



HAL
open science

Modélisation numérique du comportement irréversible des métaux ductiles soumis à grandes déformations avec endommagement

Laurent Stainier

► **To cite this version:**

Laurent Stainier. Modélisation numérique du comportement irréversible des métaux ductiles soumis à grandes déformations avec endommagement. Matériaux et structures en mécanique [physics.class-ph]. Université de Liège, 1996. Français. NNT: . tel-01575580

HAL Id: tel-01575580

<https://theses.hal.science/tel-01575580>

Submitted on 21 Aug 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE LIÈGE
Faculté des Sciences Appliquées

**Modélisation numérique du comportement
irréversible des métaux ductiles soumis à grandes
déformations avec endommagement**

par

Laurent STAINIER

Ingénieur Civil Electricien-Mécanicien (Aérospatiale)

Thèse présentée en vue de l'obtention du grade scientifique
de Docteur en Sciences Appliquées

Année académique 1995-1996

Cette thèse a été défendue publiquement le 14 juin 1996, devant un jury composé de :

M. M.GÉRADIN, Professeur à l'Université de Liège, Président ;
M. S.CESCOTTO, Professeur à l'Université de Liège ;
M. M.HOGGE, Professeur à l'Université de Liège, Promoteur ;
M. D.H.NGUYEN, Professeur à l'Université de Liège ;
M. G.CAILLETAUD, Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris,
France ;
M. I.DOGHRI, Professeur à l'Université Catholique de Louvain ;
M. J.OLIVER, Professeur à l'Université de Catalogne, Barcelone, Espagne.

Cette seconde édition comporte quelques ajouts vis à vis de l'édition originale, en réponse à certaines remarques du jury. Plus précisément, ces modifications concernent les sections 2.3.4, 3.2.5, 3.2.6, 3.3, 4.5, 5.4 et 6.4, et ont reçu l'aval du promoteur de thèse.

*« Ὅλως γὰρ δεῖ περὶ γενέσεως καὶ φθορας τὴν αἰτίαν διαπραγματεύεσθαι.
Ἐγὼ οὖν σοὶ δέειμι περὶ αὐτῶν, εἰ βούλη, τὰ γε ἐμὰ πάθη ἐπειτα, εἰ τί σοι
χρήσιμον φαίνεται ὧν ἂν λέγω, πρὸς τὴν πειθῶ περὶ ὧν λέγεις χρήσει. »*

« Quelle est d'une façon générale la cause de la génération et de la corruption, voilà en effet la question qu'il nous faut traiter à fond. Je m'en vais donc à leur sujet, pourvu que tu le désires, te raconter, moi, mes propres expériences. Puis, au cas où dans ce que je pourrai bien dire tu verrais quelque chose d'utile, ce sera à toi de l'utiliser pour rendre convaincante ta propre thèse. »

Phédon
PLATON

Avant-propos

Cette thèse est le fruit du travail réalisé depuis octobre 1992 en tant qu'Aspirant du F.N.R.S. au Laboratoire des Techniques Aéronautiques et Spatiales (LTAS), service de Thermomécanique & Milieux Continus, de l'Université de Liège. Je remercie Michel Hogge de m'y avoir accueilli, m'ouvrant ainsi les portes du monde de la recherche.

Je suis également reconnaissant à tous mes collègues, "Itassiens" et autres, pour les nombreuses occasions où j'ai pu recourir à leur aide, leur avis, leurs conseils, . . . et surtout pour leur bonne humeur.

Cet ouvrage n'aurait pas pu devenir ce qu'il est sans tous ceux qui, à différents stades de son élaboration, ont bien voulu consacrer une part de leur temps à une relecture critique. Je pense en particulier à Jean-Philippe Ponthot, dont l'avis toujours aussi judicieux a traversé à plusieurs reprises l'Océan Atlantique. Qu'ils en soient tous remerciés.

Je voudrais également remercier dès maintenant les membres du jury, pour le temps et l'attention qu'ils voudront bien consacrer à l'évaluation de ma thèse.

Finalement, je souhaite remercier ma famille pour son soutien continu, spécialement durant ces derniers mois, et plus généralement tous ceux qui m'ont encouragé à un moment ou l'autre de mon doctorat.

Résumé

La théorie de l'endommagement étudie les processus de dégradation des solides lorsqu'ils sont soumis à un certain niveau de sollicitation. Parmi les différents types d'endommagement que l'on peut rencontrer, l'endommagement plastique ductile est celui qui accompagne les grandes déformations plastiques des métaux aux températures ambiantes et peu élevées. Le suivi de l'endommagement dans un matériau, depuis l'état vierge jusqu'à l'amorçage de fissures macroscopiques, constitue ce que l'on appelle l'approche locale de la rupture, par opposition à la mécanique de la rupture classique. La modélisation numérique de l'endommagement permet par exemple de mieux optimiser les procédés de mise en forme, par la prédiction des défauts de fabrication ainsi que des propriétés finales des produits issus des opérations de formage.

La simulation de l'endommagement dans le cadre d'un code de calcul des structures conduit également à s'intéresser à différents aspects numériques. Ainsi, après avoir établi un modèle mathématique prenant en compte les micromécanismes responsables de l'endommagement et reproduisant les caractéristiques liées à l'apparition et au développement de cet endommagement, telles que la présence d'une déformation volumique irréversible et la dégradation des propriétés du solide, il a fallu écrire un schéma d'intégration des équations différentielles constitutives sur un pas de temps fini. Le schéma proposé appartient à la famille des schéma de projection sur le point le plus proche et est applicable aux modèles de comportement visqueux, ainsi qu'aux surfaces de charge dépendant de la pression. On a ensuite dérivé de ce schéma un opérateur tangent consistant, de manière à assurer l'efficacité des méthodes de résolution implicite du problème structural.

Les problèmes de localisation, inévitablement liés à la présence de l'endommagement, ont ensuite été abordés. Plus particulièrement, on s'est intéressé à la régularisation visqueuse et aux conditions de son efficacité, ainsi qu'à l'utilisation des techniques de remaillage pour l'étude des bandes de cisaillement.

Les applications présentées illustrent ces développements, mais également l'approche locale de la rupture, ainsi que l'intérêt plus général du calcul adaptatif pour la simulation des processus de mise en forme.

Sommaire

Principales notations	xiii
1 Introduction	1
1.1 Généralités	1
1.2 Position du problème	2
1.3 Les grandes lignes de la thèse	6
1.4 Apports et originalités	7
2 Modèles mathématiques d'endommagement ductile	9
2.1 Introduction	9
2.2 Physique de l'endommagement ductile	10
2.2.1 Nucléation	10
2.2.2 Croissance	11
2.2.3 Coalescence	12
2.3 Modélisation de l'endommagement	12
2.3.1 Théorie thermodynamique	12
2.3.2 Cas des lois élasto-visco-plastiques endommageables	13
2.3.3 Modèle de base de Chaboche – Lemaitre	17
2.3.4 Modèle de Gurson – Tvergaard amélioré	18
2.3.5 Autres modèles	24
2.4 Conclusion	25
3 Mise en œuvre numérique	27
3.1 Introduction	27
3.2 Intégration numérique des lois constitutives	28
3.2.1 Rappel des équations du problème	28
3.2.2 Prédicteur élastique	29
3.2.3 Correcteur plastique-endommagement	30
3.2.4 Rotation finale instantanée	32
3.2.5 Comparaison avec d'autres schémas	34
3.2.6 Stabilité et précision du schéma	35
3.3 Lois tangentes consistantes	35
3.4 Résolution par la MEF	38
3.4.1 Le quadrangle à sous-intégration partielle	38
3.4.2 Sous-intégration complète	40
3.5 Les problèmes de localisation de la déformation	40
3.6 Conclusion	43

4 Applications (1^{ère} partie)	45
4.1 Introduction	45
4.2 Essais numériques sur mono-élément	45
4.2.1 Essai de cisaillement simple	46
4.2.2 Essai de traction-compression	50
4.3 Mise en forme d'un boulon	56
4.4 Striction dans un barreau	59
4.5 Un exemple de localisation en bandes de cisaillement	76
4.6 Impact dans une turbine	82
4.7 Impact de deux plaques circulaires	85
5 Calcul adaptatif	93
5.1 Introduction	93
5.2 Génération de maillages par la méthode frontale	94
5.2.1 Le "background mesh"	94
5.2.2 Discrétisation du contour	95
5.2.3 Génération du maillage	97
5.2.4 Post-traitement du maillage généré	98
5.3 Critères pour une discrétisation optimale	99
5.3.1 Mesures à base géométrique	99
5.3.2 Méthodes basées sur l'allure du champ solution	101
5.3.3 Méthodes basées sur la notion d'erreur	103
5.4 Transfert des données	103
5.5 Conclusion	104
6 Applications (2^{ème} partie)	107
6.1 Introduction	107
6.2 Ecrasement d'un lopin cylindrique	107
6.3 Poinçonnement hémisphérique	114
6.4 Un exemple de localisation en bandes de cisaillement (suite)	119
7 Conclusions	125
7.1 Modèles de comportement	125
7.2 Aspects numériques	126
7.3 Techniques d'adaptation de maillage	128
7.4 Conclusion générale	129
Annexes	131
A Sous-intégration & grandes déformations	131
B Algorithmes de positionnement sur un maillage	137
C Splines cubiques	141
D Mesure de la distorsion d'un quadrangle	145
Références	149

Principales notations

Règles générales

- La convention d'Einstein sur la sommation des indices répétés est d'application partout où il n'est pas fait mention du contraire.
- Les tenseurs (vecteurs, matrices, ...) sont indiqués par des caractères gras quand ils ne sont pas notés sous leur forme indicielle.
- Une grandeur pointée désigne son taux de variation temporelle.

Abréviations

AXI	=	AXIsymétrie
EPD	=	Etat Plan de Déformation
HHT	=	Hilber–Hughes–Taylor
MEF	=	Méthode des Eléments Finis
TPI	=	Thermodynamique des Phénomènes Irréversibles

Symboles

Nous avons repris ci-dessous les principaux symboles utilisés, avec une brève définition de la grandeur qu'ils représentent chacun. Ils ont été répartis en différentes catégories, selon le domaine auquel ils sont le plus directement rattachés. La classification qui suit ne correspond donc pas à la division en chapitres de la thèse.

Notations générales

δ_{ij}	symbole de Kronecker
\mathbf{A}^t	transposée de \mathbf{A}
$\det(\mathbf{A})$	déterminant de \mathbf{A}
$\text{dev}(\mathbf{A})$	partie déviatorique de \mathbf{A}
$\text{tr}(\mathbf{A})$	trace de \mathbf{A}

Cinématique des milieux continus en grandes transformations

\mathbf{b}	tenseur de Cauchy–Green à gauche (tenseur de Finger)
\mathbf{C}	tenseur de Cauchy–Green à droite
\mathbf{D}	tenseur taux de déformation
$\boldsymbol{\epsilon}$	tenseur déformation (notation générique)
\mathbf{e}	tenseur d’Almansi
\mathbf{E}	tenseur de Green–Lagrange
\mathbf{F}	tenseur gradient de déformation
\mathbf{L}	tenseur gradient de vitesse
\mathbf{R}	tenseur de rotation
\mathbf{U}	tenseur de déformation pure (à droite)
\mathbf{W}	tenseur taux de rotation
\mathbf{x}	coordonnées dans la configuration actuelle
\mathbf{X}	coordonnées dans la configuration de référence

Lois de comportement

α_i ($i=1,\dots,N$)	variables d’état internes
A_i ($i=1,\dots,N$)	forces thermodynamiques associées aux variables internes
d	endommagement, fraction volumique de vides
$\boldsymbol{\epsilon}^{pl}$	déformation plastique équivalente
f	surface d’écoulement plastique
k	coefficient de viscosité
$\dot{\lambda}$	multiplicateur de plasticité
m	exposant de viscosité
\mathbf{M}	tenseur matériel (d’ordre 4)
$\varphi(\dot{\alpha}_i; \alpha_i)$	pseudo-potential de dissipation
$\varphi^*(A_i; \alpha_i)$	pseudo-potential dual de dissipation
$\psi(\boldsymbol{\epsilon}, \alpha_i)$	potentiel thermodynamique (énergie libre spécifique)
ρ	densité
T	température
σ	contrainte équivalente (unidimensionnelle)
σ_Y	contrainte d’écoulement plastique
$\boldsymbol{\sigma}$	tenseur contrainte (notation générique)
	tenseur des contraintes de Cauchy
\mathbf{s}	tenseur des contraintes déviatoriques de Cauchy
\mathbf{S}	tenseur contrainte de Piola–Kirchhoff $n^{\circ}2$
$\boldsymbol{\tau}$	tenseur contrainte de Kirchhoff
Y	force thermodynamique associée à d

Modèle d'endommagement

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$	paramètres de la surface d'écoulement plastique de Gurson–Tvergaard
d_U	endommagement ultime
d_N, ϵ_N, s_N	paramètres de nucléation
$d_{crit}, \Delta\epsilon$	paramètres de coalescence
\mathbf{H}	tenseur matériel de Hooke (d'ordre 4)
G	module de cisaillement
K	module de compressibilité cubique
λ, μ	coefficients de Lamé
p	tension hydrostatique, pression
q	deuxième invariant du tenseur des contraintes déviatoriques

Éléments finis

\mathbf{f}^{int}	forces nodales internes
N_I	fonction de forme du noeud I
V_e	volume de l'élément
ξ, η	coordonnées isoparamétriques
\mathbf{x}_I	coordonnées nodales
x_I, y_I	
Q4-VRI	quadrangle bilinéaire à intégration réduite pour la partie volumique
Q4-URI	quadrangle bilinéaire à intégration réduite uniforme

Remaillage

$\delta(\mathbf{x})$	fonction “taille de maille souhaitée”
$\delta_{min}, \delta_{max}$	taille de maille minimale, maximale
s	abscisse curviligne
τ	indicateur de distorsion

Chapitre 1

Introduction

1.1 Généralités

Le calcul des structures repose sur trois notions fondamentales : les équations de conservation, la cinématique des milieux continus et les lois de comportement. Les deux premières constituent des relations universelles indépendantes du matériau, tandis que la troisième dépend de la nature physique des milieux étudiés. Si les équations de conservation peuvent être écrites sous une forme simple et bien connue depuis longtemps déjà, la description cinématique des milieux continus devient rapidement complexe dès que l'on sort du domaine linéaire, c'est-à-dire dès que l'on veut traiter le cas de structures soumises à de grandes transformations (grandes déformations et/ou grands déplacements). Cette complexité dans la formulation mathématique rend souvent délicat le passage à la modélisation numérique. Cependant, de grandes avancées ont été réalisées ces dix ou vingt dernières années dans le domaine. Le modélisateur dispose donc aujourd'hui d'une gamme étendue d'algorithmes lui permettant de représenter correctement la cinématique d'une structure, quelle que soit l'amplitude des sollicitations auxquelles cette dernière est soumise, même si le champ des développements dans ce domaine reste largement ouvert, notamment au niveau de l'amélioration de la performance des méthodes numériques utilisées. Par contre, les points critiques nous semblent se trouver actuellement dans le domaine des lois de comportement. En effet, il apparaît que, si on sort du cadre linéaire, c'est à ce niveau que l'incertitude, c'est-à-dire la possibilité d'erreurs de modélisation, est la plus grande. Mais avant de pousser plus loin cet argument, arrêtons-nous un instant sur les notions de loi et de modèle de comportement, simplement pour préciser que nous utiliserons le terme *loi* pour désigner un type de comportement (élastique, élastoviscoplastique, ...) tandis que le terme *modèle* désignera plutôt une représentation mathématique particulière d'une telle loi (modèle de Chaboche–Lemaitre, modèle de Gurson–Tvergaard, ...). Il pourra donc y avoir plusieurs modèles pour une même loi.

Les éléments à l'origine de la relative faiblesse du pilier "lois de comportement" dans le calcul non-linéaire des structures sont multiples. Tout d'abord, la plupart des modèles de comportement ont été développés dans un cadre géométrique linéaire (petites déformations et petites rotations). Or l'extension d'un modèle du domaine des petites déformations à celui des grandes déformations n'est pas un processus aussi simple qu'il pourrait sembler à première vue. On doit en effet tenir compte d'un certain couplage des lois de comportement

avec la cinématique du milieu continu, de manière à garantir l'objectivité* de ces lois. De plus, la transposition de certaines grandeurs d'un domaine à l'autre n'est pas toujours univoque, dans le sens où des grandeurs différentes dans le cadre général du géométriquement non-linéaire peuvent se ramener à une seule et même expression dans le cadre particulier du géométriquement linéaire (par exemple, les différentes mesures de la déformation). En dehors de toute considération sur la non-linéarité géométrique du problème, d'autres difficultés surviennent également dans le développement et l'utilisation de modèles de comportement. Le modélisateur est en effet confronté à la fois à la nécessité de représenter correctement des comportements réels, c'est-à-dire complexes, et en même temps à l'obligation de limiter la complexité des modèles, de manière à leur conserver une applicabilité pratique. Cette limitation dans la complexité se justifie tout autant au niveau de la performance des modèles dans un code de calcul numérique qu'au niveau de l'identification des paramètres inévitablement présents dans ces modèles.

Dans ce travail, nous nous intéressons à la simulation du comportement des métaux, et plus particulièrement au processus de dégradation qu'ils subissent lorsqu'ils sont soumis à de grandes déformations. C'est ce processus que l'on nomme *endommagement ductile*. L'intérêt, si pas la nécessité, d'une prise en compte de l'endommagement se manifeste dans de nombreux domaines. Tout d'abord, le suivi de l'évolution, avec le temps ou le chargement, de l'endommagement dans une structure, depuis l'état vierge jusqu'à l'amorçage de fissures macroscopiques, permet la prévision de la résistance globale de cette structure ainsi que de ses points critiques. C'est ce que l'on appelle généralement l'approche locale de la rupture (Local Approach to Fracture). Le suivi de la dégradation permet également, à côté de l'utilisation de matériaux avancés, une "utilisation avancée des matériaux", dans le sens où l'on peut repousser les limites d'utilisation de ces matériaux sachant qu'un certain endommagement local peut ne pas mettre en danger la résistance globale de la structure. Si l'on s'attache en particulier aux structures soumises à de grandes déformations, le champ d'applications le plus immédiat pour la théorie de l'endommagement est le calcul de la résistance à l'impact. Il s'agit en effet d'un sujet d'actualité, principalement dans le domaine de la sécurité automobile. Mais la modélisation de l'endommagement permet aussi de mieux optimiser les procédés de mise en forme, par la prédiction des défauts de fabrication ainsi que des propriétés finales des produits issus des opérations de formage. Finalement, il ne faudrait pas oublier la simulation des processus de découpe, où la rupture est justement l'effet recherché, mais dans des conditions (emplacement, orientation, ...) particulières et maîtrisables.

1.2 Position du problème

Tous les types d'endommagement (ductile, fragile, de fatigue ou autre) sont régis par les mécanismes élémentaires de création de nouvelles surfaces à l'échelle atomique (clivage, glissement, ...). Pour les métaux polycristallins, le processus d'endommagement et de rupture ductiles résulte de l'amorçage (nous emploierons également volontiers le terme de nucléation), de la croissance et de la coalescence de microcavités. Le champ le plus naturel pour l'étude des mécanismes d'endommagement se situe donc au niveau *microscopique*. Ainsi, des modèles mathématiques ont pu être proposés pour établir des seuils de nucléation (voir Curran *et al.* ⁽²⁴⁾ ou François *et al.* ⁽⁴²⁾), ou pour étudier la croissance de vides

*On entend par là que les lois constitutives doivent être exprimées en termes de quantités indépendantes de l'observateur et de son mouvement.

isolés soumis à une contrainte appliquée à l’infini (MacClintock ⁽⁸⁰⁾, Rice et Tracey ⁽¹¹¹⁾, ...). On peut également étudier le comportement d’un groupe de vides voisins afin de tenir compte de leurs interactions. En utilisant les techniques d’*homogénéisation* (voir p.e. Aboudi ⁽¹⁾), on peut alors passer du comportement d’un volume de matière contenant un ou quelques microvides à un modèle de comportement pour un volume macroscopiquement représentatif, que l’on traite alors comme un milieu continu. Par exemple, c’est en suivant cette méthodologie que l’expression des modules élastiques d’un solide diphasique a pu être établie par Mori et Tanaka ⁽⁸⁴⁾, ou bien encore que Gurson ⁽⁵¹⁾ a obtenu une surface d’écoulement pour un matériau poreux rigide-plastique. Ces modèles construits par homogénéisation peuvent alors être utilisés dans un code de calcul pour simuler le comportement de structures macroscopiques. Cette approche présente cependant quelques inconvénients. Tout d’abord, elle introduit dans le modèle mathématique de comportement des paramètres d’origine microscopique, dont les valeurs peuvent donc être difficiles d’accès. En effet, il n’est pas toujours facile pour le modélisateur de relier les données expérimentales dont il peut bénéficier, généralement basées sur des observations macroscopiques, à ces paramètres liés aux mécanismes microscopiques sous-tendant le phénomène étudié. Une autre remarque que l’on peut formuler au sujet de cette *approche micro-macro* est que, en construisant un modèle de comportement à partir d’un certain nombre de micromécanismes, on limite la validité du modèle aux phénomènes pouvant être expliqués par les micromécanismes choisis. En utilisant des termes plus abstraits et plus absolus, on peut dire qu’il faudrait être certain de partir d’une base complète de micromécanismes (par combinaison desquels tout micromécanisme peut être décrit) pour être assuré d’obtenir un modèle macroscopique “universel”. En pratique, cette approche demande donc une connaissance assez précise des phénomènes intervenant au niveau microscopique. Parmi les auteurs ayant adopté cette approche, on peut notamment citer Agelet ⁽²⁾, Aravas ⁽⁵⁾, Becker et Needleman ⁽⁸⁾, Drugan et Miao ^(30,83), Duva ⁽³¹⁾, Goya *et al.* ⁽⁵⁰⁾, Hom et McMeeking ⁽⁵⁸⁾, Lee et Mear ^(73,74), Lee et Zhang ⁽⁷⁵⁾, Mear ⁽⁸²⁾, Oñate et Agelet ⁽⁹²⁾, Peeters et Konter ⁽⁹⁹⁾, Tvergaard ^(130–132,134), Tvergaard et Needleman ^(133,135) et Wang ⁽¹³⁶⁾.

On peut également aborder le problème de la modélisation sous un aspect purement *macroscopique*. Dans le cadre de la *théorie thermodynamique des phénomènes irréversibles* (TPI), la méthode de l’état local considère que l’état thermomécanique d’un milieu continu en un point et à un instant donnés est complètement défini par la connaissance de la valeur à cet instant d’un certain nombre de variables, dites variables d’état (Germain ⁽⁴⁶⁾, Germain *et al.* ⁽⁴⁷⁾, Lemaitre et Chaboche ⁽⁷⁶⁾). Ces variables sont donc représentatives de l’histoire complète du matériau et leur seule valeur instantanée suffit à la description du milieu continu à un instant donné. Ces variables sont classées en deux catégories : les variables d’état externes, directement observables au niveau macroscopique, représentatives de la partie réversible du comportement, et les variables d’état internes, représentatives de la partie irréversible du comportement, liée, rappelons-le, à des mécanismes microscopiques. Les variables internes sont donc des grandeurs macroscopiques (attachées au milieu continu) mesurant l’effet des micromécanismes sur le comportement observable du matériau, sans faire à la base d’hypothèse sur la nature de ces micromécanismes. Le potentiel thermodynamique permet d’associer des forces (au sens thermodynamique) aux variables d’état, tandis que le pseudo-potentiel de dissipation permet d’écrire les lois d’évolution des variables d’état. La connaissance de ces deux fonctions décrit complètement un matériau, le reste de la théorie pouvant être appliqué systématiquement. C’est donc au niveau de ces potentiels que le modélisateur intervient et que des liens peuvent être établis avec les caractéristiques du matériau. Il s’agit d’une méthode permettant une grande flexibilité, puisque la complexité

du modèle peut être adaptée au problème étudié via le choix de la nature et du nombre des variables internes. D'un autre côté, le choix des variables internes représente une opération délicate, puisqu'il implique en fait des hypothèses sur les phénomènes microscopiques pris en compte, sans que cela apparaisse toujours clairement. Ainsi, si le choix des variables internes liées à la plasticité est aujourd'hui bien établi, cela n'est pas forcément le cas pour l'endommagement, comme nous le verrons dans la suite. De plus, dans cette approche, les lois d'évolution des variables d'état sont généralement identifiées en se basant sur des mesures expérimentales macroscopiques (courbes force-déplacement p.e.) et il peut être difficile de séparer les effets structuraux des effets dus au matériau. En d'autres termes, on peut se demander si une loi identifiée sur un type de sollicitation reste valable pour les autres types de sollicitation possibles. La réponse à cette question n'est pas toujours immédiate. De très nombreux auteurs ont également adopté cette approche, parmi lesquels on peut entre autres citer Benallal *et al.* ⁽¹⁵⁾, Gelin ⁽⁴³⁾, Gelin et Predeleanu ⁽⁴⁴⁾, Ju ⁽⁶⁴⁾, Simo et Ju ^(119,120,123), Zhu ⁽¹⁴¹⁾, ...

Comme nous venons de le voir, l'approche micro-macro et l'approche macroscopique basée sur la TPI ont chacune leurs avantages et leurs inconvénients. Il apparaît donc clairement que, dans l'écriture d'un modèle de comportement, il faut sans arrêt passer d'une échelle à l'autre, en développant des lois macroscopiques sur base des informations microscopiques dont on dispose. C'est dans cet esprit que nous avons mis au point le modèle de comportement élastoviscoplastique endommageable présenté dans la suite. Ainsi, nous avons introduit les modules élastiques obtenus par Mori et Tanaka ⁽⁸⁴⁾ et la surface d'écoulement plastique de Gurson ⁽⁵¹⁾, expressions qui ont été établies par passage micro-macro, dans le formalisme systématique de la TPI. En appliquant celui-ci sur base de la théorie viscoplastique de Perzyna ⁽¹⁰⁴⁾, on arrive alors à un *modèle unifié*, comprenant comme cas particuliers les comportements élastoplastique et élastoviscoplastique. Ce modèle n'est cependant pas complètement orthodoxe du point de vue de la TPI. Par exemple, la variable interne mesurant l'endommagement n'a pas de force thermodynamiquement associée. Cela vient du fait que l'on a préféré écrire les lois d'évolution de l'endommagement sur base de considérations micromécaniques et statistiques, plutôt qu'en appliquant la procédure standard de la TPI.

L'utilisation pratique d'un modèle de comportement dans un code de calcul demande qu'on lui adjoigne un certain nombre d'outils numériques. Les deux outils de base sont :

1. un schéma d'intégration numérique permettant de passer d'une approche analytique continue à une approche numérique discrète ;
2. une loi tangente consistante avec ce schéma, de manière à obtenir un processus itératif de résolution des équations de conservation qui soit aussi efficace que possible.

Mais, outre ces aspects numériques attachés à tous les modèles de comportement, on se trouve face à un certain nombre de problèmes numériques particuliers quand il s'agit de traiter d'endommagement. Ainsi, la *localisation de la déformation en bandes de cisaillement* est sans doute un des problèmes les plus étudiés à l'heure actuelle. La formation de bandes de cisaillement est un mode de déformation qui a été fréquemment observé au niveau expérimental, et ce pour une large gamme de matériaux : dans les roches, sols et autres matériaux granulaires, tout comme dans les métaux, et même dans les polymères. Parallèlement à cette variété dans le support matériel, on est également confronté à une très grande variété dans les mécanismes responsables de l'apparition des bandes de cisaillement. Dans notre cas, c'est l'adoucissement du matériau, dû à la croissance de l'endommagement,

qui est responsable de la localisation. Mais des effets semblables peuvent être obtenus suite à un adoucissement lié à des effets thermiques, par exemple. Et il existe encore bien d'autres mécanismes, pouvant être fort différents de ceux-là. Néanmoins, lorsque l'on modélise ces différents mécanismes, on est presque toujours amené à rattacher l'apparition des bandes de cisaillement à un changement dans la nature des équations du problème. En effet, d'un point de vue purement mathématique, la localisation peut être vue comme une conséquence de la perte du caractère elliptique du problème abstrait traité. Cette perte d'ellipticité a des conséquences très fâcheuses sur le plan numérique, telles que le fait de n'être plus assuré de l'unicité de la solution et une dépendance de la solution envers la discrétisation utilisée. Le traitement de la localisation demande donc de faire appel à des techniques particulières dont nous discuterons plus loin. Il ne faut cependant pas réduire le phénomène de la localisation à son aspect purement numérique, car l'apparition des bandes de cisaillement est généralement un prélude à la rupture macroscopique. Leur modélisation correcte est donc un préliminaire au traitement de la rupture.

Dans ce travail, nous avons également abordé le sujet du *remaillage* et du *maillage adaptatif*. Les motivations qui nous y ont poussé sont multiples. Tout d'abord, pour rester dans le cadre de la localisation en bandes de cisaillement, on peut dire qu'une bonne part de la dépendance de la solution numérique envers le maillage, qui est observée en présence de ces bandes, doit être attribuée à la nature fortement orientée du phénomène de localisation. En effet, l'orientation principale des bandes de cisaillement coïncide rarement avec les directions naturelles du maillage. Ainsi, les éléments sont souvent orientés selon les axes OX et OY (en 2D), tandis que les bandes de cisaillement sont souvent orientées selon l'une des bissectrices principales (à $\pm 45^\circ$). De plus, les déformations observées dans une bande de cisaillement peuvent être très importantes, ce qui conduit à des distorsions très importantes des éléments situés à cet endroit. Enfin, comme son nom l'indique bien, la localisation est associée à une concentration de la zone subissant la déformation dans une région très limitée, au travers de laquelle les gradients sont très importants. C'est pourquoi on va chercher à adapter la discrétisation à la distribution spatiale de la déformation (ou d'une autre grandeur), de manière à atteindre une précision suffisante à un coût raisonnable. La volonté de traiter correctement la localisation suffit donc à elle seule pour justifier l'utilisation des techniques de remaillage et de maillage adaptatif. Cependant, le champ d'application de ces techniques dépasse de très loin le cadre de la localisation en bandes de cisaillement et peut être étendu au domaine général des grandes déformations (et même au-delà, mais nous n'irons pas si loin). En effet, qui dit grandes déformations dit distorsion importante du maillage et perte de qualité de la solution. Dans un grand nombre de situations, une formulation eulérienne-lagrangienne, où le maillage et la matière peuvent se déplacer de manière indépendante, permet de contourner le problème et de garder des éléments bien conditionnés (voir Ponthot ⁽¹⁰⁸⁾). Il peut cependant arriver, lorsque les déformations en jeu sont de très grande amplitude et/ou que la géométrie est complexe, que cette méthode ne soit plus suffisante. Pour fixer les idées, on peut par exemple citer le cas de la simulation de l'extrusion arrière, où la structure topologique du domaine étudié change radicalement en cours de formage. Dans ces cas extrêmes, il est alors nécessaire d'opérer un remaillage complet lorsque le maillage courant devient mauvais. On peut alors en profiter pour adapter la nouvelle discrétisation aux caractéristiques de la solution obtenue jusque là. Cela nécessite l'utilisation de critères et d'indicateurs d'erreur, si pas d'estimateurs d'erreur, pour lesquels une base mathématique saine n'est pas si simple à établir étant donné les nombreuses sources de non-linéarité présentes. C'est pourquoi nous nous sommes limités ici à des critères et indicateurs plutôt élémentaires, en abordant le problème sous un angle que l'on pourrait qualifier d'heuristique, ce afin d'éviter de sortir du

cadre que nous nous étions fixé.

1.3 Les grandes lignes de la thèse

Le thème général de cette thèse est celui de la simulation de l'endommagement et de la rupture ductile des métaux dans le cadre d'un code de calcul des structures en grandes déformations. Cela implique un certain nombre de développements, qui ont été regroupés en trois thèmes, faisant chacun l'objet d'un chapitre : les modèles de comportement, leur implémentation numérique et les techniques adaptatives. A ces trois chapitres théoriques s'ajoutent deux chapitres d'applications.

Après avoir passé en revue et brièvement décrit les micromécanismes responsables de l'endommagement et de la rupture ductiles, nous nous attacherons dans le *chapitre 2* à établir un modèle mathématique du comportement des solides élastoviscoplastiques endommageables, modèle qui traduise au mieux la nature de ces micromécanismes. Le cadre général de nos développement sera celui de la théorie thermodynamique des phénomènes irréversibles (TPI), dont nous rappellerons les grandes lignes. Après avoir particularisé cette théorie au cas des solides élastoviscoplastiques endommageables, nous décrivons le modèle proposé par Chaboche et Lemaitre ⁽⁷⁶⁾, qui peut être considéré comme étant à la base de tous les modèles développés dans le cadre strict de la TPI. Nous expliquons ensuite pourquoi ce modèle ne semble pas nous convenir, et nous présentons un modèle basé sur la surface de charge de Gurson ⁽⁵¹⁾ et Tvergaard ⁽¹³⁰⁾, prenant en compte un comportement irréversible aussi bien pour sa partie volumique que sa partie déviatorique. Bien que l'intérêt soit ici majoritairement porté sur les effets de l'endommagement sur le comportement plastique, le modèle inclut également les effets que celui-ci peut avoir sur le comportement élastique. Si l'on excepte les lois d'évolution de l'endommagement, basées ici sur des considérations microscopiques, le modèle a été écrit dans le cadre de la TPI, ce qui permet d'introduire les effets visqueux dans une formulation unifiée.

Le *chapitre 3* s'attache aux aspects numériques de la simulation des processus d'endommagement dans le cadre d'un code de calcul non-linéaire des structures. On commence par y décrire un schéma d'intégration des équations constitutives présentées au chapitre précédent. Ce schéma peut être considéré comme une extension du schéma du retour radial de la plasticité classique au cas de la plasticité non purement déviatorique. Un formalisme unifié, dans la ligne de celui qui avait été proposé par Ponthot ⁽¹⁰⁸⁾ pour l'élastoviscoplasticité, permet de traiter le cas des lois élastoviscoplastiques endommageables ainsi que tous ses sous-ensembles (élastoplastique, élastoplastique endommageable, élastoviscoplastique). A ce schéma d'intégration est associée une loi tangente consistante, indispensable si l'on veut être assuré d'une bonne convergence dans le processus de recherche itérative de l'équilibre structural intervenant à chaque (ou presque) pas de temps / incrément de mise en charge lorsqu'on utilise un schéma temporel implicite. On s'arrête également quelque peu sur le choix de l'élément fini à utiliser pour s'affranchir des problèmes liés à la quasi-incompressibilité de la déformation. On aborde ensuite le problème de la localisation en bandes de cisaillement, pour rappeler les origines mathématiques du problème et pour passer en revue les différentes approches qui ont été proposées pour le régulariser. C'est l'occasion de situer l'approche que nous avons retenue (régularisation visqueuse + remaillage) par rapport aux autres.

Le *chapitre 4* regroupe une première série d'applications illustrant les développements

présentés jusque là. Ces exemples reprennent un cas de mise en forme, une simulation de la rupture d'un barreau cylindrique en traction et deux cas d'impact. Le cas du barreau en traction, bien que pouvant paraître simple à première vue, nous semble particulièrement intéressant car il constitue un exemple significatif de ce que permet l'approche locale de la rupture. De plus, ce calcul nous a permis de mettre en évidence des problèmes liés à l'intégration spatiale du champ de déformation au travers des éléments, et qui ont pu être en grande partie résolus par l'utilisation de l'élément sous-intégré que nous avons précédemment développé (Stainier et Ponthot ⁽¹²⁴⁾). On a ainsi pu retrouver numériquement le mode de rupture en cône et cuvette observé expérimentalement. Ce chapitre contient également un exemple de localisation très marquée en bandes de cisaillement, pour lequel on voit que la régularisation visqueuse reste insuffisante.

Tout cela nous amène à aborder, dans le *chapitre 5*, les techniques liées au remaillage. Après avoir décrit la méthode frontale utilisée pour la génération de maillages en quadrangles (basée sur celle proposée par Zhu *et al.* ⁽¹⁴⁰⁾), nous traitons des critères permettant d'évaluer la qualité d'un maillage. Différents niveaux d'analyse sont envisagés, allant des critères purement géométriques au calcul d'erreur en passant par des critères basés sur l'allure des champs solution. Nous y décrivons le critère géométrique qui nous servira à décider de l'instant des remaillages et de la méthode utilisée pour adapter la discrétisation aux gradients d'un champ considéré comme caractéristique. On passe alors à la description de la méthode utilisée pour transférer une configuration d'un maillage à un autre.

Le *chapitre 6* contient une seconde série d'applications, illustrant les techniques de remaillage. On y considère d'abord deux exemples de mise en forme, pour lesquels le remaillage s'avère nécessaire. On y mesure les profits en qualité de solution, et même éventuellement en coût de calcul, que peut apporter une approche adaptative. Pour terminer, on reprend le cas de localisation déjà étudié dans la première série d'applications et on entreprend de capturer les bandes de cisaillement à l'aide du remaillage.

On conclut alors sur les différents thèmes abordés ici et on donne quelques perspectives de prolongement du travail pour chacun de ceux-ci.

1.4 Apports et originalités

Concernant les modèles de comportement, notre apport se situe plutôt dans la forme que dans le fond. En effet, toutes les expressions mathématiques qui composent les modèles présentés sont issues de la littérature, même si les combinaisons proposées présentent une certaine originalité. Mais nous avons plutôt porté notre attention sur les formalismes dans lesquels ces relations s'insèrent, car nous pensons que l'efficacité d'un modèle dépend en grande partie de la forme sous laquelle il est écrit. Ainsi, nous avons obtenu de manière tout à fait naturelle un modèle regroupant et couplant les comportements élastique, plastique, visqueux et l'endommagement ductile. Cela nous a également permis de mieux situer le modèle choisi par rapport aux autres.

L'apport le plus important de cette thèse se situe donc au niveau du passage du modèle mathématique à son utilisation pratique dans un code de calcul des structures en grandes déformations. Cela consiste en un schéma d'intégration numérique des équations constitutives, qui généralise la méthode du retour radial au cas de la viscoplasticité non purement déviatorique, et qui est, à notre connaissance, original. Parallèlement à ce schéma

d'intégration, nous avons écrit une loi tangente consistante, qui est donc elle aussi originale. Ces deux outils permettent une utilisation efficace du modèle d'endommagement lors des simulations de processus de mise en forme et d'impact. A côté de cela, nous avons également retravaillé l'élément quadrangulaire sous-intégré que nous avons précédemment développé (Stainier et Ponthot ⁽¹²⁴⁾), de manière à mieux prendre en compte les non-linéarités géométriques. Cet élément nous a été d'une grande aide pour la simulation de la rupture par striction d'un barreau cylindrique en traction.

En ce qui concerne le remaillage, nous avons utilisé la méthode de génération frontale de quadrangles qui avait été proposée par Zhu *et al.* ⁽¹⁴⁰⁾. Couplée à un critère de distortion original, bien qu'élémentaire, et à des indicateurs d'erreurs qui restent eux aussi assez élémentaires, cette technique de remaillage adaptatif a été appliquée à des cas de mise en forme où elle a montré son efficacité. Cela permet d'aller plus loin, et avec une solution de meilleure qualité. Nous avons également appliqué cette technique au cas de la localisation en bandes de cisaillement, mais les résultats obtenus restent perfectibles. On arrive bien à capturer les bandes de cisaillement, mais nous n'avons pu nous assurer que cela correspondait à la solution véritable du problème, si elle existe. En résumé, pour ce qui est des techniques adaptatives, nous avons atteint le stade du prototype : tous les outils de base sont disponibles, mais il reste à les renforcer et à les exploiter pleinement.

Chapitre 2

Modèles mathématiques d'endommagement ductile

2.1 Introduction

Lemaitre et Chaboche ⁽⁷⁶⁾ ont classé les différents types d'endommagement en quatre catégories :

- *l'endommagement plastique ductile* : il accompagne les grandes déformations plastiques des métaux aux températures ambiante et peu élevées;
- *l'endommagement viscoplastique de fluage* : il est fonction du temps et correspond, pour les métaux aux températures moyennes et élevées, aux décohésions intergranulaires accompagnant les déformations viscoplastiques;
- *l'endommagement de fatigue* : il est dû à la répétition des contraintes et on le repère en fonction du nombre de cycles;
- *l'endommagement macrofragile* : il peut être provoqué par des sollicitations monotones sans déformations irréversibles appréciables (cas du béton p.e.).

La catégorie qui nous occupe dans le présent travail est la première, celle de l'endommagement plastique ductile, mais nous introduirons cependant des effets temporels dans les modèles de comportement. En effet, il existe une viscoplasticité à basse température (i.e. inférieure au tiers de la température de fusion) liée à des déplacements de dislocations par activation thermique (voir François *et al.* ⁽⁴²⁾), et cela pour une large gamme de vitesses de déformation. De plus, l'introduction de la viscosité nous servira également d'outil numérique pour régulariser les problèmes de localisation. Le second type d'endommagement peut également intervenir dans les problèmes de mise en forme à chaud ou d'impact (suite à un échauffement adiabatique), mais nous n'en tiendrons pas compte ici, nous limitant au cas isotherme.

Ce chapitre est organisé selon le plan qui suit. Après avoir donné un aperçu des phénomènes microscopiques responsables de l'endommagement ductile des métaux (section 2.2), nous nous pencherons sur les modèles mathématiques à même de les représenter. Les modèles présentés ici sont développés dans le cadre général de la thermodynamique des phénomènes

irréversibles (TPI), dont nous rappelons les grandes lignes dans la section 2.3.1. Une fois cette théorie particularisée au cas des solides élasto-visco-plastiques endommageables (section 2.3.2), nous décrivons dans un premier temps le modèle proposé par Lemaitre et Chaboche ⁽⁷⁶⁾. Ce modèle simple permet d'illustrer la théorie générale exposée auparavant, mais est insuffisant pour représenter l'ensemble des phénomènes liés à l'endommagement ductile (section 2.3.3). C'est pourquoi nous présentons ensuite un modèle plus phénoménologique, incluant des effets de l'endommagement sur le coefficient de Poisson et sur le comportement volumique irréversible (section 2.3.4). C'est ce modèle qui sera utilisé dans la suite, mais nous décrivons également en fin de chapitre le modèle proposé par Simo et Ju ⁽¹¹⁹⁾, ainsi qu'un autre modèle assez proche, qui a lui été proposé par Zhu ⁽¹⁴¹⁾ (section 2.3.5).

2.2 Physique de l'endommagement ductile

Le processus qui conduit de l'état non-endommagé à la rupture macroscopique peut être divisé en trois phénomènes distincts : la nucléation de microvides, la croissance de ceux-ci et enfin leur coalescence. En bref, on peut décrire ces phénomènes comme suit :

- *Nucléation* : on trouve dans la plupart des métaux une quantité importante de défauts microstructuraux, tels que les inclusions ou les joints de grain. Soumis à un état de contrainte, ces défauts provoquent l'ouverture de microvides, responsables de l'endommagement du solide. La nucléation est un phénomène irréversible et intervenant une seule fois en un site déterminé.
- *Croissance* : ces microvides, dont une partie était éventuellement initialement présente, voient leur taille croître sous l'effet de la tension hydrostatique. Cela résulte en un accroissement de l'état d'endommagement du solide. Remarquons que cet effet peut agir en sens opposé, c'est-à-dire conduire à une décroissance des vides sous compression hydrostatique.
- *Coalescence* : quand la porosité a atteint un seuil critique (généralement une fraction volumique de vide comprise entre 10% et 20%), on voit apparaître un phénomène d'interaction entre les vides. En effet, une fois que le rayon moyen de deux vides voisins devient comparable à la distance qui les sépare, ceux-ci tendent à se réunir assez brutalement. Ce phénomène instable (microscopique), appelé coalescence, est à rapprocher de celui de la striction (macroscopique). Il conduit de manière irréversible à la rupture.

Une étude approfondie de ces trois phases d'endommagement a été menée par Curran *et al.* ⁽²⁴⁾, incluant une description physique et des éléments de modélisation mathématique. On peut également trouver une description de ces phénomènes dans François *et al.* ⁽⁴²⁾. Nous résumons ici les différents éléments de modélisation associés à chacune des trois étapes conduisant à la rupture.

2.2.1 Nucléation

On observe l'apparition du phénomène de nucléation en plusieurs types de sites :

- au niveau de microvides ou de microfissures préexistantes,
- au niveau des inclusions ou de particules de seconde phase,
- au niveau des joints de grain,
- au niveau d'empilements de dislocations.

Autrement dit, la nucléation peut intervenir partout où un défaut microstructural engendre une concentration locale de contrainte. Ces mécanismes sont liés à la déformation plastique, et également à la contrainte principale de traction pour les trois premiers de ces sites de nucléation. On peut donc construire deux types de modèles de nucléation.

Le premier type de modèle est basé sur la notion d'énergie d'activation. Il relie la nucléation à *l'état de contrainte* (la traction principalement) et à la température. Il est bien adapté pour représenter la rupture par fluage à haute température et également la rupture sous mise en charge rapide, comme par exemple dans les expériences d'impact entre plaques planes ("spallation"). Les autres caractéristiques de ce premier type de modèle sont la présence d'un seuil d'activation de la nucléation et une expression du taux de nucléation de la forme générale suivante :

$$\dot{d}_n = A \exp \left[\frac{B}{kT} (\sigma - \sigma_0) \right] \quad (2.1)$$

où σ est une mesure de l'état de contrainte, σ_0 le seuil d'activation, k la constante de Boltzmann et T la température. \dot{d}_n représente le taux d'accroissement de la fraction volumique de vides due à la nucléation. A , B et σ_0 sont les paramètres du modèle.

Le second type de modèle est basé sur des phénomènes de glissement au niveau microscopique. Il relie la nucléation à *la déformation plastique*. Il est utilisé pour représenter la rupture ductile à vitesse modérée, comme par exemple au niveau de la zone de striction dans des essais de traction uniaxiale. L'expression générale du taux de nucléation pour ce modèle peut s'écrire :

$$\dot{d}_n = A(\epsilon^{pl})\dot{\epsilon}^{pl} + B(p)\dot{p} + C(p, T) \quad (2.2)$$

où le premier et le deuxième termes sont liés à des phénomènes mécaniques régis par la déformation plastique équivalente ϵ^{pl} et par la contrainte moyenne (pression) p tandis que le troisième terme est lié à des phénomènes de diffusion au niveau microscopique. Nous limitant à un cadre purement mécanique, nous ne parlerons plus du phénomène de diffusion ($C = 0$).

2.2.2 Croissance

Les microvides issus de la phase de nucléation peuvent se développer soit sous forme de cavités de forme sphéroïdale, soit sous forme de fissures. La façon dont la croissance va se dérouler dépend de la température et de la vitesse de mise en charge : à basse température et haute vitesse de chargement, les microvides vont avoir tendance à se développer sous forme de fissures (rupture de type fragile) car l'écoulement plastique est limité, tandis qu'à haute température et faible vitesse de chargement, ils vont avoir tendance à se développer sous forme de cavités (rupture de type ductile) car les mouvements de dislocations responsables de l'écoulement plastique sont favorisés. Aux températures et vitesses intermédiaires, les deux modes de croissance coexistent. Ils peuvent intervenir au niveau intergranulaire (entre deux

grains) tout comme au niveau transgranulaire (au travers d'un grain). Plusieurs modèles ont été proposés qui étudient la croissance des vides (le plus souvent d'un vide isolé) sous différents cas particuliers de chargement (pour un passage en revue de ces modèles, voir Curran *et al.* ⁽²⁴⁾), mais aucun modèle suffisamment général de croissance ne semble avoir été développé jusqu'ici.

2.2.3 Coalescence

La coalescence entre microcavités (ou entre microfissures) peut intervenir par rencontre entre elles ou bien par localisation de la déformation plastique dans l'espace les séparant. Ce second mode de coalescence peut poser le problème de savoir si c'est un phénomène séparé ou bien seulement une répétition des processus de nucléation et de croissance à une échelle inférieure. Ici non plus, on ne dispose pas encore de modèle général prenant en compte tous les phénomènes impliqués, mais plusieurs recherches tendent à ce but en simulant numériquement l'interaction entre un nombre limité de vides (voir p.e. Tvergaard ⁽¹³⁰⁻¹³²⁾). Ajoutons que c'est au terme de la phase de coalescence que se forment d'éventuels fragments, fragments dont la modélisation est également importante, par exemple dans le cas des boucliers protégeant les engins spatiaux contre les micrométéorites (voir Rochus ⁽¹¹³⁾, Anderson et Mullin ⁽⁴⁾).

2.3 Modélisation de l'endommagement

2.3.1 Théorie thermodynamique

Dans le but de rappeler le cadre général de nos développements et également de fixer un certain nombre de notations, nous reprenons ici dans ses grandes lignes la théorie thermodynamique de l'état local, telle qu'établie par l'école française principalement (Germain ⁽⁴⁶⁾, Germain *et al.* ⁽⁴⁷⁾, Lemaitre et Chaboche ⁽⁷⁶⁾).

En thermodynamique classique, l'évolution réversible d'un milieu matériel est complètement définie par la connaissance d'un certain nombre de variables indépendantes définissant l'état du système à chaque instant. Ce sont les *variables d'état*. La méthode de l'état local considère que dans le cas d'une évolution irréversible du même milieu matériel, il est possible d'étendre cet espace des variables d'état dites externes (ou observables) en y ajoutant des variables supplémentaires (dites internes) auxquelles on peut appliquer les équations de la thermodynamique classique. Dans le cas des phénomènes dissipatifs, ces variables internes sont représentatives de l'histoire passée du système.

Dans le cadre de la mécanique des solides, les *variables d'état externes* sont les suivantes :

- une mesure de la déformation, que nous noterons ϵ . Ce peut être le gradient de déformation \mathbf{F} ou toute autre mesure dérivée (tenseur de Cauchy-Green à droite \mathbf{C} , tenseur de Green-Lagrange \mathbf{E} , tenseur de Cauchy-Green à gauche \mathbf{b} , tenseur d'Almansi \mathbf{e} , ...);
- la température T , que nous écartons d'emblée, puisque nous ne considérerons dans ce travail que des processus isothermes.

Pour modéliser les phénomènes irréversibles, on introduit un certain nombre de *variables d'état internes*, que nous noterons α_i ($i = 1, \dots, N$) indépendamment de leur nature scalaire, vectorielle ou tensorielle. Ces variables suffisent à définir l'état d'un système, et ce au travers de la connaissance d'un *potentiel thermodynamique*. Parmi les choix possibles, nous opterons (comme la grande majorité des auteurs) pour le potentiel énergie libre spécifique $\psi(\boldsymbol{\epsilon}, \alpha_i)$. Ce potentiel permet de définir des *forces thermodynamiques* associées à chacune des variables d'état. Ainsi, on définit les contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et les variables duales A_i ($i = 1, \dots, N$), associées aux variables internes par :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \quad (2.3.a)$$

$$A_i = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_i} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (2.3.b)$$

où ρ est la densité.

Remarque: la notation $\boldsymbol{\sigma}$ implique ici le tenseur contrainte thermodynamiquement associé à $\boldsymbol{\epsilon}$ et pas le tenseur contrainte de Cauchy (qui n'est en fait thermodynamiquement associé à aucun tenseur déformation). \square

Pour définir l'évolution des variables internes, on peut introduire un *pseudo-potentiel de dissipation* $\varphi(\dot{\alpha}_i; \alpha_i)$ [†], fonction des taux de variation de ces variables internes, les variables internes pouvant intervenir comme paramètres. Le choix pour ce potentiel d'une fonction non-négative convexe garantit l'obtention de lois d'évolution thermodynamiquement acceptables (c'est-à-dire principalement vérifiant le second principe sous toutes ses formes). Les variables internes et leurs forces associées (duales) vérifient alors les relations suivantes :

$$A_i = - \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\alpha}_i} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (2.4)$$

La transformée de Legendre-Fenchel permet d'obtenir le potentiel φ^* , dual de φ , à partir duquel on obtient alors les lois d'évolution des variables internes :

$$\dot{\alpha}_i = - \frac{\partial \varphi^*(A_i; \alpha_i)}{\partial A_i} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (2.5)$$

Les matériaux pour lesquels ces relations s'appliquent pleinement sont appelés *matériaux standards généralisés*. Nous rencontrerons également dans la suite des matériaux standard (des précisions sur la définition de tels matériaux seront données alors). Pour une étude plus approfondie de la thermodynamique des phénomènes irréversibles appliquée aux solides, on peut par exemple consulter Nguyen⁽⁹⁰⁾.

2.3.2 Cas des lois élasto-visco-plastiques endommageables

Dans le cadre de ce travail, nous nous intéressons en particulier aux matériaux élasto-visco-plastiques endommageables.

Le matériau "de base" peut être considéré comme hyperélastique ou comme hypoélastique. Un *matériau hyperélastique* est défini comme étant un matériau vérifiant la relation (2.3.a),

[†]Ici comme dans la suite, les arguments d'une fonction intervenant après un point virgule doivent être considérés comme des paramètres et pas comme des variables à part entière. Cette distinction prend par exemple son importance lors de l'écriture de la différentielle de la fonction.

c'est-à-dire que l'état cinématique $\boldsymbol{\epsilon}$ suffit à déterminer la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ associée. On a par exemple :

$$\mathbf{S} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}} \quad (2.6.a)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{e}} \quad (2.6.b)$$

pour le tenseur contrainte de Piola-Kirchhoff n°2 (PK2) \mathbf{S} et le tenseur contrainte de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau}$, respectivement.

Un *matériau hypoélastique* peut être défini comme étant un matériau vérifiant la relation suivante, reliant une dérivée temporelle des contraintes au tenseur taux de déformation \mathbf{D} , partie symétrique du tenseur gradient de vitesse \mathbf{L} :

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{M} : \mathbf{D} \quad (2.7)$$

où $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}$ représente une dérivée objective des contraintes de Cauchy, par exemple une dérivée corotationnelle, et où \mathbf{M} est un tenseur d'ordre 4. Une dérivée corotationnelle est définie comme suit :

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\rho} \left[\frac{d}{dt} (\boldsymbol{\rho}^t \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\rho}) \right] \boldsymbol{\rho}^t = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\omega} \quad (2.8)$$

où $\boldsymbol{\omega}$ est une matrice antisymétrique donnée, à partir de laquelle on génère une matrice de rotation $\boldsymbol{\rho}$ par :

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\rho} \quad (2.9)$$

Dans le référentiel entraîné par cette matrice de rotation, on peut alors définir le tenseur des contraintes corotationnelles de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}^c$:

$$\boldsymbol{\sigma}^c = \boldsymbol{\rho}^t \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\rho} \quad (2.10)$$

De manière similaire, on peut définir un taux de déformation corotationnel \mathbf{D}^c et un tenseur matériel corotationnel \mathbf{M}^c (d'ordre 4) :

$$\mathbf{D}^c = \boldsymbol{\rho}^t \mathbf{D} \boldsymbol{\rho} \quad (2.11.a)$$

$$\mathbf{M}^c = \boldsymbol{\rho}^t \left[\boldsymbol{\rho}^t \mathbf{M} \boldsymbol{\rho} \right] \boldsymbol{\rho} \quad (2.11.b)$$

Si on particularise au cas des axes entraînés par la matrice de rotation générée par le tenseur taux de rotation \mathbf{W} (partie antisymétrique du tenseur gradient de vitesse \mathbf{L}), on retrouve la dérivée corotationnelle de Jaumann. Dans ce cas, on obtient une relation entre les grandeurs corotationnelles formellement identique à celle qu'on peut écrire dans le cas des petites transformations. La généralisation est donc tentante et on écrit :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^c = \mathbf{M}^c : \mathbf{D}^c \quad (2.12)$$

Pour plus de détails, on consultera Ponthot ⁽¹⁰⁸⁾. Dans la suite, on omettra l'indice c , toutes les grandeurs considérées dans le cadre hypoélastique étant supposées corotationnelles. Le tenseur \mathbf{D} ne pouvant être intégré analytiquement pour obtenir un tenseur déformation, il semble difficile de définir un potentiel thermodynamique dans le cadre hypoélastique.

Pour prendre en compte la plasticité, il faut introduire la variable interne *déformation irréversible*. La nature de cette variable interne dépend de l'hypothèse qu'on a faite au préalable sur le comportement réversible :

- dans le cas d'un matériau à comportement réversible hyperélastique, la séparation entre déformation réversible et déformation irréversible est obtenue par décomposition multiplicative du gradient de déformation \mathbf{F} , ce qui introduit la notion de configuration intermédiaire (voir Lee ⁽⁷¹⁾) :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{rev} \mathbf{F}^{irr} \quad (2.13)$$

Cette décomposition correspond à une décomposition additive des tenseurs déformation \mathbf{E} et \mathbf{e} :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{rev} + \mathbf{E}^{irr} \quad (2.14.a)$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^{rev} + \mathbf{e}^{irr} \quad (2.14.b)$$

Nous ne définirons pas plus précisément les parties réversibles et irréversibles de ces deux tenseurs. En effet, les relations ci-dessus sont assez discutées dans la littérature et nous ne nous prononcerons pas sur le sujet puisque nous ne les avons pas utilisées en pratique. Notre but est simplement de mettre en parallèle les deux formalismes (hyperélastique et hypoélastique), ainsi que la façon dont on y introduit l'endommagement. On écrira alors, en prenant par exemple le couple (\mathbf{E}, \mathbf{S}) :

$$\psi = \psi(\mathbf{E} - \mathbf{E}^{irr}, \alpha_i) \quad (2.15.a)$$

$$\mathbf{S} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}^{rev}} \quad (2.15.b)$$

$$-\mathbf{S} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}^{irr}} \quad (2.15.c)$$

où ρ_0 est la densité dans la configuration de référence. Cette dernière relation implique que la variable duale à \mathbf{E}^{irr} est $-\mathbf{S}$, constatation dont on déduit la loi d'évolution suivante (par application de (2.5)) :

$$\dot{\mathbf{E}}^{irr} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \mathbf{S}} \quad (2.16)$$

- dans le cas d'un matériau à comportement réversible hypoélastique, la séparation entre déformation réversible et déformation irréversible est obtenue par décomposition additive du tenseur taux de déformation :

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^{rev} + \mathbf{D}^{irr} \quad (2.17)$$

Cette décomposition est à mettre en parallèle avec la théorie générale où \mathbf{D} joue le rôle de $\dot{\mathbf{e}}$. La variable duale associée à \mathbf{D}^{irr} sera $(-\boldsymbol{\sigma})$, et on aura la loi d'évolution suivante :

$$\mathbf{D}^{irr} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.18)$$

On considérera des matériaux présentant un écrouissage isotrope, ce qui implique l'introduction d'une variable interne scalaire appelée *déformation plastique équivalente* ϵ^{pl} . La variable associée est la contrainte d'écoulement plastique σ_Y :

$$\sigma_Y = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon^{pl}} = \sigma_Y(\epsilon^{pl}) \quad (2.19)$$

et la loi d'évolution est la suivante :

$$\dot{\epsilon}^{pl} = -\frac{\partial \varphi^*}{\partial \sigma_Y} \quad (2.20)$$

Remarquons que, dans la relation (2.19), on égale généralement directement le premier et le troisième membres, évitant ainsi le recours explicite au potentiel ψ .

Comme expliqué précédemment, l'endommagement ductile est lié à l'apparition et à la croissance de microvides dans le matériau. Si l'on excepte le cas des corps minces, l'hypothèse d'un endommagement isotrope, c'est-à-dire de microvides de forme globalement sphéroïdale, semble raisonnable. On se contentera donc d'une variable interne scalaire d pour représenter l'endommagement. La variable associée à d est donnée par :

$$Y = \rho \frac{\partial \psi}{\partial d} \quad (2.21)$$

tandis que la loi d'évolution de d est donnée par :

$$\dot{d} = -\frac{\partial \varphi^*}{\partial Y} \quad (2.22)$$

Le couplage entre les différentes sources d'irréversibilité est déterminé par les hypothèses de décomposition qu'on s'autorise pour le potentiel ψ et le pseudo-potentiel φ^* . Ainsi, on peut faire (Lemaitre et Chaboche ⁽⁷⁶⁾) l'hypothèse d'une partition de l'énergie libre en une partie "élastique" et une partie "plastique" (ce qui implique par exemple que les propriétés élastiques ne sont pas influencées par l'écoulement plastique) :

$$\rho \psi(\boldsymbol{\epsilon}^{rev}, \epsilon^{pl}, d) = \rho \psi^{el}(\boldsymbol{\epsilon}^{rev}, d) + \rho \psi^{pl}(\epsilon^{pl}, d) \quad (2.23)$$

Plusieurs auteurs (voir Lemaitre et Chaboche ⁽⁷⁶⁾, Simo et Ju ⁽¹¹⁹⁾, Zhu ⁽¹⁴¹⁾) font également l'hypothèse d'un endommagement non directement couplé à la plasticité (ce qui implique par exemple que les propriétés plastiques ne sont pas modifiées par l'endommagement) :

$$\rho \psi(\boldsymbol{\epsilon}^{rev}, \epsilon^{pl}, d) = \rho \psi^{el}(\boldsymbol{\epsilon}^{rev}, d) + \rho \psi^{pl}(\epsilon^{pl}) \quad (2.24)$$

En ce qui concerne le pseudo-potentiel de dissipation, on retrouve des hypothèses fort similaires. On suppose généralement un découplage entre les phénomènes dissipatifs liés à la plasticité et ceux liés à l'endommagement :

$$\varphi^*(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_Y, Y; d) = \varphi^{*pl}(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_Y; d) + \varphi^{*d}(Y; d) \quad (2.25)$$

On introduira le comportement "visqueux", c'est-à-dire dépendant des taux de variation des variables d'état, au travers du pseudo-potentiel de dissipation à la manière de Perzyna ⁽¹⁰³⁾. Cela consiste à écrire le pseudo-potentiel sous la forme suivante :

$$\varphi^*(\bullet) = \frac{k}{m+1} \left(\left\langle \frac{f(\bullet)}{k} \right\rangle \right)^{m+1} \quad (2.26)$$

où le symbole $\langle \bullet \rangle$ représente les parenthèses de MacAuley ($\langle x \rangle = x$ si $x \geq 0$, $\langle x \rangle = 0$ si $x < 0$) et où $f(\bullet)$ est une fonction convexe (de manière à ce que φ^* le soit également) et correspondant à la surface de charge de la plasticité classique. Les grandeurs k et m sont des paramètres positifs. Il est intéressant de noter que quand k tend vers 0, le comportement

devient indépendant du taux des variables d'état, tandis que quand k tend vers l'infini, le comportement devient élastique. La forme (2.26) peut s'appliquer à φ^{*pl} et à φ^{*d} , éventuellement avec des valeurs différentes de k et m . Les lois d'évolution s'écrivent donc finalement :

$$\dot{a}_i = - \left\langle \frac{f(A_i)}{k} \right\rangle^m \frac{\partial f}{\partial A_i} \quad (2.27)$$

Quand $k \rightarrow 0$, on retrouve un matériau élasto-plastique endommageable pour lequel les lois d'évolution s'écrivent :

$$\dot{a}_i = -\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial A_i} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (2.28)$$

avec les conditions classiques de type Kuhn–Tucker :

$$\dot{\lambda} \geq 0 ; f \leq 0 ; \dot{\lambda} f = 0 \quad (2.29)$$

2.3.3 Modèle de base de Chaboche – Lemaitre

Parmi ce qu'on peut appeler les modèles d'endommagement de base figure en bonne position le modèle d'endommagement ductile proposé par Lemaitre et Chaboche ⁽⁷⁶⁾. Ce modèle est au départ proposé dans un cadre géométrique linéaire (petites déformations), mais il est assez aisément généralisable au cas des grandes déformations, tout au moins dans un formalisme hyperélastique. Ce modèle est basé sur les notions de contrainte effective (Kachanov ⁽⁶⁶⁾) et d'équivalence en déformation : le matériau endommagé soumis à une certaine contrainte σ se comporte comme le matériau vierge (c'est-à-dire non-endommagé, mais éventuellement plastifié) soumis à la contrainte effective $\tilde{\sigma}$. La variable d'endommagement permet de passer de la contrainte vraie à la contrainte effective :

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1-d} = \rho \frac{\partial \psi^0}{\partial \epsilon}(\epsilon^{rev}, \epsilon^{pl}) \quad (2.30)$$

où ψ^0 représente le potentiel du matériau vierge. On retrouve le même résultat en partant d'un potentiel ψ tenant compte de l'endommagement :

$$\psi(\epsilon^{rev}, \epsilon^{pl}, d) = (1-d)\psi^0(\epsilon^{rev}, \epsilon^{pl}) \quad (2.31.a)$$

$$\sigma = (1-d)\rho \frac{\partial \psi^0}{\partial \epsilon} \quad (2.31.b)$$

Cette dernière expression permet de déterminer l'expression de la variable Y duale de d :

$$Y = \rho \frac{\partial \psi}{\partial d} = -\rho \psi^0(\epsilon^{rev}, \epsilon^{pl}) \quad (2.32)$$

Il y a cependant une variante possible à ces dernières expressions, qui consiste à utiliser une expression du type (2.24) pour le potentiel, faisant ainsi l'hypothèse d'un découplage entre plasticité et endommagement :

$$\psi(\epsilon^{rev}, \epsilon^{pl}, d) = (1-d)\psi^{rev,0}(\epsilon^{rev}) + \psi^{irr}(\epsilon^{pl}) \quad (2.33)$$

et on a alors

$$Y = -\rho \psi^{rev,0}(\epsilon^{rev}) \quad (2.34)$$

C'est sur base de cette dernière relation que la grandeur $(-Y)$ est parfois appelée taux de restitution d'énergie élastique. L'interprétation physique que l'on peut donner à $(-Y)$ est

donc celle d'une mesure énergétique de l'état de contrainte (au sens général) du solide, ce qui est à mettre en parallèle avec les critères de nucléation au niveau microstructural (voir encore une fois Curran *et al.* ⁽²⁴⁾). Le choix entre les expressions (2.31.a) et (2.33) est loin d'être immédiat, la plupart des auteurs ayant jusqu'à ce jour opté pour la seconde possibilité (Lemaitre et Chaboche ⁽⁷⁶⁾, Simo et Ju ⁽¹¹⁹⁾, Zhu ⁽¹⁴¹⁾, ...). Parmi ceux ayant opté pour la première possibilité, notons Ju ⁽⁶⁴⁾ et Laschet ⁽⁶⁸⁾. Rien parmi les résultats obtenus par tous ces auteurs ne nous a semblé permettre de trancher la question.

La loi d'évolution de l'endommagement proposée dans le modèle original ne prend en compte aucun effet visqueux et est donc du type (2.28) :

$$\dot{d} = -\dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial Y} \quad (2.35)$$

avec

$$g = \frac{S_0}{s_0 + 1} \frac{1}{1 - d} \left(-\frac{Y}{S_0} \right)^{s_0 + 1} \quad (2.36)$$

où s_0 et S_0 sont des paramètres. La forme de la fonction g , qui semble sortie du néant comme par miracle, permet en fait de retrouver par le formalisme thermodynamique un modèle proche de ceux obtenus sur base de considérations plus phénoménologiques.

Les auteurs du modèle font usage dans l'équation (2.36) du même paramètre de consistance $\dot{\lambda}$ que dans les relations régissant l'évolution des grandeurs plastiques:

$$\dot{\epsilon}^{irr} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2.37.a)$$

$$\dot{\epsilon}^{pl} = -\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_Y} \quad (2.37.b)$$

Cette hypothèse (non clairement énoncée dans le texte original) ne nous semble pas mathématiquement justifiée, à moins d'utiliser les conditions de Kuhn–Tucker suivantes:

$$\dot{\lambda} \geq 0; (f + g) \leq 0; \dot{\lambda}(f + g) = 0 \quad (2.38)$$

ce qui semble peu réaliste ! Cette remarque ne met bien entendu aucunement en cause la validité pratique du modèle, mais permet simplement de souligner une zone d'ombre dans la formulation mathématique qui y est attachée.

Ce modèle est illustratif de tous les modèles ayant une base "thermodynamique": le rôle de la variable duale de l'endommagement Y y est fondamental. Cela pose un problème dans le cadre hypoélastique, où il est difficile (si pas impossible) de définir un potentiel énergie libre à partir des grandeurs utilisées.

Nous verrons dans une section ultérieure comment certains auteurs ont essayé de résoudre les problèmes exposés ci-dessus, mais nous allons d'abord présenter un modèle d'endommagement mélangeant les apports de la théorie thermodynamique avec des considérations phénoménologiques.

2.3.4 Modèle de Gurson – Tvergaard amélioré

Dans ce modèle, on choisit comme variable d'endommagement une variable phénoménologique, la *fraction volumique de vide* (nous utiliserons également à l'occasion le terme général

de porosité) :

$$d = 1 - \frac{\rho}{\rho_M} \quad (2.39)$$

où ρ est la densité apparente (macroscopique) et ρ_M est la densité de la matrice matérielle (autour des vides).

Comportement réversible

Ce choix pour la variable d'endommagement permet un lien plus direct avec la physique du phénomène. Ainsi, la porosité a bien évidemment un effet de dégradation sur les constantes élastiques macroscopiques du métal. Par exemple, en utilisant la théorie des matériaux diphasiques de Mori et Tanaka ⁽⁸⁴⁾ et en prenant l'hypothèse que les inclusions sont des vides sphériques, on obtient les expressions suivantes pour les modules de cisaillement et de compressibilité cubique :

$$\bar{G}(d) = \frac{G_0(1-d)}{1 + \frac{6\bar{K}_0 + 12G_0d}{9\bar{K}_0 + 8G_0}} \quad \bar{K}(d) = \frac{4\bar{K}_0G_0(1-d)}{4G_0 + 3\bar{K}_0d} \quad (2.40)$$

où \bar{G} et \bar{K} sont les modules dégradés, tandis que G_0 et \bar{K}_0 sont les modules du matériau vierge (c'est-à-dire de la matrice matérielle autour des vides). La théorie de Mori-Tanaka prend en compte, jusqu'à un certain point en tout cas, les interactions entre vides. Pour de faibles concentrations de vides, ces effets sont négligeables et les expressions (2.40) dégénèrent en celles qui ont été établies par Mackenzie ⁽⁷⁹⁾, et qui ont été utilisées par Johnson ⁽⁶³⁾, Perzyna ⁽¹⁰⁵⁾, Eftis et Nemes ^(35-37,87-89). On peut également trouver d'autres théories pour les matériaux diphasiques, par exemple celles citées par Aboudi ⁽¹⁾. Ces expressions des constantes élastiques peuvent alors être utilisées soit dans le potentiel thermodynamique, soit dans le tenseur constitutif. Par exemple, pour un modèle hyperélastique de type Saint-Venant-Kirchhoff, on a :

$$\rho_0 \psi(\mathbf{E}^{rev}, d) = \frac{\bar{\lambda}(d)}{2} (\text{tr} \mathbf{E}^{rev})^2 + \bar{G}(d) \text{tr}(\mathbf{E}^{rev2}) \quad (2.41)$$

où $\bar{\lambda}$ est un des coefficients de Lamé du matériau endommagé (dont on peut facilement déduire l'expression à partir de (2.40)) et où $\text{tr}(\bullet)$ est noté pour trace de \bullet . De même, pour un modèle hypoélastique basé sur la loi de Hooke, on aura :

$$H_{ijkl} = \bar{K}(d) \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\bar{G}(d) (\delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}) \quad (2.42)$$

Il est important de remarquer que les relations (2.40) impliquent, en plus de l'effet sur le module de Young, un effet de l'endommagement sur le coefficient de Poisson (voir figure 2.1), phénomène bien physique qui n'est pas représenté dans le modèle de Chaboche-Lemaitre.

Comportement irréversible

Le comportement irréversible du matériau poreux est basé sur le pseudo-potential de dissipation suivant :

$$\varphi^{*pl} = \frac{k}{m+1} \left\langle \frac{f}{k} \right\rangle^{m+1} \quad (2.43)$$

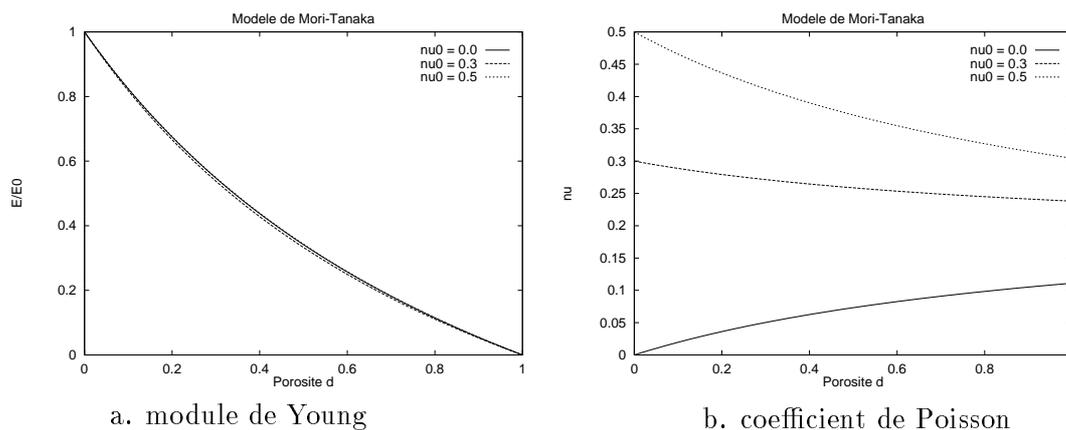


Figure 2.1: Effet de la porosité sur les propriétés élastiques

où f est la surface d'écoulement plastique pour un solide poreux proposée par Gurson ⁽⁵¹⁾:

$$f \equiv \sqrt{\frac{3}{2}}q - \omega(p, \sigma_Y, d)\sigma_Y \quad (2.44)$$

où $q = \sqrt{s_{ij}s_{ij}}$ est le deuxième invariant du tenseur des contraintes déviatoriques et σ_Y est la contrainte d'écoulement plastique du matériau vierge (c'est-à-dire du matériau autour des microvides). Le facteur ω de l'expression (2.44) est donné par:

$$\omega(p, \sigma_Y, d) = \left(1 - 2\alpha_1 d \cosh\left(\frac{\alpha_2}{2} \frac{3p}{\sigma_Y}\right) + \alpha_3 d^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.45)$$

Les paramètres α_i ont été introduits par Tvergaard ⁽¹³⁰⁾ pour améliorer le modèle dans l'étude des bandes de cisaillement[‡]. Les valeurs qu'il préconise sont les suivantes :

$$\alpha_1 = 1.5, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = \alpha_1^2$$

En fait, le paramètre α_1 définit également la valeur ultime de la fraction volumique de vide, c'est-à-dire celle pour laquelle le matériau ne présente plus aucune résistance :

$$\alpha_1 = \frac{1}{d_U} \quad (2.46)$$

L'introduction du α_1 (et donc du α_3) revient ainsi à travailler avec la variable d'endommagement d/d_U , ce qui semble meilleur car il est évident que le matériau peut être considéré comme ayant atteint la ruine bien avant que la fraction volumique de vide ait atteint une valeur unitaire. Les valeurs proposées par Tvergaard conduisent à une porosité ultime de 0.666. La surface d'écoulement plastique (2.44) a été représentée dans l'espace contrainte volumique – contrainte déviatorique $(\frac{p}{\sigma_Y}, \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{q}{\sigma_Y})$ à la figure 2.2 pour deux valeurs du paramètre α_2 . On constate que l'endommagement introduit une limite plastique dans la direction volumique ainsi qu'un effet de rétrécissement de la zone élastique de l'espace des contraintes. Le taux de déformation irréversible est donné par la loi de normalité (2.18) :

$$D^{irr} = \left\langle \frac{f}{k} \right\rangle^m \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (2.47)$$

[‡]Les α_i dont il est question ici n'ont rien à voir avec la notation utilisée pour les variables internes dans la théorie thermodynamique générale des paragraphes 2.3.1 et 2.3.2. Maintenant que cette théorie a été particularisée au cas des solides élastoviscoplastiques endommageables, les α_i désigneront jusqu'à la fin de cet ouvrage les paramètres introduits par Tvergaard.

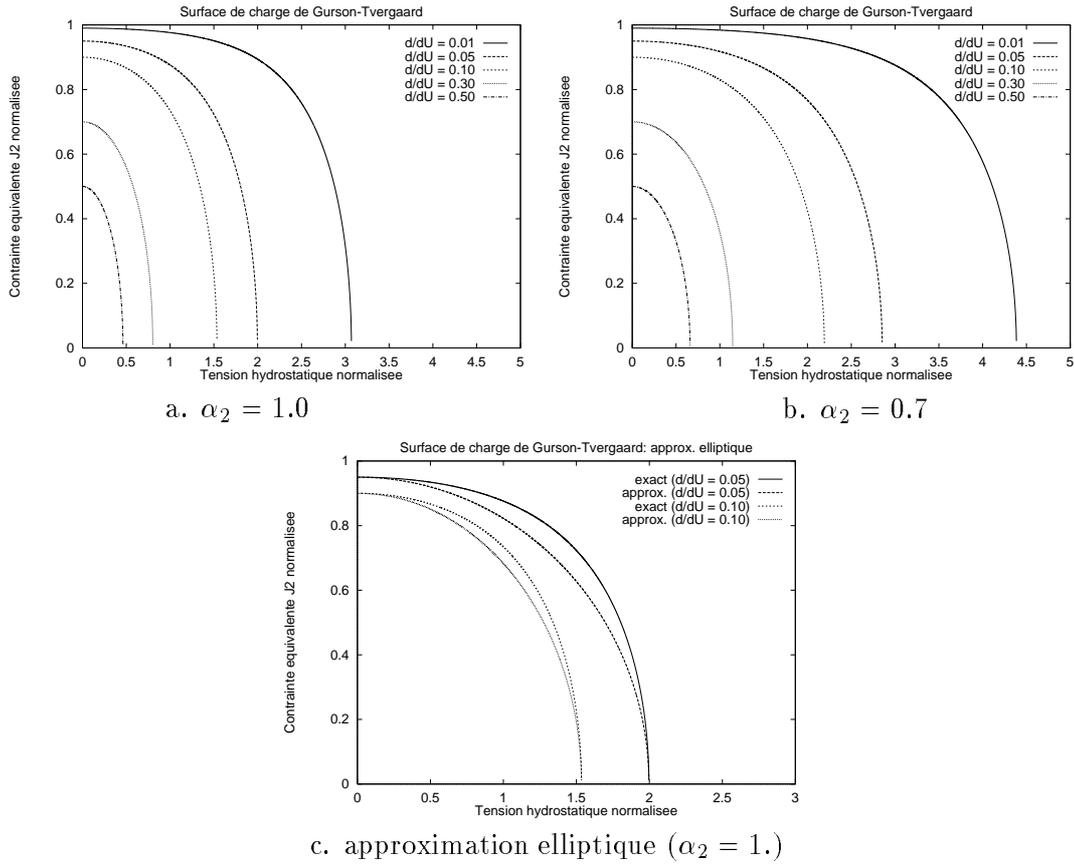


Figure 2.2: Surface d'écoulement plastique de Gurson-Tvergaard

La surface (2.44) peut être approximée par la forme plus simple d'une ellipse ayant les mêmes axes principaux. Le coefficient ω est alors donné par :

$$\omega(p, \sigma_Y, d) = \left(1 - \frac{d}{d_U}\right) \left[1 - \left(\frac{\alpha_2}{2 \ln\left(\frac{d}{d_U}\right)} \frac{3p}{\sigma_Y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.48)$$

L'approximation réalisée est illustrée à la figure 2.2. On peut également remarquer que pour les cas où la pression p reste faible par rapport à la limite d'écoulement plastique σ_Y , le facteur ω devient :

$$\omega \approx \left(1 - \frac{d}{d_U}\right) \quad (2.49)$$

On retrouve alors une surface d'écoulement plastique d'expression simple, mais où le couplage avec la partie volumique a disparu (droite horizontale sur la figure 2.2).

Ecrouissage plastique

La variable interne associée à l'écrouissage plastique est toujours la déformation plastique équivalente, mais ici on fait l'hypothèse d'une énergie libre "plastique" dépendant de l'endommagement :

$$\rho\psi^{pl}(\epsilon^{pl}, d) = \rho_M\psi^{pl,0}(\epsilon^{pl}) = (1 - d)\rho\psi^{pl,0}(\epsilon^{pl}) \quad (2.50)$$

et on a :

$$\bar{\sigma}_Y = \rho \frac{\partial \psi^{pl}}{\partial \epsilon^{pl}} = (1-d)\sigma_Y(\epsilon^{pl}) \quad (2.51)$$

où $\bar{\sigma}_Y$ est la contrainte d'écoulement plastique apparente (macroscopique), tandis que σ_Y est relative à la matrice matérielle entourant les microvides (grandeur microscopique). La loi d'évolution de la déformation plastique équivalente peut donc s'écrire :

$$\dot{\epsilon}^{pl} = -\frac{\partial \varphi^*}{\partial \bar{\sigma}_Y} = -\frac{1}{1-d} \frac{\partial \varphi^*}{\partial \sigma_Y} \quad (2.52)$$

Un résultat identique peut être obtenu en écrivant que la dissipation plastique "macroscopique" $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^{irr}$ doit être égale à la dissipation "microscopique" $(1-d)\sigma_Y \dot{\epsilon}^{pl}$, le facteur $(1-d)$ tenant compte de la porosité, comme dans Agelet ⁽²⁾ par exemple.

Evolution de l'endommagement

Jusqu'ici nous sommes restés dans le cadre thermodynamique, mais pour écrire la loi d'évolution de l'endommagement, nous allons maintenant faire appel à des considérations phénoménologiques basées sur les mécanismes physiques qui régissent l'évolution de la porosité au niveau microstructural. Ainsi, si on se place dans le cas d'une nucléation contrôlée par la déformation (voir paragraphe 2.2), on écrira :

$$\dot{d}_n = A(\epsilon^{pl}) \dot{\epsilon}^{pl} \quad (2.53)$$

Le phénomène de nucléation étant assez complexe à représenter, on peut le traiter par une approche statistique, par exemple en exprimant le facteur $A(\epsilon^{pl})$ sous forme d'une distribution normale, comme proposé par Chu et Needleman ⁽²⁰⁾:

$$A(\epsilon^{pl}) = \frac{d_N}{s_N \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon^{pl} - \epsilon_N}{s_N} \right)^2 \right] \quad (2.54)$$

où d_N est la fraction volumique totale de particules donnant naissance à des vides, ϵ_N est la valeur moyenne de la déformation plastique équivalente à laquelle la nucléation a lieu et s_N est un paramètre de distribution autour de cette moyenne. Cette loi est basée sur l'idée suivante : nous avons vu que la nucléation intervenait dès qu'on atteint un certain seuil de déformation plastique ; les métaux étant généralement hétérogènes, la valeur de ce seuil varie d'un site de nucléation à l'autre ; si on considère alors que l'apparition des microvides est instantanée, l'approche statistique semble être un bon moyen de traduire le phénomène au niveau macroscopique. Ce type de loi sera utilisé pour la simulation de la mise en forme. Dans le cas d'une nucléation contrôlée par l'état de contrainte (voir paragraphe 2.2), on utilisera plutôt une loi du type suivant :

$$\dot{d}_n = B(p, d) \dot{p} \quad (2.55)$$

avec par exemple, en s'inspirant de Curran *et al.* ⁽²⁴⁾ :

$$B(p, d) = \frac{c_1}{1-d} \exp \left(\frac{p - p_N}{c_2} \right) \quad \text{pour } p > p_N \quad (2.56)$$

Le champ d'application de cette loi serait celui des situations d'impact impliquant des contraintes de valeur élevée.

A partir de la loi de conservation de la masse, et sur base de l'hypothèse que la déformation peut être considérée comme entièrement plastique, le taux de croissance des vides s'écrit de la manière suivante :

$$\dot{d}_g = (1 - d)\text{tr}(\mathbf{D}^{irr}) \quad (2.57)$$

Cette relation implique que la porosité, et donc l'endommagement, peut décroître sous une mise en charge hydrostatique de compression. C'est un phénomène qu'on peut physiquement concevoir, mais sans doute pas jusqu'à admettre qu'il puisse ramener le matériau dans son état vierge. Nous approfondirons ce sujet dans le cadre des exemples du chapitre 4. Pour écrire la loi de croissance des vides, Perzyna⁽¹⁰⁵⁾ a lui repris une relation établie par Johnson⁽⁶³⁾ qui relie la porosité directement à la pression.

Dès que l'endommagement atteint la valeur critique d_{crit} , la coalescence est irrémédiablement enclenchée. Celle-ci conduit à la rupture macroscopique et peut être modélisée par une fonction linéaire de la déformation plastique équivalente (Tvergaard⁽¹³²⁾) :

$$\dot{d}_c = \frac{d_U - d_{crit}}{\Delta \epsilon} \epsilon^{pl} \quad (2.58)$$

En combinant les équations (2.53) ou (2.55), (2.57) et (2.58), on obtient la loi globale d'évolution de l'endommagement :

$$\dot{d} = \begin{cases} \dot{d}_n + \dot{d}_g & \text{pour } d < d_{crit} \\ \dot{d}_c & \text{pour } d \geq d_{crit} \end{cases} \quad (2.59)$$

La nucléation et la croissance des vides se produisent donc jusqu'à ce que l'endommagement atteigne une valeur critique, au-delà de laquelle la coalescence commence et conduit à la rupture macroscopique.

On peut constater dans le modèle ci-dessus que la variable d'endommagement d intervient seule, sans qu'on utilise jamais sa variable duale. En fait, cela peut être expliqué si on voit que les relations régissant l'évolution de l'endommagement relient directement celui-ci aux deux autres variables internes (déformation irréversible et déformation plastique équivalente). L'endommagement n'intervient donc ici que comme variable secondaire permettant d'écrire les équations de manière plus claire. Notons au passage que, étant donné que les lois d'évolution (2.52) et (2.59) ne sont pas issues de la loi de normalité, on a ici un modèle décrivant un *matériau standard* non-généralisé.

Remarque sur la vérification du second principe

Le second principe de la thermodynamique postule que la dissipation totale d'énergie lors d'un processus quelconque ne peut être négative. Ce principe peut prendre de nombreuses formes mathématiques, parmi lesquelles se trouve l'inégalité de Clausius-Duheim :

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_{meca} + \mathcal{D}_{ther} \geq 0 \quad (2.60)$$

où la dissipation totale \mathcal{D} a été décomposée en ses parties mécanique et thermique s'exprimant respectivement par :

$$\mathcal{D}_{meca} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \rho(\dot{\Psi} + s\dot{T}) \quad (2.61.a)$$

$$\mathcal{D}_{ther} = -\frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{g}}{T} \quad (2.61.b)$$

avec s l'entropie spécifique et T la température. On a noté \mathbf{q} le flux de chaleur et \mathbf{g} le gradient de température. Comme nous nous sommes placés dans un cadre isotherme, l'inégalité (2.60) se réduit à :

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \rho \dot{\Psi} \geq 0 \quad (2.62)$$

Le problème qui se pose dès lors qu'on travaille dans le cadre hypoélastique est alors lié à l'absence d'une expression analytique pour le potentiel thermodynamique. Plus précisément, c'est la partie liée à l'endommagement qui fait défaut. On peut en effet écrire

$$\rho \dot{\Psi} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^{rev} + (1 - d)(\sigma_Y - \sigma_Y^0) \dot{\epsilon}^{pl} + Y \dot{d} \quad (2.63)$$

mais il n'existe pas de forme analytique décrivant Y , empêchant ainsi la vérification systématique du second principe. Tout ce que l'on peut dire, c'est que Y doit notamment être relié à la dégradation des modules élastiques du solide. En *petites déformations*, on aurait pu écrire

$$Y = \frac{1}{2} \left(\frac{p^2}{\bar{K}(d)} \frac{\partial \bar{K}(d)}{\partial d} + \frac{q^2}{2\bar{G}(d)} \frac{\partial \bar{G}(d)}{\partial d} \right) - (\sigma_Y - \sigma_Y^0) \dot{\epsilon}^{pl}$$

mais le premier terme de cette expression ne peut être généralisé au cas des transformations finies dans le cadre hypoélastique.

Cependant, il faut remarquer que le processus d'endommagement ductile tel que décrit ici est fortement lié aux processus physiques largement dissipatifs que sont la déformation irréversible et l'écroutissage, ce qui peut nous rassurer quant à la vérification effective du second principe.

2.3.5 Autres modèles

Pour terminer ce chapitre, nous dirons quelques mots au sujet du modèle d'endommagement proposé par Simo et Ju ^(119,123). Ce modèle, dont la version "grandes déformations" a été établie dans un cadre hyperélastique, nous semble rencontrer la plupart des problèmes évoqués dans la section 2.3.3. En effet, il est fort proche du modèle de base de Chaboche–Lemaitre pour ce qui est du choix du potentiel thermodynamique (expression (2.33)), mais il utilise pour la loi d'évolution de l'endommagement (2.35) une fonction g ayant la forme suivante :

$$g = \sqrt{-2Y} - r \quad (2.64)$$

De plus, le paramètre de consistance utilisé pour l'évolution de l'endommagement est différent de celui lié aux phénomènes plastiques. On a donc un modèle avec deux fonctions de charge ce qui, notons le au passage, introduit un seuil d'endommagement tout comme il y en a un pour l'écoulement plastique. Ce modèle a donc tout pour plaire, mais se pose alors la question de savoir s'il est applicable en dehors du cadre hyperélastique.

Zhu ⁽¹⁴¹⁾ a proposé un modèle utilisant une fonction g du type (2.64) et faisant intervenir deux variables d'endommagement : l'une relative au comportement déviatorique et l'autre au comportement volumique, ce qui a notamment comme conséquence d'introduire un effet de l'endommagement sur le coefficient de Poisson. En outre, il part d'une hypothèse d'équivalence en énergie de déformation élastique plutôt que de l'hypothèse d'équivalence en déformation. Cependant, comme nous l'avons déjà fait remarquer, la définition de la variable

duale à l'endommagement Y est loin d'être claire dans un cadre hypoélastique. Zhu relie ces variables (une variable duale par variable d'endommagement) aux contraintes de la manière suivante :

$$Y_d = -\frac{\mathbf{s} : \mathbf{s}}{2G(1-d)^3} \quad (2.65.a)$$

$$Y_\delta = -\frac{p^2}{K(1-\delta)^3} \quad (2.65.b)$$

où d et δ sont les deux variables d'endommagement et où \mathbf{s} et p sont respectivement le tenseur des contraintes déviatoriques de Cauchy et la tension hydrostatique. Ces expressions nous apparaissent être une généralisation un peu violente de la situation "petites déformations". Mais encore une fois, cela ne remet pas en cause la validité pratique de ce modèle, qui semble très bien supporter la comparaison avec les résultats expérimentaux.

2.4 Conclusion

En conclusion, nous opterons dans la suite pour le modèle exposé dans la section 2.3.4, qui nous semble présenter des caractéristiques suffisantes pour représenter correctement le phénomène qui nous occupe, à savoir l'endommagement ductile. Nous rappelons au tableau 2.1 l'ensemble des équations décrivant le modèle.

Les données à fournir pour définir un matériau élastoviscoplastique endommageable sont donc les suivantes :

- paramètres élastiques : K_0, G_0 ;
- paramètres d'écoulement plastique : $\sigma_Y(\epsilon^{pl} = 0), d_U, \alpha_2$;
- paramètres de viscosité : k, m ;
- paramètres d'écrouissage : $\sigma_Y(\epsilon^{pl})$;
- paramètres d'endommagement : $d_N, \epsilon_N, s_N, d_{crit}, \Delta\epsilon$.

Ce sont les paramètres d'endommagement qui sont le plus difficilement obtenus par mesure expérimentale. Les paramètres de viscosité ne sont cependant pas forcément beaucoup plus facilement obtenus.

Table 2.1: Résumé des équations du modèle adopté (comportement élastoviscoplastique endommageable exprimé en grandeurs corotationnelles)

<p><u>Comportement réversible</u></p> $\dot{\sigma}_{ij} = H_{ijkl}(D_{kl} - D_{kl}^{irr})$ $H_{ijkl} = \bar{K}(d)\delta_{ij}\delta_{kl} + 2\bar{G}(d)(\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl})$ <p>avec</p> $\bar{K}(d) = \frac{4K_0G_0(1-d)}{4G_0 + 3K_0d} \quad \bar{G}(d) = \frac{G_0(1-d)}{1 + \frac{6K_0 + 12G_0}{9K_0 + 8G_0}d}$ <p><u>Comportement irréversible</u></p> $D_{ij}^{irr} = \left\langle \frac{f}{k} \right\rangle^m \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$ $f = \sqrt{\frac{3}{2}}q - \omega(p, \sigma_Y, d)\sigma_Y$ <p>avec $p = \frac{1}{3}\sigma_{ii}$, $q = \sqrt{s_{ij}s_{ij}}$ où s_{ij} est le déviateur de σ_{ij} ($s_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij}$) et</p> $\omega(p, \sigma_Y, d) = \left(1 - 2\frac{d}{d_U} \cosh\left(\frac{\alpha_2}{2} \frac{3p}{\sigma_Y}\right) + \left(\frac{d}{d_U}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ <p><u>Lois d'évolution des variables internes</u></p> <p><i>Ecrouissage isotrope</i></p> $\dot{\epsilon}^{pl} = -\frac{1}{1-d} \left\langle \frac{f}{k} \right\rangle^m \frac{\partial f}{\partial \sigma_Y} \quad \text{ou} \quad \dot{\epsilon}^{pl} = \left\langle \frac{f}{k} \right\rangle^m h_1(\sigma_{ij}, \sigma_Y, d)$ <p>avec $\sigma_Y = \sigma_Y(\epsilon^{pl})$.</p> <p><i>Endommagement</i></p> $\dot{d} = \begin{cases} \dot{d}_n + \dot{d}_g & \text{pour } d < d_{crit} \\ \dot{d}_c & \text{pour } d \geq d_{crit} \end{cases}$ <p>avec</p> $\dot{d}_n = A(\epsilon^{pl})\dot{\epsilon}^{pl} \quad \text{où} \quad A(\epsilon^{pl}) = \frac{d_N}{s_N\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon^{pl} - \epsilon_N}{s_N}\right)^2\right]$ $\dot{d}_g = (1-d)D_{nn}^{irr}$ $\dot{d}_c = \frac{d_U - d_{crit}}{\Delta\epsilon} \dot{\epsilon}^{pl}$ <p>En résumé :</p> $\dot{d} = \left\langle \frac{f}{k} \right\rangle^m h_2(\sigma_{ij}, \sigma_Y, d)$

Chapitre 3

Mise en œuvre numérique

3.1 Introduction

Un des buts principaux de ce travail est d'utiliser le modèle constitutif décrit au chapitre précédent dans le cadre d'une simulation numérique. Or qui dit simulation numérique dit discrétisation temporelle et spatiale. Il est donc nécessaire d'établir des schémas d'intégration des équations différentielles régissant le problème.

Dans la section 3.2, nous décrivons le schéma qui a été développé pour l'intégration des équations constitutives sur un incrément de temps (de mise en charge). Ce schéma est une généralisation du schéma du retour radial au cas de la plasticité non-déviatorique. Nous le présentons pour le cas particulier d'un modèle élasto-visco-plastique endommageable, mais son extension aux cas impliquant des variables internes supplémentaires ne pose aucun problème (voir par exemple Stainier et Colantonio ⁽¹²⁸⁾). Dans le cadre plus général du schéma d'intégration temporel global, si on opte pour une solution de type implicite (p.e. un schéma HHT en dynamique), il est nécessaire de calculer un opérateur tangent à la loi constitutive. Pour s'assurer d'une convergence efficace, il est primordial d'utiliser un opérateur tangent consistant avec le schéma d'intégration de la loi constitutive. Cet opérateur tangent consistant peut être assez différent de l'opérateur tangent continu directement issu des équations constitutives. Ce dernier est même inexistant dans le cadre viscoplastique. Pour plus de détails sur ce sujet, on consultera Ponthot ⁽¹⁰⁸⁾. Dans la section 3.3, nous développons une expression analytique de l'opérateur tangent consistant avec le schéma d'intégration présenté à la section précédente.

L'intégration spatiale des équations différentielles du problème est réalisée par la *méthode des éléments finis*. Dans le cadre de la modélisation des grandes déformations inélastiques, cette méthode numérique rencontre notamment des difficultés suite à la quasi-incompressibilité de l'écoulement de matière. Pour y remédier, il est nécessaire de sous-intégrer, au moins partiellement, le champ de déformation à travers l'élément. Dans la section 3.4, nous décrivons rapidement les éléments finis utilisés et nous abordons notamment les cas de la sous-intégration volumique et de la sous-intégration complète. L'utilisation de la méthode des éléments finis pour intégrer les équations différentielles du problème se heurte également à la prise en compte des singularités qui interviennent lorsque ces équations différentielles perdent leur ellipticité (leur hyperbolicité dans le cas dynamique) suite à l'adoucissement résultant de l'endommagement. On observe alors une localisation de la déformation dans des

bandes de cisaillement. Nous étudierons dans la section 3.5 les différentes solutions possibles pour modéliser correctement l'effet de ces bandes de cisaillement. En effet, l'apparition d'une déformation localisée de grande amplitude est généralement le prélude à la formation d'une macrofissure.

3.2 Intégration numérique des lois constitutives

3.2.1 Rappel des équations du problème

Nous allons décrire un schéma d'intégration pour la loi constitutive élasto-visco-plastique endommageable présentée au chapitre précédent (section 2.3.4), mais l'extension à d'autres modèles constitutifs impliquant une plasticité non-déviatorique et un nombre quelconque de variables internes ne pose aucun problème.

La résolution numérique des équations différentielles non-linéaires du problème est basée sur une approche incrémentale. En effet, en plus de la discrétisation spatiale en éléments finis, on utilise une discrétisation temporelle incrémentale (dans le cas quasi-statique, il s'agit plutôt d'une mise en charge incrémentale). Partant de la configuration initiale, on obtient ainsi un nombre fini de configurations équilibrées pour finalement arriver à la configuration finale. Remarquons que la notion de configuration équilibrée correspond ici à une configuration vérifiant les équations d'équilibre mécanique au sens *éléments finis*. Pour déterminer une nouvelle configuration équilibrée à partir de la configuration équilibrée précédente, on peut utiliser soit un schéma explicite, soit un schéma implicite (voir Belytschko ⁽⁹⁾, Ponthot ⁽¹⁰⁸⁾). Quelle que soit la méthode choisie, il faut se donner une évolution du taux de déformation entre les deux états. Nous supposons que le taux de déformation corotationnel est constant sur un incrément, ce qui implique (pour une démonstration, voir p.e. Ponthot ⁽¹⁰⁸⁾) :

$$\mathbf{D}^c = \frac{1}{\Delta t} \ln \mathbf{U} = \frac{1}{2\Delta t} \ln(\mathbf{F}^t \cdot \mathbf{F}) \quad (3.1)$$

où \mathbf{U} est issu de la décomposition $R\mathbf{U}$ de \mathbf{F} , gradient de déformation entre la configuration en début de pas (notée \mathbf{x}^0) et la configuration actuelle (notée \mathbf{x}^1) :

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i^1}{\partial x_j^0} \quad (3.2)$$

Rappelons que dans le cadre hypoélastique, on fait l'hypothèse d'une partition additive du taux de déformation :

$$D_{ij}^c = D_{ij}^{rev,c} + D_{ij}^{irr,c} \quad (3.3)$$

Connaissant \mathbf{D}^c , il nous faut donc déterminer comment il se décompose. Si on utilise la dérivée de Jaumann (voir chapitre 2, section 2.3.2), la partie réversible est définie par la relation suivante :

$$\dot{\sigma}_{ij}^c = H_{ijkl}^c D_{kl}^{rev,c} \quad (3.4)$$

Pour une discussion plus détaillée du problème de l'objectivité, on consultera Ponthot ⁽¹⁰⁸⁾. Dans la suite, on omettra l'exposant c , étant entendu que les grandeurs sont corotationnelles sauf mention du contraire. Utilisant l'hypothèse de partition, on peut donc écrire :

$$\dot{\sigma}_{ij} = H_{ijkl} D_{kl}^{rev} = H_{ijkl} (D_{kl} - D_{kl}^{irr}) = \dot{\sigma}_{ij}^{rev} - \dot{\sigma}_{ij}^{irr} \quad (3.5)$$

Le comportement irréversible est quant à lui décrit par les équations suivantes (pour le détail des expressions, voir tableau 2.1) :

$$D_{ij}^{irr} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.6.a)$$

$$\dot{\epsilon}^{pl} = \dot{\lambda} h_1(\sigma_{ij}, \sigma_Y, d) \quad (3.6.b)$$

$$\dot{d} = \dot{\lambda} h_2(\sigma_{ij}, \sigma_Y, d) \quad (3.6.c)$$

où $\dot{\epsilon}^{pl}$ est le taux de la déformation plastique équivalente (variable interne mesurant l'écroutissement), \dot{d} le taux de la fraction volumique de vide (variable interne mesurant l'endommagement), σ_{ij} les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy, σ_Y la force thermodynamique associée à ϵ^{pl} et $f(\sigma_{ij}, \sigma_Y, d)$ la surface d'écoulement plastique, par exemple celle de Gurson :

$$f \equiv \sqrt{\frac{3}{2}} q - \omega(p, \sigma_Y, d) \sigma_Y \quad (3.7)$$

avec $p = \frac{1}{3} \sigma_{ii}$ et $q = \sqrt{s_{ij}s_{ij}}$ où s_{ij} est le déviateur de σ_{ij} ($s_{ij} = \sigma_{ij} - p \delta_{ij}$).

Dans le cas visco-plastique général, $\dot{\lambda}$ est écrit pour l'expression suivante :

$$\dot{\lambda} = \left\langle \frac{f}{k} \right\rangle^m \quad (3.8)$$

où k et m sont des paramètres liés au comportement viscoplastique. Par contre, rappelons que dans le cas plastique ($k = 0$), $\dot{\lambda}$ est le paramètre de consistance obligeant les contraintes à rester à l'intérieur ou sur la surface de charge par des relations de type Kuhn-Tucker :

$$\dot{\lambda} f = 0 ; \dot{\lambda} \geq 0 ; f \leq 0 \quad (3.9)$$

De plus, dans le cas isotrope, on peut écrire :

$$H_{ijkl} = \bar{K}(d) \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\bar{G}(d) (\delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}) \quad (3.10)$$

où, par exemple, $\bar{K}(d)$ et $\bar{G}(d)$ sont obtenus par la loi de Mori-Tanaka (expressions (2.40)).

3.2.2 Prédicteur élastique

La loi constitutive exposée ci-dessus sera intégrée par un schéma du type prédicteur élastique (réversible) – correcteur plastique (irréversible). Le prédicteur élastique est le tenseur contrainte qui serait obtenu si la déformation était entièrement réversible (c'est-à-dire élastique à endommagement constant) :

$$\sigma_{ij}^{rev} = p^{rev} \delta_{ij} + s_{ij}^{rev} = \sigma_{ij}^0 + H_{ijkl}(d^0) \int_{t_0}^{t_1} D_{kl} dt \quad (3.11)$$

avec

$$p^{rev} = p^0 + \bar{K}(d^0) \int_{t_0}^{t_1} D_{kk} dt \quad (3.12.a)$$

$$s_{ij}^{rev} = s_{ij}^0 + \bar{G}(d^0) \int_{t_0}^{t_1} \text{dev}(D_{ij}) dt \quad (3.12.b)$$

où les grandeurs ⁰ sont relatives au début de l'incrément de déformation (configuration équilibrée de départ) et les grandeurs ¹ sont relatives à la fin de cet incrément (configuration à équilibrer), et où dev(•) est noté pour partie déviatorique de •. La contrainte réelle en fin d'incrément s'écrira donc :

$$\sigma_{ij}^1 = \sigma_{ij}^{rev} - \int_{t_0}^{t_1} H_{ijkl} D_{kl}^{irr} dt \quad (3.13)$$

où le second terme du membre de droite représente le correcteur plastique-endommagement (qu'il faudrait plus rigoureusement appeler correcteur viscoplastique-endommagement).

3.2.3 Correcteur plastique-endommagement

Pour plus de clarté, nous allons séparer le correcteur plastique-endommagement en sa partie volumique et sa partie déviatorique :

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{ij}^{irr} &= \int_{t_0}^{t_1} H_{ijkl} D_{kl}^{irr} dt \\ &= \left(\int_{t_0}^{t_1} \bar{K}(d) D_{kk}^{irr} dt \right) \delta_{ij} + \left(\int_{t_0}^{t_1} 2\bar{G}(d) D_{kl}^{irr} (\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}) dt \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Dans ces expressions, on peut remplacer le taux de déformation irréversible par son expression (3.6.a) :

$$D_{ij}^{irr} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \dot{\lambda} \left(\frac{\partial f}{\partial s_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial (3p)} \delta_{ij} \right) \quad (3.15)$$

On a donc, pour le correcteur plastique-endommagement sur les contraintes, l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{ij}^{irr} &= \Delta p^{irr} \delta_{ij} + \Delta s_{ij}^{irr} \\ &= \left(\int_{t_0}^{t_1} 3\bar{K}(d) \frac{\partial f}{\partial (3p)} \dot{\lambda} dt \right) \delta_{ij} + \left(\int_{t_0}^{t_1} 2\bar{G}(d) \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} \dot{\lambda} dt \right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Les intégrales ci-dessus vont être approximées de manière totalement implicite (schéma d'Euler arrière), ce qui donne pour le correcteur :

$$\Delta \sigma_{ij}^{irr} = 3\bar{K}(d^1) \left. \frac{\partial f}{\partial (3p)} \right|^1 \Gamma \delta_{ij} + 2\bar{G}(d^1) \left. \frac{\partial f}{\partial s_{ij}} \right|^1 \Gamma \quad (3.17)$$

où

$$\Gamma = \int_{t_0}^{t_1} \dot{\lambda} dt = \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \frac{f}{k} \right\rangle^m dt \quad (3.18)$$

Cette dernière intégrale peut également être approximée de manière implicite et on obtient :

$$\Gamma = \left\langle \frac{f^1}{k} \right\rangle^m \Delta t \quad (3.19)$$

où f^1 représente la fonction f évaluée en t_1 .

Avant de continuer, définissons n_{ij} , donnant la direction de s_{ij} :

$$n_{ij} = \frac{s_{ij}}{\sqrt{s_{kl}s_{kl}}} \quad s_{ij} = qn_{ij} \quad n_{ij}n_{ij} = 1 \quad (3.20)$$

A partir de cette définition, on peut écrire

$$\frac{\partial f}{\partial s_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial q} n_{ij} \quad (3.21)$$

et donc

$$\Delta p^{irr} = 3\bar{K}(d^1) \left. \frac{\partial f}{\partial(3p)} \right| \Gamma \quad (3.22.a)$$

$$\Delta s_{ij}^{irr} = 2\bar{G}(d^1) \left. \frac{\partial f}{\partial q} \right| \Gamma n_{ij}^1 \quad (3.22.b)$$

Remarque: on a d'un côté $s_{ij}^1 = s_{ij}^{rev} - \Delta s_{ij}^{irr} = q^{rev} n_{ij}^{rev} - \Delta s_{ij}^{irr}$, mais également $s_{ij}^1 = q^1 n_{ij}^1$, et donc, au vu de l'expression (3.22.b) de Δs_{ij}^{irr} , on doit avoir $n_{ij}^1 = n_{ij}^{rev}$. On a donc une méthode de type *retour radial*, ce quelle que soit la forme de la fonction f , tant que la seconde partie de la relation (3.15) reste vérifiée, c'est-à-dire que f dépend des contraintes uniquement au travers des invariants J_2 et I_1 (c'est-à-dire q et p). \square

De la même façon que pour les contraintes, on peut obtenir pour les variables internes les expressions suivantes :

$$\epsilon^{pl1} = \epsilon^{pl0} + h_1(\sigma_{ij}^1, \sigma_Y^1, d^1)\Gamma \quad (3.23.a)$$

$$d^1 = d^0 + h_2(\sigma_{ij}^1, \sigma_Y^1, d^1)\Gamma \quad (3.23.b)$$

La grandeur Γ est déterminée par la relation (3.19), qu'on peut réécrire sous la forme suivante dans le cas d'un incrément irréversible :

$$f^*(\Gamma) = f^1(\Gamma) - k \left(\frac{\Gamma}{\Delta t} \right)^{\frac{1}{m}} = 0 \quad (3.24)$$

On retrouve donc ce qu'on pourrait appeler une surface de charge généralisée, qui dégénère bien en la surface de charge f dans le cas élasto-plastique ($k = 0$). Cette équation fortement non-linéaire sera résolue par un schéma de type Newton-Raphson. L'équation linéarisée autour de l'estimé actuel s'écrit alors :

$$f^*(\Gamma^i) + \left. \frac{\partial f^*}{\partial \Gamma} \right| \delta \Gamma^i = 0$$

et la correction à l'estimé actuel vaut :

$$\delta \Gamma^i = - \frac{f^*(\Gamma^i)}{\left. \frac{\partial f^*}{\partial \Gamma} \right| \Gamma^i} \quad (3.25)$$

La dérivée de la fonction de charge f par rapport à Γ peut s'écrire en fonction des autres variables :

$$\frac{\partial f}{\partial \Gamma} = \frac{\partial f}{\partial(3p)} \frac{\partial(3p)}{\partial \Gamma} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \Gamma} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_Y} \frac{\partial \sigma_Y}{\partial \Gamma} + \frac{\partial f}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial \Gamma} \quad (3.26)$$

avec

$$\frac{\partial(3p)}{\partial\Gamma} = -9\bar{K} \frac{\partial f}{\partial(3p)} \quad (3.27.a)$$

$$\frac{\partial q}{\partial\Gamma} = -2\bar{G} \frac{\partial f}{\partial q} \quad (3.27.b)$$

$$\frac{\partial\sigma_Y}{\partial\Gamma} = H \frac{\partial\epsilon^{pl}}{\partial\Gamma} = H h_1 \quad (3.27.c)$$

$$\frac{\partial d}{\partial\Gamma} = h_2 \quad (3.27.d)$$

On obtient ainsi l'estimé $i + 1$ de Γ : $\Gamma^{i+1} = \Gamma^i + \delta\Gamma^i$. Pour obtenir l'estimé $i + 1$ des contraintes et des variables internes, il reste à résoudre le système des quatre équations non-linéaires (3.22.a), (3.22.b), (3.23.a) et (3.23.b) écrites pour l'itéré local $i + 1$, ce qui donne :

$$p^{i+1} = p^{rev} - 3\bar{K}(d^{i+1}) \left. \frac{\partial f}{\partial(3p)} \right|_{\Gamma^{i+1}}^{i+1} \quad (3.28.a)$$

$$q^{i+1} = q^{rev} - 2\bar{G}(d^{i+1}) \left. \frac{\partial f}{\partial(q)} \right|_{\Gamma^{i+1}}^{i+1} \quad (3.28.b)$$

$$\epsilon^{pl,i+1} = \epsilon^{pl0} + h_1^{i+1} \Gamma^{i+1} \quad (3.28.c)$$

$$d^{i+1} = d^0 + h_2^{i+1} \Gamma^{i+1} \quad (3.28.d)$$

Pour des surfaces de charge de type Gurson, il est fondamental de résoudre ce système d'équations non-linéaires de manière assez précise, sous peine de voir la convergence globale du schéma mise en cause. Cela implique donc un second processus itératif de type Newton-Raphson intérieur au premier (celui de recherche du correcteur plastique-endommagement).

Remarque: quand les équations ci-dessus dégènèrent vers le cas de la plasticité purement déviatorique, l'équation (3.28.a) disparaît ($p = p^{rev}$), mais l'équation d'évolution de l'endommagement (3.28.d) reste présente. \square

3.2.4 Rotation finale instantanée

Le schéma prédicteur élastique – correcteur plastique-endommagement qui vient d'être décrit permet de calculer les contraintes corotationnelles en fin de pas. Pour passer aux contraintes de Cauchy, on utilise la méthode de la rotation finale instantanée, initialement proposée par Nagtegaal et Veldpaus⁽⁸⁵⁾. Dans cette méthode, on considère la rotation nulle sur l'intervalle $[t_0, t_1[$, le tenseur taux de déformation corotationnel étant supposé constant comme nous l'avons déjà dit. On applique ensuite à l'instant t_1 la rotation totale \mathbf{R} (issue de $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$) aux contraintes corotationnelles, ce qui conduit aux contraintes de Cauchy :

$$\boldsymbol{\sigma}^1 = \mathbf{R}\boldsymbol{\sigma}^{c,1}\mathbf{R}^t \quad (3.29)$$

En conclusion, on intégrera donc les équations constitutives sur un pas de temps selon la méthode qui vient d'être exposée, et qui est résumée au tableau 3.1.

Table 3.1: Résumé du schéma d'intégration des équations constitutives élastoviscoplastiques endommageables (pour un pas de temps t_0 - t_1 , selon un schéma prédicteur élastique – correcteur plastique-endommagement)

<p>1. <u>$t = t_0$</u></p> <p><i>données:</i> $p^0, \mathbf{s}^0, \epsilon^{pl,0}, d^0, \text{tr}(\mathbf{D}), \text{dev}(\mathbf{D}), \mathbf{R}, \Delta t$</p> <p><i>inconnues:</i> $p^1, \mathbf{s}^1, \epsilon^{pl,1}, d^1$</p> <p>2. <u>Prédicteur élastique</u></p> <p>$\Delta \mathbf{e} = \mathbf{D} \Delta t$</p> <p>$p^{rev} = p^0 + \bar{K}(d^0) \text{tr}(\Delta \mathbf{e})$</p> <p>$\mathbf{s}^{rev} = \mathbf{s}^0 + 2\bar{G}(d^0) \text{dev}(\Delta \mathbf{e})$</p> <p>$q^{rev} = \sqrt{\mathbf{s}^{rev} \mathbf{s}^{rev}}$ et $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{s}^{rev}}{q^{rev}}$</p> <p>3. <u>Correcteur plastique-endommagement</u></p> <p>$p = p^{rev}, q = q^{rev}, \epsilon^{pl} = \epsilon^{pl,0}, d = d^0$</p> <p>if ($f(p, q, \epsilon^{pl}, d) \leq 0$) goto 4 (incrément réversible)</p> <p>résolution itérative du système composé des 5 équations suivantes :</p> $\left\{ \begin{array}{l} p = p^{rev} - 3\bar{K}(d) \frac{\partial f}{\partial (3p)} \Gamma \\ q = q^{rev} - 2\bar{G}(d) \frac{\partial f}{\partial q} \Gamma \\ \epsilon^{pl} = \epsilon^{pl,0} + h_1 \Gamma \\ d = d^0 + h_2 \Gamma \\ f - k \left(\frac{\Gamma}{\Delta t} \right)^{\frac{1}{m}} = 0 \end{array} \right.$ <p>4. <u>Rotation finale instantanée</u></p> <p>$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{R} (p\boldsymbol{\delta} + q\mathbf{n}) \mathbf{R}^t$</p> <p>5. <u>$t = t_1$</u></p> <p>$p^1 = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}), \mathbf{s}^1 = \text{dev}(\boldsymbol{\sigma}), \epsilon^{pl,1} = \epsilon^{pl}, d^1 = d$</p>

3.2.5 Comparaison avec d'autres schémas

Le schéma d'intégration des équations constitutives décrit au tableau 3.1 est un schéma du type Euler arrière. Ses principes de base correspondent à ceux du schéma proposé par Ortiz et Simo ^(94,117) pour l'intégration d'équations constitutives élastoplastiques de forme très générale. Les différences entre notre schéma et celui de Ortiz et Simo résident principalement dans la méthode utilisée pour évaluer le correcteur plastique (irréversible). En effet, on peut considérer que, dans la métrique définie par \mathbf{H}^{-1} (métrique variable dans notre cas), le schéma de Ortiz et Simo peut être rattaché à la méthode des plans sécants (cutting plane algorithm), tandis que notre schéma se rattache à la méthode de projection sur le point le plus proche (closest point algorithm). Ces deux méthodes sont illustrées à la figure 3.1. L'avantage fondamental de la seconde méthode sur la première est de permettre une linéarisation exacte des équations du schéma lors du calcul de l'opérateur tangent consistant (Simo et Hughes ⁽¹¹⁸⁾). Ortiz et Simo ont également étendu leur schéma à la viscoplasticité, mais en se limitant au cas de la viscosité linéaire ($m = 1$), ce qui leur fait adopter une approche assez différente de la nôtre, et où intervient un temps de relaxation instantané issu de l'intégration analytique partielle des équations.

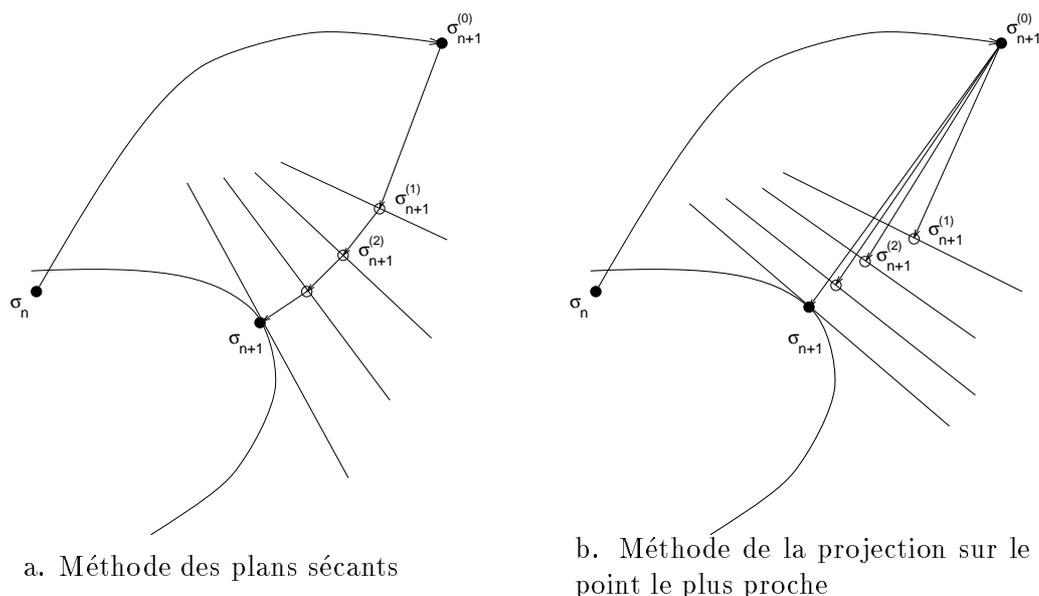


Figure 3.1: Calcul itératif du correcteur plastique

Un schéma Euler arrière a également été proposé par Aravas ⁽⁵⁾, mais dans le cadre non-visqueux uniquement. De nouveau, les différences principales entre ce schéma et celui présenté ici résident dans la méthode de résolution du système d'équations non-linéaires permettant d'évaluer le correcteur plastique-endommagement. Notre méthode nous semble présenter l'avantage de permettre la prise en compte du cas visqueux dans une écriture générale, ainsi que de conduire à une linéarisation de forme relativement simple. Le schéma de Aravas a été amélioré et étendu au cas de l'écroutissage cinématique par Lee et Zhang ⁽⁷⁵⁾. Govindarajan et Aravas ⁽⁴⁹⁾ ont également apporté des améliorations au schéma de départ.

3.2.6 Stabilité et précision du schéma

Avant de passer à la dérivation de l'opérateur tangent consistant, on peut dire quelques mots sur la stabilité et la précision du schéma proposé plus haut.

Ortiz et Popov ⁽⁹³⁾ ont présenté deux grandes familles de schémas d'intégration généralisant respectivement la méthode du trapèze et la méthode du point milieu. Ces deux auteurs ont étudié la précision et la stabilité de ces deux familles pour le cas d'un modèle de Von Mises parfaitement plastique. Ils ont également observé que la stabilité des schémas de la famille du trapèze généralisé était fortement sensible à la courbure de la surface de charge. Cependant, le schéma d'Euler arrière (cas limite appartenant aux deux familles à la fois) est lui inconditionnellement stable, même en présence de points anguleux, au prix d'une précision limitée à l'ordre un. Le domaine de stabilité des schémas de la famille du point milieu généralisé est par contre indépendant de la courbure de la surface de charge utilisée. Cela le rend (théoriquement) attractif, d'autant plus que sa précision peut atteindre l'ordre deux sous certaines conditions. Mais en pratique, dans le cas de grands incréments de déformation notamment, ces résultats peuvent être contredits, au profit du schéma Euler arrière (Ponthot ⁽¹⁰⁹⁾).

Ortiz et Simo ⁽⁹⁴⁾ ont appliqué le même type d'étude à leur schéma (dont on a parlé plus haut) en considérant le cas particulier du modèle Cam-Clay, largement utilisé en mécanique des sols. Ils ont notamment montré que la viscosité pouvait diminuer la précision de leur schéma. Lee ⁽⁷²⁾ a étudié le cas d'un modèle de Von Mises modifié, représentatif du comportement de certains polymères, pour lequel il a comparé les performances de trois schémas d'intégration de la famille du point milieu généralisé. Il en a conclu que c'est la méthode du point milieu qui donne les meilleurs résultats, les deux autres méthodes testées étant celles d'Euler avant et d'Euler arrière.

Zhang ⁽¹³⁷⁾ a évalué la précision et la stabilité des méthodes de la famille du point milieu généralisé appliquées à la surface de charge de Gurson-Tvergaard, dans un cadre élastoplastique. Il en a déduit que les performances de ces méthodes dépendent du type de problème considéré, suivant la nature radiale ou tangente de l'incrément de déformation déviatorique, le cas tangent étant le moins favorable. Il a également observé que l'algorithme d'Euler arrière n'était pas celui qui donnait la meilleure précision. La stabilité inconditionnelle de cet algorithme est par contre toujours assurée, comme nous l'avons déjà dit.

Une étude similaire sur le schéma présenté ici, prenant en compte le cas visqueux, serait rendue assez complexe par la nature variable de la métrique \mathbf{H}^{-1} dans laquelle ces calculs sont menés. Nous pensons cependant, sans en avoir la preuve mathématique, que l'effet néfaste de la viscosité observé par Ortiz et Simo ⁽⁹⁴⁾ devrait être, dans notre cas, moins marqué, si pas absent, suite à l'utilisation de la méthode de projection sur le point le plus proche plutôt que de la méthode des plans sécants.

3.3 Lois tangentes consistantes

L'intérêt majeur de l'utilisation d'une loi tangente dite consistante, par opposition à la loi tangente continue, dans le cadre du processus itératif de recherche de l'équilibre structural (au sens des éléments finis) est bien connu depuis les travaux de Simo et Taylor ⁽¹¹⁶⁾ dans le cadre

de l'élastoplasticité. Cet intérêt est d'autant plus accru dans le cas de l'élastoviscoplasticité qu'il n'existe alors plus de loi tangente continue reliant le taux des contraintes au taux de déformation (instantané). De nombreux auteurs ont dérivé des opérateurs tangents consistants correspondant à divers schémas d'intégration et à divers modèles, relevant de la plasticité déviatorique (p.e. Simo ⁽¹²²⁾), mais aussi de la plasticité non-déviatorique. Ainsi, pour le modèle de Gurson–Tvergaard, Aravas ⁽⁵⁾ a dérivé un opérateur tangent consistant avec le schéma d'intégration qu'il proposait, ainsi que Lee et Zhang ⁽⁷⁵⁾, qui ont étendu les travaux de Aravas au cas de l'érouissage cinématique. Plus récemment, Zhang ⁽¹³⁸⁾ a proposé une amélioration de l'algorithme de Aravas, qui évite le recours à toute inversion numérique de matrice. Les travaux cités ci-dessus concernent cependant uniquement le cas non-visqueux. Une extension au cas de la viscoplasticité du type Duvaut–Lions ⁽³²⁾ a été proposée par Ju ⁽⁶⁵⁾. Cet auteur a également abordé le cas de la viscoplasticité du type Perzyna, mais de manière très brève et en se limitant au cas de la surface de charge de Von Mises.

Ci-dessous, nous dérivons l'opérateur tangent consistant avec le schéma d'intégration proposé plus tôt, valable dans le cas viscoplastique général, pour toute surface de charge dépendant de la pression hydrostatique (invariant I_1 du tenseur contrainte) et de la norme du déviateur (invariant J_2 du tenseur des contraintes déviatoriques). On considère dans la suite deux variables internes (ϵ^{pl} et d), mais les développements proposés peuvent sans peine être étendus à un nombre indéfini de variables internes.

Les équations de base du schéma d'intégration dont on veut dériver la loi tangente sont donc les suivantes :

$$p^1 = p^{rev} - 3\bar{K}(d^1) \left. \frac{\partial f}{\partial(3p)} \right|^1 \Gamma \quad (3.30.a)$$

$$s_{ij}^1 = s_{ij}^{rev} - 2\bar{G}(d^1) \left. \frac{\partial f}{\partial q} \right|^1 \Gamma n_{ij} \quad (3.30.b)$$

$$\epsilon^{pl1} = \epsilon^{pl0} + h_1(\sigma_{ij}^1, \sigma_Y^1, d^1) \Gamma \quad (3.30.c)$$

$$d^1 = d^0 + h_2(\sigma_{ij}^1, \sigma_Y^1, d^1) \Gamma \quad (3.30.d)$$

avec la surface de charge généralisée

$$f^* \equiv f^1(\sigma_{ij}, \sigma_Y; d) - k \left(\frac{\Gamma}{\Delta t} \right)^{\frac{1}{m}} = 0 \quad (3.31)$$

L'opérateur tangent consistant \bar{M}_{ijkl} relie la différentielle des contraintes $d\sigma_{ij}$ à un tenseur taux de déformation différentielle \bar{D}_{kl} :

$$d\sigma_{ij} = \bar{M}_{ijkl} \bar{D}_{kl} + \bar{W}_{ik} \sigma_{kj} - \sigma_{ik} \bar{W}_{kj} \quad (3.32)$$

où

$$\bar{D}_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial dx_k}{\partial x_l} + \frac{\partial dx_l}{\partial x_k} \right) \quad (3.33.a)$$

$$\bar{W}_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial dx_k}{\partial x_l} - \frac{\partial dx_l}{\partial x_k} \right) \quad (3.33.b)$$

Les deux derniers termes de l'expression (3.32), dont la forme rappelle la dérivée de Jaumann,

correspondent à la rotation finale instantanée (voir Ponthot ⁽¹⁰⁹⁾). Le tenseur \bar{M}_{ijkl} peut être obtenu par linéarisation des équations du schéma. Ainsi, la différentielle de la contrainte dans les axes corotationnels s'écrit :

$$d\sigma_{ij}^1 = dp^1 \delta_{ij} + ds_{ij}^1 \quad (3.34)$$

avec

$$dp^1 = dp^{rev} - 3\bar{K}(d^1) \left. \frac{\partial f}{\partial(3p)} \right|^1 d\Gamma - d \left(3\bar{K}(d^1) \left. \frac{\partial f}{\partial(3p)} \right|^1 \right) \Gamma \quad (3.35.a)$$

$$dp^{rev} = \bar{K}(d^0) \text{tr}(\Delta \bar{e}_{kl}) \quad (3.35.b)$$

pour la partie volumique et

$$ds_{ij}^1 = dq^1 n_{ij} + q^1 dn_{ij} \quad (3.36.a)$$

$$dq^1 = dq^{rev} - 2\bar{G}(d^1) \left. \frac{\partial f}{\partial q} \right|^1 d\Gamma - d \left(2\bar{G}(d^1) \left. \frac{\partial f}{\partial q} \right|^1 \right) \Gamma \quad (3.36.b)$$

$$dq^{rev} = 2\bar{G}(d^0) \text{dev}(\Delta \bar{e}_{kl}) n_{kl} \quad (3.36.c)$$

$$dn_{ij} = \frac{1}{q^{rev}} (\delta_{ik} \delta_{jl} - n_{ij} n_{kl}) 2\bar{G}(d^0) \text{dev}(\Delta \bar{e}_{kl}) \quad (3.36.d)$$

pour la partie déviatorique. Dans ces équations, on a écrit $\Delta \bar{e}_{kl}$ pour $d(\Delta e_{kl})$. On peut également montrer (Ponthot ⁽¹⁰⁹⁾) que

$$R_{ik} R_{jl} \Delta \bar{e}_{kl} = \bar{D}_{ij}$$

De la même façon, les différentielles des variables internes s'écrivent :

$$d\epsilon^{pl1} = h_1(p^1, q^1, \sigma_Y^1, d^1) d\Gamma + dh_1 \Gamma \quad (3.37.a)$$

$$dd^1 = h_2(p^1, q^1, \sigma_Y^1, d^1) d\Gamma + dh_2 \Gamma \quad (3.37.b)$$

La différentielle de Γ est obtenue par différentiation de la fonction de charge généralisée f^* :

$$df^* = \frac{\partial f^*}{\partial(3p^{rev})} d(3p^{rev}) + \frac{\partial f^*}{\partial q^{rev}} dq^{rev} + \frac{\partial f^*}{\partial \Gamma} d\Gamma = 0 \quad (3.38)$$

A partir des relations (3.26), (3.35.b) et (3.36.c), on obtient alors :

$$d\Gamma = \frac{\frac{\partial f}{\partial(3p)} 3\bar{K}(d^0) \text{tr}(\Delta \bar{e}_{kl}) + \frac{\partial f}{\partial q} 2\bar{G}(d^0) \text{dev}(\Delta \bar{e}_{kl}) n_{kl}}{\frac{\partial f}{\partial(3p)} 9\bar{K}(d^1) \frac{\partial f}{\partial(3p)} + \frac{\partial f}{\partial q} 2\bar{G}(d^1) \frac{\partial f}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial \sigma_Y} H h_1 - \frac{\partial f}{\partial d} h_2 + \frac{k}{m \Delta t} \left(\frac{\Gamma}{\Delta t} \right)^{\frac{1}{m}-1}} \quad (3.39)$$

L'écriture sous forme fermée de l'opérateur tangent consistant est alors possible. Cependant, cette écriture est rendue assez lourde par la présence du dernier terme des équations (3.35.a), (3.36.b), (3.37.a) et (3.37.b). On observe notamment l'apparition des dérivées secondes de la fonction de charge f , ainsi que des dérivées des modules élastiques et des fonctions d'évolution des variables internes h_1 et h_2 . Les quatre équations (3.35.a), (3.36.b), (3.37.a) et (3.37.b) constituent donc un système linéaire dont les inconnues sont dp^1 , dq^1 , $d\epsilon^{pl,1}$ et dd^1 . Dans le cas de la surface de charge de Gurson–Tvergaard, les termes dominants dans ce système sont

ceux en $\frac{\partial^2 f}{\partial(3p)\partial(\bullet)}$, car ils font intervenir les fonctions hyperboliques, et ils ne peuvent donc être négligés. Les termes en $\frac{\partial^2 f}{\partial(q)\partial(\bullet)}$ sont eux identiquement nuls, tandis que les dérivées des modules élastiques peuvent généralement être négligées sans mettre en danger la convergence vers l'équilibre structural. De même, ce sont les dérivées des lois d'évolution par rapport à la pression $\frac{\partial h_i}{\partial(3p)}$ qui sont dominantes à leur niveau, toujours parce qu'elles font intervenir les dérivées de f par rapport à p , les autres dérivées pouvant être négligées. En résumé, on peut donc dire que c'est la courbure de la surface d'écoulement dans l'espace (p,q) qui a une influence importante sur l'opérateur tangent.

Les développements relatifs à la dérivation de la matrice tangente complète, comprenant les termes géométriques ainsi que les termes liés à la rotation finale instantanée peuvent être trouvés dans Ponthot ⁽¹⁰⁹⁾.

3.4 Résolution par la MEF

3.4.1 Le quadrangle à sous-intégration partielle

L'intégration spatiale des équations différentielles du problème est réalisée par la méthode des éléments finis (MEF). Plus particulièrement, nous utiliserons une discrétisation en éléments finis quadrangulaires à base cinématiquement admissible et à champ de déplacement bilinéaire. Cet élément est basé sur la transformation isoparamétrique illustrée à la figure 3.2. Les fonctions de forme bilinéaires peuvent être écrites sous la forme compacte suivante :

$$N_I = \frac{1}{4}(1 + \xi_I \xi)(1 + \eta_I \eta) \quad I = 1, 4 \quad (3.40)$$

où les indices en alphabet romain majuscule correspondent aux noeuds, numérotés comme indiqué à la figure 3.2, et où il n'y a pas de sommation sur I .

Le jacobien \mathbf{J} de la transformation isoparamétrique entre l'espace de référence (ξ, η) et l'espace physique (x, y) s'écrit :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial \xi} x_I & \frac{\partial N_I}{\partial \eta} x_I \\ \frac{\partial N_I}{\partial \xi} y_I & \frac{\partial N_I}{\partial \eta} y_I \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

A partir de l'expression (3.40) des fonctions de forme N_I , ce tenseur peut être exprimé analytiquement, ainsi que son inverse.

Le gradient de déformation entre deux configurations s'écrit alors :

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i^1}{\partial x_j^0} = \frac{\partial x_i^1}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j^0} = J_{ik}^1 J_{kj}^{0-1} \quad (3.42)$$

Comme nous l'avons rappelé au début de ce chapitre, c'est à partir du gradient de déformation que l'on calcule le taux de déformation corotationnel, supposé constant (expression (3.1)). Une fois les contraintes de Cauchy calculées par le schéma exposé à la section 3.2, les forces internes discrétisées aux noeuds sont calculées par l'expression suivante :

$$f_{iI}^{int} = \int_{\Omega_e} \sigma_{ij} \frac{\partial N_I}{\partial x_j} d\Omega_e \quad (3.43)$$

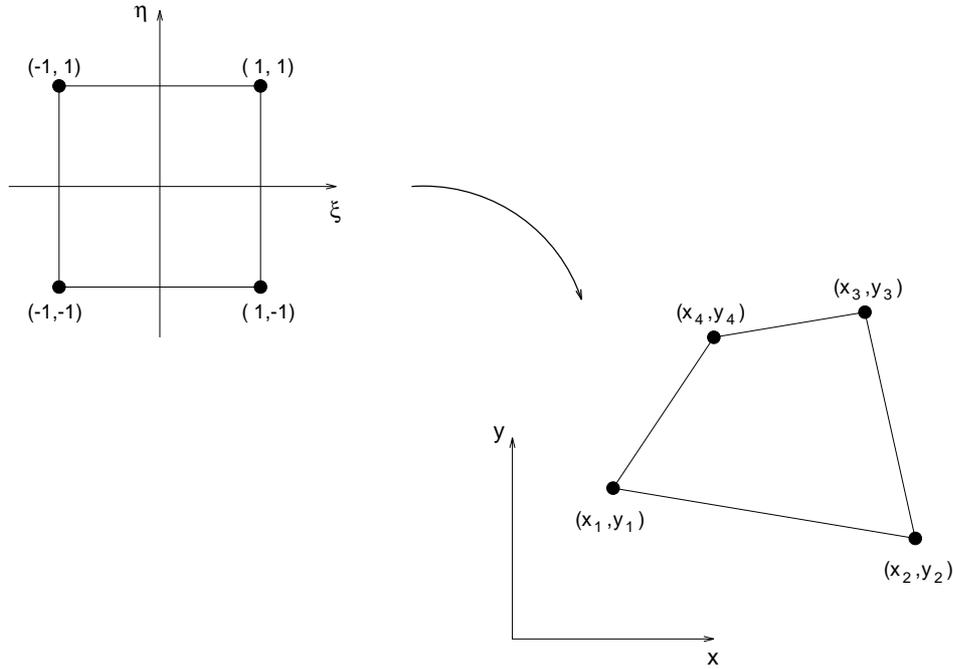


Figure 3.2: Le quadrangle isoparamétrique bilinéaire

La théorie de base de la MEF nous apprend que, comme nous utilisons des fonctions de forme bilinéaires, cette intégrale peut être évaluée par la méthode de Gauss en utilisant quatre points d'intégration situés en $(\xi, \eta) = (\pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \pm \frac{\sqrt{3}}{3})$. Mais si l'on n'y prend garde, des problèmes de “locking” volumique peuvent apparaître suite à la nature (quasi-)isochore de la partie irréversible de la déformation. En effet, même si la porosité amène une déformation irréversible volumique, nous devons pouvoir traiter les cas où l'endommagement est inexistant ou faible. En quelques mots, on peut rappeler l'origine du “locking” volumique : dans le cas des matériaux incompressibles, quand on ajoute un élément à un maillage constitué d'éléments quadrangulaires, on ajoute asymptotiquement 1 nœud et 2 degrés de liberté, tandis que l'on ajoute 1 contrainte d'incompressibilité sur la déformation en chaque point de Gauss où celle-ci est évaluée. Si on évalue la déformation volumique en 4 points de Gauss, le rapport entre le nombre de degrés de liberté et le nombre de contraintes à respecter est donc (asymptotiquement) égal à 0.5, ce qui engendre le “locking”. Par contre, si on évalue la déformation volumique en un seul point de Gauss, ce rapport passe à 2 et l'on ne rencontre plus de problèmes. C'est pourquoi on considérera que la partie volumique du champ de déformation est constante sur l'élément et égale à la déformation volumique naturelle, tandis que la partie déviatorique sera intégrée exactement (c'est-à-dire à l'aide de quatre points de Gauss).

Cependant, contrairement à ce qui se passe en plasticité classique, nous n'avons plus de découplage parfait entre les comportements volumique et déviatorique. Comme nous l'avons vu, la pression dépend maintenant des contraintes déviatoriques. Ici, seul le prédicteur élastique peut encore être calculé de manière découplée, tandis que le correcteur plastique-endommagement fait intervenir un couplage. En pratique, on aura donc :

$$\sigma_{ij}^{rev} = p^{rev} \delta_{ij} + s_{ij}^{rev} \quad (3.44.a)$$

$$p^{rev} = p^0 + 3\bar{K}(d^0) \ln\left(\frac{V_e^1}{V_e^0}\right) \quad (3.44.b)$$

$$s_{ij}^{rev} = s_{ij}^0 + 2\bar{G}(d^0) \operatorname{dev}(D_{ij}) \quad (3.44.c)$$

où V_e^0 et V_e^1 sont respectivement le volume de l'élément en début de pas et en fin de pas, tandis que D_{ij} est relatif au point de Gauss considéré. On peut donc parler de sous-intégration (partielle) du champ de déformation, mais pas pour autant du champ des contraintes. Dans la suite, nous désignerons cet élément sous l'appellation Q4-VRI (pour Volume Reduced Integration).

3.4.2 Sous-intégration complète

La sous-intégration de la déformation volumique est obligatoire si on veut éviter le “*locking*” volumique, mais on peut également envisager la sous-intégration complète du champ de déformation. En effet, lors d'une simulation numérique, une part importante du temps de calcul est consacrée à l'intégration de la loi constitutive, cette opération devant être réalisée à chaque point de Gauss de chaque élément. En diminuant le nombre de points de Gauss, on peut donc réduire de manière significative le temps de calcul total. Ce gain est plus marqué si on utilise un schéma temporel explicite que si on utilise un schéma implicite, pour lequel le temps passé à inverser la matrice tangente structurale est au moins aussi important que celui passé à intégrer la loi constitutive. Cependant la sous-intégration du champ de déformation a comme conséquence l'apparition de modes de déformation à énergie nulle, qui peuvent se superposer à la solution de base et complètement fausser les résultats. Ces modes parasites, aussi appelés modes “*hourglass*” en raison de leur forme, doivent donc être contrôlés de manière à limiter fortement leur amplitude. Dans un article récent (Stainier et Ponthot ⁽¹²⁴⁾), nous avons présenté des méthodes de stabilisation adaptées au cadre des grandes déformations ; nous ne les reprendrons pas ici. Nous avons cependant retravaillé une de ces méthodes afin qu'elle se place de manière plus rigoureuse dans le cadre non-linéaire géométrique, tout en gardant les mêmes idées de base que précédemment. La méthode de stabilisation sous sa nouvelle forme est exposée à l'*annexe A* et est utilisée dans certains des exemples présentés dans la suite. Remarquons au passage que les éléments sous-intégrés ont un meilleur comportement en flexion, comme on l'a montré dans Stainier et Ponthot ⁽¹²⁴⁾. Les éléments sous-intégrés seront également appelés Q4-URI (pour Uniformly Reduced Integration).

3.5 Les problèmes de localisation de la déformation

Le phénomène de localisation de la déformation (et de l'endommagement) peut être observé dans une large gamme de matériaux et notamment dans les métaux. Dans ce cas, la localisation est le plus souvent associée à un processus d'adoucissement, par exemple suite au développement de l'endommagement ou encore suite à un échauffement adiabatique. D'un point de vue mécanique, la localisation intervient la plupart du temps sous la forme d'une *bande de cisaillement* de largeur assez faible, ce qui conduit rapidement à la rupture macroscopique. Il est donc important de pouvoir modéliser correctement ce phénomène.

D'un point de vue mathématique, deux approches sont possibles pour étudier le phénomène de localisation. La première approche, d'application dans le cas quasi-statique, consiste à considérer la localisation comme une *bifurcation* d'un état de déformation homogène vers

un état de déformation fortement non-homogène. Cette bifurcation, liée à la perte du caractère elliptique des équations différentielles du problème, est due au comportement même du matériau et pas à des aspects structuraux (comme pour le flambement p.e.). Les bases de la théorie de la bifurcation dans les solides élastoplastiques ont été établies par Hill ⁽⁵⁶⁾, tandis que leur application à l'étude des bandes de cisaillement repose en grande partie sur le travail de Rice ⁽¹¹²⁾. Cette approche permet de déterminer des critères d'apparition de la localisation, ainsi que l'orientation des bandes. Quand on sort des hypothèses sur lesquelles se basent les travaux cités (état homogène de déformation, matériau standard, ...), on obtient alors plutôt des bornes permettant d'encadrer l'état de déformation auquel la localisation se déclenchera. La seconde approche, d'application dans le cas dynamique, consiste à considérer la bande de cisaillement comme une *onde d'accélération stationnaire* (voir Hadamard ⁽⁵⁴⁾ et Hill ⁽⁵⁷⁾). La localisation correspond alors à la transition entre un état où la vitesse de propagation des ondes existe et un état où elle est imaginaire. Cela définit un critère de localisation basé sur le tenseur acoustique équivalent au critère obtenu par l'approche bifurcation. On peut également interpréter ce critère en considérant que la localisation correspond à la disparition d'une longueur caractéristique dans les équations du problème (elle devient imaginaire).

La perte d'ellipticité des équations différentielles intervenant lors de la localisation rend le problème mal posé, ce qui met en cause l'unicité de la solution que l'on peut obtenir. Ainsi, lors d'un calcul par éléments finis, cela a comme conséquence que c'est la taille des mailles qui devient la longueur caractéristique des équations discrétisées du problème et qu'on a alors une solution dépendante du degré de discrétisation : la bande s'étale sur un nombre constant d'éléments quel que soit le maillage. Pour régulariser le problème (c'est-à-dire le rendre de nouveau bien posé), il faut introduire, de manière plus ou moins artificielle, une longueur caractéristique dans les équations constitutives du matériau. Parmi les méthodes de régularisation possibles, les plus intéressantes semblent être les suivantes :

- *modèle non-local* : la théorie de l'endommagement non-local a principalement été développée par Bazant et Pijaudier-Cabot ⁽⁶⁾. Dans les grandes lignes, ce modèle consiste à utiliser comme variable d'endommagement non plus une grandeur locale mais une grandeur intégrée sur le voisinage du point considéré, alors que les autres grandeurs (contraintes, déformations) restent définies de manière classique. Cette approche a été appliquée au modèle de Gurson–Tvergaard par Leblond *et al.* ⁽⁷⁰⁾. Les conclusions que ces derniers ont pu tirer de l'étude numérique de la formation de bandes de cisaillement sur un domaine rectangulaire tendent à minimiser le rôle de la bifurcation en tant que processus responsable de la localisation dans des situations non initialement homogènes. Tvergaard et Needleman ⁽¹³⁵⁾ ont étendu ces travaux au cas élastoviscoplastique et ont montré que l'introduction de la non-localité supprimait presque totalement la sensibilité de la solution envers le maillage. Des éléments de justification physique pour une approche non-locale de l'endommagement ont été apportés par Bazant ⁽⁷⁾ notamment.
- *modèle avec gradients d'ordre supérieur* : cette technique de régularisation a été proposée par Aifantis ⁽³⁾ et consiste à introduire dans le modèle constitutif les gradients du taux de déformation (jusqu'à un certain ordre). Cette méthode a notamment été utilisée par Lasry et Belytschko ⁽⁶⁹⁾ et par de Borst et Mulhaüs ⁽²⁶⁾ pour la plasticité avec adoucissement ou encore par Désoyer et Leroux ⁽²⁸⁾ pour des modèles élastiques avec endommagement.
- *modèle de Cosserat* : dans le modèle de milieu continu proposé par les Cosserat ⁽²³⁾, les degrés de liberté associés à un point sont non seulement les composantes de la vitesse

(ou de la position) mais également une micro-rotation (ponctuelle). Cela introduit également une composante supplémentaire aux contraintes. L'utilisation de ce modèle (également appelé micro-polaire) comme méthode de régularisation a été explorée par de Borst ^(25,27). Les résultats semblent prometteurs, mais pas pour tous les matériaux. En effet, les modèles micropolaires semblent spécialement convenir pour les matériaux granulaires (sols, bétons). Son application à des modèles avec endommagement n'a, à notre connaissance, été envisagée par aucun auteur.

- *modèle visco-plastique* : l'introduction d'une viscosité dans les problèmes dynamiques définit une longueur caractéristique au travers de la vitesse de propagation des ondes dans le milieu. Cet effet régularisateur qu'apporte la présence d'une viscosité, bien connu des mécaniciens des fluides, est largement utilisé dans la littérature pour traiter les cas de localisation de la déformation. Ainsi, Needleman ⁽⁸⁶⁾ ou Loret et Prevost ^(77,78) ont montré l'efficacité de ce type de régularisation pour des matériaux élastoplastiques avec adoucissement.

Nous n'avons cité ici qu'une partie de l'abondante littérature existant sur le sujet. Mais malgré la richesse (en nombre en tout cas) de la littérature concernant la régularisation du problème de localisation en bandes de cisaillement, il ne nous semble pas qu'une des méthodes exposées ci-dessus ait démontré sa supériorité sur les autres.

Pour notre part, nous avons choisi la méthode de *régularisation viscoplastique* pour des raisons évidentes. En effet, nous avons développé un modèle élastoviscoplastique qui peut être utilisé dans les cas où les sollicitations l'exigent réellement, mais qu'on peut aussi faire tendre vers le cas élastoplastique tout en conservant un problème bien posé. Nous évaluerons son efficacité pratique sur un exemple de localisation (très marquée) dans le chapitre 4.

Comme nous venons de l'expliquer, l'adoucissement dû à l'endommagement a tendance à provoquer une dépendance de la solution envers le maillage. Mais il existe également un autre type de dépendance envers le maillage, qu'on pourrait qualifier de géométrique ou cinématique, liée non plus à la loi constitutive, mais à la manière dont est approché le champ de déplacement dans les éléments. En effet, la localisation en bandes de cisaillement correspond à un mode de déformation bien spécifique, qui peut être mal approché par les éléments bilinéaires utilisés. Par exemple, on observe souvent le cas d'une bande de cisaillement orientée selon la diagonale des éléments (voir exemples du chapitre 4). C'est pourquoi plusieurs auteurs ont proposé des méthodes d'enrichissement du champ de déformation : une fois la localisation détectée par un critère du type Rice, on ajoute au champ de déplacement de base un champ de déplacement tenant compte de l'orientation donnée par le critère. Ainsi, Fish et Belytschko ^(10,38,39) ont proposé un élément à champ de déformation enrichi. D'un autre côté, Wang ⁽¹³⁶⁾ a appliqué la méthode des bandes spectrales initialement proposée par Belytschko *et al.* ^(11,12,40) à des modèles d'endommagement parmi lesquels celui de Gurson–Tvergaard. C'est alors le champ qu'on se donne pour représenter la bande de cisaillement qui détermine la largeur de celle-ci. Dans ce sens, il s'agit donc également de méthodes de régularisation. Dans cette classe de méthodes, on peut encore citer Charlier et Pierry ⁽¹⁹⁾, qui utilisent notamment des lignes de glissement pour modéliser les bandes de cisaillement.

De notre côté, nous aborderons ce problème d'une représentation cinématique suffisamment correcte des bandes de cisaillement par l'intermédiaire d'une technique de remaillage adaptatif (chapitre 5). Faisons déjà remarquer que le remaillage ne peut à notre sens être envisagé qu'accompagné d'une méthode de régularisation (ici la viscoplasticité), sous peine

de voir le processus de raffinement “s’emballer” au niveau des bandes de cisaillement, dont la largeur tendrait vers zéro avec un gradient de déplacement infini au travers de la bande. La seule solution dans ce cas serait d’imposer une taille minimale de maille, qui définirait alors la largeur de la bande. Parmi les approches du même type, on peut citer Huerta *et al.* ^(18,59,60,107), qui utilisent la méthode ALE couplée à un modèle d’endommagement non-local (mais principalement pour des applications unidimensionnelle jusqu’ici), ou bien Pastor *et al.* ⁽⁹⁸⁾, Peric *et al.* ^(101,102), qui utilisent la méthode de maillage frontal de Peraire *et al.* ⁽¹⁰¹⁾, ou encore Ortiz et Quigley ^(95,96).

3.6 Conclusion

Nous disposons maintenant de tous les outils nécessaires à la simulation numérique, c’est-à-dire principalement un schéma d’intégration numérique des équations constitutives et la loi tangente consistante qui y est associée. On va donc appliquer les développements précédents à quelques exemples de mise en forme et d’impact. Pour ce qui est de la localisation, nous mesurerons tout d’abord l’efficacité de la régularisation visqueuse. Dans la deuxième partie de cette thèse, on combinera cette méthode avec une technique de remaillage adaptatif.

Chapitre 4

Applications (1^{ère} partie)

4.1 Introduction

Nous allons interrompre l'exposé de nos développements théoriques afin de les illustrer par une première série d'applications. Après avoir mis en évidence quelques caractéristiques intéressantes du modèle d'endommagement utilisé à partir de l'étude de la réponse d'un mono-élément, nous présentons un exemple semi-académique de mise en forme d'un boulon. Cet exemple illustre bien les effets volumiques liés à l'endommagement ainsi que les effets de la vitesse de mise en charge quand on utilise un modèle élasto-visco-plastique. L'exemple suivant est celui de la simulation de la rupture par striction d'un barreau cylindrique en traction. Ce cas permet tout d'abord de valider notre implémentation par comparaison avec des résultats d'autres auteurs, mais il est surtout l'occasion d'illustrer l'approche locale de la rupture. En effet, on cherchera dans cette section à retrouver numériquement le mode de rupture en cône et cuvette qui est observé expérimentalement. Cela nous conduira à discuter du choix du type d'élément à utiliser dans ce cas. Les effets bénéfiques de l'introduction de la viscosité seront également observés. Avant de passer aux exemples d'impact, on s'arrêtera au cas d'une plaque plane en traction, qui illustre remarquablement le phénomène de localisation de la déformation en bandes de cisaillement, les problèmes de dépendance de la solution par rapport à la discrétisation et l'apport de la visco-plasticité à la régularisation du problème. On passe ensuite à un exemple de modélisation de l'impact entre un débris de rotor et le capot protecteur d'une turbine. Pour terminer, on présente une simulation du dispositif expérimental d'impact entre deux plaques planes, destiné à étudier la nucléation dans les matériaux ductiles au travers de l'observation du phénomène de spallation.

4.2 Essais numériques sur mono-élément

Avant d'en arriver aux applications proprement dites, nous allons nous arrêter quelques instants sur la réponse d'un mono-élément. La simplicité des essais numériques présentés ci-dessous nous permettra de mettre en évidence un certain nombre d'aspects du modèle d'endommagement étudié. En pratique, nous allons étudier la réponse d'un élément à une sollicitation de cisaillement simple puis nous comparerons sa réponse en traction et en compression.

4.2.1 Essai de cisaillement simple

La cinématique de l'essai de cisaillement simple est décrite à la figure 4.1. Comme on le voit, cet essai présente l'avantage d'imposer un déplacement à tous les degrés de liberté de l'élément, ce qui évite de devoir rechercher une configuration équilibrée à chaque pas de temps, l'équilibre étant assuré via l'application de réactions aux degrés de liberté contraints. De plus, il conduit à un état homogène aussi bien au niveau des contraintes que des variables internes. Une autre caractéristique de ce mode de sollicitation qui présente un grand intérêt pour nous est qu'il préserve le volume de l'élément. Le comportement devient alors purement déviatorique et la partie croissance de la loi d'évolution de l'endommagement s'annule. Cela permet ainsi d'isoler la partie nucléation et d'étudier l'influence des différents paramètres de la loi sur la croissance de l'endommagement. Remarquons au passage que, étant donné la grande similarité du cas de cisaillement simple avec le cas de la torsion (si on considère le cas idéal de torsion où il n'y a pas gauchissement dans la section), on peut imaginer un essai, expérimental cette fois, de torsion pour étudier la nucléation des microvides.

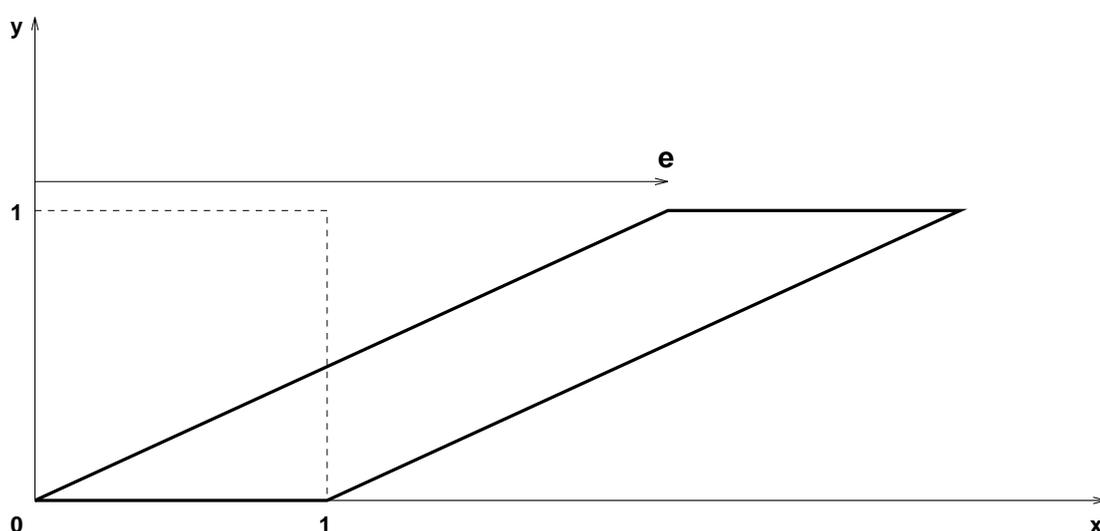


Figure 4.1: Cinématique de l'essai de cisaillement simple

On considérera tout d'abord un matériau élastoplastique endommageable décrit par les propriétés matérielles suivantes (voir conclusion du chapitre 2) :

$$\begin{aligned} E &= 300\sigma_Y^0 & \nu &= 0.3 & \sigma_Y &= (1 + 2\epsilon^{pl})\sigma_Y^0 \\ d_U &= 0.65 & \alpha_2 &= 1. \\ d_N &= 0.05 & \epsilon_N &= 0.1 & s_N &= 0.01 \text{ ou } s_N = 0.1 \end{aligned}$$

Les grandeurs ci-dessus sont exprimées en terme de σ_Y^0 de manière à travailler dans un cadre adimensionnel. Rappelons que E et ν décrivent le comportement élastique*, $\sigma_Y(\epsilon^{pl})$ décrit l'écoulement, d_U et α_2 sont des paramètres de la surface d'écoulement plastique, tandis que d_N , ϵ_N et s_N sont les paramètres de la loi de nucléation.

*Les propriétés élastiques données ici sont celles du matériau vierge, à partir desquelles on calculera les propriétés dégradées par les formules de Mori-Tanaka (2.40). C'est dans un souci d'alléger la notation que l'on n'a pas écrit E_0 et ν_0 . Cela reste valable pour toutes les applications qui suivent.

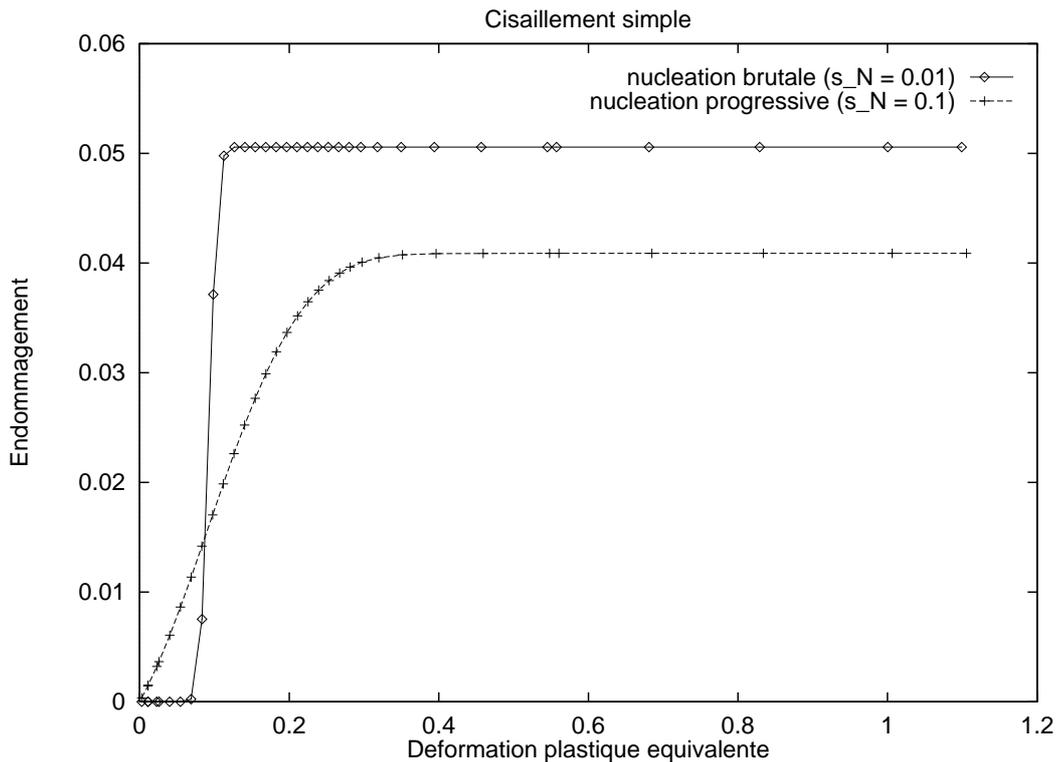


Figure 4.2: Courbes endommagement–déformation plastique équivalente pour différentes valeurs de s_N

Afin d'illustrer la signification de la loi de distribution normale choisie pour modéliser la nucléation, on a représenté à la figure 4.2 les courbes endommagement en fonction de la déformation plastique pour deux valeurs du paramètre s_N .

On retrouve bien entendu les courbes intégrales de la distribution normale (2.54) où les différents paramètres ont la signification suivante :

- la quantité totale maximale de microvides créés par la nucléation est bien donnée par $d_N = 0.05$ (cette valeur serait atteinte dans les deux cas considérés si la déformation plastique équivalente variait de $-\infty$ à $+\infty$, ce qui n'est évidemment pas le cas, raison pour laquelle l'asymptote du cas le plus progressif se trouve en $d = 0.04$);
- la valeur seuil moyenne de la déformation plastique équivalente à laquelle se déclenche la nucléation est bien donnée par $\epsilon_N = 0.1$;
- on constate bien que plus l'écart-type s_N est grand, plus la nucléation s'étale dans l'espace de la déformation plastique équivalente.

La figure 4.3 donne l'évolution de la contrainte de cisaillement en fonction du déplacement e . On y voit que, dans le cas où la nucléation intervient brusquement ($s_N = 0.01$), on observe une oscillation dans la courbe correspondant à l'apparition de l'endommagement. Dans le cas où la nucléation se déroule plus progressivement, l'effet d'adoucissement a le temps d'être compensé par l'écroutissage et l'évolution de la contrainte de cisaillement reste monotone. On a également indiqué la courbe obtenue sans endommagement comme référence.

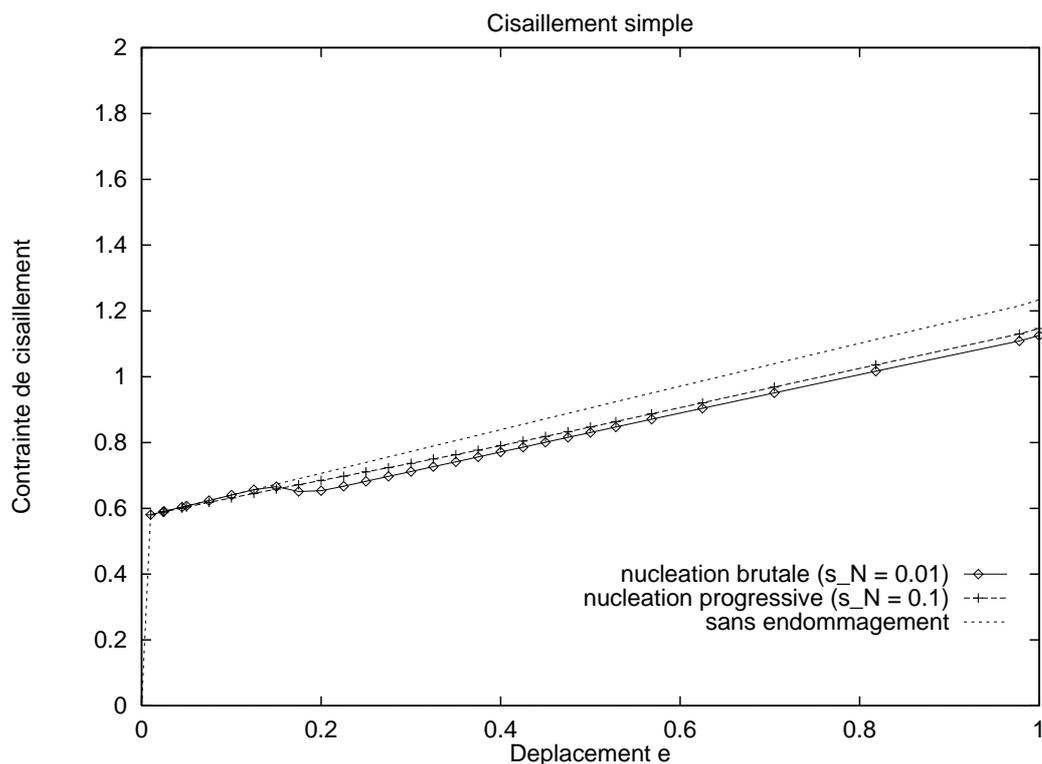


Figure 4.3: Courbes de la contrainte de cisaillement pour différentes valeurs de s_N

Si on considère maintenant un matériau élastoviscoplastique endommageable avec les caractéristiques matérielles suivantes :

$$k = \sigma_0 \quad m = 3$$

on obtient (pour $\dot{\epsilon} = 1.$) des courbes endommagement–déformation plastique équivalente identiques à celles obtenues précédemment (figure 4.4), ce qui est logique au vu de l'équation d'évolution (2.53), qui lie directement l'endommagement à la déformation plastique équivalente. Les courbes d'évolution de la contrainte de cisaillement (figure 4.5) sont elles décalées vers le haut, en raison de la viscosité.

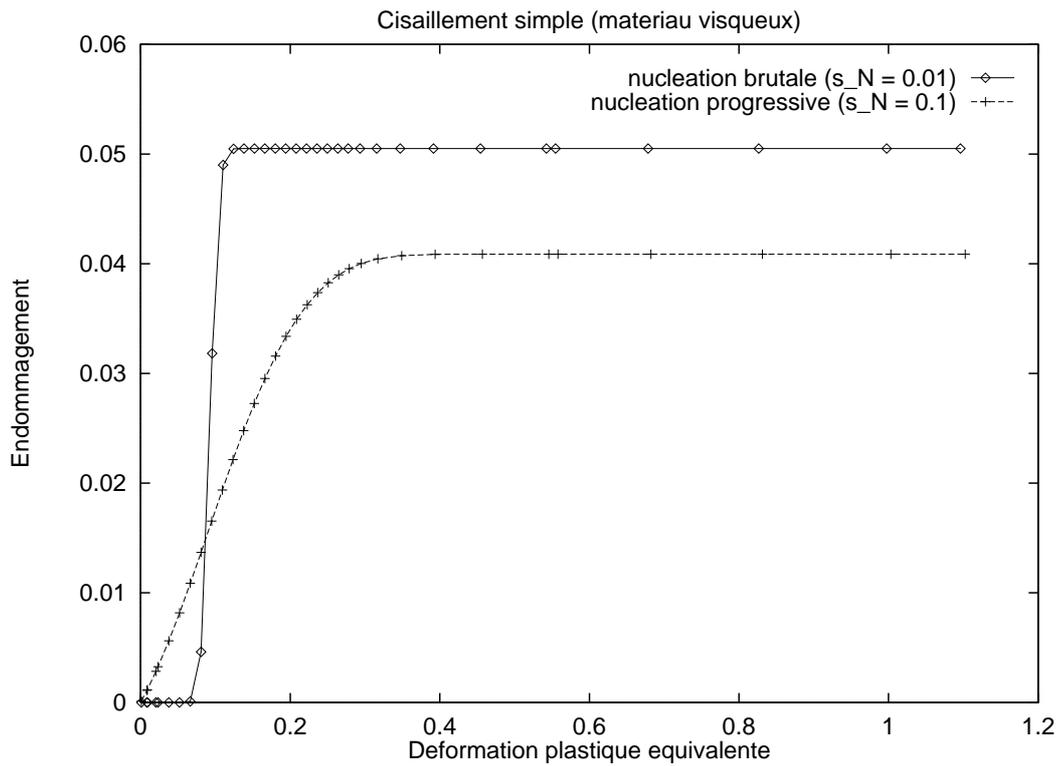


Figure 4.4: Courbes endommagement–déformation plastique équivalente pour différentes valeurs de s_N et pour un matériau visqueux

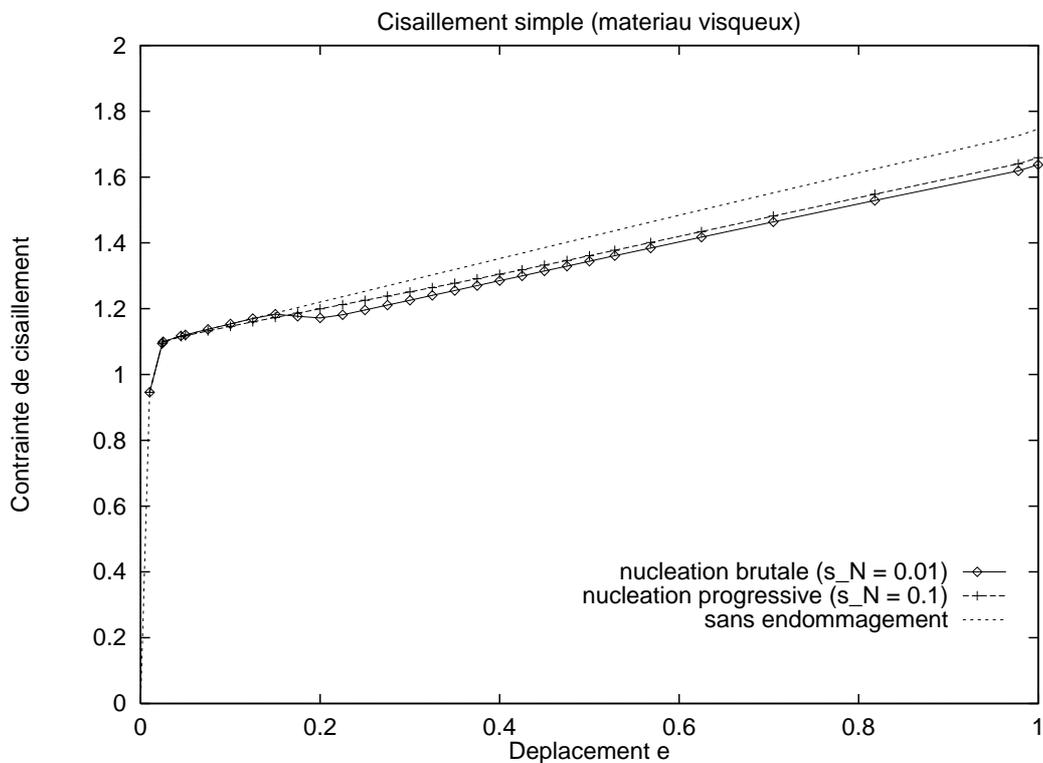


Figure 4.5: Courbes de la contrainte de cisaillement pour différentes valeurs de s_N et pour un matériau visqueux

4.2.2 Essai de traction–compression

Nous allons maintenant nous intéresser à une sollicitation de type traction–compression, telle que décrite par la figure 4.6. On peut choisir l’hypothèse d’un état plan de déformation ou bien l’hypothèse d’axisymétrie (autour de l’axe OX), nous verrons plus loin quel effet cela peut avoir. Quel que soit le choix que l’on opère, ce mode de déformation présente également l’avantage d’être homogène.

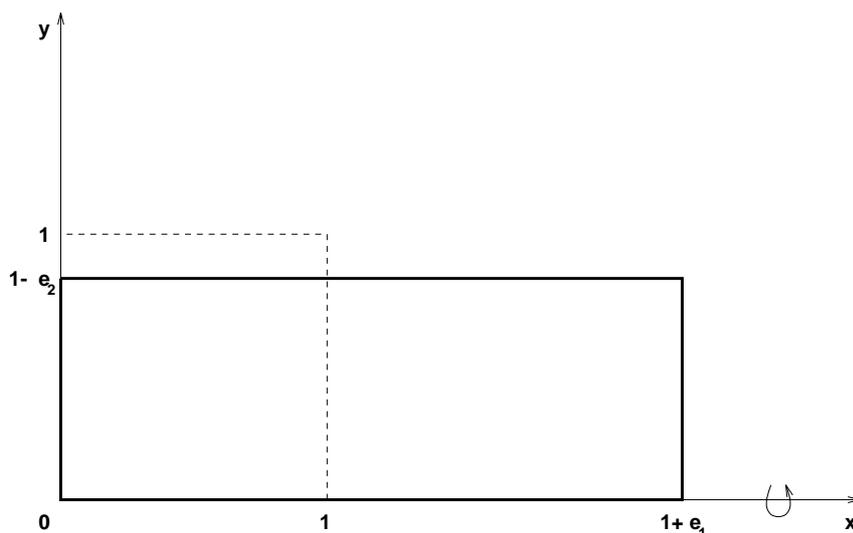


Figure 4.6: Cinématique de l’essai de traction–compression

On considérera le même matériau que précédemment (avec $s_N = 0.01$) sans tenir compte d’effets de viscosité dans un premier temps. Les courbes de l’endommagement en fonction de la déformation plastique équivalente que l’on obtient alors (figure 4.7 pour le cas de l’état plan de déformation et figure 4.8 pour le cas axisymétrique) montrent clairement la différence de comportement entre la situation de traction et celle de compression. Dans tous les cas, on distingue bien l’accroissement rapide de l’endommagement dû à la nucléation, au début de la mise en charge, suivi d’une évolution plus lente liée à la partie croissance (ou décroissance) des vides. On remarquera que cet effet croissance–décroissance semble plus marqué dans le cas plan que dans le cas axisymétrique. Si on introduit les effets visqueux, avec les mêmes paramètres k et m que ci-dessus, on obtient les courbes représentées aux figures 4.9 et 4.10. On y remarque que la différenciation entre traction et compression est plus marquée que précédemment, surtout dans le cas plan.

Remarque : on observe dans les courbes relatives à l’essai de compression une diminution de l’endommagement, ce qui pourrait a priori paraître contraire à la physique d’un phénomène irréversible. Il ne faut cependant pas oublier que nous avons choisi la porosité pour caractériser l’endommagement et que nous travaillons dans le cadre de matériaux ductiles. Il nous semble donc possible d’imaginer une diminution de la porosité sous l’effet d’une compression hydrostatique. De plus, dans l’exemple ci-dessus, les phénomènes de nucléation et de décroissance se suivent, alors que le choix d’une plus grande valeur de s_N les ferait intervenir simultanément, ce qui conduirait à des courbes plus proches de ce à quoi on s’attend, c’est-à-dire des courbes plus monotones. En tout état de cause, ce serait à l’expérience de trancher.

□

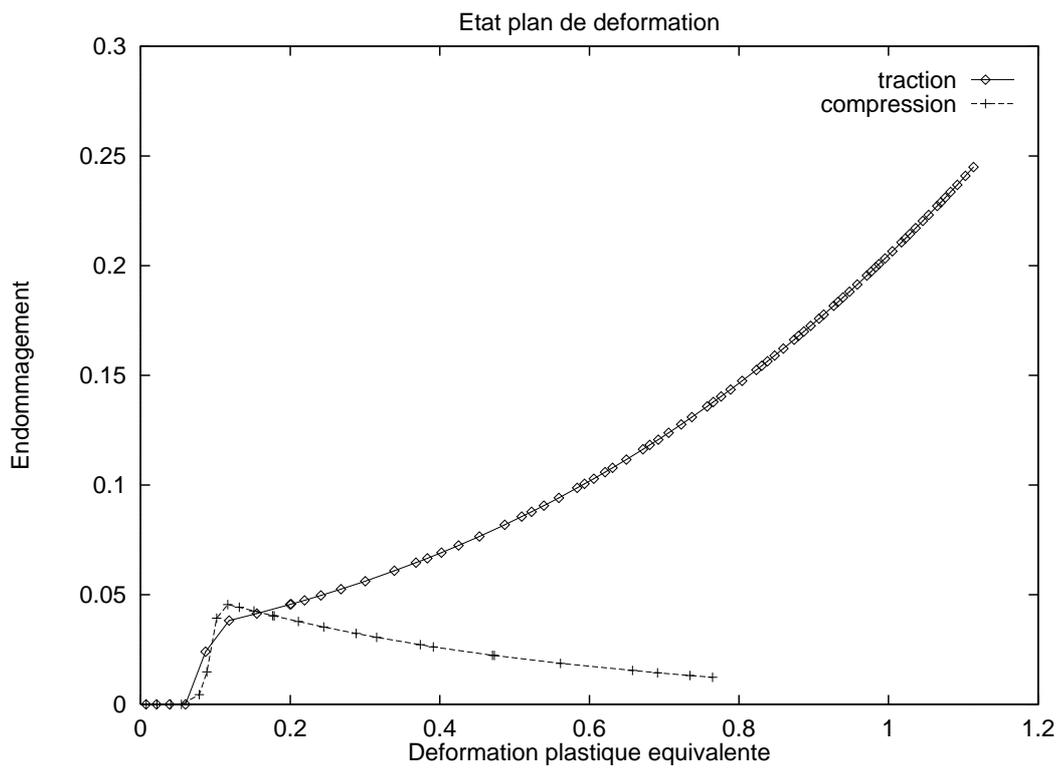


Figure 4.7: Courbes endommagement–déformation plastique équivalente en état plan de déformation

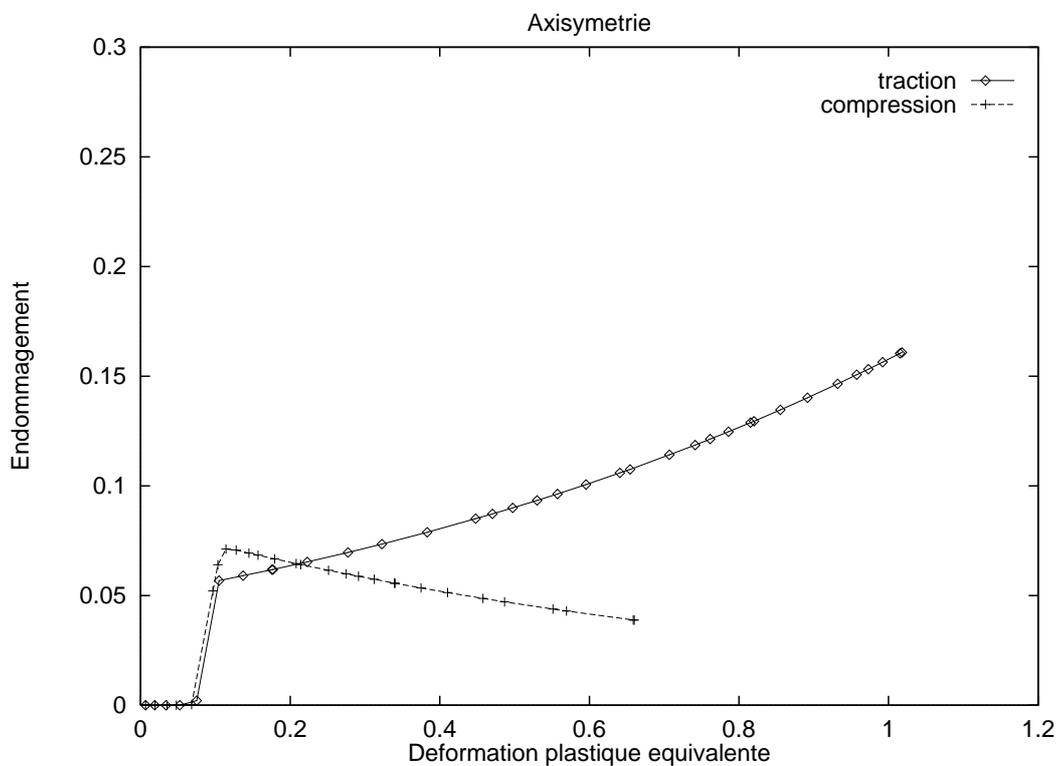


Figure 4.8: Courbes endommagement–déformation plastique équivalente pour le cas axisymétrique

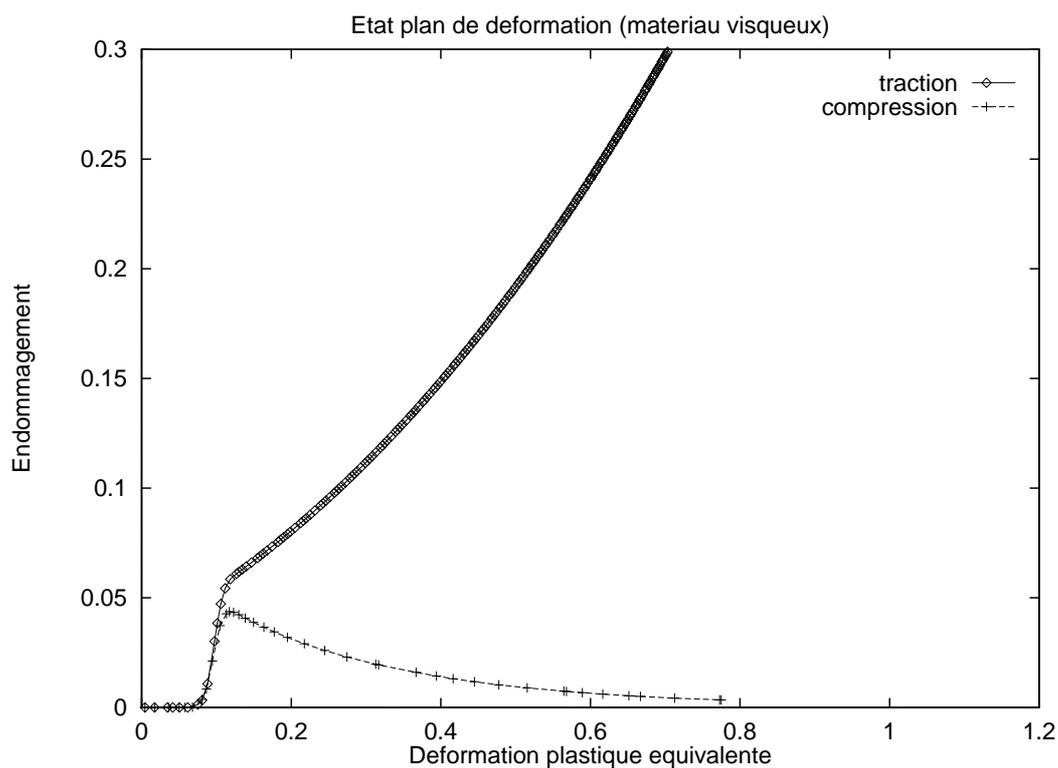


Figure 4.9: Courbes endommagement–déformation plastique équivalente en état plan de déformation et pour un matériau visqueux

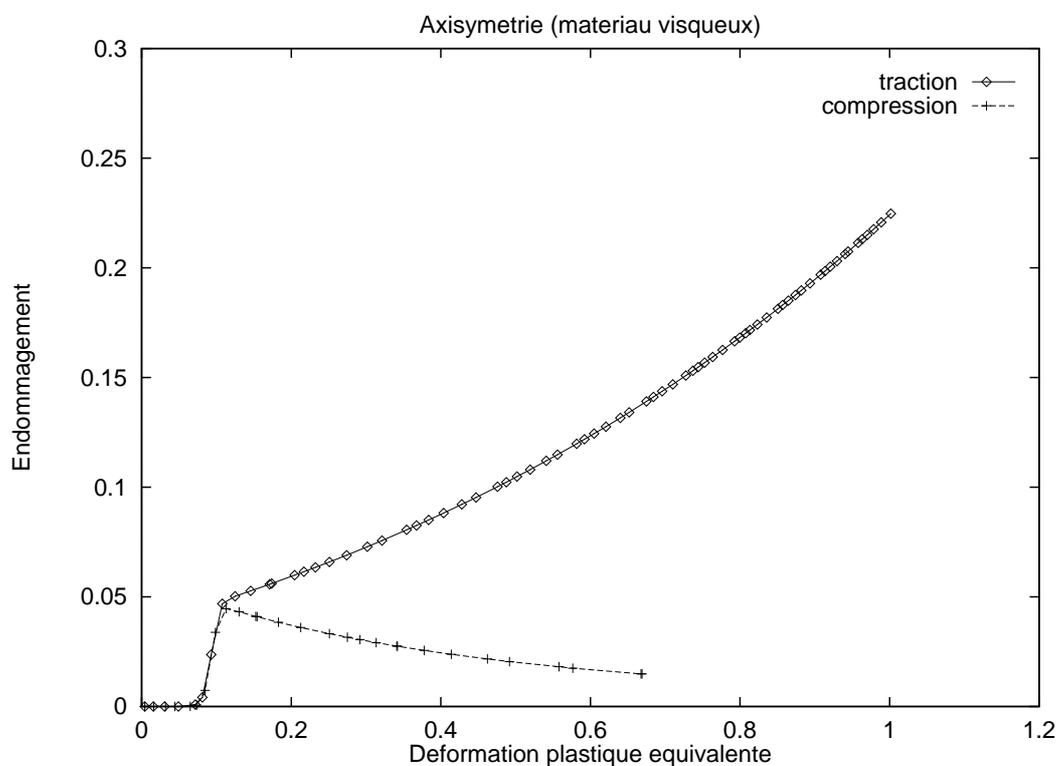


Figure 4.10: Courbes endommagement–déformation plastique équivalente pour le cas axisymétrique et pour un matériau visqueux

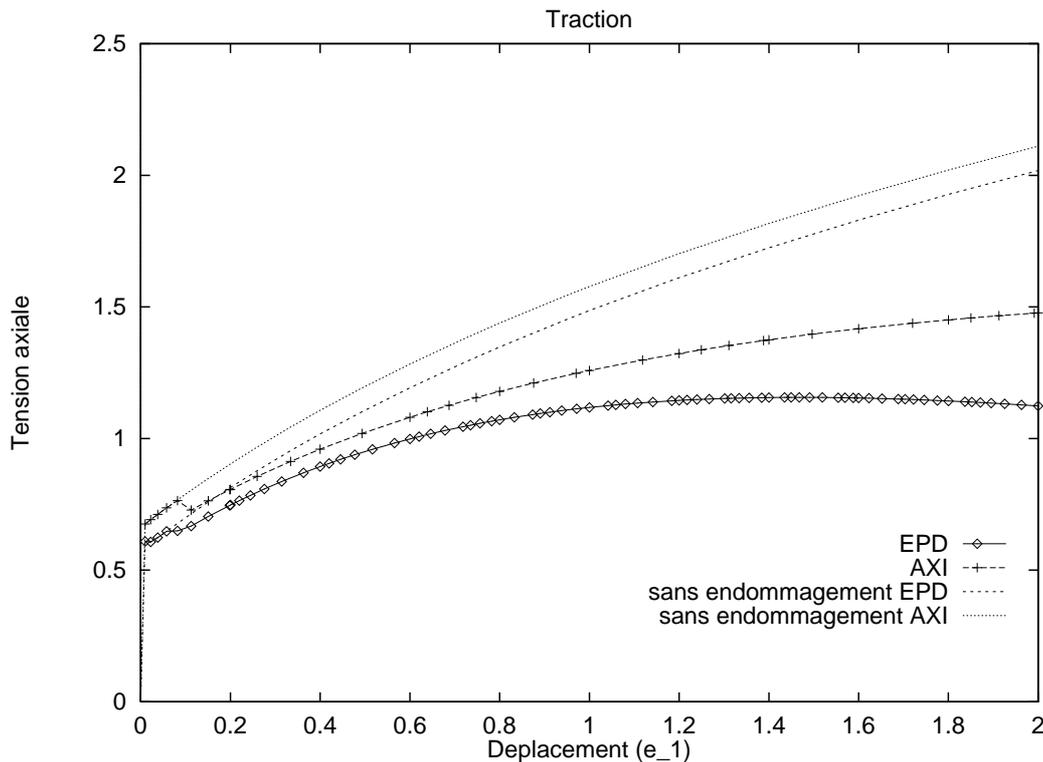


Figure 4.11: Courbes de la contrainte axiale pour l'essai de traction (EPD = état plan de déformation, AXI = axisymétrie)

Si on observe maintenant les courbes donnant l'évolution de la contrainte axiale σ_{11} en fonction du déplacement e_1 , aux figures 4.11 pour la traction et 4.12 pour la compression, on peut constater plusieurs choses. Tout d'abord, on retrouve, surtout en traction, l'oscillation dans l'évolution de la contrainte correspondant à la nucléation brutale. C'est à cet instant que la courbe se détache de celle que l'on obtient lorsqu'il n'y a aucun endommagement. Ensuite, on observe bien l'effet d'adoucissement lié à la croissance de l'endommagement pendant l'essai de traction. On voit également que l'adoucissement est plus marqué en état plan qu'en axisymétrie. En compression, l'endommagement ne peut se développer et cet effet n'apparaît pas vraiment. On n'observe dans ce cas qu'un léger décalage entre les courbes avec et sans endommagement. Comme précédemment, ces effets sont plus marqués pour le matériau visqueux (figures 4.13 et 4.14).

En conclusion, on peut donc dire que le modèle utilisé permet bien de simuler la différenciation du comportement en traction et du comportement en compression, ainsi que l'adoucissement lié à la dégradation du matériau. Ce sont, il nous semble, deux caractéristiques fondamentales que tout modèle d'endommagement doit posséder. Rappelons que nous avons en outre introduit dans le modèle un effet de dégradation des modules élastiques et du coefficient de Poisson, ce qui, sans être fondamental, constitue un avantage supplémentaire.

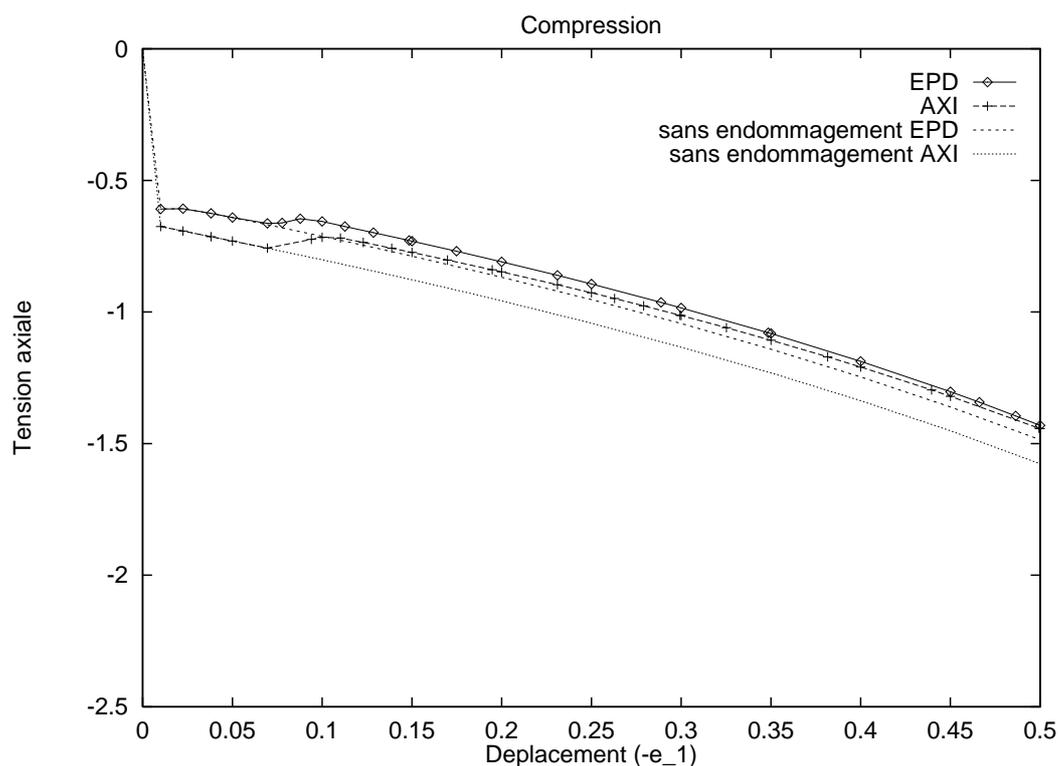


Figure 4.12: Courbes de la contrainte axiale pour l'essai de compression (EPD = état plan de déformation, AXI = axisymétrie)

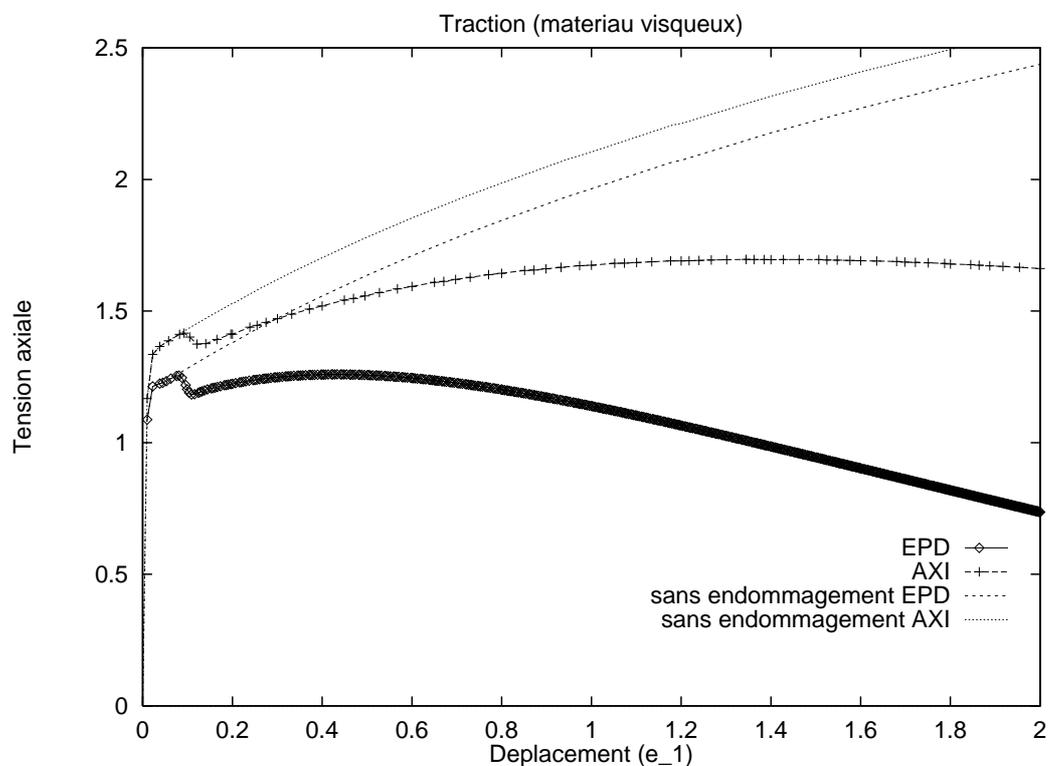


Figure 4.13: Courbes de la contrainte axiale pour l'essai de traction sur un matériau visqueux (EPD = état plan de déformation, AXI = axisymétrie)

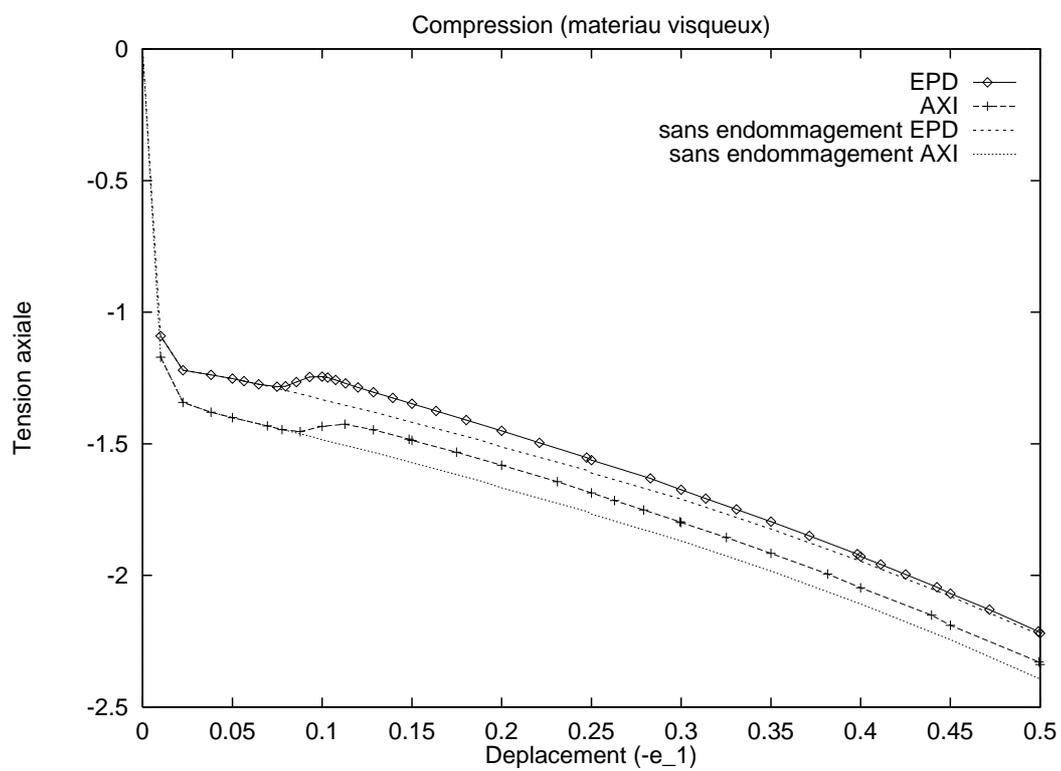


Figure 4.14: Courbes de la contrainte axiale pour l'essai de compression sur un matériau visqueux (EPD = état plan de déformation, AXI = axisymétrie)

4.3 Mise en forme d'un boulon

Nous allons maintenant passer à un exemple qui, bien que restant académique, présente un certain caractère industriel. Il s'agit de la simulation de la mise en (pré-)forme d'un boulon à partir d'un barreau cylindrique. La partie inférieure de ce barreau est maintenue dans une matrice rigide tandis que la partie supérieure est écrasée par un poinçon, rigide lui aussi, jusqu'à obtenir une réduction de hauteur de 36%. La géométrie du dispositif de mise en forme est décrite à la figure 4.15.

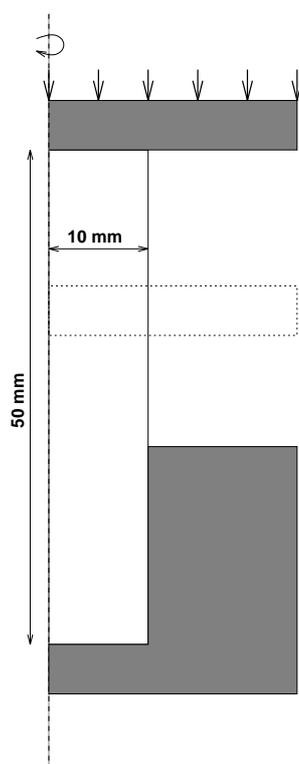


Figure 4.15: Mise en forme d'un boulon (la position finale du poinçon est indiquée en pointillés)

Profitant de l'axisymétrie du problème, on se ramène à l'étude d'une section du barreau, et on discrétise celle-ci en 10×50 éléments bilinéaires. Le contact entre le barreau et les outils sera supposé collant, c'est-à-dire qu'une fois qu'un point entre en contact avec une des matrices, il ne peut pas glisser sur celle-ci. Le traitement numérique du contact utilise la méthode de la pénalité pour imposer la non-pénétration et le non-glisement des noeuds sur la matrice (voir Bittencourt ⁽¹⁶⁾, Ponthot ⁽¹⁰⁸⁾). C'est également cette méthode qui a été utilisée pour toutes les autres applications impliquant des conditions limites de contact. Dans le cas du boulon, les coefficients de pénalité normale et tangentielle sont pris égaux à 0.3310^6 N/mm . On considérera dans un premier temps un matériau élastoviscoplastique endommageable décrit par les propriétés suivantes :

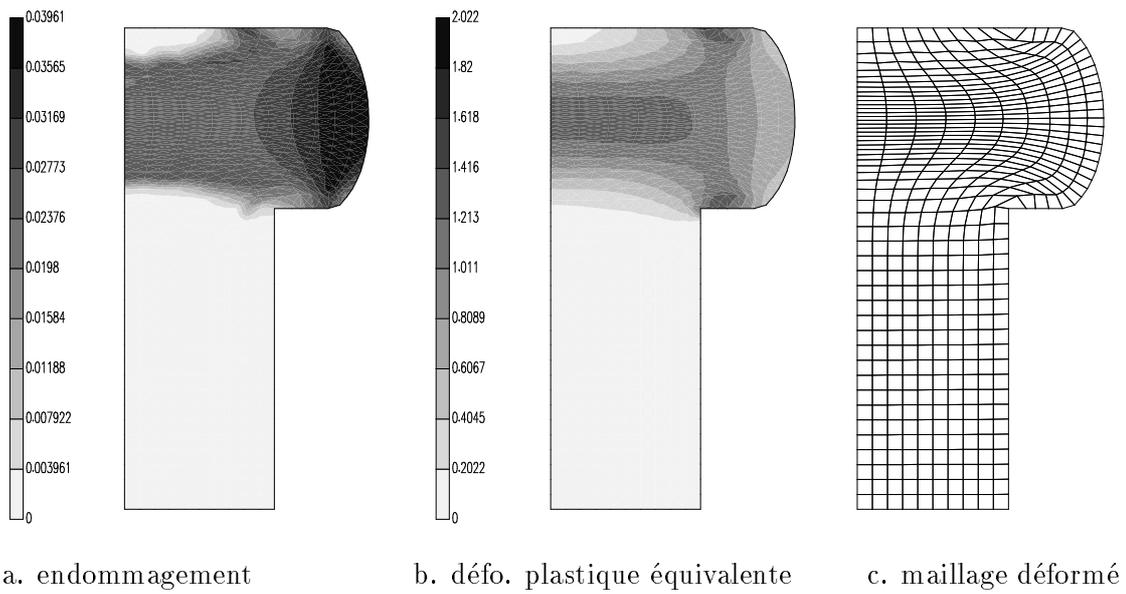


Figure 4.16: Mise en forme d'un boulon : configuration finale

$$\begin{aligned}
 E &= 200 \text{ GPa} & \nu &= 0.3 & \rho &= 7500 \text{ kg/m}^3 \\
 \sigma_Y &= 250 + 1000 \times \epsilon^{pl} \text{ MPa} \\
 d_U &= 0.5 & \alpha_2 &= 0.5 \\
 d_N &= 0.04 & \epsilon_N &= 0.5 & s_N &= 0.1 \\
 d_{crit} &= 0.15 & \Delta\epsilon &= 0.1
 \end{aligned}$$

On a représenté à la figure 4.16 les distributions obtenues pour l'endommagement et pour la déformation plastique équivalente respectivement, ainsi que le maillage déformé. On constate que, bien que l'évolution de l'endommagement soit fortement liée à l'évolution de la déformation plastique équivalente, on obtient des champs assez fortement différents entre eux : alors que la déformation plastique est maximale au cœur de la tête du boulon, l'endommagement se développe plutôt sur la couronne extérieure. Cela s'explique naturellement par la contribution croissance-décroissance à la loi d'évolution de l'endommagement, qui s'oppose à la nucléation dans la tête du boulon alors qu'elle s'y ajoute dans la couronne extérieure. Cela illustre encore une fois une différence fondamentale entre les phénomènes de plasticité et d'endommagement : le comportement plastique est identique en traction et en compression alors que le comportement d'endommagement est fortement différencié. On constate finalement une distorsion assez importante du maillage.

On peut également étudier l'influence de la vitesse de déformation lorsqu'on utilise une loi de comportement élastoviscoplastique endommageable. On considère donc un matériau avec les mêmes propriétés que précédemment et avec les paramètres de viscosité suivants :

$$k = 250 \text{ MPa}\cdot\text{s}^{1/3} \qquad m = 3$$

On utilisera cette fois une discrétisation en 10×50 éléments bilinéaires complètement sous-intégrés de type Q4-URI (et stabilisés par la méthode décrite à l'annexe A), alors que l'on avait utilisé précédemment des éléments Q4-VRI (à quatre points d'intégration pour la partie déviatorique). La figure 4.17.a donne la carte d'endommagement obtenue avec ces éléments pour un matériau sans viscosité. On peut comparer avec les résultats obtenus auparavant (figure 4.16) et constater que les solutions sont bien identiques, sauf au bord extérieur où

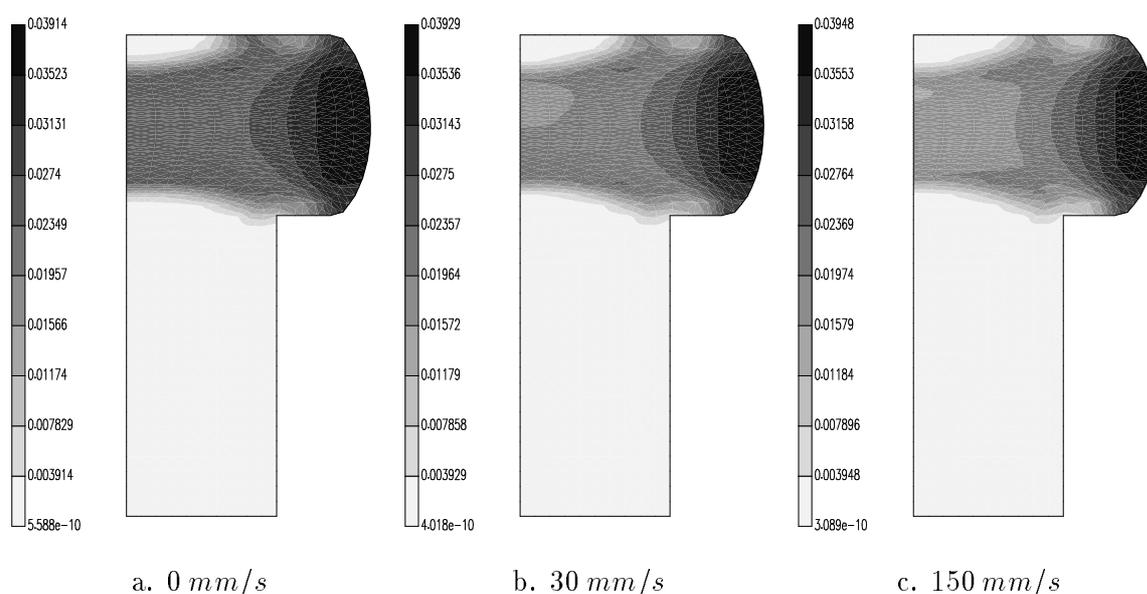


Figure 4.17: Mise en forme d'un boulon : distribution finale de l'endommagement pour différentes vitesses de descente

les éléments sous-intégrés capturent mal le fort gradient, ce qui est inhérent à leur nature. Si on introduit la viscosité avec les paramètres donnés plus haut, on obtient la carte d'endommagement de la figure 4.17.b pour une vitesse de descente du poinçon de 30 mm/s , tandis que l'on obtient la carte d'endommagement de la figure 4.17.c si la vitesse du poinçon augmente jusqu'à 150 mm/s . Il est clair que les résultats obtenus sans viscosité correspondent à une vitesse de descente du poinçon quasi-nulle.

On peut donc analyser l'évolution de la distribution de l'endommagement avec l'accroissement de la vitesse de mise en charge. Remarquons tout d'abord que les effets d'inertie n'ont pas été pris en compte ici et que les différences entre les solutions obtenues sont donc uniquement dues à la loi constitutive. On constate que la valeur maximale atteinte varie très peu, à peine une légère augmentation. Par contre, la distribution de l'endommagement est fortement modifiée par la vitesse de déformation. En effet, plus le poinçon descend vite, plus l'endommagement se localise en bordure de la tête du boulon. Cela est à mettre en parallèle avec les résultats obtenus sur un mono-élément qui montraient que la différenciation entre les réponses en traction et en compression était plus marquée si on introduisait des effets de viscosité (voir section 4.2.2).

4.4 Striction dans un barreau

L'essai de traction d'un barreau cylindrique représente sans aucun doute le dispositif expérimental de base pour l'étude des propriétés d'un matériau. Cet essai se caractérise par l'apparition, au delà d'un certain seuil de mise en charge, d'une instabilité de type structural prenant la forme d'une zone de striction. La striction consiste en une localisation de la déformation dans un section de la barre, le reste de celle-ci ne se déformant presque plus. Les modèles de comportement élastoplastiques classiques suffisent pour simuler ce phénomène de manière assez précise (Norris *et al.* ⁽⁹¹⁾, Hallquist ⁽⁵⁵⁾, Simo ⁽¹²²⁾, Ponthot ⁽¹⁰⁸⁾). Les grandes déformations plastiques localisées au niveau de la zone de striction conduisent finalement à la rupture du barreau. La simulation de cette phase finale de la striction nécessite évidemment l'introduction de l'endommagement dans le modèle de comportement. C'est à cet aspect que nous nous intéresserons dans ce paragraphe.

Validation de l'implémentation du modèle

A titre de validation de notre implémentation du modèle de Gurson–Tvergaard, nous allons comparer nos résultats à ceux obtenus par Aravas ⁽⁵⁾ pour la simulation de la croissance de l'endommagement dans un barreau cylindrique en striction. On considère donc un barreau cylindrique de rayon R et de longueur $L = 8R$ soumis à traction. Comme on le voit à la figure 4.18, où on a seulement représenté un quart du barreau en profitant des diverses symétries, un défaut $dR = 0.005R$ est placé à mi-longueur de manière à initier la striction à l'endroit voulu.

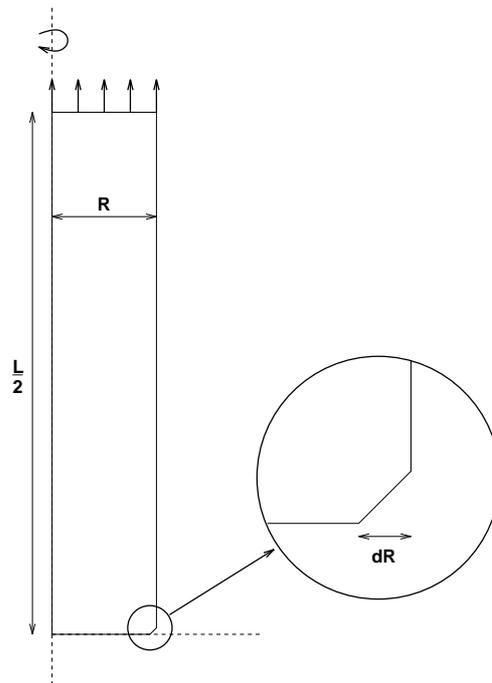


Figure 4.18: Traction d'un barreau cylindrique – géométrie de l'essai

Le matériau possède les caractéristiques élastiques suivantes :

$$E = 300\sigma_Y^0 \qquad \nu = 0.3$$

La loi d'écroutissement est donnée par la relation implicite suivante :

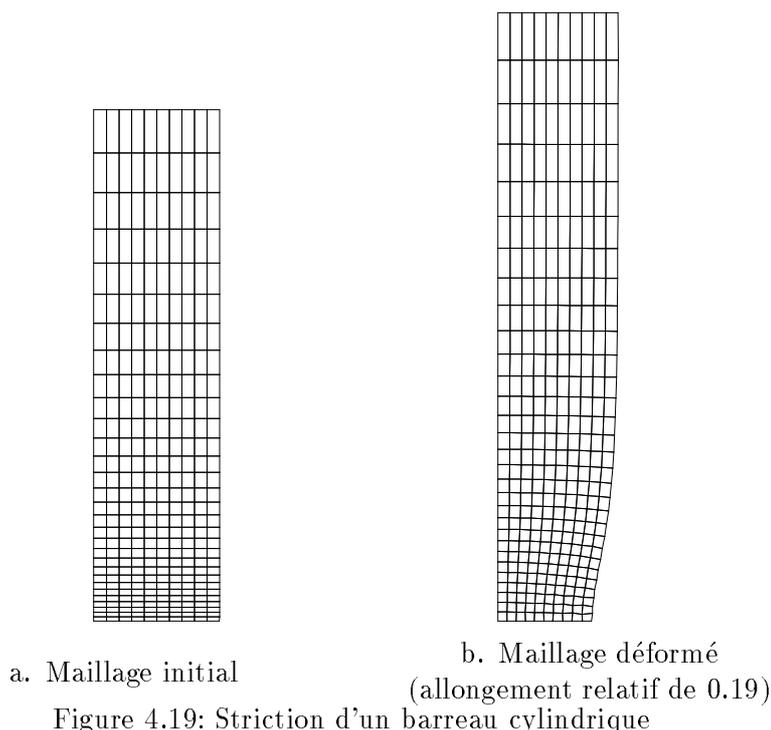
$$\frac{\sigma_Y}{\sigma_Y^0} = \left(\frac{\sigma_Y}{\sigma_Y^0} + \frac{3G'}{\sigma_Y^0} \epsilon^{pl} \right)^N$$

avec $N = 0.1$. Les caractéristiques liées à l'endommagement sont les suivantes :

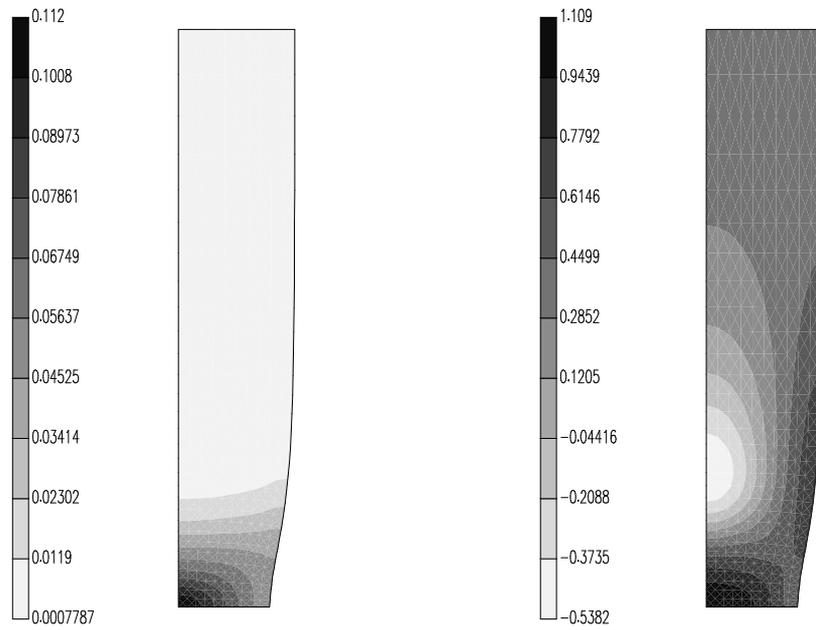
$$\begin{aligned} d_U &= \frac{2}{3} & \alpha_2 &= 1. \\ d_N &= 0.04 & \epsilon_N &= 0.3 & s_N &= 0.1 \end{aligned}$$

Aucun phénomène de coalescence n'est pris en compte.

On a représenté à la figure 4.19 le maillage initial et sa déformée pour un déplacement total de l'extrémité supérieure de $0.19L/2$. On y voit clairement apparaître la zone de striction. On a également représenté à la figure 4.20 les cartes de l'endommagement et de la tension hydrostatique dans la configuration finale. Ces résultats sont en très bon accord avec ceux obtenus par Aravas ⁽⁵⁾, reproduits à la figure 4.21. On remarquera la zone de haute traction hydrostatique, située à hauteur du col de striction, et qui est responsable de la forte croissance de l'endommagement dans cette zone.



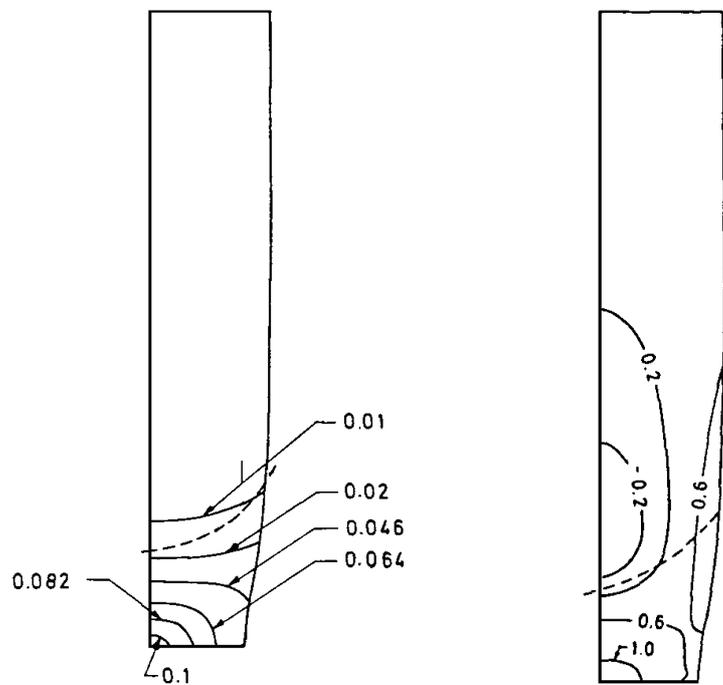
On peut également comparer les coûts de calcul sur base des quelques informations données par Aravas : alors que ce dernier utilise 156 pas, nous avons obtenus nos résultats en 72 pas seulement, avec 102 itérations (Aravas ne donne aucune précision à ce sujet). Il est cependant important de préciser qu'il est absolument nécessaire de commencer le calcul avec au moins une quinzaine de pas pour atteindre un déplacement de $0.125L/2$, sous peine de voir la déformation se localiser à l'extrémité supérieure du barreau malgré la présence de l'imperfection.



a. endommagement

b. tension hydrostatique

Figure 4.20: Striction d'un barreau cylindrique – configuration finale



a. endommagement

b. tension hydrostatique

Figure 4.21: Striction d'un barreau cylindrique – résultats obtenus par Aravas ⁽⁵⁾

Modélisation de la rupture du barreau

Comme on le voit à la figure 4.20, le cœur de la zone de striction est soumis à une traction hydrostatique importante. Cet état de contrainte particulier va provoquer une croissance rapide de l'endommagement et donc une chute assez brutale de la résistance structurale du barreau jusqu'à la rupture complète de celui-ci. Parmi les modélisations numériques de ce phénomène que l'on peut trouver dans la littérature, outre celles déjà citées, l'étude la plus achevée à ce jour semble être celle de Tvergaard et Needleman ⁽¹³³⁾. Par une simulation éléments finis utilisant la surface d'écoulement plastique de Gurson, ces derniers ont retrouvé le mode de rupture des barreaux cylindriques appelé *en cône et cuvette* (cup-cone fracture), c'est-à-dire une fissure plane dans le centre de la zone de striction, mais qui se propage en zig-zag au voisinage de la surface libre, comme illustré à la figure 4.22. Selon ces auteurs, la justification physique de ce mode de rupture peut être basée sur les considérations suivantes. On sait que, dans un spécimen en traction uniaxiale, les bandes de cisaillement apparaissent généralement selon une direction formant un angle de 45° avec la direction de sollicitation. Mais la déformation seuil à laquelle apparaît la bifurcation est assez élevée dans le cas axisymétrique (p.e. Saje *et al.* ⁽¹¹⁴⁾ trouvent des valeurs de l'ordre de l'unité). C'est pourquoi, au centre de la zone de striction, la fissure se propage selon la direction radiale. Cependant, quand on s'approche du bord libre, le champ de déformation devient non-uniforme et la théorie permettant d'établir des seuils de localisation n'est plus valable. De plus, les effets de l'axisymétrie s'estompent au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'axe. Au delà d'un certain rayon, la bande de cisaillement à 45° peut donc se former, mais on constate qu'elle change de direction après un certain temps et repart à -45° , ce qui se répète plusieurs fois, pour finalement former une fissure en zig-zag. Nous allons voir dans quelle mesure nous sommes capables de retrouver ce mode de rupture caractéristique des barreaux cylindriques à l'aide des outils dont nous disposons. Nous en profiterons également pour étudier l'effet de l'introduction de la viscosité dans la loi constitutive ainsi que pour analyser l'influence du maillage et du type d'élément utilisé sur les résultats obtenus.

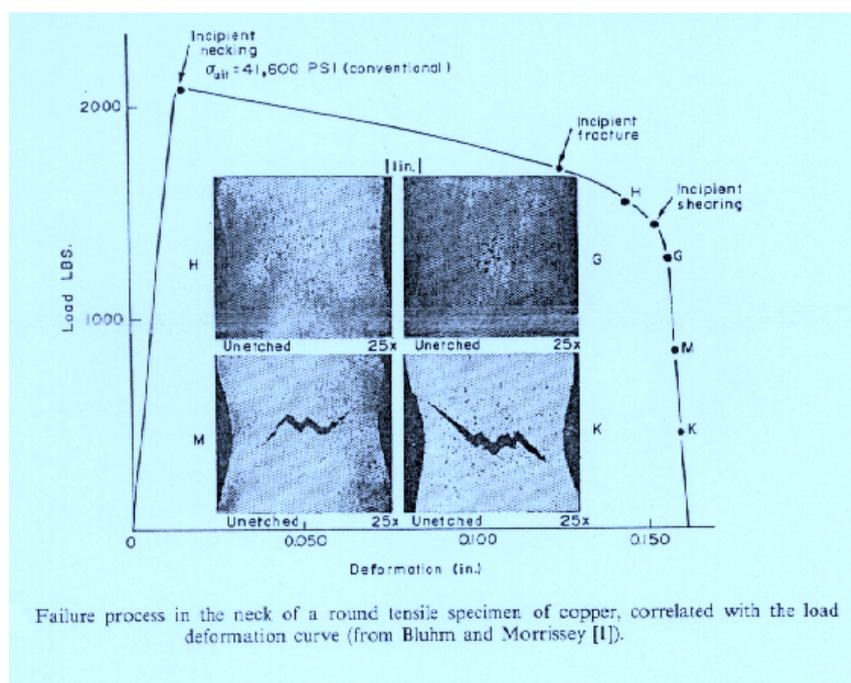


Figure 4.22: Mode de rupture en cône et cuvette

Nous utiliserons ici une géométrie initiale quelque peu différente de celle utilisée précédemment, et qui est illustrée à la figure 4.23. Le matériau utilisé est le même que dans la première partie du paragraphe, mais on tiendra compte cette fois du phénomène de coalescence, avec les paramètres suivants :

$$d_{crit} = 0.15 \quad \Delta\epsilon = 0.5$$

De plus, on imposera à l'extrémité supérieure un déplacement atteignant $0.20L/2$. Ces deux modifications provoqueront une croissance de l'endommagement jusqu'à des valeurs proches de la valeur ultime.

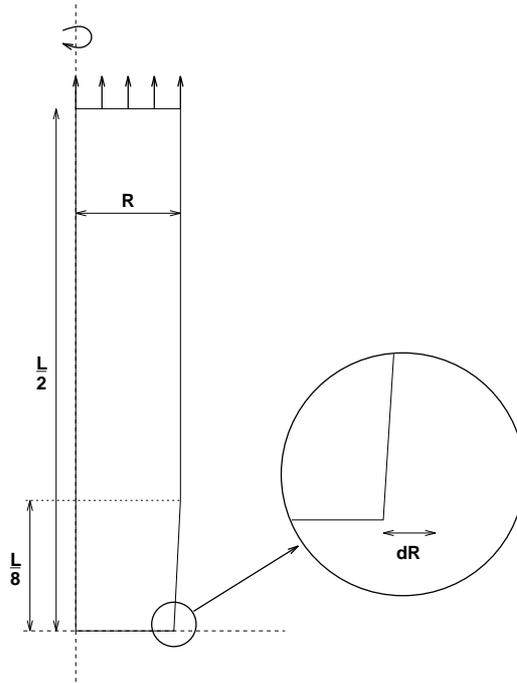


Figure 4.23: Rupture d'un barreau cylindrique – géométrie de l'essai

Afin d'étudier l'influence de la discrétisation, nous utiliserons trois maillages, de plus en plus fins : un maillage n° 1 de 10×30 éléments, un maillage n° 2 de 20×40 éléments et un maillage n° 3 de 30×50 éléments (voir figure 4.24). Dans chacun de ces maillages, les éléments ont été concentrés dans la zone de striction, puisque l'endommagement y est entièrement localisé. Nous n'utiliserons pas ici de procédure d'élimination d'éléments.

Avant toute chose, on peut calculer la réponse du barreau sans tenir compte de l'endommagement et pour chacun des trois maillages. En effet, Ponthot ⁽¹⁰⁸⁾ avait relevé des effets de maillage dans le cas de la striction élastoplastique (pour une géométrie et un matériau différents) : en raffinant le maillage, il tendait à obtenir une même solution, mais en s'écartant des mesures expérimentales. On constate cependant dans notre cas que les trois maillages conduisent aux mêmes courbes force-déformation (figure 4.25) et rayon de la zone de striction en fonction de la déformation (figure 4.26). On peut sans doute expliquer cette absence d'effet de maillage par l'amplitude relativement faible des déformations dans le cas élastoplastique. Si on introduit l'endommagement, on constate que son effet se marque tout d'abord par une accentuation de la pente négative de la courbe force-déformation après l'apparition de l'instabilité structurale (sommet de la courbe de la figure 4.25), correspondant à la localisation de la déformation et de l'endommagement dans la zone de striction. Ensuite, lorsque l'endommagement au centre de la zone de striction a atteint sa valeur critique, la coalescence

s'y déclenche, ce qui provoque une chute brutale de la résistance structurale du barreau et conduit rapidement à sa rupture. On constate que, dans ces courbes (figures 4.25 et 4.26), aucun effet de maillage ne se manifeste. Cela ne signifie pas pour autant que la solution obtenue ne dépende pas du maillage, comme nous allons le voir.

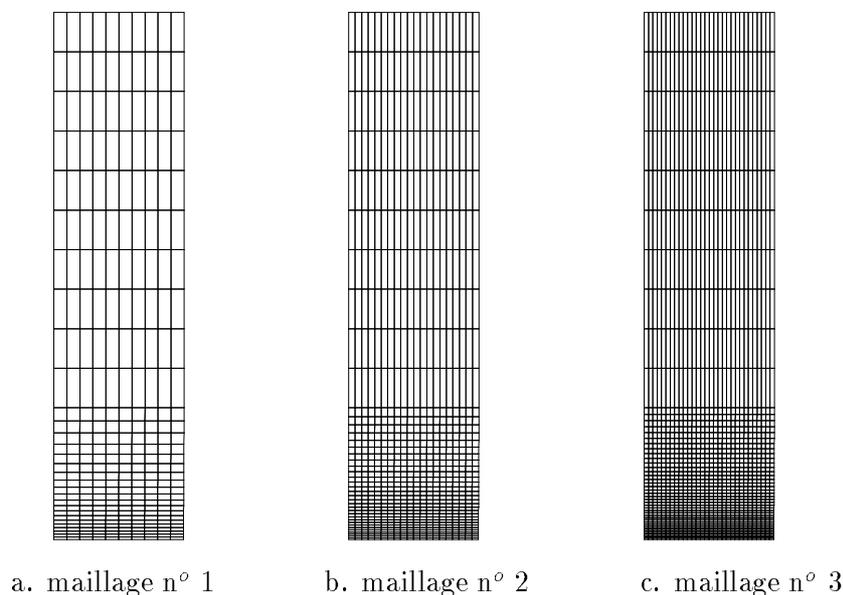


Figure 4.24: Les différents maillages utilisés

Avant d'aller plus loin, il est important de faire remarquer que les courbes dont on vient de parler ont été obtenues en utilisant des éléments sous-intégrés, c'est-à-dire des quadrangles à un seul point de Gauss. Aucune procédure de stabilisation n'a été mise en œuvre dans un premier temps. Si on veut utiliser des quadrangles de type Q4-VRI, c'est-à-dire des quadrangles à quatre points de Gauss, mais où l'on considère une déformation volumique constante, on observe l'apparition d'un mode de déformation très particulier, illustré à la figure 4.27. On y voit les éléments se déformer selon le mode sablier (qui n'est pas à énergie nulle dans ce cas-ci), ce qui conduit rapidement à des problèmes numériques et à l'arrêt du calcul. Le raffinement du maillage localise et atténue quelque peu le phénomène, mais ne le supprime pas. Si on s'arrête un instant à la carte d'endommagement obtenue avec le maillage n° 3 (figure 4.28), on observe que la zone endommagée est légèrement décentrée, mais au vu de l'allure du maillage déformé, il est difficile de dire si c'est un effet physique ou numérique. Sur la carte de pression, on voit apparaître une structure en damier qui pourrait faire penser au phénomène de locking volumique, mais il s'agit plutôt ici d'un adoucissement brutal comme on le voit sur les courbes de la figure 4.29.

Par contre, si l'on utilise des éléments à un seul point de Gauss (Q4-URI), on obtient les courbes dont on a déjà parlé et qui présentent très peu de dispersion par rapport au niveau de discrétisation. Si on compare maintenant les maillages déformés (figure 4.30) et les cartes d'endommagement (figure 4.31), on constate que seul le maillage n° 3 est suffisamment fin pour capturer le mode de rupture en cône et cuvette. On y voit bien la fissure qui part horizontalement, puis à 45° pour de nouveau changer de direction et repartir à -45° . Les deux maillages les moins fins empêchent de par leur géométrie l'apparition nette de ces bandes de cisaillement.

On constate sur la déformée finale du maillage n° 3 (figure 4.30) l'apparition moyennement

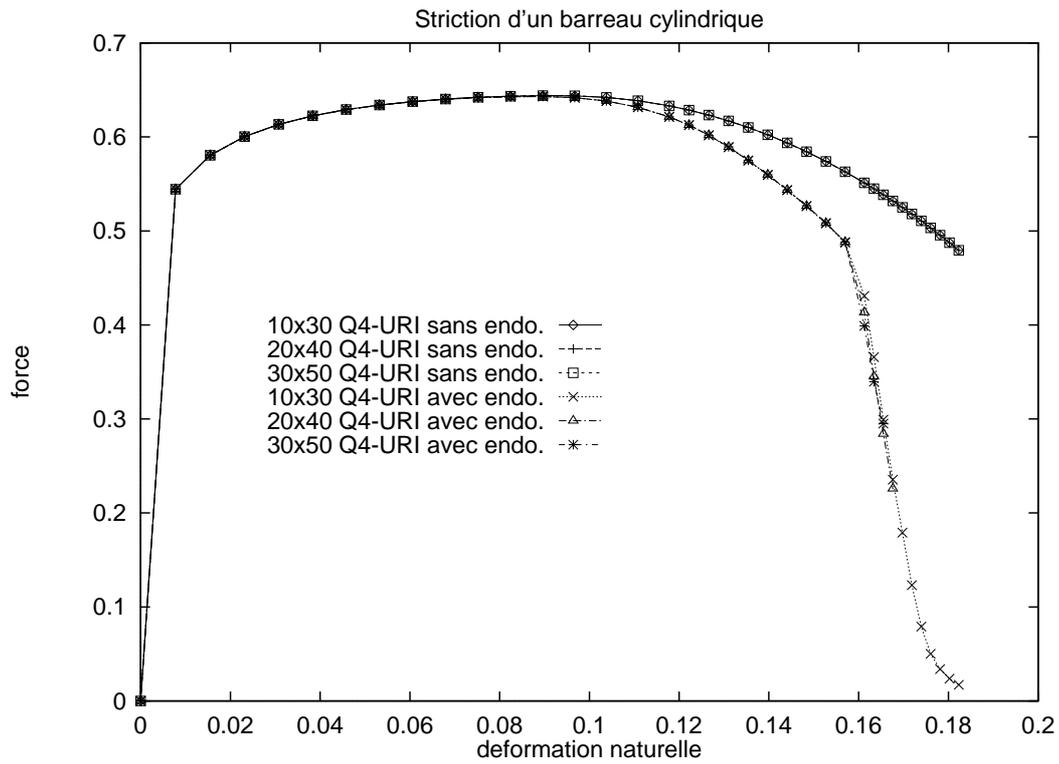


Figure 4.25: Courbes de la force de traction - déformation globale

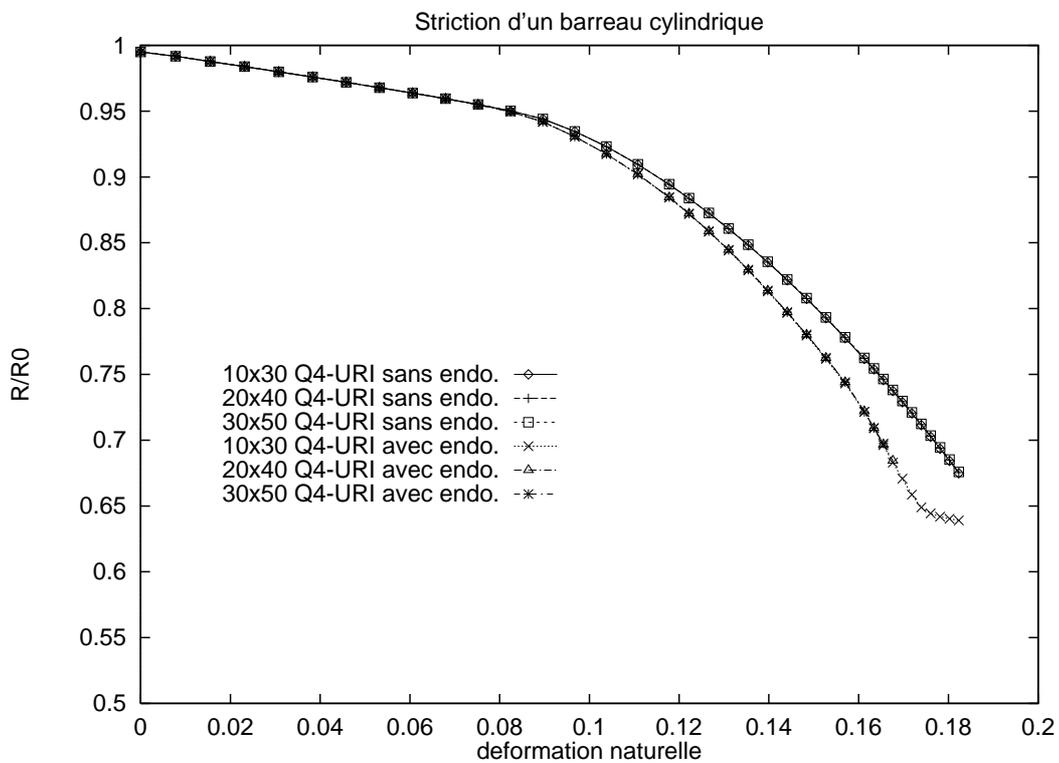
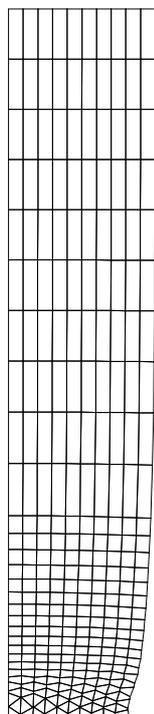
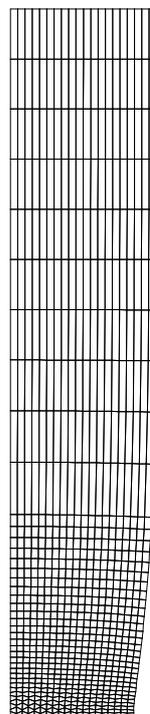


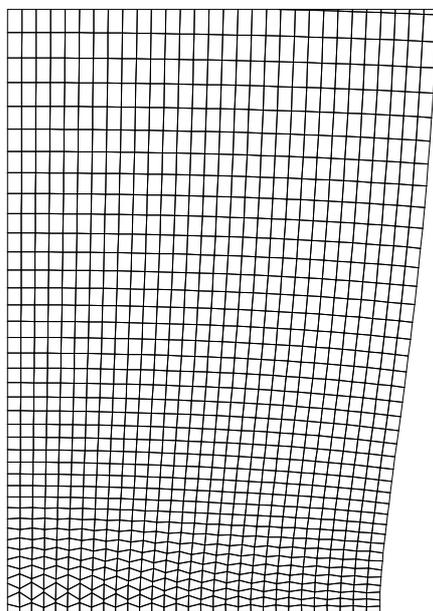
Figure 4.26: Courbes du rayon de la zone de striction - déformation globale



a. maillage n° 1

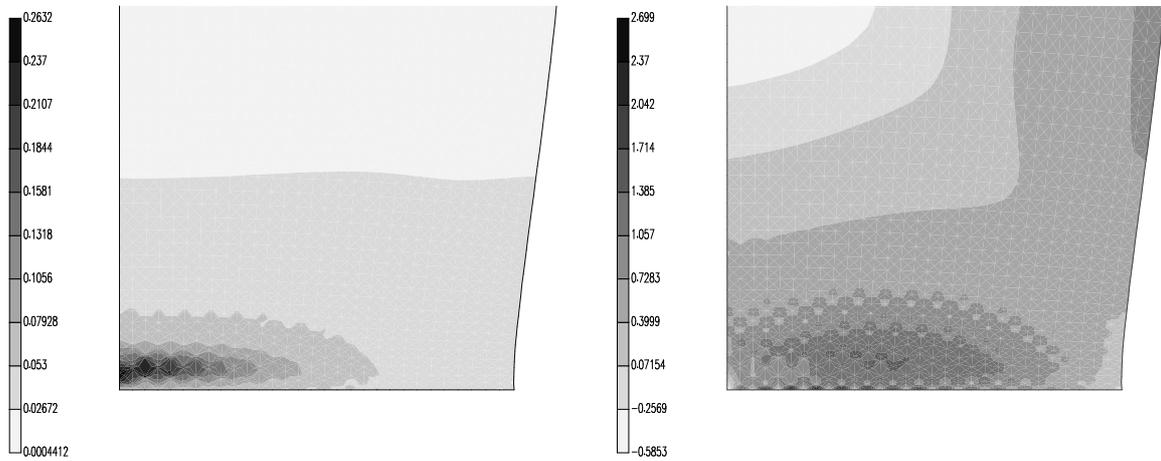


b. maillage n° 2



c. maillage n° 3

Figure 4.27: Maillages déformés obtenus avec les éléments Q4-VRI



a. endommagement

b. pression

Figure 4.28: Cartes d'endommagement et de pression obtenues avec les éléments Q4-VRI

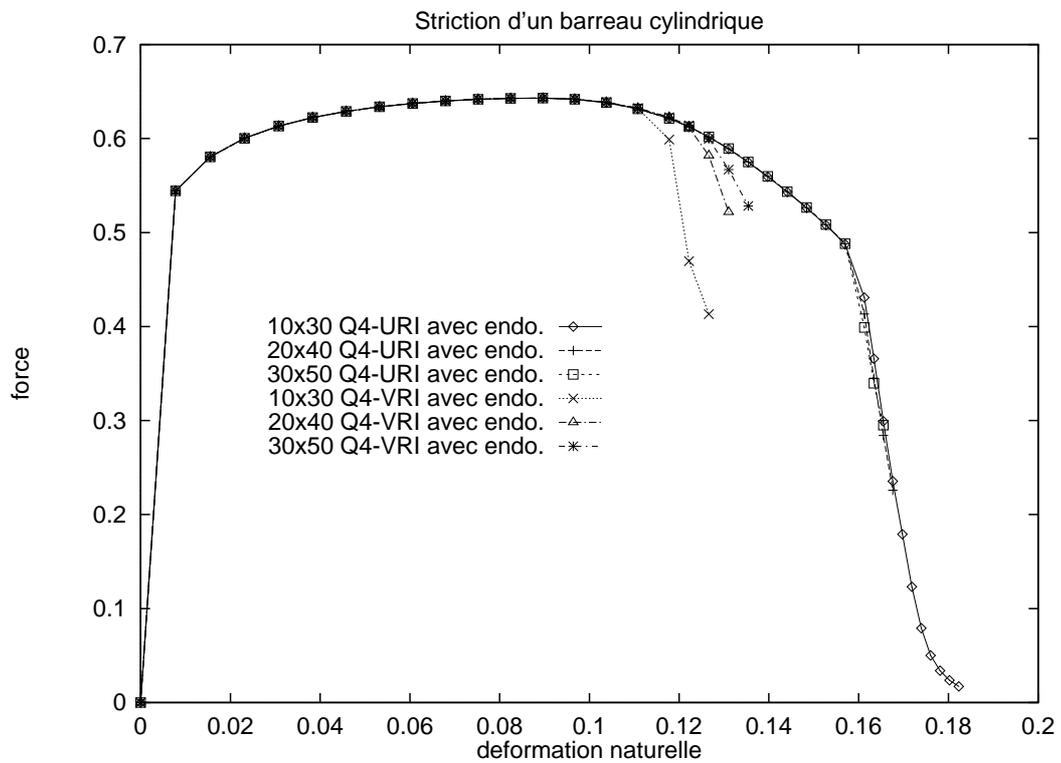
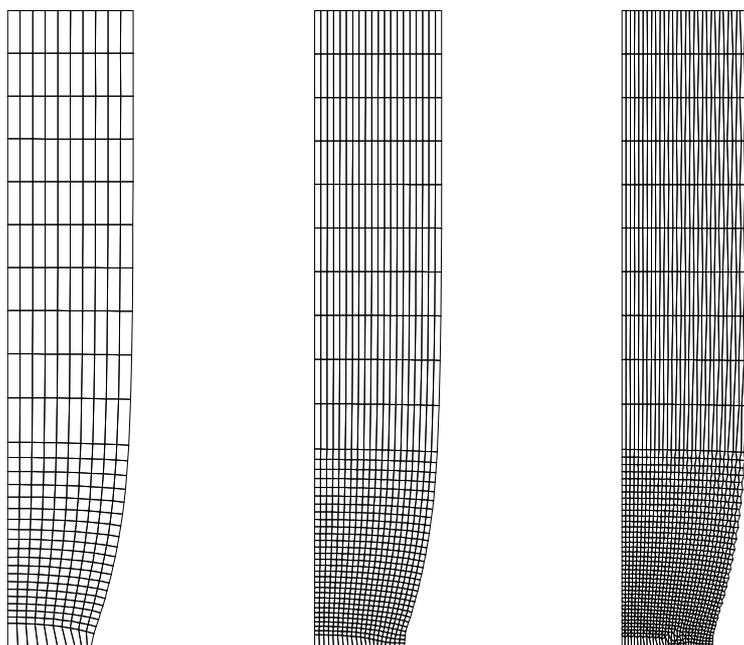


Figure 4.29: Courbes de la force de traction - déformation globale

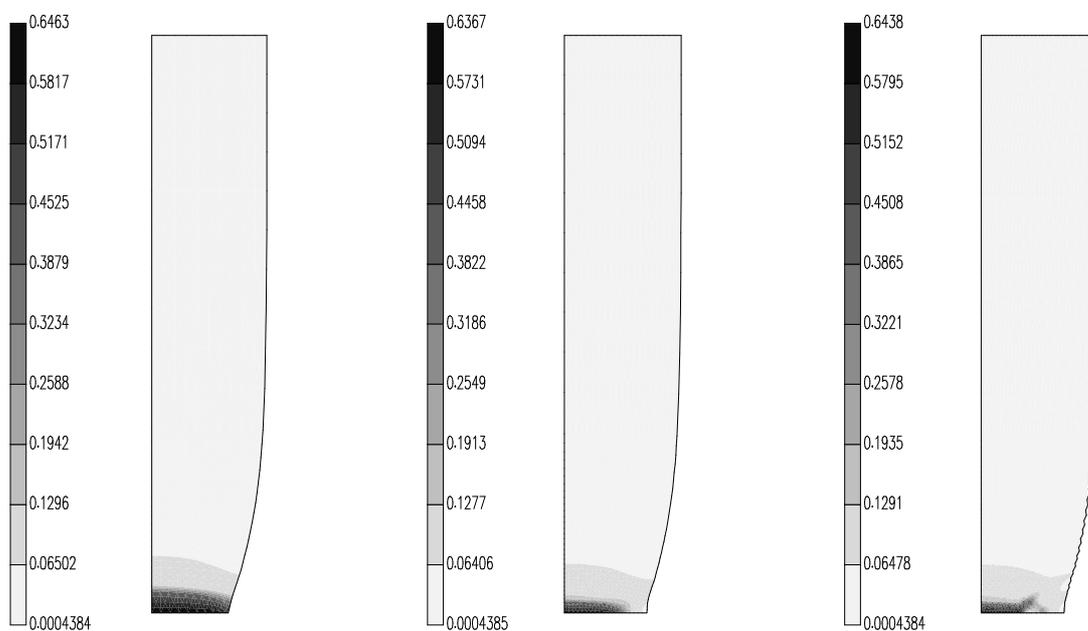


a. maillage n° 1

b. maillage n° 2

c. maillage n° 3

Figure 4.30: Déformées obtenues avec les différents maillages (éléments Q4-URI)



a. maillage n° 1

b. maillage n° 2

c. maillage n° 3

Figure 4.31: Cartes d'endommagement obtenues avec les différents maillages (éléments Q4-URI)

marquée de modes sablier (à énergie nulle cette fois, vu la sous-intégration) qui gâchent quelque peu la qualité de la solution. Cela nous a amené à mettre en oeuvre la technique de stabilisation décrite à l'annexe A (voir aussi Stainier et Ponthot ⁽¹²⁴⁾). Les résultats que l'on obtient alors sont assez surprenants. Si l'on compare tout d'abord les courbes force-déformation (figure 4.32), on constate que celles obtenues avec stabilisation montrent une influence plus nette du maillage que celles obtenues sans stabilisation, mais que la dispersion reste cependant assez faible. Par contre, si l'on regarde les déformations et l'endommagement obtenu (figures 4.33 et 4.34), on constate que la stabilisation a empêché le développement des bandes de cisaillement dans le maillage n° 3 et que la fissure est donc restée horizontale. La représentation correcte du mode de rupture en cône et cuvette à partir des maillages et du type d'élément utilisés implique donc la déformation d'un certain nombre d'éléments selon le mode sablier, ce qui est peut-être à mettre en parallèle avec les résultats obtenus avec les éléments Q4-VRI. Tout cela suggère l'utilisation d'une stabilisation dont la force serait réduite par l'utilisation d'un coefficient de contrôle, comme expliqué dans l'annexe A. On a par exemple essayé avec un coefficient $\epsilon = 0.2$ (au lieu de la valeur standard de 0.5 utilisée précédemment). On obtient alors le maillage déformé représenté à la figure 4.35, où les modes sablier ne sont pas apparus et où l'on retrouve bien la bande à 45° . Cependant, le calcul a dû être interrompu à un déplacement de $0.18165L/2$ suite à des problèmes numériques de convergence. La figure 4.35 compare la zone de striction à un déplacement de $0.18L/2$ pour les différentes valeurs du paramètre ϵ . On y voit bien l'effet bénéfique d'une stabilisation modérée. Vu les problèmes numériques rencontrés, il ne s'agit cependant pas encore de la solution miracle, qui reste à chercher ailleurs.

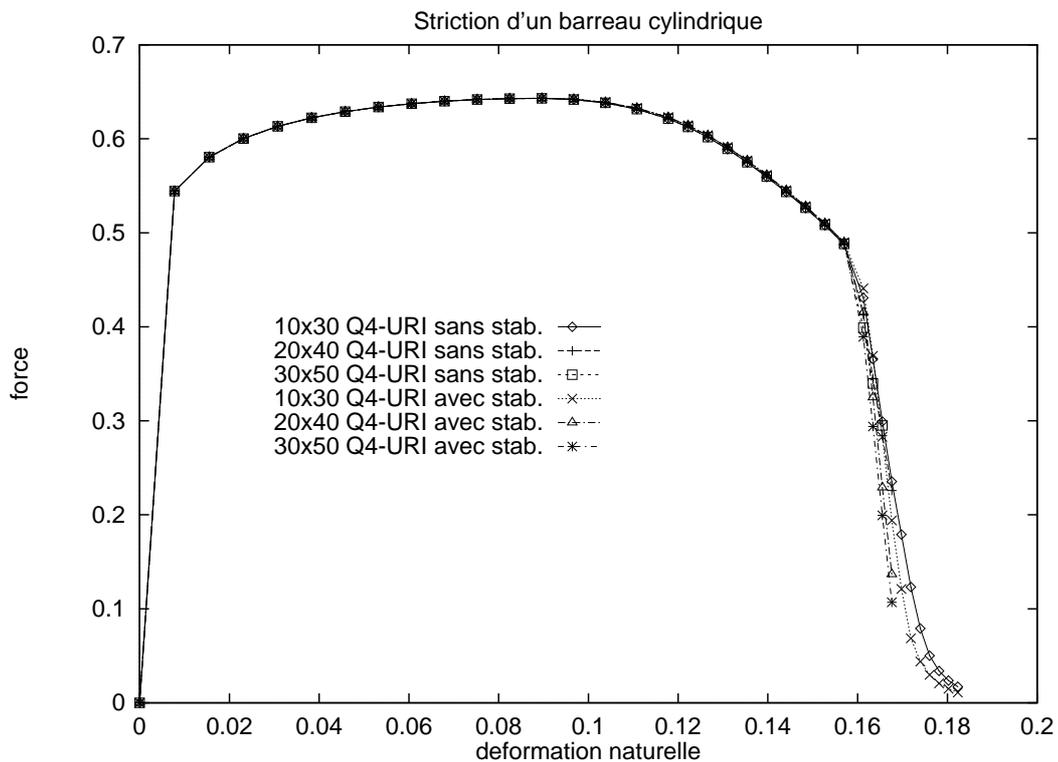
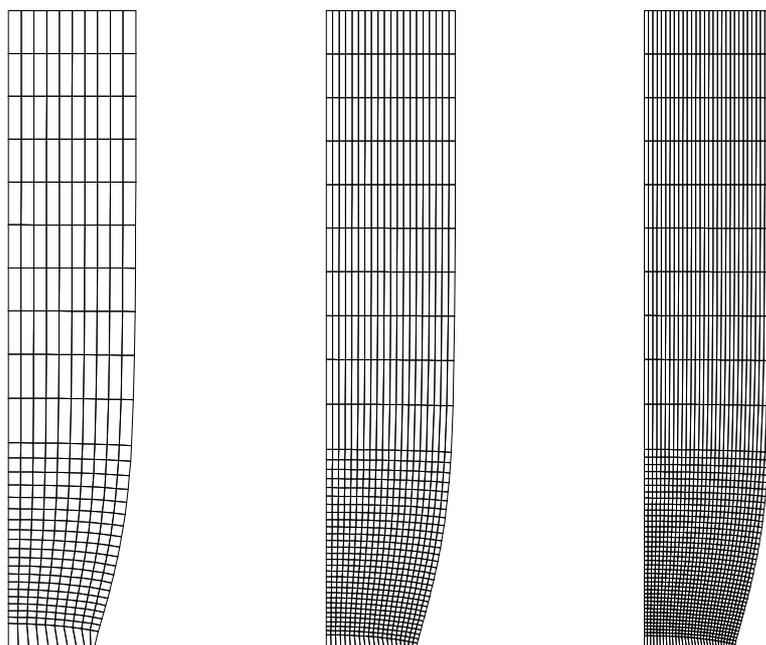


Figure 4.32: Courbes de la force de traction - déformation globale

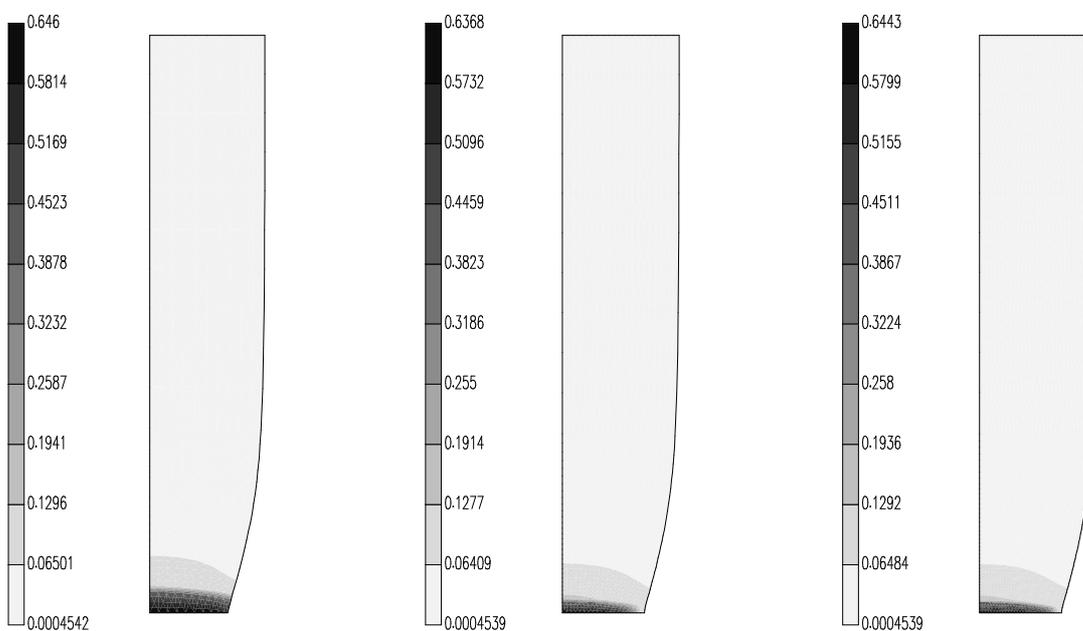


a. maillage n° 1

b. maillage n° 2

c. maillage n° 3

Figure 4.33: Déformées obtenues avec les différents maillages (éléments Q4-URI et stabilisation classique)



a. maillage n° 1

b. maillage n° 2

c. maillage n° 3

Figure 4.34: Cartes d'endommagement obtenues avec les différents maillages (éléments Q4-URI et stabilisation classique)

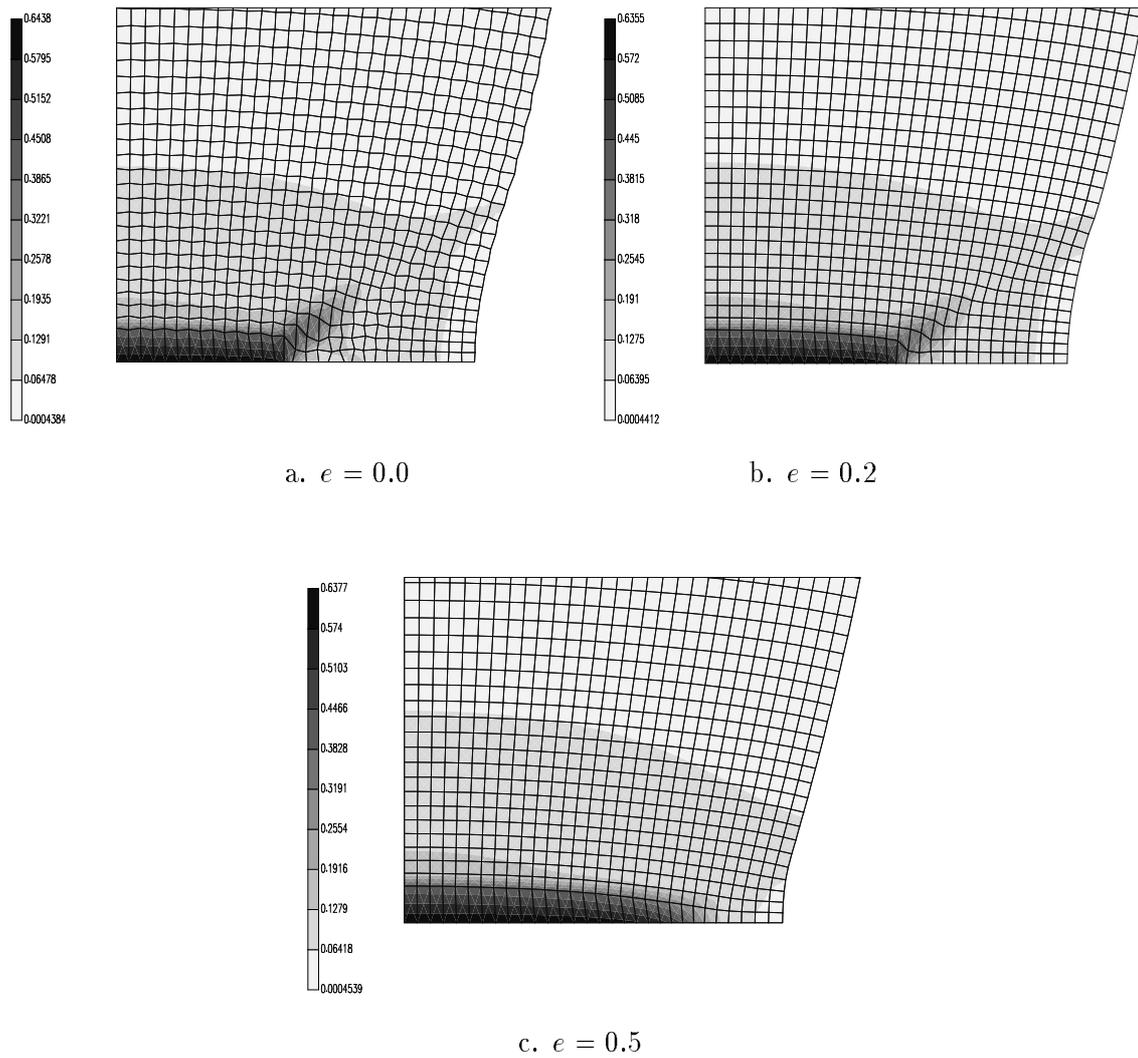


Figure 4.35: Cartes d'endommagement obtenues avec les différents niveaux de stabilisation (éléments Q4-URI) – déplacement = $0.18 L/2$

Afin d'améliorer la qualité de la solution, on peut régulariser le problème par l'introduction d'une viscosité quasi-négligeable. Nous avons donc considéré un matériau élastoviscoplastique endommageable dont les propriétés sont identiques à celles utilisées précédemment et avec les coefficients de viscosité suivants :

$$k = 10^{-3} \sigma_Y^0 \quad m = 2$$

La faible valeur du coefficient k nous assure d'obtenir des résultats très proches de ceux obtenus avec un matériau élastoplastique, tout en étant certains de travailler avec un problème qui reste mathématiquement bien posé. Si on compare les courbes force-déformation obtenues avec ou sans viscosité (figure 4.36), on constate qu'elles sont très semblables, la réponse visqueuse étant légèrement plus rigide comme on pouvait s'y attendre. La viscosité permet cependant de conduire le calcul plus loin, ce qui est son principal avantage dans ce cas. Les conclusions que l'on a pu tirer des résultats obtenus avec les différents types d'éléments (Q4-VRI / Q4-URI, avec / sans stabilisation) restent valables dans le cas visqueux, comme on peut le voir aux figures 4.37 et 4.38. Dans le cas du maillage n° 3, la viscosité permet, comme nous venons de le dire, de pousser le calcul plus loin. On peut ainsi suivre la propagation de la bande de cisaillement dans un zig-zag complet (voir figure 4.39). Cela se fait cependant au prix d'un développement des modes sablier qui est tout à fait inadmissible. L'utilisation de la stabilisation avec une valeur standard du paramètre ($\epsilon = 0.5$) conduit aux mêmes effets que précédemment, c'est-à-dire qu'elle empêche l'apparition de la bande de cisaillement à 45° . Si on réduit la valeur du paramètre ϵ à 0.2, la bande peut apparaître, mais le calcul doit être interrompu un peu avant d'avoir atteint un déplacement de 0.18, suite à des problèmes de convergence (figure 4.40). Une valeur de 0.25 conduit elle à des résultats similaires à ceux obtenus avec $\epsilon = 0.5$. Par contre, une valeur de 0.225 permet d'obtenir le mode en cône et cuvette sans aucune oscillation du maillage (figure 4.41). Le choix de la bonne valeur pour le paramètre ϵ apparaît donc comme plutôt délicate.

Cette étude de la rupture dans un barreau cylindrique nous a donc appris un certain nombre de choses : le modèle d'endommagement utilisé est apte à reproduire des modes de rupture observés expérimentalement, mais un travail reste à faire au niveau du choix de l'élément fini à utiliser. La piste de l'élément sous-intégré avec une stabilisation adéquate semble prometteuse mais demande encore à être affinée.

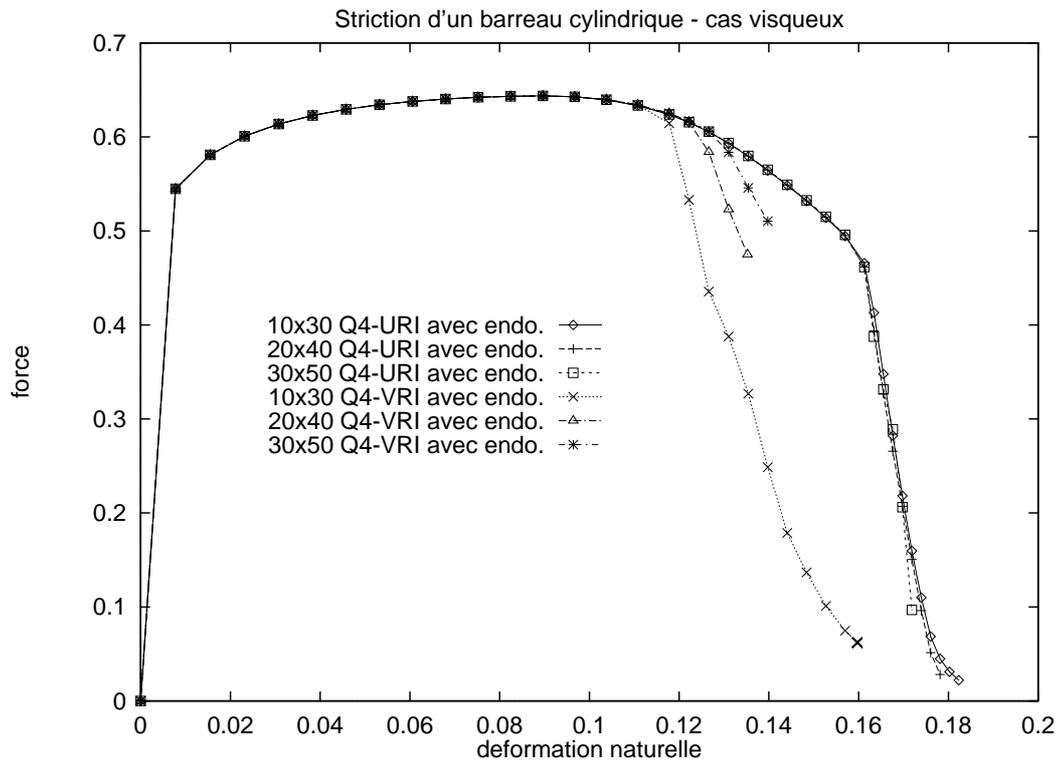


Figure 4.36: Courbes de la force de traction - déformation globale

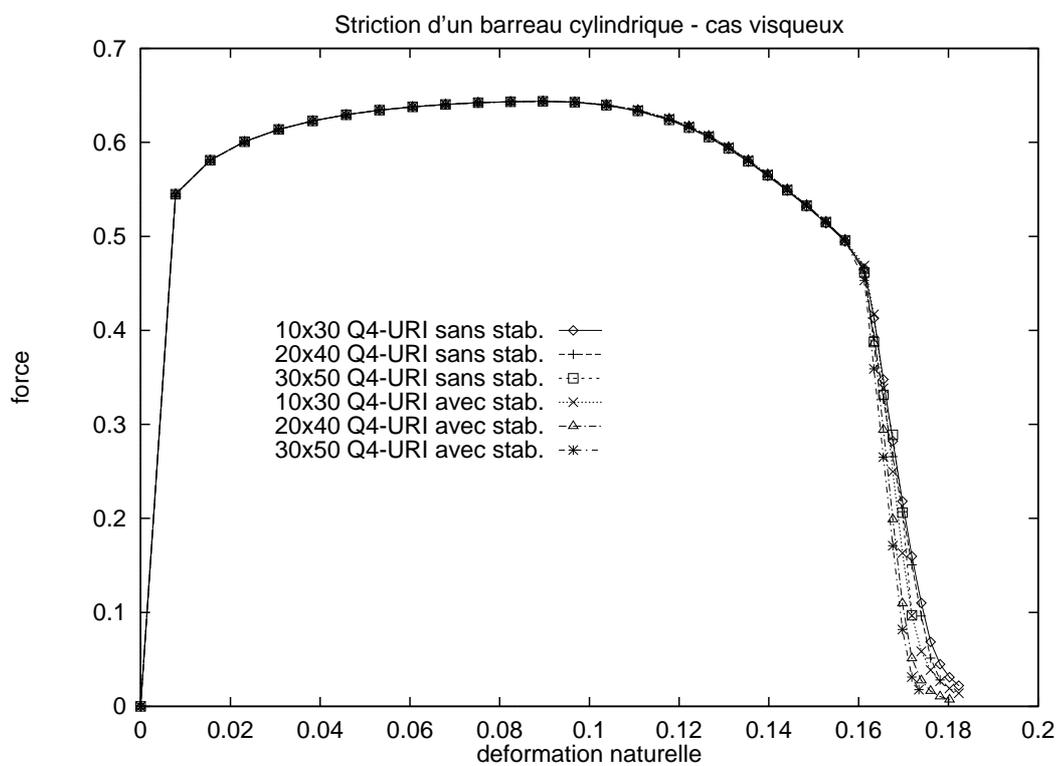


Figure 4.37: Courbes de la force de traction - déformation globale

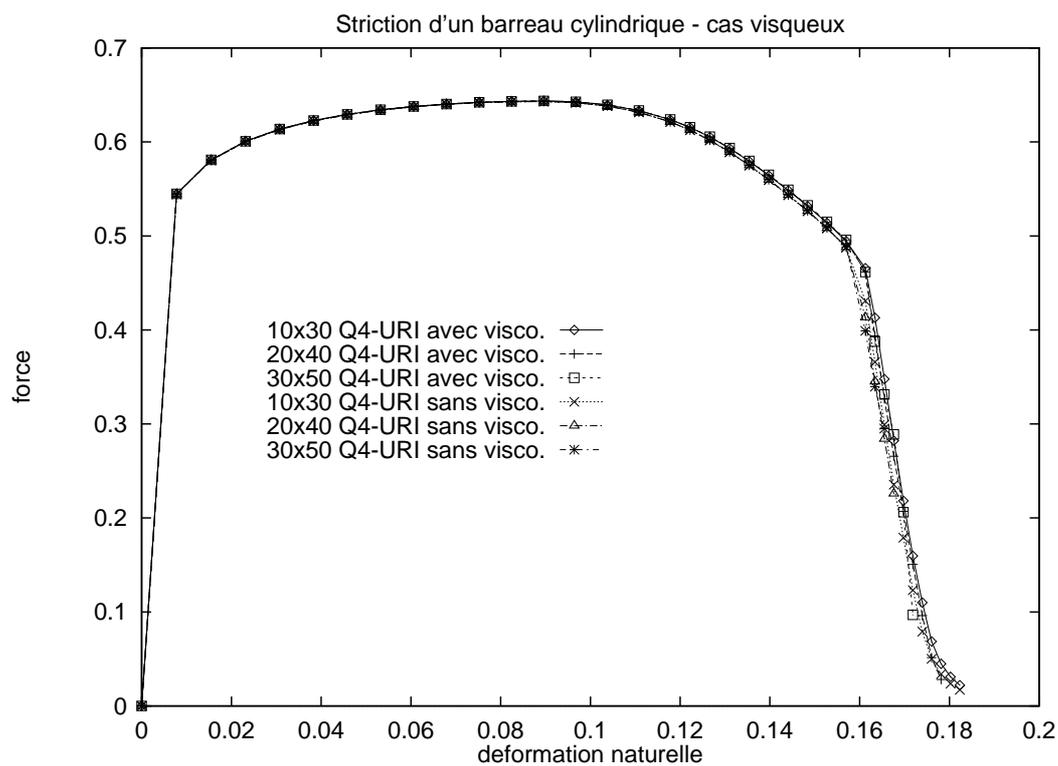
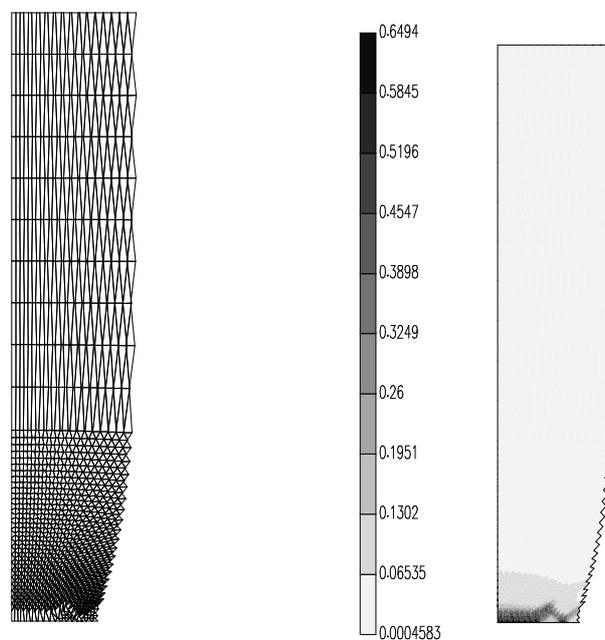


Figure 4.38: Courbes de la force de traction - déformation globale

Figure 4.39: Configuration finale obtenue avec le matériau visqueux (déplacement = $0.1892L/2$) – éléments Q4-URI

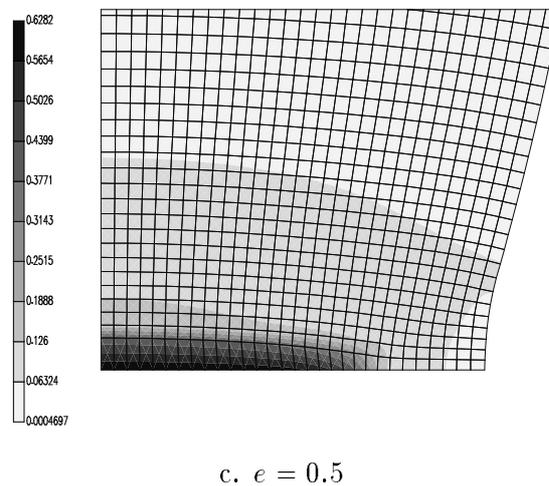
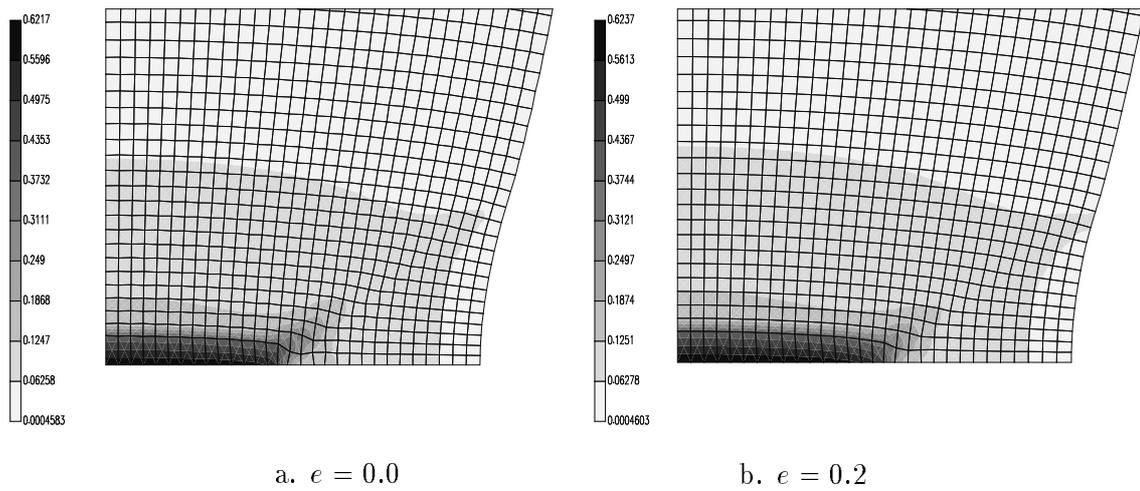


Figure 4.40: Cartes d'endommagement obtenues avec les différents niveaux de stabilisation pour le matériau visqueux (éléments Q4-URI) – déplacement = $0.18 L/2$

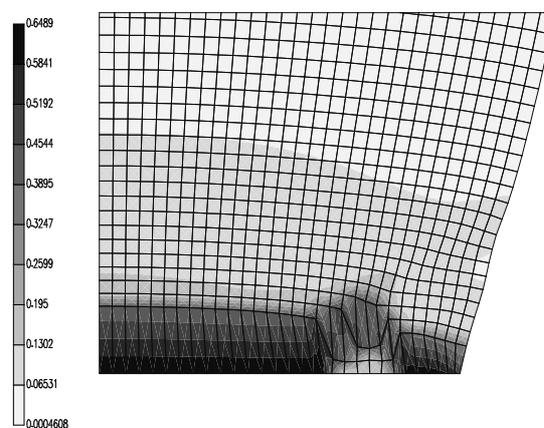


Figure 4.41: Cartes d'endommagement obtenues avec un niveau de stabilisation $e = 0.225$ pour le matériau visqueux (éléments Q4-URI) – déplacement = $0.194 L/2$

4.5 Un exemple de localisation en bandes de cisaillement

Afin d'illustrer le phénomène de localisation de la déformation en bandes de cisaillement, nous allons nous arrêter sur l'exemple simple d'une plaque plane soumise à un effort de traction. Ce cas illustre parfaitement comment la perte du caractère elliptique des équations du problème entraîne une dépendance (ici très marquée) de la solution par rapport à la discrétisation. On verra également jusqu'où l'introduction de la viscosité peut suffire à régulariser le problème.

Le problème étudié est donc celui d'une plaque plane, rectangulaire, de largeur $2L$, de hauteur $2H$ et d'épaisseur unitaire, qui est soumise à un effort de traction OX . La description du problème à la figure 4.42 nous montre également comment on a introduit un défaut dans la structure afin de forcer l'apparition des bandes de cisaillement. En pratique, vu la symétrie du problème, seul le quart de structure représenté sur la figure 4.42 sera modélisé. De plus, la mise en charge se fera par imposition d'un déplacement d'amplitude $0.5L$ du bord droit de la plaque. On étudie ici une plaque pour laquelle $H = 4L$ ($h = 3.995L$) constituée d'un matériau possédant les caractéristiques suivantes :

$$\begin{aligned} E &= 300\sigma_Y^0 & \nu &= 0.3 \\ \sigma_Y &= \sigma_Y^0(1. + 0.1 \times \epsilon^{pl}) \\ d_U &= 0.65 & \alpha_2 &= 0.5 \\ d_N &= 0.05 & \epsilon_N &= 0.3 & s_N &= 0.05 \end{aligned}$$

On ne considère pas de coalescence. On utilisera trois maillages différents : un maillage de 10×10 éléments, un de 20×20 éléments et un de 30×30 éléments, tous initialement réguliers et homogènes.

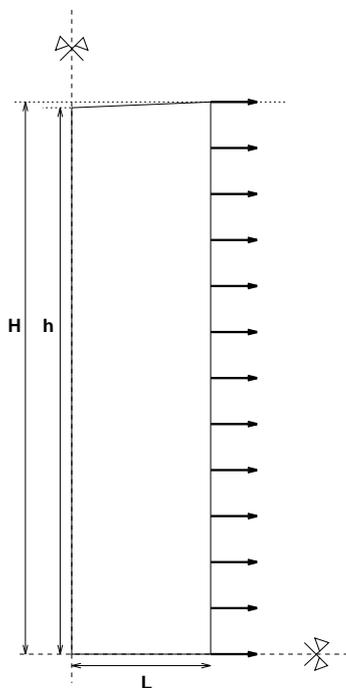


Figure 4.42: Traction d'une plaque plane – description du problème

Si on compare les cartes d'endommagement obtenues avec chacun de ces maillages (figure 4.43), on constate que le raffinement de la discrétisation modifie la solution de manière assez

marquée : le nombre de bandes de cisaillement passe progressivement de deux à trois. Nous pensons pouvoir trouver une explication à cette évolution de la solution dans le fait que, plus le maillage est fin, plus la localisation apparaît tôt (voir figure 6.15 dans la seconde partie des applications), et moins les effets de “convection-diffusion” liés à la déformation uniforme de la structure ont le temps d’agir. En effet, une fois la localisation amorcée, les zones situées hors des bandes de cisaillement se déplacent presque en mode rigide et le mode de déformation de la plaque n’évolue plus. La valeur maximale de l’endommagement augmente également, mais c’est un effet tout à fait normal. Par contre, on voit que la largeur des bandes reste toujours d’environ un élément, et diminue donc au fur et à mesure que le maillage devient fin. On peut également comparer les courbes de la force de traction en fonction du déplacement imposé (figure 4.44), mais il apparaît difficile d’en tirer grand chose qui puisse servir de critère de jugement.

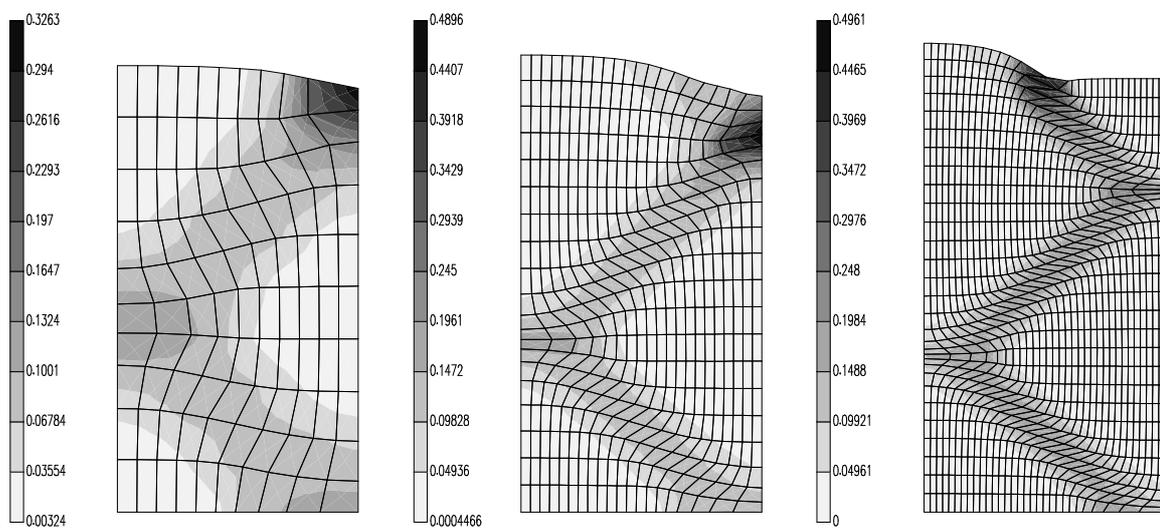
a. maillage 10×10 b. maillage 20×20 c. maillage 30×30

Figure 4.43: Cartes d’endommagement obtenues avec les différents maillages

Nous allons maintenant mesurer l’effet de la viscosité sur les comportements qui viennent d’être observés. Pour ce faire, on considère un matériau à viscosité très faible :

$$k = 10^{-3} \sigma_Y^0 \quad m = 2$$

Cela nous assure de conserver un matériau proche de celui déjà étudié. Les résultats sont représentés à la figure 4.45 (cartes d’endommagement) ainsi qu’à la figure 4.44 (courbes force-déplacement). On constate que la viscosité a très peu d’effets ! Nous pensons pouvoir expliquer cela de la manière suivante : la théorie nous montre que la viscosité introduit une longueur caractéristique dans les équations du problème, par combinaison avec une vitesse, qui ne peut être ici que la vitesse de mise en charge, puisqu’on ne tient pas compte des effets d’inertie. Il est probable que cette longueur est très faible relativement aux dimensions du problème, puisque la viscosité qu’on introduit doit rester limitée pour que la réponse du matériau ne s’éloigne pas trop du cas sans viscosité. En effet, une évaluation, très heuristique il est vrai, de cette longueur caractéristique peut être obtenue par les calculs suivants. La vitesse associée à la mise en charge, c’est-à-dire avec laquelle les déplacements sont imposés au bord droit, est ici donnée par :

$$v = L [m/s]$$

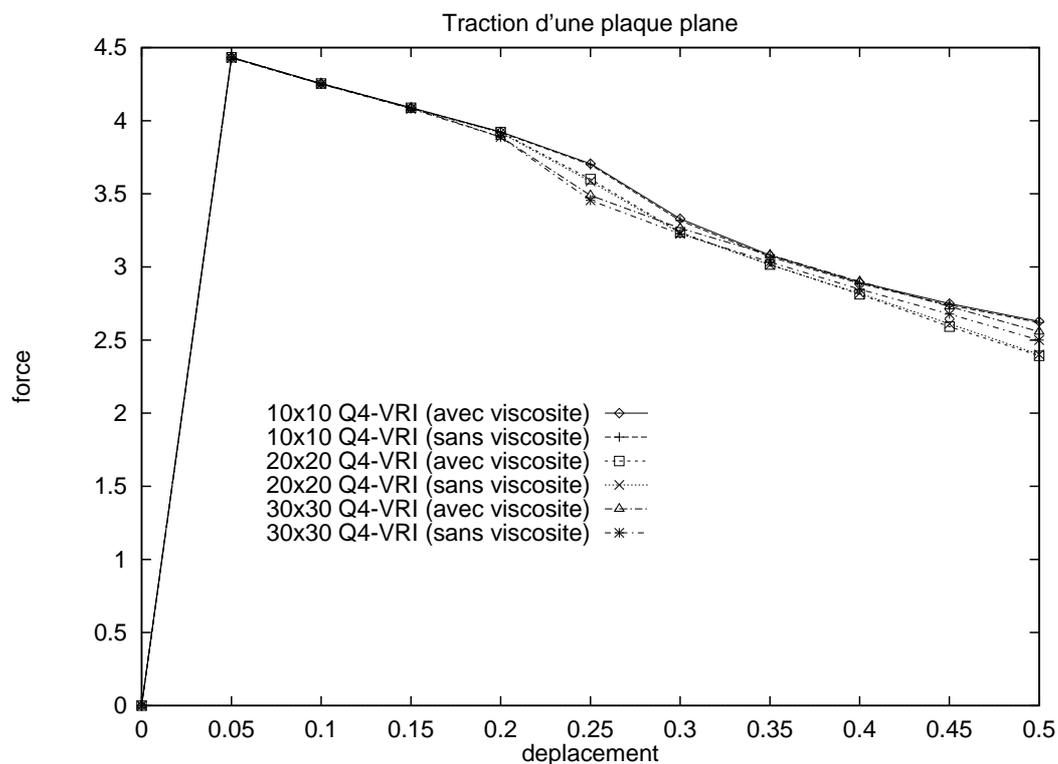


Figure 4.44: Traction d'une plaque plane – courbes force-déplacement

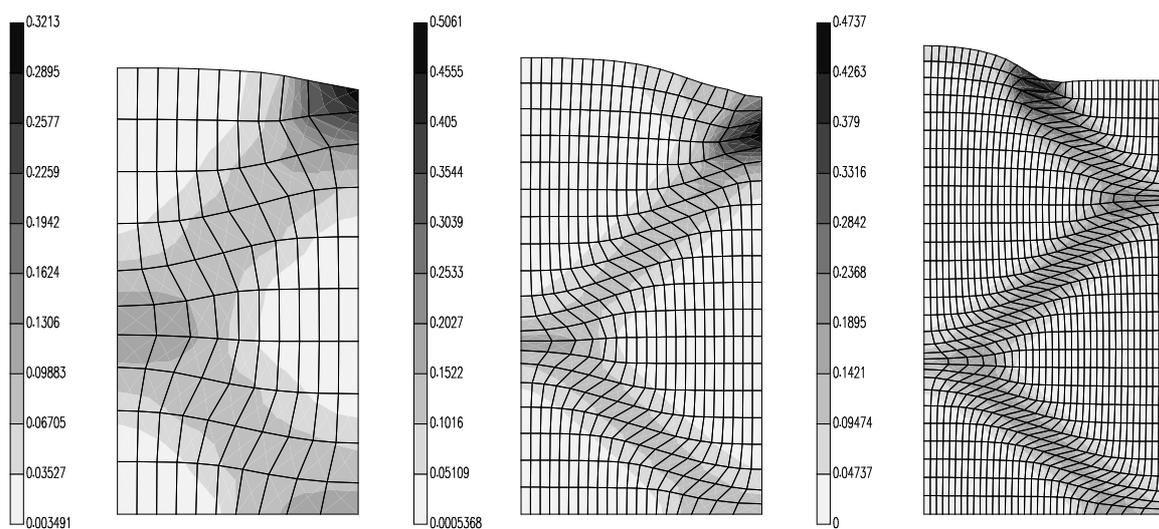


Figure 4.45: Cartes d'endommagement obtenues avec les différents maillages – cas visqueux

A partir des données matérielles, on peut déduire un temps caractéristique donné par :

$$t = \left(\frac{k}{\sigma_Y^0} \right)^m = 10^{-6} [s]$$

La longueur caractéristique issue de la viscosité serait alors donnée par :

$$l = v \cdot t = 10^{-6} L$$

L'expression que nous avons donnée ci-dessus est uniquement basée sur une analyse dimensionnelle et le sujet mériterait des développements mathématiques plus poussés. Ces derniers sont malheureusement rendus difficiles par la complexité de la partie endommagement du modèle de comportement. On peut cependant remarquer que si l'on avait utilisé E au lieu de σ_Y^0 dans l'expression du temps caractéristique, la longueur obtenue aurait encore été plus faible. La vérification pratique (numérique) de ces considérations demanderait donc d'utiliser des maillages très fins, ce qui conduirait à des coûts de calcul hors de notre portée (pour imaginer ce qu'il serait possible de faire, on peut par exemple citer Belytschko *et al.* ⁽¹⁴⁾ qui ont utilisé des maillages allant jusqu'à 64000 éléments avec 5 à 10 éléments sur la largeur d'une bande). Par contre, cela nous conforte dans notre idée d'utiliser une technique de maillage adaptatif pour concentrer les éléments dans les bandes de cisaillement.

Effet des paramètres de viscosité

On peut également jouer sur les paramètres de viscosité de manière à obtenir différentes longueurs caractéristiques, à travers différents temps caractéristiques. Ainsi, on peut considérer plusieurs valeurs de m (tableau 4.1).

Table 4.1: Longueurs caractéristiques associées à différentes valeurs de m

	$k = 10^{-3} \sigma_Y^0$			
m	2.0	0.6	0.3	0.2
l	$10^{-6} L$	$0.016L$	$0.126L$	$0.251L$

On peut observer à la figure 4.46 les distributions finales d'endommagement obtenues avec les maillages 20×20 et 30×30 pour différentes valeurs de m . On constate bien que, à partir du moment où la longueur caractéristique matérielle devient supérieure à la longueur caractéristique du maillage (c'est-à-dire pour $m = 0.3$ et $m = 0.2$), la régularisation visqueuse agit et élimine la dépendance envers la discrétisation, en grosse partie en tout cas. Par contre, pour $m = 0.6$, elle ne peut agir puisque la longueur caractéristique de la discrétisation l'emporte sur la longueur caractéristique matérielle.

On peut aussi jouer sur le paramètre k . Ainsi, on peut voir à la figure 4.47 les cartes d'endommagement obtenues avec les maillages 20×20 et 30×30 pour un $k = 0.1 \sigma_Y^0$ ($m = 2, l = 0.01L$). Malgré la valeur assez faible de l , on observe bien un effet de régularisation, dans le sens où la solution ne dépend plus du maillage. Cependant, on constate également que la localisation a quasiment disparu, avec une solution relativement homogène (variation maximale d'endommagement limitée à environ 20%). On peut donc dire que c'est la disparition du phénomène de localisation qui est à l'origine de la régularisation du problème, qui est en fait devenu différent du problème initial.

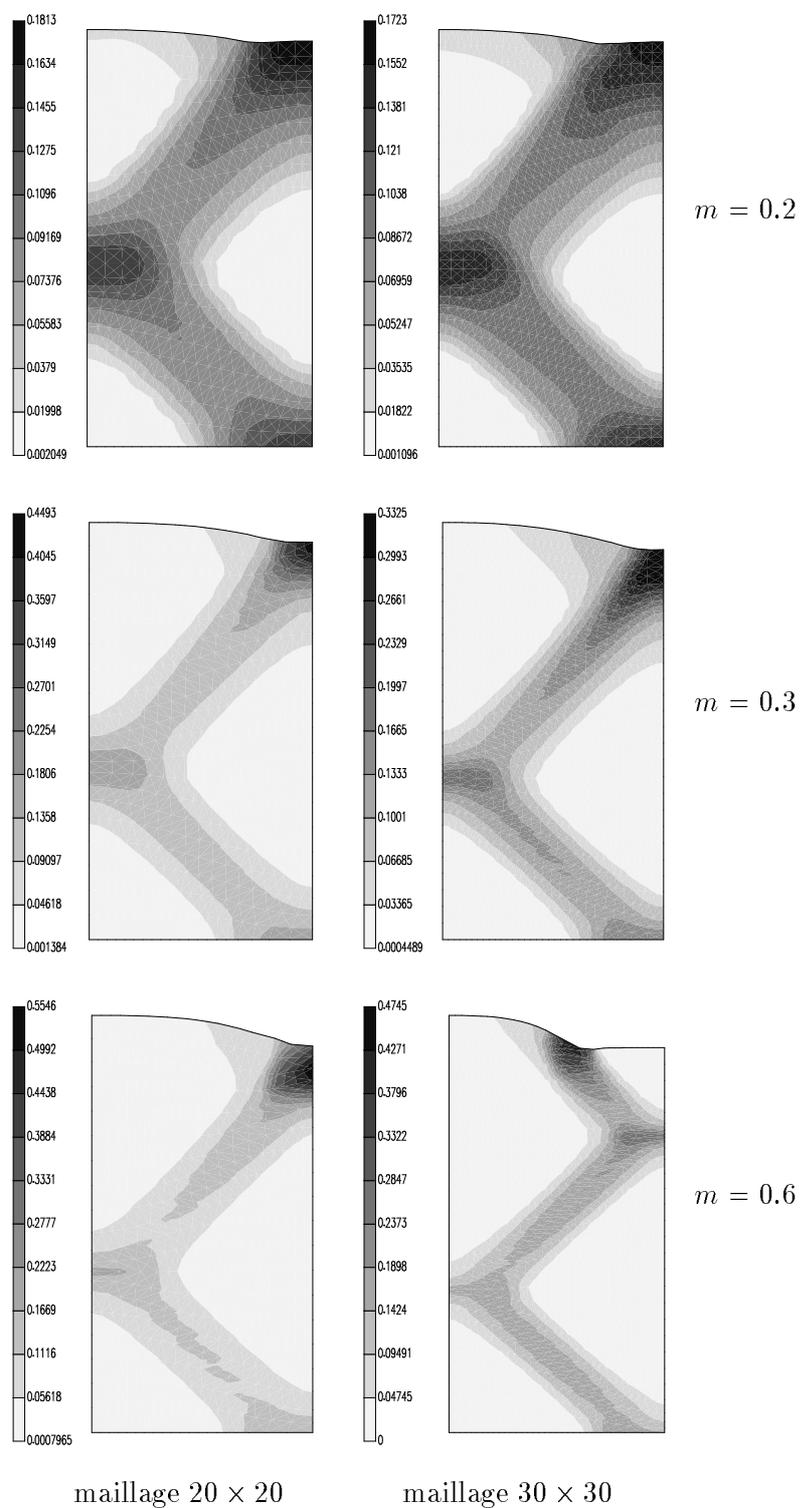


Figure 4.46: Effet de l'exposant de viscosité m sur la régularisation visqueuse (cartes d'endommagement)

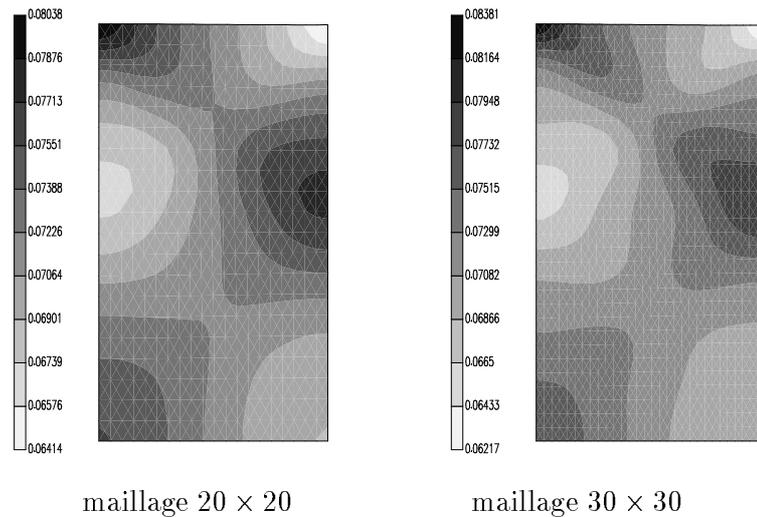


Figure 4.47: Effet du coefficient de viscosité k sur la régularisation visqueuse (cartes d'endommagement)

La régularisation viscoplastique fonctionne donc, à condition de prendre un k suffisamment faible (par rapport à σ_Y^0) et en jouant sur la valeur du paramètre m . Nous nous sommes ici basés sur une expression de la longueur caractéristique issue d'une étude dimensionnelle, mais la validité générale de cette expression reste à démontrer. Cette influence du coefficient m avait déjà été étudiée par Lasry et Belytschko ⁽⁶⁹⁾, mais ceux-ci avaient rejeté la régularisation viscoplastique suite à des problèmes de stabilité, liés à l'utilisation d'un schéma d'intégration purement explicite (Euler avant) pour les équations constitutives, lorsque m devenait trop petit. Comme nous utilisons ici un schéma d'intégration totalement implicite (Euler arrière), et inconditionnellement stable, ce problème ne se pose plus et la régularisation viscoplastique peut agir efficacement.

On a vu ci-dessus que le choix de m correspondait en fait au choix d'une longueur caractéristique. Cela est à mettre en parallèle avec les considérations suivantes :

- pour que l'effet de la régularisation soit effectif, il faut que la longueur caractéristique introduite au niveau matériel soit supérieure ou égale à la longueur caractéristique du maillage ;
- expérimentalement, pour les métaux polycristallins, on observe généralement des bandes de cisaillement de largeur assez faible (par exemple, Rey et Viaris de Leseguo ⁽¹¹⁰⁾ ont mesuré une largeur de bande de $400 \mu m$).

On se verrait donc obligé de travailler avec des discrétisations très fines, et donc très coûteuses, si on voulait mesurer l'effet d'une longueur caractéristique basée sur une mesure expérimentale. Comme nous l'avons déjà dit, cela renforce l'intérêt des techniques adaptatives.

4.6 Impact dans une turbine

Dans cette section, nous allons traiter le cas de l'impact entre un fragment de rotor et le capot protecteur d'une turbine. Cet exemple est issu de la thèse de Bittencourt ⁽¹⁶⁾, où l'auteur s'attachait à l'aspect contact-impact. Il s'agit en fait d'un modèle très simplifié d'un dispositif expérimental mis au point aux Sandia National Laboratories ⁽¹¹⁵⁾, et qui est décrit à la figure 4.48. On ne considère dans le modèle numérique qu'une section bidimensionnelle de la turbine, avec ses deux capots en forme de demi-cercles et le morceau de rotor impacteur, doté d'une vitesse initiale (voir figure 4.49). Le matériau des deux capots sera considéré comme élastoviscoplastique endommageable, avec les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
 E &= 210 \text{ GPa} & \nu &= 0.3 & \rho &= 7800 \text{ kg/m}^3 \\
 \sigma_Y &= 241 + 207 \times (1 - \exp(-15 \times \epsilon^{pl})) \text{ MPa} \\
 k &= 5. \text{ MPa.s}^{1/2} & m &= 2 \\
 d_U &= 0.5 & \alpha_2 &= 0.5 \\
 d_N &= 0.04 & \epsilon_N &= 0.3 & s_N &= 0.1 \\
 d_{crit} &= 0.15 & \Delta\epsilon &= 1.
 \end{aligned}$$

Le fragment de rotor sera lui considéré comme élastique avec les propriétés :

$$E = 210 \text{ GPa} \quad \nu = 0.3 \quad \rho = 7800 \text{ kg/m}^3$$

Il est projeté contre le capot avec une vitesse initiale de 180 m/s (648 km/h).

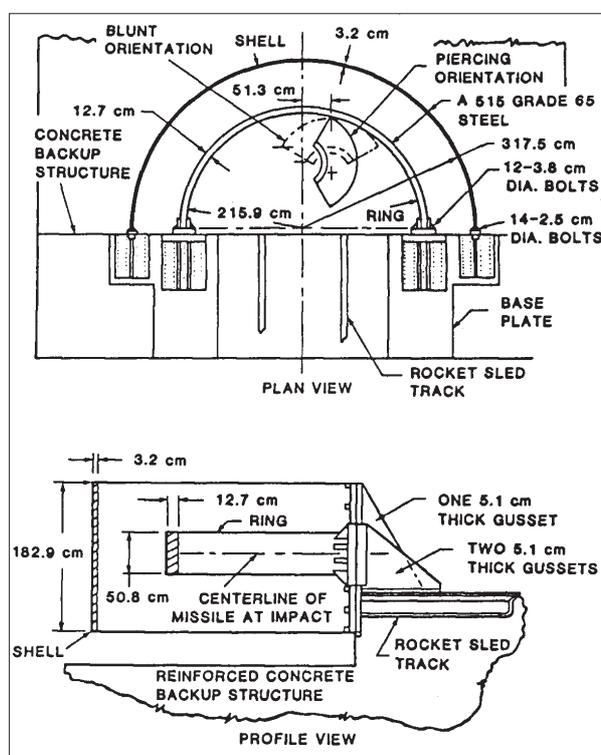


Figure 4.48: Impact dans une turbine – dispositif expérimental

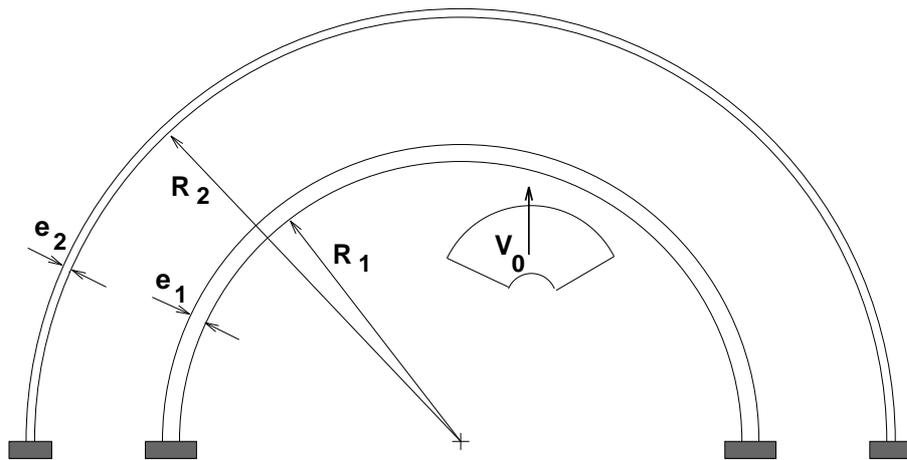


Figure 4.49: Impact dans une turbine – modèle simplifié

L'intégration temporelle est réalisée à l'aide d'un schéma explicite (différence centrée) et le coefficient de pénalité pour le contact est pris égal à 10^9 N/m .

La figure 4.50 montre l'évolution de la déformée de la structure et de la distribution d'endommagement à intervalles de 4 ms jusqu'à un temps final de 16 ms . On voit que le projectile déforme rapidement le premier capot et rejoint le second après 10 ms environ. Ce qu'il est important de remarquer dans ces résultats est qu'ils illustrent bien la nécessité d'une méthode d'élimination d'éléments. En effet, on voit sur la déformée à 16 ms qu'il s'est formé une zone de striction intense sur le capot intérieur qui doit être interprétée physiquement comme une rupture. Cependant, dans le modèle numérique, même si les éléments n'offrent plus qu'une résistance très faible à la déformation, les conditions limites de contact qui y sont associées sont encore actives et empêchent le projectile de continuer sa trajectoire au travers du premier capot protecteur, comme on le voit très bien à la figure 4.51. C'est d'ailleurs la gestion de ces conditions limites qui fait de l'élimination d'éléments un problème numériquement très complexe dans le cas présent.

Au passage, on peut encore remarquer qu'il y a également un endommagement non-négligeable au niveau des fixations inférieures du capot intérieur. Cependant, cela n'apparaît pas très bien sur les figures, suite à un effet d'échelle lié à la forte valeur de l'endommagement au niveau de la zone d'impact. Il s'agit donc également d'une zone où la rupture pourrait se produire, surtout si on prenait en compte le frottement entre les deux corps.

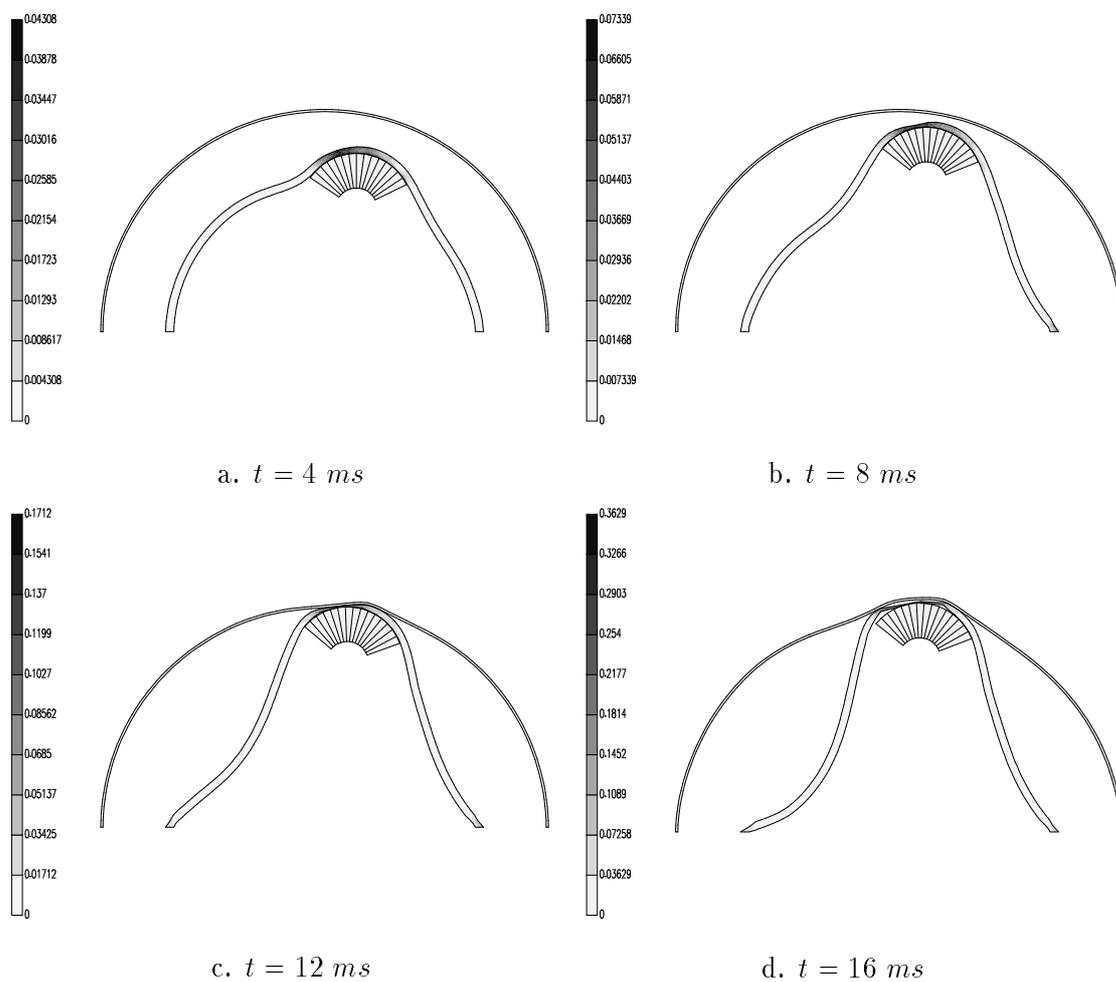


Figure 4.50: Impact dans une turbine – évolution de la déformée et de l'endommagement

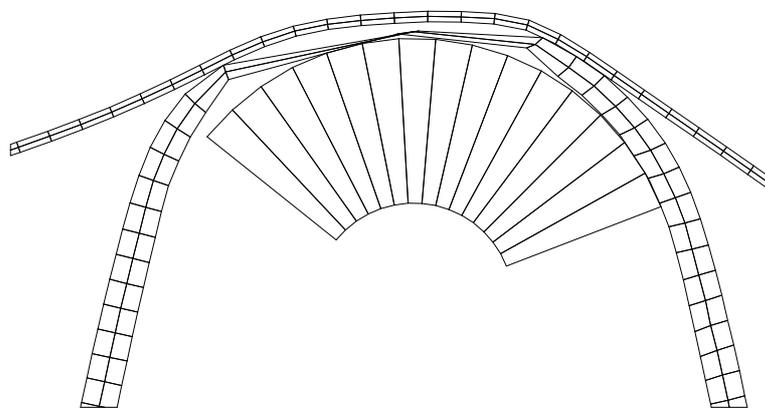


Figure 4.51: Agrandissement de la zone d'impact – $t = 16 \text{ ms}$

4.7 Impact de deux plaques circulaires

Nous allons maintenant étudier la réponse d'une plaque circulaire plane soumise à l'impact d'une autre plaque circulaire de rayon inférieur (voir figure 4.52). Ce dispositif présente l'intérêt de conduire à la rupture de la plaque impactée selon un mode dit de "spallation", qui consiste en une séparation selon un plan parallèle à celui des ondes de choc incidentes et réfléchies générées lors de l'impact (figure 4.53). En effet, les ondes de compression générées dans chacune des plaques lors de l'impact se propagent à travers celles-ci, puis se réfléchissent sur la surface libre, ce qui les transforme en ondes de traction. Ces ondes de traction se croisent quelque part au milieu de la plaque impactée (plus épaisse), ce qui y génère une nucléation et une croissance des vides plus importante qu'ailleurs (voir figure 4.54). Remarquons que, dans notre cas, ce sont plutôt les ondes plastiques qui sont importantes, et moins les ondes élastiques. En jouant sur les épaisseurs des plaques et sur la vitesse et les caractéristiques de la plaque impactante, on peut alors faire varier la quantité et la taille de microvides générés. L'observation des plaques après impact (par photographie aux rayons X p.e.) permet d'étudier le phénomène de nucléation dans les matériaux ductiles (voir Curran *et al.* ⁽²⁴⁾).

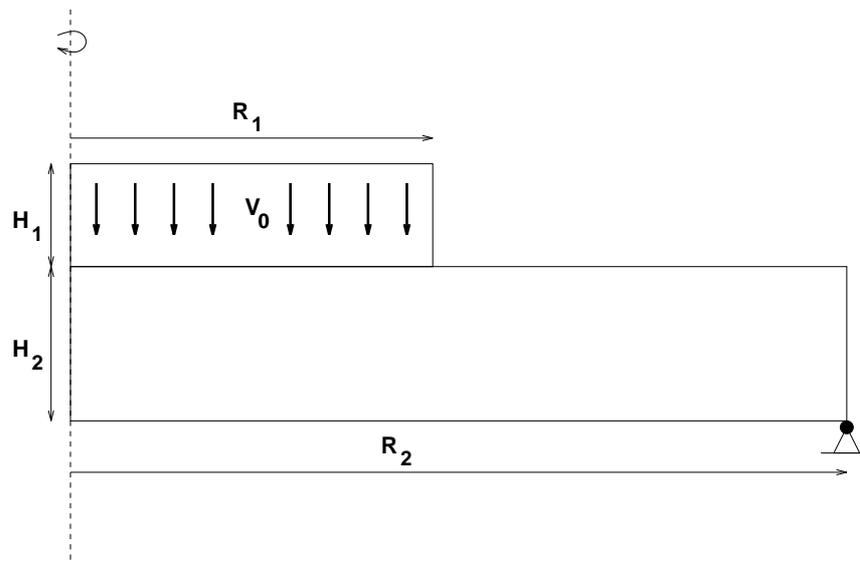


Figure 4.52: Impact de deux plaques circulaires – géométrie du problème

La modélisation de ce type d'expérimentation a notamment été entreprise par Eftis et Nemes ^(35–37,87–89) sur base du modèle proposé par Perzyna ⁽¹⁰⁵⁾. De notre côté, nous avons étudié le cas d'une plaque circulaire de rayon $R_1 = 20\text{mm}$ et d'épaisseur $H_1 = 3\text{mm}$ impactant une plaque de rayon $R_2 = 40\text{mm}$ et d'épaisseur $H_2 = 6\text{mm}$. On considère le cas d'une plaque d'acier élastoplastique impactant une plaque de cuivre élastoviscoplastique endommageable. Les propriétés matérielles utilisées sont les suivantes :

plaque impactante (acier)

$$E = 217.5 \text{ GPa} \quad \nu = 0.3 \quad \rho = 7850 \text{ kg/m}^3$$

$$\sigma_Y = \sigma_Y^0 + 1.10^8 \times \epsilon^{pl} \text{ MPa}$$

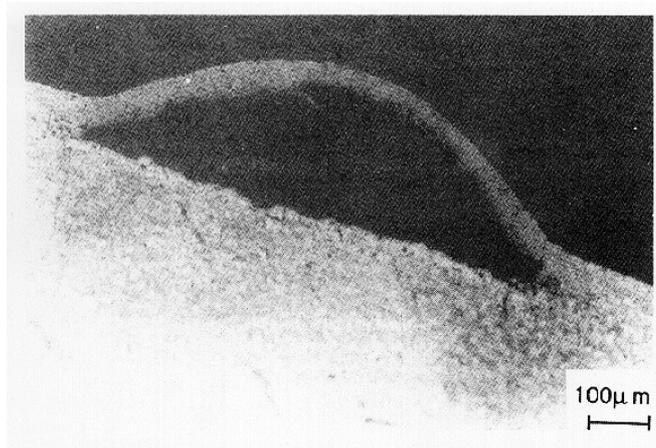


Figure 4.53: Exemple de rupture par spallation (induite par laser). Tiré de Gilath et Eliezer ⁽⁴⁸⁾

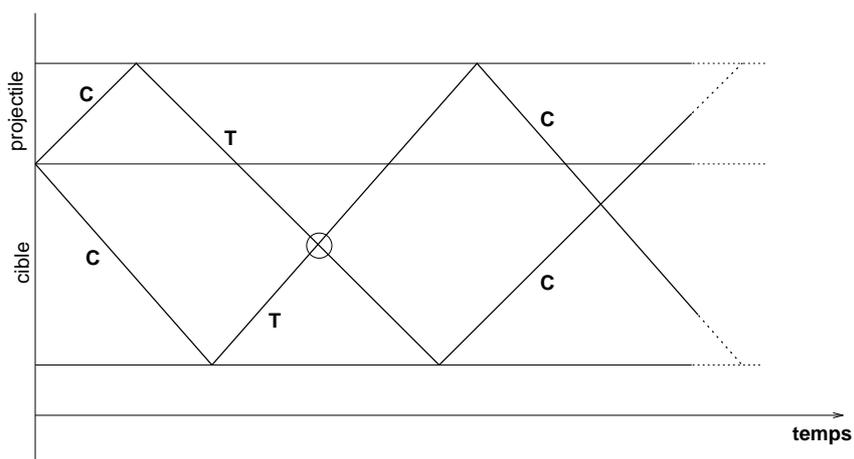


Figure 4.54: Propagation et interaction entre les ondes (C: de compression, T: de traction)

plaque impactée (cuivre)

$$\begin{aligned}
 E &= 117.9 \text{ GPa} & \nu &= 0.35 & \rho &= 8930 \text{ kg/m}^3 \\
 \sigma_Y &= 500 + 500 \times (1 - \exp(-8 \times \epsilon^{pl})) \text{ MPa} \\
 k &= 3 \text{ MPa.s}^{1/3} & m &= 3 \\
 d_U &= 0.5 & \alpha_2 &= 0.8 \\
 d_N &= 0.05 & \epsilon_N &= 0.1 & s_N &= 0.05 \\
 d_{crit} &= 0.15 & \Delta\epsilon &= 1.
 \end{aligned}$$

Ci-dessus, on n'a pas indiqué explicitement de seuil d'écoulement plastique pour l'acier, car nous étudierons l'effet d'une variation de celui-ci sur les résultats obtenus. On étudiera également l'influence de la vitesse d'impact. La discrétisation éléments finis utilisée est la suivante : 10×15 éléments pour la plaque impactante et 30×50 éléments pour la plaque impactée, où les phénomènes qui nous intéressent ont lieu (voir figure 4.55). On utilise un schéma d'intégration temporelle explicite (différence centrée) et le coefficient de pénalité pour le contact est pris égal à 10^{14} N/m .

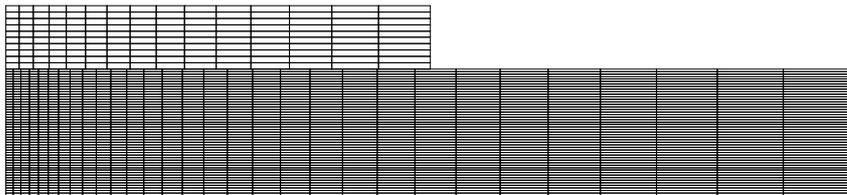
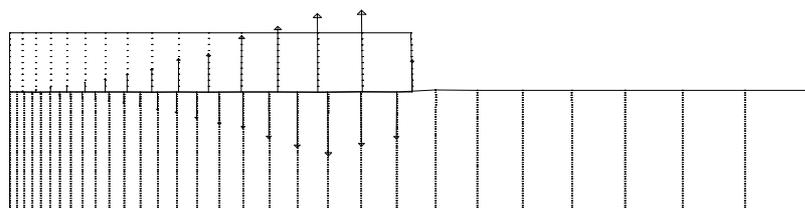
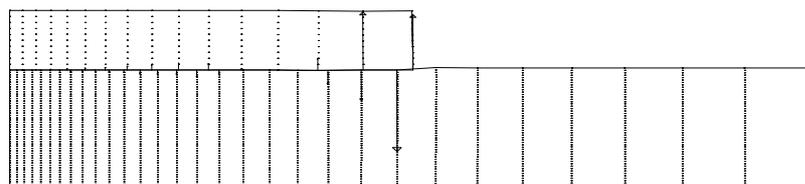


Figure 4.55: Discrétisation du problème

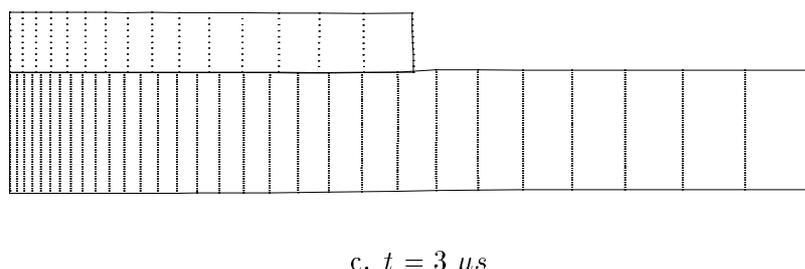
Considérons une vitesse d'impact de 150 m/s (540 km/h), ce qui représente déjà un phénomène assez violent. La figure 4.56 représente l'évolution de la déformée et des forces de contact depuis le moment de l'impact jusqu'à un temps de $5 \mu\text{s}$, pour un σ_Y^0 de 800 N/mm^2 . On voit que la plaque supérieure rebondit rapidement : après $5 \mu\text{s}$, il n'y a plus du tout contact.



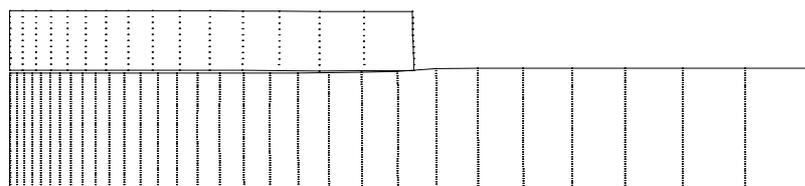
a. $t = 1 \mu s$



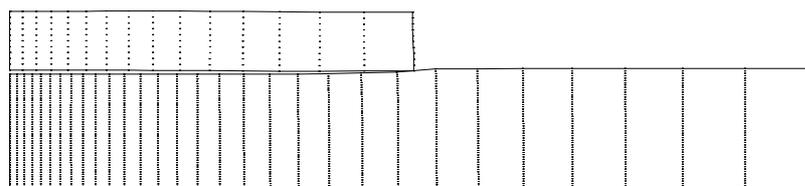
b. $t = 2 \mu s$



c. $t = 3 \mu s$



d. $t = 4 \mu s$



e. $t = 5 \mu s$

Figure 4.56: Evolution de la déformée et des forces de contact

On a représenté à la figure 4.57 la distribution d'endommagement obtenue $5 \mu s$ après le choc, ce pour différentes valeurs de la limite d'écoulement plastique du matériau de la plaque impactante (de 500 à $800 N/mm^2$). On y constate que plus cette valeur est élevée, plus le niveau d'endommagement atteint est élevé, et plus la zone d'endommagement maximal se rétrécit et se concentre. On peut répéter les calculs en considérant cette fois le matériau de la plaque cible comme étant non-visqueux. Les résultats obtenus sont représentés à la figure 4.58. On y constate tout d'abord un renforcement des effets observés dans le cas visqueux. Cela est dû à la disparition de l'effet de retard lié à la viscosité. Mais les solutions obtenues avec $\sigma_Y^0 = 700 N/mm^2$ et $\sigma_Y^0 = 800 N/mm^2$ présentent une localisation de l'endommagement très marquée, que l'on pourrait presque qualifier de fissure si l'amplitude maximale était plus élevée. Cette démarcation qui apparait entre $\sigma_Y^0 = 600 N/mm^2$ et $\sigma_Y^0 = 700 N/mm^2$ peut être attribuée au fait que l'on s'approche du seuil moyen de déformation plastique critique ($\epsilon_N = 0.1$), ce qui provoque une augmentation rapide du taux de nucléation. Si on veut pousser plus loin, on peut étudier l'effet d'une plaque impactante élastique, représenté à la figure 4.59. On voit que dans ce cas, il y a formation d'une longue fissure, avec un endommagement dépassant les 10%. Tout cela indique l'importance que peuvent avoir les propriétés plastiques de la plaque impactante sur les phénomènes observés dans la plaque cible : par exemple, l'utilisation d'un acier à haute limite élastique peut conduire à des résultats complètement différents de ceux obtenus avec un acier doux.

A côté de cette influence des propriétés plastiques du projectile, on observe bien entendu une influence de la vitesse d'impact. Par exemple, si on réduit celle-ci à $120 m/s$ ($432 km/h$), on observe une chute importante des niveaux d'endommagement atteints (figure 4.60). L'expérimentateur dispose donc de plusieurs méthodes pour étudier la nucléation et la croissance de l'endommagement dans une plaque ductile, et peut pousser le processus plus ou moins loin en jouant sur les caractéristiques cinématiques et matérielles de la plaque impactante.

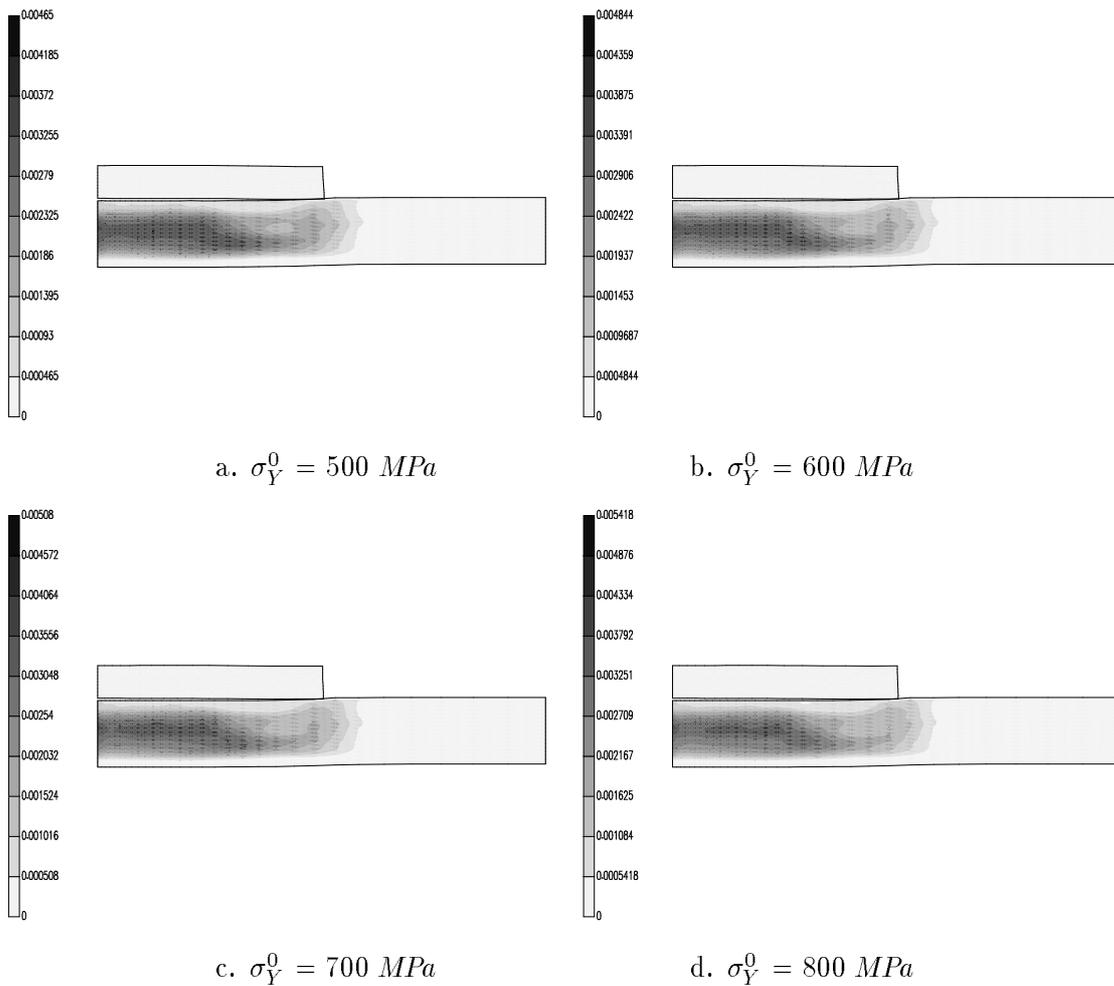


Figure 4.57: Endommagement en $t = 5 \mu s$ pour différents σ_Y^0 de la plaque impactante – cas visqueux

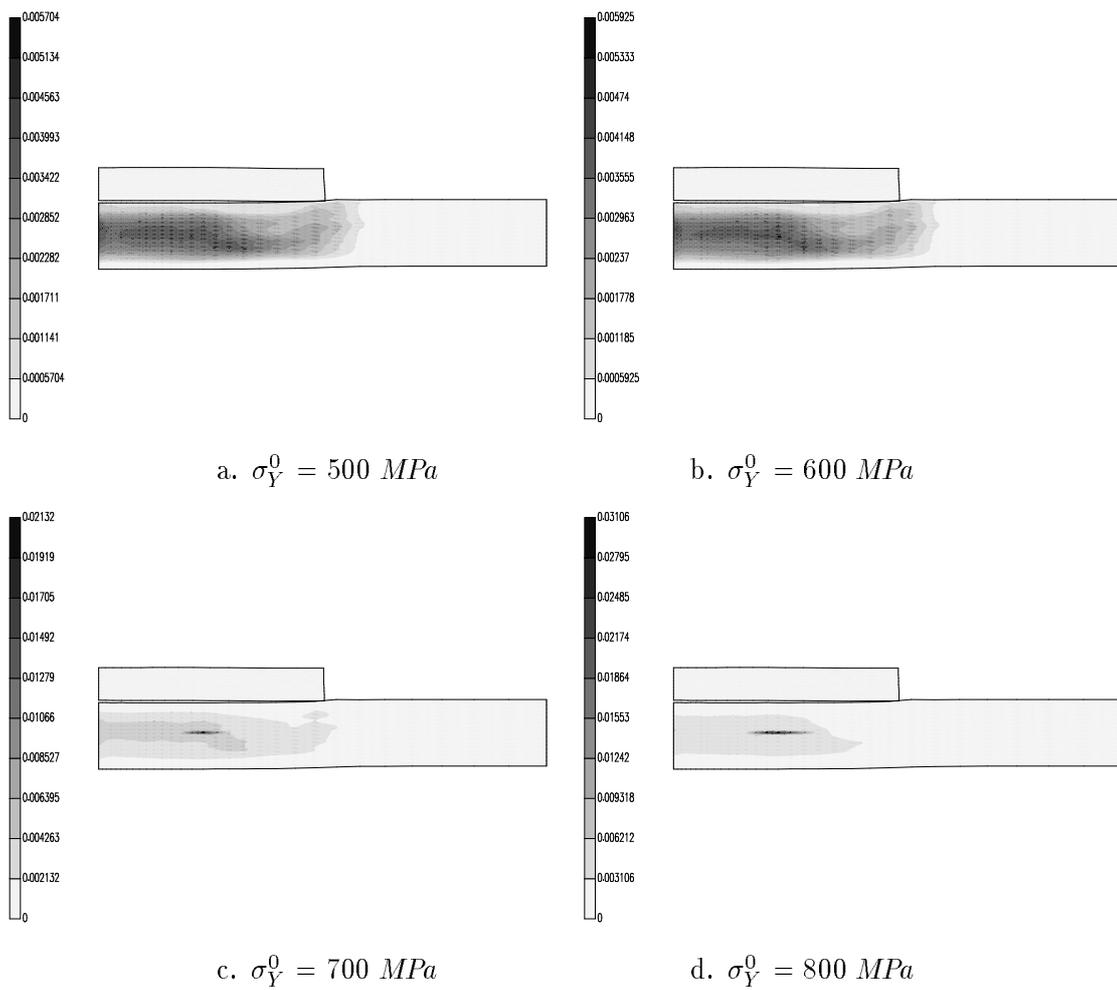


Figure 4.58: Endommagement en $t = 5 \mu s$ pour différents σ_Y^0 de la plaque impactante – cas non visqueux

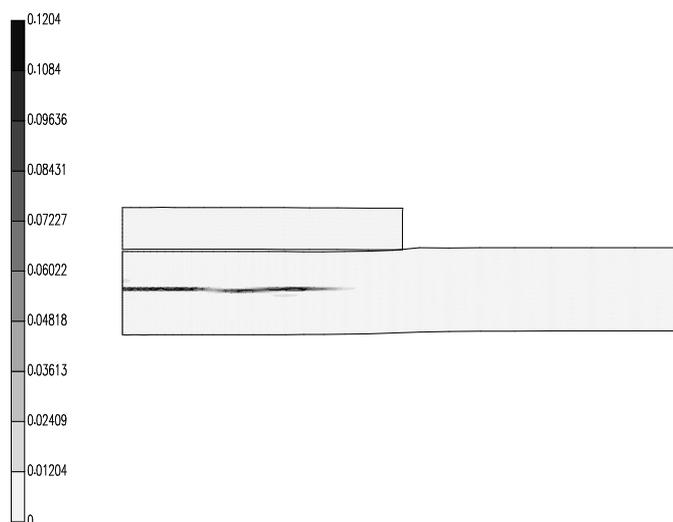


Figure 4.59: Endommagement en $t = 5 \mu s$ dans le cas d'une plaque impactante élastique – cas non visqueux

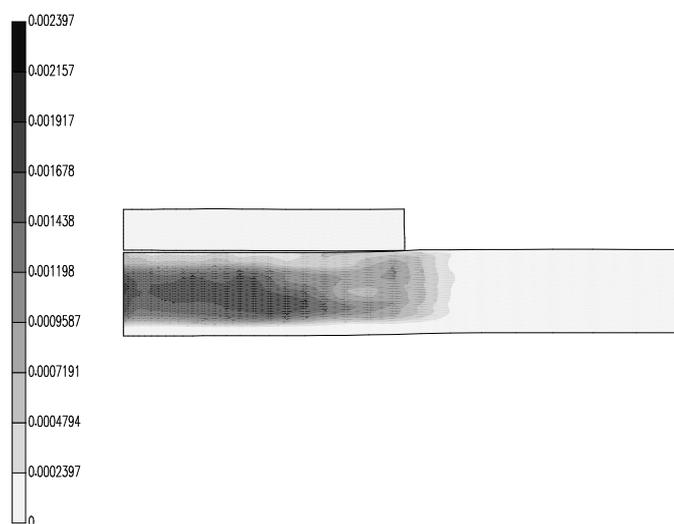


Figure 4.60: Endommagement en $t = 5 \mu s$ pour une vitesse d'impact de 120 m/s ($\sigma_Y^0 = 800 \text{ MPa}$)

Chapitre 5

Calcul adaptatif

5.1 Introduction

Ainsi que les exemples du chapitre précédent l'ont montré, l'approche Lagrangienne utilisée jusqu'ici conduit parfois à une distorsion du maillage telle que la validité de la solution pourrait être mise en cause. La formulation Eulérienne-Lagrangienne Arbitraire (ALE en anglais) permet de s'affranchir de ce problème dans un grand nombre de situations où la formulation Lagrangienne montre ses limites. Pour s'en convaincre, on peut consulter la thèse de Ponthot ⁽¹⁰⁸⁾. Nous rappellerons simplement que dans la formulation ALE, on laisse aux nœuds du maillage la possibilité de se déplacer (contrairement à la formulation Eulérienne), et ce de manière indépendante du champ de déplacement de la matière (contrairement à la formulation Lagrangienne). Cela permet d'adapter le maillage à la déformation de la structure étudiée et d'éviter ainsi une distorsion trop importante. Cependant, la topologie, c'est-à-dire la description logique de la connectivité des nœuds et des mailles, du maillage reste constante, ce qui peut poser problème lorsque la géométrie globale de la structure est fortement modifiée (par exemple si la convexité du contour change). Une autre lacune de la méthode ALE est qu'elle permet difficilement l'adaptation de la densité de la discrétisation en fonction de la solution obtenue. En effet, le nombre de mailles est fixé dès le départ et ne peut être modifié par la suite. Il apparaît donc nécessaire de disposer d'une méthode de remaillage qui nous permettra à la fois de traiter tous les types de mise en forme, quelle que soit leur complexité, mais également d'adapter la discrétisation à la solution obtenue en cours de calcul. A cette fin, nous avons implémenté une méthode frontale de génération de maillage quadrangulaire, initialement proposée par Zhu *et al.* ⁽¹⁴⁰⁾, et décrite dans ses grandes lignes au paragraphe 5.2.

L'opération de remaillage est accompagnée par deux autres opérations qui lui sont liées. Tout d'abord, il faut se donner un critère permettant de décider quand le maillage utilisé doit être remplacé, ainsi qu'une méthode de calcul de la densité (et éventuellement de l'orientation) idéale à donner au nouveau maillage en chaque point du maillage actuel. Ce problème du calcul d'un indicateur de qualité est abordé au paragraphe 5.3. Une fois le nouveau maillage généré sur base de cet indicateur, il reste à transférer un certain nombre de variables d'un maillage à l'autre. Cette opération, qui peut se révéler délicate car sujette à "dissipation" de l'information, est abordée dans le paragraphe 5.4.

5.2 Génération de maillages par la méthode frontale

Comme nous l'avons déjà évoqué plus tôt, la discrétisation en éléments quadrangulaires est la mieux adaptée pour la résolution des problèmes étudiés ici (voir Ponthot ⁽¹⁰⁸⁾). D'autre part, on a pu se rendre compte au vu des exemples présentés au chapitre précédent de la nécessité absolue de techniques de remaillage. Apparaît donc la nécessité d'une méthode de génération de maillage en quadrangles. La méthode recherchée devrait posséder les caractéristiques suivantes :

- au vu des grandes déformations que peut subir la structure étudiée, il est fondamental que la génération du maillage soit aussi *automatique* que possible;
- nous avons vu que la déformation pouvait dans certains cas être très localisée, aussi bien aux frontières du domaine étudié qu'en son cœur. Il serait donc intéressant de pouvoir *contrôler la densité de la discrétisation* partout sur l'espace maillé.

La méthode d'interpolation transfinie, qui a été utilisée par Ponthot ⁽¹⁰⁸⁾ dans le cadre de la méthode Eulérienne-Lagrangienne Arbitraire, ne répond pas à ces exigences. En effet, même si elle permet de mailler des domaines de forme plus ou moins complexe, c'est au prix d'une subdivision en macrorégions topologiquement similaires à des quadrangles. Cette subdivision peut difficilement être réalisée de manière automatique, d'autant plus que la partition idéale varie généralement au cours de la déformation de la structure. Inconvénient supplémentaire, le contrôle de la densité de mailles ne peut se faire que au niveau des frontières des macrorégions, mais pas au cœur du domaine. Les méthodes les mieux adaptées pour mailler des domaines quelconques tout en contrôlant la densité de la discrétisation sont les méthodes de type frontal. Ce type de mailleur construit le recouvrement du domaine à partir d'une approximation polygonale du contour. Le problème est que ces méthodes sont conçues à la base pour générer des maillages en triangles, or comme nous l'avons dit plus haut, il est préférable d'utiliser des quadrangles. Deux solutions s'offrent alors à nous pour obtenir des quadrangles à partir des triangles. On peut diviser chaque triangle en trois quadrangles, mais ce type d'opération donne un maillage qui, quoique topologiquement correct, contient des éléments généralement de mauvaise qualité (George ⁽⁴⁵⁾). Une autre solution a été proposée par Zhu *et al.* ⁽¹⁴⁰⁾ et consiste à recombinaison des triangles en quadrangles (deux triangles formant un quadrangle) au fur et à mesure de la génération du maillage. C'est cette méthode que nous avons choisie et implémentée. Nous en décrivons les grandes lignes ci-dessous.

5.2.1 Le “background mesh”

Avant de décrire le processus de génération du maillage, il convient d'introduire la notion de “*background mesh*”. Comme son nom l'indique, le “background mesh” est un maillage recouvrant le domaine à discrétiser et sur lequel est défini le champ représentant les caractéristiques du maillage souhaité. Dans notre cas, il s'agira simplement de la densité de maille, mais on pourrait aussi contrôler l'étirement et l'orientation des mailles. Dans le cas de la génération du maillage initial (c'est-à-dire avant tout calcul), le “background mesh” est introduit par l'utilisateur et contient généralement peu d'éléments. Par contre, lors d'un remaillage, on utilisera tout naturellement le maillage à remplacer comme “background mesh”. En effet, c'est aux nœuds de ce maillage qu'on déterminera la discrétisation souhaitée localement, et ce à partir des variables d'état.

Au cours de la génération du maillage, on sera très souvent amené à déterminer la densité de maille souhaitée en un point donné du domaine. Cela implique de déterminer dans quel élément du “background mesh” se situe ce point, la valeur de la densité étant alors obtenue par interpolation entre les valeurs nodales de l’élément. Ce processus de recherche intervenant au moins une fois par élément généré, il peut représenter une partie non-négligeable du temps de calcul nécessaire à la génération du maillage complet. La méthode la plus robuste, mais aussi la plus coûteuse en temps de calcul consiste en un balayage systématique de tous les éléments jusqu’à ce qu’on ait trouvé le bon. Il existe bien entendu des méthodes plus “intelligentes” dans le sens où elles tiennent compte des résultats obtenus précédemment pour orienter la recherche. Par exemple, Peraire *et al.* ⁽¹⁰⁰⁾ ont proposé un algorithme très simple se basant sur les coordonnées barycentriques du point considéré dans l’élément triangulaire testé pour déterminer quel élément voisin est le plus susceptible d’être celui recherché. Dans le cas d’un maillage quadrangulaire, nous proposons une extension simple consistant à tester le quadrangle en deux fois, sur base d’une division en deux triangles. Plus de détails sont donnés dans l’*annexe B*. Notons que l’efficacité de cette méthode simple ne peut être garantie dans le cas d’un “background mesh” dont le polygone frontière n’est pas convexe. La solution est d’utiliser en pratique le domaine compris dans l’enveloppe convexe du maillage en ajoutant à ce dernier les éléments nécessaires. On peut également citer l’algorithme de recherche, basé sur le “bucket algorithm”, proposé par Jansen *et al.* ⁽⁶²⁾. Cet algorithme, un peu plus complexe dans son principe, ne demande que de l’ordre d’une opération par point testé mais nécessite un prétraitement des données plus lourd.

5.2.2 Discrétisation du contour

La première étape de la génération d’un maillage (cela est également vrai pour la méthode d’interpolation transfinie) est la discrétisation du contour du domaine à mailler. Pour garantir l’existence d’un maillage entièrement quadrangulaire, la seule condition à remplir est de discrétiser le contour en un nombre pair d’arêtes.

La manière dont est défini le contour peut varier selon l’étape du calcul à laquelle on se trouve. Ainsi, lors de la création du maillage initial, le contour est décrit comme une suite de courbes de différents types (droite, arc de cercle, spline, ...). Par contre, lors d’un remaillage, le contour est défini comme le polygone composé de toutes les arêtes formant la frontière. Même si on a gardé trace de la structure topologique du contour (on sait qu’il est composé d’une certaine suite de lignes, auxquelles sont associées des nœuds), la déformation du maillage est généralement telle qu’on ne peut plus associer de type particulier aux différentes lignes composant le contour. Cependant, il est nécessaire de définir une (des) courbe(s) frontière pour pouvoir discrétiser le contour. Il est important que le volume du domaine défini par ce “nouveau” contour ne s’écarte pas trop du volume associé au maillage de départ, sous peine d’assister à une érosion (ou à un gonflement) de la structure à chaque remaillage. On constate ainsi sans peine que le fait de placer les nouveaux nœuds sur le polygone frontière du maillage de départ conduit à une perte systématique de volume dans le cas d’un domaine convexe, comme illustré à la figure 5.1. Par contre, l’utilisation de splines cubiques, ayant les anciens nœuds frontière comme pôles, pour représenter la frontière conduit généralement à des résultats nettement plus satisfaisants. A l’*annexe C*, on rappelle comment construire une courbe C^1 passant par un nombre donné de points à partir de splines cubiques.

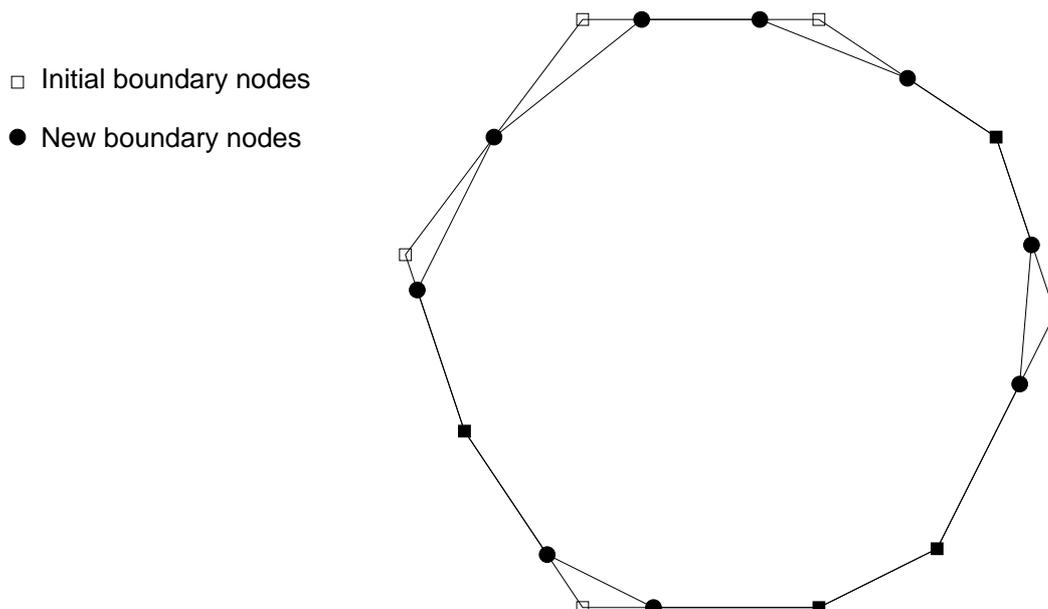


Figure 5.1: Remaillage du polygone frontière avec perte de volume

Pour chaque courbe composant le contour, on va donc réaliser la suite d'opérations suivantes, et ce quel que soit le type de ces courbes (Zhu *et al.* ⁽¹⁴⁰⁾). Tout d'abord, on détermine le nombre d'arêtes au moyen desquelles on va discrétiser la courbe. Ce nombre, noté N , sera l'entier le plus proche de

$$A = \int_0^l \left(\frac{1}{\delta(s)} \right) ds \quad (5.1)$$

où s est l'abscisse curviligne de la courbe, variant entre 0 et l , l étant la longueur de la courbe. La fonction $\delta(s)$ représente la projection du champ "taille de maille souhaitée" sur la courbe, et donc $1/\delta(s)$ représente une fonction densité de maille. L'abscisse curviligne du nœud k ($k = 0, 1, 2, \dots, N$) sur la courbe sera donnée par s_k de manière à vérifier l'équation suivante :

$$k = \frac{N}{A} \int_0^{s_k} \left(\frac{1}{\delta(s)} \right) ds \quad (5.2)$$

Ces calculs seront répétés pour chaque courbe. Cependant pour la dernière courbe du contour, on incrémentera éventuellement N de une unité de manière à bien obtenir un nombre pair de segments au total. Alternativement, on peut imposer un nombre pair de segments sur chaque courbe, mais on risque alors d'augmenter inutilement le nombre final de nœuds et d'éléments. On peut également faire remarquer qu'il est préférable de prendre N comme étant le premier entier supérieur à A , de manière à avoir au moins un élément par courbe. Comme on n'a pas accès à la forme analytique de la fonction $\delta(s)$, les intégrales ci-dessus doivent être évaluées par intégration sur un nombre fini de points. Dans le cas de la création du maillage initial, il faut donc évaluer l'intégrand en un nombre fini de points (uniformément) répartis sur la courbe. Il est à noter que ces points sont uniquement utilisés pour calculer les intégrales et n'ont rien à voir avec les nœuds à générer. Par contre, lors d'un remaillage, les points d'intégration seront les pôles de la spline, c'est-à-dire les nœuds frontière du maillage de départ, étant donné qu'en dehors de ces points la valeur de la densité de maille ne peut être obtenue que par interpolation entre ces mêmes points. On détaille à l'annexe C les équations relatives au calcul des deux intégrales (5.1) et (5.2).

5.2.3 Génération du maillage

La méthode frontale, comme son nom l'indique, génère les éléments les uns après les autres à partir d'un front consistant en une suite orientée et fermée d'arêtes et qui se rétrécit au fur et à mesure de la génération des mailles. Le front initial est constitué des arêtes qu'on a construites sur le contour et est orienté "aire à mailler à gauche". Dans le cas d'un domaine non-connexe, étant donné qu'il ne peut y avoir qu'un seul front par domaine, il est nécessaire d'insérer des coupures reliant les contours internes au contour externe. Ces coupures seront discrétisées en un certain nombre d'arêtes de la manière expliquée au paragraphe précédent. Le nombre d'arêtes générées sur les coupures n'a aucune influence sur la parité du nombre total d'arêtes étant donné que ces coupures sont toujours parcourues dans un sens puis dans l'autre lorsqu'on suit le front. L'automatisation de la génération des coupures peut sembler très simple à première vue, mais il faut prendre garde à certains pièges. Par exemple, une coupure qui divise un coin à angle droit en deux angles de 45° empêche alors de générer un quadrangle dans ce coin, ce qui est assez dommageable pour la qualité du maillage. La génération automatique des coupures doit donc être utilisée avec une certaine prudence.

La procédure de génération d'un élément quadrangulaire consiste en la suite des opérations suivantes (Zhu *et al.* ⁽¹⁴⁰⁾) :

1. Choisir une arête sur le front actuellement traité. On peut choisir la première qui se présente mais, dans le cas d'une forte transition de taille de maille à travers le domaine, il est préférable de choisir la plus courte parmi les arêtes du front. On désignera par A et B le premier et le second nœuds de l'arête (dans le sens de parcours du front).
2. Générer un triangle de base AB et de sommet C , selon la méthode d'avancée de front de Peraire *et al.* ⁽¹⁰⁰⁾. Le nœud C est soit un nœud du front, soit un nouveau nœud. Dans le premier cas, le front actuel est alors divisé en deux sous-fronts (voir figure 5.2). Un de ces sous-fronts peut être vide, si C précède directement A ou suit directement B , mais en aucun cas les deux ne peuvent l'être vu la condition sur la parité du nombre total d'arêtes du front.
3. Choisir entre AC et CB l'arête sur laquelle on va construire le second triangle destiné à former un quadrangle avec le premier. Si C était un nouveau nœud, c'est-à-dire si on n'a pas dû générer de sous-front, le choix est libre. Par contre, si on a généré des sous-fronts à l'étape précédente, l'arête choisie sera celle appartenant au sous-front comportant un nombre impair d'arêtes (0 étant considéré comme un nombre pair).
4. Générer un nouveau triangle sur la base déterminée à l'étape précédente et dont le sommet sera appelé D suivant la même méthode que pour le premier triangle. A ce niveau, on impose cependant une contrainte supplémentaire dans le cas où D est un nœud du front (ou du sous-front le cas échéant). En effet, il est fondamental que les sous-fronts éventuellement générés lors de cette étape contiennent tous un nombre pair d'arêtes, afin de garantir la bonne continuation du processus jusqu'à son terme.
5. Fusionner les deux triangles précédemment générés par suppression de l'arête ayant servi de base au second de ces triangles. La forme du quadrangle ainsi créé n'est pas toujours très bonne, mais l'étape de post-traitement (décrite plus loin) qui suit la génération du maillage complet y remédiera si nécessaire.

6. Mettre à jour les fronts. Le front initial peut avoir été divisé au maximum en trois sous-fronts, contenant tous un nombre pair d'arêtes. Il reste donc à choisir (indifféremment) un de ces sous-fronts et à y générer le quadrangle suivant.

La suite d'opérations ci-dessus est répétée jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de front. On a alors complètement couvert le domaine délimité par le front initial.

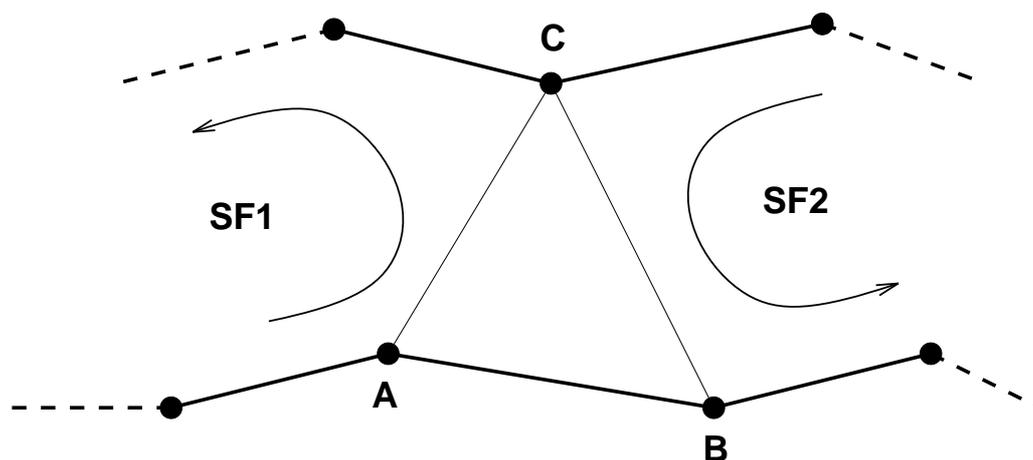


Figure 5.2: Division du front en deux sous-fronts

Il est souvent préférable d'avoir un maillage le plus régulier possible le long de la frontière du domaine étudié. C'est pourquoi Zhu *et al.* ⁽¹⁴⁰⁾ préconisent de générer une ou deux couches d'éléments par une méthode de projection "offset" avant de passer à la méthode décrite ci-dessus pour mailler l'intérieur du domaine. La méthode "offset" ne peut en effet être utilisée pour mailler l'entièreté du domaine car elle est mal adaptée à la génération de zones de transition. Notons au passage que, de manière très générale, cette approche "mixte" est également valable pour les autres méthodes de génération de quadrangles (de type "quadtree" par exemple).

5.2.4 Post-traitement du maillage généré

Les quadrangles générés par la méthode qui vient d'être décrite sont parfois loin de la forme idéale. Il convient donc d'exécuter sur le maillage brut une série d'opérations visant à l'améliorer. Le premier type d'opération consiste en une modification locale de la topologie afin d'améliorer la régularité du maillage. Parmi ce type d'opérations, citons l'élimination de nœuds, d'éléments ou d'arêtes, ainsi que le "diagonal swapping" (Zhu *et al.* ⁽¹⁴⁰⁾). Le second type d'opération possible ne modifie pas la topologie du maillage, mais tend simplement à ajuster la position des nœuds intérieurs. Ainsi l'utilisation d'une procédure de lissage laplacien permet d'améliorer significativement le maillage obtenu à la suite de la première série d'opérations de post-traitement. Blacker et Stephenson ⁽¹⁷⁾, qui ont également développé une méthode de maillage en quadrangle qu'on peut ranger dans la classe des mailleurs frontaux, conseillent même de procéder à un lissage local (impliquant seulement quelques nœuds) à intervalles réguliers pendant la génération des éléments. Cependant, nous n'utiliserons le lissage que sur le maillage final.

5.3 Critères pour une discrétisation optimale

Un élément fondamental du calcul adaptatif est la méthode permettant de déterminer, au vu d'un champ solution issu d'une certaine discrétisation, quelle devrait être la *discrétisation optimale* à adopter pour la suite du calcul. Un autre problème, préalable au premier mais qui lui est assez fortement lié, est celui de décider quand un maillage ne satisfait plus aux critères de qualité que l'on s'est donnés. Le problème peut donc se résumer comme suit : il faut évaluer la *qualité du maillage* en chaque noeud (ou en chaque élément) et en déduire le niveau de discrétisation optimal en ce point. De manière générale, on peut distinguer trois types de mesure de la qualité d'un maillage : les mesures à base topologique ou géométrique, les mesures basées sur l'allure du champ solution obtenu avec ce maillage et les mesures basées sur le calcul d'une erreur partout sur le champ solution.

5.3.1 Mesures à base géométrique

Chaque type d'élément fini a une forme que l'on peut qualifier d'optimale. C'est la forme pour laquelle le champ de déplacement que l'on se donne (on considère ici des éléments cinématiquement admissibles) est le mieux "réparti", le plus régulier sur l'élément. Par exemple, pour les quadrangles, il est clair que la forme carrée est optimale. L'importante déformation que peut subir le maillage au cours de la mise en charge dégrade donc peu à peu la capacité des éléments à représenter correctement la solution. Dans les cas extrêmes, qui ne sont pas si rares en pratique, on peut même aboutir à des situations où un ou plusieurs éléments présentent un caractère pathologique (volume négatif, par exemple) empêchant la poursuite du calcul. Une mesure de la distorsion des éléments permet donc de quantifier la qualité du maillage, fournissant ainsi un indicateur sur base duquel décider de la poursuite du calcul après chaque pas de temps. Cependant ce type de mesure ne permet pas de déterminer un niveau de discrétisation optimal puisque la solution calculée sur le maillage n'y intervient pas du tout. Par contre, il peut suffire si le seul but est d'éviter l'apparition d'éléments trop distordus. On se contentera alors d'opérer un remaillage à niveau de discrétisation constant (fixé par l'utilisateur) quand l'indicateur de distorsion d'un certain nombre d'éléments aura atteint un seuil donné.

La seule information géométrique dont on peut éventuellement déduire une taille de maille est la courbure du contour. On peut en effet imposer une certaine précision dans la représentation de la frontière par les arêtes qui la composent, comme suggéré par Dick et Harris ⁽²⁹⁾. Ainsi, si R est le rayon de courbure, on peut par exemple en déduire la taille caractéristique de maille suivante :

$$\delta_{min} = \frac{R}{2\pi n} \quad (5.3)$$

qui conduirait à la représentation d'un cercle par n segments.

De nombreux critères géométriques ont été proposés dans la littérature (voir notamment Habraken *et al.* ^(33,52,53)), mais nous décrivons ici un indicateur inspiré de l'expression du pas de temps critique pour la stabilité du schéma d'intégration temporelle explicite par différence centrée. En effet, dans ce type de schéma d'intégration temporelle, la stabilité est conditionnée par l'utilisation d'un pas de temps tel qu'une onde de perturbation ne peut traverser plus d'un élément durant cet intervalle (voir Belytschko ⁽⁹⁾). Cette condition peut être démontrée dans le cadre linéaire et est largement utilisée dans le cadre non-linéaire. Dick et Harris ⁽²⁹⁾

proposent d'interrompre un calcul explicite pour remailler lorsque le pas de temps critique devient inférieur au pas de temps initial multiplié par un certain coefficient (inférieur à l'unité). Ce critère est justifié par le fait que le pas de temps critique est, par sa définition, lié à la distorsion de l'élément. Dans un article consacré à la sous-intégration (Stainier et Ponthot ⁽¹²⁴⁾), nous avons proposé une expression de ce pas de temps critique basée sur les bornes pour la pulsation propre d'un quadrangle bilinéaire à un point de Gauss, qui avaient été établies par Flanagan et Belytschko ⁽⁴¹⁾ :

$$\Delta t_{crit} = \sqrt{\frac{\rho}{(\lambda + 2\mu)b_{iI}b_{iI}}} \quad (5.4)$$

où ρ est la densité, λ et μ les coefficients de Lamé et où les b_{iI} sont les dérivées spatiales des fonctions de forme au centroïde (voir *annexe A*). Dans cette expression, le produit $b_{iI}b_{iI}$ est représentatif de la géométrie de l'élément. Nous en avons dérivé l'indicateur de distorsion suivant (pour plus de détails, voir *annexe D*) :

$$\tau = \frac{(x_{24} - y_{31})^2 + (x_{31} + y_{24})^2}{2A} \quad (5.5)$$

où x_{ij} (y_{ij}) est écrit pour $x_i - x_j$ ($y_i - y_j$) et où A représente l'aire de l'élément. La numérotation des nœuds du quadrangle est donnée à la figure 5.3.

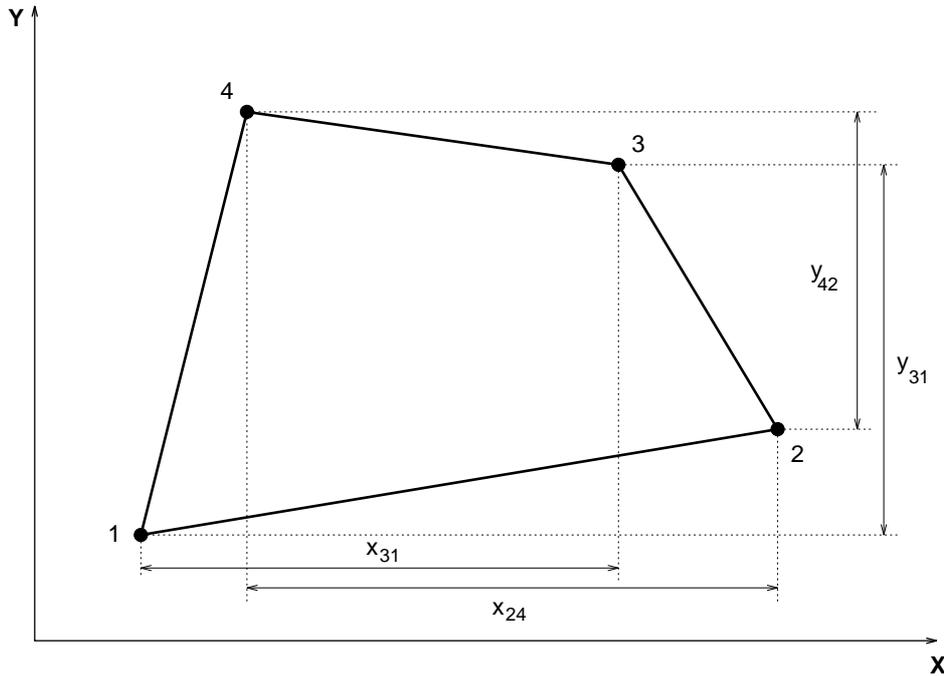


Figure 5.3: Numérotation des nœuds du quadrangle bilinéaire

L'indicateur τ est adimensionnel et varie entre 0 (pour un carré) et ∞ (pour un élément d'aire nulle par exemple). A titre d'illustration, considérons un rectangle de côtés a sur b , pour lequel l'indicateur devient :

$$\tau = \frac{(a - b)^2}{ab} = \frac{(1 - \frac{b}{a})^2}{\frac{b}{a}}$$

Si on veut limiter l'élongation de l'élément à 5, on a alors une distorsion critique de

$$\tau_{crit} = \frac{16}{5} = 3.2$$

Cela donne une idée de l'ordre de grandeur de la distorsion qui peut être admise. Si le quadrangle dégénère en un triangle par coïncidence de deux de ses nœuds, l'indicateur τ conservera une valeur limitée. En effet, pour un triangle de base b et de hauteur h , on aura :

$$\tau = \frac{(1 - \frac{2h}{b})^2}{\frac{2h}{b}}$$

il n'y a cependant rien d'étonnant à cela, puisqu'on peut construire des éléments triangulaires linéaires par dégénérescence d'éléments quadrangulaires bilinéaires (voir Hughes ⁽⁶¹⁾ ou Ponthot ⁽¹⁰⁸⁾). Par contre, si le quadrangle dégénère en un triangle par alignement de trois de ses nœuds, rien ne garantit que l'indicateur τ prendra une valeur élevée.

L'expression (5.5) constitue donc un indicateur de distorsion d'une efficacité relative, mais présentant l'avantage d'être très bon marché au niveau temps de calcul. Il nous servira comme critère d'arrêt du calcul pour remaillage.

5.3.2 Méthodes basées sur l'allure du champ solution

À côté de la qualité purement géométrique du maillage, on peut évaluer sa capacité à représenter le ou les champs solution qu'il vise à calculer. Autrement dit, on se pose la question de savoir si le champ (discrétisé) de déplacement que l'on s'est donné est apte à représenter correctement la solution que l'on cherche à obtenir. Ce problème se pose de manière aiguë lorsque la solution présente de fortes variations, comme c'est le cas en présence de chocs ou de bandes de cisaillement. La position et l'orientation de ces singularités n'est généralement pas connue à l'avance, et il apparaît donc intéressant de pouvoir adapter la discrétisation pour en tenir compte au fur et à mesure de leur apparition. Ajoutons que l'on peut également observer de forts gradients dans les zones où l'on impose les conditions limites (contact, fixation, force extérieure, ...). On va donc chercher à construire un indicateur basé sur un (ou plusieurs) champ considéré comme représentatif de la solution et qui nous donnera la taille de maille nécessaire à une bonne représentation de cette solution. Dans le cadre de la mise en forme des métaux ductiles, la variable la plus représentative est sans doute la déformation plastique équivalente. Si l'on s'intéresse à l'apparition de microfissures, on peut éventuellement y ajouter l'endommagement. En ce qui concerne les bandes de cisaillement, on peut également imaginer de tenir compte du critère de bifurcation de Rice ⁽¹¹²⁾ (basé sur le tenseur acoustique), mais ce dernier ne donne pas directement d'information sur la largeur de la bande de cisaillement.

Soit donc f le champ à partir de l'allure duquel on veut déduire la nouvelle discrétisation. Dans le cas unidimensionnel, si le champ f est représenté sur des éléments linéaires, on peut considérer que l'erreur moyenne de troncature par élément est de l'ordre de

$$h^2 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|$$

où h est la taille de l'élément (voir Peraire *et al.* ⁽¹⁰⁰⁾ ou Pastor *et al.* ⁽⁹⁸⁾). Le maillage optimal est celui pour lequel l'erreur de troncature est uniformément répartie sur tous les

éléments, c'est-à-dire pour lequel on a :

$$h^2 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right| = \text{constante} \quad (5.6)$$

A deux dimensions, on se basera sur la matrice hessienne suivante

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

dont les directions principales X_1 et X_2 permettent de définir :

$$\lambda_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial X_1^2}, \quad \lambda_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial X_2^2}, \quad |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \quad (5.7)$$

De là, on peut déduire les tailles d'élément souhaitées dans les directions principales :

$$\delta_1^2 = \frac{|\lambda_1|_{max}}{|\lambda_1|} \delta_{min}^2 \quad \text{et} \quad \delta_2^2 = \frac{|\lambda_1|_{max}}{|\lambda_2|} \delta_{min}^2 \quad (5.8)$$

où δ_{min} , défini par l'utilisateur, détermine le niveau de précision souhaité. La connaissance de δ_1 et de δ_2 permettrait de construire un maillage orienté, mais nous travaillerons ici avec des maillages isotropes, et on choisira donc :

$$\delta = \sqrt{\delta_1 \delta_2} \quad (5.9)$$

ou encore

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_{max}) \quad (5.10)$$

où δ_{max} est la taille d'élément que l'on souhaite ne pas dépasser pour des raisons pratiques.

A côté de cette méthode basée sur les dérivées secondes du champ, on peut également adopter une méthode, que l'on pourrait sans doute qualifier de plus heuristique, basée sur les dérivées premières du champ. L'idée est alors d'essayer d'obtenir un maillage tel que la variation (relative) du champ soit uniforme à travers tous les éléments. On définit alors les λ_1 et λ_2 de la manière suivante :

$$\lambda_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \lambda_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad (5.11)$$

On en déduit alors les tailles d'élément suivantes pour chacune des directions de l'espace :

$$\delta_1 = \frac{|\lambda_1|_{max}}{|\lambda_1|} \delta_{min} \quad \text{et} \quad \delta_2 = \frac{|\lambda_1|_{max}}{|\lambda_2|} \delta_{min} \quad (5.12)$$

et on définit toujours δ par (5.9) ou (5.10). On peut prendre $|\lambda_1|_{max}$ comme égal à la valeur maximale de $|\lambda_1|$ rencontrée sur tous les nœuds, ou bien se donner une valeur de la constante $|\lambda_1|_{max} \delta_{min}$.

L'évaluation des dérivées premières et de la matrice hessienne du champ f à partir de ses valeurs en un nombre fini de points est obtenue par reconstruction linéaire ou quadratique sur base de la méthode des moindres carrés. Cela demande simplement de connaître les voisins de chaque point, et parfois les voisins des voisins pour pouvoir travailler avec suffisamment de points.

5.3.3 Méthodes basées sur la notion d'erreur

Si l'on veut pousser plus loin la prise en compte de la solution pour guider la génération du nouveau maillage, on peut utiliser la notion d'erreur. D'une manière très générale, on peut considérer deux types d'approche de la notion d'erreur. Une première approche, dont Zienkiewicz et Zhu ⁽¹⁴²⁾ ont été les pionniers, consiste à mesurer l'erreur comme étant une certaine norme (typiquement dans L^2) de la différence entre le champ solution donné par les éléments finis et un champ considéré comme plus proche de la solution exacte. Ce dernier champ est obtenu par reconstruction à un ordre supérieur à celui de la solution éléments finis. Ce type d'approche a été adoptée par de très nombreux auteurs, parmi lesquels on peut citer p.e. Zhong ⁽¹³⁹⁾ pour une application à l'élasticité linéaire et Habraken *et al.* ^(33,34,52,53) pour une application à la mise en forme. Ladevèze et son équipe ^(21,22,67) ont eux proposé une mesure de l'erreur, dite erreur en comportement, basée sur la non-vérification au sens fort d'une partie des équations du problème. Par exemple, ils mesurent l'écart entre le champ des contraintes obtenu par les éléments finis et un champ de contraintes statiquement admissible construit à partir de cette solution. Nous n'entrerons pas plus loin dans le sujet, ce qui nous ferait sortir du cadre du travail, mais il nous semble cependant intéressant de faire remarquer que ces méthodes basées sur le calcul d'erreur demandent de connaître le coefficient de sensibilité de cette erreur à la finesse de la discrétisation. Si la théorie mathématique des éléments finis fournit des valeurs dans le cas linéaire, elle s'est, à notre connaissance, très peu aventurée dans le domaine non-linéaire jusqu'ici. Or la pratique a montré que l'utilisation de résultats établis dans le cadre linéaire hors de celui-ci pouvait se révéler peu fiable ...

5.4 Transfert des données

Après s'être arrêté pour générer un nouveau maillage, et avant de pouvoir reprendre le calcul, il est nécessaire de transférer certaines informations de l'ancien maillage vers le nouveau. En effet, le calcul non-linéaire étant mené de manière incrémentale, on a besoin d'une configuration de référence complète et exprimée dans la nouvelle discrétisation pour pouvoir le poursuivre. Le problème qui se pose alors est de limiter la perte d'information lors du passage d'une discrétisation à une autre.

Les grandeurs à transférer sont localisées soit aux nœuds, soit aux points de Gauss. On a repris au tableau 5.1 une liste des grandeurs à transférer dans le cas quasi-statique et celles qu'il faut y ajouter dans le cas dynamique.

Table 5.1: Liste des grandeurs à transférer et leur localisation

Quasi-statique	
contraintes σ	points de Gauss
variables internes α_i	points de Gauss
Dynamique	
densité ρ	points de Gauss
vitesse \dot{x}	nœuds

Remarque: dans le cas dynamique, on peut imaginer de transférer également l'accélération de manière à pouvoir mesurer le déficit d'équilibre dynamique obtenu avec les champs transférés, ce qui donnerait une indication sur la qualité du transfert. Dans un autre ordre d'idées, on peut également imaginer de transférer la vitesse dans le cas quasistatique, de manière à

obtenir une meilleure première estimation de la configuration équilibrée en fin du premier incrément de charge qui suit le remaillage. \square

Nous adopterons la technique de transfert suivante, qui, si elle n'est certainement pas la moins diffusive, présente néanmoins l'avantage d'être simple et d'une applicabilité très générale. Le transfert consiste en les trois étapes suivantes :

1. Dans le maillage initial, extrapolation des grandeurs aux points de Gauss vers les nœuds. Cette extrapolation peut être locale, c'est-à-dire que l'on traite chaque élément séparément puis qu'on opère un moyennage au niveau des nœuds connectés à plusieurs éléments, ou bien elle peut être globale, c'est-à-dire qu'on utilise une méthode de type moindres carrés pour déterminer directement une valeur unique en tous les nœuds du maillage. Remarquons que cette extrapolation peut poser des problèmes dans le cas d'une discontinuité entre deux éléments voisins (associés à des lois de comportement différentes par exemple).
2. Transfert des grandeurs des nœuds du maillage initial vers le nouveau maillage. On peut considérer que cette opération s'effectue entre deux nuages de points, en dehors de toute connaissance du type des éléments impliqués, ce qui confère à l'opération une grande généralité. Au niveau pratique, cela permet par exemple d'utiliser un programme indépendant du code de calcul proprement dit, sans rien devoir connaître du fonctionnement interne de ce dernier.
3. Dans le nouveau maillage, il reste à interpoler les grandeurs concernées depuis les nœuds vers les points de Gauss.

Cette méthode, qui avait également été utilisée par Dick et Harris ⁽²⁹⁾, ne semble pas, malgré sa simplicité, engendrer une perte trop importante d'informations, comme nous le verrons dans la suite.

Les conditions limites de contact (conditions de non-pénétration) sont ici traitées par la méthode de la pénalité. Si on ne prend en compte aucun phénomène de frottement, c'est-à-dire si on se limite aux cas du contact parfaitement glissant ou du contact collant, il n'existe aucune variable d'hérédité liée à ces conditions limites. Le seul traitement à effectuer lors d'un remaillage consiste alors à éventuellement projeter les nœuds frontières sur la surface de la matrice rigide avec laquelle ils sont en contact. Cela est notamment nécessaire lorsque la discrétisation est affinée au voisinage d'une surface de contact courbe. Si on effectue ensuite une opération de rééquilibrage avant de reprendre le calcul, il en résultera une certaine pénétration de ces nœuds dans les matrices. Par contre, si on voulait considérer le cas du frottement, il conviendrait de transférer certaines informations sur la situation du contact avant remaillage, par exemple la pression de contact.

5.5 Conclusion

En résumé, la procédure de remaillage se déroulera donc comme suit. Le calcul est entamé normalement et on évalue à intervalles réguliers l'indicateur de distorsion (5.5) pour tous les éléments du maillage. Quand cet indicateur dépasse une valeur seuil (choisie par l'utilisateur) pour au moins un des éléments (on peut également se fixer un pourcentage maximal d'éléments ayant atteint ce seuil), le calcul est interrompu et la configuration courante

est archivée dans un fichier intermédiaire. Ce fichier est alors relu par le programme de remaillage, qui construit une nouvelle discrétisation, soit uniforme, avec une taille d'élément donnée, soit adaptative, par l'utilisation d'une des méthodes décrites à la section 5.3.2. Une fois le nouveau maillage construit, la configuration y est transférée (de nœuds à nœuds). Le résultat est alors archivé dans un second fichier intermédiaire. C'est à partir de ce fichier que le programme de calcul peut alors redémarrer. Ces opérations se répètent chaque fois que la distorsion du maillage devient critique, jusqu'à l'obtention de la solution finale. Le processus complet peut bien entendu être automatisé par l'utilisation d'un fichier de commande.

Chapitre 6

Applications (2^{ème} partie)

6.1 Introduction

Nous allons maintenant appliquer les techniques de remaillage qui viennent d'être décrites à deux exemples de mise en forme et au cas de localisation en bandes de cisaillement déjà étudié précédemment. Il s'agit tout d'abord du cas de l'écrasement d'un lopin cylindrique par une matrice rigide. Malgré son apparente simplicité, ce processus est représentatif des processus d'écrasement en général, qui sont fréquemment rencontrés en mise en forme (voir par exemple le cas de la mise en forme du boulon). Nous comparerons les résultats obtenus sans remaillage, avec remaillage uniforme (éléments de taille constante) et avec remaillage adaptatif (éléments de taille variable). Cet exemple illustre bien le gain en qualité de la solution que peut apporter le remaillage.

On étudie ensuite le cas du poinçonnement d'un lopin de matière par une matrice rigide de forme hémisphérique. Ce cas est déjà plus complexe que le précédent, et reprend certaines caractéristiques du processus d'extrusion arrière. Le remaillage y est absolument nécessaire et on utilisera directement les méthodes d'adaptation de la taille d'élément. Cet exemple illustre le gain en temps de calcul lié à une meilleure distribution spatiale des éléments, avec un maillage affiné là où c'est nécessaire.

Pour terminer, on reprend le cas de la plaque plane en traction, pour lequel on va essayer de traiter les bandes de localisation par le remaillage adaptatif. Le processus s'avère assez délicat et les conclusions à en tirer sont mitigées : le remaillage permet bien de capturer des bandes de cisaillement, mais nous n'avons obtenu aucune certitude sur la validité intrinsèque de la solution.

6.2 Ecrasement d'un lopin cylindrique

Le premier exemple de processus de mise en forme auquel nous allons appliquer la technique de remaillage proposée ci-avant est celui de l'écrasement d'un lopin de matière de forme initialement cylindrique. Vu les différentes symétries du problème, nous n'étudierons qu'un quart de section (voir figure 6.1). Le contact entre la matrice rigide écrasant le lopin et la surface de celui-ci sera supposé collant, c'est-à-dire qu'une fois la matière entrée en contact

avec la matrice, il ne peut y avoir aucun glissement entre les deux surfaces. Rappelons que les conditions limites de contact sont ici traitées par la méthode de la pénalité (voir Bittencourt ⁽¹⁶⁾, Ponthot ⁽¹⁰⁸⁾). Le matériau considéré ici est élastoplastique à écrouissage linéaire :

$$E = 200 \text{ GPa} \quad \nu = 0.3$$

$$\sigma_Y = 700 + 300.5 \times \epsilon^{pl} \text{ MPa}$$

Aucun endommagement n'est considéré ici. Le lopin étudié a initialement les dimensions suivantes : $H = L = 0.1 \text{ m}$, et est discrétisé par 10×10 éléments quadrangulaires.

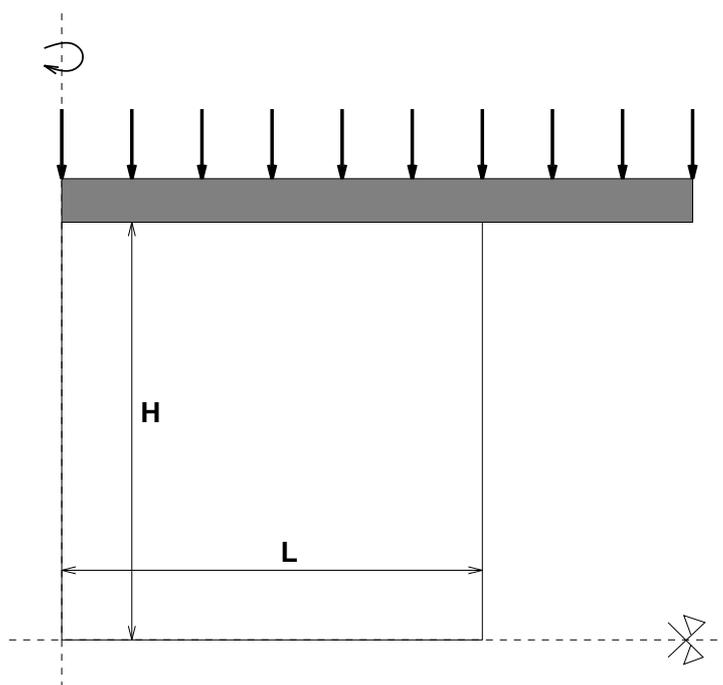
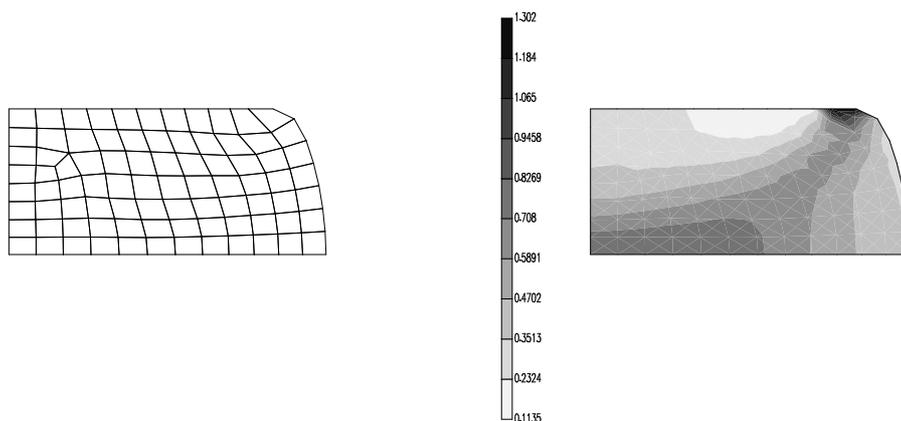
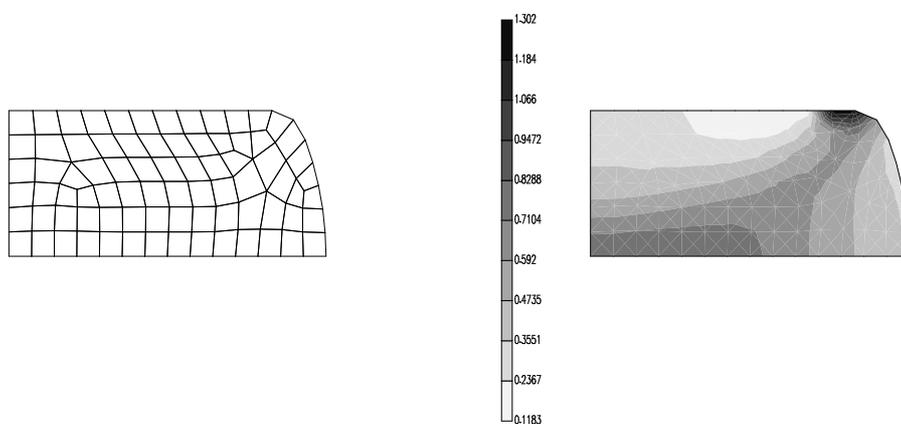


Figure 6.1: Ecrasement d'un lopin – description du problème

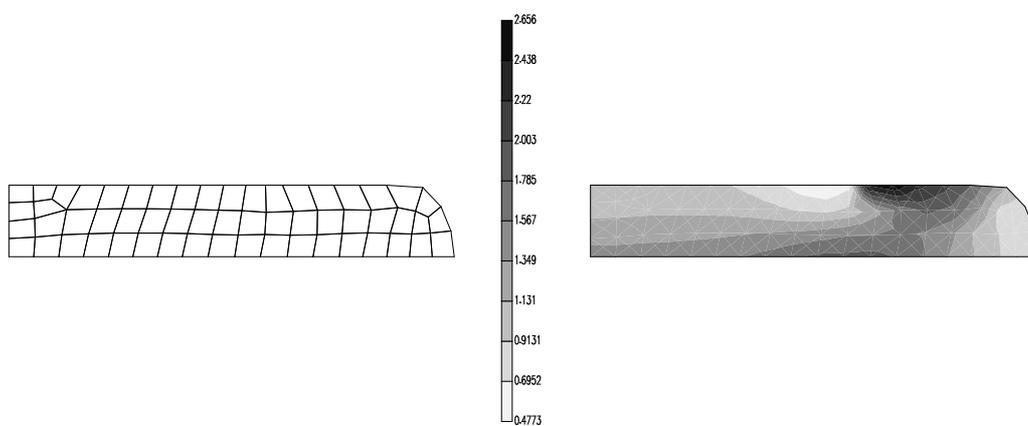
Cette application est à rapprocher du cas de la mise en pré-forme d'un boulon, la tête de celui-ci jouant le rôle du lopin. Or, nous avons constaté dans le cas du boulon une déformation excessivement importante du maillage, ce qui se répète ici, comme on le voit à la figure 6.2, qui montre la solution obtenue pour une réduction de hauteur de 70% si on n'opère aucun remaillage. La situation est particulièrement critique pour l'élément occupant initialement le coin supérieur droit, qui dégénère rapidement en triangle. Ce cas, en apparence simple, se révèle également délicat si on veut lui appliquer la méthodologie eulérienne-lagrangienne basée sur l'interpolation transfinie, telle que proposée par Ponthot ⁽¹⁰⁸⁾. En effet, il faut alors déplacer le "coin", c'est-à-dire l'endroit où l'on considère que l'on passe d'une ligne maîtresse à l'autre, ce qui nécessite la mise en œuvre d'une technique numérique spéciale, que Ponthot désigne par "élément de coin". L'utilisation d'un remaillage complet permet par contre de traiter tout naturellement ce genre de problème, comme nous allons le voir.



a. maillage et déformation plastique équivalente avant remaillage



b. maillage et déformation plastique équivalente après remaillage

Figure 6.3: Remaillage pour une descente de matrice de 39% de H 

a. maillage

b. déformation plastique équivalente

Figure 6.4: Ecrasement d'un lopin – solution avec remaillage uniforme

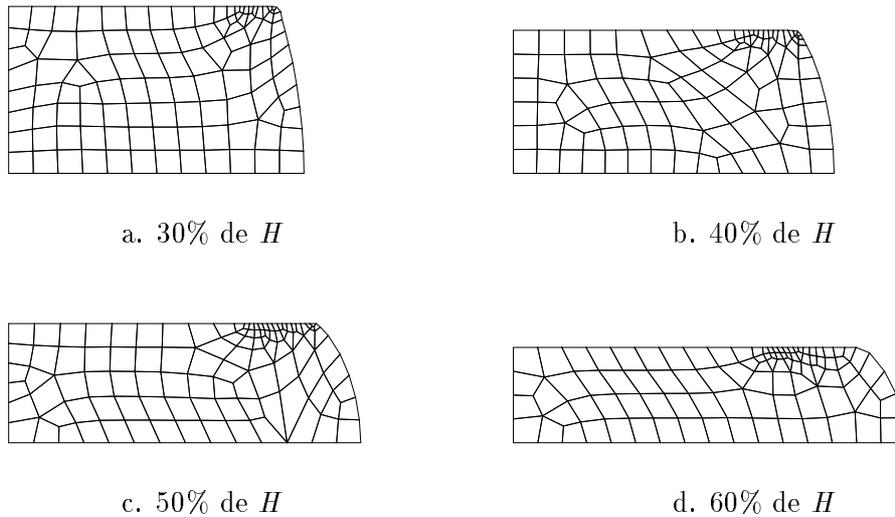


Figure 6.5: Maillages pour différentes valeurs de descente de la matrice

On observe dans les résultats précédents que la déformation plastique équivalente se concentre à l'endroit constituant initialement le coin supérieur droit du lopin (ce qui est physiquement compréhensible). On a donc réalisé le même calcul que ci-dessus, avec remaillage chaque fois que l'indicateur de distorsion (5.5) atteint la valeur critique de 0.5, mais en essayant cette fois d'adapter la taille d'élément au gradient spatial du champ de déformation plastique équivalente : la taille d'élément varie entre 0.002 m et 0.01 m et on essaye d'obtenir une variation relative du champ de déformation plastique équivalente limitée à 10 %. La procédure automatique conduit alors à quinze interruptions du calcul pour remaillage (quelques-uns des maillages intermédiaires sont représentés à la figure 6.5), pour finalement aboutir à la solution représentée à la figure 6.6.

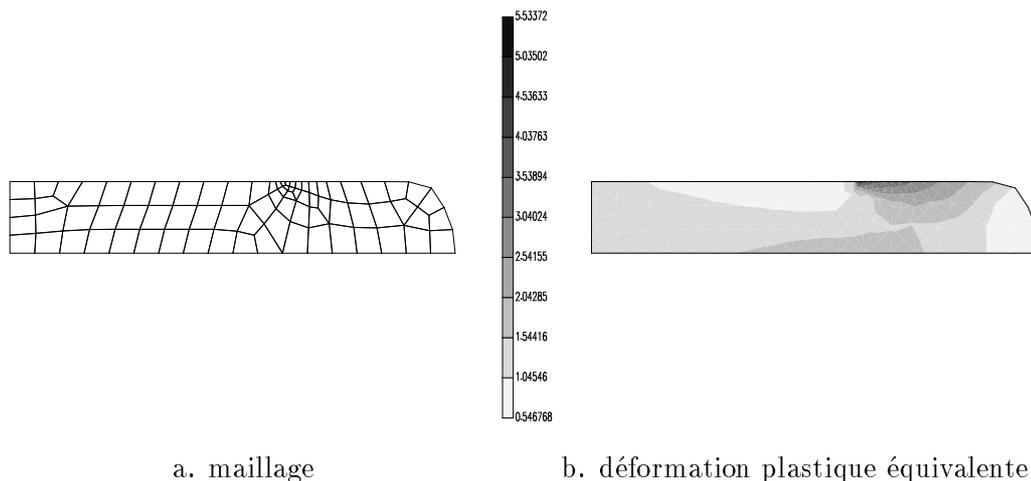


Figure 6.6: Ecrasement d'un lopin – solution avec remaillage adaptatif

Pour conclure cet exemple, on peut dresser un tableau comparatif de différentes grandeurs significatives : nombre de pas, nombre d'itérations, nombre de remaillages, temps CPU*, rayon extérieur (à hauteur du plan de symétrie horizontal) du lopin dans la configuration

*Machine utilisée : DEC Alpha 600

finale, déformation plastique équivalente maximale (table 6.1).

Table 6.1: Ecrasement d'un lopin – tableau comparatif des résultats

	cas 1	cas 2	cas 3
nombre de pas	45	108	210
nombre d'itérations	103	205	522
nombre de remaillages	—	6	15
temps CPU	22 sec	35 sec	2 min 07 sec
rayon extérieur (m)	0.1860	0.1863	0.1865
ϵ_{max}^{pl}	2.965	2.656	5.534

Pour rappel, le cas 1 correspond au calcul sans remaillage, le cas 2 correspond au calcul avec remaillage uniforme et le cas 3 correspond au calcul avec remaillage adaptatif. Ce tableau appelle quelques commentaires. Tout d'abord, l'augmentation du nombre de pas avec le nombre de remaillages est due au fait qu'après une interruption, le calcul doit être repris avec un incrément de mise en charge limité (c'est-à-dire plus petit que le dernier incrément utilisé avant l'interruption). Cette contrainte rentre dans le cadre de la procédure automatique utilisée pour le calcul du pas de temps / incrément de mise en charge et qui consiste à adapter la taille du pas à la vitesse de convergence obtenue au pas précédent. L'étape de (re)démarrage étant plus délicate à ce point de vue, on utilise initialement un pas de temps limité qui croît ensuite au fur et à mesure que le processus incrémental entre "en régime". La répétition de cette phase engendre donc une augmentation du nombre total de pas. Le nombre d'itérations augmente lui aussi, pour les mêmes raisons. On voit en effet que l'on reste à environ 2–3 itérations par pas en moyenne. Parallèlement à l'augmentation du nombre de pas et d'itérations, on constate une augmentation du coût CPU avec le nombre de remaillages. Précisons tout d'abord qu'il s'agit en fait du temps cumulé consommé par les étapes de calcul. Les étapes de remaillage n'ont pas été comptabilisées car leur coût est négligeable, l'opération étant quasi instantanée pour les maillages utilisés ici (nombre d'éléments \ll 1000). Au pire, on pourrait comptabiliser 1 seconde CPU par remaillage. Cela étant dit, il faut prendre en compte les considérations suivantes, qui atténuent quelque peu cette augmentation du coût CPU. En effet, le nombre de remaillages est dans le cas présent assez élevé alors que le temps total de calcul est assez faible : en moyenne, on a ici un remaillage à intervalles de 15 pas et 5 secondes CPU pour le cas 2 et de 14 pas et 7.5 secondes CPU pour le cas 3. Le coût généré par le pré-traitement des données, nécessaire à chaque reprise du calcul, devient alors plus significatif que sur un problème à fréquence de remaillage plus faible (en nombre de pas de temps). A cela s'ajoute également le coût de redémarrage en nombre de pas, comme expliqué plus haut, qui se traduit bien entendu par un coût en temps CPU. Cela étant, les calculs avec remaillages conduisent à des solutions géométriquement semblables : le rayon extérieur varie très peu d'un cas à l'autre. Par contre, même si la répartition des zones les plus plastifiées ne change pas, l'amplitude de la déformation plastique varie elle assez fortement : la diminution de la valeur maximale entre le cas 1 et le cas 2 correspond au meilleur traitement de la zone formant initialement le coin (plus d'élément dégénéralant en triangle) tandis que la valeur élevée obtenue dans le cas 3 correspond simplement au raffinement de la discrétisation dans cette zone.

Pour terminer, on peut encore comparer les courbes de la force d'écrasement exercée au niveau de la matrice en fonction du niveau de descente de celle-ci (figure 6.7). On y observe les pics (négatifs) associés à chaque remaillage. A part cela, l'allure moyenne des courbes varie peu.

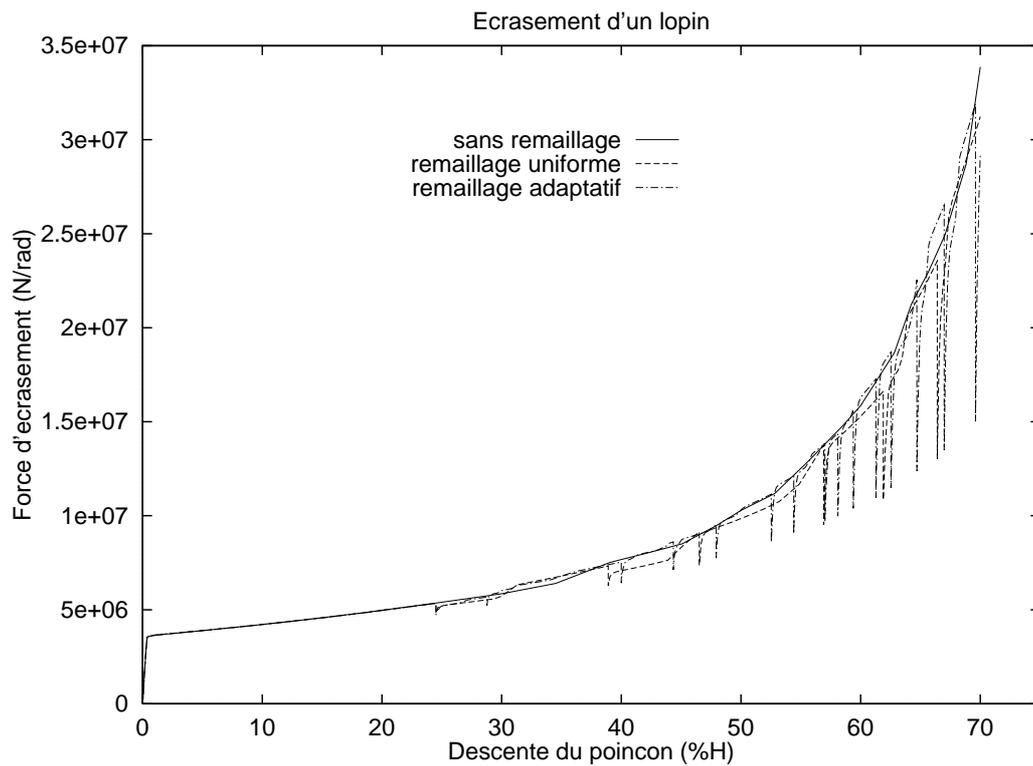


Figure 6.7: Evolution de la force d'écrasement au cours de la descente du poinçon pour les différents cas

L'intérêt principal du remaillage dans ce cas précis réside principalement dans l'amélioration de la qualité de la solution, à un prix qui pourrait à première vue sembler élevé. Mais nous allons voir avec l'application suivante que ce surcoût ne doit certainement pas être considéré comme généralisé, bien au contraire.

6.3 Poinçonnement hémisphérique

Nous allons maintenant illustrer la procédure de remaillage sur un second exemple de processus de mise en forme. Il s'agit ici d'un cas de poinçonnement d'un lopin par une matrice rigide hémisphérique. La géométrie du problème est décrite à la figure 6.8 où l'on voit que l'on va profiter de l'axisymétrie du problème. Les dimensions utilisées ici sont les suivantes : $L = 0.1 \text{ m}$, $H = 0.1 \text{ m}$ et $R = 0.05 \text{ m}$. Le poinçon est enfoncé de 0.05 m dans le lopin (c'est-à-dire complètement enfoncé), dont les propriétés matérielles sont les suivantes :

$$E = 206 \text{ GPa} \quad \nu = 0.3 \quad \rho = 8930 \text{ kg/m}^3$$

$$\sigma_Y = 346.4 + 138 \times \epsilon^{pl} \text{ MPa}$$

Aucun endommagement ne sera pris en compte dans ce cas-ci. Le contact sera ici considéré comme glissant sans frottement.

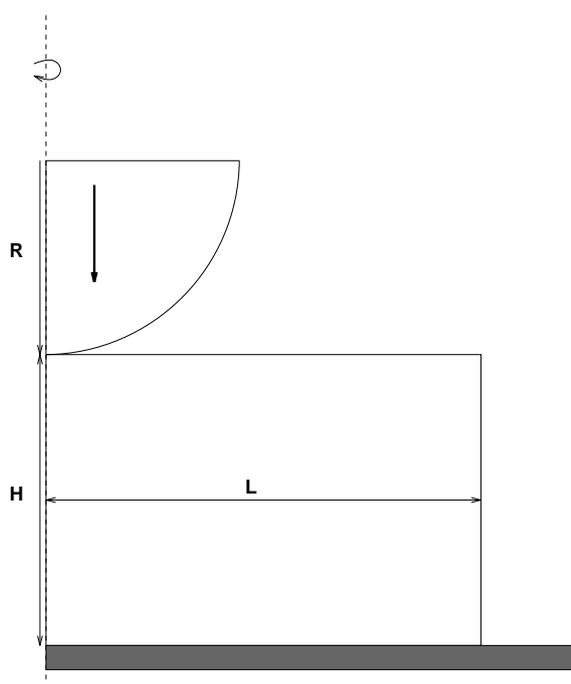


Figure 6.8: Poinçonnement hémisphérique – description du problème

Si on entame le calcul avec un maillage régulier de 100 (10×10) éléments carrés, et que l'on n'opère aucun remaillage, on arrive très rapidement à une situation pathologique et le calcul doit être interrompu pour une descente du poinçon de 84% de la descente souhaitée, ce qui se comprend au vu de l'allure du maillage à cet instant (figure 6.9). Signalons au passage que les valeurs de la déformation plastique grimpent alors jusqu'à plus de 50 !

Afin de pouvoir comparer avec les solutions que l'on obtiendra avec remaillage, on a alors considéré le même calcul avec un maillage initial de 25×25 éléments, pour lesquels on a concentré les nœuds sous le poinçon. On arrive alors à pousser le calcul jusqu'à environ 96% de descente du poinçon, niveau auquel on a la solution représentée à la figure 6.10. De nouveau, on constate la forte distorsion des mailles sous le poinçon, ce qui justifie donc le recours au remaillage.

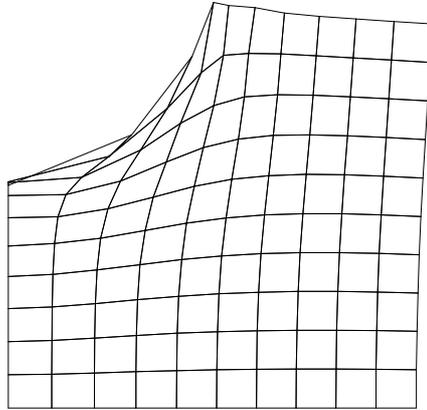
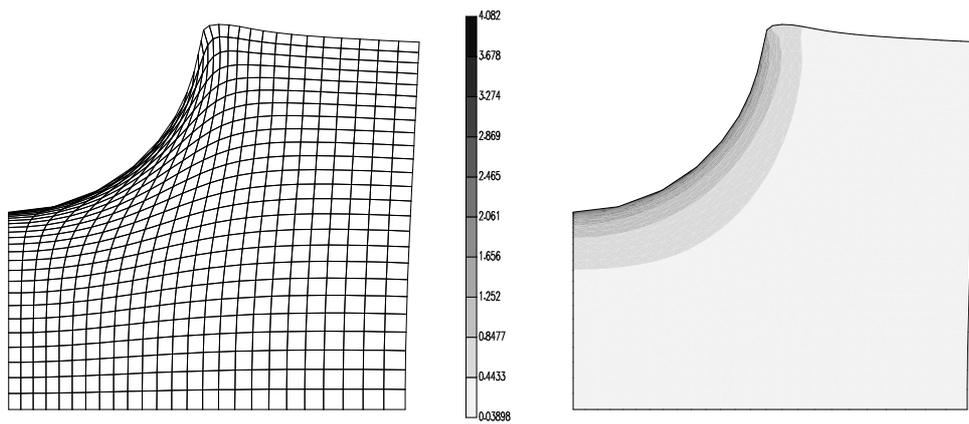


Figure 6.9: Poinçonnement hémisphérique – solution sans remaillage (maillage 10×10), enfoncement de 84%



a. maillage

b. déformation plastique équivalente

Figure 6.10: Poinçonnement hémisphérique – solution sans remaillage (maillage 25×25), enfoncement de 96%

On reprend alors le calcul avec un maillage initial de 10×10 éléments, mais on limite cette fois la distorsion en prenant comme critère l'indicateur (5.5), dont on limite la valeur à 2. Il s'agit d'une valeur déjà assez élevée, mais nous verrons qu'elle suffit à assurer le maintien d'une qualité de maillage correcte. Etant donné la géométrie courbe du poinçon, ainsi que la présence d'un fort gradient de déformation plastique sous ce poinçon, on profitera du remaillage pour affiner la discrétisation au voisinage de la zone de contact. Ainsi, la taille des éléments variera de 0.0007 m à 0.01 m , de manière à ce que la variation relative du champ de déformation plastique équivalente ne dépasse pas 10%. On peut alors conduire le calcul jusqu'à l'enfoncement voulu, c'est-à-dire jusqu'à mi-hauteur du lopin, avec trois interruptions pour remaillage (respectivement à 25%, 41% et 59% de l'enfoncement final – voir figure 6.11), et on obtient la solution présentée à la figure 6.12, avec une discrétisation en 316 éléments. Pour bien illustrer le gain en qualité que l'on a obtenu sur le maillage, on compare à la figure 6.13 un agrandissement de la zone sous le poinçon dans le cas sans remaillage et dans le cas avec remaillage.

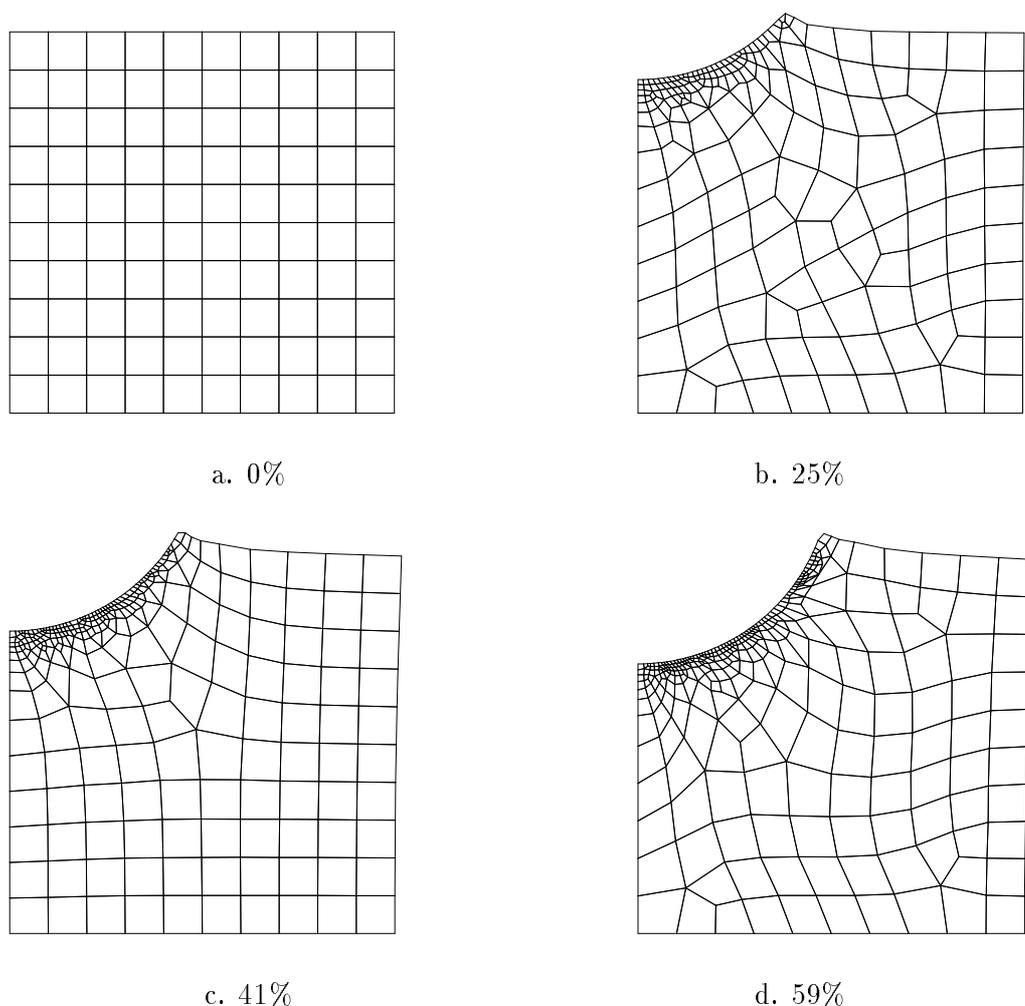


Figure 6.11: Maillages à différents niveaux de descente du poinçon (% de l'enfoncement final)

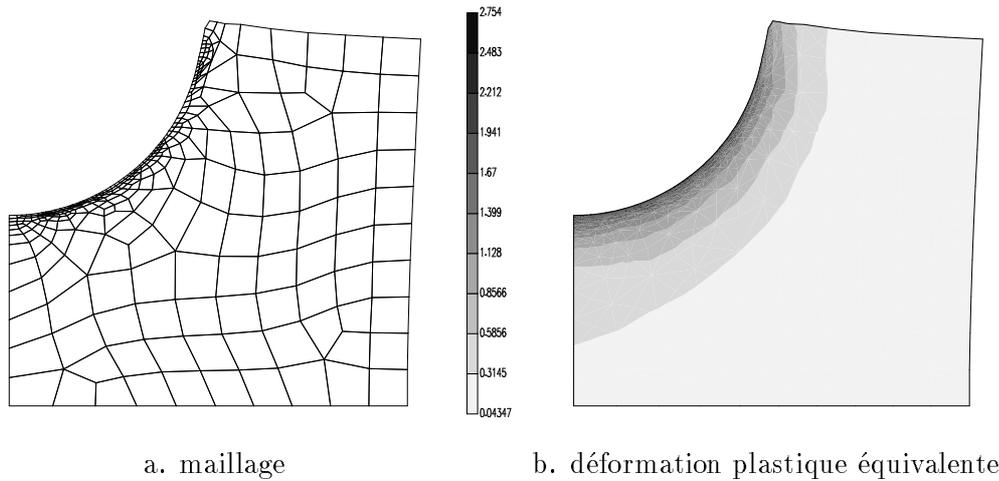


Figure 6.12: Poinçonnement hémisphérique – solution finale avec remaillage

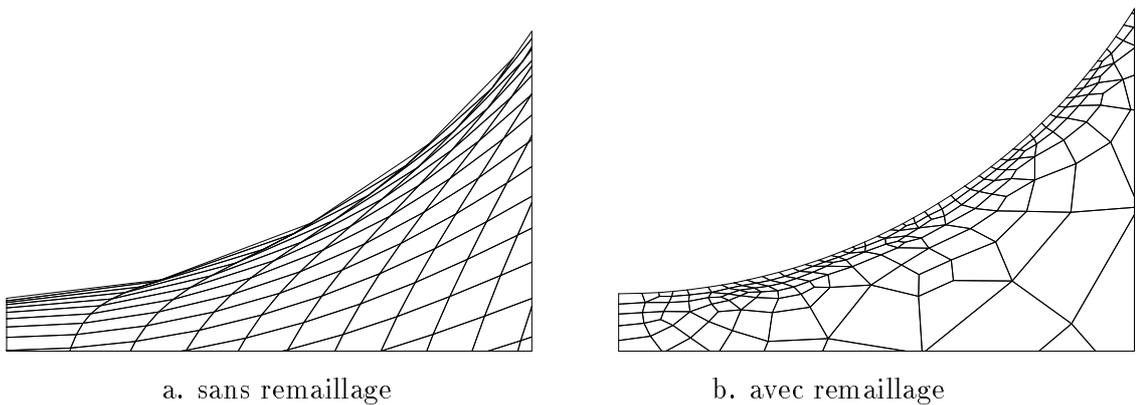


Figure 6.13: Poinçonnement hémisphérique – agrandissement de la zone située sous le poinçon

Afin de mieux quantifier les avantages apportés par le remaillage, on a rassemblé au tableau 6.2 un certain nombre de résultats significatifs : nombre de pas, nombre d'itérations, temps CPU[†], déformation plastique équivalente maximale.

Table 6.2: Poinçonnement hémisphérique – tableau comparatif des résultats

	sans remaillage (25 × 25 éléments)	avec remaillage (3 remaillages)
nombre de pas	410 pas	494 pas
nombre d'itérations	1036 itérations	1293 itérations
temps CPU	1 h 12 min 23 sec	28 min 14 sec
ϵ_{max}^{pl}	4.082	2.754

On constate que l'augmentation du nombre de pas de temps est cette fois assez légère, ce qui peut s'expliquer par la faible fréquence de remaillage (tous les 125 pas en moyenne). En effet, la phase de redémarrage pèse alors moins dans le coût total du calcul. Le nombre d'itérations suit le nombre de pas (comme précédemment, on a en moyenne 2–3 itérations par pas). Quant au temps CPU, on obtient ici un facteur d'environ 2.5 en faveur du cas avec

[†]Machine : DEC Alpha 600

remaillage, contrairement à ce qui avait été obtenu dans l'application précédente. Ce gain important peut être expliqué par plusieurs facteurs. Tout d'abord, dans le cas avec remaillage, le nombre d'éléments en jeu varie entre 100 et 316, contre 625 dans le cas sans remaillage. De plus, le remaillage permet de maintenir une qualité d'élément acceptable, alors que les éléments fortement distordus du cas sans remaillage ralentissent la convergence du processus de recherche de l'équilibre. Mais il est vrai que ce dernier effet favorable est gommé par le coût (en pas et en itérations) des redémarrages. Pour terminer, on constate que l'amélioration de la qualité de la solution se marque également par les niveaux de déformation plastique équivalente qui sont atteints. En effet, dans le cas sans remaillage, la forte distorsion des éléments fait grimper cette grandeur jusqu'à des valeurs supérieures à 4, alors que l'utilisation du remaillage conduit à des valeurs restant inférieures à 3.

Pour terminer, on peut cette fois encore comparer les courbes de la force exercée sur la matrice en fonction de l'enfoncement (figure 6.14). On obtient des courbes assez proches, sauf sur la fin, quand la différence entre la distorsion des mailles dans chacun des cas devient très importante. On remarquera également les sauts liés à la prise de contact d'un nouveau nœud (au début de la courbe), ainsi que les pics négatifs qui correspondent aux remaillages. Notons que leur amplitude est nettement moindre que dans l'exemple de l'écrasement d'un lopin.

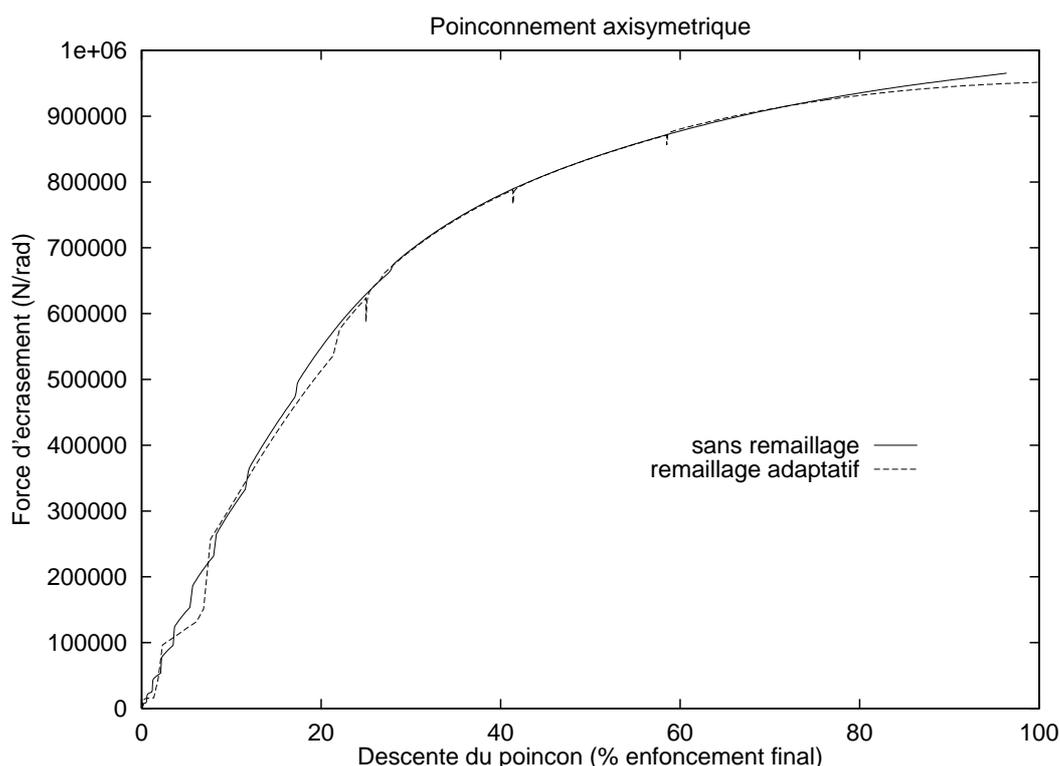


Figure 6.14: Evolution de la force d'enfoncement au cours de la descente du poinçon pour les différents cas

Cet exemple confirme donc l'intérêt des techniques de remaillage, qui permettent une amélioration de la qualité de la solution tout en conservant un coût raisonnable, ou même le diminuant, ce par une distribution mieux adaptée des éléments au travers du domaine de calcul.

6.4 Un exemple de localisation en bandes de cisaillement (suite)

Avant d'appliquer les techniques de remaillage au cas de la plaque plane en traction déjà étudiée, il est intéressant d'observer le processus de différenciation de la solution entre les trois maillages précédemment utilisés. A cette fin, on a représenté à la figure 6.15 la distribution d'endommagement pour chacune des discrétisations et pour un déplacement imposé du bord droit $u = 0.20L$, $u = 0.25L$ et $u = 0.30L$. On y constate que pour un déplacement $u = 0.2L$, la différenciation n'est pas encore réellement apparue : on retrouve une distribution d'endommagement qualitativement identique pour chacun des maillages, c'est-à-dire quatre zones de concentration reliées par des bandes plus ou moins marquées, formant approximativement un motif en damiers. Un peu plus loin, pour un déplacement $u = 0.25L$, la concentration du coin supérieur gauche a tendance à disparaître tandis que les bandes de cisaillement commencent à apparaître nettement, pour les deux maillages les plus fins en tout cas. En effet, dans le maillage grossier, on a l'impression qu'une des zones de concentration absorbe petit à petit la bande de cisaillement supérieure. Pour un déplacement $u = 0.3L$, la différenciation entre les cartes d'endommagement sur chaque maillage est devenue claire, avec deux bandes sur le maillage 10×10 , ce que l'on pourrait appeler deux bandes et demi sur le maillage 20×20 et trois bandes sur le maillage 30×30 . Nous avons également calculé la solution avec 40×40 éléments (non représentée ici), ce qui nous a bien confirmé la tendance observée ici : on retrouve alors nettement les trois bandes, celle du haut se rapprochant du coin supérieur gauche.

De ces considérations, on peut tirer quelques conclusions sur la façon dont un remaillage efficace doit être effectué. Ainsi, il faut éviter de remailler trop tard. Si on remaille quand on a atteint un déplacement $u = 0.3L$ par exemple, on voit bien que le résultat de l'opération dépendra du maillage initial, ce qui ne peut conduire qu'à un renforcement de la différence entre les solutions obtenues avec différents maillages de départ ! Par contre, il semble a priori qu'un remaillage en $u = 0.2L$ devrait conduire à des résultats moins dépendants du maillage de départ. Mais il faut bien dire que le maillage est à ce moment encore assez régulier, ce qui rend notre indicateur de distorsion d'un usage un peu délicat. Sans doute la solution se trouve-t-elle dans l'utilisation de critères de localisation de type Rice ⁽¹¹²⁾, dont nous avons parlé précédemment, mais le développement d'un tel critère sort du cadre que nous nous sommes fixé ici. Le contrôle des instants de remaillage se fera donc dans ce cas-ci de manière plus interactive et moins automatique.

On entame le calcul avec un maillage de $100(5 \times 20)$ éléments initialement carrés. La première interruption a lieu pour un déplacement imposé $u = 0.25L$. A ce moment, la distribution d'endommagement n'est pas encore localisée, elle se fait selon le mode en damier dont nous avons déjà parlé plus tôt (voir figure 6.16). Nous allons donc en profiter pour remailler avant que la localisation ne soit trop poussée. L'adaptation de la taille du maillage se fera cette fois sur base de la dérivée seconde du champ d'endommagement, comme expliqué à la section 5.3.2 du chapitre précédent. Etant donné que ce champ est assez uniforme, nous allons utiliser une taille minimale d'élément pas trop basse, sous peine de se retrouver avec un maillage très fin. On choisit donc un $\delta_{min} = 0.06 L$ et un $\delta_{max} = 0.2 L$. On obtient alors le maillage représenté à la figure 6.16.c.

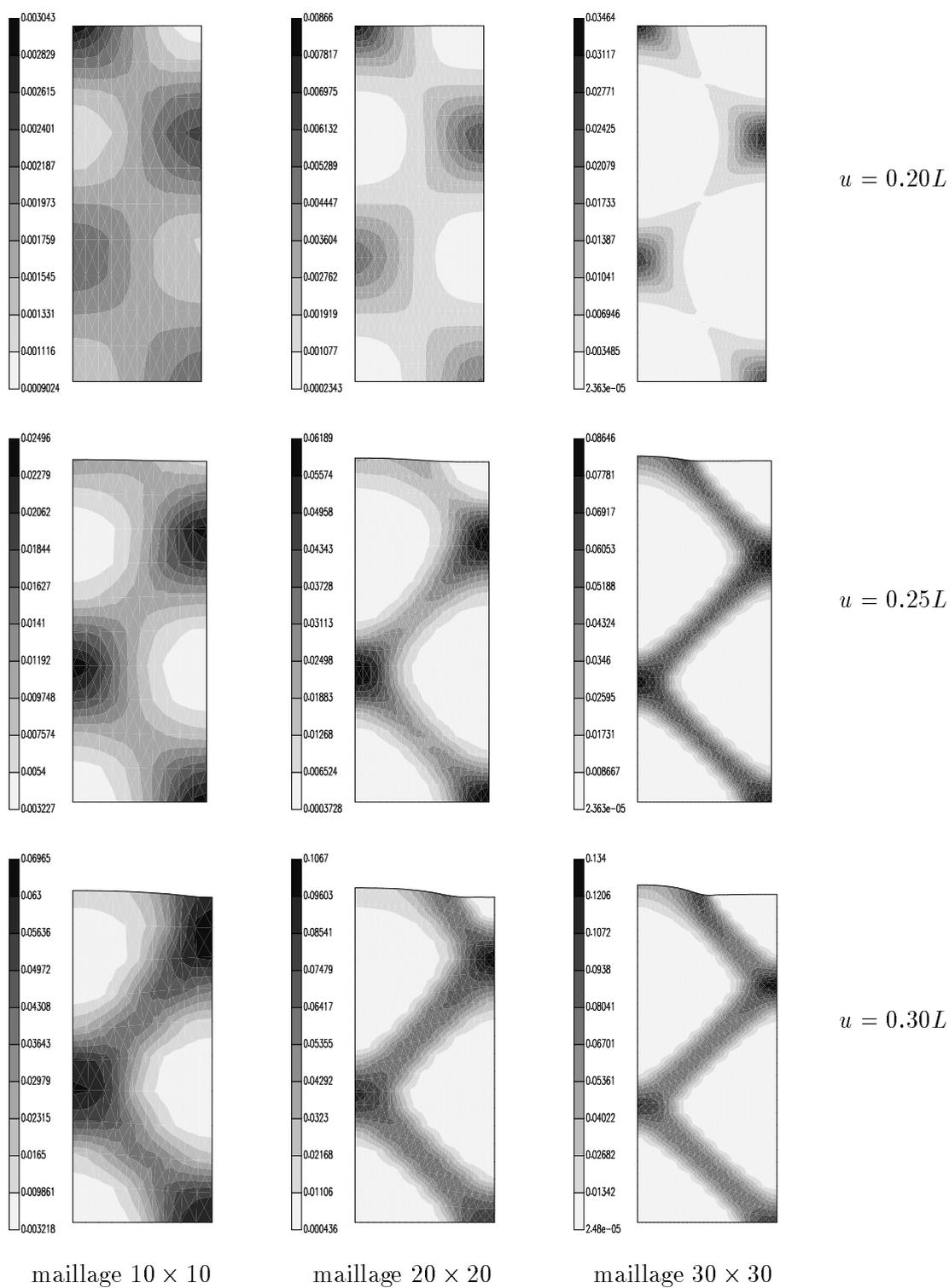
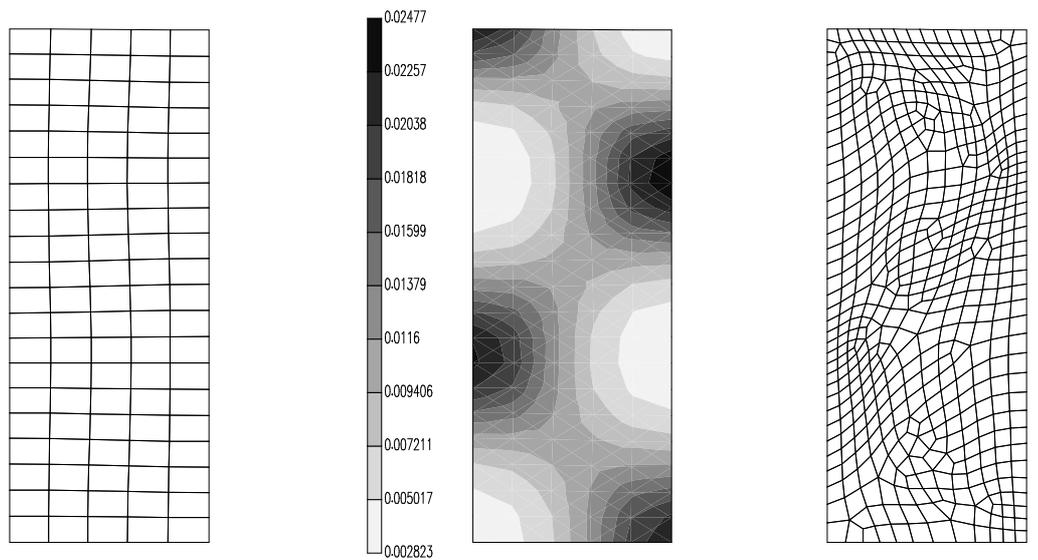
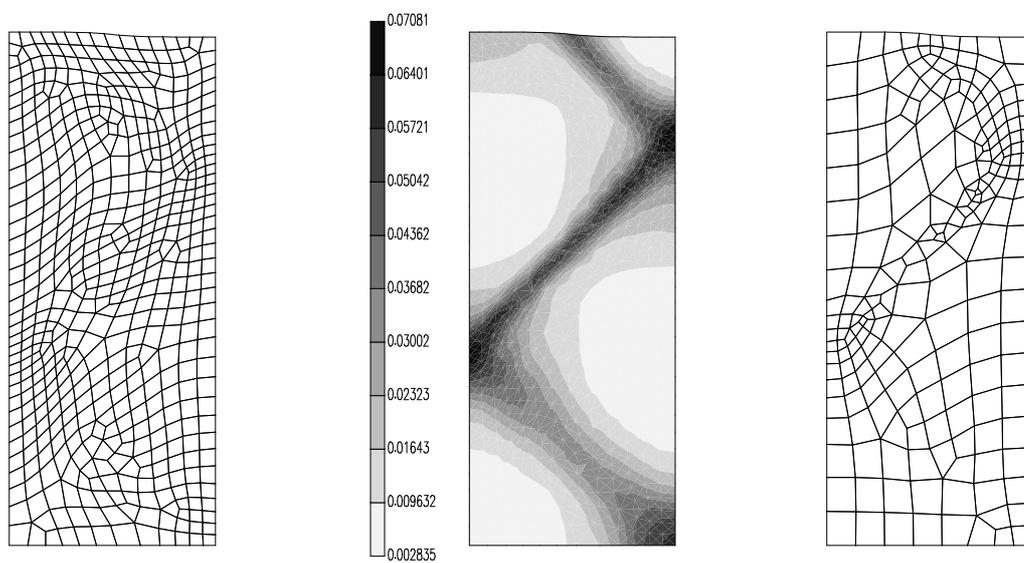


Figure 6.15: Cartes d'endommagement illustrant la formation des bandes de cisaillement en fonction du déplacement imposé u



a. maillage de départ b. endommagement c. maillage résultat
Figure 6.16: Premier remaillage en $u = 0.25L$

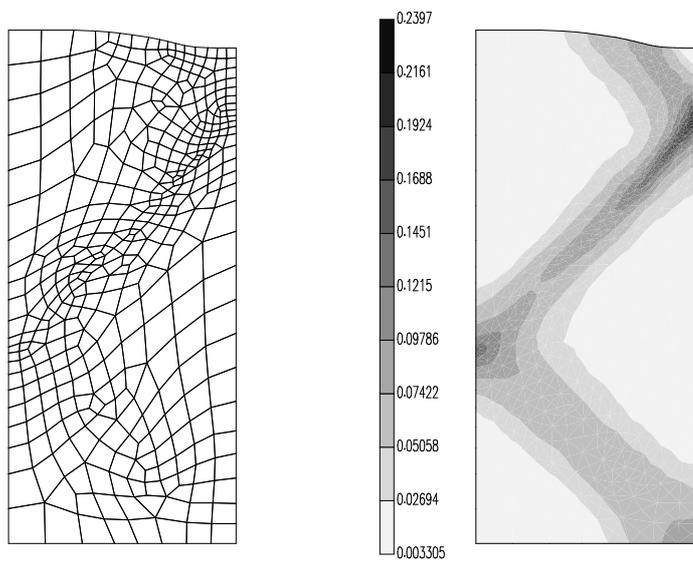
Le calcul reprend ensuite jusqu'à un déplacement imposé $u = 0.275L$, pour lequel la localisation est déjà nettement marquée (figure 6.17). On remaille cette fois avec un $\delta_{min} = 0.03 L$, toujours selon l'indicateur du second ordre et avec un $\delta_{max} = 0.2 L$. Le résultat obtenu est représenté à la figure 6.17.c. On continue le calcul, en remaillant à intervalles de déplacement imposé de $0.025L$ ($u = 0.3L, u = 0.325L, \dots$). Pour $u = 0.350L$, la localisation s'est encore renforcée, ce qui se traduit dans le maillage associé (voir figure 6.18). Après un dernier remaillage en $u = 0.375L$, le calcul doit être interrompu pour manque de convergence alors qu'on a atteint un déplacement imposé de $u = 0.393L$. En fait, on voit à la figure 6.19 que l'endommagement a alors atteint sa valeur ultime dans la bande de cisaillement. On constate également que les bandes de cisaillement n'apparaissent plus si nettement sur la carte d'endommagement, qui est plutôt localisé dans une zone ponctuelle. Par contre, ces bandes sont mieux visibles sur la carte de déformation plastique équivalente (figure 6.19.c). On observe finalement que la solution obtenue ici est qualitativement assez proche de la solution obtenue précédemment avec le maillage 20×20 , mais que l'endommagement a augmenté beaucoup plus vite ici (on a atteint la valeur ultime $d = 0.65$ pour un déplacement imposé $u \approx 0.4L$, alors que précédemment on atteignait $d = 0.5$ en $u = 0.5L$).



a. maillage de départ

b. endommagement

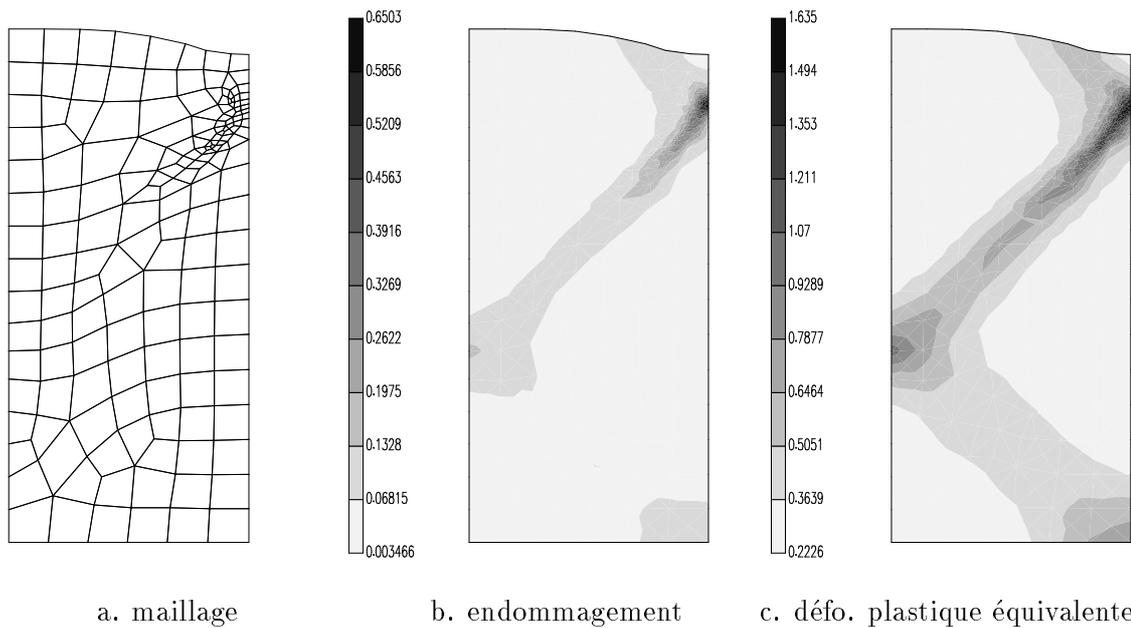
c. maillage résultat

Figure 6.17: Deuxième remaillage en $u = 0.275L$ 

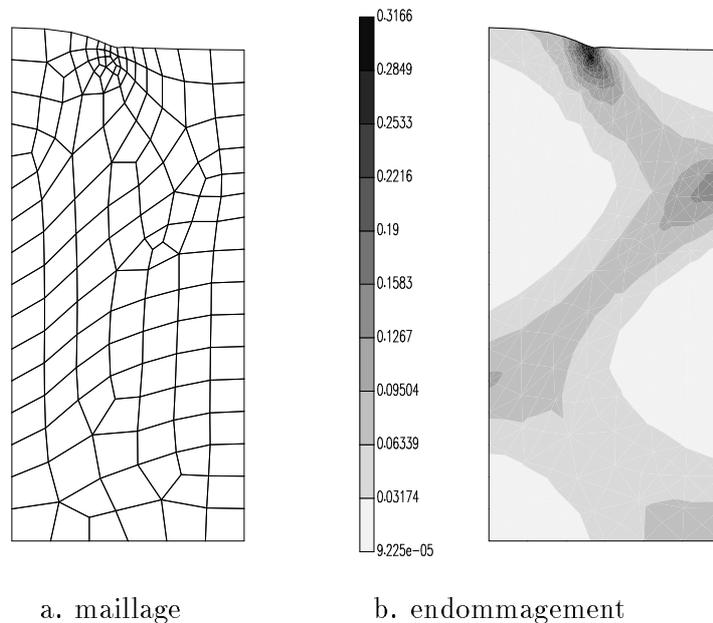
a. maillage

b. endommagement

Figure 6.18: Solution en $u = 0.35L$

Figure 6.19: Solution finale ($u = 0.39 L$)

On constate donc bien que le remaillage permet de capturer la localisation de la déformation dans les bandes de cisaillement et de suivre l'évolution de ces dernières. Par contre, on observe que la solution dépend toujours du maillage initial. Ainsi, si on part d'un maillage plus fin, on obtient une disposition différente pour les bandes, comme illustré à la figure 6.20. En fait, comme nous l'avons déjà dit, le remaillage seul ne peut suffire à régulariser le problème.

Figure 6.20: Solution finale obtenue à partir d'un maillage initial de 10×40 ($u = 0.375 L$)

Par contre, si l'on introduit de la viscosité, avec les paramètres $k = 10^{-3} \sigma_Y^0$ et $m = 0.3$, correspondant à une longueur caractéristique matérielle $l = 0.126L$, le problème est bien régularisé, comme on le voit à la figure 6.21. On y retrouve bien la même solution qu'au

paragraphe 4.5. On voit également que la largeur de la bande ne dépend plus de la taille des éléments qui s'y trouvent.

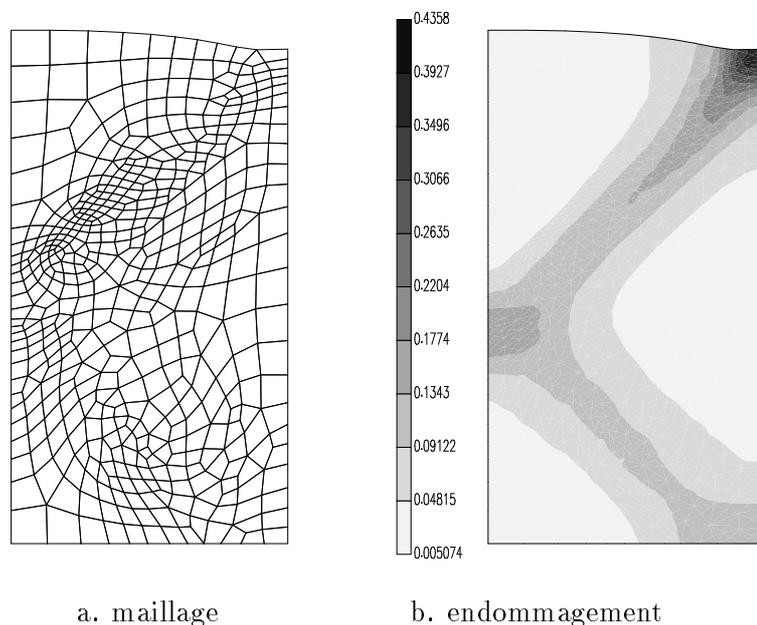


Figure 6.21: Solution finale avec régularisation visqueuse ($u = 0.50 L$)

Le remaillage adaptatif devrait donc permettre de capturer les bandes de cisaillement dans les cas où la longueur caractéristique introduite est petite, voire très petite, sans pour autant devoir utiliser une discrétisation trop lourde. Il reste cependant l'obstacle du critère de remaillage. En effet, le critère basé sur le hessien du champ d'endommagement que nous avons utilisé ici n'est pas l'indicateur de localisation optimal. En effet, il faut attendre que la localisation soit bien marquée pour que ce critère capture les bandes de cisaillement. Et il a même plutôt tendance à capturer les bords des bandes plutôt que les bandes elles-mêmes, comme on le voit à la figure 6.21. Avec ce critère, on ne pourra donc capturer une bande de faible largeur qu'en partant d'une discrétisation initiale suffisamment fine, et qui sera déraffinée après l'apparition de la localisation. Pour éviter ce problème, il faudrait utiliser, pour guider le processus de remaillage, des indicateurs de localisation (du type Rice ⁽¹¹²⁾, mais pas seulement, comme suggéré par Charler et Pierry ⁽¹⁹⁾). Cela permettrait de détecter la localisation en temps utile et d'adapter le maillage en conséquence.

Chapitre 7

Conclusions

Pour conclure, nous allons reprendre l'un après l'autre les thèmes abordés dans les trois chapitres principaux de cette thèse : les modèles de comportement, les aspects numériques liés à la modélisation de l'endommagement et de la rupture et les méthodes d'adaptation de maillage. Pour chacun de ces différents aspects du problème, nous allons tout d'abord rappeler les résultats obtenus et les conclusions qu'il faut en tirer, après quoi nous décrirons brièvement les développements qui, à l'heure de clôturer cette thèse, nous semblent devoir être envisagés à court ou moyen terme pour compléter le traitement du sujet. On établira ensuite une conclusion générale.

7.1 Modèles de comportement

Dans le chapitre 2, nous avons présenté un modèle unifié de comportement élastoviscoplastique avec endommagement. Comme nous avons pu le voir, ce modèle peut être caractérisé par la référence qui y est continuellement faite aux micromécanismes responsables du comportement qu'il permet de simuler, tout en restant fidèle au formalisme de la TPI. L'originalité des développements proposés à ce niveau ne doit pas tellement être cherchée dans le fond, mais plutôt dans la forme. En effet, toutes les expressions mathématiques utilisées dans le modèle présenté sont issues de la littérature, même si nous avons quelque peu innové dans la manière de les combiner. Mais nous avons plutôt porté notre intérêt sur le *cadre formel* (mathématiquement parlant) dans lequel ces relations s'insèrent. Cela nous a permis d'obtenir un modèle regroupant et couplant de manière naturelle les comportements élastique, plastique, visqueux et l'endommagement ductile. Au passage, nous avons également pu mesurer comment le choix d'un formalisme pour le comportement réversible (hypoélastique ou hyperélastique) influençait le choix de la variable d'endommagement et de sa variable duale associée.

Au niveau des modèles de comportement, il reste un problème dont nous avons peu parlé jusqu'ici, mais qui est néanmoins fondamental. Il s'agit de l'*identification* des paramètres du modèle que nous avons utilisé. Leur origine microscopique rend leur identification difficile dans les cas pratiques. Certains auteurs ont entamé une analyse numérique de sensibilité aux différents paramètres (voir Picart *et al.* ⁽¹⁰⁶⁾), mais il nous semble qu'il serait plus intéressant de développer des méthodes automatiques ou semi-automatiques d'analyse des résultats expérimentaux pour déterminer la valeur des différents paramètres des modèles constitutifs. La mise au point de telles méthodologies de calcul inverse dépasse évidemment, et

de loin, le cadre de cette thèse. Par contre, nous pensons qu'une des premières améliorations à apporter au modèle serait de quelque peu simplifier l'expression mathématique de la surface d'écoulement utilisée. L'utilisation d'une surface elliptique (du type de celle utilisée par Oyane et Shima ⁽⁹⁷⁾) devrait par exemple alléger le traitement algorithmique des équations du modèle, rendu assez lourd par la présence de fonctions hyperboliques, tout en préservant ses caractéristiques de couplage des comportements déviatorique et volumique. Cela devrait également simplifier un éventuel processus d'identification des paramètres. De ce point de vue, il serait également intéressant de se placer complètement dans le cadre de la TPI, c'est-à-dire de passer à un formalisme hyperélastique pour la partie réversible, ce afin de profiter au maximum de l'outillage mathématique qui y est associé (notions de dualité, ...).

7.2 Aspects numériques

Afin de permettre l'utilisation pratique, dans un code de calcul des structures, du modèle de comportement présenté ici, nous lui avons adjoint les outils numériques nécessaires. Le premier problème à résoudre était celui de l'*intégration temporelle* des équations constitutives. A cette fin, nous avons développé un schéma d'intégration numérique généralisant la méthode du retour radial de l'élastoplasticité classique (déviatorique) au cas de l'élastoviscoplasticité non purement déviatorique. On a ensuite écrit une loi tangente consistante avec ce schéma d'intégration, de manière à obtenir un processus itératif de résolution de l'équilibre structural le plus efficace possible. Cela nous amène à l'*intégration spatiale* par la MEF des équations d'équilibre. A ce niveau, nous avons abordé le problème du choix des éléments à utiliser et nous avons indiqué comment éviter le "locking" volumique. L'intérêt de la sous-intégration totale, accompagnée d'une méthode de stabilisation adéquate, nous est apparue de manière indiscutable lors de l'application du modèle proposé à la simulation de la rupture d'un barreau cylindrique en striction. D'autres applications nous ont également permis d'illustrer l'utilisation du modèle pour la simulation de processus de mise en forme et d'impact.

Un des phénomènes les plus complexes parmi ceux qui sont liés à l'endommagement est celui de la *localisation de la déformation* en bandes de cisaillement, souvent à l'origine de la rupture macroscopique. Parmi les nombreuses méthodes possibles pour contrer la perte de régularité de la solution liée à l'apparition de la localisation, nous avons opté pour l'utilisation d'une loi de comportement visqueuse, couplée à une procédure de maillage adaptatif. Les résultats de cette combinaison sont encourageants, mais pas définitifs. Nous parlerons du remaillage plus loin, mais nous avons établi les conditions sous lesquelles la régularisation visqueuse est effectivement efficace : il faut que la longueur caractéristique introduite au niveau constitutif soit supérieure à la taille caractéristique du maillage. Cela peut impliquer dans certains cas l'utilisation d'un maillage très fin, et donc un coût de calcul assez lourd. D'un autre côté, cela renforce l'idée d'utiliser une procédure de remaillage adaptatif.

Parmi les développements numériques qui nous semblent pouvoir être menés à court terme pour prolonger ce travail, le problème de la modélisation de la *rupture* occupe une des premières places. En effet, il est souvent intéressant, et même parfois nécessaire, d'étudier le comportement post-critique de la structure endommagée. Pour s'en convaincre, il suffit de songer à la simulation des processus de coupe. Quand un élément a été complètement endommagé, c'est-à-dire lorsque l'endommagement a atteint sa valeur ultime en tous ses points de Gauss, il ne contribue normalement plus à la raideur de la structure. En effet, les contraintes qu'on y calcule sont nulles puisque la surface de charge a rétréci jusqu'à se réduire

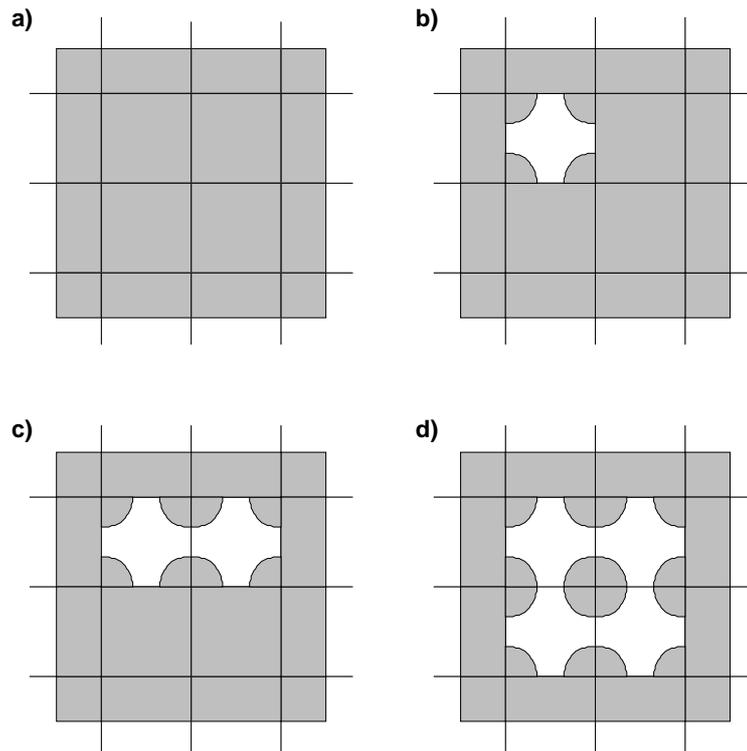


Figure 7.1: Illustration schématique du processus d'élimination d'éléments : a) situation initiale – b,c) certains éléments sont éliminés – d) un noeud pour lequel tous les éléments associés ont disparu garde sa masse

à un point, et par conséquent les forces internes nodales élémentaires sont nulles également. Certains auteurs (Tvergaard ⁽¹³²⁾ par exemple) attribuent aux éléments ayant atteint cet état de ruine un comportement élastoplastique avec une limite d'écoulement plastique très faible par rapport à leur valeur dans l'état vierge. Le but de cette opération est sans doute d'essayer de préserver un conditionnement acceptable de la matrice de raideur structurale. Cette méthode peut donner des résultats satisfaisants dans un certain nombre de cas, mais elle présente l'inconvénient de ne pas traiter correctement les conditions limites, de contact en particulier (comme nous l'avons vu lors de la simulation de l'impact dans une turbine au chapitre 4). Ainsi, si elle convient pour modéliser le comportement d'une fissure en mode I (en cas d'ouverture en tout cas), elle implique une forte distorsion des éléments "fantômes" en mode II (cisaillement). Une situation pire encore serait celle où il y a pénétration d'une partie de la structure dans une autre partie. Il apparaît donc qu'il est préférable de réellement éliminer les éléments ruinés. L'utilisation d'une méthode d'élimination d'éléments appelle un certain nombre de remarques. Tout d'abord, notons que l'élimination d'éléments ne signifie pas forcément élimination de nœuds. En effet, en dynamique, un nœud pour lequel tous les éléments auxquels il était initialement lié ont été éliminés peut conserver une masse, ses degrés de liberté contribuant au système discrétisé. Cela peut par exemple permettre de se faire une idée du nuage de débris qui se forme dans certaines situations d'impact. Cela nous suggère donc le principe suivant (illustré à la figure 7.1) : quand un élément est endommagé, il ne contribue plus aux forces internes structurales, mais ses nœuds contribuent encore à la matrice structurale des masses. Dans un schéma temporel explicite, cela est très facilement réalisé car les matrices élémentaires des masses ont déjà été diagonalisées (voir Belytschko ⁽⁹⁾), mais dans un schéma implicite, cette diagonalisation doit être opérée au

moment de l'élimination de l'élément. Dans le cas implicite, un problème supplémentaire est le rééquilibrage de la configuration après élimination d'un ou plusieurs éléments, ainsi que l'actualisation du profil de la matrice tangente structurale (information nécessaire pour une inversion efficace).

Un autre sujet qui mériterait une attention poussée est celui de l'étude des effets de la *sous-intégration* sur la localisation. Plus généralement, une étude comparée des différents types d'éléments adaptés à la modélisation des grandes déformations et de leur comportement face à la localisation en bandes de cisaillement devrait apporter de nombreuses informations nouvelles sur le sujet, comme nous l'a démontré le simple cas de la barre en striction. Une étude de ce type a d'ailleurs déjà été menée par Steinmann et Willam ⁽¹²⁹⁾.

7.3 Techniques d'adaptation de maillage

Comme un certain nombre d'exemples nous l'ont bien montré, il peut être nécessaire de recourir au remaillage afin de garantir une qualité suffisante de solution. Nous avons donc implémenté la méthode de *maillage frontal* en *quadrangles* initialement proposée par Zhu *et al.* ⁽¹⁴⁰⁾. Ce mailleur présente pour nous l'avantage d'assurer une discrétisation par des éléments quadrangulaires uniquement, avec de plus la possibilité de contrôler la taille de ces éléments partout sur le domaine maillé. Afin de profiter de cette possibilité, il faut bien entendu développer des méthodes qui puissent fournir au programme de maillage la taille d'élément souhaitée en tout point. A ce niveau, nous nous sommes limités à des indicateurs assez élémentaires, mais qui nous ont déjà fourni des résultats satisfaisants. Ainsi, pour les deux cas de mise en forme auxquels on a appliqué le remaillage, cela a résulté en une amélioration significative de la solution, tout en réduisant le coût de calcul dans le cas du poinçonnement hémisphérique. L'utilisation du remaillage dans le traitement de la localisation en bandes de cisaillement permet une meilleure capture de ces bandes, mais il faut absolument le coupler à la régularisation visqueuse pour éviter les problèmes liés à la localisation de la déformation.

Il est clair que c'est sur ce thème des *techniques adaptatives* que le nombre de développements futurs à envisager est le plus important. Tout d'abord, au niveau du processus de (re)maillage, il nous semble qu'une triangulation, processus beaucoup plus naturel qu'une quadrangulation, assurerait la meilleure robustesse. Cela pose alors le problème de pouvoir disposer d'éléments triangulaires fiables en grandes déformations (du 2ème degré ?). Le problème est d'ailleurs encore plus aigu en 3D qu'en 2D. Cela dit, la solution idéale se trouve certainement dans l'utilisation de maillages mixtes triangles/quadrangles, ce qui ne change rien au problème de la fiabilité des éléments triangulaires. Pour revenir à des considérations plus directement liées au sujet, un thème méritant une attention poussée, et la recevant de plus en plus d'ailleurs, est celui de la mise au point d'indicateurs/estimateurs d'erreur adaptés aux problèmes non-linéaires (aussi bien du point de vue matériel que géométrique) tels que ceux traités ici. Plus précisément, il serait très intéressant de mesurer leur applicabilité au cas de la localisation en bandes de cisaillement. Peut-être faudrait-il, pour obtenir des résultats satisfaisants, y introduire, d'une manière ou d'une autre, des critères de localisation ? Enfin, une extension des plus intéressantes à ce travail serait de coupler l'approche eulérienne-lagrangienne avec les techniques de remaillage, et ce, encore une fois, plus spécialement pour les problèmes de localisation en bandes de cisaillement.

7.4 Conclusion générale

A la fin de cette thèse, nous pouvons donc simuler l'évolution de l'endommagement ductile, depuis l'état initial jusqu'à l'apparition de la première microfissure, dans le cadre d'un code de calcul non-linéaire des structures (bidimensionnelles). Le modèle utilisé regroupe et couple les comportements élastiques, plastiques, visqueux et l'endommagement. Grâce à l'utilisation des techniques de remaillage, nous sommes capables de simuler des processus de mise en forme complexes, avec l'assurance d'une bonne qualité de solution grâce à l'adaptation de la discrétisation. Les critères contrôlant cette adaptation doivent encore être améliorés, mais le plus grand défi à relever nous est apparu être celui d'un traitement correct de la localisation en bandes de cisaillement.

Annexe A

Sous-intégration & grandes déformations

Dans cette annexe, nous avons repris des développements qui avaient déjà été présentés dans un article (Stainier et Ponthot ⁽¹²⁴⁾), mais nous les avons ici quelque peu retravaillés afin de mieux prendre en compte les non-linéarités géométriques attachées aux grandes déformations. L'expression finale des forces de stabilisation des modes parasites dus à la sous-intégration à laquelle on aboutit est cependant peu modifiée par rapport à celle proposée dans l'article précité.

Le schéma numérique utilisé pour le calcul en grandes transformations est basé sur une méthode incrémentale dans laquelle on suppose que le taux de déformation (corotationnel) \mathbf{D} est constant sur l'incrément de temps (ou de charge dans un calcul quasi-statique) Δt , comme nous l'avons expliqué au chapitre 3. Rappelons qu'il en résulte une expression donnée par :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{\Delta t} \ln \mathbf{U} = \frac{1}{2\Delta t} \ln(\mathbf{F}^t \cdot \mathbf{F}) \quad (\text{A.1})$$

où $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ est le gradient de déformation entre la configuration en début de pas et la configuration en fin de pas. Si on utilise des quadrangles bilinéaires et qu'on y intègre les champs sur un seul point de Gauss, situé au centroïde (coordonnées réduites isoparamétriques $\xi = \eta = 0$), le taux de déformation obtenu par application directe de la relation ci-dessus ne prend pas en compte certains modes de déformation. En effet, on peut montrer facilement qu'il existe alors, en plus des modes rigides, deux modes parasites à énergie de déformation nulle, aussi appelés modes sablier – ou “hourglass” – en raison de leur forme (lorsque l'on considère deux éléments à la fois), comme illustré à la figure A.1. Une méthode pour éliminer les modes à énergie nulle résultant de la sous-intégration consiste à travailler non pas avec un champ de déformation constant, mais plutôt avec un champ linéaire en les coordonnées isoparamétriques (ξ, η) , obtenu comme expliqué ci-dessous.

Les fonctions de forme du quadrangle bi-linéaire peuvent s'écrire sous la forme suivante (les indices en alphabet romain majuscule correspondent aux noeuds, numérotés comme indiqué à la figure A.2) :

$$N_I = \frac{1}{4}(1 + \xi_I \xi)(1 + \eta_I \eta) \quad I = 1, 4 \quad (\text{A.2})$$

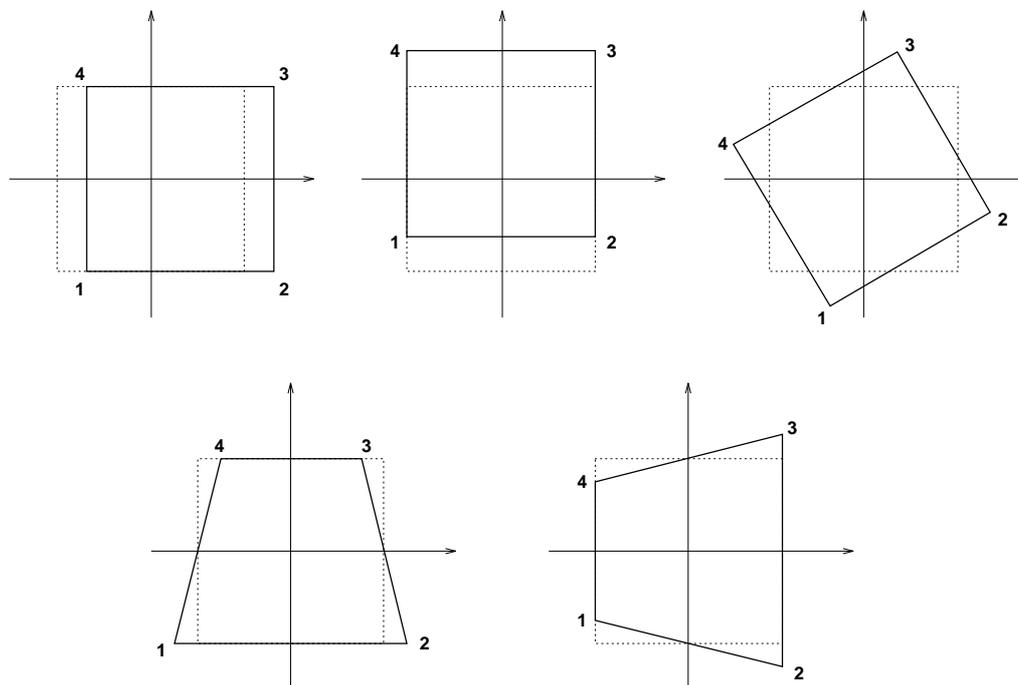


Figure A.1: Les modes à énergie de déformation nulle du quadrangle sous-intégré

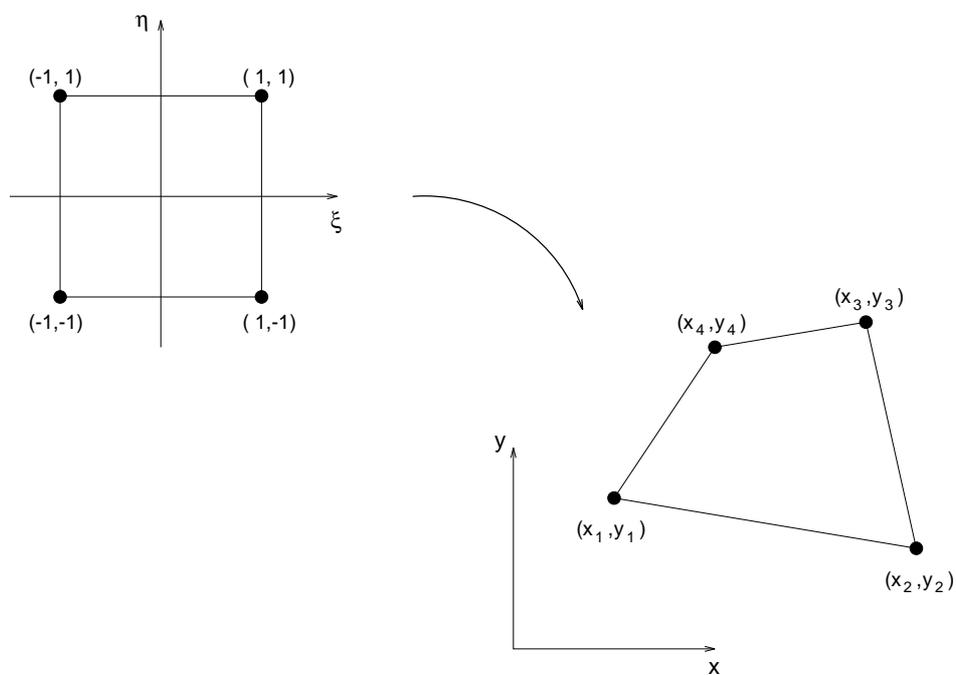


Figure A.2: Le quadrangle isoparamétrique bilinéaire

Comme on utilise des éléments isoparamétriques, le vecteur position dans la configuration de référence peut être réécrit sous la forme (les indices en alphabet romain minuscule correspondant aux directions de l'espace) :

$$X_i = a_i + b_i X + c_i Y + d_i \xi \eta \quad i = 1, 2 \quad (\text{A.3})$$

où on utilise indifféremment (X_1, X_2) et (X, Y) . En particulierisant aux noeuds, on obtient :

$$X_{iI} = a_i t_I + b_i X_I + c_i Y_I + d_i h_I \quad (\text{A.4})$$

avec

$$\mathbf{t}^t = (1 \ 1 \ 1 \ 1) \quad (\text{A.5.a})$$

$$\mathbf{h}^t = (1 \ -1 \ 1 \ -1) \quad (\text{A.5.b})$$

Les constantes a_i , b_i , c_i et d_i peuvent être déterminées à l'aide des propriétés fondamentales suivantes des vecteurs \mathbf{t} , \mathbf{h} , \mathbf{X} , \mathbf{Y} et des dérivées spatiales \mathbf{B}_i des fonctions de forme au centroïde dans la configuration de référence :

$$B_{iI} = \left. \frac{\partial N_I}{\partial X_i} \right|_0 \quad \begin{array}{ll} B_{iI} t_I = 0 & B_{iI} h_I = 0 \\ B_{iI} X_{jI} = \delta_{ij} & t_I h_I = 0 \end{array} \quad (\text{A.6})$$

En utilisant ces propriétés, on obtient l'expression suivante pour les coordonnées dans la configuration de référence :

$$X_i = (T_I + B_{jI} X_j + \Gamma_I h) X_{iI} \quad (\text{A.7})$$

avec

$$T_I = \frac{1}{4} [t_I - (B_{jI} X_{jJ}) t_J] \quad (\text{A.8.a})$$

$$\Gamma_I = \frac{1}{4} [h_I - (B_{jI} X_{jJ}) h_J] \quad (\text{A.8.b})$$

et où h est écrit pour $\xi \eta$.

De même, dans la configuration actuelle, on peut obtenir l'expression suivante pour les coordonnées x_i :

$$x_i = (\tau_I + b_{jI} x_j + \gamma_I h) x_{iI} \quad (\text{A.9})$$

avec

$$b_{iI} = \left. \frac{\partial N_I}{\partial x_i} \right|_0 \quad (\text{A.10.a})$$

$$\tau_I = \frac{1}{4} [t_I - (b_{jI} x_{jJ}) t_J] \quad (\text{A.10.b})$$

$$\gamma_I = \frac{1}{4} [h_I - (b_{jI} x_{jJ}) h_J] \quad (\text{A.10.c})$$

Et enfin, on peut obtenir tout aussi facilement l'expression "mixte" suivante :

$$x_i = (T_I + B_{jI} X_j + \Gamma_I h) x_{iI} \quad (\text{A.11})$$

A partir de cette dernière relation, on peut écrire le tenseur jacobien entre la configuration de référence et la configuration actuelle comme la combinaison d'un terme constant (sa valeur au centroïde) et d'un terme linéaire en ξ et η :

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \left(B_{jI} + \Gamma_I \frac{\partial h}{\partial X_j} \right) x_{iI} = F_{ij}^0 + F_{ij}^{HG} \quad (\text{A.12})$$

Pour exprimer le tenseur \mathbf{U} , représentant la déformation débarassée de tout effet de rotation, on va faire l'hypothèse d'une rotation constante sur tout l'élément. Autrement dit, le tenseur de rotation \mathbf{R} sera supposé constant et égal à sa valeur au centroïde :

$$\mathbf{U} = \mathbf{R}^{0t} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{R}^{0t} \cdot \mathbf{F}^0 + \mathbf{R}^{0t} \cdot \mathbf{F}^{HG} = \mathbf{U}^0 + \mathbf{U}^{HG} \quad (\text{A.13})$$

Sur base de la définition du logarithme d'un tenseur en terme de série, et en retenant pour la partie non-constante le terme du premier ordre uniquement, on obtient le résultat suivant :

$$\ln \mathbf{U} = (\mathbf{U}^0 + \mathbf{U}^{HG} - \mathbf{I}) + \dots \approx \ln \mathbf{U}^0 + \mathbf{U}^{HG} \quad (\text{A.14})$$

On a donc l'expression suivante pour la partie non-constante du tenseur taux de déformation :

$$\mathbf{D}^{HG} = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{R}^{0t} \cdot \mathbf{F}^{HG} \quad (\text{A.15})$$

avec

$$F_{ij}^{HG} = q_i \frac{\partial h}{\partial X_j} \quad (\text{A.16})$$

q_i étant une mesure de l'amplitude du mode "hourglass" dans la direction i :

$$q_i = \Gamma_I x_{iI} \quad (\text{A.17})$$

que l'on appellera *déformation "hourglass"*.

Remarque : On peut également exprimer le tenseur \mathbf{U}^{HG} d'une autre manière. En effet, on peut écrire la déformation logarithmique sous la forme :

$$\ln \mathbf{U} = \frac{1}{2} \ln(\mathbf{F}^t \cdot \mathbf{F}) = \ln \mathbf{U}^0 + \frac{1}{2} (\mathbf{F}^{0t} \cdot \mathbf{F}^{HG} + \mathbf{F}^{HGt} \cdot \mathbf{F}^0) + \dots \quad (\text{A.18})$$

Dans ce cas, on peut donc approximer la partie non-constante du tenseur taux de déformation par :

$$\mathbf{D}^{HG} = \frac{1}{2\Delta t} (\mathbf{F}^{0t} \cdot \mathbf{F}^{HG} + \mathbf{F}^{HGt} \cdot \mathbf{F}^0) \quad (\text{A.19})$$

c'est-à-dire qu'on utilise le tenseur $\mathbf{F}^{0t} \cdot \mathbf{F}^{HG}$ symétrisé, alors que le tenseur $\mathbf{R}^{0t} \cdot \mathbf{F}^{HG}$ n'est pas forcément symétrique. En pratique, cela a peu d'importance puisque, comme nous le verrons, la partie cisaillement des grandeurs "hourglass" n'intervient pas dans la stabilisation. En fait, qu'on utilise l'expression (A.15) ou l'expression (A.18), cela revient à travailler dans un espace intermédiaire $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}^{0t} \cdot \mathbf{x}$ (ou $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{F}^{0t} \cdot \mathbf{x}$), les autres grandeurs intervenant dans les relations (A.16) et (A.17) étant relatives à la configuration de référence. \square

Afin de résoudre les problèmes de "locking" en cisaillement, on ne considère pas la partie cisaillement du tenseur taux de déformation "hourglass", tandis que pour supprimer le

“locking” en déformation volumique, on projette ce tenseur sur la ligne des déformations isochores de manière à le rendre entièrement déviatorique (voir Bindeman et Belytschko ⁽¹³⁾). On obtient alors l’expression suivante pour le tenseur taux de déformation hourglass :

$$\mathbf{D}^{HG} = \begin{bmatrix} D_{11}^{HG} \\ D_{22}^{HG} \\ D_{12}^{HG} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} +e\hat{q}_1 \frac{\partial h}{\partial X} - e\hat{q}_2 \frac{\partial h}{\partial Y} \\ -e\hat{q}_1 \frac{\partial h}{\partial X} + e\hat{q}_2 \frac{\partial h}{\partial Y} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

où les \hat{q}_i sont les déformations “hourglass” dans l’espace intermédiaire ($\hat{q}_i = \Gamma_I \hat{x}_{iI}$) et où l’on a écrit le tenseur taux de déformation sous forme vectorielle. Le paramètre e est un coefficient auquel on donne normalement une valeur de 0.5, ce qui correspond à une projection normale du taux de déformation hourglass sur la ligne des déformations isochores. Pour travailler dans un espace de référence insensible aux rotations de la matière, on va décomposer l’expression (A.20) en ses contributions en ξ et en η . Plus précisément, ce sont les dérivées spatiales de h que l’on va décomposer :

$$\frac{\partial h}{\partial X_i} = J_{ki}^{0-1} \frac{\partial h}{\partial \xi_k} \quad (\text{A.21})$$

où \mathbf{J}^0 est le jacobien de la transformation des coordonnées isoparamétriques vers la configuration de référence. On peut donc écrire les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} D_{11}^{HG} &= \Delta \epsilon^\xi \xi - \Delta \epsilon^\eta \eta \\ D_{22}^{HG} &= -\Delta \epsilon^\xi \xi + \Delta \epsilon^\eta \eta \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

où

$$\begin{aligned} \Delta \epsilon^\xi &= \frac{e}{\Delta t} (J_{21}^{0-1} \hat{q}_1 + J_{22}^{0-1} \hat{q}_2) \\ \Delta \epsilon^\eta &= \frac{e}{\Delta t} (J_{11}^{0-1} \hat{q}_1 + J_{12}^{0-1} \hat{q}_2) \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Les “contraintes hourglass” dans la configuration intermédiaire sont alors obtenues très simplement (voir Stainier et Ponthot ⁽¹²⁴⁾) :

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{HG} &= Q_1^\xi \xi + Q_1^\eta \eta - Q_2^\xi \xi - Q_2^\eta \eta \\ \sigma_{22}^{HG} &= -Q_1^\xi \xi - Q_1^\eta \eta + Q_2^\xi \xi + Q_2^\eta \eta \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

où

$$\mathbf{Q}^\alpha = \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{Q}}^\alpha \quad (\text{A.25})$$

et

$$\begin{aligned} \hat{Q}_1^\xi &= \beta (Q_1^{\xi 0} + 2\mu e J_{21}^{0-1} \hat{q}_1) \\ \hat{Q}_1^\eta &= \beta (Q_1^{\eta 0} + 2\mu e J_{11}^{0-1} \hat{q}_1) \\ \hat{Q}_2^\xi &= \beta (Q_2^{\xi 0} + 2\mu e J_{22}^{0-1} \hat{q}_2) \\ \hat{Q}_2^\eta &= \beta (Q_2^{\eta 0} + 2\mu e J_{12}^{0-1} \hat{q}_2) \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

où μ est un des coefficients de Lamé (égal au module de cisaillement G). Le coefficient β est issu du schéma d’intégration de la loi constitutive par une méthode de type retour radial :

$$\beta = \frac{\sqrt{s_{ij} s_{ij}}}{\sqrt{s_{ij}^{rev} s_{ij}^{rev}}} \quad 0 \leq \beta \leq 1 \quad (\text{A.27})$$

où s_{ij} représente le tenseur des contraintes déviatoriques finales et s_{ij}^{rev} le prédicteur élastique, toutes ces grandeurs étant relatives au point de Gauss étudié (voir chapitre 3).

Les forces internes nodales sont alors obtenues par l'expression suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{bmatrix} = \int_V \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 + e \frac{\partial h}{\partial x} \boldsymbol{\gamma} & -e \frac{\partial h}{\partial x} \boldsymbol{\gamma} & \mathbf{b}_2 \\ -e \frac{\partial h}{\partial y} \boldsymbol{\gamma} & \mathbf{b}_2 + e \frac{\partial h}{\partial y} \boldsymbol{\gamma} & \mathbf{b}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11}^0 + \sigma_{11}^{HG} \\ \sigma_{22}^0 + \sigma_{22}^{HG} \\ \sigma_{12}^0 \end{bmatrix} dV \quad (\text{A.28})$$

Etant donné la forme linéaire en (ξ, η) des $\frac{\partial h}{\partial x_i}$ et des σ_{ij}^{HG} , les termes mixtes disparaissent et on peut écrire les forces internes de la manière classique, mais en y ajoutant des forces de stabilisation de la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^{HG} \\ \mathbf{f}_2^{HG} \end{bmatrix} = \int_V \begin{bmatrix} 2e \frac{\partial h}{\partial x} (\sigma_{11}^{HG} - \sigma_{22}^{HG}) \boldsymbol{\gamma} \\ 2e \frac{\partial h}{\partial y} (\sigma_{22}^{HG} - \sigma_{11}^{HG}) \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} dV \quad (\text{A.29})$$

En exprimant toutes les grandeurs en termes de ξ et η et en intégrant, on obtient finalement :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1^{HG} &= \frac{8e}{3} \det \mathbf{J}^1 \Big|_0 \left(J_{11}^{1-1} (Q_1^\eta - Q_2^\eta) + J_{21}^{1-1} (Q_1^\xi - Q_2^\xi) \right) \\ \mathbf{f}_2^{HG} &= \frac{8e}{3} \det \mathbf{J}^1 \Big|_0 \left(J_{12}^{1-1} (Q_2^\eta - Q_1^\eta) + J_{22}^{1-1} (Q_2^\xi - Q_1^\xi) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

où on a fait l'hypothèse que le déterminant du jacobien \mathbf{J}^1 était constant et égal à sa valeur au centroïde :

$$dV = \det \mathbf{J}^1 \Big|_0 d\xi d\eta \quad (\text{A.31})$$

Annexe B

Algorithmes de positionnement sur un maillage

Quand, au cours du calcul, on change de discrétisation, on se trouve confronté au problème de transférer un certain nombre de variables de l'ancien maillage vers le nouveau. Comme a priori les deux maillages peuvent être fortement différents, il est nécessaire de rechercher la position des nœuds ou des points de Gauss du nouveau maillage relativement aux éléments de l'ancien maillage. Ce processus de recherche doit être répété un grand nombre de fois et peut représenter une part importante du coût en temps CPU de l'opération globale de transfert des données. C'est pourquoi l'efficacité de l'algorithme de positionnement que l'on choisira est un facteur important.

Le problème se pose comme suit :

Etant donné un point P , quel est l'élément n_e du maillage donné dans lequel il se trouve.

L'algorithme de positionnement le plus simple consiste à tester de manière systématique chaque élément du maillage. Le test consiste en la résolution du système suivant :

$$N_I^e(\xi_i)\mathbf{x}_I^e = \mathbf{x}_P \quad (\text{B.1})$$

où les N_I^e sont les fonctions de forme de l'élément testé et \mathbf{x}_I^e les coordonnées de ses nœuds. Cette méthode de recherche systématique demande de l'ordre de N_{old} opérations par recherche, où N_{old} mesure la taille du maillage (nombre d'éléments p.e.), mais aucun pré-traitement des données topologiques. Cette méthode peut donc suffire lorsque le maillage de référence est plutôt grossier, comme c'est par exemple souvent le cas lors de la génération du premier maillage. Mais on conçoit bien l'intérêt de réduire quelque peu le nombre d'opérations nécessaires lorsque l'on a à traiter des maillages plus fins.

Peraire *et al.* ⁽¹⁰⁰⁾ ont proposé un algorithme de positionnement dédié au cas des maillages triangulaires, en utilisant les résultats du test sur un élément pour déterminer lequel de ses voisins il est le plus indiqué de tester ensuite. En effet, les coordonnées barycentriques (L_1, L_2, L_3) d'un triangle permettent de diviser le plan de l'élément (c'est-à-dire l'espace complet en 2D) en plusieurs zones, comme illustré à la figure B.1. La recherche de la position du point P s'opère donc comme suit : partant d'un élément triangulaire donné, on calcule

les coordonnées barycentriques du point P relativement à l'élément ; si les trois coordonnées (L_1, L_2, L_3) sont comprises entre 0 et 1, le point est situé dans l'élément, sinon on répète l'opération pour le voisin e_i où i est l'indice de la coordonnée de valeur minimale (voir figure B.1). On continue le processus jusqu'à trouver l'élément contenant le point P . Cet algorithme traverse donc le maillage plutôt que de le balayer systématiquement, ce qui permet en moyenne de gagner en nombre d'opérations, surtout si l'on part à chaque fois du dernier élément trouvé (pour le point P précédent), puisque deux recherches consécutives concernent généralement des points voisins dans l'espace. Cette méthode peut cependant poser des problèmes dans le cas d'un domaine non-convexe, car le chemin vers l'élément recherché peut alors sortir du maillage. La solution dans ce cas est de compléter le maillage de départ avec des éléments fictifs de manière à remplir son enveloppe convexe. Il peut également arriver que le point P soit légèrement en dehors du maillage, suite à une discrétisation différente de la frontière pour le nouveau maillage par exemple, mais il suffit alors de considérer sa projection sur l'élément le plus proche. Cette méthode est plus économe en opérations lors du processus de recherche, mais elle demande en contrepartie une meilleure connaissance de la topologie du maillage sur lequel on mène la recherche : chaque élément doit pouvoir adresser ses voisins. Une partie du coût de calcul est donc reportée dans la partie pré-traitement, mais on y gagne quand même au total.

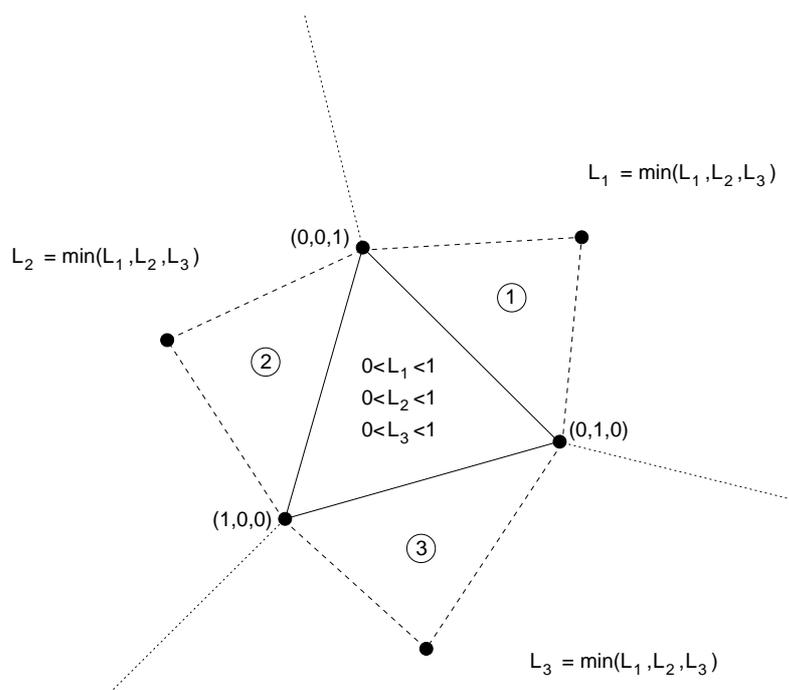


Figure B.1: Les différentes zones définies par les coordonnées barycentriques du triangle

L'extension de la méthode de Peraire au cas d'un maillage quadrangulaire n'est pas immédiate. En effet, l'inversion des fonctions de forme du quadrangle bilinéaire permet seulement de déterminer si le point P se trouve à l'intérieur de l'élément ou pas. On n'a donc plus d'information sur la direction dans laquelle on peut orienter la recherche. Il existe cependant une solution simple : il suffit de diviser le quadrangle en deux triangles. On peut alors appliquer l'algorithme précédent de la manière suivante : pour tester un élément quadrangulaire, on calcule d'abord les coordonnées barycentriques de P dans le triangle 1 – 2 – 3 (voir figure B.2) ; si les trois coordonnées sont comprises entre 0 et 1, alors P est dans l'élément,

si la coordonnée de valeur minimale est L_1 , on teste le voisin e_2 , si c'est L_3 , on teste le voisin e_1 et si c'est L_2 , on passe au triangle 1 – 3 – 4.

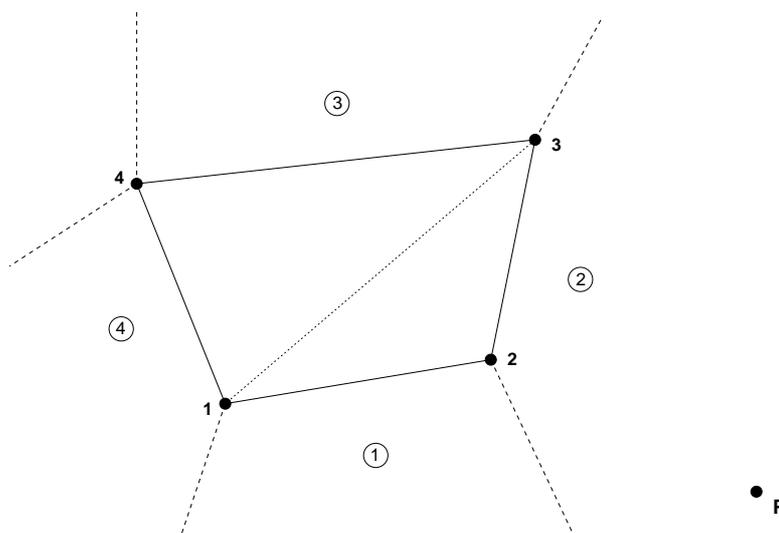


Figure B.2: Extension de la méthode de Peiraire aux quadrangles

Remarque : le calcul des coordonnées barycentriques est une opération simple, mais impliquant cependant un certain nombre de multiplications et de divisions (opérations coûteuses au niveau informatique). Il est donc intéressant de simplement vérifier si le point P se trouve dans la boîte rectangulaire (de côtés parallèles aux axes) enveloppant l'élément testé avant d'éventuellement inverser les fonctions de formes si c'est bien le cas. On peut ainsi accélérer la recherche de manière non-négligeable. \square

Certains auteurs ont proposé des méthodes pour lesquelles le coût de recherche se réduit à l'ordre 1, c'est-à-dire devient indépendant de la taille du maillage. Par exemple, Jansen *et al.* ⁽⁶²⁾ ont proposé une méthode, baptisée "smart bucket algorithm", qui se base sur la superposition d'un maillage rectangulaire structuré sur le maillage de départ. Cela permet de ne tester que les quelques éléments se trouvant dans un certain voisinage du point P . Il faut cependant faire remarquer que cela demande un processus de construction du maillage structuré et de préparation des données dont le coût est de l'ordre N_{old} (à réaliser une seule fois cependant). Bien que cette méthode soit d'après ses auteurs une des plus performantes, nous avons préféré, au vu de sa simplicité conceptuelle, nous contenter de l'algorithme de Peiraire étendu au cas des quadrangles comme nous l'avons expliqué ci-dessus.

Annexe C

Splines cubiques

Lors d'un remaillage, un des premiers problèmes qui se posent est celui d'obtenir une représentation continue de la frontière des domaines, alors que celle-ci est décrite par un nombre fini de nœuds. Remarquons que le problème peut également se poser lors de la modélisation initiale, où les contours du domaine étudié peuvent être décrites sous forme d'une liste de points. L'utilisation de splines cubiques permet d'obtenir une représentation de la frontière par une courbe C^1 , définie par morceaux.

Soient donc N points \mathbf{x}_i ($i = 1, \dots, N$) sur lesquels on veut construire une courbe. Supposons également connus en tous les points le vecteur tangent \mathbf{u}_i ($i = 1, \dots, N$). Considérons le segment $[\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}]$, paramétrisé localement par $\hat{t} \in [0, 1]$ (figure C.1). On peut construire le morceau de courbe suivant entre ces deux points :

$$\mathbf{x}(\hat{t}) = \mu_0(\hat{t})\mathbf{x}_i + \mu_1(\hat{t})\mathbf{x}_{i+1} + \mu_2(\hat{t})\mathbf{u}_i + \mu_3(\hat{t})\mathbf{u}_{i+1} \quad (\text{C.1})$$

où les μ_i sont les fonctions d'Hermite

$$\begin{aligned} \mu_0(\hat{t}) &= (1 + 2\hat{t})(1 - \hat{t})^2 \\ \mu_1(\hat{t}) &= (3 - 2\hat{t})\hat{t}^2 \\ \mu_2(\hat{t}) &= \hat{t}(1 - \hat{t})^2 \\ \mu_3(\hat{t}) &= (\hat{t} - 1)\hat{t}^2 \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

L'unicité de la tangente aux points \mathbf{x}_i assure la continuité C^1 de la courbe assemblée. Si on veut maintenant travailler avec une abscisse curviligne $t \in [0, T]$ plutôt qu'avec l'abscisse réduite \hat{t} , on peut utiliser l'approximation de MacConalogue ⁽⁸¹⁾ :

$$\mathbf{x}(t) = \mu_0\left(\frac{t}{T}\right)\mathbf{x}_i + \mu_1\left(\frac{t}{T}\right)\mathbf{x}_{i+1} + T\mu_2\left(\frac{t}{T}\right)\mathbf{u}_i + T\mu_3\left(\frac{t}{T}\right)\mathbf{u}_{i+1} \quad (\text{C.3})$$

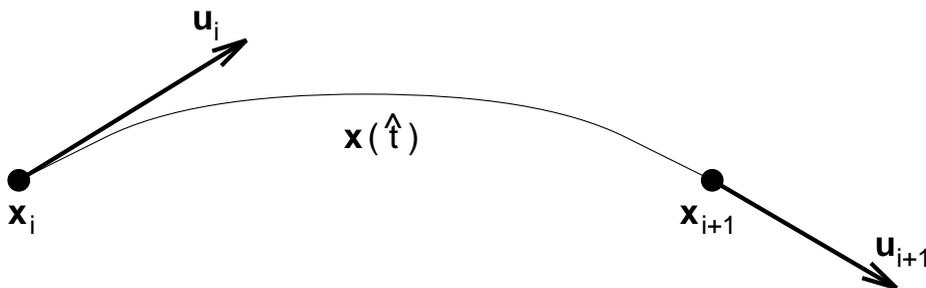


Figure C.1: Segment de spline cubique

où

$$T = \frac{3}{e} \left[\sqrt{f^2 + 2ge} - f \right] \quad (\text{C.4})$$

avec

$$\begin{aligned} f &= (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i) \cdot (\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i) \\ g &= \|\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i\|^2 \\ e &= g - \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_{i+1} + \mathbf{u}_i\|^2 \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

L'expression (C.4) donne en fait une très bonne approximation de la longueur du segment de spline $[\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}]$.

Les vecteurs tangents en chaque point peuvent être obtenus par un schéma à 3 points :

$$\mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{v}_i}{\|\mathbf{v}_i\|} \quad \mathbf{v}_i = (1 - \alpha)\Delta\mathbf{x}_{i-1} + \alpha\Delta\mathbf{x}_i \quad (\text{C.6})$$

avec

$$\alpha = \frac{\|\Delta\mathbf{x}_i\|^2}{\|\Delta\mathbf{x}_{i-1}\|^2 + \|\Delta\mathbf{x}_i\|^2} \quad (\text{C.7})$$

où

$$\Delta\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i \quad (\text{C.8})$$

En début et en fin de courbe, on utilise un schéma décentré, avec :

$$\mathbf{v}_0 = (1 - \alpha_0)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) + \alpha_0(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \quad (\text{C.9})$$

et

$$\alpha_0 = \frac{\|\Delta\mathbf{x}_0\|^2}{(\|\Delta\mathbf{x}_0\| + \|\Delta\mathbf{x}_1\|)^2 - \|\Delta\mathbf{x}_0\|^2} \quad (\text{C.10})$$

pour le premier nœud et

$$\mathbf{v}_N = (1 - \alpha_N)(\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_{N-1}) + \alpha_N(\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_{N-2}) \quad (\text{C.11})$$

et

$$\alpha_N = \frac{\|\Delta\mathbf{x}_{N-1}\|^2}{(\|\Delta\mathbf{x}_{N-2}\| + \|\Delta\mathbf{x}_{N-1}\|)^2 - \|\Delta\mathbf{x}_{N-1}\|^2} \quad (\text{C.12})$$

pour le dernier nœud. On peut ainsi reconstruire sur la frontière des courbes continues sur lesquelles on pourra positionner les nouveaux nœuds.

Pour une spline, l'intégrale (5.1) peut être calculée par la méthode du trapèze :

$$A = \int_0^l \left(\frac{1}{\delta(s)} \right) ds \approx \sum_{i=1}^{N^0} \sum_{j=0}^{M_i-1} \left(\frac{1}{\delta_j} + \frac{1}{\delta_{j+1}} \right) \frac{T_i}{2M_i} \quad (\text{C.13})$$

où N^0 représente le nombre de points définissant la spline, T_i est la longueur du segment i calculée par (C.4) et M_i est le nombre de pas utilisés pour l'intégration sur le segment i . On peut par exemple utiliser l'entier le plus proche de

$$\gamma \frac{T_i}{\min(\delta_i, \delta_{i+1})}$$

où γ est un coefficient de sécurité. Le nombre N^1 de nœuds que l'on va disposer sur la courbe est alors pris comme l'entier le plus proche de A . La répartition des nœuds est donnée par l'intégrale (5.2) :

$$k = \frac{N}{A} \int_0^{s_k} \left(\frac{1}{\delta(s)} \right) ds$$

Soient les entiers m et n tels que

$$I_{mn} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^m \left(\frac{1}{\delta_j} + \frac{1}{\delta_{j+1}} \right) \frac{T_i}{2M_i} \frac{N^1}{A} > k \quad (\text{C.14})$$

On prend alors

$$s_k = t_n + \hat{t}_m \frac{T_i}{T} \frac{k - I_{mn-1}}{I_{mn} - I_{mn-1}} \quad (\text{C.15})$$

où t_n est l'abscisse curviligne cumulée à la fin du segment précédent, \hat{t}_m est l'abscisse réduite relative au segment et T la longueur totale. I_{mn-1} est la valeur de l'intégrale que l'on avait obtenue pour le couple (m, n) précédent. Remarquons que l'on peut avoir plusieurs s_k entre I_{mn-1} et I_{mn} .

Dans le cas du remaillage, une simplification est possible. En effet, dans ce cas, il n'y a qu'aux pôles de définition de la spline que l'on connaît la valeur de la fonction $\delta(s)$. Comme le segment de spline $[\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}]$ ne s'éloigne normalement pas trop du segment de droite reliant ces deux points, relativement à la taille des éléments du maillage de référence, on peut se passer de l'intégration par la méthode du trapèze. On peut alors interpoler $\delta(s)$ entre les valeurs aux extrémités de la spline. Pour un segment, on a alors

$$A_i = \int_0^1 \frac{1}{\delta_i(1-t) + \delta_{i+1}t} T_i dt \quad (\text{C.16})$$

ce qui donne

$$A_i = \begin{cases} T_i \frac{\ln(\delta_{i+1}) - \ln(\delta_i)}{\delta_{i+1} - \delta_i} & \text{si } \delta_{i+1} \neq \delta_i \\ \frac{T_i}{\delta} & \text{si } \delta_i = \delta_{i+1} = \delta \end{cases} \quad (\text{C.17})$$

et les valeurs de l'abscisse réduite des nœuds à placer sur la courbe sont données par :

$$\hat{t}_k = \begin{cases} \frac{\delta_i}{\delta_{i+1} - \delta_i} \left[\exp \left(\frac{k A_i (\delta_{i+1} - \delta_i)}{N_i T_i} \right) - 1 \right] & \text{si } \delta_{i+1} \neq \delta_i \\ \frac{k}{N_i} & \text{si } \delta_i = \delta_{i+1} = \delta \end{cases} \quad (\text{C.18})$$

Annexe D

Mesure de la distorsion d'un quadrangle

Lorsque l'on utilise un schéma d'intégration temporelle explicite, la taille des pas de temps est conditionnée par la stabilité du schéma (Belytschko ⁽⁹⁾). En se basant sur une analyse fréquentielle dans le cadre linéaire, Flanagan et Belytschko ⁽⁴¹⁾ ont établi des bornes pour la valeur critique du pas de temps, au-delà desquelles la stabilité du schéma n'est plus assurée. Nous avons montré (Stainier et Ponthot ⁽¹²⁴⁾) que l'on pouvait étendre l'usage de ces bornes au cas non-linéaire. En explicite, on utilisera donc un pas de temps donné par :

$$\Delta t = \gamma \sqrt{\frac{\rho}{(\lambda + 2\mu)b_{iI}b_{iI}}} \quad (\text{D.1})$$

où ρ est la densité, λ et μ les coefficients de Lamé, γ un coefficient de sécurité ($0 < \gamma \leq 1$) et où les b_{iI} sont les dérivées des fonctions de forme évaluées en $\xi = \eta = 0$ (voir *annexe A*). Si on calcule leur expression en termes des positions nodales, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1^t &= \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{24} & y_{31} & y_{42} & y_{13} \end{bmatrix} \\ \mathbf{b}_2^t &= \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_{42} & x_{13} & x_{24} & x_{31} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

où A est l'aire de l'élément

$$A = \frac{1}{2}(x_{31}y_{42} + x_{24}y_{31})$$

et où x_{ij} et y_{ij} représentent $x_i - x_j$ et $y_i - y_j$ respectivement (voir figure D.1). Le pas de temps dépend donc des propriétés matérielles à travers ρ , λ et μ et de la géométrie des éléments au travers des b_{iI} . En fait, on peut même considérer que les b_{iI} définissent une longueur caractéristique de l'élément qui serait donnée par :

$$L_c = \frac{1}{\sqrt{b_{iI}b_{iI}}} \quad (\text{D.3})$$

Si on remplace les b_{iI} par leur expression, on peut voir que le produit $b_{iI}b_{iI}$ est proportionnel à la somme des carrés des longueurs des diagonales de l'élément. On peut également tracer le lieu des positions nodales optimales pour un élément d'aire A donnée (voir figure D.2). La forme carrée fait bien entendu partie des géométries optimales.

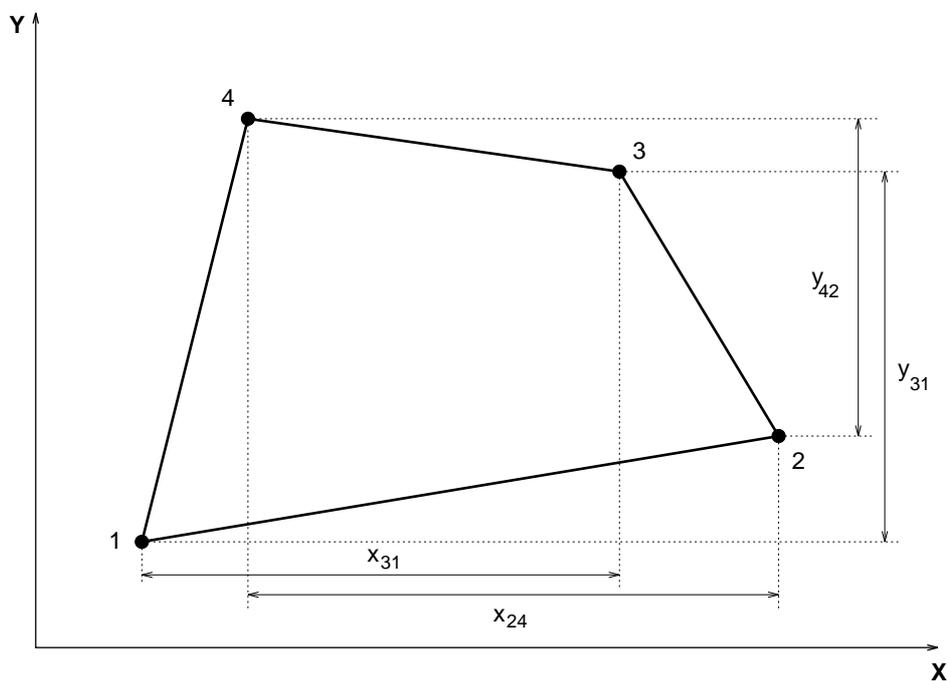


Figure D.1: Numérotation des noeuds du quadrangle

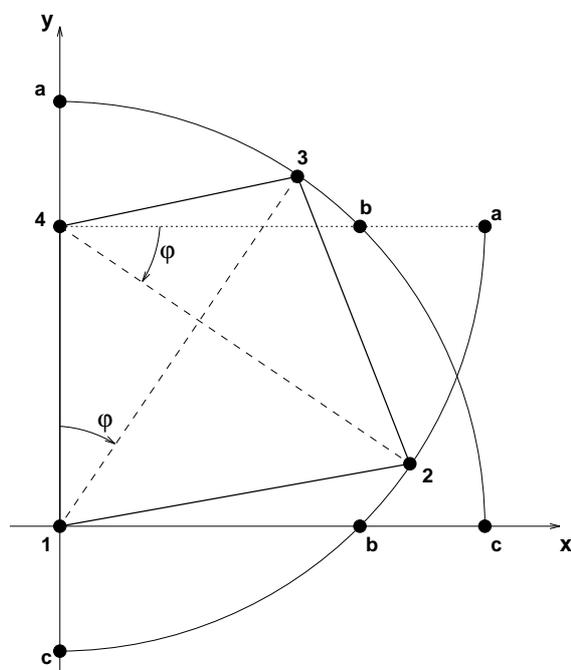


Figure D.2: Lieu des positions nodales optimales pour un quadrangle d'aire donnée

La déformation du maillage initial au cours du temps a souvent comme effet de faire diminuer le pas de temps, parfois de quelques ordres de grandeurs. Dick et Harris ⁽²⁹⁾ ont donc proposé de limiter la réduction du pas de temps à une certaine valeur, au delà de laquelle il est décidé de remailler. Cette approche se place dans une certaine logique puisque, comme nous l'avons vu, la longueur L_c traduit en partie la distorsion de l'élément. Cela nous a inspiré le développement d'un indicateur de distorsion général, qui serait utilisable aussi bien en explicite qu'en implicite. A cet effet, on considérera la grandeur adimensionnelle suivante :

$$Ab_{iI}b_{iI} = \frac{x_{24}^2 + y_{24}^2 + x_{31}^2 + y_{31}^2}{2A}$$

qui sera toujours positive. Pour un rectangle de côté a sur b , on obtient

$$\frac{a^2 + b^2}{ab}$$

et donc pour un carré, la grandeur est égale à 2, tandis qu'elle tend vers l'infini avec l'aspect ratio (a/b ou b/a). Puisque l'on considère l'élément carré comme étant optimal, on définit l'indicateur de distorsion suivant :

$$\tau = Ab_{iI}b_{iI} - 2 \quad (\text{D.4})$$

qui varie entre 0 pour le carré et $+\infty$ pour un élément infiniment allongé. Exprimé en termes des positions nodales, on aura :

$$\tau = \frac{(x_{24} - y_{31})^2 + (x_{31} + y_{24})^2}{2A} \quad (\text{D.5})$$

qui nous servira d'indicateur de distorsion décidant de l'instant du remaillage.

Références

1. **Aboudi, J.**, “Mechanics of composite materials”, *Studies in Applied Mechanics*, 29, Elsevier, Amsterdam, 1991.
2. **Agelet De Saracibar, C.**, “Análisis por el método de los elementos finitos de procesos de conformado de laminas metálicas”, *Tesis Doctoral*, Universitat de Catalunya, 1990.
3. **Aifantis, E.C.**, “On the microstructural origin of certain inelastic models”, *J. Eng. Mat. Tech.*, 106, pp. 326–331, 1984.
4. **Anderson, C.E. & Mullin, S.A.**, “Hypervelocity impact phenomenology: some aspects of debris cloud dynamics”, in *Impact: Effects of Fast Transient Loadings*, Ammann *et al.* (eds), pp. 105–122, Balkema, Rotterdam, 1988.
5. **Aravas, N.**, “On the numerical integration of a class of pressure-dependent plasticity models”, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 24, pp. 1395–1416, 1987.
6. **Bazant, Z.P. & Pijaudier-Cabot, G.**, “Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence”, *J. Appl. Mech.*, 55, pp. 287–293, 1988.
7. **Bazant, Z.P.**, “Why continuum damage is nonlocal: micromechanics arguments”, *J. Eng. Mech.*, 117, pp. 1070–1087, 1991.
8. **Becker, R. & Needleman, A.**, “Effects of yield surface curvature on necking and failure in porous plastic solids”, *J. Appl. Mech.*, 53, pp. 491–499, 1986.
9. **Belytschko, T.**, “An overview of semidiscretization and time integration procedures”, in *Computational methods for transient analysis*, T. Belytschko and T.J.R. Hughes (eds), pp. 1–65, Elsevier, 1983.
10. **Belytschko, T., Fish, J. & Englemann, B.E.**, “A finite element with embedded localization zones”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 70, pp. 59–89, 1988.
11. **Belytschko, T. & Fish, J.**, “Spectral superposition on finite elements for shear banding problems”, in *Proc. 5th Int. Symp. on Numerical Methods in Engineering*, R. Gruber *et al.* (eds), vol. 1, pp. 19–29, Springer-Verlag, 1989.
12. **Belytschko, T., Fish, J. & Bayliss, A.**, “The spectral overlay on finite elements for problems with high gradients”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 81, pp. 71–89, 1990.
13. **Belytschko, T. & Bindeman, L.P.**, “Assumed strain stabilization of the 4-node quadrilateral with 1-point quadrature for nonlinear problems”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 88, pp. 311–340, 1991.

14. **Belytschko, T., Chiang, H.Y. & Plaskasz, E.**, “High resolution two-dimensional shear band computations: imperfections and mesh dependence”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 119, pp. 1–15, 1994.
15. **Benallal, A., Billardon, R. & Lemaitre, J.**, “Continuum damage mechanics and local approach to fracture: numerical procedures”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 92, pp. 141–155, 1991.
16. **Bittencourt, E.**, “Tratamento do problema de contato e impacto em grandes deformações pelo método dos elementos finitos”, *Tese de Doutorado*, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (Brasil), 1994.
17. **Blacker, T.D. & Stephenson, M.B.**, “Paving: a new approach to automated quadrilateral mesh generation”, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 32, pp. 811–847, 1991.
18. **Bodé, L., Pijaudier-Cabot, G. & Huerta, A.**, “ALE Finite element analysis of strain localization – Consistent computational strategy and remeshing issues”, *Computational Plasticity – Fundamentals and Applications*, D.R.J. Owen *et al.* (eds), pp. 587–598, Pineridge Press, 1995.
19. **Charlier, R. & Pierry, J.**, “Detection and modelling of the shear band localisation”, *Computational Plasticity – Fundamentals and Applications*, D.R.J. Owen *et al.* (eds), pp. 635–646, Pineridge Press, 1995.
20. **Chu, C.C. & Needleman, A.**, “Void nucleation effects in biaxially stretched sheets”, *J. Eng. Mat. Tech.*, 102, pp. 249–256, 1980.
21. **Coorevits, P., Ladevèze, P. & Pelle, J.-P.**, “Mesh optimization for problems with steep gradients”, *Eng. Comp.*, 11, pp. 129–144, 1994.
22. **Coorevits, P., Ladevèze, P. & Pelle, J.-P.**, “An automatic procedure with a control of accuracy for finite element analysis in 2D elasticity”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 121, pp. 91–120, 1995.
23. **Cosserat, E. & Cosserat, F.**, *Théorie des corps déformables*, Librairie Scientifique A. Hermann, Paris, 1909.
24. **Curran, D.R., Seaman, L. & Shockey, D.A.**, “Dynamic failure of solids”, *Physics Reports*, 147, pp. 235–388, 1987.
25. **de Borst, R.**, “Simulation of strain localization: a reappraisal of the Cosserat continuum”, *Eng. Comp.*, 8, pp. 317–332, 1991.
26. **de Borst, R. & Mühlhaus, H.B.**, “Gradient-dependent plasticity: formulation and algorithmic aspects”, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 35, pp. 521–539, 1992.
27. **de Borst, R.**, “A generalisation of J2-flow theory for polar continua”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 103, pp. 347–362, 1993.
28. **Désoyer, T. & Leroux S.**, “Etude de la localisation pour une loi élastique endommageable avec gradients de déplacement d’ordre supérieur”, *C.R. Acad. Sci. Paris*, II 318, pp. 277–282, 1994.

29. **Dick, R.E. & Harris, W.H.**, “Fully automated rezoning of evolving geometry problems”, *Numerical Methods in Industrial Forming Processes*, Chenot, Wood & Zienkiewicz (eds), pp. 243–248, Balkema, Rotterdam, 1992.
30. **Drugan, W.J. & Miao, Y.**, “Influence of porosity on plane strain tensile crack-tip stress fields in elastic-plastic materials: part I”, *J. Appl. Mech.*, 59, pp. 559–567, 1992.
31. **Duva, J.M.**, “A constitutive description of nonlinear materials containing voids”, *Mech. Mat.*, 5, pp. 137–144, 1986.
32. **Duvaut, G. & Lions, J.L.**, “Les inéquations en mécanique et en physique”, Dunod, Paris, 1972.
33. **Dyduch, M., Habraken, A.M. & Cescotto, S.**, “Automatic adaptive remeshing for numerical simulation of metalforming”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 101, pp. 283–298, 1992.
34. **Dyduch, M., Cescotto, S. & Habraken, A.M.**, “Efficient error estimates for adaptive remeshing in 2D metal forming modelling”, *Simulation of Material Processing: Theory, Methods and Applications*, Shen & Dawson (eds), pp. 419–424, Balkema, Rotterdam, 1995.
35. **Eftis, J., Nemes, J.A. & Randles, P.W.**, “Viscoplastic analysis of plate-impact spallation”, *Int. J. Plasticity*, 7, pp. 15–39, 1991.
36. **Eftis, J. & Nemes, J.A.**, “Evolution equation for the void volume growth rate in a viscoplastic-damage constitutive model”, *Int. J. Plasticity*, 7, pp. 275–293, 1991.
37. **Eftis, J. & Nemes, J.A.**, “Modeling of impact-induced spall fracture and post spall behaviour of a circular plate”, *Int. J. Fracture*, 53, pp. 301–324, 1992.
38. **Fish, J. & Belytschko, T.**, “Element with embedded localization zones for large deformation problems”, *Comp. Struct.*, 30, pp. 247–256, 1988.
39. **Fish, J. & Belytschko, T.**, “A finite element with a unidirectionally enriched strain field for localization analysis”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 78, pp. 181–200, 1990.
40. **Fish, J. & Belytschko, T.**, “A general finite element procedure for problems with high gradients”, *Comp. Struct.*, 35, pp. 309–319, 1990.
41. **Flanagan, D.P. & Belytschko, T.**, “Eigenvalues and stable timesteps for the uniform strain hexaedron and quadrilateral”, *J. Appl. Mech.*, 51, pp. 35–40, 1981.
42. **François, D., Pineau, A. & Zaoui, A.**, “Comportement mécanique des matériaux – viscoplasticité, endommagement, mécanique de la rupture, mécanique du contact”, Hermès, Paris, 1993.
43. **Gelin, J.C.**, “On a fully elastic-plastic ductile damage model in finite strains and its numerical implementation”, in *Proceedings of MECAMAT Besançon*, C. Oytana (ed.), pp. III/197–III/207, 1988.
44. **Gelin, J.C. & Predeleanu, M.**, “Finite strain elasto-plasticity including damage – Application to metal forming problems”, in *Numiform 89*, Thompson *et al.* (eds), pp. 151–157, Balkema, Rotterdam, 1989.

45. **George, P.L.**, “Synthèse de quelques méthodes de génération de maillages Eléments Finis”, *Revue européenne des éléments finis*, 2, pp. 121–153, 1992.
46. **Germain, P.**, “Cours de Mécanique des Milieux Continus”, Masson & Cie, Paris, 1973.
47. **Germain, P., Nguyen, Q.S. & Suquet, P.**, “Continuum Thermodynamics”, *J. Appl. Mechs.*, 50, pp. 1010–1020, 1983.
48. **Gilath, J. & Eliezer, S.**, in *Advances in Plasticity – 1989*, A.S. Kahn and M. Tokuda (eds), pp. 393–396, Pergamon Press, Oxford, 1989.
49. **Govindarajan, R.M. & Aravas, N.**, “Pressure-dependent plasticity models: loading – unloading criteria and the consistent linearization of an integration algorithm”, *Communications in Num. Meth. Eng.*, 11, pp. 339–345, 1995.
50. **Goya, M., Nagaki, S. & Sowerby, R.**, “A ductile fracture model for porous material”, *Numerical Methods in Industrial Forming Processes*, Chenot, Wood & Zienkiewicz (eds), pp. 153–158, Balkema, Rotterdam, 1992.
51. **Gurson, A.L.**, “Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth : Part I – Yield criteria and flow rules for porous ductile media”, *J. Eng. Mat. Tech.*, 99, pp. 2–15, 1977.
52. **Habraken, A.M.**, “Contribution à la modélisation du formage des métaux par la méthode des éléments finis”, *Thèse de Doctorat*, Université de Liège, 1989.
53. **Habraken, A.M. & Cescotto, S.**, “An automatic remeshing technique for finite element simulation of forming processes”, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 30, pp. 1503–1525, 1990.
54. **Hadamard, J.**, *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l’hydrodynamique*, Librairie Scientifique A. Hermann, Paris, 1903. (ou Chelsea, New York, 1949)
55. **Hallquist, J.O.**, “NIKE2D – A vectorized, implicit finite deformation finite element code for analysing the static and dynamic response of 2-D solids”, Report UCID-19677, Lawrence Livermore National Laboratories, 1983.
56. **Hill, R.**, “A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids”, *J. Mech. Phys. Solids*, 6, pp. 236–249, 1958.
57. **Hill, R.**, “Acceleration waves in solids”, *J. Mech. Phys. Solids*, 10, pp. 1–16, 1962.
58. **Hom, C.L. & McMeeking, R.M.**, “Void growth in elastic-plastic materials”, *J. Appl. Mech.*, 56, pp. 309–317, 1989.
59. **Huerta, A. & Pijaudier-Cabot, G.**, “Discretization influence on the regularization by two localization limiters”, in *Numerical Methods in Engineering ‘92*, Ch. Hirsch *et al.* (eds), pp. 65–72, Elsevier, 1992.
60. **Huerta, A., Pijaudier-Cabot, G. & Bodé, L.**, “ALE formulation in nonlocal strain softening solids”, *Computational Plasticity – Fundamentals and Applications*, D.R.J. Owen *et al.* (eds), pp. 2249–2268, Pineridge Press, 1992.
61. **Hughes, T.J.R.**, *The Finite Element Method*, Prentice-Hall, 1987.

62. **Jansen, K., Shakib, F. & Hughes, T.J.R.**, “Fast projection algorithm for unstructured meshes”, in *Computational Nonlinear Mechanics in Aerospace Engineering*, S.N. Atluri (ed.), pp. 175–204, Progress in Astronautics and Aeronautics, 146, AIAA, 1992.
63. **Johnson, J.N.**, “Dynamic fracture and spallation in ductile solids”, *J. Appl. Phys.*, 52, pp. 2812–2825, 1981.
64. **Ju, J.W.**, “On energy-based coupled elastoplastic damage theories: constitutive modeling and computational aspects”, *Int. J. Solids Struct.*, 25, pp. 803–833, 1989.
65. **Ju, J.W.**, “Consistent tangent moduli for a class of viscoplasticity”, *J. Eng. Mech.*, 116, pp. 1764–1779, 1990.
66. **Kachanov, L.M.**, “Time to the rupture process under creep conditions”, *Izv. Akad. Nauk. SSR Otd. Tech.*, 8, 1958.
67. **Ladevèze, P., Pelle, J.-P. & Rougeot, Ph.**, “Error estimation and mesh optimization for classical finite elements”, *Eng. Comp.*, 8, pp. 69–80, 1991.
68. **Laschet, G.**, “Prediction par éléments finis du comportement non linéaire et de la résistance d’assemblages multimatériaux collés”, *Thèse de Doctorat*, Université de Liège, 1994.
69. **Lasry, D. & Belytschko, T.**, “Localization limiters in transient problems”, *Int. J. Solids Struct.*, 24, pp. 581–597, 1988.
70. **Leblond, J.B., Perrin, G. & Devaux, J.**, “Bifurcation effects in ductile metals with nonlocal damage”, *J. Appl. Mech.*, 61, pp. 236–242, 1994.
71. **Lee, E.H.**, “Elastic-plastic deformation at finite strains”, *J. Appl. Mech.*, 36, pp. 1–6, 1969.
72. **Lee, J.H.**, “Accuracies of numerical solution methods for the pressure-modified Von Mises model”, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 26, pp. 453–465, 1988.
73. **Lee, B.J. & Mear, M.E.**, “Effective properties of power-law solids containing elliptical inhomogeneities : Part II – Rigid inclusions”, *Mech. Mat.*, 13, pp. 313–335, 1992.
74. **Lee, B.J. & Mear, M.E.**, “Effective properties of power-law solids containing elliptical inhomogeneities : Part II – Voids”, *Mech. Mat.*, 13, pp. 337–356, 1992.
75. **Lee, B.J. & Zhang, Y.**, “On the numerical integration of a class of pressure-dependent plasticity models with mixed hardening”, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 32, pp. 419–438, 1991.
76. **Lemaitre, J. & Chaboche, J.L.**, *Mécanique des matériaux solides*, Dunod, Paris, 1985.
77. **Loret, B. & Prevost, H.**, “Dynamic strain localization in elasto-(visco-)plastic solids : Part 1. General formulation and one-dimensional examples”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 83, pp. 247–273, 1990.
78. **Loret, B. & Prevost, H.**, “Dynamic strain localization in elasto-(visco-)plastic solids : Part 2. Plane strain examples”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 83, pp. 275–294, 1990.

79. **Mackenzie, J.K.**, “The elastic constants of a solid containing spherical holes”, *Proc. Phys. Soc.*, 63B, pp. 2–11, 1959.
80. **MacClintock, F.A.**, “A criterion for ductile fracture by the growth of holes”, *J. Appl. Mech.*, 35, pp. 363–371, 1968.
81. **MacConalogue, D.J.**, “The quasi-intrinsic scheme for passing a smooth curve through a discrete set of points”, *Computer Journal*, 13, 1970.
82. **Mear, M.E.**, “On the plastic yielding of porous metals”, *Mech. Mat.*, 9, pp. 33–48, 1990.
83. **Miao, Y. & Drugan, W.J.**, “Influence of porosity on plane strain tensile crack-tip stress fields in elastic-plastic materials: part II”, *J. Appl. Mech.*, 60, pp. 883–889, 1993.
84. **Mori, T. & Tanaka, K.**, *Acta Metal.*, 21, p. 571, 1973.
85. **Nagtegaal, J.C., & Veldpaus, F.E.**, “On the implementation of finite strain plasticity equations in a numerical model”, in *Numerical analysis of forming processes*, Pitmann *et al.* (eds), pp. 351–371, 1984.
86. **Needleman, A.**, “Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 67, pp. 69–85, 1988.
87. **Nemes, J.A., Eftis, J. & Randles, P.W.**, “Viscoplastic constitutive modeling of high strain-rate deformation, material damage and spall fracture”, *J. Appl. Mech.*, 57, pp. 282–291, 1990.
88. **Nemes, J.A. & Eftis, J.**, “Pressure-shear waves and spall fracture described by a viscoplastic-damage constitutive model”, *Int. J. Plasticity*, 8, pp. 185–207, 1992.
89. **Nemes, J.A. & Eftis, J.**, “Constitutive modeling of the dynamic fracture of smooth tensile bars”, *Int. J. Plasticity*, 9, pp. 243–270, 1993.
90. **Nguyen, D.H.**, “Aspects thermodynamiques des comportements des solides”, *Notes de cours*, Université de Liège, 1980.
91. **Norris, D.M., Morran, J.R.B., Scudder, J.K. & Quinones, D.F.**, “A computer simulation of the tension test”, *J. Mech. Phys. Solids*, 26, pp. 1–19, 1978.
92. **Oñate, E. & Agelet de Saracibar, C.**, “Numerical modelling of sheet metal forming problems”, Publicacion CIMNE 4, Barcelona, 1990.
93. **Ortiz, M. & Popov, E.P.**, “Accuracy and stability of intergration algorithms for elastoplastic constitutive relations”, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 21, pp. 1561–1576, 1985.
94. **Ortiz, M. & Simo, J.C.**, “An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations”, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 23, pp. 353–366, 1986.
95. **Ortiz, M. & Quigley, J.J.**, “Element design and adaptive meshing in strain localization problems”, *Computational Plasticity – Models, Software and Applications*, D.R.J. Owen *et al.* (eds), pp. 213–236, Pineridge Press, 1989.
96. **Ortiz, M. & Quigley, J.J.**, “Adaptive mesh refinement in strain localization problems”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 90, pp. 781–804, 1991.

97. **Oyane, M. & Shima, S.**, “Theory of plasticity for porous materials”, *Bull. JSME*, 16, p. 99, 1973.
98. **Pastor, M., Peraire, J. & Zienkiewicz, O.C.**, “Adaptive remeshing for shear band localization problems”, *Arch. Appl. Mech.*, 61, pp. 30–39, 1991.
99. **Peeters, F.J.H. & Konter, A.W.A.**, “Numerical simulation of industrial metal forming processes”, *Numerical Methods in Industrial Forming Processes*, Chenot, Wood & Zienkiewicz (eds), Balkema, Rotterdam, 1992.
100. **Peraire, J., Vahdati, M., Morgan, K. & Zienkiewicz, O.C.**, “Adaptive remeshing for compressible flow computations”, *J. Comp. Phys.*, 72, pp. 449–466, 1987.
101. **Peric, D., Mitchell, P. & Owen, D.J.R.**, “Some computational issues in strain localization problems for rate independent solids”, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 32, pp. 79–101, 1991.
102. **Peric, D. & Owen, D.J.R.**, “Computational strategies for strain localization problems”, in *Computational Methods in Applied Sciences*, Ch. Hirsch (ed.), pp. 63–78, Elsevier, 1992.
103. **Perzyna, P.**, “Fundamental problems in visco-plasticity”, *Adv. Appl. Mech.*, 9, pp. 243–377, 1966.
104. **Perzyna, P.**, “Thermodynamic theory of viscoplasticity”, *Adv. Appl. Mech.*, 11, pp. 313–354, 1971.
105. **Perzyna, P.**, “Internal state variable description of dynamic fracture of ductile solids”, *Int. J. Solids Struct.*, 22, pp. 797–818, 1986.
106. **Picart, P., Lazzarotto, L. & Oudin, J.**, “Analyse par éléments finis de la sensibilité des structures élastoplastiques isotropes à l'évolution des paramètres de nucléation, croissance et coalescence de microcavités”, in *2^{ème} Colloque National en Calcul des Structures*, pp. 125–130, Editions Hermès, Paris, 1995.
107. **Pijaudier-Cabot, G., Bodé, L. & Huerta, A.**, “Arbitrary lagrangian-eulerian finite element analysis of strain localization in transient problems”, *Publicacion CIMNE* 56, Barcelona, 1994.
108. **Ponthot, J.P.**, “Mécanique des Milieux Continus solides en grandes transformations et traitement unifié par la Méthode des Eléments Finis”, *Thèse de doctorat*, Université de Liège, 1995.
109. **Ponthot, J.P.**, “Mécanique des Milieux Continus solides en grandes transformations et traitement unifié par la Méthode des Eléments Finis”, *Rapport TF-38, LTAS*, Université de Liège, 1995.
110. **Rey, C. & Viaris de Lesegno, P.**, “Analyse expérimentale d'un problème de localisation de la déformation plastique”, *Mecamat Infos*, 14, pp. 11–18, 1994.
111. **Rice, J.R. & Tracey, D.M.**, “On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields”, *J. Mech. Phys. Solids*, 17, pp. 201–217, 1969.
112. **Rice, J.R.**, “The localization of plastic deformation”, in *Theoretical and Applied Mechanics*, W.T. Koiter (ed.), pp. 207–220, North-Holland, 1976.

113. **Rochus, P.**, “Conception d’expériences spatiales”, *Notes de cours*, Université de Liège, 1992.
114. **Saje, M., Pan, J. & Needleman, A.**, “Void nucleation effects on shear localization in porous plastic solids”, *Int. J. Fract.*, 19, pp. 163–182, 1982.
115. **Sandia National Laboratories**, “Full-scale turbine missile casing tests”, *EPRI NP-2741*, Albuquerque, 1983.
116. **Simo, J.C. & Taylor, R.L.**, “Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity”, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, 48, pp. 101–118, 1985.
117. **Simo, J.C. & Ortiz, M.**, “A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations”, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, 49, pp. 221–245, 1985.
118. **Simo, J.C. & Hughes, T.J.R.**, “General return mapping algorithms for rate-independent plasticity”, in *Constitutive Equations for Engineering Materials: Theory and Applications*, Desai C.S. (ed.), pp. 221–231, Elsevier, 1987.
119. **Simo, J.C. & Ju, J.W.**, “Strain- and stress-based continuum damage models – I. Formulation”, *Int. J. Solids Struct.*, 23, pp. 821–840, 1987.
120. **Simo, J.C. & Ju, J.W.**, “Strain- and stress-based continuum damage models – I. Computational aspects”, *Int. J. Solids Struct.*, 23, pp. 841–869, 1987.
121. **Simo, J.C.**, “A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part I. Continuum formulation”, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, 66, pp. 199–219, 1988.
122. **Simo, J.C.**, “A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part II. Computational aspects”, *Comp. Meths. Appl. Mech. Eng.*, 68, pp. 1–31, 1988.
123. **Simo, J.C. & Ju, J.W.**, “On continuum damage-elastoplasticity at finite strains – A computational framework”, *Comp. Mech.*, 5, pp. 375–400, 1989.
124. **Stainier, L. & Ponthot, J.P.**, “An improved one-point integration method for large strain elastoplastic analysis”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 118, pp. 163–177, 1994.
125. **Stainier, L.**, “Rate-dependent void growth in ductile metals submitted to large deformation”, in *Localized damage III – Computer aided assessment and control*, Aliabadi *et al.* (eds), pp. 529–536, Computational Mechanics Publications, Southampton Boston, 1994.
126. **Stainier, L.**, “Dynamic void growth in ductile metals submitted to large deformation”, in *International Conference and Workshop on Metal Forming Process Simulation in Industry*, Kroplin B. & Luckey E. (eds), pp. 97–109, Baden-Baden, 1994.
127. **Stainier, L.**, “Modélisation numérique de l’endommagement et de la rupture ductile”, in *2^{ème} Colloque National en Calcul des Structures*, pp. 125–130, Editions Hermès, 1995.
128. **Stainier, L. & Colantonio, L.**, “Numerical integration of pressure dependent elasto-viscoplastic constitutive models”, *en préparation*.

129. **Steinmann, P. & Willam, K.**, “Performance of enhanced finite elements formulations in localized failure computations”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 90, pp. 845–867, 1991.
130. **Tvergaard, V.**, “On localization in ductile materials containing spherical voids”, Report 181, Danish Center for Applied Mathematics and Mechanics, 1980.
131. **Tvergaard, V.**, “Ductile fracture by cavity nucleation between larger voids”, Report 210, Danish Center for Applied Mathematics and Mechanics, 1981.
132. **Tvergaard, V.**, “Material failure by void coalescence in localized shear bands”, *Int. J. Solids Struct.*, 18, pp. 659–672, 1982.
133. **Tvergaard, V. & Needleman A.**, “Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar”, *Acta Metal.*, 32, pp. 157–169, 1984.
134. **Tvergaard, V.**, “Necking in tensile bars with rectangular cross-section”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 103, pp. 273–290, 1993.
135. **Tvergaard, V. & Needleman, A.**, “Effects of nonlocal damage in porous plastic solids”, Report 487, Danish Center for Applied Mathematics and Mechanics, 1994.
136. **Wang, X.**, “Modélisation numérique des problèmes avec localisation de la déformation en bandes de cisaillement”, *Thèse de Doctorat*, Université de Liège, 1993.
137. **Zhang, Z.L.**, “On the accuracies of numerical integration algorithms for Gurson-based pressure-dependent elastoplastic constitutive models”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 121, pp. 15–28, 1995.
138. **Zhang, Z.L.**, “Explicit consistent tangent moduli with a return mapping algorithm for pressure-dependent elastoplasticity models”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 121, pp. 29–44, 1995.
139. **Zhong, H.G.**, “Estimateurs d’erreurs a posteriori et adaptation de maillages dans la méthode des éléments finis”, *Thèse de Doctorat*, Université de Liège, 1991.
140. **Zhu, J.Z., Zienkiewicz, O.C., Hinton, E. & Wu, J.**, “A new approach to the development of automatic quadrilateral mesh generation”, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 32, pp. 849–866, 1991.
141. **Zhu, J.J.**, “Contribution to the local approach of fracture in solid dynamics”, *Ph.D. Thesis*, Université de Liège, 1992.
142. **Zienkiewicz, O.C. & Zhu, J.Z.**, “A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis”, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 24, pp. 337–357, 1987.

