



MODÈLES D'INVESTIGATION DES PRATIQUES INSTITUTIONNELLES EN MATHÉMATIQUES

Imène Ghedamsi

► To cite this version:

Imène Ghedamsi. MODÈLES D'INVESTIGATION DES PRATIQUES INSTITUTIONNELLES EN MATHÉMATIQUES : Dispositifs méthodologiques en didactique des mathématiques, dans une perspective de conception d'ingénieries . Education. Université de Tunis, 2017. tel-01574676

HAL Id: tel-01574676

<https://theses.hal.science/tel-01574676>

Submitted on 16 Aug 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université de Tunis



République Tunisienne
Ministère de l'Enseignement Supérieur

Imène GHEDAMSI
Maître-assistante – IPEIT

**MODELES D'INVESTIGATION DES PRATIQUES
INSTITUTIONNELLES EN MATHEMATIQUES**

**Dispositifs méthodologiques en didactique des mathématiques,
dans une perspective de conception d'ingénieries**

Note de synthèse en vue de l'Habilitation à Diriger les Recherches

Soutenue le 14 juillet 2017

Jury de l'habilitation

<i>Karim Boulabiar</i>	<i>Professeur, Université de Tunis El Manar, Président</i>
<i>Marc Rogalski</i>	<i>Professeur Emérite, Université Paris 7, Rapporteur</i>
<i>Viviane Durand-Guerrier</i>	<i>Professeur, Université de Montpellier, Rapporteur</i>
<i>Chokri Abdelkefi</i>	<i>Professeur, Université de Tunis, Examineur</i>
<i>Mohamed Ali Jendoubi</i>	<i>Professeur, Université de Carthage, Examineur</i>

REMERCIEMENTS

Je remercie Karim Boulabiar pour avoir assumé de s'investir dans l'encadrement des travaux de recherche en didactique des mathématiques, pour m'avoir encouragé à poursuivre et dont les idées et la rigueur m'ont été d'un grand apport. Je le remercie d'avoir accepté de présider ce jury.

Je suis très reconnaissante à Isabelle Bloch, qui a accompagné mon parcours de recherche et dont les remarques incisives m'ont fait progresser et contribuer à préciser la finalité de mes travaux.

Je remercie tout particulièrement les deux rapporteurs, Viviane Durand-Guerrier et Marc Rogalski, pour avoir accepté la lourde tâche de rapporter mon projet d'habilitation.

Merci à Chokri Abdelkefi et Mohamed Ali Jendoubi d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je remercie tous ceux qui ont fait que ce travail aboutisse – ils sont nombreux, je ne peux les citer tous, mais ils se reconnaîtront – qui m'ont encouragée, qui ont apprécié mon travail, et avec qui les échanges ont été riches et pleins de chaleur.

Je suis redevable aux professeurs qui ont ouvert leurs classes.

Je remercie enfin ma famille de son soutien.

RESUME

Le travail de recherche que nous avons entrepris porte essentiellement sur la prise en compte des conditions institutionnelles dans la conception d'ingénieries didactiques relatives aux savoirs mathématiques dans la transition vers l'université. Il s'est particulièrement orienté vers la question plutôt théorique d'une meilleure définition de cette prise en compte. Notre ambition a été d'apporter quelques éclairages méthodologiques au travail de recherche en didactique des mathématiques, en exploitant les constructions théoriques actuelles de la Théorie des Situations Didactiques (TSD). Les modèles que nous avons mis en place se sont montrés suffisamment flexibles pour pouvoir être utilisés conformément à la problématique spécifique de chacun des savoirs visés.

Notre recherche a finalement débouché sur un questionnement plus approfondie des conditions d'implémentation de ces ingénieries. Elle se poursuit actuellement dans le sens de l'étude de la question de la dévolution des ingénieries didactiques aux acteurs du système éducatif. Les premiers résultats révèlent que la posture autoréflexive de ces acteurs, y compris du point de vue épistémologique, apparait en tant que composante essentielle de la dévolution ou comme moyen tributaire du processus menant à sa construction. Ces premiers résultats nous portent vers l'étude de la question des similitudes entre ce que les travaux de recherche concernant les pratiques réflexives ont mis en évidence et ce que nos premiers résultats, fortement reliés à la dimension épistémologique des savoirs mathématiques, ont apporté comme éclairage.

Mots clés : ingénieries didactiques, variables macro-didactiques, gestion du professeur, savoirs formels.

Introduction	6
Documents joints à la note de synthèse	9
chapitre 1 : Spécificités d'une étude macro didactique - Le modèle des variables macro-didactiques et leur nature	10
Introduction : Des théories didactiques pour une vision globale de l'enseignement	10
I. Point de départ : Définition des variables macro-didactiques dans la transition lycée/université en analyse réelle	10
1. Introduction	10
2. Vers la définition des variabilités : Identification des outils théoriques de modélisation	11
3. Le modèle des variables macro-didactiques : Cas de la transition lycée/université en analyse	16
II. Un modèle réduit des variables macro-didactique pour l'étude de l'enseignement des nombres complexes en fin de lycée : Pertinence de la variable "Catégorie mathématique"	19
1. Etat de l'art pour l'identification des variables d'étude	19
2. Un modèle réduit des variables pour l'étude de l'organisation mathématique des nombres complexes	20
3. Aperçu des résultats de l'analyse : Algorithmisation du travail avec les nombres complexes ?	23
3.1 Catégorisation de l'organisation mathématique (OM) en praxéologies	23
3.2 Opérationnalité des nombres complexes : Une face cachée par l'institution	25
3.3 Représentations des nombres complexes	27
3.4 Conclusion : le modèle réduit des variables et/ou un moyen pour prévoir les difficultés possibles des élèves	30
Conclusion : Validité du modèle des variables macro-didactiques ?	31
chapitre 2 : Généricité d'une étude micro – Un modèle méthodologique d'analyse des classes ordinaires	32
Introduction : Le problème d'analyse des séances de classes ordinaires	32
I. Outils méthodologiques d'analyse de séances de classes : Gestion du professeur et travail des élèves/étudiants	34
II. Etude de cas en analyse à l'entrée à l'université	36
1. Présentation du dispositif	36
2. Analyse a priori des énoncés	37
3. Gestion du professeur et travail des étudiants	39
4. Conclusion	44
III. Usage du modèle en classe d'analyse en fin de lycée : Une meilleure prise en compte de la complexité de l'objet mathématique – Cas de la convergence de suite	44
1. Introduction : La problématique des images de la convergence dans la littérature	44
2. Ajustement de l'outil méthodologique : Prise en compte des caractéristiques des images de la convergence	48
3. Cadre expérimental	49
4. Investigation des images des élèves lors de l'introduction de la convergence	51
4.1 Analyse a priori du projet d'enseignement	51
4.2 Travail des élèves et gestion du professeur en situation de classe	54
5. Conclusion : Quelle possibilité pour le développement des images a posteriori ?	61

Conclusion : Flexibilité du modèle méthodologique d'analyse de séances de classe ?	63
chapitre 3 : Vers des ingénieries didactiques de développement - Un appui sur les études macro et micro didactiques	65
Introduction : Une nécessité de prise en compte du potentiellement réalisable	65
I. D'un questionnement épistémologique d'existence formelle à la validité des études macro et micro pour penser une ingénierie en analyse à l'entrée à l'université	67
1. Introduction	67
2. Les méthodes numériques : une place de choix dictée par le cadre de référence de la TSD	68
3. Construction/Expérimentation des situations	72
3.1 Antiphérèse de racine de 2	73
3.2 Le point fixe de cosinus	74
4. Effet de l'ingénierie : Synthèse et discussion	74
II. Réflexion sur les potentialités des ingénieries à fonder l'action didactique : Quel apport d'une exploration institutionnelle ?	76
1. De quoi s'agit-il ?	76
2. Prise en compte de l'impact des choix institutionnels sur le travail réel des élèves - Etude de cas	77
2.1 Difficultés d'adaptation à la définition de convergence de suite	77
2.2 Un amalgame de représentations des nombres complexes au cœur des difficultés des élèves	87
3. Des ingénieries pour l'action en cours d'expérimentation en fin du lycée : premiers éléments de perspective	93
Conclusion	99
Références bibliographiques	101

INTRODUCTION

Notre projet de recherche est depuis le début centré sur la question de conceptions d'ingénieries didactiques dans le cadre de la Théorie des Situations Didactiques (TSD) qui soit pensée dans la perspective d'une prise en compte de la réalité de l'enseignement : Qu'est ce qui est entrepris par l'institution ? Que peut-on en déduire du point de vue de l'apprentissage ? Qu'est ce qui nous reste à investir ?

Ces questionnements ont été d'abord posés dans le cadre de l'enseignement de l'analyse réelle puis des nombres complexes dans la transition lycée/université. Dans González-Martín et al. (2014), des exemples d'ingénieries didactiques pour l'enseignement supérieur élaborées et expérimentées dans le cadre de la TSD témoignent des possibilités offertes par cette théorie pour l'étude des savoirs universitaires et pré-universitaires. L'ingénierie didactique a en effet été présentée, depuis le début, comme une méthodologie de recherche étroitement liée à la TSD notamment au niveau de la phase de conception et d'analyse a priori. Une relation qui perdure en même temps que l'évolution de certaines théories dans le sens d'une meilleure adéquation avec une méthodologie de type ingénierie didactique (tel est par exemple le cas de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD)). La méthodologie globale se structure en quatre étapes fondamentales : étude préalable (qui comporte essentiellement une dimension d'étude mathématique et épistémologique), élaboration et analyse a priori, expérimentation, analyse a posteriori et confrontation à la contingence. En particulier, l'étude de la contingence a pour objectif de contrôler les choix théoriques précédemment établis et d'avancer en faveur de la progression de la recherche : les conditions d'implémentation des ingénieries dans le cadre institutionnel ne constituent pas une exigence immédiate de la communauté des chercheurs.

Comme le soulignent nos questionnements, dans nos travaux, la conception d'une ingénierie passe aussi par une étape spécifique à l'exploration du terrain institutionnel. Dans cette note de synthèse, nous décrivons les outils méthodologiques, fondés sur la TSD, que nous avons mis en place afin d'étudier la nature des choix institutionnels tant au niveau global des organisations mathématiques effectives que plutôt local au niveau de la classe et du rôle du professeur. La progression d'une telle étude et les résultats successifs qu'elle engendre permet de penser efficacement l'organisation d'un autre type d'étude : celui des difficultés des élèves par rapport aux savoirs en jeu ainsi que le rôle de l'institution dans leur émergence. Ces outils méthodologiques ont été mis en œuvre dans plusieurs travaux de master ou de thèse en cours (nombres complexes, limite de suite, intégrale, l'enseignement de la géométrie dans la transition primaire/collège, etc.), ce qui leur donne un certain niveau de généricité et permet de bien souligner leur potentialité particulièrement prometteuse pour penser efficacement la question de l'implémentation des ingénieries didactiques dans l'institution.

Tout en s'inscrivant complètement dans la TSD en tenant compte de ses avancées théoriques majeures dans le champ particulier de l'enseignement postsecondaire et supérieur (Bloch, 2006 ; Bloch, & Gibel, 2011, etc.), notre ambition est d'apporter un éclairage fondamentalement méthodologique à l'étude de la question de la prise en compte de l'institution, y compris sur le plan épistémologique, dans un projet de recherche de type conception d'ingénieries didactiques. Nous montrons dans cette note que sous le contrôle des constructions récentes de la TSD, il est possible de s'approprier les concepts d'autres théories afin d'avoir les moyens nécessaires à l'étude du terrain institutionnel et à l'intégration des résultats d'une telle étude dans l'architecture globale de la conception d'une ingénierie. La flexibilité de l'outil méthodologique global, autorise au besoin, de l'alimenter par des outils théoriques complémentaires, de sorte que la problématique étudiée, suivant le savoir visé, ait une meilleure représentativité scientifique.

Au final, la prise en compte des résultats d'exploration institutionnelle devrait aussi permettre de mieux cerner la question de l'implémentation d'une ingénierie didactique. Ceci nous a conduit à poser une question supplémentaire : Comment dévoluer aux acteurs du système éducatif (professeurs, formateurs, décideurs, etc.) la problématique étudiée, suivant le savoir visé, dans le sens de leur implication dans la conception d'une ingénierie ? Notre étude de cette question a été amorcée lors des expérimentations entreprises dans le cadre de travaux de thèse en cours sur la conception d'ingénieries concernant les notions de nombres complexes et de convergence de suites en fin de lycée (que nous codirigeons). En dépit du caractère embryonnaire de cette recherche, les résultats des expérimentations soulignent la nécessité de nourrir notre cadrage théorique par des outils empruntés à d'autres champs de recherche qui s'intéressent particulièrement aux questions de réflexivité dans toute forme de pratiques : *"Critically reflexive practice embraces subjective understandings of reality as a basis for thinking more critically about the impact of our assumptions, values, and actions on others."* (Cunliffe, 2004, p. 407). Confrontés à la diversité attestée de la bibliographie sur le sujet des pratiques réflexives, notre recherche en cours s'est attachée à étudier empiriquement les moyens à mettre en œuvre afin de déclencher chez les acteurs (particulièrement professeurs et formateurs) un processus d'autoréflexion sur leurs pratiques les menant à l'appropriation de la problématique étudiée et à l'engagement dans un travail collaboratif (avec les chercheurs) de mise en place d'alternatives. Nos premiers résultats montrent que le rôle du chercheur, à travers la richesse de la matière que ses propres moyens permettent de mettre en place, est particulièrement décisif pour aider ces acteurs à analyser leurs pratiques.

Finalement, notre travail s'articule donc essentiellement sur la question de la prise en compte de l'institution pour la conception d'ingénieries didactiques : Comment utiliser la TSD pour construire des outils méthodologiques d'analyse des organisations mathématiques relatives aux savoirs visés ? De la gestion du professeur et du travail effectif des élèves ? La mise en place de ces outils devrait par ailleurs être pensée d'abord dans la perspective d'une meilleure

flexibilité en fonction de la problématique étudiée, mais aussi pour une prise en compte des résultats de l'étude dans le dispositif global de conception d'une ingénierie. A un niveau un peu plus précoce, notre travail s'intéresse particulièrement à la question de l'implémentation des ingénieries dans l'institution : Comment alimenter la méthodologie de l'ingénierie, en tant que champ de recherche, par des outils théoriques d'autres champs de recherche, pour penser un dispositif méthodologique général qui prenne en compte l'action didactique ?

Cette note de synthèse se divise donc en trois chapitres :

- Le premier chapitre reprend en l'approfondissant notre travail sur le modèle des variables macro-didactiques relatif à l'étude des organisations mathématiques. En particulier, nous pointons la dimension de généricité de ce modèle en montrant comment il a été utilisé, voire remanié, pour étudier la question de l'enseignement des nombres complexes en fin de lycée.
- Le deuxième chapitre montre comment, en nous basant sur la TSD, nous avons conçu un outil méthodologique d'analyse de séances de classes ordinaires qui soit informé et qui informe sur les éléments à prendre en compte, du point de vue de l'institution, pour avancer dans la construction d'une ingénierie. Ce chapitre comporte aussi une mise en œuvre de cet outil dans l'étude de la question de l'enseignement de la convergence de suite en fin de lycée. Cet usage souligne les potentialités de l'outil à incorporer d'autres éléments d'analyse en fonction de la problématique abordé.
- Le troisième chapitre comporte deux parties. Dans une première partie, nous reprenons l'ingénierie que nous avons conçue dans la transition lycée/université en analyse réelle en soulignant l'intérêt de prendre en compte, dans une telle étude, les résultats concernant l'organisation mathématique et la réalité de la classe. Dans une deuxième partie, nous reprenons les études faites dans le cadre des travaux de thèse que nous co-encadrons sur les nombres complexes et la convergence de suites. Ces études concernent les difficultés des élèves qui émergent notamment à la suite de choix institutionnels particuliers (y compris ceux en lien avec la gestion du professeur). Nous montrons ensuite comment nous avons exploité ces études pour avancer dans la mise en place d'un dispositif méthodologique général qui soit cohérent avec la sensibilité de la recherche à la dimension de l'action didactique. Dans ce dispositif, une place de choix est attribuée au sens donné par l'institution à l'enseignement des savoirs visés en vue d'amener les acteurs à le réinterroger. Une telle réflexion ne peut avoir lieu sans que l'impact des choix qui concrétisent ce sens, fondamentalement sur le travail des élèves, ne soit explicitement identifié.

En conclusion, nous revenons sur la cohérence du dispositif méthodologique finalement conçu et nous interrogeons ses potentialités et les réajustements qu'il requiert.

DOCUMENTS JOINTS A LA NOTE DE SYNTHESE

Chapitre 1

- Bloch I., Ghedamsi I., (2005) L'enseignement du début de l'analyse. *Petit x*, 69, 7-30. Editions IREM-Grenoble. ISSN 0759-9188.

- Ghedamsi I., Tanazefi R. (2015) Difficultés d'apprentissage des nombres complexes en fin de Secondaire. *Petit x*, 98, 29-52. Editions IREM-Grenoble. ISSN 0759-9188.

Chapitre 2

- Chellougui F., Ghedamsi I., Kouki R. (2015) Entre le formalisme mathématique et ses "significations" : l'acte interprétatif, un maillon faible de la relation didactique ? In Butlen D. et al. (Eds.), *Rôles et places de la didactique et des didacticiens des mathématiques dans la société et le système éducatif*, pp. 465-474. La Pensée Sauvage Editions. ISBN 978-2-85919-305-8.

- Ghedamsi I. (2016) Teacher management of learning calculus: The case of sequences at the first year of university mathematics studies. In Konrad Krainer and Nad'a Vondrová (Eds.), *Proceedings of the 9th Congress of European Research in Mathematics Education (CERME9)*, pp. 2103–2110. ERME Publishing. ISBN 978-80-7290-844-8.

- Ghedamsi I., Haddad S., Lecorre T. (2016) Les alternatives en analyse : Cas de la limite et de l'intégrale. In Matheron, Y. et al. (Eds.), *Enjeux et débats en didactique des mathématiques*, pp. 421-440. La Pensée Sauvage Editions. ISBN 978-2-85919-315-7.

- Ghedamsi I., Fattoum F. (Publiable après modifications) Etude de l'évolution des images de la notion de convergence de suites chez les étudiants lors d'un enseignement ordinaire, rôle du professeur dans cette évolution. *Recherche en Didactique des Mathématiques*. La Pensée Sauvage Editions. ISSN 0246 – 9367.

Chapitre 3

- Bloch I., Ghedamsi I. (2010) From numbers to limits: situations as a way to a process of abstraction. In Durand-Guerrier et al. (Eds.), *Proceedings of CERME 6*, pp. 2386 – 2395. ERME Publishing. ISBN 978-2-7342-1190-7

- Ghedamsi I., Chellougui F. (2013) Antiphérèse de $\sqrt{2}$: introduction d'une dimension a-didactique dans l'enseignement de l'analyse à l'université. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.), *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^e siècle – Actes du colloque EMF2012*, pp. 987–1004. Editions Université de Genève. ISBN 978-2-8399-1115-3.

- Ghedamsi I. (2016) Entrée des étudiants dans l'Analyse formelle de début d'université : Potentialité des méthodes numériques d'approximation. In Nardi et al. (Eds.), *Proceedings of the first conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM 2016)*, pp. 63-72. INDRUM Publishing. ISSN 2496-1027.

- Bressoud D., Ghedamsi I., Martinez-Luaces V., Törner G. (2016) *Teaching and learning of Calculus*. Springer International Publishing. ISBN 978-3-319-32974-1.

CHAPITRE 1 : SPECIFICITES D'UNE ETUDE MACRO DIDACTIQUE - LE MODELE DES VARIABLES MACRO-DIDACTIQUES ET LEUR NATURE

Introduction : Des théories didactiques pour une vision globale de l'enseignement

Si l'on se fixe comme objectif de recherche celui de penser une alternative d'enseignement d'objet(s) mathématique(s) particuliers à un niveau donné du cursus ou lors d'une transition entre deux niveaux d'un cursus, la première étape de l'étude, plutôt globale, consiste à se doter de méthodes consistantes d'exploration des possibilités et des limites des choix institutionnels, notamment en termes d'organisations mathématiques. L'enjeu est donc celui de donner une vision synthétique (ou une modélisation) de ces choix de sorte que cette vision permette de clairement identifier aussi bien ce qui est à la charge des élèves/étudiants que les exigences liées à la nature du travail qu'ils auront à accomplir. Dans l'organisation globale de situations didactiques, certains choix se présentent comme des variables didactiques (Brousseau, 1986), dans la mesure où en agissant sur elles, on modifiera la nature des attentes du côté des élèves/étudiants. Cette modélisation devrait donc porter une dimension de variabilité afin de cerner le plus fidèlement possible les aspects macro-didactiques des choix relatifs aux organisations mathématiques qui relèvent de l'étude. Les variabilités potentielles permettent à leur tour de donner de la généricité à la modélisation construite à un niveau donné et pour un objet mathématique donné.

A travers cette modélisation, le formalisme qui matérialise les théories en didactiques des mathématiques acquiert le rôle inéluctable de contrôleur du fonctionnement du processus enseignement/apprentissage et permet de rendre l'approche globale des questions d'enseignement plus efficiente. Au final, pour le chercheur en didactique des mathématiques, étudier les phénomènes macro-didactiques liés à l'enseignement d'objet(s) mathématique(s) particuliers à des niveaux donnés du cursus suppose de prime à bord une certaine expertise dans l'investigation des variables didactiques qui soient pertinentes du point de vue de la problématique soulevée. Le modèle des variables macro-didactiques dont nous décrivons la genèse et l'évolution dans ce qui suit, pourrait constituer une base satisfaisante à tout projet de recherche de ce type.

I. Point de départ : Définition des variables macro-didactiques dans la transition lycée/université en analyse réelle

1. Introduction

La transition entre le lycée et l'université est un point crucial pour l'orientation des bacheliers et pour le recrutement des étudiants poursuivant des études scientifiques. Nous nous sommes posés la question des outils théoriques permettant d'étudier la nature des organisations mathématiques à la charnière de ces deux institutions dans l'environnement d'une notion clé

de l'analyse réelle : celle de la limite. Notre objectif final est celui d'évaluer l'adéquation du programme et des pratiques de l'enseignement secondaire pour préparer les élèves aux études supérieures, et plus précisément à l'apprentissage des notions de base de l'analyse réelle; et, parallèlement, de la prise en compte des connaissances du secondaire par l'université. Les indicateurs que nous avons dégagés font apparaître l'existence d'une variabilité importante des pratiques et des modes d'enseignement (Bloch, & Ghedamsi, 2005). Si l'on souhaite encourager l'entrée dans les filières scientifiques, la responsabilité de la réduction de cette variabilité ne peut être laissée aux seuls étudiants : elle doit être prise en charge de façon différenciée par les deux institutions.

L'étude a été réalisée en Tunisie, où la tradition de haut niveau universitaire en mathématiques est bien implantée. L'étude faite concerne les deux dernières années du lycée et la première année universitaire. Le corpus étudié comporte des cours et exercices de manuels de lycée, et des exercices de TD d'université. Les programmes sont nationaux ainsi que les manuels, ce qui a rendu l'étude plus aisée en supprimant la variabilité due aux différences dans les manuels destinés à l'enseignement.

2. Vers la définition des variabilités : Identification des outils théoriques de modélisation

L'une des constructions puissantes de la TAD (Chevallard, 1999) est celle de praxéologie mathématique. Son usage permet une catégorisation primaire des organisations mathématiques à étudier en types de tâches, techniques, technologies et théorie. A travers l'étude des organisations mathématiques dans l'environnement de la notion de limite dans les deux ordres d'enseignement, nous avons pu classifier les types de tâches en trois catégories et à chacune de ces types de tâches nous avons associé les techniques à utiliser : Tâches de type algorithmique utilisant des techniques calculatoires *simples* ou *complexes*, Tâches de type graphique et Tâches de type heuristique.

La variabilité de ces tâches du lycée à l'université est conditionnée par leur standardisation mais surtout par le degré d'autonomie exigible de la part des élèves/étudiants. Certaines tâches dont la résolution nécessite des démarches qui rappellent celles du mathématicien expert "*c'est un explorateur intrépide, courageux, mais très bien outillé et dont le champ de base est très bien fourni*" (Robert, 1998, p. 145), rendent compte de la complexité cognitive à laquelle est confronté l'étudiant pour gérer des organisations mathématiques jusque là inconnues, nécessitant un choix à formuler (conjecturer, se fixer des paramètres, etc.), plus qu'une étape de travail et l'élaboration d'un moyen adéquat de contrôle (généralement non fourni dans l'énoncé). On retrouve, en introduisant cette dimension pour analyser les tâches présentées aux apprenants, une considération des trois niveaux de mise en fonctionnement des connaissances répertoriées par Robert (1998). Le niveau disponible, qui selon l'auteur est le plus souvent sollicité en post-baccalauréat, semble attester d'une certaine autonomie de la part

de l'apprenant à interagir avec ses connaissances pour arriver à accomplir la tâche à laquelle il est confronté.

Nous avons pu montrer que l'organisation mathématique de fin du lycée se centre le plus souvent sur la mise en œuvre de techniques dans des contextes très ciblés, tandis que celles de l'entrée à l'université mettent en lumière un amalgame de techniques plus complexes. Les activités proposées dans les séries de l'université appellent à des raisonnements sur des objets généraux telles que la preuve de conjectures ou la recherche de contre-exemples, des raisonnements par l'absurde, un travail de formalisation qui n'était pas de règle au lycée, un travail de réflexion critique sur la validité des résultats trouvés, sous-tendu par une capacité à évaluer une démarche mathématique ainsi qu'une éventuelle prise d'initiative (entièrement à la charge de l'étudiant) en vue de recourir, d'une façon autonome, aux graphiques pour contrôler, vérifier et découvrir.

En effet, la transition lycée/université est surtout marquée par l'importance accordée aux tâches heuristiques et la disparition des tâches graphiques. Pour ce qui est des tâches algorithmiques, nous notons surtout un développement important des compétences algébriques à travers l'introduction de fonctions nouvelles, comme les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques et les fonctions hyperboliques. En revanche, il peut arriver que l'étudiant soit amené par lui-même à effectuer des tracés qualitatifs afin de contrôler le résultat d'un calcul de limite ou d'un développement limité asymptotique. Or, au lycée, les techniques exigées dans les tâches faisant intervenir le graphique restent inscrites dans un contrat didactique peu étendu : certaines induisent des conjectures à partir du graphique et les autres demandent des tracés. Cependant, la systématisation antérieure des études globales de fonctions par tracé du graphique favorise la mise en œuvre d'une technique d'interprétation graphique d'un nombre limite – ainsi le tracé de la tangente en un point de la courbe, le tracé des branches infinies, le tracé des asymptotes obliques, verticales ou horizontales. Réciproquement, lorsqu'il s'agit d'interpréter des courbes afin d'en conjecturer un résultat éventuel, l'élève n'est généralement pas confronté à une tâche de production complexe. On lui demande, soit d'utiliser la représentation graphique d'une fonction afin de conjecturer l'existence d'une limite éventuelle (en l'occurrence de percevoir un nombre dérivé) ou encore de représenter les courbes. Ces tâches graphiques supposent de plus que la courbe ne recèle aucun implicite non visible, donc elles induisent une utilisation du graphique peu problématique et non problématisée. Par ailleurs, les tâches induisant la prise en compte par l'élève de l'utilité du graphique – telles que les questions relatives à la représentation graphique de la réciproque d'une fonction ou à la conjecture sur la convergence éventuelle d'une suite récurrente – n'exigent en général pas le recours autonome au graphique par les étudiants – que ce soit dans des phases de contrôle ou d'exploration. L'institution scolaire semble en effet prendre peu en charge le recours au graphique comme outil de validation et ne pas chercher spécifiquement à le développer, par un effet de contrat (Bloch, 2002). Ce que nous pouvons noter, c'est une certaine carence de tâches graphiques moins élémentaires,

correspondant à un degré de familiarisation plus élevé avec les notions liées à la limite et à l'aspect heuristique du graphique.

Ce qui est remarquable concernant les tâches heuristiques à l'université, c'est le fait que les techniques qui leur sont associées sont dans leur majorité d'une nature différente de celles qui apparaissent au lycée. Ainsi dans les techniques utiles figurent très souvent des développements limités, que les étudiants sont donc supposés pouvoir maîtriser comme connaissances disponibles. Les techniques de raisonnement par l'absurde nécessitant dans la plupart des cas un travail de formalisation et la recherche de contre-exemples (qui sont aussi inexistantes au lycée) sont proposées de sorte que le choix de les mettre en œuvre est entièrement à la charge de l'étudiant. L'étudiant a donc à gérer une difficulté supplémentaire, il doit être capable de pressentir la règle adéquate au moment adéquat. Finalement, les techniques correspondant aux tâches heuristiques sur la nature des suites, qui prenaient une certaine importance au lycée par la reconnaissance de suites spécifiques (reconnaître par exemple qu'une suite est géométrique), disparaissent à l'entrée à l'université en faveur de nouvelles techniques concernant des objets généraux. Dans ces techniques, on trouve le fait de reconnaître une suite de Cauchy, ou deux suites adjacentes, d'identifier des suites extraites, d'utiliser un contre-exemple ou de raisonner par l'absurde. Tout ceci induit la nécessité de se détacher des activités scolaires secondaires afin d'intégrer un niveau supérieur de l'activité mathématique, incluant la réflexion sur la nature des concepts étudiés et leur reconnaissance sans aide de l'énoncé. Compte tenu de la variété des difficultés présentées par les tâches proposées, et du peu de temps qui sera par suite consacré à chacune des techniques utiles, il est impensable qu'une véritable routine puisse ici s'installer et permettre une familiarisation suffisante de l'ensemble des étudiants à l'ensemble de ces tâches. A l'entrée à l'université, la majorité des tâches induisent un choix à réaliser de la part de l'étudiant sans aucune indication explicite : reconnaître la nécessité de distinguer limite à droite et limite à gauche, identifier l'encadrement adéquat, construire une stratégie de travail (dans ce cas il s'agit de mettre en œuvre plusieurs techniques pour trouver la limite), inventer un contre-exemple, se fixer des paramètres, reconnaître la nécessité d'utiliser un raisonnement par l'absurde, reconnaître la ou les suite(s) extraites pertinentes, se fixer l'ordre du développement limité adéquat, etc. Nous pointons ici un amalgame de techniques nouvelles dont la mise en œuvre induit une difficulté à double entrée pour les étudiants à savoir : quand et comment ? Il y a là envers l'étudiant une exigence de prise en charge individuelle et de gestion personnelle des difficultés, à un degré non atteint jusque là.

En articulant les travaux de Robert (1998) et de Sfard (1991), nous avons été amenées à distinguer deux statuts des notions de l'analyse : processus et objet. La mise en œuvre du statut processus appelle un rapport opérationnel à la notion en question : c'est le cas par exemple de la notion de limite lors de la recherche de la pente d'une tangente. Quand à la dimension objet d'une notion, essentiellement liée à ses aspects unificateur, généralisateur et formalisateur, elle caractérise l'aspect structurel du travail de conceptualisation : c'est le cas

par exemple de la notion de limite dans des activités de raisonnement sur des objets généraux, ou lorsque les énoncés en question portent sur des propriétés générales des limites ou des objets (fonctions, suites) ayant ou non des limites. Robert pose, d'une part la question des relations que des nouvelles notions introduites à l'université entretiennent avec de notions connues ; d'autre part la question des fonctions que vont occuper ces nouvelles notions. Ceci conduit à distinguer plusieurs statuts possibles des notions concernées : statut formalisateur, unificateur, généralisateur ou simplificateur. Ces statuts sont nouveaux pour les étudiants et générateurs d'obstacles. Ainsi, le travail mené à l'université sur la définition du concept de limite de suite – fondé sur la formalisation en (ε, N) – dévoile les difficultés qu'ont les étudiants à élaborer une démarche formelle sur les problèmes de convergence, exigence nouvelle par rapport au travail sur des problèmes particuliers abordé dans l'enseignement secondaire. La démarche de formalisation ne peut être considérée comme jouant un rôle simplificateur, d'un point de vue didactique, que si l'aspect généralisateur peut en être déduit et des théorèmes facilitant le travail ultérieur prennent place dans les outils disponibles ; cette réorganisation ne peut avoir lieu que par le biais d'ingénieries *ad hoc*, et dans des organisations sur le long terme qui permettent à l'étudiant d'appréhender les gains méthodologiques ainsi conquis.

L'analyse des tâches dans l'environnement de la notion de limite, à la fin du cursus secondaire, nous montre que la notion de limite n'est presque jamais utilisée dans son statut objet. Ceci s'explique dans le contexte du travail de Sfard, qui met en avant le rôle que peut jouer la forme opérationnelle d'un concept pour une première introduction de celui-ci. Effectivement, dans leur majorité, les textes des exercices de Terminale portant sur le statut processus de la notion de limite contiennent des indications sur des étapes de calcul de limites d'expressions algébriques (niveau technique de fonctionnement). Par ailleurs, les tâches qui n'indiquent pas le recours à la limite comme outil de résolution posent des questions familières, à savoir étudier la continuité, dérivabilité, construire une tangente, asymptote, une courbe, etc. ou encore étudier la nature d'une suite bien définie. En revanche, on a pu observer, à travers certaines tâches concernant l'étude de la convergence d'une suite, un travail qui pourrait constituer une première approche de la définition formelle de la limite de suite. Cependant, même ces tâches plus complexes ne révèlent pas de besoins spécifiques de formalisation dans le domaine de l'Analyse : la technique de base est l'encadrement – comparaison et rien n'assure que, pour les élèves, ce cadre est celui d'une première approche de l'aspect généralisateur de la limite. De plus, dans une organisation de type "processus", les objets en jeu dans les exercices, même les plus difficiles, sont des fonctions (ou suites) particulières : il n'est jamais demandé de démonstration de propriétés plus générales ou décontextualisées des objets nouveaux introduits (ici les limites). Cette organisation induit des conséquences d'ordre conceptuel. Si l'on peut attendre de ce travail des connaissances accrues sur certaines fonctions et des savoir-faire en calcul algébrique, il est clair que la conceptualisation sur la notion de limite comme objet ne peut émerger du travail

prévu dans ce milieu. Concevoir la notion de limite comme objet mathématique suppose d'en maîtriser une définition et d'être capable de le voir comme inséré dans une théorie où il intervient dans la constitution d'autres objets et la validation de propriétés.

L'étude des tâches sollicitées à l'université a permis de pointer l'intervention d'un nouvel aspect du travail de conceptualisation : apparition d'exercices qui mettent en jeu le statut *objet* (rapport structurel) du concept de limite, essentiellement liés à ses aspects unificateur, généralisateur et formalisateur. Des tâches mettant en œuvre la définition formelle de la notion de limite apparaissent à travers des études de liens nécessaires/suffisants pour des propriétés de continuité uniforme, en vue de démontrer des inégalités ou encore pour déterminer une limite. Il convient de noter que le travail demandé ici exige de la part de l'étudiant une maîtrise des concepts et des modes de validation, et une capacité d'adaptation importante.

Un autre cadre théorique permet de préciser la nature du travail des étudiants, c'est celui des registres de représentations sémiotiques (Duval, 1993, 1996). En effet, un objet mathématique ne peut être accessible qu'à travers ses représentations sémiotiques et son traitement n'est possible que par ces représentations. Or les représentations sémiotiques ne sont pas homogènes dans un même cadre mathématique : pour un travail dans le cadre de l'Analyse on peut être amené à utiliser des ostensifs de type algébrique, graphique ou formel. On est aussi parfois amené à effectuer des conversions entre les registres sémiotiques, conversions congruentes ou non suivant la classification de Duval. Nous avons donc procédé à la classification des tâches attendues de la part des élèves/étudiants, selon les registres de représentations qui doivent intervenir dans la solution, en restreignant notre étude aux tâches dont la résolution nécessite une conversion entre registres de représentation sémiotique.

Ce travail nous a permis de faire apparaître les potentialités de traitements et de conversions de registres existant au niveau scolaire. Les données relatives aux pratiques induisant des conversions de registres de représentations sémiotiques ont montré une large prépondérance des conversions du type *algébrique/graphique*, toujours pilotées par les énoncés. Les énoncés réclamant ce type de conversion concernent notamment l'interprétation graphique d'un calcul de limite ou à l'inverse la conjecture graphique d'un nombre dérivée, d'une limite éventuelle d'une suite, de l'allure d'une courbe, etc.

Néanmoins, nous avons pu noter la disparition, à l'université, des tâches qui demandent une conversion entre les registres de représentations sémiotiques algébrique et graphique – pratique coutumière au lycée – cédant la place à des conversions dans le registre formel. Ceci souligne une certaine non prise en charge des connaissances antérieures des étudiants afin de les développer et de leur trouver une utilité au moins dans la partie heuristique du travail de réorganisation des savoirs.

3. Le modèle des variables macro-didactiques : Cas de la transition lycée/université en analyse

Nous avons voulu donner une vision plus synthétique des modifications qu'engendre, dans le travail demandé aux étudiants, le passage de l'enseignement du lycée à celui de l'université. Les variables que nous avons finalement retenues comme pertinentes, en fonction des éléments théoriques de notre étude, sont des variables *macro-didactiques* au sens qu'elles concernent une organisation relativement globale de l'enseignement et non une situation locale d'enseignement d'un nouveau savoir (comme une situation). Elles sont au nombre de dix.

- VD1 : le degré de formalisation, et tout particulièrement dans les définitions des concepts. A l'Université le registre formel est introduit d'emblée et les étudiants sont supposés avoir compris son utilité et se mouvoir aisément dans ce registre.

- VD2 : le registre de validation, soit l'algèbre des limites, soit le raisonnement analytique. Le raisonnement analytique est considéré comme un moyen de preuve habituel ; ceci contraste avec le travail usuel au secondaire, qui porte exclusivement sur des fonctions ou des suites particulières, données algébriquement, si bien qu'aucun travail n'est demandé sur des énoncés généraux. Dans l'enseignement secondaire, on ne procède qu'à des instanciations de théorèmes sur des fonctions simples ; et encore faut-il remarquer que les théorèmes ont été le plus souvent admis – conformément au programme.

- VD3 : le degré de généralisation requis dans les énoncés : faible ou fort.

- VD4 : le nombre de nouvelles notions introduites dans l'environnement de la limite, comme les développements limités, etc. Il pourrait paraître que cette variable ait subi peu de modifications entre l'enseignement secondaire et l'université. L'introduction de l'analyse s'accompagne, dans les deux cas, d'une augmentation significative des notions nouvelles étudiées. Cependant la nature de cette augmentation est différente dans les deux institutions. Dans l'enseignement secondaire, les notions sont présentées à l'aide de métaphores culturelles, et les notions sont donc introduites essentiellement par, a) un nouveau vocabulaire, b) des analogies ou des métaphores, ce qui est pointé comme devant reposer sur "l'intuition" par les programmes et les manuels. Une notion comme celle de limite est donc réduite à son nom, quelques occurrences (limites finies, infinies, en x_0 ou à l'infini, sur des fonctions polynômes et rationnelles simples, puis sans démonstration sur les fonctions sinus, cosinus, logarithme et exponentielle) et quelques exemples, les élèves n'ayant pas à prendre en charge sa définition générale, ni le questionnement sur les fonctions ayant une limite ou non, ni ce que signifie cette notion de limite relativement à d'autres concepts reliés au premier. A l'entrée à l'université, les notions sont introduites avec tout l'arsenal formel de définition et de preuve. Le statut d'un concept introduit est de ce fait très différent : outil général, relié à d'autres notions, susceptible d'être remis en jeu pour accéder à un nouveau concept ou un autre niveau

de validation (par exemple les rapports entre limite, taux de variation, dérivée, développement limité, intégrale, etc.).

- VD5 : le type de tâches, soit heuristique, graphique, algorithmique. A l'université, les étudiants sont supposés tenir des raisonnements analytiques : ces raisonnements portent très souvent sur des résultats généraux, faisant intervenir la définition de la notion de limite en (ε, η) , ou des fonctions possédant telle ou telle propriété. Ces raisonnements comportent une dimension heuristique – recherche d'une solution non évidente – et l'usage de définitions formelles.

- VD6 : le choix des techniques et leur routinisation ou non : usage d'une même technique ou amalgame de techniques dont la responsabilité revient à l'étudiant.

- VD7 : le degré d'autonomie nécessaire : faible ou élevé.

- VD8 : le mode d'intervention de la notion, comme processus ou objet. Les manuels du secondaire proposent des exercices et des problèmes usant la plupart du temps de la même (ou des deux ou trois mêmes) technique, techniques qui deviennent ainsi des routines pour l'élève. De plus un même exercice est en général consacré à *une* technique. A l'université il en va tout autrement : les ensembles d'exercices analysés révèlent l'usage de nombreuses techniques, de plusieurs techniques dans un même problème, les étudiants étant supposés pouvoir faire usage de ce que nous avons appelé un *amalgame de techniques*.

- VD9 : le type de conversions utilisées entre registres de représentation. L'université n'exploite pas les possibilités ouvertes par les changements de registres de représentation, et on note même la disparition de tâches de conversion entre registre algébrique et registre graphique, qui étaient pourtant relativement courantes au secondaire, même si elles avaient tendance à n'être exploitées que dans un sens : de l'algébrique vers le graphique.

- VD10 : le statut des tâches demandées aux étudiants, soit simple exercice d'application, soit démonstration d'un énoncé auxiliaire mais général. Cette variable est représentative du *contrat didactique* des deux institutions, dans la mesure où elle contribue à préciser la nature de la responsabilité mathématique dévolue aux étudiants. L'analyse des énoncés de ce qui est considéré comme des exercices à faire par les étudiants, au secondaire et à l'université, montre qu'au lycée les élèves n'ont à résoudre que des tâches ponctuelles portant sur des fonctions particulières, données par des formules algébriques, ce qui situe clairement le travail des élèves dans le domaine de l'application à des exemples ; les "exercices" des séries de travaux dirigés de l'université consistent fréquemment à démontrer des corollaires de théorèmes du cours, dans des cas de propriétés particulières éventuellement (suite majorée, alternée, à valeurs dans $\mathbb{Z}$, etc.) mais non dans le cas d'une suite donnée par sa formule. Ceci porte clairement la responsabilité mathématique des étudiants vers l'établissement de résultats de cours, supposés réutilisables dans d'autres cas ; or ce type de responsabilité ne fait partie à aucun moment du contrat habituel de l'élève du secondaire.

Les résultats de l'étude faite plus haut montre à l'évidence une modification importante des valeurs prises par les variables, ce qui ne peut que s'accompagner d'une profonde mutation

dans le travail mathématique demandé. Le passage de l'enseignement secondaire à l'université s'accompagne de modifications majeures : presque toutes les variables sont modifiées, avec un taux de changement considérable. Les valeurs prises ne montrent presque aucun recouvrement : les étudiants sont confrontés à une révolution globale, aussi bien du travail demandé que des moyens de ce travail.

Cette recherche rejoint le travail fait dans le cadre de la TAD par Bosch, Fonseca et Gascon (2004). En effet ces auteurs pointent la faible possibilité ouverte, dans l'enseignement secondaire, de transformer des *organisations mathématiques ponctuelles* (OMP), comme l'étude des limites d'une fonction donnée algébriquement) en *organisations mathématiques locales* (OML) où les notions sont reliées entre elles par les règles de la théorie. Les travaux s'avèrent donc convergents : l'organisation actuelle de l'enseignement mathématique au secondaire n'autorise qu'une 'visite guidée' d'un certain nombre de propriétés vues comme contingentes et ne permet pas de mettre en évidence les liens entre propriétés, entre concepts et la cohérence de l'édifice théorique, même de façon embryonnaire.

L'étude des paramètres de la transition met en évidence les multiples composantes qui contribuent à creuser l'écart entre l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur, et à rendre très difficile le travail des étudiants confrontés à des modifications majeures dans toutes les dimensions de leur travail et dans les connaissances en jeu. Dans ces conditions, les choix faits ne peuvent se limiter à déterminer la "dose de formel" dans les premiers apprentissages : il est essentiel de penser les situations adéquates pour l'entrée dans une nouvelle théorie comme l'analyse, ainsi que le champ de problèmes que les élèves doivent rencontrer et les outils à leur disposition pour traiter ces problèmes. Il faut aussi envisager comment pourrait s'effectuer le passage de techniques plus ou moins algorithmiques à des techniques relevant de la validation en analyse. En bref, il est nécessaire d'envisager l'articulation de l'analyse presque algébrique du lycée et de l'analyse théorique de l'université : comment penser l'introduction d'une nouvelle théorie dans une perspective d'adaptation ultérieure ? La question se pose donc des moyens que se donne l'enseignement des mathématiques pour gérer des variations aussi importantes, afin de ne pas décourager, durant les deux dernières années de lycée, les élèves d'entreprendre des études de mathématiques ; et afin de ne pas évacuer brutalement, au début du cursus universitaire, les étudiants ayant réussi à s'y engager. Le rôle du professeur en est également rendu particulièrement difficile : comment s'appuyer sur des connaissances antérieures actuellement inadaptées, comment amener les étudiants à prendre en compte les nouvelles exigences ? Cette question fera l'objet d'une étude qui concerne la réalité des classes ordinaires du point de vue de la gestion du professeur et du travail des élèves. Dans le cadre de cette étude, les résultats de l'analyse suivant le modèle des variables macro-didactiques permettront d'analyser le projet d'enseignement spécifique à ces séances.

II. Un modèle réduit des variables macro-didactique pour l'étude de l'enseignement des nombres complexes en fin de lycée : Pertinence de la variable "Catégorie mathématique"

1. Etat de l'art pour l'identification des variables d'étude

L'introduction des nombres complexes en fin du lycée est généralement accompagnée d'un bouleversement conceptuel lié à l'obligation d'accepter l'existence d'un nombre dont le carré est négatif. Les diverses représentations des nombres complexes, auxquelles il est difficile d'associer des mesures ou un modèle concret, complexifient le travail des élèves. En particulier, l'une des approches les plus dominantes pour l'introduction des nombres complexes en fin du lycée, part de l'idée de postuler l'existence d'un "nombre" i dont le carré vaut -1 et donc d'élargir en même temps le nombre d'équations solubles, et puis de généraliser de façon naturelle les opérations dans $\mathbb{R}$ au nouvel ensemble. Une telle approche table sur la résolution (ou plutôt l'obligation de résolution) de l'équation de second degré $x^2 + 1 = 0$, et suppose de la part des élèves d'accepter "l'existence" d'un carré négatif. Plusieurs travaux de recherche relatifs aux nombres complexes (Artigue, & Deledicq 1992 ; Flament, 2003 ; Rogalski, 2002 ; Rossel, & Schneider, 2003, 2004, etc.) pointent les difficultés d'apprentissage de ces nombres en soulignant l'écart qui existe entre les spécificités épistémologiques de ces nombres et l'organisation mathématique choisie pour les introduire. Trois aspects épistémologiques sont fondamentalement retenus :

- Dans l'histoire, c'est en travaillant sur les équations du troisième degré que les algébristes italiens ont utilisé les quantités imaginaires dans leur calcul. Ces quantités ont été utilisées comme objet préconstruit pour les besoins stricts de la résolution des équations, résolution donnant lieu à une solution réelle ($\sqrt[n]{a + \sqrt{-b}} + \sqrt[n]{a - \sqrt{-b}}$).
- Les quantités imaginaires ont longtemps été utilisées avec pour seule légitimité celle de leur efficacité opérationnelle dans divers domaines mathématiques (fonctionnement processus). La manipulation de ces quantités a été gérée par le principe de permanence (ou de généralisation des résultats relatifs aux nombres connus), qui continue d'être utilisé tant qu'il n'a pas généré de contradictions.
- La rencontre des nombres complexes avec les angles est antérieure à leur représentation géométrique. L'ingéniosité des mathématiciens de l'époque dans le calcul infinitésimal, les a amené à établir aussi bien leur représentation trigonométrique qu'exponentielle, à cette époque les nombres complexes n'avaient pas de statut objet. Ces nombres n'ont pu acquérir un sens, dans l'histoire de leur construction, que lorsqu'il a été d'abord possible de les doter de représentation géométrique.

Il est bien sûr irraisonnable de défendre l'existence d'un cheminement comparable entre le travail des mathématiciens dans la construction des nombres complexes et le processus d'apprentissage de ces nombres. Toutefois, nous montrerons dans le paragraphe suivant que le

travail des élèves avec ces nombres est résolument lié aux aspects épistémologiques identifiés. Nous décrivons ensuite, comment un modèle réduit des variables macro-didactiques (VD3, VD5/6, VD8 et VD9) permet d'investiguer la question de la prise en compte de ces aspects par l'organisation mathématique choisie pour introduire ces nombres. Les résultats auxquels nous aboutissons, nous permettront d'aller plus loin dans le projet de catégorisation et de formalisation des difficultés rencontrées par les élèves lors de leur première manipulation des nombres complexes.

2. Un modèle réduit des variables pour l'étude de l'organisation mathématique des nombres complexes

Dans l'histoire de la formation d'un savoir mathématique, Sfard (1991) distingue essentiellement trois phases : une phase pré-conceptuelle où la notion est considérée comme étant le résultat d'un processus ou comme le processus lui même, puis une phase opérationnelle où la notion est alors au service des mathématiques, elle est exploitée dans différentes situations, et enfin une phase structurelle où la notion devient un objet mathématique. En particulier, le concept de nombre réel apparaît d'abord comme un processus de mesure avant d'acquérir le statut d'objet mathématique : *"For a long time the term "number" appeared mainly in the context of measuring processes [...] much time elapsed before mathematicians were able to separate the notion of number from measuring processes and to acknowledge the fact that the length of any segment represents a number even if it cannot be found in the usual way."* (Sfard, 1991, p. 12). A l'opposé des réels, les nombres complexes ne sont pas associés à des mesures, ou à un modèle concret. Ainsi les quantités imaginaires et en particulier $\sqrt{-1}$ apparaissent d'abord comme étant un symbole préconstruit, soit un processus résultant de la résolution d'une équation du troisième degré. Ils sont ensuite utilisés comme opérateurs dans d'autres situations, leur efficacité opérationnelle leur donne le droit d'exister et d'atteindre dans les conditions "favorables" le statut d'objet mathématique, soit de nombre. Du point de vue cognitif, Sfard identifie trois phases dans la formation d'un concept : une phase d'intériorisation où l'apprenant prend conscience du processus qui donne lieu au concept en question, puis dans la deuxième phase de condensation, l'élève commence à combiner les processus et à les généraliser, et enfin, dans la phase de réification, c'est à dire d'unification des différents processus en une structure, le concept accède au statut d'objet mathématique. De ce point de vue, dans une première étape de formation du concept de nombres complexes, l'élève doit d'abord avoir des connaissances solides dans l'usage des racines carrées, ensuite, il doit pouvoir reconnaître que la réciproque de l'opération au "carrée" est utilisable dans les calculs même si l'élément utilisé n'a pas une légitimité mathématique, et enfin la réification suppose la légitimité mathématique de ces nombres indépendamment de toute opérationnalisation.

Par ailleurs, le statut objet des nombres complexes est lié aux structures algébriques (ou catégories) de l'ensemble $\mathbb{C}$. Chaque catégorie ou structure réfère à une représentation

mathématique précise de cet ensemble donc de ces nombres. Dans le langage des catégories, la mise en place d'un isomorphisme entre deux ensembles d'une même structure mathématique permet de relier des représentations sémiotiques "abstraites" à des représentations sémiotiques "plus concrètes" d'un objet donné par une même représentation mathématique. Par exemple l'isomorphisme de corps $\varphi : (\mathbb{C}, +, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, $a + ib \rightarrow (a, b)$ montre que $\mathbb{R}^2$ est une représentation fidèle de $\mathbb{C}$ et réciproquement. L'identification des catégories de $\mathbb{C}$ référées dans l'organisation mathématique qui introduit les nombres complexes permet en particulier de discuter de la prise en compte par l'institution de ces représentations et de ce qu'elles génèrent du point de vue de l'apprentissage.

Pour les besoins de cette recherche, il a été de plus utile de recourir à la notion de foncteur qui rappelle fortement le changement de cadres de Douady (1986), nécessaire à l'étude du passage d'une catégorie à une autre. Plus précisément, "*Difficult problems in some areas of mathematics can be translated into (easier) problems in other areas (e.g. by using functors, which map from one category to another).*" (Easterbrook, 1999). Les foncteurs traduisent une opération de changement de direction de la pensée définie en référence à l'activité du mathématicien expert. Chaque opération est une réinterprétation portant sur la formulation du problème à résoudre, et le résultat final aboutit à la création d'une nouvelle forme de l'objet (ou d'une nouvelle représentation mathématique de l'objet). Tel est l'exemple de la résolution du problème de trisection d'un angle, l'isomorphisme en jeu relie la catégorie d'espace affine euclidien à celui de corps. De la même façon qu'un changement de cadres, un changement de catégorie "*[...] est un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui sans être tout à fait équivalentes, permettent [...] la mise en œuvre d'outils et de techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation.*" (Douady, 1986, p. 11). La différence avec la théorie de changement de cadres de Douady (1986) est essentielle : qu'on travaille dans une même catégorie ou dans des catégories différentes, les formes de l'objet en jeu ne sont différentes que par les structures algébriques auxquelles elles réfèrent. En particulier, l'étude des foncteurs permet de décrire l'activité mathématique par rapport à la culture mathématique de la communauté des mathématiciens, ce qui sous-entend que l'on remet au premier plan l'unité de cette culture comme nécessaire à la pratique d'une telle activité du côté du professeur. Pour les besoins de cette recherche, l'apport d'une telle étude réside dans l'identification des éléments de contrôle qui devraient être en possession des professeurs afin d'intervenir d'une manière consistante dans la formation des élèves, dès qu'un changement de catégorie s'impose lors de la résolution d'un problème. Le changement de catégories (donc le changement de représentations mathématiques) favorise la construction de connaissances en prenant en compte l'aspect opérationnel de l'objet en jeu.

Afin d'analyser l'organisation mathématique liée aux nombres complexes, du point de vue des catégories, il est impératif de prendre en considération le fait que le travail dans une même catégorie ainsi que le passage d'une catégorie à une autre pourraient s'accompagner d'un changement de représentations sémiotiques qui rend compte d'un autre niveau d'exigence de

flexibilité cognitive dans le travail des élèves. C'est pourquoi un complément d'étude sur les registres sémiotiques est incontournable. En particulier, chaque opération de changement de représentations sémiotiques dans une même catégorie est une conversion qui conserve la référence de la représentation de départ. Elle se fait d'un registre à un autre, il en résulte alors, la création d'un nouveau contenu de représentation sémiotique qui n'implique pas la création d'une nouvelle forme de l'objet (soit d'une nouvelle représentation mathématique de l'objet). Les opérations de changements de représentations sémiotiques, permettent le développement de la capacité de représentation mentale chez l'élève/étudiant ce qui induit un accroissement du champ de représentations de ces nombres, et par la même l'élargissement de la sphère de fonctionnement cognitif spécifique aux savoirs qu'ils engendrent. Une analyse de type "conversions entre représentations sémiotiques" permet de mettre en évidence les conditions permettant à l'élève de pratiquer une activité mathématique dans l'environnement des nombres complexes, sans que celui-ci ne soit en possession d'une quelconque culture mathématique sur les catégories.

Sept registres de représentations sémiotiques peuvent intervenir dans un travail avec les nombres complexes selon la catégorie en jeu, et ce de la manière suivante :

- Registre intrinsèque (In., écriture du type z , $\bar{z}$, $|z|$, etc.) : Catégories de corps, d'espaces vectoriel et affine, y compris euclidiens.
- Registre cartésien (Ca., écriture du type $a+ib$) : Catégories de corps, d'espaces vectoriel et affine, y compris euclidiens.
- Registre trigonométrique (Tr., écriture du type $r(\cos\theta + i \sin\theta)$) : Catégories de corps, d'espaces vectoriel euclidien et affine euclidien.
- Registre exponentielle (écriture du type $re^{i\theta}$) : Catégories de corps, d'espaces vectoriel euclidien et affine euclidien.
- Registre graphique vectoriel avec coordonnées cartésiennes (les nombres complexes sont des affixes de vecteurs donnés par leurs coordonnées cartésiennes) : Catégorie d'espace vectoriel et d'espace vectoriel euclidien.
- Registre graphique affine avec coordonnées cartésiennes (G.a.c., les nombres complexes sont des affixes de points donnés par leurs coordonnées cartésiennes) : Catégories d'espace affine réel et d'espace affine euclidien.
- Registre graphique affine avec coordonnées polaires (G.a.p., les nombres complexes sont des affixes de points donnés par leurs coordonnées polaires) : Catégorie d'espace affine euclidien.

En particulier, un travail dans la structure d'espace affine euclidien peut amener à la conversion entre le registre affine graphique et le registre intrinsèque, dont un exemple est celui de l'étude de l'alignement de trois points : A, B et C sont alignés s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \alpha \overrightarrow{AC}$ ou bien $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv 0(\pi)$, soit $z_B - z_A = \alpha(z_C - z_A)$ ou $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv 0(\pi)$ ou

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R} \text{ ou encore } \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) = \overline{\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right)}.$$

Dans le cadre de l'investigation de l'organisation mathématique reliée aux nombres complexes au lycée, l'étude faite plus haut souligne l'intérêt de reprendre le modèle des variables macro-didactiques préalablement construit dans la transition lycée/université en analyse. Nous utilisons cependant un modèle réduit composé de cinq variables macro-didactiques retenues comme pertinentes en fonction de cette étude. Ces variables – adaptées donc ci-dessous au contexte de l'enseignement des nombres complexes – réfèrent notamment aux exigences de flexibilité cognitive que requiert l'apprentissage de ces nouveaux nombres :

- VD3 : Usage du principe de généralisation. Dans l'histoire de construction des nombres complexes, le principe de permanence consiste à appliquer sur les quantités imaginaires les mêmes règles de calcul que celles sur les quantités - à cette époque "valides". Ce principe traduit la fécondité qu'engendre l'usage de la généralisation dans la construction des nombres complexes. Du point de vue de l'apprentissage, l'usage non contrôlé de ce principe peut être une source de difficultés majeures.
- VD5 & VD6 : Type de tâches et choix des techniques.
- VD9 : Types de traitements ou de conversions utilisés entre registres de représentations mathématiques et sémiotiques. Le travail avec les nombres complexes induit la nécessité de développer une flexibilité permettant de saisir ses différentes représentations, et les changements qu'elles requièrent.
- VD8 : Statut des nombres complexes, processus ou objet. Le statut objet des nombres complexes est intimement lié aux lois qui définissent les structures algébriques auxquelles renvoie l'ensemble $\mathbb{C}$ (corps, espace vectoriel, espace affine euclidien, etc.). Par conséquent, à ce niveau du cursus seul un travail embryonnaire dans la structure de corps pourrait être envisageable. En outre, le statut processus de ces nombres renvoie à leur opérationnalité et à la fécondité notionnelle que porte leur usage dans la résolution de problèmes mathématiques. Dans le cadre de cette étude, nous mettons l'accent sur la place des nombres complexes pour résoudre des problèmes de la géométrie plane.

3. Aperçu des résultats de l'analyse : Algorithmisation du travail avec les nombres complexes ?

3.1 Catégorisation de l'organisation mathématique (OM) en praxéologies

L'étude des valeurs prises par le modèle réduit des variables, spécifiques aux nombres complexes, suppose une catégorisation préliminaire de l'organisation mathématique en praxéologies mathématiques. L'intérêt d'une telle catégorisation est d'abord celui de l'étude de VD3, VD5/6 mais aussi de voir plus clair au niveau des descriptions et explications que nous donnons aux différentes valeurs du reste des variables. Nous avons pu mettre en évidence 14 types de tâches, dont 8 explicitement soulignés dans les textes officiels.

Type de Tâches	Occurrence
T1 : Repérer un point du plan connaissant son affixe, ses coordonnées cartésiennes ou polaires	16
T2 : Déterminer le module d'un nombre complexe	12
T3 : Déterminer l'argument d'un nombre complexe	5
T4 : Déterminer l'écriture trigonométrique d'un nombre complexe	11
T5 : Déterminer le conjugué d'un nombre complexe	2
T6 : Déterminer l'affixe d'un point ou d'un vecteur	7
T7 : Résoudre une équation dans $\mathbb{C}$	5
T8 : Déterminer l'écriture cartésienne d'un nombre complexe	20
T9 : Déterminer la nature d'un quadrilatère	2
T10 : Déterminer un ensemble de points	11
T11 : Déterminer la nature d'un triangle	1
T12 : Montrer que trois points sont alignés	1
T13 : Déterminer la position relative de deux droites	1
T14 : Déterminer le sinus et le cosinus d'un angle	1

Tableau 1 : Types de tâches dans l'OM des nombres complexes

Les techniques associées à ces tâches sont largement indiquées dans le texte des énoncés. En particulier, la majorité de ces tâches peuvent être associées à plus qu'une technique en fonction des attentes du côté de l'énoncé. Par exemple, les techniques rattachées aux tâches de type T₃ sont : calculer la distance entre deux points, utiliser l'inégalité triangulaire pour comparer des modules de nombres complexes et calculer le module du produit ou du quotient de deux nombres complexes connaissant le module de chacun. La chronologie d'apparition de ces tâches obéit à la structuration du cours en trois grandes rubriques :

- Dans la première rubrique relative à l'introduction des nombres complexes, les tâches sollicitées sont de types T₅, T₇ et T₈. Les techniques rattachées à ces tâches tournent autour de calcul algébrique utilisant les propriétés des lois internes du corps $\mathbb{C}$. Les tâches de type T₇ ont permis d'introduire le corps des nombres complexes via le recours à l'impossibilité de résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 + 1 = 0$. Tandis que des tâches de type T₈ sont intervenues pour la démonstration des propriétés relatives aux écritures cartésiennes de la somme, du produit et de l'inverse de nombres complexes. Enfin, des tâches de type T₅ ont servi à introduire, sur des exemples les propriétés relatives aux écritures cartésiennes des conjugués de la somme, du produit et de l'inverse de nombres complexes. Dans tous les cas, aucun travail spécifique aux abus que pourraient engendrer le recours automatique à la généralisation des propriétés du corps $\mathbb{R}$ à celle du corps $\mathbb{C}$, n'a été observé. Nous pensons en particulier à la relation d'ordre total dans $\mathbb{R}$.

- Dans la deuxième rubrique relative à l'introduction des images, les tâches sollicitées sont de types T_1 , T_2 et T_6 . Pour la résolution de ces tâches, il s'agit en gros de techniques d'interprétations géométriques de relations algébriques largement explicitées dans le texte des énoncés, et réciproquement. Les tâches de type T_1 ont permis d'introduire sur des exemples l'isomorphisme entre l'ensemble $\mathbb{C}$ et le plan affine euclidien, sans aucune mention relative à la nécessité de doter ce plan d'un repérage orthonormé direct. Par ailleurs, des tâches de type T_2 sont intervenues aussi bien pour introduire la notion de module, que pour démontrer l'inégalité triangulaire et les propriétés relatives aux modules du produit et de l'inverse de nombres complexes. Enfin, des tâches de type T_6 ont servis à approcher sur des exemples la notion d'affixe d'un vecteur, soit d'introduire d'une manière furtive la structure de plan vectoriel de $\mathbb{C}$; en plongeant le travail qui en relève dans la structure de plan affine, et laisser implicite l'amalgame que ceci pourrait engendrer.

- Les tâches qui réfèrent à la troisième rubrique, relative à l'introduction de la notion d'argument, sont essentiellement de types T_3 et T_4 . Les techniques qui en relèvent sont liées aux propriétés de l'argument et du module du produit, du quotient de nombres complexes. Par ailleurs, des tâches de type T_4 sont intervenues aussi bien pour introduire la notion d'argument et définir la notion de forme trigonométrique, que pour démontrer les propriétés relatives aux formes trigonométriques du produit et du quotient de nombres complexes.

Le reste des tâches, soit T_9 , T_{10} , T_{11} , T_{12} , T_{13} et T_{14} ne sont pas particulièrement rattachées aux notions introduites dans chacune de ces rubriques. Les techniques qui leur sont rattachées nécessitent de la part des élèves de faire des choix au niveau des configurations algébriques, et parfois géométriques à utiliser de sorte que ces choix permettent d'abord de résoudre le problème et ensuite d'économiser le travail à entreprendre. En dépit de leur caractère intégratif, ces tâches n'occupent que 18% de l'ensemble du travail sollicité de la part des élèves.

3.2 Opérationnalité des nombres complexes : Une face cachée par l'institution

L'étude de VD8 repose sur l'articulation de trois statuts introduits par l'institution dans le sens contraire de la théorie de Sfard :

- le statut objet, et dans ces conditions la phase de réification "s'impose" à l'élève et ne sous-entend pas une unification du processus en une structure ;
- le statut pré conceptuel qui traduit la prise de conscience par l'élève d'une manière isolée de chacun des processus¹ qui donne lieu au concept, sans que ce dernier ne soit dans une situation d'opérationnalité² ;

¹ Par conformité aux choix institutionnels, la notion de processus est à entendre comme un changement ou une transformation de la version objet initialement introduite.

² C'est en quelque sorte une préparation de base du concept en vue d'y recourir, soit de le mettre en œuvre ultérieurement.

- le statut opérationnel met le concept au service de la résolution des questions mathématiques dans un cadre plus large que celui des questions référant explicitement aux nombres complexes.

La catégorisation en praxéologies mathématiques nous a permis d'identifier parmi les tâches sollicitées celles qui renvoient à l'un ou à l'autre des trois statuts des nombres complexes théoriquement identifiés.

Type de Tâches	Objet	Pré concept	Opération
T1 : Repérer un point du plan connaissant son affixe, ses coordonnées cartésiennes ou polaires	5	11	0
T2 : Déterminer le module d'un nombre complexe	11	1	0
T3 : Déterminer l'argument d'un nombre complexe	5	0	0
T4 : Déterminer l'écriture trigonométrique d'un nombre complexe	10	1	0
T5 : Déterminer le conjugué d'un nombre complexe	2	0	0
T6 : Déterminer l'affixe d'un point ou d'un vecteur	3	4	0
T7 : Résoudre une équation dans $\mathbb{C}$	5	0	0
T8 : Déterminer l'écriture cartésienne d'un nombre complexe	20	0	0
T9 : Déterminer la nature d'un quadrilatère	0	0	2
T10 : Déterminer un ensemble de points	1	8	2
T11 : Déterminer la nature d'un triangle	0	0	1
T12 : Montrer que trois points sont alignés	0	0	1
T13 : Déterminer la position relative de deux droites	0	0	1
T14 : Déterminer le sinus et le cosinus d'un angle	0	0	1

Tableau 2 : Répartition des statuts selon les tâches de l'OM

Ce tableau souligne nettement la prépondérance des tâches mettant en œuvre le statut objet des nombres complexes. En effet, environ les deux tiers des tâches sont relatives à la mise en place des structures algébriques de $\mathbb{C}$, dont presque la moitié est spécifiques à l'introduction des nombres complexes via leur écriture cartésienne. Le reste de ces tâches, soit l'autre moitié, a pour rôle d'introduire d'une manière linéaire, les notions de base relatives à la structure d'espace affine euclidien. Aucune réflexion de type méta ne semble être possible de la part des élèves, ces derniers sont dans l'obligation "d'accepter" cette existence sans se poser de questions.

L'apparition du statut pré conceptuel, soit dans environ 25% de l'ensemble des tâches, est postérieur à celui d'objet et s'articule sur :

- l'identification d'une transformation plane via l'interprétation géométrique d'une configuration complexe fournie dans les textes des énoncés ;
- le repérage d'un point ou d'un ensemble de points à travers l'interprétation géométrique d'une configuration complexe fournie dans les textes des énoncés ;
- la détermination de nombres complexes via l'interprétation complexe d'une configuration géométrique relative à une transformation plane, indiquée dans les énoncés ;
- la détermination de nombres complexes via l'interprétation complexe d'une configuration géométrique usuelle, indiquée dans les énoncés.

Dans tous les cas, la phase d'intériorisation où l'élève devrait prendre conscience des processus qui donnerait lieu aux nombres complexes, se limite à une activation automatique de standards conformément aux questions posées.

Notons enfin, qu'à l'exception de deux tâches, le reste des tâches mettant en œuvre le statut opérationnel des nombres peuvent être résolu en appliquant les techniques usuelles de la géométrie dans le plan affine muni d'un repère orthonormé direct. Ceci est la conséquence d'un choix arbitraire des variables didactiques en jeu, notamment celles en lien avec la nature des données complexes. En bref, seul 8% de l'ensemble des tâches rendent compte d'une réelle exigence de flexibilité cognitive telle que spécifiée dans les divers statuts des nombres complexes.

3.3 Représentations des nombres complexes

Par l'étude de la variable VD9 relative aux représentations de nombres complexes, nous entendons aussi bien l'étude des registres de représentation mathématiques que ceux des représentations sémiotiques. Le travail dans un registre mathématique donné mobilise un ou plusieurs registres sémiotiques alors qu'un même registre sémiotique peut intervenir pour décrire des activités dans divers registres mathématiques. Nous avons pu mettre en évidence que l'organisation mathématique liée à l'introduction des nombres complexes axe sur un travail dans deux catégories algébriques de l'ensemble des nombres complexes : celle de corps et celle de plan affine euclidien³. Ces nombres sont introduits via au moins quatre représentations : intrinsèque ($z, \bar{z}, |z|$) ; cartésienne ($a+ib$) ; trigonométrique ($r\cos\theta + ir\sin\theta$) et graphique avec coordonnées cartésiennes (affixe d'un point du plan complexe).

Ne pouvant pas dissocier l'analyse sémiotique de celle mathématique, nous avons mis en place trois tableaux décrivant les occurrences des tâches en fonction d'une exigence ou non de changements de représentations sémiotiques et/ou mathématiques. Selon la technique utilisée, la résolution d'une même tâche peut aussi bien sollicitée ou non un changement sémiotique tout en restant dans une même catégorie mathématique.

³ Plan complexe dans les termes scolaires.

Comme le montre le tableau 3 ci-dessous, certaines des techniques reliées aux tâches T_2 , T_3 , T_4 , T_5 , T_7 , T_8 et T_{10} ne sollicitent pas un changement de représentations qu'il soit mathématique ou sémiotique.

Registre mathématique	Registre sémiotique	Occurrence
Corps	Cartésien	26
	Intrinsèque	1
	Trigonométrique	2
Espace Affine Euclidien	Cartésien	1
	Intrinsèque	5
	Graphique affine cartésien	1

Tableau 3 : Répartition des tâches sans changements de représentations

Ce tableau montre clairement la prépondérance des tâches où la catégorie mathématique en jeu est celle de corps et les signes convoqués sont ceux liés à la forme cartésienne des nombres complexes aussi bien du côté des énoncés que du côté des solutions. Celles-ci occupent environ les trois quart du total des tâches sans changements de représentations. Ces tâches, qui représentent le tiers de l'ensemble des tâches de l'organisation mathématique en question, n'appellent pas un travail de prospection de la part des élèves et limite leurs activités à la mobilisation de standards symboliques conformément aux définitions et propriétés du cours. Le reste des tâches sans changements se répartissent d'une manière aléatoire, voire négligeable sans qu'aucune conclusion consistante ne puisse en être tirée. Par ailleurs, aucune tâche mettant en œuvre le statut pré conceptuel et le statut opérationnel des nombres complexes ne font parties de celles qui ne présentent pas de changements de représentations, ce qui constitue un résultat prévisible et conforte l'analyse que nous avons faite des variables précédentes.

Pratiquement l'ensemble des types de tâches de l'organisation mathématique étudiée présentent des techniques où il est nécessaire de procéder à un changement de registres sémiotiques tout en restant dans le même registre mathématique. La majorité de ces tâches réfère à un travail dans le registre d'espace affine euclidien comme le montre le tableau 4 ci-dessous.

Registre mathématique	Conversion registres sémiotiques	Occurrence
Corps	(Ca. $\rightarrow$ Tr.)	2
	(In. $\rightarrow$ Ca.)	1
Espace affine euclidien	(Ca. $\rightarrow$ In.)	1
	(Ca. $\rightarrow$ Tr.)	6
	(Ca. $\rightarrow$ G.a.c.)	24
	(Ca. $\rightarrow$ G.a.p.)	4
	(In. $\rightarrow$ Tr.)	6

(In. $\rightarrow$ G.a.c.)	4
(In. $\rightarrow$ G.a.p.)	2
(G.a.c. $\rightarrow$ Ca.)	5
(G.a.p. $\rightarrow$ Ca.)	1
(G.a.p. $\rightarrow$ Tr.)	1

Tableau 4 : Répartition des tâches avec changements de représentations sémiotiques

Les changements sémiotiques dans la catégorie d'espace affine euclidien, qui sont fondamentalement du type cartésien vers graphique affine cartésien ou graphique affine polaire, se résument à un travail standardisé d'interprétations géométriques, où la configuration complexe en jeu est fournie par les énoncés, y compris les tâches relatives à T_9 , T_{10} , T_{11} et T_{12} .

Par ailleurs, pour toutes les autres tâches nécessitant une conversion sémiotique, les élèves ne sont pas appelés à convoquer d'une manière autonome les configurations complexes ou graphiques adéquates et à les utiliser pour basculer d'un registre à un autre pour donner la solution. Les configurations à utiliser sont données dans les énoncés, qu'elles soient géométriques ou complexes, et le travail attendu n'est qu'une simple interprétation dans un sens ou dans un autre.

Comme souligné dans le tableau ci-dessous, seules deux tâches appellent conjointement un changement de représentations aussi bien mathématiques que sémiotiques.

Tâche	Opérationnel
T13 : Déterminer la position relative de deux droites	1 (E.a.e./G.a.p. $\rightarrow$ Corps/Tr. $\rightarrow$ E.a.e./G.a.c.)
T14 : Déterminer le sinus et le cosinus d'un angle	1 (E.a.e./Ca. $\rightarrow$ Corps/Tr.)

Tableau 5 : Répartition des tâches avec changements de représentations sémiotiques et mathématiques

L'exemple de la tâche de type T_{13} est significatif d'un réel travail mettant en œuvre l'outil complexe pour résoudre un problème géométrique, même si le choix des variables didactiques n'est pas conséquent. En effet, l'énoncé porte le risque de la résolution tout en demeurant dans le contexte de la géométrie et des propriétés de ces objets. L'exercice concerne la détermination de la position relative de deux droites du plan. Dans le cas de cette tâche, la variable concernant le repérage des points du plan en jeu est facilement accessible. Toutefois, le recours aux configurations complexes permet d'économiser le travail même si cette option n'est pas forcément un enjeu chez les élèves.

L'énoncé de la tâche de type T_{14} est beaucoup plus significative de l'opérationnalité des nombres complexes. On part de la donnée de points dans le plan affine euclidien, via leurs écritures cartésiennes, l'objectif étant de déduire le cosinus et le sinus d'un angle. Un travail intermédiaire de conversion d'écritures vers la forme trigonométrique est de plus rendu nécessaire.

3.4 Conclusion : le modèle réduit des variables et/ou un moyen pour prévoir les difficultés possibles des élèves

Les valeurs prises par les différentes variables macro-didactiques du modèle spécifique aux nombres complexes montre que l'institution scolaire peine à gérer l'amalgame dans lequel sont plongés les nombres complexes, aussi bien du point de vue de leurs représentations mathématiques que sémiotiques. De plus, les exercices supposés mettre en œuvre l'opérationnalité des complexes se limitent à l'usage de techniques permettant de changer de représentation sémiotique. Certains énoncés sont par ailleurs biaisés faute d'un choix adéquat des variables didactiques en jeu. Il nous a été possible de souligner que le travail sollicité des élèves se résumerait essentiellement à un calcul algébrique dans la catégorie de corps de l'ensemble des nombres complexes, en utilisant les représentations intrinsèque, cartésienne et trigonométrique. Aucun travail relatif aux abus possibles de transfert des résultats connus sur les réels aux nombres complexes n'a pu être noté (relation d'ordre, module et valeur absolue, opération de multiplication, etc.). Par ailleurs, le recours à la représentation graphique de ces nombres devrait permettre de les rendre opérationnels dans la résolution de problèmes géométriques. Mais, les tâches institutionnelles qui y réfèrent sont résolubles en appliquant les techniques usuelles de la géométrie plane.

Il apparaît donc que l'introduction des nombres complexes en fin de lycée est accompagnée de certaines exigences cognitives qui pourraient induire des difficultés de la part des élèves pour manipuler de tels nombres. L'étude ces difficultés a été entreprise en tenant en compte ces résultats (Cf. Chapitre 3).

Conclusion : Validité du modèle des variables macro-didactiques ?

Notre projet, qui au début était centré sur l'identification de caractéristiques spécifiques aux organisations mathématiques en analyse réelle dans la transition lycée/université, a conduit à solliciter une diversité d'outils théoriques rendant compte de certains paramètres didactiques qui influencent le travail des élèves/étudiants dans la transition lycée/université. L'articulation de ces outils théoriques a permis de construire un modèle comportant dix variables macro-didactiques qui fournissent des critères d'appréciation des spécificités du travail attendu de la part des élèves/ étudiants dans la transition lycée/université.

Dans le cadre de l'enseignement des nombres complexes, nous avons repris ces variables ; nous utilisons cependant un modèle simplifié composé de trois variables macro-didactiques retenues comme pertinentes en fonction des outils théoriques ayant servi à l'exploration des choix institutionnels. Ces variables – adaptées donc au contexte de l'enseignement des nombres complexes – réfèrent notamment aux exigences de flexibilité cognitive que requiert l'apprentissage de ces nombres. Deux adaptations majeures, liées aux spécificités des nombres complexes, ont été apportées à deux variables du modèle de base :

- VD3 : Généralisation. Dans sa version originale, cette variable a pour objet de détecter le niveau de généralité exigé dans les tâches requises par l'institution universitaire. Dans le cadre des nombres complexes, cette variable a pour objet celui de repérer les abus de généralisation des propriétés des réels à celles des nombres complexes (nous avons en particulier étudié le cas de l'ordre et de la valeur absolue).
- VD9 : Traitements et conversions entre registres de représentations. Dans le cadre des nombres complexes, ces traitements et conversions ne se limitent plus aux registres de représentations sémiotiques. L'étude des registres de représentations mathématiques s'est imposée du fait même de la nature de cet objet : les nombres complexes accèdent progressivement à leur statut objet par la conceptualisation progressive de ses différentes formes (ou catégories). Chaque forme matérialise à son tour une version particulière (ou ce que nous avons appelé représentation mathématique) de cet objet.

A côté d'une dimension de généricité, ces adaptations, qui n'affectent pas la cohérence du modèle global, soulignent la dimension de flexibilité que porte ce modèle. Dans un travail de master que nous avons dirigé concernant la preuve en géométrie à l'entrée au collège, une autre variable macro-didactique relative au statut de la figure (pour la validation) a de la même façon alimenté un sous ensemble de la version originale du modèle. Ceci montre encore une fois la capacité du modèle à rendre compte des facettes multiples des organisations mathématiques en fonction de l'objet visé et la problématique qu'il porte.

Au final, que ce soit dans le cas de l'analyse réelle ou des nombres complexes, les résultats d'une telle étude vont constituer une base de données assez consistante pour avancer dans la

conception d'ingénieries didactiques. Les chapitres suivants donneront plus d'éclairage à cette question.

CHAPITRE 2 : GENERICITE D'UNE ETUDE MICRO – UN MODELE METHODOLOGIQUE D'ANALYSE DES CLASSES ORDINAIRES

Introduction : Le problème d'analyse des séances de classes ordinaires

Nous admettons que le travail des élèves /étudiants en classes de mathématiques dépend et à un premier niveau de l'organisation mathématique en jeu, celle-ci étant fortement articulée à la gestion du professeur. Par exemple, des énoncés mathématiques relatifs à un objet déterminé étant proposés aux étudiants, leur travail dépendra de la nature des énoncés, de ce que pourrait apporter le professeur comme complément non forcément explicité dans les énoncés (par exemple dans le cas de l'analyse réelle à l'entrée à l'université, on peut noter le recours au graphique, à la calculatrice ; sollicitation de conjectures ; règles sémantiques d'usage du formalisme ; intégration de plusieurs notions du cours ; etc.).

De plus, quand on entre en classe, il est possible de comprendre le déroulement en cours relativement à chacun des objets mathématiques abordés. En particulier, on peut identifier le partage des responsabilités mathématiques entre le professeur et les étudiants, ce qui réfère à la question plus générale de l'organisation du contrat didactique en classe. Plus précisément, il s'agit d'étudier :

- les interactions que le professeur et les élèves/étudiants peuvent avoir ;
- ce qui est la charge des étudiants, en particulier du point de vue de la validation dans le cadre mathématique étudié ;
- la gestion du professeur et ses tentatives de régulations.

Dans cette étude, nous entendons enquêter sur la question du travail des étudiants en situation de classes ordinaires et leur interaction avec les savoirs en jeu : comment se caractérise dans ces conditions le travail des étudiants ? Comment identifier les difficultés qu'ils rencontrent ?

Notre étude des pratiques du professeur vise essentiellement l'étude de l'apprentissage mathématique des élèves/étudiants, ceci nous a porté à mettre les objets mathématiques en jeu au cœur des choix méthodologiques d'analyse de ces pratiques.

Comme souligné dans le chapitre précédent, au niveau global, nous avons mené l'étude via une première catégorisation de l'organisation mathématique en jeu, en praxéologies mathématiques conformément aux règles de la TAD. Cette étude s'est avérée particulièrement adaptée pour traiter les questions macro-didactiques des choix institutionnels. Dans le cadre d'une étude locale de ces choix, soit dans des situations de classes ordinaires, les travaux fondés sur la TSD permettent à travers la structuration du milieu, d'analyser les interactions

entre le professeur, les élèves/étudiants et les objets mathématiques en jeu dans une situation d'enseignement apprentissage.

M0 M- validation	E0 Elève	P0 pour l'élève	S0 Situation didactique
M-1 M-formulation	E-1 E-apprenant	P-1 P-en action	S-1 Situation d'apprentissage
M-2 M-action	E-2 E-agissant	P-2 P-observateur	S-2 Situation de référence
M-3 M-objectif	E-3 E-objectif		S-3 Situation objective

Tableau 6 : Schéma de structuration des milieux

L'objet central de la TSD est celui de "Situation" définie comme étant le modèle théorisé du système des relations entre élèves/étudiants, professeur et milieu mathématique. Le processus de conceptualisation est surligné à travers les interactions qui se produisent dans un tel système. Dans la Situation, le travail des élèves/étudiants est modélisé en réseau avec les activités du professeur sur plusieurs niveaux, à travers le schéma de structuration des milieux (Bloch, 2002). Dans leur quête d'une meilleure visibilité des conditions d'optimisation des interactions prenant place au sein du système, les chercheurs sont incités à enrichir le modèle des milieux par d'autres outils théoriques adaptés notamment à l'investigation de questions relatives au cursus secondaire et postsecondaire (Bloch, 2006). En particulier, certaines de ces recherches ont conduit à un réajustement des interventions du professeur dans le processus d'évolution du travail des élèves/étudiants au niveau de la situation expérimentale en incorporant de nouveaux éléments d'analyse sémiotiques et cognitifs dans les milieux d'action, de formulation et de validation (Bloch, & Gibel, 2011).

Nous utilisons le schéma de structuration des milieux comme outil de base pour penser la mise en place d'un outil méthodologique permettant l'analyse des interactions entre le professeur, les élèves/étudiants et les objets mathématiques en jeu (Ghedamsi, 2016). Ce schéma s'applique que les situations soient à dimension a-didactique ou non : la pertinence du modèle pour l'étude de situations de classes ordinaires a été discutée par Comiti, Grenier, & Margolinas (1995), Bloch (1999) etc.

L'objectif d'une étude locale ou micro telle que celle des classes ordinaires permet en premier lieu de mesurer l'écart entre les attentes institutionnelles préalablement établies via une investigation macro-didactique, et le travail possible des élèves/étudiants aussi bien lors du déroulement qu'à sa suite : c'est-à-dire celui que les élèves/étudiants pourraient faire sans l'aide du professeur. Notre approche des pratiques du professeur est de ce fait essentiellement orientée vers le travail des élèves/étudiants et l'apprentissage. Autrement dit, nous écartons ici une étude approfondie visant le *métier* de professeur et l'identification d'*invariants* propres à ses pratiques (Robert, 2007). Dans cet ordre d'idée, une analyse a priori des énoncés mathématiques et de ce qu'ils sont susceptibles de provoquer au niveau du travail des

élèves/étudiants, est à penser en termes des variables macro-didactiques préalablement identifiées lors de l'investigation de l'organisation mathématique qui relève de l'étude. Le croisement des résultats de l'analyse a priori et du déroulement effectif permettra d'identifier le travail possible des étudiants dans le cadre du contrat instauré dans la classe, en particulier celui relatif à la validation et les exigences qu'elle requiert.

I. Outils méthodologiques d'analyse de séances de classes : Gestion du professeur et travail des élèves/étudiants

L'évolution du travail des élèves/étudiants confrontés à des objets mathématiques bien déterminés est tributaire des situations envisagées, notamment des valeurs prises par les variables macro-didactiques reliées à ces objets dans ces situations mais aussi de la gestion du professeur et de ses dispositions de régulation. Comme mentionné plus haut, dans les milieux, ce travail est modélisé sur plusieurs niveaux ; en particulier, le niveau a-didactique met l'accent sur les phases d'action (M-2), de formulation et de validation (M-1). Les modifications apportées à ce modèle ont rendu déterminant le rôle du professeur à tous les niveaux et ont donné plus de visibilité à la conformité de son usage en fin de lycée et à l'université.

Par conséquent, la validité de l'articulation des deux étapes d'analyse, soit celles a priori des énoncés et des objets mathématiques en jeu et a posteriori des transcriptions des séances de classes est conditionnée par l'outil méthodologique général utilisé mais aussi par les éléments que nous pouvons utiliser pour l'alimenter afin de porter l'étude vers la problématique spécifiée par l'objet mathématique en question. Dans ce cas, une légitimité de l'analyse faite du travail des élèves/étudiants et de sa nature sera rendue possible à travers ce que les spécificités épistémologiques et cognitives des objets en jeu préalablement identifiées nous apporteraient comme éléments d'argumentation.

Finalement, ce que nous étudions en amont d'une séance permet de conjecturer la nature du travail demandé aux élèves/étudiants et ce qui est susceptible d'être provoqué en classe. Ceci suppose qu'on dispose d'un ensemble de critères spécifiques à l'étude des énoncés et des objets mathématiques en jeu dans une perspective d'apprentissage. Le modèle des variables macro-didactique, ou une variante en fonction de la problématique visée, constitue un appui pour penser la grille d'une telle analyse. Les valeurs prises par les variables du modèle finalement retenu, correspondent d'ailleurs souvent empiriquement à des *choix plus ou moins conscients du professeur* (Robert, 2007).

Quand on entre en classe de mathématiques, les interactions entre élèves/étudiants et milieu mathématique sont régies par le contrat didactique en vigueur et se développent en fonction de sa nature (Brousseau, 1996). La gestion de ces interactions par le professeur matérialise en grande partie ce contrat. Sur cette base, la grille d'analyse de classes ordinaires que nous définissons comporte deux dimensions d'étude des interventions des élèves/étudiants,

centrées sur les phases d'action, de formulation et de validation. A côté d'une dimension d'analyse spécifique à la gestion des interactions, les interventions du professeur sont étudiées du point de vue de la gestion du travail des élèves durant les phases modélisant le processus de conceptualisation tel que postulé dans la TSD. En outre, ces dimensions sont spécifiées via des critères d'analyse qui prennent en compte divers exemples paradigmatiques de contrats didactiques (Brousseau, 1996). Par ailleurs, l'appui sur les travaux de Robert (2003, 2007) concernant les pratiques enseignantes nous permet de souligner certains éléments essentiels dans la gestion du professeur.

1. La gestion du professeur est analysée via trois dimensions d'étude :

a) Gestion des interactions (GI)

GI1 : Engager un débat en posant des questions sur les notions mathématiques en jeu.

GI2 : Laisser aux élèves des ouvertures, un choix pour poser et se poser des questions (les déséquilibrer) afin d'organiser leurs connaissances (Robert, 2003, 2007).

GI3 : Abréger le travail des élèves (y compris leurs questions).

GI4 : Découper des tâches en tâches élémentaires et/ou indiquer des techniques, des procédures. Dans ce cas, il est important de clarifier si la façon de faire du professeur limite ou non l'activité des élèves à des applications juxtaposées du contenu du cours (Robert 2007).

GI5 : Amener les élèves à prendre de la distance par rapport à ce qui se fait (introduire des incertitudes) et à travailler dans un niveau métacognitif (Robert, 2007).

b) Gestion de la recherche et de la formulation (GRF)

GRF1 : Faire traiter un exemple ou un contre-exemple (nous insistons en particulier sur la généralité des exemples et leur exhaustivité).

GRF2 : Favoriser une formulation en offrant aux élèves/étudiants l'opportunité d'expérimenter, de conjecturer, etc.

GRF3 : Favoriser un changement de situations en mettant en œuvre dans la mesure du possible l'aspect opérationnel des notions en jeu, en soulignant les liens entre notions, en changeant de registres sémiotiques, etc.

c) Gestion de la validation (GV)

GV1 : Faire des déclarations sur les notions en jeu et leurs propriétés (ce qui revient à se limiter à énoncer des définitions et propositions du cours).

GV2 : Argumenter par validation, en restant dans un même registre ou en changeant de registre.

GV3 : Argumenter par formulation/explicitation, en restant dans un même registre ou en changeant de registre.

GV4 : Instancier des énoncés généraux et discuter les conséquences de ces énoncés sur une certaine catégorie d'objets mathématiques.

GV5 : Procéder à des bilans de connaissances (synthèses locale ou globale, y compris celles relatives à l'usage, dans la mesure du possible, des règles du calcul formel).

Parmi les critères énoncés, nous soulignons ceux qui explicitent des interventions du professeur pouvant empêcher les élèves/étudiants de s'engager dans des interactions pertinentes du point de vue de la conceptualisation. Tel est le cas des critères GI3, GI4, GV1 et GV2. Le reste des critères met l'accent sur le rôle que peut jouer le professeur pour enrichir le travail des élèves/étudiants notamment dans le cas de GI2, GI5, GRF3, GV4 et GV5.

2. L'étude des interventions des élèves/étudiants est faite suivant deux dimensions d'analyse :

a) Travail de recherche et de formulation (TRF)

TRF1 : Formuler des questions sur les notions en jeu et leurs propriétés.

TRF2 : Exprimer spontanément des connaissances (en recourant à des changements de registres, à des instanciations, à des contre-exemples, à un calcul, en reliant plusieurs notions, etc.).

TRF3 : Formuler des opinions sur les notions en jeu.

b) Travail de validation (TV)

TV1 : Indiquer des procédures et/ou des techniques de résolution (pour ne pas rentrer en confusions, nous écartons ici les interventions relatives au critère TV2).

TV2 : Procéder à un calcul de validation, formel ou autre y compris au tableau (il est impératif d'explicitier parmi ces interventions celles qui indiquent des procédures et/ou des techniques de résolution).

TV3 : Discuter des modèles de validation proposés par les pairs ou le professeur.

Cette catégorisation ne sous-entend en aucun cas un cloisonnement dans les interventions aussi bien du professeur que des élèves/étudiants. Les transcriptions des classes de mathématiques seront analysées à la suite du découpage de ces interventions en fonction des critères d'analyse de la grille ci-dessus.

II. Etude de cas en analyse à l'entrée à l'université

1. Présentation du dispositif

Nous nous sommes basée sur un corpus composé des énoncés mathématiques et des transcriptions de trois séances de travaux dirigés à l'entrée en première année de d'université : une séance sur les suites, une séance sur fonctions et continuité et une séance sur fonctions et dérivabilité. Chacune de ces séances a duré deux heures de temps, ce qui est équivalent à la durée institutionnelle accordée à une classe de travaux dirigés à ce niveau du cursus. Ces séances sont organisées par un même professeur et dans un seul groupe de travaux dirigés comportant en moyenne une trentaine d'étudiants. Ce choix nous permettra en particulier d'étudier la progression et l'évolution du travail des étudiants en classe d'analyse réelle à l'entrée à l'université et de neutraliser la variabilité dans la gestion du professeur.

L'organisation mathématique du cours d'analyse réelle prodigué à ce groupe est équivalente à celle que l'on retrouve dans la majorité des manuels destinés à l'enseignement de l'analyse

réelle : commencer par l'étude de certaines propriétés topologiques de l'ensemble des réels, puis des suites réelles, suivie par celle des fonctions réelles (limite, continuité, dérivabilité) pour déboucher sur le calcul différentiel et le calcul intégral. Les savoirs à enseigner sont tous introduits à partir de leurs définitions, celles-ci étant suivies de propriétés, théorèmes, corollaires, etc. Notons enfin que l'introduction de certains théorèmes et définitions est accompagnée par la donnée d'exemples et/ou de contre-exemples.

Dans le cadre de cette note, nous nous restreignons à exposer les résultats de l'étude spécifique à la séance sur les suites réelles et leurs natures.

2. Analyse a priori des énoncés

La séance relative à l'étude des suites comporte trois exercices : le premier exercice reprend un travail déjà entamé au lycée et concerne l'étude de la limite d'une suite géométrique $(a^n)_n$, a réel ; le deuxième exercice concerne l'étude de la convergence de certaines suites réelles définies par leur terme général ; le troisième exercice porte sur l'étude de la convergence de suites en utilisant la complétude de l'ensemble des réels.

a) Premier exercice : Résultats généraux sur la convergence de suites géométriques

Le travail sollicité consiste à étudier la convergence d'une suite géométrique en fonction de sa raison. En fin du lycée, le théorème concernant la limite d'une suite géométrique en fonction de sa raison et de son premier terme est énoncé, et démontré dans le cas où la raison est comprise (dans le sens large) entre 1 et -1, sans usage de la définition formelle de convergence d'une suite. Jusqu'à la fin du lycée, les étudiants n'ont jamais été sollicités à utiliser la définition formelle pour étudier la convergence d'une suite. Il en est de même en ce qui concerne l'usage de techniques permettant de montrer qu'une suite est divergente, hormis celle relative au calcul algébrique aboutissant à une limite infinie. Par conséquent, l'exercice est d'un genre nouveau par rapport à ce qui est coutumier en fin de lycée, et on ne peut assurer une organisation des connaissances des étudiants sans une intervention du professeur, tout en prévoyant de leur laisser une ouverture et un choix à faire.

Si on tente une interprétation sémantique de l'énoncé formel relatif à la convergence d'une suite réelle, soit de la proposition $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - L| < \varepsilon$, nous pouvons l'énoncer de la manière suivante : à chaque fois qu'on se fixe une erreur, on peut trouver un rang à partir duquel tous les termes de la suite approchent L à cette erreur près. Dans ces conditions, en dépit du fait qu'elle soit formulée dans le registre rhétorique, cette définition renvoie aux notions de valeurs approchées, d'approximations, d'erreurs, etc, et porte toute la signification du lien de la limite de suite avec les approches numériques. Par ailleurs, l'appui sur un graphique permet de visualiser le fait que lorsque l'erreur varie, le rang peut varier, ce qui peut être une manière d'interpréter le fait que N dépende d'épsilon. De plus, il est possible de voir que ce qui est vrai pour une erreur donnée est vrai pour n'importe quelle

erreur qui lui est supérieure, par conséquent le choix d'épsilon ne contredit pas le fait que l'on s'intéresse à chaque fois à des epsilons très près de 0. Si maintenant, nous tentons de faire de même pour l'énoncé quantifié de la négation : on peut trouver une erreur pour laquelle tout ordre de la suite est tel qu'à partir de celui-ci il existe un terme de la suite qui n'approche pas...etc., il paraît inutile de s'acharner sur le cas générique. Le recours à diverses instanciations de suites divergentes semble emblématique de ce type de questions :

- la suite est bornée de sorte à pouvoir extraire deux sous-suites qui ne convergent pas vers la même limite, en utilisant les approximations ;
- la suite n'est pas bornée de sorte à pouvoir tabler sur un graphique pour considérer des suites qui tendent vers l'infini et l'interpréter dans la syntaxe mathématique.

b) Deuxième exercice : étude de la convergence de suites définies par leur terme général

Le deuxième exercice n'est pas un énoncé général, et s'inscrit dans le prolongement des exercices que l'on retrouve en fin du lycée, ceux relatifs à l'étude de la convergence d'une suite donnée par son terme général.

Déterminer la nature des suites suivantes :

$$u_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \left(1 + \frac{1}{n}\right) ; v_n = \frac{\cos(2n^3 + 1)}{n+1} ; w_n = \sqrt{n^2 + 1} - n ;$$

$$t_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) ; s_n = \frac{C_n^p}{p}, p \in \mathbb{N}^* \text{ fixé.}$$

L'étude de la limite de suites telles que $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ requière des techniques routinières de fin du lycée, ces techniques correspondent respectivement à un encadrement de la fonction cosinus et la multiplication par l'expression conjuguée. Nous prévoyons donc que les étudiants n'auront pas de difficultés à faire ce travail. Les suites $(t_n)_n$ et $(u_n)_n$ ne sont pas convergentes, le calcul numérique des premiers termes de chacune de ces deux suites devrait permettre d'identifier les suites extraites à considérer, pour conclure la non convergence. L'appui sur le registre numérique peut donc être un moyen pour amener les étudiants d'abord à conjecturer la non convergence de ces suites, puis à faire le lien et/ou pressentir le mode de validation attendu. Enfin, même si le terme général de la suite $(s_n)_n$ n'est pas "habituel" pour les néo-bacheliers, sa transformation algébrique permet de mettre en œuvre les théorèmes relatifs aux opérations sur les limites de suites convergentes, et en déduire que la suite $(s_n)_n$ converge vers $\frac{1}{p!}$. Comme pour le premier exercice, les étudiants sont appelés à travailler avec des connaissances disponibles mettant en œuvre la notion de limite dans son statut processus.

c) Troisième exercice : convergence de suites et complétude de l'ensemble des réels

Même si le troisième exercice n'est pas un énoncé général, il pointe particulièrement des attentes nouvelles, notamment concernant les raisonnements formels (condition nécessaire, condition suffisante, négation d'un énoncé quantifié, etc.).

1. Soit $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}, n \geq 1$. Montrer que $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq 1$.

En déduire la nature de la suite $(u_n)_n$.

2. Soit $v_n = 1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}, n \geq 1$. Montrer que $v_n - v_m \leq \frac{1}{n+1}$ pour tout $0 < n < m$.

En déduire la nature de la suite $(v_n)_n$.

La tâche centrale consiste à étudier la convergence de deux suites, données par leurs termes généraux. La donnée d'une sous-tâche intermédiaire, devrait permettre aux étudiants d'utiliser la complétude pour conclure sur la nature des suites considérées, par contre, la disponibilité de cette connaissance est requise si l'on veut assurer sa mise en œuvre. De plus, même si ce n'est pas explicitement formulé comme tel, étudier la nature des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ revient

à étudier respectivement les séries $\sum_n \frac{1}{n}$ et $\sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Dans ces conditions, l'exercice est

totalement d'un genre nouveau par rapport à ce qui est coutumier en fin de lycée, et on ne peut assurer une organisation des connaissances des étudiants sans une intervention du professeur. Ceci implique la prise en compte des opportunités offertes aux étudiants, de travailler dans plus qu'un registre, de formuler des exemples et des contre-exemples, etc. Et ce, malgré le fait que le mode de validation attendu du côté de la solution est celui de l'analyse réelle.

3. Gestion du professeur et travail des étudiants

Nous avons fait le choix de ne plus distinguer les exercices, et de détailler l'analyse a posteriori en fonction des dimensions d'étude aussi bien du côté des interventions du professeur, que du côté des interventions des étudiants. Nous avons été, en partie, contraints de faire ce choix, en raison de la faible occurrence des interventions des étudiants observée dans les transcriptions : ces derniers n'interviennent que rarement, et l'enseignant monopolise généralement la parole tout au long des séances. Le professeur des classes observées, assure l'enseignement de l'analyse en première année d'université depuis plusieurs années. L'étude globale des transcriptions fait ressortir quelques rares interactions isolées professeur/étudiants ; ces échanges se produisant avec un nombre très restreint d'étudiants. En deux heures de travaux dirigés, nous avons recensé 71 interventions dont 57 émanant du professeur (très longues dans leur majorité), les interventions sont orales et/ou écrites au

tableau. Cette situation nous a, au besoin, obligé à procéder à l'analyse des interventions du professeur d'une manière isolée de celles des étudiants et réciproquement. Le tableau 7 ci-dessous donne une vision globale du déroulement de la séance.

Exercice	Interventions du professeur	Intervention des étudiants	Durée (approximative)
Exercice1	1 – 24	1 – 7	35 min.
Exercice2	25 – 45	8 – 22	50 min.
Exercice3	46 – 57	23 – 24	20 min.

Tableau 7 : Vision globale du déroulement

a) Gestion du professeur

Le tableau 8 ci-dessous donne les détails des interventions du professeur en fonction des critères de la grille d'analyse des classes.

Gestion Interaction					Gestion Formulation			Gestion Validation				
GI ₁	GI ₂	GI ₃	GI ₄	GI ₅	GAF ₁	GAF ₂	GAF ₃	GV ₁	GV ₂	GV ₃	GV ₄	GV ₅
7	0	4	10	0	3	3	0	10	15	5	0	0

Tableau 8 : Détails des interventions du professeur

Environ 26% des interventions du professeur concernent l'argumentation en utilisant des règles classiques de validation (GV2) sans aucune interactions avec les étudiants. De même concernant ses déclarations sur les notions en jeu et leurs propriétés (GV1) qui réfèrent en particulier à la définition de convergence, aux théorèmes sur la convergence, à la définition d'une suite de Cauchy et sa négation, etc. Ci-dessous par exemple, le cas des interventions (35, 53 et 54) :

35 Professeur : Si $(a_n)_n$ tend vers 0 et $(b_n)_n$ est bornée, alors $(a_n b_n)_n$ tend vers 0.

Les deux interventions qui suivent sont les seules (de GV1) qui sont précédées par l'intervention d'un étudiant sous forme de question :

23 Etudiant : C'est quoi la négation d'une suite de Cauchy ?

53 Professeur : $(u_n)_n$ n'est pas de Cauchy

$$\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, \exists m \geq n_0 ; |u_m - u_n| \geq \varepsilon .$$

54 Professeur : ...la négation...le quelque soit devient existe et le existe devient quelque soit...

Ces échanges posent la question des interprétations possibles d'un discours sur les quantificateurs complètement séparé du travail sur le contenu mathématique en jeu, notamment lorsque la règle qui y est énoncée devient non fonctionnelle dès que l'énoncé

contient une formule conditionnelle quantifiée (certains quantificateurs ne changent pas). C'est le cas par exemple de la négation de la propriété de l'égalité des réels :

$\forall x \forall y (\forall \varepsilon > 0 \ d(x,y) < \varepsilon \Rightarrow x = y)$ dont la négation est $\exists x \exists y (\forall \varepsilon > 0 \ d(x,y) < \varepsilon \text{ et } x \neq y)$.

Le professeur intervient uniquement cinq fois pour argumenter par formulation/explicitation, en changeant de registre (GV3). Parmi ces interventions (20, 26, 31, 34 and 39), seule la suivante porte des connaissances pour les étudiants :

6 Etudiant : [Parlant de $\forall n \in \mathbb{N}, n \leq \frac{\log|M|}{\log|a|}$] Madame absurde car $\mathbb{N}$ n'est pas majoré !

20 Professeur : Oui c'est absurde, c'est comme si l'ensemble des entiers naturels est fini !

Le reste de ces interventions est séparé du travail des étudiants :

26 Professeur : [Parlant de $u_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$] Pas de problème pour $\frac{1}{n}$ qui tend vers

0, donc $1 + \frac{1}{n}$ tend vers 1.

34 Professeur : [Parlant de $v_n = \frac{\cos(2n^3+1)}{n+1}$] Cosinus de tout réel est compris entre -1 et 1.

39 Professeur : [Parlant de $0 < w_n \leq \frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$] Cette inégalité n'est pas vrai en 0...pas

de problème puisqu'on cherche la limite en $+\infty$.

Par ailleurs, plus de 60% des interventions concernant les interactions (GI) ne contribuent pas à amener les étudiants à organiser leurs connaissances nouvelles et plus anciennes (GI3 et GI4). Plus précisément, la gestion des interactions du professeur se résume à la spécification des méthodes à utiliser par les étudiants (GI4). Or une telle pratique limite le travail des étudiants et conduit à une juxtaposition des connaissances telles que l'usage des sous-suites, le théorème de Cauchy et le théorème des suites bornées. C'est le cas, par exemple, des interventions (9, 14, 16, 36 et 40) qui sont fortement reliées au travail des étudiants :

2 Etudiant : $|u_n| = |a^n| < \varepsilon \Leftrightarrow |a|^n < \varepsilon$.

9 Professeur : Nous pouvons appliquer le logarithme aux deux membres de l'égalité !
[Pour prouver que la suite géométrique est convergente pour $a \in]-1, 1[$ and $a \neq 0$]

Dans les interventions 14 et 16, le professeur limite les choix des étudiants en insistant de plus en plus sur le recours aux méthodes qu'il suggère :

4 Etudiant : On peut utiliser les sous-suites ! [Pour prouver que la suite géométrique est divergente pour $|a| > 1$]

14 Professeur : Peut être, on peut aussi utiliser un raisonnement par l'absurde.

15 Professeur : Quelle est la propriété la plus importante d'une suite convergente ? Vous avez déjà vu ça dans le cours...

5 Etudiant : Une suite convergente est une suite de Cauchy.

16 Professeur : Ou encore qu'elle est bornée...Donc on va supposer que cette suite est bornée et on montrera que c'est absurde !

La pratique du professeur est similaire lors de l'intervention (36) qui suit :

16 Etudiant : $w_n = \sqrt{n^2 + 1} - n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n}$.

36 Professeur : On peut encadrer $\frac{1}{\sqrt{1 + n^2} + n}$ entre deux termes généraux de suites qui convergent vers 0.

Il continue à imposer sa méthode de résolution lors de l'intervention (40):

20 Etudiant : $t_n = \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right)$, $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 0$, $t_3 = -1$, $t_4 = 0$.

40 Professeur : C'est clair que cette suite diverge. Vous pouvez facilement trouver deux sous-suites qui convergent vers deux valeurs différentes.

Parmi les interventions du professeur qui abrègent explicitement le travail des étudiants (MI3), celle qui suit (22) interdit à l'étudiant d'utiliser sa propre méthode pour prouver que la suite en jeu converge (pour les autres interventions de MI3, soit 37, 38 et 56, Cf. la section relative au travail des étudiants) :

7 Etudiant : Dans le cas de cette suite, nous pouvons utiliser les sous-suites pour montrer qu'elle diverge.

22 Professeur : Ceci est trop long ! [Parlant de la méthode proposée]

Enfin, seules 10% des interventions du professeur sont susceptible d'aider les étudiants dans les phases d'action et de formulation (GAF). Ces interventions focalisent sur les potentialités du graphique et du numérique pour formuler des conjectures, pour procéder via des exemples et contre-exemples en fonction des connaissances visées. Toutefois, ces interventions sont initiées par le professeur et sont totalement isolées du travail des étudiants.

b) Travail des étudiants

Le tableau 9 ci-dessous donne les détails des interventions des étudiants en fonction des critères de la grille d'analyse des classes.

Travail Action & Formulation			Travail Validation		
TAF ₁	TAF ₂	TAF ₃	TV ₁	TV ₂	TV ₃
4	7	0	3	10	0

Tableau 9 : Détails des interventions des étudiants

Parmi les quelques questions posées par les étudiants (TAF1), trois d'entre elles (17, 19 et 24) ont été court-circuitées par le professeur (les étudiants intervenants dans les échanges suivants ne sont pas les mêmes) :

17 Etudiant : Est-ce qu'on peut pas calculer directement sa limite ? [Parlant de la suite

$$w_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1+n}}]$$

37 Professeur : Ben...vous utilisiez cette méthode au secondaire ! Maintenant je vais appliquer le théorème de la suite bornée.

18 Etudiant : $0 < w_n \leq \frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$.

19 Etudiant : C'est quoi le théorème de la suite bornée ?

38 Professeur : Vous l'avez déjà vu dans le cours !

Et un peu plus loin :

24 Etudiant : Pourquoi nous prenons n non nul ? Ce n'était pas mentionné dans la définition d'une suite ?

56 Professeur : ça dépend de la suite !

Par ailleurs, les rares interventions des étudiants où ils expriment spontanément des connaissances (TAF2) émergent à la suite de questions posées par le professeur (GI1). Toutefois, aussi bien les questions du professeur que les réponses des étudiants sont basiques et ne sont pas significatives de réelles attentes par rapport à la notion de convergence de suite.

Notons enfin que le travail des étudiants dans la phase de validation (TV) est très faible. Dans cette phase, les étudiants continuent de faire référence à des méthodes largement utilisées en fin du lycée ; certaines de ces interventions sont exprimées en même temps que celles du professeur.

Dans le cadre de cette situation de classe ordinaire, un temps de latence aurait pu être donné aux étudiants pour explorer en profondeur certaines de leurs questions/formulations, du fait même que ces dernières soulignent :

- une méconnaissance des savoirs du cours introduits à l'entrée à l'université (théorèmes sur les suites convergentes),
- des difficultés à rendre opérationnelles les règles du calcul formel (définition formelle d'une suite convergente, négation d'un énoncé quantifié) ;
- des insuffisances des étudiants dans le domaine des nombres (valeurs approchées, erreur, distance et éventuellement lien avec les limites).

Dans tous les cas, la pauvreté des interventions des étudiants rend difficile d'en déduire l'état d'avancement de leurs connaissances et ce qu'ils seront en mesure de faire dans un travail autonome. Sous cette réserve, dans un contrat tel que celui instauré dans cette classe, les

étudiants gardent aussi bien la responsabilité d'apprendre ou non, que la possibilité théorique d'interagir avec le professeur.

4. Conclusion

L'application de l'outil méthodologique d'analyse d'une classe ordinaire concernant la notion de convergence de suite à l'entrée à l'université permet d'illustrer globalement la gestion du professeur et son implication dans les apprentissages, et de donner une description beaucoup plus locale de certains éléments spécifiques à l'apprentissage potentiel de la notion mathématique en jeu.

Dans le cadre de cette étude, le professeur n'intervient pas explicitement pour enrichir le travail des étudiants, par exemple en soulignant les relations entre les notions en jeu via un changement de registre sémiotique, en laissant des ouvertures pour organiser les connaissances, pour exprimer des opinions à propos des notions en jeu, etc. Les interventions du professeur n'ont pas réussi à amener les étudiants à interagir efficacement avec le milieu mathématique. Par exemple, la gestion du professeur va dans le sens d'une limitation dans les choix des étudiants en imposant des méthodes nouvellement introduites. L'organisation des connaissances des étudiants ne semble pas être prise en compte lors de cet enseignement. Par ailleurs, les quelques interventions du professeur qui soulignent les potentialités des registres sémiotiques utilisés en fin de lycée sont totalement isolées du travail des étudiants. Il utilise le registre formel dans un contrat d'ostension (Brousseau, 1996), définit comme étant l'acte du professeur de montrer des objets mathématiques avec l'illusion selon laquelle les étudiants vont pouvoir percevoir ce qui en est visé. Par conséquent, le travail des étudiants n'a pas pu être consistant. Jusqu'à la fin de la séance, les étudiants continuent d'exprimer des connaissances basiques et des méthodes de résolution utilisées au lycée. Ils n'ont, de ce fait, pas pu accéder aux attentes requises en début d'université dans le cas de la convergence de suite.

III. Usage du modèle en classe d'analyse en fin de lycée : Une meilleure prise en compte de la complexité de l'objet mathématique – Cas de la convergence de suite

1. Introduction : La problématique des images de la convergence dans la littérature

Dans ce travail nous mettons l'accent sur les conditions de classes ordinaires et leur potentialité sur la conceptualisation de la convergence au lycée.

Les travaux qui privilégient l'étude des conceptions pour rendre compte des exigences de la conceptualisation de la convergence, soulignent que ces conceptions sous-tendent dans la majorité des cas une approche dynamique de la notion de limite d'une suite. Cette approche dynamique a régi le fonctionnement cognitif des mathématiciens d'antan jusqu'à Cauchy (Bagni, 2005) donnant lieu à au moins deux images de la convergence d'une suite, qui

méritent d'être soulignées dans une telle étude : l'image asymptotique de Leibniz et Newton symptomatique de l'idée de limite atteinte ou non, ainsi que l'image accumulation de Cauchy substituant à la limite d'une suite les limites de ses sous-suites (Tall, & Katz 2014). Cette image accumulation associe la convergence au fait qu'un nombre infini de termes de la suite s'accumulent autour (ou sont de plus en plus proches) d'un ou de plusieurs points qui seront ses limites.

De même que les mathématiciens d'antan dans leur quête de formalisation de la convergence, les élèves/étudiants développent en amont de l'introduction de la notion de convergence de suite leurs propres images. De ce fait, ils acquièrent à priori une image de cette notion qui est individuelle et pas forcément conséquente du point de vue de la conceptualisation. A côté de l'approche commune fondée sur le sens commun (Grugnetti, 2003), nous retenons en particulier la prépondérance de l'approche dynamique exprimée à travers une image asymptotique ou une image approximation basée sur le calcul numérique de valeurs approchées (Sierpiska, 1985 ; Roh, 2008). Plus précisément, l'image approximation souligne la dominance du caractère de rapprochement numérique chez certains élèves, caractère qui se traduit par le fait que la limite L d'une suite est déterminée en prenant des termes d'indices de plus en plus grands jusqu'à ce que finalement L soit atteint, ou que " L soit une valeur approchée" des termes d'indices de plus en plus grands qui devient "naturellement" de plus en plus précise (l'erreur commise devient de plus en plus petite). Ce rapprochement numérique traduit un renversement de la pensée par rapport au rôle des approximations dans l'interprétation de la convergence d'une suite : ce n'est pas l'erreur commise qui induit l'existence d'indice (ou d'ordre) à partir duquel les termes de la suite sont des valeurs approchées de la limite à cette erreur près, mais ce sont plutôt les termes d'indices pris de plus en plus grands qui vont conditionner l'existence d'une erreur de plus en plus petite pour laquelle L est une valeur approchée de ces termes. Dans toute la suite, c'est dans ce sens que nous entendons l'image approximation. Ces deux images sont liées à l'idée de mouvement et générées par un usage abusif d'expressions de la forme "la suite tend vers... quand n tend vers $+\infty$ ", "les termes s'approchent de plus en plus de", "en prenant des termes d'indices de plus en plus grands", etc. Dans le cas du cursus tunisien, cet aspect est d'autant plus important à souligner du fait que d'une part la notion de suite est définie comme cas particulier de fonction, et d'autre part la convergence de suite (et la notion de limite de suite en général) est introduite de manière concomitante à celle de sa définition formelle. Par conséquent, même si l'on ne peut évoquer un vécu "informel" relatif à cette notion, nous pensons que les expériences rencontrées par les élèves/étudiants dans leur travail avec les fonctions et leurs limites (notamment en $+\infty$) induisent le développement d'éléments spécifiques à la notion de limite d'une suite (McGowen, & Tall 2010), éléments qui à leur tour constituent une composante de l'image construite par ces élèves/étudiants en amont de la définition formelle de convergence.

L'ensemble des travaux qui ont traité la question des images construites en aval de la définition formelle de convergence, s'accordent sur le fait que les images de type dynamique demeurent chez les élèves/étudiants même après l'introduction de la définition formelle de convergence. Robert (1982) pointe en particulier l'idée dangereuse de monotonie implicite derrière certaines de ces images, qui exprime que la distance entre les termes de la suite et sa limite devienne de plus en plus petite (décroît vers zéro) quand n est de plus en plus grand. Cette idée renforce par conséquent le maintien de l'image approximation telle qu'elle émerge avant l'introduction de la convergence formelle. Par ailleurs, Przenioslo (2004) souligne l'impact d'un recours abusif aux graphiques dans le développement des images dynamiques donnant lieu à des formulations telle que *"les points (n, u_n) approchent l'asymptote $y = L$ à partir d'un certain rang"*. A côté de l'approche dynamique de la notion de convergence, la pensée en termes d'intervalles conduit certains élèves/étudiants à des formulations dans un langage rhétorique ou algébrique de la définition formalisée (Robert, 1982) donnant lieu à des images de type statique. Ces formulations sont en général très éloignées de *"pour tout intervalle ouvert I centré en L , seul un nombre fini de termes de la suite (u_n) est à l'extérieur de I "* (Roh, 2008) ; tel est le cas par exemple de *"une infinité de termes de la suite (u_n) est dans tout intervalle centré en L "*. Alcock et Simpson (2005) ont à leur tour, pu identifier des formulations plutôt algébriques du type *" $|u_n - L| < \varepsilon$, pour tout $n > N$ et $\varepsilon > 0$ "*, intimement liées à la problématique des énoncés quantifiés et des difficultés qu'ils génèrent. A l'opposé des images dynamiques, on ne peut trancher d'une manière catégorique sur l'origine des images statiques. Toutefois, nous pouvons affirmer que la standardisation des exemples et la focalisation sur les interprétations rhétoriques de la définition de convergence, sans que l'accent ne soit mis sur les différences avec le formalisme, favorisent l'émergence des images statiques. Notons enfin que certains élèves/étudiants développent ce que nous appelons une approche mixte, dans le sens où l'idée de mouvement et de rapprochement est incorporée dans des formulations algorithmiques ou en termes d'intervalles et de voisinages (Przenioslo, 2004, 2005). Le développement d'images relatives à cette approche est soutenu par un travail dans les registres graphique et algébrique. A titre d'exemple, la formulation *"il existe un ordre n_0 , pour tous les voisinages de L , à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à ces voisinages"* est fondée sur l'inversion des quantificateurs, probablement issue d'une lecture graphique ordonnée dans un sens non conséquent pour la conceptualisation.

Dans tous les cas, chacune de ces trois approches (dynamique, statique et mixte) qui semblent se développer conformément aux exemples et expérimentations auxquels les élèves/étudiants ont été confrontés, donnent naissance selon Tall et Vinner (1981) :

- soit à des images non conséquentes du point de vue de la conceptualisation, dans le sens où telles qu'elles sont verbalisées, elles ne sont pas en contradiction avec la définition formelle mais la négocient à la baisse (c'est le cas par exemple de certaines

images formulées dans un langage rhétorique utilisant des expressions telles que tend vers, s'approche de, etc., ou celles de type condition nécessaire) ;

- soit à des images en contradiction avec la définition formelle de convergence, de telles contradictions rendent difficile, mais non impossible, l'activation de conflits cognitifs nécessaires à la conceptualisation (c'est le cas par exemple des images qui sont appuyées sur des conceptions de type limite non atteinte).

L'objectif de cette recherche n'est pas de se limiter à un recensement des images des élèves du lycée en amont de la convergence formelle et lors de sa première introduction, mais plutôt de traiter à la lumière de ces images la question des différentes significations données par ces élèves à cette notion et l'évolution de telles significations. En particulier, nous nous posons la question du rôle des situations de classes ordinaires dans le conditionnement d'une telle évolution. A un niveau moindre, nous étudions les possibilités de régulation en fonction des résultats auxquels nous avons abouti.

Plusieurs travaux préconisent des situations alternatives permettant de faire face aux images problématiques de la convergence. Certains d'entre eux focalisent sur l'introduction de la convergence formelle via une représentation sémiotique qui prendrait en compte les images dynamiques pouvant être formées à priori, tout en étant un système contenant toutes les informations qui constituent la définition et permettant de décrire, d'une manière plus ou moins exhaustive, le rôle de chaque symbole et expression qui y figurent. Ce travail a été entrepris notamment par Robert (1983), Mamona-Downs (2001), Roh (2008), etc. ; les représentations sémiotiques retenues sont graphiques ou numériques. L'appui sur la structuration des milieux dans le cadre de la TSD tel que utilisé dans le travail de Bloch (2002), a de plus permis de rendre compte des différentes interactions entre professeur, élèves/étudiants et l'objet mathématique en jeu. D'autres travaux soulignent la pertinence d'amener les élèves/étudiants à procéder à des investigations, les confrontant à des conflits cognitifs entre images potentielles de la convergence. Nous citons dans ce contexte les travaux qui insistent sur l'efficacité des expériences physiques et de visualisation géométrique, graphique, numérique et ce, sur un dessin, par un logiciel ou une calculatrice (Lie, & Tall, 1992 ; Kidron, & Tall, 2014), en vue de faciliter aux élèves/étudiants la transition vers la convergence formelle. Pinto et Tall (2002) ont de plus montré que les élèves armés d'une image solide, dans le sens où tous les éléments nécessaires sont présents sans qu'aucune contradiction avec la notion ne soit détectée, peuvent à travers des expériences mentales, transformer cette image d'une manière autonome, en un énoncé quantifié sans aucune action venant de l'extérieur.

Sur la base de ces travaux, les questions que nous posons sont :

- Quelle est la nature des images de la convergence formées par les élèves de 3^{ème} année secondaire en amont de la définition formelle ?

- Comment évoluent les images de ces élèves à l'issue de l'introduction formelle de la convergence ? En particulier, comment les situations de classe conditionnent-elles une telle évolution ?

Afin d'optimiser la qualité de nos analyses, nous faisons le choix d'investiguer ces questions dans un cas clinique. Ceci suppose la donnée d'outils théoriques permettant une telle étude. Dans un premier temps, nous retenons le concept image/concept définition de Tall et Vinner (1981) permettant de distinguer entre le concept mathématique introduit via sa définition formelle et le processus cognitif par lequel il est conçu. Or, le développement d'un tel processus chez les élèves ne peut être isolé du contexte de la classe qui lui donne naissance. Ce contexte est à son tour défini à partir du contenu mathématique sollicité et de la gestion du professeur en situation réelle. Finalement, nous utilisons notre outil méthodologique d'analyse de classes ordinaires que nous réajustons pour rendre compte de la nature des images et de leur organisation.

2. Ajustement de l'outil méthodologique : Prise en compte des caractéristiques des images de la convergence

Vinner (1991) assume que la totalité de la structure cognitive associée à un objet mathématique comporte les éléments spécifiques au concept image incluant toutes sortes d'associations, de conceptions, d'intuitions, d'éléments structuraux et de processus reliés au concept en jeu. Le concept image n'est pas verbal, par contre, la confrontation directe ou indirecte des élèves à des questions spécifiques pourraient amener à une verbalisation qui rendrait compte de sa nature. Les éléments liés au concept définition comportent les formes langagières, y compris formelles qui permettent de spécifier le concept. Celles-ci peuvent être apprises par cœur puis oubliées, ou bien reconstruites par l'élève/étudiant témoignant d'une adaptation de l'image, elles seront de la sorte utilisées pour en traduire une verbalisation.

Dans le cadre de notre recherche, la notion de suite est introduite comme cas particulier de fonction. Par conséquent, le "compartiment" du concept image est plein avant l'introduction de la convergence qui s'est faite via sa définition formelle ; il comporte au moins toutes les images relatives à la limite en $+\infty$ d'une fonction, notion déjà introduite. Par ailleurs, outre les spécificités du contenu mathématique en jeu, le développement et l'évolution de ces images sont également intimement liés à ce que pourrait apporter le professeur en situation de classe ordinaire. Notre approche de la gestion du professeur en classe est fondamentalement orientée vers le travail des élèves/étudiants et le processus de conceptualisation. Comme déjà signalé, nous écartons ici une étude fine visant le métier d'enseignant et ses pratiques ; cependant nous ne nous interdisons donc pas de pointer, dans les pratiques des enseignants en contexte de classe 'ordinaire', les éléments favorisant (ou freinant) l'accès des étudiants au sens du savoir visé. Ces éléments sont issus d'invariants que nous pouvons identifier à partir de la gestion globale du professeur.

Si l'on se penche sur l'outil méthodologique d'analyse des séances de classes, nous remarquons que le recours à Robert (2003) souligne la grande importance que nous attachons notamment à l'organisation des connaissances comme condition de la conceptualisation. Nous ajoutons que ces connaissances, y compris celles qui sont inadaptées, incomplètes voire contradictoires, concrétisent les éléments constitutifs du concept image et la nécessité de les organiser va de pair avec les exigences de changer sa structure cognitive pour intégrer un nouvel objet et former une nouvelle image. En d'autres termes, dans ce travail nous pensons l'organisation des connaissances, en partie via le déclenchement de conflits cognitifs conséquents pour la conceptualisation.

L'usage de cet outil suppose un complément d'informations à priori sur la nature du contenu mathématique projeté par le professeur. Dans le cadre de l'étude de situations concernant la convergence de suite, ce contenu est étudié du point de vue du recours à la visualisation, de la pertinence et l'exhaustivité des exemples et contre-exemples, du basculement entre divers registres sémiotiques, le fait de susciter la formulation de conjecture et la nécessité d'expérimenter sur des cas particuliers, etc. L'objectif sous-jacent à une telle étude est celui d'étudier les opportunités que peuvent offrir ces énoncés pour amener les élèves à verbaliser leurs images, les confronter et en générer des conflits cognitifs conséquents. Dans certains cas, la définition formelle du concept peut ne pas permettre le développement d'images qui devraient contribuer à faire émerger des conflits cognitifs nécessaires pour surmonter l'inconsistance d'images existantes. Dans ces conditions, les élèves/étudiants seront portés à se satisfaire de leurs propres interprétations et de considérer la définition formelle comme étant inopérante et superflue (c'est le cas par exemple de certaines des images statiques énoncées dans un langage rhétorique).

3. Cadre expérimental

En Tunisie, la notion de suite réelle est introduite deux années avant la terminale via des exemples de suites arithmétiques et géométriques, aucun travail sur le comportement des suites, y compris intuitif, n'est prévu. Elle est définie comme cas particulier de fonction une année avant la terminale (3^{ème} année secondaire), la notion de convergence est introduite la même année à travers sa définition formelle et aucun autre type d'enseignement (y compris informel) sur la limite de suite n'a été auparavant dispensé. Le chapitre des suites est dispensé à l'issue de celui des fonctions (limites, continuité, dérivabilité, branches infinies, etc.). Ceci est d'autant plus important à souligner si l'on sait précisément, que l'unique manuel scolaire, auquel adhère la grande majorité des enseignants, introduit la notion de limite finie d'une fonction en $+\infty$ via sa définition formelle (où le langage se substitue aux symboles des quantificateurs) : *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$, tel que pour tout $x \in D_f$, si $x > A$, alors $|f(x) - L| < \varepsilon$.* Cette définition est tout de suite interprétée en termes d'existence d'une asymptote horizontale à la courbe de la fonction. Par ailleurs, hormis une algébrisation de calcul de limites pour les besoins de la représentation graphique d'une fonction, nous ne

pouvons observer une exemplification qui ait pour objectif la problématisation d'une telle notion pour une meilleure conceptualisation. Les exemples monotones sont les plus sollicités, et ceux tels que celui de la fonction $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ sont quasi absents.

L'étude expérimentale va s'appuyer sur la progression de trois séances de classes ordinaires faisant intervenir les acteurs d'une classe de 3ème année secondaire en amont et en aval de l'introduction de la convergence d'une suite, comportant 25 élèves à côté du professeur.

Notre objectif est celui d'étudier globalement la question du développement des images des élèves en aval de la convergence formelle contraints par les choix institutionnels, et celui de recenser un certain nombre de données concernant la nature de ces images. Nous analyserons via la grille multidimensionnelle d'analyse de classe, les transcriptions des trois séances visant l'introduction de la notion de limite de suite. Nous intégrons à cette analyse tous les éléments nécessaires à l'explicitation du processus de développement des images consolidés par les résultats de la première expérimentation. Nous nous basons sur un corpus de transcriptions composé de trois séances de cours concernant le chapitre des limites de suites dispensées dans cette chronologie : limite finie d'une suite, opérations sur les limites finies de suites et limites infinies de suites. Chacune de ces séances a duré deux heures de temps en présence des 25 élèves de la classe, ce qui est équivalent à la durée institutionnelle accordée à une classe de cours à ce niveau du cursus.

Avant de procéder à cette étude, nous avons entrepris une première expérimentation qui a pour objectif d'approfondir la question de la nature des images construites par les élèves avant tout enseignement sur la convergence des suites. Le but est de se doter d'un maximum d'informations concernant les images construites par ces élèves, et d'en sélectionner celles qui nous permettraient de voir plus clair au niveau du développement de ces images lors de l'introduction de la convergence. Nous avons pu montrer que le contexte mathématique qui renvoie, chez les élèves, à la notion de limite finie de fonction en $+\infty$ est celui relatif à l'étude des branches infinies. La majorité de ces élèves présente une cohérence dans leurs interprétations de la limite finie d'une fonction en $+\infty$. Dans tous les cas de figure, ces élèves développent une approche de la limite qui est explicitement dynamique et véhiculant au moins une image asymptotique. Ceci est particulièrement tributaire du choix institutionnel de confondre l'existence d'une telle limite à celle d'une asymptote horizontale à la courbe de la fonction en question. Certains de ces élèves appuient l'image asymptotique qu'ils ont de la limite par l'emploi d'expressions renvoyant à des conceptions telles que *limite non atteinte* ou *ne peut être dépassée*. Ils pensent la limite comme une borne, au-delà de laquelle la fonction ne peut aller. A côté de l'image asymptotique, quelques uns activent aussi une image approximation soutenue par un registre numérique. Nous avons fait le choix de ne pas particulariser dans cette analyse les élèves qui décrivent la limite via la verbalisation conséquente de la définition formelle. Les élèves approuvent cet énoncé par contrat sans qu'une signification réelle n'en soit donnée.

Cette étude nous a de plus permis de répertorier des éléments nous permettant de déceler le niveau de développement potentiel d'images relatives à la notion de limite de suite. A travers les réponses qui ont tenté une entrée à la limite de suite, il nous a été possible de détecter un recours récurrent au registre graphique, et dans un moindre niveau numérique pour appuyer le travail fait. Plus précisément, les élèves emploient sans aucune réserve des termes tels que *s'approchent de*, en ajoutant parfois *sans l'atteindre* pour exprimer la méthode qu'ils utilisent pour trouver le nombre recherché (la limite).

4. Investigation des images des élèves lors de l'introduction de la convergence

Nous nous basons sur un corpus de transcriptions composé de trois séances de cours en 3^{ème} année secondaire option mathématiques dans la classe des élèves faisant l'objet de la première expérimentation : une séance sur la limite finie d'une suite, une séance sur les opérations sur les limites finies de suites et une séance sur les limites infinies de suites.

4.1 Analyse a priori du projet d'enseignement

La première séance comporte une situation d'introduction de la convergence de suite suivie de résultats généraux énoncés comme étant à admettre, et d'une situation d'application.

La première situation proposée a pour objectif celui d'introduire la définition de la convergence de suite et s'énonce comme suit :

Soit la fonction $h : x \rightarrow \frac{3+2x}{2+x}$.

1. Déterminer la solution positive de l'équation de $h(x) = x$.
2. Dans un même repère, représenter la droite d'équation $y = x$ et la courbe de h . On considère les points $A_n(n, x_n)$ où (x_n) est une suite obtenue selon le procédé suivant : le terme x_{n+1} est l'image par h de x_n et $x_0 = 0$. Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n . Expliquer la construction de x_1, x_2 et x_3 .
3. Donner la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-6} de $x_n, n \leq 6$.
4. A partir de quel entier n , a-t-on $|\sqrt{3} - x_n| \leq 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-5}$?

Dans cette situation, le choix est celui de considérer une suite d'approximation de $\sqrt{3}$ définie par $x_{n+1} = \frac{3+2x_n}{2+x_n}$ et $x_0 = 0$ pour introduire la notion de convergence de suite. La pertinence d'une telle approche réside dans les possibilités que peuvent offrir les approximations successives pour pallier à des interprétations informelles de la convergence telle que celle générée par un renversement de la pensée dans les termes d'image approximation - pour tout ordre choisi, il existe une erreur pour laquelle la limite est une valeur approchée du terme d'indice en question ; plus l'ordre est grand, plus l'erreur est petite. Plus précisément, le recours à des changements de registres entre le graphique, le numérique et l'algébrique permettra de mettre l'accent sur :

- la formalisation de "*de plus en plus proche que*" via x_n est dans un intervalle de la forme $] \sqrt{3} - \varepsilon, \sqrt{3} + \varepsilon[$, ε un réel strictement positif de plus en plus petit ;

- la dépendance de N par rapport à ε : en prenant des ε de plus en plus petit, on trouve une valeur de plus en plus grande.

Toutefois, ce que nous pouvons souligner concerne le caractère standard de la suite en jeu : un prototype de suite croissante et majorée, et les conséquences qu'un tel choix peut engendrer du point de vue de la conceptualisation dont l'idée selon laquelle *la limite ne peut pas être dépassée*. Rappelons aussi qu'un tel choix a été pointé par Robert (1982) comme pouvant déboucher sur un modèle monotone de la convergence. Cette situation introductive est suivie par l'énoncé simple de la définition formelle de convergence de suite : *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que si $n > N$, alors $|u_n - L| < \varepsilon$* , ainsi que le vocabulaire et les notations qui lui sont attachées. Une suite divergente est définie comme étant non convergente. Dans ce projet, aucune explication ne précise la manière de transiter entre cette situation introductive et la définition en epsilon. A l'issue de cette définition, le théorème sur l'unicité de la limite est admis. Le projet notionnel de cette séance est clôturé par une situation dont l'objectif est celui d'explicitier et de valider la technique d'étude de la limite finie d'une suite en utilisant la fonction à laquelle elle réfère : *si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$, f où une fonction définie sur $[0, +\infty[$ et u la suite définie par $u_n = f(n)$* . A moins d'une prise en charge de la part du professeur dans la situation de classe réelle, telle qu'elle est énoncée cette situation porte en germes beaucoup d'implicites. L'existence de la limite de f en $+\infty$ étant une condition suffisante et non nécessaire, tel est le cas la suite $u_n = \frac{1}{n^2+1}$ et la fonction f définie par $\begin{cases} \frac{1}{x^2+1} & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$. Par ailleurs, une telle technique favorisera l'activation d'une panoplie d'images que se sont construits les élèves concernant la limite finie d'une fonction en $+\infty$. Or, le résultat de l'étude faite en amont de la convergence nous a permis de souligner la prépondérance de l'image asymptotique, traduisant des conceptions telles que la fonction n'atteint jamais sa limite, la fonction est forcément monotone et bornée, etc. Notons enfin, la standardisation des exemples d'application de la technique et l'algébrisation du calcul de limites de suites convergentes via la technique sur les fonctions.

La deuxième séance comporte une situation d'application de la notion de convergence et une situation d'introduction du théorème de comparaison, suivies d'une situation d'application concernant le théorème relatif aux opérations sur les limites de suites convergentes, formulé comme étant admis. La définition de la convergence n'est pas sollicitée dans la résolution des situations proposées sauf pour démontrer des résultats généraux, et ne ferait vraisemblablement pas partie des éléments du concept image. En particulier, l'étude de la limite d'une suite géométrique de raison -1 ne fait pas partie des attentes dans ce projet, pourtant stipulé comme occasion pour exploiter la définition formelle dans le texte du programme officiel. Par conséquent, les élèves risqueraient de ne pas cerner l'importance et le rôle de la définition formelle de la convergence et de se suffire à l'algorithmique en procédant

à un calcul algébrique ; cette procédure masquerait ainsi différentes interprétations de la notion, interprétations qui freinent la plupart du temps la conceptualisation.

La mise en place des techniques de comparaison ou des opérations sur les limites finies de suites, pour étudier la convergence d'une suite, renforce les pratiques d'algébrisation dans le travail des élèves, sans qu'aucun apport significatif dans le processus de conceptualisation de la convergence ne puisse être entrepris. Hormis la complexité parfois exagérée des expressions de certaines suites, d'ailleurs n'ayant pour conséquence que celle de renforcer les pratiques d'algébrisation dans le travail des élèves, on ne peut noter un apport significatif, de cette situation, dans le processus de conceptualisation de la convergence. Tel est par exemple le cas des suites suivantes, la question posée est de retrouver, par un calcul algébrique utilisant les encadrements des fonctions cosinus et sinus, les limites : $u_n = \frac{1}{2 + \frac{\cos n}{n}}$ et $t_n =$

$$\left[-\frac{2n+1}{3n-1} \right] \left[\frac{\sin(4n^3)}{n^2+1} + 3 \right].$$

Finalement, les élèves feront le calcul des limites de suites directement sur le terme général u_n sans se référer à la fonction en jeu, et d'une manière qui demeure algorithmique.

La troisième séance comporte une situation d'introduction de la notion de limite infinie, suivie de trois situations de validation de techniques relatives à l'étude des limites infinies de suites : technique relative à l'étude de la fonction à laquelle réfère la suite en jeu (si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$), techniques utilisant les comparaisons et les opérations sur les limites de suites. La séance est clôturée par l'énoncé de théorèmes admis sur les opérations des limites de suites infinies, suivi d'une situation d'application et d'une situation visant l'étude de la limite d'une suite géométrique dans tous les cas de figure.

Le recours aux résultats généraux concernant l'étude des limites infinies de suites via les fonctions renforce davantage les démarches algébriques de standardisation d'une part, et ne permet pas de souligner la distinction entre suite et fonction, élément essentiel à la conceptualisation de la notion de suite en tant qu'objet mathématique à part entière. Les exemples présentés sont encore une fois prototypés et n'appellent pas un réel travail d'investigation de la part des élèves. De même que pour les limites finies de suite, nous notons l'absence d'exemples et de contre-exemples pertinents pour l'activation d'images

conflictuelles, tel que l'exemple de la suite $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n < 10.000.000 \\ n + 1 & \text{sinon} \end{cases}$.

En général, le travail sollicité par les élèves se restreint à une activité de majoration ou minoration, d'usages des opérations sur les limites, réduisant ainsi l'étude des suites à l'application d'opérations algébriques sans qu'aucune réelle signification ne puisse être donnée à la notion de limite infinie.

Finalement, la définition formelle de la notion de limite de suite est noyée par la standardisation et/ou algébrisation des attentes institutionnelles. Le projet d'enseignement est

clôturé par l'énoncé du théorème relatif à la limite d'une suite géométrique, accompagné d'une situation ayant pour objectif la démonstration d'un tel résultat. Le cas problématique de la suite géométrique de raison -1 n'est pas évoqué. En dépit du fait que le programme officiel stipule l'exploitation de la définition formelle pour montrer sur des exemples qu'une suite n'a pas de limite, la question de la divergence d'une suite n'est approchée que dans le cas d'une limite infinie. Dans le cas de la suite $(-1)^n$, pour tout L réel, il suffit de prendre $\varepsilon = \inf(|L-1|, |L+1|)$. Il est donc ambitieux d'espérer que les élèves travaillent dans ce sens d'une manière autonome.

4.2 Travail des élèves et gestion du professeur en situation de classe

Nous faisons le choix de ne plus distinguer les séances, et de détailler l'analyse a posteriori en fonction des dimensions d'étude aussi bien du côté des interventions du professeur, que du côté des interventions des élèves. Ceci nous permettra en particulier, d'identifier des régularités dans la gestion du professeur en aval de la convergence, et de mieux cerner la nature du travail des élèves. L'étude globale des transcriptions montre qu'en six heures de cours, le professeur intervient 169 fois et les élèves 173 fois, les interventions sont orales et/ou écrites au tableau. En particulier, au moins 15 sur 25 élèves ont intervenu lors de ces heures de cours et à plusieurs reprises chacun. Les séances de classes se sont déroulées de la manière suivante.

Séance	Séance 1	Séance 2	Séance 3
Professeur	P ₁ – P ₅₀	P ₅₁ – P ₁₁₄	P ₁₁₅ – P ₁₆₉
Elèves	E ₁ – E ₅₈	E ₅₉ – E ₁₁₆	E ₁₁₇ – E ₁₇₃

Tableau 10 : Situations de classes/Répartition des interventions

Nous focalisons en particulier l'analyse sur la première séance (Séance 1) en distinguant dans les interventions aussi bien du professeur que des élèves, celles qui ont eu lieu avant, pendant et après l'introduction de la convergence formelle, comme l'indique le tableau ci-dessous.

Avant la définition	P ₁ – P ₂₄	E ₁ – E ₃₉
Pendant la définition	P ₂₅ – P ₃₇	E ₄₀ – E ₄₉
Après la définition	P ₃₈ – P ₅₀	E ₅₀ – E ₅₈

1. Gestion du professeur

Sur les 169 interventions du professeur nous n'avons tenu compte dans notre analyse que de 140 interventions. Le reste des interventions (soit 29) consistant en majorité à relire des questions proposées dans les activités ou les exercices, n'avait pas d'intérêt particulier dans notre grille d'analyse. On les a classées comme étant "stériles".

Gestion Interactions					Gestion Recherche & Formulation			Gestion Validation				
GI ₁	GI ₂	GI ₃	GI ₄	GI ₅	GRF ₁	GRF ₂	GRF ₃	GV ₁	GV ₂	GV ₃	GV ₄	GV ₅

16	27	25	16	0	4	4	1	20	17	10	0	0
----	----	----	----	---	---	---	---	----	----	----	---	---

Tableau 11 : Situations de classes/Interventions du professeur

Durant la résolution de la situation introductive, il a déjà, été possible d'identifier dans les interventions du professeur un usage aléatoire et non contrôlé de formulations problématiques, dont l'impact a été apparent aussi bien dans le travail des élèves, que dans son évolution.

Plus précisément, nous avons enregistré parmi les interventions relatives aux interactions, un peu moins de 20% concernant le déclenchement d'un débat en posant des questions sur les concepts mathématiques dans l'environnement de la notion de suite (GI_1). Néanmoins, la majorité de ces questions restent à connotations négatives se limitant à faire appel à la mémorisation. En particulier, les interventions P_{17} et P_{18} ayant déclenché des interactions intéressantes ne sont pas accompagnées d'interprétations plus fines mettant en évidence la place des intervalles dans la définition de la limite d'une suite :

P_{17} : [...] dites-moi ce que signifie valeur absolue de $(x - a)$ inférieur à α ?

31 Jed : x est compris entre $a - \alpha$ et $a + \alpha$...

32 Belkil : $x - a$ est compris entre $-\alpha$ et $+\alpha$...

P_{18} : C'est un intervalle centré en ...

33 Belkil : ...en 0...

34 Wiem : C'est un intervalle centré en a de largeur α ...

De plus, dans des interventions de type P_{24} "On considère des intervalles infiniment petits centrés en $\sqrt{3}$...", le professeur procède à un emploi excessif, sans davantage de clarifications, de tout ce qui renvoie à l'infini et aux infiniment petits et grands, notions assez controversées chez les élèves et qui provoquent plusieurs interprétations, pour la plupart très éloignées de leurs définitions.

Par ailleurs, un peu moins de 30% des interventions relatives à la gestion des interactions ont consisté à abrégé le travail des élèves (GI_3). Tel est le cas notamment de l'intervention P_{11} :

P_{10} : Que remarquez vous pour les éléments de la suite (x_n) ?

22 Hedi : Ils sont tous proches de $\sqrt{3}$...

P_{11} : Ils sont proches ... mais aussi ...

23 Nada : Proches mais toujours $< \sqrt{3}$...

P_{12} : [...] On a l'impression qu'ils se superposent...on va continuer par le calcul...

Cette séquence pointe encore une fois la non prise en compte par le professeur des confusions que peut engendrer l'emploi d'expressions pouvant porter vers une multitude d'interprétations parfois très éloignées de ce qui en est attendu. A aucun moment, le professeur n'a entrepris un travail d'explicitation et de formalisation de la notion d'un nombre proche d'un autre.

Plus de 30% des interventions relatives aux interactions sont supposées laisser aux élèves un choix pour se poser des questions et pour organiser leurs images à propos des suites et des limites de suites (GI_2). Toutefois, ces interventions demeurent non conséquentes du point de

vue de la conceptualisation. C'est le cas par exemple de l'intervention P_{14} qui est restée en suspens, où l'on note un usage abusif et non conditionné d'expressions telles que *s'approche de* ou *une fois inférieur ou une fois supérieur*, pourtant très significatives des spécificités de la limite finie :

28 Nada (relit la question) : A partir de quel entier n a-t-on $|\sqrt{3} - x_n| \leq 10^{-2}$.

29 Belkil : Pourquoi la valeur absolue...on sait que la différence est positive...

P_{14} : Tu as raison dans ce cas...mais rappelle toi l'exemple de la dernière fois pour approcher $\sqrt{37}$...c'était une fois inférieur et une fois supérieur...comme nous on prépare la définition...on ne doit pas se limiter pas au cas où la différence est positive...

Cette séquence pointe le danger signalé par Robert (1982) d'abuser de la monotonie dans l'étude de la convergence. De même pour l'intervention P_{75} qui n'est pas suffisamment soutenue pour espérer faire avancer les élèves dans le processus d'édification de la définition formelle :

74 Wiem : ...ça veut dire $|v_n - 0| < \varepsilon$...

P_{75} : C'est quoi ε ?

75 Wiem : Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n > N'$, on a $|v_n - 0| < \varepsilon$...

La réplique de Wiem non accompagnée de commentaires de la part du professeur, est une répétition de la définition à la demande. D'après Vinner (1991), cette définition ne serait pas utilisée et sera oubliée après un certain temps.

Par ailleurs, environ 20% des interventions du professeur relatives aux interactions visent à découper les questions en des questions élémentaires pour rendre visibles des techniques et des procédures de résolution (GI₄). Cette pratique de l'enseignant limite l'activité des élèves à des applications qui favorisent le développement d'une image algorithmique. Dans l'intervention P_{48} , le professeur renforce le côté calculatoire dans le travail avec la convergence de suite :

57 Nada : On va appliquer la définition à chaque fois ?

P_{48} : On va pouvoir appliquer cette propriété qu'on vient de démontrer... [Parlant de la technique avec les fonctions]

Dans le cas de ces interventions, le professeur impose des méthodes de calcul et de résolution autres que celles que les élèves proposent d'investiguer, en les empêchant de faire des calculs qui ne mènent pas aux résultats escomptés. Ils sont guidés pas à pas pour être conformes à une algorithmique bien déterminée allant parfois jusqu'à noyer l'objectif de la situation dans des détails de calcul.

Force est de constater que moins de 7% de l'ensemble des interventions du professeur visent à amener les élèves à procéder à la recherche, à la formulation et à l'organisation autonome des connaissances (GRF). Parmi ces interventions, on note P_{28} qui constitue la seule intervention du professeur où il met l'accent sur la nature des suites divergentes dont la limite n'est pas

infinie et qui n'ont pas fait l'objet de traitement particulier dans le projet d'enseignement. Toutefois, cette intervention n'a pas été accompagnée d'une investigation profonde et est restée en suspens :

40 Nada : Toutes les suites ont des limites ?

P_{28} : Tu veux dire si elles sont convergentes ? Est ce $(-1)^n$ admet une limite pour toi ?

41 Nada : On prend n pair et n impair, donc elle admet...

P_{29} : Tu verras plus clair à la fin de la séance...

A la lumière de cette séquence, nous pouvons d'ores et déjà prévoir le développement d'une image accumulation algorithmique, dans le sens où ce n'est plus le rapprochement dynamique qui conditionne cette image mais plutôt le canevas de calcul algébrique auquel les élèves ont été entraînés ! Plus précisément, dans le cas où la suite est définie par deux expressions ou plus, il suffit alors de calculer la limite pour chacune des expressions puis conclure en invoquant comme "limite" les résultats de ce calcul. Dans ces conditions, la suite $(-1)^n$ aurait pour "limite" 1 et -1.

Enfin, plus de 30% des interventions relatives à la gestion de la validation restreignent le travail de validation à l'argumentation standardisée en demeurant dans un même registre (GV₂). Plus précisément, le registre en jeu est soit algébrique, soit formel et dans certains cas rhétorique. Parmi ces interventions, nous retenons celle qui pointe la dépendance entre ε et N P_{37} "A chaque fois que epsilon change... l'ordre change aussi..." et celle qui verbalise une image statique de la convergence de suite P_{27} "Pour tout epsilon, les termes u_n vont se trouver dans un intervalle de rayon ε centré en L , à partir d'un certain ordre...seulement un nombre finis de termes reste à l'extérieur de cet intervalle...". Ces images ont été déjà identifiées dans la littérature comme étant une interprétation fidèle de la convergence et d'un grand apport dans la résolution de problèmes. Toutefois, le fait de se limiter à l'énoncer sans investigation ni mise en application sur des exemples, écarte un apport significatif dans le processus de conceptualisation. Plus de 50% des interventions de validation portent sur des déclarations sur le concept de suite, de limites de suites et leurs propriétés (GV₁). En particulier, ces déclarations énoncent les définitions relatives aux limites finies et infinies de suites ainsi que les théorèmes de comparaison et d'opérations sur ces limites. D'un autre côté, un peu plus de 20% des interventions relatives à la validation ont pour objectif d'amener les élèves à argumenter par formulation/explicitation en changeant de registre (GV₃). Nous soulignons en particulier l'intervention P_{12} qui explicite un changement de registre graphique/numérique :

P_{12} : Ils sont si proches que sur le graphique...on a l'impression qu'ils se superposent...on va continuer par le calcul...

24 Nada : les valeurs s'approchent de plus en plus de $\sqrt{3}$...

Cette intervention aurait pu constituer une première occasion pour expliciter ce qui est entendu par *approche*, et pointer le fait que l'erreur (ou la précision), qui va jouer le rôle de ε conditionne la nature du "rapprochement". Un peu plus loin, l'intervention P_{26} (en montrant sur le graphique déjà reproduit sur le tableau) "...c'est la première fois qu'on utilise

epsilon...il désigne toujours un réel infiniment petit...quand on change epsilon on le prend de plus en plus petit...vous remarquez que l'ordre n change..." permet une visualisation du lien, ordonné, existant entre ε et N . L'usage d'un réel infiniment petit est explicité dans ce cas de figure dans la représentation graphique via la considération de réels strictement positifs de plus en plus petits (*proches de 0*).

D'un point de vue global, l'usage de la grille d'analyse a permis d'illustrer les particularités des pratiques du professeur conformément au modèle que nous avons adopté, ceci pourrait être transversal à toute notion mathématique qui constituerait un objet d'enseignement. Dans le cadre de cette étude, environ deux tiers de ces interventions sont partagées entre celles qui abrègent le travail des élèves ou l'appauvrissent via le découpage des tâches, et celles qui énoncent simplement les résultats généraux du cours et les utilisent pour étudier algébriquement les limites de suites. En particulier, la situation d'introduction de la convergence a été complètement déconnectée de la définition formelle qui a son tour, a été simplement énoncée.

2. Travail des élèves et développement de leurs images

Nous avons enregistré 173 interventions des élèves dont 15 ont été jugées stériles. Sur les 158 interventions retenues, nous avons dénombré 74 (soit 47%) interventions relatives au travail de recherche et de formulation, et 84 (soit 53%) interventions relatives au travail de validation. Les interventions des élèves sont généralement courtes, locales et se produisent le plus souvent pour répondre aux questions posées par le professeur, moins souvent, pour discuter des suggestions des pairs et à des rares occasions pour formuler des questionnements relatifs à la notion en jeu. Bien que les interventions des élèves se réduisent à des phrases inachevées, et que leur discours porte beaucoup d'implicite, on a pu déceler certaines informations concernant le développement de leurs images en aval de la convergence.

Travail Recherche & Formulation			Travail Validation		
TRF ₁	TRF ₂	TRF ₃	TV ₁	TV ₂	TV ₃
18	55	1	17	63	4

Tableau 12 : Situations de classes/Interventions des élèves

Parmi les interventions relatives au travail de recherche et de formulation, nous notons qu'un peu moins que 30% porte sur la formulation de questions concernant la notion de suite, de limite d'une suite et leurs propriétés, et avec la même prépondérance, les techniques qui s'y rattachent (TRF₁). En particulier, les interventions E₄₂, E₄₃ et E₄₄ montrent clairement que les élèves sont plongés dans une approche dynamique de la convergence, sous-tendue par des conceptions telles que *ne peut être dépassée*, *d'un seul côté* (reliée à la monotonie), etc. :

42 Wiem : ...converge veut dire tend...

P₃₀ : Oui s'approche...

43 Ahmed : Des deux côtés...

44 Abderraouf : *D'un seul côté...*

Dans la séquence qui suit, l'intervention E₄₈ souligne la difficulté des élèves à concevoir la convergence formelle ainsi que les incertitudes qui accompagnent les argumentations du professeur :

48 Sarah : *Je n'ai pas compris la définition de convergente...ça veut dire quoi $|u_n - L| < \varepsilon$?*

P₃₆ (au tableau) : *[Représente un intervalle centré en L de rayon ε]*

P₃₇ : *A chaque fois que epsilon change... l'ordre change aussi...*

49 Sarah : *Euh ...Je pensais que le ε était constant...*

Les interventions des élèves concernant des questions relatives aux techniques et procédures en jeu, sont dans leurs majorités algorithmiques développées dans un registre algébrique. Tel est le cas des interventions 78 Wiem "*Est-ce qu'on peut appliquer ce résultat ?*" et 129 Wiem "*On va revenir aux fonctions comme pour la limite finie...*" où leur acharnement à replonger dans des méthodes algébriques témoigne de la non maîtrise du sens des objets qu'ils manipulent.

Par ailleurs, plus de 70% des interventions relatives à la recherche et la formulation concernent l'expression spontanée de connaissances (TRF₂). Celles qui mettent l'accent sur la nature des images des élèves et leurs développement durant la résolution de la première situation et au cours de l'introduction de la définition de convergence sont dominantes. C'est le cas par exemple de l'intervention 34 Wiem "*C'est un intervalle centré en a de largeur α ...*" qui montre la difficulté de saisir le sens de la métrique de l'ensemble des réels supportée par la notion de valeur absolue. Or, sans un retour profond sur cette question, on ne peut espérer le développement d'images robustes de la convergence en termes d'intervalles ouverts, voire de voisinages. Parmi ces interventions, certaines reflètent une image approximation de la convergence soutenue par un travail dans un registre numérique telles que :

11 Hedi : *Les valeurs deviennent de plus en plus proches...les unes des autres...
[Parlant des termes de la suite d'indices de plus en plus grands]*

12 Wiem : *Au départ non mais après oui...*

En règle quasi générale, avant et durant l'introduction de la définition de convergence, les élèves développent une approche dynamique de la convergence via une image asymptotique ou encore d'approximation sous-tendues par des conceptions telles que *sans jamais l'atteindre, ne la dépassant pas*, etc. Au cours de ces interventions, nous ne notons aucune prise en charge par le professeur du développement de telles images, tel qu'apparaissant dans les échanges ci-dessous :

24 Nada : *les valeurs s'approchent de plus en plus de $\sqrt{3}$...* [Parlant des termes de la suite d'indices de plus en plus grands]

25 Hedi : *Sans jamais l'atteindre...*

26 Jed : *Bien sûr c'est la limite...*

27 Nada : *Oui c'est la limite...*

Le choix de ne retenir au niveau institutionnel de la divergence que les limites infinies, a induit de la part des élèves, des formulations qui concernent le rôle de l'unicité dans l'étude de la divergence d'une suite sans qu'elles ne soient commentées par le professeur :

45 Abdessalem : *Toujours unique, même si la limite n'est pas finie ?*

46 Wiem : *Oui...elle est unique !*

47 Belkir : *Donc une suite qui ne converge pas sa limite est $+\infty$ ou bien $-\infty$...*

L'intervention ci-dessus de 49 Sarah "*Euh ...Je pensais que le ε était constant...*" met en évidence l'apparition d'images statiques qui renvoient aux difficultés du formalisme et de son usage. La gestion minimaliste du professeur ne permet pas d'attester d'un potentiel changement dans la manière avec laquelle les élèves conçoivent ce formalisme et son usage.

Nous retrouvons aussi parmi ces interventions celles qui sont formulées à l'issue de l'introduction de la définition de convergence et qui renvoient à une image asymptotique, activée en vertu des connaissances relatives à la limite finie de fonction en $+\infty$. Tel est le cas, par exemple, de l'intervention E₅₀ :

P₃₉ : *Que veut dire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$?*

50 Wiem : *Asymptote horizontale d'équation $y = a$...*

D'un autre côté, les interventions des élèves qui énoncent la définition formelle ne reflètent pas un niveau de conceptualisation conséquent, elles sont formulées à la demande du professeur.

Environ 20% des interventions relatives à la validation consistent à indiquer des procédures et/ou des techniques de résolution (TV₁). Ces procédures sont le plus souvent algébriques utilisant les techniques d'encadrement et les résultats généraux concernant les opérations sur les limites de suites. Pareillement en ce qui concerne les interventions relatives à un calcul de validation (TV₂), celles-ci sont majoritairement algébriques et représentent plus de 40% de l'ensemble de toutes les interventions des élèves. Elles traduisent une image algorithmique de la convergence. Les interventions de validation dans les registres numérique et graphique sont très rares et ne nous permettent pas de détecter des éléments permettant de cerner le processus de conceptualisation de la convergence, en raison de l'automatisme qui a régi le travail qui les a accompagnées.

Notons enfin, que seules 4 interventions de type validation sont relatives à la discussion de modèles de validation proposés par les pairs ou le professeur (TV₃). La plus significative du point de vue de cette étude est celle de E₇₇ :

77. Wiem : *Dans la définition on a...il existe N , $N \geq n_0$ [Discutant l'approche du professeur de considérer N comme étant un entier naturel]*

P₇₈ : *Dans la définition la suite (u_n) était définie pour $n \geq n_0$...mais dans cet exercice la suite est définie dans tout $\mathbb{N}$...*

Cette séquence montre une approche purement algébrique de la convergence formelle la réduisant à une suite d'ostensifs introduits selon un ordre bien déterminé. D'autre part, l'intervention E₁₄₆ suivie du commentaire expéditif du professeur est significative de la suprématie de l'autorité algorithmique imposée dans ce cours :

146 Nada : *On ne fait pas la démonstration ? [Concernant le résultat général admis relatif à la limite de l'inverse d'une suite ayant une limite infinie]*

P₁₃₉ : *1 sur l'infini c'est zéro...*

Le découpage des interventions des élèves en fonction des différents critères de la grille d'analyse a permis de souligner que plus des deux tiers de ces interventions sont relatives à l'expression spontanée de connaissances spécifiques aux procédés algébriques de calcul, et à l'usage des ces procéder pour valider le calcul des limites de suites. Dans de telles conditions, il n'est pas possible d'aspirer à un changement ou à une évolution conséquente de leurs images concernant la convergence de suite.

5. Conclusion : Quelle possibilité pour le développement des images a posteriori ?

A ce stade de l'étude, il est possible de prévoir globalement la question du développement d'images en aval de la convergence formelle tout en étant contraint par les choix institutionnels. Le recours au résultat général concernant l'étude de la limite d'une suite via la technique sur les fonctions ainsi que l'usage abusif de la part du professeur d'expressions telles que *s'approche de*, *infiniment petit*, *intervalle centré en*, etc., sans qu'une transposition plus formalisée n'en soit effectuée, ont activé chez les élèves une approche dynamique de la notion de limite de suite. Cette approche est dominante, elle est fondamentalement issue du répertoire des élèves concernant la limite finie d'une fonction à l'infini. Les images de type dynamique sont sous-tendues par des conceptions telles que *sans jamais atteindre*, *ne dépassant pas*, *d'un seul côté* (reliée à la monotonie), etc., elles sont soutenues par un travail dans le registre graphique ou numérique et montrent clairement la résistance des images asymptotique et approximation. De plus, le caractère prototypique des exemples ainsi que la pauvreté des contre-exemples énoncés par le professeur suite aux questionnements des élèves, ont renforcé l'ancrage de l'approche dynamique de la convergence de suite. Par ailleurs, la mise en avant d'une multitude de procédures d'étude des limites de suites basées sur les comparaisons et les opérations, ont marqué un abandon quasi organisé de la définition formelle au profit d'une approche mixte via une image algorithmique qui devient de fait le moyen incontournable pour traiter les questions de limites dans un registre exclusivement algébrique. En outre, la restriction de l'étude des suites divergentes à celles admettant une limite infinie a favorisé la verbalisation d'une image algorithmique pouvant donner naissance au développement du cluster point image, selon lequel l'étude de la convergence d'une suite définie par deux expression (ou plus) renvoie à l'étude de ses points d'accumulation. Cette restriction de l'étude de la divergence a de plus généré des conceptions telles que toute suite divergente admet une limite infinie.

L'exploitation de la définition de la convergence n'intervient que dans la démonstration des théorèmes sous le contrôle stricto-sensu du professeur : sa manipulation est strictement réservée au professeur. Ce dernier a à sa charge d'abrégé toute tentative de référer à des suites ayant plus qu'un point d'accumulation (telle que l'exemple soulevé pour $(-1)^n$), dans le cas où ceci se produit, l'unicité lui sert d'argument pour arrêter d'en débattre. Or, derrière l'argument d'unicité se cache le critère de divergence via les sous-suites paire et impaire. La verbalisation dans un langage rhétorique d'images statiques, par le professeur, identifiées dans la littérature comme significatives de la conceptualisation et les plus performantes dans la résolution de problèmes, est restée sans aucune suite du côté des élèves. Finalement, le professeur a à sa charge de réduire l'étude des limites de suites à l'application d'opérations algébriques sans qu'aucune réelle signification ne puisse être donnée à la notion de limite qu'elle soit finie, ou qu'elle soit infinie.

Les résultats de cette étude seront exploités pour étudier d'une manière fine l'évolution du travail des élèves concernant la notion de convergence de suite et les difficultés qu'un tel travail engendre (Cf. Chapitre 3).

Conclusion : Flexibilité du modèle méthodologique d'analyse de séances de classe ?

La mise en place de l'outil méthodologique d'analyse des séances de classes ordinaires a été pensée en vertu de critères qui prennent en compte divers exemples paradigmatiques de contrats didactiques (Brousseau, 1996). L'appui sur la structuration des milieux a de plus conduit à structurer ces critères de sorte qu'ils permettent d'étudier les potentialités didactiques portées par les séances de classe en question.

Dans les deux cas expérimentaux, l'usage de cet outil a permis d'analyser les résultats des transcriptions des séances de classes selon deux points de vue :

- Le point de vue global illustre les particularités potentiellement génériques de la gestion du professeur, ceci étant transversal à toute notion mathématique qui constituerait un objet de recherche. Ces particularités sont ensuite analysées du point de vue de leur impact sur l'apprentissage.
- Le point de vue local spécifie les choix de gestion du professeur en fonction de la problématique étudiée (relative au savoir en jeu) ainsi que leur implication potentielle dans l'évolution du travail des élèves et dans sa nature.

La dimension d'analyse locale ne peut être entreprise sans un ajustement préalable des critères d'analyse en fonction de la problématique étudiée. Cet ajustement a nécessairement porté sur une interprétation précise de ces critères afin de mieux spécifier la problématique en jeu. Dans le cadre des situations relatives à l'introduction de la convergence des suites en fin de lycée en tenant en compte la problématique des images construites par les élèves, ces régulations ont touché des critères d'analyse aussi bien relatifs à la gestion du professeur qu'au travail des élèves :

- Dans la gestion du professeur, les dimensions d'analyse relatives aux interactions et à la recherche/formulation ont particulièrement souligné dans : 1) GI2, le fait que l'organisation des connaissances matérialise l'organisation des images auxquelles elles renvoient ; 2) GRF2, le fait que la formulation attendue se traduit par une verbalisation permettant de mettre en exergue des images, en l'occurrence conflictuelles, etc.).
- Dans le travail des élèves, l'expression spontanée des connaissances (TRF2) est fondamentalement entendu en termes de verbalisation des images qui y réfèrent ; les connaissances peuvent de ce point de vue être inadaptées, incomplètes, contradictoires, etc.

Les régulations qui ont pu être apportées à cet outil préservent sa cohérence globale et rend compte de sa flexibilité à s'adapter aux problématiques étudiées. Dans un travail de master que nous avons encadré concernant la gestion par le professeur des phénomènes relatifs au

processus de validation dans la transition vers le collège, les analyses des dimensions de validation aussi bien du côté du professeur que dans le travail des élèves ont été enrichies par les travaux de Toulmin (1958) qui étudient la complexité de ce processus en prenant en compte la question du support utilisé pour l'enclencher. Dans le cadre de ce travail, ces supports portent sur la manière avec laquelle les diverses appréhensions du rôle de la figure pour justifier. Dans cet ordre d'idée, les critères GV3 (relatif à l'argumentation par formulation/explicitation du côté du professeur) et TV2 (relatif au travail de validation du côté des élèves) ont été alimentés par des indicateurs qui renvoient aux supports mis en jeu et à leurs origines. L'usage récent de cet outil pour analyser des séances de classe à l'université concernant l'enseignement de la notion d'intégrale rend compte des mêmes potentialités.

Dans tous les cas de figure, l'appui sur les résultats de l'analyse des organisations mathématiques suivant le modèle des variables macro-didactiques a permis de cerner d'une manière précise les éléments à prendre en compte dans l'analyse a priori du projet d'enseignement objet des séances visées. Les résultats des analyses des séances de classe vont à leur tour constituer une base de données pour étudier l'évolution du travail des élèves et les difficultés que génère ce travail contraint par les choix institutionnels (Cf. Chapitre 3).

CHAPITRE 3 : VERS DES INGENIERIES DIDACTIQUES DE DEVELOPPEMENT - UN APPUI SUR LES ETUDES MACRO ET MICRO DIDACTIQUES

Introduction : Une nécessité de prise en compte du potentiellement réalisable

Quand on se donne comme objectif de recherche celui d'élaborer et d'expérimenter une ingénierie didactique dans le cadre de la TSD, on se pose la question d'une éventuelle résistance de l'enseignement ordinaire dès qu'on ambitionne de diffuser pour l'action les résultats d'une telle recherche.

La question de la façon avec laquelle la notion d'ingénierie didactique a influencé le champ de recherche en didactique des mathématiques ne se pose plus. Le processus d'élaboration et d'expérimentation de ces ingénieries ainsi que la confrontation à la contingence, ont servi de base pour discuter la consistance du modèle théorique et pour avancer dans le perfectionnement de la théorie et des critères expérimentaux.

L'ingénierie didactique a longtemps été associée à la TSD notamment dans sa dimension épistémologique qui s'exprime en termes de situation fondamentale, mais aussi dans sa dimension de contrôle à travers l'analyse a priori dont le rôle est principalement celui d'organiser un milieu à fort potentiel adidactique. En même temps que se posait la question de la diffusion des situations construites dans le cadre de ces ingénieries, un réajustement théorique soulignait la nécessité de donner plus de place au professeur à tous les niveaux du milieu notamment quand il s'agit de viser des objets mathématiques avancés. Les résultats des études des classes ordinaires et des pratiques enseignantes en général ont, de leur côté, été décisifs pour réfléchir sur la question de la diffusion des ingénieries en vue de l'action didactique. Néanmoins, aucun travail de théorisation explicite d'ingénierie didactique pensée dans le cadre de l'action didactique n'a été réellement entrepris ; ce qui a pour conséquence :

- "1. Une ingénierie didactique moins dominante mais toujours privilégiée lorsqu'il s'agit d'explorer de nouvelles formes de vie didactiques.*
- 2. Une méthodologie aux contours plus flous en dépit de l'existence d'un certain nombre d'invariants, en particulier :*
 - la même sensibilité épistémologique, qu'elle s'exprime ou non en termes de situation fondamentale.*
 - la même importance accordée à la construction des tâches, le même souci d'organiser un milieu offrant un fort potentiel adidactique.*
 - la même structure globale avec le rôle clef joué par l'analyse a priori et la même vision interne des processus de validation.*
- 3. Une méthodologie qui s'appuie sur une vision plus flexible du partage des responsabilités dans la classe entre professeurs et élèves, ceci engageant les rapports entre adidactique et didactique, ainsi que les attentes en termes d'analyse a priori.*

4. Une méthodologie qui reste une méthodologie de recherche et n'a pas su donner naissance à des outils performants d'action didactique. " (Artigue, Conférences 2009 & 2016)⁴

L'ingénierie didactique que nous avons conçue dans la transition lycée/université, élaborée et expérimentée dans le cadre de la TSD, souligne une prise en compte de ce qui semble potentiellement réalisable dans l'action notamment en donnant un rôle particulier aux résultats de l'exploration du terrain institutionnel. Deux éléments essentiels sont pris en compte pour l'élaboration de telles ingénieries :

- Une étude des conditions ordinaires de l'enseignement par rapport à (aux) objet(s) mathématique(s) visé(s). Ce qui en est attendu, en particulier, c'est une meilleure définition du travail possible des élèves/étudiants dans des conditions classiques pour cerner de façon plus précise l'espace qu'il reste à investir dans une ingénierie et surtout le partage des responsabilités mathématiques et ce qui peut être dévolu aux élèves/étudiants. Nous pouvons aussi avancer une motivation, non moins importante : celle de l'adhésion possible des professeurs aux choix fondamentaux (issus d'une réflexion préalable principalement épistémologique/mathématique) des situations prévues. Ceci sous entend que le contrôle théorique (via la TSD) de ces choix n'est pas négociable, mais ce contrôle pourrait se transmettre, notamment en formation des enseignants⁵.
- La présence d'un milieu expérimental potentiellement adidactique est essentielle dans la théorie notamment en ce qui concerne la définition du partage des responsabilités mathématiques entre professeur et élèves/étudiants. Néanmoins, on peut être amené à prévoir : 1) les possibilités d'adaptation et les moyens de piloter les connaissances des élèves/étudiants, et 2) une plus grande liberté, toutefois contrôlée avec des caractéristiques explicites, peut être attribuée au rôle du professeur.

Dans tous les cas, les résultats soulignent la nécessité, pour la reproductibilité des situations didactiques, de réinterroger le rôle du professeur et celui des choix institutionnels dans les étapes de conception de ces ingénieries. Ceci, ne peut davantage être discuté avec l'évidence d'une absence de prise en charge théorique appropriée de l'action didactique.

Dans ce chapitre, nous exposons dans une première partie les résultats de l'ingénierie que nous avons conçue dans la transition lycée/université dans le cadre de l'enseignement de l'analyse. Dans une deuxième partie, nous exposons l'avancement des travaux de thèses sur deux ingénieries en cours, que nous co-encadrons, concernant l'introduction en fin du lycée des notions de convergence de suites et de nombres complexes. L'objectif ultime de ces

⁴ Dans le cadre des conférences plénières faites par Michèle Artigue à la XV^e EEDM et à ICME13 donnant lieu respectivement à un article publié dans les actes d'EEDM en 2011 et la diffusion de la conférence d'ICME sur le net <https://lecture2go.uni-hamburg.de/l2go/-/get/v/19763>

⁵ Vaste sujet que nous n'envisageons pas de traiter dans cette note de synthèse.

travaux est celui d'investiguer la question de la prise en charge théorique de l'action didactique.

I. D'un questionnement épistémologique d'existence formelle à la validité des études macro et micro pour penser une ingénierie en analyse à l'entrée à l'université

1. Introduction

L'étude macro-didactique que nous avons faite dans la transition lycée/université en analyse souligne les modifications majeures qui devraient accompagner le travail des étudiants à l'entrée à l'université. A l'instar de plusieurs travaux qui étudient le développement cognitif à la charnière lycée/université (Praslon, 2000 ; Tall, & Mejia-Ramos, 2006 ; Chellougui, 2009 ; Bergé, 2010 ; Vandebrouk, 2011, González-Martín et al., 2011, etc.), nous avons pu mettre en évidence les exigences de flexibilité requises dans le travail des étudiants : mise en œuvre de plusieurs registres de représentations sémiotiques ; mise en fonctionnement de plusieurs niveaux des connaissances (la disponibilité de ces connaissances étant le niveau habituellement exigible à l'entrée à l'université) ; transition "efficace" entre les dimensions intuitive (incarnée sur la base d'expérimentations nouvelles et plus anciennes), proceptuelle (dualité processus-objet) et formelle des notions de l'analyse, etc.. Nous avons tablé sur la modélisation préalable de l'organisation mathématique en jeu à travers des praxéologies mathématiques. L'usage de la modélisation praxéologique dans certains travaux, a de plus permis de pointer essentiellement la prédominance du bloc théorique dans les praxéologies de début d'université (Bosch et al., 2004 ; Winslow, 2008 ; Diaz et al., 2008, etc.). Dans tous les cas, l'existence formellement établie des objets de l'analyse réelle est souvent invoquée pour investiguer les difficultés que pourraient engendrer, dans le travail des étudiants, ces nouvelles attentes. Le lien entre nombres réels et limite cristallise à son tour d'une manière fondamentale cette existence, et ceci qu'il s'agisse de l'existence d'une borne supérieure, d'une limite (convergence d'une suite), d'une suite (densité de Q dans R ou théorème de Bolzano-Weierstrass par exemple), d'une valeur intermédiaire, d'un point fixe, d'un nombre dérivé (théorème des accroissements finis, théorème de Rolle ou formule de Taylor par exemple) ou encore d'un infinitésimal (reste intégral ou un équivalent d'une fonction par exemple).

Par conséquent, dans une problématique de type recherche d'une progression de situations de l'analyse réelle à l'entrée à l'université, l'un des enjeux est celui de convaincre les étudiants qu'il est possible d'explicitier et de donner plus de visibilité à ces objets. L'approfondissement et la reprise du travail sur les nombres réels, ainsi que l'élargissement du champ d'expérience des étudiants relativement à la nature des nombres réels et à leur manifestation constituent donc un second enjeu incontournable d'une telle progression. Le questionnement que nous posons globalement est le suivant : Dans quelle(s) mesure(s), un travail d'investigation

numérique sur nombres réels et limite permettrait-il de réintroduire d'une manière consistante du point de vue de l'apprentissage, un ensemble d'objets constitutifs de l'analyse réelle à l'entrée à l'université ? Nous plaçons d'emblée l'étude investiguant un tel questionnement dans le cadre de référence de la Théorie des Situations Didactiques (Bloch, 2002 ; González-Martín et al., 2014). La question de la recherche d'une dimension d'expérience dans le travail des étudiants est de ce fait posée d'un double point de vue : celui des composantes souhaitables pour la construction d'un milieu théorique de la progression de situations envisagée (d'un point de vue essentiellement épistémologique), ainsi que celui du rôle de la classe - y compris du professeur, conçu sur la base des différents niveaux d'un milieu expérimental a priori. L'étude locale des situations de classe d'analyse à l'entrée à l'université, a de plus permis d'identifier un certain nombre d'éléments qui ont mis en défaut un partage conséquent des responsabilités entre étudiants et professeur en analyse. Ces éléments seront pris en considération pour la construction du milieu expérimental des situations de l'ingénierie. Dans le cadre de ce que nous présentons ici, notre réflexion sera essentiellement portée sur les conditions d'élaboration des situations plutôt que sur les modalités d'expérimentation⁶. Plus précisément, nous étudions les potentialités d'un milieu théorique fondé sur les méthodes numériques d'approximation, pour engager les étudiants dans une phase de travail expérimental leur permettant de retourner efficacement sur un système cohérent d'objets de l'analyse. Nous décrivons succinctement comment l'entrée dans un processus de preuves mixtes – pragmatiques vs formelles – a été rendu obligatoire dans le travail des étudiants, à travers l'émergence du problème général de l'existence et de l'accessibilité des nombres, des limites et des suites.

2. Les méthodes numériques : une place de choix dictée par le cadre de référence de la TSD

La construction du milieu théorique de la progression envisagée stipule à un premier niveau de réintroduire des questionnements d'ordre épistémologique et/ou mathématique. Ce niveau d'étude devra permettre de définir un schéma théorique modélisant les principales caractéristiques d'une organisation de l'analyse réelle, qui prenne appui sur le lien entre nombres réels et limite afin de revisiter le réseau des objets de base de l'analyse standard (Convergence de suite, densité de Q dans R , segments emboîtés, borne supérieure, valeur intermédiaire, accroissements finis/Rolle, point fixe, formule de Taylor).

Il est largement reconnu que l'organisation mathématique en analyse réelle telle qu'introduite à l'entrée à l'université a complètement supplanté les préoccupations épistémologiques liées à la construction des nombres réels. Or, il est aussi amplement connu que la théorie de l'analyse standard s'est stabilisée à l'issue de la construction rigoureuse de l'ensemble des réels et de la mise en place des propriétés topologiques des réels, qui constituent un fondement théorique

⁶ Ces modalités sont largement détaillées dans Ghedamsi (2008).

des savoirs sur suite, limite et fonction. Par conséquent, avoir un niveau de signification suffisant des objets de base de l'analyse réelle suppose que l'on ait acquis le sens de l'adage "*approcher, majorer, minorer*" (Dieudonné, 1980), et qu'on ait établi le lien avec le formalisme que requiert l'existence des nombres réels. Finalement, la préoccupation ultime est celle de se donner les moyens d'investiguer la question de Cauchy de ce qu'est un nombre réel et de ce que ces nombres entretiennent comme relations avec les objets qui fondent la base de l'analyse standard. Toutes ces considérations nous portent à choisir de ne pas évacuer le problème du numérique (et/ou de l'approximation) et de la structure de $\mathbb{R}$, mais de le mettre au cœur des problèmes mathématiques et des situations qui doivent être travaillées par les étudiants.

L'évolution historique de la conception des nombres est accompagnée par la genèse et le développement des méthodes numériques d'approximation successive. A travers l'histoire, l'usage de ces méthodes a porté en germe un travail avec les objets de base de l'analyse énoncés ci-dessus ; les questions relatives aux notions de suite et fonction dérivent de l'idée d'approximation et de la nature des nombres réels/limite. Ces méthodes ont très longtemps manqué de bases solides pour la validation qui demeurait imprécise, et aucun progrès significatif ne s'est fait avant le XIX^e siècle, un siècle qui marque l'entrée dans l'ère de la formalisation de la notion de nombre (Dieudonné, 1978 ; Hairer, & Wanner, 2000). Finalement, le recours aux méthodes numériques d'approximation permet de mettre en œuvre un système satisfaisant des objets de l'analyse, de faire apparaître sa cohérence et de rendre accessible ses objets, dont l'existence théorique n'est pas forcément "constructible". L'étude de nature épistémologique et mathématique concernant le développement de différentes méthodes d'approximations dans leur lien avec l'évolution de la conception de nombre (Ghedamsi, 2008), nous a permis de préciser un modèle théorique de situations engendrant, dans la mesure du possible, un ensemble satisfaisant de problèmes spécifiques des nombres réels dans leurs relations avec les notions de limite, suite et fonction. Parmi les caractéristiques de ce modèle, nous citons : 1) concevoir la nature des nombres (distinguer entre rationnel, irrationnel algébrique, irrationnel transcendant) ; 2) faire une hypothèse et la valider sur la possibilité de construire une suite approchant un nombre ; 3) calculer des valeurs approchées d'irrationnels (par exemple solution d'une équation non résoluble par l'usage des techniques algébriques à disposition) avec une approximation arbitrairement fixée ; 4) construire une suite convergeant vers un réel et contrôler la rapidité de la convergence (exhiber une approximation d'un réel, contrôler l'erreur dans les termes de la suite) ; 5) contrôler la validité des résultats numériques (les relier aux définitions et théorèmes déjà introduits). Ces caractéristiques sont partagées par nombre de recherches en didactique des mathématiques.

La question se pose des moyens qui favoriseraient l'engagement des étudiants dans de telles situations à travers une phase expérimentale permettant : d'une part, un travail heuristique sur

des objets spécifiques, avec des preuves pragmatiques et des opportunités de conjectures, de calculs, etc., et d'autre part, un retour au formalisme dans un milieu de référence (de validation) informé par le milieu objectif (et/ou d'action) précédemment visité. Dans ce qui suit, nous explicitons succinctement comment le recours aux méthodes numériques permet d'organiser de telles situations dans les conditions susmentionnées. Dans le cadre de ce travail, les méthodes qui nous sont apparues comme les plus riches en possibilités didactiques sont celles des fractions continues, introduites historiquement par Théon de Smyrne et la méthode de Newton, qui du fait de leur histoire complexe, tant au niveau des motivations intrinsèques qu'au niveau des questions futures qu'a provoqué l'usage implicite de savoirs, s'énoncent à l'origine comme pragmatiques et imprécises mais suscitant de plus en plus de rigueur. C'est en grande partie sur la densité de Q dans R , la convergence des suites, les segments emboîtés, la valeur intermédiaire, le point fixe, les accroissements finis, Rolle et la formule de Taylor, ayant historiquement manqué longtemps de base théorique précise, que se fondent ces méthodes. Nous anticipons de la part des étudiants des va et vient entre des manques théoriques restés longtemps inaperçus et la rigueur de l'édifice final tel qu'il est enseigné actuellement.

Au moins deux paramètres sont à prendre en considération afin d'introduire un milieu d'expérience des objets de l'analyse tels que nous le visons : 1) le milieu disponible pour la dévolution doit permettre la manipulation d'une variété d'ostensifs (graphiques, géométriques, numériques) de nombres, suites et fonctions. De plus, on peut s'attendre à ce qu'un registre donne lieu à une manipulation d'ostensifs d'un autre registre ; ceci sous-entend que les réponses ne devraient pas être données dans un contrat d'ostension. Les tâches d'action et de formulation sollicitées devraient amener les étudiants à questionner les savoirs institutionnels de l'analyse réelle et les exemplifier. La richesse des questions que peut susciter le problème d'approximation et les objets auxquels réfèrent ces questions, peut mettre les étudiants sur la voie de la validation pragmatique/sémantique, déclencher leurs intuitions et les confronter (dans un milieu de référence conçu à cette fin) à des savoirs qu'ils ont reçus sans dimension d'expérience. Dans ces conditions, le milieu objectif pourrait a priori, aussi bien être un milieu graphique, géométrique ou numérique. Bien entendu, ceci n'empêche pas le fait que les étudiants pourraient recourir à des ostensifs algébriques ou analytiques au cours de leurs investigations ; 2) à la suite d'investigations sur les nombres, le milieu de référence (particulièrement algébrique et analytique) est supposé mettre à défaut le recours à une application "automatique" des définitions, théorèmes et formalisme du cours. Nous attendons que les étudiants, au cours de leur contact direct avec les nombres, développent des évidences sous forme d'intuitions fondées graphiquement, géométriquement, numériquement ou autre. Nous attendons aussi qu'ils soient en mesure de conforter ces évidences en les confrontant aux objets de l'analyse visés dont l'existence a été formellement introduite, et réciproquement. Encore faut-il que le milieu de référence, censé permettre de formuler des

preuves à l'aide des règles du calcul formel, puisse favoriser ce phénomène, et ce surtout s'il ne fait pas explicitement référence aux nombres et aux approximations.

La question du contrôle par les étudiants de la validité des résultats empiriques (numériques ou autres) suppose d'exhiber un objet spécifique (générique ou non) et d'attester de son existence en le reliant à l'objet général qui lui est associé. Réciproquement, l'idée est aussi de conforter et d'interroger cette existence tout en gardant le contrôle pragmatique. Par exemple, dans le cas de la notion de valeur intermédiaire, l'idée intuitive est que toute fonction continue sur un intervalle ne peut prendre deux valeurs distinctes $f(a)$ et $f(b)$ sans prendre les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$ (le tracé d'une fonction continue sur un intervalle ne présente pas de trous). Mais alors, cela nous aura ouvert à d'autres affirmations (ou considérations intuitives) disant, par exemple : lorsqu'une fonction continue sur un intervalle prend deux valeurs opposées, elle prend nécessairement la valeur 0 en, au moins, un point de cet intervalle. De même, si on se donne à réfléchir sur la question (appuyée par les graphiques ci-dessous), de ce qui se passe dans le cas où f est discontinue (existe-t-il t compris entre $f(a)$ et $f(b)$ et qui n'est image d'aucun c compris entre a et b ?).

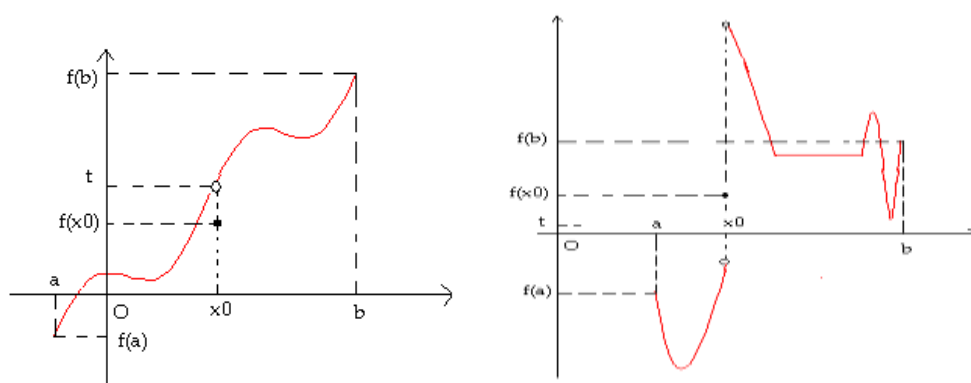


Figure 1 : Exemples de graphiques de fonctions

Posons- nous maintenant la question de ce qui se passe si on veut expliciter c . Cette question est légitime si on s'intéresse à la résolution de l'équation $f(c) = t$. Puis posons- nous la question plus générale de savoir traiter l'équation dans le cas où l'outil algébrique ne le permet plus. Ceci nous amène à la preuve du théorème des valeurs intermédiaires, preuve qui se fait à l'entrée à l'université en fonction de l'axiomatique choisie (borne supérieure, segments emboîtés, etc.). Se pose maintenant la question du rôle conceptuel de cette démonstration, en d'autres termes : à quel recours supplémentaire faudrait-il faire appel pour développer d'autres idées, affiner et/ou renforcer l'intuition ? Ceci du fait par exemple, que dans le cas où t admet plus qu'un antécédent, la preuve d'existence concernera "un seul terme c ", comment retrouver les autres ? Une source possible d'intuitions appropriées serait les approximations successives en l'occurrence au moyen de support graphique. Ce raisonnement s'applique aussi aux objets introduits dans le théorème des accroissements finis et le théorème

de Rolle. Dans tous les cas, l'appui sur le contenu conceptuel de la densité de Q dans R permettrait d'exhiber une suite de rationnels d'approximation des objets spécifiques en jeu en traduisant la convergence de la suite vers un nombre par : quelque soit l'erreur que l'on considère, on peut toujours trouver un ordre à partir duquel tous les termes de la suite sont des valeurs approchées de ce nombre à cette erreur près.

Dans la suite, nous décrivons succinctement un exemple d'une progression de deux situations que nous avons construites et expérimentées en nous fixant trois enjeux : 1) reprendre le travail sur les nombres réels, et élargir le champ d'expérience des étudiants relativement à la nature des nombres réels et à leurs manifestations de façon à ce que le savoir de base sur la structure de R devienne disponible et opérationnel ; 2) conduire les étudiants dans une phase expérimentale à un travail heuristique, permettant de développer un processus de preuves pragmatiques ; 3) amener les étudiants à saisir le lien entre expérience pragmatique et existence des objets de l'analyse réelle par le biais d'un aller/retour preuves pragmatiques/preuves formelles (pour plus de détails concernant les situations expérimentales, voir Bloch, & Ghedamsi, 2010 ; Ghedamsi, & Chellougui, 2013 ; González-Martín et al., 2014).

3. Construction/Expérimentation des situations

Les variables micro didactiques qui caractérisent le modèle théorique des situations sont au nombre de sept : nature du nombre (rationnel/irrationnel, algébrique, transcendant), nature de la suite, type de suite (explicite/récurrente), comportement de la suite (croissante, décroissante, etc.), types d'approximation et d'erreur, nature de l'équation en jeu, méthode d'approximation. Les valeurs données à ces variables sont conditionnées par l'objectif ultime qui concerne la problématisation par les étudiants de la nature des nombres et de leur lien avec la limite et les objets de base de l'analyse formellement introduits. Par exemple concernant la variable "nature du nombre", on écarte de prime abord le cas d'un rationnel ; le choix d'un transcendant défini implicitement comme solution d'équation permet de soulever les questionnements requis. Pareillement en ce qui concerne la variable "type de suite" si l'on veut bénéficier de l'avantage que représente le fait de pouvoir visualiser le processus d'approximation ; le choix des suites récurrentes se justifie par l'accessibilité et la clarté du procédé qui permet de les représenter, et afin de ne pas négliger les conditions sur le continu, il faudrait avoir le moyen de les représenter sur la droite réelle. Il est clair que pour la variable "comportement de la suite", le prototype de suites bien faites croissantes ou décroissantes est à éliminer. Dans ces conditions, les valeurs des variables macro-didactiques sont en évolution par rapport à l'enseignement secondaire car les étudiants sont plongés dans un milieu où la problématique et les moyens de résolution font appel à des connaissances générales de l'analyse réelle.

En regard de toutes les conditions auxquelles les valeurs des variables doivent être soumises, deux situations ont été retenues : 1) Antiphérèse de racine de 2, qui table sur la construction de la meilleure approximation rationnelle de $\sqrt{2}$ et, dans la mesure du possible, sa généralisation à certains irrationnels. La méthode utilisée est basée sur les fractions continues et a été introduite historiquement par Théon de Smyrne au temps d'Euclide ; 2) Point fixe de cosinus, qui prend appui sur une discussion de la qualité de l'approximation du point fixe de cosinus donnée par la méthode de dichotomie par comparaison à celle donnée par la méthode de Newton. Dans tous les cas, l'ingénierie prévue doit amener les étudiants à travailler sur la nature des nombres (rationnels, irrationnels, algébriques, transcendants), les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et l'approximation des réels non rationnels ; ceci dans la perspective plus large de revenir sur la réintroduction de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, la convergence d'une suite, la valeur intermédiaire, les segments emboîtés, les accroissements finis, le point fixe et les fonctions contractantes, la formule de Taylor.

3.1 Antiphérèse de racine de 2

La situation de l'antiphérèse vise à permettre aux étudiants de prendre appui sur le contenu conceptuel du théorème de densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ par le biais d'instanciations appropriées, ainsi que de mettre en œuvre et revenir sur un réseau de savoirs de l'analyse réelle dont les segments emboîtés et les accroissements finis. L'institutionnalisation prévue concerne des procédures et la méthode de construction d'une suite de rationnels qui converge vers un irrationnel de la forme $\sqrt{d}$, d un entier supérieur à 2, avec $d-1$ un carré parfait. L'organisation générale de la situation part de l'idée d'une instanciation de ce théorème d'existence via la recherche d'une suite rationnelle convergeant vers un irrationnel algébrique, de sorte que la construction d'une telle suite : 1) problématise la nature des nombres (différence entre rationnels/irrationnels, représentations numériques des nombres et lien avec les approximations successives, les limites, etc.) ; 2) soit une méthode généralisable à d'autres irrationnels algébriques de la même forme. Nous avons guidé l'introduction par un travail sur l'irrationalité inspiré du principe d'exhaustion s'appuyant sur la figure d'un triangle rectangle isocèle, utilisé par Euclide pour montrer l'incommensurabilité de la diagonale d'un carré. A condition de disposer de notations convenables, le procédé itératif appelé antiphérèse conduit à ce que l'on appelle aujourd'hui, le développement de $\sqrt{2}$ en fraction continue illimitée périodique. Plus précisément, dans le cas d'un entier $d \geq 2$ vérifiant les conditions requises, l'égalité $\sqrt{d} - \alpha = \frac{1}{\alpha + \sqrt{d}}$, où $\sqrt{d} - 1 = \alpha$ permet de donner le développement en fraction continue de $\sqrt{d} = \alpha + \frac{1}{2\alpha + \frac{1}{2\alpha + \frac{1}{2\alpha + \dots}}}$ et la suite des réduites de $\sqrt{d}$, obtenue en arrêtant à chaque fois le processus itératif à un ordre précis, n'est autre que la suite définie par $u_0 = \alpha, u_{n+1} = \alpha + \frac{1}{u_n + \alpha}$. Cette situation met en jeu des questions sur irrationalité, approximations,

construction, etc. et oblige les étudiants à confronter le fonctionnement du formalisme sur des objets spécifiques.

3.2 Le point fixe de cosinus

A côté des objectifs fixés à la situation de l'antiphérèse, celle du point fixe de cosinus vise de plus à amener les étudiants à un travail plus approfondi sur les nombres : différence entre rationnels / irrationnels (irrationnels algébriques, irrationnels transcendants), approximation des réels/limite, précision d'approximation, rapidité de convergence, etc. La méthode d'approximation que nous avons choisie est celle de Newton, issue d'une idée de ce dernier pour la résolution d'une équation algébrique du troisième degré. Elle est fondée sur l'idée de l'interprétation graphique d'une courbe approchée par sa tangente. Rappelons qu'à cette époque, l'énoncé du procédé était empirique. Aujourd'hui, on généralise le procédé de Newton à toute équation de la forme $g(x) = 0$ où g est une fonction de classe C^2 sur un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, et telle que l'équation possède une unique solution simple α ($g(\alpha) = 0$ et $g'(\alpha) \neq 0$) à l'intérieur de cet intervalle. La convergence vers α de la suite construite par la méthode de Newton résulte d'un choix conséquent de son premier terme. Nous avons orienté le travail de sorte que les étudiants : 1) procèdent à un premier contact graphique et numérique avec les idées qui fondent la méthode de Newton celles du rôle de la tangente, du rôle du premier terme, des conditions sur la fonction ; 2) fassent le lien entre les conditions de convergence et les outils de preuve de la convergence (en particulier l'usage de la formule de Taylor et ce que cet usage nécessite comme hypothèses aussi bien explicites qu'implicites et propres aux conditions de convergence de la suite). Cette situation a confronté les étudiants à la question de l'existence de la solution d'une équation non résoluble par les outils algébriques à disposition, et les a obligés à s'interroger sur la nature des nombres transcendants et le lien qu'ils entreprennent avec le formalisme de l'analyse.

4. Effet de l'ingénierie : Synthèse et discussion

Au terme des résultats des expérimentations, nous avons pu souligner la portée de travail des étudiants sur les situations expérimentées via trois points essentiels : 1) Saut conceptuel sur les nombres : le travail dans les situations a permis aux étudiants d'envisager les nombres réels avec leur statut d'objet mathématique. La focalisation sur les méthodes numériques d'approximations successives a favorisé un accès indirect à cet objet. Au final, les questions qui portaient au départ sur les nombres, concourent à l'émergence du problème général de l'accessibilité, et donc d'une réflexion métamathématique. Cette accessibilité est ce qui donne la clé d'un travail sur un réseau de savoirs de l'analyse réelle : densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, limite d'une suite, point fixe, segments emboîtés, valeurs intermédiaires, accroissements finis, formule de Taylor ; 2) Problématique existence/accessibilité : la question de l'existence des objets spécifiques permet, non seulement de dévoluer les situations, mais aussi de tirer le travail des étudiants vers la dimension pragmatique, ce qui les conduit à problématiser la

question d'existence des objets mathématiques. De ce fait, un travail de va et vient entre preuves pragmatiques et preuves formelles s'installe, favorisant l'émergence du lien entre la procédure de recherche (mise en œuvre dans le milieu objectif) et la preuve finalement établie ; 3) Lien entre variables didactiques et les modifications requises dans le travail des étudiants en analyse à l'entrée à l'université : les valeurs des variables didactiques (dont le modèle théorique est issu d'une réflexion épistémologique, comme nous l'avons signalé) contribuent, par l'intermédiaire d'un milieu mixte, à la prise en compte d'une évolution progressive dans travail des étudiants. Cette progression est ce qui permet d'articuler les éléments du processus d'entrée dans les connaissances de l'analyse réelle : la situation de l'antiphérèse donne un statut à des nombres vus jusque là comme des "notations" ; celle du point fixe de cosinus permet d'aller plus loin dans la conceptualisation. Elle donne accès à des nombres réels qu'on ne sait pas expliciter, et donc oblige à mettre en œuvre des procédures formelles de traitement de ces nombres. Bien entendu ces procédures ne peuvent être que des énoncés analytiques.

Nous avons donc clairement identifié deux étapes irréductibles l'une à l'autre dans l'enseignement/apprentissage de l'analyse réelle : la première mène d'un travail pragmatique de recherche d'approximation d'un nombre tel que $\sqrt{2}$ à la conception de nombres irrationnels ; la deuxième amène à concevoir que, pour contrôler des objets non descriptibles de façon simple, il est nécessaire de mettre en œuvre des énoncés formels d'une certaine nature. En dehors des savoirs académiques ainsi construits, il apparaît de façon incontournable que les situations sont porteuses de connaissances métamathématiques. Finalement la question de l'existence des objets de base de l'analyse réelle a induit la question de la nature du travail des étudiants dans des situations qui veulent prendre appui sur le contenu conceptuel de cette existence (Comment inciter les étudiants à interroger ces objets et susciter leur intuition ?). Cette question d'existence génère aussi un autre type de questionnements ; celui lié à l'unicité (dans le cas où ce qui existe est unique, par exemple la notion de limite). Or, traiter de l'unicité de l'objet existant dans l'analyse standard se déroule en général suivant une démarche classique qui conduit à supposer la non unicité et à en conclure une absurdité. Cette question n'a pas eu un statut particulier dans ce travail.

Hasardons-nous par exemple sur la question de l'unicité de la limite d'une suite convergente. Si l'on part de la définition formelle, rien ne nous permet de dire que la limite est unique. Une fois la preuve établie – et qui consiste à prouver que $\forall \varepsilon > 0, |l - l'| < 2\varepsilon$, on aura réglé la question sur le plan syntaxique. On pourrait penser que la contraposée de la définition est plus convaincante $l \neq l', \text{ si } \exists \varepsilon > 0, |l - l'| \geq \varepsilon$. Certains travaux investiguant le statut de l'égalité en analyse, ont montré les difficultés des étudiants à concevoir la forme de la définition. Face à des questions du type que peut-on dire de a et b sachant que $\forall \varepsilon > 0, |a - b| < \varepsilon$, les étudiants sont dans l'incapacité de conclure sur l'égalité. Ces questionnements renvoient à la

question plus large du continu archimédien et du continu non archimédien et aux potentialités que peut offrir, du point de vue de la didactique, une étude centrée sur les fondements épistémologiques. La littérature sur cette question dans Bressoud, Ghedamsi, et al. (2016), permet de penser différemment les enjeux épistémologiques dans le champ de la recherche en didactique de l'analyse réelle.

II. Réflexion sur les potentialités des ingénieries à fonder l'action didactique : Quel apport d'une exploration institutionnelle ?

1. De quoi s'agit-il ?

On peut observer au cours des dernières années une attention renforcée aux questions d'ingénieries didactiques dans la recherche en didactique des mathématiques. Cette attention est particulièrement motivée par le "besoin" de donner plus de visibilité aux résultats de la recherche dans l'action didactique. Ceci émerge particulièrement à travers une volonté accrue d'accepter ce besoin naturel d'une recherche dont l'évolution est conditionnée aussi bien par les avancées internes aux champs scientifiques qu'elle interroge que par des collaborations avec les praticiens de sorte que les résultats de la recherche soient pratiquement opérants. Dans ce contexte, les ingénieries didactiques constituent un enjeu majeur pour véritablement penser l'action didactique.

Le cadre général de nos interrogations est celui de la TSD, d'autres travaux se basant sur la notion de Parcours d'Etude et de Recherche dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (PER dans TAD) sont entrepris dans le même sens (Bosch, 2011 ; Chevallard, & Wozniak 2011 ; Artaud, & Cirade 2011, etc.).

Les travaux qui étudient la question de l'action didactique à travers les ingénieries didactiques dans la TSD (Artigue, 2011 ; Perrin-Glorian, 2011, etc.) soulignent l'absence de bases théoriques d'une méthodologie qui commande une ingénierie dont on veut faire une ressource pour l'institution (i.e. conçue avec un souci immédiat de diffusion). Néanmoins, ces travaux s'accordent sur un certain nombre d'éléments à prendre en considération si l'on se fixe comme projet celui de penser une telle méthodologie :

- La nécessité de garder le contrôle de la version recherche, en particulier en préservant le rôle des étapes de construction tels que statuées par la recherche. Ceci est une manière d'assurer la validité phénoménoteknique de l'ingénierie.
- La nécessité de négocier l'adaptabilité d'une telle ingénierie : 1) avec les enseignants en se posant la question de comment elle peut leur être dévolue, 2) en faisant des transformations opérées lors des expérimentations un objet d'étude, 3) en ayant des connaissances pertinentes du fonctionnement des savoirs visés dans l'institution.

La prise en compte de ces éléments, a constitué le fil conducteur des travaux d'ingénieries sur l'introduction des nombres complexes et de la convergence de suites. Comme mentionné plus

haut, dans ces travaux, une étude préalable des choix institutionnels devra constituer une base d'arguments qui permettraient d'impliquer les acteurs institutionnels et de les responsabiliser par rapport aux enjeux des ingénieries. Nous décrivons dans les paragraphes suivants les différentes étapes de négociation des ingénieries et les implications potentielles de ces travaux empiriques dans la construction méthodologique mais aussi théorique d'un cadre spécifique aux ingénieries pour l'action didactique.

2. Prise en compte de l'impact des choix institutionnels sur le travail réel des élèves

- Etude de cas

Rappelons que le projet des travaux en cours est celui d'élaborer et d'expérimenter des ingénieries didactiques qui prennent en compte l'action didactique, un premier niveau d'étude a consisté à analyser les difficultés des élèves qui émergent notamment à la suite de choix institutionnels particuliers (y compris ceux en lien avec la gestion du professeur). L'objectif d'une telle étude est d'identifier certains éléments qui permettent d'explicitier l'impact de la réalité institutionnelle sur le travail des élèves, et de confronter les acteurs de l'institution aux enjeux d'un tel impact. Nous faisons l'hypothèse qu'un projet d'ingénierie ne peut influencer le système institutionnel et la noosphère s'il ne se fonde pas sur un discours qui leur porte sens. On ne peut espérer que le sens donné par l'institution à l'enseignement d'objets spécifiques soit appréhendé et réinterrogé sans que son impact, fondamentalement sur le travail des élèves, ne soit explicitement identifié. Un travail ultérieur de collaboration entre chercheurs et acteurs institutionnels serait alors garant de l'insertion institutionnelle de l'ingénierie didactique à penser. Ce que nous en entendons c'est d'organiser une confrontation à la contingence qui soit cohérente avec la sensibilité de la recherche en didactique des mathématiques à la dimension institutionnelle.

Nous exposons ici les études qui ont été réalisées sur les difficultés des élèves après l'enseignement d'objets mathématiques emblématiques des questions de transition lycée/université : la convergence de suite et les nombres complexes. Ces études ont été basées sur les résultats d'investigation des choix institutionnels (y compris lors du déroulement des séances de classes ordinaires).

2.1 Difficultés d'adaptation à la définition de convergence de suite

A l'issue des résultats d'analyse des séances de classes ordinaires durant l'introduction de la convergence de suites en fin du lycée, un autre niveau d'étude se fixe comme enjeu celui de cerner de manière plus précise le processus menant au développement des images et à leur nature, les différentes transitions qui régissent le basculement d'une image à une autre et le rôle qu'a l'institution dans la progression d'un tel processus. La modalité d'expérimentation de type entretien a été retenue. Six élèves parmi les participants à la classe ordinaire, ont fait l'objet de ces entretiens. Le choix de ces élèves tient compte aussi bien de leur

représentativité que de la fécondité de leurs images potentielles, identifiées en amont de la convergence et confirmées à la suite de l'étude des séances de classe. Les données orales et écrites recueillies décrivent les échanges entre l'interviewer et les élèves ainsi que les échanges entre pairs. Nous avons choisi pour l'expérimentation la modalité d'entretien par deux : nous avons en définitive travaillé avec trois groupes de deux élèves chacun. Le même observateur est chargé de transcrire l'intégralité des échanges dans les trois groupes de travail. L'expérimentation s'est donc déroulée en trois phases identiques, aussi bien dans la durée que par rapport au support d'étude. Pour chacune de ces trois phases :

- Chacun des deux élèves est sollicité à répondre à un questionnaire, le même pour les trois binômes, dont les résultats vont servir de support pour l'entretien.
- A l'issue du questionnaire, l'interviewer s'entretient avec les deux élèves en même temps, du fait que les échanges entre pairs pour convaincre, proposer des exemples, etc. sont des éléments qui facilitent l'activation d'images et nous permettent de progresser dans l'analyse. La part d'improvisation qui accompagnerait de tels échanges demeurera sous le contrôle de l'interviewer.

i. Analyse à priori

Nous procédons dans la suite à l'analyse a priori du questionnaire comportant trois questions, qui a servi de support à l'entretien qui va suivre. Nous soulignons à chaque fois, comment nous entendons enrichir les réponses données par les élèves via l'entretien.

Question 1

La question consiste à choisir, en le justifiant, parmi cinq énoncés celui qui décrit le mieux la réponse à *Existe-t-il des nombres compris entre 0,9 (0,99999.....) et 1* ? L'élève a la possibilité de ne choisir aucun énoncé, et de proposer une autre réponse en la justifiant.

Comme souligné dans Durand-Guerrier et al. (2013), nous retenons dans le cadre de cette étude, deux interprétations possibles des difficultés qu'auraient les élèves à concevoir l'égalité de 0,9 et 1 : "[...] *difficulties taking in consideration non terminating decimal number; difficulties with limits considered as process, not as number [...]*." (Durand-Guerrier et al., 2013, p. 197).

Dans cet ordre d'idée, la question posée peut donc renvoyer aux notions de limite et d'infini qui, bien qu'ils soient souvent évoqués ensemble, peuvent référer à des paradigmes différents voire conflictuels. Deux idées peuvent décrire le procédé infini dans la suite des termes 0,9 ; 0,99 ; 0,999 ; etc. :

- Il indique un processus illimité, d'un *potentiel* qui peut donner des valeurs plus grandes ou plus petites, qui admettent à chaque fois un successeur, obtenu en un nombre fini d'itérations. Du point de vue de la conceptualisation, derrière cette idée, nous retrouvons des conceptions telles que *ne peut atteindre, ne peut dépasser*, etc.

- Il indique tous les éléments à la fois d'un ensemble infini, soutenu par un objet *en acte* pouvant être identifié. Cette idée traduit la convergence formelle telle qu'elle est définie dans la théorie des ensembles.

Cette distinction entre processus et objet peut tout aussi bien être soulevée sous l'angle des développements décimaux propre et impropre d'un réel : "*Does a non-terminating decimal writing refer to an object or to a process?*" (Durand-Guerrier et al., 2013, p. 198). Plus précisément, des écritures de types $0,\underline{3}$, $0,\underline{6}$, etc. pour manipuler des nombres, y compris des opérations sur ces nombres, ont été introduites depuis le collège (quatre années avant la terminale). Chaque écriture est le produit "final" d'une opération de division (de 1 par 3, de 2 par 3, etc.). Par ailleurs, les opérations de multiplication utilisant ces écritures sont légitimées, au cas par cas, par le seul recours à cette opération de division ($2.0,\underline{3}=0,\underline{6}$ car $2.1/3 = 2/3 = 0,\underline{6}$) : "[...] *this fact supports the conjecture that the calculating rules define on terminating decimal can be applied to non terminating decimal. But of course, it does not provide a proof that it is possible to extend the rule.*" (Durand-Guerrier et al., 2013, p. 197). Par conséquent, dans le cas de $0,\underline{9}$ et 1, où l'algorithme de division est inopérant, on pourrait s'attendre à ce que les élèves problématisent des arguments de type 3. $0,\underline{3} = 1$ du fait qu'une telle égalité autorise la multiplication par un nombre qui comporte des décimales qui se répètent à l'infini ; ils n'auraient aucun moyen de contrôler cette multiplication à l'infini (Durand-Guerrier et al., 2013).

En posant cette question, nous voulons savoir dans laquelle des deux optiques s'inscrivent les élèves, processus ou objet, notamment du point de vue de la limite en tant que processus ou nombre. Ceci nous permettra de mieux cerner les éléments derrière l'enracinement d'une approche dynamique de la convergence de suite, telle que répertoriée dans les résultats de l'analyse des séances de classe en aval de la convergence.

Dans ce qui suit, nous étayons chacun de ces énoncés en étudiant les justifications possibles.

- E_1 : *Il n'existe aucun nombre compris entre $0,\underline{9}$ et 1.*

Les élèves ont différentes possibilités pour justifier ce premier choix, dont celles introduites dans les classes antérieures à l'occasion de l'étude de l'ensemble des nombres réels : numérique ($3 \cdot \frac{1}{3} = 3 \cdot (0,333...) = 0,\underline{9}$), algébrique ($= 0,\underline{9}$ donc $10x = 9,\underline{9}$ et $x = 1$) ou en utilisant la suite des sommes partielles d'une suite géométrique de premier terme $\frac{9}{10}$ et de raison $\frac{1}{10}$. Par ailleurs, la non existence de nombres entre $0,\underline{9}$ et 1 peut traduire un argument de type " *$0,\underline{9}$ est juste avant 1*". Or dans ces conditions, si on accepte qu'ils soient distincts, ceci impliquerait que la moyenne de ces deux nombres est comprise entre ces nombres ; ils ne sont donc plus "l'un derrière l'autre" et l'argument est par conséquent réfuté.

Le reste des énoncés est successivement E_2 : *Il existe un nombre fini de nombres*, E_3 : *Il existe une infinité de nombres*, E_4 : *Il existe une quantité infiniment petite de nombres* et E_5 : *On ne peut pas répondre car $0,\underline{9}$ est indéfiniment périodique et ne s'arrête jamais*. Ces énoncés utilisent des expressions arbitrairement employées aussi bien par les élèves que par le

professeur lors des séances de classe, en particulier l'énoncé E_4 que nous avons choisi de ne pas discriminer même s'il ne porte aucune signification réelle. En particulier, l'énoncé E_5 reflète explicitement une vision potentielle de l'infini. L'énoncé E_2 servira de support pour éventuellement distinguer entre *un nombre fini de termes* et *une quantité infiniment petite de termes*, etc.

Question 2

Une série de cinq suites (a_n) , $n \geq 1$, a été présentée aux élèves en posant la question suivante : Etudier, en justifiant votre réponse, la convergence des suites (a_n) . Ces suites, ont été choisies de telle sorte qu'elles ne soient pas de type standard, qui se prêterait à être investigué suivant une approche algorithmique via les fonctions auxquelles les suites réfèrent. Ces suites seront désignées dans l'analyse qui suit, par leurs numéros d'apparition dans la question.

- La suite (1) est définie par $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \leq 10 \\ \frac{1}{1000} & \text{sinon} \end{cases}$. Dans leur travail, les élèves peuvent faire

abstraction de la manière dont la suite est définie et faire tendre n vers $+\infty$ dans l'expression $\frac{1}{n}$. Et ce, conformément à des conceptions telles que celles que traduit les expressions non atteinte, ne dépasse pas, etc.

- La suite (2) est définie par $a_n = \frac{n}{n}$. Les élèves peuvent simplifier l'écriture et trouver que la suite est constante, mais auront des difficultés pour conclure car l'image de la limite qui ne doit pas être atteinte est très présente dans leur esprit.

- La suite (3), $a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$ est définie de sorte que les sous-suites paires et impaires convergent vers 1. On ne s'attend pas à ce que les élèves procèdent à une validation formelle de la convergence de cette suite, par contre comme pour la suite (1), notre objectif est celui de cerner des conceptions reliées au mouvement empêchant les élèves de prendre pour limite un nombre qui soit égal à une infinité de termes de la suite.

- La suite (4) est définie par $a_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$. La donnée de cette suite est liée à l'absence d'un travail profond en classe sur la divergence de suites n'ayant pas de limites infinies.

- La suite (5) est définie par $a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$. La particularité de cette suite (par rapport à (4)) pour les élèves qui accepteraient qu'une suite converge vers deux limites, réside dans le choix des "nombres limites" qui eux sont atteints.

Question 3

La question 3 est inspirée du travail de Roh (2008), qui s'articule autour de la donnée en direction des élèves, de deux énoncés statiques soutenus par un registre rhétorique de la

convergence dans le but d'investiguer la nature des images qu'ils activent. Dans le cadre de ce questionnaire, elle a pour objectif principal celui d'étudier la cohérence des réponses données à la question 2.

Plus précisément, il s'agit de choisir parmi deux énoncés celui qui signifie que *la suite* (u_n) *converge vers* L . Le choix est laissé aux élèves de refuser en bloc les deux énoncés, et de donner leurs propres versions. Les deux énoncés attribués aux élèves Héla et Ahmed pour des raisons de motivation, se présentent comme ci-dessous.

Héla : *La suite admet une limite finie L signifie qu'une infinité de termes de la suite est dans tout intervalle ouvert centré en L .*

Ahmed : *La suite admet une limite finie L signifie que pour tout intervalle ouvert centré en L seulement un nombre fini des termes de la suite est à l'extérieur de cet intervalle.*

La formulation d'Ahmed a été simplement exprimée par le professeur, sans être mise en valeur, ni exploitée dans la suite du cours. Cet énoncé pourtant conséquence de la convergence (contraposée de la définition formelle $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n - l| \geq \varepsilon \Rightarrow n \leq N$) fait partie des expressions formulées aléatoirement par le professeur et comporte beaucoup d'implicite. La signification de Héla véhicule une image particulière que nous avons prévue à l'issue de l'analyse de la situation de classe en aval. Elle renvoie à la notion de point d'accumulation d'une suite et traduit le fait que ce point est forcément la limite de la suite ; elle traduit la définition d'un point d'accumulation d'une suite ($\forall \varepsilon > 0$, on peut trouver une infinité de valeurs de n pour lesquelles $|u_n - l| < \varepsilon$). Sa deuxième particularité réside dans le fait qu'elle permet de revenir sur la question des suites divergentes qui n'a pas été explicitement introduite en classe sauf dans le cas où la suite admet pour limite l'infini.

Le tableau ci-dessous résume, selon nous, le modèle des réponses à la question 2 qui pourrait attester d'une cohérence dans le travail prévu des élèves en fonction de leurs choix, éventuels, dans la question 3.

	$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \leq 10 \\ \frac{1}{1000} & \text{sinon} \end{cases}$	$a_n = \frac{n}{n}$	$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 + \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$	$a_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$	$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$
Héla	1/1000	1	1	1 ou -1	1 ou 0
Ahmed	1/1000	1	1	Pas de limite	Pas de limite

Tableau 13 : Niveau de cohérence des réponses/En aval de la convergence

Dans tous les autres cas de figure, lors de l'entretien nous confrontons les élèves à leur travail en fonction de leurs réponses.

ii. Résultats et discussion

Le choix des six élèves retenus dans le cadre de cette expérimentation (Hamza, Nada, Aziz, Sarah, Wiem et Jed) tient compte aussi bien de leur représentativité que de la fécondité de leurs images potentielles, y compris lors des séances de classe. L'étude faite en amont de la convergence formelle a permis de souligner que Nada, Aziz, Sarah et Wiem s'inscrivent dans

un profil cohérent approchant la limite d'un point de vue dynamique via au moins une image asymptotique, soutenue par des conceptions telles que limite non atteinte, ne peut dépasser, etc. Hormis Sarah, ces élèves activent en plus une image approximation basée sur la recherche d'une valeur approchée de plus en plus précise. Par contre Hamza et Jed s'inscrivent dans un profil incohérent où la limite est en même temps atteinte et non atteinte. L'usage fait par ces élèves des graphiques pointe une approche dynamique des limites sans qu'aucune image claire ne puisse en être déduite.

Dans cette analyse articulée des résultats du questionnaire et de l'entretien qui l'a suivi, nous focalisons sur les changements éventuels induits par la définition formelle, sur les images individuelles que les élèves ont, à priori, de la notion de convergence de suite. S'il y a eu réadaptation des images nous essayons d'en expliquer le processus. Si les images sont restées inchangées nous essayons de trouver les raisons. Lors des entretiens un intérêt particulier sera porté à la possibilité de créer des conflits cognitifs entre les différentes images en vue de déstabiliser les élèves et voir le degré de résistance de ces images.

Le tableau ci-dessous décrit les réponses données par les 6 élèves dans la première question.

Hamza	Nada	Aziz	Sarah	Wiem	Jed
$0.9 \approx 1$	E1 et E5	E5	E3	E3	E3

Tableau 14 : Conception de l'infini chez les élèves /En aval de la convergence

Même si les traces de l'infini potentiel sont incorporées dans de telles réponses, seules les réponses de Sarah et Jed sont accompagnées de justifications. En particulier Sarah verbalise explicitement ce qu'elle entend par l'infini en écrivant que : Quelque soit le nombre que l'on choisit, il existe un nombre plus grand que lui. Dès le début de l'entretien, Nada montre clairement un conflit entre une approche dynamique de la limite et une approche algorithmique, effaçant toute trace de la limite ou de l'infini pour valider algébriquement l'égalité des deux nombres (l'interviewer est désigné par la lettre I) :

I₇ : Pour toi ceci est donc suffisant pour prouver que $0.9 = 1$...penses-tu qu'il y a un autre moyen ? Par les suites par exemple ?

Nada : La suite... elle tend vers sa limite sans jamais l'atteindre ! [Essai de démonstration via la limite de suite]

I₂₁ : Ce que tu viens de faire te permet-il de dire que $0.9 = 1$?

Nada : La limite est égale à 1 ! [...]

I₂₂ : Et... 0.9 ?

Nada : La limite c'est 1... mais ce n'est pas suffisant pour démontrer que 0.9 est égal à 1...

Convaincue que la limite ne peut jamais être atteinte et que $0.9 = 1$, Nada soutient que le travail sur la suite des sommes partielles est valide mais ne peut constituer une démonstration

de $0.9 = 1$. A l'opposé, Wiem, convaincue que la limite ne peut jamais être atteinte et que $0.9 \neq 1$, soutient que le recours à la suite des sommes partielles est une démonstration de $0.9 \neq 1$:

I₇ : Vous cherchez une suite qui tend vers 1 ?

Wiem : 0.9 ; 0.99 ; 0.99 ; les termes à l'infini sont de la forme 0.9999999...

Wiem : Cette suite tend vers 1...sans l'atteindre...donc comme j'ai dit 0.9 n'est pas égale à 1...il y a une infinité de nombres entre eux...

Pour Nada et Wiem, leur conception de la convergence s'appuie sur leur conception de l'infini comme étant potentiel. Les deux élèves s'inscrivent dans une approche dynamique de la limite, pour elles la limite n'est pas atteinte.

Influencés vraisemblablement par la démonstration algébrique de l'égalité, Aziz et Sarah ont tenté de changer leur réponse, sauf qu'à chaque fois, ils se retrouvent confrontés à leur propre approche de la limite, exactement identique à celle développée par Nada et Wiem :

I₄ : Vous voulez dire indéfiniment périodique ?

Aziz : [...] pour 0,9...9 se répète indéfiniment...ça ne s'arrête jamais [...]

Sarah : Mais il y a la possibilité que ça soit strictement inférieur à 1...donc c'est presque égale à 1

I₆ : Et donc ?

Sarah : Non...cette suite ne prouve pas que $0,9 = 1$!

Alors que Jed trouve la démonstration algébrique convaincante, mais peut être pas suffisamment pour le faire changer d'avis "Pour moi c'est comme une limite 0,99999... tend vers 1 sans l'atteindre...", Hamza insiste sur son choix de changer sa réponse en faveur de l'égalité sans qu'une réelle conviction ne s'en dégage. Nous pouvons affirmer sans équivoque que le contrat institutionnel régit les confusions que développent les élèves, les amenant jusqu'à refuser de percevoir dans leur travail des éléments de conflits potentiels. Certains sont plus acharnés que d'autres à refuser de considérer que le calcul algébrique ou numérique puisse valider un travail mettant en jeu l'infini. Dans ce cas de figure, c'est le comportement de la multiplication à l'"infini" qui est critiquée :

Binôme 1

Nada : Pour $0,9 = 1$...on a même fait la démonstration en classe...moi j'ai choisi deux réponses : ils sont égaux et on ne peut pas répondre ! [...]

Nada : Il y a aussi une autre démonstration qu'on a vu en 9^{ème} année [Parlant de la démonstration numérique de fin du collège]

I₂₆ : Mais pas celle des suites ?

Nada : Non ! Bon...je ne suis plus sûre à cent pour cent...

Binôme 2

Aziz : [...] on a vu en 8^{ème} année qu'un tiers est égale à 0.3333...qui se répète à l'infini puis on multiplie [...]

Sarah : [...] je pense qu'il est presque égal à 1...

Aziz : [...] mais il faut qu'il soit égal à 1...

Binôme 3

Jed : On l'a vu au collège de la même manière... [Démonstration algébrique de l'égalité]

Wiem : Même que moi j'ai posé la question au prof pour la démonstration... je ne suis pas sûre que c'est vrai... comment on multiplie $0.\underline{3}$ par 3 [...]

Jed : C'est un argument juste... mais ce n'est pas convaincant...

Pour étudier la deuxième question, nous retenons trois critères d'analyse : le rôle de l'expression de la suite pour le calcul de limite, le registre de validation et la limite est un terme de la suite ou non (atteinte ou bien non atteinte).

Force est de constater que tous les élèves donnent la priorité aux expressions en n pour étudier la limite. D'ailleurs, pour tous ces élèves la suite (1) converge vers 0. Nous retrouvons ainsi les traces d'une image algorithmique de la limite, appuyées par des conceptions dynamiques. Ceci est souligné notamment dans les propos de Nada et Wiem quand elles disent que de toutes les façons pour les autres termes " $1/1000$ tend vers 0". Idem pour Sarah qui l'exprime explicitement "*J'ai fait le graphe et ça ne dépasse pas $0... \frac{1}{1000}... c'est proche de 0...$ ", ainsi que Jed "*D'ailleurs pour la suite (1) $\frac{1}{1000}$ tend vers 0 donc la limite est égale à $0...$ ".**

Les tentatives de déstabilisation des élèves n'ont pas été concluantes, les propos de Nada en témoignent "*Je suis sûre de mes réponses pour toutes les autres suites sauf pour la suite (1)*".

Nada et Wiem donnent toutes les deux les mêmes réponses, d'ailleurs correctes, à l'étude des suites (2), (3), (4) et (5). Toutefois, Nada est exclusivement algébrique et réfère au graphique seulement quand la suite ne comporte pas d'expressions en n , alors que Wiem s'inscrit d'une manière sans équivoque dans le registre graphique pour chercher et pour valider. Le cas de Sarah (répondant correctement aux suites (2) et (3)) est particulièrement frappant : elle s'appuie exclusivement sur le graphique pour trouver la limite en montrant une difficulté à trancher en cas de non "unicité". Lors de l'entretien, elle exprime clairement qu'une suite admet une unique limite, et que dans le cas où elle en possède deux (les suites (4) et (5)), elle choisira la plus grande valeur :

I₁₄ : Est-ce qu'une suite peut admettre deux limites ?

Sarah : Non ! La suite doit avoir une seule limite... [...]

I₁₅ : Peux-tu expliquer davantage Sarah ?

Sarah : Il ne peut y avoir qu'une seule limite... [...]

I₁₉ : Pour les suites (4) et (5), parmi les deux limites que tu calcules, tu choisis à chaque fois un seul nombre ?

Sarah : Oui je choisis 1 parce que c'est le plus grand nombre...

Afin de légitimer l'unicité, Sarah réfère aux règles du contrat en insinuant l'obligation de les respecter "*On l'a vu comme ça dans le cours...*".

Finalement du côté du registre de validation, les résultats montrent que Hamza et Aziz s'inscrivent dans une approche algorithmique en acceptant qu'une suite admette deux limites, de même que Jed sauf que son travail n'est pas forcément porté sur l'étude de la convergence. Au cours de l'entretien, il a été possible de noter un changement dans la réponse de Hamza "*[...] en tout cas si la suite admet deux limites...elle est divergente...*".

Les réponses écrites des élèves concernant les limites des suites à étudier, semblent montrer que Nada, Aziz, Sarah et Wiem acceptent de se dessaisir de conceptions telles que la limite est non atteinte, ou ne peut pas être dépassée, etc. Confrontés à ces conceptions lors de l'entretien, les réponses des élèves demeurent confuses gagnées par des incertitudes sauf lorsqu'il s'agit d'être conforme aux procédés algébriques introduits en classe notamment pour Nada. Le cas de Wiem est vraisemblablement exceptionnel, pour elle la limite est à rechercher, là bas...plus loin, voire à l'infini, le reste des termes ne poseront pas de problème même s'ils atteignent ou dépassent la limite :

Jed : [...] pour la suite (3)...il y a un problème avec le premier terme qui est égal à 2...

Wiem : Qu'est ce que tu es entrain de raconter...mais c'est le seul terme qui est supérieur à 1...il faut regarder du côté de l'infini [...]

Wiem : Moi je pense toujours aux termes à l'infini...je peux trouver des termes qui dépassent au début...

Wiem appuie ses dires en avançant que "*[...] on peut toujours trouver n'importe quoi avant l'infini...mais à l'infini on a la limite...le professeur nous a dit qu'il faut regarder à l'infini*".

A ce stade des analyses, il nous reste à étudier la cohérence des réponses données par les élèves en fonction du choix finalement retenu comme verbalisant la convergence formelle (entre celui de Héra et celui de Ahmed). Nous soulignons d'abord que le choix que s'est fixé chacun de ces élèves dans le questionnaire, n'a pas changé jusqu'à la fin de l'entretien sauf pour :

- Aziz qui n'ayant pas donné de réponse à cette question, a opté pour l'énoncé de Héra au cours de l'entretien. Lors des échanges, il a été possible de noter un certain degré de cohérence dans ses réponses qui traduisent une approche mixte de la convergence comportant au moins le cluster point image dynamique. Ceci s'applique au cas de Jed qui, par contre, a depuis le début choisi l'énoncé de Héra.
- Wiem dont la réponse stipule que "*Les points (n, u_n) approchent l'asymptote $y = L$, tout en étant en dessous*". Lors de l'entretien, en cohérence totale avec ses choix, elle accepte d'ajouter "*[...] au début certains points sont en dessous ou sur la droite $y = L$ mais pas à l'infini*". L'approche de Wiem demeure fondamentalement dynamique via une image asymptotique, le recours aux procédés algébriques se fait par contrat et ne change en rien ses conceptions.

Faisant le choix de l'énoncé d'Ahmed, Nada qui est complètement à l'aise dans les investigations algébriques se trouve confrontée à des conceptions qu'elle porte de l'infini

potentiel et qui l'empêchent de trancher dans les situations qui y réfèrent. Par ailleurs, Sarah qui depuis le début tente d'harmoniser ses réponses en fonction des résultats algébriques auxquels elle est confrontée lors de l'entretien, s'accroche au choix de l'énoncé de Héra comme celui signifiant la convergence d'une suite. Son approche de la convergence est largement conditionnée par un travail algorithmique qui toutefois, ne lui permet pas d'aller à l'encontre de la manière avec laquelle elle pense la convergence. Ceci est particulièrement apparent quand elle concilie l'unicité avec son choix de ne garder que la plus grande limite dans le cas où la suite admet plus qu'un point d'accumulation.

iii. Éléments favorables à une ingénierie pour l'action

Le choix d'associer l'étude de la convergence de suite à l'usage des techniques via les fonctions a activé chez les élèves les images qu'ils se sont construits sur les fonctions et leurs limites en $+\infty$, limite institutionnalisée dans le cas fini via la notion d'asymptote horizontale. Ces images sont sous-tendues par une vision dynamique de la limite fondée sur une idée de l'infini comme étant potentiel. Cette idée nourrie à son tour des conceptions telles que *ne peut être atteinte*, *ne peut être dépassée*, etc. En situation de classe, le recours abusif du professeur à des expressions informelles telles que *s'approche de plus en plus*, *infinitement petit*, *voisinage*, etc. ainsi que le caractère prototypique des exemples ont largement contribué au maintien de l'approche dynamique. L'algorithmisation massive qui accompagne le travail de validation ou de formulation des élèves, dans un registre principalement algébrique cache soigneusement toutes les difficultés qu'ils ont à surmonter leurs conceptions des limites. Dans le cas problématique de 0.9 et 1, ils trouvent un moyen de concilier entre ces conceptions et leurs réponses de sorte que :

- s'ils répondent que $0.9 = 1$, ils refusent que la démonstration par les suites, pourtant valide d'après eux, en soit une argumentation puisque ceci voudrait dire que 0.9 tend vers 1 ;
- s'ils répondent que $0.9 \neq 1$, ils acceptent que la démonstration par les suites en soit une argumentation, puisque ceci voudrait aussi dire que 0.9 tend vers 1.

La gestion du professeur est fondamentalement tournée vers une réduction du travail des élèves dans le sens d'une concentration sur les techniques et procédures algébriques de résolution (Cf. Chapitre 2). Ceci lui a permis, en particulier, d'échapper aux implicites notionnels relatifs aux suites divergentes, et au rôle de l'unicité pour pouvoir conclure dans le cas où la suite admet deux limites. Les retombées d'une telle pratique ont vite rejailli sur le travail des élèves dès qu'ils ont été confrontés à des exemples de suites non standards, les incitant à retourner sur la place de l'unicité et sur la donnée de leurs propres significations de la convergence. Les tentatives faites pour entrer dans un processus de déstabilisation des élèves et mesurer le degré de résistance de leurs images n'ont pas été concluantes. Les élèves tentent de réguler sans grande conviction par rapport à des conceptions dynamiques de la

limite, dans le seul but de donner plus de cohérence aux réponses données dans le registre algébrique.

Dans tous les cas, le travail des élèves avec les limites de suites baigne dans la confusion sauf quand il est procédural. Dans certains cas, les élèves, conscients de leurs conceptions et des contradictions qu'elles pourraient engendrer, acceptent de s'en dessaisir pour se conformer aux règles instaurées par le professeur.

2.2 Un amalgame de représentations des nombres complexes au cœur des difficultés des élèves

En se basant sur le modèle réduit des variables macro-didactiques relatif aux nombres complexes en fin de lycée, nous avons entrepris le projet visant la catégorisation et la formalisation des difficultés éventuelles qui peuvent être rencontrées par les élèves lors de leur manipulation des nombres complexes (Ghedamsi, & Tanazefi 2015). L'expérimentation que nous avons effectuée n'a pas pour objectif de provoquer des apprentissages, mais de recueillir un certain nombre d'informations concernant le travail des élèves lorsque les tâches proposées réfèrent explicitement ou implicitement aux exigences institutionnelles précédemment soulignées (Cf. Chapitre 1).

Dans le but de donner plus de généralité aux résultats auxquels nous avons abouti, nous avons choisi comme modalité d'expérimentation la forme d'un questionnaire, comportant huit questions de type QCM et sept questions de type Vrai ou Faux ainsi qu'un espace de deux lignes pour chaque question afin de rédiger la justification. Depuis le début du questionnaire, il est mentionné que le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O . Les tâches sollicitées sont choisies pour leur caractère non standard. Ceci suppose bien évidemment que le questionnaire ait été proposé aux élèves après un enseignement du chapitre des nombres complexes. Notre idée est de faire en sorte que les élèves n'aient pas recours d'une manière automatique aux techniques routinières du cours, ce qui nous a amenées à proposer ce questionnaire aux élèves à l'entrée en classe de Terminale avant tout nouvel enseignement sur les nombres complexes.

Nous avons distribué le questionnaire à 100 élèves issus de 6 lycées différents et ce lors de séances d'enseignement. Les élèves ont disposé d'une heure pour répondre au questionnaire. Nous avons finalement pu recueillir un total de 100 traces écrites sur lesquelles repose toute notre analyse.

i. Analyse a priori

Le questionnaire est composé de 15 questions réparties dans trois rubriques, de la manière suivante :

- Quatre questions relatives à l'usage du principe de généralisation (VD3) : Q1, Q3, Q4 et Q5.
- Six questions axant sur les diverses représentations des nombres complexes (VD9) :

Q2, Q7, Q8, Q9, Q10 et Q11.

- Cinq questions qui réfèrent à l'opérationnalité des nombres complexes (statut processus ou objet, VD8) : Q6, Q12, Q13, Q14 et Q15.

Le découpage des rubriques de ces questions s'identifie donc bien avec les variables macro-didactiques retenues au paragraphe précédent, et vise à caractériser les exigences auxquelles sont confrontés les élèves dans leur travail avec les nombres complexes. Dans la suite du texte, nous donnons quelques éléments d'analyse a priori de certaines de ces questions.

Comme mentionné plus haut, l'introduction des nombres complexes n'est pas explicitement suivie d'un travail approfondi sur les dangers de généralisation non fondée des propriétés des réels aux nombres complexes. La question Q1 concerne l'étude de la généralisation possible de la relation d'ordre total de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$. Elle s'énonce comme suit :

Q1 : *Répondre par vrai ou faux : si $z \in \mathbb{C}$ et $z^2 \in \mathbb{R}$, alors $z^2 > 0$*

L'approche institutionnelle utilisée pour introduire les nombres complexes table sur l'impossibilité de trouver un réel dont le carré est égal à -1, l'idée étant de "convaincre" d'abord les élèves de la nécessité d'étendre l'ensemble des réels à un ensemble contenant de tels "nombres". Il est donc légitime d'envisager la donnée directe par les élèves du contre-exemple i (ou d'un autre). Dans tous les autres cas de figure, les élèves ne seraient pas en mesure d'inférer un des résultats fondamentaux légitimant l'existence des nombres complexes. Ceci conforte les faiblesses que peut comporter un projet d'enseignement, quand le choix est celui d'introduire les nombres complexes, en imposant la résolution d'une équation impossible dans $\mathbb{R}$.

Les questions Q3 et Q5 posées dans cette rubrique réfèrent à la dimension sémiotique qui relie la notion de module et celle de valeur absolue. En particulier pour la question :

Q3 : *Répondre par Vrai ou Faux : $(1+i)^2 = |1+i|^2$*

Le choix du nombre complexe $1 + i$ se justifie par l'occurrence de son apparition ainsi que celle de son carré dans le projet institutionnel. Nous prévoyons que l'une des réponses et justifications possibles pourrait se résumer à remarquer qu'un module est une distance, soit positif et que le carré de $1 + i$ est imaginaire. Toutefois, en raison de la routinisation du calcul algébrique, les élèves pourraient procéder à un calcul algébrique en utilisant la définition du module d'un nombre complexe et les propriétés des opérations dans $\mathbb{C}$, puis conclure que le résultat est faux.

La question Q4 fait intervenir la structure canonique d'espace affine euclidien de $\mathbb{C}$. Elle s'énonce comme suit.

Q4 : *Répondre par Vrai ou Faux.*

Si $M(a,b)$ a pour affixe z de $\mathbb{C}$, et $M'(a',b')$ a pour affixe z' de $\mathbb{C}$, alors zz' est l'affixe de $M''(aa', bb')$

L'opération produit a été introduite dans la structure de corps de l'ensemble des nombres complexes. Si l'on se place du point de vue de la structure de corps via la représentation cartésienne, il est possible de voir – moyennant une procédure algorithmique – que la proposition est fausse. Par contre, en travaillant dans la structure affine euclidienne, il est difficile de comprendre le sens derrière le résultat de la multiplication. C'est la raison pour laquelle nous avons opté pour ce choix. A ce niveau du cursus, l'interprétation géométrique du produit n'est possible que dans le cas où l'un des facteurs est de module 1. Car dans ces conditions, le produit n'est autre que l'affixe de l'image d'un point du plan par une rotation, transformation largement manipulée dans le niveau du cursus sollicité. Dans le cadre de cette question, on ne peut penser que les élèves seraient en mesure d'interpréter géométriquement le produit, même si la notion de similitude (qui n'a pas encore été introduite) s'exprime comme la composée d'une translation et d'une rotation. Par cette question, nous visons l'étude de la généralisation abusive des propriétés de la multiplication dans l'ensemble des nombres réels à celles dans $\mathbb{C}$.

Par ailleurs, les questions Q2, Q7, Q9, Q10 et Q11 étudient les changements de représentations liés à l'interprétation complexe (donnée d'une configuration utilisant les nombres complexes) d'une configuration géométrique fournie dans le texte de l'énoncé. En particulier, dans les questions Q2 et Q7, le registre sémiotique du côté des énoncés est mixte, intrinsèque et graphique cartésien. La tâche attendue pour Q2 est classique, elle consiste à interpréter une égalité de la forme $\overrightarrow{OM'} = \alpha \overrightarrow{OM}$, où $M'(z')$ et $M(z)$ par $z' = \alpha z$. L'étude institutionnelle que nous avons faite nous a permis de souligner l'absence d'un travail dans la catégorie de plan vectoriel de $\mathbb{C}$ en dépit de l'introduction de cette structure via la notion d'affixe d'un vecteur. La manipulation de cette notion se fait exclusivement via la vectorialisation du plan affine euclidien en l'origine O par la donnée d'un repère. Les réponses ou justifications erronées peuvent, par ailleurs, s'expliquer par des carences liées aux connaissances de la géométrie, y compris analytique.

Les questions Q9, Q10 et Q11 tablent sur des énoncés fournis sous- forme de figures. C'est là que réside la différence entre les tâches de changements sollicitées dans ce questionnaire et celles institutionnalisées. L'appui sur la visualisation graphique permet de développer une preuve pragmatique dont la validité est conditionnée par un contrôle théorique qui va être exercé par les élèves. En bref, il s'agit de trois questions à choix multiples où les figures comportent des configurations géométriques qui peuvent être traduites par des égalités vectorielles, et où la question est de faire un choix sur l'affixe d'un point connaissant l'affixe d'un autre. L'une des raisons possibles qui peuvent expliquer l'échec des élèves face à de telles questions concerne leur difficulté à lire une figure.

La question Q8 étudie l'interprétation géométrique d'une configuration complexe fournie dans le texte de l'énoncé. Ce type de tâche est sollicité par l'institution, où il s'agit de montrer qu'un point B est l'image d'un point A par une transformation à déterminer, à partir d'une

égalité de la forme $z_B = z \cdot z_A$, z étant de module 1 et d'argument remarquable. Dans ce questionnaire, la donnée de la figure devra en plus aider les élèves à se représenter une telle transformation, et passer au registre graphique cartésien pour donner la solution. Même si les questions relatives à cette rubrique s'inscrivent dans la même lignée que celles sollicitées par l'institution pour des changements de représentations, la différence demeure fondamentale.

En particulier :

- la majorité des énoncés table sur une figure, pratique quasi-inexistante au niveau des choix institutionnels ;
- les énoncés articulent, dans la majorité des cas, le registre graphique cartésien soit avec le registre cartésien, soit avec le registre intrinsèque ;
- la nature des énoncés (Vrai ou faux et QCM) devrait obliger les élèves à laisser de côté les calculs parfois longs qu'engendre un travail exclusif avec les coordonnées des points du plan.

Parmi les questions qui visent l'étude de l'opérationnalité des nombres complexes, la question Q6 est accompagnée d'une figure comportant les points O, A et B, supposée constituer un appui de visualisation pour les élèves :

Q6 : *Cocher la bonne réponse.*

$Siz_B = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_A$, alors le triangle OAB est a) rectangle b) équilatéral c) isocèle

Le choix de ne pas attribuer de valeurs à z_A et z_B devrait obliger les élèves à opérationnaliser les nombres complexes et leurs propriétés pour conclure que le triangle OAB est équilatéral. Dans le cas de données particulières, comme on l'observe habituellement dans les exercices ordinaires du curriculum ou du manuel, les techniques standardisées de la géométrie plane pourraient s'avérer plus efficace. Dans la question Q13, la tâche est intégralement analogue à celle sollicitée par l'institution, sauf que dans ce cas le nombre complexe z est général : comme mentionné précédemment ceci constitue une différence de taille. Dans tous les cas de figures, les questions proposées dans le cadre de l'étude de cette rubrique ne sont pas forcément, dans leur globalité, très éloignées de celles institutionnellement sollicitées. Toutefois, ces questions présentent des différences avec celles introduites par l'institution :

- Les énoncés tablent sur des données générales, ce qui devrait obliger les élèves à chercher d'abord des configurations complexes adéquates pour ensuite les interpréter géométriquement.
- Les questions posées sont de type Vrai ou Faux et de type QCM, ce qui signifie que les élèves sont dans l'obligation d'économiser leur travail, donc de recourir d'abord à des configurations complexes pour pouvoir travailler.

ii. Résultats et discussion

Les résultats étudiant l'abus de généralisation témoignent d'une algorithmisation excessive du

calcul dans le corps des nombres complexes, réduisant le travail des élèves à une juxtaposition de connaissances sur les nombres complexes mémorisées dans le cours. Même si une raisonnable proportion des élèves répond correctement aux questions rattachées à cette rubrique, il reste que les arguments donnés sont majoritairement invalides et le test T des groupes appariés montre clairement qu'il n'y a aucune relation significative dans la manière avec laquelle ces élèves ont répondu à ces questions (tel est le cas par exemple des élèves qui reconnaissent que le produit de deux nombres complexes n'est pas forcément positif mais ne reconnaissent pas ce produit !). Les réponses données sont le plus souvent aléatoires et ne sont pas significatives d'une maîtrise des problèmes liés aux abus de généralisation.

Par ailleurs, l'analyse des questions relatives aux représentations et aux changements de représentations montre que la majorité des élèves présente des difficultés liées au basculement entre diverses représentations des nombres complexes. Nous constatons notamment des difficultés liées au travail dans le registre graphique cartésien et le registre intrinsèque quand il s'agit d'énoncés qui réfèrent aux transformations planes utilisées (symétrie, homothétie, translation et rotation d'angle droit). De plus, l'indisponibilité de connaissances géométriques nécessaires aux interprétations requises est un facteur majeur d'échec. Dans tous les cas, nous avons pu observer :

- Un usage de cas particuliers dans des questions faisant intervenir des énoncés généraux et réduire l'étude à une vérification simple de données.
- Tronquer la résolution, et, par là, aboutir à un travail inachevé, qui témoigne dans la majorité des cas d'une difficulté à mobiliser des connaissances sur les nombres complexes, pourtant introduites pour définir le module, l'argument, la notion d'affixe et d'image, etc.

Finalement, les élèves ayant répondu faux en justifiant leurs réponses ne tentent même pas un travail de changement de registres. Ces élèves présentent des carences au niveau des connaissances d'un même registre relatives aux notions de module, d'argument, d'affixe, etc.

En dépit de la standardisation institutionnelle des divers traitements ou conversions de registres sollicités dans cette recherche, l'originalité des questions proposées confronte les élèves au réseau de registres tant sémiotiques que mathématiques dans lesquels sont plongés les nombres complexes. Dans ces conditions, l'appui sur la mémorisation ou les inférences automatisées des résultats du cours ne sont pas suffisants pour la résolution. De plus, le test T de groupes appariés montre clairement qu'il n'y a aucune relation significative dans la manière avec laquelle les élèves ont répondu aux questions, ceci témoigne du caractère aléatoire de leur travail dans des situations faisant intervenir des traitements ou conversions entre divers registres de représentations des nombres complexes.

Enfin, les productions des élèves mettent en évidence une incapacité à mettre en œuvre les configurations complexes nécessaires pour traduire des configurations géométriques avérées, sans que ceci ne soit en relation avec des difficultés géométriques, sont en quantité importantes. Réciproquement, les élèves interprètent géométriquement d'une manière

inefficace les configurations complexes adéquates pourtant convoquées d'une manière autonome. Les connaissances des élèves relativement aux diverses représentations d'un nombre complexe ainsi que ses propriétés sont manquantes, en particulier celles relatives à l'argument, le module et leurs propriétés. Comme nous l'avons prévu, les élèves ne maîtrisent pas l'usage des nombres complexes dans la résolution de problèmes divers, notamment ceux liés à la géométrie plane. Les très faibles taux de réussite des différentes questions relatives à la rubrique de l'opérationnalité soulignent leur difficulté :

- à avoir recours d'une manière autonome aux configurations complexes devant simplifier le travail attendu ;
- à interpréter géométriquement les configurations complexes ainsi repérées d'une manière autonome.

iii. Éléments favorables à une ingénierie pour l'action

L'introduction des nombres complexes en fin de lycée est accompagnée de certaines exigences cognitives qui pourraient confronter les élèves à des difficultés de manipulation de tels nombres. Cette étude nous a permis de cerner de plus près ces difficultés et de les formaliser. En nous basant sur le modèle des variables macro-didactiques relatives à l'enseignement des nombres complexes en fin de lycée, il nous a été possible de regrouper ces difficultés en trois catégories que nous décrivons ci-dessous.

1. La première catégorie concerne les difficultés qu'entraînent les abus de généralisation des propriétés des réels aux nombres complexes. Plus précisément :

- Plusieurs élèves généralisent la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$. Ceux qui ne le font pas sont dans l'incapacité de donner immédiatement des contre-exemples, ayant pourtant servi pour introduire ces nombres.
- Un grand nombre d'élèves confondent module et valeur absolue et n'arrivent pas à distinguer les spécificités de chacune de ces deux notions. Les autres élèves ne sont pas en mesure d'inférer automatiquement cette différence, et éprouvent le besoin de procéder d'abord à des calculs algorithmiques pour conclure.
- Certains élèves confondent le produit de deux nombres complexes et le produit de réels dès que ce produit n'est pas représenté sous-forme cartésienne.

2. La deuxième catégorie réfère aux difficultés de traitement dans un même registre ou de conversions entre registres, parmi lesquelles nous trouvons :

- L'incapacité des élèves à procéder à un changement immédiat du registre graphique cartésien au registre intrinsèque et réciproquement ; et ce, dans le cadre de configurations faisant intervenir des transformations planes (symétrie, homothétie, translation, rotation d'angle droit), des quadrilatères, etc.
- L'indisponibilité des connaissances "basiques" sur les nombres complexes nécessaires aux traitements dans un même registre, ou conversions entre les

registres, notamment concernant les notions de conjugué, de module et d'argument.

Ces difficultés pointent encore une fois l'inconsistance d'une approche tablant sur l'extension, non motivée, des réels pour introduire les nombres complexes. Habitué à un format bien précis des nombres, visualisé sur la droite réelle, les élèves se trouvent dans l'obligation de basculer vers des nombres "représentés" en dimension 2. A ce titre, ils doivent interpréter des égalités qu'ils perçoivent a priori en tant que *calculs sur des nombres* comme des transformations du plan, ou des déplacements de points, etc. ce qui ne leur est absolument pas familier.

3. La troisième catégorie est reliée à la complexité d'exploiter les aspects unificateur et simplificateur des nombres complexes, notamment dans la résolution des problèmes de géométrie plane. En particulier, il nous a été possible de noter :

- L'incapacité des élèves à avoir recours d'une manière autonome aux configurations complexes qui permettraient de simplifier le travail attendu. Par ailleurs, les rares élèves qui le font n'optimisent pas ce recours.
- Les difficultés des élèves à interpréter géométriquement les configurations complexes pourtant énoncées d'une manière autonome, afin de parachever la résolution des problèmes en jeu.

Les questions visant la mise en œuvre des nombres complexes pour la résolution de problèmes géométriques permettent de donner du sens à ces nombres. Encore faut-il que les élèves soient suffisamment armés pour être en mesure de mobiliser les configurations requises et de procéder à leurs conversions dans d'autres registres.

Au terme de ces résultats, d'autres questionnements surviennent notamment concernant le rôle du professeur qui est supposé souligner, et clairement distinguer les registres tant mathématiques que sémiotiques en jeu dans la représentation des nombres complexes. Les professeurs disposent-ils de situations adéquates pour traiter toutes les difficultés que rencontrent les élèves ? La réponse à cette question est manifestement négative⁷ et donc, la piste à creuser est maintenant celle d'une ingénierie adaptée à l'introduction des nombres complexes et à la multiplicité des registres que requiert leur traitement.

3. Des ingénieries pour l'action en cours d'expérimentation en fin du lycée : premiers éléments de perspective

A la suite de l'investigation du terrain institutionnel (organisations mathématiques en jeu et travail des élèves/gestion du professeur dans les séances de classes ordinaires), l'étude de l'impact des choix institutionnels sur le travail réel des élèves devraient permettre de concevoir et d'expérimenter une ingénierie didactique qui soit une ressource accessible au professeur. L'engagement dans un tel projet, de partage d'expérience, conduit à la nécessité

⁷ L'analyse, en cours, des transcriptions de séances de classes ordinaires sur les nombres complexes semble aller dans le sens d'une non prise en compte de ces difficultés.

de penser la collaboration entre nous (en tant que chercheurs) et les acteurs du système éducatif. Ceci a été relativement entrepris dans le cadre des travaux en cours concernant la convergence de suites et les nombres complexes. Nous exposons ici succinctement le principe fondamental de ce type d'ingénieries que nous décrivons sur trois étapes. Nous exemplifions ensuite sommairement les étapes de mise en place de telles ingénieries.

Le principe fondamental de ces ingénieries, encore en cours d'expérimentation/régulation, s'articule autour de trois idées de base :

- La nécessité de négocier avec les acteurs du système éducatif le besoin de mettre en place d'une telle ingénierie. Nous avons choisi de négocier une telle nécessité en rendant visible les difficultés dans le travail des élèves, que génèrent les choix institutionnels par rapport aux objets visés, y compris ceux en lien avec la gestion du professeur. Cette étude est prise en charge par les niveaux d'analyse micro et macro didactiques.
- L'utilité d'impliquer les acteurs du système (en l'occurrence les professeurs), au mieux ceux qui ont joué un rôle dans la mise en évidence des vis cachés institutionnels notamment en acceptant que nous observions leurs classes, dans l'élaboration et l'expérimentation des ingénieries. La conception de ces ingénieries est faite dans le cadre de la TSD et elles peuvent être facilement dévolues aux professeurs⁸ car elles émanent en premier lieu d'une autoréflexion sur la nature de leurs pratiques tant au niveau épistémologique que celui relatif à la gestion de la classe. L'objectif de recherche reste essentiel mais les questions de recherche ne sont pas motivées en premier lieu par des questions théoriques même si cela amènera sans doute à les revisiter.
- L'expérimentation de ces ingénieries en classes devrait permettre de déterminer les principes qui garantissent leur diffusion à une plus grande échelle. En effet, même si la conception de ces ingénieries est pensée avec le souci de leur adaptabilité aux classes ordinaires, il demeure que les acteurs du système impliqués ne pourraient porter à eux seuls la garantie de leur reproductibilité. A la demande, lors des expérimentations en classes ordinaires, une marge de manœuvre pourrait être attribuée aux professeurs ayant des initiatives particulières concernant les scénarisations des situations. Dans ces conditions, les éléments d'analyse a priori demeurent un repère pour le professeur pour contrôler le déroulement de la situation.

Deux ingénieries en cours d'expérimentation/régulation, respectivement sur la convergence de suites et les nombres complexes, ont depuis le début comme objectif de produire des ressources pour les classes ordinaires, voire la formation continue des enseignants.

Dans les deux cas, la méthodologie générale est conforme aux idées qui structurent le principe fondamental de telles ingénieries. Plus précisément :

⁸ C'est ce qui se fait en France, par exemple, dans le cadre des IREM.

- 1^{er} temps : Etude préalable concernant les choix institutionnels, y compris la gestion des professeurs

Cette étude macro et/ou micro didactiques a débouché sur la mise en exergue des difficultés des élèves par rapport à l'objet visé, en situation de travail autonome. Ces difficultés ont été principalement analysées du point de vue des choix institutionnels et des pratiques des professeurs engagés. Ceci a conduit à retenir un certain nombre d'éléments à prendre en considération dans l'élaboration de ces ingénieries. Les professeurs et inspecteurs impliqués dans cette étude font partie de l'équipe retenue pour la conception de ces ingénieries. La dimension réflexive attendue de la part de ces acteurs a été déclenchée par le dispositif mis en œuvre basé sur le visionnement des séances, l'analyse des transcriptions et l'analyse des protocoles. Cette étude a de plus permis de souligner la nécessité de prendre en compte certains éléments épistémologiques incontournables dans un tel projet.

- 2^{ème} temps : Première élaboration de l'ingénierie via la collaboration entre chercheurs et acteurs institutionnels

L'architecture globale du travail suit la méthodologie de la TSD et puise ses éléments fondamentaux aussi bien dans la nature épistémologique du savoir visé que sur la prise en compte des résultats de l'étude entreprise dans la première étape.

La négociation avec les acteurs se fait essentiellement sur la base des difficultés d'élèves préalablement identifiés et expliqués via la nature des choix institutionnels. Une sorte d'autoréflexion de l'impact des choix institutionnels sur le travail des élèves est requise de la part des acteurs impliqués dans l'équipe. Toutes les discussions sont enregistrées et visionnées pour une meilleure définition des positions des chercheurs et des acteurs institutionnels.

- 3^{ème} temps (en cours) : Expérimentation dans des classes ordinaires et modifications au besoin

Ce qui est en question dans cette étape concerne au moins deux paramètres : la robustesse des situations construites notamment du côté de leur validité théorique, ainsi que leurs potentialités à être utilisées comme ressources accessibles et efficaces pour les professeurs dans les classes ordinaires. Les modifications éventuelles qui leur seraient apportées dépendraient en un premier lieu de ces paramètres. La question des moyens à utiliser, de ce que nous (chercheurs) acceptons de négocier à la baisse, pour apporter de telles modifications est ici cruciale.

Le dispositif global est schématisé dans la figure ci-dessous proposé et accepté dans le cadre de communication au 10th Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 10).

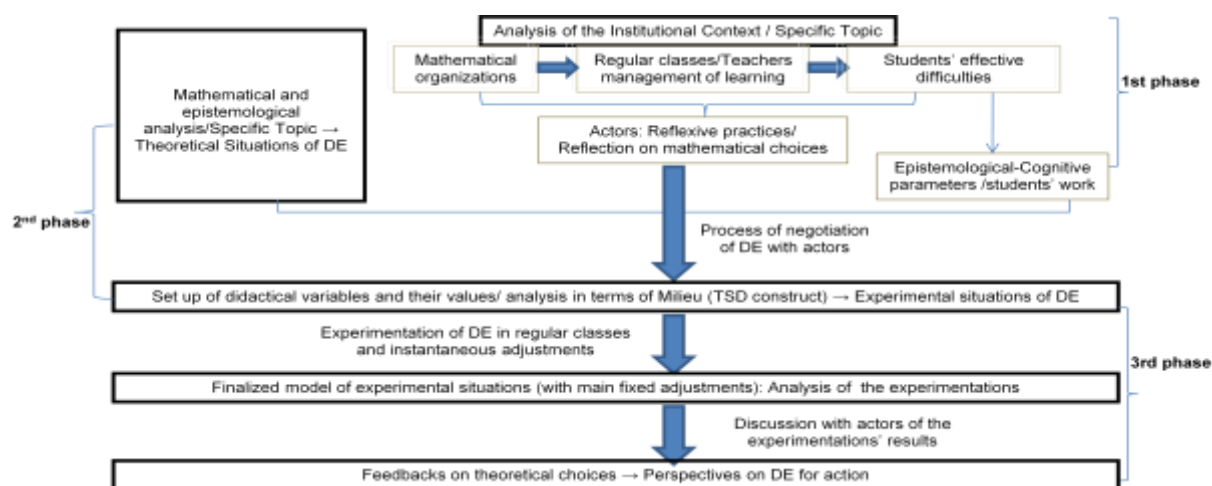


Figure 2 : Dispositif méthodologique – Ingénieries didactiques pour l'action

Aussi bien pour l'ingénierie sur la convergence de suites que celle relative aux nombres complexes, la première étape a été clôturée comme indiqué dans le paragraphe 2 de ce chapitre. Les éléments remarquables issus de l'étude lors de cette étape a permis de négocier, avec les acteurs impliqués (professeurs et formateurs/inspecteurs), des éléments importants de l'ingénierie prévue. Ces éléments sont essentiellement liés à la (aux) situation(s) fondamentale(s) théorique(s) de l'ingénierie. Ces négociations ont notamment été fortement supportées par la stature réflexive qu'ont pu avoir les acteurs institutionnels dès lors qu'ils ont été confrontés à la robustesse des arguments, tant épistémologiques qu'empiriquement observables, que nous avons pu apporter. Nous exposons ci-dessous certains de ces éléments pour chacune de ces deux ingénieries.

L'exemple de la convergence de suites

1. Structurer les connaissances sur les nombres réels, notamment à travers leur développement décimal illimité dans son lien avec l'égalité en analyse réelle. Cette condition renvoie au raisonnement à epsilon près en analyse, et permet de fonder la convergence de suites sur le sens des processus d'approximations, des encadrements, des majorations, des minorations, et sur comment utiliser ce sens pour signifier le formalisme sous-jacent à la définition de la convergence. Une prise en compte de ces éléments se traduit par :

- un travail sur les processus infinis afin de i) revenir sur des nombres emblématiques de l'égalité en analyse (par exemple leur partie décimale périodique est égale à 9) ; et ii) faire apparaître la convergence de suites comme une modélisation "efficace" des processus infinis qui donnent lieu à un résultat fini ;
- un travail de transition (de va et vient) entre les procédures d'approximations, encadrements et les procédures donnant du sens à topologie de la droite réelle (topologie de l'ordre avec comme notion fondamentale celle d'intervalle) ;
- un travail sur l'unicité de la limite de suite convergente via un retour sur l'égalité en analyse.

2. Expliciter les conditions nécessaires, les plus usuelles, de convergence de suites. Ceci est fondamental pour au moins deux raisons : manipuler la définition formelle de convergence et donner un moyen, conforme au niveau du cursus, pour étudier des suites non convergentes lorsque la limite n'est pas infinie. Notre hypothèse est qu'il est difficile de donner le sens requis au formalisme de la convergence si la non convergence n'en est pas complètement déduite. Ceci supposerait :

- d'expliciter les conditions nécessaires qui soient abordables et exhaustives à ce niveau du cursus : la suite est bornée ou une variante de la suite de Cauchy pour la comparaison de deux termes consécutifs de la suite ;
- de donner un moyen pour manipuler ces conditions afin d'infirmer la convergence d'une suite.

L'exemple des nombres complexes

1. Introduire les nombres complexes en se basant sur leur aspect pré conceptuel, soit en les abordant comme étant des objets pré construits utilisés pour résoudre les questions relatifs aux nombres connus jusque là. Le côté fondamental de cette condition est lié à la nécessité de prendre en compte la distinction entre nombre réels et nombres complexes notamment pour la construction des opérations (ou lois de composition internes) du corps $\mathbb{C}$, soit dans les termes de la théorie à la place de cet ensemble dans le théorème fondamental de l'algèbre. Dans cet ordre d'idée :

- la quantité $\sqrt{-1}$ n'apparaîtra pas comme un "choix" non justifié pour la résolution d'une équation impossible dans $\mathbb{R}$;
- la question de l'ordre dans le corps $\mathbb{C}$ et de son incompatibilité avec les lois de composition internes, émergera de la signification intrinsèque donnée à ces nombres.

La phase prévue pour prendre en charge ce premier élément, encore en cours d'expérimentation, table sur la résolution d'équations cubiques où l'existence de la solution réelle est empiriquement justifiée via un support graphique. Il a été par conséquent nécessaire de prévoir préalablement une phase de travail sur les racines cubiques et les fonctions polynomiales de degré trois.

2. Valider l'usage d'un repère orthonormé direct du plan complexe. Cette condition est fondamentale pour au moins deux raisons : approcher la distinction entre la structure de corps et celle d'espace affine euclidien de $\mathbb{C}$; et penser les aspects unificateur et simplificateur des nombres complexes en terme de changements de structures de $\mathbb{C}$. Ceci permet en particulier de :

- interpréter géométriquement les opérations dans le corps $\mathbb{C}$, pour une meilleure distinction avec celles de $\mathbb{R}$ mais aussi pour mieux définir le rôle des transformations planes usuelles dans un travail avec les nombres complexes ;

- exploiter la validité géométrique des nombres complexes pour simplifier la résolution de problèmes géométriques.

Une phase articulant le travail dans la structure de corps et celui dans le plan complexe prévoit un retour sur le lien entre la droite réelle et l'ensemble $\mathbb{R}$ notamment en redéfinissant géométriquement les opérations avec les réels.

CONCLUSION

A l'origine, notre travail de recherche a porté essentiellement sur la prise en compte des conditions institutionnelles dans la conception d'ingénieries didactiques. Il s'est ensuite orienté vers la question d'une meilleure définition de cette prise en compte, pour finalement déboucher sur un questionnement plus approfondie des conditions d'implémentation de ces ingénieries.

Nous pensons avoir montré tout au long de cette note, d'abord l'efficacité des outils méthodologiques servant à l'exploration du terrain institutionnel et leur articulation naturelle. Fondées sur la TSD, les modélisations à la base de ces outils (des variables macro-didactiques, de la gestion du professeur et du travail des élèves) sont suffisamment flexibles pour pouvoir être utilisées dans l'étude des savoirs de fin de lycée et du supérieur, tout en tenant compte des problématiques visées. Nous espérons avoir montré comment il est possible d'alimenter ces modèles en utilisant les outils d'autres théories dans le but d'une meilleure adéquation au sujet d'étude. Particulièrement, nous avons montré que l'existence objet des nombres complexes passe inéluctablement par la flexibilité de sa réinterprétation dans diverses catégories mathématiques de sorte que le résultat final préserve l'entité et aboutit à la création d'une nouvelle forme de l'objet (ou une nouvelle représentation mathématique de l'objet, i.e. une nouvelle catégorie). Ceci a conduit à l'introduction de la variable *"changements de représentations mathématiques"* dans le modèle des variables macro-didactiques. De même, la problématique des images de la convergence de suites a amené au réajustement de la modélisation relative à la gestion du professeur dans les classes ordinaires de manière à rendre visible la nature de ces images et leur organisation. Nous avons aussi montré comment l'appui sur les résultats de telles analyses permet d'entreprendre une nouvelle étude ciblée sur les difficultés effectives des élèves/étudiants et de finalement les utiliser pour construire une base de données convenables afin d'entamer la conception des ingénieries.

Ce premier niveau de sensibilité de la recherche en didactique des mathématiques à la dimension institutionnelle a ouvert des perspectives prometteuses pour l'étude de la question d'implémentation des ingénieries dans l'institution. Nous espérons aussi avoir montré que le travail entamé dans ce sens pourrait constituer une base solide pour entreprendre des investigations empiriques dont l'objectif ultime est de fournir un cadrage théorique à la question de l'action didactique via les ingénieries. Le dispositif méthodologique global qui a orienté le déroulement de nos investigations dans le cas des nombres complexes et de la convergence des suites a révélé que la posture autoréflexive, y compris du point de vue épistémologique, apparaît en tant que composante essentielle de la dévolution ou comme moyen tributaire du processus menant à sa construction.

Nos premiers résultats montrent particulièrement que prendre appui sur les travaux de recherche concernant les pratiques réflexives est incontournable pour avancer dans la question relative à l'implémentation des ingénieries dans l'institution.

Dans la suite de nos recherches, nous projetons de continuer à investiguer cette question vive dans le cadre des savoirs de la transition entre le secondaire et le supérieur. Sur le court terme, nos travaux s'articulent sur la question centrale : Quelles sont les similitudes entre ce que les travaux de recherche concernant les pratiques réflexives ont mis en évidence et ce que nos premiers résultats, fortement reliés à la dimension épistémologique, ont apporté comme éclairage ? Comment ces travaux pourraient-ils nous renseigner par rapport à la façon de cadrer théoriquement le processus d'autoréflexion dans le projet global d'implémentation des ingénieries dans l'institution ? Sur le moyen terme, notre objectif est de focaliser une telle étude sur des phases locales spécifiques à la conception d'ingénieries relative à l'enseignement de l'analyse réelle dans la transition lycée/université : Comment organiser la jonction des questions encore vives en mathématiques concernant les liens entre le continu archimédien et non archimédien et celles spécifiques aux questions de construction des situations théoriques de l'analyse réelle dans la transition lycée/université ?

Enfin, c'est la question plus générale des fondements épistémologiques de l'analyse réelle que nous souhaitons élargir et contribuer à étudier dans la ferme perspective d'une meilleure représentativité de la didactique en mathématiques.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Alcock L., Simpson A-P. (2005) Convergence of sequences and series 2: interactions between non-visual reasoning and the learner's beliefs about their own role. *Educational Studies in Mathematics*, 58, 77-110.
- Alcock L., Simpson A-P. (2011) The role of definitions in example classification. *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 33-40.
- Artaud M., Cirade G. (2011) La constitution de praxéologies professorales en formation initiale et son écologie – Contribution à une ingénierie didactique des PER. In Margolinas et al. (Eds.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques*, pp. 329 – 348. La Pensée Sauvage Editions.
- Artigue, M. (2016) The challenging relationship between fundamental research and action in mathematics education. *Conference presented at ICME-13. Hamburg, Germany: ICME.* <https://lecture2go.uni-hamburg.de/l2go/-/get/v/19763>
- Artigue, M. (2011) L'ingénierie didactique comme thème d'étude. In Margolinas et al. (Eds.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques*, pp. 15 – 26. La Pensée Sauvage Editions.
- Artigue, M., & Deledicq, A. (1992) *Quatre étapes dans l'histoire de nombres complexes : quelques commentaires épistémologiques et didactiques*. IREM de Paris : Université Paris Diderot.
- Bagni, G.T. (2005) The historical roots of the limit notion. Cognitive development and development of representation registers. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 5(4), 453-468.
- Bergé, A. (2010) Students' perceptions of the completeness property of the set of real numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(2), 217–227.
- Bloch, I. (1999) L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève : un exemple dans l'enseignement de l'analyse en Première scientifique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 135-194.
- Bloch, I. (2002) Différents niveaux de modèles de milieu dans la théorie des situations. In Dorier et al. (Eds.) *Actes de la XI^e Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, (pp.125-139), La Pensée Sauvage.
- Bloch, I., Ghedamsi, I. (2005) Comment le cursus secondaire prépare-t-il les élèves aux études universitaires ? *Petit x*, 69, 7-30.
- Bloch I. (2006) Quelques apports de la théorie des situations à la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur. *Note de synthèse HDR de l'Université Paris 7*.
- Bloch, I., Ghedamsi, I. (2010) From numbers to limits: situations as a way to a process of abstraction. *Proceedings of CERME 6*, (pp. 2386 – 2395).
- Bloch I., Gibel P. (2011) Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : Etude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 31(2), 1-18.

Bosch, M., Fonseca, C., Gascón, J. (2004) Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24(2/3), 205–250.

Bressoud, D., Ghedamsi, I., Martinez-Luaces, V., Törner, G. (2016) *Teaching and learning of Calculus*. Springer International Publishing. ISBN 978-3-319-32974-1.

Brousseau G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 7 (2), 135-194.

Brousseau G. (1996) L'enseignant dans la théorie des situations didactiques. *Actes de la VIIIe école d'été de didactique des mathématiques*, IREM de Clermont-Ferrand.

Bosch, M. (2011) «Plan d'épargne» et modélisation algébrique – Vers une ingénierie didactique des PER. In Margolinas et al. (Eds.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques*, pp. 349 – 366. La Pensée Sauvage Editions..

Chellougui, F. (2009) L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année d'université : entre l'explicite et l'implicite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 29 (2), 123-154.

Chevallard, Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-265.

Chevallard, Y. (2011) La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder - Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. In Margolinas et al. (Eds.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques*, pp. 81 – 108. La Pensée Sauvage Editions.

Chevallard, Y. Wozniak, F. (2011) Sur l'aléatoire et la variabilité – Vers une ingénierie didactique des PER. In Margolinas et al. (Eds.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques*, pp. 367 – 382. La Pensée Sauvage Editions.

Comiti C., Grenier D., Margolinas, C. (1995) Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions de classe et modélisation de phénomènes didactiques. *Différents types de savoirs et leur articulation*, pp. 93-128, La Pensée Sauvage.

Cunliffe, A. L. (2004) On becoming a critically reflective practitioner. *Journal of Management Education*, 28(4), 407–426.

Dias, M., Artigue, M., Jahn A., Campos, T. (2008) A comparative study of the secondary tertiary transition. In M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.). *Proceedings of the 34th Conference of the PME*, 2, pp. 129–136.

Dieudonné, J. (1978) *Abrégé d'histoire des mathématiques*. Tome I. Editions Hermann, Editeurs des sciences et des arts.

Dieudonné, J. (1980) *Calcul infinitésimal*. Editions Hermann.

Durand-Guerrier V., Ngansop J. N. (2013) An equality questioning the relationships between truth and validity. In *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, pp.196-205.

Duval, R. (1993) Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactiques et de sciences cognitives*, 5, 37-65.

Duval, R. (1996) Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ?' *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16(3), 349-380.

Douady, R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 7(2), 5-31.

- Easterbrook, S. (1999) *An introduction to Category Theory for Software Engineers*. <http://www.cs.toronto.edu/~sme/presentations/cat101.pdf>, University of Toronto.
- Flament, D. (2003) *Histoire des nombres complexes: entre algèbre et géométrie*. CNRS Editions.
- Ghedamsi, I. (2008) Enseignement du début de l'analyse réelle à l'entrée de l'Université. *Thèse de doctorat, Université de Bordeaux 2 et Université de Tunis*.
- Ghedamsi, I., Chellougui, F. (2013) Antiphérèse de $\sqrt{2}$: introduction d'une dimension a-didactique dans l'enseignement de l'analyse à l'université. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.), *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012*, pp. 987–1004. Editions Université de Genève.
- Ghedamsi, I., Tanazefi, R. (2015). Difficultés d'apprentissage des nombres complexes en fin de Secondaire. *Petit x*, 98, 29-52.
- González-Martín, A. S., Nardi, E., Biza, I. (2011). Conceptually-driven and visually-rich tasks in texts and teaching practice: The case of infinite series. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 42(5), 565–589.
- González-Martín, A., Bloch, I., Durand-Guerrier, V., Maschietto, M. (2014) Didactic Situations and Didactical Engineering in University mathematics: cases from the study of Calculus and proof. *Research in Mathematics Education* 16(2) 117-134.
- Grugnetti, L., Rizza, A. (2003) A lengthy process for the establishment of the concept of limit, in *Proceedings of the third Conference of the European Society for research in Mathematics Education (CERME 3)*, Bellaria, Italia.
- Haier, E, Wanner, G. (2000) *L'analyse au fil de l'histoire*. Edition Springer.
- Kidron, I., Tall, D. (2014) The role of embodiment and symbolism in the potential and actual infinity of the limit process. *Educational Studies in Mathematics*, 88(2), 183 – 199.
- Lie, L., Tall, D. (1992) Constructing Different Concept Images of Sequences and Limits by Programming. *Proceedings of the 17th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 41– 48.
- Mamona-Downs, J. (2001) Letting the intuitive bear on the formal ; a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 259-288.
- McGowen, M., Tall, D. (2010) Metaphor or Met-before? The effects of previous experience on the practice and theory of learning mathematics. *Journal of mathematical behavior*, 29, 169-179.
- Perrin-Glorian, M-J. (2011) L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement : vers une ingénierie didactique de deuxième génération ? In Margolinas et al. (Eds.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques*, pp. 57 – 78. La Pensée Sauvage Editions.
- Pinto, M., Tall, D. (2002) Building formal mathematics on visual imagery: A case study and a theory. *For the Learning of Mathematics*, 22(1), 2-10.
- Praslon, F. (2000) Continuités et ruptures dans la transition Terminale S/DEUG Sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement. *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques*, 185–220.

- Przenioslo, M. (2004) Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics*, 55, 103-132.
- Przenioslo, M. (2005) Introducing the concept of convergence of a sequence in secondary school. *Educational Studies in Mathematics*, 60, 71-93.
- Robert, A. (1982) L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 3(3).
- Robert, A. (1983) Ingénierie didactique sur les suites numériques après le baccalauréat. *Cahier de DIDIREM*, 4, IREM de Paris.
- Robert, A. (1998) 'Outils d'analyse des contenus à enseigner au lycée et à l'Université', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(2), 139-190.
- Robert, A. (2003) Tâches mathématiques et activités des élèves : une discussion sur le jeu des adaptations introduites au démarrage des exercices en classe de collège. *Petit x*, 62, 61-71.
- Robert, A. (2007) Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques (second degré) : une hypothèse, des inférences en formation. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 27(3), 271-310.
- Rogalski, M. (2002). Peut-on élaborer une situation didactique d'introduction aux nombres complexes par l'histoire de l'équation du troisième degré, en terminale scientifique. In Dorier et al. (Eds), *Actes de la XIe Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (pp. 387-393). La Pensée Sauvage.
- Rosseel, H., Schneider, M. (2003) Ces nombres que l'on dit imaginaire. *Petit x*, 63, 53-71.
- Rosseel, H., Schneider, M. (2004) *Des nombres qui modélisent des transformations*. *Petit x*, 64, 7-34.
- Roh, K.H. (2008) Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 217-233.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on process and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
- Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 6(1), 5-67.
- Tall, D., Vinner, S. (1981) Concept image and concept definition in mathematics with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
- Tall, D., Mejia-Ramos, J-P. (2006). The long term cognitive development of different types of reasoning and proof. *Conference on explanation and proof in mathematics, philosophical and educational perspectives*, Essen, Germany.
- Tall, D., Katz, M. (2014) A Cognitive Analysis of Cauchy's Conceptions of Function, Continuity, Limit, and Infinitesimal, with implications for teaching the calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 86(1), 97-124.
- Vandebrouck, F. (2011). Students' conceptions of functions at the transition between secondary school and university. *Proceedings of CERME 7*, 2093-2102.
- Vinner, A. (1991) The role of definitions in teaching and learning mathematics. In Tall, D.O. (ed), *Advanced mathematical thinking* (pp.65-81), Dordrecht, Kluwer.
- Winsløw, C. (2008). Transformer la théorie en tâches : La transition du concret à l'abstrait en analyse réelle. *Actes de la 13ème EEDM*. La Pensée Sauvage.