



HAL
open science

Rhéologie des écoulements granulaires: variables internes et effets d'échelle

Schuhmacher Paul

► **To cite this version:**

Schuhmacher Paul. Rhéologie des écoulements granulaires: variables internes et effets d'échelle. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Université de Montpellier, 2017. Français. NNT: . tel-01571196v1

HAL Id: tel-01571196

<https://theses.hal.science/tel-01571196v1>

Submitted on 1 Aug 2017 (v1), last revised 5 Jun 2018 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de
Docteur

Délivré par
UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

Préparée au sein de l'école doctorale
Information, Structures, Systèmes

Et de l'unité de recherche
Laboratoire de Mécanique et Génie Civil (LMGC)

Spécialité: **Mécanique et Génie Civil**

Rhéologie des écoulements granulaires: variables internes et effets d'échelle

par

Paul SCHUHMACHER



Soutenue publiquement le 20 décembre 2016 devant le jury composé de:

Serge MORA	Professeur	LMGC - Université de Montpellier	Président
Jean-Noël ROUX	Chercheur IFSTTAR	Laboratoire Navier	Rapporteur
Pascal VILLARD	Professeur	Laboratoire 3SR, Université Grenoble	Rapporteur
Pierre JOP	Chargé de recherche CNRS	Laboratoire Surface du Verre et Interfaces	Examineur
Farhang RADJAI	DR	CNRS - Université de Montpellier	Directeur
Stéphane ROUX	DR	CNRS - LMT, ENS Paris-Saclay	Co-directeur



Table des matières

Remerciements	1
Introduction générale	3
1 Le comportement plastique et viscoplastique des matériaux granulaires	13
1.1 Aspects expérimentaux	16
1.1.1 Phénoménologie en cisaillement plan	16
1.1.2 Plasticité et microstructure	18
1.2 Modélisation du comportement plastique en régime quasi-statique . .	21
1.2.1 Le modèle de Mohr-Coulomb	21
1.2.2 La prise en compte de variable interne : le modèle frottant-dilatant	23
1.3 Rhéologie d'un matériau granulaire en écoulement	26
1.3.1 Rhéologie locale en $\mu(I)$: le comportement viscoplastique . . .	26
1.3.2 Écarts observés à la rhéologie $\mu(I)$	28
1.3.3 Les modèles non locaux	30
1.4 Vers une rhéologie locale enrichie	34
2 Méthodes numériques : simulations et homogénéisation	37
2.1 Modélisation(s) des matériaux granulaires	39
2.1.1 Variables locales	39
2.1.2 Unilatéralité, frottement de glissement et chocs inélastiques . .	40
2.1.3 Discussion générale sur la Dynamique Moléculaire	43
2.2 Méthode de la Dynamique des Contacts	44
2.2.1 Collision inélastique de deux particules	44
2.2.2 Application de la Dynamique des Contacts à un système multi-corps	47
2.2.3 Résolution en 2D	49

2.2.4	Schéma d'intégration	50
2.2.5	Discussion générale sur la Dynamique des Contacts	51
2.3	Essais mécaniques	51
2.3.1	Le cisaillement plan	51
2.3.2	Préparation de l'échantillon	52
2.3.3	Paramètres de simulations et analyse	53
2.4	Homogénéisation	54
2.4.1	Approche	54
2.4.2	Description locale et objective : du discret au continu	55
2.4.3	Champ de texture	58
2.4.4	Procédure numérique	58
2.4.5	Homogénéisation temporelle	61
2.5	Conclusions	62
3	Ecoulements minces et effets de taille finie	65
3.1	Effets de taille finie	68
3.2	Procédure numérique	69
3.3	Analyse du comportement moyen	70
3.4	Inhomogénéités spatiales et temporelles, les <i>colonnes</i> de force	72
3.4.1	Analyse micromécanique	72
3.4.2	Variables géométriques	76
3.5	Indépendance vis à vis de l'étendue du système	78
3.6	Effet de la rugosité	79
3.7	Conclusions	82
4	Effets de paroi en écoulement stationnaire	83
4.1	Contexte	86
4.1.1	La rugosité des parois	86
4.1.2	Rhéologie et rugosité	87
4.2	Transition vers l'état stationnaire	91
4.2.1	Redéfinition de la rugosité	91
4.2.2	L'effet de la rugosité sur la transition	92
4.2.3	Permanence et intermittence	95
4.3	Profils de vitesse	99
4.3.1	L'effet de la rugosité	99

4.3.2	Effet du taux de déformation appliqué	101
4.3.3	Rugosité : espacement et amplitude	102
4.4	Conclusions préliminaires sur les conditions aux limites	104
5	Rhéologie des écoulements stationnaires à variable interne	107
5.1	Modèle des gradients de déformation	110
5.1.1	Analyse par perturbation	110
5.1.2	Couche limite et dépendance avec l'épaisseur	111
5.1.3	Identification d'une variable interne : la connectivité	111
5.1.4	Clôture du modèle	116
5.1.5	Perturbation : estimation de ξ et amplitude	119
5.1.6	Viscosité inhomogène	121
5.2	Généralisation : viscosité et nombre inertiel	122
5.2.1	Connectivité et nombre inertiel	122
5.2.2	Influence de la pression de confinement	125
5.2.3	Viscosité généralisée	127
5.3	Mécanismes et rugosité critique	128
5.4	Viscosité : connectivité et température	131
5.5	Conclusions : viscosité enrichie et loi de comportement	135
6	Conclusions générales et perspectives	139
	Bibliographie	143

Remerciements



e commencerai par remercier mon chat d'avoir bien voulu quitter le clavier sur lequel il était confortablement logé afin que je puisse rédiger ces quelques lignes.

Je souhaite tout d'abord remercier l'ensemble des membres du jury, qui ont accepté la charge de rapporteur ou d'examineur. Un grand merci à Jean-Noël Roux qui m'a laissé une copie du manuscrit fourmillant de notes et de suggestions. Au delà de servir de base pour parfaire l'original ce fût très enrichissant d'avoir des retours et des critiques extérieurs à mon encadrement, et de suivre un point de vue nouveau sur un ensemble de concepts et d'aspects qui deviennent souvent difficiles à questionner lorsque l'on se trouve aux prises avec eux sur une si longue période. Je remercie aussi Pascal Villard d'avoir accepté la tâche de rapporteur, ainsi que Pierre Jop et Serge Mora, ce dernier m'ayant fait l'honneur de bien vouloir présider ce jury.

Si la thèse est un cheminement scientifique, elle est avant tout une aventure humaine. Je tiens à remercier mes encadrants, Farhang Radjaï et Stéphane Roux, de m'avoir donné la chance de la vivre, de m'avoir accompagné au cours de ces trois années et pour la confiance qu'ils m'ont témoignée, notamment face aux nombreuses difficultés que j'ai pu rencontrer. Mais une aventure sans *périls* n'en serait certainement pas une. Je te remercie Farhang pour un ensemble de raisons qu'il serait impossible de lister mais qui peuvent se résumer à un lien d'amitié sincère. Merci de n'avoir jamais pris mes accès de désespoir au sérieux mais seulement mes doutes, et d'avoir toujours été présent dans les moments critiques, d'avancée comme d'im-

passé. Si jusqu'ici il a été surtout question des difficultés il va de soi que celles-ci sont indissociables des moments de joie et de plaisir. Les discussions avec Farhang à propos des milieux granulaires, mais également de tout un tas d'autres choses aussi importantes, au bureau ou aux terrasses de café, de nuit comme de jour, autour d'un verre ou d'une guitare, resteront ces moments que l'on garde au fond de soi. Je le remercie également de m'avoir offert la possibilité de voyager et d'aller deux fois à Cambridge : la première fois en Angleterre, la deuxième fois aux États-Unis. Je remercie chaleureusement Stéphane Roux qui, malgré l'éloignement, a été décisif au bon déroulement de ce travail de thèse. Je le remercie pour sa patience, sa sympathie et pour avoir été très pédagogue sur des aspects mécaniques qui ne m'étaient pas familiers. Sa grande rigueur scientifique et la clarté de ses propos ont été enrichissantes à plus d'un titre, et ma propre rigueur, qui a tendance à se relâcher lorsqu'il s'agit d'explorer des idées nouvelles, a, je l'espère, fini par s'inventer de nouveaux contours.

Je remercie tous mes collègues de Montpellier, doctorants ou non, qui m'ont accompagné, apporté leur aide, leur musique et leurs idées et m'ont fait rire au cours de ces trois années, et avec lesquels il fût (et demeure) bon de discuter d'aspects scientifiques mais également de toute autre chose. Je pense à Patrick, Lhassan, Kajtek, David, Cécilia, Fabien et Lionel. Mais aussi Mahmoud, Thanh Hai, Lo, Daniel, Cécile, Fatima, Maria, Gilou, Jonathan, Chao, Riccardo, Benjamin, Adil, Tarik, Luisa, Vincent, Pankaj et Sreedhar, sans oublier Aditi.

Je remercie les membres de l'équipe PMMD, à savoir Saeid, Emilien et Mathieu notamment pour toutes ces discussions improvisées et enrichissantes.

Je remercie aussi l'ensemble du personnel du laboratoire LMGC, et notamment Reine, Chantal, Roxane, Caroline et Yannick pour leur sympathie et leur aide précieuse.

Pensées particulières aux amis et amies de longue date de Rennes. Mais aussi à ceux de Montpellier, anciens et nouveaux. Je pense à Michel, Charlotte et Marlène. Une thèse c'est plusieurs années durant lesquelles la vie fait son chemin, et ce chemin ne se fait pas sans ces personnes. À l'arrivée, on finit par se rendre compte, avec amusement, que l'essentiel du travail de thèse ne résidait pas là où on l'attendait.

Ces deux pages se déroulent jusqu'aux racines. Aussi, mes remerciements les plus profonds vont à mes parents et à ma soeur, pour leur soutien sans faille et leurs encouragements. Merci d'avoir été toujours là.

*Le professeur Bartelboom, imaginé par Baricco dans *Océan-mer*, afin d'achever l'écriture de son "Encyclopédie des limites observables dans la nature, avec un supplément consacré aux limites des facultés humaines", cherche désespérément l'endroit où se termine la mer en parcourant la plage. Est-ce que la fin de la mer se dessine à l'endroit précis où la vague arrive en bout de course, ou est-ce plutôt la courbe dessinée par le sable qui brunit en se gorgeant d'eau à son arrivée ? Il est au moins une certitude, la mer s'arrête là, quelque part. Et tout comme le sable fait des limites de la mer une frontière à jamais énigmatique, les grains font du sable lui-même un milieu insaisissable. Pour s'en convaincre il suffit d'en saisir une poignée. L'étreinte, aussi forte soit-elle, ne l'empêche pas de s'écouler d'entre nos doigts.*

Introduction générale

Matière en grains

N un matériau granulaire est un ensemble de particules solides macroscopiques, d'une taille typiquement supérieure à $100\mu\text{m}$, interagissant par collisions inélastiques et contacts frottants. Cette définition communément admise exclut d'emblée les objets mous et fragiles, et fait des matériaux granulaires un ensemble restreint de la vaste famille des milieux divisés. Le critère de taille est lié aux interactions dominantes. Lorsque l'agitation thermique et les forces de surface (van der Waals, électrique. . .) ne sont plus négligeables, on parlera plutôt de poudres fines et de colloïdes.

Les matériaux granulaires sont généralement composés d'un grand nombre de particules (de l'ordre de 600 000 dans une cuillère à café de sucre). Ils se caractérisent également par une dispersion de tailles pouvant s'étaler sur plusieurs ordres de grandeur, comme par exemple au sein d'un éboulis le long d'une pente montagneuse, où des blocs de roche côtoient une multitude de petits débris. A cela s'ajoute une grande variété de formes et de propriétés de surface, les particules pouvant être plus ou moins anguleuses et allongées, ou plus ou moins rugueuses. Le comportement mécanique d'une particule peut être complexe en soi du fait de sa structure interne. Aussi, au cours de ce travail, nous considérerons uniquement des particules rigides et leurs interactions seront réduites au frottement sec et à l'impénétrabilité. Si une particule hérite des propriétés mécaniques du solide dont elle est issue, une assemblée de particules se comporte bien différemment lorsqu'on la sollicite. Les mouvements collectifs des grains et des structures locales dominant alors le comportement observable à l'échelle macroscopique.



FIGURE 1 – Un aperçu de la diversité des milieux divisés (de gauche à droite, du haut vers le bas) : particules d’argile, sable sec, ceinture d’astéroïdes, couches sédimentaires, farine, produits manufacturés, éboulis de roches.

Deux verres, un rempli d’eau et l’autre de semoule suffisent à illustrer la particularité de cet état de la matière. Si l’on verse de la semoule dans un verre, la semoule épouse la forme de celui-ci. Au premier abord il semble que la matière en grains se comporte comme un liquide, ou du moins qu’elle possède des propriétés analogues. Mais si l’on regarde attentivement, on remarque que contrairement à la surface de l’eau, celle formée par les grains n’est pas plane. Si l’on verse ensuite la semoule sur une surface, elle s’écoule et forme une pile, des grains roulent, certains se dispersent mais à terme un petit tas se forme à un angle bien défini. Cette capacité des matériaux granulaires à se mettre en pente nous est bien familière. Nous pouvons l’observer dans la nature (dépôts de gravats, dunes, rides sur les plages. . .) et c’est une propriété essentielle qui distingue les matériaux granulaires des fluides, la capacité de supporter des chargements déviatoriques qui ont tendance à déformer le matériau, sans pour autant subir de déformation, à l’instar des solides. Le sable que nous aimons fouler du pied résiste donc au chausse-pied de la classification des états de la matière. Du fait de la richesse de son comportement, de sa réponse face à des sollicitations variées, peut-on dire d’un matériau granulaire qu’il se comporte comme un solide, un liquide ou gaz? Des études approfondies montrent justement qu’il combine et partage de manière simultanée des propriétés usuellement associées à l’un ou l’autre de ces états [63].

Une histoire de grains

Au delà de son omniprésence dans des paysages très variés, des montagnes aux bords de mer, les milieux granulaires sont utilisés quotidiennement depuis des siècles. La matière en grains se trouve être la plus exploitée par l’homme, en termes de

volume, juste après l'eau. Et l'apprentissage du comportement des matériaux granulaires a commencé bien avant la naissance de la méthode scientifique.



FIGURE 2 – Matériaux granulaires et sociétés humaines (de gauche à droite, de haut en bas) : architecture, voies de chemin de fer, agriculture, risques naturels, microphone à poudre de charbon, mesure de durées à l'aide d'un sablier

Dans l'antiquité par exemple, les Égyptiens se servaient déjà des propriétés du sable pour ériger de formidables monuments. Dans les déserts, la dynamique de migration des dunes avait été comprise et mise à profit par certains peuples qui étaient capables d'estimer le temps que mettrait une dune à parcourir sa propre longueur en fonction de sa taille. Les dunes étaient alors utilisées comme grenier ou coffre-fort pour protéger des biens du pillage, ces derniers étant enfouis à l'avant et récupérés à l'arrière. Sucre, farine, sel, poivre et autres épices, pâtes, riz ou semoule, céréales en tous genres, pommes de terre et oranges empilées, café en grains, café moulu, thés noirs et verts, chocolat en poudre et en éclats, la cuisine, tout simplement, est le royaume domestique inégalé de la matière en grains.

Ce matériau fait partie intégrante de la longue métamorphose de la technique depuis l'apparition de l'agriculture jusqu'à l'ère thermo-industrielle : qu'il s'agisse de la collecte et du stockage des céréales dans des proportions tout à fait nouvelles, des matériaux électroniques aux grands ouvrages, en passant par la fabrication du verre, du papier ou du béton, les matériaux granulaires sont omniprésents. Même la révolution des moyens de communication, marquée par l'apparition de la téléphonie et la radiophonie, n'est pas épargnée. En effet, au XIX^e siècle, fut inventé un transducteur, ou microphone à charbon, utilisé au sein des premières radios comme la BBC. Ces microphones à poudre de charbon exploitaient ingénieusement la dilatance, ce phénomène bien connu de ceux qui marchent au bord de l'eau en regardant leurs pieds (ou ceux des autres) assécher le sable sous leurs pas. Le petit paquet de grains, sous l'arrivée d'une onde sonore compressive, se dilatait et écartait les parois d'un condensateur générant ainsi un courant électrique. La matière en grains, et son exploitation, se retrouvent donc nécessairement aujourd'hui au sein d'enjeux sociétaux forts qu'il soient industriels, écologiques et donc politiques. En 2015, *Arte* réalise un

reportage édifiant *Le sable, enquête sur une disparition*, montrant en quoi le sable est une ressource vitale, épuisable, et dont la surexploitation de par le monde a de lourdes conséquences écologiques et sociales. A commencer par la simple disparition de nos plages. . .

Au delà de considérations matérialistes, la granularité du sable a été la source de paradigmes nouveaux. Ainsi, Leucippe et Démocrite furent parmi les premiers savants, au V^e siècle avant JC, à défendre une idée tout à fait originale, à savoir que le monde est discontinu, et la matière composée d'une multitude de grains rigides, indivisibles et invisibles à l'œil nu, les atomes. Ce concept a également vu le jour de manière indépendante en Inde, animé par des impératifs philosophiques faisant de l'atome la brique élémentaire du monde, garante de l'unité générale des choses qui nous entourent et des phénomènes que nous percevons. L'observation des milieux granulaires a sans nul doute servi de fondement pour les arguments d'ordre philosophique avancés en faveur de l'atomisme. L'idée défendue était qu'un grain, disons sur une plage, faisant parti d'un tout, devait lui même être composé d'éléments plus petits que lui, jusqu'à une certaine limite, jusqu'à atteindre une brique élémentaire, irréductible. Sans quoi, en chaque grain il y aurait un univers divisible sans fin, infini, au sein même de l'univers. Ce qui paraissait absurde.

Nous savons cependant, depuis Galilée, que la nature ne se comporte jamais comme nous voudrions qu'elle le fasse. Mais cette vision discontinue du monde fut vérifiée expérimentalement lors de la découverte de l'atome en 1906, quelque deux mille cinq cent ans plus tard. Même si cette hypothèse fut infiniment féconde, l'atome tel qu'il est décrit aujourd'hui par la mécanique quantique n'a plus rien en commun avec les atomes imaginés par les anciens. Mais "*les choses qui n'existent pas n'existent pas pour rien*", et le modèle atomiste demeure aujourd'hui le fondement de la science moderne de la matière et des matériaux. Dans ce modèle atomiste résidait une idée tout à fait intéressante, à savoir que les propriétés de la matière dépendaient non seulement de la nature des atomes, mais également de leur agencement dans l'espace. L'atomisme s'appuyait donc sur deux piliers indissociables : la substance et la géométrie. Finalement, les atomes imaginés par Démocrite ressemblaient davantage aux grains de sable qu'aux atomes eux-mêmes.

De la mécanique aux lois de comportement

Puisque les milieux granulaires sont manipulés aussi bien par des spécialistes que par des non spécialistes, ses propriétés sont connues de manière empirique depuis des temps très reculés. C'est au XVII^e siècle, à l'apparition de la méthode scientifique, que l'on a commencé à expliquer et comprendre les phénomènes observés. L'empirisme a en effet joué un rôle prépondérant dans ce domaine. Les matériaux granulaires ont longtemps été plus familiers aux ingénieurs et hommes d'ouvrage qu'aux chercheurs en mécanique. La mécanique des milieux granulaires est en effet historiquement liée à l'ingénierie et à son art. Elle prend racine dans la mécanique des sols, où elle était l'apanage des ingénieurs civils et militaires. En période d'après-guerre et de

reconstruction, où de nombreux chantiers de transports et de barrages sont financés, ce domaine reste encore un domaine d'expertise, et il faut attendre la deuxième moitié du XX^e siècle pour que des chercheurs et des ingénieurs, inspirés par les bonnes fondations de la mécanique des milieux continus, en fassent un domaine de recherche actif et attractif.

La mécanique, née sous l'impulsion de Newton, a connu ses premiers succès dans la prédiction du mouvement des corps célestes. Cette réussite a fait d'elle un véritable projet que l'on pensait, honnêtement, capable d'embrasser tous les phénomènes naturels. Les premières difficultés sérieuses furent néanmoins posées par les phénomènes magnétiques, et à l'avènement de la mécanique quantique, il devint clair que la conception mécanique ne pouvait prétendre à ses aspirations de modèle explicatif universel. Néanmoins, force est d'admettre que la mécanique, libérée de ses promesses non tenues, demeure une science d'une performance impressionnante. De manière générale, la mécanique a pour but de prédire la trajectoire future d'un corps en mouvement, et de déterminer celle du passé, à condition de connaître les forces agissant sur lui. Si l'on considère à présent ce corps comme un petit élément de matière, le mouvement se voit remplacé par les déformations et la force par les contraintes. La mécanique des milieux continus est un formalisme mathématique conçu pour transposer la conception mécanique au cœur des objets. Elle est capable de prédire la manière dont les corps *eux-mêmes* se déforment.

Du fait de la diversité des objets étudiés et de la non moins grande diversité de leurs textures, le travail de la mécanique consiste alors à passer de la structure au matériau même, à sa substance. Il faut passer des efforts et des déplacements appliqués, observés à l'échelle du corps à la manière dont un petit élément représentatif va subir des contraintes et des déformations. Un des buts de la mécanique est de trouver une loi de comportement, c'est à dire une relation entre les contraintes et les déformations subies par ce petit élément de volume. Une loi de comportement doit être capable de prédire comment la contrainte, ou la déformation, évolue en un point en ne considérant que les points directement voisins à des instants immédiatement antérieurs. La loi de comportement est donc l'élément clef en mécanique, qui ne peut être déduite à partir des premiers principes avancés par la physique mais qui se doit de les respecter. Il convient ensuite de rattacher cette loi identifiée aux principes thermodynamiques, puis de l'appliquer en chacun des points constituant la structure d'origine, sous réserve de connaître les efforts ou les déplacements qui lui sont appliqués.

Si l'existence d'une telle relation constitutive semble évidente, elle n'est cependant pas évidente à élucider. Pour des sollicitations diverses un même matériau ne présentera pas une réponse unique, car son comportement peut être régi par la vitesse de déformation, et surtout l'accumulation et l'histoire des déformations passées. Pour illustrer ce phénomène dans les matériaux granulaires prenons une simple bille posée sur le fond d'une boîte inclinée. Si du frottement se manifeste aux contacts il n'est pas possible de prédire la valeur des forces s'y exerçant, car le problème est surdéterminé. La seule manière d'y parvenir est de savoir comment

elle y est parvenue. Si l'on transpose ce constat à un empilement, cela se traduit par le fait que la stabilité d'un empilement de grains face à une sollicitation dépend de sa construction et de son histoire. C'est aussi typiquement ce que l'on observe lorsqu'on cisaille un empilement de grains. Si l'empilement a auparavant été cisailé dans un sens, avec une déformation cumulée importante, et si l'on renverse subitement le sens de la sollicitation, ses propriétés mécaniques et leur évolution seront différentes, jusqu'à l'atteinte d'un nouvel équilibre.

Plasticité granulaire et variables internes

Les matériaux granulaires illustrent parfaitement la difficulté d'identifier une loi de comportement capable de capter la majorité des phénomènes observés. Le sable, ou n'importe quel matériau granulaire, a un comportement plastique très marqué. L'écoulement du sable ne résulte que des déplacements relatifs des grains les uns par rapport aux autres sous l'action d'un effort externe. Le comportement mécanique du matériau est donc l'unique résultat de l'échange de quantité de mouvement et de dissipation d'énergie au niveau des contacts, qui marquent l'exclusion mutuelle des particules. Malgré cette image simple et correcte de la plasticité dans les milieux granulaires, aucun modèle n'a encore réussi à proposer une loi de comportement capable de la capter complètement, car un comportement extraordinairement riche émerge du fait de la structure de l'empilement, que l'on définit de manière générale sous le nom de *texture*. La difficulté réside dans le fait que la loi de comportement macroscopique n'a pas d'équivalent à l'échelle microscopique où l'on considère les particules. Pour passer d'une échelle à l'autre, il faut adoucir des comportements non seulement hétérogènes et instationnaires mais surtout des lois de contact entre grains rigides qui ont la particularité d'être non régulières.

L'impénétrabilité des particules et le caractère désordonné des empilements de grains engendrent une grande hétérogénéité dans le matériau. Cette hétérogénéité se caractérise tout d'abord par une hétérogénéité des contraintes au sein de l'empilement. De véritables *chaînes* de force sont observées numériquement et expérimentalement. Des études plus ou moins récentes [68] ont par ailleurs montré que le réseau de contraintes était bimodale, chacun ayant un rôle mécanique singulier et différencié. Un réseau dit fort, transmettant des contraintes normales supérieures à la contrainte moyenne, supporte l'intégralité de la charge déviatorique à la manière d'une phase solide, tandis qu'un réseau faible assure un rôle mécaniquement identique à celui d'un fluide. Les grains sont susceptibles de passer d'un réseau à l'autre. Cette hétérogénéité est encore mal comprise. Enfin, l'hétérogénéité est structurelle. L'analyse fine du réseau de contact témoigne d'une anisotropie assez marquée, des directions privilégiées sont observées. Les liens étroits entre ces deux aspects, l'hétérogénéité des contraintes et de la structure, sont encore mal compris.

L'hétérogénéité est également visible en déformation. Lors de sollicitations diverses, des bandes de localisation peuvent apparaître où une partie seulement de l'empilement voit ses grains se déplacer les uns par rapport aux autres. Pour finir,

la déformation d'un matériau granulaire est aussi très sensible à la géométrie de sa mise en écoulement, à la rugosité des parois avec lesquelles il peut interagir, et au débit auquel il s'écoule. Plus particulièrement, les écoulements denses quasistatiques, sur lesquels porte ce mémoire, ont le comportement le moins bien compris, car il s'agit du régime où coexistent différentes phases à qui l'on prête, faute de mieux, les dénominations de liquide et de solide, et où l'influence de la microstructure ne peut être ignorée.

Les premiers modèles plastiques sont issus de la mécanique des sols et sont de nature phénoménologique. On peut penser au modèle pionnier de Coulomb qui fut le premier modèle à proposer une explication satisfaisante de l'effet de talus. L'école de Cambridge a également développé un modèle élastoplastique, le modèle de CamClay ou la Théorie des Etats Critiques [84]. Bien qu'il fût initialement développé pour les argiles, il a été adapté pour les sols granulaires et demeure aujourd'hui le modèle le plus connu et le plus utilisé en mécanique des sols. L'apport des simulations numériques, et des efforts de modélisation des matériaux eux-mêmes, a été essentiel. Les simulations ont permis la mesure et l'analyse d'information à l'échelle même des particules, échelle jusque là ignorée par les modèles du fait de la difficulté d'y accéder. Ce nouveau moyen d'*observation* a ouvert de nouvelles possibilités pour la modélisation du comportement plastique des matériaux granulaires, au delà des modèles phénoménologiques. Il a alors été possible, par exemple, d'étudier l'influence de la granulométrie [4, 80, 81], du frottement interparticulaire [1, 50, 82] ou encore de la forme des grains [5, 53] sur le comportement mécanique global. Cependant, comme l'ont souligné Sibille *et al.* [39], le développement des méthodes aux éléments discrets a eu l'effet non escompté d'avoir quelque peu démotivé celui de techniques expérimentales tournées vers l'exploration des échelles microscopiques. Néanmoins, cet espace d'expérimentation n'est pas délaissé et des techniques nouvelles se développent, notamment à l'aide de moyens optiques [9].

Grâce aux simulations, des variables internes caractérisant la géométrie de l'empilement, et donc le matériau lui-même, ont pu être clairement identifiées : la compacité, la connectivité (nombre moyen de contact par particule), l'orientation des contacts, l'orientation des forces. . . Il est en effet possible d'accéder à une information très riche sur la texture du matériau, sur son évolution spatiale et temporelle. Ces variables peuvent alors servir d'assise à l'élaboration de nouvelles lois de comportement. Paradoxalement, cette information riche et nouvelle n'est pas nécessairement d'un grand secours étant donné sa profusion et la complexité des mécanismes qu'elle encode. La meilleure stratégie consiste alors à proposer une loi de comportement contenant des informations structurales de plus bas ordre, puis de venir l'enrichir successivement avec des descripteurs de plus en plus complexes. Cette approche, la détermination micromécanique d'une loi de comportement, est difficile et demeure encore aujourd'hui largement inachevée.

Nous pouvons illustrer la nécessité de prendre en compte ces variables par l'expérience d'un dépôt de grain sous le seul effet de la gravité. Sous l'apport permanent de grains au sommet, l'angle du tas oscille entre deux valeurs : un angle de repos

et un angle pour lequel des avalanches de différentes tailles se déclenchent, rétablissant l'angle de repos. Actuellement aucune théorie ne peut prédire la valeur de cet angle pour un matériau granulaire donné. Il dépend à la fois de la nature des grains, de leur forme, de leur état de surface mais aussi de leur disposition, de leur organisation et de la distribution des contraintes s'exerçant aux contacts. L'angle de talus est contrôlé en partie par la texture du matériau. Le long de la pente, de petits équilibres locaux — assurant l'équilibre global — caractérisés par des variables internes encodées dans la géométrie de l'empilement, sont rompus à l'arrivée d'un grain, sous l'effet d'un choc. La rupture de ces états d'équilibre peuvent entraîner alors de grandes déformations sous forme d'avalanches. Ceci illustre bien que le comportement plastique de l'empilement est déterminé par des détails microstructuraux loin d'être triviaux.

Cette thèse

Dans ce contexte large, ce travail porte sur les écoulements granulaires denses avec l'objectif de quantifier les mécanismes qui contrôlent le comportement et la texture granulaire en fonction des échelles spatio-temporelles de l'écoulement. Pour cela, nous utiliserons un modèle granulaire numérique volontairement simple (2D, disques faiblement polydisperses) et soumettrons une collection de particules à un essai de cisaillement simple entre deux parois rigides. La méthodologie employée dans cette étude a consisté, d'une part, à considérer une approche d'homogénéisation pour la transition de l'échelle des grains et des temps caractéristiques de leurs interactions à des échelles de description de plus en plus importantes et, d'autre part, à s'intéresser, en partant de petits systèmes, à des écoulements d'épaisseur et de longueur croissantes.

En parallèle du développement de la méthode d'homogénéisation, des simulations et études paramétriques, systématiques et nombreuses, ont permis de révéler assez rapidement le rôle crucial des dimensions de l'écoulement et l'influence des interactions des grains avec les parois (avec leur rugosité). Aux faibles épaisseurs, de l'ordre de 10 diamètres de grains, le comportement est essentiellement stochastique et dominé par les interactions avec les parois avec des microstructures intrinsèquement liées à la présence des parois et à leur rugosité. Dans cette limite, pourtant très importante dans de nombreuses applications, le comportement frottant moyen n'existe que comme une propriété moyenne sur des longs temps d'intégration et le coefficient de frottement effectif reste une propriété d'ensemble grains/parois.

En poursuivant l'exploration de systèmes de taille de plus en plus grande par rapport aux tailles des grains, en faisant varier des paramètres de contrôle (pression de confinement, taux de cisaillement) et la rugosité de parois, il s'est avéré que les écoulements, même à des épaisseurs relativement importantes (une centaines de diamètres), présentent des profils de vitesse non homogènes mettant ainsi en défaut l'applicabilité des lois phénoménologiques mises en évidence récemment comme des relations entre le coefficient de frottement effectif et un paramètre sans dimension,

le nombre inertiel. De tels profils non linéaires ont été observés dans des expériences et simulations numériques, et ont même motivé le développement de modèles de comportement non locaux, mais ils n'ont jamais été systématiquement explorés. Etant donné le profil uniforme des contraintes, nous avons donc cherché à identifier des variables internes liées à la microstructure pour rendre compte de la relation entre le taux de cisaillement et le frottement au sein des écoulements. Nous avons ainsi construit un modèle d'écoulement stationnaire prenant en compte simultanément l'épaisseur de l'écoulement, la rugosité des parois et le nombre inertiel. Ce modèle tend vers un écoulement simple sans gradients de déformation aux grandes épaisseurs et permet ainsi de retrouver le comportement « normal ». Etant donné le paramètre de viscosité granulaire qui intervient dans ce modèle et qui dépend d'une variable interne liée à la connectivité des grains ou de leur agitation (nombre de coordination ou température granulaire), à compacité fixée, un tel modèle suggère que, d'une manière générale, les écoulements granulaires doivent être décrits en termes d'au moins trois paramètres en fonction du nombre inertiel : le coefficient de frottement, la compacité et la connectivité (ou la température).

Dans le premier chapitre, nous proposerons un état des lieux (nécessairement non exhaustif) de la modélisation du comportement plastique des matériaux granulaires en s'appuyant sur des résultats expérimentaux.

Le deuxième chapitre est consacré aux procédures numériques mises en place pour réaliser ce travail. Nous présentons d'une part la méthode d'éléments discrets utilisée pour réaliser les simulations numériques des écoulements. D'autre part, nous décrirons la méthode d'homogénéisation employée pour la description continue d'un écoulement granulaire. Enfin nous préciserons la géométrie et le régime d'écoulement étudiés tout au long de cette thèse.

Le troisième chapitre porte sur l'étude du comportement d'un écoulement granulaire de faible épaisseur et du rôle joué par les parois. Nous mettrons en évidence les effets de l'interaction d'un écoulement granulaire avec les parois et sa rugosité.

Dans la quatrième partie, nous étudierons les effets de taille finie et de la rugosité des parois cette fois-ci dans un état stationnaire et pour une épaisseur croissante de l'écoulement de manière à pouvoir discerner les effets conjugués de paroi et de taille. Les profils de vitesse obtenus seront comparés à ceux obtenus expérimentalement. Nous verrons comment les inhomogénéités induites par les parois offrent la possibilité d'identifier des relations entre les déformations et la texture.

Enfin dans le cinquième et dernier chapitre nous proposerons un modèle capable de rendre compte de l'inhomogénéité des champs de déformation observée en écoulement stationnaire. Ce modèle intègre une variable interne identifiée à l'aide des simulations numériques.

En conclusion, nous résumerons les résultats principaux et discuterons des perspectives de ce travail.

‘Nous avons comparé le rôle du chercheur à celui du détective [...] En un point essentiel, cette comparaison doit être regardée comme très superficielle [...] Le détective [...] sait du moins qu’un crime a été commis. Il n’en est pas de même du savant. Il n’est pas difficile d’imaginer un homme qui ne sache absolument rien de l’électricité [...]. Qu’on donne à notre homme du métal, des feuilles d’or, des carafons, un bâton de caoutchouc durci, un morceau de flanelle [...] il est probable qu’il mettra dans les flacons du vin, se servira de la flanelle pour le nettoyage et ne concevra jamais l’idée de faire les expériences [...] Le savant doit, au moins en partie, commettre lui-même le crime et en même temps faire l’enquête.’

Einstein, 1936

1

Le comportement plastique et viscoplastique des matériaux granulaires

e premier chapitre aborde le comportement plastique des matériaux granulaires sur la base de résultats expérimentaux. Nous discuterons ensuite des modèles développés pour rendre compte de ce comportement, principalement issus de la mécanique des sols et sur des descriptions macroscopiques du milieu. Enfin, face aux difficultés rencontrées par ces descriptions, nous aborderons quelques avancées récentes en terme de modélisation, où la plasticité est davantage fondée sur la base d’évènements microscopiques.

Sommaire

1.1	Aspects expérimentaux	10
1.1.1	Phénoménologie en cisaillement plan	10
1.1.2	Plasticité et microstructure	11

1.2	Modélisation du comportement plastique en régime quasi-statique	14
1.2.1	Le modèle de Mohr-Coulomb	14
1.2.2	La prise en compte de variable interne : le modèle frottant-dilatant	15
1.3	Rhéologie d'un matériau granulaire en écoulement	18
1.3.1	Rhéologie locale en $\mu(I)$: le comportement viscoplastique	18
1.3.2	Ecart observé à la rhéologie $\mu(I)$	20
1.3.3	Les modèles non-locaux	21
1.4	Vers une rhéologie locale enrichie	24

1.1 Aspects expérimentaux

Le comportement plastique se distingue d'un comportement élastique par la présence de déformations irréversibles manifestes lorsque la contrainte est relâchée. Un matériau granulaire présente naturellement un comportement plastique : les réarrangements successifs des grains sont autant de déformations irréversibles et l'histoire de sa sollicitation joue un rôle dans son état mécanique. De manière générale le comportement plastique est caractérisé par

- un seuil plastique qui précise sous quel état de contrainte une déformation peut se produire
- un potentiel plastique qui indique la direction de la déformation
- une loi d'écrouissage donnant l'évolution de variables internes caractérisant l'état du matériau et dont dépendent le seuil et le potentiel plastique.

La mécanique des sols s'est justement attelée à modéliser le comportement plastique d'échantillons de sol pour comprendre et assurer la stabilité des ouvrages issus de l'ingénierie. Les modèles ont donc principalement été des modèles macroscopiques et phénoménologiques, développés à partir de nombreux essais mécaniques sur des échantillons de sol. Etant donnés les besoins couverts et assurés par cette science, des modèles sont nés malgré l'absence totale d'information à l'échelle des grains, faute de pouvoir réaliser de telles mesures.

1.1.1 Phénoménologie en cisaillement plan

Un moyen expérimental permettant d'étudier la plasticité d'un matériau granulaire est la configuration de cisaillement plan : on impose une déformation à un empilement confiné à pression $\sigma \equiv \sigma_{yy}$ par la mise en mouvement d'une paroi à vitesse v_x suivant la direction horizontale. On mesure alors la contrainte tangentielle τ qui lui est appliquée, donnant accès à l'état de contrainte dans l'empilement. Au cours de la même expérience on peut mesurer la variation du volume occupé par les grains, la plaque étant libre de se déplacer verticalement. Des résultats typiques avec des billes d'acier, pour des empilements initialement dense et lâche, [72] sont présentés sur les figures 1.1 et 1.2. Ces résultats classiques de mécanique des sols se retrouvent à l'aide d'autres dispositifs expérimentaux comme l'essai triaxial [84].

En premier lieu, l'analyse fine de cette évolution caractéristique de la contrainte en fonction de la déformation montre que la contribution élastique à la déformation est très faible. Pour un échantillon de sol, la déformation élastique est de l'ordre de 10^{-5} [29], et le comportement plastique apparaît également à ce faible niveau de déformation. La plasticité résulte du réarrangement des grains et du frottement, et se manifeste lors de l'ouverture d'un contact dans l'empilement. On peut alors négliger la contribution élastique par la suite. Lorsque la déformation imposée est suffisante, la contrainte cisailante τ_c à appliquer pour déformer de manière continue l'empilement est la même pour les deux échantillons. Il en va de même pour la fraction volumique ϕ_c , le volume occupé par les grains, identique dans les deux cas.

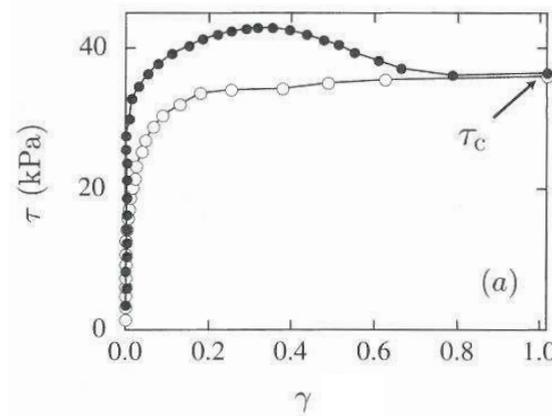


FIGURE 1.1 – Variation de la contrainte tangentielle τ en fonction de la déformation imposée pour un empilement initialement dense (points noirs) et initialement lâche (points blancs).

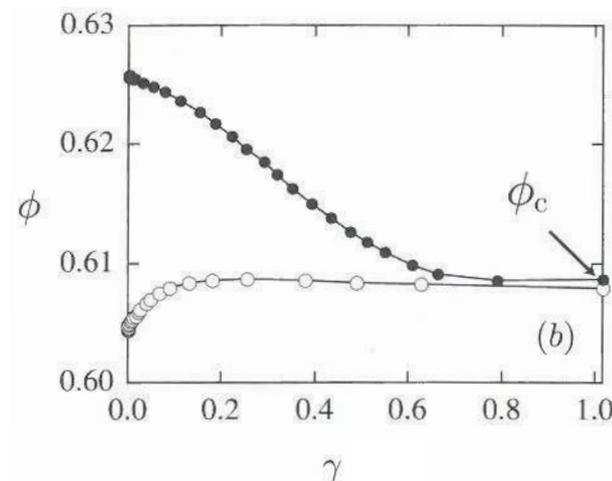


FIGURE 1.2 – Variation de la fraction volumique ϕ en fonction de la déformation imposée pour un empilement initialement dense ($\phi > \phi_c$, points noirs) et initialement lâche ($\phi < \phi_c$, points blancs).

Les deux échantillons arrivent dans le même état *critique*, ou stationnaire. C'est un état aux grandes déformations qui ne dépend pas de la préparation initiale. Dans l'état stationnaire il a été observé que la contrainte de cisaillement et la compacité sont uniquement fonctions de la pression de confinement σ . Un matériau granulaire présente donc, à l'ordre zéro, un comportement frictionnel. Il est alors envisageable de définir un coefficient de frottement effectif

$$\mu = \tau_c / \sigma \quad (1.1)$$

Ce dernier peut être vu comme une résistance au cisaillement. Cependant, les transitoires observés vers l'état stationnaire dépendent de la compacité initiale : dans le cas

dense on observe un pic de contrainte et une dilatation alors que dans le cas lâche la contrainte évolue de manière monotone et le milieu se contracte. Une variable interne comme la compacité évolue donc avec une certaine déformation cumulée caractéristique γ_ϕ vers une valeur stationnaire ϕ_c . Ce couplage avec la compacité montre la nécessité d'adjoindre au comportement frictionnel une loi d'érouissage afin de déterminer l'état de contrainte à tout moment de l'histoire du chargement.

1.1.2 Plasticité et microstructure

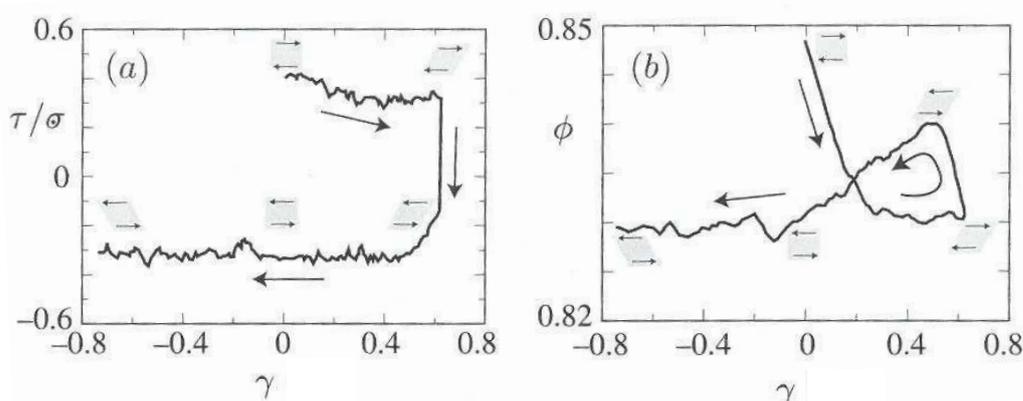


FIGURE 1.3 – Renversement du cisaillement en simulation numérique bidimensionnelle. (a) Variation de la valeur du frottement effectif au cours du chargement suivi du déchargement (b) Variation de la fraction volumique (données de Radjai *et al.* [66])

Lorsque l'on applique des chargements plus complexes, de nouveaux phénomènes se manifestent. Jusqu'ici les résultats étaient obtenus en chargement monotone. Lorsque l'on renverse la direction de chargement, comme le montre la figure 1.3, on observe un long transitoire avant d'atteindre à nouveau un état stationnaire [66]. Ce résultat suggère qu'au cours de la déformation le milieu s'est structuré dans une certaine direction. La structure est caractérisée par un réseau de contacts décrit à bas ordre par la distribution d'orientation des contacts p_θ , où $p_\theta d\theta$ donne la probabilité d'observer un contact orienté entre θ et $\theta + d\theta$, la distribution étant π périodique. Cette distribution s'obtient facilement à partir d'expériences en deux dimensions ou en simulations et a été intensivement étudiée par le passé [13, 54, 68]. Il a été observé que la distribution p_θ n'est pas uniforme et que des directions privilégiées s'établissent pendant le chargement. La structure granulaire est donc généralement anisotrope. Au cours d'un chargement monotone en cisaillement plan, même si la structure initiale est isotrope, la distribution présentera un biais, et une anisotropie a_c d'orientation des contacts sera observable. La distribution est alors bien décrite

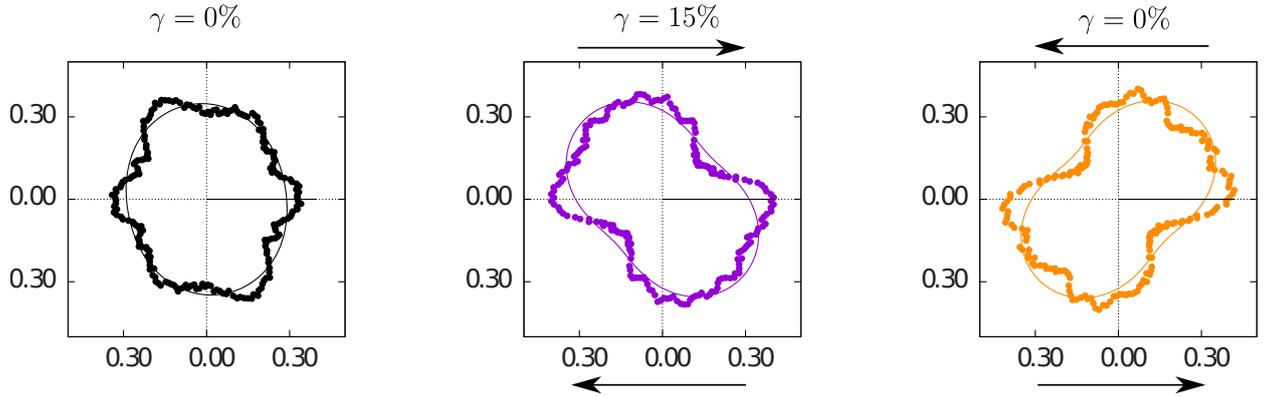


FIGURE 1.4 – Evolution de la distribution p_θ en cisaillement plan avec renversement : initial (gauche), après chargement monotone (centre), après renversement dans le nouvel état (droite).

au premier ordre par la relation

$$p_\theta = \frac{1}{2\pi} [1 + a_c \cos 2(\theta - \theta_c)] \quad (1.2)$$

où θ_c est la direction moyenne des contacts. Ces informations peuvent être extraites du tenseur de texture d'ordre 2 [73]

$$\overline{\overline{F}} = \langle \vec{n} \otimes \vec{n} \rangle \quad (1.3)$$

défini par les vecteurs normaux \vec{n} au plan de contact entre deux grains, où $\langle \dots \rangle$ est une moyenne prise sur l'ensemble des contacts appartenant au volume considéré. L'anisotropie se définit alors comme le déviateur du tenseur de texture $a_c = 2(F_1 - F_2)$ où F_1 et F_2 sont les valeurs propres, et θ_c la direction majeure. La figure 1.4 montre la distribution p_θ à l'instant initial et après cisaillement monotone (centre). On y voit bien la structuration du milieu et l'anisotropie se développer. Ces deux descripteurs, ainsi que la connectivité moyenne $z = 2N_c/N$, où N_c est le nombre de contacts et N le nombre de particules, peuvent être retenus comme variables internes caractérisant la microstructure de l'empilement.

Les figures 1.5a et 1.5b montrent l'évolution de l'anisotropie et de la connectivité lors d'une simulation d'un essai de cisaillement simple d'un échantillon de 6000 particules. La direction de cisaillement est renversée à 15% de déformation. A l'instar du frottement effectif ou de la compacité, ces variables internes présentent des transitoires avant d'atteindre une valeur stationnaire dans un nouvel état. L'anisotropie de l'empilement devient nulle au cours de ce transitoire. La distribution d'orientation des contacts (figure 1.4) montre bien que la direction de cisaillement a pour effet de déstructurer le milieu pour le restructurer dans une nouvelle direction, imposée par le tenseur de déformation. On observe également une chute brutale de la connectivité lors du renversement de la déformation imposée. La connectivité est contrôlée par le gain et la perte de contacts au cours de la déformation imposée

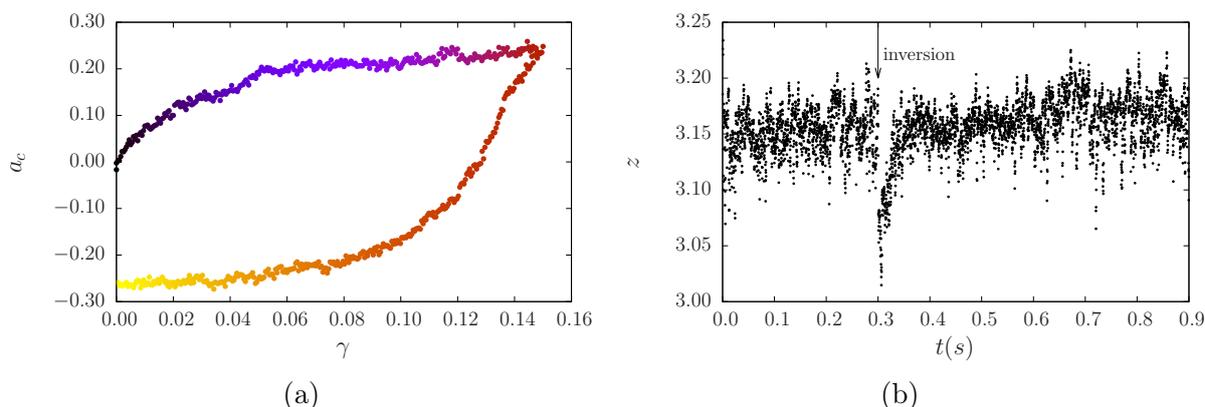


FIGURE 1.5 – Renversement du cisaillement : (a) variation de l’anisotropie a_c en fonction de la déformation imposée (b) variation de la connectivité z en fonction de la déformation imposée. La connectivité est montrée en fonction du temps par souci de clarté, ce temps étant proportionnel à la déformation cumulée.

et donc du déplacement relatif des particules. Le gain se fait de manière générale dans la direction de contraction et la perte dans la direction d’extension [12]. Les gains et les pertes se compensent dans l’état stationnaire [64, 66]. Quand la direction est renversée il existe une asymétrie entre les mécanismes de gain et de perte, ce qui conduit à une chute de la connectivité. Cet effondrement s’explique par le fait que l’ouverture d’un contact est instantanée, alors que l’advection ou la fermeture nécessite des mouvements relatifs significatifs entre grains.

Ces résultats soulignent un autre trait de la plasticité des matériaux granulaires : l’état mécanique du matériau dépend de l’histoire des déformations passées. Par exemple, l’anisotropie du milieu implique que sa résistance au cisaillement le soit également. Ceci vient du fait que l’expression de la distribution d’orientation des contacts entre directement dans la définition du tenseur de contrainte [67]. Cela montre qu’un simple critère de friction ne peut capter la globalité du comportement plastique observé. En effet, le frottement interne n’est pas une fonction simple du frottement solide entre particules. C’est une propriété de volume qui compte parmi ses origines l’anisotropie du réseau de contact [7]. On peut alors montrer que l’effet de la compacité sur l’évolution du frottement interne se fait au travers de l’anisotropie des contacts et de l’intensité des forces. De manière analogue aux métaux ou au bois, l’état du matériau (sa possible rupture, ou mise en écoulement) est donné par un couplage entre la contrainte et des variables internes comme la compacité ou l’anisotropie à résolution plus fine. A l’ordre zéro cependant, le comportement plastique des matériaux granulaires peut être réduit à son comportement frottant. C’est le modèle de Mohr-Coulomb.

1.2 Modélisation du comportement plastique en régime quasi-statique

1.2.1 Le modèle de Mohr-Coulomb

Charles Coulomb fut le premier à introduire la notion de *frottement effectif* pour expliquer la stabilité d'un empilement et les angles de pente d'un talus. Ce comportement frictionnel résulte à la fois du frottement solide entre les grains (frottement de Coulomb) mais également de la géométrie de l'empilement (exclusion mutuelle des particules). En effet, un empilement de grains non frottant présente également une pente à cause des blocages géométriques. Le modèle plastique de Mohr-Coulomb combine l'analyse de Mohr, qui permet de déterminer l'état de contraintes sur n'importe quel plan dans le matériau considéré, et le seuil plastique de Coulomb qui pose une limite à la contrainte tangentielle que peut supporter un plan avant rupture. Ce modèle reste le fondement des modèles élastoplastiques développés en mécanique des sols. Nous le présenterons ici dans un cas à deux dimensions.

Considérons un ensemble de particules rigides non cohésif et un contact quelconque dans l'empilement. La force normale N au contact est nécessairement positive $N > 0$ (en mécanique des solides la compression est définie positive), et peut être arbitrairement large. Le frottement de Coulomb relie la force tangentielle T et la vitesse de glissement v_t à chaque contact entre particules. Expérimentalement, il a été montré que v_t est nulle tant que $\|T\| < \mu_s N$ où μ_s est un coefficient de frottement solide. La force tangentielle peut alors prendre n'importe quelle valeur dans l'intervalle $[-\mu_s N : \mu_s N]$. Ces deux relations ont la propriété de n'introduire aucune échelle de force et de ne pas être monovaluées. Elles définissent à chaque contact un ensemble admissible de forces $\vec{f} = (N, T)$ à l'intérieur d'un cône défini en 2D par $-\mu_s N < T < \mu_s N$, avec $N > 0$. En l'absence de cohésion, la contrainte dans le matériau granulaire est contrôlée par les efforts extérieurs.

On peut définir le tenseur de contraintes de Cauchy, en statique, à partir des forces de contact \vec{f} et des vecteurs \vec{l} joignant les centres des particules :

$$\bar{\sigma} = n_c \langle \vec{f} \otimes \vec{l} \rangle \quad (1.4)$$

où n_c est la densité de contacts, et la moyenne $\langle \dots \rangle$ est prise sur l'ensemble des contacts appartenant au volume considéré. Comme $\bar{\sigma}$ est linéaire en \vec{f} , et que les forces sont comprises dans un cône, le domaine de contraintes admissible réside également dans un cône défini par $\sigma_T = \mu \sigma_N$ et $\sigma_N > 0$ dans l'espace des contraintes. Les symboles $\sigma_T = (\bar{\sigma} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{t}$ et $\sigma_N = (\bar{\sigma} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n}$ sont respectivement les contraintes tangentielle et normale sur le plan défini par les vecteurs unitaires normal et tangentiel \vec{n} et \vec{t} . Ce passage à l'échelle des forces de contact aux contraintes pour le critère de Coulomb ne peut se faire que si l'on néglige l'anisotropie du réseau de contacts. En effet, ce cône peut changer selon l'orientation du plan considéré car la texture défini par le tenseur $\langle \vec{n} \otimes \vec{n} \rangle$ intervient naturellement dans l'expression du

tenseur de contrainte. Le modèle de Mohr-Coulomb considère donc, par définition, le matériau comme isotrope et homogène.

Nous pouvons exprimer les composantes normale et tangentielle sur un plan repéré par sa normale $\vec{n}(\cos\theta, \sin\theta)$ à l'aide des valeurs propres du tenseur de contrainte σ_1 et σ_2 . On obtient

$$\begin{aligned}\sigma_N(\theta) &= p + q \cos 2(\theta - \theta_\sigma) \\ \sigma_T(\theta) &= q \sin 2(\theta - \theta_\sigma)\end{aligned}\tag{1.5}$$

où $p = 1/2(\sigma_1 + \sigma_2)$ et $q = 1/2(\sigma_1 - \sigma_2)$ sont respectivement la trace et le déviateur du tenseur de contraintes, et θ_σ son orientation principale. Dans l'analyse tensorielle de Mohr, l'état de contrainte sur le plan est un point de coordonnées (σ_N, σ_T) . Le critère de Coulomb est vérifié lorsque $\sigma_T = \pm\mu\sigma_N$ sur un plan d'orientation quelconque. Le cercle de Mohr est représenté sur la figure 1.6. Dans l'espace des contraintes, le frottement effectif est équivalent à un angle de frottement interne φ avec $\tan\varphi = \sigma_T/\sigma_N$. Tant que le cercle n'est pas tangent aux droites $\pm\mu\sigma_N$, il n'y a pas de rupture du matériau. Lorsque c'est le cas, il existe un plan au sein du matériau sur lequel le critère de rupture frottant est vérifié. L'analyse de Mohr permet de montrer qu'à la rupture nous avons la relation suivante entre les invariants du tenseur de contrainte q et p et l'angle de frottement interne

$$q/p = \sin\varphi\tag{1.6}$$

Cette égalité est vérifiée en même temps que la détermination de l'orientation du plan de rupture

$$\theta = \theta_\sigma \pm (\pi/4 + \varphi/2)\tag{1.7}$$

On considère alors que le matériau cède suivant ce plan en se séparant en deux *blocs* glissant l'un sur l'autre. Le modèle de Coulomb est donc construit comme un passage du critère de frottement au niveau d'un contact à l'échelle d'un matériau granulaire homogène et isotrope. Le plan de glissement, que l'on ne peut pas prédire à l'avance, joue le même rôle que le plan de contact entre deux grains. Le matériau de Coulomb n'intègre aucune variable interne et *ignore* donc sa propre microstructure. En l'absence de variable interne et de loi d'écrouissage, le matériau de Coulomb ne possède qu'un état (l'état critique) et l'angle de friction interne φ est une propriété qui lui est intrinsèque, comme représenté sur la figure 1.7. Seul le plateau des résultats expérimentaux obtenus est saisi par ce modèle et celui-ci ne peut être déterminé qu'*a posteriori*. Cependant, expérimentalement, on ne sonde qu'une seule direction de cisaillement et il n'est pas possible d'utiliser l'atteinte de l'état critique pour valider le caractère isotrope du matériau. Nous pouvons être également dans un état stationnaire anisotrope où tous les autres plans possibles de glissement ont un seuil plus élevé et ne sont donc pas explorés. En ce sens, l'angle de friction interne φ est bien dépendant de la microstructure et seule la valeur stationnaire φ^* est une propriété d'un matériau donné. Ainsi, il est possible d'enrichir le modèle de Mohr-Coulomb à l'aide de variable interne χ avec $\varphi(\chi)$ et $\dot{\chi} = f(\chi, \gamma, \dot{\gamma}, \dots)$. L'état

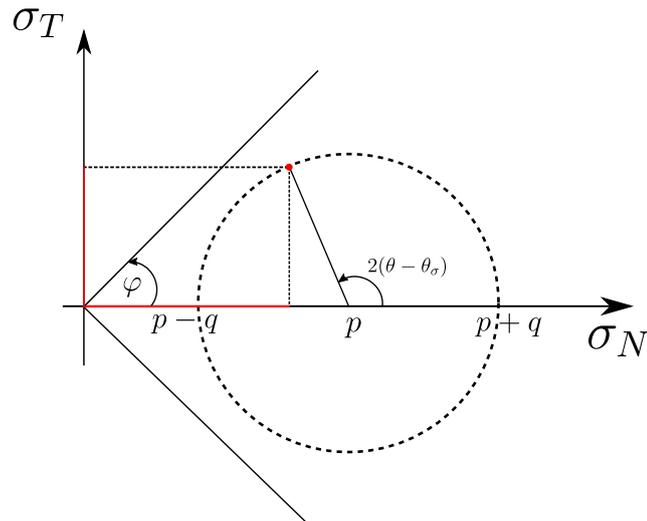


FIGURE 1.6 – Matériau de Coulomb : les coordonnées du point rouge sont les composantes normales et tangentielles de la contrainte sur le plan repéré par la normale $\vec{n}(\cos \theta, \sin \theta)$. Le cercle représente la surface de charge et les droites le critère de rupture de Coulomb. Lorsque le cercle est intersecté par l'une des droites le matériau cède.

stationnaire est alors un état *particulier* où $\dot{\chi} = 0$, $\chi = \chi^*$ et $\varphi = \varphi^*$. Dans la partie suivante nous discuterons d'un modèle plastique développé dans cet esprit, le modèle frottant-dilatant.

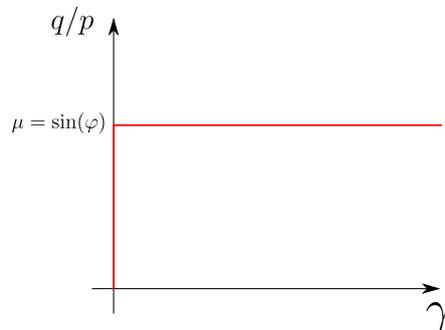


FIGURE 1.7 – Loi de comportement pour un matériau de Coulomb.

1.2.2 La prise en compte de variable interne : le modèle frottant-dilatant

Le modèle frottant-dilatant permet de décrire un matériau de Coulomb isotrope en prenant en compte le phénomène de dilatance, analysé pour la première fois par Reynolds en 1885. La dilatance, notée ψ , décrit la variation de volume occupé par les grains lorsqu'un empilement granulaire se déforme. Nous pouvons définir l'angle

de dilatance ψ comme nous avons défini l'angle de frottement interne suivant une analyse de Mohr dans l'espace des déformations. Il vient

$$\sin \psi = \frac{\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2}{\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2} \quad (1.8)$$

où $\dot{\epsilon}_1$ et $\dot{\epsilon}_2$ sont les valeurs propres du tenseur du taux de déformation ($\dot{\epsilon}_3 = 0$ en 2D). En cisaillement plan, l'angle de dilatance s'obtient simplement en mesurant le rapport du déplacement vertical de la plaque mobile au déplacement horizontal imposé tel que $\tan \psi = \Delta y / \Delta x$. Dans le cas du cisaillement plan, nous avons vu que le seuil de rupture était atteint et qu'une déformation plastique se produisait suivant le plan de glissement dont la normale \vec{n} est orientée selon l'angle θ par la relation 1.7. Comme les expériences le montre, cette déformation ne se fait pas à volume constant. Une fois l'état critique atteint, le volume ne varie plus et le matériau est caractérisé par un frottement interne critique φ^* et une compacité critique (ou stationnaire) ϕ^* . Il vient alors $\psi(\phi^*) = 0$.

Considérons un matériau initialement à la densité ϕ_0 , proche de ϕ^* . Par définition, la compacité va tendre vers cette valeur, aussi nous pouvons faire un développement limité de ψ , en petite perturbation, au voisinage de la densité critique :

$$\psi(\phi_0) = \psi(\phi^*) + \left. \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right|_{\phi^*} (\phi_0 - \phi^*) \quad (1.9)$$

avec $\psi(\phi^*) = 0$. Il vient alors

$$\psi(\phi_0) = b(\phi_0 - \phi^*) \quad (1.10)$$

avec b une constante. Nous avons vu que lorsque l'empilement était initialement dense le matériau se dilatait et se contractait s'il était initialement lâche, ce que traduit cette équation. Une relation de proportionnalité simple entre le frottement effectif et la dilatance, vérifiée expérimentalement, existe telle que

$$\mu = \tan(\varphi + \psi) \quad (1.11)$$

Cela revient à proposer que si un empilement doit se dilater pour se déformer alors son coefficient de frottement interne a une valeur plus élevée. Le matériau est à présent caractérisé par un coefficient de friction interne critique fonction de la dilatance $\varphi(\psi)$ et une compacité critique ϕ^* . Indépendamment de l'état initial, les expériences montrent que le milieu tend vers un état stationnaire où $\varphi = \varphi^*$, $\phi = \phi^*$ et $\psi = 0$. Il manque une dernière relation donnant l'évolution de la compacité au cours de la déformation pour clore le modèle. Au cours du cisaillement la masse de l'empilement est conservée telle que ϕV soit constant. Notons $d\gamma = \dot{\epsilon}_{xy} dt$ l'incrément de déformation. La variation de volume relative dV/V est donnée par $\dot{\epsilon}_{yy} dt$ si l'on suppose qu'il n'y a pas de variation possible dans la direction de l'écoulement (typiquement en écoulement périodique). En différenciant $\phi V = \text{cst}$ par rapport à V on obtient $d\phi/\phi = -dV/V$. Soit $d\phi/\phi = -\tan(\psi)d\gamma$. Il vient

$$\frac{d\phi}{d\gamma} = -\phi \tan \psi \quad (1.12)$$

Ce système d'équations constitue un modèle capable de reproduire la relaxation de la compacité, sur une déformation caractéristique $\gamma_\phi = 1/b\phi^*$, et donc de la contrainte vers leurs valeurs attendues dans l'état critique, comme le montre la figure 1.8.

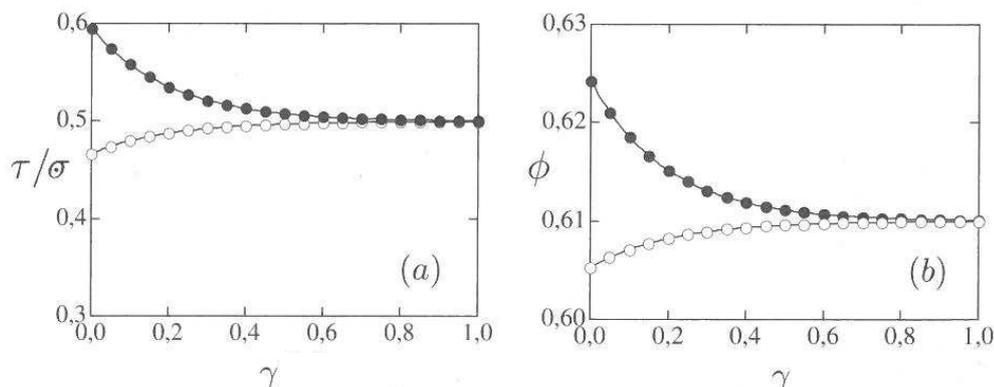


FIGURE 1.8 – Prédiction du modèle frottant dilatant pour un empilement initialement lâche (blanc, $\phi < \phi^*$) et un empilement initialement dense (noir, $\phi > \phi^*$) : (a) Evolution du frottement interne (b) Evolution de la compacité

Ce modèle dispose d'un paramètre interne ($\phi - \phi^*$), l'écart à la compacité critique. Lorsque la déformation est très grande devant γ_ϕ on retombe sur le matériau de Coulomb. L'enrichissement est ici de décrire le transitoire de dilatance/contractance vers l'état critique. Cette loi de comportement est définie sur des considérations de symétrie (par rapport à l'état critique) et elle doit être en principe complétée par une étude de stabilité autour de ce point, qui montre que l'état plus dense que l'état critique conduirait systématiquement à la formation d'une bande de cisaillement invalidant la dilatance homogène [19, 20] représentée sur la figure 1.8. Ce modèle a été généralisé et décrit à l'aide de mesures objectives sous le nom de modèle de Drücker-Prager dilatant. A noter que le couplage entre les variations de volume et l'état de contrainte est également présent dans le modèle de Cam-Clay [75].

Malgré le succès de ce modèle, capable de capter les phénomènes de relaxation, celui-ci ne peut pas prédire l'atteinte d'un nouvel état lorsque l'on renverse la direction de cisaillement par exemple, et de manière générale, l'état au cours de chargements plus complexes. Cela démontre qu'il est nécessaire de disposer d'un paramètre interne non scalaire mais tensoriel. Ainsi, la même démarche peut être suivie en intégrant par exemple l'anisotropie d'orientation des contacts a_c et en proposant une loi d'évolution pour la texture [79]. L'approche phénoménologique permet de concevoir des modèles assez enrichis pour reproduire la plupart des comportements moyens observés. Cette approche montre que les transitoires observés résultent de la relaxation d'une ou plusieurs variables internes, celles-ci n'ayant pas nécessairement les mêmes déformations caractéristiques de relaxation.

Jusqu'ici nous avons uniquement considéré le comportement plastique dans le régime statique ou quasi-statique, où les déformations sont très lentes, et où l'en-

semble des phénomènes observés est indépendant du taux de déformation appliqué. Une modélisation complète du comportement plastique doit néanmoins être capable de rendre compte aussi bien du comportement statique que du comportement en écoulement. L'approche phénoménologique peut effectivement se généraliser aux écoulements denses, où les modèles de plasticité peuvent être complétés.

1.3 Rhéologie d'un matériau granulaire en écoulement

1.3.1 Rhéologie locale en $\mu(I)$: le comportement viscoplastique

Comment un matériau granulaire s'écoule pour des conditions de contrainte données ? D'un point de vue mécanique, l'écoulement des matériaux granulaires denses est bien décrit par une loi viscoplastique de la forme $\dot{\gamma} \propto \tau - \tau_0$, où τ est la contrainte instantanée et τ_0 est un seuil de contrainte. Nous illustrons ici la rhéologie dans la géométrie de cisaillement simple. Soit un matériau granulaire constitué de particules de diamètre d et de masse volumique ρ_s , confiné à une pression P entre deux plaques rigides et rugueuses. Lorsque que la plaque supérieure est mise en mouvement à une vitesse v , on impose au matériau un gradient de taux de déformation homogène $\dot{\gamma} = v/h$, où h est la distance entre les deux plaques. En l'absence de gravité, et dans le cas de particules supposées infiniment rigides, il existe seulement 4 paramètres dans le système : la taille d , la masse volumique ρ_s des grains, le taux de cisaillement au centre et à l'équilibre $\dot{\gamma}^*$ et la pression de confinement P . D'après le théorème pi[6], il est possible de définir un nombre sans dimension caractérisant le système, comme par exemple

$$I = \dot{\gamma}^* d \sqrt{\frac{\rho_s}{P}}. \quad (1.13)$$

Ce nombre a été appelé *nombre inertiel* [31]. Il peut s'interpréter comme le rapport d'une force résultante d'échange de quantité de mouvement entre deux particules lors d'une collision à la force typique sous l'effet de la pression de confinement. Au

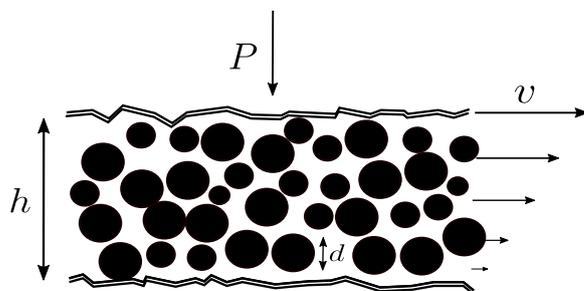


FIGURE 1.9 – Cisaillement simple

sein de écoulement caractérisé par un taux de déformation homogène $\dot{\gamma}^*$, l'échange de quantité de mouvement entre deux particules est proportionnel à leur vitesse relative. Il est de l'ordre de $m\dot{\gamma}^*d$ sur un temps caractéristique $1/\dot{\gamma}^*$. En introduisant la masse volumique du matériau ρ_s on trouve une force *dynamique* $f_d \simeq \rho_s d^3 \dot{\gamma}^2$. La force de confinement est typiquement de l'ordre de $f_s \simeq Pd$ en 2D, P étant la seule échelle de contrainte dans le système. Le rapport de la force dynamique à la force statique donne $f_d/f_s = \rho_s d^2 \dot{\gamma}^2 / P$. On trouve bien que $I = \sqrt{f_d/f_s}$.

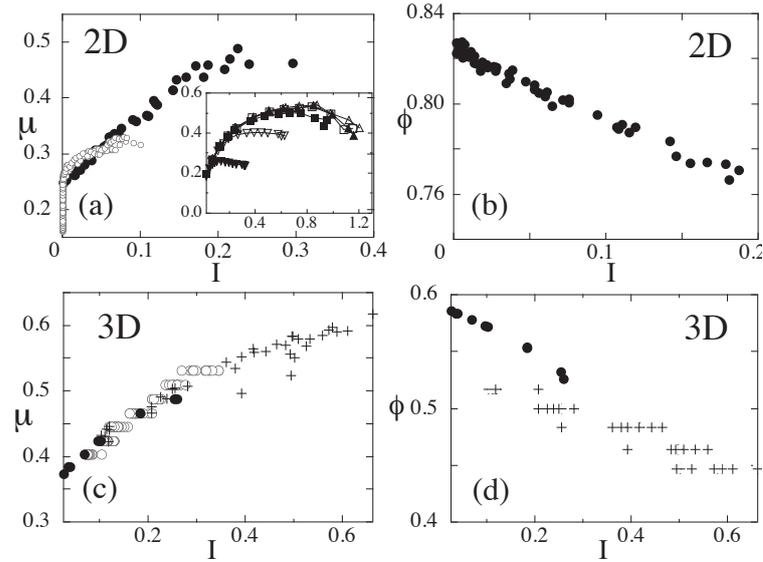


FIGURE 1.10 – (a-c) Évolution du frottement interne moyen μ en fonction de I mesurée à l'aide de simulations en 2D dans différentes géométries d'écoulement, mais aussi pour des expériences d'écoulement sur plans inclinés. (b-d) Evolution de la compacité ϕ en fonction de I .

La figure 1.10 montre les mesures de μ et de ϕ en fonction de I . La contrainte cisailante τ , proportionnelle à la contrainte de confinement P , n'est pas contrôlée dans cet essai, non plus que la fraction volumique ϕ . Cela implique que le coefficient de frottement et la compacité sont fonction de I telle que $\tau = \mu(I)P$ et $\phi(I)$. On observe bien que la résistance au cisaillement augmente avec le nombre inertiel, et ce, dans différentes géométries d'écoulement [23] et sur plusieurs ordres de grandeur. Le coefficient de frottement effectif augmente lorsque le taux de cisaillement s'accroît et diminue lorsque la pression de confinement augmente. Ce résultat semble contre-intuitif à première vue. Il faut préciser que le frottement effectif n'est pas isotrope, aussi il augmente pour une direction de chargement donnée. Lorsque le taux de cisaillement augmente (ou la pression diminue), l'agitation des grains est plus élevée et ils s'écoulent moins facilement dans la direction qui leur est imposée par le dispositif expérimental. On peut proposer une expression analytique [11] en ajustant les données issues des simulations et des expériences

$$\mu(I) = \mu_0 + \frac{\mu_1 - \mu_0}{1 + I_0/I} \quad (1.14)$$

où μ_0 représente le seuil de contrainte de sorte à ce qu'il y ait écoulement si $\tau > \mu_0 P$. Le paramètre μ_1 donne la valeur asymptotique du frottement effectif, lorsque I tend vers l'infini. Ce comportement asymptotique est conforté par des expériences analysant la propagation de front d'avalanche. Cette relation peut être linéarisée en régime quasi-statique lorsque I tend vers 0

$$\mu(I) \approx \mu_0 + a I. \quad (1.15)$$

où $a = (\mu_1 - \mu_0)/I_0$. Comme I est proportionnel à $\dot{\gamma}$, a représente une viscosité sans dimension. Typiquement, $a \simeq 1$ et l'expression 1.15 est valide pour des valeurs de I inférieures à 0.1

De la même manière, on peut proposer une relation régissant l'évolution de la compacité $\phi(I)$ avec le nombre inertiel, comme le montre la figure 1.10. Le problème de cette description est que la compacité (et son évolution) est découplée du frottement effectif alors que les résultats expérimentaux montrent clairement un couplage entre les deux. Ce système ne permet donc pas de décrire complètement le cas des hétérogénéités et des régimes transitoires observés. Cependant, en négligeant les variations de la compacité, cette description permet de prédire les comportements moyens observés : la partie centrale d'un écoulement en cisaillement plan, les écoulements sur plan inclinés et sur lit granulaire, mais également les effondrements gravitaires[40].

La rhéologie $\mu(I)$ est une loi locale au sens où elle s'applique en tout point de l'écoulement, en considérant le taux de déformation et la pression en ce point. Il faut cependant garder à l'esprit que le nombre inertiel a été défini à partir de paramètres macroscopiques, définis à l'échelle du système. Même en conditions homogènes, le nombre inertiel ne reflète en rien l'état des contraintes ou la cinématique à un instant t sur un petit ensemble de particules dans l'écoulement. Le nombre inertiel, tel qu'il a été défini en 1.13, décrit par essence un comportement moyen et stationnaire. Cette loi constitutive n'a donc pas d'origine microscopique claire et bien définie, ce qui en fait un sujet de recherche actif. Un des intérêts du nombre inertiel est de permettre une meilleure classification des régimes d'écoulement. Lorsque $I \rightarrow 0$ on parlera de régime quasi-statique, où la déformation imposée se déroule sur des échelles de temps largement supérieures à celle des instabilités locales et des réarrangements. Pour des valeurs très élevées, typiquement $I > 1$, l'écoulement est rapide et très dilué. Ces écoulements sont décrits par une théorie cinétique, inspirée des lois de comportement des gaz. Les régimes denses correspondent à des valeurs intermédiaires, la limite avec le régime quasi-statique demeurant assez floue et encore mal comprise.

1.3.2 Écarts observés à la rhéologie $\mu(I)$

Il existe en effet une transition de phase entre un état statique et l'état d'écoulement. La mise en écoulement à faible nombre inertiel est intermittente, et se fait par *avalanches* successives. Elle dépend de manière non triviale des instabilités locales [77]. Staron *et al.* ont montré que l'intermittence de l'écoulement résultait de

réarrangements localisés au niveau des contacts où le frottement était mobilisé et le glissement possible. En ce sens, lorsque les détails microstructuraux se manifestent à l'échelle du système, la rhéologie $\mu(I)$ échoue naturellement à en proposer une description satisfaisante.

La loi constitutive $\mu(I)$ décrit l'écoulement en introduisant une contrainte seuil et un unique critère de frottement. En régime quasi-statique, elle n'est pas capable de prédire l'existence de bande de cisaillement de taille finie [57]. Prenons l'exemple de la mise en écoulement d'un milieu granulaire en cellule de Couette. Lorsque le cisaillement amorcé par la mise en rotation du cylindre interne est réalisé à faible nombre inertiel ($I < 10^{-4}$), la loi locale peut se réduire à un simple critère de frottement de Coulomb. La rhéologie prédit une bande de cisaillement localisée à proximité de la paroi en mouvement du fait d'une distribution non uniforme des contraintes. La loi de comportement prédit la dépendance de l'épaisseur de cette bande au taux de déformation et également sa disparition dans le régime quasi-statique, lorsque la vitesse de rotation du cylindre tend vers zéro. Cette prédiction est contraire à l'observation car une bande de localisation d'une épaisseur finie, de l'ordre de 5 à 10 diamètres, est systématiquement observée. Un simple critère de frottement pour décrire le déclenchement de l'écoulement n'est donc pas suffisant.

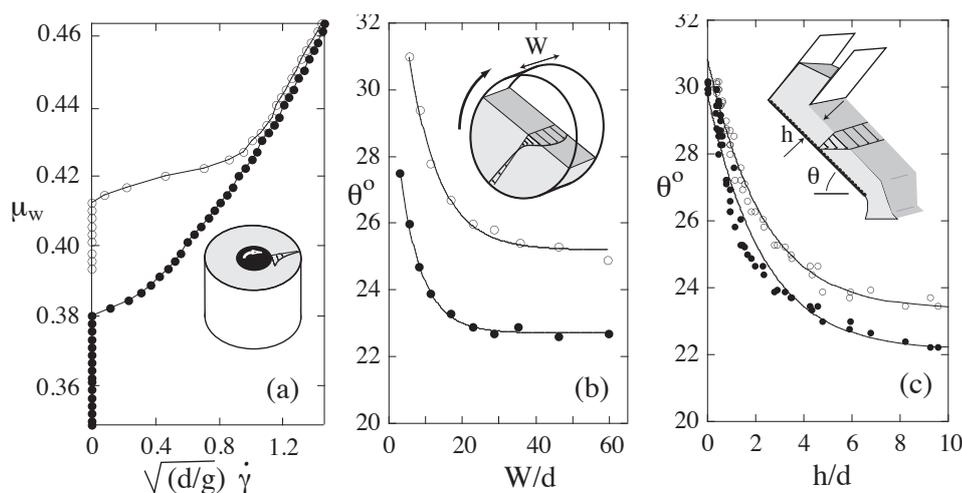


FIGURE 1.11 – Hystérésis dans (a) la cellule de Couette : frottement effectif τ_w/σ mesuré sur le cylindre tournant en fonction du taux de déformation normalisé ; (blanc) : augmentation de la contrainte (noir) diminution de la contrainte [17] (c) sur plan incliné ; (blanc) θ_{start} (noir) θ_{stop} en fonction de l'épaisseur initiale de l'empilement h/d (Pouliquen et Forterre 2002)

La rhéologie $\mu(I)$ est également incapable de décrire l'hystérésis observée dans les systèmes contrôlés en contrainte ou encore dans le cas d'un renversement de l'écoulement. Si l'on reprend le cas d'un écoulement de Couette, il est nécessaire d'atteindre une certaine valeur seuil de la contrainte pour déclencher l'écoulement. Cependant, une fois activé il faut abaisser davantage cette contrainte pour que l'écoulement s'arrête, comme le montre la figure 1.11. Un phénomène similaire est observé

pour des écoulements sur plan incliné et en tambour tournant. L'écoulement se déclenche pour une inclinaison θ_{start} . Si l'on diminue progressivement l'inclinaison de l'écoulement on observe que celui-ci s'arrête pour un angle θ_{stop} plus faible. La loi constitutive est incapable de prédire ces phénomènes car elle n'est qu'une extension au cas d'un écoulement du modèle frottant de Coulomb. Aussi, elle partage la caractéristique de n'intégrer aucune variable interne ni de loi d'écrouissage. Au cours de l'écoulement nous avons vu que le milieu se structurait en réponse aux efforts ou aux déformations imposées. Une anisotropie structurelle se développe et se reflète sur la résistance au cisaillement de l'écoulement. Lorsque l'on abaisse la contrainte en cellule de Couette, ou diminue l'angle d'inclinaison de l'écoulement, la structure ne correspond plus aux efforts pour lesquels elle s'est développée. Il en résulte une résistance nécessairement plus faible. Les phénomènes d'hystéresis ne peuvent être capturés qu'à l'unique condition d'intégrer dans la loi de comportement un descripteur de la texture du matériau.

1.3.3 Les modèles non locaux

Bien que l'approche phénoménologique $\mu(I)$ décrive un bon nombre de propriétés des écoulements denses, nous avons vu à travers quelques exemples qu'elle n'est pas capable de capter certaines caractéristiques. Pour y remédier, de nombreux modèles non locaux ont été développés. La non localité est définie par le fait que 1) la quantité de mouvement se diffuse sur une distance plus grande qu'une taille de particule avec un temps caractéristique petit par rapport à $\dot{\gamma}^{-1}$ 2) la loi constitutive est enrichie d'une variable d'état indépendante de $\dot{\gamma}$ (ainsi que son évolution) [10]. Des résultats comme la corrélation spatiale des vitesses non affines, ou réciproquement des forces de contacts entre grains, sur de grandes distances dans l'écoulement ont renforcé l'idée que la rupture d'un équilibre mécanique local dans l'empilement peut résulter d'un évènement, d'une fluctuation induite à une distance finie de celui-ci. Cette approche a donné naissance aux modèles d'auto-activation d'évènements plastiques [57], et au modèle de *fluidité* [36].

Le modèle d'auto-activation a été proposé par Pouliquen *et al.* en 2001 [58] pour décrire les écoulements quasi-statiques puis a été étendu au cas des écoulements inertiels [57]. Ce modèle part du constat évoqué précédemment, qu'un simple critère de frottement ne permet pas de décrire les zones de déformation dans l'écoulement. Le matériau se déforme et s'écoule là où la loi de frottement local ne prédit aucune déformation. Les auteurs proposent alors que le seuil plastique y est atteint si l'on intègre des contraintes fluctuantes générées par des réarrangements en d'autres points de l'écoulement. La figure 1.12 montre un schéma du mécanisme.

Dans le modèle les fluctuations décroissent de manière exponentielle avec la distance au point considéré ($z - z'$ sur le schéma) sur une longueur caractéristique $\sqrt{\beta}d$. La fluctuation de contrainte en z peut alors s'écrire sous la forme

$$\delta\sigma_{z' \rightarrow z} = \delta\sigma_0(z') \exp[-(z - z')^2 / \beta d^2] \quad (1.16)$$

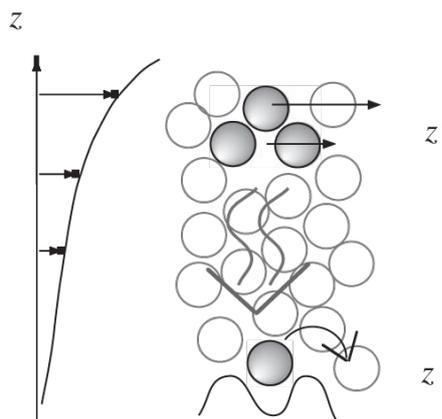


FIGURE 1.12 – Illustration du modèle non local : une particule est délogée sous l'effet des fluctuations de contrainte intégrées sur une région de taille finie.

où $\delta\sigma_0(z')$, l'intensité de la fluctuation en z' , est une variable aléatoire de l'ordre de la pression $P(z')$ tirée dans une distribution exponentielle, reflétant la distribution des forces dans l'empilement. Enfin, il est supposé qu'une particule doit être au repos pour que la fluctuation agisse sur elle. Le taux de déformation local $\dot{\gamma}(z)$ est alors déterminé à la fois par la pression locale $P(z)$, la contrainte cisailante $\tau(z)$ et l'intégrale de toutes les sources de fluctuations dans une région donnée, qui vont donner une contribution au taux de déformation, si elles permettent d'atteindre localement le seuil plastique. Ce modèle est capable de donner un bon ordre de grandeur des épaisseurs d'arrêt de l'écoulement sur plan incliné en fonction de l'angle d'inclinaison et de prédire les profils de vitesse stationnaires en cisaillement plan sous gravité ou en cellule de Couette.

Cependant ce modèle n'est pas capable de prédire les effets de taille finie comme la variation de l'hystérésis observée sur plan incliné avec l'épaisseur de l'écoulement. En effet les angles θ_{stop} et θ_{start} dépendent tous deux de l'épaisseur initiale de l'empilement. D'autre part, le modèle ne prend en compte aucune variable interne clairement définie à l'échelle des grains, comme la compacité ou l'anisotropie. En ce sens, il ne peut reproduire les transitoires observés en cisaillement quasi-statique. Le caractère non local de ce modèle provient des multiples *sources* qui viennent transmettre en chaque point un incrément supplémentaire de contrainte. D'après le modèle, cette contrainte fluctuante trouve son origine dans les réarrangements de particule et donc des instabilités locales et des percussions. Ce modèle peut donc être rapproché d'une théorie cinétique des milieux granulaires. Le modèle de Haff [27], développé en 1983, traite le cas de gaz granulaires denses. Il permet d'estimer les échanges de quantité de mouvement et d'énergie entre particules dans des petites collisions locales. La contrainte calculée à partir de ces micro-instabilités au sein de l'écoulement s'identifie à une contrainte cinématique (ou de collision) explicitée dans la description continue de l'écoulement (voir section 2.4). Elle est proportionnelle à la racine de la température $\sigma_{xy}^c \propto \text{tr}(\overline{\overline{T}})^{1/2}$, où la température est définie à partir des

fluctuations des vitesses telle que

$$\overline{\overline{T}} = \langle \delta \vec{v}_i \otimes \delta \vec{v}_i \rangle_i \quad (1.17)$$

avec $\delta \vec{v}_i = \vec{v}_i - \vec{V}$, où \vec{v}_i est la vitesse instantanée de la particule i et \vec{V} est la vitesse moyenne mesurée dans son voisinage imposée par les conditions limites.

Un autre modèle non local pour les écoulements denses a été proposé en s'appuyant sur la théorie cinétique des écoulements plastiques (*Kinetic Theory of Plastic Flow* ou KEP). Cette théorie a été développée pour décrire la rhéologie des matériaux amorphes (gels, émulsion, suspensions...) [28]. Ces matériaux ont des propriétés similaires à celles des milieux granulaires : au repos ils se comportent comme des solides élastiques mais s'écoulent comme des liquides lorsque les efforts qui leur sont appliqués atteignent une contrainte seuil. Ce comportement élasto-plastique est décrit par le modèle KEP dont le but est de proposer une origine microscopique au comportement à seuil observé. Le modèle est le suivant : sous l'effet d'un effort externe le matériau réagit de manière élastique et lorsque la contrainte atteint le seuil une déformation plastique se produit. Lors de ces événements plastiques, la contrainte est relaxée localement et une onde élastique se propage à longue portée dans le matériau, sur une distance ξ dite de *coopérativité*. Cette *vibration* du champ élastique peut amener d'autres régions à se plastifier etc... Le modèle propose alors une relation locale entre la contrainte et le taux de déformation de la forme

$$\sigma = \frac{1}{f} \dot{\gamma} \quad (1.18)$$

où σ est le tenseur de contrainte moyen local et f la *fluidité*, i.e l'inverse de la viscosité. Cette fluidité est directement proportionnelle au taux d'évènements plastiques. Le modèle montre qu'elle doit satisfaire l'équation suivante

$$\Delta f - \frac{1}{\xi^2} (f - f_b) = 0 \quad (1.19)$$

où f_b est la valeur que prend la fluidité en l'absence de termes non locaux, c'est à dire lorsque ξ tend vers zéro. La distance de coopérativité ξ est identique à la distance introduite dans les modèles phénoménologiques décrivant les écoulements confinés d'émulsion dans des micro-canaux [26]. Cette distance quantifie la zone d'influence de l'activité plastique engendrée par la relaxation des contraintes élastiques dans le système. Le modèle est capable de capturer les propriétés des écoulements lorsque ceux-ci s'écartent des prédictions d'un simple critère de rupture. Une des prédictions du modèle est que le matériau peut s'écouler sans nécessairement atteindre la contrainte seuil. Il prédit ainsi la présence d'une bande de cisaillement et d'un taux de cisaillement non nul proche d'une paroi même en régime quasi-statique, en accord avec les résultats expérimentaux. L'équation 1.19 montre que la non localité dépend de gradients non homogènes de la fluidité. Bocquet *et al.* proposent que ces gradients se manifestent lorsque la taille du système est de l'ordre de la distance de coopérativité ou lorsque des gradients de contrainte sont observés. Ils proposent

également que ces gradients peuvent trouver leur origine dans l'interaction entre le matériau et les parois. Ces gradients dépendent alors de la rugosité des parois, leur influence sur l'écoulement ayant été observée expérimentalement sur de nombreux systèmes [32], y compris les matériaux granulaires [35, 45, 71].

Kamrin *et al.* ont transposé et adapté ce modèle aux milieux granulaires denses. Ils ont adapté la relation 1.18 sous la forme

$$f = \frac{\sigma}{\sigma_0} \dot{\gamma} \quad (1.20)$$

où σ_0 est la contrainte seuil, ce qui laisse invariant l'expression si σ_0 est constant. Ainsi définie, la fluidité est homogène à un taux de déformation et $1/f$ est un temps caractéristique. La fluidité définie par le modèle KSP dérive du comportement élastoplastique des milieux amorphes. Dans le cas de simulations de milieux granulaires utilisant la dynamique moléculaire, où les contacts se déforment élastiquement (voir section 2.1.2), la fluidité peut être transposée naturellement au cas d'écoulements granulaires. Ainsi, ce modèle, tout comme le modèle précédent, est capable de prédire la présence d'une large bande de cisaillement en quasistatique, là où la rhéologie locale échoue, comme le montre la figure 1.13. Le modèle est également capable de prédire les profils de vitesse obtenus en cisaillement plan sous gravité et dans d'autres géométries [28].

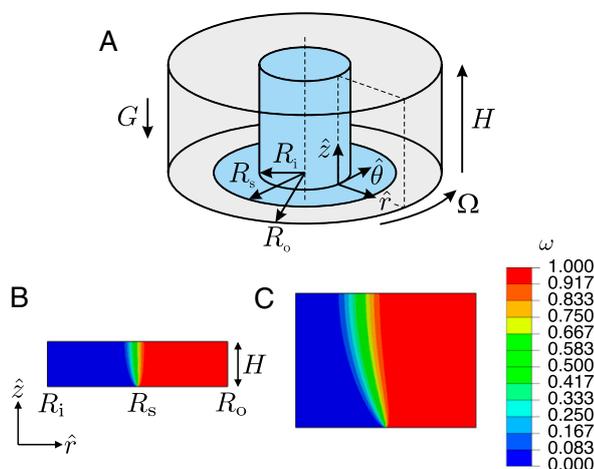


FIGURE 1.13 – (A) schéma d'un essai en cellule de Couette. Le cylindre interne en bleu est fixe tandis que le cylindre externe est en rotation. Les parois sont rugueuses et la surface de l'écoulement est libre (b,c) Prédiction du modèle des champs de vitesse en quasistatique et de la bande de cisaillement.

Cependant, transposer ce concept au cas de particules rigides n'est pas évident [10]. Pour correspondre à son rôle joué dans un modèle élastoplastique, cette variable d'état doit contribuer au taux de déformation mesuré localement et être proportionnelle au taux d'évènements plastiques. Kamrin *et al.* ont proposé de définir le taux de déformation local comme suit : à un petit élément de volume est associé une

collection de *sites*. Chaque site peut se déformer s'il subit une contrainte supérieure à une valeur seuil, laquelle est issue des perturbations induites par les autres sites. On remarque qu'avec cette définition, le modèle rejoint le modèle d'auto-activation présenté précédemment. Kamrin *et al.* ont d'ailleurs récemment proposé de relier la fluidité aux fluctuations des vitesses des particules, et donc à la température, ainsi qu'à la compacité [37]. La nature physique de la fluidité reste encore peu claire.

Ces modèles ont permis de prédire le comportement de nombreux écoulements comme des écoulements de couette sous gravité ou sur plans inclinés, et notamment là où la rhéologie $\mu(I)$ échoue à le faire. Ils sont capables de prendre en compte les hétérogénéités de l'écoulement près des parois. Nous avons vu qu'ils partageaient, malgré des approches différentes, des caractéristiques communes 1) l'introduction d'une distance caractéristique interne sur laquelle sont intégrés les effets non locaux (fluctuations de contrainte ou de vitesse) 2) l'absence de variables internes bien identifiées propre aux matériaux granulaires. En d'autres termes, malgré le pouvoir de prédiction de ces modèles, et bien qu'ils réussissent à faire de nouvelles prédictions en accord avec les observations, ils ne reposent pas sur des bases micromécaniques claires.

1.4 Vers une rhéologie locale enrichie

Les variables internes, comme la compacité ou l'anisotropie, définissent et déterminent l'état mécanique du système ainsi que son évolution. L'enjeu de la modélisation du comportement plastique pour les milieux granulaires est donc double : proposer une relation entre les variables internes et l'état de contrainte, ainsi que des lois d'évolution associées, et s'affranchir de la phénoménologie afin d'obtenir des relations que l'on n'impose pas *a priori*, mais qui soient déduites d'observations directes sur la microstructure. Nous avons vu qu'une simple modélisation frictionnelle en statique échouait à rendre compte des observations, notamment lorsque le matériau se met en écoulement à la transition *solide/liquide*. En écoulement, le matériau granulaire est bien décrit en stationnaire par une loi de type viscoplastique à seuil, le seuil décrivant le comportement frictionnel.

Les écarts à la rhéologie mesurés en écoulement ont favorisé le développement d'approches non locales, pour contrecarrer l'échec d'un simple critère de frottement. Ces approches ont montré qu'en intégrant des fluctuations de vitesse ou de contraintes sur un domaine de taille finie il était possible de reproduire la majorité des phénomènes observés en écoulement. Ces modèles le font en partie en intégrant dans le calcul des contraintes une contribution associée la trace de la température granulaire, qui s'apparente au tenseur de Reynolds en description continue. Cette contrainte résulte des échanges de quantité de mouvement entre particules lors d'un choc, et doit être prise en compte pour reproduire le comportement observé.

En ce sens, les modèles non locaux, faute de considérer les variables internes elles-mêmes, décrivant l'état du système, viennent intégrer les effets des fluctuations en

chaque point. Ces fluctuations résultent des ré-arrangements des particules, et donc de l'évolution de ces variables en temps et en espace. Derrière la non localité, l'enjeu de taille est donc bien, *in fine*, de trouver une loi locale intégrant suffisamment de variables internes pour évaluer ces réarrangements et ces instabilités. Par ailleurs, cette approche est confortée par les résultats que nous avons évoqué sur les effets de taille finie et de parois. Le déclenchement d'une avalanche sur plan incliné par exemple est un phénomène contrôlé en partie par la taille du système et par la rugosité des parois. Il en va de même pour un écoulement en cisaillement plan. Si l'on considère que les parois viennent perturber dans leur voisinage l'état géométrique de l'empilement alors l'intégration des effets de taille finie à une loi de comportement doit se faire sur des bases micromécaniques claires.

Pour y parvenir, l'utilisation de méthodes numériques paraît incontournable pour au moins deux raisons : les simulations permettent d'accéder aux variables internes géométriques bien définies à l'échelle des grains mais également de retrouver le comportement moyen, qui peut être facilement validé par des résultats expérimentaux. Une fois ces données obtenues, il est alors possible d'en faire l'homogénéisation à différentes résolutions spatiales et temporelles. Ces descriptions continues permettent de chercher des relations d'écroutissage et à terme, une loi constitutive d'un petit élément de volume.

Les concepts physiques sont des créations libres de l'esprit humain et ne sont pas, comme on pourrait le croire, uniquement déterminés par le monde extérieur. Dans l'effort que nous faisons pour comprendre le monde, nous ressemblons quelque peu à l'homme qui essaie de comprendre le mécanisme d'une montre fermée. S'il est ingénieux il pourra se former quelque image du mécanisme, [...] mais il ne sera jamais en état de comparer son image avec le mécanisme réel, et il ne peut même pas se représenter la possibilité ou la signification d'une telle comparaison.

Einstein, 1936

2

Méthodes numériques : simulations et homogénéisation

ans ce chapitre, nous allons décrire et préciser l'ensemble des méthodes numériques employées. Nous décrirons d'abord la méthode de simulation des écoulements granulaires : la dynamique des contacts. Nous aborderons ensuite la géométrie et le régime d'écoulement utilisés et nous définirons les conditions limites du système. Enfin, nous décrirons la méthode d'homogénéisation spatiale et temporelle développée, capable de produire une lecture compatible et continue des simulations discrètes alors réalisées.

Sommaire

2.1	Modélisation(s) des matériaux granulaires	29
2.1.1	Variables locales	29
2.1.2	Unilatéralité, frottement de glissement et chocs inélastiques	30
2.1.3	Discussion générale sur la Dynamique Moléculaire	32
2.2	Méthode de la dynamique des contacts	33
2.2.1	Collision inélastique de deux particules	33
2.2.2	Application de la Dynamique des Contacts à un système multi-corps	35
2.2.3	Résolution en 2D	37
2.2.4	Schéma d'intégration	37
2.2.5	Discussion générale sur la Dynamique des Contacts	38
2.3	Essais mécaniques	38
2.3.1	Le cisaillement plan	38
2.3.2	Préparation de l'échantillon	39
2.3.3	Paramètres de simulations et analyse	40
2.4	Homogénéisation	41
2.4.1	Approche	41
2.4.2	Description locale et objective : du discret au continu	41
2.4.3	Champ de texture	43
2.4.4	Procédure numérique	44
2.4.5	Homogénéisation temporelle	45
2.5	Conclusions	47

2.1 Modélisation(s) des matériaux granulaires

La nature discrète des matériaux granulaires engendre un comportement mécanique riche et complexe. Si le comportement d'un matériau granulaire doit être étudié, une bonne précaution est donc de le considérer comme tel : un ensemble d'objets en interaction, interactions régies par des mécanismes spécifiques comme la non interpénétration des grains, les chocs, et le frottement au niveau des contacts. Une description de ces matériaux doit donc explicitement prendre en compte l'échelle des grains pour pouvoir étudier sa rhéologie comme résultat de la multiplicité de ces interactions. Malgré les progrès réalisés dans le développement de techniques d'observation à l'échelle locale (positions, vitesses, déformations élastiques des grains etc.), les simulations numériques demeurent un outil puissant et éprouvé de prospection dans ce domaine. Non seulement il est possible d'accéder à la réponse mécanique à l'échelle macroscopique sous un chargement externe, mais également à une information détaillée sur la microstructure et son évolution.

Les méthodes aux éléments discrets forment une vaste famille de méthodes déployées pour l'étude d'ensemble de particules en interaction [2, 16]. Il existe plusieurs méthodes aux éléments discrets comme la Dynamique Moléculaire (*DM*), appliquée pour la première fois aux granulaires par Cundall [15] à la fin des années 80. Elle se fonde simplement sur l'intégration des équations de la dynamique pour chaque particule, décrite comme un objet rigide soumis à des forces de contact et externes. Elle a été mise en place à l'origine, comme son nom le laisse à penser, pour étudier les systèmes moléculaires. D'autres méthodes dites *non régulières* ont également été développées pour répondre à des problématiques propres aux matériaux granulaires. Par exemple, la Dynamique des Contacts (*DC*), mise au point par Moreau et Jean [33, 34, 47].

Nous allons illustrer, pas à pas, les différences fondamentales entre l'approche régulière de la *DM* et irrégulière de la *DC*. Pour cela, nous aborderons successivement les trois conditions fondamentales régissant l'interaction entre grains. Nous n'aborderons ici que le cas de disques en $2D$, ces méthodes pouvant être adaptées pour les sphères ou les polygones [61]. Nous décrirons ensuite précisément la méthode de la Dynamique des Contacts que nous avons employé dans cette thèse. Nous verrons en quoi, dans le cas d'écoulement dense, où la grande majorité des contacts sont permanents, la méthode non régulière est à privilégier.

2.1.1 Variables locales

Il est nécessaire de définir des variables locales au contact pour modéliser et simuler l'interaction de deux grains. Considérons deux particules en contact (figure 2.1). Soit \vec{u} la vitesse relative au contact définie comme

$$\vec{u} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \quad (2.1)$$

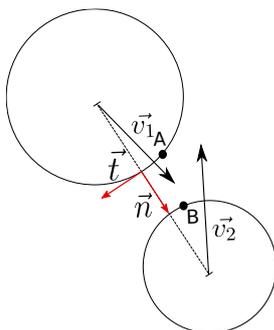


FIGURE 2.1 – Repère local d’une collision entre deux particules

où \vec{v}_1 est la vitesse instantanée de la particule avec comme point de contact potentiel A , et \vec{v}_2 est la vitesse instantanée de la particule avec comme point de contact potentiel B . Quand les deux particules sont en contact, $A \equiv B \equiv D$ et une force \vec{F} s’exerce entre elles au point D . On peut la décomposer en une composante normale et tangentielle dans le repère local défini par les vecteurs \vec{n} et \vec{t} , avec $f_N = \vec{F} \cdot \vec{n}$ et $f_T = \vec{F} \cdot \vec{t}$. De manière analogue, nous pouvons décomposer la vitesse relative \vec{u} sur le repère local en une composante normale u_N et tangentielle u_T . La distance δ est définie comme la séparation minimale entre les particules 1 et 2. Sa dérivée temporelle est donc égale à la composante normale de la vitesse relative \vec{u} , soit

$$\dot{\delta} = u_N \quad (2.2)$$

De manière générale, la vitesse d’une particule est une fonction régulière et continue du temps. Cependant, sur des intervalles de temps très courts, lors d’une percussion, des discontinuités de vitesse peuvent apparaître. Pour cela on peut définir sur un intervalle de temps quelconque une vitesse $u^-(t)$ et $u^+(t)$ avant et après le choc. On peut ainsi traiter le cas d’un saut de vitesse sans difficulté. Lorsque la fonction qui associe à tout instant t une vitesse $u(t)$ est continue alors $u^-(t) = u^+(t) = u(t)$.

2.1.2 Unilatéralité, frottement de glissement et chocs inélastiques

Les systèmes granulaires et moléculaires partagent des traits communs : ils sont composés d’un grand nombre d’objets singuliers en interaction, dont le mouvement peut être décrit par des forces. La physique est pourtant radicalement différente. La physique d’un contact dans un milieu granulaire peut être ramenée à trois composantes : l’unilatéralité, le frottement de Coulomb et la dissipation d’énergie. La première stipule que deux grains ne peuvent pas s’interpénétrer. La seconde, qu’il existe un frottement *de glissement* entre deux objets en contact, englobant des mécanismes très complexes trouvant leur origine dans des descriptions fines des surfaces mises en contact. Il se distingue du frottement visqueux par le fait qu’il faille atteindre une valeur seuil de la force pour qu’il y ait glissement au contact. Le frottement est

caractérisé par un coefficient μ_s exprimant la proportionnalité entre l'effort tangent seuil et l'effort normal. Ce coefficient ne peut être connu (de manière approximative) qu'expérimentalement, par exemple en faisant glisser des objets les uns sur les autres. La troisième, provenant de l'expérience, rend compte de la dissipation d'énergie lors d'une collision entre deux particules.

Unilatéralité

L'unilatéralité est la condition selon laquelle deux particules en contact ne peuvent pas s'interpénétrer. Soit \vec{F} la force de contact entre les deux corps. La condition s'exprime alors par le fait que le point D appartenant à la particule 2 ne peut pas pénétrer dans la particule 1. La force \vec{F} permet de respecter cette condition. Cette condition, appelée aussi condition de Signorini, peut s'écrire en termes de vitesse normale u_n [47]

$$u_N(t) \geq 0, F_N(t) \geq 0, u_N(t)F_N(t) = 0 \quad (2.3)$$

La seconde relation de l'expression (2.3) montre notamment qu'il n'existe pas de fonction $F_N(\delta)$, mais que (u_N, F_N) appartiennent à un graphe.

En *DM*, l'unilatéralité entre deux particules sera appliquée sous la forme d'interpénétrabilité donnant lieu à une force de réaction visant à les séparer. Cela peut s'interpréter numériquement comme une pénalisation. Cette modélisation s'inspire fondamentalement de la résolution proposée par Hertz pour le calcul de la force s'exerçant entre deux sphères en contact. L'interpénétration est donc vue comme la déformation élastique du contact, engendrant une force normale de répulsion F_N , fonction de la distance d'interpénétration. Mathématiquement on écrit la condition d'unilatéralité :

$$F_N(t) = \begin{cases} -k_N \delta, & \text{si } \delta(t) \leq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.4)$$

où k_N est un paramètre de rigidité, suffisamment grand pour que l'interpénétration reste faible ($\delta/d \ll 1$) même si cette condition n'est en générale pas suffisante. Nous pouvons prendre une loi d'interaction plus simple (linéaire avec l'interpénétration) que la loi originale de Hertz, car il s'agit seulement ici d'une pénalisation. Dans le cas de la *DC*, l'unilatéralité est prise au sens strict du terme, c'est à dire que la distance d'interpénétration doit rester positive telle que $\delta \geq 0$. On peut également représenter l'expression (2.4) sous la forme d'un graphe. On voit bien sur la figure 2.2 que le graphe de la relation (2.4) est un graphe approximatif, *régularisé* du graphe de Signorini.

Frottement de glissement

Le frottement de glissement s'écrit, avec les variables locales

$$\|\vec{u}_T\| \neq 0 \Rightarrow F_T = -\mu_s F_N \frac{\vec{u}_T}{\|\vec{u}_T\|} \quad (2.5)$$

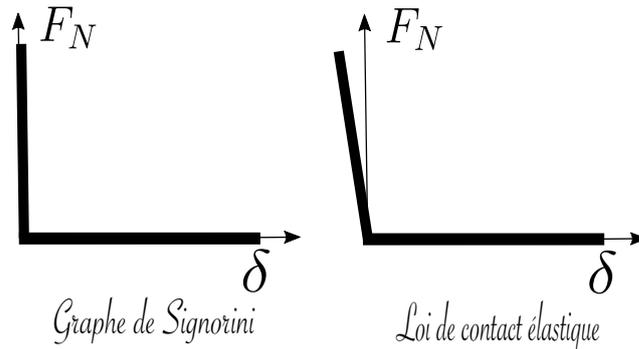


FIGURE 2.2 – Condition de Signorini non régulière (à gauche) et régularisée (à droite).

A cela s'ajoute la condition de seuil propre au frottement de glissement

$$\|F_T\| \leq \mu_s F_N \quad (2.6)$$

De la même manière que pour la condition de Signorini, le système formé par l'expression (2.5) et (2.6) ne permet pas de déterminer la valeur de F_T à la seule connaissance de la vitesse tangentielle u_T . En *DM*, pour y pallier, la loi de frottement est également régularisée en introduisant cette fois-ci une raideur k_T . La composante F_T est alors calculée de manière incrémentale. En un instant donné on mesure un incrément de déplacement Δx_T à partir de la vitesse tangentielle u_T tel que $\vec{\Delta x}_T = \Delta t u_T$, où Δt est le pas de temps de la simulation. De manière analogue à la répulsion normale, on stipule que l'incrément de force généré sur ce pas de temps F_T est proportionnel au déplacement tangent. On obtient alors la relation $\Delta F_T = k_T \Delta t u_T$, et F_T peut être déterminée par la seule connaissance de la vitesse de glissement. On impose ensuite à la nouvelle valeur de la composante calculée $F'_T = F_T + \delta F_T$ de respecter le seuil de force de glissement (équation 2.6).

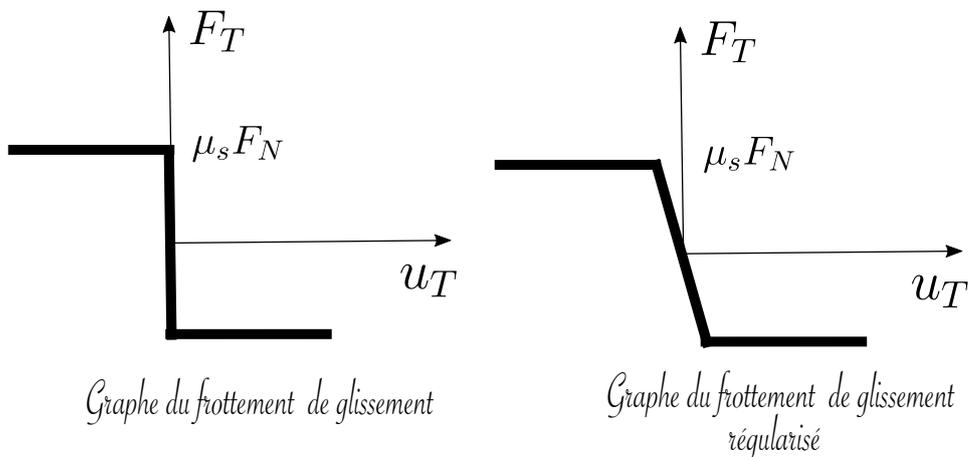


FIGURE 2.3 – Frottement de glissement non régulier (à gauche) et régularisé (à droite).

En DC , une fois de plus, l'inégalité est conservée et il n'y a pas de régularisation, comme on peut le voir sur la figure 2.3.

Dissipation de l'énergie par collision

La dissipation d'énergie dans les collisions est un phénomène d'une complexité similaire à celle du frottement. Elle prend son origine dans des déformations élastiques et plastiques locales sur des échelles spatiales et temporelles beaucoup plus fines que celles auxquelles le mouvement des corps est analysé. La loi de restitution empirique de Newton établit une relation entre la vitesse d'un objet avant et après percussion via la relation

$$u_N^+ = -e u_N^- \quad (2.7)$$

Cette loi peut être intégrée en DC . Etant donné que c'est un modèle rhéologique empirique, qui ignore tout des phénomènes microscopiques mis en jeu lors d'une collision, nous pouvons aussi choisir $e = 0$, ce qui rend toute collision parfaitement inélastique. Telle que nous l'avons présentée, en DM , la force de répulsion a la propriété d'être conservative. Il est donc nécessaire d'introduire dans l'équation (2.4) un terme d'amortissement visqueux pour reproduire ce phénomène. On peut écrire alors

$$F_N(t) = \begin{cases} -k_N \delta^{3/2} - \gamma_t (d\delta/dt), & \text{si } \delta(t) \leq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.8)$$

où γ_t est un coefficient d'amortissement visqueux. Si l'on fait tendre cette viscosité vers l'infini cela revient à faire tendre e vers 0, et ainsi reproduire des chocs parfaitement inélastiques.

2.1.3 Discussion générale sur la Dynamique Moléculaire

La DM a l'avantage d'être *simple* à comprendre et à mettre en œuvre car elle ne consiste qu'en la résolution du principe fondamental de la dynamique, grâce à la régularisation des inégalités imposées par les conditions susmentionnées. Cependant, bien que la méthode soit simple cela ne signifie pas qu'elle produise toujours des résultats simples à analyser. Par exemple, l'étude d'un système modèle comme une chaîne de grains $1D$ bloquée entre deux murs montre qu'il existe des oscillations basse fréquences faiblement dissipées dans l'empilement [43]. Ce phénomène, qu'il puisse ou non être rapproché à des phénomènes physiques observables, comme la propagation d'ondes sonores, provient essentiellement de la nature des conditions aux limites. Généralement il s'agit de mur fixes ou de conditions périodiques, ne permettant pas à l'énergie de quitter le système autrement que par dissipation au niveau des contacts. Une manière d'éviter ce phénomène est d'ajouter un nouveau terme d'amortissement visqueux $-(1/\tau_v)\vec{v}_i$ à la force totale ressentie par chaque particule. La vitesse d'une particule décroît exponentiellement au cours du temps avec un temps caractéristique τ_v , exactement comme si elle était immergée dans un fluide visqueux au repos.

Le schéma d'intégration n'est pas explicitement présenté ici car plusieurs choix peuvent être faits [2, 21, 55]. Le point important est que cette méthode est explicite, c'est à dire que la connaissance de l'état du système au temps suivant est déterminée à partir du temps précédent. La stabilité du schéma est donc conditionnelle. Il en résulte que le choix du pas de temps Δt dépend des paramètres matériaux k_N, γ_t et k_T . Ces paramètres peuvent être déterminés à partir de considérations physiques, en s'inspirant du modèle de Hertz [46]. Ils sont alors dépendants du module d'Young E et du coefficient de poisson ν du matériau. Cependant, lorsque ces paramètres sont choisis de la sorte, le critère de stabilité impose un pas de temps Δt très petit. Ce qui peut être contraignant lorsque l'on désire simuler des écoulements denses quasi-statiques, où les contacts sont permanents et les déformations cumulées très importantes. Il en va de même si l'on considère la loi d'interaction comme une pénalisation des lois non régulières. Il faut alors utiliser de fortes raideurs (et viscosités) qui vont également imposer des pas de temps très faibles.

A présent, nous allons expliquer en détail le fonctionnement de la *DC*, et notamment sa manière de résoudre un contact, c'est à dire les conditions d'unilatéralité et d'indétermination du frottement sans régularisation, ainsi que le traitement des collisions inélastiques. Cette méthode applique ces contraintes de manière stricte à la manière d'un expérimentateur faisant des observations d'ordre général, et se gardant de trop rentrer dans les détails des lois de contact (physiques ou non) introduites en *DM*. Le prix à payer en terme de facilité d'implémentation et d'appréhension est compensé par l'évitement des écueils des artefacts numériques qu'engendrent la régularisation.

2.2 Méthode de la Dynamique des Contacts

Nous avons vu que la *DM* procède par pénalisation. La *DC*, ou NSCD (*Non-smooth Contact Dynamics*) introduit des multiplicateurs de Lagrange pour respecter les contraintes d'inégalité de Signorini et de Coulomb. Par exemple, pour respecter la condition de Signorini on peut introduire une force répulsive normale en cas de contact, et son module sera défini non pas par une loi élastique, mais simplement comme étant la valeur nécessaire pour empêcher l'interpénétration des particules sur le pas de temps d'intégration. L'application stricte du critère de Signorini provient du fait que les particules sont parfaitement rigides. Dans cette approche, la déformation du matériau granulaire ne résulte donc que des réarrangements de particules. Cette méthode est par définition très adaptée pour étudier le comportement plastique des écoulements granulaires.

2.2.1 Collision inélastique de deux particules

Avant de généraliser la *DC* à un problème multi-contact, nous commencerons par décrire comment le principe d'unilatéralité est traité dans le cas d'une collision

entre deux disques 1 et 2, de rayons R_1 et R_2 et de masse m_1 et m_2 . On traite le cas d'une collision complètement inélastique avec un coefficient de restitution nul ($e = 0$). Les deux particules sont uniquement animées d'une vitesse initiale \vec{v}_1 et \vec{v}_2 et ne sont soumises à aucune force externe. La première étape consiste à détecter les contacts possibles au temps $t + \Delta t$, à partir des positions et des vitesses des particules à l'instant t . Un contact est détecté si

$$\delta(t + \Delta t) < 0 \quad (2.9)$$

Si le critère (2.9) est vérifié on peut écrire l'équation de la dynamique pour chaque particule i sur un intervalle de temps $[t : t + \Delta t]$

$$m_i \Delta v_i = F_{ir} \Delta t \quad (2.10)$$

où F_{ir} est la force de contact agissant sur i suivant la direction r , exprimée dans le repère global. Si le critère n'est pas vérifié, on intègre seulement les vitesses des particules et on réitère. On peut définir une matrice d'inertie \mathbb{M} telle que

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_2 \end{pmatrix}$$

où I_1 et I_2 sont les moments d'inertie des disques 1 et 2. Pour notre système de deux particules il vient

$$\mathbb{M} \begin{pmatrix} v_{1x}^+ - v_{1x}^- \\ v_{1y}^+ - v_{1y}^- \\ \omega_1^+ - \omega_1^- \\ v_{2x}^+ - v_{2x}^- \\ v_{2y}^+ - v_{2y}^- \\ \omega_2^+ - \omega_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_2 \end{pmatrix} \Delta t$$

avec M_i le moment agissant sur la particule i , et ω_i la vitesse de rotation de la particule i . On peut définir la vitesse relative entre les deux particules $\vec{u} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. La matrice de passage transposée \mathbb{L}^*

$$\mathbb{L}^* = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & R_1 & -\cos(\phi) & -\sin(\phi) & R_2 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) & -\cos(\phi) & 0 \end{pmatrix}$$

est définie afin d'exprimer la vitesse relative en fonction des vitesses des particules dans le repère local

$$\begin{pmatrix} u_t \\ u_n \end{pmatrix} = \mathbb{L}^* \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ \omega_1 \\ v_{2x} \\ v_{2y} \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

où $-\sin(\phi)$ et $\cos(\phi)$ sont les composantes du vecteur unitaire normal \vec{n} du repère local, dirigé de 2 vers 1. De la même manière on peut réécrire la force de contact F dans le repère local f à l'aide de la transposée de \mathbb{L}^* tel que

$$\mathbb{L} \begin{pmatrix} f_t \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_2 \end{pmatrix}$$

Ayant défini la vitesse relative et la force de contact dans le repère local on peut éliminer les variables globales dans la relation de la dynamique

$$\mathbb{L}^* u^{\vec{+}} = \mathbb{L}^* u^{\vec{-}} + \mathbb{L}^* \mathbb{M}^{-1} \mathbb{L} \vec{f} \Delta t \quad (2.11)$$

En simplifiant l'équation (2.11) on obtient pour chaque composante de la vitesse relative après le choc les relations

$$u_N^+ = u_N^- + \alpha f_N \Delta t \quad (2.12)$$

et

$$u_T^+ = u_T^- + \beta f_T \Delta t \quad (2.13)$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{R_1^2}{I_1} + \frac{R_2^2}{I_2} \quad (2.14)$$

$$\beta = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \quad (2.15)$$

On remplace u_N^+ par sa valeur définie par la loi de restitution (2.7) et on obtient l'expression

$$f_N = \frac{1}{\alpha} (1 + e) u_N^- \quad (2.16)$$

La composante normale f_N est à présent connue, il reste à résoudre l'équation

$$u_T^+ = u_T^- + \beta f_T \quad (2.17)$$

sachant que

$$\|f_T\| \leq \mu_s f_N, \quad \|u_T^+\| \neq 0 \rightarrow f_T = -\mu_s \frac{u_T^+}{\|u_T^+\|} \quad (2.18)$$

la restriction venant du frottement de glissement. Les inconnues sont u_T^+ et f_T . Il est possible de connaître la valeur de u_T^+ en notant l'intersection de la droite $u_T^+ = u_T^- + \beta f_T$ avec le graphe de Coulomb, et ainsi de déterminer la composante tangentielle f_T , comme représenté sur la figure 2.4.

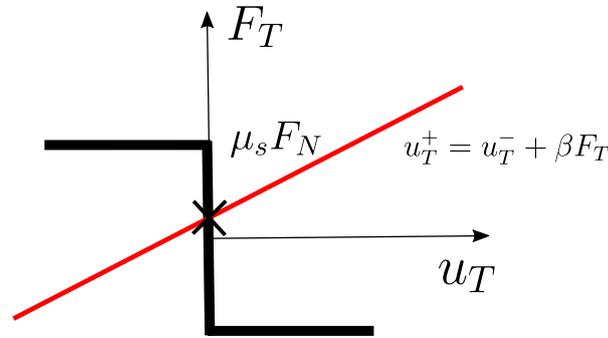


FIGURE 2.4 – Résolution du contact dans le cas d'un choc binaire

Dans le cas d'une collision binaire la solution est unique. Connaissant donc la vitesse après choc, la force f s'exerçant au contact entre les deux particules est à présent parfaitement déterminée. Il suffit alors de l'exprimer à nouveau dans le repère global, puis d'intégrer les équations du mouvement pour chaque particule.

2.2.2 Application de la Dynamique des Contacts à un système multi-corps

Maintenant que nous avons vu les principes de la résolution d'un contact, nous allons considérer un ensemble de N particules en interaction sur un intervalle $[t : t + \Delta t]$.

Discrétisation du principe d'unilatéralité et du frottement de glissement

On dresse tout d'abord la liste des contacts candidats α (existants et potentiels) à l'instant $t + \Delta t$. Les inconnues sont la vitesse relative \vec{u} à la fin du pas de temps et l'impulsion $\int \vec{f} dt$ pendant le pas de temps. Il est donc nécessaire d'utiliser ces inconnues dans des relations de contact discrètes en temps. On peut écrire la condition

de Signorini discrète au contact α sous la forme

$$f^\alpha(t + \Delta t) = \begin{cases} S_{signo}(u_N^\alpha(t + \Delta t), f_N^\alpha(t + \Delta t)) & \text{si le contact est prédit} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.19)$$

où S_{signo} renvoie à l'application de la relation (2.3) aux variables indiquées. De la même manière on discrétise la relation du frottement de glissement si une interpénétration est prédite.

Equations de la dynamique

On pose ensuite les équations de la dynamique sur ce petit intervalle de temps $[t : t + \Delta t]$. On définit d'abord la vitesse relative entre deux particules *candidates* pour un contact α

$$\vec{v}^\alpha = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \quad (2.20)$$

où \vec{v}_1 et \vec{v}_2 sont respectivement les vitesses des particules 1 et 2 (voir figure 2.1).

$$\mathbb{M}(\vec{v}^\alpha(t + \Delta t) - \vec{v}^\alpha(t)) = \int_t^{t+\Delta t} (\vec{F}^{ext,\alpha} + \vec{F}^\alpha) dt \quad (2.21)$$

où $\vec{F}^{ext,\alpha}$ est la résultante des forces externes (comme la gravité) et \vec{F}^α la résultante des forces de contact et de percussion (échange instantané de quantité de mouvement). Les vecteurs et tenseurs sont arrangés de sorte à lister les uns après les autres tous les contacts binaires. On rappelle que dans cette notation $\vec{v} = (v_x, v_y, \omega)$ où ω est la vitesse de rotation, $\vec{F} = (F_x, F_y, M)$ où M est le couple.

En Dynamique des Contacts, les forces de contact peuvent être traitées de la même manière que les forces externes, car dans le repère local elles ne se distinguent en rien dans leur effets. On peut donc réécrire (2.21) telle que

$$\mathbb{M}(\vec{v}^\alpha(t + \Delta t) - \vec{v}^\alpha(t)) = \int_t^{t+\Delta t} \vec{F}_s^\alpha dt \quad (2.22)$$

où $\vec{F}_s^\alpha = \vec{F}^{ext,\alpha} + \vec{F}^\alpha$, sachant que $\int_t^{t+\Delta t} \vec{F}^{ext,\alpha} dt$ est explicitement connue. On peut introduire dans l'équation (2.22) l'impulsion $\vec{J}^\alpha(t + \Delta t)$ définie comme

$$\vec{J}^\alpha(t + \Delta t) \equiv \int_t^{t+\Delta t} \vec{F}_s^\alpha dt \quad (2.23)$$

Nous voulons à présent réécrire l'équation (2.21) dans le repère local. Pour cela nous pouvons utiliser les opérateur de passage $\mathbb{L}^{*\alpha}$ et \mathbb{L}^α définie précédemment pour exprimer \vec{u}^α en fonction de \vec{v}^α , et \vec{j}^α en fonction de \vec{J}^α tels que

$$\vec{u}^\alpha(t) = \mathbb{L}^{*\alpha} \vec{v}^\alpha(t), \text{ et } \vec{u}^\alpha(t + \Delta t) = \mathbb{L}^{*\alpha} \vec{v}^\alpha(t + \Delta t) \quad (2.24)$$

$$\vec{J}^\alpha(t + \Delta t) = \mathbb{L}^\alpha \vec{j}^\alpha \quad (2.25)$$

où \vec{j}^α est l'impulsion dans le repère local. Ainsi, à l'aide des équations (2.24) et (2.25) l'équation de la dynamique dans le repère local s'écrit

$$\vec{u}^\alpha(t + \Delta t) = \vec{u}_{libre}^\alpha(t + \Delta t) + \sum_{\beta} \mathbb{W}^{\alpha\beta} \vec{j}^\beta(t + \Delta t) \quad (2.26)$$

où \vec{u}_{libre}^α est seulement la vitesse obtenue en intégrant l'équation de la dynamique sur l'intervalle de temps considéré sous la seule influence des forces externes, donnée par l'expression

$$\vec{u}_{libre}^\alpha(t + \Delta t) = \mathbb{L}^{*\alpha}(\vec{v}^\alpha(t) + \mathbb{M}^{-1} \vec{j}^\alpha(t + \Delta t)) \quad (2.27)$$

où $\mathbb{W}^{\alpha\beta} = \mathbb{L}^{*\alpha} \mathbb{M}^{-1} \mathbb{L}^\beta$. La dynamique d'un contact, contrairement au simple cas d'une collision binaire, est également régie par les autres contacts que portent les deux particules considérées. L'exposant β traduit cette contribution. L'opérateur $\mathbb{W}^{\alpha\beta}$ permet d'exprimer l'impulsion fournie par le contact β dans le repère local α .

2.2.3 Résolution en 2D

La résolution du contact α consiste à trouver \vec{u}^α et $\vec{j} = \sum_{\beta} \mathbb{W}^{\alpha\beta} \vec{j}^\beta$ au temps $(t + \Delta t)$ reliés par l'équation (2.21), de telle manière à ce qu'ils respectent à la fois $S_{signor}(v_N^\alpha, j_N)$ et le frottement de Coulomb (u_T^α, j_T) . On peut représenter le problème graphiquement comme sur la figure 2.5. Il n'existe pas, contrairement au

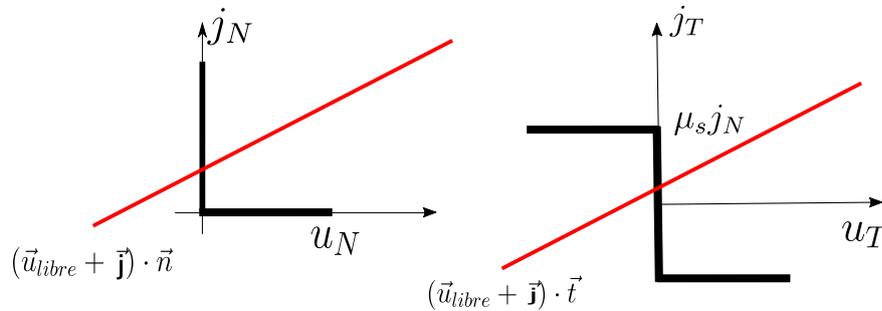


FIGURE 2.5 – Résolution d'un contact dans le cas d'un système multi-contact.

cas d'un collision binaire, de solution unique mais une infinité, car toutes les autres contributions β sont également inconnues. En effet, ici nous ne connaissons ni j_N ni j_T . La résolution des N_c contacts doit donc se faire de manière simultanée. Il est possible d'en obtenir une solution approchée en utilisant une méthode de type Gauss-Seidel. C'est une méthode itérative de résolution d'un système linéaire [14], où la solution est approchée et sélectionnée lorsqu'elle remplit un critère de convergence.

On suppose connues toutes les impulsions apportées par chaque contact, à l'exception du contact α considéré. Les contacts $\beta < \alpha$ ont déjà été résolus, on prend donc les couples de valeurs calculées à cette itération, et les forces de contact pour les contacts $\beta > \alpha$ se voient attribuées des valeurs arbitraires. On cherche le couple

$(\vec{u}^\alpha(t + \Delta t), (\vec{j}^\alpha(t + \Delta t)))$ qui vérifie à la fois l'équation de la dynamique (2.21), la condition de Signorini (2.3) et la loi de frottement sec (2.5). On fait de même avec tous les contacts restants. Une fois l'ensemble des contacts parcouru, un test de convergence indique si la solution trouvée à cette itération est rejetée ou non. Typiquement, on fait une mesure de la stabilité des forces pour chaque contact α entre l'itération k et l'itération précédente :

$$\frac{f^\alpha(k) - f^\alpha(k-1)}{f^\alpha(k)} \leq \epsilon_f \quad (2.28)$$

où ϵ_f est un critère de convergence. Si cette condition n'est pas vérifiée, on passe à l'itération suivante.

2.2.4 Schéma d'intégration

Une fois l'ensemble des forces ayant satisfait le critère de convergence déterminé, il suffit de les intégrer. Pour intégrer les équations du mouvement on utilise un θ -schéma, le schéma d'Euler étant un cas particulier ($\theta = 1$). On connaît à l'instant t les positions $\vec{r}(t)$ et les vitesses $\vec{v}(t)$ de toutes les particules. On évalue les positions à l'instant $t_h = t + (1 - \theta)\Delta t$ en intégrant les vitesses

$$\vec{r}(t_h) = \vec{r}(t) + (1 - \theta)\Delta t \vec{v}(t) \quad (2.29)$$

et les vitesses libres en intégrant les impulsions provenant des forces externes sur le pas de temps complet

$$\vec{v}_{libre}(t + \Delta t) = \vec{v}_{libre}(t) + \Delta t \mathbb{M}^{-1}[(1 - \theta)\vec{F}^{ext}(t) + \theta\vec{F}^{ext}(t + \Delta t)] \quad (2.30)$$

On résout ensuite le problème multi-contact dans la configuration évaluée, à l'instant t_h pour obtenir les impulsions de contact \vec{J} . On peut ensuite corriger les vitesses à la fin du pas de temps

$$\vec{v}(t + \Delta t) = \vec{v}_{libre}(t + \Delta t) + \mathbb{M}^{-1}\vec{J} \quad (2.31)$$

Il ne reste plus qu'à intégrer les vitesses pour obtenir les positions à la fin du pas de temps

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \theta\Delta t \vec{v}(t + \Delta t) \quad (2.32)$$

Ce schéma est inconditionnellement stable pour $\theta \geq 0.5$. Pour garantir une solution satisfaisante des équations de la dynamique, l'interpénétration (numérique) doit rester faible. Pour respecter la condition de Signorini (2.3), il faut trouver un compromis entre la distance de détection des contacts r_{verlet} et le pas de temps Δt , pour une dynamique donnée. Supposons que les grains soient cisailés sous l'effet d'un effort externe à un taux $\dot{\Gamma}$. La distance libre l parcourue par une particule de diamètre d est de l'ordre de $l \propto \dot{\Gamma}d\Delta t$. Il faut s'assurer que, sur un pas de temps, la distance parcourue libre soit inférieure à d_{ver} , soit $\Delta t < r_{verlet}/(\dot{\Gamma}d)$. Ainsi, le pas de temps, doit être

d'autant plus faible que la dynamique du système étudiée est rapide. Etant donné que le nombre de degrés de libertés du système est défini par le nombre de contacts candidats, augmenter déraisonnablement d_{ver} serait préjudiciable en terme de coût de calcul. Dans le cadre de cette thèse, nous avons typiquement $\dot{\Gamma} = 1$, $d = 0.01$ et $d_{ver} = 0.1d$, soit $\Delta t < 0.1$. Dans le tableau 2.1 sont résumés nos paramètres de simulation au cours de cette thèse. Les paramètres $n_{iter}^{min}/n_{iter}^{max}$ correspondent au nombre d'itérations minimal et maximal pour la vérification du critère de convergence des forces. Les paramètres $n_{ver}/n_{superver}$ correspondent au nombre de pas entre deux mises à jour successives des listes et superlistes de verlet.

2.2.5 Discussion générale sur la Dynamique des Contacts

La méthode de la Dynamique des Contacts s'appuie essentiellement sur le constat que l'ensemble des phénomènes physiques ayant lieu au niveau d'un contact, qu'il soit bref ou non, reste largement méconnue. Elle se focalise alors sur ses caractéristiques essentielles, l'unilatéralité et le frottement de glissement. Comme nous l'avons vu elle est très appropriée pour étudier le comportement plastique d'un empilement de particules, résultant du seul réarrangement de celles-ci. Cette méthode est certes sujette à l'indétermination, les solutions n'étant pas uniques à chaque pas de temps. Cependant, cette sensibilité peut être comparée à celle des méthodes régulières, comme la *DM*, gouvernée par les paramètres de régularisation. Cette méthode a néanmoins l'avantage de pouvoir fixer un pas de temps beaucoup plus grand que les méthodes régulières, ce qui est également adapté à notre étude où nous considérons des écoulements quasi-statiques sur de grandes déformations.

2.3 Essais mécaniques

2.3.1 Le cisaillement plan

Tout au long de cette thèse nous avons utilisé un unique essai mécanique. Nous avons simulé des écoulements denses en cisaillement plan périodique suivant la direction de l'écoulement. Nous avons effectué ces tests en l'absence de gravité et avec des parois de rugosité contrôlée. La rugosité R peut se définir comme le rapport du diamètre moyen des grains de la paroi au diamètre moyen d'une particule libre, soit $R = d_w/d$. Elle donne une mesure de la taille des *aspérités*. À noter que la rugosité est également affectée par la distance entre grains composant la paroi $\ell_w = kd_w$, où k est supérieur à 1, mesurant la fréquence spatiale de ces aspérités. Nous y reviendrons dans la section 3. La géométrie du cisaillement plan est simple, et en l'absence de gravité nous pouvons simuler des écoulements homogènes en contrainte où $\langle \nabla \bar{\sigma} \rangle = 0$. La distance entre les parois h mesure l'épaisseur de l'écoulement. L'essai mécanique consiste en un cisaillement d'un empilement préalablement contraint par la mise en mouvement d'une ou des deux plaques. Soit x la direction de l'écoulement et y la

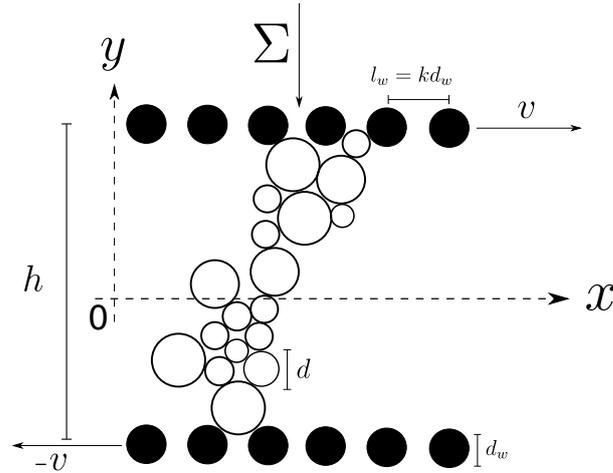


FIGURE 2.6 – Schéma d'un essai de cisaillement simple avec les conditions aux limites imposées et l'état de surface des parois

direction perpendiculaire. Le système est contrôlé en déformation dans la direction x et en contrainte dans la direction y . La plaque supérieure se voit imposer une vitesse $v_x = v$ dans la direction horizontale x et une contrainte Σ suivant la direction y . L'essai est en effet à volume libre c'est à dire que le milieu est libre de se dilater. Concernant la plaque inférieure une vitesse verticale $v_y = 0$ lui est imposée. Nous avons utilisé deux conditions différentes pour sa vitesse dans la direction de l'écoulement. Pour les écoulements minces, $v_x = 0$, la plaque inférieure est parfaitement immobile par rapport à l'écoulement. Pour les écoulements de plus grandes épaisseurs nous avons imposé une vitesse $v_x = -v$ afin d'assurer une meilleure stabilité de la symétrie de l'écoulement dans le temps. Les conditions limites sont résumées sur la figure 2.6. Nous ferons référence au taux de déformation appliqué sous la dénomination de taux nominal, défini par $\dot{\gamma}_e = 2v/h$.

2.3.2 Préparation de l'échantillon

L'échantillon se compose d'un nombre N de particules qui sera précisé dans chaque étude. Nous avons simulé des systèmes de 1000 à 6000 particules. Ces particules sont des disques $2D$ de rayon r , de diamètre d , et de masse volumique ρ_s . L'échantillon est créé par transformation inverse : les tailles des particules, bornées par d_{min} et d_{max} sont tirées aléatoirement suivant une distribution en loi de puissance $p(d)d^2 = cste$. Ainsi une polydispersité est assurée de manière à ce que la distribution soit uniforme par fraction surfacique. En d'autres termes, toutes les classes volumétriques apportent une contribution égale au volume total de l'échantillon, à condition que le nombre de particules soit suffisamment élevé [80]. Pour préparer un échantillon de N particules, on tire N nombres aléatoires u entre 0 et

1. Le rayon de chaque particule est alors donné par

$$d(u) = \frac{d_{max}d_{min}}{d_{max} + u(d_{min} - d_{max})} \quad (2.33)$$

La polydispersité que nous avons choisi est assez faible ($d_{max} = 2d_{min}$) mais suffisante pour éviter des phénomènes de cristallisation, pathogènes dans le cas d'une étude de milieux désordonnés. Enfin, l'échantillon initial est généré en plaçant successivement les particules sur une grille aléatoire assurant leur non interpénétrabilité initiale. Ensuite, avant de procéder au cisaillement, nous effectuons une compression uniaxiale suivant la direction y à l'aide de la plaque supérieure. Etant donné que nous nous intéressons aux grandes déformations, les caractéristiques initiales de l'échantillon — mécaniques ou géométriques — n'ont pas besoin d'être bien contrôlées. Après une déformation cumulée suffisante, l'écoulement devient stationnaire (dans l'état critique) et la configuration initiale ne joue plus aucun rôle dans le comportement mécanique observé.

2.3.3 Paramètres de simulations et analyse

Paramètres

Nous nous plaçons dans un régime dense, défini par un faible nombre inertiel ($I < 0.02$). Comme mentionné précédemment concernant l'adaptation du pas de temps et de la distance de détection des contacts d_{ver} au régime (typiquement $\dot{\gamma}_e$), il faut que ces paramètres de simulation le soient pour l'échelle de contrainte imposée dans l'empilement. La contrainte de confinement Σ utilisée pour les simulations est de l'ordre de $\Sigma \simeq 10^4$ Pa (sauf pour la préparation des échantillons où nous avons pris une valeur plus faible). Typiquement, la force exercée sur une particule est de l'ordre de Σd en 2D. La distance libre parcourue par une particule sous le seul effet de la force de confinement sur un pas de temps Δt est de l'ordre de $(\Sigma \Delta t^2)/(\rho d)$. Cette distance doit être inférieure à d_{ver} . Dans notre cas, avec $d_{ver} = 0.1d$ nous trouvons un pas de temps maximal de l'ordre de $\Delta t_{max} \simeq 10^{-3}$ s.

La taille des particules moyenne est estimée comme $\langle d \rangle = \langle d_{min} + d_{max} \rangle$ et vaut 15mm (estimée seulement car la distribution est en loi de puissance). Le coefficient de frottement interparticule μ_s est fixé à 0.29 et la densité à $2900 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Les simulations sont poursuivies sur une déformation cumulée totale $\gamma = \sum 2v\Delta t/h$ généralement supérieure à 10. Toutes les analyses en grandes déformations (moyennes et fluctuations) sont faites dans le régime stationnaire (état critique) et le régime transitoire (durcissement) est systématiquement écarté. Concernant la Dynamique des Contacts, nous avons imposé un coefficient de restitution e nul, définissant des chocs parfaitement inélastiques, et le pas de temps a été fixé à $\Delta t = 10^{-4}$ s. Toutes les valeurs des paramètres de la Dynamique des Contacts et des simulations sont résumées dans le tableau 2.1.

TABLE 2.1 – Paramètres de la dynamique des contacts (à gauche) et de simulation (à droite)

Δt	10^{-4}s	d_{min}/d_{max}	10/20mm
e	0	μ_s	0.29
ϵ	10^{-3}	ρ_s	$2900 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
d_{ver}/d_{super}	$0.1\langle d \rangle / 0.5\langle d \rangle$	$\dot{\gamma}_e$	$0.1/5 \text{ s}^{-1}$
$n_{iter}^{min}/n_{iter}^{max}$	40/200	Σ	$3.5/9 \cdot 10^4 \text{ Pa}$
$n_{ver}/n_{superver}$	10/20	I_e	$2 \cdot 10^{-4}/2 \cdot 10^{-3}$

Analyse : valeurs moyennes et profils

Sauf mention contraire, les valeurs moyennes sont prises à la fois spatialement et temporellement, dans l'état stationnaire uniquement. Pour s'assurer d'être dans l'état stationnaire nous pouvons tracer le frottement effectif μ , le taux de déformation au centre ou l'énergie cinétique totale du système E_c en fonction de la déformation cumulée. Lorsque l'une de ces grandeurs atteint une valeur moyenne bien définie alors nous pouvons considérer que le système est en écoulement stationnaire. Les profils ont été obtenus en divisant l'écoulement en domaines rectangulaires d'axes propres x et y , étendus dans la direction x . La valeur moyenne par domaine (prise sur la déformation cumulée) est calculée à partir de grandeurs définies sur les particules (masse, vitesse, connectivité, texture, contrainte...).

2.4 Homogénéisation

2.4.1 Approche

Dans le cadre de cette thèse, l'homogénéisation est utilisée dans le but d'obtenir une description continue d'un système composé de corps en interaction, à savoir notre écoulement granulaire, à résolution spatiale ℓ et temporelle τ données. Les champs sont obtenus à partir des données microscopiques portées par les particules (masse, vitesse, contraintes...) moyennées spatialement et temporellement. Ils obéissent aux lois de conservation et de symétrie définies en mécanique des milieux continus. Nous utiliserons l'approche popularisée par Goldhirsch *et al.* [25, 85] qui ont appliqué cette méthode de description à des expériences sur des matériaux granulaires soumis à une compression biaxiale. Weinhart et Lugind [83] ont également appliqué cette méthode pour étudier les écoulements 3D sur plan inclinés. La définition de champs continus est d'une grande utilité si l'on veut étudier la dépendance (ou non) entre différentes quantités locales. Nous commencerons par présenter la méthode d'homogénéisation spatiale puis temporelle.

2.4.2 Description locale et objective : du discret au continu

Champs de masse et de quantité de mouvement

Soit un système composé de N particules. Le champ ponctuel de masse $m'(\vec{r}, t)$ en un point \vec{r} au temps t est défini par

$$m' = \sum_{i=1}^N m_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (2.34)$$

avec $\delta(\vec{r})$ la distribution delta de Dirac, m_i et \vec{r}_i la masse et le vecteur position de la particule i au temps t . Cette formulation implique que l'on considère la masse d'une particule concentrée en son centre. De manière analogue, on peut définir un champ ponctuel de quantité de mouvement

$$\vec{p}'(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (2.35)$$

où $\vec{v}_i(t)$ est la vitesse de la particule i à l'instant t . Un champ de masse *continu* équivalent $M(\vec{r}, t) = G_\ell \star m'(\vec{r}, t)$ est défini à une résolution spatiale ℓ , où G_ℓ est une fonction gaussienne, isotrope, de moyenne 0 et de variance ℓ^2 . Le champ défini ainsi dépend peu de la fonction de moyennage choisie, ℓ étant le paramètre clef [25]. Lorsque ℓ tend vers 0 on retrouve la définition microscopique du champ. Si l'on définit de la même manière un champ continu de quantité de mouvement \vec{P} le champ de vitesse continu peut s'écrire $\vec{V}(\vec{r}, t) = \vec{P}(\vec{r}, t)/M(\vec{r}, t)$. Définis ainsi, les champs de masse et de quantité de mouvement satisfont la conservation de la masse

$$\frac{\partial M(\vec{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot [M(\vec{r}, t) \vec{V}(\vec{r}, t)] = 0 \quad (2.36)$$

en remarquant que

$$\frac{\partial M(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_\beta} \sum_{i=1}^N m_i v_{i\beta}(t) G(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) = -\frac{\partial P_\beta}{\partial x_\beta}(\vec{r}, t) \quad (2.37)$$

Conservation de la quantité de mouvement et champ de contraintes

L'équation de la dynamique pour un milieu continu $2D$ s'écrit en chaque point \vec{r} , suivant la composante α d'un repère inertiel (x_α, x_β)

$$\frac{\partial P_\alpha}{\partial t} + v_\beta \frac{\partial P_\alpha}{\partial x_\beta} = \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + f_\alpha \quad (2.38)$$

où $\sigma_{\alpha\beta}$ est la composante (α, β) du tenseur de contrainte, et f_α la densité de force volumique. Dans notre cas nous n'avons pas de force de volume, donc $f_\alpha = 0$. En

dérivant par rapport au temps le champ de quantité de mouvement (2.35) nous obtenons l'expression suivante

$$\frac{\partial P_\alpha}{\partial t} = - \sum_{i=1}^N m_i v_{i\alpha}(t) v_{i\beta}(t) \frac{\partial G}{\partial x_\beta}(\vec{r} - \vec{r}_i) + \sum_{i=1}^N m_i \frac{dv_{i\alpha}}{dt} G(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (2.39)$$

Nous cherchons une expression du tenseur de contrainte par identification. En injectant l'équation (2.39) dans l'expression (2.38) nous obtenons une relation que doit satisfaire le tenseur des contraintes :

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \frac{\partial}{\partial x_\beta} [MV_\alpha V_\beta - \sum_{i=1}^N m_i v_{i\alpha}(t) v_{i\beta}(t) G(\vec{r} - \vec{r}_i)] + \sum_{i=1}^N m_i \frac{dv_{i\alpha}}{dt} G(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (2.40)$$

Le premier terme, écrit sous la forme d'une divergence s'apparente directement à la composante *cinétique* du tenseur de contraintes. Nous pouvons introduire ici la vitesse fluctuante de la particule i défini comme $\delta \vec{v}_i(\vec{r}, t) = \vec{v}_i(t) - \vec{V}(\vec{r}, t)$, où $\vec{V}(\vec{r}, t)$ est le champ de vitesse moyen vu par la particule i . Il faut noter ici que la définition de la vitesse fluctuante dépend à la fois des échelles spatiale ℓ et temporelle τ données. On peut ainsi réécrire le premier terme sous l'opérateur de divergence de l'équation (2.40)

$$\begin{aligned} & MV_\alpha V_\beta \\ & - \sum_{i=1}^N m_i \delta v_{i\alpha}(t) \delta v_{i\beta}(t) G(\vec{r} - \vec{r}_i) \\ & - \sum_{i=1}^N m_i V_\alpha V_\beta G(\vec{r} - \vec{r}_i) \\ & + \sum_{i=1}^N m_i G(\vec{r} - \vec{r}_i) (\delta v_{i\alpha} V_\alpha \delta v_{i\beta} V_\beta) \end{aligned}$$

D'après la définition même du champ de masse (équation 2.34) le 3^e terme est égal au premier terme, ils s'annulent deux à deux. Le 4^e terme est nul par définition même du champ de quantité de mouvement (équation 2.35). En effet, $\sum_{i=1}^N m_i G(\vec{r} - \vec{r}_i) \delta v_{i\alpha} = \sum_{i=1}^N m_i G(\vec{r} - \vec{r}_i) v_{i\alpha} - \sum_{i=1}^N m_i G(\vec{r} - \vec{r}_i) V_\alpha = P_\alpha(\vec{r}) - V_\alpha(\vec{r}) M(\vec{r}) = 0$. Finalement le premier terme de l'équation (2.40) peut s'écrire

$$\sigma_{\alpha\beta}^c = \sum_{i=1}^N m_i \delta v_{i\alpha}(t) \delta v_{i\beta}(t) G(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (2.41)$$

Ce terme, le tenseur de contraintes de Reynolds, décrit le flux de quantité de mouvement fluctuant par collisions entre particules. Pour identifier le second terme de l'équation (2.40) nous l'écrivons également sous la forme d'un terme soumis à un

opérateur de divergence. Il suffit d'écrire le principe fondamental de la dynamique pour chaque particule i

$$m_i \frac{dv_{i\alpha}(t)}{dt} = \sum_j f_\alpha^{ij}(t) \quad (2.42)$$

où $f_\alpha^{ij}(t)$ est la force exercée par la particule voisine j sur la particule i à l'instant t , la somme se faisant sur l'ensemble des contacts de la particule i . On peut réécrire le deuxième terme de l'équation (2.40) sous la forme $\sum_j f_\alpha^{ij}(t)G(\vec{r} - \vec{r}_i)$. En vertu du principe de conservation de la quantité de mouvement, nous avons $\sum_j f_\alpha^{ij}(t)G(\vec{r} - \vec{r}_i) = -\sum_j f_\alpha^{ji}(t)G(\vec{r} - \vec{r}_j)$. Le second terme de l'équation (2.40) peut se réécrire

$$\sum_{i=1}^N m_i \frac{dv_{i\alpha}}{dt} G(\vec{r} - \vec{r}_i) = \frac{1}{2} \sum_{i,j,j \neq i} f_\alpha^{ij}(t) [G(\vec{r} - \vec{r}_i) - G(\vec{r} - \vec{r}_j)] \quad (2.43)$$

Le terme $G(\vec{r} - \vec{r}_i) - G(\vec{r} - \vec{r}_j)$ peut s'écrire sous la forme d'une intégrale tel que

$$G(\vec{r} - \vec{r}_i) - G(\vec{r} - \vec{r}_j) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} G(\vec{r} - \vec{r}_i + s\vec{l}) ds \quad (2.44)$$

où $\vec{l} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ est le vecteur branche joignant le centre des particules i et j . Il vient alors

$$G(\vec{r} - \vec{r}_i) - G(\vec{r} - \vec{r}_j) = l_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta} \int_0^1 G(\vec{r} - \vec{r}_i + s\vec{l}) ds \quad (2.45)$$

Si on injecte l'expression (2.45) dans l'équation (2.43) on obtient

$$\sum_{i=1}^N m_i \frac{dv_{i\alpha}}{dt} G(\vec{r} - \vec{r}_i) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j,j \neq i} f_\alpha^{ij}(t) l_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta} \int_0^1 G(\vec{r} - \vec{r}_i + s\vec{l}) ds \quad (2.46)$$

On identifie alors, soumis à un opérateur de divergence, le second terme du tenseur de contrainte

$$\sigma_{\alpha\beta}^s = -\frac{1}{2} \sum_{i,j,j \neq i} f_\alpha^{ij}(t) l_\beta \int_0^1 G(\vec{r} - \vec{r}_i + s\vec{l}) ds \quad (2.47)$$

où $\sigma_{\alpha\beta}^s$ est la contribution *statique*, définies par les forces de contact entre particules. Pour résumer nous pouvons réécrire le principe fondamental de la dynamique (2.38) en termes de champ de contraintes, grâce à la conservation de la quantité de mouvement, sous la forme

$$\frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\sigma_{\alpha\beta}^c + \sigma_{\alpha\beta}^s) \quad (2.48)$$

La contribution cinétique est un terme généré par la description eulérienne de l'écoulement. Lorsque la résolution spatiale ℓ tend vers 0 elle disparaît. Il s'agit, à un coefficient près, de la température définie dans les matériaux granulaires. Elle mesure l'intensité des vitesses non affines des particules. On peut définir le tenseur de température \overline{T} comme

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{2M} \sigma_{\alpha\beta}^c \quad (2.49)$$

raffiné suivant la direction perpendiculaire étant donné que les gradients que nous étudierons se trouvent dans cette direction. Les champs sont calculés et enregistrés pour chaque instant.

Calcul des contraintes

Concernant le calcul des champs de contrainte, il est effectué en moyennant en espace des tenseurs de contraintes définies sur chacune des particules. Afin d'éviter l'introduction de toute échelle spatiale dans la définition même du tenseur de contraintes nous calculons plutôt un champ de moments internes [48]. Il se définit pour une particule i possédant c contacts

$$M_{\alpha\beta}^{int} = \sum_{c \in i} f_{\alpha}^{ij} r_{\beta}^c \quad (2.52)$$

où f_{α}^{ij} est la composante α de la force exercée sur i par la particule j au contact c , et r_{β}^c est la composante β d'un vecteur position du contact c . Le moment interne est additif et indépendant de l'origine du vecteur \vec{r}^c s'il y a équilibre. Le tenseur des contraintes sur un volume V donné s'écrit alors comme la moyenne des moments internes portés par les particules appartenant au volume tel que

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{V} \sum_{i \in V} M_{\alpha\beta}^{int} \quad (2.53)$$

Pour calculer le moment interne par particule, nous parcourons tous les contacts et pour chaque paire de particules i et j en contact nous pouvons ajouter à la particule i le moment interne $M^{int} = f_{\alpha}^{ij} l_{\beta}^c$ et à la particule j un moment $-M$, où l_{β}^c est la composante β du vecteur branche joignant les deux centres des particules. La figure 2.8 montre un instantané du réseau de forces dans un empilement cisailé et ce même réseau vu cette fois comme un champ de contrainte.

Calcul du taux de déformation local

Le champ de taux de déformation est obtenu en dérivant le champ de vitesse continu \vec{V} en utilisant une méthode de différences finies centrée. Par exemple au point (x, y) de la grille nous avons

$$\dot{\gamma}(x, y) \equiv \frac{\partial V_x}{\partial y}(x, y) = \frac{V_x(x, y + \Delta y) - V_x(x, y - \Delta y)}{2\Delta y} \quad (2.54)$$

Pour les dérivées temporelles nous utiliserons également les différences finies centrées. Soit $s(t)$ un signal quelconque alors

$$\frac{\partial s}{\partial t}(x, y) = \frac{s(t + \Delta t) - s(t - \Delta t)}{2\Delta t} \quad (2.55)$$

En guise d'illustration, nous avons représenté sur la figure 2.9 l'évolution temporelle du taux de déformation en un point d'un écoulement stationnaire pour différentes résolutions spatiales du champ de vitesse.

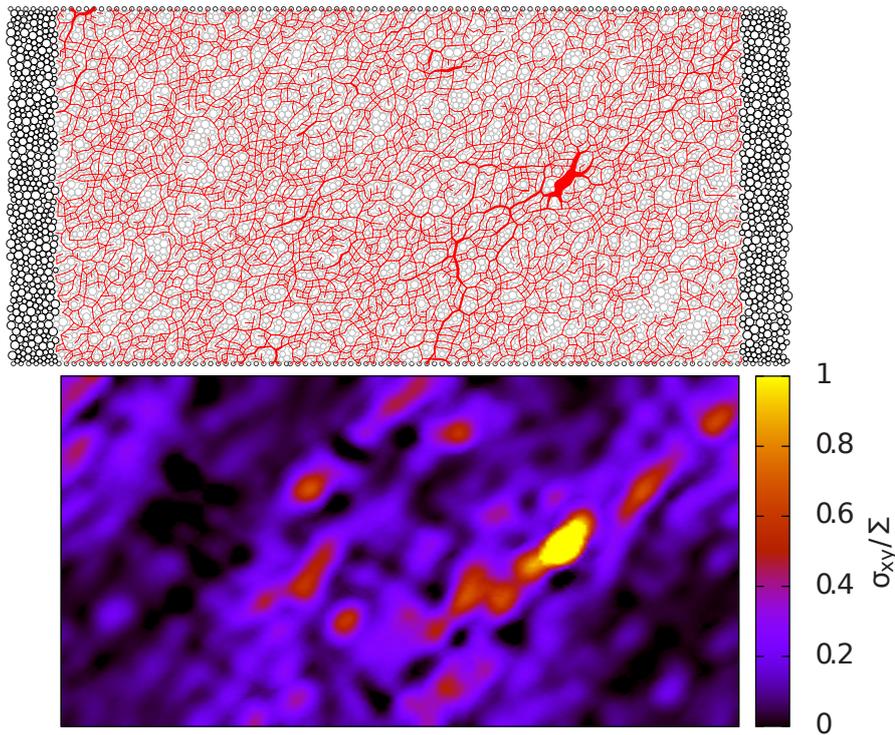


FIGURE 2.8 – Réseau de forces dans un empilement granulaire soumis à un cisaillement plan et vision continue en contrainte de ce même réseau à un instant donné, au cours d'un cisaillement plan. La résolution spatiale ℓ est égale à $1.5d$.

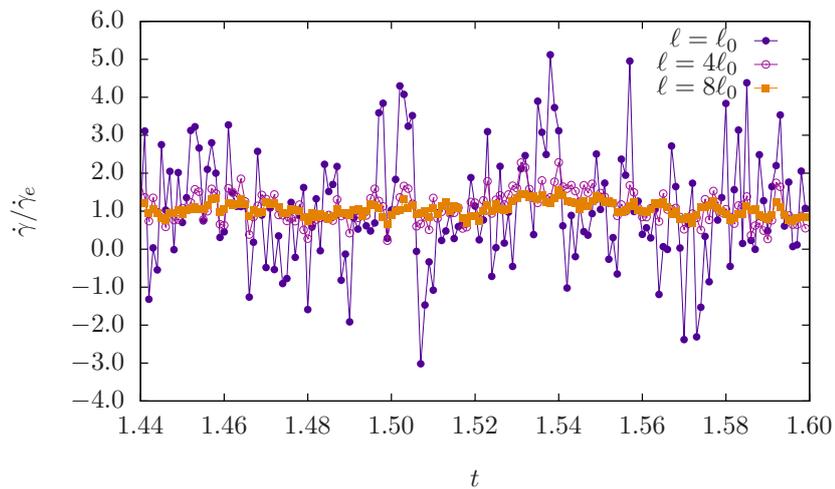


FIGURE 2.9 – Taux de déformation normalisé en un point de l'écoulement pour différentes résolutions spatiales ℓ . La résolution spatiale initiale ℓ_0 est égale à $1.5d$. La résolution temporelle est fixe, égale à $100\Delta t$.

2.4.5 Homogénéisation temporelle

Une fois les champs homogénéisés en espace nous pouvons les homogénéiser en temps pour chaque échelle spatiale explorée. L'échelle temporelle minimale est le pas de temps de la simulation $\tau_0 = \Delta t$. On fait varier l'échelle temporelle par multiple de 2 : $\tau = \tau_0, 2\tau_0, 4\tau_0, 8\tau_0 \dots$. Pour cela nous utilisons la même philosophie d'approche, à savoir une convolution par une fonction *émolliente*, mais au lieu d'utiliser une Gaussienne comme dans le cas spatial, nous utilisons un noyau. Cette méthode dissymétrique accorde toute l'importance "au passé". L'avantage étant qu'elle permet une construction *à la volée* du signal filtré. Pour construire le signal filtré au temps t il est seulement nécessaire d'avoir recours au temps $t - 1$, aussi il n'est pas nécessaire de garder en mémoire toute l'histoire du signal sur un horizon de quelques τ . Cet aspect particulier de la méthode est très utile dans notre cas étant donné le nombre important de champs à filtrer. Soit s un signal filtré quelconque, il est défini comme :

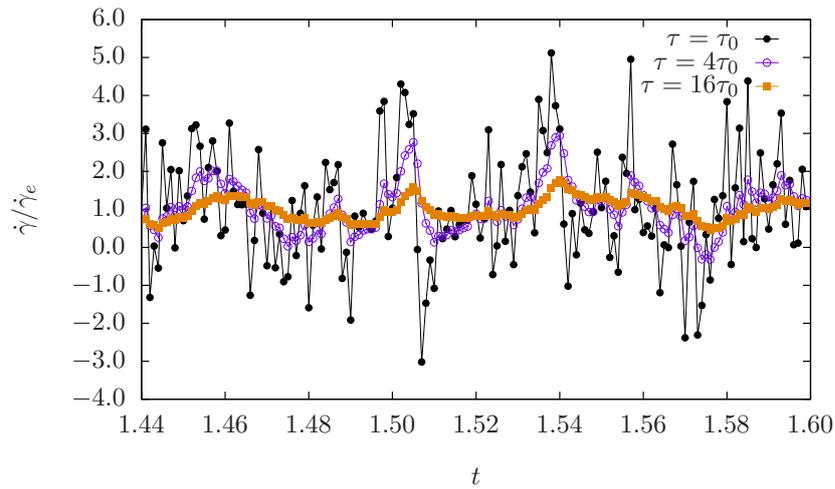


FIGURE 2.10 – Taux de déformation normalisé en un point de l'écoulement pour différentes résolutions temporelles τ . La résolution temporelle initiale est ici égale à la fréquence d'enregistrement $\tau_0 = 0.01$. Elle est cent fois plus grande que le pas de temps de simulation. La résolution spatiale est ici la résolution minimale ℓ_0 .

$$s_\tau(t) = \frac{1}{\tau} \int_0^\infty \exp(-x/\tau) s(t-x) dx \quad (2.56)$$

où τ est notre échelle temporelle. En dérivant le signal par rapport au temps nous trouvons

$$s_\tau(t) + \tau \frac{ds_\tau}{dt}(t) = s(t) \quad (2.57)$$

Ainsi l'expression du signal convolué s_τ au temps t est donnée par :

$$s_\tau(t) = \frac{1}{1 + (\tau/dt)} [s(t) + (\tau/dt) s_\tau(t - dt)] \quad (2.58)$$

Dans le cas d'un champ vectoriel ou tensoriel, il suffit d'appliquer l'expression (2.58) à chacune des composantes du champ. Nous obtenons ainsi, grâce à la combinaison de ces deux méthodes, des champs continus à différentes résolutions spatiales et temporelles. En guise d'illustration nous avons tracé l'évolution temporelle du taux de déformation sur la figure 2.10 mesuré en un point proche du centre de l'écoulement. Le taux de déformation est calculé à partir de la dérivation du champ de vitesse à résolution spatiale donnée.

2.5 Conclusions

La modélisation numérique des matériaux granulaires est un domaine de recherche en soi, et de nombreuses approches ont été développées pour étudier le comportement des milieux granulaires. Malgré leurs différences, chacune d'entre elles intègre les composantes fondamentales des interactions entre particules : le frottement, la non interpénétrabilité et la dissipation d'énergie aux contacts. Ces méthodes à éléments discrets ont l'avantage de pouvoir être ensuite couplées à des modèles de fluide pour l'étude de suspensions [3, 49] ou encore enrichis par des lois de cohésion pour étudier la fragmentation [38]. En abordant les méthodes de Dynamique Moléculaire et de Dynamique des Contacts nous avons cherché à illustrer les différences *philosophiques* existant entre les méthodes numériques dans le traitement de la non régularité des lois de contact. Pour ce travail, nous avons préféré la Dynamique des Contacts qui, de par ses fondements, se prête naturellement à l'étude du comportement plastique d'une assemblée de particules rigides sur de grandes déformations.

La méthode d'homogénéisation décrite est générale et peut avoir de nombreuses applications. L'une d'elles, à terme, est de pouvoir mettre en relation les variables internes et l'état de contrainte, ou de déformation, dans une loi de comportement. Pour y parvenir, il faut produire des descriptions continues des déformations, des contraintes et de l'information microstructurale à différentes résolutions. A titre d'exemple, nous avons simulé un écoulement stationnaire de 6000 particules à l'aide de la dynamique des contacts. Nous avons sélectionné un ensemble d'instantanés de la simulation en régime stationnaire pour produire une série de champs continus à différentes résolutions spatiotemporelles. Nous avons tracé la distribution de valeurs prises en chaque point des champs de contrainte et du taux de déformation sur les figures 2.11a et 2.11b. Les changements d'échelle, aussi bien en temps qu'en espace, s'accompagnent d'une régression des fluctuations sur les variables considérées. Affaiblir les résolutions produit une description de plus en plus homogène de l'écoulement et l'étude de cette régression permet de se faire une idée plus précise de l'échelle à partir de laquelle une loi de comportement déterministe peut être identifiée. Mais également au delà de quelle échelle nous perdons de l'information nécessaire à l'élaboration de cette loi. Ce travail d'identification à différentes échelles est conséquent et doit se faire préférentiellement sur un écoulement bipériodique. En effet, la seule présence des parois rend l'écoulement inhomogène car elle vient rompre la continuité des propriétés observées dans le volume. Ces inhomogénéités peuvent ensuite être

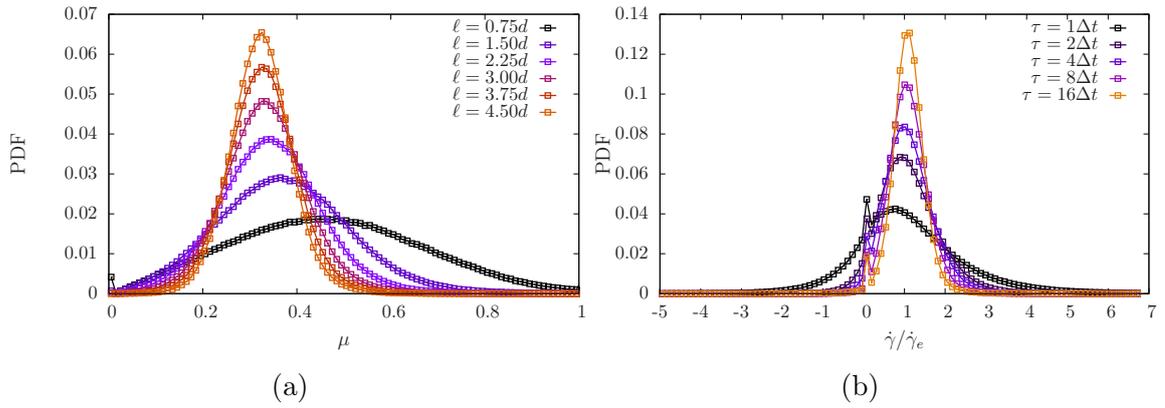


FIGURE 2.11 – (a) Distribution du frottement effectif mesuré en chaque point de l'écoulement pour différentes résolutions spatiales (b) Distribution du taux de déformation mesuré en chaque point de l'écoulement pour différentes résolutions temporelles.

amplifiées par les conditions aux limites. Enfin, des conditions bipériodiques sont naturellement adaptées car la périodicité dont hérite les champs viennent faciliter la construction des échelles spatiales et temporelles supérieures en travaillant directement dans l'espace de Fourier. Outre le fait d'éviter les écueils propres à la rupture des signaux et des brisures de gradient (par exemple en vitesse) l'utilisation des transformées de Fourier permet d'explorer les échelles à moindre coût. Ce coût ne devant pas être négligé étant donné la nature statistique de l'approche, et donc la nécessité de devoir simuler de grands systèmes, sur des grandes déformations avec une fréquence d'enregistrement suffisamment fine.

... Then shalt thou count to three, no more, no less. Three shall be the number thou shalt count and the number of the counting shall be three. Four shalt thou not count neither count thou two, excepting that thou then proceed to three. Five is right out. Once the number three, being the third number be reached ...

Monty Python, Sacré Graal

3

Écoulements minces et effets de taille finie

Dans cette partie nous allons montrer, à travers l'étude d'écoulements minces entre deux parois, que la dimension du système détermine la possibilité ou non d'atteindre un écoulement granulaire stationnaire. Plus largement, la terminologie de rhéologie pour des systèmes de dimension inférieure à une certaine taille critique est inadaptée. En effet, le frottement effectif diminue avec l'épaisseur, du fait de blocages géométriques. Les parois, et également leur rugosité, perturbent géométriquement l'empilement et contraignent les réarrangements des particules. Ces événements extrêmes écartent en permanence l'écoulement du régime stationnaire. Le comportement est dominé davantage par les interactions avec les parois que par les interactions entre particules. Il en résulte des effets de taille finie conséquents sur dix diamètres de grain environ. Les effets de parois se prolongent néanmoins au delà, car nous trouvons que le frottement effectif mesuré en stationnaire est dépendant de la rugosité des parois.

Sommaire

3.1	Effets de taille finie	50
3.2	Procédure numérique	50
3.3	Analyse du comportement moyen	51
3.4	Inhomogénéités spatiales et temporelles, les <i>colonnes</i> de force	53
3.4.1	Analyse micromécanique	53
3.4.2	Variables géométriques	56
3.5	Indépendance vis à vis de l'étendue du système	57
3.6	Effet de la rugosité	59
3.7	Conclusions	61

3.1 Effets de taille finie

Dans ce travail nous nous intéressons au régime stationnaire à l'aide d'un essai mécanique où l'écoulement granulaire est en interaction avec des parois. Nous devons alors considérer, en premier lieu, les conditions limites nécessaires pour l'atteinte de cet équilibre. En effet, les parois imposent des gradients, des ruptures qui vont perturber l'écoulement. Par ailleurs, l'étude des effets de taille finie peut nous apprendre des choses essentielles sur la rhéologie et il n'existe pas de cadre clair pour les effets de l'épaisseur sur la résistance au cisaillement dans des conditions homogènes. Pourtant, de tels systèmes se retrouvent dans des problèmes très concrets où une fine couche de matière fragmentée s'écoule entre deux parois rigides. Ce système se retrouve dans de nombreuses applications industrielles comme le transport de céréales en conduite, en géophysique lors d'écoulement de laves torrentielle sèches ou encore en tribologie où l'on s'intéresse aux propriétés et au rôle du *troisième corps*. Enfin, les ballasts utilisés pour la stabilité des voies ferroviaires sont des empilements granulaires de faible épaisseur soumis à des efforts externes dont les propriétés mécaniques doivent être contrôlées.

Les effets de taille finie sont toutefois fortement documentés [8, 18, 22, 42] dans le cadre d'écoulements gravitaires sur plans inclinés. Ces écoulements se retrouvent aussi bien en situation naturelle qu'industrielle [30, 74] ce qui a motivé un important effort de recherche. A travers ces travaux il s'agissait également de comprendre quel rôle joue l'épaisseur d'un matériau granulaire lors du déclenchement d'une avalanche. Il est aujourd'hui connu que l'angle critique θ_c à partir duquel se déclenche une avalanche, une grande déformation, dépend de l'épaisseur de l'empilement, mais non de son étendue dans le plan de l'écoulement [8]. Typiquement, en deçà d'une taille de 20 diamètres de grains θ_c est fonction de h . A l'aide du même dispositif expérimental (ou numérique) il est aussi possible d'étudier le blocage de l'écoulement. Pour cela, une fois obtenu un écoulement stationnaire on diminue progressivement l'angle d'inclinaison de son support. La loi de frottement en écoulement homogène (relation 1.15) prédit une diminution du nombre inertiel et un ralentissement de l'écoulement jusqu'à l'arrêt total pour un angle d'arrêt θ_s , qui n'est autre que l'angle de talus prédit par la loi de Coulomb. Le frottement effectif μ devient alors égal à sa valeur seuil μ_0 . L'angle d'arrêt θ_s est d'ailleurs inférieur à l'angle critique et comme ce dernier, il dépend de l'épaisseur h de l'écoulement. Cet effet a été mis en évidence expérimentalement pour la première fois par O. Pouliquen [56]. Enfin, des études ont montré [8] que pour des systèmes de faibles épaisseurs, jusqu'à 10 diamètres de grain, la stabilité du système est affectée par la rugosité du support sur lequel il s'écoule. O. Pouliquen et N. Renault [59] ont proposé que l'empilement cède pour des angles d'inclinaison plus élevés en raison du confinement géométrique à la base, qui a pour effet d'augmenter la dilatance et donc le frottement effectif. En résumé, il a été montré que la résistance seuil au cisaillement μ_0 était à la fois dépendante de l'épaisseur h , de l'histoire des déformations (et donc de la préparation initiale) et de la rugosité R pour des systèmes de faible épaisseur. Si l'on écarte ici l'effet des déformations passées, la rhéologie est dépendante des limites propres du système

mais aussi de la rugosité des interfaces. Cette dépendance se retrouve néanmoins uniquement dans la contrainte seuil, et lorsque l'écoulement est établi la rhéologie en $\mu(I)$ décrit correctement les écoulements observés.

A travers notre étude d'un écoulement en cisaillement plan, nous allons transposer cette dépendance au frottement effectif dynamique μ lui-même. Existe-t-il une dépendance ou non de μ aux dimensions du système et à ses limites ? Quel rôle joue la présence des parois sur les propriétés de l'écoulement et quelle est l'influence de la rugosité ?

3.2 Procédure numérique

Nous avons réalisé des simulations de cisaillement simple d'échantillons de 1000 particules dont l'épaisseur varie entre 4 et $14d$. L'épaisseur initiale h est définie par un empilement prédéfini de couches. Le nombre de particules reste fixe, seul l'arrangement initial et donc l'étendue entre les bandes périodiques de l'empilement varie d'une simulation à l'autre. Avec le nombre de particules utilisé chaque échantillon s'étend sur au moins sur une centaine de diamètres dans la direction de l'écoulement. Ces simulations sont réalisées à taux de déformation imposé $\dot{\gamma}_e$ fixé à $0.5s^{-1}$. Nous avons également réalisé des simulations pour des valeurs différentes de rugosité de plaque. La rugosité pour cette étude est d'abord fixée à $R = 2/3$, et l'espacement est constant avec $k = 2$. Ici nous avons deux rangées de particules composant la plaque, la deuxième sera abandonnée par la suite. Nous nous focaliserons ici uniquement sur la taille des aspérités. L'épaisseur n'est pas directement contrôlée, et nous en mesurons une valeur moyenne une fois le système mis en écoulement. Par souci d'écriture nous noterons $h \equiv \langle h \rangle$. Sur la figure 3.1 est représentée une petite région d'un écoulement de faible épaisseur. On peut y remarquer notamment que les forces dans l'empilement sont spatialement très hétérogènes. Des zones supportant la charge appliquée via la plaque supérieure côtoient des groupes de particules libres de toute charge. Enfin, l'analyse du comportement moyen a été réalisée après avoir appliqué une déformation supérieure à 60. Les statistiques, pour les très faibles épaisseurs, ont été réalisées sur plus de 25000 instants, soit une déformation γ de 25.

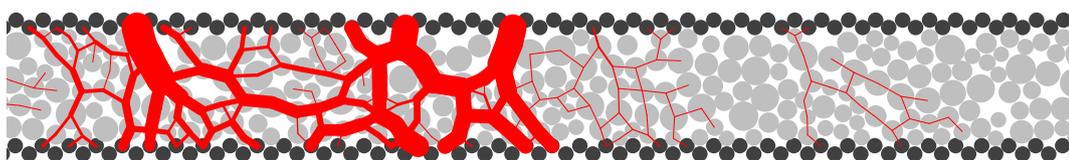


FIGURE 3.1 – Instantané d'une région d'un empilement de faible épaisseur ($h/d \simeq 4$, $R = 2/3$) soumis à un cisaillement simple. Les lignes rouges représentent les forces de contact entre particules et leur épaisseur est proportionnelle à l'intensité de la force normale.

3.3 Analyse du comportement moyen

On s'intéresse au frottement effectif de l'écoulement. On peut définir un tenseur de contrainte moyen $\langle \bar{\sigma} \rangle$ sur la durée de l'essai. Le frottement effectif μ en cisaillement plan est défini à partir des composantes moyennées du tenseur de contrainte $\bar{\sigma}$. Celui-ci est calculé à partir des forces de contact entre particules tel que

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{V} \sum_{c \in V} f_{\alpha} l_{\beta} \quad (3.1)$$

où V est le volume occupé par l'ensemble du système et \vec{l} le vecteur branche joignant les centres de particules en contact. Il vient alors

$$\mu = \frac{\langle \sigma_{xy} \rangle}{\langle \sigma_{yy} \rangle} \quad (3.2)$$

où la moyenne est prise en temps et en espace (sur tout le volume).

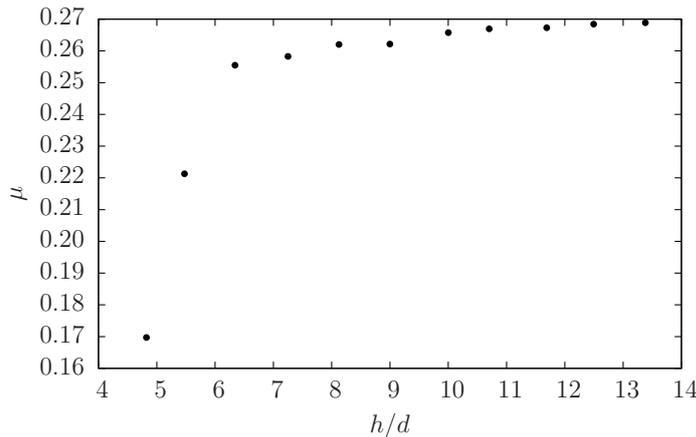


FIGURE 3.2 – Frottement effectif moyen μ en fonction de l'épaisseur de l'écoulement

Le frottement effectif moyen augmente avec l'épaisseur comme on peut le voir sur la figure 3.3, et se stabilise à partir d'une épaisseur de $10d$ environ. Pour des épaisseurs inférieures, il présente une valeur moyenne nettement plus faible. La contrainte de confinement σ_{yy} étant égale à la contrainte imposée Σ , cette diminution du frottement effectif reflète celle de la contrainte cisailante moyenne σ_{xy} , comme on peut le voir sur la figure 3.3a. A faible épaisseur, une longue queue de distribution exponentielle est observée, la valeur moyenne n'étant plus la valeur la plus probable, elle est décalée vers une valeur plus faible. La distribution tend vers une distribution gaussienne lorsque l'épaisseur augmente, et les fluctuations, représentées sur la figure 3.3b régressent pour se stabiliser autour d'une épaisseur de $10d$.

L'évolution de la compacité et de la connectivité avec l'épaisseur, présentées sur les figures 3.4b et 3.4a, sont similaires à celle de la contrainte cisailante. La connectivité est ici calculée en prenant la moyenne du nombre de contacts par particule

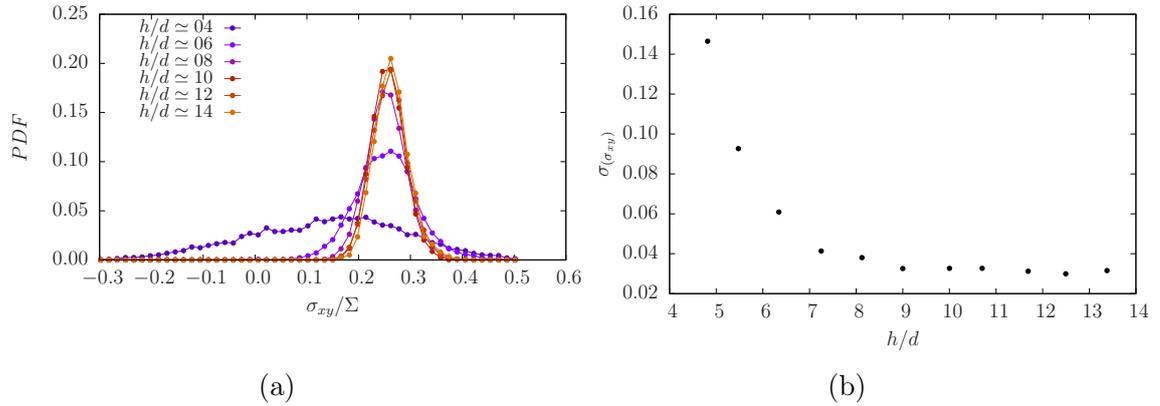


FIGURE 3.3 – (a) Distribution de la contrainte cisillante σ_{xy} pour des écoulements d'épaisseur croissante (b) Fluctuations de la contrainte cisillante avec l'épaisseur.

libre, les particules *flottantes* — particules portant une force nulle ou sans contact — ayant été écartées. A l'instar du frottement effectif, elles tendent vers une valeur asymptotique au delà d'une épaisseur caractéristique de même ordre. Comme le montre la connectivité ou la compacité, les parois ont pour effet d'écartier l'empilement de ses propriétés géométriques stationnaires et homogènes, c'est à dire leurs valeurs asymptotiques, indépendantes de h . Le comportement mécanique moyen est donc dépendant de l'épaisseur de l'écoulement à cause des effets de parois qui se propagent sur plusieurs diamètres de grains. Il en résulte un effet de taille considérable.

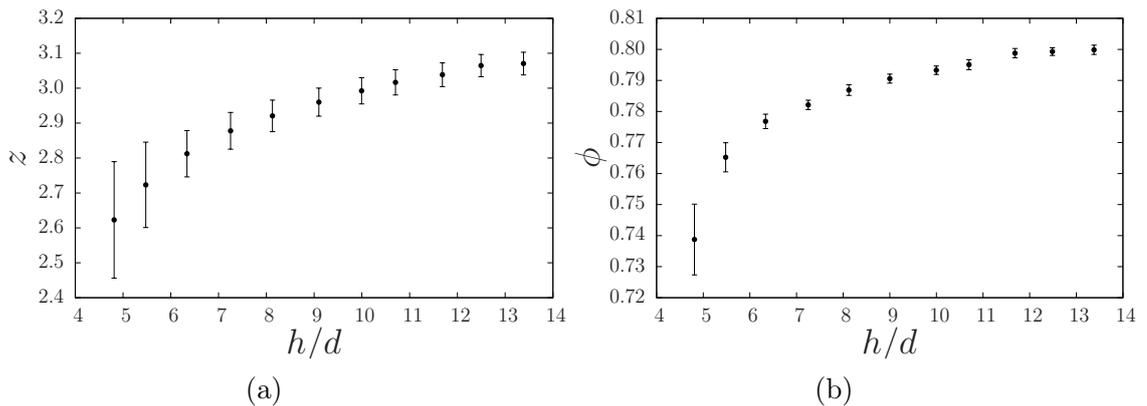


FIGURE 3.4 – (a) La connectivité moyenne $\langle z \rangle$ (les particules flottantes ayant été écartées) en fonction de l'épaisseur de l'écoulement (b) La compacité moyenne $\langle \phi \rangle$ en fonction de l'épaisseur de l'écoulement.

3.4 Inhomogénéités spatiales et temporelles, les colonnes de force

3.4.1 Analyse micromécanique

Pour mieux comprendre ces effets de taille finie et l'évolution de la distribution de la contrainte (3.3) il faut regarder plus finement le comportement du système en temps et en espace. Dans nos simulations, celui-ci est contrôlé en contrainte (Σ) dans la direction y et en déformation ($\dot{\gamma}_e$) dans la direction x . Nous pouvons alors étudier le comportement en temps —en déformation cumulée γ — des variables libres qui leur sont chacune associée : la hauteur $h(\gamma)$ mesurée par l'altitude de la plaque, et la contrainte cisailante $\sigma_{xy}(\gamma)$. Sur la figure (3.5)a on remarque que la plaque

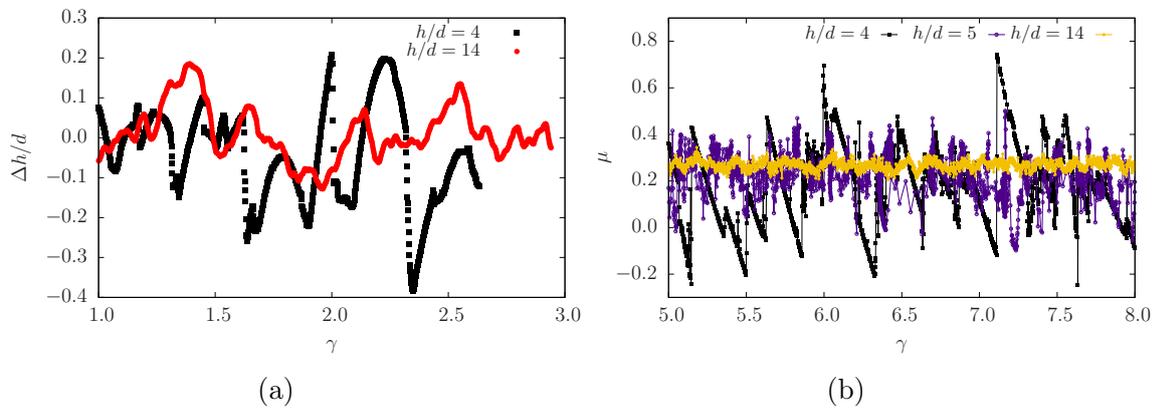


FIGURE 3.5 – (a) Fluctuations $\Delta h = h(\gamma) - \langle h \rangle$ de la position de la plaque en fonction de la déformation cumulée pour deux systèmes d'épaisseurs $h/d \simeq 4$ (points noirs) et $h/d \simeq 11$ (points rouges). (b) Evolution de la contrainte cisailante instantanée en fonction de la déformation cumulée pour des systèmes d'épaisseur h/d croissante.

cisillant un système de très faible épaisseur présente des phases de montée lente puis des chutes balistiques sur des petits incréments de déformation. Ces phases de charge et de décharge significatives disparaissent lorsque l'épaisseur de l'écoulement augmente. L'évolution de la contrainte cisailante mesurée dans le volume (figure 3.5b) montre également une particularité : la contrainte diminue progressivement jusqu'à changer de signe puis regagne à nouveau sa valeur initiale. Ce phénomène quasi-périodique ne s'observe que dans le cas d'écoulement de très faible épaisseur. L'inversion de signe de la contrainte est la traduction de la rotation du tenseur de contraintes, la valeur principale σ_1 agissant momentanément à l'opposé de la direction de l'écoulement. On note également que les pics de contrainte sont plus élevés à faible épaisseur. Ces pics peuvent être associés à la résistance seuil au cisaillement μ_0 de l'écoulement, avant que celui-ci ne s'effondre. On retrouve donc en statique un résultat similaire à ceux obtenus en écoulement sur plan incliné, où la résistance seuil augmente lorsque l'épaisseur diminue.

Nous pouvons étudier l'inhomogénéité spatio-temporelle de l'écoulement en le divisant en sous-domaines D (10 ici) dans la longueur afin de suivre l'évolution du profil au cours de la déformation. Chaque grandeur est moyennée spatialement sur le volume du sous-domaine. Ce suivi spatio-temporel est montré ici pour la contrainte normale σ_{yy} , cisailante σ_{xy} et la connectivité z pour un écoulement d'épaisseur $h \simeq 4d$ et $h \simeq 14d$. En ordonnée est représenté l'écoulement discrétisé (espace) et en abscisse la déformation cumulée (temps). Sur la figures 3.6a nous pouvons observer qu'à faible épaisseur il y a une forte localisation de la contrainte normale. D'autre part, l'écoulement est intrinsèquement instationnaire, les localisations se succèdent à différents endroits d'un incrément de déformation à l'autre. Il n'y a qu'une seule localisation extrême (couleur jaune) au même instant. La fin d'une localisation se traduit généralement par l'inversion du signe de la contrainte cisailante comme on peut le voir sur la figure et 3.6b. On compare à présent ces cartes à celle d'un écoulement de plus grande d'épaisseur, représentées sur les figures 3.6c et 3.6d. On note qu'il existe toujours des hétérogénéités spatiales et temporelles, mais également l'absence de localisations franches et d'inversion de signe de la contrainte cisailante.

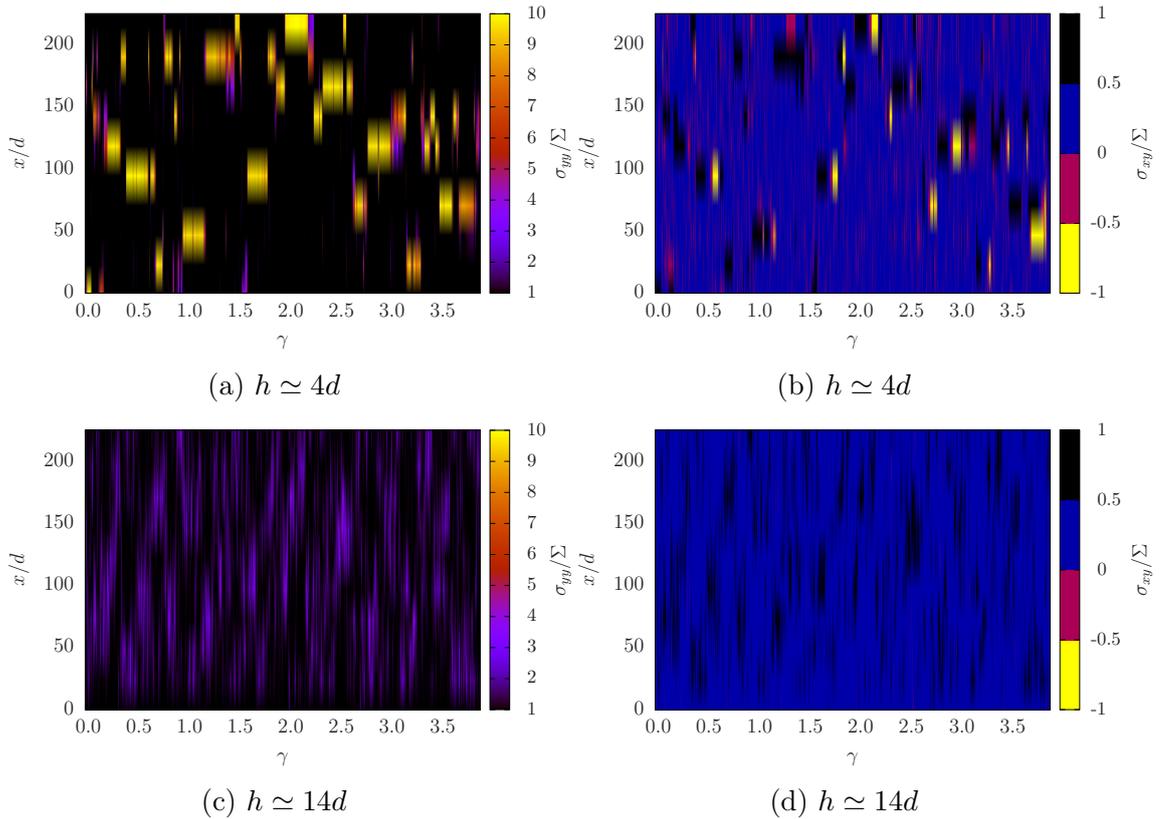


FIGURE 3.6 – Cartes spatiotemporelles de $\langle \sigma_{yy} \rangle_D$ et $\langle \sigma_{xy} \rangle_D$ (a-b) pour $h \simeq 4d$ et pour $h \simeq 14d$ (c-d)

Si l'on se place à présent à l'une de ces localisations très franches et que l'on regarde évoluer les particules on observe la formation de véritables *colonnes* de

force, comme le montre la figure 3.7. Les forces se transmettent verticalement d'une

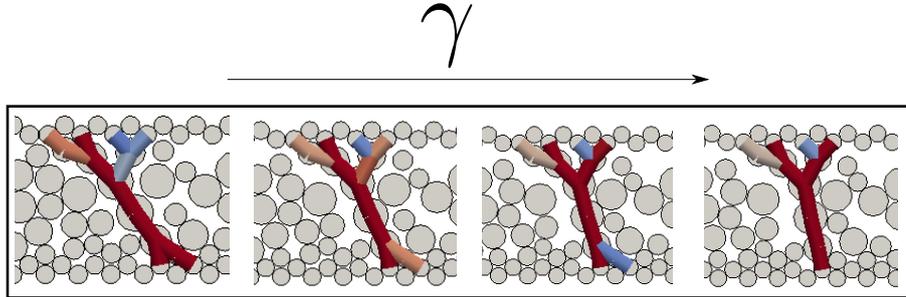


FIGURE 3.7 – Snapshots d'une *colonne* de force pour un écoulement d'épaisseur $h/d \simeq 4$.

paroi à l'autre sans se répartir sur les particules voisines. Au cours de la formation d'une colonne, la contrainte cisailante augmente. Comme la plaque doit avancer sur le pas de temps suivant, la colonne tourne, l'extrémité étant entraînée par la rugosité de la plaque. La direction majeure principale tourne donc et s'écarte de celle attendue en stationnaire, prédite par une analyse de Mohr-Coulomb (égale à $3\pi/4 - \varphi/2$, où φ est l'angle de frottement interne), comme on peut le voir sur la figure 3.8b. Quand l'orientation principale du tenseur de contrainte atteint exactement la

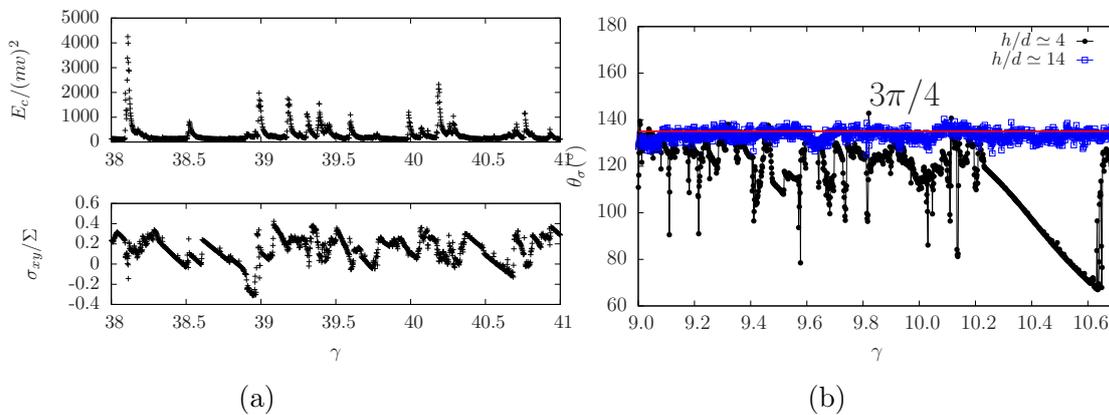


FIGURE 3.8 – (a) Dissipation de l'énergie cinétique acquise par les grains lors de la rupture d'une colonne repérée par l'inversion soudaine de la contrainte cisailante (b) Orientation du tenseur de contrainte θ_σ pour deux écoulements d'épaisseur différente

direction perpendiculaire à l'écoulement, sous l'effet de la rotation de la colonne, la contrainte cisailante change de signe. La colonne s'effondre et les particules sont localement propulsées, l'énergie cinétique acquise se retrouvant dissipée par collision inélastique (voir figure 3.8a). Cette oscillation du tenseur de contrainte et l'écart à la valeur usuellement observée dans les écoulements impose une certaine prudence

dans la mesure du frottement effectif. Si $\theta_\sigma = 3\pi/4 - \varphi/2$ alors cela implique bien l'égalité $\sigma_{xy}/\sigma_{yy} = q/p$. Or à faible épaisseur cette égalité n'est pas vérifiée. Il faut alors prendre en compte le déphasage induit par les parois dans l'expression du rapport de contrainte sous peine de le sous-évaluer, soit

$$\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{yy}} = \frac{q \sin[2(\theta_\sigma - \pi/2)]}{p + q \cos[2(\theta_\sigma - \pi/2)]} \quad (3.3)$$

Cet effet justifie le choix de travailler directement avec les composantes propres de l'écoulement, et non avec le rapport q/p . Les effets dynamiques locaux permettent

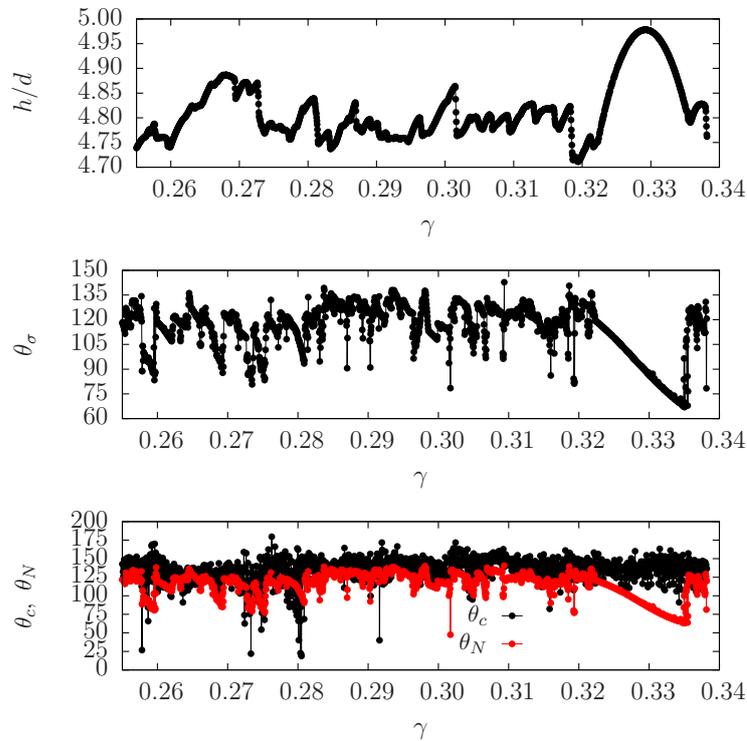


FIGURE 3.9 – Evolution de l'épaisseur h , de l'orientation du tenseur de contrainte θ_σ , de l'orientation du tenseur de texture θ_c et du tenseur d'orientation des forces normales θ_n . Les colonnes s'effondrent lorsque θ_σ dépasse 90° .

ou non un réarrangement, moins à même de créer un nouveau blocage, capable d'accommoder le déplacement imposé par la plaque. Le processus se répète alors au même endroit ou ailleurs dans l'écoulement. L'effondrement de la colonne vient du fait que l'orientation principale du tenseur de contrainte tourne par rapport au tenseur de texture. L'orientation principale du tenseur de texture (qui indique la direction principale des vecteurs unitaires au contact) fluctue autour d'une valeur proche de la direction principale de la déformation imposée à 135° , comme on peut le voir sur la figure 3.9. En effet, le gain de contacts se fait dans la direction de la déformation principale majeure (en convention de mécanique des sols). Les contacts

peuvent rouler, ce qui explique l'écart généralement observé entre les deux directions. La colonne s'effondre donc lorsque le tenseur de contrainte se rapproche de la composante principale mineure du tenseur de texture où la structure du réseau est la plus faible. La figure 3.9 montre que la rotation du tenseur de contrainte ne s'accompagne pas d'une rotation du tenseur de texture mais d'une rotation de la chaîne de force elle-même, représentée en rouge. La direction principale des chaînes de force θ_N s'obtient en définissant un tenseur $F_{\alpha\beta}^N = \langle f_n^c n_\alpha n_\beta \rangle_c$. Il s'agit d'un tenseur de texture pondéré par la force normale f_N^c se développant au contact.

L'initiation et la première phase d'apparition de ces colonnes est mécaniquement stable, et intervient à une fréquence à peu près régulière dans le temps. Cependant, chaque colonne atteint un seuil d'instabilité qui conduit à sa disparition, avec un pic d'énergie dissipée liée à cette micro-instabilité et les collisions qui l'accompagnent. Enfin l'apparition de ces colonnes garde un caractère aléatoire. Ces phénomènes font que le système ne peut jamais se structurer. Il n'y a pas de phase de durcissement usuellement observée. On peut dire que le matériau *perd sa mémoire* de manière permanente. À cause de ces phénomènes intermittents l'histoire des déformations ne joue aucun rôle dans l'évolution des propriétés mécaniques de l'écoulement. Dans le paradigme de Mohr-Coulomb, l'état mécanique d'un matériau ne dépend ni de l'histoire des déformations, de la taille, de la microstructure, ou encore de la géométrie. La résistance au cisaillement est uniquement dépendante du matériau. On peut donc affirmer que de ce point de vue, le matériau n'est jamais dans l'état critique, et que l'atteinte d'un état stationnaire est impossible lorsque l'épaisseur de l'écoulement est insuffisante.

3.4.2 Variables géométriques

Nous avons appliqué la même démarche que précédemment pour évaluer l'inhomogénéité de la connectivité dans la direction de l'écoulement. Ces cartes présentées

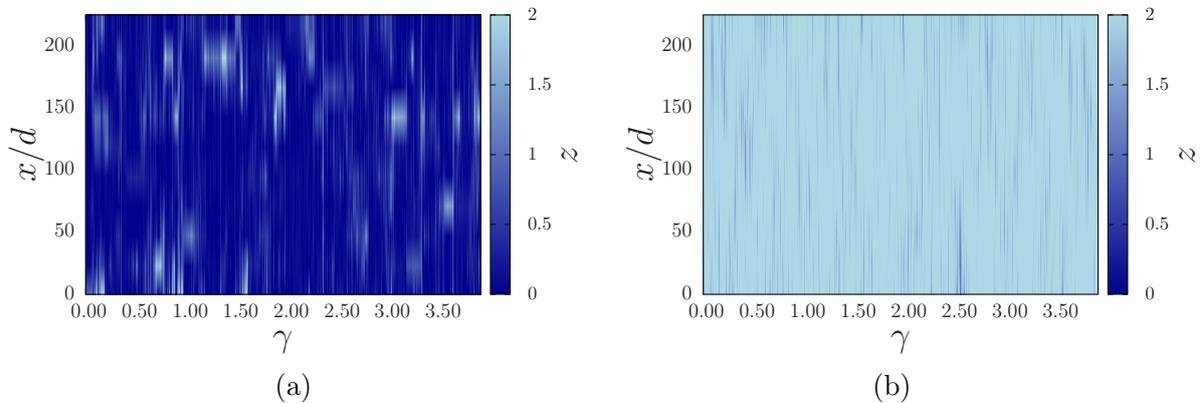


FIGURE 3.10 – Cartes spatiotemporelles de $\langle z \rangle_D$ (a) pour $h \simeq 4d$ (b) pour $h \simeq 14d$. La connectivité est évaluée ici en prenant en compte les particules flottantes.

sur la figure 3.10 nous permettent de relier les blocages (observés en contrainte) à des effets géométriques propres à la granularité de l'écoulement. Tout d'abord, on constate qu'à un blocage correspond une forte connectivité. C'est bien ce à quoi nous nous attendons en l'absence de gravité. La totalité de la contrainte s'appliquant à un petit groupe de particules, la connectivité du reste de l'empilement s'effondre. Inversement, lorsque la contrainte est moins localisée la connectivité redevient plus homogène dans le milieu à plus grande épaisseur (figure 3.10b).

L'évolution des distributions de la connectivité et de l'anisotropie sont représentées sur les figures 3.16a et 3.16b. Pour une épaisseur de $4d$, les distributions sont très étalées. Les fortes valeurs d'anisotropie atteintes et de connectivité témoignent des blocages et de la formation des colonnes. Au delà de $6d$, la distribution est bien centrée autour d'une valeur moyenne qui n'évolue plus. L'anisotropie d'orientation des contacts atteint ici une valeur moyenne indépendante de h même à faible épaisseur, contrairement à la connectivité dont la moyenne et la variance évoluent de manière continue. On voit ici que les parois perturbent davantage la connectivité de l'empilement que les directions privilégiées du réseau.

Du fait de la proximité des parois, qui imposent un ordre figé, et des exclusions mutuelles des particules, les grains ne peuvent se réorganiser librement pour un état de contrainte donné (comme cela aurait pu être le cas dans le volume). Comme en témoigne l'évolution des valeurs moyennes des variables internes (compacité, connectivité, anisotropie...) avec l'épaisseur, les effets de taille finie sont directement liés aux effets de paroi. Les interactions avec les particules figées composant les parois dominent le comportement du système.

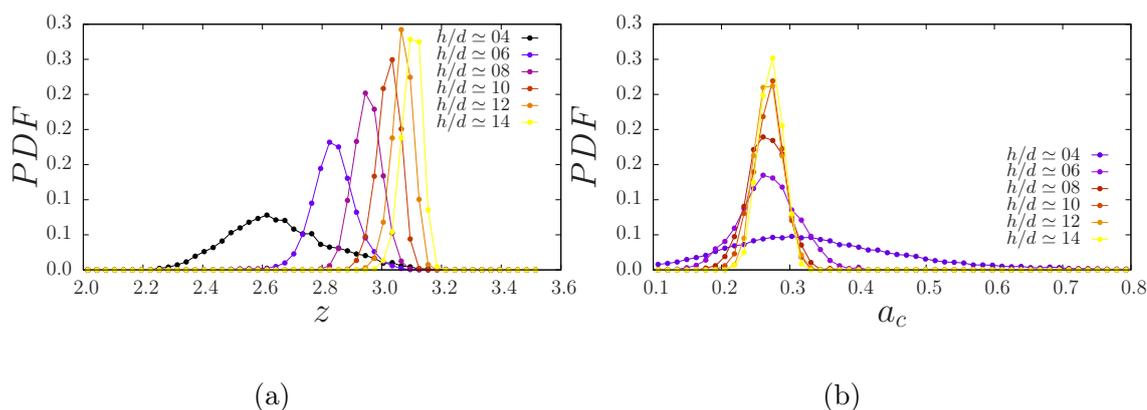


FIGURE 3.11 – (a) Distributions de la connectivité z des particules (les particules n'ayant aucun contact ont été écartées)(b) Distributions de l'anisotropie a_c de l'orientation des contacts pour différentes épaisseurs d'écoulement.

3.5 Indépendance vis à vis de l'étendue du système

L'épaisseur de l'écoulement joue un rôle déterminant dans la possibilité d'atteindre une texture favorisant une transmission de contraintes homogènes. On peut se demander si la longueur du système joue également un rôle dans l'apparition de blocages. Nous avons procédé à un essai de cisaillement sur un système de 40 particules, d'une épaisseur de $4d$ et de longueur $10d$, avec une rugosité de plaque $R = 2/3$, comme illustré sur la figure 3.12. La vitesse de la plaque et la contrainte imposées sont les mêmes que précédemment.

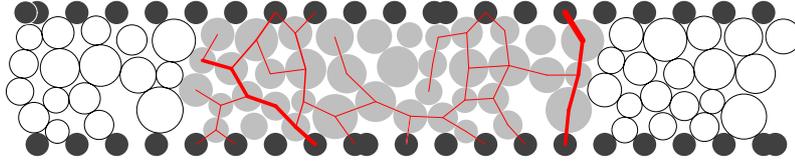


FIGURE 3.12 – Instantané d'un écoulement de petite taille (40 particules), d'épaisseur $h/d \simeq 4$. Les particules en blanc représentent les répétitions périodiques de la cellule de base, le réseau de force n'y est pas représenté.

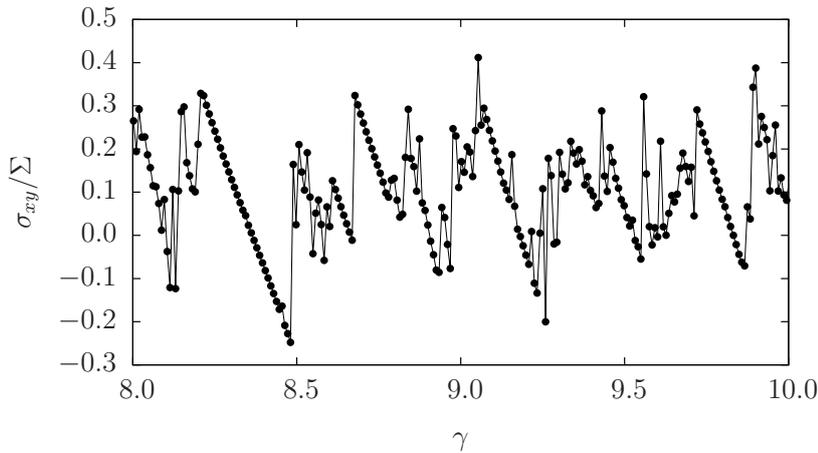


FIGURE 3.13 – Evolution de la contrainte cisailante pour un système de 40 particules et d'épaisseur $h/d \simeq 4$ au cours de la déformation.

La figure 3.13 montre l'évolution de la contrainte cisailante σ_{xy} dans l'empilement en fonction de la déformation. On retrouve bien le phénomène de blocage observé pour des systèmes de 1000 particules. Qualitativement, on peut noter que la période $1/f_\gamma$ (déformation entre deux pics successifs) et l'amplitude $A \simeq 0.5\Sigma$ des localisations sont à peu près identiques.

Comme les écoulements sur plans inclinés, les propriétés mécaniques de l'empilement sont indépendantes de sa taille dans la direction de l'écoulement. S'il s'agissait d'évènements locaux, sur une taille finie, alors la fréquence f_γ devrait doubler avec

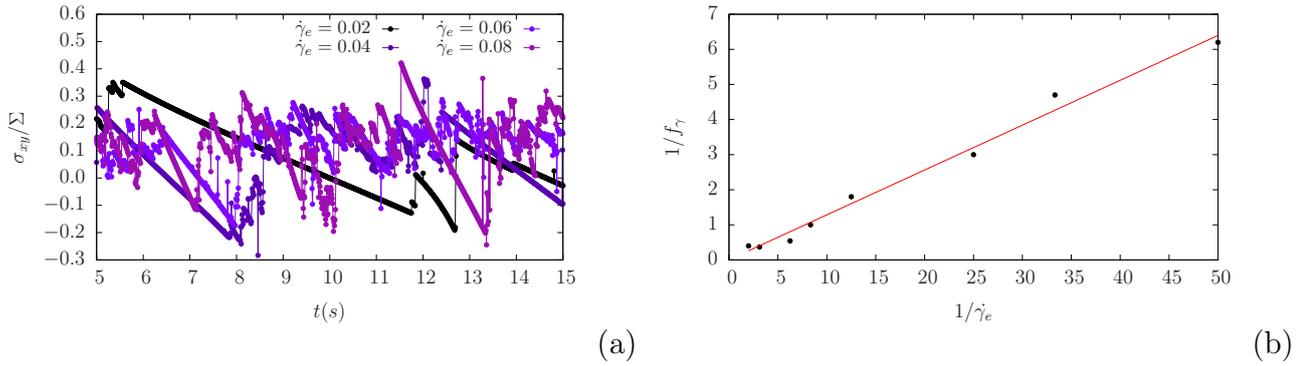


FIGURE 3.14 – (a) Evolution de la contrainte cisillante pour un petit système au cours du temps pour différents taux de déformation imposés, $h/d \simeq 4$. (b) Période des blocages en fonction de l'inverse du taux de déformation imposé. La pente de l'ajustement est égale à 0.13. Cela signifie que pour chaque déformation de l'ordre de 13% on observe une colonne de force (indépendamment de la longueur du système) pour $h/d = 4$ et $R = 2/3$.

la taille du système. Or ce n'est pas ce que l'on observe, certainement à cause de la rigidité de la paroi qui vient sélectionner la plus haute aspérité qu'elle rencontre. C'est également ce qui explique pourquoi on n'observe qu'un pic au même instant sur les cartes spatio-temporelles présentées précédemment (figures 3.6). Ceci traduit une interaction très forte entre ces blocages à travers la plaque. Il est donc possible d'étudier qualitativement le régime d'intermittence sur des petits systèmes, avec un coût faible en temps de calcul.

A rugosité constante on peut voir sur la figure 3.14a que la fréquence d'apparition des blocages augmente avec le taux de déformation imposé. La plaque se déplaçant plus rapidement, les blocages apparaissent et se rompent plus fréquemment. La figure 3.14 nous montre en effet que la fréquence de localisation est proportionnelle au taux de cisaillement imposé, à faible nombre inertiel.

3.6 Effet de la rugosité

Nous avons vu que les effets de taille finie peuvent s'expliquer par des perturbations d'ordre géométrique induites par les parois. Aussi, la rugosité des plaques doit jouer un rôle important dans l'intensité de cette perturbation. Jusqu'ici la rugosité était fixée à $R = 2/3$. Des essais de cisaillement ont été effectués sur de *grands* systèmes ($h/d \simeq 14$) pour une rugosité deux fois plus faible. Le taux de déformation nominal $\dot{\gamma}_e$ et la pression de confinement Σ restent inchangés. L'évolution du frottement effectif moyen avec l'épaisseur est présentée sur la figure 3.15. Lorsque R diminue, l'effet de l'épaisseur s'affaiblit, marqué par une plus faible variation de μ entre 4 et $14d$. Une plaque plus lisse diminue la probabilité de créer des blocages, les particules étant moins contraintes géométriquement près des parois. Nous pou-

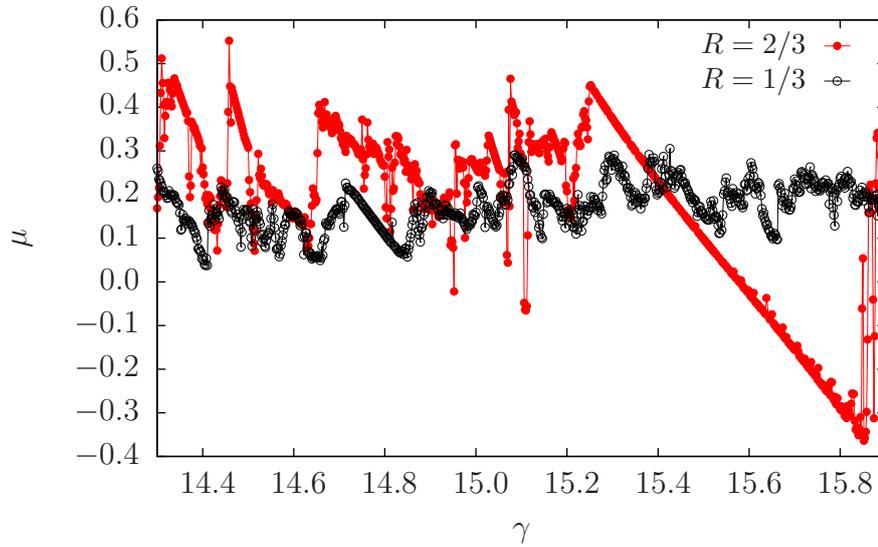


FIGURE 3.15 – Evolution de μ pour deux rugosités différentes avec $h/d \approx 4$.

vons en conclure que les blocages sont moins marqués dans le cas d'une plus faible rugosité. La figure 3.15 montre l'évolution de μ au cours de la déformation pour des systèmes de faible épaisseur. On remarque que la résistance au cisaillement seuil μ_0 , repérée par les valeurs maximales de μ , augmente avec la rugosité. On retrouve ici un résultat cohérent avec les observations faites en écoulement sur plan incliné, où une plaque rugueuse demande d'atteindre un angle d'inclinaison plus élevé pour déclencher l'écoulement. D'autre part, l'amplitude des fluctuations est clairement fonction de R . Ces résultats confirment que les effets de taille finie ne se limitent pas à la distance entre parois mais dépendent également de leur état de surface.

On peut se poser la question de la présence de localisation lorsque R tend vers zéro. Il n'est toutefois pas possible d'extrapoler ces résultats au cas asymptotique d'une plaque parfaitement lisse car des effets liés au frottement sur les parois se manifestent. En effet, dans ce cas, l'intermittence de l'écoulement s'observe lorsque la vitesse imposée dépasse une valeur critique et que la perte de résistance après glissement est explicitement introduite [51] (prise en compte d'un coefficient de friction statique μ_s et dynamique μ_d où $\mu_s > \mu_d$). La figure 3.17 nous montre comment évolue la connectivité en fonction de la rugosité pour un écoulement de $4d$ et de $14d$. A très faible épaisseur la connectivité du réseau est très fluctuante et une grande dispersion est observée. Lorsque la rugosité augmente la distribution est plus étendue, les blocages sont donc plus fréquents. La valeur moyenne en revanche est sensiblement la même. A plus forte épaisseur ($14d$), la dispersion est plus faible mais la valeur moyenne diminue avec la rugosité. En effet, la figure 3.16a montre qu'à plus grandes valeurs de h , la valeur du frottement effectif asymptotique est dépendante de R . Cela signifie, d'après la rhéologie locale $\mu(I)$, que le taux de cisaillement mesuré au centre diminue lorsque la rugosité diminue. C'est ce que montre les profils de vitesse sur la 3.16b : le taux de cisaillement au centre est plus faible à plus faible rugosité.

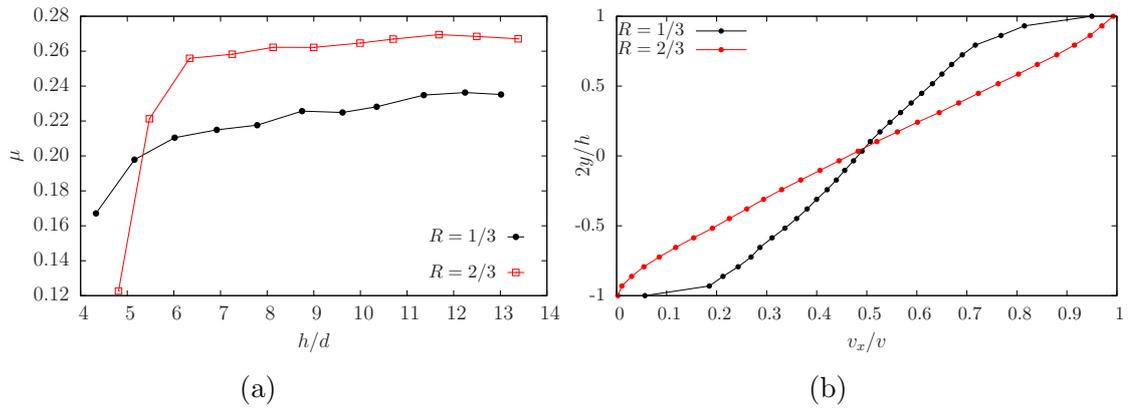


FIGURE 3.16 – (a) Evolution du frottement effectif avec l'épaisseur de l'écoulement pour deux rugosités différentes (b) Profils de vitesse pour deux rugosités différentes à épaisseur fixée $h/d \approx 14$.

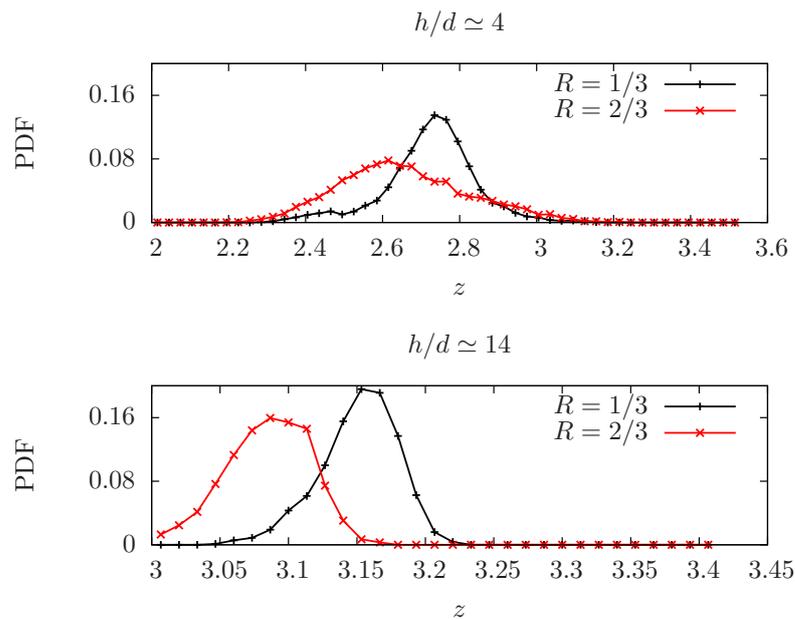


FIGURE 3.17 – Distributions de la connectivité (les particules flottantes sont écartées de la mesure mais celles en contact avec la paroi sont prises en compte) en fonction de la rugosité et de l'épaisseur.

La connectivité stationnaire mesurée au centre de l'écoulement est donc fonction du taux de cisaillement. On peut remarquer également que le taux de déformation n'est pas homogène dans l'écoulement. Ceci confirme, et ce même dans le cas d'une paroi lisse, que les effets de parois se prolongent au delà de $14d$ en régime stationnaire.

3.7 Conclusions

Nous avons montré que, du fait des fortes hétérogénéités spatiotemporelles induites par les parois, des événements extrêmes viennent contrôler le comportement des écoulements d'épaisseur de l'ordre de $10d$. Pour ces épaisseurs, l'effet des parois est de gêner géométriquement l'écoulement qui ne peut s'organiser librement, ce qui amène à des blocages fréquents de l'écoulement. Ce caractère fluctuant se traduit en particulier par des distributions très larges des contraintes et du coefficient de frottement. Nous avons également pu montrer que la rugosité des parois réduit les configurations géométriques accessibles et influence directement la connectivité et le frottement moyen. Ce frottement est plus faible en raison de la formation des "colonnes" de forces.

L'ensemble de ces phénomènes indiquent que le comportement du système est essentiellement stochastique et les interactions entre les grains et les parois dominent le comportement. En d'autres termes, il n'est pas possible de séparer le comportement rhéologique des conditions limites imposées. Ainsi, l'épaisseur h devient un paramètre à part entière dont dépendent directement les variables d'état. Même pour les valeurs moyennes, les fluctuations imposent des constantes de temps (déformation cumulée) et des échelles d'espace minimales qu'il faut prendre en compte alors que les distributions des variables d'état restent assez larges.

Ces observations soulèvent la question centrale de savoir jusqu'à quelle épaisseur les effets des parois et de taille vont subsister. Nous pouvons considérer que le système acquiert sa propre *autonomie mécanique* lorsque l'on ne mesure plus de valeurs négatives de μ . Les distributions ont montré que l'épaisseur limite à partir de laquelle la formation des colonnes s'évanouit est comprise entre 5 et $6d$. Au delà, les effets de parois subsistent. Dans quelle mesure pour des épaisseurs plus importantes ces effets s'atténuent-ils ? Pouvons-nous faire porter ces effets par des variables internes et exprimer ainsi le coefficient de frottement par une fonction dépendant d'une variable interne χ tel que $(\mu(\chi - \chi^*), \chi(h))$ où χ^* est une valeur stationnaire indépendante de h et dépendante uniquement du taux de cisaillement ? Ce sont des questions que nous allons aborder dans les deux chapitres qui vont suivre en étendant les simulations à des épaisseurs nettement plus importantes et en quantifiant plus en détail le rôle de la rugosité des parois.

–Le mariage vous réussi, ma parole Watson, vous avez pris sept livres et demie depuis que je vous ai vu ! observa-t-il.
– Sept, répondis-je.
– Vraiment ? Hum, j’aurai cru un peu plus, un tout petit peu plus j’imagine Watson.

Sherlock Holmes, Un scandale en Bohême

4

Effets de paroi en écoulement stationnaire

e chapitre quatre est consacré à l’étude des effets de taille finie et de l’influence de la rugosité des parois cette fois en écoulement stationnaire mais également sur le transitoire. Les profils de vitesse obtenus numériquement seront comparés aux profils expérimentaux. Nous proposerons une définition de la rugosité capable de rendre compte de l’ensemble des résultats et montrerons qu’il existe des valeurs de rugosité particulières pour lesquelles l’écoulement est homogène.

Sommaire

4.1	Contexte	65
4.1.1	La rugosité des parois	65
4.1.2	Rhéologie et rugosité	66
4.2	Transition vers l’état stationnaire	68
4.2.1	L’effet de la rugosité sur la transition	69

4.2.2	Permanence et intermittence	72
4.3	Profils de vitesse	74
4.3.1	L'effet de la rugosité	74
4.3.2	Effet du taux de déformation appliqué	76
4.3.3	Redéfinition de la rugosité	76
4.4	Conclusions préliminaires sur les conditions limites . . .	79

4.1 Contexte

4.1.1 La rugosité des parois

Les travaux de recherche récents sur la rhéologie des matériaux granulaires ont souvent considéré les écoulements denses des grains dans diverses géométries sans prendre systématiquement en compte les effets induits par la rugosité des parois. Or, les matériaux granulaires non cohésifs présentent deux caractéristiques qui les distinguent fortement des fluides (moléculaires) simples : les grains peuvent glisser et rouler sur les parois et les aspérités de surface, du fait de la granularité de l'écoulement, module la transmission des contraintes à l'interface. Ce couplage pose le problème de la définition des conditions aux limites, où l'état de surface des parois doit jouer un rôle dans l'atteinte d'un état stationnaire. En effet, nous avons vu précédemment que les effets de parois se prolongent loin dans l'écoulement. Des profils de vitesse inhomogènes sont observés, et cette inhomogénéité est fonction de la rugosité d'interface.

Classiquement, pour les écoulements quasi-statiques ou lents des grains (dans un silo par exemple), on qualifie une paroi de "rugueuse" lorsque le coefficient de frottement effectif μ_w entre l'écoulement et la paroi est suffisamment élevé par rapport au coefficient de frottement μ entre grains pour que les grains ne glissent point au niveau des parois [52]. Dans ce cas, les conditions aux limites au niveau des parois sont décrites par un coefficient de frottement égal à μ (plutôt que μ_w) car le rôle des parois dans ces conditions est d'immobiliser au moins une couche de grains sur lesquels glissent les grains de la couche suivante. En d'autres termes, le glissement a toujours lieu entre grains plutôt qu'entre les grains mobiles et les parois. Mais lorsque μ_w est nettement plus faible que μ , le cisaillement peut simplement se localiser au niveau des parois et le coefficient de frottement effectif est μ_w . Dans ce cas, le milieu granulaire se déplace en bloc sans être cisailé.

Un autre effet classique est la mise en ordre des grains à proximité des parois [78]. En effet, aussi bien en 2D qu'en 3D, la présence d'une paroi plane contrôle en partie les dispositions des grains et l'ordre qui en résulte peut se propager jusqu'à une certaine distance dans le volume. On peut penser que l'ordre favorise une compacité plus élevée dans le voisinage des parois. Mais on observe généralement une compacité plus faible près des parois. Une paroi étant une discontinuité, elle impose aux grains en contact avec elle de se réorganiser dans un espace figé, contrairement aux grains dans le volume. La compacité ou la connectivité près d'une paroi peut donc être plus faible.

La transmission des forces ou l'injection de l'énergie par le déplacement d'une plaque frottante vers un milieu granulaire est un mécanisme propre aux milieux granulaires. En cisaillement, le rôle du frottement entre la plaque mobile et les particules est de coupler le déplacement des parois aux rotations des particules, qui induisent à leur tour des déplacements des particules dans le volume. Ce qui est aussi singulier dans ce mécanisme est le fait qu'il ne nécessite pas la mobilisation complète

des forces de frottement mais seulement le roulement des grains. Le coefficient de frottement effectif qui en résulte pour l'ensemble des particules en contact avec une paroi peut donc être inférieur au coefficient de frottement μ_w [62]. Il y a donc une compétition entre le roulement et le glissement au niveau des parois. Pour favoriser le roulement, qui est le seul mécanisme possible pour éviter le glissement aux parois, il est alors nécessaire d'imposer une valeur élevée de μ_w . Les particules en contact direct avec la plaque roulent et leurs rotations mettent le milieu en mouvement avec un coefficient de frottement effectif qui est homogène dans tout le système.

Dans les études d'écoulement, la rugosité est imposée en collant sur les parois des grains, généralement de même taille que les grains mobiles. La rugosité est alors définie comme le rapport R des diamètres des grains des parois à celui des grains mobiles, soit $R = 1$. En présence de ces "aspérités", la nature de l'interaction entre les grains mobiles et les parois change profondément dans la mesure où les grains mobiles peuvent être mis en mouvement par la composante horizontale des forces normales transmises par les aspérités comme schématisé que la figure 4.2. La présence de ces aspérités soulève de nombreuses questions. Dans quelle mesure ce mécanisme peut l'emporter sur le mécanisme de roulement ? Jusqu'à quelle distance dans le volume les effets de discontinuité des propriétés mécaniques et géométriques se propagent-ils ? Quel est l'effet du taux de cisaillement imposé couplé à l'état de surface sur l'écoulement stationnaire atteint ?

La mise en écoulement par le mouvement d'une paroi est notamment étudiée pour des gels et des émulsions. Ces matériaux partagent une caractéristique importante avec les milieux granulaires à savoir l'existence d'une transition entre une phase solide et liquide. Cette transition, comme pour les matériaux granulaires, est décrite à l'aide d'un seuil de contrainte. Gibaud *et al.* [24] ont étudié l'influence de la paroi et de sa rugosité sur la manière dont s'amorce l'écoulement d'un gel en cisaillement. Ils ont montré que la rugosité de la paroi a un effet drastique sur les propriétés de rupture du gel sur une distance interne caractéristique ξ . Est-ce que cette distance résulte d'une combinaison entre les propriétés du gel et de la rugosité ? La manière dont se propagent les effets de paroi et l'origine de cette distance n'est pas encore bien comprise. Ces aspects sont essentiels car cela consiste à comprendre l'interaction entre une frontière et un milieu confiné, et donc la rhéologie de ces matériaux.

4.1.2 Rhéologie et rugosité

Il existe plusieurs études publiées où les effets de la rugosité des parois sur l'écoulement sont évoqués. Il est généralement admis que l'écoulement ne présente pas les mêmes caractéristiques si la plaque est rugueuse. Par exemple, en simulant les écoulements transitoires dans un cylindre incliné, Shirsath *et al.* trouvent que la compacité est d'autant plus faible que la rugosité de la base est plus importante. De même, les fluctuations et la température granulaire augmentent avec la rugosité [76]. Dans une étude systématique des écoulements 2D entre deux parois rugueuses par la méthode de Dynamique Moléculaire, da Cruz *et al.* trouvent que le milieu n'est pas unifor-

mément cisailé jusqu'à une distance égale à 5 fois le diamètre moyen des particules mobiles, mais ils trouvent un cisaillement homogène dans la partie centrale de leurs écoulements [17]. Les aspérités étant de même taille que les grains dans cette étude, les grains à proximité des parois sont moins cisailés que dans le volume. Cet effet est renforcé pour une faible polydispersité et la cristallisation au voisinage des parois. Dans le régime quasi-statique (très faible nombre inertiel), l'écoulement prend un caractère intermittent et on observe une localisation du cisaillement pendant de courts laps de temps. Néanmoins, le profil moyen des vitesses est linéaire au centre. Cependant les profils et leur forme à travers l'écoulement ne sont pas étudiés. Des résultats similaires ont été rapportés par Djelal *et al.* . [70]. Ils ont observé que la rugosité de la paroi affecte la transmission de la contrainte cisailante ainsi que les profils de vitesse. Lorsque la rugosité R est plus grande que 1, le milieu est uniformément cisailé et la contrainte de cisaillement est constante dans le volume. Pour des rugosités inférieures à 1, des bandes de localisation sont observées.

Dans une étude expérimentale très récente, Miller *et al.* ont mis en évidence des profils non homogènes de taux de déformation [44]. Les grains, de forme cylindrique, sont cisailés par une courroie rugueuse. Les grains peuvent circuler et revenir en continu dans le système, ce qui permet de cisailier le milieu pendant un temps indéfini. Le volume peut varier et la contrainte normale exercée par la courroie sur les grains est mesurée dans le centre du dispositif à l'aide de jauges de contrainte. En ce sens, ce dispositif expérimental est très proche de notre dispositif numérique. La figure 4.1a montre le dispositif expérimental et des exemples de profils de compacité et de tailles des grains (une ségrégation de taille est observée pendant un cisaillement long). La figure 4.1b montre les profils des vitesses et des taux de cisaillement moyennés. On voit que les profils présentent une certaine courbure et se mettent à l'échelle avec la vitesse de déplacement de la courroie. Le taux de cisaillement varie d'un facteur 2 entre les parois et le centre de l'écoulement. avec un minimum au centre. Le diamètre des grains mobiles varie entre 12 et 20 mm alors que le diamètre des aspérités sur la courroie est de 12 mm avec un espacement de 14 mm entre deux aspérités successives. On peut donc considérer que les parois sont *assez* rugueuses. Contrairement au taux de déformation, la contrainte cisailante est homogène dans tout l'écoulement. Ces observations posent des difficultés à la rhéologie $\mu(I)$, même dans un simple essai de cisaillement supposé homogène. Cela signifie qu'il faut disposer, en plus d'une loi rhéologique locale, d'une *loi* décrivant la perturbation induite par la paroi.

Plusieurs approches peuvent expliquer ces résultats. Premièrement, des profils de taux de déformation similaires sont obtenus pour des écoulements à grands nombres inertiels ($I > 0.1$) et sont bien décrits par la théorie cinétique. Les profils de vitesse non homogènes sont également observés pour des écoulements gravitaires. En 2005, Jop *et al.* ont étudié expérimentalement la rhéologie d'écoulements gravitaires à surface libre (sur pile) en se focalisant sur l'effet des parois, et notamment la dimension de l'écoulement [35]. Ils ont montré que les propriétés de l'écoulement et notamment le champ de vitesse, étaient entièrement contrôlées par la présence des parois.

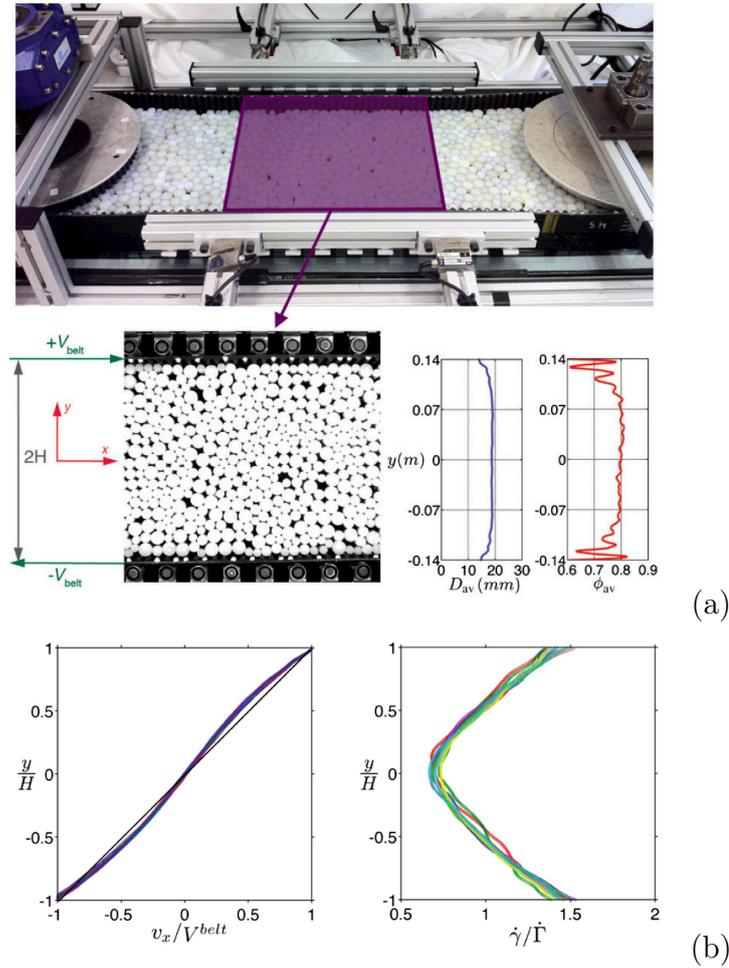


FIGURE 4.1 – (a) Montage expérimental de cisaillement périodique : 2000 cylindres en plastique posés sur une plaque en verre sont cisailés par une courroie. Profils moyens en temps à une vitesse imposée de 0.1m/s du diamètre moyen des particules (bleu) et de la compacité (rouge) (b) Profils de vitesse et de taux de cisaillement normalisés (où $\dot{\Gamma} = V_{\text{belt}}/H$).

Les auteurs proposent alors un modèle prenant en compte ces effets à travers une contrainte cisailante induite par la friction solide entre l'écoulement et les parois. En y incluant la relation constitutive $\mu(I)$, ils ont pu retrouver les profils de vitesses non homogènes. Ce modèle, en introduisant des conditions aux limites claires, permet de prédire la localisation au niveau de la surface libre ainsi que les profils observés sur plan incliné (où l'épaisseur de l'écoulement est finie). Le champ de vitesse stationnaire prédit par le modèle dépend effectivement de la largeur du canal mais également du coefficient de frottement μ_w à la paroi. L'influence de ce paramètre, que l'on peut relier à la rugosité, n'a toutefois pas été étudiée. Ce modèle hérite de l'incapacité de la rhéologie $\mu(I)$ à prédire la transition d'un régime intermittent à un régime d'écoulement continu. D'autre part, de par sa nature phénoménologique,

cette rhéologie n'est fondée sur aucune considération relative aux mouvements et aux positions des particules, et donc à sa texture. On peut supposer néanmoins que cette deuxième proposition comprend la première.

Pour expliquer leur résultats, Miller *et al.* [45] ont utilisé un modèle considérant les mouvements collectifs des grains, "la granulence" [65]. Dans la rhéologie $\mu(I)$, une analyse dimensionnelle (aussi appelée *loi de Bagnold*) montre que la viscosité tangentielle η de l'écoulement est typiquement proportionnelle à $d^2|\dot{\gamma}|$. Cela signifie que la quantité de mouvement diffuse à un taux $|\dot{\gamma}|$ sur une distance caractéristique d'un diamètre de grain. La mise en évidence de la "granulence" (par analogie avec la turbulence dans les fluides), même en régime quasi-statique, permet d'introduire une échelle spatiale mésoscopique ℓ sur laquelle le mouvement des grains est corrélé. Il faut alors savoir comment elle dépend des conditions de l'écoulement. En introduisant cette nouvelle échelle dans l'expression de la viscosité (définissant alors une viscosité *turbulente*), et en supposant que $\ell > h$, où h est la taille de l'écoulement, Miller et al retrouvent les profils de taux de déformation inhomogène. A noter que le champ de taux de déformation (et donc la forme des profils de vitesse) devient alors fonction (non linéaire) de la taille de l'écoulement h , tout comme dans le modèle de Jop. En introduisant une distance mésoscopique, le modèle devient non-local au sens où le comportement en un point ne dépend plus de ce qu'il se passe au point immédiatement voisin mais à ce qu'il se passe dans une région de taille finie.

Dans le modèle proposé par Miller, et dans les modèles non locaux de manière générale, l'écart du champ (par exemple de déformation) au champ homogène (prédit par la loi locale) en un point \vec{r}_i est prédit en intégrant des effets sur une certaine région telle que

$$\dot{\gamma}(\vec{r}_i) = \int_{-\infty}^{\infty} W\left(\frac{\vec{r}_i - \vec{r}}{\ell}\right) dV$$

où W est une fonctionnelle propre au modèle et ℓ une distance caractéristique. Or ces modèles n'abordent pas explicitement le rôle des parois et des perturbations qu'elles induisent dans l'écoulement alors que leur rôle sur la rhéologie a été souligné. Les résultats obtenus en écoulement mince ont clairement illustré ce lien dans le cas de l'intermittence de l'écoulement. Nous avons interprété les effets de taille, notamment sur le frottement effectif, comme le résultat d'une perturbation d'une grandeur géométrique par les parois. Supposons une unique loi de comportement locale s'appliquant en tout point de l'écoulement, intégrant des variables internes d'ordre géométrique et des relations gouvernant leur évolution. Le caractère non local, et la dépendance spatiale de la loi, traduit alors une intégration implicite des champs inhomogènes de variables internes qu'il reste à identifier. Cela revient à postuler que le taux de déformation mesuré en un point n'est pas lui même dépendant de sa position dans l'écoulement (ou de sa distance à la paroi) mais qu'il dépend d'une variable interne (ou plusieurs, ou de leur dérivée spatiale, temporelle etc...) elle même modulée par la présence d'une paroi. On peut alors se demander si les inhomogénéités induites dans l'écoulement par la rugosité d'une paroi peuvent nous

permettre d'identifier une loi de comportement locale.

Pour cela, nous avons effectué des cisaillements plan en contrôlant à la fois l'épaisseur de l'écoulement, le taux de cisaillement imposé, la pression de confinement ainsi que la rugosité des parois. Nous nous plaçons dans une géométrie et des conditions aux limites proche de celles de Miller, pour aborder le problème par le biais de la simulation numérique. Guidés par les résultats précédents sur l'effet de la rugosité, nous allons commencer par étudier son influence sur la transition vers l'état stationnaire.

4.2 Transition vers l'état stationnaire

Avant d'étudier les propriétés de l'écoulement granulaire en régime stationnaire il convient de le définir. Le régime stationnaire, ou permanent, est un état du système dans lequel ses propriétés moyennes n'évoluent plus au cours de la déformation. Il est précédé d'un régime transitoire au cours duquel les variables internes le caractérisant évoluent sous l'influence des efforts externes. Si un écoulement granulaire de particules rigides ne résulte que de réarrangements successifs de particules alors la texture, les caractérisant, doit évoluer jusqu'à une valeur moyenne stable, indépendante de la déformation. Pour un écoulement granulaire, on considère que le régime atteint est stationnaire lorsque le taux de déformation au centre n'évolue plus ou lorsque les fluctuations relatives des quantités mesurées sont suffisamment petites et dont la statistique est indépendante du temps. En général, on applique une déformation cumulée suffisante, écartant les effets des conditions initiales. Une manière de s'en assurer est de préparer un même échantillon de différentes manières, par exemple initialement lâche et initialement dense. Lorsque le taux de déformation au centre est identique pour chacun des systèmes alors on peut en déduire qu'ils sont dans un état indépendant des conditions initiales, et donc dans un même état stationnaire. Les résultats expérimentaux et de simulations montrent bien qu'il existe un état stationnaire (ou *critique* en mécanique des sols) et cet état est celui prédit par le modèle plastique de Coulomb. Néanmoins, les transitoires observés, comme par exemple celui de la compacité, montrent que des variables internes ont des déformations caractéristiques propres qui ne sont pas nécessairement les mêmes et qui peuvent dépendre de la sollicitation ou éventuellement des effets d'interface.

4.2.1 Redéfinition de la rugosité

Nous mettons l'écoulement en contact avec une plaque rugueuse composée de grains de même taille mais non nécessairement égale à celle des particules libres. La rugosité de la plaque, comme nous l'avons évoqué, est contrôlée dans notre cas par deux termes :

- le rapport R défini comme $R = d_w/d$, où d_w est le diamètre des grains appartenant à la paroi et d le diamètre des grains libres

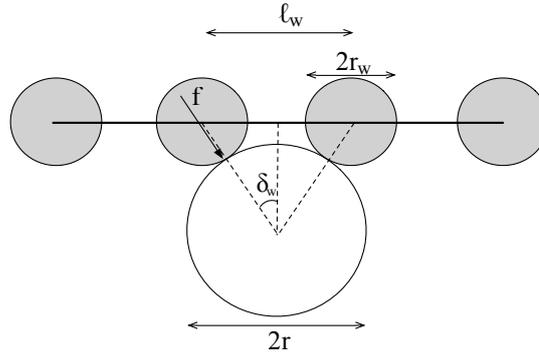


FIGURE 4.2 – Les aspérités d’une plaque, schématisées par des disques de rayons r_w et un espacement de ℓ_w , en interaction avec des particules mobiles de rayons r .

— la distance entre particules de la paroi $\ell_w = kd_w$ où k est ici supérieur à 1, comme schématisé sur la figure 4.2.

L’angle δ_w représenté sur la figure 4.2 apparaît alors comme une mesure naturelle de la rugosité. Il se définit comme

$$\sin \delta_w = \frac{kR}{2(1 + R)} \quad (4.1)$$

4.2.2 L’effet de la rugosité sur la transition

Nous avons réalisé des simulations en cisaillement plan d’un échantillon de 6000 particules, d’une épaisseur moyenne $\langle h \rangle / d = 50$, comme on peut le voir sur la figure 4.3. Le taux de cisaillement nominal (ou appliqué) $\dot{\gamma}_e$ est fixé à $3s^{-1}$, et la contrainte de confinement Σ est constante. Le nombre inertiel *nominal* de l’écoulement est constant et vaut alors $I_e = 0.01$. Cette distinction entre nominal et mesuré sera explicitée par la suite. On applique à l’empilement initial une déformation totale de $\gamma = 1.5$ et on enregistre tous les dix pas les positions, les vitesses et les forces entre particules. On peut ainsi analyser l’évolution de la contrainte cisailante, du taux de déformation et des variables internes vers l’état stationnaire. Cela nous permet de définir la déformation nécessaire pour atteindre une valeur stable des propriétés de l’écoulement mais également d’étudier l’influence de la rugosité sur l’atteinte de cet état.

La rugosité est explorée ici en faisant varier R sur un intervalle $[0.25 : 0.65]$ en augmentant progressivement d_w , et en maintenant le coefficient k égal à 1.7. A noter que dans ce cas, l’espacement et la taille des aspérités varient tous deux, ce qui offre un large intervalle de valeurs de δ_w accessible tout en évitant des situations où les particules peuvent glisser à travers les aspérités. Nous reviendrons par la suite sur l’angle de rugosité et sa paramétrisation.

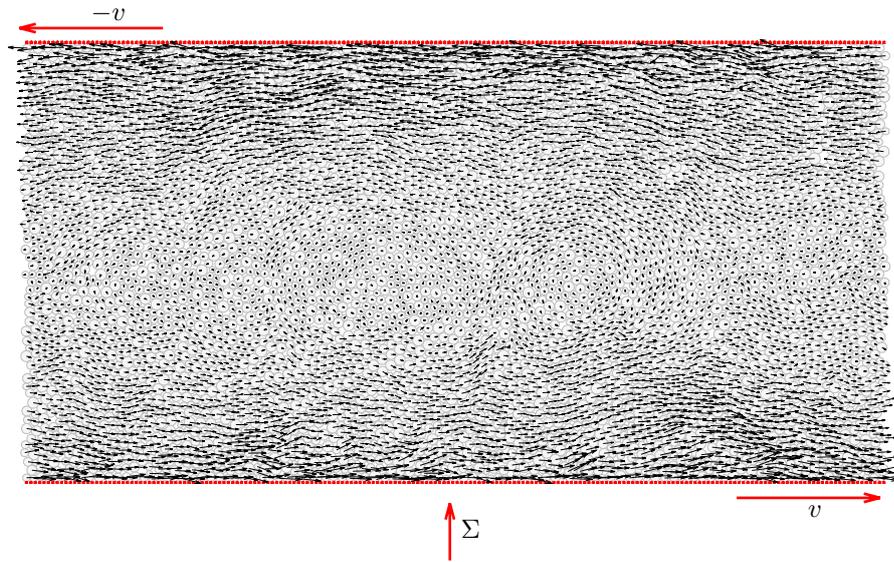


FIGURE 4.3 – Instantané d'un cisaillement plan. Les flèches représentent les vitesses instantanées des particules, $\delta_w = 0.34$.

La figure 4.4a montre que le taux de déformation mesuré au centre de l'écoulement évolue avec la rugosité (comme nous l'avions vu au chapitre précédent) et n'est pas identique à celui imposé, sauf pour des valeurs particulières. Changer la rugosité est donc équivalent à modifier localement le taux de déformation, ce qui souligne le rôle joué par la nature même de la paroi dans la transmission des efforts vers l'écoulement. En ce sens, le taux de déformation nominal $\dot{\gamma}_e$ est à distinguer du taux de déformation $\dot{\gamma}^*$ mesuré au milieu. Ce résultat se comprend intuitivement : il est plus difficile de mettre en mouvement le milieu lorsque la paroi est lisse car cela nécessite de mettre en rotation les particules et de mobiliser la force de frottement. L'augmentation du taux de déformation au centre, sous l'effet de la rugosité, s'accompagne d'une diminution au voisinage de la paroi, comme le montre la figure 4.5. Cette inhomogénéité du champ est stationnaire.

L'amortissement, ou la déformation caractéristique pour atteindre l'état stationnaire, dépend de la rugosité et donc du taux de déformation lui-même. Les figures 4.4b et 4.6 montrent respectivement l'évolution du frottement effectif et de l'anisotropie vers leurs valeurs stationnaires en fonction de la rugosité. Étant donné que la rugosité a pour effet de modifier le taux de déformation nous pouvons représenter les déformations caractéristiques associées à chaque grandeur en fonction de ce dernier. La figure 4.7 montre comment évolue les déformations caractéristiques de $\dot{\gamma}^*$, μ et a_c en fonction du taux de déformation. La première remarque est que chaque variable possède sa propre échelle de relaxation. La déformation caractéristique pour atteindre un taux de déformation à l'équilibre augmente linéairement avec celui-ci (dans le domaine considéré). On remarque également que le frottement effectif a un transitoire plus faible que l'anisotropie. Au cours de la phase de chargement,

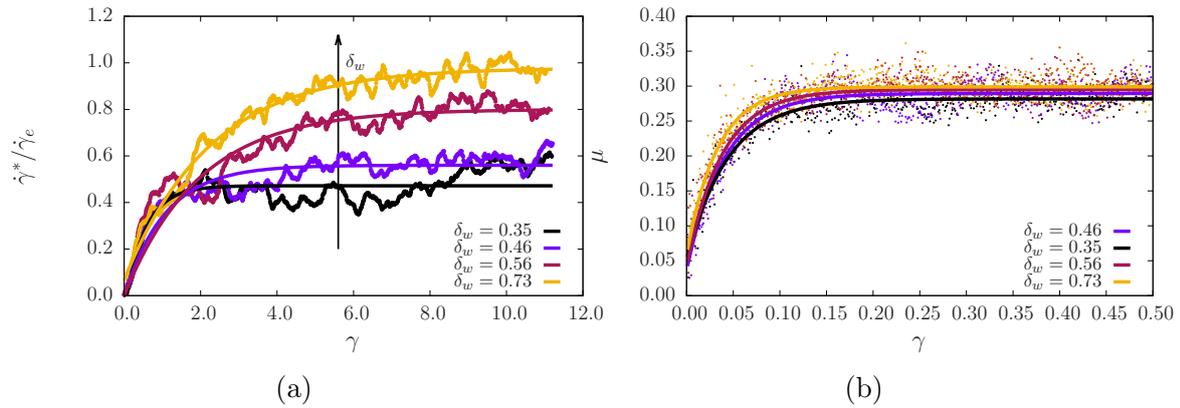


FIGURE 4.4 – Evolution au cours de la déformation pour différentes rugosités R (a) du taux de déformation au centre $\dot{\gamma}^*$. Le taux de déformation au centre $\dot{\gamma}^*$ est calculé à partir du profil de vitesse instantané en faisant la moyenne des dérivées (obtenues par différences finies) dans un intervalle autour du centre de l'écoulement (b) du frottement effectif μ .

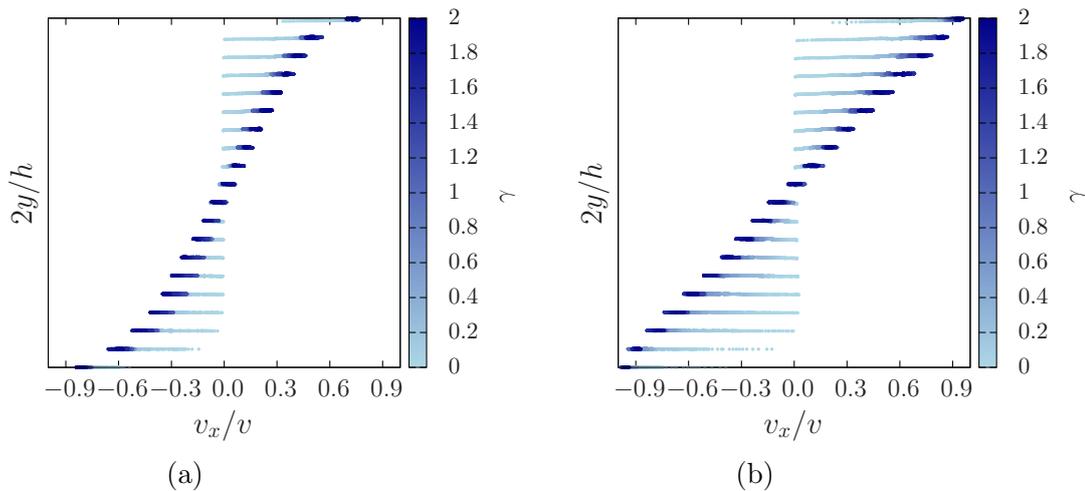


FIGURE 4.5 – Evolution du profil instantané de vitesse au cours de la déformation pour une rugosité (a) $\delta_w = 0.35$ (b) $\delta_w = 0.73$, $I_e = 0.01$.

la résistance au cisaillement du matériau atteint sa valeur maximale avant d'être complètement structuré, mais ce déphasage diminue avec le taux de déformation, et reste très faible. Cela suggère que la résistance de l'empilement durant cette phase dépend également d'autres variables internes.

Cette première étude permet de définir sans ambiguïté une déformation suffisante pour atteindre un état stationnaire global, au sens où chaque variable mesurée atteint son propre état stationnaire.

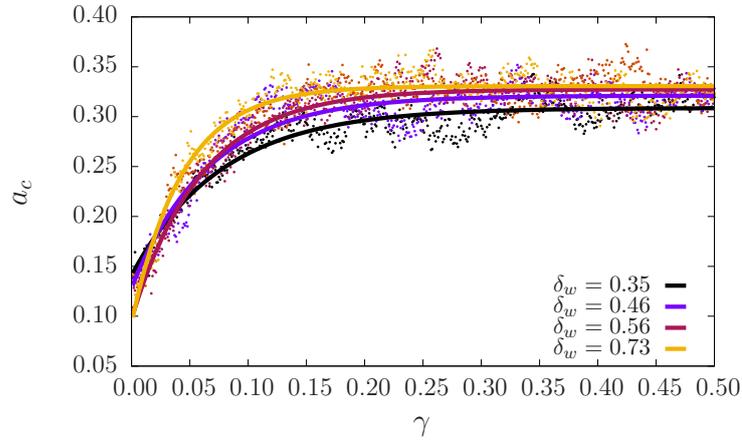


FIGURE 4.6 – Evolution de l'anisotropie d'orientation des contacts a_c au cours de la déformation en fonction de la rugosité δ_w . Les lignes continues représentent des fits à l'aide d'une exponentielle du type $a_c^*(1 - \exp(-\gamma/\gamma^c))$

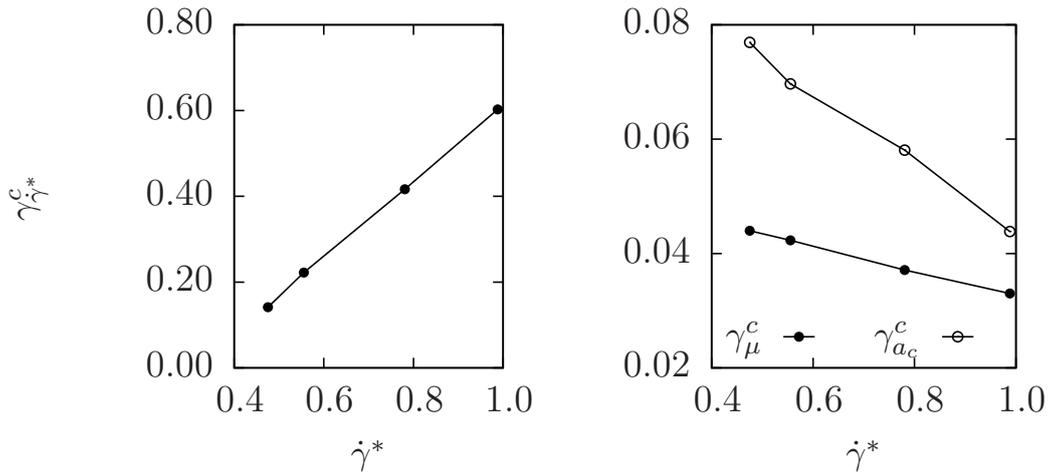


FIGURE 4.7 – Déformation caractéristique γ^c pour atteindre l'état stationnaire en fonction du taux de déformation $\dot{\gamma}^*$

4.2.3 Permanence et intermittence

Appliquer une *grande* déformation n'est pas une condition suffisante pour l'atteinte d'un régime stationnaire. Si la déformation caractéristique est elle-même dépendante du taux de déformation alors lorsque celui-ci tend vers zéro cette déformation tend vers infini. En écoulement sur plan incliné, où le débit est contrôlé, on observe également l'existence d'un débit minimum Q_c pour obtenir un écoulement continu [41, 69] Pour des débits inférieurs, l'écoulement se fait par avalanches successives. Il a été montré que le débit minimum pour entretenir un écoulement continu

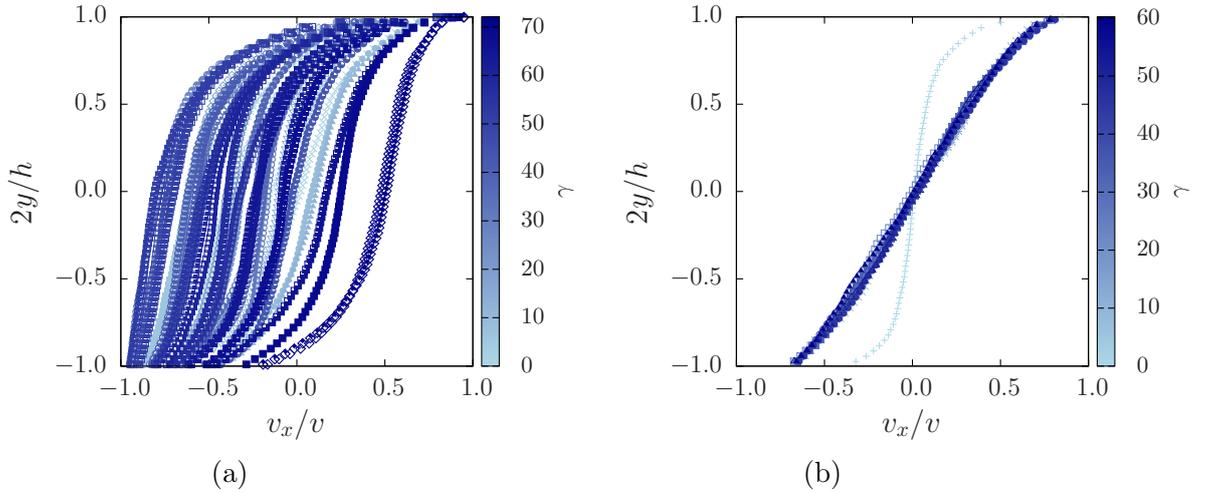


FIGURE 4.8 – Evolution du profil de vitesse au cours de la déformation (a) à très faible nombre inertiel $I_e \approx 0.002$ (b) à nombre inertiel plus élevé $I_e \approx 0.02$. Chaque profil est obtenu en moyennant les vitesses en chaque couche sur une fenêtre de déformation de 1.

dépendait également de la largeur du canal d'écoulement [35]. Plusieurs études ont montré que l'écoulement devenait instable à faible nombre inertiel. En cisaillement plan, cet effet se manifeste par une oscillation entre deux états de déformation, la déformation se localise alternativement au niveau de la paroi inférieure ou supérieure [17]. Les résultats obtenus par da Cruz *et al.* montrent que cette intermittence domine l'écoulement pour des nombres inertiels inférieurs à 0.003 environ.

Nous avons réalisé une simulation à faible nombre inertiel, $I_e \approx 0.002$, pour une rugosité fixée $\delta_w = 0.4$. La figure 4.8a montre l'évolution du profil de vitesse au cours de la déformation, mesuré sur une fenêtre temporelle glissante. On observe des phénomènes de glissement à la paroi et notamment la présence de localisations alternativement au niveau de la plaque inférieure ou supérieure, en accord avec les résultats discutés précédemment. Dans ces conditions il est difficile de caractériser un état stationnaire et de définir un taux de déformation à l'équilibre. Il est toujours possible de faire une telle mesure mais elle sera dépendante de la fenêtre de déformation considérée. La figure 4.8a montre en effet qu'il existe des fenêtres de déformation sur lesquelles le profil est symétrique et proche de ce qu'on attendrait en stationnaire. Ce sont des états intermédiaires entre les deux modes de déformation. Evaluer un profil moyen sur une déformation cumulée prise de manière arbitraire, même suffisante, n'a donc pas de sens dans ce régime au vu de ces fluctuations. Si l'on effectue la même démarche pour un écoulement à nombre inertiel 10 fois plus élevé ($I_e \approx 0.02$) le profil converge vers une forme stationnaire pour une déformation cumulée bien définie, comme le montre la figure 4.8b.

Le caractère instationnaire des écoulements quasistatiques provient du fait que les fluctuations en chaque couche sont corrélées à travers l'écoulement. Par exemple,

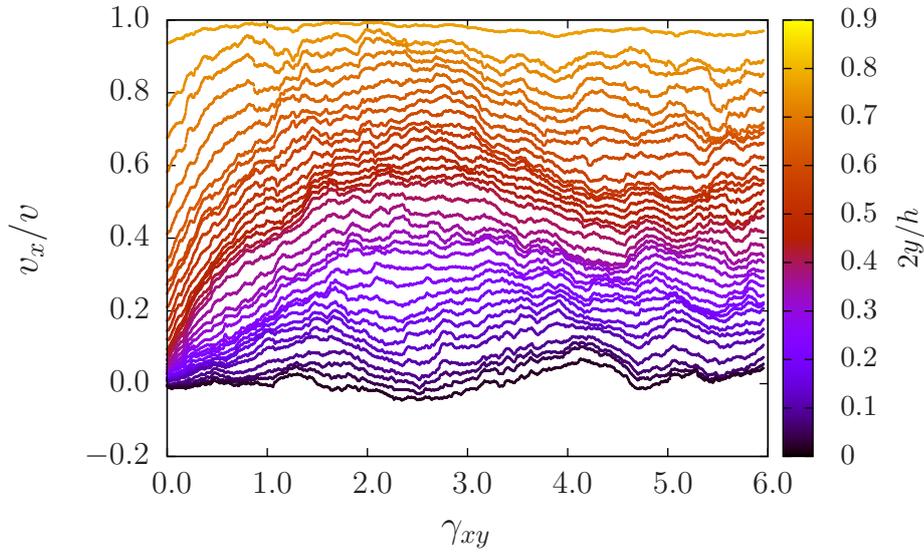


FIGURE 4.9 – Evolution de la vitesse atteinte en chaque couche ($y > 0$) de l'écoulement au cours de la déformation à plus faible nombre inertiel $I_e \approx 0.002$.

la figure 4.9 montre l'évolution de la vitesse moyenne à différentes positions de l'écoulement pour la même simulation à faible nombre inertiel. On observe bien qu'en chaque couche il existe un transitoire précédant l'atteinte une valeur stationnaire, uniquement fonction du taux de déformation et de la distance à la paroi, résultant du transfert de quantité de mouvement entre particules. Cependant, une fois cette valeur atteinte, des grandes fluctuations sont observées au cours de la déformation et ces fluctuations se propagent verticalement à travers l'écoulement. Ainsi, l'état stationnaire n'est jamais réalisé. Nous pouvons calculer la corrélation entre *couches* de l'écoulement pour différents taux de cisaillement appliqués et en différents points de l'écoulement y_0 . Soient deux couches de l'écoulement à des altitudes respectives y_0 et $y_0 + \Delta y$, la corrélation de la vitesse entre elles est donnée par

$$\text{Corr}(y_0, y_0 + \Delta y) = \frac{\langle v_x(y_0) - \langle v_x(y_0) \rangle \rangle \langle v_x(y_0 + \Delta y) - \langle v_x(y_0 + \Delta y) \rangle \rangle}{\sigma_{v_x(y_0)} \sigma_{v_x(y_0 + \Delta y)}} \quad (4.2)$$

Les figures 4.10a et 4.10b montrent que la corrélation diminue fortement au sein de l'écoulement lorsque le nombre inertiel augmente. La corrélation est également dépendante de la position à laquelle on se place dans l'écoulement.

Cette décorrélation des fluctuations, sur quelques diamètres à grand nombre inertiel, est observée alors que la température granulaire augmente, comme on peut le voir sur la figure 4.11. Ces profils, comme ceux de la vitesse, ne sont pas homogènes dans l'écoulement. La température ne mesure pas la fluctuation de la valeur moyenne au cours du temps mais sa fluctuation en chaque instant. On peut l'associer à une contribution dite *cinétique* de la contrainte, elle reflète l'échange de quantité de mouvement lors de collisions entre particules. Augmenter l'inertie de l'écoulement a

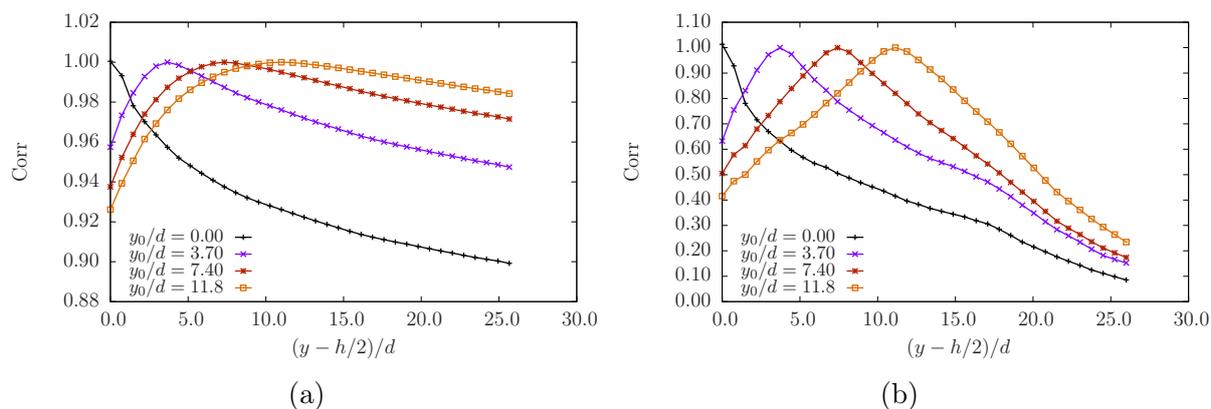


FIGURE 4.10 – Corrélation de la vitesse entre couches pour différents points de référence y_0 dans la partie supérieure de l'écoulement ($0 < y < h/2$) pour chaque valeur du nombre inertiel explorée (a) $I_e \approx 0.002$ (b) $I_e \approx 0.02$

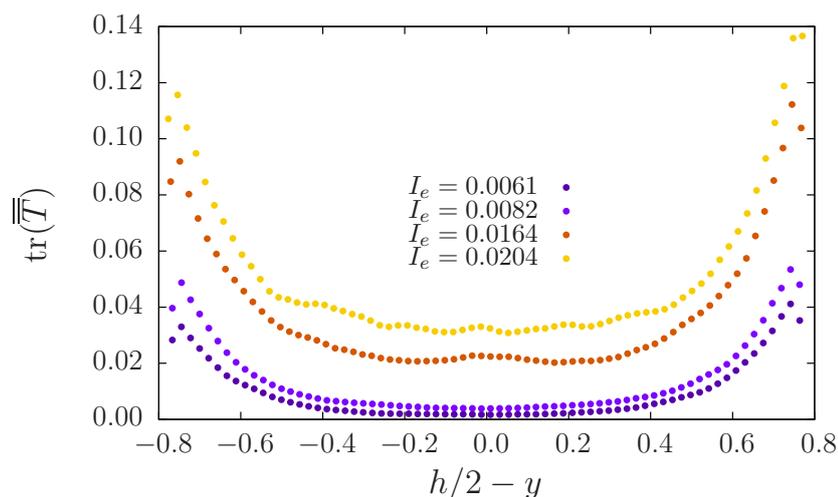


FIGURE 4.11 – Profils de la trace de la température pour différents nombre inertiels (unités arbitraires).

donc pour effet d'homogénéiser le taux de déformation, chaque particule voyant son mouvement davantage décorrélé de ses voisines, elle même étant soumise à davantage de collisions. Les fluctuations, sous l'effet de cette agitation, ne parviennent plus à se propager efficacement à travers l'écoulement. Nous nous assurons alors par la suite d'écartier ces effets en nous plaçant à des nombres inertiels supérieurs mais proche de 10^{-3} , afin d'obtenir des écoulements stationnaires aux valeurs moyennes bien établies.

4.3 Profils de vitesse

4.3.1 L'effet de la rugosité

Nous allons à présent analyser l'inhomogénéité du champ de vitesse observé précédemment. Les échantillons ont été cisailés sur une déformation cumulée excédant 30 afin d'assurer l'atteinte d'un régime stationnaire. La contrainte de confinement étant constante nous étudierons ces profils en terme de taux de déformation nominal. Nous reviendrons ensuite à une notation plus générale. Les profils sont obtenus en utilisant la méthode décrite en section 2.4, à partir des 800 derniers instants de la simulation, sur une déformation cumulée d'environ 3. Les profils de vitesse stationnaires sont représentés sur la figure 4.12a.

Tout d'abord nous observons qu'il n'y a pas une localisation franche aux parois, l'ensemble de l'échantillon est cisailé. Ceci suggère que la présence d'aspérités, même de petite taille ($\delta_w = 0.34$), suffit à augmenter le frottement effectif au pari μ_w pour favoriser le roulement à pression de confinement donnée. Il n'est donc pas nécessaire d'imposer un frottement solide μ_s élevé entre les grains composant la paroi et les grains libres. Nous trouvons des profils de vitesse inhomogènes à travers l'écoulement, jusqu'à ce que la rugosité atteigne une valeur *critique*. Augmenter la rugosité au delà de cette valeur conduit à nouveau à des profils inhomogènes. En accord avec les expériences de Miller [45] et les simulations discrètes en cisaillement plan [23], nous trouvons, contrairement au taux de déformation, un profil de frottement effectif homogène dans l'écoulement (voir figure 4.12b). Ce profil valide partiellement l'atteinte de l'état stationnaire, et l'existence d'un taux de déformation moyen imposé. En stationnaire, il est possible d'estimer le taux de déformation homogène $\dot{\gamma}^*$ en mesurant la tangente du profil autour du centre de l'écoulement. Le taux de déformation normalisé par le taux imposé est représenté en fonction de δ_w sur la figure 4.12c.

On peut en conclure que l'expérimentateur ne peut pas directement contrôler $\dot{\gamma}^*$ car il dépend du couplage entre l'écoulement et l'interface et notamment de la rugosité. Ici $\dot{\gamma}^* = \dot{\gamma}_e$ lorsque $\delta_w = \delta_w^c$. Pour des raisons de conservation, et étant donné la courbure des profils, lorsque le taux de déformation au niveau de l'interface augmente le taux de déformation au centre diminue, et devient maximal quand le champ est homogène. On peut vérifier que le taux de cisaillement à l'équilibre respecte bien la rhéologie $\mu(I^*)$, où $I^* = \dot{\gamma}^* d \sqrt{\rho/\Sigma}$ est le nombre inertiel au centre de l'écoulement, comme montré sur la figure 4.13 (noir).

Les profils non homogènes obtenus expérimentalement par Miller sont donc un cas particulier d'écoulement stationnaire, déterminés en partie par la rugosité de la courroie utilisée.

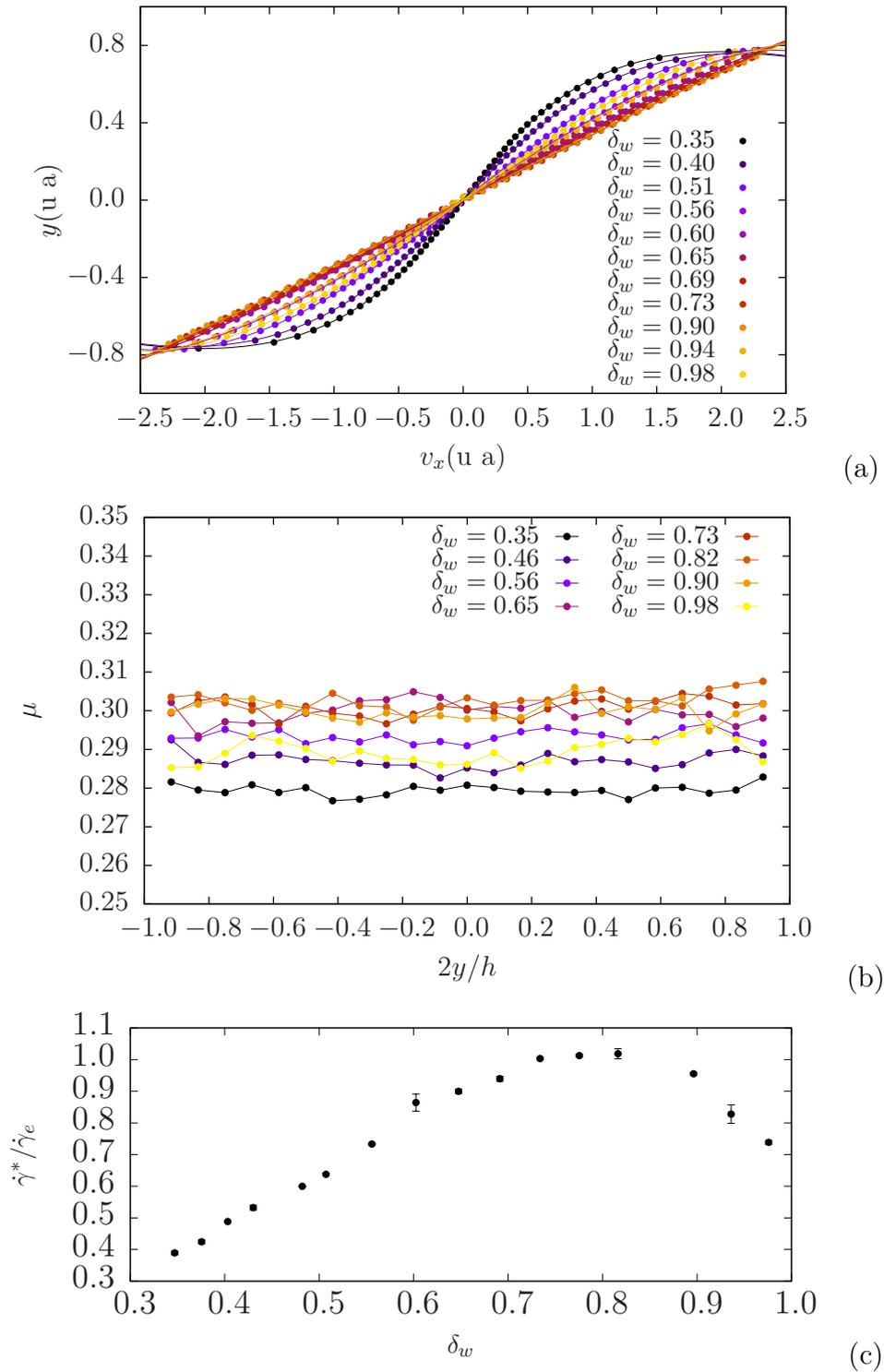


FIGURE 4.12 – (a) Profils de vitesse pour différentes valeurs de l’angle de rugosité δ_w (unités arbitraires). Les lignes correspondent à des ajustements avec l’expression (5.6) (b) Profils du rapport de contrainte $\mu = \sigma_{xy}/\sigma_{yy}$ (c) Taux de déformation $\dot{\gamma}^*$ à l’équilibre en fonction de la rugosité de la plaque.

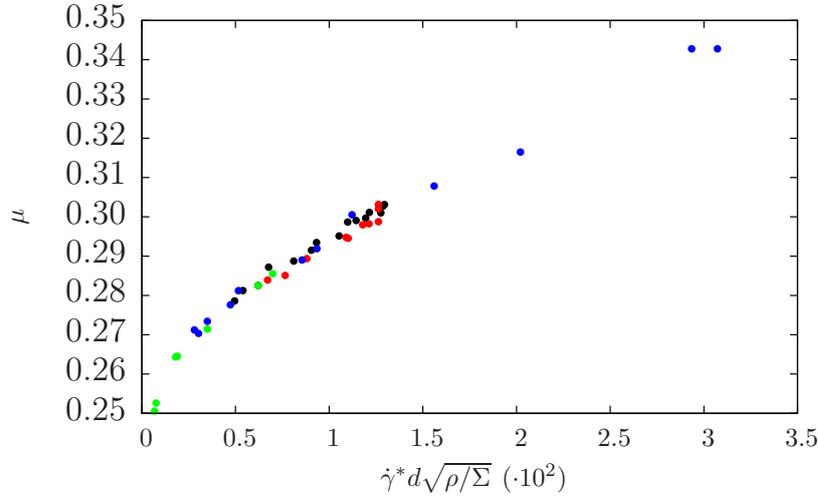


FIGURE 4.13 – Loi de frottement visco-plastique $\mu(I^*)$ où $I^* = d\dot{\gamma}^* \sqrt{\rho/\Sigma}$. Noir : série $k = 3.4$ Rouge : série $k = 3.7$ Vert : série $\dot{\Gamma}_e$ (voir section 4.3.2) Bleu : série Σ (voir section 5.2.2)

4.3.2 Effet du taux de déformation appliqué

A présent, la rugosité de la paroi est fixée (ici à $\delta_w = 0.4$) et nous faisons varier le taux de cisaillement nominal $\dot{\gamma}_e$ (de manière équivalente I_e , les autres paramètres étant fixes). Pour chaque simulation, un même échantillon est utilisé. Les profils de vitesse sont représentés sur la figure 4.14a. Les résultats confirment bien que l'effet de $\dot{\gamma}_e$ sur l'inhomogénéité du profil de vitesse est de même ordre que la rugosité : le profil tend vers un profil homogène lorsque $\dot{\gamma}_e$ augmente. Les mesures du rapport de contrainte σ_{xy}/σ_{yy} et de $\dot{\gamma}^*$ montrent que la rhéologie viscoplastique est bien vérifiée au centre (figure 4.13, points verts).

La figure 4.14b montre les mêmes profils normalisés et ajustés dans la limite des fluctuations obtenues. Contrairement aux résultats expérimentaux de Miller (figure 4.1), nous obtenons des profils qui ne se mettent pas à l'échelle. Ceci indique que l'effet est non linéaire, doubler le taux de cisaillement appliqué ne double pas les vitesses atteintes dans l'écoulement et la valeur du taux de cisaillement à l'équilibre $\dot{\gamma}^*$. Cet effet est net à faibles valeurs de I_e et tend à être moins marqué lorsque celui-ci augmente. Dans les expériences de Miller, les particules cylindriques soumises au cisaillement sont en contact avec une paroi en verre qui sert d'assise à l'écoulement. Aussi, une force de frottement constante ralentit les particules. Cet effet, absent de nos simulations, est plus marqué sur les profils lorsque l'inertie des particules est faible ou à bas nombre inertiel. C'est une hypothèse qui pourrait expliquer cette différence.

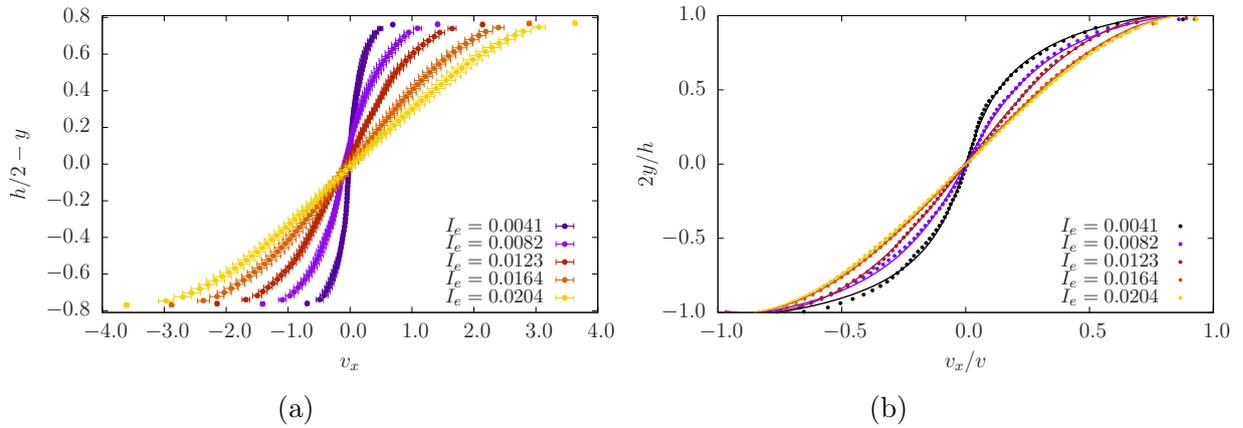


FIGURE 4.14 – Profils de vitesse pour différents taux de cisaillement $\dot{\Gamma}_e$ imposés. (a) non normalisés (unités arbitraires) (b) normalisés par le taux de déformation nominal $\dot{\gamma}_e = v_x/h$. Les lignes pleines représentent un ajustement à l’aide de la relation (5.6)

4.3.3 Rugosité : espacement et amplitude

Nous avons mis en évidence une valeur de rugosité, une rugosité critique, pour laquelle le champ de vitesse était homogène. Jusqu’ici nous avons fait varier la rugosité en changeant la taille des grains de la paroi et leur espacement pondérée par un facteur k (on rappelle que $\ell_w = kd_w$) constant, fixé à 1.85. Nous avons donc réalisé de nouvelles simulations en augmentant légèrement ce facteur avec une nouvelle valeur $k = 1.85$. Les profils sont présentés sur la figure 4.15.

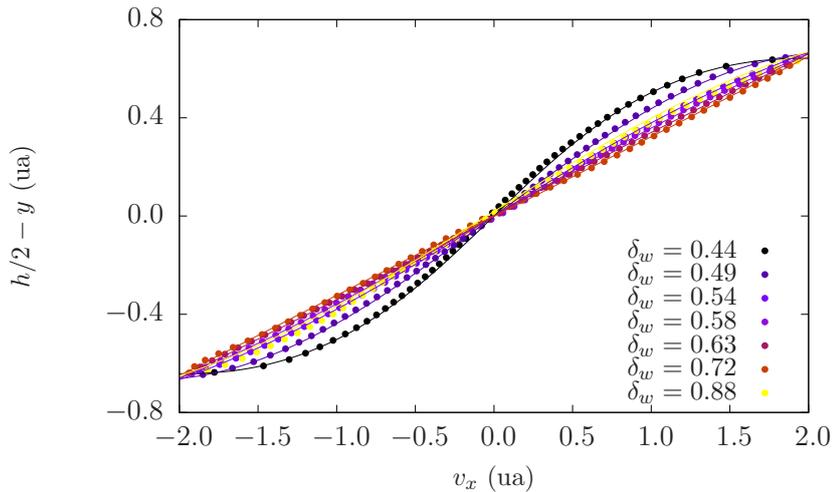


FIGURE 4.15 – Profils de vitesse pour différentes rugosités δ_w , avec $k = 1.85$. Les lignes pleines correspondent à des fits avec l’expression (5.6).

On peut remarquer que le champ est homogène autour d'une valeur identique de l'angle de rugosité δ_w^c . La distance ℓ_w étant plus grande ici que dans le cas précédent, la valeur de R pour laquelle le profil est homogène est plus faible ($R = 0.5$, contre $R = 0.65$ précédemment). Nous pouvons tracer le taux de déformation à l'équilibre comme précédemment. Lorsque $\dot{\gamma}^*$ atteint sa valeur maximale l'écoulement est homogène. Il conviendrait de mener une étude paramétrique à R fixé en faisant varier ℓ_w et inversement. Cependant, nous pouvons déjà conclure à partir de ces résultats que l'angle δ_w est bien le paramètre venant gouverner la nature des profils pour des conditions aux limites fixées

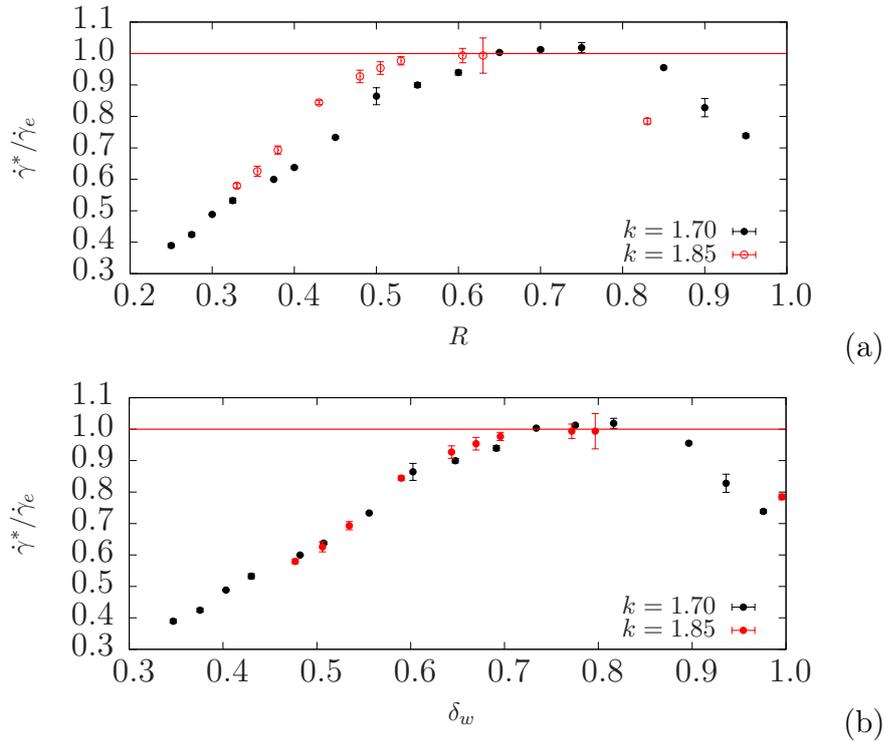


FIGURE 4.16 – Taux de déformation au centre normalisé $\dot{\gamma}^*/\dot{\gamma}_e$ pour deux valeurs différentes de k en fonction (a) du rapport R (b) de l'angle de rugosité δ_w

On peut vérifier sur la figure 4.16 que toutes les mesures se mettent à l'échelle avec cette définition de la rugosité. On trouve alors une valeur de rugosité critique $\delta_w^c \simeq 0.73$ pour laquelle tous les profils sont homogènes.

Enfin, nous avons comparé les résultats obtenus en simulation à ceux obtenus par Miller, en estimant la rugosité δ_w du dispositif expérimental à partir des caractéristiques de la courroie et du diamètre moyen des grains. Comme le montre la figure 4.17, les profils se superposent bien pour une valeur similaire de l'angle de rugosité.

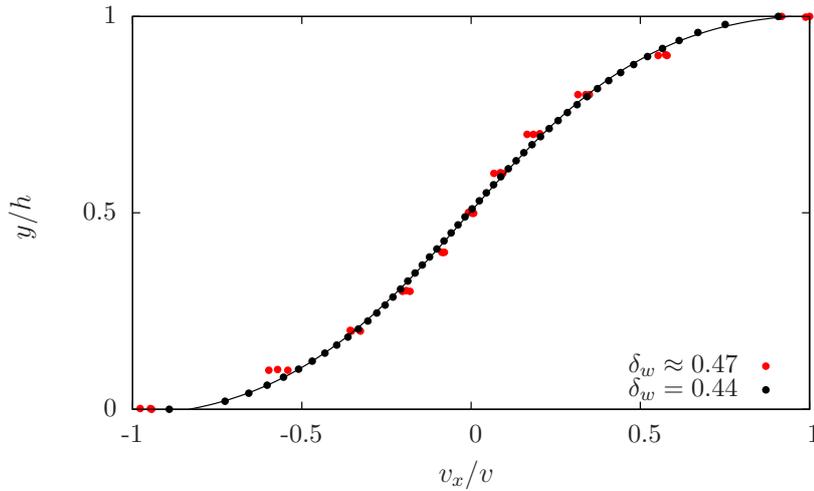


FIGURE 4.17 – Comparaison du champ de vitesse obtenu par expérimentation (rouge) et obtenu en simulation (noir) pour deux valeurs proches de la rugosité.

4.4 Conclusions préliminaires sur les conditions aux limites

Nous avons vu que le rôle de la rugosité était de moduler le taux de cisaillement local vu par l'échantillon. Le contrôle fin d'une rugosité idéalisée, grâce aux outils numériques, a permis de mieux mettre en évidence l'effet de la rugosité sur les profils de vitesse. Nous avons proposé de définir la rugosité comme un angle déterminé par les normales au contact entre une particule libre et la paroi. Cette définition permet de ramener à l'échelle l'ensemble des résultats obtenus en faisant varier la taille et l'espacement entre les aspérités. Une rugosité critique δ_w^c (ou une plage de valeurs de rugosité centrée autour d'elle) a été clairement identifiée. Elle se définit comme la rugosité pour laquelle le champ de vitesse est homogène (sauf dans le voisinage immédiat d'une paroi) avec $\dot{\gamma}^* = \dot{\gamma}_e$. Le comportement n'est cependant pas monotone : pour $\delta_w \neq \delta_w^c$ le champ est inhomogène et $\dot{\gamma}^* < \dot{\gamma}_e$. L'état d'équilibre n'est pas directement contrôlable, la géométrie de l'interface contrôlant la transmission des contraintes aux particules en écoulement. Ceci montre qu'il est difficile de distinguer les effets de taille finie (la présence d'une paroi) des effets induits par la nature même de la paroi.

L'existence d'un gradient de déformation pour les grandes épaisseurs a été mis en évidence et ce malgré le fait que la contrainte de cisaillement reste constante dans l'épaisseur. Les profils obtenus numériquement sont en accord avec les résultats expérimentaux de Miller *et al.* et ces profils non homogènes se retrouvent également en régime inertiel. Ces deux observations peuvent paraître contraires à la possibilité de formuler une loi de comportement entre les contraintes et le taux de déformation.

D'où les multiples formulations de lois non locales discutées dans la partie 1.3.3. Malgré tout, il semble physiquement naturel de considérer que l'effet des parois et de la rugosité sont encodés dans la perturbation d'une variable interne.

Il reste donc à mieux caractériser ces profils et notamment à identifier la ou les variables internes susceptibles d'être perturbées par les parois. Il faut également arriver à distinguer les contributions respectives de la rugosité et des effets de l'épaisseur de l'écoulement à l'inhomogénéité du profil de vitesse. Ces aspects, ainsi que la modélisation des inhomogénéités, feront l'objet du chapitre suivant.

*Le temps nous égare, le temps nous étroit.
Le temps nous est gare, le temps nous est train.*

Jacques Prévert

5

Rhéologie des écoulements stationnaires à variable interne

ans ce chapitre nous développerons un modèle capable de rendre compte de l'inhomogénéité des champs de déformation observée en écoulement stationnaire. Ce modèle intègre une variable interne identifiée à l'aide des simulations numériques et des champs du taux de déformation obtenus grâce à la méthode d'homogénéisation. Nous proposerons une généralisation du modèle en le rattachant au nombre inertiel et à la rhéologie $\mu(I)$.

Sommaire

5.1	Modèle des gradients de déformation	83
5.1.1	Analyse par perturbation	83
5.1.2	Couche limite et dépendance avec l'épaisseur	84
5.1.3	Identification d'une variable interne : la connectivité	85
5.1.4	Clôture du modèle	88
5.1.5	Perturbation : estimation de ξ et amplitude	89
5.1.6	Viscosité inhomogène	92

5.2	Généralisation : viscosité et nombre inertiel	93
5.2.1	Connectivité et nombre inertiel	93
5.2.2	Influence de la pression de confinement	95
5.2.3	Viscosité généralisée	97
5.3	Mécanismes et rugosité critique	98
5.4	Viscosité, connectivité et température	100
5.5	Conclusion : viscosité enrichie et loi de comportement .	103

5.1 Modèle des gradients de déformation

Nous avons vu précédemment que les inhomogénéités et les écarts observés à une rhéologie locale, où une loi unique s'applique en tout point de l'écoulement, étaient *résolues* par l'introduction de termes non locaux mais que ces derniers ne faisaient par explicitement référence aux effets de parois. Or les résultats précédents montrent clairement que l'interaction avec les parois module l'inhomogénéité du champ de taux de déformation. Nous partons donc de ce constat pour proposer un modèle capable de rendre compte des observations. Au voisinage d'une paroi, dans notre cas un objet rigide, rugueux, auquel on impose un mouvement et une force, l'écoulement est contraint par un ordre local permanent. Dans cette région, la compacité ou n'importe quelle variable interne χ (ou toute combinaison), encodée dans la géométrie de l'empilement, est perturbée par la présence de la paroi. Cette perturbation se propage sur une certaine distance caractéristique ξ avant de s'atténuer suffisamment pour être de l'ordre des fluctuations internes de l'écoulement.

5.1.1 Analyse par perturbation

Soit χ^* la valeur non perturbée de χ au centre de l'écoulement telle que

$$\chi^* = \chi(0), \quad (5.1)$$

où χ^* est une unique fonction de $\dot{\gamma}^*$. Dans cette notation il est supposé que $\chi \equiv \bar{\chi}(t)$, $\dot{\gamma} \equiv \bar{\dot{\gamma}}(t)$, ... Par définition, $\partial_t \chi^* = 0$. L'évolution de χ à travers l'écoulement peut s'écrire au premier ordre comme

$$\frac{d^2\chi}{dy^2} = \frac{1}{\xi^2}(\chi^* - \chi) \quad (5.2)$$

où ξ est la distance caractéristique de la perturbation, les effets de parois étant encodés dans la déviation $\chi^* - \chi$, la paroi empêchant χ d'atteindre sa valeur asymptotique. Le recours au terme d'ordre 2 est imposé par la symétrie du problème qui interdit tous les ordres impairs, le deuxième étant alors celui de plus bas ordre. En ce sens, la présence d'un laplacien ici n'est pas à rapprocher des laplaciens introduits dans les modèles non locaux qui viennent intégrer les seconds gradients d'une certaine quantité autour d'un point sur une longueur caractéristique interne.

En intégrant l'équation 5.2 nous obtenons pour χ la relation

$$\chi(y) = \chi^* + 2A_\chi(1 - \cosh(y/\xi)) \quad (5.3)$$

avec A_χ l'amplitude de la perturbation. L'amplitude peut être une fonction du taux de déformation et de la rugosité de la plaque. On peut voir ce terme comme un décalage de l'origine de la perturbation, qui s'évanouit à travers l'écoulement sur une distance ξ , uniquement fonction de $\dot{\gamma}^*$. La même loi rhéologique s'applique en tout point de l'écoulement donc nous pouvons écrire $\dot{\gamma}(y) = f(\mu, \chi^* - \chi(y))$. Le modèle est schématisé sur la figure 5.1.

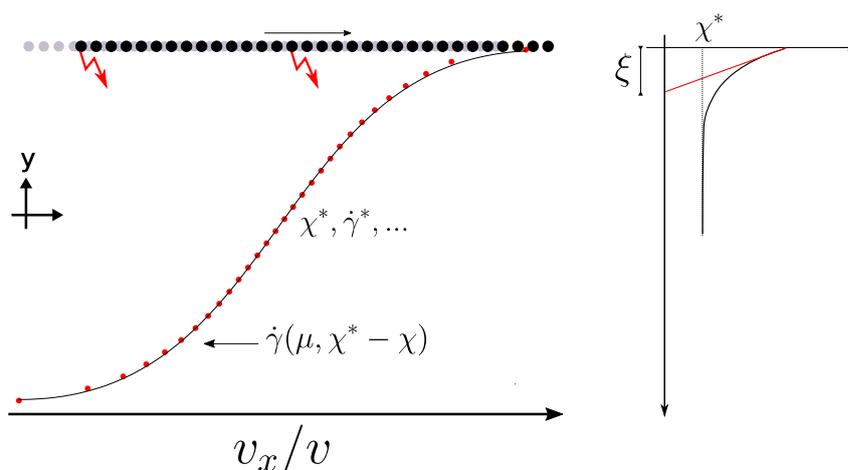


FIGURE 5.1 – Schéma représentant le profil de vitesse comme le résultat des perturbations induites par les parois : au centre l'écoulement est équilibré et stationnaire et les variables internes ont des valeurs bien établies. Une même loi de comportement s'applique près de la paroi, où une variable interne χ est perturbée.

5.1.2 Couche limite et dépendance avec l'épaisseur

Ce modèle introduit une couche limite, comme pour le cas des écoulements de fluides complexes (polymères montrant un glissement aux parois, molécules physiosorbées/organisées près des parois, forces de surface électrostatiques affectant un fluide diélectrique...). En ce sens, ce modèle peut s'appliquer à l'unique condition que le comportement à grand h soit indépendant de h , c'est à dire que ξ soit une valeur intrinsèque à l'écoulement, indépendante de son épaisseur. Cela assure qu'une rhéologie locale puisse être appliquée, et que les effets de taille finie puissent être interprétés comme une perturbation se propageant à travers l'écoulement. Nous avons réalisé des simulations avec une épaisseur h croissante (jusqu'à $150d$) pour une valeur fixée de la rugosité $\delta_w = 0.44$ et un nombre inertiel nominal fixe, en réajustant la vitesse de la plaque après le transitoire. Nous avons conservé une valeur de rugosité pour laquelle le profil de vitesse présentait une courbure caractéristique. Les profils de vitesses sont montrés sur la figure 5.11. On constate que l'inhomogénéité reste bien localisée au niveau des parois et que le taux de déformation à l'équilibre $\dot{\gamma}^*$ devient indépendant de h pour une épaisseur approximativement égale à $120d$. Cela montre que la région au centre n'est plus affectée par les perturbations des parois.

5.1.3 Identification d'une variable interne : la connectivité

Il faut à présent identifier une variable interne χ pertinente (compacité, texture...), évoluant selon l'équation 5.2, pour soutenir le modèle. Avec des résolutions spatiale et temporelle identiques à celles utilisées pour le champ de vitesse, nous allons étudier les profils de compacité, de connectivité et d'anisotropie sur une même

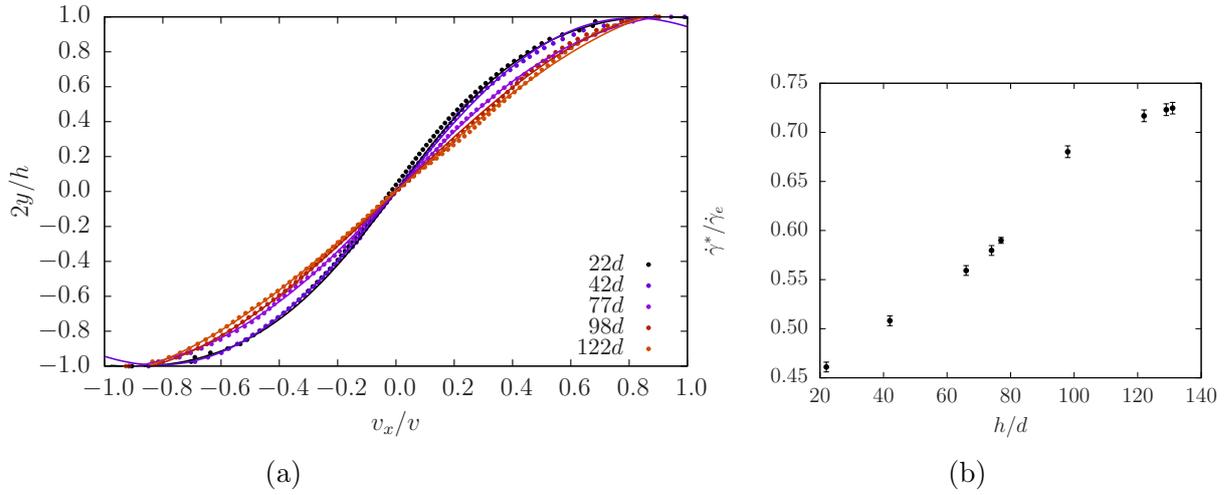


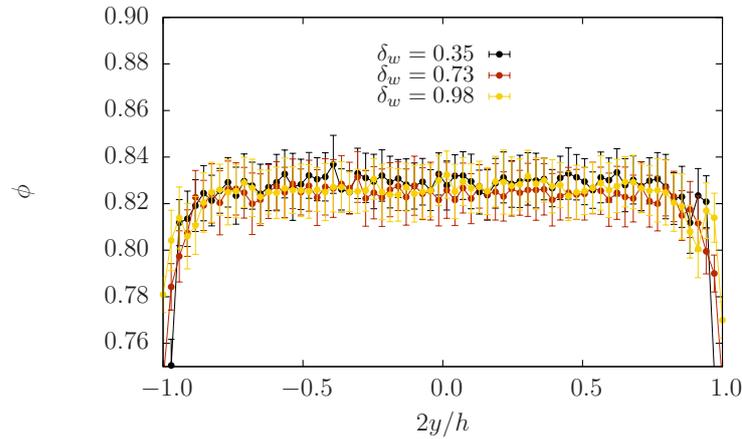
FIGURE 5.2 – (a) Profils de vitesse moyens en écoulement stationnaire pour différentes valeurs de l'épaisseur h de l'écoulement. Les courbes pleines sont les fits avec l'équation (5.6) (b) Taux de déformation au centre normalisé en fonction de l'épaisseur

déformation cumulée. Ces trois variables caractérisent à différents ordres la texture de l'écoulement. Comme l'inhomogénéité du champ est bien explorée en faisant varier la rugosité nous commencerons par étudier ces profils, même si la gamme de nombre inertiel I^* est plus restreinte. Nous regardons également ces profils pour les simulations où nous avons directement modifié le taux de cisaillement appliqué $\dot{\gamma}_e$.

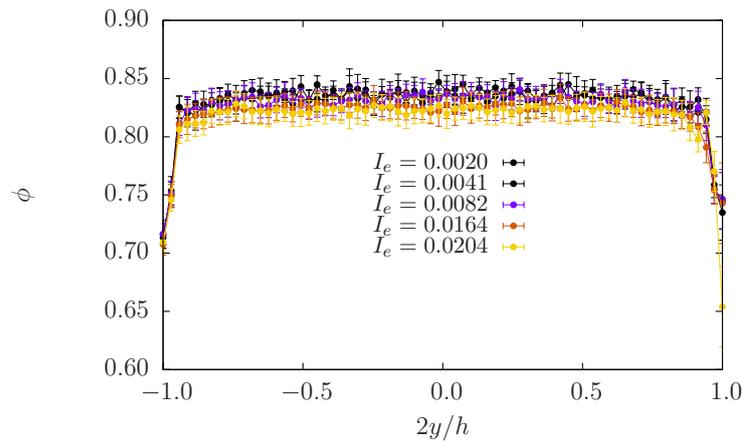
Compacité

La figure 5.3 montre le profil de compacité pour trois valeurs de la rugosité : $\delta_w < \delta_w^c$, $\delta_w = \delta_w^c$ et $\delta_w > \delta_w^c$, c'est à dire pour trois valeurs de $\dot{\gamma}^*$ différentes. On remarque qu'il existe un gradient de compacité aux abords de la paroi, la compacité est plus faible à son voisinage. Mais du fait des fortes fluctuations temporelles, il est difficile d'en extraire une distance ξ caractéristique fonction de $\dot{\gamma}^*$. On vérifie que la compacité mesurée au centre ϕ^* diminue avec le nombre inertiel au centre I^* (pour $\delta_w = \delta_w^c$). La courbure très prononcée du profil montre que la compacité est une variable interne qui retourne à sa valeur d'équilibre sur une trop faible distance pour pouvoir la mettre en relation avec l'inhomogénéité du profil de vitesse. D'autre part, le système étant à volume libre, le milieu peut se dilater et se contracter, il peut donc accommoder la déformation. Il serait intéressant d'étudier ces profils dans le cas d'un cisaillement à volume fixe. La figure 5.3 montre les profils de compacité lorsque cette fois on augmente le taux de déformation appliqué $\dot{\gamma}_e$. En accord avec les résultats obtenus en écoulement [23], la compacité moyenne diminue bien avec I_e . Bien qu'on explore un ensemble de valeurs du nombre inertiel nominal plus large, la forme du profil évolue peu. On remarque que pour le plus grand nombre

inertiel exploré le profil présente une courbure plus faible, mais sur une distance de quelques diamètres seulement. Ces profils confirment nos remarques précédentes, et la compacité, dans cette configuration d'écoulement, ne peut pas être rattachée à l'inhomogénéité du champ de vitesse observé.



(a)



(b)

FIGURE 5.3 – (a) Profils de compacité pour trois rugosités différentes. La courbe rouge est la courbe pour laquelle $\delta_w = \delta_w^c$, pour laquelle le taux de déformation au centre $\dot{\gamma}^*$ est maximal et égal au taux de déformation imposé $\dot{\gamma}_e$. (b) Profils de compacité pour un taux de déformation appliqué $\dot{\gamma}_e$ croissant ($\delta_w = 0.44$)

Connectivité

La figure 5.4 montre les profils de connectivité (ou coordinance) pour les trois mêmes écoulements que précédemment, pour lesquels la rugosité varie.

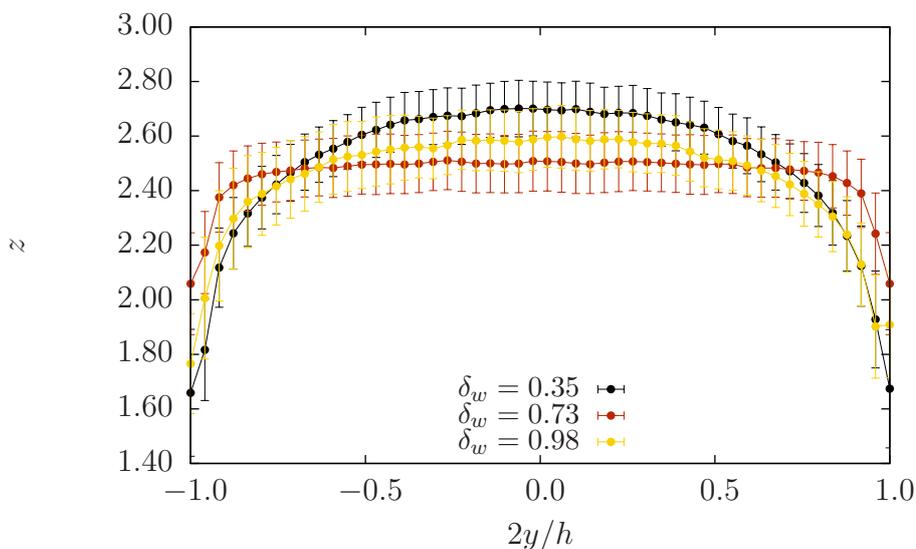


FIGURE 5.4 – Profils de connectivité pour trois rugosités différentes. La courbe rouge est la courbe pour laquelle $\delta_w = \delta_w^c$, pour laquelle le taux de déformation au centre $\dot{\gamma}^*$ est maximal et égal au taux de déformation imposé $\dot{\gamma}_e$.

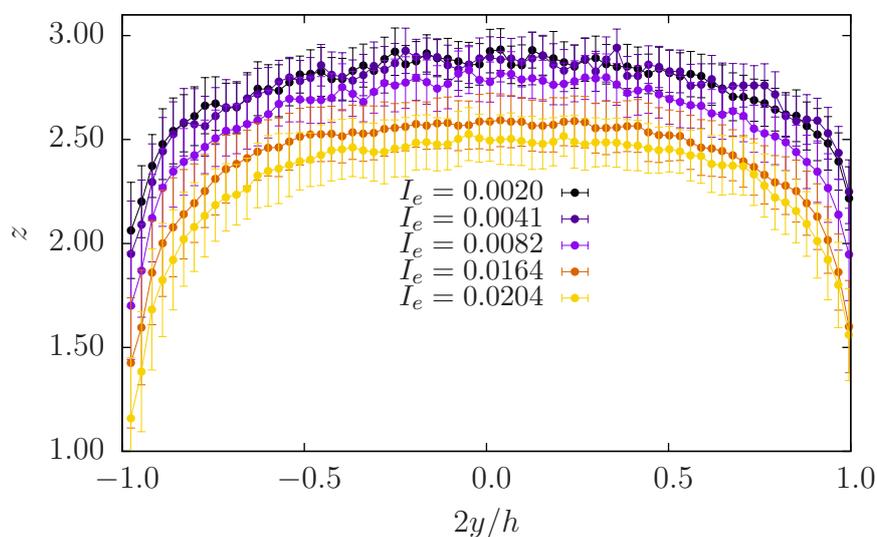


FIGURE 5.5 – Profils de connectivité pour un taux de déformation appliqué $\dot{\gamma}_e$ croissant ($\delta_w = 0.44$)

On observe que contrairement au cas de la compacité nous avons ici un gradient bien établi à partir des parois. Ce gradient est par ailleurs significatif malgré les fluctuations. L'inhomogénéité du profil de connectivité reflète bien l'inhomogénéité du champ de déformation. Le profil avec la rugosité critique, pour laquelle le taux

de déformation est homogène, est représenté en rouge. La connectivité est bien homogène sauf à proximité de la paroi comme dans le cas de la compacité. La connectivité moyenne au centre z^* , équilibrée, est également fonction de $\dot{\gamma}^*$. Lorsque la rugosité de la plaque dépasse la valeur critique ($\delta_w > \delta_w^c$), le profil redevient inhomogène, à l'instar du champ de vitesse. Lorsque l'on augmente directement le taux de déformation appliqué $\dot{\gamma}_e$ on obtient les profils représentés sur la figure 5.5. Les résultats confirment que la distance caractéristique ξ augmente avec le taux de déformation appliqué. Pour l'ensemble de ces raisons, la connectivité apparaît comme un paramètre pertinent pour le modèle proposé.

Anisotropie

Nous pouvons à présent étudier l'évolution de l'anisotropie d'orientation des contacts à travers l'écoulement. La figure 5.6 montre les profils d'anisotropie pour différents taux de déformation appliqués. Tout d'abord on observe bien que l'anisotropie augmente avec le nombre inertiel appliqué, et donc le frottement interne, comme le montre la décomposition harmonique du tenseur de contrainte. Tous les profils sont marqués par une forte rupture au niveau des parois, comme la compacité. A faible nombre inertiel le profil moyen ne présente aucune courbure, aucune tendance caractéristique. Le profil montre tout de même qu'il existe une légère courbure à plus grand nombre inertiel. L'anisotropie est un descripteur d'ordre supérieur, qui dépend à la fois de la connectivité mais également de l'orientation des contacts. C'est un paramètre qui fluctue localement beaucoup au cours de la déformation, même à faible nombre inertiel. La figure 5.7 montre les profils d'anisotropie lorsque l'on

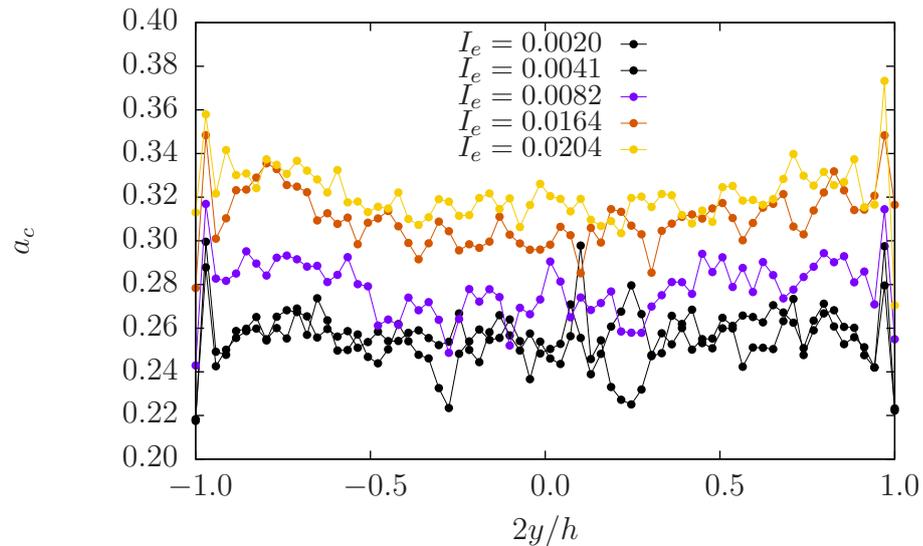


FIGURE 5.6 – Profils d'anisotropie a_c pour un taux de déformation appliqué $\dot{\gamma}_e$ croissant ($\delta_w = 0.44$).

change la rugosité à un nombre inertiel voisin de 0.02. On observe une certaine courbure lorsque la rugosité est inférieure (ou supérieure) à la rugosité critique et que le champ de déformation est inhomogène. Pour une rugosité égale à la rugosité critique le profil d'anisotropie est bien homogène. Cependant, étant donné l'amplitude des fluctuations il est difficile à partir de ces résultats de l'intégrer dans le modèle. Cette ambiguïté montrée par les résultats peut être mieux questionnée si l'on effectue des mesures de l'anisotropie à des résolutions moins fines. En effet, la grande fragilité de ce descripteur (ses fortes fluctuations spatio-temporelles) nécessite de considérer par exemple une autre échelle de temps pour en faire la statistique, contrairement à la connectivité qui est de plus bas ordre. Au vu de ces différents résultats, nous

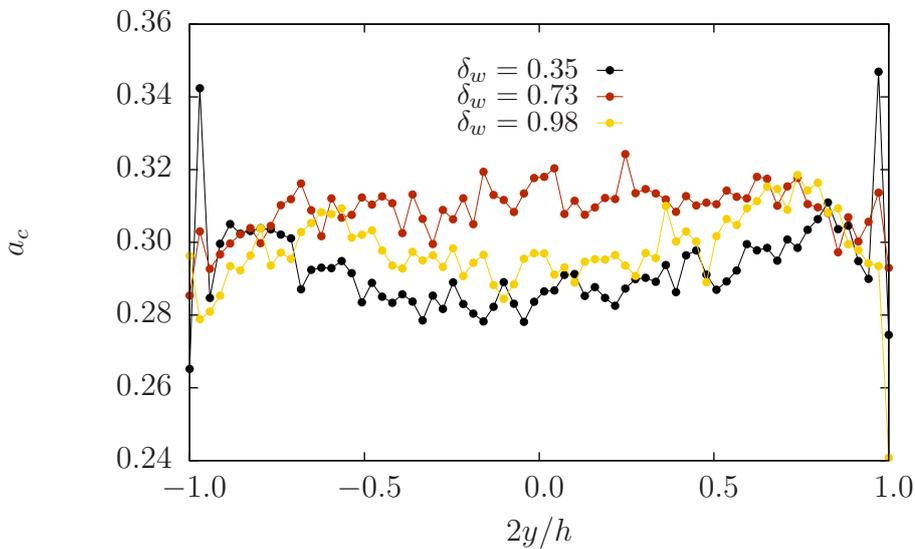


FIGURE 5.7 – Profils d’anisotropie pour trois rugosités différentes. La courbe rouge est la courbe pour laquelle $\delta_w = \delta_w^c$. Les barres d’erreur ne sont pas affichées par souci de clarté.

intégrerons, au premier ordre, la connectivité à notre modèle de perturbation. Cela ne signifie pas que la connectivité soit responsable, de manière exclusive, de l’effet de paroi observé, mais c’est sur ce paramètre que l’effet est le plus marqué. L’anisotropie mesurée ici est un candidat moins propice à une paramétrisation des effets de bord.

5.1.4 Clôture du modèle

Nous avons mis en évidence que la connectivité pouvait prendre le rôle de la variable interne perturbée par les parois au premier ordre, soit $z \equiv \chi$. Par ailleurs, il est intéressant de noter que Prochnow *et al.* [60] ont trouvé des profils de z inhomogènes en écoulement sur plan incliné. Ils ont trouvé que le profil de connectivité devenait plus homogène lorsque l’inclinaison et donc le nombre inertiel augmentait,

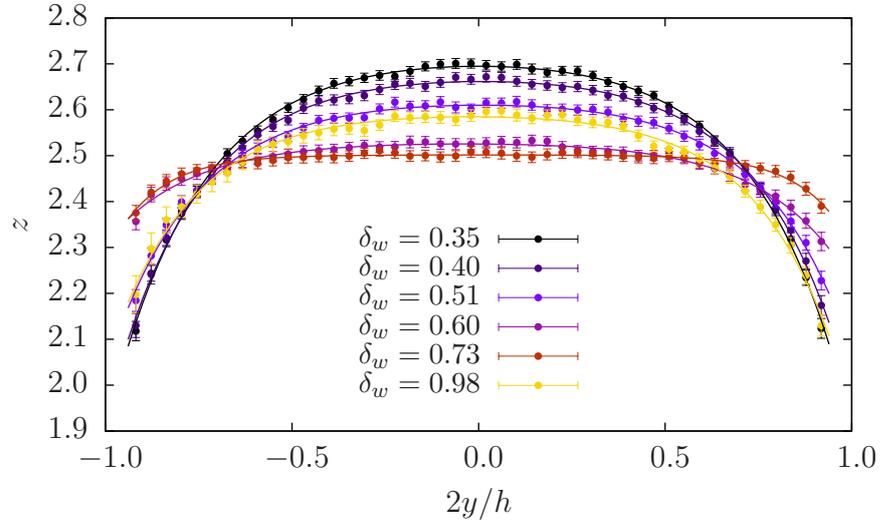


FIGURE 5.8 – Profils de connectivité des écoulements stationnaires pour l’intervalle des rugosités explorées. Les lignes pleines représentent les fits avec l’équation 5.3 issue du modèle de perturbation.

en bon accord avec nos résultats. La figure 5.8 montre que les profils de connectivité sont bien décrits à l’aide de l’équation (5.3), définie par la relaxation de la variable interne vers sa valeur d’équilibre au sein de l’écoulement.

A présent, il s’agit d’étudier la relation entre le taux de déformation stationnaire en tout point de l’écoulement et la connectivité en ce même point. Pour cela, nous utilisons l’homogénéisation. Nous pouvons définir, grâce à la lecture continue, un champ de déformation en tout point de l’écoulement. En chaque point de ce champ nous pouvons y calculer une connectivité moyenne. Enfin, nous prenons une moyenne dans la direction de l’écoulement pour obtenir des profils comparables. La figure 5.9a montre les données obtenues pour les écoulements où l’on fait varier la rugosité de la plaque et donc l’inhomogénéité du champ. On peut normaliser les données en retirant la valeur homogène du champ de déformation et la valeur critique de la rugosité. La figure 5.9b montre la composante inhomogène du profil du taux de déformation ($\dot{\gamma} - \dot{\gamma}^*$) en fonction de la composante inhomogène du profil de connectivité ($z^* - z$). Sur le graphique sont superposés trois profils où la rugosité varie (les profils les plus inhomogènes) et deux profils où le taux de déformation appliqué est contrôlé. On voit qu’il existe une simple relation linéaire entre les deux.

Nous pouvons donc développer un premier ordre l’expression de $\dot{\gamma}$ autour du point stationnaire

$$\dot{\gamma}(y) = \dot{\gamma}^* + \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial z}(z^* - z(y)) \quad (5.4)$$

où z^* est la valeur non perturbée au centre, fonction de $\dot{\gamma}^*$ et $(z^* - z(y)) > 0$. On peut alors définir un paramètre $\alpha = \partial \dot{\gamma} / \partial z$. Nous faisons ici une approche en

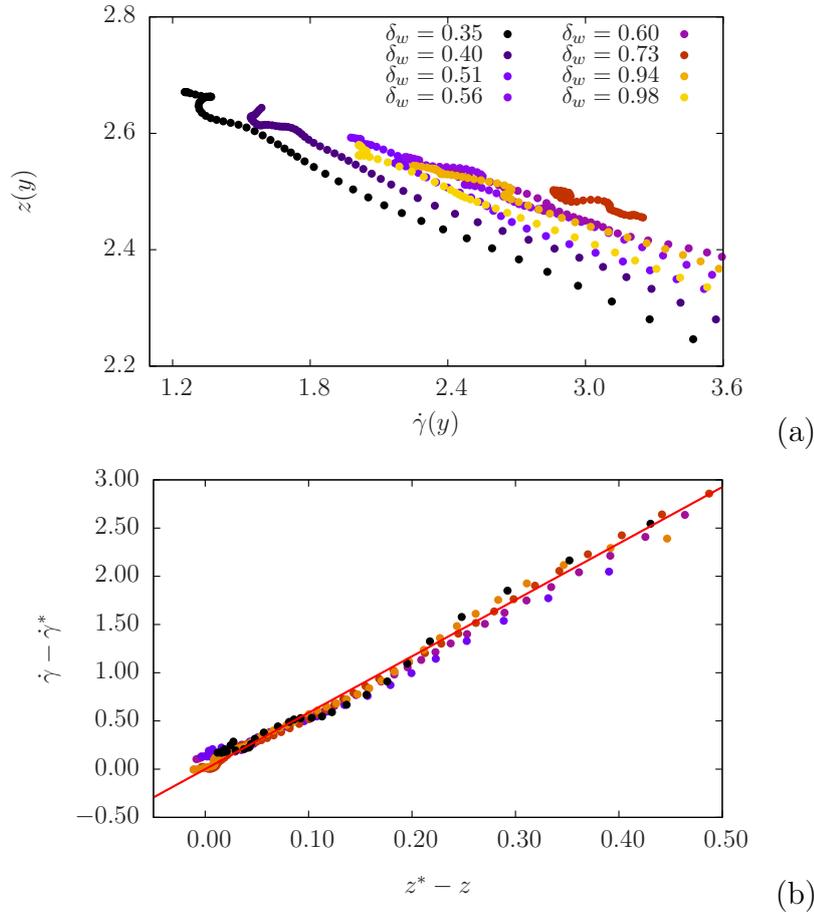


FIGURE 5.9 – (a) Relation entre la connectivité et le taux de déformation en chaque point du profil stationnaire pour des écoulements à différentes rugosités de plaque (b) Relation entre l'écart du profil du taux de déformation au taux homogène et l'écart à la connectivité mesurée au centre z^* , pour les écoulements $\delta_w = 0.35, 0.4, 0.51$ et $\dot{\gamma}_e = 0.4, 0.8$.

petite perturbation autour de l'axe central de l'écoulement, en négligeant les dérivées d'ordre supérieur. Rien ne peut garantir que cette approche soit suffisante dans tout l'écoulement, notamment au voisinage immédiat des parois où la perturbation est maximale. Nous pouvons normaliser l'équation par le taux de déformation mesuré au centre. L'équation (5.4) devient simplement

$$\frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}^*}(z) = 1 + \frac{\alpha}{\dot{\gamma}^*}(z^* - z(y)) \quad (5.5)$$

Sous cette forme on comprend mieux les résultats présentés en figure 5.5 où le profil de connectivité demeure inhomogène alors que le profil de déformation est homogène à plus grand taux de déformation imposé. Etant donné que $\dot{\gamma}^*$ est une fonction croissante de $\dot{\gamma}_e$, le terme correcteur devient de plus en plus négligeable. Cela signifie qu'à plus grand nombre inertiel l'amplitude effective de la perturbation

diminue.

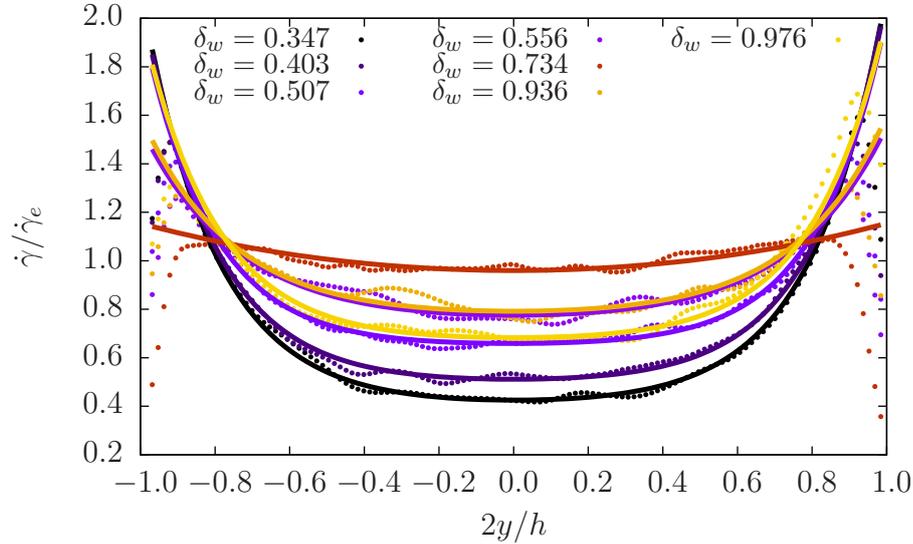


FIGURE 5.10 – Profils stationnaires du taux de déformation pour différentes valeurs de la rugosité. Ces profils sont obtenus à l’aide des champs de vitesse homogénéisés. Les lignes pleines représentent les fits à l’aide de l’expression (5.4)

La relation 5.5 donne directement le profil du taux de déformation, simplement proportionnel au profil de connectivité. La figure 5.10 montre que le taux de déformation est bien décrit par l’équation 5.5. On remarque également, conformément à l’hypothèse de petite perturbation, que l’expression n’est pas capable de saisir les ruptures au voisinage immédiat de la paroi.

En intégrant l’équation (5.4) nous obtenons l’expression des profils de vitesse dans la direction horizontale de l’écoulement

$$v_x(y) = (\dot{\gamma}^* - 2\alpha A_\chi)y - 2\alpha A_\chi \xi \sinh(y/\xi) \quad (5.6)$$

L’équation (5.6) signifie que le champ de vitesse est la superposition d’un champ homogène, représenté par le premier terme et d’une contribution résultante de la perturbation induite par les parois. L’expression (5.6) vérifie bien les conditions $v_x(0) = 0$ et $\partial v_x/\partial y(0) = \dot{\gamma}^*$. Le modèle montre qu’ici l’épaisseur h n’intervient pas explicitement dans la détermination du profil de vitesse (ou du taux de déformation). C’est bien le rapport y/ξ qui vient contrôler l’inhomogénéité de l’écoulement. Lorsque ξ est de l’ordre de h alors les effets de paroi se manifestent comme des effets de taille finie.

5.1.5 Perturbation : estimation de ξ et amplitude

Nous avons montré précédemment que le taux de déformation mesuré au centre devenait indépendant de h à grand h . La perturbation induite par les parois s’étend

sur une distance finie dans l'écoulement, que l'on peut caractériser par ξ . Cette distance ne saurait dépendre de la rugosité de la paroi car elle traduit le retour à l'équilibre, dans l'écoulement, d'une variable interne vers sa valeur critique. Elle dépend donc uniquement du nombre inertiel. On peut l'estimer directement sur les profils de la connectivité les plus courbés en fonction de $\dot{\gamma}^*$. La figure 5.11a montre ξ en fonction du nombre inertiel I^* . On peut voir que cette distance évolue très peu et est de l'ordre de quelques diamètres. De nombreuses études ont montré que

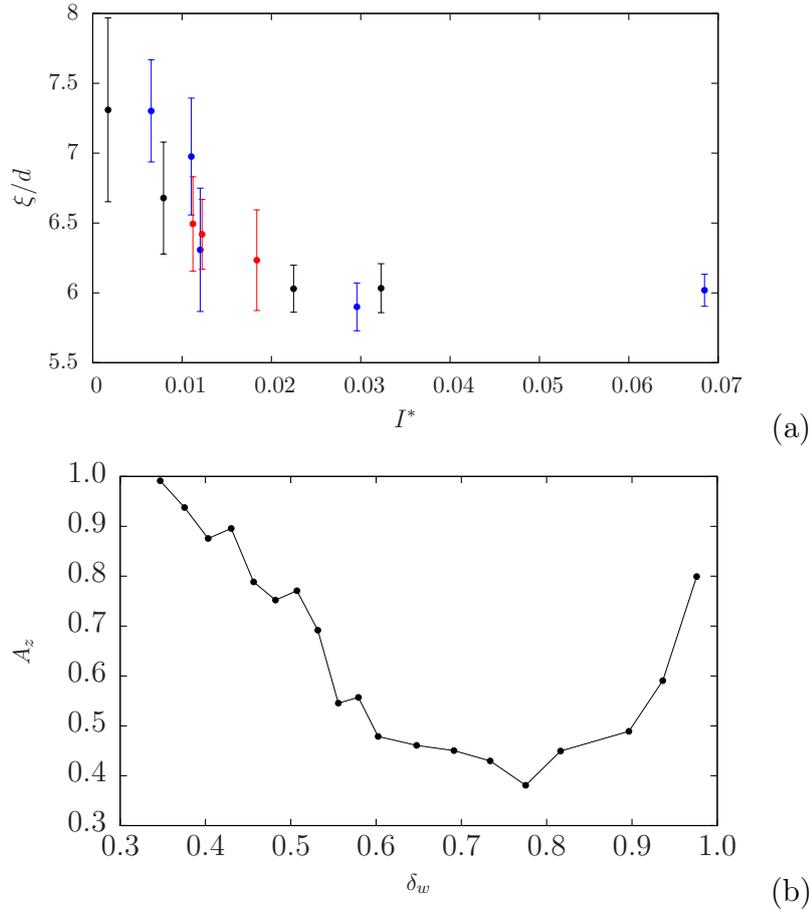


FIGURE 5.11 – (a) ξ en fonction de I^* pour (rouge) différentes valeur de rugosité δ_w (bleu) différentes valeurs de pression Σ (noir) différentes valeurs du taux de déformation nominal $\dot{\gamma}_e$ (b) Amplitude en fonction de la rugosité

l'influence des parois s'étendait sur l'ordre de quelques diamètres, mais le fait que la perturbation soit exponentielle montre que ce résultat reste valide au delà. Comment expliquer alors que le taux de déformation s'homogénéise à grand nombre inertiel alors que la distance caractéristique n'évolue peu? Par le fait que la température et le mouvement désordonné des grains ne permettent pas de transporter cette perturbation, comme nous l'avons évoqué au début de ce chapitre et comme le montre la relation l'équation 5.5. En effet, le terme correctif intervient comme un incrément au taux de déformation homogène $\dot{\gamma}^*$ sous la forme $\alpha(z^* - z(y))/\dot{\gamma}^*$. Or la température

est proportionnelle à la racine du taux de déformation [17].

Quant à la rugosité, son rôle est de moduler l'amplitude. Une façon de l'estimer est de regarder l'écart entre la valeur de la connectivité au centre et au voisinage immédiat de la paroi. La figure 5.11b montre cette amplitude en fonction de la rugosité, à nombre inertiel nominal donné. On voit que l'amplitude diminue lorsque la rugosité augmente et devient minimale dans le domaine de la rugosité critique. En ce sens la perturbation n'est pas mesurable car elle est de trop faible amplitude. Pour s'en convaincre on peut réaliser des simulations avec une rugosité de plaque critique, diminuer le nombre inertiel nominal et observer les champs de vitesse. Les profils de vitesse, présentés sur la figure 5.12 restent homogènes. L'inhomogénéité du champ de déformation résulte donc de deux effets 1) une perturbation sur une distance caractéristique ξ (faiblement) dépendante de I 2) une amplitude qui dépend au moins de la rugosité et dont la partie effective est inversement proportionnelle à I .

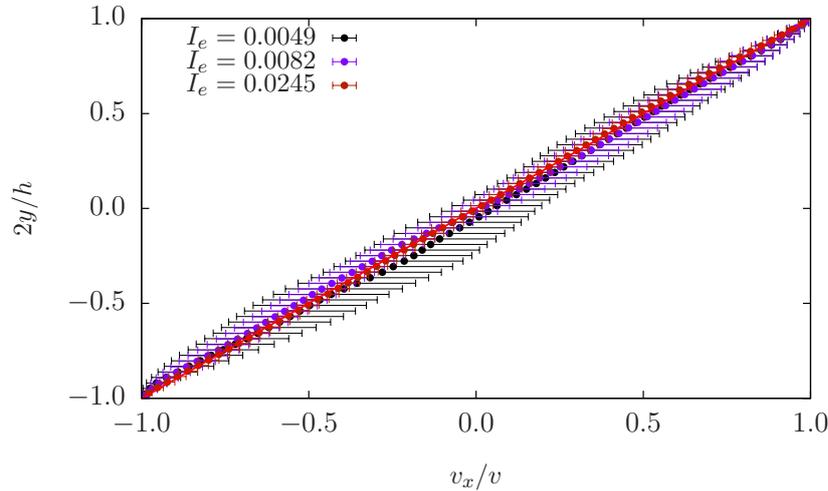


FIGURE 5.12 – Profils de vitesse à rugosité de plaque égale à la rugosité critique δ_w^c pour différents nombres inertiels nominaux I_e .

5.1.6 Viscosité inhomogène

Revenons à présent aux données initiales : nous avons un profil de contrainte cisailante τ homogène contrairement au taux de déformation. S'il existe une relation unique entre le taux de déformation et la contrainte alors la relation

$$\tau = \tau_0 + \eta \dot{\gamma} \quad (5.7)$$

doit être vérifiée en chaque point de l'écoulement. Le paramètre η est la viscosité de l'écoulement, et τ_0 la contrainte cisailante seuil. Comme cette contrainte seuil ne

dépend que du matériau nous pouvons écrire $\tau' \equiv \tau - \tau_0$ pour des simplifications d'écriture. En chaque point $\tau' = \tau'^*$, et donc se trouve vérifiée l'expression

$$\eta\dot{\gamma} = \eta^*\dot{\gamma}^* \quad (5.8)$$

Cette équation signifie que la viscosité n'est pas homogène à travers l'écoulement, et qu'elle dépend d'un paramètre interne lui même inhomogène, la connectivité. En utilisant l'expression du taux de déformation en tout point (5.5) nous trouvons l'expression suivante pour la viscosité

$$\eta(z^* - z) = \frac{\eta^*}{1 + \alpha(z^* - z)/\dot{\gamma}^*} \quad (5.9)$$

où $\eta^* = \tau/\dot{\gamma}^*$ est la viscosité stationnaire mesurée au centre. Cette expression de la viscosité permet de rétablir la relation locale entre la contrainte et la déformation en prenant en compte l'inhomogénéité de la connectivité à travers l'écoulement. Elle est fonction de z^* , une valeur de la connectivité uniquement fonction de $\dot{\gamma}^*$, la connectivité *critique*. Cette expression n'est toutefois pas complètement satisfaisante car elle fait intervenir α , un coefficient de proportionnalité qu'il reste à identifier, et la connectivité critique dont la relation avec le taux de déformation doit être explicitée.

5.2 Généralisation : viscosité et nombre inertiel

5.2.1 Connectivité et nombre inertiel

L'évolution de la connectivité z^* avec le nombre inertiel a été étudiée, comme l'a été la compacité ou l'anisotropie. La figure 5.13 montre cette relation sur deux ordres de grandeur. Les résultats sont issus de simulations en cisaillement plan homogène, à l'aide de la dynamique moléculaire, pour une raideur au contact fixe, et pour différentes valeurs du frottement interparticulaire μ_s et du coefficient de restitution e . On peut voir que la connectivité dépend de la géométrie de l'empilement, à travers la compacité (la compacité lorsque I augmente), mais également des caractéristiques mécaniques des particules à travers e et μ_s . da Cruz et *al.* ont montré que la compacité ne dépendait pas de e et de μ_s dans le régime dense mais qu'elle dépendait fortement de l'élasticité des grains à travers k . Étant donné que notre modélisation des grains n'incorpore aucun comportement élastique et que μ_s est constant dans toutes nos simulations, nous nous focaliserons sur l'effet de e (et donc le graphe de droite). D'après les résultats, les auteurs ont proposé une relation phénoménologique, comme pour l'évolution de la compacité du type

$$z^*(I^*) = z_0 - \alpha_z(I^*)^\beta \quad (5.10)$$

où β est à peu près constant et varie entre 0.48 et 0.5. La figure 5.13-b montre que z_0 et α_z dépendent de e , z_0 augmente lorsque e diminue du fait de l'augmentation du

temps de collision entre particules. Dans notre cas, nous nous rapprochons davantage de la courbe $e = 0.1, \mu_s = 0.4$, nos paramètres étant respectivement égaux à 0 et 0.29. Nous pouvons donc représenter nos résultats sur cette même courbe, présentée en figure 5.15. On remarque que les valeurs que nous trouvons sont légèrement supérieures à faible nombre inertiel étant donné que les chocs sont parfaitement inélastiques, même si le frottement est légèrement inférieur. Les données de daCruz et *al.* couvrent un large domaine du nombre inertiel, alors que nous n'avons exploré que le régime dense au cours de cette thèse. Nous ne pouvons donc pas proposer une relation non linéaire comme l'expression 5.10. Etant donné la faible courbure sur le domaine considéré nous pouvons, au premier ordre, approcher la relation par une simple relation linéaire du type

$$z^*(I^*) \approx z_0 - \alpha_z I^* \quad (5.11)$$

avec $z_0 = 2.87$ et $\alpha_z = 17$. Cela nous permet d'avoir une bonne estimation de z_0 . Nous trouvons donc, en accord avec les simulations en dynamique moléculaire, une valeur de z_0 légèrement supérieure en raison des collisions parfaitement inélastiques.

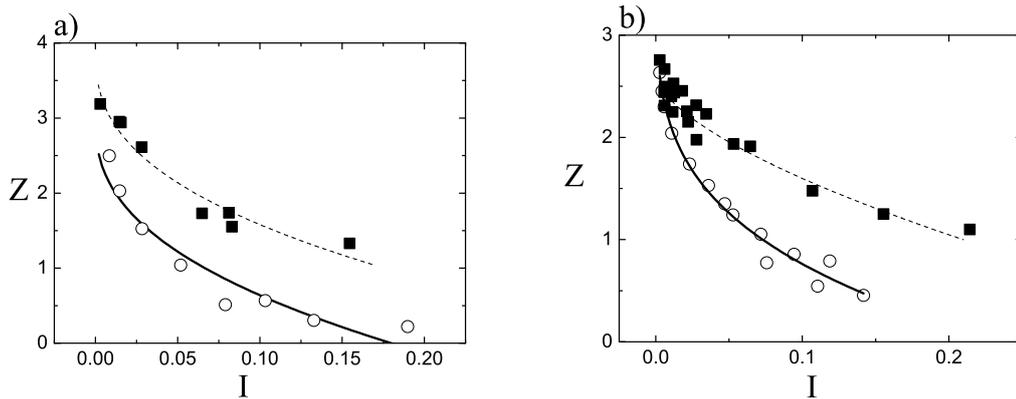


FIGURE 5.13 – Evolution de la connectivité z avec le nombre inertiel I ($k = 10^4$) : carrés noirs $e = 0.1$, point blancs $e = 0.9$. a) Frottement interparticulaire $\mu_s = 0$ b) Frottement interparticulaire $\mu_s = 0.4$. Les courbes sont ajustées par les relations $z = 2.84 - 3.8I^{0.48}$ (trait pointillé) et $z = 2.6 - 5.48I^{0.5}$ (trait plein) (d'après [17])

Il est important de noter que z_0 représente la connectivité critique lorsque I tend vers zéro. Pour cette raison il est difficile d'estimer z_0 avec une grande précision en écartant l'influence de la préparation de l'échantillon initial. Il faut réaliser des simulations quasistatiques sur de grandes déformations et traiter le cas des intermittences. Pour se donner une idée de la pertinence de l'évaluation de z_0 nous avons tracé sur la figure l'évolution de z^* pour un très faible nombre inertiel. On remarque que la valeur trouvée est en bon accord avec la tendance observée.

Ces résultats montrent qu'il existe bien une relation déterministe entre z^* et z_0 et le nombre inertiel. Cette relation est également une fonction des propriétés

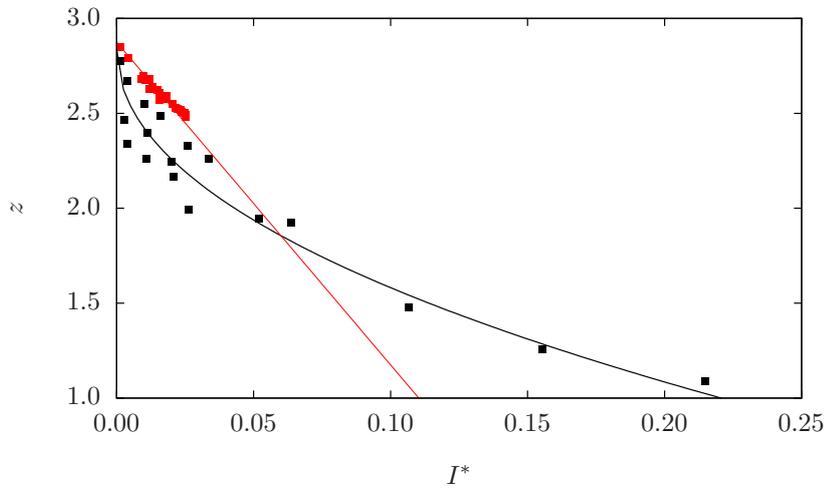


FIGURE 5.14 – Evolution de la connectivité z avec le nombre inertiel I (d’après [17]) pour $e = 0.1$ et $\mu_s = 0.4$ en dynamique moléculaire (carrés noirs) en dynamique des contacts pour $e = 0$ et $\mu_s = 0.3$ (rouge) Le trait plein rouge représente un ajustement par une relation linéaire au voisinage de $I = 0.02$.

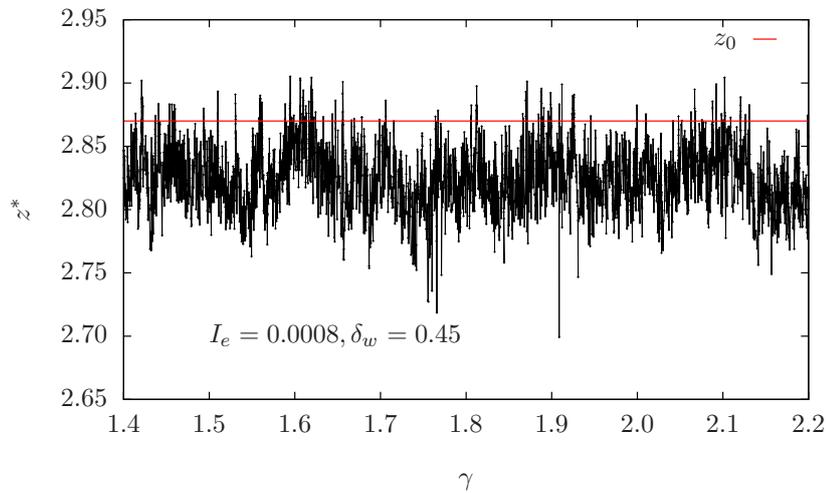


FIGURE 5.15 – Evolution de la connectivité au centre d’un écoulement quasistatique comparée à la valeur z_0 trouvée précédemment.

mécaniques des particules, et donc du modèle utilisé pour décrire leurs interactions : $z_0 = f(e, \mu_s)$ et $\alpha_z = f(e, \mu_s)$. Mais α_z est bien indépendant de I et de z , c’est une propriété mécanique du matériau lui même. Il est nécessaire de mieux la caractériser en faisant des études systématiques pour différentes valeurs de e et de μ_s dans le cas de l’utilisation de la dynamique des contacts, et également en couvrant une large gamme de valeurs du nombre inertiel, ce qui est au delà du cadre de ce travail.

En conclusion, la relation que nous avons donné pour la viscosité est une fonction de z^* , qui est elle même une valeur dépendante du nombre inertiel. Il est donc possible de généraliser cette expression au nombre inertiel. Pour cela, il nous reste à considérer l'influence de la pression de confinement, les autres paramètres étant fixes ou ayant déjà été explorés.

5.2.2 Influence de la pression de confinement

Jusqu'ici nous avons seulement considéré des écoulements à pression de confinement Σ donnée et n'avons raisonné qu'en termes de taux de déformation. Ainsi nous avons exploré une gamme du nombre inertiel en modifiant seulement ce dernier. Nous allons à présent maintenir fixe la rugosité de la plaque et le taux de déformation appliqué. Le nombre inertiel I sera exploré en faisant varier Σ afin de s'assurer que le nombre inertiel est le bon paramètre de contrôle. Nous avons fait varier Σ entre 3500 et 90000Pa, à un taux de déformation égal à $3s^{-1}$. La rugosité est fixée à $\delta_w = 0.44$. Ainsi le nombre inertiel nominal I_e est exploré entre 0.007 et 0.03. Tout d'abord la figure 5.16 montre les profils de vitesse : en accord avec les résultats précédents, lorsque le nombre inertiel augmente (lorsque Σ diminue) le profil s'homogénéise.

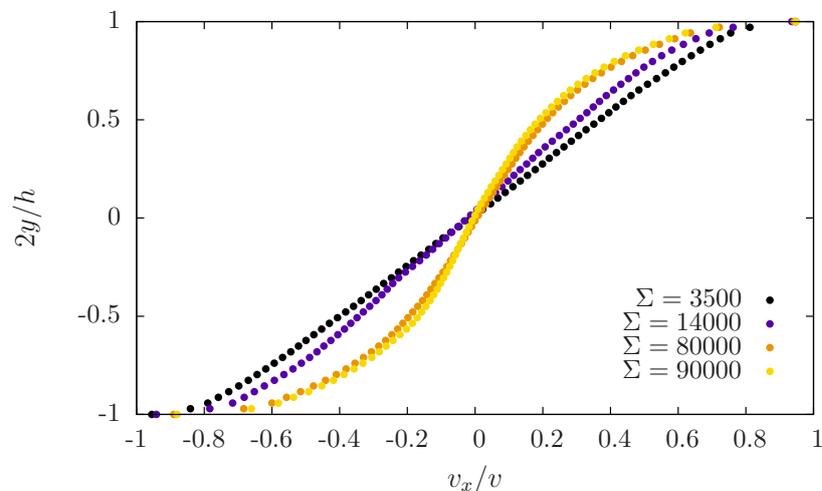


FIGURE 5.16 – Profils de vitesse pour différentes valeurs de pression de confinement Σ imposées (en Pa). Le taux de déformation appliqué et la rugosité des plaques sont fixés.

La figure 5.17 montre l'évolution des profils de la connectivité avec Σ . On observe, comme précédemment, une inhomogénéité caractéristique. La connectivité critique z^* diminue avec I^* .

Nous pouvons réitérer pour l'ensemble de ces simulations la démarche adoptée précédemment : déterminer les champs de déformation et de connectivité à résolution

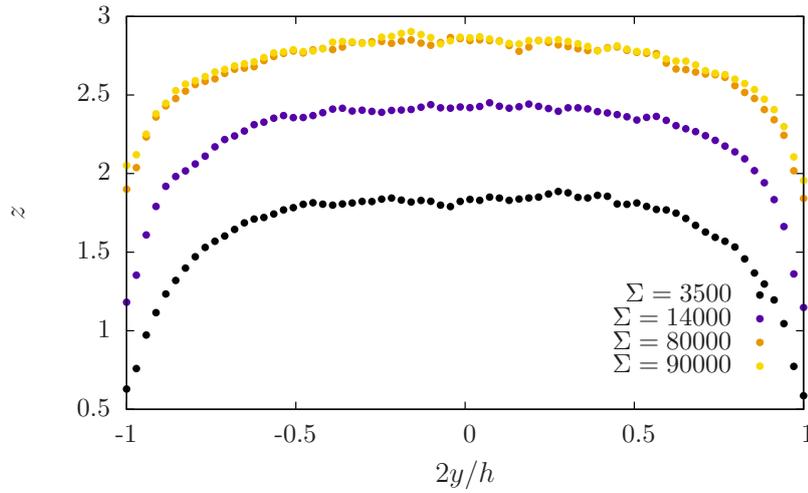


FIGURE 5.17 – Profils de connectivité pour différentes valeurs de pression de confinement Σ imposées. Le taux de déformation appliqué et la rugosité des plaques sont fixés.

spatiale donnée (à l'aide de la méthode d'homogénéisation) et moyenner ces champs dans la direction de l'écoulement pour trouver des profils stationnaires. Enfin nous pouvons tracer la relation entre $\dot{\gamma}^* - \dot{\gamma}$ et $z^* - z$ pour vérifier si nous obtenons bien la relation attendue, décrite par l'équation 5.4. Les résultats sont représentés sur la figure 5.18. On remarque que le coefficient de proportionnalité α évolue avec Σ .

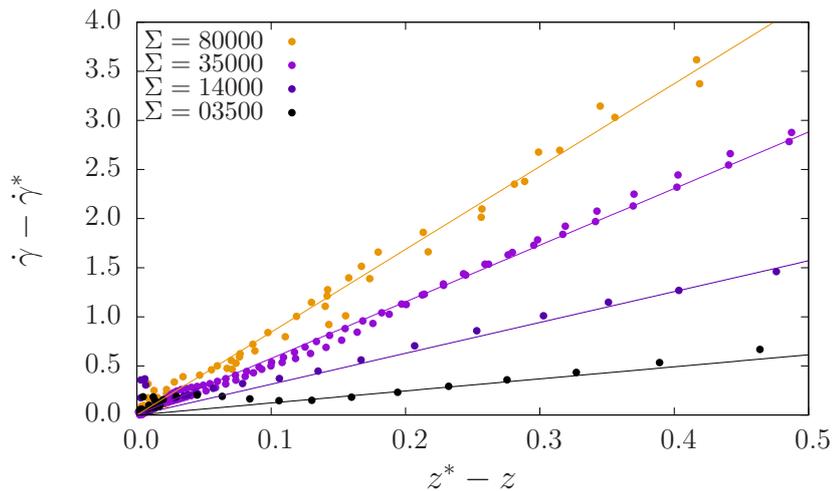
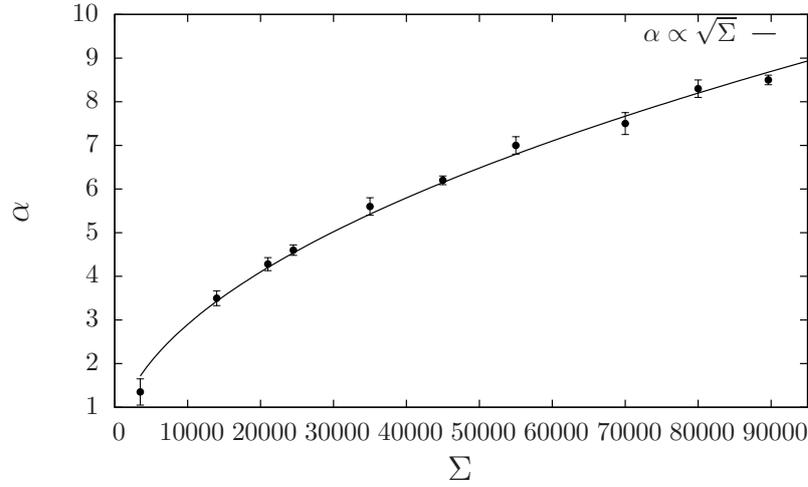


FIGURE 5.18 – Relation entre l'écart du profil du taux de déformation au taux homogène et l'écart à la connectivité mesurée au centre z^* pour différentes valeurs de pression de confinement imposées.

FIGURE 5.19 – Evolution du coefficient α avec la contrainte de confinement Σ

La figure 5.19 montre que ce coefficient évolue exactement comme la racine de la pression de confinement. On peut donc généraliser l'expression 5.4 au nombre inertiel tel que

$$\dot{\gamma}(z)d\sqrt{\frac{\rho}{\Sigma}} = \dot{\gamma}^*d\sqrt{\frac{\rho}{\Sigma}} + \alpha'd\sqrt{\rho}\alpha_z(I(z) - I^*) \quad (5.12)$$

où $\alpha' = \alpha/\sqrt{\Sigma}$. On a donc

$$I(z) - I^* = \alpha'd\sqrt{\rho}\alpha_z(I(z) - I^*) \Rightarrow \alpha' = \frac{1}{d\sqrt{\rho}\alpha_z} \quad (5.13)$$

D'après l'équation 5.13, $\alpha' = 0.036$ avec $d = 0.03$, $\rho = 2900$ et $\alpha_z = 17$. Cette valeur est en bon accord avec la valeur trouvée pour l'ajustement de la courbe (5.19) égale à 0.03, compte tenu des incertitudes. Cette dernière étude nous permet d'exprimer la viscosité sans faire intervenir de paramètres supplémentaires au sens mal défini. Le paramètre α précédemment introduit a été rattaché aux paramètres propres aux particules (diamètre, masse volumique, coefficient de restitution et friction).

5.2.3 Viscosité généralisée

Si l'on repart de l'équation $\eta\dot{\gamma} = \eta^*\dot{\gamma}^*$ vérifiée en chaque point de l'écoulement, on peut la généraliser au nombre inertiel et isoler la viscosité telle que

$$\eta(z) = \eta^* \frac{I^*}{I(z)} \quad (5.14)$$

Si l'on exprime I en fonction de z on obtient pour la viscosité

$$\eta(z) = \eta^* \left(\frac{z_0 - z^*}{z_0 - z} \right) \quad (5.15)$$

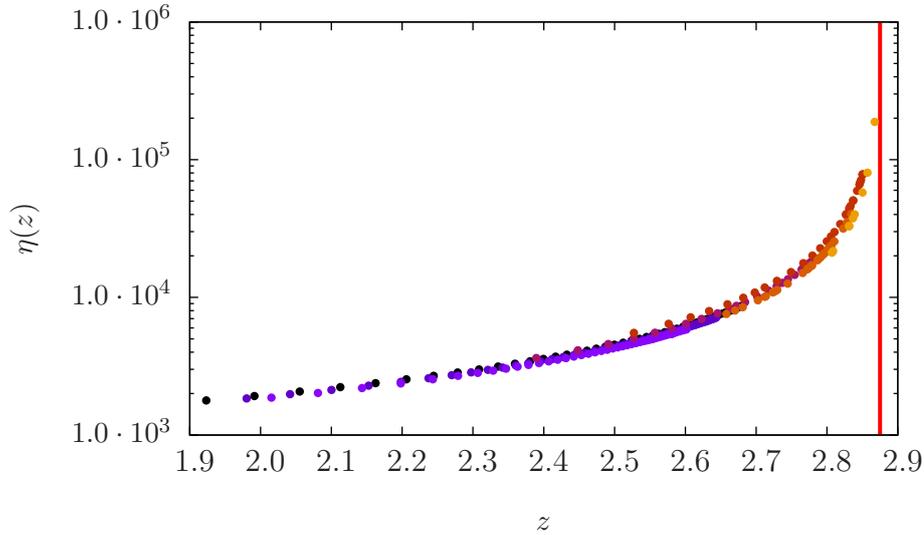


FIGURE 5.20 – Viscosité en fonction de z pour l'ensemble des simulations : rugosité, taux de déformation et pression de confinement, $z_0 = 2.87$.

où $\eta^* = \tau/\dot{\gamma}^*$. Elle n'est fonction que de z_0 et α_z qui sont toutes deux des propriétés mécaniques des particules. Cette expression donne la valeur de la viscosité en tout point de l'écoulement à la seule connaissance du frottement effectif et du profil de la connectivité. La viscosité diverge lorsque $z = z_0$ c'est à dire lorsque I tend vers zéro. Nous avons tracé la viscosité donnée par cette relation pour l'ensemble des données issues des simulations où l'on a fait varier la rugosité, le taux de déformation appliqué et la pression de confinement comme on peut le voir sur la figure 5.20.

5.3 Mécanismes et rugosité critique

Du point de vue de la texture (nous considérons uniquement la connectivité et l'anisotropie), un état de déformation stationnaire est un état où il y a compensation entre gain et perte de contacts [64]. La déformation ne résulte que des réarrangements de particules, et ceux-ci se traduisent par une évolution de la texture gouvernée par trois évènements élémentaires : 1) le gain de contact 2) la perte de contact 3) la rotation du contact (vecteur branche associé) comme schématisé sur la figure 5.21. Ces évènements se produisent sur des échelles de temps différentes selon la direction θ considérée, et ont été mis en évidence à l'aide de simulations numériques. La figure 5.22 montre un champ de vitesse relatif moyen calculé sur l'ensemble des particules soumis à un cisaillement. On remarque que dans le voisinage de la particule la vitesse relative est dirigée vers elle suivant l'orientation de compression et dans le sens opposé dans la direction d'extension. On observe également les rotations entre ces deux orientations.

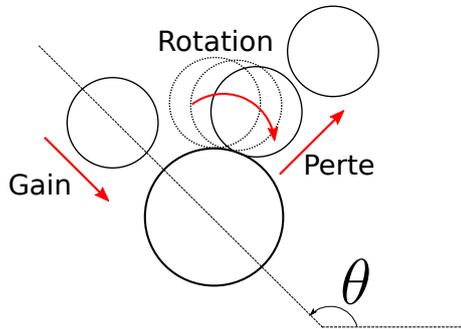


FIGURE 5.21 – Schéma représentant l'évolution de la texture au cours de la déformation par des mécanismes de gain et de perte de contact

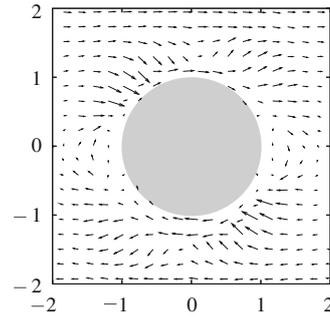


FIGURE 5.22 – Le champ de vitesses relatives moyen au voisinage de chaque particule au cours d'une simulation de cisaillement simple suivant la direction horizontale. Le cercle gris représente la distance d'exclusion mutuelle moyenne entre particules, d'après Radjai *et al.* [64]

Radjai *et al.* ont montré que l'état stationnaire se décline en terme de texture comme un état où 1) le gain de contact se fait en moyenne suivant la direction de contraction (ici $\theta_\gamma = 135^\circ$) 2) la perte se fait en moyenne dans la direction d'extension. Le tenseur de texture est donc en moyenne coaxial au tenseur de taux de déformation. Ces mécanismes nous permettent de mieux comprendre en quoi la connectivité est un paramètre interne pertinent lorsque l'on considère les déformations d'une assemblée de grains. Nous avons vu que la connectivité z était écartée de manière permanente de sa valeur stationnaire mesurée au centre, et était systématiquement plus faible au voisinage de la paroi. La proximité de la paroi implique donc des corrélations spatiales particulières sur les positions des particules, ce qui induit une connectivité différente de celle du bulk. Il en résulte une viscosité hétérogène à travers l'écoulement, sauf pour une valeur particulière de la rugosité. Comment expliquer l'existence d'une rugosité critique ?

Comme nous l'avons vu précédemment, la rugosité des parois joue un rôle clef dans l'effet de la perturbation. Elle se définit par une *texture* que la plaque impose dans son voisinage immédiat. Cette texture va à son tour moduler la transmission des contraintes aux particules libres et à tout l'écoulement. Nous avons vu que la valeur de la rugosité critique était à peu près égale à $\delta_w^c \approx 0.73$ ou $\pm 42^\circ$ par rapport à l'axe vertical. Cet angle donne une orientation moyenne des contacts au niveau de l'interface et des efforts transmis aux particules libres. Si l'on prend pour référence l'axe horizontal de l'écoulement alors on remarque que l'orientation est proche de 135° , c'est à dire de l'orientation principale du tenseur du taux de déformation imposée en cisaillement plan.

L'intérêt de définir les parois comme une assemblée rigide de particules est de pouvoir définir pour chacune d'elle un tenseur de texture. Il est alors possible de

regarder en détail quelles sont les orientations *accessibles* à rugosité donnée. Pour chaque particule appartenant à la paroi on définit un tenseur $\overline{\overline{G}} = z\langle \vec{n}_i \vec{n}_j \rangle$. La figure 5.23a montre les valeurs prises par l'orientation principale de ce tenseur sur quelques incréments de déformation, pour chaque particule appartenant à la paroi, et pour différentes rugosités (affichées de manière brute et mises bout à bout).

Qualitativement, on observe qu'à rugosité donnée certaines valeurs sont inaccessibles, les particules composant la paroi ne peuvent posséder des contacts avec les particules libres suivant certaines orientations. La figure 5.23b montre la distribution

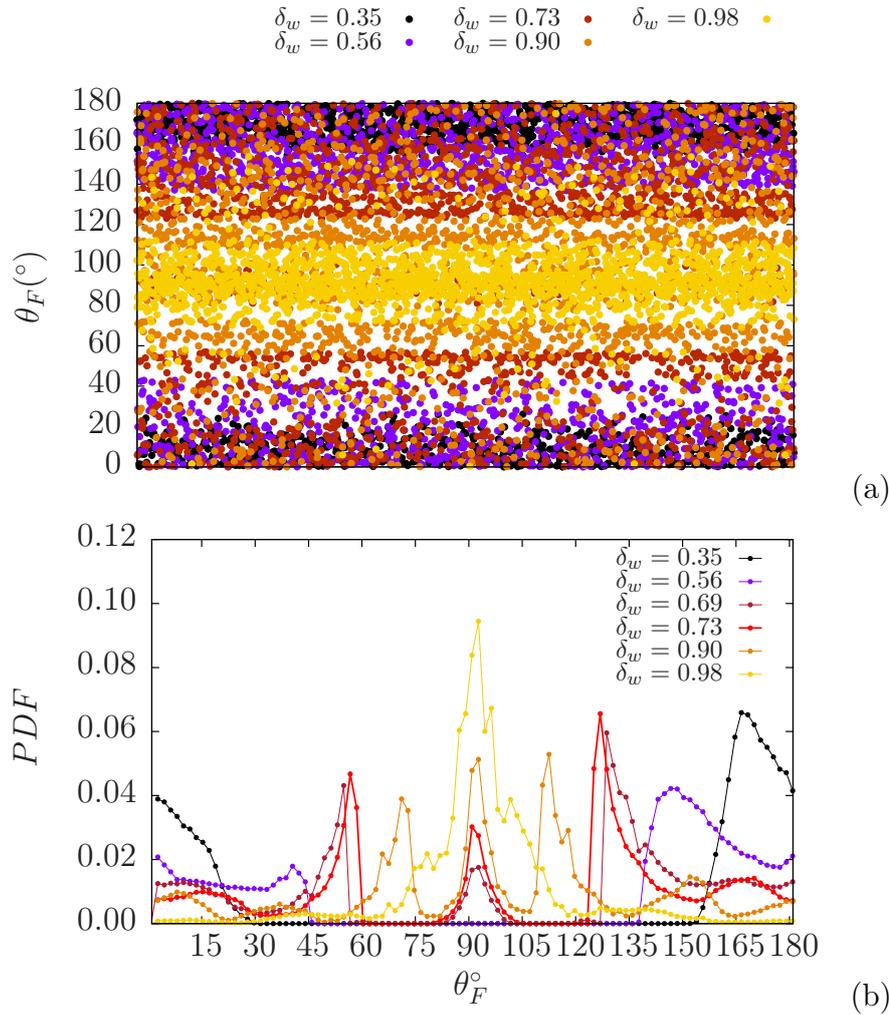


FIGURE 5.23 – (a) Valeurs prises par de l'orientation du tenseur $\overline{\overline{G}}$ pour différentes rugosités de plaque (b) Distribution de l'orientation principale des tenseurs $\overline{\overline{G}}$ de texture mesurés sur les particules appartenant à la paroi, pour différentes valeurs de la rugosité. La distribution pour la rugosité critique (ou à son voisinage) est représentée en rouge.

de cette série sur un intervalle $[0 : 180^\circ]$. Il existe des modes et des orientations de contacts privilégiées, et ceux-ci évoluent avec la rugosité. On observe que pour des

valeurs proches de δ_w^c l'orientation principale présente des modes centrés autour de 50° , 90° et 130° . Ces résultats permettent d'avancer une hypothèse concernant l'existence de la rugosité critique : les gains de contact au niveau de la paroi se font dans une direction naturelle du dispositif expérimental, c'est à dire suivant l'orientation de la valeur principale du taux de déformation, imposée par la mise en mouvement de la plaque.

Pour résumer, la rugosité peut être modulée pour imposer une texture à l'interface dont les propriétés assure une meilleure compatibilité avec le tenseur de déformation imposé. Malgré le fait que la paroi soit une rupture, et perturbe nécessairement l'évolution de la texture dans son voisinage, cette coaxialité moyenne permet d'amoinrir l'effet des parois, et d'obtenir un écoulement quasiment homogène.

5.4 Viscosité : connectivité et température

Au cours de cette étude nous avons fait référence au rôle joué par la température, reflétant l'agitation des particules et le transfert fluctuant de quantité de mouvement par collisions et instabilités locales. Selon les situations ou les dispositifs expérimentaux utilisés, on décrit les milieux granulaires avec des théories issues de la mécanique des solides (mécanique des sols), issues de la mécanique des fluides pour les écoulements (comportement visqueux) ou à l'aide de théorie cinétique directement inspirée de celle des gaz. Cependant, un matériau granulaire se comporte des trois manières à la fois, et il n'est pas possible d'isoler ces comportements les uns des autres. En ce sens, la théorie cinétique peut très bien être appliquée aux régimes denses quasi-statiques, et peut amener à mieux comprendre la rhéologie de ces écoulements. A ce propos, da Cruz *et al.* ont montré que les lois constitutives incorporant les fluctuations sont de la même forme que celles obtenues en régime collisionnel à grand nombre inertiel.

La théorie cinétique des matériaux granulaires traite les fluctuations des vitesses comme le serait la température dans un gaz de particules inélastiques, c'est-à-dire de l'énergie fluctuante qui se dissipe dans l'écoulement au cours de collisions. Dans le cas d'écoulements gravitaires, contrairement à des gaz, la température au niveau des parois n'est pas réglée par un thermostat externe mais par l'écoulement lui même. Dans un écoulement en cisaillement plan, la paroi agit comme un thermostat : sa mise en mouvement injecte de manière continue de l'énergie cinétique qui sera ensuite dissipée par collision inélastique. L'écoulement peut être vu généralement comme une couche *froide* s'écoulant entre deux couches *chaudes* localisées au niveau des parois. Mais l'ajustement de la rugosité permet de *refroidir* les couches en contact avec les parois afin d'obtenir une température homogène dans le volume, comme on peut le voir sur les figures 5.24.

Nous avons représenté la trace du tenseur de température sur la figure 5.25 pour différentes valeurs de la rugosité de la plaque. On remarque qu'il existe toujours une

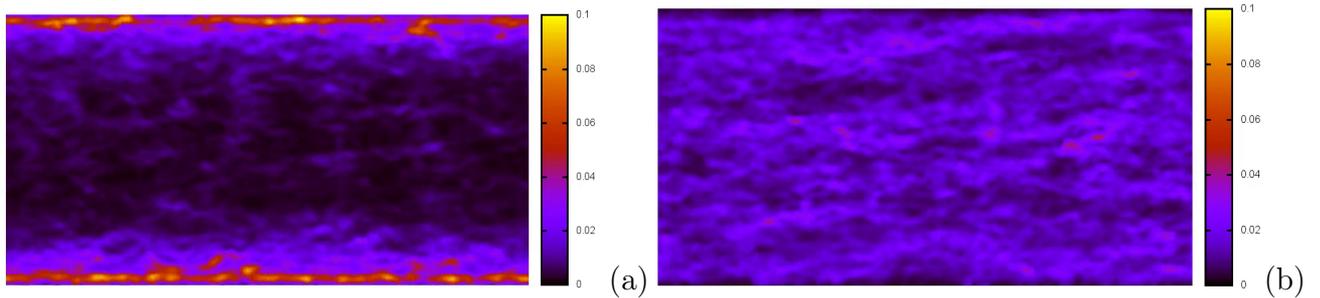


FIGURE 5.24 – Instantanée du champ de la trace de la température obtenue par homogénéisation au cours du cisaillement pour (a) une rugosité inférieure à la rugosité critique (b) à la rugosité critique.

température non nulle dans l'écoulement résultant de la non interpénétration des particules et de la physique des contacts. Les profils de température sont déterminés ici par la rugosité de la paroi : lorsque la rugosité est proche de la rugosité critique la température est homogène et donc la paroi a exactement la rugosité qui permet d'imposer une température identique à celle existant dans le volume de l'écoulement. A rugosité critique, les particules en contact avec la paroi gagnent donc, en moyenne, des contacts dans la bonne direction, la direction imposée par les conditions limites. L'énergie est alors dissipée de manière plus homogène dans l'écoulement. Lorsque la rugosité est différente de la rugosité critique, la couche en contact avec la paroi est plus *chaude*, l'énergie est dissipée de manière plus localisée et le reste de l'écoulement est moins fortement cisailé. La trace peut être décomposée en une contribution des

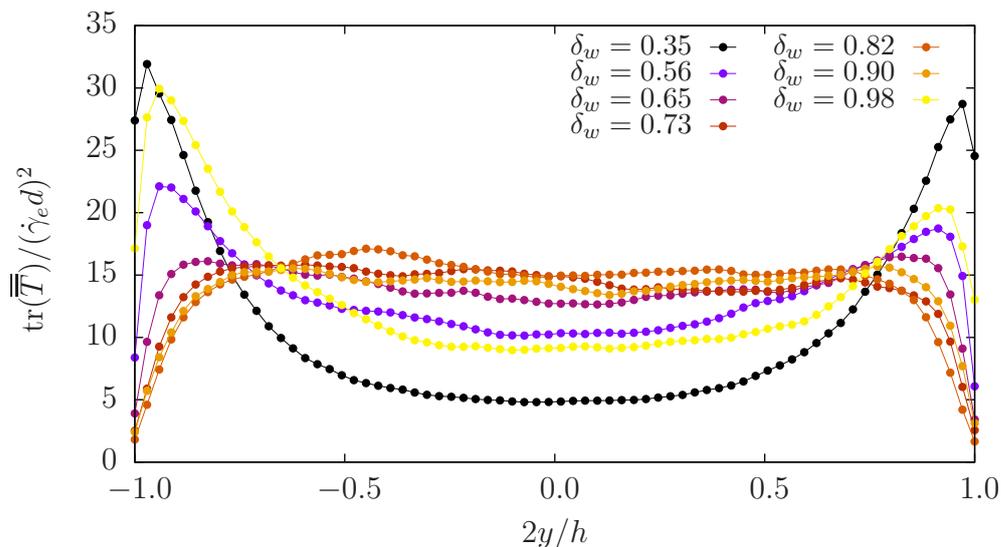


FIGURE 5.25 – Profil de la trace du tenseur de température pour différentes valeurs de la rugosité.

fluctuations des vitesses dans la direction de l'écoulement T_{xx} et perpendiculaire à celui-ci T_{yy} . Sur la figure 5.26 sont représentées chaque composante au niveau de la paroi et dans le *bulk* pour une rugosité $\delta_w < \delta_w^c$ (5.26a) et pour la rugosité critique (5.26b). Les composantes, dans les deux cas, sont de même ordre de grandeur dans le volume, la somme étant plus grande pour la rugosité critique étant donné que le taux de déformation $\dot{\gamma}$ est plus important. On peut résumer ces observations en disant que la température est isotrope dans la volume. Cependant, au niveau de la paroi, c'est bien la composante dans la direction de l'écoulement (T_{xx}) qui domine lorsque la rugosité est différente de la rugosité critique, et qui est modulée par elle.

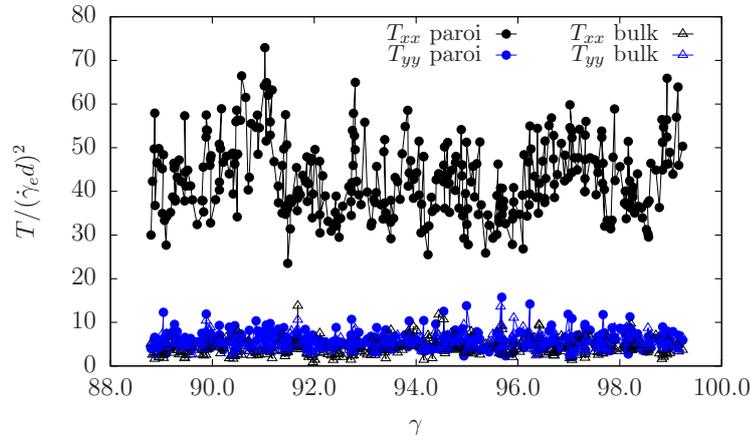
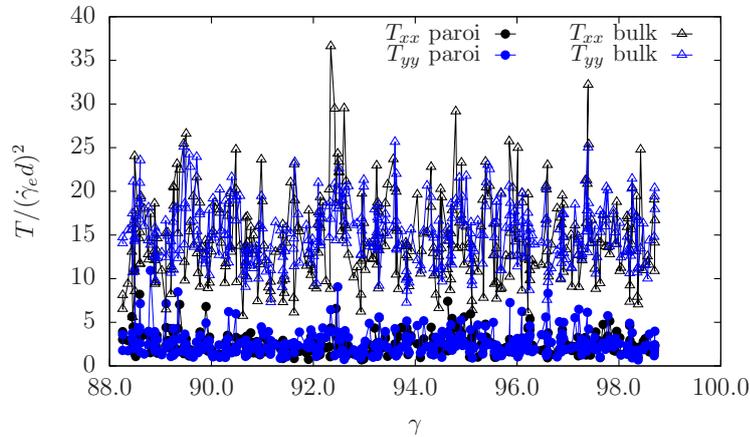
(a) $\delta_w < \delta_w^c$ (b) $\delta_w = \delta_w^c$

FIGURE 5.26 – Composante T_{xx} (noir) et T_{yy} (bleu) du tenseur de température au niveau de la paroi (points) et dans le *bulk* (triangle) au cours de la déformation (a) rugosité inférieure à la rugosité critique (b) rugosité critique

La température peut être reliée à une contrainte cinématique. Cependant, la contrainte résultante n'est pas d'un ordre de grandeur suffisant pour être simplement ajoutée à l'expression du tenseur de contrainte et expliquer directement l'augmentation du taux de déformation à viscosité constante [17]. La température reflète des événements se déroulant à l'échelle des particules : des chocs, des pertes, des gains,

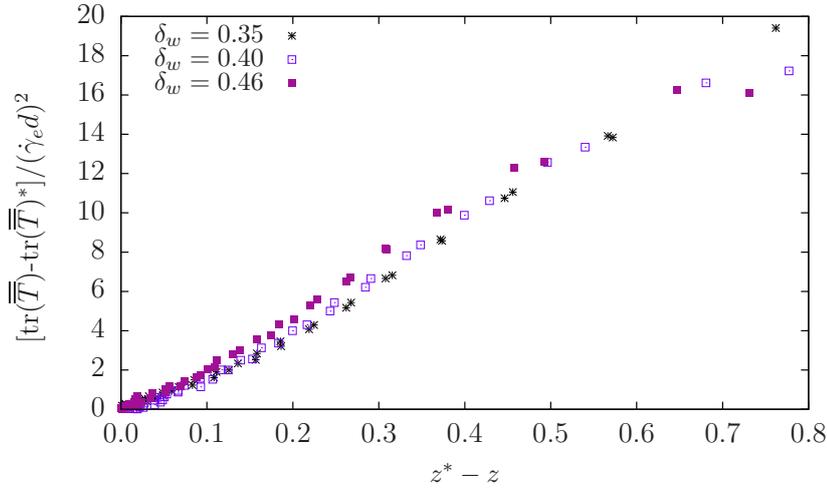


FIGURE 5.27 – Variation de la température par rapport à celle mesurée au centre en fonction de la variation de la connectivité par rapport à celle mesurée au centre. Les résultats sont représentés pour trois écoulements où l'on a fait varier la rugosité des parois.

des rotations de contact etc... En ce sens, elle donne une mesure globale de l'évolution des variables internes, sans donner une information sur les détails de cette évolution. La fluctuation des vitesses observée est donc une observable recouvrant la connectivité et son évolution au sein de l'écoulement, et pourrait prétendre également au titre de variable interne. Une plus forte température implique une plus grande agitation des grains, des mouvements relatifs s'écartant de ceux attendus en conditions homogènes et davantage de collisions. La connectivité, pour refléter ces effets, doit nécessairement diminuer. Il existe donc une relation entre ces deux observables à travers l'écoulement. Cette relation est représentée sur la figure 5.27.

Nous avons tracé les profils de la connectivité en fonction des profils de température en suivant la même démarche que précédemment. Nous avons choisi des résultats pour lesquels les gradients sont les plus forts à travers l'écoulement. Il existe, autour du centre, en petites perturbations, une relation linéaire entre la variation de température et de connectivité. La température est ici calculée comme $\overline{\overline{T}} = \langle \delta \vec{v} \otimes \delta \vec{v} \rangle$ sans en prendre la racine, la trace est donc bien proportionnelle à la connectivité, et donc au taux de déformation mesuré en chaque point du profil. Il est donc possible d'écrire la relation (5.15) en fonction, cette fois-ci, de la température, soit $\eta(T - T^*(I))$.

Dans les deux cas, la viscosité est ramenée à une dépendance aux paramètres de frottement et de restitution des particules. La température et la connectivité partagent d'ailleurs une même dépendance à l'échelle temporelle employée pour les mesurer. En effet, l'ouverture ou la fermeture d'un contact est difficile à déceler sur des particules réelles car de nombreux phénomènes compliqués interviennent sur

des échelles spatiales et temporelles très fines (déformation élastique et plastique du contact, rebond...). La connectivité est donc une variable interne facilement mesurable à l'aide de simulations numériques, ce qui n'est pas le cas d'un point de vue expérimental. Cependant, cette dernière peut être sujette à une certaine indétermination car sa valeur peut dépendre de la raideur des contacts dans le cas de la dynamique moléculaire ou du pas de temps en dynamique des contacts. Ces résultats montrent toutefois qu'il est possible d'estimer la connectivité en relevant la température, très largement accessible à l'aide de méthodes de tracking de particules.

Dans le cas d'écoulement denses quasistatiques les contacts sont persistants et la connectivité est bien définie. Lorsque l'on se déplace vers des nombres inertiels plus élevés, les particules subissent des chocs collectifs, et la connectivité a encore un sens clair. A grand nombre inertiel toutefois la connectivité perd son sens car les contacts deviennent binaires et instantanés. La viscosité, *in fine*, doit être rattachée à la température pour se généraliser à tous les régimes d'écoulement.

5.5 Conclusions : viscosité enrichie et loi de comportement

Nous avons étudié l'influence des parois sur un écoulement granulaire dense, en conditions homogènes. Nous avons tout d'abord mis en évidence le rôle de sa rugosité sur l'état stationnaire. Nous avons montré que l'effet de la rugosité était de moduler le taux de déformation localement au niveau de la paroi et donc celui se développant au centre de l'écoulement, mais que cette relation n'était pas monotone. Au delà d'une rugosité critique, le taux de déformation au centre diminue à nouveau. L'inhomogénéité du champ de vitesse observée est contrôlée par le taux de déformation et donc indirectement par la rugosité de la plaque.

Nous avons mis en évidence, grâce aux champs stationnaires, une relation entre l'inhomogénéité de la connectivité et du taux de déformation. Cette relation se fait au travers de la viscosité qui est elle même inhomogène à travers l'écoulement. Nous avons montré, qu'au premier ordre, la viscosité pouvait être rattachée à une variable interne au sens clair : la connectivité, ou plus précisément $(z^* - z)$, à l'instar du modèle frottant-dilatant présenté à la section 1.2.2. L'effet des parois est de perturber dans son voisinage les mécanismes de gain et de perte caractérisant un état stationnaire du point de vue de la microstructure. Les particules au voisinage de la paroi sont donc plus libres de se réorganiser car elles perdent davantage de contact qu'elles n'en gagnent. Il en résulte un taux de déformation plus important. Cette perturbation se propage suivant une exponentielle décroissante sur une certaine distance caractéristique de l'ordre de 7 diamètres, faiblement dépendante du nombre inertiel. Lorsque la rugosité est égale à la rugosité critique la compatibilité entre l'écoulement et la paroi est maximale en terme de texture. Les contacts entre les particules libres et les particules de la paroi se gagnent au voisinage de la direction principale du taux de déformation, ce qui a pour effet d'amortir la perturbation et

de retrouver un profil de vitesse homogène. Lorsque le taux de déformation imposé augmente, l'inertie des particules vient amortir les effets de la rugosité et la perturbation reste confinée au voisinage immédiat de la paroi. Ainsi nous obtenons des profils homogènes (sauf au voisinage de la paroi) malgré une rugosité différente de la rugosité critique.

En l'état ce modèle permet de décrire tous les résultats obtenus en faisant varier les conditions aux limites et la rugosité des parois. Cependant, la seule mesure du frottement interne de l'écoulement ne peut pas permettre de prédire l'inhomogénéité du champ de déformation. Il est nécessaire d'adjoindre une condition aux limites supplémentaire pour la variable interne retenue transportant la perturbation. Ainsi, cette nouvelle condition encapsule les effets de la rugosité et permet de déterminer l'ensemble du profil.

La loi de comportement est enrichie au sens où nous avons pu intégrer à la relation entre le frottement interne et le taux de déformation une variable interne capable de caractériser tout l'écoulement, et de lever le paradoxe apparent d'une déformation non homogène engendrée par une contrainte cisailante constante à travers l'écoulement. Si le choix se porte sur la connectivité, alors cet enrichissement se fait au prix de l'introduction d'une autre loi phénoménologique qui est la relation entre la connectivité et le nombre inertiel. L'apport est tout de même d'avoir pu réconcilier deux observations qui ne l'étaient pas auparavant. La viscosité s'exprime alors simplement en introduisant deux constantes qui ne dépendent que de la mécanique des particules considérées (e et μ_s), à savoir z_0 , la connectivité lorsque le nombre inertiel tend vers zéro et α_z qui mesure la décroissance de z avec I . Nos résultats confirment

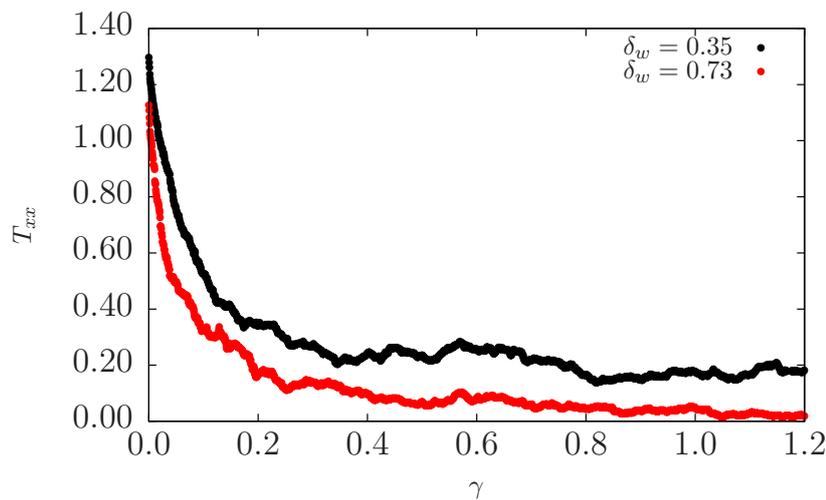


FIGURE 5.28 – Une possible nouvelle condition aux limites. Évolution de la composante T_{xx} de la température vers sa valeur d'équilibre au niveau de la paroi pour une rugosité inférieure à la rugosité critique (noir) et proche de la rugosité critique (rouge).

qu'une étude de l'énergie dissipée (par collision et par contact frottant) joue un rôle important dans la rhéologie locale des matériaux granulaires. En effet, l'expression de la viscosité que nous trouvons ne dépend que des paramètres de restitution et de frottement des particules. Finalement, nous avons pu montrer qu'il était possible de rattacher l'expression de la viscosité à la température elle-même.

A première vue le modèle est non local, au sens où il donne l'évolution de la viscosité à travers l'écoulement par rapport à une valeur mesurée au centre, et qui peut être donc arbitrairement loin du point considéré. Cependant, cette valeur mesurée au centre, η^* , ne fait pas référence à un point en particulier mais plutôt à un état de l'écoulement. Cet état est un état stationnaire, ne dépendant que du nombre inertiel.

La loi enrichie et locale nécessite des conditions aux limites complètes pour pouvoir donner la solution du profil, mais ces conditions aux limites incluent désormais la vitesse (à travers le nombre inertiel) et la température de la paroi, comme illustré sur la figure 5.28, ou la connectivité mesurée à son voisinage. Si l'on préfère la température, alors nous pouvons imaginer expliquer ou calculer la loi d'évolution du paramètre interne en termes de vitesses moyennes et de fluctuations. En d'autres termes, le gradient de température et le gradient de vitesse doivent être reliés, à l'instar des lois de la physique statistique.

J'ai toujours trouvé ça mystérieux et j'ignore la raison pour laquelle les lois de la physique ont cette capacité de pouvoir s'exprimer de tant de manières différentes.

Richard Feynman, 1964

6

Conclusions générales et perspectives

Les travaux présentés dans ce mémoire de thèse ont porté sur l'étude des effets de taille finie et de paroi sur le comportement effectif d'écoulements granulaires denses. De nombreux résultats expérimentaux et issus de simulations numériques ont pu être décrits à l'aide d'une rhéologie locale dite $\mu(I)$, modélisant le comportement viscoplastique de ces écoulements. Le succès de cette loi de comportement phénoménologique pour décrire les régimes stationnaires a été par la même occasion mise en difficulté lorsqu'il s'agissait de décrire les inhomogénéités rencontrées dans de nombreuses situations d'écoulement. Les phénomènes d'hystérésis que l'on retrouve en écoulement sur plan inclinés, associés à des effets de taille finie, ou au cours de chargement plus complexes n'ont également pas pu être expliqués. De nombreux modèles non locaux se sont développés, motivés par l'incapacité de cette loi à faire correspondre contraintes et déformations de manière locale et unique.

Bien que ces modèles apportent de réels progrès en terme de prédiction, notamment des profils de vitesse inhomogènes, ils rencontrent des difficultés face aux effets de taille finie et de parois car les conditions limites qui leur sont associées restent mal définies. Ces modèles sont généralement articulés autour de mécanismes microscopiques auxquels aucune variable interne géométrique n'a pu être clairement rattachée. Etant donné qu'il n'existe pas d'équivalent à la loi macroscopique à l'échelle microscopique, gouvernée par des lois de contact non régulières, la dérivation micro-mécanique d'une loi de comportement, et donc le lien entre contrainte, déformation et texture est difficile et reste largement à faire. Parallèlement, de nombreuses études portant sur les mécanismes de rupture à l'échelle locale, comme les événements pré-curseurs aux avalanches, ont confirmé que la stabilité d'un empilement, et donc sa mise en écoulement, dépendent étroitement de détails microstructuraux. Nous avons

donc cherché au cours de ce travail à enrichir la loi de comportement viscoplastique, éprouvée en condition homogène et stationnaire, en la rattachant à des variables internes caractérisant le matériau.

Partant du constat que la présence d'une paroi venait nécessairement perturber la microstructure de l'écoulement, nous avons étudié les effets de paroi et de taille finie dans l'optique de rattacher cette perturbation à une loi de comportement locale et effective. Pour cela nous avons étudié des écoulements d'épaisseurs allant de $4d$ à $120d$ aux conditions limites variables et en prenant en compte explicitement le rôle de la rugosité des parois.

Nous avons d'abord montré qu'entre 1 et $10d$ environ le comportement est entièrement dominé par les parois. Le frottement effectif de ces écoulements n'est pas intrinsèque mais dépend à la fois de la rugosité des parois et de l'épaisseur. Le système, contraint géométriquement par la rigidité des frontières entre lesquelles il s'écoule, possède alors un comportement à caractère stochastique. Le comportement effectif possède une valeur moyenne bien définie pourvue qu'on vienne moyennner ses propriétés sur des temps suffisamment longs, mais, les fluctuations restant conséquentes, le comportement ne peut être décrit que de manière probabiliste. Du fait des blocages géométriques réguliers, le milieu perd sa mémoire de manière permanente, il ne parvient jamais à se structurer et n'atteint jamais un état stationnaire. La limite d'épaisseur pour laquelle les parois ne font plus *partie du système* est estimée entre 5 et $6d$.

Entre $10d$ et $100d$ le comportement de l'écoulement se régularise mais demeure influencé par les parois et sa propre épaisseur. Nous retrouvons des profils non homogènes comme dans les expériences en cisaillement périodique de Miller *et al.*. En venant contrôler la rugosité des parois nous avons pu mettre en évidence son rôle sur l'atteinte de l'état stationnaire. D'une part nous avons vu qu'un expérimentateur ne pouvait pas directement contrôler le taux de déformation se développant au centre du fait du couplage entre l'écoulement et les parois. D'autre part, nous avons montré que les profils obtenus sont particuliers au sens où l'intensité de l'inhomogénéité est modulée par la rugosité. Pour une rugosité dite *critique*, le gradient de vitesse s'homogénéise à travers l'écoulement, sauf dans le voisinage immédiat de la paroi. Nous trouvons que cette homogénéité est robuste car elle se vérifie pour des conditions limites très variables.

Ces effets ont été étudiés comme une perturbation d'une variable interne par les parois, l'écartant de sa valeur stationnaire dans le volume. Cette variable interne a été identifiée comme étant la connectivité des particules, cette dernière présentant une inhomogénéité à travers l'écoulement compatible avec celle du taux de déformation sur une distance caractéristique faiblement dépendante du nombre inertiel. Nous avons considéré que la rhéologie viscoplastique $\mu(I)$ s'appliquait en tout point de l'écoulement mais qu'elle devait rendre compte de cette perturbation structurale. Le taux de déformation étant inhomogène et la contrainte constante dans le volume, il est possible d'intégrer cette perturbation dans l'expression de la viscosité de l'écoulement, affectée par la présence des parois. L'expression de la viscosité en

fonction de la connectivité (ou de la température) permet de faire correspondre à nouveau contrainte et taux de déformation et de réhabiliter une loi de comportement locale. Elle ne dépend, à terme, que de paramètres propres au matériau, notamment du coefficient de restitution et du frottement interparticulaire. Physiquement, cette expression a un sens car ces paramètres contrôlent les interactions entre particules et peuvent être rattachés aux mécanismes de diffusion de quantité de mouvement à travers l'écoulement. Le modèle est ainsi capable de rendre compte des champs de déformation non homogènes dans des conditions aux limites variées, étant donné que la viscosité est fonction du nombre inertiel. Nous avons émis l'hypothèse selon laquelle la rugosité critique précédemment définie correspond à des conditions de texture compatibles avec l'écoulement ayant la particularité d'amortir l'amplitude de la perturbation dans son voisinage.

Enfin, au delà de $100d$, le comportement est régulier et n'est plus influencé dans le volume par les effets de parois et donc de sa propre épaisseur, tant que les grains ne glissent pas au parois. L'effet de paroi est alors confiné sur quelques diamètres de grains, sous la forme d'une couche limite.

De nombreuses perspectives se dressent à l'issue de ces travaux. Premièrement, il s'agirait de venir valider ce modèle en utilisant d'autres méthodes numériques comme la dynamique moléculaire et dans d'autres géométries d'écoulement. En effet, le modèle ne dépend pas de la géométrie du dispositif expérimental, aussi il faudrait le tester dans d'autres configurations que le cisaillement plan homogène : cisaillement de type cellule de Couette, écoulement à surface libre... Il serait intéressant d'ajuster la rugosité sur des dispositifs expérimentaux pour valider (ou non) expérimentalement l'existence de la rugosité critique.

En l'état, le modèle n'est pas complet car il manque une caractérisation plus complète de l'amplitude de la perturbation ou de cette nouvelle condition aux limites. A faible nombre inertiel la forme précise du profil de vitesse dépend étroitement de cette amplitude. Elle est le dernier paramètre *a priori* inconnu et dont les dépendances sont encore à explorer. Ceci peut se réaliser en préparant des échantillons avec des propriétés géométriques initiales bien contrôlées, et en les cisillant de manière quasistatique afin d'étudier l'évolution de la connectivité à travers l'écoulement.

D'autre part, la connectivité n'a pas un équivalent expérimental évident, car la fermeture et l'ouverture des contacts impliquent de nombreux phénomènes sur des échelles spatiales et temporelles très fines, notamment lorsque les surfaces en jeu se déforment. Le lien fait entre la connectivité et la température à travers l'écoulement montre que la viscosité dépend du taux de cisaillement et de la température (tout comme la connectivité), et que l'équation d'évolution reliant le déséquilibre entre température et taux de cisaillement a de meilleures chances d'être modélisée que celle sur l'écart en connectivité. En d'autres termes, il est possible de choisir, et sûrement de privilégier, la température comme variable interne.

Ces travaux ont montré que les conditions aux limites doivent inclure aussi la variable interne comme la température de paroi et pas uniquement la vitesse. La rugosité des parois, ou un descripteur de leur état de surface doit venir les com-

pléter, le taux de déformation mesuré au centre n'étant généralement pas égal à celui imposé. Il serait également intéressant d'étudier le comportement de l'écoulement lorsque l'on laisse la rugosité évoluer de manière dynamique. On peut penser par exemple aux écoulements gravitaires, où le lit sur lequel s'écoulent les grains se retrouve progressivement érodé.

Enfin, une perspective, et non des moindres, est d'approfondir l'étude par homogénéisation des variables microscopiques. Au cours de ce travail, la méthode d'homogénéisation a été utilisée davantage comme une méthode opérante qu'un outil de prospection à proprement parler. Nous avons intégré une variable interne à la description viscoplastique d'un écoulement en régime stationnaire, à résolution spatiale fixée. Nous avons donc pu reproduire l'inhomogénéité spatiale du champ de déformation en ignorant l'échelle temporelle. L'intégralité de l'inhomogénéité n'est d'ailleurs pas captée par le modèle car nous nous sommes arrêtés à une analyse en petite perturbation autour du point stationnaire, et nous avons seulement inclus une variable interne scalaire. Or il est nécessaire d'avoir recours à des variables internes tensorielles si l'on espère pouvoir décrire des chemins de chargement plus complexes et des transitoires. Il faudrait venir appliquer cette méthode sur ces transitoires pour espérer, par exemple, proposer des lois d'écrouissage aux variables internes. Il faudrait également étudier à l'aide de ces champs la réponse du milieu à une perturbation externe, par exemple à une force instantanée. La réponse du milieu, et notamment des variables internes, permettrait de les rapprocher. Une étude exhaustive doit alors être menée sur de grandes gammes de résolutions spatiales et temporelles afin d'identifier une loi de comportement déterministe.

Bibliographie

- [1] Internal friction and absence of dilatancy of packings of frictionless polygons. 2015. *Cité page 9*
- [2] M. P. Allen and D. J. Tildesley. *Computer Simulation of Liquids*. Oxford University Press, Oxford, 1987. *2 citations pages 39 et 44*
- [3] L. Amarsid. Rhéologie des écoulements granulaires immergés dans un fluide visqueux, 2015. *Cité page 62*
- [4] K. M. Aoki and N. Ito. Effect of size polydispersity on granular materials. *Phys. Rev. E*, 54(2) :1990–, 1996. *Cité page 9*
- [5] E. Azéma, G. Saussine, and F. Radjai. Quasistatic rheology, force transmission and fabric properties of a packing of irregular polyhedral particles. *Mechanics of Materials*, 41 :729–741, 2009. *Cité page 9*
- [6] G. I. Barenblatt. *Scaling, self-similarity, and intermediate asymptotics*. Cambridge texts in applied mathematics. Cambridge University Press, Cambridge (U.K), 1996. Autres tir. : 1997, 2002, 2004, 2005. *Cité page 26*
- [7] R. J. Bathurst and L. Rothenburg. Micromechanical aspects of isotropic granular assemblies with linear contact interactions. *J. Appl. Mech.*, 55 :17, 1988. *Cité page 20*
- [8] A. N. C. I. Bideau. Influence of the number of layers on the equilibrium of a granular packing. *Phys Rev E*, 62(1 Pt B) :738–743, 2000. *Cité page 68*
- [9] A. L. Bouil. *Étude expérimentale de la plasticité et des précurseurs à la rupture de milieux granulaires*. PhD thesis, Université de Rennes I, 2014. *Cité page 9*
- [10] M. Bouzid, A. Izzet, M. Trulsson, E. Clément, P. Claudin, and B. Andreotti. Non-local rheology in dense granular flows. *The European Physical Journal E*, 38(11) :1–15, 2015. *2 citations pages 30 et 33*
- [11] Boyer. Unifying suspension and granular rheology. 2011. *Cité page 27*
- [12] F. Calvetti, G. Combe, and J. Lanier. Experimental micromechanical analysis of a 2d granular material : relation between structure evolution and loading path. *Mech. Coh. Frict. Materials*, 2 :121–163, 1997. *Cité page 20*

- [13] B. Cambou. From global to local variables in granular materials. In C. Thornton, editor, *Powders and Grains 93*, pages 73–86, Amsterdam, 1993. A. A. Balkema. *Cité page 18*
- [14] Ciarlet. *Introduction à l'Analyse Numérique Matricielle et à l'Optimisation*. Masson, 1982. *Cité page 49*
- [15] P. Cundall. Distinct element models of rock and soil structure. In B. E.T., editor, *Analytical and computational methods in engineering rocks mechanics*. Allen and Unwin, 1987. *Cité page 39*
- [16] P. A. Cundall and O. D. L. Strack. A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique*, 29(1) :47–65, 1979. *Cité page 39*
- [17] F. da Cruz, S. Emam, M. Prochnow, J.-N. Roux, and F. cois Chevoir. Rheo-physics of dense granular materials : discrete simulation of plane shear flows. *Phys Rev E Stat Nonlin Soft Matter Phys*, 72(2 Pt 1) :021309, Aug 2005. *7 citations pages 29, 88, 96, 121, 123, 124, et 133*
- [18] A. Daerr and S. Douady. Two types of avalanche behaviour in granular media. *Letters to Nature*, 399 :241–243, 1999. *Cité page 68*
- [19] F. Darve and F. Laouafa. Plane strain instabilities in soil : Application to slopes instability. In Prande, Pietruszczak, and Schweiger, editors, *Numerical Models in Geomaterials*, pages 85–90, Rotterdam, 1999. Balkema. *Cité page 25*
- [20] F. Darve and F. Laouafa. Instabilities in granular materials and application to landslides. *Mechanics of cohesive-frictional materials*, 5 :627–652, 2000. *Cité page 25*
- [21] J. Fortin and P.Coorevits. Selecting contact particles in dynamics granular mechanics systems. *Journal of computational and applied mathematics*, 168 :207–213, 2003. *Cité page 44*
- [22] V. Frette, K. Christensen, A. Malthe-Sorensen, J. Feder, T. Jossang, and P. Meakin. Avalanche dynamics in a pile of rice. *Nature*, 379 :49–51, 1996. *Cité page 68*
- [23] GDR-MiDi. On dense granular flows. *Eur. Phys. J. E*, 14 :341–365, 2004. *3 citations pages 27, 99, et 112*
- [24] T. Gibaud, C. Barentin, and S. Manneville. Influence of boundary conditions on yielding in a soft glassy material. *Phys. Rev. Lett.*, 101 :258302, Dec 2008. *Cité page 87*
- [25] I. Goldhirsch. Stress, stress asymmetry and couple stress : from discrete particles to continuous fields. *Granular Matter*, 12 :239–252, 2010. *2 citations pages 54 et 55*

- [26] J. Goyon, A. Colin, G. Ovarlez, A. Ajdari, and L. Bocquet. Spatial cooperativity in soft glassy flows. *Nature*, 454(7200) :84–87, 07 2008. *Cité page 32*
- [27] P. K. Haff. Grain flow as a fluid-mechanical phenomenon. *J. Fluid Mech.*, 134 :401–430, 1983. *Cité page 31*
- [28] D. L. Henann and K. Kamrin. A predictive, size-dependent continuum model for dense granular flows. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 110(17) :6730–6735, 2013. *2 citations pages 32 et 33*
- [29] P.-Y. Hicher. Experimental behaviour of granular materials. In B. Cambou, editor, *Behaviour of Granular Materials*, pages 1–98, Wien, 2000. Springer. *Cité page 16*
- [30] B. Ildefonse, C. Allain, and P. Coussot. *Des grands écoulements naturels à la dynamique du tas de sable*. Editions Quae, 1997. *Cité page 68*
- [31] I. Iordanoff and M. M. Khonsari. Granular lubrication : Toward an understanding of the transition between kinetic and quasi-fluid regime. *Journal of Tribology*, 126(1) :137–145, 01 2004. *Cité page 26*
- [32] L. Isa, R. Besseling, and W. C. K. Poon. Shear zones and wall slip in the capillary flow of concentrated colloidal suspensions. *Phys. Rev. Lett.*, 98 :198305, May 2007. *Cité page 33*
- [33] M. Jean. The non smooth contact dynamics method. In *Special issue on modeling contact and friction*. 1999. *Cité page 39*
- [34] M. Jean and J. J. Moreau. Unilaterality and dry friction in the dynamics of rigid body collections. In *Proceedings of Contact Mechanics International Symposium*, pages 31–48, Lausanne, Switzerland, 1992. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes. *Cité page 39*
- [35] P. Jop, Y. Forterre, and O. Pouliquen. Crucial role of sidewalls in granular surface flows : consequences for the rheology. *Journal of Fluid Mechanics*, 541 :167–192, Oct. 2005. *3 citations pages 33, 88, et 96*
- [36] K. Kamrin and G. Koval. Nonlocal constitutive relation for steady granular flow. *Phys. Rev. Lett.*, 108 :178301, Apr 2012. *Cité page 30*
- [37] Q. Z. K. Kamrin. A microscopic description of the granular fluidity field in nonlocal flow modeling, 2016. *Cité page 34*
- [38] F. Kun and H. J. Herrmann. A study of fragmentation processes using a discrete element method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 138 :3–18, 1996. *Cité page 62*

- [39] F. F. L. Sibille. A numerical photogrammetry technique for measuring micro-scale kinematics and fabric in schneebeli materials. *Granular Matter*, 9 :183–193, 2007. *Cité page 9*
- [40] P.-Y. Lagrée, L. Staron, and S. Popinet. The granular column collapse as a continuum : validity of a two-dimensional navier–stokes model with a $\mu(i)$ -rheology. *Journal of Fluid Mechanics*, 686 :378–408, 11 2011. *Cité page 28*
- [41] P.-A. Lemieux and D. J. Durian. From avalanches to fluid flow : A continuous picture of grain dynamics down a heap. *Phys. Rev. Lett.*, 85 :4273–4276, Nov 2000. *Cité page 95*
- [42] C. Liu, H. M. Jaeger, and S. R. Nagel. Finite-size effects in a sandpile. *Phys. Rev. A*, 43(12) :7091, 1991. *Cité page 68*
- [43] S. Luding, E. Clément, A. Blumen, J. Rajchenbach, and J. Duran. Anomalous energy dissipation in molecular dynamics simulations of grains : The “detachment effect”. *Phys. Rev. E*, 50 :4113, 1994. *Cité page 43*
- [44] T. Miller. *The Kinematics of Dense Granular Materials Under Indefinite Plane-Shear*. PhD thesis, University of Sydney, 2014. *Cité page 88*
- [45] T. Miller, P. Rognon, B. Metzger, and I. Einav. Eddy viscosity in dense granular flows. *Phys. Rev. Lett.*, 111 :058002, Aug 2013. *3 citations pages 33, 90, et 99*
- [46] R. D. Mindlin. Compliance of elastic bodies in contact. *J. of Appl. Mech.*, 16 :259, 1949. *Cité page 44*
- [47] J. Moreau. Some numerical methods in multibody dynamics : application to granular. *European J. Mech. A Solids*, 13 :93–114, 1994. *2 citations pages 39 et 41*
- [48] J. J. Moreau. Numerical investigation of shear zones in granular materials. In D. E. Wolf and P. Grassberger, editors, *Friction, Arching, Contact Dynamics*, pages 233–247, Singapore, 1997. World Scientific. *Cité page 59*
- [49] P. Mutabaruka. Modélisation numérique des milieux granulaires immergés : initiation et propagation des avalanches dans un fluide, 2013. *Cité page 62*
- [50] M. Muthuswamy and A. Tordesillas. How do interparticle contact friction, packing density and degree of polydispersity affect force propagation in particulate assemblies? *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2006(09) :P09003–P09003, 2006. *Cité page 9*
- [51] S. Nasuno, A. Kudrolli, and J. P. Gollub. Sensitive force measurements in a sheared granular flow with simultaneous imaging. In *Powders & Grains 97*, page 329, Rotterdam, 1997. Balkema. *Cité page 80*

- [52] R. M. Nedderman. *Statics and kinematics of granular materials*. Cambr. Univ. Press, Cambridge, 1992. *Cité page 86*
- [53] D.-H. Nguyen, E. Azéma, F. Radjai, and P. Sornay. Effect of size polydispersity versus particle shape in dense granular media. *Physical Review E*, 90(1) :012202, 2014. *Cité page 9*
- [54] M. Oda. Initial fabrics and their relations to mechanical properties of granular material. *Soils and foundations*, 12 :17–36, 1972. *Cité page 18*
- [55] S. T. Poschel T. *Computational Granular Dynamics*. Springer, 2005. *Cité page 44*
- [56] O. Pouliquen. Scaling laws in granular flows down rough inclined planes. *Phys. Fluids*, 11(3) :542–548, Mar. 1999. *Cité page 68*
- [57] O. Pouliquen and Y. Forterre. A non-local rheology for dense granular flows. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 367(1909) :5091–5107, 2009. *2 citations pages 29 et 30*
- [58] O. Pouliquen, Y. Forterre, and S. Le Dizes. Slow dense granular flows as a self-induced process. *Advances in complex systems*, 4(04) :441–450, 2001. *Cité page 30*
- [59] O. Pouliquen and N. Renaut. Onset of granular flows on an inclined rough bed : dilatancy effects. *J. Ohys. II (France)*, 6 :923–935, 1996. *Cité page 68*
- [60] M. Prochnow. *Ecoulements denses de grains secs*. Theses, Ecole des Ponts ParisTech, Dec. 2002. *Cité page 116*
- [61] B. C. M. J. D. C. J. L. F. Radjaï. *Micromécanique des matériaux granulaires*. Hermes, 2001. *Cité page 39*
- [62] F. Radjai. *Dynamique des rotations et frottement collectif dans les systemes granulaires*. PhD thesis, Université de Paris-Sud (U.F.R scientifique d’Orsay), 1995. *Cité page 87*
- [63] F. Radjai. La double vie du sable. *La Recherche*, 304 :44, 1997. *Cité page 4*
- [64] F. Radjai, J.-Y. Delenne, É. Azema, and S. Roux. Fabric evolution and accessible geometrical states in granular materials. *Granular Matter*, 14(2) :259–264, 2012. *3 citations pages 20, 128, et 129*
- [65] F. Radjai and S. Roux. Turbulentlike fluctuations in quasistatic flow of granular media. *Phys Rev Lett*, 89(6) :064302, Aug 2002. *Cité page 90*

- [66] F. Radjai and S. Roux. Contact dynamics study of 2d granular media : Critical states and relevant internal variables. In H. Hinrichsen and D. E. Wolf, editors, *The Physics of Granular Media*, pages 165–186, Weinheim, 2004. Wiley-VCH.
2 citations pages 18 et 20
- [67] F. Radjai, H. Troadec, and S. Roux. Key features of granular plasticity. In S. Antony, W. Hoyle, and Y. Ding, editors, *Granular Materials : Fundamentals and Applications*, pages 157–184, Cambridge, 2004. RS.C. *Cité page 20*
- [68] F. Radjai, D. E. Wolf, M. Jean, and J. Moreau. Bimodal character of stress transmission in granular packings. *Phys. Rev. Letter*, 80 :61–64, 1998.
2 citations pages 8 et 18
- [69] J. Rajchenbach. Flow in powders : From discrete avalanches to continuous regime. *Phys. Rev. Lett.*, 65(18) :2221–2224, 1990. *Cité page 95*
- [70] K. E. C. S. Rémond. Effect of wall roughness on interface behavior of dem-simulated granular material. In *Conference : IV International Conference on Particle-based Methods – Fundamentals and Applications PARTICLES*, 2015.
Cité page 88
- [71] P. G. Rognon, T. Miller, B. Metzger, and I. Einav. Long-range wall perturbations in dense granular flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 764 :171–192, 2015.
Cité page 33
- [72] K. H. Roscoe, A. N. Schofield, and C. P. Wroth. On the yielding of soils. *Géotechnique*, 8(1) :22–53, 1958. *Cité page 16*
- [73] M. Satake. Fabric tensor in granular materials. In P. A. Vermeer and H. J. Luger, editors, *Proceedings of the IUTAM symposium on deformation and failure of granular materials, Delft*, pages 63–68, Amsterdam, 1982. A. A. Balkema.
Cité page 19
- [74] S. B. Savage. Flow of granular materials. *Theoretical and applied mechanics*, pages 241–266, 1989. *Cité page 68*
- [75] A. N. A. N. Schofield and j. a. Wroth, Peter. *Critical state soil mechanics*. New York : McGraw-Hill, 1968. Includes bibliographies. *Cité page 25*
- [76] S. S. Shirsath, J. T. Padding, J. A. M. H. Kuipers, and H. J. H. Clercx. Simulation study of the effect of wall roughness on the dynamics of granular flows in rotating semicylindrical chutes. *AIChE Journal*, 61(7) :2117–2135, 2015.
Cité page 87
- [77] L. Staron, J.-P. Vilotte, and F. Radjai. Preavalanche instabilities in a granular pile. *Phys. Rev. Lett.*, 89 :204302, 2002. *Cité page 28*

-
- [78] T. Travers, M. Ammi, D. Bideau, A. Gervois, J.-C. Messenger, and J.-P. Troadec. Mechanical size effects in 2d granular media. *J. Phys. France*, 49 :939–948, 1988. *Cité page 86*
- [79] H. Troadec. *Texture locale et plasticité des matériaux granulaires*. PhD thesis, Université Montpellier II, 2003. *Cité page 25*
- [80] C. Voivret. *Texture et comportement des matériaux granulaires à grande polydispersité*. PhD thesis, Université Montpellier 2, 2008. *2 citations pages 9 et 52*
- [81] C. Voivret, F. Radjai, J.-Y. Delenne, and M. E. Youssoufi. Force transmission in polydisperse granular media. *Phys. Rev. Lett.*, 102 :178001, 2009. *Cité page 9*
- [82] O. R. Walton. Effects of interparticle friction and particle shape on dynamic angles of repose via particle-dynamics simulation. In *Workshop : Mechanics and Statistical Physics of Particulate Materials*, 1994. *Cité page 9*
- [83] T. Weinhart, R. Hartkamp, A. R. Thornton, and S. Luding. Coarse-grained local and objective continuum description of three-dimensional granular flows down an inclined surface. *Physics of Fluids*, 25(7), 2013. *Cité page 54*
- [84] D. Wood. *Soil behaviour and critical state soil mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1990. *2 citations pages 9 et 16*
- [85] J. Zhang, R. P. Behringer, and I. Goldhirsch. Coarse-graining of a physical granular system. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 184 :16–30, 2010. *Cité page 54*