



**HAL**  
open science

# Hyperbolicité et bouts des graphes de Schreier

Audrey Vonseel

► **To cite this version:**

Audrey Vonseel. Hyperbolicité et bouts des graphes de Schreier. Théorie des groupes [math.GR]. Université de Strasbourg, IRMA UMR 7501, 2017. Français. NNT: . tel-01575673v1

**HAL Id: tel-01575673**

**<https://theses.hal.science/tel-01575673v1>**

Submitted on 21 Aug 2017 (v1), last revised 19 Feb 2018 (v3)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT DE  
RECHERCHE  
MATHÉMATIQUE  
AVANCÉE

UMR 7501

Strasbourg

# Thèse

présentée pour obtenir le grade de docteur de  
l'Université de Strasbourg  
Spécialité MATHÉMATIQUES

**Audrey Vonseel**

**Hyperbolicité et bouts des graphes de Schreier**

Soutenue le 26 septembre 2017  
devant la commission d'examen

Thomas Delzant, directeur de thèse  
Indira Chatterji, rapporteur  
Eric Swenson, rapporteur  
Cornelia Druțu, examinateur  
Charles Frances, examinateur

[www-irma.u-strasbg.fr](http://www-irma.u-strasbg.fr)





Institut de Recherche Mathématique Avancée  
Université de Strasbourg et C.N.R.S.  
7, rue René Descartes  
67084 Strasbourg Cedex

---

# HYPERBOLICITÉ ET BOUTS DES GRAPHES DE SCHREIER

---

Audrey VONSEEL

Thèse de doctorat sous la direction de  
Thomas DELZANT

21 août 2017



# Remerciements

Pour commencer, je souhaite évidemment remercier mon directeur de thèse Thomas DELZANT sans qui tout ce travail n'aurait jamais vu le jour. Lorsque je rencontrais des difficultés, vous avez toujours su me conseiller et me guider avec patience et bienveillance. Merci pour votre très grande disponibilité et votre soutien durant ces trois années.

Je souhaite remercier sincèrement Indira CHATTERJI et Eric SWENSON pour leurs relectures attentives et la précision de leurs retours. Merci pour l'intérêt que vous avez porté à mon travail. Vos remarques pertinentes et constructives m'ont permis de prendre du recul et d'améliorer, je l'espère, la qualité de ce manuscrit.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Cornelia DRUȚU et Charles FRANCES pour l'honneur qu'ils me font de participer à mon jury.

Je souhaite également remercier Rémy COULON qui, lors de nos différentes rencontres, a toujours répondu à mes questions par des explications éclairantes. Un grand merci à Markus et Suraj pour leurs bons conseils et les discussions mathématiques toujours enrichissantes.

Cette thèse conclut 8 années d'études à l'Université de Strasbourg. Du parcours MPA en passant par le Magistère, j'ai bénéficié d'une formation de qualité. Je tiens donc à remercier l'ensemble de mes professeurs qui ont su, chacun à leur façon, nourrir ma passion du savoir.

J'aimerais souligner ici l'importance et l'impact qu'ont eu pour moi la bourse et l'aide au mérite sans lesquels je n'aurais très certainement pas pu mener à bien ces longues études.

Je souhaite également remercier le personnel de l'IRMA, de l'UFR Math-Info pour leur efficacité et leur gentillesse. Je remercie aussi l'école doctorale pour ses nombreuses initiatives intéressantes qui souffrent malheureusement du peu de temps que nous pouvons y consacrer et parfois d'un mauvais timing.

Ces années de thèse n'auraient pas eu autant de saveurs sans l'ensemble des doctorants.

Je vous remercie tout d'abord pour m'avoir fait confiance et confié les rênes du « séminaire doctorants ». J'ai parfois dû batailler pour trouver des orateurs mais ce fut toujours avec grand plaisir que j'ai organisé durant deux ans ces rendez-vous hebdomadaires. D'ailleurs je remercie Romain pour avoir fait ce job durant ma première année de thèse.

Je tiens tout particulièrement à remercier mes camarades de bureaux : Jérôme, Guillaume, Guillaume et plus récemment, Philippe. Que ce soit sur des airs de Game of Thrones, Harry Potter ou simplement de jazz, j'ai vraiment apprécié travailler en votre compagnie. Vous avez ponctué les

moments de réflexion intense par vos états d'âmes, coups de gueule et autres péripéties. Je remercie également Thomas pour son soutien longue distance et Amandine pour toutes nos discussions, des instants précieux pour tenir la distance. Que seraient les remerciements sans une longue liste (non exhaustive) de prénoms ? ! Encore un grand merci pour tous les moments sympathiques passés en votre compagnie : Abdoulaye, Alexander, Alix, Amaury, Anderson, Antoine, Arnaud, Arthur, Auguste, Charlotte, Christophe, Claire, Clément, Cuong, Elena, Florian, Frédéric, Jean-Baptiste, Jérémy, Kien, Laura, Mohamad, Nicolas, Nhung, Olivier, Philippe, Pierre, Ranine, Romain, Simon, Stéphane, Vincent, Xing, ...

J'ai aussi une pensée pour mes camarades des parcours MPA et Magistère : vous avez été des compagnons de route formidables. Je voudrais tout particulièrement remercier Agathe pour son amitié fidèle.

Je souhaite également remercier mes parents qui ont toujours été là pour moi. Merci pour votre confiance et votre soutien. Je remercie aussi plus généralement ma famille et ma belle-famille : les moments passés en votre compagnie sont toujours agréables et m'ont souvent permis de me changer les idées quand j'en avais besoin.

Je voudrais terminer en remerciant du fond du cœur celui avec qui partage ma vie depuis déjà longtemps : Vivien, tu as accepté sans jamais te plaindre la place envahissante des mathématiques dans notre vie. Je ne te remercierai jamais assez pour ton amour et ton soutien.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>Introduction (English)</b>	<b>13</b>
<b>1 Géométrie hyperbolique</b>	<b>23</b>
1.1 Espaces et groupes hyperboliques . . . . .	23
1.1.1 Définitions . . . . .	23
1.1.2 Quasi-isométries . . . . .	26
1.1.3 Groupes hyperboliques . . . . .	29
1.1.4 Lemme de Švarc-Milnor . . . . .	30
1.2 Quasi-convexité . . . . .	32
1.3 Bord . . . . .	38
1.3.1 Définitions et propriétés . . . . .	38
1.3.2 Prolongement des géodésiques . . . . .	41
1.3.3 Propriétés des isométries hyperboliques . . . . .	43
1.4 Bouts . . . . .	43
1.5 Enveloppe convexe faible et cœur convexe . . . . .	46
1.6 Un exemple fondamental : le cas du groupe libre . . . . .	49
1.7 Graphes de Schreier . . . . .	51
<b>2 Bouts d'espaces quotients</b>	<b>55</b>
2.1 Premières propriétés des espaces quotients . . . . .	55
2.1.1 Hyperbolicité de l'espace quotient . . . . .	57
2.1.2 Revêtement . . . . .	60
2.1.3 Bord de $X/H$ . . . . .	61
2.2 Connexité locale du bord . . . . .	63
2.2.1 Condition $(\dagger_{M,K})$ pour $X$ . . . . .	63
2.2.2 Condition $(\dagger_M)$ pour $X/H$ . . . . .	66
2.3 De la sphère aux bouts . . . . .	68
2.3.1 Relations d'équivalence dans l'espace quotient . . . . .	69
2.3.2 Ombres . . . . .	71



2.3.3	Bouts . . . . .	71
<b>3</b>	<b>Application à la théorie des groupes</b>	<b>77</b>
3.1	Hypothèse de quasi-convexité . . . . .	77
3.1.1	Construction de Rips . . . . .	78
3.1.2	Propriété de Markov . . . . .	80
3.1.3	Démonstration . . . . .	81
3.2	Groupes à un bout . . . . .	84
3.2.1	Autre application de la propriété $(\ddagger_{M,K})$ . . . . .	85
3.2.2	Détermination des constantes . . . . .	87
3.2.3	Détermination du nombre de bouts relatifs . . . . .	89
3.3	Groupes à une infinité de bouts . . . . .	91
	<b>Bibliographie</b>	<b>97</b>

# Table des figures

1	Forme de $T/H$ . . . . .	4
2	Surface fermée de genre 3 et sous-surface à bord totalement géodésique . . . . .	4
3	Convexe $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{H}^2$ et projection sur $\mathcal{C}$ . . . . .	5
4	$\mathbb{H}^2/H$ . . . . .	5
5	Shape of $T/H$ . . . . .	15
6	A closed surface of genus 3 and a subsurface with a totally geodesic boundary . . . . .	16
7	The convex set $\mathcal{C}$ in $\mathbb{H}^2$ and a projection onto $\mathcal{C}$ . . . . .	16
8	$\mathbb{H}^2/H$ . . . . .	17
1.1	Triangle $\delta$ -fin. . . . .	25
1.2	Arbres pour $n = 3$ . . . . .	26
1.3	$Y^{+R}$ est $2\delta$ -quasi-convexe . . . . .	33
1.4	Deux cas possibles . . . . .	34
1.5	Trois possibilités . . . . .	35
1.6	Arbre $T$ . . . . .	36
1.7	Triangle idéal . . . . .	41
1.8	Prolongement de géodésique . . . . .	42
1.9	Quadrilatère géodésique et quasi-géodésique . . . . .	49
1.10	Forme de $X/H$ . . . . .	51
2.1	Cas d'un arbre avec $x,y$ deux points ayant même racine dans le cœur convexe . . . . .	58
2.2	Condition $(\ddagger_M)$ . . . . .	63
2.3	Application $\pi'_R$ . . . . .	69
2.4	Joindre $\bar{x}$ et $\bar{y}$ en dehors de $B(\bar{x}_0, R + 1 - 8\delta_{X/H})$ . . . . .	73
3.1	Arbre $T$ pour $A = \langle a \mid a^3 \rangle$ et $B = \langle b \mid b^2 \rangle$ . . . . .	82
3.2	Quadrilatère de sommets $u, z, a, b$ . . . . .	86



# Introduction

Dans cette thèse, on étudie la topologie à l'infini d'espaces obtenus en quotientant un espace hyperbolique par un groupe ayant de bonnes propriétés. Plus précisément, on considère le quotient  $X/H$  d'un espace métrique  $X$  géodésique propre hyperbolique par un groupe  $H$  quasi-convexe-cocompact d'isométries de  $X$ .

## Théorie géométrique des groupes et groupes hyperboliques

Comme son nom l'indique, la théorie géométrique des groupes consiste en l'étude des liens entre la géométrie et la théorie des groupes. Plus précisément, la théorie géométrique des groupes explore les relations entre les propriétés algébriques des groupes de type fini et les propriétés géométriques et topologiques des espaces sur lesquels ils agissent. Pour ce faire, les groupes de type fini sont généralement considérés comme des objets géométriques à travers leurs graphes de Cayley. L'étude de ces graphes permet d'établir des propriétés profondes des groupes qu'un examen purement combinatoire ou algébrique ne saurait révéler. La richesse de la théorie géométrique des groupes repose donc sur la grande variété de méthodes issues de différentes branches des mathématiques qui peuvent être employées.

La théorie géométrique des groupes découle de la théorie combinatoire des groupes déjà étudiée au 19<sup>e</sup> siècle. Elle repose sur des travaux précurseurs initiés dans la première moitié du 20<sup>e</sup> siècle par M.Dehn, J.Nielsen, O.Schreier, E.R.van Kampen pour n'en nommer que quelques-uns, qui introduisent des idées topologiques et géométriques dans l'étude des groupes. Plus tard, d'autres travaux amènent vers cette théorie, comme la théorie de la petite simplification, introduite par M.Greenlinger dans les années 60 et la théorie de Bass-Serre, introduite en 1977 dans le livre de J-P.Serre [Ser77]. La théorie géométrique des groupes en tant que telle est généralement datée de la fin des années 80. L'engouement pour cette discipline a été largement motivé par les travaux de M.Gromov [Gro87] [Gro93] où sont notamment introduits les groupes hyperboliques.

## Algorithme de Gerasimov

Le théorème suivant dû à V.Gerasimov [Ger99] illustre une approche algorithmique de l'étude des groupes hyperboliques.

**Théorème 3.1.1.** Etant donné une présentation finie d'un groupe hyperbolique, il existe un algorithme permettant de décider si ce groupe est un produit libre non trivial et en calculer une décomposition de Grushko.

Etant donné une présentation finie d'un groupe hyperbolique  $G$ , l'algorithme de Gerasimov consiste à construire deux suites de propositions  $(P_n)_n$  et  $(Q_n)_n$  pour lesquelles on peut décider à chaque instant si elles sont satisfaites ou non par  $G$  et vérifiant :

- Si  $P_n$  est vraie alors le groupe  $G$  n'est pas un produit libre ;
- Si  $Q_n$  est vraie alors le groupe  $G$  est un produit libre et on a un scindement explicite de  $G$ .

A chaque instant  $n$ , on teste alors simultanément  $P_n$  et  $Q_n$ . Il existe un rang pour lequel l'une des deux propriétés sera réalisée. L'algorithme détermine de cette façon si le groupe  $G$  se décompose ou non en un produit libre non trivial.

## La condition de Bestvina-Mess

B.H.Bowditch (voir [Bow99]) et G.A.Swarup (voir [Swa96]) ont démontré indépendamment que si le bord d'un groupe hyperbolique est connexe alors il ne contient pas de points de coupure globaux. Par ailleurs, dans l'article [BM91, §3], M.Bestvina et G.Mess se sont intéressés à la propriété

- ( $\ddagger_M$ ) Il existe un entier  $L > 0$  tel que pour tout  $R \geq \delta_X$  et pour tous points  $x, y \in S(x_0, R)$  tels que  $d(x, y) \leq M$ , il existe un chemin de longueur inférieure ou égale à  $L$  joignant  $x$  à  $y$  en dehors de la boule  $\bar{B}(x_0, R - \delta_X)$ .

Ils ont en particulier montré que si le bord d'un groupe hyperbolique ne contient pas de points de coupure globaux alors il existe un entier  $M > 0$  tel que le groupe satisfait la propriété ( $\ddagger_M$ ). On remarque alors que cette propriété convient pour tenir le rôle de  $P_n$  dans l'algorithme de Gerasimov. Décider si le bord d'un groupe hyperbolique est connexe ou de façon équivalente, décider si un groupe hyperbolique a un bout revient à vérifier s'il existe  $M > 0$  tel que la propriété ( $\ddagger_M$ ) est satisfaite par le groupe.

On note  $X$  un espace métrique géodésique  $\delta$ -hyperbolique. On suppose que l'on peut *prolonger les géodésiques* dans  $X$  c'est-à-dire qu'il existe une constante  $\mu$  telle que pour tout point de  $X$ , il existe un rayon géodésique issu du point de base de  $X$  passant à moins de  $\mu$  de ce point. On dit dans ce cas que  $\mu$  est une *constante de prolongement des géodésiques* dans  $X$ . La condition de Bestvina-Mess intervient dans un autre résultat sur le bord d'espaces hyperboliques : s'il existe un réel  $M$  supérieur à une certaine constante ne dépendant que de  $\delta$  et  $\mu$  telle que  $X$  satisfait ( $\ddagger_M$ ) alors le bord de  $X$  est localement connexe. La condition de Bestvina-Mess donne donc un critère effectif pour la connexité locale du bord de l'espace hyperbolique  $X$ .

## Bouts relatifs

La théorie des bouts a été introduite par H.Freudenthal dans l'article [Fre31] dans le cadre des espaces topologiques. Or toute quasi-isométrie entre espaces géodésiques propres induit un

homéomorphisme entre leur espaces des bouts. C'est ainsi que la notion de bouts est étendue aux groupes de type fini. Dans l'article [Hop44], H.Hopf montre qu'un groupe de type fini admet 0, 1, 2 ou une infinité de bouts. Par ailleurs, le théorème de Stallings (voir [Sta71]) indique qu'un groupe ayant une infinité de bouts est un produit libre. Ces résultats soulignent les liens entre les propriétés algébriques des groupes de type fini et les propriétés asymptotiques de leurs graphes de Cayley.

Dans les années 50, la notion de bouts fut généralisée par A.Borel [Bor53] à des couples de groupes ; on parle dans ce cas de *bouts relatifs* d'un couple de groupes. Ces travaux furent ensuite approfondis par C.Houghton [Hou74] puis par P.Scott sous un nouveau formalisme dans [Sco78].

Si  $G$  est un groupe de type fini et  $H$  est un sous-groupe de  $G$ , le nombre de bouts relatifs du couple  $(G, H)$  est alors le nombre de bouts d'un graphe de Schreier associé. En particulier, on peut noter l'absence d'un résultat équivalent au théorème de Hopf pour les bouts relatifs.

Cela motive la question suivante.

**Question ★.** Etant donné une présentation finie d'un groupe hyperbolique  $G$  et un sous-groupe  $H$ , peut-on décrire la topologie à l'infini des graphes de Schreier associés au couple  $(G, H)$  ? En particulier, existe-t-il un algorithme permettant de déterminer le nombre de bouts relatifs du couple  $(G, H)$  ?

## Exemples

Observons dans un premier temps le cas d'un groupe libre  $F$  sur un ensemble fini  $\mathcal{S}$  et d'un sous-groupe  $H$  de type fini. Comme  $F$  est de type fini, le graphe de Schreier est quasi-isométrique au quotient d'un graphe de Cayley de  $F$  par  $H$ .

Le graphe de Cayley du groupe  $F$  par rapport à  $\mathcal{S}$  est un arbre  $T$ . En particulier, le groupe  $F$  agit *géométriquement* – c'est-à-dire par isométrie, proprement discontinument et cocompactement – sur cet arbre  $T$ . Si  $x_0$  est un point de  $T$ , la réunion des segments  $h \cdot [x_0, sx_0]$  pour  $s \in \mathcal{S}_H$  et pour tout  $h \in H$  forme un sous-arbre connexe de  $T$  et donc un convexe  $T'$  de  $T$ . Par définition de  $T'$ ,  $H$  agit géométriquement sur  $T'$ . Cela signifie alors que  $H$  est quasi-isométrique au convexe  $T'$ .

L'espace quotient  $T/H$  a la forme de la figure 1 : c'est la réunion d'un graphe fini convexe et d'une famille finie d'arbres disjoints enracinés sur ce convexe en un point. Notons l'existence d'une projection naturelle de  $T/H$  sur un convexe  $\mathcal{C}$  que l'on nomme *cœur convexe*. Chaque arbre se projette alors sur sa racine dans le convexe. Comme chacun de ces arbres admet une infinité de bouts, il en sera de même pour  $T/H$ . Donc le couple  $(F, H)$  a une infinité de bouts relatifs.

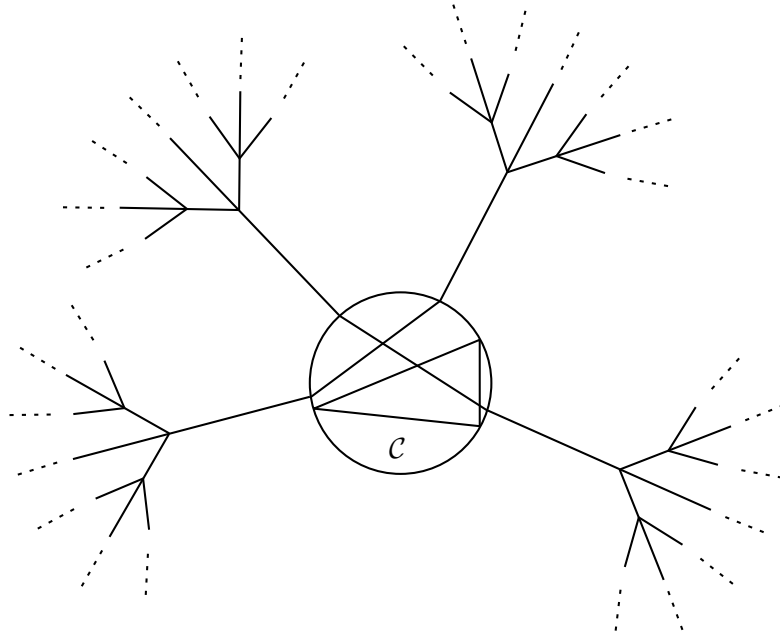


FIGURE 1 – Forme de  $T/H$

On reprendra en détail cet exemple dans la section 1.6.

Considérons maintenant une surface orientée fermée  $S$  de genre  $g \geq 2$  munie d'une métrique hyperbolique. Le groupe de surface  $\pi_1(S) = G$  est donné par la présentation finie  $\langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle$ . Son graphe de Cayley par rapport au système générateur donné par la présentation de groupe forme un pavage du plan hyperbolique par des  $4g$ -gones. Le groupe de surface  $G$  agit géométriquement sur le revêtement universel  $\mathbb{H}^2$  de  $S$ . Le groupe  $G$  est donc quasi-isométrique au plan hyperbolique pavé par des  $4g$ -gones. En particulier, chaque  $4g$ -gone est un domaine fondamental pour l'action de  $G$  sur  $\mathbb{H}^2$ .

Considérons maintenant une sous-surface  $\Sigma$  de  $S$  de bord totalement géodésique. La figure 2 illustre l'exemple pour  $g = 3$ .

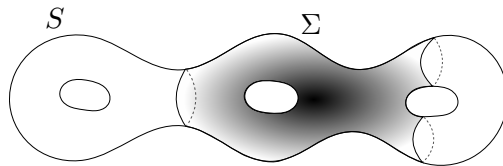


FIGURE 2 – Surface fermée de genre 3 et sous-surface à bord totalement géodésique

Si on considère un revêtement universel de la surface  $S$  en un point base appartenant à  $\Sigma$ , la composante connexe du revêtement contenant un relevé de ce point est un polygone convexe  $\mathcal{C}$  ayant

une infinité de côtés. En particulier, le groupe fondamental  $\pi_1(\Sigma) = H$  agit cocompactement sur  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}/H$  est isomorphe à  $\Sigma$ .

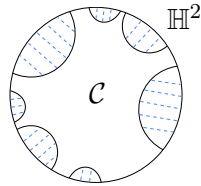


FIGURE 3 – Convexe  $\mathcal{C}$  dans  $\mathbb{H}^2$  et projection sur  $\mathcal{C}$

Comme le revêtement universel est le plan hyperbolique  $\mathbb{H}^2$ , il existe toujours une projection orthogonale  $H$ -équivariante sur le convexe  $\mathcal{C}$  (voir [BH99, II.2]). Les segments géodésiques joignant des points de  $\mathbb{H}^2$  à leur projetés sur le convexe  $\mathcal{C}$  sont tous distincts modulo l'action de  $H$ .

L'espace formé en quotientant un graphe de Cayley de  $G$  par le groupe  $H$  a donc la forme de la figure 4.

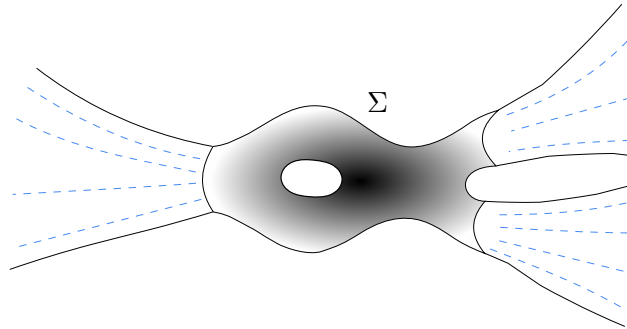


FIGURE 4 –  $\mathbb{H}^2/H$

On observe alors que le nombre de bouts du couple  $(G, H)$  est égal au nombre de composantes connexes du bord de  $\Sigma$ .

## Quasi-convexité

Ces exemples montrent que sous certaines conditions, il est possible de déterminer le nombre de bouts relatifs d'un couple de groupes. On remarque que les sous-groupes  $H$  considérés dans ces exemples ont la particularité d'être quasi-isométriques à un convexe ; ce sont des groupes *quasi-convexes*.

Les sous-groupes quasi-convexes des groupes hyperboliques sont connus pour leur nombreuses propriétés intéressantes. Par exemple, un sous-groupe quasi-convexe d'un groupe hyperbolique est à son tour de type fini, hyperbolique et donc de présentation finie. De plus les sous-groupes finis, les sous-groupes d'indice fini et les conjugués de sous-groupes quasi-convexes de groupes hyperboliques sont quasi-convexes. L'ensemble de ces bonnes propriétés expliquent pourquoi les sous-groupes quasi-convexes de groupes hyperboliques sont très largement étudiés (voir par exemple [Gro87], [CDP90], [GdlH90], [ABC<sup>+</sup>91], [GS91], [Arz01], [Swe01]).



---

En toute généralité, la réponse à la question  $\star$  est négative. Notons  $G$  un groupe hyperbolique et  $H$  un sous-groupe de  $G$ . La quasi-convexité du sous-groupe  $H$  est une condition nécessaire à l'existence d'un algorithme permettant de calculer le nombre de bouts relatifs d'un couple  $(G, H)$ .

**Théorème 3.1.2.** On peut construire une présentation finie d'un groupe hyperbolique et un sous-groupe de ce groupe pour lesquels on ne peut déterminer ni le nombre de bouts relatifs, ni si celui-ci est fini.

Etant donné une présentation finie de groupes, la construction de Rips fournit un groupe hyperbolique  $G$  (en fait un groupe à petite simplification) et un sous-groupe  $H$  pour lesquels le nombre de bouts relatifs dépendra des propriétés de la présentation de groupe initialement considérée. Le nombre de bouts relatifs de  $(G, H)$  est :

- nul si et seulement si le groupe défini par la présentation est réduit à un élément ;
- égal à 2 si et seulement si le groupe défini par la présentation est de cardinal 2 ;
- infini si et seulement si le groupe défini par la présentation est de cardinal supérieur strictement à 2.

Ces propriétés sont en fait des *propriétés de Markov*, c'est-à-dire qu'il existe deux groupes de présentation finie  $G_+$  et  $G_-$  tels que

- $G_+$  satisfait la propriété ;
- si  $G_-$  est plongé dans un groupe de présentation finie alors ce groupe ne satisfait pas la propriété.

L'importance de cette classe de propriétés des groupes de présentations finies repose tout d'abord sur le fait que la plupart des propriétés bien connues des groupes sont des propriétés de Markov, comme par exemple être trivial, fini ou abélien. De plus, les propriétés de Markov ne peuvent pas être reconnues algorithmiquement (voir [Ady55], [Rab58]). C'est ainsi que l'on montre qu'il n'existe pas d'algorithme pour déterminer le nombre de bouts relatifs d'un couple  $(G, H)$  en général.

## Hyperbolicité d'espaces quotients

On s'intéresse aux espaces quotients  $X/H$  formés d'un espace métrique  $X$  géodésique propre hyperbolique quotienté par un groupe  $H$  *quasi-convexe-cocompact* sans torsion d'isométries de  $X$ . Cela signifie que l'action de  $H$  sur l'*enveloppe convexe faible*  $C(\Lambda H)$  de l'ensemble limite de  $H$  – c'est-à-dire la réunion des géodésiques bi-infinies d'extrémités dans  $\Lambda H$  – est géométrique. On suppose de plus que  $\delta_X$  est une constante de prolongement des géodésiques dans  $X$ . On fixe un point  $x_0$  dans l'enveloppe convexe faible  $C(\Lambda H)$  de l'ensemble limite de  $H$  et on prend  $\overline{x_0}$ , l'orbite de  $x_0$  pour l'action de  $H$  sur  $X$ , comme point base de l'espace quotient  $X/H$ .

On remarque tout d'abord que loin de l'orbite de  $x_0$  pour  $H$ , un point et son translaté par un élément de  $H$  ne peuvent pas être proches. Plus précisément, un premier résultat indique qu'il existe une constante  $\alpha$  – ne dépendant que de la constante d'hyperbolicité  $\delta_X$  de  $X$  et de la constante de

quasi-convexité de  $H$  – telle que tout élément non-trivial  $h$  de  $H$  et tout point  $x$  de  $X$  à distance au moins  $\alpha$  de l’orbite  $H \cdot x_0$  vérifient  $d(x, hx) \geq 100\delta_X$ .

L’article [Kap02] (non publié) fournit une preuve<sup>1</sup> du résultat suivant cité sans démonstration dans [Gro87, §5.3].

**Théorème 2.1.2.** L’espace quotient  $X/H$  est un espace métrique hyperbolique.

I.Kapovich démontre ce résultat en montrant que tous les bigones de  $X/H$  sont fins. Dans cette thèse, on donne une preuve du Théorème 2.1.2, basée sur le lemme d’approximation par les arbres. On montre que pour tous points  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  de  $X/H$ , leurs produits de Gromov vérifient l’inégalité

$$\langle \bar{y}, \bar{z} \rangle_{\bar{x}_0} \geq \min\{\langle \bar{y}, \bar{x} \rangle_{\bar{x}_0}, \langle \bar{x}, \bar{z} \rangle_{\bar{x}_0}\} - \delta.$$

Le cas des arbres est démontré en prenant pour  $\delta$  le diamètre du cœur convexe  $C(\Lambda H)/H$  et en utilisant le fait que l’espace quotient  $X/H$  est formé du cœur convexe  $C(\Lambda H)/H$  sur lequel s’enracine un nombre fini d’arbres comme vu dans l’exemple ci-dessus. L’utilisation du lemme d’approximation par les arbres dans la démonstration se fait au travers du lemme de contraction des projections sur un quasi-convexe. Ce lemme indique que la distance entre la projection de deux points de l’espace sur un quasi-convexe est bornée.

Si on note  $\delta_{X/H}$  la constante d’hyperbolicité de l’espace quotient  $X/H$ , les résultats précédents induisent un revêtement du complémentaire de l’orbite épaissie  $(H \cdot x_0)^{+\delta_{X/H}}$  dans le complémentaire de la boule fermée  $\bar{B}(\bar{x}_0, \delta_{X/H})$ . La démonstration de l’hyperbolicité de  $X/H$  indique en particulier que la boule  $\bar{B}(\bar{x}_0, \delta_{X/H})$  contient le cœur convexe  $C(\Lambda H)/H$ .

## Bord d’espaces quotients

Dans le cas où le bord de  $X$  est connexe, on a déjà vu qu’un résultat de M.Bestvina et G.Mess indique que le bord de  $X$  est aussi localement connexe. L’ensemble limite  $\Lambda H$  étant fermé dans  $\partial X$ , le bord de  $X$  privé de  $\Lambda H$  est aussi localement connexe par arcs. En quotientant par  $H$ , on obtient alors un revêtement de  $\partial X \setminus \Lambda H$  dans  $\partial(X/H)$  et le bord de l’espace quotient  $X/H$  est donc encore localement connexe.

Considérons maintenant une variation de la condition de Bestvina-Mess à savoir pour  $M > K$  positifs,

( $\ddagger_{M,K}$ ) Il existe un entier  $L > 0$  tel que pour tout  $R \geq K + 2\delta_X$  et pour tous points  $x \in S(x_0, R)$  et  $y \in S(x_0, R)^{+K}$  tels que  $d(x, y) \leq M$ , il existe un chemin de longueur inférieure ou égale à  $L$  joignant  $x$  à  $y$  en dehors de la boule  $\bar{B}(x_0, R - K - 2\delta_X)$ .

Une démonstration analogue à celle du résultat de M.Bestvina et G.Mess cité ci-dessus permet de montrer que, pour  $M > 4K + 18\delta_X + 6$ , si l’espace  $X$  satisfait la propriété ( $\ddagger_{M,K}$ ) alors le bord de  $X$  est localement connexe.

---

1. Il y mentionne que ce résultat se retrouve aussi dans la thèse de R.Foord [Foo00] qui n’a malheureusement pas fait l’objet de publications.

Cependant l'étude des bouts de  $X/H$  nécessite une caractérisation effective de la connexité locale du bord de l'espace quotient. C'est pourquoi on introduit une condition analogue à celle de Bestvina-Mess pour l'espace quotient. Pour  $M > 0$ , on note

( $\dagger_M$ ) Il existe un entier  $L > 0$  tel que pour tout  $R \geq \max\{M + \delta_{X/H}, 8\delta_{X/H}\}$  et pour tous points  $\bar{x}, \bar{y} \in S(\bar{x}_0, R)$  tels que  $d(\bar{x}, \bar{y}) \leq M$ , il existe un chemin de longueur inférieure ou égale à  $L$  joignant  $\bar{x}$  à  $\bar{y}$  en dehors de la boule  $\bar{B}(\bar{x}_0, R - 8\delta_{X/H})$ .

Le lien entre les propriétés ( $\dagger_M$ ) et ( $\dagger_{M,K}$ ) est donné par le résultat suivant.

**Proposition 2.2.4.** Si l'espace métrique  $X$  satisfait la condition ( $\dagger_{M,4\delta_{X/H}}$ ) pour  $M > 4\delta_{X/H}$ , l'espace quotient  $X/H$  satisfait la propriété ( $\dagger_M$ ).

La preuve consiste à considérer, pour  $M > 0$  fixé, deux points  $\bar{x}, \bar{y}$  de  $X/H$  satisfaisant les hypothèses de ( $\dagger_M$ ) puis à les relever astucieusement dans  $X$  en les points  $x, y$  respectivement. En étudiant les projections de ces relevés sur le quasi-convexe  $(H \cdot x_0)^{+\delta_{X/H}}$  (qui contient l'enveloppe convexe faible  $C(\Lambda H)$ ), on montre que les points  $x$  et  $y$  satisfont les hypothèses de la condition ( $\dagger_{M,4\delta_{X/H}}$ ). Comme l'espace métrique  $X$  satisfait la condition ( $\dagger_{M,4\delta_{X/H}}$ ), il existe un chemin de longueur finie joignant  $x$  à  $y$  en dehors de  $\bar{B}(x_0, R - 4\delta_{X/H} - 2\delta_X)$ . Il reste alors à vérifier que la projection de ce chemin dans  $X/H$  est en dehors de la boule  $\bar{B}(\bar{x}_0, R - 8\delta_{X/H})$ .

## Nombre de bouts relatifs

Comme l'illustrent les exemples vus-précédemment, l'idée est d'établir un lien entre les composantes connexes du cœur convexe et l'ensemble des bouts de  $X/H$ . Pour cela on procède en deux étapes. Dans un premier temps, on détermine ces « composantes connexes » comme étant des classes d'équivalence sur la sphère. On associe ensuite à chaque classe d'équivalence son « ombre » en dehors de la sphère. D'autre part, on lie ces ombres aux bouts de l'espace quotient  $X/H$ .

---

En s'inspirant de la condition ( $\dagger_M$ ), on définit une relation d'équivalence sur les sphères centrées en  $\bar{x}_0$  dans  $X/H$  : deux points  $\bar{x}, \bar{y}$  de la sphère  $S_R$  de rayon  $R \geq R_0$  sont dits *équivalents* s'il existe un chemin de longueur finie les joignant en dehors de la boule  $B(\bar{x}_0, R - 3\delta_{X/H})$  et on note  $\bar{x} \stackrel{R}{\sim} \bar{y}$ .

On définit ensuite l'*ombre* d'une classe d'équivalence comme étant l'ensemble des points en dehors de la boule  $B(\bar{x}_0, R_0)$  dont la projection sur la sphère  $S_{R_0}$  est dans cette classe d'équivalence. Appartenir à une ombre est alors une relation d'équivalence pour les points en dehors de la boule  $B(\bar{x}_0, R_0)$ . Par construction, l'ensemble des ombres dans l'espace quotient est en bijection avec l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation  $\stackrel{R_0}{\sim}$  sur la sphère  $S_{R_0}$ .

On établit ensuite un lien entre les ombres et les bouts de l'espace quotient  $X/H$ . On se place dans le cas où l'espace  $X$  satisfait la condition  $(\ddagger_{M,4\delta_{X/H}})$  pour  $M \geq C(\delta_{X/H})$  une constante ne dépendant que de  $\delta_{X/H}$  et  $R_0 \geq M + \delta_{X/H}$ .

On observe que les projections sur la sphère  $S_{R_0}$  de points sur un rayon géodésique issu de  $\bar{x}_0$  sont toutes équivalentes entre elles. La relation « appartenir à une ombre » pour les points de  $X/H$  s'étend naturellement aux rayons de  $X/H$  et l'ensemble des rayons géodésiques issus de  $\bar{x}_0$  se surjecte sur l'ensemble des ombres de  $X/H$ .

Une récurrence sur la distance à  $\bar{x}_0$  montre que tous points de l'espace quotient appartenant à une même ombre sont joints par un chemin de longueur finie en dehors de la boule centrée en  $\bar{x}_0$  de rayon inférieur à la distance minimale de ces points à  $\bar{x}_0$ . On est alors en mesure de montrer que deux rayons géodésiques appartiennent à une même ombre si et seulement s'ils convergent vers un même bout de  $X/H$ . Il s'en suit que l'ensemble des ombres de  $X/H$  est en bijection avec l'ensemble des bouts de  $X/H$ .

---

On peut alors en déduire le résultat central de cette thèse.

**Théorème 2.3.12.** L'ensemble des bouts de  $X/H$  est en bijection avec l'ensemble des classes d'équivalence sur la sphère  $S_{R_0}$  pour la relation  $\overset{R_0}{\sim}$ . En particulier, le nombre de bouts de  $X/H$  est égal au nombre de classes d'équivalence sur cette sphère.

Ainsi, si l'espace  $X$  satisfait la condition  $(\ddagger_{M,4\delta_{X/H}})$  pour  $M \geq C(\delta_{X/H})$  et  $R_0 \geq M + \delta_{X/H}$ , le nombre de bouts de  $X/H$  est fini car borné par le cardinal de la sphère  $S_{R_0}$ .

## Algorithme pour déterminer le nombre de bouts relatifs

On se place maintenant dans le cas d'un groupe hyperbolique  $G$  de bord connexe donné par une présentation finie  $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \rangle$  et d'un sous-groupe quasi-convexe  $H$ . On note  $X$  le graphe de Cayley de  $G$  par rapport à  $\mathcal{S}$  et on fixe un point  $x_0$  dans l'enveloppe convexe faible de  $\Lambda H$ . En particulier, l'ensemble des bouts relatifs du couple  $(G, H)$  est ici l'ensemble des bouts de  $X/H$ .

Dans un premier temps, on remarque que dans ce cas on peut appliquer le Théorème 2.3.12. Pour ce faire, on combine un résultat de B.H.Bowditch et de G.A.Swarup qui indique que le bord d'un groupe hyperbolique ayant un seul bout n'admet pas de points de coupure globaux à un analogue d'un deuxième résultat de M.Bestvina et G.Mess qui assure que s'il existe des constantes  $M > K > 0$  telles que  $X$  ne satisfait pas la condition  $(\ddagger_{M,K})$  alors le bord de  $X$  admet un point de coupure global. Le Théorème 2.3.12 peut alors s'appliquer à  $X/H$  et on en déduit que le nombre de bouts relatifs du couple  $(G, H)$  est égal au nombre de classes d'équivalence pour la relation  $\overset{R_0}{\sim}$  sur  $S_{R_0}$ .

On note au passage que l'on peut déterminer l'ensemble des constantes apparaissant dans ces résultats en fonction de la constante d'hyperbolicité de  $G$ .

On construit ensuite un algorithme permettant de déterminer le nombre de bouts de l'espace quotient  $X/H$ . Cela signifie que l'on recherche une procédure permettant de déterminer le nombre de classes d'équivalence sur la sphère  $S_{R_0}$  pour la relation  $\overset{R_0}{\sim}$ . Cela repose sur le fait que deux points de  $S_{R_0}$  qui sont joints par un chemin de longueur finie en dehors de  $\bar{B}(\bar{x}_0, R_0 - 8\delta_{X/H})$  sont joints par un chemin injectif qui reste dans la boule  $B(\bar{x}_0, R_0 + \frac{1}{2}(\#\mathcal{S})^{R_0})$ . En dessinant l'anneau ouvert  $A(\bar{x}_0, R_0 - 8\delta_{X/H}, R_0 + \frac{1}{2}(\#\mathcal{S})^{R_0})$ , on est alors en mesure de déterminer les classes d'équivalence sur  $S_{R_0}$ .

## Plan de la thèse

Cette thèse est découpée en trois parties. Le premier chapitre rappelle les définitions et résultats de géométrie hyperbolique classiques utilisés dans cette thèse. Au fil de ce chapitre, on reprend aussi les exemples des groupes libres et des groupes de surfaces cités précédemment afin d'illustrer certains résultats.

Dans le second chapitre de cette thèse, on s'intéresse aux espaces quotients  $X/H$  formés d'un espace métrique  $X$  géodésique propre hyperbolique quotienté par un groupe  $H$  quasi-convexe-cocompact sans torsion d'isométries de  $X$ . Dans un premier temps, on explore différentes propriétés des espaces quotients et leurs bords. En particulier, on montre l'hyperbolicité des espaces quotients (Théorème 2.1.2). On s'intéresse ensuite à une propriété ( $\dagger_M$ ) pour l'espace quotient  $X/H$  héritée d'une variation ( $\ddagger_{M,K}$ ) de la condition de Bestvina-Mess pour  $X$ . Cette condition permet de définir une relation d'équivalence sur les sphères de  $X/H$  contenant le cœur convexe  $C(\Lambda H)/H$ . Les classes d'équivalence sur une telle sphère décrivent des ombres dans  $X/H$  qui sont elles-même en bijection avec les bouts de  $X/H$ . Cela induit un résultat clé, à savoir, le nombre de bouts de l'espace quotient  $X/H$  est déterminé par les classes d'équivalence sur une sphère fixée.

Le troisième chapitre regroupe différentes applications à la théorie des groupes de résultats liés aux espaces quotients. On y voit tout d'abord l'importance de l'hypothèse de quasi-convexité dans les résultats du second chapitre. On y utilise la construction de Rips pour fournir des groupes hyperboliques et des sous-groupes pour lesquels il n'existe pas d'algorithme permettant de déterminer le nombre de bouts relatifs (Théorème 3.1.2). On tourne ensuite notre attention vers les groupes hyperboliques admettant un unique bout. Dans ce contexte, on applique les résultats démontrés dans le second chapitre afin de donner une procédure permettant de calculer effectivement le nombre de bouts relatifs d'un couple de groupes. Pour finir, on s'intéresse au cas des groupes hyperboliques admettant une infinité de bouts.



# Introduction (English)

In this thesis, I study the topology at infinity of spaces obtained by taking the quotient of a hyperbolic space by a group with good properties. Specifically, I consider the quotient  $X/H$  of a geodesic proper hyperbolic metric space  $X$  by a quasiconvex-cocompact group  $H$  of isometries of  $X$ .

## Geometric group theory and hyperbolic groups

As its name suggests, the geometric group theory consists in the study of the links between geometry and group theory. More specifically the geometric group theory explores relations between algebraic properties of finitely generated groups and geometric and topological properties of spaces onto which they act. To that aim, finitely generated groups are usually considered as geometric objects by means of their Cayley graph. The study of these graphs makes possible to establish deep group properties that a purely combinatoric or algebraic examination would not reveal. Therefore the wealth of the geometric group theory relies on the range of methods issuing from various branches of mathematics that can be applied.

The geometric group theory follows on from the combinatoric group theory already studied in the 19th century. In the first half of the 20th century, early works of M.Dehn, J.Nielsen, O.Schreier or E.R.Van Kampen to name a few, used geometric and topological ideas in the study of groups. Later, other works explored this new approach like the small cancellation theory introduced by M.Greenlinger in the 60s and the Bass-Serre theory introduced in 1977 in J-P.Serre's book [Ser77]

The geometric group theory in its current form is usually dated to the late 80s. The enthusiasm for this subject has been motivated by M.Gromov's works [Gro87], [Gro93], in which hyperbolic groups are introduced.

## Gerasimov's algorithm

The following theorem due to V.Gerasimov [Ger99] highlights an algorithmic approach to the study of hyperbolic groups.

**Theorem 3.1.1.** Given a finite presentation of a hyperbolic group, there exists an algorithm to decide whenever this group is a non-trivial free product and to compute the Grushko decomposition



of this group.

Given a finite presentation of a hyperbolic group  $G$ , Gerasimov's algorithm consists in building two sequences of propositions  $(P_n)_n$  and  $(Q_n)_n$  satisfying :

- If  $P_n$  is true then the group  $G$  is not a free product ;
- If  $Q_n$  is true then the group  $G$  is a free product and one can give an explicit splitting of  $G$  ;
- One can decide at every moment if  $(P_n)_n$  and  $(Q_n)_n$  are satisfied or not by  $G$ .

For each  $n$ , one tests simultaneously  $P_n$  and  $Q_n$ . There exists a rank for which one of the two properties will be realised. This way the algorithm determines if the group  $G$  splits or not into a non-trivial free product.

## The Bestvina-Mess Condition

B.H.Bowditch (see [Bow99]) and G.A.Swarup (see [Swa96]) prove independently that if a hyperbolic group has a connected boundary then it has no global cut point. Moreover, in the article [BM91, §3], M.Bestvina and G.Mess focus on the following property

- ( $\ddagger_M$ ) There exists an integer  $L > 0$  such that for every  $R \geq \delta_X$  and for all points  $x, y \in X$  such that  $x, y \in S(x_0, R)$  and  $d(x, y) \leq M$ , there exists a path of length less than  $L$  joining  $x$  to  $y$  outside the ball  $\bar{B}(x_0, R - \delta_X)$ .

in particular, they show that if the boundary of a hyperbolic group has no global cut point then there exists an integer  $M > 0$  such that the group satisfies the property ( $\ddagger_M$ ). Note that this property suits for  $P_n$  in the above algorithm. To decide if the boundary of a hyperbolic group is connected or equivalently to decide if a hyperbolic group is one-ended, one has to check if there exists  $M > 0$  such that the property ( $\ddagger_M$ ) is satisfied by the group.

Consider a geodesic  $\delta$ -hyperbolic space  $X$ . Assume that geodesic rays can be extended in  $X$  in the following way : there exists a constant  $\mu$  such that for every point in  $X$ , there is a geodesic ray issuing from the base point passing within  $\mu$  from the point. The constant  $\mu$  is then called the *geodesic extension constant* in  $X$ . The Bestvina-Mess condition appears in another useful result on the boundary of hyperbolic groups : if there exists a number  $M$  greater than a specific constant depending only on  $\delta$  and  $\mu$  such that  $X$  satisfies ( $\ddagger_M$ ) then the boundary of  $X$  is locally connected. Therefore the Bestvina-Mess condition gives an effective criterion to local connectedness of the boundary of the hyperbolic space  $X$ .

## Relative ends

The theory of ends has been introduced by H.Freudenthal in the article [Fre31] for topological spaces. Besides every quasi-isometry between geodesic proper spaces induces a homeomorphism between their spaces of ends. Therefore the notion of ends extends to finitely generated groups. In the article [Hop44], H.Hopf shows that a finitely generated group admits 0, 1, 2 or infinitely ends. Furthermore, the theorem of Stallings indicates that a group having infinitely many ends is a

free product (see [Sta71]). These results emphasise the links between algebraic properties of finitely generated groups and asymptotic properties of their Cayley graphs.

In the 50', the notion of ends has been generalised by A.Borel [Bor53] to pairs of groups called *relative ends* of pairs of groups. Then these results were deepened by C.Houghton [Hou74] and later by P.Scott [Sco78] under a new formalism.

If  $G$  is a finitely generated group and  $H$  is a subgroup of  $G$ , the number of relative ends of the pair  $(G, H)$  is the number of ends of a Schreier graph associated with this pair. In particular, there is no equivalent of the theorem of Hopf for relative ends of pairs of groups. It justifies the following question.

**Question ★.** Given a finite presentation of a hyperbolic group  $G$  and a subgroup  $H$  of  $G$ , can one describe the topology at infinity of Schreier graphs associated with the pair  $(G, H)$ ? Especially is there an algorithm to decide the number of relative ends of a pair  $(G, H)$ ?

## Examples

Observe firstly the case of a free group  $F$  on a finite set  $\mathcal{S}$  and a finitely generated subgroup  $H$ . As  $F$  is of finitely generated, the Schreier graph  $Sch(G, H, \mathcal{S})$  is quasi-isometric to the quotient of a Cayley graph  $Cay(F, \mathcal{S})$  by  $H$ . Recall that the Cayley graph of the group  $F$  according to  $\mathcal{S}$  is a tree  $T$ . In particular, the group  $F$  acts *geometrically* on  $T$  – it means by isometries, properly discontinuously and cocompactly.

Now consider a finitely generated subgroup  $H$  of  $F(\mathcal{S})$ . If  $x_0$  is a point of  $T$ , the union of segments  $h \cdot [x_0, sx_0]$  for  $s \in \mathcal{S}_H$  and for  $h \in H$  forms a connected subtree of  $T$  and so a convex  $T'$  of  $T$ . By definition of  $T'$ ,  $H$  acts geometrically on  $T'$ . It means that  $H$  is quasi-isometric to the convex set  $T'$ .

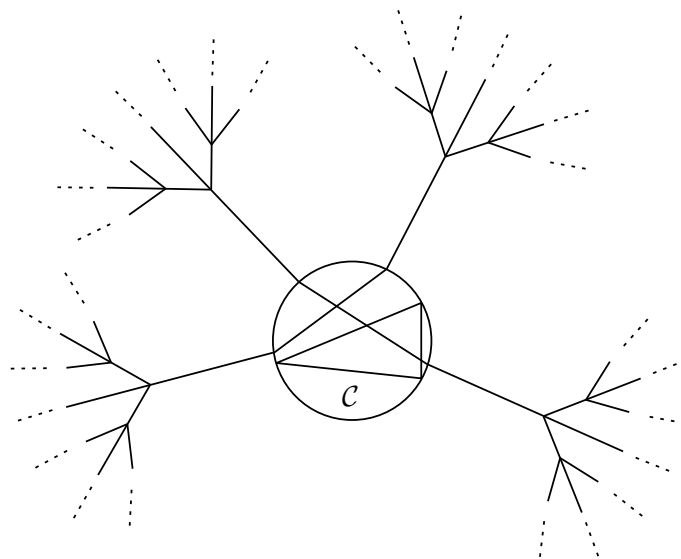


FIGURE 5 – Shape of  $T/H$

The quotient space  $T/H$  has the shape of the figure 5 : it is the union of a finite convex graph and a finite family of disjoint trees rooted on this convex. Note the existence a natural projection of  $T/H$  onto a convex set  $\mathcal{C}$  called the *convex core*. Each tree projects onto its root in the convex set. As each of these trees has an infinite number of ends, the space  $T/H$  also has an infinite number of ends. So the pair of groups  $(F, H)$  admits an infinity of relative ends.

This example is treated in detail in the section 1.6.

Consider now a closed oriented surface  $S$  of genus  $g \geq 2$  equipped with a hyperbolic metric. The surface group  $\pi_1(S) = G$  is given by the finite presentation  $\langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle$ . Its Cayley graph according to the generating set given by the group presentation forms a tessellation of the hyperbolic plane by  $4g$ -gons. The surface group  $G$  acts geometrically on the universal cover  $\mathbb{H}^2$  of  $S$ . Thus the group  $G$  is quasi-isometric to the hyperbolic plane tiled by  $4g$ -gons. In particular, each  $4g$ -gone is a fundamental domain for the action of  $G$  on  $\mathbb{H}^2$ .

Now consider a subsurface  $\Sigma$  of  $S$  with a totally geodesic boundary. The figure 6 is an example with  $g = 3$ .

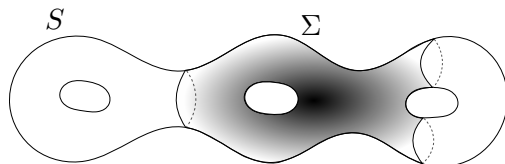


FIGURE 6 – A closed surface of genus 3 and a subsurface with a totally geodesic boundary

If one considers a universal cover of the surface  $S$  with base-point in  $\Sigma$ , the connected component of the universal cover containing a lift of the base point is a convex polygon  $\mathcal{C}$  having infinitely many sides. In particular, the fundamental group  $\pi_1(\Sigma) = H$  acts cocompactly on  $\mathcal{C}$  and  $\mathcal{C}/H$  is isomorphic to  $\Sigma$ .

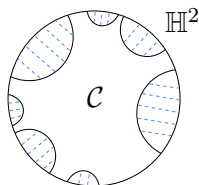


FIGURE 7 – The convex set  $\mathcal{C}$  in  $\mathbb{H}^2$  and a projection onto  $\mathcal{C}$

As the universal cover is the hyperbolic plane  $\mathbb{H}^2$ , there always exists an orthogonal  $H$ -equivariant projection onto the convex polygon  $\mathcal{C}$  (see [BH99, II.2]). Geodesic segments joining these points of  $\mathbb{H}^2$  to their projection onto the convex set  $\mathcal{C}$  are all distinct modulo the action of  $H$ .

Then the space formed by taking the quotient of a Cayley graph of  $G$  by the group  $H$  has the shape of the figure 8.

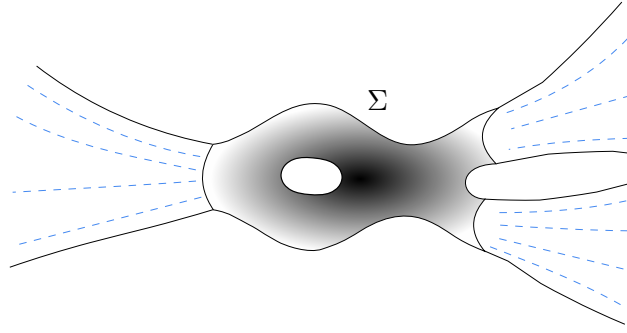


FIGURE 8 –  $\mathbb{H}^2/H$

Observe that the number of relative ends of the pair  $(G, H)$  is equal to the number of connected components of the boundary of  $\Sigma$ .

## Quasiconvexity

These examples show that under specific conditions, it is possible to determine the number of relative ends of a pair of groups. In particular, remark that the subgroups considered in these examples are quasi-isometric to a convex set ; they are *quasiconvex* groups.

Quasiconvex subgroups of hyperbolic groups are known for their abundant interesting properties. For instance, a quasiconvex subgroup of a hyperbolic group is in turn finitely generated, hyperbolic and so finitely presentable. Furthermore, finite subgroups, finite index subgroups and conjugate of quasiconvex subgroups of hyperbolic groups are quasiconvex groups. These good properties explain why quasiconvex subgroups of hyperbolic groups are widely studied (see for instance [Gro87], [CDP90], [GdlH90], [ABC<sup>+</sup>91], [GS91], [Arz01], [Swe01]).

---

In general, the answer to the question ★ is negative. Denote  $G$  a hyperbolic group and  $H$  a subgroup of  $G$ . The quasiconvexity of the subgroup  $H$  is a necessary condition to the existence of an algorithm computing the number of relative ends of the pair of groups  $(G, H)$ .

**Theorem 3.1.2.** One can build a finite presentation of a hyperbolic group and a subgroup of this group for which computing the number of relative ends or deciding if it is finite are unsolvable problems.

Given a finite group presentation, the Rips construction provides a hyperbolic group  $G$  (in fact a small cancellation group) and a subgroup  $H$  for which the number of relative ends depends on properties of the original group presentation.

The number of relative ends of the pair  $(G, H)$  is

- zero if and only if the group defined by the presentation is reduced to a single element ;
- equal to 2 if and only if the group defined by the presentation is of cardinal 2 ;

— infinite if and only if the group defined by the presentation is of cardinal greater than 2.

These properties are *Markov properties*; it means that there exist two groups of finite presentation  $G_+$  and  $G_-$  such that

- $G_+$  satisfies the property;
- if  $G_-$  is embedded in a finitely presented group then this group doesn't satisfy the property.

The importance of this class of finitely presented groups properties relies firstly on the fact that a wide range of well-known properties of groups are Markov properties, as for instance being trivial, finite or Aurelian. Moreover, Markov's properties are not algorithmically recognisable (see [Ady55], [Rab58]). That's why there is no algorithm to compute the number of relative ends of pairs of groups in general.

## Hyperbolicity of quotient spaces

Consider a space  $X/H$  consisting in the quotient of geodesic proper hyperbolic metric space  $X$  by torsion free *quasiconvex-cocompact* group of isometries of  $X$ . It means that the action of  $H$  on the *weak convex hull*  $C(\Lambda H)$  of the limit set of  $H$  – i.e. the union of all bi-infinite geodesic with endpoints in  $\Lambda H$  – is geometric. Furthermore, assume that  $\delta_X$  is a geodesic extension constant in  $X$ . Fix a point  $x_0$  in the weak convex hull  $C(\Lambda H)$  of the limit set of  $H$ . Take  $\bar{x}_0$ , the orbit of  $x_0$  under the action of  $H$  onto  $X$ , as a base point for the quotient space  $X/H$ .

First of all, remark that far from the orbit of  $x_0$  under the action of  $H$ , a point and its translated by a non-trivial element of  $H$  cannot be close. More specifically, there exists a constant  $\alpha$  – depending only on the hyperbolicity constant  $\delta_X$  of  $X$  and on the quasiconvexity constant of  $H$  – such that, if  $x \in X$  is a point within distance  $\alpha$  from the orbit  $H \cdot x_0$ , then for any non-trivial element  $h \in H$ ,  $d(x, hx) \geq 100\delta_X$ .

The article [Kap02] (unpublished) furnishes a proof<sup>2</sup> of the following result, given in [Gro87, §5.3] without further explanations.

**Theorem 2.1.2.** The quotient space  $X/H$  is a hyperbolic metric space.

I.Kapovich provides a proof of this theorem by showing that bigones in  $X/H$  are slim. In this thesis I provide another proof using the approximation by tree lemma to show that for points  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  in  $X/H$ , their Gromov product satisfy the inequality

$$\langle \bar{y}, \bar{z} \rangle_{\bar{x}_0} \geq \min\{\langle \bar{y}, \bar{x} \rangle_{\bar{x}_0}, \langle \bar{x}, \bar{z} \rangle_{\bar{x}_0}\} - \delta.$$

If the space  $X$  is a tree then the quotient space  $X/H$  consists of a convex core  $C(\Lambda H)/H$  on which are rooted a finite number of trees as seen in the previous example. The theorem is then proved by taking the diameter of the convex core  $C(\Lambda H)/H$  as  $\delta$ .

The approximation by tree lemma is used through the contracting property of projection onto quasiconvex sets. This result indicates that the distance between the projection of two points of the space onto a quasiconvex is bounded.

---

2. It also mentions that this result appears in R.Foord's thesis [F00] which is unfortunately not published.

If the hyperbolicity constant of  $X/H$  is denoted  $\delta_{X/H}$ , the latter results induce a cover of the complement of the thickened orbit  $(H \cdot x_0)^{+\delta_{X/H}}$  into the complement of the closed ball  $\bar{B}(\bar{x}_0, \delta_{X/H})$ . The proof of the hyperbolicity of  $X/H$  indicates in particular that the ball  $\bar{B}(\bar{x}_0, \delta_{X/H})$  contains the convex core  $C(\Lambda H)/H$ .

## Boundary of quotient spaces

When the boundary of  $X$  is connected, the previous result of M. Bestvina and G. Mess indicates that the boundary of  $X$  is also locally connected. The limit set  $\Lambda H$  being closed in  $\partial X$ , the boundary of  $X$  minus  $\Lambda H$  is also locally path connected. By quotienting by  $H$ , one obtains then a covering from  $\partial X \setminus \Lambda H$  onto  $\partial(X/H)$  and the boundary of the quotient space  $X/H$  is locally connected.

Consider now a variation of the Bestvina-Mess condition that is for  $M > K$  positive numbers,

( $\dagger_{M,K}$ ) There is an integer  $L > 0$  such that for every  $R \geq K + 2\delta_X$  and for all points  $x \in S(x_0, R)$  and  $y \in S(x_0, R)^{+K}$  such that  $d(x, y) \leq M$ , there is a path of length less or equal to  $L$  joining  $x$  to  $y$  outside the ball  $\bar{B}(x_0, R - K - 2\delta_X)$ .

The same scheme as in the proof of the latter result allows to show that for  $M > 4K + 18\delta_X + 6$ , if the space  $X$  satisfies the property ( $\dagger_{M,K}$ ) then the boundary of  $X$  is locally connected.

However the study of ends of  $X/H$  needs an effective characterisation of the local connectedness of the boundary of the quotient space. It motivates the introduction of a condition similar to the Bestvina-Mess condition for the quotient space. For  $M > 0$ , denote

( $\dagger_M$ ) There is an integer  $L > 0$  such that for every  $R \geq \max\{M + \delta_{X/H}, 8\delta_{X/H}\}$  and for all points  $\bar{x}, \bar{y} \in S(\bar{x}_0, R)$  such that  $d(\bar{x}, \bar{y}) \leq M$ , there is a path of length less or equal to  $L$  joining  $\bar{x}$  to  $\bar{y}$  outside the ball  $\bar{B}(\bar{x}_0, R - 8\delta_{X/H})$ .

The link between the properties ( $\dagger_M$ ) and ( $\dagger_{M,K}$ ) is given by the following result.

**Proposition 2.2.4.** If the metric space  $X$  satisfies the condition ( $\dagger_{M,4\delta_{X/H}}$ ) for  $M > 4\delta_{X/H}$ , the quotient space  $X/H$  satisfies the condition ( $\dagger_M$ ).

The proof consists in considering, for  $M > 0$  fixed, two points  $\bar{x}, \bar{y}$  in  $X/H$  satisfying the hypothesis from ( $\dagger_M$ ) and by lifting them astutely in points  $x, y$  in  $X$ . The study of projections of these lifts onto the quasiconvex  $(H \cdot x_0)^{+\delta_{X/H}}$  (containing the weak convex hull  $C(\Lambda H)$ ) proves that the points  $x$  and  $y$  satisfy the hypothesis of the condition ( $\dagger_{M,4\delta_{X/H}}$ ). As the metric space  $X$  satisfies the condition ( $\dagger_{M,4\delta_{X/H}}$ ), there is a path of finite length joining  $x$  to  $y$  outside the ball  $\bar{B}(x_0, R - 4\delta_{X/H} - 2\delta_X)$ . It remains to check that the projection of this path in  $X/H$  is still outside the ball  $\bar{B}(\bar{x}_0, R - 8\delta_{X/H})$ .

## Number of relative ends

As depicted by the previous examples, the idea is to establish a link between the connected components of the convex core and the set of ends of the quotient space  $X/H$ . For this purpose, there are two steps : describing these connected components as being equivalent classes on a sphere and associating to each equivalence class its « shadow » outside the sphere then linking these shadows to ends of the quotient space  $X/H$ .

---

Taking inspiration from the condition  $(\dagger_M)$ , define an equivalence relation on spheres at  $\bar{x}_0$  in  $X/H$  : two points  $\bar{x}, \bar{y}$  on the sphere  $S_R$  of radius  $R \geq R_0$  are said *equivalent* if there is a path of finite length joining them outside the ball  $B(\bar{x}_0, R - 3\delta_{X/H})$  and denote  $\bar{x} \stackrel{R}{\sim} \bar{y}$ .

Moreover, define the *shadow* of an equivalence class as being the set of points outside the ball  $B(\bar{x}_0, R_0)$  whose projection onto the sphere  $S_{R_0}$  are in the same equivalence class. Belonging to a shadow is then an equivalence relation on points outside the ball  $B(\bar{x}_0, R_0)$ . By construction, the set of shadows in the quotient space is in bijection with the set of equivalence classes for the relation  $\stackrel{R_0}{\sim}$  on the sphere  $S_{R_0}$ .

---

Then establish a link between shadows and ends of the quotient space  $X/H$ . Assume that the space  $X$  satisfies the condition  $(\dagger_{M, 4\delta_{X/H}})$  for  $M \geq C(\delta_{X/H})$  a constant depending only on  $\delta_{X/H}$  and fix  $R_0 \geq M + \delta_{X/H}$ .

Observe that projections on the sphere  $S_{R_0}$  of points belonging to a geodesic ray issuing from  $\bar{x}_0$  are all equivalent. So the relation « belonging to a shadow » for points in  $X/H$  extended naturally on  $X/H$  and the set of geodesic rays issuing from  $\bar{x}_0$  surjects itself on the set of shadows of  $X/H$ .

A recurrence on the distance to  $\bar{x}_0$  shows that all points of the quotient space belonging to a same shadow are joined by a path of finite length outside the ball at  $\bar{x}_0$  of radius less than the minimal distance of these points to  $\bar{x}_0$ . It is then possible to show that geodesic rays belong to a same shadow if and only if they converge to the same end of  $X/H$ . It induces that the set of shadows of  $X/H$  is in bijection with the set of ends of  $X/H$ .

---

From that follows the main result of this thesis.

**Theorem 2.3.12.** The set of ends of  $X/H$  is in bijection with the set of equivalence classes on the sphere  $S_{R_0}$  for the relation  $\stackrel{R_0}{\sim}$ . In particular, the number of ends of  $X/H$  is equal to the number of equivalence classes on this sphere.

Thus if the space  $X$  satisfies the condition  $(\dagger_{M, 4\delta_{X/H}})$  for  $M \geq C(\delta_{X/H})$  and  $R_0 \geq M + \delta_{X/H}$ , the number of ends of  $X/H$  is finite since it is bounded by the cardinal of the sphere  $S_{R_0}$ .

## Algorithm to compute the number of relative ends

Consider now a hyperbolic group  $G$  with a connected boundary given by a finite presentation  $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \rangle$  and a quasiconvex subgroup  $H$ . Denote  $X$  the Cayley graph of the group  $G$  according to  $\mathcal{S}$  and fix a point  $x_0$  in the weak convex hull  $C(\Lambda H)$ . In particular, the set of relative ends of the pair  $(G, H)$  is here the set of ends of the quotient space  $X/H$ .

Firstly remark that in this case the previous theorem applies. In order to do so, firstly recall that a result of B.H.Bowditch and G.A.Swarup indicates that the boundary of a one-ended hyperbolic group admits no global cut point. Moreover a result analogous to the second one of M.Bestvina and G.Mess asserts that if there exist constants  $M > K > 0$  such that  $X$  doesn't satisfy the condition  $(\ddagger_{M,K})$  then the boundary of  $X$  admits a global cut point. The previous theorem then applies to  $X/H$  and it induces that the number of relative ends of the pair  $(G, H)$  is equal to the number of equivalence classes for the relation  $\overset{R_0}{\sim}$  on  $S_{R_0}$ .

Note that it is possible to express every constant appearing in these results in terms of the hyperbolicity constant of the group  $G$ .

Furthermore, an algorithm computing the number of ends of quotient space  $X/H$  can be constructed. To do so, one looks to a procedure to compute the number of equivalence classes on the sphere  $S_{R_0}$  for the relation  $\overset{R_0}{\sim}$ . It relies on the fact that two points on  $S_{R_0}$  which are joined by a path of finite length outside  $\bar{B}(\bar{x}_0, R_0 - 8\delta_{X/H})$  are joined by an injective path staying in the ball  $B(\bar{x}_0, R_0 + \frac{1}{2}(\#\mathcal{S})^{R_0})$ . Drawing the open ring  $A(\bar{x}_0, R_0 - 8\delta_{X/H}, R_0 + \frac{1}{2}(\#\mathcal{S})^{R_0})$  allows to describe the equivalence classes on  $S_{R_0}$ .



## Outline

This thesis contains three parts.

The first chapter is devoted to definitions and classical results of hyperbolic geometry. Through this chapter, the previous examples of free groups and surface groups are used to illustrate some results.

In the second chapter of this thesis, I study quotient spaces  $X/H$  composed of a geodesic proper hyperbolic space  $X$  quotiented by a quasiconvex-cocompact group  $H$  of isometries of  $X$ . Firstly, I explore various properties of these quotient spaces and their boundary. In particular, I show that these quotient spaces are hyperbolic spaces (see 2.1.2). Furthermore, I study a property  $(\dagger_M)$  for the quotient space  $X/H$  inherited from a slight variation  $(\dagger_{M,K})$  of the Bestvina-Mess condition for  $X$ . This condition provides an equivalence relation on spheres in  $X/H$  containing the convex core  $C(\Lambda H)/H$ . The equivalence classes on such a sphere describe shadows in  $X/H$  which are themselves in bijection with the ends of  $X/H$ . This induces a key result, namely the number of ends of the quotient space  $X/H$  is determined by the equivalence classes on a fixed sphere.

The third chapter is composed of various applications to the group theory of results on quotient spaces. First of all, I prove the importance of the quasiconvexity hypothesis in the results given in the second chapter. The Rips construction is used to provide hyperbolic groups and subgroups for which there is no algorithm to compute the number of relative ends of the pair. Afterwards, I consider one-ended hyperbolic groups and apply them the results of the second chapter in order to give an algorithm computing effectively the number of relative ends of a pair of groups. Then I consider the case of hyperbolic groups having an infinity of ends.

# Chapitre 1

## Géométrie hyperbolique

Cette partie rassemble l'ensemble des notions et résultats préliminaires de géométrie hyperbolique requis dans cette thèse.

**Notations.** Soit  $X$  un espace métrique. Pour un réel positif  $R$  et un point  $x$  dans  $X$ , on note  $B(x, R)$  et  $\bar{B}(x, R)$  les boules respectivement ouverte et fermée centrées en  $x$  et de rayon  $R$ . Si  $Y$  est une partie de  $X$ , on note  $Y^{+R}$  le  $R$ -voisinage de  $Y$ , c'est-à-dire l'ensemble des points de  $X$  à distance inférieure ou égale à  $R$  d'un point de  $Y$ . S'il existe, un segment géodésique joignant deux points  $x$  et  $x'$  de  $X$  est noté  $[x, x']$ .

### 1.1 Espaces et groupes hyperboliques

Cette section reprend certaines notions définies et développées par M.Gromov dans [Gro87], article fondateur pour les groupes hyperboliques. Cette article d'une richesse considérable a été largement commenté; en particulier, on peut se référer à [CDP90], [GdlH90] ou [BH99].

#### 1.1.1 Définitions

Soit  $X$  un espace métrique. La *distance* entre deux points  $x$  et  $y$  de  $X$  est notée  $d_X(x, y)$  (on omet généralement l'indice correspondant à l'espace lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté). On rappelle qu'un espace métrique est dit *géodésique* si deux points  $y$  sont joints par un chemin dont la longueur est exactement la distance entre ces points.

**Définition 1.1.1** (Produit de Gromov). Le *produit de Gromov*<sup>1</sup> de deux points  $x$  et  $y$  de  $X$  au point base  $x_0 \in X$  est :

$$\langle x, y \rangle_{x_0} = \frac{1}{2} (d(x, x_0) + d(y, x_0) - d(x, y)).$$

---

1. Ce produit a en fait été introduit par R.Lyndon dans l'article [Lyn63] dans le cas des arbres.

Le produit de Gromov mesure sur quelle distance des géodésiques issues de  $x_0$  allant vers  $x$  et  $y$  restent proches avant de diverger.

L'inégalité triangulaire pour  $d$  induit alors

$$0 \leq \langle x, y \rangle_{x_0} \leq \min\{d(x, x_0), d(y, x_0)\}.$$

**Définition 1.1.2** (Espace hyperbolique pointé). Soit  $\delta \geq 0$ . Un espace métrique  $(X, x_0)$  est dit  $\delta$ -hyperbolique relativement à  $x_0$  si pour tous points  $x, y$  et  $z$  de  $X$ , on a

$$\langle x, y \rangle_{x_0} \geq \min\{\langle x, z \rangle_{x_0}, \langle y, z \rangle_{x_0}\} - \delta. \quad (\text{H})$$

Il est démontré dans [CDP90, I.1.2] que si  $(X, x_0)$  est un espace  $\delta$ -hyperbolique pointé alors pour tout autre point  $x_1$  de  $X$ , l'espace  $(X, x_1)$  est un espace  $2\delta$ -hyperbolique pointé.

**Définition 1.1.3.** Un espace métrique est dit  $\delta$ -hyperbolique s'il est  $\delta$ -hyperbolique relativement à tout point.

**Lemme 1.1.4.** Soit  $X$  un espace  $\delta$ -hyperbolique. Soit  $\Delta$  un triangle géodésique de sommets  $x, y$  et  $z$  dans  $X$ . Les segments initiaux de longueur  $\langle y, z \rangle_x$  de géodésiques  $[x, y]$  et  $[x, z]$  sont à distance inférieure ou égale à  $4\delta$  l'un de l'autre.

*Démonstration.* Considérons deux points  $y' \in [x, y]$  et  $z' \in [x, z]$  tels que  $d(x, y') = d(x, z') \leq \langle y, z \rangle_x$ . En appliquant l'inégalité (H) aux points  $y', y$  et  $z'$  puis aux points  $y, z$  et  $z'$ , on obtient

$$\langle y', z' \rangle_x \geq \min\{\langle y', y \rangle_x, \langle y, z \rangle_x, \langle z, z' \rangle_x\} - 2\delta.$$

Par définition du produit de Gromov, on a aussi

$$\langle y', y \rangle_x = d(x, y') = d(x, z') = \langle z', z \rangle_x \leq \langle y, z \rangle_x.$$

En combinant les deux inégalités précédentes, on trouve

$$\begin{aligned} \langle y', z' \rangle_x &\geq \langle y, z \rangle_x - 2\delta \\ &\geq d(x, y') - 2\delta. \end{aligned}$$

En explicitant les produits de Gromov, on obtient

$$d(x, y') - \frac{1}{2} d(y', z') \geq d(x, y') - 2\delta.$$

En conclusion, on a  $d(y', z') \leq 4\delta$ . □

L'hyperbolicité d'un espace métrique géodésique peut aussi s'exprimer à travers la forme de ses triangles.

**Définition 1.1.5.** Soit  $X$  un espace géodésique. Soit  $\delta \geq 0$  un réel. Un triangle géodésique de  $X$  est dit  $\delta$ -fin si pour tout triangle géodésique, chaque côté est contenu dans le  $\delta$ -voisinage (fermé) de l'union des deux autres côtés.

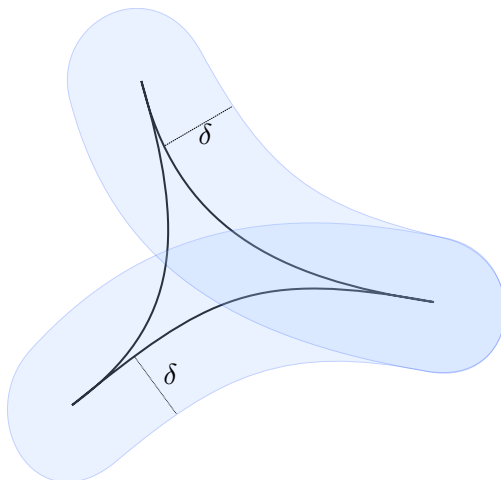


FIGURE 1.1 – Triangle  $\delta$ -fin.

L'équivalence entre ces notions s'exprime de la façon suivante.

**Proposition 1.1.6** [CDP90, I.3.6]. *Un espace géodésique est hyperbolique si et seulement s'il existe  $\delta \geq 0$  tel que tous ses triangles géodésiques soient  $\delta$ -fins.*  $\square$

Dans les espaces métriques hyperboliques, on peut borner la distance de Hausdorff de deux géodésiques de même origine en termes de la distance entre leurs extrémités.

**Proposition 1.1.7** [BH99, III.H.1.15]. *Soit  $X$  un espace métrique géodésique  $\delta$ -hyperbolique. Soient  $c_1: [0, T_1] \rightarrow X$  et  $c_2: [0, T_2] \rightarrow X$  deux géodésiques telles que  $c(0) = c'(0)$ . Notons  $T = \max\{T_1, T_2\}$  et étendons la plus courte des géodésiques à  $[0, T]$  par l'application constante. Alors ces géodésiques vérifient pour tout  $t \in [0, T]$*

$$d(c_1(t), c_2(t)) \leq 2(d(c_1(T), c_2(T)) + \delta).$$

*Démonstration.* Considérons un triangle géodésique dont  $c_1$  et  $c_2$  sont deux cotés. Soit  $t \in [0, T]$ . Deux cas de figures peuvent se présenter :

- Soit  $c_1(t)$  est  $\delta$ -proche d'un point de  $c_2$ , notons-le  $c_2(t')$  avec  $t' \in [0, T]$ . Alors  $|t - t'| \leq \delta$ .  
Donc on a

$$\begin{aligned} d(c_1(t), c_2(t)) &\leq d(c_1(t), c_2(t')) + d(c_2(t'), c_2(t)) \\ &\leq \delta + |t - t'| \\ &\leq 2\delta. \end{aligned}$$

— Soit  $c_1(t)$  est  $\delta$ -proche d'un point du troisième côté. Alors  $c_1(t)$  est  $(d(c_1(T), c_2(T)) + \delta)$ -proche d'un point de  $c_2$ . Comme dans le cas précédent, cela implique que

$$d(c_1(t), c_2(t)) \leq 2(d(c_1(T), c_2(T)) + \delta).$$

□

Le théorème suivant, souvent appelé *lemme d'approximation par les arbres* est dû à M.Gromov. Il permet de ramener l'étude d'un nombre fini de points dans un espace métrique hyperbolique à l'étude d'un nombre fini de points dans un arbre.

**Théorème 1.1.8** (Lemme d'approximation par les arbres) [Gro87, 6.1]. *Soient  $X$  un espace métrique géodésique  $\delta$ -hyperbolique,  $x_0, x_1, \dots, x_n$   $n + 1$  points de  $X$  et  $Z$  la réunion de  $n$  segments géodésiques joignant  $x_0$  à chaque  $x_i$ . Il existe alors un arbre simplicial  $(T, d_T)$  et une application continue  $f: Z \rightarrow T$  vérifiant :*

1. *La restriction de  $f$  à chaque segment  $[x_0, x_i]$  est isométrique à son image dans  $T$ .*
2. *Pour tous points  $x$  et  $y$  de  $Z$ , on a*

$$d(x, y) - 2\delta \text{Log}_2(n) \leq d_T(f(x), f(y)) \leq d(x, y).$$

□

On trouve des preuves de ce résultat dans [Gro87, 6], [CDP90, VIII.1] ou [GdlH90, II.12].

**Exemple 1.1.9.** 1. Dans le cas de trois points, l'arbre simplicial est un tripode.

2. Soient  $x_0, x_1, x_2$  et  $x_3$  quatre points d'un espace métrique  $\delta$ -hyperbolique. Pour ces points, l'arbre simplicial peut prendre trois formes différentes, illustrées dans la Figure 1.2.

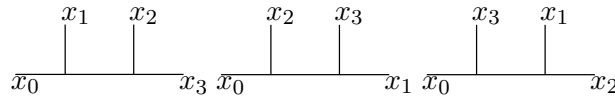


FIGURE 1.2 – Arbres pour  $n = 3$

Souvent, pour montrer un résultat dans un espace hyperbolique, on le montre dans un arbre puis on applique le lemme d'approximation par les arbres.

### 1.1.2 Quasi-isométries

**Définition 1.1.10** (Plongement quasi-isométrique, quasi-isométrie). Soient  $(X, d)$  et  $(X', d')$  deux espaces métriques. Soient  $\lambda > 0$  et  $\nu$  deux nombres réels.

— Une application  $f: X \rightarrow X'$  est un *plongement  $(\lambda, \nu)$ -quasi-isométrique* si pour tous points  $x, y$  de  $X$ , on a

$$\frac{1}{\lambda}d(x, y) - \nu \leq d'(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y) + \nu.$$

- Si, de plus, il existe une constante  $C \geq 0$  telle que tout point de  $X'$  est dans le  $C$ -voisinage de l'image de  $f$  dans  $X'$ ,  $f$  est appelée une  $(\lambda, \nu)$ -quasi-isométrie.

**Proposition 1.1.11.** *La quasi-isométrie est une relation d'équivalence.*

*Démonstration.* On considère trois espaces métriques  $(X, d)$ ,  $(X', d')$  et  $(X'', d'')$ .

- L'application identité  $id: X \rightarrow X$  est un plongement  $(1, 0)$ -quasi-isométrique. De plus,  $d(x, id(x)) = 0$ . Donc  $id$  est une quasi-isométrie de  $X$  dans  $X$ .
- Notons  $f: X \rightarrow X'$  un plongement  $(\lambda, \nu)$ -quasi-isométrique de  $X$  dans  $X'$  et  $C$  une constante telle que pour tout  $x' \in X'$ ,  $d(x', f(X)) \leq C$ . Notons  $g: X' \rightarrow X$  l'application qui à un point  $x' \in X'$  associe  $f^{-1}(x)$  où  $x$  est un point de  $X$  vérifiant  $d'(x', f(x)) \leq C$ . Soient  $x$  et  $y$  deux points de  $X$ . On a

$$\begin{aligned} d(g(x), g(y)) &\leq \lambda d(f(g(x)), f(g(y))) + \lambda \nu \\ &\leq \lambda d(x, y) + \lambda \nu; \\ d(g(x), g(y)) &\geq \frac{1}{\lambda} d(x, y) - \frac{\nu}{\lambda}. \end{aligned}$$

En posant  $\nu' = \max\{\lambda \nu, \frac{\nu}{\lambda}\}$ , l'application  $g$  est un plongement  $(\lambda, \nu')$ -quasi-isométrique de  $X'$  dans  $X$ . Soit  $x$  un point de  $X$ . Alors  $f(x) \in X'$  et on sait qu'il existe un point  $y \in X$  tel que  $d'(f(x), f(y)) \leq C$ . En notant  $x' = f(y)$ , on obtient  $d'(f(x), x') \leq C$ . Ensuite on a

$$\begin{aligned} d(g(f(x)), g(x')) &= d(x, y) \\ &\leq \lambda d'(f(x), f(y)) + \nu' \\ &\leq \lambda C + \nu'. \end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe une constante  $C' = \lambda C + \nu'$  telle que pour tout point  $x \in X$ , il existe un point  $x' = f(y)$  dans  $X'$  tel que  $d(x, g(x')) \leq C'$ . Donc l'application  $g$  est une  $(\lambda, \nu')$ -quasi-isométrie.

- Notons  $f: X \rightarrow X'$  une  $(\lambda, \nu)$ -quasi-isométrie de  $X$  dans  $X'$  et  $g: X' \rightarrow X''$  une  $(\lambda', \nu')$ -quasi-isométrie de  $X'$  dans  $X''$ . On va montrer que  $h = g \circ f$  est une quasi-isométrie de  $X$  dans  $X''$ . Soient  $x, y$  deux points de  $X$ . On a

$$\begin{aligned} d(h(x), h(y)) &\leq \lambda' d'(f(x), f(y)) + \nu' \\ &\leq \lambda' \lambda d(x, y) + \lambda' \nu + \nu'; \\ d(h(x), h(y)) &\geq \frac{1}{\lambda'} d'(f(x), f(y)) - \nu' \\ &\geq \frac{1}{\lambda' \lambda} d(x, y) + \frac{\nu}{\lambda'} - \nu'. \end{aligned}$$

Donc  $h: X \rightarrow X''$  est bien un plongement  $(\lambda \lambda', \max\{\lambda' \nu + \nu', \frac{\nu}{\lambda'} - \nu'\})$ -quasi-isométrique. Notons  $C$  une constante telle que pour tout  $x' \in X'$ , il existe  $x \in X$  tel que  $d'(x', f(x)) \leq C$  et  $C'$  une constante telle que pour tout  $x'' \in X''$ , il existe  $x' \in X'$  tel que  $d''(x'', g(x')) \leq C'$ .

Soit  $x'' \in X''$ . Il existe donc  $x' \in X'$  tel que  $d''(x'', g(x')) \leq C'$ . Ensuite, il existe  $x \in X$  tel que  $d'(x', f(x)) \leq C$ . On obtient donc

$$\begin{aligned} d(x'', h(x)) &\leq d(x'', g(x')) + d(g(x'), g(f(x))) \\ &\leq C' + \lambda d(x', f(x)) + \nu \\ &\leq C' + \lambda C + \nu. \end{aligned}$$

On a ainsi montré que la quasi-isométrie est une relation d'équivalence.  $\square$

Le résultat précédent justifie la définition suivante.

**Définition 1.1.12.** Deux espaces métriques sont dits *quasi-isométriques* s'il existe une quasi-isométrie de l'un dans l'autre.

On s'intéresse au cas particulier où  $X$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , on parle alors de quasi-géodésiques.

**Définition 1.1.13** (Quasi-géodésique). Soit  $X$  un espace métrique. Soient  $\lambda \geq 1$  et  $\nu \geq 0$  deux réels. Une  $(\lambda, \nu)$ -quasi-géodésique est un plongement  $(\lambda, \nu)$ -quasi-isométrique d'un intervalle de  $\mathbb{R}$  dans  $X$ .

Les résultats suivants sont des théorèmes fondamentaux de géométrie hyperbolique.

**Théorème 1.1.14** (Stabilité des quasi-géodésiques) [CDP90, III.1.3]. *Soit  $X$  un espace métrique  $\delta$ -hyperbolique. Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f: I \rightarrow X$  une  $(\lambda, \nu)$ -quasi-géodésique. Il existe une constante  $\kappa$  – ne dépendant que de  $\delta$ ,  $\lambda$  et  $\nu$  – telle que la distance de Hausdorff entre l'image de  $f$  et tout géodésique de mêmes extrémités dans  $X$  soit inférieure à  $\kappa$ .*  $\square$

Ce résultat est appelé *théorème de stabilité des quasi-géodésiques*. Il fut d'abord observé par M.Morse [Mor24] dans le cas de l'espace hyperbolique usuel. Il fut ensuite étendu aux espaces  $\delta$ -hyperboliques par M.Gromov [Gro87, 7.2].

**Théorème 1.1.15** [GdlH90, V.12]. *Soit  $f: X \rightarrow X'$  un plongement quasi-isométrique entre deux espaces géodésiques. Si  $X'$  est hyperbolique alors  $X$  est hyperbolique.*

*Démonstration.* Supposons que  $f$  est un plongement  $(\lambda, \nu)$ -quasi-isométrique de  $X$  dans  $X'$  et considérons un triangle géodésique  $\Delta$  de sommets  $x$ ,  $y$  et  $z$  dans  $X$ . On note  $[x, y]$ ,  $[y, z]$  et  $[z, x]$  les segments géodésiques formant les cotés de ce triangle. L'image de  $\Delta$  par  $f$  est alors un triangle  $\Delta' = f[x, y] \cup f[y, z] \cup f[z, x]$ . Puisque l'espace  $X'$  est hyperbolique, il existe une constante  $\delta \geq 0$  telle que tout triangle géodésique dans  $X'$  soit  $\delta$ -fin. En particulier, pour tout point  $u \in [f(x), f(y)]$  on a

$$d(u, [f(y), f(z)] \cup [f(z), f(y)]) \leq \delta.$$

Remarquons que, par définition, l'image par une quasi-isométrie d'un segment géodésique est l'image d'une quasi-géodésique. D'après le théorème de stabilité des quasi-géodésiques, il existe une constante  $\kappa$  ne dépendant que de  $\delta$ ,  $\lambda$  et  $\nu$  telle que

$$d(f[x, y], [f(x), f(y)]) \leq \kappa.$$

Pour tout point  $v \in f[x, y]$ , l'inégalité triangulaire donne

$$d(v, f[y, z] \cup f[z, x]) \leq \delta + 2\kappa.$$

Puisque  $f$  est une  $(\lambda, \nu)$ -quasi-isométrie, on obtient pour tout  $w \in [x, y]$

$$\frac{1}{\lambda}d(w, [y, z] \cup [z, x]) - \nu \leq d(f(w), f[y, z] \cup f[z, x]),$$

ce qui se réécrit

$$d(w, [y, z] \cup [z, x]) \leq \lambda(\delta + 2\kappa + \nu).$$

On a ainsi montré que tout triangle géodésique de  $X$  est  $\lambda(\delta + 2\kappa + \nu)$ -fin. □

Dans les deux prochaines sections, on verra que la quasi-isométrie est une notion fondamentale en théorie géométrique des groupes<sup>2</sup> puisqu'elle permet d'appliquer des méthodes métriques à certains groupes.

### 1.1.3 Groupes hyperboliques

Soit  $G$  un groupe de type fini. Soit  $\mathcal{S}$  un système générateur fini de  $G$ . Pour tous éléments  $g_1, g_2$  de  $G$ , on pose  $d_{\mathcal{S}}(g_1, g_2)$  la longueur du plus petit mot dans la pré-image de  $g_1^{-1}g_2$  sous l'application naturelle  $F(\mathcal{S}) \rightarrow G$  du groupe libre engendré par  $\mathcal{S}$  dans  $G$ . Cette fonction  $d_{\mathcal{S}}$  est appelée la *métrique du mot* associée à  $\mathcal{S}$ . Muni de cette métrique, le groupe  $G$  est alors un espace métrique géodésique dont les points sont les éléments de  $G$ . Pour un groupe donné, un changement de système générateur donne des métriques du mot équivalentes entre elles. Pour le voir, il suffit d'écrire les éléments d'un système générateur en termes de l'autre. L'équivalence des métriques du mot pour ce groupe induit alors une quasi-isométrie entre les espaces métriques associés. Cela motive la définition suivante.

**Définition 1.1.16** (Groupe hyperbolique). Un groupe de type fini  $G$  est dit *hyperbolique* si pour un (et donc pour tout) système générateur fini  $\mathcal{S}$  de  $G$ , l'espace métrique géodésique  $(G, d_{\mathcal{S}})$  est hyperbolique.

Soit  $G$  un groupe et  $\mathcal{S}$  un système générateur de  $G$ . Par définition, en attribuant à chaque arête du graphe de Cayley  $\text{Cay}(G, \mathcal{S})$  longueur 1, la métrique induite sur l'ensemble de ses sommets  $G$  est exactement la métrique du mot associée à  $\mathcal{S}$ . Le groupe  $G$  est donc plongé isométriquement dans l'espace métrique géodésique propre  $\text{Cay}(G, \mathcal{S})$ . Ce fait induit en partie le résultat suivant.

**Proposition 1.1.17** [CDP90, IV.2.1]. *Un groupe  $G$  muni d'un système générateur  $\mathcal{S}$  est hyperbolique si et seulement si le graphe de Cayley  $\text{Cay}(G, \mathcal{S})$  est hyperbolique.* □

---

2. Historiquement, J.Nielsen est le premier à avoir utilisé les quasi-géodésiques et les quasi-isométries en théorie des groupes dans l'article [Nie27, §10] où il étudie le groupe des automorphismes  $\text{Aut}(\pi_1(S))$  du groupe fondamental d'une surface orientable  $S$  de genre au moins 2. En utilisant la stabilité des quasi-géodésiques, il montre qu'un automorphisme se prolonge en un homéomorphisme du bord et étudie sa dynamique.



**Exemple 1.1.18.**

- Le groupe libre  $\mathbb{F}(a, b)$  de rang 2 est un groupe hyperbolique dont le graphe de Cayley par rapport à  $\{a, b\}$  est un arbre.
- Considérons par exemple une surface orientée fermée  $S$  de genre  $g$ . Le groupe de surface  $\pi_1(S)$  est donné par la présentation finie  $\langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle$ . Son graphe de Cayley par rapport au système générateur donné par la présentation forme un pavage du plan hyperbolique par des  $4g$ -gones.

**1.1.4 Lemme de Švarc-Milnor**

**Définition 1.1.19** (Action géométrique). Un espace métrique est dit *propre* si toutes ses boules fermées sont compactes. L'action d'un groupe  $G$  sur un espace métrique géodésique propre  $X$  est dite *géométrique* si elle est

- isométrique,
- *proprement discontinue* : pour tout compact  $K \subseteq X$ ,  $\#\{g \in G \mid g \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$  est fini,
- *cocompacte* : le quotient  $X/G$  est compact.

**Remarque 1.1.20.** La terminologie « proprement discontinue » n'est pas standard. Dans la littérature, on peut aisément rencontrer d'autres significations. Sous de bonnes hypothèses, certaines de ces définitions sont néanmoins liées. Par exemple, l'action d'un groupe  $G$  sur un espace topologique  $X$  est dite (*proprement discontinue*)' si pour tout point  $x \in X$ , il existe un voisinage ouvert  $U$  de  $x$  tel que  $gU \cap U = \emptyset$  pour tout élément  $g \in G$  non trivial. Si l'action de  $G$  sur  $X$  est proprement discontinue et libre alors elle est (*proprement discontinue*)'.

Le résultat suivant a été découvert par [Efr54] et [Š55] puis retrouvé plus tard par [Mil68].

**Lemme 1.1.21** (Lemme de Švarc-Milnor). *Soit  $X$  un espace métrique géodésique propre. Soit  $G$  un groupe agissant géométriquement sur  $X$ . Alors  $G$  est de type fini. De plus, si  $\mathcal{S}$  est un système générateur fini de  $G$ , le groupe  $G$  est muni de la métrique du mot  $d_{\mathcal{S}}$  et pour tout  $x \in X$ , l'application d'orbites est une quasi-isométrie*

$$\begin{aligned} G &\rightarrow X \\ g &\mapsto g \cdot x. \end{aligned}$$

On reprend ici la preuve donnée dans [BH99, I.8.19].

*Démonstration.* On fixe un point  $x_0$  de  $X$ . Notons  $D$  le diamètre de  $X/G$  tel que  $G \cdot \bar{B}(x_0, D)$  recouvre  $X$ . Posons  $\mathcal{S} := \{g \in G \mid g \cdot \bar{B}(x_0, 2D) \cap \bar{B}(x_0, 2D) \neq \emptyset\}$ . En particulier, comme  $X$  est propre et l'action de  $G$  sur  $X$  est proprement discontinue, l'ensemble  $\mathcal{S}$  est fini.

Montrons tout d'abord que  $\mathcal{S}$  engendre  $G$ . Pour cela, considérons un élément  $g$  de  $G$  et un segment géodésique  $c: [0, 1] \rightarrow X$  joignant  $x_0$  au point  $g \cdot x_0$ . Prenons ensuite une partition  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  de  $[0, 1]$  vérifiant  $d(c(t_i), c(t_{i+1})) = 2D$  pour tout  $i \in \{0, \dots, n-2\}$  et

$d(c(t_{n-1}), c(t_n)) \leq 2D$ . En particulier, on a

$$\left\lfloor \frac{d(x_0, g \cdot x_0)}{2D} \right\rfloor \leq n \leq \left\lceil \frac{d(x_0, g \cdot x_0)}{2D} \right\rceil + 1.$$

L'image du segment géodésique  $c$  est ainsi recouverte par l'union des boules fermées  $\bar{B}(c(t_i), D)$  pour  $i$  allant de 0 à  $n$ . Dans chaque boule  $\bar{B}(c(t_i), D)$  on peut trouver un point de la forme  $g_i \cdot x_0$  avec  $g_i \in G$  ( $g_0 = id$  et  $g_n = g$ ).

Remarquons que pour tout  $i$ ,  $g_i \cdot \bar{B}(x_0, D) = \bar{B}(g_i \cdot x_0, D)$ . Par choix des  $g_i$ , on a  $d(g_i \cdot x_0, g_{i+1} \cdot x_0) \leq 4D$  pour tout  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ . Donc  $g_i \cdot \bar{B}(x_0, 2D) \cap g_{i+1} \cdot \bar{B}(x_0, 2D) \neq \emptyset$  et ainsi  $\bar{B}(x_0, 2D) \cap g_i^{-1} g_{i+1} \cdot \bar{B}(x_0, 2D) \neq \emptyset$ . Cela signifie que  $g_i^{-1} g_{i+1}$  appartient à  $\mathcal{S}$ . Ainsi, pour tout  $i$ ,  $g_i$  s'écrit comme un produit d'éléments de  $\mathcal{S}$ . En particulier,  $g_n = g$  s'écrit comme un produit d'éléments de  $\mathcal{S}$ .

Notons  $d_{\mathcal{S}}$  la métrique du mot associée à  $\mathcal{S}$ . On montre maintenant qu'il existe des constantes  $\lambda$  et  $\nu$  telles que pour tout  $g, g'$  dans  $G$ ,

$$\frac{1}{\lambda} d_{\mathcal{S}}(g, g') - \nu \leq d(g \cdot x_0, g' \cdot x_0) \leq \lambda d_{\mathcal{S}}(g, g') + \nu.$$

Comme les métriques  $d$  et  $d_{\mathcal{S}}$  sont  $G$ -invariantes, il suffit de trouver des constantes  $\lambda$  et  $\nu$  telles que tout élément  $g \in G$  vérifie

$$\frac{1}{\lambda} d_{\mathcal{S}}(1, g) - \nu \leq d(x_0, g \cdot x_0) \leq \lambda d_{\mathcal{S}}(1, g) + \nu.$$

Posons  $\sigma := \max\{d(x_0, s \cdot x_0) \mid s \in \mathcal{S} \cup \mathcal{S}^{-1}\}$ . Considérons un élément  $g \in G$  de longueur  $n$ . Cet élément peut s'écrire  $g = s_1 \dots s_n$  avec  $s_i \in \mathcal{S}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ . On a alors

$$\begin{aligned} d(x_0, g \cdot x_0) &\leq d(x_0, s_n \cdot x_0) + d(s_1 \cdot x_0, s_{n-1} s_n \cdot x_0) + \dots + d(s_2 \dots s_n x_0, s_1 s_2 \dots s_n \cdot x_0) \\ &\leq \sigma n. \end{aligned}$$

On en conclut que  $d(x_0, g \cdot x_0) \leq \sigma d_{\mathcal{S}}(1, g)$  pour tout  $g$  dans  $G$ .

Il reste à borner  $d_{\mathcal{S}}(1, g)$  en termes de  $d(x_0, g \cdot x_0)$  pour  $g \in G$ . Considérons un chemin géodésique  $c: [0, 1] \rightarrow X$  joignant  $x_0$  à  $g \cdot x_0$ , de longueur  $d(x_0, g \cdot x_0)$ . Prenons alors une partition  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  de  $[0, 1]$  vérifiant  $d(c(t_i), c(t_{i+1})) = D$  pour tout  $i \in \{0, \dots, n-2\}$  et  $d(c(t_{n-1}), c(t_n)) \leq D$ . En particulier, on a

$$nD - 1 < d(x_0, g \cdot x_0) \leq nD.$$

Pour tout  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , il existe  $y_i \in \bar{B}(x_0, D)$  et  $g_i \in G$  tels que  $c(t_i) = g_i \cdot y_i$ ,  $y_0 = y_n = x_0$ ,  $g_0 = id$  et  $g_n = g$ . Comme  $d(c(t_i), c(t_{i+1})) \leq D$ , on obtient

$$\begin{aligned} d(g_i \cdot x_0, g_{i+1} \cdot x_0) &\leq d(g_i \cdot y_i, g_{i+1} \cdot y_{i+1}) + d(g_i \cdot y_i, g_{i+1} \cdot y_{i+1}) + d(g_i \cdot y_i, g_{i+1} \cdot y_{i+1}) \\ &\leq 3D. \end{aligned}$$

Cela signifie que  $g_i^{-1}g_{i+1}\bar{B}(x_0, 2D) \cap \bar{B}(x_0, 2D) \neq \emptyset$  et donc que  $g_i^{-1}g_{i+1}$  appartient à  $\mathcal{S}$ . Ceci implique alors que  $g = g_0(g_0^{-1}g_1) \dots (g_{n-1}^{-1}g_n)$  et  $d_{\mathcal{S}}(1, g) \leq n$ . On en déduit alors que

$$Dd_{\mathcal{S}}(1, g) - 1 \leq d(x_0, g \cdot x_0).$$

En posant  $\lambda = \max\{\frac{1}{D}, \sigma\}$  et  $\nu = 1$ , on obtient l'inégalité désirée.  $\square$

D'après le Théorème 1.1.15, un tel groupe  $G$  est hyperbolique si et seulement si l'espace  $X$  est hyperbolique. En particulier, tout groupe de type fini  $G$  agit géométriquement sur ses graphes de Cayley et pour tout système générateur fini  $\mathcal{S}$  de  $G$ ,  $(G, d_{\mathcal{S}})$  est quasi-isométrique à  $\text{Cay}(G, \mathcal{S})$ .

Cette proposition est à la base de nombreux résultats en théorie des groupes. En effet, de nombreuses propriétés de théorie des groupes s'avèrent être invariantes par quasi-isométrie comme par exemple, admettre une présentation finie, avoir un sous-groupe nilpotent d'indice fini (voir [Gro81]) ou avoir un problème du mot résoluble (voir [Alo90]).

## 1.2 Quasi-convexité

**Définition 1.2.1** (Sous-ensemble quasi-convexe). Soit  $X$  un espace métrique géodésique. Soit  $\varepsilon \geq 0$  un réel. Un sous-ensemble  $Y$  de  $X$  est dit  $\varepsilon$ -quasi-convexe si toute géodésique de  $X$  joignant deux points de  $Y$  est contenue dans le  $\varepsilon$ -voisinage de  $Y$ . Un sous-ensemble  $Y$  de  $X$  est dit *quasi-convexe* s'il existe  $\varepsilon \geq 0$  tel que  $Y$  soit  $\varepsilon$ -quasi-convexe.

### Exemple 1.2.2.

- Toute partie bornée d'un espace métrique géodésique est quasi-convexe.
- L'image de toute quasi-géodésique d'un espace hyperbolique est un ensemble quasi-convexe.  
(Conséquence directe de la stabilité des quasi-géodésiques dans un espace hyperbolique.)

**Proposition 1.2.3** [CDP90, X.1.4]. *L'image d'un quasi-convexe par une quasi-isométrie entre deux espaces géodésiques hyperboliques est un quasi-convexe.*

*Démonstration.* Considérons deux espaces géodésiques hyperboliques  $X$  et  $X'$ , une  $(\lambda, \nu)$ -quasi-isométrie  $f: X \rightarrow X'$  et un sous-ensemble  $\varepsilon$ -quasi-convexe  $Y$  de  $X$ . Considérons deux points  $y'_1$  et  $y'_2$  de  $f(Y) \subset X'$ . Montrons qu'un segment géodésique  $[y'_1, y'_2]$  est contenu dans un voisinage de  $f(Y)$ .

Pour cela, notons  $y_1$  et  $y_2$  deux points de  $X$  tels que  $f(y_1) = y'_1$  et  $f(y_2) = y'_2$ . Tout point  $x \in [y_1, y_2]$ , il existe un point  $y \in Y$  vérifiant

$$\begin{aligned} d_{X'}(f(x), f(y)) &\leq \lambda d_X(x, y) + \nu \\ &\leq \lambda \varepsilon + \nu \end{aligned}$$

car  $Y$  est  $\varepsilon$ -quasi-convexe. Cela signifie que  $f([y_1, y_2])$  est contenue dans le  $(\lambda \varepsilon + \nu)$ -voisinage de  $f(Y)$ .

Par ailleurs, le Théorème 1.1.14 indique qu'il existe une constante  $\kappa$  indépendante de  $y'_1$  et  $y'_2$  telle que tout segment géodésique  $[y'_1, y'_2]$  est contenu dans le  $\kappa$ -voisinage de  $f([y_1, y_2])$ . On peut en conclure que tout segment  $[y'_1, y'_2]$  est contenu dans le  $(\kappa + \lambda\varepsilon + \nu)$ -voisinage de  $f(Y)$ .  $\square$

**Proposition 1.2.4** [Gro87, 7.3.A]. *Soit  $X$  un espace métrique  $\delta$ -hyperbolique. Si  $Y$  est un sous-ensemble  $\varepsilon$ -quasi-convexe de  $X$  alors pour tout  $R \geq \varepsilon$ , le voisinage  $Y^{+R}$  de taille  $R$  de  $Y$  est  $2\delta$ -quasi-convexe.*

*Démonstration.* Fixons  $R \geq \varepsilon$ . Considérons deux points  $x$  et  $x'$  de  $X$  à distance inférieure ou égale à  $R$  de  $Y$ . Notons  $y$  et  $y'$  des projections respectives sur  $Y$ . En particulier, la géodésique brisée  $[x, y] \cup [y, y'] \cup [y', x']$  est contenue dans le  $R$ -voisinage de  $Y$  (voir Figure 1.3).

De plus, comme  $X$  est  $\delta$ -hyperbolique, les quadrilatères sont  $2\delta$ -fins. Tout segment géodésique  $[x, x']$  reste donc dans le  $2\delta$ -voisinage de  $[x, y] \cup [y, y'] \cup [y', x']$ . On en déduit que  $[x, x']$  est dans le  $2\delta$ -voisinage de  $Y^{+R}$ .

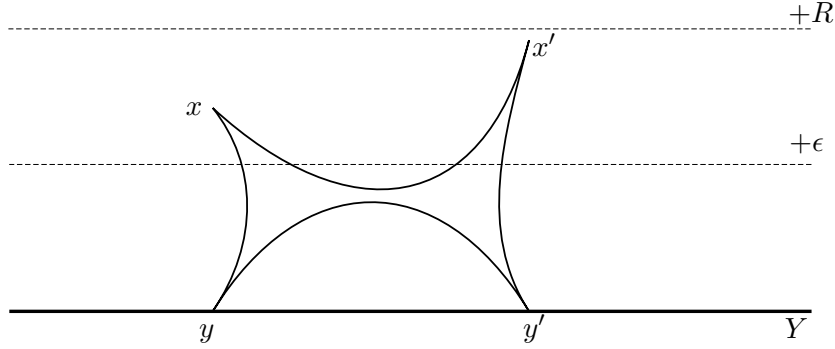


FIGURE 1.3 –  $Y^{+R}$  est  $2\delta$ -quasi-convexe

$\square$

**Définition 1.2.5** (Projection à  $\eta$  près). Soient  $X$  un espace métrique géodésique et  $Y$  une partie de  $X$ . Soit  $\eta \geq 0$  un réel. On dit que  $\pi: X \rightarrow Y$  est une *projection à  $\eta$  près* si, pour tout  $x \in X$ ,  $d(x, \pi(x)) \leq d(x, Y) + \eta$ .

Cette projection vérifie immédiatement une propriété d'invariance.

**Proposition 1.2.6.** *Soient  $X$  un espace métrique géodésique propre  $\delta$ -hyperbolique et  $H$  un groupe d'isométries de  $X$ . Soit  $Y$  un sous-ensemble  $\varepsilon$ -quasi-convexe  $H$ -invariant de  $X$ . Notons  $\pi$  une projection à  $\eta$  près de  $X$  sur  $Y$ . Alors pour tout point  $x \in X$  et tout élément  $h \in H$ , le point  $h\pi(x)$  est un projeté de  $hx$  sur  $Y$  à  $\eta$  près, c'est-à-dire  $d(hx, h\pi(x)) \leq d(hx, Y) + \eta$ .*

*Démonstration.* Considérons un point  $x \in X$  et un élément  $h \in H$ . Puisque  $h$  est une isométrie de  $X$ , on a  $d(hx, h\pi(x)) = d(x, \pi(x))$ . Par définition de la projection à  $\eta$  près, on a  $d(x, \pi(x)) \leq d(x, Y) + \eta$ . Or, par  $H$  invariance de  $Y$ , on a  $d(x, Y) = d(hx, Y)$ . On en déduit alors que  $d(hx, h\pi(x)) \leq d(hx, Y) + \eta$ .  $\square$

L'énoncé suivant donne un critère local de quasi-convexité.

**Proposition 1.2.7** [CDP90, X.3.1]. *Soient  $X$  un espace métrique géodésique  $\delta$ -hyperbolique et  $Y$  une partie connexe de  $X$ . On suppose qu'il existe  $\eta \geq 50\delta$  tel que pour tout segment géodésique  $[y, y']$  avec  $y, y' \in Y$  et  $d(y, y') \leq 2\eta + 100\delta$ ,  $Y$  est à moins de  $\eta - 50\delta$  du milieu de  $[y, y']$ . Alors  $Y$  est  $19\eta$ -quasi-convexe.  $\square$*

Considérons un arbre simplicial  $T$ , un convexe  $T'$  de  $T$  et une projection  $\pi: T \rightarrow T'$ . Remarquons que les convexes d'un arbre simplicial sont simplement ses sous-arbres. Soient  $x$  et  $x'$  deux points de  $T$ . Observons les projections de ces points sur  $T'$ . Comme l'illustre la Figure 1.4, il y a deux cas possibles :

- Soit  $x$  et  $x'$  sont dans une même composante du complémentaire de  $T'$  dans  $T$  et  $\pi(x) = \pi(x')$  ;
- Soit  $x$  et  $x'$  sont dans des composantes distinctes du complémentaire de  $T'$  dans  $T$ . Dans ce cas, on a  $d(x, x') = d(x, \pi(x)) + d(\pi(x), \pi(x')) + d(\pi(x'), x')$ .

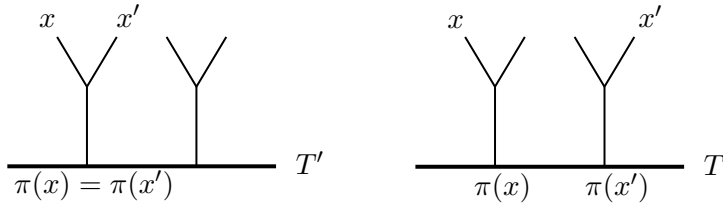


FIGURE 1.4 – Deux cas possibles

On peut étendre ce résultat aux espaces métriques géodésique hyperboliques. La proposition qui suit joue un rôle important dans cette thèse ; elle met en avant le caractère contractant des projections sur un quasi-convexe dans un espace géodésique hyperbolique. En observant la démonstration, on constate que c'est une conséquence du lemme d'approximation par les arbres.

**Proposition 1.2.8** (Contraction de la projection sur un quasi-convexe) [Gro87, 7.3.D]. *Soient  $X$  un espace métrique géodésique  $\delta$ -hyperbolique et  $Y$  une partie  $\varepsilon$ -quasi-convexe de  $X$ . Soit  $\pi: X \rightarrow Y$  une projection à  $\eta$  près. Pour tous points  $x, x'$  de  $X$ , on a*

$$d(\pi(x), \pi(x')) \leq \max\{\tau, 2\tau + d(x, x') - d(x, \pi(x)) - d(x', \pi(x'))\} \quad (1)$$

avec  $\tau = 12\delta + 2\varepsilon + 2\eta$ .

De plus, on a

$$d(\pi(x), \pi(x')) \leq \tau + d(x, x'). \quad (2)$$

*Démonstration.* Soit  $Z$  la réunion de segments géodésiques joignant  $\pi(x)$  aux points  $x, x'$  et  $\pi(x')$ . On applique le lemme d'approximation par les arbres à  $Z$ . Il existe donc un arbre simplicial  $T$  et une application continue  $f: Z \rightarrow T$  telle que :

1. Pour tous  $z, z' \in Z$ , on a  $d(z, z') - 6\delta \leq d_T(f(z), f(z')) \leq d(z, z')$ .
2. Pour tous  $z, z' \in [\pi(x), \pi(x')]$ , on a  $d_T(f(z), f(z')) = d(z, z')$ .

Posons  $u := f(x)$ ,  $u' = f(x')$ ,  $v := f(\pi(x))$  et  $v' := f(\pi(x'))$ . Notons  $p$  et  $p'$  les projections respectives de  $u$  et  $u'$  sur  $[v, v']$ . Puisque ces projections sont faites dans  $T$ , elles sont uniques. La Figure 1.5 illustre les trois configurations pour l'arbre  $T$  pouvant apparaître.

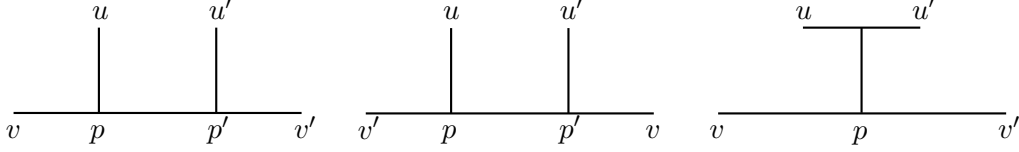


FIGURE 1.5 – Trois possibilités

Remarquons que

$$\begin{aligned} d_T(p, p') &= \max\{0, d_T(u, u') - d_T(u, p) - d_T(u, p')\} \\ &\leq d_T(f(x), f(x')). \end{aligned}$$

Notons  $y$  et  $y'$  des points de  $[\pi(x), \pi(x')]$  tels que  $f(y) = p$  et  $f(y') = p'$ . On obtient ainsi

$$\begin{aligned} d_T(u, p) &\geq d(x, y) - 6\delta && \text{d'après 1. ,} \\ &\geq d(x, Y) - \varepsilon - 6\delta && \text{par quasi-convexité de } Y, \\ &\geq d(x, \pi(x)) - \eta - \varepsilon - 6\delta && \text{car } \pi \text{ est une projection à } \eta \text{ près sur } Y. \end{aligned}$$

Comme  $d_T(u, u') \leq d(x, x')$ , en combinant les inégalités précédentes, on obtient

$$d_T(p, p') \leq \max\{0, d(x, x') - d(x, \pi(x)) - d(x', \pi(x')) + 2\eta + 2\varepsilon + 12\delta\}$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} d_T(v, p) &= d_T(u, v) - d_T(u, p) \\ &\leq d(x, \pi(x)) + \eta + \varepsilon + 6\delta - d(x, \pi(x)) \\ &\leq \eta + \varepsilon + 6\delta. \end{aligned}$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} d_T(p, p') &\geq d_T(v, v') - d_T(v, p) - d_T(v', p') \\ &\geq d(\pi(x), \pi(x')) - 2\eta - 2\varepsilon - 12\delta. \end{aligned}$$

En posant  $\tau = 12\delta + 2\varepsilon + 2\eta$ , on peut conclure que

$$d(\pi(x), \pi(x')) \leq \max\{\tau, 2\tau + d(x, x') - d(x, \pi(x)) - d(x', \pi(x'))\}.$$

□

**Corollaire 1.2.9.** *Si  $\pi'$  est une autre projection à  $\eta$  près de  $X$  sur  $Y$ , alors pour tout  $x \in X$ , on a  $d(\pi(x), \pi'(x)) \leq 8\delta + 2\varepsilon + 2\eta$ .*

*Démonstration.* Soit  $Z$  la réunion de segments géodésiques joignant  $\pi(x)$  aux points  $x$  et  $\pi'(x)$ . On applique le lemme d'approximation par les arbres à  $Z$ . Il existe donc un arbre simplicial  $T$  et une application continue  $f: Z \rightarrow T$  telle que

1. Pour tous  $z, z' \in Z$ , on a  $d(z, z') - 6\delta \leq d_T(f(z), f(z')) \leq d(z, z')$ .
2. Pour tous  $z, z' \in [\pi(x), \pi'(x)]$ , on a  $d_T(f(z), f(z')) = d(z, z')$ .

Posons  $u := f(x)$ ,  $v := f(\pi(x))$  et  $v' := f(\pi'(x))$ . Notons  $p$  l'unique projection de  $u$  sur le segment  $[v, v']$ . La Figure 1.6 représente l'arbre  $T$ .

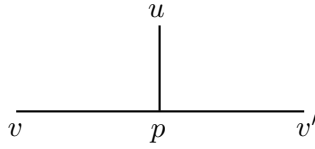


FIGURE 1.6 – Arbre  $T$

En notant  $y$  un point de  $[\pi(x), \pi'(x)]$  tels que  $f(y) = p$ , on obtient

$$\begin{aligned}
 d_T(u, p) &\geq d(x, y) - 4\delta && \text{d'après la première propriété de } f, \\
 &\geq d(x, Y) - \varepsilon - 4\delta && \text{par quasi-convexité de } Y, \\
 &\geq d(x, \pi(x)) - \eta - \varepsilon - 4\delta && \text{car } \pi \text{ est une projection à } \eta \text{ près sur } Y.
 \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
 d_T(v, p) &= d_T(u, v) - d_T(u, p) \\
 &\leq d(x, \pi(x)) + \eta + \varepsilon + 4\delta - d(x, \pi(x)) \\
 &\leq \eta + \varepsilon + 4\delta.
 \end{aligned}$$

De la même façon,  $d_T(v', p) \leq \eta + \varepsilon + 4\delta$ .

On en déduit que pour tout  $x \in X$ , on a

$$\begin{aligned}
 d(\pi(x), \pi'(x)) &\geq d_T(v, v') \\
 &\geq d_T(v, p) + d_T(p, v') \\
 &\geq 2\eta + 2\varepsilon + 8\delta.
 \end{aligned}$$

□

La notion de quasi-convexité se transcrit en termes de groupes de la façon suivante.

**Définition 1.2.10.** Soit  $G$  un groupe de type fini de système générateur fini  $\mathcal{S}$ . Un sous-groupe  $H$  de  $G$  est dit *quasi-convexe* si  $H$  est un sous-ensemble quasi-convexe du graphe de Cayley  $\text{Cay}(G, \mathcal{S})$  de  $G$  par rapport à  $\mathcal{S}$ .

Remarquons qu'en général cette définition dépend du choix du système générateur pour le groupe  $G$ . Néanmoins dans le cas où  $G$  est un groupe hyperbolique, la proposition suivante indique que cette définition ne dépend pas du choix du système générateur.

**Proposition 1.2.11.** *Soit  $G$  un groupe agissant géométriquement sur un espace géodésique propre hyperbolique  $X$ . Si  $H$  un sous-groupe quasi-convexe de  $G$ , alors  $H$  est de type fini et le plongement de  $H$  dans  $X$  est quasi-isométrique. Réciproquement, si  $H$  est de type fini et se plonge quasi-isométriquement dans  $X$ , alors  $H$  est un sous-groupe quasi-convexe de  $G$ .*

*Démonstration.* Notons  $\varepsilon$  une constante de quasi-convexité de  $H$ . L'ensemble  $B = \{h \in H \mid d(1, h) \leq 2\varepsilon + 1\}$  est un système générateur fini de  $H$ . Soit  $\mathcal{S}$  un système générateur fini de  $G$ . Considérons maintenant un chemin géodésique  $c$  joignant 1 à un point  $h \in H$  dans le graphe de Cayley  $\text{Cay}(G, \mathcal{S})$ . On ajoute ensuite des détours à ce chemin de la façon suivante : en parcourant  $c$  depuis 1, à chaque sommet rencontré, aller jusqu'au point de  $H$  le plus proche et revenir. Or  $H$  est  $\varepsilon$ -quasi-convexe, donc chaque détour est de longueur inférieure ou égale à  $2\varepsilon$ . Le chemin ainsi construit est la concaténation d'au plus  $d_{\mathcal{S}}(1, h)$  chemins de longueur inférieure ou égale à  $2\varepsilon + 1$ . On obtient alors l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{2\varepsilon + 1} d_{\mathcal{S}}(1, h) \leq d_B(1, h) \leq d_{\mathcal{S}}(1, h).$$

D'où le plongement quasi-isométrique de  $H$  dans  $\text{Cay}(G, \mathcal{S})$ . Par le Lemme 1.1.21 de Švarc-Milnor, le groupe  $G$  est quasi-isométrique à  $X$ . Donc  $X$  est quasi-isométrique à  $\text{Cay}(G, \mathcal{S})$ .

Supposons maintenant que  $H$  est un sous-groupe de  $G$  de système générateur fini  $\mathcal{S}_H$  et munissons  $H$  de la métrique du mot  $d_{\mathcal{S}_H}$ . De plus, supposons que  $H$  se plonge quasi-isométriquement dans  $X$ . Par définition, l'image d'une géodésique par une quasi-isométrie est une quasi-géodésique. Comme  $X$  est hyperbolique, le Théorème 1.1.14 de stabilité des quasi-géodésiques indique que cette quasi-géodésique est à distance bornée d'une géodésique de mêmes extrémités. Ainsi  $H$  est un sous-ensemble quasi-convexe de  $X$ . Or la quasi-convexité est un invariant quasi-isométrique (voir 1.2.3),  $H$  est donc un sous-groupe quasi-convexe de  $G$ .  $\square$

L'orbite de tout point de  $X$  pour l'action de  $H$  est ainsi quasi-convexe.

**Exemple 1.2.12.** Reprenons les deux exemples de 1.1.18.

- Considérons le groupe libre  $F(\mathcal{S})$  engendré par l'ensemble fini  $\mathcal{S}$ . Le groupe  $F(\mathcal{S})$  agit donc géométriquement sur son graphe de Cayley  $T$  par rapport à  $\mathcal{S}$ , qui est un arbre. Soit  $H$  un sous-groupe de type fini de  $F(\mathcal{S})$ . Si  $x_0$  est un point de  $T$ , la réunion des segments  $H \cdot [x_0, sx_0]$  pour  $s \in \mathcal{S}$  forme un sous-arbre connexe de  $T$  et donc un convexe de  $T$ .
- Considérons une surface fermée orientable  $S$  de genre  $g \geq 2$  munie d'une métrique hyperbolique. Le groupe de surface  $\pi_1(S)$  agit géométriquement sur le revêtement universel  $\mathbb{H}^2$  de  $S$ . On a déjà vu qu'un graphe de Cayley  $X$  de  $\pi_1(S)$  forme un pavage du plan hyperbolique par des  $4g$ -gones. Considérons maintenant une sous-surface  $\Sigma$  de bord totalement géodésique de  $S$ . Le groupe fondamental de  $\Sigma$ ,  $H = \pi_1(\Sigma)$ , est alors un sous-groupe convexe de  $\pi_1(S)$ . Il existe donc un plongement quasi-isométrique de  $H$  dans  $X$ .



Le résultat suivant se trouve aisément dans la littérature (par exemple dans [CDP90, 10.4.2]). Néanmoins, la constante d'hyperbolicité n'y est pas nécessairement explicitée.

**Proposition 1.2.13.** *Les sous-groupes quasi-convexes de groupes hyperboliques sont hyperboliques.*

*Démonstration.* Notons  $H$  un sous-groupe  $\varepsilon$ -quasi-convexe d'un groupe  $\delta$ -hyperbolique  $G$ . La preuve découle de la Proposition 1.2.11. En effet, la preuve de cette proposition indique que  $H$  se plonge  $(2\varepsilon + 1, 0)$ -quasi-isométriquement dans un graphe de Cayley de  $G$ . Comme l'image d'une géodésique par une  $(2\varepsilon + 1, 0)$ -quasi-isométrie est une  $(2\varepsilon + 1, 0)$ -quasi-géodésique, l'image d'un triangle géodésique d'un graphe de Cayley de  $H$  sera un triangle  $(2\varepsilon + 1, 0)$ -quasi-géodésique dans le graphe de Cayley de  $G$ . D'après le Théorème de stabilité des quasi-géodésiques 1.1.14, les côtés de ce triangle sont à moins de  $\kappa$  – qui ne dépend que de  $\delta$  et  $\varepsilon$  – de géodésiques de même extrémités. De plus, les triangles géodésiques de  $X$  sont  $\delta_X$ -fins. On en déduit que  $H$  est  $(2\varepsilon + 1)(2\kappa + \delta_X)$ -hyperbolique.  $\square$

On utilisera plus tard (dans la démonstration de Proposition 2.1.1) le fait que la constante d'hyperbolicité du sous-groupe quasi-convexe ne dépende que de la constante d'hyperbolicité du groupe et de la constante de quasi-convexité du sous-groupe.

## 1.3 Bord

Pour plus de détails sur le bord des groupes hyperboliques, on peut se référer à l'article [KB02] qui rassemble un grand nombre de résultats sur le sujet.

### 1.3.1 Définitions et propriétés

Soit  $X$  un espace métrique géodésique  $\delta$ -hyperbolique et  $x_0$  un point base de  $X$ . Deux rayons géodésiques  $c$  et  $c'$  sont dits *asymptotiques* si la distance de Hausdorff entre leur image est finie. Etre asymptotique est clairement une relation d'équivalence sur les rayons géodésiques. On note  $[c]$  la classe d'un rayon géodésique  $c$  pour cette relation.

**Définition 1.3.1** (Bord géodésique). Le *bord géodésique* de  $X$ , noté  $\partial^g X$ , est l'ensemble des classes d'équivalence de rayons géodésiques dans  $X$  pour la relation définie ci-dessus.

**Remarque 1.3.2.** Pour déterminer le bord géodésique, il suffit de considérer les rayons géodésiques issus de  $x_0$ . En effet, un tel rayon  $c$  appartient bien  $[c] \in \partial^g X$ . Par ailleurs, si  $c'$  est un rayon géodésique qui n'est pas issu de  $x_0$ , il reste à distance bornée (par  $d(x_0, c'(0))$ ) d'un rayon géodésique  $c$  issu de  $x_0$  et est donc asymptotique à celui-ci. Ces deux rayons définissent le même point du bord  $\partial^g X$ ,  $[c'] = [c]$ .

Une suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  de points de  $X$  *convergent à l'infini* si

$$\liminf_{i,j \rightarrow \infty} \langle x_i, x_j \rangle_{x_0} = \infty.$$

Deux suites  $(x_n)_{n \geq 1}$  et  $(y_n)_{n \geq 1}$  de points de  $X$  convergeant à l'infini sont dites *équivalentes* si

$$\liminf_{i,j \rightarrow \infty} \langle x_i, y_j \rangle_{x_0} = \infty.$$

La convergence à l'infini d'une suite de points de  $X$  ne dépend pas du choix du point base ; il en est de même pour l'équivalence de deux suites de ce type.

**Définition 1.3.3** (Bord séquentiel). Le *bord séquentiel* de  $X$ , noté  $\partial^s X$ , est l'ensemble des classes d'équivalence de suites de points de  $X$  convergeant à l'infini pour la relation ci-dessus.

Il existe une application canonique du bord géodésique dans le bord séquentiel qui provient de l'association à tout rayon  $c$  de la suite de points  $(c(n))_{n \geq 1}$ . En ajoutant l'hypothèse de propreté à l'espace, le résultat suivant permet d'identifier ces deux définitions.

**Proposition 1.3.4** [GdlH90, VII.4]. *Si  $X$  est propre, alors il existe une bijection entre le bord géodésique  $\partial^g X$  et le bord séquentiel  $\partial^s X$  de  $X$ .*  $\square$

Dans le reste de cette section,  $X$  désigne un espace métrique géodésique propre  $\delta$ -hyperbolique. On note alors simplement  $\partial X$  le bord de  $X$ .

On peut définir une notion de convergence sur le bord de  $X$ . Pour  $n \geq 1$ , soient  $c$  et  $c_n$  des rayons géodésiques issus de  $x_0$ . On dit que  $(u_n)_n = ([c_n])_n$  converge vers  $u = [c]$  dans  $\partial X$  si et seulement si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \liminf_{t \rightarrow \infty} \langle c_n(t), c(t) \rangle_{x_0} = \infty$ .

**Exemple 1.3.5.**

- Si l'espace  $X$  est borné, alors  $\partial X$  est l'ensemble vide.
- Le bord d'un arbre combinatoire est un ensemble totalement discontinu. En particulier, le bord d'un arbre régulier est un ensemble de Cantor.
- Le bord de l'espace hyperbolique de dimension  $n$ ,  $\mathbb{H}^n$  est la sphère de dimension  $n - 1$ .

Le produit de Gromov dans l'espace hyperbolique  $X$  s'étend naturellement au bord de  $X$  de la façon suivante.

**Définition 1.3.6** (Produit de Gromov). Soient  $u, v$  deux points de  $\partial X$ . Le *produit de Gromov* de  $u$  et  $v$  est défini par

$$\langle u, v \rangle_{x_0} = \inf \{ \liminf_{i,j \rightarrow \infty} \langle x_i, y_j \rangle_{x_0} \mid (x_n)_n \in u, (y_n)_n \in v \}.$$

Si  $z$  est un point de  $X$ , le produit de Gromov de  $u$  et  $z$  est donné par

$$\langle u, z \rangle_{x_0} = \inf \{ \liminf_{i \rightarrow \infty} \langle x_i, z \rangle_{x_0} \mid (x_n)_n \in u \}.$$

Le résultat suivant permet de comparer le produit de Gromov à l'infini ainsi défini aux autres choix raisonnables (sup à la place de inf et/ou lim sup à la place de lim inf).

**Proposition 1.3.7.** *Soient  $u, v$  deux points distincts de  $\partial X$ . Soient  $(x_i)_i$  et  $(x'_i)_i$  deux suites définissant  $u$  et  $(y_i)_i$  et  $(y'_i)_i$  deux suites définissant  $v$ . Soit  $z$  un point de  $X$ . On a :*

1.  $\limsup_{i,j \rightarrow \infty} \langle x'_i, y'_j \rangle_{x_0} \leq \liminf_{i,j \rightarrow \infty} \langle x_i, y_j \rangle_{x_0} + 2\delta < +\infty$  ;
2.  $\limsup_{i \rightarrow \infty} \langle x'_i, z \rangle_{x_0} \leq \liminf_{i,j \rightarrow \infty} \langle x_i, z \rangle_{x_0} + \delta < +\infty$

*Démonstration.* Montrons le point 1., le point de 2., plus simple, se traite de façon analogue.

Comme les points  $u$  et  $v$  sont distincts,  $\liminf_{i,j \rightarrow \infty} \langle x_i, y_j \rangle_{x_0}$  est fini ; notons la  $L$ . Par choix des suites, on a

$$\lim_{i,k \rightarrow \infty} \langle x_i, x'_k \rangle_{x_0} = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{j,l \rightarrow \infty} \langle y_j, y'_l \rangle_{x_0} = \infty.$$

Il existe donc un entier  $m$  tel que pour tout  $i, j, k$  et  $l$  supérieur à  $m$ ,  $\langle x_i, x'_k \rangle_{x_0} \geq L + 3\delta$  et  $\langle y_j, y'_l \rangle_{x_0} \geq L + 3\delta$ . En utilisant deux fois l'inégalité (H) et en passant à la limite, on en déduit que

$$\begin{aligned} \langle x_i, y_j \rangle_{x_0} + 2\delta &\geq \min\{\langle x_i, x'_k \rangle_{x_0}, \langle x'_k, y'_l \rangle_{x_0}, \langle y'_l, y_j \rangle_{x_0}\} \\ &\geq \min\{L + 3\delta, \langle x'_k, y'_l \rangle_{x_0}\}. \end{aligned}$$

Lorsque  $i$  et  $j$  tendent vers l'infini, on a  $L + 2\delta \geq \min\{L + 3\delta, \langle x'_k, y'_l \rangle_{x_0}\}$ . On en déduit que pour tout  $k, l \geq m$ ,

$$\langle x'_k, y'_l \rangle_{x_0} \leq \liminf_{i,j \rightarrow \infty} \langle x_i, y_j \rangle_{x_0} + 2\delta.$$

Ce qui démontre l'inégalité du point 1. □

Pour tout entier  $r \geq 0$  et pour tout point  $u \in \partial X$ , notons

$$\mathcal{U}(u, r) := \{v \in \partial X \mid \langle u, v \rangle_{x_0} \geq r\}.$$

L'ensemble  $\{\mathcal{U}(u, r) \mid r \geq 0\}$  forme un système fondamental de voisinages pour tout élément  $u \in \partial X$ . On munit alors le bord  $\partial X$  de la *topologie* correspondante. Encore une fois, comme la définition des points du bord de  $X$  ne dépend pas du point base, la topologie induite ne dépend pas du choix du point base de  $X$ .

**Proposition 1.3.8** [GdlH90, VII.9]. *L'espace topologique  $\partial X$  est compact.* □

Par ailleurs, la propriété de  $X$  permet de connecter un point de l'espace à un point du bord et donc deux points distincts du bord de la façon suivante.

**Proposition 1.3.9** [CDP90, II.2.1]. *Si  $x$  est un point de  $X$  et  $u$  un point de  $\partial X$ , alors il existe un rayon géodésique  $c: \mathbb{R}_+ \rightarrow X$  tel que  $x = c(0)$  et  $u = [(c(n))_{n \geq 1}]$ .*

*Si  $u$  et  $v$  sont deux points distincts de  $\partial X$ , alors il existe une géodésique bi-infinie  $l: \mathbb{R} \rightarrow X$  telle que  $u = [(l(-n))_{n \geq 1}]$  et  $v = [(l(n))_{n \geq 1}]$ .* □

Cela permet d'étendre la caractérisation des triangles fins à  $X \cup \partial X$ . On trouve une démonstration de ce résultat bien connu dans [CDP90, II.2.2] ou [KW04, 3.9].

**Proposition 1.3.10.** *Tout triangle géodésique de  $X \cup \partial X$  est  $4\delta$ -fin et  $4\delta$ -quasi-convexe.* □

La Figure 1.7 montre le cheminement permettant de montrer qu'un point appartenant à un côté d'un triangle idéal est à distance au plus  $4\delta$  des deux autres côtés.

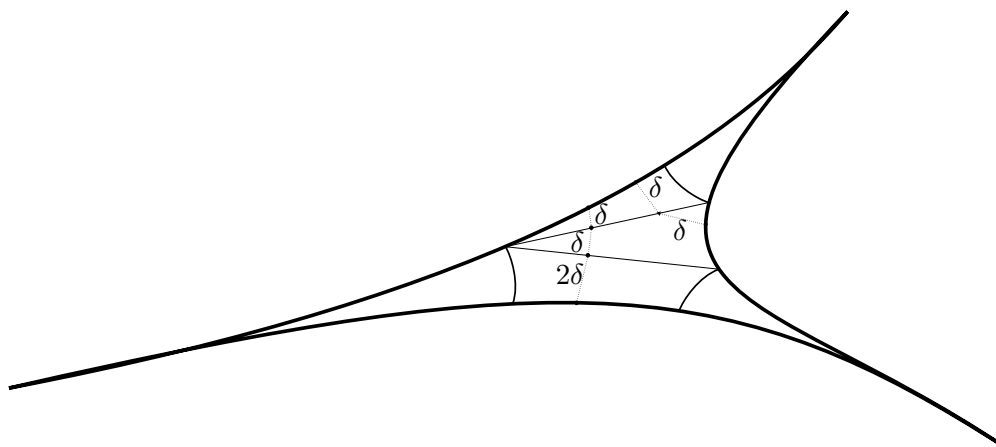


FIGURE 1.7 – Triangle idéal

Les triangles géodésiques ayant au moins un sommet dans  $\partial X$  sont généralement appelés des triangles géodésiques *idéaux*. Le résultat suivant explique que sous certaines conditions, on peut – *quitte à revenir un peu en arrière* – prolonger toute géodésique  $[x_0, x]$  en un rayon géodésique issu de  $x_0$ .

Le Théorème 1.1.15 induit le résultat suivant.

**Théorème 1.3.11** [CDP90, III.2.2]. *Soient  $X$  et  $X'$  deux espaces géodésiques propres quasi-isométriques. La quasi-isométrie s'étend en un homéomorphisme entre les bords  $\partial X$  et  $\partial X'$ .*  $\square$

Si un groupe  $G$  agit géométriquement dans deux espaces métriques géodésiques propres hyperboliques  $X$  et  $X'$ , alors  $\partial X = \partial X'$ . En particulier, on peut définir le *bord d'un groupe hyperbolique* comme étant le bord de son graphe de Cayley pour un système générateur préféré.

### 1.3.2 Prolongement des géodésiques

**Proposition 1.3.12** (Prolongement des géodésiques dans un espace hyperbolique). *Soit  $G$  un groupe agissant par isométrie et cocompactement sur un espace métrique géodésique propre  $\delta$ -hyperbolique  $X$ . Il existe une constante  $\mu \geq 0$  telle que si  $x_0$  est un point de  $X$ , pour tout point de  $X$ , il existe un rayon géodésique issu de  $x_0$  passant à distance inférieure ou égale à  $\mu$ .*

*Démonstration.* Soit  $x_0$  un point de  $X$ . Tout d'abord, comme le graphe de Cayley  $X$  est un espace géodésique propre  $\delta$ -hyperbolique, la Proposition 1.3.9 indique que deux points distincts du bord sont joints par une géodésique bi-infinie. Considérons une telle géodésique bi-infinie  $\mathcal{L}$  et considérons un point  $y$  appartenant à  $\mathcal{L}$ .

De plus, comme l'action de  $G$  sur  $X$  est cocompacte, il existe  $D$  tel que  $G \cdot B(x_0, D) = X$ . Pour un point  $x$  de  $X$ , il existe donc  $g \in G$  tel que  $d(x, gy) \leq D$ . En translatant la géodésique bi-infinie  $\mathcal{L}$  par  $g$ , on obtient une géodésique bi-infinie  $g \cdot \mathcal{L}$  passant à moins de  $D$  de  $x$  dans  $X$ .

Considérons maintenant un triangle idéal géodésique composé de  $g \cdot \mathcal{L}$  et de deux rayons issus de  $x_0$  joignant respectivement ses extrémités. Or, d'après 1.3.10, tout triangle idéal de  $X$  est  $4\delta$ -fin. Pour tout  $\mu \geq 4\delta + D$ , le point  $x$  est alors à distance inférieure ou égale à  $\mu$  d'un rayon géodésique issu de  $x_0$ .  $\square$

**Définition 1.3.13** (Constante de prolongement des géodésiques). On dit dans ce cas que  $\mu$  est une constante de prolongement des géodésiques pour  $X$ .

**Remarque 1.3.14.** Quitte à remplacer  $\delta$  par  $\mu$ , on peut toujours se ramener au cas où la constante de prolongement des géodésiques pour  $X$  est  $\delta$ .

**Proposition 1.3.15.** Soient  $X$  un espace métrique géodésique propre  $\delta$ -hyperbolique et  $x_0$  un point de  $X$ . Si  $x$  est un point de  $X$  et  $c: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow X$  est un rayon géodésique issu de  $x_0$  passant à moins de  $\mu$  de  $x$ , on a

$$d(x, c(d(x_0, x))) \leq 2\mu + 2\delta.$$

*Démonstration.* Le rayon géodésique  $c$  passe à moins de  $\mu$  de  $x$ , il existe donc  $r \geq 0$  tel que  $d(x, c(r)) \leq \mu$ . Pour plus de lisibilité, notons  $R = d(x_0, x)$ . (voir Figure 1.8)

Comme  $d(x_0, x) = d(x_0, c(R))$ , on a l'inégalité

$$\langle x_0, c(R) \rangle_x = \frac{1}{2} d(x, c(R)) \leq d(x, [x_0, c(R)]).$$

Deux cas sont à considérer.

— Si  $r \leq R$ , l'inégalité ci-dessus indique immédiatement que

$$d(x, c(R)) \leq \mu.$$

— Si  $r \geq R$ , on applique la Proposition 1.1.7 aux géodésiques  $[x_0, x]$  et  $[x_0, c(r)]$ . On obtient ainsi

$$\begin{aligned} d(x, c(R)) &\leq 2(d(x, c(r)) + \delta) \\ &\leq 2\mu + 2\delta. \end{aligned}$$

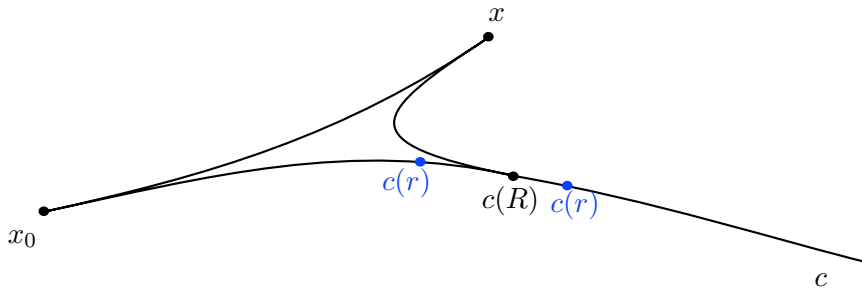


FIGURE 1.8 – Prolongement de géodésique

On en conclut que pour tout point  $x$  de  $X$  tel que  $d(x_0, x) = R$  et pour tout rayon géodésique  $c: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow X$  issu de  $x_0$  passant à moins de  $\mu$  de  $x$ , la distance de  $x$  au point  $c(R)$  est inférieure ou égale à  $2\mu + 2\delta$ .  $\square$

### 1.3.3 Propriétés des isométries hyperboliques

Soit  $X$  un espace métrique géodésique propre  $\delta$ -hyperbolique. Soit  $x_0$  un point de  $X$ .

**Définition 1.3.16** (Isométries elliptiques, paraboliques, hyperboliques). Une isométrie  $g$  de  $X$  est dite

- *elliptique* si l'orbite de  $x_0$  est bornée,
- *parabolique* si l'orbite de  $x_0$  admet exactement un point d'accumulation dans  $\partial X$ ,
- *hyperbolique* si l'application de  $\mathbb{Z}$  dans  $X$  qui à  $n$  associe  $g^n x_0$  est une quasi-isométrie.

En particulier, une isométrie  $g$  est hyperbolique si l'orbite de  $x_0$  admet exactement deux points d'accumulation dans  $\partial X$ . Par ailleurs, puisque  $g$  est une isométrie, ces définitions ne dépendent pas du choix de  $x_0$ . Le théorème suivant assure que toute isométrie de  $X$  est de l'un de ces types.

**Théorème 1.3.17** [Gro87, 8.1.B]. *Toute isométrie d'un espace métrique géodésique propre hyperbolique est elliptique, parabolique ou hyperbolique.*  $\square$

Rappelons quelques propriétés intéressantes des isométries hyperboliques.

**Proposition 1.3.18** [CDP90, X.6.6]. *L'action d'une isométrie hyperbolique de  $X$  sur  $\partial X$  a exactement deux points fixes.*  $\square$

Si  $g$  est une isométrie hyperbolique de  $X$ , on note généralement  $g^-$  le point fixe répulsif et  $g^+$  le point fixe attractif. Ces couples de points ont la bonne propriété suivante.

**Proposition 1.3.19** [Gro87, §5.1]. *L'ensemble des couples de points fixes répulsifs-attractifs d'isométries hyperboliques de  $X$  est dense dans l'ensemble des couples de points distincts du bord de  $X$ .*  $\square$

## 1.4 Bouts

On rappelle qu'une application entre espaces topologiques est dite *propre* si l'image réciproque d'un compact est un compact. Dans ce paragraphe, on appelle *rayon* une application de  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  dans un espace topologique. La notion de bouts pour les espaces topologiques a été introduite par H.Freudenthal [Fre31].

**Définition 1.4.1.** Soit  $X$  un espace topologique. On dit que deux rayons propres  $c, c'$  de  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  dans  $X$  *convergent vers un même bout* si pour tout compact  $K \subseteq X$  il existe un entier  $R$  tel que les restrictions  $c([R, \infty))$  et  $c'([R, \infty))$  soient contenues dans une même composante connexe par arcs de  $X \setminus K$ .

Converger vers un même bout est clairement une relation d'équivalence sur l'ensemble des rayons propres de  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  dans un espace topologique. On note  $bt(c)$  le *bout* défini par un rayon propre  $c: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow X$ , c'est-à-dire la classe d'équivalence de  $c$  pour la relation ci-dessus.  $Bt(X)$  désigne l'ensemble des bouts de  $X$ . Le nombre de bouts de  $X$ , noté  $e(X)$ , est le cardinal de l'ensemble  $Bt(X)$ .

On peut définir une convergence sur l'ensemble des bouts de la façon suivante : soit  $(c_n)_n$  une suite de rayons propres de  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  dans  $X$ . La suite  $(bt(c_n))_n$  converge vers  $bt(c)$  si et seulement si pour tout compact  $K \subseteq X$ , il existe une suite d'entiers  $(R_n)_n$  telle qu'à partir d'un certain rang,  $c_n([R_n, \infty))$  et  $c([R_n, \infty))$  soient dans une même composante connexe par arcs de  $X \setminus K$ . Cette notion de convergence permet alors de munir  $Bt(X)$  d'une topologie. Un sous-ensemble  $B$  de  $Bt(X)$  est dit *fermé* si toute suite d'éléments de  $B$  convergente a sa limite dans  $B$ .

**Théorème 1.4.2** [Geo08, 13.4.7 et 13.4.16]. *Soit  $X$  un espace métrique géodésique propre hyperbolique. L'ensemble des bouts  $Bt(X)$  est un Cantor.*  $\square$

En particulier, l'ensemble des bouts est totalement discontinu et sans point isolé.

**Lemme 1.4.3** [BH99, I.8.28]. *Soient  $X$  un espace métrique géodésique propre et  $x_0$  un point de  $X$ . Soit  $k > 0$ . Soient  $c, c' : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow X$  deux rayons propres de  $X$ .*

1. *Les rayons  $c$  et  $c'$  définissent le même bout si et seulement si pour tout  $R > 0$ , il existe un rang  $T$  tel que pour tout  $t \geq T$ , il existe un nombre fini de points de  $X$ ,  $c(t) = x_1, \dots, x_n = c'(t)$  avec  $d(x_i, x_{i+1}) \leq k$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  dans  $X \setminus B(x_0, R+k)$ .*
2. *Soit  $\mathcal{G}_{x_0}(X)$  l'ensemble des rayons géodésiques issus de  $x_0$  dans  $X$ . L'application naturelle de  $\mathcal{G}_{x_0}(X)$  dans  $Bt(X)$  est surjective.*  $\square$

La démonstration de ce résultat repose sur le fait que  $X$  soit propre. En effet, cela permet de remplacer les ensembles compacts de la définition de bout par des boules. Ce lemme induit le résultat suivant.

**Proposition 1.4.4** [BH99, I.8.29]. *Toute quasi-isométrie entre deux espaces géodésiques propres induit un homéomorphisme entre leur espace de bouts respectif.*  $\square$

Cela motive la définition suivante.

**Définition 1.4.5.** Soit  $G$  un groupe muni d'un système générateur fini  $\mathcal{S}$ . L'ensemble des bouts de  $G$  est  $Bt(G) := Bt(\text{Cay}(G, \mathcal{S}))$ .

Le théorème suivant regroupe des résultats dus à H.Hopf [Hop44] (1. - 2.) et J.Stallings [Sta71] (3.).

**Théorème 1.4.6.** *Soit  $G$  un groupe de type fini.*

1.  $e(G) = 0, 1, 2, \infty$
2.  $e(G) = 0$  si et seulement si  $G$  est fini.
3.  $e(G) > 1$  si et seulement si l'une des propositions suivantes est satisfaite :
  - i. Le groupe  $G$  se décompose en un produit libre amalgamé  $A *_C B$  avec  $C$  fini,  $|A/C| \geq 2$  et  $|B/C| \geq 2$  ;
  - ii. Le groupe  $G$  se décompose en une extension HNN  $\langle A, t \mid t^{-1}C_1t = C_2 \rangle$  avec  $C_1$  et  $C_2$  deux sous-groupes finis isomorphes de  $A$ .  $\square$

Le point 3. du théorème précédent peut être reformulé de la façon suivante.

**Corollaire 1.4.7.** *Soit  $G$  un groupe de type fini.*

- i.  $e(G) = 2$  si et seulement si le groupe  $G$  se décompose en produit libre amalgamé  $A *_C B$  avec  $C$  fini et  $|A/C| = |B/C| = 2$  ou  $G = \langle A, t \mid t^{-1}At \rangle$  avec  $A$  fini.*
- ii.  $e(G) = \infty$  si et seulement si le groupe  $G$  se décompose en un produit libre amalgamé  $A *_C B$  avec  $C$  est fini,  $|A/C| \geq 3$  et  $|B/C| \geq 2$  ou en une extension HNN  $\langle A, t \mid t^{-1}C_1t = C_2 \rangle$  avec  $C_1$  et  $C_2$  deux sous-groupes finis isomorphes de  $A$ , différents de  $A$ .  $\square$*

Dans le d'un groupe de type fini à deux bouts, on note aussi le résultat suivant.

**Théorème 1.4.8** [SW79, 5.12]. *Soit  $G$  un groupe de type fini. On a :*

*$e(G) = 2$  si et seulement si le groupe  $G$  est virtuellement cyclique.  $\square$*

Dans le cas d'un espace hyperbolique, la notion de bout peut être comparée à la notion de bord. Le résultat suivant est signalé par les spécialistes, voir par exemple [GdlH90, VII.17] ou [BH99, III.H.3.8]. On détaille ici l'idée de preuve donnée dans la première référence.

**Proposition 1.4.9.** *Soit  $X$  un espace métrique géodésique, propre et hyperbolique. Il existe une application continue surjective du bord  $\partial X$  dans l'ensemble des bouts  $Bt(X)$  dont les fibres sont connexes.*

*Démonstration.* Définissons une application  $\pi: \partial X \rightarrow Bt(X)$  qui à chaque point du bord de  $X$  associe un bout de  $X$  et montrons qu'elle est bien définie. D'après 1.4.3, l'ensemble des rayons géodésiques issus d'un point  $x_0$  de  $X$  permet de décrire l'ensemble des bouts de  $X$ . Considérons donc un rayon géodésique  $c: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow X$  issu de  $x_0 \in X$ . Par définition, pour tout compact  $K \subseteq X$ , il existe un entier  $R$  tel que  $c([R, \infty))$  soit en dehors de  $K$ . Le rayon  $c$  définit donc un bout. Soit  $c': \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow X$  un rayon géodésique issu de  $x_0$  asymptotique à  $c$ . D'une part, le rayon  $c'$  définit le même point de  $\partial X$  que  $c$ . D'autre part, il existe un entier  $R'$  tel que  $c'([R', \infty))$  et  $c([R', \infty))$  soient dans une même composante connexe par arcs de  $X \setminus K$ . Le bout défini par le rayon  $c$  ne dépend donc du point du bord  $\partial X$  défini par  $c$ . Ainsi l'application  $\pi$  est bien définie.

La surjectivité de  $\pi$  découle de sa définition. En effet, considérons un bout  $e \in Bt(X)$ . D'après le Lemme 1.4.3, il existe un rayon géodésique  $c$  issu de  $x_0$  qui définit  $e$ . Notons  $u$  le point du bord  $\partial X$  défini par  $c$ . Alors  $\pi(u) = e$ . Cela montre que l'application  $\pi$  est surjective.

Montrons maintenant que l'application  $\pi$  est continue. Considérons une suite  $(u_n)_n$  de points de  $\partial X$  telle que  $u_n$  soit définie par un rayon  $c_n$  pour tout  $n$ . Supposons que cette suite  $(u_n)_n$  converge vers un point  $u$  de  $\partial X$  défini par un rayon  $c$ . Cela signifie que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \liminf_{t \rightarrow \infty} \langle c_n(t), c(t) \rangle_{x_0} = \infty.$$

En d'autres termes, pour tout  $R \geq 0$ , il existe un entier  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$ , on ait

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \langle c_n(t), c(t) \rangle_{x_0} \geq R.$$

On en déduit que pour tout  $t \geq R$ , il existe un chemin géodésique joignant  $c_n(t)$  à  $c(t)$  en dehors de la boule  $\bar{B}(x_0, R - \delta)$ . Cela signifie que la suite  $(bt(c_n))_n$  converge vers  $bt(c)$ . On a ainsi montré que l'application  $\pi: \partial X \rightarrow Bt(X)$  est continue.



Comme l'espace des bouts de  $X$  est totalement discontinu (Théorème 1.4.2), les composantes connexes de  $X$  sont contenues dans les fibres de  $\pi$ .

Montrons maintenant que les fibres de  $\pi$  sont connexes. Pour cela, supposons qu'il existe un bout  $e \in \text{Bt}(X)$  dont la fibre  $\pi^{-1}(e)$  n'est pas connexe. Il existe donc deux fermés non vides  $F_1$  et  $F_2$  tels que  $\pi^{-1}(e) = F_1 \sqcup F_2$ . Considérons deux ouverts disjoints  $U_1$  et  $U_2$  de  $\partial X$  tels que  $F_i \subset U_i$  pour  $i = 1, 2$ . Notons ensuite pour  $i = 1, 2$ ,  $\hat{U}_i$  la réunion des rayons géodésiques issus de  $x_0$  définissant un point de  $U_i$ . Pour  $R$  assez grand, les ensembles  $\hat{U}_1 \setminus B(x_0, R)$  et  $\hat{U}_2 \setminus B(x_0, R)$  sont à distance strictement positive l'un de l'autre. Notons  $c_i$  un rayon géodésique issu de  $x_0$  définissant un point de  $F_i$ , pour  $i = 1, 2$ . En particulier, ces rayons définissent le même bout  $e$ . Donc il existe une suite d'entiers  $(R_n)_{n \geq 1}$  et des chemins  $l_n: [0, 1] \rightarrow X$  joignant  $c_1(R_n) \in \hat{U}_1$  à  $c_2(R_n) \in \hat{U}_2$  en dehors de la boule  $B(x_0, n)$ . Or on a déjà remarqué que, si  $n$  est assez grand, les ensembles  $\hat{U}_1 \setminus B(x_0, N_n)$  et  $\hat{U}_2 \setminus B(x_0, n)$  sont à distance strictement positive l'un de l'autre. Cela signifie qu'il existe  $t_n \in [0, 1]$  tel que  $l_n(t_n)$  soit en dehors de  $\hat{U}_1 \sqcup \hat{U}_2$ . Considérons maintenant la suite de segments géodésiques  $([x_0, l_n(t_n)])_{n \geq 1}$ . On remarque que la longueur des segments  $[x_0, l_n(t_n)]$  tend vers l'infini quand  $n$  tend vers l'infini. En utilisant la propriété de  $X$ , on peut appliquer le théorème d'Arzelà-Ascoli à l'ensemble des rayons géodésiques obtenus à partir de  $[x_0, l_n(t_n)]$  en stagnant en  $l_n(t_n)$ . Il existe une suite extraite de  $([x_0, l_n(t_n)])_{n \geq 1}$  qui converge vers un rayon  $c$  issu de  $x_0$  définissant le même bout que  $c_1$  et  $c_2$ . C'est absurde puisque le rayon  $c$  ne peut définir de point de  $F_1$ , ni de  $F_2$ . On en conclut que les fibres de  $\pi$  sont connexes.  $\square$

**Remarque 1.4.10** (Cas d'un espace ayant un bout). Dans le cas particulier d'un espace ayant un unique bout, l'application définie dans la Proposition 1.4.9 admet une unique fibre qui est exactement le bord de l'espace. Cela signifie que si un espace métrique géodésique propre hyperbolique n'a qu'un seul bout alors son bord est connexe.

En combinant les résultats<sup>3</sup> de M.Bestvina et G.Mess [BM91, 3.2 et 3.3] et B.H.Bowditch [Bow99, 0.3] et G.A.Swarup [Swa96], on remarque que si un groupe hyperbolique n'a qu'un bout alors on peut construire explicitement un chemin entre deux points de son bord. Donc si un groupe hyperbolique n'a qu'un seul bout, son bord est localement connexe par arcs.

## 1.5 Enveloppe convexe faible et cœur convexe

Pour davantage de résultats sur le sujet, on peut se référer par exemple à [KS96], [Swe01] ou [KW04].

Soit  $H$  un groupe d'isométries d'un espace métrique géodésique  $\delta$ -hyperbolique  $X$ . Soit  $x_0$  un point de  $X$ .

**Définition 1.5.1.** L'ensemble limite de  $H$  est  $\Lambda H = \overline{H \cdot x} \cap \partial X$  formé des points d'accumulation dans  $\partial X$  de l'orbite d'un point  $x \in X$  pour l'action de  $H$ . L'ensemble limite conique  $\Lambda_c H$  de  $H$  est l'ensemble des points du bord de  $X$  pour lesquels il existe  $N \geq 0$  tel que pour tout rayon  $c$  définissant ce point, le  $N$ -voisinage de  $c$  intersecte l'orbite  $H \cdot x_0$ .

3. Ces différents résultats sont énoncés et étudiés plus en détail dans les sections 2.2.1 et 3.2.1.

Par définition, l'ensemble limite  $\Lambda H$  est compact et  $H$ -invariant. De plus, l'ensemble limite conique  $\Lambda_c H$  est aussi  $H$ -invariant et  $\Lambda_c H \subseteq \Lambda H$ .

Un autre choix de point base ne change pas l'ensemble limite de  $H$ . En effet, considérons  $(h_n)_n$  une suite d'éléments de  $H$  telle que  $(h_n x)_n$  tende vers un point  $u$  de  $\Lambda H$ . Si  $x'$  est un point de  $X$  distinct de  $x$ , on a  $\langle h_n x, h_n x' \rangle_{x_0} \geq \langle h_n x, h_n x \rangle_{x_0} - d(x, x')$ . Ainsi  $\langle h_n x, h_n x' \rangle_{x_0}$  tend aussi vers l'infini. Or  $X$  est hyperbolique donc  $\langle h_n x', h_n x' \rangle_{x_0} \geq \min\{\langle h_n x, h_n x' \rangle_{x_0}, \langle h_n x, h_n x' \rangle_{x_0}\} - \delta$  et la limite de  $(h_n x')_n$  est aussi  $u$ .

**Proposition 1.5.2** [Swe01]. *Soit  $G$  un groupe agissant géométriquement sur un espace métrique géodésique hyperbolique. Un sous-groupe  $H$  de  $G$  est quasi-convexe si et seulement si  $\Lambda_c H = \Lambda H$ .*

*Démonstration.* Montrons tout d'abord que si  $H$  est un sous-groupe quasi-convexe de  $G$  alors  $\Lambda_c H = \Lambda H$ . Par définition, on a immédiatement  $\Lambda_c H \subseteq \Lambda H$ .

Montrons l'inclusion inverse. Soit  $x_0$  un point de l'espace hyperbolique. Considérons un point  $u \in \Lambda H$  et un rayon  $c$  issu de  $x_0$  définissant  $u$ . Par définition de  $\Lambda H$ , il existe une suite  $(h_n)_n$  d'éléments de  $H$  telle que  $u = [(h_n \cdot x_0)_n]$ . Puisque  $(h_n)_n$  et  $c$  définissent le même point de  $\partial X$ , à partir d'un certain rang, la distance de  $c$  à  $h_n$  sera bornée. Ainsi d'après la Proposition 1.1.7, les segments géodésiques  $[x_0, h_n \cdot x_0]$  restent à distance bornée de  $c$ . Comme  $H$  est un sous-groupe quasi-convexe de  $G$ ,  $H \cdot x_0$  est un sous-ensemble quasi-convexe de  $X$ . Le rayon  $c$  reste donc à distance bornée de  $H \cdot x_0$ . Ainsi  $u \in \Lambda_c H$ . On en déduit que  $\Lambda H \subseteq \Lambda_c H$  et donc  $\Lambda_c H = \Lambda H$ .

Montrons maintenant l'autre implication. Soit  $H$  un sous-groupe d'un groupe agissant géométriquement sur un espace hyperbolique tel que  $\Lambda_c H = \Lambda H$ . En particulier,  $H$  agit par isométrie et proprement discontinument sur  $C(\Lambda H)$ . Il reste donc à montrer que  $H$  agit cocompactement sur  $C(\Lambda H)$ . Soit  $x_0$  un point de l'espace hyperbolique.

Considérons un point  $u \in \Lambda H$ . Il existe donc une géodésique bi-infinie  $l \subset C(\Lambda H)$  dont l'une des extrémités est  $u$ , disons  $l^+ = u$ . Par ailleurs,  $u \in C(\Lambda_c H)$  et il existe un entier  $N$  tel que le  $N$ -voisinage de  $l \mid_{[0, +\infty)}$  intersecte  $H \cdot x_0$ . Ainsi  $l \mid_{[0, +\infty)} \cap (H \cdot x_0)^{+N} \neq \emptyset$  et donc  $C(\Lambda_c H)$  intersect le  $N$ -voisinage de  $H \cdot x_0$ . Par  $H$ -invariance de ce voisinage, on obtient finalement que  $C(\Lambda H) = C(\Lambda_c H) \subset (H \cdot x_0)^{+N}$ . D'après la Proposition 1.2.11,  $H$  est un sous-groupe quasi-convexe.  $\square$

**Définition 1.5.3.** Un groupe est dit *non-élémentaire* si le cardinal de son ensemble limite est strictement supérieur à 2.

**Théorème 1.5.4** [Gro87]. *Soit  $X$  un espace métrique géodésique hyperbolique. Soit  $H$  un groupe d'isométries non-élémentaire agissant proprement discontinument sur  $X$ . L'ensemble limite  $\Lambda H$  est l'unique ensemble minimal de l'action de  $H$  sur  $\partial X$ .*  $\square$

**Définition 1.5.5.** Soit  $X$  un espace métrique géodésique hyperbolique. L'*enveloppe convexe faible* d'un groupe d'isométries non-élémentaire  $H$  de  $X$ , notée  $C(\Lambda H)$ , est l'union de toutes les géodésiques bi-infinies de  $X$  joignant des points de  $\Lambda H$ .

Par définition,  $C(\Lambda H)$  est  $H$ -invariant.

**Définition 1.5.6.** Le cœur convexe de  $H$  est le quotient  $C(\Lambda H)/H$ .

**Proposition 1.5.7.** Soit  $H$  un groupe d'isométries d'un espace métrique géodésique  $\delta$ -hyperbolique non-élémentaire. L'ensemble  $C(\Lambda H)$  est  $8\delta$ -quasi-convexe.

*Démonstration.* On déduit de la Proposition 1.3.10 que tout quadrilatère de  $X$  à sommets dans  $X \cup \partial X$  est  $8\delta$ -fin et  $8\delta$ -quasi-convexe.

Considérons deux points  $x$  et  $y$  de l'enveloppe convexe faible de  $H$ . Par définition de  $C(\Lambda H)$ , il existe des points  $a, b, c, d$  de  $\partial X$  tels que  $x$  appartienne à une géodésique bi-infinie  $(a, b)$  joignant  $a$  à  $b$  et  $y$  appartienne à une géodésique bi-infinie  $(c, d)$  joignant  $c$  à  $d$ .

Supposons que les points  $a, b, c, d$  sont tous distincts (les autres cas sont plus simples et se traitent de façon analogue). En considérant deux autres géodésiques bi-infinies joignant  $a$  à  $d$  et  $b$  à  $c$ , on obtient un quadrilatère idéal  $Q = (a, b) \cup (b, c) \cup (c, d) \cup (d, a)$ . En particulier,  $Q$  est  $8\delta$ -quasi-convexe. Donc tout segment géodésique joignant  $x$  à  $y$  est ainsi dans le  $8\delta$ -voisinage de  $Q$ . Or  $Q$  est contenu dans  $C(\Lambda H)$  donc tout segment géodésique joignant  $x$  à  $y$  est dans le  $8\delta$ -voisinage de  $C(\Lambda H)$ .

On en conclut que l'enveloppe convexe faible de  $H$  est  $8\delta$ -quasi-convexe. □

La caractérisation suivante des sous-groupes quasi-convexes aura son importance dans la suite.

**Proposition 1.5.8.** Soit  $G$  un groupe agissant géométriquement sur un espace géodésique propre hyperbolique  $X$ . Un sous-groupe  $H$  de  $G$  est quasi-convexe si et seulement si  $H$  agit géométriquement sur  $C(\Lambda H)$ .

La démonstration suivante, qui reprend les preuves de [KS96, Prop.3.4] et [Swe01], fournit une expression explicite du diamètre du cœur convexe et de la constante d'hyperbolicité. En effet, pour  $\delta$  une constante d'hyperbolicité pour  $X$ , on montre plus précisément que :

- Si  $H$  est un sous-groupe  $\varepsilon$ -quasi-convexe de  $G$  alors le diamètre de  $C(\Lambda H)/H$  est inférieure à  $2(2\delta + \varepsilon + \kappa + 3)$  où  $\kappa$  est la constante du Théorème 1.1.14.
- Si le diamètre du cœur convexe est fini alors pour tout  $x \in X$ , l'ensemble  $H \cdot x$  est  $(\text{diam}(C(\Lambda H)/H) + d(x, C(\Lambda H)) + 10\delta)$ -quasi-convexe.

*Démonstration.* Soit  $x_0$  un point de  $C(\Lambda H)$ . Notons  $\delta$  une constante d'hyperbolicité pour  $X$  et  $\mathcal{S}$  un système générateur symétrique fini pour  $G$ .

Dans un premier temps, montrons que l'enveloppe convexe faible de  $H$  est contenue dans un voisinage borné de l'orbite  $H \cdot x_0$ . Considérons un point  $x$  de l'enveloppe convexe faible  $C(\Lambda H)$ . Par définition de  $C(\Lambda H)$ , il existe deux points  $u$  et  $v$  dans  $\Lambda H$  tels que  $x$  appartienne à une géodésique joignant  $u$  à  $v$ . Considérons des points  $t \in [x, u)$  et  $t' \in [x, v)$  loin de  $x$ . Par définition de  $C(\Lambda H)$ , on peut trouver des éléments  $h, h' \in H$  tels que  $d(t, hx_0) + 2\delta < d(x, t)$  et  $d(t', h'x_0) + 2\delta < d(x, t')$ . Observons alors le quadrilatère géodésique de sommets  $hx_0, h'x_0, t$  et  $t'$  ainsi formé (voir Figure 1.9). Comme  $X$  est un espace  $\delta$ -hyperbolique, il existe un point  $y$  sur  $[hx_0, h'x_0]$  satisfaisant  $d(x, y) \leq 2\delta$ .

Considérons maintenant une suite d'éléments de  $G$ ,  $g_0, g_1, \dots, g_n$  telle que  $g_0 = h$ ,  $g_n = h'$  et  $d(g_i x_0, g_j x_0) = |i - j|$  pour tout  $i, j \in \{0, \dots, n\}$ . Comme la preuve du Lemme de Švarc-Milnor 1.1.21 indique que l'application  $f: G \rightarrow X$  définie par  $f(g) = gx_0$  est une  $(\sigma, 1)$ -quasi-isométrie

où  $\sigma = \max\{d(x_0, s \cdot x_0) \mid s \in \mathcal{S}\}$ , l'union  $Y$  des segments géodésiques  $[g_i x_0, g_{i+1} x_0]$  pour  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  est une  $(\sigma, 1)$ -quasi-géodésique (voir Figure 1.9).

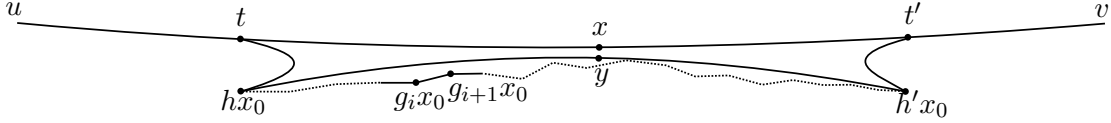


FIGURE 1.9 – Quadrilatère géodésique et quasi-géodésique

Or, d'après le Théorème 1.1.14, toute quasi-géodésique reste dans le  $\kappa$ -voisinage de toute géodésique de mêmes extrémités avec  $\kappa = 64\delta\sigma \log_2(128\sigma^2 + 2\sigma/\delta + 16\sigma) + 8\sigma + 64\delta\sigma + 2$ . Cela signifie que  $d(y, Y) \leq \kappa$ . Il existe donc un entier  $l \in \{0, \dots, n\}$  tel que  $d(y, g_l x_0) \leq \kappa + 1$ . On a alors  $d(x, g_l x_0) \leq \kappa + 2\delta + 1$ . De plus, comme  $H$  est un sous-groupe  $\varepsilon$ -quasi-convexe de  $G$ , il existe un élément  $h'' \in H$  tel que  $d(h'', g_l) \leq \varepsilon$ . On en déduit que  $d(h'' x_0, g_l x_0) \leq \varepsilon + 2$  et ainsi  $d(x, h'' x_0) \leq \kappa + 2\delta + \varepsilon + 3$ . Le diamètre de  $C(\Lambda H)/H$  est inférieur à  $2(2\delta + \varepsilon + \kappa + 3)$ .

Ainsi l'action de  $H$  sur  $C(\Lambda H)$  est cocompacte. Comme  $H$  est un sous-groupe de  $G$  et que  $G$  agit géométriquement sur  $X$ , le sous-groupe  $H$  agit géométriquement sur  $C(\Lambda H)$ .

Supposons maintenant que le diamètre du cœur convexe est fini, disons inférieur à  $d$ . Considérons un point  $x$  de  $X$  et posons  $D = d(x, C(\Lambda H))$ . Il existe alors une géodésique bi-infinie  $L$  d'extrémités dans  $\Lambda H$  contenant un point  $y$  tel que  $d(x, y) = D$ . Comme  $C(\Lambda H)$  est invariant sous l'action de  $H$ , pour tout élément  $h$  de  $H$ , le point  $hy$  appartient toujours à une géodésique bi-infinie d'extrémités dans  $\Lambda H$  et  $d(hx, hy) = D$ .

Montrons que tout segment  $[x, hx]$  reste à distance bornée de  $H \cdot x$ . Comme tout quadrilatère de sommets  $x, hx, y, hy$  est  $2\delta$ -fin, tout segment géodésique  $[y, hy]$  est contenu dans le  $(D + 2\delta)$ -voisinage d'un segment géodésique  $[x, hx]$ . Par ailleurs, la Proposition 1.5.7 indique que  $C(\Lambda H)$  est  $8\delta$ -quasi-convexe. Tout segment  $[y, hy]$  est contenu donc dans le  $8\delta$ -voisinage de  $C(\Lambda H)$ . On en déduit que  $[x, hx]$  est contenu dans le  $(d + D + 10\delta)$ -voisinage de l'orbite  $H \cdot x$ . On en conclut que  $H$  est un sous-groupe quasi-convexe de  $G$ .  $\square$

**Définition 1.5.9.** Un groupe  $H$  qui satisfait les conditions équivalentes de la Proposition 1.5.8 est appelé un groupe *quasi-convexe-cocompact* d'isométries de  $X$ .

Le théorème suivant sera utile dans l'étude du bord des espaces quotients au Chapitre 2.

**Théorème 1.5.10** [Coo89]. *Soit  $H$  un groupe agissant par isométrie et proprement discontinument sur un espace géodésique, propre et hyperbolique  $X$ . Alors  $H$  agit proprement discontinument sur  $(X \cup \partial X) \setminus \Lambda H$ .*  $\square$

## 1.6 Un exemple fondamental : le cas du groupe libre

On donne ici l'exemple du groupe libre auquel on pourra se référer plus tard pour illustrer nos propos.

**Théorème 1.6.1** (Théorème de Nielsen-Schreier) [Nie21][Sch27]. *Tout sous-groupe d'un groupe libre est un groupe libre quasi-convexe.*

Différentes approches topologiques et algébriques permettent de montrer ce résultat ; on trouve par exemple une preuve dans [Ser77, §3].

*Démonstration.* Un groupe est libre si et seulement s'il est le groupe fondamental d'un graphe. En effet, si on note  $\Gamma$  un graphe et  $\Gamma_0$  son arbre de représentants alors le graphe obtenu en rétractant  $\Gamma_0$  en un point est un bouquet de cercles dont le nombre de cercles est égal au nombre d'arêtes de  $\Gamma \setminus \Gamma_0$ . Le groupe fondamental de  $\Gamma$  est donc le groupe fondamental d'un bouquet de  $k$  cercles, c'est-à-dire le groupe libre de rang  $k$ . En particulier, un groupe est un groupe libre de type fini si et seulement s'il est le groupe fondamental d'un graphe fini.

Considérons un groupe libre  $F$  de système générateur fini  $\mathcal{S}$ . Il peut donc être réalisé comme le groupe fondamental d'un graphe fini  $\Gamma$ . Le revêtement universel de  $\Gamma$  est un arbre  $T$ . Donc le groupe  $F = \pi_1(\Gamma)$  agit géométriquement et librement sur  $T$ . Réciproquement, si un groupe agit librement sur un arbre alors l'espace quotient est un graphe. Or on a montré que le groupe fondamental d'un graphe est un groupe libre. Donc le groupe est un groupe libre. En particulier, un sous-groupe de ce groupe libre agit encore librement sur cet arbre et c'est donc aussi un groupe libre.

Soit  $H$  un sous-groupe de type fini de  $F$  engendré par un système fini  $\mathcal{S}_H$ . En particulier,  $H$  agit par isométrie, proprement discontinuement et librement sur  $T$ . Soit  $x_0$  un point de  $T$ . Considérons la réunion des segments géodésiques  $h \cdot [x_0, sx_0]$  pour  $s \in \mathcal{S}_H$  et  $h \in H$ . Par construction, cet ensemble forme un sous-ensemble connexe  $T'$  de  $T$ . Donc  $T'$  est un graphe acyclique et comme il est connexe, c'est un sous-arbre de  $T$ . De plus,  $T'$  est convexe. En effet, si  $T'$  n'était pas convexe, il existerait deux points de  $T'$  joints par un chemin qui quitte  $T'$ . Or dans un arbre, deux points sont joints par un unique chemin et si on ôte une arête d'un arbre, il n'est plus connexe. L'existence du chemin  $c$  contredit donc la connexité de  $T'$ . On en déduit que  $T'$  est un sous-arbre convexe de  $T$ .

Par construction, l'action de  $H$  sur  $T'$  est aussi cocompacte et  $H$  agit géométriquement sur  $T'$ . D'après le Lemme de Švarc-Milnor 1.1.21,  $H$  et  $T'$  sont quasi-isométriques et comme  $T' \subset T$  est convexe, la Proposition 1.2.3 indique que  $H$  est un quasi-convexe de  $F$ .  $\square$

On peut alors construire le cœur convexe  $C(\Lambda H)/H$  de l'ensemble limite de  $H$  à partir de  $T'$ . Pour ce faire, il suffit de rétracter les sommets de valence 1 de  $T'/H$  sur leur racine. On peut donc voir  $T/H$  comme la réunion du cœur convexe et d'une famille finie d'arbres  $T_x$ , avec  $x \in C(\Lambda H)/H$ , deux à deux disjoints tels que  $T_x \cap C(\Lambda H)/H = \{x\}$  comme dans la Figure 1.10. Comme la projection de  $T$  sur  $T'$  est  $H$ -équivariante, elle induit une projection du graphe quotient  $T/H$  sur le cœur convexe. Cette projection rétracte alors les arbres  $T_x$  sur leur racine  $x \in C(\Lambda H)/H$ .

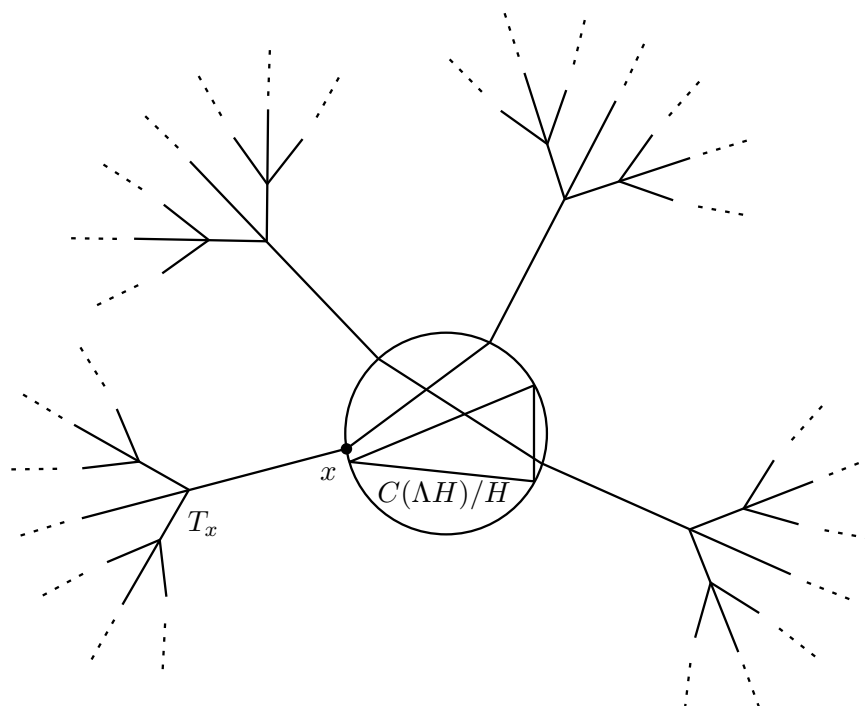


FIGURE 1.10 – Forme de  $X/H$

## 1.7 Graphes de Schreier

**Définition 1.7.1.** Soit  $G$  un groupe de système générateur fini  $\mathcal{S}$ . Soit  $H$  un sous-groupe de  $G$ . Le *graphe de Schreier* du couple  $(G, H)$  par rapport à  $\mathcal{S}$ , noté  $Sch(G, H, \mathcal{S})$ , est le graphe orienté défini de la façon suivante :

- Les sommets sont identifiés aux éléments  $G/H$  à savoir les classes  $Hg = \{hg \mid h \in H\}$  pour  $g \in G$ .
- Deux classes  $Hg$  et  $Hg'$  sont jointes par une arête orientée étiquetée par un générateur  $s \in \mathcal{S}$  si et seulement si  $Hgs = Hg'$ .

De cette façon, tout mot en  $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^{-1}$  définit un chemin simplicial dans le graphe de Schreier  $Sch(G, H, \mathcal{S})$ . Par construction, les graphes de Schreier sont des graphes réguliers (de degré  $2\#\mathcal{S}$ ) et connexes (multiplication à droite par un générateur). On peut également munir un tel graphe d'une métrique naturelle en donnant à chaque arête la longueur 1.

Les graphes de Schreier sont une généralisation naturelle des graphes de Cayley. En effet, si  $H$  est le sous-groupe trivial de  $G$ , alors le graphe de Schreier de  $(G, H)$  par rapport à  $\mathcal{S}$  est simplement le graphe de Cayley de  $G$  par rapport à  $\mathcal{S}$ . Par ailleurs, si  $H$  est un sous-groupe normal de  $G$ , alors  $Sch(G, H, \mathcal{S})$  est précisément le graphe de Cayley du groupe  $G/H$  par rapport à l'image de  $\mathcal{S}$  dans  $G/H$ . A la différence d'un graphe de Cayley, les graphes de Schreier peuvent avoir plusieurs arêtes joignant deux mêmes sommets.

On rappelle que le groupe fondamental d'un graphe de Cayley  $Cay(G, \mathcal{S})$  s'identifie au noyau de l'homomorphisme du groupe libre engendré par  $\mathcal{S}$  dans  $G$ . De la même façon, le groupe fondamental d'un graphe de Schreier peut s'identifier au noyau d'un homomorphisme. Par exemple, si  $H$  est un sous-groupe normal d'un groupe libre  $F$ , le groupe fondamental de  $Sch(F, H, \mathcal{S})$  s'identifie au noyau du morphisme  $F \rightarrow F/H$  qui est  $H$ . De la même façon, si  $H$  est un sous-groupe trivial d'un groupe  $G$  de système générateur fini  $\mathcal{S}$ , le groupe fondamental de  $Sch(G, H, \mathcal{S})$  est le groupe fondamental de  $Cay(G, \mathcal{S})$  qui s'identifie bien au noyau d'un morphisme.

En général, si  $G$  est un groupe donné par une présentation finie  $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \rangle$  et  $H$  un sous-groupe de  $G$ , le groupe fondamental de  $Sch(G, H, \mathcal{S})$  est l'ensemble des mots en  $\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^{-1}$  dont l'image par l'application  $F(\mathcal{S}) \rightarrow G$  est un élément de  $H$ .

**Proposition 1.7.2.** *Soit  $G$  un groupe de type fini et  $H$  un sous-groupe de  $G$ . L'espace quotient  $Cay(G, \mathcal{S})/H$  est exactement le graphe de Schreier  $Sch(G, H, \mathcal{S})$ .*

*Démonstration.* Les sommets du graphe de Schreier sont les classes des éléments de  $G$  suivant le sous-groupe  $H$ . Les sommets de  $Cay(G, \mathcal{S})/H$  sont les orbites des points de  $Cay(G, \mathcal{S})$  sous l'action de  $H$ . Or dans le cas d'un graphe de Cayley, les sommets sont identifiés aux éléments du groupe, l'action de  $H$  sur les sommets est donc la multiplication à gauche. Ainsi les sommets de  $Cay(G, \mathcal{S})/H$  et  $Sch(G, H, \mathcal{S})$  sont identiques. Pour les mêmes raisons, une arête d'étiquette  $s \in \mathcal{S}$  joignant  $Hx$  à  $Hxs$  dans le graphe de Schreier  $Sch(G, H, \mathcal{S})$  est identifiée avec une arête d'étiquette  $s$  de  $H \cdot x$  à  $H \cdot xs$  dans  $Cay(G, \mathcal{S})/H$ .  $\square$

Comme pour les graphes de Cayley, si  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  sont deux systèmes générateurs distincts pour  $G$ , les graphes de Schreier par rapport à ces systèmes sont quasi-isométriques car les métriques induites sont équivalentes (il suffit d'exprimer les éléments d'un système en fonction de l'autre pour le voir). Par ailleurs, la Proposition 1.4.4 indique que toute quasi-isométrie entre espaces géodésiques propres induit un homéomorphisme entre les espaces des bouts associés. Deux tels espaces ont donc le même nombre de bouts. Cela motive la définition suivante.

**Définition 1.7.3.** Soit  $G$  un groupe de type fini et  $H$  un sous-groupe de  $G$ . Le *nombre de bouts relatifs*<sup>4</sup> du couple  $(G, H)$ , noté  $e(G, H)$ , est le nombre de bouts d'un graphe de Schreier du couple  $(G, H)$ .

**Proposition 1.7.4.** *Soit  $G$  un groupe agissant géométriquement sur un espace métrique propre géodésique  $X$ . Si  $H$  est un sous-groupe de  $G$  alors  $Bt(G/H)$  est homéomorphe à  $Bt(X/H)$ .*

*Démonstration.* Pour montrer que l'ensemble des bouts de  $G/H$  et de  $X/H$  sont isomorphes, il suffit montrer que ces espaces sont quasi-isométriques et d'appliquer la Proposition 1.4.4.

Puisque l'action de  $G$  sur  $X$  est géométrique, le Lemme de Švarc-Milnor 1.1.21 indique que l'application d'orbites  $f: (G, d_G) \rightarrow (X, d_X)$  est une quasi-isométrie. Il existe donc des constantes  $\lambda$

---

4. La notion de bouts de couple de groupes a été introduite par A.Borel [Bor53] puis étudiée plus amplement par C.Houghton dans [Hou74] puis P.Scott [Sco78].

et  $\nu$  tels que pour tout  $g, g' \in G$ , on ait

$$\frac{1}{\lambda} d_S(g, g') - \nu \leq d_X(f(g), f(g')) \leq \lambda d_S(g, g') + \nu.$$

Soit  $H$  un sous-groupe de  $G$ . En particulier,  $H$  agit par isométrie sur  $(G, d_G)$  et  $(X, d_X)$ . Pour tout  $h \in H$  et tout  $g \in G$ , on a  $f(h \cdot g) = (h \cdot g) \cdot x = h \cdot (g \cdot x) = h \cdot f(g)$ . On a donc une application  $\bar{f}: G/H \rightarrow X/H$  qui envoie une orbite  $H \cdot g$  sur l'orbite  $H \cdot f(g)$ . Vérifions que cette application est encore une quasi-isométrie.

Soient  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{O}'$  deux orbites dans  $G/H$ . Par définition de la distance dans  $G/H$ , on sait qu'il existe deux éléments  $g_1, g'_1 \in G$  tels que  $\mathcal{O} = H \cdot g_1$ ,  $\mathcal{O}' = H \cdot g'_1$  et  $d_{G/H}(\mathcal{O}, \mathcal{O}') = d_G(g_1, g'_1)$ . On obtient alors

$$\begin{aligned} d_{X/H}(\bar{f}(\mathcal{O}), \bar{f}(\mathcal{O}')) &= d_{X/H}(H \cdot f(g_1), H \cdot f(g'_1)) \\ &= \min_{h \in H} d_X(h \cdot f(g_1), f(g'_1)) \\ &\leq d_X(f(g_1), f(g'_1)) \\ &\leq \lambda d_G(g_1, g'_1) + \nu \\ &\leq \lambda d_{G/H}(\mathcal{O}, \mathcal{O}') + \nu. \end{aligned}$$

D'autre part, il existe des éléments  $g_2, g'_2$  dans le groupe  $G$  tels que  $\mathcal{O} = H \cdot g_2$ ,  $\mathcal{O}' = H \cdot g'_2$  et  $d_{X/H}(\bar{f}(\mathcal{O}), \bar{f}(\mathcal{O}')) = d_X(\bar{f}(g_2), \bar{f}(g'_2))$ . On obtient donc

$$\begin{aligned} d_{G/H}(\mathcal{O}, \mathcal{O}') &\leq d_G(g_2, g'_2) \\ &\leq \lambda d_X(\bar{f}(g_2), \bar{f}(g'_2)) + \lambda \nu \\ &\leq \lambda d_{X/H}(\bar{f}(\mathcal{O}), \bar{f}(\mathcal{O}')) + \lambda \nu. \end{aligned}$$

On en déduit que  $\bar{f}$  est une quasi-isométrie et la Proposition 1.4.4 permet de conclure que l'ensemble des bouts de  $G/H$  est homéomorphe à l'ensemble des bouts de  $X/H$ .  $\square$





## Chapitre 2

# Bouts d'espaces quotients

Dans ce chapitre, l'espace  $X$  est un espace métrique géodésique propre hyperbolique. On considère ensuite un groupe quasi-convexe-cocompact  $H$  d'isométries de  $X$  dont on note  $C(\Lambda H)$  l'enveloppe convexe faible de l'ensemble limite  $\Lambda H$ . Pour simplifier la présentation, on se restreint au cas où  $H$  n'a pas d'élément d'ordre fini.

On fixe  $x_0 \in C(\Lambda H)$  un point base de  $X$ . On note  $\delta_x$  une constante d'hyperbolicité de  $X$  choisie pour être aussi une constante de prolongement des géodésiques pour  $X$ . On rappelle que cela signifie que pour tout point de  $X$ , il existe un rayon géodésique issu de  $x_0$  passant à moins de  $\delta_x$  de ce point. On fixe  $\epsilon$  une constante de quasi-convexité de  $H$ .

Pour tout point  $x$  de  $X$ , on note  $\bar{x}$  l'orbite de  $x$  dans  $X/H$ . L'espace quotient  $X/H$  est muni d'une distance naturelle obtenue à partir de la distance entre orbites dans  $X$ . Pour tous points  $x$  et  $y$  de  $X$ , on note

$$d_{X/H}(\bar{x}, \bar{y}) = \inf_{h \in H} d_X(x, hy) = d_X(x, H \cdot y).$$

Quand le contexte est clair, on omet généralement la mention de l'espace en indice.

### 2.1 Premières propriétés des espaces quotients

D'après la Proposition 1.2.11, l'ensemble  $H \cdot x_0$  est un ensemble  $\epsilon$ -quasi-convexe de  $X$ . Le premier résultat montre que pour tout  $h \in H$ , les points de  $X$  « suffisamment loin » de  $H \cdot x_0$  sont éloignés de leur translaté par  $h$ . Plus précisément :

**Proposition 2.1.1.** *Il existe une constante  $\alpha$ , ne dépendant que de  $\delta_x$  et  $\epsilon$ , telle que pour tout  $h \in H$  et pour tout point  $x \in X$  à distance au moins  $\alpha$  de  $H \cdot x_0$ , on a  $d(x, hx) \geq 100\delta_x$ .*

*Démonstration.* Puisque que  $H \cdot x_0$  est quasi-convexe, on peut construire une projection à  $\delta_x$  près de  $X$  sur  $H \cdot x_0$ . Notons-la  $\pi$ . Dans un premier temps, remarquons que la combinaison des résultats

1.2.6 et 1.2.9 indique que pour tout point  $x \in X$  et pour tout élément  $h \in H$ , l'inégalité suivante est vérifiée :

$$d(h\pi(x), \pi(hx)) \leq 10\delta_X + 2\epsilon.$$

Considérons maintenant un élément hyperbolique  $h \in H$ . Si la longueur de translation  $[h] = \inf_{x \in X} d(x, hx)$  de  $h$  est supérieure à  $\tau = 15\delta_X + 3\epsilon$ , la propriété 1.2.8(1) de contraction des projections sur un quasi-convexe donne pour tout  $x \in X$ ,

$$\begin{aligned} d(\pi(x), h\pi(x)) &\leq 30\delta_X + 6\epsilon + d(x, hx) - d(x, \pi(x)) - d(hx, \pi(hx)) + d(h\pi(x), \pi(hx)) \\ &\leq 40\delta_X + 8\epsilon + d(x, hx) - d(x, \pi(x)). \end{aligned}$$

Si  $d(x, hx) \leq 100\delta_X$ , on obtient alors

$$\begin{aligned} d(x, H \cdot x_0) &\leq d(x, hx) + 40\delta_X + 8\epsilon \\ &\leq 140\delta_X + 8\epsilon. \end{aligned}$$

Cette inégalité indique que lorsque la distance de  $x$  au quasi-convexe  $H \cdot x_0$  est supérieure  $140\delta_X + 8\epsilon$ , la distance entre  $x$  et  $hx$  est supérieure à  $100\delta_X$ .

Supposons maintenant que  $[h] \leq \tau$ . On sait que l'isométrie hyperbolique  $h$  fixe deux points du bord de  $X$ . Il existe alors un entier  $n_0$  tel que  $h^{n_0}$  fixe une géodésique joignant ces deux points en agissant par translation dessus. En d'autres termes, la norme stable de  $h$ ,  $[h]_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(x, h^n x)}{n}$ , vérifie  $n_0 [h]_\infty = [h^{n_0}]$  (voir [Gro87, §8.5.T] ou [Del96, 3.1]). La seconde référence indique que  $n_0$  ne dépend que de la constante d'hyperbolicité de  $H$ ; plus précisément  $n_0 = (\#B(1_H, 8\delta_H))^2!$  où  $\delta_H$  est une constante d'hyperbolicité pour  $H$ . A son tour, la constante  $\delta_H$  s'exprime en fonction de  $\epsilon$  et  $\delta_X$  comme l'indique la Proposition 1.2.13. Ainsi, la constante  $n_0$  ne dépend que de  $\epsilon$  et  $\delta_X$ .

Quitte à remplacer  $n_0$  par un multiple de  $n_0$ , on peut supposer que  $[h^{n_0}] > \tau$ . On peut donc reprendre les calculs précédents pour  $h^{n_0}$ . Pour tout  $x \in X$ , on obtient

$$\begin{aligned} d(x, \pi(x)) &\leq 40\delta_X + 8\epsilon + d(x, h^{n_0}x) \\ &\leq 40\delta_X + 8\epsilon + n_0 d(x, hx). \end{aligned}$$

Si  $d(x, hx) \leq 100\delta_X$ , on a

$$d(x, H \cdot x_0) \leq (40 + 100n_0)\delta_X + 8\epsilon.$$

En conclusion, pour toute isométrie hyperbolique  $h \in H$  et pour tout point  $x \in X$  vérifiant  $d(x, H \cdot x_0) \geq (40 + 100n_0)\delta_X + 8\epsilon$ , on a  $d(x, hx) \geq 100\delta_X$ . Ainsi  $\alpha = (40 + 100n_0)\delta_X + 8\epsilon$  convient.

Comme  $n_0$  ne dépend que de  $\delta_X$  et  $\epsilon$ , la constante  $\alpha$  ne dépend que de  $\delta_X$  et  $\epsilon$ . □

### 2.1.1 Hyperbolicité de l'espace quotient

Le théorème suivant a été démontré par I.Kapovich dans l'article [Kap02] en utilisant une approche directe. On donne ici une nouvelle preuve basée sur le lemme d'approximation par les arbres.

**Théorème 2.1.2.** *Soit  $X$  un espace métrique géodésique propre  $\delta_X$ -hyperbolique. Soit  $H$  un groupe quasi-convexe-cocompact d'isométries de  $X$ . L'espace quotient  $X/H$  est un espace métrique hyperbolique.*

*Démonstration.* Si  $x_0$  est un point de  $C(\Lambda H)$ , montrons que  $X/H$  est hyperbolique au sens de la Définition 1.1.2, c'est-à-dire que pour tous les points  $\bar{x}, \bar{y}$  et  $\bar{z}$  de  $X/H$ , on a

$$\langle \bar{y}, \bar{z} \rangle_{\bar{x}_0} \geq \min\{\langle \bar{y}, \bar{x} \rangle_{\bar{x}_0}, \langle \bar{x}, \bar{z} \rangle_{\bar{x}_0}\} - \delta.$$

Comme avant, pour simplifier la présentation, on se restreint au cas où  $H$  n'a pas d'éléments d'ordre fini.

Dans un premier temps, étudions le cas où l'espace métrique  $X$  est un arbre. On a déjà vu dans la Section 1.6 que dans ce cas, l'espace quotient  $X/H$  est la réunion du cœur convexe et d'un nombre fini d'arbres enracinés dans le cœur convexe comme l'illustre la Figure 1.10. Notons  $\rho$  le diamètre du cœur convexe  $C(\Lambda H)/H$  et  $\pi$  la projection de  $X$  sur l'orbite épaissie  $(H \cdot x_0)^{+\rho}$ .

Soit  $x$  un relevé de  $\bar{x}$  dans  $X$  vérifiant  $d(x_0, x) = d(\bar{x}_0, \bar{x})$ . Notons  $y$  et  $z$  des relevés respectifs de  $\bar{y}$  et  $\bar{z}$  satisfaisant  $d(x, y) = d(\bar{x}, \bar{y})$  et  $d(x, z) = d(\bar{x}, \bar{z})$ .

Supposons dans un premier temps que  $\min\{\langle \bar{y}, \bar{x} \rangle_{\bar{x}_0}, \langle \bar{x}, \bar{z} \rangle_{\bar{x}_0}\} \leq \rho$ . On a dans ce cas

$$\{\langle \bar{y}, \bar{x} \rangle_{\bar{x}_0}, \langle \bar{x}, \bar{z} \rangle_{\bar{x}_0}\} - \rho \leq 0 \leq \langle \bar{y}, \bar{z} \rangle_{\bar{x}_0}$$

par positivité du produit de Gromov.

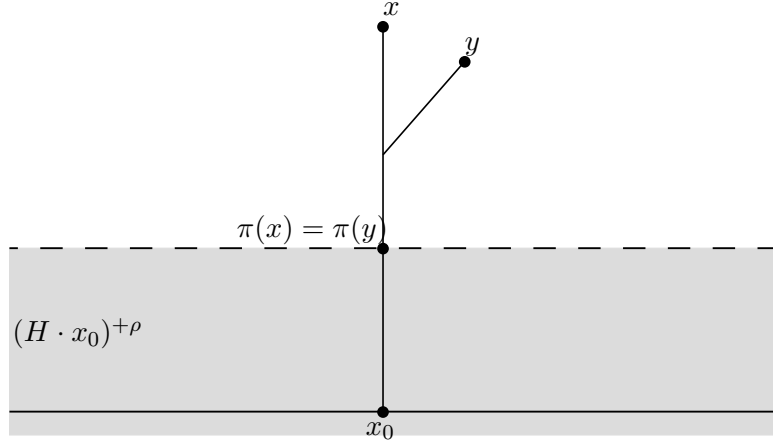
Supposons maintenant que  $\min\{\langle \bar{y}, \bar{x} \rangle_{\bar{x}_0}, \langle \bar{x}, \bar{z} \rangle_{\bar{x}_0}\} > \rho$ . Par choix des relevés, on a

$$\langle y, x \rangle_{x_0} \geq \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle_{\bar{x}_0} > \rho.$$

Remarquons que si l'image dans  $X/H$  d'une géodésique joignant  $x$  à  $y$  est une géodésique joignant  $\bar{x}$  à  $\bar{y}$  passant dans  $\bar{B}(\bar{x}_0, \rho)$  alors  $\langle \bar{y}, \bar{x} \rangle_{\bar{x}_0} < \rho$ . On en déduit que dans notre cas la géodésique joignant  $x$  à  $y$  dans  $X$  ne passe pas dans  $(H \cdot x_0)^{+\rho}$  (voir Figure 2.1).

Comme  $X$  est un arbre, le fait que les points  $x$  et  $y$  soient joints par une géodésique en dehors de  $(H \cdot x_0)^{+\rho}$  indique qu'ils se projettent sur le même point de  $(H \cdot x_0)^{+\rho}$ , c'est-à-dire  $\pi(x) = \pi(y)$ . Ainsi  $d(x_0, \pi(y)) = \rho$ . On obtient alors

$$\begin{aligned} d(x_0, y) &\leq d(x_0, \pi(y)) + d(\pi(y), y) \\ &\leq \rho + d(y, H \cdot x_0) - \rho \\ &\leq d(\bar{x}_0, \bar{y}). \end{aligned}$$


 FIGURE 2.1 – Cas d'un arbre avec  $x, y$  deux points ayant même racine dans le cœur convexe

De la même façon (en remplaçant  $y$  par  $z$  dans ce qui précède), on obtient  $d(x_0, z) \leq d(\bar{x}_0, \bar{z})$ . Le produit de Gromov de  $y$  et  $z$  par rapport à  $x_0$  vaut alors

$$\begin{aligned} \langle y, z \rangle_{x_0} &= \frac{1}{2} (d(x_0, y) + d(x_0, z) - d(y, z)) \\ &\leq \frac{1}{2} (d(\bar{x}_0, \bar{y}) + d(\bar{x}_0, \bar{z}) - d(\bar{y}, \bar{z})) \\ &\leq \langle \bar{y}, \bar{z} \rangle_{\bar{x}_0}. \end{aligned}$$

Comme  $X$  est un espace 0-hyperbolique, on en déduit que

$$\begin{aligned} \langle \bar{y}, \bar{z} \rangle_{\bar{x}_0} &\geq \langle y, z \rangle_{x_0} \\ &\geq \min\{\langle y, x \rangle_{x_0}, \langle x, z \rangle_{x_0}\} \\ &\geq \min\{\langle \bar{y}, \bar{x} \rangle_{\bar{x}_0}, \langle \bar{x}, \bar{z} \rangle_{\bar{x}_0}\}. \end{aligned}$$

On en conclut que l'espace  $X/H$  est  $\rho$ -hyperbolique.

Etudions maintenant le cas général où  $X$  est un espace métrique propre  $\delta_X$ -hyperbolique. Posons  $\rho := \text{diam}(C(\Lambda H)/H) + \alpha + \epsilon$  où  $\alpha$  est la constante donnée par la Proposition 2.1.1. En particulier, pour tout élément  $h \in H$  et pour tout point  $x \in X$  à distance supérieure à  $\rho$  de  $H \cdot x_0$ , on a  $d(x, hx) \geq 100\delta_X$ .

Dans un premier temps, supposons que  $\min\{\langle \bar{y}, \bar{x} \rangle_{\bar{x}_0}, \langle \bar{x}, \bar{z} \rangle_{\bar{x}_0}\} > \rho$ . Soit  $x$  un relevé de  $\bar{x}$  dans  $X$  tel que  $d(x_0, x) = d(\bar{x}_0, \bar{x})$ . Notons  $y$  et  $z$  des relevés respectifs de  $\bar{y}$  et  $\bar{z}$  satisfaisant  $d(x, y) = \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle_{\bar{x}_0}$  et  $d(x, z) = \langle \bar{x}, \bar{z} \rangle_{\bar{x}_0}$ . On obtient alors

$$\begin{aligned} \langle y, x \rangle_{x_0} &\geq \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle_{\bar{x}_0} > \rho, \\ \langle x, z \rangle_{x_0} &\geq \langle \bar{x}, \bar{z} \rangle_{\bar{x}_0} > \rho. \end{aligned}$$

Or,  $X$  est un espace  $\delta_X$ -hyperbolique. Les points  $x$ ,  $y$  et  $z$  satisfont donc l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \langle y, z \rangle_{x_0} &\geq \min\{\langle y, x \rangle_{x_0}, \langle x, z \rangle_{x_0}\} - \delta_X \\ &\geq \min\{\langle \bar{y}, \bar{x} \rangle_{\bar{x}_0}, \langle \bar{x}, \bar{z} \rangle_{\bar{x}_0}\} - \delta_X. \end{aligned}$$

D'après 1.2.4,  $(H \cdot x_0)^{+\rho}$  est  $2\delta_X$ -quasi-convexe. Notons  $x_1$  le point appartenant à un segment géodésique joignant  $x_0$  à  $x$  à distance  $\rho$  de  $x_0$ . En particulier, c'est une projection de  $x$  sur  $(H \cdot x_0)^{+\rho}$ . Or  $\rho \geq \epsilon$  par définition. Par ailleurs, si on note  $\pi$  une projection à  $\delta_X$  près de  $X$  sur  $(H \cdot x_0)^{+\rho}$ , le Corollaire 1.2.9 indique que

$$\begin{aligned} d(x_0, \pi(x)) &\leq d(x_0, x_1) + d(x_1, \pi(x)) \\ &\leq \rho + 14\delta_X. \end{aligned}$$

La propriété de contraction des projections sur un quasi-convexe 1.2.8(1) implique que

- soit  $d(\pi(x), \pi(y)) \leq 18\delta_X$  et alors, d'après l'inégalité ci-dessus,  $d(x_0, \pi(y)) \leq \rho + 32\delta_X$ .
- soit  $d(\pi(x), \pi(y)) \leq 36\delta_X + d(x, y) - d(x, \pi(x)) - d(y, \pi(y))$ . Dans ce cas, observons les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} d(x, y) &\geq d(\pi(x), \pi(y)) + d(x, \pi(x)) + d(y, \pi(y)) - 36\delta_X \\ &\geq d(\pi(y), x_0) - d(x_0, \pi(x)) + d(x, x_0) - d(x_0, \pi(x)) + d(y, \pi(y)) - 36\delta_X \\ &\geq d(\pi(y), x_0) + d(x, x_0) + d(y, \pi(y)) - 2\rho - 64\delta_X. \end{aligned}$$

Par ailleurs, rappelons que  $d(x, y) = d(\bar{x}, \bar{y})$  et  $d(x_0, x) = d(\bar{x}_0, \bar{x})$ . De plus, par définition de la projection,  $d(y, \pi(y)) \geq d(\bar{y}, \bar{x}_0) - \rho$ . On obtient alors l'inégalité suivante :

$$d(\bar{x}, \bar{y}) \geq d(\pi(y), x_0) + d(\bar{x}, \bar{x}_0) + d(\bar{y}, \bar{x}_0) - 3\rho - 64\delta_X.$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a  $d(x_0, \pi(y)) \leq 3\rho + 64\delta_X$ .

On en déduit que

$$\begin{aligned} d(x_0, y) &\leq d(x_0, \pi(y)) + d(\pi(y), y) \\ &\leq 3\rho + 64\delta_X + d(\bar{x}_0, \bar{y}) - \rho + \delta_X. \end{aligned}$$

car  $\pi$  est une projection à  $\delta_X$  près. De la même façon (en remplaçant  $y$  par  $z$  dans ce qui précède), on obtient  $d(x_0, z) \leq 2\rho + 64\delta_X + d(\bar{x}_0, \bar{z})$ . Le produit de Gromov de  $y$  et  $z$  par rapport à  $x_0$  vaut alors

$$\begin{aligned} \langle y, z \rangle_{x_0} &= \frac{1}{2} (d(x_0, y) + d(x_0, z) - d(y, z)) \\ &\leq \frac{1}{2} (d(\bar{x}_0, \bar{y}) + d(\bar{x}_0, \bar{z}) - d(\bar{y}, \bar{z})) + 2\rho + 65\delta_X \\ &\leq \langle \bar{y}, \bar{z} \rangle_{\bar{x}_0} + 2\rho + 65\delta_X. \end{aligned}$$

On en déduit l'inégalité suivante :

$$\langle \bar{y}, \bar{z} \rangle_{\bar{x}_0} \geq \min\{\langle \bar{y}, \bar{x} \rangle_{\bar{x}_0}, \langle \bar{x}, \bar{z} \rangle_{\bar{x}_0}\} - (2\rho + 65\delta_X).$$

De plus, si  $\min\{\langle \bar{y}, \bar{x} \rangle_{\bar{x}_0}, \langle \bar{x}, \bar{z} \rangle_{\bar{x}_0}\} \leq \rho$ , on a  $\min\{\langle \bar{y}, \bar{x} \rangle_{\bar{x}_0}, \langle \bar{x}, \bar{z} \rangle_{\bar{x}_0}\} - (2\rho + 65\delta_X) < 0$ . Or le produit de Gromov  $\langle \bar{y}, \bar{z} \rangle_{\bar{x}_0}$  est positif. En posant  $\delta := 2(\text{diam}(C(\Lambda H)/H) + \alpha + \epsilon) + 65\delta_X$ , l'espace  $X/H$  est  $\delta$ -hyperbolique.  $\square$

### 2.1.2 Revêtement

On a montré au Théorème 2.1.2 que si  $X$  est un espace métrique propre  $\delta_X$ -hyperbolique sur lequel un groupe  $G$  agit géométriquement et si  $H$  un sous-groupe  $\varepsilon$ -quasi-convexe de  $G$ , alors l'espace quotient  $X/H$  est  $\delta$ -hyperbolique avec  $\delta := 2(\text{diam}(C(\Lambda H)/H) + \alpha + \varepsilon) + 65\delta_X$ . De plus, la Proposition 2.1.1 indique que pour tout élément  $h \in H$  et pour tout point  $x \in X$  vérifiant  $d(x, H \cdot x_0) > \delta$ , il existe  $d > 0$  tel que  $2d \leq d(x, hx)$  et donc  $h \cdot \bar{B}(\bar{x}_0, d) \cap \bar{B}(\bar{x}_0, d) = \emptyset$ .

Dans un premier temps, rappelons un résultat classique en théorie des revêtements.

**Proposition 2.1.3** [Hat02, 1.40]. *Soit  $H$  un groupe agissant sur un espace topologique  $X$  de sorte que pour tout point  $x \in X$ , il existe un ouvert  $U$  contenant  $x$  tel que pour tout élément non trivial  $h \in H$ , l'intersection  $h \cdot U \cap U$  soit vide. Alors l'application quotient de  $X$  dans  $X/H$  est un revêtement.*  $\square$

D'autre part, remarquons que

**Proposition 2.1.4.** *Le quotient de l'orbite épaissie  $(H \cdot x_0)^{+\delta}$  par  $H$  est égal à la boule fermée  $\bar{B}(\bar{x}_0, \delta)$ , c'est-à-dire*

$$(H \cdot x_0)^{+\delta}/H = \bar{B}(\bar{x}_0, \delta).$$

*Démonstration.* Tout point  $\bar{x} \in \bar{B}(\bar{x}_0, \delta)$  vérifie  $d(\bar{x}_0, \bar{x}) \leq \delta$ . Par définition de la distance sur  $X/H$ , il existe un représentant  $x \in X$  de la classe  $\bar{x} \in X/H$  vérifiant  $d(x, H \cdot x_0) = d(\bar{x}_0, \bar{x}) \leq \delta$ . Ainsi  $x$  est à moins de  $\delta$  de l'orbite  $H \cdot x_0$  et donc  $\bar{x} \in (H \cdot x_0)^{+\delta}/H$ .

Soit  $\bar{x}$  un point de  $(H \cdot x_0)^{+\delta}/H$ . Notons  $x$  un représentant de  $\bar{x}$  dans  $(H \cdot x_0)^{+\delta}$ . Il vérifie  $d(x, H \cdot x_0) \leq \delta$ . Par définition de la distance sur  $X/H$ , on en déduit que  $d(\bar{x}, \bar{x}_0) \leq \delta$  ou de façon équivalente  $\bar{x} \in \bar{B}(\bar{x}_0, \delta)$ .  $\square$

On applique maintenant la Proposition 2.1.3 à  $H$  et  $X \setminus (H \cdot x_0)^{+\delta}$ . L'application quotient de  $X \setminus (H \cdot x_0)^{+\delta}$  dans  ${}^{\circ}\bar{B}(\bar{x}_0, \delta)$  est donc un revêtement. Par ailleurs, puisque  $\delta$  est supérieur au diamètre du cœur convexe par définition, la boule fermée  $\bar{B}(\bar{x}_0, \delta)$  contient le cœur convexe  $C(\Lambda H)/H$ .

On peut maintenant donner un résultat analogue au prolongement des géodésiques dans un espace hyperbolique (1.3.12) pour  $X/H$ , en tant que corollaire au Théorème 2.1.2.

**Corollaire 2.1.5.** *Soit  $G$  un groupe agissant géométriquement sur un espace métrique propre  $\delta_X$ -hyperbolique  $X$ . Soit  $H$  un sous-groupe  $\varepsilon$ -quasi-convexe sans torsion de  $G$ . Soit  $x_0 \in C(\Lambda H)$  et  $\bar{x}_0$*

son image dans  $X/H$ . Il existe une constante  $\mu$  telle que pour tout point de l'espace quotient  $X/H$ , il existe un rayon géodésique issu de  $\bar{x}_0$  passant à distance inférieure ou égale à  $\mu$  de ce point.

*Démonstration.* D'après le Théorème 2.1.2, il existe une constante  $\delta$  telle que l'espace quotient  $X/H$  soit  $\delta$ -hyperbolique.

Considérons un point  $\bar{x}$  dans  $X/H$  en dehors de la boule  $B(\bar{x}_0, \delta)$  et notons  $x$  un relevé de  $\bar{x}$  dans  $X$  vérifiant  $d_X(x_0, x) = d_{X/H}(\bar{x}_0, \bar{x})$ . D'après la Proposition 1.3.12, il existe un rayon géodésique  $c: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow X$  issu de  $x_0$  et un réel  $r$  tel que  $d(x, c(r)) \leq 4\delta_X + D$  où  $2D$  est le diamètre de  $X/G$ .

On rappelle que, d'après la Proposition 2.1.3,  $X \setminus (H \cdot x_0)^{+\delta+1}$  est localement homéomorphe à  ${}^{\mathbb{C}}\bar{B}(\bar{x}_0, \delta + 1)$ . En considérant des boules fermées de rayons  $6\delta$  dans  $X$ , l'image de  $c|_{[\delta+1, +\infty)}$  dans  $X/H$  est une géodésique  $12\delta$ -locale  $\bar{c}$ . En particulier, il existe  $r' \in [\delta + 1, +\infty)$  tel que  $\bar{c}(r') = \bar{c}(r)$  et on a  $d(\bar{x}, \bar{c}(r')) \leq 4\delta_X + D$ .

D'après le résultat sur les géodésiques locales donné dans [BH99, III.H.1.13], la géodésique locale  $\bar{c}$  est aussi une  $(2\delta, 2\delta)$ -quasi-géodésique. Le Théorème de stabilité des quasi-géodésiques 1.1.14 indique alors qu'il existe une constante  $\kappa$  ne dépendant que de  $\delta$  telle que  $\bar{c}$  est dans le  $\kappa$ -voisinage de toute géodésique  $\tilde{c}$  de même extrémités. Ainsi le point  $\bar{x}$  est à moins de  $4\delta_X + D + \kappa$  de cette géodésique.

Enfin, considérons le triangle géodésique formé par  $\tilde{c}$ , un segment géodésique  $[\bar{x}_0, \bar{c}(\delta + 1)]$  et un rayon géodésique issu de  $\bar{x}_0$  déterminant le même point du bord que  $\tilde{c}$ . Comme  $X/H$  est  $\delta$ -hyperbolique, ce triangle idéal est  $4\delta$ -fin. Ainsi tout point  $\bar{x}$  est à distance inférieure à  $\mu := 4\delta + 4\delta_X + D + \kappa(\delta)$  d'un rayon géodésique issu de  $\bar{x}_0$ .  $\square$

Dans la suite, on note  $\delta_{X/H} := 8(\text{diam}(C(\Lambda H)/H) + \alpha + \varepsilon) + 264\delta_X + D + \kappa(\delta)$  où  $\delta := 2(\text{diam}(C(\Lambda H)/H) + \alpha + \varepsilon) + 65\delta_X$  est la constante trouvée au Théorème 2.1.2. L'espace quotient  $X/H$  est encore  $\delta_{X/H}$ -hyperbolique et pour tout point de  $X/H$ , il existe un rayon géodésique issu de  $\bar{x}_0$  passant à moins de  $\delta_{X/H}$  de ce point.

### 2.1.3 Bord de $X/H$

Dans cette partie, on suppose que  $H$  est un groupe sans torsion agissant proprement discontinument par isométrie sur un espace métrique propre géodésique hyperbolique  $X$ . On note  $x_0$  un point base de  $X$ .

Notons tout d'abord quelques propriétés de  $\partial X \setminus \Lambda H$ .

**Proposition 2.1.6.** *Si le bord de  $X$  est connexe, alors  $\partial X \setminus \Lambda H$  est localement connexe par arcs et séparé.*

*Démonstration.* Notons tout d'abord que la combinaison des résultats de M. Bestvina et G. Mess [BM91, §3] et du résultat de B.H. Bowditch [Bow99, 0.3] et G.A. Swarup [Swa96], si le bord de  $X$  est connexe alors il est aussi localement connexe par arcs.

Par définition, l'ensemble limite  $\Lambda H$  est un fermé de  $\partial X$ . L'ensemble  $\partial X \setminus \Lambda H$  est donc un ouvert de  $\partial X$ . En particulier,  $\partial X \setminus \Lambda H$  est alors un voisinage de tous ses points et pour tout point  $u \in \partial X \setminus \Lambda H$ , il existe un ouvert  $U \subseteq \partial X \setminus \Lambda H$  contenant  $u$  et connexe par arcs. Cela signifie que  $\partial X \setminus \Lambda H$  est aussi localement connexe par arcs.  $\square$



Avant de montrer que l'application  $\partial X \setminus \Lambda H \rightarrow (\partial X \setminus \Lambda H)/H$  est un revêtement, citons un résultat classique de topologie.

**Lemme 2.1.7** [Hat02, I.3 Ex.23]. *Soit  $H$  un groupe agissant sur un espace topologique séparé  $Z$ . Si l'action de  $H$  sur  $Z$  est proprement discontinue et libre, alors pour tout  $z \in Z$ , il existe un ouvert  $U$  contenant  $z$  tel que pour tout élément non trivial  $h \in H$ , l'intersection  $h \cdot U \cap U$  est vide.  $\square$*

**Proposition 2.1.8.** *L'application  $\partial X \setminus \Lambda H \rightarrow (\partial X \setminus \Lambda H)/H$  est un revêtement.*

*Démonstration.* D'après le Lemme 2.1.7 et la Proposition 2.1.3, il suffit de vérifier que l'action de  $H$  sur  $\partial X \setminus \Lambda H$  est proprement discontinue et libre pour montrer que l'application  $\partial X \setminus \Lambda H \rightarrow (\partial X \setminus \Lambda H)/H$  est un revêtement.

D'une part, le Théorème 1.5.10 démontré dans l'article [Coo89] indique que sous ces hypothèses, le groupe  $H$  agit proprement discontinument sur  $\partial X \setminus \Lambda H$ . D'autre part, remarquons que comme  $H$  est sans torsion, l'action de  $H$  sur  $\partial X \setminus \Lambda H$  est libre. L'application  $\partial X \setminus \Lambda H \rightarrow (\partial X \setminus \Lambda H)/H$  est ainsi un revêtement.  $\square$

**Proposition 2.1.9.** *On a l'égalité suivante :*

$$(\partial X \setminus \Lambda H)/H = \partial(X/H).$$

*Démonstration.* Montrons tout d'abord que  $\partial(X/H) \subset (\partial X \setminus \Lambda H)/H$ . Pour cela, considérons un rayon géodésique  $\bar{c}$  dans  $X/H$ . Il détermine un point  $[\bar{c}]_{X/H}$  de  $\partial(X/H)$ . On peut ensuite relever  $\bar{c} \upharpoonright_{]0,+\infty)}$  dans  $X$  en un rayon géodésique  $c$ . En particulier, le rayon  $c$  n'est pas dans  $(H \cdot x_0)^{+\delta}$ . Par définition de l'ensemble limite, le point de  $\partial X$  déterminé par  $c$  n'est pas dans  $\Lambda H$ . Donc  $[c]_X$  appartient à  $\partial X \setminus \Lambda H$  et  $[\bar{c}]_{X/H} = [c]_{X/H}$  est dans  $(\partial X \setminus \Lambda H)/H$ .

Montrons ensuite que l'inclusion contraire,  $(\partial X \setminus \Lambda H)/H \subset \partial(X/H)$ . Soit  $c$  un rayon géodésique de  $X$  qui détermine un point  $[c]_X$  dans  $\partial X \setminus \Lambda H$ . L'image de  $c \upharpoonright_{]0,+\infty)}$  dans  $X/H$  est un rayon quasi-géodésique  $\bar{c}$ . Ce rayon détermine un point  $[\bar{c}]_{X/H}$  de  $\partial(X/H)$  qui vérifie  $[\bar{c}]_{X/H} = [c]_{X/H}$ . Ainsi  $(\partial X \setminus \Lambda H)/H \subset \partial(X/H)$ .  $\square$

Notons que les deux précédents résultats sont valables sans hypothèse particulière sur le bord de  $X$ . On utilisera à nouveau le fait que l'application  $\partial X \setminus \Lambda H \rightarrow \partial(X/H)$  est un revêtement dans la Section 3.3.

Le revêtement indique alors que les espaces  $\partial X \setminus \Lambda H$  et  $\partial(X/H)$  sont localement homéomorphes. Le résultat 2.1.6 assure que si le bord de  $X$  est connexe, alors  $\partial X \setminus \Lambda H$  est localement connexe par arcs. On a donc immédiatement la proposition suivante.

**Proposition 2.1.10.** *Si  $\partial X$  est connexe, alors  $\partial(X/H)$  est localement connexe par arcs.  $\square$*

Ce résultat n'est cependant pas suffisant pour nos besoins ; une version effective de la connexité par arcs locale de  $\partial(X/H)$  sera requise dans la suite.

## 2.2 Connexité locale du bord

Dans ce qui suit, sauf mention contraire, tous les chemins considérés sont des chemins de longueur finie.

### 2.2.1 Condition $(\ddagger_{M,K})$ pour $X$

Au paragraphe 3. de l'article [BM91], M. Bestvina et G. Mess étudient la connexité par arcs locale du bord d'un espace hyperbolique  $X$ . Pour ce faire, ils s'intéressent, pour  $M > 0$ , à la condition

$(\ddagger_M)$  Il existe un entier  $L > 0$  tel que pour tout  $R \geq 2\delta_X$  et pour tous points  $x, y \in S(x_0, R)$  et  $d(x, y) \leq M$ , il existe un chemin de longueur inférieure ou égale à  $L$  joignant  $x$  à  $y$  en dehors de la boule  $\bar{B}(x_0, R - 2\delta_X)$ .

où  $x_0$  est un point de base de  $X$  fixé. Au-delà de la constante  $L$ , on retiendra surtout l'existence d'un chemin de longueur *finie* joignant ces points.

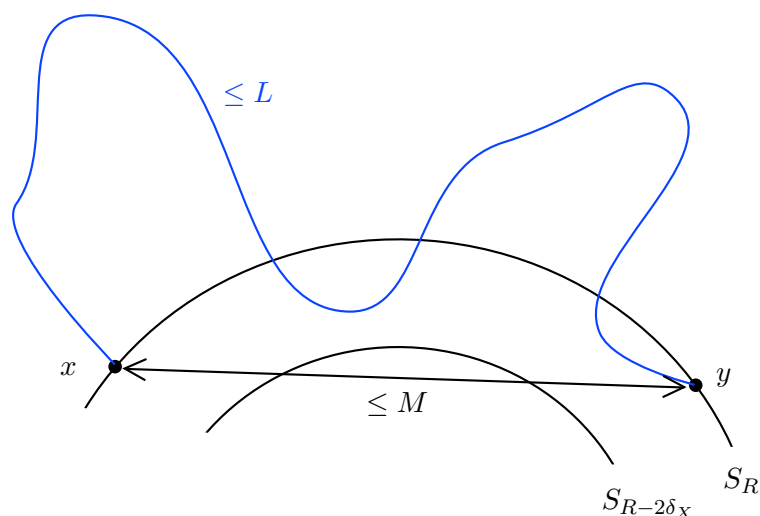


FIGURE 2.2 – Condition  $(\ddagger_M)$

Cette condition intervient en particulier dans le résultat suivant :

**Proposition 2.2.1** [BM91, 3.2]. *Soit  $X$  un espace métrique géodésique hyperbolique. Si, pour un certain  $M$  supérieur à une constante dépendant de  $\delta$ , l'espace  $X$  satisfait la condition  $(\ddagger_M)$  alors le bord  $\partial X$  est localement connexe par arcs.*  $\square$

On considère ici une variante de cette propriété pour  $M > K \geq 0$

( $\dagger_{M,K}$ ) Il existe un entier  $L > 0$  tel que pour tout  $R \geq K + 2\delta_X$  et pour tous points  $x \in S(x_0, R)$  et  $y \in S(x_0, R)^{+K}$  tels que  $d(x, y) \leq M$ , il existe un chemin de longueur inférieure ou égale à  $L$  joignant  $x$  à  $y$  en dehors de la boule  $\bar{B}(x_0, R - K - 2\delta_X)$ .

L'introduction de cette variation est motivée par le fait suivant : la condition de Bestvina-Mess fournit un moyen d'explorer le bord de l'espace. Si une telle condition était satisfaite par l'espace quotient, cela permettrait d'appréhender le comportement à l'infini et ainsi de décrire l'ensemble des bouts de cet espace. C'est pourquoi on cherche sous quelles conditions pour  $X$  l'espace quotient  $X/H$  satisfait la condition de Bestvina-Mess.

En relevant des points  $\bar{x}, \bar{y}$  de  $X/H$  dans  $X$ , on ne peut cependant pas assurer que les distances entre les points  $\bar{x}, \bar{y}$  et  $\bar{x}_0$  soient toutes conservées pour des relevés  $x, y$  et  $x_0$ . C'est ainsi qu'apparaît la condition  $|d(x_0, x) - d(x_0, y)| \leq K$ , c'est-à-dire  $y \in S(x_0, R)^{+K}$ . Les détails de cette observation se trouvent dans la preuve de la Proposition 2.2.4. Par ailleurs, remarquons que lorsque  $K = 0$ , on retrouve la condition ( $\dagger_M$ ).

Montrons maintenant que la propriété ( $\dagger_{M,K}$ ) vérifie un résultat analogue à la Proposition 2.2.1 de M. Bestvina et G. Mess. On suppose toujours que  $X$  est un espace métrique géodésique propre hyperbolique.

**Proposition 2.2.2.** *S'il existe des constantes  $M, K$  avec  $M \geq 4K + 18\delta_X + 6$  telles que  $X$  satisfait la propriété ( $\dagger_{M,K}$ ) alors le bord de  $X$  est localement connexe par arcs.*

Afin de renforcer le résultat de M. Bestvina et G. Mess [BM91, Prop.3.2], on adapte leur démonstration en ces nouveaux termes.

*Démonstration.* Quitte à remplacer  $L$  par  $\lceil L \rceil$  dans la propriété ( $\dagger_{M,K}$ ), on peut supposer que  $L$  est un entier. Considérons deux points  $u$  et  $v$  dans  $\partial X$ . On va construire une application continue  $\phi: [0, 1] \rightarrow \partial X$  telle que  $\phi(0) = u$  et  $\phi(1) = v$ .

Notons  $c_0$  et  $c_1$  deux rayons géodésiques issus de  $x_0$  se terminant respectivement en  $u$  et  $v$ . Montrons par récurrence que pour tout entier  $k > 0$ , il existe une famille de rayons géodésiques issus de  $x_0$ ,  $(c_{i/L^k})_k$  avec  $0 < i < L^k$  vérifiant :

$$d(c_{i/L^k}(k), c_{i+1/L^k}(k)) \leq 4K + 18\delta_X + 6.$$

Supposons qu'une telle famille existe jusqu'au rang  $k$  et montrons que c'est encore le cas au rang  $k+1$ . Puisque  $X$  satisfait ( $\dagger_{M,K}$ ), il existe un chemin de longueur inférieure ou égale à  $L$  joignant  $c_{i/L^k}(k)$  à  $c_{i+1/L^k}(k)$  en dehors de la boule  $\bar{B}(x_0, k - K - \delta_X)$ . Notons alors  $p_1, \dots, p_{L-1}$  des points sur ce chemin vérifiant  $d(c_{i/L^k}(k), p_1) \leq 1$ ,  $d(p_i, p_{i+1}) \leq 1$  pour tout  $i \in \{1, \dots, L-2\}$  et  $d(p_{L-1}, c_{i+1/L^k}(k)) \leq 1$ . Par hypothèse sur  $\delta_X$ , il existe des rayons géodésiques  $(c_{i/L^{k+1}})_{1 \leq i \leq L-1}$  issus de  $x_0$  passant à moins de  $\delta_X$  des points  $p_1, \dots, p_{L-1}$ . Notons  $q_1, \dots, q_{L-1}$  des points sur ces rayons à distance inférieure ou égale à  $\delta_X$  de  $p_1, \dots, p_{L-1}$  respectivement. Or le chemin se trouve en dehors de la boule  $\bar{B}(x_0, k - K - 2\delta_X)$ , on a donc  $d(q_j, x_0) \geq k - K - 3\delta_X$  pour  $j \in \{1, \dots, L-1\}$ . Notons maintenant

$s_1, \dots, s_{L-1}$  des points sur ces rayons vérifiant  $d(s_j, q_j) \leq K + 3\delta_X + 1$  et  $d(s_j, x_0) \geq k + 1$  pour tout  $j \in \{1, \dots, L-1\}$ . Ainsi on obtient

$$\begin{aligned} d(s_j, s_{j+1}) &\leq d(s_j, q_j) + d(q_j, p_j) + d(p_j, p_{j+1}) + d(p_{j+1}, q_{j+1}) + d(q_{j+1}, s_{j+1}) \\ &\leq K + 3\delta_X + 1 + \delta_X + 1 + \delta_X + K + 3\delta_X + 1 \\ &\leq 2K + 8\delta_X + 3. \end{aligned}$$

Observons maintenant le triangle géodésique de sommets  $x_0$ ,  $s_j$  et  $s_{j+1}$  dont deux côtés sont formés par les sous-segments des rayons  $c_{j/L^{k+1}}$  et  $c_{j+1/L^{k+1}}$  correspondants. D'après la Proposition 1.1.7, on a alors

$$\begin{aligned} d(c_{i+j/L^{k+1}}(k+1), c_{i+j+1/L^{k+1}}(k+1)) &\leq 2(2K + 8\delta_X + 3 + \delta_X) \\ &\leq 4K + 18\delta_X + 6. \end{aligned}$$

Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout réel  $i \in ]0, L^k[$ , on définit ensuite  $\phi(i/L^k)$  comme étant l'extrémité des rayons  $c_{i/L^k}$ .

Montrons maintenant que l'application  $\phi$  ainsi définie sur  $\{\frac{i}{L^k} \mid k \in \mathbb{N}, i \in ]0, L^k[ \}$  s'étend continuellement à  $[0, 1]$ .

Tout d'abord observons que pour tous entiers  $n \geq k$  et  $0 < i < L^k$ , l'inégalité triangulaire donne

$$d(c_{i/L^k}(n), c_{i+1/L^k}(n)) \leq 2(n - k) + 4K + 18\delta_X + 6.$$

On obtient ainsi pour  $n \geq k$ ,

$$\begin{aligned} \langle c_{i/L^k}(n), c_{i+1/L^k}(n) \rangle_{x_0} &\geq \frac{1}{2}(n + n - (2(n - k) + 4K + 18\delta_X + 6)) \\ &\geq k - 2K - 9\delta_X - 3. \end{aligned}$$

En utilisant la Proposition 1.3.7, on en déduit que

$$\begin{aligned} \langle \phi(\frac{i}{L^k}), \phi(\frac{i+1}{L^k}) \rangle_{x_0} &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle c_{i/L^k}(n), c_{i+1/L^k}(n) \rangle_{x_0} - 2\delta_X \\ &\geq k - 2K - 11\delta_X - 3. \end{aligned}$$

D'après le résultat [GdlH90, Chap.7 Prop.10], il existe un réel  $v > 0$  pour lequel il existe une distance  $d_v$  sur  $\partial X$  vérifiant pour tous points  $u, v$  de  $\partial X$ ,  $d_v(u, v) \leq e^{-v\langle u, v \rangle}$ . On a alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et pour  $0 < i < L^k$ ,

$$d_v(\phi(\frac{i}{L^k}), \phi(\frac{i+1}{L^k})) \leq e^{-v(k-2K-11\delta_X-3)}$$

Montrons maintenant que l'application  $\phi$  est bien définie sur  $[0, 1]$ . Pour tout  $x \in [0, 1]$ , définissons une suite  $(x_k)_k$  d'éléments de  $\{\frac{i}{L^k} \mid k \in \mathbb{N}, 0 < i < L^k\}$  de la façon suivante : pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x_k$  est l'élément de  $\{\frac{i}{L^k} \mid 0 < i < L^k\}$  le plus proche de  $x$  (s'il en existe plusieurs, prendre le plus grand). Par définition de  $(x_k)_k$ , si  $x_k = \frac{i}{L^k} = \frac{iL}{L^{k+1}}$  alors  $x_{k+1}$  appartient à l'ensemble

$\{\frac{iL+j}{L^{k+1}} \mid \lceil \frac{-L}{2} \rceil \leq j \leq \lfloor \frac{L}{2} \rfloor\}$ . Cela implique que  $d(\phi(x_k), \phi(x_{k+1})) \leq \frac{L}{2} e^{-v(k-2K-11\delta_X-2)}$ . Pour des entiers  $p \leq q$ , on a alors

$$\begin{aligned} d(\phi(x_p), \phi(x_q)) &\leq \sum_{k=p}^{q-1} d(\phi(x_k), \phi(x_{k+1})) \\ &\leq \sum_{k=p}^{q-1} \frac{L}{2} e^{-v(k-2K-11\delta_X-2)} \\ &\leq CL e^{-vp} \end{aligned}$$

pour  $C$  une constante dépendant de  $K$  et  $\delta_X$ . Cela signifie que la suite  $(x_k)_k$  est une suite de Cauchy de  $\partial X$ . Comme le bord de  $X$  est compact, il est donc complet et la suite  $(x_k)_k$  converge dans  $\partial X$ . Par ailleurs, en faisant tendre  $q$  vers plus l'infini, on a  $d(\phi(x_p), \phi(x)) \leq CL e^{-vp}$ . Ainsi  $\phi(x) = \lim_{p \rightarrow \infty} \phi(x_p)$  et l'application  $\phi$  est bien définie sur  $[0, 1]$ .

Vérifions maintenant que cette application  $\phi$  ainsi définie est uniformément continue sur  $[0, 1]$ . Considérons deux points  $x, y$  de  $[0, 1]$ . Soit  $N$  le plus grand entier tel que  $d(x, y) \leq \frac{1}{L^N}$ . Considérons maintenant deux suites  $(x_k)_k$  et  $(y_k)_k$  construites comme ci-dessus telles que  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$  et  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y$ . Il existe donc un entier  $k$  tel que  $d(x, x_k) \leq \frac{1}{L^N}$  et  $d(y, y_k) \leq \frac{1}{L^N}$ . L'inégalité triangulaire donne alors  $d(x_k, y_k) \leq \frac{3}{L^N}$ . On a  $d(\phi(x_k), \phi(y_k)) \leq \frac{3}{L^N} e^{-v(k-2K-11\delta_X-3)}$  et donc

$$\begin{aligned} d(\phi(x), \phi(y)) &\leq d(\phi(x), \phi(x_k)) + d(\phi(x_k), \phi(y_k)) + d(\phi(y_k), \phi(y)) \\ &\leq (2CL + \frac{3}{L^N}) e^{-v(k-2K-11\delta_X-3)} \\ &\leq C' e^{-vk} \end{aligned}$$

avec  $C'$  une constante dépendant de  $K$ ,  $\delta_X$ ,  $N$  et  $L$ . En faisant tendre  $k$  vers l'infini, cela montre que l'application  $\phi$  est uniformément continue.

Pour  $u$  et  $v$  deux points de  $\partial X$ , on a donc construit une application  $\phi: [0, 1] \rightarrow \partial X$  uniformément continue telle que  $\phi(0) = u$  et  $\phi(1) = v$ . Ainsi  $X$  est localement connexe par arcs.  $\square$

**Remarque 2.2.3.** La Proposition 2.2.2 est vraie pour  $x_0 \in X$  quelconque. Le choix «  $x_0 \in C(\Lambda H)$  » fait en début de chapitre intervient lors du passage au quotient.

### 2.2.2 Condition $(\dagger_M)$ pour $X/H$

Pour  $M > 0$ , on s'intéresse à une propriété analogue à  $(\dagger_M)$  pour l'espace quotient  $X/H$  :

- $(\dagger_M)$  Il existe un entier  $L > 0$  tel que pour tout  $R \geq \max\{M + \delta_{X/H}, 8\delta_{X/H}\}$  et pour tous points  $\bar{x}, \bar{y} \in S(\bar{x}_0, R)$  tels que  $d(\bar{x}, \bar{y}) \leq M$ , il existe un chemin de longueur inférieure ou égale à  $L$  joignant  $\bar{x}$  à  $\bar{y}$  en dehors de la boule  $\bar{B}(\bar{x}_0, R - 8\delta_{X/H})$ .

Cette condition est essentiellement une réécriture de la condition de Bestvina-Mess  $(\dagger_M)$  pour l'espace quotient  $X/H$ . Néanmoins, les constantes diffèrent.

Le résultat suivant permet de lier cette propriété pour  $X/H$  à la propriété  $(\dagger_{M,K})$  pour  $X$ .

**Proposition 2.2.4.** *S'il existe une constante  $M > 4\delta_{X/H}$  telle que  $X$  satisfait la propriété  $(\dagger_{M,4\delta_{X/H}})$  alors  $X/H$  satisfait la propriété  $(\dagger_M)$ .*

La condition  $M > 4\delta_{X/H}$  provient du fait que la propriété  $(\dagger_{M,K})$  est définie pour  $M > K > 0$ .

*Démonstration.* Fixons une constante  $M > 4\delta_{X/H}$  pour laquelle  $X$  satisfait la propriété  $(\dagger_{M,4\delta_{X/H}})$ . Considérons des points  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  de  $X/H$  tels que  $d(\bar{x}_0, \bar{x}) = d(\bar{x}_0, \bar{y}) = R \geq \max\{M + \delta_{X/H}, 8\delta_{X/H}\}$  et  $d(\bar{x}, \bar{y}) \leq M$ . Notons  $x$  un relevé de  $\bar{x}$  dans  $X$  vérifiant  $d(x_0, x) = d(\bar{x}_0, \bar{x})$ . Comme  $R > M + \delta_{X/H}$ , on peut relever l'ensemble de la boule  $\bar{B}(\bar{x}, M)$  en  $\bar{B}(x, M)$ . On note alors  $y$  un relevé de  $\bar{y}$  dans cette boule  $\bar{B}(x, M)$ , obtenu en relevant une géodésique de  $\bar{x}$  à  $\bar{y}$ . En particulier, on aura  $d(x, y) = d(\bar{x}, \bar{y})$ .

Soit  $\pi: X \rightarrow (H \cdot x_0)^{+\delta_{X/H}}$  une projection à  $\delta_X$  près sur l'orbite épaissie  $(H \cdot x_0)^{+\delta_{X/H}}$ . Par définition d'une projection à  $\delta_X$  près, le point  $y$  satisfait

$$d(y, (H \cdot x_0)^{+\delta_{X/H}}) \leq d(y, \pi(y)) \leq d(y, (H \cdot x_0)^{+\delta_{X/H}}) + \delta_X,$$

ce qui se réécrit

$$d(\bar{y}, \bar{x}_0) - \delta_{X/H} \leq d(y, \pi(y)) \leq d(\bar{y}, \bar{x}_0) + \delta_X.$$

Comme l'orbite épaissie  $(H \cdot x_0)^{+\delta_{X/H}}$  est  $2\delta_X$ -quasi-convexe, la propriété de contraction des projections sur un quasi-convexe (Proposition 1.2.8(1)) assure que

$$d(\pi(x), \pi(y)) \leq \max\{\tau, 2\tau + d(x, y) - d(x, \pi(x)) - d(y, \pi(y))\}$$

où  $\tau = 12\delta_X + 2 \times 2\delta_X + 2\delta_X = 18\delta_X$ .

Il y a donc deux possibilités :

— soit  $d(\pi(x), \pi(y)) \leq 18\delta_X$ . On a alors

$$\begin{aligned} d(x_0, y) &\leq d(x_0, \pi(x)) + d(\pi(x), \pi(y)) + d(\pi(y), y) \\ &\leq \delta_{X/H} + 18\delta_X + d(\bar{x}_0, \bar{y}) + \delta_X \\ &\leq 2\delta_{X/H} + d(x_0, x). \end{aligned}$$

— soit  $d(\pi(x), \pi(y)) \leq 36\delta_X + d(x, y) - d(x, \pi(x)) - d(y, \pi(y))$ . Ce qui donne

$$\begin{aligned} d(x, y) &\geq d(\pi(x), \pi(y)) + d(x, \pi(x)) + d(y, \pi(y)) - 36\delta_X \\ &\geq d(x_0, \pi(y)) + d(x, x_0) + d(y, \pi(y)) - 2d(x_0, \pi(x)) - 36\delta_X \end{aligned}$$

Par choix du relevé  $x$  de  $\bar{x}$ , on a

$$d(x, y) \geq d(x_0, \pi(y)) + d(x, x_0) + d(y, \pi(y)) - 2\delta_{X/H} - 36\delta_X.$$

Puis par choix du relevé  $y$  de  $\bar{y}$ , on a

$$d(\bar{x}, \bar{y}) \geq d(x_0, \pi(y)) + d(\bar{x}_0, \bar{x}) + d(\bar{x}_0, \bar{y}) - 3\delta_{X/H} - 36\delta_X.$$

Par inégalité triangulaire, on obtient

$$d(x_0, \pi(y)) \leq 3\delta_{X/H} + 36\delta_X.$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} d(x_0, y) &\leq d(x_0, \pi(y)) + d(\pi(y), y) \\ &\leq 3\delta_{X/H} + 36\delta_X + d(\bar{x}_0, \bar{y}) + \delta_X \\ &\leq 3\delta_{X/H} + 37\delta_X + d(\bar{x}_0, \bar{x}) \\ &\leq 4\delta_{X/H} + d(x_0, x). \end{aligned}$$

Ainsi, les points  $x$  et  $y$  vérifient  $d(x_0, x) = R$ ,  $|d(x_0, x) - d(x_0, y)| \leq 4\delta_{X/H}$  et  $d(x, y) \leq M$ . Puisque  $X$  satisfait  $(\dagger_{M, 4\delta_{X/H}})$ , il existe un entier  $L > 0$  et un chemin de longueur inférieure ou égale à  $L$  joignant  $x$  à  $y$  en dehors de  $\bar{B}(x_0, R - 4\delta_{X/H} - 2\delta_X)$ .

Montrons maintenant que l'image de ce chemin dans  $X/H$  reste en dehors de  $\bar{B}(\bar{x}_0, R - 8\delta_{X/H})$ . Pour cela, considérons un élément  $z \in X$  sur ce chemin. De la même façon que l'on a montré que  $d(x_0, y) \leq 3\delta_{X/H} + 37\delta_X + d(\bar{x}_0, \bar{y})$ , on peut vérifier que l'image  $\bar{z}$  de  $z$  dans  $X/H$  satisfait

$$d(x_0, z) \leq 3\delta_{X/H} + 37\delta_X + d(\bar{x}_0, \bar{z}).$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} d(\bar{x}_0, \bar{z}) &\geq R - 4\delta_{X/H} - 2\delta_X - 3\delta_{X/H} - 37\delta_X \\ &> R - 8\delta_{X/H}. \end{aligned}$$

L'image du chemin dans  $X/H$  forme donc bien un chemin de longueur inférieure ou égale à  $L$  joignant  $\bar{x}$  à  $\bar{y}$  en dehors de  $\bar{B}(\bar{x}_0, R - 8\delta_{X/H})$ .  $\square$

Cette proposition interviendra plus tard dans la démonstration du résultat principal (Théorème 3.2.6) de la Section 3.2.3.

Dans ce qui suit, on fixe un entier  $M \geq 43\delta_{X/H} + 4$  et  $R_0 = M + \delta_{X/H}$ . En particulier,  $R_0$  est supérieur à la constante de quasi-convexité de  $H$ . D'après la Proposition 1.2.4, il s'en suit que l'orbite épaissie  $(H \cdot x_0)^{+R_0}$  est  $2\delta_X$ -quasi convexe. Notons alors  $\pi_{R_0}: X \rightarrow (H \cdot x_0)^{+R_0}$  une projection à  $\delta_X$  près de  $X$  sur ce quasi-convexe.

## 2.3 De la sphère aux bouts

Dans cette section, on commence par définir une première relation d'équivalence sur les sphères centrées en l'origine dans l'espace quotient  $X/H$ . On en déduira quelques propriétés sur les rayons issus de l'origine dans  $X/H$ . Cela nous amènera ensuite à définir une autre relation d'équivalence sur le complémentaire de boules centrées en l'origine dont les classes d'équivalence seront appelées des *ombres*. Dans un second temps, on verra que les ombres et les bouts de l'espace quotient sont étroitement liés. Ceci permettra de démontrer le théorème principal de cette thèse qui indique que sous certaines conditions, le nombre de bouts de  $X/H$  peut être lu sur une sphère dont le rayon est calculable.

### 2.3.1 Relations d'équivalence dans l'espace quotient

Rappelons que  $M \geq 43\delta_{X/H} + 4$  et  $R_0 = M + \delta_{X/H}$  sont fixés. Définissons maintenant une relation d'équivalence  $\overset{R}{\sim}$  sur les sphères  $S(\bar{x}_0, R)$  de centre  $\bar{x}_0$  et de rayon  $R \geq R_0$ .

**Définition 2.3.1.** Deux points  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  de  $S(\bar{x}_0, R)$  sont dit *équivalents* s'il existe un chemin les joignant en dehors de la boule ouverte  $B(\bar{x}_0, R - 3\delta_{X/H})$ . On note  $\bar{x} \overset{R}{\sim} \bar{y}$ .

Pour  $R \geq R_0$ , on note  $\pi_R: X \rightarrow (H \cdot x_0)^{+R}$  une projection à  $\delta_X$  près de  $X$  sur ce quasi-convexe. On définit alors une nouvelle projection  $\pi'_R: X/H \rightarrow \bar{B}(\bar{x}_0, R)$  associée à  $\pi_R$  telle que

- Pour tout  $\bar{x} \in \overset{\circ}{B}(\bar{x}_0, R)$ , le point  $\pi'_R(\bar{x})$  est l'image dans  $X/H$  de la projection par  $\pi_R$  d'un relevé de  $\bar{x}$ ;
- La restriction de  $\pi'_R$  à la boule fermée  $\bar{B}(\bar{x}_0, R)$  est l'identité sur  $\bar{B}(\bar{x}_0, R)$ .

La Figure 2.3 illustre le fonctionnement de l'application  $\pi'_R$ .

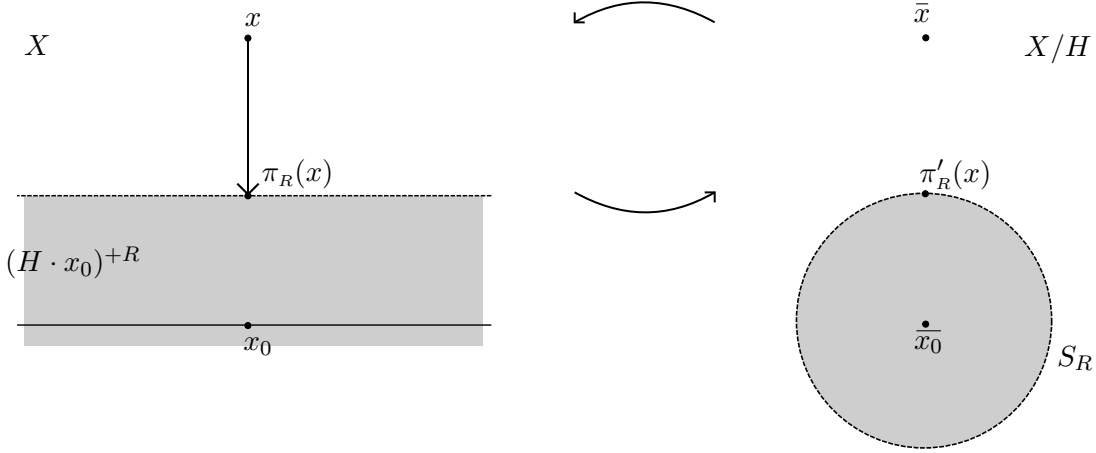


FIGURE 2.3 – Application  $\pi'_R$

**Lemme 2.3.2.** Soit  $R \geq R_0$ . Pour tout point  $\bar{x}$  dans  $\overset{\circ}{B}(\bar{x}_0, R)$  et pour tout relevé  $x'$  de  $\bar{x}$  dans  $X$ , on a

$$d(\pi'_R(\bar{x}), \overline{\pi_R(x')}) \leq 28\delta_X.$$

*Démonstration.* Par définition de  $\pi'$ , il existe un relevé  $x''$  de  $\bar{x}$  dans  $X$  tel que  $\pi'_R(\bar{x}) = \overline{\pi(x'')}$ . Alors on a

$$d\left(\pi'_R(\bar{x}), \overline{\pi_R(x')}\right) = d\left(\overline{\pi(x'')}, \overline{\pi_R(x')}\right).$$

Notons  $x$  un relevé de  $\bar{x}$  dans  $X$  tel que  $d(x_0, x) = d(\bar{x}_0, \bar{x})$ . Soient  $h', h'' \in H$  tels que  $x' = h'x$  et



$x'' = h''x$ . On obtient donc

$$\begin{aligned} d\left(\overline{\pi_R(x'')}, \overline{\pi_R(x')}\right) &= \min_{h \in H} d\left(\pi_R(h''x), h\pi_R(h'x)\right) \\ &\leq \min_{h \in H} d\left(\pi_R(h''x), h''\pi_R(x)\right) + d\left(h''\pi_R(x), hh'\pi_R(x)\right) + d\left(hh'\pi_R(x), h\pi_R(h'x)\right) \\ &\leq d\left(\pi_R(h''x), h''\pi_R(x)\right) + \min_{h \in H} d\left(hh'\pi_R(x), h\pi_R(h'x)\right). \end{aligned}$$

Pour tout  $x \in X$  et tout  $h \in H$ , la Proposition 1.2.6 indique que le point  $h\pi_R(x)$  est un projeté à  $\delta_X$  près de  $hx$  sur  $(H \cdot x_0)^{+R}$ . Ainsi, comme montré au Corollaire 1.2.9, les points  $h\pi_R(x)$  et  $\pi_R(hx)$  satisfont  $d(h\pi_R(x), \pi_R(hx)) \leq 14\delta_X$ . Cela permet de conclure que

$$d\left(\pi'_R(\overline{x_0}), \overline{\pi_R(x')}\right) \leq 28\delta_X.$$

□

Le résultat suivant assure que les images par  $\pi'_R$  des points sur un rayon géodésique issu de  $\overline{x_0}$  appartiennent tous à la même classe d'équivalence sur  $S(\overline{x_0}, R_0)$ .

**Proposition 2.3.3.** *Pour tout rayon géodésique  $c: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow X/H$  issu de  $\overline{x_0}$  et pour tout entier  $R \geq R_0$ , il existe un chemin joignant  $c(R_0)$  à  $\pi'_{R_0}(c(R))$  en dehors de  $B(\overline{x_0}, R_0 - 14\delta_X)$ . En particulier, on a*

$$c(R_0) \stackrel{R_0}{\sim} \pi'_{R_0}(c(R)).$$

*Démonstration.* Soit  $(r_i)_{1 \leq i \leq n}$  une famille finie d'entiers de  $[R_0, R]$  telle que  $R_0 = r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_n = R$  et  $r_{i+1} - r_i \leq \delta_X$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ . Notons  $x_1$  un relevé de  $c(r_1)$  dans  $X$ . Pour chaque  $i > 1$ , notons ensuite  $x_i$  un relevé de  $c(r_i)$  dans  $X$  vérifiant  $d(x_{i-1}, x_i) \leq \delta_X$ .

Appliquons maintenant la propriété de contraction des projections sur un quasi-convexe à chaque couple  $(x_i, x_{i+1})$ . On obtient ainsi, pour tout  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ ,

$$\begin{aligned} d\left(\overline{\pi_{R_0}(x_i)}, \overline{\pi_{R_0}(x_{i+1})}\right) &\leq d(\pi_{R_0}(x_i), \pi_{R_0}(x_{i+1})) \\ &\leq 18\delta_X + d(x_i, x_{i+1}) \quad \text{d'après 1.2.8(2),} \\ &\leq 19\delta_X. \end{aligned}$$

D'autre part, d'après le Lemme 2.3.2, pour tout  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ ,

$$d\left(\pi'_{R_0}(c(r_i)), \overline{\pi_{R_0}(x_i)}\right) \leq 28\delta_X.$$

Or  $\pi'_{R_0}$  est l'identité sur  $S(\overline{x_0}, R_0)$ , on a  $\pi'_{R_0}(c(R_0)) = \overline{x_1} = c(R_0)$ . Observons ensuite le chemin obtenu en concaténant un segment géodésique  $\left[c(R_0), \overline{\pi_{R_0}(x_1)}\right]$  avec des segments géodésiques  $\left[\overline{\pi_{R_0}(x_i)}, \overline{\pi_{R_0}(x_{i+1})}\right]$  pour  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  et  $\left[\overline{\pi_{R_0}(x_n)}, \pi'_{R_0}(c(R))\right]$ . Ce chemin joint  $c(R_0)$  à  $\pi'_{R_0}(c(R))$  et reste en dehors de la boule  $B(\overline{x_0}, R_0 - 14\delta_X)$ . □

### 2.3.2 Ombres

On s'intéresse maintenant à l'*ombre* formée par ces classes d'équivalence  $[\cdot]$  pour  $\overset{R_0}{\sim}$  à l'extérieur de la boule  $B(\bar{x}_0, R_0)$ . Plus précisément, on définit :

**Définition 2.3.4.** L'*ombre* d'une classe d'équivalence pour  $\overset{R_0}{\sim}$  est l'image réciproque de cette classe par  $\pi'_{R_0}$ .

*Appartenir à une même ombre* est clairement une relation d'équivalence sur  ${}^c B(\bar{x}_0, R_0)$ . On note  $\mathcal{O}([\bar{x}])$  l'ombre de la classe  $[\bar{x}]$  de  $\bar{x}$  pour  $\overset{R_0}{\sim}$  et  $\mathcal{O}(X/H)$  l'ensemble des ombres dans  $X/H$ .

**Proposition 2.3.5.** L'ensemble  $\mathcal{O}(X/H)$  des ombres dans  $X/H$  est en bijection avec l'ensemble  $S(\bar{x}_0, R_0)/\overset{R_0}{\sim}$  des classes d'équivalence pour  $\overset{R_0}{\sim}$  sur  $S(\bar{x}_0, R_0)$ .

*Démonstration.* Pour voir cela, étudions l'application  $f: S_{R_0}/\overset{R_0}{\sim} \rightarrow \mathcal{O}(X/H)$  qui à chaque classe d'équivalence associe son ombre dans  $X/H$ .

Soient  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  deux points de  $S(\bar{x}_0, R_0)$  tels que  $\mathcal{O}([\bar{x}]) = \mathcal{O}([\bar{y}])$ . En particulier, on a alors  $\pi'_{R_0}(\mathcal{O}([\bar{x}])) = \pi'_{R_0}(\mathcal{O}([\bar{y}]))$ . De plus, par définition de  $\pi'_{R_0}$ , la classe de  $\bar{x}$  pour  $\overset{R_0}{\sim}$  est  $[\bar{x}] = \pi'_{R_0}(\mathcal{O}([\bar{x}]))$  et la classe de  $\bar{y}$  pour cette même relation est  $[\bar{y}] = \pi'_{R_0}(\mathcal{O}([\bar{y}]))$ . Ainsi l'application  $f$  est injective.

Soit  $\mathcal{O}$  une ombre dans  $\mathcal{O}(X/H)$ . Par définition de l'ombre, il existe un point  $\bar{x} \in S_{R_0}$  tel que  $\mathcal{O}$  soit l'image réciproque de  $[\bar{x}]$  par  $\pi'_{R_0}$ . L'image de  $[\bar{x}]$  dans  $\mathcal{O}(X/H)$  est bien  $\mathcal{O}$ . Donc l'application  $f$  est surjective.

On en conclut qu'il existe une bijection entre l'ensemble des classes d'équivalence sur  $S(\bar{x}_0, R_0)$  et l'ensemble des ombres dans  $X/H$ .  $\square$

### 2.3.3 Bouts

Il s'agit maintenant d'établir un lien entre les ombres et les bouts de  $X/H$ . Dans un premier temps, montrons que tout couple de points appartenant à une même ombre est joint par un chemin qui reste « loin » de  $\bar{x}_0$ . On a toujours  $M \geq 43\delta_{X/H} + 4$  fixé et  $R_0 = M + \delta_{X/H}$ .

**Lemme 2.3.6.** *Supposons que l'espace  $X$  satisfait  $(\dagger_{M, 4\delta_{X/H}})$ . Pour tout entier  $R \geq R_0$ , tout couple de points de  $S(\bar{x}_0, R)$  appartenant à une même ombre est joint par un chemin en dehors de la boule  $B(\bar{x}_0, R - 8\delta_{X/H})$ .*

En d'autres termes, si  $X$  vérifie  $(\dagger_{M, 4\delta_{X/H}})$  alors deux points à même distance  $R$  de  $\bar{x}_0$  appartenant à une même ombre sont équivalents pour  $\overset{R}{\sim}$ .

La méthode utilisée pour démontrer ce lemme est analogue à celle utilisée dans la preuve de la Proposition 2.2.2. Néanmoins, il s'agit ici de montrer l'existence d'un chemin à l'extérieur d'une boule plutôt qu'à l'infini ; cela permet d'adopter des notations moins lourdes que dans la Proposition 2.2.2.

*Démonstration.* On procède par récurrence sur  $R$ . Considérons deux points  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  de  $S(\bar{x}_0, R_0)$  dans une même ombre. Cela signifie donc que  $\pi'_{R_0}(\bar{x})$  et  $\pi'_{R_0}(\bar{y})$  sont joints par un chemin en dehors de la

boule  $B(\bar{x}_0, R_0 - 3\delta_{X/H})$ . Or  $\pi'_{R_0}(\bar{x}) = \bar{x}$  et  $\pi'_{R_0}(\bar{y}) = \bar{y}$ . Il existe donc un chemin joignant  $\bar{x}$  à  $\bar{y}$  en dehors de  $B(\bar{x}_0, R_0 - 3\delta_{X/H}) \supset B(\bar{x}_0, R_0 - 8\delta_{X/H})$ .

Soit  $R \geq R_0$ . Supposons maintenant que tout couple de points de  $S(\bar{x}_0, R)$  dans une même ombre soit joint par un chemin en dehors de la boule  $B(\bar{x}_0, R - 8\delta_{X/H})$ . Considérons deux points  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  sur  $S(\bar{x}_0, R + 1)$  dans une même ombre. Notons  $c_0$  et  $c_1$  deux rayons géodésiques issus de  $\bar{x}_0$  passant à moins de  $\delta_{X/H}$  de  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  respectivement.

On va construire une suite de points sur  $S(\bar{x}_0, R + 1)$  suffisamment proches les uns des autres pour utiliser le fait que  $X/H$  satisfait  $(\dagger_M)$  et joindre  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  par un chemin en dehors de la boule  $B(\bar{x}_0, R + 1 - 8\delta_{X/H})$ . Dans un premier temps, montrons que  $c_0(R)$  et  $c_1(R)$  sont dans une même ombre en explicitant la chaîne d'équivalence suivante :

$$\pi'_{R_0}(c_0(R)) \stackrel{R_0}{\sim} \pi'_{R_0}(c_0(R + 1)) \stackrel{R_0}{\sim} \pi'_{R_0}(\bar{x}) \stackrel{R_0}{\sim} \pi'_{R_0}(\bar{y}) \stackrel{R_0}{\sim} \pi'_{R_0}(c_1(R + 1)) \stackrel{R_0}{\sim} \pi'_{R_0}(c_1(R)).$$

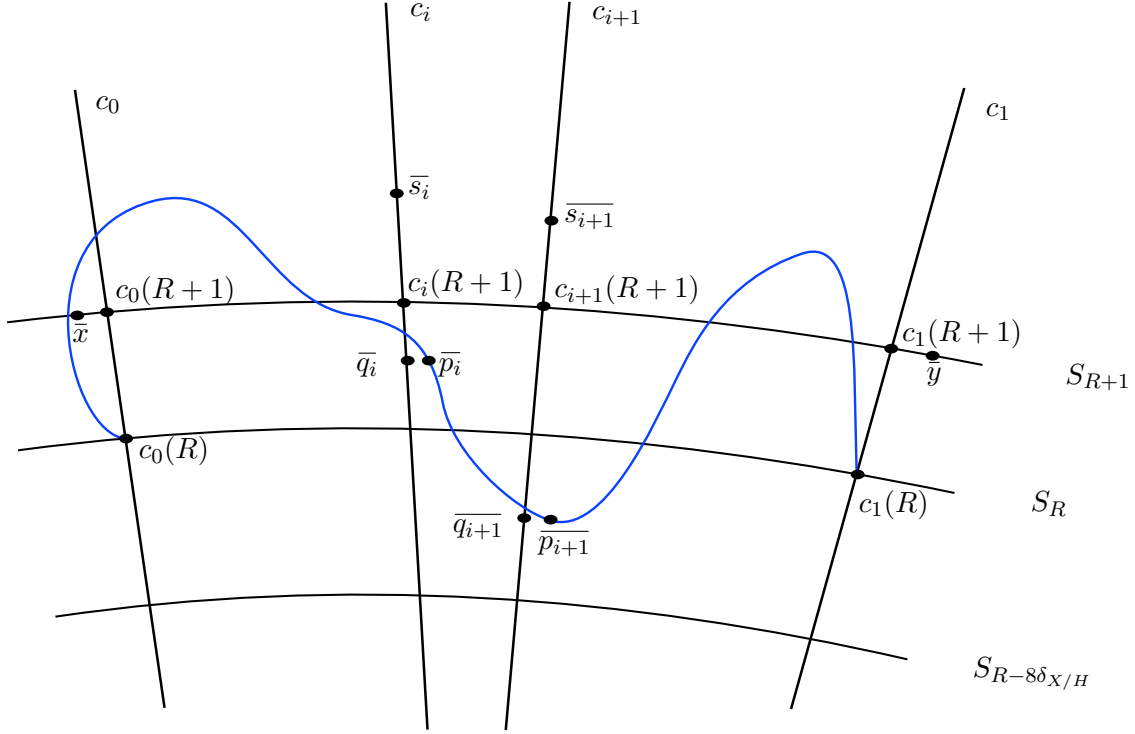
On utilisera ensuite l'hypothèse de récurrence pour  $c_0(R)$  et  $c_1(R)$  pour construire la suite de points recherchée.

Tout d'abord, montrons que  $\pi'_{R_0}(c_0(R + 1)) \stackrel{R_0}{\sim} \pi'_{R_0}(\bar{x})$ . Notons  $z$  un relevé de  $c_0(R + 1)$  tel que  $\pi'_{R_0}(c_0(R + 1)) = \overline{\pi_{R_0}(z)}$  et  $x'$  un relevé de  $\bar{x}$  tel que  $d(x', z) = d(c_0(R + 1), \bar{x}) \leq 4\delta_{X/H}$  (d'après le Corollaire 1.3.15). L'inégalité triangulaire permet alors de majorer  $d(\pi'_{R_0}(c_0(R + 1)), \pi'_{R_0}(\bar{x}))$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} d(\pi'_{R_0}(c_0(R + 1)), \pi'_{R_0}(\bar{x})) &\leq d(\overline{\pi_{R_0}(z)}, \overline{\pi_{R_0}(x')}) + d(\overline{\pi_{R_0}(x')}, \pi'_{R_0}(\bar{x})) \\ &\leq d(\pi_{R_0}(z), \pi_{R_0}(x')) + 28\delta_X && \text{d'après 2.3.2,} \\ &\leq 18\delta_X + d(z, x') + 28\delta_X && \text{d'après 1.2.8(2),} \\ &\leq 4\delta_{X/H} + 46\delta_X \\ &< 6\delta_{X/H}. \end{aligned}$$

Il existe donc un chemin joignant les points  $\pi'_{R_0}(c_0(R + 1))$  et  $\pi'_{R_0}(\bar{x})$  en-dehors de la boule  $B(\bar{x}_0, R_0 - 3\delta_{X/H})$ . Un calcul identique indique qu'il existe aussi un chemin joignant  $\pi'_{R_0}(c_1(R + 1))$  et  $\pi'_{R_0}(\bar{y})$  en dehors de la boule  $B(\bar{x}_0, R_0 - 3\delta_{X/H})$ . Par ailleurs, d'après 2.3.3, il existe un chemin joignant  $\pi'_{R_0}(c_i(R))$  et  $\pi'_{R_0}(c_i(R + 1))$  en dehors de la boule  $B(\bar{x}_0, R_0 - 20\delta_X)$  pour  $i = 0, 1$ . De plus, comme  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  sont dans une même ombre, il existe aussi un chemin joignant  $\pi'_{R_0}(\bar{x})$  et  $\pi'_{R_0}(\bar{y})$  en dehors de la boule  $B(\bar{x}_0, R_0 - 3\delta_{X/H})$ . En concaténant ces chemins, on obtient un chemin joignant  $\pi'_{R_0}(c_0(R))$  à  $\pi'_{R_0}(c_1(R))$  en dehors de la boule  $B(\bar{x}_0, R_0 - 3\delta_{X/H})$ . Les points  $c_0(R)$  et  $c_1(R)$  sont sur la sphère  $S(\bar{x}_0, R)$  et appartiennent ainsi à une même ombre.

La Figure 2.4 illustre les différentes étapes de la méthode suivante.


 FIGURE 2.4 – Joindre  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  en dehors de  $B(\bar{x}_0, R + 1 - 8\delta_{X/H})$ 

On peut maintenant appliquer l'hypothèse de récurrence à  $c_0(R)$  et  $c_1(R)$  : il existe donc un chemin joignant  $c_0(R)$  et  $c_1(R)$  en dehors de la boule  $B(\bar{x}_0, R - 8\delta_{X/H})$ . Considérons des points  $\bar{p}_0, \dots, \bar{p}_n$  sur ce chemin vérifiant  $\bar{p}_0 = c_0(R)$ ,  $\bar{p}_n = c_1(R)$  et pour tout  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ ,  $d(\bar{p}_i, \bar{p}_{i+1}) \leq \delta_X$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , notons  $c_i$  un rayon géodésique issu de  $\bar{x}_0$  passant à moins de  $\delta_{X/H}$  de  $\bar{p}_i$ .

On note  $\bar{q}_i$  un point de  $c_i$  à distance inférieure ou égale à  $\delta_{X/H}$  de  $\bar{p}_i$ . Alors la distance de  $\bar{q}_i$  à  $\bar{x}_0$  est supérieure ou égale à  $R - 9\delta_{X/H}$ . Notons maintenant  $\bar{s}_i$  un point de  $c_i$  vérifiant

$$\begin{aligned} d(\bar{s}_i, \bar{x}_0) &\geq R + 1, \\ d(\bar{s}_i, \bar{q}_i) &\leq 1 + 9\delta_{X/H}. \end{aligned}$$

Pour tout  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ , ces points satisfont

$$\begin{aligned} d(\bar{s}_i, \bar{s}_{i+1}) &\leq d(\bar{s}_i, \bar{q}_i) + d(\bar{q}_i, \bar{p}_i) + d(\bar{p}_i, \bar{p}_{i+1}) + d(\bar{p}_{i+1}, \bar{s}_{i+1}) \\ &\leq 2 + 20\delta_{X/H} + \delta_X. \end{aligned}$$

Considérons un triangle géodésique formé par des segments  $[\bar{x}_0, \bar{s}_i] \subset c_i$ ,  $[\bar{x}_0, \bar{s}_{i+1}] \subset c_{i+1}$  et un segment géodésique joignant  $\bar{s}_i$  et  $\bar{s}_{i+1}$ . D'après la Proposition 1.1.7, on obtient le résultat suivant :

$$\begin{aligned} d(c_i(R+1), c_{i+1}(R+1)) &\leq 2(2 + 20\delta_{X/H} + \delta_X + \delta_{X/H}) \\ &\leq 4 + 43\delta_{X/H}. \end{aligned}$$

Utilisons maintenant le fait que  $X$  satisfait la propriété  $(\dagger_{4+43\delta_{X/H}, 4\delta_{X/H}})$  : il existe un chemin joignant  $c_i(R+1)$  et  $c_{i+1}(R+1)$  en dehors de la boule  $B(\bar{x}_0, R+1-8\delta_{X/H})$  pour tout  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ . De plus, d'après le Corollaire 1.3.15, on a  $d(c_0(R+1), \bar{x}) \leq 4\delta_{X/H}$  et  $d(c_1(R+1), \bar{y}) \leq 4\delta_{X/H}$ . Il existe ainsi un chemin joignant  $\bar{x}$  à  $\bar{y}$  en-dehors de la boule  $B(\bar{x}_0, R+1-8\delta_{X/H})$ .

Pour conclure, pour tout entier  $R \geq R_0$ , tout couple de points de  $S(\bar{x}_0, R)$  est joint par un chemin en dehors de la boule  $B(\bar{x}_0, R-8\delta_{X/H})$ .  $\square$

**Lemme 2.3.7.** *Supposons que l'espace  $X$  satisfait la propriété  $(\dagger_{M, 4\delta_{X/H}})$ . Tous points  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  de l'espace quotient  $X/H$  appartenant à une même ombre sont joints par un chemin en dehors de la boule  $B(\bar{x}_0, \min\{d(\bar{x}_0, \bar{x}), d(\bar{x}_0, \bar{y})\} - 8\delta_{X/H})$ .*

*Démonstration.* Considérons deux points  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  dans  $X/H$  appartenant à la même ombre. Notons  $R_x := d(\bar{x}_0, \bar{x})$  et  $R_y := d(\bar{x}_0, \bar{y})$ . Quitte à échanger les rôles de  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$ , on peut supposer que  $R_x$  est inférieur ou égal à  $R_y$  et donc  $\min\{d(\bar{x}_0, \bar{x}), d(\bar{x}_0, \bar{y})\} = R_x$ . Notons  $c$  un rayon géodésique issu de  $\bar{x}_0$  passant à moins de  $\delta_{X/H}$  de  $\bar{y}$  et posons  $\bar{y}' := c(R_x)$ . D'après la Proposition 2.3.3 et puisque  $d(\bar{y}, c) \leq \delta_{X/H}$ ,  $\bar{y}$  et  $\bar{y}'$  appartiennent à une même ombre. On en déduit que  $\bar{x}$  et  $\bar{y}'$  appartiennent encore à la même ombre. En appliquant le Lemme 2.3.6, il existe un chemin joignant  $\bar{x}$  à  $\bar{y}'$  en-dehors de la boule  $B(\bar{x}_0, R_x - 8\delta_{X/H})$ . Par ailleurs, d'après le Corollaire 1.3.15,  $d(\bar{y}, c(R_y)) \leq 4\delta_{X/H}$  et ces points sont donc joints par un chemin en dehors de la boule  $B(\bar{x}_0, R_y - 2\delta_{X/H})$ .

En concaténant les différents chemins ainsi obtenus avec la restriction de  $c$  à  $[R_x, R_y]$ , on obtient un chemin joignant  $\bar{x}$  à  $\bar{y}$  en dehors de la boule  $B(\bar{x}_0, R_x - 8\delta_{X/H})$ .  $\square$

Rappelons que la Proposition 2.3.3 indique que tous points d'un rayon géodésique issu de  $\bar{x}_0$  situé à distance supérieure ou égale à  $R_0$  de  $\bar{x}_0$  appartiennent à une même ombre. On peut donc naturellement étendre la notion d'appartenance à une ombre aux rayons géodésiques de  $X/H$  issus de  $\bar{x}_0$ .

**Définition 2.3.8.** Deux rayons géodésiques  $c, c' : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow X/H$  issus de  $\bar{x}_0$  appartiennent à une même ombre si tous points sur  $c$  et  $c'$  à distance supérieure ou égale à  $R_0$  de  $\bar{x}_0$  sont dans une même ombre.

On note  $\mathcal{O}(r) := \mathcal{O}([c(R_0)])$  l'ombre déterminée par la classe de  $c(R_0)$ .

**Remarque 2.3.9.** On a donc une surjection naturelle de l'ensemble des rayons géodésiques issus de  $\bar{x}_0$  vers l'ensemble des ombres dans  $X/H$ .

**Lemme 2.3.10.** *Supposons que l'espace  $X$  satisfait la propriété  $(\dagger_{M, 4\delta_{X/H}})$ . Tous les rayons géodésiques appartenant à une même ombre convergent vers un même bout de  $X/H$ .*

*Démonstration.* Considérons deux rayons géodésiques  $c, c' : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow X/H$  appartenant à une même ombre. D'après le Lemme 2.3.7, pour tout  $r, r' \geq R_0$ , il existe un chemin joignant  $c(r)$  à  $c'(r')$  en-dehors de la boule  $B(\bar{x}_0, \min\{r, r'\} - 8\delta_{X/H})$ . On en déduit que pour tout  $R \geq R_0$ , tout point de  $c([R, +\infty))$  est joint par un chemin en dehors de  $B(\bar{x}_0, R - 8\delta_{X/H})$  à tout point de  $c'([R, +\infty))$ . Cela signifie donc que ces rayons convergent vers un même bout de  $X/H$ .  $\square$

L'implication inverse est vraie sans que l'espace  $X$  ne vérifie de propriétés supplémentaires.

**Lemme 2.3.11.** *Deux rayons géodésiques dans  $X/H$  convergeant vers un même bout appartiennent à une même ombre.*

*Démonstration.* Considérons deux rayons géodésiques  $c$  et  $c'$  convergeant vers un même bout de  $X/H$ . En particulier, pour tout  $R \geq R_0$ , il existe un entier  $R' \geq R$  tel que pour tout  $r, r' \geq R'$ , les points  $c(r)$  et  $c'(r')$  soient dans la même composante connexe par arcs de  ${}^{\mathbb{C}}B(\bar{x}_0, R)$ . Pour tout  $r, r' \geq R'$ , les points  $c(r)$  et  $c'(r')$  sont donc joints par un chemin en dehors de la boule  $B(\bar{x}_0, R) \supset B(\bar{x}_0, R_0)$ .

D'après la Proposition 2.3.3, les équivalences suivantes sont vérifiées pour tout  $r, r' \geq R'$  :

$$\begin{aligned}\pi'_{R_0}(c(r)) &\stackrel{R_0}{\sim} \pi'_{R_0}(c(R_0)) = c(R_0), \\ \pi'_{R_0}(c'(r')) &\stackrel{R_0}{\sim} \pi'_{R_0}(c'(R_0)) = c'(R_0).\end{aligned}$$

Cela signifie qu'il existe des chemins joignant  $\pi'_{R_0}(c(r))$  à  $c(R_0)$  et  $\pi'_{R_0}(c'(r'))$  à  $c'(R_0)$  en dehors de la boule  $B(\bar{x}_0, R_0 - 8\delta_{X/H})$ .

En concaténant ces chemins avec les restrictions des rayons  $c([R_0, r])$  et  $c'([R_0, r'])$ , on obtient un chemin joignant  $\pi'_{R_0}(c(r))$  à  $\pi'_{R_0}(c'(r'))$  en dehors de la boule  $B(\bar{x}_0, R_0 - 8\delta_{X/H})$ . Toujours à l'aide de la Proposition 2.3.3, ce fait s'étend à tous points distants de  $\bar{x}_0$ . En effet, pour tout  $r_1, r_2 \geq R_0$ , on a alors la chaîne d'équivalence

$$\pi'_{R_0}(c(r_1)) \stackrel{R_0}{\sim} c(R_0) \stackrel{R_0}{\sim} \pi'_{R_0}(c(r)) \stackrel{R_0}{\sim} \pi'_{R_0}(c'(r')) \stackrel{R_0}{\sim} c'(R_0) \stackrel{R_0}{\sim} \pi'_{R_0}(c'(r_2)).$$

Pour tout  $r_1, r_2 \geq R_0$ , il existe donc un chemin joignant  $\pi'_{R_0}(c(r_1))$  à  $\pi'_{R_0}(c'(r_2))$  en-dehors de la boule  $B(\bar{x}_0, R_0 - 8\delta_{X/H})$ . Les rayons géodésiques  $c$  et  $c'$  sont ainsi dans une même ombre.  $\square$

En résumé, lorsque l'espace  $X$  satisfait la propriété  $(\ddagger_{M, 4\delta_{X/H}})$  avec  $M \geq 43\delta_{X/H} + 4$ , la notion d'ombre pour les rayons géodésiques de  $X/H$  est équivalente à la notion de bouts pour  $X/H$ . Cela induit le résultat suivant.

**Théorème 2.3.12.** *Soient  $M \geq 43\delta_{X/H} + 4$  et  $R_0 \geq M + \delta_{X/H}$ . Si l'espace  $X$  satisfait la propriété  $(\ddagger_{M, 4\delta_{X/H}})$  alors l'ensemble des bouts de  $X/H$  est en bijection avec l'ensemble des classes d'équivalence sur la sphère  $S(\bar{x}_0, R_0)$  pour  $\stackrel{R_0}{\sim}$ .*

*Démonstration.* Etudions l'application de  $f: Bt(X/H) \rightarrow \mathcal{O}(X/H)$  qui à un bout  $bt(r)$  associe l'ombre  $\mathcal{O}(r)$ .

Soient  $r$  et  $r'$  deux rayons géodésiques issus de  $\bar{x}_0$  dans  $X/H$  tels que  $\mathcal{O}(r) = \mathcal{O}(r')$ . Le Lemme 2.3.10 indique alors que  $r$  et  $r'$  convergent vers un même bout, c'est-à-dire  $bt(r) = bt(r')$ . Ainsi  $f$  est injective.

Soit  $\mathcal{O}$  un élément de  $\mathcal{O}(X/H)$ . On a déjà vu à la Remarque 2.3.9 que l'application de l'ensemble des rayons géodésiques issus de  $\bar{x}_0$  vers l'ensemble des ombres de  $X/H$  est surjective. Il existe donc un rayon géodésique  $r$  issu de  $\bar{x}_0$  tel que  $\mathcal{O} = \mathcal{O}(r)$ . L'image de  $bt(r)$  est alors exactement  $\mathcal{O}$ . Donc l'application  $f$  est surjective.

On en conclut qu'il existe une bijection entre l'ensemble  $Bt(X/H)$  des bouts de  $X/H$  et l'ensemble  $\mathcal{O}(X/H)$  des ombres dans  $X/H$ .  $\square$

**Corollaire 2.3.13.** *Soient  $M \geq 43\delta_{X/H} + 4$  et  $R_0 \geq M + \delta_{X/H}$ . Si l'espace  $X$  satisfait la propriété  $(\ddagger_{M,4\delta_{X/H}})$  alors le nombre de bouts de  $X/H$  est égal au nombre de classes d'équivalence sur la sphère  $S(\bar{x}_0, R_0)$  pour  $\overset{R_0}{\sim}$ .*

*Démonstration.* D'après le théorème précédent, il existe une bijection entre l'ensemble  $Bt(X/H)$  des bouts de  $X/H$  et l'ensemble  $\mathcal{O}(X/H)$  des ombres dans  $X/H$ . Ces deux ensembles ont donc le même nombre d'éléments.

Par ailleurs, on a déjà souligné (2.3.5) une bijection entre l'ensemble des ombres sur  $X/H$  et l'ensemble des classes d'équivalence pour  $\overset{R_0}{\sim}$  sur la sphère  $S(\bar{x}_0, R_0)$ . On en déduit que le nombre d'ombres dans  $X/H$  est égal au nombre de classes d'équivalence sur  $S(\bar{x}_0, R_0)$ .

On en conclut que l'ensemble des bouts de  $X/H$  et l'ensemble des classes d'équivalence sur  $S(\bar{x}_0, R_0)$  ont le même nombre d'éléments.  $\square$

**Remarque 2.3.14.** En particulier, le nombre de classes d'équivalence sur la sphère de rayon  $R_0$  est fini car borné par le cardinal de cette sphère. Le nombre de bouts de  $X/H$  est donc nécessairement fini dans ce cas.

## Chapitre 3

# Application à la théorie des groupes

### 3.1 Hypothèse de quasi-convexité

Rappelons le résultat suivant dû à V.Gerasimov :

**Théorème 3.1.1** [Ger99]. *Il existe un algorithme qui, étant donné une présentation finie d'un groupe hyperbolique, calcule le nombre de bouts de ce groupe.*  $\square$

Il est donc légitime de se demander si, étant un groupe hyperbolique  $G$  et un sous-groupe  $H$ , il existe un algorithme pour déterminer le nombre de bouts relatifs du couple  $(G, H)$ . La réponse est négative :

**Théorème 3.1.2.** *On peut construire un couple de groupes  $(G, H)$  pour lesquels on ne puisse pas décider algorithmiquement si :*

1.  $G/H$  est fini;
2. le couple  $(G, H)$  a deux bouts relatifs;
3. le couple  $(G, H)$  a une infinité de bouts relatifs.  $\square$

On verra plus tard (dans la section 3.2.3) que l'on peut construire un algorithme permettant de déterminer le nombre de bouts relatifs dans le cas où  $H$  est un sous-groupe quasi-convexe. Le Théorème 3.1.2 souligne donc l'importance de cette hypothèse de quasi-convexité pour l'existence d'un tel algorithme.

Etant donné une présentation finie de groupe, la construction de Rips permettra de mettre en évidence un groupe  $G$  et un sous-groupe  $H \leq G$  pour lesquels le nombre de bouts relatifs dépendra des propriétés de la présentation finie. L'idée est de montrer que ces propriétés sont des propriétés de Markov. En d'autres termes, on ne peut pas décider algorithmiquement si une présentation finie satisfait cette propriété. On en déduira alors qu'il n'existe pas d'algorithme permettant de déterminer le nombre de bouts relatifs du couple  $(G, H)$ .



### 3.1.1 Construction de Rips

La construction de Rips est une source majeure de contre-exemples à des problèmes algorithmiques pour les groupes hyperboliques. En effet, cette technique permet de transférer une pathologie d'une présentation finie de groupe vers un groupe hyperbolique concret.

**Définition 3.1.3.** Soit  $0 < \lambda$  un réel. Soit  $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \rangle$  une présentation de groupe où l'ensemble des relations  $\mathcal{R}$  est composé de mots cycliquement réduits et leurs inverses.

Un mot réduit  $w$  en  $\mathcal{S}$  est une *pièce* de  $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \rangle$  si  $w$  est un préfixe commun de deux mots distincts de  $\mathcal{R}$ .

On dit que la présentation  $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \rangle$  satisfait la *condition de petite simplification*  $C'(\lambda)$  si l'inégalité

$$|u| \leq \lambda|r|.$$

est vérifiée pour toute pièce  $w$  de  $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \rangle$  et pour toute relation  $r \in \mathcal{R}$  de préfixe  $w$ .

La construction de Rips est donnée par le théorème suivant.

**Théorème 3.1.4** [Rip82]. *Soit  $0 < \lambda < 1$  un réel. Etant donné un groupe de présentation finie  $Q$ , il existe une suite exacte courte de groupes*

$$1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow Q \rightarrow 1$$

où  $G$  est un groupe de présentation finie satisfaisant la condition de petite simplification  $C'(\lambda)$  et  $H$  est un groupe de type fini.

*Démonstration.* Notons  $\langle \mathcal{S}' \mid \mathcal{R}' \rangle$  une présentation finie du groupe  $Q$ . Quitte à ajouter les inverses manquant à  $\mathcal{S}'$ , on peut supposer que  $\mathcal{S}'$  est symétrique. Considérons deux éléments  $a$  et  $b$  de  $Q$  n'appartenant pas à  $\mathcal{S}'$  et notons  $\mathcal{S} = \mathcal{S}' \cup \{a, b\}$ . Pour chaque élément  $s \in \mathcal{S}$  et chaque relation  $r \in \mathcal{R}$ , on choisit des mots  $U_s, V_s$  et  $W_r$  en  $\{a, b\}$  vérifiant :

$$\begin{aligned} U_s(a, b) &= sas^{-1}, \\ V_s(a, b) &= sbs^{-1}, \\ W_r(a, b) &= r. \end{aligned}$$

Considérons maintenant le groupe  $G$  de présentation  $\langle \mathcal{S} \mid \{U_s, V_s\}_{s \in \mathcal{S}}, \{W_r\}_{r \in \mathcal{R}} \rangle$ . Notons  $H$  le sous-groupe de  $G$  engendré par  $\{a, b\}$ . Comme par définition  $U_s = sas^{-1}$  et  $V_s = sbs^{-1}$  sont des mots en  $\{a, b\}$ , le groupe  $H$  est en particulier un sous-groupe normal de  $G$ . De plus, par construction, le quotient  $G/H$  est isomorphe à  $Q$ . D'où la suite exacte courte.

Remarquons que cette construction est valable pour tout choix de mots  $U_s, V_s$  et  $W_r$ . Pour  $\lambda > 0$  donné, on peut choisir astucieusement ces mots de sorte que la présentation  $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \rangle$  vérifie la condition de petite simplification  $C'(\lambda)$ . En effet, si les mots  $U_s, V_s$  et  $W_r$  sont distincts, suffisamment longs et compliqués, les mots  $sas^{-1}U_s^{-1}$ ,  $sbs^{-1}V_s^{-1}$  et  $rW_r$  auront au plus des sous-mots communs de taille négligeable par rapport à leur longueur. On peut par exemple prendre pour  $U_s, V_s$  et  $W_r$

des mots de la forme  $ab^k a^2 b^{k+1} \dots a^n b^{k+n}$  avec  $k$  et  $n$  de grands entiers positifs tels que l'intervalle  $[k, k+n]$  soit différent pour chaque mot.  $\square$

**Remarque 3.1.5.** Comme montré dans l'appendice de [GdlH90], une présentation satisfaisant la condition de petite simplification  $C'(\frac{1}{6})$  détermine un groupe hyperbolique. La preuve de ce résultat comporte deux temps :

- Le lemme de Greendlinger indique que l'algorithme de Dehn résout le problème du mot pour toute présentation satisfaisant la condition de petite simplification  $C'(\frac{1}{6})$ . (voir [LS77, V.4.4])  
On dit alors que cette présentation est une présentation de Dehn.
- Un groupe admet une présentation de Dehn si et seulement s'il est hyperbolique. (voir [ABC<sup>+</sup>91])

Plus généralement, tout groupe admettant une présentation satisfaisant la condition de petite simplification  $C'(\lambda)$  avec  $\lambda \leq \frac{1}{6}$  est un groupe hyperbolique.

Par ailleurs, on note le résultat suivant.

**Proposition 3.1.6.** *Soit  $H$  un sous-groupe normal d'un groupe hyperbolique  $G$ . Si  $H$  est quasi-convexe alors  $H$  est fini ou d'indice fini dans  $G$ .*

On donne ici une preuve différente de celle de [ABC<sup>+</sup>91, 3.9]<sup>1</sup>.

*Démonstration.* Tout d'abord, si  $\partial H = \emptyset$  alors  $H$  est fini. En effet, si  $H$  est infini, il contient une infinité d'éléments à partir desquels on extrait une suite de points convergeant à l'infini. Cette suite de points détermine donc un point de  $\partial H$ , ce qui contredit l'hypothèse  $\partial H = \emptyset$ .

Supposons maintenant que  $\partial H$  est non vide. Dans un premier temps, remarquons que le bord  $\partial H$  de  $H$  est  $G$ -invariant. En effet, pour tout élément  $g \in G$ , on a immédiatement  $\partial(gHg^{-1}) = g\partial H$ . Par ailleurs, comme  $H$  est un sous-groupe normal de  $G$ , on a aussi  $\partial(gHg^{-1}) = \partial H$ . On en déduit que pour tout élément  $g \in G$ , on a  $\partial H = g\partial H$ .

De plus, le groupe  $H$  est un sous-groupe quasi-convexe de  $G$ . Le bord  $\partial H$  est donc homéomorphe à l'ensemble limite  $\Lambda H$  (voir [Swe01, 12] par exemple) et en particulier,  $\partial H$  est fermé dans  $\partial G$ .

Or le Théorème 1.5.4 indique que  $\Lambda G = \partial G$  est l'unique ensemble minimal de l'action de  $G$  sur  $\partial G$ . Cela signifie que le seul fermé  $G$ -invariant de  $\partial G$  est  $\partial G$ . Comme  $\partial H$  est un fermé  $G$ -invariant non vide de  $\partial G$ , on a  $\partial H = \partial G$ .

D'après la Proposition 2.1.8, on a alors

$$\partial G/H = (\partial G \setminus \Lambda H)/H = (\partial G \setminus \partial H)/H = \emptyset.$$

On peut alors en conclure que  $H$  est d'indice fini dans  $G$ . En effet, si  $H$  était d'indice infini dans  $G$ , il existerait une géodésique infinie dans  $G/H$  qui se relèverait dans  $G$  en une géodésique infinie d'extrémité dans  $\partial G \setminus \Lambda H = \emptyset$ , ce qui est absurde.  $\square$

---

1. M.Mihalik et W.Towle ont donné dans [MT94] un résultat plus général pour les espaces à courbure négative en utilisant le même schéma de démonstration que dans [ABC<sup>+</sup>91, 3.9].

### 3.1.2 Propriété de Markov

On reprend ici quelques résultats du rapport de C.F.Miller [Mil92] sur les problèmes de décision pour les groupes. C'est en cherchant à déterminer quelle propriété de groupe peut se reconnaître algorithmiquement sur une présentation finie qu'apparaît la condition de Markov.

**Définition 3.1.7.** Une propriété  $\mathcal{P}$  de groupes de présentation finie est une *propriété de Markov* s'il existe deux groupes de présentation finie,  $G_+$  et  $G_-$ , tels que :

- $G_+$  satisfait la propriété  $\mathcal{P}$  ;
- si  $G_-$  est plongé dans un groupe de présentation finie, ce groupe ne satisfait pas la propriété  $\mathcal{P}$ .

Les groupes  $G_+$  et  $G_-$  sont parfois appelés des *témoins* pour la propriété  $\mathcal{P}$ . En particulier,  $G_-$  ne satisfait pas la propriété  $\mathcal{P}$  et aucun groupe de présentation finie satisfaisant  $\mathcal{P}$  ne contient de sous-groupe isomorphe à  $G_-$ .

**Définition 3.1.8.** Soit  $\mathcal{P}$  une propriété de groupes de présentation finie.

La propriété  $\mathcal{P}$  est dite *non triviale* si ce n'est ni la propriété vide, ni une propriété satisfaite par tous groupes de présentation finie.

La propriété  $\mathcal{P}$  est dite *héréditaire* si tout sous-groupe de présentation finie d'un groupe satisfaisant  $\mathcal{P}$  satisfait encore cette propriété.

Le lemme suivant permet d'identifier rapidement une certaine catégorie de propriétés de Markov.

**Lemme 3.1.9.** *Si une propriété non triviale de groupes de présentation finie est héréditaire alors c'est une propriété de Markov.*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{P}$  une propriété non triviale et héréditaire de groupes de présentation finie. Comme cette propriété est non triviale, il existe un groupe  $G_+$  vérifiant  $\mathcal{P}$  et un groupe  $G_-$  ne vérifiant pas  $\mathcal{P}$ . Or si le groupe  $G_-$  est plongé dans un groupe de présentation finie, disons  $H$ , on sait que  $H$  ne satisfait pas la propriété  $\mathcal{P}$  car elle est héréditaire. On en déduit que ces groupes  $G_+$  et  $G_-$  assurent que  $\mathcal{P}$  est une propriété de Markov.  $\square$

La proposition qui suit liste quelques propriétés de Markov.

**Proposition 3.1.10.** *Les propriétés suivantes des groupes de présentation finie sont des propriétés de Markov :*

- être un groupe réduit à un élément ;
- être un groupe fini ;
- être un groupe sans torsion ;
- être un groupe de torsion.

*Démonstration.* Remarquons que chacune de ces propriétés est non triviale et héréditaire. D'après le Lemme 3.1.9, ces propriétés sont bien des propriétés de Markov.  $\square$

Le résultat qui nous intéresse ici est le théorème suivant de S.I.Adyan et M.O.Rabin.

**Théorème 3.1.11** [Ady55],[Rab58]. *Soit  $\mathcal{P}$  une propriété de Markov pour des groupes de présentation finie. Il n'existe pas d'algorithme permettant de décider si un groupe de présentation finie satisfait la propriété  $\mathcal{P}$ .*  $\square$

La démonstration de ce théorème repose sur ce que l'on appelle la *construction d'Adyan-Rabin*. Cette méthode consiste à déduire de l'indécidabilité du problème du mot l'indécidabilité d'un problème de décision pour les présentations finies de groupes.

Considérons une propriété de Markov  $\mathcal{P}$  pour des groupes de présentation finie et notons  $G_+$  et  $G_-$  des témoins pour la propriété  $\mathcal{P}$ . Considérons de plus un groupe  $U$  pour lequel le problème du mot est indécidable. Le procédé d'Adyan-Rabin consiste à construire effectivement une famille récursive de présentations finies  $\{\mathfrak{p}_u \mid u \in U\}$  indexée par les mots de  $U$  vérifiant :

- Si  $u \neq 1_U$  alors  $G_-$  est plongé dans le groupe défini par  $\mathfrak{p}_u$ .
- Si  $u = 1_U$  alors le groupe défini par  $\mathfrak{p}_u$  est isomorphe à  $G_+$ .

Comme le problème du mot est indécidable pour  $U$ , la propriété  $\mathcal{P}$  n'est pas reconnue récursivement.

### 3.1.3 Démonstration

Avant de donner une preuve du Théorème 3.1.2, démontrons le résultat suivant.

**Lemme 3.1.12.** *Soit  $A$  un groupe de type fini. Soit  $Q = A * \mathbb{Z}_2$ .*

1. *Le groupe  $Q$  est fini si et seulement si le groupe  $A$  est le groupe réduit à un élément ;*
2. *Le groupe  $Q$  a 2 bouts si et seulement si le groupe  $A$  est de cardinal 2 ;*
3. *Le groupe  $Q$  a une infinité de bouts si et seulement si le cardinal de  $A$  est supérieur ou égal à 3.*

La démonstration proposée ici est basée sur le troisième paragraphe de l'article de P.Scott et T.Wall [SW79]. On peut aussi déduire ce résultat de la partie directe du théorème de Stallings sur les groupes à une infinité de bouts.

*Démonstration.* Dans un premier temps, on sait que  $e(Q) = 0$  si et seulement si le groupe  $Q$  est fini (voir Théorème 1.4.6). Or le produit libre de deux groupes est fini si et seulement si l'un des groupes est trivial. On en déduit que le groupe  $Q = A * \mathbb{Z}_2$  est fini si et seulement si le groupe  $A$  est le groupe trivial. On obtient alors  $e(Q) = 0$  si et seulement si  $A$  est trivial.

Par ailleurs, si  $A = \mathbb{Z}_2$  alors  $Q = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$  est le groupe diédral infini. Ainsi  $Q$  est un groupe d'isométries de la droite bi-infinie  $\mathbb{Z}$  et  $e(Q) = 2$ . De plus, un théorème de P.Scott et T.Wall [SW79, 5.12] indique que si  $e(Q) = 2$  alors  $Q$  se décompose en une extension HNN  $A *_C$  ou en un produit libre amalgamé  $A *_C B$  avec  $C$  est fini,  $|A/C| = |B/C| = 2$ . Or  $Q = A * \mathbb{Z}_2$ , donc dans la décomposition,  $C$  est le groupe trivial,  $B = \mathbb{Z}_2$  et  $A$  est un groupe de cardinal 2. On obtient ainsi que le groupe  $Q$  a deux bouts si et seulement si  $Q = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ .

Montrons maintenant que si le cardinal de  $A$  est supérieur ou égal à 3 alors le groupe  $Q$  a une infinité de bouts. Soit  $Y$  un CW-complexe de groupe fondamental  $A$  de point base  $y$  et soit  $Z$  un

CW-complexe de groupe fondamental  $B := \mathbb{Z}_2$  de point base  $z$ . Soit  $[y, z]$  un segment joignant les points  $y$  et  $z$  et soit  $x_0$  son milieu. On considère alors  $X = Y \cup [y, z] \cup Z$ . D'après le théorème de Van Kampen, on a  $\pi_1(X, x_0) = \pi_1(Y, y) * \pi_1(Z, z)$  et ainsi  $\pi_1(X, x_0) = A * \mathbb{Z}_2 = Q$ . Si on note  $\tilde{X}$  le revêtement universel de  $X$ , l'application  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  est un revêtement régulier et son groupe d'automorphisme est  $\pi_1(X, x_0) = Q$ . En particulier,  $Q$  agit alors géométriquement sur  $\tilde{X}$ . Si on note  $\Gamma$  le 1-squelette de  $\tilde{X}$ , le groupe  $Q$  agit géométriquement sur  $\Gamma$  et ainsi  $\Gamma$  et  $Q$  ont le même nombre de bouts.

Considérons ensuite l'arbre de Bass-Serre  $T$  dont les sommets sont de deux types,  $A$  ou  $B$ , et dont les arêtes sont des revêtements du segment  $[y, z]$  dans  $\tilde{X}$ . Il existe donc une application  $\Gamma \rightarrow T$  continue et surjective qui envoie le 1-squelette d'un revêtement de  $A$  (respectivement  $B$ ) dans  $\tilde{X}$  sur un sommet de type  $A$  (respectivement  $B$ ) dans  $T$ . En particulier, par construction, les sommets de  $T$  de type  $A$  sont de valence  $\#A$  et les sommets de  $T$  de type  $B$  sont de valence 2.

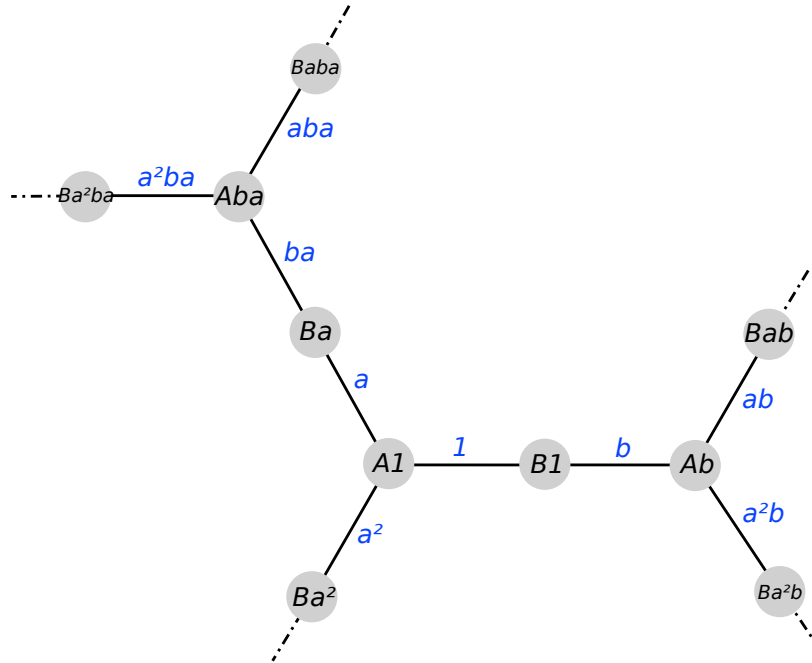


FIGURE 3.1 – Arbre  $T$  pour  $A = \langle a \mid a^3 \rangle$  et  $B = \langle b \mid b^2 \rangle$

Remarquons maintenant que le complémentaire de toute boule fermée de rayon 1 de  $T$  a  $\#A$  ou  $2(\#A - 1)$  composantes connexes disjointes (selon qu'elle soit centrée en un sommet de type  $A$  ou de type  $B$ ). On en déduit alors que dès que le cardinal de  $A$  est supérieur ou égal à 3, l'arbre  $T$  a une infinité de bouts. Comme l'application  $\Gamma \rightarrow T$  est surjective, on peut en conclure que  $\Gamma$  a aussi une infinité de bouts dans ce cas.

Il reste à voir l'implication réciproque. Supposons que  $Q = A * \mathbb{Z}_2$  a une infinité de bouts. En particulier, cela signifie que  $Q$  n'est pas fini et donc  $A$  n'est pas le groupe trivial. Le cardinal de  $A$  est ainsi supérieur ou égal à 2. Or, on a vu que  $e(A * \mathbb{Z}_2) = 2$  si et seulement si  $A = \mathbb{Z}_2$ . Donc dans notre cas, on a nécessairement  $\#A \geq 3$ .

On obtient ainsi l'équivalence du point 3. : le groupe  $Q$  a une infinité de bouts si et seulement si le cardinal de  $A$  est supérieur ou égal à 3.  $\square$

Grâce à ce qui précède, le Théorème 3.1.2 peut être reformulé de la façon suivante.

**Théorème 3.1.13.** *Soit  $\mathfrak{p}$  une présentation finie pour laquelle les problèmes suivants sont indécidables :*

1. « Le groupe défini par  $\mathfrak{p}$  est fini. » ;
2. « Le groupe défini par  $\mathfrak{p}$  est de cardinal 2. » ;
3. « Le groupe défini par  $\mathfrak{p}$  est de cardinal supérieur ou égal à 3. » .

A l'aide de la construction de Rips pour  $\mathfrak{p}$ , on peut construire un couple  $(G, H)$  de groupes pour lesquels on ne peut pas décider algorithmiquement si :

1. «  $G/H$  est fini. » ;
2. « Le couple  $(G, H)$  a deux bouts relatifs. » ;
3. « Le couple  $(G, H)$  a une infinité de bouts relatifs. » .

*Démonstration.* Dans un premier temps, remarquons que pour un groupe  $Q$  donné par une présentation finie et des groupes  $G, H$  associés à  $Q$  par la construction de Rips, le nombre de bouts de  $Q$  est égal au nombre de bouts relatifs du couple  $(G, H)$ . En effet, la construction de Rips pour le groupe  $Q$  fournit une suite exacte courte

$$1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow Q \rightarrow 1$$

où  $G$  est un groupe de présentation finie hyperbolique (prendre  $\lambda = 1/6$  par exemple) et  $H$  est un sous-groupe de type fini de  $G$ . En particulier, le groupe  $G/H$  est alors isomorphe à  $Q$ . Le graphe de Schreier du couple  $(G, H)$  est donc exactement le graphe de Cayley de  $Q$  par rapport au même système générateur. Ainsi le nombre de bouts relatifs du couple  $(G, H)$  est égal au nombre de bouts de  $Q$ .

Soit  $A$  un groupe donné par une présentation finie  $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \rangle$ . Montrons que la présentation finie  $\langle \mathcal{S} \cup \{b\} \mid \mathcal{R} \cup \{b^2\} \rangle$  du groupe  $Q = A * \mathbb{Z}_2$  est un exemple de présentation finie pour laquelle il n'existe pas d'algorithme pour décider si :

1. le groupe  $A$  est fini ;
2. le groupe  $A$  est de cardinal 2 ;
3. le groupe  $A$  est de cardinal supérieur ou égal à 3.

Le lemme précédent couplé au fait que le nombre de bouts de  $G$  est égal au nombre de bouts relatifs du couple  $(G, H)$  permet d'en déduire le théorème.

**Le groupe  $G/H$  est fini.** Le premier point du Lemme 3.1.12 indique que le groupe  $Q$  est fini si et seulement si le groupe  $A$  est réduit à un élément. Or, on a vu dans la Proposition 3.1.10 que « être un groupe réduit à un élément » est une propriété de Markov. Le Théorème d'Adyan-Rabin 3.1.11 assure alors qu'il n'existe pas d'algorithme pour décider si le groupe  $A$  est réduit à un élément. On en conclut qu'il n'existe pas d'algorithme pour décider si le groupe  $Q = A * \mathbb{Z}_2$  est fini. Donc il n'existe pas d'algorithme pour décider si « le groupe  $G/H$  est fini ».

**Le couple  $(G, H)$  a deux bouts relatifs.** Montrons maintenant qu'il n'existe pas d'algorithme pour décider si  $e(Q) = 2$ . D'après la seconde assertion du Lemme 3.1.12, le groupe  $Q$  a deux bouts si et seulement si le groupe  $A$  est de cardinal 2. Par ailleurs, remarquons que « être un groupe de cardinal 2 » est une propriété de Markov en prenant pour témoins  $G_+ = \mathbb{Z}_2$  et  $G_- = \mathbb{Z}_5$  par exemple. Le théorème d'Adyan-Rabin assure alors qu'il n'existe pas d'algorithme pour décider si le groupe  $A$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}_2$ . On en déduit qu'il n'existe pas d'algorithme pour décider si le groupe  $Q = A * \mathbb{Z}_2$  admet deux bouts. « Le couple  $(G, H)$  a deux bouts relatifs » est donc un problème algorithmiquement indécidable.

**Le couple  $(G, H)$  a une infinité de bouts relatifs.** Pour cela, montrons qu'il n'existe pas d'algorithme pour décider si le groupe  $Q$  a une infinité de bouts. Le dernier point du Lemme 3.1.12 affirme que le groupe  $Q$  a une infinité de bouts si et seulement si le cardinal de  $A$  est supérieur ou égal à 3. On remarque que « être de cardinal inférieur ou égal à 2 » est une propriété de Markov ; on peut par exemple prendre pour témoins  $G_+ = \mathbb{Z}_2$  et  $G_- = \mathbb{Z}_5$ . Il n'existe donc pas d'algorithme pour décider si  $\#A \leq 2$ . On en déduit alors qu'il n'existe pas d'algorithme pour déterminer si  $\#A \geq 3$ . Cela implique qu'il n'existe pas d'algorithme pour décider si le groupe  $Q$  admet une infinité de bouts. Donc on ne peut pas décider algorithmiquement si « le couple  $(G, H)$  a une infinité de bouts relatifs ».

Cela conclut la preuve du théorème. □

**Remarque 3.1.14.** On peut expliciter une présentation finie de groupes  $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \rangle$  pour laquelle on ne peut pas vérifier si le groupe défini est réduit à un élément. Cette présentation convient pour le cas 1. du théorème. A partir de cette présentation, on peut alors construire explicitement un groupe hyperbolique  $G$  et un sous-groupe  $H$  tel que  $G/H$  est fini.

De même, les présentations  $\langle \mathcal{S}, b \mid \mathcal{R}, b^2 \rangle$  et  $\langle \mathcal{S}, b \mid \mathcal{R}, b^3 \rangle$  vérifient les hypothèses des points 2. et 3. de ce théorème. Grâce à la construction de Rips, on peut encore une fois expliciter des groupes hyperboliques et sous-groupes dont le nombre de bouts relatifs est deux ou une infinité.

## 3.2 Groupes à un bout

Dans ce qui suit, on considère un groupe  $\delta$ -hyperbolique  $G$  de bord connexe donné par une présentation finie  $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \rangle$ . On note  $X$  le graphe de Cayley de  $G$  associé à  $\mathcal{S}$ . En particulier, le groupe  $G$  agit géométriquement sur  $X$ . De plus, on suppose qu'il existe un sous-groupe  $H$  de  $G$

quasi-convexe et on note  $x_0$  un point de l'enveloppe convexe faible  $C(\Lambda H)$ . On rappelle que le nombre de bouts relatifs du couple  $(G, H)$  est le nombre de bouts du graphe de Schreier associé  $X/H$  (voir Proposition 1.7.2).

Le but de cette section est de donner un algorithme permettant de déterminer le nombre de bouts relatifs du couple  $(G, H)$ .

Pour ce faire, on observe un autre résultat faisant intervenir la *condition de Bestvina-Mess*. Combiné à un résultat de B.H.Bowditch et G.A.Swarup, cela permet l'utilisation du théorème démontré au Chapitre 2 indiquant que le nombre de bouts de  $X/H$  est égal au nombre de classes d'équivalence sur une sphère entourant le cœur convexe. Il s'agit ensuite d'expliciter l'ensemble des constantes intervenant dans ce résultat. On est alors en mesure de donner une procédure permettant de déterminer les classes d'équivalence sur cette sphère et donc le nombre de bouts relatifs du couple  $(G, H)$ .

### 3.2.1 Autre application de la propriété $(\ddagger_{M,K})$

Comme vu dans la Section 2.2, dans le contexte présent – qui est un cas particulier de celui du Chapitre 2 – il convient d'étudier une variation de la condition de M.Bestvina et G.Mess [BM91, §3] pour  $M > K > 0$  :

$(\ddagger_{M,K})$  Il existe un entier  $L > 0$  tel que pour tout  $R \geq K + 2\delta_x$  et pour tous points  $x \in S(x_0, R)$  et  $y \in S(x_0, R)^{+K}$  tels que  $d(x, y) \leq M$ , il existe un chemin de longueur inférieure ou égale à  $L$  joignant  $x$  à  $y$  en dehors de la boule  $\bar{B}(x_0, R - K - 2\delta_x)$ .

On s'intéresse maintenant à un résultat analogue à [BM91, Prop. 3.3] qui fournit une condition pour que le bord du graphe de Cayley  $X$  ait un point de coupure.

**Proposition 3.2.1.** *Soit  $X$  un graphe de Cayley d'un groupe hyperbolique. Soit  $x_0$  un point de  $X$ . Soit  $\delta_x$  une constante d'hyperbolicité et une constante de prolongement des géodésiques pour  $X$ .*

*S'il existe des constantes  $M > K > 0$  telles que  $X$  ne satisfait pas  $(\ddagger_{M,K})$  alors il existe un point de coupure global dans le bord de  $X$ .*

On reprend les arguments de M.Bestvina et G.Mess dans le cas où  $X$  est un graphe de Cayley.

*Démonstration.* Considérons des suites de points  $(x_n)_n, (y_n)_n$  de  $X$  et une suite d'entiers  $(R_n)_n$  satisfaisant :

- $x_n \in S(x_0, R_n)$ ,
- $y_n \in S(x_0, R_n)^{+K}$ ,
- $d(x_n, y_n) \leq M$ ,
- il n'existe pas de chemin de longueur inférieure ou égale à  $n$  joignant  $x_n$  à  $y_n$  en dehors de la boule  $\bar{B}(x_0, R_n - K - 2\delta_x)$ .

Posons  $l_n := d(x_0, y_n)$ . Par hypothèse sur  $\delta$ , il existe  $c_n : [-R_n, \infty) \rightarrow X$  et  $c'_n : [-l_n, +\infty) \rightarrow X$  des rayons géodésiques issus de  $x_0$  passant à moins de  $\delta_x$  de  $x_n$  et  $y_n$  respectivement. D'après la Proposition 1.3.15, on a  $d(x_n, c_n(0)) \leq 4\delta_x$  et  $d(y_n, c'_n(0)) \leq 4\delta_x$ .



Considérons maintenant une suite  $(g_n)_n$  d'éléments de  $G$  tels que  $g_n^{-1}$  appartient à une géodésique  $[x_n, y_n]$  et vérifie  $|d(x_n, g_n^{-1}) - d(y_n, g_n^{-1})| \leq 1$ . Quitte à extraire une suite de  $(g_n)_n$ , on peut supposer que

- La suite  $(g_n x_n)_n$  converge vers un point  $x \in X$  ;
- La suite  $(g_n y_n)_n$  converge vers un point  $y \in X$  ;
- La suite  $(g_n x_0)_n$  converge vers un point  $u \in \partial X$  ;
- La suite  $(g_n \bar{B}(x_0, R_n - K - 2\delta_X))_n$  converge vers une horoboule  $B \subset X \cap \partial X$  ;
- La suite  $(g_n c_n)_n$  converge vers une géodésique bi-infinie  $c$  joignant  $u$  à un point  $v \in \partial X$  ;
- La suite  $(g_n c'_n)_n$  converge vers une géodésique bi-infinie  $c'$  joignant  $u$  à un point  $v' \in \partial X$ .

Montrons dans un premier temps que l'intersection  $B \cap \partial X = \{u\}$ . Par construction, le point  $u$  appartient à  $B$ . Considérons maintenant un élément  $z \in \partial X$  distinct de  $u$ . Il existe alors une géodésique bi-infinie joignant  $c$  à  $z$  et deux rayons géodésiques joignant  $x$  à  $c$  et  $z$  respectivement. Ensemble, ils forment un triangle idéal dans  $X \cup \partial X$ . La Proposition 1.3.10 assure que ce triangle est  $4\delta_X$ -fin. Comme  $u$  et  $z$  sont distincts, la distance de  $x$  à  $(u, z)$  est bornée, disons inférieure ou égale à  $D$ . Considérons ensuite deux points  $a$  et  $b$  de  $X$  proches de  $u$  et  $z$  respectivement. Ces quatre points sont les sommets d'un quadrilatère idéal  $8\delta_X$ -fin. Par construction, tout point de  $(u, z)$  loin des extrémités est à moins de  $8\delta_X$  de  $[a, b]$ . Il existe donc bien un entier  $N$  tel que toute géodésique joignant des points proches de  $u$  et  $z$  passe à moins de  $N$  de  $x$ . Supposons maintenant que  $b$  appartient à  $(u, z)$  et que  $a = g_n x_0$  pour un certain  $n$  assez grand. Comme  $\langle a, b \rangle_x \leq N$ , on obtient

$$\begin{aligned} d(a, b) &\geq d(a, x) + d(b, x) - 2N \\ &\geq d(x_0, x_n) + d(b, x) - 2N. \end{aligned}$$

Dès que  $d(b, x) \geq 2N$ , on a  $d(a, b) \geq R_n$ . Ainsi  $z$  n'appartient pas à  $B$ .

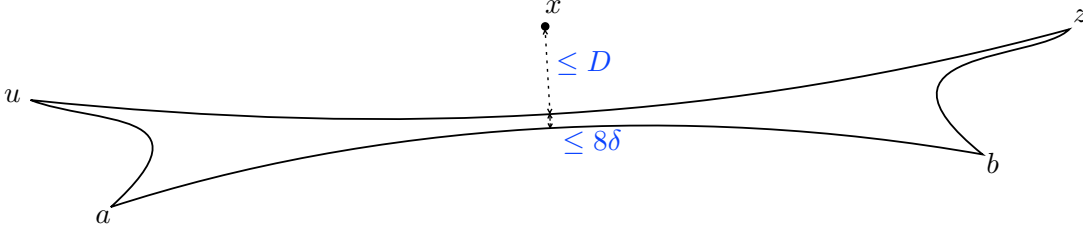


FIGURE 3.2 – Quadrilatère de sommets  $u, z, a, b$

Par ailleurs, montrons que les points  $v$  et  $v'$  sont dans des composantes distinctes de  $\partial X \setminus \{u\}$ . Pour cela, supposons que  $u$  n'est pas un point de séparation. Cela signifie que pour tout recouvrement  $\mathcal{U}$  de  $\partial X \setminus \{u\}$  et pour tous points  $z, z' \in \partial X \setminus \{u\}$ , il existe une chaîne d'ouverts  $U_1, \dots, U_k$  de  $\mathcal{U}$  telle que  $z \in U_1, z' \in U_k$  et  $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$  pour  $i \in \{1, \dots, k-1\}$ . Il existe donc un chemin joignant  $z$  à  $z'$  dans  $\cup U_i$  qui reste en dehors de  $B$ . Cela induit un chemin de  $v$  à  $v'$  dans  $X \cap \partial X$ . En associant à chaque point de  $\partial X$  un rayon issu de  $x_0$  représentant  $x$ , on peut pousser ce chemin via ces rayons en un chemin  $p$  dans  $X$ . La concaténation de  $p$  et des segments géodésiques  $[x, c(0)]$  et  $[y, c'(0)]$  avec

les restrictions de  $c$  et  $c'$  débutant en  $c(0)$  et  $c'(0)$  et d'extrémités coïncidant avec celles de  $p$  fournit un chemin  $q$  joignant  $x$  à  $y$  dans  $X$ . Dès que  $n$  vérifie  $\text{long}(q) \leq n$ ,  $g_n^{-1}q$  est un chemin de  $x_n$  à  $y_n$  en dehors de la boule  $\bar{B}(x_0, R_n - K - 2\delta_X)$ . Cela contredit le choix de  $x_n$  et  $y_n$ . On en conclut que le point  $u$  est un point de coupure de  $\partial X$ .  $\square$

Par ailleurs, rappelons le résultat suivant sur les points de coupure des groupes hyperboliques de bord connexe – ou de façon équivalente, à un bout.

**Théorème 3.2.2** [Bow99, 0.3],[Swa96]. *Si  $G$  est un groupe hyperbolique à un bout, alors le bord  $\partial G$  de  $G$  ne contient pas de points de coupure globaux.*  $\square$

En combinant les deux précédents résultats, on obtient immédiatement le corollaire suivant.

**Corollaire 3.2.3.** *Si  $G$  est un groupe hyperbolique de bord connexe, alors tout graphe de Cayley de  $G$  satisfait la propriété  $(\ddagger_{M,K})$  pour tout  $M > K > 0$ .*  $\square$

À l'aide des résultats du chapitre précédent, on déduit du Corollaire 3.2.3 le résultat suivant qui aura un rôle clé dans la Section 3.2.3.

**Corollaire 3.2.4.** *Soient  $G$  un groupe hyperbolique de bord connexe et  $H$  un sous-groupe quasi-convexe de  $G$ . Si  $X$  est un graphe de Cayley de  $G$  alors il existe une constante  $R_0$  telle que le nombre de bouts relatifs du couple  $(G, H)$  est égal au nombre de classes d'équivalence pour la relation  $\overset{R_0}{\sim}$  dans  $X$ .*

*Démonstration.* Le Corollaire 3.2.3 affirme que  $X$  satisfait la propriété  $(\ddagger_{M,K})$  pour tout  $M > K > 0$ . De plus, le Corollaire 2.3.13 indique que si  $M \geq 43\delta_{X/H} + 4$  et  $R_0 \geq M + \delta_{X/H}$  alors le nombre de bouts de  $X/H$  est égal au nombre de classes d'équivalence pour la relation  $\overset{R_0}{\sim}$  sur la sphère  $S(\bar{x}_0, R_0)$ . Or, par définition, le nombre de bouts de  $X/H$  est exactement le nombre de bouts relatifs du couple  $(G, H)$ .  $\square$

### 3.2.2 Détermination des constantes

On exprime ici les constantes intervenant dans les résultats précédents en termes des données initiales. On évalue :

- la constante de quasi-convexité de  $H$  ;
- la constante de prolongement des géodésiques dans  $X$  ;
- le diamètre du cœur convexe  $C(\Lambda H)/H$  ;
- la constante  $\alpha$  de la Proposition 2.1.1 ;
- la constante d'hyperbolicité de l'espace quotient  $X/H$ .

#### Un algorithme pour déterminer une constante de quasi-convexité pour $H$

Le groupe  $H$  est un sous-groupe quasi-convexe de  $G$ . C'est en particulier un groupe de type fini d'après la Proposition 1.2.11. Notons alors  $\mathcal{S}_H$  un système générateur fini pour  $H$  et  $\iota$  la longueur du plus grand élément de  $\mathcal{S}_H$  pour  $d_S$ . Remarquons que le graphe de Cayley de  $H$  associé à  $\mathcal{S}_H$  est

un sous-graphe  $Y$  de  $X$  dont les sommets sont les éléments de  $H$  et pour lequel deux sommets sont joints par une arête s'ils diffèrent par un élément de  $\mathcal{S}_H$ .

Dans un premier temps, puisque  $H$  agit par isométrie sur le graphe de Cayley  $X$ , remarquons que le critère local de quasi-convexité (Proposition 1.2.7) se formule de la façon suivante dans le cas présent.

**Proposition 3.2.5.** *S'il existe une constante  $\eta \geq 50\delta$  telle que pour tout point  $y \in Y$  vérifiant  $d(1, y) \leq 2\eta + 100\delta$ ,  $Y$  est à distance inférieure ou égale à  $\eta - 50\delta$  du milieu de tout segment géodésique  $[1, h]$  alors  $Y$  est  $19\eta$ -quasi-convexe.  $\square$*

La procédure suivante permet d'expliciter une constante  $\eta$  vérifiant les hypothèses de cette proposition.

**Initialisation.** *Commençons avec  $\eta = \lceil 50\delta + 1 \rceil$ .*

**Étape 1.** *Dessignons la boule fermée  $\bar{B}(1, 2\eta + 100\delta)$  dans  $X$ . Notons  $h_1^\eta, \dots, h_{n_\eta}^\eta$  les éléments de  $H$  dans cette boule.*

**Étape 2.** *Pour chaque  $i \in \{1, \dots, n_\eta\}$ , considérons les segments géodésiques joignant 1 à  $h_i^\eta$  et dessinons les boules de rayon  $\eta - 50\delta - 1$  centrées au milieu de ces segments. Si l'une de ces boules ne contient pas d'élément de  $H$ , on incrémente  $\eta$  de 1 et on reprend l'étape 1. avec cette nouvelle valeur de  $\eta$ .*

**Conclusion.** *Si la procédure s'arrête : la constante  $\eta$  est telle que toutes les boules de rayon  $\eta - 50\delta - 1$  centrées au milieu de segments géodésiques joignant 1 à  $h_1^\eta, \dots, h_{n_\eta-1}^\eta$  et  $h_{n_\eta}^\eta$  contiennent toutes des éléments de  $H$ .*

En d'autres termes, cette procédure donne une valeur de  $\eta$  pour laquelle les éléments de  $H$  dans la boule  $\bar{B}(1, 2\eta + 100\delta)$  forment un ensemble  $(\eta - 50\delta - 1)$ -quasi-convexe. Ainsi  $Y \cap \bar{B}(1, 2\eta + 100\delta)$  forme un ensemble  $(\eta - 50\delta)$ -quasi-convexe. D'après la Proposition 3.2.5, cela signifie que  $Y$  est un sous-graphe  $19\eta$ -quasi-convexe de  $X$ .

### Une constante de prolongement des géodésiques pour $X$

La Proposition 1.3.12 indique que pour tout point  $x \in X$ , il existe un rayon géodésique issu de  $x_0$  passant à moins de  $4\delta + D$  de  $x$  où  $D$  est tel que  $G \cdot B(x_0, D) = X$ . Or dans le cas présent,  $X$  est un graphe de Cayley et  $D = \delta$  convient. Une constante de prolongement des géodésiques dans  $X$  est donc  $5\delta$ .

Pour que le graphe de Cayley  $X$  du groupe  $G$  considéré ici satisfasse les conditions de la Proposition 3.2.1, il suffit de prendre  $\delta_X = 5\delta$ . Dans ce cas, comme le bord de  $X$  est connexe, on peut affirmer que pour tout  $M > K > 0$ , l'espace  $X$  satisfait la condition  $(\ddagger_{M,K})$ .

### Une borne pour le diamètre du cœur convexe $C(\Lambda H)/H$

D'après la Proposition 1.5.8, le diamètre du cœur convexe est inférieur ou égal à  $2(\kappa + 2\delta_X + \varepsilon + 3)$ .

On a déjà vu ci-dessus que la constante de quasi-convexité  $\varepsilon$  de  $H$  peut être déterminée explicitement en fonction de  $\delta$ . De plus, puisque l'espace  $X$  est un graphe de Cayley, la quantité  $\sigma =$

$\max\{d(x_0, s \cdot x_0) \mid s \in \mathcal{S}\}$  vaut 1. Cela simplifie l'expression de la constante  $\kappa$  provenant du Théorème 1.1.14 de stabilité des quasi-géodésiques qui devient  $\kappa = 64\delta_x \log_2(128 + 2/\delta_x + 16) + 8 + 64\delta_x + 2$ . D'après le point précédent, on a bien une borne du diamètre du cœur convexe  $C(\Lambda H)/H$  en fonction de la constante d'hyperbolicité  $\delta$  de  $G$  :

$$\text{diam}(C(\Lambda H)/H) \leq 2(\kappa(\delta) + 10\delta + \varepsilon(\delta) + 3).$$

### La constante $\alpha$

La preuve de la Proposition 2.1.1 montre que la valeur  $(40 + 100n_0)\delta_x + 8\varepsilon$  convient pour  $\alpha$ . Par ailleurs, le résultat [Del96, 3.1] indique que la constante  $n_0$  vaut  $\#B(1, 8\delta_H)^2!$  où  $\delta_H$  est une constante d'hyperbolicité pour  $H$ . D'après la Proposition 1.2.13, la constante  $\delta_H$  vaut  $(2\varepsilon + 1)(2\kappa + \delta_x)$  où, comme ci-dessus,  $\kappa$  ne dépend que de  $\delta_x$ .

Il suffit ensuite de remarquer que le cardinal de la boule  $B(1, 8\delta_H)$  est le nombre de mots de longueur inférieure ou égale à  $8\delta_H$  acceptés par l'automate reconnaissant les géodésiques du groupe  $H$  (voir [CDP90, XII]). On peut donc déterminer  $n_0$  à l'aide de la matrice d'adjacence de cet automate. La constante  $\alpha$  peut ainsi être déterminée.

### Une constante d'hyperbolicité pour $X/H$

On a vu dans le Théorème 2.1.2 qu'une constante d'hyperbolicité pour  $X/H$  peut être donnée en fonction du diamètre du cœur convexe, de la constante d'hyperbolicité de  $X$  et de la constante de quasi-convexité de  $H$  par l'expression  $2(\text{diam}(C(\Lambda H)/H) + \alpha + \varepsilon) + 65\delta_x$ . De plus, on veut que pour tout point de  $X/H$ , il existe une géodésique issue de  $\bar{x}_0$  passant à distance uniforme égale à la constante d'hyperbolicité de  $X/H$ . Pour cela, le Corollaire 2.1.5 indique que la constante d'hyperbolicité de  $X/H$  doit être supérieure à  $8(\text{diam}(C(\Lambda H)/H) + \alpha + \varepsilon) + 264\delta_x + D + \kappa'$ . La constante  $\kappa'$  provient du théorème de stabilité des quasi-géodésiques et vaut dans ce cas  $128d^2 \log_2(512d^2 + 48d) + 384d^2 + 8d$  où  $d = 2(\text{diam}(C(\Lambda H)/H) + \alpha + \varepsilon) + 65\delta_x$ . On retiendra que  $\kappa'$  ne dépend finalement que de  $\delta$  et  $n_0$ .

D'après les points précédents, l'expression suivante donne une constante d'hyperbolicité de  $X/H$  ayant cette propriété :

$$\delta_{X/H} = 16(\kappa(\delta) + 10\delta + \varepsilon(\delta) + 3) + 8\alpha(\delta, n_0) + 8\varepsilon(\delta) + 1500\delta + \kappa'(\delta, n_0).$$

### 3.2.3 Détermination du nombre de bouts relatifs

L'objet de ce paragraphe est la démonstration du théorème suivant.

**Théorème 3.2.6.** *Soit  $G$  un groupe  $\delta$ -hyperbolique de bord connexe donné par une présentation finie  $\langle \mathcal{S} \mid \mathcal{R} \rangle$ . Soit  $H$  un sous-groupe quasi-convexe de  $G$ . Il existe un algorithme permettant de déterminer le nombre de bouts relatifs du couple  $(G, H)$ .*

On rappelle que, dans cette section,  $X$  représente un graphe de Cayley de  $G$ . En particulier,  $X$  est aussi un espace  $\delta_x$ -hyperbolique et  $X/H$  est alors un espace  $\delta_{X/H}$ -hyperbolique. De plus, on

a fixé un point  $x_0$  de l'enveloppe convexe faible  $C(\Lambda H)$  de l'ensemble limite de  $H$ . Ces notations établies, démontrons tout d'abord le lemme suivant.

**Lemme 3.2.7.** *Soit  $R_0 > 8\delta_{X/H} + \delta_X$ . S'il existe un chemin de longueur finie joignant deux points de la sphère  $S(\bar{x}_0, R_0)$  en dehors de la boule  $\bar{B}(\bar{x}_0, R_0 - 8\delta_{X/H})$  alors il existe un chemin injectif joignant ces points dans l'anneau  $A(\bar{x}_0, R_0 - 8\delta_{X/H}, R_0 + 10\delta_X(\#\mathcal{S})^{R_0})$ .*

L'injectivité du chemin intervient dans l'algorithme décrit dans la démonstration du Théorème 3.2.6 ; elle permet de réduire le nombre de chemin à tester lorsque l'on détermine les classes d'équivalences sur la sphère  $S(\bar{x}_0, R_0)$ .

*Démonstration.* Soient  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  deux points sur la sphère  $S(\bar{x}_0, R_0)$  joints par un chemin de longueur finie en dehors de la boule  $\bar{B}(\bar{x}_0, R_0 - 8\delta_{X/H})$ . Notons  $\bar{x} = \bar{p}_0, \bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n = \bar{y}$  des points sur ce chemin vérifiant  $d(\bar{p}_i, \bar{p}_{i+1}) \leq \delta_X$  pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$ .

Comme  $R_0 - 8\delta_{X/H} - \delta_X > \delta_{X/H}$ , on peut relever toute boule fermée de rayon  $\delta_X$  centrée en un point  $\bar{p}_i$ . Soit  $x$  un relevé de  $\bar{x} = \bar{p}_0$ . Commençons par relever la boule  $B(\bar{p}_0, \delta_X)$  en la boule  $B(p_0, \delta_X)$ . Par construction, cette boule contient un relevé  $p_1$  de  $\bar{p}_1$  vérifiant  $d(p_0, p_1) \leq \delta_X$ . Par récurrence, on obtient des relevés  $p_i$  des  $\bar{p}_i$  vérifiant encore  $d(p_i, p_{i+1}) \leq \delta_X$  pour  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ . Notons  $y = p_n$  le relevé de  $\bar{y} = \bar{p}_n$  ainsi obtenu.

On note  $\pi_{R_0}$  la projection à  $\delta_X$  près de  $X$  sur l'orbite épaissie  $(H \cdot x_0)^{+R_0}$  qui est  $2\delta_X$ -quasi-convexe (voir Proposition 1.2.4). Comme  $d(\bar{x}_0, \bar{x}) = d(\bar{x}_0, \bar{y}) = R_0$ , on a aussi  $d(H \cdot x_0, x) = d(H \cdot x_0, y) = R_0$  et alors  $\pi_{R_0}(x) = x$  et  $\pi_{R_0}(y) = y$ . On projette ensuite les points  $p_i$  sur  $(H \cdot x_0)^{+R_0}$ . D'après la Proposition 1.2.8(2), pour tout  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ , on a alors

$$\begin{aligned} d(\pi_{R_0}(p_i), \pi_{R_0}(p_{i+1})) &\leq d(p_i, p_{i+1}) + 18\delta_X \\ &\leq 19\delta_X. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} d(\overline{\pi_{R_0}(p_i)}, \overline{\pi_{R_0}(p_{i+1})}) &\leq 19\delta_X \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \\ d(\bar{x}, \overline{\pi_{R_0}(p_1)}) &\leq 19\delta_X, \\ d(\overline{\pi_{R_0}(p_{n-1})}, \bar{y}) &\leq 19\delta_X. \end{aligned}$$

On peut donc joindre  $\bar{x}$  à  $\bar{y}$  par un chemin formé en concaténant des chemins de longueur inférieure ou égale à  $19\delta_X$  joignant les  $\overline{\pi_{R_0}(p_i)}$ . Quitte à supprimer d'éventuelles boucles sur ce chemin (certains  $\overline{\pi_{R_0}(p_i)}$  pouvant être égaux), on obtient un chemin de longueur inférieure ou égale à  $19\delta_X \times \#\mathcal{S}_{R_0}$  joignant  $\bar{x}$  à  $\bar{y}$  en dehors de la boule  $B(\bar{x}_0, R_0 - 10\delta_X)$ .

Par définition, le cardinal de la sphère  $S(\bar{x}_0, R_0)$  est à son tour inférieur à  $(\#\mathcal{S})^{R_0}$ . On en déduit que  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  sont joints par un chemin injectif de longueur inférieure ou égale à  $19\delta_X \times (\#\mathcal{S})^{R_0}$ .

En conclusion, deux points de la sphère  $S(\bar{x}_0, R_0)$  joints par un chemin de longueur finie en dehors de la boule  $\bar{B}(\bar{x}_0, R_0 - 8\delta_{X/H})$  sont en fait joints par un chemin dans l'anneau ouvert  $A(\bar{x}_0, R_0 - 8\delta_{X/H}, R_0 + 10\delta_X(\#\mathcal{S})^{R_0})$ .  $\square$

Remarquons qu'en vertu de la section précédente, on est en mesure d'exprimer les différentes constantes intervenant dans la démonstration en fonction des données initiales du problème.

On peut maintenant donner une preuve du Théorème 3.2.6.

*Démonstration.* Le groupe  $G$  étant un groupe hyperbolique de bord connexe, on peut appliquer le Corollaire 3.2.4. Pour tout  $M \geq 43\delta_{X/H} + 4$ , il existe ainsi une constante  $R_0 = M + \delta_{X/H}$  telle que le nombre de bouts relatifs du couple  $(G, H)$  est égal au nombre de classes d'équivalence pour la relation  $\overset{R_0}{\sim}$ . Il s'agit donc de déterminer quand est-ce que deux points de  $S(\bar{x}_0, R_0)$  sont joints par un chemin de longueur finie en dehors de la boule ouverte  $B(\bar{x}_0, R_0 - 3\delta_{X/H})$ .

Pour ce faire, notons que d'après le Corollaire 3.2.3, le graphe de Cayley  $X$  de  $G$  satisfait la propriété  $(\dagger_{M,K})$  pour tout  $M > K > 0$ . En particulier,  $X$  satisfait  $(\dagger_{M,4\delta_{X/H}})$  pour tout  $M > 4\delta_{X/H}$ . La Proposition 2.2.4 indique alors que l'espace quotient  $X/H$  satisfait  $(\dagger_M)$ . Cela signifie que deux points de  $S(\bar{x}_0, R_0)$  à distance inférieure ou égale à  $M$  sont joints par un chemin de longueur finie en dehors de la boule  $\bar{B}(\bar{x}_0, R_0 - 8\delta_{X/H})$ .

On applique maintenant le Lemme 3.2.7 : deux points de  $S(\bar{x}_0, R_0)$  joints par un chemin en dehors de  $\bar{B}(\bar{x}_0, R_0 - 8\delta_{X/H})$  sont joints par un chemin injectif dans l'anneau ouvert  $A(\bar{x}_0, R_0 - 8\delta_{X/H}, R_0 + 10\delta_X(\#\mathcal{S})^{R_0})$ . Il suffit donc de dessiner la boule  $\bar{B}(\bar{x}_0, R_0 + 10\delta_X(\#\mathcal{S})^{R_0})$  pour déterminer si deux points de la sphère  $S(\bar{x}_0, R_0)$  sont joints par un chemin en dehors de  $B(\bar{x}_0, R_0 - 3\delta_{X/H})$  et être en mesure de répartir les éléments de  $S(\bar{x}_0, R_0)$  en classes d'équivalence pour  $\overset{R_0}{\sim}$ . On détermine ainsi le nombre de bouts relatifs du couple  $(G, H)$ .  $\square$

### 3.3 Groupes à une infinité de bouts

**Proposition 3.3.1.** *Soit  $G$  un groupe hyperbolique sans torsion. Soit  $H$  un sous-groupe quasi-convexe d'indice infini dans  $G$ . Si le groupe  $G$  a une infinité de bouts alors il existe des ouverts compacts dans  $\partial G \setminus \partial H$ .*

*Démonstration.* Le groupe  $G$  est sans torsion et admet une infinité de bouts. Il existe donc des groupes hyperboliques  $A$  et  $B$ , qui ne sont pas réduits à un élément, tels que  $G = A * B$ .

Dans un premier temps, déterminons le bord de  $G$  dans ce cas. Notons  $p$  un segment unité d'extrémité initiale  $p_A$  et d'extrémité terminale  $p_B$  et  $\bar{p}$  le segment parcouru de  $p_B$  vers  $p_A$ . L'arbre de Bass-Serre  $T$  de la décomposition  $G = A * B$  est obtenu en quotientant  $G \times p$  par la relation d'équivalence  $\sim$  vérifiant

$$\begin{aligned} gp_A \sim g'p_A & \quad \text{si} \quad g^{-1}g' \in A, \\ gp_B \sim g'p_B & \quad \text{si} \quad g^{-1}g' \in B. \end{aligned}$$

On note  $[gx]$  la classe d'équivalence de  $gx \in G \times p$ . Le groupe  $G$  agit sur les éléments de  $T$  de la façon suivante : pour  $g' \in G$ ,  $g' \cdot [gx] = [(g'g)x]$ . On remarque alors que toute arête de la forme  $[gp] = \{[gx] \mid x \in p\}$  forme un domaine fondamental pour l'action de  $G$  sur  $T$ . En particulier, on en déduit que le stabilisateur de toute arête dans  $T$  est le groupe réduit à un élément. Le stabilisateur

d'un sommet  $[gp_A]$  est l'ensemble  $\{g' \in G \mid g' \cdot [gp_A] = [gp_A]\} = \{g' \in G \mid g^{-1}g'g \in A\}$  qui est donc un conjugué de  $A$ . De même, le stabilisateur d'un sommet  $[gp_B]$  est un conjugué de  $B$ .

On construit ensuite le graphe  $X$  comme étant la réunion d'un graphe de Cayley  $X_A$  pour  $A$ , d'un graphe de Cayley  $X_B$  pour  $B$  et de  $p$  en identifiant  $p_A$  avec l'origine de  $X_A$  et  $p_B$  avec l'origine de  $X_B$ . On considère alors le graphe  $\Gamma$  obtenu en quotientant  $G \times X$  par la relation d'équivalence  $\sim$  donnée par

$$\begin{aligned} gx_1 \sim g'x_2 & \text{ si } x_1, x_2 \in A, \quad g^{-1}g' \in A, \quad g^{-1}g'x_2 = x_1, \\ gx_1 \sim g'x_2 & \text{ si } x_1, x_2 \in B, \quad g^{-1}g' \in B, \quad g^{-1}g'x_2 = x_1. \end{aligned}$$

La contraction de  $X_A$  et  $X_B$  en leur origine induit une application continue  $G$ -équivariante de  $\Gamma$  dans  $T$ . La pré-image d'un sommet de  $T$  par cette application est alors un sous-graphe de  $\Gamma$  isomorphe à un graphe de Cayley du stabilisateur de ce sommet pour l'action de  $G$  sur  $T$ .

Le bord de  $G$  est décrit dans l'article [MS15] d'A.Martin et J.Światkowski. Il est homéomorphe à la réunion du bord des stabilisateurs des sommets de  $T$  et du bord de  $T$ . Plus précisément, le bord des stabilisateurs des sommets de  $T$  est l'ensemble  $G \times \partial A \cup \partial B$  quotienté par la relation d'équivalence  $\sim$  donnée par

$$\begin{aligned} gu_1 \sim g'u_2 & \text{ si } u_1, u_2 \in \partial A, \quad g^{-1}g' \in A, \quad g^{-1}g'u_2 = u_1, \\ gu_1 \sim g'u_2 & \text{ si } u_1, u_2 \in \partial B, \quad g^{-1}g' \in B, \quad g^{-1}g'u_2 = u_1. \end{aligned}$$

En notant  $[gu]$  la classe d'équivalence de  $gu \in G \times \partial A \cup \partial B$ , l'action de  $G$  sur  $(G \times \partial A \cup \partial B)/\sim$  prend la forme suivante : pour  $g' \in G$ , on a  $g' \cdot [gu] = [(g'g)u]$ . L'espace  $G \times \partial A \cup \partial B/\sim$  se projette ainsi naturellement sur les sommets de l'arbre de Bass-Serre  $T$ . La pré-image d'un sommet de  $T$  par cette projection est isomorphe au bord du stabilisateur de ce sommet pour l'action de  $G$  sur  $T$ . Le bord de  $T$  est quant-à-lui décrit par les classes d'équivalence de rayons géodésiques infinis de  $T$  où deux tels rayons sont dits équivalents s'ils ne diffèrent que sur un segment initial. Une action du groupe  $G$  sur le bord de  $T$  et induite par l'action de  $G$  sur  $T$ .

Le bord de  $G$  est donc composé de trois sortes de points : les points de  $\partial A$ , les points de  $\partial B$  et les points de  $\partial T$ .

La description de la topologie du bord montre que dans le bord de  $G$ , les bords de  $A$  et  $B$  sont ouverts et compacts. De plus, pour tout élément  $g \in G$ , on a  $\partial gAg^{-1} = g\partial A$  et  $\partial gBg^{-1} = g\partial B$ . Le bord de tout conjugué de  $A$  et  $B$  est donc encore un ouvert compact de  $\partial G$ .

Montrons maintenant qu'il existe des conjugués de  $A$  dont l'intersection avec le bord de  $H$  est vide. Pour ce faire, considérons un point  $u \in \partial G$  loin de  $\partial H$ . On peut par exemple prendre  $u$  vérifiant, pour  $K > 0$  fixé,  $\langle u, h \rangle < K$  pour tout  $h \in \partial H$ . De la même façon, considérons un point  $v \in \partial G$  en dehors de  $\partial A$ .

Rappelons que l'ensemble des couples de points fixes répulsifs-attractifs d'éléments de  $G$  est dense dans l'ensemble des couples de points distincts du bord de  $G$ . Il existe donc une suite  $(g_n)_n$  d'éléments de  $G$  telle que  $(g_n^-, g_n^+)_n$  tend vers  $(u, v)$ . Il existe alors un rang  $n$  pour lequel  $g_n^-$  est loin de  $\partial H$  et  $g_n^+$  est en dehors de  $\partial A$ . En particulier, pour un entier  $k > 0$ ,  $g_n^{-k}\partial A$  est loin de  $\partial H$ .

On en déduit que  $\partial g_n^k A g_n^{-k}$  n'intersecte pas le bord de  $H$ . On a ainsi déterminé une suite d'ouverts compacts de  $\partial G \setminus \partial H$ .

De la même façon, on peut déterminer à partir de  $B$  d'autres ouverts compacts de  $\partial G \setminus \partial H$ .  $\square$

**Proposition 3.3.2.** *Soit  $G$  un groupe hyperbolique sans torsion. Soit  $H$  un sous-groupe quasi-convexe d'indice infini dans  $G$ . Si le groupe  $G$  a une infinité de bouts alors il existe des ouverts compacts dans  $\partial G/H$ .*

En particulier, le bord de  $G/H$  n'est pas localement connexe.

*Démonstration.* Comme  $H$  est un sous-groupe de  $G$ , il agit par isométrie et proprement discontinuement sur  $G$  vu en tant qu'espace métrique. Selon le Théorème 1.5.10, le groupe  $H$  agit alors proprement discontinuement sur  $\partial G \setminus \Lambda H$ . La combinaison de la Proposition 2.1.8 avec la Proposition 2.1.9 indique alors que l'application  $\partial G \setminus \Lambda H \rightarrow \partial G/H$  est un revêtement. L'espace  $\partial G \setminus \Lambda H$  est donc localement homéomorphe à  $\partial G/H$ .

D'après la Proposition 3.3.1, il existe des ouverts compacts dans  $\partial G \setminus \Lambda H$ . Comme  $\partial G \setminus \Lambda H$  et  $\partial G/H$  sont localement homéomorphes, il existe aussi des ouverts compacts dans  $\partial G/H$ .  $\square$





# Bibliographie

- [ABC<sup>+</sup>91] J. M. Alonso, T. Brady, D. Cooper, V. Ferlini, M. Lustig, M. Mihalik, M. Shapiro, and H. Short. Notes on word hyperbolic groups. In *Group theory from a geometrical viewpoint (Trieste, 1990)*, pages 3–63. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991. Edited by Short.
- [Ady55] S. I. Adyan. Algorithmic unsolvability of problems of recognition of certain properties of groups. *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, 103 :533–535, 1955.
- [Alo90] Juan M. Alonso. Inégalités isopérimétriques et quasi-isométries. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 311(12) :761–764, 1990.
- [Arz01] G. N. Arzhantseva. On quasiconvex subgroups of word hyperbolic groups. *Geom. Dedicata*, 87(1-3) :191–208, 2001.
- [BH99] Martin R. Bridson and André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [BM91] Mladen Bestvina and Geoffrey Mess. The boundary of negatively curved groups. *J. Amer. Math. Soc.*, 4(3) :469–481, 1991.
- [Bor53] Armand Borel. Les bouts des espaces homogènes de groupes de Lie. *Ann. of Math. (2)*, 58 :443–457, 1953.
- [Bow99] Brian H. Bowditch. Connectedness properties of limit sets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 351(9) :3673–3686, 1999.
- [CDP90] M. Coornaert, T. Delzant, and A. Papadopoulos. *Géométrie et théorie des groupes*, volume 1441 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [Coo89] Michel Coornaert. Sur le domaine de discontinuité pour les groupes d’isométries d’un espace métrique hyperbolique. *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari*, 59(2) :185–195, 1989.
- [Del96] Thomas Delzant. Sous-groupes distingués et quotients des groupes hyperboliques. *Duke Math. J.*, 83(3) :661–682, 1996.
- [Efr54] V. A. Efremovič. Almost topological properties. *Ivanov. Gos. Ped. Inst. Uč. Zap. Fiz.-Mat. Nauki*, 5 :3–8, 1954.
- [Foo00] Robert Foord. *Automaticity and Growth in Certain Classes of Groups and Monoids*. PhD thesis, University of Warwick, 2000.

- 
- [Fre31] Hans Freudenthal. Über die Enden topologischer Räume und Gruppen. *Math. Z.*, 33(1) :692–713, 1931.
- [GdlH90] Étienne Ghys and Pierre de la Harpe. Le bord d’un espace hyperbolique. In *Sur les groupes hyperboliques d’après Mikhael Gromov (Bern, 1988)*, volume 83 of *Progr. Math.*, pages 117–134. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
- [Geo08] Ross Geoghegan. *Topological methods in group theory*, volume 243 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2008.
- [Ger99] V. Gerasimov. Detecting connectedness of the boundary of a hyperbolic group. Preprint, 1999.
- [Gro81] Mikhael Gromov. Groups of polynomial growth and expanding maps. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (53) :53–73, 1981.
- [Gro87] Mikhael Gromov. Hyperbolic groups. In *Essays in group theory*, volume 8 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 75–263. Springer, New York, 1987.
- [Gro93] Mikhael Gromov. Asymptotic invariants of infinite groups. In *Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991)*, volume 182 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 1–295. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- [GS91] S. M. Gersten and H. B. Short. Rational subgroups of biautomatic groups. *Ann. of Math. (2)*, 134(1) :125–158, 1991.
- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [Hop44] Heinz Hopf. Enden offener Räume und unendliche diskontinuierliche Gruppen. *Comment. Math. Helv.*, 16 :81–100, 1944.
- [Hou74] C. H. Houghton. Ends of locally compact groups and their coset spaces. *J. Austral. Math. Soc.*, 17 :274–284, 1974. Collection of articles dedicated to the memory of Hanna Neumann, VII.
- [Kap02] I. Kapovich. The geometry of relative Cayley graphs for subgroups of hyperbolic groups. *ArXiv Mathematics e-prints*, January 2002.
- [KB02] Ilya Kapovich and Nadia Benakli. Boundaries of hyperbolic groups. In *Combinatorial and geometric group theory (New York, 2000/Hoboken, NJ, 2001)*, volume 296 of *Contemp. Math.*, pages 39–93. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
- [KS96] Ilya Kapovich and Hamish Short. Greenberg’s theorem for quasiconvex subgroups of word hyperbolic groups. *Canad. J. Math.*, 48(6) :1224–1244, 1996.
- [KW04] Ilya Kapovich and Richard Weidmann. Freely indecomposable groups acting on hyperbolic spaces. *Internat. J. Algebra Comput.*, 14(2) :115–171, 2004.
- [LS77] Roger C. Lyndon and Paul E. Schupp. *Combinatorial group theory*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 89.
- [Lyn63] Roger C. Lyndon. Length functions in groups. *Math. Scand.*, 12 :209–234, 1963.

- [Mil68] J. Milnor. A note on curvature and fundamental group. *J. Differential Geometry*, 2 :1–7, 1968.
- [Mil92] Charles F. Miller. *Decision Problems for Groups — Survey and Reflections*, pages 1–59. Springer New York, New York, NY, 1992.
- [Mor24] Harold Marston Morse. A fundamental class of geodesics on any closed surface of genus greater than one. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 26(1) :25–60, 1924.
- [MS15] Alexandre Martin and Jacek Świątkowski. Infinitely-ended hyperbolic groups with homeomorphic Gromov boundaries. *J. Group Theory*, 18(2) :273–289, 2015.
- [MT94] Michael L. Mihalik and Williams Towle. Quasiconvex subgroups of negatively curved groups. *J. Pure Appl. Algebra*, 95(3) :297–301, 1994.
- [Nie21] Jakob Nielsen. Om regning med ikke-kommutative faktorer og dens anvendelse i gruppeteorien. (Über das Rechnen mit nicht-vertauschbaren Faktoren und dessen Anwendung in der Gruppentheorie.). *Mat. Tidsskr. B*, 1921 :78–94, 1921.
- [Nie27] Jakob Nielsen. Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen. *Acta Math.*, 50(1) :189–358, 1927.
- [Rab58] Michael O. Rabin. Recursive unsolvability of group theoretic problems. *Ann. of Math. (2)*, 67 :172–194, 1958.
- [Rip82] E. Rips. Subgroups of small cancellation groups. *Bull. London Math. Soc.*, 14(1) :45–47, 1982.
- [Sch27] Otto Schreier. Die Untergruppen der freien Gruppen. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 5(1) :161–183, 1927.
- [Sco78] Peter Scott. Ends of pairs of groups. *J. Pure Appl. Algebra*, 11(1-3) :179–198, 1977/78.
- [Ser77] Jean-Pierre Serre. *Arbres, amalgames,  $SL_2$* . Société Mathématique de France, Paris, 1977. Avec un sommaire anglais, Rédigé avec la collaboration de Hyman Bass, Astérisque, No. 46.
- [Sta71] John R. Stallings. Group theory and 3-manifolds. In *Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 2*, pages 165–167. Gauthier-Villars, Paris, 1971.
- [SW79] Peter Scott and Terry Wall. Topological methods in group theory. In *Homological group theory (Proc. Sympos., Durham, 1977)*, volume 36 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 137–203. Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York, 1979.
- [Swa96] G. A. Swarup. On the cut point conjecture. *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.*, 2(2) :98–100 (electronic), 1996.
- [Swe01] Eric L. Swenson. Quasi-convex groups of isometries of negatively curved spaces. *Topology Appl.*, 110(1) :119–129, 2001. Geometric topology and geometric group theory (Milwaukee, WI, 1997).
- [Š55] A. S. Švarc. A volume invariant of coverings. *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, 105 :32–34, 1955.

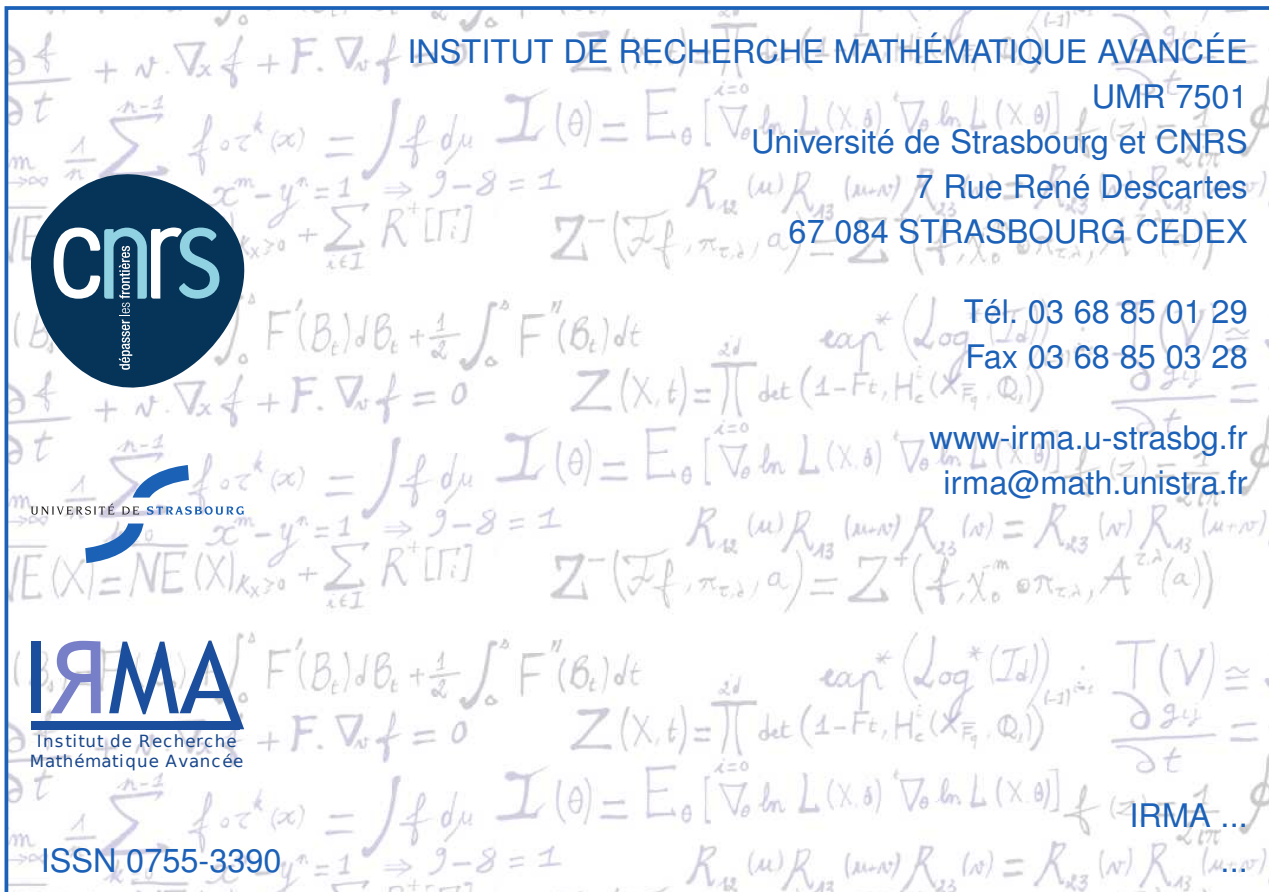




On s'intéresse dans cette thèse à la topologie à l'infini des graphes de Schreier.

Dans un premier temps, on étudie le quotient  $X/H$  d'un espace métrique géodésique propre hyperbolique  $X$  par un groupe quasi-convexe-cocompact  $H$  d'isométries de  $X$ . En particulier, on montre que  $X/H$  est un espace hyperbolique. On s'intéresse ensuite aux bouts de cet espace. On prouve que si  $X$  satisfait une condition de Bestvina-Mess, alors le nombre de bouts de l'espace quotient  $X/H$  est égal au nombre de composantes connexes du bord du cœur convexe.

On applique ensuite ces considérations à la théorie des groupes. En particulier, on se demande s'il existe un algorithme permettant de déterminer le nombre de bouts d'un groupe hyperbolique relativement à un sous-groupe. La réponse à cette question est négative en général : on peut construire des groupes et sous-groupes pour lesquels un tel algorithme n'existe pas. En revanche, si le sous-groupe est quasi-convexe, on donne un algorithme permettant de calculer le nombre de bouts relatifs. Par ailleurs, on montre que le bord d'un groupe hyperbolique sans torsion ayant une infinité de bouts n'est pas localement connexe par arcs.



**INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE**  
UMR 7501  
Université de Strasbourg et CNRS  
7 Rue René Descartes  
67 084 STRASBOURG CEDEX

Tél. 03 68 85 01 29  
Fax 03 68 85 03 28  
[www-irma.u-strasbg.fr](http://www-irma.u-strasbg.fr)  
[irma@math.unistra.fr](mailto:irma@math.unistra.fr)

**IRMA**  
Institut de Recherche  
Mathématique Avancée

ISSN 0755-3390

**cnrs**  
dépasser les frontières

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

IRMA...