



HAL
open science

Dynamique à grande échelle des disques protoplanétaires

William Bethune

► **To cite this version:**

William Bethune. Dynamique à grande échelle des disques protoplanétaires. Astrophysique [astro-ph]. Université Grenoble Alpes, 2017. Français. NNT : 2017GREAY022 . tel-01574454v2

HAL Id: tel-01574454

<https://theses.hal.science/tel-01574454v2>

Submitted on 13 Dec 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE LA COMMUNAUTE UNIVERSITE GRENOBLE ALPES

Spécialité : **Astronomie & Astrophysique**

Arrêté ministériel : 25 mai 2016

Présentée par

William BÉTHUNE

Thèse dirigée par **Jonathan FERREIRA**, professeur
à l'**Université Grenoble Alpes**, et
codirigée par **Geoffroy LESUR**, chargé de recherche CNRS

préparée au sein de
L'institut de Planétologie et d'Astrophysique de Grenoble
dans l'**École Doctorale de Physique de Grenoble**

Dynamique à grande échelle des disques protoplanétaires

Thèse soutenue publiquement le **lundi 3 juillet 2017**,
devant le jury composé de :

M. Steven BALBUS

Professeur savilien à l'université d'Oxford, examinateur

Mme. Sylvie CABRIT

Astronome à l'observatoire de Paris, présidente du jury

M. Fabien CASSE

Maître de conférence à l'université Paris Diderot, rapporteur

M. Sébastien FROMANG

Chargé de recherche au CEA de Saclay, rapporteur

M. François MÉNARD

Directeur de recherche à l'IPAG, examinateur

M. Richard NELSON

Professeur à l'université de Londres, examinateur





REMERCIEMENTS

De nombreuses personnes ont laissé leur empreinte sur cette thèse ; je vais inscrire leur nom sans relation d'ordre et sans espoir d'exhaustivité.

Les membres permanents de l'IPAG, à commencer (chronologiquement) par Gilles Henri pour m'avoir motivé dès la première année de licence, et toute l'équipe SHERPAS pour m'avoir encouragé pendant trois années après trois stages d'été. Mes directeurs de thèse Geoffroy Lesur et Jonathan Ferreira, pour avoir tenté de m'éduquer à la recherche scientifique, entre les proverbes "c'est ta thèse" et "l'important, c'est de se faire plaisir".

Les doctorants de l'IPAG, dont Anne Vialatte, Anaël Wünsche, Maxime Cudel, Enrique Garcia, Thomas Vuillaume, Faustine Cantalloube, Sylvain Philippe, etc., pour lutter contre l'image sinistre des études scientifiques.

Les chercheurs d'autres laboratoires : Steven Balbus pour m'avoir invité à Oxford et permis de discuter avec William Potter, Marek Stromik, Caroline Terquem, Julien Devriendt, Alexander Schekochihin. Jean Teyssandier et Antoine Riols pour m'avoir invité à Cambridge et permis de me présenter devant Henrik Latter, Gordon Ogilvie, John Papaloizou. Sébastien Fromang et Mario Flock pour m'avoir accueilli à l'orme des merisiers. Les nombreuses personnes que j'ai pu rencontrer à l'école de physique des plasmas des Houches et à l'atelier de physique des plasmas de Vienne, telles que Matthew Kunz, Nuno Loureiro, Steven Cowley, etc.

Mes amis d'autres disciplines, à commencer (chronologiquement toujours) par Adrien Fay pour l'informatique, l'infini, et les poussières. Jean Decamp pour apprendre à désapprendre, et simplement rire. Thomas Camus pour les mathématiques, la curiosité partagée, la rationalité et le goût de l'absurde, l'entretien physique et la quête du whisky gras. Lucie Labede pour la confiance, le soutien, la disponibilité et les champignons de Paris.

Mon anti-particule, Laure Schulz, avec qui je peux m'annihiler et vibrer librement, éprouver l'infini hors du monde physique.

Ceux qui ont cru en ma naïveté.

«Partons ! Et ne nous arrêtons que n'importe où ! »

André Gide, *Les Nourritures Terrestres*

RÉSUMÉ

Les planètes se forment dans le disque de gaz et de poussières orbitant les étoiles jeunes. Ces disques protoplanétaires sont dispersés en quelques millions d'années, par accrétion sur l'étoile centrale et par évaporation dans le milieu interstellaire. Pour expliquer l'efficacité avec laquelle l'étoile accrète, il est couramment supposé que le transport de matière dans le disque est turbulent, sans certitude quant au processus entretenant la turbulence. D'autre part, l'irradiation du disque par l'étoile peut déclencher un vent photo-évaporé, mais elle ne permet pas d'expliquer la collimation du vent en un jet étroit, perpendiculairement au plan du disque.

Ces problèmes trouvent des réponses si le disque est sensible aux champs magnétiques. À champ faible, l'instabilité magnéto-rotationnelle peut saturer en turbulence entretenue. À champ fort, la force de Lorentz peut freiner le disque, causant simultanément l'accrétion sur l'étoile et l'éjection d'un vent collimaté. Cependant, le couplage du disque au champ magnétique se fait par l'intermédiaire des charges électriques libres, dont la proportion est d'une sur plusieurs milliards de molécules neutres. Le couplage imparfait du champ magnétique au gaz neutre est décrit en termes d'effets "non-idéaux", lesquels introduisent de nouveaux comportements.

Cette thèse est dédiée aux processus de transport se déroulant dans les disques faiblement magnétisés et faiblement ionisés; l'influence des effets microphysiques sur la dynamique du disque à grande échelle y est centrale. Dans un premier temps, j'exclus le vent et j'examine l'impact des effets non-idéaux sur la turbulence dans le plan du disque. Je montre que l'écoulement peut spontanément s'organiser si la fraction d'ionisation est assez faible; dans ce cas, l'accrétion est stoppée, et le disque exhibe des anneaux axisymétriques susceptibles d'affecter la formation planétaire.

Dans un second temps, je caractérise l'émission de vents de disque via un modèle global de disque stratifié, où le disque est magnétisé et plongé dans une atmosphère chaude. Ce modèle est le premier à décrire de façon globale les effets non-idéaux d'après un réseau chimique simplifié. Il révèle que le disque est essentiellement non-turbulent, et que le champ magnétique peut adopter différentes configurations globales, affectant drastiquement les transports de masse et de flux magnétique. Un nouveau processus d'auto-organisation est identifié, produisant aussi des structures axisymétriques, tandis que le précédent est invalidé par l'action du vent. Les propriétés des vents magnéto-thermiques sont examinées pour différentes magnétisations du disque, permettant de discriminer les vents magnétisés des vents photo-évaporés par leur efficacité d'éjection.

ABSTRACT

Planets form in the gaseous and dusty disks orbiting young stars. These protoplanetary disks are dispersed in a few million years, being accreted onto the central star or evaporated into the interstellar medium. To explain the observed accretion rates, it is commonly assumed that matter is transported through the disk by turbulence, although the mechanism sustaining turbulence is uncertain. On the other side, irradiation by the central star could heat up the disk surface and trigger a photoevaporative wind, but thermal effects cannot account for the observed acceleration and collimation of the wind into a narrow jet perpendicular to the disk plane.

Both issues can be solved if the disk is sensitive to magnetic fields. Weak fields lead to the magnetorotational instability, whose outcome is a state of sustained turbulence. Strong fields can slow down the disk, causing it to accrete while launching a collimated wind. However, the coupling between the disk and the neutral gas is done via electric charges, each of which is outnumbered by several billion neutral molecules. The imperfect coupling between the magnetic field and the neutral gas is described in terms of “non-ideal” effects, introducing new dynamical behaviors.

This thesis is devoted to the transport processes happening inside weakly ionized and weakly magnetized accretion disks ; the role of microphysical effects on the large-scale dynamics of the disk is of primary importance. As a first step, I exclude the wind and examine the impact of non-ideal effects on the turbulent properties near the disk midplane. I show that the flow can spontaneously organize itself if the ionization fraction is low enough ; in this case, accretion is halted and the disk exhibits axisymmetric structures, with possible consequences on planetary formation.

As a second step, I study the launching of disk winds via a global model of stratified disk embedded in a warm atmosphere. This model is the first to compute non-ideal effects from a simplified chemical network in a global geometry. It reveals that the flow is essentially laminar, and that the magnetic field can adopt different global configurations, drastically affecting mass and magnetic flux transport through the disk. A new self-organization process is identified, also leading to the formation of axisymmetric structures, whereas the previous mechanism is discarded by the action of the wind. The properties of magnetothermal winds are examined for various disk magnetizations, allowing discrimination between magnetized and photoevaporative winds based upon their ejection efficiency.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION	1
i CONTEXTE THÉORIQUE & MÉTHODE	
I MAGNÉTOHYDRODYNAMIQUE NON-IDÉALE	9
I.1 Cadre de travail	10
I.2 Dérivation des équations MHD	11
I.3 Effets non-idéaux	14
I.4 Ionisation dans les disques protoplanétaires	21
I.5 Instabilité magnétorotationnelle	27
II SIMULATIONS DE DISQUES PROTOPLANÉTAIRES	35
II.1 Introduction	36
II.2 Méthodes numériques	40
II.3 PLUTO	48
II.4 Infrastructures de calcul	58
ii MODÈLES DE DISQUES NON-STRATIFIÉS	
III MODÈLES DE DISQUES NON-STRATIFIÉS	63
III.1 Description du modèle	64
III.2 Configuration standard	66
III.3 Précautions supplémentaires	70
IV SIMULATIONS CYLINDRIQUES 3D EN MHD IDÉALE	79
IV.1 Convergence en résolution	81
IV.2 Diagnostiques usuels en turbulence MRI	83
IV.3 Loi phénoménologique du transport turbulent	85
V SIMULATIONS AXISYMETRIQUES 2D EN MHD-HALL	91
V.1 Aperçu global	92
V.2 Écoulements zonaux	95
V.3 Plasmoïdes	100
V.4 Polarité du flux net vertical	102
VI SIMULATIONS CYLINDRIQUES 3D EN MHD HALL	105
VI.1 Comparaison aux travaux précédents	106
VI.2 Influence du paramètre Hall	109
VI.3 Menaces à l'auto-organisation	118
iii MODÈLES DE DISQUES STRATIFIÉS	
VII MODÈLE NUMÉRIQUE	127
VII.1 Enjeux et objectifs	128
VII.2 Construction du modèle	130
VII.3 Configuration standard	134
VII.4 Modèle d'ionisation	140
VIII DISQUES STRATIFIÉS EN MHD NON-IDÉALE	147
VIII.1 Diagnostiques	149

VIII.2	Simulation de référence	149
VIII.3	Couronne chaude	154
VIII.4	Configuration magnétique globale	161
VIII.5	Écoulements zonaux	172
IX	MHD IDÉALE ET DISQUES IRRADIÉS	183
IX.1	MHD idéale du disque interne	184
IX.2	Modèles de disques irradiés	188
	SYNTHÈSE ET PERSPECTIVES	203
	Annexes	
A	MÉTHODES SPECTRALES ET MODES PROPRES MRI	209
A.1	Méthode de validation	210
A.2	Validation en géométrie cylindrique	225
A.3	Validation en géométrie sphérique	233
B	AUTO-ORGANISATION EN ÉCOULEMENTS ZONAUX	239
B.1	Simulations globales stratifiées	240
B.2	Shearing-boxes non-stratifiées	242
B.3	Simulations cylindriques non-stratifiées	246
C	ÉQUILIBRES MAGNÉTOHYDRODYNAMIQUES	249
C.1	Équations fondamentales	249
C.2	Écoulement képlerien cylindrique non-stratifié	249
C.3	Disque képlerien stratifié	250
C.4	Chauffage coronal progressif	254
D	DIGRESSIONS	257
D.1	Équation d'induction non-idéale en champ moyen	257
D.2	Écoulements zonaux en MHD Hall non-stratifiée	259
D.3	Bilans de conservation et assimilation de données	262
	BIBLIOGRAPHIE	265

TABLE DES FIGURES

FIGURE 1	Disques protoplanétaires en lumière visible	1
FIGURE 2	Disques protoplanétaires en infrarouge lointain	2
FIGURE 3	Disque de poussières millimétriques dans HL Tauri	3
FIGURE 4	Durée de vie des disques protoplanétaires	3
FIGURE 5	Lobe moléculaire et jet atomique dans HH30	4
FIGURE 6	Accélération et collimation d'un vent magnétisés	5
FIGURE I.1	Illustration de la dérive de Hall	15
FIGURE I.2	Effet Hall en régime linéaire	17
FIGURE I.3	Ondes caractéristiques liée à l'effet Hall	18
FIGURE I.4	Fraction d'ionisation dans les disques	24
FIGURE I.5	Hierarchie des effets MHD non-idéaux	25
FIGURE I.6	Intensité des effets MHD non-idéaux	26
FIGURE I.7	Impact des grains sur les diffusivités	27
FIGURE I.8	Cisaillement d'une onde polarisée circulairement	30
FIGURE I.9	Taux de croissance HSI	34
FIGURE II.1	Modèles stationnaires et dynamiques de disques	37
FIGURE II.2	Simulations locales et globales de turbulence MRI	38
FIGURE II.3	Simulations globales en MHD résistive+ambipolaire	39
FIGURE II.4	Auto-organisation en MHD Hall	40
FIGURE II.5	Précision des méthodes spectrales	42
FIGURE II.6	Phénomène de Gibbs	44
FIGURE II.7	Méthode des éléments finis	45
FIGURE II.8	Méthode SPH : exemples de noyaux	46
FIGURE II.9	Problème de Riemann	52
FIGURE II.10	Reconstruction linéaire sous-maille	53
FIGURE II.11	Implémentation Hall en terme source	56
FIGURE II.12	Implémentation Hall en terme source	56
FIGURE II.13	Implémentation Hall dans le solveur de Riemann	57
FIGURE II.14	Centre de calcul grenoblois CIMENT	58
FIGURE II.15	Centre de calcul national IDRIS	59
FIGURE III.1	Géométrie du domaine cylindrique	66
FIGURE III.2	Taux de croissance MRI en champ critique	68
FIGURE III.3	Stabilité hydro du setup non-stratifié	69
FIGURE III.4	Ondes spirales dans un run hydrodynamique	71
FIGURE III.5	Réflexions d'ondes spirales au bord interne	71
FIGURE III.6	Simple zone tampon	74
FIGURE III.7	Double zone tampon	74
FIGURE III.8	Réflexions d'ondes spirales au bord externe	75
FIGURE III.9	Pertes de flux magnétique	77
FIGURE III.10	Ajustement du flux en simulations non-stratifiées	78
FIGURE IV.1	Test de résolution en MHD idéale non-stratifiée	82

FIGURE IV.2	Test de résolution en MHD idéale non-stratifiée . . .	83
FIGURE IV.3	Ondes spirales en MHD 3D non-stratifiée	84
FIGURE IV.4	Rapport de stress en turbulence MRI non-stratifiée	84
FIGURE IV.5	Convergence en MHD idéale non-stratifiée	85
FIGURE IV.6	Modélisation du couple turbulent en MHD idéale .	89
FIGURE V.1	Taux de croissance Hall-MRI	93
FIGURE V.2	Saturation non-linéaire de la HSI 2D	94
FIGURE V.3	HSI non-linéaire 2D : dépendance en résolution . .	94
FIGURE V.4	Conservation de la vorticité canonique	96
FIGURE V.5	Auto-organisation en MHD Hall non-stratifiée . . .	97
FIGURE V.6	Stabilité des écoulements zonaux	97
FIGURE V.7	Confinement radial des écoulements zonaux	98
FIGURE V.8	Confinement Hall versus diffusion Ohm	99
FIGURE V.9	Dérive radiale des écoulements zonaux	100
FIGURE V.10	Vitesse de dérive des écoulements zonaux	101
FIGURE V.11	Plasmoïdes en MDHD Hall axisymétrique	102
FIGURE V.12	MHD Hall 2D à champ négatif : carte de stabilité .	103
FIGURE V.13	MHD Hall 2D à champ négatif : auto-stabilisation .	103
FIGURE VI.1	O’Keefe & Downes : masse et flux magnétique . . .	107
FIGURE VI.2	O’Keefe & Downes : densité instantanée	107
FIGURE VI.3	O’Keefe & Downes : turbulence	108
FIGURE VI.4	Transport turbulent en MHD Hall 3D	111
FIGURE VI.5	Longueur de corrélation en MHD Hall 3D	112
FIGURE VI.6	Hall faible : snapshot turbulent	112
FIGURE VI.7	Hall faible : profils de couples turbulents	113
FIGURE VI.8	Accrétion de plasmoïdes en 3D	114
FIGURE VI.9	Vortex en MHD Hall : flux magnétique et densité .	115
FIGURE VI.10	Vortex en MHD Hall : vorticité et stress projeté . . .	116
FIGURE VI.11	Hall fort : bandes de flux magnétique	116
FIGURE VI.12	Hall fort : stabilité des écoulements zonaux	117
FIGURE VI.13	Hall fort : déviations au profil képlerien	118
FIGURE VI.14	Auto-organisation Hall plus diffusion ambipolaire .	121
FIGURE VI.15	Auto-organisation Hall versus diffusion ambipolaire	122
FIGURE VI.16	Résistivité effective en MHD Hall + ambipolaire . .	123
FIGURE VII.1	Instabilité de cisaillement vertical : exemple	132
FIGURE VII.2	Disque stratifié à deux températures	135
FIGURE VII.3	Domaine sphérique standard	136
FIGURE VII.4	Vitesse du son et fraction d’ionisation	143
FIGURE VII.5	Effets non-idéaux : profils verticaux	145
FIGURE VII.6	Effets non-idéaux : profils radiaux	145
FIGURE VIII.1	R10 – M3 – C2 : structure globale	151
FIGURE VIII.2	R10 – M3 – C2 : stabilité WKB	152
FIGURE VIII.3	3D – R1 – M4 versus 3D – R1 – P4	153
FIGURE VIII.4	R10 – M3 – C2 : profils radiaux de stress normalisé	154
FIGURE VIII.5	R10 – M3 – C2 : composantes d’accrétion	155
FIGURE VIII.6	R10 – M3 : carte poloïdale	156

FIGURE VIII.7	R10 – M3 : vitesses caractéristiques	157
FIGURE VIII.8	R10 – M3 : dynamique du vent	158
FIGURE VIII.9	R10 – M3 : invariant de Bernoulli	160
FIGURE VIII.10	Vents magnétothermiques et magnétisation	161
FIGURE VIII.11	R1 – P4 – C4 : circulation méridionale	163
FIGURE VIII.12	R1 – P4 – C4 : équilibre magnétique	165
FIGURE VIII.13	R1 – P4 : configurations mixtes	166
FIGURE VIII.14	Accrétion-éjection versus circulation méridionale	167
FIGURE VIII.15	R1 – M3 : configurations unilatérales	168
FIGURE VIII.16	R1 – P2 : coefficients de symétrie	169
FIGURE VIII.17	R1 – P2 : transport de la nappe de courant	170
FIGURE VIII.18	Configuration magnétique globale	171
FIGURE VIII.19	R1 – P2 : écoulements zonaux	173
FIGURE VIII.20	R1 – P3 : 2D versus 3D	174
FIGURE VIII.21	2π – R1 – P2 : cartes équatoriales	175
FIGURE VIII.22	2π – R1 – P2 : turbulence sonique	175
FIGURE VIII.23	R1 – P3 – H : transport du flux magnétique	177
FIGURE VIII.24	R1 – P2 : confinement magnétique	178
FIGURE VIII.25	EMF ambipolaire et projection du courant électrique	179
FIGURE VIII.26	R1 – P2 : profils radiaux de stress	180
FIGURE VIII.27	R1 – P2 : saturation de l’auto-organisation	182
FIGURE IX.1	ID1 & ID2 : écoulement moyen	186
FIGURE IX.2	ID1 & ID2 : nombres adimensionnés	187
FIGURE IX.3	X30 : profils verticaux de température	193
FIGURE IX.4	Chargement en masse du vent hydro	194
FIGURE IX.5	Cartes moyennes : température coronale	195
FIGURE IX.6	Carte moyenne : écoulement	195
FIGURE IX.7	Vents magnétothermiques : Mach coronal	196
FIGURE IX.8	Chargement en masse du vent MHD	197
FIGURE IX.9	Magnétisation et transition disque-couronne	198
FIGURE IX.10	Vents magnétothermiques et magnétisation	200
FIGURE IX.11	S3 : corrugation de la nappe de courant	201
FIGURE A.1	Bases satisfaisant Dirichlet et Neumann	214
FIGURE A.2	Modes propres du Laplacien	217
FIGURE A.3	Précision des méthodes spectrales	218
FIGURE A.4	Systèmes couplés via Galerkin-Chebyshev	219
FIGURE A.5	Non-convergence de Galerkin-Chebyshev	220
FIGURE A.6	Collocation-Chebyshev sur plusieurs champs	220
FIGURE A.7	Modes propres du laplacien 2D cartésien	223
FIGURE A.8	Modes propres du laplacien 2D sphérique	224
FIGURE A.9	Laplacien 2D sphérique, conditions hybrides	224
FIGURE A.10	Validation du laplacien sphérique	225
FIGURE A.11	Spectre MRI idéal cylindrique	229
FIGURE A.12	Spectre HSI cylindrique	230
FIGURE A.13	Carte de taux de croissance HSI	231
FIGURE A.14	Taux de croissance d’un mode HSI cylindrique	231

FIGURE A.15	Géométrie d'un mode propre HSI cylindrique . . .	233
FIGURE A.16	Matrice pour six champs en deux dimensions . . .	235
FIGURE A.17	Mode propre MRI 2D sphérique (factorisation QR)	236
FIGURE A.18	Modes MRI 2D sphérique par itération d'Arnoldi .	237
FIGURE A.19	Modes MRI 2D sphérique par itération d'Arnoldi .	237
FIGURE B.1	Écoulements zonaux en MHD idéale 2D stratifiée .	241
FIGURE B.2	Écoulements zonaux en MHD idéale stratifiée . . .	242
FIGURE B.3	Écoulements zonaux en MHD idéale : masse & flux	243
FIGURE B.4	Auto-organisation en MHD idéale shearing-box . .	244
FIGURE B.5	Auto-organisation en MHD idéale shearing-box . .	244
FIGURE B.6	Auto-organisation shearing-box : relations de phase	245
FIGURE B.7	Auto-organisation ambipolaire non-stratifiée	247
FIGURE B.8	Auto-organisation ambipolaire non-stratifiée	247
FIGURE C.1	Chauffage coronal progressif : profils de densité . .	256
FIGURE C.2	Chauffage coronal progressif : cartes 2D	256
FIGURE D.1	Localisation des bandes de flux magnétique	261
FIGURE D.2	Correction des flux par assimilation des variations .	263

LISTE DES TABLEAUX

TABLE IV.1	Simulations 3D non-stratifiées en MHD idéale	81
TABLE IV.2	Modélisation du couple turbulent en MHD idéale .	88
TABLE V.1	Simulations 2D axisymétriques en MHD Hall	92
TABLE VI.1	Simulations 3D en MHD Hall non-stratifiée	110
TABLE VI.2	Simulations 3D en MHD Hall avec champ toroïdal	119
TABLE VI.3	Simulations 3D en MHD Hall + Ohm	120
TABLE VI.4	Simulations 3D en MHD Hall + ambipolaire	121
TABLE VII.1	Conversions d'unités code – physique	142
TABLE VIII.1	Simulations stratifiées en MHD non-idéale	148
TABLE VIII.2	Configuration finale des simulations stratifiées . . .	172
TABLE IX.1	Simulations stratifiées en MHD idéale	185
TABLE IX.2	Disques irradiés en MHD non-idéale	192
TABLE B.1	Écoulements zonaux en MHD idéale	240

ACRONYMES

AU	Unité astronomique (Astronomical Unit)
CPU	Unité de calcul (Central Processing Unit)
CFL	Critère de stabilité ou coefficient de Courant–Friedrichs–Lewy
EDO	Équation différentielle ordinaire
EDP	Équation aux dérivées partielles
EMF	Champ électrique électromoteur (Electro-Motive force)
EUV	Ultraviolets extrêmes (Extreme Ultra-Violet)
FUV	Ultraviolets lointains (Far Ultra-Violet)
HSI	Instabilité de cisaillement Hall (Hall Shear Instability)
MHD	Magnéto-Hydro-Dynamique
MPI	Message Passing Interface
MRI	Instabilité magnéto-rotationnelle (Magneto-Rotational Instability)
RWI	Instabilité d’ondes de Rossby (Rossby Wave Instability)
SPH	Smoothed Particle Hydrodynamics
VSI	Instabilité de cisaillement vertical (Vertical-Shear Instability)
WKB	Wentzel - Kramers - Brillouin (approximation)

INTRODUCTION

FORMATION PLANÉTAIRE ET STRUCTURE DES DISQUES

Avec le développement de méthodes d'observation de plus en plus performantes, le nombre de planètes extra-solaires détectées a explosé ces dernières années [266, 267], motivant plus que jamais l'étude des conditions de formation planétaire. Il suffit de regarder le système solaire pour supposer que les planètes se forment dans des disques de gaz et de poussières orbitant de jeunes étoiles [172, 190]. En lumière visible, ces disques sont clairement distingués par leur opacité, comme illustré sur la Figure 1.

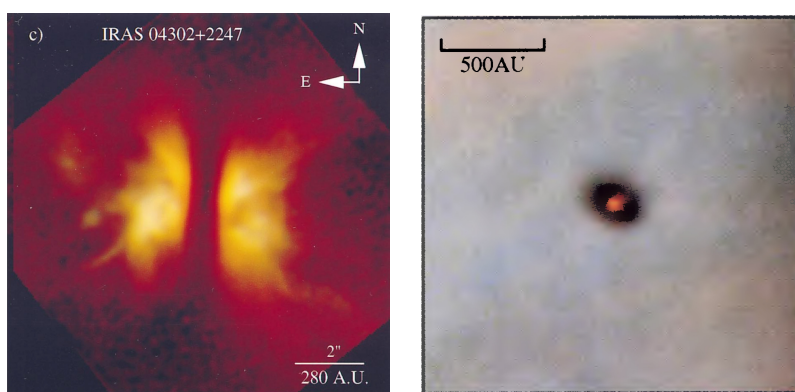


FIGURE 1. – Disques protoplanétaires observés en lumière visible, vus par la tranche (bande sombre verticale à gauche, extrait de Padgett et al. [257]), et vus de face (à droite, extrait de McCaughrean & O'dell [224]).

La formation de planétésimaux par accumulation de poussières pose des difficultés théoriques [46, 75]. La compétition entre coagulation et fragmentation des grains dépend notamment du degré de turbulence dans le disque [350]. Les poussières sont entraînées par le gaz, avec une tendance à migrer vers les maxima de pression [349]. Lorsque des grains centimétriques sont formés, la friction avec le gaz pourrait précipiter leur chute sur l'étoile, privant le disque des matériaux nécessaires à la formation de planètes. Certains disques présentent des structures en fer à cheval dans leur distribution de poussières millimétriques (voir Figure 2). Ces accumulations de poussières sont vraisemblablement associées à des structures dans l'écoulement de gaz. Par exemple, elles peuvent traduire la présence de vortex anti-cycloniques dans le disque [32, 328], lesquels discriminent précisément ces tailles de grains [72, 35]. Divers mécanismes pourraient ensuite expliquer la formation de tels vortex [e.g., 203, 226], dont l'interaction du disque avec une planète [361].

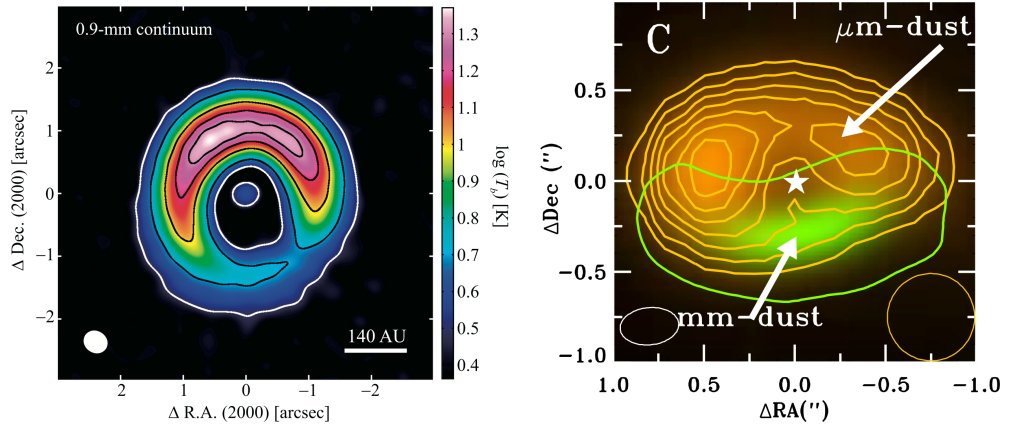


FIGURE 2. – Disques protoplanétaires vus de face dans l’infrarouge lointain, traçant l’émission thermique des poussières ; les grains millimétriques sont concentrés dans une région en forme de banane. Figures extraites de Fukagawa et al. [120] et van der Marel et al. [340].

À ce jour, le seul autre disque ayant révélé une organisation semblable est TW Hydrae [8].

L’observation du disque HL Tauri par l’interféromètre ALMA marque un moment important dans la connaissance des disques protoplanétaires [58]. Pour la première fois, la structure profonde d’un disque est résolue à des échelles inférieures à 10 unités astronomiques. La Figure 3 révèle l’organisation des poussières en anneaux axisymétriques, sédimentés dans le plan du disque et séparés par des sillons [272]. Il est tentant d’interpréter les sillons comme les orbites de planètes [178, 87], ou comme des résonances gravitationnelles liées à leur présence [34], mais d’autres mécanismes pourraient être en cause [e.g., 217, 358, 111]. Si la distribution des grains de poussière reflète un écoulement spontanément organisé, sans influence de planètes, alors il est primordial de comprendre les processus gouvernant la dynamique du gaz dans ces disques.

Je prendrai ce parti tout au long de la thèse : je considérerai des disques de gaz sans inclure l’influence de planètes, afin de me concentrer sur les processus de transport et d’organisation de nature hydrodynamique.

DISPERSION DES DISQUES : ACCRÉTION ET ÉJECTION

En étudiant les populations d’étoiles nées dans différents amas, il est possible d’estimer la durée de vie moyenne des disques protoplanétaires [142]. L’âge de 10 millions d’années est communément pris comme limite supérieure (voir Figure 4), bien que certains disques pourraient être dispersés en moins d’un million d’années [76]. En plus d’imposer des contraintes sur les modèles de formation planétaire, la dispersion du disque requiert des processus de transport efficaces. La matière du disque peut être accrétée par l’étoile, ou bien dispersée dans le milieu interstellaire.

Voir Williams & Cieza [351].

L’accrétion nécessite un transport de moment cinétique : la matière ne peut tomber que si elle est freinée dans sa rotation autour de l’étoile, i.e. si du moment cinétique lui est prélevé. Le mécanisme de transport du mo-

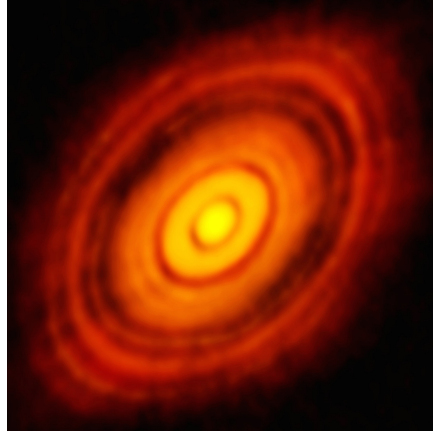


FIGURE 3. – Lumière diffusée en infrarouge millimétrique dans HL Tauri, révélant une série de sept anneaux axisymétriques dans la distribution des poussières millimétriques. Figure extraite de Brogan et al. [58].

ment cinétique est une énigme pour tous les types de disques d'accrétion [260]. Dans le cas des disques protoplanétaires, l'accrétion du gaz sur la surface de l'étoile laisse des signatures observationnelles [52, 147, 141] qui ont permis d'estimer les taux d'accrétion *sur l'étoile* dans de nombreux systèmes [e.g., 245, 93, 2, 220]. Ces taux d'accrétions s'expliquent difficilement dans un disque de gaz képlerien purement hydrodynamique [26, 196].

À noter qu'il n'y a pas de signature non-ambiguë de l'accrétion [68, 9].

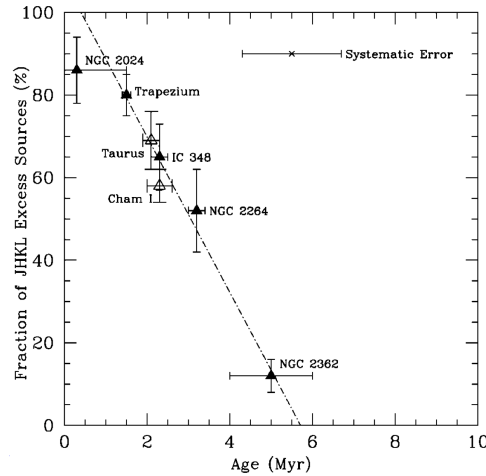


FIGURE 4. – Proportion d'étoiles possédant un disque détecté dans l'infrarouge au sein de différents amas stellaires, en fonction de l'âge de l'amas. Figure extraite de Haisch et al. [142].

D'autre part, la dispersion des disques dans le milieu interstellaire est observée sous plusieurs formes génériques [186, 13]. Les disques émettent un vent moléculaire avec un grand angle d'ouverture, lequel cerne un jet atomique, lancé depuis les régions centrales et pouvant rester collimaté sur de grandes distances [352, 146]. L'ensemble produit des lobes bipolaires, délimitées par un choc s'étendant dans le milieu interstellaire [139, 29].

L'irradiation stellaire peut chauffer la surface du disque à des températures suffisantes pour déclencher son évaporation [3, 4, 262], lorsque la vitesse thermique du gaz avoisine la vitesse d'échappement locale. En décrivant l'accrétion sous forme d'évolution "visqueuse", les modèles hydrodynamiques rendent simultanément compte du fait que la dispersion d'un disque procède de l'intérieur vers l'extérieur, et sur une échelle de temps pouvant être nettement plus courte que l'âge moyen du disque [78, 179].

Néanmoins, les modèles hydrodynamiques ne permettent pas d'expliquer le degré de collimation observé pour les jets atomiques [33, 60], ni l'apparente corrélation entre les taux d'accrétion et d'éjection [61, 145].

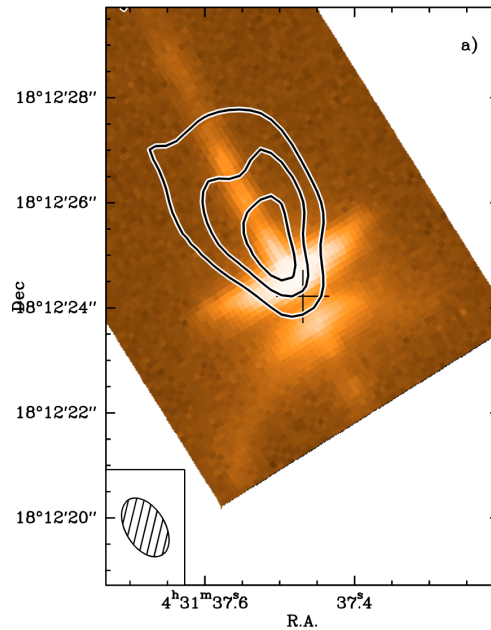


FIGURE 5. – Image optique du disque HH30 vu par la tranche (*teintes oranges*) [59]; les contours tracent l'intensité de la raie d'émission rotationnelle $J = 2 - 1$ de la molécule de CO, englobant le jet collimaté dans l'hémisphère supérieur. Figure extraite de Pety et al. [269].

Les problématiques d'accrétion et d'éjection sont unifiées dans le cas des disques magnétisés [281, 264]. Le champ magnétique interstellaire pourrait être indispensable dès la phase de formation d'un disque [47], et être amplifié de plusieurs ordres de grandeur lors de l'effondrement du nuage parent [122]. Partant d'un nuage sphérique, l'effondrement tend à produire un disque dont l'axe de rotation est aligné avec le champ magnétique global [123]. De telles configurations favorisent le lancement d'un vent magnétocentrifuge [44], où la matière s'échappe du disque en suivant les lignes de champ (voir Figure 6). À la différence d'un vent photoévaporé, le champ magnétique extrait le moment cinétique du disque au cours de ce processus, causant simultanément l'accrétion sur l'étoile [100]. Si l'orientation du champ magnétique ou son intensité ne répondent pas à ce scénario, les disques magnétisés peuvent tout de même afficher des taux d'accré-

tion élevés grâce à l'instabilité magnétorotationnelle [23]. Grâce à elle, un champ magnétique faible peut déstabiliser les écoulements képlériens et entretenir un transport turbulent de moment cinétique [148, 149].

À ce jour, l'orientation du champ magnétique a été mesurée dans plusieurs disques [282, 303, 356]. Le champ est principalement orienté dans le plan du disque, avec une géométrie complexe. L'axe de rotation ne semble pas systématiquement être aligné avec le champ magnétique global [227], mettant en doute les conditions initiales trop symétriques des études théoriques [175]. La principale incertitude est encore l'intensité du champ magnétique, difficilement accessible hors des régions internes [88].

L'orientation du champ magnétique dans le disque est déduite de celle des grains de poussières par polarimétrie, non sans ambiguïtés ; voir Andersson et al. [7].

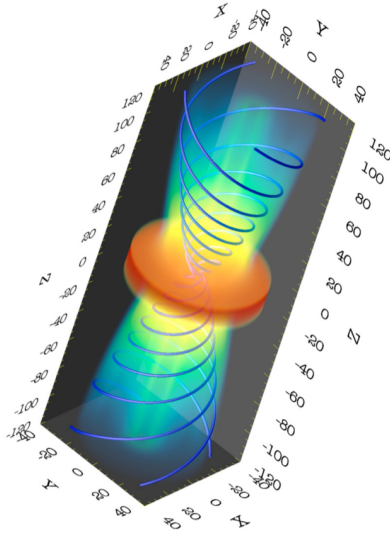


FIGURE 6. – Simulation de vent de disque magnétisé par Zanni et al. [357] : les lignes de champ magnétique torsadées contribuent à l'accélération et à la collimation du vent.

La théorie de l'accrétion-éjection dans les disques magnétisés est appliquée aux microquasars [89] et aux noyaux actifs de galaxie [45, 121]. Elle est moins justifiée dans les régions externes des disques protoplanétaires en raison du faible degré d'ionisation attendu au coeur de ces derniers [124, 119]. La réponse du disque au champ magnétique se fait par l'intermédiaire des charges libres, dont la densité serait inférieure à une pour plusieurs milliards de molécules neutres. Cependant, l'influence du champ magnétique ne peut pas être aussitôt exclue : le milieu est suffisamment collisionnel pour que ces quelques particules ionisées communiquent leur impulsion au gaz neutre. La question est de savoir si les courants électriques au sein du disque peuvent engendrer une force de Lorentz dynamiquement importante. Pour y répondre, il faut comprendre les mécanismes d'induction du champ magnétique dans le disque.

Au delà d'une unité astronomique.

La réponse du champ magnétique à un disque faiblement ionisé peut être décrite dans un cadre magnétohydrodynamique (MHD) non-idéal [243]. Le champ magnétique n'est sensible qu'aux espèces chargées élec-

triquement : les ions, les électrons, et les grains de poussières. Sous l'effet des collisions avec le gaz neutre, ces charges ne conduisent pas idéalement les courants électriques. Une conductivité imparfaite serait nécessaire dès la naissance des disques, sans quoi le champ magnétique pourrait empêcher l'effondrement des nuages moléculaires [228, 208, 222]. Une fois le disque formé, les courants électriques sont d'autant plus faibles que la conductivité est basse, diminuant progressivement l'influence du champ magnétique. Dans cette limite, l'instabilité magnétorotationnelle disparaît [168, 85], mettant en doute l'existence d'un transport turbulent de moment cinétique [124, 265]. Divers observations supportent l'idée d'une faible activité turbulente dans ces disques [164, 241, 102].

L'intensité de la turbulence est contrainte dans peu de disques ; voir aussi Guilloteau et al. [140], Pinte et al. [272].

Les modèles d'accrétion-éjection magnétisés ne sont pas exclus pour autant [345], et la transition d'un disque totalement ionisé à un disque totalement neutre donne lieu à des comportements qualitativement nouveaux. Le faible degré d'ionisation ne cause pas seulement une faible conductivité électrique : le transport du flux magnétique par les charges mobiles pourrait générer des structures axisymétriques et auto-organisées [184].

QUESTIONS DIRECTRICES

J'entreprends d'étudier la dynamique à grande échelle des disques protoplanétaires par l'intermédiaire de simulations numériques dans le régime magnétohydrodynamique non-idéal. J'ai mentionné différentes facettes de ce sujet, chacune étant intriquée plus ou moins étroitement avec les autres. J'identifie trois catégories de problématiques majeures :

- A. Comment est transporté le moment cinétique dans les disques protoplanétaires ? Comment la micro-physique du plasma affecte-t-elle le transport de nature turbulente ?
- B. Comment s'effectue la transition entre un vent thermique et un jet magnétisé lancé depuis la surface du disque ? Comment le disque interagit-il avec ce vent magnétothermique ?
- C. Quelle est l'origine des grandes structures observées dans les distributions de poussières ? Quel rôle ont les effets magnétohydrodynamiques non-idéaux dans ce processus ?

Dans la [Partie i](#), je définis un cadre théorique et méthodologique pour aborder ces questions. Dans la [Partie ii](#) je me concentre sur l'influence des effets MHD non-idéaux au coeur du disque. Dans la [Partie iii](#), je décris l'interaction du disque avec son environnement afin d'étudier conjointement l'accrétion et l'éjection. Des problématiques plus précises seront définies progressivement, en parallèle de nouveaux résumés bibliographiques.

Première partie

CONTEXTE THÉORIQUE & MÉTHODE

Je commence par définir un cadre théorique approprié pour décrire la physique des plasmas collisionnels, faiblement ionisés et faiblement magnétisés. Je présente les principaux effets de physique des plasmas pouvant affecter la dynamique des disques protoplanétaires. Je discute notamment de l'instabilité magnétorotationnelle, dans les régimes linéaires et non-linéaires d'un plasma idéal puis non-idéal. Je décris ensuite les méthodes employées pour affronter concrètement nos problématiques par simulations numériques.

Résumé

Je rappelle des propriétés générales des plasmas collisionnels, faiblement ionisés et faiblement magnétisés. J'exhibe le système d'équations fondamentales de la magnétohydrodynamique non-idéale en partant du modèle multi-fluides. Je discute ensuite chacun des termes affectant l'induction du champ magnétique, en insistant sur leur pertinence dans le contexte des disques protoplanétaires. Je décris finalement l'instabilité magnétorotationnelle, origine privilégiée de la turbulence dans les disques, et j'aborde l'influence des effets non-idéaux sur le régime linéaire de l'instabilité.

Sommaire

1.	Cadre de travail	10
2.	Dérivation des équations MHD	11
3.	Effets non-idéaux	14
3.1.	Résistivité ohmique	14
3.2.	Dérive de Hall	15
3.3.	Diffusion ambipolaire	18
3.4.	Caractérisation des effets non-idéaux	20
3.5.	Conventions d'unités	20
3.6.	Autres extensions de la MHD	21
4.	Ionisation dans les disques protoplanétaires	21
4.1.	Mécanismes d'ionisation et de recombinaison	21
4.2.	Modèles chimiques stationnaires	23
4.3.	Conséquences sur la MHD non-idéale	25
5.	Instabilité magnétorotationnelle	27
5.1.	Cisaillement d'une onde circulaire	28
5.2.	MRI non-idéale en régime linéaire	33

La magnétohydrodynamique est un modèle de description des plasmas magnétisés. Dans ce modèle, le plasma est considéré comme un fluide, sensible au champ magnétique par l'intermédiaire de la force de Lorentz sur les charges qui le compose. Simultanément, le champ magnétique est induit par le mouvement des charges, de sorte que champ et fluide évoluent suivant les contraintes imposées par l'autre. Dans la limites des champs magnétiques faibles, c'est le plasma (la matière) qui impose sa dynamique au champ, et réciproquement dans le cas des champs magnétiques forts. Par analogie aux fluides non-visqueux, un plasma sera considéré comme 'idéal' s'il conduit les courants électriques sans dissipation. Dans le cas contraire, les sources de dissipation magnétique seront attribuées à des effets 'non-idéaux'. Lorsqu'il sera question de MHD idéale, j'ajouterai toujours la propriété au plasma d'être parfaitement ionisé, et magnétisé à l'échelle considérée. Dans les sections suivantes, j'établirai les équations de la MHD non-idéale telles qu'elles sont couramment employées dans l'étude des disques protoplanétaires.

I.1 CADRE DE TRAVAIL

En hydrodynamique, on caractérise usuellement le degré de collisionnalité du milieu par le nombre de Knudsen, rapport du libre parcours moyen à la longueur caractéristique du phénomène considéré. Si ce rapport est petit devant l'unité, la dynamique microscopique peut être lissée pour considérer le milieu comme un fluide continu. Dans un plasma collisionnel, la validité d'une description fluide nécessitera que l'échelle de variations spatiale du champ magnétique soit grande devant le libre parcours moyen des particules. Le couplage électromagnétique entre les espèces est ensuite indispensable pour décrire la dynamique de l'ensemble des espèces comme celle d'un seul fluide.

Exception faite des chocs.

Dans un plasma fortement ionisé, les collisions sont médiées par l'interaction électromagnétique sur des distances beaucoup plus grandes que dans le cas d'un fluide neutre (de l'ordre de la longueur de Debye). La fréquence de collision est alors définie par rapport au temps nécessaire pour significativement dévier une particule chargée de sa trajectoire initiale, et la section efficace des collisions dépend directement de la température [38]. Dans un plasma ionisé, il existe une fréquence caractéristique ne dépendant que de l'intensité du champ magnétique et des propriétés intrinsèques des particules constituant le plasma : la pulsation cyclotron

$$\omega_c := \frac{q}{m} B. \quad (I.1)$$

Une particule chargée dans un champ magnétique uniforme décrit une trajectoire hélicoïdale le long d'une ligne de champ, avec ω_c pour pulsation. Incluant la vitesse caractéristique des particules orthogonalement au champ magnétique, nous définissons le rayon de Larmor $\rho_L := v_{\perp}/\omega_c$. La validité d'une description MHD idéale requiert que le rayon de Larmor soit petit devant l'échelle de variation du champ magnétique, et que la

pulsation cyclotron soit la plus grande fréquence en présence. Ces hypothèses peuvent être mises en défaut dans les plasmas chauds et/ou fortement magnétisés. Néanmoins, les effets de rayon de Larmor fini ne brisent pas nécessairement la validité d’une description fluide (voir [Section I.3.6](#)).

Additionnellement, le fluide doit être électriquement neutre ; les variations de vitesse doivent être faibles devant la vitesse thermique des porteurs de charge les plus mobiles, et les longueurs caractéristiques doivent être grandes devant la longueur de Debye $\lambda_D := \sqrt{\epsilon_0 k_B T / n_e e^2}$.

Une propriété fondamentale des plasmas obéissant à la MHD idéale est contenue dans le théorème d’Alfvén [6] : le flux magnétique traversant un élément de fluide est préservé par la dynamique du plasma (voir par exemple Landau et al. [189], Bellan [38]). On dit souvent que champ et fluide sont gelés l’un dans l’autre. Si l’on représente le champ d’induction par ses “lignes de champ”, celles-ci se déforment pour suivre chaque point du fluide qu’elles traversaient initialement. En conséquence, transport de matière et de flux magnétique sont intimement reliés en MHD idéale. Cette propriété n’est plus vérifiée en MHD non-idéale, et chaque nouvel effet induit le champ magnétique d’une façon qui lui est propre. Comme discuté ci-dessous, les effets MHD non-idéaux contribuent à l’équation d’induction magnétique ; leur impact sur la dynamique du fluide se fait indirectement, en redistribuant le champ d’induction et les courants électriques associés, ou par échanges d’énergie magnétique en énergie thermique.

I.2 DÉRIVATION DES ÉQUATIONS MHD

Considérons un plasma constitué de trois espèces : des électrons (indice ‘e’), des ions de charge arbitraire (indice ‘i’), ainsi qu’une grande majorité de particules neutres (indice ‘n’). La présence de plusieurs espèces neutres ou ioniques ne modifierait pas la forme finale de l’équation d’induction [346]. Considérons que chacune de ces espèces peut être décrite comme un fluide collisionnel (pression scalaire). Les équations gouvernant la dynamique des électrons, des ions et des neutres s’écrivent respectivement :

$$n_e m_e \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = -\nabla P_e + n_e q_e (\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) + \mathbf{R}_{ne} + \mathbf{R}_{ie}, \quad (\text{I.2a})$$

$$n_i m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -\nabla P_i + n_i q_i (\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) + \mathbf{R}_{ei} + \mathbf{R}_{ni}, \quad (\text{I.2b})$$

$$n_n m_n \frac{d\mathbf{v}_n}{dt} = -\nabla P_n + \mathbf{R}_{in} + \mathbf{R}_{en}. \quad (\text{I.2c})$$

Chaque espèce est sensible à sa propre pression, correspondant à un transport d’impulsion non-collisionnel, et les espèces chargées sont sensibles à la force de Lorentz. Les termes du type $\mathbf{R}_{\alpha\beta}$ correspondent à l’échange collisionnel d’impulsion d’une espèce α vers l’espèce β . Cette interaction ne peut dépendre que de la vitesse relative entre les deux espèces, et elle doit faire intervenir le produit des densités de chaque espèce. Elle

peut être simplement modélisée comme un frottement aérodynamique, linéaire par rapport à la vitesse relative :

$$\mathbf{R}_{\alpha\beta} = \rho_\alpha \rho_\beta \gamma_{\alpha\beta} (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta), \quad (\text{I.3})$$

où

$$\gamma_{\alpha\beta} \equiv \langle \sigma_{\alpha\beta} v_{\text{th}} \rangle / (m_\alpha + m_\beta) \quad (\text{I.4})$$

décrit le transfert d'impulsion de l'espèce α vers l'espèce β . Le numérateur encode la géométrie des collisions via la section efficace $\sigma_{\alpha\beta}$, et la cinétique des collisions via la vitesse thermique v_{th} . Ce transfert d'impulsion est optimal lorsque les masses des particules sont égales. Dans le cas où les masses des deux particules sont très différentes, la particule légère se voit rebondir sur un mur rigide sans l'affecter, tandis que la particule lourde se voit traverser un milieu sans résistance à son mouvement.

La charge électrique totale et la densité de courant électrique sont respectivement définies par :

$$Q := \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} = 0 \implies n_i q_i = -n_e q_e, \quad (\text{I.5})$$

$$\mathbf{J} := \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} = n_i q_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) \equiv \nabla \times \mathbf{B} / \mu_0, \quad (\text{I.6})$$

où la dernière égalité dans (I.6) correspond à la limite non-relativiste de l'équation de Maxwell-Ampère. Appelons $x_i := n_i / n_n$ la fraction d'ionisation, $Z := |q_i / q_e|$ le nombre de charges élémentaires par ion, et les rapports de masse $\varepsilon_i := m_i / m_n$ ainsi que $\varepsilon_e := m_e / m_n$. La vitesse moyenne du fluide, pondérée par la densité de chaque espèce :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &:= \sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} / \sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} \\ &= \frac{m_n \mathbf{v}_n + x_i m_i \mathbf{v}_i + x_i Z m_e \mathbf{v}_e}{m_n + x_i m_i + x_i Z m_e} \\ &= \mathbf{v}_n + (\varepsilon_i \mathbf{v}_i + Z \varepsilon_e \mathbf{v}_e) x_i + \mathcal{O}(x_i^2). \end{aligned} \quad (\text{I.7})$$

Il s'agit approximativement de la vitesse du fluide neutre. Appelons

$$\rho := \sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} = n_n m_n (1 + (\varepsilon_i + Z \varepsilon_e) x_i) \quad (\text{I.8})$$

la densité moyenne du fluide ; son évolution obéit à :

$$\partial_t \rho = \sum_{\alpha} \partial_t [n_{\alpha} m_{\alpha}] = - \sum_{\alpha} \nabla \cdot [n_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}] = - \nabla \cdot [\rho \mathbf{u}]. \quad (\text{I.9})$$

Pour décrire l'évolution de l'impulsion du fluide, nous pouvons sommer les équations (I.2a) à (I.2c) :

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \sum_{\alpha} n_{\alpha} m_{\alpha} \frac{d\mathbf{v}_{\alpha}}{dt} \\ &= - \nabla P + n_i q_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) \times \mathbf{B} \\ &= - \nabla P + \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (\text{I.10})$$

Les termes de collision $R_{\alpha\beta}$ sont compensés deux à deux, du fait que l'ensemble du fluide ne peut exercer de force sur lui-même. À ce stade, il nous reste à exprimer la pression en fonction des autres variables du problème, ainsi que le champ électrique \mathbf{E} intervenant dans l'équation d'induction :

$$\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E}. \quad (\text{I.11})$$

Selon les conditions physiques du milieu, la pression pourra suivre une prescription isotherme ($P = \rho c_s^2$), isentropique ($d[P/\rho^\gamma]/dt = 0$), ou bien nous pourrions suivre le troisième moment de l'équation de Boltzmann via une équation pour $\partial_t P$. Pour ce qui est du champ électrique, sa valeur E mesurée dans un référentiel inertiel est liée à celle E' mesurée dans le référentiel comobile au fluide par $E' = E + \mathbf{u} \times \mathbf{B}$. Dans le cas idéal, le plasma est considéré comme un conducteur parfait : E' doit s'annuler dans le référentiel du fluide, d'où l'équation d'induction idéale :

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times [\mathbf{u} \times \mathbf{B}]. \quad (\text{I.12})$$

Pour déterminer le champ électrique E' dans le cas MHD non-idéal, nous commençons par développer (I.7) à faible fraction d'ionisation :

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= n_n m_n \left[\frac{d\mathbf{v}_n}{dt} + \left(\varepsilon_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} + Z\varepsilon_e \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} \right) \times_i \right] \\ &\simeq n_n m_n \frac{d\mathbf{v}_n}{dt} \\ &\simeq -\nabla P_n + \mathbf{R}_{in}, \end{aligned} \quad (\text{I.13})$$

où le terme de collision R_{en} a été négligé devant R_{in} en raison du rapport de masse m_i/m_e . Comparant avec (I.10) et négligeant les gradients de pression des espèces chargées, il apparaît que $R_{in} \simeq \mathbf{J} \times \mathbf{B}$, soit :

$$\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_n \simeq \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{\rho_i \rho_n \gamma_{in}}. \quad (\text{I.14})$$

Une autre façon d'obtenir cette relation est de sommer les équations (I.2a) et (I.2b), puis de supposer que les ions ont atteint leur vitesse terminale (i.e. $dv_i/dt = 0$), sous l'action de la force de Lorentz et des frottements avec les neutres. Négligeons l'inertie et la pression des électrons dans (I.2a) :

$$\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B} \simeq \frac{\mathbf{R}_{ne}}{en_e}, \quad (\text{I.15})$$

avec $e = |q_e|$ la charge élémentaire. En développant le membre de droite :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{ne} &= \rho_n \rho_e \gamma_{ne} [(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) + (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_i)], \\ &= \frac{\rho_n \rho_e \gamma_{ne}}{en_e} \mathbf{J} - \frac{\rho_n \rho_e \gamma_{ne}}{\rho_i \rho_n \gamma_{in}} \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (\text{I.16})$$

Puisque $\rho_e \gamma_{ne}/\rho_i \gamma_{ni} \ll 1$, et $\rho_\alpha \rho_\beta \gamma_{\alpha\beta} = \rho_\beta \rho_\alpha \gamma_{\beta\alpha}$, nous négligerons le second terme du membre de droite de (I.16). Il ne reste plus qu'à déve-

Limite non-relativiste ; voir Landau [188], Landau et al. [189].

R_{ie} est négligé au premier ordre en fraction d'ionisation.

lopper la force électromotrice pour obtenir une loi d'Ohm généralisée :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} &\simeq \mathbf{E} + \mathbf{v}_n \times \mathbf{B} \\ &= \underbrace{\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}}_{\text{Ohm}} + \underbrace{(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) \times \mathbf{B}}_{\text{Hall}} + \underbrace{(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_i) \times \mathbf{B}}_{\text{ambipolaire}} \end{aligned} \quad (\text{I.17a})$$

$$\begin{aligned} &\simeq \frac{\mathbf{R}_{ne}}{en_e} + \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{n_i q_i} - \frac{(\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{\rho_i \rho_n \gamma_{in}} \\ &\simeq \eta \mathbf{J} + \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{en_e} - \frac{(\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{\rho_i \rho_n \gamma_{in}}. \end{aligned} \quad (\text{I.17b})$$

Les trois termes du membre de droite font intervenir la densité de courant $\mathbf{J} \equiv \nabla \times \mathbf{B} / \mu_0$. Ils peuvent être interprétés comme le développement au premier ordre de la MHD idéale par rapport aux gradients de champ magnétique. Ils sont respectivement désignés par résistivité ohmique, dérive de Hall et diffusion ambipolaire. Je présente leurs propriétés essentielles ci-dessous, et réfère le lecteur à Nakano & Umebayashi [243], Wardle & Ng [346] pour d'autres dérivations dans un contexte astrophysique.

1.3 EFFETS NON-IDÉAUX

1.3.1 Résistivité ohmique

La résistivité ohmique est provient essentiellement des collisions subies par les porteurs de charges les plus mobiles, i.e. électrons-neutres :

$$\eta = \frac{\rho_n \rho_e \gamma_{ne}}{e^2 n_e^2}. \quad (\text{I.18})$$

Ces collisions provoquent une dérive entre le fluide d'électrons et le champ magnétique. Dans (I.17a), la résistivité correspond au terme $\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}$, c'est à dire au champ électrique dans le référentiel co-mobile au fluide d'électrons. Dire que le champ électrique n'est pas nul dans ce référentiel revient à dire que le fluide électronique n'est pas un conducteur parfait, bien qu'il s'agisse de l'espèce la plus mobile en présence. Le terme résultant dans l'équation d'induction est

$$\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times [\eta \mathbf{J}], \quad (\text{I.19})$$

traduisant une diffusion du champ magnétique. En multipliant par \mathbf{B} et intégrant, nous obtenons le taux de variation de l'énergie magnétique

$$\begin{aligned} \partial_t \int_{\mathcal{V}} \frac{B^2}{2} dV &= - \int_{\mathcal{V}} \mathbf{B} \cdot [\nabla \times \eta \mathbf{J}] dV \\ &= \int_{\mathcal{V}} \{ \nabla \cdot [\eta \mathbf{J} \times \mathbf{B}] - \eta \mathbf{J} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \} dV \\ &= \int_{\partial \mathcal{V}} (\eta \mathbf{J} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} - \int_{\mathcal{V}} \mu_0 \eta \mathbf{J}^2 dV. \end{aligned} \quad (\text{I.20})$$

Le premier terme correspond au flux d'énergie à travers les bords du volume d'intégration. Le second terme est défini négatif, et décrit effectivement la dissipation ohmique d'énergie magnétique.

L'influence de la résistivité ohmique sur le transport de flux magnétique est la plus simple à intuitier : dans un plasma au repos (i.e. vitesse macroscopique $u = 0$ partout), une accumulation de flux magnétique est diffusée à travers le fluide. Réciproquement, la résistivité permet au plasma de passer à travers des lignes de champ qui seraient maintenues statiques.

1.3.2 Dérive de Hall

Le second terme de (1.17b) est la dérive de Hall :

$$\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \left[\frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{en_e} \right]. \quad (1.21)$$

Comme elle ne fait pas intervenir de collisions, nous devinons déjà qu'elle est non-dissipative. Son influence sur l'énergie magnétique est

$$\begin{aligned} \partial_t \int_V \frac{en_e}{2} B^2 dV &= \int_V \{ \nabla \cdot [(\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] - \mu_0 (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{J} \} dV \\ &= \int_{\partial V} \{ (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \} \cdot d\mathbf{S}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

En d'autres termes, la dérive de Hall peut seulement transporter de l'énergie magnétique, sans création ni pertes. À l'échelle cinétique, on parlera de "dérive $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ " : en présence de champs électriques et magnétiques perpendiculaires, une charge va spontanément dériver dans la troisième direction, comme illustré sur la Figure 1.1. Réciproquement, si les charges électriques dérivent perpendiculairement au champ magnétique, cela engendre un champ électrique de Hall dans la troisième direction. De manière générale, les termes non-diagonaux du tenseurs de conductivité pourront toujours être identifiés à une dérive de type Hall [189].

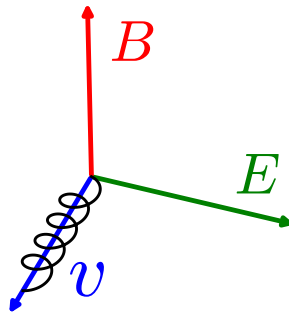


FIGURE 1.1. – Trajectoire d'une particule chargée soumise à un champ électrique E et magnétique B perpendiculaires : la particule accélère suivant E , et tandis qu'elle gagne de la vitesse, la force de Lorentz $F = v \times B$ la dévie dans une direction perpendiculaire à E ainsi qu'à B .

Cette dérive ne dépend pas du signe des charges : en présence de champs électriques et magnétiques perpendiculaires, les charges positives et négatives vont toutes dériver dans la même direction, et à la même vitesse moyenne $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2$. Pour générer un courant, la dérive de Hall requiert une différence de mobilité entre les ions et les électrons. Cette différence est appréciable lorsque les électrons sont magnétisés à l'échelle considérée, mais pas les ions. Dans le cas d'un plasma électron-ion parfaitement ionisé, la dérive de Hall peut être négligée si :

- A. la force de Lorentz domine le gradient de pression dans (I.10); si ω est la fréquence caractéristique du problème, alors le rapport de l'EMF Hall à l'EMF idéale est celui de la fréquence caractéristique ω par rapport à la fréquence cyclotron des ions ω_{ci} [38];
- B. la vitesse relative électron-ion est petite devant la vitesse d'Alfvén; le rapport de l'EMF Hall à l'EMF idéale est alors celui de la longueur de peau des ions $\delta_i := \omega_{pi}/c$ comparé à la longueur caractéristique ℓ_0 du problème, avec ω_{pi} la pulsation plasma des ions [263].

En résumé, l'effet Hall est négligeable dans la mesure où les ions sont magnétisés aux échelles spatio-temporelles considérées. Nous nous attachons plutôt au second critère dans le cas des plasmas faiblement ionisés, car pour un courant électrique donné, la vitesse relative des charges est d'autant plus grande que leur densité est faible. Nous pouvons comparer les EMFs Hall et idéale pour extraire le rapport de longueurs suivant :

$$\begin{aligned} \frac{J}{en_e v_A} &\sim \frac{1}{en_e} \frac{B}{\mu_0 \ell_0} \frac{\sqrt{\mu_0 n_n m_n}}{B} \sim \sqrt{\frac{n_n m_n}{n_i m_i}} \sqrt{\frac{\varepsilon_0 m_i}{Z^2 q_i n_i}} \frac{c}{\ell_0} \\ &\sim \sqrt{\frac{\rho_n}{\rho_i}} \frac{\delta_i}{\ell_0} \equiv \frac{\ell_H}{\ell_0}. \end{aligned} \quad (\text{I.23})$$

La vitesse d'Alfvén est notée v_A , la longueur ℓ_0 correspond à l'échelle caractéristique des variations du champ magnétique, et la *longueur de Hall* ℓ_H définit l'échelle en dessous de laquelle la dérive de Hall domine le terme d'induction idéale. Il s'agit de la longueur de peau inertielle des ions, pondérée par une fonction décroissante de la fraction d'ionisation.

L'équation d'induction Hall peut être réécrite de plusieurs façons, permettant différentes interprétations; j'en propose deux ci-dessous. Premièrement, dans un plasma électron-ion, l'équation d'induction devient :

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{B} &= \nabla \times \left[\mathbf{v}_i \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{en_e} \right] \\ &= \nabla \times [\mathbf{v}_i \times \mathbf{B} - (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) \times \mathbf{B}] = \nabla \times [\mathbf{v}_e \times \mathbf{B}]; \end{aligned} \quad (\text{I.24})$$

correspondant à une équation d'induction idéale suivant le fluide électronique. Le champ magnétique suit les porteurs de charge mobiles, tandis que les ions assurent juste l'électroneutralité. Dans cette limite où les ions sont inertes, la vitesse moyenne du fluide peut être dominée par celle des électrons, incompressibles dans un cadre MHD. Cette interprétation est encore valable dans un plasma majoritairement constitué de neutres, à

conditions que les ions soient parfaitement couplés aux neutres (diffusion ambipolaire nulle). Deuxièmement, l'EMF Hall peut être réécrite comme

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{B} &= -\nabla \times \left[\frac{1}{en_e} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \right] = \nabla \times \left[\frac{1}{\mu_0 en_e} \left(\frac{1}{2} \nabla B^2 - \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} \right) \right] \quad (\text{I.25}) \\ &= \nabla \times \left[\frac{1}{\mu_0 en_e} \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \mathbb{1} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} \right) \right] = \nabla \times \left[\frac{1}{\mu_0 en_e} \nabla \cdot \tilde{\mathcal{M}} \right],\end{aligned}$$

avec $\tilde{\mathcal{M}}$ le tenseur de Maxwell complet. Dans un régime dominé par l'effet Hall, la dynamique du champ magnétique \mathbf{B} est reliée au tenseur des contraintes magnétiques \mathcal{M} par l'intermédiaire de l'effet Hall. Cela fournit un canal pour transporter du flux magnétique sans transport de masse.

Finalement, considérons le rôle de l'effet Hall sur la propagation d'ondes dans un plasma homogène au repos. Après linéarisation de (I.21) autour d'un champ guide $B_0 \mathbf{e}_z$, nous avons :

$$\partial_t \mathbf{B}_1 = -\nabla \times \left[\frac{\mathbf{J}_1 \times \mathbf{B}_0}{en_e} \right] = \frac{B_0 k^2}{\mu_0 en_e} (\mathbf{e}_z \times \mathbf{B}_1). \quad (\text{I.26})$$

Cette équation décrit la rotation de \mathbf{B}_1 dans le plan perpendiculaire à \mathbf{B}_0 et à la pulsation Hall $\omega_H := B_0 k^2 / en_e$, comme illustré sur la [Figure I.2](#).

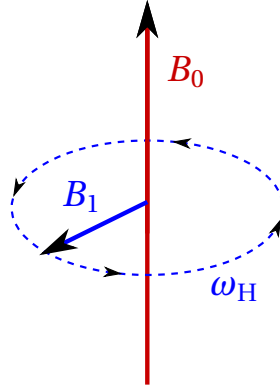


FIGURE I.2. – Dans le régime linéaire, l'effet Hall fait tourner la perturbation B_1 dans le plan perpendiculaire à B_0 à la fréquence ω_H .

Nous voyons apparaître deux propriétés de l'effet Hall en l'absence d'écoulement : ses ondes caractéristiques sont polarisées circulairement, et elles sont dispersives, avec une vitesse de phase décroissante en fonction de la longueur d'onde. Plus précisément, si nous ré-introduisons la réponse du fluide dans l'équation d'induction (I.26), l'effet Hall génère deux nouvelles ondes caractéristiques dans un plasma homogène. Définissant $\ell_H \equiv 1/en_e$, la relation de dispersion du plasma prend la forme

$$\omega^4 - \omega^2 (2k^2 v_A^2 + k^4 \ell_H^2 B_0^2) + k^4 v_A^4 = 0. \quad (\text{I.27})$$

Si nous appelons $k_0 := v_A \sqrt{2}/\ell_H B_0$, nous pouvons expliciter deux catégories de racines, correspondant à deux branches caractéristiques :

$$\omega_{\pm}^2 = k^2 v_A^2 \left[1 + \frac{k^2}{k_0^2} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{k^2}{k_0^2}\right)^2 - 1} \right]. \quad (I.28)$$

Dans la limite $k/k_0 \rightarrow 0$, il s'agit de deux ondes d'Alfvén $\omega^2 \sim k^2 v_A^2$; dans la limite $k/k_0 \rightarrow +\infty$, nous obtenons deux ondes dispersives :

$$\omega_+^2 \xrightarrow{\frac{k}{k_0} \rightarrow +\infty} 2 \frac{k^4}{k_0^2} v_A^2 \quad (I.29a)$$

$$\omega_-^2 \xrightarrow{\frac{k}{k_0} \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} k_0^2 v_A^2 \quad (I.29b)$$

respectivement dénommées ondes whistler et ion-cyclotron (voir [Figure I.3](#)).

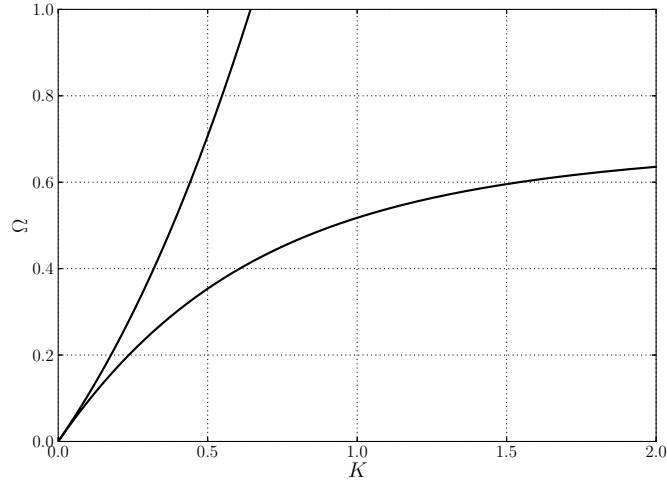


FIGURE I.3. – Relation de dispersion $\Omega := \omega/k_0 v_A$ en fonction de $K := k/k_0$ des ondes whistler (convexe) et ions-cyclotron (concave).

1.3.3 Diffusion ambipolaire

Le dernier terme de (I.17b) peut être réécrit

$$\frac{(\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{\rho_i \rho_n \gamma_{in}} = \frac{\mathbf{F}}{\rho_i \rho_n \gamma_{in}} \times \mathbf{B} \quad (I.30a)$$

$$= \frac{(\mathbf{J} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{J}}{\rho_i \rho_n \gamma_{in}} = \frac{-B^2 \mathbf{J}_\perp}{\rho_i \rho_n \gamma_{in}} \equiv -\eta_A \mathbf{J}_\perp, \quad (I.30b)$$

avec $\mathbf{F} := \mathbf{J} \times \mathbf{B}$ la force de Lorentz, et $\mathbf{J}_\perp := \mathbf{J} - (\mathbf{J} \cdot \mathbf{B})/(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})$ le courant électrique projeté perpendiculairement au champ magnétique local. Il peut être utile de faire l'analogie avec l'équation d'induction idéale (I.12), où le champ de vitesse \mathbf{u} serait remplacé par le champ de force de Lorentz \mathbf{F} .

La dernière égalité dans (I.30b) permet de comparer l'EMF ambipolaire à l'EMF ohmique, avec deux différences notables. Premièrement, la diffusivité $\eta_A \equiv \tau_{in} v_A^2$ dépend du carré de la vitesse d'Alfvén locale, entraînant une réponse non-linéaire du champ sur lui-même. Deuxièmement, seule la composante du courant électrique perpendiculaire au champ magnétique intervient, causant une diffusion anisotrope.

Une intuition supplémentaire peut être gagnée dans le régime linéaire. Soit $B_0 e_z$ un champ d'induction "guide" sur lequel nous ajoutons une perturbation $B_1 \exp[ik \cdot r]$; au premier ordre en perturbation, l'équation d'induction ambipolaire est :

$$\partial_t \mathbf{B}_1 = \nabla \times \left[\frac{(\mathbf{J}_1 \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_0}{\rho_i \rho_n \gamma_{in}} \right] = \frac{B_0^2}{\rho_i \rho_n \gamma_{in}} \partial_z^2 \mathbf{B}_1 = -\eta_A k_z^2 \mathbf{B}_1. \quad (\text{I.31})$$

En d'autres termes, une perturbation magnétique est diffusée dans la direction du champ guide, et d'autant plus rapidement que ce dernier est intense. La diffusion ambipolaire agit sur l'énergie magnétique de façon analogue à la résistivité ohmique (voir (I.20)) :

$$\partial_t \int_{\mathcal{V}} \frac{B^2}{2} dV = \int_{\partial \mathcal{V}} (\eta_A \mathbf{J}_\perp \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} - \int_{\mathcal{V}} \mu_0 \eta_A J_\perp^2 dV. \quad (\text{I.32})$$

Elle est également définie négative : la diffusion ambipolaire ne peut que dissiper de l'énergie magnétique. En revanche, son caractère anisotrope lui permet théoriquement de concentrer du flux magnétique dans une dimension, à condition de diffuser le champ au moins aussi efficacement dans les autres dimensions ; je reviendrai sur ce cas de figure.

Comme indiqué dans les équations (I.17a) et (I.14), la diffusion ambipolaire correspond à la dérive du fluide ionique par rapport au fluide neutre. Cette dérive des ions résulte de l'action combinée de la force de Lorentz (motrice) et de la friction avec le fluide neutre (modératrice). Un point mérite maintenant d'être éclairci. La diffusion ambipolaire fait intervenir le taux de collisions ion-neutre, et j'ai montré via (I.32) qu'il s'agit bien d'un processus dissipatif. Paradoxalement, la diffusivité η_A est une fonction décroissante du taux de collision ion-neutre. Cela vient du fait que la vitesse terminale de dérive $v_i - v_n$ est d'autant plus grande que les collisions sont peu fréquentes, et c'est bien la vitesse de dérive qui intervient dans la dissipation d'énergie magnétique. Ces considérations ne sont valables que dans le cas d'un milieu fortement collisionnel, et il serait injustifié de prendre la limite $n_n \rightarrow 0$, même en maintenant $n_i/n_n \ll 1$.

Mention doit être faite d'un autre processus désigné par "diffusion ambipolaire", appartenant à la physique des plasmas froids non-magnétisés. Dans un plasma faiblement ionisé et isotherme, les électrons ont une vitesse thermique plus élevée que les ions d'un facteur $\sqrt{m_i/m_e}$. En conséquence, leur diffusivité au sein du gaz neutre est également plus élevée. Néanmoins, les électrons ne peuvent pas diffuser plus vite que les ions sans créer une séparation de charge, ainsi qu'un champ électrique ambipolaire associé. Le résultat net est une réduction de la diffusivité effective

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \implies B_1 \perp k.$$

I.e. le délais pour atteindre la vitesse terminale de dérive $v_i - v_n$ doit être court devant les temps macroscopiques.

Voir par exemple Pitaevskii & Lifshitz [275], Rax [283].

des électrons, et une augmentation de la diffusivité effective des ions. Le point commun avec le processus que j'appellerai "diffusion ambipolaire" est la dérive des ions par rapport au fluide neutre.

1.3.4 Caractérisation des effets non-idéaux

Il existe différentes façons de caractériser l'intensité des effets MHD non-idéaux, sans convention unique. Je récapitule les caractérisations que l'on trouve le plus souvent dans la littérature et tout au long de cette thèse.

Premièrement, chaque terme de l'équation d'induction (1.17b) peut être identifié à une diffusivité effective [344] :

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times [\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \eta_O \mathbf{J} - \eta_H \mathbf{J} \times \mathbf{e}_B + \eta_A (\mathbf{J} \times \mathbf{e}_B) \times \mathbf{e}_B], \quad (1.33)$$

avec le vecteur unitaire orienté suivant $\mathbf{e}_b \equiv \mathbf{B} / \sqrt{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}}$, même si la dérive de Hall n'est pas à proprement parler un processus diffusif. Nous pouvons ensuite définir différents nombres adimensionnés, dépendant de la vitesse d'Alfvén v_A , de la hauteur caractéristique h et de la fréquence caractéristique Ω du problème considéré :

le nombre de *Reynolds*

$$\mathcal{R} := \frac{\Omega h^2}{\eta}, \quad (1.34)$$

le nombre de *Lundquist*

$$\mathcal{S} := \frac{v_A h}{\eta}, \quad (1.35)$$

et le nombre d'*Elsasser*

$$\mathcal{L} := \frac{v_A^2}{\eta \Omega}. \quad (1.36)$$

Ces trois nombres peuvent être pertinents selon le phénomène considéré. Nous privilégierons un ensemble de trois nombres adimensionnés qui ne dépendent pas de l'intensité du champ magnétique : le nombre de Reynolds ohmique, le nombre d'Elsasser ambipolaire $\mathcal{L}_A \equiv 1/\Omega \tau_{in}$, et l'inverse du nombre de Lundquist Hall :

$$\mathcal{L} := \ell_H / h. \quad (1.37)$$

Ces nombres seront plus aisément transposables entre des études utilisant différentes intensité de champ magnétique.

1.3.5 Conventions d'unités

Afin d'alléger les notations, j'emploierai de préférence un système d'unités du type CGS, sans les coefficients ϵ_0 et μ_0 . Les facteurs 4π et c seront absorbés dans la définition du champ magnétique, de sorte que la vitesse d'Alfvén soit définie comme $v_A \equiv B / \sqrt{\rho}$, l'énergie magnétique est $B^2/2$, le courant électrique est $\mathbf{J} \equiv \nabla \times \mathbf{B}$. Dans ce système d'unités, la longueur de Hall $\ell_H \equiv 1/en_e$ apparaît directement dans l'équation d'induction.

I.3.6 *Autres extensions de la MHD*

Dans la limite d'un plasma faiblement collisionnel, le champ magnétique parvient à imposer une direction privilégiée à l'échelle microscopique, autorisant la distribution de vitesse des particules à devenir anisotrope. Une approximation fluide est encore envisageable dans ce régime [74]. La forme générale d'un tenseur de pression possédant une direction privilégiée e_B est $P = p_{\perp} \mathbb{1} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) e_B \otimes e_B$ [38]. Il incorpore deux pressions distinctes : l'une parallèle au champ magnétique, l'autre perpendiculaire. Cette anisotropie représente l'inclusion la plus simple d'effets cinétiques dans le cadre MHD. Elle autorise de nouveaux canaux d'échanges vers l'une ou l'autre des pressions, et permet notamment le développement d'instabilités de nature cinétique [e.g., 185].

Les gradients de pression électronique et ionique peuvent également devenir importants lorsque $\beta_{i,e} < 1$. Si les gradients de densité et de pression ne sont pas colinéaires, ils permettent de générer des champs magnétiques à partir de zéro [301, 244]. Entre autre, ces termes peuvent devenir importants dans la modélisation des sites de reconnexion magnétique [219]. Ils sont négligés dans notre cas car les densités électronique et ionique seront supposées faibles devant la pression du gaz neutre, et les pressions scalaires satisferont une équation d'état barotrope en bonne approximation.

I.4 IONISATION DANS LES DISQUES PROTOPLANÉTAIRES

Comme nous l'avons vu en construisant l'équation d'induction (1.17), la fraction d'ionisation contrôle l'importance des effets MHD non-idéaux. Elle n'est pas nécessaire pour discuter de leurs intensités relatives (voir Kunz & Balbus [183], Wardle [344] et Section 1.4.3), mais elle joue un rôle critique dans la construction de modèle de disques "réalistes". La fraction d'ionisation dans le plan médian du disque n'est pas aisément accessible aux observations ; elle nécessite d'établir des modèles d'ionisation. Je discute dans cette section des mécanismes d'ionisation et de recombinaison dans les disques protoplanétaires, puis de la détermination des fractions d'ionisation par l'intermédiaire de modèles de structure. Voir Draine [90] pour un exposé approfondi sur l'ionisation du milieu interstellaire.

I.4.1 *Mécanismes d'ionisation et de recombinaison*

I.4.1.1 *Collisions thermiques*

Les régions les plus internes des disques protoplanétaires, au voisinage de l'étoile jeune, sont susceptibles d'être bien ionisées sous l'effet des collisions thermiques. Umebayashi [334] a calculé la fraction d'ionisation au sein des nuages moléculaires en incluant l'influence des collisions thermiques ; ce calcul s'applique aux disques protoplanétaires. Il prédit une croissance de la fraction d'ionisation de 10^{-16} à 10^{-11} entre 8×10^2 K et

1×10^3 K par ionisation thermique du potassium. Ces températures sont typiquement atteintes à des distances de l'ordre de 0.1 AU d'une jeune étoile, et devraient suffire à coupler significativement la dynamique du disque à celle du champ magnétique d'après Gammie [124]. Notons que l'ionisation thermique de l'hydrogène requiert des températures de l'ordre de $13.6 \text{ eV} \sim 10^4 \text{ K}$, inaccessibles au coeur des disques protoplanétaires.

1.4.1.2 Rayonnements stellaires

Avec des densités de colonne largement supérieures à 10^{22} cm^{-2} , les disques protoplanétaires sont opaques aux photons stellaires de haute énergie [165, 95]. Les rayonnements considérés vont du spectre ultraviolet lointains (FUV) aux X, avec des énergies généralement comprises entre 6 eV et 5 keV. Ces photons parviennent à ioniser les couches superficielles du disque, sur une profondeur de l'ordre de quelques g.cm^{-2} pour les photons X [127], et de l'ordre de $10^{-2} \text{ g.cm}^{-2}$ pour les rayonnements FUV [16, 265]. Ils sont également la principale source d'ionisation dans l'atmosphère du disque [353, 10]. Dans cette gamme d'énergie, le rôle des grains de poussières (sub-)microniques est double : ils sont à la fois responsables de l'opacité du milieu, et de la capture et recombinaison d'électrons libres [248]. Leur effet exact sur la fraction d'ionisation dépend du spectre énergétique des photons et de la distribution en taille des grains.

1.4.1.3 Rayonnements cosmiques

Pour des densités de colonne supérieures à 10 g.cm^{-2} , les photons stellaires sont absorbés. Les rayonnements cosmiques, principalement des protons provenant du milieu interstellaire et possédant des énergies bien plus élevées $> 100 \text{ MeV}$, ont une profondeur de pénétration de l'ordre de 100 g.cm^{-2} [335]. Le taux d'ionisation associé est relativement faible : dans le milieu interstellaire, sa valeur est généralement prise entre 10^{-17} s^{-1} [314] et 10^{-16} s^{-1} dans un cas optimiste [223]. Il est admis que les rayons cosmiques sont la principale source d'ionisation dans les régions externes des disques protoplanétaires, où les rayonnements stellaires sont géométriquement dilués, et où la densité surfacique du disque est moindre. En réalité, leur taux d'ionisation pourrait être fortement réduit sous les effets d'un vent stellaire [124] et/ou par déflexion sur le champ magnétique global ; voir par exemple Cleeves et al. [79], Padovani et al. [258].

1.4.1.4 Radioactivité

La dernière source d'ionisation à prendre en compte provient des éléments radioactifs présents dès les premiers stades de formation du disque. Les produits de désintégration peuvent ioniser le gaz environnant par collisions inélastiques, et cela de façon homogène au sein du disque. L'essentiel de l'ionisation résultant de désintégrations nucléaires est causé par l'aluminium (^{26}Al) sur une durée de demi-vie relativement courte ($\sim 7 \times 10^5 \text{ yr}$), puis par le potassium (^{40}K), suivi par des éléments lourds

(^{232}Th , $^{235,238}\text{U}$) [336]. Les taux d'ionisation attendus sont de l'ordre de 10^{-19} s^{-1} en présence de ^{26}Al , et tombent à 10^{-22} s^{-1} en n'incluant que la contribution des autres éléments. La radioactivité fournit un seuil inférieur sur la fraction d'ionisation au coeur des disques protoplanétaires.

I.4.1.5 *Recombinaison*

La recombinaison désigne le processus de capture d'un électron par une espèce chargée positivement ; elle participe à la neutralisation électrique du fluide à l'échelle microscopique, par opposition à l'ionisation. Dans les disques protoplanétaires sont identifiés trois canaux de recombinaison :

- A. la recombinaison radiative par des éléments métalliques, symétrique de l'effet photo-électrique ;
- B. l'adsorption à la surface de grains de poussières, augmentant considérablement la cinétique des réactions chimiques dans le disque ;
- C. la recombinaison dissociative sur des cations moléculaires, i.e. capture de l'électron et dissociation en deux espèces chimiques neutres.

Chacun de ces mécanismes peut être caractérisé par un taux de recombinaison. Le rôle des grains de poussières est central lorsque l'on cherche à estimer ces taux de recombinaison. Les atomes métalliques peuvent se trouver condensés à la surface des grains, éliminant virtuellement le premier mécanisme ci-dessus. La distribution en taille des grains intervient de manière cruciale : à masses de poussières égales, la surface effective des grains décroît avec leur taille moyenne. La physico-chimie de surface des grains étant encore mal comprise, la détermination du taux de recombinaison totale est grandement simplifiée en supposant qu'ils sont sédimentés, i.e. spatialement isolés. Dans ce cas, la recombinaison dissociative est dominante dans le volume du disque, et les taux de recombinaison peuvent être estimés par des réseaux chimiques appropriés [e.g., 251].

I.4.2 *Modèles chimiques stationnaires*

Une fois que nous connaissons les taux d'ionisation et de recombinaison associés à chacun des processus décrits ci-dessus, nous pouvons envisager de calculer la distribution de fraction d'ionisation $x_e := n_e/n$, où n représente la densité volumétrique moyenne de particules neutres. La première étape consiste à coupler l'ensemble des processus physico-chimiques pour déterminer le taux d'ionisation local, ainsi que le taux de recombinaison local. La seconde étape consiste à faire l'hypothèse de stationnarité, i.e. supposer que les taux d'ionisation et de recombinaison sont égaux. Sans cette hypothèse, nous devrions suivre la dynamique d'un ensemble d'espèces chimiques pour un coût rapidement prohibitif en temps de calcul ; avec les modèles chimiques considérés, cette hypothèse donne explicitement la fraction d'ionisation en fonction des propriétés locales du gaz.

Différents modèles chimiques ont été considérés par le passé, incluant ou non la présence de métaux volatiles, la chimie des grains, un ensemble

Un réseau chimique réduit peut rester abordable dans des simulations dynamiques ; voir par exemple Turner et al. [333], Ilgner & Nelson [167].

d'espèces moléculaires et de processus ionisants ; voir par exemple Fromang et al. [119], Semenov et al. [304]. Le modèle de disque considéré intervient également, puisque les rayonnements ionisants (stellaires et cosmiques) sont sensibles à la densité de colonne intégrée sur leur trajectoire.

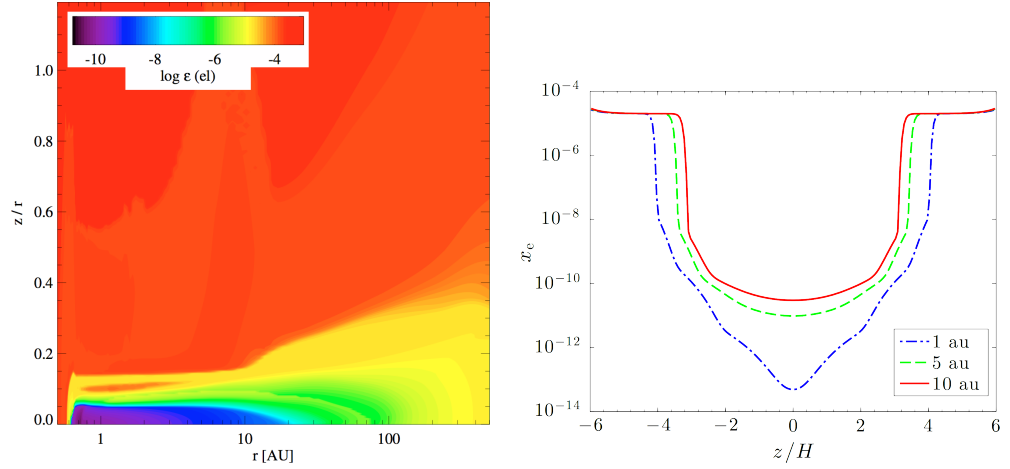


FIGURE 1.4. – À gauche : fraction d'ionisation $\varepsilon = n_e/n_H$ dans le plan $(r, z/r)$ pour un modèle global de disque hydrostatique avec grains de poussières, extrait de Woitke et al. [353]. À droite : profils verticaux de fraction d'ionisation $x_e = n_e/n_n$ près du plan médian $z = 0$ dans un modèle local de disque stratifié sans poussières, extraits de Lesur et al. [195].

Sur la Figure 1.4 sont rassemblées deux cartes de fraction d'ionisation obtenues pour des modèles physico-chimiques différents. Elle partagent des tendances communes, à savoir une fraction d'ionisation inférieure à $x_e < 10^{-8}$ dans les régions internes ($r < 10\text{AU}$) et profondes ($z/H < 2$) du disque, et supérieure à $x_e > 10^{-5}$ au delà de $z/H > 3$. Dans le détail, les profils radiaux (dans le plan médian) et verticaux (à un rayon cylindrique donné) diffèrent significativement entre ces deux modèles. Le modèle présenté sur la Figure 1.4 gauche tient compte d'un grand nombre de processus physico-chimiques pour déterminer l'état d'un disque hydrostatique, tandis que le modèle de la Figure 1.4 droite emploie une physico-chimie simplifiée pour se concentrer sur la dynamique de l'écoulement.

La validité de l'hypothèse de stationnarité est discutable sous au moins deux angles. Premièrement, elle requiert que les temps caractéristiques associés à la chimie, et en particulier à la recombinaison des électrons libres, soient courts devant les temps caractéristiques associés à la dynamique du fluide. Cette hypothèse est corroborée par les modèles plus ou moins complets de Woitke et al. [353], Bai [14], Rodgers-Lee et al. [289], avec de possibles bémols selon l'activité turbulente et la composition chimique dans le disque [166, 167]. Deuxièmement, les modèles les plus complets [e.g., 10, 354] font généralement une hypothèse supplémentaire : le disque n'est pas seulement stationnaire, il est hydrostatique. Même si sa structure est calculée par une méthode itérative pour correspondre à un équilibre physico-chimique, cet équilibre n'autorise pas la matière du disque

à s'échapper sous la forme d'un vent. Cette approche exclut l'effet d'auto-écranage du vent aux photons stellaires, pouvant être important dans un vent de disque au delà de quelques unités astronomiques. Ces processus dynamiques sont susceptibles d'avoir un impact fort sur la chimie des disques, mais leur influence n'a pas encore reçu d'étude quantitative.

I.4.3 Conséquences sur la MHD non-idéale

Sans connaître la fraction d'ionisation, nous pouvons estimer l'importance relative des EMFs non-idéales dans les disques [183] à condition de considérer un plasma électrons-ions-neutres sans poussières. Il suffit de remarquer que chaque EMF est inversement proportionnelle à la fraction d'ionisation, y compris la résistivité ohmique (voir Pitaevskii & Lifshitz [275, §22], Nakano & Umebayashi [243], Balbus & Terquem [28]) :

$$\eta \simeq 234 \left(\frac{n}{n_e} \right) T^{1/2} \text{cm}^2 \text{s}^{-1}. \quad (\text{I.38})$$

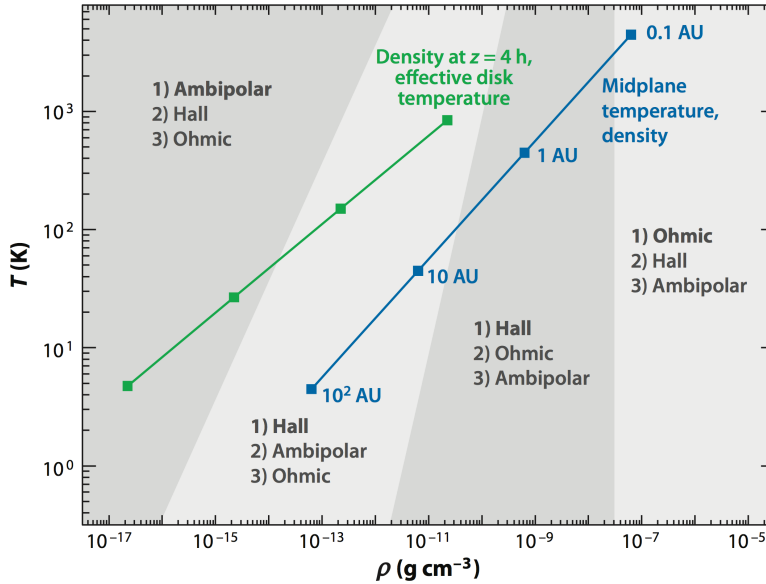


FIGURE I.5. – Hiérarchie des effets MHD non-idéaux dans le plan densité-température ; les segments de droites correspondent à des intervalles en rayon par rapport à l'étoile, à quatre échelles de hauteur (verte) et dans le plan médian (bleue) d'un modèle de disque protoplanétaire. Figure extraite de Armitage [12].

Avec un modèle physico-chimique raisonnable, et en faisant l'hypothèse d'une intensité de champ magnétique $\beta \equiv c_s^2/v_A^2 = 100$, nous obtenons le diagramme de la Figure 1.5. À basse densité, i.e. dans les régions externes et superficielles du disque, la diffusion ambipolaire est dominante. À l'opposé, dans les régions les plus denses, la résistivité ohmique est dominante. Dans le régime intermédiaire, c'est la dérive de Hall qui devrait

dominer les EMFs non-idéales. Cette hiérarchie vient directement des dépendances en densité de la résistivité ohmique (ρ^0), de l'effet Hall ($\rho^{-1/2}$) et de la diffusion ambipolaire (ρ^{-1}). La dépendance en température disparaît dans les régions denses, mais la transition Hall-ambipolaire dépend sensiblement de la température dans les régions diluées. Les conclusions essentielles à tirer de ce diagramme sont les suivantes :

- les trois effets non-idéaux interviennent sur l'étendue des disques protoplanétaires ; en dehors des régions les plus denses ou les plus diluées, il est injustifié d'exclure l'un de ces effets ;
- l'induction Hall est l'EMF non-idéale dominante pour des rayons allant de quelques 10^{-1} à 10^2 AU au voisinage plan médian du disque.

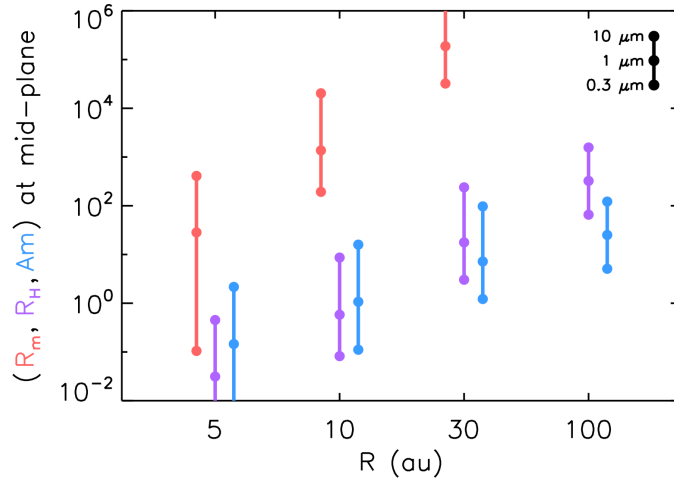


FIGURE 1.6. – Nombre de Reynolds ohmique $R_m \equiv \mathcal{R}_O$, nombre de Lundquist Hall $R_H \equiv \mathcal{L}^{-1}$ et nombre d'Elsasser ambipolaire $A_m \equiv \Lambda_A$ (voir Section 1.3.4) dans le plan médian en fonction du rayon ; les barres verticales correspondent à différentes tailles caractéristiques des grains de poussières. Figure extraite de Simon et al. [310].

Si nous incluons la fraction d'ionisation calculée par l'intermédiaire d'un modèle de structure, nous pouvons déterminer l'importance relative des effets non-idéaux par rapport à l'induction idéale ; voir par exemple Bai [14]. Sur la Figure 1.6 sont marquées les valeurs représentatives des nombres adimensionnés associés aux trois effets MHD non-idéaux, en fonction de la distance à l'étoile et de la taille caractéristique des grains de poussières. La hiérarchie prédite sur la Figure 1.5 est bien préservée sur cet intervalle en rayon. Ces nombres adimensionnés prennent des valeurs inférieures à l'unité dans les régions les plus internes < 30 AU, témoignant de l'importance majeure des EMFs non-idéales sur l'induction idéale. Au delà de 30 AU, la présence et la taille caractéristique des grains de poussières jouent un rôle significatif dans cette comparaison.

L'influence des grains de poussières sur les inductions non-idéales se fait essentiellement par la capture d'électrons libres. D'une part, les grains réduisent la fraction d'ionisation en servant de site de recombinaison pour les ions et les électrons. D'autre part, les grains chargés ont une grande

section efficace de collision avec les neutres, en comparaison aux collisions électrons-neutres. Ces deux effets ont tendance à augmenter les diffusivités magnétiques, en particulier pour des grains de petite taille (sub-micronique), comme illustré sur la [Figure 1.7](#). Ultimement, les grains de poussières chargés peuvent remplacer les ions en tant que porteurs de charge inertes, auquel cas les ions deviennent les porteurs de charge mobiles dominants, inversant le signe de la dérive de Hall [355]. Malheureusement, la distribution spatiale des grains de différentes tailles est encore assez mal contrainte dans les disques observés ; voir Pinte et al. [273, 272].

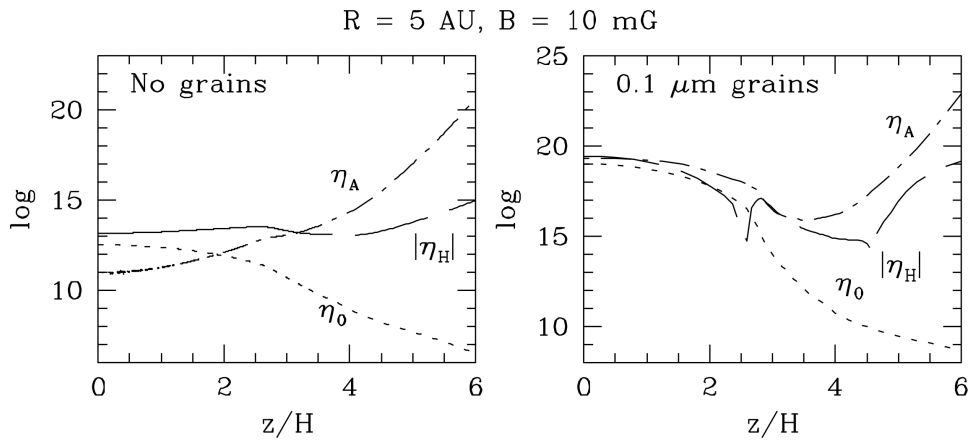


FIGURE 1.7. – Profils verticaux des diffusivités ohmique, Hall et ambipolaire, sans grains (à gauche) et avec grains sub-microniques (à droite). Figure extraite de Salmeron & Wardle [295].

Le traitement auto-cohérent de la sédimentation et de la migration des grains, en prenant en compte plusieurs populations en taille avec des processus de coagulation et de fragmentation, est un projet ambitieux mais numériquement abordable [131]. Cependant, considérant la complexité et les incertitudes ajoutées par le traitement des poussières, en contraste avec l'état actuel des simulations globales en MHD non-idéale, nous choisissons de ne pas inclure l'effet des poussières dans nos modèles de disques. Nous devons garder à l'esprit que cette simplification sur-estime la densité d'électrons libres, donc sous-estime les diffusivités dans le disque de potentiellement plusieurs ordres de grandeur.

I.5 INSTABILITÉ MAGNÉTOROTATIONNELLE

Dans cette section, je présente une classe d'instabilités propres aux écoulements cisailés, en hydrodynamique et magnétohydrodynamique à faible magnétisation. Je me focalise sur l'instabilité magnétorotationnelle, dont le succès vient de ce qu'elle peut saturer en turbulence auto-entretenu, transportant efficacement du moment cinétique dans les disques. Les dérivations originales des propriétés de cette instabilité sont présentées par

Balbus & Hawley [23, 24]. Je vais tenter d'en proposer une image intuitive à partir d'une description locale et lagrangienne du fluide [157].

1.5.1 Cisaillement d'une onde circulaire

1.5.1.1 Équations locales

L'approximation de Hill [157] est appropriée pour étudier les phénomènes locaux dans les disques [129]. Considérons un élément de fluide en orbite dans un potentiel gravitationnel. Plaçons-nous dans un référentiel tournant avec cette parcelle de fluide, à la vitesse angulaire $\Omega_0 := \sqrt{\frac{GM}{r_0^3}} \mathbf{e}_z$. Dans ce référentiel, la dynamique d'une particule est gouvernée par trois accélérations inertielles :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -2\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{v} - \mathbf{\Omega}_0 \times (\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{r}) - \nabla\varphi, \quad (\text{I.39})$$

La pression va introduire des modes acoustiques, sans altérer la discussion ci-dessous, car nous considérerons toujours des perturbations incompressibles.

avec $\varphi = -GM/r$ le potentiel gravitationnel de l'astre central. Le gradient de pression du fluide à été négligé par simplification. En écrivant $\mathbf{r} = (r_0 + x, z)$ et en développant au second ordre au voisinage de r_0 :

$$\begin{aligned} r^{-1} &= r_0^{-1} \left(1 - \frac{x}{r_0} + \frac{x^2}{r_0^2} - \frac{1}{2} \frac{z^2}{r_0^2} + \mathcal{O}\left(\frac{x^3}{r_0^3}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{z^4}{r_0^4}\right) \right) \\ \Rightarrow \nabla\varphi &\simeq \Omega_0^2 [(r_0 - 2x) \mathbf{e}_x + z\mathbf{e}_z] \\ \Rightarrow \frac{d\mathbf{v}}{dt} &\simeq \Omega_0^2 r_0 \left(1 + \frac{x}{r_0} \right) \mathbf{e}_x - 2\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{v} - \Omega_0^2 r_0 \left(1 - 2\frac{x}{r_0} \right) - \Omega_0^2 z \mathbf{e}_z, \end{aligned}$$

soit finalement :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \simeq +3\Omega_0^2 x \mathbf{e}_x - 2\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{v} - \Omega_0^2 z \mathbf{e}_z. \quad (\text{I.40})$$

Dans le membre de droite de (I.41), le premier terme décrit les forces de marées, le second correspond à l'accélération de Coriolis, et le troisième est dû à la gravité. Dans ce référentiel tournant, la gravité agit comme une force de rappel en direction du plan médian. L'accélération centrifuge n'est exactement compensée par la gravité qu'au rayon r_0 : une particule tournant à la vitesse angulaire Ω_0 à un rayon plus petit (plus grand) que r_0 tournerait trop lentement (trop vite) pour rester à sa position. L'accélération de Coriolis empêche une telle particule d'être indéfiniment déviée de son rayon d'équilibre. La force de marée contient l'information sur le cisaillement de l'écoulement (i.e. $\partial_r v_\varphi / r \neq 0$). L'ajout d'un gradient radial de pression au membre de droite de (I.39) reviendrait à modifier le potentiel gravitationnel dans le référentiel en rotation ; en conséquence, le profil de vitesse ne serait plus nécessairement Képlerien. Nous pouvons considérer le cas plus général d'un fluide cisailé dans un référentiel en rotation :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \simeq -2\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{v} + 2q\Omega_0^2 x \mathbf{e}_x - \Omega_0^2 z \mathbf{e}_z, \quad (\text{I.41a})$$

$$q \equiv -\frac{\partial \log \Omega}{\partial \log r}, \quad (\text{I.41b})$$

avec $q = 3/2$ dans le cas Képlerien. En regardant une portion suffisamment petite de l'écoulement, nous pouvons négliger la courbure des trajectoires et adopter un système de coordonnées cartésiennes, avec $r_0 d\varphi \sim dy$.

I.5.1.2 Instabilité d'onde circulaire cisailée

Considérons pour commencer le cas sans cisaillement dans (I.41) : $q = 0$. Au premier ordre en perturbations incompressibles $\mathbf{v} \propto \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$, l'accélération de Coriolis est responsable d'ondes inertielles satisfaisant

$$\partial_t [\nabla \times \mathbf{v}] = -2\nabla \times [\boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{v}] = 2(\boldsymbol{\Omega}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (\text{I.42a})$$

$$\implies \omega \mathbf{k} \times \mathbf{v} = 2i\Omega_0 k_z \mathbf{v} \iff i\omega \mathbf{v} = 2\Omega_0 \frac{k_z}{k^2} (\mathbf{k} \times \mathbf{v})$$

$$\implies \omega = 2\Omega_0 \frac{k_z}{k}. \quad (\text{I.42b})$$

Il s'agit d'ondes incompressibles et polarisées circulairement. Ajoutons maintenant le cisaillement radial du fluide $q \neq 0$, et complétons (I.41a) par la définition du déplacement lagrangien $\mathbf{v} := d\mathbf{r}/dt$:

$$\partial_t \begin{pmatrix} x \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2q\Omega_0^2 & 0 & 2\Omega_0 \\ 0 & -2\Omega_0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix}. \quad (\text{I.43})$$

Si nous cherchons une solution oscillante $\propto e^{i\omega t}$, nous obtenons un système linéaire $\mathbf{M} \cdot \mathbf{V} = 0$ pour le vecteur des perturbations \mathbf{V} , et la condition de compatibilité du système linéaire $\det(\mathbf{M}) = 0$ donne les valeurs propres

$$\omega^2 = 2(2 - q)\Omega_0^2. \quad (\text{I.44})$$

La pulsation ω est affectée par le cisaillement q , et elle devient imaginaire au delà d'une valeur critique $q = 2$. L'inégalité

$$\frac{\partial \log \Omega}{\partial \log r} > -2 \quad (\text{I.45})$$

correspond au critère de stabilité de Rayleigh [279] : une condition nécessaire à la stabilité hydrodynamique des écoulements rotatoires est d'avoir un moment cinétique spécifique $l := \Omega r^2$ croissant en rayon.

Nous pouvons étendre cette description à un cas plus général. Considérons le déplacement lagrangien d'une particule soumise à deux effets : le cisaillement de fréquence $s := \partial_x v_y(x)$, et une rotation à la pulsation ν . Le point considéré évolue sous l'action d'un opérateur de cisaillement et d'un opérateur de rotation : $\partial_t \mathbf{r} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{r}$; explicitement :

$$\partial_t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\nu \\ \nu - s & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (\text{I.46})$$

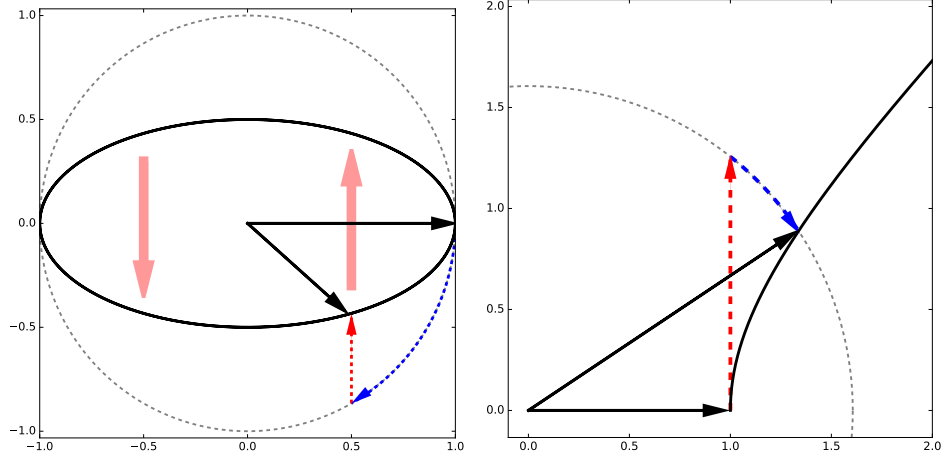


FIGURE 1.8. – Illustration du critère d'instabilité pour les ondes circulaires cisillées. Dans les deux cas, le cisaillement (flèches rouges) et la rotation (flèches bleues) ont les mêmes orientations. À gauche : la fréquence de cisaillement s est inférieure à la fréquence de rotation ν , la particule décrit une ellipse. À droite : la fréquence de cisaillement s est supérieure à la fréquence de rotation ν , et la particule s'écarte indéfiniment de sa position initiale.

Pour que la particule décrive une trajectoire périodique $\propto e^{i\omega t}$, $\omega \in \mathbb{R}$, le spectre de l'opérateur d'évolution M (l'ensemble de ses valeurs propres) doit être imaginaire pur. On trouve de façon élémentaire

$$\text{Sp}(M) = \left\{ \pm \sqrt{\nu(s - \nu)} \right\}, \quad (\text{I.47})$$

dont les valeurs propres deviennent réelles pour $s > \nu$. En d'autres termes, il ne peut y avoir de mouvement périodique que lorsque la fréquence de cisaillement s est inférieure à la fréquence de rotation ν . Ce principe est illustré sur la Figure 1.8. Le critère de Rayleigh exprimé précédemment dans (I.45) se retrouve comme cas particulier où les ondes circulaires sont causées par l'accélération de Coriolis, avec une pulsation $\nu \equiv 2\Omega_0$ (voir (I.42b)) et une fréquence de cisaillement $s \equiv q\Omega_0$.

1.5.1.3 Couplage aux ondes d'Alfvén

Ajoutons maintenant l'effet d'un flux magnétique net, aligné avec la vorticité $\omega \equiv \partial_x v_y e_z$. Avec la densité de courant $\mathbf{J} \equiv \nabla \times \mathbf{B}$, la force de Lorentz peut être décomposée comme

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\nabla \left[\frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \right] + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}, \quad (\text{I.48})$$

où le premier terme du membre de droite est analogue à une *pression magnétique*, tandis que le second s'apparente à une *tension magnétique*. Nous allons à nouveau négliger le terme de pression, sous prétexte de considérer des perturbations incompressibles. L'effet de la tension magnétique

est celui d'une force de rappel, dirigée suivant le rayon de courbure local des lignes de champ. L'intensité de cette force de rappel peut être reliée au déplacement lagrangien du fluide à la façon d'un ressort de pulsation $\omega_A \equiv k \cdot v_A$, où k est le vecteur d'onde de la perturbation et v_A la vitesse d'Alfvén associée au champ net [25]. La dynamique d'une particule fluide est alors décrite par le système d'équations :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2q\Omega_0^2 x + 2\Omega_0 \dot{y} - \omega_A^2 x, \\ \ddot{y} = -2\Omega_0 \dot{x} - \omega_A^2 y, \end{cases} \quad (\text{I.49})$$

En injectant une solution harmonique $\propto \exp[i\omega t]$, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - \omega_A^2 + 2q\Omega_0^2 & i2\Omega_0\omega \\ -i2\Omega_0\omega & \omega^2 - \omega_A^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0, \quad (\text{I.50})$$

et le déterminant de cette matrice doit s'annuler pour que le système linéaire soit compatible ; nous obtenons ainsi le polynôme caractéristique

$$\omega^4 - 2\omega^2 [\omega_A^2 + (2 - q)\Omega_0^2] + \omega_A^2 (\omega_A^2 - 2q\Omega_0^2) = 0. \quad (\text{I.51})$$

En dépit de son caractère quartique, nous pouvons extraire des informations simples de cette relation de dispersion. Tous ses coefficients sont réels ; en conséquence, les racines seront réelles ou complexes conjuguées. Les racines x_{\pm} du polynôme de degré deux $ax^2 + bx + c$ satisfont les relations $x_+ + x_- = -b/a$ et $x_+ \cdot x_- = c/a$. Partant de ce constat, si le coefficient de degré zéro $\omega_A^2 - 2q\Omega_0^2 < 0$, alors l'une des racines ω_{\pm}^2 a un carré négatif, donc deux racines ω sont imaginaires conjuguées, et l'une provoque une croissance exponentielle des perturbations. La condition de stabilité ainsi dégagée est

$$(k \cdot v_A)^2 > 2q\Omega_0^2. \quad (\text{I.52})$$

À nouveau, ce critère indique que pour avoir propagation d'une onde, la fréquence de cette dernière doit être plus élevée qu'une fréquence caractéristique associée au cisaillement. Cette interprétation était déjà donnée par Balbus & Hawley [23] ; elle permet de comprendre la MRI comme l'instabilité d'une onde d'Alfvén, entraînée par Coriolis et cisailée par l'écoulement. Dans le cas d'un fluide compressible, l'onde magnéto-sonique lente est déstabilisée le plus aisément suivant la même phénoménologie. Le signe de q intervient dans le critère (I.52) : la MRI n'affecte que les écoulements dont le profil de vitesse angulaire décroît radialement, i.e. $q > 0$.

En l'absence de champ magnétique ($\omega_A = 0$), nous retrouvons la relation de dispersion hydrodynamique (I.44), et le critère de stabilité de Rayleigh (I.45) associé au second degré.

Magnéto-sonique lente se propage le long du champ magnétique, avec la célérité la plus faible, donc la plus faible pulsation à une échelle donnée.

I.5.1.4 Ondes whistler et HSI

J'ai montré dans la Section 1.3.2 que les ondes causées par l'effet Hall dans un plasma homogène sont polarisées circulairement. La discussion donnée en Section 1.5.1.2 reste pertinente dans ce cas : ces ondes peuvent être déstabilisées par le cisaillement du fluide électronique, donnant lieu à l'instabilité de cisaillement Hall (HSI) [182].

Cela revient à exclure les ondes ion-cyclotron ; voir (I.29b).

Hypothèse de (I.15).

L'EMF Hall seule ne suffit pas ; voir Section 1.3.2.

Grâce à la relation $\mathbf{J} \equiv \nabla \times \mathbf{B}$, l'équation d'induction est suffisante pour capturer la HSI si nous considérons le fluide neutre comme un terme source constant, d'inertie infinie. À faible fraction d'ionisation, ne considérer que l'EMF Hall revient à dire que la diffusion ambipolaire est nulle, i.e. le couplage collisionnel ion-neutre est parfait (voir Section 1.3.3). Même si la fraction d'ionisation est telle que le fluide électronique ne possède virtuellement aucune énergie cinétique au départ, l'entraînement collisionnel des ions par les neutres entretient le cisaillement des ondes whistler à l'origine de l'instabilité. L'instabilité provoque bien un transfert d'énergie partant du cisaillement du fluide neutre vers le champ magnétique.

Dans la limite où la dérive de Hall domine l'induction idéale, nous pouvons extraire un critère de stabilité d'une onde whistler cisailée. Considérons la vitesse des neutres comme un terme source constant, la présence d'un champ guide B_0 vertical, et ajoutons les composantes radiale et azimutale du champ magnétique sous la forme de perturbations au premier ordre $B_x \sim B_y \sim e^{i(kz - \omega t)}$. L'équation d'induction projetée en coordonnées cartésiennes perpendiculairement à B_z donne

$$\partial_t B_x \simeq \ell_H B_z \partial_z^2 B_y = -\ell_H k^2 B_0 B_y \quad (\text{I.53a})$$

$$\partial_t B_y \simeq -\partial_x [s x B_x] - \ell_H B_z \partial_z^2 B_x = -s B_x + \ell_H k^2 B_0 B_x \quad (\text{I.53b})$$

où s désigne le cisaillement. Le discriminant de ce système (la relation de dispersion) donne directement

$$\omega^2 = \omega_H (\omega_H - s) \quad (\text{I.54})$$

avec $\omega_H = \ell_H k^2 B_0$ la pulsation des ondes whistler dans la limite des hautes fréquences spatiales. Cette pulsation est imaginaire quand $s > \omega_H > 0$, i.e. quand la fréquence de cisaillement dépasse la fréquence d'oscillation de l'onde, en accord avec les arguments donnés en Section 1.5.1.2. Une instabilité d'ondes ion-cyclotron peut être capturée en présence d'un champ de polarité inversée et d'intensité plus forte [259, 310]. Nous l'ignorons régulièrement, car elle opère dans un espace de paramètres limité.

Le cas $\omega_H < 0$ avec $s > 0$ n'a pas été discuté précédemment ; il correspond à un champ magnétique guide opposé à la vortécité, donc opposé au vecteur rotation $\mathbf{r} \times \mathbf{v}_K$ dans un disque képlerien (\mathbf{r} rayon par rapport à l'astre central). Dans ce cas, la pulsation caractéristique est systématiquement réelle, donc ces ondes whistler cisailées sont toujours stables. L'effet Hall induit une dynamique qualitativement différente selon l'orientation du champ magnétique traversant le disque. Cela peut se comprendre en remarquant que l'EMF Hall dépend d'une puissance paire du champ magnétique : en linéarisant l'équation d'induction, le signe du champ guide B_0 est conservé dans (I.26). Cette discrimination n'apparaît pas en MHD idéale. Nous pouvons aussi remarquer que le sens de propagation de l'onde n'intervient pas dans les équations (I.26) et (I.54) : le sens de rotation de l'onde (le signe de ω) est déterminé par B_0 uniquement. En revanche, le sens de rotation d'une onde inertielle dépend de sa direction de propagation via $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}$ d'après (I.42b). En conséquence, la MRI peut être

déclenchée par une onde d’Alfvén se propageant dans la direction appropriée, un degré de liberté absent pour les ondes whistler.

1.5.2 MRI non-idéale en régime linéaire

Partant de l’équation d’induction (I.17b), nous pouvons déjà déduire un certain nombre de propriétés sur la phase linéaire de la MRI en MHD non-idéale. J’isole l’influence de chaque EMF ci-dessous.

1.5.2.1 Résistivité ohmique

La résistivité ohmique tend à diffuser les structures magnétiques sur une échelle h en un temps caractéristique $\tau_\eta \sim h^2/\eta$. Réciproquement, le temps caractéristique de croissance de la MRI idéale sur une échelle h est de l’ordre de $\tau_{\text{MRI}} \sim h/v_A$ d’après (I.51). Nous devinons que la MRI est stabilisée pour $\tau_\eta < \tau_{\text{MRI}}$, correspondant à un critère de stabilité sur le nombre de Lundquist ohmique $S_O < 1$ à l’échelle h . Jin [168] a montré que ce critère peut effectivement être extrait de la relation de dispersion locale du plasma traversé par un flux magnétique vertical ; le cas d’un flux net toroïdal fut décrit par Papaloizou & Terquem [261], et Sano & Miyama [298] ont ajouté une stratification verticale en densité.

Nous parlons ici des modes MRI à grande échelle $kv_A < \Omega$, les plus lent à diffuser.

Dans le cas des disques d’accrétion, l’échelle de distance caractéristique est toujours de l’ordre de quelques échelles de hauteur hydrostatique. Lorsque l’écoulement est stabilisé sur cette échelle, la MRI ne peut plus se développer dans le disque, d’où les dénominations courantes de “zone morte” ou “magnétiquement inactive”. D’après les profils attendus pour le nombre de Lundquist ohmique dans les disques protoplanétaires, le plan médian entre 0.1AU et quelques unités astronomiques pourrait ainsi être magnétiquement inactif [124], suggérant que l’accrétion turbulente se produit en surface du disque. Notons qu’un disque stabilisé vis-à-vis de la MRI peut encore subir une force de Lorentz significative, et en particulier accréter sous l’influence d’un couple magnétique à grande échelle.

Suivant l’exemple d’une “roue de Barlow”.

1.5.2.2 Diffusion ambipolaire

Nous pourrions nous attendre à ce que la diffusion ambipolaire agisse sur la MRI d’une façon analogue à la résistivité ohmique, avec une diffusivité dépendant cette fois-ci du champ guide suivant $\eta_A \equiv \tau_{in} v_A^2$ (voir Section 1.3.3). Blaes & Balbus [43] ont étudié ce cas par l’intermédiaire d’un modèle multi-fluide, et obtenu que les taux de croissance dépendent du rapport entre la fréquence épicyclique et l’inverse du temps de couplage ion-neutre. Le nombre d’Elsasser ambipolaire $\Lambda_A \equiv 1/\Omega\tau_{in}$ est justement adapté pour décrire cette phénoménologie. Le nombre d’Elsasser ambipolaire prédit dans les disques protoplanétaires est suffisamment faibles pour empêcher le développement de structures turbulentes à la surface [265]. La combinaison des diffusions ohmique et ambipolaire pourrait donc tuer l’activité turbulente sur toute la hauteur des disques protoplanétaires. Une

différence qualitative apparaît lorsque l'on considère des modes MRI non-axisymétriques. Desch [85] et Kunz & Balbus [183] ont montré que la diffusion ambipolaire peut jouer un rôle déstabilisant sur des modes obliques, en raison de son caractère anisotrope [182]. Dans la limite des champs magnétiques faibles ($\beta \gg 1$), la diffusivité ambipolaire est également faible, donc la MRI est susceptible d'amplifier le champ magnétique de façon quasi-idéale. Suite à cette amplification, la diffusivité ambipolaire pourrait atteindre le seuil de stabilisation linéaire, laissant entrevoir un mécanisme de saturation quasi-linéaire de la MRI.

1.5.2.3 Dérive de Hall

La HSI décrite en Section 1.5.1.4 donne le comportement asymptotique de la MRI pour une induction Hall dominante. La transition MRI-HSI se fait continûment, et fait l'objet des articles de Wardle [343], Balbus & Terquem [28]. En prenant la réaction du fluide neutre en compte, i.e. la relation de dispersion complète (de degré 4 en ω dans la limite incompressible), nous retrouvons plusieurs manifestations de la HSI :

*Ignorant pour le moment
l'instabilité d'ondes
ion-cyclotron.*

- comme la pulsation whistler $\omega_H \equiv \ell_H B_0 k^2$ augmente quadratiquement avec la fréquence spatiale k , l'effet Hall a tendance à rapidement stabiliser les petites échelles (voir Figure 1.9) ;
- le critère de stabilité (1.54) est symétrique par $(\omega_H, s) \mapsto (-\omega_H, -s)$; la HSI est donc capable de déstabiliser des écoulements dont le profil de vitesse angulaire croît radialement, à la différence de la MRI ;
- un champ magnétique opposé à la vorticité locale (donc au vecteur rotation Ω dans un disque képlerien) tend à stabiliser l'écoulement : le domaine d'instabilité est asymétrique suivant le signe de $B \cdot \Omega$.
- en présence de résistivité, un effet Hall faible est capable de réhausser les taux de croissance de la MRI ; voir Wardle & Salmeron [347].

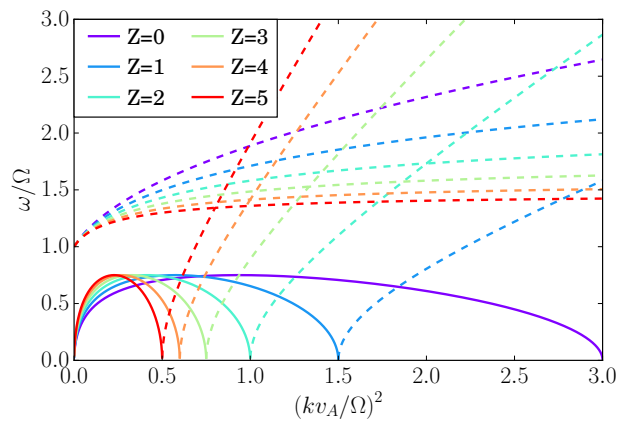


FIGURE 1.9. – Pulsations caractéristiques ω/Ω dans un écoulement képlerien pour différentes intensités d'effet Hall $Z := 2\ell_H\Omega/v_A$, avec un champ net orienté suivant la vorticité locale ($B \cdot \Omega > 0$) ; les taux de croissance Hall-MRI sont indiqués en trait pleins, et les fréquences réelles des ondes whistler et ion-cyclotron sont en pointillés (voir Figure 1.3).

Résumé

Je vais décrire les méthodes numériques que j'ai employées pour 'résoudre' les équations de la MHD non-idéale. Je commence par résumer les travaux numériques antérieurs à cette thèse concernant la magnétohydrodynamique des disques d'accrétion. Je présente ensuite les méthodes de simulations numériques les plus communes en astrophysique ; j'oriente le sujet vers le code en volumes finis PLUTO, dont je me suis principalement servi, et dont j'ai adapté un module pour le calcul des effets MHD non-idéaux. Je conclurai sur les infrastructures de calcul dont j'ai pu bénéficier.

Sommaire

1.	Introduction	36
1.1.	Classes de modèles numériques	36
1.2.	Simulations de disques magnétisés	37
2.	Méthodes numériques	40
2.1.	Différences finies	41
2.2.	Méthodes spectrales	42
2.3.	Éléments finis	44
2.4.	Smoothed Particle Hydrodynamics	46
2.5.	Volumes Finis	47
3.	PLUTO	48
3.1.	Variables primitives et conservatives	48
3.2.	Transport contraint	49
3.3.	Solveur de Riemann	50
3.4.	Calcul des courants électriques	54
3.5.	Effets MHD non-idéaux dans PLUTO	55
4.	Infrastructures de calcul	58
4.1.	Froggy @ CIMENT	58
4.2.	Ada & Turing @ IDRIS	58

II.1 INTRODUCTION

À défaut de pouvoir réaliser des expériences in situ, les simulations numériques offrent une approche privilégiée pour étudier les phénomènes astrophysiques. Dans l'étude numérique des disques protoplanétaires, on peut identifier plusieurs grandes classes de modèles, chacun adapté dans un but particulier. Je distingue ci-dessous les modèles stationnaires des modèles dynamiques, et les modèles locaux des modèles globaux. Cela me permettra de mieux cerner le cadre de travail de cette thèse : les simulations dynamiques et globales de disques protoplanétaires.

II.1.1 Classes de modèles numériques

II.1.1.1 Modèles stationnaires et modèles dynamiques

L'étude analytique de la structure et de la dynamique des disques protoplanétaires n'est réalisable que sous certaines hypothèses simplificatrices. Les hypothèses les plus couramment employées sont celles de stationnarité et d'axisymétrie, réduisant le nombre de dimensions du problème à deux (radiale et latitudinale). Même sous ces hypothèses, une machine de calcul est souvent nécessaire pour évaluer des intégrales, et les solutions (champs de densité, vitesse, etc.) n'admettent pas de formes closes. Ces méthodes sont privilégiées dans l'étude des équilibres et de leur stabilité. Un exemple d'étude semi-analytique de disque produisant un vent MHD est montré sur la [Figure II.1](#) gauche. On trouve également des modèles moyennés azimuthalement et verticalement, utiles pour se concentrer sur l'évolution des profils radiaux dans le disque. Ces modèles permettent d'inclure d'autres dimensions de complexité (distributions de grains de poussières ou d'espèces chimiques, transfert radiatif) à coût raisonnable ; voir par exemple Pinilla et al. [271].

Sur la [Figure II.1](#) droite est représenté le résultat d'une simulation hydrodynamique de disque. Cette simulation traite les équations de la dynamique du fluide en quatre dimensions (espace & temps), avec un minimum d'hypothèses simplificatrices (e.g., choix d'une équation d'état pour la thermodynamique du gaz). En raison du nombre de dimensions, ces simulations sont coûteuses en temps de calcul (10^3 à 10^6 heures CPU) et en mémoire (10^7 à 10^{10} octets). Elles nécessitent généralement une phase de réduction des données, analogue à de vrais expériences de physique numérique. Elles sont le seul moyen théorique de tester la validité des modèles simplifiés ; c'est ce second type d'étude qui va m'intéresser.

II.1.1.2 Modèles locaux et modèles globaux

Les simulations dynamiques de disques protoplanétaires se séparent typiquement en deux catégories. Dans les modèles locaux, nous considérons un élément de fluide à suffisamment petite échelle pour négliger la courbure des trajectoires du gaz (voir [Section I.5.1.1](#)). Nous suivons cet élément

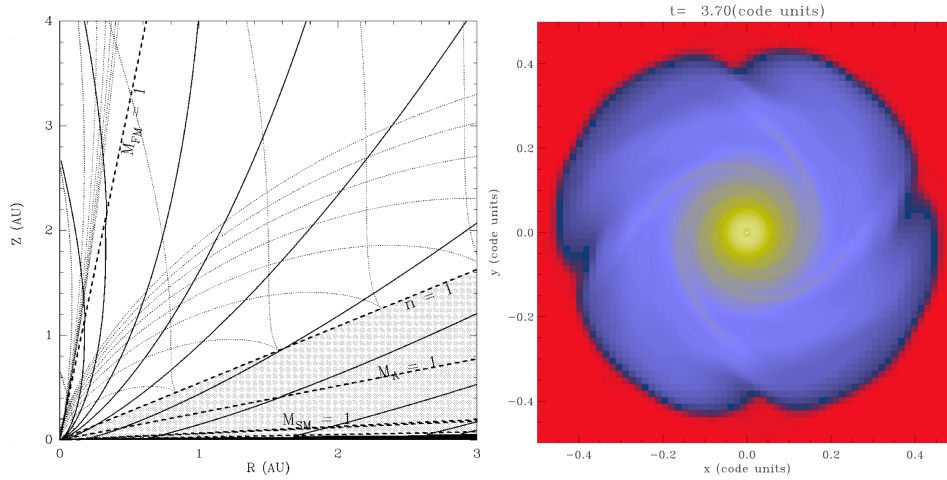


FIGURE II.1. – À gauche : modèle semi-analytique de jet MHD stationnaire, extrait de Ferreira & Casse [98]; à droite : modèle dynamique de disque d'accrétion, extrait de Hennebelle et al. [156].

de fluide en rotation dans le disque, soumis aux accélérations centrifuge et Coriolis. Ces modèles sont appropriés pour caractériser des processus à haute résolution, de manière bien contrôlée, sans effets de transport global. Ils sont adaptés pour étudier les instabilités locales et la turbulence, et ont trouvé un certain succès dans l'étude de la MRI (e.g. Figure II.2 gauche).

À l'inverse, les simulations globales s'attachent à décrire la géométrie du disque et à capturer les phénomènes de transport à grande échelle. Elles permettent difficilement d'atteindre les mêmes résolutions spatiales que dans les simulations locales, et les processus de transport rendent le système hautement dynamique. Néanmoins, ces simulations sont nécessaires pour valider les résultats des études locales, qu'il s'agisse de turbulence MRI [284, 48, 49] ou de vents magnétisés [194, 113]. Un exemple de simulation globale de turbulence MRI est représenté sur la Figure II.2 droite. Mon objectif est de réaliser des simulations dynamiques globales de disques protoplanétaires dans le régime MHD non-idéal.

Conservation exacte de la masse et du flux magnétique total, sans effets de bords.

II.1.2 Simulations de disques magnétisés

Dans un premier temps, je vais me concentrer sur la physique au sein du disque. Je fais un bref rappel des résultats majeurs, et je reporte l'introduction des vents de disque et de l'interaction disque-jet à la Partie iii.

II.1.2.1 MHD idéale

Les premières simulations de la MRI en régime non-linéaire sont attribuées à Hawley & Balbus [149] en 2D axisymétrique et à Hawley et al. [150] en 3D. Ces dernières confirment que la MRI sature en turbulence, transportant efficacement du moment cinétique sous l'action d'un couple principalement magnétique. La turbulence est entretenue en présence d'un

flux magnétique net à travers le disque. Sans flux net, le maintien d'un écoulement turbulent dans les simulations est sensible aux propriétés de dissipation à petite échelle [197, 117]. Dans les deux cas, un champ magnétique initial faible ($\beta \gg 1$) suffit à produire un couple $\alpha \equiv \mathcal{T}_{r\phi}/P \in [10^{-3}, 10^{-1}]$, où \mathcal{T} représente le tenseur des contraintes et P la pression.

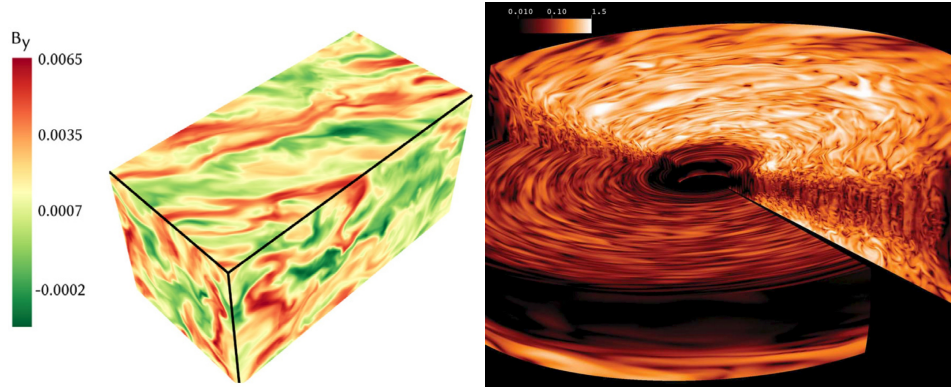


FIGURE II.2. – Simulations de turbulence MRI en MHD idéale, dans un modèle local (à gauche, extrait de Meheut et al. [225]) et dans un modèle global de disque (à droite, extrait de Flock et al. [105]).

II.1.2.2 Résistivité ohmique

L'influence d'une résistivité ohmique sur le régime non-linéaire de la MRI fut abordé par Sano et al. [296] en 2D axisymétrique et par Fleming et al. [104] en 3D. Ces derniers ont montré qu'en l'absence de flux magnétique axial (vertical), une résistivité faible, sans grande influence sur le régime linéaire de l'instabilité, pouvait fortement affecter son régime de saturation non-linéaire. Sans flux magnétique net, un nombre de Reynolds $\mathcal{R}_O \equiv \Omega h^2/\eta \lesssim 10^4$ suffit à tuer le transport turbulent de moment cinétique. Avec flux magnétique net, une résistivité croissante peut réduire le taux de transport de moment cinétique $\alpha \sim \mathcal{R}_O$ [104], mais l'action de la MRI n'est inhibée qu'en dessous du seuil de stabilité linéaire $\mathcal{S}_O < 1$ [168].

Comme proposé par Gammie [124], les simulations stratifiées de disques dont le plan médian est résistif exhibent de l'accrétion en surface, et une "zone morte" en profondeur [103]. La turbulence MRI peut entretenir $\alpha \in [10^{-3}, 10^{-2}]$ en surface; elle excite aussi des ondes de densité spirales dans le plan médian, suffisantes pour maintenir un seuil $\alpha \sim 10^{-4}$ [167].

II.1.2.3 Diffusion ambipolaire

L'influence d'une diffusion ambipolaire sur la MRI fut d'abord examinée dans des simulations locales non-stratifiées. Les simulations bi-fluides de Hawley & Stone [152] montrent que l'écoulement ionique reste turbulent quelle que soit la fraction d'ionisation. Cependant, l'écoulement neutre est progressivement découplé des ions pour des nombres d'Elsasser am-

bipolaires $\Lambda_A < 10^2$. Le niveau de saturation du coefficient de transport turbulent $\alpha \equiv \mathcal{T}_{r\phi}/P_{\text{neutres}}$ croît directement avec la fraction d’ionisation.

Les simulations MHD de Bai & Stone [17] prouvent qu’à faible fraction d’ionisation, le coefficient de transport α décroît avec le nombre d’Elsasser Λ_A , atteignant $\alpha \approx 10^{-4}$ pour $\Lambda_A = 10^{-1}$. Dans ce régime, la MRI est stabilisée par un flux magnétique net d’autant plus faible que Λ_A est petit.

Les premières simulations globales incluant simultanément les diffusions ohmique et ambipolaire ont été produites par Gressel et al. [134]. Ces simulations suggèrent que les disques protoplanétaires pourraient être entièrement laminaires : le plan médian serait magnétiquement inactif à cause de la résistivité ohmique, et la diffusion ambipolaire empêcherait la saturation turbulente de la MRI (voir Figure II.3). L’accrétion de masse reste permise en surface, sous l’action de couples magnétiques laminaires.

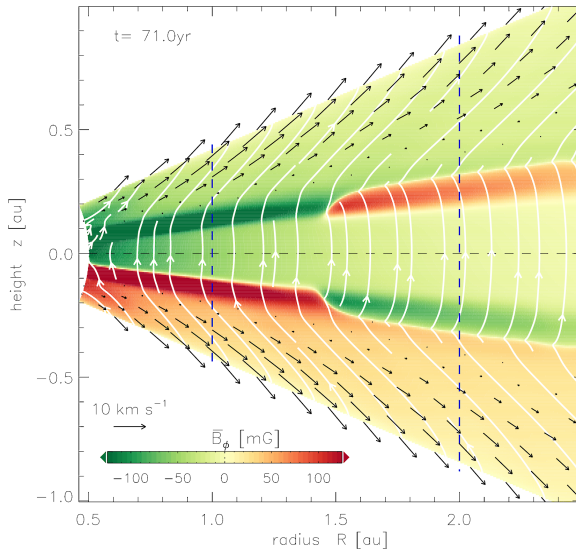


FIGURE II.3. – Simulations MHD globale de disque protoplanétaire avec diffusions ohmique et ambipolaire, extraite de Gressel et al. [134].

II.1.2.4 Dérive de Hall

L’induction Hall est la plus difficile à intégrer de façon précise et robuste dans les simulations MHD. Son influence sur le développement non-linéaire de la MRI fut abordé par Sano & Stone [299, 300] dans des simulations locales non-stratifiées. Ces simulations ont été conduites dans le régime $\mathcal{L} \sim v_A/\Omega h \ll 1$. Elles confirment que le niveau de saturation de la turbulence Hall-MRI dépend de l’orientation du flux magnétique vertical net. Elles suggèrent notamment que le coefficient de transport α pourrait être réhaussé par l’effet Hall dans les régions résistives des disques.

Dans le régime $\mathcal{L} \geq 1$, les simulations de Kunz & Lesur [184] ont révélé un comportement qualitativement nouveau. En présence d’un flux magnétique net $B_0 \cdot \Omega > 0$, l’instabilité de cisaillement Hall (HSI) ne sature pas en turbulence : le flux magnétique s’organise en structures zonales (axisymé-

triques), comme illustré sur la [Figure II.4](#). Le transport turbulent est réduit à $\alpha < 10^{-4}$ dans cette phase organisée. Les structures axisymétriques dans le champ magnétique ont une contrepartie hydrodynamique : des écoulements zonaux, susceptibles de piéger des poussières (voir [Section VI.2.4](#)).

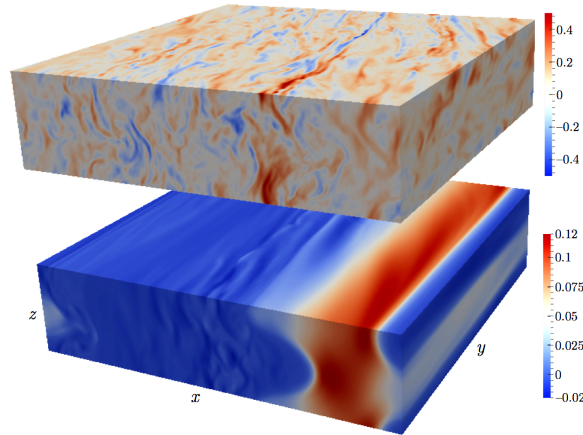


FIGURE II.4. – Champ magnétique vertical B_z dans deux simulations locales non-stratifiées ; en MHD idéale (*panneau supérieur*), la MRI avec flux magnétique net sature en turbulence ; en MHD Hall (*panneau inférieur*) avec $\mathcal{L} \geq 1$, le flux magnétique s’organise en bandes axisymétriques. Figure extraite de Kunz & Lesur [184].

Le mécanisme d’auto-organisation sous-jacent est expliqué par [Kunz & Lesur](#) : le paramètre de Hall doit être suffisamment grand ($\mathcal{L} \geq 1$), l’écoulement doit être linéairement instable, et l’accumulation de flux magnétique doit permettre d’atteindre le seuil de stabilisation de la HSI (voir [Section I.5.1.4](#)). Cependant, ce mécanisme d’auto-organisation ne semble pas opérer dans les simulations stratifiées de Lesur et al. [195], Bai [15].

Mon premier objectif sera d’étendre les résultats de [Kunz & Lesur](#) en géométrie cylindrique, afin de tester la robustesse globale de ces structures. Dans ce chapitre, je vais parler des méthodes numériques couramment utilisées pour simuler les disques, puis converger vers mon utilisation du code PLUTO en MHD non-idéale. La [Partie ii](#) est dédiée à l’étude du processus d’auto-organisation Hall en configuration globale non-stratifiée. Les effets de stratification seront au coeur de la [Partie iii](#).

II.2 MÉTHODES NUMÉRIQUES

Les recherches en astrophysique ont motivé le développement de méthodes numériques spécifiques, aujourd’hui applicables dans une variété de domaines technologiques [e.g., 126, 96], à l’instar des grands instruments de physique expérimentale. Lorsque l’on souhaite simuler la dynamique d’un fluide, une tâche courante des simulations numériques consiste à intégrer en temps un jeu d’équations aux dérivées partielles pour des conditions initiales données. La résolution algorithmique du problème né-

cessite de discrétiser l'espace et le temps, puis d'établir un schéma d'intégration en temps. L'estimation des dérivées joue un rôle central dans la précision spatiale du schéma d'intégration. Une méthode parfaite serait précise, robuste, et d'exécution rapide. Évidemment, ces critères ne commutent pas, et il faut se satisfaire d'un compromis. Différentes méthodes répondent à différents besoins ; je vais en illustrer quelques unes dans le cas typique de l'équation d'advection-diffusion pour f :

$$\begin{aligned} \partial_t f + \partial_x f + \nu \partial_x^2 f &= 0, \\ f : (x, t) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

II.2.1 Différences finies

La méthode des différences finies repose sur le développement de Taylor d'une fonction pour estimer sa dérivée. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est analytique, alors

$$f(x+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h^n}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}(x). \quad (\text{II.2})$$

Pour estimer la dérivée de f en un point x_i , à partir de ses voisins sur un maillage uniforme de pas h , nous pouvons évaluer la "dérivée à droite"

$$\frac{f(x_i+h) - f(x_i)}{h} = \frac{df}{dx}(x_i) + \mathcal{O}(h^2). \quad (\text{II.3})$$

En choisissant judicieusement les points d'évaluation de f , nous pouvons réduire l'erreur de l'estimation, par exemple avec la "dérivée centrée" :

$$\frac{f(x_i+h) - f(x_i-h)}{2h} = \frac{df}{dx}(x_i) + \mathcal{O}(h^3). \quad (\text{II.4})$$

Dans le cas général, nous pourrions utiliser un nombre arbitraire de P points voisins de x_i , répartis symétriquement ou non, avec un pas de maillage pouvant varier. On explicite les P développements de Taylor

$$f(x+h_p) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h_p^n}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}(x), \quad p = 1, \dots, P \quad (\text{II.5})$$

et considérant l'espace vectoriel engendré par les $d^n f/dx^n$, il ne reste plus qu'à trouver une combinaison linéaire des $f(x+h_p)$ qui annule tous les coefficients sauf celui devant df/dx , laissant une erreur d'ordre aussi élevé que possible (P au mieux). La même procédure peut être appliquée pour calculer une dérivée d'ordre $r < P$, en annulant tous les coefficients sauf celui devant la r -ième dérivée. Ces dérivées spatiales peuvent être directement injectées dans (II.1) pour estimer la dérivée temporelle.

Les méthodes en différences finies d'ordre élevé sont précises mais peu robustes. Les codes de simulations basés sur les différences finies, tels que le PENCIL code [55], emploient typiquement plus de 6 points d'échantillonnage de f pour évaluer sa dérivée (e.g. Brandenburg & Dobler [54]).

Le code PLUTO emploie une méthode différente (en volumes finis, voir [Section II.2.5](#)) pour intégrer en temps les équations physiques, mais les algorithmes de différences finies seront utiles pour implémenter simplement des conditions aux limites, ou pour évaluer des dérivées.

II.2.2 Méthodes spectrales

Dans le cas où les fonctions manipulées sont suffisamment lisses, les méthodes spectrales offrent une précision virtuellement illimitée dans l'estimation des dérivées. Leur principe de base consiste à décomposer les fonctions manipulées sur un ensemble de fonctions élémentaires dont le support est le *domaine de définition* \mathcal{D} entier. L'exemple le plus courants d'une telle décomposition est celle de Fourier, où les N valeurs f_n dans l'espace "réel" sont liées aux composantes spectrales par

$$f_n = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{f}_k \exp\left(i2\pi \frac{nk}{N}\right), \quad \tilde{f}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n \exp\left(-i2\pi \frac{nk}{N}\right). \quad (\text{II.6})$$

L'opération de dérivation de f se ramène à une multiplication sur \tilde{f} . Calculer la série de Fourier, multiplier \tilde{f}_k par $i2\pi k/N$, puis revenir à f par transformée de Fourier inverse : ces opérations peuvent se faire à la précision de la machine utilisée. Comme l'ensemble des f_n sert à calculer la transformée \tilde{f} , nous avons inclus toute l'information disponible dans ce calcul de dérivée. Pour des fonctions suffisamment lisses, la vitesse de convergence de ces méthodes est remarquablement grande (voir [Figure II.5](#)).

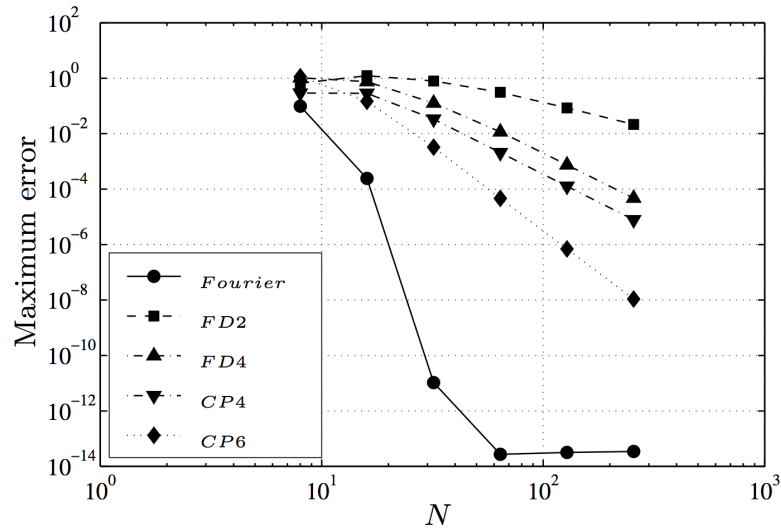


FIGURE II.5. – Erreur sur la résolution d'une équation d'advection $\partial_t f + \partial_x f = 0$ en fonction du nombre de modes spectraux N , pour une méthode spectrale (ronds et traits pleins) et plusieurs méthodes en différences finies d'ordre 2, 4 et 6. Figure extraite de Canuto et al. [62].

La décomposition en série de Fourier est judicieuse lorsque l'on souhaite naturellement imposer des conditions aux limites périodiques à la fonction

f. Pour des conditions aux limites différentes il faut employer un autre ensemble de fonctions élémentaires. Dans la grande majorité des cas, il s'agit de polynômes ϕ_k définis sur un segment, une demi droite ou la droite réelle entière, ordonnés par degré croissant, et orthonormés pour un certain produit scalaire :

$$\langle \phi_a, \phi_b \rangle = \delta_{ab}. \quad (\text{II.7})$$

Les *coefficients spectraux* d'une fonction f sont ensuite obtenus par projection : $\tilde{f}_k = \langle f, \phi_k \rangle$. Si l'on souhaite résoudre (II.1) sur l'intervalle $\mathcal{D} = [-1, 1]$ avec des conditions aux limites de Dirichlet, les polynômes de Chebyshev sont appropriés et offrent une vitesse de convergence optimale. Pour un problème différentiel sur la droite réelle, ce sont les polynômes de Hermite qui seront appropriés. Dans ces deux cas, et à la différence des séries de Fourier, l'opération de dérivation ne se résume plus à une multiplication scalaire dans l'espace spectral. Cependant, ces ensembles de polynômes vérifient diverses relations de récurrence, et des relations analytiques permettent souvent d'exprimer la dérivée d'un polynôme ϕ_k comme combinaison linéaire des autres polynômes de la base :

$$\frac{d\phi_k}{dx} = \sum_{p=0}^{N-1} D_{kp} \phi_p. \quad (\text{II.8})$$

De cette façon, l'opération de dérivation sur $f(x)$ correspond à un opérateur matriciel agissant sur les composantes spectrales \tilde{f}_k :

$$\frac{df}{dx}(x) \simeq \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{f}_k \frac{d\phi_k}{dx}(x) = \sum_{k,p=0}^{N-1} \tilde{f}_k D_{kp} \phi_p = \sum_{p=0}^{N-1} \tilde{f}'_p \phi_p. \quad (\text{II.9})$$

Les méthodes spectrales sont également adaptées pour garantir certaines lois de conservation. Par exemple, la transformée de Fourier par rapport à x de (II.1) est

$$\partial_t \tilde{f} + ik\tilde{f} - \nu k^2 \tilde{f} = 0, \quad (\text{II.10})$$

et pour $k = 0$ (i.e. la valeur moyenne), cette équation donne directement $\partial_t \tilde{f}(k = 0) = 0$. Cette propriété sera également préservée sous une autre décomposition spectrale : toutes les bases de polynômes doivent contenir un polynôme constant ϕ_0 (de degré zéro), et la loi de conservation se traduira nécessairement par $\partial_t \langle f, \phi_0 \rangle = 0$.

Le principal inconvénient des méthodes spectrales résulte de ce que l'ensemble des valeurs f_n dans l'espace réel intervient dans le calcul de chaque coefficient spectral \tilde{f}_k , et réciproquement. En conséquence, une erreur sur un coefficient spectral va affecter la fonction associée dans l'espace réel sur tout son ensemble de définition. Un exemple frappant est le phénomène de Gibbs, illustré sur la Figure II.6. Les discontinuités ne peuvent pas être capturées avec un nombre fini de modes spectraux, et la meilleure approximation de la fonction recherchée produit des oscillations sur le domaine entier. Ce phénomène révèle notamment que les méthodes spectrales sont

Celle qui minimise la distance pour ce produit scalaire.

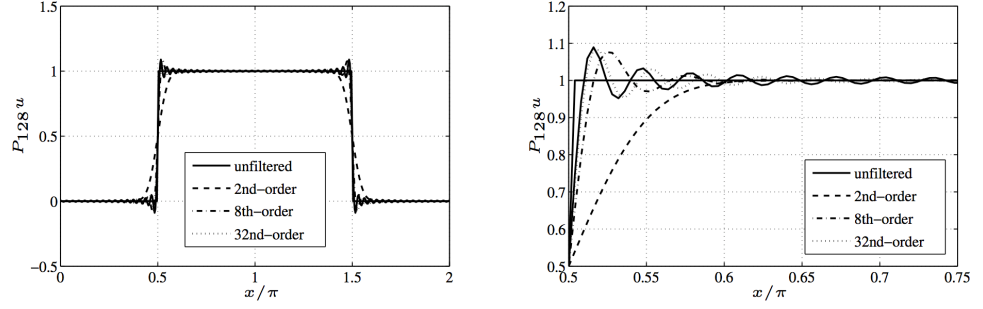


FIGURE II.6. – Le phénomène de Gibbs se manifeste lorsque l’ordre de troncation est insuffisant pour capturer les variations brusques de la fonction dans l’espace réel. Les oscillations sont causées par les discontinuités, mais elles s’étendent à tout l’ensemble de définitions. Il existe des méthodes de lissage (courbes en traits pointillés), dont l’effet est plus appréciable sur la figure de droite (zoom au niveau d’une discontinuité). Figure extraite de Canuto et al. [62].

inadaptées au traitement des discontinuités, ce qui pourra limiter leur applications physique (interfaces, chocs, etc.).

Pour la même raison, les méthodes spectrales se prêtent mal au calcul parallèle. La plupart des phénomènes physiques sont spatialement locaux ; cela permet de partitionner l’espace réel en sous-domaines, chacun affecté à une unité de calcul indépendante, et ne communiquant qu’avec ses voisins directs. Cependant, un processus physique local dans l’espace réel sera non-local dans l’espace spectral. Un partitionnement de l’espace réel ou spectral ne présentera pas d’intérêt en performances puisque chaque unité de calcul aurait besoin de connaître le contenu de toutes les autres. Par ailleurs, le calcul de la transformée spectrale d’une fonction échantillonnée sur N points nécessite généralement $\mathcal{O}(N^2)$ opérations. Cela limite l’usage des méthodes spectrales comparé aux méthodes “locales” dans l’espace réel, dont la complexité avoisine $\mathcal{O}(N)$. Enfin, l’implémentation de conditions aux limites quelconques peut être malaisé dans l’espace spectral. Il existe néanmoins des codes spectraux adaptés pour simuler des écoulements astrophysiques, et parallélisables dans une certaine mesure.

Dans l’Annexe A, j’emploie une méthode de collocation Chebyshev pour résoudre des problèmes aux valeurs propres. Les références incontournables à l’égard des méthodes spectrales en hydrodynamique sont Canuto et al. [62] et Peyret [270].

II.2.3 Éléments finis

La méthode des éléments finis hérite de certains caractères des méthodes spectrales : la fonction recherchée est représentée comme combinaison linéaire de fonctions élémentaires ϕ_k . En revanche, ces fonctions élémentaires (les éléments finis) ont un support compact sur \mathcal{D} :

$$\phi_k(x) = 0 \forall x \notin \Omega_k \subset \mathcal{D}. \quad (\text{II.11})$$

Exception faite de la transformée de Fourier [81], de complexité $\mathcal{O}(N \log N)$.

E.g. le code SNOOPY [193].

Par exemple, nous pouvons approximer la fonction recherchée f par une fonction en escalier, en choisissant des fonctions créneaux comme éléments de base, auquel cas les Ω_k partitionnent \mathcal{D} . Pour approximer f comme une fonction linéaire par morceaux, nous choisissons les ϕ_k comme fonctions chapeaux : $\phi_k(x_j) = \delta_{kj}$ linéaire par morceaux. Le degré des polynômes choisis est toujours conditionné par le degré de dérivabilité souhaité pour la solution. Comme pour les méthodes spectrales, la dérivée d'une fonction s'obtient en dérivant les fonctions élémentaires :

Rarement plus de 3.

$$f(x) \simeq \sum_k \tilde{f}_k g_k(x), \quad (\text{II.12a})$$

$$\frac{df}{dx}(x) \simeq \sum_k \tilde{f}_k \frac{dg_k}{dx}(x), \quad (\text{II.12b})$$

mais la propriété (II.11) apporte un caractère spatialement local à cette méthode de résolution. La différence entre les méthodes en éléments finis et les méthodes spectrales rappelle la différence entre une succession d'interpolations polynomiales d'ordre bas, sur de petits intervalles, et une interpolation d'ordre élevé sur tout l'intervalle. Au lieu de résoudre le problème (II.1), la méthode des éléments finis s'attache plutôt à sa "formulation faible" (i.e. intégrale, voir Courant [82]), dont la solution sera une approximation de la vraie solution sous certaines conditions.

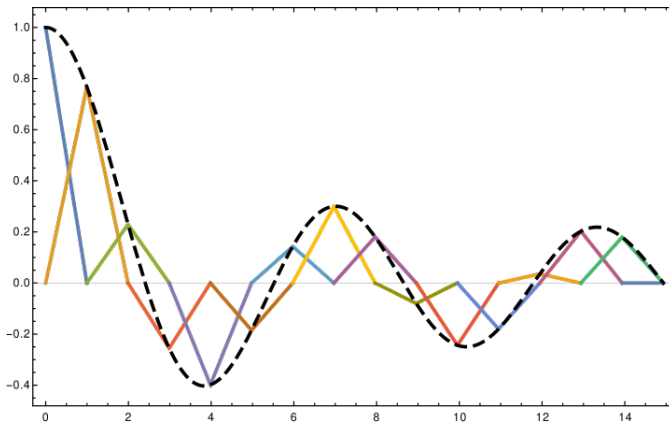


FIGURE II.7. – Illustration de la méthode des éléments finis : une fonction de Bessel (noir) est décomposée comme une somme de fonctions chapeau.

Les vertex du maillage peuvent être placés de manière à reproduire des objets de géométrie complexe, les fonctions élémentaires n'étant définies qu'ensuite (voir par exemple Prud'Homme et al. [280]). Cela constitue l'un des principaux avantages des méthodes en élément finis. Ces méthodes permettent également de contrôler finement la précision des solutions estimées. On leur trouve des applications en astrophysique, mais il n'existe pas à ma connaissance de code de simulation dédié ; on leur préférera souvent l'une des autres méthodes présentées.

II.2.4 Smoothed Particle Hydrodynamics

La méthode SPH partage un point commun avec la méthode des éléments finis : à chaque vertex du maillage est associé une fonction à support compact ϕ_k . On parle de fonction de lissage, ou de noyau de convolution. En revanche, le support de ce noyau n'est pas déterminé par les points voisins du maillage, et peut en intersecter un nombre arbitraire. De même qu'en éléments finis, une fonction f et sa dérivée sont approximées en un point x en sommant les contributions de chaque points voisins :

$$f(x) \simeq \sum_k f_k \phi_k(x - x_k) \quad (\text{II.13a})$$

$$\frac{df}{dx}(x) \simeq \sum_k f_k \frac{d\phi_k}{dx}(x - x_k). \quad (\text{II.13b})$$

Par opposition à 'Eulérien'.

La méthode SPH se distingue fondamentalement des méthodes précédentes par son caractère lagrangien. Chaque vertex évolue spatialement au cours du temps, comme s'il représentait une particule élémentaire de matière. Le maillage est donc advecté en cas d'écoulement, et naturellement destructuré. Chaque vertex du maillage (chaque particule) sert à échantillonner l'écoulement sous-jacent : on reconstruit les propriétés du fluide en tout point par l'opération de convolution (II.13a).

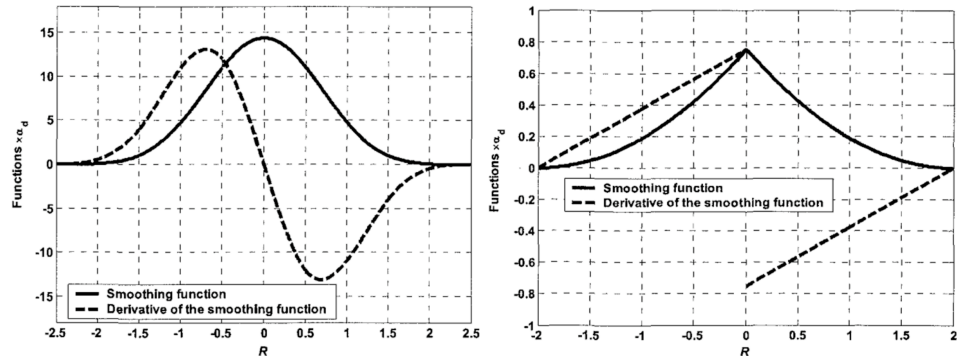


FIGURE II.8. – Deux exemples de noyaux employés en SPH, chacun polynomial par morceaux (quatrième degré à gauche, second degré à droite). Leur support doit être assez large pour intersecter plusieurs autres particules. Figure extraite de Liu & Liu [211].

Comme avec les éléments finis, la méthode SPH permet de traiter aisément des problèmes ayant des géométries complexes. Les particules vont naturellement se répartir dans le volume occupé par le fluide, évitant de sur-échantillonner certaines régions. La largeur caractéristique du noyau de chaque particule peut être incluse dans les variables dynamiques, permettant d'affiner spontanément la résolution dans les zones de forts gradients. La méthode SPH est parfaitement adaptée aux problèmes faisant intervenir des surfaces libres [e.g. 39, 239]; il n'est donc pas surprenant qu'elle ait été originalement développée pour l'astrophysique [126]. Un

dernier atout de ces méthodes est qu'elles garantissent aisément les propriétés de conservation des systèmes physiques (masse, moment, énergie) pour peu que les équations soient correctement formulées.

*Symétriques par
interchange de particules.*

Un inconvénient générique aux méthodes SPH est lié à l'agencement spatial des particules. Si chaque particule de fluide exerce une pression sur ses voisines, les seuls équilibres stables sont de nature cristalline. Autrement, des instabilités liées à l'agencement des particules peuvent se produire [302, 240]. Un autre argument en défaveur des méthodes SPH est la faible précision des solutions relativement au nombre de particules employées. Ce défaut est lié à la vitesse de convergence de l'interpolation (II.13), et agit en effet comme un "bruit numérique". Néanmoins, ces méthodes restent souvent avantageuses en astrophysique ; voir à ce sujet les revues de Monaghan [238], Rosswog [292], Springel [315]. Dans le contexte des disques protoplanétaires, elles sont notamment utilisées pour étudier la dynamique des poussières [187, 131].

II.2.5 Volumes Finis

J'aborde une dernière méthode de résolution d'EDP, dont je me suis le plus servi durant ma thèse et sur laquelle je reviens dans la Section II.3. La méthode des volumes finis fut développée pour résoudre des problèmes hyperboliques [205], tels que le problème (II.1) pour $v = 0$. La première étape consiste à écrire les équations sous une forme "conservative" :

$$\partial_t u + \nabla \cdot f = s \quad (\text{II.14})$$

où u est une densité, f le flux associé, et s un terme source. Le domaine de calcul \mathcal{D} est partitionné en volumes élémentaires, de géométrie quelconque. L'intégration de (II.14) sur un volume élémentaire \mathcal{V} donne, par application du théorème de Stokes :

$$\partial_t \int_{\mathcal{V}} u \, dV + \int_{\partial \mathcal{V}} f \cdot d\sigma = \int_{\mathcal{V}} s \, dV, \quad (\text{II.15})$$

que l'on pourra réécrire sous une forme plus compacte :

$$\partial_t U + \sum_{\text{face } i} F_i \sigma_i = S. \quad (\text{II.16})$$

À ce stade, il suffit d'estimer les flux moyens à travers chaque face de \mathcal{V} pour connaître la dérivée temporelle de U . Cette égalité s'applique notamment à l'espace \mathcal{D} entier ; en conséquence, dans le cas où $S = 0$, cette méthode garantit que $\int_{\mathcal{D}} u \, dV$ ne dépend que des flux aux bords de \mathcal{D} . La densité u est alors advectée sans création ni pertes, à la précision de la machine de calcul. Quant à l'estimation des flux F_i , elle fait intervenir un nombre limité de volumes de part et d'autre de l'interface. C'est un atout pour paralléliser simplement et efficacement cette méthode. En dépit du faible nombre de points de grille utilisés dans l'estimation de $\partial_t U$,

les méthodes en volumes finis permettent d’atteindre une précision remarquable, et en particulier de suivre fidèlement l’évolution de discontinuités. Cela est rendu possible par une estimation soigneuse des flux F_i et de leur intégration temporelle ; j’y reviens dans la [Section II.3.3.3](#).

II.3 PLUTO

La majorité des simulations numériques réalisées durant ma thèse ont été produites avec le code de simulation PLUTO, développé par Mignone et al. [230]. Il s’agit d’un code en volumes finis initialement développé pour l’astrophysique. Par souci de performance, il est indispensable d’employer un langage de programmation compilé (par opposition à ‘interprété’) et permettant une gestion fine de la mémoire ; le langage C répond parfaitement à ces deux critères. Le code n’en est pas moins modulaire, permettant d’inclure divers effets physiques (diffusivité, champ magnétique, relativité restreinte) dans des géométries simples (cartésienne, cylindrique ou sphérique). Ce langage supporte également de nombreuses implémentations du Message Passing Interface [MPI, 136] et du Open Multi-Processing [Open MP, 71], deux interfaces standards pour la programmation parallèle ; PLUTO emploie effectivement MPI mais pas Open MP.

Éviter par exemple les défauts de cache [69].

Systèmes à mémoire distribuée (MPI) ou partagée (Open MP).

La simulation d’un phénomène physique à l’aide du code PLUTO se déroule en plusieurs étapes génériques :

- A. Définir un cadre de travail : géométrie du problème, modules physiques activés, schemas d’intégration numérique ;
- B. Définir le domaine de calcul et son maillage, les conditions initiales, les conditions aux limites ;
- C. Intégrer en temps le système d’équations jusqu’à satisfaction.

Je réfère le lecteur à Massaglia et al. [221] pour un exposé à la fois concis et approfondi des méthodes en volumes finis pour l’intégration numérique des équations de la MHD.

II.3.1 Variables primitives et conservatives

Voir (II.1). PLUTO intègre les équations de la dynamique sous une forme conservative. Au lieu d’utiliser les variables “primitives” densité-vitesse-pression (ρ, \mathbf{v}, P) , il fait évoluer les variables “conservatives” densité-impulsion-énergie $(\rho, \rho\mathbf{v}, E)$. Si le système considéré est soumis à une force de potentiel ϕ , ainsi qu’à une force non-potentielle \mathbf{g} , alors la forme conservative des équations de la MHD idéale est :

$$\partial_t \begin{bmatrix} \rho \\ \rho\mathbf{v} \\ E + \rho\phi \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} \rho\mathbf{v} \\ \rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + (P + \frac{1}{2}\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})\mathbb{1} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} \\ (E + P + \frac{1}{2}\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} + \rho\phi)\mathbf{v} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v})\mathbf{B} \\ \mathbf{v} \otimes \mathbf{B} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho\mathbf{g} - \rho\nabla\phi \\ \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{g} \\ 0 \end{bmatrix}$$

On remarque que les variables primitives interviennent dans la définition des flux, et PLUTO doit régulièrement calculer un jeu de variables à partir de l'autre. Cette étape est une des plus sensibles et nécessite des précautions. Par exemple, la pression est obtenue à partir de la densité d'énergie $E = \rho\epsilon + \rho v^2/2 + B^2/2$ et d'une équation d'état $P(\rho, \epsilon)$. Si la densité d'énergie magnétique $B^2/2$ est grande devant la pression thermique P , la soustraction $\rho\epsilon = E - \rho v^2/2 - B^2/2$ peut être entachée d'une grande erreur de troncation, causant éventuellement des pressions négatives ou du bruit à l'échelle de grille. Il existe des méthodes pour éviter ce problème [30], mais le remède standard consiste à augmenter artificiellement la pression et/ou la densité pour imposer une valeur minimale. Cette précaution est habituellement insuffisante, car elle ne corrige pas le processus physique à l'origine des densités et pressions négatives. Par exemple, lors d'une détente adiabatique la densité peut passer sous le seuil imposé ; en réhaussant la densité dans cette région, on réhausse également la pression, pouvant accentuer la détente initiale de manière explosive.

II.3.2 Transport constraint

L'équation (I.11) décrit l'évolution du champ d'induction magnétique. L'opérateur rotationnel garantit que si $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ à un temps donné, alors cela reste vrai à tout temps. Cependant, toutes les discrétisations de (I.11) ne préservent pas $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ à la précision de la machine. Dans le cas MHD idéal, pour lequel $\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B}$, les équations d'impulsion et d'énergie sont sensibles à cette divergence :

Prendre la divergence de (I.11).

$$\partial_t [\rho \mathbf{v}] \simeq \nabla \cdot [\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}] = \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{B})}_{\neq 0?} \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}, \quad (\text{II.17a})$$

$$\partial_t \left[\frac{B^2}{2} \right] \simeq \mathbf{B} \cdot \left[\underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{B})}_{\neq 0?} \mathbf{v} - (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} \right]. \quad (\text{II.17b})$$

Ces contributions n'ont pas un signe défini, mais elles peuvent influencer la dynamique d'un système de manière non-physique. Plusieurs méthodes ont été mises au point pour éviter ce problème [331]. Par exemple, les équations peuvent être réécrites en termes de vecteur potentiel A tel que $\mathbf{B} = \nabla \times A$, garantissant $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ à chaque instant. Dans un code spectral utilisant une décomposition en série de Fourier, $\nabla \cdot \mathbf{B} = i\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$ peut être exactement imposé en projetant \mathbf{B} orthogonalement à \mathbf{k} dans l'espace de Fourier à chaque pas de temps.

Dans le cadre des volumes finis, Evans & Hawley [96] ont proposé une méthode conservative garantissant $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ à la précision de la machine. Une manière naturelle de garantir une loi de conservation consiste à respecter la symétrie associée. L'équation (I.11) peut être intégrée sur une surface \mathcal{S} , et le théorème de Stokes donne

$$\partial_t \int_{\mathcal{S}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = - \int_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = - \int_{\partial \mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}, \quad (\text{II.18})$$

ne dépendant que des forces électromotrices aux bords de \mathcal{S} . Si l'influence des bords peut être effacée (forces électromotrice s'annulant à l'infini, conditions périodiques), alors (II.18) traduit la conservation du flux magnétique traversant cette surface. La première étape consiste donc à manipuler le champ d'induction B moyenné sur les faces des cellules élémentaires, et non sur leur volume comme les autres quantités (densité, vitesse). Quant au champ électromoteur E , il est moyenné sur les arêtes des cellules. Cela permet de discrétiser exactement (II.18), et ainsi de garantir $\nabla \cdot B = 0$.

II.3.3 Solveur de Riemann

II.3.3.1 Schéma 'upwind'

Considérons l'équation d'advection sur $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$

$$\partial_t q + \lambda \partial_x q = 0, \quad (\text{II.19})$$

ainsi que sa discrétisation au premier ordre, par *différences finies à droite* sur une grille d'espace-temps de pas (ε, δ) et indexée par (i, n) :

$$q_{n+1}^i = q_n^i - \lambda \frac{\delta}{\varepsilon} (q_n^{i+1} - q_n^i). \quad (\text{II.20})$$

Nous pouvons réécrire cette équation

$$\begin{aligned} q_{n+1}^i &= q_n^i - \lambda \frac{\delta}{\varepsilon} \left(q_n^{i+1} - q_n^i + \frac{1}{2} (q_n^{i+1} - q_n^{i+1} + q_n^{i-1} - q_n^{i-1}) \right) \\ &= q_n^i - \lambda \frac{\delta}{\varepsilon} \left(\frac{q_n^{i+1} - q_n^{i-1}}{2} + \frac{q_n^{i+1} - 2q_n^i + q_n^{i-1}}{2} \right), \end{aligned} \quad (\text{II.21})$$

correspondant cette fois-ci à la discrétisation au second ordre en δ de l'équation d'advection-diffusion :

$$\partial_t q + \lambda \partial_x q = -\lambda \delta \partial_x^2 q. \quad (\text{II.22})$$

En comparant avec (II.19), nous trouvons un terme supplémentaire au membre de droite ; il est analogue à une diffusivité $\nu \equiv \lambda \delta$, proportionnel à l'espacement spatial de la grille δ ainsi qu'à la vitesse de l'écoulement. Ce coefficient peut être positif ou négatif, autorisant dans le premier cas le développement d'une instabilité visqueuse (numérique). Le principe des schémas 'upwind' (à contre courant) est de systématiquement calculer la dérivée au premier ordre de (II.20) dans la direction opposée à l'écoulement. De cette façon, le coefficient devant $\partial_x^2 q$ dans (II.22) est toujours négatif, c'est à dire dissipatif et stabilisant.

Nous aurions pu directement discrétiser la dérivée spatiale de (II.19) au second ordre en δ , c'est à dire ne garder que le premier terme entre parenthèse dans le membre de droite de (II.21). Nous aurions ainsi obtenu une discrétisation au second ordre de précision en δ , avec une dissipation numérique d'ordre plus élevé. Néanmoins, un tel schéma serait inconditionnellement instable. Le théorème de Godunov [128] affirme qu'un

schéma linéaire d'intégration temporelle de (II.19), qui serait monotone (i.e. ne crée pas d'extrema locaux), peut être au plus d'ordre 1 spatialement. Un schéma d'intégration optimal aura une précision d'ordre élevé partout sauf dans les zones "à risques", où il basculera automatiquement vers une méthode plus diffusive. La méthode des volumes finis fournit une manière naturelle d'évaluer la dissipation nécessaire et suffisante via le problème de Riemann.

II.3.3.2 Problème de Riemann

Le problème de Riemann désigne un ensemble de problèmes différentiels aux conditions initiales. Les équations sont linéaires et hyperboliques, du type $\partial_t u + \partial_x f = 0$. Les conditions initiales sont définies par un état gauche et un état droit de part et d'autre de $x = 0$, au sein desquels les variables conservatives u sont constantes. Nous pouvons appliquer ce cas d'étude pour estimer l'évolution du fluide entre deux cellules voisines du maillage dont nous connaissons les propriétés moyennes à un instant.

Par combinaisons linéaires, nous pouvons construire un jeu de *variables caractéristiques* pour lesquels le système différentiel est diagonal. Ces variables ont la propriété d'être advectées le long de *courbes caractéristiques* avec chacune leur *vitesse caractéristique* [83, 205]. La Figure II.9 illustre l'évolution de ce système en hydrodynamique compressible. Partant d'un état gauche u_L et d'un état droit u_R séparés par l'interface $x = 0$, la diagonalisation du problème linéarisé met en évidence une onde de choc (SW), une onde de raréfaction (RW) et une discontinuité de contact (CD). À l'extérieur du cône délimité par les ondes de choc et de raréfaction, les états initiaux n'ont pas reçu l'information quant à la discontinuité initiale, donc ils restent inchangés. Au passage de chaque onde caractéristique, l'état du fluide adopte l'une des variables caractéristiques, définie initialement par mélange des états gauche et droit. Le nombre d'ondes caractéristiques est déterminé par le nombre d'équations du système hyperbolique; par exemple, en MHD compressible 3D ce nombre s'élève typiquement à sept.

Si les états gauche et droit représentent deux cellules de volume fini, nous pouvons intégrer la solution du problème de Riemann sur un intervalle de temps Δt , puis moyenniser cette solution sur le volume des cellules pour affecter leur nouvelles propriétés.

En lien avec les schémas upwind présentés en Section II.3.3.1, les états gauche et droit sont mélangés lors de la définition des variables caractéristiques du problème de Riemann, et la diffusivité numérique est proportionnelle à la plus grande vitesse caractéristique en jeu. Cette méthode s'accorde très bien conceptuellement avec la méthode des volumes finis; elle s'appuie sur un problème fondamentalement discontinu, et peut être adaptée pour capturer des discontinuités tout en restant robuste. Un exposé approfondi sur l'application des solveurs de Riemann pour les méthodes en volume finis est donné par Toro [330].

Dans la suite, j'ai employé différents solveurs de Riemann *approximatifs* selon le contexte des simulations :

Une huitième onde pouvant être incluse pour imposer $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$; voir Powell [276].

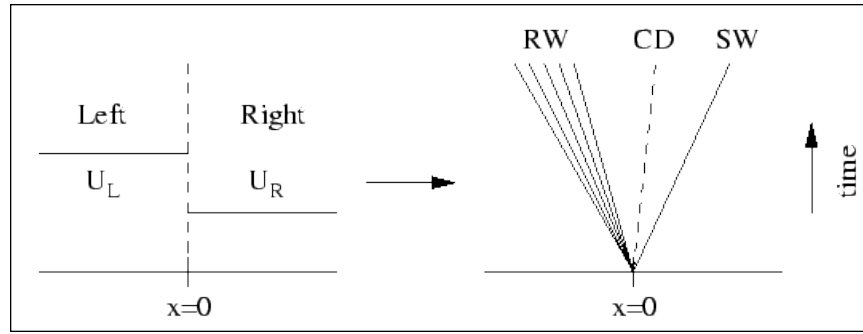


FIGURE II.9. – Problème de Riemann : deux états uniformes u_L et u_R sont initialement séparés par une interface en $x = 0$. Le système d'équations hyperbolique admet dans cet exemple trois ondes caractéristiques : une onde de raréfaction (RW), une discontinuité de contact (CD) et une onde de choc (SW), se propageant à une vitesse constante indiquée par l'orientation de chaque courbe caractéristique.

- à basse résolution : le solveur HLL [144] en hydrodynamique et en magnétohydrodynamique non-idéale incluant l'effet Hall ;
- à haute résolution : le solveur HLLC en hydrodynamique et le solveur HLLD [229, 235] en magnétohydrodynamique sans effet Hall ;
- le solveur de Roe [290] pour des tests de convergence en MHD idéale.

Chacune de ces méthodes résout le problème de Riemann aux interfaces de façon approchée. En particulier, le solveur HLL ignore la discontinuité de contact dans l'ensemble des ondes caractéristiques, tandis que les solveurs HLLC (C pour 'contact') et HLLD l'incluent. Bien que la vitesse caractéristique extrême soit inchangée, le solveur HLL est significativement plus diffusif que ses analogues tenant compte de la discontinuité tangentielle. Il peut néanmoins être avantageux pour plusieurs raisons : il est plus robuste et sensiblement plus rapide. Il s'est avéré être indispensable pour implémenter l'effet Hall ; j'y reviens dans la [Section II.3.5](#).

II.3.3.3 Schémas de Godunov et de Van Leer

Le problème de Riemann permet d'estimer les flux intervenants dans (II.1). Après intégration sur le volume d'une cellule, nous obtenons (II.16) ; si nous l'intégrons également en temps, nous obtenons la relation exacte :

$$U(t + \Delta t) - U(t) = \int_t^{t+\Delta t} \left\{ S(\tau) - \sum_i F_i(\tau) \sigma_i \right\} d\tau. \quad (\text{II.23})$$

L'ordre de précision d'un schéma d'intégration est contraint par la précision sur l'intégration temporelle des flux. Le schéma de Godunov [128] consiste à remplacer les flux exacts $F_i(\tau)$ dans l'intégrale par les flux issus des problèmes de Riemann aux interfaces σ_i , avec pour conditions initiales les variables conservatives au temps t . La majorité des simulations que je vais présenter ont été intégrées suivant une méthode de Runge-Kutta d'ordre deux, i.e. les flux sont estimés deux fois par pas de temps.

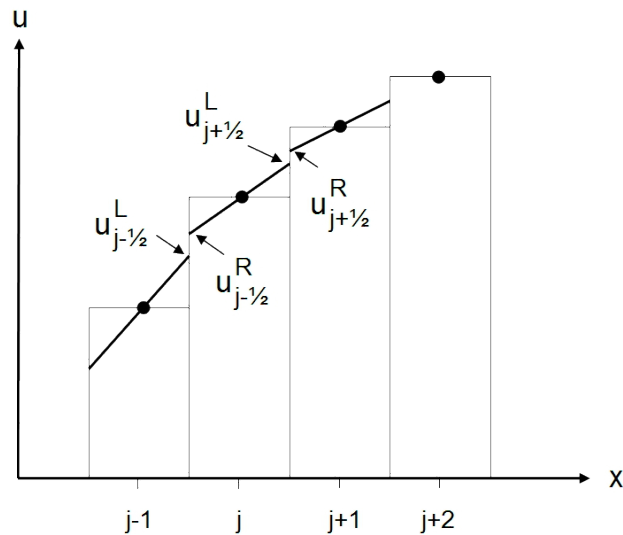


FIGURE II.10. – Reconstruction linéaire par morceaux des champs à l'échelle sous-maille, avec limiteur de pente pour garantir la stabilité numérique, permettant d'estimer plus finement les flux aux interfaces dans le problème de Riemann.

Une amélioration due à Van Leer [341] consiste à “reconstruire” les champs à l'intérieur des cellules. Il s'agit de réintroduire de l'information quant à la distribution spatiale de la densité u à l'échelle sous-maille, tout en conservant les valeurs moyennées intégrées. Par exemple, connaissant les valeurs moyennées en volume $U_n(t)$ dans chaque cellule, nous pourrions employer une interpolation polynomiale pour estimer plus fidèlement les valeurs de la densité $u(x_i, t)$ aux interfaces σ_i , et par suite les flux $F_i(t)$ aux interfaces. Cette méthode permet d'accroître l'ordre de précision spatiale du schéma numérique. Elle est numériquement stable à condition de limiter la pente des fonctions reconstruites par morceaux à l'intérieur de chaque cellule. La Figure II.10 illustre un exemple de reconstruction linéaire par morceaux avec limiteur de pente.

Dans la suite, sauf indication particulière, j'utiliserai toujours une méthode de reconstruction linéaire des champs à l'intérieur des cellules. Les méthodes de reconstructions d'ordre plus élevé n'ont présenté des avantages appréciables que lors d'analyse de stabilité linéaire, afin de mieux contrôler le bruit sur une condition initiale d'équilibre. Je n'ai pas observé de différence qualitative ou quantitative en employant des schémas de reconstruction d'ordre plus élevé (reconstruction parabolique ou WENO3 [143]) dans des écoulements turbulents suffisamment entretenus. Le limiteur de pente utilisé sera systématiquement celui de Van Leer, par contrainte de convergence du schéma en présence de l'EMF Hall [332, 195].

II.3.4 Calcul des courants électriques

Comme discuté dans la [Section 1.2](#), les effets non-idéaux font tous intervenir le courant électrique $\mathbf{J} \equiv \nabla \times \mathbf{B}$. Il est donc souhaitable de calculer les courants électriques une seule fois par pas de temps, afin d'en disposer pour chaque effet MHD non-idéal. Comme le champ d'induction magnétique \mathbf{B} est défini sur les faces des cellules en transport contraint (voir [Section II.3.2](#)), il est judicieux d'évaluer la densité de courant $\mathbf{J} \equiv \nabla \times \mathbf{B}$ sur les faces également ; de cette façon, nous pouvons directement calculer les produits $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ aux interfaces et les inclure dans le solveur de Riemann.

Nous procédons par différences finies pour estimer les courants aux faces des cellules, avec $J_i = \epsilon_{ijk} \partial_j B_k$ en coordonnées cartésiennes. Considérons une face normale à la direction paramétrée par x , de coordonnées $\mathbf{r} = (x_\alpha + \frac{1}{2}, y_\beta, z_\gamma)$. Nous avons :

$$\partial_x B_y(\mathbf{r}) \simeq \frac{B_y(x_{\alpha+1}, y_\beta, z_\gamma) - B_y(x_\alpha, y_\beta, z_\gamma)}{x_{\alpha+1} - x_\alpha}, \quad (\text{II.24a})$$

$$\partial_y B_x(\mathbf{r}) \simeq \frac{B_x(x_{\alpha+\frac{1}{2}}, y_{\beta+1}, z_\gamma) - B_x(x_{\alpha+\frac{1}{2}}, y_{\beta-1}, z_\gamma)}{y_{\beta+1} - y_{\beta-1}}. \quad (\text{II.24b})$$

La première équation ([II.24a](#)) nécessite de moyenner le champ B_y sur les cellules centrées en x_α et $x_{\alpha+1}$; cette moyenne fait intervenir les valeurs de B_y sur les autres faces de la cellule considérée, et ce lissage se répercute par un ajout de diffusion numérique. La seconde équation ([II.24b](#)) emploie directement le champ magnétique sur les faces des cellules voisines, procurant une précision spatiale du second ordre par différences finies centrées. Nous obtenons ainsi $J_z = \partial_x B_y - \partial_y B_x$ sur cette face normale à x , et les autres composantes de manière analogue sur chaque face.

Sur une face donnée, seule la composante normale du champ magnétique est stockée ; par exemple, la distribution de B_x est représentée sur l'ensemble des faces normales à la direction x . En conséquence, un troisième cas de figure se présente, nécessitant également une moyenne :

$$\partial_y B_z(\mathbf{r}) \simeq \left(\frac{B_y(x_{\alpha+1}, y_{\beta+1}) + B_y(x_\alpha, y_{\beta+1})}{2} - \frac{B_y(x_{\alpha+1}, y_{\beta-1}) + B_y(x_\alpha, y_{\beta-1})}{2} \right) / (y_{\beta+1} - y_{\beta-1}). \quad (\text{II.25})$$

L'opérateur rotationnel prend une forme plus complexe en géométrie non-cartésienne. La méthode est néanmoins identique, en prenant soin de distinguer la distance séparant les centres de deux faces voisines et la distance séparant les centres géométriques de deux cellules voisines. L'implémentation du calcul des courants électriques en géométrie non-cartésienne dans le code PLUTO fut ma première tâche concrète en début de thèse. Bien que cette tâche ne soit pas particulièrement compliquée, elle représente environ 250 lignes de code très répétitives dans la manipulation de tableaux à quatre indices. Une erreur peut facilement passer inaperçue, ce pourquoi je dédie l'[Annexe A](#) à la validation de cette implémentation.

II.3.5 Effets MHD non-idéaux dans PLUTO

Une fois que nous disposons des courants électriques, nous pouvons inclure les trois effets MHD non-idéaux dans les équations d'induction et d'énergie. Dans le cas où le champ magnétique est stocké au centre des cellules, une intégration en volume permet de faire évoluer B_i suivant l'équation conservative (II.16), comme pour le champ de densité. Si η représente un tenseur de résistivité :

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{B} &= \nabla \times [-\eta \cdot \mathbf{J}] \\ \partial_t B_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j [-\eta_{km} J_m] = -\partial_j [\epsilon_{ijk} \eta_{km} J_m] \\ &= -\nabla \cdot \mathbf{f}_i,\end{aligned}\quad (\text{II.26})$$

avec le "flux" f_i associé à l'évolution de la composante B_i .

Dans le cas où le champ magnétique est stocké sur les faces des cellules (i.e. transport contraint Section II.3.2), le terme $\epsilon_{ijk} \eta_{km} J_m$ donne l'EMF parallèle à x_j sur la face normale à x_i ; ces EMFs sont incorporées au schéma d'intégration par analogie à (II.18), bien que les courants soient estimés au centre des faces et non sur les arêtes. Une démarche rigoureusement identique est appliquée pour la diffusion ambipolaire, avec l'EMF appropriée $E_A = \eta_A J_\perp$ (voir Section I.3.3). Ces diffusivités imposent des contraintes sur les pas de temps pour que le schéma d'intégration reste numériquement stable. Avec un schéma d'intégration explicite (e.g. Runge Kutta), le majorant pour les pas de temps est donné par $\tau_\eta \sim \delta^2 / \eta_{O,A}$, où δ est la plus petite longueur d'arête de cellule sur laquelle circule l'EMF. Ce temps varie quadratiquement avec la taille des cellules et devient handicapant à haute résolution. Je n'ai pas pu employer un algorithme de "super time stepping" [5], incompatible avec la formulation en transport contraint pour l'induction magnétique dans le code PLUTO. Notons qu'en présence de gradients de diffusivité, l'équation d'induction peut être développée comme

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times [\eta \mathbf{J}] = \eta \Delta \mathbf{B} + \nabla \eta \times \mathbf{J}, \quad (\text{II.27})$$

révélant un second terme de nature hyperbolique, associé à la vitesse caractéristique $\nabla \eta$. Ce terme peut devenir dominant dans la zone de transition entre le disque et son environnement ionisé (voir Figure I.4).

Nous aurions pu calculer les courants électriques directement sur les arêtes des cellules, et obtenir précisément la circulation du champ électrique sur les interfaces comme dans (II.18). Cette discrétisation est employée par défaut à partir de la version 4.2 de PLUTO, mais cette version n'inclut pas l'effet Hall. L'EMF Hall fut ajoutée indépendamment dans la version 4.0 du code PLUTO, de deux façons différentes [195].

La première implémentation de l'effet Hall respecte (II.18) en calculant les EMFs sur les arêtes des cellules. Dans ce cas, l'effet Hall est traité comme un terme source dans les équations. Cette implémentation s'avère être numériquement instable et tend à produire des structures indésirables à petite échelle (voir Figure II.11 gauche). Un remède possible consiste à volontairement ajouter une diffusivité artificielle sur le champ d'induction

Ce tenseur doit être diagonal, voir Section I.3.2.

$\tau_c \sim \delta/c$ pour une équation hyperbolique avec c la plus grande vitesse caractéristique.

magnétique, proportionnelle à $\delta^2 \omega_H$, avec δ la longueur de l'arête considérée et ω_H la pulsation whistler à cette échelle. Cela revient à ajouter une EMF de la forme $\nu_H \delta^2 \ell_H B_{\perp} \Delta J_{\parallel}$. Je montre sur la [Figure II.11](#) droite que les structures à petite échelle sont considérablement atténuées pour $\nu_H = 0.1$, tous les autres paramètres étant identiques.

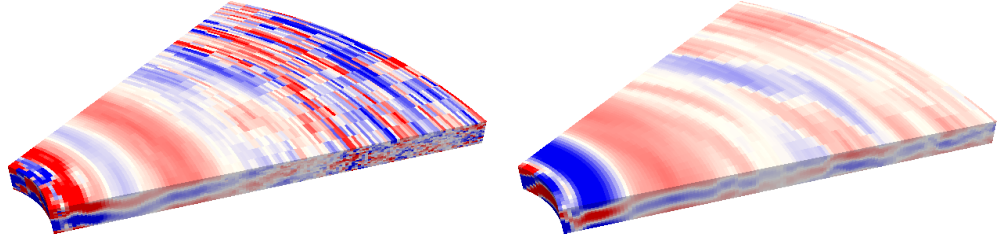


FIGURE II.11. – Champ magnétique B_{φ} dans une simulation cylindrique de la HSI, l'EMF Hall étant implémentée en terme source dans l'équation d'induction, pour $\nu_{EMF} = 0.01$ (à gauche) et $\nu_{EMF} = 0.1$ (à droite).

Sur la [Figure II.12](#) gauche, je montre la même distribution de champ magnétique pour $\nu_H = 0.2$. Les structures à petite échelle n'apparaissent plus dans la distribution de champ toroïdal B_{φ} . En revanche, l'amplitude du champ toroïdal est réduite d'un facteur deux comparé aux cas précédents, témoignant de l'impact à grande échelle d'une diffusion excessive à petite échelle. De plus, la distribution de champ magnétique radial B_r sur la [Figure II.12](#) droite affiche encore des structures mal résolues à l'échelle de grille. En résumé, cette implémentation de l'effet Hall en terme source présente de mauvaises propriétés numériques en régime non-linéaire, et nous n'avons pas de critère rigoureux pour déterminer la valeur adéquate du coefficient de diffusivité artificielle ν_H , à supposer qu'elle soit unique.

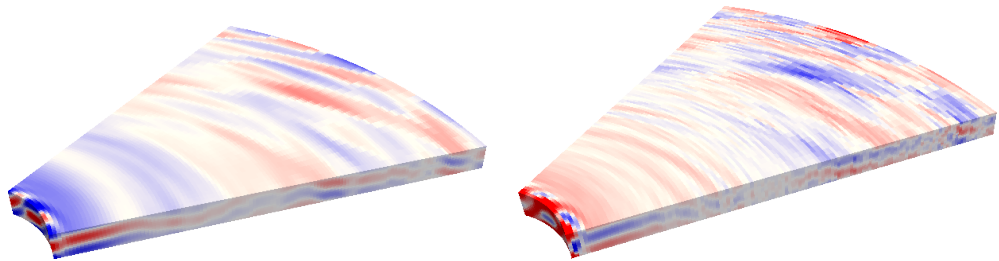


FIGURE II.12. – Simulation cylindrique de la HSI, l'EMF Hall étant implémentée en terme source dans l'équation d'induction, pour une diffusivité $\nu_{EMF} = 0.2$, avec B_{φ} à gauche et B_r à droite.

Une implémentation de l'effet Hall en terme source aurait eu un avantage majeur : disposer d'un schéma numérique faiblement diffusif et laissant libre le choix de solveur de Riemann. J'ai exécuté plusieurs séries de tests pour essayer d'en tirer le maximum, échantillonné plusieurs valeurs de diffusivité ν_H , différentes méthodes de reconstructions, etc., avant de me résoudre à utiliser l'implémentation décrite ci-dessous.

Comme l'effet Hall est essentiellement dispersif et non diffusif, il peut être directement inclus dans le traitement des flux hyperboliques par le

solveur de Riemann. L'implémentation au sein de PLUTO est expliquée dans l'appendice A de Lesur et al. [195]; j'en rappelle ici les grandes lignes et réfère à Tóth et al. [332] pour plus de détails.

L'équation d'induction est agrémentée d'un flux supplémentaire :

$$\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \cdot [\mathbf{v} \otimes \mathbf{B} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{V} - \ell_H (\mathbf{J} \otimes \mathbf{B} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{J})] \equiv -\nabla \cdot \mathbf{F}, \quad (\text{II.28})$$

où la densité de courant \mathbf{J} est considérée comme un champ externe, i.e. sans lien à \mathbf{B} . Les flux $F_{L/R}$ de part et d'autre de l'interface sont estimés à partir des variables conservatives, après reconstruction sous-maille à gauche (indice 'L') et à droite (indice 'R') de l'interface. Le flux de Godunov, utilisé pour avancer le système en temps, est égal aux flux $F_{L/R}$ à l'extérieur du cône délimité par les ondes caractéristiques des états gauche et droit. Cet ensemble d'ondes caractéristiques inclut cette fois les ondes whistler dues à l'effet Hall. Ces ondes sont dispersives : leur vitesse de phase augmente linéairement avec leur fréquence spatiale. La vitesse caractéristique considérée est celle des ondes whistler à l'échelle de grille. À l'intérieur du cône d'influence, nous employons un solveur de Riemann du type HLL [144], ne décrivant qu'un seul état intermédiaire (i.e. les ondes caractéristiques dont la célérité n'est pas extrémale sont négligées), et donc un seul flux de Godunov.

Cette implémentation force l'emploi d'un solveur HLL, avec une dissipation numérique relativement importante (proportionnelle à la vitesse des ondes whistler à l'échelle de grille ; voir Section II.3.3.1). Je montre sur la Figure II.13 que le champ magnétique ne présente plus de structures indésirables à petite échelle. Je présente dans l'Annexe A ma démarche pour valider rigoureusement cette implémentation dans le code PLUTO.

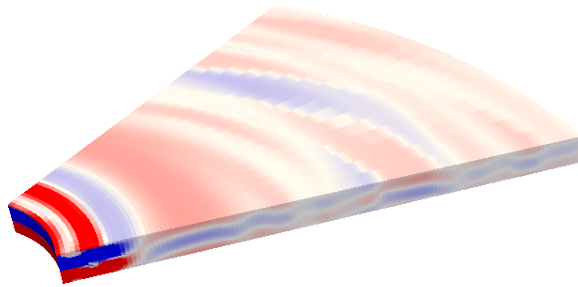


FIGURE II.13. – Champ magnétique radial B_r dans une simulation cylindrique de la HSI, l'EMF Hall étant implémentée dans le solveur de Riemann.

II.4 INFRASTRUCTURES DE CALCUL

II.4.1 *Froggy @ CIMENT*

La machine ‘Froggy’ du réseau grenoblois CIMENT¹ rassemble actuellement 190 noeuds de calcul, possédant chacun 2 processeurs de 8 coeurs. Le gestionnaire de tâches OAR [64] est programmé pour autoriser des travaux parallèles sur une plage de 4 jours et 8192 heures CPU au maximum. J’ai consommé environ 4×10^5 heures CPU sur cette machine durant ma thèse. Je l’ai privilégiée pour réaliser la grande majorité de mes simulations 2D, tous les tests en 2D et également des tests en 3D à basse résolution. La plupart des travaux ont été exécutés sur 16 ou 32 coeurs, pour une durée allant de 6 à 72 heures réelles. La pression d’utilisation relativement faible m’a permis d’obtenir des résultats préliminaires avec une faible latence, et d’exécuter mes tests instantanément sur les noeuds dédiés au développement. Le renouvellement de notre projet de calcul sur Froggy s’est fait sur la base d’un rapport annuel auquel j’ai contribué.

Un nombre entier de noeuds pour respecter le partage des ressources.

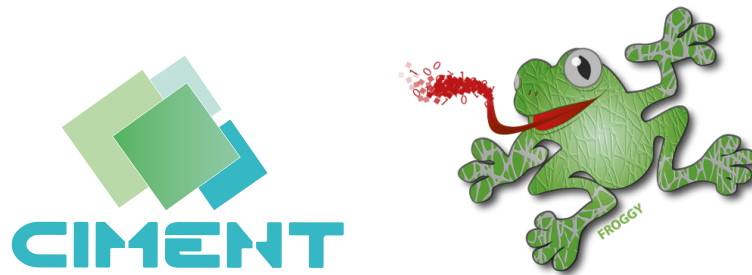


FIGURE II.14. – Le centre grenoblois de Calcul Intensif, Modélisation, Expérimentation Numérique et Technologique (CIMENT) regroupe une dizaine de machines de calcul, dont le supercalculateur Froggy.

II.4.2 *Ada & Turing @ IDRIS*

J’ai exécuté la majorité des simulations 3D sur les machines de l’Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique (IDRIS). Le supercalculateur Ada est comparable à Froggy en terme de vitesse d’exécution à nombre de coeur fixé. Elle dispose de 332 noeuds de calcul, possédant chacun 4 processeurs de 8 coeurs. Le gestionnaire de tâches LoadLeveler [171] est programmé pour permettre des travaux d’une durée maximum de 20h réelles, sur un maximum de 2048 coeurs. J’ai réservé Ada aux calculs ne nécessitant pas moins de 128 coeurs, mais la majorité des simulations exécutées sur Ada ont tourné sur 512, 1024 ou 2048 coeurs, pour des durées comprises entre 12 et 120 heures réelles. J’ai ainsi consommé 2×10^6 heures CPU sur une unique allocation.

4Go RAM par coeur et une fréquence d’horloge 2.7GHz, similaire à Froggy.

1. <https://ciment.ujf-grenoble.fr>

Pour les simulations nécessitant 2048 coeurs ou plus, j'ai privilégié l'utilisation de Turing. Cette machine dispose de 1024 noeuds de 16 coeurs chacun, mais suivant l'architecture IBM Blue Gene/Q [73]. Les CPUs ont une fréquence d'horloge de 1.6GHz ; pour une utilisation optimale, il est indispensable de soumettre plusieurs processus par coeur, chaque coeur pouvant gérer 4 fils d'exécution. Les points forts de cette architecture sont sa faible consommation énergétique et un réseau de communication efficace (topologiquement, un tore de dimension 6).

$2^{13} = 8192$ coeurs pour les simulations 2π stratifiées.

La puissance dissipée croît comme le cube de la fréquence.



FIGURE II.15. – L'Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique (IDRIS) gère les calculateurs Ada et Turing.

Le portage des travaux de Ada vers Turing ne s'est pas déroulé immédiatement. Les temps d'exécution à nombre de coeurs fixé, profitant bien du multi-threading, étaient dégradés d'un facteur compris entre 3 et 8 ; je m'attendais à une diminution d'un facteur 2 dans un cas optimal. Soucieux d'économiser le temps de calcul qui nous était accordé, j'ai préféré exécuter plusieurs séries de tests et faire appel au services d'assistance de l'IDRIS. Nous avons convergé sur un ensemble d'options de compilation du code PLUTO, et sur une répartition acceptable des charges sur les noeuds de calcul. Avec des sous-domaines comprenant un minimum de 32^3 cellules, et en assignant 2 fils d'exécution (processus) par coeur, je me suis contenté d'une vitesse d'exécution 3 fois inférieure à celle obtenue sur Ada pour le même nombre de coeurs. Pour des sous-domaines plus petits que 16^3 cellules actives, le nombre de cellules fantômes (impliquées dans les communications inter-processus) dépasse le nombre de cellules actives (propres à un seul processus). Dans ce cas, le temps réservé aux échanges d'information inter-processus peut dominer le temps réservé à leur traitement intra-processus, dégradant les performances. Il est aussi souhaitable d'aligner le nombre de sous-domaines dans les directions périodiques du maillage au nombre de processus dans une dimension périodique du réseau de calcul ; cela garantit que les échanges se font entre unités de calcul voisines. Finalement, j'ai optimisé les opérations de réduction et d'intégration spatiale en définissant des sous-réseaux de communication adaptés.

J'ai consommé 4×10^6 heures CPUs sur Turing lors d'une première allocation, et autant sur une seconde allocation. J'ai également contribué aux demandes de temps pour ces deux machines, faisant l'objet d'une sélection sévère par le Grand Équipement de Calcul National Intensif (GENCI²).

2. <https://www.genci.fr/>

Deuxième partie

MODÈLES DE DISQUES NON-STRATIFIÉS

Dans la première partie de ma thèse, j'ai employé des modèles de disques non-stratifiés pour étudier la dynamique au coeur des disques protoplanétaires sous l'influence d'effets MHD non-idéaux. Je vais commencer par préciser les caractéristiques de ces modèles, puis les appliquer à des situations de complexité croissante, en gardant un intérêt particulier pour l'effet Hall.

Résumé

Je vais préciser en quoi consiste notre modèle de disque non-stratifié, justifier ses avantages et ses limites, puis définir la configuration numérique “standard” que j’ai adoptée. Ce chapitre représente un investissement de plusieurs centaines de tests dont je ne peux pas faire le bilan exhaustif, et un investissement en temps nettement supérieur à celui requis pour la production et l’analyse des données scientifiques. Par compassion pour mes lecteurs, j’irai directement à la configuration numérique opérationnelle.

Sommaire

1.	Description du modèle	64
1.1.	Motivations physiques	64
1.2.	Géométrie et topologie	64
2.	Configuration standard	66
2.1.	Géométrie	66
2.2.	Schémas d’intégration numérique	66
2.3.	Conditions initiales	67
2.4.	Équation d’état	68
2.5.	Conditions aux limites	69
2.6.	Système d’unités	70
3.	Précautions supplémentaires	70
3.1.	Ondes au bords radiaux	70
3.2.	Pertes de flux magnétique	75

III.1 DESCRIPTION DU MODÈLE

III.1.1 *Motivations physiques*

Les disques réels ont probablement une structure complexe dans leurs distributions de densité, température, champ magnétique. Afin d'isoler certains processus, nous pouvons commencer par simplifier la géométrie du système. L'approximation de Hill [157] (voir Section 1.5.1.1) remplit déjà ce rôle en représentant un volume de fluide infinitésimal au sein du disque ; cependant, elle n'est pas appropriée pour capturer des processus de transport à grande échelle. Nous entreprenons une première étape de 'globalisation' en considérant une tranche équatoriale du disque en coordonnées cylindriques, avec une certaine extension radiale et azimuthale, mais très fine dans la direction verticale. Dans cette limite, nous nous permettons d'ignorer la stratification du disque, i.e. négliger la contribution verticale du potentiel gravitationnel en coordonnées cylindriques, bien qu'elle ait une influence au premier ordre en z/h d'après (1.41). Nous considérons donc un écoulement à géométrie cylindrique, dont la physique devrait être invariante par translation verticale. Ce faisant, nous éliminons les processus de transport vertical tels que le lancement d'un vent, ou la convection due à des effets de flottabilité [169, 201, 158].

III.1.2 *Géométrie et topologie*

Nous choisissons un système de coordonnées cylindriques (r, φ, z) , avec r centré sur l'astre massif et z mesuré par rapport au plan de rotation du disque. Dans ce système de coordonnées, le domaine de calcul est un cylindre délimité par les intervalles $\Delta r \times \Delta \varphi \times \Delta z$. Il est commun de restreindre l'intervalle angulaire à une fraction de disque, avec des conditions aux limites périodiques, afin de réduire le temps de calcul par simulation. Flock et al. [106] suggèrent qu'une extension de π (demi disque) n'affecte pas de façon sensible les propriétés de la turbulence MRI, et qu'une extension de $\pi/2$ (quart de disque) reste acceptable (figures 2 et 6 de [106]).

Concernant l'extension radiale du domaine, un rapport de rayon inférieur à 3 risquerait d'entretenir des modes stationnaires entre les bords radiaux interne et externe. De plus, une extension radiale trop petite serait inadaptée à l'étude de processus de transport globaux. Un modèle de disque cylindrique décrit la courbure des trajectoires képlériennes ; concrètement, les équations dynamiques contiennent des termes géométriques supplémentaires. Ces effets de courbure empêchent d'appliquer naturellement des conditions cisillées-périodiques comme une shearing-sheet, et les conditions aux limites radiales nécessitent des soins particuliers.

Dans la direction verticale, il est primordial de respecter la physique que nous cherchons à capturer, c'est à dire représenter une fine tranche équatoriale du disque. Pour cela, il faut que l'extension verticale du domaine soit petite par rapport à l'ensemble des rayons couverts par Δr . Dans cette

partie, nous noterons h l'extension verticale du cylindre, et $H := c_s/\Omega$ la hauteur d'échelle hydrostatique. À un rayon donné, nous pouvons définir le rapport d'aspect $\epsilon := h/r$; l'hypothèse de disque fin se traduira par $\epsilon \ll 1 \forall r \in \Delta r$. Si cette condition n'est pas respectée, nous permettrons à des structures de se former sur des échelles verticales artificiellement grandes, avec des conséquences sur les propriétés de transport turbulent [50, 291]. Le modèle du *disque fin* [215, 278] fournit un socle théorique pour l'étude analytique des disques protoplanétaires, et il trouve précisément son intérêt dans cette séparation d'échelle.

En fixant la hauteur géométrique h du cylindre, nous imposons une échelle caractéristique à l'écoulement. Afin de ne pas entretenir de modes stationnaires entre les bords inférieur et supérieur, des conditions aux limites périodiques se présentent comme un choix naturel. De cette façon, l'échelle géométrique h est imposée sans inclure de bords à proprement parler; les 'bords' inférieur et supérieur du domaine de calcul sont donc connectés, la matière passant à travers l'un réapparaît à travers l'autre.

La hauteur géométrique h n'a pas besoin d'être égale à la hauteur hydrostatique H sur le domaine entier. Cependant, il est souhaitable de maintenir $h \approx H$ sur tout le domaine radial. Dans le cas contraire, la MRI peut entretenir une turbulence supersonique dans les régions où $h > H$, et subsonique là où $h < H$; les propriétés de transport turbulent seraient donc discriminées par le rapport artificiel h/H (voir Section III.3.1).

Il est important de remarquer que ce modèle de disque non-stratifié n'est valide que dans la limite $h \rightarrow 0$, avec la condition $H \approx h$ nécessaire pour capturer la physique pertinente des disques fins. Si nous diminuons H et h dans les mêmes proportions, nous augmentons le rapport d'aspect $\Delta r/h$ du domaine. Pour garder un certain nombre de cellules par échelle de hauteur h , en imposant qu'elles gardent un rapport d'aspect cubique, nous devront augmenter le nombre de cellules dans la direction radiale, et donc le coût en temps de calcul d'une simulation. Au final, la géométrie du domaine répond à un compromis entre un disque suffisamment fin et un temps de calcul raisonnable.

J'insiste sur le fait que les résultats de simulations cylindriques non-stratifiées ne sont pas directement transposable au cas d'un disque verticalement stratifié. L'échelle $H := c_s/\Omega$ n'est pertinente que vis-à-vis des effets de compressibilité et de flottabilité, ces derniers étant directement exclus dans les modèles non-stratifiés. Dans un disque stratifié, l'extension caractéristique des plus grandes structures turbulentes pourrait atteindre plusieurs échelles de hauteur hydrostatique H , laissant une incertitude d'un facteur comparable sur les prédictions des modèles non-stratifiés. Quoi qu'il en soit, ce type de modèle non-stratifié nous permettra de sonder la physique au coeur du disque et de capturer des tendances globales. L'applicabilité de ces modèles a déjà été éprouvée avec succès dans l'étude de la turbulence magnétorotationnelle par Armitage [11], Steinacker & Papaloizou [318], Sorathia et al. [311, 312].

Nous noterons à nouveau $h := c_s/\Omega$ dans la Partie iii, lorsqu'il sera question de disques stratifiés.

Ce qui nécessiterait une vitesse du son $c_s = \Omega h \propto r^{-3/2}$.

III.2 CONFIGURATION STANDARD

Après de nombreux essais, j'ai finalement adopté une configuration que j'appellerai "standard" pour la majorité de mes simulations non-stratifiées 3D. J'en détaille les caractéristiques dans cette section. La géométrie et les conditions initiales seront susceptibles de changer dans les cas particuliers que j'ai explorés en 2D ; cela sera alors précisé.

III.2.1 Géométrie

Le domaine radial s'étend sur $r \in [1, 5]$, assez grand pour limiter l'influence des bords radiaux, et assez petit pour limiter le nombre de cellules nécessaires dans le cadre d'un disque fin. Le domaine azimuthal couvre $\varphi \in [0, \pi/2]$ par défaut, mais un petit nombre de simulations couvrent le disque entier $\varphi \in [0, 2\pi]$ en gage de validation. L'extension verticale du domaine est fixée à $z \in [0, 1/4]$; le rapport d'aspect $\epsilon = h/r \in [1/4, 1/20]$ est convenablement petit pour représenter un disque fin. Les contours du domaine de calcul standard sont tracés sur la [Figure III.1](#).

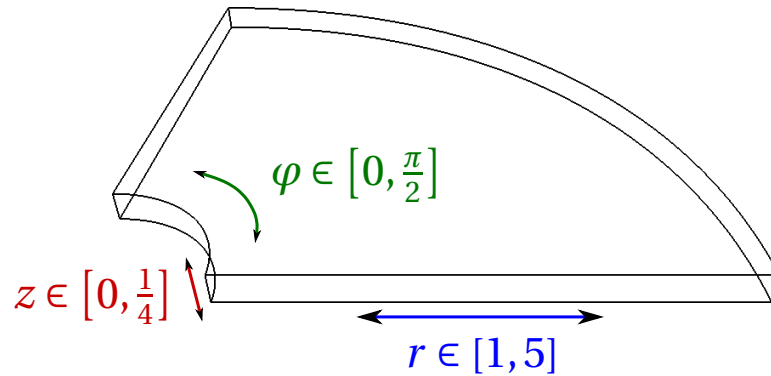


FIGURE III.1. – Contours du domaine de calcul dans la configuration standard des simulations cylindriques 3D non-stratifiées.

La résolution nominale du maillage est de $512 \times 512 \times 32$ cellules, distribuées uniformément dans chaque direction, i.e. les incréments δr , $\delta \varphi$ et δz d'une cellule à la suivante sont les mêmes pour l'ensemble des cellules. Les cellules sont exactement carrées dans le plan poloïdal (r, z) . Dans le plan équatorial (r, φ) , elles sont allongées radialement d'un facteur 2.5 près du bord radial interne, et allongées azimuthalement d'un facteur 2 près du bord radial externe ; les cellules sont approximativement cubiques pour un rayon $r \approx 2.55$, proche du milieu du domaine radial.

III.2.2 Schémas d'intégration numérique

Plusieurs aspects de notre méthode numérique ont déjà été présentés dans la [Section II.3.3](#). Je précise une nouvelle fois, de façon plus concentrée,

les caractéristiques de la méthode numérique telle que je l’ai adaptée aux modèles de disques non-stratifiés.

Le solveur de Riemann employé est HLLD pour les simulations sans effet Hall, et HLL modifié pour les simulations avec effet Hall. Les flux de Godunov sont estimés aux interfaces par reconstruction linéaire des champs à l’intérieur des cellules, avec le limiteur de pente harmonique de Van Leer. Le champ magnétique est évolué aux interfaces des cellules suivant la méthode du transport-contraint.

Les EMFs sont estimées sur les arêtes des cellules par une opération de moyenne arithmétique [30]. Les autres procédures de moyennes ont de meilleurs propriétés de dissipation [125], mais elles ne s’accordent pas avec l’implémentation actuelle de l’EMF Hall dans le code PLUTO. Par négligence, la même méthode de moyenne arithmétique est utilisée dans les simulations non-stratifiées en MHD idéale, avec le solveur HLLD. Flock et al. [107] ont montré que cette combinaison pouvait affecter les taux de croissance MRI de manière non-physique. J’ai vérifié, via la méthode spectrale détaillée en [Annexe A](#), que les modes MRI ont la géométrie et le taux de croissance prédits à mieux que 10^{-2} de précision relative, en MHD résistive et idéale, avec les moyennes arithmétique et UCT_CONTACT.

L’attraction gravitationnelle de l’astre central est incluse sous forme vectorielle. Les termes paraboliques (résistivité, viscosité) sont intégrés explicitement en temps. Les pas de temps sont avancés suivant un schéma de Runge-Kutta d’ordre deux, avec un coefficient CFL de 20%.

Le module FARGO [231] est activé pour l’ensemble des simulations non-stratifiées. Comme l’écoulement reste approximativement képlerien au cours d’une simulation, nous pouvons soustraire la vitesse képlerienne au champ de vitesse instantané, opérer sur les fluctuations, puis advecter la solution suivant l’écoulement képlerien. L’intérêt de cette méthode apparait lorsque la vitesse orbitale est grande par rapport aux autres vitesses caractéristiques de l’écoulement. Si l’écoulement orbital est nettement supersonique, le module FARGO va descendre la vitesse caractéristique maximale dans le problème de Riemann à celle des ondes sonores. Il en résulte non-seulement une dissipation numérique réduite (voir [Section II.3.3.1](#)), mais également une dissipation numérique homogène sur le domaine de calcul pour une vitesse du son constante.

La vitesse du son est dominante à $\beta \gg 1$.

III.2.3 Conditions initiales

Dans l’ensemble des simulations de disques non-stratifiés que je vais présenter, la densité initiale est constante sur tout le domaine de calcul. Le champ de vitesse est képlerien : la vitesse azimuthale décroît comme $v_K \propto 1/\sqrt{r}$, tandis que les vitesses radiale et verticale sont nulles. À chaque composante du champ de vitesse képlerienne, nous ajoutons une valeur aléatoire uniforme dont l’amplitude atteint 1% de la vitesse du son locale ; de cette façon, les configurations initialement instables saturent rapidement dans un régime non-linéaire.

Sauf mention contraire, le champ magnétique est initialement constant dans le domaine de calcul entier ; la condition initiale correspond à un équilibre MHD. La vitesse d'Alfvén est constante, donc son rapport à la vitesse képlérienne augmente avec le rayon ; cela implique que les propriétés de la MRI vont varier radialement. Le champ magnétique initial sera toujours orienté dans le plan (φ, z) . À champ vertical donné, le critère de stabilité (I.52) indique qu'il existe un rayon au delà duquel la MRI est stabilisée. Cette relation nous permet d'extraire le champ vertical B_c pour lequel la MRI est stabilisée au bord radial externe du domaine : $B_c^2 = 3 \times 5^{-3} / (2\pi/h)^2 \approx 6.2 \times 10^{-3}$. La Figure III.2 montre les taux de croissance MRI estimés localement pour un champ magnétique vertical d'intensité B_c sur le domaine radial $r \in [1, 5]$. Ce critère de stabilité s'applique au champ magnétique vertical uniquement : un champ toroïdal beaucoup plus intense peut entretenir la MRI non-axisymétrique [24].

'Localement' en rayon, suivant une approximation du type WKB dans la direction radiale, et non suivant une résolution des modes propres globaux.

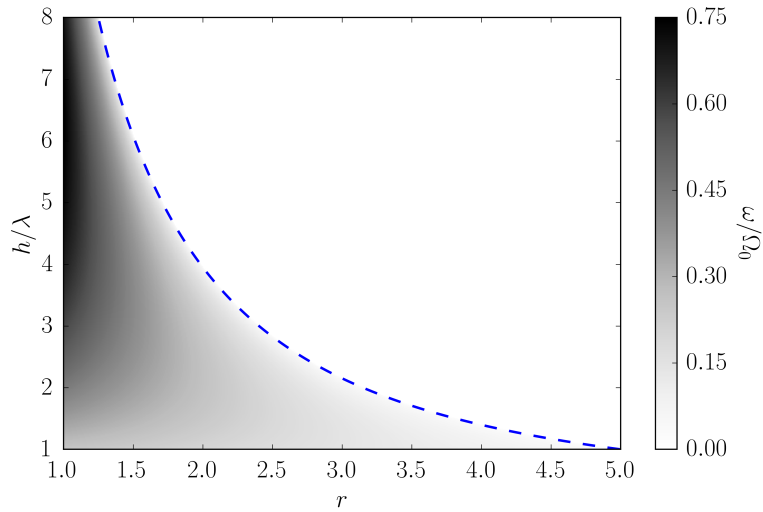


FIGURE III.2. – Taux de croissance local de la MRI axisymétrique (*teintes de gris*) en fonction du rayon dans un disque képlérien (*abscisse*), pour un champ vertical critique $B_c \approx 6.2 \times 10^{-3}$, et en fonction de l'échelle verticale λ du mode considéré par rapport à $h = 1/4$ (*ordonnées*) ; la limite de stabilité (*tirets bleus*) correspond au critère (I.52).

III.2.4 Équation d'état

Nous employons une équation d'état isotherme $P(\rho) = c_s^2 \rho$, avec une vitesse du son $c_s = 10\%$ de la vitesse képlérienne au bord radial interne, constante dans tout le domaine de calcul et à chaque instant. L'écoulement képlérien impose une fréquence de cisaillement de l'ordre de Ω . Dans la limite $h \ll H \equiv c_s/\Omega$, les structures turbulentes sont limitées par l'échelle de hauteur géométrique h avant d'atteindre l'échelle H , au delà de laquelle les ondes sonores ne permettraient plus de maintenir un écoulement cohérent sur un temps de cisaillement. En raison de la faible épaisseur du

disque $\epsilon \equiv h/r \ll 1$, la courbure des orbites est négligeable; l'amplitude caractéristique des fluctuations de vitesse doit donc varier comme le produit Ωh , et non pas comme la vitesse képlérienne Ωr . Nous pouvons affecter à l'écoulement képlérien un nombre de Mach $\mathfrak{M} := \Omega h/c_s \equiv h/H$, décroissant de 2.5 à 0.22 sur l'intervalle radial $r \in [1, 5]$, et valant $\mathfrak{M} = 1$ au rayon $r \approx 1.84$. Des effets de compressibilité risquent de se manifester au voisinage du bord radial interne, où $\mathfrak{M} \gtrsim 1$. Dans l'ensemble, les conditions physiques sont choisies pour limiter les effets de stratification radiale, mais il n'est pas possible de construire une configuration strictement auto-similaire à cause de la hauteur géométrique h constante.

III.2.5 Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont périodiques dans les directions azimutale et verticale. Les mêmes conditions sont imposées aux bords radiaux interne et externe, correspondant aux conditions initiales :

- $\partial_r \rho = 0$;
- $v_r = 0$;
- $v_\varphi = v_K$, la vitesse képlérienne;
- $v_z = 0$;
- $B_\varphi = 0$;
- $B_z = B_0$, le champ magnétique initial.

En l'absence de perturbations et de champ magnétique, ces conditions aux limites préservent rigoureusement l'équilibre initial. En présence de perturbations initiales dans le champ de vitesse, mais sans champ magnétique, les perturbations sont progressivement amorties et exercent une influence négligeable sur l'écoulement (voir [Figure III.3](#)).

La composante radiale du champ magnétique ne peut pas être imposée aux bords radiaux sans affecter la condition $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

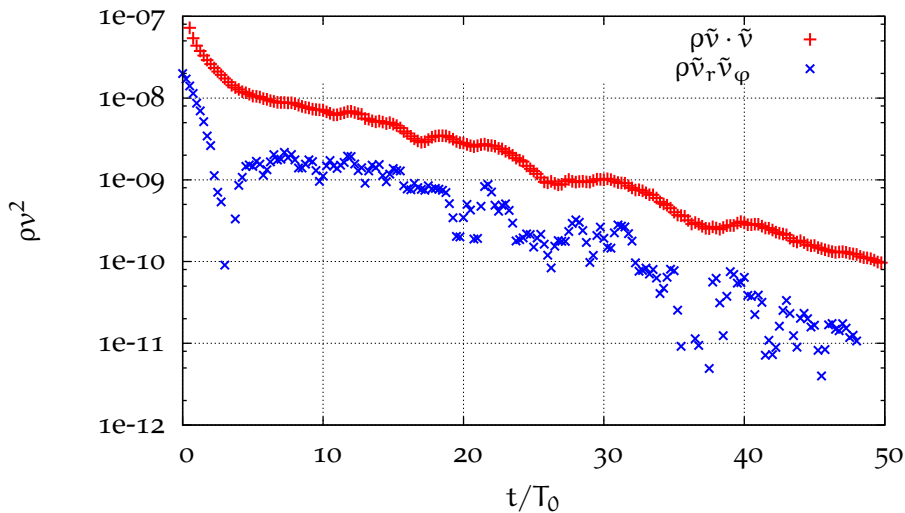


FIGURE III.3. – Énergie cinétique totale (+ rouges) et couple total (× bleus) dans les perturbations à l'écoulement képlérien, pour une simulation hydrodynamique 3D dans notre configuration standard.

III.2.6 Système d'unités

Je clarifie le système d'unités apparaissant naturellement dans cette configuration standard. Le rayon interne r_0 définit notre unité de distance, et la vitesse képlérienne au bord radial interne v_0 notre unité de vitesse. À partir de là, nous avons l'unité de fréquence $\Omega_0 := v_0/r_0$, et la période orbitale associée $T_0 := 2\pi/\Omega_0$. La densité initiale ρ_0 est notre unité de densité; le champ magnétique peut alors se mesurer en unité de vitesse, d'après la vitesse d'Alfvén équivalente $B/\sqrt{\rho_0}$.

“Scale-free”

Notons que ce système d'unité est adimensionné : il ne fait pas intervenir d'échelle physique particulière. Nous pouvons décréter que le rayon interne r_0 correspond à 1AU; l'unité de vitesse v_0 est alors donnée par un choix de masse de l'astre central, et l'intensité du champ magnétique est liée au choix de densité (surfactive) locale du disque. Nous tirerons profit des unités adimensionnées pour échantillonner indépendamment différents régimes physiques. La conversion en unités usuelles sera faite occasionnellement pour mettre nos résultats en relation aux observables.

III.3 PRÉCAUTIONS SUPPLÉMENTAIRES

Après production de plusieurs séries de simulations, la configuration standard décrite précédemment a révélé plusieurs défauts. Ces défauts affectent potentiellement l'évolution au long terme des simulations, d'une part en éloignant le système des conditions initiales que nous souhaitons étudier, et d'autre part en perturbant les processus physiques d'intérêt. Je décris dans cette section les soins que j'ai apportés à leur correction.

III.3.1 Ondes au bords radiaux

III.3.1.1 Nature du problème

En examinant une simulation hydrodynamique dans notre configuration standard, nous nous apercevons que des ondes spirales émanent des régions internes du domaine de calcul, comme illustré sur la [Figure III.4](#). L'amplitude des perturbations indiquées sur la [Figure III.3](#) ne s'annule pas, et elle tend à croître avec la résolution spatiale du maillage. Même si cette amplitude est faible dans les simulations hydrodynamiques, elle révèle un défaut susceptible de s'aggraver dans les simulations MHD, et d'affecter la stabilité des structures pouvant se former dans l'écoulement.

Il apparaît sur la [Figure III.4](#) que ces ondes spirales sont essentiellement 2D : elles n'ont pas de structure dans la direction verticale. En l'absence de champ magnétique, notre configuration standard reste hydrodynamiquement stable, et l'excitation d'ondes acoustiques provient vraisemblablement des conditions aux limites radiales. Des ondes de densité spirales peuvent également être excitées par la présence de structures dans l'écoulement, telles qu'un vortex par exemple [256]. La [Figure III.5](#) illustre ce cas

Je reviendrai dans le [Chapitre VI](#) sur la physique de ces vortex.

particulier, tout en révélant un nouveau défaut des conditions aux limites radiales. Le vortex excite des ondes de densité jusqu'au bord interne ; ces ondes sont "trailing" en raison du cisaillement képlerien, ce qui se traduit par le fait qu'à rayon croissant, le front d'onde se déplace dans la direction $-e_\varphi$ opposée à l'écoulement. Pourtant, nous pouvons apercevoir des ondes "leading" à faible rayon, dont la seule origine possible est la réflexion d'ondes trailing sur le bord interne. Ces ondes risquent de dégrader la qualité de nos mesures, et d'affecter artificiellement la physique à l'intérieur du domaine de calcul. Le cas du vortex peut paraître singulier, mais des ondes acoustiques cohérentes peuvent également être excitées au sein d'un écoulement turbulent [154, 155, 306].

Son extension angulaire importante lui permet d'exciter un mode spiral à deux bras.

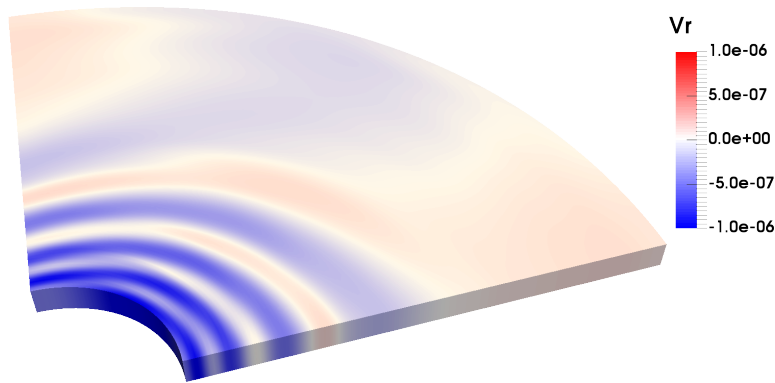


FIGURE III.4. – Vitesse radiale v_r dans une simulation hydrodynamique à résolution $128 \times 64 \times 16$; des ondes spirales émanent du bord interne.

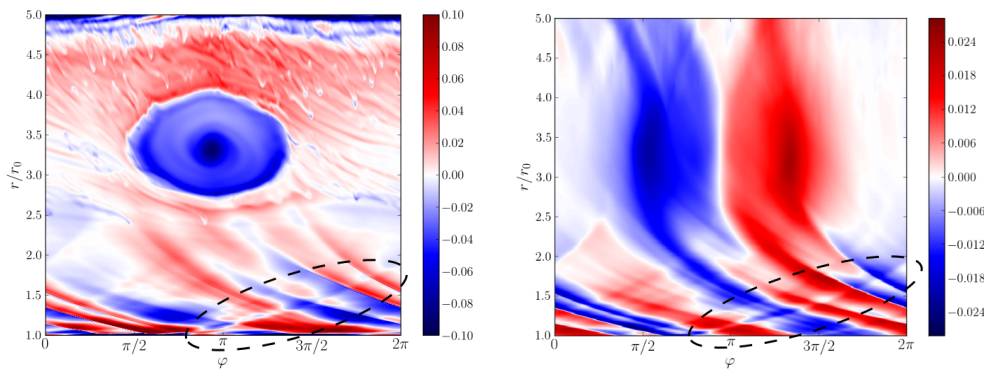


FIGURE III.5. – Cartes instantanées dans le plan équatorial (φ, r) d'une simulation de disque complet ($\Delta\varphi = 2\pi$) avec un vortex ; à gauche : vorticité verticale $(\nabla \times v) \cdot e_z$, révélant nettement le centre du vortex en $(\varphi, r) \approx (\pi, 3.5r_0)$; à droite : vitesse radiale v_r . Sur les deux cartes apparaissent des ondes "leading" près du bord interne, dont la plus nette est entourée en tirets noirs.

III.3.1.2 Discrimination des ondes caractéristiques

Comme première tentative de correction, j'ai modifié les conditions aux limites radiales dans le but d'empêcher la réflexion d'ondes sur les bords. L'idée est de décomposer les fluctuations de vitesse et de densité en tant qu'ondes se propageant radialement vers l'intérieur et vers l'extérieur, puis de filtrer les ondes entrant dans le domaine de calcul. Cette méthode fut appliquée par Suzuki & Inutsuka [325] dans le cas d'ondes MHD en modifiant directement le solveur de Riemann. Par soucis de simplicité, j'ai préféré ne pas tenter de modifier le solveur de Riemann, mais seulement jouer sur les valeurs des champs dans les cellules fantômes.

Les ondes spirales considérées couplent clairement les champs de densité et de vitesse radiale, mais n'affectent pas significativement le champ magnétique. Nous faisons l'hypothèse qu'il s'agit d'ondes purement acoustiques, sans contribution inertielle (pas de structure verticale), obéissant au système d'équations :

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot [\rho \mathbf{v}], \quad (\text{III.1a})$$

$$\partial_t \mathbf{v} \simeq -\frac{c_s^2}{\rho} \nabla \rho. \quad (\text{III.1b})$$

Le cisaillement képlerien a tendance à lisser les structures azimuthales, de sorte que la dérivée radiale soit dominante et que nous puissions considérer un problème unidimensionnel. Après linéarisation, nous obtenons une équation d'onde dans la direction radiale, pouvant s'écrire

Négligeant également les effets de courbure.

$$\partial_r^2 \rho - c_s^{-2} \partial_t^2 \rho = (\partial_r - c_s^{-1} \partial_t) (\partial_r + c_s^{-1} \partial_t) \rho = 0. \quad (\text{III.2})$$

Cette factorisation révèle la décomposition en ondes se propageant vers les r décroissants (première parenthèse) et croissants (seconde parenthèse). Pour ne garder que les ondes se propageant vers l'intérieur au bord radial interne, nous pouvons imposer à la densité de satisfaire uniquement

$$(\partial_t - c_s \partial_r) \rho = 0. \quad (\text{III.3})$$

Nous ne pouvons pas assigner directement la dérivée temporelle, mais nous pouvons indépendamment imposer les conditions aux limites sur $\partial_r v$. En couplant la condition (III.3) avec (III.1a), nous obtenons

$$-\partial_r [\rho v] - c_s \partial_r \rho = 0 \quad (\text{III.4a})$$

$$\iff \partial_r \rho + \frac{\rho}{c_s + v} \partial_r v = 0. \quad (\text{III.4b})$$

Une discrétisation possible de (III.4b) aux interfaces est

$$\frac{\rho_{i+1} - \rho_i}{r_{i+1} - r_i} = -\frac{\rho_{i+1} + \rho_i}{2c_s + v_{i+1} + v_i} \frac{v_{i+1} - v_i}{r_{i+1} - r_i}, \quad (\text{III.5})$$

connaissant la valeur de ρ dans la première cellule du domaine actif, nous pouvons récursivement assigner les valeurs dans les cellules fantômes :

$$\rho_i = \frac{1 + \alpha_i}{1 - \alpha_i} \rho_{i+1} \quad \text{avec} \quad \alpha_i = \frac{v_{i+1} - v_i}{2c_s + v_{i+1} + v_i}. \quad (\text{III.6})$$

En dépit des nombreux essais, cette méthode de discrimination des ondes caractéristiques n’a pas réduit significativement les réflexions au bord interne. L’inclusion des termes de courbure ainsi que des dérivées azimuthales ∂_φ furent vaines, quelle que soit la discrétisation choisie.

III.3.1.3 Zones tampons

Pour réduire l’excitation et la réflexion d’ondes au bord interne, la méthode finalement adoptée consiste en l’adaptation de zones tampons. Il s’agit de modifier directement les valeurs des champs à l’intérieur du domaine de calcul, dans une région étroite au voisinage des bords du domaine. Dans le cas qui nous préoccupe, les ondes acoustiques doivent être amorties lors de leur traversée du tampon. Des zones tampons optimales doivent avoir une largeur δr aussi étroite que possible, et lisser la transition entre le domaine actif et les cellules fantômes. Si l’amortissement est trop brusque, une onde verra un mur et sera réfléchi sur le bord du tampon ; le temps caractéristique d’amortissement doit donc être de l’ordre de $\delta r/c_s$, avec δr de l’ordre de la longueur d’onde à amortir.

Sur la [Figure III.6](#) sont représentés les profils radiaux de différentes quantités dans une simulation de turbulence MRI, avec une zone tampon à proximité du bord radial interne. À l’intérieur du tampon, les champs de vitesse et de densité sont amortis vers leur distribution initiale suivant

$$X(r, t + \delta t) = X(r, t) - 10 S(r) \Omega(r) \delta t [X(r, t) - X_0(r)], \quad (\text{III.7})$$

avec $S(r)$ une fonction de transition linéaire définie par $S(r_0) = 1$ et $S(r_0 + \delta r) = 0$. Bien que la largeur du tampon et le temps caractéristique d’amortissement respectent les ordres de grandeurs identifiés précédemment, ce tampon n’est pas idéal. Il génère un couple hydrodynamique turbulent à l’interface, où la vorticité potentielle ω_z/Σ présente un minimum marqué. Il est connu qu’un minimum local de vorticité potentielle est responsable de l’instabilité d’ondes de Rossby [213, 207, 206], laquelle peut exciter une turbulence hydrodynamique et entretenir des ondes spirales.

$$\omega := \nabla \times v, \Sigma := \int \rho dz$$

Pour corriger ce défaut, j’ai adapté une méthode de double tampon. L’intervalle δr est séparé en deux ; seule la densité est amortie suivant (III.7) dans l’intervalle δr entier ; le champ de vitesse n’est amorti que dans le sous-intervalle le plus proche du bord de domaine, avec la fonction de transition $S(r)$ s’annulant en $r_0 + \delta r/2$. De cette façon, le champ de vitesse aurait tendance à provoquer une accumulation de masse en $r_0 + \delta r/2$, et cette accumulation est empêchée par le tampon en densité. La [Figure III.7](#) confirme que c’est effectivement le cas : le minimum de vorticité potentielle est beaucoup moins marqué que sur la [Figure III.6](#), de même que le maximum de couple de Reynolds $\mathcal{R}_{r\varphi}$.

La [Figure III.8](#) montre l’analogie à la [Figure III.5](#) droite avec les doubles tampons activés.   nouveau, un vortex excite des ondes de densité spirales, mais il n’y a plus d’ondes “leading” marquées près du bord radial interne. En revanche, il apparait nettement des ondes réfléchies sur le bord radial externe. Le temps caractéristique d’amortissement choisi dans (III.7)

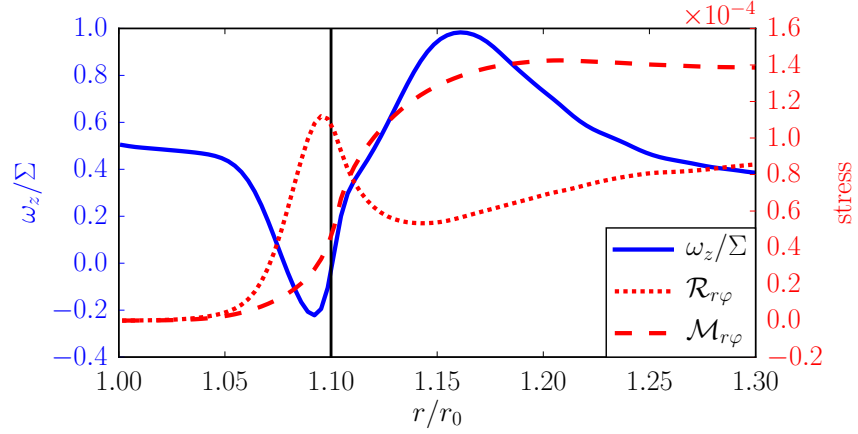


FIGURE III.6. – Profils radiaux de vorticité potentielle (*trait plein bleu*, normalisée), couple hydrodynamique (*pointillés rouges*), et magnétique (*tirets rouges*) dans une simulation de turbulence MRI, avec une unique zone tampon de largeur $\delta r = 0.1$ (*trait vertical noir*); le domaine de calcul a une extension verticale $h = 0.1$ différente de notre configuration standard; le flux magnétique net vaut $B_0 = 2 \times 10^{-3}$.

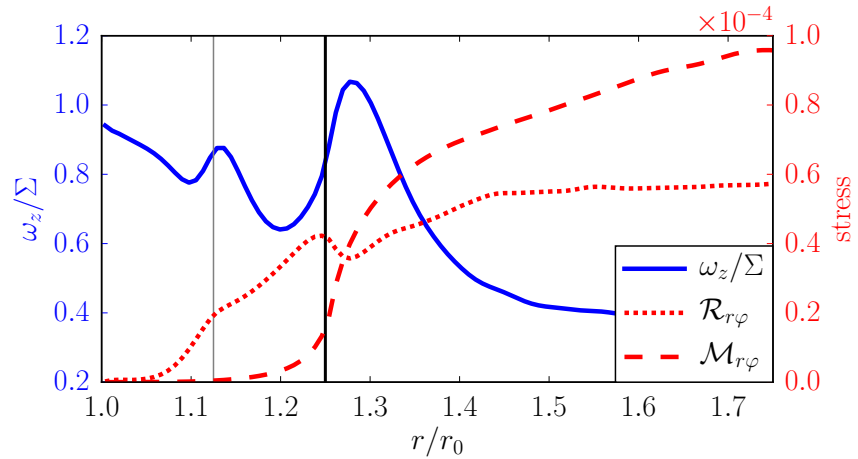


FIGURE III.7. – Comme la [Figure III.6](#), mais avec deux tampons marqués par les traits verticaux, dans un domaine correspondant à notre configuration standard $h = 0.25$, avec un flux magnétique net $B_0 = 10^{-3}$.

décroit radialement comme Ω^{-1} , au lieu du temps constant $\delta r/c_s$ suggéré précédemment. Ce temps caractéristique d'amortissement est sans doute trop long dans la zone tampon externe, un défaut affectant l'ensemble de nos simulations non-stratifiées. L'influence des ondes réfléchies dans la région externe devrait être mineure comparée à celle des ondes de densité dans la région interne. Cela se justifie par la décroissance radiale du nombre de Mach $\mathfrak{M} \equiv h/H$, donc des effets de compressibilité. Je n'utiliserai pas de zones tampons dans les simulations axisymétriques.

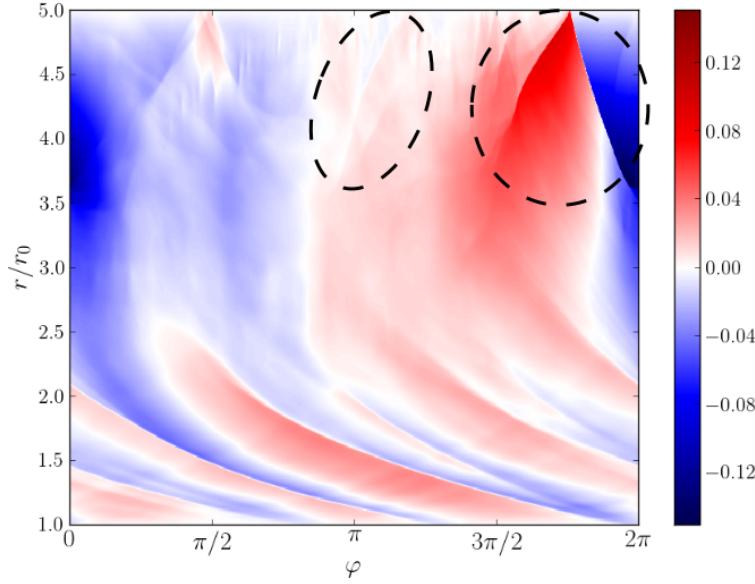


FIGURE III.8. – Distribution instantanée de vitesse radiale v_r dans le plan équatorial (φ, r) issue d’une simulation de disque complet (2π) avec un vortex en $(\varphi, r) \approx (\pi, 3.5r_0)$. Des ondes “leading” sont entourées d’ellipses en tirets noirs, au voisinage du bord radial externe.

III.3.2 Pertes de flux magnétique

III.3.2.1 Nature du problème

Nous employons une géométrie cylindrique pour étudier des processus de transport globaux, mais nos simulations gardent un caractère local sous plusieurs aspects : l’absence de stratification radiale et verticale, et la relativement faible extension radiale du domaine de calcul. En MHD idéale, le flux magnétique est “gelé” dans la matière : les transports de masse et de flux magnétique sont contraints à préserver le rapport $\int B_z dz / \int \rho dz$ d’une parcelle de fluide. Les effets MHD non-idéaux libèrent ce degré de liberté en permettant au flux magnétique d’être transporté sans transport de masse, et réciproquement (voir [Chapitre 1](#)). Deux phénomènes distincts peuvent survenir au cours d’une simulation :

- A. le flux magnétique initialement présent est transporté hors du domaine de calcul, par advection radiale ou via les EMFs non-idéales ;
- B. les conditions aux limites du domaine favorisent l’apport de flux magnétique, avec une polarité corrélée ou non au flux initial.

Remarquons bien que le premier est physique, tandis que le second est artificiellement induit par les conditions aux bords du domaine de calcul. Ces deux effets sont indésirables, car ils peuvent affecter l’écoulement entier sur une échelle de temps de quelques dizaines d’orbites internes ; cela nous empêche de définir des diagnostics statistiquement significatifs pour la durée d’une simulation. Comme la valeur initiale du flux magné-

Le flux magnétique par unité de masse surfacique du disque.

tique n'est pas représentative de l'évolution du système, nous ne pouvons pas aisément produire une étude paramétrique du taux de transport pour différents flux magnétiques et intensités des effets non-idéaux.

La première difficulté, liée à l'évolution temporelle du système, est gênante mais pas rédhibitoire. La seconde difficulté, liée aux effets de bords, nécessite une correction particulière. En effet, le flux magnétique induit par les conditions aux limites du domaine peut être comparable, voir largement supérieur au flux initial. Je présente sur la [Figure III.9](#) l'exemple d'une simulation de turbulence Hall-MRI. La turbulence se déclenche vers $t \approx 40T_0$, et le flux magnétique moyen dans le domaine entier s'annule à $t \approx 100T_0$, changeant même de signe ensuite. Cet exemple montre clairement que les transports de masse et de flux magnétique ne se font pas dans les mêmes proportions. De plus, le fait que le flux magnétique total change de signe indique qu'il n'est pas seulement évacué hors du domaine, mais qu'un flux de polarité opposé entre par les bords radiaux.

Le champ magnétique imposé dans les cellules fantômes correspond au champ initial, positif pour l'exemple. En conséquence, ni l'induction idéale, ni les inductions ohmique ou ambipolaire ne peuvent être responsable de l'entrée de flux magnétique négatif à travers les bords. Quant à l'induction Hall, commençons par l'écrire en terme de couple magnétique comme dans (I.25), et intégrons-la sur une surface équatoriale :

$$\begin{aligned} \partial_t \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} &= \int \nabla \times [\ell_H \nabla \cdot \tilde{\mathcal{M}}] \cdot d\mathbf{S} = \oint \{\ell_H \nabla \cdot \tilde{\mathcal{M}}\} \cdot d\ell \\ &\iff \partial_t \Phi_z = \oint \left\{ \frac{1}{r^2} \partial_r [r^2 \tilde{\mathcal{M}}_{r\varphi}] + \partial_z \tilde{\mathcal{M}}_{z\varphi} \right\} \ell_H r d\varphi. \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

Le second terme de l'accolade s'annule en moyenne verticale dans le cas où $\partial_z \ell_H = 0$. Seuls les bords radiaux (i.e. en $d\varphi$) contribuent à l'intégrale sur le contour du domaine ; l'orientation du contour affecte un signe '−' au bord radial interne, et un signe '+' au bord externe. Le couple magnétique $\tilde{\mathcal{M}}_{r\varphi}$ tend à s'annuler dans les zones tampons (voir [Figure III.7](#)), et il prend toujours des valeurs positives dans le domaine actif ; le premier terme de l'accolade est donc positif au bord interne et négatif au bord externe. Il s'ensuit qu'en présence de couple magnétique, l'induction Hall apporte systématiquement du flux vertical négatif à travers les bords radiaux.

Comme discuté dans la [Section I.5.1.4](#), la combinaison de l'effet Hall avec un champ magnétique opposé à la vorticité tend à stabiliser l'écoulement. Cela est apparent sur la [Figure III.9](#) : au delà de $100T_0$, le transport de masse est dramatiquement réduit, et l'écoulement est progressivement stabilisé par le flux magnétique négatif qui diffuse à partir des bords. Les échelles de temps sont alors trop rapides pour identifier un état quasi-stationnaires et faire des mesures représentatives. J'ai vérifié que ce défaut ne concerne que les simulations de turbulence Hall-MRI : dans la limite $\ell_H/h \rightarrow 0$, les transports de masse et flux magnétique sont bien corrélés ; dans la limite $\ell_H/h \geq 1$, la HSI est stabilisée et le couple $\tilde{\mathcal{M}}_{r\varphi}$ s'annule.

$\tilde{\mathcal{M}}_{r\varphi} > 0$ à cause des cisaillements képlerien et Hall.

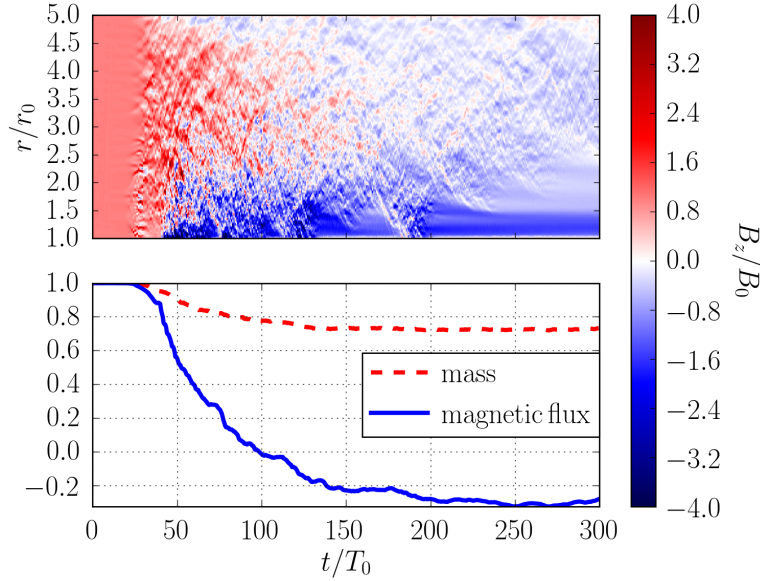


FIGURE III.9. – Simulation de turbulence Hall-MRI, avec initialement $B_0 \approx 1.4 \times 10^{-3}$ et $\ell_H/h = 0.2$; *panneau supérieur* : champ magnétique vertical B_z/B_0 , moyenné verticalement et azimuthalement, en fonction du temps (abscisse) et du rayon (ordonnée); *panneau inférieur* : évolution temporelle du flux magnétique vertical (tirets rouges) et de la masse totale (trait plein bleu) dans le domaine de calcul.

III.3.2.2 Corrections

La méthode adoptée pour corriger cet apport de flux magnétique négatif est sévère. À chaque pas de temps, nous mesurons le champ magnétique moyen $\langle B \rangle := \int B \, dV$ dans le volume du domaine actif (tampons exclus); nous ajustons ensuite la valeur du champ dans chaque cellule d'après

$$B(r, \varphi, z) \mapsto B(r, \varphi, z) - \langle B \rangle + B_0. \quad (\text{III.9})$$

De cette façon, le flux magnétique total est maintenu à sa valeur initiale. Comme nous ajoutons une valeur constante dans chaque cellule, cette procédure n'affecte pas la divergence du champ magnétique. De même, la distribution de courant électrique $J \equiv \nabla \times B$ est préservée, donc a priori les propriétés de dissipation numérique et ohmique sont les mêmes. Enfin, une correction additive assure que le flux magnétique est altéré de la même amplitude sur le domaine de calcul entier, alors qu'une correction multiplicative de la forme $B \mapsto \alpha B$, avec α constant, risquerait d'accentuer les accumulations locales et les gradients de champ magnétique.

Cette correction entraîne de nouveaux défauts. Considérons qu'une parcelle de fluide sort du domaine de calcul en emportant du flux magnétique avec elle. La procédure (III.9) va alors réhausser l'intensité du champ magnétique dans des régions qui ne sont pas causalement reliées à la parcelle de fluide sortie. Cet accroissement du flux magnétique va artificiellement augmenter la diffusivité ambipolaire. Elle va aussi augmenter la

pulsation des ondes whistler, risquant de stabiliser l'écoulement dans les régions où le champ magnétique serait localement intense. Le dernier souci potentiel est de nature topologique : la [Figure III.10](#) illustre clairement qu'en retirant le flux magnétique moyen, des lignes de champ initialement connectées par les bords verticaux peuvent se refermer en boucles. Dans ce sens, cette procédure crée des sites de reconnexion et facilite le mélange à petite échelle. Réciproquement, un accroissement artificiel du flux vertical peut connecter des lignes de champ initialement disjointes, favorisant la formation de structures verticalement cohérentes.

J'ai vérifié que j'obtenais des résultats qualitativement comparables avec et sans cette procédure d'ajustement du flux magnétique total ; en particulier, la formation de structures magnétiques à grande échelle se fait dans les mêmes régimes physiques. Une méthode analogue pour contrôler la masse totale dans le domaine de calcul fut appliquée pour certaines simulations, dans le but d'atteindre un état quasi-stationnaire et de réaliser des mesures plus précises. Au final, la plupart de mes simulations sont initialisées avec un champ magnétique net $B_0 = \sqrt{2} \times 10^{-3}$ proche du champ critique (voir [Section III.2.3](#)), afin que la MRI sature rapidement en turbulence développée dans le domaine de calcul entier. J'arrête la simulation après un court délai dans la phase non-linéaire, puis je la prolonge en imposant une nouvelle valeur pour le flux magnétique total. L'écoulement s'ajuste en quelques orbites locales à ce nouveau champ moyen, et toutes mes simulations s'accordent à l'hypothèse que les conditions initiales ont effectivement été oubliées. En particulier, nous trouvons qu'une turbulence développée se maintient lorsque le flux cible est nul.

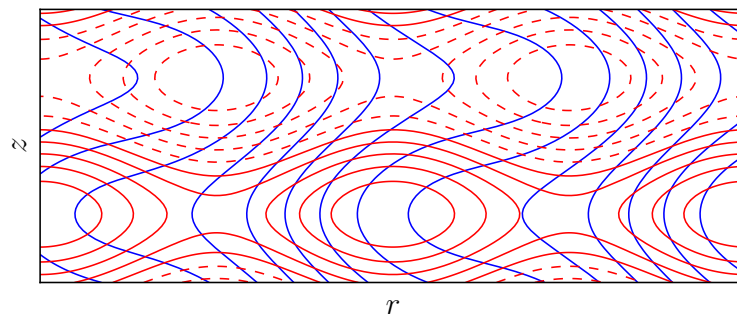


FIGURE III.10. – Lignes de champ magnétique représentant une configuration avec flux net (*courbes verticales bleues*) et la configuration équivalente avec un flux magnétique moyen B_0 nul (*ellipses et courbes horizontales rouges*) obtenue par la procédure ([III.9](#)).

Résumé

Avant d'inclure les effets MHD non-idéaux, je caractérise la turbulence MRI obtenue dans les simulations non-stratifiées en MHD idéale. Je teste la convergence en résolution, ainsi que plusieurs diagnostics concernant le transport turbulent. Je mets en évidence l'impact des ondes spirales sur le couple hydrodynamique total, et tente d'extraire une relation phénoménologique entre les différents nombres adimensionnés en jeu.

Sommaire

1.	Convergence en résolution	81
2.	Diagnostics usuels en turbulence MRI	83
3.	Loi phénoménologique du transport turbulent	85
3.1.	Motivations	85
3.2.	Méthode	86
3.3.	Résultats	87

Dans ce chapitre, les moyennes spatiales sont notées par des crochets $\langle \cdot \rangle$ avec les dimensions indiquées en indice :

$$\langle f \rangle_z := \frac{1}{h} \int_{z=0}^h f \, dz; \quad (\text{IV.1a})$$

$$\langle f \rangle_{r\varphi} := \frac{2}{r_{\text{out}}^2 - r_{\text{in}}^2} \frac{1}{\Delta\varphi} \int_{r=r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}} \int_{\varphi=0}^{\Delta\varphi} f \, r \, d\varphi \, dr, \quad (\text{IV.1b})$$

la moyenne temporelle des champs moyennés spatialement est notée par une barre, et la moyenne pondérée par la masse avec un indice ρ :

$$\bar{f} := \frac{1}{\Delta t} \int_{t=t_0}^{t_0+\Delta t} \langle f \rangle_{\varphi z} \, dt; \quad (\text{IV.2a})$$

$$\langle f \rangle_{\rho} := \langle \rho f \rangle_{\varphi z} / \langle \rho \rangle_{\varphi z}. \quad (\text{IV.2b})$$

À la différence des autres chapitres, les moyennes temporelles seront affectées d'une incertitude qui ne correspond pas à la variance du signal, mais bien à la variance de notre estimateur de moyenne. Pour estimer cette variance, nous calculons d'abord la fonction d'auto-corrélation

$$C[f](t) := \frac{\int f(\tau)f(\tau+t) \, d\tau}{\int f(\tau)^2 \, d\tau}, \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (\text{IV.3})$$

Le temps de corrélation est couramment défini comme le premier moment de l'auto-corrélation, c'est à dire $\int_{\mathbb{R}^+} C(t) \, t \, dt$. Cette définition est sensible au comportement de l'auto-corrélation à grand intervalle de temps t , laquelle ne converge pas aussi rapidement vers zéro qu'il est souvent fait l'hypothèse. Nous estimons le temps de corrélation d'après la vitesse de décroissance de $C[f](t)$ pour $t \rightarrow 0$. Nous l'ajustons comme une exponentielle $C[f](t) \sim \exp[-t/\tau]$, et définissons le temps de corrélation $t_c \equiv 2\tau$ pour lequel l'auto-corrélation devient inférieure à $C[f](t_c) \lesssim 14\%$. Notre mesure de moyenne \bar{f} n'a un sens statistique que sur un intervalle de temps supérieur à t_c . Si nous disposons de $\Delta t/t_c$ échantillons temporels non-corrélés, la variance $(\Delta f)^2$ de notre estimateur de moyenne se déduit de la variance $\text{Var}(f)$ par $(\Delta f)^2 \equiv \text{Var}(f) / (\Delta t/t_c)$ [80, 212].

Comme précédemment, le stress de Maxwell est $\mathcal{M} := -B \otimes B$, et nous définissons le stress de Reynolds $\mathcal{R} := \rho \tilde{v} \otimes \tilde{v}$, où $\tilde{v} := v - \langle v \rangle_{\rho}$ est la déviation par rapport à la vitesse moyenne pondérée par la masse [27]. Le coefficient de transport α est défini comme

$$\alpha := \frac{\mathcal{R}_{r\varphi} + \mathcal{M}_{r\varphi}}{\rho \Omega^2 h^2} \equiv \alpha_{\mathcal{R}} + \alpha_{\mathcal{M}}, \quad (\text{IV.4})$$

dont la normalisation $\rho \Omega^2 h^2 \neq \rho c_s^2$ diffère de l'originale [305] par $\mathfrak{M} := \Omega h / c_s \equiv h/H$, caractérisant la géométrie du domaine.

Comme nous n'incluons pas l'induction Hall dans ce chapitre, nous employons le solveur de Riemann approximatif HLLD, moins diffusif que le solveur HLL. Les résultats sont qualitativement les mêmes qu'avec le solveur HLL, en particulier nos tests de convergence. Les simulations discutées dans ce chapitre sont répertoriées dans la [Table iv.1](#).

NOM	n_z	c_s/v_0	$B_{z,0}$	$B_{\varphi,0}$
znf – 16	16	0.1	0	0
znf – 24	24	0.1	0	0
znf – 32	32	0.1	0	0
znf – 48	48	0.1	0	0
Z4	32	0.1	10^{-4}	0
Z3.5	32	0.1	$10^{-3.5}$	0
Z3.5M	32	0.3	$10^{-3.5}$	0
Z3	32	0.1	10^{-3}	0
Z2.5	32	0.1	$10^{-2.5}$	0
Y3	32	0.1	0	10^{-3}
Y2.5	32	0.1	0	$10^{-2.5}$
Y2	32	0.1	0	10^{-2}
Y1.5	32	0.1	0	$10^{-1.5}$
Y1	32	0.1	0	10^{-1}
Z3Y3	32	0.1	10^{-3}	10^{-3}
Z3Y2	32	0.1	10^{-3}	10^{-2}
Z2.5Y1.5	32	0.1	$10^{-2.5}$	$10^{-1.5}$

TABLE IV.1. – Simulations 3D non-stratifiées en MHD idéale : résolution verticale n_z , champ magnétique net vertical $B_{z,0}$ et toroïdal $B_{\varphi,0}$.

IV.1 CONVERGENCE EN RÉOLUTION

La turbulence MRI peut s’auto-entretenir en MHD idéale et sans flux magnétique net. Ce cas d’apparence simple est en fait particulièrement subtile pour plusieurs raisons. En l’absence de flux magnétique net, la turbulence se déclenche comme un processus sous-critique, i.e. nécessitant des perturbations initiales hors du régime linéaire [200]. L’entretien du champ magnétique procède via une dynamo, couplée à l’instabilité magnétorotationnelle, dont les mécanismes restent à explorer [286, 287, 288].

La turbulence MHD entretenue par la MRI induit une cascade spectrale d’énergie, dans laquelle les petites échelles spatiales peuvent affecter les grandes [199]. Par “petites” échelles, il est entendu l’échelle de dissipation, c’est à dire l’échelle de la grille numérique en l’absence de viscosité et résistivité. Fromang & Papaloizou [116] ont montré que les propriétés de dissipation numérique affectent sensiblement le transport turbulent à grande échelle. En l’absence de flux magnétique net, le diagnostique α ne converge pas vers une valeur bien définie, même aux plus hautes résolutions numériques testées. Le nombre de Prandtl magnétique effectif $\mathcal{P} \equiv \nu/\eta$ doit être supérieur à une valeur critique $\mathcal{P}_c \approx 1$ pour entretenir

Coincidence, la turbulence MRI génère spontanément un Prandtl turbulent $\mathcal{P} \gtrsim 1$ [137, 118, 198].

la turbulence sans flux magnétique net [117, 342], et il affecte le niveau de saturation avec flux magnétique net [197].

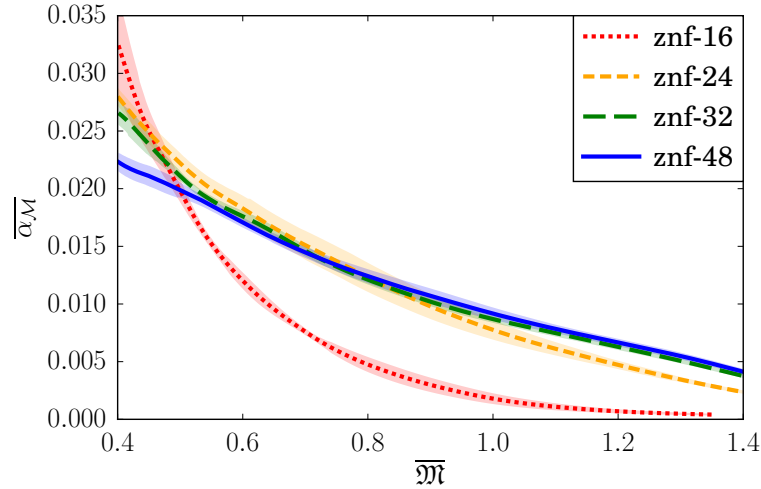


FIGURE IV.1. – Couple magnétique normalisé $\alpha_{\mathcal{M}}$ en fonction du nombre de Mach $\mathfrak{M} \equiv \Omega h/c_s$ dans des simulations de turbulence MRI sans flux magnétique net, avec des résolutions verticales de 16 (rouge), 24 (orange), 32 (vert) et 48 (bleu) cellules.

Avec ces biais en tête, nous pouvons vérifier que notre configuration numérique permet l’entretien de la turbulence MRI sans flux net, et tester dans quelle mesure les diagnostics ont convergé avec la résolution spatiale du maillage. Je fais varier le nombre de cellules dans la direction verticale et proportionnellement dans les autres directions. Les simulations sont initialisées avec un flux net jusqu’à saturation en turbulence, puis le flux magnétique et la masse totale sont maintenus constants aux valeurs désirées dans le domaine actif au cours du temps. Je n’ai pas observé de sensibilité des résultats à la topologie initiale du champ magnétique, avant ajustement du flux total.

Sur la [Figure iv.1](#) sont tracés les profils de stress magnétique normalisé $\alpha_{\mathcal{M}}$ en fonction du nombre de Mach local $\mathfrak{M} \propto r^{-3/2}$. Avec seulement 16 cellules dans la direction verticale, le run ‘znf – 16’ se distingue clairement des autres en saturant à un niveau de transport relativement faible. Les trois autres courbes se superposent en bonne approximation ; en particulier les runs ‘znf – 32’ (notre résolution standard) et ‘znf – 48’ sont compatibles pour $\mathfrak{M} > 0.5$, i.e. pour des rayons $r/r_0 < 3$. Nous pouvons espérer avoir des diagnostics convergés avec notre résolution standard.

Je vérifie sur la [Figure iv.2](#) que les couples hydrodynamique et magnétique évoluent de la même façon lorsque la résolution est accrue. Si nous mettons le run ‘znf – 16’ à part, le rapport \mathcal{M}/\mathcal{R} tend à décroître avec la résolution, i.e. la proportion de stress hydrodynamique augmente. La convergence n’est pas évidente sur ces courbes, et la décroissance du rapport \mathcal{M}/\mathcal{R} en dessous de 2 est inattendue : les valeurs typiques sont généralement comprises entre 3 et 5 [150, 268, 234]. Cela trahit la présence d’un

La convergence plus lente à $\mathfrak{M} < 0.5$ peut trahir des effets de compressibilité ; voir ci-dessous.

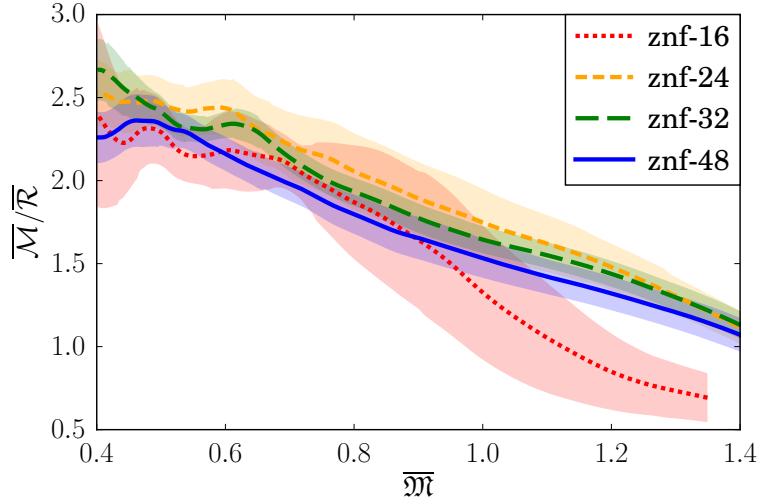


FIGURE IV.2. – Rapports des couples magnétique et hydrodynamiques \mathcal{M}/\mathcal{R} en fonction du nombre de Mach $\overline{\mathcal{M}}$ dans des simulations de turbulence MRI sans flux magnétique net, avec des résolutions verticales de 16 (rouge), 24 (orange), 32 (vert) et 48 (bleu) cellules.

couple hydrodynamique excessif et sensible à la résolution. Le fait que ce rapport de stress décroît avec le nombre de Mach suggère des effets de compressibilité, tel qu'un transport par ondes de densité.

Cette hypothèse est validée en décomposant les champs de vitesse et densité en tant que moyenne verticale plus fluctuations, $v = \langle v \rangle_z + v'$, puis en calculant le stress moyen $\langle \mathcal{R} \rangle \equiv \langle \rho \rangle \langle v_r \rangle \langle v_\phi \rangle$. Dans le run 'znf-48', le stress causé par les structures verticalement cohérentes $\langle \mathcal{R} \rangle$ représente environ 45% du stress hydrodynamique total. Je vérifie sur la [Figure iv.3](#) qu'il s'agit bien d'ondes de densité. Elles sont clairement compressives ($\nabla \cdot v \neq 0$), avec des différences de vitesse de l'ordre de la vitesse du son c_s . Ces ondes de densité sont nettement plus intenses que celles obtenues dans nos tests hydrodynamiques laminaires (voir [Section III.3.1](#)). En l'absence de structures marquées en vorticité potentielle, et sans influence significative des zones tampons, nous pouvons présumer que ces spirales sont directement excitées par la turbulence [155].

IV.2 DIAGNOSTIQUES USUELS EN TURBULENCE MRI

Je vais me concentrer sur les simulations avec 32 cellules dans la direction verticale, correspondant à notre configuration standard. Je vais m'assurer que les propriétés de la turbulence MRI sont conformes aux résultats des nombreuses études publiées.

Tant que l'écoulement reste faiblement magnétisé ($\beta \gg 1$), le couple turbulent tend à croître avec l'intensité du flux magnétique vertical net [150]. En augmentant ce flux magnétique net, le transport turbulent peut dominer le transport cohérent dû aux ondes de densité spirales, et nous retrou-

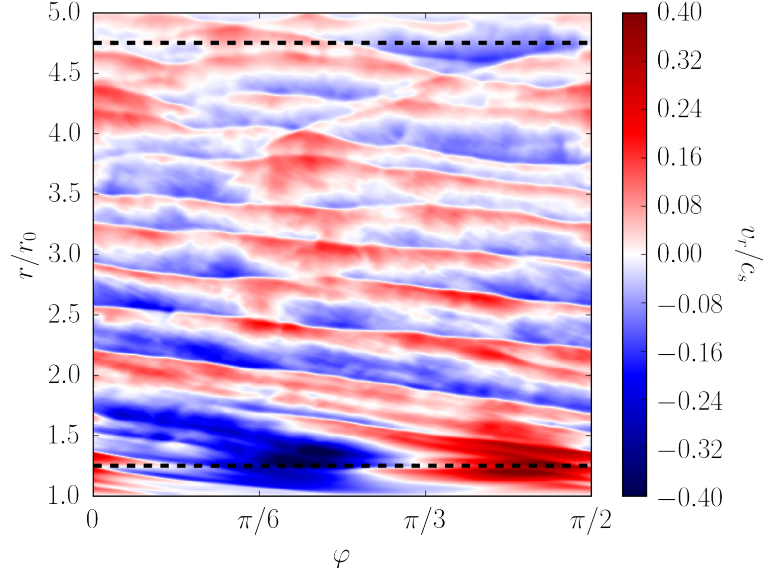


FIGURE IV.3. – Vitesse radiale moyenne $\langle v_r \rangle_z / c_s$ dans le plan équatorial (φ, r) du run ‘znf – 48’ ; les tirets marquent la position des zones tampons.

vons un rapport $\mathcal{M}/\mathcal{R} \approx 3$ typique en turbulence MRI (voir Figure iv.4). Un ajustement affine permet de majorer, par extrapolation en $\mathcal{M} \rightarrow 0$, le transport hydrodynamique cohérent à $\alpha_{\mathcal{R}} \lesssim 3 \times 10^{-3}$. Nous pouvons donc nous attendre à ce que les mesures de stress total inférieures à $\alpha < 10^{-3}$ soient nettement affectées par les ondes de densité spirales, reflétant un défaut de notre modèle de disque non-stratifié.

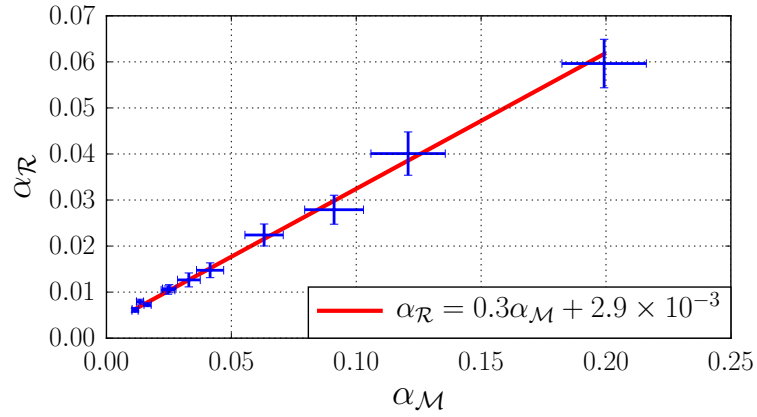


FIGURE IV.4. – Couple hydrodynamique normalisé $\alpha_{\mathcal{R}}$ en fonction du couple magnétique normalisé $\alpha_{\mathcal{M}}$ dans la série des simulations avec flux magnétique net vertical et / ou toroïdal (runs ‘znf – **’ exclus).

Un critère couramment utilisé pour quantifier la résolution spatiale de la MRI est le rapport entre la longueur d’onde $\lambda_{\text{MRI}} \simeq 2\pi v_A / \Omega$ du mode MRI le plus instable, avec v_A la vitesse d’Alfvén associée au flux magnétique

net, et δz l'incrément vertical du maillage [297, 249]. Un rapport supérieur à $\lambda_{\text{MRI}}/\delta z > 6$ serait nécessaire pour correctement capturer la physique de la MRI. Je vérifie sur la Figure iv.5 gauche que même dans une simulation sans flux magnétique net, 60% du volume du domaine de calcul voit un champ assez intense vis-à-vis de ce critère [311].

Sans compter l'influence du champ toroïdal [200, 312].

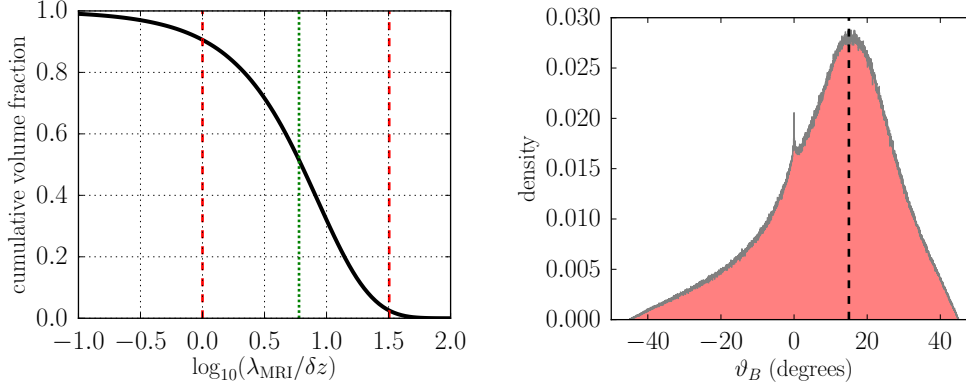


FIGURE IV.5. – Diagnostiques de convergence dans le run ‘znf – 32’. À gauche : proportion du domaine de calcul dont le rapport $\lambda_{\text{MRI}}/\delta z$ est supérieur à celui indiqué en abscisse (fonction de répartition); les tirets rouges bornent le domaine de résolution de la MRI, les pointillés verts indiquent le rapport minimal souhaitable $\lambda_{\text{MRI}}/\delta z = 6$. À droite : angle entre le champ magnétique équatorial (B_r, B_φ) et la direction azimuthale e_φ locale; les tirets marquent l’angle 15° .

Un autre diagnostic servant de critère de convergence fut proposé par Guan et al. [138] : l’angle caractéristique ϑ_B entre le champ magnétique équatorial (B_r, B_φ) et la direction azimuthale e_φ . À la différence du facteur de qualité $\lambda_{\text{MRI}}/\delta z$, ce diagnostic est spontanément produit par la simulation et n’est pas fixé à l’avance. Sorathia et al. [312] ont montré que ce diagnostic est pertinent pour définir un critère de convergence des simulations de turbulence MRI. Les simulations de Guan et al. convergent vers $\vartheta_B \approx 15^\circ$; la Figure iv.5 droite confirme que nous obtenons cette valeur moyenne dans nos simulations sans flux magnétique net. Le pic en $\vartheta_B \approx 0$ est causé par les zones tampons et peut être caché en excluant une portion plus grande du domaine au voisinage des bords radiaux.

Plus précisément : l’orientation du grand axe de la distribution d’auto-corrélation du champ magnétique équatorial.

IV.3 LOI PHÉNOMÉNOLOGIQUE DU TRANSPORT TURBULENT

IV.3.1 Motivations

Depuis Shakura & Sunyaev [305], le coefficient de transport α est fréquemment invoqué dans l’étude des disques protoplanétaires, qu’il s’agisse de l’accrétion de masse [271], de la migration planétaire [247] ou encore de la fraction d’ionisation dans le disque [119]. À défaut de résoudre la physique du disque à petite échelle $\ell \ll c_s/\Omega$, les résultats de simulations shearing-box non-stratifiées sont utilisés pour affecter une valeur

Guan et al. [138] confirment que la turbulence MRI non-stratifiée est locale.

constante à $\alpha \sim [10^{-3}, 10^{-2}]$. Cependant, le transport de masse n'obéit pas nécessairement à une diffusion visqueuse, où les taux de dissipation d'énergie et de transport de moment cinétique seraient définis localement [27]. Même dans ce cas, la prescription d'un α constant n'est pas justifiée.

Il est connu que le niveau de saturation de la turbulence MRI dépend, par exemple, de l'intensité du flux magnétique net [150], du taux de cisaillement $q \equiv -\partial \log \Omega / \partial \log r$ [268] ou de la pression thermique [234, 291]. Un enjeu majeur est l'élaboration d'un modèle de champ moyen de la turbulence MRI, permettant de prédire les propriétés locales de la turbulence connaissant les propriétés moyennes du fluide à plus grande échelle. Ce modèle pourrait servir de description sous-maille de la turbulence dans les simulations globales de disques d'accrétion. Cela permettrait d'étudier de grandes échelles spatio-temporelles sans avoir à résoudre le détail de la turbulence à petite échelle, donc à moindre coût en temps de calcul.

$\mu \sim \sqrt{2/\beta}$ augmente avec l'intensité du champ magnétique.

Enfin, la dépendance fonctionnelle de α par rapport aux autres nombres adimensionnés disponibles peut faire émerger des comportements qualitativement différents. Définissons $\mu := \sqrt{\langle v_A^2 / \Omega^2 h^2 \rangle_{\varphi z}}$ une mesure adimensionnée de la magnétisation, et prenons l'exemple où $\alpha(\mu) \propto \mu^\chi$. Si $\chi > 2$, alors le couple total $\mathcal{T} \equiv \alpha \rho \Omega^2 h^2 \sim \rho^{1-\chi/2}$ est une fonction décroissante de la densité. Dans ce cas, les régions diluées évacuent radialement leur masse vers les régions denses, le stress augmente dans les régions diluées, et cette boucle est à l'origine d'une instabilité visqueuse [274]. Il convient d'examiner si la turbulence MRI génère spontanément de telles situations.

IV.3.2 Méthode

J'entreprends d'extraire une loi phénoménologique simple entre le coefficient de transport α produit par la turbulence MRI, et les nombres adimensionnés décrivant la physique *imposée à l'écoulement*. Je me focaliserai sur le transport dû au stress de Maxwell $\alpha_{\mathcal{M}}$ pour soustraire l'effet des ondes spirales de densité. Quant aux paramètres de contrôle, ils sont en nombre fini et nous pouvons les énumérer :

- $\epsilon := h/r$ le rapport d'aspect géométrique du domaine ;
- $\mathfrak{M} := \Omega h / c_s \equiv h/H$ un nombre de Mach sonique ;
- $q := -\partial \log \Omega / \partial \log r$ le taux de cisaillement ;
- $\mu_z := v_{A,z} / \Omega h$ la magnétisation liée au flux net vertical ;
- $\mu_\varphi := v_{A,\varphi} / \Omega h$ la magnétisation liée au flux net toroïdal.

À ce stade, je vais supposer que le rapport $\epsilon \ll 1$ a une influence négligeable sur le niveau de saturation de la turbulence. Cela revient à dire que les effets de courbure sont imperceptibles pour l'écoulement, i.e. la physique est la même pour deux éléments de fluide séparés d'une distance radiale $\sim h$. En conséquence, le paramètre ϵ ne devrait pas intervenir dans les dépendances fonctionnelles de α . Ce même argument s'applique aux fluctuations de vitesse : les structures turbulentes sont spatialement contraintes par la hauteur géométrique h et non par le rayon local r . Comme l'échelle de temps au rayon r est fixée par $\Omega(r)$, l'amplitude des

fluctuations de vitesse devrait être de l'ordre de Ωh . J'initialiserai toutes les simulations avec un profil de vitesse képlérienne, fixant le paramètre $q = 3/2$ pour l'ensemble des runs présentés.

L'idée est d'exploiter chaque simulation globale comme un ensemble de simulations locales à différents rayons, les champs étant moyennés dans les directions azimuthale et verticale. Pour que cette approche fasse sens, il faut également lisser les profils dans la direction radiale [27]; je calcule-rais donc la moyenne glissante des profils de chaque variable primitive sur une largeur radiale $\delta r = h$. Les profils radiaux sont moyennés en temps et affectés d'une incertitude tenant compte du temps local de corrélation de la turbulence, suivant la procédure indiquée en début de chapitre. Je peux ensuite combiner les profils issus de différentes simulations pour échantillonner l'espace des paramètres de contrôle. J'obtiens donc un ensemble de points de coordonnées $(\alpha_{\mathcal{M}}, \mathfrak{M}, \mu_z, \mu_\varphi)$, avec l'ensemble des incertitudes associées, et je peux procéder à l'ajustement de différents modèles avec une statistique satisfaisante.

Convolution par une fonction porte.

iv.3.3 Résultats

Je commence par ajuster $\alpha_{\mathcal{M}}$ comme fonction du nombre de Mach \mathfrak{M} dans la simulation sans flux net 'znf - 32'. Les simulations avec flux magnétique vertical net permettent de modéliser la dépendance de $\alpha_{\mathcal{M}}$ par rapport aux deux paramètres (\mathfrak{M}, μ_z) sur plusieurs décades de μ_z . J'inclus ensuite le flux magnétique toroïdal net pour progresser en complexité. Les modèles sont d'abord ajustés sur les profils d'une simulation à la fois, afin de faciliter la convergence des méthodes d'optimisation sur l'ensemble des échantillons. La qualité d'ajustement d'un modèle aux données d'une simulation est quantifiée par le χ^2 réduit [277], et je veille à restreindre le nombre de paramètres libres des modèles.

Après de nombreux essais, (iv.5) correspond à notre modélisation optimale de l'ensemble des résultats de simulation :

$$\hat{\alpha}_{\mathcal{M}} \simeq \alpha_0 \left\{ \frac{1}{1 + \left(\frac{\mathfrak{M}}{m}\right)^2} + \frac{\mu_z}{\mu_0} + \left(\frac{\mu_\varphi}{\mu_1}\right)^\xi \right\}, \quad (\text{iv.5})$$

et les paramètres optimaux pour ce modèle sont listés dans la Table iv.2. La dépendance en magnétisation verticale $\alpha_{\mathcal{M}} \propto \mu_z$ est conforme à la majorité des simulations de turbulence MRI présentés dans la littérature (e.g. Hawley et al. [150]). Cette dépendance ne suffit pas à causer l'instabilité visqueuse mentionnée en Section iv.3.1 : le couple reste une fonction croissante de la densité locale. Par ailleurs, les contributions hydrodynamique et magnétique au couple turbulent, respectivement symbolisées par le nombre de Mach \mathfrak{M} et par les magnétisations μ_z et μ_φ , sont séparées additivement. Cela pourrait refléter la distinction entre deux moteurs de stress : d'une part, la dynamo turbulente, et d'autre part la MRI [200].

Exceptés Bai & Stone [17].

Le couple turbulent $\alpha_{\mathcal{M}}$ apparaît comme une fonction décroissante du nombre de Mach \mathfrak{M} . Pour le comprendre, concentrons-nous sur le couple

PARAMÈTRE	ESTIMATION
α_0	$(7.5 \pm 0.3) \times 10^{-2}$
m	$(3.4 \pm 0.1) \times 10^{-1}$
μ_0	$(3.2 \pm 0.3) \times 10^{-3}$
μ_1	$(9.2 \pm 0.6) \times 10^{-2}$
ξ	$(6.75 \pm 0.03) \times 10^{-1}$

TABLE IV.2. – Paramètres optimaux pour l’ajustement du modèle (iv.5) à l’ensemble des simulations de la Table iv.1 ayant $n_z = 32$ cellules de résolution.

hydrodynamique turbulent $\alpha_{\mathcal{R}}$ en gardant à l’esprit qu’il est proportionnel au couple magnétique (voir Figure iv.4). Dans le régime supersonique, la turbulence ne peut pas générer de structures cohérentes sur des échelles supérieures à $H \equiv c_s/\Omega$, restreintes par la vitesse du son et non par la hauteur géométrique du domaine h . Les vitesses caractéristiques correspondantes seront de l’ordre de $\tilde{v} \sim \Omega H$, donc le couple hydrodynamique turbulent doit décroître comme $\alpha_{\mathcal{R}} = \tilde{v}_r \tilde{v}_\varphi / \Omega^2 h^2 \sim (H/h)^2 \equiv \mathfrak{M}^{-2}$.

Pour valider ce modèle, je représente sur la Figure iv.6 la distribution des résidus d’ajustement du modèle (iv.5) sur l’ensemble de nos échantillons. Les résidus sont calculés comme différence entre les valeurs mesurée et prédite du coefficient $\alpha_{\mathcal{M}}$, normalisés par l’incertitude $\Delta\alpha$ au point considéré, $y := (\alpha_{\mathcal{M}} - \hat{\alpha}_{\mathcal{M}}) / \Delta\alpha$. L’ensemble des résidus est ajusté par une loi normale de moyenne $\bar{y} = -0.23$ et d’écart-type $\Delta y = 2.0$. L’ajustement par une loi normale est acceptable d’après le panneau inférieur de la Figure iv.6 : avec une distance $D = 0.02$ entre les fonctions de répartition des deux histogrammes, le critère de Kolmogorov-Smirnov [277] renvoie une probabilité d’exclusion de 50%. Notre modèle est donc faiblement biaisé, et 68% des prédictions se trouvent à moins de deux écarts-types des valeurs de α mesurées. La carte de couleur confirme que ce modèle décrit bien l’ensemble des simulations ; seules les simulations à fort flux vertical + toroïdal (teintes grises claires) semblent légèrement biaisées en $y < 0$.

Rappel : les incertitudes $\Delta\alpha$ sont estimées d’après le temps de corrélation local, avec un critère sur le degré de corrélation considéré comme négligeable.

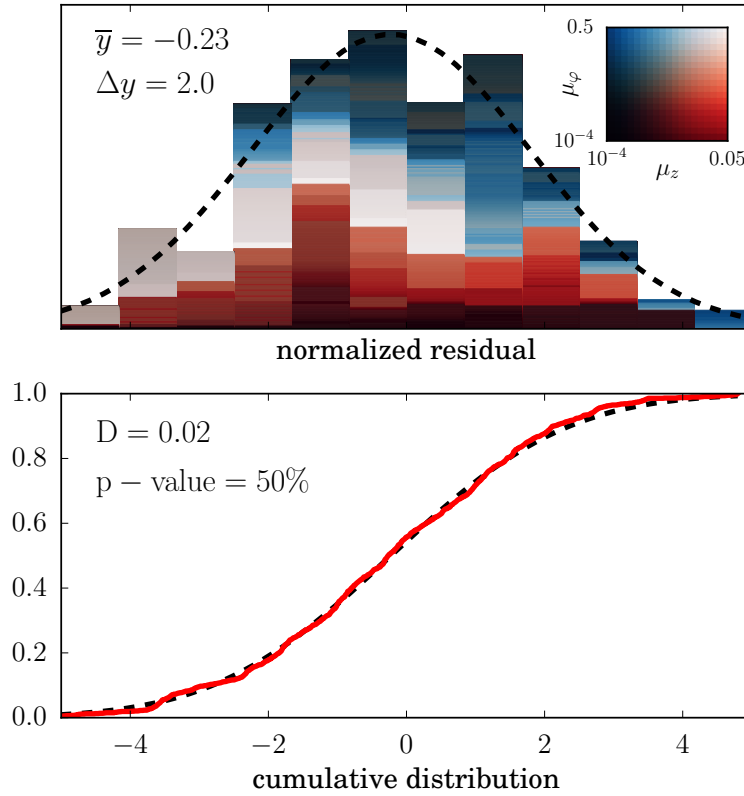


FIGURE IV.6. – *Panneau supérieur* : distribution des résidus d’ajustement normalisés y pour le modèle (iv.5) appliqué à l’ensemble de nos échantillons ; les couleurs représentent le flux magnétique du point considéré dans le plan (μ_z, μ_φ) ; les tirets décrivent l’ajustement optimal des résidus par une loi normale, de moyenne $\bar{y} = -0.23$ et d’écart-type $\Delta y = 2.0$. *Panneau inférieur* : fonction de répartition normalisée associée à l’ensemble des résidus (trait rouge) et à la loi normale (tirets noirs) ; la distance maximale entre les deux courbes vaut $D \approx 0.02$.



SIMULATIONS AXISYMÉTRIQUES 2D EN MHD-HALL

Résumé

Je présente les résultats de simulations numériques 2D axisymétriques en MHD Hall. L'hypothèse d'axisymétrie permet une étude exploratoire à moindre coût en temps de calcul. Elle suffit à mettre en évidence des processus physiques propres à l'effet Hall, et nous pourrons ensuite vérifier si ces processus restent pertinents en 3D non-stratifié.

Sommaire

1.	Aperçu global	92
1.1.	Phase linéaire	92
1.2.	Phase non-linéaire	93
1.3.	Dépendance en résolution	93
2.	Écoulements zonaux	95
2.1.	Caractérisation	95
2.2.	Formation	96
2.3.	Stabilité	97
2.4.	Évolution	98
3.	Plasmoïdes	100
4.	Polarité du flux net vertical	102

V.1 APERÇU GLOBAL

Je regroupe dans la [Table v.1](#) les simulations présentées dans ce chapitre. Le champ magnétique est vertical et constant initialement, ainsi que le paramètre de Hall $\mathcal{L} := \ell_H/h$ (voir [Section 1.3.4](#)). Cela revient à imposer une densité électronique constante, ne dépendant pas de la densité locale. Le champ magnétique initial du run ‘ohmi’ vaut 50% du champ critique de stabilisation à la HSI [28], satisfaisant à chaque rayon la relation :

$$\ell_H v_A k^2 = \frac{3}{2} \Omega \quad (\text{v.1})$$

pour la vitesse d’Alfvén $v_A \equiv B/\sqrt{\rho}$ associée au champ vertical net, et pour le plus petit vecteur d’onde vertical résolu $k = 2\pi/h$.

NOM	Δr	n_z	B_0	\mathcal{L}	\mathcal{R}_O
res1	[1, 9]	16	$\sqrt{2} \times 10^{-3}$	1/5	0
res2	[1, 9]	32	$\sqrt{2} \times 10^{-3}$	1/5	0
res3	[1, 9]	64	$\sqrt{2} \times 10^{-3}$	1/5	0
res4	[1, 9]	128	$\sqrt{2} \times 10^{-3}$	1/5	0
hall	[1, 6]	64	$\sqrt{2} \times 10^{-4}$	4	0
nega	[1, 5]	32	-5×10^{-2}	1	0
ohmi	[1, 5]	32	$B_c(r)/2$	1	625 Ω

TABLE V.1. – Simulations axisymétriques en MHD Hall : intervalle radial Δr , résolution verticale n_z , champ magnétique initial B_0 , paramètre de Hall $\mathcal{L} = \ell_H/h$, Reynolds ohmique $\mathcal{R}_O \equiv \Omega h^2/\eta_0$.

V.1.1 Phase linéaire

Sans induction Hall, le domaine de calcul est sensible à la MRI à condition que le champ magnétique soit suffisamment faible (voir [Figure III.2](#)). Avec induction Hall et champ vertical positif ($B \cdot \Omega > 0$), l’écoulement est stabilisé pour des fréquences Ω croissantes lorsque ℓ_H augmente (voir (v.1) & [Figure 1.9](#)). Les taux de croissance de la Hall-MRI axisymétrique sont illustrés sur la [Figure v.1](#) pour différentes intensités du champ magnétique et de l’effet Hall. Les choix de \mathcal{L} et B_0 seront ajustés pour qu’une partie significative du domaine de calcul soit initialement instable.

Au cours de la phase linéaire de l’instabilité, les perturbations sont amplifiées exponentiellement vite, avec pour temps caractéristique la période orbitale locale. En conséquence, les channels MRI se développent du bord radial interne vers le bord radial externe. De la même façon, le front de saturation de l’instabilité linéaire vers une phase non-linéaire se propage vers les rayons croissants.

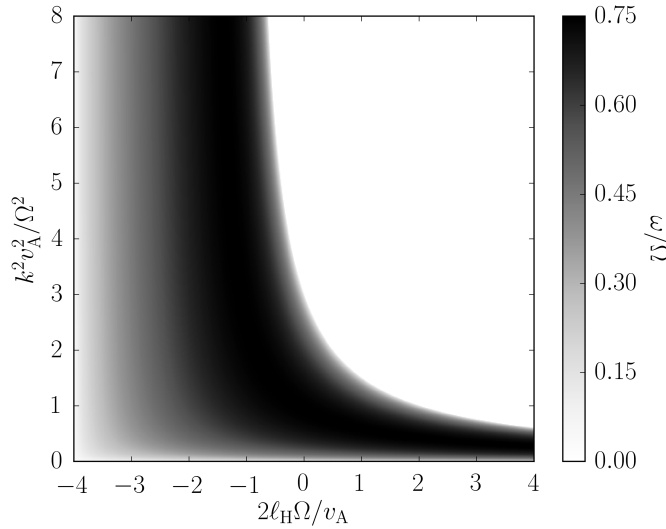


FIGURE V.1. – Taux de croissance de la MRI Hall axisymétrique (*teinte*) en fonction de l’intensité de l’effet Hall (*abscisse*) et celle du champ magnétique à l’échelle considéré (*ordonnées*) dans un écoulement képlerien ; analogue à la Figure 1 de Balbus & Terquem [28].

v.1.2 Phase non-linéaire

La saturation non-linéaire de la HSI 2D est représentée sur la [Figure v.2](#) : le flux magnétique est concentré en bandes. Leur largeur est toujours comparable ou supérieur à la hauteur géométrique h , et elles confinent systématiquement un flux magnétique positif. Nous verrons que ces structures sont générées et maintenues par l’induction Hall, et qu’elles survivent en trois dimensions à conditions que $\mathcal{L} \geq 1$. Nous les qualifierons d’*écoulement zonaux*, en vertu de leur axisymétrie. J’ai aussi observé la formation d’écoulements zonaux en MHD idéale ; j’en discute en [Annexe B](#).

v.1.3 Dépendance en résolution

Avant de me pencher sur la physique de ces simulations, je souhaite tester la dépendance des résultats avec la résolution spatiale du maillage. Je réalise quatre simulations avec différentes résolutions spatiales sur un domaine étendu $r/r_0 \in [1, 9]$, avec un champ magnétique vertical d’intensité $B_0 = \sqrt{2} \times 10^{-3}$ et un paramètre de Hall $\mathcal{L} = 1/5$. Je représente deux diagnostics sur la [Figure v.3](#) : la masse accrétée au bord interne et l’énergie magnétique des fluctuations au champ moyen au cours du temps, pour des simulations ayant 16 à 128 cellules dans la direction verticale.

Le panneau supérieur de la [Figure v.1](#) montre que $\sim 1\%$ de la masse totale est accrétée au bord interne durant les premières $30T_0$, après quoi le taux d’accrétion s’annule, conséquence de l’auto-stabilisation de l’écoulement. Au delà de $100T_0$, le taux d’accrétion est clairement nul pour les

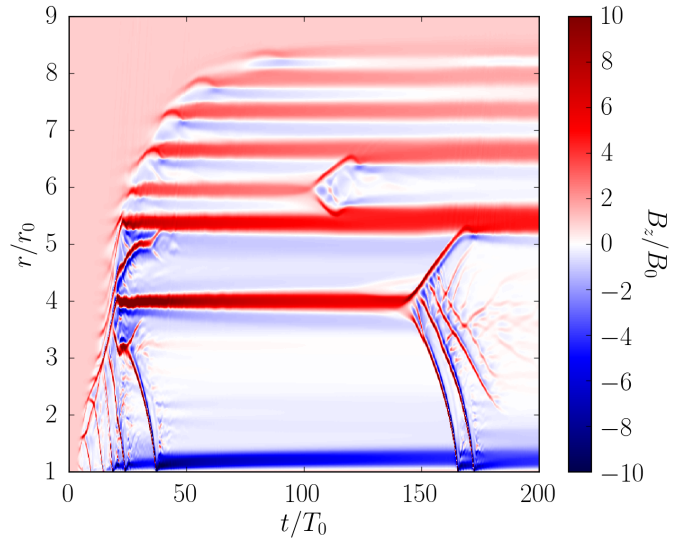


FIGURE v.2. – Flux magnétique vertical $\langle B_z \rangle_z / B_0$ (couleurs) en fonction du temps (abscisse) et du rayon (ordonnées) dans la simulation MHD Hall ‘res2’, avec $B_0 = \sqrt{2} \times 10^{-3}$ et $\mathcal{L} = 1/5$.

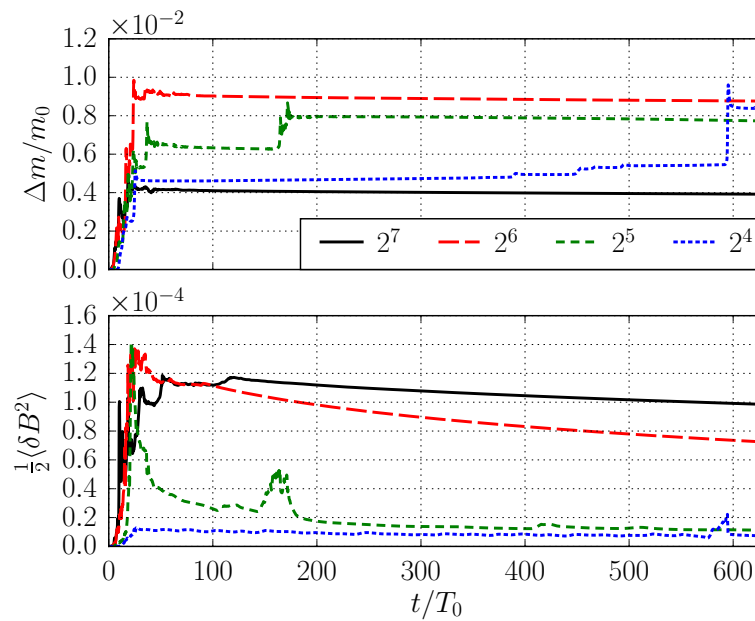


FIGURE v.3. – Masse totale accrétée (panneau supérieur) et énergie des fluctuations magnétiques (panneau inférieur) en fonction du temps dans les simulations ‘res1’ à ‘res4’; le nombre de cellules dans la direction verticale est indiqué en légende.

deux runs à plus haute résolution, mais des événements d’accrétion apparaissent dans les deux runs à plus faible résolution. Je discuterai de ces événements d’accrétion dans la [Section v.3](#).

Le panneau inférieur de la [Figure v.1](#) montre une dépendance nette de l'énergie magnétique avec la résolution du maillage. Notre résolution standard de $2^5 = 32$ cellules permet d'atteindre le même niveau d'énergie magnétique que les deux runs à plus haute résolution. Cependant, l'énergie magnétique diminue d'autant plus vite que la résolution est faible, et elle décroît encore sensiblement sur le temps d'intégration de notre run à plus haute résolution. Cela indique clairement un problème de diffusion numérique. Ce problème n'apparaîtra plus dans les simulations incluant tous les effets MHD non-idéaux, y compris les diffusivités ohmique et ambipolaire, tant qu'elles dominent la diffusion d'origine numérique.

V.2 ÉCOULEMENTS ZONAUX

V.2.1 Caractérisation

En MHD Hall incompressible, les équations d'évolution de la vortacité $\boldsymbol{\omega} := \nabla \times \mathbf{v}$ et du champ magnétique peuvent être combinées pour définir un flux de *vortacité canonique* :

$$\boldsymbol{\omega} := \boldsymbol{\omega} - \frac{\mathbf{B}}{\rho \ell_H}, \quad (\text{v.2})$$

qui obéit à une équation d'induction idéale [184] :

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} = \nabla \times [\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} / \rho], \quad (\text{v.3a})$$

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times [\mathbf{u} \times \mathbf{B} - \ell_H \mathbf{J} \times \mathbf{B}], \quad (\text{v.3b})$$

$$\implies \partial_t \boldsymbol{\omega} = \nabla \times [\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}]. \quad (\text{v.3c})$$

En d'autres termes, le flux de $\boldsymbol{\omega}$ à travers un élément de fluide est préservé par la dynamique de cet élément fluide en MHD Hall incompressible. Le transport du champ magnétique induit une ré-organisation du champ de vortacité, médiée par l'effet Hall : la vortacité du fluide diminue là où le champ magnétique augmente, et réciproquement.

Pour attester du rôle de l'induction Hall dans la formation des écoulements zonaux, nous pouvons mesurer les variations de flux magnétique et de vortacité verticale dans une simulation produisant des bandes. Sur la [Figure v.4](#) sont tracés les profils radiaux de ces deux quantités, ainsi que le profil de densité pour assurer que l'hypothèse d'incompressibilité est valable. Les fluctuations relatives en densité sont inférieures à 10^{-4} ; elles sont positivement corrélées aux fluctuations en champ magnétique, faisant de chaque accumulation magnétique une région de surpression. La superposition des deux autres courbes valide la loi (v.3) du transport de la vortacité canonique en très bonne approximation. J'ai vérifié qu'il n'apparaît pas de corrélation semblable entre la vortacité et le champ magnétique dans les simulations en MHD idéale axisymétrique.

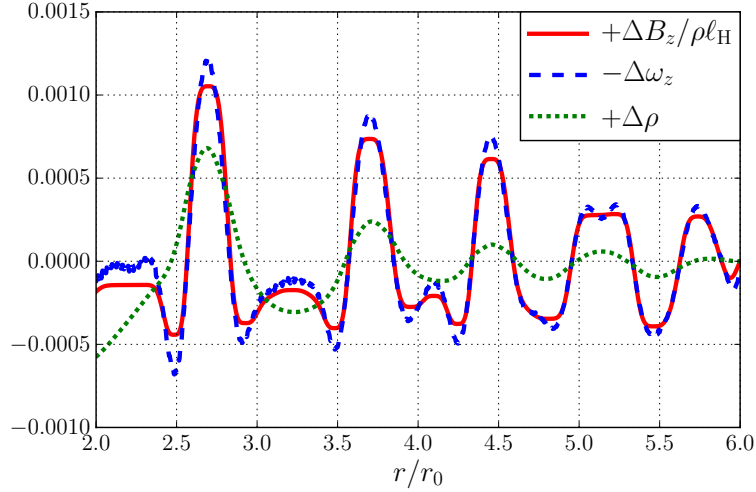


FIGURE v.4. – Profils radiaux des variations de champ magnétique $\Delta B_z/\rho\ell_H$ (trait rouge), vorticité $-\Delta\omega_z$ (tirets bleus, signe opposé) et densité ρ (pointillés verts) dans la simulation ‘hall’ ($B_0 = \sqrt{2} \times 10^{-4}$, $\mathcal{L} = 4$).

v.2.2 Formation

Voir Section 1.3.2 & Section D.1. Je considèrerai exclusivement le cas $\nabla\ell_H = 0$.

Dans le régime linéaire de l’instabilité, les channels HSI se développent progressivement des régions internes vers les régions externes. Il en résulte un gradient radial de stress magnétique $\partial_r \mathcal{M}_{r\varphi} < 0$. L’effet Hall couple l’évolution du flux magnétique vertical $\langle B_z \rangle_{\varphi z}$ aux gradients de stress via

$$\partial_t \langle B_z \rangle_{\varphi z} = \ell_H \left(\partial_r^2 + \frac{3}{r} \partial_r \right) \langle M_{r\varphi} \rangle_{\varphi z}. \quad (\text{v.4})$$

Le résultat est un transport du flux magnétique vers les rayons croissants. Ce faisant, le champ magnétique est accumulé jusqu’à atteindre une intensité suffisante pour stabiliser la HSI. Une bande de flux magnétique est alors déposée, et ce déroulement se répète au delà de la région stabilisée.

Ce processus est illustré sur la Figure v.5. La région $r \in [1.2, 2.2]r_0$ a un flux magnétique quasi-nul, et une bande est formée en $r \approx 2.5r_0$. Un channel HSI se développe entre $2.6r_0$ et $3.8r_0$, il s’étire radialement vers l’extérieur en accumulant du flux vertical, jusqu’à former une seconde bande en $r \approx 4r_0$. Notons l’évolution topologique du champ magnétique. Sur le premier panneau, les lignes de champ sont pincées de part et d’autre de $r \approx 3.1r_0$, générant une nappe de courant électrique $J_r \simeq \partial_z B_\varphi$ près du plan médian. Sur le second panneau, les lignes de champs sont reconnectées au niveau de la nappe de courant, en $r \approx 3r_0$, formant une boucle magnétique centrée en $r \approx 3.8r_0$. Sur le troisième panneau, la boucle magnétique commence à se reconnecter à travers les bords verticaux périodiques, formant une seconde bande de flux magnétique vertical.

La reconnexion magnétique nécessite une forme de diffusion, uniquement numérique en l’occurrence. Pourtant, ce processus n’est pas inhibé à haute résolution, et la résolution du maillage n’affecte pas le nombre de

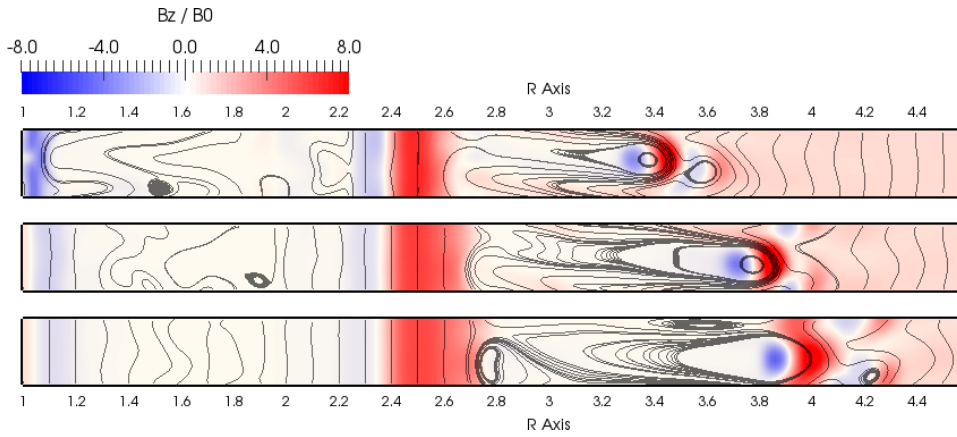


FIGURE V.5. – Distributions instantanées du champ magnétique vertical (*couleurs*) et lignes de champ dans le plan poloïdal (*traits gris*) à trois instants successivement séparés d’une orbite interne.

bandes formées. Je présente dans la [Section D.2](#) un modèle simplifié pour prédire leur position radiale. La diffusion magnétique d’origine turbulente ou ohmique pourrait jouer ce rôle dans les disques protoplanétaires.

Comme $\eta_A \sim B^2$, la diffusion ambipolaire ne permet pas de reconnexion magnétique.

v.2.3 Stabilité

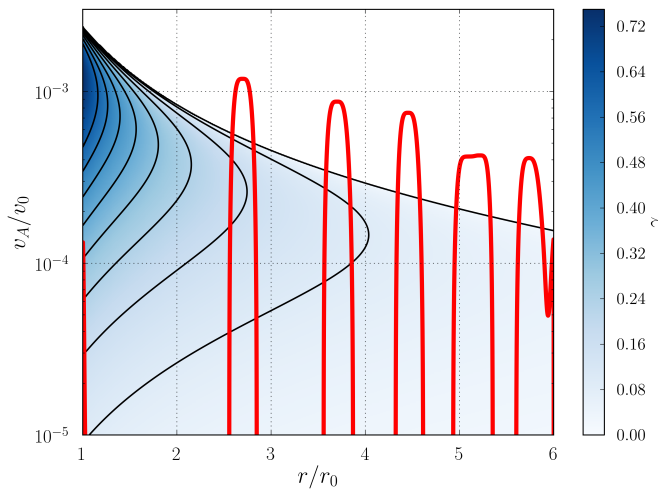


FIGURE V.6. – Taux de croissance de la HSI (*teintes*) en fonction du rayon (*abscisse*) et de l’intensité locale du champ magnétique (*ordonnées*) dans la simulation ‘hall’ ($B_0 = \sqrt{2} \times 10^{-4}$, $\mathcal{L} = 4$); profil radial de vitesse d’Alfvén (*lignes rouges*) une fois que les cinq bandes sont formées.

Pour comprendre le maintien de ces écoulements zonaux, j’ai commencé par m’assurer qu’ils sont stables pour le critère de Rayleigh $\partial_r[\Omega r^2] > 0$. Nous pouvons ensuite regarder le critère de stabilité à la HSI. Cinq bandes sont identifiables sur la [Figure v.6](#), au sein desquelles la vitesse d’Alfvén

est suffisamment élevée pour stabiliser la HSI. Dans l'intervalle entre deux bandes, le flux magnétique est quasi-nul et les taux de croissance sont trop faibles pour être capturés numériquement. Les seules régions où la HSI est susceptible d'opérer sont les bords des bandes, là où le champ magnétique est relativement intense mais encore inférieur au seuil de stabilité.

En présence de diffusion numérique, ohmique ou turbulente, les bandes devraient s'étaler radialement au cours du temps. Par diffusion, une portion croissante du domaine devient instable à la HSI aux bords des bandes ; ces régions sont spatialement résolues par quelques cellules, et nous pourrions nous attendre à ce qu'elles finissent par jouer un rôle destructeur. En réalité, ces régions instables sont responsables du confinement radial des écoulements zonaux. Pour le comprendre, plaçons-nous en coordonnées cartésiennes locales (voir [Section 1.5.1.1](#)), et moyennons l'équation d'induction dans les directions azimuthale et verticale (voir [Section D.1](#)) :

$$\partial_t \langle B_z \rangle_{yz} = \partial_x \langle F_{zx} \rangle_{yz} + \eta \partial_x^2 \langle B_z \rangle_{yz} + \ell_H \partial_x^2 \langle M_{xy} \rangle_{yz}. \quad (\text{v.5})$$

À supposer que le tenseur de Faraday s'apparente à une diffusion turbulente du champ magnétique, $\langle F_{zx} \rangle_{yz} = -\langle F_{xz} \rangle_{yz} \simeq -\eta_t \partial_x \langle B_z \rangle_{yz}$, cette équation prend la forme simplifiée

$$\partial_t \langle B_z \rangle_{yz} = (\eta + \eta_t) \partial_x^2 \langle B_z \rangle_{yz} + \ell_H \partial_x^2 \langle M_{xy} \rangle_{yz}. \quad (\text{v.6})$$

La physique de cette équation est illustrée sur la [Figure v.7](#). La diffusion tend à étaler une bande spatialement, permettant à la HSI de se développer aux bords. La HSI génère un couple magnétique $\mathcal{M}_{xy} > 0$ qui est maximal aux bords de la bande et minimal au centre. La dérivée seconde $\partial_x^2 \mathcal{M}_{xy}$ est donc positive au centre et négative aux bords. Le résultat net est une concentration radiale du flux magnétique s'opposant à la diffusion [[184](#)].

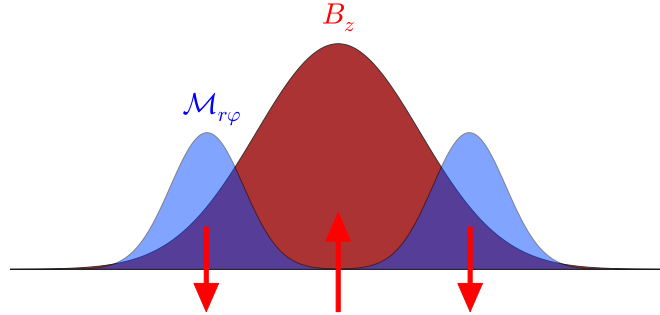


FIGURE v.7. – Mécanisme d'auto-organisation Hall décrit par (v.6) : le stress magnétique $\mathcal{M}_{r\phi}$ est confinant en MHD Hall.

v.2.4 Évolution

Pour bien mettre en évidence le mécanisme décrit précédemment, nous pouvons ajouter une résistivité ohmique d'intensité modérée, afin de forcer la diffusion radiale des bandes sans pour autant tuer la HSI. Sur la

Figure v.8 sont tracés les profils radiaux de flux magnétique B_z et du couple magnétique $\mathcal{M}_{r\varphi}$ dans le run ‘ohmi’ : l’anti-corrélation des deux est nette. La diffusion radiale du flux magnétique permet d’entretenir la HSI entre les bandes, jusqu’à trouver un équilibre entre confinement et diffusion. Paradoxalement, en augmentant la diffusivité ohmique nous avons provoqué une augmentation du couple magnétique total (voir Table v.1).

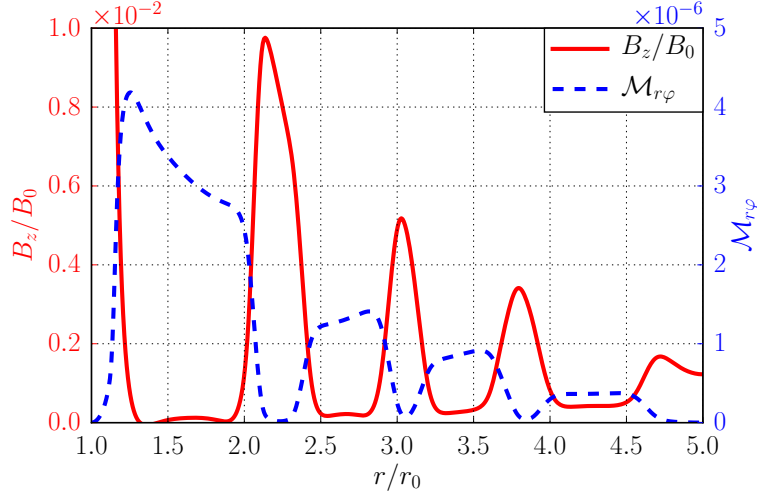


FIGURE v.8. – Profils radiaux moyennés entre $250T_0$ et $300T_0$ du champ magnétique vertical $\langle B_z \rangle_{\varphi z}$ (trait plein rouge, axe de gauche) et du stress magnétique $\mathcal{M}_{r\varphi}$ (tirets bleus, axe de droite) dans le run ‘ohmi’.

L’ajout d’une diffusion ohmique permet de mettre en évidence un autre phénomène de nature globale (versus locale) : la dérive radiale des bandes, illustrée sur la Figure v.9. Cette dérive se fait toujours vers les rayons croissants dans nos simulations non-stratifiées. L’origine de cette dérive est encore liée aux gradients de stress magnétique $\mathcal{M}_{r\varphi}$ via l’effet Hall. Pour le comprendre, plaçons-nous de nouveau en coordonnées locales cartésiennes. Considérons que le champ magnétique vertical est positif sur le domaine de calcul entier, et qu’il s’annule suffisamment vite en s’éloignant d’une bande. Nous pouvons alors définir la position de la bande comme :

$$\zeta(t) := \frac{\int_{x \in I} \langle B_z \rangle_{yz} x \, dx}{\int_{x \in I} \langle B_z \rangle_{yz} \, dx} \equiv \frac{1}{b} \int_{x \in I} x \langle B_z \rangle_{yz} \, dx. \quad (\text{v.7})$$

Connaissant la dérivée $\partial_t \langle B_z \rangle_{yz}$ d’après (v.6), nous pouvons estimer la vitesse de dérive de la bande en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} \partial_t \zeta &\simeq \frac{1}{b} \int_{x \in I} x (\eta \partial_x^2 \langle B_z \rangle + \ell_H \partial_x^2 \langle \mathcal{M}_{xy} \rangle) \, dx \\ &= \frac{\eta}{b} \left(\left[x \frac{\partial \langle B_z \rangle}{\partial x} - \langle B_z \rangle \right]_{\partial I} \right) + \frac{\ell_H}{b} \left(\left[x \frac{\partial \langle \mathcal{M}_{xy} \rangle}{\partial x} - \langle \mathcal{M}_{xy} \rangle \right]_{\partial I} \right). \end{aligned} \quad (\text{v.8})$$

Toujours restreint au cas de nos simulations : $\nabla \ell_H = \nabla \eta = 0$.

Finalement, choisissons un intervalle I suffisamment grand pour atteindre $\partial_x \mathcal{M}_{xy} \approx 0$; dans cette région, le champ magnétique B_z et sa dérivée $\partial_x B_z$ s'annulent également, et nous obtenons l'équation de dérive simplifiée :

$$\partial_t \zeta \simeq -\frac{\ell_H}{b} \Delta \mathcal{M}_{xy}. \quad (\text{v.9})$$

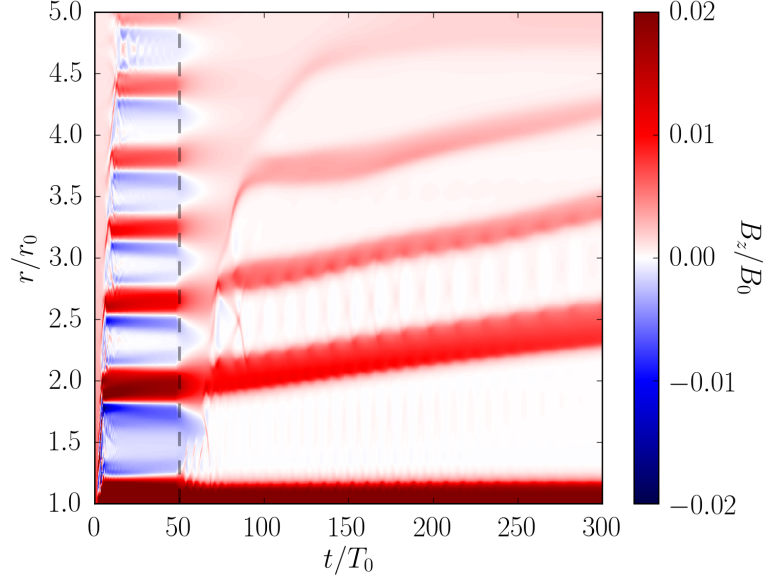


FIGURE v.9. – Flux magnétique vertical $\langle B_z \rangle_{\varphi_z} / B_0$ (couleurs) en fonction du temps (abscisse) et du rayon (ordonnées) dans le run ‘ohmi’ ; la résistivité ohmique est enclenchée à $t = 50T_0$ (tirets gris).

La relation (v.9) montre que le stress magnétique exerce une pression sur la bande de champ magnétique, et qu’une différence de stress entre les deux bords d’une bande provoque sa dérive radiale. Le pouvoir prédictif de cette relation est limité puisque nous ne connaissons pas a priori la différence de stress magnétique. Cependant, nous pouvons mesurer cette quantité dans une simulation, puis comparer les vitesses de dérives prédites et mesurées. La comparaison est faite sur la Figure v.10, confirmant que l’effet Hall est entièrement responsable de la dérive des bandes, sans invoquer un transport radial du fluide. Les bandes dérivent toujours vers le bord radial externe dans nos simulations ; cela vient du fait que le stress magnétique $\mathcal{M}_{r\varphi}(r)$ est toujours décroissant en rayon (voir Figure v.8), une propriété liée au profil de vitesse képlérienne en géométrie globale.

V.3 PLASMOÏDES

Revenons à la Figure v.2, représentant les premières $200T_0$ du run ‘res2’. La bande qui se trouve initialement en $r \approx 6r_0$ est dissoute à $t \approx 100T_0$; son flux magnétique est intercepté et accumulé dans les deux bandes voisines. C’est ensuite au tour de la bande en $r \approx 4r_0$ d’être dissoute à

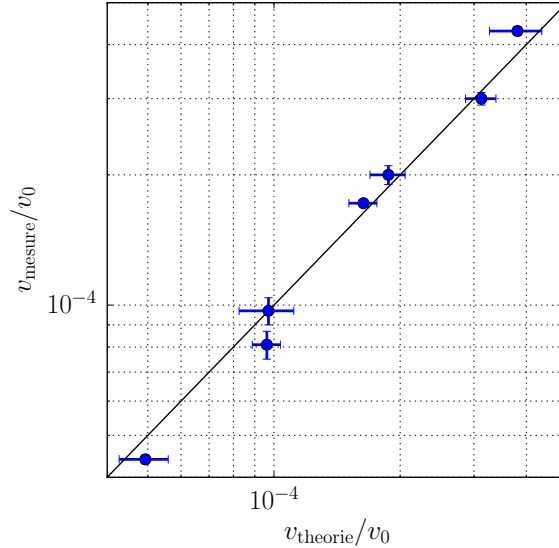


FIGURE V.10. – *En ordonnée* : vitesse de dérive radiale des écoulements zonaux issus de simulations en MHD Hall résistive, avec $\mathcal{L} = 1$, pour différents Reynolds ohmiques \mathcal{R}_O , et pour des bandes à différents rayons dans la même simulation. *En abscisse* : vitesse de dérive $\partial_t \zeta$ estimée suivant (v.9) après avoir mesuré la différence de stress $\Delta \mathcal{M}_{xy}$ et l'intégrale b du champ dans chaque bande.

$t \approx 150T_0$. Une partie de son flux magnétique atteint le bord radial interne et quitte le domaine de calcul, laissant un excès de flux négatif au bord radial interne. Nous allons nous focaliser sur ce second événement.

Le flux magnétique se propage de $r \approx 4r_0$ vers le bord radial interne, qu'il atteint en $t \approx 170t_0$. De la masse est accrétée à cet instant comme en témoigne la Figure v.3 (tirets verts, avec $n_z = 2^5$ cellules). Ces sursauts d'accrétion ne se produisent pas dans les simulations à plus haute résolution. Le mécanisme de confinement décrit précédemment ne supporte pas des diffusions arbitrairement grandes, et la destruction des écoulements zonaux est facilitée par la diffusion numérique. Comme pour la formation des bandes (voir Figure v.5), leur destruction procède par la reconnexion de lignes de champ magnétique disjointes.

L'état instantané de l'écoulement au voisinage du bord interne, peu avant le sursaut d'accrétion à $170T_0$, est représenté sur la Figure v.11. Le panneau supérieur affiche un front de sur-densité en $r \approx 1.1r_0$, une bulle de sur-densité en $r \approx 1.2r_0$, et des filaments horizontaux entre $1.3r_0$ et $2.3r_0$. Ces structures sont confinées par des gradients de pression magnétique. La vitesse de propagation de la bulle de surdensité correspond à celle du fluide neutre, de la masse est bien advectée vers le bord interne.

Parallèlement, le transport de flux magnétique obéit au fluide électronique. Sur le panneau inférieur de la Figure v.11 est représentée la composante radiale de la vitesse électronique $v_e \equiv v_n - \ell_H J$. La bulle de surdensité voit une vitesse électronique dirigée vers le bord radial interne, tandis

Rappel : nous n'utilisons pas de zones tampons au voisinage des bords radiaux dans les simulations axisymétriques.

Ces boucles correspondent à des tores axisymétriques en 3D.

que les filaments ont une vitesse électronique dirigée vers l'extérieur. Au niveau de cette bulle de densité, les lignes de champ magnétique sont refermées en boucles dans le plan poloïdal. De tels rouleaux magnétiques répondent à la dénomination de plasmoides [51].

L'induction Hall détermine le sens de propagation des plasmoides en fonction de l'orientation du champ magnétique dans les boucles. Si le champ magnétique poloïdal (B_r, B_z) est orienté dans le sens horaire, alors $\partial_z B_r > 0$ à l'intérieur du plasmotide. En raison des cisaillements képlerien et Hall, le champ toroïdal B_ϕ possède toujours un signe opposé au champ radial B_r . En conséquence, le courant électrique $J_r \equiv -\partial_z B_\phi > 0$, et la vitesse électronique $v_e < 0$ transporte le plasmotide vers le bord interne. Réciproquement, un plasmotide se propagera vers les rayons croissants si le champ magnétique est refermé en boucles dans le sens anti-horaire.

Bien que ces structures soient essentiellement axisymétriques, elles constituent un mode d'accrétion intermittente pilotée par le champ magnétique [310], dont la pertinence reste à prouver en 3D.

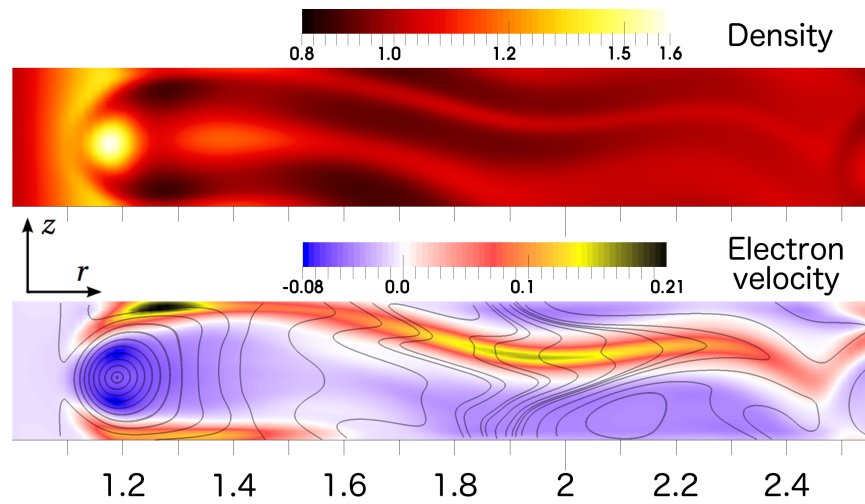


FIGURE V.11. – Run 'res2' dans le plan poloïdal (r, z) à $t = 165T_0$; *panneau supérieur* : distribution de densité; *panneau inférieur* : vitesse électronique radiale (couleurs) et lignes de champ magnétique.

V.4 POLARITÉ DU FLUX NET VERTICAL

Comme mentionné en [Section 1.5.2.3](#), l'induction Hall tend à stabiliser l'écoulement en présence d'un faible flux magnétique vertical de signe négatif $(B_0 \cdot \Omega < 0)$ [28]. En augmentant l'intensité du champ magnétique, nous pouvons récupérer une instabilité d'ondes ion-cyclotrons. Comme apparent sur la [Figure v.1](#), cette instabilité se manifeste à toutes les échelles verticales pour $|\Omega \ell_H / 2v_A| < 1$. Avec un paramètre de Hall \mathcal{L} constant, un profil de $\Omega \propto r^{-3/2}$ décroissant et une vitesse d'Alfvén v_A constante, l'écoulement est instable sur un intervalle borné en rayons. La carte de stabilité associée à notre simulation 'nega' est présentée sur la [Figure v.12](#).

Le domaine instable s'étend sur l'intervalle $r/r_0 \in [1.9, 4.7]$, et les taux de croissance ne dépendent pas de l'échelle λ/h considérée.

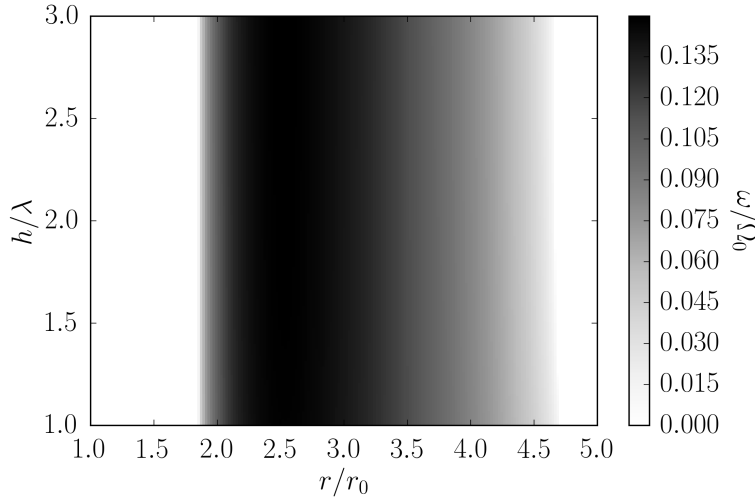


FIGURE V.12. – Taux de croissance ω/Ω_0 de la MRI Hall axisymétrique (*teinte*), en fonction du rayon dans un écoulement képlerien (abscisse) et de l'échelle h/λ du mode considéré (ordonnée), pour les paramètres du run 'nega' avec un champ magnétique de polarité $B_0 \cdot \Omega < 0$.

Au cours de la phase linéaire, un mode linéaire se développe sur l'échelle $\lambda = h$ au voisinage de $r/r_0 \approx 2.5$. Lorsque la pression magnétique associée devient assez grande, des instabilités parasites de type 'kink' tendent à casser ces channels linéaires. L'écoulement qui était initialement dans le plan équatorial acquiert une vitesse verticale. La saturation non-linéaire procède par la formation de jets verticaux, alternativement vers les z positifs et négatifs. En conséquence, la vorticté $\omega := \nabla \times v$ n'est plus verticale : sa composante azimuthale est affectée par $\omega_\phi \simeq -\partial_r v_z$. Je représente sur la [Figure v.13](#) la distribution du rapport de cisaillement $\mathfrak{s} := -\partial_r v_z / \partial_r v_\phi$. Le rapport $|\mathfrak{s}| \approx 1$ entre les jets verticaux pourrait empêcher le développement de modes MRI axisymétriques : des modes linéaires seraient cisailés verticalement sur un temps plus court que leur temps caractéristique de croissance. Suivant cette hypothèse, c'est la périodicité verticale du domaine qui permettrait à l'écoulement de spontanément se stabiliser.

Voir figure A1 de [184].

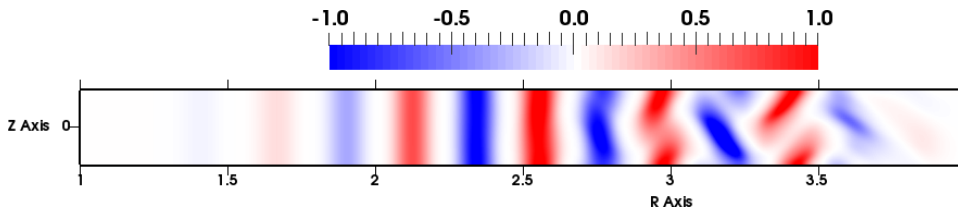


FIGURE V.13. – Distribution instantanée du rapport de cisaillement \mathfrak{s} dans la phase non-linéaire du run 'nega' après $177T_0$.

Résumé

Je présente les résultats de simulations cylindriques 3D en MHD non-idéale, avec un intérêt particulier pour l'induction Hall. Je compare mes résultats à ceux d'une étude précédente, puis j'échantillonne différentes intensités du flux magnétique net et du paramètre de Hall. J'identifie trois régimes physiques distincts : turbulence, vortex et écoulements zonaux. Je teste ensuite la stabilité des structures organisées en présence de diffusion ohmique ou ambipolaire, ou en ajoutant un flux magnétique toroïdal net. Ce chapitre achève la première partie de mon travail de thèse ; la majorité des résultats sont rassemblés dans la publication de Béthune et al. [40].

Sommaire

1.	Comparaison aux travaux précédents	106
1.1.	Configuration numérique	106
1.2.	Résultats	107
2.	Influence du paramètre Hall	109
2.1.	Propriétés de transport	109
2.2.	Hall faible	112
2.3.	Hall intermédiaire	113
2.4.	Hall fort	115
3.	Menaces à l'auto-organisation	118
3.1.	Champ toroïdal	118
3.2.	Hall + Ohm	119
3.3.	Hall + ambipolaire	120

VI.1 COMPARAISON AUX TRAVAUX PRÉCÉDENTS

Au moment où nous avons réalisé cette étude, O’Keeffe & Downes [250] étaient les seuls à avoir rapporté les résultats de simulations globales incluant l’effet Hall. Leurs simulations sont cylindriques non-stratifiées, ce qui devrait permettre une comparaison assez directe avec nos résultats. Ils ont employé une description multi-fluide, à la différence de notre description MHD. Le modèle multi-fluide contient naturellement l’ensemble des effets de plasmas non-idéaux [252]. Comme O’Keeffe & Downes souhaitent modéliser la dynamique des régions profondes des disques proto-planétaires, ils se placent dans un régime où la fraction d’ionisation est faible et la densité neutre est élevée. Dans ce régime, la diffusion ambipolaire est faible, les ions sont dynamiquement couplés aux neutres, i.e. la fréquence de collision ions-neutres est élevée. L’approche multi-fluide est handicapante dans ces conditions, car elle requiert de résoudre temporellement cette fréquence de collisions. Cela dit, O’Keeffe & Downes n’ont pas témoigné d’effets spécifiquement multi-fluides qu’un modèle MHD ne permettrait pas de capturer [289]. Nous allons utiliser leurs résultats pour tester le comportement non-linéaire de nos simulations en MHD Hall.

VI.1.1 Configuration numérique

J’ai tenté de reproduire la même configuration numérique que O’Keeffe & Downes [250] avec le code PLUTO. Après conversions d’unités, le domaine cylindrique s’étend sur $\Delta r \times \Delta \varphi \times \Delta z = [1, 5.2] \times [0, \pi/2] \times [0, 0.39]$, maillé par $480 \times 480 \times 36$ cellules uniformément réparties dans chaque dimension. Le fluide obéit à une équation d’état globalement isotherme, avec pour vitesse du son $c_s = 4.35 \times 10^{-2}$. Le champ magnétique initialement vertical a pour valeur $B_0 = \pm 2.2 \times 10^{-3}$; nous souhaitons vérifier que son orientation affecte bien le taux de transport turbulent [300]. La longueur de hall $\ell_H = 5.5 \times 10^{-3}$ correspond à un paramètre Hall $\mathcal{L} \approx 1.4\%$. Des zones tampons d’une largeur $0.2r_0$ amortissent les variables hydrodynamiques au voisinage des bords radiaux interne et externe, avec les mêmes prescriptions que O’Keeffe & Downes.

Avec cette configuration, les pertes de masse et de flux magnétique sont très rapides (voir Figure vi.1). Les simulations à $B_0 > 0$ perdent leur flux magnétique plus rapidement que celles à $B_0 < 0$, et les deux atteignent le même niveau de transport turbulent, ce qui nous empêche de proprement discriminer les deux orientations du champ magnétique initial. J’ai donc choisi de contrôler la masse et le flux magnétique total dans le domaine de calcul suivant la procédure décrite en Section III.3.2.2. Les diagnostics obtenus avec cette procédure de contrôle atteignent un régime statistiquement stationnaire et représentatif des conditions initiales.

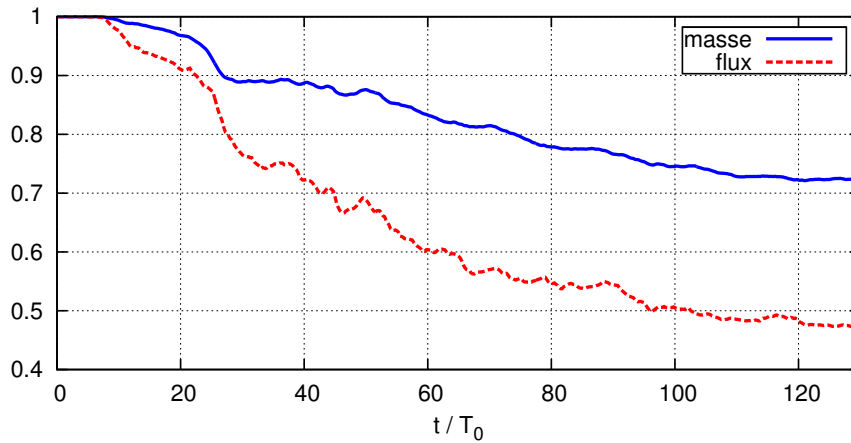


FIGURE VI.1. – Évolution de la masse totale (*trait bleu*) et du flux magnétique total (*tirets rouges*) en fonction du temps dans une simulation à $B_0 = -2.2 \times 10^{-3}$ suivant la configuration de O’Keeffe & Downes [250].

VI.1.2 Résultats

Je compare deux simulations avec la configuration décrite précédemment : l’une avec un champ initial positif (run ‘Up’), l’autre avec un champ négatif (run ‘Down’). La [Figure VI.2](#) montre que des structures axisymétriques se développent dans la distribution de densité. Les fluctuations de flux magnétique et de vorticité verticale sont positivement corr el es, à l’inverse du processus d’auto-organisation Hall décrit précédemment (voir [Figure v.4](#)). Comme l’accumulation de densité se produit précisément au bord de la zone tampon interne, nous attribuons ce phénomène à des effets de bords. De telles accumulations devraient être évitées avec notre méthode de double tampons (voir [Section III.3.1.3](#)).   ce propos, les gradients de densité sont très marqués sur la [Figure VI.2](#), suggérant que la turbulence atteint un régime sonique.

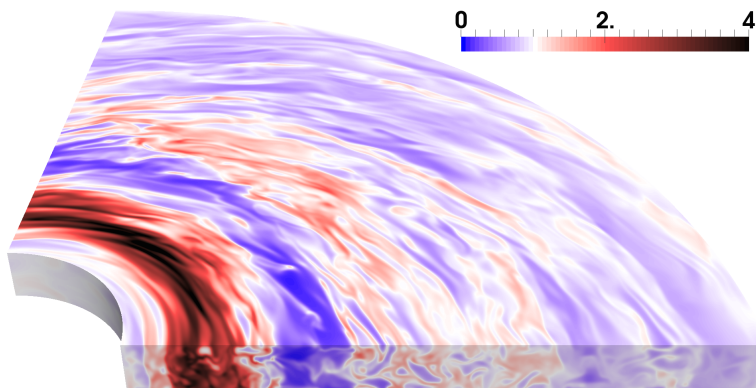


FIGURE VI.2. – Distribution instantanée de densité dans le run ‘Down’   $120T_0$.

Nous pouvons comparer les niveaux de transport atteint dans nos simulations à ceux de [O’Keeffe & Downes](#). Normalisons le couple turbulent à la pression isotherme locale [305] :

Cette définition diffère de notre choix standard de normalisation par rapport à $\rho\Omega^2h^2$.

$$\alpha_{SS} := \frac{\mathcal{R}_{r\varphi} + \mathcal{M}_{r\varphi}}{\rho c_s^2}, \quad (\text{VI.1})$$

ainsi que l’énergie magnétique turbulente $\delta B^2/2P_0$. Ces deux diagnostics sont représentés sur la [Figure VI.3](#) pour les deux orientations du champ magnétique vertical initial.

Les grandes valeurs de $\alpha_{SS} \gtrsim 0.1$ sont en partie causées par l’épaisseur géométrique du domaine de calcul. Le nombre de Mach $\mathfrak{M} \equiv h/H \approx 9(r/r_0)^{-3/2}$ est de l’ordre de l’unité pour $r \approx 4.3r_0$. L’épaisseur géométrique du disque est grande par rapport à la hauteur de pression hydrostatique dans les régions internes, permettant la formation d’ondes de densité prononcées dans une turbulence sonique.

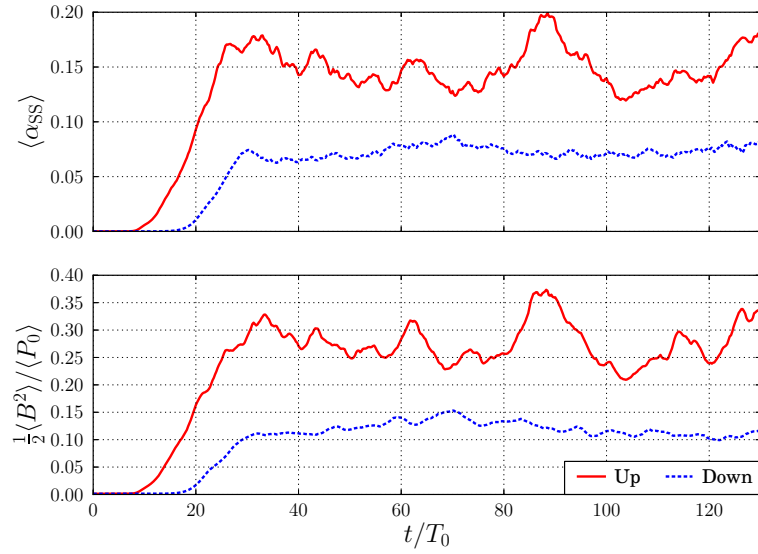


FIGURE VI.3. – Couple turbulent normalisé α_{SS} (panneau supérieur) et énergie magnétique turbulente normalisée (panneau inférieur) en fonction du temps dans les runs ‘Up’ (trait rouge) et ‘Down’ (tirets bleus).

Entre $60T_0$ et $130T_0$, je mesure $\alpha_{SS} = (1.5 \pm 0.2) \times 10^{-1}$ dans le run ‘Up’ et $\alpha_{SS} = (7.4 \pm 0.5) \times 10^{-2}$ dans le run ‘Down’. Ces valeurs sont respectivement deux fois et huit fois plus importantes que celles mesurées par [O’Keeffe & Downes](#). La différence peut provenir des diffusions ohmique et ambipolaire incluses dans leur modèle multi-fluide, ou d’un problème de convergence des simulations. Je peux aussi comparer ces résultats aux simulations locales de Sano & Stone [300] : leurs runs ‘Z2L’ et ‘Z4L’ ont respectivement un champ magnétique $B_0 = \pm 2.5 \times 10^{-3}$ et une longueur de Hall $\ell_H = v_A/\Omega \approx 5.5 \times 10^{-3}$ à un rayon de $1.8r_0$. Leurs simulations incluent une résistivité ohmique dont le nombre d’Elsasser $\Lambda_O = 100$ devrait faiblement impacter le niveau de saturation de la turbulence [296].

Les couples turbulents associés valent $\alpha_{SS} \approx 2 \times 10^{-1}$ dans 'Z2L' ($B_z > 0$) et $\alpha_{SS} \approx 8 \times 10^{-2}$ dans 'Z4L' ($B_z < 0$), compatibles avec nos mesures.

Quant à l'énergie magnétique turbulente, elle atteint bien une valeur statistiquement stationnaire de l'ordre de $\delta B^2/2 \approx 1.2\rho c_s^2$ dans le run 'Down', comparable à la simulation 'Z4' de [Sano & Stone](#). Le rapport des énergies magnétiques turbulentes entre les runs 'Up' et 'Down' est le même que le rapport des couples turbulents, en accord avec Minoshima et al. [234] par exemple. En conclusion, nos résultats ne concordent pas avec ceux de [O'Keefe & Downes](#), mais ils sont compatibles avec les études locales de la turbulence MRI, en particulier vis-à-vis de l'influence de l'effet Hall.

O'Keefe & Downes rapportent une croissance exponentielle non-convergée de l'énergie magnétique après $80T_0$.

VI.2 INFLUENCE DU PARAMÈTRE HALL

J'entreprends d'échantillonner une large gamme de paramètres Hall \mathcal{L} . Le premier objectif est d'étudier la transition de la turbulence vers le régime auto-organisé ; le second objectif est de confirmer la formation et la stabilité de multiples écoulements zonaux en géométrie globale 3D. Les paramètres des simulations MHD Hall sont rassemblés dans la [Table vi.1](#), avec la même nomenclature que dans Béthune et al. [40]. Toutes les simulations sont initialisées en MHD idéale avec la configuration standard décrite au [Chapitre III](#), et avec un champ magnétique net $B_0 = 10^{-3}$. Après 50 orbites internes, la turbulence MRI est développée sur le domaine entier ; j'arrête la simulation, et je la prolonge en activant l'induction Hall. Un état initial turbulent garantit que les écoulements zonaux ne seront pas causés par des conditions initiales quasi-axisymétriques. Je n'ai pas davantage exploité des simulations 3D avec $B_0 \cdot \Omega < 0$, car elles nécessitent un champ magnétique net fort pour être instables sur une portion limitée du domaine de calcul (voir Balbus & Terquem [28] & [Section v.4](#)).

La hauteur $h/r_0 = 1/4$ est plus petite que dans la section précédente ; voir [Section vi.1.1](#).

VI.2.1 Propriétés de transport

Pour chaque simulation en quart de disque répertoriée dans la [Table vi.1](#), j'évalue la moyenne spatio-temporelle du coefficient de transport

$$\alpha := \frac{\mathcal{R}_{r\varphi} + \mathcal{M}_{r\varphi}}{\rho\Omega^2 h^2} \equiv \alpha_{\mathcal{R}} + \alpha_{\mathcal{M}}, \quad (\text{VI.2})$$

désignée par $\bar{\alpha}$, et la représente sur la [Figure vi.4](#). Cette figure est analogue à la figure 3 de Kunz & Lesur [184] : le coefficient de transport $\bar{\alpha}$ augmente avec $\mathcal{L} \lesssim 0.1$, puis décroît et sature à une valeur de quelques 10^{-4} pour $\mathcal{L} \geq 1$. Cette tendance apparaît indépendamment de l'intensité du champ magnétique initial B_0 . La valeur de \mathcal{L} détermine donc la transition d'un état de transport efficace vers un état de transport faible. La transition se fait pour un \mathcal{L}_0 que [Kunz & Lesur](#) estiment à $\mathcal{L}_0 \approx 0.2$ à partir du nombre de Prandtl effectif en turbulence MRI idéale [198].

En shearing-box, la diminution du coefficient de transport α traduit une évolution structurelle de l'écoulement. Avant de regarder en détail les

NOM	$\Delta\varphi$	B_0	\mathcal{L}	$\bar{\alpha}$	ÉTAT
B3L0	$\pi/2$	10^{-3}	0.00	5.6×10^{-2}	turbulence
B3L1	$\pi/2$	10^{-3}	0.02	7.8×10^{-2}	turbulence
B3L2	$\pi/2$	10^{-3}	0.04	9.8×10^{-2}	turbulence
B3L3	$\pi/2$	10^{-3}	0.10	1.4×10^{-1}	turbulence
B3L4	$\pi/2$	10^{-3}	0.20	8.2×10^{-2}	turbulence
B3L5	$\pi/2$	10^{-3}	0.40	1.6×10^{-2}	1 bande
B3L6	$\pi/2$	10^{-3}	1.00	4.8×10^{-4}	4 bandes
<hr/>					
2 π L4	2π	10^{-3}	0.20	1.7×10^{-1}	turbulence
2 π L5	2π	10^{-3}	0.40	1.8×10^{-2}	vortex
2 π L6	2π	10^{-3}	1.00	1.2×10^{-3}	3 bandes
<hr/>					
B4L0	$\pi/2$	10^{-4}	0.00	3.8×10^{-3}	turbulence
B4L1	$\pi/2$	10^{-4}	0.02	1.7×10^{-2}	turbulence
B4L2	$\pi/2$	10^{-4}	0.04	3.7×10^{-2}	turbulence
B4L3	$\pi/2$	10^{-4}	0.10	8.2×10^{-2}	turbulence
B4L4	$\pi/2$	10^{-4}	0.20	6.2×10^{-2}	turbulence
B4L5	$\pi/2$	10^{-4}	0.40	1.7×10^{-2}	vortex
B4L6	$\pi/2$	10^{-4}	1.00	3.8×10^{-4}	1 bande
B4L7	$\pi/2$	10^{-4}	2.00	5.1×10^{-4}	3 bandes
<hr/>					
B5L1	$\pi/2$	10^{-5}	0.10	7.6×10^{-2}	turbulence
B5L2	$\pi/2$	10^{-5}	0.20	6.4×10^{-2}	turbulence
B5L3	$\pi/2$	10^{-5}	0.40	1.1×10^{-2}	vortex
B5L4	$\pi/2$	10^{-5}	1.00	4.4×10^{-4}	1 bande
B5L5	$\pi/2$	10^{-5}	2.00	8.5×10^{-4}	3 bandes
B5L6	$\pi/2$	10^{-5}	4.00	2.5×10^{-4}	5 bandes
B5L7	$\pi/2$	10^{-5}	10.0	3.7×10^{-4}	3 bandes

TABLE VI.1. – Simulations 3D en MHD Hall : intervalle azimuthal $\Delta\varphi$, champ magnétique vertical initial B_0 , paramètre Hall \mathcal{L} , coefficient de transport turbulent $\bar{\alpha}$, état final de la simulation.

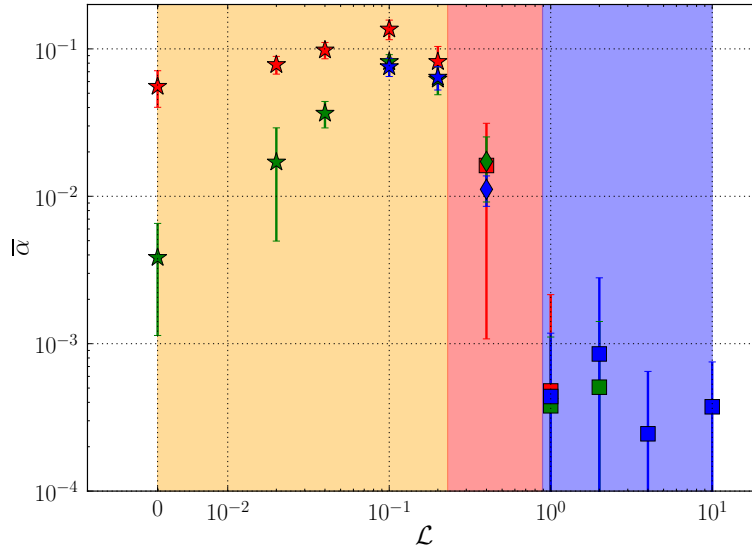


FIGURE VI.4. – Coefficient de transport moyenné en temps et espace $\bar{\alpha}$ en fonction du paramètre de Hall \mathcal{L} ; la couleur des symboles représente l'intensité du champ magnétique initial $B_0 = 10^{-3}$ (vert), 10^{-4} (rouge) ou 10^{-5} (bleu) ; la forme des symboles correspond à l'état final des simulations : turbulence (étoiles), vortex (losanges) ou écoulements zonaux (carrés). Les couleurs de fonds délimitent ces trois états ; les barres d'erreurs représentent la variance temporelle.

structures des différents champs, nous pouvons définir des diagnostics pour quantifier le degré d'ordre. Soit

$$A_{y,z}[f](x) := \frac{\int f(t, y, z)f(t+x, y, z) dt}{\int f(t, y, z)^2 dt} \quad (\text{VI.3})$$

l'auto-corrélation d'une distribution f par rapport à la variable x , et

$$\langle C_z[f] \rangle_\varphi(r) := \frac{1}{\Delta\varphi} \int_0^{\Delta\varphi} \left\{ \frac{1}{h} \int_0^h A_{r,\varphi}[f](z) dz \right\} d\varphi \quad (\text{VI.4a})$$

$$\langle C_\varphi[f] \rangle_z(r) := \frac{1}{h} \int_0^h \left\{ \frac{1}{\Delta\varphi} \int_0^{\Delta\varphi} A_{r,z}[f](\varphi) d\varphi \right\} dz \quad (\text{VI.4b})$$

les profils d'auto-corrélation verticale et azimuthale normalisées. Sur la [Figure VI.5](#) sont regroupés les coefficients d'auto-corrélation de chaque simulation en fonction du paramètre de Hall \mathcal{L} . Nous pouvons confirmer que la transition en transport turbulent s'accompagne d'une transition d'une phase turbulente vers une phase organisée, pour des valeurs de \mathcal{L} comprises entre 0.2 et 1.0. Je vais successivement considérer les régimes d'effet Hall faible, intermédiaire puis fort.

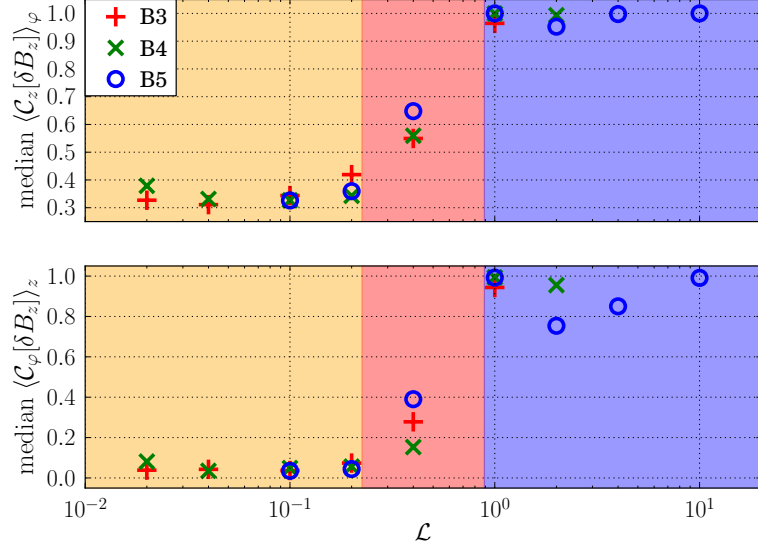


FIGURE VI.5. – Médiannes des profils d’auto-corrélation verticale ((vi.4a), *panneau supérieur*) et azimuthale ((vi.4b), *panneau inférieur*) en fonction du paramètre Hall \mathcal{L} . Différents symboles correspondent à différentes intensités du champ magnétique initial $B_0 = 10^{-3}$ (‘+’ rouges), 10^{-4} (‘x’ verts) et 10^{-5} (ronds bleus). Les trois sous-domaines colorés (orange / rouge / bleu) sont les mêmes que sur la Figure vi.4.

VI.2.2 Hall faible

Pour $\mathcal{L} \leq 0.2$, le transport turbulent est intense et augmente avec \mathcal{L} . La Figure vi.6 montre l’état turbulent utilisé comme condition initiale des simulations MHD Hall, représentatif des simulations dans ce régime.

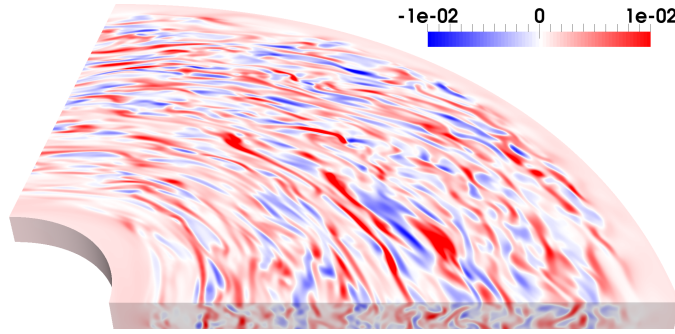


FIGURE VI.6. – Distribution de champ magnétique vertical B_z dans le run ‘B3L0’.

Je compare les coefficients de transport magnétique $\alpha_{\mathcal{M}}$ et hydrodynamique $\alpha_{\mathcal{R}}$ de moment cinétique en MHD idéale et en MHD Hall sur la Figure vi.7. Le rapport du stress de Maxwell au stress de Reynold est approximativement constant en rayon, avec et sans effet Hall. La valeur $\alpha_{\mathcal{M}}/\alpha_{\mathcal{R}} \approx 2$ est légèrement en dessous des résultats de shearing-box [150]; comme en MHD idéale, le couple de Reynolds est agrémenté par des

ondes de densité spirales à grande échelle. Le rapport de stress augmente sensiblement en ajoutant l'induction Hall avec un flux vertical net positif.

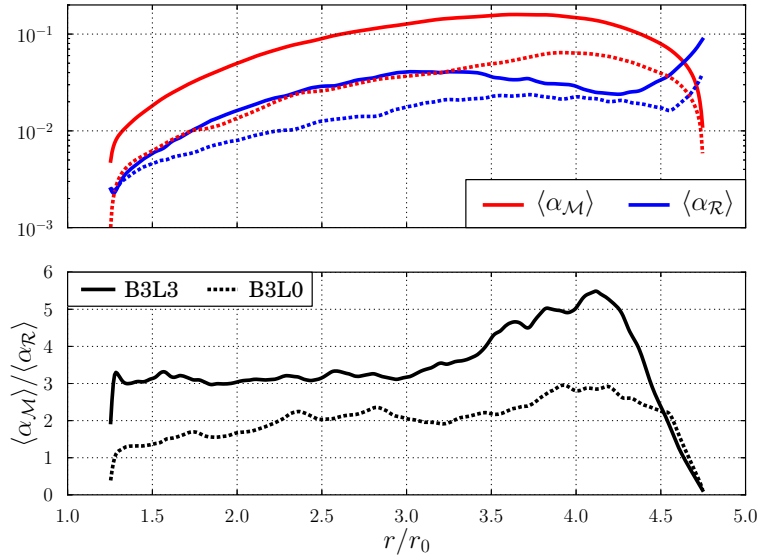


FIGURE VI.7. – *Panneau supérieur* : profils radiaux des couples de Maxwell (rouge) et de Reynolds (bleu) dans les runs 'B3L3' (trait plein) et 'B3L0' (pointillés); *panneau inférieur* rapport des couples.

Dans la [Section v.3](#), j'ai identifié un mode d'accrétion de masse et de flux magnétique, piloté par l'induction Hall et se manifestant sous forme de plasmodes. Ces structures ne sont pas facilement mises en évidence dans des simulations de turbulence MRI 3D car l'écoulement est hautement non-axisymétrique. Je présente sur la [Figure vi.8](#) l'évolution du flux magnétique dans une simulation avec $\mathcal{L} = 0.2$, sans contrôle du flux total (voir [Section iii.3.2.2](#)) afin de ne pas ajouter de biais numérique. Sur cette figure, nous pouvons discerner des filaments de flux tombant vers le bord radial interne. Il en résulte une évacuation ponctuelle du flux magnétique (notamment à $t \approx 150T_0$ et $t \approx 190T_0$), mais pas de signature observable sur les cartes spatio-temporelles de densité. Le transport de flux accru par rapport au transport de masse, comme sur les [Figures vi.1](#) et [iii.9](#), supporte l'idée que ce phénomène est piloté par l'induction Hall. Ce phénomène apparaît exclusivement dans le régime $0 < \mathcal{L} < 1$.

VI.2.3 Hall intermédiaire

Pour un paramètre de Hall $0.2 < \mathcal{L} < 1$, le transport turbulent décroît avec \mathcal{L} , tandis que la longueur de cohérence des structures magnétiques augmente. Je représente sur la [Figure vi.9](#) les distributions de flux magnétique vertical et de densité dans le run '2 π L5'. L'essentiel du flux magnétique est concentré dans une région en forme de banane dans le quart supérieur gauche. Comme discuté en [Section iii.3.2.2](#), il est possible que la procédure de contrôle du flux magnétique ait facilité la formation d'une

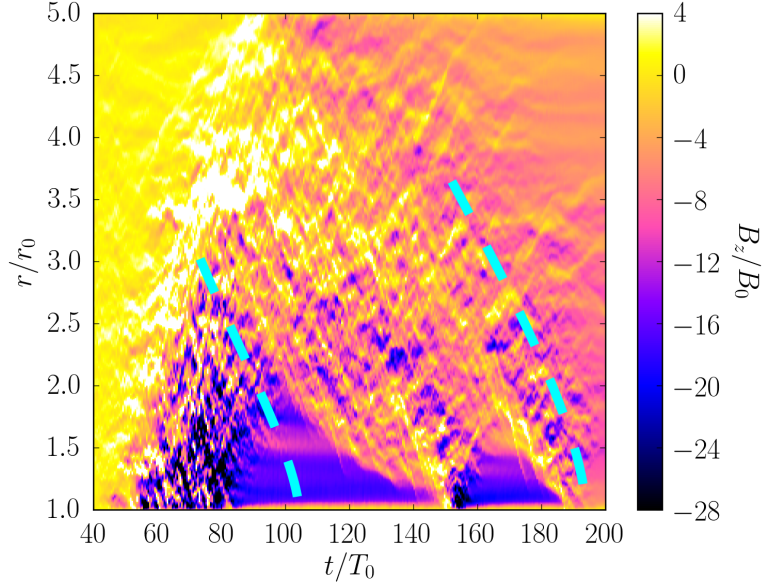


FIGURE VI.8. – Champ magnétique vertical $\langle B_z \rangle_z$ en fonction du temps (abscisse) et du rayon (ordonnée) dans un run équivalent à B4L4 mais sans contrôle du flux magnétique total; les tirets cyan guident l’œil pour identifier les filaments d’accrétion de flux magnétique.

zone où le champ serait suffisamment fort pour stabiliser la HSI. J’ai vérifié que ces zones se forment aussi sans contrôle du flux magnétique. Dans le reste du domaine, le champ magnétique est majoritairement négatif, les régions de flux positif sont très localisées. L’écoulement est visiblement stable près du bord radial externe dans le quart inférieur droit. La Figure VI.9 droite montre que la densité est réduite de 80% dans cette région; la vitesse d’Alfvén y est suffisamment grande pour stabiliser la HSI. La densité est accumulée dans la région de fort champ magnétique, où elle atteint 160% de sa valeur initiale. Cette zone d’accumulation correspond donc à une surpression localisée dans le disque.

Pour maintenir un équilibre dans la direction radiale, la vitesse azimutale de l’écoulement doit s’adapter à la présence d’une surpression. Il en résulte une variation de vorticité verticale par rapport à l’écoulement képlérien, $\delta\omega_z \equiv (\nabla \times [v - v_K]) \cdot e_z$, représentée sur la Figure VI.10 gauche. La présence d’un vortex anticyclonique est évidente, avec une fluctuation en vorticité $\delta\omega_z \approx -3 \times 10^{-2}$. Cet écart correspond au $\delta B/\rho\ell_H$ mesuré dans le vortex; la vorticité canonique (v.2) est donc conservée en bonne approximation, et nous pouvons affirmer que l’induction Hall est responsable de la production d’un vortex par accumulation de flux magnétique.

Les vortex anticycloniques sont soumis à différentes instabilités hydrodynamiques et magnétohydrodynamiques, lesquelles peuvent entretenir ou détruire les structures à grande échelle (e.g. [202, 236, 203, 216, 226]). Il est vraisemblable que l’induction Hall génère de nouvelles branches d’instabilité, par résonance des ondes whistler avec la période propre du

La période propre du vortex représente environ 25 périodes képlériennes locales, d’où les fluctuations sur la Figure VI.10.

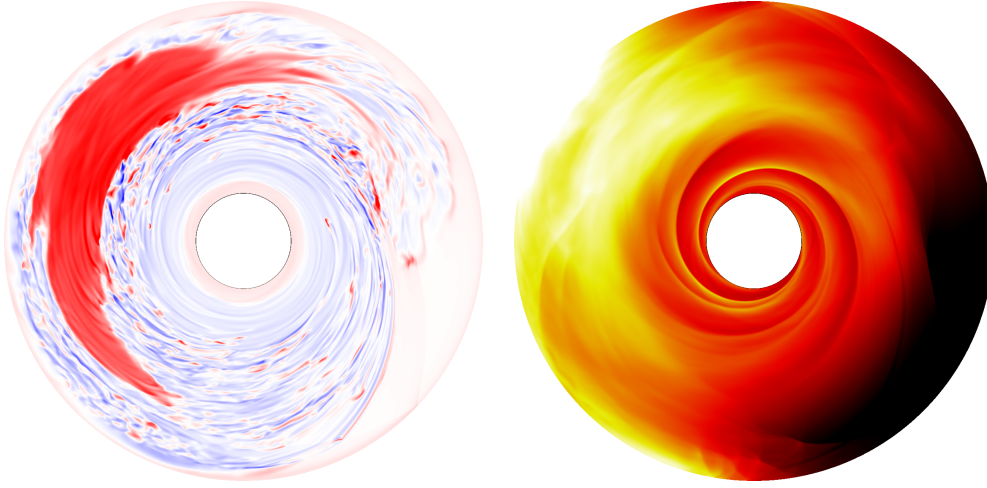


FIGURE VI.9. – Distributions instantanées de flux magnétique vertical (*gauche*) et de densité (*droite*) dans une coupe équatoriale du run '2 π L5'. Les cartes de couleurs couvrent les intervalles $[\pm 10^{-2}]$ en champ magnétique et $[0.2, 1.6]$ en densité.

vortex. La survie des vortex observés sur plusieurs rotations propres appelle à une étude approfondie de leur stabilité en MHD Hall. Par ailleurs, comme la distribution de stress magnétique $\mathcal{M}_{r\varphi}$ n'est pas positive sur tout le contour du vortex, le mécanisme décrit dans la [Section v.2.3](#) n'est pas directement applicable pour expliquer leur confinement.

La composante $\mathcal{M}_{r\varphi}$ du tenseur de stress n'est pas pertinente en présence d'un vortex, parce que l'écoulement n'est plus toroïdal : il prend une composante radiale non-nulle au voisinage du vortex. Dans le cas des écoulements zonaux, j'ai montré que le flux magnétique est confiné radialement par la composante $\mathcal{M}_{r\varphi}$ du stress de Maxwell, i.e. le produit des champs $-B_r B_\varphi$ le long de l'écoulement et perpendiculaire à l'écoulement. Nous pouvons généraliser ce principe en calculant la composante $\mathcal{M}_{\perp\parallel} \equiv -B_\perp B_\parallel$, après avoir projeté le champ magnétique équatorial (B_r, B_φ) parallèlement et perpendiculairement aux lignes de courant. La distribution de $\mathcal{M}_{\perp\parallel}$ est représentée sur la [Figure vi.10](#) droite. Cette composante du stress magnétique est positive dans le voisinage du vortex et nulle à l'intérieur ; elle confine le flux magnétique depuis toutes les directions simultanément, suivant la physique décrite en [Section v.2.3](#).

Les vortex Hall n'ont pas été observés dans les simulations shearing-box en MHD Hall de Kunz & Lesur [184], Bai [15]. Nous présumons que cela provient de l'étendue spatiale limitée de leurs simulations. Ces vortex constituent donc un nouvel état dynamique observé, à la transition entre un écoulement turbulent et un écoulement axisymétrique organisé.

VI.2.4 *Hall fort*

Pour un paramètre Hall $\mathcal{L} \geq 1$, le transport turbulent est figé à $\bar{\alpha} \approx 10^{-4}$ et l'écoulement est entièrement organisé d'après la [Figure vi.5](#). La

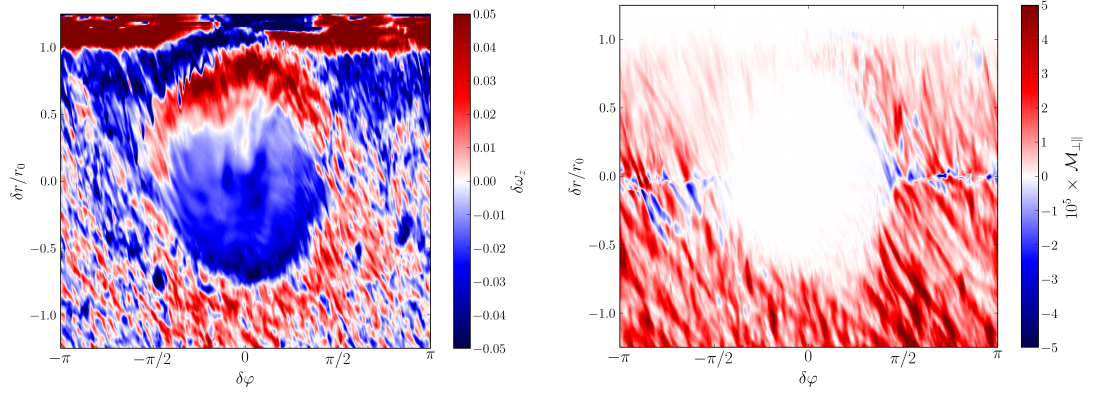


FIGURE VI.10. – Cartes moyennées verticalement dans le plan équatorial (φ, τ) du run '2 π L5', moyennées entre $250T_0$ et $290T_0$, et centrées sur le vortex. À gauche : carte de vorticité verticale ω_z ; à droite : carte de stress magnétique projeté $\mathcal{M}_{\perp\parallel}$.

Figure VI.11 confirme que des écoulements zonaux se sont formés dans une simulation 3D, à partir d'un état initialement turbulent, et persistants sur plusieurs centaines d'orbites internes. Cette carte est représentative de l'ensemble des simulations en MHD Hall avec $\mathcal{L} \geq 1$: plusieurs bandes de largeur h peuvent être formées, elles accumulent tout le flux magnétique positif, et l'écoulement reste apparemment turbulent entre les bandes.

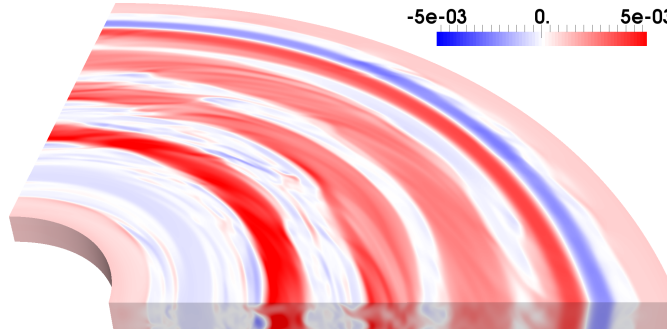


FIGURE VI.11. – Distribution instantanée du flux magnétique vertical B_z dans le run 'B3L6' après $t = 300T_0$ d'intégration.

La Figure VI.12 gauche confirme que l'accumulation de flux magnétique suffit à stabiliser la HSI à l'intérieur des bandes, et que le flux magnétique entre les bandes est trop faible (ou négatif) pour stimuler l'instabilité sur des échelles de temps appréciables. Par contre, les bords de bandes sont soumis à la HSI sur une largeur significative, suffisante pour entretenir une légère activité turbulente.

Les profils radiaux de flux magnétique, couples magnétique $\mathcal{M}_{r\varphi}$ et hydrodynamique $\mathcal{R}_{r\varphi}$ sont tracés sur la Figure VI.12 droite. Comme dans les simulations 2D, le couple magnétique est maximal entre les bandes et minimal à l'intérieur ; le mécanisme de confinement décrit dans la Section v.2.3 semble opérationnel. Notons que le couple magnétique se développe sur

tout l'espace entre les bandes, de façon analogue à la Figure v.8, mais sous l'influence d'une diffusion turbulente et non ohmique. Ce système reste très dynamique : les bandes survivent sur de grandes échelles de temps, mais leur stabilité requiert l'action de l'écoulement linéairement instable.

Le stress de Reynolds $\mathcal{R}_{r\varphi}$ tracé sur la Figure vi.12 est dix fois plus fort que sa contrepartie magnétique, sans corrélation apparente avec cette dernière. Ce couple hydrodynamique provient d'ondes de densité spirales à grande échelle, n'interagissant pas de façon remarquable avec les écoulements zonaux. J'ai vérifié que le profil radial de vorticité potentielle est monotonement décroissant ; l'instabilité d'ondes de Rossby n'est donc pas à l'origine de ce couple hydrodynamique [213]. Nous supposons que ces ondes spirales sont excitées par les déviations à l'axisymétrie dans les écoulements zonaux, elles-mêmes causées par l'activité turbulente résiduelle.

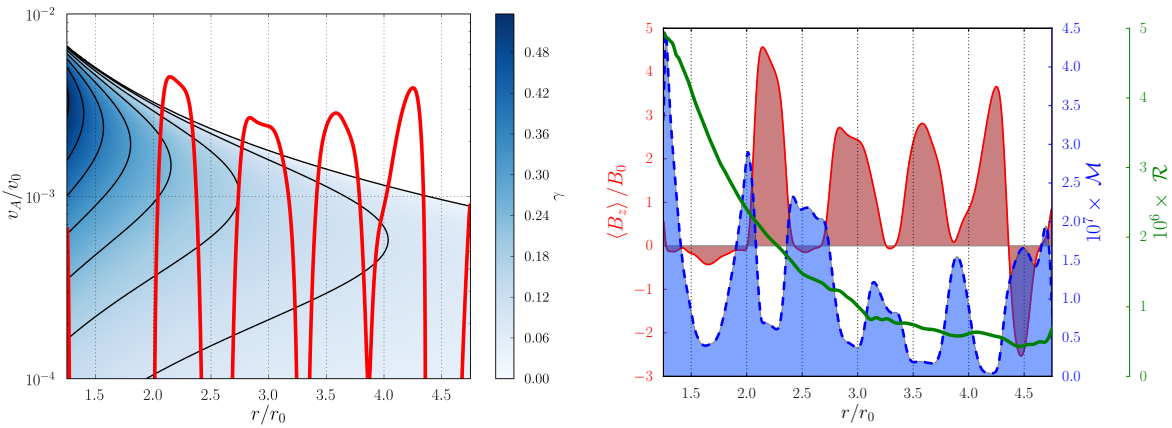


FIGURE VI.12. – Profils radiaux dans le run B3L6, moyennés azimuthalement, verticalement, et temporellement entre $200T_0$ et $300T_0$. À droite : taux de croissance de la HSI (teintes) en fonction du rayon (abscisse) et de l'intensité locale du champ magnétique (ordonnées) ; profil de vitesse d'Alfvén (trait plein rouges). À gauche : profils de flux magnétique vertical B_z/B_0 (rouge), couples de Maxwell $\mathcal{M}_{r\varphi}$ (bleu) et de Reynolds $\mathcal{R}_{r\varphi}$ (vert).

La conservation de la vorticité canonique (v.2) impose une diminution de vorticité dans les zones d'accumulation de champ magnétique (voir Section v.2.1 et [184]). La vorticité $\langle \omega_z \rangle \simeq (1/r)\partial_r[r\langle v_\varphi \rangle]$ est directement liée au profil radial de vitesse azimuthale. Si ce profil passe de super-képlerien à sub-képlerien pour des rayons croissants, les écoulements zonaux peuvent jouer le rôle de pièges à poussières [349].

Les poussières suffisamment grosses auront tendance à se mouvoir inertiuellement dans le disque, à la vitesse képlerienne locale. Les poussières suffisamment petites et diluées suivent la trajectoire du gaz environnant par l'intermédiaire des collisions moléculaires. Dans un régime intermédiaire (poussières milli-/centimétriques), les poussières et le gaz sont partiellement découplés : s'ils n'orbitent pas à une vitesse identique, alors les poussières voient un vent qui peut les freiner ou les accélérer, selon

que l'écoulement fluide est super-képlerien ou sub-képlerien. Un grain de poussière freiné aura alors tendance à tomber sur l'astre central, tandis qu'un grain accéléré va s'en éloigner. Cette dérive radiale se fait à vitesse maximale lorsque le temps caractéristique de freinage des grains est de l'ordre de la période orbitale locale.

La Figure VI.13 montre deux transitions de vitesse super-képlerienne à sub-képlerienne dans la simulation 'B3L6'. Les deux bandes externes ne causent pas de transition semblable, et les déviations au profil képlerien sont inférieures à 1%. La capacité de ces structures à capturer des poussières reste donc incertaine dans ce modèle de disque non-stratifié.

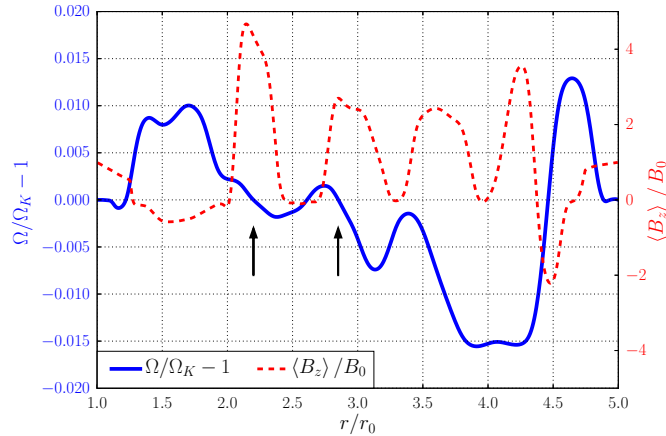


FIGURE VI.13. – Profils radiaux de flux magnétique B_z/B_0 (tirets rouges) et déviations au profil képlerien $\Omega/\Omega_K - 1$ moyennés entre $260T_0$ et $300T_0$ dans le run 'B3L6'. Les flèches noires marquent les rayons où l'écoulement passe de super-képlerien à sub-képlerien.

VI.3 MENACES À L'AUTO-ORGANISATION

Je souhaite à présent tester la robustesse des structures organisées en introduisant de nouveaux effets physiques. Dans un premier temps j'ajoute un flux magnétique toroïdal net dans les conditions initiales, pouvant exciter des modes MRI non-axisymétriques susceptibles de détruire les écoulements zonaux. Dans un second temps, j'examine l'influence des diffusivités ohmique et ambipolaire.

VI.3.1 Champ toroïdal

J'initialise un état de turbulence MRI sur $50T_0$ comme précédemment, mais avec un champ magnétique net incliné dans le plan (φ, z) . Je fixe sa composante toroïdale $B_{\varphi,0} = 10^{-3}$ constante, et j'échantillonne deux valeurs pour sa composante verticale : 10^{-3} et 10^{-4} . Rappelons au passage que le champ magnétique toroïdal ne peut exciter que des modes MRI non-axisymétriques [24]. Cette MRI non-axisymétrique peut se dévelop-

per pour un champ magnétique toroïdal B_ϕ beaucoup plus intense que le champ vertical critique B_z dans la MRI axisymétrique que nous avons considérée jusqu'à présent. Les paramètres des simulations en champ toroïdal sont rassemblés dans la [Table vi.2](#).

NOM	$B_{z,0}$	\mathcal{L}	$\bar{\alpha}$	ÉTAT
T3L0	10^{-3}	0.0	6.2×10^{-2}	turbulence
T3L1	10^{-3}	0.1	1.4×10^{-1}	turbulence
T3L2	10^{-3}	0.4	1.0×10^{-2}	vortex
T3L3	10^{-3}	1.0	1.1×10^{-3}	3 bandes
T4L0	10^{-4}	0.0	4.9×10^{-3}	turbulence
T4L1	10^{-4}	0.1	7.9×10^{-2}	turbulence
T4L2	10^{-4}	0.4	7.3×10^{-3}	turbulence
T4L3	10^{-4}	1.0	3.3×10^{-3}	1 bande

TABLE VI.2. – Simulations 3D en MHD Hall avec champ magnétique toroïdal $B_{\phi,0} = 10^{-3}$: champ vertical initial $B_{z,0}$, paramètre de Hall \mathcal{L} , coefficient de transport turbulent $\bar{\alpha}$, état final de la simulation.

Structurellement, je n'observe que des différences mineures par rapport aux simulations avec un flux magnétique net vertical. Le run 'T3L3' n'a produit que trois bandes au lieu de quatre dans le run équivalent 'B3L6' ; le run 'T4L2' n'a pas produit de vortex bien délimité, mais plutôt de larges îlots de flux magnétique, avec une durée de vie de quelques orbites locales seulement. Cela supporte l'idée que le champ toroïdal joue un rôle déstabilisant sur les structures organisées à grande échelle, mais ne suffit pas à inhiber le processus d'auto-organisation pour $B_\phi = 10^{-3}$. Je n'ai pas exploité de simulations avec un flux magnétique toroïdal plus fort en MHD Hall. En ce qui concerne le coefficient de transport turbulent $\bar{\alpha}$, je n'observe pas de différence significative à l'ajout d'un flux magnétique toroïdal net. En particulier, la transition d'un régime turbulent vers un régime organisé a toujours lieu pour $\mathcal{L} \approx 0.1$.

VI.3.2 Hall + Ohm

Dans la limite où l'induction Hall domine l'induction idéale, le critère de stabilité marginale des modes HSI axisymétriques s'écrit

$$\ell_{\text{HVA}}(\ell_{\text{HVA}}k^2 - q\Omega) + \eta_0 k^2 = 0, \quad (\text{VI.5})$$

où k est le vecteur d'onde vertical du mode considéré et $q = -\partial \log \Omega / \partial \log r$ réfère au cisaillement adimensionné. En présence de résistivité, la HSI se manifeste dans un espace de paramètres borné par :

$$\frac{2\ell_{\text{HVA}}k^2}{q\Omega} = 1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{2\eta_0 k^2}{q\Omega}\right)^2}, \quad (\text{VI.6})$$

Cette définition du Reynolds est exclusive à cette section et diffère de notre définition standard $\mathcal{R}_O \equiv \Omega h^2 / \eta_O$.

contrôlé par le nombre Reynolds magnétique $\mathcal{R}_O := q\Omega / 2\eta_O k_0^2$, avec $k_0 = 2\pi/h$. Je présente quatre simulations avec différents nombres de Reynolds et de Lundquist ohmique dans la [Table vi.3](#).

NOM	B_0	\mathcal{L}	\mathcal{S}_O (\mathcal{R}_O)	$\bar{\alpha}$	ÉTAT
O3N0	10^{-3}	0.4	25 (119 Ω)	6.2×10^{-2}	turbulence
O3N1	10^{-3}	1.0	25 (119 Ω)	1.4×10^{-1}	turbulence
O3N2	10^{-3}	1.0	2.5 (12 Ω)	1.0×10^{-2}	vortex
O4N3	10^{-4}	1.0	2.5 (119 Ω)	1.1×10^{-3}	3 bandes

TABLE VI.3. – Simulations 3D en MHD Hall résistive : champ magnétique vertical initial $B_{z,0}$, paramètre Hall \mathcal{L} , nombres de Lundquist \mathcal{S}_O et de Reynolds magnétiques \mathcal{R}_O , coefficient de transport turbulent $\bar{\alpha}$, état final de la simulation.

L'influence d'une diffusivité ohmique a été brièvement discutée en 2D dans la [Section v.2.4](#). En diffusant, le champ magnétique vertical déstabilise les régions inter-bandes, produisant un couple magnétique positif sur une région spatialement étendue. C'est ainsi que nous avons pu mettre en évidence la dérive radiale des bandes, causée par une différence de stress magnétique de part et d'autre d'une bande. J'observe encore une dérive radiale des bandes accrue par la résistivité en 3D, toujours dirigée vers les rayons croissants. De même, nous trouvons encore que le coefficient de transport $\bar{\alpha}$ est une fonction croissante du nombre de Lundquist \mathcal{S}_O à flux magnétique B_0 et paramètre de Hall \mathcal{L} constants.

Structurellement, l'auto-organisation n'est pas inhibée par la résistivité ohmique, et elle se déclenche toujours pour $\mathcal{L} \approx 0.1$. Cependant, une résistivité croissante diminue clairement le nombre d'écoulements zonaux produits dans une simulation : deux dans le run 'O3N1' et un seul dans le run 'O3N2', au lieu de quatre dans le run équivalent sans résistivité 'B3L6'. Les runs 'O3N0' et 'O3N4' ont néanmoins produit les mêmes structures que leurs analogues non-résistifs. J'ai essayé de prolonger le run 'B3L6' à partir de sa configuration organisée à quatre bandes, en activant instantanément la résistivité avec $\mathcal{S}_O = 2.5$ sur le domaine entier : les bandes de flux magnétique diffusent aussitôt et fusionnent pour n'en laisser qu'une, large de quelques échelles de hauteur h . Cela suggère que les bandes auront tendance à fusionner à long terme, jusqu'à se trouver suffisamment distantes les unes des autres pour ne plus interagir.

VI.3.3 Hall + ambipolaire

La diffusion ambipolaire est anisotrope et son intensité croît avec le carré de la vitesse d'Alfvén locale. Pour ces raisons, nous ne pouvons pas prédire son effet sur l'auto-organisation à partir des résultats en MHD résistive (ohmique). Je caractérise son intensité avec le nombre de Lundquist ambipolaire \mathcal{S}_A , relatif à la stabilité MRI, et avec le nombre d'Elsasser

Λ_A , qui est plus couramment employé et ne dépend pas de l'intensité du champ magnétique. Ces paramètres sont regroupés dans la [Table vi.4](#) pour l'ensemble des runs ambipolaires que j'ai exploité. Comme précédemment, les simulations sont initialisées en MHD idéale jusqu'à un état de turbulence développée, puis les inductions Hall et ambipolaire sont activées simultanément. J'impose un nombre de Lundquist ambipolaire S_A constant en fixant une fréquence de collision ion-neutre $\tau_{in} = \eta_A/v_A^2$ constante dans le domaine de calcul entier, par rapport à $v_A = B_0/\sqrt{\rho_0}$ la vitesse d'Alfvén associée au flux vertical net uniquement.

Le nombre d'Elsasser ambipolaire augmente comme $\Lambda_A \propto \Omega^{-1}$.

NOM	B_0	\mathcal{L}	$S_A (\Omega \Lambda_A)$	$\bar{\alpha}$	ÉTAT
A3N0	10^{-3}	1.0	25 (0.1)	1.0×10^{-3}	2 bandes
A3N1	10^{-3}	2.0	25 (0.1)	1.1×10^{-3}	3 bandes
A3N2	10^{-3}	1.0	2.5 (0.01)	7.3×10^{-4}	2 bandes
A3N3	10^{-3}	0.4	2.5 (0.01)	9.6×10^{-4}	2 bandes
A3N4	10^{-3}	0.2	2.5 (0.01)	1.5×10^{-3}	2 bandes
A4N5	10^{-4}	1.0	25 (0.01)	1.3×10^{-3}	channels
A4N6	10^{-4}	4.0	25 (0.01)	1.1×10^{-3}	3 bandes

TABLE VI.4. – Simulations 3D en MHD Hall ambipolaire : champ magnétique vertical initial $B_{z,0}$, paramètre Hall \mathcal{L} , nombres de Lundquist S_A et d'Elsasser ambipolaires Λ_A au bord radial interne, coefficient de transport turbulent $\bar{\alpha}$, état final de la simulation.

De façon analogue à la résistivité ohmique, nous trouvons que le nombre d'écoulements zonaux est réduit en présence de diffusion ambipolaire par rapport au cas non-diffusif. Cependant, à nombres de Lundquist égaux, nous obtenons plus de bandes en présence de diffusion ambipolaire qu'en présence de résistivité ohmique. Cela peut s'expliquer par le fait que la diffusion ambipolaire a une faible influence dans les régions inter-bandes, où le champ magnétique est faible. En conséquence, les bandes ne peuvent interagir de manière diffusive et fusionner qu'à courte portée.

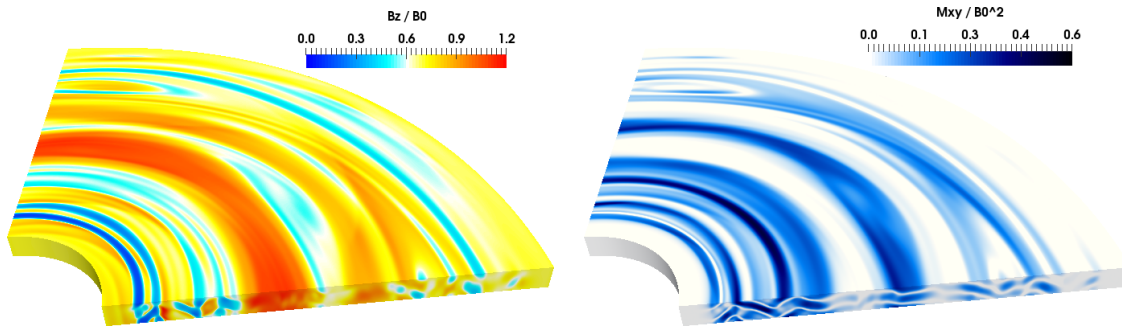


FIGURE VI.14. – États instantanés du run 'A3N4' après $t = 180T_0$; à gauche : champ magnétique vertical B_z/B_0 ; à droite : stress de Maxwell $\mathcal{M}_{r\phi}/B_0^2$.

La diffusion ambipolaire permet d'atteindre un état que j'ai qualifié par 'channels' dans la [Table vi.4](#), où le domaine de calcul est rempli de modes HSI saturés dans un régime quasi-linéaire. Pour cause, le champ magnétique initial est très faible par rapport au seuil de stabilisation HSI ; l'instabilité amplifie la vitesse d'Alfvén et donc la diffusivité ambipolaire $\eta_A \equiv \tau_{in} v_A^2$, jusqu'à ce que le taux de croissance de l'instabilité soit compensé par la fréquence de diffusion $\sim \eta_A/h^2$. Dans ce régime quasi-linéaire, les modes channels HSI induisent un couple magnétique 'laminaire', à grande échelle. Par ailleurs, la diffusion ambipolaire maintient un système quasi-axisymétrique, vraisemblablement en empêchant les instabilités parasites de saturer vers un régime turbulent [17].

Un vortex se trouve après la deuxième bande, proche du bord azimuthal.

Un exemple d'écoulement à la fois instable et laminaire est présenté sur la [Figure vi.14](#). À gauche, nous pouvons discerner deux bandes de flux magnétique axisymétriques en bonne approximation. La distribution de stress magnétique $\mathcal{M}_{r\varphi}$ est représentée sur la [Figure vi.14](#) droite. Le stress est minimal à l'intérieur des zones d'accumulation de flux magnétique ; dans le reste du domaine, le champ équatorial (B_r, B_φ) produit des structures cohérentes à grande échelle, avec un haut degré d'axisymétrie même dans les régions à faible flux magnétique vertical.

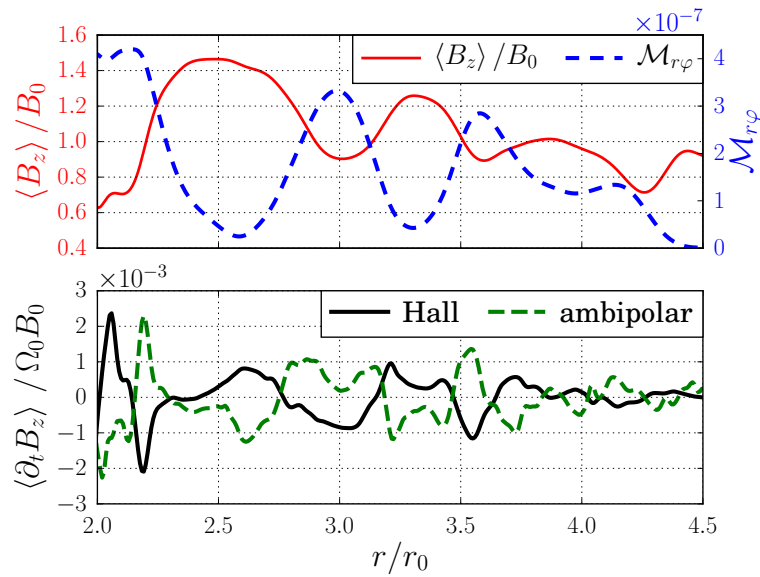


FIGURE VI.15. – Profils radiaux dans le run 'A3N4', moyennés verticalement, azimuthalement et en temps entre $200T_0$ et $300T_0$. *Panneau supérieur* : profils de flux magnétique B_z/B_0 (trait plein rouge) et de stress magnétique $\mathcal{M}_{r\varphi}$ (tirets bleus). *Panneau inférieur* : contributions des EMFs Hall (trait plein noir) et ambipolaire (tirets verts) à l'induction de flux magnétique vertical $\partial_t B_z$.

Si nous moyennons les champs dans les directions azimuthale, verticale, et en temps entre $200T_0$ et $300T_0$, nous obtenons les profils représentés sur la [Figure vi.15](#). Nous pouvons confirmer la présence de deux bandes de flux magnétique cernées par le couple de Maxwell $\mathcal{M}_{r\varphi}$; cette anti-

corrélation signifie que l'effet Hall devrait jouer un rôle confinant sur B_z . Notons que le contraste en flux magnétique est très faible comparé aux simulations sans diffusion ; les contrastes en vorticité et en densité seront d'autant plus faibles. Nous pouvons calculer séparément les contributions des EMFs non-idéales à l'induction du champ magnétique vertical. L'induction idéale est négligeable dans ce cas ; nous trouvons une compétition entre les inductions Hall et ambipolaire, approximativement opposées l'une à l'autre pour maintenir un système quasi-stationnaire. L'induction Hall a bien tendance à concentrer le flux magnétique dans les bandes, par opposition à la diffusion ambipolaire radiale.

La simulation 'A3N4' prouve que le processus d'auto-organisation Hall peut opérer pour un paramètre de Hall aussi bas que $\mathcal{L} = 1/5$, correspondant au seuil $\mathcal{L}_0 \approx 0.2$ estimé par Kunz & Lesur [184]. Cette estimation reposait sur la connaissance du nombre de Prandtl magnétique $\mathcal{P} \equiv \nu/\eta$, rapport des viscosité et résistivité turbulentes dans le régime de turbulence MRI idéale. Cependant, l'écoulement reste laminaire dans le run 'A3N4', et l'auto-organisation doit maintenant vaincre la diffusion ambipolaire et non turbulente. Le rapport de la viscosité turbulente à la résistivité ambipolaire donne un nombre de Prandtl effectif $\mathcal{P} \ll 1$, dépendant du nombre d'Elsasser ambipolaire Λ_A imposé. Le fait que des structures axisymétriques restent auto-confinées à $\mathcal{L} = 0.2 < 1$ pourrait signifier que la diffusion magnétique effective, somme des diffusions turbulente η_t et ambipolaire η_A , est une fonction décroissante de η_A (voir Figure VI.16).

Ce résultat est intéressant en soi puisqu'il étend le domaine de pertinence du mécanisme d'auto-organisation Hall. Je n'ai pas exploré ce régime davantage car les écoulements zonaux ont déjà un contraste en flux magnétique relativement faible. Je laisse en suspens la question de savoir pourquoi le paramètre de Hall seuil \mathcal{L}_0 est déplacé par la diffusion ambipolaire et non par la diffusion ohmique.

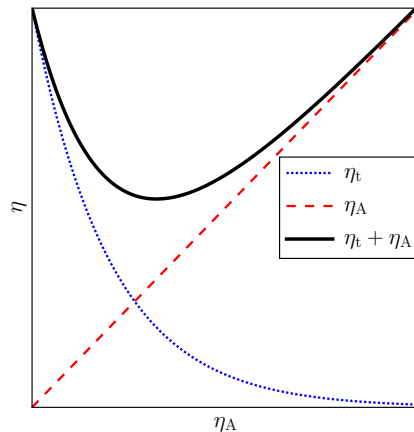


FIGURE VI.16. – Schémas de principe : la diffusion magnétique effective, somme des diffusions turbulentes η_t et ambipolaire η_A , est d'abord une fonction décroissante de η_A ; autrement dit, le transport turbulent décroît plus vite que la diffusion ambipolaire n'augmente.

Troisième partie

MODÈLES DE DISQUES STRATIFIÉS

Dans la seconde partie de ma thèse, j'ai développé et exploité des modèles globaux de disque stratifiés en densité. La stratification se répercute sur la stabilité linéaire de l'écoulement, sur le transport de flux magnétique en présence des trois effets MHD non-idéaux, et sur l'interaction du disque avec un vent magnétisé. Je commence par décrire la configuration numérique standard que j'ai développée. Je l'applique ensuite en situation MHD non-idéale, puis j'ouvre une perspective d'étude concernant la thermochimie des vents de disque.

Résumé

Je commence par motiver le développement d'un modèle numérique global de disque stratifié, puis je présente les caractéristiques de la configuration standard que j'ai adoptée. Le nombre de tests nécessaires à l'élaboration de ce modèle dépasse le millier ; je me contenterai de mentionner les principales difficultés rencontrées et les corrections apportées, reportant en appendice le détail de tentatives infructueuses.

Sommaire

1.	Enjeux et objectifs	128
1.1.	Auto-organisation	128
1.2.	Interaction disque-jet	128
1.3.	Transport à grande échelle	129
2.	Construction du modèle	130
2.1.	Difficultés du modèle isotherme	130
2.2.	Solution adoptée	133
3.	Configuration standard	134
3.1.	Système d'unités	134
3.2.	Géométrie et maillage	135
3.3.	Conditions initiales	136
3.4.	Conditions aux limites	138
3.5.	Précautions supplémentaires	139
4.	Modèle d'ionisation	140
4.1.	Fraction d'ionisation	140
4.2.	Effets MHD non-idéaux	143

VII.1 ENJEUX ET OBJECTIFS

Les enjeux de notre modèle stratifié sont différents de ceux abordés précédemment ; j'indique ci-dessous trois distinctions importantes : vérifier la pertinence du processus d'auto-organisation Hall, étudier l'interaction du disque avec un vent magnétisé, ainsi que les processus de transport de masse et de flux magnétique en présence des trois effets MHD non-idéaux.

VII.1.1 *Auto-organisation*

Le critère d'auto-organisation établi par Kunz & Lesur [184] et étudié dans le [Chapitre VI](#) fait intervenir la hauteur géométrique du domaine cylindrique. Comme discuté dans la [Section III.1.2](#), cette hauteur géométrique sert à imposer, de façon simple mais artificielle, une échelle caractéristique à l'écoulement. Cette échelle n'a pas besoin d'être reliée à la hauteur d'échelle hydrostatique c_s/Ω d'un disque stratifié. Il est légitime de se demander à quel point les conditions verticalement périodiques facilitent ce processus d'auto-organisation. Les simulations en shearing-box stratifiées de Lesur et al. [195] ainsi que Bai [15] suggèrent que l'auto-organisation Hall ne s'exprime pas en configuration stratifiée. Cependant, ces auteurs observent l'apparition d'un flux magnétique toroïdal net dans le domaine de calcul. Ce flux toroïdal net s'accompagne d'un couple magnétique laminaire, transportant du moment cinétique dans le disque sans turbulence. Si l'intensité du couple magnétique reste une fonction croissante du flux vertical net, cela peut inhiber le processus d'auto-organisation Hall décrit dans la [Section V.2.3](#). En configuration stratifiée, un vent de disque peut générer un tel couple laminaire [281, 294], même dans un écoulement MRI-stable avec un fort flux magnétique vertical net [293]. Un modèle global de disque stratifié est nécessaire pour conclure quant à la pertinence de l'auto-organisation Hall dans les disques protoplanétaires.

Des écoulements zonaux furent néanmoins observés par Bai [15] en MHD idéale non-stratifiée avec flux magnétique net ; voir [Annexe B](#).

Sur l'intervalle de magnétisations considérées.

VII.1.2 *Interaction disque-jet*

Un modèle global de disque stratifié permet d'étudier le lancement de vents magnétisés depuis la surface du disque. Un ingrédient essentiel de ce modèle est la présence d'un flux magnétique vertical net, traversant le disque et permettant d'en extraire le moment cinétique [281]. Théoriquement, l'ensemble forme une structure cohérente ou accrétion et éjection vont de paire [264, 100]. En pratique, la séparation d'échelles spatio-temporelles entre le coeur du disque et son environnement couvre plusieurs décades ; il est difficile de décrire simultanément la dynamique du disque dense et du vent dilué en un temps de calcul raisonnable. Pour dépasser le cadre auto-similaire [44, 264, 97], une possibilité consiste à modéliser le transport turbulent en prescrivant des coefficients de diffusion α dans le disque [67, 242, 319]. Pour se concentrer sur la dynamique à grande échelle du jet, il est aussi possible de se placer dans la limite

d'un disque infiniment fin [253, 339, 181]. Les simulations dynamiques globales de l'interaction disque-jet, dans lesquelles la structure fine du disque était résolue, ont été intégrées sur quelques orbites internes seulement [323, 232, 317]. Réciproquement, la majorité des simulations globales de disques stratifiés ne couvrent que quelques échelles de hauteur hydrostatiques au voisinage du plan médian [327, 134], ne permettant pas au vent d'atteindre les régimes d'accélération et collimation magnétique. J'ai pour ambition de résoudre simultanément la dynamique à petite échelle du disque, ainsi que l'accélération et la collimation d'un vent de disque sur de grandes échelles spatio-temporelles.

Pour un écoulement symétrique par rapport au plan médian, les composantes radiale et toroïdale du champ magnétique changent de signe dans le plan. L'apparition d'un flux magnétique toroïdal net brise la symétrie de réflexion par rapport au plan médian ; en conséquence, les vents obtenus dans les simulations locales non-idéales se propagent vers l'extérieur dans un hémisphère, et vers l'intérieur dans l'autre hémisphère [18, 195]. Cette situation est naturelle dans l'approximation de Hill [157], où l'absence de termes de courbure empêche de discriminer les régions internes et externes du disque. Dans un modèle global de disque, le gradient radial de pression pourrait empêcher le lancement d'un vent vers l'étoile, causant une asymétrie entre les hémisphères de part et d'autre du disque. De nombreuses étoiles jeunes montrent une asymétrie entre les deux hémisphères [159, 269]. Des simulations globales stratifiées incluant les trois effets MHD non-idéaux sont nécessaires pour tester la robustesse des configurations asymétriques vues dans les simulations locales.

VII.1.3 *Transport à grande échelle*

Les effets MHD non-idéaux permettent de découpler les transports de masse et de flux magnétique. Le cas résistif (ohmique) a reçu le plus d'intérêt pour sa simplicité [65], mais pour calculer le transport radial de flux magnétique sous l'effet des inductions Hall et ambipolaire, nous devons nécessairement connaître la structure verticale de l'écoulement [180]. Dans un modèle global de disque stratifié en densité, nous pouvons naturellement capturer la stratification en intensité des effets MHD non-idéaux (voir Section 1.4.3). À l'heure de rédaction de ce document, seuls Gressel et al. [134] ont calculé la distribution de fraction d'ionisation dans des simulations dynamiques globales, en tenant compte des densités de colonnes radiales pour les rayonnements stellaires ionisants. Leurs simulations incluent les diffusions ohmique et ambipolaire, mais pas l'induction Hall. Leurs résultats supportent le modèle d'accrétion stratifiée [124], où le plan médian serait découplé du champ magnétique, l'accrétion se ferait en surface, mais sous l'action d'un vent magnétisé laminaire.

L'influence des EMFs Hall et ambipolaire sur le transport de flux magnétique fait l'objet de l'étude de Bai & Stone [20], dans laquelle les nombres d'Elsasser ont été prescrits à l'intérieur du disque. Leurs résultats sug-

Cet article de Bai & Stone est paru peu après soumission de nos résultats pour publication.

gèrent que l'accrétion de masse se fait dans le plan médian ou en surface du disque, selon que le flux magnétique net est parallèle ($B \cdot \Omega > 0$) ou anti-parallèle ($B \cdot \Omega < 0$) au vecteur rotation. La différence est attribuée à l'induction Hall, qui agit dans le plan du disque et transporte radialement le flux magnétique vers l'intérieur ou vers l'extérieur. Ces deux configurations d'accrétion ont déjà été observées dans des simulations globales en MHD idéale, indépendamment de la polarité du champ magnétique et de la stabilité MRI du plan médian [323, 359]. Pour décrire les transports de flux magnétique et de moment cinétique dans le plan poloidal, il est maintenant nécessaire de réaliser des simulations globales incluant les trois effets MHD non-idéaux, avec une fraction d'ionisation calculée dynamiquement et des nombres d'Elsasser réalistes pour chaque EMF non-idéale.

VII.2 CONSTRUCTION DU MODÈLE

Dans cette partie, j'utiliserai simultanément les coordonnées cylindriques (r, φ, z) par rapport au plan équatorial, et les coordonnées sphériques (R, θ, φ) avec θ l'angle polaire. À la différence de la [Partie ii](#), la hauteur d'échelle hydrostatique sera notée $h := c_s/\Omega$.

VII.2.1 Difficultés du modèle isotherme

La majorité des simulations globales de disques stratifiés ne résolvent pas les transferts thermiques et radiatifs. La distribution de température est prescrite de manière ad-hoc, guidée par les observations de l'épaisseur des disques ou par des modèles thermo-chimiques stationnaires [42]. La prescription $T(r) \propto r^m$ est la plus courantes : la température décroît avec le rayon cylindrique, et une équation d'état localement isotherme $P = \rho c_s^2(r)$ est imposée. La prescription localement isotherme est justifiée dans le coeur du disque par les études de transfert radiatif [108]. En choisissant une décroissance en $T \propto 1/r$, le rapport des vitesses du son et vitesse Képlérienne c_s/v_K est constant dans le plan médian, donc l'échelle de hauteur hydrostatique $h \propto r$. Ce choix est courant [115, 37, 327, 134], car le disque adopte alors une symétrie sphérique : pour une extension angulaire $\Delta\theta$ fixée, le rapport $(h/r)/\Delta\theta$ est le même pour tous les rayons.

J'indique ci-dessous deux difficultés spécifiquement liées à ce type de prescription thermique. La première est une contrainte en temps due au critère CFL, la seconde est un problème de stabilité hydrodynamique.

VII.2.1.1 Contraintes en temps

La condition d'équilibre hydrostatique dans la direction verticale donne le profil de densité du gaz connaissant la distribution de température. Pour une température constante verticalement, la densité doit décroître exponentiellement vite avec l'altitude par rapport au plan médian ; en conséquence, la vitesse d'Alfvén $v_A \equiv B/\sqrt{\rho}$ croît exponentiellement vite. Il

n'est pas possible de résoudre simultanément, et en un temps de calcul raisonnable, la dynamique d'un disque hydrostatique et celle des ondes d'Alfvén au delà de quelques échelles de hauteur $h \equiv c_s/\Omega$. Il est usuel de restreindre l'extension verticale du domaine de calcul à quelques échelles h , mais les vents stationnaires obtenus dans ces conditions dépendent sensiblement de la hauteur choisie, indiquant un problème de convergence [113, 194]. Tant que ces vents ne passent pas tous les points critiques, et en particulier le point magnéto-sonique rapide, leurs propriétés seront affectées par les conditions aux limites verticales du domaine [237, 285].

La surface magnéto-sonique rapide est capturée dans des simulations globales suffisamment étendues ; voir par exemple [319, 359].

Des méthodes plus ou moins sophistiquées ont été employées pour corriger ce problème. Le remède le plus simple consiste à augmenter artificiellement la densité pour maintenir une vitesse d'Alfvén suffisamment faible dans le domaine de calcul. Cette méthode a plusieurs inconvénients. Premièrement, le risque de surcharger le vent et réduire son accélération magnétique. Deuxièmement, dans un écoulement isotherme où la température est fixée par avance, l'augmentation de densité s'accompagne d'une augmentation proportionnelle de pression. Cette pression peut écraser le disque et empêcher le lancement du vent, ou bien affecter l'inclinaison des lignes de champ dans une géométrie globale. Dans les deux cas, l'efficacité d'éjection est influencée d'une manière difficile à quantifier. Une alternative développée par Miller & Stone [233] consiste à directement modifier l'équation d'induction afin d'inclure une vitesse limite, semblable à une formulation relativiste, et empêchant à nouveau les vitesses de devenir trop grandes dans l'atmosphère du disque. J'ai choisi de ne pas suivre cette démarche en raison de sa complexité de mise en oeuvre, et parce que notre équation d'induction contient déjà trois effets non-idéaux.

VII.2.1.2 Stabilité hydrodynamique

La prescription localement isotherme $T \propto r^m$ provoque d'autres effets indésirables en géométrie globale. Pour cerner l'origine du problème, nous pouvons partir de l'équation d'Euler dans un champ de gravité $\Phi(R)$:

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} - \nabla \Phi. \quad (\text{VII.1})$$

Cherchons un champ de vitesse stationnaire ($\partial_t \mathbf{v} = 0$) et purement toroïdal, c'est à dire $\mathbf{v} = \Omega(r, z) \mathbf{e}_z \times r \mathbf{e}_r$ en coordonnées cylindriques :

$$-\Omega^2 r \mathbf{e}_r = -\frac{\nabla P}{\rho} - \nabla \Phi; \quad (\text{VII.2})$$

appliquons un opérateur rotationnel et projetons sur la direction \mathbf{e}_φ :

$$r \partial_z \Omega^2 = \left(\nabla \times \left[\frac{\nabla P}{\rho} \right] \right) \cdot \mathbf{e}_\varphi = \left[\frac{\nabla P \times \nabla \rho}{\rho^2} \right] \cdot \mathbf{e}_\varphi. \quad (\text{VII.3})$$

Cette égalité montre que le profil vertical de vitesse angulaire dépend de la thermodynamique du fluide. Pour un fluide barotrope $\nabla P \propto \nabla \rho$, la vitesse angulaire est constante sur des cylindres. Ce serait le cas d'un disque

globalement isotherme, si $P = \rho c_s^2$ avec une vitesse du son c_s constante. Dans le cas où $T \propto 1/R$, les gradients de pression et densité sont reliés par $\nabla P = c_s^2 \nabla \rho + \rho \nabla c_s^2$, et (VII.3) devient

$$r \partial_z \Omega^2 = (\nabla c_s^2 \times \nabla \log \rho) \cdot \mathbf{e}_\varphi = -(\partial_r c_s^2) \cdot (\partial_z \log \rho). \quad (\text{VII.4})$$

Le profil vertical de vitesse angulaire influence la stabilité hydrodynamique de l'écoulement. Le calcul de stabilité linéaire est attribué à Goldreich & Schubert [130] et Fricke [112] dans le contexte des étoiles en rotation différentielle, et l'application aux disques d'accrétion est présenté par Urpin & Brandenburg [338], Nelson et al. [246]. Le critère de stabilité dépend de la distribution de moment cinétique spécifique $j := \Omega r^2$, et peut s'exprimer comme :

$$\frac{\partial j^2}{\partial r} - \frac{k_r}{k_z} \frac{\partial j^2}{\partial z} > 0 \quad (\text{VII.5})$$

pour une perturbation se propageant suivant le vecteur d'onde (k_r, k_z) dans le plan poloïdal. Le premier terme correspond au critère usuel de Rayleigh $\partial_r j > 0$ [279]. Le second terme fait intervenir le profil vertical de moment cinétique spécifique. Si $\partial_z j$ est suffisamment grand, un élément de fluide pourrait être déplacé suivant un angle proche de la verticale, et diminuer son moment cinétique spécifique tout en augmentant son rayon. L'équation (VII.4) donne $\partial_z j^2 < 0$ dans le cas où $T \propto 1/r$: le second terme est déstabilisant pour les perturbations ayant un rapport k_r/k_z suffisamment grand, comme illustré sur la Figure VII.1 droite.

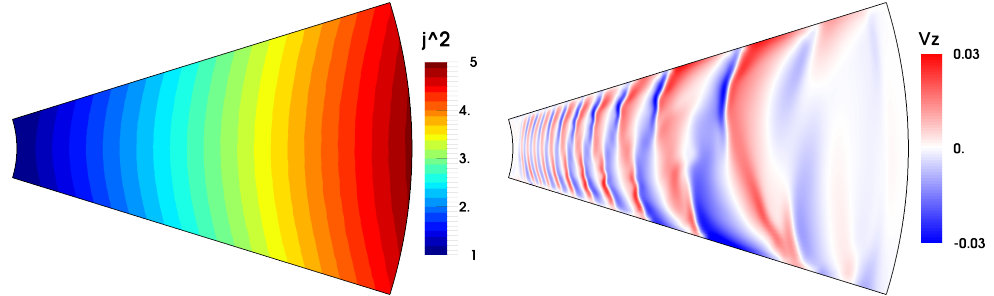


FIGURE VII.1. – Instabilité de cisaillement vertical dans un disque localement isotherme; à gauche : moment cinétique spécifique $j^2 \equiv \Omega^2 r^4$; à droite : vitesse verticale v_z dans la phase saturée de l'instabilité.

Cette instabilité survient dans la limite où les transferts thermiques sont rapides en comparaison aux transports de moment cinétique. Ainsi l'instabilité de cisaillement vertical (VSI) est particulièrement vigoureuse dans un disque localement isotherme, mais elle n'est pas auto-entretenu dans un écoulement adiabatique où des ondes internes (de flottabilité) assurent que l'écoulement reste stablement stratifié. Nelson et al. [246] ont montré que l'intensité de la VSI peut être modulée d'après le temps caractéristique d'amortissement thermique $\Omega \tau$ d'un élément de fluide. Les régimes isotherme et adiabatique se retrouvent dans les limites $\Omega \tau \rightarrow 0$ et $\Omega \tau \rightarrow \infty$;

notons ici la distinction entre l'équation d'état servant à définir instantanément la pression du fluide, et l'amortissement thermique affectant l'évolution de la température. Le calcul analytique de Lin & Youdin [209] permet d'estimer le seuil d'amortissement de la VSI à $\Omega\tau \gtrsim 1/8$ dans un fluide d'indice adiabatique $\gamma = 7/5$, approprié aux gaz diatomiques froids. En ajustant le produit $\Omega\tau \geq 1/10$, la distribution d'entropie parvient effectivement à se réorganiser pour s'opposer aux causes de l'instabilité, de telle sorte que la VSI sature à un niveau numériquement imperceptible.

La VSI est susceptible d'affecter de larges régions des disques protoplanétaires [209], pouvant entretenir un couple hydrodynamique $\alpha \sim 10^{-4}$ [322]. Cependant, nous la considérons comme indésirable pour étudier les processus de transport spécifiques aux effets MHD non-idéaux. Je mettrai en place des mesures pour nous rapprocher d'une configuration stable et localement isotherme, afin de faciliter les comparaisons à la littérature et de mieux identifier les mécanismes de transport dans le disque.

VII.2.2 *Solution adoptée*

Dans le but de maintenir les vitesses d'Alfvén suffisamment faibles dans l'atmosphère du disque, j'ai décidé de jouer premièrement sur la distribution spatiale de température $T \sim P/\rho$. En augmentant la température coronale, nous apportons un support supplémentaire contre la gravité et favorisons une atmosphère dense. En revanche, la température dans le disque doit rester suffisamment froide pour justifier l'application d'un modèle de disque fin. Je présente en [Section C.4](#) une classe d'équilibres hydrostatiques satisfaisant aux contraintes de temps liées au critère CFL, mais pas à la contrainte de stabilité vis-à-vis de la VSI.

La solution adoptée consiste en un équilibre à deux températures. Je définis une région 'disque' dans laquelle la température c_s/v_K est faible, et une région 'couronne' à plus haute altitude, où le rapport c_s/v_K est plus élevé que dans le disque. L'équilibre hydrostatique est réalisé en ajustant la densité de part et d'autre de la transition disque-couronne, afin d'assurer la continuité du gradient de pression $P \equiv \rho c_s^2$. Ce modèle se justifie théoriquement lorsque l'on considère le chauffage non-thermique de l'atmosphère optiquement mince aux rayonnements X et UV stellaires [353, 10]. En réalité, l'équilibre à deux températures n'est pas stable à proprement parler : lorsque la température coronale est suffisamment élevée, un vent thermique se développe depuis la surface du disque [3].

Ce vent est laminaire, il n'extrait pas de moment cinétique du disque et donc ne cause pas d'accrétion. Selon la température coronale, il faut au minimum 10^6 orbites internes pour dissiper la masse initiale du disque dans le vent. Je reporte au [Chapitre ix](#) la discussion sur l'évaporation thermique des disques ; en attendant, ces taux de perte de masse sont suffisamment faibles pour obtenir un système quasi-stationnaire. Ni la MRI ni la VSI ne parviennent à se développer dans le vent car les structures sont aussitôt

advectées. À défaut d'être un équilibre hydrostatique, cette configuration de vent est dynamiquement stable et laminaire.

La [Figure VII.2](#) illustre cette configuration en présence d'un champ magnétique vertical net, avec $\beta \equiv 2P/B_0^2 = 5 \times 10^3$ constant dans le plan médian, et un rapport de 100 entre les températures du disque et de la couronne à un rayon cylindrique donné. Sur la figure de gauche, l'écoulement moyen est laminaire tant pour le champ de vitesse que pour le champ magnétique. Sur la figure de droite, l'état instantané du disque révèle une turbulence développée dans le disque, entretenue par la MRI, et des structures filamentaires pour le champ magnétique dans la couronne.

Ces filaments partagent des points communs avec les "spicules" solaires [[36](#), [316](#), [321](#)] : le flux magnétique est concentré en tubes étroits, la pression magnétique y est assez élevée pour localement raréfier le gaz, et la vitesse de l'écoulement augmente de sorte que le flux de masse soit plus important à l'intérieur des filaments. L'origine de ces structures est incertaine. La connection du disque avec un vent fortement magnétisé pourrait être spontanément instable [[214](#), [63](#)] ; des vents striés ont été observés dans les simulations de Moll [[237](#)], Lesur et al. [[194](#)]. Cependant, ces filaments se forment précisément à la base de la couronne, et ils n'apparaissent plus lorsque la transition disque-couronne est lissée sur une échelle de hauteur h ou plus. Il est difficile de caractériser l'influence du fort gradient de pression à l'interface disque-couronne, parce que cette région est très dynamique et spatialement mal résolue. Une forte stratification verticale pourrait être responsable d'accumulations de flux magnétique en situation de turbulence MHD idéale [[176](#), [56](#)]. Je mets de côté la question de la pertinence de ce phénomène dans les disques protoplanétaires ; la transition en température est lissée sur environ une échelle de hauteur, dans l'espoir de correctement résoudre la physique de l'interface disque-couronne.

VII.3 CONFIGURATION STANDARD

Je vais maintenant décrire, de façon plus directe et exhaustive, la configuration numérique standard pour la majorité des simulations de disques stratifiés. Je détaille la géométrie du domaine de calcul, puis les conditions initiales et conditions aux limites pour l'ensemble des variables primitives.

VII.3.1 *Système d'unités*

Je prends le rayon interne du domaine de calcul r_0 comme unité de distance, et v_0 la vitesse képlérienne au bord radial interne comme unité de vitesse. L'unité de temps est la période orbitale $T_0 = 2\pi/\Omega_0 \equiv 2\pi r_0/v_0$, et l'unité de densité ρ_0 correspond à la densité dans le plan médian du disque au bord radial interne. L'intensité du champ magnétique est exprimée d'après la vitesse d'Alfvén équivalente $B/\sqrt{\rho_0}$.

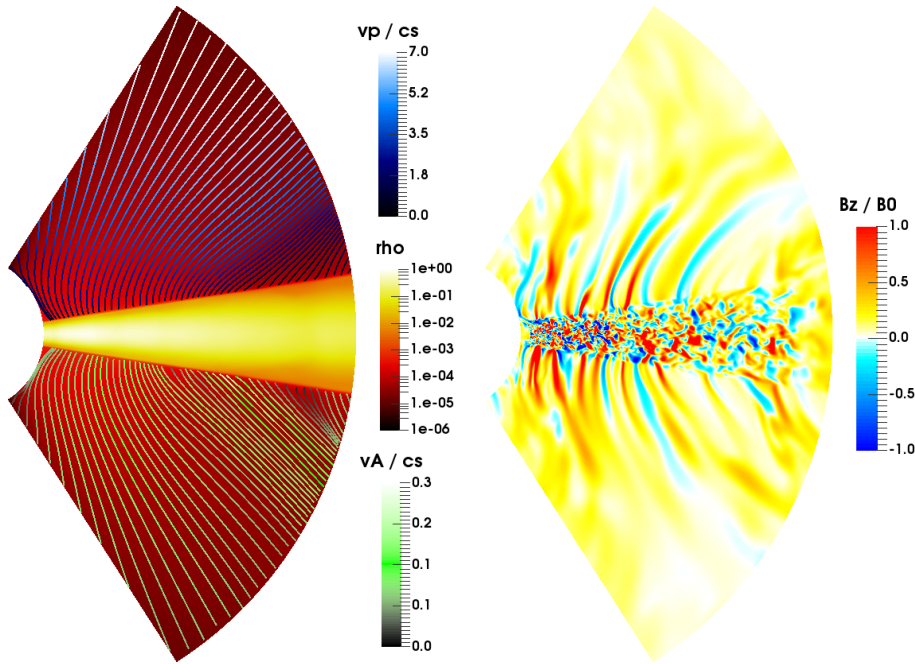


FIGURE VII.2. – Cartes dans le plan poloidal (r, θ) issues d’une simulation globale de disque stratifié en MHD idéale 3D. À gauche : distributions moyennées azimuthalement et temporellement sur $10T_0$ de la densité ρ (carte de couleur), du champ de vitesse poloidal v_p/c_s (lignes de courant bleues, hémisphère supérieur) et du champ magnétique poloidal v_{Ap}/c_s (lignes de courant vertes, hémisphère inférieur). À droite : coupe poloidale instantanée du champ magnétique vertical B_z/B_0 dans la même simulation et dans le même intervalle de temps.

VII.3.2 Géométrie et maillage

Pour étudier le transport de flux magnétique et l’interaction disque-jet, nous aurons intérêt à utiliser un domaine de calcul avec une extension polaire aussi grande que possible. Avec notre prescription thermique, nous pourrions envisager d’étendre la couronne chaude jusqu’aux pôles en $\theta = \{0, \pi\}$. En pratique, l’équilibre hydrostatique est instable : un vent thermique se développe depuis la surface du disque, et ce vent se propage préférentiellement vers les rayons croissants (e.g., Clarke & Alexander [77] & Figure VII.2 gauche). En conséquence, les régions proches de l’axe ne sont pas alimentées par le vent du disque. Un écoulement radial se développe proche de l’axe, pouvant être convergent ou divergent selon les conditions aux limites imposées au bord radial interne. Cet écoulement est contrôlé par nos conditions aux limites, il est découplé du vent de disque, et influence ce dernier en produisant un fort cisaillement $\partial_\theta v_R$. Pour ces raisons, il est finalement avantageux d’exclure les régions polaires.

Le domaine de calcul est délimité en coordonnées sphériques par les intervalles $\Delta R \times \Delta\theta \times \Delta\phi$. L’intervalle radial est $\Delta R = [1, 10]$. Je fixe le

Analogie aux “backflows” de Krasnopolsky et al. [181].

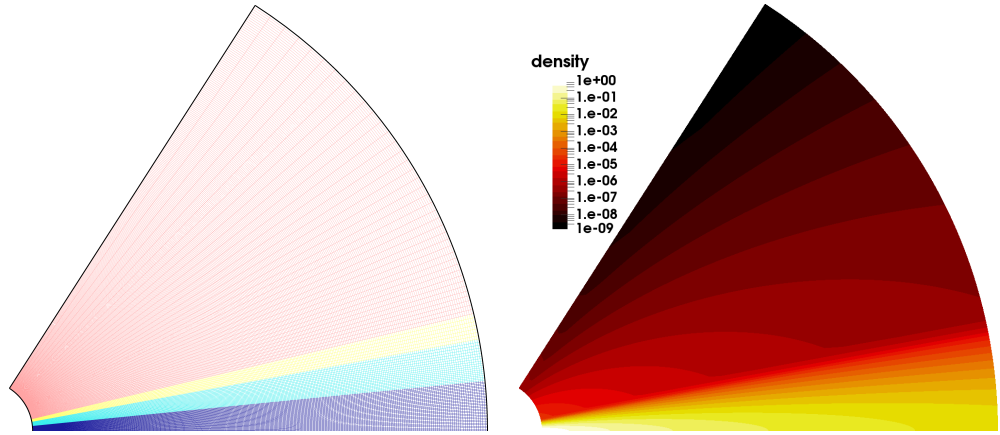


FIGURE VII.3. – Hémisphère supérieur du domaine de calcul standard ; à gauche : maillage du domaine, distinguant le disque profond (bleu), la surface du disque (cyan), la transition disque-couronne (jaune) et la couronne (rouge) ; à droite : distribution de densité initiale.

rapport d'aspect $c_s/v_K \equiv h/r = 5\%$ constant dans le disque ; de cette façon, le nombre d'échelles hydrostatiques $(h/r) / \Delta\theta$ est indépendant du rayon. L'ouverture angulaire du domaine est fixée à $\Delta\theta = [\pi/2 \pm \theta_0]$, avec $\theta_0 = 20(h/r) \approx \pi/3$. Comme illustré sur la Figure VII.3, l'intervalle angulaire est séparé en quatre régions. L'intervalle $\theta \in [\pi/2 \pm 2(h/r)]$ correspondant au disque profond est maillé uniformément par 64 cellules (région bleue). Cela correspond à 16 cellules par échelle de hauteur, à peine suffisant pour bien capturer la turbulence MRI en MHD idéale [151]. Le reste du domaine (cyan + jaune + rouge) est maillé par 64 cellules dans chaque hémisphère, progressivement étirées dans la direction angulaire. L'intervalle radial est maillé logarithmiquement par 512 cellules, i.e. l'incrément $\delta R \propto R$ préserve la géométrie des cellules dans le plan (R, φ) . Pour les simulations 3D, l'extension azimuthale vaut $\pi/2$ ou 2π selon les simulations, maillée uniformément par 256 ou 1024 cellules respectivement.

VII.3.3 Conditions initiales

L'équilibre hydrostatique initial est construit suivant la démarche détaillée en Section C.3. J'impose un profil radial de densité surfacique $\Sigma := \int \rho dz \propto 1/r$, moins raide que le profil en $r^{-3/2}$ déduit de notre système solaire [153], mais compatible avec de plus nombreuses observations de disques protoplanétaires [84, 351]. Étant donné que $c_s/v_K \equiv h/r = 5\%$ est constant dans le disque, le profil radial de densité dans le plan médian doit être de la forme $\rho(r, z=0) = \rho_0(r/r_0)^{-2}$. La méthode des caractéristiques permet de propager la solution dans le plan poloïdal :

$$\rho(R, r) = \rho_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-2} \exp \left[\frac{1}{c_s^2(r)} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \right]. \quad (\text{VII.6})$$

Je fixe la transition disque-couronne à l'altitude $z = H$ telle que $\rho(r, H)/\rho(r, z = 0) = 10^{-3}$. L'angle de transition satisfait donc la relation $\sin(\theta_i) = 1 + \log(10^{-3})(h/r)^2$, soit $H/h \approx 3.72$. Au delà de cette altitude, la vitesse du son isotherme $c_s \equiv \sqrt{P/\rho}$ est accrue d'un facteur k par rapport à sa valeur dans le disque. Le rapport k^2 entre les températures du disque et de la couronne est le même à tous les rayons. La transition disque-couronne est lissée sur l'intervalle $\sin(\theta) \in [\sin(\theta_i) - 0.2(h/r), \sin(\theta_i)]$:

$$c_s(r, \theta) = c_{s, \text{disque}}(r) \times \left[1 + (k - 1) \frac{\sin(\theta_i) - \sin(\theta)}{0.2(h/r)} \right]. \quad (\text{VII.7})$$

Le gaz atteint donc sa température maximale à une altitude $z/h \approx 4.68$. La transition se fait sur le domaine jaune de la [Figure VII.3](#) gauche. Dans la couronne, la distribution de densité correspond à [\(VII.6\)](#), mais la contrainte d'égalité des pressions isothermes $P \equiv \rho c_s^2$ impose de diminuer la densité à l'interface disque-couronne. Il suffit de remplacer la densité

$$\rho_0 \mapsto \rho_{\text{disque}}(R, \theta_i) \left[c_{s, \text{disque}}(R, \theta_i) / c_{s, \text{couronne}}(R, \theta) \right]^2, \quad (\text{VII.8})$$

afin de prolonger les caractéristiques depuis la surface du disque. Cette solution correspond à un équilibre hydrostatique isotherme. Je noterai \mathcal{D} le sous-domaine $\{(R, \theta, \varphi) \mid \sin(\theta) \geq \sin(\theta_i)\}$ restreint au disque, et \mathcal{C}^\pm les régions coronales supérieure et inférieure.

Le champ de vitesse azimuthale associé à cet équilibre isotherme est

$$v_\varphi^2 = \frac{1}{R} - 3c_s^2, \quad (\text{VII.9})$$

aussi bien dans le disque que dans la couronne. Comme la vitesse du son c_s varie verticalement entre le disque et la couronne, la vitesse azimuthale v_φ est cisailée verticalement à l'interface. J'ai vérifié que cette couche de cisaillement est stable en configuration hydrodynamique ; en particulier, je n'ai pas observé le développement de la VSI (cf. [Section VII.2.1.2](#)). Un bruit blanc est ajouté aux trois composantes du champ de vitesse, afin de rapidement déclencher la MRI / HSI et d'atteindre un régime non-linéaire. L'amplitude des perturbations en vitesse est uniformément aléatoire, atteignant jusqu'à 1% de la vitesse du son locale.

Le champ magnétique initial est vertical, et son amplitude décroît radialement comme $r^{-3/2}$ afin de maintenir un $\beta \equiv 2P/B^2$ constant dans le plan médian du disque. L'initialisation se fait par l'intermédiaire du potentiel vecteur $A = 2B_0 (r/r_0)^{-1/2} e_\varphi$, tel que $B \equiv \nabla \times A = B_0(r) e_z$. Le gradient de pression magnétique $\partial_r B_z^2$ résultant n'est pas compensé par les champs hydrodynamiques : la condition initiale ne correspond pas rigoureusement à un équilibre MHD. Cependant, la déviation à l'équilibre intervient à l'ordre $1/\beta \ll 1$ dans le disque, et l'inclinaison des lignes de champ dans la couronne obéit en grande partie au vent thermique rapide.

VII.3.4 Conditions aux limites

La définition des conditions aux bords radiaux et polaires fut la principale difficulté dans l'élaboration d'un modèle global de disque stratifié. Dans un premier temps, ces conditions ne doivent pas causer un crash quasi-instantané des simulations, et assurer que le disque reste intègre sur plusieurs dizaines d'orbites internes. Dans un second temps, les conditions aux bords doivent être ajustées pour ne pas provoquer d'écoulements à grande échelle dans le domaine de calcul. Quand ces deux conditions sont satisfaites, nous pouvons tenter de minimiser l'influence à long terme des bords sur le domaine actif, en évitant par exemple les réflexions d'ondes. Dans ce but, j'ai développé des conditions aux limites de plus en plus sophistiquées, au point de ne plus pouvoir intuitiver la réponse des bords à la dynamique dans le domaine actif. Finalement, les conditions aux bords adoptées sont relativement simples mais suffisantes ; elles sont loin d'être parfaites, mais leurs défauts peuvent être facilement identifiés.

Les simulations 3D sont périodiques dans la direction azimuthale. Afin d'isoler les angles à l'intersection du bord radial interne et des bords polaires, je définis le rayon $r_c := (1 + \sin(\theta_0))r_0/2$, où $\theta_0 \equiv 20(h/r)$ est l'extension polaire du domaine de calcul dans un hémisphère. Les conditions aux limites radiales et polaires sont les suivantes :

- $\partial_R \rho = 0$ aux bords radiaux, $\partial_\theta \rho = 0$ aux bords polaires, avec un seuil $\rho/\rho_0 \geq 10^{-6}$ au bord radial interne ;
- $P = \rho c_s^2$ la pression isotherme déduite de la densité locale à chaque bord, ce qui revient à imposer la température d'équilibre ;
- $\partial_R v_R = 0$ aux bords radiaux, $\partial_\theta v_R = 0$ aux bords polaires, avec un seuil $v_R/c_s \geq 1$ sortant au bord radial externe ;
- $\partial_R v_\theta = 0$ aux bords radiaux, $\partial_\theta v_\theta = 0$ aux bords polaires, avec un seuil $|v_\theta|/c_s \geq 1$ sortant aux bords polaires ;
- $\partial_R v_\varphi = 0$ au bord radial externe, $\partial_\theta v_\varphi = 0$ aux bords polaires ; au bord radial interne, v_φ est fixé à sa distribution initiale (VII.9) dans le disque, et la vitesse angulaire $\partial_R(v_\varphi/R) = 0$ sur le reste du bord.
- $\partial_\theta B_R = 0$ aux bords polaires si $r < r_c$, $B_R = 0$ sur le reste du bord ;
- $B_\theta = 0$ au bord radial interne, $\partial_R B_\theta = 0$ au bord radial externe ;
- $\partial_R B_\varphi = 0$ au bord radiaux si $r > r_c$, $B_\varphi = 0$ sinon ; $\partial_\theta B_\varphi = 0$ aux bords polaires si $r > r_c$, et $B_\varphi = 0$ sinon.

Les régions $r < r_c$ proches des angles sont les plus sensibles du domaine de calcul ; leur discrimination dans les conditions aux limites semble aider à stabiliser le code, sans impacter le reste du domaine. Aux bords polaires et au bord radial externe, je force le fluide à sortir avec une vitesse supérieure ou égale à la vitesse du son locale. Cette mesure est sévère, elle n'est pas systématiquement nécessaire, mais elle rend notre configuration numérique significativement plus robuste en général. Imposer simplement une vitesse sortante est insuffisant : si de la matière parvient tout de même à entrer dans le domaine de calcul, il s'ensuit une forte détente du fluide dans les cellules fantômes, la magnétisation devient excessivement élevée

et peut provoquer un crash du solveur. La [Figure VII.2](#) gauche montre que la vitesse poloïdale du vent thermique peut facilement dépasser la vitesse du son locale ; nous devrions donc pouvoir remarquer si l'écoulement sortant est forcé ou non à proximité des bords.

VII.3.5 Précautions supplémentaires

VII.3.5.1 Zones tampons

J'emploie à nouveau des zones tampons pour adoucir la transition entre le domaine actif et les bords radiaux. Le tampon interne s'étend sur $\{(R, \theta) \mid R < 1.05r_0\}$, et le tampon externe couvre le sous-domaine $\{(R, \theta) \mid R > 9.5r_0\} \cap \mathcal{D}$ restreint au disque. Dans les zones tampons, un champ V est relaxé vers la distribution prescrite V_0 suivant

$$\partial_t V = -f \times m \times [V(t) - V_0], \quad (\text{VII.10})$$

où f est la fréquence caractéristique définie par

$$f = 5 \times (\Omega_K + c_s/w_b), \quad (\text{VII.11})$$

avec $\Omega_K \equiv v_K/R$ la pulsation képlérienne, w_b la largeur radiale du tampon considéré, et $m(R)$ une modulation linéaire valant 1 au bord de la première cellule fantôme et 0 au bord du tampon du côté du domaine actif. Seules les trois composantes du champ de vitesse sont affectées dans les zones tampons, d'une façon compatible avec les conditions aux limites :

- v_R est amorti vers zéro aux deux bords radiaux ;
- v_θ est relaxé vers une vitesse angulaire v_θ/R constante, celle-ci étant échantillonnée au bord actif de chaque tampon ;
- v_φ est relaxé vers la distribution de vitesse initiale dans le disque, et vers une vitesse angulaire v_φ/R constante dans la région coronale du tampon interne, échantillonnée au bord actif à nouveau.

VII.3.5.2 Relaxation thermique

L'équilibre explicité précédemment est construit à partir d'une équation d'état localement isotherme $P = \rho c_s^2$. Comme discuté en [Section VII.2.1.2](#), le disque localement isotherme est sujet à la VSI, mais le niveau de saturation de la VSI peut être modéré en autorisant la distribution d'entropie à se réorganiser. En pratique, j'emploie une équation d'état polytropique $P \propto \rho^\gamma$, avec l'indice adiabatique $\gamma = 7/5$. À chaque pas de temps, la température P/ρ est contrôlée dans le domaine de calcul entier grâce à un terme source en pression :

$$\partial_t p = -\chi \Omega (p - \rho c_0^2), \quad (\text{VII.12})$$

où c_0 représente la distribution cible pour la vitesse du son. Le coefficient $\chi = 10$ est suffisamment grand pour maintenir la distribution de température initiale, tout en permettant une redistribution d'entropie [246].

VII.3.5.3 Divers

À la différence de nos simulations non-stratifiées, la masse et le flux magnétique total dans le domaine de calcul ne sont pas maintenus constants au cours du temps. Comme nous ne cherchons pas absolument à obtenir des écoulements stationnaires, cela nous aidera à étudier les processus de transport globaux avec un minimum de biais numériques.

Afin de soulager la contrainte CFL sur les pas de temps d'intégration, la densité est contrôlée dans le domaine actif pour assurer que $v_A \equiv B/\sqrt{\rho} \leq v_0$. De cette façon, le critère CFL n'est pas limité par la vitesse d'Alfvén, et cela permet à la densité de prendre des valeurs arbitrairement faibles dans les régions non-magnétisées. J'ai vérifié que cette procédure n'affecte que ponctuellement un volume restreint de la couronne ; pour $\beta = 5 \times 10^3$ dans le plan médian, la valeur maximale (en espace) du rapport v_A/v_0 est de l'ordre de 30% en moyenne temporelle.

L'accélération due au champ de gravité est imposée via son potentiel scalaire $\Phi(R) = -1/R$, garantissant la conservation de l'énergie totale du fluide à la précision machine. À l'inverse, l'assignation d'un champ vectoriel $-\nabla\Phi$ tend à produire des structures indésirables à petite échelle dans la distribution de pression coronale. Le flag `CT_EN_CORRECTION` de PLUTO est activé, permettant également de limiter l'apparition de structures parasites en pression dans les régions magnétisées de la couronne.

L'énergie totale n'est pas conservée par notre procédure de relaxation thermique, mais nous pouvons prédire cet apport.

VII.4 MODÈLE D'IONISATION

Avec un modèle global de disque stratifié, nous pouvons correctement décrire la géométrie des rayonnements ionisants. J'indique dans cette section comment est estimée la fraction d'ionisation et comment sont gérés les effets MHD non-idéaux dans le domaine de calcul ; la méthode est largement adaptée du modèle local stratifié de Lesur et al. [195].

VII.4.1 Fraction d'ionisation

Pour connaître l'intensité des effets MHD non-idéaux, la résolution dynamique d'un réseau chimique complet est inaccessible pour les simulations actuelles. Nous nous contenterons d'estimer la fraction d'électrons libres $x_e := n_e/n$ dans l'écoulement. Ce compromis est le plus simple et le moins coûteux en temps de calcul. Notons tout de même que des modèles chimiques réduits peuvent être appliqués avec succès [333, 167]. Les principales sources d'ionisation dans les disques protoplanétaires sont :

Voir [Section 1.4](#).

- A. les collisions thermiques proches de l'étoile ;
- B. les photons X et FUV stellaires en surface du disque ;
- C. les rayonnements cosmiques pénétrant en profondeur ;
- D. la radioactivité dans le disque entier.

Nous allons considérer séparément les régions les plus internes des disques ($r < 0.1\text{AU}$), susceptibles d'atteindre un régime de MHD idéale en raison

de l'ionisation thermique, et les régions externes ($r \geq 1\text{AU}$) où l'ionisation thermique devient rapidement négligeable dans le plan médian.

La radioactivité est la plus simplement modélisée : elle contribue à $\zeta_{\text{rad}} = 10^{-19}\text{s}^{-1}$ du taux d'ionisation local, indépendamment de la localisation dans le disque. À l'inverse, les rayonnements ionisants sont progressivement atténués en traversant le gaz ; les taux d'ionisation associés dépendent donc de la densité de colonne de gaz traversée.

Plusieurs problèmes surviennent vis-à-vis des densités de colonne. En premier lieu, les rayons cosmiques peuvent atteindre le disque depuis toutes les directions, avec une distribution angulaire mal contrainte [79]. Il est hors de propos de calculer l'influence de toutes les directions séparément, via Monte Carlo par exemple, dans une simulation dynamique. Nous devons trouver une astuce pour estimer l'ionisation due aux rayonnements cosmiques à partir d'un nombre limité de densités de colonnes. Sachant que la profondeur de pénétration des rayonnements cosmiques est de l'ordre de 10^2g.cm^{-2} , l'atmosphère du disque devrait leur être transparente, et l'atténuation devrait principalement se faire en surface du disque. Je choisis d'atténuer les rayonnements cosmiques suivant la densité de colonne polaire $\sigma_{\theta} := \int \rho R d\theta$, comme s'ils se propageaient le long des méridiens à rayon constant. Cette prescription devrait être compatible avec celle couramment adoptée en simulations locales stratifiées, où l'atténuation se fait suivant la densité de colonne verticale [103, 195].

En second lieu, les rayonnements stellaires se propagent radialement depuis l'étoile, donc ils devraient être atténués suivant la densité de colonne radiale $\sigma_R := \int \rho dR$. Cependant, avec un angle d'ouverture h/r constant, les rayonnements stellaires ne peuvent pas pénétrer dans le disque depuis son atmosphère. Un photon se propageant radialement depuis l'étoile resterait dans l'atmosphère optiquement mince, ou bien se trouverait directement dans le disque optiquement épais. Cela pose problème pour deux raisons. Premièrement, les disques protoplanétaires sont évasés, i.e. l'angle d'ouverture h/r augmente radialement, permettant à des rayons stellaires d'ioniser la surface du disque. Deuxièmement, avec notre prescription $\rho \sim R^{-2}$, la densité de colonne σ_R diverge lorsque la borne d'intégration inférieure tend vers zéro ; σ_R est donc dominée par les régions les plus internes du disque, hors du domaine de calcul. L'occultation du disque par les régions internes pourrait avoir un impact significatif sur la dynamique du disque [31], mais nous choisissons d'ignorer ce degré de complexité. L'atténuation des rayonnements stellaires est calculée suivant la densité de colonne polaire σ_{θ} , de façon à imiter un disque évasé [10].

Le taux d'ionisation dû aux rayons cosmiques est estimé d'après l'étude de Umebayashi & Nakano [335] :

$$\zeta_{\text{CR}} \equiv \left(e^{-\sigma_{\theta}^{+}/\sigma_0} + e^{-\sigma_{\theta}^{-}/\sigma_0} \right) \times 10^{-17}\text{s}^{-1}, \quad (\text{VII.13})$$

où σ_{θ}^{\pm} représente les densités de colonne intégrées depuis les pôles supérieur (exposant +) et inférieur (exposant -), et $\sigma_0 \equiv 96\text{g.cm}^{-2}$ est la profondeur de pénétration typique des rayons cosmiques. Le taux d'ioni-

À moins d'être diffusé depuis la couronne, ce que nous ne pourrions pas proprement décrire sans transfert radiatif.

Voir Padgett et al. [257], Bitsch et al. [42].

sation dû aux rayonnements X stellaires est estimé d'après l'expression (21) de Bai & Goodman [16] pour une luminosité $L_X \equiv 10^{30} \text{ ergs.s}^{-1}$:

$$\zeta_X \equiv \left(\frac{R}{1\text{AU}} \right)^{-2.2} \times \left[\zeta_1 \left(e^{-(N^+/N_1)^{0.5}} + e^{-(N^-/N_1)^{0.5}} \right) + \zeta_2 \left(e^{-(N^+/N_2)^{0.7}} + e^{-(N^-/N_2)^{0.7}} \right) \right], \quad (\text{VII.14})$$

avec les paramètres $\zeta_1 = 4.0 \times 10^{-11} \text{ s}^{-1}$, $\zeta_2 = 2.0 \times 10^{-14} \text{ s}^{-1}$, $N_1 = 3 \times 10^{21} \text{ cm}^{-2}$ et $N_2 = 10^{24} \text{ cm}^{-2}$. La densité surfacique $N^\pm \equiv (3/4)\sigma_\sigma^\pm/m_H$ correspond à l'écrantage par les atomes d'hydrogène, de masse m_H .

Le taux d'ionisation total est défini comme $\zeta \equiv \zeta_{\text{rad}} + \zeta_{\text{CR}} + \zeta_X$. La fraction d'ionisation s'obtient en compensant le taux d'ionisation par un taux de recombinaison. Ce dernier est estimé en l'absence de métaux et de grains de poussières [119]; le taux de recombinaison est donc sous-estimé, et la fraction d'ionisation sur-estimée [295, 355] :

$$x_e \equiv \sqrt{\frac{\zeta}{n_n \tau}} + x_{\text{FUV}}, \quad (\text{VII.15})$$

où $\tau \equiv 3 \times 10^{-6} \text{ T}^{-1/2} \text{ cm}^2.\text{s}^{-1}$ est un coefficient de recombinaison dépendant de la température locale T . Le terme x_{FUV} représente l'ionisation causée par les rayonnements FUV stellaires :

$$x_{\text{FUV}} \equiv 2 \times 10^5 \left[\exp \left\{ -(\sigma_\theta^+/\sigma_{\text{FUV}})^4 \right\} + \exp \left\{ -(\sigma_\theta^-/\sigma_{\text{FUV}})^4 \right\} \right], \quad (\text{VII.16})$$

avec $\sigma_{\text{FUV}} \equiv 3 \times 10^{-2} \text{ g.cm}^{-2}$. Ce terme n'est pas inclu en tant que taux d'ionisation ζ_{FUV} , car il est fait l'hypothèse que les photons FUV ionisent totalement le carbone et le soufre en surface du disque [265].

GRANDEUR	UNITÉ CODE	$r_0 \equiv 1\text{AU}$	$r_0 \equiv 10\text{AU}$
distance	r_0	1AU	10AU
temps	$\Omega_0^{-1} \equiv T_0/2\pi$	0.159 yr	5.03 yr
vitesse	$v_0 \equiv \Omega_0 r_0$	29.8 km.s ⁻¹	9.42 km.s ⁻¹
densité surfacique	Σ_0	500 g.cm ⁻²	50 g.cm ⁻²
densité volumique	$\rho_0 \equiv \frac{\Sigma_0}{\sqrt{2\pi}(h/r)r_0}$	$2.67 \times 10^{-10} \text{ g.cm}^{-3}$	$2.67 \times 10^{-12} \text{ g.cm}^{-3}$
masse	$m_0 \equiv \rho_0 r_0^3$	$4.49 \times 10^{-4} M_\odot$	$4.49 \times 10^{-3} M_\odot$
champ magnétique	$B_0 \equiv v_0 \sqrt{\rho_0}$	48.6 G	1.54 G

TABLE VII.1. – Correspondance entre nos unités code et les unités physiques usuelles pour un disque autour d'une étoile de masse solaire, avec un profil de densité surfacique $\Sigma(r) = 500 (r/1\text{AU})^{-1} \text{ g.cm}^{-2}$, de température $T(r) = 280 (r/1\text{AU})^{-1} \text{ K}$, et un rayon interne $r_0 \equiv 1\text{AU}$ ou $r_0 \equiv 10\text{AU}$.

Les expressions précédentes, donnant les taux et fraction d'ionisation en fonction de la densité de colonne de gaz, font intervenir des constantes dimensionnées. La profondeur de pénétration des rayonnements ionisants,

ou encore la température du gaz, interviennent explicitement avec des coefficients issus de la microphysique du gaz. Si nous voulons estimer la distribution de fraction d'ionisation dans un disque, nous ne pouvons pas garder un système entièrement adimensionné comme dans la [Partie ii](#). Je choisis de fixer la densité surfacique $\Sigma(1\text{AU}) = 500 \text{ g.cm}^{-2}$, ainsi que la température $T_0(1\text{AU}) = 280\text{K}$ dans le disque [351]. Le rayon interne des simulations est fixé à $r_0 \equiv 1\text{AU}$ ou bien à $r_0 \equiv 10\text{AU}$, de façon à couvrir l'extension typique $[1, 100]\text{AU}$. La correspondance entre les unités code et les unités physiques usuelles est explicitée dans la [Table VII.1](#).

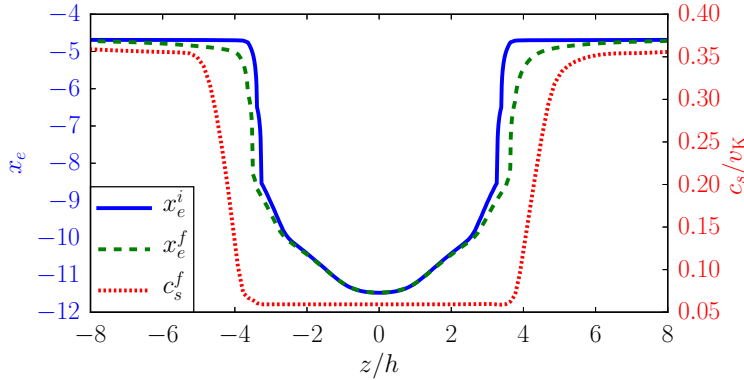


FIGURE VII.4. – Profils verticaux à un rayon $r = 5\text{AU}$: fraction d'ionisation initiale x_e^i (trait bleu), et finale x_e^f après 27 orbites locales (tirets verts), et vitesse du son c_s/v_K (pointillés rouges, axe de droite); le rapport imposé en vitesse du son couronne / disque vaut $k = 6$.

À $r = 5\text{AU}$, je calcule le profil vertical de fraction d'ionisation tracé sur la [Figure VII.4](#). Cette courbe est comparable à celles présentées sur la figure 1 de Lesur et al. [195] malgré les profils radiaux de température et de densité surfacique différents. Les accroissements en fraction d'ionisation et en température se produisent chacun à une altitude voisine de $H \approx 3.72h$, correspondant à la transition disque-couronne. Les densités de colonnes σ_{θ}^{\pm} sont susceptibles d'évoluer au cours d'une simulation. Typiquement, le lancement d'un vent thermique tend à écranter la surface du disque et à diminuer la fraction d'ionisation (voir [Figure VII.4](#)). Je choisis de calculer la fraction d'ionisation de manière dynamique, en intégrant les densités de colonnes toutes les $T_0/8$. Cette période est assez courte par rapport aux temps dynamiques du disque; à condition d'optimiser l'intégration des densités de colonnes pour les calculs parallèles, elle est assez longue pour ne pas impacter les performances du code.

VII.4.2 Effets MHD non-idéaux

L'intensité des EMFs non-idéales est déduite de la fraction d'ionisation locale [228, 91], à supposer l'absence de grains de poussières (voir Lesur et al. [195] & [Section I.3](#)); il nous reste deux précautions à prendre. Premiè-

rement, la fraction d'ionisation sature à $x_e \leq 2 \times 10^{-5}$ dans la couronne, due à la contribution χ_{FUV} ; cette valeur est suffisamment faible pour que les EMFs Hall et ambipolaire affectent la couronne entière. En réalité, notre modèle n'est pas approprié pour décrire les processus d'ionisation non-thermiques dans la couronne. Nous allons supposer que la couronne est parfaitement ionisée, c'est à dire que les EMFs non-idéales doivent s'annuler avec l'altitude. Je multiplie chaque diffusivité $\eta_{\text{O,H,A}}$ par un coefficient $\exp(-x_e/10^{-8})$, de sorte que les EMFs non-idéales s'annulent progressivement à la transition disque-couronne. Deuxièmement, pour réaliser des simulations dans un temps de calcul raisonnable, je choisis de limiter l'intensité des EMFs non-idéales. Je limite le rapport $\ell_{\text{H}}/h \leq 4$, ce qui n'affecte que le plan médian du disque dans les régions internes $r \leq 2.3r_0$. Je limite aussi les nombres de Reynolds magnétiques $\mathcal{R}_{\text{O,A}} \equiv \Omega h^2/\eta_{\text{O,A}} \geq 4$. Ce second limiteur n'affecte que la diffusion ambipolaire dans les couches supérieures du disque. Après avoir appliqué la première procédure liée à la fraction d'ionisation, cette seconde procédure n'impacte que les simulations à $\beta \leq 500$ sur l'intervalle $z/h \in [2.6, 3]$.

J'ai défini dans la [Section 1.3.4](#) des nombres adimensionnés pour caractériser l'intensité des EMFs non-idéales. Nous privilégions les nombres ne dépendant pas de l'intensité du champ magnétique, et représentons leur distribution sur les [Figure VII.5](#) et [Figure VII.6](#). Les profils verticaux sont comparables à ceux de Lesur et al. [195], et les profils radiaux à ceux de Simon et al. [310] dans la limite des gros grains de poussières.

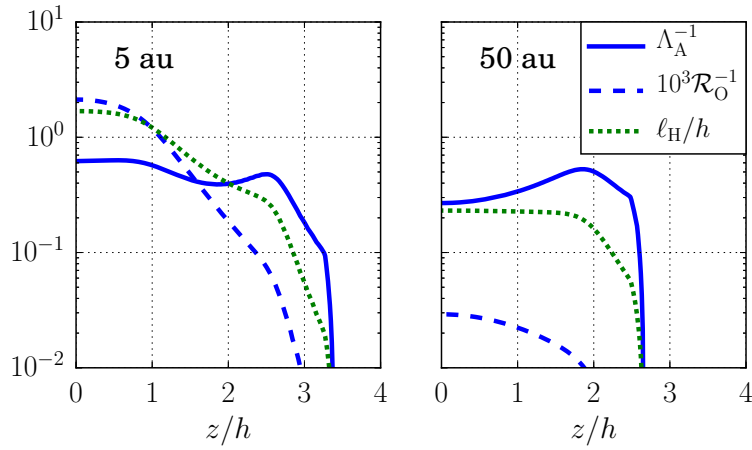


FIGURE VII.5. – Inverse du nombre d’Elsasser ambipolaire $\Lambda_A^{-1} \equiv \Omega\eta_A/v_A^2$ (trait plein bleu), du nombre de Reynolds ohmique $10^3\mathcal{R}_O^{-1} \equiv 10^3\eta_O/\Omega h^2$ (tirets bleus) et paramètre de Hall $\mathcal{L} \equiv \ell_H/h$ (pointillés verts) dans des coupes verticales à $r = 5\text{AU}$ (gauche) et à $r = 50\text{AU}$ (droite).

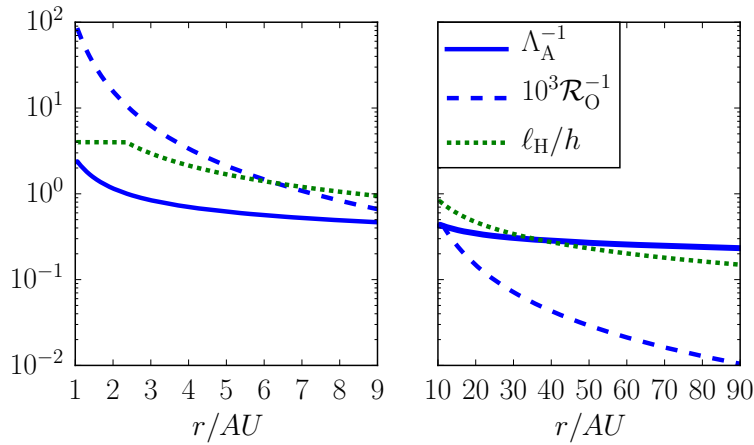


FIGURE VII.6. – Profils radiaux dans le plan médian des mêmes nombres adimensionnés que sur la Figure VII.5, pour une simulation dont le rayon interne est placé à $r_0 \equiv 1\text{AU}$ (gauche) et $r_0 \equiv 10\text{AU}$ (droite).

Résumé

Je présente les résultats de simulations globales de disques stratifiés en MHD non-idéale. Je choisis d'exclure les simulations qualifiables de tests, dans lesquelles j'ai tenté de reproduire les résultats présents dans la littérature. Dans cette phase de développement, les simulations en MHD idéale ont précédé celles en MHD non-idéale ; nous avons privilégié l'exploitation des simulations non-idéales pour cause de concurrence. Les trois effets MHD non-idéaux sont inclus simultanément pour couvrir séparément les intervalles 1AU – 10AU et 10AU – 100AU autour d'une étoile de masse solaire. Le plan de ce chapitre et son contenu sont largement extraits de la publication de Béthune et al. [41] : je décris la structure du disque, la dynamique du vent, leur interaction et l'organisation globale qui en résulte, puis les phénomènes d'auto-organisation au sein du disque.

Sommaire

1.	Diagnostiques	149
2.	Simulation de référence	149
2.1.	Structure laminaire	150
2.2.	Polarité magnétique et effet Hall	152
2.3.	Accrétion	152
3.	Couronne chaude	154
3.1.	Points critiques	156
3.2.	Dynamique	157
3.3.	Énergétique	158
4.	Configuration magnétique globale	161
4.1.	Circulation méridionale	162
4.2.	Configurations mixtes	165
4.3.	Brisure de symétrie	166
4.4.	Configurations unilatérales	167
4.5.	Espace des phases	171
5.	Écoulements zonaux	172
5.1.	Aperçu global	173
5.2.	Comparaisons 2D versus 3D	174
5.3.	Transport radial du flux magnétique	176
5.4.	Confinement magnétique	177
5.5.	Propriétés hydrodynamiques et saturation	181

NOM	$\Delta\varphi$	r_0/AU	T_{end}/T_0	$\beta/5$	k	$\Sigma(1\text{AU})$
R1 – P4	0	1	1000	10^4	6	500
R1 – P4 – C4	0	1	1000	10^4	4	500
R1 – P3	0	1	1000	10^3	6	500
R1 – P3 – H	0	1	1000	10^3	6	1000
R1 – P2	0	1	1000	10^2	6	500
R1 – M3	0	1	1000	-10^3	6	500
R10 – P3	0	10	1000	10^3	6	500
R10 – P2	0	10	1000	10^2	6	500
R10 – M3	0	10	1000	-10^3	6	500
R10 – M3 – C2	0	10	1000	-10^3	2	500
3D – R1 – P4	$\pi/2$	1	300	10^4	6	500
3D – R1 – P3	$\pi/2$	1	200	10^3	6	500
3D – R1 – M4	$\pi/2$	1	200	10^4	6	500
2π – R1 – P2	2π	1	200	10^2	6	500
3D – R10 – P3	$\pi/2$	10	200	10^3	6	500

TABLE VIII.1. – Paramètres des simulations stratifiées en MHD non-idéale : extension azimuthale du domaine, rayon correspondant au bord interne en unités astronomiques, temps d’intégration en orbites internes, magnétisation dans le plan médian, contraste couronne/disque en vitesses du son isothermes, et densité surfacique du disque à 1AU.

Les simulations discutées dans ce chapitre sont rassemblées dans la Table VIII.1, avec la même nomenclature que dans Béthune et al. [41] : ‘R1’ ou ‘R10’ pour les simulations à $r_0 \equiv 1\text{AU}$ ou $r_0 \equiv 10\text{AU}$, ‘P’ pour un champ magnétique net positif ($B_0 \cdot \Omega > 0$) ou ‘M’ pour un champ net négatif, suivi d’un chiffre correspondant à la magnétisation initiale du plan médian. Les runs ‘C2’ et ‘C4’ ont un contraste en vitesse du son réduit à 2 ou 4 entre le disque et la couronne, et le run ‘H’ a une densité surfacique accrue d’un facteur deux. Les trois effets MHD non-idéaux sont inclus avec les fractions d’ionisation calculées dynamiquement. Je ne présenterai pas les simulations n’incluant que une ou deux EMFs non-idéales.

En fin de phase de développement, j’ai tenté de reproduire la configuration numérique de Gressel et al. [134], sans effet Hall, et obtenu qualitativement les mêmes résultats. J’ai aussi produit plusieurs simulations 2D axisymétriques avec l’induction Hall comme seul effet non-idéal, la longueur de Hall étant calculée d’après la fraction ou bien prescrite de manière ad-hoc. Ces simulations en MHD Hall n’ont pas convergé vers un état stationnaire : la phase linéaire de la HSI se prolonge jusqu’à faire sortir le flux magnétique hors du domaine de calcul, après quoi le disque est stabilisé. Des simulations 3D à haute résolution et domaine de calcul élargi

seraient nécessaires pour conclure quant à ce comportement en MHD Hall. J'ai préféré me concentrer sur la situation plus pertinente où les trois effets non-idéaux sont simultanément présents. Une étude globale en MHD Hall + ambipolaire fut publiée par Bai & Stone [20] avant la rédaction de cette thèse, mais après production et analyse de nos simulations.

Le contenu de ce chapitre est largement extrait de l'article de Béthune et al. [41]. Je choisis de ne pas simplement traduire cet article ; je tenterai de le présenter sous un angle différent, moins détaillé mais plus synthétique.

VIII.1 DIAGNOSTIQUES

Je définis plusieurs diagnostics utiles dans ce chapitre. Les champs moyennés seront notés entre crochets comme précédemment : la moyenne verticale sur l'épaisseur $z \in [-H, +H]$ de la vitesse radiale est $\langle v_r \rangle_z$, la moyenne pondérée par la masse est $\langle v_r \rangle_\rho$; les indices seront omis s'ils sont évidents d'après le contexte. La moyenne temporelle est notée par une barre. Le tenseur de stress hydrodynamique de Reynolds est défini comme $\mathcal{R} := \rho \tilde{v}_r \otimes \tilde{v}_\varphi$, avec $\tilde{v} := v - \langle v \rangle_\rho$ les fluctuations en vitesse dans le disque. Le tenseur de stress magnétique de Maxwell est défini comme $\mathcal{M} := -\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}$, et la somme des stress est notée $\mathcal{T} := \mathcal{R} + \mathcal{M}$. Les coefficients de transport adimensionnés sont définis par $\alpha^{\mathcal{T}} := \mathcal{T} / \langle P \rangle_{\varphi, z}$, normalisés par la pression moyenne sur la hauteur du disque au rayon considéré.

Voir [Chapitre iv](#).

Connaissant la distribution spatiale du stress total, nous pouvons estimer le flux de masse radial à partir des transports radiaux et verticaux de moment cinétique [27], dénotés respectivement τ_r et τ_z :

$$\begin{aligned} \Sigma \langle v_r \rangle_\rho &\simeq -\frac{1}{\partial_r [r \langle v_\varphi \rangle_{\varphi, z}]} \left(\frac{1}{r} \partial_r [2r^2 H(r) \langle \mathcal{T}_{r\varphi} \rangle_{\varphi, z}] - r \left[\langle \mathcal{T}_{z\varphi} \rangle_\varphi \right]_{-H}^{+H} \right) \\ &\equiv \tau_r + \tau_z, \end{aligned} \quad (\text{VIII.1})$$

avec $\Sigma \simeq 2H(r) \langle \rho \rangle_z$ la densité surfacique locale. Le terme τ_r représente l'accrétion due au flux radial de moment cinétique, tandis que l'accrétion τ_z est causée par l'extraction de moment cinétique en surface du disque.

Le taux de pertes de masse dans le vent est calculé par intégration du flux de masse sur la surface sphérique au rayon externe R_{out} du domaine, restreinte aux régions coronales de chaque hémisphère :

$$\dot{m}_w^\pm := \iint \rho v_R R_{\text{out}}^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi, \quad (\theta, \varphi) \in \mathcal{C}^\pm. \quad (\text{VIII.2})$$

VIII.2 SIMULATION DE RÉFÉRENCE

Je commence par présenter une simulation que je définis comme référence : le run 'R10 – M3 – C2'. J'insiste sur le fait que cette simulation n'est pas une référence au sens où ses propriétés seraient génériques à toutes les simulations ; j'indiquerai quelles propriétés sont génériques, et je reviendrai sur les différences qualitatives remarquables en [Section VIII.4](#).

VIII.2.1 *Structure laminaire*

La [Figure VIII.1](#) représente la structure globale de l'écoulement dans le run de référence 'R10 – M3 – C2'. Le champ magnétique initial est opposé au vecteur rotation $\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\Omega} < 0$, et le rapport de température entre le disque et la couronne vaut $k^2 = 4$. Les structures observables évoluent sur des temps caractéristiques de l'ordre de la centaine d'orbites locales. Après 200 orbites internes, le disque a accompli 6 révolutions au bord externe. En MHD idéale, ce délai serait suffisant pour développer une turbulence MRI dans le disque entier. Dans cette situation non-idéale, la taille caractéristique des structures magnétiques correspond à l'extension du disque, à la fois dans la direction verticale et radiale. En décomposant le champ magnétique comme une valeur moyenne plus fluctuations $\mathbf{B} \equiv \bar{\mathbf{B}} + \tilde{\mathbf{B}}$, nous pouvons séparer les composantes laminaires et turbulentes du stress magnétique $\langle \mathcal{M} \rangle = -\langle \bar{\mathbf{B}} \otimes \bar{\mathbf{B}} \rangle - \langle \tilde{\mathbf{B}} \otimes \tilde{\mathbf{B}} \rangle \equiv \langle \bar{\mathcal{M}} \rangle + \langle \tilde{\mathcal{M}} \rangle$. Je calcule les moyennes temporelles sur $30T_0$, approximativement une orbite externe, et je trouve que $\bar{\mathcal{M}} / \langle \mathcal{M} \rangle > 90\%$ dans toutes les simulations. Ces éléments indiquent que l'écoulement n'est pas turbulent à proprement parler. Les propriétés mentionnées ci-dessus restent vérifiées par nos simulations 3D en quart de disque (voir [Section VIII.5.2](#)) : l'écoulement moyenné azimuthalement est représentatif de l'état instantané du disque. Cela justifie l'emploi privilégié de simulations 2D, moins coûteuses en temps de calcul.

Pour quantifier le degré de turbulence, le nombre de Mach sonique associé aux fluctuations de vitesse verticale vaut $\mathfrak{M} \approx 5\%$ au coeur du disque ($z/h \leq 2$). Cette mesure est comparable à celle déduite de l'élargissement spectral de raies moléculaires observé par Flaherty et al. [[102](#)].

Dans les runs 'R1 – P3' et 'R1 – M3', le paramètre $\beta = 5 \times 10^3$ et le nombre d'Elsasser ambipolaire $\Lambda_A \approx 1$ dans le plan médian sont comparables aux valeurs de la simulation cylindrique non-stratifiée 'ZF7' présentée en [Annexe B](#). Cette dernière produit un écoulement turbulent, riche en structures non-axisymétriques (voir [Figure B.8](#)), compatible avec les simulations locales dans ce régime physique [[17](#), [19](#)]. Par contre, mes simulations stratifiées incluent l'EMF Hall, avec une résolution spatiale plus faible. Mettons de côté les effets de stratification au voisinage du plan médian. Les simulations globales de O'Keefe & Downes [[250](#)], Rodgers-Lee et al. [[289](#)] incluent bien les inductions Hall et ambipolaire, mais n'atteignent pas ce régime de diffusivité. Les simulations locales stratifiées de Lesur et al. [[195](#)], Bai [[15](#)] produisent un écoulement essentiellement laminaire, mais elles pourraient être biaisées par l'apparition d'un fort flux magnétique toroïdal. À défaut d'un schéma numérique moins diffusif pour l'induction Hall, nous ne pourrions pas définitivement affirmer lequel de l'effet Hall ou de la résolution numérique réduite maintient l'écoulement dans un régime quasi-laminaire et axisymétrique.

Avec un flux magnétique net négatif ($\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\Omega} < 0$) et suffisamment faible, l'effet Hall joue un rôle stabilisant dans la simulation de référence 'R10 – M3 – C2'. Le dernier panneau de la [Figure VIII.1](#) montre que le rapport

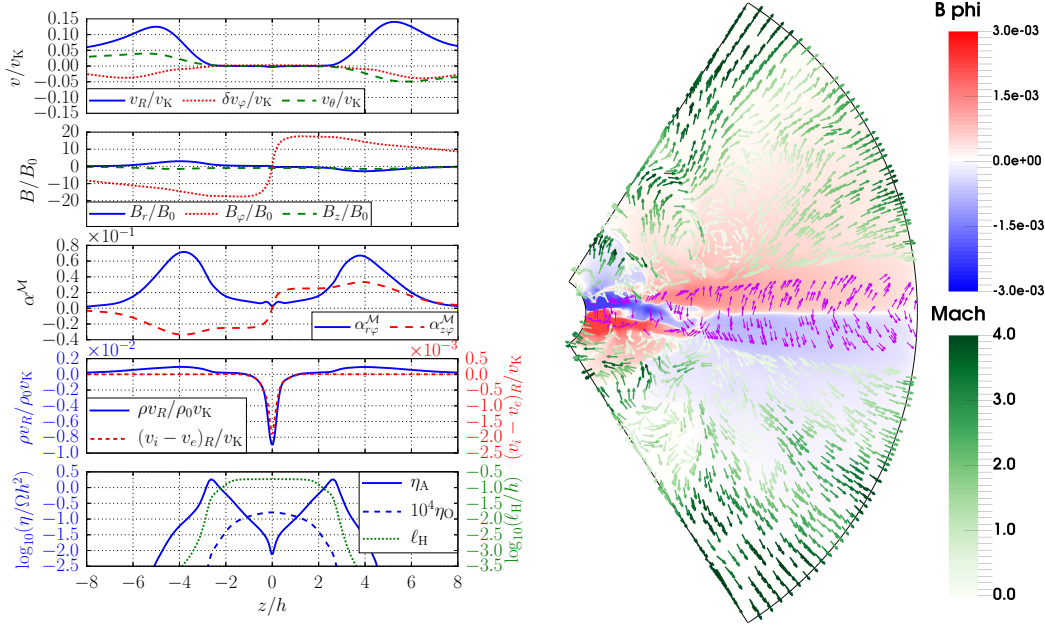


FIGURE VIII.1. – À gauche : profils verticaux dans le run R10 – M3 – C2, moyennés radialement entre $5r_0$ et $8r_0$ et temporellement entre $200T_0$ et $600T_0$; de haut en bas : fluctuations en vitesse, champ magnétique, stress magnétique radial et vertical, flux de masse et courants électriques, et nombres adimensionnés caractérisant les effets MHD non-idéaux. À droite : état instantané à $200T_0$: champ magnétique toroïdal B_φ (couleurs), vitesse poloïdale (flèches vertes) et flux de moment cinétique dû au couple magnétique $-B_\varphi \mathbf{B}$ (flèches mauves).

$\ell_H/h \approx 0.2$ dans les régions profondes $z/h < 2$. Nous pouvons déterminer a priori la stabilité de l'écoulement au voisinage du plan médian. Sur la [Figure VIII.2](#) sont tracés les profils verticaux des taux de croissance Hall-MRI calculés dans l'approximation WKB, pour des modes ayant une longueur d'onde verticale suffisamment courte devant la hauteur de stratification h . Les régions profondes $z/h < 2$ sont stables. Le même critère s'applique dans nos simulations entre 1AU et 10AU : si le champ magnétique net est négatif, un rapport $\ell_H/h \geq 1/5$ suffit à stabiliser la MRI pour $\beta = 5 \times 10^3$.

La stabilité MRI est régulièrement invoquée comme critère définissant une “zone-morte” (*dead-zone*), c'est à dire une région magnétiquement inactive. L'expression “magnétiquement inactive” est ambiguë, car si le transport turbulent y est très faible par définition ($\alpha < 10^{-4}$), un vent magnétisé émis en surface du disque peut exercer un couple magnétique laminaire jusqu'au plan médian. Notre simulation de référence est MRI-stable dans le plan médian, mais le couplage au champ magnétique reste suffisant pour extraire du moment cinétique du plan médian vers la surface (voir [Figure VIII.1](#) panneau 3). Cette situation est à distinguer des résultats de Gressel et al. [134] par exemple, où le couple dû au vent en surface ne parvient pas à se propager jusqu'au plan médian.

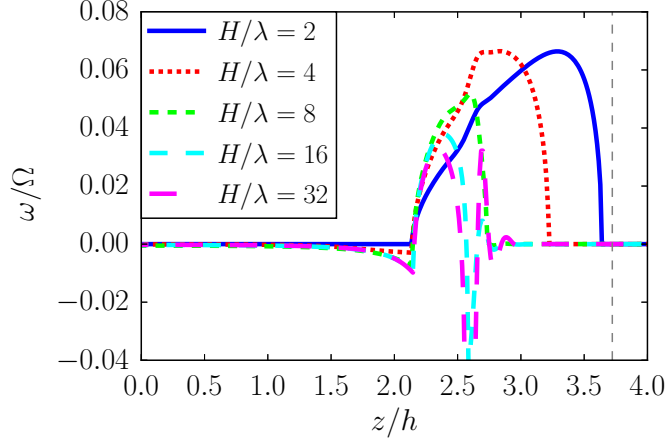


FIGURE VIII.2. – Profils verticaux des taux de croissance ω/Ω de la Hall-MRI, estimés dans l’approximation WKB à partir des conditions initiales du run ‘R10 – M3 – C2’ à un rayon $r = 5r_0$, et pour des modes ayant une longueur d’onde λ suffisamment petite par rapport à la hauteur $H \approx 3.72h$ du disque sous la couronne (tirets gris).

VIII.2.2 Polarité magnétique et effet Hall

Je fais une parenthèse concernant la dépendance du couple total avec la polarité du champ magnétique net. Sur le troisième panneau de la [Figure VIII.1](#), les composantes horizontale $\mathcal{M}_{r\varphi}$ et verticale $\mathcal{M}_{z\varphi}$ du stress magnétique sont non-nulles jusqu’au plan médian du disque, en dépit de sa stabilité à la MRI/HSI. Le coefficient de transport moyen $\langle \alpha \rangle_{r\varphi}^{\mathcal{M}}$ ne varie que d’un facteur 2 à 3 entre deux simulations dont seule l’orientation du champ magnétique initial diffère. Une différence qualitative apparaît dans les simulations les plus faiblement magnétisées ($\beta \geq 5 \times 10^4$) : si $B \cdot \Omega < 0$, alors le couple dû au vent n’atteint pas le plan du disque sur la durée d’une simulation. Dans ce cas, le moment cinétique est extrait depuis la surface $z/h > 2$ vers la couronne, il n’y a pas de courants électriques dans le disque, et donc pas de couple magnétique (voir [Figure VIII.3](#)).

VIII.2.3 Accrétion

Il ne suffit pas de connaître l’intensité moyenne du stress total $\langle \alpha_{r\varphi}^{\mathcal{T}} \rangle$ pour prédire le taux d’accrétion dans le disque : l’accrétion résulte d’un flux de moment cinétique à divergence non-nulle. En conséquence, la définition de τ_r fait intervenir une dérivée radiale dans ([VIII.1](#)). Je trace sur la [Figure VIII.4](#) les profils radiaux de stress dans notre run de référence.

Le profil de $\langle \alpha_{r\varphi}^{\mathcal{M}} \rangle_z$ est croissant radialement ; les valeurs de $\langle \alpha_{r\varphi}^{\mathcal{M}} \rangle_z \in [10^{-2}, 10^{-1}]$ semblent élevées pour un disque laminaire à champ faible, mais elles sont compatibles avec les résultats de simulations locales [195]. Elles sont dominées par le stress en surface du disque (voir [Figure VIII.1](#)).

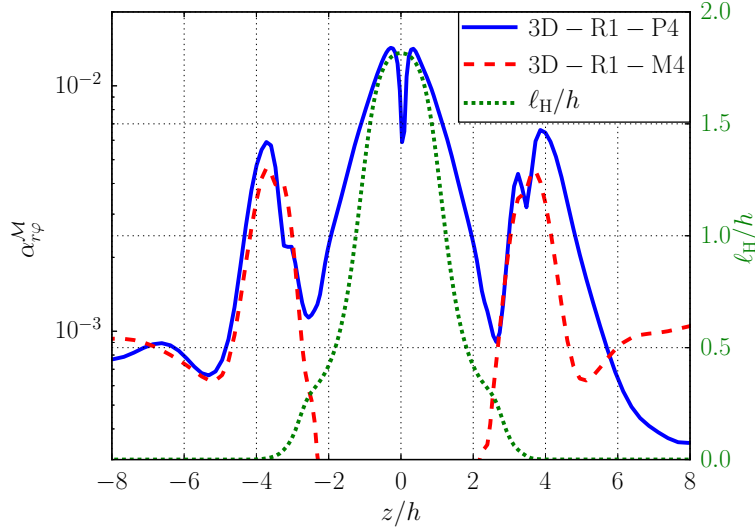


FIGURE VIII.3. – Profils verticaux du stress magnétique horizontal $\alpha_{r\phi}^M$ dans les simulations ‘3D – R1 – P4’ ($B_0 > 0$, *trait bleu*) et ‘3D – R1 – M4’ ($B_0 < 0$, *tirets rouges*), moyenné sur $50T_0$ sur la plage de rayon $r/r_0 \in [3, 6]$; la distinction se fait dans le disque profond $z/h < 2$, où le rapport $\ell_H/h \geq 20\%$ (*pointillés verts, axe de droite*).

Le profil de stress hydrodynamique $\langle \alpha_{r\phi}^R \rangle_z$ est négatif pour des rayons $r > 4.5r_0$. Pour cause, la fluctuation $\tilde{v}_\phi := v_\phi - \langle v_\phi \rangle_\rho$ est systématiquement négative en surface du disque, dès les conditions initiales, même si l’écoulement est accéléré azimuthalement et s’échappe sous forme de vent. En ce qui concerne le stress magnétique vertical $\alpha_{z\phi}^M$, les valeurs négatives en $r \leq 2.3r_0$ indiquent une influence des conditions aux limites polaires. En aspirant le vent à la vitesse du son locale, les bords polaires forcent l’écoulement à être dirigé vers l’intérieur; l’écoulement entraîne ensuite les lignes de champ magnétique : $B_z < 0$ est ré-orienté en $B_r > 0$ dans l’hémisphère supérieur, et le cisaillement radial déforme $B_r > 0$ en $B_\phi < 0$ (voir [Figure VIII.1](#) droite), soit finalement $\mathcal{M}_{z\phi} \equiv -B_z B_\phi < 0$.

Nous pouvons simultanément vérifier la validité de [\(VIII.1\)](#) et déterminer l’importance relative du transport radial au transport vertical de moment cinétique dans le transport de masse. Dans ce but, je mesure séparément le flux de masse $\Sigma \langle v_r \rangle_\rho$ et les profils radiaux de stress. Pour que [\(VIII.1\)](#) soit applicable, il faut préalablement lisser l’écoulement à petite échelle spatio-temporelle [\[27\]](#). Les profils de stress sont moyennés radialement sur une largeur $\delta r = 4h$, et temporellement sur $\delta t = 2$ orbites locales. Le taux d’accrétion mesuré est confronté au taux prédit sur la [Figure VIII.5](#).

En moyenne, le transport radial de moment cinétique ne cause pas d’accrétion dans ce volume de contrôle : il y a autant de moment cinétique entrant et sortant du volume. L’accrétion mesurée est entièrement due aux pertes de moment cinétique en surface du disque. Cette propriété est générique à toutes nos simulations : le transport de masse à grande échelle est contrôlé par le vent et pas par les couples horizontaux $\mathcal{T}_{r\phi}$ dans le disque.

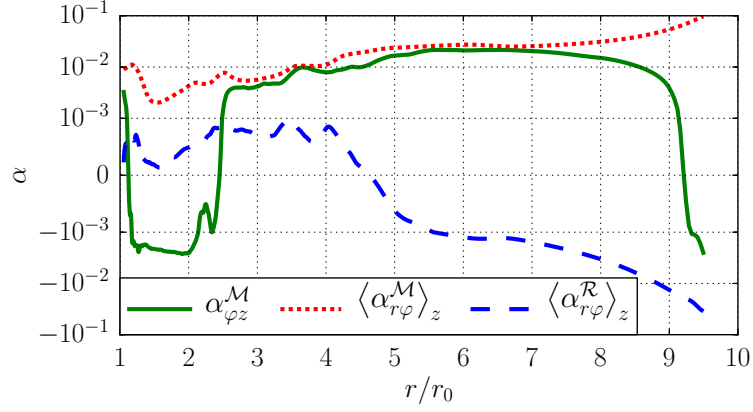


FIGURE VIII.4. – Profils radiaux de stress dans le run ‘R10 – M3 – C2’ : stress magnétique vertical en surface du disque $\alpha_{\varphi z}^{\mathcal{M}}$ (trait vert), stress radial magnétique $\langle \alpha_{r\varphi}^{\mathcal{M}} \rangle_z$ (pointillés rouges) et hydrodynamique $\langle \alpha_{r\varphi}^{\mathcal{R}} \rangle_z$ (tirets bleus) moyennés verticalement dans le disque.

Ce résultat appelle plusieurs remarques. Premièrement, le niveau de saturation des couples dépend des profils initiaux en densité surfacique $\Sigma(r)$ et en flux magnétique $B_z(r)$. Sans compter les effets MHD non-idéaux, les nombres adimensionnés initiaux sont constants en rayon ; l’équation (VIII.1) permet de prédire qu’un coefficient $\alpha_{r\varphi}^{\mathcal{J}}$ constant ne causerait pas d’accrétion avec nos conditions initiales. En limitant le transport de masse, cette situation facilite la réalisation de simulations quasi-stationnaires sur de grandes échelles de temps. J’ai réalisé plusieurs tests, non-répertoriés dans ce chapitre, dans lesquels j’ai vérifié que $\tau_r \leq 0$ selon que $\partial_r \beta \leq 0$, les autres paramètres étant identiques. Il est envisageable que les disques d’accrétion ajustent spontanément leurs profils de masse et de flux magnétique vers une configuration satisfaisant $\tau_r \approx 0$.

Deuxièmement, soulignons le rôle du flux magnétique net dans l’extraction de moment cinétique. Dans un vent thermique, la matière quitte le disque en emportant son moment cinétique spécifique, mais sans freiner le disque. À la différence d’un vent thermique, le vent magnétisé exerce un couple sur le disque, même à champ faible, suffisant pour induire un taux d’accrétion $\dot{m}_r = |2\pi r \Sigma \langle v_r \rangle_\rho| \approx 1.1 \times 10^{-7} \dot{M}_\odot \cdot \text{yr}^{-1}$. En lien avec la section précédente, cet exemple montre que le vent est capable de motiver un taux d’accrétion conséquent dans des régions considérées comme magnétiquement inactives vis-à-vis de la stabilité MRI.

VIII.3 COURONNE CHAUDE

Dans la simulation de référence ‘R10 – M3 – C2’, le disque accrète sous l’action d’un vent magnétisé. Ce vent est soulevé par la force de Lorentz, et plus précisément par la pression magnétique due à la composante toroïdale B_φ^2 en surface du disque. Cependant, l’accélération de Lorentz

$$\langle \mathcal{J} \rangle_{\varphi,z}(r) \sim \alpha \rho c_s^2 \propto r^{-3} \text{ avec nos profils initiaux.}$$

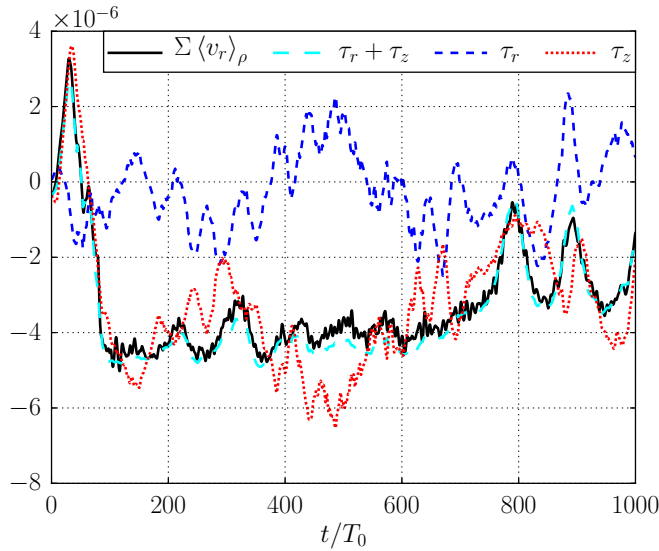


FIGURE VIII.5. – Flux de masse dans le sous-domaine $r/r_0 \in [3, 8]$ restreint au disque du run 'R10 – M3 – C2' : taux d'accrétion mesuré $\Sigma \langle v_r \rangle_\rho$ (trait noir), et déduit des pertes radiales (τ_r , tirets bleus) et verticales (τ_z , pointillés rouges) de moment cinétique; la somme des composantes $\tau_r + \tau_z$ est superposée en tirets cyans.

compense à peine l'accélération gravitationnelle. Le vent atteint une vitesse modérée au bord radial externe du domaine de calcul : à l'altitude $z/h = 8$, la vitesse poloïdale $v_p \approx 20\%$ de la vitesse képlérienne initiale. Cet écoulement ne franchit pas tous les points critiques MHD; en particulier, la vitesse poloïdale avoisine la vitesse magnéto-sonique rapide précisément en bord de domaine, comme observé par Moll [237], Lesur et al. [194]. Les conditions aux limites du domaine influencent vraisemblablement l'écoulement jusqu'à la surface du disque, et peuvent notamment affecter les taux de pertes de masse [113, 285]. Pour décrire des vents avec de meilleurs propriétés de convergence, je vais me concentrer sur les simulations ayant un plus grand contraste en température entre le disque et la couronne. Ce scénario s'accorde à d'autres études des disques faiblement magnétisés [99, 21] et de leur structure thermo-chimique [353, 10].

La Figure VIII.6 représente la structure moyenne de l'écoulement dans le run 'R10 – M3', dont la seule différence avec notre simulation de référence est le rapport en température $k^2 = 36$ (au lieu de 4) entre le disque et la couronne à un rayon donné. Un vent est visiblement lancé depuis la surface du disque, avec une inclinaison suffisante par rapport à la direction verticale pour satisfaire au critère de lancement magnéto-centrifuge [44]. Les lignes de champ magnétique sont écrasées à la surface du disque par le gradient radial de pression thermique dans la couronne. Les régions internes de la couronne sont donc faiblement magnétisées; le champ de vitesse y est visiblement affectées par nos conditions aux limites polaires.

$10^4\text{K}/280\text{K} \approx 36$ à 1AU,
voir Aresu et al. [10].

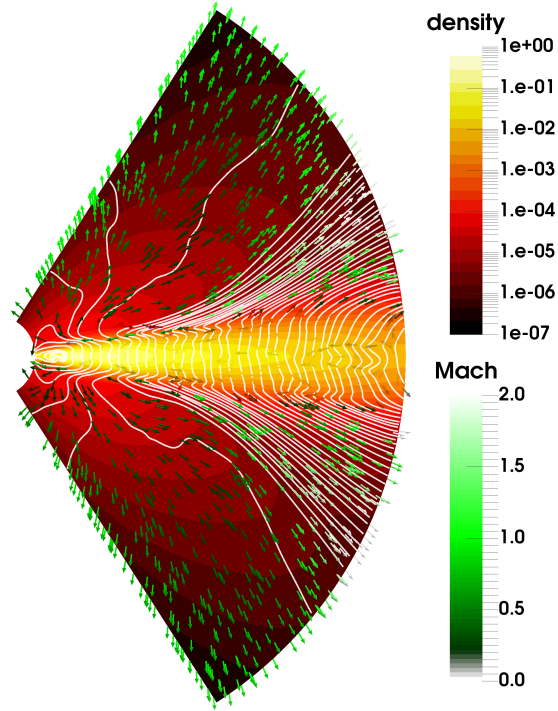


FIGURE VIII.6. – Écoulement moyen dans la simulation 'R10 – M3' entre $400T_0$ et $700T_0$: densité (carte de couleurs), champ de vitesse poloïdale (flèches vertes) et champ magnétique poloïdal (courbes intégrales).

VIII.3.1 Points critiques

Le franchissement des points critiques est un critère standard de convergence du vent vers une configuration physique. En chaque point de l'écoulement, nous pouvons calculer un cône de Mach délimité par les vitesses caractéristiques extrémales du fluide ; par analogie à un cône de lumière, cette construction permet de délimiter les domaines causalement liés au point considéré. En MHD idéale, les modes de propagation linéaires correspondent aux ondes d'Alfvén et aux ondes magnétosoniques lentes et rapides, respectivement définies par :

$$v_{\pm}^2 \equiv \frac{1}{2} \left(v_A^2 + c_s^2 \pm \sqrt{(v_A^2 + c_s^2)^2 - 4c_s^2 v_{Ap}^2} \right), \quad (\text{VIII.3})$$

où l'indice p correspond à la composante poloïdale d'un vecteur.

J'intègre la trajectoire d'une ligne de courant depuis $(r/r_0 = 7, z/h = 5)$ dans l'écoulement moyen présenté sur la [Figure VIII.6](#). Je compare sur la [Figure VIII.7](#) la vitesse poloïdale du vent aux vitesses caractéristiques le long de cette ligne de courant. Dès la base du vent, l'écoulement s'échappe plus rapidement que la vitesse magnétosonique lente, et la vitesse d'Alfvén est franchie à une hauteur $z/h \approx 4$, correspondant à la transition thermique entre le disque et la couronne. La vitesse magnétosonique rapide est franchie à $z/h \approx 6.4$, avant d'atteindre le bord radial externe.

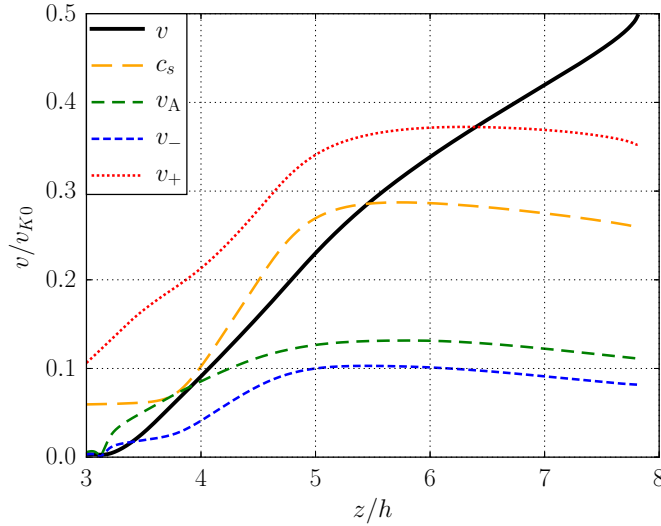


FIGURE VIII.7. – Vitesses caractéristiques de l’écoulement en fonction de l’altitude z/h locale : vitesse poloidale du vent v (trait noir), vitesse du son c_s (tirets oranges), vitesse d’Alfvén v_A (tirets verts), vitesses magnéto-soniques lentes et rapides v_- et v_+ (pointillés bleus et rouges).

Comme ce vent franchit l’ensemble des points critiques, il est causalement déconnecté du disque, donc les conditions aux limites du domaine ne devraient pas influencer la physique de la couronne dans les régions externes. Cette propriété n’est pas vérifiée dans les régions internes de la couronne, et elle n’est pas systématiquement vérifiée dans toutes nos simulations. L’extension spatiale du domaine de calcul intervient dans ce problème. La vitesse magnéto-sonique rapide pourrait être plus facilement atteinte dans des domaines étendus (e.g., Zhu & Stone [359] & Section IX.2), en comparaison aux simulations sur 8 échelles de hauteur ou moins (e.g. Suzuki & Inutsuka [327], Gressel et al. [134]). Dans notre cas, la prescription de chauffage coronal affecte continuellement l’énergie interne du fluide, et pourrait contribuer à indéfiniment accélérer le vent.

VIII.3.2 Dynamique

Afin de comprendre la dynamique du vent, je calcule le long de la même ligne de courant les différentes forces F agissant sur le fluide, et représente les accélérations correspondantes F/ρ sur la Figure VIII.8. L’accélération poloidale est calculée comme $a_p \equiv v_p \partial_p v_p$; l’accélération inertielle inclut la gravitation, et le fait que le repère de référence tourne avec le fluide :

$$\mathbf{F}_{\text{inertia}} \equiv -\rho (\nabla \Phi + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - v_p \partial_p \mathbf{v}_p). \quad (\text{VIII.4})$$

Malgré la variabilité temporelle de l’écoulement, la somme des forces reproduit décentement bien la véritable accélération le long de la ligne de courant. J’ai vérifié a posteriori que l’erreur vient principalement de l’estimation de l’accélération de Lorentz $F = \mathbf{J} \times \mathbf{B}/\rho$, le courant étant calculé à

L’erreur est significativement réduite en exportant directement la distribution moyenne des courants électriques.

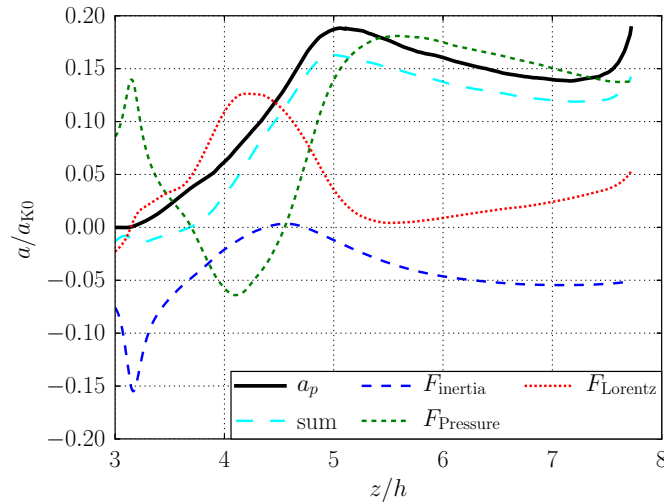


FIGURE VIII.8. – Accélération poloidale du vent a_p (*trait noir*) et décomposition en somme des forces agissant sur le fluide : le gradient de pression (*tirets verts*), la force de Lorentz (*pointillés rouges*), les forces inertielles (voir (VIII.4), *tirets bleus*) et leur somme (*tirets cyans*).

partir de la distribution moyenne du champ magnétique.

La lecture de la Figure VIII.8 doit se faire avec la Figure VIII.6 en tête, pour suivre la ligne de courant depuis la base du vent. À la surface du disque $z/H \lesssim 3$, l'équilibre hydrostatique se traduit par l'opposition du gradient de pression aux forces inertielles. Dans la couche de transition disque-couronne, l'augmentation de température induit un gradient de pression dirigé de la couronne vers le disque, opposé au lancement du vent. Dans cette zone, c'est la force de Lorentz qui est responsable du soulèvement de la matière du disque vers la couronne. Simultanément, l'inclinaison des lignes de champ est telle qu'au delà de $z/h > 4.5$, le gradient radial de pression favorise l'accélération du vent ; les forces de pression sont finalement dominantes pour $z/h > 5$. En résumé, l'accélération du vent est principalement thermique ; l'intervention du champ magnétique se fait essentiellement dans la phase de chargement et lancement du vent.

VIII.3.3 Énergétique

Au delà de la surface magnéto-sonique rapide, l'écoulement n'est plus causalement relié au disque par l'intermédiaire d'ondes plasma. En revanche, l'interaction gravitationnelle est médiée à vitesse infinie dans notre modèle, et l'écoulement n'est pas nécessairement libéré du potentiel gravitationnel de l'astre central. Le critère de franchissement des points critiques n'est pas suffisant pour affirmer que la matière peut s'échapper indéfiniment. Cette information dépend du contenu énergétique de l'écoulement, que nous pouvons caractériser par l'invariant de Bernoulli.

Commençons par décomposer le flux de Poynting :

$$\begin{aligned}\Pi &\equiv \mathbf{E} \times \mathbf{B} = (-\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \\ &= (\mathbf{B}_\perp \cdot \mathbf{B}_\perp)\mathbf{v} - (\mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{B}_\perp)\mathbf{B} \equiv B_\perp^2 \mathbf{v} + \mathbf{w},\end{aligned}\tag{VIII.5}$$

où le premier terme est analogue à l'advection d'énergie magnétique par l'écoulement, tandis que le second terme décrit le transport d'énergie propre aux ondes d'Alfvén. Ensuite, nous pouvons décomposer l'intégrale

$$\int \frac{\nabla P}{\rho} \cdot d\ell = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} - \int T \nabla s \cdot d\ell \equiv \mathcal{H} - \mathcal{Q},\tag{VIII.6}$$

représentant respectivement l'enthalpie \mathcal{H} de l'écoulement, moins un terme de chauffage \mathcal{Q} . La variation d'enthalpie \mathcal{H} correspond au travail adiabatique exercé par le fluide, tandis que \mathcal{Q} représente sa variation d'entropie spécifique s . Il ne nous reste plus qu'à prendre le produit scalaire de l'équation d'impulsion avec le champ de vitesse pour construire une quantité invariante le long des lignes de courant : l'invariant de Bernoulli

$$\begin{aligned}\mathcal{B}' &\equiv \frac{v^2}{2} + \Phi + \frac{\Pi_p}{\rho v_p} + \int \frac{\nabla P}{\rho} \cdot d\ell \\ &= \frac{v_\phi^2}{2} + \frac{v_p^2}{2} + \Phi + \frac{B_\perp^2 v_p + w_p}{\rho v_p} + \mathcal{H} - \mathcal{Q}.\end{aligned}\tag{VIII.7}$$

Cette définition dépend du domaine d'intégration des lignes de courant : comme \mathcal{Q} garde une forme intégrale, le rayon externe du domaine de calcul intervient explicitement dans la définition de \mathcal{B}' . Nous choisissons de lui ajouter la valeur de \mathcal{Q} prise en bord de domaine : $\mathcal{B} := \mathcal{B}' + \mathcal{Q}_{\text{end}}$. De cette façon, l'inégalité $\mathcal{B} > 0$ signifie que l'écoulement dispose d'une énergie suffisante pour échapper au potentiel gravitationnel avant d'atteindre le bord externe du domaine de calcul.

Les différentes contributions à l'invariant modifié \mathcal{B} sont tracées sur la [Figure VIII.9](#). Cette quantité est constante en bonne approximation au delà de $z/h > 5$, attestant à la fois du caractère MHD idéal et stationnaire de l'écoulement moyen. Comme $\mathcal{B} > 0$, le vent dispose du contenu énergétique nécessaire pour s'échapper du potentiel gravitationnel avant d'avoir atteint le bord radial externe. J'ai vérifié que les autres invariants MHD usuels [70, 264], tels que le rapport des flux $\kappa := \rho v_p / B_p$ et le moment cinétique $j \equiv r v_\phi - r B_\phi / \kappa$ sont également constants au delà de $z/h > 5$. Le fait que ces quantités ne soient pas constantes en surface du disque indique que l'écoulement n'obéit pas en moyenne à la MHD idéale, qu'il s'agisse de diffusivité microphysique (ohmique, ambipolaire) ou turbulente.

En lien avec la [Figure VIII.7](#) montrée précédemment, remarquons que la vitesse d'Alfvén est atteinte à $z/h \approx 3.9$, dans la zone non-idéale. Ferreira & Pelletier [101] ont montré que seul le point critique sonique impose des contraintes de régularité sur un vent résistif, le point d'Alfvén n'étant pertinent que dans le régime MHD idéal. Il est généralement fait l'hypothèse que le vent franchit la vitesse d'Alfvén dans le régime idéal.

Le potentiel gravitationnel $\Phi < 0$ n'est pas tracé ; il s'oppose essentiellement à l'inertie de rotation v_ϕ^2 .

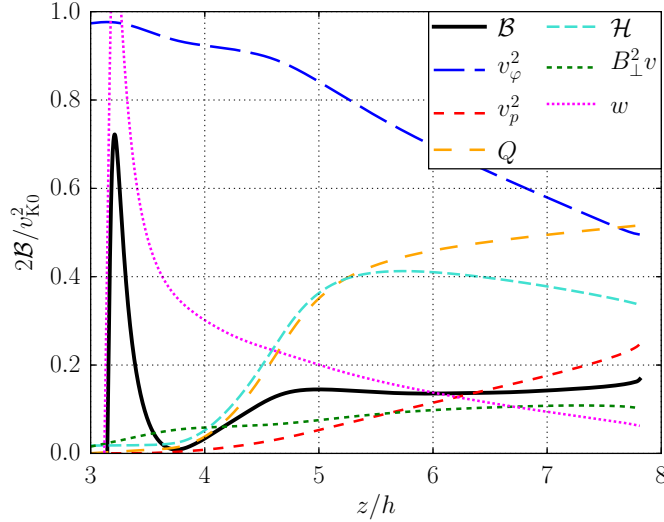


FIGURE VIII.9. – Décomposition de l’invariant de Bernoulli \mathcal{B} (trait noir) d’après (VIII.7) en fonction de l’altitude z/h sur la ligne de courant.

Cette hypothèse n’est pas satisfaite dans nos simulations, et le fait que le vent devienne super-Alfvénique en zone résistive pourrait lever certaines contraintes sur la régularité des solutions. En particulier, cela pourrait expliquer pourquoi Casse & Ferreira [66] n’ont pas obtenu de telles efficacités d’éjection avec un terme de chauffage coronal.

La consommation de flux de Poynting w se fait principalement sur l’intervalle $z/h \in [3, 5]$, i.e. dans la zone résistive, donc avec un faible rendement sur l’accélération du vent. Le nombre de Bernoulli \mathcal{B} devient clairement positif à la transition disque-couronne $z \approx H$, et résulte du chauffage coronale \mathcal{Q} . La quantité $\mathcal{B}' + \mathcal{Q}$ devient positive en $z/h \approx 5.1$, hauteur à partir de laquelle le vent pourrait s’échapper sans chauffage supplémentaire. Au delà de cette altitude, le fluide continue de recevoir de l’énergie par notre prescription de chauffage, car il est toujours plus froid que la température imposée localement. Simultanément, la diminution d’enthalpie témoigne du travail des forces de pression pour accélérer le vent.

Finalement, je représente sur la Figure VIII.10 le taux de perte de masse dans le vent en fonction de la magnétisation du disque. Chaque symbole représente une simulation dans laquelle j’ai intégré le flux de masse total sur le rayon externe du domaine suivant (VIII.2). En réduisant le taux de pertes de masse à un nombre unique par simulation, nous pouvons effacer les fluctuations radiales et quantifier l’efficacité d’éjection de façon significative. Un ajustement en $\dot{m}_w \propto \beta^{-1/2}$ est superposé aux simulations ayant $r_0 \equiv 1\text{AU}$ (R1) et $r_0 \equiv 10\text{AU}$ (R10) séparément, en accord avec les résultats de simulations locales de Suzuki & Inutsuka [326], Bai & Stone [18]. La dispersion verticale des mesures ne montre pas de corrélation nette entre le taux de pertes de masse et l’orientation du flux magnétique net, ni même avec le contraste en température entre le disque et la couronne.

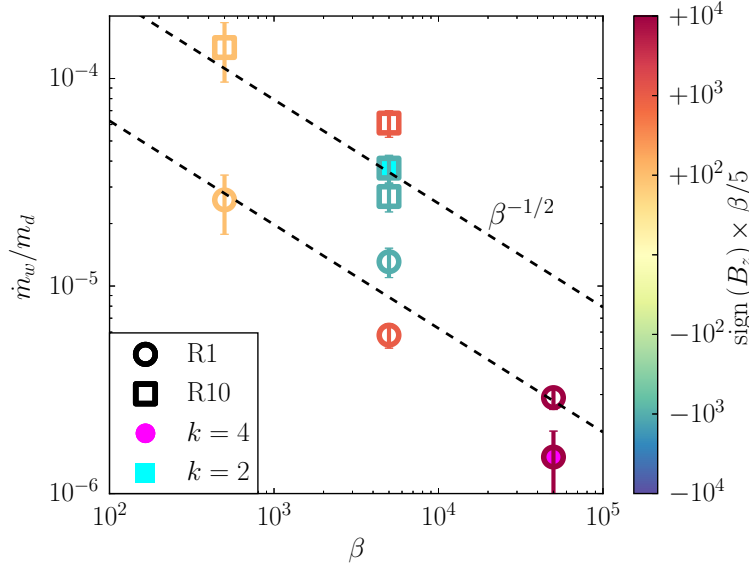


FIGURE VIII.10. – Taux de perte de masse dans le vent \dot{m}_w/m_d normalisé à la masse totale du disque dans le domaine de calcul, en fonction du paramètre $\beta \equiv 2P/B_0^2$ dans le plan médian d'une série de simulations.

Dans toutes les simulations, la masse totale du disque dans le domaine de calcul vaut $m_d \equiv \int_{\mathcal{D}} \rho dV \approx 7.10m_\odot$ en unité de code ; la [Table VII.1](#) permet de convertir les taux de pertes de masse dans le vent en masses solaires par an : $\dot{M}_W \approx 2 \times 10^{-2} (r_0/1\text{AU}) (\dot{m}_w/m_d)$. Comme \dot{m}_w/m_d décroît d'un facteur $4 \approx \sqrt{10}$ entre les runs R1 et R10, le taux de pertes de masse \dot{M}_W est approximativement indépendant du rayon interne r_0/AU , et la somme des contributions sur $r/\text{AU} \in [1, 100]$ vaut :

$$\dot{M}_W \approx 3 \times 10^{-5} \beta^{-1/2} M_\odot \cdot \text{yr}^{-1}. \quad (\text{VIII.8})$$

Ces valeurs sont relativement élevées : le taux de pertes de masse dans le vent est comparable au taux d'accrétion à un rayon donné [22]. Avec un bras de levier magnétique $\lambda \approx 1.5$, les modèles stationnaires de jets MHD prédisent une efficacité d'éjection $\partial \log \dot{m}_w / \partial \log r \sim 1$ [100, 97]. Dans ce cas, le chargement en masse du vent serait trop intense pour atteindre un régime trans-alfvénique sans notre prescription de chauffage coronal [97].

Les simulations R10 couvrent une surface ≈ 100 fois plus grande que R1, mais la densité surfacique est 10 fois plus faible et les temps caractéristiques $10^{3/2}$ fois plus grands.

VIII.4 CONFIGURATION MAGNÉTIQUE GLOBALE

Les disques stratifiés présentés jusqu'ici avaient une structure verticale caractéristique des modèles d'accrétion-éjection. Le champ magnétique global exerce un couple laminaire sur le disque, du moment cinétique est prélevé dans le plan médian et transporté vers la surface, causant à la fois l'accrétion de masse et l'éjection magnétocentrifuge. À la différence des modèles usuels de jets magnétisés, l'accélération magnétique est minime

devant l'accélération thermique ; de plus, le lancement du vent est causé par la pression magnétique des lignes de champ fortement enroulées, et non par la tension magnétique d'un champ proche de l'équipartition $\beta \approx 1$. Cependant, la symétrie des deux solutions est la même. Dans cette section, je montre que le disque n'adopte pas nécessairement cette configuration. Le champ magnétique peut spontanément s'organiser suivant une symétrie différente, sur de grandes échelles spatio-temporelles, avec des répercussions inattendues sur les processus de transport globaux.

VIII.4.1 Circulation méridionale

L'accrétion de masse ne se fait pas nécessairement dans le plan méridien du disque. Si la turbulence peut être modélisée comme une viscosité $\nu \sim \alpha c_s h$ [305], alors le plan médian verra une vitesse radiale dirigée vers l'intérieur ou vers l'extérieur selon les profils radiaux de température et densité surfacique [337]. Dans certains cas, l'accrétion de masse a lieu en surface du disque [177], formant un écoulement que nous qualifierons de circulation méridionale. Si la densité décroît comme $\rho \sim r^p$ et la température comme $T \sim r^q$, Fromang et al. [114] explicitent la condition de circulation méridionale : $3p + 2q + 6 < 0$. Cette condition est satisfaite par la majorité des simulations globales de disques protoplanétaires, avec $q \approx -1$ et $p \approx -3/2$ comme valeurs les plus courantes. Pourtant, Fromang et al. [114] et Flock et al. [105] n'ont pas observé de circulations méridionales dans des simulations stratifiées en MHD idéale : le transport par la turbulence MRI ne s'accorde pas aux prédictions de la théorie visqueuse.

Néanmoins, l'existence de circulations méridionales dans les disques protoplanétaires n'est pas exclue. Les simulations globales de Suzuki & Inutsuka [327] et Zhu & Stone [359], conduites dans un cadre MHD idéal avec flux magnétique vertical net, montrent chacune des nappes d'accrétion en surface du disque, tandis que le plan médian est "excrétant".

VIII.4.1.1 Structure globale

En l'absence de turbulence, certaines de nos simulations exhibent des circulations méridionales. C'est le cas du run 'R1 – P4 – C4' présenté sur la Figure VIII.11. Le quatrième panneau de la Figure VIII.11 gauche montre que la masse est accrétée en surface et excrétée dans le plan médian. Le flux de moment cinétique $\mathcal{M}_{z\varphi} \approx 0$ dans la couronne ; dans le disque, il est dirigé de la surface vers le plan médian (voir Figure VIII.11 droite). En conséquence, le moment cinétique est prélevé à la surface du disque et transporté verticalement vers le plan médian. Comme une tranche du disque conserve son moment cinétique total, ce processus ne cause pas d'accrétion nette : $\Sigma \langle v_r \rangle_\rho \approx 0$ en moyenne dans cette simulation.

Le transport radial $\tau_r \approx 0$ comme dans notre simulation de référence ; voir Figure VIII.5.

Le transport de moment cinétique se fait essentiellement via la composante $\mathcal{M}_{z\varphi} \equiv -B_z B_\varphi$ du tenseur de stress de Maxwell. Avec $B_z > 0$ dans le run 'R1 – P4 – C4', il suffit de regarder le signe de B_φ dans chaque hémisphère de la Figure VIII.11 droite. Comme $B_\varphi \approx 0$ dans la couronne, le

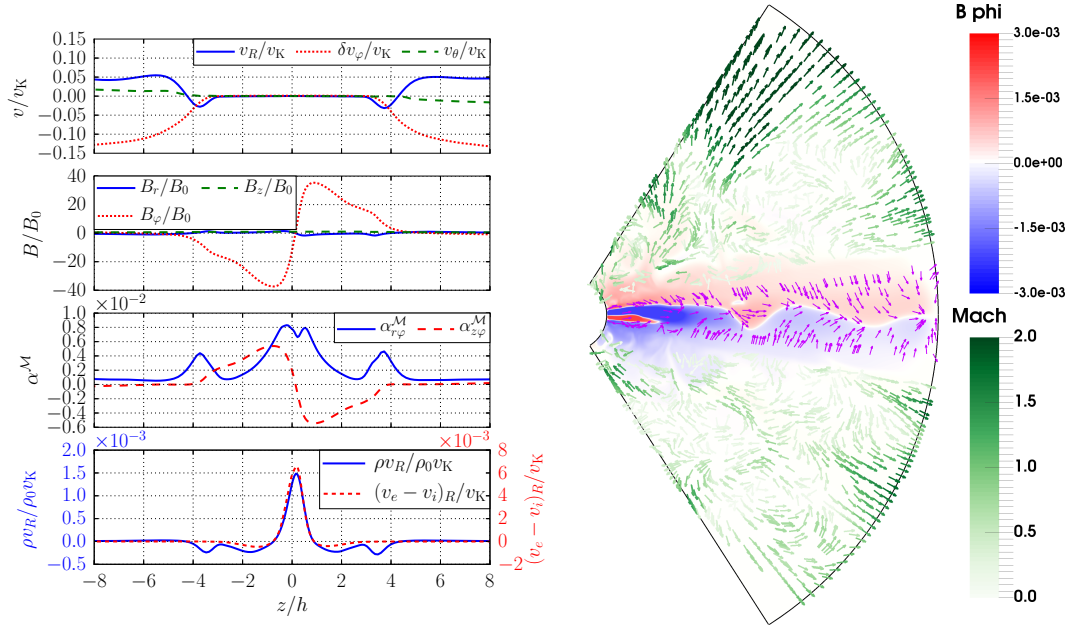


FIGURE VIII.11. – À gauche : profils verticaux dans le run R1 – P4 – C4, moyennés radialement entre $5r_0$ et $8r_0$ et temporellement entre $400T_0$ et $1000T_0$; de haut en bas : fluctuations en vitesse, champ magnétique, stress magnétique radial et vertical, flux de masse et courants électriques. À droite : état instantané à $1000T_0$: champ magnétique toroïdal B_ϕ (couleurs), vitesse poloïdale (flèches vertes) et flux de moment cinétique dû au couple magnétique $-B_\phi \mathbf{B}$ (flèches mauves).

disque ne pompe pas de moment cinétique depuis les bords du domaine de calcul. Le champ toroïdal B_ϕ change de signe au delà de $z/h > 5$ (voir Figure VIII.11 gauche, deuxième panneau), prenant une symétrie analogue aux disques éjectants présentés précédemment, mais avec une intensité trop faible pour être significative. La couronne ne produit pas un vent organisé : la masse est soulevée par une faible activité turbulente en surface du disque avant d'être entraînée thermiquement. L'influence des conditions aux limites est la plus flagrantes dans cette situation : le fluide est aspiré vers les bords à la vitesse du son locale. Les points critiques ne sont pas franchis par l'écoulement, et il est pertinent de se demander si cette configuration serait permise sans l'influence des bords.

VIII.4.1.2 Équilibre magnétique

Parce que la température y est plus élevée, la couronne tourne plus lentement que le disque à l'équilibre. À la façon d'une roue de Barlow, nous pourrions nous attendre à ce que le champ initialement vertical soit entraîné par le disque ; le cisaillement vertical $\partial_z [v_\phi B_z]$ produirait systématiquement un couple $\mathcal{M}_{z\phi}$ freinant le disque, comme dans notre simulation de référence 'R10 – M3 – C2' (voir Figure VIII.1). Les circulations méridi-

dionales correspondent à une situation opposée, dans laquelle le disque et la couronne sont magnétiquement découplés. Cela soulève la question de l'origine du champ magnétique toroïdal B_φ dans le disque. Pour y répondre, je décompose les équations d'induction radiale et toroïdale en une somme de termes, auxquels j'attribue différentes significations physiques. Les termes 'shear' et 'stretch' correspondent à différentes façons de cisailer une ligne de champ ; les termes 'outflow' et 'advection' correspondent chacun à l'advection du flux magnétique par l'écoulement.

$$\left\langle \frac{\partial B_R}{\partial t} \right\rangle_\varphi = \frac{1}{R} \left(\cot(\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \cdot \left[\underbrace{\langle v_R B_\theta \rangle}_{\text{stretch}} - \underbrace{\langle v_\theta B_R \rangle}_{\text{outflow}} \right. \\ \left. - \underbrace{\langle \eta_O J_\varphi \rangle}_{\text{Ohm}} - \underbrace{\langle \eta_H (J \times e_b)_\varphi \rangle}_{\text{Hall}} - \underbrace{\langle \eta_A ((J \times e_b) \times e_b)_\varphi \rangle}_{\text{ambipolar}} \right]; \quad (\text{VIII.9a})$$

$$\left\langle \frac{\partial B_\varphi}{\partial t} \right\rangle_\varphi = \left(\frac{1}{R} + \frac{\partial}{\partial R} \right) \cdot \left[\underbrace{\langle v_\varphi B_R \rangle}_{\text{shear}} - \underbrace{\langle v_R B_\varphi \rangle}_{\text{advection}} \right] \\ - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\underbrace{\langle v_\theta B_\varphi \rangle}_{\text{outflow}} - \underbrace{\langle v_\varphi B_\theta \rangle}_{\text{stretch}} \right] - \underbrace{\langle \nabla \times \mathcal{E}_{O,H,A} \rangle}_\varphi. \quad (\text{VIII.9b})$$

Je calcule ces termes à partir de l'écoulement moyen du run 'R1 – P4 – C4', et trace les contributions non-négligeables sur la [Figure VIII.12](#). À propos de l'induction de champ toroïdal $\partial_t B_\varphi$ (panneau de gauche) :

- à $z/h > 3$, la somme des termes de 'outflow' + 'advection' est faible ;
- à $z/h < 2$, la diffusion ambipolaire assure la saturation de B_φ dans le disque, opposée au 'shear' képlerien du champ radial ;
- à $z/h \approx 3.4$, la diffusion ambipolaire transporte le flux toroïdal vers la surface du disque, mais pas vers le plan médian ;
- à $z \approx H$, il y a compétition entre les termes de 'shear' et de 'stretch', correspondant respectivement aux cisaillements de B_r et de B_z .

En vertu du cisaillement initial $\partial_z [v_\varphi B_z]$, le terme de 'stretch' favorise une configuration du type roue de Barlow, où le disque accrete sous l'action d'un couple magnétique global. La *phase* verticale de $B_\varphi(z)$, i.e. le signe de B_φ de part et d'autre du plan médian, est donc déterminée par le cisaillement du champ radial B_R . L'induction du champ radial B_R est décomposée sur le panneau de droite de la [Figure VIII.12](#) :

- à $z/h < 2$, la nappe de courant pince le champ magnétique vertical via l'EMF Hall (voir [Figure VIII.11](#) gauche, panneau 4) ; la diffusion ambipolaire compense partiellement cet effet ;
- à $z/h > 3$, le terme 'outflow' est relativement faible ; le terme de 'stretch' représente les nappes d'accrétion en surface, qui cisailent le champ vertical jusqu'à saturation par la diffusion ambipolaire.

Au voisinage du plan médian, c'est la HSI qui est responsable de l'amplification du champ horizontal. À la surface du disque, le mécanisme d'amplification du champ correspond plutôt à la MRI : la vitesse du fluide

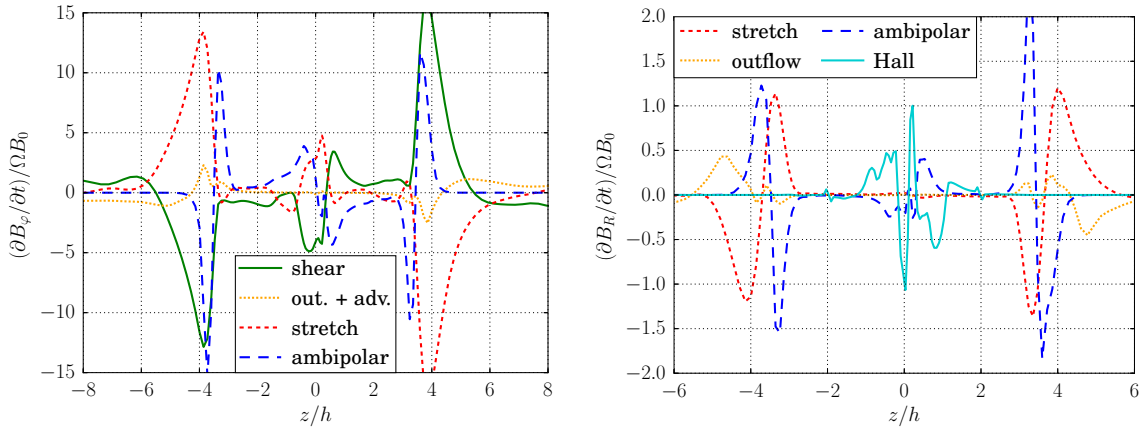


FIGURE VIII.12. – Profils verticaux calculés à partir du run ‘R1 – P4 – C4’, moyenné temporellement entre $400T_0$ et $1000T_0$ et radialement entre $5r_0$ et $8r_0$: contributions à l’induction de champ magnétique radial $\partial_t B_R$ (à gauche) et de champ magnétique toroïdal $\partial_t B_\phi$ (à droite).

accrétant induit B_r à partir de B_z , et le cisaillement képlérien induit B_ϕ à partir de B_r . Le couple magnétique $\mathcal{M}_{z\phi}$ résultant transporte du moment cinétique depuis la surface vers le plan médian, ce qui entretient l’accrétion en surface. Sur toute la hauteur du disque, c’est la diffusion ambipolaire qui joue un rôle modérateur. En résumé, le champ toroïdal B_ϕ est principalement contrôlé par les instabilités MHD au sein du disque. Il est possible que la magnétisation du disque soit trop faible pour que le vent parvienne à imposer une structure globale d’accrétion-éjection [237].

VIII.4.2 Configurations mixtes

L’organisation globale du champ magnétique peut être plus complexe que dans les situations présentées jusqu’ici. La Figure VIII.13 illustre le cas de la simulation ‘R1 – P4’ : les régions internes du disque ont adopté une configuration d’accrétion-éjection, tandis qu’une circulation méridionale s’est établie dans les régions externes. Prises individuellement, ces deux zones répondent à la phénoménologie des sections précédentes. Elles évoluent au cours de la simulation, mais sur des échelles de temps de l’ordre de la centaine d’orbites locales ; la distinction des deux régions reste donc pertinente. La transition radiale se fait sans discontinuité dans le disque.

La Figure VIII.13 droite montre que les flux de masse sont principalement localisés au niveau des surfaces $B_\phi = 0$. Ces surfaces s’identifient aux nappes où le courant électrique $\langle J_r \rangle_\phi \equiv -\partial_z \langle B_\phi \rangle_\phi$ est extrémal, ainsi que le couple dû à la force de Lorentz $F_\phi = -J_r B_z$. Dans la zone de circulation méridionale, le flux de masse décrit une boucle longeant la surface du disque et connectée au plan médian. Dans les régions internes, le plan médian accrète tandis que la matière en surface est éjectée. En juxtaposant radialement une région accrétante et une région non-accrétante, nous pourrions nous attendre à une accumulation/diminution de densité surfa-

Voir Brandenburg & Zweibel [57] concernant la formation de nappes de courants étroites en MHD ambipolaire.

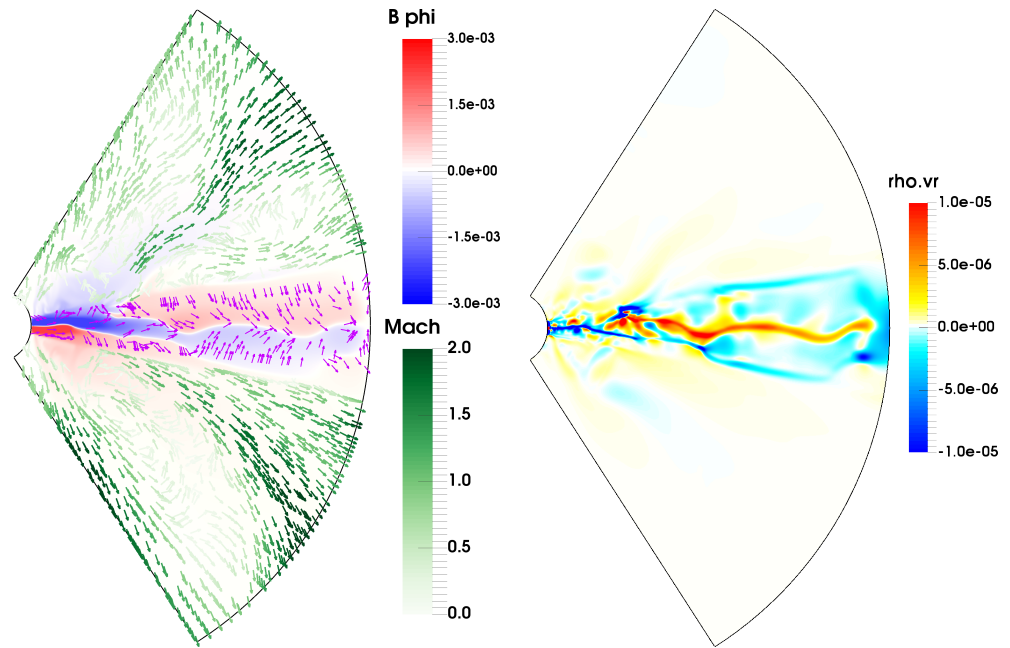


FIGURE VIII.13. – Écoulement instantané dans le run ‘R1 – P4’ après $1000T_0$ d’intégration; à gauche : champ magnétique toroidal B_ϕ (couleurs), champ de vitesse (flèches vertes) et flux de moment cinétique (flèches mauves); à droite : flux de masse radial ρv_r .

cique au niveau de la transition. En réalité, les flux de masse sont partagés au niveau de la transition : une part de la masse accrétée/éjectée vient des régions externes. La transition dans le disque se répercute aussi sur la couronne : un vent magnétisé organisé est lancé depuis les régions internes, alors qu’un vent thermique désordonné part des régions externes.

VIII.4.3 Brisure de symétrie

Maintenant que j’ai décrit deux configurations caractéristiques du champ magnétique, il serait souhaitable de comprendre ce qui motive l’une ou l’autre à se développer dans une simulation donnée. La simulation ‘R10 – M3 – C2’ est un modèle de disque accrétant, et la simulation ‘R1 – P4 – C4’ fournit le meilleur exemple de circulation méridionale dans le disque. Ces deux simulations diffèrent par le rayon interne du domaine de calcul, la polarité du flux magnétique net, son intensité, et le rapport de température entre le disque et la couronne. Malheureusement, je n’ai pas pu identifier un paramètre discriminant les deux solutions. La configuration magnétique choisie ne varie pas de façon monotone avec l’intensité du champ initial B_0 ou avec le contraste en température disque-couronne, et elle est sensible aux détails numériques tels que la résolution spatiale du maillage.

Je représente sur la [Figure VIII.14](#) l’évolution temporelle du champ magnétique toroïdal dans les premiers instants des deux simulations typiques.

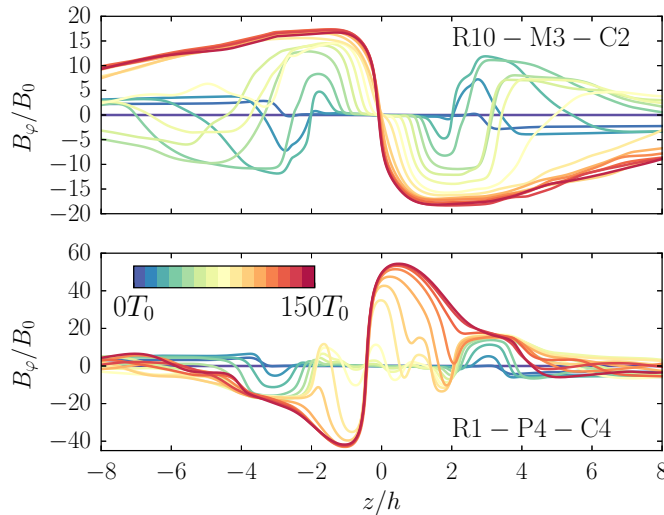


FIGURE VIII.14. – Profil vertical de champ magnétique toroïdal $B_\phi(z)$ dans les simulations ‘R10 – M3 – C2’ (*panneau supérieur*) et ‘R1 – P4 – C4’ (*panneau inférieur*), au rayon $r = 5r_0$ et durant les premières $150T_0$ (couleurs); la normalisation inclut le signe du champ vertical initial B_0 .

Sur le panneau supérieur, un vent magnétisé se développe verticalement; sur le panneau inférieur, le champ toroïdal reste confiné dans l’épaisseur du disque et entretient une circulation méridionale. Dans les deux cas, la MRI commence par amplifier le champ magnétique à une altitude $z/h \approx 3$. La polarité du champ toroïdal qui s’impose ensuite semble dépendre du mode MRI dont le taux de croissance est maximal, et de la saturation non-linéaire de ce mode. Ce processus est sensible aux conditions initiales de la simulation, y compris au bruit injecté dans le champ de vitesse. Il est possible que cette brisure de symétrie disparaisse lorsque le champ magnétique initial est déjà incliné vers l’extérieur [e.g., 357], ou bien en augmentant l’intensité du flux magnétique net à travers le disque.

VIII.4.4 Configurations unilatérales

VIII.4.4.1 Structure globale

Une troisième configuration typique est obtenue dans nos simulations : le disque accrète en surface dans un hémisphère, tandis que l’autre face produit un vent magnétisé, comme illustré sur la [Figure VIII.15](#). Les propriétés du disque et du vent dans l’hémisphère supérieur sont analogues aux configurations de type “circulation méridionale”. Le vent est thermique, et l’influence des conditions aux limites polaires est très marquée sur l’écoulement moyen dans la couronne supérieure. À l’inverse, les propriétés dans l’hémisphère inférieur correspondent à celles d’un disque accrétant/éjectant. Les simulations atteignant cette configurations sont les

seules à montrer une collimation magnétique nette dans le vent. Lorsque le système atteint cette configuration globale, il y reste jusqu'à la fin de la simulation, et le disque ne montre plus aucune variabilité.

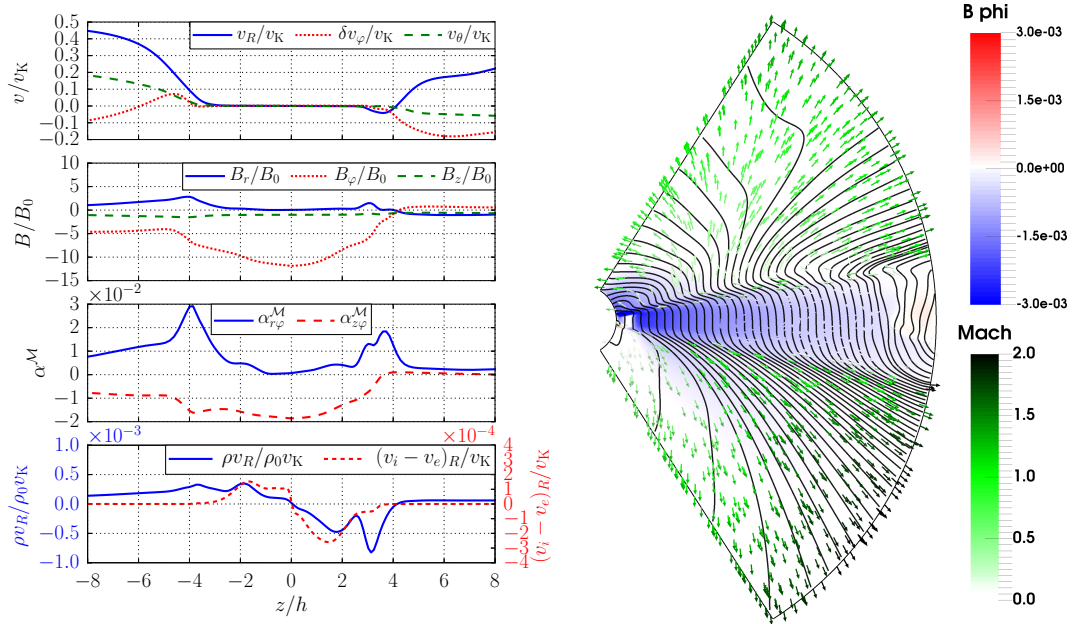


FIGURE VIII.15. – À gauche : profils verticaux dans le run R1 – M3, moyennés radialement entre $6r_0$ et $8r_0$ et temporellement entre $800T_0$ et $1000T_0$; de haut en bas : fluctuations en vitesse, champ magnétique, stress magnétique radial et vertical, flux de masse et courants électriques. À droite : écoulement moyen entre $800T_0$ et $1000T_0$: champ magnétique toroïdal B_ϕ (couleurs), vitesse poléoïdale (flèches vertes) et champ magnétique (courbes intégrales).

Le disque voit une seule polarité du champ toroïdal B_ϕ . En conséquence, le flux de moment cinétique $\mathcal{M}_{z\phi}$ est unidirectionnellement dirigé d'un hémisphère vers l'autre. L'extraction de moment cinétique depuis la face supérieure du disque cause une nappe d'accrétion ; ce moment cinétique est transmis à la face inférieure, où la matière est accélérée azimuthalement et éjectée poloïdalement. De telles configurations asymétriques ont été observées dans des simulations locales stratifiées incluant la diffusion ambiolaire. En l'absence de flux vertical net, Simon et al. [308] attribuent ces configurations à un domaine spatial trop restreint pour capturer les cycles de dynamo MRI. En revanche, avec un flux vertical net, les simulations de Lesur et al. [195] et Bai [15] produisent ces solutions de façon robuste. En géométrie globale, Gressel et al. [134] n'ont pas reporté de telle asymétrie. Cependant, une polarité de $B_\phi < 0$ commence à dominer le disque sur leur figure 5 (panneau inférieur), après $71 \text{ ans} \equiv 200T_0$ d'intégration. Comme je le montre dans la section suivante, cela correspond typiquement au temps de développement des configurations unilatérales dans nos simulations.

VIII.4.4.2 Évolution séculaire des symétries

Je définis deux diagnostics pour caractériser la symétrie du disque :

$$\iota_\varphi := \frac{\int_{\mathcal{D}} \text{sign}(\langle B_\varphi \rangle_\varphi) \, dr \, d\theta}{\int_{\mathcal{D}} dr \, d\theta}; \quad (\text{VIII.10a})$$

$$\sigma_\varphi := \frac{\int_{\mathcal{D}} \text{sign}(\langle \mathcal{M}_{z\varphi} \rangle_\varphi) \times \text{sign}(z) \, dr \, d\theta}{\int_{\mathcal{D}} dr \, d\theta}. \quad (\text{VIII.10b})$$

Ces diagnostics sont comparables aux coefficients de Fourier d'ordre zéro et un pour le profil vertical $B_\varphi(z)$. Le premier vaut $\iota_\varphi = \pm 1$ lorsque le disque ne voit qu'une seule polarité de B_φ ; le second vaut $\sigma_\varphi = \pm 1$ si chaque hémisphère voit une polarité différente de B_φ . Ces estimateurs sont choisis pour avoir une variance importante, et pour converger vers les valeurs 0 ou ± 1 dans les configurations extrêmes précédentes.

La simulation 'R1 – P2' adopte une configuration unilatérale après $200T_0$. Je trace les coefficients de symétrie associés sur la [Figure VIII.16](#), calculés à partir d'une série de cartes moyennes échantillonnées toutes les $10T_0$. Jusqu'à $100T_0$, $\iota_\varphi \approx 0$ implique que le disque est symétrique de part et d'autre du plan médian. Dans les premiers instants, $\sigma_\varphi > 0$ correspond au cisaillement $\partial_z [v_\varphi B_z]$ du champ vertical par la rotation différentielle entre le disque et la couronne. La MRI/HSI favorise ensuite la phase opposée pour $B_\varphi(z)$ dans le disque, i.e. une configuration du type "circulation méridionale". À $100T_0$, la polarité $B_\varphi > 0$ commence à dominer dans le disque, jusqu'à remplir complètement le disque après $200T_0$. Le fait que $\sigma_\varphi \rightarrow 0$ atteste du caractère unilatéral de la configuration finale.

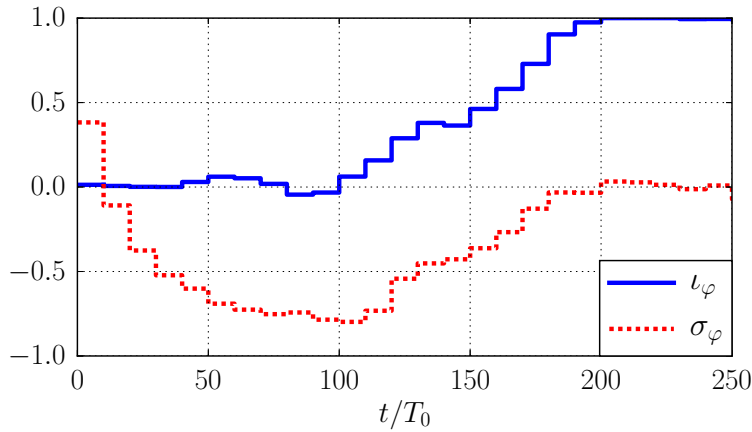


FIGURE VIII.16. – Évolution des coefficients de symétrie dans le run 'R1 – P2'.

La configuration initiale ne contient pas de flux magnétique toroïdal net, donc le flux net traversant le disque doit résulter d'échanges avec les bords du domaine de calcul. Plus précisément, le champ toroïdal est amplifié dans le disque par la MRI/HSI, et l'une des polarités est transportée verticalement hors du disque. Pour le montrer, je trace sur la [Figure VIII.17](#)

la structure verticale du disque dans le run ‘R1 – P2’ au cours de sa transition vers une configuration unilatérale. La nappe de courant électrique, qui se situait à proximité du plan médian dans les configurations extrêmes précédentes (voir [Figure VIII.1](#) et [Figure VIII.11](#)), se trouve à une altitude $z/h \approx -1.5$ et se déplace vers l’hémisphère inférieur. Comme indiqué précédemment, la nappe de courant est localisée là où $B_R = B_\phi \approx 0$, donc cette dérive verticale correspond à la croissance d’une polarité prédominante dans le disque. L’induction ambipolaire est responsable de ce processus de transport d’après le panneau inférieur de la [Figure VIII.17](#).

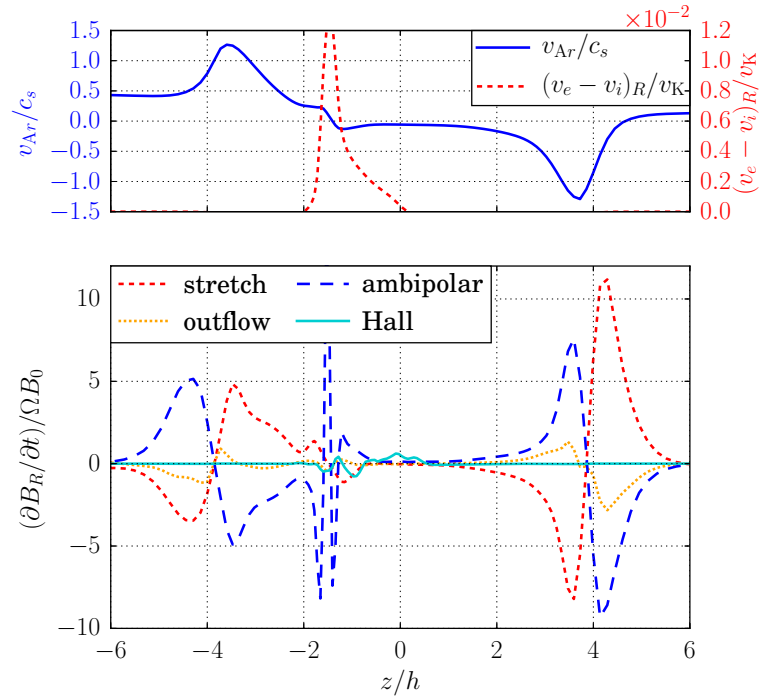


FIGURE VIII.17. – Profils verticaux dans le run ‘R1 – P2’, moyennés radialement entre $5.5r_0$ et $6r_0$ et temporellement entre $120T_0$ et $130T_0$. *Panneau supérieur* : vitesse d’Alfvén radiale $B_R/\sqrt{\rho}$ (trait bleu) et vitesse relative des charges (tirets rouge); *panneau inférieur* : induction du champ magnétique radial $\partial_t B_R$ d’après (VIII.9a).

Voir [équation 1.32](#).

La transition d’une configuration symétrique $(\iota_\phi, \sigma_\phi) = (0, \pm 1)$ vers une configuration unilatérale $(\iota_\phi, \sigma_\phi) = (\pm 1, 0)$ relève vraisemblablement de la stabilité de la nappe de courant [195]. Comme la diffusivité ambipolaire $\eta_A \equiv \tau_{in} v_A^2$, la dissipation d’énergie magnétique serait minimale si la nappe de courant restait confinée dans le plan médian, où la densité est maximale et où le champ magnétique horizontal tend à s’annuler. La surface $B_\phi = 0$ décrit des ondulations dans le régime “circulation méridionale” des [Figures VIII.11](#) et [VIII.13](#), s’écartant de la solution moins dissipative. Notre modèle global de disque stratifié n’est pas idéal pour étudier la corrugation des nappes de courant dans la phase saturée de la MRI-ambipolaire; j’y reviendrai brièvement dans la [Section IX.2.3.5](#).

Pour expliquer la bifurcation vers des configurations d'éjection unilatérale, la [Figure VIII.10](#) peut fournir un argument heuristique. Les simulations 'R1 – M3' (rond bleu) et 'R10 – P3' (carré rouge) atteignent une configuration unilatérale, à la différence des autres simulations à $\beta = 5 \times 10^3$. Ces deux simulations atteignent également des valeurs plus élevées pour le taux de pertes de masse dans le vent. Il est envisageable qu'à champ magnétique faible, la configuration d'éjection unilatérale soit préférable car elle maximise l'extraction de moment cinétique du disque, et donc la libération d'énergie gravitationnelle par accrétion.

VIII.4.5 Espace des phases

Je représente sur la [Figure VIII.18](#) les coefficients de symétrie représentatifs de nos simulations axisymétriques. Dans l'ensemble, les simulations se répartissent proches des extrémités des axes, $(\sigma_\varphi, \iota_\varphi) = (0, \pm 1)$ ou bien $(\sigma_\varphi, \iota_\varphi) = (\pm 1, 0)$. À part la simulation 'R10 – M3' (carré bleu), toutes les autres adoptent une configuration dominante bien définie. La trajectoire d'une simulation donnée reste relativement simple dans ce plan. Les simulations sur l'axe horizontal $(\sigma_\varphi, \iota_\varphi) = (\pm 1, 0)$ orbitent autour des marqueurs associés. Les simulations sur l'axe vertical $(\sigma_\varphi, \iota_\varphi) = (0, \pm 1)$ ont commencé comme les autres, puis elles ont bifurqué en diagonale vers leur configuration finale, suivant une trajectoire analogue à la [Figure VIII.16](#).

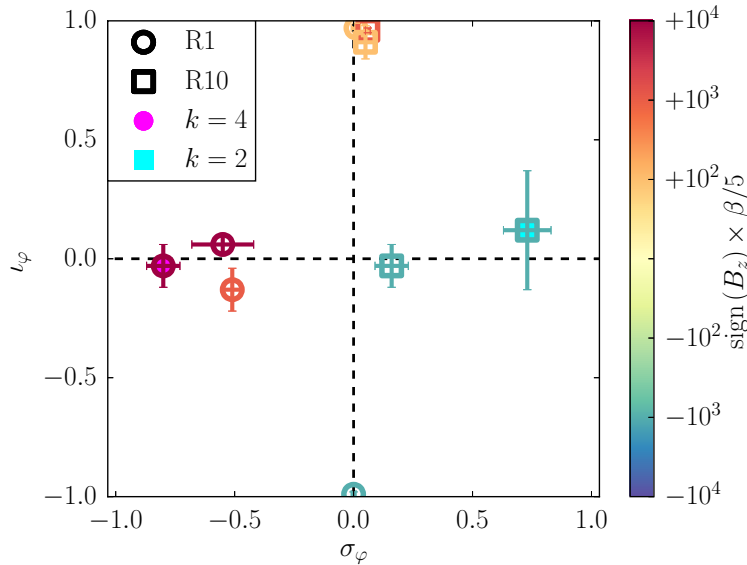


FIGURE VIII.18. – Coefficients de symétrie ι_φ et σ_φ représentatifs des neuf simulations stratifiées axisymétriques avec $\Sigma(1\text{AU}) = 500 \text{ g.cm}^{-2}$.

Sur la [Figure VIII.18](#), la brisure de symétrie gauche/droite semble corrélée avec la polarité du champ magnétique net. Les simulations accrétantes/éjectantes (à gauche) ont toutes $B_0 > 0$, tandis que les simulations produisant des circulations méridionales (à droite) ont $B_0 < 0$. Comme

expliqué dans la [Section VIII.4.3](#), nous pensons que cette corrélation est biaisée par notre configuration numérique. Sur les quatre simulations qui ont bifurqué vers une configuration d'éjection unilatérale, trois d'entre elles ont $B_0 > 0$, et elles ont toutes $\beta \leq 5 \times 10^{-3}$. Le cisaillement vertical entre le disque et la couronne ne suffit donc pas à imposer une structure d'accrétion-éjection lorsque l'intensité du champ magnétique augmente.

Dans le régime $\beta \gg 1$.

Seule la gravité fait explicitement intervenir z^2 , indépendant de l'hémisphère.

Notons finalement l'apparente brisure de symétrie haut/bas suivant l'orientation du champ magnétique vertical net. L'éjection unilatérale est orientée dans la direction opposée au champ net pour les quatre simulations axisymétriques concernées. Cette corrélation est fortuite à nouveau : la coordonnée verticale z *signée* n'intervient dans aucune équation, donc la physique devrait être indépendante du choix d'un hémisphère. La simulation ' $2\pi - R1 - P2$ ', non-représentée sur ce diagramme, converge vers une structure d'éjection unilatérale orientée suivant le champ net vertical.

VIII.5 ÉCOULEMENTS ZONAUX

NOM	r/AU	$\beta/5$	n_{zf}	CONFIG.
R1 – P4	1	10^4	0	CM
R1 – P4 – C4	1	10^4	0	CM
R1 – P3	1	10^3	7	CM
R1 – P3 – H	1	10^3	3	UL
R1 – P2	1	10^2	5	UL
R1 – M3	1	-10^3	0	UL
R10 – P3	10	10^3	9	UL
R10 – P2	10	10^2	9	UL
R10 – M3	10	-10^3	0	AE
R10 – M3 – C2	10	-10^3	0	AE
3D – R1 – P4	1	10^4	0	CM
3D – R1 – P3	1	10^3	2	CM
3D – R1 – M4	1	-10^4	0	AE
$2\pi - R1 - P2$	1	10^2	5	UL
3D – R10 – P3	10	10^3	2	CM

TABLE VIII.2. – État final des simulations : nombre d'écoulements zonaux n_{zf} identifiés, et configuration magnétique prédominante : accrétion-éjection (AE), circulation méridionale (CM) ou unilatérale (UL).

Cette dernière section est dédiée aux structures de type "écoulements zonaux" produites dans certaines simulations. Je décris leurs propriétés générales, puis je caractérise le mécanisme d'auto-organisation sous-jacent.

La [Table VIII.2](#) indique le nombre de motifs organisés se répétant dans le domaine de calcul pour chaque simulation listée, ainsi que la configuration magnétique prédominante en fin de simulation. Comme les temps d'intégration des simulations 3D sont plus courts, les résultats peuvent différer des runs 2D équivalents, reflétant plutôt l'état antérieur du système.

VIII.5.1 Aperçu global

La [Figure VIII.19](#) représente l'écoulement moyen dans la simulation axisymétrique 'R1 – P2'. Le champ magnétique est organisé suivant une configuration d'éjection unilatérale dans cette simulation : le disque accrète en surface dans l'hémisphère supérieure, et lance un vent magnétisé dans l'hémisphère inférieure. À l'intérieur du disque, la densité est distribuée en une série de tores régulièrement espacés de $\delta r \approx 2H$. Les lignes de champ magnétique sont piégées entre les tores de densité. Cette structure radiale se prolonge dans la couronne : la densité du vent reste anti-corrélée au flux magnétique. L'accélération du vent est maximale dans les zones où la magnétisation $1/\beta$ est maximale.

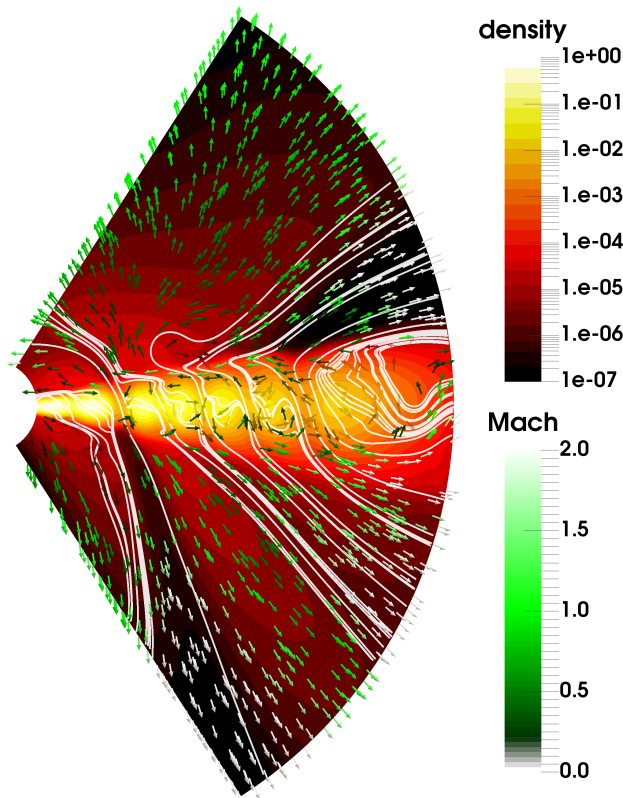


FIGURE VIII.19. – Écoulement moyen dans le run axisymétrique 'R1 – P2' moyenné entre $500T_0$ et $700T_0$: densité (*carte de couleurs*), champ de vitesse poléoïdale (*flèches vertes*) et champ magnétique (*courbes intégrales*).

Notre échantillon est trop petit pour dégager des tendances nettes depuis la [Table VIII.2](#). Seules les configurations symétriques d'accrétion-éjection

ne produisent pas de structures distinctement organisées. Des écoulements zonaux sont observés dans les situations de circulation méridionale et d'éjection unilatérale. Le nombre de motifs indiqué donne une mesure de l'espacement radial entre les concentrations de flux magnétique. Ce nombre est plus grand dans les simulations sur 10AU – 100AU ; l'espacement entre les bandes dépend donc de l'état d'ionisation du disque.

VIII.5.2 Comparaisons 2D versus 3D

Les structures apparentes sur la [Figure VIII.19](#) sont axisymétriques par construction, mais leur formation et stabilité ne sont pas garanties a priori en 3D. Je montre sur la [Figure VIII.20](#) que des écoulements zonaux sont formés dans les simulations 'R1 – P3' et son équivalent '3D – R1 – P3'. L'auto-organisation se déroule sur les mêmes échelles de temps $\delta t \approx 50T_0$, et produit des structures semblables : même séparation radiale $\delta r \lesssim 2h$ dans les deux simulations, et même contraste d'un facteur 100 en magnétisation $1/\beta$. L'auto-organisation n'est donc pas inhibée en 3D.

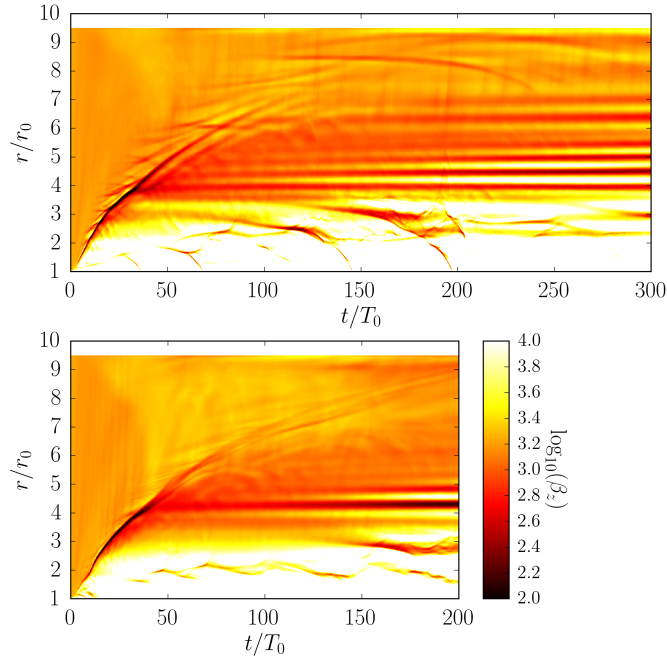


FIGURE VIII.20. – Profil radial de $\beta_z \equiv 2P/B_z^2$ au cours du temps dans les runs 'R1 – P3' (panneau supérieur) et '3D – R1 – P3' (panneau inférieur).

Pour ce qui est de la stabilité à long terme des écoulements zonaux, nos simulations n'ont pas été intégrées suffisamment longtemps pour permettre une réponse définitive. Les bandes apparentes sur la [Figure VIII.20](#) survivent au moins 20 orbites locales sur un quart de disque. D'après le profil radial de vorticité potentielle, le critère de stabilité des ondes de Rossby [RWI, 213] suggère que ces écoulements zonaux seraient instables. Les modes RWI les plus vigoureux ont une fréquence azimuthale faible

[207], or la géométrie en quart de disque ne permet pas de capturer les modes de périodicité 2π , π ou $2\pi/3$. Pour tester la robustesse de ces structures, j'ai réalisé une simulation supplémentaire sur un disque complet.

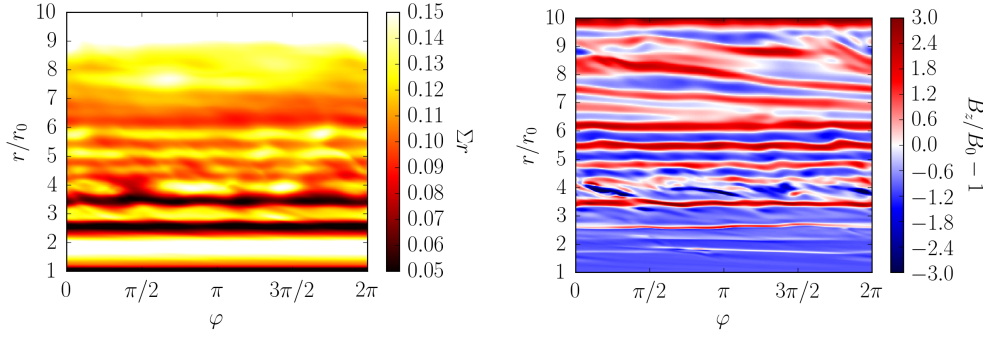


FIGURE VIII.21. – Cartes équatoriales dans le run ‘ $2\pi - R1 - P2'$ ’ à $t = 200T_0$; à gauche : densité surfacique Σ intégrée sur la hauteur du disque et multipliée par r pour aplatir l'image; à droite : fluctuations relatives du champ magnétique vertical à travers le plan médian.

La Figure VIII.21 représente deux cartes équatoriales dans la simulation ‘ $2\pi - R1 - P2'$ ’ après $200T_0$ d'intégration. L'anti-corrélation entre les profils radiaux de densité surfacique et de flux magnétique est apparente. Jusqu'à $r/r_0 \leq 6.5$, les deux cartes sont axisymétriques en bonne approximation. Les bandes de champ magnétique subissent des oscillations de faible amplitude, avec une période azimuthale de l'ordre de $2\pi/8$, mais la bande de flux magnétique localisée à $r/r_0 \approx 2.6$ a déjà survécu à plusieurs dizaines d'orbites locales. Un test de stabilité plus rigoureux nécessitera une simulation à long terme, avec si possible un schéma numérique moins diffusif. Comme mentionné en Section VIII.2.1, il n'est pas exclu que la diffusion numérique due au solveur HLL, nécessaire pour inclure l'induction Hall, facilite le maintien d'un écoulement axisymétrique.

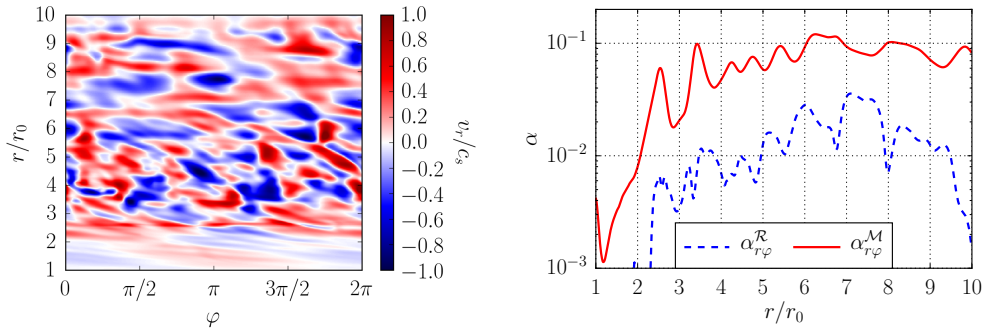


FIGURE VIII.22. – À gauche : coupe équatoriale du nombre de Mach sonique radial v_r/c_s dans le run ‘ $2\pi - R1 - P2'$ ’ à $t = 200T_0$. À droite : profils radiaux des coefficients de transport turbulent hydrodynamique $\alpha_{r\varphi}^R$ (tirets bleus) et magnétique $\alpha_{r\varphi}^M$ (trait rouge).

Sur la Figure VIII.22 gauche, je représente la distribution de vitesse radiale dans le plan médian du run ‘ $2\pi - R1 - P2'$ ’. Il est surprenant de consta-

La valeur $\beta = 5 \times 10^2$ fut choisie pour assurer que les structures soient bien résolues radialement, et pour favoriser un fort contraste en densité.

ter que l'écoulement entretient une turbulence sonique dans le disque, sans détruire instantanément les structures organisées de la [Figure VIII.21](#). Ce niveau de saturation turbulente n'est pas atteint dans les autres simulations 3D, pour lesquelles le nombre de Mach turbulent avoisine $\mathcal{M} \lesssim 10\%$. Parmi les origines possibles de cette différence, nous pouvons compter l'intensité accrue du champ magnétique, ainsi que l'augmentation du domaine azimuthal pour un écoulement potentiellement soumis à la RWI.

Cela prouve que le champ de vitesse n'est pas systématiquement biaisé vers une configuration axisymétrique par la diffusion numérique. Malheureusement, cela jette aussi un doute sur la pertinence des autres simulations stratifiées (axisymétriques et 3D en quart de disque) vis-à-vis du niveau de saturation de la turbulence hydrodynamique. À défaut de temps de calcul et d'un schéma numérique moins diffusif, cette question est laissée en suspens. La [Figure VIII.22](#) droite nous assure que le couple magnétique reste dominant par rapport au couple hydrodynamique turbulent. Cette activité turbulente n'invalide aucun des mécanismes décrits par ailleurs, et elle démontre que le processus d'auto-organisation des écoulements zonaux est robuste.

VIII.5.3 *Transport radial du flux magnétique*

Comme l'espacement entre les bandes dépend de l'état d'ionisation du disque, il est intéressant de tester la formation d'écoulements zonaux dans un disque deux fois plus massif, représentant par exemple un système protostellaire plus jeune. La simulation 'R1 – P3 – H' est initialisée avec une densité surfacique $\Sigma(r) = 10^3(r/1\text{AU})^{-1} \text{g.cm}^{-2}$. En augmentant la masse du disque, nous augmentons l'écrantage des couches profondes aux rayonnements ionisants, et diminuons ainsi la fraction d'ionisation dans le plan médian. Cela augmente considérablement l'intensité des diffusivités Hall et Ohm dans le disque profond, comme le montre la [Figure VIII.23](#) gauche, en comparaison à notre configuration standard (voir [Figure VII.6](#)).

Exceptionnellement, le rapport ℓ_H/h n'est pas borné de façon artificielle; voir [Section VII.4.2](#).

La [Figure VIII.23](#) droite montre le transport radial de flux magnétique dans cette simulation, à comparer avec le run équivalent 'R1 – P3' sur la [Figure VIII.20](#). Le nombre de motifs produit est réduit à 3 au lieu de 7 : les bandes se forment à plus grand rayon, avec un espacement accru $\delta r/h \gtrsim 3$. Le flux magnétique est entièrement évacué hors des régions internes du disque $r/r_0 < 5$ au cours des premières $200T_0$. Durant cette phase, le champ magnétique équatorial (B_r, B_ϕ) est amplifié dans le disque par la HSI et adopte une configuration de type circulation méridionale (voir [Table VIII.2](#)). Dans le plan médian, la vitesse électronique est orientée vers l'extérieur, comme sur la [Figure VIII.11](#) panneau 4. L'induction Hall induit donc un transport radial du flux magnétique vers l'extérieur dans cette simulation. Ce résultat est opposé aux tendances dégagées par Bai & Stone [20], où le disque adopte systématiquement une configuration de type accrétion-éjection, avec une nappe de courant dirigée dans le sens opposé. Comme mentionné dans la [Section VIII.4.3](#), la brisure de symétrie

observée dans nos simulations est sensible aux conditions initiales, et pourrait disparaître en imposant un champ magnétique incliné dès le départ, comme l'ont fait [Bai & Stone](#).

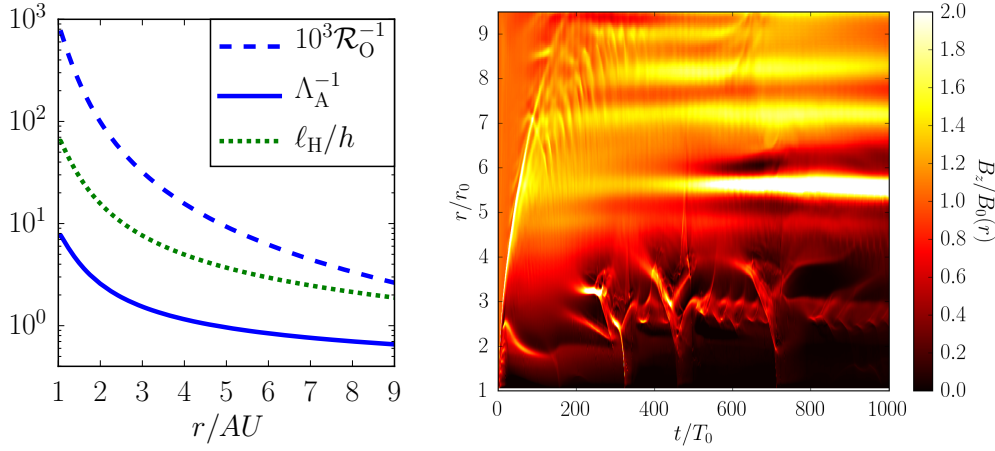


FIGURE VIII.23. – À gauche : nombres adimensionnés caractérisant les effets MHD non-idéaux dans le plan médian du run ‘R1 – P3 – H’, à comparer à la [Figure VII.6](#). À droite : transport radial du flux magnétique vertical net, normalisé à la distribution initiale $B_0(r)$.

Cette simulation confirme que le transport radial de flux magnétique induit par l’effet Hall n’est pas inhibé par la diffusion ambipolaire. Le flux magnétique est évacué hors des régions sensibles à la HSI, suivant la même phénoménologie que celle observée dans nos simulations non-stratifiées, sur une échelle de temps de quelques dizaines d’orbites locales. Comme [Bai & Stone](#) le soulignent, le taux de transport de flux magnétique dépend de la microphysique du disque : le flux magnétique est évacué hors des régions où la fraction d’ionisation est la plus faible, et où simultanément la HSI induit les couples magnétiques les plus intenses. Idéalement, cela permettrait de contraindre la distribution spatiale du flux magnétique connaissant la distribution des poussières fines (cf. [295] & [Section I.4.3](#)).

En augmentant la densité surfacique d’un facteur 2 à β constant, nous avons uniquement changé les propriétés d’ionisation du disque. La simulation ‘R1 – P3 – H’ pourrait correspondre à un disque plus jeune et plus massif, ou bien représenter un disque soumis à des taux d’ionisation plus faibles. Par exemple, si notre estimation du taux d’ionisation par les rayons cosmiques est trop optimiste [79], alors la fraction d’ionisation devrait être réduite de façon analogue dans les régions denses ($\Sigma \gtrsim 100\text{g}\cdot\text{cm}^{-2}$).

VIII.5.4 Confinement magnétique

Pour comprendre quel processus physique assure le confinement du flux magnétique, nous pouvons décomposer l’équation d’induction pour $\partial_t \langle B_z \rangle_{\varphi,z}$. Cette démarche ne produit malheureusement pas des profils satisfaisants, présumément à cause des dérivées spatiales qui doivent être

L’analogie des plasmoides 2D apparaît à $330T_0$, $460T_0$ et $720T_0$ (voir [Section v.3](#) & [Figure VI.8](#))

estimées numériquement avant d'être moyennées. À la place, je vais me concentrer directement sur les EMFs moyennées. Le transport du flux magnétique vertical obéit à l'équation d'induction :

$$\left\langle \frac{\partial B_z}{\partial t} \right\rangle_{\varphi, z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \langle r (\mathcal{E}_I + \mathcal{E}_O + \mathcal{E}_H + \mathcal{E}_A)_{\varphi} \rangle_{\varphi, z}. \quad (\text{VIII.11})$$

Le flux magnétique $\langle B_z \rangle$ tend donc à augmenter lorsque l'EMF \mathcal{E}_{φ} décroît radialement. Les EMFs idéale, Hall et ambipolaire sont explicitées comme

$$\mathcal{E}_I \equiv -\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad \mathcal{E}_H \equiv \ell_H \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad \mathcal{E}_A \equiv \eta_A \mathbf{J}_{\perp}, \quad (\text{VIII.12})$$

où $\mathbf{J}_{\perp} \equiv \mathbf{J} - (\mathbf{J} \cdot \mathbf{B} / \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B}$ est le courant électrique projeté perpendiculairement au champ magnétique local (voir [Section 1.3](#)). Je trace leurs profils sur la [Figure VIII.24](#), l'EMF ohmique \mathcal{E}_O étant omise car négligeable.

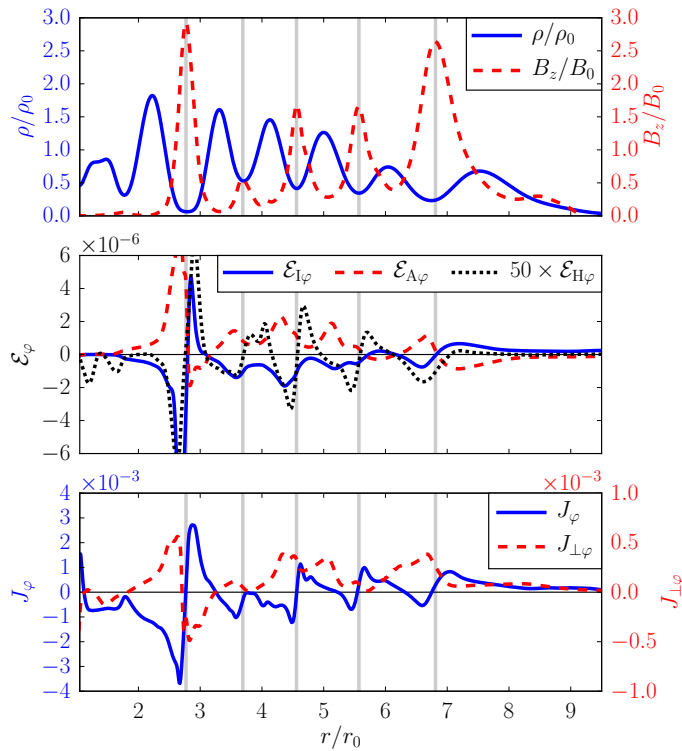


FIGURE VIII.24. – Profils radiaux dans le run 'R1 – P2 moyenné entre $500T_0$ et $700T_0$. *Premier panneau* : anti-corrélation masse/flux ; *second panneau* : EMFs idéale (trait bleu), ambipolaire (tirets rouges) et Hall (pointillés noirs, multiplié par 50) ; *troisième panneau* : composantes toroïdales du courant électrique (trait bleu) et de sa projection perpendiculaire au champ magnétique local (tirets rouges).

Avec surprise, seule l'EMF ambipolaire est décroissante au niveau des concentrations de flux magnétique. Elle est donc confinante, alors que les EMFs idéale et Hall jouent un rôle destructeur. L'EMF Hall est d'ailleurs négligeable d'un facteur ~ 50 une fois que l'écoulement est organisé, et l'équilibre se fait essentiellement entre les inductions idéale et ambipolaire.

La *diffusion* ambipolaire reste un processus dissipatif : si elle permet l'accumulation de flux magnétique dans une direction, elle doit causer une diffusion au moins aussi rapide d'une autre composante du champ magnétique. Je vérifie que la dissipation d'énergie magnétique se fait principalement sur la composante toroïdale B_φ dans la direction verticale.

Bai & Stone [19] ont noté que la diffusion ambipolaire pouvait faciliter la concentration de flux magnétique en bandes axisymétriques. Comme ils observent également l'organisation du champ magnétique dans des simulations MHD idéales, le mécanisme qu'ils proposent repose uniquement sur l'induction idéale \mathcal{E}_I . Je discute dans l'Annexe B des phénomènes d'auto-organisation que j'ai observés en MHD idéale. Comme Bai & Stone l'ont montré, l'auto-organisation idéale ne survit pas dans des boîtes suffisamment grandes, ce qu'ont confirmé mes simulations non-stratifiées. Je montre dans l'Annexe B que des structures axisymétriques peuvent survivre en géométrie globale dans des simulations MHD ambipolaires, suggérant l'existence de deux mécanismes d'auto-organisation distincts.

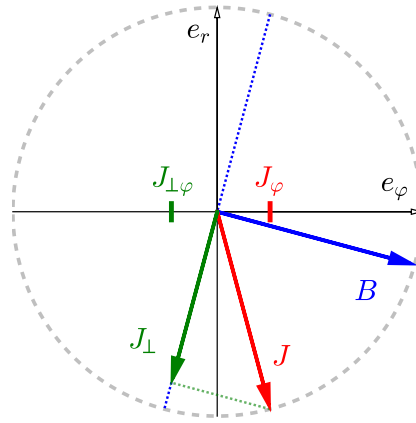


FIGURE VIII.25. – Projection du courant électrique (flèche rouge) perpendiculairement au champ magnétique (flèche bleue) dans le plan (e_φ, e_r) . En raison des cisaillements képlérien et Hall, le champ magnétique est dans le quadrant supérieur gauche ou inférieur droit. Si le courant électrique est principalement radial, alors sa composante toroïdale change de signe par projection (flèche verte).

Pour gagner en compréhension, je montre sur le troisième panneau de la Figure VIII.24 que la composante toroïdale du courant électrique projeté $J_{\perp,\varphi}$ a, en moyenne, un signe opposé à celui du courant initial J_φ . D'après (VIII.12), la composante toroïdale de l'EMF ambipolaire prend une forme analogue à celle de l'EMF ohmique, $\mathcal{E}_{O,\varphi} \equiv \eta_O J_\varphi$, mais avec une diffusivité effective qui serait négative, i.e. une anti-diffusion.

Le changement de signe de J_φ par projection orthogonale au champ magnétique est illustré sur la Figure VIII.25. Cette propriété requiert que le champ magnétique soit principalement toroïdal, et que la composante principale du courant électrique soit radiale, $\langle J_r \rangle \equiv -\partial_z \langle B_\varphi \rangle$. La même in-

Le champ magnétique net vertical est toujours faible par rapport aux composantes horizontales.

version de signe se produit si le champ B et/ou le courant J initial change de signe ; il n'y a priori pas de discrimination entre les configurations du type accrétion-ejection et circulation méridionale.

Pour aborder le mécanisme responsable de l'auto-organisation ambipolaire, nous pouvons nous rappeler que l'EMF ambipolaire est analogue à l'EMF idéale, en remplaçant la vitesse du fluide par la force de Lorentz :

$$\mathcal{E}_A \equiv -\frac{1}{\rho_i \rho_n \gamma_{in}} \mathbf{F} \times \mathbf{B}. \quad (\text{VIII.13a})$$

Si B_ϕ et J_r sont les composantes dominantes du champ magnétique et du courant électrique, alors la force de Lorentz est dominée par la composante verticale $F_z \simeq J_r B_\phi$ près du plan médian. Comme l'auto-organisation se produit en configuration axisymétrique, l'induction de champ vertical B_z ne peut venir que du cisaillement de champ radial par $\partial_r [F_z B_r]$. D'ailleurs, pour qu'un changement de signe se produise lors de la projection perpendiculairement au champ magnétique local, la [Figure VIII.25](#) montre la nécessité d'avoir B_r et J_ϕ non-nuls. Pour compléter la boucle, il nous faudrait connaître la rétro-action du champ vertical B_z sur les composantes B_r et F_z ; je n'ai pas exploré cette piste plus loin.

Le dernier élément nécessaire à la formation des structures observées est une corrélation positive du stress total $\mathcal{R}_{r\phi} + \mathcal{M}_{r\phi}$ avec le flux magnétique net B_z . Les profils radiaux de stress tracés sur la [Figure VIII.26](#) sont effectivement corrélés avec les maxima de B_z indiqués sur la [Figure VIII.24](#), et j'ai vérifié que cette corrélation ne vient pas de la normalisation par la pression locale. Le moment cinétique étant évacué hors des régions de stress maximal, la masse et le flux magnétique sont séparés radialement.

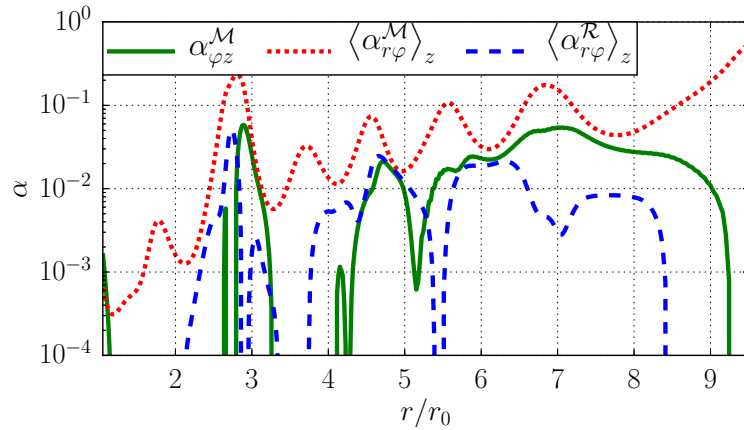


FIGURE VIII.26. – Profils radiaux du stress normalisé dans le run 'R1 – P2' : stress magnétique vertical en surface du disque $\alpha_{\phi z}^{\mathcal{M}}$ (trait vert), stress radial magnétique $\langle \alpha_{r\phi}^{\mathcal{M}} \rangle_z$ (pointillés rouges) et hydrodynamique $\langle \alpha_{r\phi}^{\mathcal{R}} \rangle_z$ (tirets bleus) moyennés verticalement dans le disque.

Le mécanisme d'auto-organisation Hall décrit précédemment (voir Kunz & Lesur [184] & [Chapitre v](#)) ne s'exprime jamais dans nos simulations globales stratifiées. J'ai élaboré plusieurs tests pour forcer l'induction Hall à

jouer un rôle confinant, en vain. Dans les simulations stratifiées en MHD Hall, le flux magnétique est transporté radialement jusqu'à son évacuation complète hors du domaine de calcul ; c'est l'ajout d'une diffusion ambipolaire qui permet la formation de structures magnétiques quasi-stationnaires. Il est difficile d'exclure définitivement le processus d'auto-organisation Hall dans notre modèle global de disque stratifié ; néanmoins, nous pouvons fournir des justification au fait qu'il ne se manifeste jamais.

Le mécanisme d'auto-organisation Hall requiert que le couple magnétique $\mathcal{M}_{r\phi}$ devienne une fonction décroissante du flux magnétique net à partir d'une certaine valeur seuil [184]. De cette façon, le flux et le stress magnétique peuvent être anti-corrélés, permettant à l'effet Hall de jouer un rôle confinant. En configuration stratifiée, la composante $\mathcal{M}_{r\phi}$ reste pertinente pour étudier le transport radial du flux magnétique net. À la différence des configurations non-stratifiées, le disque n'est plus connecté verticalement par des conditions périodiques : la dynamique dans la couronne peut affecter le transport du flux magnétique dans le disque. Comme l'illustre la Figure VIII.26, le couple magnétique est toujours maximal dans les zones d'accumulation de flux magnétique. Ces contraintes magnétiques sont provoquées par le vent, même (et surtout) dans les régions où le flux net serait suffisamment intense pour stabiliser le disque. Comme le flux et le stress magnétiques restent corrélés, la condition d'auto-organisation Hall n'est jamais satisfaite en configuration stratifiée.

VIII.5.5 Propriétés hydrodynamiques et saturation

Pour conclure, j'examine les propriétés hydrodynamiques des écoulements zonaux observés en configuration stratifiée. La première question à laquelle je souhaite répondre concerne la capacité de ces structures à capturer des poussières (cf. [349] & Section VI.2.4). La seconde question est relative à la saturation du processus d'auto-organisation. Pour y répondre, je me concentre sur deux diagnostics particuliers : les déviations au profil de rotation képlérienne Ω/Ω_K , et le cisaillement radial adimensionné $\partial \log \Omega / \partial \log r$ qui en résulte. Ces deux quantités sont moyennées sur la hauteur du disque dans le run 'R1 – P2', et tracées sur la Figure VIII.27.

Les déviations au profil de rotation képlérienne sont de l'ordre de 3%. La vitesse orbitale est déphasée de $\pi/2$ par rapport aux fluctuations de densité du gaz : Ω/Ω_K est maximal lorsque la densité augmente radialement, et minimale lorsque la densité décroît. De cette façon, un équilibre est atteint entre le gradient radial de pression et les forces inertielles. Entre les maxima et les minima, la vitesse orbitale transite de super-képlérienne à sub-képlérienne ; les poussières auraient donc tendance à être accumulées dans les maxima de densité. En l'absence de diffusion turbulente, l'accumulation de poussières peut opérer sur quelques périodes orbitales [360].

Le cisaillement adimensionné $q := \partial \log \Omega / \partial \log r$ oscille entre deux valeurs remarquables. Dans le régime $q < -2$, l'écoulement serait hydrodynamiquement instable avec un profil de moment cinétique spécifique

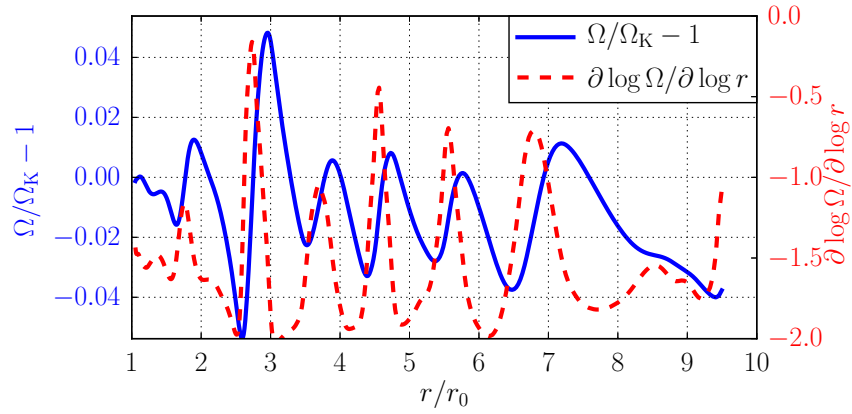


FIGURE VIII.27. – Profils radiaux dans le run 'R1 – P2', moyennés sur la hauteur du disque entre $500T_0$ et $70T_0$: déviations au profil de rotation képlérienne (*trait bleu*) et cisaillement adimensionné (*tirets rouges*).

$j \equiv r^2\Omega$ radialement décroissant [279]. La borne inférieure $q = -2$ est atteinte dans les maxima de densité. L'inégalité $q \geq -2$ suggère que des processus de transport hydrodynamiques maintiennent le disque dans un état marginalement stable. Le couple hydrodynamique $\alpha_{r\phi}^R$ tracé sur la Figure VIII.26 n'est pas clairement accru dans les régions où $q \approx 2$; je montre en Annexe B, via une simulation locale, que la turbulence hydrodynamique joue bien un rôle dans l'état saturé en phase organisée. Quand le cisaillement décroît vers $q \approx -2$ dans certaines régions, la conservation de la circulation du fluide impose que q augmente dans le domaine restant, i.e. dans les concentrations de flux magnétique. Pour $q = 0$, l'écoulement en rotation solide est insensible à la MRI/HSI; pour $q \rightarrow 0^-$, ces instabilités disparaissent à $\beta \rightarrow \infty$ (faible magnétisation).

Résumé

Ce chapitre rassemble les résultats préliminaires de simulations globales stratifiées dans deux nouveaux régimes physiques. Dans un premier temps, je me suis penché sur la dynamique des régions internes du disque à l'aide de simulations globales 3D en MHD idéale, toujours à champ faible. Dans un second temps, j'ai modifié le traitement de la thermodynamique du vent en incluant un chauffage par l'irradiation stellaire. À défaut de temps, cette piste nécessite relativement peu de développement, et peut fournir des observables caractéristiques des vents magnétothermiques.

Sommaire

1.	MHD idéale du disque interne	184
1.1.	Motivations	184
1.2.	Modèle	184
1.3.	Résultats	185
1.4.	Discussion	187
2.	Modèles de disques irradiés	188
2.1.	Modèle	188
2.2.	Vents purement thermiques	192
2.3.	Vents magnétothermiques	194

IX.1 MHD IDÉALE DU DISQUE INTERNE

IX.1.1 *Motivations*

Dans le [Chapitre VIII](#), j'ai montré que la théorie des jets magnétisés stationnaires est pertinente pour décrire le vent émanant d'un disque en régime MHD non-idéal, à condition de regarder l'écoulement moyenné azimuthalement et temporellement. J'ai aussi montré que les transports radiaux de flux magnétique et de moment cinétique sont dominés par un couple magnétique global, essentiellement laminaire à faible magnétisation. Sans développements techniques supplémentaires, je peux a priori appliquer la même méthode pour étudier les régions internes des disques protoplanétaires, où la fraction d'ionisation devrait être suffisamment élevée pour atteindre un régime de MHD idéale [109, 110]. La pertinence d'un modèle de disque stratifié en MHD idéale ne s'arrête pas aux disques protoplanétaires, mais peut concerner plus généralement les disques d'accrétion autour d'objets compacts (trous noirs stellaires, naines blanches).

Les problématiques soulevées concernent le régime de transport atteint dans le disque, ainsi que le lancement et la collimation d'un jet magnétisé. Je me placerai dans la limite $\beta \gg 1$ par soucis de stabilité numérique et de contrainte CFL. La MRI sera donc active dans le disque, et je m'attends à un transport turbulent du flux magnétique et du moment cinétique. Quant au jet, le bras de levier magnétique restera limité par la faible magnétisation du disque [320]. Cependant, je peux vérifier si l'absence de diffusion ambipolaire permet de consommer plus efficacement le flux de Poynting en surface du disque, dans l'espoir de produire un vent stationnaire et magnétiquement collimaté. Comme je vais le montrer, ces objectifs sont difficilement atteignable avec le modèle numérique que j'ai développé.

IX.1.2 *Modèle*

La principale différence avec les simulations globales stratifiées présentées dans le [Chapitre VIII](#) est l'absence d'effets MHD non-idéaux. Les densités de colonne et la fraction d'ionisation ne sont donc pas calculées. Nous nous placerons toujours dans la limite des champs magnétiques faibles, pour lesquels le disque est soumis à la MRI. La MRI ne sature pas en turbulence développée dans les simulations axisymétriques (voir [Annexe B](#)); cela nous contraint à exploiter des simulations 3D. Non-seulement les simulations 3D sont plus coûteuses en temps de calcul, mais elles sont aussi moins robustes vis-à-vis de la stabilité numérique du code PLUTO. Ces deux raisons rendent le développement d'un modèle MHD idéal long et pénible; c'est la raison pour laquelle j'ai finalement décidé de forcer le fluide à sortir à vitesse sonique sur les bords du domaine (voir [Section VII.3.4](#)). Le domaine de calcul est étendu à un quart de disque; le maillage, les conditions initiales et les conditions aux limites sont les mêmes que définies dans la [Section VII.3](#). Le contraste en température

entre le disque et la couronne est fixé à $k^2 = 36$, assez élevé pour faciliter le lancement d'un vent hydrodynamique et stabiliser le setup numérique. Comme je n'inclus aucun effet MHD non-idéal, le solveur approximatif de Riemann HLLD est utilisé en combinaison à la méthode de reconstruction moins diffusive UCT_CONTACT pour les EMFs.

Les trois simulations exploitées sont listées dans la [Table ix.2](#). Elles ne diffèrent que par la magnétisation initiale du plan médian. Chacune est intégrée sur $200T_0 \sim 6$ orbites externes ; ce délais permet d'accéder à un régime de turbulence saturée sur au moins $100T_0$.

NOM	β	$\alpha_{r\varphi}^{\mathcal{T}}$
ID1	5×10^2	$(6.5 \pm 0.3) \times 10^{-1}$
ID2	5×10^3	$(8.1 \pm 0.2) \times 10^{-2}$
ID3	5×10^4	$(8.5 \pm 0.4) \times 10^{-3}$

TABLE IX.1. – Simulations globales stratifiées en MHD idéale : nom du run, magnétisation du plan médian et stress moyen dans le disque.

IX.1.3 Résultats

Je montre sur la [Figure ix.1](#) l'écoulement moyen représentatif des simulations 'ID1' et 'ID2'. Dans les deux cas, l'écoulement est globalement sub-sonique dans la couronne. La surface sonique n'est pas uniformément atteinte par le vent dans le run 'ID1', elle est franchie près des bords dans les runs 'ID2' et 'ID3', et la surface magnéto-sonique rapide n'est jamais atteinte. L'orientation différente des lignes de courant et de champ magnétique poloïdal témoigne d'un écoulement non-idéal, où la variabilité spatio-temporelle du vent agit comme une diffusion turbulente.

Dans le disque profond des runs 'ID2' et 'ID3', le champ magnétique moyen reste approximativement vertical ; la turbulence joue un rôle résistif sans induire de circulation globale. En surface du disque, les lignes de champ magnétique sont visiblement pincées vers l'intérieur par des nappes d'accrétion à vitesse sonique $v_r/c_s \approx -1$. Cette structure est plus prononcée dans le run 'ID1', où le plan médian devient clairement excréant et transporte le flux magnétique vers l'extérieur.

Cette configuration globale s'apparente aux circulations méridionales décrites dans la [Section VIII.4.1](#). Le couple magnétique $\mathcal{M}_{z\varphi} \equiv -B_z B_\varphi$ transporte du moment cinétique de la surface $z \approx H$ vers le plan médian et isole le disque de la couronne. En défaut de moment cinétique, la surface accrète et induit un champ magnétique radial B_r à partir du champ net vertical. Le cisaillement radial produit ensuite un champ toroïdal B_φ , qui entretient le flux de moment cinétique $\mathcal{M}_{z\varphi}$ de la surface vers le plan médian. La saturation de cette boucle est assurée par une diffusion d'origine turbulente au lieu de la diffusion ambipolaire.

Cette boucle d'instabilité correspond à la MRI [191], et sa saturation produit un champ d'intensité thermique $\delta B^2/2P \in [1, 10]$.

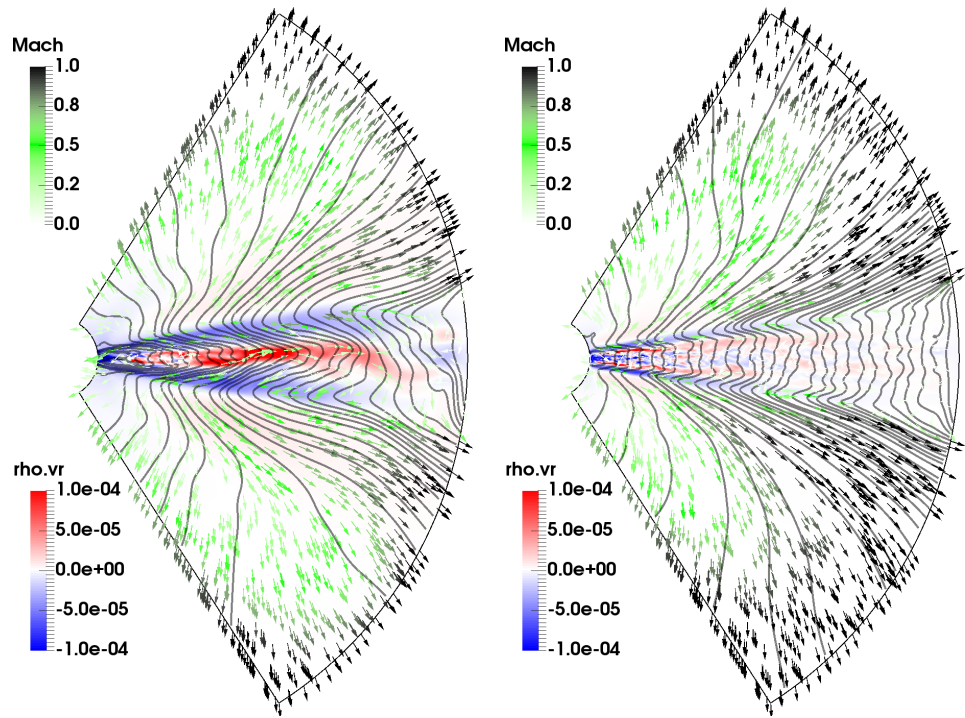


FIGURE IX.1. – Écoulement moyenné azimuthalement et temporellement entre $120T_0$ et $200T_0$ dans les runs 'ID1' (*gauche*) et 'ID2' (*droite*) : flux de masse radial ρv_r (couleurs), vitesse poloidale v_p/c_s (flèches vertes), champ magnétique poloidal (courbes noires).

Le vent est essentiellement thermique, son inclinaison est contrôlée par le gradient radial de pression dans la couronne, et son apparence ordonnée n'apparaît qu'après les opérations de moyenne spatiale et temporelle. Les invariants de la théorie des jets magnétisés stationnaires [264] sont approximativement conservés le long de l'écoulement moyen. Cependant, la surface sonique est à peine franchie en bord de domaine : le vent pourrait être significativement influencé par les conditions aux bords.

Nous pouvons tout de même examiner les processus de transport dans le disque. Je trace sur la [Figure ix.2](#) les profils radiaux de divers rapports adimensionnés, générés par la turbulence MRI et souvent utilisés comme diagnostics de convergence des simulations. Les valeurs mesurées sont comparables à celles trouvées dans la littérature. Les nombres adimensionnés définissant les conditions initiales de chaque simulation, tels que l'ouverture angulaire c_s/v_K et la magnétisation $1/\beta$ sont constants en rayon. Il n'est donc pas surprenant de trouver des profils plats pour chacun des diagnostics adimensionnés caractérisant la turbulence.

Le nombre de Mach sonique des fluctuations en vitesse $\mathfrak{M} := \sqrt{\tilde{v}^2}/c_s$ augmente d'un facteur ≈ 2 lorsque β est divisé d'un facteur 10, atteignant $\mathfrak{M} \approx 80\%$ dans le disque du run 'ID1', le plus fortement magnétisé. La valeur $\mathfrak{M} = 1$ est généralement admise comme borne supérieure, car une turbulence supersonique serait auto-régulée par dissipation dans des chocs. Il

Cette valeur $\mathfrak{M} \lesssim 1$ est comparable à celle mesurée dans la simulation 3D non-idéale '2 π - R1 - P2' à même β ; voir [Figure VIII.22](#).

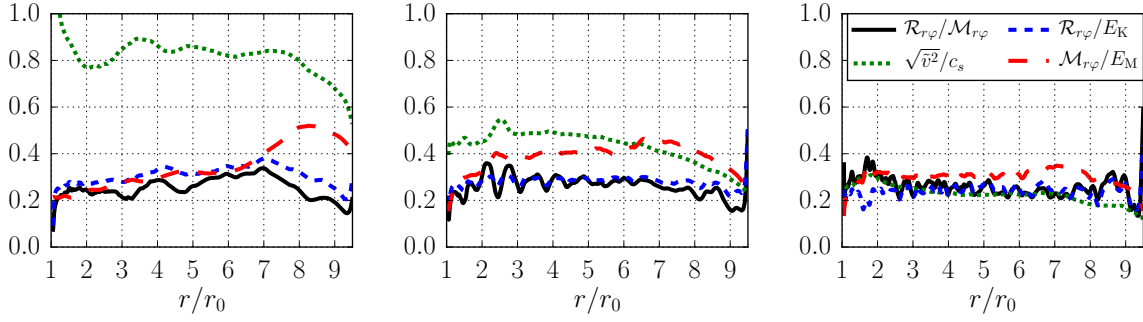


FIGURE IX.2. – Nombres adimensionnés dans les runs ‘ID1’ (*gauche*) et ‘ID2’ (*centre*) et ‘ID3’ (*droite*), moyennés dans le disque entre $120T_0$ et $200T_0$: rapport du couple hydrodynamique au couple magnétique $\mathcal{R}_{r\phi}/\mathcal{M}_{r\phi}$ (trait noir), rapport des couples $\mathcal{R}_{r\phi}$ et $\mathcal{M}_{r\phi}$ aux énergies cinétique E_K et magnétique E_M turbulentes (tirets bleus et rouges), Mach sonique des fluctuations de vitesse (pointillés verts).

est remarquable que $\mathfrak{M} \approx 80\%$ soit atteint pour β aussi grand que 5×10^2 : la pression turbulente causée par un champ net sub-thermique est comparable à la pression thermique du disque. La magnétisation calculée à partir des trois composantes du champ turbulent $\delta\beta \equiv 2P/\delta B^2 \sim 1$, affectant fortement l’équilibre hydrostatique initial [237]. En ce sens, un champ net à $\beta \equiv 2P/B_0^2 = 5 \times 10^2$ dans le plan médian peut déjà être considéré comme “fort”. L’épaississement turbulent du disque devrait affecter l’altitude de la transition thermique entre le disque et la couronne. La description auto-cohérente de cette transition fait l’objet de la section suivante.

Finalement, le coefficient de transport $\langle \alpha_{r\phi}^{\mathcal{T}} \rangle$ est aussi constant en rayon. Étant donnés les profils prescrits pour la température et la densité, il n’y a pas d’accumulations/pertes locales de moment cinétique dues aux couples turbulent $\mathcal{T}_{r\phi}$: le transport de moment cinétique ne cause pas d’accrétion. Comme le disque adopte une configuration de type circulation méridionale, les pertes de masse se font essentiellement dans le vent thermique.

Voir (VIII.1) & Section VIII.2.3.

IX.1.4 Discussion

Les simulations MHD idéales listées dans la Table IX.2 n’ont été que partiellement exploitées. Devant les difficultés numériques propres à ce régime physique, j’ai préféré me concentrer sur le régime MHD non-idéal. Une tendance semble néanmoins se dégager des simulations globales avec flux magnétique net : l’accrétion en surface du disque est viable et accessible en régime de turbulence MRI idéale. Ce scénario n’est pas sans rappeler le modèle d’accrétion stratifiée proposé par Gammie [124], à supposer que la résistivité turbulente remplace la résistivité ohmique dans les couches profondes du disque.

Les modèles axisymétriques de disques α prédisent le développement de circulations méridionales selon les profils radiaux de densité et de tem-

pérature prescrits. Ces prédictions furent mises en défaut par les simulations globales de Fromang et al. [114] : les variations verticales du tenseur de stress ne s'accordent pas avec le modèle α , de sorte qu'aucune circulation méridionale n'apparaît dans l'écoulement moyen. Ce résultat concerne les disques sans flux magnétique vertical net. Les premières simulations globales avec flux net montrent un disque accrétant en surface et excrétant dans le plan médian [327]. Les simulations globales de Zhu & Stone [359] retrouvent cette tendance sur de plus grandes échelles spatio-temporelles, capturant aussi l'action de la couronne sur le disque. Une partie du vent atteint la surface magnéto-sonique rapide dans leur domaine de calcul, même en l'absence de chauffage coronal, mais le vent reste épisodique et transporte peu de moment cinétique.

Dans la Section VIII.4.3, j'ai exprimé une réserve quant à la sensibilité des résultats aux conditions initiales, spécifiquement vis-à-vis de l'inclinaison du champ magnétique global. Comme toutes les simulations que j'ai présentées précédemment, celles de Zhu & Stone ont un champ magnétique initialement vertical. Il est possible qu'un champ net incliné dès les conditions initiales (e.g., Murphy et al. [242]) favoriserait la configuration d'accrétion-éjection magnétisée. La limite des champs forts $\beta \sim 1$ demande aussi à être explorée : une tension magnétique accrue pourrait empêcher les oscillations verticales de $B_r(z)$ visibles sur la Figure IX.1 et n'autoriser que la configuration d'accrétion-éjection.

IX.2 MODÈLES DE DISQUES IRRADIÉS

Dans cette dernière section, je présente des résultats préliminaires concernant les disques chauffés par irradiation stellaire. Ce chauffage est traité de façon très simplifiée, mais permet une description auto-cohérente de la transition disque-couronne en fonction des densités de colonne de gaz. Un des objectifs est de caractériser la transition entre les régimes thermiques et magnétisés des vents de disque. Une motivation à plus long terme est la définition d'observables qui attesteraient de la présence d'un champ magnétique global, voir de contraindre son intensité et sa géométrie.

IX.2.1 *Modèle*

IX.2.1.1 *Géométrie*

Le modèle numérique est adapté pour se focaliser sur les propriétés du vent à grande échelle. J'étends le domaine de calcul comparé à la configuration standard du Chapitre VIII, afin de réduire les effets de bords et faciliter l'obtention d'un vent super-magnéto-sonique stationnaire. Le domaine de calcul est étendu à l'intervalle radial $r/r_0 \in [1, 100]$. Le domaine angulaire est limité à $\theta \in [0.05, \pi/2]$: la région exclue près de l'axe est plus étroite que précédemment, et seul un hémisphère est résolu par défaut. Il sera fait l'hypothèse que le système est symétrique de part et d'autre du

plan médian dans la majorité des simulations, afin de réduire les temps de calcul et de contraindre les solutions à adopter une géométrie simple. Toutes les simulations sont axisymétriques par construction. La résolution du maillage est adaptée à 512 cellules sur l'intervalle radial, et 128 cellules dans la direction polaire, dont 32 uniformes sur $\theta \in [\pi/2 - 0.15, \pi/2]$ et 96 progressivement étirées sur l'intervalle restant.

IX.2.1.2 Conditions aux limites et internes

Les conditions sur le plan médian correspondent à une symétrie équatoriale, avec inversion de signe pour les composantes horizontales du champ magnétique. Au bord radial interne :

- $\partial_R \rho = 0$ avec une borne inférieure à $10^{-10} \rho_0$;
- $\partial_R T = 0$ pour la température isotherme $T \equiv P/\rho$;
- $\partial_R v = 0$;
- $\partial_R B_\theta = 0$ et $B_\varphi = 0$.

Au bord radial externe :

- $\partial_R \rho = 0$;
- $\partial_R T = 0$;
- $\partial_R v = 0$, avec $v_R \geq 0.2c_s$ comme vitesse sortante minimale ;
- $\partial_R B_\theta = \partial_R B_\varphi = 0$.

Aux bords polaires :

- $\partial_\theta \rho = 0$;
- $\partial_\theta P = 0$;
- $\partial_\theta v_R = 0$, $v_\theta = v_\varphi = 0$;
- $\partial_\theta B_R = 0$, $B_\varphi = 0$.

La densité est ajustée de sorte que la vitesse d'Alfvén soit limitée à $v_A = 4v_0$, pour éviter que les pas de temps d'intégration soient excessivement courts. Les diffusivités ohmiques et ambipolaires sont de nouveau bornées à un nombre de Reynolds $\mathcal{R}_{O,A} \equiv \Omega h^2 / \eta_{O,A} \leq 4$, de même que le paramètre de Hall ℓ_H/h , avec $h \equiv c_s/\Omega$ l'échelle de hauteur hydrostatique dans le plan médian. Des zones tampons adoucissent la transition avec les bords radiaux. Le tampon au rayon externe est le même que précédemment ; au rayon interne, la vitesse radiale est amortie vers sa valeur au bord du tampon, ainsi que les vitesses angulaires v_θ/R et v_φ/R .

IX.2.1.3 Conditions initiales

Les champs de densité et de vitesse sont initialisés suivant le même modèle de disque stratifié détaillé en [Section C.3](#). La densité décroît toujours en $\rho \propto r^{-2}$ dans le plan médian. À la différence des modèles précédents, la température dans le disque décroît comme $T \equiv P/\rho \propto r^{-3/4}$; de cette façon, la surface du disque est spontanément évasée et peut intercepter les photons stellaires. Le rapport du disque est toujours de $h/r \equiv c_s/v_K = 5\%$ à 1AU, et la densité surfacique décroît comme $\Sigma = 500 (r/\text{AU})^{-7/8} \text{ g.cm}^{-2}$. La distribution initiale de pression correspond toujours à une transition disque-couronne entre $z/h \in [3.7, 4.7]$ avec un contraste initial en tempéra-

ture de $k^2 = 36$ constant en rayon. Cette distribution de pression évolue aussitôt suivant les prescriptions thermiques décrites ci-dessous. Le champ magnétique initial traverse le disque verticalement avec un $\beta \equiv 2P/B_0^2$ constant dans le plan médian; il est incliné vers l'extérieur dans la couronne grâce au choix de vecteur potentiel [357, 20] :

$$A_\varphi(R, \theta) = \frac{8B_0}{5} [R \sin(\theta)]^{-3/8} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \tan(\theta) \right)^{-2} \right]^{-5/8}. \quad (\text{IX.1})$$

IX.2.1.4 Traitement de la thermodynamique

Il est admis que les transferts thermiques dans la couronne sont dominés par les rayonnements stellaires de haute énergie [307], principalement dans la gamme des rayons X [10, 354]. À défaut de résoudre le transfert de rayonnement, nous pouvons employer une prescription motivée par des calculs de transfert détaillés [94]. Ces derniers indiquent que le paramètre d'ionisation $\xi := L_X/nR^2$ [329] suffit à déterminer la température d'équilibre dans une couronne optiquement mince aux photons X [255].

L'influence des FUV pourra être dominante dans les disques soumis à l'irradiation (externe) d'une étoile massive [324, 160].

L'influence des rayonnements FUV est beaucoup plus difficile à intégrer dans un modèle simple. Elle dépend des densité de colonne et densité locale de manière non-monotone [1], ainsi que de la chimie du gaz et des propriétés des poussières; voir à ce sujet les revues de Hollenbach & Tielens [161], Hollenbach et al. [163]. Les modèles incluant de différentes façons le chauffage par les photons UV ne s'accordent pas sur les distributions de température obtenues [265], et l'importance relative du chauffage FUV sur les taux de pertes de masse est incertaine [133, 255].

Pour faire simple et faciliter la comparaison au résultats publiés, je choisis d'exclure les rayonnements FUV comme source de chauffage. La prescription thermique se résume à amortir l'écart par rapport à une température d'équilibre T_c sur un temps d'amortissement thermique τ . Définissons

$$\psi(x, a, b) := \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x-a}{b} \right) \right] / 2 \quad (\text{IX.2})$$

une fonction de transition, et les densités de colonne

$$n_R = \int \rho/\mu \, dR; \quad \sigma_\theta = \int \rho R \, d\theta, \quad (\text{IX.3})$$

où le poids moléculaire moyen dépend grossièrement de la température :

$$\mu(T) = 2.3 + (2.3 - 0.62) \times \psi(T, 2.10^3, 10^3), \quad (\text{IX.4})$$

afin de décrire l'ionisation thermique à basse densité [86]. La température cible résultant du chauffage par les X est ajustée à partir des résultats de simulation Monte Carlo de Owen et al. [255, figure 2] :

$$\log_{10} [T_e(\rho, T_g, R)] := 2 + 2 \times \psi(\log_{10}(\xi), -5.5, 1.0). \quad (\text{IX.5})$$

La température dans le disque est toujours associée aux poussières [84] et prescrite de manière ad-hoc :

$$T_d(r) := 280 (r/1\text{AU})^{-3/4} \text{K}. \quad (\text{IX.6})$$

La température cible du gaz est déterminée d'après la densité de colonne $n_R \sim 10^{22}$ caractéristique à l'écrantage des photons X [94] :

$$T_c := \max [T_d, T_e \times \psi(-\log_{10}(n_R), 22.0, 0.5)]. \quad (\text{IX.7})$$

Le temps caractéristique d'amortissement thermique τ n'est pas rigoureusement pertinent pour décrire la diffusion ou l'advection du champ d'énergie radiative, mais nous pouvons l'ajuster pour représenter les régimes respectivement optiquement épais et mince. L'opacité Rosseland du gaz est estimée d'après les résultats de Semenov et al. [304] :

$$\kappa = \begin{cases} 2 \times 10^{-2} (T/10\text{K})^2 \text{ cm}^2/\text{g}, & \text{si } T < 200\text{K} \\ 8 \text{ cm}^2/\text{g}, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{IX.8})$$

Le temps d'amortissement thermique est estimé d'après la diffusivité thermique χ sur une hauteur d'échelle hydrostatique h dans les régions optiquement épaisses : $\tau_1 := h^2/3\chi$ [218, 204]. Les temps d'amortissement sont présumés rapides dans la couronne [162] ; je leur affecte un temps d'amortissement $\tau_0 = 10^{-2}\Omega_0^{-1}$ constant dans la couronne. Finalement, La distinction entre les zones optiquement minces et épaisses est faite d'après la prescription

$$\tau := \tau_0 + (\max[\tau_0, \tau_1] - \tau_0) \times \psi(\log_{10}(\kappa\sigma_\theta), 0, 0.5). \quad (\text{IX.9})$$

Par simplification, la valeur de κ locale est utilisée, au lieu d'intégrer l'opacité $\kappa\rho$.

IX.2.1.5 Ionisation

La fraction d'ionisation $x_{e,0}$ est calculée comme dans la Section VII.4, mais en utilisant la densité de colonne radiale pour l'atténuation des rayonnements X et UV. Une contribution thermique est ajoutée pour forcer la couronne à devenir totalement ionisée à haute température :

$$x_e = x_{e,0} + (1.0 - x_{e,0}) \times \psi(T, 2.10^3, 3.10^2) \quad (\text{IX.10})$$

Cette contribution est particulièrement mal maîtrisée dans la mesure où l'équilibre chimique pourrait se faire sur des temps relativement long dans la couronne [165, 86]. Notons que la fraction d'ionisation peut rester très inférieure à l'unité ($x_e \lesssim 10^{-5}$) si la couronne est suffisamment dense.

Les principales zones d'incertitude de ce modèle concernent l'influence des photons FUV, les temps caractéristiques de transfert thermique et l'état d'ionisation dans la couronne. Les paramètres de contrôle d'intérêt pour mon étude seront la luminosité L_X et la magnétisation $1/\beta$ du disque ; les valeurs échantillonnées sont rassemblées dans la Table IX.2.

NOM	SYMÉTRIQUE	L_X	$\beta/5$	\dot{m}_{100}
X28	oui	10^{28}	∞	$(7.0 \pm 2.0) \times 10^{-11}$
X29	oui	10^{29}	∞	$(8.5 \pm 0.5) \times 10^{-10}$
X30	oui	10^{30}	∞	$(8.6 \pm 0.5) \times 10^{-9}$
X31	oui	10^{31}	∞	$(1.6 \pm 0.2) \times 10^{-8}$
B4	oui	10^{30}	10^4	$(3.0 \pm 1.0) \times 10^{-8}$
B3	oui	10^{30}	10^3	$(2.8 \pm 0.2) \times 10^{-7}$
B2	oui	10^{30}	10^2	$(2.6 \pm 0.3) \times 10^{-6}$
M3	oui	10^{30}	-10^3	$(2.7 \pm 0.3) \times 10^{-7}$
S3	non	10^{30}	10^3	$(3.0 \pm 0.5) \times 10^{-7}$

TABLE IX.2. – Simulations de disques irradiés en MHD non-idéale : nom du run, symétrie imposée par rapport au plan équatorial, luminosité X en ergs.s^{-1} , magnétisation du plan médian, taux de pertes de masse dans le vent en $M_\odot.\text{yr}^{-1}$ à un rayon de 100AU.

IX.2.2 Vents purement thermiques

Je trace sur la [Figure ix.8](#) les profils verticaux de température obtenus dans la simulation de référence 'X30', à comparer à la figure 9 de Owen et al. [255], en tenant compte de leur luminosité L_X deux fois plus élevée. Les températures moyennes dans le disque concordent comme souhaité; le plateau en température confirme que le disque est maintenu localement isotherme [108]. La transition thermique disque-couronne se fait à une altitude décroissante vis-à-vis de l'échelle de hauteur hydrostatique $h \equiv c_s/\Omega$ dans le plan médian. La température augmente vers $z/h \approx 4.3$ à 2AU et vers $z/h \approx 3.7$ à 32AU; la température coronale est atteinte à $z/h \approx 4.6$ pour chaque profil tracé sur la [Figure ix.8](#). Ces valeurs coïncident avec celles prescrites de façon ad-hoc dans le [Chapitre VIII](#).

J'entreprends ensuite de comparer mes résultats à ceux de Owen et al. en régime hydrodynamique. Le principal diagnostic propre à comparaison est le taux de pertes de masse dans le vent. Je le définis comme

$$\dot{m}_w(R) := \iint \mathbb{1}(\mathbf{v}) \rho v_R R^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi, \quad (\text{IX.11})$$

où l'intégration est faite sur la coquille sphérique de rayon R , et où $\mathbb{1}(\mathbf{v})$ est une indicatrice du vent satisfaisant simultanément les conditions :

$$\mathbb{1}(\mathbf{v}) := (v_R > 0) \times (v_p/c_s \geq 1). \quad (\text{IX.12})$$

La [Figure ix.4](#) représente les taux de pertes de masse dans le vent des simulations hydrodynamiques. Sur le panneau de gauche, je trace le profil cumulé $\dot{m}_w(R)$ en fonction du rayon dans la simulation de référence 'X30'. Le vent franchit la surface sonique à un rayon $r_s \approx 8\text{AU}$, avant lequel l'indicatrice $\mathbb{1}(\mathbf{v}) = 0$. La dépendance radiale exacte du taux de pertes de

Cf. figure 4 de Owen et al..

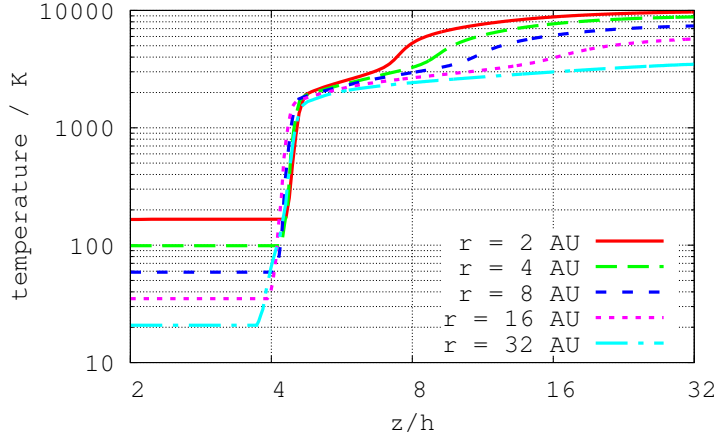


FIGURE IX.3. – Température du gaz dans le run ‘X30’ en fonction de l’altitude mesurée par rapport à l’échelle de hauteur hydrostatique du plan médian $h \equiv c_s/\Omega$, dans des coupes à différents rayons cylindriques.

masse cumulé est sensible aux profils de densité et température prescrits dans le disque. Ici, un ajustement de la forme $\dot{m}_w \propto \sqrt{r - r_s}$ montre que le taux de pertes de masse est dominé par les régions internes du disque.

Pour vérifier que la physique des régions internes est bien capturée, j’ai produit une simulation équivalente sur l’intervalle $r/\text{AU} \in [0.2, 20]$, avec la même géométrie et les mêmes prescriptions pour les profils radiaux de densité et de température. Cette simulation révèle que le vent est lancé depuis la surface du disque à un rayon $r_w = (0.9 \pm 0.1)\text{AU}$, où la vitesse du son avoisine 25% de la vitesse de libération locale $\sqrt{2}v_K$. Des tests à rayons encore plus faibles s’accordent sur cette valeur pour le rayon de lancement du vent thermique. Les simulations sur l’intervalle $r/\text{AU} \in [1, 100]$ capturent donc entièrement le vent émis depuis les régions internes. En produisant une simulation équivalente à ‘X30’ à résolution double, je confirme que le taux de pertes de masse est convergé à mieux que 10%.

Je fais varier la luminosité L_X et je mesure le taux de pertes de masse dans le vent traversant une coquille sphérique à 100AU; les valeurs relevées sont marquées sur le panneau droit de la Figure ix.4. Pour $L_X \leq 10^{30} \text{ ergs.s}^{-1}$, le taux de pertes de masse croît linéairement avec la luminosité X , comme suggéré par Owen et al., suivant la relation :

$$\dot{m}_w = 8 \times 10^{-9} \left(\frac{L_X}{10^{30} \text{ ergs.s}^{-1}} \right) M_\odot \text{ yr}^{-1}. \quad (\text{IX.13})$$

Nos mesures s’écartent au plus d’un facteur 2 par rapport à celles de Owen et al. à basse luminosité $L_X \leq 10^{28} \text{ ergs.s}^{-1}$. À haute luminosité $L_X = 10^{31} \text{ ergs.s}^{-1}$, le taux de pertes de masse est inférieur à celui prédit par extrapolation de (ix.13). Le temps de relaxation thermique est suffisamment court pour maintenir un écart relatif à la température cible de l’ordre de 2×10^{-4} dans le vent des runs ‘X30’ et ‘X31’. Le défaut de \dot{m}_w n’est donc pas causé par une température plus basse que la température

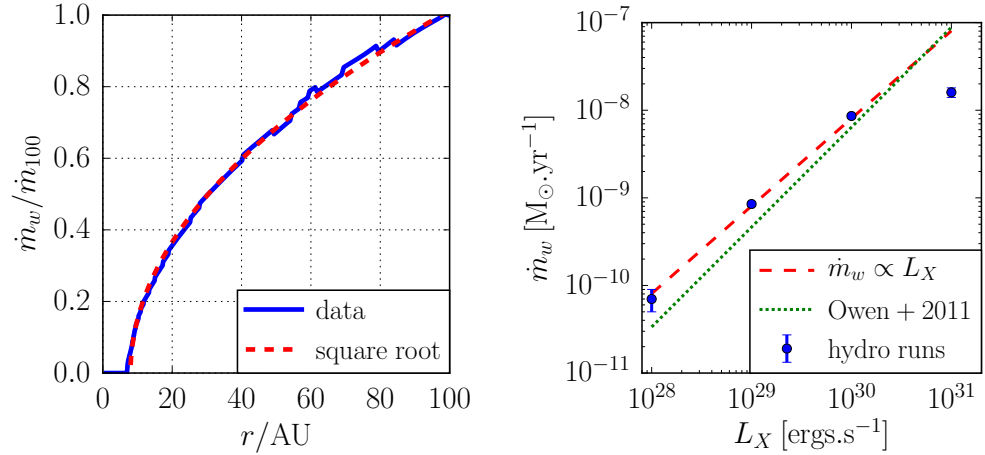


FIGURE IX.4. – À gauche : taux de pertes de masse cumulé radialement dans le run ‘X30’ ; un ajustement en $\dot{m}_w \propto \sqrt{r - r_s}$ est superposé. À droite : taux de pertes de masse dans le vent en fonction de la luminosité X ; l’ajustement (IX.13) est tracé en tirets rouges, et l’ajustement optimal (non-linéaire) de Owen et al. [254] en pointillés verts.

d’équilibre attendue d’après L_X . Comme la surface critique sonique ne diffère pas significativement entre les runs ‘X30’ et ‘X31’, nous pouvons aussi exclure un défaut lié à la restriction de \dot{m}_w au vent supersonique. L’origine de cette déviation à la relation linéaire est laissée en suspens.

IX.2.3 Vents magnétothermiques

Notre modèle reproduit de façon satisfaisante les résultats de vents hydrodynamiques de Owen et al.. Nous pouvons maintenant ajouter un champ magnétique global dans l’espoir de dégager des tendances propres aux vents magnétisés. La luminosité $L_X = 10^{30} \text{ ergs} \cdot \text{s}^{-1}$ est prise comme référence, et trois valeurs de magnétisation sont échantillonnées.

IX.2.3.1 Aperçu

La Figure IX.5 permet de comparer la distribution de température coronale du run hydrodynamique de référence ‘X30’ aux deux runs MHD à plus faible magnétisation ‘B4’ et ‘B3’. Entre la première et la seconde figure, la température coronale décroît d’environ 3000K à 2000K en moyenne dans la couronne. Sur la figure de droite, l’intensité du champ magnétique net atteint $\beta = 5 \times 10^3$ dans le plan médian, et la température coronale passe en dessous de 1000K. Cette diminution de température est causée simultanément par une diminution du paramètre d’ionisation $\xi \sim 10^{-6}$, et par une augmentation de la densité de colonne radiale $\sim 10^{22} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$. En d’autres termes, le chauffage par les X est moins intense non-seulement à cause de la densité accrue du vent, mais aussi par un effet d’écrantage des régions

La température de la couronne adopte progressivement notre prescription pour les poussières dans le plan médian.

externes par les régions internes. Ces deux effets suggèrent que le champ magnétique contribue au chargement en masse du vent.

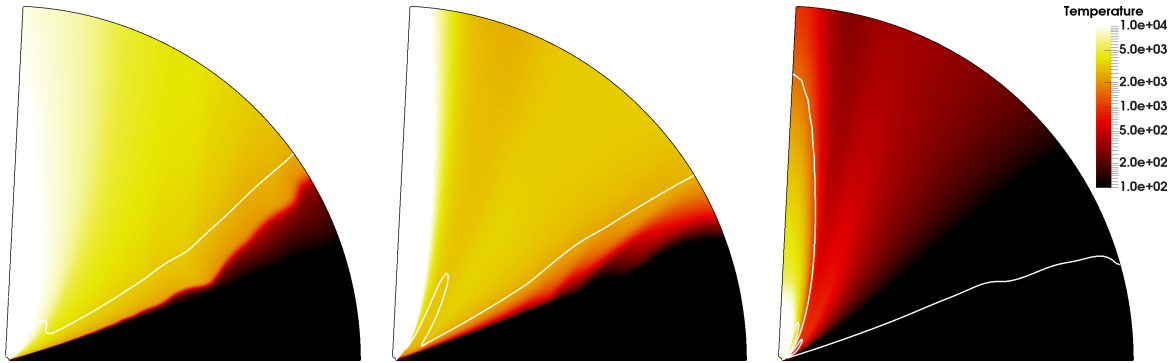


FIGURE IX.5. – Cartes moyennées sur $10T_0$ de la température coronale (en degrés Kelvin) dans les runs ‘X30’ (gauche), ‘B4’ (centre) et ‘B3’ (droite); la surface critique sonique est tracée en blanc.

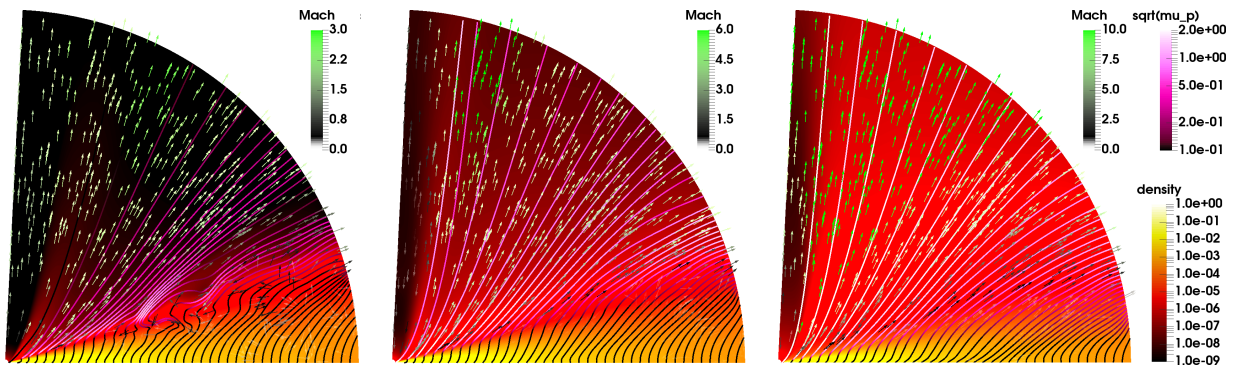


FIGURE IX.6. – Écoulement moyen dans les runs ‘B4’ (gauche), ‘B3’ (centre) et ‘B2’ (droite) : densité (couleurs), vitesse poloïdale v_p/c_s (flèches vertes) et champ magnétique poloïdal $B_p/\sqrt{2P}$ (courbes magenta).

Les cartes moyennes de la Figure IX.6 confirment que la densité coronale augmente avec l’intensité du champ magnétique net. La magnétisation dans la couronne augmente proportionnellement à celle du disque : le rapport $B_p^2/2P$ augmente d’un facteur $\approx 10^2$ entre les runs ‘B4’ et ‘B2’. La diminution de température (observable sur la Figure IX.5) et l’accroissement de densité se font donc à pression thermique constante. Dans ces trois simulations, la vitesse d’Alfvén est saturée à sa valeur seuil uniquement dans le cylindre de faible densité proche de l’axe; la pression thermique $P \sim \rho T$ n’est donc pas biaisée par l’intensité locale du champ magnétique.

Avec une température réduite, la vitesse du son est plus facilement franchie par le vent. En conséquence, le nombre de Mach moyen dans la couronne augmente avec la magnétisation du disque. La Figure IX.7 montre l’évolution temporelle du nombre de Mach $\mathfrak{M} := v_p/c_s$, calculé à partir de la vitesse poloïdale dans le vent des simulations avec et sans champ magnétique. Les simulations hydrodynamiques convergent vers $\mathfrak{M} \in [1, 1.5]$, sans grande sensibilité à la luminosité L_X . La sensibilité du nombre de

Attention : les figures IX.5 & IX.6 ne correspondent pas aux mêmes simulations.

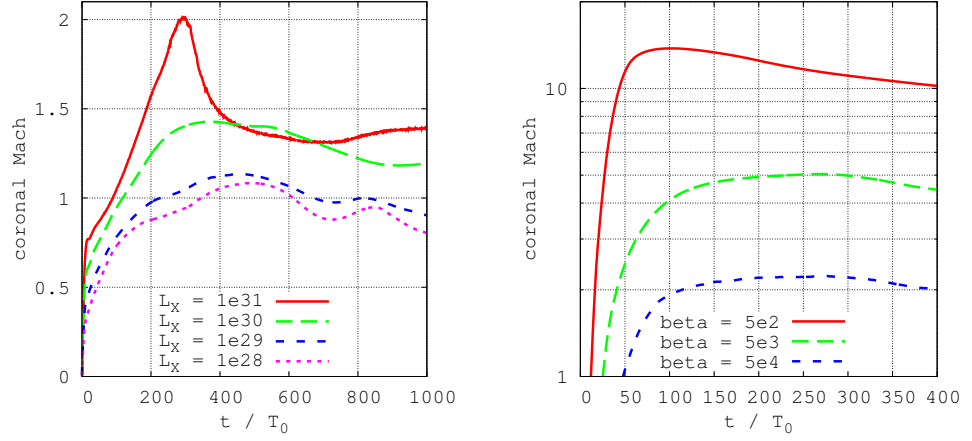


FIGURE IX.7. – Mach poloidal v_p/c_s moyenné dans le volume de la couronne, pour les runs hydrodynamiques (à gauche) et MHD (à droite).

Mach à la magnétisation du disque est nettement plus marquée, atteignant $\mathfrak{M} \gtrsim 10$ dans le run 'B2'. Observationnellement, le nombre de Mach compare le décalage spectral des raies à leur élargissement thermique. Les vitesses poloïdale et toroïdale seront distinguées sur la [Figure ix.9](#).

ix.2.3.2 Taux de pertes de masse

Comme dans la [Section ix.2.2](#), je mesure les taux de pertes de masse dans le vent traversant la coquille sphérique à 100AU, et les représente en fonction de la magnétisation du disque sur la [Figure ix.8](#). Le taux de pertes de masse est une fonction décroissante de β , avec une dépendance $\dot{m}_w \propto \beta^{-1}$ plus raide que la relation ([viii.8](#)) du chapitre précédent :

$$\dot{m}_w = 1.4 \times 10^{-3} \beta^{-1}. \quad (\text{IX.14})$$

Cette relation n'est valide qu'à $L_X = 10^{30} \text{ ergs.s}^{-1}$ et ne suffit pas à mapper le plan $\dot{m}_w(L_X, \beta)$. À supposer que ces deux paramètres soient décorrélés, la dépendance en β^{-1} au lieu de $\beta^{-1/2}$ peut révéler une réaction de la couronne sur le disque, liant l'efficacité d'éjection à la thermodynamique du vent. La fraction d'ionisation fournit précisément ce lien.

La base du vent est assez dense et froide pour que l'ionisation thermique soit négligeable, et assez diluée pour que les photons stellaires maintiennent une ionisation partielle. La diffusion ambipolaire pourrait alors faciliter le développement d'un vent laminaire, accéléré par un champ magnétique organisé à grande échelle [134]. Les hypothèses partant de là reposent sur notre méconnaissance de l'ionisation dans la couronne, nécessitant une modélisation plus sophistiquée de la thermochimie du vent. Si de tels modèles favorisent la dépendance plus raide en β^{-1} , cela pourrait aider à discriminer les vents magnétisés des vents photo-évaporés.

La comparaison des runs 'B3' et 'M3' ne révèle pas d'impact significatif de l'orientation du champ magnétique net sur le taux de pertes de masse.

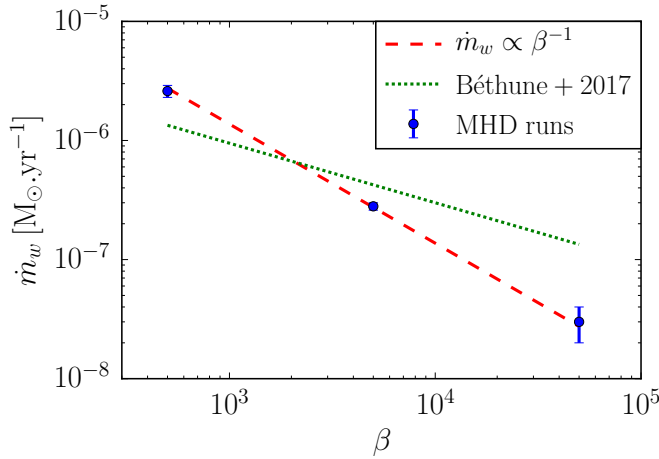


FIGURE IX.8. – Taux de pertes de masse à 100AU dans le vent des runs MHD ; l’ajustement (ix.14) est tracé en tirets rouges, et l’estimation (viii.8) du Chapitre VIII est superposée en pointillés verts.

En accord avec la Section VIII.2.2, l’effet Hall ne permet pas de discriminer franchement les deux polarités magnétiques d’après les taux d’accrétion et d’éjection dans les régimes physiques considérés.

IX.2.3.3 Interface disque-couronne

Avec les instruments et méthodes d’observation moderne, il devient envisageable de résoudre la structure verticale des disques sur quelques échelles de hauteur. Cette information pourrait également permettre de distinguer un vent magnétisé d’un vent thermique. Je trace sur la Figure IX.9 les profils de densité et de vitesse à l’interface du disque et de la couronne, à une distance de 20AU dans notre modèle de disque irradié.

Les profils de densité confirment que le chargement en masse du vent augmente avec la magnétisation du disque. Pour $\beta \rightarrow \infty$, le gradient de température induit un contraste en densité de l’ordre de 10^6 entre le plan médian et la base de la couronne. Pour $\beta = 5 \times 10^2$, le contraste n’est plus que de 10^3 à $z/h \approx 8$: le disque est significativement plus épais que ce que prédirait un modèle hydrostatique aux températures considérées [92].

À magnétisation croissante, le vent est soulevé depuis une altitude plus basse, $z/h \lesssim 2.5$ au lieu de $z/h \approx 4$ sans champ magnétique. L’accélération poloïdale du vent diminue avec la magnétisation, en réponse aux grandes efficacités d’éjection atteintes dans ce régime (voir Section VIII.3.3).

Dans le régime faiblement magnétisé $\beta = 5 \times 10^4$, le profil vertical de vitesse toroïdale est similaire à celui de la Figure VII.1, correspondant à la simulation de référence du Chapitre VIII. Le couple magnétique accélère la surface du disque au niveau de la transition thermique avec la couronne, la vitesse toroïdale est super-képlérienne entre $z/h \in [5, 8]$, puis décroît aussi rapidement que dans un vent thermique. En revanche, le cisaillement vertical est quasi-nul dans le vent des disques plus fortement magnétisés.

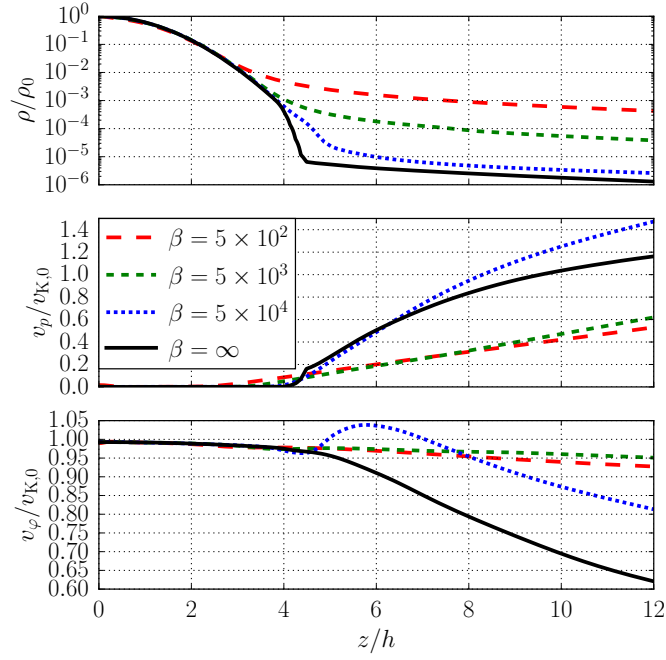


FIGURE IX.9. – Profils verticaux au rayon cylindrique $r = 20\text{AU}$ dans les runs avec une luminosité $L_X = 10^{30} \text{ ergs.s}^{-1}$. *Panneau supérieur* : densité par rapport à la densité du plan médian ; *panneau intermédiaire* : vitesse poloïdale par rapport à la vitesse képlérienne à 20AU ; *panneau inférieur* : vitesse toroïdale par rapport à la vitesse képlérienne à 20AU.

IX.2.3.4 Dynamique du vent

Je finis cette caractérisation des vents magnétothermiques en comparant les runs 'B4' et 'B2' le long d'une ligne de courant. Les diagnostics rassemblés sur la [Figure ix.10](#) ont été utilisés dans le [Chapitre VIII](#) ; je rappelle ci-dessous leur définition. Sur la première ligne, la vitesse poloïdale de l'écoulement v_p est comparée aux vitesses caractéristiques, dont les deux vitesses magnéto-soniques :

$$v_{\pm}^2 \equiv \frac{1}{2} \left(v_A^2 + c_s^2 \pm \sqrt{(v_A^2 + c_s^2)^2 - 4c_s^2 v_{Ap}^2} \right). \quad (\text{IX.15})$$

Sur la deuxième ligne, je décompose le moment cinétique spécifique

$$j \equiv \underbrace{rv_{\varphi}}_{\text{matter}} - \underbrace{rB_{\varphi}/\kappa}_{\text{magnetic}}, \quad \text{avec } \kappa \equiv \frac{B_p}{\rho v_p}, \quad (\text{IX.16})$$

dont la théorie des jets magnétisés prédit qu'ils sont invariants en MHD idéale et stationnaire [264]. Sur la troisième ligne, je décompose la somme des forces F agissant sur le fluide, représentées par leurs accélérations respectives F/ρ . L'accélération inertielle est calculée dans le repère tournant à la vitesse toroïdale locale, en sommant les contributions dues à la gravité et à la dérivée convective :

$$F_{\text{inertia}} \equiv -\rho (\nabla\Phi + \mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v} - v_p \partial_p \mathbf{v}_p). \quad (\text{IX.17})$$

Sur la dernière ligne est tracé le nombre de Bernoulli $\mathcal{B} := \mathcal{B}' + \mathcal{Q}_{\text{end}}$, où

$$\mathcal{B}' \equiv \frac{v_{\Phi}^2}{2} + \frac{v_{\text{p}}^2}{2} + \Phi + \frac{B_{\perp}^2 v_{\text{p}} + w_{\text{p}}}{\rho v_{\text{p}}} + \mathcal{H} - \mathcal{Q}, \quad (\text{IX.18})$$

est l'invariant obtenu par projection de l'équation d'impulsion le long du champ de vitesse ; le terme

$$\int \frac{\nabla P}{\rho} \cdot d\ell = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} - \int T \nabla s \cdot d\ell \equiv \mathcal{H} - \mathcal{Q}, \quad (\text{IX.19})$$

représente la contribution thermique, et le flux de Poynting

$$\begin{aligned} \Pi &\equiv \mathbf{E} \times \mathbf{B} = (-\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \\ &= (\mathbf{B}_{\perp} \cdot \mathbf{B}_{\perp})\mathbf{v} - (\mathbf{v}_{\perp} \cdot \mathbf{B}_{\perp})\mathbf{B} \equiv B_{\perp}^2 \mathbf{v} + \mathbf{w}, \end{aligned} \quad (\text{IX.20})$$

représente la contribution magnétique en MHD idéale. Toutes ces quantités sont normalisées à leur valeur estimée à la base du vent.

Les deux simulations produisent un vent devenant super-sonique à $z/h \approx 5$, et le vent franchit la surface magnéto-sonique rapide avant d'atteindre le bord radial externe. Cette propriété permet de penser que les résultats ont convergé par rapport à la taille du domaine de calcul [194, 113].

Le moment cinétique spécifique devient constant en bonne approximation pour $z/h \geq 5$ dans le run 'B4', et à une altitude sensiblement plus élevée $z/h \geq 10$ dans le run 'B2'. Il est donc raisonnable de considérer le vent comme stationnaire et idéal au delà de cette altitude. La constante de normalisation est le moment $j_0 := rv_{\text{K}}$ à la base du vent ; le rapport j/j_0 correspond donc au bras de levier magnétique λ couramment utilisé depuis Blandford & Payne [44]. La contribution magnétique à j est consommée le long de la ligne de courant : le champ magnétique accélère la matière azimuthalement et favorise son éjection magnétocentrifuge. Les valeurs de $\lambda \gtrsim 3/2$ avoisinent le seuil en dessous duquel un vent trans-sonique stationnaire serait théoriquement inaccessible sans chauffage coronal [97]. Ces valeurs sont attendues dans la limite d'un vent fortement chargé en masse [100], i.e. le taux d'éjection est de l'ordre du taux d'accrétion.

La transition entre un vent thermique et un vent magnétisé est plus flagrante sur la troisième ligne, représentant les forces agissant le long de la ligne de courant. Dans le run 'B4', nous retrouvons le scénario décrit dans le [Chapitre VIII](#) : la force de Lorentz intervient essentiellement à la transition disque-couronne, permettant à la matière de franchir la barrière thermique ; au delà de $z/h \geq 7$, c'est l'accélération due au gradient de pression thermique qui est dominante. À l'inverse, le run 'B2' produit un vent accéléré par la force de Lorentz au delà de $z/h \geq 4$, et l'accélération thermique est négligeable. L'accélération relevée sur la [Figure IX.10](#) n'est pas incompatible avec les profils de vitesse tracés sur la [Figure IX.9](#) : ici nous suivons une ligne de courant qui évolue radialement, et non une coupe verticale à rayon cylindrique constant.

Enfin, la transition d'un vent thermique à un vent magnétisé se retrouve dans la composition énergétique du vent. Le nombre de Bernoulli est dominé par l'apport de chaleur \mathcal{Q} dans le run 'B4', alors que le flux de Poynting est la principale source d'énergie consommée dans le run 'B2'.

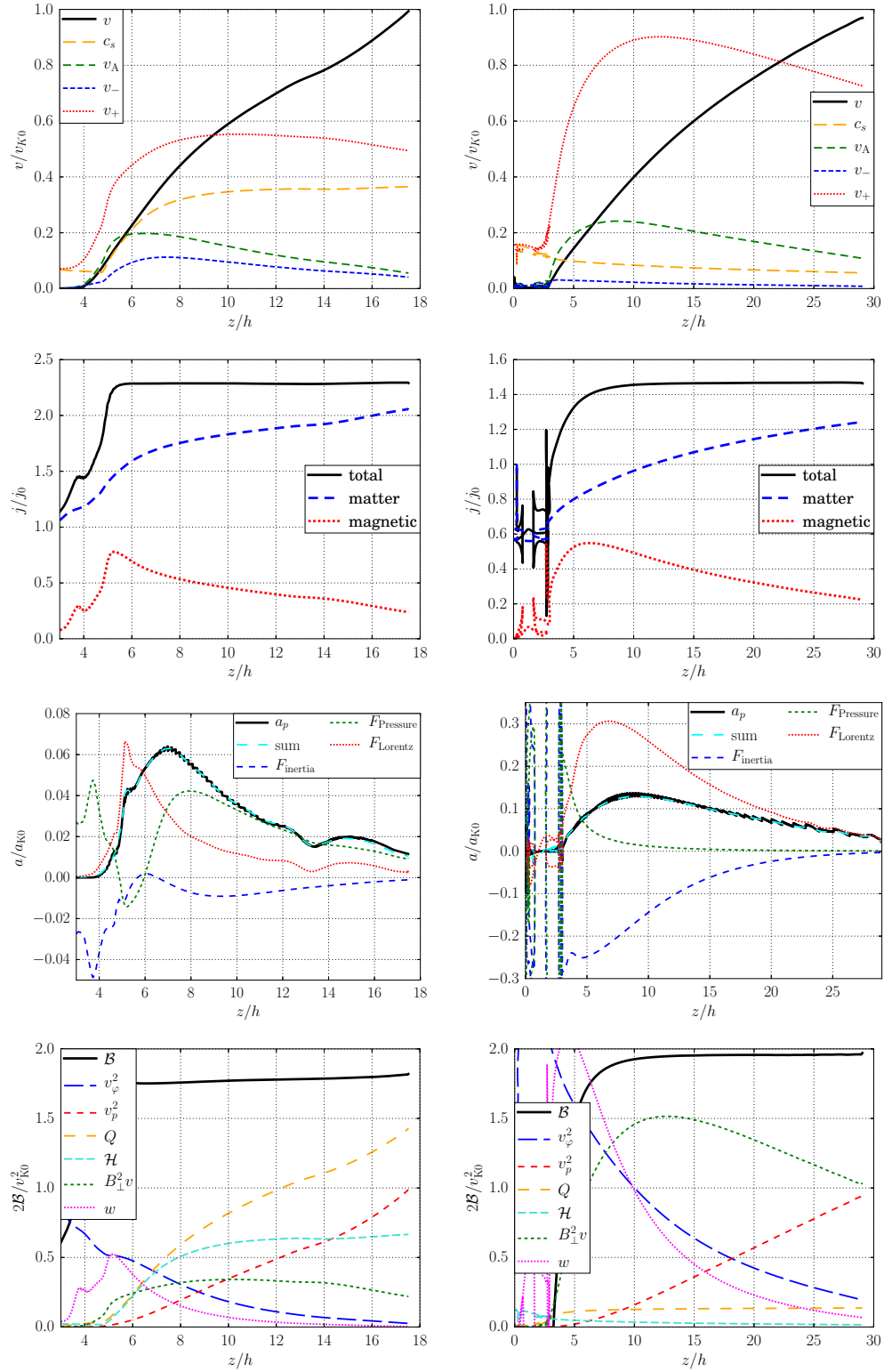


FIGURE IX.10. – Comparaison des runs ‘B4’ (à gauche) et ‘B2’ (à droite) le long d’une ligne de courant, intégrée depuis le point ($r = 10\text{AU}$, $z/h = 2$) dans l’écoulement moyenné sur $10T_0$. De haut en bas : vitesses caractéristiques de l’écoulement, moment cinétique spécifique, forces agissant sur le fluide, décomposition du nombre de Bernoulli. Les mêmes diagnostics sont définis et tracés dans le [Chapitre VIII](#).

IX.2.3.5 *Symétrie équatoriale*

Dans les simulations précédentes de ce chapitre, j'ai imposé au disque une symétrie équatoriale pour me concentrer sur les propriétés de l'interaction disque-couronne à moindre coût, et dans une situation volontairement sur-contrainte. Cette restriction autorise a priori le développement de circulations méridionales, mais elle interdit les configurations d'éjection unilatérales, ainsi qu'une corrugation de la nappe de courant.

J'ai indiqué dans la [Section VIII.4.4](#) que les configurations unilatérales étaient des attracteurs stables pour les simulations à champ net suffisamment fort. Il est possible que ces configurations soient un artefact lié à la taille réduite du domaine de calcul, ne permettant pas de capturer la surface magnétozonique rapide pour le vent émanant des régions les plus internes et externes du disque. Par ailleurs, la solution en circulation méridionale était favorisée par les simulations à champ magnétique positif ($B_0 \cdot \Omega > 0$). Les simulations de disques irradiés initialisées avec un champ net déjà incliné ont toutes adoptées une configuration d'accrétion-éjection. Cela supporte l'hypothèse selon laquelle la brisure de symétrie discutée dans la [Section VIII.4.3](#) est sensible aux conditions initiales.

Afin d'examiner la robustesse des solutions de vents asymétriques, le run 'S3' capture la dynamique des deux hémisphères sans symétrie équatoriale imposée. Le champ magnétique initial est vertical (non-incliné) dans le domaine de calcul entier, toujours à $\beta = 5 \times 10^3$ constant dans le plan médian, pour voir si une circulation méridionale s'établit spontanément.

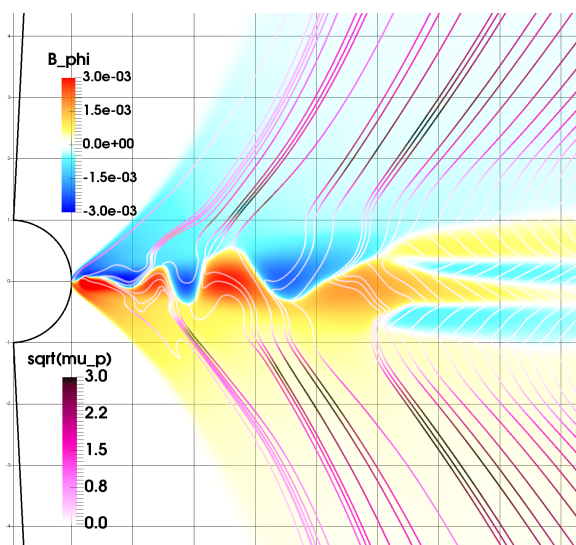


FIGURE IX.11. – Champ toroïdal B_ϕ (carte de couleur) et champ poloïdal $B_p/\sqrt{2P}$ (courbes magenta) à $280T_0$ dans le plan (r, z) du run 'S3'; le pas de la grille est de $r_0 \equiv 1\text{AU}$.

La figure [Figure IX.11](#) représente la configuration magnétique établie sur l'intervalle $r/\text{AU} \in [1, 10]$ après 280 orbites internes. Avec le flux de moment cinétique $\mathcal{M}_{z\phi} \equiv -B_z B_\phi$ dirigé du plan médian vers la couronne, le

disque a adopté une solution de type accrétion-éjection entre $r/r_0 \in [1, 6]$. Pour $r/r_0 > 6$, la HSI est encore dans un régime quasi-linéaire, produisant une structure comparable aux modes “channels” linéaires.

Dans les régions internes, la surface $B_\varphi = 0$ oscille radialement sur toute la hauteur du disque. Cette surface s’identifie toujours à la nappe de courant électrique maximal, et la [Figure IX.11](#) confirme que cette nappe de courant est instable autour de la position de symétrie $z = 0$. Si nous définissons l’altitude moyenne de la nappe de courant

$$\zeta := \frac{\int z J_r dz}{\int J_r dz} \equiv \frac{\int B_\varphi dz}{2H\mathfrak{J}}, \quad (\text{IX.21})$$

il est clair que $\zeta = 0$ uniquement lorsque le flux toroïdal net traversant le disque est nul. L’altitude de la nappe de courant est donc déterminée par la compétition des mécanismes d’induction de champ toroïdal de part et d’autre du plan médian. Tant que le vent exerce un couple sur le disque, l’accrétion résultante devrait induire un champ B_φ entretenant l’extraction de moment cinétique par le vent. Parallèlement, la MRI/HSI amplifie B_r et B_φ dans le disque pour $B_0 \cdot \Omega > 0$. Les effets non-idéaux affectent ensuite l’efficacité d’éjection (le couplage disque-vent) et l’évacuation verticale du flux toroïdal. Je n’ai pas examiné cette question plus en profondeur.

Aucune des simulations symétriques par rapport au plan médian n’a produit de structures zonales. Parmi les nombreuses causes possibles, nous pouvons supposer que la résolution numérique est insuffisante pour capturer des structures à petite échelle radiale, ou bien que le mécanisme d’accumulation du flux magnétique nécessite une asymétrie entre les deux hémisphères. Sur la [Figure IX.11](#), des concentrations de flux magnétique vertical apparaissent dans les régions internes du run ‘S3’, corrélées aux oscillations de B_φ . Des minima de densité apparaissent progressivement, associés aux concentrations de flux magnétique vertical.

Dans le chapitre précédent, le confinement du flux magnétique était assuré par la diffusion ambipolaire, y compris dans les situations d’éjection unilatérale, alors que le disque ne voit qu’une seule polarité du champ toroïdal et pas de nappe de courant. Dans la simulation ‘S3’, c’est la nappe de courant électrique qui gouverne le transport radial du flux magnétique vertical. En moyenne, le courant électronique transporte le flux magnétique vers l’intérieur via l’induction Hall. Cette nappe de courant n’est pas horizontale, donc l’EMF Hall due au champ net est minimale lorsque $\mathbf{J} \times \mathbf{B}_{\text{net}} \approx 0$, approximativement dans les extrema de J_z . Comme la vitesse d’advection du flux magnétique est minimale dans ces régions, le flux magnétique vertical a tendance à s’y accumuler.

SYNTHÈSE ET PERSPECTIVES

SYNTHÈSE

Dans la première partie de ma thèse, je me suis concentré sur des modèles cylindriques non-stratifiés de disques protoplanétaires. J'ai examiné les propriétés de transport turbulent dans différents régimes de MHD non-idéale, en considérant un disque képlerien faiblement magnétisé ($\beta \gg 1$) traversé par un flux magnétique axial net. Cette étude a montré la robustesse, en l'absence de stratification, d'un mécanisme d'auto-organisation causé par l'induction Hall. Le champ magnétique est confiné dans des bandes axisymétriques, réduisant le transport turbulent de plusieurs ordres de grandeur. Les fluctuations en vorticité sont faibles mais favorisent la capture de poussières dans les zones de flux magnétique maximal. Ce processus d'auto-organisation résiste aux diffusions ohmique et ambipolaire, mais elles réduisent les contrastes en flux magnétique et vorticité.

J'ai ensuite développé un modèle global de disque stratifié, avec pour objectif de tester la validité du mécanisme d'auto-organisation précédent. L'écoulement s'organise bien en structures axisymétriques, mais c'est l'induction ambipolaire qui est seule responsable de leur confinement, et jamais l'induction Hall.   la différence du processus d'auto-organisation Hall, les fluctuations en champ magnétique et en densité sont maintenant anti-corrélées ; les fluctuations en vorticité sont beaucoup plus marquées que précédemment, et l'accumulation de poussières devrait se faire dans les minima de flux magnétique. L'espacement caractéristique entre les anneaux est sensible à la magnétisation du disque et à son état d'ionisation. En dépit d'une faible statistique, nos simulations suggèrent aussi que la formation d'écoulements zonaux nécessite un champ magnétique orienté suivant le vecteur rotation du disque ($B \cdot \Omega > 0$), pour lequel le plan médian est linéairement instable à la HSI.

Le second objectif était de caractériser les régimes de transport dans le disque en présence des trois effets MHD non-idéaux, la fraction d'ionisation étant calculée dynamiquement selon la distribution de densité du gaz. C'est le couple magnétique laminaire qui est dominant dans le disque, qu'il soit entretenue par la HSI ou par l'action du vent. L'orientation du champ magnétique global contrôle la stabilité HSI du plan médian, mais le flux radial net de moment cinétique n'est affecté que d'un facteur 3. Un vent magnétisé ne se développe pas systématiquement : le champ magnétique peut entretenir une circulation méridionale, où le disque accrète en surface et excrète dans le plan médian, sans extraction verticale de moment cinétique, donc sans accrétion nette.   long terme, le disque peut converger vers une configuration asymétrique : le champ magnétique extrait le

moment cinétique depuis une face du disque, et le transporte verticalement vers l'hémisphère opposé, où un vent magnétisé est lancé.

Le troisième objectif concernait l'interaction disque-vent pour un disque obéissant à une MHD non-idéale et baigné dans une couronne chaude. Lorsque le disque adopte une configuration de circulation méridionale, le vent est thermique et désorganisé. À l'inverse, lorsqu'un vent magnétisé extrait du moment cinétique depuis le plan médian, ce dernier est organisé et contribue à évacuer la masse du disque. Le taux de pertes de masse dans le vent est comparable au taux d'accrétion local : ces vents magnétothermiques sont chargés en masse. En décrivant de façon simplifiée l'irradiation du disque et de sa couronne par les photons X stellaires, les régimes d'éjection purement thermique et magnétisée peuvent être discriminés par plusieurs observables liées au vent.

En conclusion, la microphysique du plasma affecte fortement la dynamique globale des disques protoplanétaires. Le transport radial du flux magnétique est dominé par les porteurs de charge mobiles via l'induction Hall, et découplé du transport de masse. Les collisions subies par les espèces chargées atténuent l'activité turbulente et favorisent le développement de structures laminaires à grande échelle, telles que des circulations méridionales ou encore des structures zonales auto-organisées.

PERSPECTIVES

Cette étude est affectée de nombreuses incertitudes qu'il conviendrait d'aborder dans des travaux futurs. Premièrement, j'ai caractérisé plusieurs processus physiques sans parvenir à expliquer le mécanisme en cause. C'est notamment le cas des écoulements zonaux obtenus dans nos simulations globales stratifiées. L'apparente brisure de symétrie équatoriale mérite aussi une étude numérique extensive, laquelle fournirait des éléments pour comprendre l'instabilité de la nappe de courant dans le plan médian. Enfin, nos simulations suggèrent que l'écoulement est axisymétrique en bonne approximation lorsque les inductions Hall et ambipolaire sont combinées. Afin de numériquement stabiliser l'induction Hall, j'ai utilisé un solveur de Riemann reconnu pour être diffusif. Il n'est pas aisé de déterminer lequel de l'effet Hall ou du schéma numérique favorise les configurations axisymétriques, et une implémentation moins diffuse de l'induction Hall est nécessaire pour y répondre.

Deuxièmement, je me suis concentré sur la dynamique du gaz et non sur celle des poussières. L'absence de diffusion turbulente favorise la sédimentation verticale des poussières vers le plan médian, en particulier pour les grains partiellement couplés au gaz (millimétriques). Simultanément, les circulations laminaires s'établissant dans le plan médian pourraient avoir un rôle important sur le transport radial des grains. Les situations où le plan médian est excréteur rétablissent la possibilité de transporter des éléments réfractaires des régions internes et chaudes vers les régions externes. Le transport radial pourrait être stoppé en accumulant les grains

dans les écoulements zonaux. Ces hypothèses supposent que la présence de grains n'influence pas les propriétés de transport dans le disque, mais il est connu que les poussières sub-microniques peuvent capturer des électrons et dramatiquement augmenter la diffusion magnétique. Cet effet n'a pas été inclus car non-seulement il fait intervenir une chimie complexe (distributions spatiales en tailles et en charges des grains), mais il pourrait aussi augmenter les diffusivités magnétiques hors du régime numériquement abordable. Une étude dédiée sera nécessaire pour valider les différents comportements exposés précédemment en présence de poussières.

Troisièmement, les vents de disques faiblement magnétisés dépendent de l'irradiation stellaire pour emmagasiner l'énergie nécessaire à leur libération. J'ai adopté différentes prescriptions pour décrire le chauffage par les photons stellaires de haute énergie, aucune ne correspondant véritablement à un transfert de rayonnement. Les prescriptions thermiques basées sur des calculs Monte Carlo en régime stationnaire permettent des progrès. Cependant, la thermo-chimie du vent reste mal contrainte, et une faible fraction d'ionisation pourrait étendre l'influence du champ magnétique sur de plus grandes échelles verticales par diffusion ambipolaire. Les rayonnements FUV non-ionisants devraient être pris en compte dans un second temps, car s'ils peuvent significativement contribuer à l'évaporation des disques dans les régions externes ; leur sensibilité à la chimie et à la distribution de poussières amène le problème à un degré de complexité actuellement inaccessible aux simulations numériques.

ANNEXES



Résumé

Je présente une méthode pour valider l'implémentation du calcul des courants électriques dans le code PLUTO en géométrie non-cartésienne. La méthode s'appuie sur la relation de dispersion du plasma en rotation différentielle pour extraire des modes propres MRI non-idéaux. Le problème aux valeurs propres est résolu par une méthode de collocation spectrale. Il s'agit de mon premier travail de thèse concret.

Sommaire

1.	Méthode de validation	210
1.1.	Problèmes aux valeurs propres	210
1.2.	Méthodes spectrales	211
1.3.	Conditions aux limites	215
1.4.	Validation de la méthode	216
2.	Validation en géométrie cylindrique	225
2.1.	Définition du problème	225
2.2.	Spectre	228
2.3.	Géométrie des modes propres	232
3.	Validation en géométrie sphérique	233
3.1.	Difficultés liées à la méthode spectrale	233
3.2.	Difficultés liées aux simulations directes	237
3.3.	Validation sphérique	238

A.1 MÉTHODE DE VALIDATION

Les codes de simulations tels que PLUTO sont écrits en plusieurs dizaines de milliers de lignes en langage C, incorporant de nombreux modules de façon intriquée. Il est difficile de prévoir comment une fonctionnalité particulière va impacter les résultats de simulations, certaines fonctionnalités pouvant même être mutuellement exclusives. Pour tester le bon comportement du code dans diverses configurations, il faut autant que possible confronter les résultats de simulations à des prédictions analytiques. La phase linéaire de la MRI est adaptée à ce rôle : nous pouvons faire des prédictions analytiques et semi-analytiques précises, et il s'agit bien de la physique que nous souhaitons capturer par la suite. Le code PLUTO a bien sûr été testé dans de nombreuses configurations [230], et en particulier avec la MRI [107]. L'implémentation de l'EMF Hall peut être validée en retrouvant précisément les propriétés de la relation de dispersion MHD Hall. Par exemple, la relation de dispersion des ondes whistler et ion-cyclotron, illustrée sur la Figure 1.3, a servi de test dans les codes SNOOPY [184, figure 1] et dans PLUTO en géométrie cartésienne [195, figure A.1]. Je vais me concentrer sur la relation de dispersion d'un plasma MHD non-idéal et cisailé, capturant ainsi la MRI en géométrie non-cartésienne.

A.1.1 Problèmes aux valeurs propres

Considérons pour commencer le système d'équations suivant, décrivant la dynamique 1D d'un fluide isotherme entre deux murs :

$$\partial_t \rho = -\partial_x [\rho v], \quad (\text{A.1a})$$

$$\partial_t v = -v \partial_x v - (c_s^2 / \rho) \partial_x \rho. \quad (\text{A.1b})$$

$$v(x = -1, t) = v(x = 1, t) = 0 \forall t \quad (\text{A.1c})$$

Ce système admet pour solution stationnaire $\bar{\rho} = \rho_0, \bar{v} = 0$. Perturbons cet équilibre et ne gardons que les termes du premier ordre en perturbation :

$$\partial_t \rho' \simeq -\rho_0 \partial_x v', \quad (\text{A.2a})$$

$$\partial_t v' \simeq -(c_s^2 / \rho_0) \partial_x \rho'. \quad (\text{A.2b})$$

Nous pouvons formellement ré-écrire ce système

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\rho_0 \partial_x \\ -\frac{c_s^2}{\rho_0} \partial_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \rho' \\ v' \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

Historiquement connu sous le nom de 'stiffness matrix'.

ou bien sous une forme plus compacte : $\partial_t \xi = \Lambda \cdot \xi$, avec Λ l'opérateur d'évolution du système. Nous pouvons chercher des solutions $\xi \propto e^{\omega t}$ en vertu de ce que le problème est linéaire, et obtenir les pulsations caractéristiques comme valeurs propres de l'opérateur Λ [135]. Ce problème peut se résoudre algorithmiquement en cherchant des solutions (ρ', v') de dimension finie, échantillonnées sur un maillage uniforme. L'opérateur ∂_x

peut alors être représenté comme une matrice de dimension finie, agissant sur le vecteur ρ'_i dont la coordonnée i est la valeur de ρ' au point d'échantillonnage x_i . Par exemple, si la solution recherchée est discrétisée sur un maillage de pas h , nous pouvons représenter ∂_x comme la matrice des différences finies à droite :

$$\partial_x \equiv \frac{1}{h} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Les différences finies centrées auraient également été valables.

Différence évaluée à gauche au dernier point d'interpolation.

À ce moment là, il faut remplacer ρ' et v' par leurs vecteurs respectifs dans (A.3), et remplacer les opérateurs ∂_x par la matrice associée. L'opérateur d'évolution est ainsi construit bloc par bloc, et le problème devient algorithmiquement abordable. Pour qu'il soit bien posé, il ne reste plus qu'à imposer des conditions aux limites. Cela peut être réalisé de différentes façons ; j'y reviendrai dans les sections suivantes. On peut ensuite chercher des valeurs propres particulières, ou les extraire à partir du spectre entier de Λ , et étudier les modes propres correspondant.

Je récapitule les étapes de la méthode révélées dans cet exemple simple :

- A. exhiber une solution stationnaire du système d'EDP ;
- B. expliciter le système linéaire tangent à cet équilibre ;
- C. représenter les opérateurs partiels en dimension finie ;
- D. construire l'opérateur d'évolution global Λ par bloc ;
- E. injecter des conditions aux limites ;
- F. extraire les valeurs et vecteurs propres du système linéaire.

A.1.2 Méthodes spectrales

Les méthodes spectrales offrent une précision remarquable dans l'estimation des opérateurs différentiels. Les fonctions recherchées sont décomposées sur un ensemble de fonctions élémentaires, et la troncation sur cet ordre de décomposition permet de se ramener à un problème de dimension finie. Le choix de l'espace des fonctions élémentaires est déterminé par les conditions aux limites du problème :

Voir Section II.2.2.

- Fourier : sinusoidal, périodique ;
- Chebyshev : polynômial sur $[-1, 1]$;
- Laguerre : polynômial sur $[0, +\infty[$;
- Hermite : polynômial sur $]-\infty, +\infty[$.

Chaque famille de base est orthogonale pour un produit scalaire approprié sur les ensembles indiqués. Il peut être judicieux de choisir les polynômes de Laguerre ou de Hermite lorsque le problème s'étend jusqu'à l'infini :

Une fonction satisfaisant $f(-1) = f(1)$ pourra aussi être décomposée sur la base de Fourier : le spectre est invariant par changement de base.

cela retire de façon naturelle les effets de bords indésirables pouvant survenir lors de la résolution numérique du problème. Dans la suite, je vais toujours considérer un intervalle fermé $[-1, 1]$. Les polynômes de Chebyshev sont idéaux dans ce cas : ils sont bien documentés, ils offrent d'excellentes propriétés de convergence [53], et les opérations usuelles s'expriment assez simplement dans cette base.

Le choix d'un ensemble de fonctions élémentaires n'est rien d'autre qu'un choix de base finie pour représenter les opérateurs linéaires. Si la solution au problème linéaire peut être décomposée sur deux bases différentes, alors le choix de la base ne devrait pas affecter les valeurs propres de l'opérateur d'évolution. Si la solution n'est pas compatible avec la base choisie (par exemple une fonction non-périodique sur la base de Fourier), la convergence des valeurs propres pourra être dégradée, et le spectre pourra être pollué de modes non-physiques. Une fois la base choisie, il existe encore différentes approches pour résoudre le problème aux valeurs propres. Je décris ci-dessous deux méthodes que j'ai mises en oeuvre.

A.1.2.1 Méthode de Galerkin

Suivant l'approche de Galerkin, nous cherchons à minimiser la distance entre la solution approchée et la solution exacte du problème, avec la distance associée au produit scalaire pour lequel les fonctions de base sont orthogonales [62, 270]. Suivant cette approche, l'information pertinente est la donnée des coefficients spectraux de la fonction recherchée : la résolution consiste à chercher la meilleure approximation des coefficients spectraux qui satisfont le problème dans l'espace spectral. La solution approchée est obtenue en revenant dans l'espace réel par une transformation inverse, après avoir trouvé les coefficients spectraux optimaux. Cette solution est donc optimale dans un sens "faible", en moyenne ; en particulier, la solution approximée n'a pas besoin d'être égale à la solution exacte sur les points d'échantillonnage.

Dans l'espace spectral, l'opération de différenciation pourra être ramenée à un opérateur matriciel linéaire :

$$\partial_x f(x, t) \simeq \sum_{k=0}^N \tilde{f}_k(t) \partial_x \phi_k(x) = \sum_{k,p=0}^N \tilde{f}_k(t) D_{kp} \phi_p(x) = \sum_{p=0}^N \tilde{f}'_p \phi_p(x),$$

où les $\tilde{f}'_p := \sum_k D_{kp} \tilde{f}_k$ sont les coefficients spectraux de la dérivée de f . Dans la base de Fourier, l'opérateur de différenciation est diagonal :

$$\langle \phi_m | \partial_x | \phi_n \rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & -ik_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -ik_N \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Dans la base de Chebyshev, la matrice de différenciation spectrale prend une forme que l'on trouve explicitée dans Peyret [270]. Par exemple, pour

$N = 5$, l'opérateur de différenciation prend une forme relativement creuse lorsqu'il agit sur les coefficients spectraux :

$$\langle \phi_m | \partial_x | \phi_n \rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

On veillera à mailler l'intervalle $[-1, 1]$ avec les $N + 1$ points de Gauss associés à la base de polynômes choisie. Dans le cas des polynômes de Chebyshev, ces points sont répartis suivant

$$x_i = \cos\left(\frac{(1 + 2i)\pi}{2N}\right), \quad 0 \leq i \leq N - 1, \quad (\text{A.7})$$

afin de minimiser l'erreur d'interpolation lorsque l'on ajuste une fonction.

L'implémentation des conditions aux limites dans l'espace réel à partir des coefficients spectraux peut être délicate. En effet, les valeurs d'une fonction aux bords du domaine sont affectées par l'ensemble de ses coefficients spectraux. La première méthode que j'ai mise au point consiste à construire une nouvelle base de polynômes par combinaison linéaire, de telle sorte que chaque élément de la nouvelle base satisfasse indépendamment les conditions aux limites. Si les conditions aux limites imposent d'annuler la dérivée n -ième de la solution, chaque polynôme de la nouvelle base a sa dérivée n -ième nulle au bord, et cette propriété est préservée par combinaison linéaire de tels polynômes.

Avec deux conditions aux limites imposées, un ensemble de $N + 1$ polynômes de Chebyshev est réduit à $N - 1$ polynômes modifiés. Connaissant la décomposition spectrale d'une fonction dans la base initiale, nous pouvons obtenir les coefficients spectraux dans la base modifiée par l'intermédiaire d'une matrice de passage P non-carrée. Cette opération n'est pas injective : il y a une perte d'information, et la fonction de départ est projetée sur l'ensemble des fonctions satisfaisant les conditions aux limites du problème. Nous pouvons ensuite retrouver les coefficients spectraux de la fonction déprojetée à l'aide de la matrice pseudo-inverse P^\dagger telle que $PP^\dagger P = P$; voir par exemple Grifone [135]. Dans l'ensemble des matrices pseudo-inverse possibles pour P , celle de Penrose-More est naturellement préférable car elle minimise la norme euclidienne du vecteur des coefficients spectraux déprojetés. Par analogie avec un changement de base usuel, les composantes d'un opérateur linéaire Λ dans la base modifiée s'obtiennent via $\Lambda \mapsto P\Lambda P^\dagger$. Il suffit alors de résoudre le problème projeté sur la base modifiée, puis de revenir à la base initiale; un exemple d'application de cette méthode est élaboré par Liu et al. [210].

Si $(T_m)_{m \in \mathbb{N}}$ dénote l'ensemble des polynômes de Chebyshev, nous pouvons construire $(\phi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ satisfaisant des conditions homogènes de Robin

$$a_\pm \phi_m(\pm 1) + b_\pm \phi'_m(\pm 1) = 0 \quad (\text{A.8})$$

Les points d'interpolation sont typiquement choisis comme racines du polynôme de plus haut degré résolu afin de minimiser l'erreur résiduelle; cf. intégration de Gauss.

L'inverse de Penrose-More n'ajoute pas de contributions dans le supplémentaire du sous-espace projeté.

par la combinaison $\phi_m = T_m + a_m T_{m+1} + b_m T_{m+2}$, avec les coefficients

$$a_m = \left\{ - \left(a_+ + b_+ (m+2)^2 \right) (-a_- + b_- m^2) + \left(a_- - b_- (m+2)^2 \right) (-a_+ - b_+ m^2) \right\} / c_m, \quad (\text{A.9a})$$

$$b_m = \left\{ + \left(a_+ + b_+ (m+1)^2 \right) (-a_- + b_- m^2) + \left(a_- - b_- (m+1)^2 \right) (-a_+ - b_+ m^2) \right\} / c_m, \quad (\text{A.9b})$$

$$c_m = 2a_+ a_- + (m+1)^2 (m+2)^2 (a_- b_+ - a_+ b_- - 2b_- b_+). \quad (\text{A.9c})$$

Par exemple, les conditions homogènes de Dirichlet et de Neumann sont respectivement satisfaites par les choix suivants :

$$\phi_m = T_m - T_{m+2} \implies \phi(-1) = \phi(+1) = 0 \quad (\text{A.9d})$$

$$\phi_m = T_m - \frac{m^2}{(m+2)^2} T_{m+2} \implies \partial_x \phi(-1) = \partial_x \phi(+1) = 0. \quad (\text{A.9e})$$

Les quatre premiers polynômes modifiés pour ces deux conditions aux limites sont représentés sur la [Figure A.1](#).

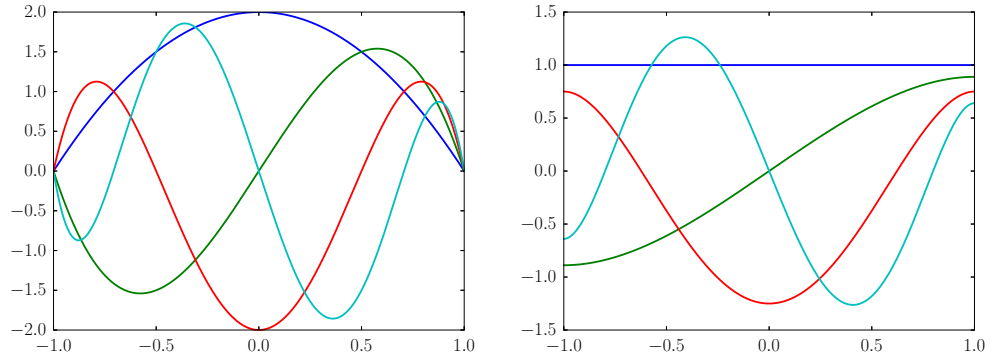


FIGURE A.1. – Bases de Chebyshev modifiées, satisfaisant les conditions de Dirichlet (*à gauche*) et de Neumann (*à droite*).

A.1.2.2 Méthode de collocation

Il est possible de garder les avantages d'une décomposition spectrale tout en travaillant directement dans l'espace réel. Suivant la méthode de collocation [e.g., 62, 270], la solution recherchée doit satisfaire le problème donné aux points de collocations $(x_i)_i$, et non en moyenne comme une méthode de type Galerkin. Les inconnues sont les valeurs de la fonction f recherchée aux points de collocation. Partant de f dans l'espace réel, nous calculons sa transformée, puis sa dérivée dans l'espace spectral, puis la transformée inverse de la dérivée; chacune de ces opérations étant linéaires, nous pouvons estimer la dérivée de f au point x_i par combinaison linéaire des valeurs de f sur l'ensemble des $(x_j)_j$:

$$\partial_x f(x_i) \equiv \sum_j D_{ij} f(x_j) \quad (\text{A.10})$$

La distinction avec les différences finies vient de l'information sur la base de polynômes choisie, et de l'ensemble des points de collocation associés. Par exemple, connaissant les valeurs $f(x_j)$ d'une fonction f décomposée sur les $N + 1$ polynômes de Chebyshev aux points de Gauss-Lobatto :

$$x_j = \cos\left(\frac{\pi j}{N}\right), \quad j \in [0, N], \quad (\text{A.11})$$

nous pouvons estimer la dérivée $\partial_x f(x_i)$ grâce à la matrice de différenciation définie par :

$$D_{00} = -D_{NN} = \frac{2N^2 + 1}{6}; \quad (\text{A.12a})$$

$$D_{ii} = -\frac{x_i}{2(1 - x_i^2)}, \quad 1 \leq i \leq N - 1; \quad (\text{A.12b})$$

$$D_{ij} = \frac{c_i (-1)^{i+j}}{c_j x_i - x_j}, \quad 0 \leq i, j \leq N, i \neq j, \quad (\text{A.12c})$$

avec $c_0 = c_N = 2$ et $c_j = 1$ pour $1 \leq j \leq N - 1$.

Suivant une méthode de collocation, la multiplication de f par une fonction quelconque $g(x)$ prend une forme diagonale, mais les matrices de différenciation sont denses. C'est l'opposé des méthodes de Galerkin, mais les opérateurs d'évolution seront généralement plus denses que ceux obtenus par la méthode de Galerkin. Cette remarque devient pertinente dans le cas de problèmes multidimensionnels avec de nombreux champs couplés, pour lesquels des algorithmes de résolution creuse deviennent indispensables.

Un avantage majeur des méthodes de collocation est dans la facilité à imposer des conditions aux limites. Sur les points de Gauss-Lobatto (A.11), les premières et dernières valeurs du vecteur $(f_i)_i$ correspondent respectivement à $f(1)$ et $f(-1)$. Pour imposer des conditions aux bords dans le problème aux valeurs propres $\Lambda \cdot \xi = \omega \xi$, nous pouvons modifier la première et la dernière ligne de l'opérateur d'évolution Λ . Par exemple, pour imposer des conditions aux limites de Neumann $\partial_x f = 0$ aux bords, il faut remplacer la première et la dernière ligne de Λ par les lignes correspondantes de la matrice associée à l'opérateur différenciation ∂_x , définies par (A.12). Il faut ensuite modifier le problème aux valeurs propres en ajoutant une *matrice de conditionnement* Γ dans le membre de droite : $\Lambda \cdot \xi = \omega \Gamma \cdot \xi$; on parle alors de problème aux valeurs propres généralisé. La matrice Γ est construite à partir de la matrice identité, dans laquelle la première et la dernière ligne sont remplacées par les valeurs souhaitées pour la dérivée (i.e. une ligne de zéros). En résumé, la première et la dernière ligne de Λ portent l'information sur les conditions aux limites, tandis que le reste de la matrice contient le problème différentiel.

A.1.3 Conditions aux limites

Comme tout système d'équations différentielles, le problème aux valeurs propres n'est bien posé qu'une fois des conditions aux limites correc-

tement assignées. Il faut en imposer le bon nombre en fonction de la géométrie du problème et de l'ordre de différenciation des opérateurs partiels. Il faut également que ces conditions aux limites soient mutuellement compatibles, une propriété qui s'appuie sur notre intuition selon la physique que l'on souhaite capturer. Par exemple, on interdira les modes acoustiques du système (A.1) en tentant d'imposer des conditions de Dirichlet à la fois pour la pression et pour la vitesse. Comme il y a un échange entre énergie cinétique et énergie interne, la vitesse et la pression doivent être déphasées de $\pi/2$, et cette physique doit être respectée par les conditions aux limites. Dans ce cas précis, nous pouvons dériver une seconde fois l'une des équations du système (A.1) par rapport au temps pour obtenir une équation d'onde n'impliquant qu'un seul champ (densité ou vitesse), révélant que deux conditions aux limites sont suffisantes.

A.1.4 Validation de la méthode

Dans cette section, je valide les méthodes spectrales que j'ai développées pour la résolution de problèmes aux valeurs propres. Je vais régulièrement me servir de l'opérateur laplacien Δ . Les propriétés de cet opérateur garantissent la convergence des méthodes numériques vers des modes propres non-triviaux. L'équation aux valeurs propres correspondante est $\Delta\xi = \omega\xi$. Elle est analogue à la recherche des modes de vibration d'une variété, décrite par l'équation d'onde $\partial_t^2\xi = \Delta\xi$. Nous pourrions donc interpréter les modes propres de Δ comme des modes de vibration d'une corde ou d'une surface, et les valeurs propres associées par le carré de la fréquence de vibration associée. Je commence par comparer les méthodes de Galerkin et de collocation, puis je les applique à la résolution de problèmes à plusieurs dimensions spatiales et à plusieurs champs couplés.

A.1.4.1 Galerkin & Collocation

J'explique dans le [Listing 1](#) l'algorithme permettant de calculer l'ensemble des valeurs et vecteurs propres de l'opérateur laplacien 1D, avec conditions aux limites de Dirichlet aux deux bords, suivant la méthode spectrale de Galerkin. Les principales étapes sont indiquées en commentaires. Les quarante premières valeurs propres ainsi obtenues ont une précision relative meilleure que 1% par rapport aux valeurs attendues, $\omega_n = -(n\pi/2)^2$, $n \in \mathbb{N}$. Le premier mode propre, de valeur propre minimale, est représenté sur la [Figure A.2](#); il est précisément superposé à la prédiction analytique $\cos(\pi x/2)$.

Listing 1 – Laplacien 1D avec conditions de Dirichlet : Galerkin-Chebyshev.

```

1 Nx = 64 # Resolution spatiale
2 DX = CDM(Nx) # Matrice de differentiation spectrale
3 DX2 = np.dot(DX,DX) # Double differentiation
4 BC = np.eye(Nx) - np.diag(np.ones(Nx-2), -2) # Base de Dirichlet
5 BC = BC[:, :Nx-2] # Troncation de la nouvelle base

```

```

7 BC_1 = la.pinv(BC)           # Pseudo-inverse de Penrose-More
8 DDX2 = np.dot(np.dot(BC_1,DX2),BC) # Projection de l'opérateur
w, v = la.eig(DDX2)          # Valeurs et vecteurs propres
9 vr = np.dot(BC,vr)         # De-projection vers la base usuelle

```

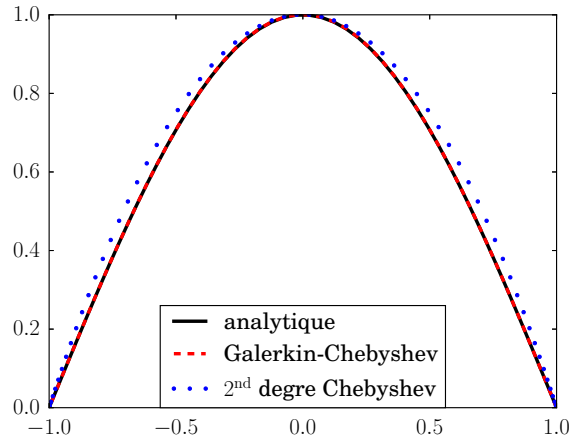


FIGURE A.2. – Premier mode propre de l’opérateur laplacien cartésien 1D sur l’intervalle $[-1, 1]$ avec conditions aux limites de Dirichlet; la solution obtenue par la méthode de Galerkin (*tirets rouges*) se superpose précisément à la solution analytique (*trait noir*); le polynôme du second degré $(x - 1)(x + 1)$ est tracé (*points bleus*) comme référence.

Le Listing 2 présente l’algorithme analogue via la méthode de collocation Chebyshev. Les différences notables sont indiquées en commentaires. Son résultat est le même que celui du Listing 1. Je compare la précision relative des valeurs propres calculées avec les méthodes de Galerkin et de collocation sur la Figure A.3, pour des conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann. Dans les deux cas, la résolution spatiale est de 64 points, dont deux servant à coder les conditions aux limites. Les vingt premières valeurs propres sont calculées à la précision machine, et les vingt suivantes restent estimées à mieux que 1%, indépendamment des conditions aux limites choisies. En comparaison, seuls les sept premières valeurs propres sont estimées à mieux que 1% par les différences finies du second ordre.

Listing 2 – Laplacien 1D avec conditions de Dirichlet : collocation Chebyshev.

```

1 Idx = np.eye(Nx)           # Operateur identite
DX = CDM_real(x)           # Matrice de differentiation via collocation
3 A = np.dot(DX,DX)         # Operateur laplacien
A[0,:] = Idx[0,:]          # Dirichlet : valeur imposee a gauche
5 A[-1,:] = Idx[-1,:]      # valeur imposee a droite
B = np.eye(Nx) ;           # Matrice de conditionnement
7 B[0,:] = 0.0 ;           # Dirichlet : valeur zero a gauche
B[-1,:] = 0.0 ;           # zero a droite
9 w, v = scipy.linalg.eig(A,B) # Probleme aux valeurs propres generalise

```

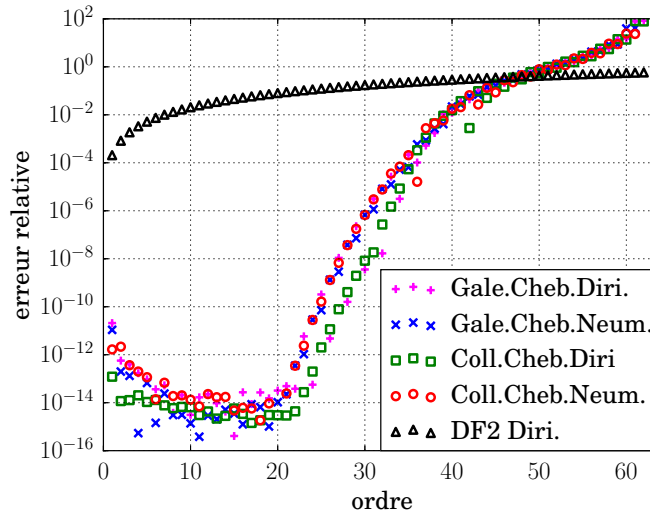


FIGURE A.3. – Erreur relative sur l'estimation des valeurs propres de l'opérateur laplacien cartésien 1D, en fonction de l'ordre du mode, pour différentes configurations ayant chacune 64 points de résolution : méthode de Galerkin ou de collocation Chebyshev, conditions de Dirichlet ou de Neumann aux bords ; la méthode des différences finies du second ordre (DF2) est représentée pour comparaison.

A.1.4.2 Systèmes à plusieurs champs

Je vais considérer un problème avec plusieurs champs couplés, en me concentrant sur l'exemple des modes acoustiques (A.1) de la Section A.1.1. En examinant le système (A.1), il est clair que les oscillations de densité et de vitesse doivent être déphasées, i.e. si v satisfait les conditions de Dirichlet comme souhaité, alors ρ doit satisfaire les conditions de Neumann. Nous sommes confrontés à une difficulté liée à la méthode de Galerkin : nous ne pouvons pas simplement imposer des conditions aux limites différentes, i.e. employer différentes bases au sein de l'opérateur d'évolution.

Il suffirait de dériver une seconde fois l'une des équations (A.1) par rapport au temps pour obtenir une équations d'ondes sur ρ ou v isolément. Le calcul des modes propres se ramènerait alors au cas de l'opérateur laplacien discuté plus haut, en ne travaillant que sur un seul champ. Dans le cas MHD non-idéal qui va nous intéresser, le nombre de champs couplés peut être important (typiquement sept), et chaque équation peut contenir des opérateurs de différenciation d'ordre un ou deux. Dans ces conditions, la démarche consistant à isoler un champ dans une équation d'ordre élevé devient particulièrement pénible. J'ai préféré conserver le système d'équations couplées pour faciliter le debugage du problème ; cela évite aussi l'emploi d'opérateurs de différenciation d'ordre élevé, lesquels pourraient souffrir de l'approximation numérique.

J'ai tenté d'extraire des modes acoustiques en imposant différents jeux de conditions aux limites dans la méthode de Galerkin. Si j'impose des conditions aux limites de Dirichlet simultanément aux perturbations en

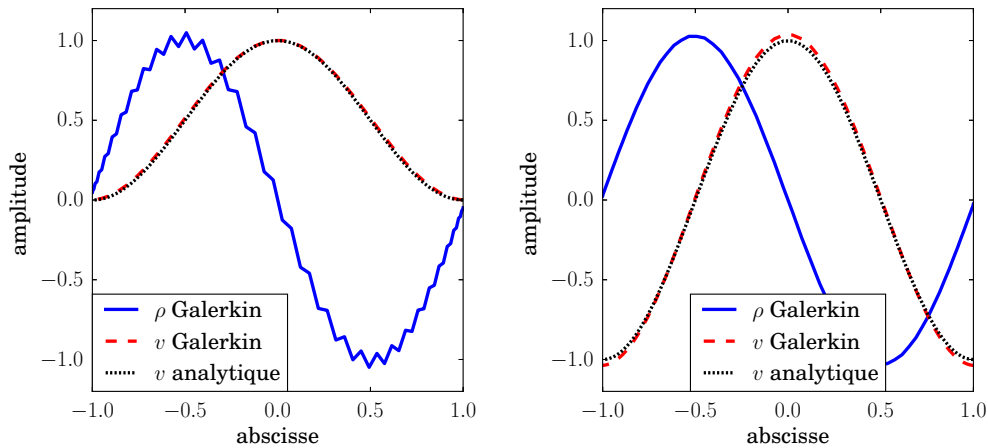


FIGURE A.4. – Premier mode acoustique obtenu par la méthode de Chebyshev-Galerkin avec des conditions de Dirichlet (*à gauche*) et des conditions de Neumann (*à droite*) simultanément appliquées aux champs de densité et de vitesse.

densité et en vitesse, j’obtiens bien des modes propres s’annulant aux bords (voir [Figure A.4 gauche](#)); en revanche, la densité exhibe des oscillations à petite échelle, caractéristiques d’une convergence spectrale dégradée. Si je projette les opérateurs de différenciation des champs de densité et de vitesse dans le sous-espace satisfaisant les conditions de Neumann, j’obtiens les solutions lisses de la [Figure A.4 droite](#). La densité ne satisfait clairement pas la condition de Neumann; comme mentionné précédemment, une seule paire de conditions aux limites est suffisante dans ce problème, et les conditions sont ici incompatibles. Dans les deux cas de la [Figure A.4](#), les modes propres ont une géométrie semblable à celle que l’on attend de la solution exacte, et les valeurs propres sont estimées avec une précision relative de quelques 10^{-2} au mieux avec 62 modes spectraux.

Par curiosité encore, j’ai essayé de projeter les opérateurs partiels de différenciation sur les deux bases différentes (Dirichlet et Neumann), au sein du même opérateur d’évolution. Les modes propres de cette matrice ont approximativement la bonne géométrie (voir [Figure A.5 gauche](#)), mais s’écartent significativement des prédictions analytiques. Les valeurs propres sont estimées à 10^{-2} près, mais *ne convergent pas* vers le spectre exact à plus haute résolution spectrale. Pour ces raisons, j’ai définitivement exclu la méthode de projection des opérateurs sur des sous-espaces satisfaisant les conditions aux limites (Galerkin). Dans la suite, je ferai uniquement référence à la méthode de collocation spectrale.

Je vérifie que la méthode de collocation fournit les bonnes prédictions pour les modes acoustiques. Les conditions aux limites sont imposées comme indiqué dans la [Section A.1.2.2](#), en modifiant la première et dernière ligne de chaque bloc diagonal dans l’opérateur d’évolution. Le troisième mode propre est bien reproduit sur la [Figure A.6 gauche](#). Les vingt premières valeurs propres sont capturées à la précision machine.

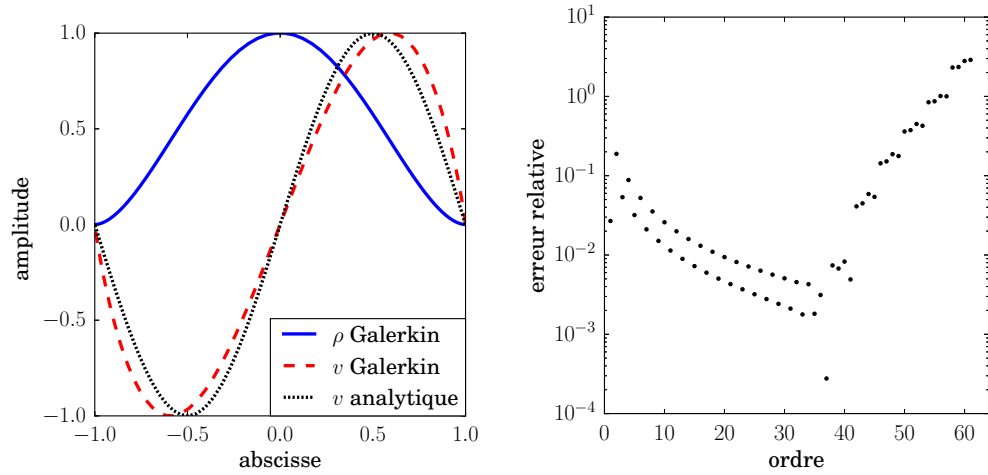


FIGURE A.5. – Non-convergence de la méthode de Galerkin-Chebyshev pour capturer les modes acoustiques (résolution de 64 points, soit 62 modes). À gauche, structure du premier mode propre : densité (traits pleins bleu) et vitesse (tirets rouge) obtenues, vitesse théorique (pointillés noirs) ; à droite : erreur relative sur l'estimation des valeurs propres.

Lorsque je considérerai le problème des modes propres MRI non-idéaux, je commencerai toujours par vérifier que je retrouve bien des modes stationnaires acoustiques en l'absence de champ magnétique, puis la MRI idéale en l'absence d'effets non-idéaux. Cette vérification étape par étape doit être systématiquement appliquée tant que nous pouvons identifier différentes familles de modes propres, associées à différents processus physiques. Augmenter progressivement la complexité des tests devient essentiel pour vérifier l'implémentation des problèmes multidimensionnels avec de nombreux champs couplés.

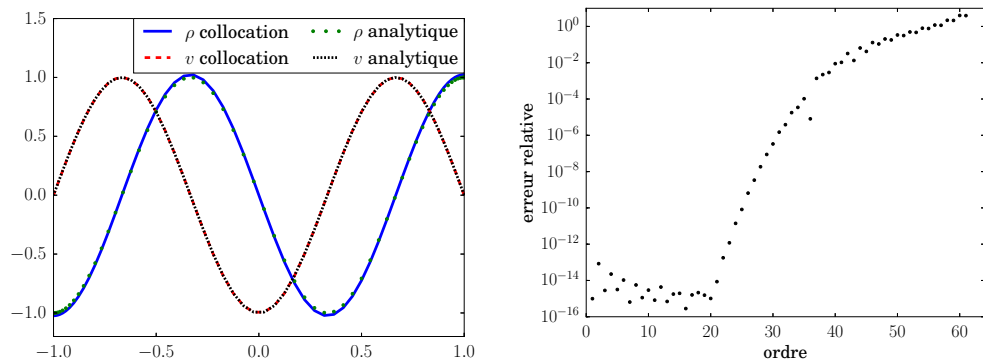


FIGURE A.6. – Validation de la méthode de Collocation Chebyshev pour capturer les modes acoustiques (résolution de 64 points). À gauche, structure du troisième mode propre : densité (traits pleins bleu) et vitesse (tirets rouge) obtenues, densité théorique (points verts) et vitesse théorique (pointillés noirs) ; à droite : erreur relative sur l'estimation des valeurs propres en fonction de leur ordre.

Les dimensions de la matrice à diagonaliser peut poser un handicap technique. Le nombre de lignes de l'opérateur d'évolution augmente comme le nombre de champs couplés, multiplié par le produit des résolutions spatiales dans chaque dimension. Par exemple, pour résoudre les modes propres de deux champs couplés en trois dimensions, avec une résolution de 32 points par dimension, il faut diagonaliser une matrice carrée de 65536 lignes. Il devient alors indispensable de travailler sur des matrices creuses, et de résoudre le problème aux valeurs propres de façon approximative, en cherchant spécifiquement un nombre donné de valeurs propres à proximité d'un point donné du plan complexe.

A.1.4.3 Systèmes multi-dimensionnels

La résolution d'un problème aux valeurs propres sur un domaine multidimensionnel ne diffère pas conceptuellement du problème 1D. En revanche, cela introduit de nouvelles difficultés techniques. J'explique une méthode générique pour passer du problème 1D au 2D. Par analogie au cas 1D, une fonction de deux variables $f : (x, y) \in X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ peut formellement être décomposée sur un produit de fonctions élémentaires :

$$f(x, y) = \sum_{i,j} \tilde{f}_{ij} \phi_i(x) \psi_j(y). \quad (\text{A.13})$$

Cette décomposition correspond au produit tensoriel des espaces de fonctions de ϕ et ψ . Connaissant l'action d'un opérateur linéaire L_x agissant sur les $\phi_i(x)$, nous pouvons naturellement l'appliquer sur $f(x, y)$ en tant que produit tensoriel d'opérateurs $L_x \otimes \mathbb{1}_y$. Si nous connaissons indépendamment les actions de ∂_x sur ϕ_i et de ∂_y sur ψ_j , alors leur action simultanée sur une fonction $f(x, y)$, c'est à dire $\partial_x \partial_y f$, s'exprime comme

$$(\partial_x \otimes \partial_y) \cdot f(x, y) = \sum_{i,j} \tilde{f}_{ij} \partial_x \phi_i(x) \partial_y \psi_j(y). \quad (\text{A.14})$$

Par exemple, le laplacien en coordonnées sphériques axisymétriques ($\partial_\varphi = 0$) peut s'écrire comme somme de produits tensoriels d'opérateurs :

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{1}{r^2} \partial_r [r^2 \partial_r f] + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \partial_\theta [\sin(\theta) \partial_\theta f] \\ &= \left(\partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r \right) \cdot [f] + \left(\frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\tan(\theta)} \partial_\theta \right) \cdot [f] \\ \Delta f &= \left\{ \left(\partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r \right) \otimes \mathbb{1}_\theta + \frac{1}{r^2} \otimes \left(\partial_\theta^2 + \frac{1}{\tan(\theta)} \partial_\theta \right) \right\} \cdot [f]. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

En raison de la non-commutativité des opérateurs, il est primordial de développer les expressions telles que $\partial_x [xf] = x \partial_x f + f = (x \partial_x + \mathbb{1}_x) \cdot f$. Cela permet de clairement dégager les opérateurs partiels formant les blocs de l'opérateur d'évolution. Cela évite également les erreurs de troncation au dernier ordre spectral et la perte des valeurs propres extrêmes.

I.e. les résolutions dans les dimensions x et y sont respectivement m et n.

Dans le cas d'une fonction f d'une seule variable, un opérateur linéaire peut être représenté par une matrice agissant sur le vecteur des composantes de f . Dans le cas d'une fonction de deux variables, la fonction f est identifiée par un ensemble de coefficients \tilde{f}_{ij} correspondant aux deux bases $(\phi_i)_i$ et $(\psi_j)_j$. Si cette matrice a pour dimensions m et n , nous pouvons aisément la réorganiser en un vecteur \tilde{f}_k , avec par exemple $k = i + mj$. Parallèlement, un produit tensoriel d'opérateurs linéaires se présente comme une application linéaire sur l'espace produit, i.e. comme une matrice agissant sur le vecteur des \tilde{f}_k . Concrètement, la matrice M décrivant le produit tensoriel de deux applications linéaires $A \otimes B$ sera représentée par le produit de Kronecker des deux matrices A et B . Je présente dans le [Listing 3](#) ci-dessous la démarche pour construire le problème aux valeurs propres du laplacien 2D par collocation Chebyshev, conditions aux limites incluses. À partir de la ligne 12, le jeu d'indices est approprié pour imposer des conditions aux limites dans les deux dimensions.

Listing 3 – Construction du Laplacien 2D cartésien par collocation Chebyshev, conditions aux limites de Dirichlet via matrice de conditionnement.

```

1 Nx = Ny = 48 # Resolution spatiale
  N2 = Nx*Ny # Nombre total de points
3 x = y = GL_grid(Nx) # Points de Gauss & Lobatto
  [X,Y] = np.meshgrid(x,y) # maillage 2D
5 Idx = Idy = np.eye(Nx) # Operateurs identite 1D
  Idxy = np.kron(Idy,Idx) # Operateur identite 2D
7 DX = DY = CDM_real(x) # Operateurs de differentiation
  DX2 = np.dot(DX,DX) # Double differentiation en x
9 DY2 = np.dot(DY,DY) # Double differentiation en y
  # Operateur laplacien cartésien 2D :
11 A = np.kron(DX2,Idy) + np.kron(Idy,DY2)
  for i in xrange(Nx) : # Conditions Dirichlet aux bords y
13     A[i*Ny,:] = Idxy[i*Ny,:]
     A[(i+1)*Ny-1,:] = Idxy[(i+1)*Ny-1,:]
15 for j in xrange(Ny) : # Conditions Dirichlet aux bords x
     A[j,:] = Idxy[j,:]
17     A[N2-j-1,:] = Idxy[N2-j-1,:]
  B = np.copy(Idxy) # Matrice de conditionnement
19 for i in xrange(Nx) : # Conditions sur les bords y :
     B[i*Ny,i*Ny] = 0.0 # valeur zero
21     B[(i+1)*Ny-1,(i+1)*Ny-1] = 0.0 # valeur zero
  for j in xrange(Ny) : # Condition sur les bords x :
23     B[j,j] = 0.0 # valeur zero
     B[N2-j-1,N2-j-1] = 0.0 # valeur zero

```

Premiers par valeur propre de valeur absolue croissante.

Sur la [Figure A.7](#) sont illustrés les neuf premiers modes propres obtenus par cette méthode, avec 48 points de collocation par dimension. J'ai vérifié que les valeurs propres du laplacien cartésien 2D correspondent bien à l'ensemble des produits de paires de valeurs propres du laplacien 1D.

Dans le [Listing 4](#), je construis le même problème en géométrie sphérique axisymétrique ($\partial_\phi = 0$), sur une portion de sphère délimitée radialement et angulairement. Comme la base de Chebyshev est toujours définie sur

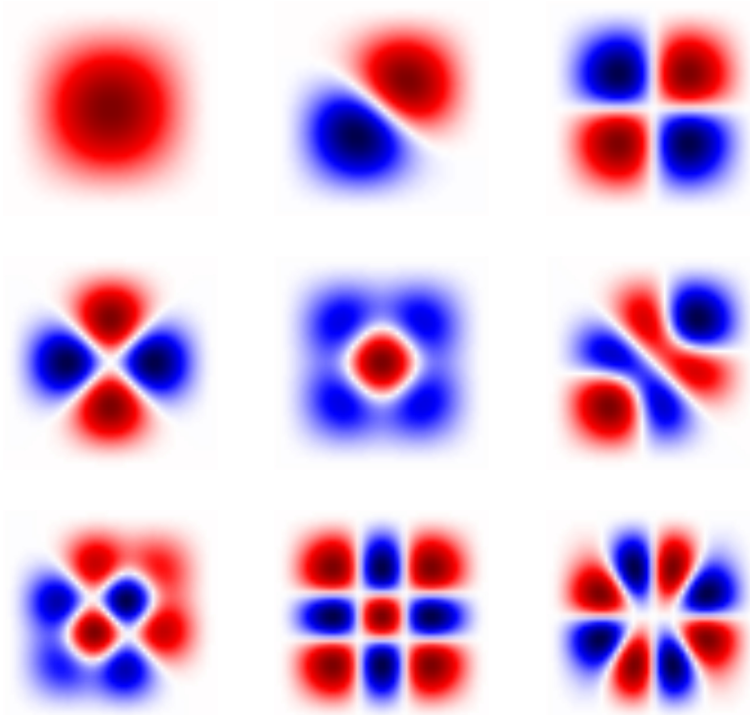


FIGURE A.7. – Illustration des neuf premiers modes propres de l’opérateur laplacien sur un domaine carré avec conditions aux limites de Dirichlet.

l’intervalle $[-1, 1]$, la première étape consiste à identifier le changement de coordonnées $(r, \theta) \mapsto (x, y) \in [-1, 1]^2$. L’opérateur laplacien sphérique est défini par (A.15), faisant cette fois intervenir des produits Kronecker d’opérateurs radiaux et angulaires.

Listing 4 – Construction du laplacien 2D (r, θ) sphérique axisymétrique.

```

# Definition des operateurs partiels
2 DX2 = np.dot(DX,DX)           # Double differentiation
  X_1 = np.diag(1.0/r)          # Multiplication par 1/r
4  X_2 = np.diag(1.0/(r*r))     # Multiplication par 1/r^2
  DY = (2.0/dt)*CDM_real(y)    # Differentiation en theta
6  DY2 = np.dot(DY,DY)         # Double differentiation
  COT = np.diag(np.cos(t)/np.sin(t)) # Multiplication par cotan(t)
8 # Operateur laplacien spherique axisymetrique :
  A = np.kron(DX2,Idy) + np.kron(np.dot(2*X_1,DX),Idy)
10 + np.kron(X_2,DY2) + np.kron(X_2,np.dot(COT,DY))

```

Les six premiers modes propres ainsi obtenus sont représentés sur la Figure A.8, où l’effet de courbure est responsable de l’asymétrie radiale.

Pour vérifier la validité de cette méthode spectrale en deux dimensions sphériques, nous pouvons encore comparer les modes propres obtenus à des solutions analytiques. Je vais me restreindre à une famille de modes du laplacien sphérique axisymétrique. J’emploie une méthode de colloca-

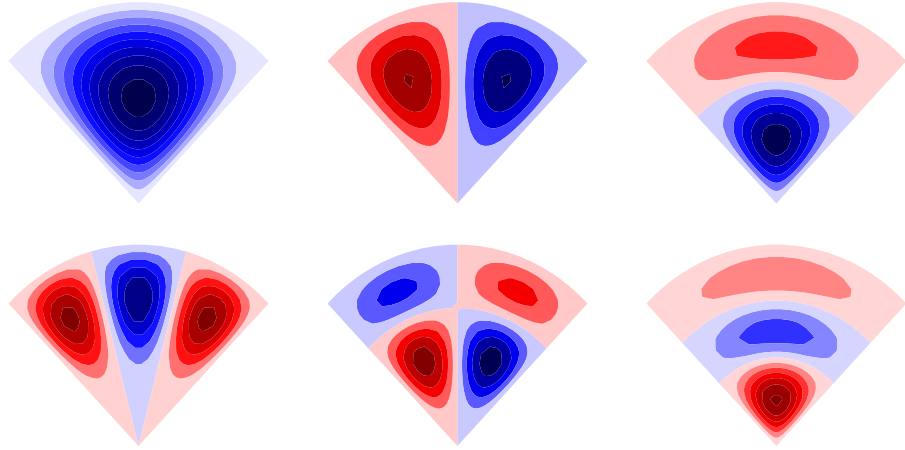


FIGURE A.8. – Illustration des six premiers modes propres du laplacien sur un domaine sphérique (r, θ) avec conditions aux limites de Dirichlet.

tion Chebyshev dans la dimension radiale $r \in [0, 1]$, et Galerkin-Fourier dans la dimension polaire $\theta \in [0, \pi/n]$, $n \in \mathbb{N}^*$, avec des conditions de Neumann en $r = 0$ et de Dirichlet en $r = 1$. Les trois premiers modes propres, ordonnés par la partie réelle de leur valeur propre, sont illustrés sur la [Figure A.9](#). Les valeurs propres réelles correspondent aux modes isotropes ($\partial_\theta = 0$), à l'exemple des deux premiers de la [Figure A.9](#). Les modes multipolaires comme le troisième de la [Figure A.9](#) ont une valeur propre complexe. Nous pouvons isoler les modes isotropes à partir du spectre complet représenté sur la [Figure A.10](#) gauche. Leur amplitude ne dépend que de la coordonnée radiale, et s'exprime simplement en terme de fonction de Bessel de première espèce : $J_{1/2}(n\pi r)/\sqrt{r}$, $n \in \mathbb{N}^*$, comme confirmé sur la [Figure A.10](#) droite.

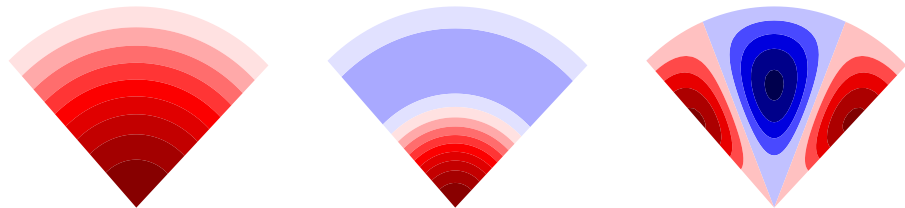


FIGURE A.9. – Modes propres du laplacien sphérique avec conditions aux limites de Fourier en angle, de Neumann en $r = 0$ et de Dirichlet en $r = 1$, ordonnés par la partie réelle de la valeur propre associée.

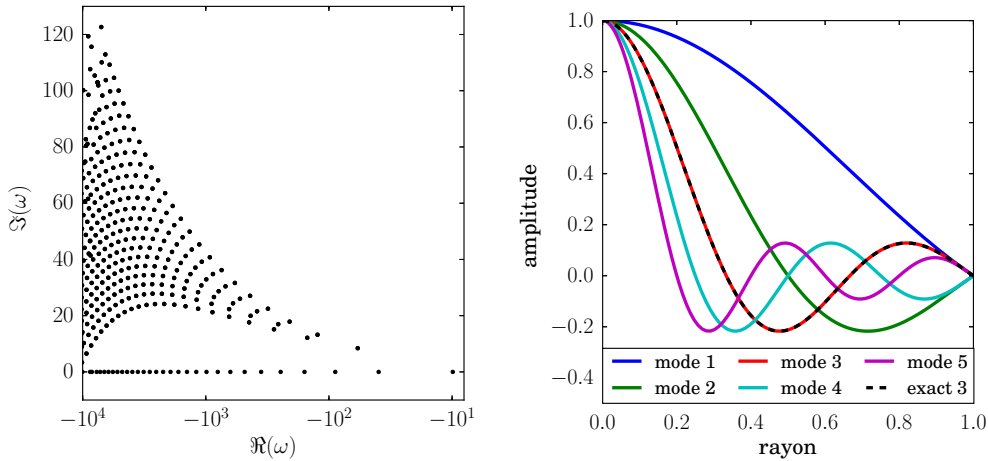


FIGURE A.10. – Modes propres du Laplacien sphérique axisymétrique sur $(r, \theta) \in [0, 1] \times [0, \pi/2]$, avec conditions de Neumann en $r = 0$, conditions de Dirichlet en $r = 1$, et périodicité angulaire; à gauche : portion du spectre dans le plan complexe pour une résolution de 48×48 ; à droite : amplitude des modes isotropes ($\partial_\theta = 0$, $\Im(\omega) = 0$) en fonction du rayon; une solution exacte $J_{1/2}(3\pi r)/\sqrt{r}$ (Bessel de première espèce) est normalisée et superposée au troisième mode.

A.2 VALIDATION EN GÉOMÉTRIE CYLINDRIQUE

Maintenant que la méthode spectrale est opérationnelle, nous pouvons l'appliquer pour tester l'implémentation des courants en géométrie cylindrique dans le code PLUTO. Il est préférable de tester une situation aussi proche que possible des configurations que nous étudierons ensuite. La phase linéaire de la MRI en régime MHD non-idéale se prête parfaitement à ce test. Il s'agit de prédire la géométrie des modes propres MRI par la méthode spectrale, et de la comparer aux résultats issus de simulations directes. Ce type d'étude spectrale de la MRI trouve des exemples dans Keppens et al. [173], Kersalé et al. [174], Latter et al. [191].

A.2.1 Définition du problème

Considérons un écoulement képlérien dans un système de coordonnées cylindriques (r, φ, z) . Nous pouvons forcer l'axisymétrie en annulant les termes de dérivées $\partial_\varphi = 0$, afin de simplifier les calculs tout en conservant des modes MRI à fort taux de croissance [24]. L'hypothèse d'écoulement cylindrique consiste à considérer un écoulement d'équilibre qui soit invariant par translation verticale. En revanche, pour capturer la MRI nous devons permettre aux perturbations d'avoir une structure verticale. Nous pouvons décomposer les champs perturbés en série de Fourier sur une échelle de hauteur verticale h , et considérer différentes valeurs de h

comme paramètre. Les équations décrivant la dynamique d'un fluide compressible, visqueux, magnétisé et en régime MHD non-idéal sont :

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot [\rho \mathbf{v}] \quad (\text{A.16a})$$

$$\partial_t \mathbf{v} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \frac{\nabla P}{\rho} + \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{\rho} + \mu \Delta \mathbf{v} - \nabla \Phi \quad (\text{A.16b})$$

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{B} = & \nabla \times [\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \eta \nabla \times \mathbf{B}] \\ & - \lambda (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \gamma ((\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \end{aligned} \quad (\text{A.16c})$$

où ρ est la densité du fluide, \mathbf{v} sa vitesse, \mathbf{B} le champ d'induction magnétique, $P \equiv c_s^2 \rho$ la pression suivant une équation d'état isotherme, μ la viscosité, $\mathbf{J} \equiv \nabla \times \mathbf{B}$ la densité de courant électrique, η la résistivité Ohmique, λ la longueur de Hall et γ le coefficient de diffusion ambipolaire. Les coefficients λ et γ sont constants dans ce modèle. $\Phi \propto r^{-1}$ est le potentiel gravitationnel associé à un écoulement en rotation képlérienne dans un système de coordonnées cylindriques.

Ces équations sont linéarisées au voisinage de la solution stationnaire $\bar{\rho} = \rho_0$, $\bar{\mathbf{B}} = B_0 \mathbf{e}_z$, $\bar{\mathbf{v}} = \Omega r \mathbf{e}_\varphi$ où $\Omega(r) \propto r^q$ avec $q = -3/2$ dans le cas d'un écoulement képlérien. En cherchant des perturbations axisymétriques ($\partial_\varphi = 0$), l'équation décrivant la perturbation en densité s'écrit :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho' &= -\bar{\rho} \nabla \cdot \mathbf{v}' \\ \Leftrightarrow \partial_t \rho' &= -\rho_0 \left(\frac{1}{r} + \partial_r \right) [v'_r] + \rho_0 \partial_z v'_z. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

La perturbation en vitesse obéit à

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{v}' &= -\mathbf{v}' \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla \mathbf{v}' + \frac{c_s^2}{\bar{\rho}} \nabla \rho' + \frac{(\nabla \times \mathbf{B}') \times \bar{\mathbf{B}}}{\bar{\rho}} + \mu \Delta \mathbf{v}'; \\ \partial_t v'_r &= -\frac{\bar{v}_\varphi v'_r}{r} \mathbf{e}_\varphi - (\partial_r \bar{v}_\varphi) v'_r \mathbf{e}_\varphi + 2 \frac{\bar{v}_\varphi v'_\varphi}{r} \mathbf{e}_r \\ &\quad - \frac{c_s^2}{\rho_0} \nabla \rho' - \frac{B_0}{\rho_0} \mathbf{e}_z \times (\nabla \times \mathbf{B}') + \mu \Delta \mathbf{v}', \end{aligned}$$

soit pour chaque composante

$$\begin{aligned} \partial_t v'_r &= 2\Omega v'_\varphi + \frac{B_0}{\rho_0} (\partial_z B'_r - \partial_r B'_z) - \frac{c_s^2}{\rho_0} \partial_r \rho' \\ &\quad + \mu \left(\partial_z^2 + \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r - \frac{1}{r^2} \right) v'_r; \end{aligned} \quad (\text{A.18a})$$

$$\begin{aligned} \partial_t v'_\varphi &= -(2+q) \Omega v'_r + \frac{B_0}{\rho_0} \partial_z B'_\varphi \\ &\quad + \mu \left(\partial_z^2 + \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r - \frac{1}{r^2} \right) v'_\varphi; \end{aligned} \quad (\text{A.18b})$$

$$\partial_t v'_z = -\frac{c_s^2}{\rho_0} \partial_z \rho' + \mu \left(\partial_z^2 + \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r \right) v'_z. \quad (\text{A.18c})$$

La perturbation du champ magnétique évolue suivant

$$\begin{aligned} \partial_t B' = \nabla \times [\Omega r e_\phi \times B' - B_0 e_z \times v' - \eta \nabla \times B' \\ + \lambda B_0 e_z \times (\nabla \times B') + \gamma B_0^2 e_z \times e_z \times (\nabla \times B')]; \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

nomons $D_r := 1/r + \partial_r$, ainsi que $\bar{\eta} := \eta + \gamma B_0^2$, et décomposons :

$$\partial_t B'_r = B_0 \partial_z v'_r + \bar{\eta} \partial_z [\partial_z B'_r - \partial_r B'_z] + \lambda B_0 \partial_z^2 B'_\phi \quad (\text{A.20a})$$

$$\begin{aligned} \partial_t B'_\phi = B_0 \partial_z v'_\phi + (q\Omega - \lambda B_0 \partial_z^2) [B'_r] \\ + (\bar{\eta} \partial_z^2 + \eta \partial_r D_r) [B'_\phi] + \lambda B_0 \partial_z \partial_r B'_z \end{aligned} \quad (\text{A.20b})$$

$$\partial_t B'_z = -B_0 D_r v'_r - \bar{\eta} D_r [\partial_z B'_r - \partial_r B'_z] - \lambda B_0 D_r \partial_z B'_\phi \quad (\text{A.20c})$$

Dans une configuration axisymétrique, nous pouvons réduire le nombre de variables et garantir la contrainte $\nabla \cdot B = 0$ en utilisant le vecteur potentiel A_ϕ tel que $B_r = -\partial_z A_\phi$ et $B_z = D_r A_\phi$:

$$\begin{aligned} \partial_t B'_\phi = B_0 \partial_z v'_\phi + \bar{\eta} \partial_z^2 B'_\phi \\ + \lambda B_0 \partial_z (\partial_z^2 - \partial_r D_r - \partial_r [\Omega r]) [A'_\phi] \\ + \eta \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r - \frac{1}{r^2} \right) [B'_\phi] \end{aligned} \quad (\text{A.21a})$$

$$\partial_t [-\partial_z A'_\phi] = B_0 \partial_z v'_r - \bar{\eta} \partial_z (\partial_z^2 + \partial_r D_r) [A'_\phi] + \lambda B_0 \partial_z B'_\phi \quad (\text{A.21b})$$

$$\partial_t [D_r A'_\phi] = -B_0 D_r v'_r + \bar{\eta} D_r (\partial_z^2 + \partial_r D_r) [A'_\phi] - \lambda B_0 D_r \partial_z B'_\phi \quad (\text{A.21c})$$

où seule l'une des équations (A.21b) et (A.21c) est nécessaire (au choix). Nous disposons alors d'un système d'équations différentielles $\partial_t \xi = \Lambda \cdot \xi$ pour les six champs $\xi = (\rho', v'_r, v'_\phi, v'_z, A'_\phi, B'_\phi)$ en deux dimensions (r, z) .

Comme l'écoulement d'équilibre est invariant par translation verticale, nous pouvons choisir d'étudier des phénomènes sur une échelle verticale h quelconque. En développant chaque champ en série de Fourier $f(r, z, t) = \sum_n \hat{f}_n(r, t) \exp[i2\pi n z/h]$, nous nous limitons automatiquement aux phénomènes sur une échelle inférieure ou égale à h . L'opérateur différentiel ∂_z est alors équivalent à une multiplication par $i2\pi n/h$ du n -ième mode de Fourier. La coordonnée z n'apparaît plus dans une seule équation, donc la structure radiale des modes propres est seulement déphasée dans la direction verticale, et nous pouvons chercher des solutions harmoniques $\xi \propto \exp[ikz]$. De cette façon, la décomposition spectrale est uniquement calculée dans la direction radiale, et nous pouvons jouer sur l'échelle k comme un paramètre.

I.e. multipliée par $e^{i2n\pi z/h}$.

Pour le domaine radial, considérons un intervalle fermé avec des conditions aux limites imposées aux bords interne et externe; la méthode de collocation Chebyshev est appropriée. Un jeu de conditions aux limites compatibles, à imposer aux deux bords radiaux, est :

- $\partial_r \rho = 0$;
- $v_r = 0$;
- $v_\phi = 0$;
- $\partial_r v_z = 0$;

- $\partial_r D_r A_\varphi = 0$;
- $B_\varphi = 0$,

et nous aurons automatiquement $B_r = 0$ à partir du potentiel A_φ .

Dans la suite, je prends le rayon interne r_0 pour unité de longueur, Ω_0 au bord interne pour unité de fréquence, $T_0 = 2\pi/\Omega_0$ pour unité de temps, ρ_0 pour unité de densité, et j'exprime l'intensité du champ magnétique par la vitesse d'Alfvén associée $B/\sqrt{\rho_0}$. Le domaine radial est défini comme l'intervalle $[1, 2]$ en unité de rayon interne.

A.2.2 Spectre

A.2.2.1 Propriétés du spectre

Dans un premier temps, je diagonalise l'opérateur d'évolution Λ avec 64 points de collocation, et je regarde la répartition des valeurs propres dans le plan complexe. Je fixe les valeurs de $h = 1$, $q = -3/2$, $c_s = 1$ et $B_0 = 2 \times 10^{-3}$. Je commence par considérer le spectre de Λ en MHD idéale et non visqueuse, c'est à dire $\eta = \lambda = \gamma = \mu = 0$. Dans ce cas, la relation de dispersion du plasma admet des racines réelles ou imaginaires pures, et cette propriété doit être vérifiée par les valeurs propres ω_n , comme c'est effectivement le cas sur la [Figure A.11](#) gauche. Encore une fois, c'est le type de prédiction qui doit systématiquement être confrontée aux résultats des méthodes numériques pour en tester la validité et les limites. Le spectre peut être pollué par des modes non-physiques, dus aux erreurs numériques ou à des conditions aux limites incorrectement implémentées.

Donc $k = 2\pi$.

Les valeurs propres imaginaires correspondent aux modes oscillants temporellement. Leur symétrie par rapport à l'origine reflète leur deux directions de propagation possibles. Ils sont séparés en deux groupes distincts : les modes d'Alfvén à basse fréquence, et les modes magnétosoniques à plus haute fréquence. Les valeurs propres réelles correspondent aux modes évanescents (négatifs) et instables (positifs); ces derniers sont justement des modes MRI. Pour chaque famille de modes propres identifiée, l'ensemble des valeurs propres représentées correspond à différentes longueurs d'ondes radiales; ces ensembles sont discrets en raison de la discrétisation de l'opérateur d'évolution.

Sur la [Figure A.11](#) droite, je représente le spectre obtenu pour le même jeu de paramètres à l'exception des diffusivités magnétique et visqueuse, respectivement fixées à $\eta = \mu = 3 \times 10^{-3}$. Le nombre de Lundquist associé $\mathcal{S} := v_A h / \eta = 2/3$ dans ce cas. En MHD résistive, nous pouvons prédire que la MRI est stabilisée pour des nombres de Lundquist inférieurs à l'unité [168]. En conséquence, le spectre ne contient pas de valeurs propres dont la partie réelle est positive. Les modes d'Alfvén et magnétosoniques sont tous deux affectés par les effets dissipatifs : ils prennent une partie réelle négative, traduisant l'amortissement temporel de toutes les fluctuations par rapport à l'équilibre.

Je retire la viscosité $\mu = 0$, mais laisse une résistivité $\eta \neq 0$ afin de tuer les modes MRI à petite échelle. De cette façon, nous serons certains de

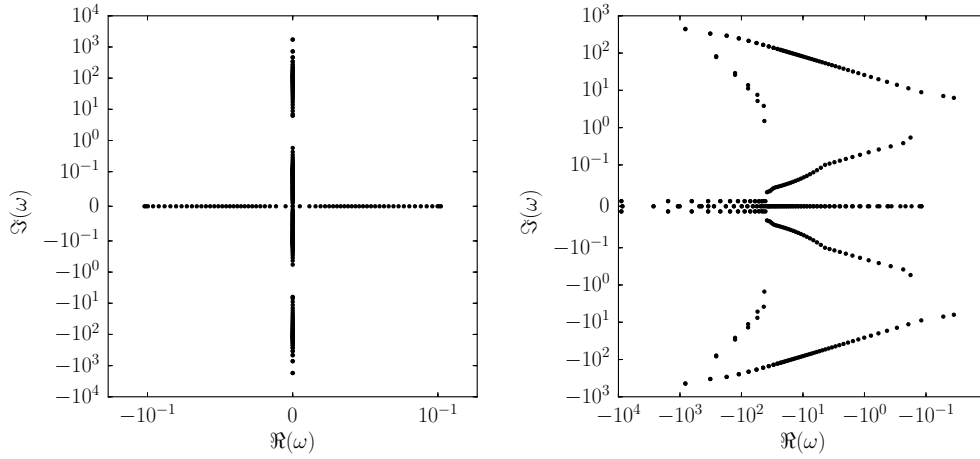


FIGURE A.11. – Spectre de l’opérateur d’évolution en MHD idéale (à gauche) et en MHD résistive et visqueuse (à droite, nombres de Lundquist $S = 2/3$). La partie réelle des modes propres est décalée vers la gauche (partie réelle négative) en présence d’effets dissipatifs.

bien résoudre spatialement le mode instable au plus fort taux de croissance dans les simulations numériques directes. Le nombre de Lundquist ohmique vaut toujours $S = 2/3 < 1$, mais l’effet Hall peut déstabiliser des modes dans ce régime de résistivité [28]. Avec $\lambda = 1$, nous obtenons le spectre représenté sur la Figure A.12. Les modes d’Alfvén et magnétosoniques sont faiblement affectés par la résistivité ; un zoom près de l’axe imaginaire révèle que les modes oscillants prennent une partie réelle négative, d’autant plus grande que les modes sont à petite échelle spatiale. Les ondes whistler contribuent maintenant au spectre à haute fréquence d’oscillation, et elles sont également amorties par la résistivité. Dans ce régime de paramètres, nous trouvons une unique valeur propre réelle positive, i.e. un mode instable, avec un taux de croissance $\omega \approx 0.0989\Omega_0$.

Viscosité et résistivité affectent différemment ces modes.

A.2.2.2 Validation des spectres

Avant d’aller plus loin, je souhaite valider les spectres obtenus en MHD non-idéale, sans inclure l’effet Hall pour le moment. Je fixe les diffusivités $\eta = \mu = 3 \times 10^{-3}$, et j’échantillonne différentes valeurs de champ magnétique B_0 et de fréquence spatiale k . Pour chaque couple (k, B_0) , je calcule le spectre complet, et trace sur la Figure A.13 le taux de croissance maximal obtenu (i.e. la plus grande valeur propre réelle positive). Je peux comparer cette carte avec celle produite par Kersalé et al. [174], avec la même géométrie et la même physique, mais avec des conditions aux bords légèrement différentes. Les deux cartes sont très semblables ; en particulier le taux de croissance maximal est dans le voisinage de $(k, B_0) \approx (4.6, 0.1)$ dans les deux cas. Cela nous apporte une assurance supplémentaire quant à la validité des spectres calculés.

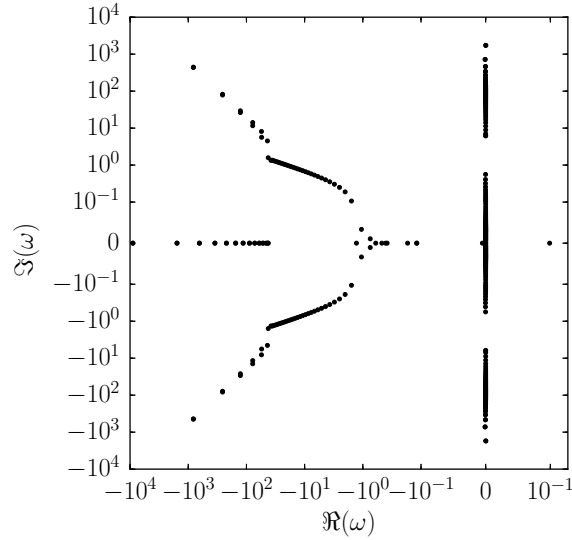


FIGURE A.12. – Spectre de l’opérateur d’évolution MHD avec effet Hall et résistivité ohmique. On ne trouve qu’un seul mode instable (dont la partie réelle est positive) dans ce régime, à $\omega \approx 0.0989\Omega_0$.

A.2.2.3 Simulation directe de l’instabilité

Je prépare un setup numérique pour le code PLUTO, avec la même configuration que dans la méthode spectrale : même extension radiale $r \in [1, 2]$ et verticale $z \in [0, 1]$ en géométrie cylindrique axisymétrique, même équilibre initial et mêmes valeurs pour la résistivité ohmique η et la longueur de Hall λ . Selon la méthode numérique, l’instabilité peut ne pas se déclencher en l’absence de bruit. J’ajoute donc à cette condition initiale un bruit blanc sur les trois composantes du champ de vitesse, d’amplitude $10^{-10}\Omega h$, en guise de perturbation initiale à l’équilibre. Cette perturbation doit être aussi faible que possible pour bien capturer le régime linéaire de l’instabilité, durant laquelle l’amplitude des mode va croître exponentiellement en temps. Le bruit blanc assure que tous les modes disponibles sont excités ; en présence de plusieurs modes instables, c’est celui dont le taux de croissance est le plus élevé qui va rapidement dominer la perturbation.

Les conditions aux limites imposées correspondent à celles indiquées à la fin de la [Section A.2.1](#). Un soin particulier sur les conditions aux limites permet de gagner en précision sur la solution. Indexons les cellules par i dans la direction radiale, notons i_0 l’indice de la première cellule dans le domaine actif pour i croissant, et Γ l’interface entre les cellules fantômes et le domaine actif. Les conditions aux limites pour f peuvent être fixées précisément sur Γ par le choix des valeurs fantômes $0 \leq i < i_0$:

$$\mathbb{1}_x \cdot f|_{\Gamma} = C \quad : \quad f_i = C - (f_{2i_0-1-i} - C), \quad (\text{A.22a})$$

$$\partial_x \cdot f|_{\Gamma} = 0 \quad : \quad f_i = f_{2i_0-1-i}. \quad (\text{A.22b})$$

Ces conditions reviennent à prolonger f comme une fonction paire ou impaire par rapport à l’interface. Le même raisonnement s’applique pour l’in-

I.e. une valeur aléatoire uniforme de moyenne nulle.

Il ne faudrait pas exciter spécifiquement un mode évanescent.

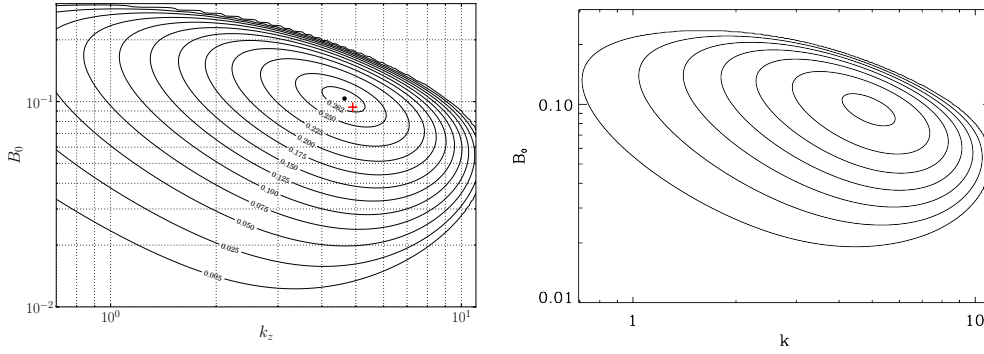


FIGURE A.13. – Taux de croissance $\Re(\omega)/\Omega$ en fonction de l'intensité du champ magnétique B_0 et de la fréquence spatiale k dans la direction verticale. À gauche : mon analyse spectrale ; à droite : celle extraite de Kersalé et al. [174], avec des conditions aux limites différentes. La croix rouge sur la figure de gauche localise le maximum de la figure de droite.

terface située à l'autre extrémité du domaine de calcul. Je fais remarquer que ce choix d'implémentation des conditions aux limites, s'il est précis, *n'est pas nécessairement robuste*. Il est adapté dans cette situation où nous cherchons à capturer précisément des modes propres linéaires, mais peut devenir inadapté dans les simulations non-linéaires. Il est arrivé qu'une simulation s'arrête en raison de conditions non-physiques dans les cellules fantômes, ce qui peut être délicat à diagnostiquer. Pour moins de précision et plus de robustesse, j'ai préféré imposer pour $0 \leq i < i_0$:

$$\mathbb{1}_x \cdot f|_{\Gamma} = C \quad : \quad f_i = C, \quad (\text{A.23a})$$

$$\partial_x \cdot f|_{\Gamma} = 0 \quad : \quad f_i = f_{i_0}. \quad (\text{A.23b})$$

E.g. densités négatives

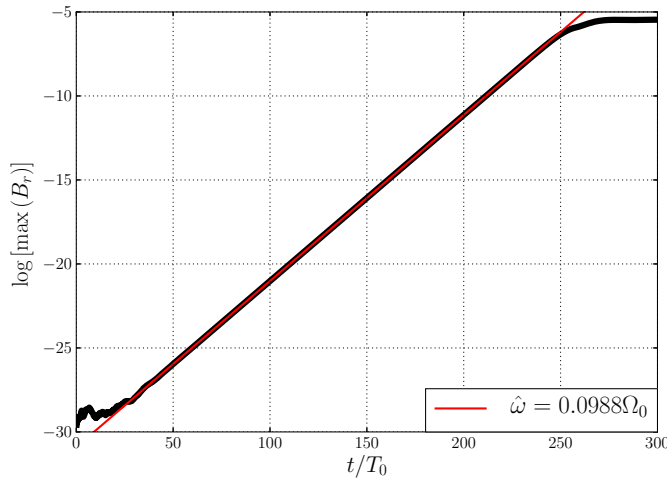


FIGURE A.14. – Amplitude de la perturbation en champ magnétique radial B_r' au cours du temps dans la simulation directe (noir) et ajustement exponentiel (rouge) avec un taux de croissance estimé à $\hat{\omega} = 0.0988$.

Je trace sur la [Figure A.14](#) la valeur maximale de B_r' dans cette simulation au cours du temps. La phase de croissance exponentielle est parfaitement capturée, et le taux de croissance mesuré $\hat{\omega} \approx 0.0988\Omega$ ne dévie que de 10^{-3} relativement à la valeur attendue ; cette précision est très satisfaisante. Après $250T_0$, l'intensité de la perturbation magnétique est comparable à l'intensité du champ initial B_0 . Sur ce mode MRI peuvent alors pousser d'autres instabilités dites "parasites", avec des taux de croissance doublement exponentiels et responsables de la saturation de la MRI ; voir par exemple Goodman & Xu [132], Latter et al. [192]. J'ai également vérifié qu'en inversant l'orientation du champ magnétique initial, l'effet Hall joue un rôle stabilisateur : aucun mode instable n'apparaît, ni par la méthode spectrale, ni dans la simulation directe.

A.2.3 Géométrie des modes propres

Une fois que nous disposons du spectre de Λ entier, nous pouvons sélectionner une valeur propre dans le plan complexe, puis identifier le mode propre ξ_n correspondant, au sein duquel sont successivement stockées les composantes des six champs couplés. Une façon supplémentaire de vérifier que le code PLUTO résout correctement le système d'équations MHD non-idéales consiste à comparer la géométrie des modes prédits et mesurés. Par exemple, dans le cas d'une onde sonore isotherme (A.1), vitesse et densité sont déphasées de $\pi/2$ dans la direction de propagation de l'onde. C'est cette information structurelle qu'il s'agit de tester.

J'isole le vecteur propre associé à la seule valeur propre réelle positive sur la [Figure A.12](#), je le décompose en champs de densité, vitesse et induction magnétique, et représente leur dépendance radiale sur la [Figure A.15](#). En moyenne radiale, les profils prédits et mesurés s'accordent à mieux que 10^{-3} près d'erreur relative. Notons qu'en raison de la décomposition de Fourier dans la direction verticale, les vecteurs propres sont complexes. La symétrie de translation verticale assure que l'argument complexe de chaque champ est constant radialement, préservant la relation de phase verticale entre les différents champs. Les profils représentés sur la [Figure A.15](#) correspondent en fait aux modules des différents champs à une hauteur z/h quelconque.

Les perturbations en densité et en vitesse azimuthale sont représentées sur la [Figure A.15](#) droite. Pour ces deux champs en particulier, la simulation n'a pas convergé vers les profils prédits. Les conditions aux limites sont correctement satisfaites, et les tendances sont les bonnes. En revanche, les déviations aux profils attendus sont grandes, et les courbes ne sont pas lisses. Ces deux champs avaient des valeurs d'équilibre de l'ordre de l'unité, soit un facteur 10^{10} fois plus grandes que l'amplitude des perturbations injectées ; ils sont donc les plus sensibles aux erreurs de troncature numérique. Leur convergence n'est pas améliorée en augmentant de 10^4 l'amplitude relative des perturbations initiales en vitesse. Par ailleurs, ces perturbations en densité et vitesse azimuthale ne s'annulent pas en

*Je n'ai pas employé de schéma
d'advection orbitale de type
FARGO dans ce test.*

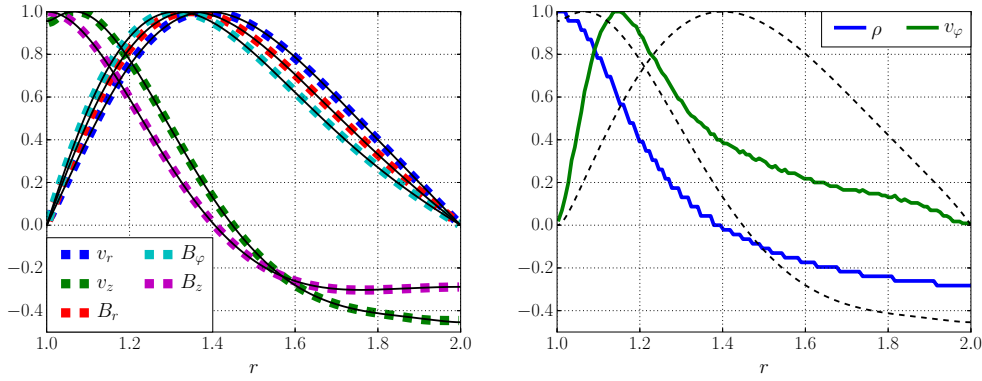


FIGURE A.15. – Vecteur propre Hall-MRI cylindrique pour un Lundquist ohmique $S = 2/3$ et un paramètre de Hall $\mathcal{L} = 1$. À gauche : les simulations directes (carrés) se superposent aux prédictions spectrales (traits) ; à droite : les profils de densité ρ' (bleu) et de vitesse azimuthale v'_ϕ (vert) n'ont pas convergé vers les prédictions (tirets).

moyenne verticale, donc elles ne sont pas entièrement causées par la Hall-MRI. Il peut s'agir d'un effet indésirable des bords radiaux.

A.3 VALIDATION EN GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE

A.3.1 Difficultés liées à la méthode spectrale

J'ai souhaité appliquer la même méthode pour valider l'implémentation des courants électriques et de l'effet Hall en géométrie sphérique dans le code PLUTO. Ce cas présente de nouvelles difficultés ; j'ai passé un certain temps à développer ma méthode spectrale pour la rendre optimale en temps de calcul et robuste en prédictions. Malheureusement, cette démarche n'a trouvé qu'un succès très limité.

Le premier problème est le suivant : nous ne pouvons plus nous débarrasser de la coordonnée verticale. Pour tester des effets de géométrie sphérique sur la MRI, il faut un domaine spatial avec une extension latitudinale non-négligeable, et il faut aussi une certaine extension radiale. L'opérateur d'évolution doit donc coupler les six champs perturbés dans deux dimensions. Je vais considérer le même équilibre perturbé que précédemment : un écoulement képlérien cylindrique, mais représenté en coordonnées sphériques ; le système linéaire tangent est explicité dans la [Section C.2](#). Le [Listing 5](#) donne un échantillon du code permettant de construire l'opérateur d'évolution dans ce cas, et le [Listing 6](#) montre comment implémenter des conditions aux limites dans la matrice de conditionnement. Le jeu d'indices permettant d'affecter les conditions aux limites a encore gagné en complexité.

Si les résolutions spatiales sont respectivement N_r et N_θ dans les directions radiale et latitudinale, alors le nombre de lignes de l'opérateur d'évolution vaut $N = 6 \times N_r \times N_\theta$. Pour un strict minimum de 8×16 points de

collocation, la matrice contient 768 lignes, et prend environ cinq secondes à diagonaliser avec la librairie LAPACK sur un ordinateur de bureau. La complexité des algorithmes de diagonalisation est typiquement en $\mathcal{O}(N^3)$ [277], ce qui rend rapidement le problème impraticable à haute résolution.

Listing 5 – Extrait de construction de l’opérateur d’évolution 2D à 6 champs.

```

Nx = 32, Ny = 32, N2=Nx*Ny # Resolution spatiale
2 N_var = 6 # Six champs : rho, v_r, v_t, v_p, A_p, B_p

4 STIF = np.zeros((N_var*Nx*Ny,N_var*Nx*Ny)) # Operateur d'evolution

6 i = 0, j = 1 #-----# d[rho]/dt : dependance en v_r
BOB = -rho0 * np.kron(2*X_1+DX,Idy) # -\rho_0 * (2/r + \partial_l_r)
8 Paste(STIF,i,j,Nx*Ny,Nx*Ny,BOB)
j = 2 #-----# d[rho]/dt : dependance en v_t
10 BOB = -rho0 * np.kron(X_1,DT) # -\rho_0 * (1/r) D_{\theta}
Paste(STIF,i,j,Nx*Ny,Nx*Ny,BOB)

```

Listing 6 – Construction de la matrice de conditionnement 2D à 6 champs.

```

1 COND = np.eye(N_var*N2) # Matrice de conditionnement
DXy = np.kron(DX,Idy) # Differentiation radiale
3 DYx = np.kron(Idx,DY) # Differentiation angulaire

5 # l'equation #5 concerne B_theta = -Dr.A_phi :
Paste(COND,4,4,N2,N2,np.kron(-Dr,Idy))

7
i = 0 #-----# equation pour rho
9
for k in xrange(Nx) : # Bords polaires : Neumann
11 STIF[i*N2+k*Ny,:] = 0.0 # Bord superieur
STIF[i*N2+k*Ny,i*N2:(i+1)*N2] = DYx[k*Ny,:] # Derivee
13 STIF[i*N2+(k+1)*Ny-1,:] = 0.0 # Bord inferieur
STIF[i*N2+(k+1)*Ny-1,i*N2:(i+1)*N2] = DYx[(k+1)*Ny-1,:] # Derivee
15 COND[i*N2+k*Ny,i*N2+k*Ny] = 0.0 # Derivee nulle
COND[i*N2+(k+1)*Ny-1,i*N2+(k+1)*Ny-1] = 0.0 # Derivee nulle
17
for k in xrange(Ny) : # Bords radiaux : Neumann
19 STIF[i*N2+k,:] = 0.0 # Bord externe
STIF[i*N2+k,i*N2:(i+1)*N2] = DXy[k,:] # Derivee
21 STIF[(i+1)*N2-k-1,:] = 0.0 # Bord interne
STIF[(i+1)*N2-k-1,i*N2:(i+1)*N2] = DXy[N2-k-1,:] # Derivee
23 COND[i*N2+k,i*N2+k] = 0.0 # Derivee nulle
COND[(i+1)*N2-k-1,(i+1)*N2-k-1] = 0.0 # Derivee nulle

```

I.e. les zeros ne sont pas stockés en mémoire.

Le premier remède consiste à manipuler des matrices creuses : pour une résolution de 8×16 points de collocation en MHD idéale, la matrice Λ contient 96% de coefficients nuls (voir [Figure A.16](#)). Jusque là, la matrice associée à l’opérateur d’évolution était directement diagonalisée via l’algorithme de factorisation QR [348]. Cette méthode est robuste mais coûteuse en temps, puisqu’il faut attendre la fin du processus de diagonalisation

pour disposer de l'ensemble des valeurs propres. Comme alternative, la méthode d'Arnoldi [313] nous permet de chercher un nombre fixé de valeurs propres dans le voisinage d'un point spécifique du plan complexe. La complexité algorithmique de cette méthode est au pire en $\mathcal{O}(pN^2)$ pour estimer p valeurs propres d'une matrice de dimensions $N \times N$.

Nous pouvons donc commencer par échantillonner le spectre complet à basse résolution via factorisation QR, identifier les valeurs et vecteurs propres d'intérêt, puis exécuter la méthode itérative d'Arnoldi pour retrouver spécifiquement ces modes propres à haute résolution. La matrice Λ est construite comme une matrice dense, puis convertie en matrice creuse en un temps négligeable. Le vecteur propre obtenu à basse résolution peut être utilisé comme condition initiale dans l'itération d'Arnoldi, après interpolation sur le nouveau maillage. Pour 8×16 points de collocation, l'extraction d'une seule valeur propre via Arnoldi sur matrice creuse prend moins de 0.12 seconde, déjà trente fois moins de temps que la factorisation QR sur matrice dense, avec une erreur relative meilleure que 10^{-12} sur la valeur propre estimée. Pour une résolution de 32×64 points de collocation ($N = 12288$), la méthode d'Arnoldi prend environ six minutes pour converger à la précision machine vers le mode sélectionné.

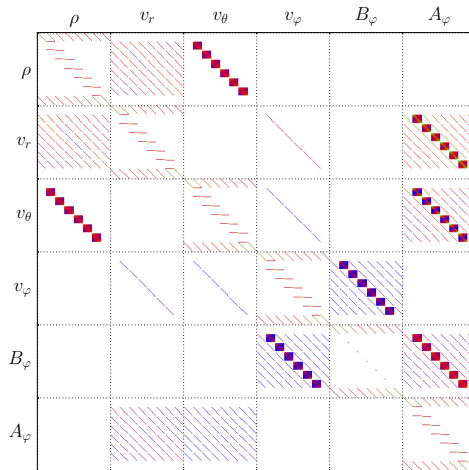


FIGURE A.16. – Exemple de matrice associée à l'opérateur d'évolution Λ en MHD idéale, pour six champs couplés en deux dimensions ; elle contient 768 lignes pour une résolution de 8×16 points de collocation.

Je présente maintenant la résolution spectrale d'un mode propre MRI en coordonnées sphériques axisymétriques $(r, \theta) \in [1, 1 + \pi/4] \times [\pi/2 \pm \pi/8]$. L'écoulement d'équilibre est en rotation képlérienne (densité constante, vitesse toroïdale constante sur des cylindres), avec $c_s = 1$ et $B_0 = 0.1$, et les perturbations obéissent à la MHD idéale. Je sélectionne le mode correspondant aux plus grandes échelles spatiales, et représente sur la Figure A.17 les différents champs obtenus à basse résolution 8×16 , par factorisation QR sur matrice dense. En dépit de la basse résolution, nous capturons raisonnablement bien la structure du "channel" MRI. Les champs v_r et v_ϕ

sont positivement corrélés, les champs B_r et B_φ sont négativement corrélés, et les champs v_r et B_r sont déphasés verticalement de $\pi/2$. Les champs v_θ et B_θ sont là pour annuler les divergences de vitesse et d'induction magnétique. Le taux de croissance de ce mode MRI est de $\omega \approx 0.4149\Omega_0$.

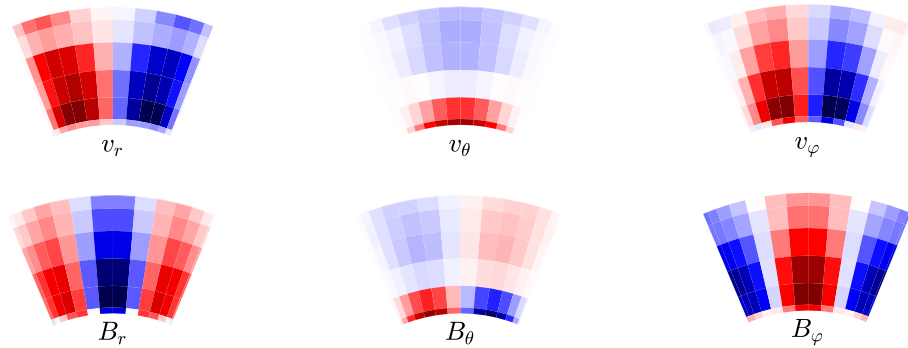


FIGURE A.17. – Mode propre MRI 2D sphérique correspondant à la valeur propre $\omega \approx 0.4149\Omega_0$, résolu sur 8×16 points de collocation, obtenus par factorisation QR sur matrices denses.

Pour une résolution double, la méthode itérative d'Arnoldi converge en quatre secondes vers un mode semblable (au signe près, voir Figure A.18), avec un taux de croissance estimé à $\omega \approx 0.4027\Omega$. Pour une résolution encore double de 32×64 , la méthode d'Arnoldi converge en six minutes vers le mode décomposé sur la Figure A.19, avec un taux de croissance estimé à $\omega \approx 0.4173\Omega$. Le taux de croissance estimé n'a pas encore convergé à cette résolution. Il en va de même pour les champs de vitesse radiale v_r , vitesse azimuthale v_φ , induction magnétique radiale B_r : des structures à plus petite échelle apparaissent lorsque la résolution augmente, et la forme globale des modes en est affectée. J'ai observé qu'il était délicat d'imposer des conditions aux limites interdisant le développement de modes de bords [174] sans entraver la convergence de l'algorithme de diagonalisation.

Le cas que je présente ici est encore l'un des meilleurs que j'ai pu obtenir. Dans la plupart des cas (conditions aux limites ou conditions physiques différentes, y compris l'inclusion d'effets MHD non-idéaux), je parviens éventuellement à obtenir des modes propres physiques à basse résolution, et aucune des méthodes d'extraction de valeurs propres ne converge à plus haute résolution. Il arrive que tous les champs sauf un ou deux soient correctement résolus, mais l'erreur sur les champs restants se répercutent sur la valeur propre associée. La cause du problème vient certainement du mauvais conditionnement de la matrice Λ et d'erreurs numériques dues à la grande dimension du problème. Dans tous les cas, ces propriétés de convergence sont insuffisantes pour envisager une comparaison fine avec les résultats de simulations numériques.

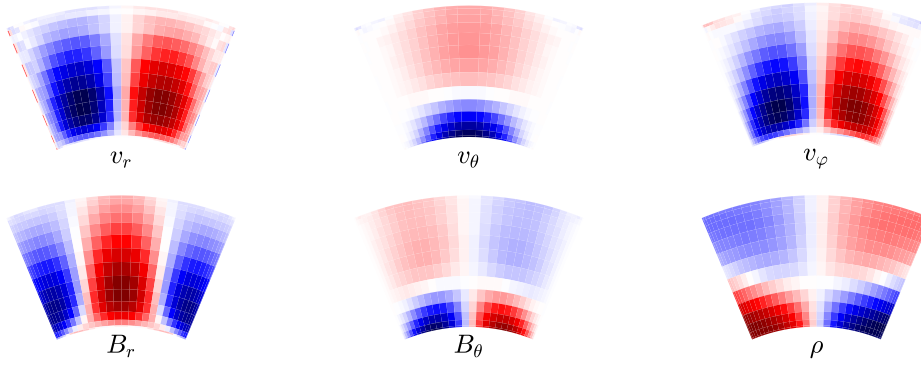


FIGURE A.18. – Mode propre MRI 2D sphérique correspondant à la valeur propre $\omega \approx 0.4027\Omega$, résolu sur 16×32 points de collocation, obtenus par itération d’Arnoldi sur matrices creuses.

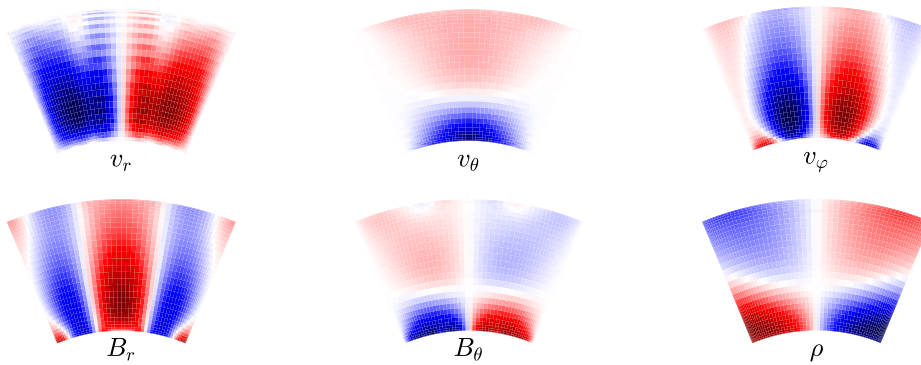


FIGURE A.19. – Mode propre MRI 2D sphérique correspondant à la valeur propre $\omega \approx 0.4173\Omega$, résolu sur 32×64 points de collocation, obtenus par itération d’Arnoldi sur matrices creuses.

A.3.2 Difficultés liées aux simulations directes

Des difficultés intrinsèques au code PLUTO viennent s’ajouter en géométrie sphérique. Le principal problème vient de la définition des conditions initiales de la simulation. Nous disposons d’une solution analytique stationnaire ; les conditions initiales naturelles consistent à affecter à chaque cellule la valeur des champs de densité, vitesse et induction magnétique correspondant à la solution analytique évaluée au centre de la cellule. Malheureusement, cela ne correspond pas nécessairement à la valeur des champs moyennés sur le volume de la cellule, telle qu’elle est définie dans la méthode des volumes finis (cf. [Section II.2.5](#)). Quand bien même la solution analytique serait moyennée sur le volume de chaque cellule, la méthode de reconstruction des champs aux interfaces pourra induire des flux à divergence non-nulle aux bords des cellules. Même sans méthode de reconstruction (i.e. ordre zero spatial), l’emploi d’un solveur de Riemann approximatif produit une erreur sur l’estimation des flux, et l’équilibre analytique n’est pas rigoureusement un équilibre numérique. Sauf cas ex-

ceptionnel, il en résulte une phase transitoire durant laquelle des ondes se propagent et rétablissent un équilibre numérique. L'amplitude de ces ondes par rapport à l'écoulement d'équilibre peut être réduite à 10^{-4} en choisissant judicieusement le schéma de reconstruction et en augmentant la résolution du maillage, mais cette amplitude est déjà trop grande pour proprement caractériser la phase linéaire de la MRI. En particulier, les modes MRI disponibles ne sont pas tous excités uniformément, et nous pouvons distinguer plusieurs croissances exponentielles.

Ce problème de bruit initial non-contrôlé n'affectait pas nos simulations cylindriques de façon sensible. Pour cause, l'équilibre analytique était très bien approximé par interpolation linéaire dans la direction radiale à l'intérieur des cellules. La vitesse azimuthale étant constante sur des cylindres, l'écoulement d'équilibre respectait la symétrie cylindrique du maillage. J'ai envisagé de construire d'autres équilibres MHD qui puissent être mieux adaptés au système de coordonnées sphériques. Il se pose alors le problème de construire des équilibres hydrodynamiquement stables, et seulement affectés par des instabilités telles que la MRI, sensibles aux effets MHD non-idéaux. Cette tâche est difficile et sans garantie préalable que les nouveaux équilibres ne produisent pas de régime transitoire comme précédemment.

A.3.3 Validation sphérique

Finalement, j'ai mis de côté la validation de l'implémentation des courants électrique en géométrie sphérique pour exploiter le code PLUTO en géométrie cylindrique. J'y suis revenu lorsque j'ai commencé à développer des modèles de disques stratifiés en géométrie sphérique.

En premier lieu, j'ai employé un domaine sphérique $(r, \theta) \in [1, 2] \times [-1/2, +1/2]$ avec des conditions aux limites analogues à celles précédemment choisies sur le domaine cylindrique. Après avoir réduit autant que possible l'amplitude du régime transitoire sans champ magnétique, je me suis assuré que les taux de croissance MRI étaient comparables à ceux attendus en géométrie cylindrique, à mieux que 10% pour différentes valeurs de champ magnétique, résistivité et paramètre de Hall.

Dans un second temps, j'ai comparé les évolutions non-linéaires en MHD-Hall (sans résistivité) entre un setup cylindrique et un setup sphérique semblable. Les conditions aux limites sont périodiques dans la direction angulaire, mais avec une extension radiale grande devant l'extension verticale du domaine (rapport d'aspect de l'ordre de huit). La formation de structures magnétiques (écoulements zonaux, cf. [Section v.2](#)) se produit de façon analogue dans les deux cas : même temps caractéristiques et localisation radiale. Je considère ce test comme suffisant.

Y compris la périodicité dans la direction angulaire.

La résistivité permet d'isoler des modes à grande échelle spatiale et à faible taux de croissance, donc mieux résolus spatialement et temporellement.

Résumé

Divers processus physiques peuvent générer des structures axisymétriques dans les disques d'accrétion. Dans le [Chapitre vi](#), j'ai montré que l'effet Hall était capable de concentrer le flux magnétique en bandes axisymétriques, et de maintenir des écoulements zonaux dans des simulations 3D non-stratifiées. Dans les simulations stratifiées [Chapitre viii](#), j'ai mis en évidence un autre mécanisme où l'induction ambipolaire est seule responsable du confinement magnétique. Des structures semblables ont aussi été observées dans des simulations de disques en MHD idéale. Elles partagent les propriétés d'être axisymétriques et temporellement cohérentes, mais les relations de phase entre les différents champs ne sont pas les mêmes, indiquant l'existence d'autres mécanismes d'auto-organisation.

Sommaire

1.	Simulations globales stratifiées	240
1.1.	Aperçu	240
1.2.	Transport radial du flux magnétique	241
2.	Shearing-boxes non-stratifiées	242
2.1.	Diagrammes espace-temps	242
2.2.	État saturé	245
3.	Simulations cylindriques non-stratifiées	246

NOM	GÉOMÉTRIE	STRATIFIÉ	SOLVEUR	Λ_A	β
ZF1	sphérique 2D	oui	HLLD	0	5.0×10^3
ZF2	shearing-box 2D	non	HLLD	0	2.0×10^4
ZF3	shearing-box 2D	non	HLLD	0	2.0×10^3
ZF4	shearing-box 2D	oui	HLLD	0	2.0×10^4
ZF5	shearing-box 3D	non	HLLD	0	2.0×10^3
ZF6	cylindrique 3D	non	HLL	1	6.4×10^3
ZF7	cylindrique 3D	non	HLLD	1	6.4×10^3

TABLE B.1. – Auto-organisation sans effet Hall : nom du run, géométrie du domaine de calcul, stratification verticale du disque, nombre d’Elsasser ambipolaire et paramètre $\beta \equiv 2\rho c_s^2/B_0^2$ dans le plan médian.

Plusieurs disques protoplanétaires observés présentent des structures zonales (axisymétriques) dans leur distribution de poussières, pouvant nous renseigner sur la distribution de pression dans le disque [349]. La présence d’un flux magnétique net traversant le disque offre des mécanismes de formation d’écoulements zonaux. Des concentrations axisymétriques de flux magnétique ont été reportées en MHD idéale, dans des simulations shearing-box non-stratifiées [19] et stratifiées [170, 309]. Différents mécanismes ont été proposés pour expliquer la formation de ces structures. Cependant, les résultats dépendent significativement de l’extension spatiale du domaine de calcul employé [19], mettant en doute leur pertinence dans les disques protoplanétaires. J’ai également observé la formation d’écoulements zonaux et de concentrations axisymétriques de flux magnétique dans mes simulations MHD idéales ; les simulations illustratives sont listées dans la Table B.1

B.1 SIMULATIONS GLOBALES STRATIFIÉES

B.1.1 Aperçu

En MHD idéale stratifiée, la saturation non-linéaire de la MRI axisymétrique avec flux net diffère de son analogue 3D. Au lieu d’entretenir une turbulence développée, l’écoulement s’organise spontanément comme apparent sur la Figure B.1. Le champ magnétique est concentré en bandes étroites, et le flux magnétique inter-bande est quasi-nul. Comme dans nos simulations en MHD Hall non-stratifiée, le flux magnétique est assez intense pour stabiliser l’écoulement dans les bandes, et trop faible entre les bandes pour permettre une croissance rapide de l’instabilité. Le niveau de transport est très faible dans ce régime ($\alpha \lesssim 10^{-4}$), et ces structures survivent sur plusieurs centaines d’orbites locales. Leur formation se déroule sur quelques orbites locales seulement, après quoi une série de bandes

Cf. Chapitre v.

atteignent un régime quasi-stationnaires, séparées d'une distance radiale typique $\delta r \sim 2H$ et pouvant dériver radialement au cours du temps.

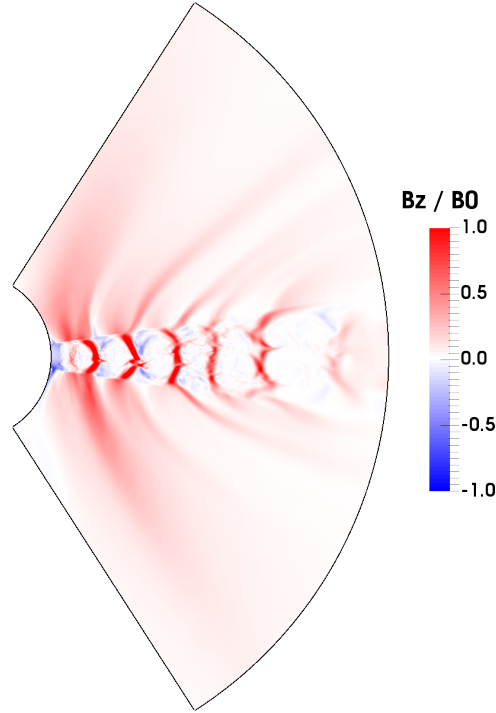


FIGURE B.1. – Distribution de champ magnétique vertical B_z/B_0 dans le plan poloidal (r, z) du run 'ZF1' à $t = 200T_0$.

B.1.2 Transport radial du flux magnétique

Pour cerner l'origine de ces structures, je décompose sur la [Figure B.2](#) les différentes contributions au transport radial de flux magnétique vertical. Le terme $-B_z \partial_r v_r$ correspond à la compression des lignes de champ par un écoulement à divergence non-nulle, et le terme $-v_r \partial_r B_z$ représente l'advection du flux suivant l'écoulement moyen ; les termes dus à la composante verticale v_z sont négligeables et ne sont pas représentés pour plus de clarté. Les deux premières bandes de flux magnétique (à faible rayon) sont advectées vers le rayon interne, tandis que les deux dernières sont advectées vers le rayon externe. Le terme de compression $-B_z \partial_r v_r$ est responsable du confinement de chacune des bandes.

En MHD idéale, le gel du flux magnétique dans le plasma entraîne que le rapport B_z/Σ est advecté par l'écoulement. Je trace sur la [Figure B.3](#) les profils radiaux de flux magnétique et de densité $\langle \rho \rangle_z$ moyennée sur la hauteur $2H$ du disque. Les fluctuations en flux magnétique sont clairement anti-corrélées aux fluctuations de densité surfacique. Cette séparation nécessite un transport diffusif du flux magnétique, ici causé par les fluctuations turbulentes de vitesse dans les premiers instants de la simulation.

À supposer que $\Sigma := \int \rho dz$ soit intégrée sur $z \in \mathbb{R}$, incluant le vent.

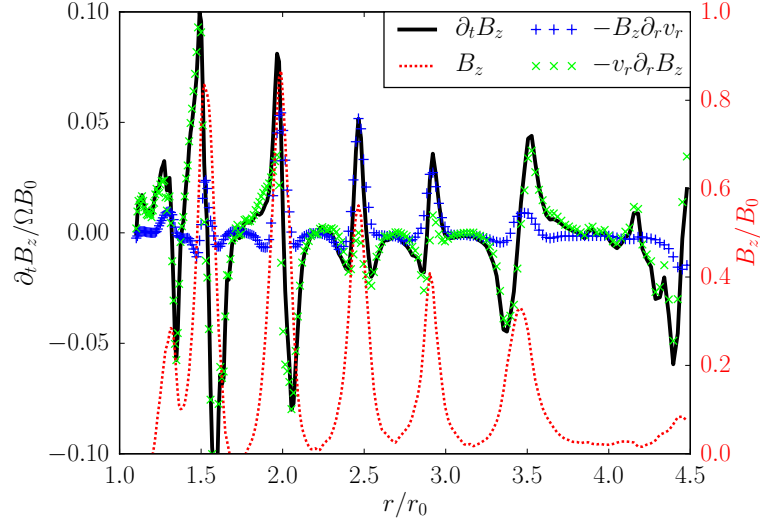


FIGURE B.2. – Profils radiaux dans le run axisymétrique ‘ZF1’ moyennés entre $z = \pm H(r)$: champ magnétique vertical B_z/B_0 (pointillés rouges, axe de droite), dérivée temporelle $\partial_t B_z$ (trait noir), contribution compressive $-B_z \partial_r v_r$ (‘+’ bleus) et advective $-v_r \partial_r B_z$ (‘x’ vertes).

Une explication possible donne un rôle central au vent du disque. La diffusion turbulente peut diminuer dans les zones plus fortement magnétisées [18]. Ces zones sont donc alimentées en masse et en flux magnétique par la turbulence MRI des régions voisines. Si le taux de pertes de masse dans le vent augmente avec la magnétisation $\mu \equiv 1/\beta$ [320], alors la masse est évacuée dans le vent tandis que le flux magnétique est accumulé radialement. Puisque le contraste en magnétisation μ a augmenté, ce processus pourrait donner lieu à une instabilité d’accrétion-éjection globale [cf. 214].

Une autre possibilité repose sur la nature du transport turbulent de moment cinétique et de flux magnétique. Si le transport turbulent autorise un découplage flux / masse, il devient nécessaire de caractériser comment les tenseurs de résistivité et viscosité dépendent des propriétés locales du fluide. En l’absence de diffusivités explicites, notre configuration MHD idéale est mal conditionnée pour aborder ce problème : les tenseurs de diffusivités sont ultimement affectés par les propriétés de dissipation numérique à petite échelle [116, 199]. Nous pouvons quand même progresser en adoptant une configuration numérique simplifiée.

B.2 SHEARING-BOXES NON-STRATIFIÉES

B.2.1 Diagrammes espace-temps

J’ai procédé par étapes pour développer un modèle numérique global de disque stratifié. La majorité des tests ont été réalisés en MHD idéale et en géométrie sphérique axisymétrique. Dans cette configuration, l’ap-

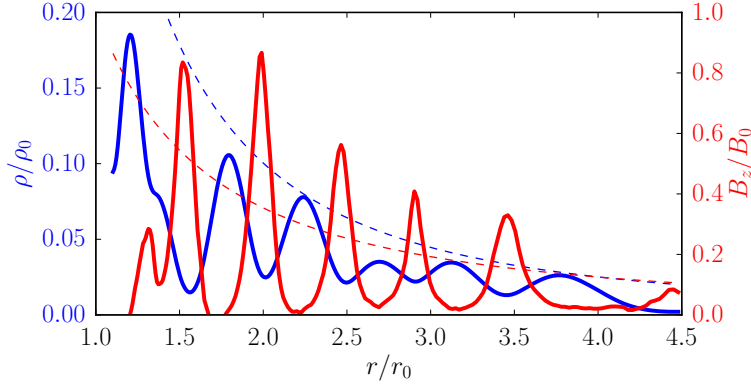


FIGURE B.3. – Profils radiaux dans le run axisymétrique ‘ZF1’ moyennés entre $z = \pm H(r)$: densité moyenne dans le disque $\langle \rho \rangle / \rho_0$ (trait bleu, axe de gauche) et champ magnétique vertical B_z/B_0 (trait rouge, axe de droite); les tirets représentent les profils initiaux.

partition d’écoulements zonaux est générique aux simulations avec flux magnétique net, or ces structures sont relativement peu documentées à partir de simulations locales (voir Bai & Stone [19]). J’ai d’abord douté de la méthode numérique : avant de décomposer les termes d’induction magnétique sur la Figure B.2, j’ai commencé par tester la dépendance de ces structures avec l’ensemble des paramètres libres du code PLUTO. Cela inclut la résolution spatiale du maillage, les méthodes de reconstruction, le solveur de Riemann, etc. Observant toujours l’auto-organisation du flux magnétique, j’ai progressivement réduit la complexité physique du setup : les conditions aux limites polaires, la stratification, la géométrie du domaine de calcul. J’obtiens toujours des écoulements zonaux en simulations shearing-box 2D, sans stratification verticale, et avec la distribution publique du code PLUTO 4.0. Nous pouvons d’ores et déjà exclure l’hypothèse selon laquelle l’auto-organisation résulte d’un vent magnétisé. J’ai aussi vérifié que la vitesse verticale n’induit pas un rapport de cisaillement $\mathfrak{s} := -\partial_r v_z / \partial_r v_\varphi$ significatif ; le processus d’auto-organisation suggéré en Section v.4 est également exclu.

La Figure B.4 montre l’évolution du flux magnétique vertical dans deux simulations shearing-box non-stratifiées avec différentes magnétisations initiales. Le domaine $(x, z) \in [\pm 0.8] \times [\pm 0.3]$ est maillé par 256×96 cellules ; les flux de Godunov sont estimés par le solveur HLLD après reconstruction linéaire avec le limiteur de Van Leer, puis intégrés temporellement par Runge-Kutta d’ordre 2 ; le champ magnétique évolue en transport contraint, les EMFs étant reconstruites par le schéma UCT_CONTACT. Le champ magnétique initial est constant et vertical, et la vitesse du son isotherme est fixée à $c_s = 10\%$ comme dans les simulations cylindriques.

Dans les deux cas, le flux magnétique est concentré en bandes étroites et temporellement cohérentes. À plus fort flux net (cf. Figure B.4 droite), le flux magnétique s’organise plus rapidement et sur de plus grandes

Voir Chapitre II.

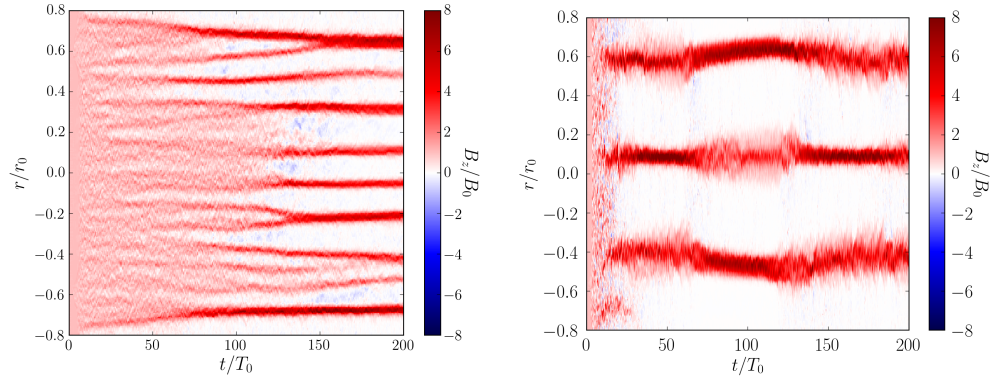


FIGURE B.4. – Flux magnétique vertical B_z/B_0 au cours du temps dans les simulations 'ZF2' ($\beta = 5 \times 10^3$, gauche) et 'ZF3' ($\beta = 5 \times 10^2$, droite).

échelles, produisant moins de bandes dans le domaine de calcul. La résolution spatiale est juste suffisante pour capturer l'ensemble des accumulations de flux du run 'ZF2' à faible magnétisation (Figure B.4 gauche) ; à cette échelle, le nombre de bandes dépend sensiblement des propriétés de diffusion numérique du champ magnétique. J'ai vérifié que la simulation 'ZF3' est bien convergée en résolution vis-à-vis du nombre de bandes.

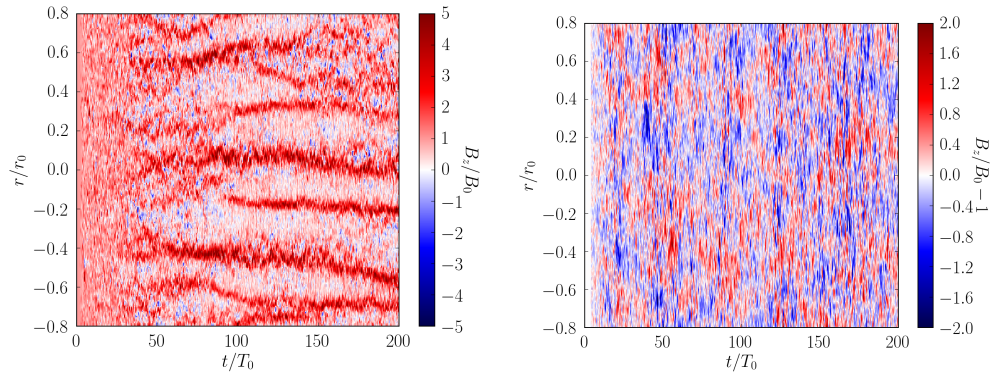


FIGURE B.5. – Flux magnétique vertical B_z/B_0 au cours du temps dans la simulation 2D stratifiée 'ZF4' (gauche) et 3D non-stratifiée 'ZF5' (droite).

Comme apparent sur la Figure B.5 gauche, le flux magnétique vertical est encore confiné radialement en shearing-box 2D verticalement stratifiée, avec des conditions verticales périodiques pour empêcher les pertes de masse et de flux magnétique. Cependant, la cohérence temporelle des bandes est faible comparée au run non-stratifié équivalent 'ZF2', de même que le contraste entre les zones de fort et faible flux magnétique. Le run 'ZF5' représenté sur la Figure B.5 droite est équivalent au run 'ZF3' mais avec 256 cellules pour couvrir l'extension azimuthale $y \in [\pm 0.8]$. Cette figure confirme que l'auto-organisation du flux magnétique vertical est inhibée en 3D avec une extension spatiale suffisante [19].

B.2.2 État saturé

Je représente sur la [Figure B.6](#) les profils radiaux issus du run ‘ZF3’, après moyennes verticale et temporelle entre $20T_0$ et $200T_0$. Cet intervalle temporel est long devant le temps dynamique de l’écoulement, donnant des profils lisses mais plus étalés que les structures instantanées.

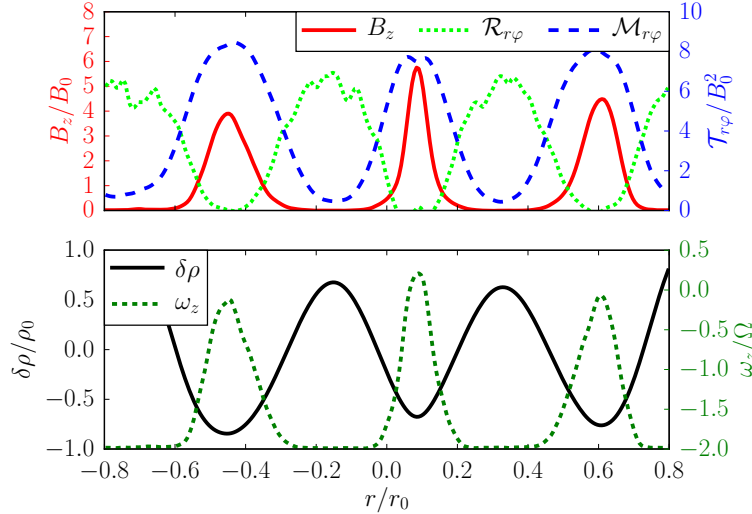


FIGURE B.6. – Profils radiaux dans le run ‘ZF3’, moyennés verticalement et temporellement entre $20T_0$ et $200T_0$. *Panneau supérieur* : flux magnétique vertical B_z/B_0 (trait rouge, axe de gauche), stress horizontal de Reynolds $\mathcal{R}_{r\phi}/B_0^2$ (pointillés verts) et de Maxwell $\mathcal{M}_{r\phi}/B_0^2$ (tirets bleus); *panneau inférieur* : fluctuations en densité $\delta\rho/\rho_0$ (trait noir) et vorticité verticale $\langle\omega_z\rangle_{\phi,z} \equiv \partial_r \langle v_\phi \rangle_{\phi,z}$.

Les profils de flux magnétique B_z et de stress magnétique $\mathcal{M}_{r\phi} \equiv -B_r B_\phi$ sont positivement corrélés. Les concentrations de flux magnétique ne seraient pas suffisamment intenses pour tuer la MRI dans un écoulement képlerien, et le profil de stress magnétique atteste du caractère instable de l’écoulement dans ces zones. Les maxima de stress ont tendance à évacuer la masse vers les minima de stress; les profils de densité et de flux magnétique se retrouvent donc anti-corrélés. Cette anti-corrélation ne répond pas à un transport idéal du plasma : le découplage masse / flux requiert une forme de diffusion, d’origine turbulente en l’occurrence. Les fluctuations en densité $\delta\rho \equiv \rho - \rho_0$ sont de l’ordre de la densité initiale ρ_0 . Pour compenser les gradients radiaux en pression thermique $\partial_r P \equiv c_s^2 \partial_r \rho$, la vorticité de l’écoulement $\omega_z \sim \partial_r v_\phi$ doit s’ajuster de telle sorte que le cisaillement $|\omega_z|$ soit maximal dans les maxima de densité.

Les valeurs prises par le profil de ω_z sont remarquables. La borne $\omega_z^+ = 0$ correspond à un écoulement en rotation solide, donc insensible à la MRI; la borne $\omega_z^- = -2$ correspond à la limite de stabilité hydrodynamique de Lord Rayleigh [279] : le moment cinétique doit croître radialement. Avec $\omega_z \approx 0$ dans les bandes de champ magnétique, la MRI

peut être stabilisée pour des champs relativement peu intenses. Le stress de Reynolds est anti-corrélé au stress magnétique ; il est maximal entre les bandes, empêchant la vorticité de passer sous $\omega_z < -2$ et maintenant l'écoulement marginalement stable.

L'hypothèse de disque képlerien est invalide dans nos simulations d'écoulements zonaux, aussi bien en shearing-box non-stratifiée en MHD idéale que dans nos simulations stratifiées en MHD non-idéale. J'ai identifié les termes de l'équation d'induction responsables du confinement magnétique dans les deux cas, mais le mécanisme favorisant la séparation masse / flux n'est pas élucidé. Suivant une description en champ moyen, il s'agit de caractériser la dépendance du coefficient de transport α par rapport aux autres nombres adimensionnés du problème. Avec $\alpha \sim \beta^{-1/2}$, la dépendance en magnétisation ne suffit pas à causer l'auto-organisation. Cependant, la [Figure B.6](#) laisse deviner l'importance du cisaillement local [268]. L'interaction de la MRI avec une instabilité hydrodynamique pourrait ouvrir de nouvelles pistes d'auto-organisation visqueuse dans le disque.

Voir [Section IV.3](#).

B.3 SIMULATIONS CYLINDRIQUES NON-STRATIFIÉES

Bai & Stone [19] ont observé des concentrations axisymétriques de flux magnétique dans des simulations locales en MHD idéale. Ils ont observé que l'auto-organisation tendait à disparaître dans des boîtes plus grandes, mais que la diffusion ambipolaire pouvait amplifier les contrastes en flux magnétique. J'ai profité de ma configuration cylindrique non-stratifiée pour vérifier si je retrouve ce phénomène d'auto-organisation en MHD ambipolaire dans une géométrie globale. Les runs 'ZF6' et 'ZF7' sont basés sur le run 'AD - 4 - 64' de Bai & Stone, avec un paramètre $\beta = 6.4 \times 10^3$ et un nombre d'Elsasser ambipolaire $\Lambda_A = 1$ imposé dans le domaine de calcul entier. Comme nos simulations cylindriques sont spatialement moins bien résolues que les simulations locales de Bai & Stone, je teste deux solveurs de Riemann différents : HLL dans le run 'ZF6', et HLLD dans le run 'ZF7'. Le run 'ZF6' est donc plus diffusif, mais il correspond à la configuration typique de nos simulations incluant l'effet Hall.

La reconstruction arithmétique des EMFs est employée dans les deux runs ; voir Flock et al. [107].

La [Figure B.7](#) confirme que des structures organisées se forment dans nos simulations 3D non-stratifiées en MHD ambipolaire. Dans les deux cas, les fluctuations en champ magnétique sont de l'ordre du champ initial ; les bandes sont deux fois plus étroites que la hauteur h du domaine cylindrique, elles sont mieux visibles près du bord radial interne, et leur temps de cohérence est de quelques dizaines d'orbites locales. Ces diagnostics sont compatibles avec ceux obtenus par Bai & Stone en shearing-boxes non-stratifiées et Bai [15] avec stratification verticale. Bai & Stone ont montré que l'auto-organisation du flux magnétique tend à disparaître quand l'extension spatiale du domaine augmente ; cependant, cette observation n'est faite qu'en MHD idéale, sans diffusion ambipolaire. Le fait que ces structures survivent dans nos simulations globales pourrait trahir l'existence d'un second mécanisme d'auto-organisation, reposant sur l'induc-

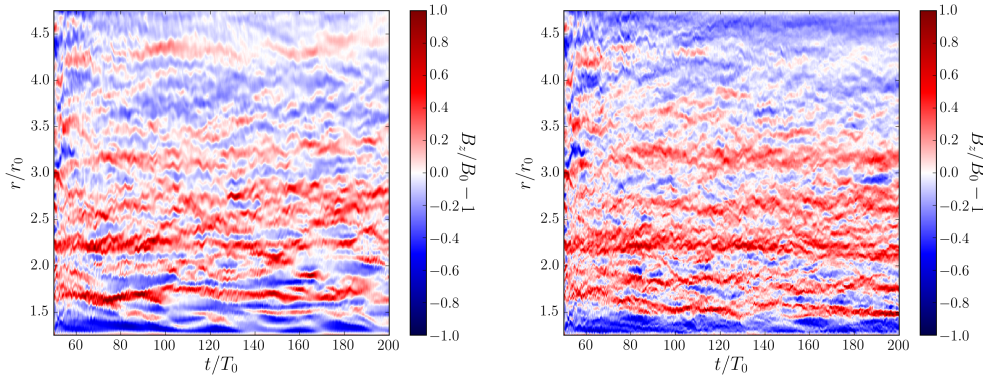


FIGURE B.7. – Flux magnétique vertical B_z/B_0 au cours du temps dans les simulations cylindriques 3D non-stratifiées ‘ZF6’ (*gauche*) et ‘ZF7’ (*droite*).

tion ambipolaire comme décrit dans la [Section VIII.5.4](#). Ce dernier serait capable de s’exprimer en géométrie globale. Je n’ai pas observé l’auto-organisation du flux magnétique dans les simulations 3D non-stratifiées en MHD idéale, et j’ai vérifié que l’induction ambipolaire est seule responsable du confinement magnétique dans les runs ‘ZF6’ et ‘ZF7’.

Par comparaison, le run moins diffusif ‘ZF7’ produit nettement plus de structures à petite échelle. Les couples turbulents, symbolisés par le coefficient de transport α , sont compatibles dans ces deux runs. En revanche, je compte environ deux fois plus de bandes de flux magnétique dans le run plus diffusif ‘ZF6’. La [Figure B.8](#) permet de comparer les distributions instantanées de champ magnétique dans ces deux simulations : l’axisymétrie n’est pas évidente à l’inspection du run ‘ZF7’. Bai & Stone [17] ont aussi obtenu un écoulement marginalement axisymétrique en simulations locales avec $\Lambda_A = 1$. Il est possible que le mécanisme d’auto-organisation ne permette pas de maintenir des structures cohérentes à plus haute résolution, du moins dans ce régime de paramètres physiques.

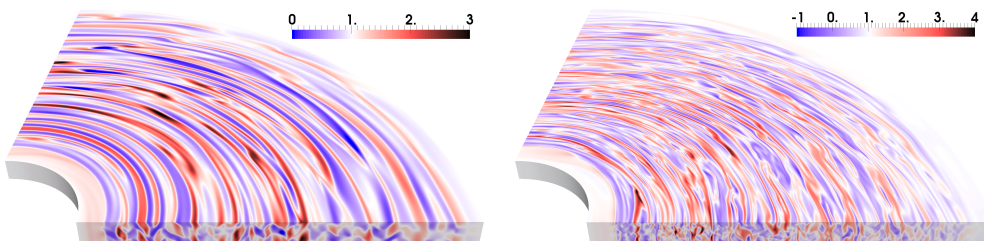


FIGURE B.8. – Distribution instantanée du champ magnétique vertical B_z/B_0 dans les runs ‘ZF6’ (*gauche*) et ‘ZF7’ (*droite*).

ÉQUILIBRES MAGNÉTOHYDRODYNAMIQUES

Dans l'espoir de tester l'implémentation des courants électriques en géométrie sphérique dans le code PLUTO, j'ai explicité différentes solutions analytique d'équilibres MHD, que j'ai ensuite linéarisés et implémentés dans ma méthode spectrale bidimensionnelle. Je ne vais présenter que deux solutions analytiques particulières.

C.1 ÉQUATIONS FONDAMENTALES

Plaçons-nous en coordonnées sphériques axisymétriques (r, θ) , et partons du système d'équations décrivant la dynamique d'un fluide magnétisé en régime MHD non-idéal et compressible :

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot [\rho \mathbf{v}] \quad (\text{C.1a})$$

$$\partial_t \mathbf{v} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \frac{\nabla P}{\rho} + \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{\rho} - \nabla \Phi \quad (\text{C.1b})$$

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{B} = & +\nabla \times [\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \eta \nabla \times \mathbf{B}] \\ & - \lambda (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \gamma ((\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \end{aligned} \quad (\text{C.1c})$$

complété par les relations

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} \quad (\text{C.2a})$$

$$P = c^2 \rho, \quad (\text{C.2b})$$

où ρ est la densité du fluide, \mathbf{v} sa vitesse, \mathbf{B} le champ d'induction magnétique, P la pression suivant une équation d'état isotherme, \mathbf{J} la densité de courant électrique, η la résistivité Ohmique, λ la longueur de Hall et γ le coefficient de diffusion ambipolaire. Φ est le potentiel gravitationnel. Je définis les opérateurs partiels $D_r := 1/r + \partial_r$, $D_\theta := \cot(\theta) + \partial_\theta$, $D_r^2 := D_r \cdot D_r \equiv (2/r)\partial_r + \partial_r^2$, ainsi que les opérateurs identité I_r et I_θ suivant chaque direction. Les équations pour le champ magnétique ne comportent que les composantes θ et φ ; la troisième composante se déduit de $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, ou plus directement des relations $B_r = (1/r)D_\theta A_\varphi$ et $B_\theta = -D_r A_\varphi$. Je dénoterai par une barre les champs d'équilibre, et par une apostrophe les perturbations.

C.2 ÉCOULEMENT KÉPLERIEU CYLINDRIQUE NON-STRATIFIÉ

C.2.1 Solution stationnaire

La première solution considérée est l'analogie exacte d'un disque képlérien cylindrique, exprimée en coordonnées sphériques, c'est à dire $\bar{\rho} = \rho_0$, $\bar{\mathbf{B}} = B_0 \mathbf{e}_z$, $\bar{\mathbf{v}} = (r \sin(\theta))^{-1/2} \mathbf{e}_\varphi$.

C.2.2 *Système linéaire tangent*

$$\partial_t \rho' = -\rho_0 \left(\left(\partial_r + \frac{2}{r} \right) \otimes I_\theta [v'_r] + \frac{1}{r} \otimes D_\theta [v'_\theta] \right) \quad (C.3)$$

$$\begin{aligned} \partial_t v'_r &= -\frac{c^2}{\rho_0} \partial_r \otimes I_\theta [\rho'] + \frac{2}{r^{3/2}} \otimes \sin(\theta)^{-1/2} [v'_\varphi] \\ &\quad + \frac{B_0}{\rho_0} \left(D_r \otimes \sin(\theta) [B'_\theta] - \frac{1}{r} \otimes \sin(\theta) \partial_\theta [B'_r] \right) \end{aligned} \quad (C.4a)$$

$$\begin{aligned} \partial_t v'_\theta &= -\frac{c^2}{\rho_0} \frac{1}{r} \otimes \partial_\theta [\rho'] + \frac{2}{r^{3/2}} \otimes \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)^{3/2}} [v'_\varphi] \\ &\quad + \frac{B_0}{\rho_0} \left(D_r \otimes \cos(\theta) [B'_\theta] - \frac{1}{r} \otimes \cos(\theta) \partial_\theta [B'_r] \right) \end{aligned} \quad (C.4b)$$

$$\begin{aligned} \partial_t v'_\varphi &= -\frac{r^{-3/2}}{2} \otimes \sin(\theta)^{-1/2} [v'_r] - \frac{r^{-3/2}}{2} \otimes \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)^{3/2}} [v'_\theta] \\ &\quad + \frac{B_0}{\rho_0} \left(D_r \otimes \cos(\theta) - \frac{1}{r} \otimes \sin(\theta) D_\theta \right) [B'_\varphi] \end{aligned} \quad (C.4c)$$

$$\begin{aligned} \partial_t B'_\theta &= B_0 D_r \otimes \sin(\theta) [v'_r] + B_0 D_r \otimes \cos(\theta) [v'_\theta] \\ &\quad + \lambda B_0 \left(D_r^2 \otimes \cos(\theta) - \frac{1}{r} \partial_r \otimes \sin(\theta) D_\theta \right) [B'_\varphi] \end{aligned} \quad (C.5a)$$

$$\begin{aligned} \partial_t B'_\varphi &= B_0 \left(D_r \otimes \cos(\theta) - \frac{1}{r} \otimes (\cos(\theta) + \sin(\theta) \partial_\theta) \right) [v'_\varphi] \\ &\quad + \left\{ \left(r^{-1/2} D_r - \frac{r^{-3/2}}{2} \right) \otimes \sin(\theta)^{-1/2} \right. \\ &\quad \left. + \lambda B_0 \left(\frac{1}{r} \partial_r \otimes \cos(\theta) \partial_\theta - r^{-2} \otimes (\cos(\theta) + \sin(\theta) \partial_\theta) \partial_\theta \right) \right\} [B'_r] \\ &\quad + \left\{ r^{-3/2} \otimes \left(\sin(\theta)^{-1/2} \partial_\theta - \frac{\cos(\theta)}{2 \sin(\theta)^{3/2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \lambda B_0 \left(\frac{1}{r} D_r \otimes (\cos(\theta) + \sin(\theta) \partial_\theta) - D_r^2 \otimes \cos(\theta) \right) \right\} [B'_\theta] \end{aligned} \quad (C.5b)$$

C.3 DISQUE KÉPLERIEN STRATIFIÉ

J'exhibe une classe de solutions représentant des disques quasi-képlériens, obéissant à une équation d'état localement isotherme avec une vitesse du son ne dépendant que du rayon cylindrique. Le champ magnétique d'équilibre est constant et aligné avec l'axe de rotation du disque, le champ de vitesse d'équilibre est purement toroïdal, et la densité est libre de varier radialement et verticalement.

C.3.1 Solution localement isotherme

Assignons la distribution de vitesse du son $c(r, \theta)^2 = c_0^2 (r \sin(\theta))^\alpha$, et imposons une vitesse poloïdale nulle $\bar{v}_r = \bar{v}_\theta = 0$. Le champ magnétique d'équilibre est $\bar{\mathbf{B}} = B_0 \mathbf{e}_z$, le courant électrique associé est donc nul. Le potentiel gravitationnel cause une force centrale $\nabla \Phi = -r^{-2} \mathbf{e}_r$. Je souhaite déterminer les distributions d'équilibre pour la densité et le champ de vitesse, étant donnée une distribution de vitesse du son. Je pars de l'équation d'impulsion (C.1b) dans le plan poloïdal (r, θ) :

$$\frac{\bar{v}_\varphi^2}{r} = c^2 \partial_r \log(\rho) + \frac{\alpha c^2}{r} + \frac{1}{r^2} \quad (\text{C.6a})$$

$$\cot(\theta) \bar{v}_\varphi^2 = c^2 \partial_\theta \log(\rho) + \alpha \cot(\theta) c^2, \quad (\text{C.6b})$$

soit

$$\partial_r \log(\rho) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{r^{-\alpha-1} \sin(\theta)^{-\alpha}}{c_0^2} \left(\bar{v}_\varphi^2 - \frac{1}{r} \right) \quad (\text{C.7})$$

$$\partial_\theta \log(\rho) = -\alpha \cot(\theta) + \frac{\bar{v}_\varphi^2}{c_0^2} \cot(\theta) \sin(\theta)^{-\alpha-1} r^{-\alpha}.$$

En différenciant la première équation par rapport à θ et la seconde par rapport à r :

$$\tan(\theta) \partial_\theta \bar{v}_\varphi^2 = r \partial_r \bar{v}_\varphi^2 - \frac{\alpha}{r}. \quad (\text{C.8})$$

À supposer que la forme de la solution ne soit pas évidente, appliquons une méthode standard de résolution. Je définis les nouvelles coordonnées $(r, \theta) \mapsto (x = \log(r), y = -\log(\sin(\theta)))$ pour obtenir l'équation

$$(\partial_x + \partial_y) \bar{v}_\varphi^2 = \alpha e^{-x}. \quad (\text{C.9})$$

Dans le plan (x, y) , nous pouvons paramétrer une courbe $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto (x(t) = x_0 + t, y(t) = y_0 + t)$. Étant donné un point de coordonnées (x, y) , la courbe caractéristique passant par ce point a pour coordonnées initiales $(x - (y - y_0), y_0)$. Le long de cette courbe, l'équation précédente devient :

$$\frac{d\bar{v}_\varphi^2}{dt} \equiv (\partial_x + \partial_y) \bar{v}_\varphi^2 = \alpha e^{-(x_0+t)}, \quad (\text{C.10})$$

d'où $\bar{v}_\varphi^2(t) - \bar{v}_\varphi^2(0) = -\alpha e^{-(t+x_0)} + \alpha e^{-x_0}$. Cela peut être ré-écrit $\bar{v}_\varphi^2(x, y) - \bar{v}_\varphi^2(x - y + y_0, y_0) = -\alpha(e^{-x} - e^{-x_0})$. Si nous prescrivons la distribution radiale de vitesse $x \mapsto \bar{v}_\varphi^2(x, y_0)$, nous pouvons la transporter le long des caractéristiques pour reconstruire la solution dans le plan poloïdal (r, θ) .

Si nous choisissons d'imposer la vitesse $\bar{v}_\varphi^2(r_0, \pi/2) = v_0^2 r_0^n$ dans le plan médian, le transport de cette condition le long des caractéristiques donne

$$\begin{aligned} \bar{v}_\varphi^2(x, y) &= v_0^2 e^{n(x-y+y_0)} - \alpha (e^{-x} - e^{-x_0}) \\ &= v_0^2 \left(r \frac{\sin(\theta)}{\sin(\frac{\pi}{2})} \right)^n - \alpha \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

(avec $r_0 = r \sin(\theta)$ le rayon cylindrique) de telle sorte que le champ de vitesse d'équilibre est :

$$\bar{v}_\varphi^2 = v_0^2 r_0^n - \alpha \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right). \quad (\text{C.12})$$

En injectant cette solution dans (C.7), nous ne pouvons pas trouver une primitive simple pour ρ , car la densité apparaît dérivée dans (C.6), sauf dans le cas $\alpha = 0$, pour lequel

$$\rho = \rho_0 \exp \left[\frac{1}{c_0^2 r} \left(1 - \frac{1}{\sin(\theta)} \right) \right]. \quad (\text{C.13})$$

Plus couramment dans la littérature, c'est le profil radial de densité, et non le profil de vitesse toroïdale, qui est imposé dans le plan médian. En revenant à (C.6), nous pouvons isoler v_φ et égaliser les deux lignes, obtenant ainsi une équation pour ρ seulement :

$$c^2 (r \partial_r - \tan(\theta) \partial_\theta) \log(\rho) = -\frac{1}{r}; \quad (\text{C.14})$$

définissant $f := \log(\rho)$ et de nouveau $x := \log(r)$ et $y := -\log(\sin(\theta))$, cela peut être réécrit

$$(\partial_x + \partial_y) f = -\frac{1}{c_0^2 r} = c_0^{-2} \exp[-(\alpha + 1)x + \alpha y]. \quad (\text{C.15})$$

La même méthode que précédemment conduit à l'équation différentielle

$$\frac{df}{dt} = c_0^{-2} e^{\alpha(y_0 - x_0)} \exp[-(x_0 + t)]. \quad (\text{C.16})$$

Prescrire le profil radial $\rho(r_0, \theta = \pi/2) = \rho_0 r_0^n$ revient à imposer $f(x_0 = x - y, y_0 = 0) = \log(\rho_0) + n(x - y)$:

$$f(x, y) = f(x - y, 0) + c_0^{-2} e^{-\alpha x_0} \left(e^{-x_0} - e^{-(x_0 + t)} \right), \quad (\text{C.17})$$

et la solution globale pour la densité est :

$$\rho(r, r_0) = \rho_0 r_0^n \exp \left[\frac{1}{c^2(r_0)} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \right]. \quad (\text{C.18})$$

et le champ de vitesse toroïdale s'obtient simplement d'après (C.6) :

$$v_\varphi(r, \theta)^2 = (1 - (\alpha + 1)(1 - \sin(\theta)^{-1})) \frac{1}{r} + (n + \alpha) c(r, \theta)^2 \quad (\text{C.19})$$

c.3.2 Linéarisation pour un angle d'ouverture constant

Considérons la famille de solutions (C.18) avec un profil de densité imposé dans le plan médian, et focalisons-nous sur le cas le plus pratique en géométrie sphérique : un disque avec un angle d'ouverture constant,

I.e. le rapport vitesse du son sur vitesse képlérienne est constant dans le plan médian.

donné par $\alpha = -1$, c'est à dire $c(r, \theta)^2 = c_0^2/r \sin(\theta) \equiv c_r^2$. Les champs d'équilibre sont :

$$\bar{\rho}(r, \theta) = \rho_0 r^n \sin(\theta)^n \exp [c_0^{-2} (\sin(\theta) - 1)] \equiv \rho_r \otimes \rho_\theta \quad (\text{C.20a})$$

$$\bar{v}_\varphi(r, \theta)^2 = r^{-1} (1 + (n-1) c_0^2 \sin(\theta)^{-1}) \equiv v_r^2 \otimes v_\theta^2 \quad (\text{C.20b})$$

Définissons à nouveau $\mu := 1/\rho$, et développons le système linéarisé :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho' &= \left\{ -\rho_r \left(\partial_r + \frac{2}{r} \right) \otimes \rho_\theta - n \frac{\rho_r}{r} \otimes \rho_\theta \right\} [v_r'] \\ &+ \left\{ -\frac{\rho_r}{r} \otimes \rho_\theta D_\theta - n \frac{\rho_r}{r} \otimes \rho_\theta \cot(\theta) \right\} [v_\theta'] \end{aligned} \quad (\text{C.21a})$$

$$\begin{aligned} \partial_t v_r' &= \left\{ \frac{\mu_r v_r^2}{r} \otimes \mu_\theta v_\theta^2 + \mu_r c_r^2 \left(\frac{1}{r} - \partial_r \right) \otimes \mu_\theta c_\theta^2 - \frac{\mu_r}{r^2} \otimes \mu_\theta \right\} [\rho'] \\ &+ 2 \frac{v_r}{r} \otimes v_\theta [v_\varphi'] \\ &- B_0 \frac{\mu_r}{r} \otimes \mu_\theta \sin(\theta) \partial_\theta [B_r'] + B_0 \mu_r D_r \otimes \mu_\theta \sin(\theta) [B_\theta'] \end{aligned} \quad (\text{C.22a})$$

$$\begin{aligned} \partial_t v_\theta' &= \left\{ \frac{\mu_r v_r^2}{r} \otimes \mu_\theta v_\theta^2 \cot(\theta) + \frac{\mu_r c_r^2}{r} \otimes \mu_\theta c_\theta^2 (\cot(\theta) - \partial_\theta) \right\} [\rho'] \\ &+ 2 \frac{v_r}{r} \otimes v_\theta \cot(\theta) [v_\varphi'] \\ &- B_0 \frac{\mu_r}{r} \otimes \mu_\theta \cos(\theta) \partial_\theta [B_r'] + B_0 \mu_r D_r \otimes \mu_\theta \cos(\theta) [B_\theta'] \end{aligned} \quad (\text{C.22b})$$

$$\begin{aligned} \partial_t v_\varphi' &= \left\{ -\frac{v_r}{r} \otimes v_\theta - \partial_r v_{|r} \otimes \partial_r v_{|\theta} \right\} [v_r'] \\ &+ \left\{ -\frac{v_r}{r} \otimes v_\theta \cot(\theta) - \frac{1}{r} \partial_\theta v_{|r} \otimes \partial_\theta v_{|\theta} \right\} [v_\theta'] \\ &+ \left\{ B_0 \mu_r D_r \otimes \mu_\theta \cos(\theta) - B_0 \frac{\mu_r}{r} \otimes \mu_\theta \sin(\theta) D_\theta \right\} [B_\varphi'] \end{aligned} \quad (\text{C.22c})$$

$$\begin{aligned} \partial_t B_\theta' &= B_0 D_r \otimes \sin(\theta) [v_r'] + B_0 D_r \otimes \cos(\theta) [v_\theta'] \\ &+ \left\{ \lambda B_0 D_r^2 \otimes \cos(\theta) - \lambda B_0 \frac{1}{r} \partial_r \otimes \sin(\theta) D_\theta \right\} [B_\varphi'] \end{aligned} \quad (\text{C.23a})$$

$$\begin{aligned} \partial_t B_\varphi' &= \left\{ B_0 D_r \otimes \cos(\theta) - B_0 \frac{1}{r} \otimes (\sin(\theta) \partial_\theta + \cos(\theta)) \right\} [v_\varphi'] \\ &+ \left\{ (\partial_r v_{|r} \otimes \partial_r v_{|\theta} + v_r D_r \otimes v_\theta) \right. \\ &+ \left. \left(\frac{\lambda B_0}{r} \partial_r \otimes \cos(\theta) \partial_\theta - \frac{\lambda B_0}{r^2} \otimes (\cos(\theta) + \sin(\theta) \partial_\theta) \partial_\theta \right) \right\} [B_r'] \\ &+ \left\{ \left(\frac{1}{r} \partial_\theta v_{|r} \otimes \partial_\theta v_{|\theta} + \frac{v_r}{r} \otimes v_\theta \partial_\theta \right) \right. \\ &+ \left. \left(\frac{\lambda B_0}{r} D_r \otimes (\cos(\theta) + \sin(\theta) \partial_\theta) - \lambda B_0 D_r^2 \otimes \cos(\theta) \right) \right\} [B_\theta'] \end{aligned} \quad (\text{C.23b})$$

avec

$$\begin{aligned}\partial_r v &= -\frac{1}{2}r^{-3/2} \otimes \sqrt{1 + (n-1)c_0^2 \sin(\theta)^{-1}} \\ \partial_\theta v &= -\frac{1}{2}r^{-1/2} \otimes \frac{(n-1)c_0^2 \cos(\theta) \sin(\theta)^{-2}}{\sqrt{1 + (n-1)c_0^2 \sin(\theta)^{-1}}}\end{aligned}\quad (\text{C.24})$$

C.4 CHAUFFAGE CORONAL PROGRESSIF

Dans le calcul fait en [Section C.3](#), la distribution de température (vitesse du son) intervient comme un degré de liberté. Une fois que la distribution de température est définie, nous pouvons prescrire un profil radial de densité et le propager au plan poloïdal (r, θ) entier par la méthode des caractéristiques. Je souhaite expliciter une solution d'équilibre hydrostatique pour laquelle la densité reste assez élevée dans la couronne du disque. En l'absence de champ magnétique, c'est la pression thermique du fluide qui apporte un support vertical contre la gravité : l'échelle de hauteur caractéristique du disque varie comme $h/R \sim c_s/v_K$. Nous pourrions obtenir une atmosphère dense en reprenant la solution de la [Section C.3](#) avec une température élevée, mais cela produirait un disque excessivement épais vis-à-vis du modèle du disque mince. Un rapport $h/R \approx 20\%$ peut s'accorder aux observations de disques protoplanétaires, mais la densité décroît toujours exponentiellement vite avec l'altitude, et le seuil des densités faibles n'est élevé que de quelques échelles de hauteur.

La première solution que j'ai développée consiste à prescrire une distribution de température augmentant avec l'altitude. De cette façon, l'épaisseur h/R peut rester faible dans le plan médian, mais h augmente avec l'altitude de sorte que la densité reste relativement élevée dans la couronne. Après plusieurs essais, j'ai opté pour l'une des seules prescriptions en température permettant d'aboutir à une forme analytique simple pour la solution. Les composantes poloïdales de l'équation d'impulsion sont :

$$\frac{v_\phi^2}{r} = \frac{1}{r^2} + c_s^2 \partial_r \log(\rho) + \partial_r c_s^2; \quad (\text{C.25a})$$

$$\cot(\theta)v_\phi^2 = c_s^2 \partial_\theta \log(\rho) + \partial_\theta c_s^2. \quad (\text{C.25b})$$

La distribution de vitesse du son augmente quadratiquement avec l'angle par rapport au plan médian, par l'intermédiaire du paramètre χ :

$$c_s^2(r, \theta) = c_0^2 (r \sin(\theta))^\alpha [1 + \chi \cos(\theta)^2]. \quad (\text{C.26})$$

Avec le changement de variables usuel $(r, \theta) \mapsto (x := \log(r), y := -\log(\sin(\theta)))$, et définissant $f := \log(\rho)$, nous pouvons nous ramener à l'EDP :

$$\begin{aligned}(\partial_x + \partial_y) f &= - \left\{ c_0^2 e^x e^{\alpha(x-y)} [1 + \chi (1 - e^{-2y})] \right\}^{-1} - \frac{2\chi e^{-2y}}{1 + \chi (1 - e^{-2y})} \\ &= - \frac{c_0^{-2} e^{-(\alpha+1)x} e^{\alpha y} + 2\chi e^{-2y}}{1 + \chi (1 - e^{-2y})}.\end{aligned}\quad (\text{C.27})$$

J'applique ensuite la méthode des caractéristiques suivant la même démarche que dans la [Section C.3](#). Je définis l'abscisse curviligne $t \mapsto (x(t) = x_0 + t, y(t) = y_0 + t)$, le profil de densité équatoriale est prescrit comme $\rho(r, \theta = \pi/2) = \rho_0 (r \sin(\theta))^n$, les courbes caractéristiques sont donc prolongées depuis $(x_0 = x - y, y_0 = 0)$, avec pour condition initiale $f(t = 0) = f(x - y, 0) = \log(\rho_0) + n(x - y)$, donnant :

$$\frac{df}{dt} = -\frac{c_0^{-2} e^{-(\alpha+1)x_0} e^{-t} + 2\chi e^{-2t}}{1 + \chi(1 - e^{-2t})}. \quad (\text{C.28})$$

Définissons

$$v = \sqrt{\frac{\chi}{1 + \chi}}, \quad (\text{C.29})$$

et intégrons formellement :

$$f(t) = f(0) + \int_0^t \frac{df}{d\tau} d\tau = f(0) + F(t) - F(0), \quad (\text{C.30})$$

où la primitive

$$F(t) = 2t - \log(1 + \chi) - \log(e^{2t} - v^2) - \frac{v e^{-(\alpha+1)x_0}}{2c_0^2 \chi} \log \left[\frac{e^t - v}{e^t + v} \right]. \quad (\text{C.31})$$

Le membre de droite de [\(C.30\)](#) s'écrit donc

$$F(t) - F(0) = 2t - \log \left[\frac{e^{2t} - v^2}{1 - v^2} \right] - \frac{v e^{-(\alpha+1)x_0}}{2c_0^2 \chi} \log \left[\frac{(e^t - v)(1 + v)}{(e^t + v)(1 - v)} \right], \quad (\text{C.32})$$

et la distribution de densité dans le plan poloïdal est :

$$f(r, \theta) = \log(\rho_0) + n \log(r \sin(\theta)) - 2 \log(\sin(\theta)) - \log \left[\frac{\sin(\theta)^{-2} - v^2}{1 - v^2} \right] - \frac{v (r \sin(\theta))^{-(\alpha+1)}}{2c_0^2 \chi} \log \left[\frac{(\sin(\theta)^{-1} - v)(1 + v)}{(\sin(\theta)^{-1} + v)(1 - v)} \right]. \quad (\text{C.33})$$

En injectant cette expression dans [\(C.25\)](#), nous pouvons en déduire la distribution poloïdale de vitesse toroïdale :

$$v_\phi^2 = \frac{1}{r} + c_s^2 \left\{ \alpha + n + (\alpha + 1) \frac{v (r \sin(\theta))^{-(\alpha+1)}}{2c_0^2 \chi} \log \left[\frac{(\sin(\theta)^{-1} - v)(1 + v)}{(\sin(\theta)^{-1} + v)(1 - v)} \right] \right\}. \quad (\text{C.34})$$

Sur la [Figure C.1](#) sont tracés les profils polaires de densité obtenus en échantillonnant différents paramètres de chauffage χ ; les propriétés désirées sont bien apparentes. La hauteur d'échelle $\tan(\theta_0) \equiv h/R = 5\%$ dans les régions denses du disque, quel que soit le paramètre de chauffage χ , assurant la validité du modèle de disque fin. Pour $\chi > 10^2$, la densité

décroit suffisamment lentement dans la couronne pour maintenir un rapport $\rho/\rho_0 > 10^{-6}$. Ces valeurs sont suffisamment élevée pour envisager de produire des simulations en un temps de calcul raisonnable.

La pression élevée dans la couronne contribue à supporter le gaz contre la gravité. En conséquence, la vitesse d'équilibre est nettement sub-képlérienne au dessus du disque : le cisaillement vertical $\partial_z v_\varphi$ est accru. Cela favorise le développement de la VSI dans la couronne, comme illustré sur la [Figure C.2](#). Je ne suis pas parvenu à concilier les avantages d'un chauffage coronal progressif et d'un amortissement thermique suffisamment lent pour modérer l'intensité de saturation de la VSI.

Voir [Section VII.2.1.2](#).

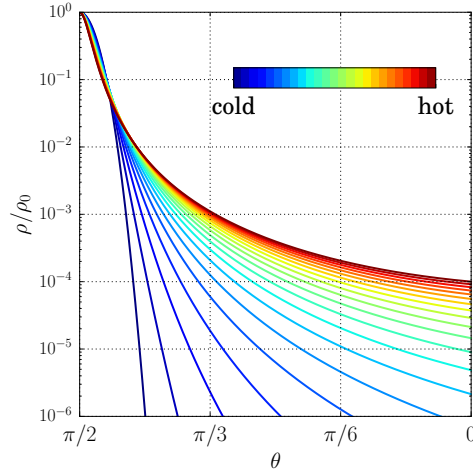


FIGURE C.1. – Profils polaires de densité par rapport au plan médian ρ/ρ_0 , pour un disque avec $h/R \equiv c_0 = 5\%$ dans le plan médian, et avec un chauffage coronal χ échantillonné uniformément sur $[0, 500]$.

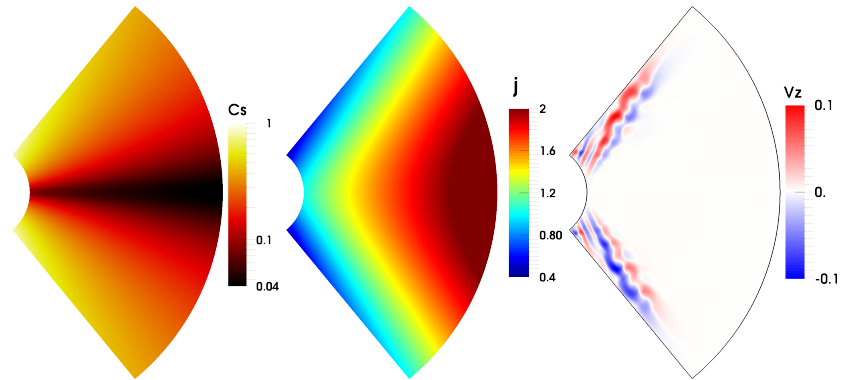


FIGURE C.2. – Solution d'équilibre localement isotherme (C.33)-(C.34) dans le plan poloïdal (r, θ) , pour un disque d'épaisseur $h/R \equiv c_0 = 7\%$ et un paramètre de chauffage coronal $\chi = 111$. À gauche : vitesse du son en unité de vitesse képlérienne au bord interne c_s/v_0 ; au milieu : moment cinétique spécifique $j := \Omega R^2$; à droite : vitesse verticale v_z/v_0 après intégration temporelle sur quelques orbites internes.

DIGRESSIONS

D.1 ÉQUATION D'INDUCTION NON-IDÉALE EN CHAMP MOYEN

Définissons l'opération de moyenne verticale :

$$\langle \cdot \rangle_z := \frac{1}{\mu(h)} \int_h \{ \cdot \} dz \quad \text{avec} \quad \mu(h) := \int_h dz, \quad (\text{D.1})$$

ainsi que les moyennes de surface dans le plan équatorial (r, φ) :

$$\langle \cdot \rangle_{yz} := \frac{1}{\mu(\Sigma)} \int_{\Sigma} \{ \cdot \} dy dz \quad \text{avec} \quad \mu(\Sigma) := \int_{\Sigma} dy dz, \quad (\text{D.2})$$

en coordonnées cartésiennes, et

$$\langle \cdot \rangle_{\varphi z} := \frac{1}{\mu(\Sigma)} \int_{\Sigma} \{ \cdot \} r d\varphi dz \quad \text{avec} \quad \mu(\Sigma) := \int_{\Sigma} r d\varphi dz, \quad (\text{D.3})$$

en coordonnées cylindriques. Supposons que les champs soient périodiques dans la direction azimuthale et verticale, et que nous incluons les EMFs Ohm et Hall dans l'équation d'induction :

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times [\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \eta \nabla \times \mathbf{B} - \ell_H (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}]. \quad (\text{D.4})$$

Les champs sont séparés en moyennes plus fluctuations : $\mathbf{B} = \langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{B}'$. Définissons le tenseur de contraintes de Maxwell $\mathbf{M} := -\mathbf{B}' \otimes \mathbf{B}'$ et le tenseur de Faraday $\mathbf{F} := \mathbf{v}' \otimes \mathbf{B}' - \mathbf{B}' \otimes \mathbf{v}'$, construits à partir des fluctuations des champs de vitesse et d'induction magnétique. Je vais me concentrer sur l'induction du champ vertical moyen.

D.1.1 Coordonnées cartésiennes

D.1.1.1 Moyenne verticale

Supposons que $\langle v_x \rangle_z = \langle v_z \rangle_z = \langle B_x \rangle_z = \langle B_y \rangle_z = 0$. La composante verticale du champs d'induction magnétique obéit à :

$$\langle \partial_t B_z \rangle_z = \langle \nabla \times_z [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] + \eta \Delta B_z - \ell_H \nabla \times_z [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] \rangle_z. \quad (\text{D.5})$$

Décomposons :

$$\begin{aligned} \langle \nabla \times_z [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \rangle_z &= \frac{1}{\mu} \int dz \{ \partial_x [v_z B_x - v_x B_z] - \partial_y [v_y B_z - v_z B_y] \} \\ &= \frac{1}{\mu} \int dz \{ \partial_x [v'_z B'_x - v'_x B'_z] - \partial_y [\langle v_y \rangle \langle B_z \rangle + v'_y B'_z - v'_z B'_y] \} \\ &= \partial_x \langle F_{zx} \rangle_z - \partial_y \langle F_{yz} \rangle_z - \partial_y [\langle v_y \rangle_z \langle B_z \rangle_z] \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

$$\begin{aligned}
\langle \nabla \times_z [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] \rangle_z &= \langle \nabla \times_z [\nabla \cdot (\mathbf{B} \otimes \mathbf{B})] \rangle_z \\
&= \frac{1}{\mu} \int dz \{ \partial_x [\partial_x [B_x B_y] + \partial_y [B_y B_y]] - \partial_y [\partial_x [B_x B_x] + \partial_y [B_y B_x]] \} \\
&= \frac{1}{\mu} \int dz \{ \partial_x [\partial_x [B'_x B'_y] + \partial_y [B_y'^2]] - \partial_y [\partial_x [B_x'^2] + \partial_y [B'_x B'_y]] \} \\
&= \partial_x \partial_y [\langle M_{xx} \rangle_z - \langle M_{yy} \rangle_z] - (\partial_x^2 - \partial_y^2) [\langle M_{xy} \rangle_z] \quad (\text{D.7})
\end{aligned}$$

La moyenne verticale du champ d'induction vertical évolue donc suivant

$$\begin{aligned}
\partial_t \langle B_z \rangle_z &= \partial_x \langle F_{zx} \rangle_z - \partial_y \langle F_{yz} \rangle_z - \partial_y [\langle v_y \rangle_z \langle B_z \rangle_z] + \eta (\partial_x^2 + \partial_y^2) [\langle B_z \rangle_z] \\
&\quad + \ell_H \{ (\partial_x^2 - \partial_y^2) [\langle M_{xy} \rangle_z] - \partial_x \partial_y [\langle M_{xx} \rangle_z - \langle M_{yy} \rangle_z] \} \quad (\text{D.8})
\end{aligned}$$

D.1.1.2 Moyenne verticale et azimuthale

Si nous moyennons dans la direction azimuthale, nous pouvons simplement retirer les termes en ∂_y et obtenir l'équation d'induction simplifiée :

$$\partial_t \langle B_z \rangle_{yz} = \partial_x \langle F_{zx} \rangle_{yz} + \eta \partial_x^2 \langle B_z \rangle_{yz} + \ell_H \partial_x^2 \langle M_{xy} \rangle_{yz}. \quad (\text{D.9})$$

Si nous modélisons le tenseur de Faraday comme une diffusion turbulente du champ magnétique, $\langle F_{zx} \rangle_{yz} = -\langle F_{xz} \rangle_{yz} \simeq -\eta_t \partial_x \langle B_z \rangle_{yz}$, cette équation prend la forme simplifiée

$$\partial_t \langle B_z \rangle_{yz} = (\eta + \eta_t) \partial_x^2 \langle B_z \rangle_{yz} + \ell_H \partial_x^2 \langle M_{xy} \rangle_{yz}. \quad (\text{D.10})$$

D.1.2 Coordonnées cylindriques

Notons d'abord les égalités suivantes :

$$\left(\frac{1}{r} + \partial_r \right)^2 = \frac{2}{r} \partial_r + \partial_r^2 \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{r} \partial_r + \partial_r \right) \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \partial_r. \quad (\text{D.11})$$

Nous allons à nouveau supposer que $\langle v_r \rangle_z = \langle v_z \rangle_z = \langle B_r \rangle_z = \langle B_\varphi \rangle_z = 0$.

D.1.2.1 Moyenne verticale

Développons séparément chaque termes de l'équation (D.4) :

$$\begin{aligned}
\langle \nabla \times_z [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \rangle_z &= \frac{1}{\mu} \int dz \left\{ \frac{1}{r} \partial_r [r (v_z B_r - v_r B_z)] - \frac{1}{r} \partial_\varphi [v_\varphi B_z - v_z B_\varphi] \right\} \\
&= \frac{1}{\mu} \int dz \left\{ \frac{1}{r} \partial_r [r (v'_z B'_r - v'_r B'_z)] - \frac{1}{r} \partial_\varphi [\langle v_\varphi \rangle \langle B_z \rangle + v'_\varphi B'_z - v'_z B'_\varphi] \right\} \\
&= \frac{1}{r} (\partial_r [r \langle F_{zr} \rangle_z] - \partial_\varphi [\langle F_{\varphi z} \rangle_z - \langle v_\varphi \rangle_z \langle B_z \rangle_z]) \quad (\text{D.12})
\end{aligned}$$

Pour le terme d'induction Hall :

$$\begin{aligned}
\langle \nabla \times_z [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] \rangle_z &= \langle \nabla \times_z [\nabla \cdot (\mathbf{B} \otimes \mathbf{B})] \rangle_z \\
&= \frac{1}{\mu} \int dz \left\{ \frac{1}{r} \partial_r \left[r \left(\frac{1}{r} \partial_r [r B'_r B'_\varphi] + \frac{1}{r} \partial_\varphi [B_\varphi'^2] + \frac{1}{r} B'_\varphi B'_r \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{r} \partial_\varphi \left[\frac{1}{r} \partial_r [r B_r'^2] + \frac{1}{r} \partial_\varphi [B'_\varphi B'_r] - \frac{1}{r} B_\varphi'^2 \right] \right\} \\
&= \frac{1}{\mu} \int dz \left\{ \left(\frac{1}{r} + \partial_r \right) \left[\left(\frac{1}{r} + \partial_r \right) [B'_r B'_\varphi] + \frac{1}{r} \partial_\varphi [B_\varphi'^2] + \frac{1}{r} B'_\varphi B'_r \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{r} \partial_\varphi \left[\left(\frac{1}{r} + \partial_r \right) [B_r'^2] + \frac{1}{r} \partial_\varphi [B'_r B'_\varphi] - \frac{1}{r} B_\varphi'^2 \right] \right\} \\
&= - \left(\frac{1}{r} + \partial_r \right)^2 \langle M_{r\varphi} \rangle + \left(\frac{1}{r} + \partial_r \right) \left[\frac{1}{r} \partial_\varphi \langle B_\varphi'^2 \rangle - \frac{1}{r} \langle M_{r\varphi} \rangle \right] \\
&\quad - \frac{1}{r} \partial_\varphi \left[\left(\frac{1}{r} + \partial_r \right) \langle B_r'^2 \rangle \right] + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 \langle M_{r\varphi} \rangle + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi \langle B_\varphi'^2 \rangle \\
&= \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} \partial_r \right) \partial_\varphi [\langle M_{rr} \rangle_z - \langle M_{\varphi\varphi} \rangle_z] \\
&\quad - \left(\partial_r^2 + \frac{3}{r} \partial_r - \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 \right) \langle M_{r\varphi} \rangle_z. \tag{D.13}
\end{aligned}$$

D.1.2.2 Moyenne verticale et azimuthale

Moyennant aussi l'équation d'induction dans la direction azimuthale :

$$\begin{aligned}
\partial_t \langle B_z \rangle_{\varphi z} &= \frac{1}{r} \partial_r [r \langle F_{zr} \rangle_{\varphi z}] + \eta \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r \right) \langle B_z \rangle_{\varphi z} \\
&\quad + \ell_H \left(\partial_r^2 + \frac{3}{r} \partial_r \right) \langle M_{r\varphi} \rangle_{\varphi z}. \tag{D.14}
\end{aligned}$$

D.2 ÉCOULEMENTS ZONAUX EN MHD HALL NON-STRATIFIÉE

Un domaine cylindrique est initialement traversé par un flux magnétique vertical constant d'intensité B_0 , tel que le domaine soit soumis à la HSI. Un mode linéaire se développe depuis le rayon interne r_i , emportant le flux magnétique radialement vers l'extérieur. Le flux magnétique emporté entre les rayons r_i et r vaut

$$\Phi_0(r) := \int_{r_i}^r B(r) r dr = \frac{1}{2} B_0 (r^2 - r_i^2). \tag{D.15}$$

En MHD Hall, le champ requis pour tuer la HSI peut être estimé en égalisant la fréquence whistler à la fréquence de cisaillement. Définissons $q := |\partial \log \Omega / \partial \log r| = 3/2$ pour un écoulement képlérien, ℓ_H la longueur de Hall, $v_c := B_c / \sqrt{\rho}$ la vitesse d'Alfvén critique issue de (1.52) et $k = 2\pi/h$ le vecteur d'onde vertical considéré. Dans la limite où l'EMF Hall domine l'induction idéale, le critère de stabilité correspond approximativement à

$$q\Omega(r) \simeq \ell_H v_c(r) k^2. \tag{D.16}$$

Le champ critique B_c requis pour tuer la HSI sur la plus grande échelle accessible $k = 2\pi/h$ vaut

$$B_c(r) = \frac{qh^2\sqrt{\rho}}{4\pi^2\ell_H} r^{-3/2} \propto r^{-3/2}. \quad (\text{D.17})$$

Supposons qu'une bande se forme lorsque le flux magnétique accumulé entre r_i et r permet de tuer la HSI s'il est uniformément distribué sur un anneau de largeur $\delta \approx h$ à partir du rayon r :

$$\begin{aligned} \Phi_c(r, \delta) &:= \int_r^{r+\delta} B_c(x) x dx \\ &= \int_r^{r+\delta} \left\{ B_c(r) + (x-r) \partial_x B_c(r) + \frac{1}{2} (x-r)^2 \partial_x^2 B_c(r) + \mathcal{O}((x-r)^3) \right\} x dx \\ &= \int_r^{r+\delta} B_c(r) \left\{ 1 - \frac{3}{2} \frac{x-r}{r} + \frac{15}{8} \frac{(x-r)^2}{r^2} + \mathcal{O}\left(\frac{(x-r)^3}{r^3}\right) \right\} x dx \\ &= B_c(r) \left\{ \int_r^{r+\delta} x dx - \frac{3}{2} \int_r^{r+\delta} \frac{x-r}{r} x dx \right. \\ &\quad \left. + \frac{15}{8} \int_r^{r+\delta} \frac{(x-r)^2}{r^2} x dx + \int_r^{r+\delta} \mathcal{O}\left(\frac{(x-r)^3}{r^3}\right) \right\} \\ &= B_c(r) r^2 \left\{ \frac{1}{2} \varepsilon (2 + \varepsilon) - \frac{1}{4} \varepsilon^2 (3 + 2\varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \right\} \quad \text{avec} \quad \varepsilon := \frac{\delta}{r} \\ &\simeq B_c(r) r^2 \left(\varepsilon - \frac{1}{4} \varepsilon^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

En égalisant les flux (D.15) et (D.18), nous obtenons la condition

$$\begin{aligned} \Phi_0(r) &= \Phi_c(r, \delta) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} B_0 (r^2 - r_i^2) &\simeq \frac{qh^2\sqrt{\rho}}{4\pi^2\ell_H} r^{-3/2} \left(\delta r - \frac{1}{4} \delta^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

Nous pouvons extraire numériquement les racines de cette équation en r pour chaque (r_i, δ) , puis chercher la largeur $\delta \approx h$ et le rayon $r_i \approx r_0$ initial qui ajuste de façon optimale l'ensemble des positions des bandes obtenues via simulation numérique. Dans un cas à $\mathcal{L} \equiv \ell_H/h = 4$ où les bandes sont restées intactes, la [Figure D.1](#) montre que cette méthode est prédictive.

À partir du critère de stabilité HSI (D.16), nous pouvons construire une situation auto-similaire en demandant que l'écoulement soit marginalement instable à tous les rayons. Nous pouvons par exemple fixer B_0 constant et diminuer la longueur de Hall suivant

$$\ell_H(r) = \frac{q\Omega(r)\sqrt{\rho}}{k^2 B_0 (1 + \varepsilon)}. \quad (\text{D.20})$$

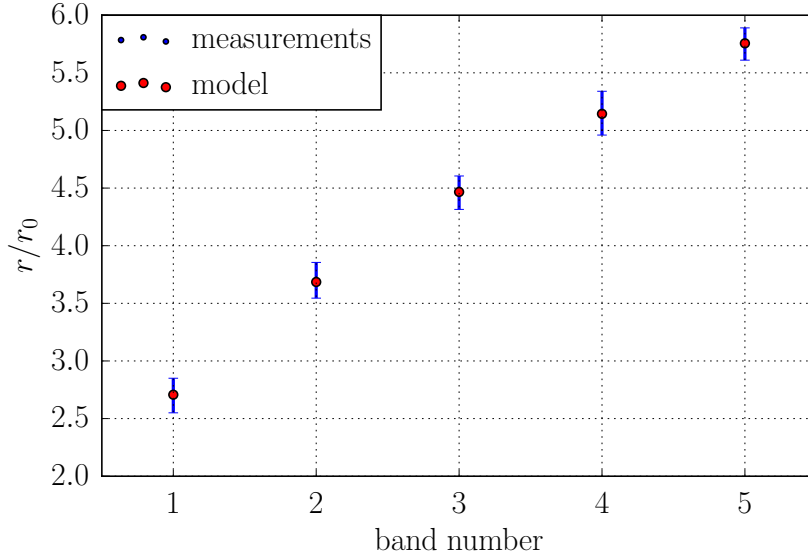


FIGURE D.1. – Positions mesurées d’un ensemble de cinq bandes dans un run MHD Hall axisymétrique avec $\mathcal{L} = 4$ (*barres bleues*), et ajustement optimal des positions par notre critère (D.19) du flux critique (*points rouges*). L’ajustement optimal correspond à un rayon initial $r_i \approx 1.37r_0$, et à une largeur effective des bandes $\delta \approx 0.27h$.

Dans ce cas, nous pouvons développer (D.19) en puissances de ϵ et obtenir l’incrément radial entre deux bandes consécutives :

$$\begin{aligned} r &= (1 + \epsilon) \delta + r_i \sqrt{1 + 2(1 + \epsilon)(1 + 2\epsilon) \frac{\delta^2}{r_i^2}} \\ &= r_i + (1 + \epsilon) \delta + \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (\text{D.21})$$

c’est à dire un incrément constant pour $\epsilon \ll 1$. J’ai vérifié par simulations numériques que cette condition conduit bien à la formation d’un ensemble d’écoulements zonaux régulièrement espacés. La même prédiction est valide en fixant l_H constant et en assignant un profil de B_0 décroissant radialement, obéissant encore à (D.20). De manière plus générale, dans la limite où l’EMF Hall domine l’EMF idéale, l’équation d’induction

$$\partial_t \mathbf{B} \simeq -\nabla \times [\ell_H (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] \quad (\text{D.22})$$

est invariante sous la transformation $(\mathbf{B}, \ell_H) \mapsto (x\mathbf{B}, \ell_H/x)$, $x \in \mathbb{R}^*$. J’ai vérifié cette assertion en reproduisant la même simulation avec des coefficients x variant sur trois décades : la HSI se développe avec les mêmes taux de croissance, et produit rigoureusement les mêmes structures non-linéaires, y compris la distribution radiale des écoulements zonaux. L’auto-similarité est permise parce que dans la limite $\mathcal{L} \gg 1$, l’équation d’induction est gouvernée par le courant électrique et non par le fluide neutre. Comme le champ B_0 doit rester suffisamment faible pour provoquer la HSI, la force de Lorentz n’affecte que faiblement le fluide neutre et l’équation d’impulsion n’intervient pas dans le problème.

D.3 BILANS DE CONSERVATION ET ASSIMILATION DE DONNÉES

Considérons l'équation d'advection intégrée sur un volume de contrôle :

$$\partial_t u(t) = \sum_{\text{face } i} f_i(t) s_i \equiv \sum_i x_i(t), \quad (\text{D.23})$$

où u est une quantité advectée par les flux f_i à travers les surfaces s_i . En échantillonnant $f_i(t_n)$ en temps, nous pouvons estimer $u(t_n)$ à partir de $u(t_0)$ en intégrant (D.23) :

$$\hat{u}(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^t \sum_{\text{face } i} x_i(\tau) d\tau. \quad (\text{D.24})$$

Dans un code en volumes finis, les flux sont calculées par un solveur de Riemann après reconstruction des champs aux interfaces. Ces flux diffèrent de ceux que l'on pourrait estimer naïvement en interpolant sur les interfaces les flux calculés d'après les quantités moyennes dans chaque cellule. Supposons que nous mesurons aussi les $u(t_n)$. La différence entre les mesures $u(t_n)$ et les estimations $\hat{u}(t_n)$ reflète notre méconnaissance des flux $f_i(t)$ réellement utilisés pour l'intégration. L'objectif de cette section est d'améliorer notre estimation des flux moyennés en temps \hat{f}_i à partir de cette information supplémentaire sur l'échantillonnage de $u(t_n)$.

Considérons la mesure de $x_i := f_i s_i$ comme réalisation d'un processus Gaussien, de moyenne \hat{x}_i et de variance σ_i^2 . En supposant que les réalisations de x_i sont indépendantes, la probabilité d'avoir mesuré le vecteur x est donnée par le produit des probabilités :

$$P(x) = \frac{1}{\prod_i \sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x_i - \hat{x}_i)^2}{2\sigma_i^2} \right]. \quad (\text{D.25})$$

Nous pouvons déterminer les \hat{x}_i qui maximisent $P(x)$, étant données les mesures de x_i , et telles que $\hat{u}(t_n) = u(t_n)$. Notons Δ l'estimation de $\partial_t u$ à partir des $u(t_n)$. La contrainte $\hat{u}(t_n) = u(t_n)$ se traduit par $g(x) = \Delta - \sum_i \hat{x}_i = 0$. Le problème d'extrémisation sous contraintes devient

$$\delta \{ \log [P(\hat{x})] - \lambda g(\hat{x}) \} = 0, \quad (\text{D.26})$$

où λ est un multiplicateur de Lagrange. En maximisant par rapport aux \hat{x}_i , nous obtenons $\hat{x}_i = x_i - \lambda \sigma_i^2$. Il suffit d'injecter cette relation dans la contrainte g pour se débarrasser du multiplicateur de Lagrange λ :

$$\hat{x}_i = x_i + \left(\Delta - \sum_j x_j \right) \frac{\sigma_i^2}{\sum_k \sigma_k^2}. \quad (\text{D.27})$$

Les variances σ_i ont été introduites afin de pondérer l'amplitude des corrections sur chaque flux. Cette information n'est pas toujours disponible a priori, ni aisée à mesurer. Nous pouvons nous débarrasser de ce degré de liberté en ajoutant une condition "naturelle" sur les σ_i :

$$\left| \frac{\hat{x}_i - x_i}{x_i} \right| = C \in \mathbb{R}^+ \forall i, \quad (\text{D.28})$$

i.e. réclamer que les corrections relatives soient les mêmes pour chaque flux. S'il existe une hiérarchie nette entre les différents flux, elle devrait être préservée lors de cette correction. La condition (D.28) se traduit par

$$\begin{aligned} \left| \frac{\hat{x}_i - x_i}{x_i} \right| &= \left| \frac{\Delta - \sum_j x_j}{x_i} \frac{\sigma_i^2}{\sum_k \sigma_k^2} \right| = C \\ \Rightarrow \frac{\sigma_i^2}{\sum_k \sigma_k^2} &= C / \left| \frac{\Delta}{x_i} - \sum_j \frac{x_j}{x_i} \right|. \end{aligned} \quad (\text{D.29})$$

À ce stade, nous pouvons librement imposer $\sum_k \sigma_k^2 = 1$ en vertu de ce que seuls les rapports de variance interviennent. Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} \sum_i \sigma_i^2 &= \sum_i \frac{C}{\left| \frac{\Delta}{x_i} - \sum_j \frac{x_j}{x_i} \right|} = 1 \\ \Rightarrow \frac{1}{C} &= \sum_i \frac{1}{\left| \frac{\Delta}{x_i} - \sum_j \frac{x_j}{x_i} \right|}. \end{aligned} \quad (\text{D.30})$$

Cette méthode peut s'appliquer sur un nombre arbitraire de flux, et avec un schéma d'intégration linéaire quelconque. Dans le cas où le schéma d'intégration temporel serait parfait, elle permet d'obtenir a posteriori des informations sur la précision des flux estimés indépendamment.

Par exemple, si les flux sont "turbulents" aux bords radiaux et "laminaires" aux bords polaires d'une portion de disque.

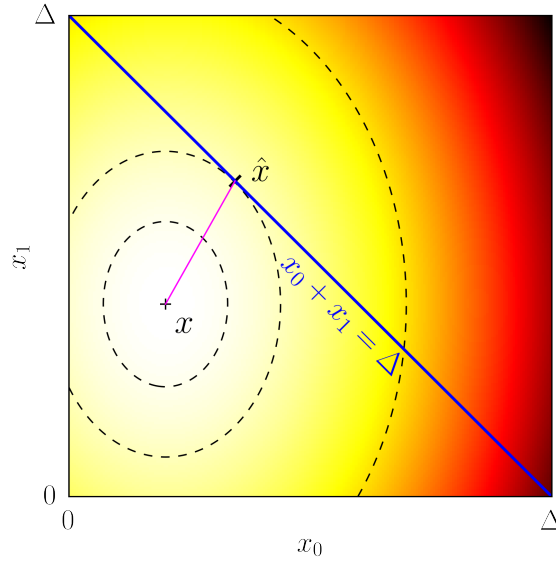


FIGURE D.2. – Le point x représente la mesure des flux entrants x_0 et sortants x_1 . Avec une incertitude sur x_0 et x_1 , la carte de couleur indique la probabilité $P(\hat{x})$ de trouver la valeur "vraie" \hat{x} dans un voisinage de x . La somme des flux vrais $\hat{x}_0 + \hat{x}_1$ doit correspondre à la variation Δ mesurée, i.e. \hat{x} doit se trouver sur la droite bleue. La maximisation de P sous contrainte donne le point \hat{x} là où la droite bleue est tangente aux isocontours de P . Le segment magenta représente la correction apportée aux flux initialement mesurés.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Adams, F. C., Hollenbach, D., Laughlin, G., & Gorti, U. (2004). Photoevaporation of Circumstellar Disks Due to External Far-Ultraviolet Radiation in Stellar Aggregates. *ApJ*, 611(1), 360–379. (Cité page 190.)
- [2] Alcalá, J. M., Natta, A., Manara, C. F., et al. (2014). X-shooter spectroscopy of young stellar objects. IV. Accretion in low-mass stars and substellar objects in Lupus. *A&A*, 561, A2. (Cité page 3.)
- [3] Alexander, R. D., Clarke, C. J., & Pringle, J. E. (2006a). Photoevaporation of protoplanetary discs - I. Hydrodynamic models. *MNRAS*, 369, 216–228. (Cité pages 4 et 133.)
- [4] Alexander, R. D., Clarke, C. J., & Pringle, J. E. (2006b). Photoevaporation of protoplanetary discs - II. Evolutionary models and observable properties. *MNRAS*, 369, 229–239. (Cité page 4.)
- [5] Alexiades, V., Amiez, G., & Gremaud, P.-A. (1996). Super-time-stepping acceleration of explicit schemes for parabolic problems. *Communications in numerical methods in engineering*, 12(1), 31–42. (Cité page 55.)
- [6] Alfvén, H. (1976). On frozen-in field lines and field-line reconnection. *Journal of Geophysical Research*, 81(22), 4019–4021. (Cité page 11.)
- [7] Andersson, B. G., Lazarian, A., & Vaillancourt, J. E. (2015). Interstellar dust grain alignment. *ARA&A*, 53, 501–539. (Cité page 5.)
- [8] Andrews, S. M., Wilner, D. J., Zhu, Z., et al. (2016). Ringed Substructure and a Gap at 1 au in the Nearest Protoplanetary Disk. *ApJ*, 820(2), L40. (Cité page 2.)
- [9] Ardila, D. R., Jonhs-Krull, C., Herczeg, G. J., et al. (2015). Magnetospheric Accretion in Close Pre-main-sequence Binaries. *ApJ*, 811(2), 131. (Cité page 3.)
- [10] Aresu, G., Kamp, I., Meijerink, R., et al. (2011). X-ray impact on the protoplanetary disks around T Tauri stars. *A&A*, 526, A163. (Cité pages 22, 24, 133, 141, 155 et 190.)
- [11] Armitage, P. J. (1998). Turbulence and Angular Momentum Transport in a Global Accretion Disk Simulation. *ApJ*, 501(2), L189. (Cité page 65.)
- [12] Armitage, P. J. (2011). Dynamics of Protoplanetary Disks. *ARA&A*, 49, 195–236. (Cité page 25.)
- [13] Bachiller, R. (1996). Bipolar Molecular Outflows from Young Stars and Protostars. *ARA&A*, 34, 111–154. (Cité page 3.)
- [14] Bai, X.-N. (2011). Magnetorotational-instability-driven Accretion in Protoplanetary Disks. *ApJ*, 739, 50. (Cité pages 24 et 26.)
- [15] Bai, X.-N. (2015). Hall effect controlled gas dynamics in protoplanetary disks. II. Full 3D simulations toward the outer disk. *ApJ*, 798(2), 84–18. (Cité pages 40, 115, 128, 150, 168 et 246.)
- [16] Bai, X.-N. & Goodman, J. (2009). Heat and Dust in Active Layers of Protostellar Disks. *ApJ*, 701, 737–755. (Cité pages 22 et 142.)
- [17] Bai, X.-N. & Stone, J. M. (2011). Effect of Ambipolar Diffusion on the Nonlinear Evolution of Magnetorotational Instability in Weakly Ionized Disks. *ApJ*, 736, 144. (Cité pages 39, 87, 122, 150 et 247.)
- [18] Bai, X.-N. & Stone, J. M. (2013). Wind-Driven Accretion In Protoplanetary Disks. I. Suppression Of The Magnetorotational Instability And Launching Of The Magnetocentrifugal Wind. *ApJ*, 769(1), 76. (Cité pages 129, 160 et 242.)
- [19] Bai, X.-N. & Stone, J. M. (2014). Magnetic Flux Concentration and Zonal Flows in Magnetorotational Instability Turbulence. *ApJ*, 796, 31. (Cité pages 150, 179, 240, 243, 244 et 246.)
- [20] Bai, X.-N. & Stone, J. M. (2017). Hall Effect-Mediated Magnetic Flux Transport in Protoplanetary Disks. *ApJ*, 836, 46. (Cité pages 129, 149, 176, 177 et 190.)
- [21] Bai, X.-N., Ye, J., Goodman, J., & Yuan, F. (2016). Magneto-thermal Disk Winds from Protoplanetary Disks. *ApJ*, 818, 152. (Cité page 155.)

- [22] Bai, X.-N., Ye, J., Goodman, J., & Yuan, F. (2016). Magneto-thermal Disk Winds from Protoplanetary Disks. *ApJ*, 818(2), 152. (Cité page 161.)
- [23] Balbus, S. A. & Hawley, J. F. (1991). A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. I - Linear analysis. II - Nonlinear evolution. *ApJ*, 376, 214–233. (Cité pages 5, 28 et 31.)
- [24] Balbus, S. A. & Hawley, J. F. (1992a). A Powerful Local Shear Instability in Weakly Magnetized Disks. IV. Nonaxisymmetric Perturbations. *ApJ*, 400, 610–621. (Cité pages 28, 68, 118 et 225.)
- [25] Balbus, S. A. & Hawley, J. F. (1992b). Is the Oort A-value a universal growth rate limit for accretion disk shear instabilities? *ApJ*, 392, 662–666. (Cité page 31.)
- [26] Balbus, S. A., Hawley, J. F., & Stone, J. M. (1996). Nonlinear Stability, Hydrodynamical Turbulence, and Transport in Disks. *ApJ*, 467, 76–. (Cité page 3.)
- [27] Balbus, S. A. & Papaloizou, J. C. B. (1999). On the Dynamical Foundations of α Disks. *ApJ*, 521, 650–658. (Cité pages 80, 86, 87, 149 et 153.)
- [28] Balbus, S. A. & Terquem, C. (2001). Linear Analysis of the Hall Effect in Protostellar Disks. *ApJ*, 552, 235–247. (Cité pages 25, 34, 92, 93, 102, 109 et 229.)
- [29] Bally, J., Sutherland, R. S., Devine, D., & Johnstone, D. (1998). Externally Illuminated Young Stellar Environments in the Orion Nebula : Hubble Space Telescope Planetary Camera and Ultraviolet Observations. *ApJ*, 116(1), 293–321. (Cité page 3.)
- [30] Balsara, D. S. & Spicer, D. (1999). Maintaining pressure positivity in magnetohydrodynamic simulations. *J. Comput. Phys.*, 148(1), 133–148. (Cité pages 49 et 67.)
- [31] Bans, A. & Königl, A. (2012). A Disk-wind Model for the Near-infrared Excess Emission in Protostars. *ApJ*, 758, 100. (Cité page 141.)
- [32] Barge, P. & Sommeria, J. (1995). Did planet formation begin inside persistent gaseous vortices? *A&A*, 295, L1–L4. (Cité page 1.)
- [33] Barral, J. F. & Canto, J. (1981). A Stellar Wind Model for Bipolar Nebulae. *Rev. Mexicana Astron. Astrofis.*, 5, 101. (Cité page 4.)
- [34] Baruteau, C. & Papaloizou, J. C. B. (2013). Disk-Planets Interactions and the Diversity of Period Ratios in Kepler’s Multi-planetary Systems. *ApJ*, 778(1), 7. (Cité page 2.)
- [35] Baruteau, C. & Zhu, Z. (2016). Gas and dust hydrodynamical simulations of massive lopsided transition discs—II. dust concentration. *MNRAS*, 458(4), 3927–3941. (Cité page 1.)
- [36] Beckers, J. (1968). Solar spicules. *Solar Physics*, 3(3), 367–433. (Cité page 134.)
- [37] Beckwith, K., Armitage, P. J., & Simon, J. B. (2011). Turbulence in global simulations of magnetized thin accretion discs. *MNRAS*, 416(1), 361–382. (Cité page 130.)
- [38] Bellan, P. (2008). *Fundamentals of Plasma Physics*. Cambridge University Press. (Cité pages 10, 11, 16 et 21.)
- [39] Benz, W. (1986). Smooth particle hydrodynamics : Theory and application to the origin of the moon. In *The Use of Supercomputers in Stellar Dynamics* (pp. 117–124). Springer. (Cité page 46.)
- [40] Béthune, W., Lesur, G., & Ferreira, J. (2016). Self-organisation in protoplanetary discs. Global, non-stratified Hall-MHD simulations. *A&A*, 589, A87. (Cité pages 105 et 109.)
- [41] Béthune, W., Lesur, G., & Ferreira, J. (2017). Global simulations of protoplanetary disks with net magnetic flux - I. Non-ideal MHD case. *A&A*, 600, A75. (Cité pages 147, 148 et 149.)
- [42] Bitsch, B., Crida, A., Morbidelli, A., et al. (2013). Stellar irradiated discs and implications on migration of embedded planets. I. Equilibrium discs. *A&A*, 549, A124. (Cité pages 130 et 141.)
- [43] Blaes, O. M. & Balbus, S. A. (1994). Local shear instabilities in weakly ionized, weakly magnetized disks. *ApJ*, 421, 163–177. (Cité page 33.)
- [44] Blandford, R. D. & Payne, D. G. (1982). Hydromagnetic flows from accretion discs and the production of radio jets. *MNRAS*, 199(4), 883–903. (Cité pages 4, 128, 155 et 199.)
- [45] Blandford, R. D. & Znajek, R. L. (1977). Electromagnetic extraction of energy from Kerr black holes. *MNRAS*, 179, 433–456. (Cité page 5.)
- [46] Blum, J. & Wurm, G. (2008). The Growth Mechanisms of Macroscopic Bodies in Protoplanetary Disks. *ARA&A*, 46(1), 21–56. (Cité page 1.)

- [47] Bodenheimer, P. (1995). Angular momentum evolution of young stars and disks. *ARA&A*, 33(1), 199–238. (Cité page 4.)
- [48] Bodo, G., Cattaneo, F., Ferrari, A., et al. (2011). Symmetries, scaling laws, and convergence in shearing-box simulations of magneto-rotational instability driven turbulence. *ApJ*, 739(2), 82. (Cité page 37.)
- [49] Bodo, G., Cattaneo, F., Mignone, A., & Rossi, P. (2014). On the Convergence of Magnetorotational Turbulence in Stratified Isothermal Shearing Boxes. *ApJ*, 787, L13. (Cité page 37.)
- [50] Bodo, G., Mignone, A., Cattaneo, F., et al. (2008). Aspect ratio dependence in magnetorotational instability shearing box simulations. *A&A*, 487(1), 1–5. (Cité page 65.)
- [51] Bostick, W. H. (1956). Experimental study of ionized matter projected across a magnetic field. *Physical Review*, 104(2), 292. (Cité page 102.)
- [52] Bouvier, J., Covino, E., Kovo, O., et al. (1995). COYOTES II : SPOT properties and the origin of photometric period variations in T Tauri stars. *A&A*, 299, 89. (Cité page 3.)
- [53] Boyd, J. (2001). *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications. (Cité page 212.)
- [54] Brandenburg, A. & Dobler, W. (2002). Hydromagnetic turbulence in computer simulations. *Computer Physics Communications*, 147, 471–475. (Cité page 41.)
- [55] Brandenburg, A. & Dobler, W. (2010). Pencil : Finite-difference Code for Compressible Hydrodynamic Flows. Astrophysics Source Code Library. (Cité page 41.)
- [56] Brandenburg, A., Gressel, O., Jabbari, S., et al. (2014). Mean-field and direct numerical simulations of magnetic flux concentrations from vertical field. *A&A*, 562, A53. (Cité page 134.)
- [57] Brandenburg, A. & Zweibel, E. G. (1994). The formation of sharp structures by ambipolar diffusion. *ApJ*, 427, L91–L94. (Cité page 165.)
- [58] Brogan, C. L., Perez, L. M., Hunter, T. R., et al. (2015). The 2014 ALMA Long Baseline Campaign : First Results from High Angular Resolution Observations toward the HL Tau Region. *ApJ*, 808(1), L3. (Cité pages 2 et 3.)
- [59] Burrows, C. J., Stapelfeldt, K. R., Watson, A. M., et al. (1996). Hubble Space Telescope Observations of the Disk and Jet of HH 30. *ApJ*, 473, 437. (Cité page 4.)
- [60] Cabrit, S. (2007). The need for MHD collimation and acceleration processes. In J. Ferreira, C. Dougados, & E. Whelan (Eds.), *Jets from Young Stars : Models and Constraints*, volume 723 of *Lecture Notes in Physics* chapter 2, (pp. 21–53). Springer Berlin Heidelberg. (Cité page 4.)
- [61] Cabrit, S., Edwards, S., Strom, S. E., & Strom, K. M. (1990). Forbidden-line emission and infrared excesses in T Tauri stars - Evidence for accretion-driven mass loss ? *ApJ*, 354, 687–700. (Cité page 4.)
- [62] Canuto, C., Hussaini, M., Quarteroni, A., & Zang, T. (2007). *Spectral Methods : Fundamentals in Single Domains*. Scientific Computation. Springer Berlin Heidelberg. (Cité pages 42, 44, 212 et 214.)
- [63] Cao, X. & Spruit, H. C. (2002). Instability of an accretion disk with a magnetically driven wind. *A&A*, 385(1), 289–300. (Cité page 134.)
- [64] Capit, N., Da Costa, G., Georgiou, Y., et al. (2005). A batch scheduler with high level components. In *Cluster Computing and the Grid, 2005. CCGrid 2005. IEEE International Symposium on*, volume 2, (pp. 776–783). IEEE. (Cité page 58.)
- [65] Casse, F. & Ferreira, J. (2000). Magnetized accretion-ejection structures. IV. Magnetically-driven jets from resistive, viscous, Keplerian discs. *A&A*, 353, 1115–1128. (Cité page 129.)
- [66] Casse, F. & Ferreira, J. (2000). Magnetized accretion-ejection structures. V. Effects of entropy generation inside the disc. *A&A*, 361, 1178–1190. (Cité page 160.)
- [67] Casse, F. & Keppens, R. (2002). Magnetized Accretion-Ejection Structures : 2.5-dimensional Magnetohydrodynamic Simulations of Continuous Ideal Jet Launching from Resistive Accretion Disks. *ApJ*, 581(2), 988. (Cité page 128.)
- [68] Cauley, P. W. & Johns-Krull, C. M. (2015). Optical Mass Flow Diagnostics in Herbig Ae/Be Stars. *ApJ*, 810, 5. (Cité page 3.)

- [69] Cazes, A. & Delacroix, J. (2015). *Architecture des machines et des systèmes informatiques*. INFO SUP. Dunod. (Cité page 48.)
- [70] Chandrasekhar, S. (1956). Axisymmetric Magnetic Fields and Fluid Motions. *ApJ*, 124, 232. (Cité page 159.)
- [71] Chapman, B., Jost, G., & van der Pas, R. (2008). *Using OpenMP : Portable Shared Memory Parallel Programming*. Number vol. 10 in Scientific Computation Series. MIT Press. (Cité page 48.)
- [72] Chavanis, P. H. (2000). Trapping of dust by coherent vortices in the solar nebula. *A&A*, 356, 1089–1111. (Cité page 1.)
- [73] Chen, D., Easley, N. A., Heidelberger, P., et al. (2011). The ibm blue gene/q interconnection network and message unit. In *High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis (SC), 2011 International Conference for*, (pp. 1–10). IEEE. (Cité page 59.)
- [74] Chew, G., Goldberger, M., & Low, F. (1956). The boltzmann equation and the one-fluid hydromagnetic equations in the absence of particle collisions. In *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 236, (pp. 112–118). The Royal Society. (Cité page 21.)
- [75] Chiang, E. & Youdin, A. N. (2010). Forming Planetesimals in Solar and Extrasolar Nebulae. *AREPS*, 38(1), 493–522. (Cité page 1.)
- [76] Cieza, L., Padgett, D. L., Stapelfeldt, K. R., et al. (2007). The Spitzer c2d Survey of Weak-Line T Tauri Stars. II. New Constraints on the Timescale for Planet Building. *ApJ*, 667, 308–328. (Cité page 2.)
- [77] Clarke, C. J. & Alexander, R. D. (2016). A self-similar solution for thermal disc winds. *MNRAS*, 460, 3044–3051. (Cité page 135.)
- [78] Clarke, C. J., Gendrin, A., & Sotomayor, M. (2001). The dispersal of circumstellar discs : the role of the ultraviolet switch. *MNRAS*, 328(2), 485–491. (Cité page 4.)
- [79] Cleeves, L. I., Adams, F. C., & Bergin, E. A. (2013). Exclusion of Cosmic Rays in Protoplanetary Disks : Stellar and Magnetic Effects. *ApJ*, 772, 5. (Cité pages 22, 141 et 177.)
- [80] Clément, B. (2012). *Analyse de données en sciences expérimentales*. Dunod. (Cité page 80.)
- [81] Cooley, J. W. & Tukey, J. W. (1965). An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. *Mathematics of computation*, 19(90), 297–301. (Cité page 44.)
- [82] Courant, R. (1994). Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Lect. Notes Pure Appl. Math.*. (Cité page 45.)
- [83] Courant, R. & Friedrichs, K. (1999). *Supersonic Flow and Shock Waves*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York. (Cité page 51.)
- [84] D'Alessio, P., Calvet, N., & Hartmann, L. (2001). Accretion Disks around Young Objects. III. Grain Growth. *ApJ*, 553, 321–334. (Cité pages 136 et 191.)
- [85] Desch, S. J. (2004). Linear Analysis of the Magnetorotational Instability, Including Ambipolar Diffusion, with Application to Protoplanetary Disks. *ApJ*, 608, 509–525. (Cité pages 6 et 34.)
- [86] Desch, S. J. & Turner, N. J. (2015). High-temperature Ionization in Protoplanetary Disks. *ApJ*, 811(2), 156. (Cité pages 190 et 191.)
- [87] Dipierro, G., Price, D., Laibe, G., et al. (2015). On planet formation in hl tau. *MNRAS*, 453(1), L73–L77. (Cité page 2.)
- [88] Donati, J.-F., Paletou, F., Bouvier, J., & Ferreira, J. (2005). Direct detection of a magnetic field in the innermost regions of an accretion disk. *Nature*, 438, 466–469. (Cité page 5.)
- [89] Done, C., Gierliński, M., & Kubota, A. (2007). Modelling the behaviour of accretion flows in x-ray binaries. *A&A Rev.*, 15(1), 1–66. (Cité page 5.)
- [90] Draine, B. (2010). *Physics of the Interstellar and Intergalactic Medium*. Princeton Series in Astrophysics. Princeton University Press. (Cité page 21.)
- [91] Draine, B. T., Roberge, W. G., & Dalgarno, A. (1983). Magnetohydrodynamic shock waves in molecular clouds. *ApJ*, 264, 485–507. (Cité page 143.)

- [92] Dullemond, C. P. (2002). The 2-D structure of dusty disks around Herbig Ae/Be stars. I. Models with grey opacities. *A&A*, 395, 853–862. (Cité page 197.)
- [93] Edwards, S., Hartigan, P., Ghandour, L., & Andrulis, C. (1994). Spectroscopic evidence for magnetospheric accretion in classical T Tauri stars. *AJ*, 108. (Cité page 3.)
- [94] Ercolano, B., Clarke, C. J., & Drake, J. J. (2009). X-Ray Irradiated Protoplanetary Disk Atmospheres. II. Predictions from Models in Hydrostatic Equilibrium. *ApJ*, 699(2), 1639–1649. (Cité pages 190 et 191.)
- [95] Ercolano, B. & Glassgold, A. E. (2013). X-ray ionization rates in protoplanetary discs. *MNRAS*, 436, 3446–3450. (Cité page 22.)
- [96] Evans, C. R. & Hawley, J. F. (1988). Simulation of magnetohydrodynamic flows - A constrained transport method. *ApJ*, 332, 659–677. (Cité pages 40 et 49.)
- [97] Ferreira, J. (1997). Magnetically-driven jets from Keplerian accretion discs. *A&A*, 319, 340–359. (Cité pages 128, 161 et 199.)
- [98] Ferreira, J. & Casse, F. (2004). Stationary Accretion Disks Launching Super-fast-magnetosonic Magnetohydrodynamic Jets. *ApJ*, 601, L139–L142. (Cité page 37.)
- [99] Ferreira, J., Dougados, C., & Cabrit, S. (2006). Which jet launching mechanism(s) in T Tauri stars? *A&A*, 453(3), 785–796. (Cité page 155.)
- [100] Ferreira, J. & Pelletier, G. (1993). Magnetized accretion-ejection structures. 1. General statements. *A&A*, 276, 625. (Cité pages 4, 128, 161 et 199.)
- [101] Ferreira, J. & Pelletier, G. (1995). Magnetized accretion-ejection structures. III. Stellar and extragalactic jets as weakly dissipative disk outflows. *A&A*, 295, 807. (Cité page 159.)
- [102] Flaherty, K. M., Hughes, A. M., Rosenfeld, K. A., et al. (2015). Weak Turbulence in the HD 163296 Protoplanetary Disk Revealed by ALMA CO Observations. *ApJ*, 813, 99. (Cité pages 6 et 150.)
- [103] Fleming, T. & Stone, J. M. (2003). Local Magnetohydrodynamic Models of Layered Accretion Disks. *ApJ*, 585(2), 908–920. (Cité pages 38 et 141.)
- [104] Fleming, T. P., Stone, J. M., & Hawley, J. F. (2000). The Effect of Resistivity on the Nonlinear Stage of the Magnetorotational Instability in Accretion Disks. *ApJ*, 530, 464–477. (Cité page 38.)
- [105] Flock, M., Dzyurkevich, N., Klahr, H., et al. (2011). Turbulence and steady flows in three-dimensional global stratified magnetohydrodynamic simulations of accretion disks. *ApJ*, 735(2), 122. (Cité pages 38 et 162.)
- [106] Flock, M., Dzyurkevich, N., Klahr, H., et al. (2012). Large-scale Azimuthal Structures of Turbulence in Accretion Disks : Dynamo Triggered Variability of Accretion. *ApJ*, 744(2), 144. (Cité page 64.)
- [107] Flock, M., Dzyurkevich, N., Klahr, H., & Mignone, A. (2010). High-order Godunov schemes for global 3D MHD simulations of accretion disks. I. Testing the linear growth of the magnetorotational instability. *A&A*, 516, A26. (Cité pages 67, 210 et 246.)
- [108] Flock, M., Fromang, S., González, M., & Commerçon, B. (2013). Radiation magnetohydrodynamics in global simulations of protoplanetary discs. *A&A*, 560, A43. (Cité pages 130 et 192.)
- [109] Flock, M., Fromang, S., Turner, N. J., & Benisty, M. (2016). Radiation Hydrodynamics Models of the Inner Rim in Protoplanetary Disks. *ApJ*, 827, 144. (Cité page 184.)
- [110] Flock, M., Fromang, S., Turner, N. J., & Benisty, M. (2017). 3D Radiation Nonideal Magnetohydrodynamical Simulations of the Inner Rim in Protoplanetary Disks. *ApJ*, 835, 230. (Cité page 184.)
- [111] Flock, M., Ruge, J. P., Dzyurkevich, N., et al. (2015). Gaps, rings, and non-axisymmetric structures in protoplanetary disks. From simulations to ALMA observations. *A&A*, 574, A68. (Cité page 2.)
- [112] Fricke, K. (1968). Instabilität stationärer Rotation in Sternen. *ZAp*, 68, 317. (Cité page 132.)
- [113] Fromang, S., Latter, H., Lesur, G., & Ogilvie, G. I. (2013). Local outflows from turbulent accretion disks. *A&A*, 552, A71. (Cité pages 37, 131, 155 et 199.)

- [114] Fromang, S., Lyra, W., & Masset, F. (2011). Meridional circulation in turbulent protoplanetary disks. *A&A*, 534, A107. (Cité pages 162 et 188.)
- [115] Fromang, S. & Nelson, R. P. (2006). Global MHD simulations of stratified and turbulent protoplanetary discs. I. Model properties. *A&A*, 457, 343–358. (Cité page 130.)
- [116] Fromang, S. & Papaloizou, J. (2007). MHD simulations of the magnetorotational instability in a shearing box with zero net flux. I. The issue of convergence. *A&A*, 476(3), 1113–1122. (Cité pages 81 et 242.)
- [117] Fromang, S., Papaloizou, J., Lesur, G., & Heinemann, T. (2007). MHD simulations of the magnetorotational instability in a shearing box with zero net flux. II. The effect of transport coefficients. *A&A*, 476, 1123–1132. (Cité pages 38 et 82.)
- [118] Fromang, S. & Stone, J. M. (2009). Turbulent resistivity driven by the magnetorotational instability. *A&A*, 507, 19–28. (Cité page 81.)
- [119] Fromang, S., Terquem, C., & Balbus, S. A. (2002). The ionization fraction in α models of protoplanetary discs. *MNRAS*, 329, 18–28. (Cité pages 5, 24, 85 et 142.)
- [120] Fukagawa, M., Tsukagoshi, T., Momose, M., et al. (2013). Local Enhancement of the Surface Density in the Protoplanetary Ring Surrounding HD 142527. *PASJ*, 65. (Cité page 2.)
- [121] Gabuzda, D. C., Vitrichchak, V. M., Mahmud, M., & O’Sullivan, S. P. (2008). Radio circular polarization produced in helical magnetic fields in eight active galactic nuclei. *MNRAS*, 384(3), 1003–1014. (Cité page 5.)
- [122] Galli, D. & Shu, F. H. (1993a). Collapse of Magnetized Molecular Cloud Cores. I. Semianalytical Solution. *ApJ*, 417, 220–. (Cité page 4.)
- [123] Galli, D. & Shu, F. H. (1993b). Collapse of Magnetized Molecular Cloud Cores. II. Numerical Results. *ApJ*, 417, 243–. (Cité page 4.)
- [124] Gammie, C. F. (1996). Layered Accretion in T Tauri Disks. *ApJ*, 457, 355. (Cité pages 5, 6, 22, 33, 38, 129 et 187.)
- [125] Gardiner, T. A. & Stone, J. M. (2005). An unsplit Godunov method for ideal MHD via constrained transport. *J. Comput. Phys.*, 205(2), 509–539. (Cité page 67.)
- [126] Gingold, R. A. & Monaghan, J. J. (1977). Smoothed particle hydrodynamics - Theory and application to non-spherical stars. *MNRAS*, 181, 375–389. (Cité pages 40 et 46.)
- [127] Glassgold, A. E., Najita, J., & Igea, J. (1997). X-Ray Ionization of Protoplanetary Disks. *ApJ*, 480, 344–350. (Cité page 22.)
- [128] Godunov, S. K. (1959). A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics. *Matematicheskii Sbornik*, 89(3), 271–306. (Cité pages 50 et 52.)
- [129] Goldreich, P. & Lynden-Bell, D. (1965). II. Spiral arms as sheared gravitational instabilities. *MNRAS*, 130, 125. (Cité page 28.)
- [130] Goldreich, P. & Schubert, G. (1967). Differential Rotation in Stars. *ApJ*, 150, 571. (Cité page 132.)
- [131] Gonzalez, J.-F., Laibe, G., Maddison, S. T., et al. (2015). The accumulation and trapping of grains at planet gaps : effects of grain growth and fragmentation. *Planet. Space Sci.*, 116, 48–56. (Cité pages 27 et 47.)
- [132] Goodman, J. & Xu, G. (1994). Parasitic instabilities in magnetized, differentially rotating disks. *ApJ*, 432, 213–223. (Cité page 232.)
- [133] Gorti, U. & Hollenbach, D. (2009). Photoevaporation of Circumstellar Disks By Far-Ultraviolet, Extreme-Ultraviolet and X-Ray Radiation from the Central Star. *ApJ*, 690, 1539–1552. (Cité page 190.)
- [134] Gressel, O., Turner, N. J., Nelson, R. P., & McNally, C. P. (2015). Global Simulations of Protoplanetary Disks With Ohmic Resistivity and Ambipolar Diffusion. *ApJ*, 801, 84. (Cité pages 39, 129, 130, 148, 151, 157, 168 et 196.)
- [135] Grifone, J. (2002). *Algèbre linéaire*. Editions Cépaduès. (Cité pages 210 et 213.)

- [136] Gropp, W., Lusk, E., & Skjellum, A. (1999). *Using MPI : Portable Parallel Programming with the Message-passing Interface*. Number vol. 1 in Scientific and engineering computation. MIT Press. (Cité page 48.)
- [137] Guan, X. & Gammie, C. F. (2009). The Turbulent Magnetic Prandtl Number of MHD Turbulence in Disks. *ApJ*, 697, 1901–1906. (Cité page 81.)
- [138] Guan, X., Gammie, C. F., Simon, J. B., & Johnson, B. M. (2009). Locality of MHD Turbulence in Isothermal Disks. *ApJ*, 694, 1010–1018. (Cité pages 85 et 86.)
- [139] Gueth, F., Guilloteau, S., & Bachiller, R. (1996). A precessing jet in the L1157 molecular outflow. *A&A*, 307, 891–897. (Cité page 3.)
- [140] Guilloteau, S., Dutrey, A., Wakelam, V., et al. (2012). Chemistry in disks. VIII. The CS molecule as an analytic tracer of turbulence in disks. *A&A*, 548, A70. (Cité page 6.)
- [141] Gullbring, E., Calvet, N., Muzerolle, J., & Hartmann, L. (2000). The Structure and Emission of the Accretion Shock in T Tauri Stars. II. The Ultraviolet-Continuum Emission. *ApJ*, 544, 927–932. (Cité page 3.)
- [142] Haisch, Jr., K. E., Lada, E. A., & Lada, C. J. (2001). Disk Frequencies and Lifetimes in Young Clusters. *ApJ*, 553, L153–L156. (Cité pages 2 et 3.)
- [143] Harten, A., Engquist, B., Osher, S., & Chakravarthy, S. R. (1987). Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, III. *Journal of computational physics*, 71(2), 231–303. (Cité page 53.)
- [144] Harten, A., Lax, P. D., & Van Leer, B. (1997). On upstream differencing and godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. In *Upwind and High-Resolution Schemes* (pp. 53–79). Springer. (Cité pages 52 et 57.)
- [145] Hartigan, P., Edwards, S., & Ghandour, L. (1995). Disk Accretion and Mass Loss from Young Stars. *ApJ*, 452, 736. (Cité page 4.)
- [146] Hartigan, P., Edwards, S., & Pierson, R. (2004). Going Slitless : Images of Forbidden-Line Emission Regions of Classical T Tauri Stars Observed with the Hubble Space Telescope. *ApJ*, 609(1), 261–276. (Cité page 3.)
- [147] Hartmann, L., Calvet, N., Gullbring, E., & D’Alessio, P. (1998). Accretion and the Evolution of T Tauri Disks. *ApJ*, 495(1), 385–400. (Cité page 3.)
- [148] Hawley, J. F. & Balbus, S. A. (1991). A Powerful Local Shear Instability in Weakly Magnetized Disks. II. Nonlinear Evolution. *ApJ*, 376, 223. (Cité page 5.)
- [149] Hawley, J. F. & Balbus, S. A. (1992). A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. III - Long-term evolution in a shearing sheet. *ApJ*, 400, 595–609. (Cité pages 5 et 37.)
- [150] Hawley, J. F., Gammie, C. F., & Balbus, S. A. (1995). Local Three-dimensional Magneto-hydrodynamic Simulations of Accretion Disks. *ApJ*, 440, 742. (Cité pages 37, 82, 83, 86, 87 et 112.)
- [151] Hawley, J. F., Guan, X., & Krolik, J. H. (2011). Assessing Quantitative Results in Accretion Simulations : From Local to Global. *ApJ*, 738, 84. (Cité page 136.)
- [152] Hawley, J. F. & Stone, J. M. (1998). Nonlinear Evolution of the Magnetorotational Instability in Ion-Neutral Disks. *ApJ*, 501, 758–771. (Cité page 38.)
- [153] Hayashi, C. (1981). Structure of the Solar Nebula, Growth and Decay of Magnetic Fields and Effects of Magnetic and Turbulent Viscosities on the Nebula. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 70, 35–53. (Cité page 136.)
- [154] Heinemann, T. & Papaloizou, J. C. B. (2009a). The excitation of spiral density waves through turbulent fluctuations in accretion discs - I. WKB theory. *MNRAS*, 397(1), 52–63. (Cité page 71.)
- [155] Heinemann, T. & Papaloizou, J. C. B. (2009b). The excitation of spiral density waves through turbulent fluctuations in accretion discs - II. Numerical simulations with MRI-driven turbulence. *MNRAS*, 397(1), 64–74. (Cité pages 71 et 83.)
- [156] Hennebelle, P., Lesur, G., & Fromang, S. (2017). Spiral-driven accretion in protoplanetary discs . III. Tridimensional simulations. *A&A*, 599, A86. (Cité page 37.)

- [157] Hill, G. W. (1878). Researches in the Lunar Theory. *American journal of Mathematics*, 1(1), 5. (Cité pages 28, 64 et 129.)
- [158] Hirose, S., Blaes, O., Krolik, J. H., et al. (2014). Convection Causes Enhanced Magnetic Turbulence in Accretion Disks in Outburst. *ApJ*, 787, 1. (Cité page 64.)
- [159] Hirth, G. A., Mundt, R., Solf, J., & Ray, T. P. (1994). Asymmetries in bipolar jets from young stars. *ApJ*, 427, L99–L102. (Cité page 129.)
- [160] Hollenbach, D., Johnstone, D., Lizano, S., & Shu, F. (1994). Photoevaporation of disks around massive stars and application to ultracompact H II regions. *ApJ*, 428, 654–669. (Cité page 190.)
- [161] Hollenbach, D. J. & Tielens, A. G. G. M. (1997). Dense Photodissociation Regions (PDRs). *ARA&A*, 35, 179–216. (Cité page 190.)
- [162] Hollenbach, D. J. & Tielens, A. G. G. M. (1999). Photodissociation regions in the interstellar medium of galaxies. *Reviews of Modern Physics*, 71(1), 173–230. (Cité page 191.)
- [163] Hollenbach, D. J., Yorke, H. W., & Johnstone, D. (2000). Disk Dispersal around Young Stars. In V. Mannings, A. P. Boss, & S. S. Russell (Eds.), *Protostars and Planets IV* (pp. 401). Tucson, AZ : Univ. Arizona Press. (Cité page 190.)
- [164] Hughes, A. M., Wilner, D. J., Andrews, S. M., et al. (2011). Empirical Constraints on Turbulence in Protoplanetary Accretion Disks. *ApJ*, 727(2), 85. (Cité page 6.)
- [165] Igea, J. & Glassgold, A. E. (1999). X-Ray Ionization of the Disks of Young Stellar Objects. *ApJ*, 518(2), 848–858. (Cité pages 22 et 191.)
- [166] Ilgner, M. & Nelson, R. P. (2006). On the ionisation fraction in protoplanetary disks. II. The effect of turbulent mixing on gas-phase chemistry. *A&A*, 445(1), 223–232. (Cité page 24.)
- [167] Ilgner, M. & Nelson, R. P. (2008). Turbulent transport and its effect on the dead zone in protoplanetary discs. *A&A*, 483, 815–830. (Cité pages 23, 24, 38 et 140.)
- [168] Jin, L. (1996). Damping of the Shear Instability in Magnetized Disks by Ohmic Diffusion. *ApJ*, 457, 798. (Cité pages 6, 33, 38 et 228.)
- [169] Johansen, A. & Levin, Y. (2008). High accretion rates in magnetised Keplerian discs mediated by a Parker instability driven dynamo. *A&A*, 490(2), 501–514. (Cité page 64.)
- [170] Johansen, A., Youdin, A., & Klahr, H. (2009). Zonal Flows and Long-lived Axisymmetric Pressure Bumps in Magnetorotational Turbulence. *ApJ*, 697, 1269–1289. (Cité page 240.)
- [171] Kannan, S., Roberts, M., Mayes, P., Brelsford, D., & Skovira, J. F. (2001). Workload management with loadleveler. *IBM Redbooks*, 2(2). (Cité page 58.)
- [172] Kant, I. (1755). Naturgeschichte und theorie des himmels. *Philosophische Bibliothek Bd*, 48. (Cité page 1.)
- [173] Keppens, R., Casse, F., & Goedbloed, J. P. (2002). Waves and Instabilities in Accretion Disks : Magnetohydrodynamic Spectroscopic Analysis. *ApJ*, 569, L121–L126. (Cité page 225.)
- [174] Kersalé, E., Hughes, D. W., Ogilvie, G. I., et al. (2004). Global Magnetorotational Instability with Inflow. I. Linear Theory and the Role of Boundary Conditions. *ApJ*, 602, 892–903. (Cité pages 225, 229, 231 et 236.)
- [175] Klassen, M., Pudritz, R. E., & Kirk, H. (2017). Filamentary flow and magnetic geometry in evolving cluster-forming molecular cloud clumps. *MNRAS*, 465(2), 2254. (Cité page 5.)
- [176] Kleeorin, N., Mond, M., & Rogachevskii, I. (1996). Magnetohydrodynamic turbulence in the solar convective zone as a source of oscillations and sunspots formation. *A&A*, 307, 293–. (Cité page 134.)
- [177] Kley, W. & Lin, D. N. C. (1992). Two-dimensional viscous accretion disk models. I - On meridional circulations in radiative regions. *ApJ*, 397, 600–612. (Cité page 162.)
- [178] Kley, W. & Nelson, R. (2012). Planet-disk interaction and orbital evolution. *ARA&A*, 50, 211–249. (Cité page 2.)
- [179] Koepferl, C. M., Ercolano, B., Dale, J., et al. (2013). Disc clearing of young stellar objects : evidence for fast inside-out dispersal. *MNRAS*, 428, 3327–3354. (Cité page 4.)
- [180] Konigl, A., Salmeron, R., & Wardle, M. (2010). Wind-driving protostellar accretion discs - I. Formulation and parameter constraints. *MNRAS*, 401(1), 479–499. (Cité page 129.)

- [181] Krasnopolsky, R., Li, Z.-Y., & Blandford, R. (1999). Magnetocentrifugal Launching of Jets from Accretion Disks. I. Cold Axisymmetric Flows. *ApJ*, 526(2), 631–642. (Cité pages 129 et 135.)
- [182] Kunz, M. W. (2008). On the linear stability of weakly ionized, magnetized planar shear flows. *MNRAS*, 385, 1494–1510. (Cité pages 31 et 34.)
- [183] Kunz, M. W. & Balbus, S. A. (2004). Ambipolar diffusion in the magnetorotational instability. *MNRAS*, 348, 355–360. (Cité pages 21, 25 et 34.)
- [184] Kunz, M. W. & Lesur, G. (2013). Magnetic self-organization in Hall-dominated magnetorotational turbulence. *MNRAS*, 434, 2295–2312. (Cité pages 6, 39, 40, 95, 98, 103, 109, 115, 117, 123, 128, 180, 181 et 210.)
- [185] Kunz, M. W., Schekochihin, A. A., & Stone, J. M. (2014). Firehose and mirror instabilities in a collisionless shearing plasma. *Phys. Rev. Lett.*, 112(20), 205003. (Cité page 21.)
- [186] Lada, C. J. (1985). Cold outflows, energetic winds, and enigmatic jets around young stellar objects. *ARA&A*, 23(1), 267–317. (Cité page 3.)
- [187] Laibe, G. & Price, D. J. (2012). Dusty gas with smoothed particle hydrodynamics - I. Algorithm and test suite. *MNRAS*, 420, 2345–2364. (Cité page 47.)
- [188] Landau, L. (2013). *The classical theory of fields*, volume 2 of *Course of Theoretical Physics*. Elsevier. (Cité page 13.)
- [189] Landau, L., Lifshitz, E., & Pitaevskii, L. (1984). *Electrodynamics of continuous media*, volume 8 of *Course of Theoretical Physics*. Pergamon. (Cité pages 11, 13 et 15.)
- [190] Laplace, P. S. (1796). *Exposition du système du monde*. (Cité page 1.)
- [191] Latter, H. N., Fromang, S., & Gressel, O. (2010). MRI channel flows in vertically stratified models of accretion discs. *MNRAS*, 406, 848–862. (Cité pages 185 et 225.)
- [192] Latter, H. N., Lesaffre, P., & Balbus, S. A. (2009). MRI channel flows and their parasites. *MNRAS*, 394(2), 715–729. (Cité page 232.)
- [193] Lesur, G. (2015). SnoopY : General purpose spectral solver. Astrophysics Source Code Library. (Cité page 44.)
- [194] Lesur, G., Ferreira, J., & Ogilvie, G. I. (2013). The magnetorotational instability as a jet launching mechanism. *A&A*, 550, A61. (Cité pages 37, 131, 134, 155 et 199.)
- [195] Lesur, G., Kunz, M. W., & Fromang, S. (2014). Thanatology in protoplanetary discs. The combined influence of Ohmic, Hall, and ambipolar diffusion on dead zones. *A&A*, 566, A56. (Cité pages 24, 40, 53, 55, 57, 128, 129, 140, 141, 143, 144, 150, 152, 168, 170 et 210.)
- [196] Lesur, G. & Longaretti, P.-Y. (2005). On the relevance of subcritical hydrodynamic turbulence to accretion disk transport. *A&A*, 444, 25–44. (Cité page 3.)
- [197] Lesur, G. & Longaretti, P.-Y. (2007). Impact of dimensionless numbers on the efficiency of magnetorotational instability induced turbulent transport. *MNRAS*, 378(4), 1471–1480. (Cité pages 38 et 82.)
- [198] Lesur, G. & Longaretti, P.-Y. (2009). Turbulent resistivity evaluation in magnetorotational instability generated turbulence. *A&A*, 504, 309–320. (Cité pages 81 et 109.)
- [199] Lesur, G. & Longaretti, P.-Y. (2011). Non-linear energy transfers in accretion discs MRI turbulence. I. Net vertical field case. *A&A*, 528, A17. (Cité pages 81 et 242.)
- [200] Lesur, G. & Ogilvie, G. I. (2008). On self-sustained dynamo cycles in accretion discs. *A&A*, 488(2), 451–461. (Cité pages 81, 85 et 87.)
- [201] Lesur, G. & Ogilvie, G. I. (2010). On the angular momentum transport due to vertical convection in accretion discs. *MNRAS*, 404(1), L64–L68. (Cité page 64.)
- [202] Lesur, G. & Papaloizou, J. C. B. (2009). On the stability of elliptical vortices in accretion discs. *A&A*, 498, 1–12. (Cité page 114.)
- [203] Lesur, G. & Papaloizou, J. C. B. (2010). The subcritical baroclinic instability in local accretion disc models. *A&A*, 513, A60. (Cité pages 1 et 114.)
- [204] Lesur, G. R. & Latter, H. (2016). On the survival of zombie vortices in protoplanetary discs. *MNRAS*, 462(4), 4549–4554. (Cité page 191.)

- [205] LeVeque, R. (2002). *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press. (Cité pages 47 et 51.)
- [206] Li, H., Colgate, S. A., Wendroff, B., & Liska, R. (2001). Rossby Wave Instability of Thin Accretion Disks. III. Nonlinear Simulations. *ApJ*, 551(2), 874–896. (Cité page 73.)
- [207] Li, H., Finn, J. M., Lovelace, R. V. E., & Colgate, S. A. (2000). Rossby Wave Instability of Thin Accretion Disks. II. Detailed Linear Theory. *ApJ*, 533(2), 1023–1034. (Cité pages 73 et 175.)
- [208] Li, Z.-Y., Krasnopolsky, R., & Shang, H. (2011). Non-ideal MHD effects and magnetic braking catastrophe in protostellar disk formation. *ApJ*, 738(2), 180. (Cité page 6.)
- [209] Lin, M.-K. & Youdin, A. N. (2015). Cooling Requirements for the Vertical Shear Instability in Protoplanetary Disks. *ApJ*, 811, 17. (Cité page 133.)
- [210] Liu, F., Ye, X., & Wang, X. (2011). Efficient chebyshev spectral method for solving linear elliptic pdes using quasi-inverse technique. *Numerical Mathematics : Theory, Methods and Applications*, 4(2), 197–215. (Cité page 213.)
- [211] Liu, G. & Liu, M. (2003). *Smoothed Particle Hydrodynamics : A Meshfree Particle Method*. World Scientific Publishing Company. (Cité page 46.)
- [212] Longaretti, P.-Y. & Lesur, G. (2010). MRI-driven turbulent transport : the role of dissipation, channel modes and their parasites. *A&A*, 516, A51. (Cité page 80.)
- [213] Lovelace, R. V. E., Li, H., Colgate, S. A., & Nelson, A. F. (1999). Rossby Wave Instability of Keplerian Accretion Disks. *ApJ*, 513, 805–810. (Cité pages 73, 117 et 174.)
- [214] Lubow, S. H., Papaloizou, J. C. B., & Pringle, J. E. (1994). On the Stability of Magnetic Wind-Driven Accretion Discs. *MNRAS*, 268, 1010. (Cité pages 134 et 242.)
- [215] Lynden-Bell, D. & Pringle, J. E. (1974). The evolution of viscous discs and the origin of the nebular variables. *MNRAS*, 168(3), 603–637. (Cité page 65.)
- [216] Lyra, W. & Klahr, H. (2011). The baroclinic instability in the context of layered accretion. Self-sustained vortices and their magnetic stability in local compressible unstratified models of protoplanetary disks. *A&A*, 527, A138. (Cité page 114.)
- [217] Lyra, W. & Kuchner, M. (2013). Formation of sharp eccentric rings in debris disks with gas but without planets. *Nature*, 499(7), 184–187. (Cité page 2.)
- [218] Lyra, W., Paardekooper, S.-J., & Mac Low, M.-M. (2010). Orbital migration of low-mass planets in evolutionary radiative models : avoiding catastrophic infall. *ApJ*, 715(2), L68. (Cité page 191.)
- [219] Ma, Z. & Bhattacharjee, A. (1996). Fast impulsive reconnection and current sheet intensification due to electron pressure gradients in semi-collisional plasmas. *Geophysical research letters*, 23(13), 1673–1676. (Cité page 21.)
- [220] Manara, C. F., Testi, L., Natta, A., et al. (2014). Gas content of transitional disks : a VLT/X-Shooter study of accretion and winds. *A&A*, 568, A18. (Cité page 3.)
- [221] Massaglia, S., Bodo, G., Mignone, A., & Rossi, P. (Eds.). (2008). *Jets from Young Stars III : numerical MHD and instabilities*, volume 754 of *Lecture Notes in Physics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. (Cité page 48.)
- [222] Masson, J., Chabrier, G., Hennebelle, P., et al. (2016). Ambipolar diffusion in low-mass star formation - I. General comparison with the ideal magnetohydrodynamic case. *A&A*, 587, A32. (Cité page 6.)
- [223] McCall, B. J., Huneycutt, A. J., Saykally, R. J., et al. (2003). An enhanced cosmic-ray flux towards ζ Persei inferred from a laboratory study of the $\text{H}_3^+ - \text{e}^-$ recombination rate. *Nature*, 422, 500–502. (Cité page 22.)
- [224] McCaughrean, M. J. & O'dell, C. R. (1996). Direct Imaging of Circumstellar Disks in the Orion Nebula. *AJ*, 111, 1977. (Cité page 1.)
- [225] Meheut, H., Fromang, S., Lesur, G., et al. (2015). Angular momentum transport and large eddy simulations in magnetorotational turbulence : the small pm limit. *A&A*, 579, A117. (Cité page 38.)
- [226] Meheut, H., Keppens, R., Casse, F., & Benz, W. (2012). Formation and long-term evolution of 3D vortices in protoplanetary discs. *A&A*, 542, A9. (Cité pages 1 et 114.)

- [227] Ménard, F. & Duchêne, G. (2004). On the alignment of classical T Tauri stars with the magnetic field in the taurus-auriga molecular cloud. *A&A*, 425(3), 973–980. (Cité page 5.)
- [228] Mestel, L. & Spitzer, Jr., L. (1956). Star formation in magnetic dust clouds. *MNRAS*, 116, 503. (Cité pages 6 et 143.)
- [229] Mignone, A. (2007). A simple and accurate riemann solver for isothermal mhd. *J. Comput. Phys.*, 225(2), 1427–1441. (Cité page 52.)
- [230] Mignone, A., Bodo, G., Massaglia, S., et al. (2007). PLUTO : A Numerical Code for Computational Astrophysics. *ApJS*, 170, 228–242. (Cité pages 48 et 210.)
- [231] Mignone, A., Flock, M., Stute, M., et al. (2012). A conservative orbital advection scheme for simulations of magnetized shear flows with the PLUTO code. *A&A*, 545, A152. (Cité page 67.)
- [232] Miller, K. A. & Stone, J. M. (1997). Magnetohydrodynamic Simulations of Stellar Magnetosphere-Accretion Disk Interaction. *ApJ*, 489(2), 890–902. (Cité page 129.)
- [233] Miller, K. A. & Stone, J. M. (2000). The Formation and Structure of a Strongly Magnetized Corona above a Weakly Magnetized Accretion Disk. *ApJ*, 534, 398–419. (Cité page 131.)
- [234] Minoshima, T., Hirose, S., & Sano, T. (2015). Dependence of the Saturation Level of Magnetorotational Instability on Gas Pressure and Magnetic Prandtl Number. *ApJ*, 808, 54. (Cité pages 82, 86 et 109.)
- [235] Miyoshi, T. & Kusano, K. (2005). A multi-state hll approximate riemann solver for ideal magnetohydrodynamics. *J. Comput. Phys.*, 208(1), 315–344. (Cité page 52.)
- [236] Mizerski, K. A. & Bajer, K. (2009). The magnetoelliptic instability of rotating systems. *J. Fluid Mech.*, 632, 401. (Cité page 114.)
- [237] Moll, R. (2012). Shearing box simulations of accretion disk winds. *A&A*, 548, A76. (Cité pages 131, 134, 155, 165 et 187.)
- [238] Monaghan, J. J. (1992). Smoothed particle hydrodynamics. *Annual review of astronomy and astrophysics*, 30(1), 543–574. (Cité page 47.)
- [239] Monaghan, J. J. (1994). Simulating free surface flows with sph. *Journal of computational physics*, 110(2), 399–406. (Cité page 46.)
- [240] Monaghan, J. J. (2000). Sph without a tensile instability. *J. Comput. Phys.*, 159(2), 290–311. (Cité page 47.)
- [241] Mulders, G. D. & Dominik, C. (2012). Probing the turbulent mixing strength in protoplanetary disks across the stellar mass range : no significant variations. *A&A*, 539, A9. (Cité page 6.)
- [242] Murphy, G. C., Ferreira, J., & Zanni, C. (2010). Large scale magnetic fields in viscous resistive accretion disks. I. Ejection from weakly magnetized disks. *A&A*, 512, A82. (Cité pages 128 et 188.)
- [243] Nakano, T. & Umebayashi, T. (1986). Dissipation of magnetic fields in very dense interstellar clouds. I - Formulation and conditions for efficient dissipation. *MNRAS*, 218, 663–684. (Cité pages 5, 14 et 25.)
- [244] Naoz, S. & Narayan, R. (2013). Generation of primordial magnetic fields on linear overdensity scales. *Physical review letters*, 111(5), 051303. (Cité page 21.)
- [245] Natta, A., Testi, L., Muzerolle, J., et al. (2004). Accretion in brown dwarfs : An infrared view. *A&A*, 424, 603–612. (Cité page 3.)
- [246] Nelson, R. P., Gressel, O., & Umurhan, O. M. (2013). Linear and non-linear evolution of the vertical shear instability in accretion discs. *MNRAS*, 435(3), 2610–2632. (Cité pages 132 et 139.)
- [247] Nelson, R. P., Papaloizou, J. C. B., Masset, F., & Kley, W. (2000). The migration and growth of protoplanets in protostellar discs. *MNRAS*, 318(1), 18–36. (Cité page 85.)
- [248] Nishi, R., Nakano, T., & Umebayashi, T. (1991). Magnetic flux loss from interstellar clouds with various grain-size distributions. *ApJ*, 368, 181–194. (Cité page 22.)
- [249] Noble, S. C., Krolik, J. H., & Hawley, J. F. (2010). Dependence of Inner Accretion Disk Stress on Parameters : The Schwarzschild Case. *ApJ*, 711, 959–973. (Cité page 85.)
- [250] O’Keeffe, W. & Downes, T. P. (2014). Multifluid simulations of the magnetorotational instability in protostellar discs. *MNRAS*, 441, 571–581. (Cité pages 106, 107, 108, 109 et 150.)

- [251] Oppenheimer, M. & Dalgarno, A. (1974). The Fractional Ionization in Dense Interstellar Clouds. *ApJ*, 192, 29–32. (Cité page 23.)
- [252] O’Sullivan, S. & Downes, T. P. (2006). An explicit scheme for multifluid magnetohydrodynamics. *MNRAS*, 366, 1329–1336. (Cité page 106.)
- [253] Ouyed, R. & Pudritz, R. E. (1997). Numerical Simulations of Astrophysical Jets from Keplerian Disks. I. Stationary Models. *ApJ*, 482(2), 712–732. (Cité page 129.)
- [254] Owen, J. E., Ercolano, B., & Clarke, C. J. (2011). Protoplanetary disc evolution and dispersal : the implications of X-ray photoevaporation. *MNRAS*, 412(1), 13–25. (Cité pages 192, 193 et 194.)
- [255] Owen, J. E., Ercolano, B., Clarke, C. J., & Alexander, R. D. (2010). Radiation-hydrodynamic models of X-ray and EUV photoevaporating protoplanetary discs. *MNRAS*, 401(3), 1415–1428. (Cité pages 190 et 192.)
- [256] Paardekooper, S.-J., Lesur, G., & Papaloizou, J. C. B. (2010). Vortex migration in protoplanetary disks. *ApJ*, 725(1), 146–158. (Cité page 70.)
- [257] Padgett, D. L., Brandner, W., Stapelfeldt, K. R., et al. (1999). Hubble space telescope/NICMOS imaging of disks and Envelopes around very young stars. *AJ*, 117, 1490–1504. (Cité pages 1 et 141.)
- [258] Padovani, M., Galli, D., & Glassgold, A. E. (2013). Cosmic-ray ionization of molecular clouds (Corrigendum). *A&A*, 549, C3. (Cité page 22.)
- [259] Pandey, B. P. & Wardle, M. (2012). Magnetorotational instability in magnetic diffusion dominated accretion discs. *MNRAS*, 423, 222–235. (Cité page 32.)
- [260] Papaloizou, J. C. B. & Lin, D. N. C. (1995). Theory Of Accretion Disks I : Angular Momentum Transport Processes. *ARA&A*, 33, 505–540. (Cité page 3.)
- [261] Papaloizou, J. C. B. & Terquem, C. (1997). On the stability of an accretion disc containing a toroidal magnetic field : the effect of resistivity. *MNRAS*, 287, 771–789. (Cité page 33.)
- [262] Pascucci, I., Sterzik, M., Alexander, R., et al. (2011). The photoevaporative wind from the disk of tw hya. *ApJ*, 736(1), 13. (Cité page 4.)
- [263] Pelletier, G. (2007). Introduction to magneto-hydrodynamics. In J. Ferreira, C. Dougados, & E. Whelan (Eds.), *Jets from Young Stars : Models and Constraints*, volume 723 of *Lecture Notes in Physics* chapter 4, (pp. 77–101). Springer Berlin Heidelberg. (Cité page 16.)
- [264] Pelletier, G. & Pudritz, R. E. (1992). Hydromagnetic disk winds in young stellar objects and active galactic nuclei. *ApJ*, 394, 117–138. (Cité pages 4, 128, 159, 186 et 198.)
- [265] Perez-Becker, D. & Chiang, E. (2011). Surface Layer Accretion in Conventional and Transitional Disks Driven by Far-ultraviolet Ionization. *ApJ*, 735, 8. (Cité pages 6, 22, 33, 142 et 190.)
- [266] Perryman, M. (2011). *The exoplanet handbook*. Cambridge University Press. (Cité page 1.)
- [267] Perryman, M., Hartman, J., Bakos, G. Á., & Lindegren, L. (2014). Astrometric exoplanet detection with gaia. *ApJ*, 797(1), 14. (Cité page 1.)
- [268] Pessah, M. E., Chan, C.-K., & Psaltis, D. (2006). The signature of the magnetorotational instability in the Reynolds and Maxwell stress tensors in accretion discs. *MNRAS*, 372, 183–190. (Cité pages 82, 86 et 246.)
- [269] Pety, J., Gueth, F., Guilloteau, S., & Dutrey, A. (2006). Plateau de Bure interferometer observations of the disk and outflow of HH 30. *A&A*, 458, 841–854. (Cité pages 4 et 129.)
- [270] Peyret, R. (2013). *Spectral Methods for Incompressible Viscous Flow*. Applied Mathematical Sciences. Springer New York. (Cité pages 44, 212 et 214.)
- [271] Pinilla, P., Flock, M., Ovelar, M. d. J., & Birnstiel, T. (2016). Can dead zones create structures like a transition disk ? *A&A*, 596, A81. (Cité pages 36 et 85.)
- [272] Pinte, C., Dent, W. R. F., Ménard, F., et al. (2016). Dust and Gas in the Disk of HL Tauri : Surface Density, Dust Settling, and Dust-to-gas Ratio. *ApJ*, 816, 25. (Cité pages 2, 6 et 27.)
- [273] Pinte, C., Fouchet, L., Ménard, F., et al. (2007). On the stratified dust distribution of the GG Tauri circumbinary ring. *A&A*, 469, 963–971. (Cité page 27.)

- [274] Piran, T. (1978). The role of viscosity and cooling mechanisms in the stability of accretion disks. *ApJ*, 221, 652–660. (Cité page 86.)
- [275] Pitaevskii, L. & Lifshitz, E. (2012). *Physical Kinetics*, volume 10 of *Course of Theoretical Physics*. Elsevier Science. (Cité pages 20 et 25.)
- [276] Powell, K. G. (1997). An approximate riemann solver for magnetohydrodynamics. In *Upwind and High-Resolution Schemes* (pp. 570–583). Springer. (Cité page 51.)
- [277] Press, W. H., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., et al. (2007). *Numerical Recipes : The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press. (Cité pages 87, 88 et 234.)
- [278] Pringle, J. E. (1981). Accretion discs in astrophysics. *ARA&A*, 19, 137–162. (Cité page 65.)
- [279] Lord Rayleigh (1917). On the dynamics of revolving fluids. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 93(648), 148–154. (Cité pages 29, 132, 182 et 245.)
- [280] Prud'Homme, C., Chabannes, V., Doyeux, V., et al. (2012). Feel++ : A computational framework for galerkin methods and advanced numerical methods. In *ESAIM : Proceedings*, volume 38, (pp. 429–455). EDP Sciences. (Cité page 45.)
- [281] Pudritz, R. E. (1985). Star formation in rotating, magnetized molecular disks. *ApJ*, 293, 216–229. (Cité pages 4 et 128.)
- [282] Rao, R., Girart, J. M., Lai, S.-P., & Marrone, D. P. (2014). Detection of a Magnetized Disk around a Very Young Protostar. *ApJ*, 780, L6. (Cité page 5.)
- [283] Rax, J.-M. (2005). *Physique des plasmas : Cours et applications*. Physique. Dunod. (Cité page 20.)
- [284] Regev, O. & Umurhan, O. M. (2008). On the viability of the shearing box approximation for numerical studies of MHD turbulence in accretion disks. *A&A*, 481, 21–32. (Cité page 37.)
- [285] Riols, A., Ogilvie, G. I., Latter, H., & Ross, J. P. (2016). Magnetorotationally driven wind cycles in local disc models. *MNRAS*, 463, 3096–3112. (Cité pages 131 et 155.)
- [286] Riols, A., Rincon, F., Cossu, C., et al. (2013). Global bifurcations to subcritical magnetorotational dynamo action in Keplerian shear flow. *J. Fluid Mech.*, 731, 1–45. (Cité page 81.)
- [287] Riols, A., Rincon, F., Cossu, C., et al. (2015). Dissipative effects on the sustainment of a magnetorotational dynamo in Keplerian shear flow. *A&A*, 575, A14. (Cité page 81.)
- [288] Riols, A., Rincon, F., Cossu, C., et al. (2017). Magnetorotational dynamo chimeras. The missing link to turbulent accretion disk dynamo models? *A&A*, 598, A87. (Cité page 81.)
- [289] Rodgers-Lee, D., Ray, T. P., & Downes, T. P. (2016). Global multifluid simulations of the magnetorotational instability in radially stratified protoplanetary discs. *MNRAS*, 463, 134–145. (Cité pages 24, 106 et 150.)
- [290] Roe, P. L. (1981). Approximate riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *Journal of computational physics*, 43(2), 357–372. (Cité page 52.)
- [291] Ross, J., Latter, H. N., & Guilet, J. (2016). The stress-pressure relationship in simulations of MRI-induced turbulence. *MNRAS*, 455, 526–539. (Cité pages 65 et 86.)
- [292] Rosswog, S. (2009). Astrophysical smooth particle hydrodynamics. *New Astronomy Reviews*, 53(4), 78–104. (Cité page 47.)
- [293] Salmeron, R., Königl, A., & Wardle, M. (2007). Angular momentum transport in protostellar discs. *MNRAS*, 375(1), 177–183. (Cité page 128.)
- [294] Salmeron, R., Königl, A., & Wardle, M. (2011). Wind-driving protostellar accretion discs - II. Numerical method and illustrative solutions. *MNRAS*, 412, 1162–1180. (Cité page 128.)
- [295] Salmeron, R. & Wardle, M. (2008). Magnetorotational instability in protoplanetary discs : the effect of dust grains. *MNRAS*, 388, 1223–1238. (Cité pages 27, 142 et 177.)
- [296] Sano, T., Inutsuka, S.-i., & Miyama, S. M. (1998). A Saturation Mechanism of Magnetorotational Instability Due to Ohmic Dissipation. *ApJ*, 506, L57–L60. (Cité pages 38 et 108.)
- [297] Sano, T., Inutsuka, S.-i., Turner, N. J., & Stone, J. M. (2004). Angular Momentum Transport by Magnetohydrodynamic Turbulence in Accretion Disks : Gas Pressure Dependence of the Saturation Level of the Magnetorotational Instability. *ApJ*, 605(1), 321. (Cité page 85.)

- [298] Sano, T. & Miyama, S. M. (1999). Magnetorotational Instability in Protoplanetary Disks. I. On the Global Stability of Weakly Ionized Disks with Ohmic Dissipation. *ApJ*, 515, 776–786. (Cité page 33.)
- [299] Sano, T. & Stone, J. M. (2002a). The effect of the Hall term on the nonlinear evolution of the magnetorotational instability : I. local axisymmetric simulations. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc.*, 570(1), 314–328. (Cité page 39.)
- [300] Sano, T. & Stone, J. M. (2002b). The Effect of the Hall Term on the Nonlinear Evolution of the Magnetorotational Instability. II. Saturation Level and Critical Magnetic Reynolds Number. *ApJ*, 577, 534–553. (Cité pages 39, 106, 108 et 109.)
- [301] Schlüter, A. & Biermann, L. (1950). Interstellare magnetfelder. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 5(5), 237–251. (Cité page 21.)
- [302] Schuessler, I. & Schmitt, D. (1981). Comments on smoothed particle hydrodynamics. *A&A*, 97, 373–379. (Cité page 47.)
- [303] Segura-Cox, D. M., Looney, L. W., Stephens, I. W., Fernández-López, M., Kwon, W., Tobin, J. J., Li, Z.-Y., & Crutcher, R. (2015). The Magnetic Field in the Class o Protostellar Disk of L1527. *ApJ*, 798, L2. (Cité page 5.)
- [304] Semenov, D., Wiebe, D., & Henning, T. (2004). Reduction of chemical networks. II. Analysis of the fractional ionisation in protoplanetary discs. *A&A*, 417, 93–106. (Cité pages 24 et 191.)
- [305] Shakura, N. I. & Sunyaev, R. A. (1973). Black holes in binary systems. Observational appearance. *A&A*, 24, 337–355. (Cité pages 80, 85, 108 et 162.)
- [306] Shi, J.-M., Stone, J. M., & Huang, C. X. (2016). Saturation of the magnetorotational instability in the unstratified shearing box with zero net flux : convergence in taller boxes. *MNRAS*, 456, 2273–2289. (Cité page 71.)
- [307] Shu, F. H., Johnstone, D., & Hollenbach, D. (1993). Photoevaporation of the solar nebula and the formation of the giant planets. *Icarus*, 106, 92–1001. (Cité page 190.)
- [308] Simon, J. B., Bai, X.-N., Stone, J. M., et al. (2013). Turbulence in the Outer Regions of Protoplanetary Disks. I. Weak Accretion with No Vertical Magnetic Flux. *ApJ*, 764(1), 66. (Cité page 168.)
- [309] Simon, J. B., Beckwith, K., & Armitage, P. J. (2012). Emergent mesoscale phenomena in magnetized accretion disc turbulence. *MNRAS*, 422(3), 2685–2700. (Cité page 240.)
- [310] Simon, J. B., Lesur, G., Kunz, M. W., & Armitage, P. J. (2015). Magnetically driven accretion in protoplanetary discs. *MNRAS*, 454, 1117–1131. (Cité pages 26, 32, 102 et 144.)
- [311] Sorathia, K. A., Reynolds, C. S., & Armitage, P. J. (2010). Connections Between Local and Global Turbulence in Accretion Disks. *ApJ*, 712, 1241–1247. (Cité pages 65 et 85.)
- [312] Sorathia, K. A., Reynolds, C. S., Stone, J. M., & Beckwith, K. (2012). Global Simulations of Accretion Disks. I. Convergence and Comparisons with Local Models. *ApJ*, 749, 189. (Cité pages 65 et 85.)
- [313] Sorensen, D. C. (1997). Implicitly restarted arnoldi/lanczos methods for large scale eigenvalue calculations. In *Parallel Numerical Algorithms* (pp. 119–165). Springer. (Cité page 235.)
- [314] Spitzer, L. & Tomasko, M. G. (1968). Heating of H I Regions by Energetic Particles. *ApJ*, 152, 971. (Cité page 22.)
- [315] Springel, V. (2010). Smoothed particle hydrodynamics in astrophysics. *ARA&A*, 48, 391–430. (Cité page 47.)
- [316] Spruit, H. & Roberts, B. (1983). Magnetic flux tubes on the sun. *Nature*, 304, 401–406. (Cité page 134.)
- [317] Steinacker, A. & Henning, T. (2001). Global Three-dimensional Magnetohydrodynamic Simulations of Accretion Disks and the Surrounding Magnetosphere. *ApJ*, 554(1), 514–527. (Cité page 129.)
- [318] Steinacker, A. & Papaloizou, J. C. B. (2002). Three-dimensional Magnetohydrodynamic Simulations of an Accretion Disk with Star-Disk Boundary Layer. *ApJ*, 571, 413–428. (Cité page 65.)

- [319] Stepanovs, D. & Fendt, C. (2014). Modeling MHD accretion-ejection from the launching area to propagation scales. *ApJ*, 793(1), 31. (Cité pages 128 et 131.)
- [320] Stepanovs, D. & Fendt, C. (2016). An Extensive Numerical Survey of the Correlation Between Outflow Dynamics and Accretion Disk Magnetization. *ApJ*, 825, 14. (Cité pages 184 et 242.)
- [321] Sterling, A. C. (2000). Solar spicules : A review of recent models and targets for future observations. *Solar Physics*, 196(1), 79–111. (Cité page 134.)
- [322] Stoll, M. H. R. & Kley, W. (2014). Vertical shear instability in accretion disc models with radiation transport. *A&A*, 572, A77. (Cité page 133.)
- [323] Stone, J. M. & Norman, M. L. (1994). Numerical simulations of magnetic accretion disks. *ApJ*, 433, 746–756. (Cité pages 129 et 130.)
- [324] Störzer, H. & Hollenbach, D. (1999). Photodissociation Region Models of Photoevaporating Circumstellar Disks and Application to the Proplyds in Orion. *ApJ*, 515(2), 669–684. (Cité page 190.)
- [325] Suzuki, T. K. & Inutsuka, S.-i. (2006). Solar winds driven by nonlinear low-frequency Alfvén waves from the photosphere : Parametric study for fast/slow winds and disappearance of solar winds. *Journal of Geophysical Research : Atmospheres*, 111(A6). (Cité page 72.)
- [326] Suzuki, T. K. & Inutsuka, S.-i. (2009). Disk Winds Driven by Magnetorotational Instability and Dispersal of Protoplanetary Disks. *ApJ*, 691, L49–L54. (Cité page 160.)
- [327] Suzuki, T. K. & Inutsuka, S.-i. (2014). Magnetohydrodynamic Simulations of Global Accretion Disks with Vertical Magnetic Fields. *ApJ*, 784, 121. (Cité pages 129, 130, 157, 162 et 188.)
- [328] Tanga, P., Babiano, A., Dubrulle, B., & Provenzale, A. (1996). Forming Planetesimals in Vortices. *Icarus*, 121, 158–170. (Cité page 1.)
- [329] Tarter, C. B., Tucker, W. H., & Salpeter, E. E. (1969). The Interaction of X-Ray Sources with Optically Thin Environments. *ApJ*, 156, 943–. (Cité page 190.)
- [330] Toro, E. (2009). *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics : A Practical Introduction*. Springer Berlin Heidelberg. (Cité page 51.)
- [331] Tóth, G. (2000). The $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ constraint in shock-capturing magnetohydrodynamics codes. *J. Comput. Phys.*, 161(2), 605–652. (Cité page 49.)
- [332] Tóth, G., Ma, Y., & Gombosi, T. I. (2008). Hall magnetohydrodynamics on block-adaptive grids. *J. Comput. Phys.*, 227(1), 6967–6984. (Cité pages 53 et 57.)
- [333] Turner, N. J., Sano, T., & Dziourkevitch, N. (2007). Turbulent Mixing and the Dead Zone in Protostellar Disks. *ApJ*, 659, 729–737. (Cité pages 23 et 140.)
- [334] Umebayashi, T. (1983). The Densities of Charged Particles in Very Dense Interstellar Clouds. *Progress of Theoretical Physics*, 69(2), 480–502. (Cité page 21.)
- [335] Umebayashi, T. & Nakano, T. (1981). Fluxes of Energetic Particles and the Ionization Rate in Very Dense Interstellar Clouds. *PASJ*, 33, 617. (Cité pages 22 et 141.)
- [336] Umebayashi, T. & Nakano, T. (2009). Effects of Radionuclides on the Ionization State of Protoplanetary Disks and Dense Cloud Cores. *ApJ*, 690, 69–81. (Cité page 23.)
- [337] Urpin, V. (1984). Hydrodynamic flows in accretion disks. *Soviet Astronomy*, 28, 50–53. (Cité page 162.)
- [338] Urpin, V. & Brandenburg, A. (1998). Magnetic and vertical shear instabilities in accretion discs. *MNRAS*, 294, 399. (Cité page 132.)
- [339] Ustyugova, G. V., Koldoba, A. V., Romanova, M. M., et al. (1999). Magnetocentrifugally Driven Winds : Comparison of MHD Simulations with Theory. *ApJ*, 516(1), 221–235. (Cité page 129.)
- [340] van der Marel, N., van Dishoeck, E. F., Bruderer, S., et al. (2013). A major asymmetric dust trap in a transition disk. *Science*, 340, 1199–1202. (Cité page 2.)
- [341] Van Leer, B. (1979). Towards the ultimate conservative difference scheme. v. a second-order sequel to godunov's method. *Journal of computational Physics*, 32(1), 101–136. (Cité page 53.)
- [342] Walker, J., Lesur, G., & Boldyrev, S. (2016). On the nature of magnetic turbulence in rotating, shearing flows. *MNRAS*, 457, L39–L43. (Cité page 82.)

- [343] Wardle, M. (1999). The Balbus-Hawley instability in weakly ionized discs. *MNRAS*, 307, 849–856. (Cité page 34.)
- [344] Wardle, M. (2007). Magnetic fields in protoplanetary disks. *Ap&SS*, 311, 35–45. (Cité pages 20 et 21.)
- [345] Wardle, M. & Koenigl, A. (1993). The structure of protostellar accretion disks and the origin of bipolar flows. *ApJ*, 410, 218–238. (Cité page 6.)
- [346] Wardle, M. & Ng, C. (1999). The conductivity of dense molecular gas. *MNRAS*, 303, 239–246. (Cité pages 11 et 14.)
- [347] Wardle, M. & Salmeron, R. (2012). Hall diffusion and the magnetorotational instability in protoplanetary discs. *MNRAS*, 422, 2737–2755. (Cité page 34.)
- [348] Watkins, D. S. (2000). QR-like algorithms for eigenvalue problems. *J. Comput. Appl. Math.*, 123(1), 67–83. (Cité page 234.)
- [349] Weidenschilling, S. J. (1977). Aerodynamics of solid bodies in the solar nebula. *MNRAS*, 180, 57. (Cité pages 1, 117, 181 et 240.)
- [350] Weidenschilling, S. J. (1984). Evolution of grains in a turbulent solar nebula. *Icarus*, 60(3), 553–567. (Cité page 1.)
- [351] Williams, J. P. & Cieza, L. A. (2011). Protoplanetary Disks and Their Evolution. *ARA&A*, 49, 67–117. (Cité pages 2, 136 et 143.)
- [352] Woitas, J., Ray, T. P., Bacciotti, F., et al. (2002). Hubble Space Telescope Space Telescope Imaging Spectrograph Observations of the Bipolar Jet from RW Aurigae : Tracing Outflow Asymmetries Close to the Source. *ApJ*, 580(1), 336. (Cité page 3.)
- [353] Woitke, P., Kamp, I., & Thi, W. F. (2009). Radiation thermo-chemical models of protoplanetary disks. I. Hydrostatic disk structure and inner rim. *A&A*, 501(1), 383–406. (Cité pages 22, 24, 133 et 155.)
- [354] Woitke, P., Min, M., Pinte, C., et al. (2016). Consistent dust and gas models for protoplanetary disks. I. Disk shape, dust settling, opacities, and PAHs. *A&A*, 586, A103. (Cité pages 24 et 190.)
- [355] Xu, R. & Bai, X.-N. (2016). On the Grain-modified Magnetic Diffusivities in Protoplanetary Disks. *ApJ*, 819, 68. (Cité pages 27 et 142.)
- [356] Yang, H., Li, Z.-Y., Looney, L., & Stephens, I. (2016). Inclination-induced polarization of scattered millimetre radiation from protoplanetary discs : the case of HL Tau. *MNRAS*, 456, 2794–2805. (Cité page 5.)
- [357] Zanni, C., Ferrari, A., Rosner, R., et al. (2007). Mhd simulations of jet acceleration from keplerian accretion disks—the effects of disk resistivity. *A&A*, 469(3), 811–828. (Cité pages 5, 167 et 190.)
- [358] Zhang, K., Blake, G. A., & Bergin, E. A. (2015). Evidence of Fast Pebble Growth Near Condensation Fronts in the HL Tau Protoplanetary Disk. *ApJ*, 806(1), L7. (Cité page 2.)
- [359] Zhu, Z. & Stone, J. M. (2017). Global Evolution of an Accretion Disk with Net Vertical Field : Coronal Accretion, Flux Transport, and Disk Winds. *ArXiv e-prints*. (Cité pages 130, 131, 157, 162 et 188.)
- [360] Zhu, Z., Stone, J. M., & Bai, X.-N. (2015). Dust transport in MRI turbulent disks : ideal and non-ideal MHD with ambipolar diffusion. *ApJ*, 801(2), 81. (Cité page 181.)
- [361] Zhu, Z., Stone, J. M., Rafikov, R. R., & Bai, X.-n. (2014). Particle concentration at planet-induced gap edges and vortices. I. inviscid three-dimensional hydro disks. *ApJ*, 785(2), 122. (Cité page 1.)

Dynamique à grande échelle des disques protoplanétaires

William BÉTHUNE

RÉSUMÉ

Cette thèse est dédiée aux processus de transport de moment cinétique et de flux magnétique dans les disques faiblement magnétisés et faiblement ionisés ; l'influence des effets microphysiques sur la dynamique du disque à grande échelle y est centrale. Dans un premier temps, j'exclus les effets de stratification et j'examine l'impact des effets MHD non-idéaux sur la turbulence dans le plan du disque. Je montre que l'écoulement peut spontanément s'organiser si la fraction d'ionisation est assez faible ; dans ce cas, l'accrétion est stoppée, et le disque exhibe des anneaux axisymétriques susceptibles d'affecter la formation planétaire. Dans un second temps, je caractérise l'interaction du disque avec un vent magnétisé via un modèle global de disque stratifié. Ce modèle est le premier à décrire globalement les effets MHD non-idéaux d'après un réseau chimique simplifié. Il révèle que le disque est essentiellement non-turbulent, et que le champ magnétique peut adopter différentes configurations globales, affectant drastiquement les processus de transport. Un nouveau mécanisme d'auto-organisation est identifié, produisant aussi des structures axisymétriques, tandis que le précédent est invalidé par l'action du vent. Les propriétés des vents magnéto-thermiques sont examinées pour différentes magnétisations, permettant de discriminer les vents magnétisés des vents photo-évaporés par leur efficacité d'éjection.

Mots-clés : simulations numériques, magnétohydrodynamique, disques d'accrétion, turbulence

ABSTRACT

This thesis is devoted to the transport of angular momentum and magnetic flux through weakly ionized and weakly magnetized accretion disks ; the role of microphysical effects on the large-scale dynamics of the disk is of primary importance. As a first step, I exclude stratification and examine the impact of non-ideal MHD effects on the properties of turbulence near the disk mid-plane. I show that the flow can spontaneously organize itself if the ionization fraction is low enough ; in this case, accretion is halted and the disk exhibits axisymmetric structures, with possible consequences on planet formation. As a second step, I study the disk-wind interaction via a global model of stratified disk embedded in a warm atmosphere. This model is the first to compute non-ideal MHD effects from a simplified chemical network in a global geometry. It reveals that the flow is essentially laminar, and that the magnetic field can adopt different global configurations, drastically affecting the transport processes. A new self-organization mechanism is identified, also leading to the formation of axisymmetric structures, whereas the previous mechanism is discarded by the action of the wind. The properties of magneto-thermal winds are examined for various magnetizations, allowing discrimination between magnetized and photo-evaporative winds based upon their ejection efficiency.

Keywords : numerical simulations, magnetohydrodynamics, accretion disks, turbulence