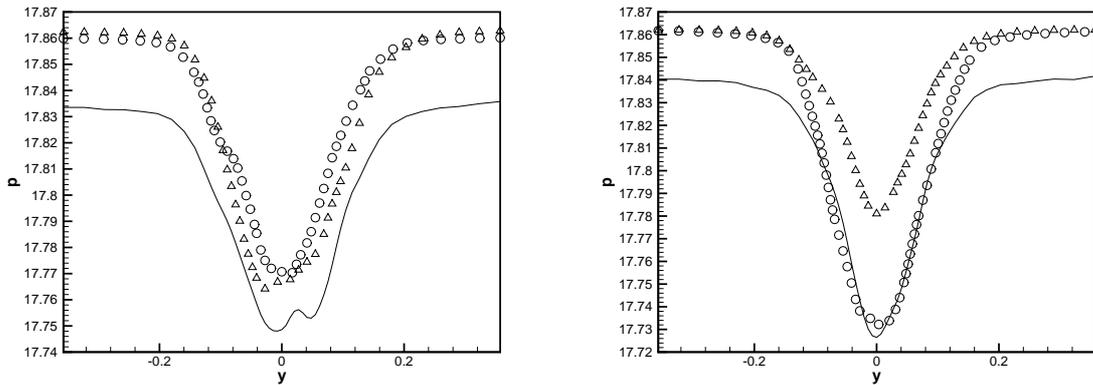


FIG. 8.8 – Profils de pression moyenne à $t = 60$ pour les calculs fin (\circ), grossier (Δ) et adapté ($—$); **Gauche** : modèle d'échelle mixte ; **Droite** : modèle de Smagorinsky.

Au niveau des profils de fluctuations (figures 8.10 et 8.11), un bon accord est obtenu avec l'approche multi-domaines par rapport aux calculs de référence. On notera cependant une légère sous-estimation des fluctuations dans la direction verticale au niveau de la zone centrale de l'écoulement dans le cas du modèle d'échelle mixte (figure 8.10). Pour les calculs avec le modèle de Smagorinsky, un gain intéressant est obtenu au niveau des fluctuations de vitesse avec le calcul multi-niveaux. Il est également intéressant de noter la grande similitude existant entre les solutions fines de référence obtenues avec chacun des modèles.

La figure 8.12 décrit, pour sa part, la répartition spatiale des termes croisés du tenseur de Reynolds. Un très bon accord est constaté entre le calcul fin de référence et le calcul avec adaptation de maillage. On notera cependant que les valeurs du pic de fluctuations obtenues avec le modèle de Smagorinsky sont très proches pour les trois simulations. La valeur de ce pic est, par ailleurs, légèrement supérieure à celle obtenue avec le modèle d'échelle mixte et le maillage fin.

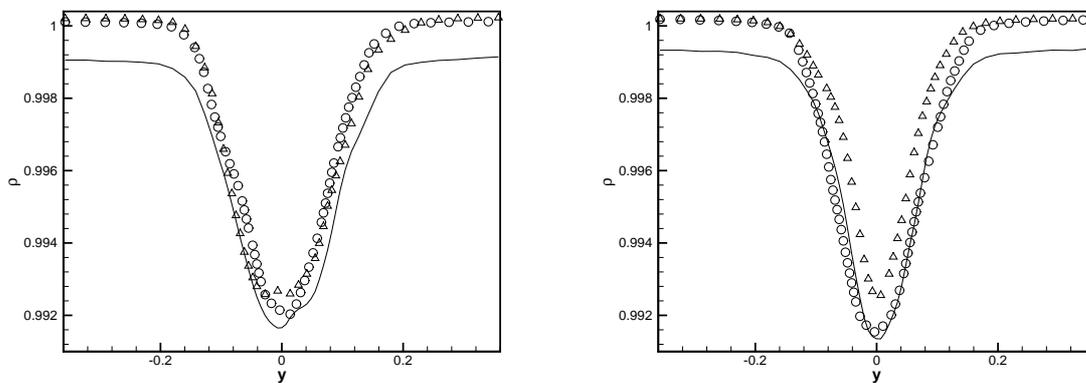


FIG. 8.9 – Profils de masse volumique à $t = 60$ pour les calculs fin (\circ), grossier (Δ) et adapté ($—$); **Gauche** : modèle d'échelle mixte; **Droite** : modèle de Smagorinsky.

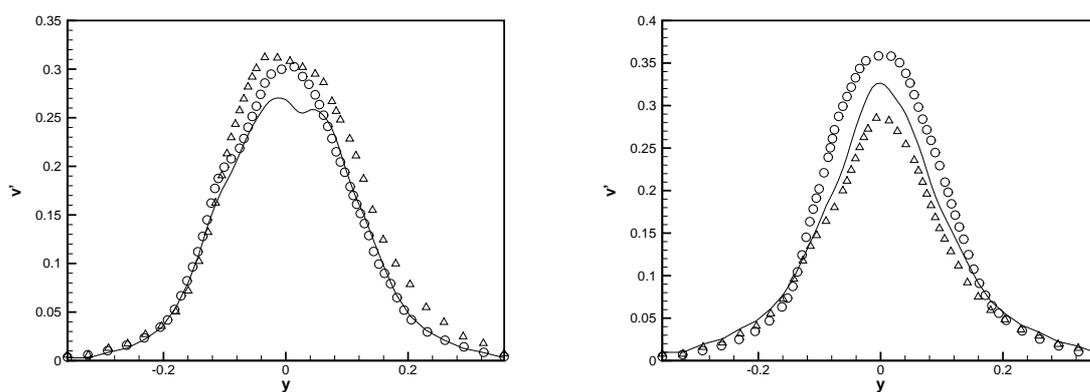


FIG. 8.10 – Fluctuations de vitesse verticale à $t = 60$ pour les calculs fin (\circ), grossier (Δ) et adapté ($—$); **Gauche** : modèle d'échelle mixte; **Droite** : modèle de Smagorinsky.

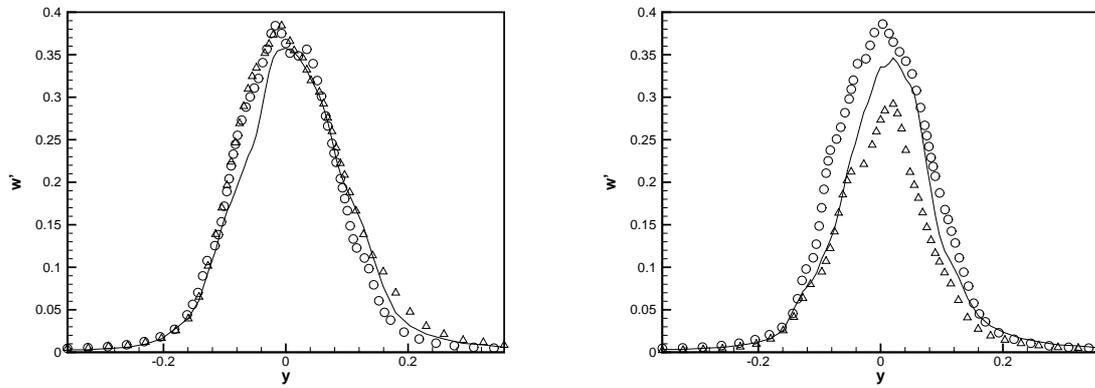


FIG. 8.11 – Fluctuations de vitesse transversale à $t = 60$ pour les calculs fin (\circ), grossier (Δ) et adapté ($—$); **Gauche** : modèle d'échelle mixte; **Droite** : modèle de Smagorinsky.

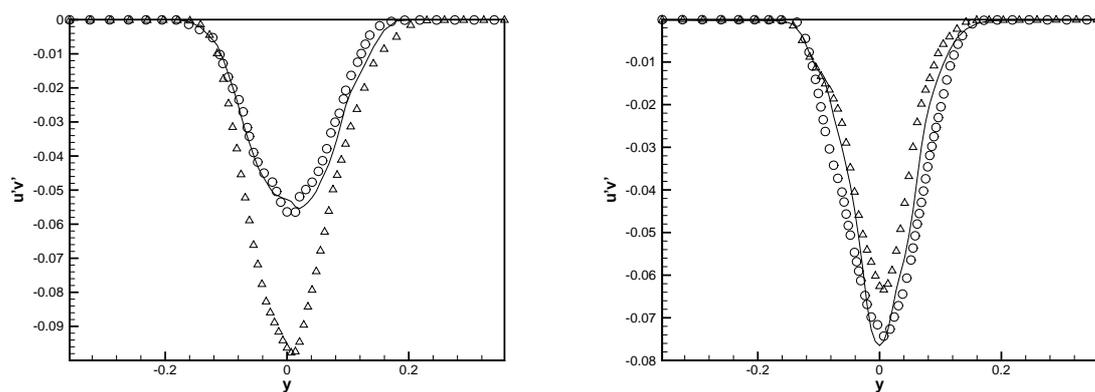


FIG. 8.12 – Profils des termes croisés du tenseur des tensions de Reynolds $u'v'$ à $t = 60$ pour les calculs fin (\circ), grossier (Δ) et adapté ($—$); **Gauche** : modèle d'échelle mixte; **Droite** : modèle de Smagorinsky.

Enfin, les profils de viscosité turbulente (figure 8.13), adimensionnée par la viscosité moléculaire μ_t/μ , sont reportés sur les dernières images. Il ressort que la viscosité sous-maille est plus importante dans le cas multi-niveaux. En se rappelant que ces profils sont évalués sur le maillage grossier dans le cas multi-niveaux, il est compréhensible que la viscosité y soit plus importante. En effet, l'utilisation de niveaux fins entraîne l'apparition de d'avantage de petites échelles au niveau de la zone de recouvrement, ce qui nécessite une viscosité sous-maille plus importante sur la grille grossière pour en tenir compte. Cependant, dans l'étude avec le modèle de Smagorinsky, la différence est moins marquée entre le domaine grossier et le calcul multi-niveaux. Ceci tenderait à confirmer le caractère sur-dissipatif du modèle de Smagorinsky sur le maillage grossier au niveau de la zone d'enroulement de la couche de mélange.

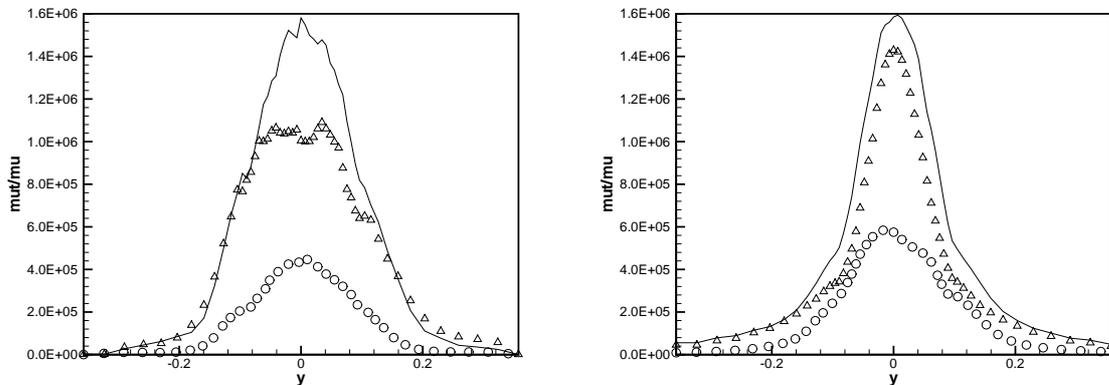


FIG. 8.13 – Profils de viscosité turbulente, adimensionnée par la viscosité moléculaire, à $t = 60$ pour les calculs fin (\circ), grossier (Δ) et adapté ($—$); **Gauche** : modèle d'échelle mixte; **Droite** : modèle de Smagorinsky.

En plus de la valeur attribuée à la constante d'enrichissement, d'autres paramètres peuvent avoir une influence non négligeable sur la solution. Il s'agit, en particulier, de la fréquence à laquelle on applique la stratégie de raffinement, des variables enrichies au niveau des interfaces et du taux de remplissage de la méthode de grouping/clustering qui permet de créer un nombre plus ou moins important de domaines de niveau fin. Afin d'étudier l'impact de ces différents facteurs sur la solution obtenue à partir de maillages adaptatifs, plusieurs séries de simulations ont été réalisées. Chacune de ces séries concerne un des paramètres pouvant avoir une influence sur la stratégie d'adaptation en LES, à commencer par le choix effectué pour les variables à enrichir aux interfaces entre deux niveaux successifs.

Influence des variables choisies pour l'enrichissement

En effet, une fois la valeur de la constante choisie, plusieurs jeux de variables ont été testés pour évaluer l'influence du choix des variables sur lesquelles l'enrichissement aux frontières est appliqué. Il a ainsi été envisagé d'enrichir soit les variables conservatives, soit les variables de Favre ou encore uniquement les trois composantes du vecteur vitesse. Bien que les résultats de ces différentes simulations soient assez proches, il apparaît que

les calculs les plus précis sont basés sur un enrichissement des variables de Favre. Cette approche étant par ailleurs la plus consistante avec le filtrage utilisé pour l'obtention des équations de la LES, elle a été retenue dans la suite de cette étude. Il est cependant intéressant de noter que les conclusions quant à la précision de la solution en fonction du choix des variables à enrichir semblent dépendre de la valeur attribuée à la constante d'enrichissement.

Influence de la fréquence de maillage

L'utilisation d'une méthode itérative dans le but de modifier le maillage en fonction des phénomènes rencontrés nécessite une attention toute particulière vis à vis du choix effectué pour la fréquence de régénération des grilles fines. En effet, dans un souci de précision, il semble intéressant de modifier la position de ces grilles le plus souvent possible afin de suivre l'évolution des structures présentes dans l'écoulement. Cependant, outre les erreurs engendrées par un recours important aux opérateurs de transfert intergrilles, il faut s'attendre à voir apparaître de nouvelles sources d'erreurs propres à la Simulation des Grandes Echelles dans un tel contexte : les erreurs de commutation. Comme évoqué dans la première partie de ces travaux, des variations trop fréquentes du pas local de discrétisation risquent effectivement d'engendrer des erreurs de commutation non négligeables. Ainsi, toute la difficulté est de trouver un bon compromis quant au choix de la fréquence de maillage qui permette de limiter ces erreurs numériques tout en conservant un bon suivi de l'écoulement par la stratégie de raffinement.

Dans le cas de la couche de mélange, plusieurs fréquences ont été testées afin de vérifier l'impact de ce paramètre sur la solution. Le tableau 8.2 décrit les différents tests effectués dans cette étude et caractérisés par la période à laquelle la méthode de raffinement est utilisée, adimensionnée par le temps initial de retournement des grosses structures de l'écoulement. Ainsi, la simulation IT35 permet d'adapter à trois reprises environ le maillage pendant un temps de retournement des grosses structures, alors que la simulation IT280 revient à n'utiliser la méthode d'adaptation que tous les 2,5 temps de retournement des gros tourbillons.

simulation	nombre d'itérations entre deux raffinements	période correspondante
IT35	35	$0,3125 \times T_{L_0}$
IT70	70	$0,625 \times T_{L_0}$
IT140	140	$1,25 \times T_{L_0}$
IT280	280	$2,5 \times T_{L_0}$

TAB. 8.2 – Fréquences de raffinement utilisées dans les simulations de couche de mélange ; T_{L_0} désigne le temps de retournement initial des grosses structures.

Afin de limiter les erreurs dues à l'opérateur de projection, toutes les simulations sont réalisées en procédant de manière synchronisée au premier raffinement. Celui-ci intervenant tôt dans le calcul, les perturbations initiales jouent encore un rôle important et la projection sur le niveau fin va alors varier assez fortement entre deux itérations. Les fréquences utilisées sont repertoriées dans le tableau 8.2. Les premières observations (figure

8.14) permettent d'affirmer que l'influence de la fréquence de remaillage sur la solution est faible.

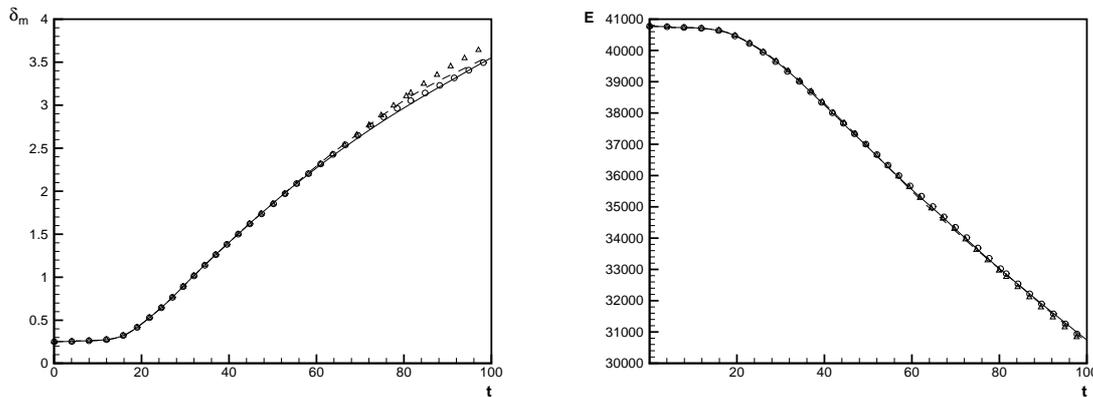


FIG. 8.14 – Influence de la fréquence de remaillage : évolution de l'épaisseur de quantité de mouvement et de l'énergie pour les simulations IT35 (— —), IT70 (Δ), IT140 (—) et IT280 (\circ).

Cette tendance est confirmée par les profils de statistiques turbulentes (figures 8.15 à 8.18). Les courbes obtenues pour les différentes fréquences de remaillage sont, en effet, quasiment confondues à $t = 50$. Dans un régime plus turbulent ($t = 80$), l'influence de la fréquence de régénération des grilles fines se fait d'avantage ressentir. La différence la plus marquante intervient au niveau des termes croisés du tenseur de Reynolds $u_1 u_2$ (figure 8.18) puisque la valeur du pic au centre de la couche pour la simulation IT70 est inférieure à celles obtenues avec les autres calculs. Ce même calcul semble par ailleurs surestimer les fluctuations dans les directions longitudinale et verticale au detriment de la troisième composante, dans la direction transverse. Ces légers écarts pour des instants avancés se font également ressentir sur l'évolution de l'épaisseur de quantité de mouvement (figure 8.14). Les écarts relevés restent cependant faibles et sont sûrement dus en grande partie aux approximations numériques engendrées par les opérateurs inter-grilles. De plus, au niveau des profils moyens de densité et de pression (figure 8.17), la fréquence de remaillage a une influence négligeable sur les profils obtenus. Les seules erreurs apparaissent au niveau des frontières du domaine de calcul lorsque le régime est turbulent et donc lorsque le raffinement s'étend à l'ensemble du domaine de base. Les écarts constatés peuvent de nouveau provenir des opérateurs inter-grilles dont l'erreur d'interpolation est d'autant plus importante que la taille des cellules du maillage est grande, comme c'est le cas dans ces zones situées près des limites du domaine de calcul.

En conclusion, même si pour des fréquences de remaillage rapides quelques modifications des profils de fluctuations apparaissent, la dynamique générale de la couche de mélange n'est pas altérée de manière significative par une modification de la période de régénération des niveaux fins.

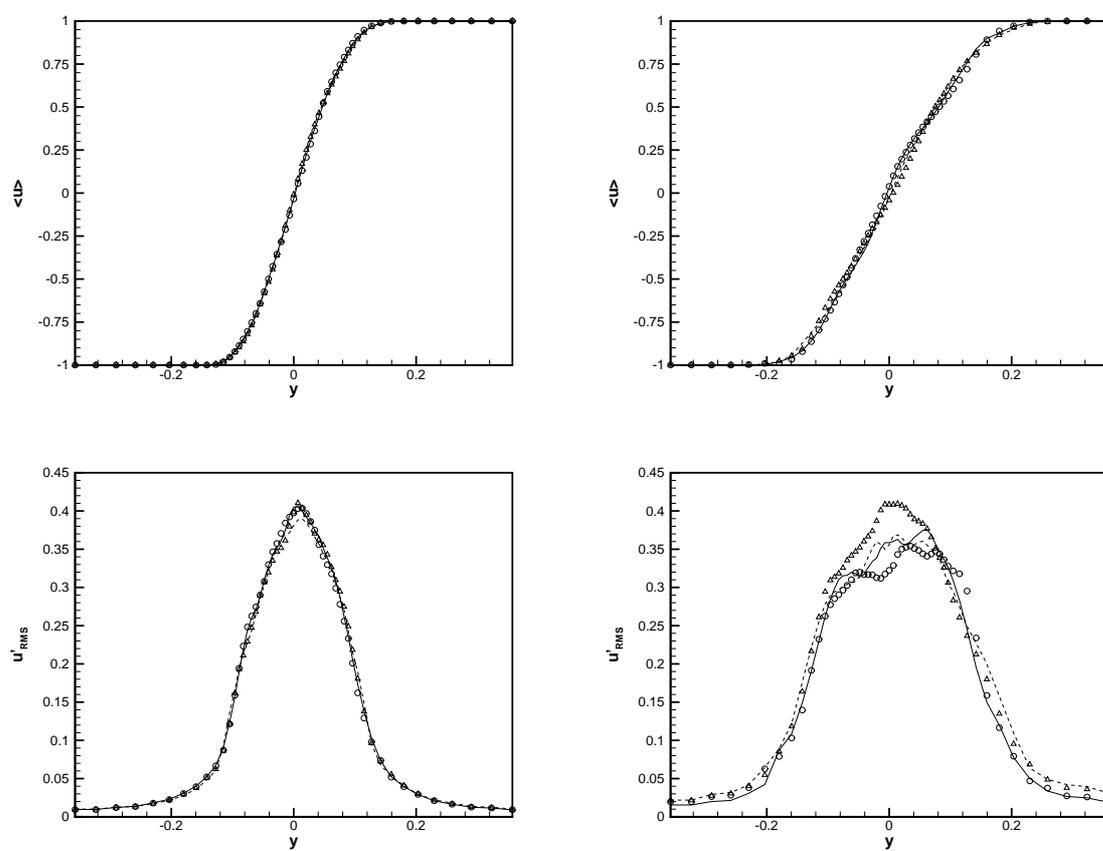


FIG. 8.15 – Influence de la fréquence de remaillage : profils moyens et fluctuations de la vitesse longitudinale à $t = 50$ (**gauche**) et $t = 80$ (**droite**), pour les simulations IT35 (—), IT70 (Δ), IT140 (—) et IT280 (\circ).

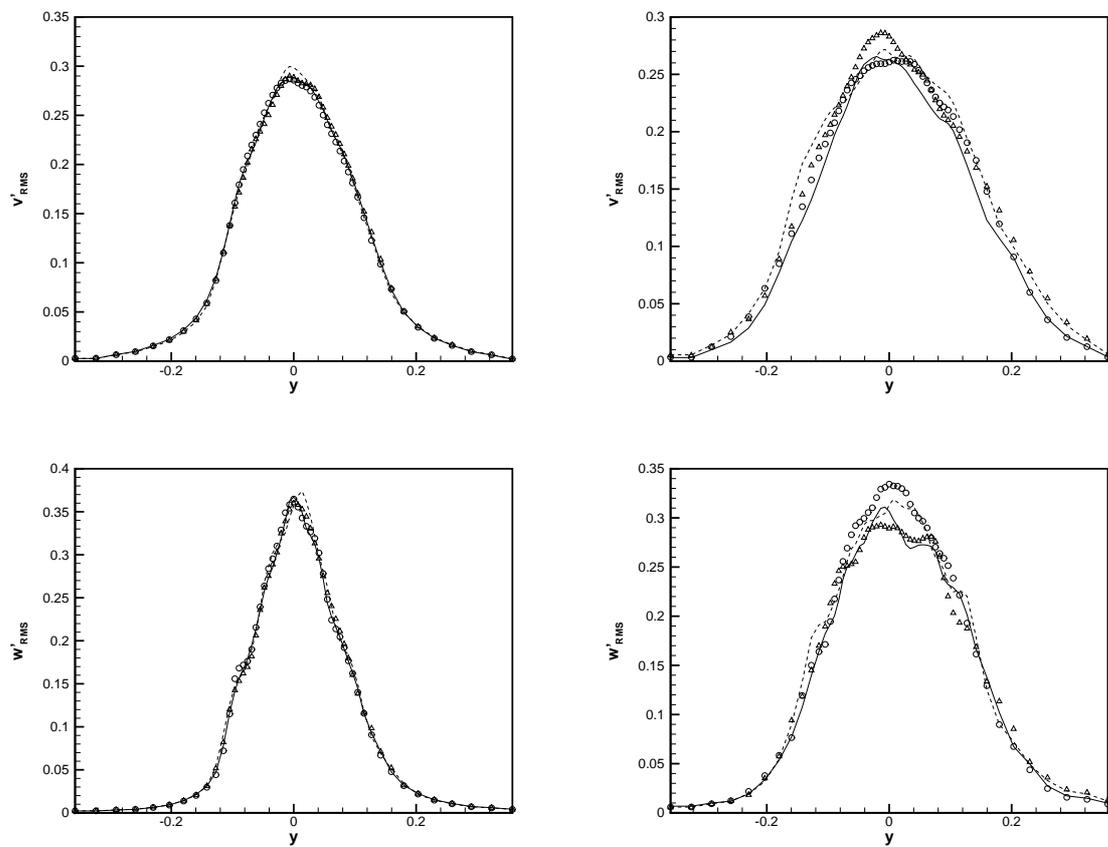


FIG. 8.16 – Influence de la fréquence de remaillage : fluctuations des vitesses verticale et transverse à $t = 50$ (**gauche**) et $t = 80$ (**droite**), pour les simulations IT35 (– –), IT70 (Δ), IT140 (—) et IT280 (\circ).

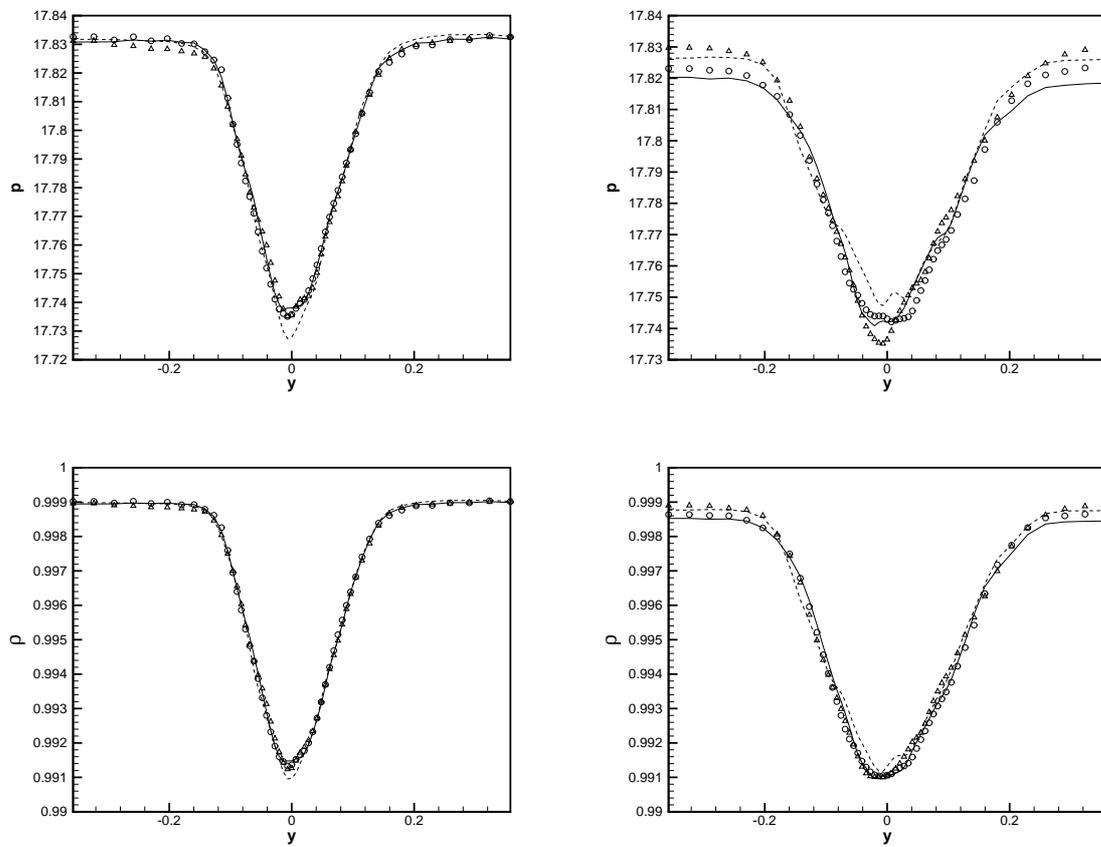


FIG. 8.17 – Influence de la fréquence de remaillage : profils de pression moyenne et densité à $t = 50$ (**gauche**) et $t = 80$ (**droite**), pour les simulations IT35 (— —), IT70 (Δ), IT140 (—) et IT280 (\circ).

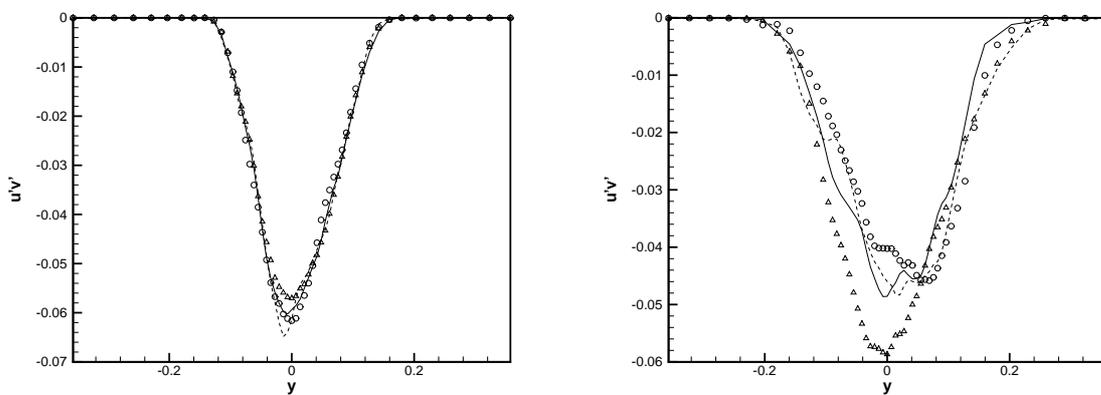


FIG. 8.18 – Influence de la fréquence de remaillage : terme croisé du tenseur de Reynolds $u'_1 u'_2$ à $t = 50$ (**gauche**) et $t = 80$ (**droite**), pour les simulations IT35 (— —), IT70 (Δ), IT140 (—) et IT280 (\circ).

Influence du taux de remplissage des sous-domaines

La méthode utilisée pour regrouper les cellules à raffiner en sous-domaines de niveaux fins a pour ambition d'optimiser les calculs et éviter ainsi d'augmenter inutilement les ressources nécessaires en terme de mémoire. Cependant, cela s'accompagne nécessairement d'une augmentation du nombre de domaines de niveaux fins. Or ceci a pour conséquence de rendre plus complexe le traitement du couplage entre l'ensemble des domaines de différents niveaux.

Cependant, en ajoutant quelques fonctionnalités à la procédure de raffinement, des résultats intéressants ont été obtenus, à la fois aussi précis et moins coûteux que les calculs initiaux s'appuyant sur un seul domaine raffiné ($\lambda = 0$). En particulier, un gain non négligeable a été obtenu en ajoutant des conditions de raccord conforme entre deux domaines fins voisins. En effet, après avoir constaté que des erreurs non négligeables apparaissent dès lors qu'un nombre important de domaines fins est créé, il a été envisagé "d'écraser" les conditions classiques de traitement par enrichissement au niveau des frontières des domaines fins lorsque la situation le permet. Auparavant, les conditions aux limites (hors des frontières physiques du domaine de calcul) étaient uniquement traitées par enrichissement de la solution grossière au niveau des cellules fictives du maillage fin. Bien entendu, cette méthode est une approximation qui n'est pas sans introduire des erreurs dans la prédiction des petites échelles de l'écoulement.

Les simulations effectuées en ajoutant des raccords entre des domaines fins voisins ont montré un gain conséquent en précision par rapport aux premiers calculs réalisés uniquement à l'aide d'un enrichissement aux frontières des domaines fins. Les résultats sont alors très proches de ceux obtenus en ne créant qu'un seul domaine fin à chaque nouveau raffinement (*i. e.* $\lambda = 0$). L'évolution des grandeurs moyennes de l'écoulement (figure 8.19) ainsi que la répartition spectrale de l'énergie (figure 8.20) semblent effectivement faiblement influencées par la valeur attribuée au taux de remplissage λ . Cependant, quelques différences apparaissent lorsque l'écoulement atteint le régime turbulent et qu'il couvre l'ensemble du domaine de base. Ceci peut avoir plusieurs explications : tout d'abord la taille des mailles près des extrémités du domaine de calcul dans la direction (y) peut entraîner des erreurs d'interpolation importantes au niveau des opérateurs intergrilles et des conditions de raccord fin/grossier. De plus, dans des instants si avancés, il est possible que l'influence de la condition limite suivant la direction verticale ne soit plus négligeable. Le fait d'utiliser d'avantage de domaines fins va également se traduire par des variations plus importantes au niveau de la résolution locale de l'écoulement aux interfaces fin/grossier. Il est ainsi possible d'envisager l'émergence d'erreurs de type erreur de commutation au niveau de ces interfaces, erreurs qui se feraient d'avantage ressentir du fait de variations locales importantes du pas de discrétisation. Néanmoins, il est évident que l'utilisation de la méthode de raffinement sur un écoulement pleinement turbulent couvrant l'ensemble du domaine de calcul n'est pas le but recherché. Dans une telle situation, il semble de toutes façons inadapté de recourir à un nombre conséquent de domaines fins qui n'apporterait pas un gain conséquent en terme de ressources nécessaires au calcul mais serait d'avantage source d'erreurs numériques supplémentaires.

Au final, la valeur attribuée au taux de remplissage λ pour l'algorithme de grouping/clustering ne semble donc pas avoir une grande influence sur la solution. Ce paramètre permet essentiellement d'adapter la stratégie en fonction des exigences de l'utilisateur et des moyens informatiques à disposition.

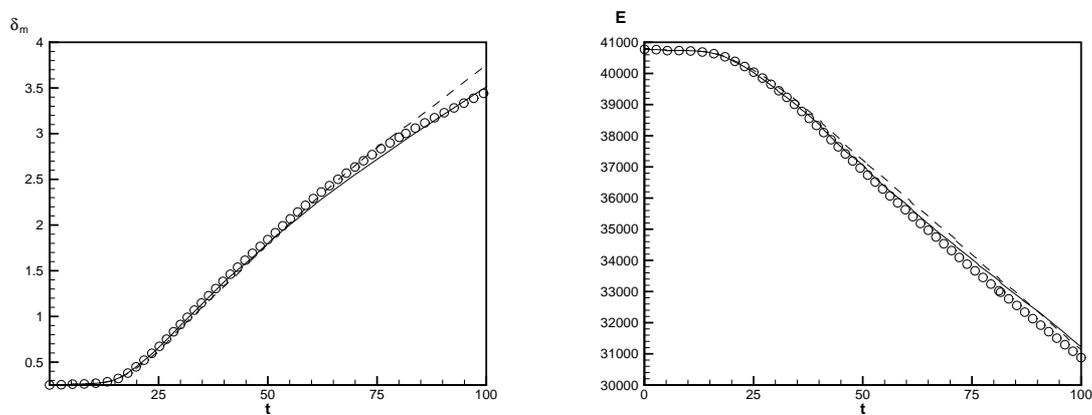


FIG. 8.19 – Influence du taux de remplissage des sous-domaines sur la solution : évolution de l'épaisseur de quantité de mouvement et de l'énergie cinétique. \circ : $\lambda = 0$, $—$: $\lambda = 0.3$ et $- -$: $\lambda = 0.5$.

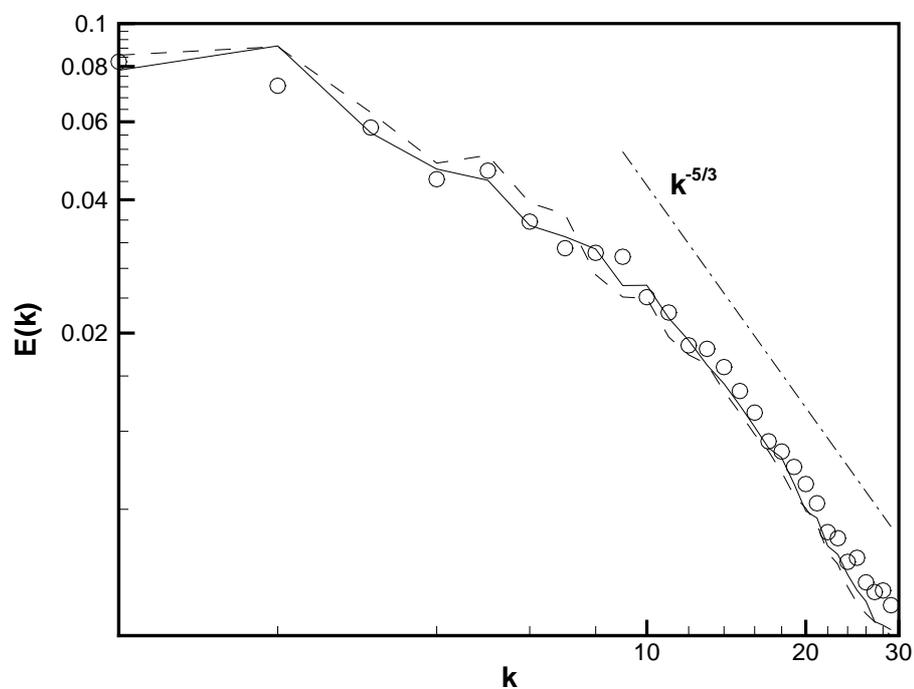


FIG. 8.20 – Influence du taux de remplissage sur le spectre d'énergie à $t = 60$. \circ : $\lambda = 0$, $—$: $\lambda = 0.3$ et $- -$: $\lambda = 0.5$.

Utilisation de plusieurs niveaux de raffinement

Les paragraphes précédents ont montré la capacité de la méthode d'adaptation à modifier la précision locale de la solution dans l'optique d'un recours à la Simulation des Grandes Echelles. Dans le but d'optimiser d'avantage les calculs, il est ensuite envisagé d'utiliser plusieurs niveaux de raffinement, ce qui permettrait de partir d'un maillage de base encore plus grossier et ainsi de diminuer de manière conséquente les coûts de calcul. Afin de tester l'aptitude de la stratégie de raffinement à créer de manière dynamique plusieurs niveaux de grilles, un maillage dit "très grossier" a été créé pour étudier la couche de mélange en développement temporel. Ce maillage comporte environ 10^4 points ($30 \times 24 \times 15$) soit quatre fois moins que le maillage fin de référence ($120 \times 96 \times 60 \sim 7 \times 10^5$ points) dans chacune des directions.

Dans cette partie de l'étude, les perturbations initiales sont déterministes car l'utilisation d'un bruit blanc sur ce maillage très grossier donne lieu à des résultats très différents de ceux obtenus sur le maillage fin. En effet, les mailles très grossières atténuent trop fortement le bruit initial pour obtenir la bonne dynamique de l'écoulement. Les perturbations utilisées ici se limitent donc aux modes propres tridimensionnels caractéristiques de l'écoulement de couche de mélange. Le principe du recours à plusieurs niveaux de raffinement est schématisé sur la figure 8.21 où l'augmentation progressive de la résolution de la grille de calcul permet de représenter des structures de tailles de plus en plus petites. Les grosses structures restent pour leur part inchangées d'un niveau à l'autre.

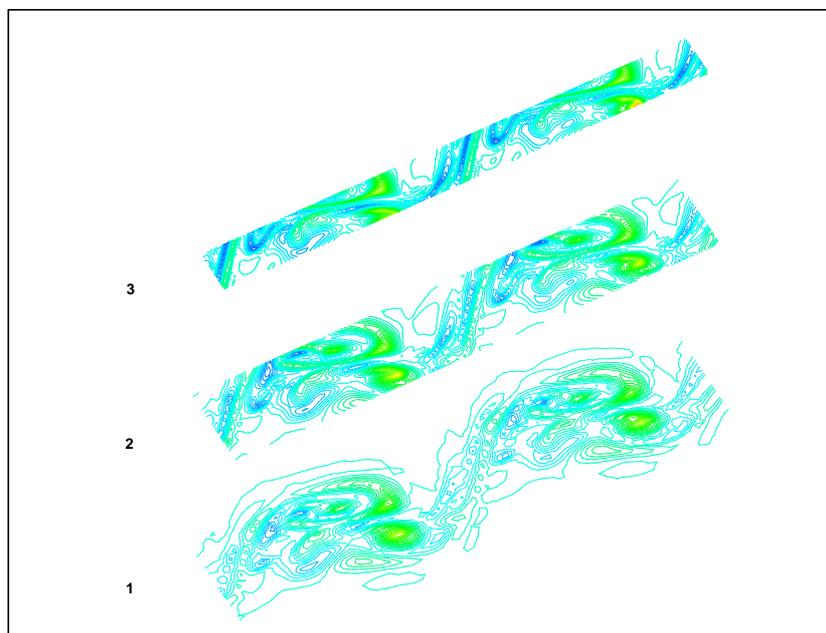


FIG. 8.21 – Calcul à trois niveaux de filtrage (couche de mélange 2D) : iso-contours de vorticité.

Le calcul adapté se déroule de la manière suivante : on procède tout d'abord à la création du niveau intermédiaire de grille, puis on lui applique immédiatement le senseur en ondelettes afin de créer le deuxième niveau de raffinement. On procède de cette manière à intervalle régulier.   chaque nouveau domaine crée, on efface les domaines de même

niveau créés auparavant. Ceci explique que le niveau fin soit immédiatement créé après le remaillage du niveau intermédiaire pour faciliter le traitement des conditions aux limites de raccord fin/grossier. Le pas de temps est toujours divisé par deux à chaque fois qu'un nouveau niveau de maillage est créé. Le rapport d'aspect entre deux grilles successives est toujours fixé à deux dans chacune des directions.

La figure 8.22 décrit l'évolution de l'épaisseur de quantité de mouvement et de l'énergie cinétique de l'écoulement pour chacune des trois simulations réalisées. Outre un léger retard au niveau de la transition, les courbes obtenues sur la grille très grossière présentent un deuxième point d'inflexion vers $t \sim 60$ qui correspond au second appariement pour le calcul fin et le début de la transition à la turbulence. Ceci montre l'incapacité d'un maillage trop grossier à représenter convenablement l'écoulement dans son régime turbulent. Le calcul adapté permet de retrouver la dynamique générale du développement temporel de la couche de mélange. L'évolution de l'épaisseur de quantité de mouvement est tout à fait comparable à celle obtenue sur la grille fine. L'évolution de la quantité d'énergie cinétique est également bien représentée par le calcul multi-niveaux. Le second palier aperçu sur le calcul très grossier a ainsi totalement disparu sur le calcul avec adaptation de maillage.

Au niveau des profils de statistiques turbulentes, il a été choisi cette fois-ci de les évaluer sur chaque niveau de grille puisqu'un écart important existe entre le niveau de filtrage le plus fin et le plus grossier. Ceci est facilité par le fait que ces calculs ont été réalisés en créant un unique maillage à chaque nouveau raffinement et à chaque niveau de filtrage. Du fait de l'utilisation de perturbations déterministes, les domaines fins obtenus respectent les conditions de périodicité utilisées pour évaluer les statistiques turbulentes. Ainsi le critère de raffinement est moyenné dans les directions homogènes pour limiter le raffinement à la direction (y) et permettre le calcul des statistiques turbulentes. Enfin, l'absence de moyenne temporelle dans le calcul de ces statistiques est également nécessaire pour permettre leur estimation sur les niveaux créés par raffinement.

Les profils moyens de vitesse longitudinale (figures 8.23, (a) et (b)) montrent un très bon comportement du calcul multi-niveaux. Etant donné qu'il s'agit d'une grandeur moyenne, il n'y a pas une différence significative entre les profils obtenus sur les différents niveaux de raffinement. Ce n'est plus le cas lorsque l'on s'intéresse à des profils de fluctuations (figures 8.23, (c) et (d), et figure 8.24). Ces profils dépendent en effet du niveau de filtrage associé au niveau de raffinement considéré. De manière générale, pour un même calcul, on observe une atténuation des fluctuations au fur et à mesure que la grille sur laquelle elles sont évaluées est de plus en plus grossière. Ceci est cohérent avec la notion de filtrage utilisée en Simulation des Grandes Echelles. Une comparaison des fluctuations obtenues sur le niveau fin du calcul adapté avec celles évaluées à partir du calcul fin permet de confirmer le bon comportement de la simulation multi-niveaux. En étudiant plus en détail ces profils de fluctuations, plusieurs constatations peuvent être effectuées. Tout d'abord, à $t = 50$, les fluctuations obtenues à l'aide du calcul grossier sont surévaluées dans les directions longitudinale et verticale, alors qu'elles sont sous-estimées dans la direction transverse, par rapport au calcul fin. Ceci pourrait traduire une tendance de la simulation grossière à conserver plus longtemps un comportement plutôt bidimensionnel. Pour des temps plus avancés, les valeurs des fluctuations dans chacune des directions sont du même ordre de grandeur pour le calcul grossier, mais sont surtout supérieures aux fluctuations obtenues sur les calculs fins et multi-niveaux. Au niveau des calculs multi-niveaux, outre le fait que les différents niveaux de filtrage tendent à atténuer les fluctuations au fur et à mesure

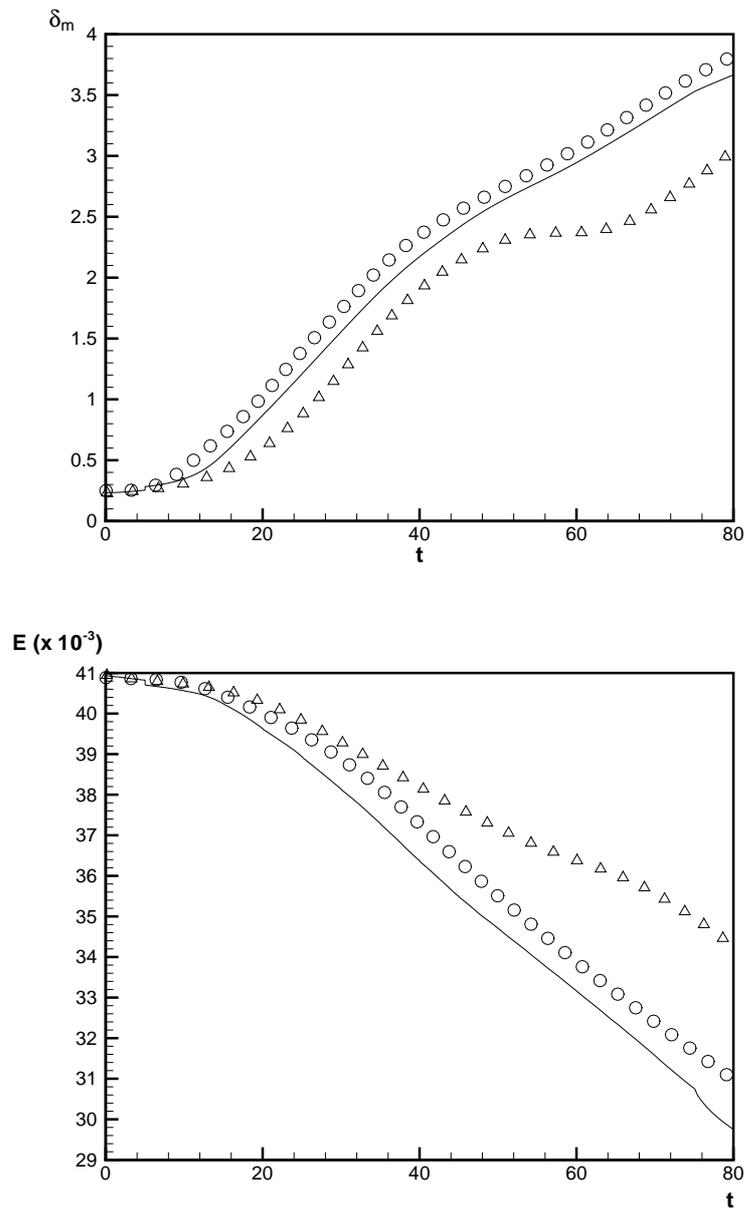


FIG. 8.22 – Calcul à trois niveaux de filtrage : évolution de l'épaisseur de quantité de mouvement et de l'énergie pour le calcul fin (\circ), le calcul "très grossier" (Δ) et le calcul multi-niveaux (—).

que le degré de résolution diminue, on constate que l'allure générale des profils de fluctuations est identique sur les différents niveaux de filtrage. Ceci montre que les erreurs d'interpolations liées à l'opérateur de restriction sont négligeables. Le calcul adapté permet finalement une très bonne estimation des fluctuations dans chacune des directions, avec un écart maximal de l'ordre de 16% contre des erreurs avoisinant les 30 – 40% pour le maillage grossier. En particulier, les fluctuations dans la direction verticale sont très bien évaluées dans tous les régimes de l'écoulement sur le calcul multi-niveaux.

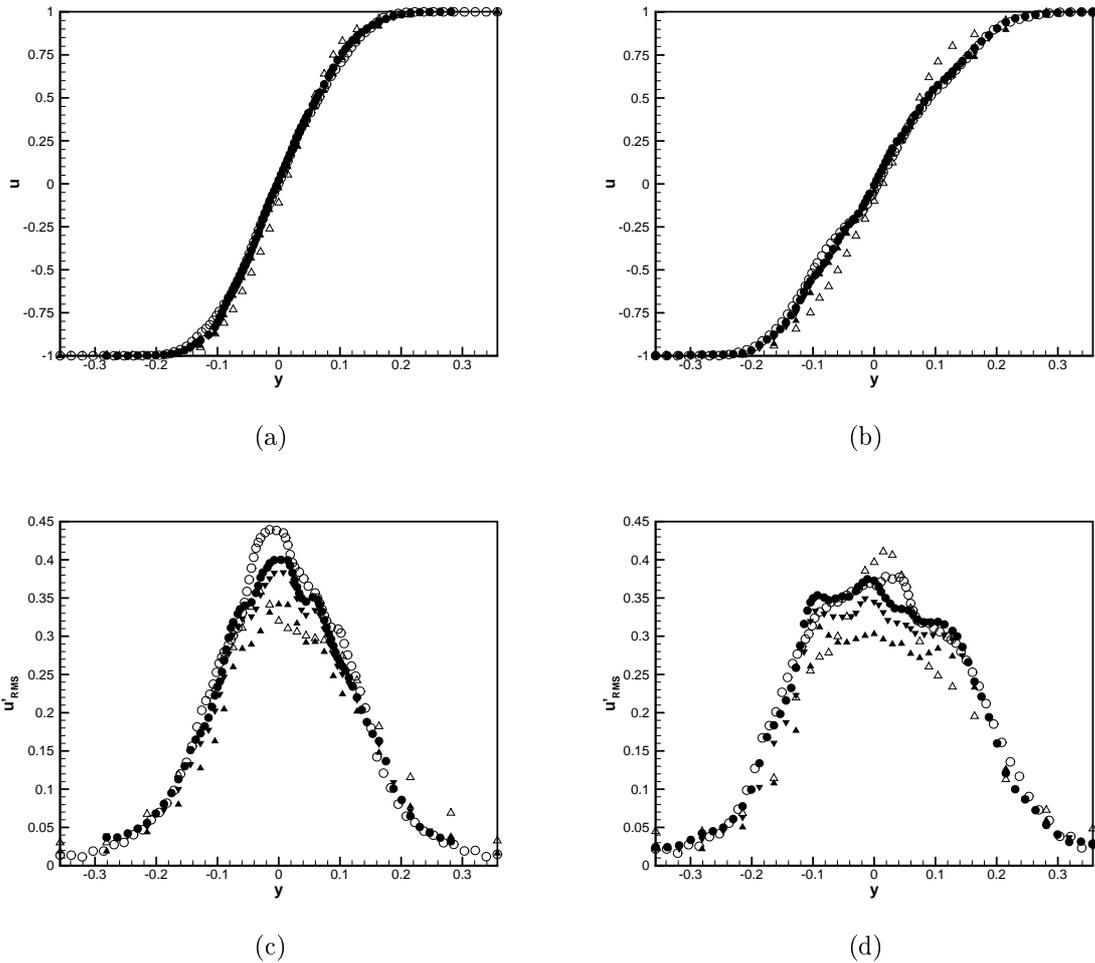


FIG. 8.23 – Calcul de couche de mélange avec trois niveaux de grilles ; profil moyen et fluctuations de la vitesse longitudinale à $t = 50$ (gauche) et $t = 80$ (droite) pour le calcul fin (\circ), le calcul “très grossier” (Δ) et le calcul adapté évalué sur la grille “très grossière” (\blacktriangle), sur la grille intermédiaire (\blacktriangledown) et sur la grille fine (\bullet).

La figure 8.25 présente les profils moyens de pression et densité observés pour chacune des trois simulations. Le gain en précision avec le calcul multi-niveaux est évident sur ces profils, en particulier dans le régime de transition ($t \sim 50$). A cet instant, les profils obtenus sur les différents niveaux de grille du calcul adapté sont quasiment confondus. Au delà de ce temps, il existe une nette différence entre ces différents niveaux. Ceci

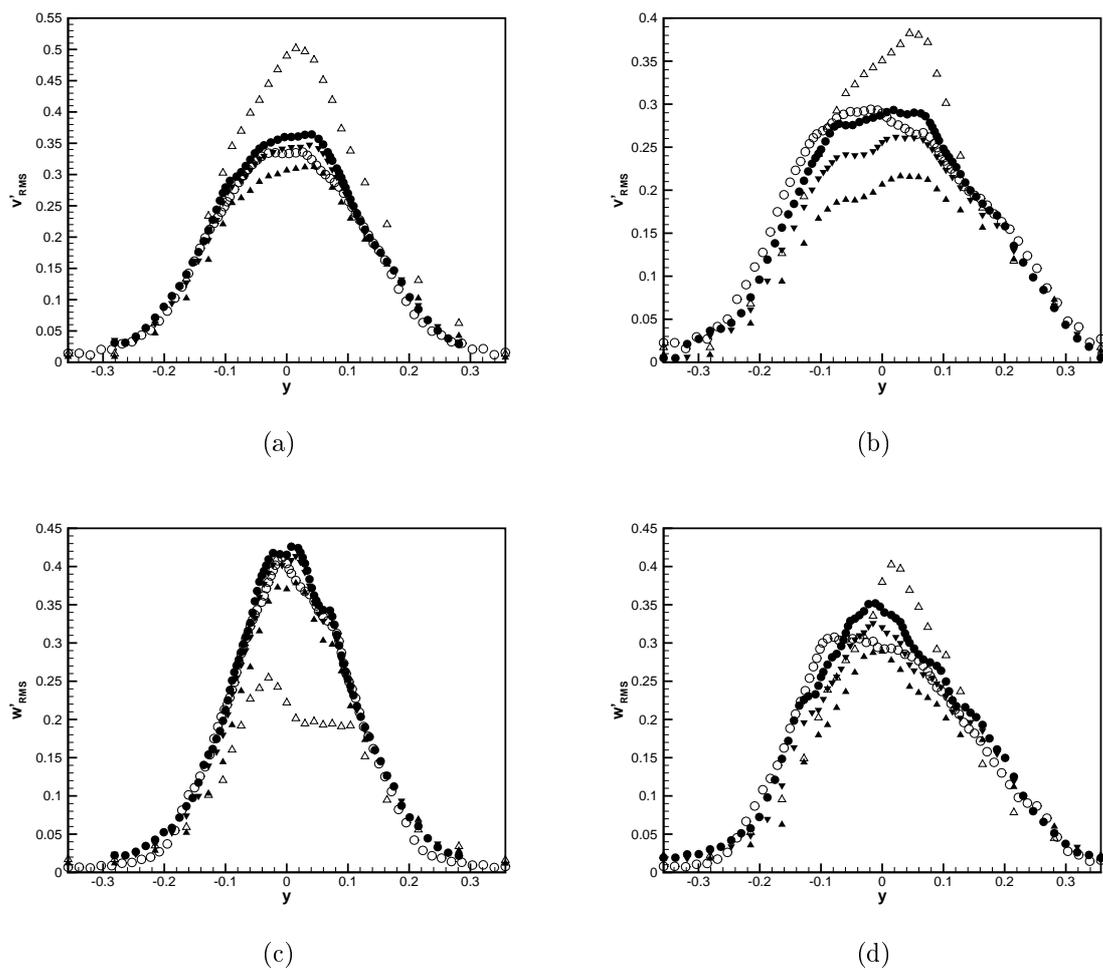


FIG. 8.24 – Calcul de couche de mélange avec trois niveaux de grilles ; profil des fluctuations des vitesses verticale et transverse à $t = 50$ (gauche) et $t = 80$ (droite) pour le calcul fin (\circ), le calcul “très grossier” (Δ) et le calcul adapté évalué sur la grille “très grossière” (\blacktriangle), sur la grille intermédiaire (\blacktriangledown) et sur la grille fine (\bullet).

est sans doute lié à la taille caractéristique des structures présentes dans l'écoulement au temps considéré. En effet, dans le régime turbulent, la proportion de petites structures est plus importante ce qui explique la représentation moins précise sur les niveaux de grilles inférieurs. Au niveau de la phase de transition, une quantité importante de structures cohérentes est contenue dans l'écoulement, justifiant alors une différence moins marquée entre les statistiques obtenues sur les différents niveaux de grilles. On observe de nouveau les écarts observés précédemment dans les simulations à un niveau de raffinement au niveau des limites du domaine de calcul. Cependant, ces erreurs sont moins importantes sur le niveau fin que sur les niveaux grossier et intermédiaire.

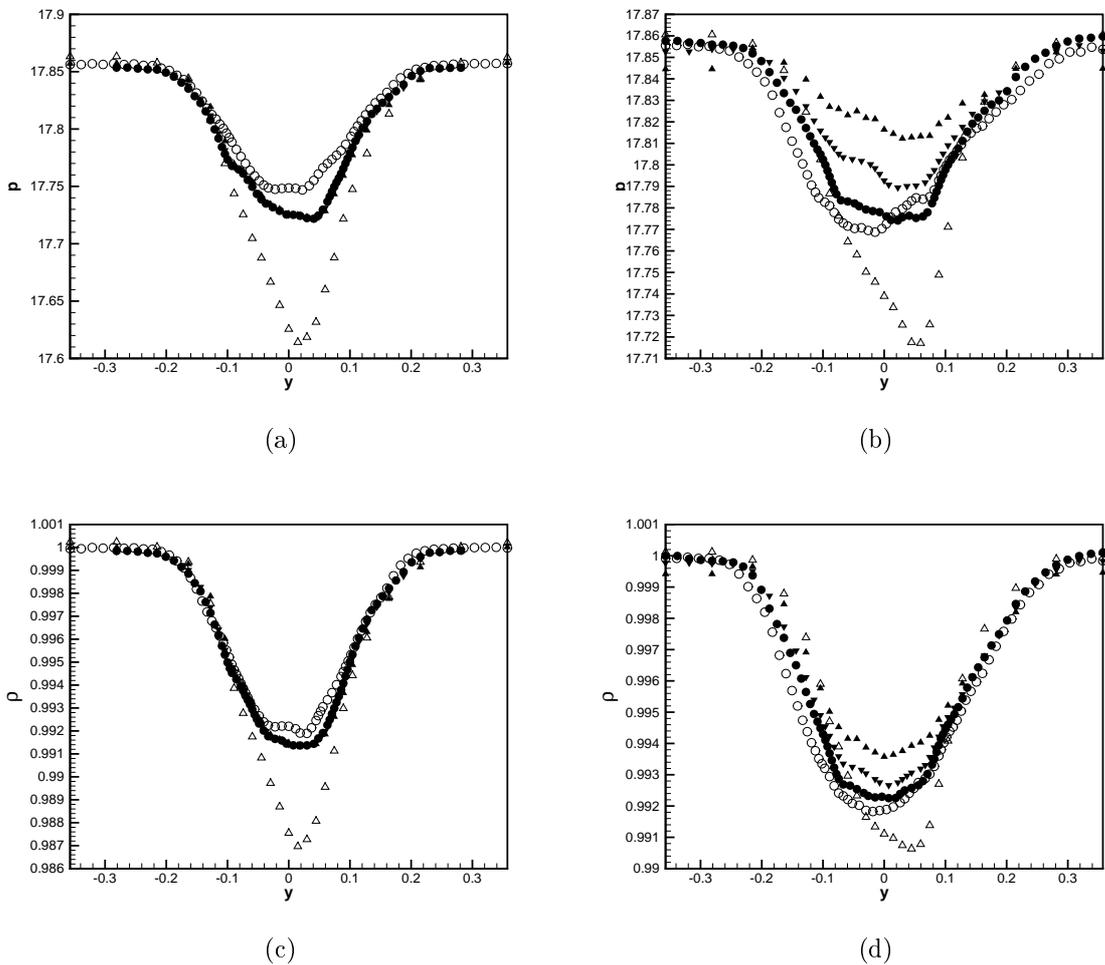


FIG. 8.25 – Calcul de couche de mélange avec trois niveaux de grilles ; profils de pression moyenne et densité à $t = 50$ (gauche) et $t = 80$ (droite) pour le calcul fin (\circ), le calcul “très grossier” (Δ) et le calcul adapté évalué sur la grille “très grossière” (\blacktriangle), sur la grille intermédiaire (\blacktriangledown) et sur la grille fine (\bullet).

Enfin, la figure 8.26 décrit la répartition spatiale du terme croisé du tenseur de Reynolds. Une bonne estimation de la répartition de cette variable est obtenue avec le calcul multi-niveaux, tant au niveau de la valeur du pic de fluctuations que de sa position dans

la direction (y).

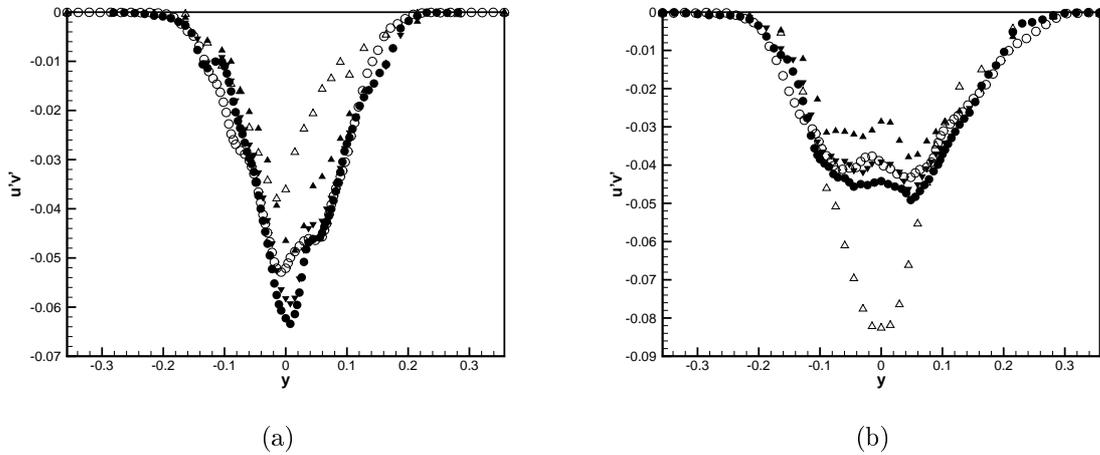


FIG. 8.26 – Calcul de couche de mélange avec trois niveaux de grilles ; terme croisé du tenseur de Reynolds $u'_1 u'_2$ à $t = 50$ (gauche) et $t = 80$ (droite) pour le calcul fin (\circ), le calcul “très grossier” (Δ) et le calcul adapté évalué sur la grille “très grossière” (\blacktriangle), sur la grille intermédiaire (\blacktriangledown) et sur la grille fine (\bullet).

Bilan : coûts de calculs

Afin de discuter de l'intérêt d'une approche multi-niveaux dans l'optique de calculs de Simulation des Grandes Echelles, un comparatif a été réalisé entre les coûts de calcul des simulations de référence et la simulation multi-niveaux. La comparaison porte sur le coût mémoire et le temps de simulation qui ont été nécessaires aux calculs de couche de mélange en développement temporel. Les valeurs reportées dans le tableau 8.3 correspondent aux simulations avec un seul niveau de raffinement présentées en début de chapitre. L'influence du taux de remplissage λ des sous-domaines sur les coûts engendrés est également mise en avant dans ce tableau.

maillage	coût mémoire à $t = 40$	coût mémoire à $t = 100$	temps de calcul $t = 0 \dots 100$
fin	1	1	31'30
grossier	0,145	0,145	2'50
adapté $\lambda = 0$	0,81	1,02	32'
adapté $\lambda = 0,3$	0,75	0,87	34'
adapté $\lambda = 0,5$	0,65	0,737	39'

TAB. 8.3 – Coûts de calcul des différentes simulations réalisées (temps CPU et mémoire).

Tout d'abord, en terme de ressources mémoires, le calcul grossier de référence se montre environ sept fois moins couteux que le calcul fin. Au niveau des calculs multi-grilles, il est évident que plus la valeur du paramètre λ va être élevée, plus le nombre de points fins utilisés va être faible, entraînant par la même occasion une diminution des ressources de stockage nécessaires. De même, il est logique que le gain mémoire tende à diminuer au fur et à mesure que la couche se développe. En effet, une fois le régime turbulent établi ($t \sim 100$), la couche de mélange tend à couvrir l'ensemble du domaine de calcul et le raffinement va donc nécessiter un nombre de plus en plus important de cellules fines. Dans le cas où un seul domaine fin est créé à chaque raffinement ($\lambda = 0$), le domaine fin va recouvrir l'ensemble du maillage de base, ce qui explique que le coût mémoire soit alors légèrement supérieur à celui du calcul fin de référence. Pour des valeurs plus grandes du taux de remplissage, le gain mémoire atteint des valeurs proches de 30 ou 40% par rapport au maillage fin.

Le second critère important en simulation numérique concerne le temps nécessaire à la réalisation des calculs. Les durées des différentes simulations réalisées sont reportées dans la dernière colonne du tableau 8.3. On vérifie que le calcul grossier est bien moins coûteux en temps de calcul que la simulation sur la grille fine, avec un rapport entre les deux temps de calcul proche de dix. Les calculs adaptés présentent des temps de calcul légèrement supérieurs au calcul fin, et ce d'autant plus que la valeur du taux de remplissage est importante. Cette augmentation du temps de calcul avec λ a plusieurs origines, en particulier la difficulté accrue de la gestion mémoire due à l'existence de nombreux domaines ou le coût de l'algorithme de grouping/clustering. Le fait de trouver des coûts de calcul du même ordre de grandeur pour les calculs adaptés et le calcul fin de référence n'est cependant pas rédhibitoire. En effet, plusieurs aspects de la méthode peuvent être améliorés dans le but de diminuer le temps de calcul. L'optimisation et la vectorisation des routines de calcul n'ont pas été poussées à leur maximum au cours de cette thèse et un gain non négligeable peut encore être obtenu à ce niveau. Ensuite, l'approche multi-domaines utilisée s'avère particulièrement intéressante pour des calculs parallèles. Bien que la gestion des ressources ne soit alors pas évidente, l'utilisation d'une machine parallèle pourrait se montrer efficace pour ce type de problème par rapport à une machine vectorielle comme celle utilisée dans ces travaux.

8.1.6 Conclusion partielle

Ce chapitre permet de mesurer l'apport de la méthode d'adaptation sur un calcul de couche de mélange en Simulation des Grandes Echelles. La configuration de calcul présentée correspond à une couche de mélange faiblement compressible, dont on étudie le développement temporel afin de limiter les coûts de calcul. Le nombre de Reynolds est très élevé de manière à se situer dans la limite faiblement visqueuse particulièrement concernée par un calcul SGE. Les principaux phénomènes intervenant dans ce type d'écoulement sont liés au développement des tourbillons de Kelvin Helmholtz et à leurs appariements. Les structures longitudinales reliant ces tourbillons ainsi que le développement des tourbillons en "lambda" sont, par ailleurs, difficiles à obtenir sur des maillages trop grossiers. Le critère de raffinement utilisé dans l'étude pour détecter les zones à raffiner est appliqué sur l'écoulement de couche de mélange. Il décrit des cellules réparties entre les structures primaires, au niveau de ces tourbillons longitudinaux qui joignent les tourbillons transversaux entre eux. Le fait que ces tourbillons soient allongés dans la direction de l'écoulement

laisse augurer de leur caractère anisotrope, ce qui ne correspond pas aux hypothèses de modélisation de la SGE. Ceci explique qu'il soit difficile de les représenter sur un maillage trop grossier qui nécessiterait de les inclure dans les échelles sous-maillages. Un raffinement de maillage au niveau de ces zones pourrait alors se montrer particulièrement efficace.

Ceci se vérifie sur les différents calculs réalisés à l'aide de la méthode adaptative. Tout d'abord, les premiers calculs ont fait l'oeuvre d'une publication [75]. Ils consistent à n'utiliser qu'un seul niveau de raffinement et ont été menés pour deux modèles sous-maille (Smagorinsky et échelle mixte) afin de tester l'influence éventuelle de ce choix. Ils ont montré un apport non négligeable de l'adaptation de maillage quelque soit le modèle sous-maille utilisé, aussi bien au niveau des grandeurs moyennes de l'écoulement que des fluctuations turbulentes. Seules les fluctuations dans la direction verticale conservent de faibles imprécisions au niveau de la zone centrale de la couche pour le calcul avec le modèle d'échelle mixte. Les profils de masse volumique et de pression semblent par ailleurs très légèrement dégradés sur le calcul avec raffinement mais l'erreur ne dépasse pas les 0,1%. Une étude de l'influence des différents paramètres inhérents à la méthode d'adaptation a ensuite été réalisée. Elle a montré la nécessité de contrôler la fréquence de régénération des grilles fines pour éviter l'apparition d'erreurs numériques trop importantes (erreur de commutation, opérateurs inter-grilles, etc.). Le taux de remplissage des domaines fins ne devient influant qu'à partir du moment où la turbulence couvre l'ensemble du domaine de calcul c'est à dire lorsque l'influence des conditions aux limites et de la taille des cellules du maillage de base ne sont plus négligeables. Un λ trop important entraîne alors des écarts de la solution par rapport au calcul de référence. Cependant, dans une telle situation, il ne semble pas judicieux de créer un nombre trop important de maillages fins, la turbulence recouvrant la totalité du domaine de calcul.

Un calcul présentant deux niveaux de raffinement a ensuite été exécuté. Les résultats se sont montrés de nouveau très encourageant quant à l'apport de l'outil d'adaptation. Il permet ainsi d'évaluer une solution proche de la solution de référence en partant initialement d'un maillage quatre fois plus grossier dans chacune des directions.

Cependant, la méthode reste perfectible au niveau des coûts de calcul. Une optimisation des routines développées et surtout le recours à un calculateur plus orienté vers des calculs multi-blocs permettrait ainsi de diminuer considérablement les temps de calcul par rapport aux calculs actuels. La mémoire nécessaire aux calculs est pour sa part moins importante avec la méthode de raffinement que pour le calcul fin de référence.

8.2 Canal plan

Le second cas d'étude concerne l'écoulement se développant dans un canal plan. Cette configuration présente de nombreux avantages puisqu'elle repose sur une géométrie simple à traiter à la fois numériquement et expérimentalement, et ce cas présente l'intérêt d'avoir été très largement étudié dans la littérature. Par ailleurs, cette configuration représente un cas d'épreuve intéressant pour la Simulation des Grandes Echelles. En effet, un grand nombre de phénomènes physiques entrent en jeu dans ce type d'écoulement, dont certains peuvent être critiques en vue de leur traitement en Simulation des Grandes Echelles. En particulier, le traitement de l'écoulement en proche paroi nécessitant la prise en compte des petites échelles anisotropes présentes dans cette zone reste un point délicat à traiter en SGE. La présence de ces structures anisotropes permet de penser que la stratégie de

raffinement présentée dans ce mémoire peut s'avérer particulièrement efficace pour limiter les erreurs de modélisation des échelles sous-maille.

8.2.1 Physique de l'écoulement

L'écoulement dans un canal plan est principalement régi par des phénomènes d'interactions turbulentes particulièrement complexes en région de proche paroi. En effet, pour les écoulements pariétaux, les instabilités primaires apparaissent dans les zones de proche paroi ce qui traduit le fait que les effets visqueux jouent un rôle déterminant dans l'apparition de ces instabilités. Plus précisément, on distingue généralement au minimum deux régions :

- une région *externe* dans laquelle les effets inertiels sont prépondérants ;
- une région proche de la paroi dans laquelle les effets visqueux sont les plus importants.

Plus précisément, il est couramment admis que la région de proche paroi est elle-même subdivisée en deux zones : la première est appelée *sous-couche visqueuse*, la seconde *zone tampon*. De même, la zone externe peut être scindée en deux parties : la première est appelée *zone de sillage*, partie la plus éloignée de la paroi et qui est très peu étendue (voire inexistante) dans le cas du canal plan ; la seconde est appelée *zone logarithmique*. Un aperçu de l'organisation de ces zones est donné sur la figure 8.27.

L'étendue de ces différentes zones est définie en termes d'unités de paroi. Cette unité désigne la grandeur caractéristique obtenue en normalisant les unités de longueur par une longueur de référence :

$$z^+ = \frac{z}{\nu/u_\tau} \quad (8.11)$$

La vitesse u_τ désigne la vitesse de frottement à la paroi, définie par :

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_\omega}{\rho_\omega}} \quad (8.12)$$

où τ_ω et ρ_ω désignent respectivement le taux de cisaillement et la densité à la paroi définis par (si z désigne la coordonnée normale à la paroi) :

$$\begin{aligned} \tau_\omega &= \left(\mu \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial z} \right) (z = 0) \\ \rho_\omega &= \rho(z = 0) \end{aligned} \quad (8.13)$$

On admet alors que l'on peut décomposer l'écoulement pariétal de la manière suivante :

- Sous-couche visqueuse pour $0 \leq z^+ \leq 5$.
- Zone tampon pour $5 \leq z^+ \leq 30$.
- Zone logarithmique pour $30 \leq z^+ \leq 500$.
- Zone de sillage pour $z^+ \geq 500$.

Par ailleurs, les profils moyens de vitesse ont des développements asymptotiques bien connus dans la sous-couche visqueuse et dans la zone logarithmique. Ainsi, au niveau de la sous-couche visqueuse, une analyse simple [127] corroborée par les résultats expérimentaux montre que la contrainte de cisaillement est presque uniquement due au gradient normal de vitesse longitudinale de telle sorte que l'on peut écrire :

$$u^+ = z^+ \quad (8.14)$$

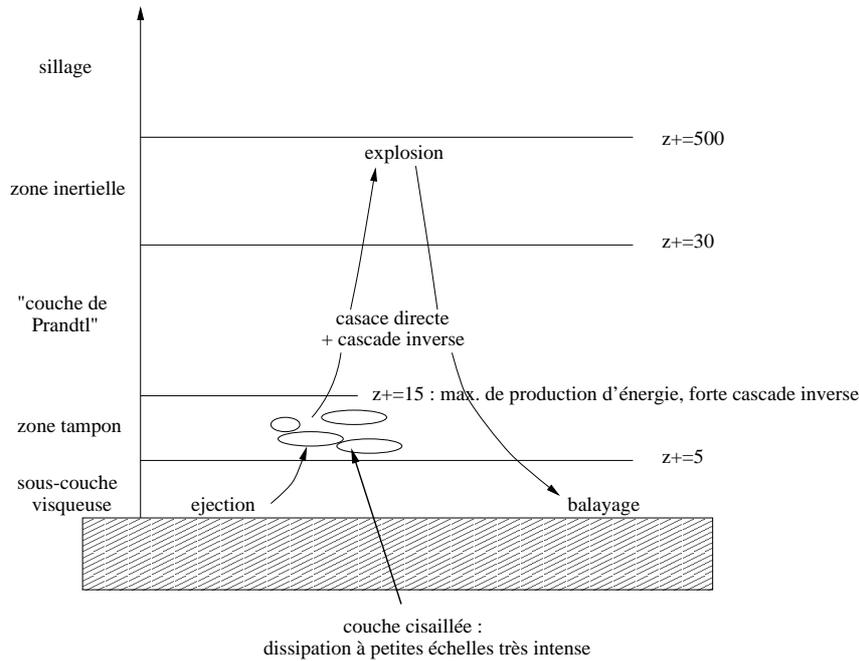


FIG. 8.27 – Description de la dynamique de la couche limite turbulente.

Pour la zone logarithmique, le profil moyen de vitesse longitudinale obéit à une loi logarithmique, qui s'écrit dans le cas incompressible (et faiblement compressible, comme dans les simulations présentées ici) :

$$u^+ = \frac{1}{K} \ln(z^+) + C \quad (8.15)$$

La constante $K = 0,41$ est la constante de Von Karman, alors que la constante C a été évaluée expérimentalement entre 5 et 5,5.

Les nombreux travaux portant sur les écoulements pariétaux ont permis de démontrer que la zone tampon est la partie motrice de l'écoulement du point de vue de la turbulence. En effet, les études antérieures ont permis de montrer que l'énergie est principalement créée dans cette zone tampon, pour ensuite être diffusée de part et d'autre de cette zone. Une partie de cette énergie est donc transférée vers la sous-couche visqueuse où elle est dissipée sous l'action de la viscosité moléculaire. L'autre partie de l'énergie produite est transmise à la zone externe où elle est propagée avant d'être dissipée progressivement.

Une des caractéristiques importantes de ce phénomène de production d'énergie est son caractère intermittent. En effet, si l'on observe un écoulement pariétal turbulent, on visualise facilement l'organisation tridimensionnelle de celui-ci, ainsi que la présence de structures allongées en proche paroi. Ces structures allongées sont disposées dans la direction longitudinale de l'écoulement et sont couramment appelées "streaks". Elles sont à l'origine de l'apparition de tourbillons en épingles à cheveux (ou tourbillons en lambda Λ) pour de grands nombres de Reynolds, ou de structures en fer à cheval pour des nombres de Reynolds plus faibles. Ces streaks correspondent à une alternance de zones de fluide à faible vitesse et de zones de fluide à haute vitesse. La présence de ces zones de fluide de faible vitesse s'explique par une remontée de fluide de la paroi (fluide lent) vers le centre du canal. Ce phénomène d'éjection de fluide vers l'extérieur de la couche-limite est donc

provoqué par la présence de ces structures de petite taille fortement anisotropes du fait de leur allongement dans la direction de l'écoulement. En effet, les dimensions couramment admises pour ces structures sont de 50 unités de paroi pour le diamètre, deux streaks voisins étant séparés par une distance de 100 unités de paroi dans la direction transverse, alors que des valeurs comprises entre 300 et 800 unités de paroi sont référencées dans la littérature pour la longueur de ces structures. Il s'agit donc bien de structures anisotropes étirées dans la direction longitudinale.

Une analyse plus détaillée des phénomènes intervenant dans la zone tampon permet de distinguer deux mouvements particuliers des structures. On regroupe ces phénomènes sous l'appellation d'éclatement tourbillonnaire ("bursts" en anglais). On distingue ainsi un balayage du fluide ("sweep") provoqué par les particules de fluide rapide issues de la zone centrale du canal (pour lesquelles $u' > 0$ et $w' < 0$) et un mouvement d'éjection du fluide présent en proche paroi vers le centre du canal ($u' < 0$ et $w' > 0$). Piomelli *et al.* [113] montrent alors que les transferts directs d'énergie intervenant dans la zone tampon sont liés à la phase d'éjection, tandis que les transferts inverses (*backscatter*) sont dus au phénomène de balayage. Ces zones sont situées de part et d'autre des structures longitudinales (figure 8.28). Au niveau de la zone logarithmique, ils estiment que les transferts directs et inverses sont tous deux liés à l'éjection.

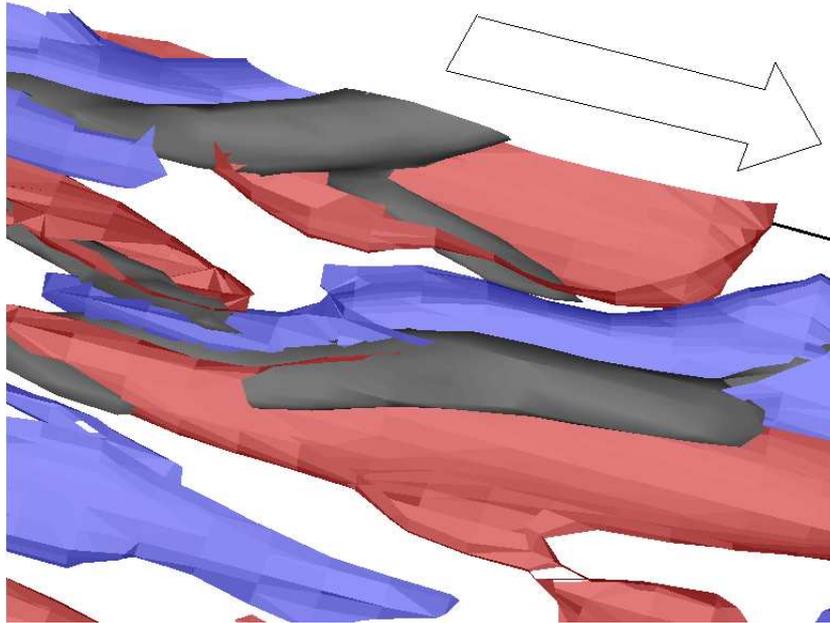


FIG. 8.28 – Lieux des transferts directs (éjection : $u_3 > 0$ en bleu) et inverses (balayage : $u_3 < 0$ en rouge) d'énergie de part et d'autre des streaks (critère Q en gris).

8.2.2 Description de la simulation

Toutes ces observations permettent de mettre en évidence le rôle prépondérant joué par les structures pariétales anisotropes en ce qui concerne les transferts d'énergie entre les différentes échelles de l'écoulement, particulièrement en ce qui concerne les phénomènes de

cascade inverse ou backscatter. La prise en compte de ces transferts inverses risque d'être mal réalisée par la majorité des modèles sous-maille qui sont généralement purement dissipatifs, ce qui explique que le canal plan soit un cas d'épreuve important pour la Simulation des Grandes Echelles.

L'étude du canal plan nécessitant une résolution de type couche-limite en proche-paroi, les coûts de calcul peuvent s'avérer conséquents. Ainsi, il est généralement considéré la même approximation temporelle que pour le cas de la couche de mélange, ce qui permet de s'affranchir de la résolution du développement spatial d'une couche limite turbulente qui entraînerait d'importants coûts de calcul. Cette approximation consiste de nouveau à imposer des conditions aux limites périodiques dans la direction de l'écoulement et à étudier le développement temporel de la turbulence dans le canal. L'hypothèse de périodicité dans la direction longitudinale est justifiable par le fait que l'écoulement de canal plan est parallèle, c'est à dire que la composante normale à la paroi de la vitesse moyenne est nulle, aussi bien en régime laminaire qu'en régime turbulent, et que cet écoulement contient des structures ayant des longueurs caractéristiques longitudinales et transverses bien définies. La condition de périodicité n'a alors pas d'influence sur les résultats sous l'hypothèse que les tailles du domaine de calcul ont été choisies de manière adéquate. De même, on utilise également des conditions de périodicité dans la direction transverse, ce choix étant de nouveau motivé par le fait que les tailles des structures dans cette direction sont correctement définies.

Le recours à des conditions aux limites de type périodique permet, en outre, de s'affranchir des problèmes de traitement des conditions de type entrée/sortie qui seraient indispensables en développement spatial. Néanmoins, la périodicité entraîne naturellement l'annulation du gradient de pression entre l'entrée et la sortie du domaine de calcul. Or ce gradient de pression représente le terme moteur de cet écoulement c'est à dire que ce terme permet d'entretenir l'écoulement turbulent et de conserver une énergie constante au cours du calcul. En l'absence de ce gradient, les pertes de charge provoquées par le frottement visqueux du fluide contre les parois ne sont plus compensées, ce qui se traduit par une perte d'énergie du système. Dans le but d'entretenir l'écoulement, il est alors nécessaire d'introduire une quantité d'énergie équivalente à un gradient de pression, ce qui est réalisé par l'intermédiaire d'un terme de forçage. Un aperçu détaillé de ce terme de forçage est donné en annexe (annexe C).

Le champ initial se compose d'un profil moyen parabolique (profil de Poiseuille, fig 8.29) auquel on ajoute une perturbation aléatoire de moyenne nulle. La loi de Busemann-Crocco est de nouveau employée pour la répartition initiale de la température. Les variables de l'écoulement sont ainsi initialisées par :

$$\rho(t = 0) = 1 + s\epsilon \quad (8.16)$$

$$u(t = 0) = U_c (1 - (z - 1)^2) (1 + s\epsilon) \quad (8.17)$$

$$v(t = 0) = w(t = 0) = s\epsilon \quad (8.18)$$

$$T(t = 0) = 1 + \frac{\gamma - 1}{3} Pr M_0^2 U_c^2 (1 - (z - 1)^4) \quad (8.19)$$

U_c désigne la vitesse longitudinale moyenne au centre du canal, fixée à $U_c = 1,5$; $\epsilon \in [-1; 1]$ est un nombre aléatoire et $s = 0,15$ fixe l'amplitude de la perturbation.

Le nombre de Reynolds de frottement est fixé à $Re_\tau = 395$ et le nombre de Reynolds basé sur la demi-hauteur du canal à $Re = 7000$. Le nombre de Prandtl turbulent est fixé à $Pr = 0,7$ comme préconisé par Comte et Lesieur [21]. Le débit initial est $Q_0 = 8,3814$

(8,3865 sur le maillage grossier), ce qui est un peu plus élevé que la valeur théorique dans le cas d'un champ de vitesse non perturbé $8\pi/3 \sim 8,3776$.

Au niveau du choix pour la taille du domaine de calcul, on cherche à s'assurer que les

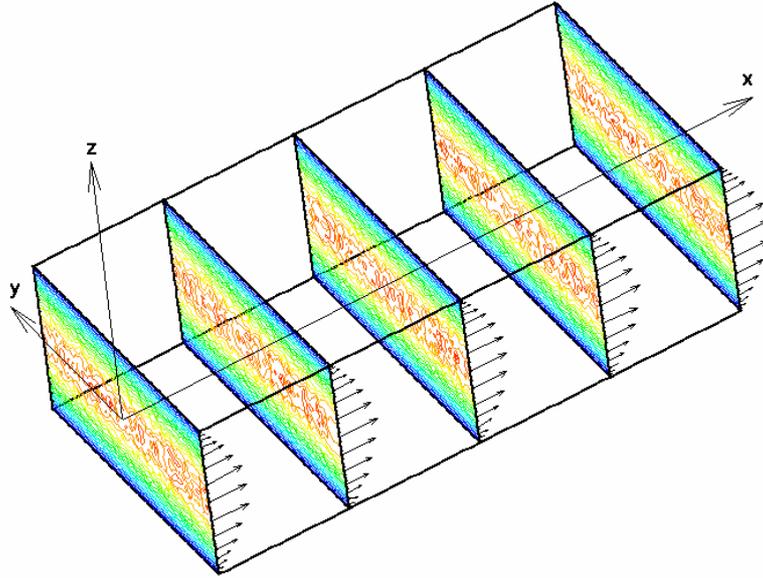


FIG. 8.29 – Canal plan : configuration de calcul et champ initial ; vecteurs vitesses et iso-contours de la composante longitudinale de la vitesse.

statistiques en deux points, situés l'un au centre du canal et l'autre à l'extrémité de celui-ci dans chacune des directions, sont décorréelées. Parmi les études antérieures effectuées à $Re_\tau = 395$, on trouve généralement deux choix pour ces dimensions. Par exemple, Moser *et al.* [96] réalisent une DNS en s'appuyant sur un domaine de dimensions $2\pi \times \pi \times 2$ respectivement dans les directions longitudinale, transverse et normale à la paroi. D'autres références préfèrent utiliser un domaine légèrement moins étendu dans la direction transverse $2\pi \times \frac{2}{3}\pi \times 2$ afin de diminuer les coûts de calcul tout en conservant une bonne précision dans cette direction [95, 118]. Les simulations présentées dans ce mémoire font appel à des domaines de taille identique à celle employée par Moser *et al.* [96], à savoir $2\pi \times \pi \times 2$.

Deux grilles de référence seront utilisées par la suite : la grille fine contient environ $3,1 \times 10^5$ cellules alors que la grille grossière contient deux fois moins de mailles dans chacune des directions, soit environ 4×10^4 cellules. Les tailles de mailles utilisées avec chacune de ces grilles sont reportées dans le tableau 8.4. On notera en particulier la taille des mailles à la paroi, dans la direction normale (Δz_{min}^+), qui est de l'ordre d'une unité de paroi pour le maillage fin et de deux unités de paroi pour le maillage grossier.

Les figures 8.30 et 8.31 permettent de comparer les résultats des deux simulations de référence.

La figure 8.30 décrit l'évolution temporelle de plusieurs grandeurs moyennes caractéristiques de l'écoulement de canal. La première d'entre elles est la vitesse moyenne débitante qui permet de vérifier le bon fonctionnement du forçage qui assure bien la conservation du débit pour les deux simulations. Les valeurs de la vitesse débitante obtenues pour les deux simulations de référence sont alors toutes les deux proches de l'unité. La seconde

maillage	$N_x \times N_y \times N_z$	Δx^+	Δy^+	Δz_{min}^+	Δz_{max}^+
grossier	$30 \times 41 \times 32$	67,4	24,6	2,44	45,3
fin	$60 \times 82 \times 64$	33,7	12,3	1,22	22,6

TAB. 8.4 – Maillages fin et grossier : nombre de cellules et tailles de mailles correspondantes.

variable décrit, pour sa part, les variations de la masse volumique au niveau de la paroi solide. Cette quantité diminue très légèrement au cours du temps même si les variations restent négligeables. La troisième courbe décrit l'évolution du terme de forçage $fg_1 = f_1^{(1)}$ au cours du temps. Celui-ci tend à se stabiliser autour d'une valeur moyenne comprise entre -2×10^{-3} et -3×10^{-3} . Enfin, la dernière courbe décrit l'établissement progressif du régime turbulent grâce à une visualisation du nombre de Reynolds de frottement. En effet, après une phase transitoire au cours de laquelle le nombre de Reynolds de frottement augmente rapidement, celui-ci se stabilise autour d'une valeur proche de la valeur nominale $Re_\tau = 395$. Cependant, le calcul fin permet d'atteindre un Re_τ plus proche de la valeur souhaitée que le calcul grossier.

La figure 8.31 donne quant à elle un aperçu du profil moyen de vitesse longitudinale obtenu pour chacun de ces calculs de référence ainsi que les fluctuations de vitesse dans chacune des trois directions. Ces profils sont obtenus en moyennant les variables de l'écoulement dans les directions homogènes et au cours du temps. Cette moyenne temporelle ne s'applique cependant qu'au régime établi et ne prend pas en considération la phase de transition initiale. Pour les profils moyens, les deux calculs tendent à donner le bon comportement dans la sous-couche visqueuse, ainsi qu'une assez bonne approximation de la pente théorique dans la zone logarithmique. Cependant, la pente calculée se montre légèrement inférieure à la valeur théorique. Par ailleurs, les écarts existant entre les courbes et la droite théorique sont liés à la différence entre le Reynolds de frottement théorique et la valeur réellement obtenue par le calcul. Par ailleurs, la loi de comportement théorique sera discutée dans le prochain paragraphe dans le but de donner une première explication de l'écart observé au niveau de l'évaluation de la pente par rapport à la loi logarithmique. Au niveau des profils de fluctuations, on observe une légère surestimation du pic de fluctuations de vitesse longitudinale avec le calcul grossier, alors qu'au contraire les fluctuations dans les deux autres directions sont légèrement sous-estimées. De plus, le pic de fluctuations de la vitesse longitudinale se trouve décalé vers le centre du canal avec le maillage grossier. On obtient ainsi une bonne estimation de la position de ce pic sur le calcul fin puisque la valeur obtenue est voisine de $z^+ = 15$ ce qui correspond bien au maximum de production d'après la figure 8.27.

8.2.3 Adaptation de maillage

La stratégie d'adaptation est ensuite appliquée à l'écoulement de canal plan dans le but d'augmenter la précision de la solution par rapport au calcul grossier.

La première étape de validation porte de nouveau sur le critère de raffinement. La figure 8.32 permet de comparer les zones détectées par le critère de raffinement au critère Q correspondant. La première remarque est que le raffinement se concentre bien sur la zone de proche paroi. Plus précisément, les deux premières rangées de cellules dans la direction

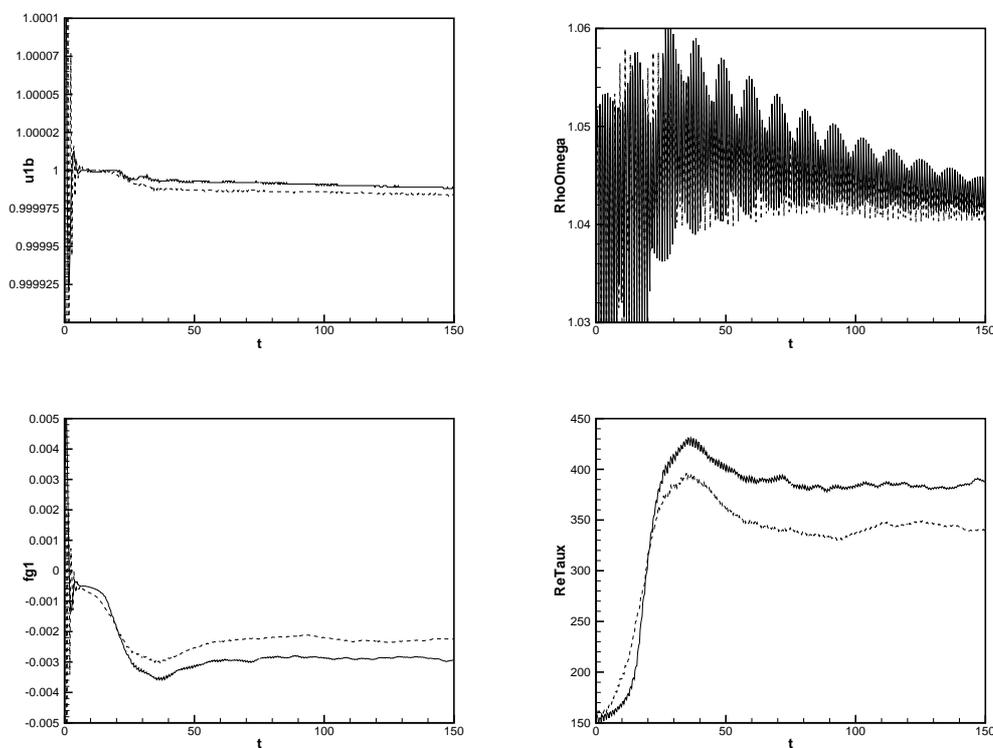


FIG. 8.30 – Canal plan forcé; évolution de la vitesse moyenne débitante, de la masse volumique en proche paroi, du terme de forçage et du nombre de Reynolds turbulent. — : maillage fin ; - - : maillage grossier.

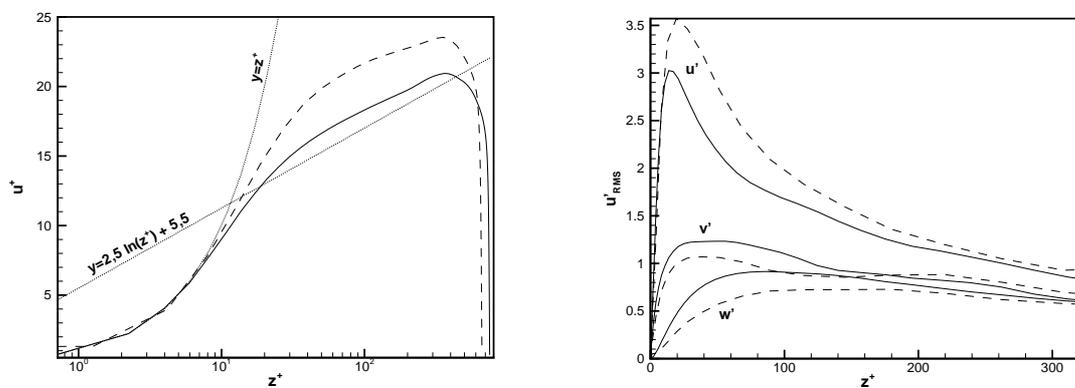


FIG. 8.31 – **Gauche** : Profils de vitesse moyenne longitudinale; **Droite** : fluctuations de vitesse longitudinale; — : maillage fin ; - - : maillage grossier.

normale à la paroi sont presque totalement incluses dans le nuage de cellules à raffiner. Au delà de ces rangées, les cellules à raffiner sont réparties au voisinage des structures cohérentes. La figure 8.33 montre ainsi que le senseur sélectionne des cellules qui forment des ensembles étirés dans la direction longitudinale. Ceux-ci semblent par ailleurs situés autour des structures cohérentes, ce qui pourrait correspondre aux zones responsables des phénomènes d'éclatement tourbillonnaire.

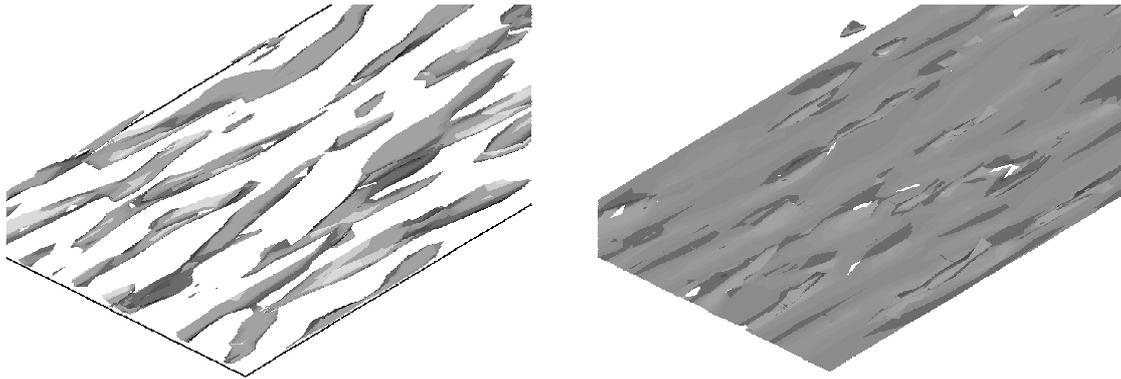


FIG. 8.32 – **Gauche** : Iso-contours du critère Q ($Q = 0, 1$); **Droite** : Iso-contour du critère de raffinement $\alpha = -2/3$.

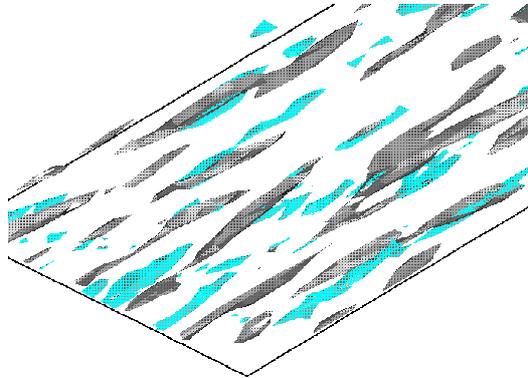


FIG. 8.33 – Iso-contours du critère de raffinement $\alpha = -2/3$ et du critère Q ($Q = 0, 1$), en dehors des deux premiers plans de proche-paroi.

Les premières simulations multi-niveaux réalisées ayant présenté des différences importantes par rapport aux calculs de référence, il a été choisi de procéder en plusieurs étapes afin de déterminer l'origine de ces écarts.

Ainsi, dans un premier temps, on limitera à deux le nombre de domaines fins créés à chaque nouveau raffinement, chaque domaine correspondant à une des couches limites composant le canal. Par ailleurs, afin de limiter les recours à la procédure d'enrichissement aux frontières, les domaines fins sont forcés à occuper l'ensemble du domaine dans les directions longitudinales et transverses. Ainsi on peut appliquer une condition de périodicité dans chacune de ces directions pour les domaines fins. Dans la direction normale à

la paroi, la taille des domaines fins est fixée par le critère de raffinement. Il est cependant intéressant de noter qu'à tout instant les raccords entre le niveau fin et le niveau grossier interviennent bien en dehors de la zone de production ($z^+ < 15$) comme préconisé par Quéméré [115].

Enfin, comme un doute persiste quant au terme de forçage à appliquer sur une configuration multi-domaines (voir en annexe C), les premières simulations vont porter uniquement sur des calculs de canal sans terme de forçage. Par ailleurs, même si la phase de transition est bien représentée dans le cas de la couche de mélange, il est difficile de se prononcer sur la capacité réelle de la méthode d'adaptation à représenter convenablement les phénomènes transitionnels intervenant dans des écoulements de proche paroi. De ce fait, l'adaptation s'appliquera dans cette étude uniquement au canal en régime établi.

Comme dans l'étude de la couche de mélange, l'évaluation de la solution obtenue avec l'outil adaptatif sera réalisée à partir des informations contenues dans le niveau le plus grossier. L'objectif est de nouveau d'utiliser des variables obtenues en moyennant le champ sur l'ensemble du domaine.

Les premiers résultats obtenus auront donc pour objectif de valider l'approche multi-niveaux dans une configuration de canal, et plus spécifiquement la condition de raccord dans la direction verticale entre le domaine de base et les domaines fins créés. La figure 8.34 donne un aperçu du comportement des trois simulations réalisées en l'absence de forçage. Le nombre de Reynolds de frottement reste stabilisé autour d'une valeur moyenne. L'absence de forçage ne se fait pas encore ressentir de manière significative sur son évolution. Un gain non négligeable est alors obtenu avec l'approche multigrille pour l'évaluation de ce nombre. En effet, après une première phase d'établissement de l'écoulement qui se traduit par une augmentation rapide de la valeur du Re_τ , le calcul multi-niveaux tend à se stabiliser autour d'une valeur proche de celle obtenue par la simulation fine de référence. Par la même occasion, la courbe obtenue à l'aide de la méthode d'adaptation se rapproche de la valeur nominale utilisée pour ces simulations ($Re_\tau = 395$). Le taux de cisaillement à la paroi τ_w voit sa valeur diminuer avec le temps du fait de l'absence de forçage. Néanmoins, la courbe obtenue avec la simulation multi-grilles est de nouveau voisine de celle obtenue à l'aide du calcul fin de référence.

Au niveau des statistiques turbulentes (figure 8.35), le calcul multi-niveaux s'avère être en très bon accord avec le calcul fin. Au niveau du profil de vitesse moyenne longitudinale, les deux courbes sont quasiment identiques, traduisant à la fois une bonne représentation du profil de vitesse dans la sous-couche visqueuse et dans la zone logarithmique. Concernant les fluctuations de vitesse, les profils obtenus avec la stratégie de raffinement sont en très bon accord avec les profils de référence au niveau des prévisions dans la région de proche paroi. Ainsi, une très bonne approximation des pics de fluctuations dans cette partie du canal est constatée. En outre, le pic correspondant au maximum de production d'énergie est bien estimé par le calcul multi-niveaux puisque sa position et sa valeur sont proches de celles relevées sur le calcul fin. Au niveau de la zone externe, une très légère surestimation des fluctuations de vitesse longitudinale est observable. Sachant que cette zone n'est pas affectée directement par le raffinement puisque les grilles fines se concentrent sur la zone de proche paroi, on peut estimer que ces écarts au niveau des profils de fluctuations sont dus essentiellement à des erreurs numériques liées à la taille des mailles grossières dans cette zone du canal. Le profil des tensions de Reynolds s'avère d'avantage sensible au traitement réalisé à l'interface fin/grossier. On observe en effet des variations importantes de cette variable au voisinage de l'interface. Les profils de densité

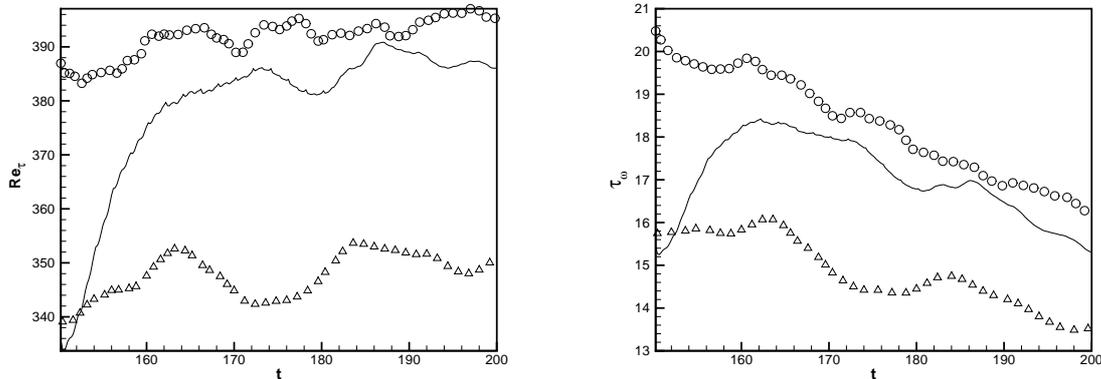


FIG. 8.34 – Simulations de canal plan sans terme de forçage ; évolution du nombre de Reynolds turbulent et du taux de cisaillement à la paroi. \circ : maillage fin ; Δ : maillage grossier ; — : maillage adaptatif.

obtenus avec plusieurs niveaux de grilles présentent également des différences par rapport aux calculs de référence. Une surestimation de l'ordre de 1% est en effet relevée au niveau de la zone centrale du canal.

Au niveau des structures de proche-paroi caractéristiques de l'écoulement de canal plan, une visualisation des champs instantanés permet de confirmer la capacité de la méthode d'adaptation à représenter convenablement l'allure générale des streaks. Ainsi, la figure 8.36 permet de comparer l'écart moyen entre deux streaks consécutifs, dans la direction transverse, ainsi que leurs diamètres moyens. Les valeurs couramment admises pour l'écart transversal entre deux structures varient de quatre-vingt à cent vingt unités de paroi [98]. Les valeurs relevées pour cet écartement à partir des calculs fin et multi-niveaux sont voisines de quatre-vingt dix unités de paroi et sont par conséquent en très bon accord avec les études antérieures. Au niveau du diamètre des streaks, une valeur d'environ trente unités de paroi est généralement mentionnée dans la bibliographie. Les valeurs relevées dans notre étude varient plutôt autour de vingt unités de paroi pour le calcul fin et entre quinze et vingt unités de paroi pour le calcul adapté. Dans la direction longitudinale, des valeurs allant de 500 à 1000 unités de paroi sont relevées dans la littérature pour la longueur des streaks. Le calcul fin présente des structures caractéristiques dont la longueur est de l'ordre de 800 unités de paroi, contre 900 unités de paroi en moyenne pour le calcul multi-niveaux.

Du point de vue de l'organisation des structures obtenues pour chacun des calculs, la figure 8.37 montre que le calcul avec adaptation de maillage permet effectivement de retrouver sur le niveau fin des structures de forme et de dimensions similaires à celles calculées sur la grille fine de référence.

Pour le niveau grossier (figure 8.38), une plus grande quantité de structures allongées sont présentes dans l'écoulement lorsque l'approche multi-niveaux est utilisée par rapport au calcul grossier mono-niveau.

Ces tendances sont confirmées par les figures 8.39 et 8.40 qui présentent les iso-contours

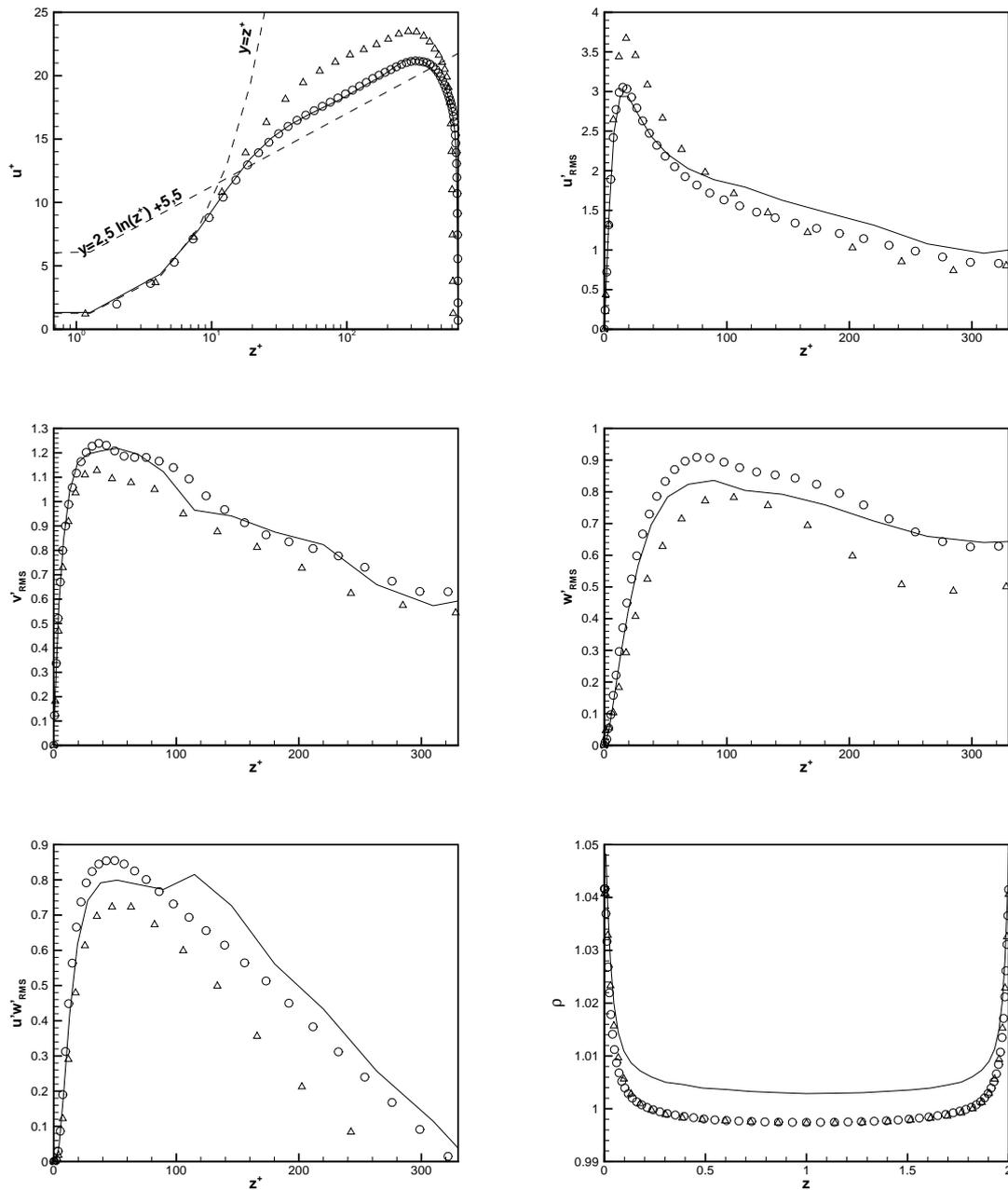


FIG. 8.35 – Simulations de canal plan sans terme de forçage ; profils de statistiques turbulentes. \circ : maillage fin ; Δ : maillage grossier ; — : maillage adaptatif.

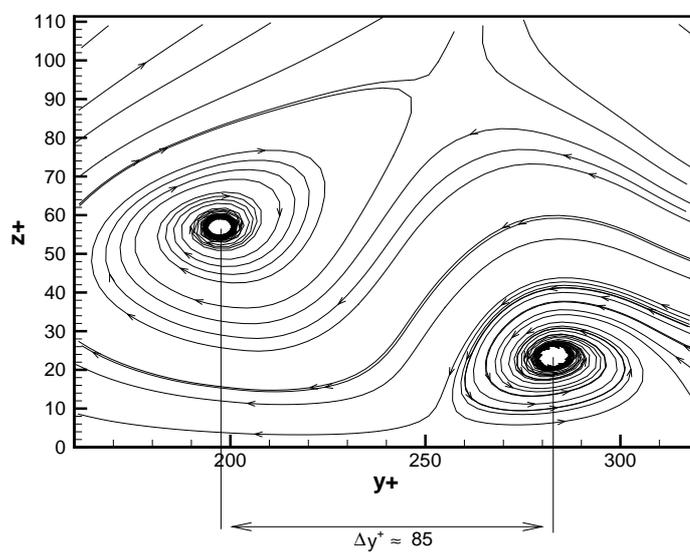
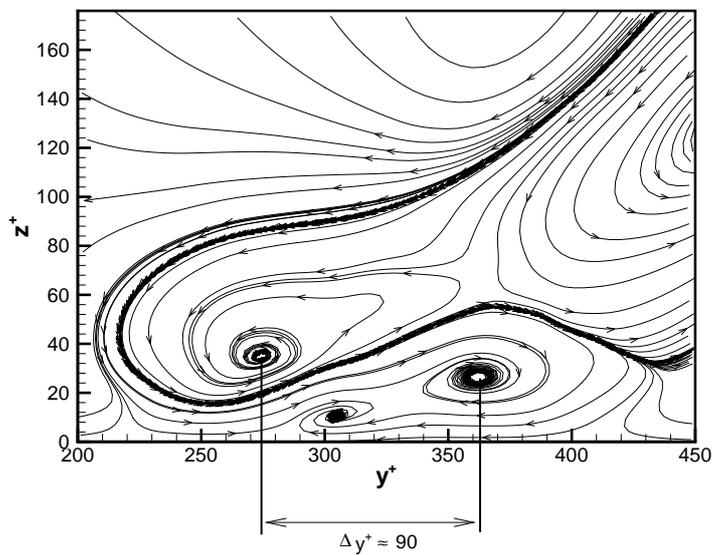
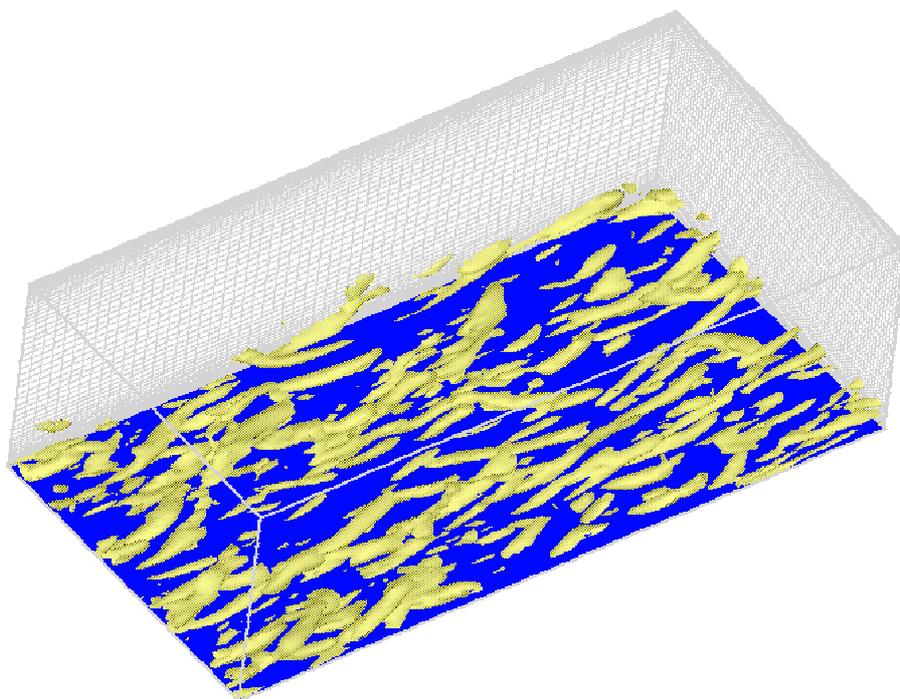
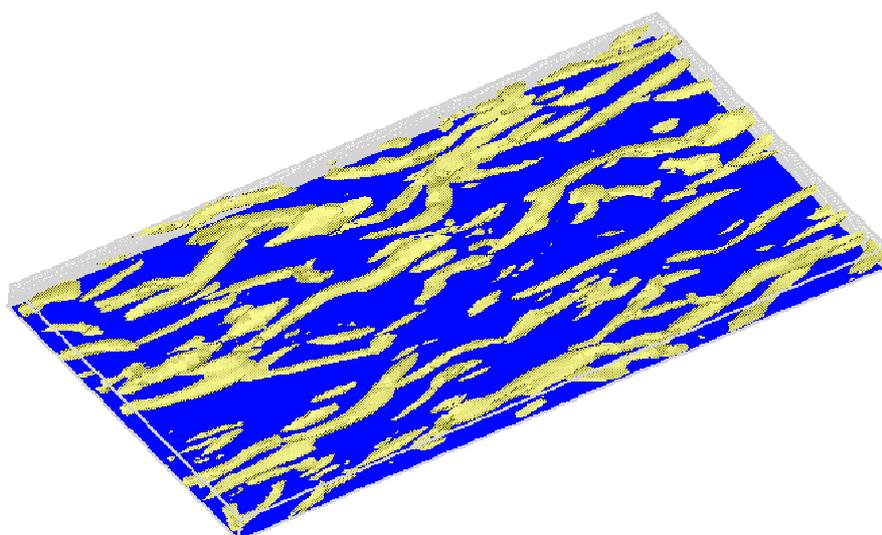


FIG. 8.36 – Evaluation de l'écart transversal entre deux streaks pour le cas du canal plan à l'aide des lignes de courant - Calcul fin et adapté (évalué sur le niveau fin) sans terme de forçage.

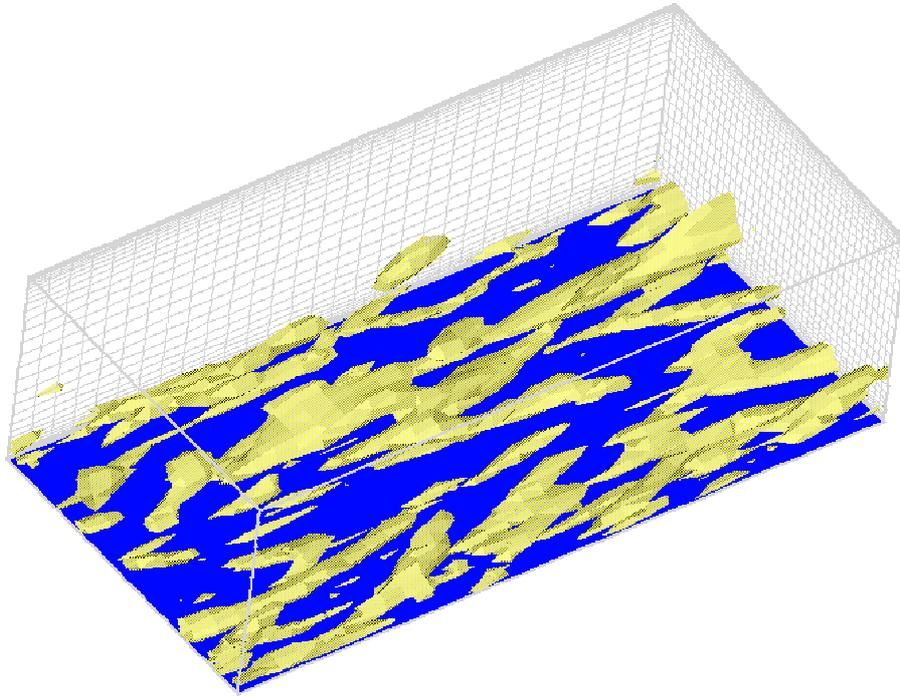


(a) Calcul fin

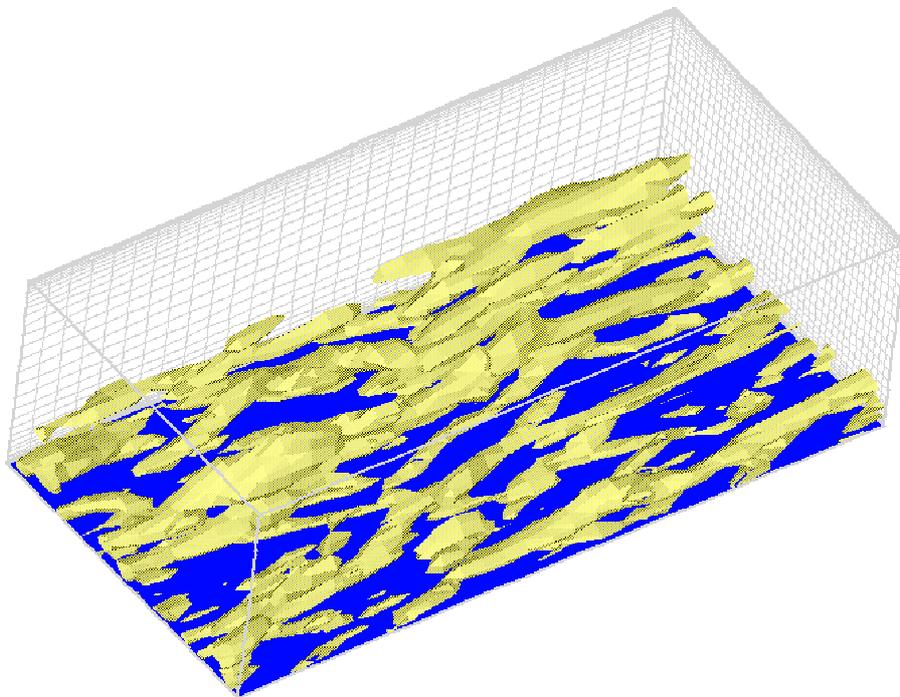


(b) Calcul adapté, grille fine

FIG. 8.37 – Iso-valeurs du critère Q ($Q=0,65$).



(a) Calcul grossier



(b) Calcul adapté, grille grossière

FIG. 8.38 – Iso-valeurs du critère Q ($Q=0,1$).

du critère Q évalués dans deux plans (x - y) à un temps suffisamment avancé pour se situer dans le régime établi. Le premier plan est situé à $z^+ = 25$ c'est à dire qu'il se situe dans la couche de Prandtl de l'écoulement, près de la zone de production maximale d'énergie. Le second plan, situé plus loin de la paroi du canal, est placé à $z^+ = 55$, ce qui le situe au niveau de la zone inertielle du canal. Ces visualisations permettent tout d'abord de confirmer le comportement inadéquate de la simulation grossière dans la zone de proche paroi. En effet, une comparaison de la taille et de la répartition des structures allongées obtenues sur les deux grilles de référence montre clairement une différence de représentation des petites structures de l'écoulement. Le maillage grossier tend bien à atténuer trop fortement la quantité de petites structures présentes en proche paroi. Au niveau du calcul multi-niveaux, une quantité sensiblement plus importante de petites échelles est obtenue dans le plan $z^+ = 25$ sur le niveau grossier en comparaison du calcul grossier de référence. Il est plus difficile de tirer des conclusions au niveau du plan $z^+ = 95$ même si cette représentation semble confirmer un léger gain au niveau de la quantité de structures obtenue sur le calcul adapté. Le niveau fin permet quant à lui de retrouver une topologie similaire à celle du calcul fin dans les deux plans choisis.

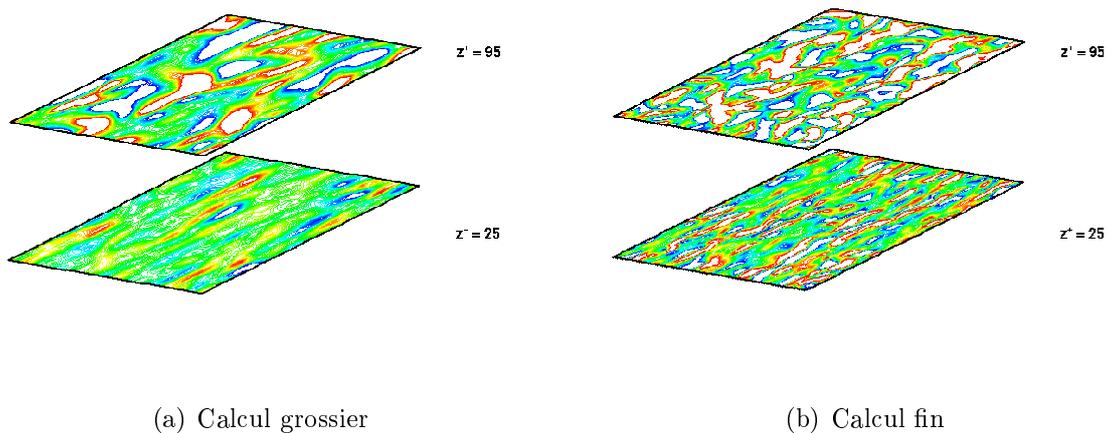


FIG. 8.39 – Iso-valeurs du critère Q en proche paroi pour les simulations de référence.

La figure 8.41 utilise de nouveau le critère Q pour examiner le comportement de la solution au niveau de l'interface de raccord entre le domaine correspondant au niveau fin (en haut) et le domaine de base (en bas). A l'instant considéré, le raccord intervient au niveau du plan $z^+ = 120$. Il est intéressant de souligner que cette valeur est cohérente avec celles utilisées par Quéméré [115] dans son étude à grands nombres de Reynolds ($z_1^+ = 115$). En comparant les structures obtenues de part et d'autre de la frontière, il apparaît que le traitement par continuité des grosses structures est bien respecté. L'enrichissement intervenant au niveau de ces interfaces semble également permettre de créer artificiellement des petites structures au niveau de la grille fine et d'amplifier celles observées sur la grille grossière.

Enfin en terme d'apport de la méthode de raffinement au niveau des coûts de calculs, le tableau 8.5 montre que la méthode, dans son état actuel, apporte essentiellement un

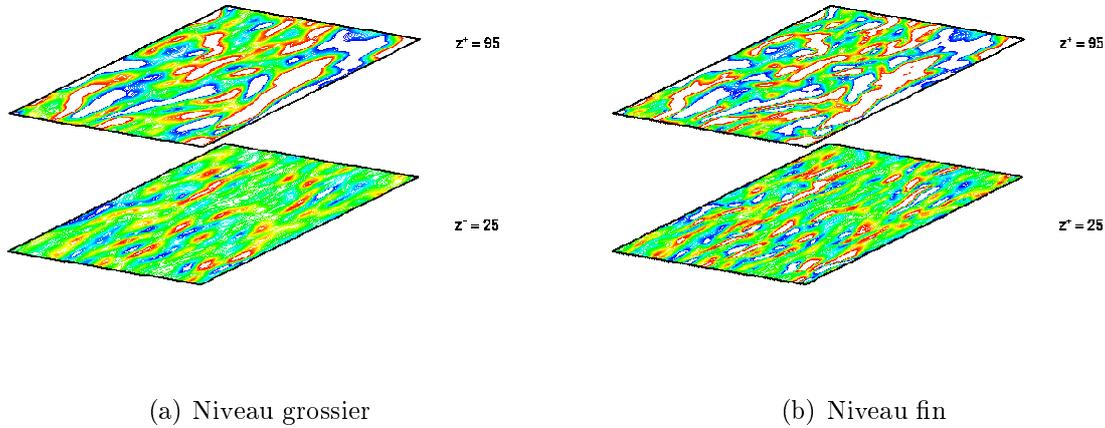


FIG. 8.40 – Iso-valeurs du critère Q en proche paroi pour le calcul avec adaptation de maillage.

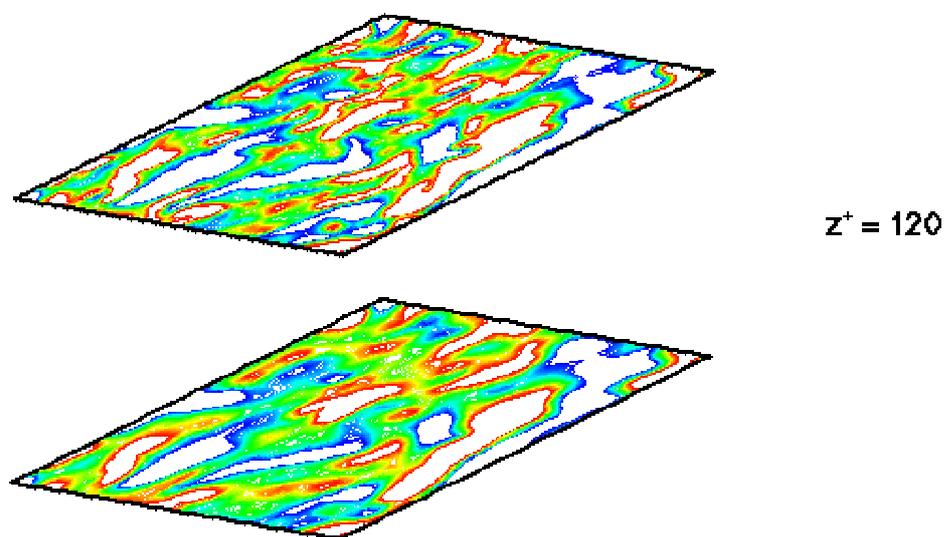
gain au niveau de la mémoire utilisée par le calcul. Les temps de calcul sur le maillage fin de référence et le calcul multi-niveaux sont quant à eux du même ordre de grandeur. Il est possible d'imaginer qu'un gain en temps pourrait être apporté par une optimisation des routines de calcul et l'utilisation d'une machine de calcul orientée vers le calcul multi-domaines.

maillage	coût mémoire	temps de calcul
fin	1	2h24'15
grossier	0.13	15'32
adapté	0.6	2h32'10

TAB. 8.5 – Coûts de calcul des différentes simulations réalisées (temps CPU et mémoire).

Les résultats qui viennent d'être présentés pour le canal plan non forcé confortent les premières conclusions effectuées sur la configuration de couche de mélange. Le raffinement de maillage permet de retrouver des résultats proches des calculs fins de référence, tant au niveau des profils de statistiques turbulentes que des grandeurs moyennes caractéristiques d'un écoulement de canal plan. La forme générale des structures tourbillonnaires attendues pour ce type d'écoulement est également bien représentée par les simulations multi-niveaux. Il reste maintenant à appliquer la méthode d'adaptation de maillage au cas du canal plan forcé. Cependant ceci s'avère être difficile à réaliser.

En effet, les premières simulations effectuées en appliquant le forçage sur l'ensemble des domaines (annexe C) présentent des variations temporelles importantes au niveau des valeurs moyenne de la masse volumique et de la vitesse débitante obtenues avec le calcul adapté. Ainsi, alors que la valeur du Reynolds de frottement tend à se stabiliser autour d'une valeur intermédiaire entre celles obtenues dans les deux calculs de référence et que le débit est bien conservé, les statistiques turbulentes ne peuvent être correctement évaluées. Il semble difficile d'attribuer ces écarts à la seule stratégie de raffinement, d'autant que celle-ci fonctionne dans le cas non forcé. On pourrait par contre imaginer que l'enrichis-



(a)

FIG. 8.41 – Iso-valeurs du critère Q en proche paroi; zone de raccord entre le domaine grossier (en bas) et le domaine fin (en haut) utilisés dans le calcul adapté.

sement aux frontières, associé au forçage, tend à faire varier artificiellement les variables de l'écoulement du fait du caractère non conservatif de ces frontières. De plus, comme mentionné en annexe, le fait d'appliquer à tous les niveaux le terme de forçage calculé uniquement sur le domaine grossier n'est pas consistant avec les équations filtrées.

Dans le but d'éliminer cette dernière hypothèse, la seconde méthode de forçage, dont le but est de conserver le gradient de pression, a ensuite été employée. L'intérêt de ce forçage est qu'il est constant et identique pour tous les domaines et tous les niveaux de grille. L'inconvénient principal est un temps d'établissement de la turbulence (bien) plus important que pour les simulations avec évaluation dynamique du terme de forçage. Un autre inconvénient est la décroissance du débit de l'écoulement, pendant la phase d'établissement du régime turbulent, mais le débit tend ensuite à se stabiliser sensiblement une fois le régime turbulent établi. Une fois ce régime obtenu, la stratégie d'adaptation est appliquée à la grille grossière.

Les premières constatations tendent à montrer une influence plus importante de la valeur choisie pour la constante d'enrichissement que dans les cas de la couche de mélange ou du canal sans forçage. Ceci est dans doute lié en partie à l'existence de structures complexes en proche paroi et aux phénomènes d'éjection qui entraînent les structures à travers les conditions de raccord fin/grossier. L'ajout du terme de forçage peut également interférer avec le traitement par enrichissement utilisé au niveau des interfaces de couplage. En effet, certains calculs réalisés à partir d'une évaluation dynamique de la constante d'enrichissement présentent des accumulations de structures tourbillonnaires au niveau de la zone de raccord. Ceci pourrait traduire un comportement similaire à celui constaté dans plusieurs études portant sur le canal plan à l'aide de l'approche RANS/LES [109]. Ces structures, qui apparaissent au niveau de l'interface de couplage entre les approches RANS et LES, sont généralement appelées "super-streaks". Les résultats observés sont ainsi difficilement exploitables en particulier du fait de variations trop importantes des valeurs des grandeurs caractéristiques en proche paroi. Des variations temporelles de la vitesse débitante ou de la densité en proche paroi sont en effet rencontrées au cours de la simulation multi-niveaux. Les temps d'établissement d'un régime turbulent étant rallongés avec ce type de forçage, les calculs n'ont pas été poussés suffisamment loin pour obtenir un éventuel état stabilisé de l'écoulement. Il est donc difficile de conclure sur la cause principale des écarts observés et les améliorations à apporter à la méthode de raffinement afin de régler les problèmes rencontrés.

Ainsi, le problème du canal forcé reste non solutionné pour l'approche multi-niveaux sans que cela ne résulte nécessairement d'un mauvais fonctionnement de la méthode de raffinement. Celle-ci s'est en outre montrée efficace sur le cas du canal sans forçage.

Parmi les sujets de controverses qui persistent dans l'étude numérique du canal plan, le comportement des profils de vitesse longitudinale dans la zone logarithmique reste sujet à discussion. En effet, Moser *et al.* [96] ont montré que le comportement logarithmique de la vitesse moyenne longitudinale n'est pas toujours évident dans cette zone. En se référant aux travaux de George *et al.* [42] et Barenblatt *et al.* [4], ils envisagent une variation de la vitesse longitudinale suivant une loi en puissance $u^+ = A(z^+)^n$. Pour comparer les deux hypothèses, ils utilisent deux coefficients β et γ définis par :

$$\gamma = z^+ \frac{\partial u^+}{\partial z^+} \quad (8.20)$$

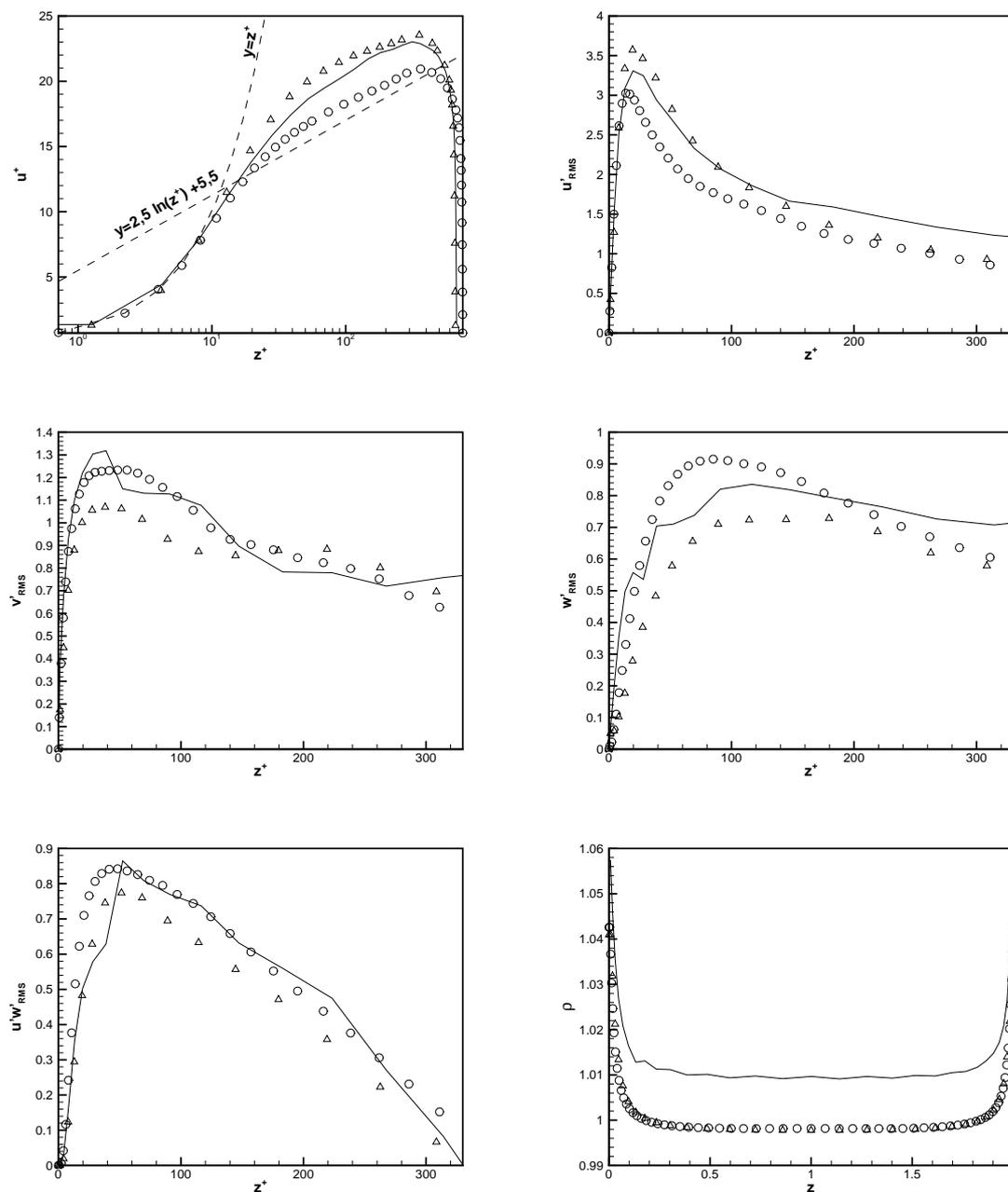


FIG. 8.42 – Simulations de canal plan forcé ; profils de statistiques turbulentes. \circ : maillage fin ; Δ : maillage grossier ; — : maillage adaptatif.

et

$$\beta = \frac{z^+}{u^+} \frac{\partial u^+}{\partial z^+} \quad (8.21)$$

Ainsi, en traçant l'évolution de ces deux variables dans la direction normale à la paroi, il est possible de savoir quelle loi de comportement privilégier pour la vitesse longitudinale. Si γ se stabilise autour d'un palier constant dans la zone logarithmique, la loi est effectivement de type logarithmique. Si c'est β qui se stabilise à une valeur constante, la loi de comportement sera en $(z^+)^n$ avec n donné par la valeur du palier.

Pour nos simulations de canal, la même procédure a été suivie. La figure 8.43 décrit les évolutions spatiales de γ et β obtenues dans notre étude pour les trois simulations réalisées pour le canal non forcé. Ces courbes mettent en évidence un palier pour la variable β au niveau de la zone externe, la valeur du palier étant voisine de 0,1. Ainsi, les simulations seraient plus proches d'un comportement en $(z^+)^{0,1}$ que d'une loi logarithmique en proche paroi. D'après Barenblatt [4], la valeur théorique de n est donné par $n_{th} = \frac{3}{2Re}$. Dans notre étude, la théorie donne donc $n_{th} \sim 0,113$, ce qui est comparable aux valeurs relevées pour les trois simulations.

Même si ces relevés concernent uniquement le canal non forcé, il est intéressant de constater que le profil logarithmique généralement admis pour le canal plan n'est pas retrouvé dans cette partie de l'étude. L'influence du terme de forçage sur la loi de comportement est cependant difficile à prévoir.

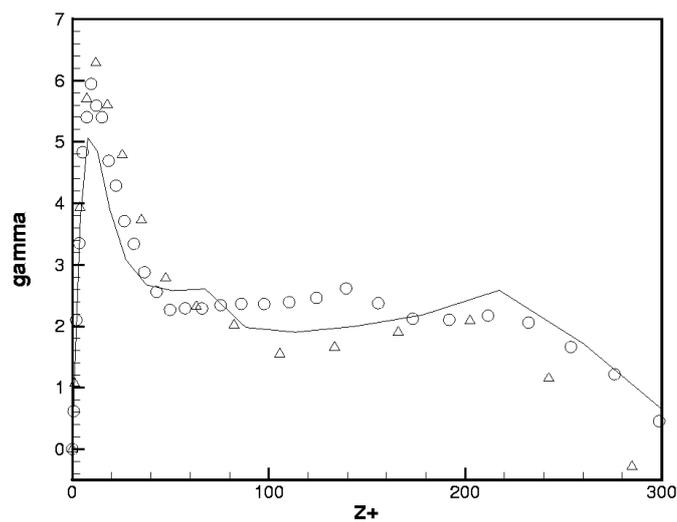
Dans le cas du canal forcé à débit constant, les profils de γ et β sont reportés sur la figure 8.44 pour les simulations de référence. Pour le calcul grossier, ni γ ni β ne semblent se rapprocher d'une valeur constante dans la zone logarithmique. Dans le même temps, le calcul sur le maillage fin permet l'obtention de profils de β et γ tendant tous deux à se stabiliser dans la zone externe, même si ce phénomène est moins marqué pour la variable γ . Le plateau se situe de nouveau autour de 0,1 pour β alors que γ se stabilise autour de la valeur 2,1, ce qui reste inférieur à la valeur 2,5 généralement admise pour la loi de comportement logarithmique.

En conclusion, il semble ainsi que la méthode de forçage joue un rôle sur la dynamique générale des couches limites présentes dans un écoulement de canal plan. Cependant, la tendance serait plutôt de considérer une loi en puissance pour la vitesse longitudinale en proche paroi dans les simulations réalisées dans cette étude.

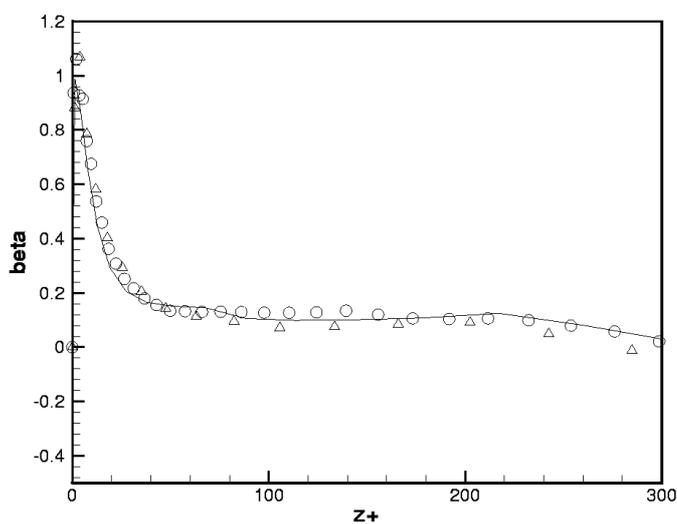
8.2.4 Conclusion partielle

Ce chapitre présente les simulations du développement temporel d'un écoulement de canal plan. Ce type d'écoulement est complexe à traiter en Simulation des Grandes Echelles, en particulier du fait de la présence de parois solides et de structures de petites tailles près de ces parois. Ces "streaks" fortement anisotropes sont en effet impossibles à modéliser avec précision à l'aide d'un modèle SGE et nécessitent ainsi généralement des cellules très fines en proche paroi pour les calculer convenablement. Afin de limiter le raffinement aux zones sensibles, on applique la stratégie d'adaptation de maillage mise au point pendant cette étude. Les calculs sont menés pour un nombre de Reynolds turbulent Re_τ égal à 395.

Le critère en ondelletes détecte des zones à raffiner situées près des parois solides. Les

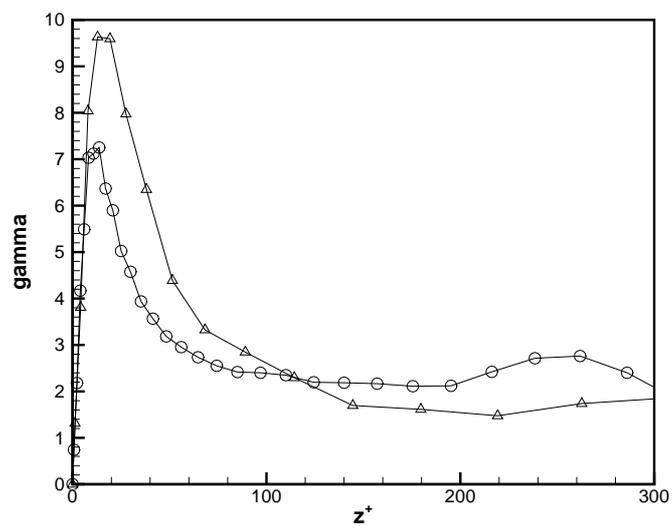


(a)

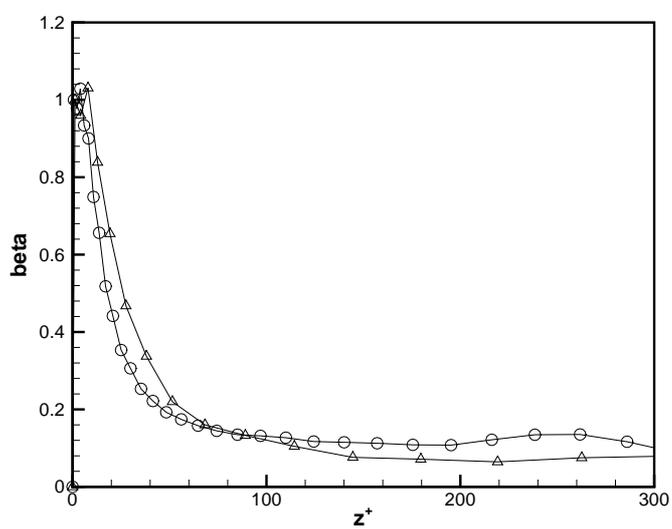


(b)

FIG. 8.43 – Profils de γ et β pour les calculs fin (o), grossier (Δ) et adapté (—) dans le cas du canal non forcé.



(a)



(b)

FIG. 8.44 – Profils de γ et β pour les calculs fin (\circ) et grossier (Δ) dans le cas du canal à débit constant.

cellules sélectionnées forment des ensembles allongés dans la direction de l'écoulement et visiblement placés de part et d'autre des streaks. Ces emplacements correspondent aux régions de l'écoulement à l'origine des transferts d'énergie dans les couches limites du canal.

Le principal problème rencontré lors de ces simulations de canal plan provient du terme de forçage qu'il est nécessaire d'imposer dans le cas d'un écoulement de canal en développement temporel afin d'entretenir l'écoulement et contrer la dissipation d'énergie provoquée par les frottements visqueux au niveau des parois. La problématique est de connaître le terme à utiliser sur les niveaux fins, sachant que les domaines fins ne recouvrent pas l'ensemble du domaine, ne permettant pas d'utiliser l'hypothèse de symétrie faite pour déterminer les caractéristiques du premier forçage. Il n'est alors possible d'utiliser que la deuxième méthode de forçage qui repose sur un terme constant et donc ne nécessite pas d'évaluation dynamique. Il ne permet par contre pas de conserver totalement le débit à une valeur constante et provoque un allongement du temps d'établissement de l'écoulement.

Pour pallier ce problème, la méthode d'adaptation a tout d'abord été confrontée au calcul sans terme de forçage. Celui-ci montre une bonne résolution des caractéristiques de l'écoulement de canal plan par le calcul multi-niveaux. Les grandeurs turbulentes, telles que le nombre de Reynolds turbulent, sont proches des valeurs nominales. La géométrie des structures tourbillonnaires est également bien restituée et les profils de statistiques turbulentes sont en accord avec ceux obtenus sur le maillage fin de référence. Cependant de légères différences subsistent pour les fluctuations de vitesse évaluées dans la zone centrale de l'écoulement. Cette région n'étant pas recouverte par les grilles fines, elle conserve un pas de discrétisation grossier, expliquant probablement les écarts constatés.

L'ajout du terme de forçage va provoquer des phénomènes indésirables. En particulier, les grandeurs turbulentes en proche paroi (taux de frottement, masse volumique) sont altérées par l'adaptation de maillage, ce qui peut être imputé à la stratégie d'enrichissement utilisée aux interfaces fin/grossier. Par ailleurs, des accumulations de structures près de ces interfaces ont été observées pour certaines valeurs de la constante d'enrichissement, ce qui pourrait faire songer aux "super-streaks" qui peuvent également être obtenus pour des calculs hybrides RANS/LES. La simulation de canal plan à l'aide de l'approche multi-niveaux reste ainsi à ce jour non solutionnée.

Une étude approfondie des profils de vitesse moyenne dans la direction longitudinale montre que ceux-ci tendent à se rapprocher d'avantage d'une loi en puissance que de la loi logarithmique couramment admise pour un écoulement de canal plan. Ceci est mis en évidence à la fois sur les trois calculs sans terme de forçage, et sur les calculs forcés de référence.

8.3 Culot

Le dernier cas d'étude abordé concerne l'écoulement décollé se formant en aval d'un culot. La configuration choisie est celle du culot bidimensionnel. L'intérêt principal de cette configuration est son faible coût numérique qui permet d'étudier réellement l'écoulement en développement spatial, ce qui est plus en adéquation avec les écoulements rencontrés dans l'industrie que les écoulements en développement temporel. Il est ainsi possible d'évaluer la capacité de la méthode de raffinement à suivre la progression des structures

en aval de leur apparition. Cependant, les données bibliographiques, tant expérimentales que numériques, sont plus limitées pour cet écoulement que pour les précédents. Néanmoins, le but étant de valider l’approche multi-niveaux pour la Simulation des Grandes Echelles en configuration “complexe”, cette étape paraît être une bonne transition entre les écoulements classiques évoqués plus haut et des configurations plus industrielles.

8.3.1 Physique de l’écoulement

Le principe général de ce type d’écoulement est d’étudier les phénomènes qui apparaissent en aval du bord de fuite du culot. En effet, le long des parois solides de part et d’autre de l’objet considéré, il se développe deux couches limites (laminaires ou turbulentes selon le cas d’étude) qui vont être amenées à décoller une fois le bord de fuite atteint. Des structures tourbillonnaires vont alors se développer dans le sillage de l’objet. Des études antérieures ont effectivement permis de mettre en évidence la présence de structures cohérentes au sein des écoulements de sillage se développant derrière des corps à géométrie bidimensionnelle [88, 120]. Ce phénomène *d’échappement tourbillonnaire* a ainsi été observé et étudié en détails pour des obstacles arrondis (cylindre à section circulaire) ou à bord d’attaque franc (cylindre à section carrée). On observe le même phénomène dans les écoulements de bord de fuite tronqué, comme le culot bidimensionnel. Dans cette configuration, le décollement est provoqué par le changement brusque de la géométrie au niveau du bord de fuite. On observe alors, dans le sillage, un phénomène connu sous le nom d’*allées de Von Karman* qui consiste en un enchaînement de rouleaux bidimensionnels dont la vorticité change alternativement de signe.

Par ailleurs, certaines études ont mis en évidence l’apparition de structures tridimensionnelles dans les écoulements de sillage. Ainsi, Grant [52] a montré expérimentalement l’apparition progressive de structures tridimensionnelles de forte intensité qui tendent à s’organiser en paires contrarotatives. L’existence de telles structures est par ailleurs confirmée dans des études plus récentes [101, 139].

La connaissance et la compréhension des phénomènes à l’origine de la formation et de l’évolution des structures tourbillonnaires pour ce type d’écoulement s’avèrent particulièrement riches d’enseignements dans le but de connaître les forces qui agissent sur le corps au voisinage du bord de fuite. La répartition de ces efforts est à l’origine du comportement vibratoire de l’objet et par conséquent de son rayonnement acoustique. De plus, un bruit acoustique est généré par l’interaction entre les tourbillons et les angles vifs du bord de fuite. Ainsi, ce type d’écoulement est un cas test intéressant pour les études aéroacoustiques comme celle de Manoha *et al.* [87].

8.3.2 Description de la simulation

La configuration de référence étudiée s’appuie sur trois domaines de calculs. Les deux premiers sont situés en amont du culot et permettent de suivre l’évolution des couches limites le long des parois de l’objet. Le troisième domaine, quant à lui, est placé en aval du bord de fuite dans le but de suivre l’évolution des tourbillons alternés dans le sillage de l’objet. Les dimensions des domaines amonts rapportées à l’épaisseur du culot $H = 10$ sont fixées à $13H \times 59, 5H \times 4H$ alors que le domaine en aval de l’objet a des dimensions de $30H \times 120H \times 4H$.

Les maillages employés pour ces trois domaines sont adaptés aux phénomènes que l’on

souhaite observer. Ainsi, un raffinement progressif dans le direction y est appliqué aux domaines 1 et 2 au fur et à mesure que l'on s'approche de la paroi solide. Un stretching des maillages de ces domaines amont est également appliqué dans la direction de l'écoulement afin d'assurer un raccord conforme vis à vis du troisième domaine à hauteur du culot.

Ce troisième domaine utilise également une variation du pas de discrétisation dans la direction longitudinale. Ceci a pour but, à la fois de raffiner le maillage près du bord de fuite de l'objet, mais aussi d'accroître la taille de maille près de la condition de sortie afin d'augmenter la dissipation liée au schéma et ainsi éviter au maximum les phénomènes de réflexion. Par ailleurs, le maillage voit son pas varier dans la direction (y) afin d'obtenir la meilleure résolution possible au niveau de la zone de sillage.

Les pas de discrétisation dans la direction transverse sont quant à eux constants pour les trois domaines de calcul.

Par la suite, trois maillages de référence seront utilisés : un maillage dit "fin", un "grossier" et un très grossier. Le nombre de cellules utilisées dans chacun de ces calculs est résumé dans le tableau 8.6.

calcul	domaines amonts	domaine aval	Nombre total de cellules
très grossier	$22 \times 18 \times 22$	$30 \times 50 \times 22$	$4,1712 \times 10^4$
grossier	$44 \times 36 \times 44$	$60 \times 100 \times 44$	$3,33696 \times 10^5$
fin	$88 \times 72 \times 88$	$120 \times 200 \times 88$	$2,669568 \times 10^6$

TAB. 8.6 – Maillages fin, grossier et très grossier

Les simulations sont réalisées pour un nombre de Reynolds $Re_H = 10000$ et un nombre de Reynolds de frottement $Re_\tau = 480$. La taille dans la direction verticale de la première maille à la paroi est fixée à $y^+ = 2$ pour le maillage fin, $y^+ = 4$ pour le maillage grossier et $y^+ = 8$ pour le maillage très grossier. Au niveau du raccord conforme entre les domaines amont et aval, la taille de maille dans la direction longitudinale est fixée à $x^+ = 30$ pour le maillage fin, $x^+ = 60$ pour le maillage grossier et $x^+ = 120$ pour le maillage très grossier.

Des conditions aux limites périodiques sont appliquées dans la direction transverse du fait du caractère fortement bidimensionnel de l'écoulement de culot. Au niveau des parois solides, une condition de paroi adiabatique est imposée. Une condition de sortie traitée à l'aide des variables caractéristiques est utilisée pour tous les domaines dans la direction (y).

Le même traitement est utilisé au niveau de la condition de sortie du troisième domaine. Cependant, il est possible d'ajouter un terme visant à éviter les réflexions au niveau des dernières cellules de ce domaine. Les réflexions semblent cependant suffisamment faibles dans les simulations réalisées pour ne pas utiliser cette dissipation artificielle. Les réflexions restent négligeables en particulier du fait de l'étirement imposé au maillage en sortie de domaine.

Enfin, au niveau de la condition d'entrée, deux possibilités ont été envisagées. La première consiste à appliquer un profil de couche limite laminaire en entrée des domaines 1 et 2. Ce profil va évoluer le long de la paroi solide avant de décoller au niveau du bord tronqué. Cependant, la longueur réduite des domaines en amont du culot ne permet pas aux couches limites de transitionner avant le point de décollement sur cette configuration. Cette condition aux limites basée sur un profil de couche limite laminaire sera nommée condition d'entrée "laminaire". La figure 8.47 montre que l'écoulement obtenu avec ce type

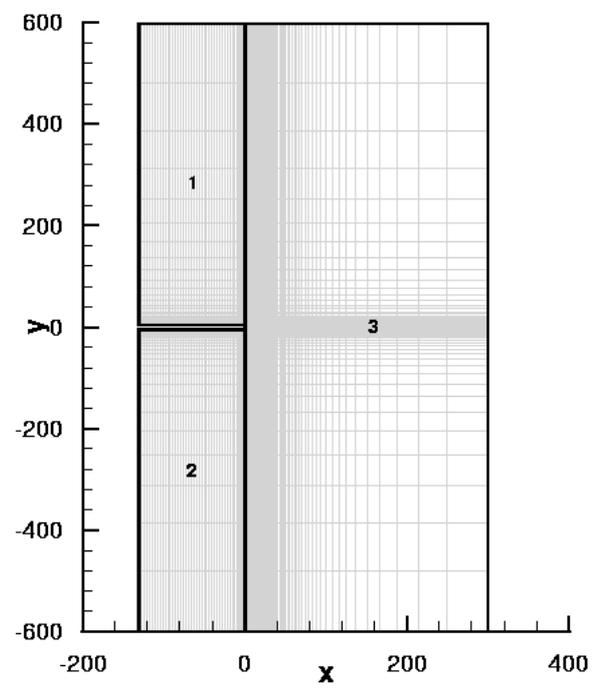


FIG. 8.45 – Ecoulement de culot : exemple de maillage de référence.

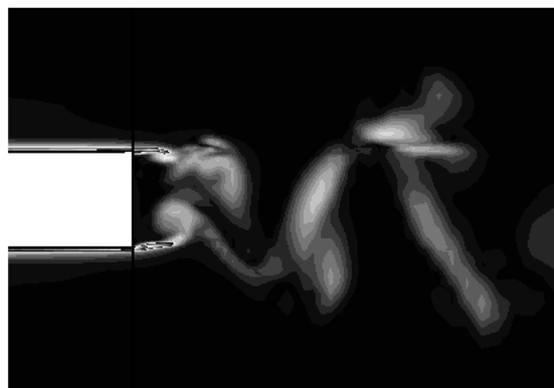


FIG. 8.46 – Ecoulement au voisinage du culot.

de condition d'entrée reste fortement bidimensionnelle et ne présente pas les structures qui caractérisent généralement une couche limite turbulente.

La seconde possibilité est d'ajouter à ce profil laminaire en entrée de domaine des structures du type de celles attendues dans les écoulements de proche paroi. Terracol [137] montre que ce type de condition aux limites permet de restituer à la fois les structures présentes dans une couche limite turbulente et les phénomènes acoustiques caractéristiques des écoulements de bord de fuite. La figure 8.48 permet de vérifier l'existence de structures allongées au niveau de la paroi. Ces structures similaires aux streaks obtenus précédemment sur la configuration de canal plan ont des longueurs caractéristiques de l'ordre de 1000 à 1200 unités de paroi sur le maillage fin. Cette seconde condition d'entrée est dite "turbulente". Le problème avec ce type de condition d'entrée réside dans la comparaison des résultats obtenus pour les différents maillages. En effet, le développement des streaks est fortement influencé par la taille de maille utilisée près des parois. Un maillage trop grossier tend ainsi à atténuer trop fortement les perturbations ajoutées en entrée de domaine pour obtenir convenablement les structures recherchées. La figure 8.48 montre ainsi deux organisations différentes des structures obtenues sur les deux maillages. On constate en particulier que l'allongement de ces structures sur le maillage grossier est plus important puisque ces structures couvrent la quasi-totalité du domaine dans la direction longitudinale. Il est alors impossible de retrouver une taille correcte pour ces structures sur le maillage grossier.

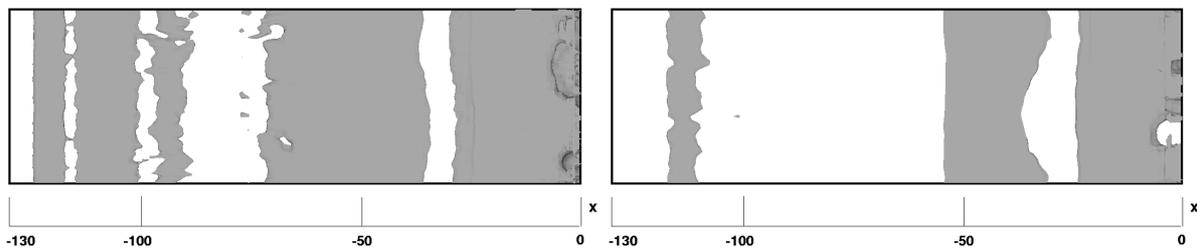


FIG. 8.47 – Écoulement en amont du culot avec condition d'entrée "laminaire" : iso-valeurs du critère Q ; gauche : maillage fin $Q = 1 \times 10^{-5}$; droite : maillage grossier $Q = 3 \times 10^{-5}$.

La figure 8.49 permet de comparer les tourbillons de Von Karman obtenus pour les deux types d'entrées utilisées. La figure 8.50 décrit le développement des couches limites pour ces deux entrées où l'on note que la différence concerne essentiellement la composante transverse de la vitesse et donc le caractère tridimensionnel de l'écoulement.

De ce fait, les calculs réalisés dans cette étude utiliseront la condition d'entrée laminaire, le but étant de comparer l'évolution des structures en aval de l'objet obtenue pour chacun des maillages utilisés. Les profils moyens de vitesse obtenus le long de l'objet pour les deux maillages de référence sont comparés sur la colonne de gauche de la figure 8.51. Seul l'écoulement à l'extrémité du culot, et donc influencé par l'écoulement aval, se distingue entre les deux calculs ; il est donc possible de comparer l'écoulement en aval du

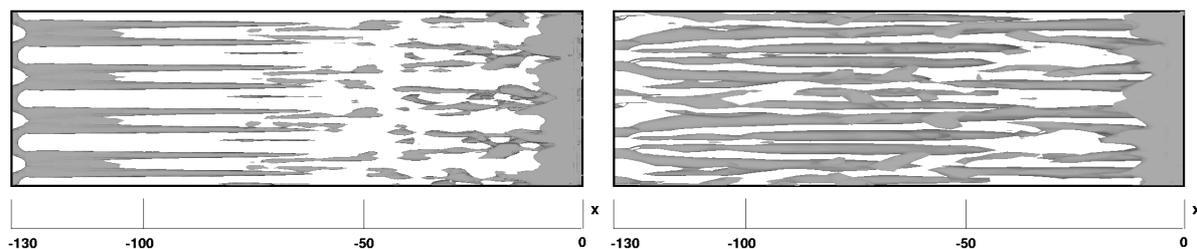


FIG. 8.48 – Ecoulement en amont du culot avec condition d'entrée "turbulente" : iso-valeurs du critère Q (9×10^{-5}) ; gauche : maillage fin ; droite : maillage grossier.

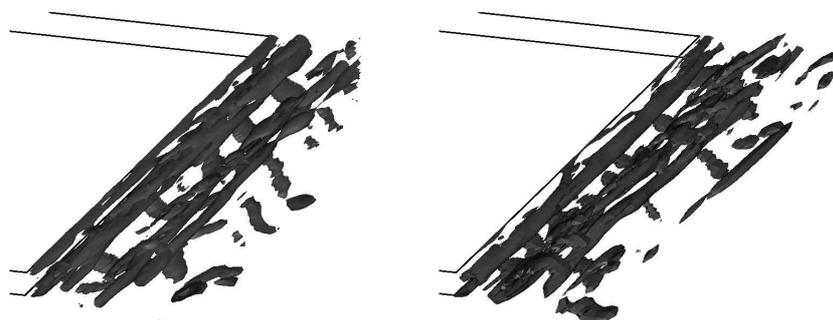


FIG. 8.49 – Visualisation 3D de l'écoulement (maillage grossier) : iso-valeurs du critère Q ; gauche : condition d'entrée *turbulente* ; droite : condition d'entrée *laminaire*.

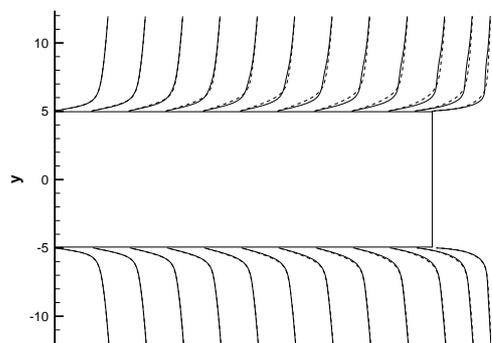
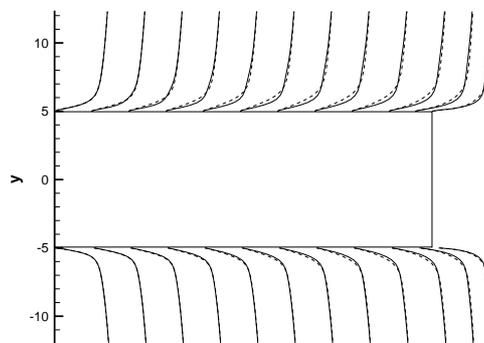
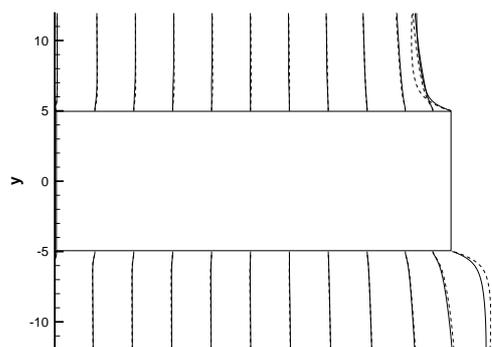
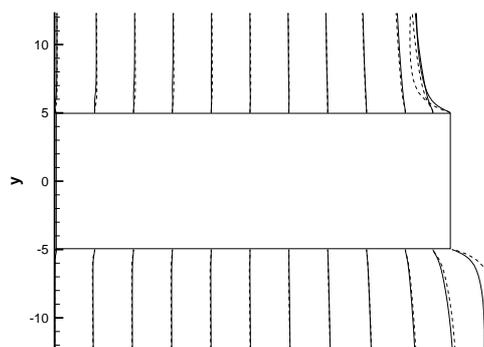
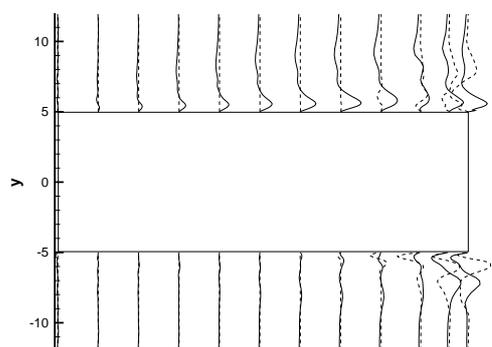
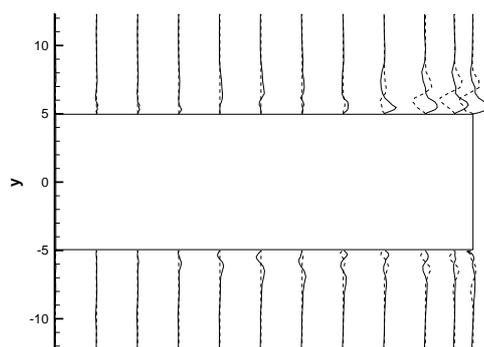
(a) $\langle u \rangle$, maillage fin(b) $\langle u \rangle$, maillage grossier(c) $\langle v \rangle$, maillage fin(d) $\langle v \rangle$, maillage grossier(e) $\langle w \rangle$, maillage fin(f) $\langle w \rangle$, maillage grossier

FIG. 8.50 – Comparaisons des profils de statistiques obtenus sur les domaines 1 et 2 avec des entrées “turbulente” (—) et “laminaire” (— —).

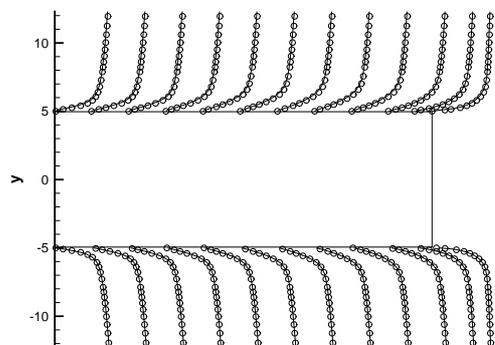
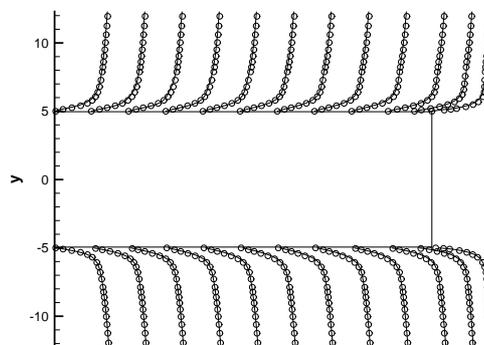
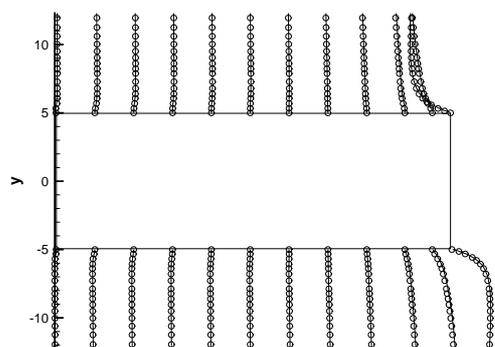
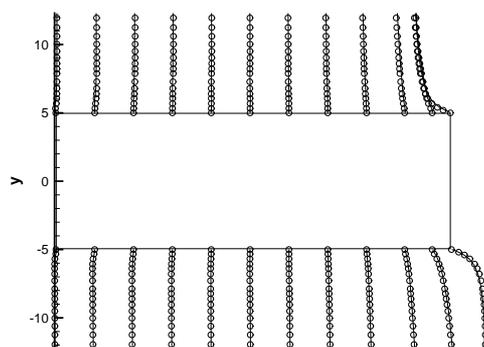
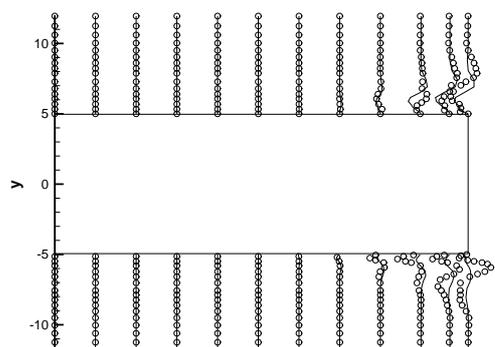
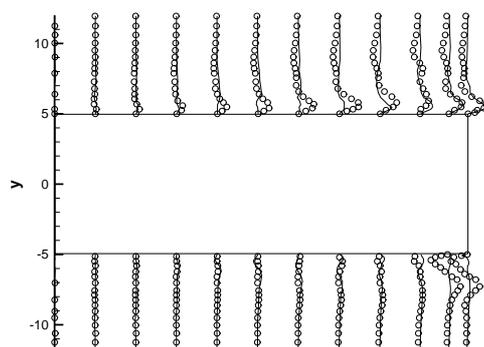
(a) $\langle u \rangle$, laminaire(b) $\langle u \rangle$, turbulent(c) $\langle v \rangle$, laminaire(d) $\langle v \rangle$, turbulent(e) $\langle w \rangle$, laminaire(f) $\langle w \rangle$, turbulent

FIG. 8.51 – Comparaisons des profils de statistiques obtenus sur les domaines 1 et 2 pour les calculs fin (\cdot) et grossier ($-$).

culot en partant de couches limites présentant des caractéristiques comparables sur les deux maillages.

De cette manière, les simulations de référence sur les grilles fine et grossière donnent lieu à des résultats très proches. Ceci confirme l'aptitude de la Simulation des Grandes Echelles à résoudre des écoulements libres. Afin de réellement mesurer l'apport de l'adaptation de maillage sur la simulation de culot, les simulations multi-niveaux vont s'appuyer sur un maillage de base "très grossier". Son pas de discrétisation est deux fois plus grand que le maillage grossier dans chacune des directions. Ainsi, les résultats peuvent être comparés à ceux obtenus sur les maillages grossier et très grossier.

8.3.3 Adaptation de maillage

Afin de limiter les sources d'erreur, le choix a été fait de ne considérer qu'une adaptation de maillage appliquée au troisième domaine. Aucun raffinement n'intervient au niveau des couches limites en amont du culot, ce qui explique qu'il serait délicat de comparer les résultats sur la configuration fine avec ceux obtenus sur une configuration adaptée en utilisant la condition d'entrée dite "turbulente". Pour la condition d'entrée dite "laminaire", la taille des cellules dans les domaines amonts ne devrait pas avoir une influence aussi importante sur la solution.

Au niveau de la détection des zones à raffiner, une simplification a été utilisée pour le calcul du critère en ondelettes. En effet, du fait du caractère fortement bidimensionnel de l'écoulement dans le sillage de l'objet, les coefficients en ondelettes sont moyennés dans la direction transverse pour ce cas d'étude. Le but essentiel de cette démarche est de simplifier l'organisation des grilles fines créées et d'éviter l'utilisation des conditions de raccords non conformes dans cette direction transverse. Il est en effet possible dans ce cas d'utiliser des conditions de prolongement par continuité pour les maillages fins dans la direction transverse ce qui limite les sources d'erreur. De plus, la stratégie de raffinement ne s'applique pas à la première cellule du troisième domaine, dans la direction longitudinale, du fait de la difficulté de traitement des conditions aux limites pour les grilles fines à cet endroit. Il faudrait en effet utiliser à la fois une condition de paroi au niveau du culot mais aussi un raccord non conforme avec les domaines amonts, ce qui pourrait s'avérer compliqué et source d'erreurs.

Au delà de ces hypothèses simplificatrices, la figure 8.52 permet de visualiser le comportement du senseur pour cet écoulement. Cette figure montre que le critère de raffinement désigne des structures qui ont tendance à s'allonger dans la direction longitudinale et qui relient les tourbillons transversaux entre eux. Le critère tend également à suivre l'évolution de ces structures dans la direction de l'écoulement même si ce suivi s'arrête au niveau de l'abscisse $10H$.

Les statistiques turbulentes obtenues avec les trois calculs réalisés sont reportées sur les figures 8.53 à 8.56 sur lesquelles sont tracés les iso-contours évalués en aval du culot. Au niveau des profils moyens de vitesse dans les directions (x) et (y) (figure 8.53), on observe peu de différence entre les trois calculs sur ce type de figure. Il semble cependant que les niveaux calculés sur le maillage adapté se rapprochent d'avantage de ceux obtenus sur le maillage grossier de référence. En particulier, les iso-contours pour la composante normale à la paroi sont mieux évalués près de l'axe entre les abscisses $x \sim 50$ et $x \sim 150$ avec le maillage adapté. Au niveau des fluctuations dans ces mêmes directions (figure 8.54), on observe un net gain de précision avec le calcul multi-niveaux par rapport au maillage très

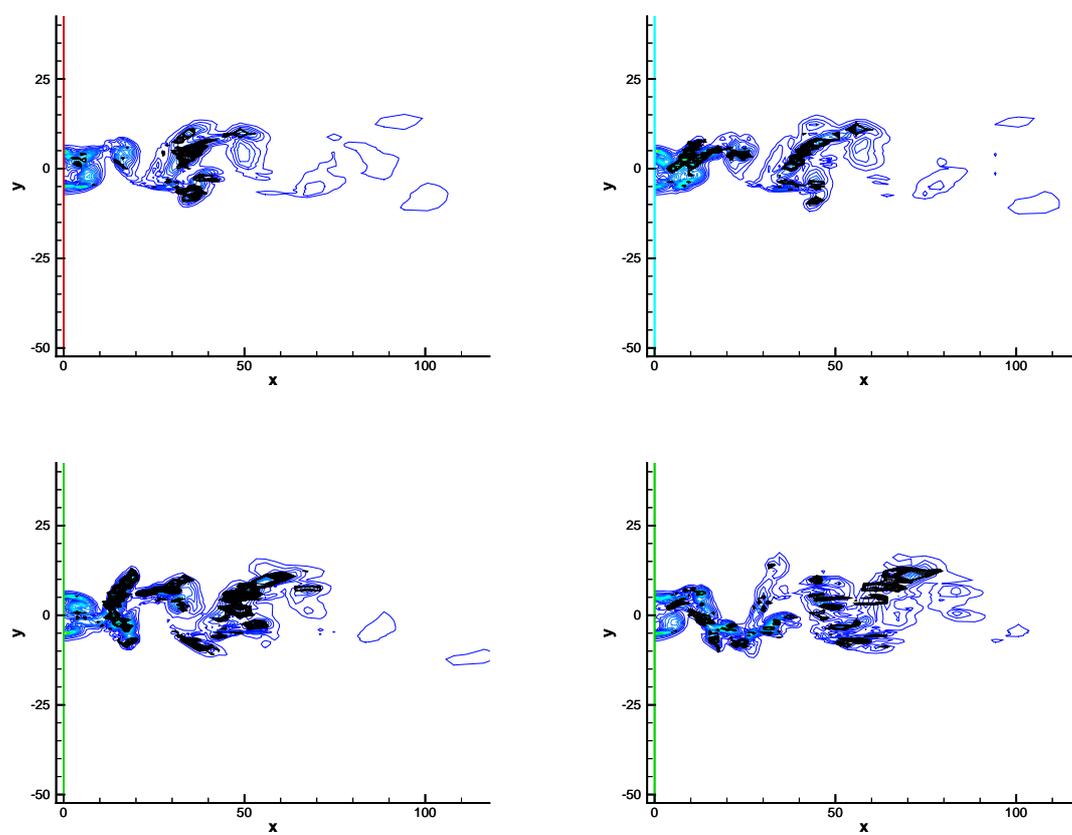


FIG. 8.52 – Comparaison de l'évolution du rotationnel de la vitesse (en bleu) et du critère de raffinement (en noir).

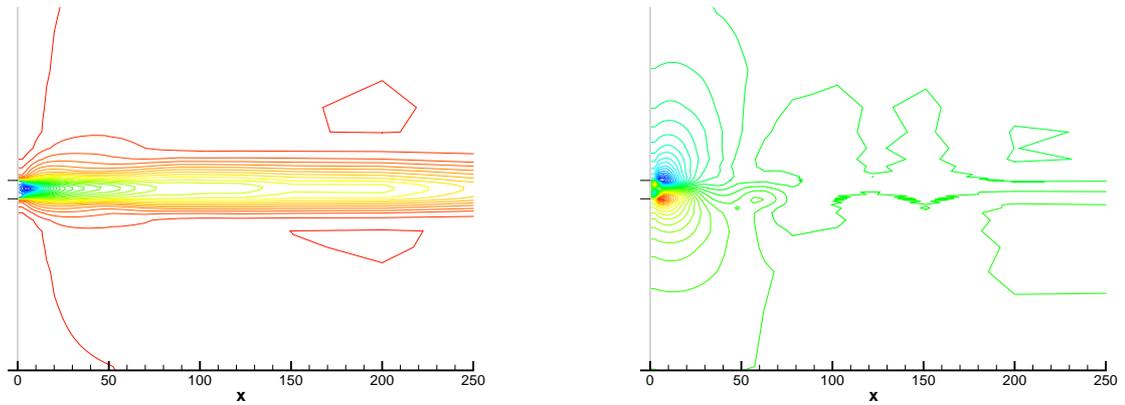
grossier. Il reste cependant des différences au niveau des premiers points en aval du culot ($x < 10$) qui s'expliquent par l'influence des couches limites qui se développent en amont du point de décollement et qui diffèrent entre les calculs grossiers et adaptés. Le fait que le raffinement ne s'applique pas au niveau de la première cellule en aval du culot peut également justifier ces écarts. Les mêmes conclusions peuvent être effectuées en comparant les iso-contours de pression et de masse volumique sur la figure 8.55. Ces deux variables sont en effet mieux représentées lorsque la méthode de raffinement est employée. Ceci est surtout visible dans le sillage proche de l'objet ($x < 200$), ce qui correspond aux zones réellement recouvertes par la méthode d'adaptation. Dans la direction transverse, tant au niveau des profils moyens que des fluctuations de vitesse, les iso-contours obtenus avec le calcul multi-niveaux restent voisins de ceux calculés sur le maillage très grossier. Ceci semblerait traduire une mauvaise restitution du caractère tridimensionnel de l'écoulement par la méthode de raffinement. Ce phénomène peut provenir des simplifications utilisées au niveau des conditions de raccord du niveau fin dans cette direction, l'utilisation de raccords conformes ne permettant pas d'enrichir la solution dans cette direction. On peut également imaginer que le développement des couches limites amont joue un rôle non négligeable sur la tridimensionnalité de l'écoulement ce qui expliquerait que le calcul adapté ne soit pas en mesure de restituer les mêmes statistiques turbulentes dans la direction transverse.

Ainsi, il semble que le calcul multi-niveaux permette de retrouver des résultats proches de ceux obtenus sur le calcul grossier au niveau de la zone de recouvrement désignée par le critère en ondelettes. Pour les premières cellules en aval du culot, les écarts sont plus importants, sans doute du fait de l'influence des couches limites en amont du point de décollement. De plus, le caractère tridimensionnel de l'écoulement semble plus prononcé sur le calcul grossier que dans les deux autres cas. Afin de valider ces premières constatations, les profils de statistiques sont détaillés pour trois abscisses différentes sur les figures 8.58 à 8.61. Ces trois abscisses sont reportées sur la figure 8.57.

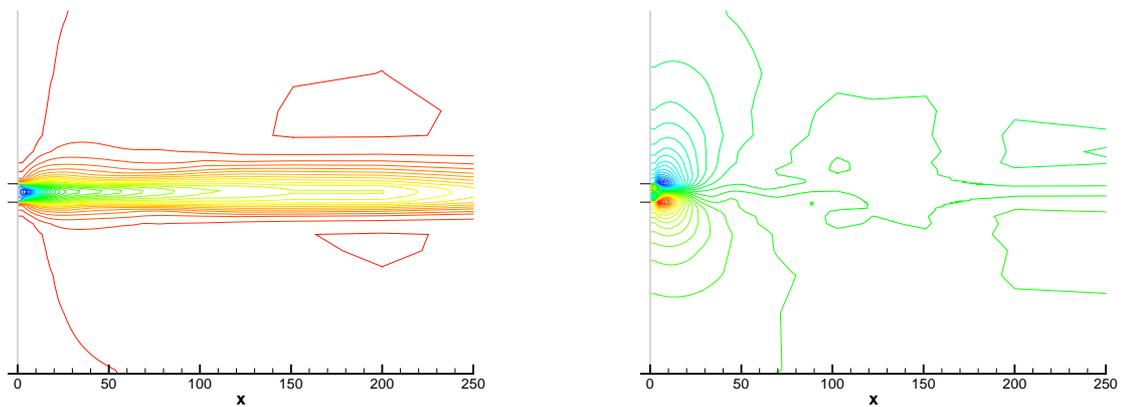
La figure 8.58 présente ainsi les profils moyens de la composante longitudinale de la vitesse ainsi que les fluctuations correspondantes. Les profils moyens dans cette direction sont très proches pour les trois calculs et l'adaptation de maillage ne semble pas apporter un gain significatif. Par contre au niveau des fluctuations, le calcul adapté permet de se rapprocher des profils obtenus sur le maillage grossier. La précision est particulièrement accrue pour les points les plus éloignés du point de décollement. Plus près du culot, les calculs adaptés et très grossier présentent les mêmes niveaux de fluctuations. Il est de nouveau possible que ce phénomène soit dû à la proximité des couches limites amont.

Dans la direction verticale, la vitesse moyenne reste très proche avec l'adaptation de maillage de ce qui a été calculé sur le maillage le plus grossier. On observe ainsi un très léger gain au niveau de la zone recouverte par le raffinement de maillage, mais l'apport n'est pas significatif. On observe également une précision accrue dans la zone centrale en $x \sim 48$. Par ailleurs, les fluctuations dans cette direction verticale sont très bien représentées sur le maillage multi-niveaux, en particulier pour les cellules situées dans la zone de recouvrement et en aval de celle-ci. Il semble ainsi que le mouvement moyen soit influencé de manière non négligeable par l'écoulement amont, tandis que les fluctuations de vitesse sont plutôt liées au pas local du maillage.

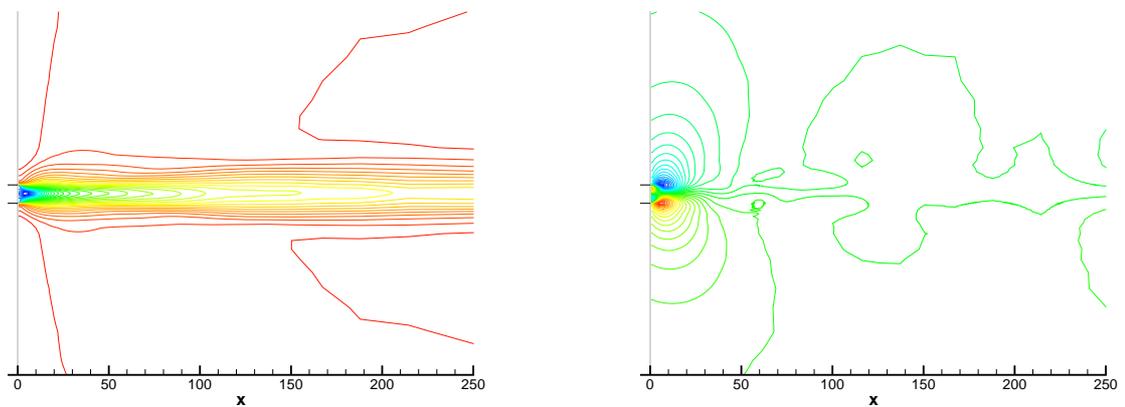
La figure 8.60 présente les variations de pression et de densité observées sur chacun des trois calculs. On observe une très bonne concordance entre les courbes obtenues sur le



(a) Calcul très grossier

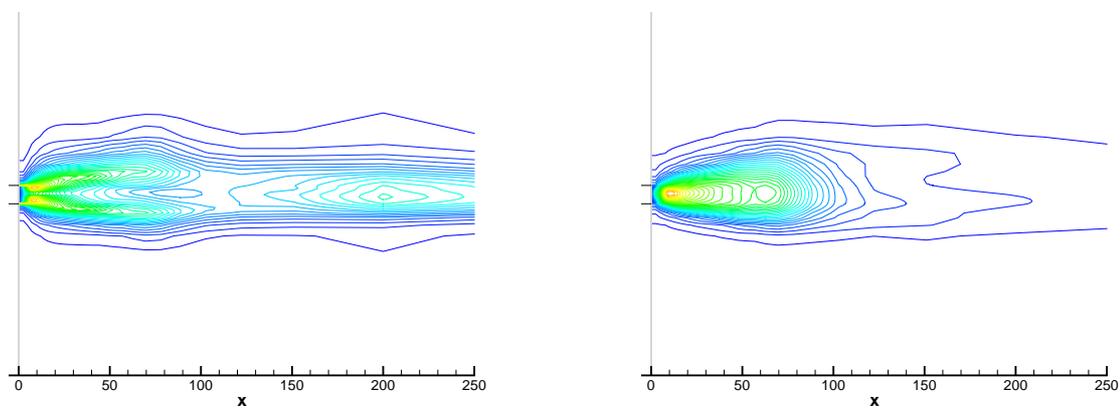


(b) Calcul adapté

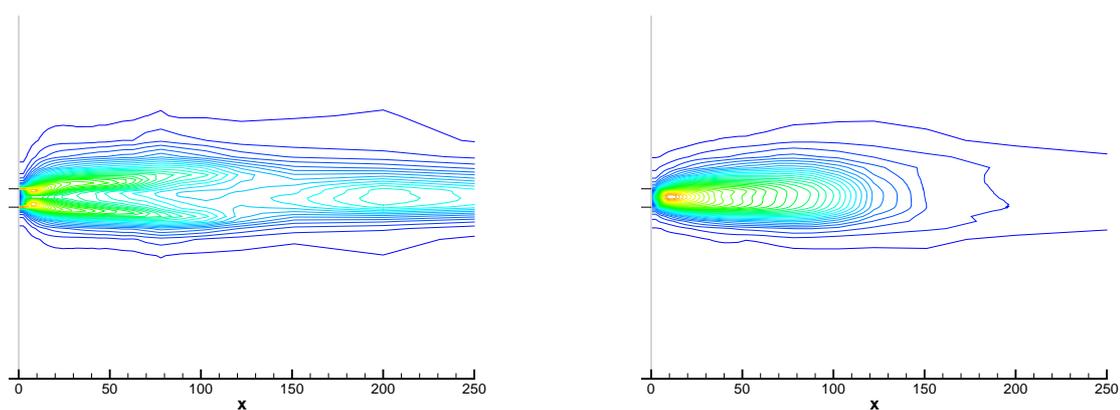


(c) Calcul grossier

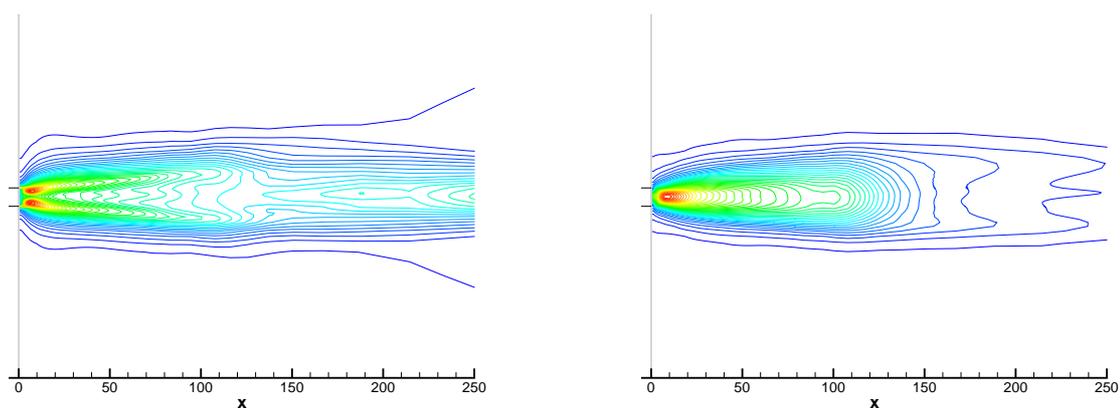
FIG. 8.53 – Profils des vitesses moyennes dans les directions longitudinale (gauche) et normale à la paroi (droite).



(a) Calcul très grossier

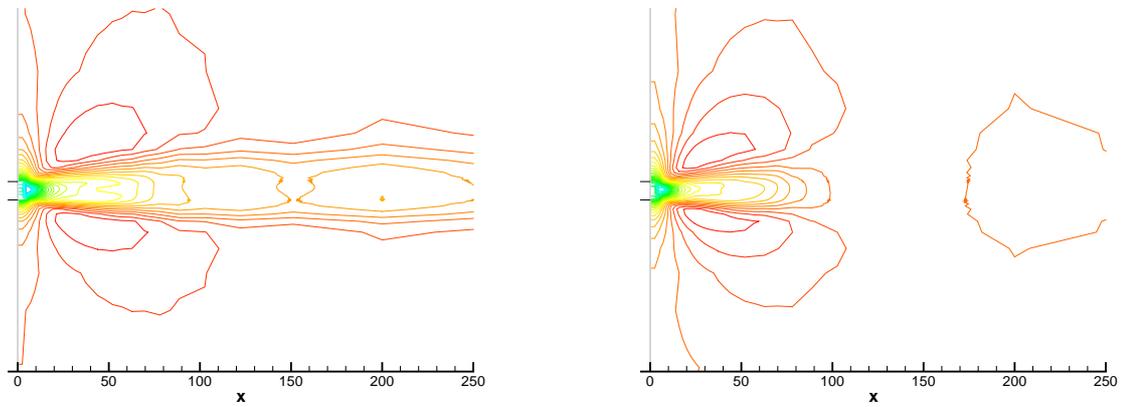


(b) Calcul adapté

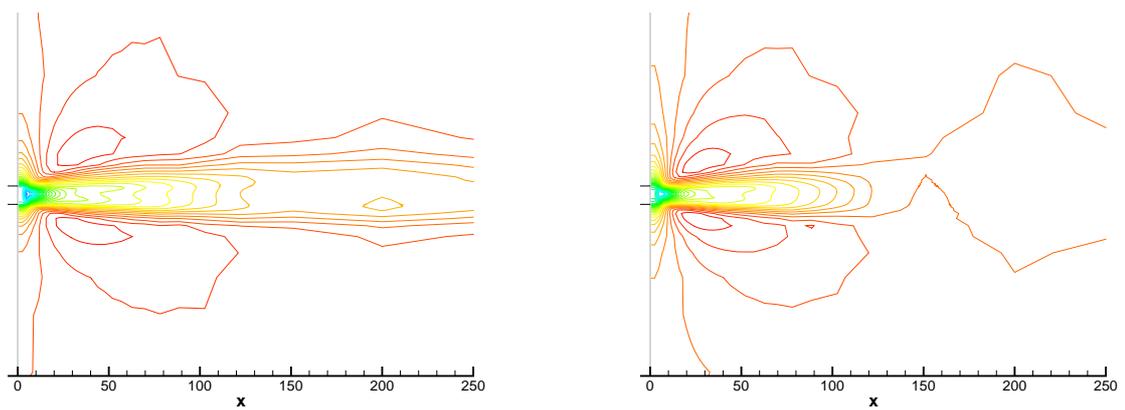


(c) Calcul grossier

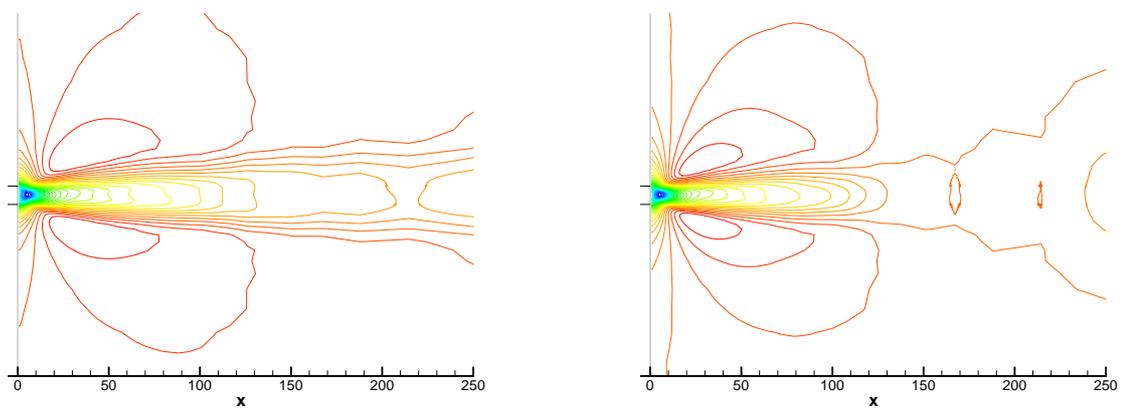
FIG. 8.54 – Profils de fluctuations de vitesse dans les directions longitudinale (gauche) et normale à la paroi (droite).



(a) Calcul très grossier

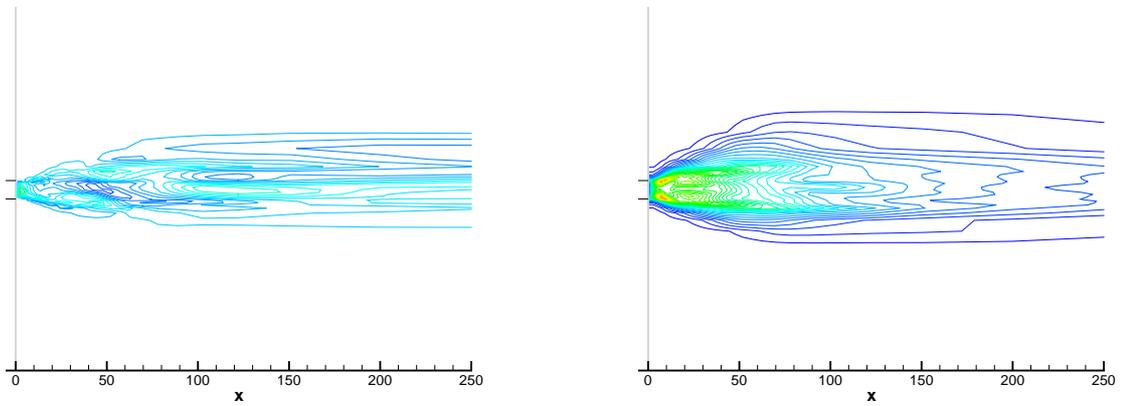


(b) Calcul adapté

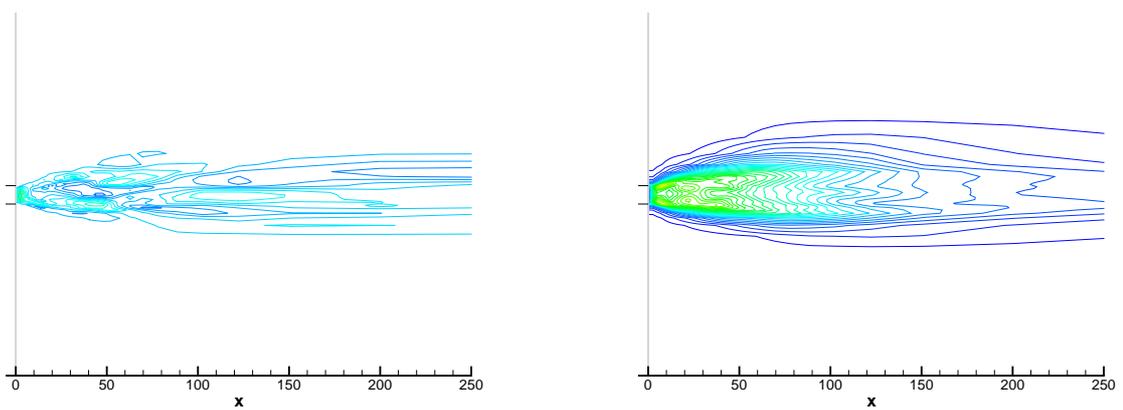


(c) Calcul grossier

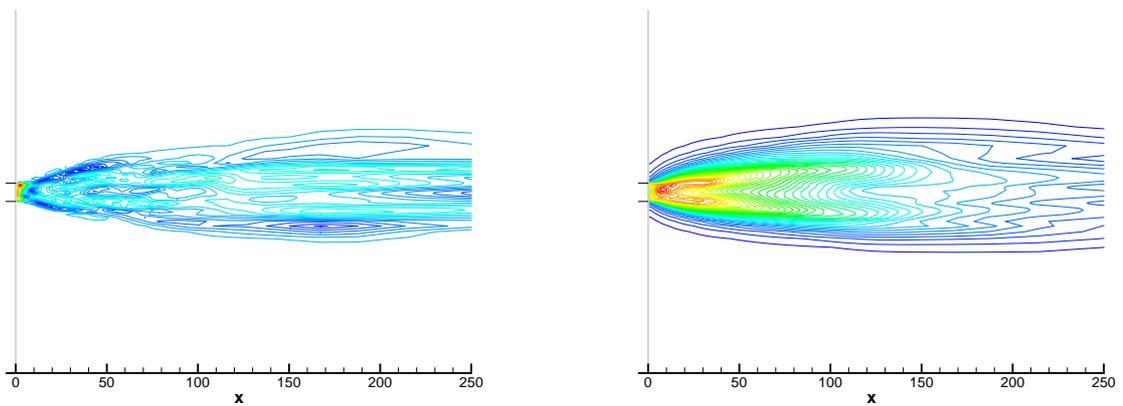
FIG. 8.55 – Profils de masse volumique (gauche) et de pression (droite).



(a) Calcul très grossier



(b) Calcul adapté



(c) Calcul grossier

FIG. 8.56 – Profils de vitesse moyenne (gauche) et de fluctuations de vitesse (droite) dans la direction transverse.

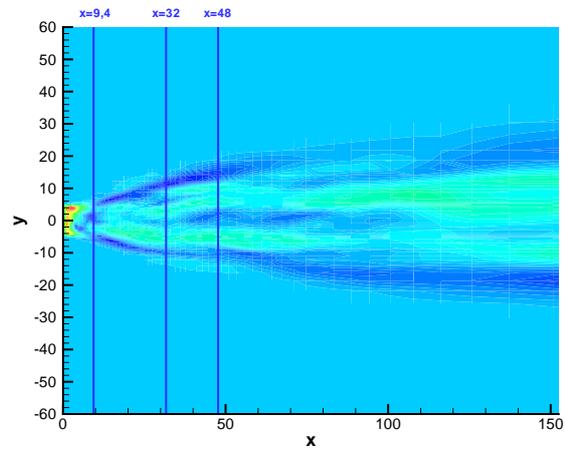
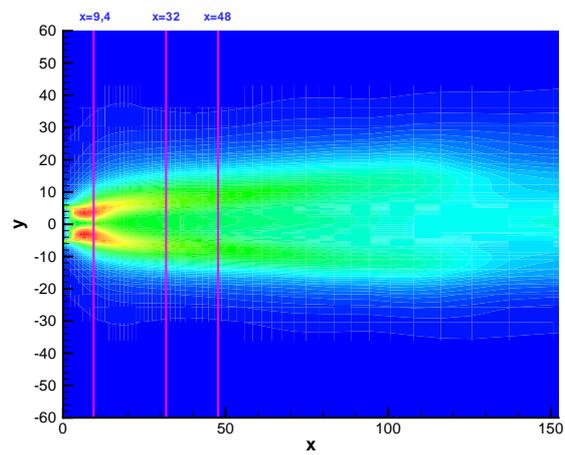
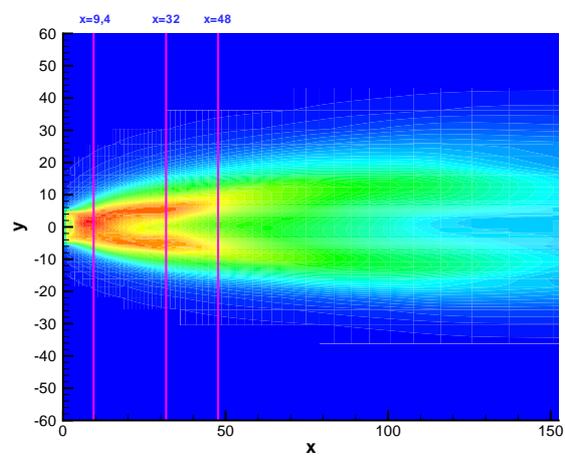
(a) $\langle w \rangle$ (b) u' (c) w'

FIG. 8.57 – Position des plans choisis pour le détail des profils de statistiques turbulentes.

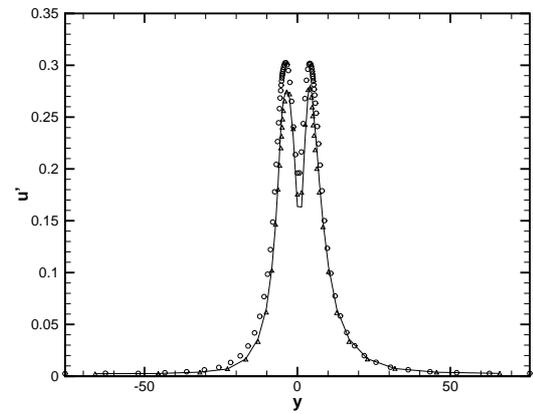
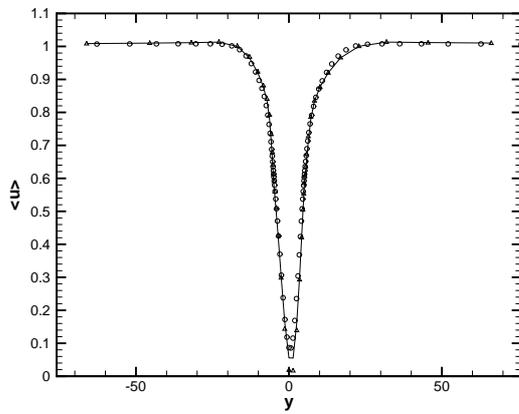
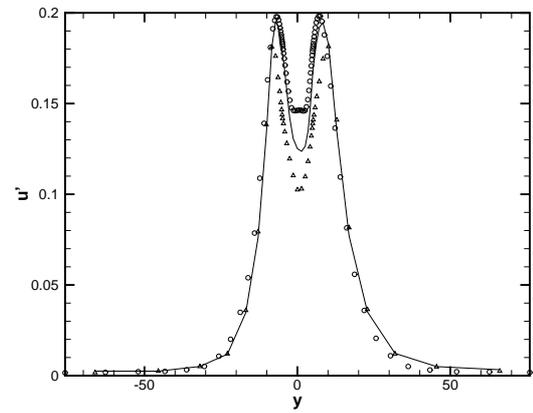
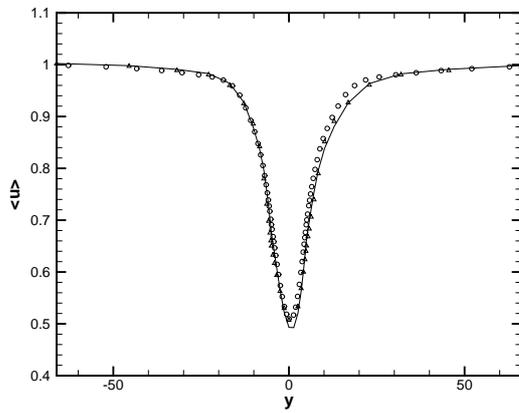
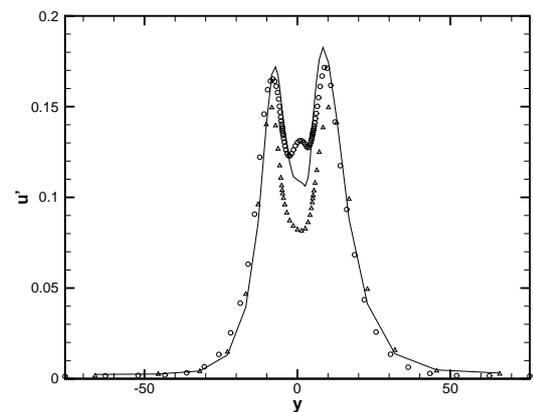
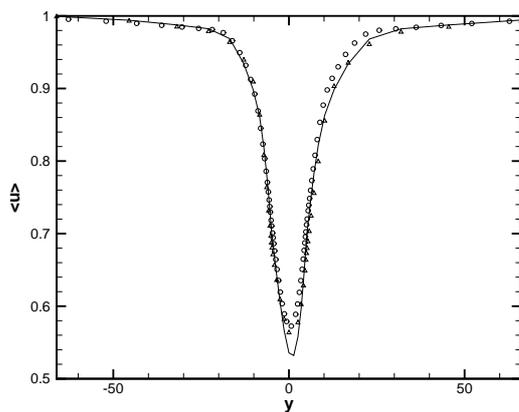
(a) $x \sim 9,4$ (b) $x \sim 32$ (c) $x \sim 48$

FIG. 8.58 – Comparaison des profils de vitesse moyenne longitudinale (gauche) et de fluctuations de vitesse longitudinale (droite) pour les calculs très grossier (Δ), grossier (\circ) et adapté (—) en trois abscisses différentes.

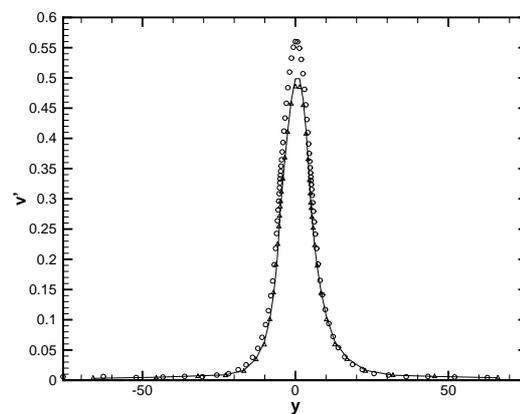
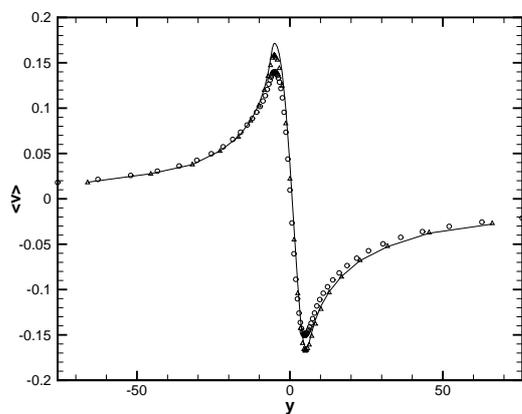
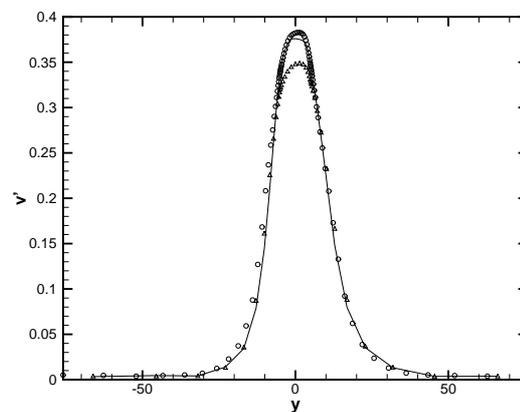
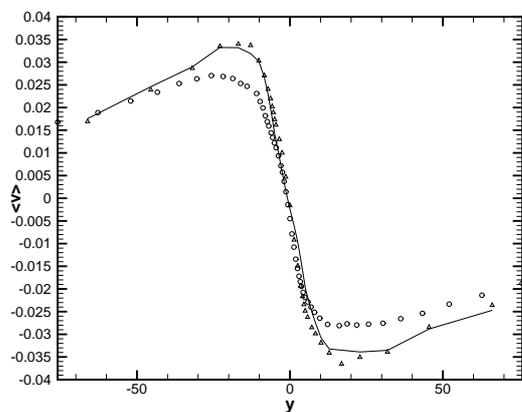
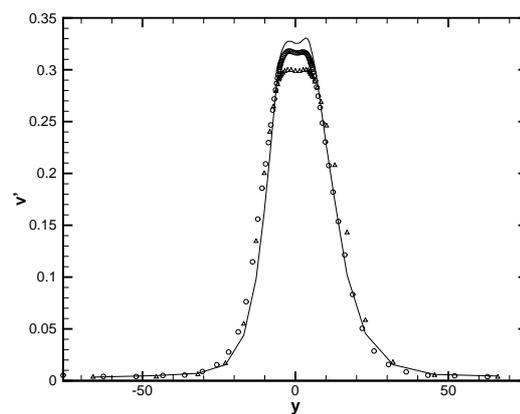
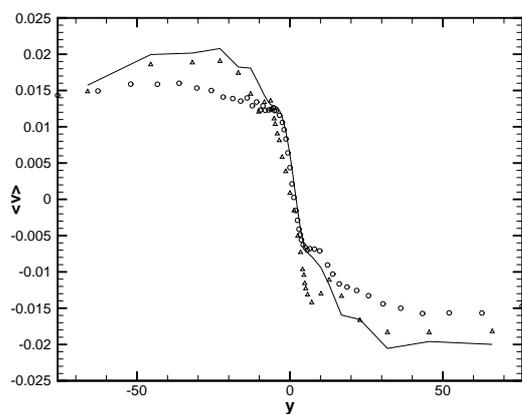
(a) $x \sim 9,4$ (b) $x \sim 32$ (c) $x \sim 48$

FIG. 8.59 – Comparaison des profils de vitesse moyenne verticale (gauche) et de fluctuations de vitesse verticale (droite) pour les calculs très grossier (Δ), grossier (\circ) et adapté (—) en trois abscisses différentes.

maillage grossier et celles calculées avec la méthode d'adaptation, en particulier au niveau du sillage de l'objet. Les niveaux sont ainsi bien estimés au niveau de la zone centrale de l'écoulement. En dehors de cette zone de sillage, on observe des niveaux plus proches de ceux observés sur le maillage très grossier, sans doute du fait que cette zone ne soit pas influencée directement par l'adaptation de maillage. Cependant les courbes obtenues montrent bien un apport non négligeable de la stratégie de raffinement.

Enfin, on vérifie le manque de précision de la méthode quant à la représentation du caractère 3D de l'écoulement sur la figure 8.61. En effet, les fluctuations dans la direction transverse w' obtenues avec la méthode d'adaptation sont proches de celles calculées sur le maillage très grossier. Un léger gain est cependant observé en $x = 48$, alors que plus en amont le gain est négligeable. De la même façon, le terme croisé du tenseur de Reynolds $u'v'$ n'est pas mieux évalué sur le maillage raffiné que sur le maillage très grossier.

8.3.4 Conclusion partielle

Ce dernier chapitre présente l'étude réalisée sur le cas de l'écoulement se formant dans le sillage d'un objet. Ce dernier présente, dans notre étude, une section rectangulaire et un bord de fuite (ou *culot*) tronqué. L'écoulement amont va, dans un premier temps, évoluer le long de la paroi de l'objet, donnant lieu à l'apparition d'une couche limite qui transitionne progressivement vers un état turbulent. Au niveau du bord de fuite, cette couche limite décolle et l'interaction des deux écoulements provenant des couches limites situées de part et d'autre de l'objet va donner lieu à un écoulement de sillage. On y distingue des tourbillons alternés, formant ce que l'on appelle une "allée de Von Karman".

L'apport de la méthode d'adaptation de maillage présentée dans ce mémoire a été testé sur cet écoulement se formant en aval de l'objet. L'objectif est alors de tirer profit de cette méthode pour optimiser le calcul de l'écoulement de sillage. Du fait du caractère fortement bidimensionnel de cet écoulement, les domaines fins sont forcés à s'étendre sur l'ensemble du domaine de base dans la direction transverse.

Le critère en ondelettes détecte des zones à raffiner proches de ce qui a été observé pour la couche de mélange. Il s'agit de structures allongées dans la direction de l'écoulement et qui relient les structures primaires entre elles.

En raffinant ces zones avec l'outil multi-niveaux développé, on observe un gain non négligeable de la solution, en particulier dans le sillage réel de l'objet. Cependant, pour les cellules situées trop près du culot, on n'observe pas un gain significatif, sûrement en grande partie du fait de la proximité des couches limites amont qui diffèrent en fonction de la résolution du maillage à leur niveau. On note également des écarts de précision dans la direction transverse qui peuvent être dues au traitement par raccord conforme des maillages fins dans cette direction.

Bien que certains points restent perfectibles pour ce cas de simulation, les premiers calculs montrent un gain intéressant de précision par rapport au maillage le plus grossier. Un traitement par enrichissement dans la direction transverse pourrait par ailleurs se montrer efficace afin de s'approcher au mieux de la solution de référence.

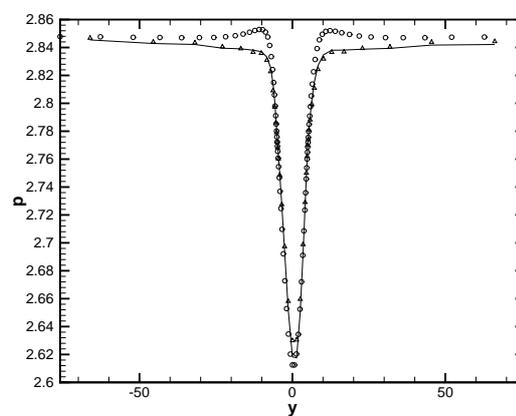
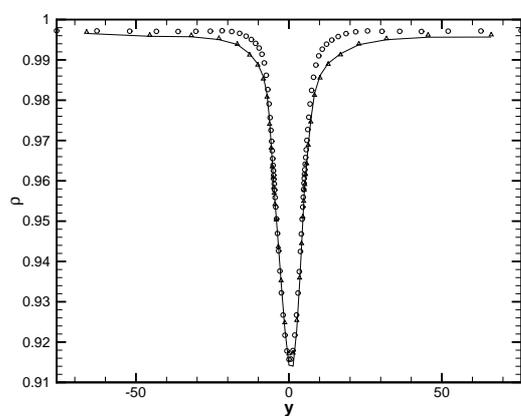
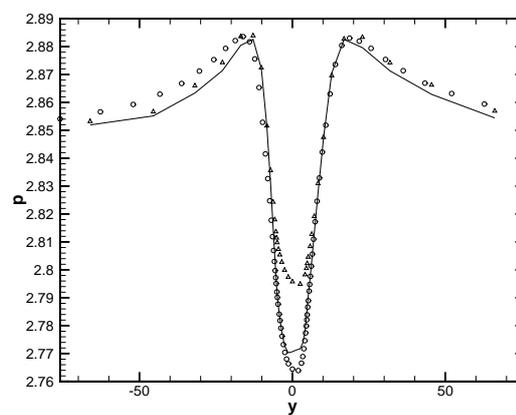
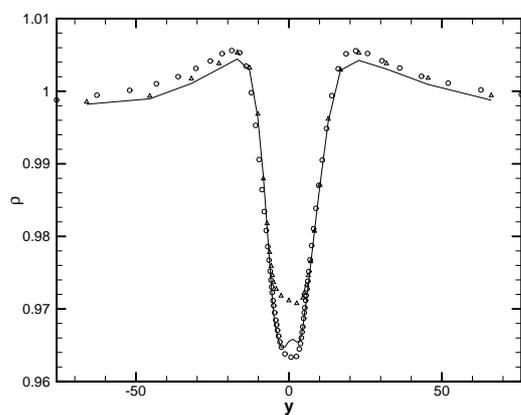
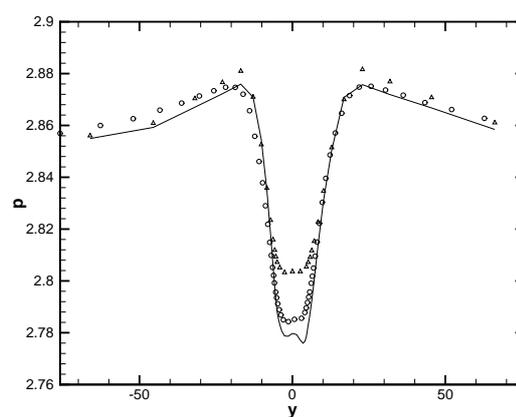
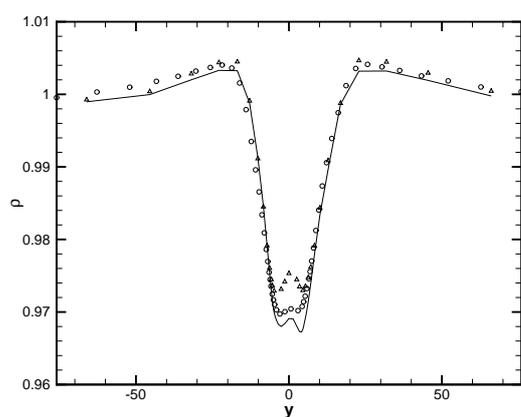
(a) $x \sim 9,4$ (b) $x \sim 32$ (c) $x \sim 48$

FIG. 8.60 – Comparaison des profils de masse volumique (gauche) et de pression (droite) pour les calculs très grossier (Δ), grossier (\circ) et adapté ($—$) en trois abscisses différentes.

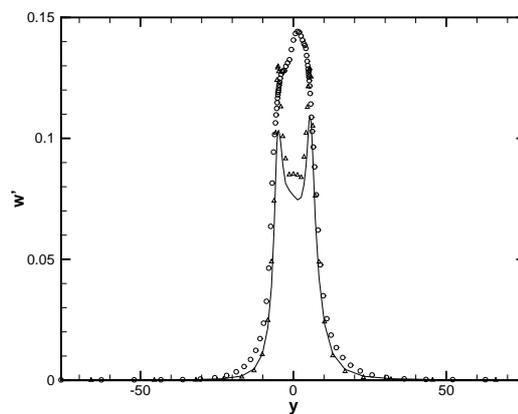
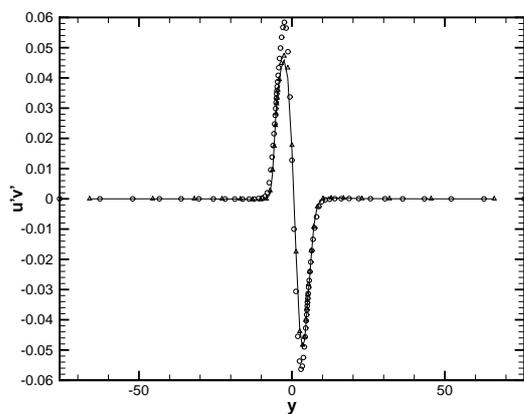
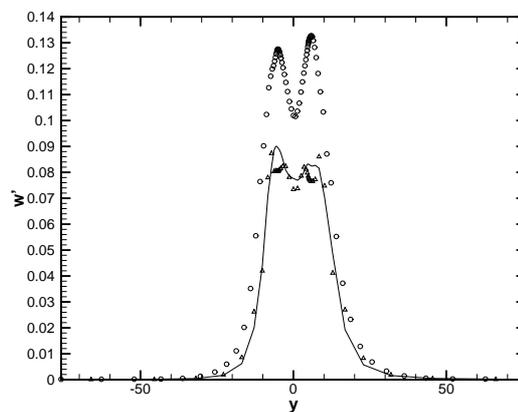
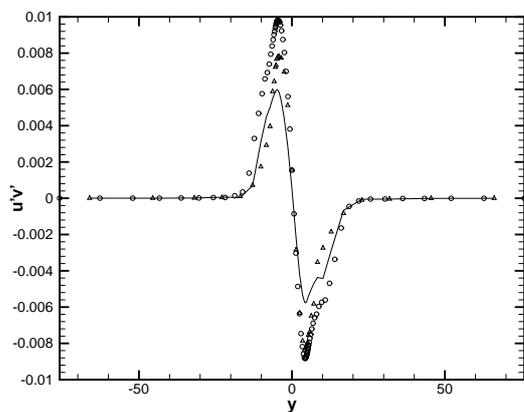
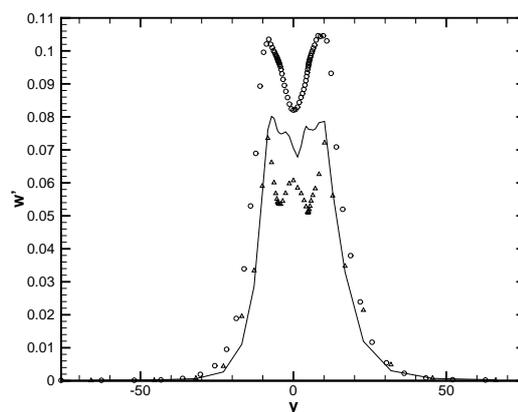
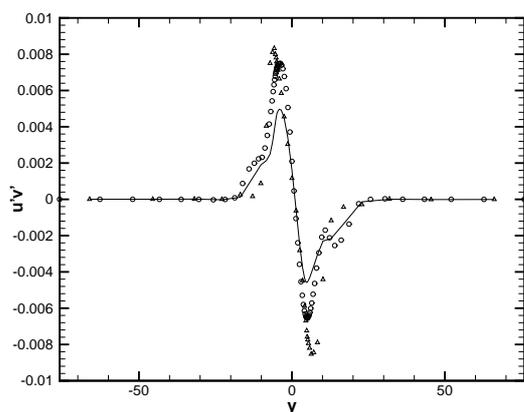
(a) $x \sim 9,4$ (b) $x \sim 32$ (c) $x \sim 48$

FIG. 8.61 – Comparaison des termes croisés du tenseur de Reynolds $u'v'$ (gauche) et des fluctuations de vitesse transverse (droite) pour les calculs très grossier (Δ), grossier (\circ) et adapté (—) en trois abscisses différentes.

Conclusion

L'objectif principal de cette thèse est d'évaluer l'apport des méthodes d'adaptation de maillages sur des calculs de Simulation des Grandes Echelles. Cette étude constitue une des premières approches concrètes de cette problématique. L'utilisation de maillages adaptatifs devrait permettre de diminuer les erreurs de modélisation inhérentes à la Simulation des Grandes Echelles, tout en conservant des coûts de calcul acceptables de manière à pouvoir étendre la SGE à des écoulements de plus en plus complexes.

L'idée à l'origine de ces travaux est qu'une augmentation locale de la précision du maillage doit permettre de réduire la quantité d'échelles à modéliser dans ces zones. On espère ainsi diminuer les erreurs de modélisation dans les zones de l'écoulement qui ne vérifient pas nécessairement les hypothèses de la SGE. En particulier, le caractère anisotrope des petites structures n'est pas nécessairement vérifié dans les écoulements en présence de parois solides.

Dans un premier temps, une approche théorique du problème a montré que le recours à des maillages à pas variables, tant spatialement que temporellement, entraîne l'apparition d'erreurs numériques supplémentaires, appelées *erreurs de commutation*. Ces erreurs sont dues à la non-commutation de l'opérateur de filtrage utilisé en SGE avec les opérateurs de dérivées en temps et en espace des équations de Navier-Stokes, en présence de tels maillages. Le problème lié à une variation spatiale du maillage ayant déjà été détaillé dans la littérature (par exemple [50, 143, 142, 63]), nos travaux proposent une étude approfondie de l'impact d'une variation temporelle du maillage. Il a ainsi été montré, à la fois par un développement mathématique et par un calcul numérique de Turbulence Homogène Isotrope, qu'il est indispensable de limiter la fréquence à laquelle le pas de discrétisation est modifié. Dans le cas contraire, l'erreur de commutation peut se montrer plus importante que l'erreur de modélisation sous-maille.

Dans un second temps, une méthodologie basée sur une décomposition multi-niveaux des variables de l'écoulement et visant à raffiner localement et de manière automatique le maillage a été développée. On utilise ainsi plusieurs niveaux de grilles, les maillages correspondants à un niveau donné recouvrant les maillages des niveaux plus grossiers. Cet outil doit permettre d'augmenter localement la précision du maillage afin de réduire les erreurs engendrées par le non-respect des hypothèses de modélisation. Pour cela, un critère de raffinement basé sur une décomposition en ondelettes du champ de vorticité est utilisé. Il vise à repérer les petites structures anisotropes de l'écoulement afin de créer une grille de niveau fin au niveau des cellules correspondantes. Un algorithme de remaillage est ensuite utilisé à intervalles de temps réguliers afin de rég ner les grilles de niveau fin. Dans cette étude, on limite toutefois à deux le nombre maximal de niveaux fins utilisés.

Le traitement des variables aux interfaces de couplage entre deux niveaux de grille de différentes résolutions tient compte explicitement de la discontinuité fréquentielle qui existe entre les différents niveaux. Un enrichissement direct en fréquence par extrapolation du champ grossier vers les grilles fines, inspiré des travaux de Quéméré [115], a été retenu dans cette étude. Les premiers calculs ont permis de fixer la valeur de la constante qui intervient dans cette procédure d'enrichissement.

Cette méthode d'adaptation de maillage a ensuite été appliquée à trois configurations d'écoulements afin de tester son intérêt en vue de calculs turbulents instationnaires. Ces simulations concernent l'écoulement de couche de mélange, le canal plan et l'écoulement se formant en aval d'un objet au bord de fuite tronqué.

Ces différentes simulations ont permis de valider le critère de raffinement développé dans le cadre de calculs de Simulation des Grandes Echelles. Celui-ci désigne en effet des structures de petite taille, allongées dans la direction de l'écoulement et par conséquent anisotropes. Les résultats des simulations multi-niveaux montrent alors un apport non négligeable de la procédure d'adaptation de maillage. Le cas de la couche de mélange se montre particulièrement bien résolu avec cette méthode tout en se basant sur un maillage initial grossier. Les profils de statistiques présentent ainsi le bon niveau de turbulence, aussi bien avec le modèle de Smagorinsky qu'avec le modèle d'échelle mixte. Une simulation avec deux niveaux de raffinement a également été réalisée et a montré de nouveau des résultats en très bon accord avec le calcul fin de référence. Dans le cas du canal plan non forcé, les profils de statistiques au niveau des couches limites sont bien évalués avec la méthode d'adaptation. Les fluctuations dans la zone centrale du canal sont, pour leur part, sources d'erreur, mais cette zone n'est pas raffinée et le maillage y reste probablement trop grossier pour représenter convenablement l'écoulement. Enfin, le cas de l'écoulement de culot se montre également bien représenté par la méthode multi-niveaux. Des erreurs persistent cependant dans la direction transverse, qui peuvent être dues aux simplifications apportées dans cette direction afin de limiter le nombre de domaines fins créés. Une étude poussée de l'influence de la condition limite dans cette direction pourrait alors s'avérer nécessaire pour cet écoulement.

Diverses perspectives sont ouvertes à la suite de cette étude. En premier lieu, il semble nécessaire de confronter la méthode à une machine permettant de réaliser des calculs parallèles afin de valider l'apport de la méthode au niveau des coûts de calcul. Pour cela, il convient d'adapter le code de calcul à ce type de calculateur. Il pourrait ensuite être intéressant de comparer le critère de raffinement basé sur les ondelettes à d'autres critères habituellement utilisés dans le cadre d'écoulements turbulents. Le problème du terme de forçage dans le cadre d'études multi-grilles locales semble également un sujet d'étude intéressant. Enfin, dans le but d'accroître la précision des calculs présentés dans ce mémoire, il faudrait étudier plus en détails la méthodologie proposée pour le traitement aux interfaces fin/grossier. La valeur attribuée à la constante d'enrichissement pourrait en effet avoir une influence non négligeable sur des écoulements confinés comme on a pu l'observer dans le cas du canal forcé.

Troisième partie

Annexes

Annexe A

Outils numériques

Cette annexe a pour but de présenter les schémas numériques utilisés dans l'étude afin de discrétiser les équations de Navier-Stokes filtrées. Afin de simplifier les expressions, les notations propres à la notion de filtrage seront volontairement omises dans cette annexe. Ainsi, les développements présentés ici porteront sur les équations filtrées mais sont facilement extensibles aux équations de la Simulation des Grandes Echelles. En effet, les termes sous-maille sont traités de la même façon que les termes visqueux du fait de l'utilisation de modèles à base de viscosité sous-maille.

Afin de détailler la méthode de discrétisation employée, on note par la suite les équations à intégrer sous leur forme compacte :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \nabla \cdot (F_c(V) - F_v(V)) = 0 \quad (\text{A.1})$$

où on rappelle que le vecteur V désigne le vecteur des variables conservatives. Les notations F_c et F_v désignent respectivement les flux convectifs et visqueux des équations :

$$F_c = \left(\rho U, \rho(U \otimes U) + p\bar{I}, (\rho E + p)U \right)^T \quad (\text{A.2})$$

$$F_v = (0, \sigma, \sigma : U - Q)^T \quad (\text{A.3})$$

– Code spectral

La simulation numérique de la Turbulence Homogène Isotrope est réalisée à l'aide d'un code de calcul dit *pseudo-spectral*. Cette désignation traduit le fait que l'on résout les équations de Navier-Stokes dans l'espace spectral, mais que le terme non-linéaire de ces équations nécessite un retour dans l'espace physique. En effet, le terme non-linéaire est simple à calculer dans l'espace physique puisqu'il s'agit d'un simple produit, alors que dans l'espace spectral, il faudrait procéder au calcul d'un produit de convolution.

Cependant, ce passage entre l'espace de Fourier et l'espace physique n'est pas sans poser un certain nombre de problèmes. En particulier, ce changement temporaire d'espace de travail entraîne l'apparition d'une erreur supplémentaire, appelée *erreur d'aliasing*. Celle-ci est due à un mélange des modes dans l'espace de Fourier, appelé repliement spectral. En effet, si une fonction u est donnée par sa série de Fourier $u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}_k e^{ikx}$, et que l'on impose à la série tronquée à N termes $u^N(x)$ de

prendre les mêmes valeurs que $u(x)$ aux points de collocation, il vient :

$$\sum_{k=-K}^K \hat{u}_k^N e^{ikx_j} = u(x_j) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}_k e^{ikx_j} \quad (\text{A.4})$$

c'est à dire

$$\sum_{k=-K}^K \hat{u}_k^N e^{ikx_j} = \sum_{k=-K}^K \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{u}_{k+pN} \right) e^{ikx_j} \quad (\text{A.5})$$

ou encore

$$\hat{u}_k^N = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{u}_{k+pN} \quad (\text{A.6})$$

Le coefficient \hat{u}_k^N contient alors \hat{u}_k mais aussi des termes "repliés" \hat{u}_{k+pN} ($p = \pm 1 \dots \pm \infty$). Ce phénomène intervient dès lors que des termes non-linéaires sont présents. Ainsi, si on s'intéresse à une fonction présentant N modes de nombres d'onde k tels que $|k| \leq K$, le carré de cette fonction contient les modes k tels que $|k| \leq 2K$. Or comme expliqué ci-dessus, la méthode de collocation est incapable de distinguer un mode k d'un mode $k \pm N$ pour le carré de u , et ces modes se trouvent alors mélangés. La résolution numérique est donc entachée de l'erreur provenant de ce repliement spectral.

Afin de remédier à ce problème, on utilise la méthode dite **des 2/3**. Il s'agit de sur-échantillonner la fonction étudiée et de ne conserver que les deux tiers premiers modes de cette échantillonnage. Les modes affectés par le repliement se retrouvent ainsi détruits par cette troncature, annulant par la même occasion l'erreur d'aliasing. Concernant la discrétisation temporelle, le code spectral employé dans ce mémoire fait appel au schéma explicite de Runge-Kutta d'ordre trois. Plus précisément, un schéma Runge-Kutta compact nécessitant deux tableaux de stockage par variable a été utilisé pour les simulations de Turbulence Homogène Isotrope. On rappelle que ce schéma s'appuie sur trois sous-itérations et la formulation retenue, pour l'intégration temporelle entre les itérations n et $n + 1$, s'écrit :

$$V^{(0)} = V^n \quad (\text{A.7})$$

$$V^{(k)} = V^{(k-1)} - \Delta t \gamma_k R_{k-1} \quad k = 1, 2, 3 \quad (\text{A.8})$$

$$V^{n+1} = V^{(3)} \quad (\text{A.9})$$

avec

$$R_0 = \mathcal{L}(V^{(0)}) \quad (\text{A.10})$$

$$R_1 = \mathcal{L}(V^{(1)}) + \xi_1 R_0 \quad (\text{A.11})$$

$$R_2 = \mathcal{L}(V^{(2)}) + \xi_2 R_1 \quad (\text{A.12})$$

où \mathcal{L} désigne l'opérateur de dérivée spatiale qui contient donc les flux visqueux et convectifs.

Les paramètres $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \xi_1$ et ξ_2 sont choisis en accord avec les travaux de Lowery

et Reynolds [83] :

$$\gamma_1 = 1/2 \quad (\text{A.13})$$

$$\gamma_2 = 0.9106836025 \quad (\text{A.14})$$

$$\gamma_3 = 0.3660254038 \quad (\text{A.15})$$

$$\xi_1 = -0.6830127019 \quad (\text{A.16})$$

$$\xi_2 = -4/3 \quad (\text{A.17})$$

– Code de volumes finis

Le schéma numérique utilisé dans la deuxième partie du mémoire est basé sur une discrétisation de type volumes finis des variables. La méthode adoptée est dite *cell-centered* c'est à dire que les inconnues du problème sont localisées au centre des cellules. En Simulation des Grandes Echelles, il a été montré qu'il est nécessaire d'avoir recours à des schémas de discrétisation spatiale qui soient au minimum d'ordre deux [48, 104].

Ainsi, les flux visqueux sont discrétisés à l'aide d'un schéma centré du second ordre. Les flux convectifs (ou flux d'Euler) nécessitent, quant à eux, un traitement spécifique. Garnier *et al.* [40] et Mossi [98] affirment que les schémas classiques (comme celui de Jameson par exemple), par nature dissipatifs, se révèlent être inadaptés à la Simulation des Grandes Echelles. En effet, de tels schémas procurent une dissipation qui peut être du même ordre de grandeur (voire supérieure) que celle apportée par le modèle sous-maille. Ceci a pour conséquence, non seulement, d'annuler l'effet du modèle sous-maille, mais aussi de dégrader la dynamique des grandes échelles. Afin de conserver un schéma qui soit à la fois non dissipatif et stable, Mary et Sagaut [90] ont proposé d'optimiser le schéma hybride centré/décentré, appelé AUSM+(P), initialement développé par Edwards et Liu [32], en vue de son application sur des calculs de Simulation des Grandes Echelles. Le principe de ce schéma est de limiter l'utilisation d'un décentrement aux zones instables de l'écoulement. Pour cela, ils utilisent un senseur dont le but est de détecter ces zones affectées par des oscillations et pour lesquelles il est intéressant d'utiliser un schéma décentré.

Ce schéma s'inspire du schéma de capture de choc AUSM+ de Liu et Steffen [81] qui s'appuie sur une séparation du flux F_c en un terme visqueux et un terme de pression aux interfaces : $F_c = F_{conv} + P$. Le schéma AUSM+(P) va alors permettre d'optimiser la précision et le coût numérique au niveau du calcul de F_{conv} . Pour des soucis de notations, on omettra ici l'indice c pour le flux convectif : $F = F_c$. Le flux convectif dans une direction j , au niveau de l'interface $i + 1/2$ est alors exprimé à l'aide de :

$$F_j^{i+1/2} = U(Q_{jL} + Q_{jR})/2 - |U_{dis}|(Q_{jR} - Q_{jL})/2 + P_j \quad (\text{A.18})$$

Les indices L et R désignent respectivement l'état gauche et l'état droit de part et d'autre de l'interface. Le vecteur Q contient les variables conservatives de l'écoulement. Le terme de pression P_j est évalué au niveau de l'interface à partir des

pressions de chaque coté de celui-ci :

$$P_j = \frac{\bar{p}_R + \bar{p}_L}{2} (0, \delta_{2j}, \delta_{3j}, \delta_{4j}, 0)^t \quad (\text{A.19})$$

La variable U représente la vitesse de déplacement de l'interface définie par $U = 0.5 (\tilde{u}_R + \tilde{u}_L) \cdot \vec{n}^{i+1/2} - c_2 (\bar{p}_R - \bar{p}_L)$ où c_2 est une constante. Enfin, le senseur mentionné ci-dessus intervient au niveau du terme U_{dis} :

$$U_{dis} = \Phi \max(|U|, c_1) \quad (\text{A.20})$$

où c_1 est une autre constante et Φ est une fonction binaire qui joue le rôle de senseur. Si aucune oscillation n'est détectée sur une variable primitive $\psi = (\bar{p}, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \bar{p})^t$ au niveau de la cellule i alors $\Phi = 0$ aux interfaces $i + \frac{1}{2}$ et $i - \frac{1}{2}$, sinon Φ passe à un. Cette fonction Φ est déterminée à l'aide des relations suivantes :

$$\Delta_\phi^k = \begin{cases} -1 & \text{si } (\phi_{k+1} - \phi_k)(\phi_{k+2} - \phi_{k+1}) < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

$$W_{\psi_i} = \begin{cases} 1 & \text{si } \Delta_{\psi_i}^k + \Delta_{\psi_i}^{k+1} < 0 \quad \text{ou} \quad \Delta_{\psi_i}^k + \Delta_{\psi_i}^{k-1} < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

$$\Phi = \max(W_{\psi_i}) \quad \text{pour } i = 1, 5 \quad (\text{A.23})$$

Pour finir, le schéma en temps est identique à celui utilisé dans le code spectral, à savoir une intégration explicite à l'aide du schéma compact de Runge-Kutta d'ordre trois.

Annexe B

Modèles sous-maille dynamiques

Afin d'éviter le caractère empirique de certains modèles, des procédures dynamiques de modification des différents paramètres de ces modèles ont été développées. Typiquement, le modèle de Smagorinsky fait partie de ces modèles non universels sous sa forme citée précédemment, du fait de l'apparition de la constante C_s fixée de manière arbitraire et qui peut être amenée à varier en fonction de l'écoulement considéré. Afin de mieux représenter la structure de l'écoulement à l'aide de ce modèle, Germano *et al.* [45] choisissent d'évaluer le coefficient C_s de manière dynamique et de l'adapter localement en temps et en espace au cours de la simulation. Cette procédure peut ensuite être étendue à l'ensemble des modèles faisant intervenir un coefficient empirique dans leur expression. Germano [44] a tout d'abord décidé d'appliquer un deuxième niveau de filtrage aux équations de Navier-Stokes. Ce filtre "test", que l'on note par exemple F ou encore $\hat{\cdot}$, est choisi tel que sa longueur de coupure soit supérieure à celle du filtre réel $\hat{\Delta} > \overline{\Delta}$. On peut alors exprimer les composantes du tenseur des contraintes sous-maille au niveau de filtrage FG :

$$T_{ij} = \widehat{\rho u_i u_j} - \frac{\widehat{\rho u_i} \cdot \widehat{\rho u_j}}{\widehat{\rho}} = \widehat{\rho u_i u_j} - \frac{\widehat{\rho u_i} \cdot \widehat{\rho u_j}}{\widehat{\rho}} \quad (\text{B.1})$$

On introduit alors un autre tenseur \mathcal{L} , appelé tenseur de Leonard [74], qui a la même structure que la relation précédente portant sur le tenseur T , mais qui est fondée uniquement sur des informations directement calculables :

$$\mathcal{L}_{ij} = \widehat{\widehat{\rho u_i u_j}} - \frac{\widehat{\widehat{\rho u_i}} \cdot \widehat{\widehat{\rho u_j}}}{\widehat{\widehat{\rho}}} \quad (\text{B.2})$$

Finalement, la relation de Germano permet de relier les tenseurs τ , \mathcal{L} et T et s'écrit :

$$T_{ij} = \mathcal{L}_{ij} + \widehat{\tau_{ij}} \quad (\text{B.3})$$

Cette égalité est exacte et indépendante du modèle qui sera ensuite introduit.

On peut généraliser cette relation au cas de toute fonction non linéaire f appliquée à un champ quelconque V :

$$\widehat{f(\widehat{V})} - f(\widehat{\widehat{V}}) = \left(\widehat{f(\widehat{V})} - f(\widehat{\widehat{V}}) \right) - \left(\widehat{f(\widehat{V})} - f(\widehat{V}) \right) \quad (\text{B.4})$$

que l'on peut réécrire à l'aide du commutateur (1.30) :

$$[F\star, f](G\star V) = [F\star G\star, f](V) - F\star [G\star, f](V) \quad (\text{B.5})$$

La modélisation dynamique de Germano *et al.* [45] consiste, dans un premier temps, à modéliser les tenseurs des contraintes sous-maille associés aux niveaux de filtrage G et FG à l'aide d'un modèle de Smagorinsky, en remplaçant la constante empirique C_s^2 par un coefficient C_d que l'on va chercher à évaluer. Ainsi, à l'aide de (2.3) et (2.1), les parties déviatrices de ces tenseurs vont s'écrire :

$$\tau_{ij}^d = -2\bar{\rho}C_d(\bar{\Delta})^2|\tilde{S}|\tilde{S}_{ij}^d \quad (\text{B.6})$$

$$T_{ij}^d = -2\hat{\rho}C_d(\hat{\Delta})^2 \left| \frac{\widehat{\rho S}}{\hat{\rho}} \right| \left(\frac{\widehat{\rho S_{ij}}}{\hat{\rho}} \right)^d \quad (\text{B.7})$$

En supposant que la valeur de C_d varie peu sur la gamme d'échelles associées à $[\bar{\Delta}; \hat{\Delta}]$, ce coefficient va alors pouvoir être sorti de l'intégrale lorsque l'on va appliquer le filtre F au tenseur des contraintes sous-mailles τ . Ainsi, on peut écrire la relation de Germano à l'aide de ce coefficient grâce à :

$$\mathcal{L}_{ij}^d = -2C_d M_{ij} \quad (\text{B.8})$$

avec

$$M_{ij} = \hat{\rho} \left(\hat{\Delta}^2 \left| \frac{\widehat{\rho S}}{\hat{\rho}} \right| \left(\frac{\widehat{\rho S_{ij}}}{\hat{\rho}} \right)^d - \bar{\Delta}^2 |\tilde{S}| \tilde{S}_{ij}^d \right) \quad (\text{B.9})$$

Dans le but de résoudre le système (B.8), il apparaît nécessaire de le convoluer par un tenseur, noté B , dans le but de s'assurer que l'on évalue un unique coefficient C_d . En effet, du fait de la symétrie des tenseurs M et \mathcal{L} , le respect de (B.8) devrait introduire six coefficients, ce qui n'est pas le but recherché ici. Il reste donc à déterminer un tenseur B à employer afin de se ramener à l'évaluation de la valeur du coefficient C_d . Germano *et al.* [45] choisissent $B_{ij} = \tilde{S}_{ij}$ alors que Lilly [80] propose de modifier la procédure afin d'éviter le choix de ce tenseur B . Lilly propose en effet de résoudre le système (B.8) en introduisant le résidu E_{ij} :

$$E_{ij} = \mathcal{L}_{ij}^d + 2C_d M_{ij} \quad (\text{B.10})$$

On va alors chercher à déterminer la valeur à attribuer à C_d de manière à minimiser ce résidu, au sens des moindres carrées :

$$\frac{\partial E_{ij} E_{ij}}{\partial C_d} = 0 \quad (\text{B.11})$$

Ce critère conduit à l'expression suivante pour le coefficient C_d :

$$C_d = -\frac{\mathcal{L}_{ij}^d M_{ij}}{2M_{ij} M_{ij}} \quad (\text{B.12})$$

Bien que la minimisation moindres carrées conditionne relativement bien le système, une expression purement locale de C_d peut s'avérer instable, en particulier si le dénominateur tend vers zéro ou si des valeurs non physiques fortement négatives de ce coefficient sont obtenues. On peut alors choisir de borner les valeurs de C_d (par exemple

$C_d = \min(0, C_d)$, ou moyenner directement C_d ou le dénominateur et le numérateur suivant les directions homogènes de l'écoulement. Nous optons ici pour cette dernière solution, à savoir l'introduction d'un opérateur de moyenne noté $\langle . \rangle$ que l'on applique au numérateur et au dénominateur afin d'éviter des instabilités numériques trop importantes. Dans le cas de la THI, il s'agit d'une moyenne sur tout l'espace de calcul qui détermine un coefficient indépendant de \mathbf{x} .

$$C_d = -\frac{1 \langle \mathcal{L}_{ij}^d M_{ij} \rangle}{2 \langle M_{ij} M_{ij} \rangle} \quad (\text{B.13})$$

De plus, d'un point de vue théorique, le modèle n'est pas consistant puisqu'il utilise l'hypothèse de faible variation de C_d sur la gamme d'échelles correspondant aux niveaux de filtrage G et FG , alors que les simulations révèlent des fluctuations importantes.

Ghosal *et al.* [49], Meneveau *et al.* [91], Ducros *et al.* [30], ou encore Piomelli *et al.* [112] ont ainsi proposé d'autres méthodes plus complexes et plus coûteuses visant à déterminer un C_d non local tout en stabilisant son évaluation.

Par ailleurs, Nagele et Wittum [102] proposent de moyenner la constante également en temps afin d'assurer la stabilité, à l'aide d'un filtre passe-bas de la forme :

$$C_d^{n+1} = (1 - \epsilon)C_d^{n+1} + \epsilon C_d^n \quad (\text{B.14})$$

Concernant le choix du filtre test, Spyropoulos et Blaisdell [134] montrent sur un cas de THI que le choix $\widehat{\Delta} = 2\overline{\Delta}$ est optimal, même si ce choix a une influence relativement faible.

Annexe C

Terme de forçage

Dans la cadre du canal plan, le recours à un terme de forçage s'avère indispensable afin d'entretenir l'écoulement et ainsi palier la perte du terme moteur classique (gradient de pression) du fait du recours à des conditions aux limites périodiques. Ce terme de forçage va agir sur les équations filtrées. Plus précisément, le système d'équations filtrées va s'écrire, dans le cas du canal plan :

$$\frac{\partial}{\partial t} \widehat{V}^{(n)} + \mathcal{N} \left(\widehat{V}^{(n)} \right) = -\mathcal{T}^{(n)} - \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{K}^{(n)} + \mathbf{F}^{(n)} \quad (\text{C.1})$$

Le vecteur $\mathbf{F}^{(n)}$ désigne le terme de forçage appliqué à l'écoulement dans la direction longitudinale :

$$\mathbf{F}^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_1^{(n)} \\ 0 \\ 0 \\ f_1^{(n)} \tilde{u}_1^{(n)} \end{pmatrix} \quad (\text{C.2})$$

La méthode adoptée ici consiste à évaluer de manière dynamique le vecteur $\mathbf{F}^{(n)}$ afin d'assurer la conservation du débit massique de l'écoulement au cours du calcul. Cette approche a été proposée, dans un premier temps, par Deschamps [29, 28] dans le cas incompressible, et fut étendue ensuite au cas compressible par Lenormand *et al.* [71, 72]. Le débit massique de l'écoulement $Q^{(n)}$ au niveau n s'obtient par intégration dans le plan $x - z$ de la composante longitudinale de la quantité de mouvement moyennée suivant le plan homogène $x - y$:

$$Q^{(n)} = \int_0^{L_z} \int_0^{L_y} \langle \bar{\rho}^{(n)} \tilde{u}_1^{(n)} \rangle dy dz \quad (\text{C.3})$$

où la notation $\langle \cdot \rangle$ désigne la moyenne dans un plan $x - y$.

Par intégration de l'équation de conservation de la composante longitudinale de la quantité de mouvement filtrée, on obtient l'équation d'évolution pour le débit massique $Q^{(n)}$:

$$\frac{\partial Q^{(n)}}{\partial t} = L_y \left[\left\langle \mu(\tilde{T}^{(n)}) \right\rangle \frac{\partial \langle \tilde{u}_1^{(n)} \rangle}{\partial z} \right]_0^{L_z} + L_y L_z f_1^{(n)} \quad (\text{C.4})$$

ou encore en supposant l'écoulement moyen symétrique :

$$\frac{\partial Q^{(n)}}{\partial t} = -2L_y \left\langle \mu(\tilde{T}^{(n)}) \right\rangle \frac{\partial \left\langle \tilde{u}_1^{(n)} \right\rangle}{\partial z} \Bigg|_0 + L_y L_z f_1^{(n)} \quad (\text{C.5})$$

Ainsi, à l'aide d'une discrétisation en temps précise à l'ordre un, on obtient une estimation du débit à l'instant $t + \Delta t$:

$$Q^{(n)}(t + \Delta t) = Q^{(n)}(t) + \Delta t \left(-2L_y \left\langle \mu(\tilde{T}^{(n)}) \right\rangle \frac{\partial \left\langle \tilde{u}_1^{(n)} \right\rangle}{\partial z} \Bigg|_0 + L_y L_z f_1^{(n)} \right) \quad (\text{C.6})$$

Le terme de forçage $f_1^{(n)}$ peut alors être évalué en s'appuyant sur un algorithme à un niveau de mémoire :

$$\begin{aligned} f_1^{(n)}(t + \Delta t) = f_1^{(n)}(t) &+ \frac{\alpha}{L_y L_z} (Q^{(n)}(t + \Delta t) - Q^{(n)}(t_0)) \\ &+ \frac{\beta}{L_y L_z} (Q^{(n)}(t) - Q^{(n)}(t_0)) \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

où $Q^{(n)}(t_0)$ désigne le débit à l'instant initial.

À l'instant initial t_0 , l'algorithme est initialisé en attribuant la valeur suivante au terme de forçage :

$$f_1^{(n)}(t_0) = \frac{2}{L_z} \left\langle \mu(\tilde{T}^{(n)}(t_0)) \right\rangle \frac{\partial \left\langle \tilde{u}_1^{(n)}(t_0) \right\rangle}{\partial z} \Bigg|_0 \quad (\text{C.8})$$

Les paramètres α et β intervenant dans la relation (C.7) qui ont été retenus dans cette étude sont ceux suggérés par Deschamps [29], à savoir $\alpha = 2/\Delta t$ et $\beta = 0, 2/\Delta t$.

Au niveau de l'équation de conservation de l'énergie filtrée, Lenormand [71] montre que l'algorithme de forçage est plus stable si on remplace le terme $f_1^{(n)} \tilde{u}_1^{(n)}$ dans (C.2) par $f_1^{(n)} u_b$. La vitesse u_b désigne la vitesse moyenne longitudinale de l'écoulement :

$$u_b = \frac{1}{L_x L_y L_z} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \int_0^{L_z} \tilde{u}_1^{(n)} dx dy dz \quad (\text{C.9})$$

Dans le cadre d'une étude multiniveau, une question importante est de savoir si le terme de forçage doit agir sur l'ensemble des niveaux ou uniquement sur l'un d'entre eux. De plus, l'évaluation de ce terme de forçage doit-elle tenir compte de l'existence de plusieurs niveaux de grilles recouvrantes ? Ou un calcul à partir des informations contenues dans le maillage de base suffit-il ? Terracol [136] choisit d'évaluer ce terme en se basant sur la grille fine dans un souci de précision, mais les deux grilles sont alors totalement recouvrantes, ce qui n'est pas le cas en général dans notre approche. Dans nos travaux, ce terme de forçage s'est montré particulièrement difficile à traiter. Pour plus de détails quant aux différents tests effectués, on pourra se reporter au paragraphe 8.2.3.

Dans un premier temps, il semble concevable d'évaluer le terme de forçage sur le domaine grossier, qui couvre l'ensemble du domaine de calcul. Le but serait donc bien de conserver le débit du système constant. Ensuite, la logique voudrait que ce terme s'applique à

l'ensemble des domaines de calcul. En effet, si le forçage ne s'appliquait qu'au domaine grossier, l'utilisation de l'opérateur de restriction tendrait à annuler l'effet de ce forçage dans les zones de recouvrement. Le forçage ne serait alors restitué aux domaines fins que par l'intermédiaire des conditions de raccord fin/grossier et des éventuelles (et rares...) utilisations de l'opérateur de prolongement. Ainsi le terme de forçage n'interviendra quasiment qu'au niveau de la zone non recouverte du domaine grossier, et comme son but est de conserver un débit constant pour l'ensemble de ce domaine, le débit dans cette zone (en l'occurrence la zone centrale du canal) va augmenter avec le temps.

Cependant, le fait de n'évaluer le terme de forçage que sur le niveau grossier n'est pas consistant avec les équations filtrées écrites ci-dessus pour lesquelles il est nécessaire de calculer le terme de forçage $f_1^{(n)}$ pour chaque niveau. Or le calcul de ce terme exige que l'on utilise un écoulement moyen symétrique et que le domaine de calcul soit en contact avec une paroi solide pour évaluer les phénomènes de frottement. Dans notre méthode de raffinement automatique, rien n'assure que ces conditions seront vérifiées pour chaque domaine fin créé.

Par conséquent, il a ensuite été envisagé d'utiliser un terme de forçage constant au cours du temps et identique pour tous les niveaux. Celui-ci a alors pour but de conserver un gradient de pression constant et non plus un débit constant. Un tel terme a été évoqué par Deschamps [28], ses principaux inconvénients étant la non conservation du débit et un temps de transition allongé par rapport au terme de forçage à débit constant. Le terme de forçage utilisé est alors :

$$f_1(t) = -\frac{3}{Re_0} \quad (\text{C.10})$$

où Re_0 désigne le nombre de Reynolds initial de l'écoulement : $Re_0 = 7000$. Ce terme de forçage ne permet pas de conserver un débit constant, celui-ci voyant sa valeur diminuer avec le temps. Cependant, le débit tend tout de même à se stabiliser au fur et à mesure que la simulation se poursuit. On pourra ainsi considérer que le régime est suffisamment établi pour comparer les calculs fin et grossier de l'étude.

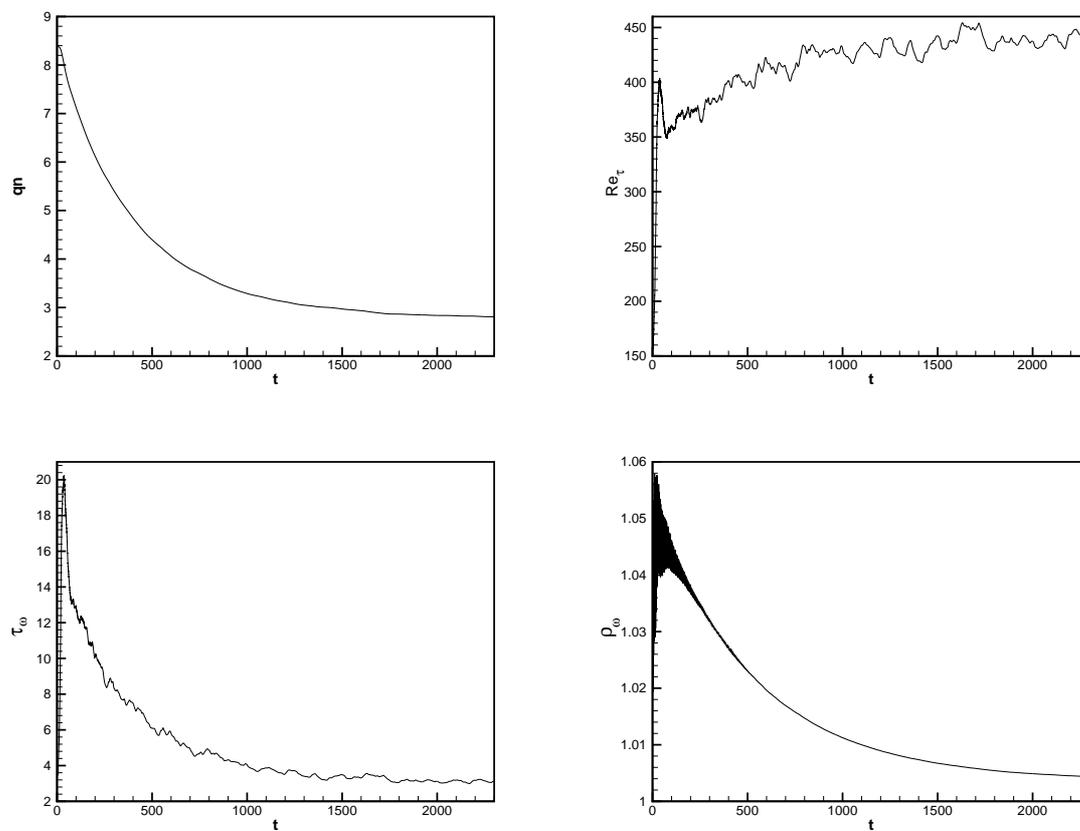


FIG. C.1 – Simulations de canal plan forcé par un gradient de pression constant : évolutions du débit, du nombre de Reynolds turbulent, du taux de cisaillement à la paroi et de la masse volumique à la paroi pour le maillage grossier.

Annexe D

Commutation error in LES with time-dependent filter width

A paraître dans *Computers and Fluids*

Commutation error in LES with time-dependent filter width

S. LEONARD* and M. TERRACOL†

ONERA/DSNA, 29 av. de la Division Leclerc, 92322 Chatillon, France

P. SAGAUT‡

*Laboratoire de Modélisation en Mécanique**Université Pierre et Marie Curie - Paris 6**Boite 162, 4 Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France*

Keywords: Turbulence, Large-Eddy Simulation, commutation errors, theory

*E-mail: leonard@onera.fr

†E-mail: terracol@onera.fr

‡E-mail: sagaut@lmm.jussieu.fr

The governing equations for Large-Eddy Simulation^{1,2} (LES) are classically obtained by applying a convolution filter with a time-independent cutoff length to the Navier-Stokes equations. Resulting equations are similar to the original Navier-Stokes equations when differentiation and filtering operators are assumed to commute (the only additional term is the classical subgrid stress tensor). This assumption is true with uniform filter width on unbounded domains, but commutation errors appear when space-dependent or time-dependent filter widths are considered. The commutation error involved by the use of space-dependent filter width has been extensively studied^{1,3-10} contrary to the commutation error due to time-dependent filter width. Nevertheless, Pruett¹¹ has already mentioned the existence of an additional commutation error between filtering and time derivative, but only for Eulerian time-domain filters. Franke and Frank¹² have also mentioned the problem introduced using time-varying cutoff length, treating a monodimensional example. More recently Moureau *et al.*¹³ have independently studied the Temporal Commutation Error that could appear in piston-engine flows.

The use of time-varying filter cutoff lengths is necessary to derive a relevant mathematical model for the coupling of LES with numerical methods that are based on the use of dynamic grids, such as Adaptive Mesh Refinement (AMR) methods or Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) techniques. The extension of LES to dynamic grid simulations thus requires to extend the filtering procedure to the case of time-dependent filters, and to derive new constraints on the filter kernel to enforce the consistency of the resulting set of governing equations for LES. Recent studies concerning the use of adaptive methods in LES have been reported by Hoffman *et al.*¹⁴⁻¹⁶ who chose not to focus on possible commutation errors.

This article presents the analysis of the commutation error introduced in the LES equations when using a time-dependent filter width. The case of the usual Gaussian filter is presented as an example. Some *a priori* tests performed in the case of an isotropic homogeneous turbulence are also reported in the last section, and reveal that the commutation error may become significant.

I. BASIC LES EQUATIONS FOR TIME-DEPENDENT FILTER WIDTH

Let $\phi(x)$ be the studied variable, which is supposed¹⁷ to have derivatives of all orders (no shock) and to be square integrable (i.e. to have a finite energy). The filtered variable $\bar{\phi}(x, t)$

is defined as a convolution product:

$$\begin{aligned}\bar{\phi}(x, t) &= G \star \phi(x, t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} G(x - y, \Delta(x, t)) \phi(y, t) dy\end{aligned}\tag{1}$$

or, equivalently¹⁸, with the relation $G(x, \Delta) = \frac{1}{\Delta} g\left(\frac{x}{\Delta}\right)$:

$$\bar{\phi}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Delta(x, t)} g\left(\frac{x - y}{\Delta(x, t)}\right) \phi(y, t) dy\tag{2}$$

where G and $\Delta = \Delta(x, t)$ are respectively the filter kernel and the cutoff length. For a sake of simplicity, the dependency of Δ with respect to space and time will not be noted hereafter.

Notice that in the following we will only consider some variations of the filtering operator through variations of the cutoff lengthscale Δ . In particular, no explicit dependency of the filter G itself to space or time will be considered. However it should be noted that a filter shape variation close to domain boundaries should result in an additional commutation error³.

Applying the filtering operator to the incompressible Navier-Stokes equations written in velocity-pressure formulation, one obtains the following filtered equations:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{u} \otimes \bar{u}) + \frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} - \nu \nabla^2 \bar{u} \\ = \nabla \cdot \tau + \left[\frac{\partial}{\partial t}, G \star \right] (u) + [\nabla \cdot, G \star] \circ B(u, u) + \frac{1}{\rho} [\nabla, G \star](p) - \nu [\nabla^2, G \star](u)\end{aligned}\tag{3}$$

$$\nabla \cdot \bar{u} = [\nabla \cdot, G \star](u)\tag{4}$$

where u, p and ν are the velocity, the pressure and the kinematic viscosity, respectively. The commutator between two operators applied to a field u , $[a, b]$ and the operator $B(u, v)$, are defined as:

$$[a, b](u) = a \circ b(u) - b \circ a(u)$$

$$B(u, v) = u \otimes v$$

and the subgrid stress tensor τ :

$$\tau = [B(\cdot, \cdot), G\star](u, u)$$

When the commutation property is assumed, the r.h.s of Eqs. (3) and (4) simplify to the classical subgrid term, i.e. $\nabla \cdot \tau$.

II. EVALUATION OF THE COMMUTATION ERROR

The previous equations have allowed us to introduce the two sources of commutation errors, that is to say space and time filtering commutation errors. The issue of commutation between space derivative and filtering has already been studied by several authors³⁻¹⁰ who derived some conditions on the filter kernel G to control this error.

The purpose of the present section is to express the commutation error $\left[\frac{\partial}{\partial t}, G\star \right] (u)$.

The method is based on the Taylor-series expansion of the filtered variable^{19,20}; first, relation (2) is rewritten using the transformation⁵ $\xi = \frac{x-y}{\Delta}$, yielding

$$\bar{\phi}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) \phi(x - \Delta \xi, t) d\xi \quad (5)$$

The Taylor-series expansion will be used at this step. Rewriting the term $\phi(x - \Delta \xi, t)$ as:

$$\phi(x - \Delta \xi, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \Delta^k \xi^k D_x^k \phi(x, t) \quad (6)$$

where $D_x^k \equiv \frac{\partial^k}{\partial x^k}$ is the k^{th} -order space derivative.

Introducing it into (5), after changing the order of integration and summation, a new expression for the filtered variable is obtained:

$$\bar{\phi}(x, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \Delta^k D_x^k \phi(x) M_g^k \quad (7)$$

where the k^{th} -order filter moment M_g^k is defined as:

$$M_g^k = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^k g(\xi) d\xi \quad (8)$$

Applying the same procedure to the variable $\frac{\partial \phi}{\partial t}$, one gets:

$$\overline{\frac{\partial \phi}{\partial t}}(x, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \Delta^k M_g^k \frac{\partial}{\partial t} [D_x^k \phi(x, t)] \quad (9)$$

The commutation error is obtained by differentiating relation (7) with respect to time:

$$\frac{\partial \overline{\phi}}{\partial t}(x, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial}{\partial t} [\Delta^k D_x^k \phi(x, t) M_g^k] \quad (10)$$

Combining (9) and (10), it comes:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t}, G \star \right] (\phi)(x, t) &= \left[\frac{\partial \overline{\phi}}{\partial t} - \overline{\frac{\partial \phi}{\partial t}} \right] (x, t) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} D_x^k \phi(x, t) M_g^k \frac{\partial \Delta^k}{\partial t} \end{aligned} \quad (11)$$

We obtain different expressions for the commutation error, by using definitions of the moments for the filter g or the filter G :

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial}{\partial t}, G \star \right] (\phi)(x, t) \\ &= \frac{\partial \Delta}{\partial t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \Delta^k D_x^k \phi(x, t) M_{\frac{\partial g}{\partial \Delta} - \frac{1}{\Delta} g}^k \\ &= \frac{\partial \Delta}{\partial t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} D_x^k \phi(x, t) M_{\frac{\partial G}{\partial \Delta}}^k \end{aligned} \quad (12)$$

where the moments for the operator $\frac{\partial G}{\partial \Delta}$ are defined as:

$$M_{\frac{\partial G}{\partial \Delta}}^k = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^k \frac{\partial G}{\partial \Delta}(\xi) d\xi \quad (13)$$

It is interesting to note that the first two terms in the expansion (12) can be regarded as physical convective and diffusive effects due to the temporal variation of the filter cutoff length.

These expressions, which rely on the moments of the filter kernels, are however valid only if the filters employed (g , G and their derivatives) are rapidly decreasing, verifying:

$$M_F^k = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^k F(\xi) d\xi < \infty \text{ for each } k \quad (14)$$

This assumption is usually true for common filters, but it should be studied for their derivatives. In section IV, it will be shown that the gaussian filter and its derivatives satisfy this property. More generally, this assumption is satisfied for filters with a finite support, and filters whose moments do not grow too fast, but not in all other situations ; thus the Taylor expansion is not consistent for the sharp cutoff filter.

A three-dimensional expansion of equation (12) was derived in the independent works of Moureau *et al.*¹³ leading to (with our hypothesis) :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}, G\star \right] (\phi)(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{i+j+k}}{i!j!k!} M_g^{(ijk)} \frac{\partial}{\partial t} [\Delta_x^i \Delta_y^j \Delta_z^k] D_x^i D_y^j D_z^k \phi(\mathbf{x}, t) \quad (15)$$

where Δ_x , Δ_y and Δ_z are the cutoff lengthscales in each direction ; the three-dimensional momentum is given by :

$$M_F^{(ijk)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_x^i \xi_y^j \xi_z^k F(\xi) d\xi^3 \quad (16)$$

III. NECESSARY CONSTRAINTS ON FILTER KERNELS

We now address the problem of finding filter kernels which lead to consistent filtered equations when time-dependent filter cutoff lengths are considered. A n^{th} -order commutation error is obtained if:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}, G\star \right] (\phi)(x, t) = O(\Delta^p), \quad p \geq n \quad (17)$$

Equation (12) shows that a n^{th} -order error can be enforced using different solutions. The first one consists in controlling the norm of the variation rate of the cutoff length, $\left| \frac{\partial \Delta}{\partial t} \right|$, independently of the properties of the filter kernel. For each filter kernel, the variation rate can be chosen small enough to recover any order of accuracy. The second one consists in

choosing the filter kernel so that the commutation error with both space and time derivatives will obey the required scaling laws:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\partial}{\partial t}, G \star \right] (\phi)(x, t) = O(\Delta^p), \\ \left[\frac{\partial}{\partial x}, G \star \right] (\phi)(x, t) = O(\Delta^q), \quad (q, p) \geq n \end{array} \right. \quad (18)$$

yielding the following constraints:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{\frac{\partial}{\partial \Delta} - \frac{1}{\Delta} g}^k = 0, \quad k = 0 \dots p \\ M_g^k = 0, \quad k = 1 \dots q \quad \text{and} \quad M_g^0 = 1 \end{array} \right. \quad (19)$$

Theoretical analyses by Ghosal²¹ show that the Reynolds stress tensor obeys to a $\Delta^{2/3}$ scaling law in the ideal case of an infinite inertial range. Thus, considering a n^{th} order commuting filter will allow to neglect commutation errors in comparison with the subgrid terms.

Nevertheless, the filter employed in the simulation is generally unknown since it is implicitly given by the numerical scheme and thus it is not feasible to control its order. The objective of the following parts is then to study the influence of the variation rate of the cutoff length.

IV. AN EXAMPLE: THE GAUSSIAN FILTER

Many types of low-pass filters are used for classical LES problems, but the most popular are top-hat, Gaussian, and sharp cutoff filters. The issue of looking for filters commuting up to any order with both space and time-derivatives should then represent an interesting study for future AMR applications. The present study is restricted to the particular case of the Gaussian filter.

Gaussian filters are valid in the present study because infinite intervals are considered. However, in the case of finite intervals, the filters need to be modified in the vicinity of the boundary due to their infinite support.

The Gaussian filter kernel G is defined as follow:

$$G(x, \Delta) = \sqrt{\frac{6}{\pi \Delta^2}} \exp\left(-\frac{6x^2}{\Delta^2}\right) \quad (20)$$

or, equivalently, using the filter kernel g :

$$g(\xi) = \sqrt{\frac{6}{\pi}} \exp(-6\xi^2) \quad (21)$$

Its gradient is:

$$\frac{\partial G}{\partial \Delta}(x, \Delta) = G(x, \Delta) \left[\frac{-1}{\Delta} + \frac{12}{\Delta^3} x^2 \right] \quad (22)$$

leading to:

$$M_{\frac{\partial G}{\partial \Delta}}^k = \frac{-1}{\Delta} M_G^k + \frac{12}{\Delta^3} M_G^{k+2} \quad (23)$$

This relation immediatly allows us to conclude that relation (14) is verified for the Gaussian filter derivatives. The symmetry property of the Gaussian kernel induces:

$$\begin{cases} M_G^{2k+1} = 0 & \text{for } k = 0 \dots \infty \\ M_G^{2k} \neq 0 & \text{for } k = 0 \dots \infty \end{cases}$$

The same relations also stand for the function $\frac{\partial G}{\partial \Delta}$ because of (23). Using the g form of the kernel, it comes

$$M_{\frac{\partial g}{\partial \Delta}}^k = \frac{12}{\Delta} M_g^{k+2} \quad (24)$$

Remembering that $M_g^0 = 1$, $M_g^2 = 1/12$ and $M_g^4 = 1/48$, one obtains:

$$\begin{cases} M_{\frac{\partial g}{\partial \Delta}}^0 - \frac{1}{\Delta} M_g^0 = \frac{12}{\Delta} M_g^2 - \frac{1}{\Delta} M_g^0 = 0 \\ M_{\frac{\partial g}{\partial \Delta}}^2 - \frac{1}{\Delta} M_g^2 = \frac{12}{\Delta} M_g^4 - \frac{1}{\Delta} M_g^2 = \frac{1}{6\Delta} \end{cases}$$

Inserting these values in relation (12), one obtains the following expression for the commutation error:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}, G \star \right] (\phi)(x, t) = \frac{\partial \Delta}{\partial t} \left(\frac{\Delta}{12} D_x^2 \phi(x, t) + o(\Delta^3) \right) \quad (25)$$

thus showing that the Gaussian filter yields to a first order error term with time-dependent cutoff lengths. This term can be viewed as a diffusive term, which should be rewritten :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}, G \star \right] (\phi)(x, t) = \nu_t^{new} D_x^2 \phi(x, t) + \frac{\partial \Delta}{\partial t} o(\Delta^3) \quad (26)$$

where $\nu_t^{new} = \frac{\partial \Delta}{\partial t} \frac{\Delta}{12}$ can be interpreted as an eddy viscosity that would be positive for increasing Δ and negative for decreasing Δ . This interpretation suggests that a higher-order method can be recovered by cancelling the leading commutation error term by adding an explicit diffusion term with the viscosity equal to $-\nu_t^{new}$.

V. A PRIORI TESTS ON HOMOGENEOUS ISOTROPIC TURBULENCE

In this section, a set of *a priori* tests is presented, which provides information on the influence of the commutation error on the simulation of homogeneous isotropic turbulence on a periodic cubic domain. For these simulations an efficient pseudospectral method is used, time integration being performed with an explicit third-order accurate Runge-Kutta scheme and we impose periodicity boundary conditions in the three space directions. All the simulations have been carried out in the inviscid limit. The Chollet-Lesieur²² model has been retained as subgrid closure. The classical 3/2-rule is applied to remedy for aliasing errors. The initial field has a spectral energy distribution which satisfies the following law:

$$E(k, t = 0) \sim k^4 \exp(-2k^2/k_0^2) , \quad (27)$$

k_0 corresponding to the initial integral scale, $k_0 = 4$ for our simulations. We then allow the turbulence to decay until an arbitrary time ensuring that a self-similar solution is reached; we choose $t = 24$. A forcing scheme²³ is then implemented until $t = 40$. This scheme keeps the kinetic energy in the band $[0, k_{min}]$ at a constant level by injecting the energy lost during the dissipation process (Fig. 1). The *a priori* tests are then applied on the resulting field at $t = 40$. At this time, the integral scale is $L_0 \approx 0.8$ and the corresponding large-eddy turnover time is $T_{L_0} \approx 11$.

The tests were performed using a very well resolved LES database on a 192^3 uniformly distributed mesh (ensuring commutation between filtering and space derivatives), and applying a Gaussian filter to this solution.

We impose the following sinusoidal law for the cutoff wavenumber:

$$k_c(t) = \frac{k_{min} + k_{max}}{2} + \frac{k_{max} - k_{min}}{2} \cos(\omega t) \quad (28)$$

with $k_{min} = 23$ and $k_{max} = 63$. We thus find:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} = \frac{\partial \Delta}{\partial k_c} \frac{\partial k_c}{\partial t} = \frac{\Delta^2}{\pi} \frac{k_{max} - k_{min}}{2} \omega \sin(\omega t) \quad (29)$$

We then report the \mathbb{L}^2 -norm obtained for the terms in (3) with this filter, and compare their influence for several values of the pulsation ω , the corresponding period being noted T and the commutation error being evaluated using:

$$C(u) = \left[\frac{\partial}{\partial t}, G \star \right] (u) = \frac{\partial \Delta}{\partial t} \left(\frac{\partial G}{\partial \Delta} * u \right) \quad (30)$$

We denote by “subgrid term” the expression $\|SGS(u)\| = \int_D |\nabla \cdot \tau| \, d\Omega$, by “commutation error” $\|C(u)\| = \int_D |C(u)| \, d\Omega$, and by “convective term” $\|conv(u)\| = \int_D \left| \nabla \cdot (\bar{u} \otimes \bar{u}) + \frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} \right| \, d\Omega$, where D refers to the complete computational domain.

ω	$\frac{T}{T_{L_0}}$	$\max \left(\frac{\ C(u)\ }{\ conv(u)\ } \right)$	$\max \left(\frac{\ C(u)\ }{\ SGS(u)\ } \right)$
10	0.05	1.26	6.9
3	0.18	3.6×10^{-1}	2
1	0.55	1.24×10^{-1}	6.8×10^{-1}

TABLE I: Relative commutation error for several values of the pulsation ω

The results obtained here are in good agreement with the previous theoretical study. Indeed the commutation error is no longer negligible for large values of ω (fig. 2) and can become as much important as the convective and subgrid terms. This leads to a non effective subgrid model, and could consequently represent a perturbation source for the simulation. We can then conclude that controlling the term $\frac{\partial \Delta}{\partial t}$ is a significant stake for LES applied on adaptive meshes.

Table I displays, for each value of the pulsation ω considered here, the maximum value of the ratio between the commutation error and the convective and subgrid terms respectively. The corresponding periods of oscillation are reported in the second column, varying from 5% to

110% of the large-eddy turnover time T_{L_0} which validate the values chosen for ω as physical values. As stated previously, too large values of ω lead to a high level of the commutation error, which becomes roughly four times larger than the other terms for $\omega = 10$. From this table, we also conclude that a negligible level of the commutation error is reached when the cutoff variation period T becomes at least of the order of the large-eddy turnover time T_{L_0} . Figures 3 and 4 present a more detailed visualization of the spectral distribution of this error, and reveal that it mainly acts on high wavenumbers. Indeed these wavenumbers are directly affected by fluctuations of the cutoff length, and thus exhibit the highest error levels. This is consistent with previous conclusions^{21,24} regarding other LES errors (discretization and aliasing) that occur at large wavenumbers and can thus have an adverse effect on the simulation, since the subgrid models extract information from this wavenumber range to compute the subfilter scales. Figure 5 displays the evolution of the amplitude of the *modified* commutation error as a function of the cutoff length Δ . The *modified* commutation error describes the commutation error referred to the variation of the cutoff lengthscale and the gradient of the variable :

$$\|C(u)\|^* = \frac{\|C(u)\|}{\frac{\partial \Delta}{\partial t} \|D_x^2 u\|} \quad (31)$$

A linear dependency is observed for all values of Δ considered in this study, in good agreement with the theoretical law (25). This result show that the Taylor-series expansion is a relevant tool to analyze the commutation error, and that the first term is responsible for almost all the commutation errors.

VI. CONCLUSIONS

The issue of commutation between filtering and time derivatives has been studied in this paper; indeed, in some critical situations, the use of a variable filter width is unavoidable in LES. In such a situation, some new terms arise in the filtered equations due to the non-commutation between filtering and both space and time derivatives. The above study deals with the issue of time-dependent cutoff lengths, the issue of space-dependent ones having already been studied. Some conditions have been found in order to reduce the commutation error terms in the LES equations and to be consistent with the accuracy of the numerical scheme. The example of the Gaussian filter has also been studied, and it seems that some undesirable errors should appear for rapidly varying cutoff length. Some

a priori tests performed in the case of an homogeneous isotropic turbulence problem in presence of varying cutoff wavenumber have indeed demonstrated that a too fast variation of the cutoff length results in some significant errors. Finally, it would be interesting to see whether the accuracy of time integration affects the commutation error as it was highlighted by Haselbacher and Vasilyev⁶ in the case of spatial discrete operators.

Acknowledgments

The authors thank one of the referee for suggesting the interpretation of the commutation error as an artificial diffusion term.

-
- ¹ B.J. Geurts. *Elements of Direct and Large-Eddy Simulation*. R.T. Edwards, Inc., 2004.
 - ² P. Sagaut. *Large-eddy simulation for incompressible flows - An introduction second edition*. Scientific Computation. Springer-Verlag, 2002.
 - ³ C. Fureby and G. Tabor. Mathematical and Physical Constraints on Large-Eddy Simulations. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 9:85–102, 1997.
 - ⁴ S. Ghosal. Mathematical and Physical Constraints on Large-Eddy Simulation of Turbulence. *AIAA J.*, 37:425–433, 1999.
 - ⁵ S. Ghosal and P. Moin. The Basic Equations for the Large Eddy Simulation of Turbulent Flows in Complex Geometry. *Journal of Computational Physics*, 118:24–37, 1995.
 - ⁶ A. Haselbacher and O.V. Vasilyev. Commutative Discrete Filtering on Unstructured Grids Based on Least-Squares Techniques.
 - ⁷ S.A. Jordan. A Large-Eddy Simulation Methodology in Generalized Curvilinear Coordinates. *Journal of Computational Physics*, 148:322–340, 1999.
 - ⁸ O.V. Vasilyev. Computational constraints on large eddy simulation of inhomogeneous turbulent complex geometry flows. Departement of Mechanical and Aerospace Engineering, University of Missouri - Columbia.
 - ⁹ O.V. Vasilyev and T.S. Lund. A general theory of discrete filtering for LES in complex geometry. In *Annual Research Briefs, Center for Turbulence Research*, pages 67–82, 1997.

- ¹⁰ H. Van Der Ven. A family of large eddy simulation (LES) filters with nonuniform filter widths. *Phys. of Fluids*, 7:1171–1172, 1995.
- ¹¹ C.D. Pruett. Eulerian Time-Domain Filtering for spatial Large-Eddy Simulation. *AIAA J.*, 38(9):1634–1642, 2000.
- ¹² J. Franke and W. Frank. Temporal commutation errors in large-eddy simulation. *ZAMM*, 81(S3), 2001.
- ¹³ V.R. Moureau, O.V. Vasilyev, C. Angelberger, and T.J. Poinsot. Commutation errors in Large Eddy Simulation on moving grids : Application to piston engine flows. In *Proceedings of the Summer program, Center for Turbulence Research*, pages 157–168, 2004.
- ¹⁴ J. Hoffman and C. Johnson. *Encyclopedia of Computational Mechanics*, chapter Computability and adaptivity in CFD. John Wiley & Sons, 2004.
- ¹⁵ J. Hoffman. Adaptive finite element methods for LES: Computation of the drag coefficient in a turbulent flow around a surface mounted cube. *submitted to SIAM Journal of Scientific Computing*, 2003.
- ¹⁶ J. Hoffman and C. Johnson. Adaptive DNS/LES: a new agenda in CFD, Chalmers Finite Element Center Preprint 2003-23. Technical report, Chalmers University of Technology, 2003.
- ¹⁷ C.D. Pruett and N.A. Adams. A priori analyses of three subgrid-scale models for one-parameter families of filters. *Phys. of Fluids*, 12(5):1133–1141, 2000.
- ¹⁸ C.D. Pruett, J.S. Sochacki, and N.A. Adams. On Taylor-Series expansions of residual stress. *Phys. of Fluids*, 13(9):2578–2588, 2001.
- ¹⁹ A.L. Marsden and O.V. Vasilyev. Commutative Filters for LES on unstructured meshes. In *Annual Research Briefs, Center for Turbulence Research*, pages 389–402, 1999.
- ²⁰ A.L. Marsden, O.V. Vasilyev, and P. Moin. Construction of commutative filters for LES on unstructured meshes. In *Annual Research Briefs, Center for Turbulence Research*, pages 179–192, 2000.
- ²¹ S. Ghosal. An analysis of numerical errors in large-eddy simulations of turbulence. *Journal of Computational Physics*, 125:187–206, 1996.
- ²² J.P. Chollet and M. Lesieur. Parametrization of small scales of three-dimensional isotropic turbulence utilizing spectral closures. *J. Atmos. Sci.*, 38, 1981.
- ²³ A. Witkowska. *Estimation numérique du bruit rayonné par une turbulence isotrope*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 1994.

- ²⁴ F.K. Chow and P. Moin. A further study of numerical errors in large-eddy simulations. *Journal of Computational Physics*, 184:366–380, 2003.

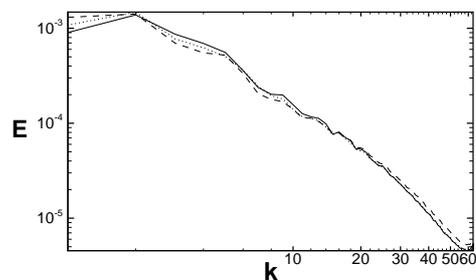


FIG. 1: Energy spectrum evolution :
Influence of the forcing scheme
-- t=30 ; ... t=35 ; — t=40

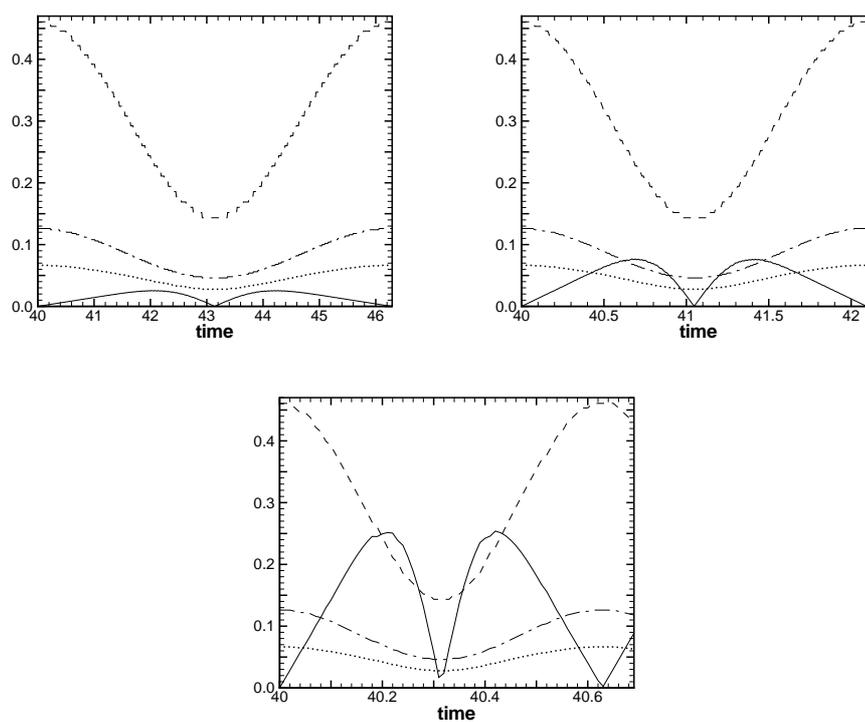


FIG. 2: L^2 norms: commutation error (—), convective term (---) and subgrid term (\cdots) ;
 $k_c \times 10^{-5}$ (-·-). Top left: $\omega = 1$, Top right: $\omega = 3$, Bottom: $\omega = 10$

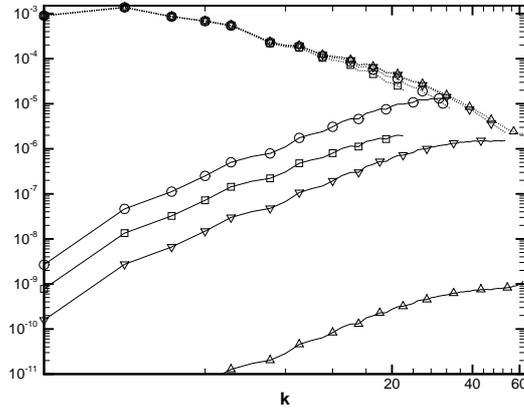


FIG. 3: Spectral distribution of the commutation error (—) and the resolved scale energy (\cdots) for $\omega = 3$; \triangle : $t = 40.01$; ∇ : $t = 40.35$; \circ : $t = 40.7$; \square : $t = 41.1$.

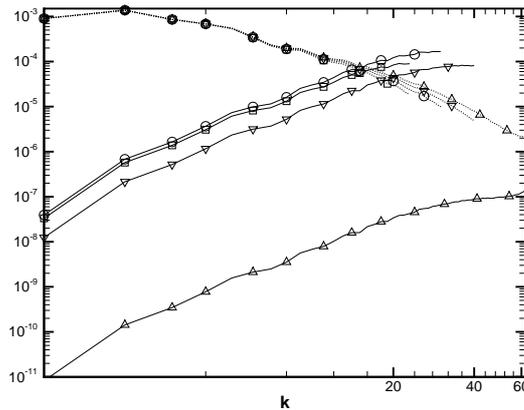


FIG. 4: Spectral distribution of the commutation error (—) and the resolved scale energy (\cdots) for $\omega = 10$; \triangle : $t = 40.01$; ∇ : $t = 40.17$; \circ : $t = 40.23$; \square : $t = 40.35$.

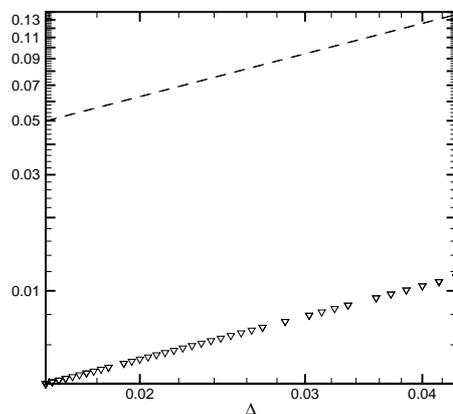


FIG. 5: Scaling law of the commutation error ($\omega = 3$ for example); ∇ : modified commutation error; — : $f(x) = \Delta$

Annexe E

A Wavelet-based Adaptive Mesh Refinement Criterion for Large-Eddy Simulation

A paraître dans *Journal Of Turbulence*

Journal of Turbulence
Vol. 00, No. 00, September 2006, 1–33

A Wavelet-based Adaptive Mesh Refinement Criterion for Large-Eddy Simulation

S. Léonard[†], M. Terracol[†], P. Sagaut[‡]
(April 2006)

This paper address the problem of coupling an Adaptive Mesh Refinement method with Large-Eddy Simulation (LES). A multigrid algorithm is used in order to refine the grid in zones detected by a specific sensor based on a wavelet decomposition. This sensor has been developed to accurately detect cells in which the classical LES hypotheses should not be verified. This algorithm is then applied to the simulation of a 3D turbulent mixing layer at Reynolds number 10^{10} . First results exhibit a great sensitivity to the boundary treatments of the interface between the different grid levels. It is shown that the use of a dynamic enrichment procedure allows to recover results in a very good agreement with non-adaptive very fine grid simulations.

[†] ONERA, DSNA/ETRI, BP72 - 29 av. de la Division Leclerc, 92322 Châtillon cedex, France

[‡] Laboratoire de Modélisation en Mécanique, Université Pierre et Marie Curie - Paris 6, Boite 162, 4 Place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France

2

1 Introduction

The numerical simulation of turbulent flows still represents an outstanding open problem of fluid mechanics. Indeed, turbulence can be partially described as a three-dimensional physical phenomenon involving a large variety of characteristic spatial and temporal scales. The difficulty relies in modelling the non-linear interactions between different scales due to the Navier-Stokes equations. Indeed to perform an accurate numerical simulation of a fully three-dimensional turbulent flow, all physically relevant scales should be resolved, requiring generally a huge and prohibitive number of mesh points. Such a Direct Numerical Simulation (DNS) is however restricted by the capabilities of computers and a modeling approach is necessary in practically all cases of technological interest to reduce the amount of scales to be resolved. For example, Large-Eddy Simulation (LES [19,40]) allows to simulate deterministically only the largest scales, the effect of smallest ones being parametrized. Such a scale distinction is obtained by applying a low-pass wavevector filter to the Navier-Stokes equations. The interactions between large and small scales are then described by the use of subgrid-scale (SGS) models which allow to close the filtered Navier-Stokes equations. This parametrization is generally possible under the assumption that the small scales tend to be more homogeneous, isotropic, and universal than the large ones. However, this hypothesis implies that the cutoff wavenumber should be chosen in the inertial range of the energy spectrum. For example the modelling of the wall layer is perhaps one of the most important challenges that needs to be met. Indeed, the exchange mechanism between resolved and unresolved scales is altered considering that the subgrid scales may contain some significant Reynolds-stress producing events in the near-wall region and thus the SGS model must account for them.

In such a situation the subgrid-scale model would not allow to simulate efficiently the influence of small scales on the resolved ones. The unresolved scales would contain too much information and one way to avoid the problem is to increase the mesh resolution to take into account a wider range of scales in the resolved flow. An important property of turbulent flows is their strong intermittency, so that small scales may be localized only in a very small fraction of space. Thus, a strategy of local grid refinement would represent a good compromise between optimizing the model efficiency and limiting the cost of the simulation. The difficulty relies in the determination of the regions of the flow where a finer resolution than the one of the original grid is necessary. Indeed grid refinement basically requires to define a criterion that will select zones to be refined.

Adaptive strategies can be divided into two classes: those which aim at refining a unique mesh, and those which aim at dispatching refinement levels into different subdomains or subscales. In the present study, the second class will be

considered. In this case, most of the works are based on embedded structured meshes. Historically, the first methods used topologically similar, lined up subdomains - the so-called Multi-Level Adaptive Technique (MLAT [1, 8, 32]). Then authors turn to topologically different, lined up subdomains - the so-called Adaptive Mesh Refinement (AMR) method [4, 5, 27, 37] - but also to rotating subdomains [2, 3].

Many different refinement sensors can be found in the literature. They are usually divided into two classes: numerical sensors, which usually evaluate the local truncation error [2, 3], and physical sensors, which are based on physical considerations [9, 11, 23, 37].

At the same time, several works in different scientific fields on space-scale decomposition have led to wavelet theory [13]. In Computational Fluid Dynamic (CFD), these methods have been used to analyse or simulate turbulent flows [16, 17, 42]. The idea is that the wavelet decomposition is able to separate a turbulent solution into its two contributions, that is to say coherent and random fluctuations. The wavelet de-noising procedure [14] consists in setting to zero the wavelet coefficients that are below a given threshold. This allows a coherent/incoherent splitting of the solution. This approach is then different from the classical decomposition between large and small scales since coherent motion is observed at all scales. Nevertheless, since each wavelet coefficient is exclusively associated with a single grid point, the wavelet thresholding can be seen as a criterion to select active grid nodes for the simulation. In this context, two adaptive wavelet methods seem particularly promising: the Coherent Vortex Simulation (CVS [16]) and the Stochastic Coherent Adaptive Large Eddy Simulation (SCALES [21]). Both methods have the ability to dynamically resolve the most energetic part of the coherent eddies in a turbulent flow field. The major distinction is that, in the CVS approach, the resulting SGS field is near Gaussian white noise which results in practically no SGS dissipation, and so no SGS model is required, while in the SCALES approach, some coherent modes are filtered out in order to decrease the cost of the calculation and a model for the unresolved scales is now required to recover satisfactory results. Finally, the wavelet approach was also used to refine solutions of conservation laws in a finite volume formulation, leading to the so-called multiresolution schemes [6, 10, 22].

Nevertheless, all methods presented above are based on a priori error estimation which presents some issues. A more efficient method consists in using a posteriori criteria for refinement as proposed by Hoffman [24–26]. In these works, a Galerkin-type approach is adopted, the introduction of a dual solution allowing to control the discretization error.

Concerning Large-Eddy Simulation, some authors have already mentioned the possibility to use multigrid-based methods (see [41] for a review). We can distinguish two particular approaches. The first one is inspired by the pioneering

4

works of Voke [47] which consists in using a multigrid cycling algorithm. Here several grid levels are used on the entire domain and the objective is to reduce the cost of the computation by using a specific time scale for each level with the aim to minimize the computations at the fine grid levels. More recently, Terracol *et al.* [44, 45] have used the same idea with a different cycling procedure and a multilevel subgrid closure. The second approach consists in using a multidomain configuration, each one having its own degree of resolution [36]. In the present study, a particular method is proposed to optimize the grid resolution for LES calculation. We first discuss on specific sensors that should be considered to determine regions where too coarse meshes are used. Then the hierarchical strategy governing grid interactions is described. Finally, some results are presented for the simulation of a subsonic temporal mixing layer.

2 Governing equations

2.1 Navier-Stokes equations

In the present study, we will consider the dimensionless compressible Navier-Stokes equations, that is, in the compact form:

$$\partial_t V + \mathcal{N}(V) = 0, \quad (1)$$

with $V = (\rho, \rho U^T, \rho E)^T$, $U = (u_1, u_2, u_3)^T$ and:

$$\mathcal{N}(V) = \begin{pmatrix} \nabla \cdot (\rho U) \\ \nabla \cdot (\rho U \otimes U) + \nabla p - \nabla \cdot \sigma \\ \nabla \cdot ((\rho E + p)U) - \nabla \cdot (\sigma : U) + \nabla \cdot Q_v \end{pmatrix}, \quad (2)$$

where p , ρ , and U are respectively the pressure, density, and velocity vector of the studied flow. The total energy ρE satisfies:

$$\rho E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho |U|^2, \quad (3)$$

where γ is the ratio of specific heats C_p/C_v . The viscous stress tensor σ is given by:

$$\sigma = \frac{2}{Re} \mu(T) \left(S - \frac{1}{3} \text{tr}(S) I \right), \quad (4)$$

where $S = \frac{1}{2}(\nabla U + \nabla^T U)$ is the shear stress tensor and the dynamic viscosity μ satisfies Sutherland's law.

The temperature T is given by the perfect gas state-law:

$$T = \gamma M_0^2 \frac{p}{\rho}, \quad (5)$$

and the viscous heat flux vector Q_v by:

$$Q_v = -\frac{\mu(T)}{(\gamma - 1) Re Pr M_0^2} \nabla T, \quad (6)$$

where M_0 , Re , and Pr are respectively the Mach, Reynolds, and Prandtl numbers.

2.2 Multilevel formalism

The principle of Large-Eddy Simulation is to distinguish large from small scales in a given flow. The resolved part of the flow contains only the largest scales and is obtained by filtering the general solution of Navier-Stokes equations. In the following, we will consider the multilevel decomposition of any variable ϕ of the flow by using L different filtering levels as developed in Terracol *et al.* [44, 45]. Each level is associated to a low-pass filter G_l , $l \in \{1, \dots, L\}$, which is characterized by its cutoff length scale Δ_l and the corresponding cutoff wavenumber k_l , k_1 defining the finest level and k_l decreasing when l increases. Any filtered variable is then defined by a convolution product on the overall domain Ω of the filter kernel G_l with the continuous variable:

$$G_l \star \phi(x, t) = \int_{\Omega} G_l(\Delta_l(x, t), x - \xi) \phi(\xi, t) d\xi. \quad (7)$$

The filtered variables at the finest level are defined as $\overline{\phi}^{(1)} = G_1 \star \phi$ and recursively, the filtered variables at any coarser level $l \in \{2, \dots, L\}$ as:

$$\overline{\phi}^{(l)} = G_l \star G_{l-1} \star \dots \star G_1 \star \phi = \mathcal{G}_1^l(\phi). \quad (8)$$

6

The so-called *frequential complement* $\delta\phi^l$ between two successive levels is given by:

$$\delta\phi^{(l)} = \overline{\phi}^{(l)} - \overline{\phi}^{(l+1)}. \quad (9)$$

It represents the scales that are resolved at level l and unresolved at level $l + 1$. In this context, any flow variable ϕ can be decomposed into its resolved contribution at a given l th level $\overline{\phi}^{(l)}$, the successive frequential complements $\delta\phi^{(l)}$ between the l th and the finest ($l = 1$) levels, and the unresolved scales on the finest level ϕ'' , as follows:

$$\phi = \overline{\phi}^{(l)} + \sum_{l=1}^{l-1} \delta\phi^{(l)} + \phi''. \quad (10)$$

In order to take into account the compressibility of the flow, it is necessary to introduce the mass-weighted variables, also called Favre variables, that are defined by:

$$\tilde{\phi}^{(l)} = \frac{\overline{\rho\phi}^{(l)}}{\overline{\rho}^{(l)}}. \quad (11)$$

Applying the operator \mathcal{G}_1^l to equation (1) and introducing the subgrid term:

$$\mathcal{T}^{(l)} = \overline{\mathcal{N}(\overline{V})}^{(l)} - \mathcal{N}(\overline{V}^{(l)}). \quad (12)$$

we obtain the filtered equation at level l :

$$\partial_t \overline{V}^{(l)} + \mathcal{N}(\overline{V}^{(l)}) = -\mathcal{T}^{(l)}. \quad (13)$$

The subgrid term $\mathcal{T}^{(l)}$ should contain both classical subgrid-scale tensor and commutation error contributions. However, in the present study, the commutation errors that could appear between filtering and differencing operators are not considered, as it is usual in Large-Eddy Simulation. That is, it's assumed $\nabla(G_l \star \phi) = G_l \star \nabla\phi$ always, as well as $\partial_t(G_l \star \phi) = G_l \star \partial_t\phi$.

Nevertheless, it should be noted that, as previously mentioned, considering the compressible case requires to perform Favre filtering of the variables. That is to say that the variables on which the filtering operation is applied are ρ , ρU and p (or equivalently ρT). Thus the fifth component of the filtered field $\overline{V}^{(l)}$ is not directly the filtered energy but the resolved energy at level l given

by:

$$\overline{V}_5^{(l)} = \widehat{\rho E}^{(l)} = \frac{\overline{p}^{(l)}}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \frac{\overline{\rho U}^{(l)} \cdot \overline{\rho U}^{(l)}}{\overline{\rho}^{(l)}} \neq \overline{\rho E}^{(l)}. \quad (14)$$

Thus, the filtered Navier-Stokes equations, that were first simplified in (13), are given in the present work by:

$$\frac{\partial \overline{\rho}^{(l)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{\rho}^{(l)} \tilde{u}_i^{(l)}) = 0, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho}^{(l)} \tilde{u}_i^{(l)}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho}^{(l)} \tilde{u}_i^{(l)} \tilde{u}_j^{(l)}) + \frac{\partial \overline{p}^{(l)}}{\partial x_i} - \frac{\partial \widehat{\sigma}_{ij}^{(l)}}{\partial x_j} \\ & = -\frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij}^{(l)}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\sigma}_{ij}^{(l)} - \widehat{\sigma}_{ij}^{(l)}), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \widehat{\rho E}^{(l)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\widehat{\rho E}^{(l)} + \overline{p}^{(l)} \right) \tilde{u}_j^{(l)} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\widehat{q}_j^{(l)}) - \frac{\partial}{\partial x_j} (\widehat{\sigma}_{ij}^{(l)} \tilde{u}_i^{(l)}) \\ & = -B_1 - B_2 - B_3 + B_4 + B_5 + B_6 + B_7, \end{aligned} \quad (17)$$

where B_1, \dots, B_7 terms are the subgrid terms coming from the Vreman's decomposition [49].

The subgrid stress tensor $\tau_{ij}^{(l)}$ is defined by:

$$\tau_{ij}^{(l)} = \overline{\rho}^{(l)} (\widetilde{u_i u_j}^{(l)} - \tilde{u}_i^{(l)} \tilde{u}_j^{(l)}). \quad (18)$$

The tensor $\overline{\sigma}_{ij}^{(l)}$ is the filtered stress tensor, while the computable stress tensor $\widehat{\sigma}_{ij}^{(l)}$ and the computable heat flux vector $\widehat{q}_j^{(l)}$ are defined by:

$$\widehat{\sigma}_{ij}^{(l)} = \frac{1}{Re} \mu(\widetilde{T}^{(l)}) \left(\frac{\partial \tilde{u}_i^{(l)}}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j^{(l)}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{u}_k^{(l)}}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \quad (19)$$

8

and

$$\hat{q}_j^{(l)} = -\frac{\mu(\tilde{T}^{(l)})}{(\gamma-1)RePrM_0^2} \frac{\partial \tilde{T}^{(l)}}{\partial x_j}. \quad (20)$$

To close the set of equations, the filtered equation of state is used:

$$\tilde{T}^{(l)} = \gamma M_0^2 \frac{\bar{p}^{(l)}}{\bar{\rho}^{(l)}}. \quad (21)$$

2.3 Subgrid modeling

Several assumptions allow to simplify the expressions (16) and (17) by neglecting some terms. Indeed, following Vreman's conclusions [49], B_6 , B_7 and the last term in the r.h.s. of (16) can be neglected. Vreman *et al.* have also shown that B_4 and B_5 are small when compared to B_1 , B_2 and B_3 in the energy equation and are also neglected. Finally, the terms B_1 , B_2 and B_3 and the first term in the r.h.s. of (16) have to be evaluated in order to close the problem. Using the Boussinesq hypothesis, we get:

$$B_3 = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\tau_{ij}^{(l)} \tilde{u}_i^{(l)} \right),$$

$$B_1 + B_2 = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{\rho}^{(l)} \nu_t^{(l)}}{(\gamma-1)Pr_t M_0^2} \frac{\partial \tilde{T}^{(l)}}{\partial x_j} \right),$$

where Pr_t is the turbulent Prandtl number. The deviatoric part $\tau_{ij}^{(l)d}$ of the subgrid-scale stress tensor τ_{ij} is modeled by:

$$\tau_{ij}^{(l)d} = \tau_{ij}^{(l)} - \frac{1}{3} \tau_{kk}^{(l)} \delta_{ij} = -2\bar{\rho}^{(l)} \nu_t^{(l)} \tilde{S}_{ij}^{(l)}, \quad (22)$$

where ν_t is the subgrid viscosity.

The first SGS model that is used is the selective mixed-scale model [40]. This model is based on a non-linear combination between the filter cutoff length Δ_l , the resolved shear stress $\tilde{S}^{(l)} = \left(2\tilde{S}_{ij}^{(l)} \tilde{S}_{ij}^{(l)} \right)^{1/2}$ and the turbulent kinetic energy near the cutoff $q_c^{(l)}$:

$$\nu_t^{(l)} = 1.65 f_{\theta_0}(\theta) C_m |\tilde{S}^{(l)}|^{\frac{1}{2}} q_c^{(l)\frac{1}{4}} \Delta_l^{\frac{3}{2}} \quad (23)$$

Classically, the constant value is $C_m = 0.06$ and Δ_l is obtained by evaluating the cube root of the volume of a cell. The energy $q_c^{(l)}$ is usually defined by $q_c^{(l)} = \sqrt{0.5 \widetilde{u}''^{(l)} \widetilde{u}''^{(l)}}$ where $\widetilde{u}''^{(l)} = \widetilde{u}^{(l)} - \widehat{u}^{(l)}$, the hat filter being a three-dimensional test filter denoted by $\widehat{u}^{(l)} = A_i \circ A_j \circ A_k(\widetilde{u}^{(l)})$ and with the following definition :

$$A_m(\phi) = \frac{1}{3} \phi_{m-1} + \frac{1}{3} \phi_m + \frac{1}{3} \phi_{m+1} \quad (24)$$

The selective function f_{θ_0} allows to zero the subgrid-scale viscosity $\nu_t^{(l)}$ in the laminar parts of the flow, using the angle between the filtered vorticity and the local averaged filtered vorticity $\theta = \arccos \frac{\overline{\omega} \cdot \widehat{\omega}}{|\overline{\omega}| |\widehat{\omega}|}$. It is defined by:

$$f_{\theta_0}(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{if } \theta \geq \theta_0 = 20^\circ \\ 0, & \text{else.} \end{cases} \quad (25)$$

A second SGS model is studied in this paper: the classical Smagorinsky model. In this case, the subgrid viscosity is based on a double dependence on the filter cutoff length Δ_l and the resolved shear stress tensor $\widetilde{S}^{(l)}$:

$$\nu_t^{(l)} = (C_s \Delta_l)^2 |\widetilde{S}^{(l)}|, \quad (26)$$

where C_s is a constant that is fixed in our study at $C_s = 0.18$.

3 Adaptive mesh refinement strategy

3.1 Detection of too coarse resolution: A wavelet-based refinement sensor

Most of the refinement strategy encountered in the literature make use of *a priori* criteria based on solution gradients and/or numerical errors; such methods should become inefficient for fully turbulent flows where fluctuations would be detected throughout the overall domain and such *a priori* techniques would have to be modified for each study. The objective is then to establish a generalized numerical and physical criterion that should be well suited to LES calculation of turbulent flows.

The problem is to localize the small scales of the flow and wavelets theory seems very promising in such a context. The basic idea behind the wavelet decomposition is to represent a function in terms of basis functions, called wavelets, which are well localized in both physical and spectral spaces. The

10

wavelet decomposition of a function $f(x)$ consists in evaluating its inner product with some wavelet functions $\psi_{m,j}(x)$. The corresponding values are called *wavelet coefficients*:

$$w_{m,j} = \langle f, \psi_{m,j} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \psi_{m,j}(x) dx. \quad (27)$$

The index $m \geq 0$ refers to the scale, $m = 0$ corresponding to the finest scale in the present study, and j represents the position in space. The basis functions $\psi_{m,j}$ are obtained by dilation and translation of a mother wavelet ψ . In the following, we will use redundant wavelets, that is:

$$\psi_{m,j}(x) = 2^{-m} \psi \left(\frac{x-j}{2^m} \right) \quad (28)$$

Indeed, our objective being to determine how much of scale 2^m is present in $f(x)$ at all points *with the same accuracy*, redundant wavelets seem more adapted than orthogonal ones [43]. It should be noted that the support of $\psi_{m,j}$ increases with m , as the associated scale becomes larger.

From a mathematical point of view, wavelet coefficients at small scales grow at a related power of the scale in a region where the field encounters a singularity (of a given order) or smooth, strong oscillation. We can then determine the number of degrees of freedom that are necessary regarding the number of singularities and thus wavelet coefficients at a given small scale.

Several wavelet methods have already been implemented for solving Partial Differential Equations (PDEs) and wavelet techniques have been used for analysis and compression of turbulent fields [15, 33]. For example, Coherent Vortex Simulation (CVS) allows to separate coherent structures from incoherent background using wavelet decomposition [16]. In the same way one can expect to detect small scale structures in a flow: wavelets should represent an efficient error estimation criterion useful for the refinement strategy. Sjögreen and Yee [43] have used different families of wavelets in order to detect shocks, turbulent fluctuations, and spurious high frequency oscillations. The present study relies on the evaluation of the local Hölder exponent α_j which gives a very accurate information about the regularity of the function analyzed by the wavelet decomposition, using a least squares fit of a line to the equation:

$$\log_2 r_{m,j} = \alpha_j m + C, \quad (29)$$

with

$$r_{m,j} = \max_{k=-2^m p, \dots, 2^m q} |w_{m,j+k}|, \quad (30)$$

where C is a constant and p and q define the stencil of the wavelet decomposition. The function f in (27) should be chosen as a characteristic variable of the flow such as for instance rotational, pressure or kinetic energy.

We have extended this approach to develop a three-dimensional sensor whose objective is to determine how much of each scale is contained in the flow. The criterion α is computed from three levels of the wavelet algorithm, three-dimensional wavelet coefficients being obtained using the one-dimensional coefficients evaluated in each direction by a simple finite-difference approximation as proposed by Sjögren and Yee (here in the x -direction):

$$w_{m,(i,j,k)}^x = f_{i,j,k}^{m-1} - (f_{i+1,j,k}^{m-1} + f_{i-1,j,k}^{m-1})/2 \quad (31)$$

and

$$f_{i,j,k}^m = (f_{i+1,j,k}^{m-1} + f_{i-1,j,k}^{m-1})/2. \quad (32)$$

More precisely, the three-dimensional coefficients $w_{m,j}$ are obtained using one-dimensional ones computed in each direction :

$$w_{m,(i,j,k)} = \sqrt{(w_{m,(i,j,k)}^x)^2 + (w_{m,(i,j,k)}^y)^2 + (w_{m,(i,j,k)}^z)^2} \quad (33)$$

The starting function f_j^0 for 32 is the studied function f_j evaluated on the finest grid. We can interpret α_j as a local evaluation of the spectrum decaying exponent. Consequently, we consider that refinement is necessary in locations where α_j is lower than a given threshold α_0 , evaluated according to Kolmogorov's hypothesis. Indeed, subgrid-scale models are generally efficient only if isotropy and universality of small scales are respected, characterized by a $k^{-5/3}$ energy spectrum near the cutoff wavenumber for three-dimensional turbulence. The sensor has then to detect regions for which such hypotheses are not verified.

The link between the Kolmogorov decaying law and the wavelet coefficients has already been studied by Farge *et al.* [15] and Perrier *et al.* [35]. Let's suppose an energy spectrum which satisfies:

$$E(k) \sim E_0 k^{-\beta}. \quad (34)$$

In the following simulations, we will apply wavelets to the rotational field. The corresponding enstrophy spectrum will then satisfy:

$$\Omega(k) \sim \Omega_0 k^{2-\beta}. \quad (35)$$

12

Considering two successive spectral bands $[k_3, k_2]$ and $[k_2, k_1]$, with $k_1 = rk_2$ and $k_2 = rk_3$ ($r > 1$), the enstrophy contained in each band is:

$$\Omega_n = \int_{k_{n+1}}^{k_n} \Omega(k) dk = \frac{\Omega_0}{3-\beta} \left(1 - \frac{1}{r^{3-\beta}}\right) k_n^{3-\beta}. \quad (36)$$

We can then express the ratio between the two quantities Ω_1 and Ω_2 as:

$$\log \frac{\Omega_1}{\Omega_2} = (3-\beta) \log r. \quad (37)$$

In our particular case, $r = 2$ in order to compare Fourier and wavelet decompositions.

In the wavelet space, the quantities Ω_1 and Ω_2 can be related to wavelet coefficients. If the wavelet decomposition is applied to the vorticity field, we have $\Omega_1 = r_1^2$ and $\Omega_2 = r_2^2$, r_1 and r_2 satisfying (29). The ratio between Ω_1 and Ω_2 , in the wavelet space, then satisfies:

$$\log \frac{\Omega_1}{\Omega_2} = -2\alpha \log 2, \quad (38)$$

where the position index j has been omitted.

Comparing (37) and (38), we obtain

$$\alpha = \frac{\beta - 3}{2}. \quad (39)$$

The threshold parameter α_0 will be chosen accordingly to this definition i.e. $\alpha_0 = -2/3$ corresponding to an equilibrium energy spectrum power law as a function of the wavenumber k in $k^{-\beta}$ where $\beta = \frac{5}{3}$. According to this definition of the threshold value, grid refinement will be performed if disequilibrium is detected in the spectrum, corresponding to $\beta < \frac{5}{3}$.

It appears necessary in practice to add a threshold parameter on wavelet-coefficient magnitudes. Indeed, in regions where the flow is well resolved, the sensor only evaluates the decaying exponent of the spectrum and thus, no consideration on small-scale energy level is made. Indeed cells corresponding to $\alpha \leq \alpha_0$ can be detected in some flow regions where energy at small-scale is negligible. For this reason, in the following simulations, wavelet coefficients lower than a given threshold ϵ were not considered in the refinement strategy even for small values of α_j . The parameter ϵ is given by $\epsilon = 6 \times 10^{-3} \Omega_0$ where Ω_0 is a characteristic vorticity of the flow. For the mixing layer simulations reported in sections 4, this quantity is defined as $\Omega_0 = \frac{U_\infty}{\delta_\omega}$ with δ_ω the vorticity thickness at the refinement time and U_∞ the reference streamwise velocity.

3.2 Mesh refinement algorithm

In the previous part, a sensor has been proposed to determine which cells of the original grid need to be refined in the specific LES context. Various refinement strategies are available in the literature and we can regroup these methods into two families: the first one consists in raising the number of grid points (or moving nodes) of a unique grid; the second one distinguishes the different levels of refinement in a hierarchical grid organization.

The particular form of adaptivity we have chosen to consider is block-structured refinement strategy, referred to as AMR (Adaptive Mesh Refinement), that was originally developed by Berger and Olinger [5]. AMR solves partial differential equations using a hierarchy of grids of differing resolutions. The key element is the use of block-structured locally refined grid patches to increase the resolution of an underlying coarser grid only where needed. It is based on a sequence of nested grids with finer and finer mesh spacing, each level being advanced in time with time step intervals determined by the CFL condition. This time step is chosen to be the same for each level and computed to ensure the CFL condition at the finest level. The fine grids are recursively embedded in coarser grids until the solution is sufficiently resolved accordingly to the sensor mentioned previously.

The grid hierarchy is composed of different levels of refinement ranging from finest ($l = 1$) to coarsest ($l = L$). The grids are properly nested: the union of grids at level $l - 1$ is contained in the union of grids at level l . In the present study, the refinement ratio in each direction between two successive levels is two.

Cells requiring refinement are tagged using the wavelet sensor; the tagged cells are then clustered into parallelepipedic patches obtained by successively dividing in sub-grids. Note that some cells not tagged for refinement are also included in new fine grid patches. A parameter allows to impose the number of tagged cells contained in a sub-grid reporting to the total number of cells in the sub-domain (grouping/clustering methods [34]). The minimal size of a sub-domain is also imposed to avoid too small ones which would be unefficient in terms of calculation costs.

When new grids are created at level $l - 1$, the data on these grids are copied from previous grids at level $l - 1$ if possible, otherwise the data is interpolated from the underlying grid level l (prolongation operation). As the solution advances in time, the regridding algorithm is called every n_l (user-specified) level l steps to redefine grids at levels $l - 1$ and remove finer, obsolete grids. Boundary conditions and relations between different degrees of resolution are discussed in the next section. When a fine grid boundary coincides with a physical boundary, the coarsest grid boundary condition is applied on this fine mesh.

14

3.3 Intergrid transfers

The multilevel scheme requires some intergrid operators that allow to link up the different grid levels. On the one hand we have already mentioned the prolongation operator that is used to initialize a grid level $l-1$ by interpolation of level l information:

$$\overline{\phi}^{(l-1)} = P_l^{l-1}(\overline{\phi}^{(l)}) \quad (40)$$

where P_l^{l-1} is the prolongation operator from level l to a finer level $l-1$. On the other hand, fine grids contain more information than coarser ones. For this reason a restriction operator R_{l-1}^l , acting as a discrete filter on the solution, is used to improve the solution on the coarse grid levels overlapped by finer grids. At a given level l , we then apply:

$$\overline{\phi}^{(l)} = R_{l-1}^l(\overline{\phi}^{(l-1)}) \quad (41)$$

In this study, the restriction and prolongation operators were inspired by Teracol *et al.* [45]. The full operator coefficients are detailed in the appendix. In our approach, these operators act on the Favre variables since it seems to give the most accurate results and is moreover fully consistent with the Favre filtering formalism considered to derive the filtered Navier-Stokes equations. It should be noticed that this hierarchical grid configuration is strongly linked with the continuous multilevel formalism introduced in (8). Indeed, the restriction operator R_{l-1}^l acts as a low-pass frequency filter on the solution, and is a discrete equivalent of the continuous filter G_l .

On the fine grids boundaries, the discontinuity of the solution with coarser grid levels has to be explicitly taken into account. In this aim, data in ghost-cells at the finer level are obtained by summing two contributions: the first one is obtained by prolongation of the coarse solution and the second one represents the frequential complement evaluated in the near-boundary cells. This dual contribution in ghost cells is explained in Quéméré *et al.* [36]. The evaluation of the fine solution in the ghost cells $\overline{\phi}_*^{(l-1)}$ is described in figure 1 and can be summarized as:

$$\overline{\phi}_*^{(l-1)} = P_l^{l-1}(\overline{\phi}^{(l)}) + C \delta\phi^{(l-1)}, \quad (42)$$

where the frequency complement (“detail”) $\delta\phi^{(l-1)}$ between the two filtering levels $l-1$ and l is computed in the last row of physical cells of the fine grid

level as:

$$\delta\phi^{(l-1)} = \bar{\phi}^{(l-1)} - P_l^{l-1} \circ R_{l-1}^l(\bar{\phi}^{(l-1)}). \quad (43)$$

The constant $C \in [0; 1]$ is a parameter which will be referred to as the *enrichment coefficient*.

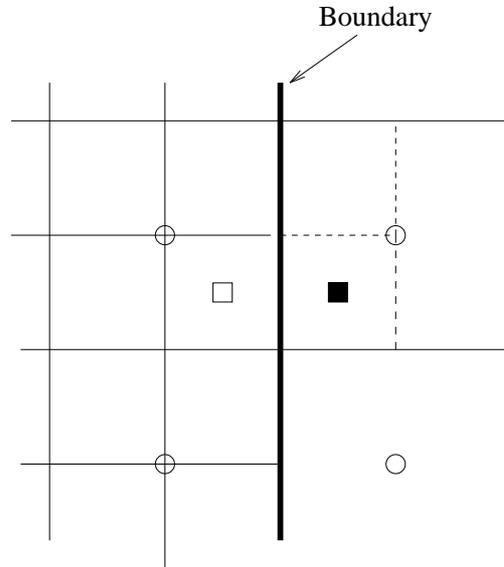


Figure 1. Enrichment procedure ; \blacksquare : $\bar{\phi}_*^{(l-1)}$, \square : $\bar{\phi}^{(l-1)}$, \circ : $\bar{\phi}^{(l)}$.

3.4 Numerical scheme

Previous works, such as the ones by Ghosal [20], have shown that it is necessary to use numerical discretization schemes that are at least of second order in space in LES calculations. Moreover, the Large-Eddy Simulation has been proven to be more efficient when using non-dissipative schemes since a numerical dissipation would overcome the subgrid scale model contribution [18]. Nevertheless, numerical dissipation is sometimes necessary in some regions of the flow (shocks, ...) and thus a specific scheme has been retained in our calculations having this goal.

The numerical method that has been retained is based on a classical cell-centered finite-volume scheme for space discretization, with structured multi-block meshes.

The convective fluxes are evaluated using the so-called AUSM+(P) (for Pre-conditioned Advective Upstream Splitting Method) scheme, associated to a

16

wiggle detector [31]. This sensor allows to limit the numerical dissipation to the zones where spurious oscillations are detected while the scheme acts as a centered scheme elsewhere. It is indeed mandatory to decrease as much as possible the intrinsic dissipation of the numerical scheme such that it is not responsible for an artificial damping of energy carried by spectral modes close to the cutoff wavenumber. This is a classical constraint that has to be satisfied when performing large eddy simulations, and especially in the case of the present adaptive mesh strategy since a loss of energy in the highest resolved wavenumbers may interact with the wavelet-based refinement sensor. The possible (non-linear) interactions between the numerical method, the subgrid closure, and refinement sensor are in practice not possible to quantify, and it is only possible to consider a reasonable compromise between the accuracy of the numerical method, its robustness, and the subgrid parametrization. The following modified version of the AUSM+(P) scheme has been retained here, and appears as a reliable approach for LES, as demonstrated in several previous studies [12, 28–31, 39].

The convective flux at the interface $i + 1/2$, in the direction j , is then obtained using:

$$F_j^{i+1/2} = U(Q_{jL} + Q_{jR})/2 - |U_{dis}|(Q_{jR} - Q_{jL})/2 + P_j, \quad (44)$$

where the indicia L and R denote respectively the left and right third-order MUSCL interpolation. The pressure term P_j is given by:

$$P_j = \frac{\bar{p}_R + \bar{p}_L}{2} (0, \delta_{2j}, \delta_{3j}, \delta_{4j}, 0)^t \quad (45)$$

The vector Q designates the conservative variables.

The variable U designates the interface fluid velocity defined by $U = 0.5 (\tilde{u}_R + \tilde{u}_L) \cdot \vec{n}^{i+1/2} - c_2 (\bar{p}_R - \bar{p}_L)$, where c_2 is a constant parameter. Finally, the previously mentioned sensor appears in the term U_{dis} :

$$U_{dis} = \Phi \max(|U|, c_1), \quad (46)$$

where c_1 is a constant parameter and Φ a binary function acting as a sensor. If no spurious oscillation is detected on a primitive variable ψ at the cell i then Φ is equal to 0, elsewhere Φ is set to 1 at $i + \frac{1}{2}$ and $i - \frac{1}{2}$ interfaces. The following relations are used to define the value taken by Φ :

$$\Delta_\phi^k = \begin{cases} -1 & \text{if } (\phi_{k+1} - \phi_k)(\phi_{k+2} - \phi_{k+1}) < 0 \\ 1 & \text{else} \end{cases} \quad (47)$$

17

$$W_{\psi_i} = \begin{cases} 1 & \text{if } \Delta_{\psi_i}^k + \Delta_{\psi_i}^{k+1} < 0 \text{ or } \Delta_{\psi_i}^k + \Delta_{\psi_i}^{k-1} < 0, \\ 0, & \text{else,} \end{cases} \quad (48)$$

$$\Phi = \max(W_{\psi_i}) \quad \text{for } i = 1, \dots, 5 \quad (49)$$

where the vector ψ corresponds to the primitive variables $\psi = (\bar{\rho}, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \bar{p})^T$.

A second-order centered scheme is employed for the viscous fluxes.

Finally, the time integration is performed using a third-order low-storage Runge-Kutta scheme. This leads to a global scheme which is third-order accurate in time and second-order accurate in space.

4 Numerical simulation: The subsonic temporal mixing layer

Some first numerical simulations have been carried out on a temporally growing mixing layer. This flow is a typical example of a fully unsteady situation in which different scales, both in space and time, co-exist. The study takes place in the limit of an infinite Reynolds number $Re = 10^{10}$, in order to evaluate precisely the LES performance in the case where dissipation is only due to the subgrid model used. Initial flow and boundary conditions are similar to those used in Terracol *et al.* [45]. It is to be noted that in this previous study, a second order-accurate non-dissipative discretization scheme was used to perform the simulations, which remained stable. It is therefore expected that in the present case, the wiggle detector will be inactive in most of the calculation domain, and that the influence of the numerical stabilization terms will remain low, and therefore will not affect the highest resolved wavenumbers.

Periodic boundaries are imposed in streamwise (x) and spanwise (z) directions, while a Thomson's non-reflecting boundary condition [46] is employed in the cross-stream (y) direction. The initial mean velocity profile is defined by a hyperbolic tangent law in the streamwise direction, other mean components of the velocity vector being initially set to zero:

$$u_1(y, t = 0) = U_\infty \tanh\left(\frac{2y}{\delta_0}\right), \quad (50)$$

where $\delta_0 = (7N_{rol})^{-1}$ is the initial vorticity thickness and $U_\infty = 1$. N_{rol} denotes the number of primary rollers present in the computational box. The

18

initial mean density is uniform $\rho = 1$ and the mean temperature is given by the Busemann-Crocco law [38].

A 3D-perturbation is superposed to the initial mean profile in order to initiate pairing phenomena [48]. Two- and three-dimensional modes are noted (α, β) , where α and β are respectively the streamwise and the spanwise wavenumbers. The most unstable mode is given by a linear stability analysis, that is the two-dimensional mode $(8, 0)$ with wavelength $L_x/8$. The subharmonic modes $(4, 0)$, $(2, 0)$ and $(1, 0)$ are used to initiate pairings. In order to study three-dimensionality, we can also add oblique modes: $(8, \pm 8)$, $(4, \pm 4)$, $(2, \pm 2)$ and $(1, \pm 1)$. The amplitude of the perturbation is the same for two- and three-dimensional modes, and is taken as 5×10^{-2} . The phases of the oblique modes are shifted to avoid symmetry of the initial conditions. All perturbations are also modulated by a gaussian profile $f(y) = \exp\left(-0.5\left(\frac{y}{\delta_0}\right)^2\right)$ to limit their effect to the initial rotational zone.

The number of primary rollers of the simulations is fixed to $N_{rol} = 8$, allowing three successive pairings of these structures to occur. The initial mach number is $M_0 = 0.2$.

The computational domain is a rectangular box $[0, L_x] \times [-L_y/2, L_y/2] \times [0, L_z]$ with dimensions $L_x = 1$, $L_y = 40\delta_0$, and $L_z = \frac{2}{3}L_x$ as in Terracol's inviscid case. The grid is uniform in both streamwise and spanwise directions, while a stretching is employed in the shear layer $[-L_y/8, L_y/8]$. The initial coarse grid contains $60 \times 52 \times 30$ cells.

4.1 Quasi two-dimensional mixing layer

In this case, only two-dimensional modes are used in the initial flow in order to evaluate the efficiency of the wavelet sensor. As explained in Bockhorn *et al.* [7], fine scales are expected to be more active in the strain field between vortices, thus these regions should represent difficulties for too-coarse LES computations, and should be marked by the sensor. Figure 2(a) shows clearly the large quasi two-dimensional Kelvin-Helmholtz vortices with intense streamwise rib vortices in the stagnation regions between them. Figure 2(b) seems coherent with the approach of Bockhorn *et al.* [7], with refinement occurring in the shear regions. Moreover, these structures can be seen as anisotropic because of their elongation in the streamwise direction. Figure 2(c) depicts an example of grid organization obtained in this situation, with a minimum number of fine grids required.

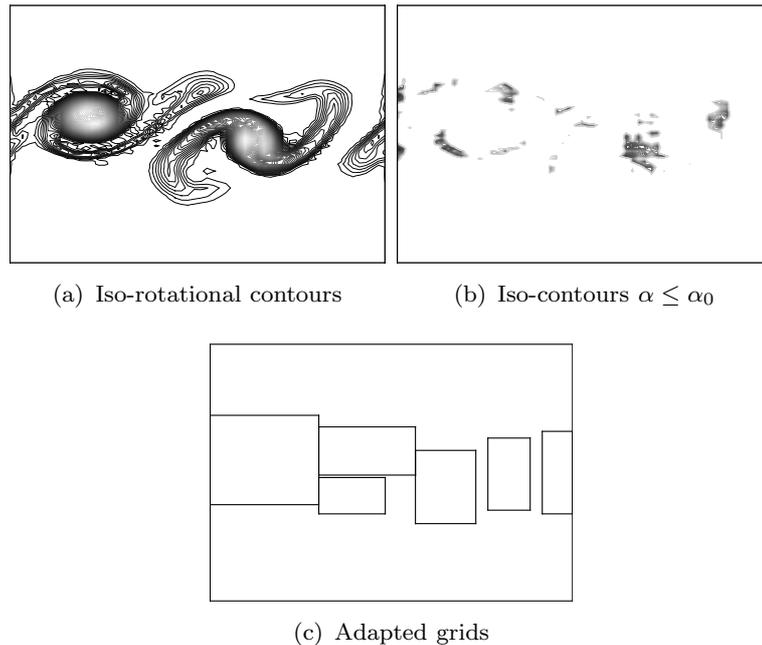


Figure 2. Mesh refinement applied on the 2D temporal mixing layer at $t = 65$

4.2 Fully turbulent mixing layer

For these simulations, the oblique modes are also excited to introduce three-dimensionality. Such a simulation is more relevant for LES calculation than the 2D case. Figure 3(a) allows to verify the three-dimensional aspect of the flow by considering iso- Q surfaces. Q is the second invariant of the velocity gradient tensor and is defined by:

$$Q = \frac{1}{2} (\Omega : \Omega - S : S), \quad (51)$$

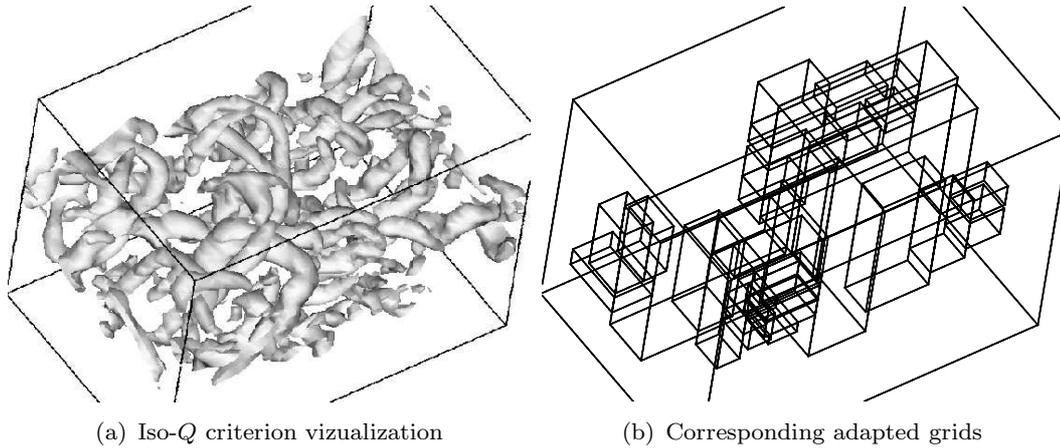
with $\Omega = \frac{1}{2}(\nabla U - \nabla^T U)$.

Applying the wavelet sensor on this configuration leads to a complex grid organization such as shown in figure 3(b).

Table 1 shows the corresponding number of cells of such a calculation involved in coarse and fine grids calculations on the overall domain. A gain of approximately 50% is obtained by using the adaptive grids instead of the control fine grid.

The results obtained on such a multigrid configuration can then be compared to those evaluated on a coarse or a fine unique grid. The remeshing algorithm is then applied on the coarse grid once every fixed interval, that corresponds

20

Figure 3. Mesh refinement applied on the 3D temporal mixing layer at $t = 70$.

grid	number of cells
coarse	93600
fine	748800
adaptive	356944

Table 1. Comparison between different grids considered

to five initial large-eddy turnover periods between two successive refinements. Other refinement frequencies have been tested and a small dependence of the accuracy on this parameter was observed. Nevertheless, the calculation with a fast variation of the mesh (corresponding to 1.25 initial large-eddy turnover periods between two successive refinements) is seen not to converge. This indicates that it is necessary not to use a too frequent variation of the mesh in order not to obtain additional errors such as commutation errors between filtering and differencing operators.

The so-called fine grid contains twice the number of points in each direction, that is $120 \times 104 \times 60$ cells. Figure 4(a) depicts the temporal evolution of the momentum thickness δ_m which is defined by:

$$\delta_m(t) = \int_{-L_y/2}^{L_y/2} \left(\frac{1}{4} - \frac{\langle u_1 \rangle_{xz}^2(t)}{\Delta U^2} \right) dy, \quad (52)$$

where $\langle \cdot \rangle_{xz}$ is an averaging operator over the (x-z) planes, $\Delta U = 2U_\infty$, and t is the time scaled by the characteristic time $\frac{\delta_0}{U_\infty}$. It should be noted that δ_m is here normalized by the initial vorticity thickness δ_0 . Figure 4(a) allows to distinguish successive pairings. The first one occurs at $t \sim 20$ and is well represented on all simulations. The second pairing process occurs at $t \sim 55$ and

is also well captured by each simulation. The mixing transition that arises between first and second pairings is well represented even on coarse grid. After the second pairing, the flow reaches the fully turbulent state. Such a complex flow is observed to be badly evaluated on the coarse grid in comparison with the fine reference grid results. In the adaptive multilevel simulation, the momentum thickness is observed to be better predicted with a small over-prediction regarding the fine grid case.

Mean and fluctuations velocity profiles (figure 4(b)), both normalized by ΔU , are also compared. The mean velocity is obtained by applying an averaging over the constant- y planes of the streamwise velocity: $u_{irms} = \langle u_i \rangle_{xz}$. The corresponding velocity fluctuations are defined by:

$$u'_{irms} = \sqrt{\langle (u_i - \langle u_i \rangle_{xz})^2 \rangle_{xz}}. \quad (53)$$

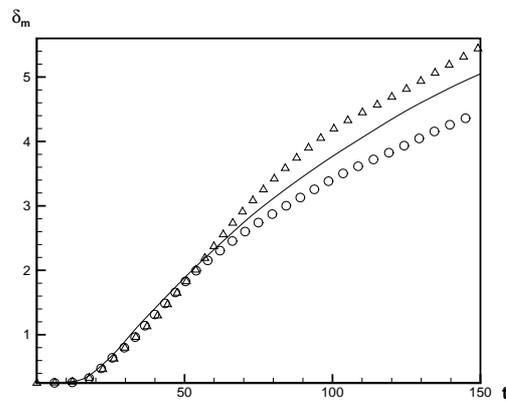
A good agreement exists between adaptive and fine grid results which should ensure a good agreement between the sensor application and the LES requirements.

Nevertheless, the different calculations have shown a great dependance of the results on the value of the enrichment constant C at the coupling interfaces between two consecutive levels (see relation (42)). In the first calculations presented above, the enrichment coefficient was fixed to $C = 0.7$. In the following simulations, some values of the enrichment coefficient have been tested. Figure 5(a) and figure 5(b) describe the momentum thickness evolution for these different enrichment values. The corresponding results are compared with the curves obtained on the coarse and fine reference grids, and in the case without enrichment procedure. Four different values have been evaluated. On the first case (figure 5(a)), the values are $C = 0.7$ and $C = 0.95$ in the three space directions and for each boundary encountered. In the second case (figure 5(b)), the enrichment coefficient is set to zero on cell boundaries in which the flow is entering the cell, and to the user-specified value ($C = 0.7$ and $C = 0.95$) elsewhere, that is for tangential or outgoing flow. This case will be referred to as the *dynamic enrichment case*. In the non-dynamic enrichment case, results are quite similar for each enrichment coefficient value, while in the dynamic case, a greater dependence on the coefficient value is observed. In this configuration, the dynamic enrichment case with $C = 0.95$ presents the best results. This tendency is confirmed by figures 6(a) and 6(b) where the evolution of the kinetic energy is shown. The most accurate enrichment constant, $C = 0.95$ dynamically, gives a good description of this evolution comparatively to the fine results.

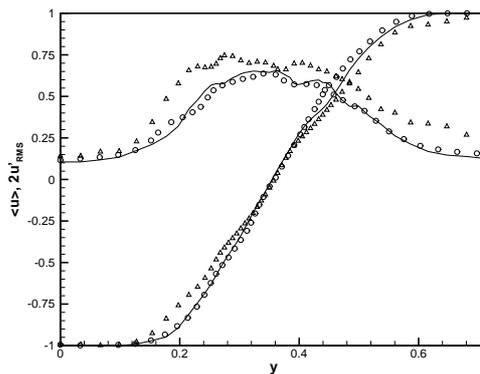
Finally, figures 7 and 8 give an overview of the velocity profiles obtained for the different calculations at the three distinct times $t = 20, 60$ and 100 . Again, the

22

results obtained with the dynamic enrichment coefficient $C = 0.95$ present the best results. In particular, the streamwise velocity profile and the RMS streamwise velocity fluctuation profile at $t = 100$ obtained in this case are in quite good agreement with those obtained on the fine control grid. The amplitude of the fluctuations in the mixing zone are indeed close to the value obtained with the control fine grid calculation.



(a) Temporal evolution of the momentum thickness

(b) Streamwise velocity profile and RMS streamwise velocity fluctuations at $t = 100$ Figure 4. Results obtained for coarse (Δ), fine (\circ) and adaptive $C = 0.7$ (—) grids.

In order to evaluate the influence of the subgrid-scale model on the multi-level solution, the results obtained with the classical Smagorinsky model (26) are compared to those obtained with the mixed-scale model (23). For all the following calculations, the enrichment coefficient is fixed to 0.95 dynamically. Figures 9(a) and 9(b) show the evolution of the momentum thickness for the two models. With the Smagorinsky model, the pairing phenomena are de-

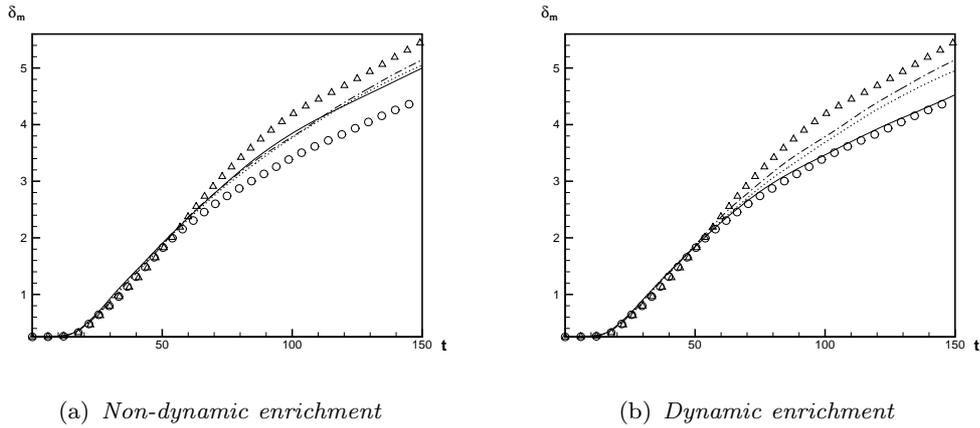


Figure 5. Temporal evolution of the momentum thickness for different values of the enrichment constant, for the coarse grid (Δ), the fine grid (\circ) and adaptive grids with $C = 0$ ($- \cdot -$), $C = 0.7$ ($\cdot \cdot \cdot$) and $C = 0.95$ ($-$).

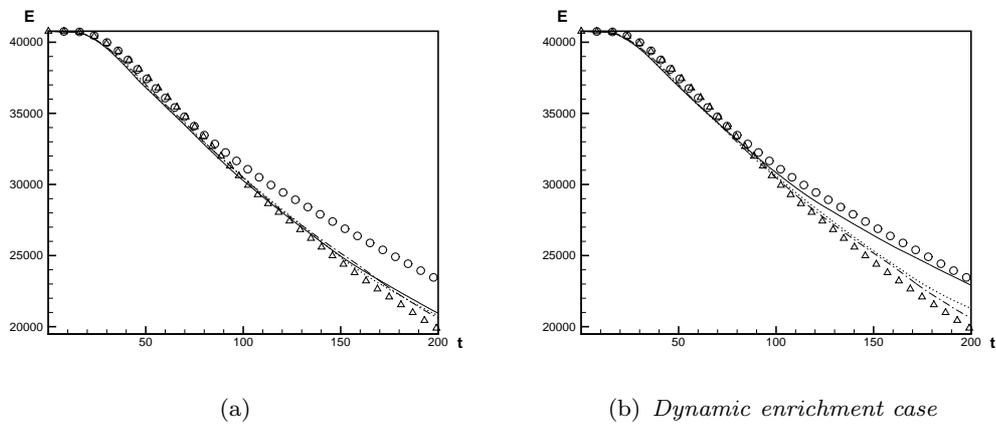


Figure 6. Temporal evolution of the total kinetic energy for different values of the enrichment constant, for the coarse grid (Δ), the fine grid (\circ) and adaptive grids with $C = 0$ ($- \cdot -$), $C = 0.7$ ($\cdot \cdot \cdot$) and $C = 0.95$ ($-$).

layed: the first pairing occurs near $t \sim 30$ and the second near $t \sim 50$. With both models, the results corresponding to the multilevel calculations present a quite good agreement with the fine results. Nevertheless, when using the Smagorinsky model, the transitional regime is not correctly represented on the multilevel calculation since the evolution of the momentum thickness is closer to the one obtained on the coarse grid. A possible explanation of this phenomenon comes from the excessive dissipation of the Smagorinsky model in the early transitional regime. Indeed, the Smagorinsky model is known to exhibit such a large subgrid dissipation that transition is delayed comparatively to other models [48]. This is due to a damping of the initial perturbation. This

24

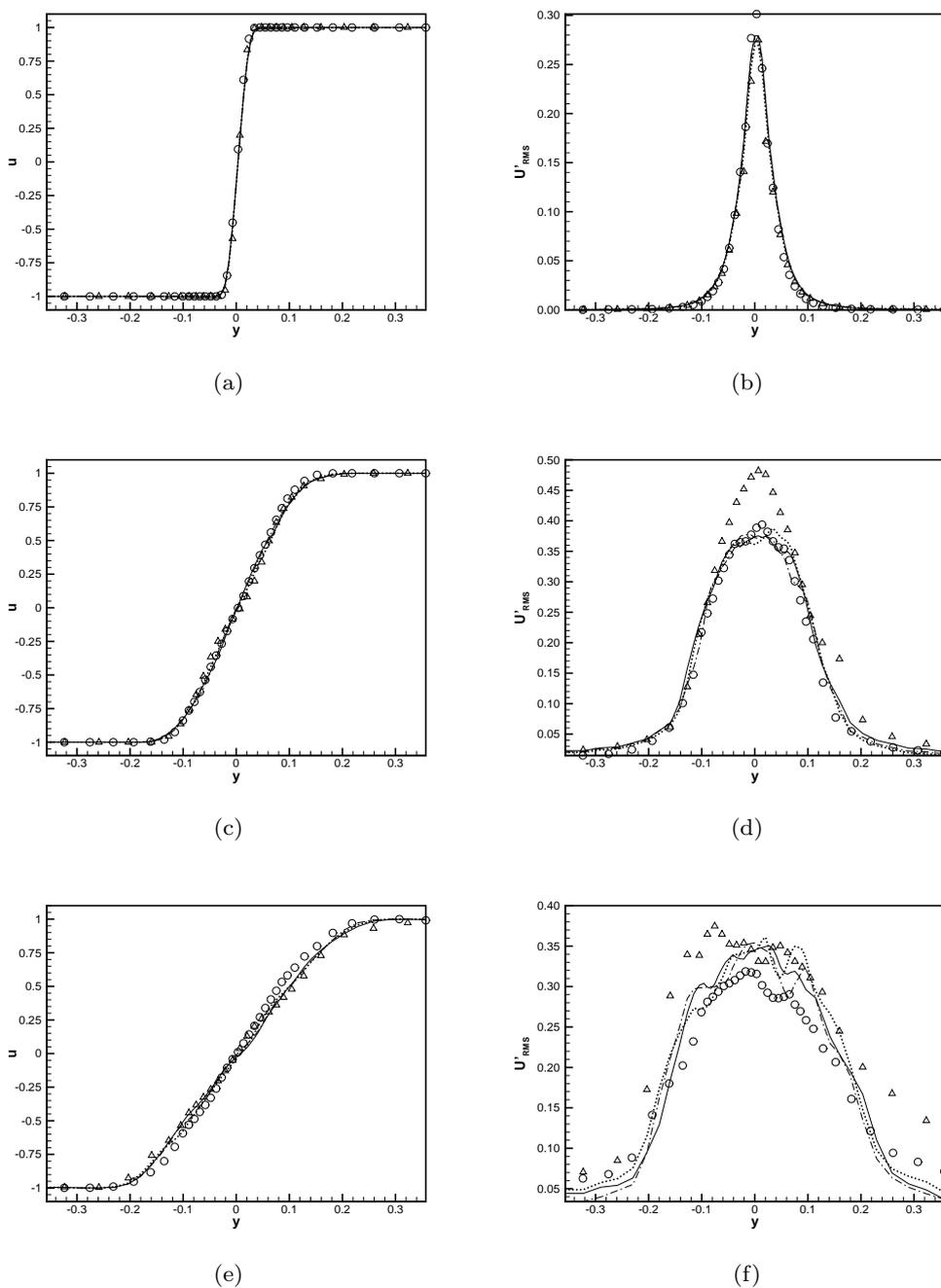


Figure 7. Streamwise velocity (left) and RMS streamwise velocity fluctuations (right) profiles at $t = 20, 60, 100$, for the coarse grid (Δ), the fine grid (\circ) and adaptive grids with $C = 0$ (- · -), $C = 0.7$ (· · ·) and $C = 0.95$ (—).

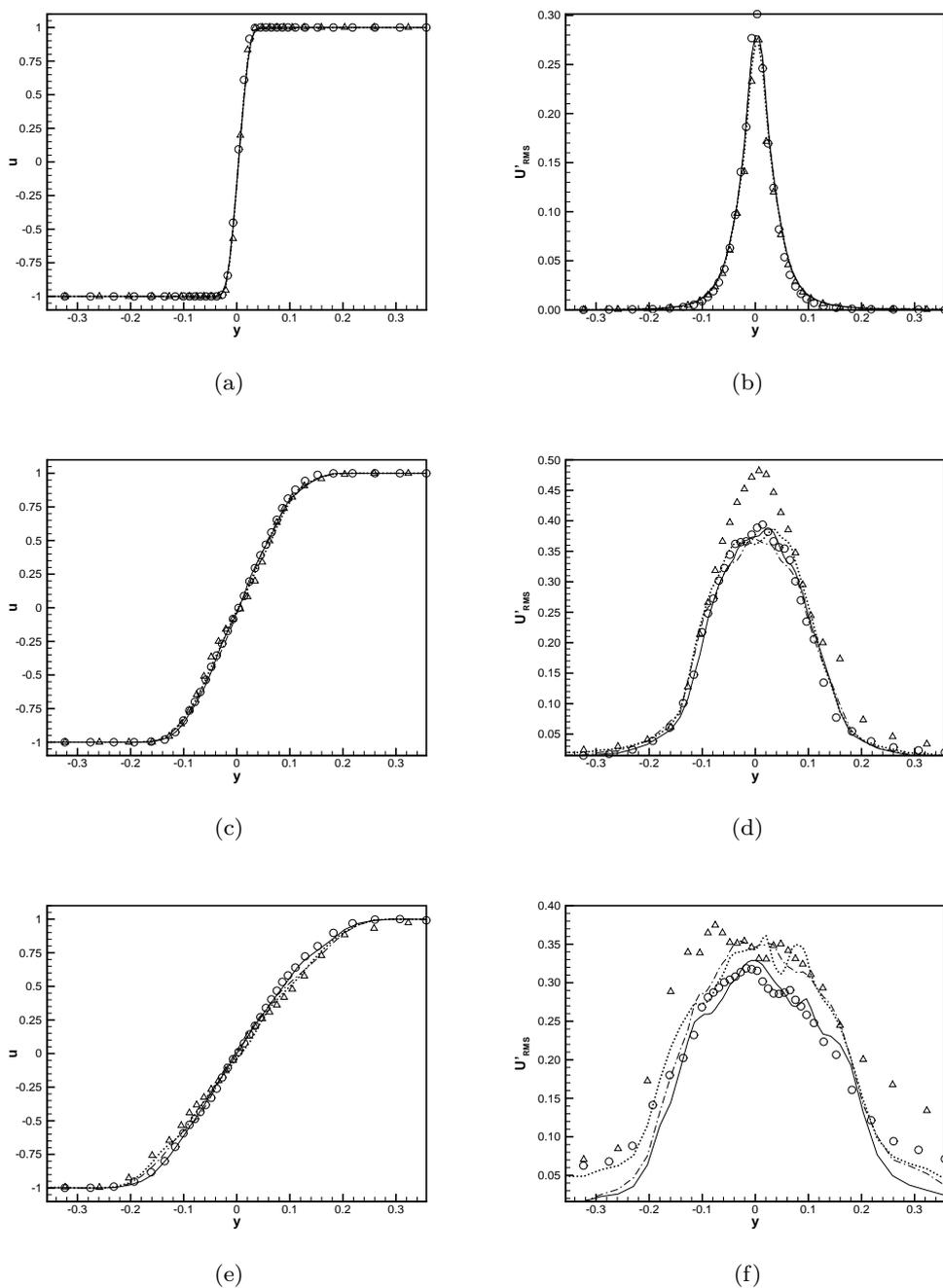


Figure 8. Streamwise velocity (left) and RMS streamwise velocity fluctuations (right) profiles at $t = 20, 60, 100$, for the coarse grid (Δ), the fine grid (\circ) and adaptive grids with $C = 0$ ($-\cdot-$), $C = 0.7$ ($\cdot\cdot\cdot$) and $C = 0.95$ ($---$), in the *dynamic enrichment case*.

26

damping is more important on the coarse grid and in the first instants for the adaptive calculation. Indeed, the first refinement occurs after some simulation steps corresponding to five initial large-eddy turnover periods and during this time the Smagorinsky model damps the perturbations giving an inaccurate description of the transitional regime. This confirms that in such simulations the first instants are really important.

Nevertheless, after the first pairing, both multilevel calculations present curves that are good approximations of the corresponding fine results. While the coarse grid simulation is unable to represent correctly the small-scale transition that occurs in the turbulent regime, the adaptive grid allows a good representation of this phenomenon.

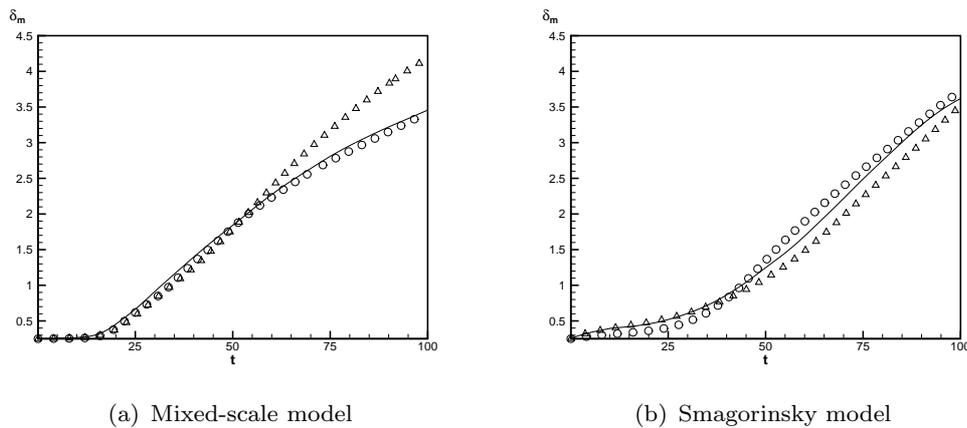


Figure 9. Evolution of the momentum thickness for the fine grid (\circ), the coarse grid (Δ) and adaptive grids ($—$).

The evolution of the total kinetic energy is then given in figures 10(a) and 10(b). The same conclusions can be made as for the momentum thickness: while the transitional regime is not correctly described by the multilevel calculation using the Smagorinsky model, it is quite well captured with the mixed-scale model. Nevertheless, even with the Smagorinsky model, the turbulent regime is well predicted with adaptive calculations in comparison with the control fine simulations. Moreover, the Smagorinsky model is confirmed to be characterized by a too large dissipation in the transitional regime in comparison to other models.

Figures 11(a) and 11(b) depict the streamwise energy spectra obtained in each simulation, at the same time $t = 60$. The spectra obtained with the two models lead to the same conclusions. The coarse grid solution does not represent correctly the turbulent characteristic of the flow that is expected at

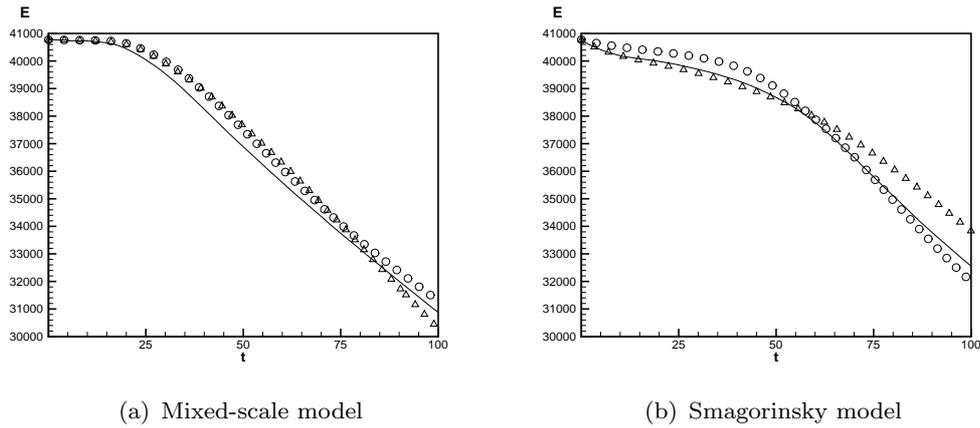


Figure 10. Evolution of the kinetic energy for the fine grid (\circ), the coarse grid (Δ) and adaptive grids ($—$).

this time, with a too low energy at the small scales and the presence of too energetic large eddies. The multilevel simulation presents a correct slope close to the $k^{-5/3}$ power law in the inertial range. A good representation of small and large scales is obtained with the adaptive grid in comparison with the fine control calculation.

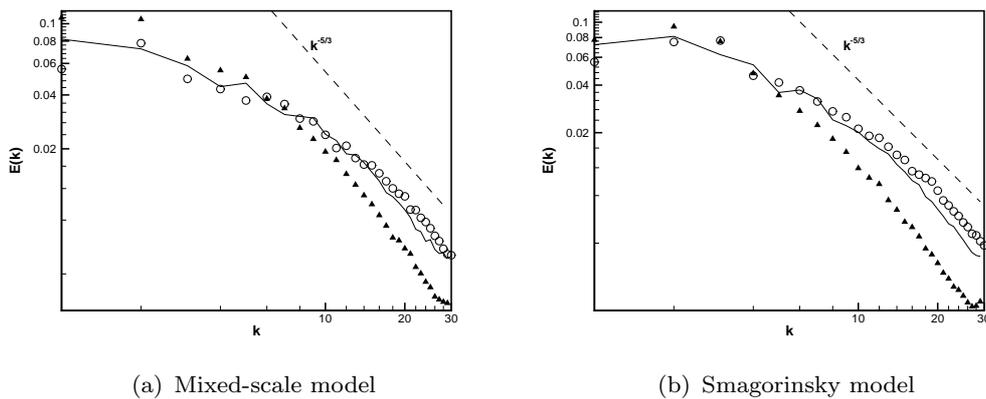


Figure 11. Streamwise energy spectrum at $t = 60$; \circ : fine grid ; \blacktriangle : coarse grid ; $—$: adaptive grids.

Finally, figures 12 and 13 present the RMS streamwise velocity fluctuations for the fine and adaptive calculations with both models. This time, the space coordinate is normalized by the momentum thickness $\psi = y/\delta_m$ in order to highlight the self-similar regime. In this regime, the velocity profiles, in normalized units, are expected to present a similar aspect at different times. The coarse solution doesn't reach the self similar state, while the fine and adaptive

28

calculations do. It should be noted that the visualization times are different for the two models since the transition occurs earlier with the mixed-scale model.

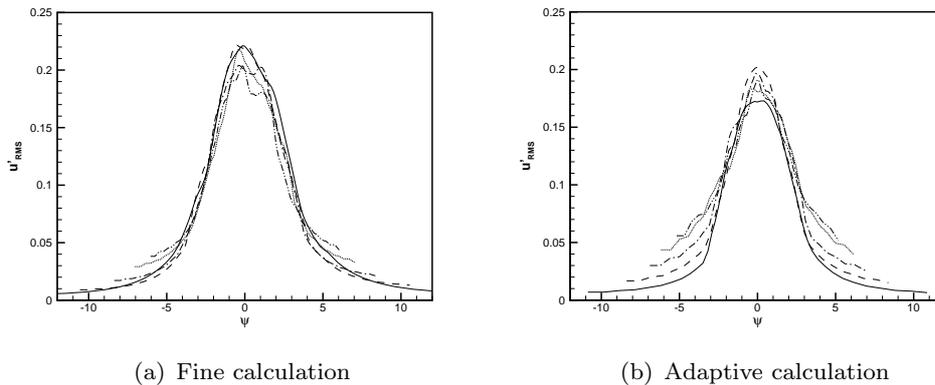


Figure 12. Streamwise velocity fluctuations during the self-similar phase, for fine and adaptive calculations, at times $t = 50$ (—), $t = 60$ (---), $t = 70$ (- · - ·), $t = 80$ (· · ·) and $t = 90$ (- · ·). Smagorinsky model.

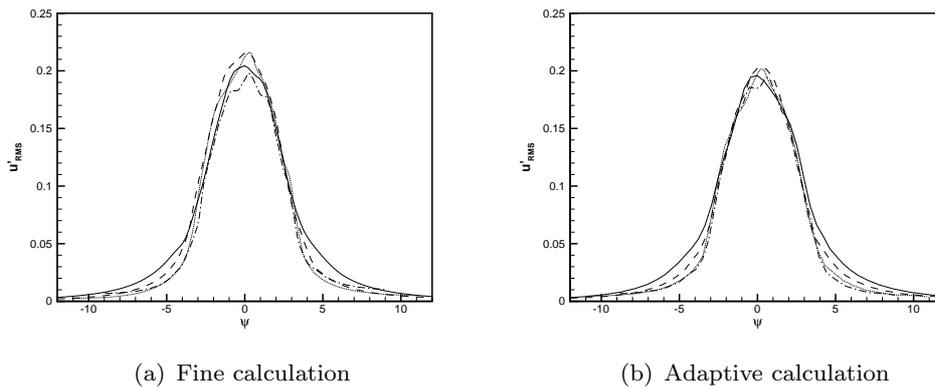


Figure 13. Streamwise velocity fluctuations during the self-similar phase, for fine and adaptive calculations, at times $t = 30$ (—), $t = 40$ (---), $t = 50$ (· · ·) and $t = 60$ (- · ·). Mixed-scale model.

5 Conclusions

An adaptive grid method has been proposed, whose objective is to limit the error introduced by LES modeling. It first relies on the determination of regions in which errors should occur; a wavelet-based sensor has been proposed and assessed to evaluate the local variation of characteristic spectra at small scales

and allows to compare this scaling with the Kolmogorov hypothesis. This sensor is combined with a multilevel resolution of the Navier-Stokes equations, fine grids being created where the sensor has detected a too slow decrease of the energy spectrum at small scales. At this step, a particular attention has to be paid to the treatment at the interface between grids of different levels. First simulations have considered the three-dimensional temporal mixing layer. The results seem in good agreement with previous studies, and allow to assess the method as a good compromise between accuracy and cost of the computation. The refinement strategy allows to obtain a good description of the behavior of the mixing layer: the evolutions of momentum thickness and total kinetic energy are in good agreement with those obtained on the control fine grid ; the velocity profiles confirm the good predictions of the multilevel calculations. The self-similar regime is well described by using the refinement strategy while the coarse grid calculation does not reach this regime. A comparison between the results obtained with the Smagorinsky and the mixed-scale models has confirmed a great dependance of the solution on the first instants of the calculation. In particular, the transitional regime is affected by the too large dissipation of the Smagorinsky model.

Other calculations are currently carried out on wall-bounded flows in order to assess the accuracy of the present method near solid boundaries.

6 Appendix

We have mentioned that prolongation and restriction operators are necessary to represent interactions between the different grid levels. We describe here the interpolation coefficients used in the present paper.

Any fine grid point - level l - is represented by indexes (i, j, k) , while coarse grid points - level $l + 1$ - indexes are (I, J, K) . The previous indices satisfy the relations: $i = 2(I - I_{beg}) + 1$, $j = 2(J - J_{beg}) + 1$ and $k = 2(K - K_{beg}) + 1$, $(I_{beg}, J_{beg}, K_{beg})$ designating the first coarse cell to be refined.

6.1 The restriction operator

The fine-to-coarse restriction operator acts as a discrete filter on the solution. For any field $\bar{\phi}^{(l-1)}$ on the $(l - 1)$ - *th* grid level, this operator allows to define the field $\bar{\phi}^{(l)}$ on the coarser grid level. This operator uses eight values on the 3D fine grid to determine the corresponding coarse value. The stencil used by this operator is described on figure 14(a), in the simplified 2D case for readability. The fine-to-coarse operator is second order accurate in space and is defined

30

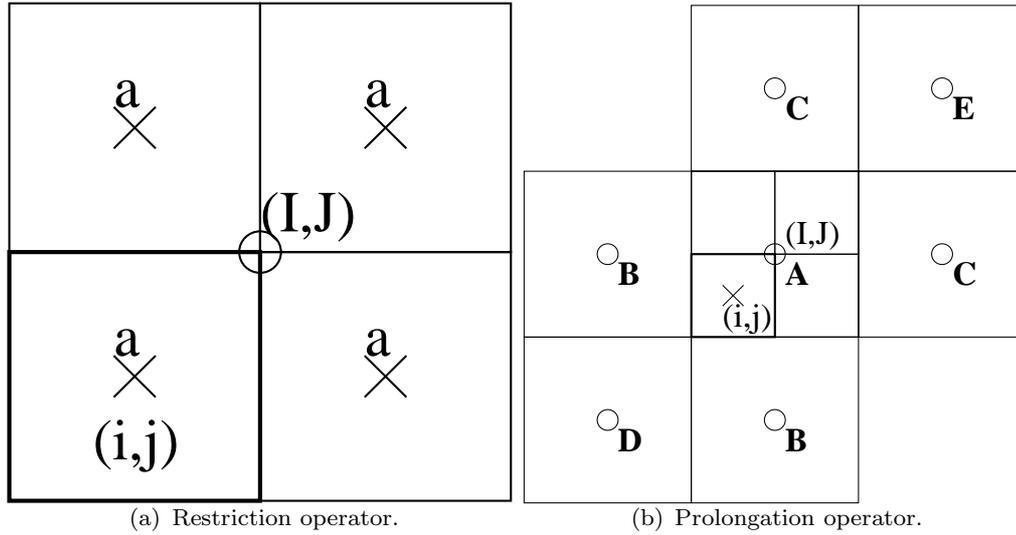


Figure 14. Stencil used for intergrid operators (2D case).

by:

$$\begin{aligned}
 \bar{\phi}_{I,J,K}^{(l)} &= \left(R_{l-1}^l(\bar{\phi}^{(l-1)}) \right)_{I,J,K} \\
 &= \frac{1}{8} \sum_{(\xi,\eta,\zeta) \in \Omega_R^a} \bar{\phi}_{i+\xi, j+\eta, k+\zeta}^{(l-1)},
 \end{aligned}$$

with

$$\Omega_R^a = \left\{ (0, 0, 0); (0, 0, 1); (0, 1, 0); (0, 1, 1); (1, 0, 0); (1, 0, 1); (1, 1, 0); (1, 1, 1) \right\}. \quad (54)$$

It should be noted that this operator is a discrete equivalent of the well-known box filter.

6.2 The prolongation operator

For any field $\bar{\phi}^{(l)}$ on the $l - th$ grid level, the coarse-to-fine prolongation operator allows to define a field $\bar{\phi}^{(l-1)}$ on the finer grid level. This operator uses fifteen values on the coarse grid to determine the corresponding fine value. The stencil used by this operator is described on figure 14(b), in the simplified 2D case. The coarse-to-fine operator is third order accurate in space and is

defined by:

$$\begin{aligned}
\bar{\phi}_{i,j,k}^{(l-1)} &= \left(P_l^{l-1}(\bar{\phi}^{(l)}) \right)_{i,j,k} \\
&= \frac{1125}{784} \sum_{(\xi,\eta,\zeta) \in \Omega_P^A} \bar{\phi}_{I+\xi, J+\eta, K+\zeta}^l - \frac{825}{6272} \sum_{(\xi,\eta,\zeta) \in \Omega_P^B} \bar{\phi}_{I+\xi, J+\eta, K+\zeta}^l \\
&\quad - \frac{2295}{6272} \sum_{(\xi,\eta,\zeta) \in \Omega_P^C} \bar{\phi}_{I+\xi, J+\eta, K+\zeta}^l + \frac{195}{784} \sum_{(\xi,\eta,\zeta) \in \Omega_P^D} \bar{\phi}_{I+\xi, J+\eta, K+\zeta}^l \\
&\quad + \frac{195}{784} \sum_{(\xi,\eta,\zeta) \in \Omega_P^E} \bar{\phi}_{I+\xi, J+\eta, K+\zeta}^l - \frac{3945}{18816} \sum_{(\xi,\eta,\zeta) \in \Omega_P^F} \bar{\phi}_{I+\xi, J+\eta, K+\zeta}^l \\
&\quad - \frac{1413}{6272} \sum_{(\xi,\eta,\zeta) \in \Omega_P^G} \bar{\phi}_{I+\xi, J+\eta, K+\zeta}^l,
\end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned}
\Omega_P^A &= \{(0, 0, 0)\} \\
\Omega_P^B &= \{(-1, 0, 0); (0, -1, 0); (0, 0, -1)\} \\
\Omega_P^C &= \{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\} \\
\Omega_P^D &= \{(-1, -1, 0); (0, -1, -1); (-1, 0, -1)\} \\
\Omega_P^E &= \{(1, 1, 0); (0, 1, 1); (1, 0, 1)\} \\
\Omega_P^F &= \{(-1, -1, -1)\} \\
\Omega_P^G &= \{(1, 1, 1)\}.
\end{aligned}$$

References

- [1] P. Angot, J.P. Caltagirone, and K. Khadra. An Adaptive Method for Local Mesh Refinement: the Flux Interface Correction. *C.R. Acad. Sci. Paris, serie I*, t. 315:739–745, 1992. *In French*.
- [2] C. Benoit. *Méthode d'adaptation de maillages au moyen d'algorithmes génétiques pour le calcul d'écoulements compressibles*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Arts et Métiers, Paris, 1999.
- [3] M. Berger. *Adaptive Mesh Refinement for Partial Differential Equations*. PhD thesis, Stanford, 1982.
- [4] M. Berger and P. Colella. Local Adaptive Mesh Refinement for Shock Hydrodynamics. *J. Comput. Phys.*, 82(64-84), 1989.
- [5] M.J. Berger and J. Olinger. Adaptive Mesh Refinement for Hyperbolic Partial Differential Equations. *J. Comput. Phys.*, 53:484–512, 1984.
- [6] B.L. Bihari and A. Harten. Multiresolution schemes for the numerical solution of 2-D conservation laws I. *SIAM J. Sci. Comput.*, 18(2):315–354, 1997.
- [7] H. Bockhorn, K. Schneider, and J. Ziuber. Wavelet Analysis of Two-Dimensional Reactive Turbulent Flow Data from Direct Numerical Simulation. In *17th International Colloquium on the Dynamics of Explosions and Reactive Systems*, July 1999.
- [8] A. Brandt. Multi-level adaptive solutions to boundary value problems. *Math. Comp.*, 31:330–390, 1977.
- [9] E. Canonne, C. Benoit, and G. Jeanfaivre. Cylindrical mesh adaptation for isolated rotors in hover. *Aerospace Science and Technology*, 8(1):1–10, 2004.
- [10] G. Chiavassa and R. Donat. Numerical experiments with multilevel schemes for conservation laws. In *Proceedings of International Conference on Godunov's Methods: Theory and Applications*, Oxford, October 1999.
- [11] W.J. Coirier and K.G. Powell. An accuracy assessment of Cartesian-mesh approaches for the Euler equations. *AIAA paper 95-3335*, 1995.
- [12] J. Dandois, E. Garnier, and P. Sagaut. Unsteady simulation of a synthetic jet in a crossflow. *AIAA J.*, 44(2):225–238, 2006.
- [13] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. CBMS lecture notes series. SIAM, 1991.
- [14] D.L. Donoho. De-noising by soft-thresholding. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 41(3):613–627, 1994.
- [15] M. Farge, N. Kevlahan, V. Perrier, and E. Goirand. Wavelets and Turbulence. *Proc. IEEE*, 84(4):639–669, 1996.
- [16] M. Farge and K. Schneider. Coherent Vortex Simulation (CVS), A Semi-Deterministic Turbulence Model Using Wavelets. *Flow, Turbulence and Combustion*, 66:393–426, 2001.
- [17] M. Farge, K. Schneider, G. Pellegrino, A.A. Wray, and R.S. Rogallo. Coherent vortex extraction in three-dimensional homogeneous turbulence: Comparison between CVS-wavelet and POD-Fourier decompositions. *Phys. Fluids*, 15(10):2886–2896, 2003.
- [18] E. Garnier, M. Mossi, P. Sagaut, P. Comte, and M. Deville. On the use of shock-capturing schemes for Large-Eddy Simulation. *J. Comput. Phys.*, 153:273–311, 1999.
- [19] B.J. Geurts. *Elements of Direct and Large-Eddy Simulation*. R.T. Edwards, Inc., 2004.
- [20] S. Ghosal. An analysis of numerical errors in large-eddy simulations of turbulence. *Journal of Computational Physics*, 125:187–206, 1996.
- [21] D.A. Goldstein and O.V. Vasilyev. Stochastic Coherent Adaptive Large-Eddy Simulation Method. *Phys. Fluids*, 16(7):2497–2513, 2004.
- [22] A. Harten. Multiresolution algorithms for the numerical solution of hyperbolic conservation laws. *Comm. Pure Appl. Math.*, 48:1305–1342, 1995.
- [23] E. Hentschel and H. Hirschel. Self adaptive flow computations on structured grids. In *1st ECCOMAS CFD conference*, 1994.
- [24] J. Hoffman. On duality based a posteriori error estimation in various norms and linear functionals for LES. *SIAM J. Sci. Comput.*, 2003.
- [25] J. Hoffman and C. Johnson. Adaptive DNS/LES : A New Agenda in CFD. In *Chalmers Finite Element Center*. Chalmers University of Technology, 2003.
- [26] J. Hoffman and C. Johnson. *Encyclopedia of Computational Mechanics*, chapter Computability and adaptivity in CFD. John Wiley & Sons, E. Stein, R. de Horz and T.J.R. Hughes edition, 2004.
- [27] J.C. Jouhaud and M. Borrel. A Hierarchical Adaptive Mesh Refinement Method : Application to 2D Flows. In *3rd ECCOMAS CFD Conference, Paris*, 1996.
- [28] E. Labourasse and P. Sagaut. Reconstruction of turbulent fluctuations using a hybrid RANS/LES approach. *J. Comput. Phys.*, 182(1):301–336, 2002.
- [29] L. Larchevêque, P. Sagaut, T.-H. Lê, and P. Comte. Large-eddy simulation of a compressible

- flow in a three-dimensional open cavity at high Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 516:265–301, 2004.
- [30] L. Larchevêque, P. Sagaut, I. Mary, O. Labbé, and P. Comte. Large-eddy simulation of the compressible flow over a deep open cavity. *Phys. Fluids*, 15(1):193–210, 2003.
- [31] I. Mary and P. Sagaut. Large-Eddy Simulation of Flow Around an Airfoil Near Stall. *AIAA J.*, 40(6):1139–1145, 2002.
- [32] S.F. Mc Cormick. Multilevel adaptive methods for elliptic eigenproblems: a two-level convergence theory. *SIAM J. Num. Anal.*, 31(6):1731–1745, 1994.
- [33] C. Meneveau. Analysis of Turbulence in the Orthonormal Wavelet Representation. *J. Fluid Mech.*, 232:469–520, 1991.
- [34] H.J. Neeman. *Autonomous Hierarchical Adaptive Mesh Refinement for Multiscale Simulations*. PhD thesis, Univ. of Illinois, 1996.
- [35] V. Perrier, T. Philipovitch, and C. Basdevant. Wavelet Spectra Compared to Fourier Spectra. *J. Math. Phys.*, 36(3):1506–1519, 1995.
- [36] P. Quéméré, P. Sagaut, and V. Couaillier. A New Multi-domain/Multi-resolution Method for Large-Eddy Simulation. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 36:391–416, 2001.
- [37] J.J. Quirk. *An Adaptive Grid Algorithm for Computational Shock Hydrodynamics*. PhD thesis, College of Aeronautics, 1994.
- [38] S.A. Ragab and J.L. Wu. Linear Instabilities in Two-dimensional Compressible Mixing Layers. *Phys. Fluids A*, 1:957–966, 1989.
- [39] B. Raverdy, I. Mary, P. Sagaut, and N. Liamis. High-Resolution Large-Eddy Simulation of Flow Around Low-Pressure Turbine Blade. *AIAA J.*, 41(3):390–397, 2003.
- [40] P. Sagaut. *Large-Eddy Simulation for Incompressible Flows - An Introduction. Third Edition*. Scientific Computation. Springer-Verlag, 2005.
- [41] P. Sagaut, S. Deck, and M. Terracol. *Multiscale and Multiresolution Approaches in Turbulence*. Imperial College Press, 2006.
- [42] K. Schneider, M. Farge, G. Pellegrino, and M.M. Rogers. CVS filtering of 3D turbulent mixing layers using orthogonal wavelets. *J. Fluid Mech.*, 534(5):39–66, 2005.
- [43] B. Sjögreen and H.C. Yee. Multiresolution Wavelet Based Adaptive Numerical Dissipation Control for High Order Methods. *J. Sc. Comp.*, 20(2):211–255, 2004.
- [44] M. Terracol, P. Sagaut, and C. Basdevant. A Multilevel Algorithm for Large-Eddy Simulation of Turbulent Compressible Flows. *J. Comput. Phys.*, 167(2):439–474, 2001.
- [45] M. Terracol, P. Sagaut, and C. Basdevant. A Time Self-adaptive Multilevel Algorithm for Large-Eddy Simulation. *J. Comput. Phys.*, 184(2):339–365, 2003.
- [46] K.W. Thomson. Time Dependent Boundary Conditions for Hyperbolic Systems. *J. Comput. Phys.*, 89:439–461, 1990.
- [47] P.R. Voke. Multiple mesh simulation of turbulent flow. Technical Report QMW EP-1082, University of London, 1990.
- [48] B. Vreman, B. Geurts, and H. Kuerten. Large-Eddy Simulation of the Turbulent Mixing Layer. *J. Fluid Mech.*, 339:357–390, 1997.
- [49] B. Vreman, B.J. Geurts, and J.G.M. Kuerten. A priori test of large-eddy simulation of compressible plane mixing layer. *J. Engineering Math.*, 29:299–327, 1995.

Bibliographie

- [1] C. Ackermann. *Développements et Validation de Simulation des Grandes Echelles d'écoulements turbulents dans un code industriel*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2000.
- [2] B. Aupoix and J. Cousteix. Modèles simples de tensions de sous-maille en turbulence homogène isotrope. *Rech. Aéro.*, 4 :273–283, 1982.
- [3] J. Bardina, J.H. Ferziger, and W.C. Reynolds. Improved turbulence models based on large eddy simulation of homogeneous, incompressible, turbulent flows. *AIAA paper*, 80 :1357, 1980.
- [4] G.I. Barenblatt, A. Chorin, and V.M. Prostokishin. Scaling laws for fully developed flow in pipes. *Appl. Mech. Rev.*, 50 :413–429, 1997.
- [5] S. Basu, E. Foufoula-Georgiou, and F. Porté-Agel. Synthetic Turbulence, Fractal Interpolation and Large-Eddy Simulation. 2003.
- [6] G.K. Batchelor and A.A. Townsend. The nature of turbulent motion at large wave-numbers. *Proc. Roy. Soc. A*, 199 :238, 1949.
- [7] P. Batten, U.C. Goldberg, S. Palaniswamy, and S.R. Chakravarthy. Hybrid RANS/LES : Spatial-resolution and energy-transfer issues. In *2nd Int. Symposium of Turbulent Shear Flow Phenomena*, 2001.
- [8] M. Berger. *Adaptive Mesh Refinement for Partial Differential Equations*. PhD thesis, Stanford, 1982.
- [9] M. Berger and P. Colella. Local Adaptive Mesh Refinement for Shock Hydrodynamics. *J. Comput. Phys.*, 82(64-84), 1989.
- [10] M.J. Berger and J. Olinger. Adaptive Mesh Refinement for Hyperbolic Partial Differential Equations. *J. Comput. Phys.*, 53 :484–512, 1984.
- [11] M.J. Berger and I. Rigoutsos. An Algorithm for Point Clustering and Grid Generation. Technical Report 501, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, 1990.
- [12] G. Berkooz, P. Holmes, and J.L. Lumley. The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flows. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 25 :539–575, 1993.
- [13] L.C. Berselli, C.R. Grisanti, and V. John. On commutation errors in the derivation of the space averaged Navier-Stokes equations. 2004.
- [14] L.C. Berselli and V. John. On the comparison of a commutation error and the Reynolds stress tensor for flows obeying a wall law.
- [15] H. Bockhorn, K. Schneider, and J. Ziuher. Wavelet analysis of two-dimensional reactive turbulent flow data from direct numerical simulation. In *17th International Colloquium on the Dynamics of Explosions and Reactive Systems*, July 1999.

- [16] B.J. Boersma, M.N. Kooper, F.T.M. Nieuwstadt, and P. Wesseling. Local grid refinement in large-eddy simulations. *J. Eng. Math.*, 32 :161–175, 1997.
- [17] J.P. Boris, F.F. Grinstein, E.S. Oran, and R.L. Kolbe. New insights into large-eddy simulation. *Fluid Dyn. Res.*, 10(199-228), 1992.
- [18] R. Breidenthal. Structure in turbulent mixing layers and wakes using a chemical reaction. *J. Fluid Mech.*, 109 :1–24, 1981.
- [19] E. Canonne. *Méthode d'adaptation de maillage pour le calcul d'écoulements compressibles autour d'un rotor d'hélicoptère*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, Paris, 2004.
- [20] W.J. Coirier and K.G. Powell. An accuracy assessment of Cartesian-mesh approaches for the Euler equations. *AIAA Paper*, 1995.
- [21] P. Comte and M. Lesieur. Large-eddy simulations of compressible turbulent flows. In *Advances in turbulence modelling*, VKI lecture series 1998-05. March 1998.
- [22] P. Comte, M. Lesieur, and E. Lamballais. Large- and small-scale stirring of vorticity and a passive scalar in 3-D temporal mixing layer. *Phys. Fluids A*, 4(12) :2761–2778, 1992.
- [23] G. Comte-Bellot and S. Corrsin. Simple eulerian time correlation of full- and narrow-band velocity signals in grid-generated "isotropic" turbulence. *J. Fluid Mech.*, 48(2) :273–337, 1971.
- [24] E. Cote, F.S. Godefert, and C. Cambon. Effets structurels de la compressibilité dans les écoulements cisailés à grande vitesse. Rapport de synthèse final - Contrat DRET 95/2585A, 1997.
- [25] I. Daubechies. Ten Lectures on Wavelets. In *CBMS-NSF regional conference series in applied mathematics*, number 61. SIAM.
- [26] I. Daubechies. Orthogonal bases of compactly supported wavelets. *Commun. Pure Appl. Math.*, 41 :909–996, 1988.
- [27] E. David. *Modélisation des écoulements compressibles et hypersoniques*. PhD thesis, INPG, Grenoble, 1993.
- [28] V. Deschamps. *Simulation numérique de la turbulence inhomogène incompressible dans un écoulement de canal plan*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 1988.
- [29] V. Deschamps. Simulation numérique de la turbulence inhomogène incompressible dans un écoulement de canal plan. Note technique ONERA, 1988.
- [30] F. Ducros, P. Sagaut, and P. Quéméré. On the use of relaxation methods for localized dynamic models. *Phys. Fluids*, 12(12) :3297–3300, 2000.
- [31] A. Dunca, V. John, and W.J. Layton. The commutation error of the space averaged Navier-Stokes equations on a bounded domain. January 2002.
- [32] J.R. Edwards and M.S. Liou. Low-diffusion flux-splitting methods for flows at all speeds. *AIAA J.*, 36(9) :1610–1617, 1998.
- [33] G. Erlebacher, M.Y. Hussaini, C.G. Speziale, and T.A. Zang. Toward the large-eddy simulation of compressible turbulent flows. *J. Fluid Mech.*, 238 :155–185, 1992.
- [34] M. Farge. Wavelet transforms and their applications to turbulence. *Ann. Rev. of Fluid Mech.*, 24 :395–457, 1992.

- [35] M. Farge, Y. Guezennec, C.M. Ho, and C. Meneveau. Continuous wavelet analysis of coherent structures. *Center for Turbulence Research - Proceedings of the Summer Program*, pages 331–348, 1990.
- [36] M. Farge, N.K.-R. Kevlahan, V. Perrier, and E. Goirand. Wavelets and Turbulence. *Proc. of the IEEE*, 84(4) :639–669, 1996.
- [37] M. Farge and K. Schneider. Coherent Vortex Simulation (CVS), A Semi-Deterministic Turbulence Model Using Wavelets. *Flow, Turbulence and Combustion*, 66 :393–426, 2001.
- [38] J. Franke and W. Frank. Temporal Commutation Errors in Large-Eddy Simulation. *Z. Angew. Math. Mech. (ZAMM)*, 81 :S467–S468, 2001.
- [39] C. Fureby and G. Tabor. Mathematical and Physical Constraints on Large-Eddy Simulations. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 9 :85–102, 1997.
- [40] E. Garnier, M. Mossi, P. Sagaut, P. Comte, and M. Deville. On the use of shock-capturing schemes for Large-Eddy Simulation. *J. Comput. Phys.*, 153 :273–311, 1999.
- [41] E. Garnier, P. Sagaut, and M. Deville. Large-Eddy Simulation of shock/homogeneous turbulence interaction. *Comput. Fluids*, 31 :245–268, 2002.
- [42] W.K. George, L. Castillo, and M. Wosnik. A theory for turbulent pipe and channel flow at high Reynolds numbers. TAM Report No. 872 - Dept. Theoret. Appl. Mech., University of Illinois at Urbana-Champaign, 1997.
- [43] M. Germano. Differential filters of elliptic type. *Phys. Fluids*, 29(6) :1757–1758, 1986.
- [44] M. Germano. Turbulence : The filtering approach. *J. Fluid Mech.*, 238 :325–336, 1992.
- [45] M. Germano, U. Piomelli, P. Moin, and W.H. Cabot. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Phys. Fluids*, A3(7) :1760–1765, 1991.
- [46] B.J. Geurts and D.D. Holm. Regularization modeling for large-eddy simulation. *Phys. Fluids*, 15(1) :L13–L16, 2003.
- [47] B.J. Geurts, F. van der Bos, and D.D. Holm. Commutator-errors in large-eddy simulation of turbulent flow. In *ICTAM*, 2004.
- [48] S. Ghosal. An Analysis of Numerical Errors in Large-Eddy Simulations of Turbulence. *J. Comput. Phys.*, 125 :187–206, 1996.
- [49] S. Ghosal, T. Lund, P. Moin, and K. Akselvoll. A dynamic localization model for Large-Eddy Simulation of turbulent flows. *J. Fluid Mech.*, 286 :229–255, 1995.
- [50] S. Ghosal and P. Moin. The Basic Equations for the Large Eddy Simulation of Turbulent Flows in Complex Geometry. *J. Comput. Phys.*, 118 :24–37, 1995.
- [51] D.A. Goldstein and O.V. Vasilyev. Stochastic Coherent Adaptive Large-Eddy Simulation Method. *Phys. Fluids*, 16(7) :2497–2513, 2004.
- [52] H.L. Grant. The large eddies of turbulent motions. *J. Fluid Mech.*, 4 :149–190, 1958.
- [53] A. Harten. Multiresolution algorithms for the numerical solution of hyperbolic conservation laws. *Comm. Pure Appl. Math.*, 48 :1305–1342, 1995.

- [54] A. Haselbacher and O.V. Vasilyev. Commutative Discrete Filtering on Unstructured Grids Based on Least-Squares Techniques. *J. Comput. Phys.*, 187, 2003.
- [55] E. Hentschel and H. Hirschel. Self adaptive flow computations on structured grids. In *1st ECCOMAS CFD conference*, 1994.
- [56] C.-M. Ho and P. Huerre. Perturbed free shear layers. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 16 :365–424, 1984.
- [57] J. Hoffman. On duality based a posteriori error estimation in various norms and linear functionals for LES. *SIAM J. Sci. Comput.*, 2003.
- [58] J. Hoffman and C. Johnson. Adaptive DNS/LES : A New Agenda in CFD. In *Chalmers Finite Element Center Preprint 2003-23*. Chalmers University of Technology, 2003.
- [59] K. Horiuti. The role of Bardina model in large eddy simulation of turbulent channel flow. *Phys. Fluids*, 1(2) :426–428, 1989.
- [60] L.-H. Huang and C.-H. Ho. Small-scale transition in a plane mixing layer. *J. Fluid Mech.*, 210 :475–500, 1990.
- [61] J.C.R. Hunt, A.A. Wray, and P. Moin. Eddies, stream, and convergence zones in turbulent flows. Technical Report CTR-S88, Center for Turbulence Research, 1988.
- [62] M. Iovieno and D. Tordella. Variable scale filtered Navier-Stokes equations : A new procedure to deal with the associated commutation error. *Phys. Fluids*, 15(7) :1926–1936, 2003.
- [63] S.A. Jordan. A Large-Eddy Simulation Methodology in Generalized Curvilinear Coordinates. *J. Comput. Phys.*, 148 :322–340, 1999.
- [64] J.-C. Jouhaud. *Méthode d'adaptation de maillages structurés par enrichissement*. PhD thesis, Université de Bordeaux, 1997.
- [65] J.-C. Jouhaud and M. Borrel. Discontinuous Galerkin and MUSCL Strategies for an Adaptive Mesh Refinement Method. *15th ICNMF, Monterey-CA*, June 1996.
- [66] J.H. Konrad. *An experimental investigation of mixing in two-dimensional turbulent shear flows with applications to diffusion-limited chemical reactions*. PhD thesis, California Institute of Technology, 1976.
- [67] R.H. Kraichnan. Eddy Viscosity in Two and Three dimensions. *J. Atmos. Sci.*, 33 :1521–1536, 1976.
- [68] E. Labourasse. *Reconstruction des fluctuations turbulentes par une approche hybride RANS/SGE*. PhD thesis, Université de Paris VI, 2002.
- [69] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Fluid Mechanics*. Pergamon Press, 1959.
- [70] J. Lasheras, J. Cho, and T. Maxworthy. Three-dimensional instability of a plane free shear layer : an experimental study of the formation and evolution of streamwise vortices. *J. Fluid Mech.*, 172 :231–258, 1986.
- [71] E. Lenormand. *Contribution à la Simulation des Grandes Echelles d'écoulements turbulents compressibles en milieux confinés*. PhD thesis, Université de Paris VI, 1999.
- [72] E. Lenormand, P. Sagaut, and L. Ta Phuoc. Large-Eddy Simulation of compressible channel flow at moderate Reynolds number. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 32 :369–406, 2000.

- [73] E. Lenormand, P. Sagaut, L. Ta Phuoc, and P. Comte. Subgrid scale models for Large-Eddy Simulation of compressible wall bounded flows. *AIAA J.*, 38(8) :1340–1350, 2000.
- [74] A. Leonard. Energy cascade in large-eddy simulations of turbulent fluid flows. *Adv. in Geophys. A*, 18(237-248), 1974.
- [75] S. Leonard, M. Terracol, and P. Sagaut. A Wavelet-based Adaptive Mesh Refinement Criterion for Large-Eddy Simulation. *A paraître dans J. Of Turbulence*, 2005.
- [76] S. Leonard, M. Terracol, and P. Sagaut. Commutation error in LES with time-dependent filter width. *A paraître dans Computers and Fluids*, 2005.
- [77] M. Lesieur and O. Métais. New trends in large-eddy simulations of turbulence. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 28 :45–82, 1996.
- [78] M. Lesieur and S. Ossia. 3D isotropic turbulence at very high Reynolds numbers : EDQNM study. *J. Turb.*, 1(007) :1–25, 2000.
- [79] M. Lesieur and D. Schertzer. Amortissement auto-similaire d’une turbulence à grand nombre de Reynolds. *J. Mécanique*, 17 :609–646, 1978.
- [80] D.K. Lilly. A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method. *Phys. Fluids A*, 4(3) :633–635, 1992.
- [81] M.S. Liou and C.J. Steffen. A new flux splitting scheme. *J. Comput. Phys.*, 107 :23–39, 1993.
- [82] S. Liu, C. Meneveau, and J. Katz. On the properties of similarity subgrid-scale models as deduced from measurements in a turbulent jet. *J. Fluid Mech.*, 275 :83–119, 1994.
- [83] P.S. Lowery and W.C. Reynolds. Numerical simulation of a spatially-developing, forced, plane mixing layer. Technical Report TF 26, Stanford University, 1986.
- [84] S. Mallat and W.L. Hwang. Singularity Detection and Processing with Wavelets. *IEEE Transactions on Information Theory*, 38(2) :617–643, 1992.
- [85] S.G. Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition : the wavelet representation. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 11 :674–693, 1989.
- [86] M. Manhart and R. Friedrich. *Direct and Large-Eddy Simulation III*, chapter Towards DNS of turbulent boundary layers, pages 429–440. Kluwer Academic Publisher, 1999.
- [87] E. Manoha, B. Troff, and P. Sagaut. Trailing-edge noise prediction using Large-Eddy Simulation and acoustic analogy. *AIAA J.*, 38(4) :573–583, 2000.
- [88] M.V. Markovin. Flow around circular cylinder. Kaleidoscope of challenging fluid phenomena. In *Proc. ASME Symp. on Fully Separated Flow*, 1964.
- [89] A.L. Marsden and O.V. Vasilyev. Commutative Filters for LES on unstructured meshes. In *Annual Research Briefs, Center for Turbulence Research*, pages 389–402, 1999.
- [90] I. Mary and P. Sagaut. Large-Eddy Simulation of flow around an airfoil near stall. *AIAA J.*, 40(6) :1139–1145, 2002.
- [91] C. Meneveau, T. Lund, and W. Cabot. A lagrangian dynamic subgrid-scale model of turbulence. *J. Fluid Mech.*, 319 :353, 1996.

- [92] A. Michalke. On the inviscid instability of the hyperbolic-tangent velocity profile. *J. Fluid Mech.*, 19 :543–556, 1964.
- [93] S. Mitran. A Comparison of Adaptive Mesh Refinement Approaches for Large Eddy Simulation. In T. Beutner C. Liu, L. Sakell, editor, *DNS/LES Progress and Challenges, Third AFOSR International Conference*, 2001.
- [94] A.S. Monin and A.M. Yaglom. *Statistical Fluid Mechanics : vol. 2*. MIT Press, 1975.
- [95] Y. Morinishi and O.V. Vasilyev. A recommended modification to the dynamic two-parameter mixed subgrid scale model for Large-Eddy Simulation of wall bounded turbulent flow. *Phys. Fluids*, 13(11) :3400–3410, 2001.
- [96] R.D. Moser, J. Kim, and N.N. Mansour. Direct Numerical Simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau = 590$. *Phys. Fluids*, 11(4) :943–945, 1999.
- [97] R.D. Moser and M.M. Rogers. Direct simulation of a self-similar turbulent mixing layer. *Phys. Fluids A*, 6 :903–924, 1994.
- [98] M. Mossi. *Simulation of Benchmark and Industrial Unsteady Compressible Turbulent Fluid Flows*. PhD thesis, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1999.
- [99] V.R. Moureau, O.V. Vasilyev, C. Angelberger, and T.J. Poinso. Commutation errors in Large Eddy Simulation on moving grids : Application to piston engine flows. *Center of Turbulence Research - Proceedings of the Summer Program*, pages 157–168, 2004.
- [100] O. Métais and M. Lesieur. Spectral large-eddy simulation of isotropic and stably stratified turbulence. *J. Fluid Mech.*, 239 :157–194, 1992.
- [101] J.C. Mumford. The structures of the large eddies in fully turbulent shear flows. part 2 : The plane wake. *J. Fluid Mech.*, 137 :447–456, 1983.
- [102] S. Nägele and G. Wittum. Large-Eddy Simulation and multigrid methods. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 15 :152–164, 2003.
- [103] H.J. Neeman. *Autonomous Hierarchical Adaptive Mesh Refinement for Multiscale Simulations*. PhD thesis, University of Illinois, Urbana-Champaign, 1996.
- [104] M. Olson and L. Fuchs. Significant terms in dynamic sgs-modeling. In P.R. Voke, L. Kleiser, and J.-P. Chollet, editors, *Direct and large-eddy simulation I*, pages 73–84. Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [105] T. Passot and A. Pouquet. Numerical simulation of homogeneous flows in the turbulent regime. *J. Fluid Mech.*, 181 :441, 1987.
- [106] V. Perrier, T. Philipovitch, and C. Basdevant. Wavelet Spectra compared to Fourier Spectra. *J. Math. Phys.*, 36(3) :1506–1519, 1995.
- [107] J. Pike. Grid Adaptive Algorithms for the Solution of the Euler Equations on Irregular Grids. *J. Comput. Phys.*, 71 :194–223, 1987.
- [108] U. Piomelli. Large-eddy simulation : achievements and challenges. *Progress in Aerospace Sciences*, 35 :335–362, 1999.
- [109] U. Piomelli, E. Balaras, H. Pasinato, K.D. Squires, and P.R. Spalart. The inner-outer layer interface in large-eddy simulations with wall-layer models. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 24 :538–550, 2003.

- [110] U. Piomelli, W.H. Cabot, P. Moin, and S. Lee. Subgrid-scale backscatter in turbulent and transitional flows. *Phys. Fluids*, A3(7), 1991.
- [111] U. Piomelli, J.H. Ferziger, and P. Moin. Models for Large-Eddy Simulation of turbulent channel flows including transpiration. Technical Report TF-32, Department of Mechanical Engineering, Stanford University, 1987.
- [112] U. Piomelli and J. Liu. Large-Eddy Simulation of rotating channel flows using a localized dynamic model. *Phys. Fluids*, 7 :839, 1995.
- [113] U. Piomelli, Y. Yu, and R.J. Adrian. Subgrid scale energy transfer and near-wall turbulence structure. *Phys. Fluids*, 8(1) :215–224, 1996.
- [114] J. Piquet. *Turbulent Flows, Models and Physics*. Springer Verlag, 1999.
- [115] P. Quéméré. *Une méthode multidomaine/multirésolution avec applications au couplage LES/LES et RANS/LES*. PhD thesis, Université de Paris VI, 2001.
- [116] P. Quéméré, P. Sagaut, and V. Couaillier. A New Multi-domain/Multi-resolution Method for Large-Eddy Simulation. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 36 :391–416, 2001.
- [117] J.J. Quirk. *An Adaptive Grid Algorithm for Computational Shock Hydrodynamics*. PhD thesis, Cranfield Institute of Technology, U.K., 1991.
- [118] S. Ramakrishnan and S.S. Collis. Multiscale Modeling for Turbulence Simulation in Complex Geometries. In *AIAA Aerospace Science Meeting*, Reno, 2004.
- [119] M.M. Rogers and R.D. Moser. Spanwise scale selection in plane mixing layers. *J. Fluid Mech.*, 247 :321–337, 1993.
- [120] A. Roskko. On the development of turbulent wakes from vortex streets. NACA Technical Report *n°* 1191, 1964.
- [121] P. Sagaut. *Simulations numériques d'écoulements décollés avec des modèles de sous-maille*. PhD thesis, Université de Paris VI, 1995.
- [122] P. Sagaut. *Large-Eddy Simulation for Incompressible Flows - An Introduction - Second Edition*. Scientific Computation. Springer-Verlag, 2002.
- [123] P. Sagaut, E. Montreuil, O. Labbé, and C. Cambon. Analysis of the near-wall behavior of some self-adaptive subgrid-scale models in finite-differenced simulations of channel flow. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 40(10) :1275–1302, 2002.
- [124] P. Sagaut, B. Troff, T.H. Lê, and T.P. Loc. Large eddy simulation of turbulent flow past a backward facing step with a new mixed scale SGS model. In Gavrilakis Deville and Rhyning, editors, *Computation of three-dimensional complex flows, Notes on Numerical Fluid Mechanics 53*. 1996.
- [125] R. Samtaney, D.I. Pullin, and B. Kosovic. Direct numerical simulation of decaying compressible turbulence and shocklet statistics. *Phys. Fluids*, 13(5) :1415–1430, 2001.
- [126] N.D. Sandham and W.C. Reynolds. The compressible mixing layer : Linear theory and direct simulation. *AIAA J.*, 1989.
- [127] H. Schlichting. Boundary layer theory. In *Mc Graw Hill series in mechanical engineering*. 1969.
- [128] U. Schumann. Subgrid scale model for finite difference simulations of turbulent flows in place channels and annuli. *J. Comput. Phys.*, 18 :376–404, 1975.

- [129] C. Seror. *Simulation des Grandes Echelles pour la prédiction du bruit des écoulements turbulents*. PhD thesis, Université Paris XI, 2000.
- [130] T.A. Simons and H. Pletcher. Large-Eddy Simulation of Turbulent Flows Using Unstructured Grids. In *34th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit*, Cleveland, OH, 1998.
- [131] B. Sjögreen and H.C. Yee. Multiresolution Wavelet Based Adaptive Numerical Dissipation Control for High Order Methods. *J. of Scientific Comput.*, 20(2) :211–255, 2004.
- [132] J. Smagorinsky. General circulation experiments with the primitive equations. *Mon. Weath. Rev.*, 3 :99–164, 1963.
- [133] P.R. Spalart, W.-H. Jou, M. Strelets, and S.R. Almaras. Comments on the feasibility of LES for wings, and on a hybrid RANS/LES approach. In C. Liu and Z. Liu, editors, *Advances in DNS/LES*, page 137. Greyden Press, 1998.
- [134] E.T. Spyropoulos and G.A. Blaisdell. Evaluation of the dynamic subgrid-scale model for Large-Eddy Simulations of compressible flows. *AIAA Paper*, 95-0355, 1995.
- [135] P.P. Sullivan, J.C. Mc Williams, and C. Moeng. A grid nesting method for large-eddy simulation of planetary boundary-layer flows. *Boundary-Layer Meteorol.*, 80 :167–202, 1996.
- [136] M. Terracol. *Méthodes multiniveau pour la Simulation des Grandes Echelles des écoulements turbulents compressibles*. PhD thesis, Université Paris Nord, 2001.
- [137] M. Terracol. Airframe noise prediction by mean of a zonal RANS/LES approach. In *4th International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena*, Williamsburg, USA, 2005.
- [138] M. Terracol, P. Sagaut, and C. Basdevant. A Multilevel Algorithm for Large Eddy Simulation of Turbulent Compressible Flows. *J. Comput. Phys.*, 167(2) :439–474, 2001.
- [139] A.A. Townsend. Flow patterns of large eddies in a wake and a boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 95 :515–537, 1979.
- [140] E.R. Van Driest. Turbulent boundary layer in compressible fluids. *J. of Aerospace Sciences*, 18(3) :145–160, 1951.
- [141] O.V. Vasilyev and E. Goldstein. Local spectrum of commutation error in large eddy simulations. *Phys. Fluids*, 16(2) :470–473, 2004.
- [142] O.V. Vasilyev, T.S. Lund, and P. Moin. A general class of commutative filters for LES in complex geometries. *JCP*, 146 :82–104, 1998.
- [143] H. Van Der Ven. A family of large eddy simulation (LES) filters with nonuniform filter widths. *Phys. Fluids*, 7 :1171–1172, 1995.
- [144] A. Vincent and M. Meneguzzi. The spatial structure and statistical properties of homogeneous turbulence. *J. Fluid Mech.*, 225 :1–20, 1991.
- [145] B. Vreman. *Direct and large-eddy simulation of the compressible turbulent mixing layer*. PhD thesis, Université de Twente, 1995.
- [146] B. Vreman, B. Geurts, and H. Kuerten. Large-eddy simulation of the turbulent mixing layer. *J. Fluid Mech.*, 339 :357–390, 1997.

- [147] B. Vreman, B.J. Geurts, and J.G.M. Kuerten. A priori test of large-eddy simulation of compressible plane mixing layer. *J. Engineering Math.*, 29 :299–327, 1995.
- [148] A. Witkowska. *Estimation numérique du bruit rayonné par une turbulence isotrope*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 1994.
- [149] A. Witkowska, D. Juvé, and J.G. Brasseur. Numerical study of noise from isotropic turbulence. *J. Comp. Acoustics*, 5(3) :317–336, 1997.
- [150] A. Yoshizawa and K. Horiuti. A statistically-derived subgrid-scale kinetic energy model for the large-eddy simulation of turbulent flows. *J. Phys. Soc. Japan*, 54(8) :2834–2839, 1985.
- [151] Y. Zang, R.L. Street, and J.R. Koseff. A dynamic mixed subgrid-scale model and its applications to turbulent recirculating flows. *Phys. Fluids A*, 5(12) :3186–3196, 1993.