



**HAL**  
open science

# Modélisation de la variabilité des temps de parcours et son intégration dans des algorithmes de recherche du plus court chemin stochastique

Raphaël Delhome

► **To cite this version:**

Raphaël Delhome. Modélisation de la variabilité des temps de parcours et son intégration dans des algorithmes de recherche du plus court chemin stochastique. Infrastructures de transport. Université de Lyon, 2016. Français. NNT : 2016LYSET010 . tel-01576746

**HAL Id: tel-01576746**

**<https://theses.hal.science/tel-01576746v1>**

Submitted on 23 Aug 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° d'ordre NNT: 2016LYSET010

## THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

Opérée au sein de

**l'École Nationale des Travaux Publics de l'État**

**École Doctorale N° 162**

**Mécanique, Énergétique, Génie Civil et Acoustique**

**Spécialité / discipline de doctorat : Génie Civil**

Soutenue publiquement le 01/12/2016, par :

**Raphaël Delhome**

---

# Modélisation de la variabilité des temps de parcours et son intégration dans des algorithmes de recherche du plus court chemin stochastique

---

Devant le jury composé de :

C. SOLNON	Professeur (INSA Lyon)	<i>Présidente du jury</i>
A. MOUKRIM	Professeur (UTC)	<i>Rapporteur</i>
M. RACHDI	Professeur (Univ. Grenoble-Alpes)	<i>Rapporteur</i>
M.-J. HUGUET	Professeur (INSA Toulouse)	<i>Examinatrice</i>
N.-E. EL FAOUZI	Directeur de recherche (IFSTTAR/ENTPE)	<i>Directeur de thèse</i>
R. BILLOT	Maître de Conférences (Télécom Bretagne)	<i>Co-directeur de thèse</i>
O. COURTIN	Directeur associé (OSLANDIA)	<i>Invité</i>

*Thèse préparée au laboratoire*

**LICIT**

Laboratoire Ingénierie Circulation Transports

UMR T\_E IFSTTAR-ENTPE

Université de Lyon



IFSTTAR  
COSYS/LICIT  
25 Avenue François Mitterrand Case 24  
Cité des mobilités  
69675 Bron Cedex, France



ENTPE  
LICIT  
Rue Maurice Audin  
69518 Vaulx-en-Velin Cedex, France

# Remerciements

La conduite d'un projet tel que peut l'être une thèse de doctorat est une entreprise longue, harassante, mais ô combien formatrice. Trois ans de réflexions, de découvertes, et d'un bon nombre de péripéties. Trois ans de succès comme de déceptions, de plaisir et d'insatisfaction, de hauts mais aussi de bas. Heureusement les premiers sont plus nombreux !

Mes premières pensées à l'écriture de ces lignes vont à MM. Nour-Eddin El Faouzi et Romain Billot, mes encadrants pour cette thèse. Je me rappelle encore nos débuts, une prise de contact à distance source de stress, autant pour vous que pour moi d'ailleurs... Mais passée cette incertitude initiale, je crois pouvoir avancer que le jeu en valait la chandelle. Merci de m'avoir fait confiance à ce moment-là comme sur toute la durée de l'exercice. De m'avoir accompagné comme il se devait, mais aussi de m'avoir laissé piloter le navire jusqu'au bout. Au-delà de vos compétences scientifiques et professionnelles (de taille !), je retiendrais aussi des qualités humaines indéfectibles sans lesquelles cette expérience aurait été toute autre.

Je tiens également à remercier MM. Aziz Moukrim et Mustapha Rachdi pour avoir accepté la qualité de rapporteur pour ce manuscrit, et pour le temps précieux qu'ils ont accordé à cette tâche malgré l'épaisseur relative du document qui, j'en ai bien conscience, n'en faisait rien d'une sinécure ! Ils ont été accompagnés le jour de la soutenance par M<sup>mes</sup> Christine Solnon et Marie-Jo Huguet, examinatrices dont la bienveillance dans ce moment crucial aura su me porter jusqu'à la toute fin de l'épreuve, ainsi que par M. Olivier Courtin, dont l'expertise opérationnelle a été précieuse. Merci à eux également.

M. El-Houssaine Aghezzaf obtient aussi toute ma gratitude. Merci de m'avoir accueilli pour cette semaine au sein de l'université de Gand. Le moment fut bref, mais l'expérience très instructive. Merci aux autres membres du département, et en particulier à Cedric Verbeeck, pour leur accueil chaleureux. Je me souviendrais aussi de la ville, perle des Flandres vers laquelle j'aurai plaisir à revenir.

Je remercie également MM. Daniel Bardou, Daniel Lléréna et Bernard Penz, qui auront été très importants dans mon parcours universitaire, tout en étant des personnes tout bonnement extraordinaires.

Comment ne pas remercier également tous les membres de ce merveilleux laboratoire qu'est le LICIT ? Pour commencer, des remerciements spéciaux à Anne-Christine pour son assistance quotidienne et nos échanges littéraires enthousiastes (des intégrales de GoT contre des chapitres de thèse, je n'ai pas été très fair-play, pour le coup !); à Sonia pour sa dextérité dans des eaux administratives qui restent troubles à mes yeux ; à Christine de m'avoir fait confiance pour les quelques heures de TD à assurer ; à Cécile qui a gentiment accueilli un, puis deux, et en fait trois nouveaux compagnons dans sa petite famille (désolé pour l'allergie,

ils sont fous ces Delhome, ils sont fous...); à Fouad, bol d'air footballistique dans l'équipe et co-bureau premier du nom ; à Aurélien *aka* Junior, co-bureau deuxième du nom et garçon brillant s'il en est ; à Aurélien (...senior ?), pour le modèle (mésos), la gentillesse (macro), et aussi pour le recrutement d'un homonyme, quand même ; à Bernard, qui m'aura ébloui par son humour, sa culture et sa connaissance de la géopolitique autant que par sa proverbiale pantouflardise ; à Jean-Luc, électron libre attachant qu'il faudrait bien inventer s'il n'existait pas ; à Étienne pour nous avoir montré la voie, et avec le sourire s'il vous plaît (toi aussi tu es un mec génial !). Une pensée et mille mercis pour les anciens (Anahid, Fathia, Matthieu, Sergey...) qui ont rendu l'expérience plus belle, et pour les actuels qui s'y écrivent toujours, et que je n'ai pas encore cités (Anastasia, Arthur, Chuan-Lin, Clelia, Colette, Delphine, Dinah, Guilhem, Jean, Johana, Julien, Ludovic, Nicolas, Nicole, Sergio). Puissiez-vous continuer à faire de ce labo un endroit où il fait bon travailler.

Un immense merci à Max et Péa : ces trois années n'auraient pas été aussi belles sans vous. On a avancé ensemble, souffert ensemble, et on soutient presque ensemble, à quelques jours près. On en sera venu à bout, de ces thèses, et tant pis si on n'a pas tout plaqué pour fonder une start-up chimérique. Je vous souhaite le meilleur, les copains, et à très vite !

Il m'est impossible d'oublier tous les thésards (et assimilés) du site de Bron, en particulier Amandine et Anaïs, grâce auxquels le jour des enfants est devenu le jour des doctorants (et du tarot !), une respiration bienvenue dans le train-train hebdomadaire.

Au-delà du cercle professionnel, quelques personnes certes moins nombreuses mais ô combien chères à mes yeux ont ma gratitude, pour avoir écouté de bon cœur mes petites aventures doctorantes : Arnaud, avec qui je partage encore avec plaisir des moments à Lyon et aux alentours (« *qui ne saute pas n'est pas lyonnais, hé !* »), Lilian, le dernier des mohicans grenoblois, Amandine, la prof<sup>e</sup> de math du ch'nord (si tu as besoin d'une assistance correction de copies...), les anciens GI (et assimilés !) que j'ai l'occasion de retrouver ici et là : Anne-Lise et Flo, Amélie, Quentin, Farah et Thomas et Caro (vive les mariés !), entre autres...

Et Mickaël, pour finir en apothéose, le canal historique, le plus ardéchois de cette liste à la Prévert, celui auprès de qui ma reconnaissance est infinie. Une fois encore, j'ai pu compter sur ta présence, les quelques mots que je pourrais rajouter pour témoigner de ma gratitude sont bien peu face à ton concours inestimable.

Le doctorat est l'aboutissement d'une longue période passée « sur les bancs de l'école », dont un beau paquet vécu en présence de mon frère et de mes parents. Je ne crois pas être quelqu'un de très facile à vivre, et tous les trois, vous en avez pris plus que votre part. Malgré ça, vous avez toujours été là quand il fallait, et peu importent les difficultés et les aléas de la vie. Je ne vous le dis pas assez, mais soyez-en sûrs, vous êtes extrêmement importants pour moi. J'ai aussi une petite pensée pour tout le reste de la famille qui m'a toujours soutenu dans ma longue entreprise.

Pour finir... « *Pourquoi tu y passes tout ce temps ? Ça me dépasse !* »...« *Et puis, pourquoi tu nous remercies alors qu'en fait, on ne t'a pas aidé à l'écrire, ta thèse ? !* » Ah, sacrée toi... À quoi bon avoir épuisé tous les superlatifs si c'est pour se rendre compte qu'ils nous manquent au moment crucial ? Si seulement tu pouvais savoir à quel point ta présence à mes côtés a été essentielle durant la thèse ! Tu es mon moteur, ma joie de vivre. Le surplus de motivation qu'il fallait pour tourner cette page en beauté, comment aurait-il pu venir d'ailleurs ? Ces trois ans de rab ont été un investissement (ah ah !), libre à nous désormais d'écrire les suivantes et de poursuivre notre aventure *made in Normandie*...

# Résumé

La représentation des temps de parcours est un enjeu influençant la qualité de l'information transmise aux usagers des réseaux de transport. En particulier, la congestion constitue un inconvénient majeur dont la prise en compte n'est pas toujours maîtrisée au sein des calculateurs d'itinéraires. De même, les événements comme les réductions de capacité, les perturbations climatiques, ou encore les pics de fréquentation incitent à dépasser la définition *statique* des temps de parcours. Des travaux antérieurs se sont focalisés sur des temps *dynamiques*, *i.e.* dépendants de la date de départ, de manière à affiner le détail de la représentation, et à prendre notamment en compte le caractère périodique des congestions. La considération d'informations en *temps réel* est aussi une amélioration indéniable, que ce soit lors de la préparation du trajet, ou lorsqu'il s'agit de s'adapter à des perturbations rencontrées en cours de route. Ceci dit, aussi fines qu'elles soient dans les calculateurs disponibles, ces modélisations présentent un inconvénient majeur : elles ne prennent pas en compte toutes les facettes de la variabilité des temps de parcours. Cette variabilité est très importante, en particulier si l'on considère le niveau d'aversion au risque des usagers. En outre, dans un réseau multimodal, les correspondances éventuelles rendent encore plus critique l'incertitude associée aux temps de parcours. En réponse à ces enjeux, les présents travaux de thèse ont ainsi été consacrés à l'étude de temps de parcours *stochastiques*, *i.e.* vus comme des variables aléatoires distribuées.

Dans une première étape, nous nous intéressons à la modélisation statistique des temps de parcours et à la quantification de leur variabilité. Nous proposons l'utilisation d'un système de lois développé dans le domaine de l'hydrologie, la famille des lois de Halphen. Ces lois présentent les caractéristiques typiques des distributions de temps de parcours, elles vérifient par ailleurs la propriété de fermeture par l'addition sous certaines hypothèses afférentes à leurs paramètres. En exploitant les ratios de moments associés aux définitions de ces lois de probabilité, nous mettons également au point de nouveaux indicateurs de fiabilité, que nous confrontons avec la palette d'indicateurs classiquement utilisés. Cette approche holistique de la variabilité des temps de parcours nous semble ainsi ouvrir de nouvelles perspectives quant au niveau de détail de l'information, notamment à destination des gestionnaires de réseaux.

Par la suite, nous étendons le cadre d'analyse aux réseaux, en utilisant les résultats obtenus à l'étape précédente. Différentes lois de probabilité sont ainsi testées dans le cadre de la recherche du plus court chemin stochastique. Cette première étude nous permet de dresser un panorama des chemins identifiés en fonction du choix de modélisation. S'il est montré que le choix du modèle est important, il s'agit surtout d'affirmer que le cadre stochastique est pertinent. Ensuite, nous soulevons la relative inefficacité des algorithmes de recherche du plus court chemin stochastique, ceux-ci nécessitant des temps de calcul incompatibles avec un passage à l'échelle industrielle. Pour pallier cette difficulté, un nouvel algorithme met-

tant en œuvre une technique d'accélération tirée du cadre déterministe est développé dans la dernière partie de la thèse. Les résultats obtenus soulignent la pertinence de l'intégration de modèles stochastiques au sein des calculateurs d'itinéraires.

***Mots-Clefs :***

Temps de parcours ; Variabilité ; Plus courts chemins ; Accélération algorithmique

# Abstract

The travel time representation has a major impact on user-oriented routing information. In particular, congestion detection is not perfect in current route planners. Moreover, the travel times cannot be considered as *static* because of events such as capacity drops, weather disturbances, or demand peaks. Former researches focused on *dynamic* travel times, *i.e.* that depend on departure times, in order to improve the representation details, for example concerning the periodicity of congestions. *Real-time* information is also a significant improvement for users aiming to prepare their travel or aiming to react to on-line events. However these kinds of model still have an important drawback : they do not take into account all the aspects of travel time variability. This dimension is of huge importance, in particular if the user risk aversion is considered. Additionally in a multimodal network, the eventual connections make the travel time uncertainty critical. In this way the current PhD thesis has been dedicated to the study of *stochastic* travel times, seen as distributed random variables.

In a first step, we are interested in the travel time statistical modeling as well as in the travel time variability. In this goal, we propose to use the Halphen family, a probability law system previously developed in hydrology. The Halphen laws show the typical characteristics of travel time distributions, plus they are closed under addition under some parameter hypothesis. By using the distribution moment ratios, we design innovative reliability indexes, that we compare with classical metrics. This holistic approach appears to us as a promising way to produce travel time information, especially for infrastructure managers.

Then we extend the analysis to transportation networks, by considering previous results. A set of probability laws is tested during the resolution of the stochastic shortest path problem. This research effort helps us to describe paths according to the different statistical models. We show that the model choice has an impact on the identified paths, and above all, that the stochastic framework is crucial. Furthermore we highlight the inefficiency of algorithms designed for the stochastic shortest path problem. They need long computation times and are consequently incompatible with industrial applications. An accelerated algorithm based on a deterministic state-of-the-art is provided to overcome this problem in the last part of this document. The obtained results let us think that route planners might include travel time stochastic models in a near future.

***Key-Words :***

Travel times ; Travel time variability ; Shortest paths ; Acceleration techniques





# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Résumé</b>	<b>iii</b>
<b>Table des matières</b>	<b>vii</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>I Modélisation statistique des temps de parcours et de leur variabilité</b>	<b>7</b>
<b>1 État de l'art : la variabilité des temps de parcours</b>	<b>9</b>
1.1 Variabilité des temps de parcours . . . . .	10
1.1.1 Collecte des données de temps de parcours . . . . .	10
1.1.2 La variabilité à l'aune des préférences individuelles . . . . .	15
1.2 Indicateurs de performance statistique . . . . .	18
1.2.1 Approche synthétique de la construction d'un indicateur de fiabilité	18
1.2.2 Recherche de lois de probabilité pour les temps de parcours . . . . .	21
<b>2 Modélisation statistique des temps de parcours</b>	<b>25</b>
2.1 Lois de Halphen et estimation par les ratios de moments . . . . .	26
2.1.1 Construction du diagramme de ratios des moments . . . . .	26
2.1.2 Système de Halphen et diagramme de ratio de moments . . . . .	28
2.1.3 Estimateurs des paramètres des lois de la famille de Halphen . . . . .	39
2.1.4 Autres lois usuelles pour la modélisation des temps de parcours . . . . .	41
2.2 Méthodologie de la modélisation statistique des temps de parcours . . . . .	42
2.2.1 Présentation des données empiriques . . . . .	43
2.2.2 Temps de parcours, ou délais ? . . . . .	46
2.3 Les ratios de moments comme métriques de fiabilité . . . . .	48
2.3.1 Mesurer la fiabilité avec des indicateurs simples . . . . .	48
2.3.2 Classification des indicateurs de fiabilité des temps de parcours . . . . .	51
2.3.3 Évolution temporelle des distributions de temps de parcours . . . . .	55
2.4 Ajustement des temps de parcours sur un segment . . . . .	59
2.4.1 Éléments méthodologiques . . . . .	60
2.4.2 Résultats d'ajustement . . . . .	63

2.5	Extension de la modélisation à l'échelle de l'itinéraire . . . . .	68
2.5.1	Méthodologie . . . . .	69
2.5.2	Analyse empirique de la loi d'une somme de distributions . . . . .	70
<b>Contributions de la partie I</b>		<b>80</b>
 <b>II Les modèles statistiques des temps de parcours dans le calcul du plus court chemin</b>		 <b>81</b>
<b>3</b>	<b>État de l'art : les PCC stochastiques</b>	<b>83</b>
3.1	Définition du problème et forme de la fonction objectif . . . . .	84
3.1.1	Travaux fondateurs . . . . .	84
3.1.2	Formulation <i>LET</i> . . . . .	85
3.1.3	Formulation <i>SSPP</i> . . . . .	85
3.1.4	Formulation <i>SPOTAR/SOTA</i> . . . . .	86
3.1.5	Autres variantes rencontrées . . . . .	87
3.2	Méthodes de résolution . . . . .	88
3.2.1	Programmes d'optimisation mathématique . . . . .	88
3.2.2	Algorithmes de programmation dynamique . . . . .	90
3.2.3	Algorithmes d'étiquetage . . . . .	91
3.2.4	Autres techniques rencontrées . . . . .	94
3.3	Représentation du poids des arcs dans le graphe . . . . .	94
3.3.1	Utilisation de modèles probabilistes pour les poids des arcs . . . . .	94
3.3.2	Corrélations entre les temps de parcours au sein du réseau . . . . .	95
3.3.3	Approche par scénario . . . . .	96
<b>4</b>	<b>Calcul du PCC stochastique et lois de probabilité</b>	<b>99</b>
4.1	Plus courts chemins stochastiques . . . . .	100
4.1.1	Arcs stochastiques . . . . .	100
4.1.2	Opérations de base sur les arcs stochastiques . . . . .	102
4.1.3	Dominance stochastique et politiques de routage . . . . .	110
4.1.4	Algorithme SPOTAR . . . . .	113
4.2	Éléments méthodologiques et plan d'expérience . . . . .	114
4.2.1	Présentation générale et vocabulaire . . . . .	114
4.2.2	Facteurs de l'analyse . . . . .	115
4.2.3	Indicateurs de comparaison . . . . .	118
4.3	Résultats de l'analyse de sensibilité . . . . .	120
4.3.1	Comparaison des chemins proposés par les modèles stochastiques . . . . .	120
4.3.2	Comparaison entre modèle déterministe et modèles stochastiques . . . . .	123
4.3.3	Proportion d'arcs communs entre les chemins optimaux . . . . .	123
4.3.4	Évaluation des temps de calcul . . . . .	125
<b>Contributions de la partie II</b>		<b>128</b>

<b>III Mise en œuvre du calcul du plus court chemin stochastique pour des calculateurs d'itinéraires</b>	<b>129</b>
<b>5 Accélérer le calcul du PCC avec les CH</b>	<b>131</b>
5.1 Phase de pré-traitement : hiérarchisation des nœuds . . . . .	132
5.1.1 Critères de classement . . . . .	132
5.1.2 Hiérarchisation des nœuds . . . . .	134
5.1.3 Contraction du graphe et ajout de raccourcis . . . . .	136
5.1.4 Raffinements algorithmiques . . . . .	137
5.2 Phase de résolution de requêtes . . . . .	138
5.2.1 Précisions liminaires . . . . .	138
5.2.2 Algorithme de résolution de requêtes dans un graphe hiérarchisé . .	139
5.3 Extension au cas des graphes dynamiques . . . . .	140
5.3.1 Fonctions de temps de parcours . . . . .	140
5.3.2 Solutions algorithmiques . . . . .	142
<b>6 Implémentation des CH et analyse de sensibilité</b>	<b>147</b>
6.1 Paramétrage des contractions hiérarchiques . . . . .	148
6.1.1 Définition de la fonction de hiérarchisation . . . . .	148
6.1.2 Sorties du modèle . . . . .	149
6.2 Évaluation du paramétrage . . . . .	150
6.2.1 Décomposition de la variance . . . . .	150
6.2.2 Optimisation du temps de calcul global . . . . .	154
6.3 Résultats empiriques . . . . .	155
6.3.1 Données utilisées . . . . .	155
6.3.2 Analyse des résultats par rapport aux coefficients de priorité . . . . .	156
6.3.3 Recherche d'un ensemble optimal de coefficients . . . . .	165
6.3.4 Mise en œuvre opérationnelle : graphe Ile-de-France (Mappy) . . . .	167
<b>7 Extension stochastique des CH</b>	<b>171</b>
7.1 Construction des chemins optimaux dans les graphes stochastiques . . . . .	171
7.1.1 Opérations sur les chemins . . . . .	171
7.1.2 Opérations sur les politiques de routage . . . . .	173
7.2 Adaptation des contractions hiérarchiques aux graphes stochastiques . . . .	177
7.2.1 Phase de requêtage . . . . .	177
7.2.2 Phase de pré-traitement : hiérarchisation et contraction . . . . .	178
7.3 Résultats expérimentaux . . . . .	184
7.3.1 Résultats de la technique d'accélération . . . . .	185
7.3.2 Comparaisons avec une résolution sans accélération . . . . .	186
7.3.3 Vers la recherche du chemin à temps de parcours garanti . . . . .	187
<b>Contributions de la partie III</b>	<b>190</b>
<b>Conclusion générale</b>	<b>191</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>195</b>
<b>Table des figures</b>	<b>207</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>211</b>

<b>Liste des algorithmes</b>	<b>213</b>
<b>A Abréviations</b>	<b>I</b>
<b>B Étude de la similarité entre indicateurs de fiabilité</b>	<b>III</b>
<b>C Cercles de corrélation des analyses en composantes principales</b>	<b>VII</b>
<b>D Illustration d'une politique de routage</b>	<b>XI</b>
<b>E Analyse des plus courts chemins stochastiques</b>	<b>XIII</b>
<b>F Stabilité des hiérarchies de nœuds</b>	<b>XXIII</b>

# Introduction générale

” *Question : comment faire pour ne pas perdre son temps ?*  
Réponse : l'éprouver dans toute sa longueur.

— **Albert Camus**  
La peste

## Contexte du travail de thèse

« *Comment faire pour ne pas perdre son temps ?* » C'est une question que les utilisateurs des réseaux de transports se posent assurément lorsqu'ils affrontent les aléas de la circulation armés de leur seule patience, fût-elle mince. Pour les assister dans cette épreuve et satisfaire au mieux leur besoin, les Systèmes d'Information Multimodale (ou SIM) connaissent un essor fulgurant ces dernières années, tiré par le volontarisme affiché par les pouvoirs publics (ces outils sont régis par l'article L1231-8 du code des transports) et par la démocratisation des nouvelles technologies de l'information et de la communication. Grâce à ces outils, les utilisateurs ont désormais accès à une multitude d'informations à propos des conditions de circulation, des horaires des transports en commun, ou encore de la disponibilité des véhicules partagés. Ces sources d'informations restent cependant très fragmentées entre modes, et leur complémentarité doit être assurée par le développement de calculateurs d'itinéraires polyvalents prenant en charge une large gamme de modes de transport et de critères de décision, jusqu'à l'individualisation de l'information apportée aux usagers.

Les SIM doivent ainsi répondre aux interrogations de ces derniers en matière de choix d'itinéraire, en prenant en compte des contraintes de plus en plus individualisées concernant d'abord l'impédance des déplacements (temps, coût, confort...), bien sûr, mais également la garantie d'arriver à l'heure à destination, ou encore les exigences d'accessibilité pour les personnes à mobilité réduite. Ces critères mettent en valeur d'autres visions d'un trajet « idéal », et par voie de conséquence, consacrent le besoin de modèles multi-objectifs robustes et fiables qui complexifient le calcul d'itinéraires, la plupart des calculateurs ne permettant actuellement pas d'optimiser plusieurs critères simultanément. Le choix parmi ces critères est encore assez restreint en pratique, la variabilité des temps de parcours étant d'ailleurs la grande absente des outils proposés. Pourtant, l'incertitude caractérisant le temps de parcours moyen annoncé traditionnellement s'avère aussi instructive quant aux conditions de circulation sur le réseau routier et à la qualité de service que ce dernier offre aux usagers.

Cette notion est encore plus critique dans un contexte de multimodalité, où les ruptures de charge et autres correspondances rendent tout retard potentiellement lourd de conséquence quant à l'heure effective d'arrivée, et donc, à l'optimalité de l'itinéraire.

La variabilité des temps de parcours apparaît ainsi comme un critère d'optimisation à part entière visant la recherche d'itinéraires à temps de parcours garanti (avec un niveau de confiance donné), ou, autrement dit, le plus fiable. Cette variabilité pose un certain nombre de questions auxquelles il convient de répondre, à commencer par son origine : vient-elle d'un surplus de demande, d'une insuffisance de l'offre, voire de facteurs exogènes ? De même la question de sa modélisation doit être résolue. Il est aisé de comprendre que les temps de parcours dépendent de l'heure de départ. Le caractère récurrent des phénomènes de congestion est ainsi reconnu. Les calculateurs d'itinéraires visent en outre le suivi du trafic en temps réel, ouvrant la voie à une modélisation plus fine des temps de parcours et de leur évolution. Ceci étant dit, la notion de variabilité suggère d'aller plus loin que ces premières approches en considérant le temps de parcours comme une variable aléatoire distribuée. Ceci constitue une transition du déterministe vers le stochastique, ce qui représente un verrou scientifique important. La modélisation probabiliste des temps de parcours va de pair avec l'incertitude inhérente aux trajets, à laquelle est associé le niveau d'aversion au risque de chaque individu. L'évaluation des itinéraires à partir d'une métrique de la variabilité doit ainsi permettre d'adapter les solutions à chaque utilisateur du réseau.

Ce champ de recherche s'inscrit dans un ensemble de travaux accomplis depuis déjà plusieurs années au sein du LICIT. En particulier, la présente thèse est le prolongement de celle réalisée par Aurélie Bousquet [17] à propos de l'optimisation d'itinéraires dans des réseaux multimodaux. Cette première thèse avait été réalisée en parallèle du développement de la plateforme *open-source* TEMPUS (<http://www.tempus-project.org/>), dédiée au calcul du plus court chemin multimodal. Par ailleurs, Sergey Kovalev [90] s'est consacré à l'optimisation multi-objectifs d'itinéraires multimodaux dans le cadre d'un post-doctorat au laboratoire. Une dernière thèse soutenue récemment par Fouad Baouche [6] a été dédiée au problème du plus court chemin énergétique, correspondant au calcul du meilleur itinéraire pour un trajet réalisé avec une voiture électrique. Plus généralement, le LICIT possède une expertise reconnue sur les thématiques de l'information multimodale, l'optimisation des itinéraires et la gestion du trafic, qu'il exploite notamment à travers sa participation au pôle de compétitivité LUTB, et le développement en fil rouge de la plateforme TEMPUS, qui fait notamment l'objet d'une collaboration avec la société Oslandia, spécialisée dans les systèmes d'information géographique, et plus récemment avec Mappy, l'éditeur du calculateur d'itinéraire éponyme.

## Objectif et contributions

Le développement d'un moteur de calcul du plus court chemin multimodal demande entre autres la prise en compte d'une information dynamique et temps réel, voire prévisionnelle à travers les temps de parcours stochastiques. L'intégration de leur incertitude sous-jacente via la variabilité constitue la motivation de la présente thèse. Celle-ci a pour but de contribuer à l'étude de la variabilité des temps de parcours sur un réseau de transport. En s'intéressant à deux niveaux de granularité différents tout autant que complémentaires, nous nous proposons d'examiner la variabilité sur un tronçon routier d'une part, de manière à la caractériser par une métrique synthétique utilisable par exemple par les gestionnaires de réseau, et à la recherche du plus court chemin stochastique d'autre part, ce qui revient à examiner les stratégies de choix d'itinéraires dans un contexte incertain.

Dans le premier volet, l'objectif principal tient en l'identification d'un modèle statistique paramétrique apte à reproduire le phénomène des temps de parcours sur les tronçons routiers. Plusieurs lois de probabilité seront considérées pendant cette quête, des plus usuelles jusqu'à d'autres moins courantes, ce qui permettra de les hiérarchiser par ordre de pertinence. Le choix d'un modèle paramétrique se justifie ici par la volonté de caractériser l'évolution temporelle des temps de parcours et des conditions de circulation, ces dernières suivant une trajectoire identifiable par l'évolution temporelle des paramètres du modèle. Cet effort constituera en parallèle un fondement théorique propice à la production de métriques destinées à synthétiser la fiabilité des temps de parcours. Une étude préliminaire de l'additivité des modèles propres aux segments élémentaires permettra de dresser un cadre pour leur extension à l'échelle d'un chemin complet, constituant ainsi une transition avec le second volet de la thèse.

Pour celui-ci, l'accent sera porté sur l'échelle du réseau, le but étant de proposer une solution algorithmique innovante apte à intégrer la variabilité des temps de parcours dans l'optimisation des choix d'itinéraires. Cette réalisation sera concrétisée comme une variante du problème du plus court chemin dans laquelle les arcs du graphe représentant le réseau de transport routier sont caractérisés par des poids stochastiques, ici les temps de parcours. Le meilleur chemin n'est ainsi plus celui ayant le temps de parcours minimum, mais plutôt celui représentant le meilleur compromis entre temps de parcours moyen et garantie de réaliser le temps annoncé (avec un niveau de confiance donné), le choix parmi les itinéraires optimaux pouvant alors être réalisé en fonction du niveau d'aversion au risque de l'utilisateur. Un objectif annexe à ce second point est l'intégration de cette démarche dans des calculateurs standards, la collaboration du laboratoire avec Mappy dans le cadre de TEMPUS constituant ainsi une visée à moyen terme pour l'optimisation d'itinéraires dans des graphes stochastiques.

Les travaux réalisés ont été valorisés à travers les publications suivantes :

#### **Revues internationales à comités de lecture**

- DELHOME R., BILLOT R., DURET A., AND EL FAOUZI N.-E. The Halphen Distribution System, a Toolbox for Modeling Travel Time Variability : some insights based on mesoscopic simulation. *Transportation Research Record : Journal of the Transportation Research Board*, 2490, 32-40, (2015).
- DELHOME R., BILLOT R., AND EL FAOUZI N.-E. Travel time statistical modeling with the Halphen distributions. *Journal of Intelligent Transportation System*, En révision (2015).

#### **Conférences internationales à comités de sélection/lecture**

- DELHOME R., BILLOT R., AND EL FAOUZI N.-E. Investigating travel time reliability : Empirical study based on Portland Bluetooth data. In *4th International Symposium of Transport Simulation (ISTS)*, Ajaccio, France (2014).
- DELHOME R., BILLOT R., DURET A., ET EL FAOUZI N.-E. The Halphen Distribution System, a Toolbox for Modeling Travel Time Variability : some insights based on mesoscopic simulation. In *Transportation Research Board 94th Annual Meeting (TRB)*, Washington DC, USA (2015).
- DELHOME R., BILLOT R., AND EL FAOUZI N.-E. Moment-Ratio Diagram and Travel Time Reliability : Empirical Study on Urban and Periurban Links. In *Proceedings*



of the 5th International Symposium on Transportation Network Reliability (INSTR), Nara, Japan (2015).

- DELHOME R., BILLOT R., AND EL FAOUZI N.-E. Calibration of Time-Dependent Contraction Hierarchies based on Sensitivity Analysis. In *28th European Conference on Operations Research (EURO)*, Poznan, Poland (2016).

### Conférences françaises à comités de sélection/lecture

- DELHOME R., BILLOT R., AND EL FAOUZI N.-E. Recherche du plus court chemin stochastique avec des distributions de probabilité connues. In *16ème Conférence de la société Française de Recherche Opérationnelle et Aide à la Décision (ROADEF)*, Marseille, France (2015).
- DELHOME R. Modélisation de l'incertitude des temps de parcours par les lois de distribution d'Halphen. In *3<sup>ème</sup> Rencontres Interdisciplinaires Doctorales de l'Architecture et de l'Aménagement Durables (RIDA<sup>2</sup>D)*, Vaulx-en-Velin, France (2015).

## Plan du manuscrit

Les différents points évoqués précédemment sont articulés en trois parties principales développées autour de sept chapitres, se proposant d'étudier respectivement la modélisation des temps de parcours et de leur variabilité, l'impact des modèles statistiques dans les recherches du plus court chemin stochastique et l'accélération des procédures de recherche du plus court chemin stochastique.

La figure 1 résume l'organisation générale de la thèse, dont le détail des chapitres est donné ci-après.

Le **chapitre 1** propose un état de l'art relatif à la variabilité des temps de parcours, notion suscitant un intérêt manifeste ces dernières années sans pour autant créer de consensus quant aux indicateurs à utiliser et à la façon de la modéliser. Ainsi, les approches de la variabilité sont aussi diverses que les outils théoriques mobilisés. Cet état de l'art s'oriente vers les indicateurs les plus populaires dans le but de synthétiser cette information aussi bien que vers les contributions liées à la modélisation statistique des temps de parcours au moyen de lois de probabilité.

Le **chapitre 2** est consacré à la modélisation statistique des temps de parcours et à la production de métriques de la variabilité, qui sont combinées grâce à l'utilisation d'un système de lois de probabilité issu de l'hydrologie, la famille des lois de Halphen. Le développement de nouvelles propriétés mathématiques associées aux ratios de moments permet de démontrer la richesse de l'approche proposée, autant sur le plan théorique avec la proposition d'estimateurs des paramètres des lois impliquées, que sur le plan empirique par la caractérisation du niveau de variabilité en temps réel.

Le **chapitre 3** aborde le second axe du travail par une revue de l'état de l'art consacré à l'optimisation des itinéraires dans les graphes stochastiques. Un aperçu des pistes suivies dans la littérature est proposé autour de différents axes tels que les problèmes définis, les outils théoriques utilisés et les modèles statistiques employés pour représenter les poids des arcs.

Riche de tous les concepts évoqués dans le chapitre précédent, le **chapitre 4** recontextualise la notion de calcul du plus court chemin stochastique. Des éléments théoriques consolident la modélisation stochastique des arcs d'un graphe, dans le but de développer des algo-

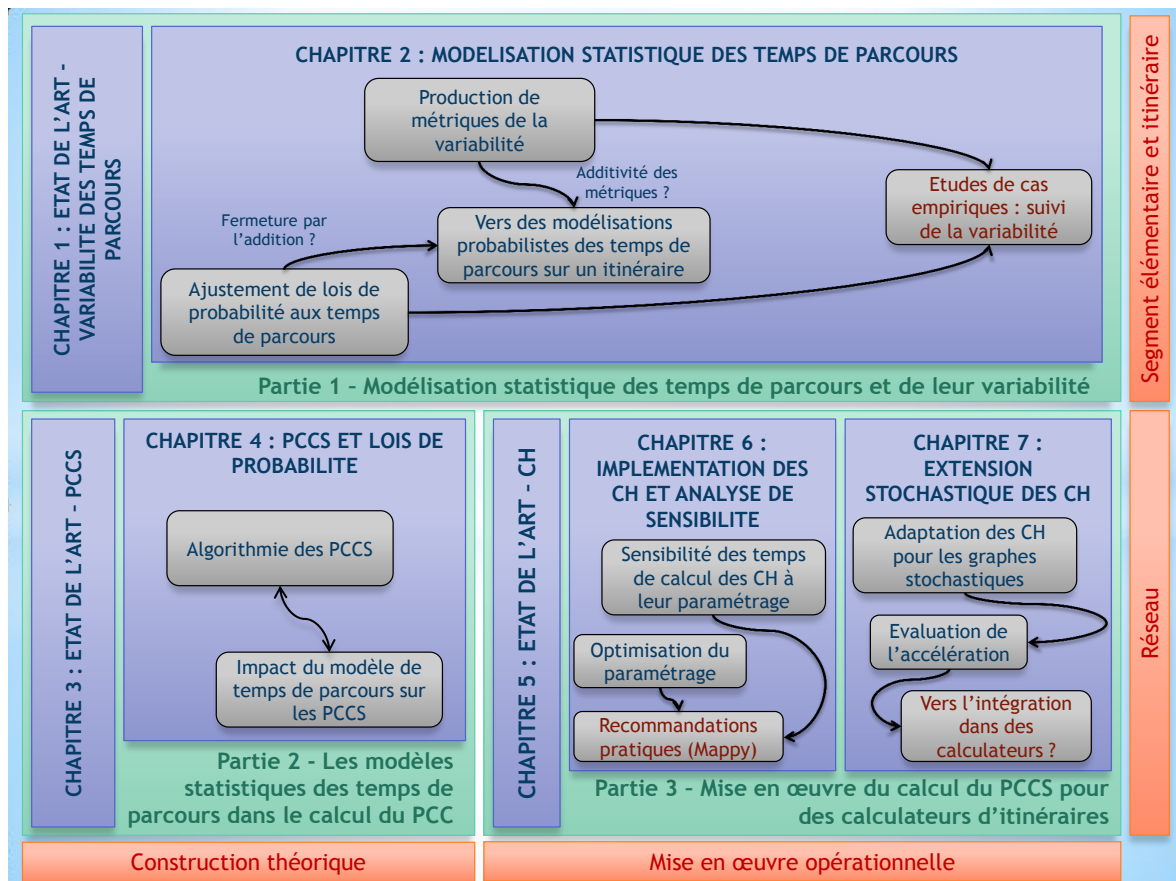


FIGURE 1 – Organisation générale de la thèse

rithmes d'étiquetage. Un premier test est conduit sur la robustesse des plus courts chemins stochastiques au regard du modèle statistique utilisé, pour déterminer l'impact de ce choix sur les itinéraires optimaux identifiés.

Actant la nécessité de l'accélération algorithmique pour le calcul du plus court chemin stochastique, le **chapitre 5** constitue un des volets de la troisième partie de la thèse. Ce chapitre permet de détailler la technique des contractions hiérarchiques telle que développée dans l'état de l'art. Celle-ci a été sélectionnée pour ses bonnes performances dans les graphes déterministes, éprouvées notamment dans les premières versions de la plateforme TEMPUS.

Dans le cadre de la collaboration avec Mappy, dont l'objectif est la caractérisation de l'apport des contractions hiérarchiques, le **chapitre 6** porte sur l'évaluation des performances de la technique des contractions hiérarchiques dans le cadre déterministe en fonction des paramètres nécessaires à leur fonctionnement. Une analyse de sensibilité couplée à un procédé d'optimisation conduisent à l'identification des jeux de paramètres les plus aptes à réduire le temps de calcul de la méthode, en particulier lors de sa phase de pré-traitement.

Enfin, nourrie par un paramétrage défini à la suite du chapitre 6, une extension de cette technique au cas stochastique est développée dans le **chapitre 7**. Une série de procédures est proposée pour le traitement des arcs ainsi que pour la résolution de requêtes de plus courts chemins dans les graphes stochastiques. Une comparaison empirique entre les contractions hiérarchiques et un algorithme de l'état de l'art de référence prouve la pertinence de l'accélération algorithmique dans ce cadre.



---

---

## Première partie

---

# MODÉLISATION STATISTIQUE DES TEMPS DE PARCOURS ET DE LEUR VARIABILITÉ

” *Quand on sait pas où l'on va, il faut y aller!! ... et le plus vite possible.*

— **Jacques Rouxel**  
Les Shadoks



# État de l'art : la variabilité des temps de parcours

## Introduction

La variabilité des temps de parcours est une notion qui focalise de plus en plus l'attention des spécialistes de l'ingénierie du trafic, chercheurs comme gestionnaires de réseaux de transport, au regard de l'impact qu'elle peut avoir sur les choix d'itinéraire des usagers. À ce titre, ce premier chapitre va s'attacher à expliciter sa signification ainsi qu'à déterminer les grands enjeux qui y sont liés en matière d'amélioration des réseaux de transport.

L'interrogation première associée à cette problématique concerne la fiabilité de la qualité de service, et donc des temps de parcours, qui est devenue un critère aussi important que la gestion des capacités, de la sécurité ou la gestion budgétaire pour les exploitants de réseaux de transport [12]. Il est communément admis de distinguer la fiabilité selon deux points de vue : celui du gestionnaire du réseau et celui des usagers du réseau. Le premier juge la fiabilité à l'aune de la qualité du service proposé, quel que soit le mode de transport et le réseau considéré, ou le moment auquel il est emprunté [42]. Il est d'ailleurs soutenu dans cette démarche par les pouvoirs publics, qui érigent la fiabilité au rang d'objectif prépondérant [16]. L'utilisateur du réseau, quant à lui, considère la fiabilité au regard du temps passé sur le trajet, et notamment l'incertitude associée au temps de parcours [20]. Les auteurs s'étant penchés sur le sujet définissent ainsi la fiabilité des temps de trajet en fonction de l'appartenance du moment d'arrivée à un intervalle de temps spécifié à l'avance [42, 43]. A ce propos, Emam *et al.* [43] ont proposé une nouvelle définition de la fiabilité permettant de considérer directement la vitesse expérimentée : un tronçon sur lequel les automobilistes peuvent rouler à la vitesse maximale autorisée sur le parcours (et donc, réaliser le temps de parcours minimal) est jugé 100% fiable.

Notons par ailleurs que la fiabilité des temps de parcours trouve une quantification assez naturelle à travers des métriques de variabilité des temps de parcours. Celles-ci font référence à une incertitude statistique inhérente à la distribution des temps de parcours, cette dernière pouvant être décomposée en plusieurs composantes distinctes typiques d'une distribution statistique, comme le suggère la figure 1.1. Une typologie des variabilités a été identifiée par Noland *et al.* [116], on distingue :

- la variabilité inter-journalière, *i.e.* d'un jour sur l'autre ;
- la variabilité intra-journalière, *i.e.* d'une période de la journée à l'autre ;
- la variabilité inter-individuelle, *i.e.* d'un usager à un autre.

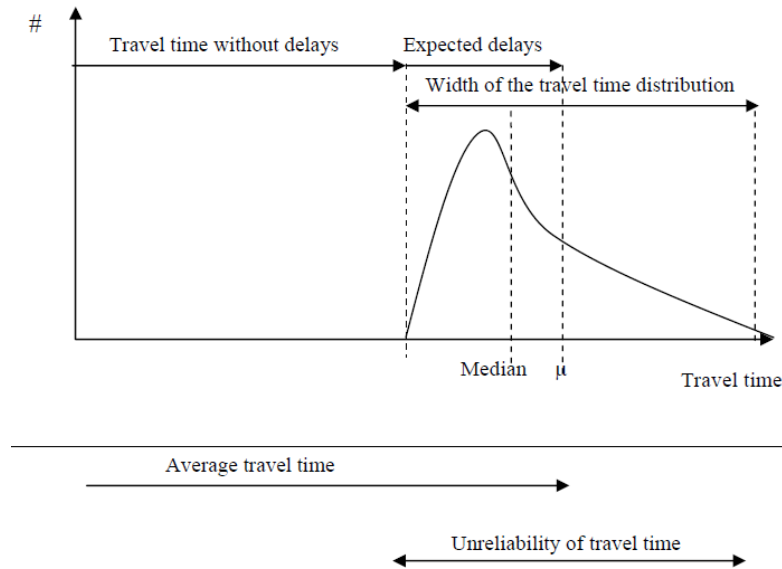


FIGURE 1.1 – Évaluation de la variabilité, d'après Warffemius [166]

Cette incertitude du temps de parcours a un coût qu'il s'agit de minimiser. Des travaux récents [166] ont montré que sa non-prise en compte peut impacter négativement l'exploitation d'un réseau de transport à hauteur de 5% à 50% de pertes d'exploitation selon les spécificités locales. Les sources de l'incertitude peuvent être différentes en fonction du mode utilisé (véhicule particulier ou transport en commun), mais celles qui sont souvent mises en avant dans la littérature sont les incidents induisant une diminution de la capacité [32, 97], les feux de signalisation [61] ou l'hétérogénéité des comportements de conduite [80]. Il est également possible de citer les fluctuations de demande, la météorologie, les travaux ou encore les interruptions de service dans les transports en commun [71, 102].

Ce premier chapitre présente un état de l'art ainsi que les premières définitions liées à la variabilité des temps de parcours. Les principales mesures de la variabilité seront détaillées, de même que les outils et méthodes utilisés dans le deuxième chapitre. Il sera d'abord question dans la section 1.1.1 d'examiner les techniques utilisées dans la littérature pour collecter des données, et ainsi alimenter les modèles permettant de construire les métriques de la variabilité. Ensuite, la section 1.1.2 sera focalisée sur les différentes modélisations de la variabilité des temps de parcours dans une optique de maximisation de l'utilité des individus. Et enfin, un point de vue plus agrégé correspondant potentiellement à celui du gestionnaire sera développé au sein des sections 1.2.1 et 1.2.2 : ces paragraphes évoqueront respectivement les différentes métriques de la variabilité ainsi que les modèles statistiques rencontrés dans la littérature.

## 1.1 Variabilité des temps de parcours

### 1.1.1 Collecte des données de temps de parcours

Quelle que soit l'approche retenue pour modéliser la variabilité des temps de parcours, il est nécessaire d'obtenir des jeux de données suffisamment représentatifs des conditions de circulation. Pour ce faire, plusieurs techniques sont utilisées : les premières collectes de données ont consisté à questionner des individus sur des trajets hypothétiques, et à leur faire

évaluer le coût qu'ils pensaient subir du fait de retards ou d'incertitudes quant au temps de parcours. Par la suite, les techniques de recueil directes ou indirectes ont fait leur apparition. Elles consistent à mesurer les temps de parcours au moyen de différents dispositifs technologiques (boucles électromagnétiques, GPS, véhicules-traceurs, voire Bluetooth). Une distinction est ainsi faite entre les enquêtes de préférences déclarées (« Stated-Preference ») et les mesures directes des préférences (« Revealed-Preference »), tantôt objectives ou subjectives. Une revue de littérature assez détaillée est fournie par Carrion *et al.* [20].

Une autre approche destinée à alimenter les modèles considère les techniques de simulation comme les plus pertinentes : elle est fondée sur le principe selon lequel les précédentes méthodes de collecte sont coûteuses, et amènent même potentiellement des problèmes de représentativité statistique. Quelques travaux utilisant la simulation seront ainsi également détaillés dans une troisième et dernière sous-section.

### 1.1.1.1 Enquêtes de préférences

Plus connue sous le terme de *Stated-Preference* (SP), cette classe de mesure renvoie à une méthodologie de collecte de donnée par enquêtes, lors desquelles les individus sont interrogés sur leur préférence en fonction de trajets hypothétiques. Typiquement, une enquête de type SP requiert un choix par l'individu entre deux trajets dont les caractéristiques principales sont la durée moyenne estimée, différentes réalisations montrant la variabilité subie sur celui-ci et enfin le coût supporté pour l'emprunter. Cette approche se décline récemment jusqu'aux procédés de ludification, visant à évaluer les comportements des usagers aux moyens de jeux reproduisant des conditions de conduite réelles.

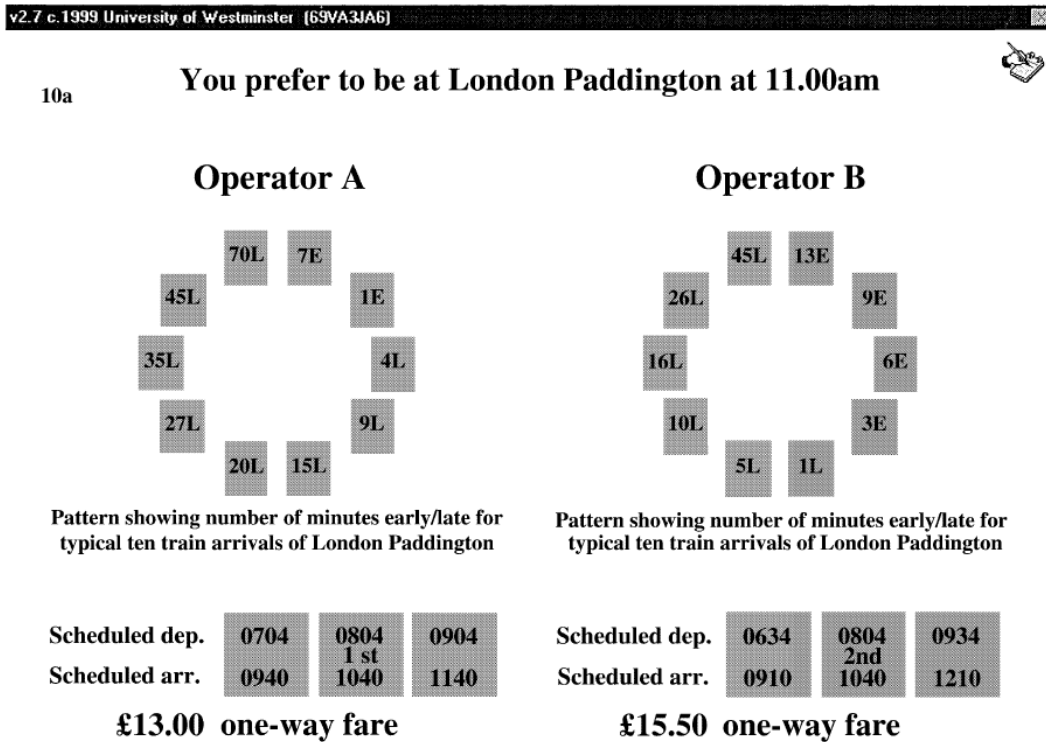
Dans notre contexte, il a été question d'appréhender les préférences individuelles entre temps de parcours et variabilité, au travers d'une fonction objectif optimisée par le biais d'un programme linéaire [77]. Par la suite, il a été question de construire un ratio de fiabilité rapportant la valorisation du temps de trajet à celle de sa variabilité [13]. La méta-analyse de Carrion *et al.* [20] recense les réalisations de cet indicateur dans l'état de l'art : les auteurs ont ainsi identifié 68 mesures différentes s'établissant entre 0.08 et près de 3.29, pour une valeur moyenne d'environ 1.2. La valeur monétaire associée au temps de parcours moyen est ainsi supérieure à celle de la variabilité à hauteur de 20%, mais la différence reste minime et suggère l'importance de cette dernière dans les décisions des individus. Armstrong *et al.* [4] ont bien insisté sur le caractère subjectif de cette évaluation au sein des fonctions d'utilité individuelle. Une méta-analyse proposée par Abrantes *et al.* [2] apporte également des éléments de réponse en synthétisant l'évaluation économique et les élasticités-prix des éléments constitutifs des déplacements (étapes, modes, spécificités locales, caractéristiques individuelles).

De nombreuses études ont cherché à déterminer les niveaux de préférence individuelle via une enquête de type SP. Jackson *et al.* [77] ont initialement proposé une forme simple de comparaison entre deux trajets hypothétiques caractérisés par un temps habituel et un délai possible, tel que décrit dans la figure 1.2. Un individu était alors caractérisé en fonction de son aversion au risque, qui l'orientait tantôt vers un parcours « sûr », tantôt vers un autre plus risqué où un retard pouvait survenir.

Par la suite, d'autres auteurs ont proposé de nouvelles formes d'enquêtes dans lesquelles la présentation des alternatives s'est raffinée, impliquant d'autres modes de transport, la notion de coût monétaire, ou encore la mise en valeur plus claire des incertitudes sur les temps de trajet. Des alternatives caractérisées par des temps de parcours moyens ont également été proposées, de manière à pousser l'individu à choisir explicitement entre des niveaux différents de variabilité. À titre d'exemple, il est possible de citer deux contributions ayant pro-



1. Usual time: 50 minutes  
Possible delays: None
2. Usual time: 40 minutes  
Possible delays: 20 minutes once a week.

FIGURE 1.2 – Item d'enquête SP, tiré de Jackson *et al.* [77]FIGURE 1.3 – Item d'enquête SP, tiré de Bates *et al.* [8]

posé des designs originaux : d'un côté, Bates *et al.* [8] se sont penchés sur une problématique ferroviaire, et ont proposé une présentation circulaire des réalisations de temps de parcours, pour éviter toute impression d'ordre dans la liste de réalisations, et donc éviter l'introduction d'un biais dans la réponse. D'un autre côté, Hollander [72] a réalisé une enquête dans le cadre d'un service de bus interurbain basé à York, en Angleterre, dans laquelle il propose un choix entre deux services de bus différenciés par des couleurs. Dans cette dernière étude, les temps de parcours sont représentés par des barres dont la longueur et la position dépendent de la date de départ et de la durée du trajet. Des illustrations propres à ces deux exemples sont reproduites dans les figures 1.3 et 1.4, respectivement.

Pour une discussion de ces représentations et la présentation d'autres exemples d'enquête de type SP, le lecteur est invité à se référer à Carrion *et al.* [20].

### 1.1.1.2 Collecte de données sur le terrain

Cette seconde catégorie de collecte réfère à des temps de parcours réels. Des enquêtes comparables à celles évoquées dans le paragraphe précédent existent qui correspondent à des mesures réelles, le terme consacré étant *Revealed-Preference*, ou RP. La quantification de la variabilité est alors tantôt issue de la perception des individus sur leurs trajets passés

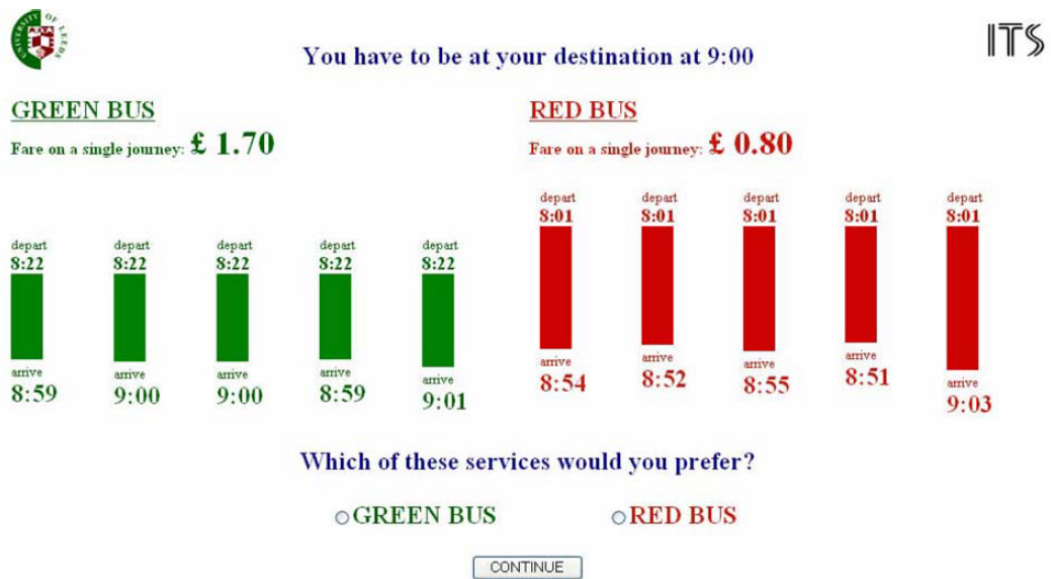


FIGURE 1.4 – Item d’enquête SP, tiré de Hollander [72]

(on parle ici de mesure subjective), tantôt issue de dispositifs techniques installés sur le bord des voies de transport ou à l’intérieur des véhicules (on parle alors de mesure objective) [20].

La première catégorie est assez peu présente dans la littérature, ce qui pourrait s’expliquer par le niveau de fiabilité des mesures, à corriger par un facteur aléatoire matérialisant l’erreur d’estimation propre à chaque individu. Au sein du corpus de publications étudiées, seule la contribution de Börjesson *et al.* [16] propose une méthode assimilable à la première approche. Ainsi, les auteurs ont transmis un questionnaire aux usagers des lignes de métro et de train sur l’agglomération de Stockholm afin d’obtenir des renseignements sur leurs trajets personnels. Cependant, cette partie de l’étude a essentiellement servi de première étape pour la suite de l’étude, qui a consisté en une enquête de type SP dont les alternatives étaient calées sur le trajet personnel des répondants : les notions de temps de parcours, de date de départ ou de coût étant relatives à celles rencontrées réellement par les individus.

Les méthodes objectives de type RP sont également peu nombreuses, eu égard à la difficulté d’obtenir des données mettant en concurrence deux routes différentes [20]. Il est tout de même possible d’identifier deux séries d’études utilisant la technique d’enquête des préférences révélées : une première série focalisée sur la route SR91 en Californie (par exemple, [96]) et une seconde série centrée sur un tronçon situé à Minneapolis, dans le Minnesota (voir par exemple [21]). La particularité de ces deux axes est qu’ils permettent aux utilisateurs un choix entre une route gratuite classique, potentiellement sujette à de la congestion, et une route à péage de type *High Occupancy Toll*, dont le tarif évolue avec le niveau de fréquentation pour assurer une circulation la plus fluide possible. Il est alors possible de considérer qu’un utilisateur empruntant le péage juge le gain de temps et de fiabilité obtenu plus précieux que la valeur du ticket d’entrée sur la route payante.

Les enquêtes de type SP et RP semblent plutôt complémentaires, au sens où elles répondent toutes les deux à des exigences différentes, les inconvénients de l’une étant palliés en partie par l’autre. Bien sûr, elles restent des techniques perfectibles, et si certains auteurs ont tenté de proposer des méthodologies « enrichies » [15], aucune méthodologie d’enquête ne s’est véritablement imposée comme la référence dans ce champ de recherche.

Par ailleurs, de nombreuses autres références se sont attelées à la question de la variabilité

des temps de parcours via une mesure directe sur site, sans pour autant aller jusqu'à une comparaison des choix des utilisateurs telle que définie par la méthodologie des enquêtes RP. Qu'une seule route [12, 61], un ensemble de routes non consécutives [98] ou même un réseau complet [44, 133, 172] soient étudiés, il est possible de remarquer que de nombreux dispositifs techniques de recueil de données ont été utilisés. Ainsi, le procédé le plus souvent utilisé est la boucle électromagnétique [12, 61, 98, 130, 162], simple ou double, qui permet de mesurer le débit, la vitesse instantanée et le taux d'occupation sur une voie. Les systèmes de reconnaissance de plaques via des caméras [44, 98, 130], les véhicules-traceurs [56, 61, 82, 98, 101, 121, 149, 151, 152] équipés de GPS, voire de Bluetooth sont également de plus en plus employés. Enfin, il existe des outils statistiques tels que la fusion de données, qui permettent d'améliorer la fiabilité des échantillons en considérant différentes sources de données [40, 41].

Les données ainsi obtenues se distinguent par la nature de l'aire géographique considérée (villes denses, aires urbaines ou périurbaines) et des modes utilisés (véhicules personnels, bus, rail). Il est à noter que pour le cas des transports en commun, les données sont centralisées et récupérées directement par les opérateurs de transport [133, 172].

### 1.1.1.3 Données synthétiques obtenues par la simulation

En l'absence de données réelles, la technique de simulation peut trouver des applications intéressantes dans le cadre de l'étude du niveau de variabilité des temps de parcours [133]. Elle constitue un pis-aller en l'absence de jeux de données réelles ou d'enquêtes de terrain, notamment dans la mesure où ces dernières techniques requièrent un investissement assez coûteux en ressources (temps consacré, dispositifs techniques nécessaires, rétribution éventuelle des répondants...). *A contrario*, la simulation engendre des données dont la qualité et la représentativité sont maîtrisées, à des échelles variées [102].

Ceci étant dit, cette technique nécessite le respect d'une méthodologie rigoureuse. Dans cette optique, Hollander [73] a proposé une technique de micro-simulation des entrées d'un modèle, à l'échelle microscopique (véhicules, individus...), de manière à représenter de la façon la plus pertinente possible l'évolution aléatoire du trafic et l'hétérogénéité des acteurs, composantes principales de la variabilité des temps de parcours. Quoiqu'il en soit, une étape de validation de la simulation par des données de terrain s'avère nécessaire, puisqu'elle permet de vérifier si la simulation s'oriente vers des résultats pertinents dans le contexte empirique [102]. La simulation peut également être employée sur le modèle d'un jeu de données réelles, pour pallier les défauts de ce dernier tout comme pour s'inscrire dans un contexte aussi réaliste que possible [33].

Par ailleurs, Clark *et al.* [31] soulèvent un autre inconvénient de la simulation, à savoir l'inexactitude des résultats théoriques auxquels elle permet d'aboutir. Ils proposent un exemple au sein duquel la simulation est surpassée par l'approche analytique : dans le contexte de l'étude de temps de parcours sur un réseau complet, la reconstruction analytique des moments des distributions des temps de trajet est plus efficace, au sens de la significativité statistique ainsi qu'en termes de temps de calcul, qu'une génération des distributions via une simulation Monte-Carlo. Bien que réalisés en environnement contrôlé avec une maîtrise forte des entrées et des sorties du modèle associé, les procédés de simulation restent tributaires de la qualité de leur conception.

## 1.1.2 La variabilité à l'aune des préférences individuelles

Une première tendance de fond observée dans la littérature est la recherche d'un modèle de variabilité permettant d'étudier les comportements des individus. Dans cette optique, les chercheurs se sont placés dans une perspective utilitariste, dans laquelle l'objectif est la minimisation d'une fonction de coût (ou de désutilité), ou de façon duale, la maximisation d'une fonction d'utilité. Après les apports précurseurs de Gaver [58], Vickrey [160] ou Knight [89], deux familles de modèles se sont développées autour de cette logique : les modèles de type *centralité-dispersion* et ceux de type *ordonnancement*, à partir des apports respectifs de Jackson *et al.* [77] d'une part et de Small [147] d'autre part. Les évolutions du champ de recherche présentées ici se basent sur les revues proposées par Noland *et al.* [116], et Carrion *et al.* [20], le lecteur est invité à s'y référer pour plus de détails.

### 1.1.2.1 Modèles de centralité-dispersion

Au sein de cette première approche, la mesure de fiabilité est dite « directe » [72]. Par définition, une fonction d'utilité s'inscrivant dans la mouvance des modèles de centralité-dispersion inclut une mesure de centralité ainsi qu'une mesure de dispersion, cette dernière traduisant la variabilité du temps de trajet. Les paramètres d'une telle fonction sont généralement estimés à partir des données tirées d'une enquête de type SP [166].

La première contribution ayant fourni un modèle de centralité-dispersion est celle de Jackson *et al.* [77]. A l'origine, sur un ensemble de chemins  $C_{OD}$  reliant une origine  $O$  à une destination  $D$ , un voyageur est supposé trouver le chemin  $c \in C_{OD}$  qui optimise le programme linéaire suivant :

$$\min (\mathbb{E}(T_c) + \lambda_k * V(T_c)) \quad (1.1)$$

où  $T_c$  est le temps nécessaire au parcours du chemin  $c$ ,  $\mathbb{E}(T_c)$  son espérance et  $V(T_c)$  sa variance. Le paramètre  $\lambda_k > 0$  mesure l'aversion au risque du voyageur  $k$ . Il est ainsi question de choisir une route minimisant le coût supporté par un individu, à l'aune de son comportement face au risque.

Depuis, plusieurs formulations de type centralité-dispersion ont émergé, à commencer par la plus simple, mêlant la moyenne  $\mu_T$  et l'écart-type  $\sigma_T$ , et des coefficients  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  représentant l'importance donnée à ces deux grandeurs :

$$U = \gamma_1 \cdot \mu_T + \gamma_2 \cdot \sigma_T \quad (1.2)$$

D'autres formes fonctionnelles ont également été proposées pour modéliser l'utilité perçue par le voyageur, à l'image des formes polynomiales ou exponentielles [125, 143]. À l'aide de la théorie de l'utilité espérée [161], et quelle que soit la forme fonctionnelle retenue, il est possible d'exprimer l'espérance de l'utilité en fonction de l'espérance du temps de parcours et de sa variance, ce qui permet de revenir sur des formes d'équation semblables à celle de Jackson *et al.*.

Plus récemment, Carrion *et al.* [21], ont développé un modèle économétrique incluant des mesures de centralité, de dispersion, de coût mais aussi une variable socio-démographique, une variable d'habitude et une variable temporelle pour représenter le moment de la journée. Ces auteurs ont testé deux variables de centralité (la moyenne et la médiane) et trois variables de dispersion (l'écart-type, l'écart entre le 90<sup>ème</sup> et le 50<sup>ème</sup> centiles, et l'écart entre le 75<sup>ème</sup> et le 25<sup>ème</sup> centiles), soit six modèles différents, et trouvent que le modèle composé de la moyenne et de l'écart-type est le plus significatif. Par ailleurs, Liu *et al.* [96] ont proposé un modèle de centralité-dispersion à quatre termes : une variable représentant le temps

de parcours, une autre pour sa fiabilité, et une troisième pour le coût du trajet, la dernière représentant un terme d'erreur. Leur approche se distingue par l'utilisation d'un algorithme génétique pour l'estimation des paramètres de la fonction objectif. Enfin, une dernière approche se rattache à la logique de centralité-dispersion : il s'agit de l'étude de la relation entre l'écart-type et la moyenne de la distribution des temps de parcours [102]. Quelle que soit la taille du réseau et l'échelle considérée (tronçon, route, matrice O-D ou réseau entier), il existe une corrélation entre les deux mesures. L'implication directe de cette conclusion pourrait entraîner une simplification des modèles de centralité-dispersion.

Il est intéressant de noter que le terme servant à exprimer le coût du trajet permet d'obtenir les valorisations monétaires du temps de trajet ( $VoT$ ) et de l'incertitude liée ( $VoR$ ) [20, 96] :

$$VoT = \frac{\delta U / \delta T}{\delta U / \delta C} \quad (1.3)$$

$$VoR = \frac{\delta U / \delta V}{\delta U / \delta C} \quad (1.4)$$

où  $T$  désigne le temps de parcours,  $V$  la dispersion du temps de parcours et  $C$  désigne le coût supporté pour effectuer le trajet. À ce stade, il est alors possible de construire un indicateur de fiabilité, généralement noté  $RR$  ( $RR = \frac{VoR}{VoT}$ ). Cette mesure est reconnue comme métrique de la variabilité sur un tronçon donné, et constitue l'objet principal de la méta-analyse évoquée plus haut [20].

### 1.1.2.2 Modèles d'ordonnement

Une approche différente de celle décrite précédemment s'est focalisée sur une description plus intuitive de la variabilité des temps de parcours, mais qui la rend du même coup moins directement accessible : il s'agit de l'approche par l'ordonnement. Ainsi, l'utilité perçue par un individu dépend du temps de parcours en soi, mais aussi de variables d'ordonnement telles que l'arrivée en avance ou en retard et la probabilité d'arriver en retard. Small [147], premier auteur à avoir proposé un tel modèle, exprime l'utilité de la manière suivante :

$$U(t_d) = \alpha T + \beta SDE + \gamma SDL + \theta D_L \quad (1.5)$$

$SDE$  désigne l'éventuelle avance par rapport à la date d'arrivée préférée, et parallèlement,  $SDL$  représente le retard possible par rapport à cette date. Une de ces deux valeurs est nécessairement nulle.  $D_L$  est une fonction indicatrice valant 1 si l'individu est en retard, 0 sinon. Enfin,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\theta$  sont les paramètres du modèle. Le principe de ce modèle sera de choisir une date de départ  $t_d$  maximisant la fonction d'utilité.

Plus tard, la notion d'utilité espérée a servi à caractériser un environnement incertain, avec un temps de parcours devenu stochastique. Sous l'égide de Noland *et al.* [117], la nouvelle formulation a été la suivante :

$$\mathbb{E}(U(t_d)) = \alpha \mathbb{E}(T) + \beta \mathbb{E}(SDE) + \gamma \mathbb{E}(SDL) + \theta P_L \quad (1.6)$$

où  $P_L = \mathbb{E}(D_L)$  est la probabilité d'être en retard, l'équation 1.6 peut donc être considérée comme la version stochastique de l'équation 1.5.

Une avancée intéressante pour le cas des transports publics soumis à des horaires planifiés a été apportée par Bates *et al.* [8]. Ainsi, les passages des bus, tramways et autres métros sont définis sur des grilles horaires pré-définies, *i.e.* des intervalles discrets, si bien que plus de désutilité est générée. La date de départ optimale peut ne pas correspondre avec l'arrivée du véhicule en service, et il est alors nécessaire de gérer les temps d'attente comme des variables aléatoires supplémentaires. Ces auteurs apportent également la notion d'adhésion au planning du service de transport, définie par la différence entre arrivée réelle et arrivée prévue par la grille horaire. Ainsi, la perte d'utilité causée par une arrivée tardive peut être compensée par une arrivée en avance, mais aussi aggravée par un retard sur le planning.

D'autres contributions récentes ont permis de raffiner l'approche par ordonnancement, à tel point qu'il est possible d'envisager la propriété d'additivité des mesures de la variabilité des temps de parcours sur des tronçons consécutifs [44]. Dans cette dernière étude, il est montré que la variabilité ne dépend que d'une constante  $\beta$ , résultante du comportement des individus face au risque :

$$C_T(\beta) = \frac{\ln \mathbb{E}[\exp(\beta(T - \mu))]}{\beta^2} \quad (1.7)$$

où  $T$  est la variable aléatoire représentant le temps de parcours, et  $\mu$  le temps de parcours moyen. Une telle expression rend la fonction d'utilité additive, et autorise l'analyse de la variabilité sur des enchaînements de segments. Sur le même thème, Jenelius [79] modélise la moyenne et la variabilité des temps de parcours en considérant des distributions dépendantes entre des tronçons adjacents, ce qui ouvre également la voie à la modélisation de trajets chaînés, composés d'une ou plusieurs correspondances.

Ces dernières avancées sont soumises à des hypothèses relativement restrictives concernant la forme des fonctions d'utilité des activités entourant les trajets. Deux cas de figure sont envisagés : une forme en pente et une forme en escalier [16, 79], dans lesquelles les fonctions d'utilité doivent posséder des propriétés précises tant dans la forme de la fonction qu'en termes de continuité ou de variation.

### 1.1.2.3 Points de rencontre entre les deux approches

Ces deux méthodes de modélisation de la variabilité des temps de parcours se sont mutuellement influencées. Ainsi, Hollander s'est attaché à déterminer la significativité des variables correspondant aux deux approches [72]. La variabilité dans les modèles d'ordonnancement s'établit ainsi dans les variables d'arrivée en avance ou en retard, alors que les modèles de centralité-dispersion accordent une importance jugée trop grande à la mesure de centralité, cela conduisant à une sous-estimation de la valeur de la variabilité. L'auteur déduit de cette différence l'inadaptation des modèles de centralité-dispersion, plus facilement utilisables (les données individuelles propres aux dates de départ et d'arrivée préférées ne sont pas nécessaires) mais moins exacts dans la théorie.

En plus de comparaisons entre les deux modèles, la littérature contient également des contributions ayant démontré l'équivalence théorique entre les deux approches, sous certaines hypothèses (notamment liées aux formes des courbes d'utilité des activités adjacentes, ou au caractère d'indépendance entre la date de départ et le temps de parcours). Ainsi, à partir d'un modèle d'ordonnancement, Börjesson *et al.* [16] parviennent à exprimer un modèle d'utilité de forme réduite assimilable à un modèle de centralité-dispersion. Cependant, lorsqu'ils testent un modèle d'ordonnancement et sa forme réduite sur des données réelles, les paramètres du premier correspondent à une valorisation de la variabilité jusqu'à dix fois

inférieure à celle du second. Les auteurs avancent quelques hypothèses pour expliquer cette différence, au rang desquelles la connaissance *a priori* de la date d'arrivée, la désutilité liée à la variabilité, ou des biais cognitifs exprimés dans les réponses. Ils en déduisent finalement que l'équivalence entre les deux formes de modélisation reste peu évidente et sujette à des hypothèses contraignantes.

Malgré tout, un tel rapprochement n'est sans doute pas hors de propos : si le temps de parcours est indépendant de la date de départ, l'utilité espérée maximale est linéaire par rapport à la moyenne et à l'écart-type [49], indépendamment de la forme de la distribution centrée-réduite du temps de parcours. Et si le temps de parcours est dépendant de la date de départ, cette relation est encore bien approximée.

## 1.2 Indicateurs de performance statistique

Le second pan de la littérature dédié à la variabilité des temps de parcours est orienté selon une approche plus opérationnelle, consistant à estimer la variabilité par une métrique simple ou via un encadrement du temps de parcours au sein d'un intervalle de confiance. Cette vision nécessite l'utilisation de données fiables, ce que des techniques comme la fusion de données permettent d'assurer [40].

Ainsi, plusieurs pistes de mesure de la variabilité ont déjà été proposées, fondées sur des indicateurs de centralité, de dispersion, ou sur des écarts inter-centiles de la distribution des temps de parcours. De plus, des tentatives de modélisation de cette distribution par des lois statistiques classiques ont été développées. La modélisation statistique de la distribution des temps de parcours est une approche plus complète qui permet de déduire des indicateurs théoriques, une fois que les paramètres des lois ont été calés. Cette dernière piste de modélisation n'est pas nouvelle au sein de l'état de l'art, et plusieurs lois de probabilité ont été citées comme des candidates sérieuses, qu'elles soient caractérisées par deux paramètres, ou plus.

### 1.2.1 Approche synthétique de la construction d'un indicateur de fiabilité

Le travail de l'Institut des Transports Texan est certainement l'effort le plus exhaustif sur le sujet, il est relativement instructif en matière d'indicateurs de fiabilité des temps de parcours [98].

Un rapport datant de 2003 énumère ainsi tout un ensemble d'indicateurs regroupés autour de trois catégories :

— **Les indicateurs statistiques**, au rang desquels :

— la fenêtre de temps de parcours acceptable  $TTW$ , correspondant à un intervalle de confiance autour de la moyenne  $\mu$  construit avec l'écart-type  $\sigma$  :

$$TTW = \mu \pm \alpha * \sigma \quad (1.8)$$

— le coefficient de variation  $CV$  :

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} \quad (1.9)$$

- un indice de variabilité  $VI$  comparant une situation de congestion avec une situation fluide, qui se base sur les intervalles de confiance  $IC_i(95\%) = [a_i, b_i]$ , où  $i = \{fluide, cong\}$  :

$$VI = \frac{b_{cong} - a_{cong}}{b_{fluide} - a_{fluide}}$$

- **Les indicateurs de type marge de sécurité**, tels que :

- le *Buffer Time*  $BT$ , indiquant l'ampleur de la dispersion pour les trajets plus longs, construit à partir du 95<sup>ème</sup> centile  $T_{95}$  :

$$BT = T_{95} - \mu \quad (1.10)$$

- le *Buffer Time Index*  $BTI$ , pondérant la valeur précédente par le temps de parcours moyen :

$$BTI = \frac{T_{95} - \mu}{\mu} \quad (1.11)$$

- le *Planning Time Index*  $PTI$ , ratio entre un temps de parcours ralenti et un temps de parcours effectué à une vitesse  $V_f$  associée à un trafic fluide (60 miles/heure dans le rapport) :

$$PTI = \frac{T_{95}}{T_{V_f}} \quad (1.12)$$

- **Les indicateurs d'évaluation du retard**, tels que :

- l'indicateur de fiabilité Floridien (ou *IFF*) renseignant sur la probabilité d'effectuer un trajet en moins de temps qu'une mesure liée à la moyenne :

$$IFF = \mathbb{P}(T \leq \mu(1 + \beta)) \quad (1.13)$$

où  $\beta$  est un seuil fixé par le modélisateur,

- le *Misery Index*  $MI$  défini par l'équation suivante :

$$MI = \frac{ATR_\alpha - ATR}{ATR} \quad (1.14)$$

où  $ATR$  est défini comme le temps de parcours moyen sur une portion de route de longueur normalisée, et  $ATR_\alpha$  comme la même valeur au sein du sous-échantillon constitué des  $\alpha\%$  de trajets les plus longs (le paramètre  $\alpha$  étant également laissé à la discrétion du modélisateur).

Il est à noter que ces indicateurs mettent en œuvre pour la plupart les mesures de centiles de la distribution des temps de parcours, et en particulier des centiles situés dans la deuxième partie de la distribution : les temps de parcours intéressants pour caractériser la fiabilité sont ceux des individus subissant une forte variabilité [166], à la précision près que les valeurs extrêmes sont mises de côté, d'où l'utilisation du 75<sup>ème</sup>, du 90<sup>ème</sup> voire du 95<sup>ème</sup> centile.

Au-delà de ce travail d'inventaire très cité au sein du domaine de recherche, deux tendances contraires cohabitent dans la littérature : la première met à l'honneur l'écart-type en tant que mesure la plus simple et la plus pertinente pour évoquer la variabilité. Ainsi, cette notion est liée à la variabilité au sens statistique. À partir de ce constat, certains auteurs ont cherché des propriétés mathématiques caractérisant les distributions empiriques des temps



de parcours : c'est le cas par exemple de Mahmassani *et al.* [102] ou de Kim et Mahmassani [87] qui ont construit leur réflexion sur l'hypothèse d'existence d'une relation linéaire entre la moyenne des temps de parcours et leur écart-type. De manière générale, l'écart-type a aussi été reconnu comme apte à représenter la variabilité, dans la mesure où il constituerait une approximation relativement bonne d'autres métriques [128]. Enfin, cette approche a également été rencontrée dans une publication de Rakha *et al.* [129] centrée sur les temps de parcours sur un lien composé de plusieurs tronçons : l'écart-type  $y$  est la métrique choisie pour caractériser la variabilité, il est ici intéressant de constater que les auteurs envisagent de multiples variantes à partir de cette grandeur, en identifiant tantôt des contraintes de dépendance entre tronçons, tantôt des bornes sur l'écart-type, voire en introduisant des mesures médianes plutôt que moyennes.

En partant de la constatation que les indicateurs basés sur l'écart-type ne permettent pas de retranscrire fidèlement la variabilité des temps de parcours, Van Lint *et al.* [156] mettent en exergue une seconde vision de la variabilité. Ces auteurs ont mené des investigations relatives à la largeur de la distribution et à son asymétrie, preuves selon eux du manque de fiabilité du temps de parcours. Plutôt que de se focaliser sur les définitions théoriques de ces grandeurs, sensibles aux observations extrêmes, ils ont proposé des indicateurs de la largeur et de l'asymétrie de la distribution, tels que définis ci-dessous :

$$\lambda^{var} = \frac{C90 - C10}{C50} \quad (1.15)$$

$$\lambda^{skew} = \frac{C90 - C50}{C50 - C10} \quad (1.16)$$

où  $C_x$  désigne le  $x^{\text{ème}}$  centile de la distribution des temps de parcours. À partir de ces deux premières mesures, un autre indicateur synthétique pondéré par la longueur du tronçon  $l_r$  a été défini pour caractériser la possibilité d'observer une valeur extrême de temps de parcours :

$$UI_r = \begin{cases} \frac{\lambda^{var} \ln(\lambda^{skew})}{l_r} & \text{si } \lambda^{skew} > 1 \\ \frac{\lambda^{var}}{l_r} & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.17)$$

Ce faisant, ces auteurs ajoutent que l'analyse de tels indicateurs est pertinente au regard des différentes phases de congestion : la phase d'installation de la congestion, la congestion en elle-même, la phase de décongestion et le trafic fluide. Ces indicateurs ont récemment été testés sur un tronçon autoroutier francilien [12]. Les auteurs de cette étude de cas ont ainsi estimé que  $\lambda^{var}$  est un indicateur robuste de la fiabilité des temps de parcours, contrairement à  $\lambda^{skew}$  (et  $UI_r$ , qui en dépend) : le dénominateur de  $\lambda^{skew}$  apparaît très impacté par les conditions de limitation de vitesse, si bien que la métrique apporterait plus d'informations sur la centralité de la distribution. Par ailleurs, d'autres indicateurs alternatifs s'inscrivent également dans cette optique, à l'image de la *variabilité acceptable du temps de parcours* et de la *réduction désirée du temps de parcours* (notés *ATTV* et *DTTR*) proposées par Wakabayashi *et al.* [162], qui correspondent à des mesures de centralité auxquelles est ajouté (respectivement retranché) un temps déterminé par le modélisateur. Cette approche très empirique permet de mettre en valeur la dispersion des valeurs autour de la moyenne (ou de la médiane) sans passer par l'écart-type.

Finalement, là aussi, aucun consensus n'a émergé sur la question de la représentation de la variabilité par une métrique. Quoi qu'il en soit, que l'écart-type soit mis en avant ou non,

la simplicité de ces techniques doit tout de même rester à l'esprit du modélisateur, comme le rappelle la contribution d'Emam *et al.* [43]. Ces derniers ont comparé un ensemble d'indicateurs de la fiabilité à une technique de modélisation par différentes distributions statistiques, le résultat principal de cette dernière contribution étant qu'une loi de probabilité semble montrer des résultats plus significatifs pour représenter le temps de parcours des segments congestionnés (et donc, pour caractériser la variabilité). Justement, la représentation de la distribution des temps de parcours par une loi statistique a été considérée comme une technique prometteuse pour cette thèse, et constitue sans nul doute un préalable pertinent avant la construction d'une quelconque métrique. A ce titre, il est assez évocateur de rappeler la contribution de Kaparias *et al.* [82], dans laquelle un indicateur théorique de la variabilité est construit à partir de la définition de la loi lognormale. Au-delà de cet exemple, le paragraphe suivant retrace toutes les tentatives de modélisation des temps de parcours via des lois de probabilité.

### 1.2.2 Recherche de lois de probabilité pour les temps de parcours

Représenter la distribution des temps de parcours par l'ajustement d'une loi statistique classique est un exercice relativement récent dans la littérature. L'avantage de cette technique est la possibilité d'effectuer des prévisions de temps de parcours, ou de juger des performances passées du réseau sur des tronçons donnés. De même, l'information proposée par une telle technique pourrait être transmise sous une forme simplifiée aux utilisateurs du réseau de transport (usagers et professionnels), de manière à améliorer le niveau de service [15, 43]. La modélisation des temps de parcours par une loi de probabilité est un moyen plus complet d'appréhender le phénomène, dans la mesure où des indicateurs tirés du modèle peuvent être produits pour caractériser les temps de parcours de manière plus synthétique.

Les distributions des temps de parcours possèdent des particularités aisément identifiables en termes de profil. Ainsi, il est question d'une forme asymétrique sur la droite (i.e. avec un coefficient d'asymétrie positif) et d'une longue queue de distributions pour les grandes observations [42, 151, 152].

Avant d'aller plus loin sur cette voie, il est intéressant de noter que d'autres chercheurs ont posé le problème de façon un peu différente. Plutôt que d'ajuster une loi connue, Clark *et al.* [31] ont déterminé la distribution d'un temps de parcours en reconstruisant les premiers moments de la distribution (i.e. ceux influençant le plus sa forme) en s'inscrivant au sein du système de courbes de Johnson, dérivées par un ensemble de transformations associées à la loi Normale, Sohn *et al.* [149] se sont attachés à développer un modèle statistique prédictif basé sur les séries temporelles d'observations, alors que Graves *et al.* [61] se sont concentrés sur la modélisation de la variabilité des temps de parcours à l'échelle d'un carrefour à feu. Les carrefours à feux, théâtre particulier de la circulation sur le réseau de transport routier, ont également été étudiés par Cao *et al.* [19], qui se sont appliqués à proposer une loi de probabilité adaptée. Ainsi, la distinction entre temps de rouge et temps de vert appelle l'utilisation d'un plateau de Dirac couplé à des distributions plus standards (lois normales ou lognormales tronquées). Cette approche a également été suivie par Hans *et al.* [69], pour qui des lois normales et des plateaux de Dirac composaient le modèle régissant les temps de parcours. Ces derniers auteurs ont également traité le phénomène des temps de parcours en se penchant sur la physique du trafic dans les artères urbaines à l'aide de la théorie variationnelle [70]. Ceci étant dit, la variété de ces approches suggère également la diversité du phénomène, entre contextes urbain et inter-urbain.

Pour ce qui concerne l'ajustement des lois statistiques à proprement parler, les prémisses

de cette approche reposent sur la modélisation de la distribution des dates de départ et d'arrivée [133]. Ainsi, en supposant que le temps de parcours soit égal à la date d'arrivée moins la date de départ, sa modélisation est assurée par le biais d'une technique de convolution des lois statistiques correspondant à ces deux autres variables (les auteurs de cet article évoquent les lois normales, lognormales, exponentielles, en fonction des différents modes de transport).

Une autre contribution sur le thème de l'adaptation des lois statistiques à la modélisation de la distribution du temps de parcours sur un tronçon est celle de Jintanakul *et al.* [80] : ces auteurs présentent une approche bayésienne visant à reproduire la distribution des temps de parcours à partir de paramètres géographiques (caractéristiques de la route, conditions de trafic), ou relevant des comportements des conducteurs. L'intérêt de leurs résultats réside dans la prise en compte des particularités locales du trafic, de même que dans la découverte d'une caractéristique propre à la forme de la distribution des temps de parcours : sa bimodalité, évoquée également plus tard par Taylor *et al.* [152], ou encore Ma *et al.* [101]. Le caractère bimodal trouve aussi sa justification lorsque plusieurs modes de transport empruntent la même section, comme mentionné par exemple par Laharotte *et al.* [91] : chaque mode de la distribution correspond alors à la modélisation d'un mode de transport particulier.

Par la suite, d'autres publications se sont concentrées sur la question de la meilleure loi de distribution, au sens de la significativité statistique d'un ajustement basé sur des données empiriques [42, 43, 62, 87, 151, 152]. Ainsi, comme évoqué précédemment, Emam *et al.* [43] se sont attachés à comparer les performances des indicateurs de fiabilité avec celles des ajustements des lois de Weibull, exponentielle, normale et lognormale. Leur conclusion met en avant la distribution lognormale, dont les propriétés sont d'ailleurs discutées par El-Faouzi *et al.* [42]. Compte tenu de sa forme, cette distribution semble assez proche de celle imaginée pour la distribution des temps de parcours. Chen *et al.* [27] modélisent les temps de parcours selon des lois normales, mais également selon des lois lognormales. L'arbitrage est effectué en fonction des performances comparées des deux lois au test du  $\chi^2$ . Les auteurs aboutissent à une modélisation des temps de parcours avec la loi lognormale dans plus de 83% des cas, démontrant la supériorité de cette loi sur la loi normale. Un autre éclairage est apporté par Taylor *et al.* [152], qui, eux, développent les propriétés d'une autre loi de distribution, la loi de Burr, après avoir obtenu de meilleures performances statistiques avec cette distribution dans le processus d'ajustement [151]. En effet, au vu des données empiriques utilisées, la loi lognormale présente des coefficients de significativité statistique assez peu élevés, alors que des lois telles que celle de Weibull ou la loi Gamma semblent également moins performantes. Guessous *et al.* [62] parviennent à la même conclusion générale, lorsqu'ils comparent une variante de la loi de Burr avec les lois lognormale, Weibull, Gamma, Gamma mixte et gaussienne mixte sur un jeu de données impliquant des trajets autoroutiers à la jonction de l'A4 et de l'A86. L'intérêt de cette dernière étude est la considération des niveaux de service définis par l'autorité américaine des transports (de 1 à 6, 1 désignant le niveau de service le plus élevé). La publication de Kim *et al.* [88] accorde au contraire plus de crédit à la loi Gamma : sur des données simulées sur le centre-ville de Chicago, ces auteurs mettent en avant cette loi pour modéliser les temps de parcours, au titre de sa correspondance avec le phénomène physique modélisé. Le temps de parcours est alors vu comme une variable aléatoire caractérisée par une erreur multiplicative, ce qui revient à dire qu'elle est affectée par une multiplication de petits aléas conditionnant sa réalisation. Cette définition coïncide également avec la loi lognormale, comme les travaux de Rakha *et al.* [129] à propos de la variabilité des temps de parcours sur une route composée de plusieurs tronçons l'indiquaient. Mais sur l'échantillon retenu, les auteurs observent une meilleure performance de la loi Gamma. Ces derniers

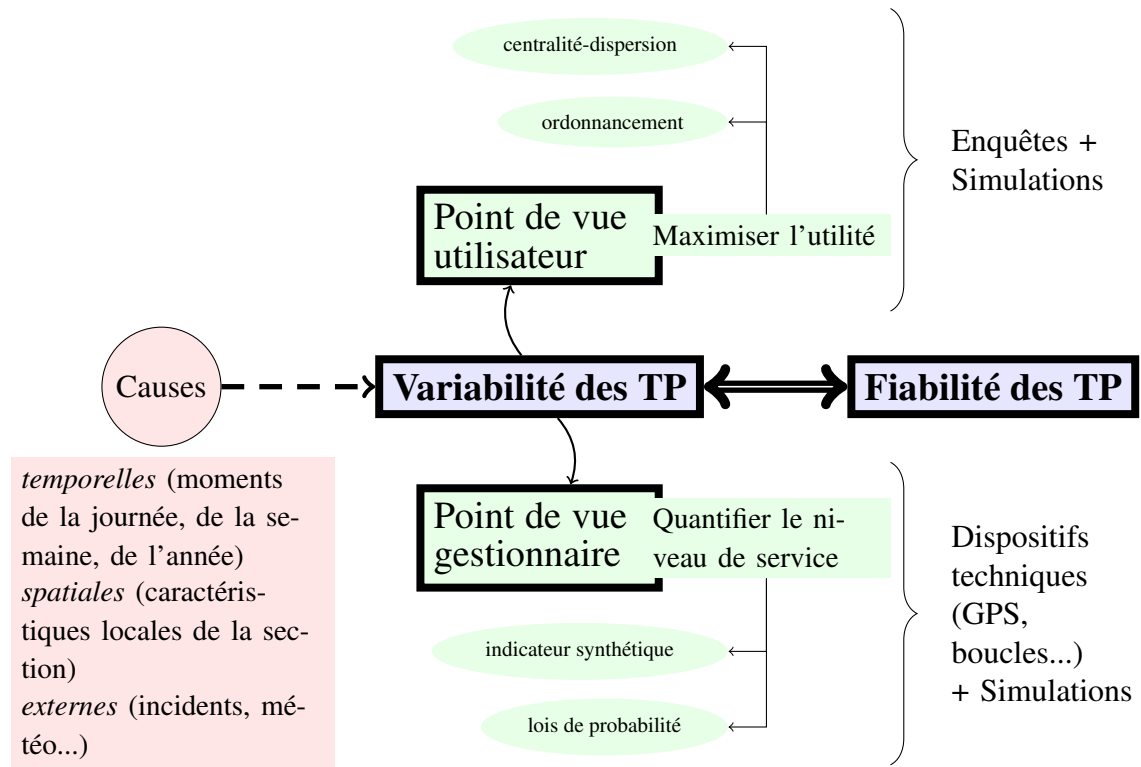


FIGURE 1.5 – La variabilité des temps de parcours dans la littérature

travaux sont également rendus intéressants par la proposition d'un modèle mixte combinant deux lois Gamma, via une première variable censée représenter la variabilité d'un véhicule à l'autre, et une seconde censée représenter la variabilité d'un jour à l'autre. Même si aucune réelle validation statistique ne vient étayer la qualité supposée de cette dernière modélisation, il s'agit à ce jour de l'une des représentations les plus abouties des temps de parcours en tant que phénomène physique. Enfin, un autre élément important de la modélisation statistique est à prendre en compte, notamment dans le cas de l'étude d'itinéraires composés de plusieurs sections non indépendantes : les temps de parcours peuvent être corrélés les uns par rapport aux autres [112].

## Conclusion

Depuis quelques années, la variabilité des temps de parcours est reconnue comme une notion incontournable pour un gestionnaire d'infrastructure, d'une importance peut-être même supérieure à celle des temps de parcours moyens. Cet intérêt des individus (chercheurs, mais aussi voyageurs, gestionnaires de réseaux ou pouvoirs publics) reflète l'intérêt porté à la fiabilité des temps de parcours et au niveau de service proposé par les infrastructures de transport.

Ce travail de revue aura permis de préciser les grands enjeux de la conception d'une métrique de l'incertitude, en rappelant notamment que deux grands courants existent dans ce but : celui centré sur l'utilité ressentie par les individus, et un autre se focalisant sur un questionnement plus opérationnel d'estimation objective de l'incertitude présente sur une portion de réseau. Les points de vue mis en lumière au travers des deux approches s'avèrent différents, mais leur complémentarité permet d'aborder le problème de la variabilité des temps

de parcours de manière complète. En outre, la question du recueil des données est également centrale : au-delà de la validation des modèles conçus durant l'activité de recherche, elle est le cadre d'un développement technologique voyant l'émergence de nouveaux dispositifs comme le GPS ou le Bluetooth. Et finalement, la gestion du réseau de transport par les opérateurs de trafic s'améliore au fur et à mesure des innovations, dans la mesure où de nouvelles grandeurs deviennent mesurables. Les orientations prises dans la littérature sur la variabilité sont résumées par la figure 1.5.

Un objectif de cette thèse est la prise en compte de l'incertitude propre aux temps de parcours. La notion de variabilité est ainsi la porte d'entrée choisie, tout l'enjeu étant d'en proposer une mesure synthétique. Comme il a été possible de le voir tout au long des précédentes sections, il n'existe pas de réponse parfaite pour modéliser la variabilité, ni de métrique robuste dans l'absolu, que le choix de modélisation soit simple ou qu'il combine des notions théoriques différentes comme cela a été le cas des différents modèles mixtes proposés dans la littérature : des modèles multinomiaux [71], des approches bayésiennes [80], des algorithmes génétiques [96], ou encore des chaînes de Markov [130]. Le chapitre suivant présentera les orientations choisies lors du travail de thèse pour répondre à la question de la quantification de la variabilité. En l'occurrence, plusieurs lois de probabilité seront confrontées de manière à déterminer laquelle présente le plus de potentiel en matière de modélisation des temps de parcours, en gardant à l'esprit le besoin de synthétiser l'information via une métrique simple, ainsi que la nécessité de considérer l'additivité des distributions en vue de la modélisation d'itinéraires complets.

## Modélisation statistique des temps de parcours

L'estimation statistique et la prévision des temps de parcours sont des questions centrales en ingénierie des transports et en exploitation des infrastructures. Parmi les questions associées, la problématique de la variabilité des temps de parcours est fondamentale pour les gestionnaires de réseaux, qui l'utilisent comme un indicateur de qualité des déplacements, ainsi que pour les usagers (en particulier, via des temps de parcours rapides et fiables). À ce titre, plusieurs lois de probabilité ont déjà été utilisées pour capturer la variabilité du phénomène.

Dans le cadre de notre travail, une famille de lois de probabilité a été étudiée, il s'agit des lois de Halphen, mises au point par Étienne Halphen [66, 110] en hydrologie pour modéliser les fréquences des débits de crue des rivières. Elles sont intéressantes de par la correspondance de leur fonction de densité avec le profil empirique des distributions de temps de parcours, à savoir une définition sur l'ensemble des réels positifs, un mode plutôt marqué, et une silhouette globale asymétrique caractérisée par une queue de distribution. Des propriétés supplémentaires pour ces lois ont été développées par Perreault *et al.* [122, 123]. L'intérêt de ce système de lois de probabilité pour la modélisation des temps de parcours sera démontré dans les sections à venir. L'objet du présent chapitre sera le développement de propriétés mathématiques pour un sous-ensemble de lois de probabilité proposées dans l'état de l'art ou dérivées de la famille de Halphen. Cette première étape sera destinée à alimenter une étude comparative des lois pour la modélisation des temps de parcours. En particulier, des temps de parcours sur des segments simples seront d'abord considérés comme préalable à une analyse centrée sur un itinéraire composé de plusieurs segments consécutifs.

Les contributions principales de ce chapitre sont les points suivants :

- L'utilisation de la famille des lois de Halphen pour des applications au trafic. Cette famille est composée de lois de probabilité dont les propriétés correspondent de manière adéquate aux densités empiriques de temps de parcours constatés sur des segments routiers.
- De nouveaux estimateurs des paramètres, développés pour un sous-ensemble de lois de probabilité. Ceux-ci sont construits à partir des moyennes arithmétique, géométrique et harmonique, et d'un outil graphique à deux dimensions, le diagramme des ratios de moments  $\delta_1$ - $\delta_2$  (ou  $\delta$ -MRD). De par les liens qu'entretiennent les lois de Halphen avec le diagramme  $\delta$ -MRD, une analyse détaillée se concentrera sur cette famille de lois. Cependant quelques lois classiques seront intégrées à cette partie de l'étude, telles

que les lois lognormale, Gamma et Gamma Inverse.

- L'évaluation graphique des états de trafic, et en particulier, de la variabilité des temps de parcours, également facilitée par la manipulation du  $\delta$ -MRD. On montrera que ses coordonnées apportent une information sur la fiabilité, au même titre que les indicateurs classiquement utilisés. Cette étude sera complétée par une analyse multidimensionnelle sur un ensemble d'indicateurs comportant des métriques traditionnelles et celles déduites des ratios de moments.
- Enfin, une évaluation du modèle statistique de sommes de lois est proposée, par le biais d'un ensemble de simulations liant des couples d'échantillons. Le  $\delta$ -MRD sera utilisé pour développer un ensemble de conjectures quant à la propriété de fermeture par l'addition des différentes lois. Une mise en œuvre opérationnelle complète cette modélisation avec l'évaluation des temps de parcours sur une section autoroutière.

Ce chapitre est composé de cinq sections. La partie 2.1 détaillera les différentes lois de probabilité qui ont été examinées lors de cette étude, ainsi que des éléments théoriques traitant de l'estimation des paramètres des lois par la méthode du diagramme  $\delta$ -MRD. Ensuite, la partie 2.2 présentera les différents jeux de données empiriques qui seront utilisés par la suite. Puis la partie 2.3 examinera la notion de fiabilité avec une étude comparative approfondie des différents indicateurs. La partie 2.4 proposera une étude empirique centrée sur l'ajustement des temps de parcours. La partie 2.5 proposera une extension de l'examen des temps de parcours à l'échelle d'un itinéraire, posant ainsi des bases pour l'étude d'une somme de lois de probabilité indépendantes.

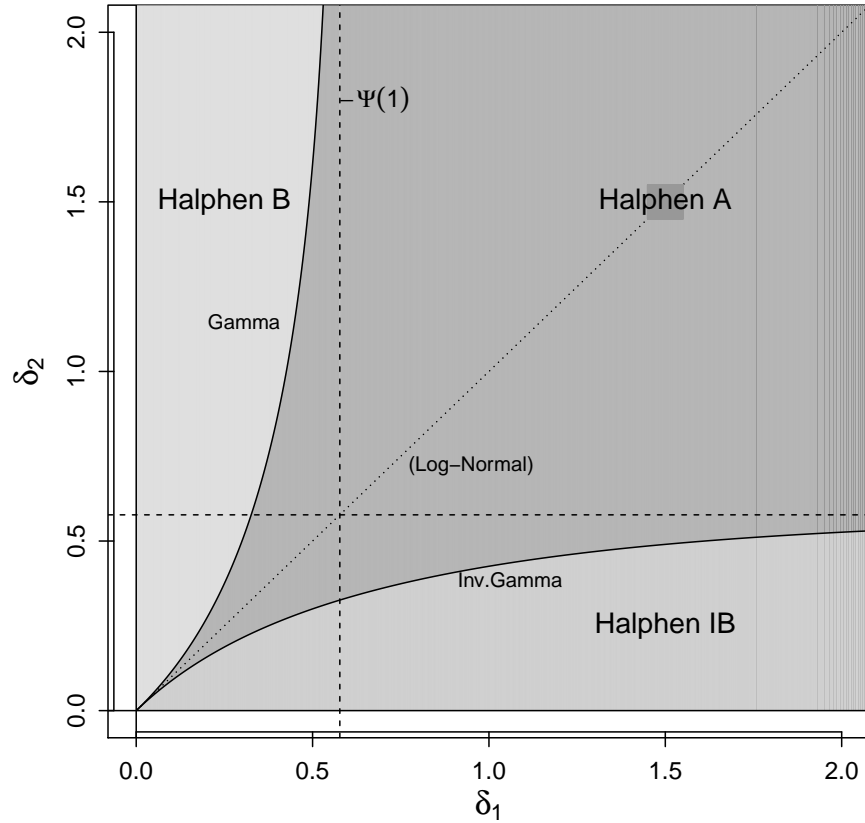
## 2.1 Lois de Halphen et estimation par les ratios de moments

Le Diagramme de Ratio des Moments  $\delta_1$ - $\delta_2$ , dénoté par la suite  $\delta$ -MRD, est un outil graphique mis au point par Morlat [110] dans le but de représenter des distributions composant la famille des lois de Halphen. Il doit être distingué du diagramme  $\beta_1$ - $\beta_2$ , qui représente un espace défini par les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement (moments d'ordre 3 et 4). Les deux diagrammes ont été étudiés en détail par Bobée *et al.* [14]; toutefois, nous avons préféré ici le  $\delta$ -MRD pour sa capacité à mettre en évidence les évolutions de grandeurs simples, les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique, tout comme pour sa faculté à représenter la famille de Halphen. Le principe de construction de ce diagramme sera présenté dans la section 2.1.1.

Différentes lois de probabilité associées au  $\delta$ -MRD et inscrites au sein de la famille de Halphen seront énumérées dans la section 2.1.2. Une revue synthétique des techniques classiques d'estimation de paramètres sera proposée dans la section 2.1.3. D'autres lois issues de l'état de l'art seront abordées plus succinctement dans la section 2.1.4 pour compléter le cadre d'analyse. L'étude se restreint aux lois constituées de deux ou trois paramètres, afin de limiter la complexité des modèles considérés.

### 2.1.1 Construction du diagramme de ratios des moments

À partir d'un échantillon de données empiriques  $x_i > 0$ , l'expression de la moyenne généralisée d'ordre  $r$  est la suivante :

FIGURE 2.1 – Diagramme  $\delta$ -MRD théorique, d'après Bobée *et al.* [14] et Perreault *et al.* [122]

$$M_r(x_i | i \in \{1, \dots, n\}) = \begin{cases} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^r \right)^{\frac{1}{r}} & , \text{ si } r \neq 0 \\ \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} & , \text{ si } r = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Le  $\delta$ -MRD lie les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique, notées respectivement  $A$ ,  $G$  et  $H$ . Ces valeurs sont issues de la moyenne généralisée avec  $|r| \leq 1$ , et sont données par l'ensemble d'équations suivant :

$$A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (2.2)$$

$$G = \exp \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(x_i) \right\} \quad (2.3)$$

$$H = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \quad (2.4)$$

Le lien entre ces valeurs est réalisé à travers l'expression de ratios. Mathématiquement, on a les inégalités  $A \geq G \geq H$  [141]. Par conséquent, on obtient :



$$\frac{A}{G} \geq 1 \quad (2.5)$$

$$\frac{G}{H} \geq 1 \quad (2.6)$$

Les ratios présentés par les équations 2.5 et 2.6 sont d'autant plus grands que l'échantillon initial présente des observations dispersées. En particulier, le ratio liant  $A$  et  $G$  est très sensible aux valeurs extrêmes. En utilisant une transformation logarithmique, ces équations deviennent :

$$\delta_1 = \ln\left(\frac{A}{G}\right) \geq 0 \quad (2.7)$$

$$\delta_2 = \ln\left(\frac{G}{H}\right) \geq 0 \quad (2.8)$$

où  $\delta_1$  et  $\delta_2$  sont respectivement l'abscisse et l'ordonnée du diagramme  $\delta$ -MRD, tel qu'illustré dans la figure 2.1.

Ces coordonnées sont strictement positives, sauf si toutes les valeurs  $(x_i)_{i=1,\dots,n}$  sont identiques, auquel cas  $\delta_1$  et  $\delta_2$  deviennent nulles. L'espace sur lequel le  $\delta$ -MRD est défini est ainsi le cadran supérieur droit sur le repère orthonormé. Le comportement de ces deux ratios de moments les rend adaptés pour des analyses de fiabilité des temps de parcours. Un point sur le  $\delta$ -MRD représente un échantillon, une comparaison entre échantillons peut donc aussi être réalisée graphiquement. Un exemple évident est l'analyse de l'évolution temporelle d'une variable : la trajectoire des points sur le diagramme renseigne sur l'évolution de la dispersion des échantillons. À titre illustratif, les évolutions temporelles de la congestion et de la variabilité des temps de parcours pourront être étudiées visuellement.

La figure 2.1 donne les emplacements théoriques de certaines lois utilisées dans cette étude : les lois de la famille de Halphen, ainsi que ses cas limites, les lois Gamma et Gamma Inverse, d'après la contribution de Bobée *et al.* [14]. Nous montrerons par la suite que la position de ces lois, dans une zone ou le long d'une courbe, est déductible analytiquement à partir de leurs paramètres. Il sera également possible de constater qu'à partir d'une position sur le diagramme, des estimateurs des paramètres des différentes lois peuvent être déduits.

### 2.1.2 Système de Halphen et diagramme de ratio de moments

L'utilisation du  $\delta$ -MRD revient à estimer, dans le contexte d'une variable aléatoire  $X$ , les moments non-centrés d'ordre  $|r| \leq 1$ , par le biais des moyennes empiriques  $A$ ,  $G$  et  $H$ . On pose :

$$A = \widehat{\mathbb{E}(X)} \quad (2.9)$$

$$\ln(G) = \mathbb{E}(\widehat{\ln(X)}) \quad (2.10)$$

$$H^{-1} = \widehat{\mathbb{E}(X^{-1})} \quad (2.11)$$

En combinant les équations 2.9 et 2.10 d'une part, et les équations 2.10 et 2.11, on obtient :

$$\delta_1 = \ln\left(\frac{A}{G}\right) = \ln\left(\widehat{\mathbb{E}(X)}\right) - \mathbb{E}\left(\widehat{\ln(X)}\right) \quad (2.12)$$

$$\delta_2 = \ln\left(\frac{G}{H}\right) = \mathbb{E}\left(\widehat{\ln(X)}\right) + \ln\left(\widehat{\mathbb{E}(X^{-1})}\right) \quad (2.13)$$

Il sera donc question d'utiliser les moments pour positionner chaque loi dans le  $\delta$ -MRD en fonction de ses paramètres. Il sera aussi possible de réaliser le processus inverse, ce qui permettra de proposer de nouveaux estimateurs de ces paramètres.

### 2.1.2.1 La loi Gamma (G)

La loi Gamma entre dans le système de Halphen comme loi limite située entre les lois de types  $A$  et  $B$ . Elle est définie sur l'ensemble des réels positifs. Plutôt dédiée aux applications liées à un écoulement temporel, cette loi est prisee notamment en analyse de survie. Si la variable aléatoire  $X$  suit une loi Gamma  $\mathcal{G}(k, \theta)$ , elle est associée à la fonction de densité suivante :

$$f_G(x|k, \theta) = \frac{\theta^{-k} x^{k-1}}{\Gamma(k)} e^{-\frac{x}{\theta}} \quad (2.14)$$

où  $\Gamma$  est la fonction Gamma. Les moments non-centrés de la loi sont donnés par Bobée *et al.* [14] :

$$\mu_G(r) = \theta^r \frac{\Gamma(k+r)}{\Gamma(k)} \quad (2.15)$$

La position des trois lois de Halphen sur le  $\delta$ -MRD est directement déductible de la localisation de leurs cas limites, c'est-à-dire des courbes identifiant les positions des lois Gamma d'une part, et Gamma Inverse d'autre part. Or, le  $\delta$ -MRD possède la propriété de symétrie axiale par rapport à la première bissectrice. De ce fait, trouver l'expression de l'un des cas limites revient en réalité à trouver les deux. D'après Bobée *et al.* [14], l'expression de la fonction associée à la courbe de la loi Gamma est la suivante (avec  $k > 1$ ) :

$$\delta_2 = \delta_1 + \left(2\Psi(k) + \ln \frac{\Gamma(k-1)}{\Gamma(k+1)}\right) \quad (2.16)$$

où  $\Psi$  est la fonction digamma, définie comme la dérivée logarithmique de la fonction Gamma  $\Gamma$  (*i.e.*  $\Psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ ). La fonction donnant  $\delta_2$  à partir de  $\delta_1$  est définie sur l'intervalle  $]0; -\Psi(1)[$ , comme illustré par la figure 2.1. En partant de l'expression des moments non-centrés rappelée par l'équation 2.15 et des propriétés de la fonction Gamma, il est possible d'écrire :

$$\mathbb{E}(X) = \theta k \quad (2.17)$$

$$\mathbb{E}(\ln(X)) = \ln(\theta) + \Psi(k) \quad (2.18)$$

$$\mathbb{E}(X^{-1}) = \frac{1}{\theta(k-1)} \quad (2.19)$$

D'où, d'après les équations 2.12 et 2.13 :

$$\delta_1 = \ln(\hat{k}) - \Psi(\hat{k}) \quad (2.20)$$

$$\delta_2 = \Psi(\hat{k}) - \ln(\hat{k} - 1) \quad (2.21)$$

Les équations 2.20 et 2.21 donnent la localisation de l'échantillon sur le diagramme de ratio des moments. En posant  $f(x) = \ln(x) - \Psi(x)$ , et en admettant que  $f$  est inversible sur l'intervalle  $]0; -\Psi(1)[$ , on obtient alors  $\hat{k} = f^{-1}(\delta_1)$ . Il suffit d'injecter cette expression au sein de l'équation 2.16 pour retrouver la courbe correspondant à l'ensemble des lois Gamma au sein du  $\delta$ -MRD :

$$\delta_2 = \delta_1 + \left( 2\Psi(f^{-1}(\delta_1)) + \ln \frac{\Gamma(f^{-1}(\delta_1) - 1)}{\Gamma(f^{-1}(\delta_1) + 1)} \right) \quad (2.22)$$

En ce qui concerne l'estimation du paramètre  $k$ , celle-ci peut être réalisée numériquement via l'équation 2.20, qui correspond d'ailleurs à l'expression de l'estimateur selon la méthode du maximum de vraisemblance. L'autre paramètre,  $\theta$ , ne dépend pas des grandeurs  $\delta_1$  et  $\delta_2$ , mais uniquement de  $\hat{k}$ . Son expression, obtenue via l'équation 2.9, est également équivalente à celle de l'estimateur du maximum de vraisemblance :

$$\hat{\theta} = \frac{A}{\hat{k}} \quad (2.23)$$

Les équations 2.20 et 2.21 apportent l'égalité suivante, qu'il convient d'utiliser pour estimer  $k$  :

$$\delta_1 + \delta_2 = \ln \left( \frac{\hat{k}}{\hat{k} - 1} \right) \quad (2.24)$$

L'estimateur de  $k$  par la méthode du ratio des moments est alors :

$$\hat{k} = \frac{e^{\delta_1 + \delta_2}}{e^{\delta_1 + \delta_2} - 1} \quad (2.25)$$

Ce qui peut également s'exprimer à l'aide des moyennes arithmétique et harmonique :

$$\hat{k} = \frac{A/H}{A/H - 1} \quad (2.26)$$

Cette dernière expression constitue une estimation certes différente de celle fournie par l'équation 2.20, mais elle a pour avantage de présenter un estimateur directement calculable à partir d'un échantillon empirique.

Enfin, en utilisant les équations 2.23 et 2.26, il est également possible d'exprimer l'estimateur du paramètre  $\theta$  :

$$\hat{\theta} = A - H \quad (2.27)$$

### 2.1.2.2 La loi Gamma Inverse (GI)

Cette loi est l'inverse de la loi Gamma : si  $X \sim \mathcal{G}(k; \theta)$ , alors  $Y = 1/X \sim \mathcal{G}^{-1}(k; 1/\theta)$ . Cette loi est le second cas limite du système de Halphen, séparant cette fois les lois  $A$  et  $B^{-1}$ . Elle est définie par la fonction de densité suivante :

$$f_{GI}(x|k, \theta) = \frac{\theta^k x^{-k-1} e^{-\frac{\theta}{x}}}{\Gamma(k)} \quad (2.28)$$

Ses moments non-centrés s'écrivent ainsi [14] :

$$\mu_{GI}(r) = \theta^r \frac{\Gamma(k-r)}{\Gamma(k)} \quad (2.29)$$

En tirant parti de la propriété de symétrie du  $\delta$ -MRD, l'expression de la courbe de la loi Gamma Inverse est le miroir de l'équation 2.22 :

$$\delta_1 = \delta_2 + \left( 2\Psi(f^{-1}(\delta_2)) + \ln \frac{\Gamma(f^{-1}(\delta_2) - 1)}{\Gamma(f^{-1}(\delta_2) + 1)} \right) \quad (2.30)$$

En suivant le même raisonnement que dans la partie précédente, on a :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\theta}{k-1} \quad (2.31)$$

$$\mathbb{E}(\ln(X)) = \ln(\theta) - \Psi(k) \quad (2.32)$$

$$\mathbb{E}(X^{-1}) = \frac{k}{\theta} \quad (2.33)$$

On obtient ainsi les expressions des ratios de moments tels que dans les équations 2.20 et 2.21, ce qui permet une nouvelle fois d'illustrer la symétrie des lois Gamma et Inverse Gamma par rapport à la première bissectrice :

$$\delta_1 = \Psi(\hat{k}) - \ln(\hat{k} - 1) \quad (2.34)$$

$$\delta_2 = \ln(\hat{k}) - \Psi(\hat{k}) \quad (2.35)$$

Comme dans le cas de la loi Gamma, la fonction inverse de  $f(x)$  est utilisée pour calculer numériquement la courbe représentative des lois Gamma Inverse, exprimée par l'équation 2.30. Les estimateurs des paramètres de la loi Inverse Gamma par la méthode du diagramme de ratios des moments sont donnés par les formules suivantes :

$$\hat{k} = \frac{A/H}{A/H - 1} \quad (2.36)$$

$$\hat{\theta} = \frac{A}{A/H - 1} \quad (2.37)$$

### 2.1.2.3 La loi Halphen de type A (HA)

La Loi Halphen A est la première des trois lois de Halphen [66], elle a été introduite dans le domaine de l'hydrologie dans les années 1940. Sa fonction de densité est la suivante :

$$f_{HA}(x|\alpha, \nu, m) = \frac{1}{2m^\nu K_\nu(2\alpha)} x^{\nu-1} \exp\left[-\alpha\left(\frac{x}{m} + \frac{m}{x}\right)\right] \quad (2.38)$$

où  $x > 0$ ,  $m$  est un paramètre d'échelle strictement positif,  $\alpha$  est un paramètre de forme strictement positif et  $\nu \in \mathbb{R}$  est un second paramètre de forme, alors que  $K_\nu(z)$  est la fonction de Bessel modifiée de second ordre. Parmi plusieurs expressions propres à cette dernière fonction, nous choisissons ici d'utiliser la forme intégrale mentionnée par Perreault *et al.* [122] :

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty x^{\nu-1} \exp\left[-\frac{z}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right] dx \quad (2.39)$$

Cette fonction est reprise dans l'expression des moments non-centrés de la loi Halphen A :

$$\mu_{HA}(r) = m^r \frac{K_{\nu+r}(2\alpha)}{K_\nu(2\alpha)} \quad (2.40)$$

La loi de Halphen apparaît également dans différents contextes techniques sous le nom de Gaussienne Inverse Généralisée, caractérisée par les paramètres  $\nu$ ,  $\psi$  et  $\chi$ , version qui a été plus particulièrement développée au sein de la littérature anglo-saxonne. Pour atteindre l'équivalence entre les deux lois de probabilité, il faut poser  $\alpha = 1/2\sqrt{\chi\psi}$  et  $m = \sqrt{\chi/\psi}$  [81].

La loi Halphen A possède deux cas limites évoqués auparavant : la loi Gamma et la loi Gamma Inverse. Si  $X$  est une variable aléatoire définie telle que  $X \sim \mathcal{H}_A(\alpha, \nu, m)$ , avec  $\nu > 0$ ,  $\alpha m \rightarrow 0$  et  $\alpha/m \rightarrow \omega$ , alors  $X$  tend vers une loi Gamma  $\mathcal{G}(\nu, m/\alpha)$ . *A contrario*, si on a  $\nu < 0$ ,  $\alpha/m \rightarrow 0$  et  $\alpha m \rightarrow \omega$ , alors  $X$  va tendre vers une loi Gamma Inverse  $\mathcal{G}^{-1}(|\nu|, \alpha m)$  [122, 123]. Les lois de Halphen de type A sont situées entre les courbes des lois Gamma et Gamma Inverse, dans le diagramme de ratio des moments.

Les trois moments non-centrés utilisés dans cette étude sont obtenus à l'aide de l'équation 2.40, ils sont du reste exprimés par Perreault *et al.* [122] :

$$\mathbb{E}(X) = m \frac{K_{\nu+1}(2\alpha)}{K_\nu(2\alpha)} \quad (2.41)$$

$$\mathbb{E}(\ln(X)) = \ln(m) + \frac{\delta K_\nu(2\alpha)/\delta \nu}{K_\nu(2\alpha)} \quad (2.42)$$

$$\mathbb{E}(X^{-1}) = \frac{1}{m} \frac{K_{\nu-1}(2\alpha)}{K_\nu(2\alpha)} \quad (2.43)$$

En combinant les équations 2.9 à 2.11 avec les équations précédentes, une expression des coordonnées du diagramme  $\delta$ -MRD est dérivée en fonction des paramètres de la loi Halphen de type A :

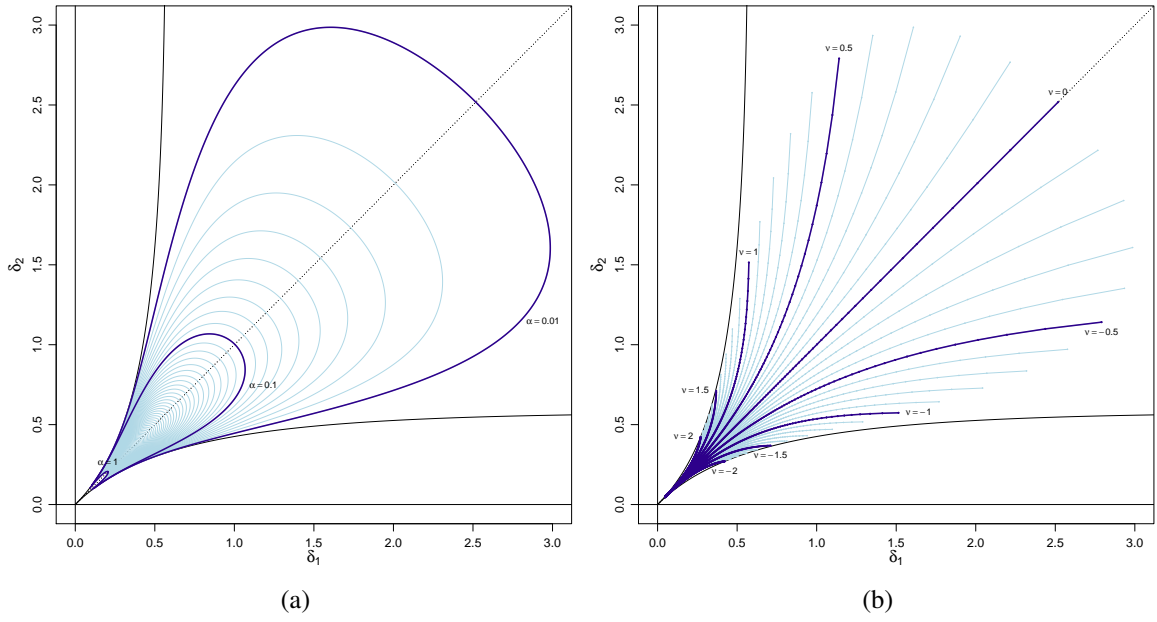


FIGURE 2.2 – Gammes de positions des lois Halphen de type A sur le  $\delta$ -MRD en fonction des valeurs de (a)  $\alpha$ , avec  $\nu \in ]-3; 3[$  (b)  $\nu$ , avec  $\alpha \in [0.01; 5]$ .

$$\delta_1 = \ln \left( \frac{K_{\hat{\nu}+1}(2\hat{\alpha})}{K_{\hat{\nu}}(2\hat{\alpha})} \right) - \frac{[\delta K_{\nu}(2\hat{\alpha})/\delta \nu]_{\nu=\hat{\nu}}}{K_{\hat{\nu}}(2\hat{\alpha})} \quad (2.44)$$

$$\delta_2 = \ln \left( \frac{K_{\hat{\nu}-1}(2\hat{\alpha})}{K_{\hat{\nu}}(2\hat{\alpha})} \right) + \frac{[\delta K_{\nu}(2\hat{\alpha})/\delta \nu]_{\nu=\hat{\nu}}}{K_{\hat{\nu}}(2\hat{\alpha})} \quad (2.45)$$

Les équations 2.44 et 2.45 permettent de donner les positions théoriques des lois de type A, pour des couples de paramètres  $\{\alpha; \nu\}$  donnés. Ainsi, ces résultats sont illustrés sur la figure 2.2. Les arcs obtenus dans la figure 2.2a proposent l'ensemble des positions théoriques des lois Halphen de type A pour  $\alpha$  fixé, le pas entre deux arcs étant égal à 0.01. De la même façon, la figure 2.2b représente les positions théoriques des lois de Halphen A en fonction du paramètre  $\nu$ , chaque arc constituant un ensemble où ce paramètre est fixé. Le pas entre deux arcs est là égal à 0.1. Le paramètre  $m$ , qui est un paramètre d'échelle, n'apparaît pas dans les expressions de ces ratios de moments, et incidemment, n'influe pas sur le positionnement théorique des lois.

Calculer les coordonnées du diagramme correspondant à une loi  $\mathcal{H}_A(\alpha, \nu, m)$  est donc analytiquement réalisable. Cependant la procédure inverse, visant à estimer les paramètres de la loi Halphen de type A associée à un échantillon qui figure sur le diagramme, s'avère moins évidente. Il s'agit de trouver  $\alpha^*$  et  $\nu^*$  tels que :

$$g_1(\alpha^*; \nu^*) = \ln \left( \frac{K_{\nu^*+1}(2\alpha^*)}{K_{\nu^*}(2\alpha^*)} \right) - \frac{[\delta K_{\nu}(2\alpha^*)/\delta \nu]_{\nu=\nu^*}}{K_{\nu^*}(2\alpha^*)} = \delta_1 \quad (2.46)$$

$$g_2(\alpha^*; \nu^*) = \ln \left( \frac{K_{\nu^*-1}(2\alpha^*)}{K_{\nu^*}(2\alpha^*)} \right) + \frac{[\delta K_{\nu}(2\alpha^*)/\delta \nu]_{\nu=\nu^*}}{K_{\nu^*}(2\alpha^*)} = \delta_2 \quad (2.47)$$

Pour déterminer ces valeurs, nous proposons une procédure d'optimisation numérique utilisant la méthode de Newton-Raphson. Celle-ci se compose de deux phases, l'initialisation

puis des itérations successives visant à converger vers les valeurs optimales. Les estimateurs selon la méthode du maximum de vraisemblance peuvent être choisis comme valeurs initiales des deux paramètres pour cette procédure :

$$\alpha_0 = \widehat{\alpha}_{mle} \quad (2.48)$$

$$v_0 = \widehat{v}_{mle} \quad (2.49)$$

La qualité de l'estimation réalisée par la méthode du maximum de vraisemblance laisse présager que les valeurs initiales sont proches des estimateurs par la présente méthode, dite du  $\delta$ -MRD. De cette façon, la phase itérative convergera d'autant plus rapidement. Un autre compromis peut être de choisir les estimateurs des paramètres  $\alpha$  et  $v$  selon la méthode des moments, ce qui laisse augurer une plus grande vitesse d'initialisation, mais aussi une dégradation de l'efficacité de la phase de convergence. L'expression des  $k$ -ième valeurs des paramètres est donnée par l'équation suivante, tirée du développement des fonctions  $g_1$  et  $g_2$  en série de Taylor :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{k+1} \\ v_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_k \\ v_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \left[ \frac{\delta g_1(\alpha; v_k)}{\delta \alpha} \right]_{\alpha=\alpha_k} & \left[ \frac{\delta g_1(\alpha; v)}{\delta v} \right]_{v=v_k} \\ \left[ \frac{\delta g_2(\alpha; v_k)}{\delta \alpha} \right]_{\alpha=\alpha_k} & \left[ \frac{\delta g_2(\alpha; v)}{\delta v} \right]_{v=v_k} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} g_1(\alpha_k; v_k) - \delta_1 \\ g_2(\alpha_k; v_k) - \delta_2 \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

où  $k \in \mathbb{N}$ . Cette équation est vérifiée sous réserve que l'inverse de la matrice jacobienne existe. La condition d'arrêt de la phase d'itération est définie telle que  $g_1(\alpha_k; v_k) - \delta_1$  et  $g_2(\alpha_k; v_k) - \delta_2$  soient inférieurs à une valeur seuil  $\varepsilon$  définie par l'utilisateur.

Le troisième et dernier paramètre,  $m$ , est déductible des deux premiers, par exemple via l'équation 2.41, en utilisant la moyenne arithmétique comme estimateur de l'espérance.

#### 2.1.2.4 La loi Harmonique (Har)

La loi Harmonique est un cas particulier de la loi Halphen de type A, pour laquelle  $v = 0$ . Historiquement, cette loi fut la première à être définie au sein de la famille de Halphen [66]. Sa fonction de densité s'exprime comme suit :

$$f_{Har}(x|\alpha, m) = \frac{1}{2xK_0(2\alpha)} \exp \left[ -\alpha \left( \frac{x}{m} + \frac{m}{x} \right) \right] \quad (2.51)$$

Cette loi est caractérisée sur le  $\delta$ -MRD par les points situés sur la première bissectrice. Cette dernière divise la zone du diagramme correspondant aux lois de Halphen de type A en deux parties égales : lorsque  $\delta_2 > \delta_1$ , les lois de Halphen sont caractérisées par un paramètre  $v$  strictement positif, alors qu'il est strictement négatif si  $\delta_2 < \delta_1$ . Enfin, lorsque  $\delta_2 = \delta_1$ ,  $v$  est nul. L'équation d'égalité des ratios peut s'écrire  $\ln(G/H) = \ln(A/G)$ , i.e.  $G = \sqrt{AH}$ . Ainsi, les distributions correspondantes sont telles que leur moyenne géométrique est également la moyenne géométrique des moyennes arithmétique et harmonique.

Dans ce cas de figure, la fonction de Bessel modifiée du second ordre vérifie [1] :

$$\left[ \frac{\delta K_v(z)}{\delta v} \right]_{v=0} = 0 \quad (2.52)$$

Ainsi, les équations 2.44 et 2.45 se simplifient comme suit :

$$\delta_1 = \ln \left( \frac{K_1(2\hat{\alpha})}{K_0(2\hat{\alpha})} \right) \quad (2.53)$$

$$\delta_2 = \ln \left( \frac{K_{-1}(2\hat{\alpha})}{K_0(2\hat{\alpha})} \right) \quad (2.54)$$

De plus, comme  $K_{-v}(z) = K_v(z)$  [1], on retrouve finalement l'égalité  $\delta_1 = \delta_2$ . On peut poser :

$$h(\alpha) = \frac{K_1(2\hat{\alpha})}{K_0(2\hat{\alpha})} = \frac{A}{G} \quad (2.55)$$

La valeur de l'estimateur du premier paramètre de la loi Harmonique selon la méthode du  $\delta$ -MRD est donnée par :

$$\alpha^* = h^{-1} \left( \frac{A}{G} \right) \quad (2.56)$$

La valeur du second paramètre  $m$  est simplement la moyenne géométrique, résultat obtenu en combinant les équations 2.42 et 2.52.

### 2.1.2.5 La loi de Tweedie (T)

Un autre cas intéressant de la loi Halphen A est la loi dite de Tweedie [154, 155]. Elle correspond à une loi de Halphen de type A pour laquelle  $v = -\frac{1}{2}$ . Cette loi vérifie la propriété de fermeture par l'addition sous certaines conditions. En effet, pour  $X_1 \sim \mathcal{T}(\alpha_1, m_1)$ ,  $X_2 \sim \mathcal{T}(\alpha_2, m_2)$ ,  $X_1 + X_2$  suit une loi de Tweedie si  $\alpha_1/m_1 = \alpha_2/m_2$ . Sa fonction de densité est définie comme suit :

$$f_T(x|\alpha, m) = \frac{\sqrt{m}}{2K_{-1/2}(2\alpha)} x^{-3/2} \exp \left[ -\alpha \left( \frac{x}{m} + \frac{m}{x} \right) \right] \quad (2.57)$$

Sur le  $\delta$ -MRD, la loi de Tweedie se trouve donc dans la zone relative à la loi Halphen de type A, dans sa moitié inférieure (cf figure 2.2b). Pour cette nouvelle loi, en adaptant les équations 2.44 et 2.45, les ratios de moments estiment les grandeurs suivantes :

$$\delta_1 = -\frac{[\delta K_v(2\hat{\alpha})/\delta v]_{v=-1/2}}{K_{1/2}(2\hat{\alpha})} \quad (2.58)$$

$$\delta_2 = \frac{[\delta K_v(2\hat{\alpha})/\delta v]_{v=-1/2}}{K_{1/2}(2\hat{\alpha})} - \ln \left( \frac{K_{1/2}(2\hat{\alpha})}{K_{3/2}(2\hat{\alpha})} \right) \quad (2.59)$$

En injectant l'équation 2.58 au sein de l'équation 2.59, on peut déduire la relation suivante :

$$t(\alpha) = \frac{K_{3/2}(2\hat{\alpha})}{K_{1/2}(2\hat{\alpha})} = \frac{A}{H} \quad (2.60)$$



La valeur de l'estimateur du premier paramètre de la loi de Tweedie selon la méthode du  $\delta$ -MRD se détermine d'une façon similaire à celui de la loi Harmonique :

$$\alpha^* = t^{-1} \left( \frac{A}{H} \right) \quad (2.61)$$

Et, dans ce cas de figure, l'estimateur  $m^*$  est égal à la moyenne arithmétique (cf équation 2.41). En posant par ailleurs  $\delta_1 = t_2(\alpha)$  sur le modèle de l'équation 2.58, on retrouve finalement l'équation de la courbe relative aux lois de Tweedie au sein du  $\delta$ -MRD grâce à l'équation 2.59 :

$$\delta_2 = \ln \left( \frac{K_{3/2}(2t_2^{-1}(\delta_1))}{K_{1/2}(2t_2^{-1}(\delta_1))} \right) - \delta_1 \quad (2.62)$$

### 2.1.2.6 La loi Halphen de type B (HB)

La loi Halphen de type  $B$  est la seconde loi constitutive de cette famille, elle vient compléter la loi de type  $A$  après la contribution de Halphen [67]. Elle apporte une variété de formes nouvelles, dans la mesure où elle peut être caractérisée par des distributions uni-modales, des distributions sans mode, ou encore des distributions avec un mode et un antimode, en fonction de la valeur des différents paramètres qui la caractérisent [122]. La fonction de densité associée à ce type de loi est présentée par l'équation ci-dessous :

$$f_{HB}(x|\alpha, \nu, m) = \frac{2}{m^{2\nu} ef_{\nu}(\alpha)} x^{2\nu-1} \exp \left[ - \left( \frac{x}{m} \right)^2 + \alpha \left( \frac{x}{m} \right) \right] \quad (2.63)$$

où  $x > 0$ ,  $m$  est un paramètre d'échelle strictement positif,  $\nu$  est un paramètre de forme également strictement positif et  $\alpha$  est un second paramètre de forme tel que  $\alpha \in \mathbb{R}$ , alors que  $ef_{\nu}(x)$  est la fonction exponentielle factorielle, apparentée aux fonctions d'Hermite et définie par Halphen [67] de la façon suivante :

$$ef_{\nu}(\alpha) = 2 \int_0^{\infty} x^{2\nu-1} \exp[-x^2 + \alpha x] dx \quad (2.64)$$

À l'image de la loi Halphen de type  $A$  et de la fonction de Bessel associée, la fonction exponentielle factorielle apparaît dans l'expression des moments non-centrés de la loi Halphen de type  $B$  :

$$\mu_{HB}(r) = m^r \frac{ef_{\nu+r/2}(\alpha)}{ef_{\nu}(\alpha)} \quad (2.65)$$

Sa zone dédiée sur le  $\delta$ -MRD correspond à la région la plus à gauche, au-dessus de la courbe relative à la loi Gamma, comme l'illustre la figure 2.1. En l'occurrence, la loi Gamma est un cas limite de la loi Halphen de type  $B$  : lorsque  $\alpha m \rightarrow -\infty$  et  $\alpha/m \rightarrow -1/\theta$  avec  $\theta > 0$ , la loi  $\mathcal{H}_B(\alpha, \nu, m)$  tend vers une loi Gamma  $\mathcal{G}(2\nu; -m/\alpha)$  [122, 123].

Une nouvelle fois, les moments non-centrés sont donnés par Perreault *et al.* [122], ils peuvent néanmoins être obtenus à partir de l'équation 2.65 :

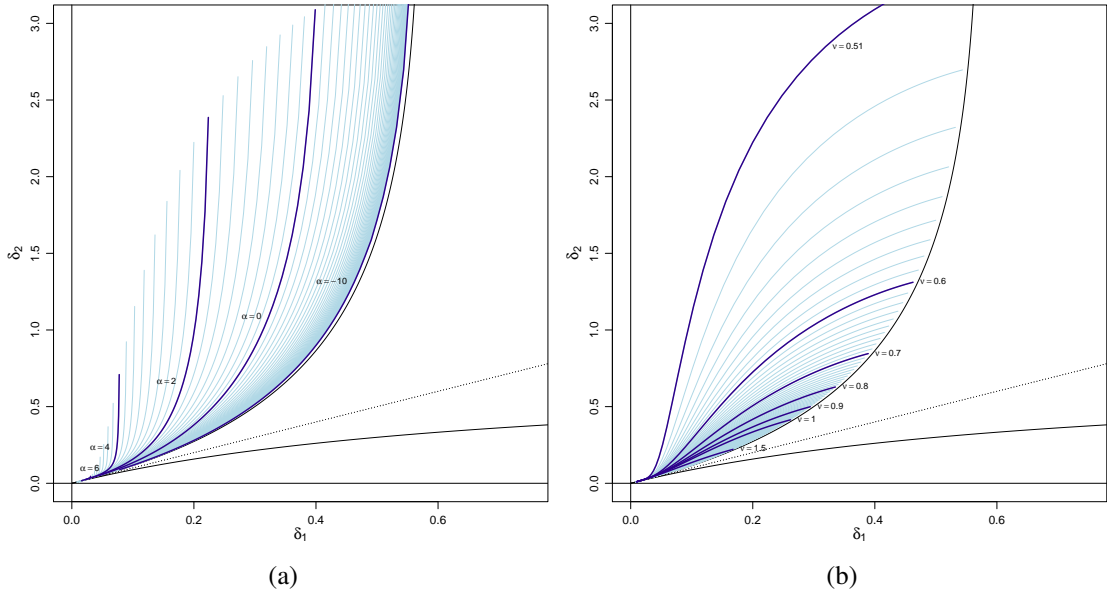


FIGURE 2.3 – Gammes de positions des lois Halphen de type B sur le  $\delta$ -MRD en fonction des valeurs de (a)  $\alpha$ , avec  $\nu \in [0.51; 3]$  (b)  $\nu$ , avec  $\alpha \in [-10; 10]$ .

$$\mathbb{E}(X) = m \frac{ef_{\nu+1/2}(\alpha)}{ef_{\nu}(\alpha)} \quad (2.66)$$

$$\mathbb{E}(\ln(X)) = \ln(m) + \frac{\delta ef_{\nu}(\alpha) / \delta \nu}{2ef_{\nu}(\alpha)} \quad (2.67)$$

$$\mathbb{E}(X^{-1}) = \frac{1}{m} \frac{ef_{\nu-1/2}(\alpha)}{ef_{\nu}(\alpha)} \quad (2.68)$$

À partir de ces expressions, les ratios de moments sont déduits en fonction des paramètres de la loi :

$$\delta_1 = \ln\left(\frac{ef_{\hat{\nu}+1/2}(\hat{\alpha})}{ef_{\hat{\nu}}(\hat{\alpha})}\right) - \frac{[\delta ef_{\nu}(\hat{\alpha}) / \delta \nu]_{\nu=\hat{\nu}}}{2ef_{\hat{\nu}}(\hat{\alpha})} \quad (2.69)$$

$$\delta_2 = \ln\left(\frac{ef_{\hat{\nu}-1/2}(\hat{\alpha})}{ef_{\hat{\nu}}(\hat{\alpha})}\right) + \frac{[\delta ef_{\nu}(\hat{\alpha}) / \delta \nu]_{\nu=\hat{\nu}}}{ef_{\hat{\nu}}(\hat{\alpha})} \quad (2.70)$$

Lorsque les paramètres sont connus (estimés par une autre méthode, ou donnés), ces équations permettent de localiser les emplacements théoriques des distributions correspondantes. La figure 2.3 illustre la gamme de positions associée à des ensembles de paramètres différents. Il est possible de voir sur la figure 2.3a que le paramètre  $\alpha$ , défini sur l'ensemble des réels (les valeurs représentées sur le diagramme sont incrémentées par un pas de 0.25), renvoie à des situations proches du cas limite associé à la loi Gamma lorsqu'il tend vers de grandes valeurs négatives. *A contrario*, une valeur élevée pour ce paramètre renvoie à des localisations plus proches de l'origine. Il est possible de constater que l'étendue des localisations est moins forte dans ce second cas de figure, ce qui fait directement écho à la figure 2.3b, où des valeurs situées entre 0.51 et 3 avec un pas de 0.01 sont étudiées pour le paramètre  $\nu$ . Dans cette figure, on voit que des valeurs faibles du paramètre  $\nu$  correspondent à

des distributions dont les ratios de moments sont potentiellement les plus grands, notamment  $\delta_2$ . De plus grandes valeurs pour  $\nu$  renvoient à des distributions assez proches de l'origine ainsi que de la loi Gamma. Il faut noter que ce second paramètre n'est défini que sur l'ensemble des réels positifs. Ceci étant dit, des valeurs inférieures à 0.5 posent le problème de l'existence de la moyenne harmonique, et donc rendent impossible la représentation sur le  $\delta$ -MRD : la fonction  $ef_r(z)$  définie par l'équation 2.64 contient une intégrale qui ne converge que pour  $r > 0$ , et la moyenne harmonique implique l'existence de  $ef_{\nu-1/2}(\alpha)$ .

L'estimation des paramètres d'une loi de type  $B$  à partir d'un échantillon localisé sur le  $\delta$ -MRD doit être effectuée par le même procédé que celui entrepris pour la loi de type  $A$ . Ainsi, deux fonctions  $g_3$  et  $g_4$  sont définies de manière à exprimer les valeurs optimales de  $\alpha$  et  $\nu$  :

$$g_3(\alpha^*; \nu^*) = \ln \left( \frac{ef_{\nu^*+1/2}(\alpha^*)}{ef_{\nu^*}(\alpha^*)} \right) - \frac{[\delta ef_{\nu}(\alpha^*) / \delta \nu]_{\nu=\nu^*}}{2ef_{\nu^*}(\alpha^*)} = \delta_1 \quad (2.71)$$

$$g_4(\alpha^*; \nu^*) = \ln \left( \frac{ef_{\nu^*-1/2}(2\alpha^*)}{ef_{\nu^*}(\alpha^*)} \right) + \frac{[\delta ef_{\nu}(\alpha^*) / \delta \nu]_{\nu=\nu^*}}{2ef_{\nu^*}(\alpha^*)} = \delta_2 \quad (2.72)$$

Les équations régissant la procédure d'optimisation sont par la suite définies telles que pour la loi Halphen  $A$  (cf équations 2.48, 2.49 et 2.50), avec  $g_3$  et  $g_4$  en lieu et place de  $g_1$  et  $g_2$ . Ici encore, la procédure se termine lorsque  $g_3(\alpha_k; \nu_k)$  et  $g_4(\alpha_k; \nu_k)$  convergent respectivement vers  $\delta_1$  et  $\delta_2$ .

Le troisième et dernier paramètre  $m$  peut être déduit à partir des valeurs  $\alpha^*$  et  $\nu^*$ , introduites par exemple au sein de l'équation 2.66.

### 2.1.2.7 La loi Halphen de type $B^{-1}$ (HIB)

La troisième loi définie au sein de la famille de Halphen est la loi de type  $IB$ , ou  $B^{-1}$ . Comme cette dernière dénomination l'indique, la loi de type  $IB$  est construite par symétrie à partir de la loi de type  $B$ . Ainsi, si  $X \sim \mathcal{H}_B(\alpha; \nu; m)$ , alors  $Y = 1/X \sim \mathcal{H}_{IB}(\alpha; \nu; 1/m)$ . La fonction de densité correspondante s'exprime ainsi :

$$f_{HIB}(x|\alpha, \nu, m) = \frac{2}{m^{-2\nu} ef_{\nu}(\alpha)} x^{-2\nu-1} \exp \left[ - \left( \frac{m}{x} \right)^2 + \alpha \left( \frac{m}{x} \right) \right], \quad (2.73)$$

Cette loi a été rajoutée à la famille par Morlat [110], de manière à compléter le système de lois. Cela se vérifie particulièrement au sein du diagramme  $\delta$ -MRD, dans lequel les lois de type  $IB$  occupent la zone située sous la courbe de la loi Gamma Inverse, dernière zone encore non caractérisée. D'ailleurs, la loi Gamma Inverse a le statut de cas limite par rapport à la loi de type  $IB$  : si  $X$  est définie telle que  $X \sim \mathcal{H}_{IB}(\alpha, \nu, m)$ , avec  $\alpha/m \rightarrow -\infty$  et  $\alpha m \rightarrow -\omega$ ,  $X$  tendra vers la loi  $\mathcal{G}^{-1}(2\nu, -\alpha m)$  [122, 123].

Cette troisième loi ne sera pas détaillée ici, dans la mesure où ses propriétés se déduisent à partir des propriétés de la loi Halphen de type  $B$ , grâce à la relation de symétrie liant les deux lois.

### 2.1.2.8 La loi lognormale à deux paramètres (LN2)

La loi lognormale n'appartient pas à proprement parler au système des lois de Halphen, toutefois, elle est populaire dans le domaine de la modélisation des temps de parcours et

présente les mêmes caractéristiques globales que la loi Gamma, en particulier sa définition sur l'ensemble des réels positifs.

Cette loi est directement liée à la loi normale. Ainsi, si  $X \sim \mathcal{N}(\mu_X; \sigma_X)$ , alors  $Y = \exp(X) \sim \mathcal{L}(\mu_X; \sigma_X)$ , où  $\mu_X$  et  $\sigma_X$  sont respectivement l'espérance et l'écart-type de  $X$ . Il s'en déduit directement l'expression de la fonction de densité de la loi lognormale à deux paramètres :

$$f_{LN2}(y|\mu_X, \sigma_X) = \frac{1}{y\sigma_X\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(y) - \mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right) \quad (2.74)$$

Les moments non-centrés de la loi lognormale sont définis de la façon suivante [14] :

$$\mu_N(r) = \exp\left(r\mu + \frac{r^2\sigma^2}{2}\right) \quad (2.75)$$

où  $\mu$  et  $\sigma$  correspondent respectivement à la moyenne et à l'écart-type du logarithme de  $Y$ .

Sur le  $\delta$ -MRD, la première bissectrice correspond déjà aux lois harmoniques, cas particuliers des lois Halphen de type  $A$  pour lesquelles le paramètre  $\nu$  est nul, comme développé auparavant. C'est également une caractéristique propre aux lois lognormales, comme évoqué par Bobée *et al.* [14], dans la mesure où les ratios entre les différentes moyennes sont théoriquement égaux. En effet, les moments non-centrés s'expriment de la façon suivante :

$$\mathbb{E}(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \quad (2.76)$$

$$\mathbb{E}(\ln(X)) = \mu \quad (2.77)$$

$$\mathbb{E}(X^{-1}) = e^{-\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \quad (2.78)$$

En réutilisant les équations 2.12 et 2.13, on obtient bien la même valeur pour les deux ratios de moments :

$$\delta_1 = \delta_2 = \frac{\sigma^2}{2} \quad (2.79)$$

Réciproquement, il est possible d'exprimer l'estimateur du second paramètre, alors que celui du premier paramètre est donné directement par l'équation 2.77 :

$$\hat{\mu} = \ln(G) \quad (2.80)$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\delta_1 + \delta_2} = \sqrt{\ln\left(\frac{A}{H}\right)} \quad (2.81)$$

### 2.1.3 Estimateurs des paramètres des lois de la famille de Halphen

Les différents estimateurs obtenus grâce au  $\delta$ -MRD dans la section 2.1.2 sont résumés au sein du tableau 2.1. Ce tableau reporte aussi les estimateurs correspondant à la technique du maximum de vraisemblance d'une part, et à la méthode des moments d'autre part. En particulier, les estimateurs du maximum de vraisemblance des lois de Halphen ont été élaborés

TABLEAU 2.1 – Revue des estimateurs des paramètres des lois détaillées dans la section 2.1.2, selon les méthodes du  $\delta$ -MRD, du maximum de vraisemblance (MV), et des moments

Loi	$\delta$ -MRD	MV	Moments
Gamma	$\hat{k} = \frac{A}{A-H}$	$\hat{k} = k$ tel que $\ln(k) - \Psi(k) = \ln\left(\frac{A}{G}\right)$	$\hat{k} = \frac{A^2}{S_X^2}$
	$\hat{\theta} = A - H$	$\hat{\theta} = \frac{A}{k}$	$\hat{\theta} = \frac{S_X^2}{A}$
Gamma Inv	$\hat{k} = \frac{A}{A-H}$	$\hat{k} = k$ tel que $\ln(k) - \Psi(k) = \ln\left(\frac{G}{H}\right)$	$\hat{k} = \frac{2Q-A^2}{S_X^2}$
	$\hat{\theta} = \frac{AH}{A-H}$	$\hat{\theta} = \hat{k}H$	$\hat{\theta} = \frac{AQ}{S_X^2}$
Halphen A	$\hat{\alpha} : cf$ équations 2.46 et 2.47	$\hat{\alpha} = \alpha(\hat{v})$ avec $\frac{K_{v+1}(2\alpha(v))K_{v-1}(2\alpha(v))}{K_v(2\alpha(v))^2} = \frac{A}{H}$	$\hat{\alpha} = \frac{A/m-m/H}{S_X^2/m^2-m^2/S_{X-1}^2}$
	$\hat{v} : cf$ équations 2.46 et 2.47	$\hat{v} = \arg \max_{ v <U} l_A(\alpha(v); v; m(v)   x)$	$\hat{v} = \frac{(A/m-m/H)^2}{S_X^2/m^2-m^2/S_{X-1}^2}$
	$\hat{m} = A \frac{K_{\hat{v}}(2\hat{\alpha})}{K_{\hat{v}+1}(2\hat{\alpha})}$	$\hat{m} = m(\hat{v})$ avec $m(v) = A \frac{K_v(2\alpha(v))}{K_{v+1}(2\alpha(v))}$	$\hat{m} = \sqrt{\frac{(Q-A^2)H^{-1}-A(AH^{-1}-1)}{(IQ-H^{-2})A-H^{-1}(AH^{-1}-1)}}$
Harmonic	$\hat{\alpha} = \alpha$ tel que $\frac{K_1(2\alpha)}{K_0(2\alpha)} = \frac{A}{G}$	$\hat{\alpha} = \alpha$ tel que $\frac{K_1(2\alpha)}{K_0(2\alpha)} = \frac{A}{G}$	$\hat{\alpha} = \frac{A^2H}{\sqrt{AH(Q-AH)}}$
	$\hat{m} = G$	$\hat{m} = G$	$\hat{m} = G$
Tweedie	$\hat{\alpha} = \alpha$ tel que $\frac{K_{3/2}(2\alpha)}{K_{1/2}(2\alpha)} = \frac{A}{H}$	$\hat{\alpha} = \frac{H}{2(A-H)}$	$\hat{\alpha} = \frac{A^2}{2(Q-A^2)}$
	$\hat{m} = A$	$\hat{m} = A$	$\hat{m} = A$
Halphen B	$\hat{\alpha} : cf$ équations 2.71 et 2.72	$\hat{\alpha} = \alpha(\hat{v})$ avec $\frac{ef_{v+1}(\alpha(v))ef_v(\alpha(v))}{ef_{v+1/2}(\alpha(v))^2} = \frac{Q}{A^2}$	$\hat{\alpha} = \frac{\hat{m}(2\hat{\alpha}(A-QH^{-1})+QH^{-1})}{Q-A^2}$
	$\hat{v} : cf$ équations 2.71 et 2.72	$\hat{v} = \arg \max_{v<V} l_B(\alpha(v), v, m(v)   x)$	$\hat{v} = \frac{AH^{-1}(AC-Q^2)-A^2(Q-A^2)}{2(1-AH^{-1})(Q^2-AC)-(Q-A^2)^2}$
	$\hat{m} = A \frac{ef_{\hat{v}}(\hat{\alpha})}{ef_{\hat{v}+1/2}(\hat{\alpha})}$	$\hat{m} = m(\hat{v})$ avec $m(v) = A \frac{ef_v(\alpha(v))}{ef_{v+1/2}(\alpha(v))}$	$\hat{m} = \sqrt{\frac{2(Q-A^2)}{2\hat{v}(1-AH^{-1})+AH^{-1}}}$
Lognormal	$\hat{\mu} = \ln(G)$	$\hat{\mu} = \ln(G)$	$\hat{\mu} = 2 \ln(A) - \frac{1}{2} \ln(Q)$
	$\hat{\sigma} = \sqrt{\ln\left(\frac{A}{H}\right)}$	$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln(x_i) - \ln(G))^2}$	$\hat{\sigma} = \ln(Q) - 2 \ln(A)$

par Perreault *et al.* [123], alors que ceux obtenus à partir de la méthode des moments viennent des contributions de Fitzgerald [48] pour la loi de type  $A$ , et de Chebana *et al.* [25] pour les lois de types  $B$  et  $IB$ . Des estimateurs alternatifs ont aussi été développés par Chebana *et al.* [24], à partir de méthodes mixtes combinant maximum de vraisemblance et méthode des moments.

Quelques notations doivent être introduites pour une meilleure compréhension de ce tableau :

- $A$ ,  $G$  et  $H$ , respectivement les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique déjà introduites par les équations 2.9, 2.10 et 2.11 ;
- $S_X^2$  est l'estimateur de la variance de  $X$  ;
- la moyenne quadratique  $Q$ , soit l'estimateur du moment non-centré d'ordre 2 :  $Q = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2}$  ;
- $IQ$ , l'estimateur du moment non-centré d'ordre -2 :  $IQ = \sqrt{n \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2} \right)^{-1}}$

- la moyenne cubique  $C$ , estimateur du moment non-centré d'ordre 3 :  $C = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^3\right)^{\frac{1}{3}}$
- $] -U; U[$  l'intervalle de définition du paramètre  $v$  pour la loi de type  $A$ , dans une procédure de maximisation de la vraisemblance, avec  $U = \frac{A}{A-H}$  ;
- $] 0; V[$  le même intervalle correspondant à la loi de type  $B$ , où  $V = \frac{A^2}{2(Q-A^2)}$ .

L'estimation des paramètres des lois figurant sur le  $\delta$ -MRD à partir des coordonnées associées à un échantillon est une procédure novatrice, hybride entre la méthode du maximum de vraisemblance et la méthode des moments : elle se base en effet sur les moments non-centrés, lorsqu'ils existent. Ces moments ne sont toutefois pas ceux utilisés par la méthode des moments traditionnelle. Dans le cas des lois de Halphen, ils apparaissent dans le processus de maximisation de la fonction de vraisemblance, en tant que statistiques suffisantes pour identifier ces lois appartenant à la famille exponentielle. Le tableau 2.1 illustre bien ces similitudes entre techniques d'estimation.

## 2.1.4 Autres lois usuelles pour la modélisation des temps de parcours

D'autres lois seront considérées par la suite, notamment lors des analyses comparatives dédiées aux ajustements des séries empiriques. Ces quelques lois sont reproduites ici dans un souci de complétude.

### 2.1.4.1 La loi normale (N)

La loi normale, ou loi gaussienne, est une loi de probabilité fondamentale permettant de modéliser des événements aléatoires. Elle est généralement mobilisée comme une base, servant de première approximation de la distribution des temps de parcours, ce qui se justifie par le théorème central limite, selon lequel la réplication d'un même phénomène sur un nombre élevé d'expériences indépendantes tend vers une loi normale. Pour un événement  $X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma)$ , la fonction de densité de la loi normale s'exprime ainsi :

$$f_N(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.82)$$

Les moments non-centrés s'expriment de la même manière que pour la loi lognormale (cf équation 2.75), au détail près que les paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  sont les paramètres de la variable  $X$  elle-même.

### 2.1.4.2 La loi lognormale à trois paramètres (LN3)

La loi lognormale à trois paramètres est une extension de la loi lognormale, dans laquelle est inclus un troisième paramètre visant à prendre en compte le décalage par rapport à l'origine sur l'axe des abscisses. Sa fonction de densité, associée à la variable  $Y \sim \mathcal{L}_3(\theta, \mu, \sigma)$ , est donnée par l'équation suivante :

$$f_{LN3}(y|\theta, \mu, \sigma) = \frac{1}{(y-\theta)\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(y-\theta) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.83)$$

où  $\mu$  et  $\sigma$  sont respectivement la moyenne et l'écart-type de la variable  $X = \ln(Y - \theta) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ .

Les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres sont tirés d'une technique d'optimisation proposée par Chen [29].

### 2.1.4.3 La loi de Burr (B3)

Les lois de Burr ont été définies dans les travaux précurseurs de Burr [18]. Cet ensemble de lois en contient 12, chacune définie par une fonction de répartition. En particulier, la dernière, la loi de type *XII*, est utilisée principalement en économétrie et en actuariat. Son utilisation pour la modélisation de durées de vie et de niveaux de fiabilité a aussi été mise en exergue [174]. Cette loi a été utilisée récemment par Taylor *et al.* [152] pour modéliser des temps de parcours.

La fonction de densité de la loi de Burr de type *XII* est définie comme suit :

$$f_{B2}(x|\tau, \alpha) = \frac{\tau \alpha x^{\tau-1}}{(x^\tau + 1)^{\alpha+1}} \quad (2.84)$$

Cette forme a été étendue par la suite à une forme plus générique à trois paramètres, qui est la forme retenue en vue de l'analyse comparative à venir :

$$f_{B3}(x|\tau, \alpha, \phi) = \frac{\tau \alpha}{\phi} \left(\frac{x}{\phi}\right)^{\tau-1} \left(\left(\frac{x}{\phi}\right)^\tau + 1\right)^{-(\alpha+1)} \quad (2.85)$$

Cette généralisation a été étudiée par de nombreux auteurs dans le but de proposer des estimateurs convaincants, notamment par la méthode du maximum de vraisemblance. En particulier, les estimateurs construits ici sont fondés sur les approches de Shao [146], Wang *et al.* [164] et Watkins [167].

### 2.1.4.4 La loi de Weibull (W)

La loi de Weibull est un autre exemple généralement inclus dans le corpus de lois utilisées pour l'étude statistique des temps de parcours dans l'état de l'art, notamment en vertu de sa définition sur l'ensemble des réels positifs. La fonction de densité correspondante est la suivante :

$$f_W(x|\theta, \beta) = \frac{\beta}{x} \left(\frac{x}{\theta}\right)^\beta \exp\left[-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\beta\right] \quad (2.86)$$

où  $x > 0$ ,  $\beta > 0$  et  $\theta > 0$ . Cette loi de probabilité est reconnue comme un cas particulier de la loi de Burr [146, 167]. En effet, si  $X \sim \mathcal{B}_3(\phi, \tau, \alpha)$ , avec  $\alpha \rightarrow \infty$  et  $\phi/\alpha^{1/\tau} \rightarrow \theta$ , alors  $X$  tend vers une loi de Weibull  $W(\phi/\alpha^{1/\tau}, \tau)$ .

L'estimation des paramètres de la loi de Weibull est réalisée via la technique du maximum de vraisemblance, telle que décrit par exemple par Watkins [167]. Dans leur étude consacrée au  $\delta$ -MRD, Bobee *et al.* [14] ont également mentionné cette loi en tant que cas particulier de la loi Gamma généralisée, en considérant un paramétrage voisin. La localisation de cette loi sur le  $\delta$ -MRD est ainsi très similaire à celle des lois Gamma et Gamma inverse.

## 2.2 Méthodologie de la modélisation statistique des temps de parcours

Préalablement à la présentation des premiers résultats, les trois jeux de données empiriques utilisés dans ce chapitre doivent être détaillés. Le premier regroupe des observations collectées à Portland, Oregon, au moyen de capteurs Bluetooth, le second est constitué de

données synthétiques simulées sur la base du tronçon considéré à Portland. Le troisième et dernier jeu de données concerne des données collectées sur la rocade Est de Lyon avec un dispositif de Lecture Automatique de Plaques d’Immatriculation (LAPI). L’indisponibilité de données individualisées (adresses MAC pour le Bluetooth, plaques anonymisées pour la technique LAPI) fait que la variabilité inter-véhiculaire ne peut être traitée, toutefois ces méthodes de collecte de données permettent de donner des éléments quant à la variabilité temporelle (d’une heure à l’autre, et d’un jour sur l’autre).

## 2.2.1 Présentation des données empiriques

### 2.2.1.1 Données Bluetooth de Portland

Ce premier jeu de données a été constitué par l’Université de Portland, au même titre qu’un ensemble de données mesurées pour l’ensemble de l’agglomération sur des problématiques de gestion du trafic. Celles-ci sont disponibles en accès libre à l’adresse URL <http://portal.its.pdx.edu/fhwa>.

Parmi toutes ces données, les échantillons qui relèvent de la mesure des temps de parcours ont été collectés sur l’artère I82, un tronçon urbain orienté selon l’axe Nord-Sud et situé dans les faubourgs Est de l’agglomération. La figure 2.4 propose la localisation du tronçon sur Google Maps. Le dispositif ayant permis cette collecte repose sur deux capteurs Bluetooth, placés aux intersections de l’axe I82 avec Woodward Street au nord, et Foster Road au sud, constituant ainsi un segment mesurant 1.3 mile, soit environ 2.1 kilomètres. Situé sur un axe urbain principal, le tronçon croise de multiples routes mineures devant lesquelles il bénéficie du régime de priorité. Toutefois, deux carrefours à feux importants sont situés aux intersections avec les boulevards Powell et Holgate, impactant les temps de parcours réalisés par les usagers. La vitesse maximale autorisée sur la section est égale à 35 miles/heure (soit environ 56 kilomètres/heure), ce qui correspond à un temps de parcours minimal de 216 secondes. Les analyses à venir se sont concentrées sur les trajets mesurés dans le sens Nord-Sud.

Par construction, seuls les véhicules disposant d’appareils émetteurs en Bluetooth (systèmes embarqués, voire téléphones mobiles) font partie de l’échantillon. Les temps de parcours individuels sont obtenus après l’identification des véhicules aux deux capteurs, comme différence entre la date de passage au point de départ et celle au point d’arrivée. Pour plus de détails quant à la technique de collecte et à la construction des jeux de données mis à disposition, le lecteur est incité à se référer au site web indiqué ci-avant.

Les données de temps de parcours obtenues par un dispositif Bluetooth comportent des défauts bien identifiés et documentés dans la littérature (voir par exemple Nantes *et al.* [111] ou Tsubota *et al.* [153]) : des procédures de vérification sont nécessaires pour assurer un niveau satisfaisant de qualité. En particulier, les données enregistrées peuvent inclure différents modes de transport qu’il est difficile de distinguer : bus, camions, vélos, voire piétons. Deux procédures ont été incluses ici. Tout d’abord, une borne supérieure artificielle a été fixée à 20 minutes pour filtrer les piétons, ainsi que les véhicules arrêtés sur le trajet. Ensuite, un filtrage supplémentaire a permis d’éliminer les observations extrêmes, *i.e.* caractérisées par des vitesses nettement inférieures à celle du flux lors d’une période donnée. Au total, des temps de parcours ont été mesurés pendant deux mois sur l’artère urbaine, entre le 15 septembre 2011 et le 15 novembre 2011, mais un doute sur la qualité des données nous a poussé à ne considérer que les mesures prises après le 18 octobre 2011, cela conduisant à la constitution d’un échantillon final contenant 29 jours de données, dont 8 jours de week-end.



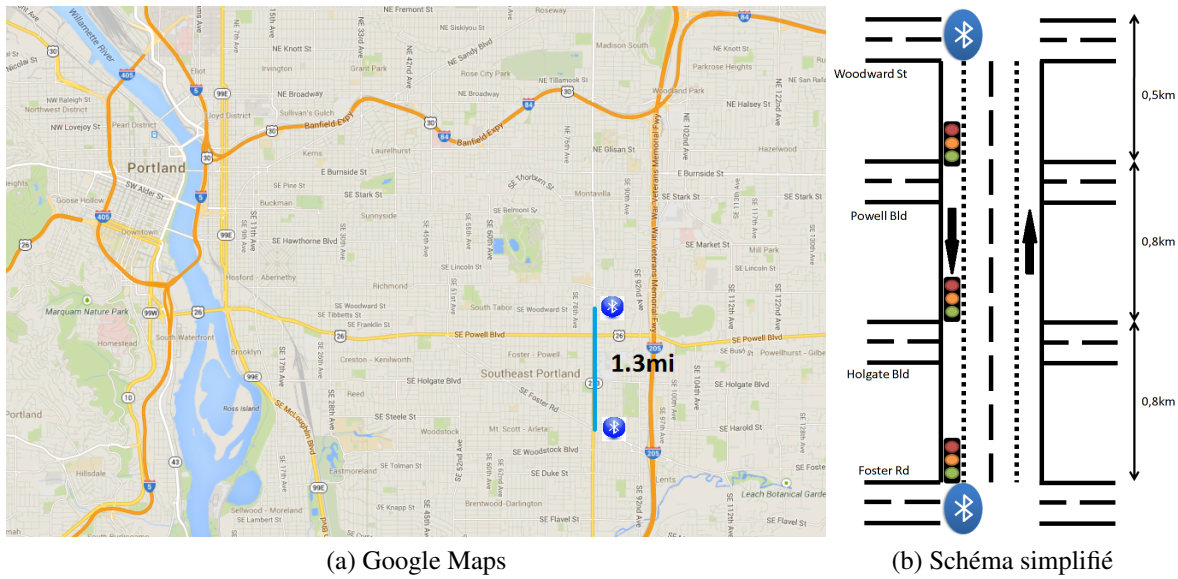


FIGURE 2.4 – Description du site de Portland

Une autre limite du Bluetooth est le faible taux de pénétration, estimé entre 5 et 20% des véhicules selon les études, ce qui a pour principale conséquence une faible quantité de données dans les échantillons constitués. En l'occurrence, sur ce jeu de données, environ 400 observations par jour en moyenne sont validées après les procédés de filtrage abordés plus haut. Des périodes d'une heure sont construites pour étudier les évolutions temporelles des distributions de temps de parcours. En restreignant l'analyse aux sous-échantillons incluant *a minima* 30 observations, 128 périodes restent exploitables, principalement durant les après-midi.

### 2.2.1.2 Données synthétiques associées au tronçon précédent

Pour pallier cette quantité relativement faible de données et également pour étudier le fonctionnement du tronçon en environnement contrôlé, un jeu de données a été simulé sur un tronçon ayant les mêmes caractéristiques que l'axe situé à Portland, en fondant le processus de simulation sur la modélisation mésoscopique du trafic [38, 92]. La variable d'entrée considérée dans le cadre de la simulation est le niveau de demande. De cette façon, les heures caractérisées par une forte demande sont qualifiées de période « de pointe », alors que les heures de faible affluence sont qualifiées de périodes « fluides ». La figure 2.5 ci-dessous résume les paramètres principaux du processus de simulation.

D'une longueur de 6.9 kilomètres, le tronçon s'avère plus long que celui décrit dans le paragraphe précédent. Ceci étant dit, l'excédent de longueur a été rajouté en début de section, pour éviter toute situation de congestion produite artificiellement par la simulation au nœud de départ. Deux carrefours à feux sont introduits sur la section, à l'image du tronçon réel. Le cycle de feu défini ici est purement hypothétique, faute d'information sur les feux de l'I82.

Par ailleurs, un profil de demande typique de ceux recueillis à Portland a servi de base pour la simulation. Le niveau de demande a été calibré de façon à ce que la demande maximale de la journée soit égale à 3100 véhicules/heure. Avec ce profil de demande, un seul véritable pic de fréquentation est reproduit, il a lieu durant l'après-midi.

Le modèle mésoscopique produit les temps de passage à chaque nœud des véhicules simulés, et à partir de cette information, les temps de parcours sont reconstruits de la même

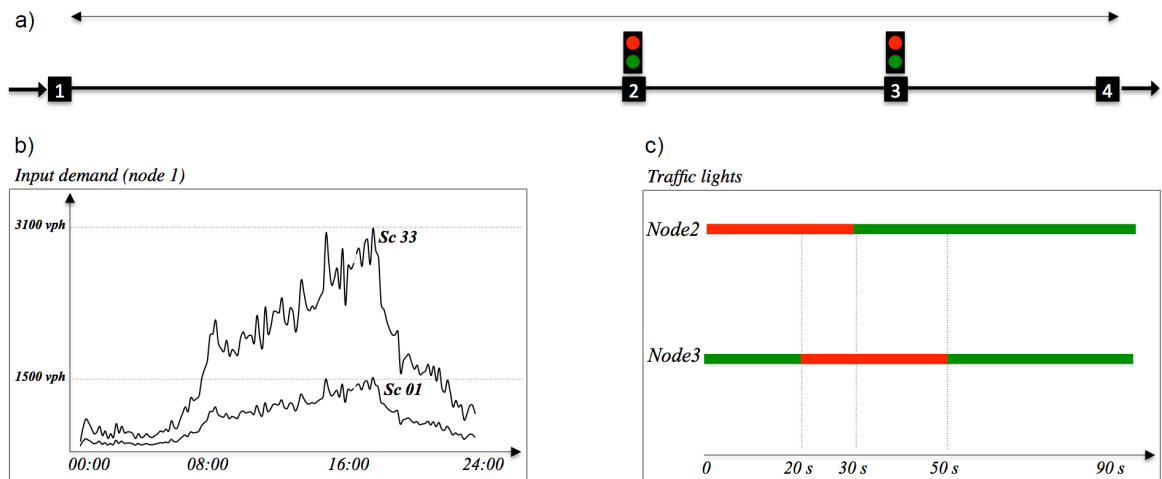


FIGURE 2.5 – Description des données simulées (a) Couloir urbain simulé ; (b) profils de demande journalière typiques ; (c) cycle de feu

façon que précédemment.

### 2.2.1.3 Données LAPI de Lyon

Ce troisième et dernier jeu de données correspond à des mesures obtenues par la DIR Centre-Est sur la RN346, le contournement Est de l'agglomération lyonnaise, à l'aide d'un dispositif de Lecture Automatique de Plaques d'Immatriculation (LAPI). Ce dispositif repose sur l'installation de caméras sur le bord de la voie de circulation capables de lire les plaques des véhicules empruntant le tronçon. Le même principe régit la transition entre enregistrements aux stations et obtention des temps de parcours individuels, à savoir le calcul de la différence entre les temps de passage en entrée et en sortie. Cette seconde technique de collecte de données s'avère plus fiable que le Bluetooth, eu égard à la proportion des véhicules enregistrés, et montre ainsi une image plus fidèle du flux de trafic. Ainsi, le jeu de données utilisé ici présente des taux d'enregistrement oscillant entre 60 et 80% des véhicules, en fonction des conditions de trafic.

La section de l'infrastructure qui est considérée ici est longue de 11.7 kilomètres, et équipée avec cinq stations notées de *A* à *E* sur la carte issue de Google Maps reproduite dans la figure 2.6a. Les différents segments de cet itinéraire (*AB*, *BC*, *CD* et *DE*), mesurent respectivement 3.2, 1, 1.3 et 6.2 kilomètres, et comportent respectivement 3, 0, 2 et 2 bretelles d'accès/sortie. Le profil de cette route est celui d'une voie rapide périphérique composée de deux voies, la vitesse maximale autorisée y est limitée à 90 kilomètres/heure.

Dans un premier temps, une attention particulière est portée au tronçon *BC* illustré par la figure 2.6b, situé entre la deuxième et la troisième station : aucun convergent ni divergent n'est présent sur cette portion, ceci permettant d'espérer une fiabilité maximale du recueil de données. En effet, tous les véhicules observés en entrée de ce tronçon passent nécessairement devant la station à sa sortie.

Les temps de parcours ont été collectés entre le 1<sup>er</sup> mars 2014 et le 7 août 2014, quelques jours d'inactivité étant tout de même à considérer du fait de la maintenance du dispositif. Quoiqu'il en soit, la quantité de données exploitables est très supérieure à celle du premier jeu de données : après une étape de filtrage des données extrêmes, près de 2.9 millions de trajets valides sont conservés entre ces deux stations. Au final, 143 jours d'enregistrement

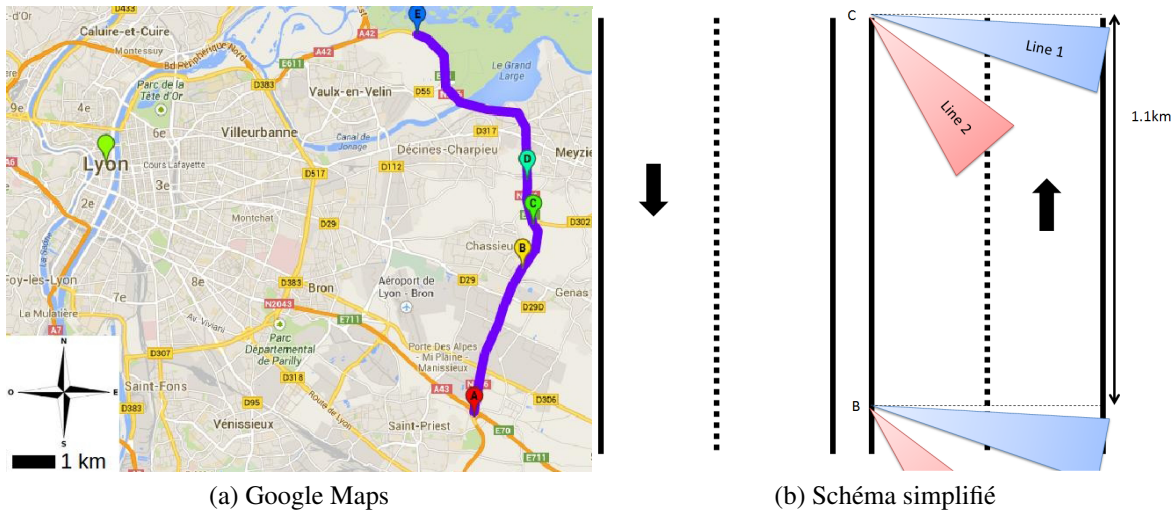


FIGURE 2.6 – Description du site de Lyon, avec mise en valeur du tronçon entre les capteurs  $B$  et  $C$

complets sont à disposition, à raison de 840 temps de parcours par heure en moyenne. Pour tirer un avantage de cette abondance de données, l'analyse des distributions de temps de parcours est réalisée sur des sous-périodes de 15 minutes. Ainsi, 13503 sous-échantillons peuvent être examinés selon cette définition, quantité ramenée à 13110 après filtrage des sous-échantillons contenant moins de 30 observations. À des fins de concision, l'analyse des ajustements des distributions empiriques est ici limitée aux trajets réalisés sur un jour typique de semaine, le jeudi, hors période de congés scolaires et jours fériés. Cela conduit à l'examen de 13 jours différents représentant 1248 périodes de 15 minutes, nombre réduit à 1026 périodes après filtrage.

## 2.2.2 Temps de parcours, ou délais ?

Plusieurs alternatives existent pour représenter les temps de parcours en tant que phénomène aléatoire. En effet, il est possible de considérer deux composantes, qui sont d'une part un temps incompressible déterministe, donné par la vitesse maximale autorisée, ou plus prosaïquement par le temps de parcours dit libre, et d'autre part une seconde composante aléatoire pouvant se rapporter à un retard accumulé par rapport à un temps optimal. Soit une variable aléatoire  $T$  associée au temps de parcours sur un itinéraire donné,  $(T_1, T_2, \dots, T_n)$  un échantillon de  $n$  observations de cette variable et  $T_{min} = \min_i \{T_i\}$ . La figure 2.7 met en lumière trois possibilités de modélisation, à partir des fonctions de densité des temps de parcours. Ces trois options sont les suivantes :

- modèle sans décalage ( $TT$ ) : la prise en compte des temps de parcours dans leur globalité, solution dans laquelle la variable  $T$  est considérée en l'état ;
- modèle avec décalage constant ( $TDF$ ) : la modélisation plus spécifique des temps de retard, ou délais par rapport à un temps minimal, qui se focalise sur la composante véritablement stochastique du phénomène. La variable d'intérêt est cette fois-ci  $\varepsilon_i = T_i - T_{min}$  ;
- modèle avec décalage adaptatif ( $TD$ ) : un dernier modèle faisant office de raffinement du second, également centré sur les délais observés, considère des sous-échantillons relatifs à un ensemble de sous-périodes de mesure  $P$ . Dans ce modèle, le décalage par rapport à la date de départ n'est plus  $T_{min}$  le temps minimal observé sur l'échantillon,

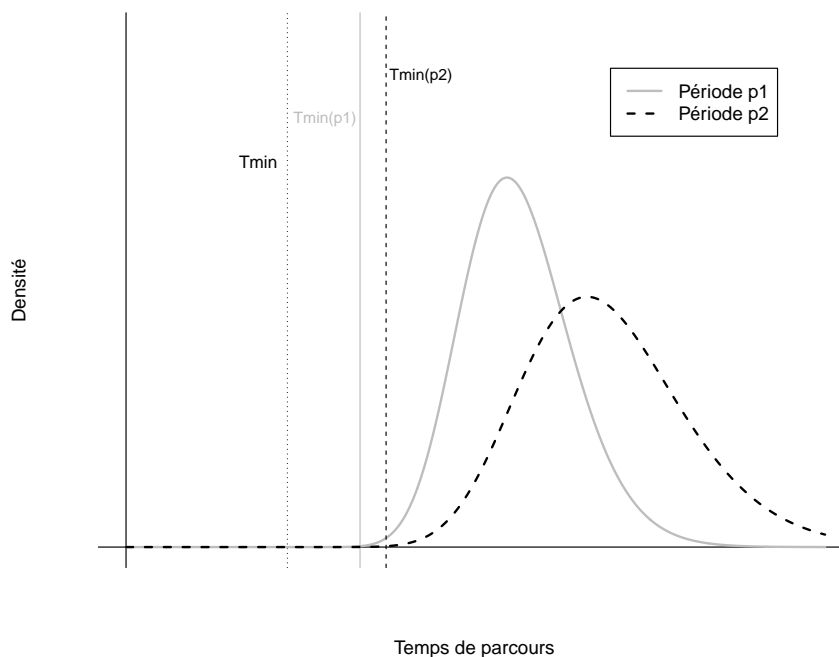


FIGURE 2.7 – Décomposition des temps de parcours, entre temps minimum incompressible et délais aléatoires

mais  $T_{min}^p$ , le temps de parcours minimal enregistré pendant la sous-période  $p \in P$ , *i.e.* on considère les variables  $\varepsilon_i^p = T_i - T_{min}^p$ .

Dans tous les cas, les temps de parcours sont normalisés par rapport à la longueur de la section, de manière à pouvoir comparer différentes sections de route, sous réserve que les topologies des segments soient également similaires, en particulier les limitations de vitesse en vigueur.

Les ajustements de temps de parcours sont réalisés avec le modèle  $TD$ . En effet, un tel choix va permettre de mettre l'accent sur leur composante aléatoire, si bien que le temps de parcours total sur un itinéraire complet sera vu comme une somme des temps incompressibles sur chacun des tronçons à laquelle devra être ajoutée la composante stochastique représentant l'ensemble des délais accumulés pendant le trajet. En termes de significativité statistique, le modèle avec décalage adaptatif présente les meilleures performances : les lois usuelles sont moins aptes à représenter des densités nulles ou quasi-nulles sur le début de l'axe des réalisations. Réduire au maximum cette partie de la distribution en la considérant comme déterministe (et éventuellement, fonction du temps) permet de se focaliser sur la composante réellement stochastique du phénomène.

Ce choix de modélisation présente une sensibilité importante à la valeur minimale mesurée durant la période d'intérêt, qui constitue le temps de référence. Pour tenter de réduire le biais induit, le premier centile des échantillons de temps de parcours est filtré, à raison d'au moins une valeur. De cette façon, les temps particulièrement courts, synonymes d'excès de vitesse importants, seront moins susceptibles de dégrader la qualité des échantillons.

## 2.3 Les ratios de moments comme métriques de fiabilité

Nous proposons ici l'utilisation du diagramme  $\delta$ -MRD pour l'évaluation de la fiabilité des temps de parcours. De nombreux indicateurs existent déjà pour caractériser les temps de parcours, et en particulier leur variabilité. L'intérêt de la présente démarche réside dans la polyvalence des ratios de moments et du diagramme associé pour d'une part rendre compte du modèle statistique le plus adapté au phénomène physique, comme l'illustrera la section suivante, et d'autre part caractériser de manière simple et synthétique la notion d'incertitude entourant l'expérience des utilisateurs du réseau de transport.

Dans un premier temps, dans la section 2.3.1, une déclinaison de nouveaux indicateurs de la fiabilité liés aux ratios de moment ainsi qu'un ensemble de métriques tirées de l'état de l'art retenu pour la comparaison seront présentés. Puis dans la section 2.3.2, une analyse en composantes principales prenant en compte plusieurs indicateurs sera produite, de manière à caractériser plus en détail l'information apportée par chacun d'entre eux. Enfin, dans la section 2.3.3, les indicateurs tirés du  $\delta$ -MRD seront combinés avec les débits et vitesses observés empiriquement pour identifier des évolutions temporelles propres aux temps de parcours ainsi que des motifs significatifs visant à clarifier la notion de variabilité.

### 2.3.1 Mesurer la fiabilité avec des indicateurs simples

#### 2.3.1.1 Coordonnées du $\delta$ -MRD

Compte tenu de la construction du diagramme  $\delta$ -MRD évoquée en section 2.1, les coordonnées cartésiennes du diagramme peuvent être considérées comme un couple innovant de métriques de fiabilité. En guise d'extension, les coordonnées polaires, déduites des premières, peuvent aussi être testées dans ce but.

Les coordonnées cartésiennes du  $\delta$ -MRD sont définies par les équations 2.7 et 2.8, à titre de rappel. La clef d'interprétation principale de cette section est la suivante : des faibles valeurs pour  $\delta_1$  et  $\delta_2$ , respectivement l'abscisse et l'ordonnée du diagramme  $\delta$ -MRD, indiquent une faible dispersion dans l'échantillon et, parallèlement, un haut niveau de fiabilité.

Par ailleurs, il est possible de considérer que ces deux ratios de moments proposent une information redondante sur la dispersion de l'échantillon. Elles peuvent être synthétisées en une seule valeur par le biais du calcul de la distance du point représentant un échantillon avec l'origine du  $\delta$ -MRD. Cette distance représente la première coordonnée polaire, dénotée  $\rho$ . Dans une telle représentation, l'information sur la localisation de l'échantillon est complétée par la seconde coordonnée polaire, l'azimut  $\theta$ , nécessairement compris entre 0 et 90 degrés. Ces coordonnées s'expriment avec les valeurs  $\delta_1$  et  $\delta_2$  :

$$\rho = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2} \quad (2.87)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right) \quad (2.88)$$

Finalement, ces quatre indicateurs peuvent être introduits dans chacun des trois modèles décrits dans la section 2.2.2, *i.e.* les modèles *TT*, *TDF* et *TD*. Cela conduit à l'intégration dans l'analyse de 12 nouveaux indicateurs.

### 2.3.1.2 Revue des indicateurs usuels

Afin de déterminer l'intérêt de ces nouveaux indicateurs, un ensemble de métriques communément utilisées est pris comme base de comparaison. Cet ensemble contient des indicateurs construits de manières variées basés sur la fonction de répartition, les quantiles empiriques ou sur l'écart-type, et adaptés de la revue d'état de l'art présentée dans le chapitre 1.

#### ***Le débit de véhicule :***

Plus que la variabilité en tant que telle, cette quantité renseigne quant au nombre de véhicules ayant emprunté le segment de route sur la période d'intérêt. Elle est considérée pour donner une image complète du trafic sur le segment. En fonction de la technique de collecte de données utilisée, le débit mesuré ne correspond qu'à une portion variable du trafic total, cela créant de fait un biais relatif à la représentativité des véhicules enregistrés. Le débit est noté  $q$ , et exprimé en véhicules/heure.

#### ***La vitesse moyenne observée :***

Avec le débit du flux vient une seconde variable constitutive des modèles de trafic traditionnels : la vitesse moyenne observée sur une période, notée  $\bar{v}$ , et exprimée en kilomètres/heure. Elle est généralement associée à la précédente pour former un diagramme fondamental débit-vitesse. Il est à noter que les techniques de collecte de données utilisées ici ne permettent pas d'obtenir la concentration du flux exprimée en véhicules/kilomètre, troisième variable centrale de la théorie du trafic.

#### ***Le temps de parcours moyen :***

Le temps de parcours moyen, lié à la vitesse moyenne par la longueur du tronçon d'intérêt, est noté  $\bar{T}$ . Cette valeur n'a pas réellement vocation à donner de l'information sur la variabilité des temps de parcours en elle-même, mais demeure un élément important du choix de route des utilisateurs du réseau.

#### ***Le temps de parcours médian :***

Le temps de parcours médian est le temps  $T_{50}$  tel que la moitié des temps de parcours observés durant la période considérée sont plus courts. La médiane donne le même type d'indication que la moyenne, mais a pour avantage d'être plus robuste, *i.e.* moins impactée par les observations extrêmes. Cela revêt une importance particulière dans le cas des temps de parcours, phénomène marqué par une asymétrie forte.

#### ***L'écart-type des temps de parcours :***

L'écart-type des temps de parcours est la première variable réellement capable de renseigner sur le niveau de variabilité de la distribution des temps de parcours. Notée ici  $\sigma_T$ , elle renseigne sur l'écart des observations par rapport à la moyenne.

#### ***Le coefficient de variation :***

Le coefficient de variation complète l'écart-type, en diminuant l'impact de l'échelle des valeurs observées : ratio entre l'écart-type et la moyenne noté  $CV_T$ , il renseigne ainsi sur l'importance de la variabilité rapportée à une observation standard.

#### ***Le Planning Time Index :***

Le *Planning Time Index* (*cf* Lomax *et al.* [98]), ou *PTI*, est une comparaison entre un temps de parcours jugé dégradé, correspondant par exemple au 90<sup>ème</sup> centile, et un temps de parcours jugé fluide, pris par défaut au 10<sup>ème</sup> centile. On a :

$$PTI = \frac{T_{90}}{T_{10}} \quad (2.89)$$

**Le Buffer Time :**

Le *Buffer Time* (cf Lomax *et al.* [98]), ou *BT*, est une simple différence entre centiles, désignant en définitive le budget de temps qu'un automobiliste doit prévoir en plus d'un temps de parcours standard pour parcourir le tronçon avec moins de  $\alpha\%$  de chance d'être en retard à destination. On prend ici  $\alpha = 10$ , et on note :

$$BT = T_{90} - T_{50} \quad (2.90)$$

**Le Buffer Time Index :**

Le *Buffer Time Index* (cf Lomax *et al.* [98]), ou *BTI*, reprend l'indicateur précédent en l'exprimant en termes relatifs, vis-à-vis d'une situation standard. Il s'agit donc ici d'un indicateur sous forme de ratio, tel que présenté par l'équation suivante :

$$BTI = \frac{T_{90} - T_{50}}{T_{50}} \quad (2.91)$$

**Le Misery Index :**

Le *Misery Index* (cf Lomax *et al.* [98]), ou *MI*, est construit selon une logique voisine de celle utilisée pour le *BTI*, tout en considérant une valeur différente pour ce qui est des temps de parcours dégradés : plutôt que de considérer un centile élevé, il est question d'utiliser le temps de trajet moyen parmi un sous-échantillon  $T_m$  constitué des 20% (proportion liée aux nombres de jours ouvrés dans une semaine) de temps de parcours les plus élevés. De même, le temps de trajet moyen sert de temps de parcours de référence dans cette comparaison :

$$MI = \frac{\bar{T}_m - \bar{T}}{\bar{T}} \quad (2.92)$$

**L'indicateur Floridien :**

L'indicateur Floridien, ou *IF*, est ici adapté de la statistique de fiabilité floridienne (cf Lomax *et al.* [98]). Son but est d'évaluer la proportion des véhicules qui peuvent traverser le tronçon en un temps inférieur à 110% du temps médian. Il se note simplement à partir de la fonction de répartition de la distribution des temps de parcours :

$$IF = F_T(1.1 * T_{50}) \quad (2.93)$$

**L'étendue de la distribution :**

L'étendue de la distribution (cf Van Lint *et al.* [156]) est notée  $\lambda_{var}$ . Elle est exprimée par :

$$\lambda_{var} = \frac{T_{90} - T_{10}}{T_{50}} \quad (2.94)$$

Cette mesure donne de l'information sur l'ampleur de la distribution, en termes d'écart de temps de parcours entre un trajet plutôt rapide et un trajet plutôt lent, le tout relativement à un temps de trajet standard.

**L'asymétrie de la distribution :**

L'asymétrie de la distribution, second indicateur développé par Van Lint *et al.* [156] et notée  $\lambda_{skew}$ , est également construite à partir des quantiles de la distribution. Il s'agit ici de comparer l'ampleur des temps de parcours dégradés avec celle des temps de parcours libres, à travers un ratio d'autant plus proche de 1 que la distribution est symétrique :

$$\lambda_{skew} = \frac{T_{90} - T_{50}}{T_{50} - T_{10}} \quad (2.95)$$

**La fréquence de congestion :**

Pu [128] a mis au point un autre indicateur intégré ici dans l'analyse, la fréquence de congestion  $FC$  : son idée était d'évaluer la quantité de véhicules non gênés par des ralentissements. Ainsi, il a proposé de mesurer cette proportion en considérant la valeur de la fonction de répartition correspondant à 2 fois un temps jugé rapide :

$$FC = F_T(2 * T_{10}) \quad (2.96)$$

**La variabilité acceptée :**

Un autre indicateur utilise la fonction de répartition dans notre analyse, il s'agit du niveau de variabilité acceptée  $L_{VA}$  : construit à partir de l'indicateur  $ATTV$  de Wakabayashi *et al.* [162], il s'agit de considérer la proportion de véhicules traversant le tronçon selon un temps standard indiqué par la médiane, auquel est ajouté un temps constant donné  $C$ . Vu la taille des segments considérés ici, ce temps supplémentaire est fixé à 60 secondes. Plus cette proportion est élevée, et plus les voyageurs lents auront en réalité connu une expérience de temps de parcours proche de la norme indiquée par la médiane :

$$L_{VA} = F_T(T_{50} + C) \quad (2.97)$$

**Le temps de parcours désiré :**

Enfin, le dernier indicateur entrant dans le cadre de l'étude comparative est inspiré du  $DTTR$ , second indicateur de Wakabayashi *et al.* [162]. Noté  $L_{TD}$ , cet indicateur est le pendant de la métrique précédente pour les voyageurs plus rapides :

$$L_{TD} = F_T(T_{50} - C) \quad (2.98)$$

**2.3.2 Classification des indicateurs de fiabilité des temps de parcours**

28 métriques différentes sont intégrées à l'étude, au total (12 métriques propres au  $\delta$ -MRD, 16 indicateurs classiques). Ainsi, pour chaque échantillon de temps de parcours, la fiabilité est évaluée de 28 manières différentes, certaines d'entre elles étant fortement liées. Par ailleurs, avec  $n$  le nombre de sous-échantillons considéré, une matrice de dimension  $28 * n$  est produite. Trois critères de comparaison de ces métriques ont été mis en œuvre : le premier est le calcul du coefficient de corrélation entre les vecteurs relatifs à chaque métrique ; le second est un score de similarité évaluant les classements des sous-échantillons produits par chaque métrique ; le troisième est une analyse en composantes principales alimentée par la matrice sus-mentionnée.

**2.3.2.1 Classification à l'aide de critères simples**

Les deux premiers critères donnent une image globale de la qualité des indicateurs tirés du  $\delta$ -MRD pour représenter la fiabilité des temps de parcours, en comparaison de métriques de l'état de l'art. Les coefficients de corrélation expriment l'intensité des liens linéaires régissant deux variables. Définis entre -1 et 1, ils dénotent une relation forte si le coefficient est proche de 1 en valeur absolue, et qui plus est inverse si cette valeur est négative. Pour apporter une image complémentaire de ce premier critère, nous construisons un score  $RS$ , indiquant la similarité des classements des individus en fonction des variables étudiées. En posant  $c_i^1$  le rang de l'individu  $i$  pour la première variable et  $c_i^2$  son rang pour la seconde variable, ce critère s'exprime de la façon suivante :

$$RS = \sum_{i=1}^n |c_i^1 - c_i^2| \quad (2.99)$$



où  $n$  est le nombre d'individus.  $RS$  est compris entre 0 (les deux classements sont identiques) et une valeur  $RS_{max}$  (les deux classements sont diamétralement opposés) définie telle que :

$$RS_{max} = 2 \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} (n - (i - 1) - i) \quad (2.100)$$

Deux cas de figures émergent : soit  $n$  est pair ( $\exists k$  tel que  $n = 2k$ ) ou  $n$  est impair ( $\exists k$  tel que  $n = 2k + 1$ ). L'expression de  $RS_{max}$  dépend ainsi du cas :

$$RS_{max}^{pair} = 2k^2 \quad (2.101)$$

$$RS_{max}^{imp.} = 2k(k + 1) \quad (2.102)$$

Quel que soit  $n$ , la valeur  $RS$  est normalisée par  $RS_{max}$  pour obtenir un indicateur défini sur l'intervalle  $[0; 1]$ , et ainsi pouvoir comparer des couples de variables sur des tailles d'échantillons différentes.

La figure 2.8 présente quelques valeurs significatives relativement aux coefficients de corrélation et au score  $RS$  normalisé, entre un sous-échantillon regroupant les métriques de fiabilité les plus citées et les coordonnées cartésiennes obtenues sur le  $\delta$ -MRD. En particulier, les corrélations sont les plus élevées pour le modèle  $TT$ , quels que soient l'échantillon et la coordonnée considérés (sous-figures 2.8b et 2.8c). Les valeurs de corrélation pour le modèle  $TDF$  sont assez fluctuantes : on peut noter qu'elles sont plus grandes pour les temps de parcours mesurés à Portland. De façon générale, il est possible de constater que les liens sont également plus forts entre les métriques de fiabilité classiques et la coordonnée  $\delta_1$ . Sur le détail des métriques, parmi celles sélectionnées, il semble que le coefficient de variation, le *Misery Index*, le *Planning Time Index* et  $\lambda_{var}$  proposent l'image la plus proche de celle apportée par les coordonnées du  $\delta$ -MRD. Ces conclusions sont renforcées par les scores de rang (sous-figures 2.8d et 2.8e), notamment en ce qui concerne le coefficient de variation. Le modèle  $TT$  fournit encore une fois les indicateurs les plus proches des métriques de fiabilité classiques, en particulier pour le premier ratio de moments : les scores de rang sont très proches de 0, indiquant par là des classements d'échantillons semblables. Pour aller plus loin quant à cette première phase de comparaison, l'ensemble des valeurs de corrélation et de similarité des rangs est proposé pour les deux jeux de données dans l'annexe B.

### 2.3.2.2 Analyse en Composantes Principales (ACP)

En guise d'analyse multidimensionnelle, une ACP normée regroupant les 28 indicateurs a été réalisée pour obtenir une description plus précise de la caractérisation des temps de parcours et de leur fiabilité. Au sein d'une représentation factorisée des jeux de données originaux, cette approche permet de savoir comment chaque indicateur contribue aux dimensions synthétiques créées. Les 128 échantillons retenus à Portland forment la première matrice d'intérêt, alors que dans le cas de Lyon, l'intégralité des échantillons de 15 minutes valides est considérée ici, soit 13110 individus statistiques.

Au vu des valeurs propres et des parts d'inertie expliquées par les axes principaux  $F_i$  proposées au sein du tableau 2.2, le nombre optimal de facteurs s'élève entre 4 et 6. Dans l'étude de la pertinence des indicateurs liés au  $\delta$ -MRD, un nombre de facteurs égal à 4 suffit à identifier les comportements des différents indicateurs, comme l'illustre la figure 2.9. La proportion de l'inertie expliquée est ainsi respectivement de 84.1 et 84.7% dans les deux cas étudiés.

Pour les données mesurées à Portland, les 28 indicateurs sont calculés pour 128 échantillons d'une heure. La figure 2.9a propose les contributions relatives des indicateurs pour

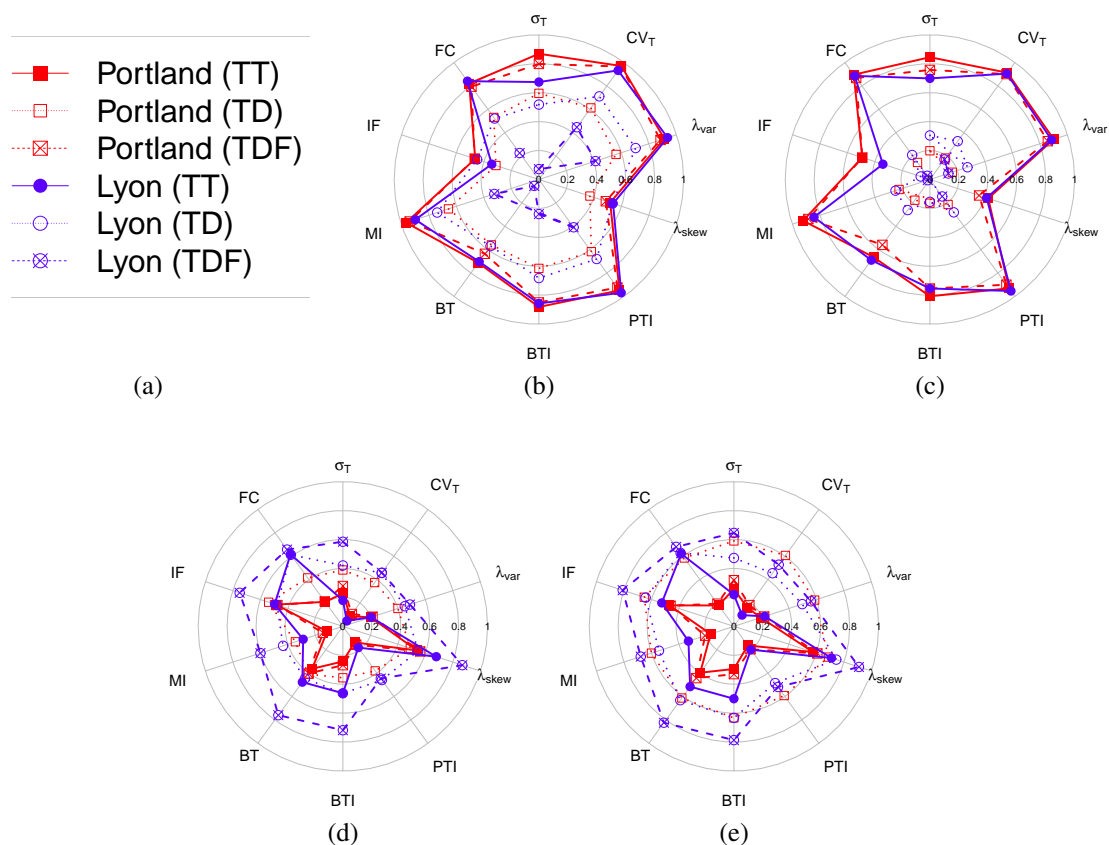


FIGURE 2.8 – Similarité entre les indicateurs de fiabilité classiques et les coordonnées du  $\delta$ -MRD : (a) légende (b) coefficient de corrélation avec  $\delta_1$  (c) coefficient de corrélation avec  $\delta_2$  (d) similitude des rangs des périodes avec  $\delta_1$  (e) similitude des rangs des périodes avec  $\delta_2$

chacun des quatre facteurs. Le premier facteur met en scène les principaux indicateurs de fiabilité connus dans l'état de l'art accompagnés par les indicateurs tirés du  $\delta$ -MRD (respectivement,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  et  $\rho$  pour les modèles TT et TDF). Le second facteur est plus compliqué à analyser, il faut toutefois noter qu'il regroupe les trois mesures d'angle prises au sein du diagramme de ratio des moments. Le facteur suivant est le complément du premier, au sens où les temps de parcours moyens sont mis en valeur au même titre que la variabilité des temps de parcours : les moyennes de vitesse et de temps de parcours, la médiane des temps de parcours, ou encore l'indicateur *BT* (différence entre la médiane et un temps de parcours particulièrement élevé) sont les principaux contributeurs. Enfin, le quatrième et dernier facteur est principalement constitué des indicateurs du  $\delta$ -MRD issus du modèle TD, celui-ci semblant apporter une information différente du reste des indicateurs.

Dans le cas des données collectées à Lyon, les conclusions sont encore plus claires, la si-

TABEAU 2.2 – Sélection du nombre de facteurs pour les analyses en composantes principales

Site	Variable	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Portland	Valeur propre	15.21	3.31	2.69	2.33	1.08	0.95	0.69
	Variance cumulée	54.33	66.17	75.77	84.10	87.95	91.34	93.82
Lyon	Valeur propre	12.55	5.50	3.59	2.07	0.99	0.66	0.56
	Variance cumulée	44.83	64.47	77.30	84.69	88.22	90.57	92.58

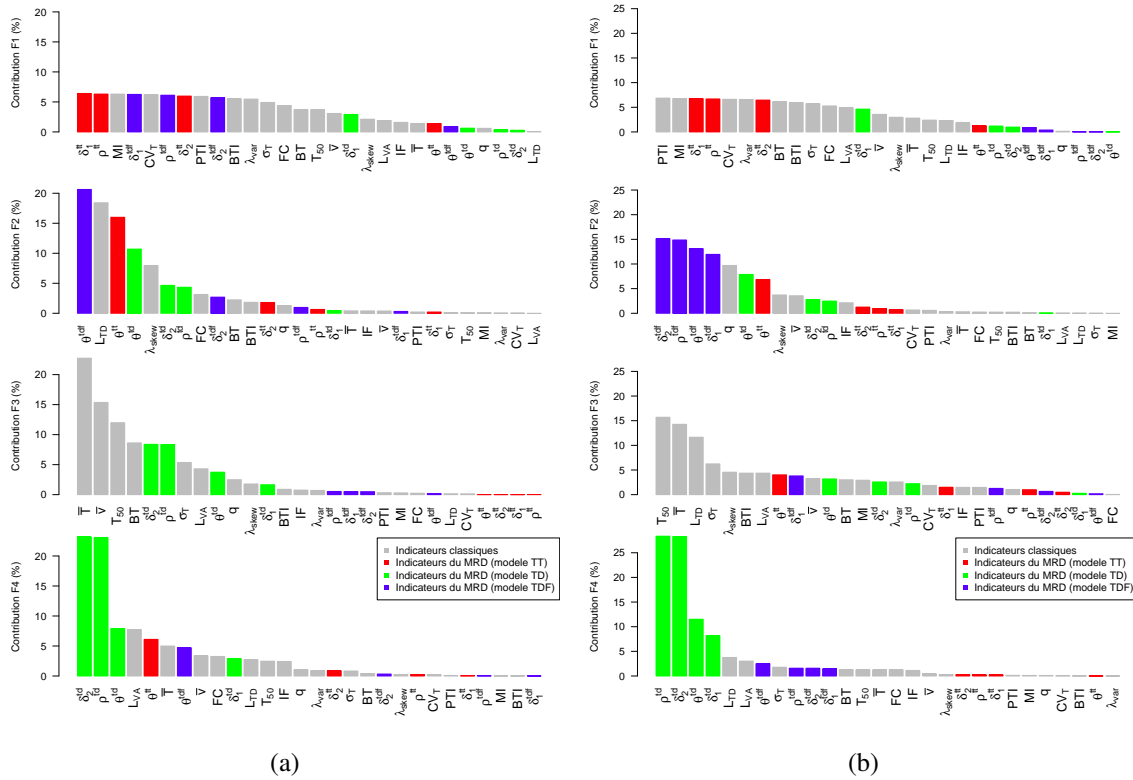


FIGURE 2.9 – Contributions des indicateurs aux facteurs identifiés lors de l’ACP sur les données de (a) Portland (128 individus) (b) Lyon (13110 individus)

gnificativité statistique étant par ailleurs renforcée par la considération de 13110 échantillons différents. Les contributions relatives des indicateurs aux facteurs conservés sont décrites par la sous-figure 2.9b . En l’occurrence, le premier facteur est construit principalement autour des principales métriques de fiabilité des temps de parcours, auxquelles s’ajoutent trois des quatre coordonnées du  $\delta$ -MRD ( $\delta_1$ ,  $\delta_2$  et  $\rho$  pour le modèle TT). Le deuxième facteur regroupe les indicateurs du  $\delta$ -MRD propres au modèle *TDF*. Ces quatre métriques semblent en réalité constituer un facteur proposant une information à part entière. C’est d’ailleurs également le cas pour les indicateurs du  $\delta$ -MRD construits via le modèle TD pour le quatrième facteur. Enfin, le troisième facteur regroupe des variables centrées sur le temps de parcours « standard », *i.e.* celui auquel peut s’attendre un individu lambda : les indicateurs qui contribuent le plus à ce facteur sont la médiane, la moyenne, l’indicateur de temps de parcours désiré  $L_{TD}$  et dans une moindre mesure, l’écart-type.

Pour compléter ces résultats, les cercles de corrélation correspondant aux deux analyses sont présentés dans l’annexe C, pour chacun des couples de facteurs.

### 2.3.2.3 Mesurer la fiabilité avec le diagramme de ratio de moments

En conclusion de cette analyse centrée sur les indicateurs de fiabilité, il est possible d’affirmer les performances des coordonnées du  $\delta$ -MRD (en particulier pour le modèle TT) en matière de représentation de la variabilité des échantillons, et en filigrane, de la fiabilité des temps de parcours. Ce résultat est obtenu dans les trois critères de comparaison retenus, *i.e.* les coefficients de corrélation, les scores de rang, et l’ACP, et ce, pour les deux jeux de données considérés. Ces résultats illustrent le fait que le  $\delta$ -MRD puisse se *substituer* aux

différents indicateurs existants plutôt que sa capacité à représenter la fiabilité de manière idéale.

En outre, les résultats moins convaincants obtenus pour les modèles TD et TDF doivent être remis en perspective : la comparaison portant sur des métriques propres aux temps de parcours, ces indicateurs construits à partir de la distribution des délais apportent nécessairement une autre information, qu'il convient tout de même de prendre en compte.

### 2.3.3 Évolution temporelle des distributions de temps de parcours

Les distributions de temps de parcours peuvent être modélisées avec les lois de la famille de Halphen, *i.e.* par une distribution apparaissant au sein du  $\delta$ -MRD. La section précédente a démontré que ce graphique peut également donner de l'information quant à la fiabilité des temps de parcours. Celui-ci peut en outre capturer les évolutions temporelles des distributions de temps de parcours sur un tronçon.

Nous faisons ici l'hypothèse qu'il existe une correspondance entre l'information apportée par le  $\delta$ -MRD et les états de trafic, et inversement. Cela implique par ailleurs que les évolutions en termes de trafic, et donc de distribution de temps de parcours, sont localisables au sein du  $\delta$ -MRD. Nous portons ici une attention plus particulière à la dispersion des échantillons de temps de parcours, et ainsi, sur leur variabilité, au cours de trois études de cas focalisées sur la variabilité intra-journalière, la détection d'une chute de la fiabilité et la variabilité inter-journalière. Un paragraphe préalable décrira une procédure de classification utilisée ici pour construire des groupes homogènes sur lesquels les différentes études de cas s'appuieront.

#### 2.3.3.1 Constitution de sous-ensembles de périodes homogènes

Afin de mieux appréhender les comparaisons de distributions et les ajustements de séries temporelles, une distinction des périodes est réalisée. En particulier, l'analyse des états de trafic montre que les distributions de temps de parcours présentent des silhouettes différentes selon les niveaux de congestion. Par exemple, Van Lint *et al.* [156] se focalisent sur un schéma en quatre temps dans lequel une phase fluide est suivie d'une étape d'installation de la congestion (montée en charge), puis d'une phase congestionnée, avant une dernière étape de dissolution de la congestion et de retour à la normale. Ces phases sont identifiables en termes d'état de trafic, la congestion étant mesurable par la densité, le débit et la vitesse des véhicules présents sur le tronçon. Cependant, elles sont aussi synonymes de niveaux de variabilité différents, suggérés par le profil de la densité de la distribution des temps de parcours.

Pour réaliser cette subdivision et identifier les phases de trafic évoquées, deux outils graphiques sont mobilisés. Les états de trafic sont représentés par une variante du Diagramme Fondamental, outil de base de la théorie du trafic [94, 95, 132], liant débit et vitesse. Le débit horaire est ici le nombre de véhicules enregistrés par les dispositifs de collecte des données. Eu égard aux caractéristiques de ces outils, la valeur obtenue n'est pas le débit réel, mais l'hypothèse est faite que la proportion de véhicules enregistrés est représentative de la population des véhicules ayant effectivement traversé le segment. La seconde dimension, la vitesse du flux, est calculée comme la vitesse moyenne des véhicules enregistrés pendant chaque période de temps. Les données brutes indiquent des temps de parcours individuels en secondes, qu'il convient de transformer en vitesses exprimées en kilomètres par heure, en utilisant la longueur des segments. D'une forme théorique proche d'une parabole concave, ce premier diagramme indique un état fluide pour les points situés sur le haut du nuage,

soit ceux caractérisés par des vitesses moyennes élevées, le point d'inflexion correspond au fonctionnement du tronçon à sa capacité maximale, alors que les points appartenant à la zone inférieure du diagramme renvoient à des états congestionnés (vitesses faibles, et débit saturé). Par ailleurs, le  $\delta$ -MRD présenté précédemment est utilisé pour rendre compte des niveaux de variabilité des temps de parcours.

Plus concrètement, une méthode de classification est entreprise à partir de ces deux diagrammes, et plus particulièrement de leurs coordonnées :

- le débit et la vitesse moyenne du flux (diagramme débit-vitesse) ;
- les ratios de moments  $\delta_1$  et  $\delta_2$  (diagramme  $\delta$ -MRD).

Par une technique d'apprentissage non supervisé, chaque échantillon de temps de parcours est caractérisé par un vecteur de quatre dimensions. Le but de cette approche est de grouper les individus, *i.e.* les périodes de mesure, en fonction de leurs similarités mathématiques sur ces quatre données, sans aucune connaissance préalable. Le nombre optimal de classes, ou *clusters*, est un paramètre à optimiser. Pour ce faire, ici, l'algorithme *PAM* (*Partitioning Around Medoids*) est utilisé sur les vecteurs des quatre coordonnées pour différentes quantités de clusters, jusqu'à donner un indice de qualité de la classification, *i.e.* la silhouette [83]. Le nombre de classes optimal est celui maximisant cet indice.

### 2.3.3.2 Comparaisons intra-journalières

La première étude de cas consacrée à l'évolution temporelle des temps de parcours est centrée sur la variabilité intra-journalière. Sur une même journée, comment les temps de parcours évoluent-ils ? Quelle gamme d'états de trafic est réalisée, et surtout, quels liens sont décelables entre ceux-ci et le niveau de variabilité des distributions ? Des réponses à ces questions peuvent être apportées par l'analyse du jeu de données simulées décrit dans la section 2.2.1. Le profil de la demande correspond ainsi à la courbe supérieure au sein de la figure 2.5. Des sous-échantillons de 6 minutes sont considérés, pour des temps de parcours mesurés entre 8h et 20h, et un procédé de classification sur le débit, la vitesse et les coordonnées du  $\delta$ -MRD est entrepris afin de mettre en valeur des groupes de distributions homogènes, tel que décrit dans la section précédente. La figure 2.10 décrit le comportement des temps de parcours sur le diagramme débit-vitesse, le  $\delta$ -MRD et une chronologie mettant en valeur l'étendue des distributions.

L'étape préliminaire de la classification a conduit à la formation de quatre groupes de distributions. Sur le diagramme débit-vitesse, les classes 1 et 2 correspondent à des périodes fluides, aux débits les plus faibles, la troisième classe représente les périodes à capacité, voire légèrement congestionnées, pour lesquelles le débit atteint des valeurs parmi les plus fortes et la vitesse moyenne est ralentie. La quatrième et dernière classe concerne les périodes saturées, où le débit reste maximal, mais où la vitesse chute sensiblement. L'étude du  $\delta$ -MRD montre également une trajectoire relativement nette, si l'on considère les ratios de moments propres aux distributions des délais (modèle TD). Ainsi les périodes les plus fluides correspondent à la zone la plus éloignée de l'origine du diagramme, mais également au nuage de point le plus dispersé. Les deux premières classes forment le gros de la trajectoire du nuage, et sont caractérisées par des ratios de moments élevés. En particulier, la première classe désigne les périodes fluides pendant lesquelles la distribution des délais est la plus dispersée. Les deux groupes représentant des périodes plus congestionnées sont eux plutôt proches de l'origine du diagramme, dénotant un moindre écart entre les moyennes arithmétiques, géométriques et harmoniques. Les positions des échantillons appartenant à la quatrième classe, la plus congestionnée, apparaissent néanmoins comme légèrement plus élevées. La position

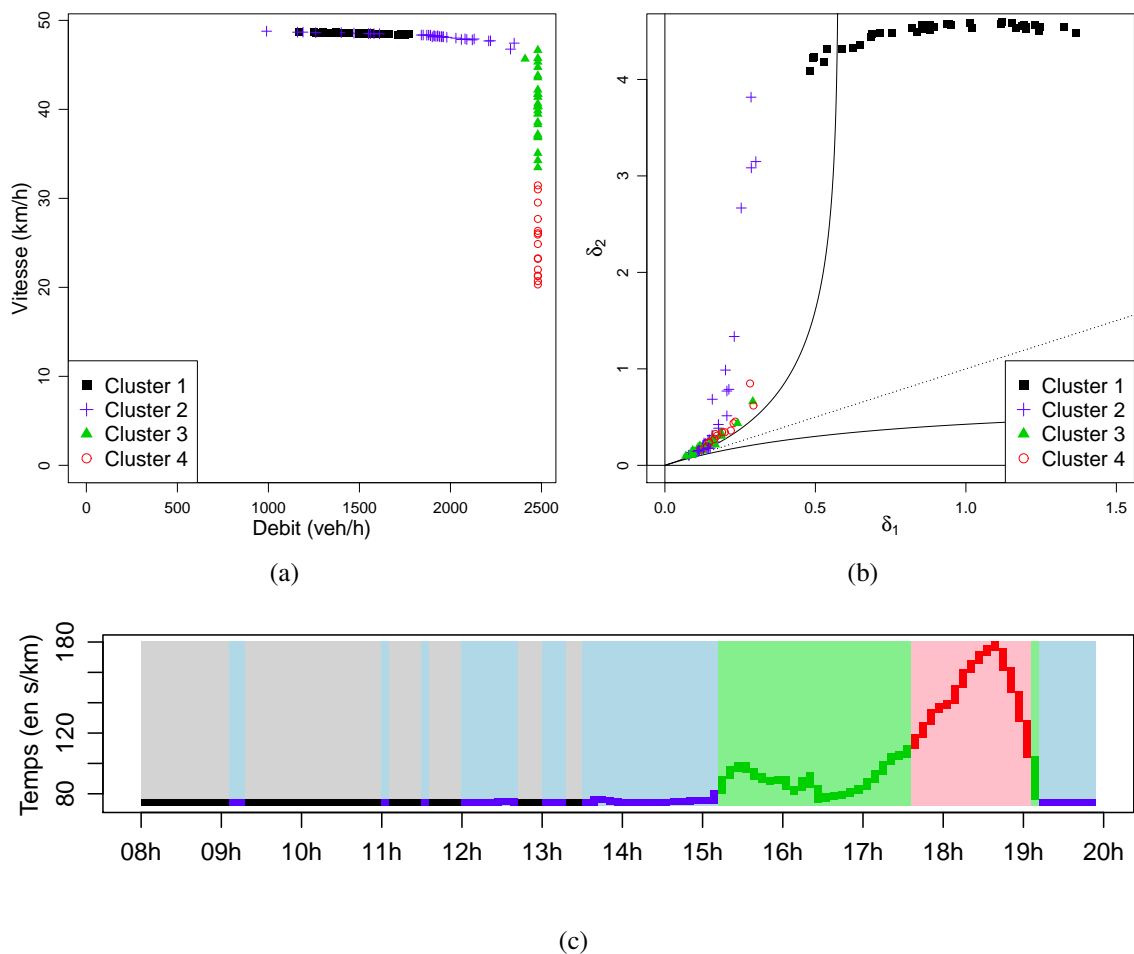


FIGURE 2.10 – Distributions de temps de parcours sur une journée (données simulées, intervalles de 6 minutes), regroupement par classes d'échantillons ; (a) Position des échantillons (modèle *TD*) sur le diagramme débit-vitesse (b) Position des échantillons sur le  $\delta$ -MRD ; (c) Répartition chronologiques des échantillons dans les différentes classes (en surbrillance, l'étendue des distributions)

globale du nuage de point suggère la pertinence de la loi Halphen de type *B* dans la modélisation des délais, la loi de type *A* apparaissant comme un substitut pour les échantillons de la première classe. Sur une frise chronologique représentant chaque échantillon de 6 minutes à sa place, entre 8h et 20h, tel qu'illustré par la sous-figure 2.10c, il est possible de discerner l'évolution des temps de parcours ainsi que la répartition temporelle des différents groupes. Ainsi, la pointe de l'après-midi correspond aux états les plus congestionnés, et les périodes saturées sont en fait des prémisses de congestion, en milieu d'après-midi. Ces périodes sont ainsi jugées comme étant celles où les délais par rapport à un temps de référence sont peu variables. Sur le reste de la journée, et en particulier le matin, les temps de parcours restent faibles comme la demande l'est également. Cet état de fluidité se traduit par de grands écarts potentiels entre les moyennes : ces périodes de fluidité permettent aux conducteurs de choisir leur vitesse préférentielle, si bien qu'il est plus fréquent que certains s'écartent de la norme.

### 2.3.3.3 Détection des dégradations de la fiabilité des temps de parcours

En utilisant l'information produite par le diagramme de ratio des moments d'une manière légèrement différente, à savoir avec le modèle *TT* plutôt qu'avec le modèle *TD*, cette logique

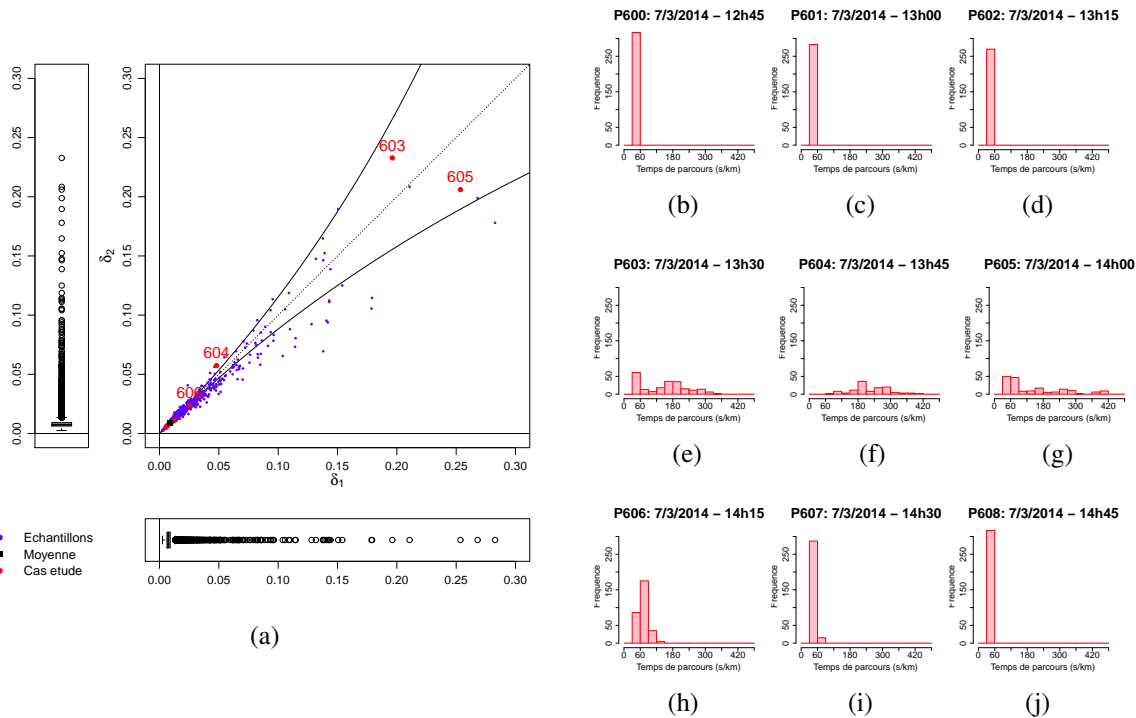


FIGURE 2.11 – Détection d’une chute de fiabilité sur la rocade Est lyonnaise (07/03/14, entre 12h45 et 15h); (a) Position des échantillons de temps de parcours sur le  $\delta$ -MRD; (b-h) Histogrammes des temps de parcours quart d’heure par quart d’heure

de variabilité temporelle au sein d’une même journée peut être déclinée selon une perspective différente. Comme vu précédemment, les coordonnées du  $\delta$ -MRD peuvent faire office d’indicateurs de fiabilité. De là, il est possible d’identifier les dégradations de la fiabilité d’un tronçon routier en suivant en temps réel l’évolution des ratios de moments.

La figure 2.11 illustre la détection d’une chute de fiabilité, sur l’exemple de la rocade Est lyonnaise. Ainsi, sur un début d’après-midi de semaine (ici, entre 12h45 et 15h), il apparaît que les temps de parcours observés entre 13h30 et 14h15 subissent de forts ralentissements, et une incertitude grandissante, en témoignent les histogrammes des sous-figures 2.11e, 2.11f et 2.11g. Cette chute de fiabilité se traduit sur le  $\delta$ -MRD par deux éléments : une augmentation sensible des valeurs des ratios de moment pour ces périodes, de même qu’une instabilité notable d’une période à l’autre.

Les points rouges au sein de la figure 2.11a correspondent aux neuf histogrammes affichés, il est rapide de constater que la plupart de ces points oscillent autour de la période moyenne, indiquée par un point noir, et mise en valeur par les diagrammes en boîte sur les axes. Les temps de parcours des périodes 603 (13h30-13h45) et 605 (14h-14h15) sont jugés comme les plus incertains, malgré un infléchissement lors de la période 604 (la fiabilité des temps de parcours sur cette dernière est malgré tout significativement plus faible que la moyenne). La distribution à la période 606, même si elle reste dans la partie supérieure du nuage de points, témoigne d’un retour progressif à la normale.

### 2.3.3.4 Comparaisons inter-journalières

La troisième et dernière étude de cas liée à l’évolution des temps de parcours et à leur variabilité est consacrée à la comparaison du fonctionnement du tronçon d’un jour sur l’autre,

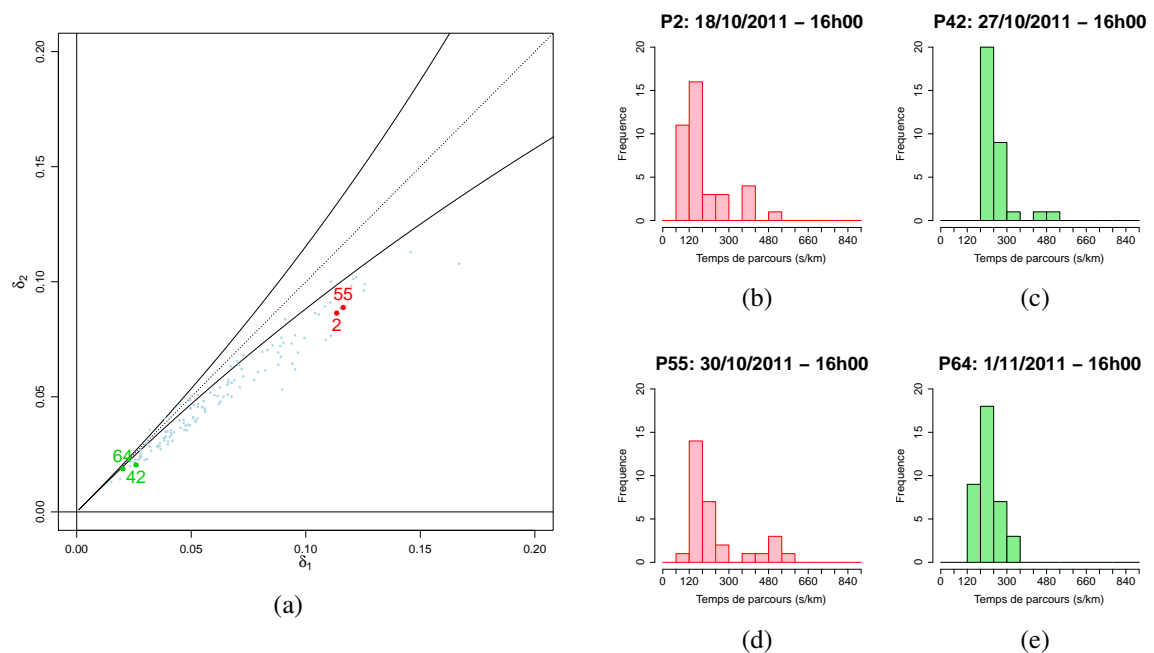


FIGURE 2.12 – Comparaison des distributions de temps de parcours mesurés entre 16h et 17h à Portland, sur différents jours ; (a) Position des échantillons de temps de parcours sur le  $\delta$ -MRD ; (b) et (d) Exemples d’histogramme de temps de parcours, distributions à forte variabilité ; (c) et (e) Exemples d’histogramme de temps de parcours, distributions à faible variabilité

pour une heure donnée. En guise d’illustration, la figure 2.12 propose une comparaison de quatre échantillons de temps de parcours relevés entre 16h et 17h pendant des jours différents, sur la section I82 de Portland.

En l’occurrence, les périodes 42 et 64 concernent des jours pour lesquels les temps de parcours ont été plutôt stables, en témoignent les positions correspondantes sur le  $\delta$ -MRD, sur la partie basse du nuage de points, et les histogrammes 2.12c et 2.12e, caractérisés par un mode marqué et relativement peu de temps de parcours élevés. Au contraire, les temps de parcours observés pendant les périodes 2 et 55 sont particulièrement variables : les ratios de moments sont plutôt élevés comparativement aux autres périodes, alors que les histogrammes 2.12b et 2.12d présentent des modes moins prononcés, et une queue d’observations plus conséquente.

## 2.4 Ajustement des temps de parcours sur un segment

La section précédente illustre l’utilité des ratios de moments pour la représentation de la variabilité des temps de parcours. À l’aune des résultats théoriques obtenus dans la section 2.1, les différentes valeurs des ratios de moments peuvent orienter le choix du modèle pour la représentation des temps de parcours en tant que phénomène statistique. Si les ratios de moments correspondant aux temps de parcours sont les meilleurs métriques de fiabilité, il apparaît que les valeurs les plus intéressantes dans une optique d’ajustement de lois théoriques sont les ratios associés aux délais. En effet, l’adéquation des différentes lois sera testée par rapport à la composante stochastique des temps de parcours, telle que proposée par le modèle



TD évoqué dans la section 2.2.2.

Dans cette section, une première étape consistera à préciser les modalités des analyses d'ajustement statistique, ce sera l'objet de la section 2.4.1. Par la suite, dans la section 2.4.2, les performances des différentes lois de probabilité présentées auparavant seront détaillées pour les jeux de données de Portland et de Lyon.

## 2.4.1 Éléments méthodologiques

### 2.4.1.1 Comparaison entre les distributions

En première approximation, le  $\delta$ -MRD présente un intérêt notable, puisqu'il permet de juger la pertinence des distributions qui y sont illustrées, à savoir les lois de Halphen, mais aussi les lois Gamma, Gamma inverse, ou encore lognormale [14]. Plus précisément, plus le point correspondant à l'échantillon est éloigné de la zone théorique associée à une loi donnée, et moins cette loi sera jugée apte à modéliser le phénomène duquel est tiré l'échantillon. Pour tirer profit de cette conjecture, les nouveaux estimateurs tirés du  $\delta$ -MRD sont introduits dans l'analyse comparative des modèles pour les lois de Halphen. Une première comparaison avec les estimateurs du maximum de vraisemblance développés par Perreault *et al.* [123] sur les ajustements réalisés ici donnera un aperçu des possibilités de cette nouvelle technique d'estimation. De manière plus générale, les différentes lois de probabilité seront comparées sur la base d'estimateurs tirés de la méthode du maximum de vraisemblance, théoriquement optimaux.

Parmi toutes les lois considérées, deux niveaux de compétition émergent : la significativité maximale sera certainement obtenue par les lois de probabilité à trois paramètres (Halphen, Burr, lognormale), alors que les distributions à deux paramètres (Gamma, Gamma inverse, Harmonique, lognormale, normale, Tweedie, Weibull) permettent de modéliser les temps de parcours de manière plus simple, avec une précision moindre, mais potentiellement suffisante selon les exigences du modélisateur.

Les comparaisons entre lois sont réalisées au moyen de quatre indicateurs apportant des informations complémentaires :

- La valeur de la fonction de vraisemblance maximisée  $MV$ , proposant une mesure synthétique de la qualité du modèle compte tenu des observations :

$$MV = \mathcal{L}(\theta|x_i) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) \quad (2.103)$$

- Le critère d'inférence bayésien  $BIC$ , fondé sur la valeur du maximum de vraisemblance, mais prenant également en compte le nombre de paramètres du modèle. Ce critère rend compte de la complexité des modèles en pénalisant un accroissement du nombre de paramètres. Ainsi, pour  $MV$  la valeur du maximum de vraisemblance,  $k$  le nombre de paramètres et  $n$  la taille de l'échantillon de référence :

$$BIC = -2 * \ln(MV) + k * \ln(n) \quad (2.104)$$

- une erreur quadratique moyenne  $RMSE$ , focalisée sur les fonctions de densité, elle permet de mesurer la proximité des densités théoriques avec un histogramme des données empiriques. Ainsi, pour une valeur théorique  $f_{th}(t)$  et une valeur empirique correspon-

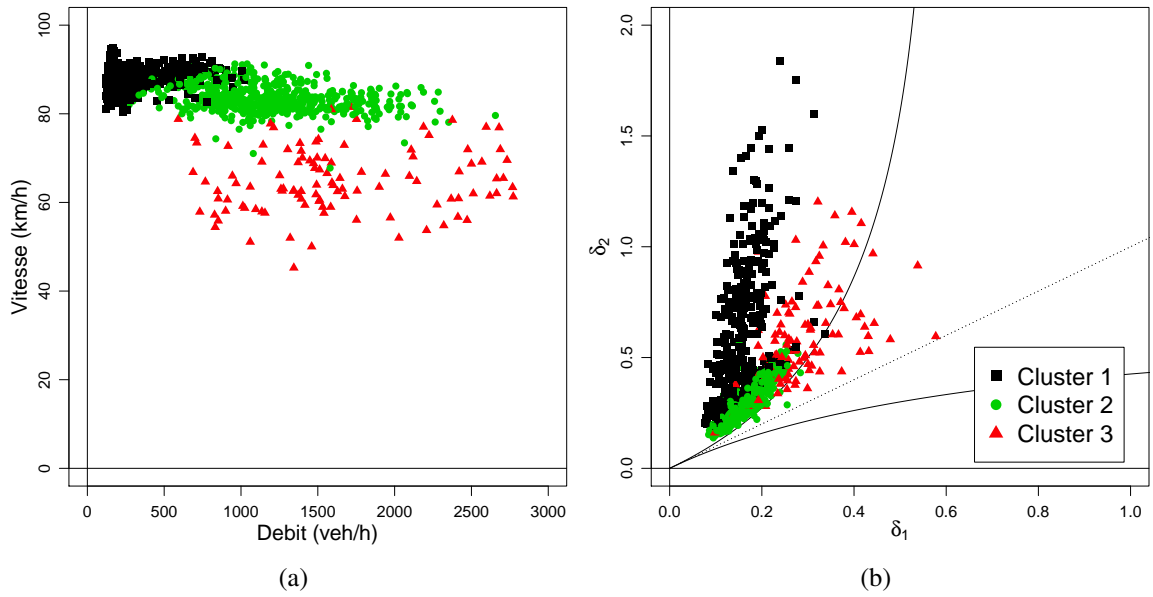


FIGURE 2.13 – Subdivision des échantillons de temps de parcours mesurés à Lyon, selon une méthode de classification réalisée simultanément sur (a) les états de trafic mesurés par un diagramme débit-vitesse et (b) sur les niveaux de variabilité des temps de parcours (modèle  $TD$ ) mesurés par le  $\delta$ -MRD

dante  $p_{obs}(t)$ , cet indicateur s'exprime comme suit :

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=0}^{T_{max}} (f_{th}(t) - p_{obs}(t))^2} \quad (2.105)$$

- la distance de Kolmogorov-Smirnov  $KS$ , centrée sur les fonctions de répartition. Ce dernier indicateur représente la distance maximale entre la fonction de répartition théorique associée au modèle  $F_{th}(t)$  et la fonction de répartition empirique :

$$KS = \max_{0 \leq t \leq T_{max}} \left| F_{th}(t) - \sum_{h=0}^t p_{obs}(h) \right| \quad (2.106)$$

### 2.4.1.2 Regroupement des échantillons de temps de parcours

Pour augmenter la valeur des ajustements réalisés, le jeu de données collecté à Lyon se voit subdivisé en sous-groupes d'échantillons homogènes, selon la procédure décrite lors de la section 2.3.3. Le jeu de données collecté à Portland n'est pas concerné par cette procédure, compte tenu de la faible quantité de périodes exploitables.

Ainsi, la figure 2.13a illustre le diagramme débit-vitesse au sein duquel sont représentés les 1026 échantillons de 15 minutes de données, et la figure 2.13b donne une représentation de ces échantillons sur le  $\delta$ -MRD. La première constatation est le nombre de groupes mis en valeur : la silhouette de la procédure de classification présente les valeurs les plus élevées pour un nombre de groupes compris entre 2 et 5, avec un maximum à 3 groupes.

Cette répartition laisse penser que la subdivision des périodes a abouti à un groupe de temps de parcours fluide, un groupe intermédiaire correspondant à un trafic modéré, ou à des phases de transition, et un dernier groupe représentant des périodes congestionnées. En

l'occurrence, l'examen des états de trafic indiqués par le diagramme débit-vitesse va dans ce sens. Le premier groupe, mis en valeur par des carrés noirs (347 individus), se réfère aux périodes lors desquelles la vitesse est la plus élevée, et où le débit est très faible. Ce groupe correspond aux périodes fluides, où le tronçon est peu emprunté. Le second groupe, identifié par les ronds verts (571 individus), désigne un état de trafic intermédiaire, à dominante fluide, mais pour lequel la fréquentation du tronçon est significativement plus forte : les vitesses moyennes sont quasiment aussi élevées que dans le premier groupe, alors que les débits sont plus importants. Le troisième et dernier groupe, représenté par les triangles rouges (108 individus), désigne les états congestionnés, où la vitesse moyenne décline sérieusement (jusqu'à 50 kilomètres par heure de moyenne). L'importance de la congestion est renseignée par le débit observé : les périodes où il est le plus fort indiquent un fonctionnement à capacité, alors que celles où le débit est faible renvoient à des écoulements de véhicules ralentis. Aucune situation de blocage complet du tronçon n'est décelée : aucun point n'est localisé à l'extrémité de la branche basse du « U », où le débit observé est nul ou quasi-nul, et où la vitesse moyenne correspond à un rythme au pas.

Le  $\delta$ -MRD proposé dans la figure 2.13b apporte des éléments de réponse à propos de l'étude de la variabilité dans les différents groupes de distributions. De manière globale, le nuage de points représente un panache partant près de l'origine et orienté vers le coin opposé. Il est à noter que les valeurs du ratio  $\delta_2$  sont nettement plus dispersées (jusqu'à 2) alors que les valeurs les plus élevées pour  $\delta_1$  dépassent difficilement 0.5. Ceci étant dit, la concentration des points est d'autant moins élevée que ceux-ci sont éloignés de l'origine, indiquant des situations inhabituelles impactées par des observations extrêmes. Par exemple, le premier groupe est caractérisé par des valeurs plutôt faibles pour  $\delta_1$ , alors que le second ratio de moment est nettement plus variable. Dans cette situation, il semble ainsi que la variabilité soit le fait de conducteurs particulièrement plus rapides que les autres sur une même période, entraînant des valeurs très faibles pour la moyenne harmonique, et donc, de grandes valeurs pour le ratio  $\delta_2$ . Au contraire, le second groupe présente les ratios de moments les plus faibles, dénotant par là des situations de trafic où les temps de parcours ne présentent que peu de singularités. Dans ces situations plutôt fluides, les conducteurs se déplacent globalement à la même vitesse que le flux qui les contient. Dans le troisième et dernier groupe, le ratio  $\delta_1$  est plus élevé : ce dernier, fortement impacté par la moyenne arithmétique, indique des échantillons de temps de parcours dans lesquels des conducteurs ont été significativement ralentis, ce qui coïncide avec la classification par les états de trafic. Ces résultats sont à mettre en perspective avec l'étude de cas centrée sur les données simulées (cf section 2.3.3)

Par ailleurs, la figure 2.13b donne une première indication quant aux modèles statistiques les plus susceptibles d'émerger comme les meilleures solutions dans l'analyse comparative de la qualité des ajustements. Une grande concentration de points caractérise la zone du nuage de points la plus proche de l'origine, laissant penser que la même loi avec des jeux de paramètres proches pourrait représenter une grande quantité d'échantillons. Si ce graphique empirique est comparé avec le  $\delta$ -MRD théorique proposé dans la figure 2.1, les délais semblent particulièrement bien représentés par la loi Halphen de type B, à un degré moindre par la loi de type A, mais aussi par la loi Gamma.

Les données mesurées à Lyon concernent des jours supposément comparables les uns avec les autres : elles ne concernent que des jeudis, hors vacances scolaires. Ainsi, l'agrégation de ces périodes en trois grands groupes permet de construire une journée type, eu égard à l'état de trafic et à la variabilité des temps de parcours. Cette autre illustration de la subdivision temporelle est apportée par la figure 2.14. Le premier groupe, indiquant des

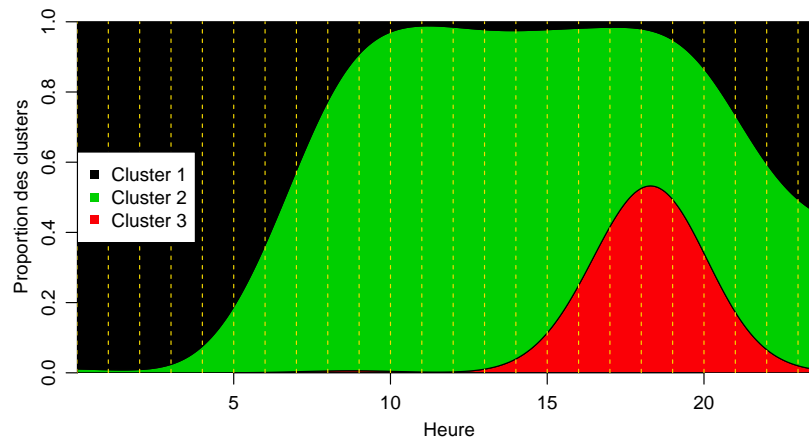


FIGURE 2.14 – Répartition temporelle des groupes d'échantillons de temps de parcours mesurés à Lyon, sur une journée type

trajets fluides et des distributions de délais possiblement influencés par des conducteurs significativement plus rapides, correspond plutôt à des périodes nocturnes. Le second groupe, caractérisé par des états fluides, une fréquentation hétérogène et des distributions de temps de parcours assez peu variables, correspond lui à une situation diurne typique. Enfin, le troisième groupe, correspondant à des situations congestionnées, et à des temps de parcours potentiellement ralentis, intervient lui quasiment exclusivement en fin d'après-midi.

## 2.4.2 Résultats d'ajustement

Les résultats du processus d'ajustement sont proposés ici de la façon suivante. Les onze modèles (Burr, Halphen, Halphen avec estimation par la méthode dite du  $\delta$ -MRD, lognormal à trois paramètres, mais aussi Gamma, Gamma inverse, Harmonique, lognormal à deux paramètres, normal, Tweedie et Weibull) sont ajustés aux 128 échantillons de temps de parcours sur l'artère de Portland, ainsi qu'au 1026 échantillons élaborés à partir des données de Lyon, ceux-là étant regroupés en trois groupes traduisant différents états de trafic et différents profils de distribution. Les quatre critères de performance sus-mentionnés (*MV*, *BIC*, *RMSE* et *KS*) évaluent la qualité des ajustements de manière relative, ce qui distingue la présente étude d'une évaluation absolue focalisée sur l'adéquation d'une loi précise à des séries empiriques, et sur des résultats de tests statistiques.

Concrètement, pour chaque critère et chaque échantillon, les modèles candidats sont classés les uns par rapport aux autres, obtenant des notes allant de 1 à 11, la note minimale désignant le meilleur modèle. Les distributions des classements ainsi produits donnent une image robuste du comportement de chacun des modèles : ceux dont la note moyenne est proche de 1 avec un faible écart inter-quartile sont supposés être les meilleurs pour représenter la composante stochastique des temps de parcours.

### 2.4.2.1 Cas de Portland

La figure 2.15 résume les performances relatives des différentes lois de probabilités pour la modélisation des temps de parcours pendant les 128 périodes d'une heure considérées à Portland. La figure 2.15a présente les résultats de la comparaison d'après les valeurs des fonctions de vraisemblance. Cette première comparaison montre la supériorité de la loi de

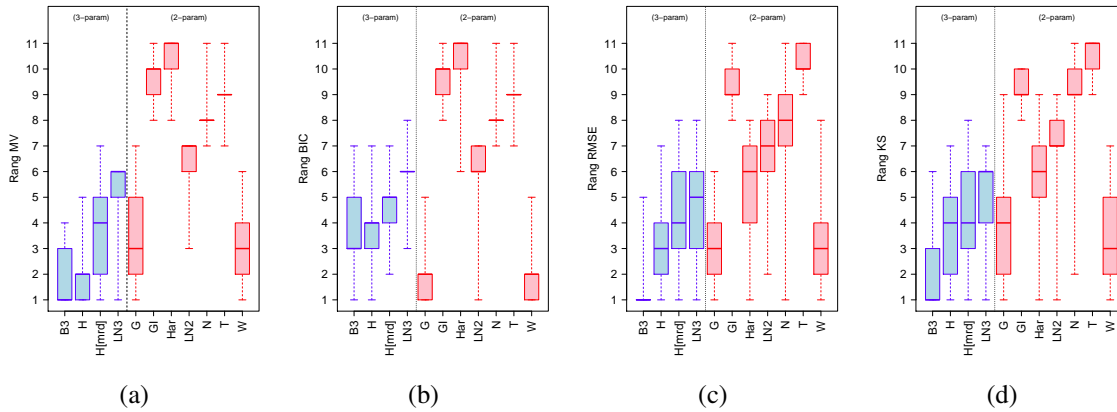


FIGURE 2.15 – Performances des lois de probabilités pour l’ajustement des temps de parcours collectés à Portland, sur des périodes d’une heure, mesurées par le rang relatif des lois (a) Maximum de vraisemblance (b) BIC (c) RMSE (d) distance de Kolmogorov-Smirnov.

Burr, et dans une moindre mesure, des lois de Halphen sur les autres lois. Les lois Weibull et Gamma sont les meilleures lois à deux paramètres pour ce critère. Les lois lognormales, tant à deux qu’à trois paramètres, ne figurent qu’après ces quatre premières lois, puis viennent en dernier lieu les lois normale, Tweedie, Gamma inverse et Harmonique. Si le critère *BIC* est considéré, les lois à deux paramètres, et en particulier Gamma et Weibull, deviennent les modèles les plus intéressants. Le reste de la hiérarchie est préservé. En se focalisant sur les fonctions de densité, comme le permet le critère *RMSE*, il est nécessaire de constater que la loi de Burr se détache des autres en étant jugée comme le meilleur modèle dans au moins trois quarts des situations. Même si ce plébiscite est moins marqué pour les fonctions de répartition et le critère *KS*, cette loi apparaît comme une solution intéressante pour la modélisation des temps de parcours agrégés sur une heure, pour ce tronçon.

Pour ce qui est de la comparaison des méthodes d’estimation des paramètres des lois de Halphen, une rapide constatation s’impose : les estimateurs du maximum de vraisemblance dépassent globalement les estimateurs développés à partir du  $\delta$ -MRD. Cette dernière technique permet d’ailleurs des estimations moins précises que celles réalisées avec les lois Gamma et Weibull. Le point fort de ces nouveaux estimateurs apparaît donc moins dans leur précision que dans une éventuelle rapidité de calcul, non évaluée ici.

#### 2.4.2.2 Cas de Lyon - groupe fluide

Une première série de résultats dédiés au tronçon de la rocade Est lyonnaise est proposée par la figure 2.16. Les distributions des rangs occupés par les différentes lois de probabilité lors de l’ajustement des 347 séries de temps de parcours appartenant à ce premier groupe montrent assez peu de variabilité, quels que soient les critères considérés. En particulier, les critères *MV* et *BIC* montrent des positions relativement figées : les lois de Halphen sont vues comme les meilleures lois pour ces échantillons suivies par les lois de Burr, et les lois Weibull et Gamma. En pénalisant les distributions à trois paramètres avec le critère *BIC*, la loi Halphen reste la plus adéquate, suivie par la loi Weibull. À l’image des conclusions sur le tronçon de Portland, la loi lognormale, et encore plus les lois Gamma inverse, Harmonique, normale et Tweedie apparaissent comme des propositions moins adaptées pour modéliser la composante stochastique des temps de parcours. En considérant les indicateurs *RMSE* et *KS*, la situation s’équilibre toutefois : les lois de Halphen restent jugées comme la meilleure al-

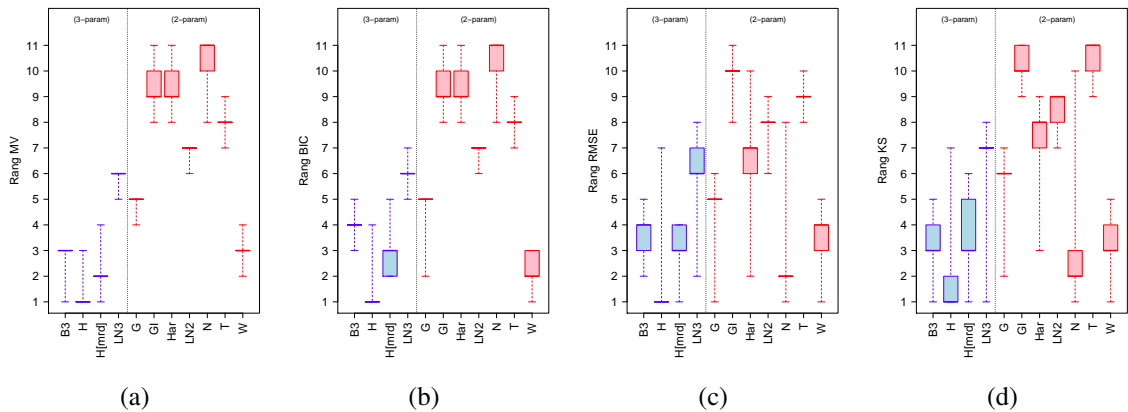


FIGURE 2.16 – Performances des lois de probabilités pour l’ajustement des temps de parcours collectés sur la rocade Est lyonnaise (groupe 1), sur des périodes de 15 minutes, mesurées par le rang relatif des lois (a) Maximum de vraisemblance (b) BIC (c) RMSE (d) distance de Kolmogorov-Smirnov.

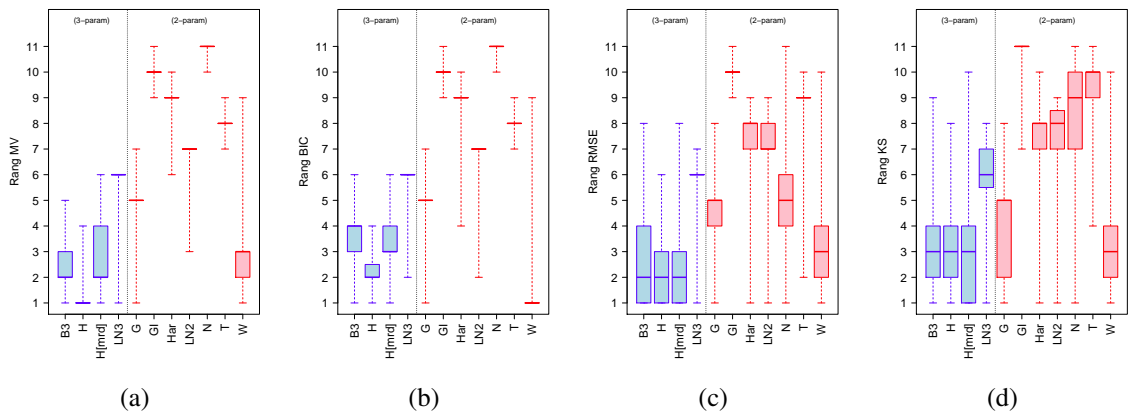


FIGURE 2.17 – Performances des lois de probabilités pour l’ajustement des temps de parcours collectés sur la rocade Est lyonnaise (groupe 2), sur des périodes de 15 minutes, mesurées par le rang relatif des lois (a) Maximum de vraisemblance (b) BIC (c) RMSE (d) distance de Kolmogorov-Smirnov.

ternative parmi les modèles statistiques considérés, talonnées par les lois de Burr et Weibull. Il faut toutefois noter le bon comportement de la loi normale au travers de ces deux indicateurs : il semble que les fonctions de densité et de répartition de ce modèle se rapprochent des courbes empiriques dans le cas d’un trafic fluide, même si sa fonction de vraisemblance le classe parmi les moins performants.

Dans ce cas de figure, les estimateurs de la loi de Halphen selon la méthode du  $\delta$ -MRD sont plus convaincant : logiquement moins performants que ceux issus du maximum de vraisemblance, les ajustements obtenus restent parmi les meilleurs, en particulier pour les indicateurs mettant en scène la fonction de vraisemblance ( $MV$  et  $BIC$ ).

### 2.4.2.3 Cas de Lyon - groupe intermédiaire

Le second cas de figure centré sur l’étude de la rocade lyonnaise concerne les 571 périodes classées dans le groupe intermédiaire, caractérisé par un trafic chargé, mais restant fluide. Les résultats en termes de performance des ajustements sont illustrés par la figure 2.17.

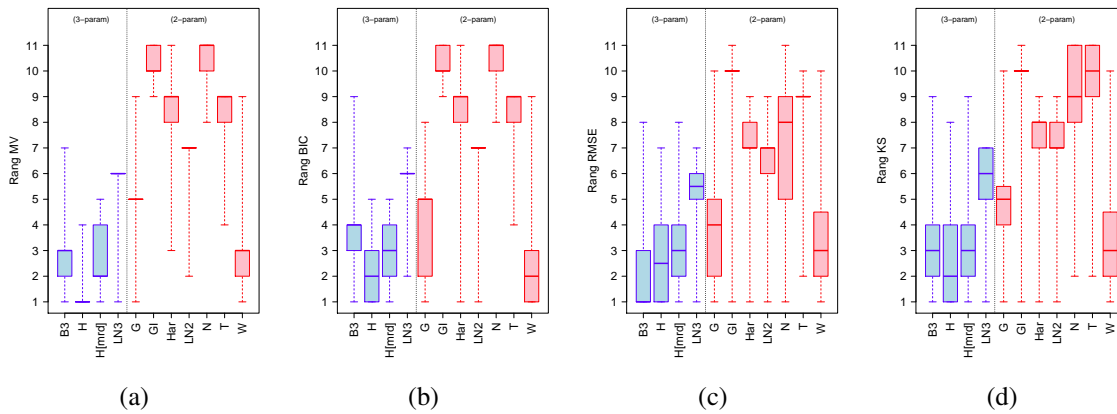


FIGURE 2.18 – Performances des lois de probabilités pour l’ajustement des temps de parcours collectés sur la rocade Est lyonnaise (groupe 3), sur des périodes de 15 minutes, mesurées par le rang relatif des lois (a) Maximum de vraisemblance (b) BIC (c) RMSE (d) distance de Kolmogorov-Smirnov.

Dans ce second groupe d’échantillons de temps de parcours, les classements relatifs des différents modèles statistiques sont assez proches de ceux observés pour le premier groupe. En l’occurrence, la loi de Halphen est toujours la loi plébiscitée par l’indicateur *MV*, même si son avance sur la loi Weibull est gommée dans le cas de l’indicateur *BIC*. La loi de Burr, dauphine pour l’indicateur *MV*, est également dépassée. Les lois de Halphen et de Burr devancent malgré tout le reste des lois pour ces deux indicateurs. En particulier, la loi Gamma arrive en quatrième position (cinquième modèle, également derrière le modèle Halphen tiré du  $\delta$ -MRD). Les lois lognormales à deux et trois paramètres complètent la suite du classement. Les deux autres critères proposent des situations nettement moins tranchées : l’indicateur *RMSE* place les lois de Halphen et de Burr aux places de modèles les plus pertinents, suivis par la loi de Weibull, alors que l’indicateur *KS* met également ces trois lois en valeur sans en distinguer particulièrement une plus que les autres.

Dans ce second cas de figure, le modèle de Halphen issu du  $\delta$ -MRD propose de bonnes qualités d’ajustement. Toujours devancé par le modèle tiré du maximum de vraisemblance, il est toutefois particulièrement compétitif selon les critères *RMSE* et *KS*, ce qui suggère des fonctions de densité et de répartition pleinement satisfaisantes.

#### 2.4.2.4 Cas de Lyon - groupe congestionné

Le dernier groupe de données collectées sur la rocade Est de Lyon contient 108 échantillons de temps de parcours, qui présentent des caractéristiques proches de la congestion, ou tout du moins d’un fonctionnement à capacité, avec des occurrences de temps de parcours plus longs. Un changement dans la hiérarchie des lois de probabilité pourrait être envisageable, si tant est que les lois mises en valeur précédemment soient incapables d’appréhender des formes de densité différentes.

Les résultats d’ajustement sont résumés par la figure 2.18. Il s’avère que les classements restent très semblables à ceux obtenus pour les autres groupes. Il faut malgré tout noter que les hiérarchies sont encore moins affirmées que précédemment : les lois de Halphen restent la meilleure solution du panel de modèles statistiques, sauf pour le critère *RMSE*, où la loi de Burr les devance dans au moins 50% des cas. Les meilleurs modèles à deux paramètres sont là encore la loi Weibull, qui concurrence fortement les lois de Halphen pour le critère *BIC*, et dans une moindre mesure, la loi Gamma.

Dans ce dernier groupe d'échantillons, il semble que des situations nettement plus variées soient étudiées. Cette constatation, déjà alimentée par la dispersion des nuages de points correspondant au groupe dans les diagrammes débit-vitesse et  $\delta$ -MRD, est renforcée par la diversité des positions qu'occupent chacune des lois de probabilité dans les hiérarchies produites pour les différents critères. La compétition entre les modèles pour les indicateurs *RMSE* et *KS* est particulièrement indécise : la loi la plus régulière est la loi lognormale à trois paramètres, qui oscille entre la première et la septième place. Autre signe de cette variété, pour l'indicateur *RMSE*, on peut noter que toutes les lois à l'exception de la loi de Tweedie ont été jugées comme le meilleur modèle pour au moins un échantillon.

#### 2.4.2.5 Discussions et synthèse

À la lumière des différents groupes d'échantillon testés dans les paragraphes précédents, les lois les plus convaincantes par rapport à l'ensemble de celles introduites dans le panel de test sont les lois de Halphen, la loi de Burr, ainsi que les lois Weibull et Gamma. En particulier, la famille de Halphen, nouvellement appliquée au transport routier, apparaît comme une solution convaincante et profite de la variété des formes qu'elle propose, notamment grâce à la définition de trois lois très complémentaires. La loi de Burr, déjà évoquée dans l'état de l'art comme un modèle performant pour les analyses de fiabilité [164] et même dans le cadre de la modélisation des temps de parcours [151], présente des performances très satisfaisantes dans la présente analyse, même si elle est souvent devancée par les lois de Halphen, voire par la loi de Weibull. Cette dernière constitue le meilleur modèle à deux paramètres sur l'ensemble des cas examinés, suivi par la loi Gamma. Ce résultat paraît cohérent avec les performances des lois à trois paramètres, au sens où les lois Weibull et Gamma sont respectivement des cas limites de la loi de Burr et de la famille de Halphen. Sur les dix lois testées, la loi Gamma occupe la quatrième place au sein de la hiérarchie des modèles, elle avait elle aussi déjà été identifiée comme un modèle pertinent pour la modélisation des temps de parcours sous une forme composée par Kim *et al.* [88].

La loi lognormale, tant avec deux qu'avec trois paramètres, est clairement moins performante. En particulier, l'intérêt de rajouter un troisième paramètre est assez faible, ceci étant dû au choix d'une modélisation focalisée sur les retards par rapport à un temps de référence : le troisième paramètre, prenant en compte un décalage de la distribution, perd ainsi sa justification. Il s'agit d'un résultat important de cette investigation, à juger à l'aune du nombre d'échantillons testés (plus de 1000 périodes de mesures, sur deux tronçons de nature différente), qui va à l'encontre des conclusions de plusieurs études de l'état de l'art.

Afin de rebondir sur la conjecture émise dans la partie 2.4.1, les lois à deux paramètres dont les zones théoriques sur le  $\delta$ -MRD étaient les plus proches des nuages de points voient leur importance confirmée : la loi Gamma ainsi que la loi de Weibull sont primées, alors que les lois lognormales, Harmonique, Tweedie, et surtout Gamma inverse, plus éloignées sur le diagramme, présentent des performances nettement moins intéressantes, quels que soient le critère de comparaison et le groupe d'échantillon examinés.

Par ailleurs, la famille des lois de Halphen a été considérée comme un système unique lors de l'analyse. Des routines de calcul en pré-traitement de chaque processus d'ajustement ont permis de sélectionner comme loi candidate celle des trois lois de la famille qui correspondait le mieux à l'échantillon. Comme évoqué à la fin de la section 2.4.1 pour le site de Lyon, les lois de types *A* et surtout *B* ont régulièrement été mises en valeur. C'est le cas aussi pour les distributions de temps de parcours liées au site de Portland. Comme l'indique le tableau 2.3, le ratio  $\delta_2$  est distribué sur une échelle de valeurs plus fortes que celles propres



TABLEAU 2.3 – Déciles des distributions des ratios de moments  $\delta_1$  et  $\delta_2$ , pour chaque site test

	Site	0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%
$\delta_1$	Portland	0.23	0.35	0.38	0.44	0.46	0.48	0.53	0.61	0.65	0.72	1.07
	Lyon	0.08	0.12	0.13	0.14	0.15	0.16	0.17	0.19	0.20	0.24	0.58
$\delta_2$	Portland	0.78	1.15	1.27	1.39	1.49	1.62	1.76	2.01	2.38	3.03	7.62
	Lyon	0.14	0.20	0.24	0.26	0.29	0.33	0.38	0.44	0.56	0.77	1.84

au ratio  $\delta_1$ , indiquant des échantillons localisés au-dessus de la première bissectrice au sein du  $\delta$ -MRD. Les valeurs figurant dans ce tableau laissent entrevoir une plus grande dispersion du nuage de points relatif au site de Portland, de même qu'une zone plus éloignée de l'origine du diagramme des ratios de moments. C'est le signe de fluctuations temporelles plus importantes des distributions de temps de parcours, tout comme d'une plus grande variabilité entre les trajets des voyageurs. Ceci étant dit, il ne faut pas négliger la taille des fenêtres temporelles, d'une heure contre seulement 15 minutes pour ceux de Lyon : de plus grandes périodes appellent mécaniquement des situations plus variées.

Notons enfin que les modèles conçus à partir des estimateurs des paramètres des lois de Halphen issus de la technique dite du  $\delta$ -MRD, décrite dans la section 2.1, sont satisfaisants, bien que la qualité des estimations ne soit pas aussi bonne qu'attendu. Les modèles correspondants n'équivalent ceux du maximum de vraisemblance pour la même loi que dans de rares exceptions, et les modèles à deux paramètres tels que les lois de Weibull et de Gamma (cas limite de la famille de Halphen) apparaissent comme des alternatives compétitives. En termes de temps de calcul, les paramètres des distributions qui n'en contiennent que deux sont plus rapides à estimer. Un inconvénient principal de cette nouvelle méthode d'estimation est son initialisation : en fonction de la qualité du couple  $\{\alpha_0; v_0\}$  choisi, le processus d'optimisation peut ne pas converger (respectivement 10% et 21% des échantillons à modéliser pour les données de Portland et de Lyon). Des améliorations doivent encore être entreprises à la suite de ce travail pour augmenter la proportion d'optimisations convergentes, sans dégrader le temps de calcul (à ce propos, l'initialisation par les estimateurs du maximum de vraisemblance ne représente pas une solution compétitive), de façon à généraliser l'usage de ces nouveaux estimateurs.

## 2.5 Extension de la modélisation à l'échelle de l'itinéraire

Les sections précédentes ont démontré l'utilité de la famille des lois de Halphen dans le contexte de la modélisation des temps de parcours, de même que la faculté des ratios de moments à représenter leur variabilité. Les analyses ont porté exclusivement sur des segments élémentaires.

Pour compléter ces résultats, nous nous intéressons à une modélisation statistique du temps de parcours sur un itinéraire, en nous focalisant sur l'existence de propriétés de fermeture des lois par l'addition : les lois mentionnées auparavant sont-elles fermées par l'addition ? Et si ce n'est pas le cas, une approximation est-elle envisageable ? Le  $\delta$ -MRD sera de nouveau utilisé pour émettre un ensemble de conjectures liées aux lois qui y apparaissent. La sous-section 2.5.1 définira quelques points méthodologiques, puis la sous-section 2.5.2 proposera une gamme de résultats empiriques à propos de l'addition de distributions obtenues tant par la simulation que par l'utilisation des données de la rocade Est lyonnaise, constituant en une succession de quatre tronçons de type autoroutier.

TABLEAU 2.4 – Domaine de définition des paramètres de chaque loi lors du processus d'échantillonnage (\*les valeurs nulles ne sont pas intégrées pour considérer le modèle de régression logarithmique)

Loi	Nb Expériences	Paramètre 1				Paramètre 2				Paramètre 3			
		Nom	Min	Max	Pas	Nom	Min	Max	Pas	Nom	Min	Max	Pas
Gamma	900	$k$	1.1	10	0.1	$\theta$	10	100	10				
Lognormal	1000	$\mu$	0.2	5	0.2	$\sigma$	0.05	2	0.05				
Halphen A	800	$\alpha$	0.05	1	0.05	$v^*$	-2	2	0.2	$m$	50	100	50
Harmonic	1000	$\alpha$	0.01	1	0.01	$m$	10	100	10				
Tweedie	1000	$\alpha$	0.01	1	0.01	$m$	10	100	10				
Halphen B	600	$\alpha^*$	-2.5	2.5	0.25	$v$	0.6	2	0.1	$m$	50	100	50

### 2.5.1 Méthodologie

Dans un premier temps, des distributions simulées sont échantillonnées à partir du sous-ensemble de lois figurant sur le  $\delta$ -MRD. Ces lois, ainsi que les plages de paramètres utilisées lors du processus d'échantillonnage, sont listées au sein du tableau 2.4. Les lois Gamma et lognormale sont échantillonnées à partir des méthodes déjà implémentées sur le logiciel *R*. Quant aux lois de Halphen, nous avons implémenté la méthode d'acceptation-rejet décrite par El Adlouni *et al.* [39]. Les lois Harmonique et de Tweedie sont échantillonnées comme des lois Halphen de type A particulières. Pour chaque loi et chaque jeu de paramètres, un échantillon de 20000 individus est créé.

Pour chaque loi de probabilité considérée, 500 couples d'échantillons sont tirés aléatoirement parmi ceux créés de manière à brasser les paramètres des lois sommées. L'échantillon somme est obtenu par l'addition terme à terme (*i.e.* termes d'indice équivalent) des individus compris dans les deux échantillons de départ, ceux-ci étant supposés issus de variables indépendantes et non corrélées. À cette étape, les estimateurs des paramètres des distributions obtenues sont calculés selon la méthode du diagramme  $\delta$ -MRD, décrite pour chaque loi de probabilité dans la section 2.1.2. Une analyse graphique fondée sur les positions des échantillons sur ce diagramme servira ensuite de vérification de la justesse de l'hypothèse de fermeture de la loi : le voisinage des points avec la zone théorique de la loi sur le diagramme est vu comme une condition nécessaire à la vérification de l'hypothèse. En dernier lieu, une étude de régression complètera ce processus. Plus précisément, il s'agira d'étudier l'existence des relations simples entre les paramètres et/ou les coordonnées du  $\delta$ -MRD des lois sommées d'une part, et ceux de la loi de la somme d'autre part. Deux modèles sont mis en œuvre à ce titre, à savoir des relations linéaire et logarithmique, régies respectivement par les équations suivantes :

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + b \quad (2.107)$$

$$y = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} e^{\beta} \quad (2.108)$$

où  $x_1$  et  $x_2$  sont les paramètres des lois sommées,  $y$  est le paramètre de la loi somme à modéliser, et  $a_1$ ,  $a_2$  et  $b$  sont les paramètres des modèles de régression. Les résultats de cette section n'ont pas pour objectif d'exprimer des relations théoriques entre les paramètres, en sachant que ces expressions sont soit plus complexes que celles proposées par les modèles de régression mobilisés ici, soit non encore démontrées. Plus prosaïquement, le but est de proposer des approximations numériques suffisamment robustes en termes statistiques pour entreprendre des modélisations de sections successives (et donc, de sommes de plusieurs échantillons). Une application empirique au cas de la rocade Est lyonnaise sera entreprise. L'ensemble des temps de parcours réalisés sur l'intégralité des 11.7 kilomètres du site est examiné, ce qui amène à considérer 297630 temps de parcours, mesurés entre le 27 mai et le 31 juillet 2014. De la même façon que précédemment sur le seul tronçon BC, des sous-

périodes de 15 minutes sont constituées pour évaluer les distributions de temps de parcours, à partir des dates d'entrée sur le site. Au total, 3681 périodes contenant au moins 30 parcours complets sur l'itinéraire sont recensées. Les distributions considérées ici sont les délais par rapport à une référence absolue (modèle  $TDF$ ), avec  $T_{min}^s$  le temps minimal sur la section  $s \in S$ . Sur l'itinéraire complet, le temps de référence est donné par la somme des références propres aux sections  $\sum_{s=1}^{|S|} T_{min}^s$ , quantité inférieure au temps de parcours minimal constaté sur l'itinéraire dans la mesure où le véhicule le plus rapide n'est pas nécessairement le même sur l'ensemble des sections. En posant  $T_s$  la variable aléatoire décrivant les temps de parcours sur la section  $s$ ,  $T_s^d = T_s - T_{min}^s$  les délais qui y sont observés, puis  $T_{tot}$  les temps de parcours et  $T_{tot}^d$  les délais sur l'itinéraire complet, on obtient :

$$\sum_{s=1}^{|S|} T_s = \sum_{s=1}^{|S|} (T_{min}^s + T_s^d) = T_{min}^{tot} + T_{tot}^d \quad (2.109)$$

De l'équation 2.109, on déduit  $\sum_{s=1}^{|S|} T_s^d = T_{tot}^d$ , soit l'équivalence entre les distributions des délais relatives aux sections et la distribution des délais sur l'itinéraire, qui sont les composantes stochastiques du phénomène. Dans ce cas de figure, les éléments déterministes, *i.e.* les temps de référence, sont constants. L'information propre à la dynamique temporelle du trafic est ainsi incluse dans ces composantes stochastiques.

## 2.5.2 Analyse empirique de la loi d'une somme de distributions

### 2.5.2.1 Évaluation graphique de l'hypothèse relative à la propriété de fermeture

La figure 2.19 rassemble les vérifications graphiques de la propriété de fermeture par l'addition pour chacune des six lois de probabilité évoquées dans la section 2.5.1. Cette figure concerne les cas généraux, où aucune restriction n'est appliquée sur les paramètres, mais également des cas particuliers, dans lesquels le fait de fixer l'un des paramètres améliore la qualité de l'approximation.

La loi Gamma respecte relativement bien cette propriété, comme le montre la figure 2.19a. Les échantillons correspondant à des sommes se retrouvent plus proches de l'origine du diagramme, ce qui laisse penser que le paramètre de forme  $k$  est plus grand pour ces échantillons. Le paramètre  $\theta$  n'étant pas déductible par l'outil graphique, aucune déduction sur le sens de la relation entre les distributions ne peut être effectuée le concernant. La propriété est cependant théoriquement vérifiée si  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ . Le nuage de point confirme cette tendance : les points correspondants aux échantillons générés par des sommes de Gamma sont tous sur la courbe théorique de la loi.

En se penchant sur les cas particuliers de la loi Halphen A, à savoir les lois Harmonique et Tweedie, il est possible de constater sur la base des échantillons utilisés que la méthode du diagramme  $\delta$ -MRD infirme l'hypothèse de fermeture. Les échantillons sommes figurent sous les courbes correspondant à ces cas particuliers. Ceci étant dit, il existe un ensemble de configurations pour lesquelles une somme de deux lois de Tweedie suit également une loi de Tweedie : *i.e.* lorsque  $\alpha_1/m_1 = \alpha_2/m_2$  [154]. Cette propriété est rapidement confirmée par la représentation sur le diagramme  $\delta$ -MRD (voir figure 2.19c). Si la même restriction est appliquée au cas des lois harmoniques, un motif régulier apparaît également.

Concernant les lois de Halphen de types A et B, les échantillons issus des sommes sont représentés dans la zone correspondant à cette loi, comme l'illustrent les figures 2.19d et 2.19e. Dans le cas de la loi de type A, les points correspondant aux sommes de distribution se

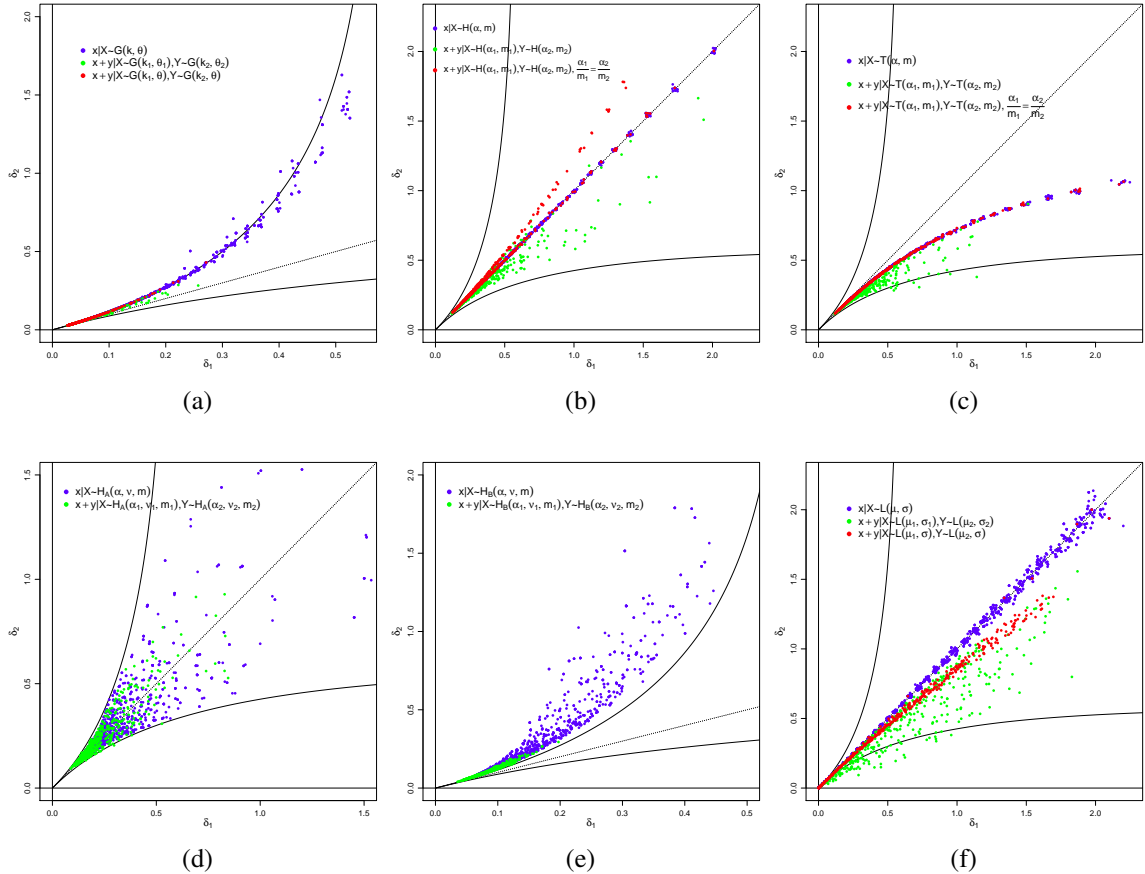


FIGURE 2.19 – Représentation d'échantillons sommés, pour chaque loi de probabilité : (a) Gamma (b) Lognormal (c) Halphen A (d) Harmonic (e) Tweedie (f) Halphen B

concentrent sur le bas du graphique, dans la zone la plus proche de l'origine du diagramme, indiquant par là des valeurs plus élevées pour le paramètre  $\alpha$ . Une constatation similaire doit être effectuée pour la loi de type *B* : le nuage de points lié aux sommes de distributions tend vers le cas limite de la loi Gamma, et s'avère plus proche de l'origine du diagramme que celui correspondant aux échantillons pris en entrée, cela dénotant dans ce cas des valeurs plus élevées pour le paramètre  $\nu$ . La propriété de fermeture de ces lois par l'addition se vérifie ainsi graphiquement, même si des études supplémentaires sont nécessaires pour préciser les relations entre les paramètres.

Enfin, en ce qui concerne la loi lognormale, l'approximation admise par exemple par El Faouzi *et al.* [42] ne se vérifie pas sur le diagramme  $\delta$ -MRD. En effet, les points relatifs aux échantillons sommés sont tous situés sous la première bissectrice, identifiée comme l'emplacement théorique pour ce type de loi. La figure 2.19f permet toutefois d'admettre une approximation quant à la fermeture de la loi : si  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ , la distribution somme peut être représentée par une loi lognormale. Cette approximation semble particulièrement pertinente pour des niveaux de variance faibles ( $\delta_1 \leq 0.5$ , *i.e.*  $\sigma \leq 1$ ).

### 2.5.2.2 Recherche de relation entre les paramètres

Après avoir vérifié graphiquement la pertinence de l'hypothèse de fermeture des lois de probabilité testée dans cette section, une analyse numérique basée sur les techniques de régression est entreprise. L'objectif est ici de montrer pour les lois utilisées que les paramètres

TABLEAU 2.5 – Analyse de régression entre les paramètres des lois sommées et ceux de la loi de la somme, pour différents modèles statistiques (significativité à \*\*\* 0.1% \*\* 1% \* 5% · 10%).

Loi	Paramètre	Régression linéaire				Régression logarithmique			
		$b$	$a_1$	$a_2$	$r^2$	$\beta$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$r^2$
Gamma	$k$	-0.051	0.996***	1.002***	0.971	0.887***	0.46***	0.46***	0.887
	$\theta$	-0.129	0.483*	0.533*	0.947	0.023	0.525**	0.471**	0.987
	$\delta_1$	0.011***	0.166***	0.162***	0.629	-1.026***	0.447***	0.444***	0.882
	$\delta_2$	0.029***	0.081***	0.08***	0.457	-1.444***	0.371***	0.367***	0.835
Harmonique	$\alpha$	0.132***	0.519***	0.739***	0.616	0.302***	0.36***	0.457***	0.752
	$m$	10.364***	1.078***	1.06***	0.826	1.141***	0.45***	0.486***	0.857
	$\delta_1$	0.019	0.304***	0.359***	0.745	-0.423***	0.394***	0.519***	0.739
	$\delta_2$	-0.021	0.351***	0.414***	0.831	-0.346***	0.424***	0.548***	0.786
Tweedie	$\alpha$	0.087***	0.664***	0.675***	0.657	0.379***	0.452***	0.47***	0.81
	$m$	0***	1***	1***	1	0.963***	0.465***	0.481***	0.963
	$\delta_1$	-0.037**	0.381***	0.408***	0.835	-0.342***	0.489***	0.505***	0.787
	$\delta_2$	-0.053***	0.441***	0.453***	0.815	-0.223***	0.525***	0.539***	0.76
Halphen A	$\alpha$	-0.02	0.968***	0.957***	0.945	0.635***	0.491***	0.515***	0.946
	$\nu$	0.72***	0.847***	0.856***	0.917	0.709***	0.407***	0.392***	0.383
	$m$	7.917*	1.041***	0.9***	0.766	0.91***	0.494***	0.464***	0.802
	$\delta_1$	-0.008	0.308***	0.349***	0.754	-0.351***	0.556***	0.556***	0.846
Halphen B	$\delta_2$	-0.006	0.351***	0.35***	0.704	-0.315***	0.571***	0.521***	0.76
	$\alpha$	-0.648***	0.62***	0.605***	0.499	-0.402**	0.196	0.454*	0.053
	$\nu$	-0.039	1.064***	1.013***	0.83	0.727***	0.513***	0.486***	0.83
	$m$	16.639***	0.617***	0.663***	0.681	0.624***	0.476***	0.478***	0.702
lognormal	$\delta_1$	0.01***	0.193***	0.195***	0.826	-0.915***	0.455***	0.465***	0.907
	$\delta_2$	0.046***	0.069***	0.075***	0.684	-1.552***	0.326***	0.34***	0.856
	$\mu$	1.199***	0.512***	0.509***	0.878	0.941***	0.263***	0.233***	0.707
	$\sigma$	0.002	0.2	0.642*	0.981	-0.172***	0.818	0.178	0.99
	$\delta_1$	-0.008	0.239	0.532**	0.965	-0.292***	0.578	0.432	0.991
	$\delta_2$	0.01	0.412**	0.242	0.953	-0.407***	0.851*	0.13	0.99

de la loi somme peuvent s'exprimer par le biais d'une relation mathématique simple utilisant les paramètres des lois sommées. Les analyses de régression sont limitées aux cas de lois dont la définition des paramètres est restreinte, comme mentionné dans la sous-section précédente.

Les deux types de régression sont appliqués sur chaque paramètre pris séparément, ainsi que sur les coordonnées du diagramme  $\delta$ -MRD. Les paramètres sont calculés selon la méthode du  $\delta$ -MRD développée lors de la section 2.1.2, pour tous les échantillons considérés. Le tableau 2.5 explicite les modèles de régression ainsi déterminés.

Dans la plupart des cas, les valeurs des coefficients retournés par les processus de régression sont jugées fortement significatives (jugées fiables à plus de 99.9%). De même, les coefficients de corrélation sont souvent élevés : à l'aune du nombre d'individus considérés pour ces calculs ( $n = 500$ ), ils sont vus comme significativement éloignés de 0.

### Loi Gamma :

La propriété de fermeture se vérifie pour la loi Gamma lorsque le paramètre d'échelle  $\theta$  est identique dans toutes les lois sommées (voir par exemple Chatelain [23]). Ainsi, si  $X_1 \sim \mathcal{G}(k_1; \theta)$  et  $X_2 \sim \mathcal{G}(k_2; \theta)$ , alors  $X_1 + X_2 \sim \mathcal{G}(k_1 + k_2; \theta)$ . Les paramètres obtenus par la régression linéaire tendent effectivement vers ce cas théorique, comme indiqué dans le tableau.

Concernant les ratios de moment, la diminution des ratios  $\delta_1$  et  $\delta_2$  dans le processus d'addition est retranscrite par les modèles tant linéaires que logarithmiques. Les meilleurs coefficients de corrélation sont obtenus par les modèles logarithmiques, qui mettent en scène des exposants compris entre 0.36 et 0.44, ainsi qu'un multiplicateur inférieur à  $e^{-1}$ .

**Loi Harmonique :**

Concernant le premier cas particulier de la loi Halphen de type A, *i.e.* la loi Harmonique, les coefficients de corrélation sont moins élevés que ceux de la loi Gamma, même s'ils restent compris entre 0.61 et 0.86. Les lois sommées considérées ici sont telles que  $\alpha_1/m_1 = \alpha_2/m_2$ . Le paramètre  $\alpha$  de la loi de la somme semble mieux représenté par une relation logarithmique dans laquelle les coefficients associés à  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  valent respectivement 0.36 et 0.46. Le paramètre  $m$  est tel qu'une relation linéaire simple  $m = m_1 + m_2$  semble convenir, même si un terme supplémentaire est nécessaire, comme suggéré par l'importance du paramètre  $b$  dans la régression.

Les coordonnées du  $\delta$ -MRD sont plus faibles pour l'échantillon somme, avec des relations linéaires de bonne qualité indiquant une valeur autour de 65 à 75% des coordonnées associées aux échantillons sommés. Au regard du diagramme, les coordonnées des échantillons générés selon la loi Harmonique sont théoriquement égales. Cette propriété se manifeste par la similitude des relations propres aux deux ratios de moments.

**Loi de Tweedie :**

La loi de Tweedie, second cas particulier de la loi Halphen de type A étudié ici, vérifie la propriété de fermeture pour  $\alpha_1/m_1 = \alpha_2/m_2$ . Une relation théorique pour le paramètre  $m$  est clairement confirmée ici par la régression linéaire :  $m = m_1 + m_2$ . La relation correspondant au paramètre  $\alpha$  est elle moins claire à discerner : la régression linéaire propose un modèle tel que  $\alpha \simeq (2/3)\alpha_1 + (2/3)\alpha_2$ , mais le coefficient de corrélation du modèle est plus faible, alors que la régression logarithmique se rapproche de l'expression de la moyenne géométrique des paramètres des lois sommées  $\alpha \simeq \sqrt{\alpha_1\alpha_2}$ .

Il faut noter par ailleurs la similarité des modèles de régression propres aux coordonnées  $\delta_1$  et  $\delta_2$  pour la loi de Tweedie avec ceux correspondant à la loi Harmonique. Les coordonnées résiduelles plus faibles dénotent, comme pour le cas de la loi Gamma, un rapprochement des échantillons sommes vers l'origine du diagramme.

**Loi Halphen A :**

Au-delà de ces deux cas particuliers, l'utilisation de la loi Halphen de type A dans le cadre d'une somme de lois laisse apparaître des relations claires entre les paramètres. Le tableau 2.5 reporte les résultats de modèles conduits pour des cas particuliers de sommes de lois de type A, où  $\alpha_1/m_1 = \alpha_2/m_2$ , comme pour les lois décrites ci-avant. Ce choix constitue une continuité avec les lois Harmonique et de Tweedie, tout comme avec les lois Gamma, pour lesquelles le paramètre  $\theta$  a été fixé : pour rappel, une loi de type A peut tendre vers une loi Gamma telle que  $1/\theta = \alpha/m$ .

Les régressions linéaires entreprises sur les paramètres de la loi de type A montrent que les approximations  $\alpha \simeq \alpha_1 + \alpha_2$  et  $m \simeq m_1 + m_2 + b$  sont de bonne qualité, en témoignant leurs coefficients de corrélation respectifs. Les régressions logarithmiques sont également intéressantes : en particulier, on note une relation  $\alpha \simeq 2\sqrt{\alpha_1\alpha_2}$ . Pour ce qui est du paramètre  $v$ , la régression linéaire indique une relation affine où  $v_1$  et  $v_2$  sont d'importance équivalente, avec des coefficients multiplicateurs établis autour de 0.85. Ce paramètre pose la question de la pertinence de la restriction sur les paramètres : produire d'autres hypothèses pour identifier des approximations plus fines est une poursuite envisageable de cet effort de recherche.

Pour les coordonnées du  $\delta$ -MRD, les relations mises en valeur par les analyses de régression sont proches de celles déjà produites pour les cas particuliers des lois Harmoniques et de Tweedie. Ainsi, les relations linéaires sont telles que les coordonnées de la loi de la somme valent 30 à 35% de l'addition des coordonnées relatives aux lois sommées. Les régressions logarithmiques, pour lesquelles les coefficients de corrélation sont sensiblement plus élevés,

proposent des relations où les exposants oscillent autour de 0.55, avec un multiplicateur tel que  $e^\beta \simeq 0.7$ . Quel que soit le modèle retenu, les coordonnées correspondant à la loi de la somme sont jugées plus faibles que celles associées aux lois sommées, ce qui indique encore une fois une convergence vers l'origine.

### **Loi Halphen B :**

Dans le cas de cette nouvelle loi de probabilité, les résultats apportés par le tableau 2.5 correspondent à des additions de loi sans restriction sur les paramètres : suivant la logique définie pour la loi de type A et l'étude du cas limite de la loi Gamma, une restriction telle que  $\alpha_1/m_1 = \alpha_2/m_2$  a été testée, sans donner de résultats particulièrement significatifs (en particulier, les coefficients de corrélation associés aux différents modèles de régression étaient tous inférieurs à 0.4). Ce paragraphe donne malgré tout l'occasion d'examiner le cas général, dans lequel des conjectures fortes sont possibles.

La loi Halphen de type B présente un comportement comparable à la loi de type A, au détail près que le rôle des paramètres change : une relation de type  $v = v_1 + v_2$  apparaît. Les relations centrées sur le paramètre  $\alpha$  sont moins claires, les performances du modèle de régression logarithmique étant particulièrement faibles. Les modèles de régression associés au paramètre  $m$  sont eux très proches de ceux obtenus dans le cadre de la loi de type A.

Concernant les ratios de moment, la loi de type B est conforme à la tendance observée pour le reste des lois : les ratios correspondant à la loi de la somme sont plus faibles. Ainsi, en considérant les modèles de régression linéaire, la valeur de  $\delta_1$  est constituée par un peu moins de 20% de chacune des valeurs associées aux lois sommées, contre un peu plus de 7% pour  $\delta_2$ . Cette différence s'explique aisément par la nature de la zone associée à la loi Halphen de type B : les valeurs de  $\delta_1$  sont plus faibles que celles de  $\delta_2$ , leur diminution en cas de convergence vers l'origine du diagramme est ainsi plus forte en termes relatifs. Les coefficients de corrélation de ces modèles sont élevés, même si les régressions logarithmiques présentent des valeurs de corrélation encore plus élevées. Dans ce dernier cas, les modèles obtenus démontrent des résultats très proches de ceux mis en lumière pour la loi Gamma.

### **Loi lognormale :**

Comme observé dans la figure 2.19f, le fait de considérer des paramètres  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  égaux rend plus plausible l'hypothèse de fermeture de cette loi par l'addition. Ceci étant dit, les analyses de régression réalisées pour cette loi apportent peu d'éléments probants : seuls les résultats portant sur le paramètre  $\mu$  proposent des paramètres fortement significatifs et des coefficients de corrélation élevés : un modèle  $\mu \simeq 0.5\mu_1 + 0.5\mu_2 + b$  émerge, le paramètre  $\mu$  de la loi de la somme correspondant ainsi à la moyenne des paramètres des lois sommées, plus un coefficient additionnel qui interroge tout de même quant à la pertinence d'une modélisation affine. Les autres coefficients n'ont pas des niveaux de significativité dignes de confiance, malgré des coefficients de corrélation très élevés.

### **2.5.2.3 Étude de cas : la rocade Est lyonnaise**

Après avoir évalué les différentes lois de probabilité au moyen d'échantillons simulés, il est possible de considérer à nouveau les données LAPI mesurées sur la rocade Est lyonnaise. Comme évoqué dans la section 2.5.1, 3681 échantillons de temps de parcours sont disponibles, correspondant à des observations agrégées par période de 15 minutes. Pour rappel, la description du site d'étude a été entreprise lors de la section 2.2.

Les états de trafic relatifs aux quatre sections composant le site test ainsi que l'état global de la rocade Est sont donnés par les diagrammes débit-vitesse proposés au sein de la figure 2.20. Dans chacun des cas, la plupart des périodes de mesure sont caractérisées par

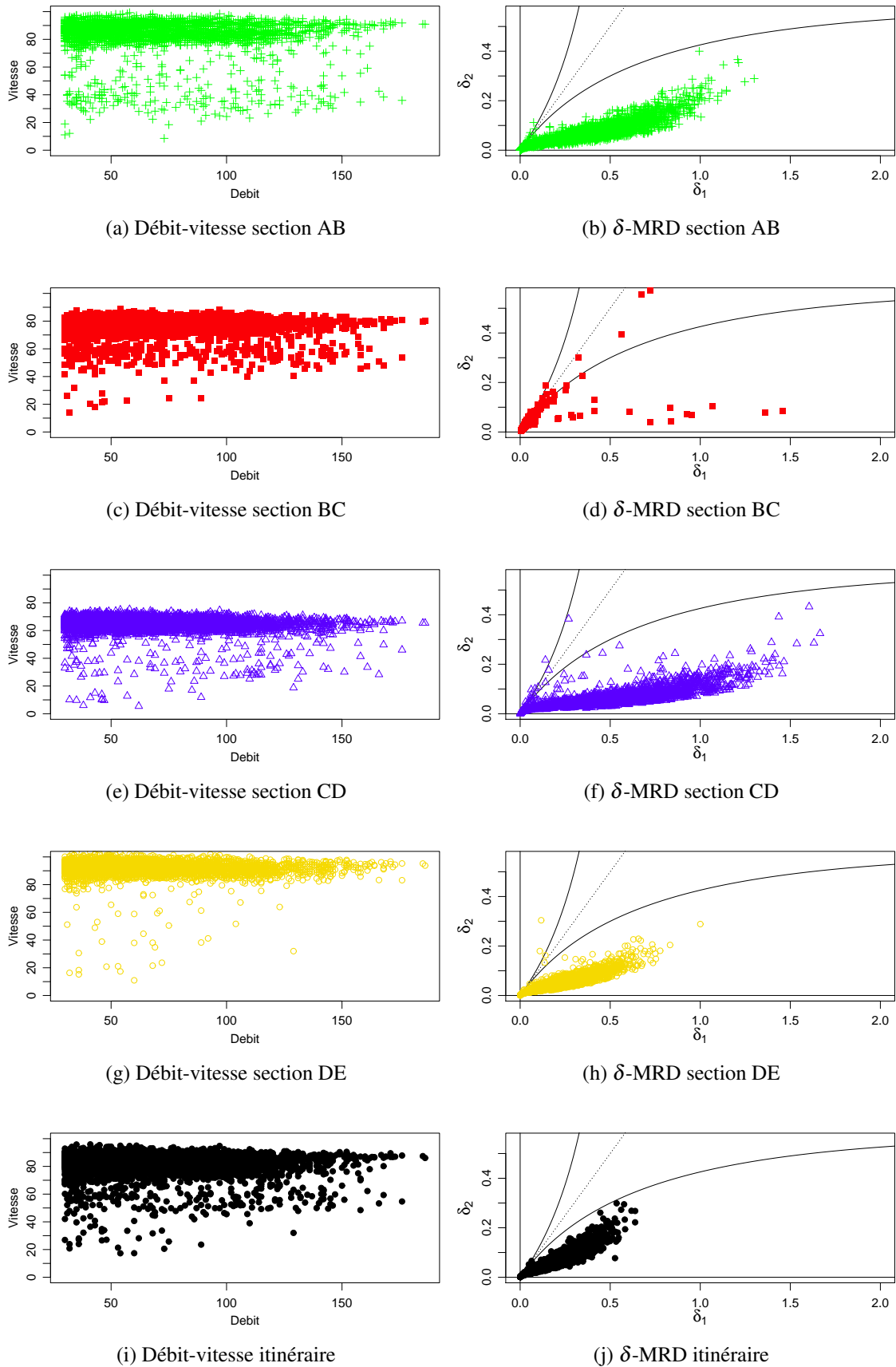


FIGURE 2.20 – États de trafic et ratios de moments sur les sections de la rocade Est lyonnaise



un état fluide, comme en témoigne la densité importante de points dans la partie supérieure des nuages. Toutefois, il existe de nombreuses situations dans lesquelles la vitesse est notablement réduite, dénotant des situations de congestion plus affirmées. Cette première série de diagrammes indique ainsi que les états de trafic ne sont pas identiques d'une section à l'autre. En particulier, les sections AB et CD semblent particulièrement sujettes à la congestion, même si leur fonctionnement à vide n'est pas le même : la section CD se distingue par une vitesse fluide oscillant autour des 65 kilomètres/heure, élément pouvant être expliqué par la déclivité du tronçon, ou encore par un abaissement temporaire de la limitation de vitesse. La section BC, elle, présente une situation intermédiaire, avec moins de périodes lors desquelles le trafic sature, alors que la section DE est très rarement congestionnée. La synthèse de ces éléments apparaît dans la figure relative à l'itinéraire complet : globalement la RN346 apparaît modérément congestionnée, la densité des points sur le bas du nuage restant faible.

Si l'accent est porté sur le niveau de variabilité des distributions de délais générées par le modèle *TDF*, les sections AB et CD se démarquent des autres. En plus d'être les plus congestionnées, elles apparaissent comme les sections où les délais observés par rapport à un temps de référence sont les plus variables, comme en témoigne l'étalement plus important des nuages de points correspondants sur le  $\delta$ -MRD. La section BC est caractérisée elle par une très grande concentration de points près de l'origine, alors que la section DE se caractérise par une dispersion notable des points, même si elle est nettement moins importante que celles des sections AB et CD.

Les ratios de moments donnent une indication quant à la variabilité d'une distribution, ou d'un ensemble de distributions (*cf* section 2.3). Les éléments précédents peuvent donc aussi être considérés à l'aune de la variabilité des délais observés par rapport aux temps de référence. L'association de cette seconde information avec les états de trafic illustrés par les diagrammes débit-vitesse complète la description du fonctionnement de la rocade Est. En l'occurrence, les tronçons AB et CD sont les plus saturés, et les plus susceptibles d'être le théâtre de flux irréguliers, avec des automobilistes réalisant des temps de parcours plutôt variés. Le tronçon CD apparaît comme particulièrement sensible aux observations extrêmes, au vu des valeurs fortes que prend le ratio  $\delta_1$ , ce qui intervient en écho d'une vitesse moyenne du flux relativement faible : l'existence de véhicules particulièrement lents dans la plupart des périodes dégrade la moyenne des performances tout comme les ratios entre moments. Le tronçon DE est à l'opposé du spectre des situations de trafic, dans la mesure où les états de congestion y sont rares, et où les performances entre véhicules durant une même période sont sensiblement plus homogènes. Le tronçon BC, lui, est plus atypique : les informations proposées par les deux diagrammes associés révèlent un tronçon où la congestion peut apparaître de temps en temps, mais où les délais sont la plupart du temps peu variables, dénotant un flux très homogène. En guise d'explication probable à ce phénomène, il faut rappeler que ce tronçon ne comporte pas de bretelles d'accès, et est le seul des quatre tronçons dans ce cas. Dans trois cas sur quatre (sections AB, CD et DE), une large majorité d'échantillons de délais sont localisés dans la zone théorique de la loi Halphen de type *IB*, cas pour lequel le ratio  $\delta_2$  est faible, et où l'influence des temps faibles (*i.e.* des véhicules rapides) est moindre. Cela s'explique par le choix de temps de référence fixes : les observations les plus faibles sont relativement proches du reste des observations, et la moyenne harmonique tend vers la moyenne géométrique. Les échantillons sur le tronçon BC correspondent à des lois différentes : l'homogénéité des délais mesurés est synonyme de réduction du ratio  $\delta_1$ , si bien que la loi Halphen de type *A* apparaît intéressante dans un nombre plus important de cas, tout comme les distributions à deux paramètres que sont les lois Gamma, Gamma Inverse, lognormale voire normale.

TABLEAU 2.6 – Analyse de régression entre les coordonnées du  $\delta$ -MRD associées aux échantillons de temps de parcours mesurés par le dispositif LAPI (significativité à \*\*\* 0.1% \*\* 1% \* 5% · 10%).

Régression linéaire						
Paramètre	$b$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$r^2$
$\delta_1$	0.003***	0.243***	0.008	0.131***	0.391***	0.954
$\delta_2$	0.001***	0.464***	-0.122***	0.346***	0.582***	0.941
Régression logarithmique						
Paramètre	$\beta$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$r^2$
$\delta_1$	-0.802***	0.273***	-0.177***	0.163***	0.341***	0.709
$\delta_2$	-0.327***	0.351***	-0.23***	0.241***	0.395***	0.793

Au final, la synthèse des quatre sections permet d'aboutir au cinquième  $\delta$ -MRD, associé lui à l'itinéraire entier : le nuage de points regroupant les échantillons de délais s'avère peu étendu, la concentration la plus forte étant dans la zone théorique de la loi Halphen de type *IB* la plus proche de l'origine. Ce résultat suggère une dilution des distributions les plus variables avec les autres, en particulier celles mesurées sur la section BC, tout autant qu'un rapprochement vers l'origine du diagramme, déjà évoqué précédemment.

Ces observations sont évaluées au regard d'une analyse de régression identique à celles entreprises auparavant. En l'occurrence, une extension à quatre termes des modèles proposés par les équations 2.107 et 2.108 a été entreprise, ses résultats figurant dans le tableau 2.6. À titre de première illustration, seules les coordonnées du  $\delta$ -MRD ont été étudiées.

Il apparaît que des relations de type linéaire sont aptes à modéliser correctement les coordonnées de la distribution d'une somme, par rapport aux relations logarithmiques. Les niveaux de significativité sont forts (hormis pour la section BC), et les coefficients de corrélation sont proches de 1 (0.95 et 0.94), contre respectivement 0.71 et 0.79 pour la régression logarithmique. Le terme  $b$  est très proche de 0. Le ratio  $\delta_1$  diminue plus fortement que le paramètre  $\delta_2$ , d'après les résultats de régression : les coefficients associés aux abscisses des distributions sommées sont plus faibles que ceux liés aux ordonnées. Les contributions respectives de chaque tronçon sont moins évidentes à expliquer, on note toutefois que pour les sections AB, CD et DE, le niveau de contribution est d'autant plus fort que le segment est long. Pour la section BC, les contributions nulle pour  $\delta_1$  (malgré un coefficient non significatif à 10%) et négative pour  $\delta_2$  paraissent contre-intuitive. Elles indiquent tout de même que les ratios de moments sur l'itinéraire, et donc le niveau de variabilité des délais observés, est avant tout déterminé par les sections où les délais sont les plus variables. En écho aux résultats obtenus suite aux analyses de la section précédente, ces régressions aboutissent à des relations identiques à celles obtenues pour la loi Halphen de type *B*, avec une inversion des rôles de  $\delta_1$  et  $\delta_2$ . Cette caractéristique est conforme à la définition des lois de types *B* et *IB*, liée par une relation inverse.

## Conclusion

Ce second chapitre clôt la première partie, et apporte de nombreuses réponses à la problématique de la modélisation des temps de parcours et de leur variabilité. En particulier, l'adaptation d'une famille de lois définies dans le cadre de l'hydrologie a permis la production d'une réponse originale pour l'ingénierie du trafic.

Ce système, la famille des lois de Halphen, qui inclut au passage des lois usuelles telles que les lois Gamma et Gamma Inverse, est un ensemble de distributions complet capable de modéliser une large gamme de phénomènes. Il s'inscrit au sein d'un diagramme à deux

dimensions mettant en scène des ratios de moment, le  $\delta$ -MRD. Chaque loi de la famille y possède une zone théorique dédiée, et par corollaire, chaque point au sein du diagramme est associé à une distribution paramétrée. Cette association entre modèle théorique et localisation sur le diagramme  $\delta$ -MRD a conduit à la production d'une nouvelle technique d'estimation des paramètres des lois de la famille de Halphen, à mi-chemin entre la maximisation de la vraisemblance et la méthode des moments. Les moments utilisés, différents de ceux de la méthode du même nom, apparaissent dans le processus de maximisation de la vraisemblance des lois de Halphen, au titre de statistiques suffisantes. Les ratios de moments constituent ainsi un lien théorique fort entre les deux approches, pour cette famille.

Par ailleurs, l'utilisation des coordonnées du diagramme  $\delta$ -MRD en tant qu'indicateurs de fiabilité a conduit à une première application dans le domaine du trafic : les ratios de moments ont été utilisés en tant qu'indicateurs de fiabilité des temps de parcours. Une analyse en composantes principales a démontré que ces nouvelles métriques donnent une information parfaitement compatible avec celle proposée par les indicateurs de fiabilité des temps de parcours classiques de l'état de l'art.

En supplément de cette première utilisation, la famille de Halphen est apparue comme un candidat sérieux pour la modélisation statistique des délais associés aux temps de parcours, parmi d'autres lois de probabilité. Sa pertinence a été confirmée par l'étude de deux segments de nature différente, pour un grand nombre de périodes de mesure laissant entrevoir des états de trafic variés. Les ajustements réalisés sur un ensemble d'une dizaine de lois de probabilité ont par ailleurs confirmé l'intérêt des lois Gamma et Weibull, possédant deux paramètres, ainsi que de la loi de Burr, à trois paramètres.

Enfin, une dernière section de ce chapitre a été consacrée à la modélisation des temps de parcours sur un itinéraire constitué de plusieurs segments élémentaires. Une approche empirique a été développée selon deux axes : premièrement, des sommes de deux distributions ont été constituées à partir d'échantillons simulés selon des lois apparaissant au sein du  $\delta$ -MRD, puis dans un second temps, des données réelles mesurées sur une succession de quatre segments ont été examinées. Dans cette dernière étape, un modèle de temps de parcours alternatif a été considéré, construit comme le retard par rapport à un temps de référence fixe. L'utilisation de modèles de régression a permis d'identifier quelques relations simples entre les paramètres des distributions sommées et ceux de la distribution somme. L'étude des coordonnées du  $\delta$ -MRD a également donné un aperçu des meilleurs modèles pour la loi de la somme, de même qu'une description des niveaux de variabilité attendus.

Le travail réalisé ici apporte néanmoins tout autant de questions sur cette problématique. L'analyse des délais des temps de parcours (selon le modèle noté  $TD$ ) a mis en lumière un sous-ensemble de lois. Un approfondissement des ajustements entrepris dans ce chapitre pourrait confirmer (ou infirmer) les résultats pour les autres variables dérivées des temps de parcours (modèles  $TT$  et  $TDF$ ). De même, l'évaluation de sections différentes, en particulier en contexte urbain, pourrait apporter des compléments salvateurs. Un autre complément possible est la considération de modes de transport différents : les présents travaux sont avant tout focalisés sur les voitures, mais l'analyse des temps de parcours pour les vélos, les bus ou encore les tramways et métros est un champ de recherche aussi riche. Par ailleurs, un sous-ensemble de lois a été pris en compte ici. Son exhaustivité n'est malgré tout pas garantie, et l'intégration d'autres lois, *a fortiori* un système homogène au sein du  $\delta$ -MRD, pourrait être intéressante : les discontinuités au sein de l'espace des ratios de moments entre les trois lois de Halphen constituent un inconvénient de cette famille. La loi Gamma généralisée est une piste à envisager pour pallier ce défaut. Par ailleurs, des analyses plus approfondies sont sans nul doute nécessaires pour affirmer la relation entre états de trafic et modèles statis-

tiques des temps de parcours, en particulier en ce qui concerne l'évolution temporelle des paramètres des lois. Enfin, l'étude des temps de parcours sur un itinéraire composé de plusieurs segments reste encore très incomplète. D'une part, un travail d'ajustement des temps de parcours sur des itinéraires pourrait compléter les résultats obtenus ici : la famille de Halphen se comporte-t-elle aussi bien dans ce cadre par rapport aux autres lois ? Et la hiérarchie établie entre les lois usuelles pour un segment élémentaire est-elle robuste à ce changement d'échelle ? D'autre part, l'analyse des relations entre les paramètres des lois reste à compléter. En particulier, existe-t-il des relations théoriques permettant de confirmer les conjectures établies dans ce chapitre ? Ces interrogations demeurent très importantes, et pourront constituer l'objet de travaux futurs.

La modélisation statistique des temps de parcours dans les réseaux est une question de recherche encore très ouverte. Comment entreprendre des calculs de temps de parcours à l'échelle d'un réseau ? Comment considérer des distributions de probabilité à cette échelle ? La partie II sera l'occasion de proposer des éléments de réponse d'ordre algorithmique à ces interrogations. Il sera notamment question de l'intégration des modèles statistiques des temps de parcours au sein d'algorithmes de recherche du plus court chemin.

## Contributions de la partie I

- ▶ *Un état de l'art des différentes modélisations de la variabilité des temps de parcours, rendant compte de la diversité des conceptions propres à cette notion*
- ▶ *La présentation et l'adaptation d'une nouvelle famille de lois de probabilité, les lois de Halphen, pour le contexte de l'ingénierie du trafic*
- ▶ *L'exploitation des propriétés de ce système au moyen du diagramme des ratios de moments, jusqu'à la proposition de nouveaux estimateurs pour les paramètres des lois qui y figurent*
- ▶ *Le développement d'un cadre d'analyse complet pour la modélisation statistique des temps de parcours et de leur variabilité, entre modélisation théorique des temps de parcours et suivi opérationnel de la variabilité sur un segment élémentaire*
- ▶ *Une série de conjectures quant à la validité de la propriété de fermeture par l'addition appliquées à un sous-ensemble de lois de probabilité*

---

---

## Deuxième partie

---

# LES MODÈLES STATISTIQUES DES TEMPS DE PARCOURS DANS LE CALCUL DU PLUS COURT CHEMIN

” *Il y a deux chemins, poursuit-il, l'un est court et droit, mais il ne mène nulle part, l'autre est long et tortueux et on ne sait pas où il mène, mais en attendant, on sait au moins qu'on marche.*

— **Imre Kertész**  
Le refus



# État de l'art : les plus courts chemins stochastiques

## Introduction

Ce chapitre est consacré à une revue de l'état de l'art relatif à la recherche du plus court chemin dans des graphes caractérisés par des pondérations stochastiques, *i.e.* les coûts associés aux arcs sont des variables aléatoires. Pour des raisons de clarté, nous dénotons ici *graphe stochastique* un tel graphe, et *plus court chemin stochastique* un plus court chemin calculé dans un graphe stochastique. Compte tenu de la variabilité associée aux temps de parcours dans ce paradigme, la notion de *chemin le plus fiable* est d'autant plus pertinente : le chemin optimal sera en principe celui pour lequel l'incertitude est réduite au maximum. Les graphes sont ici associés à des réseaux de transport, et les arcs sont pondérés par les temps de parcours entre les nœuds du réseau. Ce temps de parcours, comme vu lors du chapitre 2, est une variable aléatoire distribuée définie sur l'ensemble des réels positifs. Les graphes utilisés dans la suite de ce manuscrit seront notés  $G = (V, E)$ , avec  $V$  l'ensemble de nœuds et  $E$  l'ensemble d'arcs orientés qui les composent.

Dans la littérature, le problème du plus court chemin stochastique a donné lieu à de nombreuses contributions, toutefois quelques orientations sont aisément discernables, selon que l'on s'intéresse à l'objectif de l'optimisation *in fine*, à la méthode de résolution, ou encore aux hypothèses qui régissent la modélisation des poids des arcs.

Concernant la définition du problème, plusieurs appellations ont émergé : la formulation dénotée *SSPP* (ou *Stochastic Shortest Path Problem*) est la plus répandue, mais des variantes comme le *LET* (*Least Expected Time*), le *SOTA* (*Stochastic On-Time Arrival*) ou encore l'*ORP* (ou *Optimal Routing Problem*) ont été les sujets de quelques publications notables. L'objectif d'une recherche du plus court chemin stochastique ne s'avère pas aussi simple à définir que dans le cas déterministe, où il est simplement question de déterminer le temps le plus court fruit de l'addition des temps de parcours sur les sections composant l'itinéraire. Ainsi, plusieurs questions peuvent se poser :

- Quel est le temps minimal possible (respectivement le pire temps possible) pour relier une origine à une destination données ?
- Quel est le temps moyen minimal pour relier l'origine et la destination ?
- Quel est le chemin au temps de parcours le plus sûr entre l'origine et la destination ?
- Quel est le plus court chemin entre l'origine et la destination lorsque l'on désire être à l'heure dans  $\alpha\%$  des situations ?



- Quel est le chemin le plus fiable entre l'origine et la destination si le budget-temps alloué au trajet est de  $t$  minutes ? En d'autres termes, compte tenu d'un budget-temps donné, quel est le chemin qui maximise la probabilité d'être à l'heure ?

Les définitions des variantes du problème du plus court chemin stochastique seront détaillées dans la première section de ce chapitre.

Par ailleurs, plusieurs types d'approche ont été utilisés. Tout d'abord, le foisonnement d'algorithmes basés sur la notion d'étiquetage est à noter ; une seconde voie très poursuivie utilise les outils de la programmation mathématique ; enfin, des calculs analytiques fondés sur la convolution des fonctions de répartition et la programmation dynamique donnent l'expression exacte de la distribution des temps de parcours sur un itinéraire. Les techniques de résolution du problème du plus court chemin stochastique seront évoquées au sein de la section 3.2.

Le positionnement opérationnel de la recherche de plus court chemin apparaîtra en filigrane dans ces deux premières sections. Ainsi, les algorithmes développés pour une recherche d'itinéraire antérieure au trajet (ou *a priori*) seront opposés à ceux développés pour une recherche en cours de trajet (dite *adaptive*).

En dernier lieu, le présent état de l'art se focalise sur la façon dont sont représentées les coûts des arcs stochastiques. Ainsi, plusieurs hypothèses quant à la nature de la distribution des temps de parcours ont été étudiées, la section 3.3 en proposera le détail. Il sera ainsi principalement question des lois normale, lognormale et Gamma. L'existence de corrélations entre les poids des différents arcs du graphe sera également évoquée dans cette section.

## 3.1 Définition du problème et forme de la fonction objectif

La recherche du plus court chemin stochastique s'est matérialisée dans l'état de l'art par le développement de fonctions objectif de natures très différentes. Cette première partie fera ainsi mention des techniques de recherche employées initialement, centrées sur la minimisation du temps de parcours espéré, *i.e.* l'espérance de la variable aléatoire associée. Puis la suite se concentrera sur les définitions plus complètes proposées dans les travaux contemporains. Quelques variantes du problème du plus court chemin stochastique seront décrites, de manière à comprendre les nuances à apporter au problème.

### 3.1.1 Travaux fondateurs

Si les poids des arcs du graphe sont déterministes, les calculs de plus court chemin sont réalisables grâce des algorithmes relativement anciens, dont les plus connus sont ceux de Bellman [11] et Dijkstra [35].

Cependant, les premières tentatives de résolution du problème de recherche du plus court chemin stochastique sont l'œuvre de Frank [50] et Mirchandani [109]. L'un comme l'autre ont présenté des contributions fondatrices dans ce cadre de recherche : alors que le premier s'est focalisé sur des distributions continues, le second s'est intéressé aux distributions discrètes. Même si le caractère stochastique des poids sur les arcs constitue une rupture dans la conceptualisation du problème, ces approches n'en restaient pas moins relativement basiques, dans la mesure où elles considéraient des temps de parcours statiques (les distributions de temps de parcours n'évoluent pas en fonction du temps) et indépendants. En outre, les techniques de résolution mises en œuvre restaient encore à être améliorées, puisque ces premiers traitements proposaient des comparaisons de chemins deux à deux, procédé peu

efficace en matière de temps de calcul, en particulier pour des réseaux de grande taille. L'impératif d'efficacité a été rapidement intégré dans des contributions postérieures, preuve en est la contribution de Frieze *et al.* [53], dans laquelle est proposé un algorithme de résolution du problème du plus court chemin stochastique de complexité  $\mathcal{O}(n^2 \log(n))$ .

### 3.1.2 Formulation *LET*

La recherche du plus court chemin stochastique a par la suite reposé sur une hypothèse relativement simple : une variable aléatoire peut être représentée par une grandeur simple, que ce soit la réalisation minimale, la réalisation maximale, ou encore l'espérance. En considérant de telles informations pour modéliser le poids des arcs, le cas étudié se rapporte à un problème déterministe. Il suffit ainsi d'appliquer les algorithmes de recherche de plus court chemin classiques pour le résoudre, la simplicité de l'approche permettant par ailleurs de considérer des temps de parcours dynamiques.

Dès lors, plusieurs propositions relativement différentes ont émergé en partant de ce constat. Miller-Hooks *et al.* [106] se sont d'abord focalisés sur le trajet le plus rapide possible dans un graphe dynamique : pour chaque arc, le poids retenu correspond à la réalisation la plus petite possible. Ainsi, le trajet le plus court correspond à celui qui permet de rallier la destination au plus tôt. Cependant, cette approche ne rendait pas compte de l'intégralité de l'information sur les distributions de temps de parcours et favorisait les stratégies de prise de risque.

L'espérance mathématique, même si elle est un indicateur très simplifié de l'information contenue dans une variable aléatoire, a pour avantage de synthétiser l'ensemble des réalisations. Hall [65] a ainsi proposé un premier algorithme prenant en compte les espérances des temps de parcours sur les arcs, et a mis en valeur l'importance de l'adaptation dans les choix de route, au regard des réalisations constatées au fur et à mesure de la progression dans le graphe. Plus tard, Miller-Hooks *et al.* [107], puis Miller-Hooks [105] ont repris la logique développée par Miller-Hooks *et al.* [106] avec les espérances des temps de parcours, en fournissant des algorithmes d'étiquetage dédiés aux recherches *a priori* et aux recherches adaptatives, respectivement. La minimisation d'un temps de parcours moyen a également été au cœur de la contribution de Yang *et al.* [170], au sein d'une méthode de programmation mathématique sensiblement différente des précédentes. Enfin, une dernière étude notable focalisée sur l'optimisation de l'espérance est celle de Dong *et al.* [37], dans laquelle des schémas de corrélation sont développés : ces auteurs expriment l'espérance du temps de parcours sur un itinéraire en considérant les états de trafic des segments élémentaires qui le composent.

### 3.1.3 Formulation *SSPP*

Il est toutefois compliqué de considérer un plus court chemin stochastique seulement à l'aune de son espérance mathématique. L'étape de sophistication suivante a donc consisté à intégrer la variance dans la formulation du problème.

Cette approche a ouvert la voie à des approches bi-critères (l'espérance et la variance étant respectivement les deux principaux critères à optimiser). Par exemple, Loui [99] est l'un des premiers à avoir introduit une fonction multi-objectif, les critères proposés étant génériques et pondérés en fonction des préférences individuelles. Plus tard, Fu *et al.* [54] ont proposé un calcul de l'espérance du temps de parcours agrégé au niveau de l'itinéraire, raffiné par une approximation impliquant la variance. Des programmes de minimisation dont

les fonctions objectif étaient des sommes pondérées de l'espérance et de la variance ont ensuite été proposés [142, 169], sous la forme générique suivante :

$$\min_c \{ \mathbb{E}(T_c) + \theta \sigma(T_c) \} \quad (3.1)$$

où  $T_c$  représente le temps de parcours sur l'itinéraire  $c$ ,  $\mathbb{E}(T_c)$  désigne son espérance et  $\sigma(T_c)$  son écart-type. Ces formulations sont des cas particuliers de celle proposée par Loui [99]. L'écart-type y est pondéré par un paramètre noté  $\theta$  ( $\theta > 0$ ), qui dépend du niveau d'aversion au risque de l'individu. Plus ce paramètre est grand, plus l'impact de la variance dans la fonction objectif est fort : dans ce cas, l'individu sera enclin à rechercher un itinéraire à variance faible. Lu *et al.* [100] ont eux proposé une fonction objectif composée de l'espérance et d'un terme valorisant l'incertitude engendrée par le tronçon. Ce terme est composé de la variance ainsi que d'estimateurs des moments d'ordre 3 et 4 de la distribution.

Une variation de la forme de la fonction objective a parallèlement été développée : en admettant que le terme associé au temps de parcours moyen puisse être négligeable par rapport au terme associé à la variance, des systèmes de pondération convexe ont également été introduits, par exemple par Nikolova [115] :

$$\min_c \{ \varepsilon \mathbb{E}(T_c) + (1 - \varepsilon) \sigma(T_c) \} \quad (3.2)$$

où  $\varepsilon \in [0; 1]$ , d'où une valorisation qui suit le principe des vases communicants. Ce schéma de pondération est également suivi par Shahabi *et al.* [145] et Prakash *et al.* [127], qui ont également considéré des temps de parcours corrélés, en faisant intervenir dans la fonction objectif les termes de la matrice de variance-covariance. Chen *et al.* [26] ont aussi proposé une formulation pondérée, et dont le paramètre attaché au terme de variance correspond au quantile visé. Dans des travaux parallèles, les mêmes auteurs ont également étudié des variantes du problème incluant les corrélations entre liens [28] et des temps de parcours dynamiques [27]. Le concept d'optimisation bi-objectif, combinant un terme propre au temps de parcours moyen et un terme propre à sa variance, a été raffiné par Hutson *et al.* [76] : ces auteurs ont proposé une forme de fonction objectif soumise à des hypothèses de convexité telles qu'elle peut être introduite dans des approches d'étiquetage classique.

Plus généralement, les combinaisons de l'espérance et de la variance peuvent poser un problème relatif à la non-additivité des mesures de variance. Cette difficulté est mise en avant par Khani *et al.* [85], qui ne cherchent pas le chemin de variance minimale, mais se focalisent plutôt sur la somme des variances des arcs appartenant au chemin optimal.

### 3.1.4 Formulation SPOTAR/SOTA

Une formulation alternative pour la recherche de plus court chemin stochastique se rapproche du concept d'ordonnancement, en avançant les notions de budget alloué au temps de transport et d'arrivée à l'heure. Ainsi, il est ici question de minimiser le budget nécessaire au trajet, avec une probabilité donnée de ne pas être en retard. Cette approche revient à définir un chemin «  $b$ -fiable » : au regard du budget minimisé  $b$  [50]. La première formulation de ce problème, dénommé *SOTA* pour *Stochastic On-Time Arrival*, est à mettre au crédit de Fan *et al.* [45, 47]. Elle est donnée par les équations suivantes :

$$u_i(t) = \max_{j \neq i} \int_0^t p_{ij}(x) u_j(t-x) dx \quad (3.3)$$

$$u_s(t) = 1, \forall t \geq 0 \quad (3.4)$$

où  $u_i(t)$  est la probabilité maximale de parcourir le chemin entre la source  $s$  et le nœud  $i$  ( $i \in V \setminus s$ ) en un temps  $t$ , au plus ; et  $p_{ij}(x)$  est la probabilité de traverser l'arc  $(i, j) \in E$  en un temps égal à  $x$ .

La perspective est ici inversée par rapport à l'approche initiale : on ne minimise pas le budget nécessaire au trajet, mais on maximise la probabilité  $\alpha$  d'être à l'heure, compte tenu d'un budget de temps donné  $b$ . Nie *et al.* [113] parlent de chemin «  $\alpha$ -fiable », et démontrent la similitude des deux approches.

Ces chercheurs introduisent par ailleurs l'appellation *SPOTAR*, complément du problème *SOTA*, faisant alors référence à une procédure de recherche de chemin antérieur au trajet, alors que le problème *SOTA* correspond à une requête adaptable en cours de trajet. La différence vient du fait que le problème *SPOTAR* se focalise sur les chemins localement optimaux (cf Définition 3 dans [113]) : l'ensemble de chemins localement optimaux vers un nœud est reconstruit à partir de l'ensemble des chemins localement optimaux menant aux prédécesseurs. Ainsi, en posant  $C_i$  l'ensemble des chemins reliant  $s$  au nœud  $i \in V$ ,  $C_i^*$  l'ensemble des chemins localement optimaux entre  $s$  et  $i$ , et  $\oplus$  l'opérateur de concaténation de chemins :

$$u_i(t) = \max \{u_i^c(t) \mid c \in C_i^*\}, \forall t \geq 0 \quad (3.5)$$

$$C_i^* = \max_{LO} \{c_i = c_j \oplus (i, j) \mid c_j \in C_j^*\} \quad (3.6)$$

$$C_s^* = \{\emptyset\} \quad (3.7)$$

$$u_i(t) = \max_{c \in C_i^*} \left\{ \int_0^t p_{ij}(x) u_j^c(t-x) dx \right\}, \forall t \geq 0, \forall i \neq s \quad (3.8)$$

$$u_s(t) = 1, \forall t \geq 0 \quad (3.9)$$

Dans le déroulement de la procédure sous-jacente, la construction des ensembles de chemins localement optimaux telle que décrite par l'équation 3.6 est fondamentale, elle est résumée par l'opération notée ici  $\max_{LO}$ . Elle accompagne les opérations de convolutions incluses dans l'équation 3.8, et consiste principalement en des concaténations de sous-chemins, suivies d'un éventuel filtrage des chemins non-optimaux. En comparant les problèmes *SOTA* et *SPOTAR*, Nie *et al.* [113] nuancent la supériorité de la formulation adaptative de la recherche du plus court chemin stochastique, en précisant que la première est moins précise lorsque les variances des segments élémentaires ne sont pas homogènes.

Certaines contributions de ce pan de la littérature ont par ailleurs pris en compte la définition dynamique des temps de parcours [113, 120, 168]. Et d'autres encore ont envisagé la possibilité de temps de parcours corrélés les uns avec les autres : par exemple, Zockaie *et al.* [176] testent par la simulation les corrélations entre tronçons adjacents. Ils concluent que l'hypothèse de temps de parcours dépendants modifie le chemin optimal, mais ne parviennent pas à déterminer un schéma systématique à ce propos.

### 3.1.5 Autres variantes rencontrées

D'autres formulations moins répandues et d'autres variantes existent, et sont développées ici plus brièvement dans la mesure où elles ne sont pas au centre du sujet. Ainsi, Gao *et al.* [57] ont traité du problème *ORP*. Ils ont réalisé une taxonomie complète fondée sur le niveau d'information disponible. Cette variante est également mentionnée par Seshadri *et al.* [144], ainsi que par Ding *et al.* [36], qui ont proposé respectivement un algorithme itératif de recherche *a priori* basé sur la définition de la loi normale et un algorithme d'étiquetage

adaptatif. Le problème *ORP* part de la constatation que les recherches de plus courts chemins stochastiques n'aboutissent généralement pas à un seul chemin résultat, mais plutôt à un ensemble de chemins, évoluant au gré des réalisations connues sur les tronçons traversés, d'où le terme de « politique » de routage.

Par ailleurs, Lecluyse *et al.* [93] et Van Woensel *et al.* [157] ont évoqué le problème *VRP* (*Vehicle Routing Problem*), mais la formulation de leur fonction objectif est similaire à celle du problème standard *SSPP* évoqué dans la partie 3.1.3. L'originalité de leur approche repose sur des algorithmes construits à partir de la théorie des files d'attente. La contribution de Verbeeck [158] s'est intéressé au problème *OP* (*Orienteering Problem*), une variante du *VRP* dans laquelle une limite de budget de temps nécessite de choisir les clients qui seront satisfaits. D'autres appellations ont été rencontrées (*PUE* [22], *RSPP* [26, 27, 28], *MRCP* [127], *MRP* [150]), mais les problèmes formulés étaient également assimilables au problème standard. De la même façon, les problèmes *RASP* [168] et *MPTTB* [175] sont voisins du problème *SOTA* évoqué dans la section précédente.

Enfin, un dernier problème rencontré est le *k-SPP*, dans ses formes déterministe et stochastique. L'idée principale de cette technique est la mise en valeur des *k* meilleurs chemins stochastiques, sur le principe de l'algorithme de Yen [171]. Cette brique algorithmique a constitué un élément vers la détermination du plus court chemin stochastique dans plusieurs cas rencontrés ici (voire par exemple [37, 114, 144, 165]). Il s'agit d'une formulation dont la portée s'étend aussi aux problèmes multimodaux, Scano *et al.* [140] l'a par exemple employée dans ce contexte, en la combinant à l'utilisation de langages réguliers.

## 3.2 Méthodes de résolution

Dans cette partie, les pistes de résolution employées pour résoudre le problème de plus court chemin seront considérées. À quelques exceptions près, les principales méthodes de résolution tiennent de la programmation mathématique, de la programmation dynamique (technique héritée de Bellman [11]) et de la conception d'algorithmes d'étiquetage affiliés à l'algorithme de Dijkstra [35].

### 3.2.1 Programmes d'optimisation mathématique

Une grande partie des contributions rencontrées dans la littérature ont mis au point des programmes d'optimisation, dans lesquels une fonction objectif doit être optimisée. Comme évoqué dans la partie précédente, il a pu s'agir de minimiser un temps de parcours moyen [170] ou, le plus souvent, une combinaison du temps de parcours moyen et d'une composante liée à l'incertitude pondérée par un paramètre individuel lié au comportement face au risque [26, 27, 28, 54, 93, 100, 115, 127, 142, 145, 157, 169, 175]. Fondée sur des fonctions objectif semblables à celles présentées par les équations 3.1 et 3.2, la technique de programmation mathématique s'inspire de la formulation standard du problème du plus court chemin en programmation linéaire, avec notamment la présence systématique d'une contrainte d'intégrité du flot :

$$\sum_{j:(i,j) \in E} x_{ij}^c - \sum_{j:(j,i) \in E} x_{ji}^c = \begin{cases} 1 & \text{si } i = s \\ -1 & \text{si } i = d \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.10)$$

où  $x_{ij}^c$  vaut 1 si le chemin  $c$  emprunte l'arc  $(i, j)$ , 0 sinon. À l'aide de ces variables de décision, il est possible d'exprimer l'espérance du temps de parcours sur l'itinéraire ainsi que sa variance  $V(T_c)$  :

$$\mathbb{E}(T_c) = \sum_{(i,j) \in E} m_{ij} x_{ij}^c \quad (3.11)$$

$$V(T_c) = \sum_{(i,j) \in E} \sigma_{ij}^2 x_{ij}^c + \sum_{(i,j) \in E} \sum_{(k,l) \neq (i,j) \in E} \Lambda_{(i,j)(k,l)} x_{ij}^c x_{kl}^c \quad (3.12)$$

où  $m_{ij}$  est l'espérance du temps de parcours sur l'arc  $(i, j)$ ,  $\sigma_{ij}^2$  sa variance, et  $\Lambda_{(i,j)(k,l)}$  le terme de covariance entre les temps de parcours sur les arcs  $(i, j)$  et  $(k, l)$ , respectivement. Dans le cas où les temps de parcours sur les différents arcs sont indépendants, le second terme de l'équation 3.12 est nul.

Différents outils et techniques d'optimisation ont été utilisés afin de résoudre ces problèmes mathématiques de grande complexité, souvent des méthodes d'approximation pour accélérer le processus de recherche. Ainsi, la relaxation Lagrangienne a été employée par Xing *et al.* [169] ou encore Yang *et al.* [170] : elle revient à relâcher un ensemble de contraintes qui sera introduit dans la fonction objectif sous forme de pénalité. Cheng *et al.* [30] emploient une technique de relaxation centrée sur la définition binaire des contraintes impliquant la matrice d'incidence, *i.e.* sur la garantie d'intégrité du flot passant par les nœuds du réseau. Shahabi *et al.* [145] résolvent le problème via une approximation qui consiste à décomposer le problème de recherche du plus court chemin en un sous-problème estimant la partie correspondant à la variance, et à injecter la valeur (ainsi qu'un estimateur de l'espérance) correspondante dans un problème maître. Le sous-problème correspond à une borne supérieure, alors que le problème maître est considéré comme une borne inférieure : l'algorithme retourne ainsi une valeur objectif à la convergence des solutions des deux problèmes. Des principes d'encadrement convergeant similaires sont utilisés par Seshadri *et al.* [144] et Srinivasan *et al.* [150]. Un autre procédé classique de la recherche opérationnelle utilisé dans des publications recensées ici est le principe du *Branch&Bound* : pour une variable binaire donnée, il consiste en la division de l'espace des solutions en deux parties complémentaires, caractérisées chacune par la valeur de la variable (0 ou 1). Ensuite, les branches sont éliminées au fur et à mesure en fonction des solutions optimales qu'elles proposent : si la branche du 0 fournit une solution optimale plus mauvaise qu'une solution quelconque de la branche du 1, elle est éliminée, et l'algorithme de recherche ne se poursuivra que dans la seconde. Nielsen *et al.* [114] l'appliquent dans une recherche des  $k$ -plus courts chemins stochastiques, et Yang *et al.* [170] s'en servent pour accélérer leur algorithme de relaxation Lagrangienne. Ces deux dernières contributions se démarquent par ailleurs par leur opposition eu égard au positionnement opérationnel : alors que la formulation de Yang *et al.* donne une solution *a priori*, Nielsen *et al.* partent du principe que la solution à la formulation adaptative est plus rapide à calculer et est en plus toujours meilleure, ils s'en servent donc comme d'une borne inférieure pour le calcul de la solution à la formulation *a priori*.

Enfin, de façon plus isolée, Van Woensel *et al.* [157] produisent des approximations pour résoudre le problème VRP en utilisant l'heuristique des colonies de fourmis, fonctionnant par mimétisme avec ces insectes : une population de solutions est générée itérativement, celles-ci étant marquées par d'autant plus de phéromones que leur qualité est bonne par rapport à l'optimal. Ainsi, les générations de solutions postérieures seront orientées vers les zones les plus marquées de l'espace des solutions. Lecluyse *et al.* [93] utilisent l'heuristique de recherche tabou, qui est un procédé de recherche locale dans lequel les derniers mouvements sont archivés de manière à interdire toute possibilité de retour en arrière sur les itérations

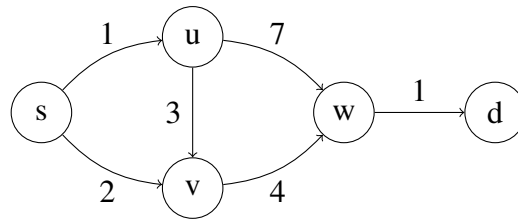


FIGURE 3.1 – Illustration du principe d’optimalité de Bellman : le chemin optimal entre  $s$  et  $d$  passe par  $v$  et  $w$ , ce qui implique que  $s \rightarrow v \rightarrow w$  est optimal pour rallier  $s$  à  $w$ , de même que le trajet direct  $s \rightarrow v$  pour rallier  $s$  à  $v$

suivantes. En dernier lieu, Chen *et al.* [26, 27] utilisent l’algorithme  $A^*$ , une heuristique de recherche du plus court chemin se dirigeant en priorité vers la destination, au regard d’une fonction de proximité qui s’additionne au coût associé à chaque arc. Ainsi, aller vers un nœud donné coûtera le temps nécessaire au trajet, plus un montant synthétique d’autant plus grand que le nœud est éloigné de la destination (la distance géographique euclidienne étant un exemple simple pour évaluer l’éloignement).

### 3.2.2 Algorithmes de programmation dynamique

La programmation dynamique est utilisée pour la recherche du plus court chemin depuis la contribution fondatrice de Bellman *et al.* [11], dans laquelle est proposé un principe élémentaire éponyme : au sein d’un graphe, tout chemin optimal entre une origine et une destination est composé de sous-chemins optimaux, comme l’illustre la figure 3.1.

Le modèle de programmation dynamique de Bellman réside dans les équations 3.13 et 3.14 présentées ci-après :

$$u_i = \min_{j \neq i} \{t_{ij} + u_j\}, \forall i \in V \setminus d \quad (3.13)$$

$$u_d = 0 \quad (3.14)$$

où  $t_{ij}$  est le temps de parcours sur l’arc  $(i, j)$  et  $u_i$  le temps de parcours minimal entre  $i$  et  $d$ . Ce principe permet de faire un calcul itératif depuis la destination en remontant jusqu’à l’origine (respectivement depuis l’origine vers la destination), de manière à trouver les nœuds intermédiaires constituant des sous-chemins optimaux. Ceci étant dit, le principe de Bellman est inapplicable en l’état pour des coûts stochastiques, comme le rappelle Loui [99].

Les quelques publications utilisant expressément ce type de procédure contournent cette contrainte en proposant des fonctions objectif alternatives. Polychronopoulos *et al.* [126] se sont penchés sur la question de la recherche du plus court chemin adaptatif compte tenu du niveau d’information disponible à chaque nœud du réseau. Plutôt qu’un chemin optimal, cette approche revient alors à déterminer une « politique » optimale en fonction du niveau d’information accessible en cours de route. Gao *et al.* [57] et Ding *et al.* [36] ont également creusé la question de l’information en proposant un algorithme basé sur l’expression d’une condition optimale récursive. Dans leur contribution, Gao *et al.* ont également proposé une typologie précise de problèmes liés au niveau d’information disponible : des optimisations avec information parfaite, incomplète ou encore totalement indisponible.

Par ailleurs, Fan *et al.* [45] ont développé une méthode d’approximation successive dans laquelle un état de trafic (congestionné ou fluide) est associé à chaque arc. Les distributions

de temps de parcours sur les arcs sont ainsi différentes selon l'état de trafic concerné. L'application de la programmation dynamique est permise via l'utilisation des espérances des temps de parcours. La même approche est utilisée par Dong *et al.* [37], qui considèrent en plus des temps de parcours dynamiques. Les premiers auteurs ont ensuite développé leur approche jusqu'à formaliser le problème *SOTA* [46, 47], qui réside dans une fonction récursive impliquant une convolution en série des distributions associées aux arcs parcourus, et dans laquelle le budget de temps de parcours diminue au gré des nœuds visités et des réalisations de temps de parcours sur les arcs. Les équations 3.3 et 3.4 sont les équations constitutives de cette formulation consacrant une optimisation adaptative. Le principe de Bellman y est préservé via l'expression des convolutions. Même si ce genre de technique mathématique nécessite une grande puissance de calcul, son utilisation permet de conserver l'intégralité de l'information quant aux distributions des temps de parcours.

### 3.2.3 Algorithmes d'étiquetage

#### 3.2.3.1 Étiquetage dans les graphes stochastiques

Les algorithmes d'étiquetage sont une autre approche pour la recherche du plus court chemin stochastique. Bien que fondamentaux dans le cadre déterministe, avec l'algorithme de Dijkstra [35] et ses déclinaisons, l'adaptation aux graphes stochastiques n'a pourtant pas été directe. Miller-Hooks *et al.* [106, 107] présentent deux algorithmes intéressants pour la recherche du plus court chemin stochastique fondés sur les espérances des temps de parcours, introduisant ainsi les variables aléatoires dans les procédés d'étiquetage. Cependant, en simplifiant le caractère aléatoire des temps de parcours, ces contributions ne résolvent pas la question de leur variabilité. Sur le même principe, Miller-Hooks [105] étend l'étude aux réseaux de données, dont l'architecture est sensiblement différente.

À l'image de la programmation dynamique, l'invalidité du principe de Bellman a poussé les chercheurs à développer des structures innovantes pour lesquelles un procédé d'étiquetage pouvait amener à la solution optimale. Par exemple, Opananon *et al.* [119] ont défini les *hyperpaths*, qui constituent un ensemble de chemins optimaux à discriminer en fonction des réalisations de temps de parcours constatés sur le début du trajet. En ce sens, l'algorithme correspondant se rapproche de la détermination de la politique de routage optimale (problème *ORP*) définie plus haut. Huang *et al.* [74] ont défini le concept de chemin « pur » (*pure path*), qui est un cas particulier de chemin non-dominé : est considéré comme pur tout chemin qui est non-dominé quelles que soient la date de départ et la densité de probabilité associée, et qui est en plus composé de sous-chemins présentant les mêmes caractéristiques. Un chemin non-dominé qui ne respecte pas l'une de ces conditions est dit « mixte » (*mixed path*). Tous ces objets mathématiques permettent d'appliquer les algorithmes d'étiquetage, puisqu'ils admettent l'application du principe de Bellman.

D'autres auteurs ont plus récemment proposé des algorithmes d'étiquetage prenant en considération d'autres caractéristiques des temps de parcours. Pan *et al.* [120] présentent un algorithme d'étiquetage pour résoudre un problème de maximisation de la probabilité d'être à l'heure dans lequel les chemins non-dominés admettent le principe de Bellman. Rey *et al.* [131] présentent une méthodologie utilisant l'étiquetage des nœuds dans un cadre où l'aléa est scénarisé. Enfin, Prakash *et al.* [127] combinent un procédé d'étiquetage avec de l'optimisation (minimisation d'un coût) : l'étiquetage sert à supprimer les chemins dominés pour accélérer la résolution du programme mathématique.

La relation de dominance est un concept fondamental autour duquel gravitent les contributions mentionnées ici. Miller-Hooks *et al.* [108] ont proposé une définition complète de



cette notion, avant une extension au cas continu apportée par Nie *et al.* [113] focalisée sur le concept des chemins « localement fiables » (*local-reliable paths*). La relation de dominance est décrite dans les paragraphes suivants.

### 3.2.3.2 Relation de dominance

Dans le cas d'arcs définis selon des structures non déterministes, un problème majeur des algorithmes d'étiquetage réside dans la comparaison des étiquettes les unes avec les autres. En effet, les étiquettes ne sont plus de simples scalaires pour lesquelles les opérations de comparaison sont trivialement définies. Il s'agit plutôt de vecteurs dont les éléments doivent être comparés deux à deux.

Miller-Hooks *et al.* [106, 108] fournissent un cadre d'analyse extrêmement précieux pour procéder à ces évaluations. Ainsi, la notion de dominance est proposée : elle revient à juger de la supériorité d'une distribution statistique par rapport à une autre. En posant  $F_1$  et  $F_2$  les fonctions de répartition associées respectivement aux distributions de deux événements  $T_1$  et  $T_2$  définis sur l'intervalle  $[0; T_{max}]$ , les auteurs mettent en valeur trois relations de dominance :

- la **dominance déterministe** : en posant  $\arg \min_t \{F(t)\}$  et  $\arg \max_t \{F(t)\}$  respectivement le plus petit et le plus grand fractiles associés à la fonction de répartition  $F(t)$ , la distribution 1 domine la distribution 2 si et seulement si :

$$\arg \max_t \{F_1(t)\} < \arg \min_t \{F_2(t)\} \quad (3.15)$$

- la **dominance stochastique du premier ordre** : la distribution 1 domine la distribution 2 si et seulement si :

$$F_1(t) \geq F_2(t), \forall t \in [0; T_{max}] \quad (3.16)$$

$$\exists t \in [0; T_{max}] \text{ tel que } F_1(t) > F_2(t) \quad (3.17)$$

- la **dominance par l'espérance** : dans ce cas de figure très semblable au cadre déterministe, la distribution 1 domine la distribution 2 si et seulement si :

$$\mathbb{E}(T_1) < \mathbb{E}(T_2) \quad (3.18)$$

Ce triplet de relation est étendu par Wu [168], qui introduit la notion de **dominance stochastique du second ordre**, et avance que ce critère offre un bon compromis entre temps de calcul et exactitude de la solution, si bien que les dominances stochastiques d'ordres supérieurs ne semblent pas intéressantes à employer. Ainsi, la distribution 1 domine la distribution 2 selon la relation de dominance stochastique du second ordre si et seulement si :

$$\int_0^t F_1(x) dx \geq \int_0^t F_2(x) dx, \forall t \in [0; T_{max}] \quad (3.19)$$

$$\exists t \in [0; T_{max}] \text{ tel que } \int_0^t F_1(x) dx > \int_0^t F_2(x) dx \quad (3.20)$$

Dans la présente étude, il sera plus particulièrement question de la seconde de ces quatre relations, la dominance stochastique du premier ordre : un événement sera jugé dominant si sa fonction de répartition est supérieure, quelle que soit la réalisation  $t$ .

En posant deux chemins  $c_1$  et  $c_2$  reliant deux nœuds au sein d'un graphe, caractérisés par des distributions de probabilité dont les fonctions de répartition correspondent à  $F_1$  et

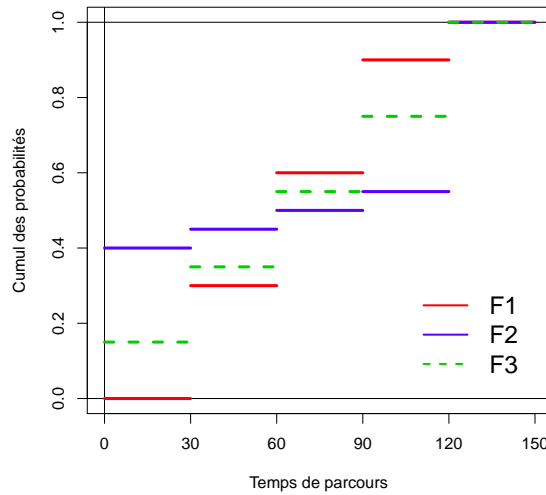


FIGURE 3.2 – Illustration de la dominance stochastique de premier ordre :  $F_3$  est dominé par le groupe  $\{F_1; F_2\}$ , mais pas par  $F_1$  et  $F_2$  pris individuellement.

$F_2$ , la définition de dominance trouve rapidement une première application. Ainsi, on dit que le chemin  $p_1$  est dominant vis-à-vis de  $p_2$  si et seulement si sa fonction de répartition  $F_1$  domine celle du chemin  $p_2$ , *i.e.*  $F_2$ .

Une définition parallèle revient à établir que la distribution représentée par la fonction de répartition  $F$  est non-dominée si et seulement si il n'existe aucune autre distribution représentée par  $G$  telle que  $G$  domine  $F$ .

### 3.2.3.3 Dominance de groupe

Durant l'exécution d'un algorithme d'étiquetage dans un graphe, de nombreux sous-chemins sont explorés au fur et à mesure des visites successives aux nœuds. Cela a pour conséquence directe un nombre élevé de comparaisons de distributions deux à deux. En complément de cette première méthode, une autre stratégie de comparaison de distributions existe et a été mise en avant par Miller-Hooks *et al.* [108]. Elle fait appel à la relation de dominance de groupe.

Ainsi, en reprenant le cas de la dominance stochastique du premier ordre, on dit qu'une distribution caractérisée par la fonction de répartition  $F$  est non-dominée par rapport à un ensemble de distributions  $D$  si et seulement si il existe une réalisation  $t \in [0; T_{max}]$  pour laquelle :

$$F(t) > F_d(t), \forall d \in D \quad (3.21)$$

où  $F_d$  représente la fonction de répartition associée à une distribution de l'ensemble  $D$ . La définition opposée est ainsi la suivante : une distribution est dominée lorsque  $\forall t \in [0; T_{max}]$ ,  $\exists d \in D$  telle que :

$$F(t) \leq F_d(t) \quad (3.22)$$

La relation de dominance de groupe est plus stricte que la dominance individuelle, au sens où moins de distributions peuvent prétendre au statut de distribution non-dominée. Comme

le rappellent Nie *et al.* [113], cette quantité est bornée par la taille de l'ensemble des réalisations  $T$  si les distributions sont discrétisées. À titre d'exemple, la figure 3.2 montre qu'une distribution peut être non-dominée en vertu des comparaisons deux à deux, tout en étant dominée par le groupe des autres distributions.

### 3.2.4 Autres techniques rencontrées

D'autres types de modélisation mathématique ont été employés dans le cadre de la recherche du plus court chemin stochastique. Par exemple :

- Wu *et al.* [168] développent un algorithme fondé sur les calculs de convolution, et évaluent les distributions résultantes via la notion de dominance stochastique. Oliveira-Neto *et al.* [118] utilisent aussi cette méthodologie pour déterminer les distributions des vitesses sur un chemin complet et évaluer les corrélations entre les distributions relatives aux tronçons.
- Van Woensel *et al.* [157] se placent dans un cadre méthodologique quelque peu différent, puisqu'ils s'attachent à modéliser un problème de routage de véhicule par le biais de la théorie des files d'attente. L'avantage de ce genre de modèle est une plus grande significativité physique des paramètres.
- Enfin, Zockaie *et al.* [175, 176] ont basé leur approche sur les techniques de simulation. Dans ces publications, les auteurs comparent des algorithmes de génération aléatoire de chemins avec d'autres algorithmes similaires de l'état de l'art (respectivement [113, 145]), et affirment qu'ils sont de bonnes alternatives du fait de leur rapidité d'exécution et de la relative bonne qualité des approximations obtenues.

## 3.3 Représentation du poids des arcs dans le graphe

Un dernier élément-clé ressort de l'étude de l'état de l'art pour la recherche des plus courts chemins stochastiques : la représentation statistique des pondérations affectées aux différents arcs. Dans un réseau routier, les temps de parcours sont généralement évalués entre les intersections qui le maillent. Pour représenter ce phénomène, nous avons constaté dans le chapitre 1 de la thèse que de nombreuses lois de probabilité ont été utilisées, et dans le chapitre 2 que les lois les plus adaptées à la modélisation des délais sont les lois de Halphen, de Burr, Gamma ou encore Weibull.

Dans le contexte de la recherche du plus court chemin stochastique, peu de lois ont été mobilisées que ce soit pour le développement des algorithmes (les propriétés de la loi sont utilisées pour faire fonctionner l'algorithme), ou plus simplement, en guise d'illustration au sein d'une étude empirique. Quel que soit le modèle probabiliste utilisé, il convient aussi de s'interroger sur le schéma de corrélation entre les temps de parcours sur les différents arcs, bien que cette interrogation puisse être contournée en considérant des temps de parcours scénarisés. Ces éléments seront détaillés dans les paragraphes qui suivent.

### 3.3.1 Utilisation de modèles probabilistes pour les poids des arcs

La gamme de lois de probabilité utilisées dans le cadre de la recherche du plus court chemin stochastique est en fait assez réduite.

Sans surprise, la loi normale est le modèle le plus sollicité. Sen *et al.* [142] ont exploité sa propriété d'additivité dans le cadre d'un modèle focalisé sur l'espérance et l'écart-type.

Wang *et al.* [165] ont profité de la facilité d'échantillonnage à partir de sa moyenne et de son écart-type empiriques, et ont calculé des chemins de moyenne minimale d'une part, et de variance minimale d'autre part, en caractérisant la fiabilité des temps de parcours en fonction des quantiles des lois. Quelques contributions ont cherché à optimiser un objectif dans lequel apparaît la fonction de répartition de la loi normale [26, 27, 144] : pour un niveau de fiabilité désiré (correspondant à un quantile de la fonction de répartition), il est question de trouver le chemin qui minimise le temps à allouer au trajet. Huang *et al.* [74] ainsi que Verbeeck [158] ont proposé des développements analytiques basés sur la définition de cette loi. Les premiers ont proposé une cartographie des chemins optimaux à partir des niveaux d'aversion au risque et des niveaux de corrélation entre les segments, alors que le second s'est focalisé sur l'impact sur les distributions que peuvent avoir les arrivées en dehors de fenêtres de temps propres à chaque étape d'un trajet. Hunter *et al.* [75] ont quant à eux envisagé une modélisation des temps de parcours par des lois normales dans le cadre d'une méthode de prévision utilisant l'inférence statistique : déduire la distribution des temps de parcours sur un segment est possible en utilisant celles associées aux segments antérieurs.

La loi lognormale est le second modèle utilisé pour ses propriétés mathématiques, celles-ci dérivées des propriétés de la loi normale. La loi lognormale profite en outre d'un profil plus typique des temps de parcours (*cf* partie I). Lecluyse *et al.* [93] ont sélectionné cette loi dans la mesure où elle représente mieux qu'une loi normale l'asymétrie des distributions de temps de parcours, et affirment simulation à l'appui qu'une somme de lois lognormales suit approximativement une loi lognormale. Srinivasan *et al.* [150] utilisent aussi cette propriété, et développent un programme d'optimisation afin de maximiser la fiabilité (*i.e.* la probabilité d'être à l'heure avec un budget-temps fixé) en fonction de temps de parcours sur des itinéraires distribués selon des lois lognormales à trois paramètres.

Au-delà de ces exemples, le reste des références identifiées dans l'état de l'art à propos de l'utilisation des lois de probabilité dans ce contexte concerne des mises en œuvre empiriques. Les lois normales [37, 74, 175] et lognormales [127] sont concernées en premier lieu, cependant d'autres modèles ont aussi été exploités dans ce but : la loi Gamma [46, 47, 113, 176], la loi exponentielle [65] ou encore la loi uniforme [168], soit une gamme plus réduite par rapport aux lois envisagées dans le contexte d'un segment élémentaire (*cf* partie I).

Il est important de noter que, quelle que soit l'application visée, les contributions précédentes n'interrogent pas la pertinence de ces lois dans la modélisation des poids des arcs. Celles-ci sont d'abord utilisées à des fins utilitaires encouragées soit par des propriétés mathématiques « confortables », soit par une simple volonté illustrative. Il pourrait être intéressant de comparer les différents modèles en vertu des chemins optimaux identifiés par les algorithmes de recherche du plus court chemin stochastique.

### 3.3.2 Corrélations entre les temps de parcours au sein du réseau

Quelle que soit la loi de probabilité retenue pour la modélisation des temps de parcours, l'existence de corrélations entre les segments élémentaires donne une information supplémentaire quant au phénomène étudié.

Plusieurs procédés ont permis de considérer cette question. Le plus simple est l'utilisation de la matrice de variance-covariance [28, 127, 145, 175], composée des covariances entre tous les couples d'arcs au sein du graphe. Cette approche a essentiellement été utilisée dans des techniques de programmation mathématique, notamment pour augmenter la qualité de la modélisation du terme associé à la variance, mais elle nécessite une grande quantité d'information.

Pour pallier ce besoin en données, d'autres procédés ont été développés par ailleurs. L'approche markovienne, dans laquelle le modèle de chaque arc dépend essentiellement de celui en vigueur sur l'arc précédent, en est l'exemple le plus populaire [37, 45, 68, 75]. Waller *et al.* [163] ont proposé un algorithme déterminant le plus court chemin pour des arcs soumis à des dépendances spatio-temporelles locales, entre deux segments consécutifs et/ou d'une période à la suivante. Ce cas de figure souligne l'intérêt d'une modélisation adaptative, les auteurs notant d'ailleurs la meilleure qualité des solutions obtenues lorsque l'information est disponible pour l'usager au fur et à mesure de son avancée. Samanarayake *et al.* [139] proposent également une formulation du problème considérant des corrélations locales (*i.e.* entre un lien et son prédécesseur optimal) fondée sur l'expression de la probabilité maximale d'arriver en un budget de temps donné. Chen *et al.* [28], eux, se démarquent par la capacité de leur démarche à gérer les corrélations entre un arc donné et son  $k$ -voisinage (via la définition d'un sous-graphe constitué de tous les nœuds accessibles en moins de  $k$  arcs).

Comme l'avancent par exemple Polychronopoulos *et al.* [126] ou Xing *et al.* [169] par le biais de comparaisons algorithmiques entre le cas dépendant et le cas indépendant, négliger les corrélations entre les arcs amène à un résultat sous-optimal. Cela n'a toutefois pas empêché l'émergence des études utilisant des calculs de convolution, impliquant théoriquement des distributions indépendantes [46, 47, 113, 118].

### 3.3.3 Approche par scénario

Une dernière approche proposée est celle de la scénarisation de l'aléa, qui passe outre la nécessaire définition des variables correspondant aux temps de parcours. Dans cette approche, les temps de parcours deviennent des grandeurs déterministes, définies par un scénario donné. La difficulté se situe ici dans la définition des scénarios, qui doivent être à même de caractériser une instance complète décrivant les conditions de trafic sur le réseau.

Yu *et al.* [173] définissent deux problèmes spécifiques à l'approche par scénario, qui reviennent à chercher le plus petit des temps de parcours maximaux sur tous les scénarios d'une part, et la plus petite amplitude entre temps de parcours minimal et temps de parcours maximal sur tous les scénarios d'autre part. L'idée est ainsi de définir un chemin robuste, ce qui est également l'objet de la contribution de Gabrel *et al.* [55]. Ces derniers auteurs évoquent deux types de scénario : le premier concerne des arcs définis sur un ensemble discret, et le second est composé d'arcs définis sur des intervalles bornés. Ils définissent également deux critères : le premier est le critère du pire cas, qui est assimilable au premier problème évoqué par Yu *et al.* [173], et le second, le critère de robustesse  $bw$ . Ce dernier nécessite la connaissance d'un paramètre objectif ( $b$ ), qui est le temps de parcours qu'un chemin doit permettre de réaliser dans un maximum de scénarios, et d'un paramètre limite ( $w$ ), qui est le temps de parcours à ne dépasser dans aucun scénario. Ainsi, le chemin le plus robuste est celui qui respecte le critère  $w$  dans tous les scénarios tout en présentant le plus grand nombre de scénarios respectant  $b$ .

Par ailleurs, Rey *et al.* [131] proposent un algorithme d'étiquetage basé sur des temps de parcours scénarisés. Cette approche est vue comme une méthode efficace pour gérer les situations de dépendance statistique entre les différents arcs : toutes les corrélations sont ainsi capturées par la scénarisation, une réalisation de temps de parcours sur un segment donné ne pouvant être rencontrée que si le scénario le permet. Leur objectif est d'obtenir des chemins non-dominés, et de déterminer parmi eux celui qui minimise l'espérance du temps de parcours tous scénarios confondus. Cette particularité est également soulevée par Yang *et al.* [170], qui précisent que les schémas de corrélation ne peuvent être modélisés

qu'au moyen d'un nombre suffisant de scénarios. En pratique, un scénario peut être identifié comme une journée typique. Ainsi, ils développent un programme mathématique dans lequel les temps de parcours sont définis en fonction de l'arc, de la date de départ, mais aussi du jour concerné.

En somme, l'approche par scénario passe pour une méthode simple et efficace pour gérer la complexité de modélisation engendrée par la définition stochastique des temps de parcours. Ce choix nécessite tout de même une grande rigueur dans la définition des scénarios, qui doivent être cohérents, typiques des conditions de trafic sur un réseau de transport, et complets, pour représenter l'univers des réalisations des temps de parcours au sein du graphe.

## Conclusion

Bien que quantité de travaux aient été consacrés à la thématique de la recherche du plus court chemin dans la littérature, seulement un nombre réduit d'entre eux considère des graphes stochastiques, et ce nombre diminue d'autant si les définitions des temps de parcours évoluent en fonction de la date de départ aux nœuds, et/ou si elles impliquent des corrélations non nulles. Les quelques travaux qui incluent toutes ces dimensions présentent des niveaux de difficulté importants en matière de modélisation, ainsi que de faibles performances algorithmiques. Des hypothèses simplificatrices semblent toujours nécessaires pour aboutir à un algorithme acceptable (recherche sur les espérances, utilisation de lois normales, corrélations limitées aux tronçons adjacents voire nulles, scénarisation de l'aléa...).

Les techniques de modélisation employées suivent trois grandes tendances : d'abord, une partie des publications exprime la minimisation du temps nécessaire au trajet par le biais d'une fonction à optimiser dans un programme mathématique ; ensuite, un autre pan de la littérature est composé d'algorithmes fondés sur la programmation dynamique, outil particulièrement pertinent pour les recherches de chemins adaptatives ; et enfin, un troisième et dernier ensemble de chercheurs s'est appliqué à développer des algorithmes d'étiquetage, lors desquels les nœuds du réseau sont parcourus successivement jusqu'à obtenir des étiquettes optimales. Dans les graphes stochastiques, ces étiquettes ne sont pas des scalaires, mais des vecteurs qui sont comparés les uns par rapport aux autres au moyen des relations de dominance stochastique. Les deux dernières techniques mentionnées ont nécessité le développement de structures algorithmiques novatrices pour dépasser l'invalidité du principe d'optimalité de Bellman dans le cadre stochastique.

Après la partie I consacrée à la modélisation des temps de parcours à l'échelle du segment et de l'itinéraire, cet état de l'art a permis de constater que seul un nombre restreint de lois de probabilité est plébiscité à l'échelle du graphe, aucun consensus n'existant réellement sur la détermination du meilleur candidat. Enrichir l'état de l'art sur ce point précis est possible, notamment en testant les solutions classiques que sont les lois normales et lognormales.

Une question de recherche peut notamment être soulevée à l'aune des précédents développements : le choix de modélisation a-t-il un impact sur les chemins jugés optimaux ? Dans de nombreux cas, les lois de probabilité sont utilisées pour leurs propriétés analytiques, ou à titre d'illustration dans des cas empiriques, plutôt que pour une quelconque pertinence en termes de modélisation. Une analyse de la robustesse des plus courts chemins au regard du choix du modèle statistique employé sera réalisée dans le chapitre suivant pour évaluer l'aspect critique de ce choix. Le modèle de l'état de l'art retenu pour cette analyse est la formulation *SPOTAR* détaillée par Nie *et al.* [113], grâce à laquelle les temps de parcours peuvent être considérés comme des variables aléatoires distribuées, et dans laquelle la définition du modèle probabiliste peut être directement interrogée via les fonctions de répartition.



## Calcul du plus court chemin stochastique : considérations probabilistes et résolution algorithmique

Comme évoqué dans le chapitre précédent, plusieurs solutions algorithmiques ont été proposées pour le problème du plus court chemin stochastique, mais peu d'entre elles sont capables de prendre en compte de façon détaillée l'aspect stochastique des temps de parcours. L'objet de ce chapitre est de proposer un cadre méthodologique pour la représentation stochastique des temps de parcours, en utilisant l'approche algorithmique de Nie *et al.* [113]. Celle-ci consiste en un algorithme d'étiquetage (dénommé *SPOTAR*) permettant de maximiser la probabilité d'arriver à l'heure, pour un budget-temps donné. Cette approche est à notre connaissance la première qui offre un cadre permettant la prise en compte des distributions de temps de parcours dans un graphe qui considère plus d'informations que le traditionnel couple moyenne-variance. L'approche est fondée sur la mise à jour, à chaque nœud, d'un vecteur d'étiquettes (une étiquette optimale par budget de temps), structure comparable à celle utilisée pour les calculs du plus court chemin dans les graphes dynamiques.

Une question de recherche fondamentale associée au traitement de cet algorithme réside en l'évaluation des différents modèles statistiques qui servent à alimenter la définition des graphes stochastiques. Selon le modèle régissant le poids des arcs, le plus court chemin désigné est-il le même ? Autrement dit, dans quelle mesure peut-on considérer que les calculs de PCCS sont robustes au choix de la loi de probabilité destinée à représenter les temps de parcours dans le réseau ? Nous approfondirons cette question en mettant en évidence le rôle de différents paramètres tels que la taille du graphe, la précision de la discrétisation des distributions, ou même le niveau de variance utilisé lors de l'échantillonnage, au cœur d'une analyse impliquant un sous-ensemble de modèles évoqués dans la partie I.

Après avoir développé les définitions liées aux graphes stochastiques dans la section 4.1, nous établirons un cadre méthodologique visant à tester les solutions obtenues avec l'algorithme *SPOTAR* dans la section 4.2. Dans la section 4.3, une palette de résultats la plus exhaustive possible sera développée concernant la robustesse des chemins obtenus face aux choix de modélisation statistique, cela permettant par ailleurs une mise en contexte des travaux de la partie I pour la représentation des temps de parcours dans un réseau de transport.



## 4.1 Plus courts chemins stochastiques

Dans la première partie de ce chapitre, le cadre théorique de l'algorithme *SPOTAR* sera détaillé. Du fait de la définition stochastique du graphe, le principe de Bellman, garantissant qu'un sous-chemin d'un chemin optimal est également optimal, ne se matérialise plus de la même façon. Il est donc nécessaire d'utiliser un autre type de construction théorique pour explorer le graphe et étiqueter les sommets de manière adéquate. L'algorithme *SPO-TAR* sera lui-même également présenté : il constitue une méthode puissante pour calculer les probabilités d'arriver à l'heure, en considérant des distributions discrétisées.

### 4.1.1 Arcs stochastiques

Soit un graphe  $G = (V, E)$ , où  $V$  est l'ensemble des nœuds et  $E$  l'ensemble des arcs qui le composent. Classiquement, dans le problème du calcul du plus court chemin déterministe, les arcs  $(i, j) \in E$  sont caractérisés par un poids  $w_{ij}$  tel que  $w_{ij} \in \mathbb{R}$ . Ici, compte tenu de l'application envisagée, *i.e.* les coûts de franchissement des arcs correspondent à des temps de parcours sur des itinéraires, les poids des arcs sont définis sur l'ensemble des réels positifs.

Avec des temps de parcours définis comme des variables aléatoires distribuées, on pose d'ailleurs à cet effet  $T_{ij}$  la variable représentant le temps de parcours entre les nœuds  $i$  et  $j$  ( $i, j \in V$ ), les arcs  $(i, j) \in E$  sont alors pondérés par leurs réalisations  $\tau_{ij}$ .

Dans ce qui va suivre, et quelle que soit la distribution de probabilité choisie, on notera  $f_{ij}^*(x)$  la fonction de densité théorique de la variable  $T_{ij}$  ainsi que  $F_{ij}^*(x)$  sa fonction de répartition théorique. La fonction de densité théorique est discrétisée en une fonction de masse  $p_{ij}(x)$  par l'intermédiaire de la définition d'un intervalle de largeur  $\Delta_t$ , typique de la constitution d'un histogramme, et des  $T_{max}$  premiers entiers non nuls consécutifs (le temps de parcours maximal considéré étant ainsi égal à  $T_{max}\Delta_t$ ).

#### 4.1.1.1 Discrétisation de la fonction de densité

Afin d'exploiter les temps de parcours de manière algorithmique, les fonctions de densité sont discrétisées à la manière du procédé utilisé par Nie *et al.* [113]. Une illustration de cette transformation est fournie par les figures 4.1a et 4.1b. Analytiquement, la fonction  $f_{ij}^*(x)$  est discrétisée sous la forme de la fonction de masse suivante :

$$p_{ij}(x) = \begin{cases} F_{ij}^*(x + \Delta_t) - F_{ij}^*(x), & \text{si } x \in \{0, \Delta_t, \dots, \Delta_t(T_{max} - 1)\} \\ 1 - F_{ij}^*(x), & \text{si } x = \Delta_t T_{max} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.1)$$

où la fonction de répartition théorique  $F_{ij}^*$  peut s'écrire :

$$F_{ij}^*(x) = \int_0^x f_{ij}^*(t) dt \quad (4.2)$$

Le poids associé à la valeur  $t\Delta_t$  représente en réalité la probabilité d'obtenir une valeur dans l'intervalle  $[t\Delta_t; (t+1)\Delta_t]$ ,  $t \in \{0, \dots, T_{max} - 1\}$ .

À l'issue du procédé de discrétisation, une nouvelle fonction de répartition  $F_{ij}(t)$  émerge,  $\forall t \geq 0$  : il s'agit d'une fonction constante par morceaux dont les valeurs sont construites à partir des poids de la fonction de masse précédemment définie. Ainsi, on a :

$$F_{ij}(t\Delta_t) = \sum_{k \in \{0, \Delta_t, \dots, t\Delta_t\}} p_{ij}(k), \quad \forall t \in \{0, \dots, T_{max}\} \quad (4.3)$$

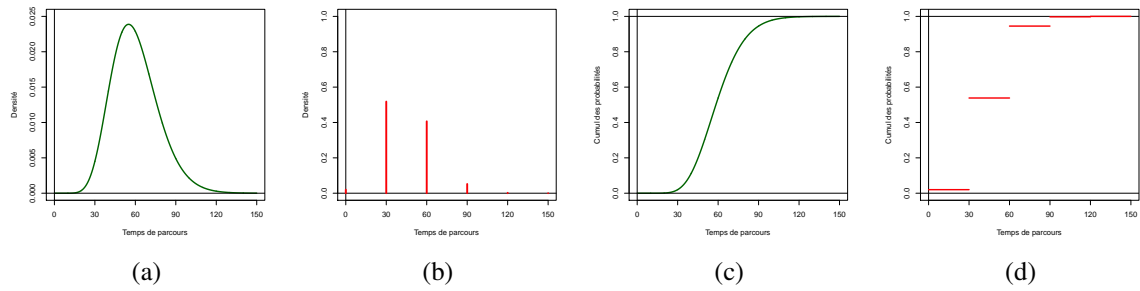


FIGURE 4.1 – Illustration du procédé de discrétisation selon la méthode de Nie *et al.* [113] : fonctions de densité (a) et de répartition (c) théoriques de la loi Gamma de paramètres (10;5), et adaptations respectives avec  $\Delta_t = 30$ ,  $T_{max} = 5$  (b,d)

En particulier, on peut écrire :

$$F_{ij}(0) = p_{ij}(0) \quad (4.4)$$

$$F_{ij}(T_{max}\Delta_t) = 1 \quad (4.5)$$

Par ailleurs, d'après la nature discrète des variables créées, on a  $\forall t \in \{0, \dots, T_{max} - 1\}$  :

$$F_{ij}(x) = F_{ij}(t\Delta_t), \forall x \in [t\Delta_t; (t+1)\Delta_t[ \quad (4.6)$$

On peut enfin déduire des équations 4.5 et 4.6 que :

$$F_{ij}(x) = 1, \forall x \geq T_{max}\Delta_t \quad (4.7)$$

Une description graphique des fonctions de répartition utilisées en entrée et obtenues en sortie du procédé de discrétisation est apportée par les figures 4.1c et 4.1d.

#### 4.1.1.2 Description des modèles utilisés

La définition des fonctions de masse telles qu'utilisées dans ce chapitre est un élément peu considéré dans la littérature. La présente analyse portera sur trois lois de probabilité discutées dans le chapitre 2, les lois Gamma, lognormale et normale (dans sa version tronquée sur l'ensembles réels positifs). Comme nous avons pu le constater dans le chapitre 3, les deux premières sont les plus utilisées dans le cadre de la résolution du problème du PCCS. La troisième apparaît comme un compromis parfait entre la richesse permise par le système de Halphen développé dans le chapitre 2 (elle apparaît d'ailleurs dans ce système en tant que cas limite), et la simplicité de modélisation qu'offrent ses deux paramètres. En outre, cette loi définie sur les réels positifs se rapproche également d'autres modèles tels que les lois de Weibull, exponentielle ou lognormale [47].

Ces trois lois présentent des niveaux de performance différents en matière d'ajustement, selon que l'on considère les temps de parcours dans leur intégralité ou les délais définis par rapport à un temps de référence ; elles respectent par ailleurs la propriété de fermeture par l'addition, au moins par approximation. Les autres lois évoquées dans la partie I pourraient également être rajoutées à l'analyse, leur éventuelle intégration constituant une perspective possible des présents travaux.

Les trois distributions sus-citées sont ici comparées sur une base d'échantillonnage commune. Les lois de probabilité sont générées à partir d'un couple de valeurs fondamentales, la

moyenne et l'écart-type empiriques, supposées connues compte tenu d'échantillons de temps de parcours hypothétiques. Soient  $m$  et  $s$  respectivement ces valeurs, le tableau 4.1 précise les estimateurs des trois modèles s'appuyant sur elles, selon la méthode des moments.

TABLEAU 4.1 – Estimateurs des paramètres des lois Gamma, lognormale et normale, selon la méthode des moments

Lois	Gamma	lognormale	normale
1	$\hat{\alpha} = \frac{m^2}{s^2}$	$\hat{\mu} = \ln\left(\frac{m^2}{\sqrt{m^2+s^2}}\right)$	$\hat{\mu} = m$
2	$\hat{\beta} = \frac{s^2}{m}$	$\hat{\sigma} = \sqrt{\ln\left(1 + \frac{s^2}{m^2}\right)}$	$\hat{\sigma} = s$

## 4.1.2 Opérations de base sur les arcs stochastiques

En prenant appui sur la structure vectorielle des coûts des arcs dans les graphes déterministes dépendants du temps exploitée par Batz [9], trois opérations de base sont définies pour la recherche du plus court chemin dans les graphes stochastiques : évaluation, concaténation et agrégation. Chacune de ces trois opérations est détaillée ci-après.

### 4.1.2.1 Évaluation

L'évaluation d'un arc stochastique revient à affecter une valeur numérique à une grandeur vectorielle. Deux possibilités sont ouvertes :

- D'une part, il est possible de calculer la probabilité de réaliser le trajet ciblé avec une durée inférieure à un budget temporel  $t$  donné. Cette option revient à évaluer la fonction de répartition en  $t$ .
- D'autre part, en prenant comme entrée une probabilité  $\alpha$ , il est possible de déterminer le temps de trajet nécessaire au parcours du chemin-cible dans  $\alpha\%$  des trajets. Ce second choix revient à calculer la valeur du quantile correspondant à la probabilité  $\alpha$ , à partir de l'inverse de la fonction de répartition.

Dans ces deux cas, l'évaluation va reposer sur deux vecteurs de taille  $T_{max} + 1$  spécifiés lors de la discrétisation des poids des arcs. Le premier contient tous les points supports, *i.e.* toutes les valeurs  $t$  telle que  $t \in \mathcal{T} = \{0, \Delta_t, \dots, T_{max}\Delta_t\}$ . Le second est le vecteur contenant la valeur de la fonction de répartition pour tous les points supports suscités, soit  $F_{ij}(t)$ ,  $\forall t \in \mathcal{T}$ . Les procédures d'évaluation sont décrites ci-après. L'étape d'évaluation s'appuie sur la définition fondamentale apportée par l'équation 4.6.

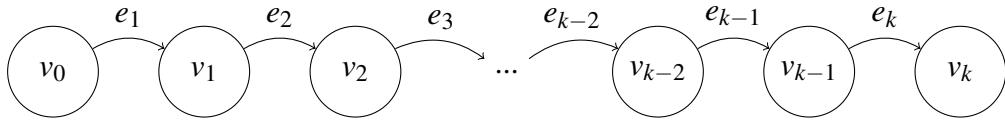
#### **Évaluation à partir de la fonction de répartition et d'un budget-temps $t$ :**

Dans ce cas, la procédure d'évaluation s'articule autour de deux étapes principales :

(Étape 1) Trouver  $k$  tel que  $k\Delta_t \leq t < (k+1)\Delta_t$

(Étape 2) Retourner  $F_{ij}(k\Delta_t)$

À l'aide d'une recherche binaire, la procédure a une complexité de  $O(\log |k|)$ , qui peut encore être réduite via la partition de l'intervalle  $[0; T_{max}\Delta_t[$ , à l'image de la procédure décrite par Batz [9].

FIGURE 4.2 – Itinéraire composé de  $k + 1$  nœuds et de  $k$  arcs successifs**Évaluation à partir de la fonction quantile et d'une probabilité  $\alpha$  :**

Ici, la procédure d'évaluation s'appuie sur un parcours du vecteur associé à la fonction de répartition, plutôt qu'à celui associé aux réalisations possibles du temps de parcours :

(Étape 1) Trouver  $k$  tel que  $F_{ij}(k\Delta_t) \leq \alpha < F_{ij}((k+1)\Delta_t)$

(Étape 2) Retourner  $k\Delta_t$

La complexité algorithmique est identique à celle du cas précédent.

**4.1.2.2 Concaténation**

La seconde opération à la base d'une méthode de calcul du plus court chemin stochastique est la constitution du modèle relatif à une succession d'arcs. Plusieurs lois de probabilité sont ainsi composées, de manière à obtenir le modèle global de temps de parcours sur l'itinéraire. Dans ce cadre, la solution conceptuelle naturelle est la convolution des lois statistiques. Dans le cas de lois de probabilité discrètes, on peut définir respectivement les fonctions de masse et de répartition de façon suivante :

$$p_{u \rightarrow w}(t) = \sum_{\tau=0}^t (p_{u \rightarrow v}(\tau) p_{v \rightarrow w}(t - \tau)) \quad (4.8)$$

$$F_{u \rightarrow w}(t) = \sum_{\tau=0}^t (F_{u \rightarrow v}(\tau) p_{v \rightarrow w}(t - \tau)) \quad (4.9)$$

où  $p_e$  et  $F_e$  désignent respectivement les fonctions de masse et de répartition régissant le modèle lié à l'arc  $e$  ( $\forall e \in E$ ),  $u, v, w \in V$  tels que  $(u, v), (v, w) \in E$ , et  $t \in \{0, \Delta_t, \dots, T_{max}\Delta_t\}$ . L'idée sous-jacente consiste dans les deux cas à répartir le temps total  $t$  nécessaire au parcours des deux arcs sur chacun d'entre eux, de telle façon que le nœud intermédiaire  $v$  est atteint en un temps  $\tau$ . Les indices sont d'ailleurs interchangeables dans ces formules, selon la convention de répartition utilisée.

Pour mener à bien les opérations de concaténation sur des itinéraires complets, tant dans des processus de recherche vers l'aval que vers l'amont, quelques propriétés doivent être établies. Soit un itinéraire tel que décrit par la figure 4.2. Il va s'agir d'étendre les relations illustrées par les équations 4.8 et 4.9 à des concaténations entre un itinéraire  $v_0 \rightarrow v_{k-1}$  composé de plusieurs segments et un  $k^{\text{ième}}$  segment  $(v_{k-1}, v_k)$  d'une part (convolution vers l'aval), et entre un segment  $(v_0, v_1)$  et un itinéraire  $v_1 \rightarrow v_k$  d'autre part (convolution vers l'amont). Ces deux aspects font appel aux notions de préfixe et de suffixe : dans une convolution vers l'aval (respectivement vers l'amont), on dit que le sous-chemin concaténé est le préfixe (respectivement le suffixe) du chemin complet. Dans la suite de cette section, pour simplifier les notations, on appelle  $p_i(t)$  la probabilité de parcourir l'arc  $e_i = (v_{i-1}, v_i)$  en un temps  $t \in \mathcal{T}$ , et  $F_i(t)$  la valeur de la fonction de répartition associée (*i.e.* la probabilité de parcourir  $e_i$  en un temps inférieur à  $t$ ).

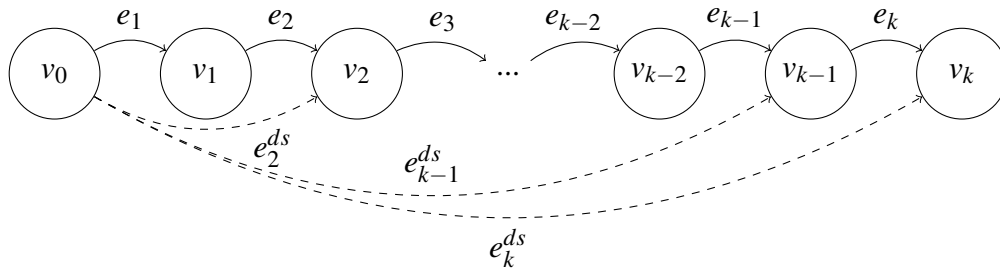


FIGURE 4.3 – Itinéraire composé de  $k + 1$  nœuds et de  $k$  arcs successifs, avec arcs synthétiques symbolisant les préfixes du chemin  $v_0 \rightarrow v_i, \forall i \in \{1, k\}$

### Convolution vers l'aval de la fonction de masse :

Dans ce premier cas, il s'agit de s'intéresser à la fonction de masse associée au temps de parcours du chemin reliant l'origine  $v_0$  au nœud  $v_n$ , que l'on note  $p_n^{ds}, \forall n \in \{1, \dots, k\}$ . Cette probabilité est associée à l'arc synthétique  $e_n^{ds}$  au sein de la figure 4.3. En particulier, on peut remarquer que  $e_1^{ds} = e_1$ .

**Proposition 1.** La probabilité  $p_n^{ds}(t)$  de parcourir le chemin  $v_0 \rightarrow v_n$  en un temps  $t$  est égale à la somme pour toutes les répartitions temporelles du produit des probabilités de traverser le sous-chemin  $v_0 \rightarrow v_{n-1}$  en un temps  $\tau$  et l'arc  $e_n = (v_{n-1}, v_n)$  en un temps égal à  $t - \tau, \forall n \in \{1, \dots, k\}$ . Autrement dit :

$$p_n^{ds}(t) = \sum_{\tau=0}^t \left( p_{n-1}^{ds}(\tau) p_n(t - \tau) \right) \quad (4.10)$$

*Démonstration.* La probabilité  $p_n^{ds}(t)$  correspond à la conjonction des événements indépendants « parcourir  $e_i$  en un temps  $\tau_i$  », où  $t = \sum_{i=1}^n \tau_i$ , elle-même matérialisée par le produit des probabilités  $p_i(t_i - t_{i-1}), \forall i \in \{1, \dots, n\}$ , et avec  $t_i - t_{i-1} = \tau_i, t_0 = 0$  et  $t_n = t$ . La décomposition du temps total peut être effective selon plusieurs combinaisons des  $\tau_i$ , si bien qu'il est possible d'écrire :

$$p_n^{ds}(t_n) = \sum_{t_{n-1}=0}^{t_n} \sum_{t_{n-2}=0}^{t_{n-1}} \dots \sum_{t_1=0}^{t_2} \left[ \prod_{i=1}^n p_i(t_i - t_{i-1}) \right] \quad (4.11)$$

On peut noter assez rapidement pour valider la proposition 1 que :

$$\sum_{t_{n-2}=0}^{t_{n-1}} \dots \sum_{t_1=0}^{t_2} \left[ \prod_{i=1}^{n-1} p_i(t_i - t_{i-1}) \right] = p_{n-1}^{ds}(t_{n-1}) \quad (4.12)$$

□

### Convolution vers l'amont de la fonction de masse :

Dans ce second cas, la fonction de masse associée au temps de parcours du chemin reliant le nœud  $v_n$  à l'arc  $v_k$  est primordiale, elle est notée  $p_n^{us}, \forall n \in \{0, \dots, k-1\}$ . Cette probabilité est associée à l'arc synthétique  $e_n^{us}$  au sein de la figure 4.4. On peut remarquer que  $e_{k-1}^{us} = e_k$  et  $e_0^{us} = e_k^{ds}$ .

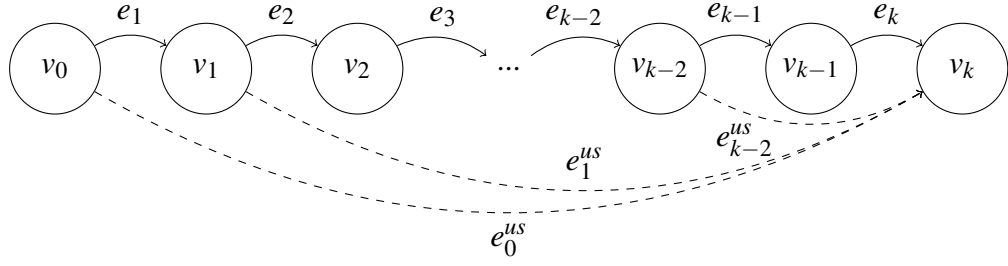


FIGURE 4.4 – Itinéraire composé de  $k + 1$  nœuds et de  $k$  arcs successifs, avec arcs synthétiques symbolisant les suffixes  $v_i \rightarrow v_k, \forall i \in \{0, k-1\}$

**Proposition 2.** La probabilité  $p_n^{us}(t)$  de parcourir le chemin  $v_n \rightarrow v_k$  en un temps  $t$  est égale à la somme pour toutes les répartitions temporelles du produit des probabilités de traverser l'arc  $e_{n+1} = (v_n, v_{n+1})$  en un temps  $\tau$  et le sous-chemin  $v_{n+1} \rightarrow v_k$  en un temps  $t - \tau, \forall n \in \{0, \dots, k-1\}$ . Autrement dit :

$$p_n^{us}(t) = \sum_{\tau=0}^t (p_{n+1}(\tau) p_{n+1}^{us}(t - \tau)) \quad (4.13)$$

*Démonstration.* À l'image de la preuve de la proposition 1, l'idée principale est d'isoler la probabilité de traverser le sous-chemin, ici le suffixe. En particulier, on note  $\tau_{k-1}$  le temps réalisé sur le dernier tronçon  $e_k$ , avec  $\tau_{k-1} = t_{k-1} - t_k$ , et on remonte le chemin en considérant des temps résiduels  $t_{i-1} - t_i, \forall i \in \{n+1, \dots, k\}$ , avec  $t_k = 0$ . On réécrit l'équation 4.11 avec les nouveaux indices :

$$p_n^{us}(t_n) = \sum_{t_{n+1}=0}^{t_n} \sum_{t_{n+2}=0}^{t_{n+1}} \dots \sum_{t_{k-1}=0}^{t_{k-2}} \left[ \prod_{i=n+1}^k p_i(t_{i-1} - t_i) \right] \quad (4.14)$$

$$p_n^{us}(t_n) = \sum_{t_{n+1}=0}^{t_n} \left[ p_{n+1}(t_n - t_{n+1}) \sum_{t_{n+2}=0}^{t_{n+1}} \dots \sum_{t_{k-1}=0}^{t_{k-2}} \prod_{i=n+2}^k p_i(t_{i-1} - t_i) \right] \quad (4.15)$$

De même que précédemment, on reconnaît  $p_{n+1}^{us}(t_{n+1})$ , et on obtient l'égalité donnée par la proposition 2, avec  $\tau = t_n - t_{n+1}$ .  $\square$

#### Convolution vers l'aval de la fonction de répartition :

La troisième propriété relative aux convolutions des distributions de temps de parcours dans le graphe se rapporte à la fonction de répartition décrivant la distribution sur un chemin  $v_0 \rightarrow v_n$ , par rapport à la définition du préfixe  $v_0 \rightarrow v_{n-1}$ , tel que décrit dans la figure 4.3. On définit  $F_n^{ds}, \forall n \in \{1, \dots, k\}$ , la fonction de répartition associée au chemin  $v_0 \rightarrow v_n$ .

**Proposition 3.** La probabilité  $F_n^{ds}(t)$  de parcourir le chemin  $v_0 \rightarrow v_n$  en un temps inférieur à  $t$  est égale à la somme pour toutes les répartitions temporelles du produit des probabilités de traverser le sous-chemin  $v_0 \rightarrow v_{n-1}$  en un temps inférieur à  $\tau$  et l'arc  $e_n = (v_{n-1}, v_n)$  en un temps égal à  $t - \tau, \forall n \in \{1, \dots, k\}$ . Autrement dit :

$$F_n^{ds}(t) = \sum_{\tau=0}^t (F_{n-1}^{ds}(\tau) p_n(t - \tau)) \quad (4.16)$$

*Démonstration.* Il est nécessaire de distinguer deux cas, en fonction de la valeur de  $n$  :

1. ( $n = 1$ ) En posant  $e_0$  l'arc reliant  $v_0$  à lui-même, on a  $p_0(0) = 1$  et  $F_0(t) = 1, \forall t \geq 0$ . Or, par construction,  $F_0^{ds}(t) = F_0(t), \forall t \in \mathcal{T}$ . On peut donc écrire :

$$\sum_{\tau=0}^t \left( F_0^{ds}(\tau) p_1(t-\tau) \right) = \sum_{\tau=0}^t p_1(t-\tau) = F_1(t) \quad (4.17)$$

Comme  $e_1$  et  $e_1^{ds}$  sont équivalents, on obtient bien la propriété pour  $n = 1$  :

$$F_1^{ds}(t) = \sum_{\tau=0}^t \left( F_0^{ds}(\tau) p_1(t-\tau) \right) \quad (4.18)$$

2. ( $n \in \{2, \dots, k\}$ ) Par définition de la fonction de répartition, on peut écrire :

$$F_{n+1}^{ds}(t) = \sum_{\tau=0}^t p_{n+1}^{ds}(\tau) \quad (4.19)$$

La propriété de convolution appliquée aux fonctions de masse (proposition 1) permet de développer ainsi :

$$F_{n+1}^{ds}(t) = \sum_{\tau=0}^t \sum_{h=0}^{\tau} \left( p_n^{ds}(h) p_{n+1}(\tau-h) \right) \quad (4.20)$$

Si on décompose cette expression pour chaque valeur de  $\tau$  :

$$F_{n+1}^{ds}(t) = \begin{cases} p_n^{ds}(0) p_{n+1}(0) & (\tau = 0) \\ + p_n^{ds}(0) p_{n+1}(1) + p_n^{ds}(1) p_{n+1}(0) & (\tau = 1) \\ \dots & \dots \\ + p_n^{ds}(0) p_{n+1}(t) + p_n^{ds}(1) p_{n+1}(t-1) + \dots + p_n^{ds}(t) p_{n+1}(0) & (\tau = t) \end{cases} \quad (4.21)$$

Il s'agit là d'une somme de  $t(t+1)/2$  termes, dont les composantes peuvent être réorganisées de la façon suivante (diagonale par diagonale, en commençant par le terme situé en bas à gauche dans la matrice) :

$$F_{n+1}^{ds}(t) = \left( \sum_{h=0}^{t-t} p_n^{ds}(h) \right) p_{n+1}(t) + \dots + \left( \sum_{h=0}^{t-0} p_n^{ds}(h) \right) p_{n+1}(0) \quad (4.22)$$

$$F_{n+1}^{ds}(t) = \sum_{\tau=0}^t \left[ \left( \sum_{h=0}^{t-(t-\tau)} p_n^{ds}(h) \right) p_{n+1}(t-\tau) \right] \quad (4.23)$$

$$F_{n+1}^{ds}(t) = \sum_{\tau=0}^t \left( F_n^{ds}(\tau) p_{n+1}(t-\tau) \right) \quad (4.24)$$

□

#### Convolution vers l'amont de la fonction de répartition :

La quatrième et dernière proposition consacrée aux convolutions concerne la fonction de répartition d'un chemin  $v_n \rightarrow v_k$  et son suffixe  $v_{n+1} \rightarrow v_k$ . Cette fonction est notée  $F_n^{us}, \forall n \in \{1, \dots, k\}$ .

**Proposition 4.** La probabilité  $F_n^{us}(t)$  de parcourir le chemin  $v_n \rightarrow v_k$  en un temps inférieur à  $t$  est égale à la somme pour toutes les répartitions temporelles du produit des probabilités de traverser l'arc  $e_{n+1} = (v_n, v_{n+1})$  en un temps  $\tau$  et le sous-chemin  $v_{n+1} \rightarrow v_k$  en un temps inférieur à  $t - \tau$ ,  $\forall n \in \{0, \dots, k-1\}$ . Autrement dit :

$$F_n^{us}(t) = \sum_{\tau=0}^t (p_{n+1}(\tau) F_{n+1}^{us}(t-\tau)) \quad (4.25)$$

*Démonstration.* Comme pour la preuve de la proposition 2, il faut distinguer deux cas :

1.  $n = k - 1$ . Au sein d'un graphe tel que celui décrit par la figure 4.4, on pose  $e_{k+1}$  l'arc reliant  $v_k$  à lui-même. On a, par construction,  $e_{k+1} = e_k^{us}$  (à titre de rappel, on a également  $e_k = e_{k-1}^{us}$ ),  $p_{k+1}(0) = 1$  et  $F_{k+1}(t) = 1, \forall t \geq 0$ . D'où,

$$F_k^{us}(t) = F_{k+1}(t) = 1, \forall t \geq 0 \quad (4.26)$$

On démontre ainsi l'égalité issue de la proposition 4 pour  $n = k - 1$  :

$$\sum_{\tau=0}^t p_k(\tau) F_k^{us}(t-\tau) = \sum_{\tau=0}^t p_k(\tau) = F_k(t) = F_{k-1}^{us}(t) \quad (4.27)$$

2.  $n \in \{0, \dots, k-2\}$ . La démonstration pour ce cas de figure se déroule de façon similaire au cas  $n = \{2, \dots, k\}$  pour la proposition 3. En utilisant la définition de la fonction de répartition ainsi que la proposition 2, on a :

$$F_n^{us}(t) = \sum_{\tau=0}^t \sum_{h=0}^{\tau} p_{n+1}(h) p_{n+1}^{us}(\tau-h) \quad (4.28)$$

La décomposition de l'équation en fonction des valeurs de  $\tau$  donne :

$$F_n^{us}(t) = \begin{cases} p_{n+1}(0) p_{n+1}^{us}(0) & (\tau = 0) \\ + p_{n+1}(0) p_{n+1}^{us}(1) + p_{n+1}(1) p_{n+1}^{us}(0) & (\tau = 1) \\ \dots & \dots \\ + p_{n+1}(0) p_{n+1}^{us}(t) + p_{n+1}(1) p_{n+1}^{us}(t-1) + \dots + p_{n+1}(t) p_{n+1}^{us}(0) & (\tau = t) \end{cases} \quad (4.29)$$

Si on considère les termes positionnés colonne par colonne :

$$F_n^{us}(t) = p_{n+1}(0) \sum_{h=0}^{t-0} p_{n+1}^{us}(h) + \dots + p_{n+1}(t) \sum_{h=0}^{t-t} p_{n+1}^{us}(h) \quad (4.30)$$

$$F_n^{us}(t) = \sum_{\tau=0}^t p_{n+1}(\tau) \sum_{h=0}^{t-\tau} p_{n+1}^{us}(h) \quad (4.31)$$

$$F_n^{us}(t) = \sum_{\tau=0}^t p_{n+1}(\tau) F_{n+1}^{us}(t-\tau) \quad (4.32)$$

□

Nous avons ici défini les opérations fondamentales permettant d'évaluer les distributions de temps de parcours (avec un paramètre d'entrée  $t$  ou  $\alpha$  selon le procédé d'évaluation choisi), et d'établir la loi les régissant sur des itinéraires constitués de plusieurs arcs consécutifs. La troisième opération relative à l'agrégation reste à décrire ci-dessous.



### 4.1.2.3 Agrégation

La troisième opération fondamentale associée aux arcs stochastiques est l'agrégation, qui doit produire une synthèse de la distribution des temps de parcours entre deux nœuds  $s, t \in V$ , dans le cas où plusieurs itinéraires permettent de joindre ces nœuds.

**Définition 1.** Soient  $v_0$  et  $v_k$  deux nœuds de  $G$ ,  $c_1$  et  $c_2$  deux chemins parallèles permettant de relier ces nœuds, et  $F_1$  et  $F_2$  (respectivement  $p_1$  et  $p_2$ ) les fonctions de répartition (respectivement les fonctions de masse) caractérisant les temps de parcours sur chacun de ces chemins. On définit  $m_{F_1, F_2}$  l'enveloppe supérieure de  $F_1$  et  $F_2$ , i.e. la fonction synthétique représentant les probabilités les plus favorables de parcourir la distance entre les nœuds  $v_0$  et  $v_k$  en un temps donné. On a :

$$m_{F_1, F_2}(t) = \max \{F_1(t), F_2(t)\}, \forall t \in \mathcal{T} = \{0, \Delta_t, \dots, T_{max}\Delta_t\} \quad (4.33)$$

**Corollaire 1.** La fonction  $m$ , bâtie comme l'enveloppe supérieure de deux fonctions de répartition, constitue elle-même une fonction de répartition.

*Démonstration.* Les temps de parcours sont des variables aléatoires définies ici sur l'ensemble  $\mathcal{T}$ . D'où  $F_1(x) = F_2(x) = 0$  si  $x < 0$  et  $F_1(x) = F_2(x) = 1$  si  $x \geq T_{max}\Delta_t$ , on en déduit :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} m_{F_1, F_2}(x) = 0 \quad (4.34)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} m_{F_1, F_2}(x) = 1 \quad (4.35)$$

Par ailleurs, on pose  $t \in \{0, \dots, (T_{max} - 1)\Delta_t\}$ . On a  $t \leq t + \Delta_t$ , et on cherche à comparer  $m_{F_1, F_2}(t)$  et  $m_{F_1, F_2}(t + \Delta_t)$ .

1. Cas 1 :  $F_1(t) \leq F_2(t)$  et  $F_1(t + \Delta_t) \leq F_2(t + \Delta_t)$  On conclut directement :

$$m_{F_1, F_2}(t) = F_2(t) \leq F_2(t + \Delta_t) = m_{F_1, F_2}(t + \Delta_t) \quad (4.36)$$

2. Cas 2 :  $F_1(t) \leq F_2(t)$  et  $F_1(t + \Delta_t) \geq F_2(t + \Delta_t)$  On remarque la suite d'inégalités suivantes :

$$F_1(t) \leq F_2(t) \leq F_2(t + \Delta_t) \leq F_1(t + \Delta_t) \quad (4.37)$$

Ce qui se traduit directement par :

$$m_{F_1, F_2}(t) = \max(F_1(t), F_2(t)) \leq \max(F_1(t + \Delta_t), F_2(t + \Delta_t)) = m_{F_1, F_2}(t + \Delta_t) \quad (4.38)$$

Ainsi, quelles que soient les fonctions  $F_1$  et  $F_2$ ,  $m_{F_1, F_2}(t) \leq m_{F_1, F_2}(t + \Delta_t)$ , i.e. la fonction  $m_{F_1, F_2}$  est croissante. Enfin, celle-ci est le maximum de deux fonctions continues à droite, elle est donc elle-même continue à droite.  $\square$

**Corollaire 2.** La fonction  $m'_{F_1, F_2}(t)$  telle que :

$$m'_{F_1, F_2}(t) = \begin{cases} m_{F_1, F_2}(t) - m_{F_1, F_2}(t - \Delta_t) & \text{si } t \in \mathcal{T} \setminus \{0\} \\ m_{F_1, F_2}(t) & \text{si } t = 0 \end{cases} \quad (4.39)$$

désigne la probabilité d'apparition de la valeur  $t$ , soit la fonction de masse du chemin synthétique entre  $v_0$  et  $v_k$ .

*Démonstration.* Deux cas de figure sont à distinguer :

— Pour  $t = 0$ , on a :

$$m'_{F_1, F_2}(0) = m_{F_1, F_2}(0) = \max(F_1(0), F_2(0)) = \max(p_1(0), p_2(0)) \quad (4.40)$$

Le maximum entre deux probabilités est bel et bien une probabilité.

— Pour  $t \in \mathcal{T} \setminus 0$ ,  $m$  étant croissante, on a :

$$m'_{F_1, F_2}(t) = m_{F_1, F_2}(t) - m_{F_1, F_2}(t - \Delta_t) \geq 0 \quad (4.41)$$

De plus,  $m_{F_1, F_2}(t - \Delta_t) \geq 0$  et  $m_{F_1, F_2}(t) \leq 1$ . On en déduit  $m'_{F_1, F_2}(t) \leq 1$ . □

Les propriétés de la fonction maximum permettent de noter que  $m$  est une fonction commutative et associative.

**Corollaire 3.** *La définition de la fonction  $m$  est généralisable pour  $k$  chemins  $c_i$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, k\}$  :*

$$m_{F_1, \dots, F_k}(t) = \max\{F_i(t) \mid i \in \{1, \dots, k\}\}, \forall t \in \mathcal{T} \quad (4.42)$$

*Démonstration.* On sait que  $m_{F_1, F_2}(t) = \max(F_1(t), F_2(t))$ ,  $\forall t \in \mathcal{T}$ . De même,  $\forall t \in \mathcal{T}$  on a :

$$m_{F_1, F_2, F_3}(t) = \max(F_1(t), m_{F_2, F_3}(t)) = \max(F_1(t), \max(F_2(t), F_3(t))) \quad (4.43)$$

$$m_{F_1, F_2, F_3}(t) = \max(F_1(t), F_2(t), F_3(t)) \quad (4.44)$$

La même opération est effectuée jusqu'à intégrer les  $k$  fonctions de répartition initiales dans la comparaison. □

L'agrégation de plusieurs fonctions de répartition revient à décaler les poids de la fonction de masse vers les valeurs les plus faibles de l'horizon, comme illustré par la figure 4.5. Celle-ci décrit l'opération d'agrégation pour deux chemins parallèles entre des nœuds  $u$  et  $w$ , décrits comme suit :

- un arc synthétique fruit de la concaténation des arcs  $e_1 = (u, v)$  et  $e_2 = (v, w)$  définis respectivement par les distributions discrètes suivantes :  $p_{u \rightarrow v}(0) = 0.6$  et  $p_{u \rightarrow v}(1) = 0.4$  d'une part,  $p_{v \rightarrow w}(0) = 0.1$ ,  $p_{v \rightarrow w}(1) = 0.8$  et  $p_{v \rightarrow w}(2) = 0.1$  d'autre part. La distribution du chemin résultant de cette concaténation est obtenue grâce aux éléments fournis dans la section 4.1.2.2 :  $p_{u \rightarrow v \rightarrow w}(0) = 0.06$ ,  $p_{u \rightarrow v \rightarrow w}(1) = 0.52$ ,  $p_{u \rightarrow v \rightarrow w}(2) = 0.38$  et  $p_{u \rightarrow v \rightarrow w}(3) = 0.04$  ;
- un arc direct  $e_3 = (u, w)$  dont le poids est distribué tel que  $p_{u \rightarrow w}(0) = 0.1$ ,  $p_{u \rightarrow w}(1) = 0.4$ ,  $p_{u \rightarrow w}(2) = 0.3$  et  $p_{u \rightarrow w}(3) = 0.2$ .

Dans cet exemple, le poids associé au temps  $t = 0$  après l'étape d'agrégation est issu de l'arc  $e_3$ , alors que le reste des poids vient de l'arc synthétique produit par la concaténation de  $e_1$  et  $e_2$ . La comparaison entre la distribution finale et celle de l'arc synthétique illustre le décalage mentionné plus haut : elles sont en tout point similaires, sauf sur les deux premiers points support.

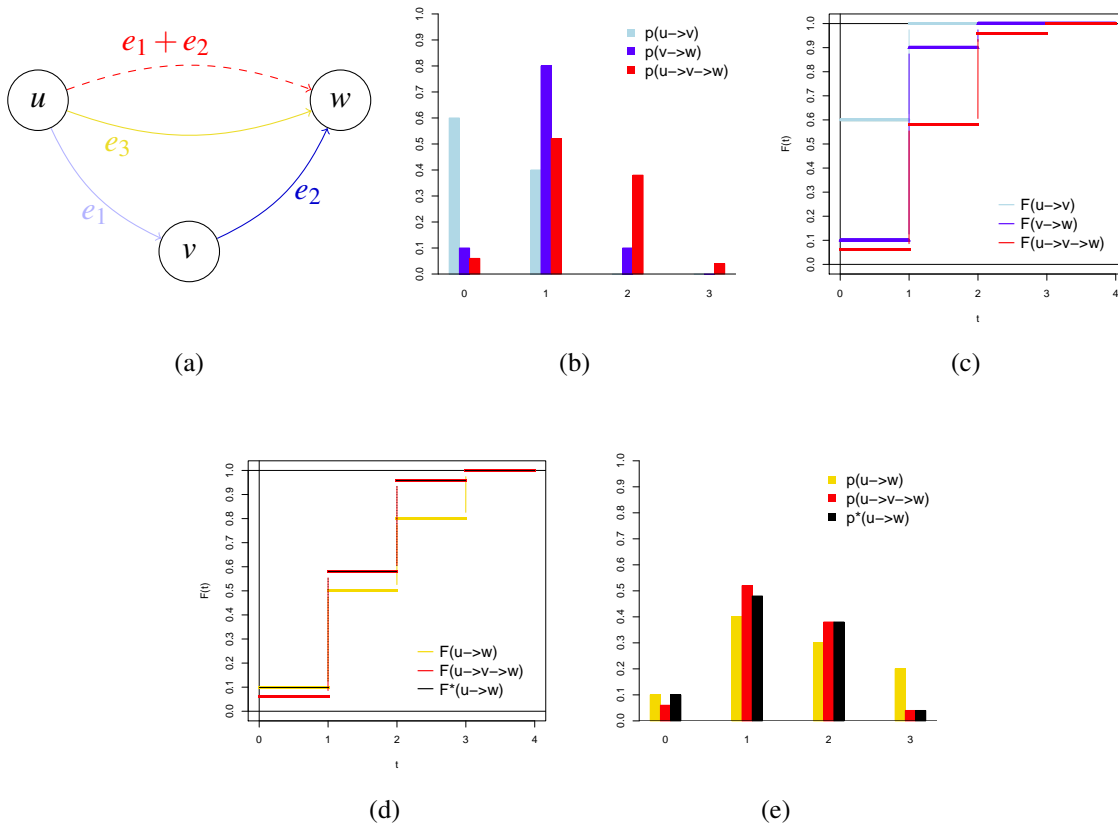


FIGURE 4.5 – Illustration des opérations de concaténation et d’agrégation sur les arcs stochastiques : Sous-graphe considéré (a) ; Concaténation des deux arcs consécutifs  $e_1$  et  $e_2$  : fonction de masse (b) et fonction de répartition (c) ; Agrégation de l’arc obtenu avec l’arc  $e_3$  via la fonction de répartition (d) et fonction de masse résultante (e)

### 4.1.3 Dominance stochastique et politiques de routage

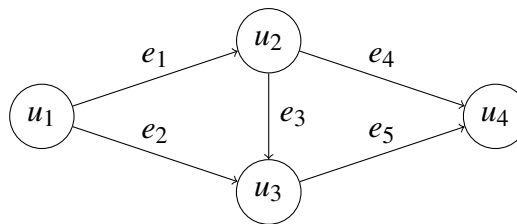
Dans le cas d’un calcul du plus court chemin déterministe et statique, les algorithmes traditionnels, tels que ceux basés sur la programmation dynamique ou encore ceux utilisant un processus d’étiquetage, permettent d’obtenir des chemins optimaux. Ces méthodes de résolution se fondent sur le principe d’optimalité de Bellman, qui implique la récursivité.

Dans le cas de graphes stochastiques, le parcours d’un graphe et le stockage de l’information sur les meilleurs prédécesseurs sont plus complexes, et nécessitent l’emploi de structures de données et de procédés de comparaison entre étiquettes plus sophistiqués. Cette section donnera l’occasion de présenter les *politiques de routage*, telles que définies par Nie *et al.* [113], qui s’appuient sur la notion de dominance stochastique du premier ordre, décrite dans la section 3.2.3.

#### 4.1.3.1 Reconstitution du chemin optimal dans un graphe stochastique

Dans des graphes où les arcs sont définis par des pondérations stochastiques, les chemins explorés sont nettement plus complexes à reconstituer à partir d’une information sur le nœud prédécesseur optimal.

Pour illustrer cette complexité, considérons le cas simple proposé par la figure 4.6. En po-

FIGURE 4.6 – Comment reconstituer l'itinéraire optimal entre  $u_1$  et  $u_4$  ?

sant  $\Delta_t = 1$ , on cherche à répondre à la question suivante : quelle est la probabilité d'atteindre  $u_4$  à partir de  $u_1$  en seulement deux unités de temps ? Par des relations de convolution, il est assez rapide d'obtenir la valeur de  $F_4(2)$ , soit la probabilité recherchée. Deux prédécesseurs sont possibles, pour chaque budget-temps :  $u_2$  ou  $u_3$ , la meilleure solution étant obtenue via la comparaison de deux distributions :

- la première est issue de la convolution entre la fonction de répartition associée au nœud  $u_2$  et la fonction de masse associée à l'arc  $e_4$ , reliant  $u_2$  à  $u_4$  ;
- la seconde est le produit de convolution entre la fonction de répartition associée au nœud  $u_3$  et la fonction de masse de l'arc  $e_5$ , issu de  $u_3$  et dirigé vers  $u_4$ .

En admettant que la meilleure distribution soit la seconde pour  $t = 2$ , cela signifie que le prédécesseur optimal est  $u_3$  pour ce budget-temps. La même question se pose ensuite pour le nœud  $u_3$ . À chaque budget-temps, le prédécesseur de  $u_3$  est donné par la distribution optimale au nœud, *i.e.* par le produit de convolution maximisant la probabilité cumulée d'arriver à  $u_3$ . Or, la date de passage au nœud  $u_3$  n'est pas garantie : atteindre le nœud  $u_4$  en  $t = 2$  est possible dans 3 situations (atteindre  $u_3$  respectivement en  $t = 0$ ,  $t = 1$  ou  $t = 2$  et traverser  $e_5$  respectivement en 2, 1 ou 0 unité(s) de temps). Quelle que soit la réalisation du temps de parcours sur  $e_5$ , le résidu de budget devra être alloué selon le même procédé sur les arcs en amont, jusqu'à atteindre le nœud source.

Il s'agit donc de répondre à un problème d'allocation d'un budget positif (le temps de parcours donné ou obtenu par calcul) sur un ensemble de « postes budgétaires » (les différents arcs du chemin optimal à reconstituer), la difficulté résidant dans l'explosion combinatoire générée par l'importance du budget-temps à allouer d'une part, et par la quantité d'arcs traversés d'autre part. Le tableau 4.2 décrit le nombre de réalisations possibles pour chaque couple  $\{\text{budget}, \text{arcs}\}$ , et la forme générale de l'expression pour des valeurs  $t$  et  $|e|$  quelconques. À titre de remarque, on note que la taille de l'information  $p^*$  sur le chemin préfixe est régie par trois équations fondamentales :

$$p^*(t, |e|) = p^*(t, |e| - 1) + p^*(t - 1, |e|) \quad (4.45)$$

$$p^*(t, |e|) = \sum_{\tau=0}^t p^*(\tau, |e| - 1) \quad (4.46)$$

$$p^*(t, |e|) = \sum_{e=0}^{|e|} p^*(t - 1, e) \quad (4.47)$$

La reconstitution du chemin optimal dans le problème du plus court chemin stochastique est donc nettement moins simple que dans le cas déterministe, puisqu'elle nécessite de retenir l'information inhérente à chaque scénario préalablement à tout effort de reconstitution du chemin. Cela équivaut à une énumération de chemins optimaux, comme l'ont fait remarquer

TABLEAU 4.2 – Taille  $p^*(t, |e|)$  de l'information sur les prédécesseurs, pour un budget  $t$  et un nombre d'arc  $|e|$  dans l'itinéraire à reconstituer

$p^*(t,  e )$	$ e  = 1$	$ e  = 2$	$ e  = 3$	...	$ e  = n$
$t = 0$	1	1	1	...	1
$t = 1$	1	2	3	...	$\sum_{e=1}^n (1) = n$
$t = 2$	1	3	6	...	$\sum_{e_2=1}^n \sum_{e_1=1}^{e_2} (1)$
$t = 3$	1	4	10	...	...
$t = 4$	1	5	15	...	...
...	...	...	...	...	...
$t = T$	1	$\sum_{t_1=0}^T (1) = T + 1$	$\sum_{t_2=0}^T \sum_{t_1=0}^{t_2} (1)$	...	$\sum_{t_n=0}^T \sum_{t_{n-1}=0}^{t_n} \dots \sum_{t_1=0}^{t_2} (1)$

Nie *et al.* [113]. La conception d'une structure de données plus complexe s'avère également essentielle du fait de la nature combinatoire du graphe des prédécesseurs.

#### 4.1.3.2 Construction des politiques de routage

Une nouvelle structure de données mise à jour au gré des différentes visites aux nœuds est associée aux éléments précédents, la *routing policy*, que l'on peut traduire par *politique de routage*. Cette structure est constituée par l'ensemble des chemins non-dominés entre une origine et une destination données.

Nie *et al.* [113] proposent deux versions de politiques de routage, en soulignant les avantages et les inconvénients de chacune :

- La première est fondée sur la relation de dominance simple : elle produit l'ensemble des chemins optimaux et donne donc la solution exacte au problème de recherche du plus court chemin stochastique. Cependant, elle demande un traitement plus élaboré, et conduit à la conservation de chemins ne contribuant pas directement à la distribution enveloppe, synthèse des distributions associées aux chemins optimaux.
- La seconde est une approximation de la solution optimale fondée sur la relation de dominance de groupe : ne sont conservés que les chemins contribuant directement à la distribution enveloppe, *i.e.* les chemins non-dominés par le groupe des autres chemins. Cette version accélère le temps de résolution au prix d'une perte limitée de la précision de l'algorithme. De plus, cette approximation permet de borner la quantité de chemins optimaux par la taille du vecteur de budget, notée ici  $T_{max}$ .

Dans cette thèse, le parti est pris d'accélérer le temps de résolution du problème, dans le but de proposer des outils utilisables opérationnellement et résistants à l'échelle. La seconde option de routage est donc conservée, et seuls les chemins contribuant à la distribution enveloppe sont considérés par la suite. La définition des politiques de routage développées dans notre travail est inspirée par les travaux précédents.

**Définition 2.** On appelle politique de routage d'un nœud source  $s$  à un nœud destination  $d$  le sous-ensemble  $C^*$  de chemins reliant les deux nœuds et dont les distributions vérifient l'équation 3.21.

**Définition 3.** L'agrégation des distributions relatives aux chemins  $c \in C^*$ , *i.e.* leur enveloppe supérieure, forme la frontière de Pareto de la politique de routage, une fonction de répartition optimale que l'on note ici  $F^*$ . Cette frontière marque la probabilité maximale de relier deux nœuds en un budget-temps donné.

---

**Algorithme 1** (*SPOTAR, version pseudo-code*) Recherche du plus court chemin stochastique (d'après Nie *et al.* [113])

---

**ENTRÉES:** Graphe  $G = (V, E)$ , nœud destination  $d \in V$

**SORTIES:** Politiques de routage  $[\mathcal{P}_v^*]_{v \in V}$  pour rejoindre  $d$  depuis les nœuds  $v \in V$

```

1:  $\mathcal{P}_v^* \leftarrow \{\emptyset\}$ 
2:  $Q \leftarrow \{d\}$  ▷ Initialiser la file d'attente avec le chemin menant de  $d$  à lui-même
3: TantQue  $Q \neq \emptyset$  Faire
4:   Extraire le chemin courant  $c$  depuis  $Q$ , soit  $j$  le nœud le plus en amont de  $c$ 
5:   Pour  $e = (i, j) \in E$  Faire
6:     Vérifier que le chemin  $c' = \{i, c\}$  est acyclique
7:     Calculer la fonction de répartition  $F_{c'}$ 
8:     Si  $c'$  est le seul chemin reliant  $i$  à  $d$  Alors
9:       Initialiser  $\mathcal{P}_i^*$  avec  $c'$  ▷ Le chemin optimal est  $c'$  quel que soit  $t$ 
10:       $Q \leftarrow Q \cup \{c'\}$ 
11:     Sinon
12:       Si  $\exists t \in \{0, \Delta_t, \dots, \Delta_t T_{max}\}$  tel que  $c'$  améliore la frontière de Pareto Alors
13:         Mettre à jour  $\mathcal{P}_i^*$  ▷ La frontière est modifiée, le chemin  $c'$  ajouté à la politique de routage, et les anciens chemins optimaux pour les budgets concernés sont susceptibles d'en être retirés
14:          $Q \leftarrow Q \cup \{c'\}$ 
15:       FinSi
16:     FinSi
17:   FinPour
18: FinTantQue
19: Retourner  $\mathcal{P}_v^*$ 

```

---

**Définition 4.** On note  $c_t^*$  le chemin optimal entre  $s$  et  $d$  pour un budget équivalent à  $t$ . Cette information répond à la requête simple de recherche de chemin compte tenu d'un budget-temps disponible.

Pour la déclinaison de ces notions sur un exemple, une politique de routage typique est détaillée dans l'annexe D.

#### 4.1.4 Algorithme SPOTAR

Les définitions précédentes posent les bases de la recherche du plus court chemin stochastique. Pour en tirer profit, le pseudo-code donné par l'algorithme 1 propose une version simplifiée de la procédure *SPOTAR*, initialement proposée par Nie *et al.* [113]. Cette procédure est un algorithme d'étiquetage fondé sur le développement et la mise à jour des politiques de routage  $[\mathcal{P}_v^*]_{v \in V}$ , depuis chaque nœud du graphe jusqu'à une destination donnée.

Une file d'attente  $Q$  joue le même rôle que dans l'algorithme de Dijkstra, elle est alimentée par des chemins plutôt que par des nœuds : cela permet d'admettre l'existence de plusieurs chemins optimaux pour un même couple origine-destination. Son initialisation est réalisée à la ligne 2, les chemins en étant extraits à la ligne 4. À chaque itération, le chemin courant  $c$  est étendu en un chemin  $c'$  à l'aide de chacun des nœuds prédécesseurs du nœud  $j$ , le plus en amont de  $c$  (ligne 5). À la condition de n'être pas constitué d'un cycle, le nouveau chemin est susceptible d'être intégré à la politique du nœud prédécesseur, soit en tant qu'unique chemin d'une nouvelle politique (ligne 9), soit en tant qu'énième chemin d'une

politique déjà existante (ligne 13). Dans le second cas, la question de son intégration est résolue par le biais de la comparaison entre la fonction de répartition candidate et la frontière de Pareto, au moyen de la relation de dominance (ligne 12).

Si la fonction de répartition candidate n'est pas dominée par la frontière de Pareto au sens de la dominance stochastique du premier ordre, il est alors nécessaire d'intégrer le nouveau chemin à la politique. En complément, il est nécessaire de vérifier si les anciens chemins optimaux (en particulier ceux tout juste surpassés par le chemin candidat) sont toujours non-dominés par la frontière de Pareto : si ce n'est plus le cas, ils sont à exclure de la politique.

## 4.2 Éléments méthodologiques et plan d'expérience

La question de l'importance de la modélisation probabiliste des pondérations doit être examinée pour évaluer son impact sur le calcul du PCCS. Autrement dit, parvient-on à des résultats différents selon que l'on choisisse de modéliser les poids des arcs par des lois normale, lognormale ou Gamma, les trois lois considérées dans ce chapitre ?

Pour répondre à cette question, et afin d'organiser au mieux les essais, un plan d'expérience sera conçu dans cette section. Les différents facteurs le constituant (liés à la topologie du graphe d'une part, et au modèle de pondération des arcs d'autre part) ainsi qu'une batterie d'indicateurs visant à qualifier les performances de l'algorithme seront présentés.

### 4.2.1 Présentation générale et vocabulaire

Trois principaux facteurs définissent une première brique de ce plan d'expérience : le graphe ( $G$ ), le scénario de variance ( $V$ ) et le niveau de précision de la discrétisation ( $H$ ). La conjonction de ces trois facteurs constitue un **problème (Pb)**. Avec 4 graphes, 3 scénarios de variance et 3 niveaux de précision des distributions, 36 problèmes sont examinés. Pour minimiser les fluctuations dues à l'échantillonnage, 3 **réplications (R)** sont générées pour chaque problème. Pour chaque réplication, une copie déterministe du graphe est produite à des fins de comparaison entre cas déterministe et cas stochastiques. La définition d'une **instance (I)** inclut le modèle statistique ( $M$ ) avec lequel les arcs du graphe sont représentés. La déclinaison des réplications en fonction des trois lois de probabilité aboutit à la considération de 324 instances. Le tableau 4.3 propose une version simplifiée du tableau d'expérimentations ainsi constitué.

L'algorithme *SPOTAR* est une procédure de type « all-to-one », *i.e.* son exécution conduit à la résolution de  $|V|$  requêtes de plus courts chemins. 10 destinations sont choisies aléatoirement pour chaque réplication. En négligeant le cas où l'origine et la destination sont identiques,  $10(|V| - 1)$  **politiques de routage (P)** sont ainsi calculées à chaque résolution d'instance. Toutes ces politiques de routage représentent autant de couples origine-destination, et donc de **distances entre origine et destination (D)**. 3 niveaux sont retenus pour ce facteur. Enfin, les **chemins optimaux (C)** constituent les résultats des expériences. Trois valeurs sont considérées pour la **probabilité d'être à l'heure (Q)**, de manière à extraire trois chemins optimaux par politique de routage en fonction des centiles des frontières de Pareto.

Cinq facteurs sont croisés pour constituer les **configurations (Cf)**, l'élément de base des comparaisons entre les modèles : le graphe, le scénario de variance, le niveau de précision de la discrétisation, la distance entre origine et destination et la probabilité désirée d'arriver à l'heure. Ainsi, 324 configurations sont construites, dans lesquelles le nombre de chemins obtenus équivaut au nombre de couples origine-destination séparés par la distance considérée multiplié par le nombre d'instances par problème.

TABLEAU 4.3 – Extraits du tableau d'expérimentations : 36 problèmes constitués par un graphe, un scénario de variance et un niveau de précision des discrétisations sont déclinés chacun en 9 instances, définies également par une réplication et une loi de probabilité

Problème	Instance	Réplication	Modèle probabiliste
Pb1={G1,V1,H1}	1	R1	M1
	2	R1	M2
	9	R3	M3
Pb2={G1,V1,H2}	10	R1	M1
	18	R3	M3
	316	R1	M1
Pb36={G4,V3,H3}	324	R3	M3

## 4.2.2 Facteurs de l'analyse

### 4.2.2.1 Graphes

Dans le cadre de cette étude, quatre graphes de nature différente sont utilisés, et représentés par la figure 4.7. En premier lieu, des adaptations de graphes disponibles en téléchargement libre (<http://www.bgu.ac.il/~bargera/tntp/>) sont construites pour bénéficier de graphes routiers réalistes, les graphes de *Sioux Falls* (noté *SF*) et *ChicagoSketch* (noté *CS*). Le premier contient 24 nœuds et 76 arcs, et correspondra à un graphe test dans les analyses à venir. Le second est un réseau de taille intermédiaire, composé de 546 nœuds et 2176 arcs. Dans sa forme originale, 387 nœuds supplémentaires figurent également dans le graphe, mais sans réelle signification physique (en réalité, il s'agit de centroïdes conçus pour la résolution d'un problème d'affectation du trafic) : ces nœuds n'ont pas été considérés ici. Une correction a été appliquée à ces graphes pour pallier les défauts de connectivité dans les données brutes : tous les nœuds peuvent ainsi être considérés comme origine ou destination pendant les phases de requête.

Deux autres graphes sont ajoutés ici, il s'agit de réseaux synthétiques sous forme de grilles régulières. Ils contiennent respectivement 10 et 20 nœuds de côté, ce qui correspond à 100 nœuds et 360 arcs pour le premier, et 400 nœuds et 1520 arcs pour le second. Ces graphes sont notés respectivement *G10* et *G20*.

Pour enrichir les scénarios de temps de parcours, une typologie des arcs est considérée dans chaque graphe : certains arcs correspondent à des autoroutes urbaines ou peri-urbaines dans le réseau de Chicago, ils sont mis en valeur en bleu dans la figure 4.7c. Par ailleurs, sur les réseaux en grille (figures 4.7b et 4.7d), une distinction voisine est entreprise. Les arcs reliant les nœuds en bordure de graphe sont vus comme des tronçons d'un périphérique urbain et sont représentés également en bleu, alors que quelques axes Nord-Sud (respectivement Est-Ouest) sont considérés comme des axes « structurants » : ils sont vus comme des grands boulevards urbains, sur lesquels le trafic est important. Ceux-là sont représentés en vert.

Les pondérations associées aux arcs de ces graphes sont des temps de parcours constants au cours du temps distribués selon des lois de probabilité. En guise de point de départ à leur définition, un temps de parcours à vide est fixé. Ce temps est récupéré avec la topologie du graphe pour les graphes réels, et généré aléatoirement sur les réseaux en grille :



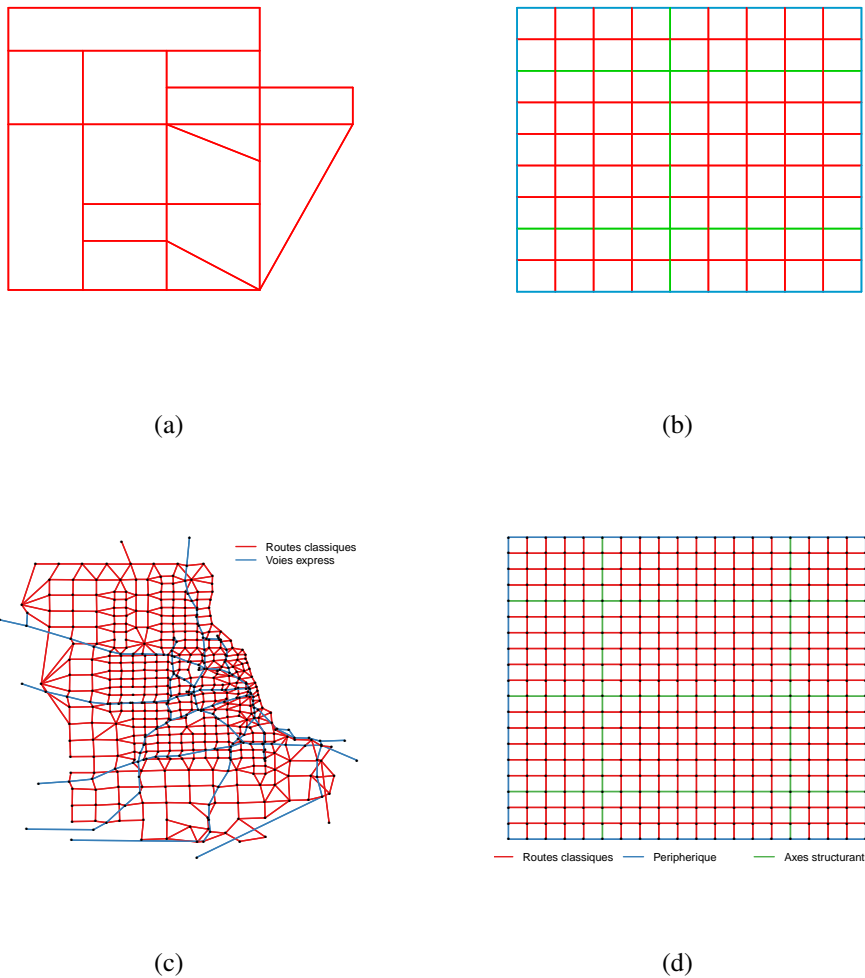


FIGURE 4.7 – Graphes utilisés dans les expérimentations : (a) réseau de Sioux-Falls ; (b) grille 10\*10 ; (c) réseau simplifié de Chicago (a) ; (d) grille 20\*20

- les arcs périphériques sont caractérisés par un temps à vide généré à partir d'une loi uniforme sur l'intervalle  $[10; 40]$ , ces arcs sont traités de la même façon que les auto-routes urbaines dans le graphe *CS* ;
- les axes structurants sont associés à des temps à vide générés selon une loi uniforme sur l'intervalle  $[20; 50]$  ;
- les arcs restants constituent le contingent des arcs « classiques », le temps fluide qui les caractérise est généré selon une loi uniforme sur l'intervalle  $[40; 80]$ .

#### 4.2.2.2 Scénario de variabilité

Comme l'ont fait remarquer Nie *et al.* [113] dans une comparaison entre la procédure *SPOTAR* et l'algorithme *LET* de Miller-Hooks *et al.* [107], la variance de la distribution peut avoir un impact sur la qualité de la modélisation, et justifie d'aller plus loin que l'espérance du temps de parcours.

Chaque arc  $e \in E$  est caractérisé par un temps de parcours à vide  $t_e^{min}$  et un retard distribué. Cette seconde composante est échantillonnée à partir de l'espérance et de l'écart-type

TABLEAU 4.4 – Profils de discrétisation des distributions retenus pour les expérimentations : pour chaque graphe et chaque nombre de points supports  $T_{max}$ , on peut déduire la largeur  $\Delta_t$  d'un intervalle de discrétisation

	SF	G10	G20	CS
$T_{max}\Delta_t$	3600	3600	3600	25200
$T_{max} = 60$	60	60	60	420
$T_{max} = 120$	30	30	30	210
$T_{max} = 600$	6	6	6	42

« empiriques » propres à chaque arc. En l'absence de données réelles, ces valeurs sont elles-mêmes issues de processus de génération aléatoire définis comme suit :

- La moyenne  $\mu_e$  est générée selon une loi uniforme sur l'ensemble des entiers compris entre 0 et  $t_e^{min}$  exclus.
- L'écart-type  $\sigma_e$  est généré dans un intervalle  $[\alpha_{LB}^s \mu_e; \alpha_{UB}^s \mu_e]$ , selon une loi uniforme entière, où  $\alpha_{LB}^s$  et  $\alpha_{UB}^s$  désignent respectivement les bornes inférieure et supérieure dans le scénario  $s$  ( $s = 1$  : variance faible,  $2$  : moyenne ou  $3$  : forte). Les valeurs retenues pour la génération des écarts-types sont :  $\alpha_{LB}^1 = 0.2$ ,  $\alpha_{UB}^1 = 0.3$ ,  $\alpha_{LB}^2 = 0.45$ ,  $\alpha_{UB}^2 = 0.55$ ,  $\alpha_{LB}^3 = 0.7$ , et  $\alpha_{UB}^3 = 0.8$ .

En définitive, les temps de parcours sur les différents arcs se décomposent en deux composantes. La première correspond au temps de parcours fluide, qui constitue un minimum en-dessous duquel aucune réalisation n'est possible. La seconde, elle, représente le retard par rapport à ce temps minimum, elle est caractérisée par une moyenne et un écart-type définis tels que ci-dessus, et sa distribution de probabilité est l'une des distributions évoquées dans la section 4.1.1. Des vecteurs  $[\mu_e]_{e \in E}$  et  $[\sigma_e]_{e \in E}$  sont définis pour chaque réplique.

### 4.2.2.3 Précision des distributions de temps de parcours

La discrétisation des distributions suppose une perte de précision par rapport au cas continu plus ou moins importante selon le nombre de points supports et la largeur des classes de l'histogramme sous-jacent. Le tableau 4.4 précise les horizons temporels  $T_{max}\Delta_t$  affectés à chaque graphe, ainsi que les différents profils de discrétisation utilisés. Les trois quantités de points supports sur lesquelles se fonde la discrétisation des temps de parcours sont respectivement 60, 120 et 600. Les unités de temps utilisées sont voulues relativement conformes à la topologie des graphes, et peuvent se lire comme étant des secondes.

Si des réalisations de temps de parcours sur un itinéraire donné dépassent mathématiquement la limite supérieure  $T_{max}\Delta_t$ , il est choisi d'assigner la probabilité résiduelle au dernier point support. Bien qu'intéressant pour comparer les distributions deux à deux, ce choix de modélisation est problématique si l'horizon temporel est trop court : dans ce dernier cas, les réalisations de temps de parcours sont toutes agglomérées sur le point support  $t = T_{max}\Delta_t$ , et les comparaisons entre les chemins perdent en efficacité. Les horizons temporels propres à chaque graphe ont donc été dimensionnés de manière à éviter cet écueil. La valeur maximale  $T_{max}\Delta_t$  est le plus petit multiple de 3600 (soit une heure, si l'unité de temps est la seconde) supérieur à  $D9(t_e^{min}) * 2\sqrt{|V|}$ , où  $D9(t_e^{min})$  est le neuvième décile des temps de parcours en régime fluide sur le graphe, et  $2\sqrt{|V|}$  est une estimation de la longueur maximale d'un itinéraire optimal dans un réseau en grille, donnée par la distance entre un coin du graphe et son opposé.

TABLEAU 4.5 – Valeurs des niveaux retenus pour la distance entre l'origine et la destination (en nombre d'arcs)

Graphe	SF	G10	G20	CS
<i>D1</i>	1	2	5	5
<i>D5</i>	3	6	13	12
<i>D9</i>	5	11	22	19

#### 4.2.2.4 Distance entre origine et destination

La distance entre l'origine et la destination est le nombre minimal d'arcs séparant les deux sommets. Le calcul de cette distance est réalisé par un algorithme de Dijkstra sur des versions des graphes pour lesquelles le coût de franchissement de tous les arcs vaut 1.

Pour chacun des graphes, l'ensemble des distances origine-destination constitue une population statistique. Comme évoqué précédemment, 10 destinations sont aléatoirement sélectionnées, conduisant de facto à la construction d'un échantillon de distances. La valeur maximale au sein de cet échantillon donne le nombre de niveaux à tester pour ce paramètre. Pour simplifier l'analyse, seules seront considérées trois distances pour chaque graphe :

- Une distance courte, évaluée par le premier décile de la distribution des distances (soit une distance de *D1* arcs) ;
- Une distance moyenne, évaluée par le cinquième décile (*D5* arcs) ;
- Une distance longue, évaluée par le neuvième décile (*D9* arcs).

Seuls les PCCS calculés entre des nœuds origine et destination séparés par *D1*, *D5* et *D9* arcs sont retenus dans la suite de l'analyse. Les niveaux de ce paramètre pour chaque graphe sont explicités dans le tableau 4.5.

#### 4.2.2.5 Probabilité d'être à l'heure

Dans une politique de routage, chaque budget-temps correspond à un chemin, et donc à une probabilité maximisée d'être à l'heure. En inversant la perspective, on peut considérer qu'à toute probabilité donnée d'être à l'heure, correspond un chemin optimal minimisant le budget-temps. Les différentes probabilités considérées suggèrent des niveaux de propension au risque également différents. Dans cet esprit, nous choisissons de tester trois valeurs de probabilité : 0.1, 0.5 et 0.9, qui correspondent ainsi aux 10<sup>ème</sup>, 50<sup>ème</sup> et 90<sup>ème</sup> centiles de la frontière de Pareto associée à la politique de routage. Pour un niveau de probabilité fixé, les chemins optimaux identifiés pourront donc être comparés d'un modèle à l'autre.

### 4.2.3 Indicateurs de comparaison

L'impact du choix du modèle probabiliste est mesuré par les indicateurs suivants :

#### 4.2.3.1 Similarité des modèles stochastiques

Considérons les cinq situations suivantes :

- (S1) Des arcs distribués selon des lois normale, lognormale ou Gamma conduisent à des chemins optimaux tous différents ;

TABLEAU 4.6 – Couples de modèles pour lesquels les proportions d'arcs communs sont comparées

Modèle 1	Modèle 2
déterministe	normal
déterministe	lognormal
déterministe	Gamma
normal	lognormal
normal	Gamma
lognormal	Gamma

- (S2) Les chemins optimaux sont les mêmes que les arcs soient distribués selon des lois normale ou lognormale, mais différent s'ils sont distribués selon une loi Gamma ;
- (S3) Les chemins optimaux sont les mêmes que les arcs soient distribués selon des lois normale ou Gamma, mais différent s'ils sont distribués selon une loi lognormale ;
- (S4) Les chemins optimaux sont les mêmes que les arcs soient distribués selon des lois lognormale ou Gamma, mais différent s'ils sont distribués selon une loi normale ;
- (S5) Les chemins optimaux sont les mêmes que les arcs soient distribués selon des lois normale, lognormale ou Gamma.

L'indicateur que nous utiliserons pour mesurer le degré de similarité des modèles stochastiques calcule la proportion moyenne de chacune de ces cinq situations parmi tous les résultats d'une même configuration, soit 324 valeurs.

#### 4.2.3.2 Similarité avec le modèle déterministe

Cet indicateur traduit le niveau de similarité entre les chemins optimaux obtenus si les poids des arcs sont déterministes et ceux obtenus pour les autres modèles de pondérations (lois normale, lognormale ou Gamma). Le chemin déterministe de référence est calculé par l'algorithme de Dijkstra dans une copie du graphe associé à la réplique telle que la variance est nulle pour tous les arcs.

Pour chaque configuration, la valeur de ce second indicateur est la proportion moyenne de chemins similaires entre les cas. À l'image du premier indicateur, 324 valeurs sont calculées.

#### 4.2.3.3 Proportion d'arcs communs

Comparer deux à deux les quatre modèles (les trois cas stochastiques, plus le cas déterministe) revient à effectuer six comparaisons indiquées dans le tableau 4.6.

Pour chacune de ces six situations, l'indicateur utilise le pourcentage moyen d'arcs en commun dans les chemins obtenus, sur toutes les expériences d'une même configuration. Il constitue une généralisation des deux premiers indicateurs. Par convention, la référence du nombre d'arc est donnée par le premier des deux modèles, pour chaque couple mentionné précédemment.

#### 4.2.3.4 Temps de calcul par instance

Le quatrième indicateur consiste en une mesure du temps nécessaire à l'exécution de l'algorithme SPOTAR, pour chacune des instances.

Comme évoqué dans les paragraphes précédents, une exécution de l'algorithme permet le calcul de  $|V| - 1$  plus courts chemins, soit un par nœud origine, pour une destination

donnée. Deux indicateurs temporels sont alors proposés : le temps moyen nécessaire pour la résolution d'une requête, et le temps pris pour la résolution d'un groupe de  $|V| - 1$  requêtes.

## 4.3 Résultats de l'analyse de sensibilité

L'analyse des résultats correspondant aux valeurs prises par chacun des quatre indicateurs sera déclinée en fonction des différents facteurs du plan d'expérience. À chaque fois, un sous-ensemble de configurations sera mis en avant à des fins de concision. L'intégralité des résultats figure toutefois en annexe (cf annexe E). Par ailleurs, l'exemple de politique de routage présenté dans l'annexe D propose une illustration de chemins optimaux obtenus dans ces expériences, accompagnée des distributions des temps de parcours associées.

Les expérimentations sont réalisées sous l'environnement Windows sur une machine dotée de 32Go de mémoire vive, d'un processeur *Intel Xeon E3-1225 3.2GHz* équipé de 4 cœurs. Les programmes sont écrits en C++, selon la norme C++11, et compilés sur l'IDE Eclipse, à l'aide de MinGW.

### 4.3.1 Comparaison des chemins proposés par les modèles stochastiques

L'examen de l'indicateur de similarité des modèles stochastiques (cf figure 4.8) donne une première tendance quant à la répartition des cinq situations décrites dans la section 4.2.3.1. Les configurations représentées ne mettent en valeur qu'un seul niveau de distance entre origine et destination, à savoir les distances plutôt longues (décile  $D9$ ). Toutefois, la variété des graphes fait que les distances restent diversifiées. Dans la majorité des situations, les trois modèles (Gamma, lognormal, normal) fournissent des chemins optimaux identiques, peu importe la nature du graphe, la probabilité d'arriver à l'heure à la destination, la précision des discrétisations et le niveau de variance du scénario.

Un examen plus détaillé des configurations montre que le graphe *CS* est le seul pour lequel le choix du modèle statistique paraît avoir un impact réel quant au chemin identifié. En particulier, lorsque la précision de la discrétisation est faible, les modèles donnent des résultats différents dans près de 80% des cas. Les situations les plus fréquentes sont une divergence totale des trois modèles (zone noire), ou une divergence de la loi Gamma seule (zone rouge). Quelques situations se démarquent aussi par le biais d'une divergence de la loi lognormale (zone verte). La loi normale représente ainsi souvent une solution de consensus, à défaut d'être le meilleur modèle. En ce qui concerne la probabilité d'arrivée en un temps donné, les différences ne sont pas réellement marquées, ce qui constitue une demi-surprise : les trois modèles étant caractérisés par des coefficients d'asymétrie différents, les chemins qu'ils mettent en valeur auraient pu diverger de façon nettement plus prononcée, en particulier pour les trajets dits « sûrs », *i.e.* où une probabilité d'être à l'heure de 90% est visée. La loi normale ne diverge des autres modèles que lorsque les niveaux de variance sont élevés, et les pourcentages d'apparition des situations concernées restent assez faibles (moins de 10%). Bien sûr, des niveaux de variance plus élevés que ceux retenus ici (pour rappel, les écarts-types représentent entre 70 et 80% de la moyenne des délais) pourraient augmenter la fréquence de ces situations, mais il convient de conserver des hypothèses en phase avec le phénomène physique étudié ici.

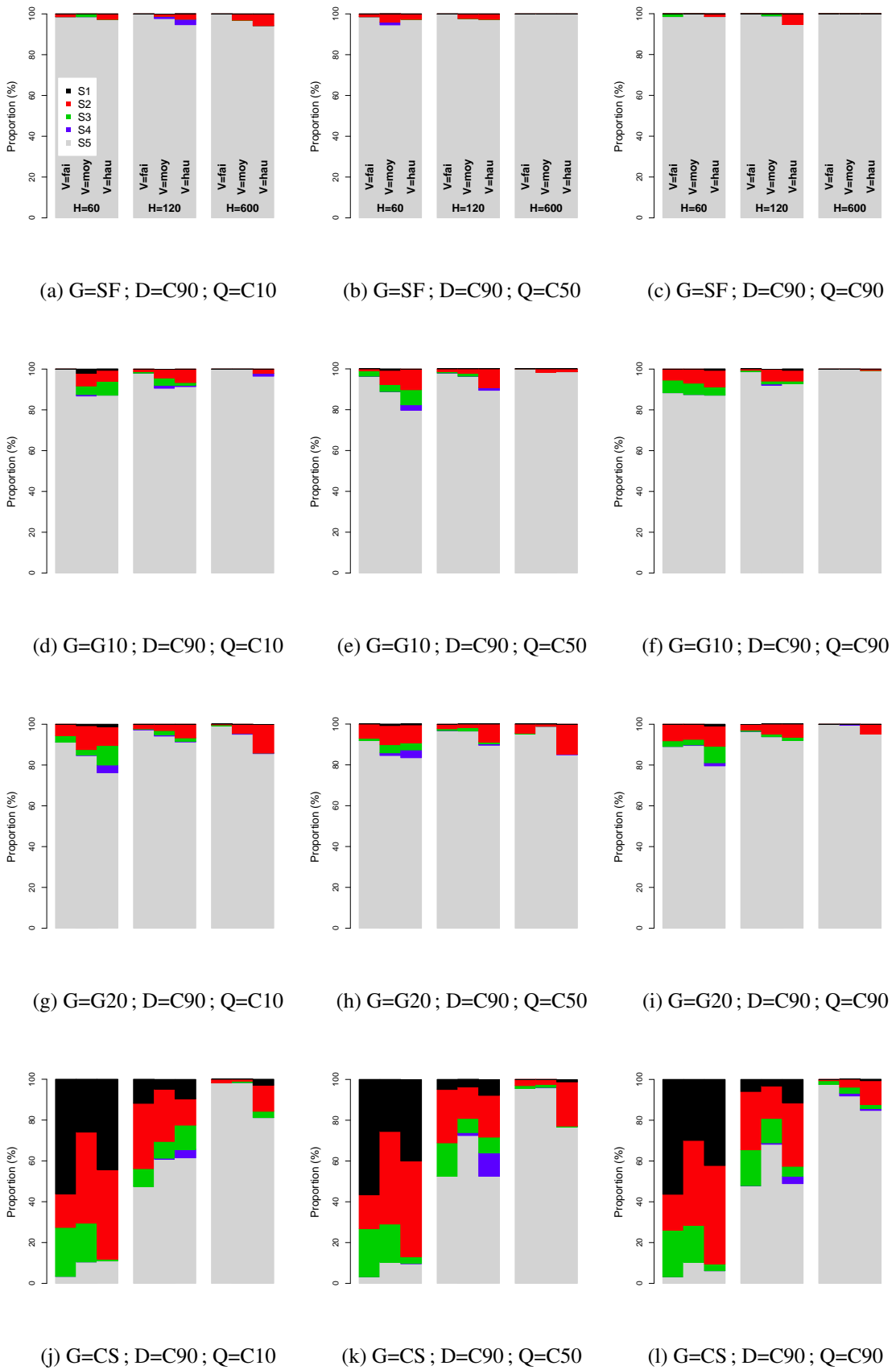
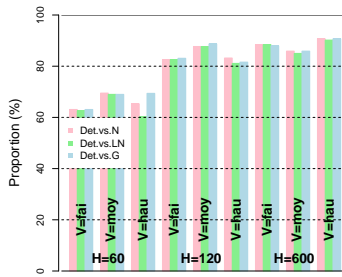
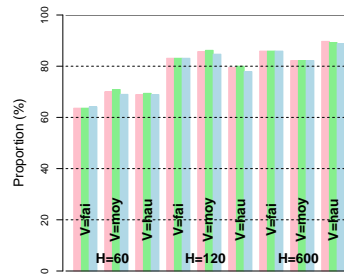


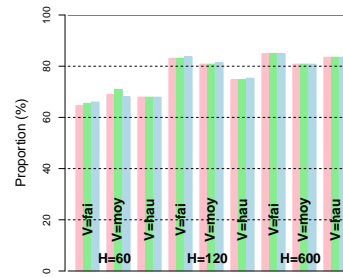
FIGURE 4.8 – Proportions des 5 situations constituant le premier indicateur pour un sous-ensemble de configurations  $G*V*H*D*Q$



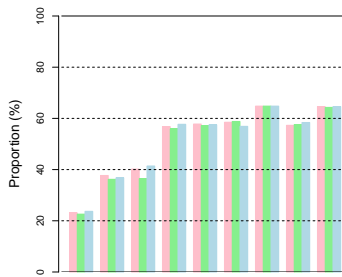
(a)  $G=G10$ ;  $D=C10$ ;  $Q=C10$



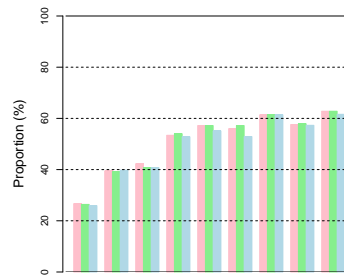
(b)  $G=G10$ ;  $D=C10$ ;  $Q=C50$



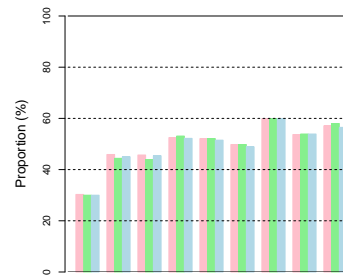
(c)  $G=G10$ ;  $D=C10$ ;  $Q=C90$



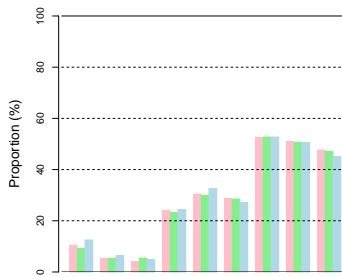
(d)  $G=G10$ ;  $D=C50$ ;  $Q=C10$



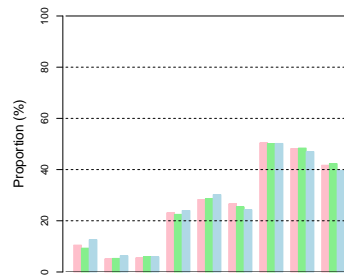
(e)  $G=G10$ ;  $D=C50$ ;  $Q=C50$



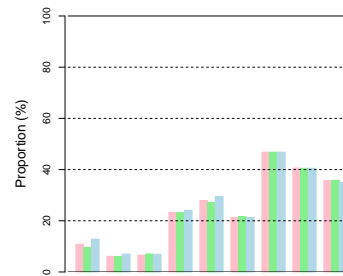
(f)  $G=G10$ ;  $D=C50$ ;  $Q=C90$



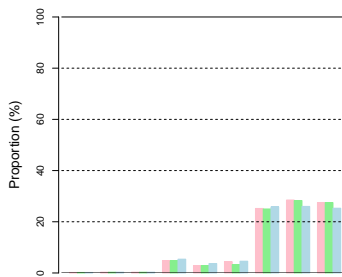
(g)  $G=CS$ ;  $D=C10$ ;  $Q=C10$



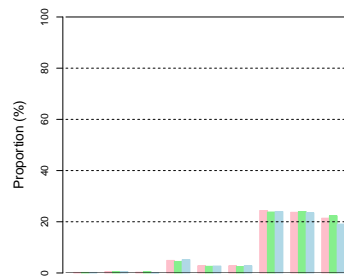
(h)  $G=CS$ ;  $D=C10$ ;  $Q=C50$



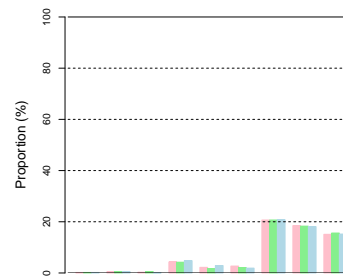
(i)  $G=CS$ ;  $D=C10$ ;  $Q=C90$



(j)  $G=CS$ ;  $D=C50$ ;  $Q=C10$



(k)  $G=CS$ ;  $D=C50$ ;  $Q=C50$



(l)  $G=CS$ ;  $D=C50$ ;  $Q=C90$

FIGURE 4.9 – Proportions de chemins équivalents entre cas déterministe et cas stochastiques, pour un sous-ensemble de configurations  $G*V*H*D*Q$

### 4.3.2 Comparaison entre modèle déterministe et modèles stochastiques

La figure 4.9 montre que les pourcentages de divergence entre les chemins optimaux des cas déterministes et stochastiques sont plus élevés. Elle illustre les problèmes impliquant les graphes *G10* et *CS*, pour des distances faibles à moyennes entre les nœuds origine et destination. Ainsi, pour un graphe de taille moyenne, avec des distances plutôt faibles entre origine et destination, l'apport des modèles stochastiques est réduit : les mêmes chemins optimaux sont mis en valeur dans 60 à 90% des cas. Ce pourcentage tombe entre 20 et 60% si la distance origine-destination augmente, dans le même graphe. Dans un graphe plus grand basé sur une architecture de réseau de transport réaliste, le modèle déterministe ne donne le même chemin que dans 5 à 50% des cas pour une distance faible, et 0 à 30% des cas pour une distance plus élevée. Ainsi, encore une fois, le graphe et la distance origine-destination apparaissent comme des facteurs aggravant l'impact du choix du modèle de pondération des arcs.

En considérant les autres facteurs, les conclusions sont variables. La précision des discrétisations est l'autre facteur important. Comme précédemment, les chemins trouvés par les modèles ont plus tendance à diverger si le nombre de classes de discrétisation est faible. Sauf à considérer que les écarts entre les niveaux de variance sont trop faibles pour mettre en valeur des différences marquées, le niveau de variance apparaît lui n'avoir qu'un impact réduit. Il faut toutefois noter que considérer un niveau de variance non nul amène à identifier des chemins différents. Cela confirme l'insuffisance d'une modélisation déterministe. Enfin, la probabilité d'arriver à l'heure dans un temps limité, observable en fonction des colonnes de graphiques, n'a pas non plus d'impact sur la nature des chemins obtenus, compte tenu de la structure des graphes utilisés : le pourcentage de similarité des cas déterministe et stochastique ne varie pas significativement avec les évolutions de ce facteur.

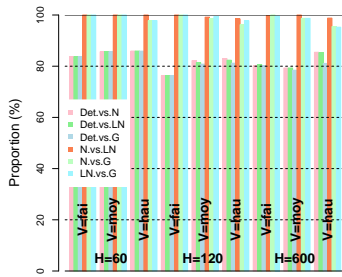
### 4.3.3 Proportion d'arcs communs entre les chemins optimaux

Pour le dernier indicateur lié à la similitude des chemins obtenus par les différents modèles, le choix est fait de représenter le même graphe (*CS*) pour différents niveaux de distance origine-destination, avec une série de configurations propres au graphe *SF* servant de référence. Deux ensembles de résultats se distinguent : d'une part, les comparaisons entre chemins déterministes et chemins stochastiques, et d'autre part les comparaisons entre les chemins stochastiques proposés par des modèles statistiques différents. Le taux d'arcs communs est toujours plus faible dans le premier cas, ce qui est en phase avec les proportions de chemins équivalents données dans les paragraphes précédents.

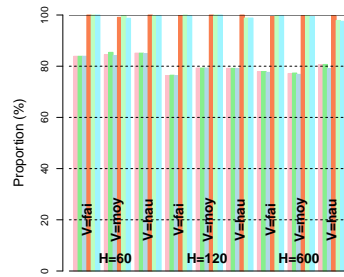
Pour le graphe référence *SF* associé à une distance médiane, les chemins stochastiques sont quasiment systématiquement équivalents, les taux d'arcs en commun avoisinant les 100%. Ceux-ci s'établissent autour de 90% dans le cas d'une comparaison avec les chemins déterministes. Ces résultats sont robustes aux évolutions des niveaux de variance, à la précision de la discrétisation et à la probabilité donnée d'être à l'heure.

Dans les configurations mettant en scène le graphe *CS*, les taux d'arcs en commun entre les chemins stochastiques restent toujours au-dessus de 70%, démontrant la grande similarité entre les solutions optimales obtenues quel que soit le modèle statistique utilisé. Ce résultat est à mettre en perspective avec ceux proposés par les graphes 4.8j, 4.8k et 4.8l : même si les chemins identifiés divergent, ce n'est finalement qu'à travers un nombre limité d'arcs. Par rapport aux chemins déterministes, les divergences sont plus grandes : le taux d'arcs en commun est d'environ 70% pour les distances courtes et une discrétisation précise, alors qu'il n'est que d'environ 30% pour une distance plus longue, et une discrétisation grossière des

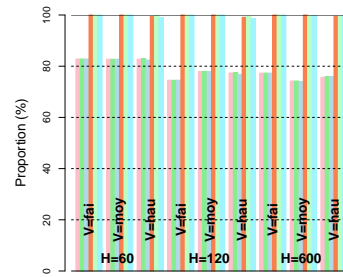




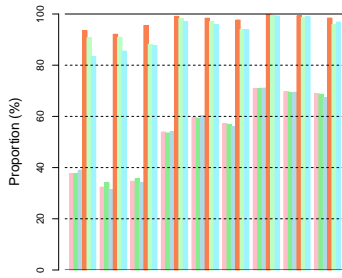
(a) G=SF ; D=C50 ; Q=C10



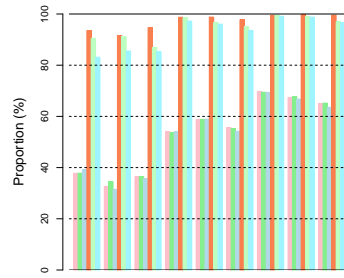
(b) G=SF ; D=C50 ; Q=C50



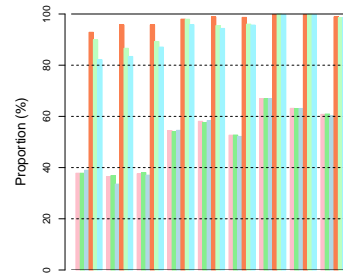
(c) G=SF ; D=C50 ; Q=C90



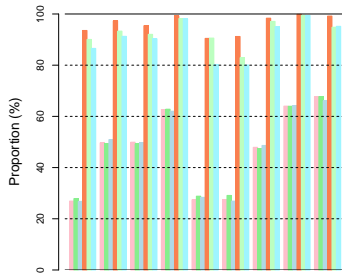
(d) G=CS ; D=C10 ; Q=C10



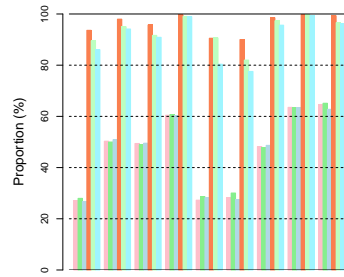
(e) G=CS ; D=C10 ; Q=C50



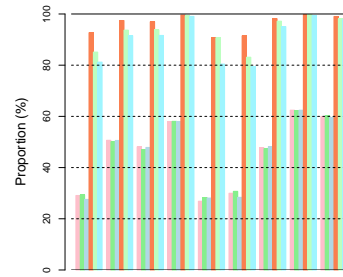
(f) G=CS ; D=C10 ; Q=C90



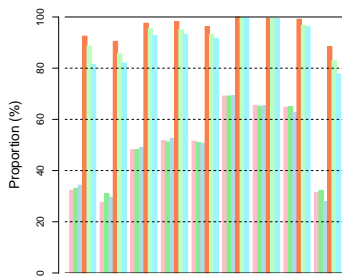
(g) G=CS ; D=C50 ; Q=C10



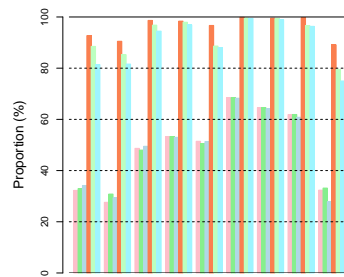
(h) G=CS ; D=C50 ; Q=C50



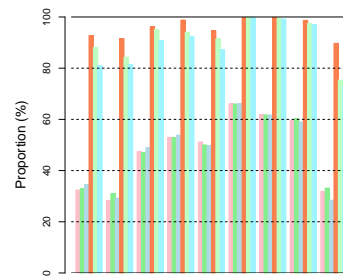
(i) G=CS ; D=C50 ; Q=C90



(j) G=CS ; D=C90 ; Q=C10



(k) G=CS ; D=C90 ; Q=C50



(l) G=CS ; D=C90 ; Q=C90

FIGURE 4.10 – Proportions d’arcs en commun pour chaque binôme de modèles, pour un sous-ensemble de configurations  $G*V*H*D*Q$

TABLEAU 4.7 – Temps d'exécution moyen par requête de l'algorithme *SPOTAR* (en millisecondes)

Graphe	Variance	fai			med			hau		
	Modèle	gam	log	nor	gam	log	nor	gam	log	nor
	Tmax									
<i>SF</i>	60	0.53	0.52	0.55	0.59	0.62	0.55	0.62	0.65	0.56
	120	1.12	1.10	1.19	1.17	1.22	1.14	1.28	1.30	1.15
	600	17.55	17.16	19.29	17.58	17.64	18.27	19.17	20.29	18.91
<i>G10</i>	60	3.06	2.47	2.63	2.75	2.70	2.94	2.81	2.91	2.95
	120	5.61	3.77	4.12	4.43	4.38	4.89	4.95	5.37	5.54
	600	93.67	57.71	65.77	64.30	63.45	72.84	77.24	82.91	86.38
<i>G20</i>	60	10.21	8.79	9.56	9.97	10.04	10.27	8.95	10.21	8.69
	120	16.16	13.23	14.44	14.88	15.40	15.73	16.97	18.96	16.36
	600	196.93	152.28	177.11	199.53	196.32	232.44	248.06	270.81	246.66
<i>CS</i>	60	24.49	22.29	19.97	24.16	23.26	23.50	24.07	30.33	27.78
	120	32.20	24.73	26.54	29.13	30.49	28.19	35.19	40.48	33.38
	600	264.65	181.16	195.17	258.07	268.37	266.38	252.24	292.91	251.97

fonctions constitutives des modèles statistiques. Dans ces derniers cas, à mettre en relation avec les graphes 4.9g à 4.9i, les chemins stochastiques sont réellement différents des chemins déterministes : ils partagent avec eux une quantité limitée d'arcs, et/ou proposent des chemins totalement alternatifs pour certaines requêtes.

#### 4.3.4 Évaluation des temps de calcul

Dans une perspective opérationnelle, la question des temps de calcul de la procédure *SPOTAR* est importante, elle n'est toutefois pas traitée dans la littérature et en particulier par Nie *et al.* [113]. Chaque exécution de l'algorithme permet le calcul de  $|V| - 1$  requêtes de plus courts chemins dirigées vers le même nœud destination. En termes de mesure du temps de calcul, l'algorithme peut profiter de cet aspect pour réduire le temps moyen de résolution d'une requête. Les temps moyens obtenus pour chacun des problèmes figurent dans le tableau 4.7. On note ainsi que parmi les problèmes les plus longs à résoudre, celui composé du graphe *CS*, de 600 classes de discrétisation et d'une variance élevée demande environ 250 à 300 millisecondes par requête.

Les données figurant dans ce tableau montrent comme attendu que le temps de calcul est fortement sensible à la taille du graphe, ainsi qu'à la précision de la discrétisation. Ainsi, plus le graphe est grand, et plus la résolution d'une requête est longue, à la nuance près que les réseaux en grille, de par cette topologie particulière, bénéficient de temps réduits (*cf* comparaison entre les graphes *G20* et *CS*). De même, plus la précision de la discrétisation des fonctions de densité est élevée, et plus le temps de calcul sera long, principalement du fait d'opérations de concaténation plus lourdes à réaliser. Le troisième paramètre constitutif des problèmes est le niveau de variance, son impact sur les temps de calcul est plus réduit : un niveau de variance plus élevé génère un traitement légèrement plus long. En plus des premiers paramètres, le tableau 4.7 donne également les temps de traitement pour les différents modèles. Au vu des chronométrages, le choix du modèle statistique n'apparaît pas comme décisif quant à la rapidité de résolution des requêtes.

Ceci étant dit, avec un lot de requêtes intégrant des destinations différentes, il apparaît également crédible de mesurer le temps pris par chaque exécution de l'algorithme. Cette seconde série de temps de calcul figure dans le tableau 4.8. Mesurés en secondes, ces temps

TABLEAU 4.8 – Temps d'exécution par groupe de requêtes de l'algorithme *SPOTAR* (en secondes)

Graphe	Variance	fai			med			hau		
	Modèle	gam	log	nor	gam	log	nor	gam	log	nor
	Tmax									
<i>SF</i>	60	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
	120	0.03	0.02	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03
	600	0.40	0.40	0.44	0.40	0.41	0.42	0.44	0.47	0.43
<i>G10</i>	60	0.30	0.24	0.26	0.27	0.27	0.29	0.28	0.29	0.29
	120	0.56	0.37	0.41	0.44	0.43	0.48	0.49	0.53	0.55
	600	9.27	5.71	6.51	6.37	6.28	7.21	7.65	8.21	8.55
<i>G20</i>	60	4.07	3.50	3.81	3.98	4.00	4.10	3.57	4.07	3.47
	120	6.45	5.28	5.76	5.94	6.15	6.28	6.77	7.56	6.53
	600	78.57	60.76	70.67	79.61	78.33	92.74	98.98	108.05	98.42
<i>CS</i>	60	13.35	12.15	10.88	13.17	12.68	12.81	13.12	16.53	15.14
	120	17.55	13.48	14.46	15.88	16.62	15.36	19.18	22.06	18.19
	600	144.23	98.73	106.37	140.65	146.26	145.18	137.47	159.63	137.32

de calcul suggèrent la difficulté d'intégrer un algorithme du plus court chemin stochastique dans un calculateur d'itinéraires standard. Les effets des différents paramètres mentionnés précédemment sont toujours de même nature, toutefois l'augmentation de la taille du graphe a nettement plus d'impact : le nombre de nœuds que contiennent les graphes est un facteur d'augmentation des temps de calcul. Dans ces conditions, la résolution d'un groupe de requêtes sur un petit graphe (*SF*) dure moins d'une demi-seconde, contre jusqu'à 150 secondes pour un graphe plus important (*CS*). Dans des graphes tels que ceux utilisés dans l'état de l'art déterministe, le nombre de nœuds se chiffre en millions, révélant par là l'impossibilité du passage à l'échelle avec une procédure telle que *SPOTAR*, et ce, même en considérant des modèles stochastiques très simplifiés. Ceci milite donc pour l'incorporation d'heuristiques d'accélération du traitement.

## Conclusion

Dans ce chapitre, la modélisation statistique des temps de parcours a été introduite dans la problématique des calculs d'itinéraires. L'algorithme d'étiquetage *SPOTAR*, développé par Nie *et al.* [113], a été testé avec un sous-ensemble de lois de probabilité mentionnées dans la partie I. Un effort de modélisation et de contextualisation de l'état de l'art a permis de dégager les structures propres aux graphes stochastiques et à la recherche du PCCS. Ainsi, les distributions de probabilité ont été considérées sous une forme discrétisée, amenant pour chaque nœud à considérer des étiquettes vectorielles. Celles-ci ont été comparées au moyen de la relation de dominance stochastique, pour laquelle une distribution est dominée par une autre lorsque les valeurs de sa fonction de répartition sont toujours inférieures. Le parcours du graphe et la mise à jour des étiquettes associées aux nœuds aboutissent à la constitution de politiques de routage, désignant un chemin optimal pour chaque budget de temps disponible, ou parallèlement, pour chaque probabilité d'être à l'heure.

En plus de ce cadre théorique, un plan d'expérience a été construit pour tester l'impact du choix du modèle statistique sur les chemins obtenus. La partie I avait donné l'occasion de classer un ensemble de lois de probabilité en fonction de leur aptitude à modéliser les temps de parcours routiers ; trois d'entre elles parmi les plus simples, les lois Gamma, lognormale et normale, ont été utilisées dans ce second exercice. Pour comparer les chemins obtenus

dans le contexte de ces trois lois, et en particulier, étudier les conditions dans lesquelles ceux-ci diffèrent, un ensemble de configurations a été défini à partir de facteurs comme la taille du graphe, la distance entre l'origine et la destination à chaque requête, la définition des fonctions de répartition associées aux arcs, niveau de variance d'une part et précision de la discrétisation des modèles d'autre part, ou encore la probabilité visée d'être à l'heure, amenant à sélectionner des chemins plus ou moins risqués au sein des politiques de routage.

Trois indicateurs ont été utilisés pour déterminer la robustesse des plus courts chemins. Ils concernaient tour à tour la proportion de chemins identiques donnés par les différents modèles, la proportion de similarité entre ces chemins et des chemins optimaux déterministes ou encore la proportion d'arcs en commun entre les chemins obtenus dans chaque configuration. Il apparaît au final que les trois modèles statistiques donnent des chemins optimaux la plupart du temps identiques, en particulier sur les graphes de taille modeste. Même si les divergences entre les chemins restent mesurées, un passage à une échelle plus grande nuance cette première constatation. La loi normale semble être une solution consensuelle, il s'agit du modèle qui désigne le plus souvent des chemins relevés également par d'autres modèles. Les proportions d'arcs en commun sont relativement élevées dans les comparaisons entre modèles stochastiques. Par contre, les chemins déterministes optimaux sont très souvent différents de ceux obtenus dans le cadre d'une modélisation stochastique, et ce, quels que soient le modèle et le niveau de variance. Des taux d'arcs en commun très faibles témoignent de cette différence. L'utilisation de variables aléatoires pour modéliser les poids des arcs d'un graphe donne ainsi accès à des stratégies de routage sensiblement différentes, et suggère l'importance de la variance des temps de parcours dans les choix d'itinéraires, en particulier lorsqu'il y a une contrainte forte sur l'heure d'arrivée. Cette conclusion apparaît en outre relativement robuste aux autres facteurs, notamment la précision de la discrétisation, le niveau de variance ou encore la probabilité désirée d'arriver à l'heure.

Bien que cette étude apporte un éclairage intéressant, elle comporte des limites qu'il convient de mentionner. Le quatrième indicateur met en valeur la principale question restant en suspens, à savoir la viabilité de la méthode pour une utilisation sur des graphes plus grands. Les temps de calcul observés sur des graphes de taille moyenne sont déjà longs, l'accélération du traitement des requêtes apparaît nécessaire pour l'intégration de modèles statistiques dans des calculateurs d'itinéraires usuels. En outre, une collaboration entre le LICIT et Mappy ayant eu lieu en parallèle de la thèse a souligné la nécessité d'une plus grande efficacité des calculs du point de vue industriel. Cette orientation forte a guidé la suite des présents travaux, si bien que la partie III sera consacrée à la construction d'une méthode d'accélération adaptée au cadre stochastique.

## Contributions de la partie II

- ▶ *La revue des différentes approches pour le calcul du plus court chemin dans des graphes stochastiques, déclinées en fonction des méthodes mathématiques et des modèles statistiques impliqués*
- ▶ *La recontextualisation et l'enrichissement des outils théoriques nécessaires à la construction des procédures d'étiquetage au sein des graphes stochastiques*
- ▶ *Une analyse de la robustesse des chemins identifiés par une procédure de calcul du plus court chemin stochastique au regard de la nature du modèle utilisé pour représenter les coûts des arcs*
- ▶ *La mise en perspective de l'importance des modèles stochastiques dans ce contexte, par rapport à une modélisation déterministe*

---

---

## Troisième partie

---

# MISE EN ŒUVRE DU CALCUL DU PLUS COURT CHEMIN STOCHASTIQUE POUR DES CALCULATEURS D'ITINÉRAIRES

” MARTY MCFLY : *Eh Doc reculez ! La route est trop courte pour atteindre 88 miles à l'heure.*  
EMMETT BROWN : *La route ? Là où l'on va on n'a pas besoin... de route.*

— **Robert Zemeckis**  
Retour vers le futur (1985)



## Accélérer le calcul du plus court chemin avec les contractions hiérarchiques

Comme mis en évidence dans le chapitre précédent, le calcul du plus court chemin stochastique présente des temps de réalisation assez importants lorsque les poids des arcs sont caractérisés par une distribution complète, même si cette dernière est discrétisée. Pour envisager une utilisation opérationnelle sur des réseaux réels, l'amélioration des performances de ce genre d'algorithme est fondamentale. Le cadre déterministe fournit encore une fois une piste très prometteuse dans ce but vu la diversité des techniques d'accélération algorithmique existantes, synthétisée dans un travail de revue complet proposé par Bast *et al.* [7]. Ainsi, les techniques d'accélération du calcul du plus court chemin dans les graphes déterministes se déclinent en des algorithmes de recherche orientée comme la recherche  $A^*$  ou la pose de drapeaux sur les arcs (approche *Arc-flag*) ; des approches par partition du graphe sur les nœuds ou sur les arcs ; des techniques hiérarchiques telles que les *Contractions Hiérarchiques* visant à construire une hiérarchie entre les nœuds, ou l'approche *Reach* qui évalue chaque nœud sur la base d'une distance par rapport aux extrémités du chemin recherché ; des approches par « saut », visant à quantifier de manière simplifiée la distance entre couples de nœuds ; ou encore des approches hybrides combinant plusieurs de ces techniques.

L'exercice d'adaptation d'une technique d'accélération au cas stochastique a déjà été entrepris par Sabran *et al.* [134]. Ces auteurs ont ainsi comparé une formulation standard de type *SOTA* (cf section 3.1.4) avec des formulations utilisant des techniques de pré-traitement combinant recherche orientée et partition du graphe, en l'occurrence *reach* et *arc-flag*. Ils ont obtenu une accélération de la résolution d'un ensemble de requêtes selon des facteurs compris entre 1.2 et 8.8 par rapport à une résolution stochastique classique sur des graphes de grande taille (jusqu'à 30000 nœuds et 72500 arcs environ), pour des horizons temporels comprenant jusqu'à 2000 unités de temps.

Les travaux développés ici se focalisent sur la technique des *Contractions Hiérarchiques*, combinant un pré-traitement et une phase de résolution de requêtes parmi les moins longs de l'état de l'art. Les expérimentations reportées par Bast *et al.* [7] sur un graphe appelé *Western Europe* et contenant 18 millions de nœuds et 42 millions d'arcs orientés indiquent un pré-traitement de l'ordre de la dizaine de minutes, et des requêtes résolues en moyenne en 0.1 milliseconde. Il s'agit en outre de la méthode la plus performante implémentée dans la plateforme TEMPUS évoquée en introduction (<http://www.tempus-project.org/>), c'est également l'approche qui a été choisie pour le moteur Mappy en vue de l'amélioration de leur calculateur d'itinéraires routiers.

Les contractions hiérarchiques sont une technique d'accélération du calcul du plus court



chemin développée par Geisberger [59] et Geisberger *et al.* [60]. Cette méthode consiste en la priorisation des nœuds d'un graphe en fonction de différents critères à paramétrer, puis l'ajout d'arcs « raccourcis » (ou *shortcuts*) entre certains couples de nœuds hiérarchisés et la résolution de requêtes utilisant le nouveau graphe enrichi des raccourcis, au moyen d'une version bidirectionnelle de l'algorithme de Dijkstra.

Les contractions hiérarchiques peuvent faire figure de brique au sein d'une combinaison algorithmique impliquant en plus d'autres techniques : des requêtes de type *many-to-many*, l'algorithme TNR (pour *Transit Node Routing*), l'optimisation multicritères, l'étude de modes alternatifs (véhicules électriques, vélo) caractérisés par des contraintes propres, ou encore la prise en compte de coûts dépendant des dates de départ aux nœuds. Les contractions hiérarchiques ont d'ailleurs été étudiées en détail par Batz [9] et Batz *et al.* [10] dans ce dernier cas de figure.

L'objectif de ce chapitre est de présenter les ingrédients fondamentaux de cette technique, à travers les contributions de Geisberger [59] et Geisberger *et al.* [60], puis de Batz [9] et de Batz *et al.* [10]. Dans la section 5.1, la phase de pré-traitement sera présentée. La section 5.2 décrira la résolution des requêtes de plus courts chemins. La section 5.3 portera sur l'adaptation des contractions hiérarchiques dans les graphes dynamiques.

## 5.1 Phase de pré-traitement : hiérarchisation des nœuds

Le pré-traitement des contractions hiérarchiques s'articule autour de deux étapes principales : la hiérarchisation des nœuds composant le graphe et la contraction des arcs suivant cet ordre de priorité [59]. Ainsi, une nouvelle formulation du graphe est construite par la réorganisation des nœuds, puis par l'ajout d'arcs spéciaux, appelés *raccourcis*. À titre de rappel, l'algorithme intervient sur un graphe initial  $G = (V, E)$  représentant le réseau étudié, où  $V$  est l'ensemble des nœuds, et  $E$  l'ensemble des arcs.

Cette première partie est essentielle, elle traite du classement des nœuds du graphe selon un ordre de priorité. Deux éléments constitutifs de cette phase méritent d'être discutés : (i) les raisons d'un tel classement et (ii) les règles de priorité utilisées.

La hiérarchisation des nœuds par ordre d'importance est combinée avec une exploration orientée vers le haut de la hiérarchie, de manière à visiter des nœuds de plus en plus importants. Autrement dit, les nœuds les moins « importants » ont moins de chance d'être atteints lors de l'exploration du graphe, l'intérêt de la démarche étant la réduction de l'espace de recherche potentiel. En cours de hiérarchisation, chaque nœud est *contracté*, *i.e.* virtuellement supprimé, tout comme ses arcs incidents. Ceux possédant un niveau d'importance faible auront tendance à être plus rapidement contractés. À l'issue du pré-traitement, les nœuds du graphe sont caractérisés par un indice d'importance, de 0 à  $n - 1$ , où  $n = |V|$ .

Les paragraphes suivants détailleront les critères régissant la constitution de la hiérarchie, la construction de cette dernière, puis l'incorporation de nouveaux arcs dans le graphe, les *raccourcis*. Un dernier paragraphe permettra de compléter la description du pré-traitement avec quelques techniques d'implémentation utiles pour accélérer cette phase préliminaire.

### 5.1.1 Critères de classement

L'évaluation du niveau de priorité d'un nœud est réalisée à travers une simulation de contraction, qui permet de connaître l'impact de la suppression du nœud sur le graphe, en termes d'arcs ajoutés et/ou supprimés. De nombreux critères sont envisageables pour quantifier cet impact.

Les premiers d'entre eux sont focalisés sur l'évolution du nombre d'arcs entre le graphe initial et le graphe de recherche final. En effet, des arcs peuvent être virtuellement supprimés lors de la contraction du nœud, alors que les raccourcis constituent des arcs supplémentaires dans le graphe. Le critère le plus utilisé dans ce but est la **variation du nombre d'arcs** [59]. Ce solde est tantôt négatif (s'il y a plus d'arcs supprimés) ou positif (si la quantité de raccourcis ajoutés dépasse celle des arcs supprimés). Plus ce solde est négatif, et moins le nœud est jugé important. Une variante plus simple de ce critère est le **nombre de nouveaux arcs**. À titre d'alternative, Batz *et al.* [10] mettent en relation les arcs supprimés et ceux ajoutés au sein d'un **ratio de création d'arcs**, pour éviter des valeurs absolues trop importantes.

Cette première famille, bien que cruciale pour construire une hiérarchie de qualité, ne suffit pas. Un second type de critère, lié à l'uniformité des contractions au sein du graphe initial, est souvent utile pour éviter une trop grande concentration des nœuds contractés. Les critères correspondant sont ainsi la **profondeur du nœud** (*i.e.* le nombre de nœuds voisins déjà contractés avant lui), la **région de Voronoi**, calculée comme le carré du nombre de nœuds contractés présents dans la zone d'influence du nœud courant (*cf* Geisberger [59]), ou encore le **nombre d'arcs originaux que représente un nouveau raccourci généré**. Ce dernier critère se définit de manière récursive : les arcs originels sont considérés trivialement comme étant de poids 1, un premier raccourci à construire représentera donc un poids de 2, puis un raccourci construit plus tard à l'aide du premier vaudra 3 (il représente un arc originel et le raccourci valant 2) *etc...* Si la contraction d'un nœud entraîne la création de plusieurs raccourcis, leurs poids respectifs s'additionnent pour constituer le coefficient de priorité du nœud. Dans l'étude des contractions hiérarchiques pour les graphes dynamiques, Batz *et al.* [10] utilisent une variante de ce dernier critère similaire au ratio de création d'arcs : ce nouveau ratio lie la quantité d'arcs originels créés via les raccourcis à celle représentant le nombre d'arcs originels supprimés lors de la contraction du nœud.

D'autres critères sont liés à la taille des recherches locales entreprises à chaque contraction. En considérant les arcs  $(u, v)$  et  $(v, w)$  lors de la contraction d'un nœud  $v \in V$ , un raccourci  $(u, w)$  doit être ajouté uniquement si aucun autre chemin de poids inférieur reliant les nœuds  $u$  et  $w$  n'existe. Ceci étant dit, trouver ce *chemin-témoin* (ou *witness path*) demande la réalisation d'une recherche locale potentiellement longue, qu'il convient de limiter. Les critères étudiés par Geisberger à ce titre sont la **profondeur de l'arbre de recherche**, et le **nombre d'arcs constituant le chemin-témoin**. Ces critères peuvent aussi être considérés comme des seuils qui, une fois atteints, causent l'interruption de la recherche locale.

En outre, Geisberger [59] évoque un dernier type de critères proposant une évaluation globale de chaque nœud : ces derniers seront caractérisés par un coefficient de priorité d'autant plus faible (et donc, ils seront susceptibles d'être contractés tôt) s'ils ne sont pas jugés centraux par rapport aux nœuds qui leur sont adjacents. Cette évaluation de la « centralité » d'un nœud par rapport à ses voisins utilise des fonctions synthétiques connues sous les termes de *betweenness* [3, 52] ou de *reach* [63].

Enfin, un dernier type de critère peut être utilisé pour le cas de temps de parcours dépendant des dates de départ aux nœuds. Batz *et al.* [10] proposent un critère de complexité des arcs, mesurée comme l'étendue des valeurs prises par le temps de parcours. Ces auteurs construisent ce critère comme un nouveau ratio liant arcs créés et arcs supprimés.

Les combinaisons de ces critères sont essentiellement réalisées sous la forme de sommes pondérées impliquant la plupart des critères sus-cités. Seuls les critères consacrés à la taille des recherches locales interviennent différemment, en jouant sur la capacité de la procédure à trouver des chemins-témoins. Geisberger *et al.* [60] ont défini une dizaine de scénarios dans lesquels différents critères étaient impliqués, pour la plupart accompagnés d'un coeffi-

cient de pondération fixé. En particulier, une variante dite « économique » permet d’obtenir un bon compromis entre temps de pré-traitement et phase de requête, alors qu’une autre variante, dite « agressive », est construite pour minimiser le temps de requête, quitte à dégrader le temps de pré-traitement. Les différentes valeurs numériques avancées dans cette contribution ont été testées dans une analyse de sensibilité plus complète disponible par ailleurs [59]. Batz *et al.* [10] utilisent eux une seule combinaison plus simple, qu’ils annoncent avoir retenue après un processus de sélection par essais et erreurs en se référant aux travaux de Vetter [159] :

$$k_u = 2 * EQ(u) + SSD(u) + OEQ(u) + 2 * CQ(u) \quad (5.1)$$

où  $k_u$  désigne le coût de contraction du nœud  $u \in V$ ,  $EQ(u)$  désigne le ratio liant arcs créés et arcs supprimés,  $SSD(u)$  désigne la profondeur du nœud dans le graphe,  $OEQ(u)$  le ratio consacré aux quantités d’arcs originels, et  $CQ(u)$  le ratio dédié à la complexité des fonctions de temps de parcours.

### 5.1.2 Hiérarchisation des nœuds

L’algorithme 2 fournit le pseudo-code de la procédure de hiérarchisation des nœuds. Trois structures de données sont nécessaires au bon déroulement de ce programme : un vecteur  $l$  destiné à recueillir les niveaux hiérarchiques de chaque nœud, un vecteur  $k$  dans lequel seront stockés les coefficients de priorité pour chaque nœud, on note respectivement  $l_u$  le niveau du nœud  $u$  dans la hiérarchie,  $k_u$  la valeur de son coefficient de priorité, et enfin une structure  $h$ , file d’attente (vide, au départ de l’algorithme) dans laquelle sont stockés les prochains nœuds à contracter. Pour optimiser l’organisation de cette file d’attente, Geisberger utilise les propriétés des tas binaires, alors que Batz propose d’utiliser des *pairing heap* [51, 124]. Ces deux formes de tas présentent des niveaux de complexité algorithmique compétitifs pour les opérations d’insertion d’éléments, de suppression du minimum, ou encore pour la mise à jour des clés associées aux éléments.

Au début de la procédure, la contraction de chaque nœud est simulée de manière à initialiser les vecteurs  $k$  (cf ligne 2) et  $h$  (cf ligne 3). Le pseudo-code proposé dans l’algorithme 3 illustre cette sous-procédure par un exemple de réalisation avec le solde du nombre d’arcs pour seul critère. Le plus petit élément du vecteur  $k$  se retrouve à l’indice 1 au sein du vecteur  $h$ , organisé selon les propriétés des tas.

Par la suite, un ensemble d’instructions sera répété jusqu’à ce que tous les nœuds aient été contractés, *i.e.* que tous aient été associés à un niveau de priorité :

- le plus petit élément de  $h$  est supprimé, le nœud  $u$  associé étant le nœud à contracter pour l’itération  $i$  (cf ligne 7) ;
- le nœud  $u$  se voit attribuer le niveau de priorité  $i$  (cf ligne 8) ;
- les arcs sortants sont tour à tour supprimés (lignes 11-14), de même que les arcs entrants (lignes 15-18) ainsi que le nœud  $u$  lui-même (ligne 19).
- les coefficients de priorité de tous les nœuds adjacents à  $u$  doivent être mis à jour au sein du vecteur  $k$ . La procédure *SIMUCONTRACT* (algorithme 3) est de nouveau entreprise sur le graphe résiduel (cf ligne 21). Dans le même temps, la file  $h$  est mise à jour au regard des nouvelles valeurs des coefficients de priorité (la structure est réorganisée jusqu’au rétablissement de ses propriétés, cf ligne 22).

À la fin de cette procédure, tous les nœuds ont été contractés, leur niveau de priorité est connu. À ce stade de la méthodologie de Geisberger, les nœuds ne sont plus reconnus par le biais de leur identifiant, mais par leur niveau de priorité, compris entre 0 et  $n - 1$ .

**Algorithme 2 (HIERARCHIE)** Hiérarchisation des nœuds, d'après Geisberger [59]**ENTRÉES:** Graphe  $G$ **SORTIES:** Vecteur  $l$ , contenant les indices des nœuds dans l'ordre hiérarchique

---

```

1: Pour  $u \in V$  Faire
2:    $k_u \leftarrow \text{SIMUCONTRACT}(u)$    ▷ Calcul du coefficient de priorité du nœud  $u$  par la
     simulation de sa contraction
3:    $h \leftarrow h \cup \{(u, k_u)\}$    ▷ Insertion du coefficient du nœud  $u$  dans la file  $h$ 
4: FinPour
5:  $i \leftarrow 0$ 
6: TantQue  $i \neq |V|$  Faire
7:    $(u, k) \leftarrow h.\text{SUPMIN}$    ▷ Extraction du minimum dans la file d'attente  $h$ 
8:    $l_u \leftarrow i$    ▷ Sauvegarde du niveau du nœud (début à 0)
9:    $i \leftarrow i + 1$ 
10:   $W \leftarrow \emptyset$    ▷ Ensemble des nœuds voisins impactés par la contraction d'un nœud
11:  Pour  $v \in \{V \mid (u, v) \in E\}$  Faire
12:     $W \leftarrow W \cup \{v\}$ 
13:     $E \leftarrow E \setminus (u, v)$    ▷ Suppression des arcs sortants
14:  FinPour
15:  Pour  $v \in \{V \mid (v, u) \in E\}$  Faire
16:     $W \leftarrow W \cup \{v\}$ 
17:     $E \leftarrow E \setminus (v, u)$    ▷ Suppression des arcs entrants
18:  FinPour
19:   $V \leftarrow V \setminus \{u\}$    ▷ Suppression du nœud dans  $G$ 
20:  Pour  $v \in W$  Faire
21:     $k_v \leftarrow \text{SIMUCONTRACT}(v)$ 
22:     $\{k \mid (v, k) \in h\} \leftarrow k_v$    ▷ Mise à jour du coefficient du nœud  $v$  dans la file
23:  FinPour
24: FinTantQue

```

---

**Algorithme 3 (SIMUCONTRACT)** Évaluation de la priorité d'un nœud (critère unique : différence dans le nombre d'arcs), d'après Geisberger [59]**ENTRÉES:** Nœud  $v$ **SORTIES:** Coût de contraction  $k_v$  du nœud  $v$ 


---

```

1:  $k_v \leftarrow 0$ 
2: Pour  $u \in V \mid (u, v) \in E$  Faire
3:   Pour  $w \in V \setminus u \mid (v, w) \in E$  Faire
4:      $k_v \leftarrow k_v - 2$    ▷ Les arcs  $(u, v)$  et  $(v, w)$  seront supprimés après contraction
5:      $t_{new} \leftarrow \text{PCC}(u, w, G' = (V \setminus v, E \setminus \{(x, v) \mid x \in V, (v, x) \mid x \in V\}))$    ▷ Plus court chemin
     entre  $u$  et  $w$  dans  $G$  ôté du nœud  $v$  et des arcs le reliant au reste du graphe
6:     Si  $(u, w) \notin E$  et  $t_{uv} + t_{vw} < t_{new}$  Alors
7:        $k_v \leftarrow k_v + 1$    ▷ Le raccourci  $(u, w)$  doit être ajouté
8:     FinSi
9:   FinPour
10: FinPour
11: Retourner  $k_v$ 

```

---

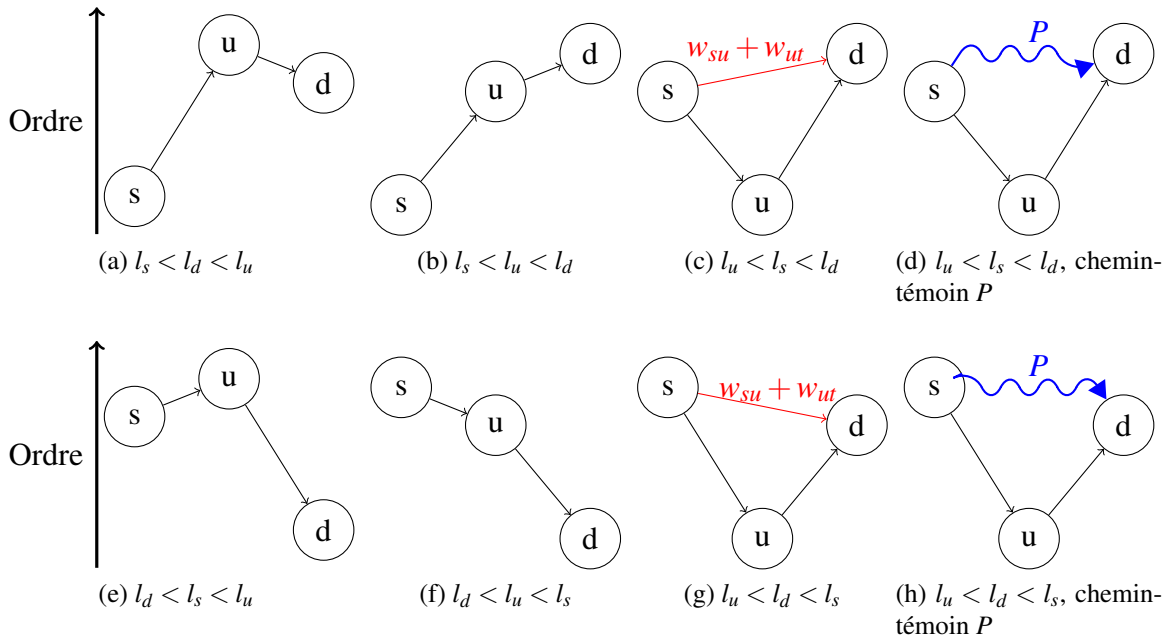


FIGURE 5.1 – Configurations possibles dans un graphe hiérarchisé, avec  $l_i$  le niveau du nœud  $i \in V$  dans la hiérarchie : des raccourcis ne peuvent être rajoutés que pour les cas 5.1c, 5.1d, 5.1g et 5.1h, la présence de chemins-témoins dans les cas 5.1d et 5.1h ne les rend en fait nécessaires que dans les cas 5.1c et 5.1g

## 5.1.3 Contraction du graphe et ajout de raccourcis

### 5.1.3.1 Identification des motifs propices à l'ajout de raccourcis

Soit un nœud source noté  $s$ , un nœud cible noté  $d$  et un nœud intermédiaire  $u$  et tel que  $s$  et  $d$  soient adjacents à  $u$ . L'ajout d'un raccourci pour relier directement  $s$  à  $d$  en conséquence de la contraction du nœud  $u$  dépend de deux éléments : d'une part les niveaux des trois nœuds dans la hiérarchie construite lors de la procédure détaillée en section précédente, d'autre part l'existence d'un chemin alternatif entre  $s$  et  $d$  dont le coût serait inférieur à  $w_{su} + w_{ud}$ , avec  $w_{ij}$  le coût de l'arc  $(i, j) \in E$ .

La figure 5.1 détaille les différentes configurations possibles par rapport à ces deux arguments. Concernant les niveaux hiérarchiques, il convient de garder à l'esprit que le premier nœud contracté est nécessairement celui qui possède le niveau le plus faible, de ce fait, un arc raccourci ne peut apparaître entre  $s$  et  $d$  que si  $l_u < \min\{l_s, l_d\}$ . Le second élément est lui une condition *sine qua non* de la création d'un raccourci : en effet, si un meilleur chemin alternatif existe, le raccourci entre  $s$  et  $d$  n'a pas lieu d'être.

### 5.1.3.2 Ajout des raccourcis dans le graphe de recherche

En pratique, ajouter les raccourcis est relativement simple, une fois que la hiérarchie des nœuds a été construite. La marche à suivre est décrite ici par l'algorithme 4.

Cette procédure consiste en une boucle sur tous les nœuds, dans l'ordre hiérarchique décrit par le vecteur  $l$ . À chaque itération, seuls les nœuds adjacents plus élevés dans la hiérarchie sont examinés. Ainsi, chaque séquence  $(v, u, w)$  avec  $l_u < l_v$  et  $l_u < l_w$  est évaluée : s'il existe un chemin-témoin, *i.e.* un chemin de poids inférieur à celui de cette séquence, le

---

**Algorithme 4 (AJOUTRACCOURCI)** Rajout de raccourcis dans le graphe  $G$ , à partir de la contraction des nœuds qui le composent

---

**ENTRÉES:** Graphe  $G$ , hiérarchie  $l$

**SORTIES:** Graphe  $G$  modifié

```

1:  $i \leftarrow 0$ 
2: TantQue  $i < |V|$  Faire
3:    $u \leftarrow \{u \in V \mid l_u = i\}$ 
4:    $V_H \leftarrow V \setminus \{x \mid l_x < l_u\}$ 
5:    $E_H \leftarrow \{(x, y) \mid x, y \in V_H\}$ 
6:    $G' \leftarrow (V_H, E_H)$  ▷ Construction du sous-graphe abritant la recherche de chemin-témoin
7:   Pour  $v \in V_H$  Faire
8:     Pour  $w \in V_H \setminus v$  Faire
9:        $w_{new} \leftarrow PCC(v, w, G')$  ▷ Calcul du PCC entre  $v$  et  $w$  dans le graphe  $G'$ 
10:      Si  $w_{vu} + w_{uw} < w_{new}$  Alors
11:        Si  $(v, w) \notin E$  Alors
12:           $E \leftarrow E \cup (v, w)$  ▷ Ajout du raccourci
13:        FinSi
14:         $w_{vw} \leftarrow w_{vu} + w_{uw}$  ▷ Affecter un poids au raccourci (ou MAJ du poids de l'arc, si existant)
15:      FinSi
16:    FinPour
17:  FinPour
18:   $i \leftarrow i + 1$ 
19: FinTantQue

```

---

raccourci n'est pas nécessaire. Dans le cas contraire, il est nécessaire de modifier le graphe. Si l'arc  $(v, w)$  n'existe pas, il est rajouté et son poids est égal à celui de la séquence  $(v, u, w)$ . S'il existe déjà, son poids doit être mis à jour. À l'issue de ce processus, le graphe de recherche est augmenté des raccourcis nouvellement rajoutés.

### 5.1.4 Raffinements algorithmiques

Partant de la proposition de Geisberger, une définition plus compacte du pré-traitement a été proposée par Batz *et al.* [10] : les deux étapes ont été synthétisées jusqu'à n'en former qu'une seule afin de diminuer le nombre de contractions. Ainsi, les arcs raccourcis sont rajoutés au fur et à mesure de la construction de la hiérarchie entre les nœuds.

Par ailleurs, Kieritz *et al.* [86] ont remarqué la possibilité structurelle de paralléliser les contractions de nœuds. Ainsi, deux nœuds indépendants, *i.e.* séparés par au moins deux arcs, peuvent être contractés en même temps, sans que des raccourcis soient oubliés pendant la contraction. D'autres étapes du calcul se prêtent également à la parallélisation : les calculs préliminaires des coûts de contraction, pour chaque nœud, ou encore la sélection du prochain sous-ensemble de nœuds à contracter.

Le pré-traitement peut aussi être accéléré par la sauvegarde des résultats des contractions, pour réutilisation ultérieure. En particulier, la nécessité de création d'un arc raccourci  $(v, w)$  lors de la simulation de la contraction du nœud  $u$  et des arcs incidents  $(v, u)$  et  $(u, w)$  peut être conservée en mémoire jusqu'à la suppression effective de l'un des nœuds du triplet  $\{v, u, w\}$ .

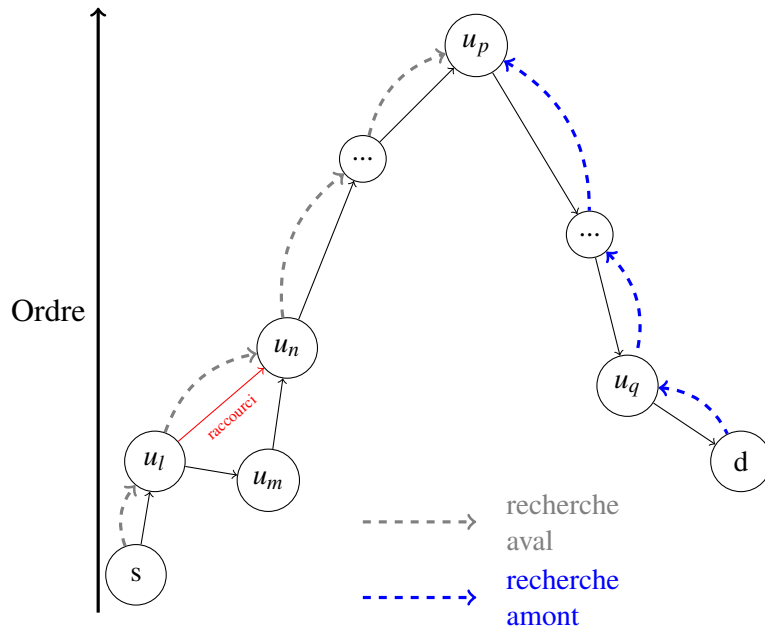


FIGURE 5.2 – Type de chemin mis en valeur par la procédure des contractions hiérarchiques

Si la question de la contraction de la séquence  $(v, u, w)$  se pose de nouveau, un simple examen du cache remplacera la procédure de recherche de chemin-témoin.

## 5.2 Phase de résolution de requêtes

L'étape finale de la procédure proposée par Geisberger [59], dédiée aux contractions hiérarchiques dans des graphes déterministes statiques, est consacrée à la description de la procédure de calcul du plus court chemin au sein du graphe hiérarchisé.

### 5.2.1 Précisions liminaires

Un graphe  $G = (V, E)$ , constitue la donnée d'entrée de la procédure. Après les étapes présentées dans la section 5.1, les nœuds du graphe ont été hiérarchisés, *i.e.* ils ont été classés selon un ordre propre à accélérer les requêtes de calcul du plus court chemin. Par ailleurs, l'ensemble  $E$  a été enrichi par l'ajout de raccourcis, ce qui a permis d'accroître le maillage entre les nœuds mais a potentiellement augmenté l'espace de recherche. En réalité, cet inconvénient est complètement contrebalancé par la puissance du concept de raccourci : ils permettent de déterminer des plus courts chemins empruntant des séquences de nœuds dont les niveaux sont croissants (respectivement décroissants) en aval de la source (respectivement en amont de la destination).

Plus formellement, une recherche bidirectionnelle s'appuie sur les sous-graphes  $G_{up} = (V, E_{up})$  et  $G_{down} = (V, E_{down})$  définis comme suit :

$$E_{up} = \{(u, v) \in E \mid l_u < l_v\} \quad (5.2)$$

$$E_{down} = \{(u, v) \in E \mid l_u > l_v\} \quad (5.3)$$

En posant  $\bar{E}_{down} = \{(v, u) \mid (u, v) \in E_{down}\}$ , et  $E^*$  comme l'union des ensembles  $E_{up}$  et  $\bar{E}_{down}$ , on obtient un ensemble d'arcs constitutif du graphe de recherche final  $G^* = (V, E^*)$ .

---

**Algorithme 5 (RECHBIDIR)** Requête effectuée au sein du graphe de recherche entre un nœud source  $s$  et un nœud destination  $d$

---

**ENTRÉES:** Nœud source  $s$ , nœud destination  $d$

**SORTIES:** Temps de trajet minimal  $t^*$  entre  $s$  et  $d$

```

1:  $t^* \leftarrow \infty$  ▷ Phase d'initialisation
2: Pour  $v \in V$  Faire
3:    $t_{fw}[v] \leftarrow \infty$ 
4:    $t_{bw}[v] \leftarrow \infty$ 
5: FinPour
6:  $t_{fw}[s] \leftarrow 0$ 
7:  $Q_{fw} \leftarrow \{(0, s)\}$ 
8:  $t_{bw}[t] \leftarrow 0$ 
9:  $Q_{bw} \leftarrow \{(0, d)\}$ 
10:  $dir \leftarrow fw$  ▷ Fin de la phase d'initialisation
11: TantQue ( $Q_{dir} \neq \emptyset$  ou  $Q_{-dir} \neq \emptyset$ ) et  $t^* > \min\{\min Q_{dir}, \min Q_{-dir}\}$  Faire
12:   Si  $Q_{-dir} \neq \emptyset$  Alors
13:      $dir \leftarrow \neg dir$  ▷ Si l'autre file n'est pas vide, la direction change
14:   FinSi
15:    $(u, k) \leftarrow Q_{dir}.SUPMIN$  ▷ Extraction du minimum dans la file  $Q_{dir}$ 
16:    $t^* \leftarrow \min\{t^*, t_{fw}[u] + t_{bw}[u]\}$ 
17:   Pour  $e = (u, v) \in E_{dir}$  Faire
18:     Si  $t_{dir}[u] + w_{uv} < t_{dir}[v]$  Alors
19:        $t_{dir}[v] \leftarrow t_{dir}[u] + w_{uv}$ 
20:        $\{k | (v, k) \in Q_{dir}\} \leftarrow t_{dir}[v]$  ▷ Mise à jour du tas-min
21:     FinSi
22:   FinPour
23: FinTantQue
24: Retourner  $t^*$ 

```

---

Le premier sous-graphe est parcouru par une recherche aval, alors que le second est parcouru par une recherche amont. Les deux recherches convergent sur le haut de la hiérarchie, *i.e.* aux nœuds jugés les plus importants. Ainsi, la recherche bidirectionnelle met en valeur des chemins optimaux dont le profil est décrit par la figure 5.2. De ce fait, aucun nœud dont le niveau hiérarchique est inférieur à ceux de la source et de la destination ne sera visité lors de la requête : si un tel nœud fait partie d'un chemin optimal, il sera court-circuité par un arc raccourci pendant la recherche, et identifié à la fin lors de la reconstitution du chemin. Cette figure présente un exemple de raccourci « utile », permettant à la recherche avant de ne pas redescendre vers le nœud  $u_m$ , qui constitue un minimum local. À titre de remarque, le nœud  $u_p$  tel que représenté dans la figure 5.2 n'est pas nécessairement le nœud le plus élevé dans la hiérarchie parmi tous les nœuds du graphe, mais il l'est par rapport à ceux appartenant au chemin optimal. Il représente l'un des points de rencontre des deux recherches (respectivement aval et amont).

### 5.2.2 Algorithme de résolution de requêtes dans un graphe hiérarchisé

L'algorithme 5 décrit le calcul du plus court chemin dans les graphes de recherche produits par la phase de pré-traitement. Il s'appuie sur une recherche bidirectionnelle, comme évoqué dans le paragraphe précédent, et utilise l'algorithme de Dijkstra. La clé de la résolu-



tion de la requête se trouve dans la gestion de deux files de priorité  $Q_{fw}$  et  $Q_{bw}$  construites comme dans l'algorithme 2, et affectées chacune à un sens de recherche.

La recherche aval commence au nœud source (cf lignes 6-7), alors que la recherche amont s'enclenche depuis le nœud destination (cf lignes 8-9). Compte tenu de la définition du graphe de recherche, dans lequel les nœuds sont hiérarchisés, les deux processus convergent sur le haut du graphe  $G^*$ . Le parcours du graphe de recherche continue tant qu'une des deux files de priorité au moins contient des éléments, elle peut toutefois s'interrompre si la somme des clefs minimales ne peut plus améliorer la solution optimale (cf ligne 11).

Plusieurs possibilités existent pour concilier les deux directions de recherche. La version de l'algorithme présentée ici se caractérise par une alternance systématique entre les deux directions. De cette façon, dès lors que la file de priorité de l'une des deux directions devient vide, la recherche se concentre sur l'autre direction (cf lignes 12-14). Le reste de la boucle principale se poursuit avec l'identification du nœud courant par l'élément minimal de la file de priorité (cf ligne 15), puis la solution optimale est mise à jour avec les clefs correspondant au nœud dans chaque file (cf ligne 16). Cette mise à jour n'est ainsi possible que si le nœud a été visité dans les deux sens de recherche. L'exploration du graphe est la dernière opération à réaliser dans la boucle principale : chaque arc menant à un nœud plus élevé dans la hiérarchie est évalué (cf ligne 17), et si l'étiquette de la destination est améliorée, le nœud atteint est ajouté dans la file de priorité (cf ligne 20).

## 5.3 Extension au cas des graphes dynamiques

La présentation précédente a été réalisée dans un environnement statique, *i.e.* pour lequel les coûts des arcs (*i.e.* les temps de parcours) sont constants. L'extension de la méthode au cas des graphes dépendants du temps, dans lesquels les coûts associés aux arcs doivent être exprimés en fonction de la date de départ au nœud initial, a été proposée par Batz *et al.* [10], puis Batz [9]. Leur approche se caractérise par des coûts sous forme de vecteurs à chaque arc, comme explicité dans la sous-section 5.3.1. En outre, les structures algorithmiques associées aux contractions hiérarchiques sont complétées par de nouvelles procédures et de nouvelles stratégies d'optimisation qu'il conviendra de présenter dans la sous-section 5.3.2.

### 5.3.1 Fonctions de temps de parcours

Dans l'approche dynamique proposée initialement par Batz *et al.* [10], les temps de parcours sont représentés par une fonction linéaire par morceaux, associant une valeur de temps de parcours à chaque date de départ, pour chaque arc  $e \in E$ , sur un horizon temporel  $H$ . Elle est notée  $f_e$  et définie sur l'ensemble des réels positifs non nuls. Dans la figure 5.3, la fonction de temps de parcours donnée en exemple prend des valeurs sur l'intervalle  $H = [0, 9t]$ , qui constitue l'horizon temporel, alors que sa manipulation algorithmique ne nécessite que le stockage des points d'inflexion dénotant les changements de pente de la fonction linéaire par morceaux. Cette représentation constitue un intermédiaire intéressant en termes de complexité : il n'est pas nécessaire de stocker en mémoire le temps de parcours à chaque pas de temps, ceci étant dit, les fonctions de temps de parcours sont modélisées sur un intervalle continu.

La vérification de l'hypothèse FIFO est rapidement assurée par l'évaluation de la pente des composantes de la fonction, nécessairement supérieure à -1. De l'expression des fonctions de temps de parcours se déduit également la fonction d'arrivée, qui à toute date de

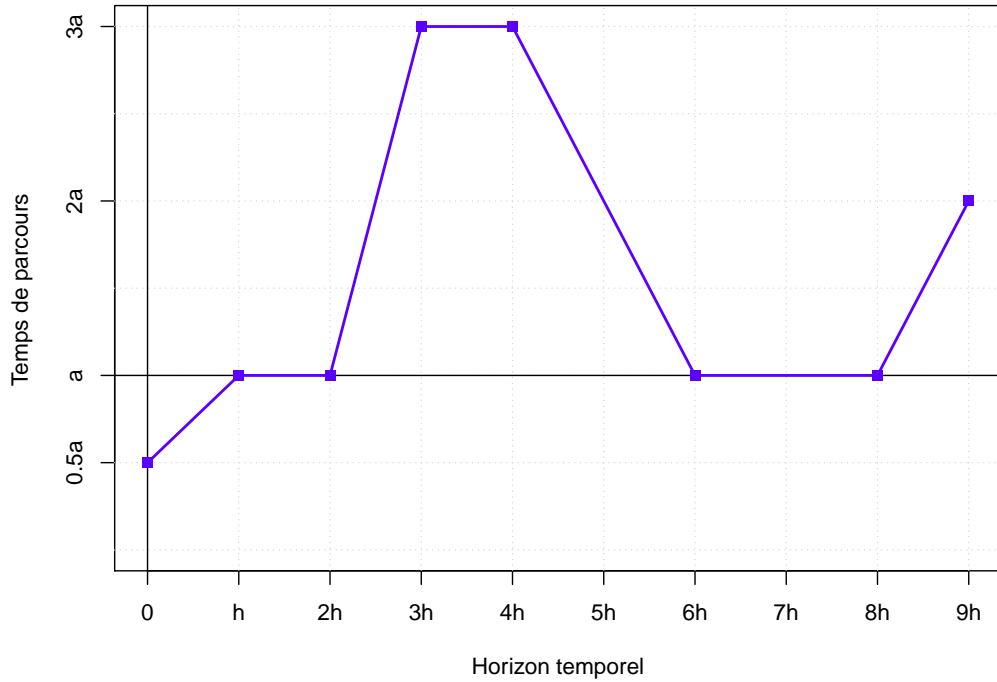


FIGURE 5.3 – Exemple de fonction de temps de parcours sur un arc,  $a$  étant un temps de parcours de référence

départ d'un nœud associe une date d'arrivée :  $arr_e : h \rightarrow f_e(h) + h$ . Plus généralement, l'ensemble des définitions et des propriétés associées aux fonctions de temps de parcours et de date d'arrivée est détaillé par Batz [9].

Trois opérations de base s'appuient sur la définition des fonctions de temps de parcours : l'évaluation du temps de parcours  $t_e^h = f_e(h)$  observé sur l'arc  $e \in E$  à l'instant  $h$ , la concaténation des fonctions de temps de parcours régissant deux arcs consécutifs et l'agrégation des fonctions caractérisant deux arcs reliant le même couple origine-destination.

La première opération associe une date de départ incluse dans l'horizon temporel à un temps de parcours. Elle est représentée par la fonction  $f_e$  elle-même. Deux cas de figure sont considérés : soit  $h$  est un point d'inflexion de la fonction, auquel cas  $f_e(h)$  est donné par hypothèse, soit  $h$  est compris entre deux points d'inflexion  $h_{inf}$  et  $h_{sup}$ , la valeur  $f_e(h)$  étant alors donnée par interpolation :

$$f_e(h) = \frac{f_e(h_{sup}) - f_e(h_{inf})}{h_{sup} - h_{inf}} (h - h_{inf}) + f_e(h_{inf}) \quad (5.4)$$

La seconde opération relie les fonctions de temps de parcours relatives à des arcs consécutifs. Ainsi, soient  $f_1$  et  $f_2$  les fonctions associées à des arcs  $(u, v), (v, w) \in E$ . L'opération de concaténation de ces deux fonctions de temps de parcours est notée  $f_1 * f_2$  et s'exprime telle que  $f_1 * f_2 : h \rightarrow f_1(h) + f_2(h + f_1(h))$ . Cette définition fait ainsi apparaître la nécessité de connaître la date de départ au nœud  $u$  pour exprimer aussi bien le temps de parcours sur  $(u, v)$  que sur  $(v, w)$ .

La troisième et dernière opération consiste en l'agrégation de deux fonctions de temps de parcours  $f_1$  et  $f_2$  décrivant le même arc  $(u, v) \in E$ . Cette situation peut intervenir lors

de la comparaison de deux itinéraires reliant  $u$  à  $v$ . Dans ce cas de figure, le meilleur temps de parcours est conservé pour chaque date de départ, ce qui revient à calculer la fonction  $\min$  appliquée à  $f_1$  et  $f_2$ . À titre de remarque, le résultat des fonctions de concaténation et d'agrégation est également une fonction de temps de parcours.

Outre ces opérations, la définition des coûts sur chacun des arcs constitue un préalable nécessaire à l'étude du temps de parcours sur un chemin entier  $c$ . Celui-ci est donné par la concaténation de l'ensemble des fonctions de temps de parcours décrivant les arcs constitutifs de  $c$  : pour un départ à la date  $h_0$ , on a  $f_c = f_1 * \dots * f_k$ , où  $f_c$  est la fonction de temps de parcours sur le chemin  $c$  et  $f_i$  est la fonction de temps de parcours décrivant le  $i^{\text{ème}}$  arc. Parallèlement, la date d'arrivée obtenue en empruntant  $c$  après un départ à la date  $h_0$  est alors  $h_0 + f_c(h_0)$ . De là vient la première grandeur à optimiser proposée par Batz *et al.* [10] : la date d'arrivée au plus tôt (*early-arrival time*, ou *EA*). On a :

$$EA(s, d, h_0) = \min_c \{h_0 + f_c(h_0) \mid c \in C_{sd}\} \cup \{\infty\} \quad (5.5)$$

avec  $C_{sd}$  l'ensemble des chemins reliant  $s$  à  $d$  au sein du graphe.

Cet objectif constitue une version simplifiée où la date de départ est fixée, le calcul devient alors semblable à un calcul de plus court chemin statique, au détail près que la structure des fonctions de temps de parcours rend la procédure moins directe. Une version plus complète propose un calcul du plus court chemin  $\forall h_0 \in H$ , exprimé comme le profil de temps de parcours. Ce calcul est matérialisé par la fonction  $TTP(s, d, h_0)$  définie telle que :

$$TTP(s, d, h_0) = EA(s, d, h_0) - h_0 \quad (5.6)$$

où  $s$  et  $d$  sont respectivement les nœuds sources et destination fixés, et où  $h_0 \in H$ . Les fonctions  $EA$  et  $TTP$  respectent le principe de Bellman, et permettent donc le développement de calculs propres aux chemins partiels.

Des fonctions peuvent également être définies pour encadrer  $TTP(s, d, h_0)$ , telles que  $P_{\min}(s, d) \leq TTP(s, d, h_0) \leq P_{\max}(s, d), \forall h_0 \in H$  :

$$P_{\min}(s, d) = \min_c \left\{ \sum_{i=1}^{k_c} \min_h f_i(h) \mid c \in C_{sd} \right\} \cup \{\infty\} \quad (5.7)$$

$$P_{\max}(s, d) = \min_c \left\{ \sum_{i=1}^{k_c} \max_h f_i(h) \mid c \in C_{sd} \right\} \cup \{\infty\} \quad (5.8)$$

où  $f_i$  désigne la fonction de temps de parcours associée au  $i^{\text{ème}}$  arc du chemin  $c$ , qui en contient au total  $k_c$ . Les fonctions  $P_{\min}$  et  $P_{\max}$  donnent les plus courts chemins entre les nœuds  $s$  et  $d$  avec des étiquettes équivalentes respectivement aux valeurs minimales et maximales de chaque fonction de temps de parcours. Cet encadrement sera crucial lors du calcul du profil de temps de parcours optimal, comme développé dans la section suivante.

### 5.3.2 Solutions algorithmiques

Dans le cas statique, la recherche du plus court chemin dans le graphe hiérarchisé est réalisée à l'aide d'un algorithme de Dijkstra bidirectionnel, chacune des sous-procédures convergeant vers le haut du graphe. Les étiquettes obtenues après l'accomplissement de ces procédures sont additionnées nœud à nœud, le temps de parcours optimal étant donné par la somme minimale. Dans le cas où la date de départ impacte la valeur du temps de parcours sur les arcs, la détermination par une recherche bidirectionnelle du meilleur temps de parcours,

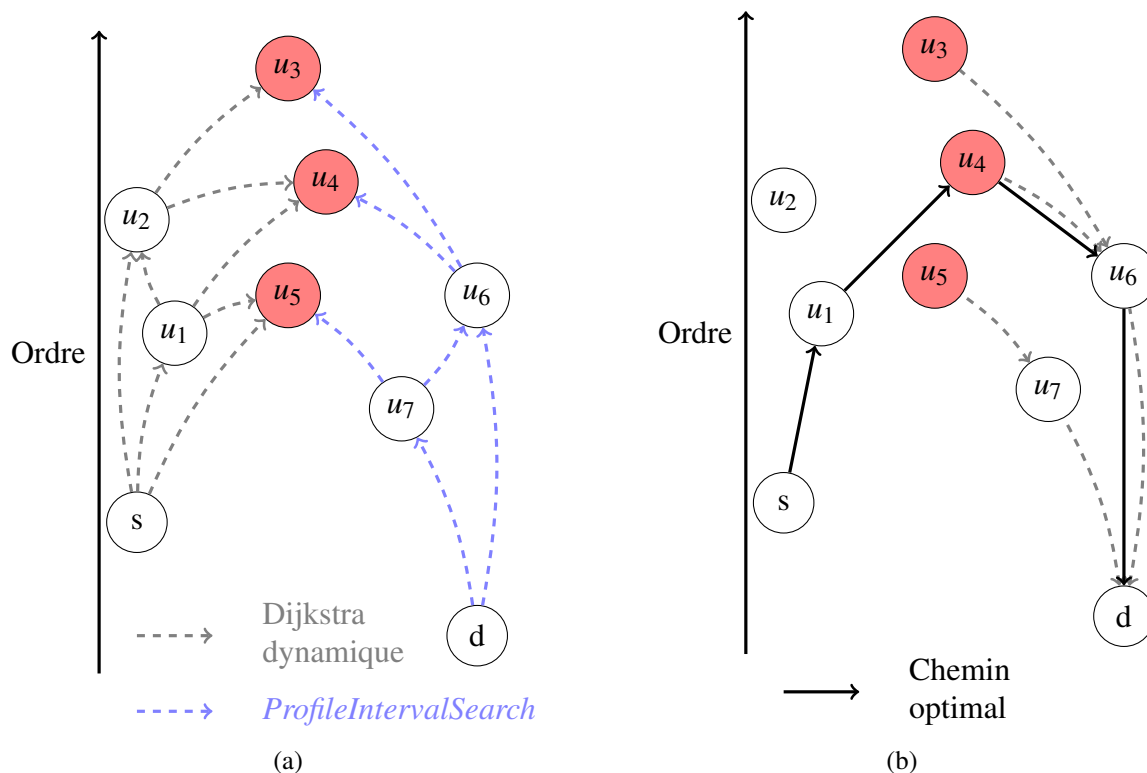


FIGURE 5.4 – Calcul de  $EA(s, d, h_0)$  : (a) un algorithme de Dijkstra dynamique depuis  $s$  et une recherche sur l'intervalle du profil optimal depuis  $d$  se rencontrent pour former l'ensemble  $X = \{u_3, u_4, u_5\}$  (b) un Dijkstra dynamique est appliqué dans le sous-graphe constitué des nœuds prédécesseurs optimaux dans la recherche amont, jusqu'à identifier le chemin optimal  $s \rightarrow u_1 \rightarrow u_4 \rightarrow u_6 \rightarrow d$

ou du meilleur profil de temps de parcours, constituait un verrou scientifique notable avant la contribution de Batz *et al.* [10]. Les paragraphes suivants proposent une description des procédures principales proposées par ces auteurs pour le résoudre, pour chacune des deux fonctions objectif explicitées dans la section précédente.

### 5.3.2.1 Minimisation du temps de parcours pour une date de départ donnée

Ce premier cas de figure revient à calculer la date d'arrivée au plus tôt  $EA(s, d, h_0)$ , avec  $s$  l'origine,  $d$  la destination et  $h_0$  la date de départ données. Deux étapes principales sont requises, cette procédure étant résumée par la figure 5.4. En premier lieu, une recherche bidirectionnelle est entreprise. Depuis le nœud origine  $s$  et pour une date de départ  $h_0$ , un algorithme de Dijkstra dynamique est appliqué, alors que depuis le nœud destination  $d$ , le graphe est parcouru à l'aide d'une recherche sur les bornes du profil de temps de parcours optimal. L'utilisation du profil de temps de parcours optimal est justifiée par le fait que la date d'arrivée n'est pas connue (il s'agit au demeurant de la valeur recherchée). Pour accélérer le traitement, seules deux valeurs servent d'étiquettes : le temps minimum et le temps maximum des fonctions de temps de parcours, donnés par les équations 5.7 et 5.8. Cette procédure de recherche correspond à l'algorithme *ProfileIntervalSearch* de Batz *et al.* [10].

Les deux recherches se rencontrent sur le haut de la hiérarchie sur un sous-ensemble de nœuds  $x \in X \subset V$ , desquels un nouvel algorithme de Dijkstra dynamique est appliqué. L'initialisation de cette procédure est réalisée en considérant les nœuds au sein de  $X$  et leurs étiquettes issues de la recherche aval. L'espace de recherche est tel que les nœuds à visiter

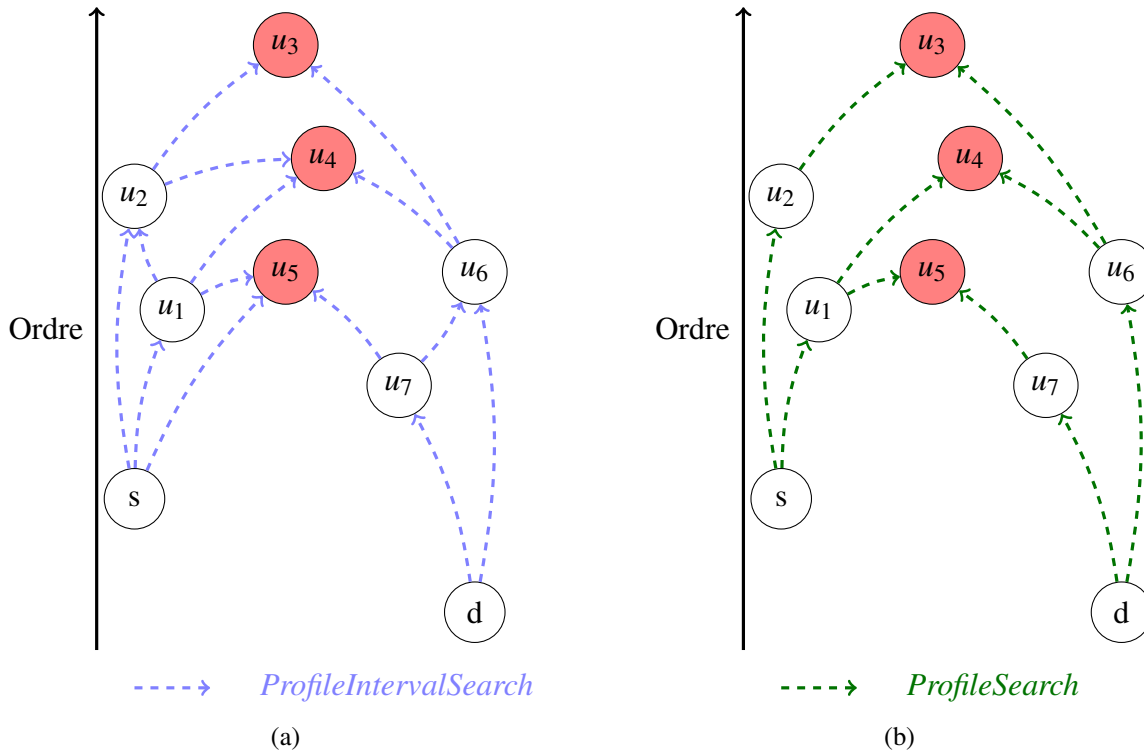


FIGURE 5.5 – Calcul de  $TTP(s, d, h_0)$  accéléré : (a) des recherches sur les intervalles des profils optimaux depuis  $s$  et  $d$  se rencontrent pour former l'ensemble  $X = \{u_3, u_4, u_5\}$ , et surtout, les sous-graphes  $C \uparrow$  et  $C \downarrow$ , d'après les nœuds prédécesseurs optimaux (b) des recherches sur les profils optimaux sont entreprises respectivement dans  $C \uparrow$  depuis  $s$  et dans  $C \downarrow$  depuis  $d$ , le profil optimal résulte de la concaténation puis de l'agrégation des sous-profils optimaux  $TTP(s, x, h_0)$  et  $TTP(d, x, h_0)$ , avec  $x \in X$ .

sont les prédécesseurs optimaux dans la recherche amont des nœuds courants. Le temps de parcours optimal est donné par l'étiquette finale au nœud  $d$ , et le chemin optimal est reconstruit classiquement à l'aide des meilleurs précédésseurs.

### 5.3.2.2 Profil de temps de parcours optimal

Cette seconde procédure porte sur la recherche du profil de temps de parcours optimal  $TTP(s, d, h_0), \forall h_0 \in H$ . Il s'agit d'un algorithme d'étiquetage utilisant l'intégralité du profil des temps de parcours pour marquer chaque nœud : ainsi, à partir d'un nœud initial  $u$ , l'étiquette d'un nœud  $v \in V$  quelconque sera le profil de temps de parcours optimal pour parcourir le chemin entre  $u$  et  $v$ .

Ces deux recherches convergent vers un sous-ensemble de nœuds  $X \subseteq V$ , comme dans le cas précédent. Ici, la solution optimale n'est pas directement calculable par une simple addition. Les résultats des deux sous-procédures sont deux ensembles de profils de temps de parcours  $TTP(s, x, h_0)$  et  $TTP(d, x, h_0)$ , où  $x \in X$  et  $\forall h_0 \in H$ . La reconstruction du profil optimal est réalisée en deux étapes. Les profils précédents sont concaténés deux à deux pour aboutir à  $|X|$  profils candidats entre  $s$  et  $d$ , puis une agrégation de ces derniers donne le profil optimal  $TTP(s, d, h_0)$ .

Ceci dit, cette procédure est lourde en termes de temps de calcul, du fait de nombreuses opérations sur les profils de temps de parcours. Une manière de pallier ce défaut est la réduction de l'espace de recherche via une recherche bidirectionnelle préalable focalisée sur les intervalles de ces profils, comme illustré au sein de la figure 5.5. Le rajout de cette étape

mène à la constitution de deux sous-graphes  $C \uparrow$  et  $C \downarrow$ , définis par la remontée des pré-décesseurs optimaux depuis les nœuds  $x \in X \subseteq V$  communs aux deux procédures jusqu'à respectivement  $s$  et  $d$ . Dans un second temps, la recherche bidirectionnelle sur les profils complets est réalisée au sein du sous-graphe de taille plus réduite  $C \uparrow \cup C \downarrow \subseteq G_H$ , où  $G_H$  est le graphe hiérarchisé. Le profil optimal est déterminé comme précédemment.

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la méthode des contractions hiérarchiques développée par Geisberger [59] pour les graphes déterministes statiques, et par Batz *et al.* [10] pour le cas d'arcs dépendants du temps.

Les contractions hiérarchiques nécessitent en premier lieu une phase de **hiérarchisation des nœuds du graphe**, en fonction de paramètres liés à l'efficacité des contractions. Cette étape est la plus importante du processus, dans la mesure où elle permet une réorganisation du graphe admettant la formulation de nouvelles propriétés basées sur les niveaux hiérarchiques.

La seconde étape consiste en l'**ajout de nouveaux arcs**, les raccourcis. Ces arcs permettent de court-circuiter les nœuds mineurs lors de l'exploration d'un chemin, ceux-là représentant des minima locaux dans la hiérarchie. L'ajout de nouveaux arcs augmente mécaniquement l'espace de recherche d'une requête, mais cet investissement doit être amorti par l'utilisation d'un algorithme d'exploration spécifique.

À l'issue de cette seconde étape, le graphe de recherche est dans son état final, prêt à être exploré pour la **résolution de requêtes de plus courts chemins**. Le graphe hiérarchisé est exploité au moyen d'une recherche bidirectionnelle orientée vers le haut de la hiérarchie. Chacune des deux explorations aboutit à un chemin partiel constitué de nœuds tels que les niveaux hiérarchiques suivent une évolution monotone : ainsi ils sont croissants (respectivement décroissants) d'après la recherche aval (respectivement amont). Dans le cas canonique des graphes déterministes et statiques, il s'agit alors de minimiser la somme des temps associés aux deux chemins partiels obtenus.

Dans le cas où les temps de parcours sont dépendants de la date de départ au nœud initial, étudié par Batz *et al.* [10], plusieurs adaptations sont nécessaires. En l'occurrence, après la définition de fonctions de temps de parcours linéaires par morceaux, l'algorithme de résolution de requêtes gagne en complexité : le parcours du graphe est guidé par la concaténation et l'agrégation de fonctions de temps de parcours, jusqu'à obtenir le profil optimal du temps d'arrivée au nœud destination. Ces adaptations rejaillissent également au cours du pré-traitement, lors des étapes de recherche de chemin-témoin. La quantité d'opérations sur les fonctions de temps de parcours peut toutefois être réduite via une phase préliminaire de réduction de l'espace de recherche, lors de laquelle les nœuds sont étiquetés par les intervalles des profils de temps de parcours. Cette sophistication algorithmique se traduit tout de même par des temps de calcul bien supérieurs à ceux du cas statique étudié par Geisberger, sur des graphes de taille comparable : il faut ainsi compter au minimum 2 heures de pré-traitement et entre 2 et 5 secondes de temps moyen par requête sur le graphe *Western Europe*, dans un scénario où seules les routes principales sont définies par des fonctions dynamiques.

Comme indiqué par Bast *et al.* [7], les contractions hiérarchiques apportent une réduction évidente du temps de calcul observé lors des requêtes, au prix d'un pré-traitement raisonnablement court comparativement aux autres techniques d'accélération. Ceci étant dit, plusieurs sources d'amélioration persistent. Concernant l'évaluation du coût d'une contraction tout d'abord, le choix d'un modèle de somme pondérée rend le paramétrage de la fonction de

coût très important, d'autant plus que de nombreux critères de nature variée ont été utilisés, et que les performances des contractions hiérarchiques y sont très sensibles. Pourtant, les tests empiriques réalisés dans l'état de l'art donnent peu d'indications sur cette question. Afin d'optimiser le paramétrage de cette technique d'accélération et améliorer les calculateurs d'itinéraires qui l'utilisent, à l'image de la plateforme TEMPUS ou du moteur de calcul de Mappy, un examen de l'espace vectoriel défini par les paramètres utilisés par Batz *et al.* [10] sera effectué dans le chapitre 6.

Par ailleurs, cette technique a été présentée pour un cadre déterministe, il sera intéressant d'étudier le cas stochastique, dans lequel les poids associés aux arcs sont représentés par des variables aléatoires. L'adaptation des contractions hiérarchiques à un tel canevas constitue un défi intéressant à relever dans la mesure où elle pourrait significativement réduire le temps de traitement propre à l'approche classique définie dans la partie II. Cet aspect sera abordé au cours du chapitre 7, le dernier de cette thèse.

## Implémentation des contractions hiérarchiques et analyse de sensibilité

Les contractions hiérarchiques et leurs performances en termes de temps de calcul sont fortement dépendantes d'un ensemble de paramètres à définir en préalable à la hiérarchisation des nœuds, réalisée en pré-traitement. Comme mentionné dans le chapitre 5, Geisberger [59], puis Geisberger *et al.* [60], ont défini un ensemble de critères permettant d'obtenir une hiérarchie performante tout autant qu'équilibrée, prenant comme fondement la nécessité de faire diminuer le nombre d'arcs dans le graphe lors des phases de contraction des nœuds, ou encore celle de répartir relativement uniformément les nœuds contractés. La différence entre les nombres d'arcs créés et supprimés est vue comme le critère principal, le nombre de nœuds parcourus lors des recherches locales ou encore la quantité d'arcs originaux représentés dans les raccourcis étant également mis en valeur par leurs simulations. Plus tard, Batz [9] a restreint l'analyse sur quatre critères, inspirés des travaux précédents. Trois sont des ratios entre arcs créés et arcs supprimés, focalisés respectivement sur l'évolution du nombre d'arcs, sur l'évolution du nombre correspondant d'arcs originaux et sur l'évolution de la complexité des fonctions de temps de parcours. Le dernier critère mesure la « profondeur » des nœuds, évaluation de la densité de nœuds contractés dans leur voisinage. Cependant, l'auteur n'a considéré qu'un seul paramétrage dans ses expérimentations.

Le but de ce chapitre est d'évaluer et de caractériser l'impact relatif de ces différents critères, dans des contextes de graphe statique d'une part et dynamique d'autre part. Les quatre critères utilisés par Batz [9] sont choisis pour la présente analyse. Par rapport aux évolutions des coefficients linéaires associés à ces critères, quelle est la sensibilité respectivement du temps de pré-traitement, du temps de requêtage pour un nombre  $r$  de requêtes et de l'évolution du nombre d'arcs entre le graphe de recherche initial et le graphe hiérarchisé ? D'un point de vue plus pragmatique, si l'objectif est de réduire le temps nécessaire à la résolution de  $r$  requêtes, quel est l'ensemble optimal de coefficients à intégrer dans la fonction de hiérarchisation, au sein de l'espace défini par les coefficients des quatre critères d'intérêt ?

La première section du chapitre détaillera les entrées et sorties de la procédure de contraction hiérarchique envisageables dans une optique d'analyse de sensibilité, puis quelques outils théoriques seront rappelés dans la section 6.2 pour répondre aux questions de recherche précédentes. Et enfin, la section 6.3 proposera une gamme de résultats conduisant à des recommandations pratiques concernant le paramétrage des contractions hiérarchiques, ainsi qu'une confirmation obtenue par l'intermédiaire du calculateur Mappy démontrant le potentiel encore non exploité des contractions hiérarchiques dans les calculateurs industriels.



## 6.1 Paramétrage des contractions hiérarchiques

Les temps de pré-traitement, et à un degré moindre, de requêtage sont fortement dépendants du paramétrage de la fonction de hiérarchisation entrant en jeu lors du pré-traitement. L'idée de cette première partie est de proposer une description détaillée de ces éléments, pour permettre la construction d'un plan d'expérience destiné à mettre en évidence l'importance de chacun des paramètres. Une revue exhaustive des paramètres initialement utilisés par Batz [9] sera proposée en guise d'entrée de l'analyse, puis l'accent sera porté sur quelques éléments observés en sortie de l'algorithme, ceux-ci étant vus comme les variables expliquées de l'analyse, qu'il convient d'optimiser.

### 6.1.1 Définition de la fonction de hiérarchisation

Dans l'algorithme des contractions hiérarchiques, les nœuds sont ordonnés en vertu d'une clef correspondant à leur niveau d'importance relative dans le graphe. Cette clef est en réalité une fonction de hiérarchisation proposée dans l'état de l'art sous la forme d'une somme pondérée de critères. Comme précisé dans l'introduction de ce chapitre, l'analyse sera centrée sur les quatre critères de hiérarchisation définis par Batz [9] :

- $EQ$  : ratio décrivant l'évolution du nombre d'arcs dans le graphe si un nœud  $u$  est contracté ;
- $SSD$  : indicateur de « profondeur » qui représente le niveau d'importance de chaque nœud : plus l'indicateur est élevé, et plus le nœud aura été contracté tardivement par rapport aux autres nœuds de son voisinage. La valeur associée à un nœud donné est ainsi mise à jour lors de la contraction d'un nœud voisin ;
- $OEQ$  : ratio décrivant, en cas de contraction du nœud  $u$ , l'évolution du nombre d'arcs dans le graphe résiduel mesurée par la quantité d'arcs originaux qu'ils représentent. Cet indicateur retranscrit la complexité de chaque arc du graphe de recherche notamment en vue du développement des chemins qui l'empruntent ;
- et enfin  $CQ$  : ratio fondé sur l'évolution du nombre d'arcs mesurant un niveau de complexité des fonctions de temps de parcours, *i.e.* la complexification de la description du caractère dynamique des temps de parcours en cas de contraction d'un nœud  $u$ .

Le nœud  $u \in V$  est alors caractérisé par la valeur de sa fonction de hiérarchisation, définie comme suit :

$$k(u) = w_{EQ} * EQ(u) + w_{SSD} * SSD(u) + w_{OEQ} * OEQ(u) + w_{CQ} * CQ(u) \quad (6.1)$$

où  $w_{EQ}$ ,  $w_{SSD}$ ,  $w_{OEQ}$  et  $w_{CQ}$  sont les coefficients linéaires associés à chaque critère, définis sur l'ensemble des réels. En référence à la contraction du nœud  $u$ , on exprime les quatre critères précédents :

$$EQ(u) = \frac{|S_u|}{\max(1, |R_u|)} \quad (6.2)$$

$$SSD(v) = \max(1 + SSQ(u), SSQ(v)) \quad (6.3)$$

$$OEQ(u) = \frac{\sum_{e \in S_u} (O(e))}{\max(1, \sum_{e \in R_u} (O(e)))} \quad (6.4)$$

$$CQ(u) = \frac{\sum_{e \in S_u} (C(e))}{\max(1, \sum_{e \in R_u} (C(e)))} \quad (6.5)$$

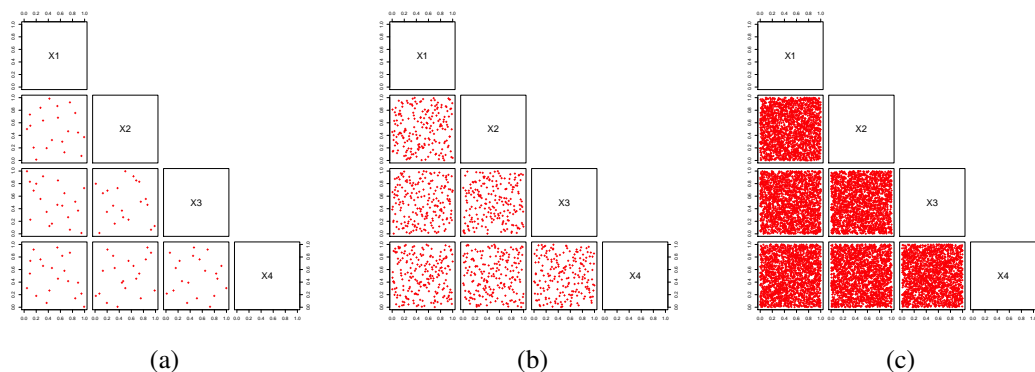


FIGURE 6.1 – Couverture de l'espace d'échantillonnage par la technique *LHS* : (a) 20 individus (b) 200 individus (c) 2000 individus.

où  $S_u$  est l'ensemble des arcs raccourcis générés,  $R_u$  l'ensemble des arcs supprimés au sein du graphe résiduel,  $O(\cdot)$  une fonction retournant le nombre d'arcs originaux représentés par un arc ( $O(e) = 1$  si  $e \in E$ ),  $C(\cdot)$  une fonction retournant la complexité d'un arc, mesurée comme le nombre de segments composant la fonction linéaire par morceaux associée, et  $v$  les nœuds tels que  $(u, v) \in E$ .

Dans le cas présent, nous simplifions l'analyse en générant des valeurs indépendantes situées dans l'intervalle  $[0; 1]$  pour chacun des quatre coefficients. Afin de quadriller de manière optimale l'espace à quatre dimensions ainsi défini, la technique d'échantillonnage dite de l'échantillonnage par hypercube latin (*Latin Hypercube Sampling*, ou *LHS*) est employée [104]. La couverture de l'espace est assurée par la subdivision de chaque dimension en  $M$  intervalles, les tuples générés s'y répartissant de manière équilibrée. La figure 6.1 illustre cet état de fait, tout comme l'impact de la taille des échantillons.

Compte tenu de la définition linéaire de la fonction, certains ensembles de coefficients sont équivalents, c'est le cas par exemple de ceux issus de la multiplication d'un premier tuple par un scalaire. En considérant l'importance relative des coefficients les uns par rapport aux autres, il est également possible d'échantillonner des tuples tels que  $\sum_i (w_i) = 1$ . Pour prendre en compte cette contrainte supplémentaire, un échantillonnage basé sur la loi de Dirichlet apporte des réponses (voir par exemple [34]). Toutefois, pour des raisons de clarté de l'analyse de sensibilité, la présente étude se limite à l'étude des sorties du modèle sur l'espace  $[0; 1]^4$ , l'espace des solutions étant du reste couvert de façon satisfaisante sans cette dernière contrainte, comme l'illustre la figure 6.1.

### 6.1.2 Sorties du modèle

Les entrées du modèle sont les pondérations associées aux quatre critères de Batz *et al.* [9]. Pour ce qui est des sorties de l'algorithme, il ne sera pas question de stratégie de routage ni de plus court chemin, mais plutôt des performances intrinsèques de l'algorithme et de la qualité de la hiérarchisation des nœuds, évaluées au travers de trois variables d'intérêt.

La première d'entre elles est le temps de pré-traitement, recouvrant la hiérarchisation des nœuds par ordre d'importance, et la contraction du graphe visant à définir les arcs raccourcis nécessaires pour la résolution des requêtes. Cette variable est la plus importante de l'analyse, elle est aussi celle qui est supposément la plus impactée par la définition des coefficients associés aux critères de hiérarchisation. En effet, en modifiant directement les degrés d'importance des nœuds lors de la procédure de hiérarchisation, il est possible d'envisager

une modification de leur ordre dans la hiérarchie, et donc, un comportement différent lors de la contraction du graphe.

La seconde variable est le temps de requêtage, mesuré autour de la milliseconde pour une requête unique, et ce, même dans les graphes de très grande taille [7]. Il convient donc de mesurer le temps de requêtage pour un grand nombre  $r$  de requêtes, dans des conditions se rapprochant notamment de l'exploitation opérationnelle d'un calculateur d'itinéraires à grande échelle sur un serveur distant.

Enfin, un ratio de création d'arcs fournira l'évolution du nombre d'arcs entre le graphe initial et le graphe hiérarchisé pour chaque configuration. Si le ratio est supérieur à 1, cela signifie que le nombre de raccourcis créés surpasse le nombre d'arcs supprimés pendant la phase de contraction. En substance, plus ce ratio est bas, et plus la phase de hiérarchisation aura été efficace pour préparer les requêtes, au prix toutefois d'un temps de pré-traitement également plus long.

En complément, le degré de similarité entre les hiérarchies de nœuds sera également considéré en annexe de ce manuscrit (voir annexe F). Ce dernier critère pourra être évalué en phase de post-traitement, pour décrire les similarités obtenues en termes de hiérarchie.

## 6.2 Évaluation du paramétrage

Les techniques de décomposition de la variance tirées de l'état de l'art dédié à l'analyse de sensibilité, qui permettront de relier les entrées et sorties évoquées en section précédente, seront proposées ci-après (cf section 6.2.1). Par ailleurs, un algorithme de recherche locale sera développé pour aboutir à des jeux de paramètres optimaux, au sens de la minimisation du temps de calcul nécessaire à l'accomplissement des contractions hiérarchiques (cf section 6.2.2).

### 6.2.1 Décomposition de la variance

Après la génération de  $N$  tuples de base selon la technique *LHS*, comme évoqué dans la section 6.1.1, il convient d'évaluer les sorties de l'algorithme des contractions hiérarchiques. Pour plus de détails sur la technique de décomposition de la variance ainsi que les démonstrations associées à la propriété de décomposition, le lecteur intéressé pourra par exemple se référer aux contributions de Sobol [148], Jacques [78] et Saltelli *et al.* [137]. Les grandes lignes du procédé sont retranscrites ici, de la même manière que toutes les clefs de résolution du problème à 4 facteurs sont apportées.

#### 6.2.1.1 Analyse de sensibilité et décomposition de la variance

Pour schématiser le processus étudié, on pose une fonction  $f$  telle que :

$$Y = f(X_1, \dots, X_k) \quad (6.6)$$

où  $k$  est le nombre de facteurs considérés dans l'analyse. Si elle est intégrable sur l'ensemble  $[0; 1]^k$ , la fonction  $f$  est décomposable comme suit [148] :

$$f(X_1, \dots, X_k) = f_0 + \sum_{i=1}^k f_i(X_i) + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k (f_{ij}(X_i, X_j)) + \dots + f_{1, \dots, k}(X_1, \dots, X_k) \quad (6.7)$$

De même, en considérant la variance de chacun de ces termes, une nouvelle décomposition est observable :

$$V_{tot} = \sum_{i=1}^k V_i + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k (V_{ij}) + \dots + V_{1\dots k} \quad (6.8)$$

où  $V_{tot}$  est la variance totale du vecteur résultat  $Y$ . De plus, on a :

$$V_i = V(f_i(X_i)) = V_{X_i}(\mathbb{E}_{X_{-i}}[Y|X_i]) \quad (6.9)$$

où  $X_i$  est le facteur  $i$  (*i.e.* la  $i^{\text{ème}}$  colonne de la matrice d'inputs),  $X_{-i}$  est la matrice d'inputs complète moins la colonne  $i$ , et  $V_{X_i}(\mathbb{E}_{X_{-i}}[Y|X_i])$  représente la variance conditionnelle de  $Y$  sachant  $X_i$ . De même, à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} V_{ij} &= V(f_{ij}(x_i, x_j)) \\ &= V_{X_i X_j}(\mathbb{E}_{X_{-ij}}[Y|X_i, X_j]) - V_{X_i}(\mathbb{E}_{X_{-i}}[Y|X_i]) - V_{X_j}(\mathbb{E}_{X_{-j}}[Y|X_j]) \end{aligned} \quad (6.10)$$

Cette dernière expression est généralisable pour les variances partielles aux ordres supérieurs. Pour compléter l'équation précédente, on peut définir  $V_{ij}^p$  comme la variance conditionnelle du groupe constitué des facteurs  $i$  et  $j$  :

$$V_{ij}^p = V_{X_i X_j}(\mathbb{E}_{X_{-ij}}[Y|X_i, X_j]) = V_{ij} + V_i + V_j \quad (6.11)$$

Il faut noter que les expressions des variances conditionnelles renvoient à une proportion de la variance totale due au(x) facteur(s) étudié(s). Ainsi, soit  $I$  un ensemble de facteurs tel que  $0 \leq |I| \leq k$ , les grandeurs  $V_{X_I}(\mathbb{E}_{X_{-I}}[Y|X_I])$  sont nécessairement comprises entre 0 et  $V_{tot}$ . Il est alors possible de poser  $S_I$  l'*effet* du groupe de facteur  $I$  :

$$S_I = \frac{V_I}{V} \quad (6.12)$$

L'équation 6.8 peut également être considérée à l'aune de cette nouvelle grandeur :

$$1 = \sum_{i=1}^k S_i + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k (S_{ij}) + \dots + S_{1\dots k} \quad (6.13)$$

De plus, on déduit de l'équation 6.11 la même relation sur les indices de sensibilité, pour définir l'*effet principal* du groupe  $I$  :

$$S_{ij}^p = S_{ij} + S_i + S_j \quad (6.14)$$

Par ailleurs, un autre indice très populaire dans la littérature consacrée à l'analyse de sensibilité est l'*effet total* d'un facteur, ou d'un groupe de facteurs. Avec  $I$  un ensemble de facteurs donné, l'effet total de  $I$  est la somme de tous les effets impliquant des facteurs inclus au sein du groupe  $I$ . En utilisant le théorème de la variance totale avec le groupe de facteurs complémentaire à  $I$ , noté  $-I$ , on a :

$$V_{tot} = V_{X_{-I}}(\mathbb{E}_{X_I}[Y|X_{-I}]) + \mathbb{E}_{X_{-I}}(V_{X_I}[Y|X_{-I}]) \quad (6.15)$$

On déduit l'expression de la variance totale impliquant les facteurs du groupe  $I$ , et donc l'effet total  $S_I^T$  :

$$V_{tot} = V_{-I}^p + V_I^T \quad (6.16)$$

$$1 = S_{-I}^p + S_I^T \quad (6.17)$$

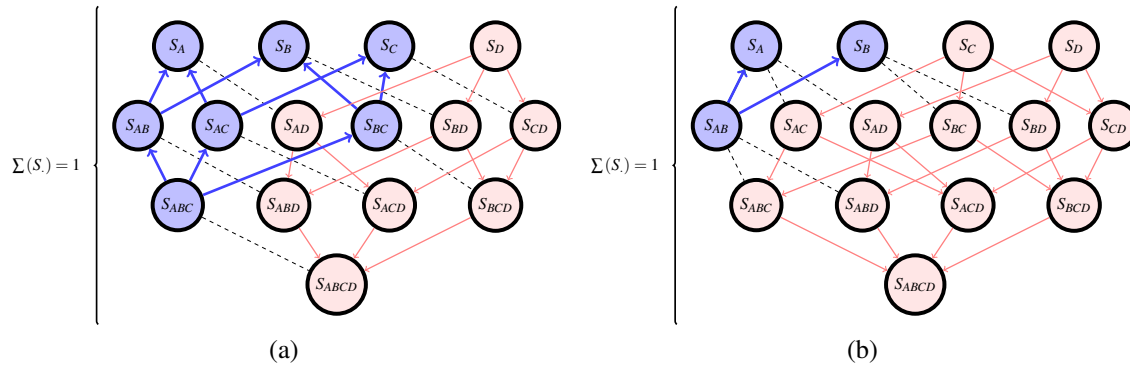


FIGURE 6.2 – Décomposition des effets des facteurs sur la variance totale, pour quatre facteurs A, B, C et D (par exemple,  $EQ=A$ ,  $SSD=B$ ,  $OEQ=C$ ,  $CQ=D$ ) et exemples de complémentarité des indices de sensibilité  $S_I^T$  et  $S_{-I}^p$  : (a)  $S_D^T$  et  $S_{ABC}^p$  ; (b)  $S_{CD}^T$  et  $S_{AB}^p$

En définitive, l'effet total d'un groupe de facteurs donné est le résidu complétant l'effet principal du groupe de facteurs complémentaire. La figure 6.2 illustre l'ensemble de cette décomposition dans un cas à 4 facteurs, tel qu'étudié ici. On observe dans ce schéma que les effets principaux  $S_I^p$  sont composés en remontant dans le graphe constituant le schéma de décomposition de variance, comme le montrent les exemples des groupes  $\{ABC\}$  et  $\{AB\}$  (en bleu). Ainsi, il est également possible de réaliser graphiquement que  $S_{AB}^p \leq S_{ABC}^p$ , ce qui s'explique par définition des effets des facteurs, tout comme par la relation ensembliste  $\{AB\} \subset \{ABC\}$ . Parallèlement, l'effet total du groupe  $I$  est la somme des effets des groupes incluant le ou les facteurs composant  $I$ , il est reconstitué par un parcours descendant dans le graphe du schéma 6.2, comme l'illustrent les exemples du facteur  $D$  et du groupe  $\{CD\}$  (en rouge). Enfin, la nature des effets totaux définis par l'équation 6.17 est montrée par les couples  $S_{ABC}^p$  et  $S_D^T$  d'une part, et  $S_{AB}^p$  et  $S_{CD}^T$  d'autre part. Dans les deux cas, tous les effets des facteurs sont couverts, ce qui permet de retrouver la variance totale.

### 6.2.1.2 Estimation de la variance par la technique de Monte-Carlo

Pour calculer les variances conditionnelles telles qu'exprimées dans la sous-section précédente, une méthode de Monte-Carlo développée successivement par Sobol [148], puis par Saltelli *et al.* [135, 136, 137] est utilisée. Dans cette approche, pour une taille d'échantillon initial égale à  $N$ , l'analyse de la variance s'effectue via le calcul de  $(k+2) * N$  individus,  $k$  étant le nombre de facteurs utilisés en entrée.

Deux échantillons construits selon la méthodologie développée dans la section 6.1.1 sont tout d'abord générés. Les matrices de dimension  $(N, k)$  produites sont notées  $A$  et  $B$ .

Pour déterminer l'impact du  $i^{\text{ième}}$  facteur ( $1 \geq i \geq k$ ), il est ensuite nécessaire de créer une nouvelle matrice  $C_i$  telle que :

$$C^{(i)} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & B_{1,i} & \cdots & A_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & B_{n,i} & \cdots & A_{n,k} \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

Dans le cas présent, il y a 4 facteurs. L'étude complète nécessite donc de procéder au calcul de contraction hiérarchique lors de  $6 * N$  expériences. La matrice d'inputs complète  $M$  est construite de la façon suivante :

$$M = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C^{(1)} \\ C^{(2)} \\ C^{(3)} \\ C^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & A_{n,3} & A_{n,4} \\ B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} & B_{1,4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{n,1} & B_{n,2} & B_{n,3} & B_{n,4} \\ B_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{n,1} & A_{n,2} & A_{n,3} & A_{n,4} \\ A_{1,1} & B_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n,1} & B_{n,2} & A_{n,3} & A_{n,4} \\ A_{1,1} & A_{1,2} & B_{1,3} & A_{1,4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & B_{n,3} & A_{n,4} \\ A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & B_{1,4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & A_{n,3} & B_{n,4} \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

Le calcul des variances conditionnelles, et par voie de conséquence, des effets relatifs aux différents facteurs, est réalisé à partir de l'ensemble de ces matrices grâce aux estimateurs empiriques développés par Saltelli *et al.* [137] :

$$\hat{V}_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left\{ f(B_{k,\cdot}) \left( f(C_{k,\cdot}^{(i)}) - f(A_{k,\cdot}) \right) \right\} \quad (6.20)$$

$$\hat{V}_i^T = \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^N \left\{ \left( f(A_{k,\cdot}) - f(C_{k,\cdot}^{(i)}) \right)^2 \right\} \quad (6.21)$$

$$\hat{V}_{ij}^T = \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^N \left\{ \left( f(C_{k,\cdot}^{(i)}) - f(C_{k,\cdot}^{(j)}) \right)^2 \right\} \quad (6.22)$$

En somme, 14 estimateurs sont obtenus. Quatre estimateurs calculés via l'équation 6.20 donnent directement les effets du premier niveau  $S_i$ , après division de ces quantités par la variance totale  $V_{tot}$ . Ensuite, les six effets du second niveau  $S_{ij}$  sont calculés par le biais de la combinaison des équations 6.14 et 6.17, dans laquelle les  $S_i$  et les  $S_{ij}^T$  sont issus respectivement des équations 6.20 et 6.22 :

$$S_{ij} = 1 - S_{kl}^T - S_i - S_j \quad (6.23)$$

où  $i, j, k$  et  $l$  sont les indices référant aux quatre facteurs. Dans un troisième temps, il est nécessaire d'utiliser les effets des deux premiers niveaux pour déterminer les effets du troisième niveau, toujours d'après l'équation 6.17 (et l'équation 6.14 adaptée pour les groupes de trois facteurs) en estimant les  $S_i^T$  au moyen de l'équation 6.21 :

$$S_{ijk} = 1 - S_l^T - S_{ij} - S_{ik} - S_{jk} - S_i - S_j - S_k \quad (6.24)$$

En combinant tous les effets calculés avec l'équation 6.13, une estimation de l'effet résiduel  $S_{ABCD}$  est à son tour obtenue.

Une dernière interrogation réside en la valeur  $N$ , un nombre d'expériences suffisant pour que les différents estimateurs convergent. Des expériences préliminaires avec  $N = 100$  et  $N = 200$  (soit respectivement 600 et 1200 calculs de contraction hiérarchique) semblent indiquer que ces nombres sont clairement insuffisants. De même, les expériences conduites par Saltelli *et al.* [137] sur les estimateurs des effets totaux, correspondant ici aux équations 6.21 et 6.22, semblent indiquer une stabilisation du biais par rapport aux valeurs théoriques à partir d'un nombre total d'expériences compris entre 30000 et 60000 (soit  $N = 5000$ , voire  $N = 10000$ ), suivant les estimateurs et les fonctions  $f$  impliquées. Ces ordres de grandeur suggèrent de travailler sur des graphes de petites tailles, de manière à ne pas voir s'envoler le temps de calcul, ces considérations seront évoquées de nouveau dans la section 6.3.

## 6.2.2 Optimisation du temps de calcul global

Les éléments de méthodologie présentés jusqu'à présent permettent de répondre à la première des deux questions de recherche avancées en introduction : comment varient les différentes variables résultats, et en particulier le temps de pré-traitement, en fonction de l'évolution des coefficients associés aux critères de priorité. Il reste à examiner la deuxième question : quelle forme aurait le tuple « optimal », *i.e.* celui qui permet d'aboutir au temps de calcul minimal ?

Dans cette optique, l'algorithme 6, fondé sur le principe de recherche locale, donne des éléments de réponse. Le temps total nécessaire à la réalisation du pré-traitement et la résolution d'un lot limité de requêtes est choisi comme objectif de l'optimisation.

Dans cette partie, la logique de proportion allouée à chaque critère décrite dans le paragraphe 6.1.1 est retenue : un budget de points est réparti entre les quatre critères, de telle manière que la somme des points est normalisée. Viser une précision de  $10^{-3}$  sur l'intervalle  $[0; 1]$  pour chacun des critères évoqués plus haut revient à partager 1000 points entre quatre coefficients définis sur l'ensemble des entiers naturels.

L'algorithme de recherche locale nécessite la définition d'une relation de voisinage (ligne 14), ici celle-ci est fondée sur l'idée de budget à partager. En l'occurrence, pour quatre poids  $w_i \forall i \in \{1; \dots; 4\}$ , les paramétrages voisins  $W'$  sont tels qu'il y a deux indices  $i, j \in \{1; \dots; 4\}$  et  $i \neq j$  pour lesquels  $w'_i = w_i - 1$  et  $w'_j = w_j + 1$ , les coefficients relatifs aux deux autres indices restant inchangés. Cette relation de voisinage doit également respecter la contrainte de budget, *i.e.* les nouveaux coefficients doivent être définis entre 0 et 1000. Par ailleurs, le paramétrage voisin précédemment visité à la dernière itération est exclu des voisinages possibles pour améliorer l'efficacité du parcours de l'espace des paramètres. Cette opération est généralisable en un mécanisme de recherche tabou, non implémenté ici.

Plusieurs paramétrages de départ sont envisagés, de manière à ne pas rester limité à un minimum local éventuel, subdivisant de facto la procédure principale de recherche locale en autant de sous-procédures. Une sous-procédure se décompose en plusieurs étapes, qui se terminent lorsqu'aucune amélioration à la meilleure solution de la sous-procédure n'est réalisée pendant  $n_1$  itérations. En outre, ces étapes sont séparées par une étape de diversification du paramétrage (ligne 10) définie comme une relation de voisinage dont l'incrément est fixé à 100 points (*i.e.*  $w'_i = w_i - 100$  et  $w'_j = w_j + 100$ ). La sous-procédure elle-même se termine après  $d$  diversifications, ou  $n_2$  itérations au total.

---

**Algorithme 6 (CHRECHLOCALE)** Algorithme de recherche locale utilisé pour optimiser les coefficients de la fonction de hiérarchisation

---

**ENTRÉES:** Graphe  $G$ ,  $W_{init}$ ,  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $d$

**SORTIES:** Paramétrage optimisé  $W^*$

```

1:  $W \leftarrow W_{init}$ 
2:  $lastImprove \leftarrow 0$ 
3:  $counter \leftarrow 0$ 
4:  $divsf \leftarrow 0$ 
5:  $T \leftarrow TCH(W)$  ▷ Déterminer le temps de calcul pour le jeu de paramètre initial
6:  $T^* \leftarrow T$ 
7:  $W^* \leftarrow W$ 
8: TantQue  $counter < n_2$  et  $divsf < d$  Faire
9:   Si  $divsf > 0$  Alors
10:      $W \leftarrow DIVERSIFICATION(W)$  ▷ Diversification du jeu de paramètres
11:      $lastImprove \leftarrow 0$ 
12:   FinSi
13:   TantQue  $lastImprove < n_1$  Faire
14:      $W_{new} \leftarrow VOISINAGE(W)$  ▷ Mise à jour simple des paramètres
15:      $T \leftarrow TCH(W_{new})$ 
16:     Si  $T \leq T^*$  Alors
17:        $T^* \leftarrow T$ 
18:        $W^* \leftarrow W_{new}$ 
19:        $W \leftarrow W_{new}$ 
20:        $lastImprove \leftarrow 0$ 
21:     Sinon
22:        $lastImprove \leftarrow lastImprove + 1$ 
23:     FinSi
24:      $counter \leftarrow counter + 1$ 
25:   FinTantQue
26:    $divsf \leftarrow divsf + 1$ 
27: FinTantQue

```

---

## 6.3 Résultats empiriques

Les résultats obtenus après l'analyse de sensibilité et la phase d'optimisation des paramètres seront détaillés ici. Après une rapide présentation des instances exploitées, les résultats de l'analyse de sensibilité seront explorés pour les trois variables de sorties évoquées dans la section 6.1.2. Par la suite, les jeux de paramètres qui minimisent le temps de pré-traitement seront approximés au moyen de l'algorithme de recherche locale défini dans la sous-section 6.2.2. Enfin, ces résultats seront illustrés par une application empirique offerte par la collaboration avec Mappy.

### 6.3.1 Données utilisées

Deux des graphes utilisés dans le chapitre 4 sont réutilisés ici : le réseau en grille  $G20$  et le graphe de la région de Chicago  $CS$ . Pour chacun d'eux, une version statique et une version dynamique sont prises en compte. Les temps de parcours se rapportant aux instances



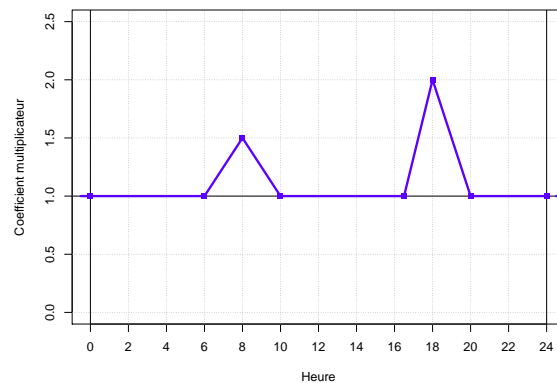


FIGURE 6.3 – Profil de base de la génération des scénarios dynamiques

statiques sont ceux décrits dans la partie 4.2, ils constituent également les temps de parcours de base des scénarios dynamiques. Dans ce second cas, un horizon de temps de 24 heures est considéré pour construire des fonctions de temps de parcours telles qu'utilisées par Batz [9], avec le profil de temps de parcours proposé par la figure 6.3. Deux périodes de pointe sont considérées, le matin et l'après-midi, lors desquelles les temps de parcours fluides sont respectivement multipliés par 1.5 et 2 au plus fort de la pointe (respectivement 8h et 18h).

Pour simplifier l'analyse et travailler sur des graphes possédant un taux d'arcs dynamiques comparable à celui de Batz [9], il est choisi de ne faire varier que les temps de parcours des arcs non réguliers, *i.e.* les voies express pour le graphe *CS*, et les voies périphériques et les axes structurants pour le réseau *G20*. Au final, les graphes *CS* et *G20* possèdent respectivement 16.5% et 22.5% d'arcs dynamiques.

Dans la suite de l'analyse, les quatre graphes sont notés *CSsta*, *CSdyn*, *G20sta* et *G20dyn*.

### 6.3.2 Analyse des résultats par rapport aux coefficients de priorité

Avant la détermination des effets de chacun des facteurs, une étude de la convergence des estimateurs décrits dans la section 6.2.1 a été réalisée, pour donner une première image de la qualité des estimations. Après cette première étape, et une fois la quantité d'expériences validée, un procédé de *bootstrap* est utilisé pour estimer les effets des facteurs aux différents ordres. Il s'agit d'un procédé de rééchantillonnage qui consiste à générer des « nouveaux échantillons » tirés à partir d'un échantillon initial [64]. Cette technique permet d'exprimer les effets à calculer comme des distributions, que l'on peut simplifier par les valeurs moyennes, mais aussi encadrer en utilisant l'écart-type obtenu ou les valeurs des centiles. Pour chacune des variables en sortie, le *bootstrap* a consisté en 10000 réplifications du calcul de décomposition de la variance prenant en compte 20% des expériences.

La machine utilisée pour les tests est équipée de Windows 7, d'un processeur Intel Xeon E5-2620 Dual Core à 2GHz et de 96Go de RAM. Les expériences (toutes les phases de l'algorithme des contractions hiérarchiques, requêtes comprises) ont été conduites de manière parallélisée, 16 threads ayant été mobilisés sur cette machine.

#### 6.3.2.1 Convergence des estimateurs

Avant de détailler les résultats de l'analyse de sensibilité, il est nécessaire de commenter le processus de convergence de chacune des analyses entreprises. Dans la section 6.2.1, la

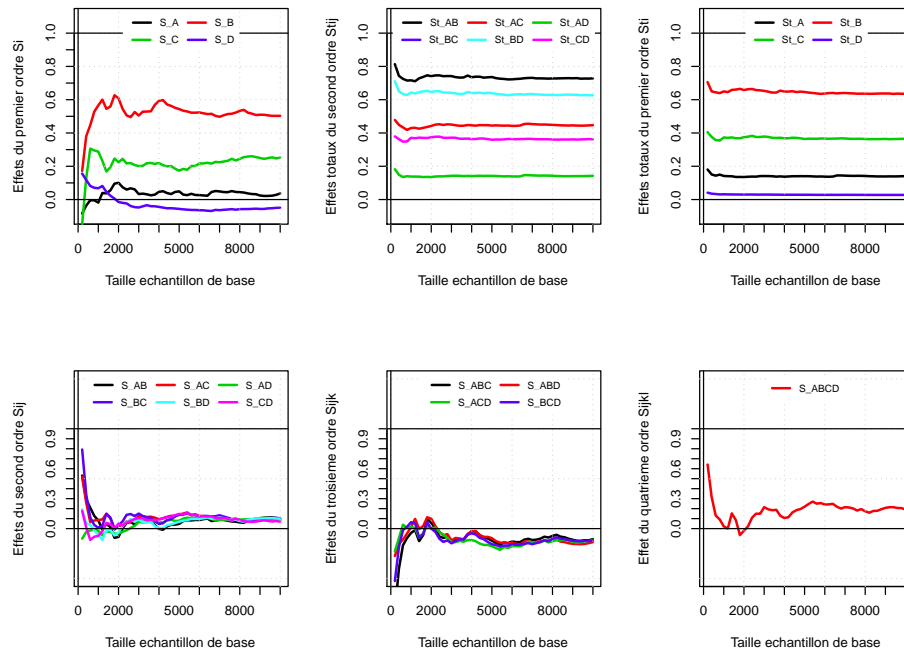


FIGURE 6.4 – Convergence des estimateurs des effets des facteurs ( $A=EQ$ ;  $B=SSD$ ;  $C=OEQ$ ;  $D=CQ$ ) expliquant la variance du temps de pré-traitement pour le graphe  $CSsta$  : (en haut, de gauche à droite) estimateurs des effets  $S_i$ ,  $ST_{ij}$ ,  $ST_i$ ; (en bas, de gauche à droite) effets déduits  $S_{ij}$ ,  $S_{ijk}$ ,  $S_{ijkl}$

nécessité de procéder à des analyses impliquant plusieurs dizaines de milliers d'expériences était avancée. En l'occurrence, le graphe  $G20dyn$  a été testé selon 120000 configurations (soit  $N = 20000$  configurations de base générées par la technique *lhs*), alors que les autres graphes ( $CSsta$ ,  $CSdyn$  et  $G20sta$ ) ont été testés dans 60000 configurations.

Pour étudier la convergence des estimateurs, une succession de sous-échantillons correspondant aux  $n$  premières configurations données par l'échantillonnage par hypercube latin a été utilisée. Concrètement, 50 tailles d'échantillons  $n$  ont été sélectionnées à partir de  $N/50$ , par pas de  $N/50$ , avec  $N$  le nombre de configurations de base. Le calcul des estimateurs a ainsi été réalisé à partir des configurations portant les indices allant de 1 à  $n$ , de  $N + 1$  à  $N + n$ , et de  $N * (1 + i) + 1$  à  $N * (1 + i) + n$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, 4\}$  (respectivement liés aux matrices  $A$ ,  $B$  et  $C^{(i)}$ ), cf sous-section 6.2.1).

Les figures 6.4, 6.5 et 6.6 donnent une illustration de la convergence des trois séries d'estimateurs  $\hat{S}_i$ ,  $\hat{S}_{ij}^T$  et  $\hat{S}_i^T$  pour chacun des trois objectifs examinés pour le cas du graphe  $CSsta$ . Les comportements de convergence des estimateurs sont identiques dans tous les cas empiriques testés, seules ces figures sont présentées pour des raisons de clarté de l'analyse.

La première variable, le temps de pré-traitement, présente une stabilisation relative de tous les estimateurs des effets des facteurs pour des échantillons de base tels que  $N = 10000$ , comme indiqué par la figure 6.4. En particulier, les effets totaux des facteurs (aux ordres 1 et 2) convergent très rapidement. Les effets simples d'ordre 2 à 4 sont globalement plutôt stables, et s'avèrent pour la plupart proches de 0, laissant paraître de faibles interactions entre les facteurs. En somme, la convergence pour ce critère est jugée relativement bonne, malgré les quelques irrégularités des effets exprimés en fonction de la taille d'échantillon, et certaines valeurs négatives expliquées par la qualité des estimateurs.

La seconde variable, le temps de requête, est illustrée par la figure 6.5. Il est à noter

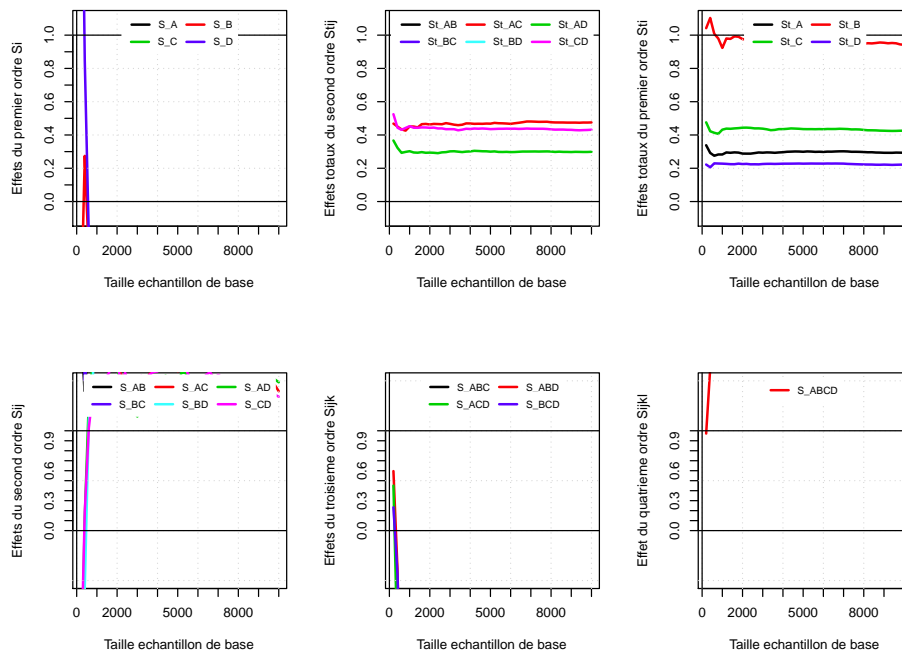


FIGURE 6.5 – Convergence des estimateurs des effets des facteurs ( $A=EQ$ ;  $B=SSD$ ;  $C=OEQ$ ;  $D=CQ$ ) expliquant la variance du temps de résolution de 10000 requêtes pour le graphe  $CSsta$  : (en haut, de gauche à droite) estimateurs des effets  $S_i$ ,  $ST_{ij}$ ,  $ST_i$ ; (en bas, de gauche à droite) effets déduits  $S_{ij}$ ,  $S_{ijk}$ ,  $S_{ijkl}$

sur cette figure que les estimateurs correspondant aux effets totaux ( $ST_i$  et  $ST_{ij}$ ) présentent un comportement de convergence incontestable, alors que dans le même temps, la première série d'estimateurs  $\hat{S}_i$  ne converge visiblement pas. Les effets simples des facteurs ne semblent pas se stabiliser dans l'intervalle  $[0; 1]$ , ce qui a pour conséquence directe des estimations de moins bonne qualité également pour les effets d'ordres supérieurs (il est ainsi possible de noter des valeurs plus grandes que 1 aux ordres 2 et 4, ainsi que des valeurs négatives à l'ordre 3). Dans les autres graphes, les estimateurs présentent des comportements tout aussi discutables, même si les différents estimateurs s'inscrivent dans l'intervalle  $[0; 1]$  (ou tout du moins ne s'en éloignent pas autant que pour l'exemple  $CSsta$ ). Par la suite, peu de crédit sera attribué aux analyses de sensibilité sur cette variable, et seuls les nuages de points obtenus seront commentés.

En ce qui concerne la troisième et dernière variable, le ratio de création d'arcs, le phénomène de convergence sous-jacent est décrit par la figure 6.6. À l'image de la première variable, elle présente une convergence correcte pour les effets d'ordre 1. Cette bonne impression est renforcée par la stabilité des effets totaux aux ordres 1 et 2 et par les valeurs des effets simples d'ordre supérieur à 1. Au regard des résultats pour ce graphe, mais également pour les trois autres, cette dernière variable est celle pour laquelle le phénomène de convergence est le plus marqué.

### 6.3.2.2 Temps de pré-traitement

Ce premier objectif est, pour rappel, le plus important de notre analyse. En effet, il représente une durée nettement supérieure à celle correspondant au temps de résolution d'une requête. Par ailleurs, il est possible d'envisager un fonctionnement opérationnel fondé sur

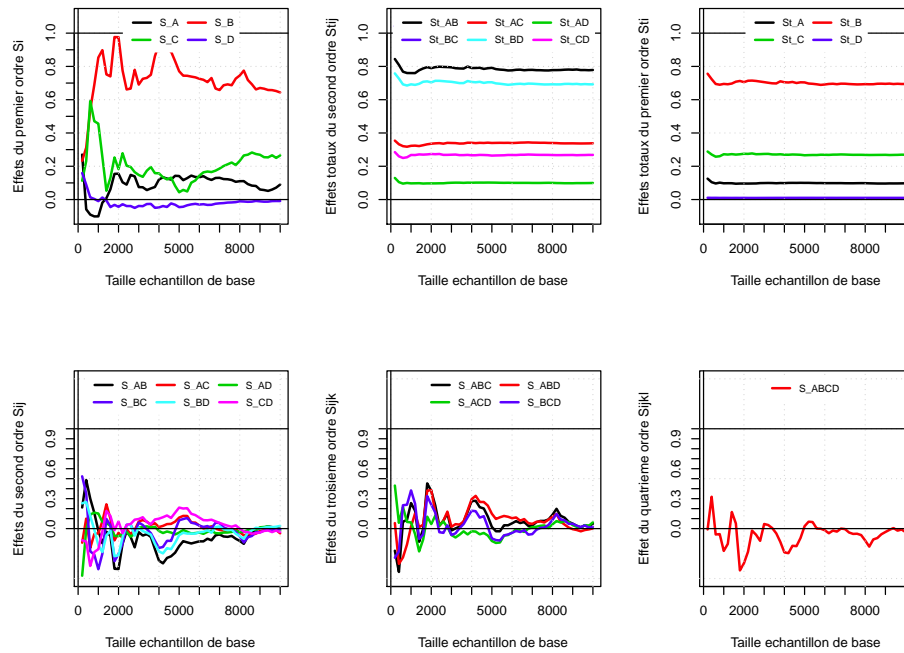


FIGURE 6.6 – Convergence des estimateurs des effets des facteurs ( $A=EQ$ ;  $B=SSD$ ;  $C=OEQ$ ;  $D=CQ$ ) expliquant la variance du ratio de création d’arcs dans le graphe  $CSsta$  : (en haut, de gauche à droite) estimateurs des effets  $S_i$ ,  $ST_{ij}$ ,  $ST_i$ ; (en bas, de gauche à droite) effets déduits  $S_{ij}$ ,  $S_{ijk}$ ,  $S_{ijkl}$

une mise à jour régulière de la hiérarchie des nœuds : de ce point de vue là, mieux vaudrait pouvoir bénéficier d’un temps de pré-traitement court, de manière à basculer d’une logique de pré-traitement à une logique de calage en temps réel.

Les figures 6.7a et 6.7b illustrent la décomposition de la variance relative au cas du graphe  $CSdyn$  observée sur le critère du temps de pré-traitement. Dans ce cas, où les estimateurs des effets des facteurs convergent de façon très visible, il est possible de constater que les effets d’ordre 1 représentent un peu plus de 60% de la variance totale. Les interactions entre les couples de facteurs représentent un peu plus de 20%, et sont essentiellement représentées par l’interaction entre les facteurs  $EQ$  et  $OEQ$ . Les deux diagrammes semblent d’ailleurs montrer la prépondérance du facteur  $OEQ$  : son effet total (somme de son effet simple et des effets de ses interactions avec un ou plusieurs autres facteurs) atteint plus de 60% de la variance totale.

Le tableau 6.1 reprend les coefficients calculés pour chacun des facteurs dans les quatre graphes. Les coefficients de la colonne correspondant au graphe  $CSdyn$  ont déjà été présentés dans la figure 6.7. À la qualité du phénomène de convergence près, il est possible d’observer dans ce tableau une image plutôt stable de la sensibilité du temps de pré-traitement aux coefficients de la fonction de hiérarchisation, quel que soit le graphe. Deux situations se distinguent néanmoins : les graphes statiques d’une part, et les graphes dynamiques d’autre part. Ainsi, dans le second cas, le facteur le plus important semble être  $OEQ$ , suivi par les facteurs  $SSD$  et  $EQ$ . Le facteur  $CQ$  est celui qui a le moins d’impact, mais il est tout de même à considérer, ce qui est la différence fondamentale avec les graphes statiques, où les valeurs (négatives, du fait d’une convergence imparfaite) sont proches de 0, soit un impact nul. Dans le cas statique, l’importance relative des autres facteurs est également modifiée : le facteur  $SSD$  semble influencer fortement le temps de pré-traitement.

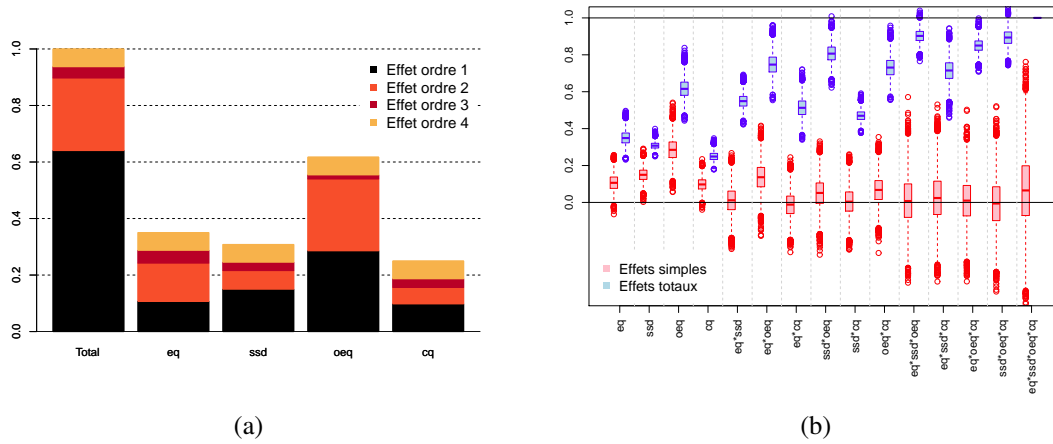


FIGURE 6.7 – Décomposition de la variance du temps de pré-traitement vis-à-vis des quatre coefficients étudiés, cas *CSdyn* : (a) Décomposition par ordres (b) Distribution des effets simples et totaux via le procédé de *bootstrap*

TABLEAU 6.1 – Moyenne des effets des facteurs issus de la décomposition de la variance sur le critère *temps de pré-traitement*, pour chaque graphe (méthode de *bootstrap*, 10000 tirages aléatoires de 2000 individus)

	<i>CSsta</i>	<i>CSdyn</i>	<i>G20sta</i>	<i>G20dyn</i>
$S_{\{eq\}}$	0.04	0.11	0.01	0.09
$S_{\{ssd\}}$	0.50	0.15	0.35	0.14
$S_{\{oeq\}}$	0.25	0.29	0.24	0.38
$S_{\{cq\}}$	-0.05	0.10	-0.08	0.03
$S_{\{eq;ssd\}}$	0.10	0.01	0.16	0.04
$S_{\{eq;oeq\}}$	0.09	0.14	0.16	0.08
$S_{\{eq;cq\}}$	0.08	-0.01	0.14	0.11
$S_{\{ssd;oeq\}}$	0.10	0.05	0.22	0.08
$S_{\{ssd;cq\}}$	0.10	0.00	0.16	0.18
$S_{\{oeq;cq\}}$	0.07	0.07	0.14	0.15
$S_{\{eq;ssd;oeq\}}$	-0.11	0.01	-0.21	-0.07
$S_{\{eq;ssd;cq\}}$	-0.14	0.03	-0.23	-0.12
$S_{\{eq;oeq;cq\}}$	-0.11	0.01	-0.21	-0.15
$S_{\{ssd;oeq;cq\}}$	-0.12	-0.01	-0.23	-0.15
$S_{\{eq;ssd;oeq;cq\}}$	0.19	0.06	0.38	0.21

TABLEAU 6.2 – Moyenne des effets des facteurs issus de la décomposition de la variance sur le critère *temps de requêtage*, pour chaque graphe (méthode de *bootstrap*, 10000 tirages aléatoires de 2000 individus)

	<i>CSsta</i>	<i>CSdyn</i>	<i>G20sta</i>	<i>G20dyn</i>
$S_{\{eq\}}$	-0.76	-0.18	-0.21	-0.15
$S_{\{ssd\}}$	-0.57	0.13	-0.07	-0.14
$S_{\{oeq\}}$	-0.56	-0.13	-0.13	-0.19
$S_{\{cq\}}$	-0.74	0.48	-0.48	-0.34
$S_{\{eq;ssd\}}$	1.90	0.44	0.59	0.65
$S_{\{eq;oeq\}}$	1.40	0.52	0.60	0.56
$S_{\{eq;cq\}}$	1.49	-0.10	0.73	0.55
$S_{\{ssd;oeq\}}$	1.83	0.47	0.76	0.88
$S_{\{ssd;cq\}}$	1.83	-0.06	0.78	0.84
$S_{\{oeq;cq\}}$	1.34	-0.05	0.78	0.71
$S_{\{eq;ssd;oeq\}}$	-2.46	-0.67	-0.89	-0.99
$S_{\{eq;ssd;cq\}}$	-2.58	-0.12	-1.04	-1.00
$S_{\{eq;oeq;cq\}}$	-2.12	-0.15	-1.04	-0.91
$S_{\{ssd;oeq;cq\}}$	-2.43	-0.14	-1.10	-1.14
$S_{\{eq;ssd;oeq;cq\}}$	3.42	0.55	1.72	1.67

### 6.3.2.3 Temps de requêtage

Concernant le temps de requêtage, les estimateurs des effets des facteurs ne convergent pas de manière satisfaisante pour un nombre de 60000 expériences (120000 dans le cas du graphe *G20dyn*), et en conséquence, les valeurs retenues pour les différents effets sont rarement incluses dans l'intervalle de définition théorique  $[0; 1]$  (*cf* tableau 6.2). Plusieurs raisons peuvent être avancées pour cet état de fait.

Tout d'abord, le nombre de configurations testées dans le cadre de cette approche de type Monte-Carlo peut être insuffisant. Augmenter le nombre de configurations pourrait être une solution, mais c'est une option contraignante à mettre en œuvre, compte tenu du temps de calcul qu'une telle augmentation de la taille de la matrice d'expériences engendrerait. De plus, aucune garantie de performance ne permet de penser qu'une augmentation de la taille des simulations suffirait à rendre les estimateurs convergents.

Le caractère non-déterministe de la résolution des requêtes doit aussi être évalué. Pour un ensemble de requête défini *a priori*, de légères fluctuations du temps de requêtage ont été constatées. Si un terme d'erreur d'ordre stochastique vient agrémenter la valeur de la variable expliquée, l'analyse de sensibilité se retrouve faussée. Une procédure corrective pourrait être de résoudre l'ensemble des requêtes plusieurs fois, et d'utiliser le temps de calcul moyen ou médian comme valeur de sortie. C'est ce type de procédure qui est utilisé dans les expérimentations menées par Batz [9], où la médiane de trois résolutions est utilisée comme temps de calcul pour une requête. Le nombre de 10000 requêtes choisi arbitrairement en début d'analyse est également discutable : d'autres tests avec plus de requêtes pour chaque configuration sont possibles.

Une image intéressante de l'importance de ce critère est malgré tout donnée par la figure 6.8, qui regroupe les nuages de points représentant le temps de requêtage exprimé en fonction de chacun des facteurs, pour le cas *G20dyn*. Il est possible de voir qu'aucune relation claire n'émerge : tout au plus, le temps de requêtage semble baisser légèrement avec le niveau du facteur *OEQ*, et s'accroître encore plus succinctement avec le niveau du facteur *CQ*

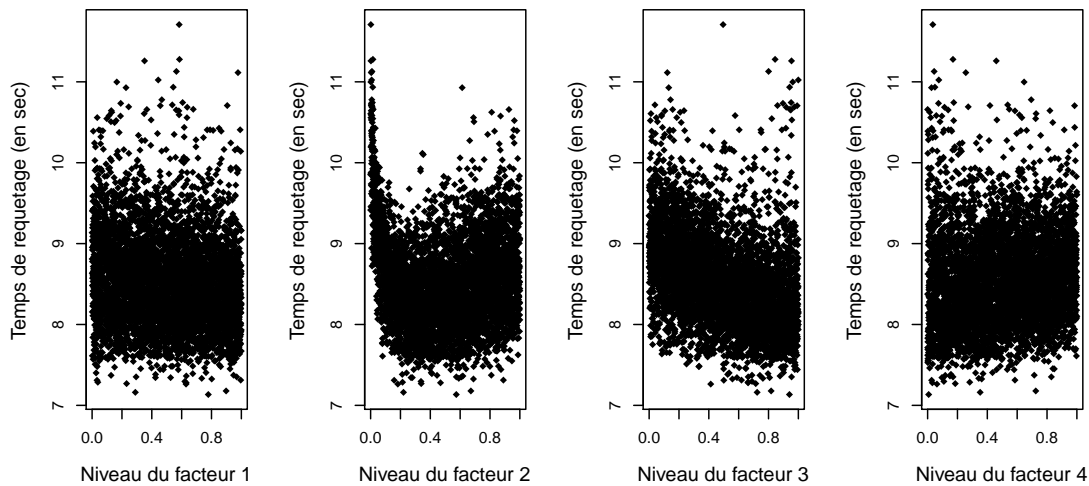


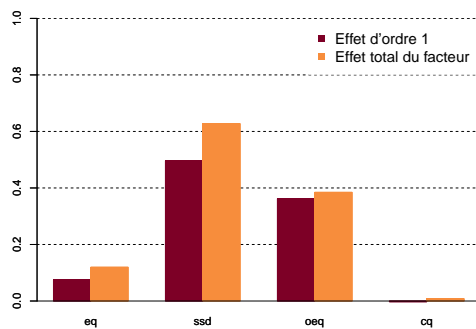
FIGURE 6.8 – Profil du temps de requête total en fonction des valeurs des coefficients (graphe *G20dyn*)

(cette dernière relation étant inexistante pour les graphes statiques). Le cas du facteur *SSD* est par contre remarquable : des valeurs très faibles pour ce facteur impliquent des temps de requête significativement plus longs, et au-delà d'une valeur « optimale » entre 0.1 et 0.25, l'augmentation du coefficient associé au facteur engendre de nouveau une remontée des temps de résolution des requêtes. Globalement, les temps obtenus pour la résolution de 10000 requêtes s'inscrivent dans un intervalle assez étroit (entre 7 et 12 secondes), ce qui correspond à des temps proches de la milliseconde pour une requête unique (le graphe *CS-dyn*, légèrement plus grand, se caractérise par des temps de requête du même ordre de grandeur, entre 10 et 30 secondes).

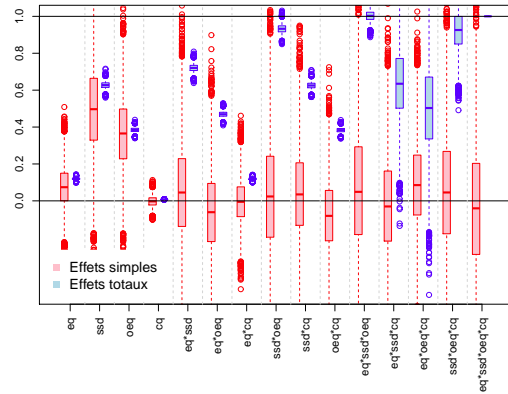
#### 6.3.2.4 Évolution du nombre d'arcs

Comme évoqué précédemment, le ratio de création d'arc est un indicateur permettant de comparer le nombre total d'arcs créés durant le pré-traitement, *i.e.* les raccourcis ajoutés pendant la contraction du graphe, avec les arcs qui sont virtuellement supprimés suite à la contraction des nœuds adjacents. Il est calculé par une simple comparaison entre les quantités d'arcs dans le graphe initial d'une part et dans le graphe de recherche final, après contraction, d'autre part. Si le ratio est élevé, cela signifie que beaucoup de raccourcis ont été rajoutés, et parallèlement, peu d'arcs ont été supprimés.

La sensibilité de cet indicateur aux valeurs des quatre coefficients mis en jeu est présentée par les figures 6.9a et 6.9b, pour le cas du graphe *G20sta*. Cet exemple montre que cette troisième variable semble surtout sensible aux facteurs *SSD* et *OEQ*, le pourcentage de variance expliquée par ces deux facteurs s'élevant respectivement autour de 50% et de 35%. De plus, les interactions entre facteurs s'avèrent très faibles : les effets totaux sont très proches des effets simples sur le diagramme 6.9a, et les distributions des effets d'ordre 2, 3 et 4 sont centrées sur 0 sur la figure 6.9b. Ce cas de figure montre tout de même que la convergence des estimateurs n'est pas pleinement réalisée. En effet, certaines interactions sont estimées par une grandeur négative (par exemple, l'interaction entre *EQ* et *OEQ*, ou encore l'effet résiduel) ; de plus, la dispersion des estimateurs obtenus avec le procédé de *bootstrap* est élevée (les écarts interquartiles relevés s'élèvent parfois jusqu'à 0.5, *i.e.* la composante de



(a)



(b)

FIGURE 6.9 – Décomposition de la variance du ratio de création d’arc vis-à-vis des quatre coefficients étudiés, cas *G20sta* : (a) Comparaison entre ordre 1 et effet total (b) Distribution des effets simples et totaux via le procédé de *bootstrap*

la variance expliquée par certaines combinaisons de facteurs s’établit dans une fourchette d’une ampleur égale à la moitié de la variance totale).

Le tableau 6.3 reporte les valeurs des estimateurs de chaque effet dans les quatre instances testées. À l’image de la situation décrite pour le premier critère, le facteur *CQ*, relatif à la définition dynamique du graphe, a une importance faible dans les cas dynamiques, et nulle dans les cas statiques. Pour le reste, des conclusions assez similaires au premier critère sont observées : le ratio de création d’arc est peu sensible au facteur *EQ*, et il est particulièrement sensible aux facteurs *SSD* et *OEQ*. Dans chaque instance, plus de 90% de la variance du critère s’explique par les facteurs eux-mêmes, ce qui laisse penser que les interactions sont très faibles, ici.

### 6.3.2.5 Conclusions et recommandations

Les éléments précédents sont résumés par les coefficients de régression présents dans le tableau 6.4. Ces données présentent un autre regard sur l’analyse de sensibilité en donnant le sens des relations entre les variables explicatives et celles expliquées par les différents modèles employés.

Les évolutions du temps de pré-traitement sont principalement impactées par les facteurs *SSD* et *OEQ*, ces deux-là étant respectivement prédominants dans les cas statiques et dynamiques. Le tableau 6.4 montre que l’influence du premier est positive : plus la valeur du facteur est élevée, et plus le pré-traitement sera long. *A contrario*, le facteur *OEQ* est lié négativement à ce critère : des valeurs élevées pour le facteur génèreront des pré-traitements plutôt courts. À l’image des niveaux de sensibilité observés précédemment, les coefficients de régression sont plutôt élevés concernant ces facteurs, dénotant ainsi un lien fort entre les variables. Le facteur *EQ* évolue de la même façon que le facteur *OEQ*, mais avec un impact moindre. Quant au dernier facteur, la relation est positive dans le cas dynamique, et logiquement nulle pour le cas statique.

En ce qui concerne le temps de requêtage, la conclusion est moins évidente. Il semble toutefois que les facteurs *EQ*, *OEQ* et *SSD* impactent cette variable de la même manière que pour la première, même si les coefficients sont moins élevés. Le facteur *SSD* présente un comportement tel que la modélisation par un modèle linéaire est de mauvaise qualité, si bien



TABLEAU 6.3 – Moyenne des effets des facteurs issus de la décomposition de la variance sur le critère *ratio de création d'arc*, pour chaque graphe (méthode de *bootstrap*, 10000 tirages aléatoires de 2000 individus)

	<i>CSsta</i>	<i>CSdyn</i>	<i>G20sta</i>	<i>G20dyn</i>
$S_{\{eq\}}$	0.09	0.08	0.07	0.14
$S_{\{ssd\}}$	0.65	0.65	0.50	0.42
$S_{\{oeq\}}$	0.26	0.17	0.36	0.43
$S_{\{cq\}}$	-0.01	0.03	-0.00	0.10
$S_{\{eq;ssd\}}$	-0.00	-0.03	0.05	-0.08
$S_{\{eq;oeq\}}$	-0.05	0.01	-0.06	-0.12
$S_{\{eq;cq\}}$	-0.02	-0.03	-0.00	-0.13
$S_{\{ssd;oeq\}}$	-0.01	0.01	0.02	-0.11
$S_{\{ssd;cq\}}$	0.03	0.00	0.04	-0.05
$S_{\{oeq;cq\}}$	-0.03	0.01	-0.08	-0.16
$S_{\{eq;ssd;oeq\}}$	0.05	0.02	0.05	0.18
$S_{\{eq;ssd;cq\}}$	0.00	0.04	-0.03	0.18
$S_{\{eq;oeq;cq\}}$	0.06	0.02	0.09	0.22
$S_{\{ssd;oeq;cq\}}$	0.02	0.01	0.05	0.21
$S_{\{eq;ssd;oeq;cq\}}$	-0.04	-0.01	-0.04	-0.24

TABLEAU 6.4 – Coefficients de régression standardisés (*cf* Saltelli [138]), par critère et par graphe

	<i>EQ</i>	<i>SSD</i>	<i>OEQ</i>	<i>CQ</i>
<i>Critère 1 : Temps de pré-traitement</i>				
<i>CSsta</i>	-0.26	0.73	-0.50	0.00
<i>CSdyn</i>	-0.32	0.35	-0.54	0.24
<i>G20sta</i>	-0.27	0.66	-0.53	0.00
<i>G20dyn</i>	-0.33	0.40	-0.65	0.36
<i>Critère 2 : Temps de requêtage</i>				
<i>CSsta</i>	-0.10	-0.14	-0.18	0.01
<i>CSdyn</i>	-0.20	-0.33	-0.35	0.32
<i>G20sta</i>	-0.20	0.37	-0.43	0.00
<i>G20dyn</i>	-0.16	-0.06	-0.40	0.10
<i>Critère 3 : Ratio de création d'arcs</i>				
<i>CSsta</i>	-0.25	0.77	-0.46	0.00
<i>CSdyn</i>	-0.24	0.74	-0.42	-0.15
<i>G20sta</i>	-0.26	0.73	-0.53	0.00
<i>G20dyn</i>	-0.31	0.62	-0.58	0.16

que les valeurs de cette colonne restent anecdotiques : en réalité, la caractéristique forte de ce facteur est l'existence d'une valeur « pivot », en-dessous de laquelle les temps de requête augmentent fortement, et au-dessus de laquelle ils réaugmentent selon une pente plus douce (les nuages de points correspondants prenant des formes allant du « L » au « V » selon les graphes, ce qui fait écho à la grande variabilité des coefficients obtenus).

Enfin, la troisième variable présente des niveaux de sensibilité très proches de ceux observés pour la première variable : la relation avec le facteur *SSD* est la plus forte, elle est positive (les grandes valeurs pour ce paramètre sont synonymes de ratio très élevé, et donc d'une augmentation de la densité du graphe), alors que les relations avec les facteurs *OEQ*, et à un degré moindre *EQ*, sont négatives (plus les valeurs de ce paramètre sont grandes, et moins le graphe de recherche aura tendance à grossir lors du processus de contraction). Le facteur *CQ* est assez particulier : il n'a aucun impact dans les cas statiques, et son impact dans les cas dynamiques est tantôt positif (graphe *G20dyn*), tantôt négatif (graphe *CSdyn*).

En somme, cette analyse nous permet de dégager des éléments essentiels pour comprendre la façon dont évoluent les temps de calcul associés à l'algorithme des contractions hiérarchiques, que ce soit lors de la phase de pré-traitement ou lors de la résolution des requêtes, ainsi que la quantité d'arcs dans le graphe entre son initialisation et la fin du pré-traitement. Au vu de l'analyse de sensibilité conduite ci-avant, il apparaît que l'objectif de réduction du temps de calcul est atteint pour des combinaisons de coefficients de priorité au sein desquelles les facteurs *EQ* et *OEQ* possèdent des valeurs élevées par rapport aux deux autres facteurs, et où le facteur *SSD* doit avoir une valeur faible si le temps de requête n'est pas considéré comme critique. Si au contraire un temps de requête faible est désiré, la valeur de ce facteur doit être légèrement augmentée, vu l'existence d'une « trappe à longs calculs » en-dessous d'un seuil évalué à environ 0.1 dans cette étude (pour un domaine de définition des coefficients situé dans l'intervalle  $[0; 1]$ ). Quelle que soit la situation, une attention particulière doit être portée au choix des valeurs attribuées aux coefficients *SSD* et *OEQ*, dans la mesure où ce sont les deux principaux contributeurs à la variance des grandeurs évaluées ici. La règle de décision concernant le dernier coefficient de pondération, associé à la complexité des fonctions de temps de parcours sur l'horizon temporel, est moins stricte (et cette faible importance ne se discute que pour le cas dynamique). Il apparaît qu'une focalisation sur la minimisation du temps de pré-traitement appelle une valeur plutôt faible pour ce coefficient. Il faut malgré tout garder à l'esprit que les taux d'arcs dynamiques testés ici étaient plutôt faibles, et que ce facteur aurait pris plus de consistance si tous les arcs étaient dynamiques. Enfin, les conclusions en termes de simplification du graphe de recherche final vont dans le sens de celles portant sur le temps de pré-traitement : une part importante de la phase de pré-traitement consiste en l'évaluation de la nécessité des raccourcis. De ce fait, les paramètres de l'algorithme qui favorisent un temps de pré-traitement court favorisent en même temps la limitation de la création de raccourcis (ou en tout cas empêchent l'inflation du nombre d'arcs dans le graphe).

### 6.3.3 Recherche d'un ensemble optimal de coefficients

L'algorithme 6, décrit lors de la sous-section 6.2.2, est utilisé sur le graphe *CSdyn*, pour tenter de compléter la situation décrite plus haut, et pour apporter une réponse à la seconde question de recherche définie au début de ce chapitre, à savoir l'identification d'un paramétrage optimal pour le pré-traitement des contractions hiérarchiques.

Le tableau 6.5 détaille les configurations initiales testées en guise de point de départ de la recherche locale. Les trois premières configurations mettent en valeur les paramètres *EQ* et

TABLEAU 6.5 – Paramétrages pris comme points de départ de la recherche locale (sur une base de 1000 points distribués entre les coefficients de pondération)

Départ	EQ	SSD	OEQ	CQ
1	1000	0	0	0
2	0	0	1000	0
3	500	0	500	0
4	250	250	250	250
5	333	167	167	333
6	467	6	473	54
7	480	6	459	55
8	616	1	248	135
9	54	2	804	140
10	596	1	272	131
11	606	10	362	21
12	457	8	423	113
13	669	5	214	113
14	254	5	525	217
15	438	0	289	272
16	81	4	705	210

*OEQ*, jugés plus favorables à la rapidité de l'algorithme des contractions hiérarchiques. La quatrième configuration place les quatre coefficients au même niveau, alors que la cinquième configuration est équivalente à celle proposée par Batz [9]. Les autres configurations sont celles qui ont donné les temps les plus rapides lors de l'analyse de sensibilité, sur la base du pré-traitement et de l'équivalent de 1000 requêtes résolues. Ce nombre plus petit est choisi ici afin de mettre plus l'accent sur le pré-traitement, la résolution des requêtes étant vue comme un moyen de départager des configurations menant à des temps de contraction comparables. Les plus petits temps de calcul obtenus sont listés au sein du tableau 6.6, obtenu avec  $n_1 = 50$ ,  $n_2 = 1000$  et  $d = 5$ .

Au final, la recherche locale a mis en valeur plusieurs points de départ comme les principaux fournisseurs de « meilleures » solutions. En particulier, les jeux de paramètres 1, 9 et 13 fournissent la plupart des 10 paramétrages les plus performants (*cf* tableau 6.6). Le point commun de la majorité de ces solutions est l'importance prise par le paramètre EQ. Lors de l'analyse de sensibilité, il avait été identifié en ce sens, même si son effet sur la variance des différents temps de calcul semblait faible. Cela apporte une confirmation à l'intuition initiale de Geisberger [59], selon laquelle ce paramètre est essentiel. Par ailleurs, le paramètre *SSD* est à chaque fois extrêmement faible, sa valeur ne représente jamais plus de 1% du total des coefficients. C'est une nouvelle fois une confirmation forte des résultats de l'analyse de sensibilité. En ce qui concerne le paramètre *OEQ*, son importance est variable. Il n'est majoritaire que dans deux des dix meilleures configurations, dans lesquelles il apparaît toutefois comme un substitut convaincant au facteur *EQ*. Enfin, le quatrième coefficient, correspondant au critère *CQ*, obtient une part non négligeable au regard des précédentes conclusions : dans cette liste des 10 meilleures configurations, elle oscille entre 0% et 20% du budget de points alloué aux quatre coefficients.

La figure 6.10 explore la convergence de chaque sous-procédure vers la solution optimale en fonction des configurations de départ définies dans le tableau 6.5. Il apparaît que les configurations 1, 9 et 13 se démarquent effectivement des autres, même si la configuration 1 atteint plus vite des valeurs de temps de calcul faibles. Il est également possible de noter

TABLEAU 6.6 – 10 meilleures solutions obtenues à l'issue du processus d'optimisation

Départ	Itération	EQ	SSD	OEQ	CQ	Pré-traitement (s)	Requêtage (s)	Total (s)
9	349	52	5	803	140	9.89	2.17	12.06
9	371	53	5	802	140	10.62	1.52	12.14
13	324	868	5	114	14	10.70	1.53	12.23
13	320	868	5	113	15	10.39	1.94	12.33
1	284	794	2	4	200	10.63	1.75	12.38
1	283	795	2	4	199	10.77	1.63	12.40
1	36	995	2	3	0	10.85	1.55	12.40
13	346	868	5	115	13	10.46	1.98	12.45
1	84	994	2	4	0	10.92	1.54	12.46
13	347	868	4	114	15	10.92	1.55	12.47

que les configurations 4 et 5, respectivement une valorisation égale pour tous les coefficients et la configuration mise en valeur par Batz [9], sont nettement moins performantes : elles n'engendrent aucune configuration donnant des temps de calcul inférieurs à 25 secondes, même après les opérations de diversification.

Bien sûr, ces résultats restent soumis à l'aléa dans la mesure où l'algorithme des contractions hiérarchiques ne donne pas un temps de calcul absolument identique à chaque lancement (des différences allant jusqu'à la seconde peuvent être observées dans le présent cas empirique), malgré des paramètres et une configuration machine stables. Dans ces conditions, il est difficile d'affirmer qu'un jeu de paramètres est le « meilleur ». Lancer le calcul plusieurs fois par configuration et conserver un temps médian, ou moyen, comme évoqué précédemment dans l'analyse, est une idée devant permettre l'amélioration de cet aspect.

### 6.3.4 Mise en œuvre opérationnelle : graphe Ile-de-France (Mappy)

La présente étude a été conduite en vue d'une confrontation à une application industrielle, conjointement à une collaboration entre le laboratoire et Mappy au sujet de l'accélération du calcul du plus court chemin dans des graphes dynamiques.

À ce titre, les précédentes recommandations ont été présentées à Mappy, dont le moteur de calcul d'itinéraires routiers est fondé sur les contractions hiérarchiques. Au départ, la fonction de hiérarchisation employée se caractérisait par une prédominance forte du critère *EQ*, dont la pondération était supérieure à celle du critère *SSD* et d'un autre critère relatif à la taille de l'espace de recherche propre à la recherche de chemin-témoin lors des contractions. Les résultats obtenus ont incité les développeurs de Mappy à remplacer le critère *EQ* par le critère *OEQ* dans la fonction de hiérarchisation, cela conduisant à une amélioration sensible des temps de calcul et à la réduction de l'espace mémoire nécessaire à la réalisation des étapes de pré-traitement des contractions hiérarchiques.

Dans un graphe correspondant au réseau routier d'Île-de-France, soit 0.6 million de nœuds et 1.1 million d'arcs, les résultats pointés par Mappy avancent une réduction du temps de hiérarchisation de 9.9% et une réduction du temps de contraction du graphe s'élevant à 2.1%, pour une réduction totale de la durée du pré-traitement de 9.1%. En outre, le nombre d'arcs raccourcis générés par la procédure a été réduit de 11.2% après l'utilisation de la nouvelle fonction de hiérarchisation, diminuant ainsi assez fortement le besoin en mémoire, critère important dans le contexte d'un serveur en ligne destiné à répondre à un nombre conséquent de requêtes de clients distants.

Ces éléments confirment la portée des résultats détaillés précédemment, et augurent un

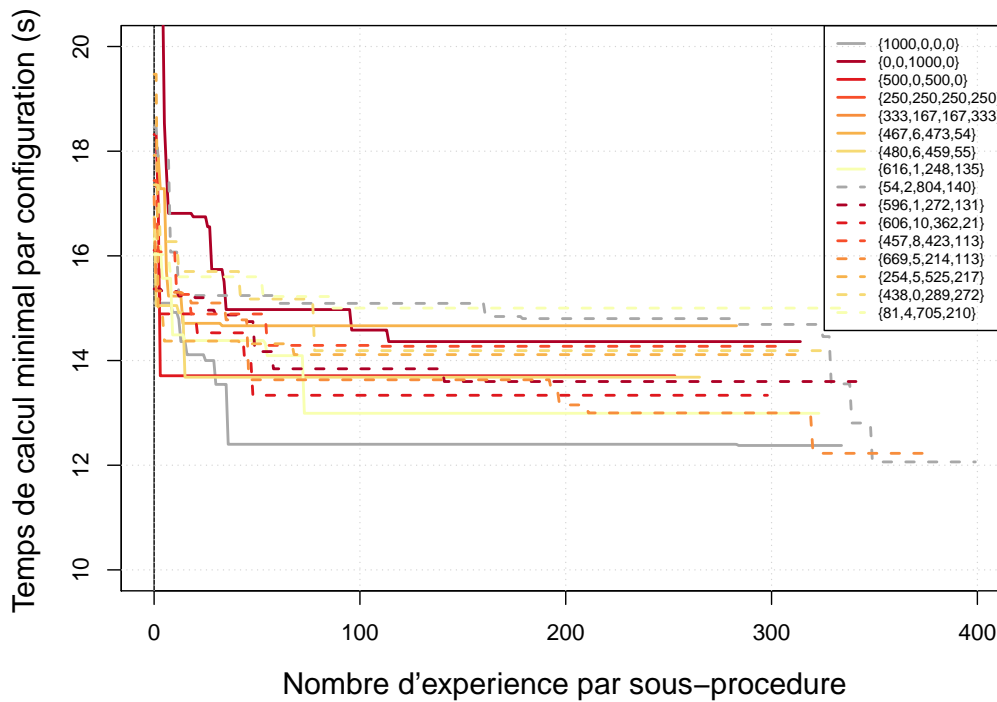


FIGURE 6.10 – Évolution de la meilleure solution pour chaque départ de la recherche locale

potentiel d'amélioration indéniable de la technique des contractions hiérarchiques. Pour une utilisation opérationnelle, le gisement d'économie est également important dans la mesure où la taille des structures manipulées est considérable, prouvant de fait la pertinence d'une approche d'optimisation.

## Conclusion

L'algorithme des contractions hiérarchiques permet un calcul du plus court chemin plus rapide par rapport aux méthodes standards de l'état de l'art, au moyen d'un procédé de hiérarchisation des nœuds du graphe dans la phase de pré-traitement. Les développements précédents ont été l'occasion de constater que l'efficacité de cette méthode est soumise à des choix de modélisation concernant une gamme de paramètres, et en particulier, qu'il existe des ensembles de paramètres plus efficaces que d'autres lorsqu'il s'agit de minimiser le temps de calcul de l'algorithme.

Le présent chapitre aura été l'occasion d'effectuer une analyse de sensibilité des sorties de la procédure, à l'aune du paramétrage choisi en entrée. Il a ainsi été possible de voir que le temps de pré-traitement, le temps de requête (*i.e.* le temps nécessaire à la résolution d'un grand nombre de requêtes) ainsi que l'évolution de la quantité d'arcs sont particulièrement sensibles au critère de profondeur des nœuds (*SSD*), reportant la quantité de nœuds voisins contractés avant un nœud donné, ainsi qu'au critère relatif à l'évolution du nombre d'arcs originels à la suite de la contraction d'un nœud (*OEQ*). Cependant, il semble que ces deux critères aient des effets opposés : alors que le premier critère dégrade le temps de pré-traitement et augmente fortement le nombre d'arcs dans le graphe quand son coefficient

augmente, le second critère, lui, a une influence positive sur ces valeurs. A contrario, le temps de requête est d'autant plus court que le coefficient du premier critère est élevé et celui du second critère faible. Les présentes analyses n'indiquent pas une variabilité des temps de calcul aussi forte au regard des valeurs des critères  $EQ$  et  $CQ$ , respectivement liés au ratio de création d'arc et à l'évolution de la complexité des fonctions de temps de parcours après la contraction d'un nœud.

Par ailleurs, une phase d'optimisation s'appuyant en partie sur les meilleurs jeux de paramètres obtenus après l'analyse de sensibilité permet d'affirmer que les configurations les plus intéressantes pour le modélisateur, au sens de celles qui exigent les temps de calcul les plus faibles, sont caractérisées par des coefficients élevés pour les critères  $EQ$  et  $OEQ$  et un coefficient associé au critère  $SSD$  plutôt faible. De par la nature non déterministe des temps de calcul de la procédure, il est peu évident de prétendre qu'un jeu de paramètre est véritablement optimal pour cet algorithme. Cependant, les éléments fournis ici montrent les meilleures configurations à utiliser.

L'homogénéité des résultats obtenus sur des graphes de différentes natures laisse présager que les conclusions de l'étude sont extensibles à des graphes plus grands. Des simulations supplémentaires pour des taux d'arcs dynamiques différents pourront apporter des confirmations et/ou des nuances au message affirmé ici. Une étude similaire pour des graphes de plus grande taille constitue en soi une autre extension possible. Néanmoins, dans ce dernier cas, le temps correspondant à la génération d'un seul résultat serait plus long, et l'appel à des techniques complexes de l'analyse de sensibilité pourrait être nécessaire. Par exemple, l'utilisation d'émulateurs bayésiens tels que présentés par Kennedy *et al.* [84] est un moyen de contourner la génération de plusieurs dizaines de milliers d'expériences en simulant le comportement du modèle de base à partir d'un ensemble réduit de configurations.

En guise d'application opérationnelle à un réseau de grande taille, les premiers résultats obtenus dans le cadre de notre collaboration avec Mappy suite à l'application des recommandations formulées dans la dernière section fournissent de toute façon un indice fort quant au comportement des contractions hiérarchiques après un passage à l'échelle.

Le présent chapitre, d'abord construit autour de la coopération entreprise avec Mappy, permet une utilisation aussi optimale que possible des contractions hiérarchiques : en plus de proposer des améliorations de la technique pour le cadre déterministe, il fournit un jalon important pour leur adaptation au cadre stochastique. Cette dernière tâche sera justement celle réalisée dans le chapitre 7. Le paramétrage de l'algorithme sera fondé sur les résultats du présent chapitre, en faisant l'hypothèse que le critère  $CQ$  peut être adapté pour retranscrire la complexité des fonctions de répartition des arcs, elle-même mesurée en nombre d'intervalles de discrétisation par l'étendue statistique. Ainsi, le tuple de coefficient utilisé sera  $\{800, 5, 100, 95\}$ . Bien évidemment, ce paramétrage n'a pas la prétention d'être parfait, mais il se rapproche de certains paramétrages précédemment mis en valeur, avec un ensemble valorisant en premier lieu le critère  $EQ$ , et caractérisé par une valeur faible pour le critère  $SSD$ , dans le but d'accélérer les phases de pré-traitement.



# Extension stochastique des contractions hiérarchiques

Dans ce chapitre, nous proposons d'aller plus loin que les approches traditionnelles telles que développées dans la partie II en développant l'adaptation stochastique des contractions hiérarchiques dans une visée opérationnelle, marquée par des temps de calcul résolument faibles, même dans des graphes de grande taille. Comme nous l'avons déjà souligné dans le chapitre 4, le temps d'exécution des premiers algorithmes de calcul du plus court chemin stochastique est trop important pour permettre un passage à l'échelle. Les contractions hiérarchiques, présentées dans les chapitres précédents pour le cadre déterministe, servent de point de départ pour proposer une adaptation au cas stochastique.

Dans un premier temps, la section 7.1 proposera des constructions algorithmiques permettant de manipuler les chemins et les politiques de routage, définies dans le chapitre 4, puis la section 7.2 développera les algorithmes propres aux contractions hiérarchiques stochastiques, et enfin la section 7.3 sera l'occasion de présenter quelques résultats empiriques illustrant les performances de la méthode d'accélération, et son potentiel pour l'intégration d'algorithmes de calcul du plus court chemin stochastique dans des réseaux complexes à l'échelle locale.

## 7.1 Construction des chemins optimaux dans les graphes stochastiques

Dans le cadre de la mise en œuvre des contractions hiérarchiques pour le cas stochastique, les premières opérations concernent les chemins, définis principalement par une séquence de nœuds, une séquence d'arcs et une distribution correspondant à la fonction de répartition du temps de parcours entre l'origine et la destination du chemin. Elles seront détaillées dans la section 7.1.1. Par la suite, un ensemble de procédures consacrées aux politiques de routage seront proposées dans la section 7.1.2. Pour rappel, les politiques de routage se définissent par un ensemble des chemins non-dominés, une distribution frontière, et un vecteur identifiant les chemins de référence pour chaque budget de temps.

### 7.1.1 Opérations sur les chemins

Un chemin  $c$  est défini par trois structures :



- Une **séquence de nœuds**  $\mathcal{N}_c$ , entre une origine  $s$  et une destination  $d$  que l'on exprime  $\mathcal{N}_c^s$  et  $\mathcal{N}_c^d$  par souci de cohérence entre les notations. En outre, cette notation permet d'exprimer les nœuds prédécesseurs et successeurs du nœud  $u \in \mathcal{N}_c$  respectivement comme les nœuds  $\mathcal{N}_c^{u-1}$  et  $\mathcal{N}_c^{u+1}$ . La taille du chemin est renseignée par la longueur de la séquence de nœuds, notée  $|\mathcal{N}_c|$ .
- Une **séquence d'arcs**  $\mathcal{E}_c \subseteq E_H$  qui complète la structure précédente, composée de  $|\mathcal{E}_c|$  arcs (avec  $|\mathcal{E}_c| = |\mathcal{N}_c| - 1$ ). Pour les besoins des méthodes appliquées sur les chemins, on définit par ailleurs  $\mathcal{E}_c^1$  le premier arc de la séquence.
- La **distribution de son temps de parcours**, notée  $F_c$ , qui permet de juger de l'intérêt d'un chemin  $c$ , celle-ci étant construite comme la convolution des distributions relatives aux arcs  $e \in \mathcal{E}_c$ .

En outre, il est possible de caractériser un chemin par deux indices entiers : son identifiant, qui servira lors de la phase de mise à jour des politiques de routage, ainsi que son degré de dominance (on note ici  $\delta_c$ ), indiquant la quantité de budgets pour lesquels le chemin est le meilleur parmi tous les chemins d'une politique. On a  $\delta_c = 0$  si le chemin est dominé.

Structure centrale de la politique de routage, un chemin est caractérisé par quelques opérations spécifiques qu'il convient de définir. Outre les opérations de base relatives à la manipulation des distributions, déjà évoquées de manière exhaustive dans le chapitre 4, trois procédures doivent être rappelées : (i) l'examen du caractère acyclique d'un chemin, (ii) la concaténation de deux chemins de tailles quelconques (soit un chemin suffixe et un chemin préfixe), intervenant lors d'une recherche bilatérale, et (iii) le développement des éventuels raccourcis qui composent le chemin complet, en fin de procédure.

### 7.1.1.1 Acyclicité

La vérification du caractère acyclique d'un chemin  $c$  est une opération relativement simple, dont la complexité dépend uniquement du nombre de nœuds formant le chemin. Elle se compose d'une itération principale sur ceux-ci, et s'arrête dès qu'un doublon est rencontré. Dans ce cas, un cycle est présent dans le chemin. Si la séquence de nœuds est entièrement parcourue sans qu'un doublon n'ait été trouvé, il n'y a pas de cycle.

### 7.1.1.2 Concaténation entre un préfixe et un suffixe

L'algorithme 7 décrit la concaténation de deux chemins  $c_p$  et  $c_s$  tels que  $c_p$  relie un nœud  $s$  à un nœud  $u$ , alors que  $c_s$  relie  $u$  à  $d$ . Le résultat de cette procédure est le chemin reliant  $s$  à  $d$ . La séquence de nœuds correspondante est une simple concaténation des sous-séquences (idem pour la séquence d'arcs). Par ailleurs, la distribution du temps de parcours sur l'itinéraire complet est le fruit de la concaténation entre la distribution sur le préfixe et celle sur le suffixe, telle que décrite dans la section 4.1.2.2.

### 7.1.1.3 Développement d'un chemin

Le développement d'un chemin consiste à récupérer le chemin optimal « réel », *i.e.* qui emprunte uniquement des arcs  $e \in E$ , à partir du chemin synthétique trouvé grâce à une recherche au sein du graphe hiérarchisé. Son principe repose sur la construction et la mise à jour d'une pile où sont rangés les triplets  $\{\text{origine}, \text{arc}, \text{destination}\}$  qui composent le chemin. Ainsi, un arc est développé jusqu'à retrouver le détail des arcs originels  $e \in E$  présent

---

**Algorithme 7 (CONCATCHEMIN)** Opération de concaténation entre deux chemins : la procédure retourne un chemin composé des nœuds et arcs des deux sous-chemins, à la condition implicite que l'origine du suffixe soit la destination du préfixe

---

**ENTRÉES:** Chemins  $c_p$  et  $c_s$  tels que  $\mathcal{N}_{c_p}^d = \mathcal{N}_{c_s}^s$

**SORTIES:** Chemin  $c$

```

1:  $c \leftarrow c_p$ 
2: Si  $|\mathcal{N}_{c_s}| = 1$  Alors
3:   Retourner  $c$ 
4: FinSi
5: Pour  $n \in \mathcal{N}_{c_s} \setminus \mathcal{N}_{c_s}^s$  Faire
6:    $\mathcal{N}_c \leftarrow \mathcal{N}_c \cup \{n\}$ 
7: FinPour
8: Pour  $e \in \mathcal{E}_{c_s}$  Faire
9:    $\mathcal{E}_c \leftarrow \mathcal{E}_c \cup \{e\}$ 
10: FinPour
11:  $F_c \leftarrow \text{CONVOLUTION}(F_{c_p}, F_{c_s})$  ▷ cf chapitre 4, proposition 3
12: Retourner  $C$ 

```

---

dans le graphe de départ. Vient ensuite le tour de l'arc suivant (l'ancienne destination devient l'origine courante), jusqu'à avoir examiné l'ensemble des arcs  $\mathcal{E}_c$ . Un exemple détaillé de cette procédure est par exemple donné par Batz [9].

## 7.1.2 Opérations sur les politiques de routage

Ces premiers traitements relatifs aux chemins permettent d'envisager la manipulation des politiques de routage, définies elles-mêmes comme un sous-ensemble des chemins reliant deux nœuds dans un graphe. Pour un nœud origine  $s$  fixé, la politique de routage décrivant la stratégie de choix d'itinéraire optimale pour rallier un nœud  $v$  est notée  $\mathcal{P}_v$ . On note également  $C_v^*$ ,  $F_v^*$  et  $c_v^*(t)$  respectivement l'ensemble des chemins qui la composent, sa frontière de Pareto et le chemin optimal pour le budget-temps  $t$ . Les chemins  $c \in C_v^*$  sont tels que  $\mathcal{N}_c^d = v$ . En outre, on appelle  $\Pi = \{\mathcal{P}_v\}_{v \in V}$  l'ensemble des politiques de routage construites lors de l'exploration du graphe.

### 7.1.2.1 Ajout d'un chemin

L'ajout d'un chemin guidé par la dominance de groupe (cf équation 3.21) au sein d'une politique de routage composée de chemins optimaux est décrit dans l'algorithme 8. Le chemin candidat n'est pas nécessairement ajouté à la politique : ce n'est le cas que s'il est non-dominé par le groupe des chemins optimaux, *i.e.* s'il améliore la distribution frontière.

Cette définition se rapproche de l'approximation définie par Nie *et al.* [113] dans l'algorithme SPOTAR. Tous les chemins optimaux ne seront pas nécessairement intégrés dans les politiques de routage finales, mais la diminution de la performance attendue est jugée minimale, tant en nombre de chemins qu'en termes de maximisation de la probabilité d'être à l'heure. La procédure est très liée à la définition de la dominance, puisqu'il s'agit de trouver un indice  $t$  pour lequel la probabilité du chemin candidat est supérieure à la probabilité de la frontière. Dès lors que cet indice existe, le chemin candidat entre dans la politique, et la frontière ainsi que les indices de meilleurs chemins sont modifiés de manière adéquate.

**Algorithme 8 (AJOUTCHEMIN)** Ajout d'un chemin dans une politique de routage**ENTRÉES:** Politique  $\mathcal{P}_v$ , chemin candidat  $c$ , tel que  $\mathcal{N}_c^d = v$  et  $\delta_c = 0$ **SORTIES:** Vrai si le chemin  $c$  a été ajouté ( $\mathcal{P}_v$  est alors mis à jour), faux sinon

- 1: **Si**  $C_v^* = \{\emptyset\}$  **Alors**       $\triangleright$  *Si la politique de routage est vide, elle est initialisée avec  $c$*
- 2:      $\delta_c \leftarrow T_{max}$
- 3:      $C_v^* \leftarrow \{c\}$
- 4:      $F_v^* \leftarrow F_c$
- 5:      $c_v^*(t) \leftarrow c, \forall t \in \{0; \dots; T_{max}\Delta_t\}$
- 6:     **Retourner vrai**
- 7: **FinSi**
- 8: **Pour**  $t \in \{0; \dots; T_{max}\Delta_t\}$  **Faire**       $\triangleright$  *Test de la dominance de  $c$*
- 9:      $k \leftarrow c_v^*(t)$
- 10:    **Si**  $F_v^*(t) < F_c(t)$  **Alors**       $\triangleright$  *Si  $c$  domine la frontière, celle-ci est mise à jour*
- 11:      $F_v^*(t) \leftarrow F_c(t)$
- 12:      $\delta_k \leftarrow \delta_k - 1$
- 13:      $\delta_c \leftarrow \delta_c + 1$
- 14:      $c_v^*(t) \leftarrow c$
- 15:     **Si**  $\delta_k = 0$  **Alors**  $\triangleright$  *Si l'ancien chemin optimal ne domine plus, il sort de la politique*
- 16:      $C_v^* \leftarrow C_v^* \setminus k$
- 17:     **FinSi**
- 18: **FinSi**
- 19: **FinPour**
- 20: **Si**  $\delta_c > 0$  **Alors**       $\triangleright$  *Si  $c$  domine la frontière au moins une fois, le chemin entre dans la politique*
- 21:      $C_v^* \leftarrow C_v^* \cup \{c\}$
- 22: **FinSi**
- 23: **Retourner**  $\delta_c > 0$

Lorsque le chemin candidat entre dans la politique de routage, l'algorithme 8 est à combiner avec l'algorithme 9, qui régit l'extension des politiques entre un nœud et l'un de ses successeurs. Si la frontière  $F_v^*$  n'est pas dominée par la frontière candidate, issue de la convolution entre la frontière du nœud prédécesseur et la distribution associée à l'arc adjacent, il est alors nécessaire de confronter les deux politiques avec la procédure AJOUTCHEMIN (cf algorithme 9). Lorsque  $F_v^*$  est dominée au sens de la dominance déterministe, la procédure AJOUTCHEMIN n'est pas nécessaire : la politique existante est écrasée par la politique candidate (cf algorithme 10). Cette dernière procédure est également utile lors de la première visite d'un nœud  $v$ . Dans ce dernier cas de figure, la politique de routage correspondante sera initialisée à partir de celle du nœud prédécesseur.

**7.1.2.2 Concaténation de politiques**

La concaténation de deux politiques dont les nœuds destinations sont équivalents est donnée par l'algorithme 11. Cette procédure est essentielle dans une recherche bidirectionnelle : après la phase d'exploration du graphe hiérarchisé  $G_H$ , il existe des politiques de routage entre la source  $s$  et le haut du graphe (recherche aval) et des politiques de routage entre la destination  $d$  et le haut du graphe (recherche amont). Cette procédure permet d'assembler les sous-politiques pour obtenir la politique optimale régissant l'itinéraire entre  $s$  et  $d$ .

Concrètement, il s'agit d'itérer sur chacun des chemins composant les deux politiques

---

**Algorithme 9** (*EXTENPOL*) Complétion d'une politique via l'extension de la politique associée à un nœud prédécesseur

---

**ENTRÉES:** Politique  $\mathcal{P}_v$ , Politique  $\mathcal{P}_u$ , arc  $e = (u, v) \in E_H$

**SORTIES:** Vrai si au moins un chemin construit à partir de  $\mathcal{P}_u$  est ajouté dans  $\mathcal{P}_v$ , faux sinon

1:  $p \leftarrow$  **faux**

2: **Pour**  $c \in C_u^*$  **Faire**

3:    $p \leftarrow p$  **ou** *AJOUTCHEMIN*( $\mathcal{P}_v, \text{CONCATCHEMIN}(c, e)$ ) ▷ cf algorithmes 7 et 8

4: **FinPour**

5: **Retourner**  $p$

---

**Algorithme 10** (*REINITPOL*) Réinitialisation d'une politique de routage

---

**ENTRÉES:** Politique  $\mathcal{P}_u$ , arc  $e = (u, v) \in E_H$

**SORTIES:** Politique  $\mathcal{P}_v$

1:  $C_v^* \leftarrow \{\emptyset\}$

2: **Pour**  $c \in C_u^*$  **Faire**

3:    $C_v^* \leftarrow C_v^* \cup \text{CONCATCHEMIN}(c, e)$

▷ cf algorithme 7

4:    $F^* \leftarrow \text{CONVOLUTION}(F_u^*, F_e)$

5:    $c_v^*(t) \leftarrow c_u^*(t), \forall t$

6: **FinPour**

7: **Retourner**  $\mathcal{P}_v$

---

utilisées en argument, de reconstituer des chemins complets, et d'examiner la pertinence de leur ajout à la politique finale. Certains chemins peuvent contenir des cycles, dans la mesure où les deux sous-chemins initiaux peuvent passer par des nœuds communs avant d'aboutir au nœud le plus élevé de la hiérarchie. Ceux-là sont ignorés par souci d'efficacité, mais la procédure d'ajout de chemin les filtrerait quoi qu'il arrive, dans la mesure où les poids associés aux arcs du cycle sont positifs. Comme illustré par la figure 7.1, le chemin avec cycle peut être intégré dans la politique dans un premier temps, avant d'en être exclu lors de l'évaluation postérieure du chemin sans cycle.

### 7.1.2.3 Fusion de deux politiques

L'algorithme 12 est destiné à fusionner deux politiques de routage associées au même nœud  $v$ , pour en proposer une synthèse, *i.e.* réévaluer l'ensemble des chemins optimaux entre la source  $s$  et le nœud  $v$ . Cette méthode est utile pour construire la politique optimale, dans la mesure où la recherche bidirectionnelle dans le graphe hiérarchisé met en valeur potentiellement plusieurs points « de rencontre »  $x \in X \subseteq V$ , situés plus haut dans la hiérarchie. Il convient donc de synthétiser l'information, en comparant les chemins non-dominés relatifs aux différents nœuds de l'ensemble  $X$ .

Si l'une des deux politiques est vide, la politique retournée est équivalente à l'autre politique passée en paramètre. Si les deux politiques contiennent des chemins non-dominés, il convient simplement de tenter d'ajouter les chemins d'une des deux politiques au sein de l'ensemble des chemins non-dominés de l'autre.

**Algorithme 11** (*CONCATPOL*) Concaténation de deux politiques dont les nœuds destinations sont équivalents

**ENTRÉES:** Politique  $\mathcal{P}_x^1$  (issue de  $s$ ), Politique  $\mathcal{P}_x^2$  (issue de  $d \neq s$ )

**SORTIES:** Politique  $\mathcal{P}_d$

```

1:  $\mathcal{P}_d \leftarrow \{\emptyset\}$ 
2: Pour  $c_{bw} \in C_x^2$  Faire ▷  $c_{bw}$  est un chemin liant  $d$  à  $x$ 
3:   Pour  $c_{fw} \in C_x^1$  Faire ▷  $c_{fw}$  est un chemin liant  $s$  à  $x$ 
4:      $c \leftarrow \text{CONCATCHEMIN}(c_{fw}, c_{bw}^-)$  ▷  $c_{bw}^-$  désigne le chemin miroir de  $c_{bw}$ 
5:     Si ACYCLIQUE( $c$ ) Alors
6:       AJOUTCHEMIN( $\mathcal{P}_d, c$ ) ▷ cf algorithme 8
7:     FinSi
8:   FinPour
9: FinPour
10: Retourner  $\mathcal{P}_d$ 

```

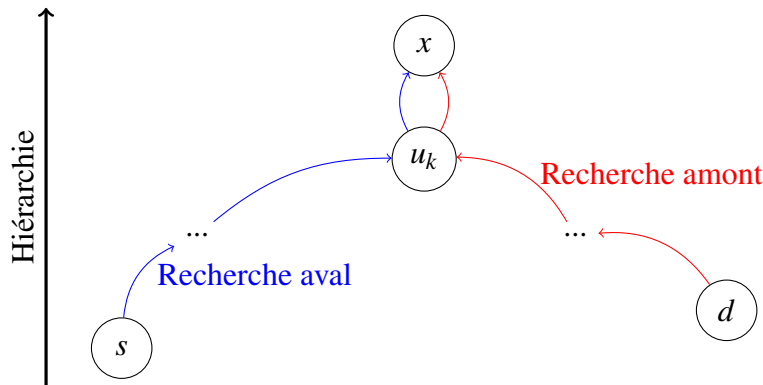


FIGURE 7.1 – Exemple de concaténation de politiques de routage  $\mathcal{P}_x^1$  et  $\mathcal{P}_x^2$  impliquant la formation d'un chemin cyclique : dans ce cas de figure, le nœud  $x$  est le point de rencontre des deux politiques, et si, parmi  $C_x^1$  et  $C_x^2$  se trouvent respectivement les chemins  $s \rightarrow \dots \rightarrow u_k \rightarrow x$  et  $d \rightarrow \dots \rightarrow u_k \rightarrow x$ , le chemin  $s \rightarrow \dots \rightarrow u_k \rightarrow x \rightarrow u_k \rightarrow \dots \rightarrow d$  sera évalué, mais finira par être ignoré du fait de l'évaluation du chemin acyclique  $s \rightarrow \dots \rightarrow u_k \rightarrow \dots \rightarrow d$

#### 7.1.2.4 Suppression des chemins dominés

Le dernier algorithme relatif aux politiques de routage est une procédure visant à expurger la politique de routage des chemins dominés, que l'on pourrait noter *FINPOL* (cf son appel lors de l'algorithme 14). La nécessité de cette procédure peut paraître contre-intuitive, mais son intérêt réside dans le filtrage des chemins encore présents dans le vecteur  $c_v^*(t)$  mais qui ne respectent plus l'équation 3.21. Cette irrégularité vient de l'inégalité stricte située à la ligne 10 de l'algorithme 8 : la politique de routage n'est pas mise à jour quand la probabilité du candidat égale celle du chemin de référence, et il est du même coup possible qu'un chemin soit encore considéré comme optimal alors même que les indices correspondant réfèrent à des cas d'égalité.

Pour pallier cette caractéristique structurelle de l'ajout de chemins non-dominés, la méthode fonctionne en deux temps. Au cours d'une première étape d'itération sur les budgets  $t$ , les chemins dont la probabilité coïncide avec celle de la frontière tout en étant les seuls dans ce cas, pour un budget donné, sont marqués comme « utiles ». Ensuite, en ne considérant que les budgets  $t$  tels qu'aucun chemin n'a été pointé par la première étape, une seconde itéra-

---

**Algorithme 12** (*FUSIONPOL*) Fusion de deux politiques dont les nœuds destinations sont équivalents

---

**ENTRÉES:** Politique  $\mathcal{P}_v^1$ , Politique  $\mathcal{P}_v^2$

**SORTIES:** Politique  $\mathcal{P}_v$

1: **Si**  $C_v^1 = \{\emptyset\}$  **Alors**

2:      $\mathcal{P}_v \leftarrow \mathcal{P}_v^2$

3:     **Retourner**  $\mathcal{P}_v$

4: **Sinon**

5:      $\mathcal{P}_v \leftarrow \mathcal{P}_v^1$

6:     **Pour**  $c \in C_v^2$  **Faire**

7:          $\delta_c \leftarrow 0$

8:         *AJOUTCHEMIN*( $\mathcal{P}_v, c$ )

▷ cf *algorithme 8*

9:     **FinPour**

10:     **Retourner**  $\mathcal{P}_v$

11: **FinSi**

---

tion identifie les chemins restés « inutiles » et cherche des chemins de substitution au sein de l'ensemble des chemins utiles. La politique  $\mathcal{P}_v$  est donc potentiellement simplifiée lors du traitement, via une réduction du nombre de chemins inclus dans l'ensemble  $C_v^*$ , et une mise à jour du vecteur  $c_v^*(t)$ .

L'absence de cette méthode dans la procédure des contractions hiérarchiques n'altère en rien la solution obtenue, puisque les chemins superflus conservés ne pourront être retournés que dans des cas où la probabilité d'arriver à l'heure en un budget de temps donné est égale à celle de la distribution frontière. Cependant, son intégration permet d'améliorer la concision de la solution, au prix d'une légère dégradation de la rapidité d'exécution de la phase de requêtage.

## 7.2 Adaptation des contractions hiérarchiques aux graphes stochastiques

Dans la section qui va suivre, nous nous focalisons sur l'ensemble des procédures utilisées pour le calcul du plus court chemin stochastique intégrant les contractions hiérarchiques. Dans ce cadre, le graphe stochastique  $G = (V, E)$  est modifié en un graphe  $G_H = (V_H, E_H)$  dans lequel de nouveaux arcs, les raccourcis, ont été rajoutés, et où les nœuds  $v \in V$  se sont vus attribués un rang dans la hiérarchie calculée lors du pré-traitement.

Les opérations relatives à la détermination de l'itinéraire optimal au sein du graphe  $G_H$  seront proposées dans la section 7.2.1, alors que la section 7.2.2 détaillera quant à elle la phase de pré-traitement, largement semblable à celle du cas déterministe.

### 7.2.1 Phase de requêtage

Le nouvel algorithme de recherche du plus court chemin stochastique s'appuie sur l'ensemble des opérations détaillées précédemment. Il est réalisé en deux étapes fondamentales décrites ci-après : un parcours bidirectionnel du graphe de recherche  $G_H = (V_H, E_H)$  permettant d'aboutir à deux politiques de routage partielles, et à partir de celles-ci, une phase de construction de la politique optimale entre la source  $s$  et la destination  $d$ .

### 7.2.1.1 Recherche bidirectionnelle

L'algorithme 13, au cœur de la phase de requête, consiste en l'exploration du graphe hiérarchisé  $G_H$ , depuis la source d'une part, et la destination d'autre part, vers le haut du graphe. Cette procédure s'arrête lorsque les deux recherches ont atteint le haut du graphe, et ont traité tous les nœuds visités. Certains nœuds sont visités dans les deux directions, ils sont qualifiés de « points de rencontre » et forment un ensemble noté  $X \subseteq V$ .

Concernant le détail de la procédure, l'essentiel des opérations se présente sous la même forme que celle proposée pour les contractions hiérarchiques appliquées au cas déterministe [10, 60]. À chaque itération, la direction de recherche est modifiée, sauf s'il ne reste plus qu'une direction de recherche à explorer. Dans le cas de la recherche aval, les arcs explorés dans le graphe  $G_H$  sont les arcs  $e = (u, v)$  permettant une élévation dans la hiérarchie établie lors de la phase de pré-traitement, *i.e.* avec des niveaux tels que  $l_u < l_v$ . Pour la recherche amont, il est également question de monter dans la hiérarchie, mais plutôt de manière indirecte : les arcs descendants  $e = (v, u)$ , avec  $l_u < l_v$ , sont considérés à contre-sens, si bien que la recherche s'oriente également vers le haut de la hiérarchie.

Lors d'une itération, le nœud courant est celui qui est associé à la clé minimale au sein de la file d'attente correspondant à la direction de recherche sélectionnée. Ces files d'attente sont construites comme des tas binaires, et les clés stockées sont les temps de parcours minimaux pour atteindre chaque nœud. Par ailleurs, une borne supérieure est mise à jour à chaque fois que la somme des clés associées au nœud courant dans les deux files d'attente diminue. Cette borne permet de clore la recherche de manière anticipée, dans le cas où les clés stockées dans les files d'attente sont plus élevées que le temps d'arrivée au plus tard optimal.

L'originalité de cette procédure réside dans les étapes de relaxation des arcs, via la gestion des politiques de routage. Si un nouveau nœud est visité, dans une direction donnée, sa politique est construite à partir de celle de son prédécesseur. Idem si le nœud avait déjà été visité et que les chemins existants sont tous dominés par les chemins issus du nœud prédécesseur. Dans le cas contraire, *i.e.* les chemins candidats sont tous dominés, rien ne change, et l'arc suivant est examiné. Enfin, si la frontière existante et la frontière candidate ne se dominant pas au sens de la dominance déterministe (ce choix est effectué pour des raisons d'efficacité de l'algorithme : analyser la dominance stochastique dès cette étape revient à rajouter des boucles sur les budgets-temps  $t$ ), la procédure d'ajout des chemins candidats est appelée, et la file d'attente mise à jour uniquement si l'un des chemins est réellement ajouté.

### 7.2.1.2 Construction de la politique de routage optimale

Il est nécessaire de compléter l'étape précédente par l'algorithme 14, afin d'unifier les résultats de la recherche bidirectionnelle. Contrairement aux algorithmes bidirectionnels liés aux graphes déterministes, la réponse optimale n'est pas obtenue par une simple somme des étiquettes résultant des deux étapes d'exploration. Ainsi, pour tous les points de rencontre, les sous-politiques sont concaténées (algorithme 11), et fusionnées (algorithme 12) jusqu'à constituer une politique de routage brute entre  $s$  et  $d$ . Puis les chemins superflus encore présents peuvent être filtrés à l'aide de la procédure *FINPOL*, et ceux qui restent sont développés de manière à n'être composés que d'arcs originels  $e \in E$ .

## 7.2.2 Phase de pré-traitement : hiérarchisation et contraction

Avant la phase de requête, il est nécessaire de procéder à deux étapes préliminaires, qui sont la hiérarchisation des nœuds et la contraction des arcs.

---

**Algorithme 13 (RECHBIDIRSTOC)** Parcours bidirectionnel dans un graphe stochastique hiérarchisé : dans chaque direction, une file d'attente  $Q_{dir}$  et un ensemble de politiques de routage  $\mathcal{P}_v^{dir}$ ,  $\forall v \in V$  sont construits et mis à jour (d'après Batz *et al.* [10])

---

**ENTRÉES:** Graphe hiérarchisé  $G_H = (V, E_H)$

**SORTIES:** Politiques  $\mathcal{P}_x^{fw}$  et  $\mathcal{P}_x^{bw}$ , avec  $x \in X \subseteq V$

```

1:  $dir \leftarrow bw$ 
2:  $\mathcal{P}_s^{fw} \leftarrow \{\emptyset\}$ ,  $Q_{fw} \leftarrow \{(s, 0)\}$ 
3:  $\mathcal{P}_d^{bw} \leftarrow \{\emptyset\}$ ,  $Q_{bw} \leftarrow \{(d, 0)\}$ 
4:  $UB \leftarrow \infty$ 
5:  $X \leftarrow \{\emptyset\}$ 
6:  $E_{fw} \leftarrow \{(u, v) \in E_H | l_u < l_v\}$   $\triangleright$  Les arcs de la recherche aval sont les arcs ascendants
   dans la hiérarchie,  $l_n$  désigne le niveau du nœud  $n \in V$ 
7:  $E_{bw} \leftarrow \{(v, u) \in E_H | l_v > l_u\}^-$   $\triangleright$  Les arcs de la recherche amont sont les arcs
   descendants dans la hiérarchie, pris à rebours
8: TantQue ( $Q_{fw} \neq \{\emptyset\}$  ou  $Q_{bw} \neq \{\emptyset\}$ ) et  $\min\{Q_{fw}.min, Q_{bw}.min\} \leq UB$  Faire
9:   Si  $Q_{-dir} \neq \{\emptyset\}$  Alors
10:      $dir \leftarrow \neg dir$ 
11:   FinSi
12:    $u \leftarrow Q_{dir}.deleteMin$ 
13:    $UB \leftarrow \min\{UB, \arg \max_t (F_u^{dir}(t)) + \arg \max_t (F_u^{-dir}(t))\}$ 
14:   Si  $UB < \infty$  et  $\arg \min_t (F_u^{dir}(t)) + \arg \min_t (F_u^{-dir}(t)) \leq UB$  Alors
15:      $X \leftarrow X \cup \{u\}$ 
16:   FinSi
17:   Si ( $dir = fw$  et  $u = d$ ) ou ( $dir = bw$  et  $u = s$ ) Alors
18:     Continuer
19:   FinSi
20:   Pour  $e = (u, v) \in E_{dir}$  Faire
21:      $newVal \leftarrow \arg \min_t (F_u^{dir}(t)) + \arg \min_t (F_e(t))$ 
22:     Si  $v \notin Q_{dir}$  Alors
23:        $\mathcal{P}_v^{dir} \leftarrow REINITPOL(\mathcal{P}_u^{dir}, e)$   $\triangleright$  cf algorithme 10
24:        $Q_{dir} \leftarrow Q_{dir} \cup (v, newVal)$ 
25:     Sinon
26:       Si  $\arg \max_t (F_v^{dir}(t)) \leq newVal$  Alors
27:         Continuer  $\triangleright$  La frontière existante domine le candidat, pas de modification
28:       FinSi
29:       Si  $\arg \max_t (F_u^{dir}(t)) + \arg \max_t (F_e(t)) \leq \arg \min_t (F_v^{dir}(t))$  Alors
30:          $\mathcal{P}_v^{dir} \leftarrow REINITPOL(\mathcal{P}_u^{dir}, e)$   $\triangleright$  Le candidat domine la frontière existante,
           la politique est modifiée
31:          $Q_{dir}.key \leftarrow newVal$ 
32:       FinSi
33:       Si  $EXTENPOL(\mathcal{P}_v^{dir}, \mathcal{P}_u^{dir}, e)$  Alors  $\triangleright$  cf algorithme 9
34:          $Q_{dir}.key \leftarrow newVal$ 
35:       FinSi
36:     FinPour
37:   FinTantQue
38: FinTantQue

```

---



---

**Algorithme 14** (*RESOLREQ*) Reconstruction de la politique de routage optimale, pour relier un nœud source  $s$  à un nœud destination  $d$ , à partir de sous-politiques calculés via une recherche bidirectionnelle et d'un ensemble de nœuds communs

---

**ENTRÉES:** Nœuds  $x \in X \subseteq V$ , politiques  $\mathcal{P}_x^{fw}$  et  $\mathcal{P}_x^{bw}$ , avec  $x \in X$

**SORTIES:** Politique  $\mathcal{P}_d^*$

- 1:  $\mathcal{P}_d^* \leftarrow \{\emptyset\}$
  - 2: **Pour**  $x \in X$  **Faire**
  - 3:    $\mathcal{P}_d \leftarrow \text{CONCATPOL}(\mathcal{P}_x^{fw}, \mathcal{P}_x^{bw})$  ▷ Concaténation (cf algorithme 11)
  - 4:    $\mathcal{P}_d^* \leftarrow \text{FUSIONPOL}(\mathcal{P}_d^*, \mathcal{P}_d)$  ▷ Fusion (cf algorithme 12)
  - 5: **FinPour**
  - 6:  $\mathcal{P}_d^* \leftarrow \text{FINPOL}(\mathcal{P}_d^*)$  ▷ Finalisation de la politique optimale (facultatif)
  - 7: **Pour**  $c \in \mathcal{P}_d^*$  **Faire**
  - 8:    $\text{DEVELOP}(c)$  ▷ Développement des chemins optimaux
  - 9: **FinPour**
  - 10: **Retourner**  $\mathcal{P}_d^*$
- 

La première étape consiste à évaluer un coût de contraction associé à chaque nœud, à partir d'une somme pondérée de critères (cf chapitre 6). Le premier nœud à contracter est celui qui possède le plus petit coût de contraction. Puis le coût des nœuds adjacents est mis à jour de sorte qu'il corresponde à la topologie du graphe résiduel. Le même procédé est réitéré jusqu'à ce que tous les nœuds aient été contractés. L'ordre dans lequel ils ont été successivement écartés du graphe désigne la hiérarchie de contraction.

La seconde étape utilise cette hiérarchie : chacun des nœuds est de nouveau contracté dans le but d'ajouter les arcs raccourcis nécessaires au parcours du graphe des nœuds les moins importants aux nœuds les plus importants.

Partant de la contribution de Geisberger [59], Batz *et al.* [10] ont proposé une formulation plus compacte, visant à réduire le nombre de contractions (simulées ou non). Dans cette nouvelle formulation, les deux étapes ont été synthétisées jusqu'à n'en former qu'une seule, présentée de manière simplifiée pour les graphes stochastiques dans la section 7.2.2.1. La sélection des prochains nœuds à contracter (*MINLOCAL*), la contraction d'un nœud (*CONTRACT*) et la recherche de chemins-témoins (*SIMUCONTRACTSTOC*), procédures secondaires incluses dans cette formulation, seront introduites respectivement dans les sections 7.2.2.2, 7.2.2.3 et 7.2.2.4.

### 7.2.2.1 Procédure principale

La procédure permettant de construire la hiérarchie des nœuds au sein d'un graphe stochastique est proposée par l'algorithme 15. Les lignes 1 à 4 constituent son initialisation, en particulier les nœuds du graphe hiérarchisés sont les mêmes que ceux du graphe initial, et la procédure *SIMUCONTRACTSTOC* (cf algorithme 17) est appelée pour chacun d'entre eux dans le but d'obtenir une première mise à jour du coût de contraction. L'itération principale (lignes 5 à 41) débute ainsi par l'identification des nœuds possédant un coût minimal au regard de leurs voisins (lignes 6 à 10). Une fois ces nœuds identifiés, chaque triplet  $\{\text{arc entrant}, \text{noeud}, \text{arc sortant}\}$  est contracté, et le raccourci est ajouté à l'ensemble  $E^*$  s'il est nécessaire (lignes 11 à 17). L'étape suivante consiste à identifier les nœuds  $u$  voisins des nœuds contractés dans un ensemble à part entière, à augmenter leur compteur de profondeur  $d_u$ , et à affecter un niveau hiérarchique au nœud  $v$  avant de le supprimer du graphe (lignes 18

---

**Algorithme 15 (PRETRAITCHSTOC)** Phase de pré-traitement de la technique des contractions hiérarchiques adaptée aux graphes stochastiques, d'après Batz [10]

---

**ENTRÉES:** Graphe  $G = (V, E)$ , coefficients  $\rho_{eq}, \rho_{ssd}, \rho_{oeq}, \rho_{cq}$

**SORTIES:** Graphe hiérarchisé  $G_H = (V_H, E_H)$ , où  $V_H = V$  et  $E \subseteq E_H$

```

1:  $d_v \leftarrow 1, k_v \leftarrow 0, l_v \leftarrow 0, \forall v \in V, l \leftarrow 0$ 
2:  $V_H \leftarrow V, W \leftarrow V, X \leftarrow \{\emptyset\}, Up \leftarrow \{\emptyset\}$ 
3:  $E_H \leftarrow E, E^* \leftarrow \{\emptyset\}$ 
4:  $k_v \leftarrow SIMUCONTRACTSTOC(v, d_v, \rho_{eq}, \rho_{ssd}, \rho_{oeq}, \rho_{cq}), \forall v \in V$   $\triangleright$  cf algorithme 17
5: TantQue  $W \neq \{\emptyset\}$  Faire
6:   Pour  $v \in V$  Faire  $\triangleright$  Identification des nœuds à contracter
7:     Si  $MINLOCAL(v, k_u \forall u \in V)$  Alors
8:        $X \leftarrow X \cup \{v\}, W \leftarrow W \setminus \{v\}$ 
9:     FinSi
10:  FinPour
11:  Pour  $v \in X$  Faire  $\triangleright$  Identification des raccourcis nécessaires, pour chaque séquence
     $u \rightarrow v \rightarrow w$  impactée par la contraction du nœud  $v$ 
12:    Pour  $e_{bw} = (u, v) \in E$  Faire
13:      Pour  $e_{fw} = (v, w) \in E$  Faire
14:         $CONTRACT(v, e_{bw}, e_{fw}, faux, E^*)$   $\triangleright$  cf algorithme 16
15:      FinPour
16:    FinPour
17:  FinPour
18:  Pour  $v \in X$  Faire  $\triangleright$  Suppression effective des nœuds et de leurs arcs adjacents
19:    Pour  $e = (u, v) \in E$  ou  $e = (v, u) \in E$  Faire
20:       $d_u \leftarrow d_u + 1$ 
21:       $Up \leftarrow Up \cup \{u\}$   $\triangleright$  Identification des nœuds dont le coût doit être mis à jour
22:       $E \leftarrow E \setminus \{e\}, E_H \leftarrow E_H \cup \{e\}$ 
23:    FinPour
24:     $l_v \leftarrow l, l \leftarrow l + 1, V \leftarrow V \setminus \{v\}$   $\triangleright$  Sauvegarde du niveau de  $v$  dans la hiérarchie
25:  FinPour
26:  Pour  $e^* = (u, v) \in E^*$  Faire  $\triangleright$  Intégration des raccourcis dans le graphe
27:    Si  $\exists e = (u, v) \in E$  Alors
28:      Si  $F_{e^*} \text{ DOMINE } F_e$  Alors  $\triangleright$  cf équations 3.16 et 3.17
29:         $F_e \leftarrow F_{e^*}$ 
30:      Sinon
31:         $E \leftarrow E \cup \{e^*\}$ 
32:      FinSi
33:    Sinon
34:       $E \leftarrow E \cup \{e^*\}$ 
35:    FinSi
36:  FinPour
37:  Pour  $v \in Up$  Faire  $\triangleright$  Mise à jour des coûts de contraction
38:     $k_v \leftarrow SIMUCONTRACTSTOC(v, d_v, \rho_{eq}, \rho_{ssd}, \rho_{oeq}, \rho_{cq})$   $\triangleright$  cf algorithme 17
39:  FinPour
40:   $X \leftarrow \{\emptyset\}, Up \leftarrow \{\emptyset\}$ 
41: FinTantQue
42: Retourner  $G_H = (V_H, E_H)$ 

```

---

à 25). C'est également à cette étape que sont sauvegardés les arcs du graphe final adjacent aux nœuds contractés, l'itération principale se concentrant par la suite sur des niveaux hiérarchiques plus élevés. Ensuite, les arcs raccourcis identifiés lors de l'itération courante doivent être évalués pour déterminer si l'ajout d'un nouvel arc est nécessaire, ou si une simple mise à jour d'un arc existant suffit, typiquement si le poids de l'arc candidat domine celui de l'arc existant (lignes 26 à 36). Enfin, l'itération se termine par la mise à jour des coûts de contraction des nœuds voisins, et par une remise à zéro des ensembles de nœuds à contracter et de nœuds voisins.

Par ailleurs, le traitement est accéléré au moyen de deux procédés additionnels qui ne sont pas détaillés dans l'algorithme 15 :

- la parallélisation, tant dans les calculs des coûts de contractions, indépendants les uns des autres, que dans la contraction simultanée d'un sous-ensemble de nœuds (on considère alors des nœuds non-adjacents), ou encore dans la sélection du prochain sous-ensemble de nœuds à contracter ;
- la sauvegarde des résultats des contractions dans la mémoire de l'ordinateur (en particulier, la nécessité de création d'un arc raccourci  $(u, w)$  lors de la suppression d'un nœud  $v$  et d'un couple d'arcs existants  $(u, v)$  et  $(v, w)$ ), pour réutilisation ultérieure.

### 7.2.2.2 Sélection des nœuds à contracter

Cette procédure de sélection fait partie de l'état de l'art, elle est mentionnée par exemple par Batz [9]. Elle est néanmoins redéfinie ici dans un souci de clarté, et notée *MINLOCAL*.

À chaque itération, un ensemble de nœuds doit être désigné pour être contracté, ces nœuds occuperont les places disponibles les plus basses dans la hiérarchie. En vertu des derniers coûts de contraction calculés, chaque nœud  $x \in V$  est évalué avec la procédure *MINLOCAL* (ligne 7 de l'algorithme 15), parmi un voisinage comprenant tous les nœuds situés à strictement moins de 2 arcs, par défaut. Cette procédure fondée sur l'exploration du voisinage direct des nœuds est réalisée au moyen de la construction et de la mise à jour d'une file d'attente où entrent les voisins successifs des nœuds déjà visités. Si le nœud  $x$  possède un coût de contraction strictement inférieur à celui de ses voisins, alors il entre dans la liste des nœuds à contracter. Si au contraire un nœud dont le coût de contraction est inférieur à celui du nœud  $x$  est rencontré, la procédure s'arrête immédiatement, et  $x$  est reconnu comme n'étant pas un minimum local. À titre de remarque, dans la comparaison entre coûts de contraction, les égalités sont arbitrées ici à l'aide d'une comparaison subsidiaire entre les identifiants des nœuds.

### 7.2.2.3 Contraction

Une contraction revient à supprimer un nœud  $v \in V$  au sein du graphe, ainsi que l'ensemble des arcs entrants  $(u, v) \in E$  et sortants  $(v, w) \in E$ . Cette opération intervient dans deux occasions : directement lors de l'itération principale (ligne 14) lorsque les nœuds à contracter sont identifiés, ou indirectement lorsqu'il s'agit d'évaluer les coûts de contraction (lignes 4 et 38), l'opération étant alors simulée. Ces deux procédures sont respectivement détaillées au sein des algorithmes 16 et 17.

Dans le premier cas, l'algorithme 16 permet d'identifier un chemin-témoin entre les nœuds  $u$  et  $w$ , origine et destination d'une séquence d'arcs impactée par la contraction. Dans le cas stochastique, un tel chemin est caractérisé ici par une fonction de répartition dominant celle associée à la séquence  $\{(u, v), (v, w)\}$ . S'il existe, alors aucun raccourci n'est

**Algorithme 16** (*CONTRACT*) Contraction d'un nœud

**ENTRÉES:** Nœud  $v \in V$ , arc entrant  $e_{bw} = (u, v) \in E$ , arc sortant  $e_{fw} = (v, w) \in E$ , booléen  $sim$  (si vrai, la contraction est simulée), Ensemble de raccourcis à mettre à jour  $E^*$

**SORTIES:** Booléen  $s$ , vrai si un raccourci est nécessaire

```

1:  $s \leftarrow \text{faux}$ 
2:  $F_c \leftarrow \text{CONVOLUTION}(F_{e_{bw}}, F_{e_{fw}})$ 
3:  $s \leftarrow \neg \text{TEMOIN}(u, v, w, F_c)$ 
4: Si  $\neg sim$  et  $s$  Alors
5:    $E^* \leftarrow E^* \cup \{(u, w)\}$ 
6: FinSi
7: Retourner  $s$ 

```

nécessaire. Autrement, la préservation de l'information dans le graphe nécessite d'ajouter un nouvel arc, qui vient compléter l'ensemble  $E^*$ . Dans le second cas, la simulation du processus de contraction est gérée par l'algorithme 17. Ce dernier évalue le coût de contraction d'un nœud en fonction de l'existence de chemins-témoins, pour les différentes séquences d'arcs impactées par la contraction. Ce coût est construit par la somme pondérée des différents critères évoqués dans le chapitre 6, la complexité des fonctions de temps de parcours étant remplacée ici par l'étendue des fonctions de répartition. Globalement, le coût de contraction diminue pour chaque arc supprimé, et inversement. Ceux-ci sont directement accessibles par définition du graphe, alors que les raccourcis sont identifiés à travers l'appel de l'algorithme 16 en mode simulé (cf ligne 9).

#### 7.2.2.4 Recherche d'un chemin-témoin

La recherche de chemin-témoin dans un graphe stochastique, appelée ici *TEMOIN*, est quasi-identique à celle correspondant au cas d'un graphe déterministe dynamique [10]. La modification fondamentale réside dans la nature des étiquettes utilisées tout au long de l'algorithme : les fonctions de temps de parcours sont remplacées par les distributions de temps de parcours, qui sont évaluées les unes par rapport aux autres à travers la gestion des politiques de routage. Le squelette de la méthode est formé par trois procédures de parcours du graphe hiérarchisé définies sur le modèle des celles proposées par Batz *et al.* [10], respectivement centrées sur les étendues statistiques, les espérances et les distributions.

La première d'entre elles est un parcours du graphe considérant les réalisations minimales (respectivement maximales) sur chaque arc, dans le but d'identifier le temps de parcours le plus court (respectivement le plus long) possible. Cette première sous-procédure a deux intérêts majeurs : d'une part, elle suffit à prouver l'existence (respectivement l'inexistence) d'un chemin-témoin si le plus grand (respectivement petit) temps de parcours possible est inférieur (respectivement supérieur) à la réalisation minimale (respectivement maximale) de la distribution associée à la séquence  $u \rightarrow v \rightarrow w$  supprimée, et d'autre part, si aucune conclusion n'est possible, elle permet de réduire l'espace de recherche dans les sous-procédures suivantes. En effet, seuls seront explorés les nœuds appartenant au graphe des prédécesseurs.

La seconde sous-procédure est une évaluation heuristique de l'existence d'un chemin-témoin centrée sur l'espérance du temps de parcours sur la séquence  $u \rightarrow v \rightarrow w$  d'une part et sur le plus petit temps de parcours espéré sur un itinéraire alternatif d'autre part. Si la première est inférieure au second, il est admis que la suppression de la séquence sus-mentionnée fait perdre de l'information, et donc qu'un raccourci est nécessaire.

Si les deux premières sous-procédures n'ont pas permis de statuer quant à l'existence

---

**Algorithme 17** (*SIMUCONTRACTSTOC*) Calcul du coût de contraction d'un nœud dans un graphe stochastique, selon une somme pondérée de paramètres, d'après Batz *et al.* [10]

---

**ENTRÉES:** Nœud  $v \in V$ , profondeur du nœud  $d_v$ , coefficients  $\rho_{eq}$ ,  $\rho_{ssd}$ ,  $\rho_{oeq}$ ,  $\rho_{cq}$

**SORTIES:** Coût de contraction  $k_v$  associé au nœud  $v$

```

1:  $C_{eq}^-, C_{eq}^+, C_{oeq}^-, C_{oeq}^+, C_{cq}^-, C_{cq}^+ \leftarrow 0$ 
2: Pour  $e = (u, v) \in E$  ou  $e = (v, u) \in E$  Faire
3:    $C_{eq}^- \leftarrow C_{eq}^- + 1$ 
4:    $C_{oeq}^- \leftarrow C_{oeq}^- + O(e)$   $\triangleright O(e)$  désigne les arcs originaux  $e' \in E$  que représente  $e$ 
5:    $C_{cq}^- \leftarrow C_{cq}^- + C(e)$   $\triangleright C(e)$  désigne l'étendue de la distribution associée à l'arc  $e$ , soit
    $\arg \max \{F_e(t)\} - \arg \min \{F_e(t)\}$ 
6: FinPour
7: Pour  $e_{bw} = (u, v) \in E$  Faire
8:   Pour  $e_{fw} = (v, w) \in E$  Faire
9:     Si CONTRACT ( $v, e_{bw}, e_{fw}, vrai, \emptyset$ ) Alors  $\triangleright$  cf algorithme 16
10:       $C_{eq}^+ \leftarrow C_{eq}^+ + 1$ 
11:       $C_{oeq}^+ \leftarrow C_{oeq}^+ + O(e_{bw}) + O(e_{fw})$ 
12:       $C_{cq}^+ \leftarrow C_{cq}^+ + C(e_{bw}) + C(e_{fw})$ 
13:     FinSi
14:   FinPour
15: FinPour
16: Retourner  $\rho_{eq} * \frac{C_{eq}^+}{\max\{1, C_{eq}^+\}} + \rho_{ssd} * d_v + \rho_{oeq} * \frac{C_{oeq}^+}{\max\{1, C_{oeq}^+\}} + \rho_{cq} * \frac{C_{cq}^+}{\max\{1, C_{cq}^+\}}$ 

```

---

d'un chemin-témoin, l'exploration du graphe à l'aide des distributions complètes est nécessaire. Celle-ci est plus coûteuse en termes de temps de calcul, par exemple lors d'évaluations de relations de dominance. Elle est toutefois accélérée par la restriction au sous-graphe identifié dans les étapes précédentes. Cette troisième exploration permet d'aboutir au meilleur chemin alternatif, qui correspond à un chemin-témoin si sa distribution de temps de parcours domine la distribution associée à la séquence supprimée.

### 7.3 Résultats expérimentaux

Dans le but d'évaluer l'efficacité des contractions hiérarchiques sur le calcul du plus court chemin dans des graphes stochastiques, les résultats seront comparés à une solution de référence de l'état de l'art, l'algorithme *SPOTAR* décrit précédemment. Dans cette optique, les instances testées restent de taille modeste. La machine utilisée pour cette série d'expérimentations est la même que dans le chapitre 4. En outre, trois threads sont mobilisés pour paralléliser le pré-traitement des contractions hiérarchiques.

Quelques caractéristiques évoquées dans le chapitre 4 sont de nouveau utilisées : la taille du graphe, la précision de l'horizon temporel et le scénario de variabilité. Le plan d'expérience décrit dans la section 4.2 sert de grille d'analyse, au détail près que les graphes considérés ici sont le réseau de Sioux Falls (*SF*), les grilles *G10* et *G20*, ainsi qu'une grille supplémentaire comportant 5 nœuds par côté (*G5*), qui pourra être comparée au graphe *SF* vu la proximité de leur nombre de nœuds et d'arcs respectifs. Les distributions sont toutes discrétisées selon la procédure évoquée lors de la section 4.1.1. La base de comparaison est le **problème** (graphe, niveau de variance, précision de la discrétisation des modèles statistiques), chaque problème regroupant 9 instances (3 modèles statistiques et 3 répliques).

TABLEAU 7.1 – Durée médiane du pré-traitement des contractions hiérarchiques stochastiques (en secondes), pour les 9 instances de chaque configuration

$T_{max}$ Variance	60			120			600		
	fai	med	hau	fai	med	hau	fai	med	hau
G5	5.0	6.2	6.6	6.4	8.0	7.8	8.5	9.9	12.0
SF	4.2	5.6	5.5	5.7	6.2	5.9	6.9	7.8	8.5
G10	259.1	287.3	296.3	266.0	380.6	391.4	339.0	471.8	592.6
G20	10054	13711	15263	10740	15352	19056	12566	20241	25815

TABLEAU 7.2 – Durée d'exécution médiane d'un lot de 1000 requêtes de plus courts chemins via les contractions hiérarchiques stochastiques (en secondes), pour les 9 instances de chaque configuration

$T_{max}$ Variance	60			120			600		
	fai	med	hau	fai	med	hau	fai	med	hau
G5	3.18	4.09	4.80	8.69	11.83	14.36	166.03	220.28	320.19
SF	3.43	4.20	5.70	8.76	11.90	13.51	169.74	203.44	265.97
G10	14.12	21.11	20.33	29.59	64.16	63.33	506.63	1075.39	1516.74
G20	62.14	119.61	195.50	131.62	258.13	362.84	1823.83	3725.08	7419.26

### 7.3.1 Résultats de la technique d'accélération

Le tableau 7.1 propose les temps de pré-traitement observés sur l'ensemble des problèmes. Ces durées apparaissent extrêmement faibles pour les graphes *SF* et *G5*, et augmentent nettement avec la taille du graphe : une multiplication par 4 du nombre de nœuds (de *G5* à *G10*, mais également de *G10* à *G20*) engendre une multiplication du temps de pré-traitement par un facteur allant de 40 à 50. La précision de l'horizon de discrétisation impacte aussi cette variable, dans des proportions moins importantes : une multiplication par 10 du nombre de classes de discrétisation peut aller jusqu'à doubler le temps de pré-traitement. Quant au niveau de variance caractérisant les temps de parcours, il provoque également une augmentation du temps de calcul, mais dans des proportions moins significatives.

Par ailleurs, la seconde dimension concernant les temps de calcul associés aux contractions hiérarchiques est illustrée au sein du tableau 7.2, pour le même ensemble de problèmes. Celui-ci résume les temps de calcul nécessaires à la résolution de lots de 1000 requêtes. Les trois variables que sont la taille du graphe, la précision de la distribution et le niveau de variance présentent des comportements légèrement différents par rapport au premier tableau. En effet, l'augmentation de la taille du graphe induit une croissance proportionnelle des temps de requêtage, alors que l'augmentation de la précision des distributions de temps de parcours a une influence nettement plus forte (\*30 à \*70, pour une multiplication par 10 de la précision). Le scénario de variabilité conserve le même impact que pour le pré-traitement, à savoir que l'augmentation de la variance des distributions entraîne une légère augmentation des temps de calcul, effet d'autant plus prononcé que le graphe est grand. Dans l'ensemble, les temps de calcul moyens constatés pour une requête sont quasiment tous inférieurs à la seconde. Les exceptions sont les configurations dans lesquelles les graphes contiennent plus d'une centaine de nœuds, où les procédés de discrétisation aboutissent à plusieurs centaines de classes, et où les distributions sont caractérisées par des niveaux de variance élevés. Ce tableau est à mettre en perspective avec le tableau 4.8, dans lequel les temps de résolution des requêtes de plus courts chemins stochastiques par l'algorithme *SPOTAR* peuvent atteindre plusieurs dizaines de secondes. Un comparatif plus complet est proposé dans la section 7.3.2, pour des ensembles de requêtes similaires.

Enfin, un dernier élément peut être évoqué, à savoir l'évolution du nombre d'arcs dans le

TABLEAU 7.3 – Évolution médiane du nombre d’arcs après le pré-traitement des contractions hiérarchiques stochastiques (ratio > 1 : solde positif, ratio < 1 : solde négatif), pour les 9 instances de chaque configuration

$T_{max}$ Variance	60			120			600		
	fai	med	hau	fai	med	hau	fai	med	hau
<i>G5</i>	1.56	1.60	1.66	1.66	1.75	1.71	1.58	1.63	1.65
<i>SF</i>	1.45	1.53	1.51	1.50	1.55	1.51	1.46	1.50	1.49
<i>G10</i>	1.59	1.66	1.64	1.69	1.80	1.83	1.76	1.88	2.03
<i>G20</i>	1.92	2.05	2.11	2.02	2.12	2.25	2.02	2.25	2.38

graphe, à l’issue de sa contraction. Le tableau 7.3 propose un ensemble de ratios décrivant le nombre d’arcs dans le graphe de recherche en sortie du pré-traitement rapporté au nombre d’arcs dans le graphe initial. Au contraire des temps de calcul, l’impact respectif des trois variables est résolument faible, pour ne pas dire nul. Ces ratios s’établissent tous entre 1.45 et 2.38, soit un doublement du nombre d’arcs dans le graphe de recherche. Cela suggère un ajout important d’arcs destiné à préserver l’information dans le graphe hiérarchisé, ajout qui est toutefois limité par le paramétrage de la fonction de hiérarchisation, conçu pour optimiser la hiérarchie et réduire ainsi au maximum le temps de pré-traitement et l’ajout de raccourcis (cf chapitre 6).

### 7.3.2 Comparaisons avec une résolution sans accélération

Avant de caractériser les temps de calcul obtenus grâce aux contractions hiérarchiques stochastiques, il est utile de vérifier la similarité des politiques de routage résultat des méthodes avec et sans accélération. Comme précisé dans la section 4.1.3, les politiques de routage sont constituées uniquement par les chemins contribuant à la distribution enveloppe, ce qui a pour conséquence une perte minimale en termes de chemins optimaux identifiés. Dans la mesure où l’algorithme *SPOTAR* et les contractions hiérarchiques ne parcourent pas le graphe de la même façon, les chemins éventuellement « ratés » par chacune d’entre elles peuvent différer. La figure 7.2 permet de constater que cette différence est très faible, en présentant la divergence entre les chemins identifiés par les deux méthodes, agrégée sur les 1000 requêtes de chaque lot. On note que le solde de chemins est la plupart du temps positif, ce qui signifie que les contractions hiérarchiques reconnaissent légèrement moins de chemins optimaux que l’algorithme *SPOTAR*. Cependant les niveaux de différence sont négligeables. Seules 3 des 324 instances évaluées présentent plus de 50 chemins d’écart, soit 5% de différence. Les chemins identifiés sont les mêmes dans la moitié des cas, et le pourcentage de différence est inférieur à 1% dans 89% des cas. Dans le détail, l’écart mesuré en nombre de chemins augmente avec la taille du graphe, mais se réduit pour des niveaux de discrétisation élevés, alors que l’influence du niveau de variance n’est guère importante.

La figure 7.3 apporte des éléments de réponse fondamentaux quant à la question de l’accélération du traitement des requêtes de plus courts chemins dans les graphes stochastiques. Au vu de cette figure, les contractions hiérarchiques permettent de réduire le temps de résolution moyen selon des facteurs s’établissant entre 0.8 et 58.2, dans les différentes configurations testées. Ainsi, la méthode d’accélération peut être contre-productive dans certains cas particuliers, mais elle s’avère particulièrement efficace dans la grande majorité des situations : elle est plus rapide que l’algorithme *SPOTAR* dans 99% des instances mises en œuvre, deux fois plus rapide dans 89% des instances, cinq fois plus rapide dans 47% des instances et dix fois plus rapide dans 35% des instances. Dans le détail, il apparaît assez net que

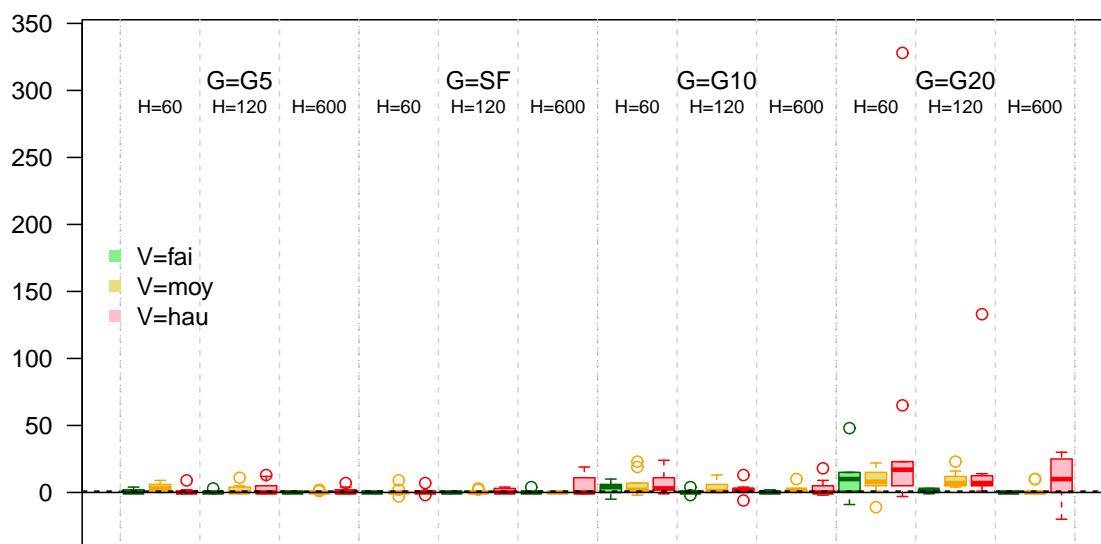


FIGURE 7.2 – Différence agrégée entre le nombre de chemins optimaux identifiés par l’algorithme *SPOTAR* et celui issu des contractions hiérarchiques stochastiques, pour 1000 politiques de routage

L’ampleur de l’accélération dépend de la taille du graphe : cela permet d’envisager un gain exponentiel dans les graphes composés de plusieurs millions de nœuds, par rapport à l’algorithme *SPOTAR*. Les deux autres variables paraissent moins importantes. Il faut malgré tout noter que le gain de la méthode d’accélération est d’autant moins élevé que la variance des modèles statistiques est forte, cette diminution étant surtout affirmée lorsque les niveaux de variance passent de faibles à moyens, et qu’une discrétisation plus précise des distributions de probabilité diminue également la valeur de l’accélération.

Les résultats obtenus dans ce chapitre montrent que la technique des contractions hiérarchiques déplace les opérations les plus coûteuses en temps de calcul dans le pré-traitement, de manière à minimiser le temps de requêtage. Le pré-traitement apparaît conséquemment assez long, et constitue une source d’optimisation majeure pour une éventuelle intégration de la méthode dans des calculateurs opérationnels tels que Mappy : pour des graphes plus grands de plusieurs ordres de grandeur, cette phase de pré-traitement sera compliquée à intégrer telle quelle, en particulier dans des logiques de calculs en temps réel, où la hiérarchie peut nécessiter d’être mise à jour régulièrement. Cependant, les temps de calcul réalisés pour les phases de requêtage suffisent à justifier la pertinence des contractions hiérarchiques. À ce titre, cette technique apparaît comme une alternative supplémentaire à l’algorithme *SPOTAR*, après les travaux de Sabran *et al.* [134] appliqués aux méthodes *Arc-flags* et *Reach*.

### 7.3.3 Vers la recherche du chemin à temps de parcours garanti

Les travaux réalisés ont considéré une modélisation des temps de parcours par des distributions discrétisées, incluant une quantité d’information plus importante que dans les approches centrées sur la moyenne et la variance. Les chemins calculés sont ceux qui minimisent le budget-temps nécessaire à la réalisation d’un trajet, compte tenu d’une probabilité désirée d’être à l’heure, ou parallèlement, d’une probabilité acceptée de ne pas l’être. De ce point de vue, il est aussi pertinent de parler de chemin à temps de parcours « sûr ».

D’autres variantes à ces calculs existent, et se déclinent selon deux axes principaux : d’une part, la fonction objectif utilisée pourrait considérer des étiquettes plus synthétiques,



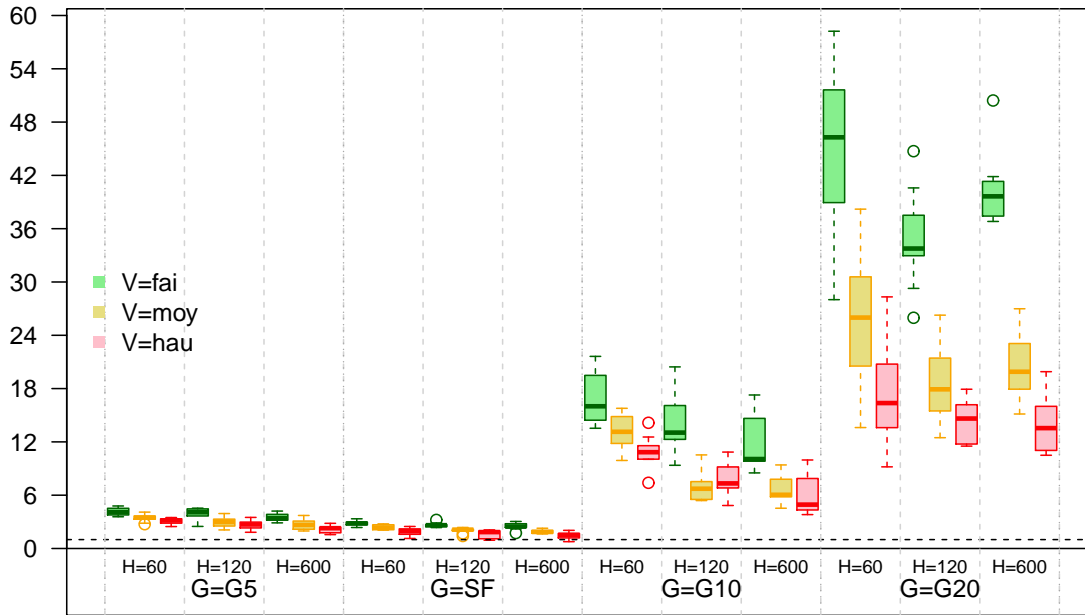


FIGURE 7.3 – Coefficient d'accélération du calcul d'un lot de 1000 requêtes sélectionnées aléatoirement, comparaison entre les contractions hiérarchiques stochastiques et l'algorithme *SPOTAR*

ce qui se rapproche plutôt des méthodes de minimisation de la variance rencontrées dans le chapitre 3 ; d'autre part, la question des critères entrant dans la composition de la fonction de hiérarchisation reste ouverte. Alors que la première piste doit profiter de l'accélération algorithmique brute permise par la technique de contraction, la seconde piste est quant à elle motivée par la recherche des nœuds les plus sensibles du réseau, *i.e.* ceux dont les arcs adjacents sont les plus susceptibles d'être associés aux temps de parcours les plus incertains. Le remplacement de l'étendue statistique par d'autres indicateurs de variabilité pourrait mettre en valeur d'autres nœuds après la construction de la hiérarchie (en particulier, les indicateurs développés dans le chapitre 2 constituent des candidats dignes d'intérêt), même si cette grandeur est convaincante en tant que première estimation de la dispersion des distributions : cela renvoie à la règle empirique dite du *range rules of thumb* [103], pour laquelle l'écart-type représente un quart de l'étendue statistique.

La combinaison des deux approches mentionnées dans le paragraphe précédent apparaît comme la meilleure solution : la valorisation des nœuds sensibles dans le graphe conduit à des calculs efficaces uniquement si l'objectif ne tient qu'à la variabilité des itinéraires. Dans le cas contraire, si une minimisation du temps de parcours est recherchée, la hiérarchie construite en pré-traitement sera sous-optimale, et les temps de calcul pour la phase de requêtage risquent d'être moins performants.

## Conclusion

L'adaptation du problème du plus court chemin au cas de graphes stochastiques, *i.e.* pour lesquels les poids des arcs sont des variables aléatoires distribuées, est un problème plus complexe que la recherche du plus court chemin déterministe. Bien que des formulations aient déjà été proposées par le passé, telles que l'algorithme *SPOTAR* [113] l'enjeu principal réside encore et toujours dans le temps de calcul nécessaire à la résolution des requêtes. C'est

l'objet de ce chapitre que de proposer des réponses aussi bien théoriques qu'expérimentales à ce problème. Ainsi, la technique des contractions hiérarchiques, récemment développée dans le cadre de graphes déterministes, a été adaptée et comparée à l'un des algorithmes non accélérés de référence, jusqu'à démontrer son intérêt dans ce nouveau paradigme.

Ces développements suivent les notions théoriques rappelées dans le chapitre 4, notamment les relations de dominance et la définition des politiques de routage. Ainsi, un premier ensemble de procédures a été construit pour initialiser et mettre à jour ces structures dans le cadre du parcours du graphe par un algorithme d'étiquetage. Ces procédures ont pu être exploitées par la suite au sein d'une seconde série de méthodes définies pour la réalisation de la version stochastique des contractions hiérarchiques.

Cette technique consiste à reformuler le graphe en hiérarchisant les nœuds qui le composent, et à ajouter de nouveaux arcs synthétiques, les « raccourcis », pour garantir un mode d'exploration original lors de la phase de requête. En effet, la résolution des requêtes repose sur un parcours bidirectionnel du graphe hiérarchisé, depuis la source d'une part, et la destination d'autre part, vers le haut de la hiérarchie. Bien que des exemples de contribution combinent parcours bidirectionnel et relation de dominance (*cf* par exemple Artigues *et al.* [5] dans une optique d'optimisation dans un contexte multimodal), aucune approche n'intègre à notre connaissance le parcours bidirectionnel des graphes stochastiques. Le résultat de ce processus correspond à deux politiques de routage qui, par des opérations de concaténation et d'agrégation, sont synthétisées en une seule politique décrivant la stratégie de choix d'itinéraire optimale entre une origine et une destination prédéfinies.

Plus prosaïquement, une étude empirique a permis de comparer les performances des contractions hiérarchiques stochastiques avec celles de l'algorithme *SPOTAR*, référence de l'état de l'art pour le problème d'optimisation du temps de parcours *a priori*. Elle a démontré que l'accélération de la résolution des requêtes est réelle, puisqu'elle peut atteindre un facteur 50 très rapidement avec l'augmentation de la taille du graphe autant que celle de la granularité des fonctions de répartition discrétisées. Quoiqu'il en soit, l'accélération de la résolution des requêtes de plus courts chemins dans les graphes stochastiques s'avère être une piste qui tient toutes les promesses déjà entrevues dans le cas déterministe. Une marge de progression importante est par ailleurs attendue quant aux performances de l'algorithme, compte tenu du caractère encore non-optimisé des implémentations réalisées, des limites matérielles rencontrées, voire du fait que certaines des briques algorithmiques évoquées par Geisberger *et al.* [60] et Batz *et al.* [10] n'aient pas été exploitées pour aboutir aux présents résultats. Ces conclusions confirment les premiers bons résultats obtenus avec des techniques d'accélération alternatives [134], tout comme ils complètent la gamme de solutions algorithmiques à disposition en proposant une technique caractérisée par un temps de pré-traitement plus long et des temps de résolution de requêtes plus faibles. Une poursuite des études expérimentales paraît intéressante pour comparer les différentes techniques d'accélération entre elles.

### Contributions de la partie III

- ▶ *Une description détaillée de la technique des contractions hiérarchiques proposée au sein de l'état de l'art pour les graphes déterministes*
- ▶ *L'évaluation des temps de calcul des contractions hiérarchiques en fonction des paramètres d'entrée de la méthode, conduisant à une série de recommandations pratiques pour leur optimisation*
- ▶ *L'adaptation des contractions hiérarchiques aux graphes stochastiques, sur la base des outils développés dans la partie II*
- ▶ *La preuve de l'efficacité des contractions hiérarchiques pour la résolution d'un grand nombre de requêtes de plus courts chemins dans les graphes stochastiques, rapprochant ce champ de recherche d'une utilisation en contexte industriel*

# Conclusion générale

## Conclusions

Au grand dam de Camus, qui aurait peut-être conseillé aux automobilistes de profiter des perturbations de la circulation pour *éprouver le temps dans toute sa longueur*, ceux-ci désirent généralement parcourir leurs trajets dans un temps réduit et qui plus est, sans incertitude quant à leur heure d'arrivée.

Guidés par cette exigence bien contemporaine, les travaux de recherche proposés dans cette thèse se sont donc attelés à la modélisation des temps de parcours routiers et la prise en compte de la variabilité des temps de parcours. Cet objectif s'est décliné sur les segments de route élémentaires, autour de la modélisation probabiliste du temps de parcours individuel, ainsi qu'à travers la recherche du plus court chemin stochastique dans un réseau. Des propositions originales ont jalonné ce travail de thèse avec des contributions dans les différents pans de l'état de l'art associés à la thématique.

La modélisation statistique des temps de parcours a constitué le premier axe de cette thèse, avec une focalisation sur la variabilité de ce phénomène. Cette notion a été le cœur de nombreuses études depuis une quinzaine d'années, avec des propositions plus ou moins abouties, comme le chapitre 1 a pu l'illustrer. Des approches utilitaristes ont ainsi considéré cette variabilité à l'aune des préférences individuelles des usagers, en comparant le confort supplémentaire apporté par une réduction de l'incertitude afférente au trajet avec celui apporté par une réduction du temps de parcours moyen. Moins centrées sur l'individu que sur le flux global, d'autres approches ont considéré les temps de parcours comme une variable aléatoire qu'il convient de représenter par le biais de lois de probabilité. Cette dernière approche est voisine de la production d'indicateurs synthétiques de la variabilité, elle a par ailleurs jalonné la suite des travaux effectués au sein du chapitre 2. Cette piste nous a conduit à proposer la famille des lois de Halphen pour la modélisation statistique des temps de parcours. Les trois lois qui la composent s'avèrent particulièrement adaptées pour cette problématique, en témoignent leur forme asymétrique et la présence de queues de distribution relativement longues. Ce constat a été confirmé au moyen d'une comparaison entre les lois de Halphen et un ensemble de neuf autres lois de probabilité sur deux types de voies (urbaines et autoroutières) impliquant plus d'un millier d'échantillons de délais mesurés par rapport à des temps de parcours de référence. Les lois de Burr, ainsi que les lois Gamma et Weibull, sont aussi mises en avant dans cette étude. Nous considérons les lois de Halphen comme particulièrement intéressantes dans ce cadre dans la mesure où elles profitent également d'un outil graphique à deux dimensions, le diagramme des ratios de moments  $\delta_1$ - $\delta_2$ , ou  $\delta$ -MRD, sur lequel elles couvrent l'univers complet des ratios entre les moyennes arithmétique et géométrique d'une part, et entre moyennes géométrique et harmonique d'autre part.

L'intérêt conjugué des lois de Halphen et du  $\delta$ -MRD a été renforcé en premier lieu par le développement d'une nouvelle méthode d'estimation des paramètres des lois basée sur les ratios de moments. Ces estimateurs ont été intégrés à la comparaison de lois mentionnée plus haut pour donner un premier aperçu de leurs performances. En second lieu, les coordonnées du  $\delta$ -MRD constituent de nouvelles métriques de la fiabilité des temps de parcours, qu'une analyse multidimensionnelle a consacrées : celles-ci s'avèrent aussi performantes que les métriques traditionnelles pour rendre compte de la variabilité des temps de parcours. Cet aspect a d'ailleurs été illustré avec l'utilisation du  $\delta$ -MRD dans trois études de cas empiriques traitant des variabilités intra-journalière et inter-journalière ainsi que d'un scénario de chute brutale du niveau de fiabilité sur un tronçon routier. La première partie de la thèse se termine par une extension des analyses précédentes sur une succession de tronçons élémentaires, en considérant l'hypothèse de fermeture par l'addition pour les différentes lois. Les propriétés mathématiques du  $\delta$ -MRD ainsi qu'un ensemble de modèles de régression nous ont incité à proposer une série de conjectures quant à la vérification de cette hypothèse : elle paraît valide pour les lois de Halphen, notamment, alors que différentes restrictions sur les paramètres sont nécessaires pour certaines lois à deux paramètres (Gamma, Tweedie, Harmonique).

Le second bloc de contributions de la thèse s'articule autour de la définition des temps de parcours dans les réseaux de transport routiers. Pour déterminer le temps de parcours de référence entre une origine et une destination données, nous avons considéré une variante du problème du plus court chemin dans laquelle les poids des arcs d'un graphe orienté sont des variables aléatoires distribuées, faisant ainsi écho aux résultats précédents. Les approches classiques pour ce problème se cantonnent généralement à des mesures de l'espérance et de la variance, comme noté dans le chapitre 3. Différentes variantes existent quant à la combinaison optimale de ces deux grandeurs, cependant elles considèrent une version très simplifiée des temps de parcours, négligeant l'information qu'une distribution est à même de reproduire. Dans le chapitre 4, un corpus de définitions a été construit pour le développement d'algorithmes d'étiquetage dans les graphes stochastiques. L'algorithme *SPOTAR* est une des solutions qui manipulent des distributions complètes, il s'est inscrit à la suite de ces définitions et nous a servi de solution de référence pour l'étude des distributions statistiques dans les algorithmes de recherche du plus court chemin stochastique. Sur des graphes de taille moyenne (jusqu'à 500 nœuds et un peu plus de 2100 arcs), il a été démontré que le choix de la distribution retenue pour représenter les temps de parcours n'avait pas un impact fort sur la nature des chemins optimaux mis en valeur. Dans le même temps, cette étude a permis d'affirmer l'apport essentiel de la définition stochastique des temps de parcours : les chemins optimaux identifiés sont très souvent distincts de ceux proposés par les approches déterministes ou centrées sur l'espérance. Malgré tout, l'applicabilité des développements effectués lors de cette seconde partie reste à confirmer surtout dans la perspective d'un portage dans des calculateurs industriels. L'un des freins reste les temps de calcul, comme en témoignent les résultats obtenus, très sensibles à la taille du graphe.

La troisième et dernière partie de nos travaux s'est attachée à résoudre cette limitation, par l'adjonction d'une technique d'accélération algorithmique dans la procédure de calcul du plus court chemin stochastique. La technique sélectionnée dans ce but est celle des contractions hiérarchiques, dont les fondements développés dans l'état de l'art pour le cas du calcul du plus court chemin déterministe sont rappelés dans le chapitre 5. Cette technique est caractérisée par un pré-traitement consistant en la hiérarchisation des nœuds du graphe selon un ordre tel que les plus importants d'entre eux auront plus tendance à être visités lors des phases d'exploration du graphe, et en l'ajout de nouveaux arcs virtuels destinés à garantir des parcours ascendants dans la hiérarchie. Cette étape de pré-traitement est relativement longue

en termes de temps de calcul en comparaison d'autres méthodes d'accélération, cependant les temps de résolution des requêtes via les contractions hiérarchiques sont parmi les moins élevés de l'état de l'art, rendant celles-ci prometteuses pour le cadre stochastique. Du reste, leur efficacité est tributaire d'un ensemble de paramètres entrant en jeu lors de la phase de hiérarchisation. Dans le chapitre 6, nous avons proposé des améliorations sur ce point via une analyse de la sensibilité des temps de calcul de la procédure au paramétrage de la fonction de hiérarchisation : des recommandations pratiques ont été avancées pour garantir un temps de pré-traitement minimal sans dégradation du temps de résolution des requêtes, point fort de la méthode. D'ailleurs, un paramétrage issu de cette analyse a été le point d'entrée vers le chapitre 7, et la mise en œuvre des contractions hiérarchiques stochastiques. Cette dernière contribution tient en un ensemble de procédures algorithmiques explicitant la gestion des chemins stochastiques, tout comme en l'adaptation des méthodes utilisées dans le cadre des contractions hiérarchiques déterministes. Au final, des expériences sur des graphes de taille petite à moyenne (jusqu'à 400 nœuds et 1500 arcs) ont démontré la puissance de cette technique d'accélération par rapport à l'algorithme *SPOTAR*, pris comme référence : au prix d'une phase de pré-traitement, les temps de calcul du plus court chemin stochastique sont réduits d'un à deux ordres de grandeur pour les instances testées.

## Limites et perspectives

L'ensemble de ces travaux constitue une réponse relativement riche à la problématique des temps de parcours routiers sur le plan statistique comme sur le plan algorithmique. Cependant, plusieurs questions restent en suspens, et certaines pistes de ce travail méritent davantage d'approfondissements.

Les investigations à propos du modèle statistique le plus apte à représenter les temps de parcours semblent à première vue peu propices à de nouveaux développements. L'interrogation principale pourrait basculer vers la signification physique des paramètres des différentes lois de probabilité utilisées, leur évolution faisant notamment écho à l'évolution temporelle des états de trafic, comme suggéré dans le manuscrit. Pour insister sur l'importance des paramètres des modèles statistiques, il est possible de rebondir sur la nouvelle méthode d'estimation proposée à partir des ratios de moments. De plus amples études quant à son efficacité sont nécessaires pour évaluer le biais et le niveau de convergence relatifs à chaque estimateur. En guise de point de départ à une telle démarche, il faut remarquer que les estimateurs obtenus sont très proches des estimateurs du maximum de vraisemblance pour un nombre important de paramètres des lois de la famille exponentielle.

Au-delà du choix de la loi de probabilité, la principale question restant en suspens est l'indépendance entre les temps de parcours observés sur des segments élémentaires adjacents. En considérant des segments indépendants, nous nous plaçons dans une optique adaptée aux états de trafic fluides, voire à capacité. La remontée de la congestion n'est ainsi pas considérée, sauf à laisser de côté la définition de la loi de probabilité, comme c'est le cas dans la plupart des contributions de l'état de l'art. L'intégration de cette dimension demandera sans nul doute de nouveaux types de constructions théoriques. En effet, la manipulation de lois au sein du  $\delta$ -MRD ou le calcul de convolutions requièrent l'hypothèse d'indépendance. Par ailleurs, les sommes de lois de probabilité ont été approximées au moyen de cet outil graphique, laissant le soin à des études postérieures de prouver les quelques relations identifiées entre les paramètres des lois sommées et ceux des lois résultantes. Le développement d'approches probabilistes pour le calcul de distributions de temps de parcours sur des itinéraires complets pourrait grandement profiter de cet effort.

Au cours de ce travail de recherche, nous nous sommes plutôt focalisés sur une approche algorithmique, en procédant à des échantillonnages de lois de probabilité pour alimenter des procédures de recherche du plus court chemin stochastique. L'impact que peut avoir le choix du modèle statistique a été identifié, cependant des questions supplémentaires émergent. Notamment, jusqu'à quelle taille de graphe peut-on considérer ces résultats comme probants ? La conduite d'études supplémentaires sur des réseaux de plus grande taille est une piste de réflexion importante, néanmoins tributaire d'implémentations plus performantes. En outre, nous avons détecté des différences de chemins optimaux entre les modèles, sans pour autant être capables de proposer des chemins de référence incontestables auxquels comparer les chemins obtenus. Ce point reste ici encore à développer.

Concernant des contractions hiérarchiques stochastiques, des perspectives intéressantes peuvent être dégagées de ce que nous avons proposé. Le pré-traitement est encore trop coûteux en temps de calcul pour une utilisation opérationnelle efficace. Ce handicap pourrait être contourné par la forme de l'implémentation d'une part : le code développé lors de la thèse est non-optimisé, et un effort sur cet aspect donnerait sans doute des résultats rapides. Un axe d'amélioration touche au fond de la technique d'accélération, et plus spécifiquement à la fonction de hiérarchisation utilisée pour classer les nœuds les uns par rapport aux autres, au cœur de la phase de pré-traitement. Des modifications de cette fonction appelée de nombreuses fois pourraient optimiser la procédure. En particulier, un effort de recherche additionnel sur la définition des critères à y intégrer serait envisageable, pour identifier les plus pertinents dans le processus de hiérarchisation, tout comme pour le fonctionnement de variantes telle que peut l'être la méthode des contractions hiérarchiques stochastiques. Dans le même temps, une réflexion sur la forme de cette fonction de hiérarchisation est également à envisager, pour tenter d'améliorer un traitement aujourd'hui dépendant d'une simple somme pondérée.

La collaboration mentionnée auparavant avec Mappy nous a permis d'appréhender les étapes séparant la conception originelle des algorithmes d'une mise en œuvre opérationnelle, ainsi que la difficile articulation des contraintes de chacun, entre la maturation nécessaire à un projet de recherche et les impératifs de plus court terme propres au monde industriel. Cela dit, cette association en fil rouge de la thèse a permis de donner un cadre fort et clair à celle-ci, tout en inscrivant ses livrables dans une perspective opérationnelle. Grâce aux contractions hiérarchiques, les développements entrepris dans la seconde partie de la thèse sont susceptibles d'être intégrés dans une plateforme comme TEMPUS, pour des réseaux locaux de petite taille. L'accélération algorithmique rend ce scénario plausible à moyen terme, au moins dans un but de comparaison d'algorithmes, toutefois l'effort d'intégration demeure une tâche à entreprendre. Cet effort sera également l'occasion d'associer les présents travaux à des approches multi-objectifs (la variabilité comme un critère à part entière) et adaptatives (les distributions de temps de parcours évoluent avec l'heure du trajet), périphériques à notre problématique.

De manière générale, les chemins optimaux identifiés gagneront en qualité de représentation des situations réelles lorsque les données utilisées seront issues d'observations de terrain. Le pas à franchir pour aboutir à une telle situation est encore important : cela nécessiterait la mesure et la mise à disposition de données sur un réseau entier et pour un horizon temporel suffisamment étendu pour procéder à des ajustements de lois de probabilité pertinents. Peut-être est-ce une évolution qui sera rendue possible par l'effort actuel de production et d'ouverture progressive de données massives, nourri lui-même par des orientations politiques récentes en faveur des systèmes de transport intelligents et des « villes durables ».

# Bibliographie

- [1] ABRAMOWITZ, M., STEGUN, I. A., ET AL. *Handbook of mathematical functions*, vol. 1046. Dover New York, 1965. (Cité pages 34 et 35.)
- [2] ABRANTES, P. A., AND WARDMAN, M. R. Meta-analysis of uk values of travel time : An update. *Transportation Research Part A : Policy and Practice* 45, 1 (2011), 1–17. (Cité page 11.)
- [3] ANTHONISSE, J. M. The rush in a directed graph. *Stichting Mathematisch Centrum. Mathematische Besliskunde*, BN 9/71 (1971), 1–10. (Cité page 133.)
- [4] ARMSTRONG, P., GARRIDO, R., AND DE DIOS ORTÚZAR, J. Confidence intervals to bound the value of time. *Transportation Research Part E : Logistics and Transportation Review* 37, 2 (2001), 143–161. (Cité page 11.)
- [5] ARTIGUES, C., HUGUET, M.-J., GUEYE, F., SCHETTINI, F., AND DEZOU, L. State-based accelerations and bidirectional search for bi-objective multimodal shortest paths. *Transportation Research Part C : Emerging Technologies* 27 (2013), 233–259. (Cité page 189.)
- [6] BAUCHE, F. *Outils pour l'optimisation de la consommation des vehicules électriques*. PhD thesis, École Nationale des Travaux Publics de l'État, 2015. (Cité page 2.)
- [7] BAST, H., DELLING, D., GOLDBERG, A., MÜLLER-HANNEMANN, M., PAJOR, T., SANDERS, P., WAGNER, D., AND WERNECK, R. F. Route planning in transportation networks. *arXiv preprint arXiv :1504.05140* (2015). (Cité pages 131, 145, et 150.)
- [8] BATES, J., POLAK, J., JONES, P., AND COOK, A. The valuation of reliability for personal travel. *Transportation Research Part E : Logistics and Transportation Review* 37, 2-3 (2001), 191–229. (Cité pages 12, 17, et 207.)
- [9] BATZ, G. V. *Time-Dependent Route Planning with Contraction Hierarchies*. PhD thesis, Karlsruhe, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Diss., 2014, 2014. (Cité pages 102, 132, 140, 141, 147, 148, 149, 156, 161, 166, 167, 173, et 182.)
- [10] BATZ, G. V., GEISBERGER, R., SANDERS, P., AND VETTER, C. Minimum time-dependent travel times with contraction hierarchies. *ACM Journal of Experimental Algorithmics* 18, 1.4 (2013), 1–43. (Cité pages 132, 133, 134, 137, 140, 142, 143, 145, 146, 178, 179, 180, 181, 183, 184, 189, et 213.)
- [11] BELLMAN, R. On a routing problem. *Quarterly of Applied Mathematics* 16 (1958), 87–90. (Cité pages 84, 88, et 90.)
- [12] BHOURI, N., ARON, M., AND KAUPPILA, J. Relevance of travel time reliability indicators : a managed lanes case study. In *Proceedings of the 15th meeting of the Euro Working Group on Transportation (EWGT)* (2012). (Cité pages 9, 14, et 20.)



- [13] BLACK, I., TOWRISS, J., AND LTD, P. A. S. *Demand Effects of Travel Time Reliability*. London congestion charging. Centre for Transport Studies, Cranfield Institute of Technology, 1993. (Cité page 11.)
- [14] BOBÉE, B., PERREAULT, L., AND ASHKAR, F. Two kinds of moment ratio diagrams and their application in hydrology. *Stochastic Hydrology Hydraulic* 7 (1993), 41–65. (Cité pages 26, 27, 28, 29, 31, 39, 42, et 60.)
- [15] BOGERS, E. A. I., LINT, H. W. C. V., AND ZUYLEN, H. J. V. Reliability of travel time : Effective measures from a behavioral point of view. *Transportation Research Record : Journal of the Transportation Research Board* 2082 (December 2008), 27–34. (Cité pages 13 et 21.)
- [16] BÖRJESSON, M., ELIASSON, J., AND FRANKLIN, J. P. Valuations of travel time variability in scheduling versus mean-variance models. *Transportation Research Part B : Methodological* 46, 7 (2012), 855 – 873. (Cité pages 9, 13, et 17.)
- [17] BOUSQUET, A. *Optimisation d'itinéraires multimodaux fondée sur les temps de parcours à l'échelle d'une agglomération urbaine dense*. PhD thesis, École Nationale des Travaux Publics de l'État, 2010. (Cité page 2.)
- [18] BURR, I. Cumulative frequency function. *The Annals of Mathematical Statistics* 13 (1942), 115–246. (Cité page 42.)
- [19] CAO, P., MIWA, T., AND MORIKAWA, T. Modeling distribution of travel time in signalized road section using truncated distribution. *Procedia-Social and Behavioral Sciences* 138 (2014), 137–147. (Cité page 21.)
- [20] CARRION, C., AND LEVINSON, D. Value of travel time reliability : A review of current evidence. *Transportation Research Part A : Policy and Practice* 46, 4 (2012), 720 – 741. (Cité pages 9, 11, 12, 13, 15, et 16.)
- [21] CARRION, C., AND LEVINSON, D. Valuation of travel time reliability from a gps-based experimental design. *Transportation Research Part C : Emerging Technologies* 35, 0 (2013), 305 – 323. (Cité pages 13 et 15.)
- [22] CASTILLO, E., CALVIÑO, A., SÁNCHEZ-CAMBRONERO, S., NOGAL, M., AND RIVAS, A. A percentile system optimization approach with and without path enumeration. *Computers & Operations Research* 40, 11 (2013), 2711–2723. (Cité page 88.)
- [23] CHATELAIN, F. *Lois Gamma multivariées pour le traitement d'images radar*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2007. (Cité page 72.)
- [24] CHEBANA, F., AND EL ADLOUNI, S.-E. Mixed estimation method for halphen distributions with applications in extrem hydrologic events. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment* 24 (2010), 359–376. (Cité page 40.)
- [25] CHEBANA, F., EL ADLOUNI, S.-E., AND BOBÉE, B. Method of moment of the halphen distribution parameters. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment* 22 (2008), 749–757. (Cité page 40.)
- [26] CHEN, B. Y., LAM, W. H., SUMALEE, A., LI, Q., SHAO, H., AND FANG, Z. Finding reliable shortest paths in road networks under uncertainty. *Networks and spatial economics* 13, 2 (2013), 123–148. (Cité pages 86, 88, 90, et 95.)
- [27] CHEN, B. Y., LAM, W. H., SUMALEE, A., LI, Q., AND TAM, M. L. Reliable shortest path problems in stochastic time-dependent networks. *Journal of Intelligent Transportation Systems* 18, 2 (2014), 177–189. (Cité pages 22, 86, 88, 90, et 95.)

- [28] CHEN, B. Y., LAM, W. H., SUMALEE, A., AND LI, Z.-L. Reliable shortest path finding in stochastic networks with spatial correlated link travel times. *International Journal of Geographical Information Science* 26, 2 (2012), 365–386. (Cité pages 86, 88, 95, et 96.)
- [29] CHEN, C. Tests of fit for the three-parameter lognormal distribution. *Computational Statistics & Data Analysis* 50, 6 (2006), 1418 – 1440. (Cité page 41.)
- [30] CHENG, J., LISSER, A., AND LETOURNEL, M. Distributionally robust stochastic shortest path problem. *Electronic Notes in Discrete Mathematics* 41 (2013), 511–518. (Cité page 89.)
- [31] CLARK, S., AND WATLING, D. Modelling network travel time reliability under stochastic demand. *Transportation Research part B* 39 (feb 2005), 119–140. (Cité pages 14 et 21.)
- [32] COHEN, H., AND SOUTHWICK, F. On the measurement and valuation of travel time variability due to incidents on freeways. *Journal of Transportation and Statistics* 2 (1999), 123–132. (Cité page 10.)
- [33] DELHOME, R., BILLOT, R., DURET, A., AND EL FAOUZI, N.-E. The halphen distribution system, a toolbox for modeling travel time variability : some insights based on mesoscopic simulation. *Transportation Research Record : Journal of the Transportation Research Board* 2490 (2015), 32–40. (Cité page 14.)
- [34] DEVROYE, L. *Non-Uniform Random Variate Generation*. SpringerLink : Bücher. Springer New York, 2013. (Cité page 149.)
- [35] DIJKSTRA, E. W. A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische mathematik* 1, 1 (1959), 269–271. (Cité pages 84, 88, et 91.)
- [36] DING, J., GAO, S., JENELIUS, E., RAHMANI, M., HUANG, H., MA, L., PEREIRA, F., AND BEN-AKIVA, M. Routing policy choice set generation in stochastic time-dependent networks : Case studies for stockholm, sweden, and singapore. *Transportation Research Record : Journal of the Transportation Research Board* 2466 (2014), 76–86. (Cité pages 87 et 90.)
- [37] DONG, W., VU, H. L., NAZARATHY, Y., VO, B. Q., LI, M., AND HOOGENDOORN, S. P. Shortest paths in stochastic time-dependent networks with link travel time correlation. *Transportation Research Record : Journal of the Transportation Research Board* 2338, 1 (2013), 58–66. (Cité pages 85, 88, 91, 95, et 96.)
- [38] DURET, A. A multi-lane capacity model designed for variable speed limit applications. In *Transport Research Arena (TRA) 5th Conference : Transport Solutions from Research to Deployment* (2014). (Cité page 44.)
- [39] EL ADLOUNI, S.-E., AND BOBEE, B. Sampling techniques for halphen distributions. *Journal of Hydrologic Engineering* 12, 6 (2007), 592–604. (Cité page 69.)
- [40] EL FAOUZI, N.-E. Toward an efficient travel time estimation for transportation network reliability assessment based on multisource data fusion. In *Proceedings of the 2nd International Symposium on Transport Network Reliability (INSTR)* (2004). (Cité pages 14 et 18.)
- [41] EL FAOUZI, N.-E., LEUNG, H., AND KURIAN, A. Data fusion in intelligent transportation systems : Progress and challenges—a survey. *Information Fusion* 12, 1 (2011), 4–10. (Cité page 14.)

- [42] EL FAOUZI, N.-E., AND MAURIN, M. Reliability metrics for path travel time under log-normal distribution. In *Proceedings of the 3rd International Symposium on Transportation Network Reliability (INSTR)* (2007). (Cité pages 9, 21, 22, et 71.)
- [43] EMAM, E., AND AI-DEEK, H. Using real-life dual-loop detector data to develop new methodology for estimating freeway travel time reliability. *Transportation Research Record : Journal of the Transportation Research Board* 1959 (2006), 140–150. (Cité pages 9, 21, et 22.)
- [44] ENGELSON, L., AND FOSGERAU, M. Additive measures of travel time variability. *Transportation Research Part B : Methodological* 45, 10 (2011), 1560 – 1571. (Cité pages 14 et 17.)
- [45] FAN, Y., KALABA, R., AND MOORE II, J. Arriving on time. *Journal of Optimization Theory and Applications* 127, 3 (2005), 497–513. (Cité pages 86, 90, et 96.)
- [46] FAN, Y., KALABA, R., AND MOORE II, J. Shortest paths in stochastic networks with correlated link costs. *Computers & Mathematics with Applications* 49, 9 (2005), 1549–1564. (Cité pages 91, 95, et 96.)
- [47] FAN, Y., AND NIE, Y. Optimal routing for maximizing the travel time reliability. *Networks and Spatial Economics* 6, 3-4 (2006), 333–344. (Cité pages 86, 91, 95, 96, et 101.)
- [48] FITZGERALD, D. Statistical aspects of tricomi’s function and modified bessel functions of the second kind. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment* 14, 2 (2000), 139–158. (Cité page 40.)
- [49] FOSGERAU, M., AND KARLSTROM, A. The value of reliability. *Transportation Research Part-B : Methodological* 44, 1 (2010), 38–49. (Cité page 18.)
- [50] FRANK, H. Shortest paths in probabilistic graphs. *Operations Research* 17, 4 (1969), 583–599. (Cité pages 84 et 86.)
- [51] FREDMAN, M. L., SEDGEWICK, R., SLEATOR, D. D., AND TARJAN, R. E. The pairing heap : A new form of self-adjusting heap. *Algorithmica* 1, 1-4 (1986), 111–129. (Cité page 134.)
- [52] FREEMAN, L. C. A set of measures of centrality based on betweenness. *Sociometry* (1977), 35–41. (Cité page 133.)
- [53] FRIEZE, A. M., AND GRIMMETT, G. R. The shortest-path problem for graphs with random arc-lengths. *Discrete Applied Mathematics* 10, 1 (1985), 57–77. (Cité page 85.)
- [54] FU, L., AND RILETT, L. R. Expected shortest paths in dynamic and stochastic traffic networks. *Transportation Research Part B : Methodological* 32, 7 (1998), 499–516. (Cité pages 85 et 88.)
- [55] GABREL, V., MURAT, C., AND WU, L. New models for the robust shortest path problem : complexity, resolution and generalization. *Annals of Operations Research* 207, 1 (2013), 97–120. (Cité page 96.)
- [56] GALLOTTI, R., BAZZANI, A., AND RAMBALDI, S. Understanding the variability of daily travel-time expenditures using gps trajectory data. *EPJ Data Science* 4, 1 (2015), 1–14. (Cité page 14.)
- [57] GAO, S., AND CHABINI, I. Optimal routing policy problems in stochastic time-dependent networks. *Transportation Research Part B : Methodological* 40, 2 (2006), 93–122. (Cité pages 87 et 90.)

- [58] GAVER, D. P. Headstart strategies for combating congestion. *Transportation Science* 2, 2 (1968), 172–181. (Cité page 15.)
- [59] GEISBERGER, R. Contraction hierarchies : Faster and simpler hierarchical routing in road networks. Master’s thesis, Institut für Theoretische Informatik Universität Karlsruhe (TH), 2008. (Cité pages 132, 133, 134, 135, 138, 145, 147, 166, 180, et 213.)
- [60] GEISBERGER, R., SANDERS, P., SCHULTES, D., AND VETTER, C. Exact routing in large road networks using contraction hierarchies. *Transportation Science* 46, 3 (2012), 388–404. (Cité pages 132, 133, 147, 178, et 189.)
- [61] GRAVES, T. L., KARR, A. F., AND THAKURIAH, P. Variability of travel times on arterial links : Effects of signals and volume. Tech. rep., National Institute of Statistical Science (North Carolina), 1998. (Cité pages 10, 14, et 21.)
- [62] GUESSOUS, Y., ARON, M., BHOURI, N., AND COHEN, S. Estimating travel time distribution under different traffic conditions. *Transportation Research Procedia* 3 (2014), 339–348. (Cité page 22.)
- [63] GUTMAN, R. J. Reach-based routing : A new approach to shortest path algorithms optimized for road networks. In *Proceedings of the Sixth Workshop on Algorithm Engineering and Experiments and the First Workshop on Analytic Algorithmics and Combinatorics, New Orleans, LA, USA* (2004), pp. 100–111. (Cité page 133.)
- [64] HALL, P. On bootstrap confidence intervals in nonparametric regression. *The Annals of Statistics* (1992), 695–711. (Cité page 156.)
- [65] HALL, R. W. The fastest path through a network with random time-dependent travel times. *Transportation science* 20, 3 (1986), 182–188. (Cité pages 85 et 95.)
- [66] HALPHEN, E. Sur un nouveau type de courbe de fréquence. *Compte-Rendus de l’Académie des Sciences* 213 (1941), 633–635. (Cité pages 25, 32, et 34.)
- [67] HALPHEN, É. *Les Fonctions factorielles*. Inst. de Statistique de l’Université de Paris, 1955. (Cité page 36.)
- [68] HÄME, L., AND HAKULA, H. Dynamic journeying under uncertainty. *European Journal of Operational Research* 225, 3 (2013), 455–471. (Cité page 96.)
- [69] HANS, E., CHIABAUT, N., AND LECLERCQ, L. Clustering approach for assessing the travel time variability of arterials. *Transportation Research Record : Journal of the Transportation Research Board* 2422 (2014), 42–49. (Cité page 21.)
- [70] HANS, E., CHIABAUT, N., AND LECLERCQ, L. Applying variational theory to travel time estimation on urban arterials. *Transportation Research Part B : Methodological* 78 (2015), 169–181. (Cité page 21.)
- [71] HOLLANDER, Y. Travellers’ attitudes to travel time variability : Intermodal and intra-modal analysis. In *Proceedings of the 3rd International SHIV Congress in Bari, Italy* (2005). (Cité pages 10 et 24.)
- [72] HOLLANDER, Y. Direct versus indirect models for the effects of unreliability. *Transportation Research Part A : Policy and Practice* 40, 9 (2006), 699 – 711. (Cité pages 12, 13, 15, 17, et 207.)
- [73] HOLLANDER, Y., AND LIU, R. Calibration of a traffic microsimulation model as a tool for estimating the level of travel time variability. In *10th meeting of Euro Working Group on Transportation (EWGT), Poznan, Poland* (2005). (Cité page 14.)

- [74] HUANG, H., AND GAO, S. Optimal paths in dynamic networks with dependent random link travel times. *Transportation Research Part B : Methodological* 46, 5 (2012), 579–598. (Cité pages 91 et 95.)
- [75] HUNTER, T., HOFLEITNER, A., REILLY, J., KRICHENE, W., THAI, J., KOUVELAS, A., ABBEEL, P., AND BAYEN, A. Arriving on time : estimating travel time distributions on large-scale road networks. *arXiv preprint arXiv :1302.6617* (2013). (Cité pages 95 et 96.)
- [76] HUTSON, K. R., AND SHIER, D. R. Extended dominance and a stochastic shortest path problem. *Computers & Operations Research* 36, 2 (2009), 584–596. (Cité page 86.)
- [77] JACKSON, W. B., AND JUCKER, J. V. An empirical study of travel time variability and travel choice behavior. *Transportation Science* 16, 4 (1982), 460–475. (Cité pages 11, 12, 15, et 207.)
- [78] JACQUES, J. *Contributions à l'analyse de sensibilité et à l'analyse discriminante généralisée*. PhD thesis, Université Joseph-Fourier-Grenoble I, 2005. (Cité page 150.)
- [79] JENELIUS, E. The value of travel time variability with trip chains, flexible scheduling and correlated travel times. *Transportation Research Part B : Methodological* 46, 6 (2012), 762 – 780. (Cité page 17.)
- [80] JINTANAKUL, K., CHU, L., AND JAYAKRISHNAN, R. Bayesian mixture model for estimating freeway travel time distributions from small probe samples from multiple days. *Transportation Research Record : Journal of the Transportation Research Board* 2136 (2009), 37–44. (Cité pages 10, 22, et 24.)
- [81] JORGENSEN, B. *Statistical properties of the generalized inverse Gaussian distribution*, vol. 9. Springer Science & Business Media, 2012. (Cité page 32.)
- [82] KAPARIAS, I., BELL, M. G. H., AND BELZNER, H. A new measure of travel time reliability for in-vehicle navigation systems. *Journal of International Transportation Systems* 12, 4 (2008), 202–211. (Cité pages 14 et 21.)
- [83] KAUFMAN, L., AND ROUSSEEUW, P. *Finding groups in data : An introduction to cluster analysis*. Wiley, 2009. (Cité page 56.)
- [84] KENNEDY, M. C., AND O'HAGAN, A. Bayesian calibration of computer models. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B, Statistical Methodology* (2001), 425–464. (Cité page 169.)
- [85] KHANI, A., AND BOYLES, S. D. An exact algorithm for the mean–standard deviation shortest path problem. *Transportation Research Part B : Methodological* 81 (2015), 252–266. (Cité page 86.)
- [86] KIERITZ, T., LUXEN, D., SANDERS, P., AND VETTER, C. Distributed time-dependent contraction hierarchies. In *Experimental Algorithms*. Springer, 2010, pp. 83–93. (Cité page 137.)
- [87] KIM, J., AND MAHMASSANI, H. S. Compound gamma representation for modeling vehicle-to-vehicle and day-to-day travel time variability in a traffic network. In *Transportation Research Board 93rd Annual Meeting* (2014), no. 14-1616. (Cité pages 20 et 22.)
- [88] KIM, J., AND MAHMASSANI, H. S. Compound gamma representation for modeling travel time variability in a traffic network. *Transportation Research Part B : Methodological* 80 (2015), 40–63. (Cité pages 22 et 67.)

- [89] KNIGHT, T. E. An approach to the evaluation of changes in travel unreliability : A "safety margin" hypothesis. *Transportation* 3, 4 (1974), 393–408. (Cité page 15.)
- [90] KOVALEV, S., AND BILLOT, R. Time-expanded mathematical programming models for multi-objective multi-modal trip planning problem. In *4th International Symposium of Transport Simulation (ISTS), Ajaccio, France* (2014). (Cité page 2.)
- [91] LAHAROTTE, P.-A., BILLOT, R., EL-FAOUZI, N.-E., OUKHELLOU, L., AND COME, E. How to filter transportation modes with bluetooth data? In *4th International Symposium of Transport Simulation (ISTS), Ajaccio, France* (2014). (Cité page 22.)
- [92] LECLERCQ, L., AND BECARIE, C. Meso lighthill-whitham and richards model designed for network applications. In *Transportation Research Board 91st Annual Meeting* (2012). (Cité page 44.)
- [93] LECLUYSE, C., VAN WOENSEL, T., AND PEREMANS, H. Vehicle routing with stochastic time-dependent travel times. *4OR* 7, 4 (2009), 363–377. (Cité pages 88, 89, et 95.)
- [94] LIGHTHILL, M. J., AND WHITHAM, G. B. On kinematic waves. I. flood movement in long rivers. In *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* (1955), vol. 229, The Royal Society, pp. 281–316. (Cité page 55.)
- [95] LIGHTHILL, M. J., AND WHITHAM, G. B. On kinematic waves. II. a theory of traffic flow on long crowded roads. In *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* (1955), vol. 229, The Royal Society, pp. 317–345. (Cité page 55.)
- [96] LIU, H. X., RECKER, W., AND CHEN, A. Uncovering the contribution of travel time reliability to dynamic route choice using real-time loop data. *Transportation Research Part A : Policy and Practice* 38, 6 (2004), 435 – 453. (Cité pages 13, 15, 16, et 24.)
- [97] LO, H. K., AND TUNG, Y.-K. Network with degradable links : capacity analysis and design. *Transportation research part B* 37 (2003), 345–363. (Cité page 10.)
- [98] LOMAX, T., SCHRANK, D., TURNER, S., AND MARGIOTTA, R. Selecting travel reliability measures. Tech. rep., Texas Transportation Institute, 2003. (Cité pages 14, 18, 49, et 50.)
- [99] LOUI, R. P. Optimal paths in graphs with stochastic or multidimensional weights. *Communications of the ACM* 26, 9 (1983), 670–676. (Cité pages 85, 86, et 90.)
- [100] LU, J., BAN, X., QIU, Z., YANG, F., AND RAN, B. Robust route guidance model based an advanced traveler information systems. *Transportation Research Record : Journal of the Transportation Research Board* 1935, 1 (2005), 1–7. (Cité pages 86 et 88.)
- [101] MA, Z., FERREIRA, L., MESBAH, M., AND ZHU, S. Modeling distributions of travel time variability for bus operations. *Journal of Advanced Transportation* 50 (2015), 6–24. (Cité pages 14 et 22.)
- [102] MAHMASSANI, H., HOU, T., AND DONG, J. Characterizing travel time variability in vehicular traffic networks : deriving a robust relation for reliability analysis. *Transportation Research Record : Journal of the Transportation Research Board*, 2315 (2012), 141–152. (Cité pages 10, 14, 16, et 20.)

- [103] MANTEL, N. Rapid estimation of standard errors of means for small samples. *The American Statistician* 5, 4 (1951), 26–27. (Cité page 188.)
- [104] MCKAY, M. D., BECKMAN, R. J., AND CONOVER, W. J. Comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. *Technometrics* 21, 2 (1979), 239–245. (Cité page 149.)
- [105] MILLER-HOOKS, E. Adaptive least-expected time paths in stochastic, time-varying transportation and data networks. *Networks* 37, 1 (2001), 35–52. (Cité pages 85 et 91.)
- [106] MILLER-HOOKS, E. D., AND MAHMASSANI, H. S. Least possible time paths in stochastic, time-varying networks. *Computers & operations research* 25, 12 (1998), 1107–1125. (Cité pages 85, 91, et 92.)
- [107] MILLER-HOOKS, E. D., AND MAHMASSANI, H. S. Least expected time paths in stochastic, time-varying transportation networks. *Transportation Science* 34, 2 (2000), 198–215. (Cité pages 85, 91, et 116.)
- [108] MILLER-HOOKS, E. D., AND MAHMASSANI, H. S. Path comparisons for a priori and time-adaptive decisions in stochastic, time-varying networks. *European Journal of Operational Research* 146, 1 (2003), 67–82. (Cité pages 91, 92, et 93.)
- [109] MIRCHANDANI, P. B. Shortest distance and reliability of probabilistic networks. *Computers & Operations Research* 3, 4 (1976), 347–355. (Cité page 84.)
- [110] MORLAT, G. Les lois de probabilités de halphen. *Revue de Statistique Appliquée* 3 (1956), 21–46. (Cité pages 25, 26, et 38.)
- [111] NANTES, A., MISKA, M. P., BHASKAR, A., CHUNG, E., ET AL. Noisy bluetooth traffic data ? *Road & Transport Research : A Journal of Australian and New Zealand Research and Practice* 23, 1 (2014), 33–43. (Cité page 43.)
- [112] NICHOLSON, A. Travel time reliability benefits : Allowing for correlation. *Research in Transportation Economics* 49 (2015), 14–21. (Cité page 23.)
- [113] NIE, Y. M., AND WU, X. Shortest path problem considering on-time arrival probability. *Transportation Research Part B : Methodological* 43, 6 (2009), 597–613. (Cité pages 87, 92, 94, 95, 96, 97, 99, 100, 101, 110, 112, 113, 116, 125, 126, 173, 188, 208, et 213.)
- [114] NIELSEN, L. R., ANDERSEN, K. A., AND PRETOLANI, D. Ranking paths in stochastic time-dependent networks. *European Journal of Operational Research* 236, 3 (2014), 903–914. (Cité pages 88 et 89.)
- [115] NIKOLOVA, E. High-performance heuristics for optimization in stochastic traffic engineering problems. In *Large-Scale Scientific Computing*. Springer, 2010, pp. 352–360. (Cité pages 86 et 88.)
- [116] NOLAND, R. B., AND POLAK, J. W. Travel time variability : A review of theoretical and empirical issues. *Transport Review* 22 (nov 2002), 39–54. (Cité pages 9 et 15.)
- [117] NOLAND, R. B., AND SMALL, K. A. *Travel-time uncertainty, departure time choice, and the cost of the morning commute*. Institute of Transportation Studies, University of California, Irvine, 1995. (Cité page 16.)
- [118] OLIVEIRA-NETO, F. M., CHIN, S. M., HWANG, H.-L., AND HAN, L. D. Modeling highway travel time distribution with conditional probability models. In *Transportation Research Board 93rd Annual Meeting* (2014), vol. 14-4843. (Cité pages 94 et 96.)
- [119] OPASANON, S., AND MILLER-HOOKS, E. Multicriteria adaptive paths in stochastic, time-varying networks. *European Journal of Operational Research* 173, 1 (2006), 72–91. (Cité page 91.)

- [120] PAN, Y., SUN, L., AND GE, M. Finding reliable shortest path in stochastic time-dependent network. *Procedia-Social and Behavioral Sciences* 96 (2013), 451–460. (Cité pages 87 et 91.)
- [121] PARK, H., AND HAGHANI, A. Optimal number and location of bluetooth sensors considering stochastic travel time prediction. *Transportation Research Part C : Emerging Technologies* 55 (2015), 203–216. (Cité page 14.)
- [122] PERREAULT, L., BOBEE, B., AND RASMUSSEN, P. F. Halphen distribution system i : Mathematical and statistical properties. *Journal of Hydrologic Engineering* 4, 3 (1999), 189–199. (Cité pages 25, 27, 32, 36, et 38.)
- [123] PERREAULT, L., BOBEE, B., AND RASMUSSEN, P. F. Halphen distribution system ii : Parameter and quantile estimation. *Journal of Hydrologic Engineering* 4, 3 (1999), 200–208. (Cité pages 25, 32, 36, 38, 40, et 60.)
- [124] PETTIE, S. Towards a final analysis of pairing heaps. In *46th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS2005)* (2005), IEEE, pp. 174–183. (Cité page 134.)
- [125] POLAK, J. A more general model of individual departure time choice. In *Proceedings of seminar C - PTRC Summer Annual Meeting* (1987), pp. 247–258. (Cité page 15.)
- [126] POLYCHRONOPOULOS, G. H., AND TSITSIKLIS, J. N. Stochastic shortest path problems with recourse. *Networks* 27, 2 (1996), 133–143. (Cité pages 90 et 96.)
- [127] PRAKASH, A. A., AND SRINIVASAN, K. A sample-based algorithm to determine minimum robust cost path with correlated link travel times. In *Transportation Research Board 93rd Annual Meeting* (2014). (Cité pages 86, 88, 91, et 95.)
- [128] PU, W. Analytic relationships between travel time reliability measures. *Transportation Research Record : Journal of the Transportation Research Board* 2254 (2011), 122–130. (Cité pages 20 et 51.)
- [129] RAKHA, H., EL-SHAWARBY, I., AND ARAFEH, M. Trip travel-time reliability : Issues and proposed solutions. *Journal of International Transportation Systems* 14, 4 (2010), 232–250. (Cité pages 20 et 22.)
- [130] RAMEZANI, M., AND GEROLIMINIS, N. On the estimation of arterial route travel time distribution with markov chains. *Transportation Research part B* 46 (2012), 1576–1590. (Cité pages 14 et 24.)
- [131] REY, D., DIXIT, V. V., AND WALLER, S. T. Stochastic scenario-based time-dependent shortest path. Working paper, 2014. (Cité pages 91 et 96.)
- [132] RICHARDS, P. I. Shock waves on the highway. *Operations research* 4, 1 (1956), 42–51. (Cité page 55.)
- [133] RIETVELD, P., BRUINSMA, F., AND VAN VUUREN, D. Coping with unreliability in public transport chains : A case study for netherlands. *Transportation Research Part A : Policy and Practice* 35, 6 (2001), 539 – 559. (Cité pages 14 et 22.)
- [134] SABRAN, G., SAMARANAYAKE, S., AND BAYEN, A. Precomputation techniques for the stochastic on-time arrival problem. In *Proceedings of the Meeting on Algorithm Engineering & Experiments* (2014), Society for Industrial and Applied Mathematics, pp. 138–146. (Cité pages 131, 187, et 189.)
- [135] SALTELLI, A. Making best use of model evaluations to compute sensitivity indices. *Computer Physics Communications* 145, 2 (2002), 280–297. (Cité page 152.)



- [136] SALTELLI, A., ANDRES, T., AND HOMMA, T. Sensitivity analysis of model output : an investigation of new techniques. *Computational statistics & data analysis* 15, 2 (1993), 211–238. (Cité page 152.)
- [137] SALTELLI, A., ANNONI, P., AZZINI, I., CAMPOLONGO, F., RATTO, M., AND TARANTOLA, S. Variance based sensitivity analysis of model output : design and estimator for the total sensitivity index. *Computer Physics Communications* 181, 2 (2010), 259–270. (Cité pages 150, 152, 153, et 154.)
- [138] SALTELLI, A., CHAN, K., AND SCOTT, E. M. *Sensitivity analysis*, vol. 1. Wiley New York, 2000. (Cité pages 164 et 211.)
- [139] SAMARANAYAKE, S., BLANDIN, S., AND BAYEN, A. A tractable class of algorithms for reliable routing in stochastic networks. *Transportation Research Part C : Emerging Technologies* 20, 1 (2012), 199–217. (Cité page 96.)
- [140] SCANO, G., HUGUET, M.-J., AND NGUEVEU, S. U. Adaptations of k-shortest path algorithms for transportation networks. In *International Conference on Industrial Engineering and Systems Management (IESM)* (2015), IEEE, pp. 663–669. (Cité page 88.)
- [141] SCHLOMILCH, M. Moyennes géométriques, arithmétiques, harmoniques comparées. *Nouvelles annales de mathématiques : journal des candidats aux écoles polytechnique et normale* 18 (1859), 353–355. (Cité page 27.)
- [142] SEN, S., PILLAI, R., JOSHI, S., AND RATHI, A. K. A mean-variance model for route guidance in advanced traveler information systems. *Transportation Science* 35, 1 (2001), 37–49. (Cité pages 86, 88, et 94.)
- [143] SENNA, L. The influence of travel-time variability on the value of time. *Transportation* 21, 2 (1994), 203–228. (Cité page 15.)
- [144] SESHADRI, R., AND SRINIVASAN, K. K. Algorithm for determining most reliable travel time path on network with normally distributed and correlated link travel times. *Transportation Research Record : Journal of the Transportation Research Board* 2196, 1 (2010), 83–92. (Cité pages 87, 88, 89, et 95.)
- [145] SHAHABI, M., UNNIKRISHNAN, A., AND BOYLES, S. D. An outer approximation algorithm for the robust shortest path problem. *Transportation Research Part E : Logistics and Transportation Review* 58 (2013), 52–66. (Cité pages 86, 88, 89, 94, et 95.)
- [146] SHAO, Q. Notes on maximum likelihood estimation for the three-parameter burr XII distribution. *Computational Statistics & Data Analysis* 45, 3 (2004), 675 – 687. (Cité page 42.)
- [147] SMALL, K. A. The scheduling of consumer activities : Work trips. *American Economic Review* 72, 3 (June 1982), 467–79. (Cité pages 15 et 16.)
- [148] SOBOL, I. Sensitivity analysis or nonlinear mathematical models. *Math Model Comput Exp* 1, 4 (1993), 407–414. (Cité pages 150 et 152.)
- [149] SOHN, K., AND KIM, D. Statistical model for forecasting link travel time variability. *Journal of Transportation Engineering* 135, 7 (2009), 440–453. (Cité pages 14 et 21.)
- [150] SRINIVASAN, K. K., PRAKASH, A., AND SESHADRI, R. Finding most reliable paths on networks with correlated and shifted log-normal travel times. *Transportation Research Part B : Methodological* 66 (2014), 110–128. (Cité pages 88, 89, et 95.)

- [151] SUSILAWATI, S., TAYLOR, M. A., AND SOMENAHALLI, S. V. Distributions of travel time variability on urban roads. *Journal of Advanced Transportation* 47, 8 (2013), 720–736. (Cité pages 14, 21, 22, et 67.)
- [152] TAYLOR, M. A., AND SUSILAWATI, S. Modelling travel time reliability with the burr distribution. *Procedia-Social and Behavioral Sciences* 54 (2012), 75–83. (Cité pages 14, 21, 22, et 42.)
- [153] TSUBOTA, T., BHASKAR, A., CHUNG, E., AND BILLOT, R. Arterial traffic congestion analysis using bluetooth duration data. In *Proceedings of the 34th Australasian Transport Research Forum* (2011). (Cité page 43.)
- [154] TWEEDIE, M. Statistical properties of inverse gaussian distributions i. *The Annals of Mathematical Statistics* 28 (1957), 281–545. (Cité pages 35 et 70.)
- [155] TWEEDIE, M. Statistical properties of inverse gaussian distributions ii. *The Annals of Mathematical Statistics* 28 (1957), 547–822. (Cité page 35.)
- [156] VAN LINT, J. W. C., VAN ZUYLEN, H. J., AND TU, H. Travel time unreliability on freeways : Why measures based on variance tell only half the story. *Transportation Research Part-A : Policy and Practice* 42, 1 (2008), 258–277. (Cité pages 20, 50, et 55.)
- [157] VAN WOENSEL, T., KERBACHE, L., PEREMANS, H., AND VANDAELE, N. A queueing framework for routing problems with time-dependent travel times. *Journal of Mathematical Modelling and Algorithms* 6, 1 (2007), 151–173. (Cité pages 88, 89, et 94.)
- [158] VERBEECK, C. *Optimizing practical orienteering problems with stochastic time-dependent travel times : towards congestion free routes*. PhD thesis, Ghent University, 2016. (Cité pages 88 et 95.)
- [159] VETTER, C. Parallel time-dependent contraction hierarchies. *Student Research Project* (2009). (Cité page 134.)
- [160] VICKREY, W. S. Congestion theory and transport investment. *American Economic Review* 59, 2 (May 1969), 251–60. (Cité page 15.)
- [161] VON NEUMANN, J., AND MORGENSTERN, O. *Theory of games and economic behavior*. Princeton university press, 1944. (Cité page 15.)
- [162] WAKABAYASHI, H., AND MATSUMOTO, Y. Comparative study on travel time reliability indexes for highway users and operators. *Journal of Advanced Transportation* 46, 4 (2012), 318–339. (Cité pages 14, 20, et 51.)
- [163] WALLER, S. T., AND ZILIASKOPOULOS, A. K. On the online shortest path problem with limited arc cost dependencies. *Networks* 40, 4 (2002), 216–227. (Cité page 96.)
- [164] WANG, F., KEATS, J., AND ZIMMER, W. J. Maximum likelihood estimation of the burr XII parameters with censored and uncensored data. *Microelectronics Reliability* 36, 3 (1996), 359 – 362. (Cité pages 42 et 67.)
- [165] WANG, S., SHAO, H., TAO, L., AND NI, Q. Travel time reliability-based optimal path finding. In *3rd International Joint Conference on Computational Science and Optimization (CSO)* (2010), vol. 2, IEEE, pp. 531–534. (Cité pages 88 et 95.)
- [166] WARFFEMIUS, P. Using the standard deviation of the travel time distribution as an indicator for valuing the reliability of travel time. In *Young Researchers Seminar of the European Conference of Transport Research Institutes, The Hague, Netherlands* (2005). (Cité pages 10, 15, 19, et 207.)

- [167] WATKINS, A. J. An algorithm for maximum likelihood estimation in the three parameter burr XII distribution. *Computational Statistics & Data Analysis* 32, 1 (1999), 19 – 27. (Cité page 42.)
- [168] WU, X. Finding reliable shortest paths in dynamic stochastic networks. *Transportation Research Record : Journal of the Transportation Research Board* 2333, 1 (2013), 80–90. (Cité pages 87, 88, 92, 94, et 95.)
- [169] XING, T., AND ZHOU, X. Finding the most reliable path with and without link travel time correlation : A lagrangian substitution based approach. *Transportation Research Part B : Methodological* 45, 10 (2011), 1660 – 1679. (Cité pages 86, 88, 89, et 96.)
- [170] YANG, L., AND ZHOU, X. Constraint reformulation and a lagrangian relaxation-based solution algorithm for a least expected time path problem. *Transportation Research Part B : Methodological* 59 (2014), 22–44. (Cité pages 85, 88, 89, et 96.)
- [171] YEN, J. Y. Finding the k shortest loopless paths in a network. *Management Science* 17, 11 (1971), 712–716. (Cité page 88.)
- [172] YETISKUL, E., AND SENBIL, M. Public bus transit travel-time variability in ankara (turkey). *Transport Policy* 23 (2012), 50 – 59. (Cité page 14.)
- [173] YU, G., AND YANG, J. On the robust shortest path problem. *Computers & Operations Research* 25, 6 (1998), 457–468. (Cité page 96.)
- [174] ZIMMER, W. J., KEATS, J. B., AND WANG, F. The burr XII distribution in reliability analysis. *Journal of Quality Technology* 30, 4 (1998), 386. (Cité page 42.)
- [175] ZOCCAIE, A., NIE, Y. M., AND MAHMASSANI, H. S. Plan b : A simulation-based method for finding minimum travel time budget paths in stochastic networks with correlated link times. In *Transportation Research Board 93rd Annual Meeting* (2014), vol. 14-5615. (Cité pages 88, 94, et 95.)
- [176] ZOCCAIE, A., NIE, Y. M., WU, X., AND MAHMASSANI, H. S. Impacts of correlations on reliable shortest path finding. *Transportation Research Record : Journal of the Transportation Research Board* 2334, 1 (2013), 1–9. (Cité pages 87, 94, et 95.)

# Table des figures

1	Organisation générale de la thèse . . . . .	5
1.1	Évaluation de la variabilité, d'après Warffemius [166] . . . . .	10
1.2	Item d'enquête SP, tiré de Jackson <i>et al.</i> [77] . . . . .	12
1.3	Item d'enquête SP, tiré de Bates <i>et al.</i> [8] . . . . .	12
1.4	Item d'enquête SP, tiré de Hollander [72] . . . . .	13
1.5	La variabilité des temps de parcours dans la littérature . . . . .	23
2.1	Diagramme $\delta$ -MRD théorique . . . . .	27
2.2	Gammes de positions des lois Halphen de type A sur le $\delta$ -MRD . . . . .	33
2.3	Gammes de positions des lois Halphen de type B sur le $\delta$ -MRD . . . . .	37
2.4	Description du site de Portland . . . . .	44
2.5	Description des données simulées . . . . .	45
2.6	Description du site de Lyon . . . . .	46
2.7	Décomposition des temps de parcours, entre temps minimum incompressible et délais aléatoires . . . . .	47
2.8	Similarité entre indicateurs de fiabilité classiques et coordonnées du $\delta$ -MRD . . . . .	53
2.9	Contributions des indicateurs aux facteurs identifiés lors de l'ACP . . . . .	54
2.10	Distributions de temps de parcours sur une journée (données simulées, intervalles de 6 minutes), regroupement par classes d'échantillons . . . . .	57
2.11	Détection d'une chute de fiabilité sur la rocade Est lyonnaise (07/03/14, entre 12h45 et 15h) . . . . .	58
2.12	Comparaison des distributions de temps de parcours mesurés entre 16h et 17h à Portland, sur différents jours . . . . .	59
2.13	Classification des échantillons de temps de parcours mesurés à Lyon . . . . .	61
2.14	Répartition temporelle des groupes d'échantillons de temps de parcours mesurés à Lyon, sur une journée type . . . . .	63
2.15	Performances des lois de probabilités pour l'ajustement des temps de parcours collectés à Portland . . . . .	64
2.16	Performances des lois de probabilités pour l'ajustement des temps de parcours collectés sur la rocade Est lyonnaise (groupe 1) . . . . .	65
2.17	Performances des lois de probabilités pour l'ajustement des temps de parcours collectés sur la rocade Est lyonnaise (groupe 2) . . . . .	65
2.18	Performances des lois de probabilités pour l'ajustement des temps de parcours collectés sur la rocade Est lyonnaise (groupe 3) . . . . .	66
2.19	Représentation d'échantillons sommés, pour chaque loi de probabilité . . . . .	71
2.20	États de trafic et ratios de moments sur les sections de la rocade Est lyonnaise . . . . .	75

3.1	Illustration du principe d'optimalité de Bellman . . . . .	90
3.2	Illustration de la dominance stochastique de premier ordre . . . . .	93
4.1	Illustration du procédé de discrétisation selon la méthode de Nie <i>et al.</i> [113] .	101
4.2	Itinéraire composé de $k + 1$ nœuds et de $k$ arcs successifs . . . . .	103
4.3	Itinéraire composé de $k + 1$ nœuds et de $k$ arcs successifs, avec arcs synthétiques symbolisant les préfixes du chemin $v_0 \rightarrow v_i, \forall i \in \{1, k\}$ . . . . .	104
4.4	Itinéraire composé de $k + 1$ nœuds et de $k$ arcs successifs, avec arcs synthétiques symbolisant les suffixes $v_i \rightarrow v_k, \forall i \in \{0, k - 1\}$ . . . . .	105
4.5	Illustration des opérations de concaténation et d'agrégation sur les arcs stochastiques . . . . .	110
4.6	Comment reconstituer l'itinéraire optimal entre $u_1$ et $u_4$ ? . . . . .	111
4.7	Graphes utilisés dans les expérimentations . . . . .	116
4.8	Proportions des 5 situations constituant le premier indicateur pour un sous-ensemble de configurations $G^*V^*H^*D^*Q$ . . . . .	121
4.9	Proportions de chemins équivalents entre cas déterministe et cas stochastiques, pour un sous-ensemble de configurations $G^*V^*H^*D^*Q$ . . . . .	122
4.10	Proportions d'arcs en commun pour chaque binôme de modèles, pour un sous-ensemble de configurations $G^*V^*H^*D^*Q$ . . . . .	124
5.1	Configurations possibles dans un graphe hiérarchisé, avec $l_i$ le niveau du nœud $i \in V$ dans la hiérarchie . . . . .	136
5.2	Type de chemin mis en valeur par la procédure des contractions hiérarchiques	138
5.3	Exemple de fonction de temps de parcours sur un arc . . . . .	141
5.4	Calcul de $EA(s, d, h_0)$ . . . . .	143
5.5	Calcul de $TTP(s, d, h_0)$ accéléré . . . . .	144
6.1	Couverture de l'espace d'échantillonnage par la technique <i>LHS</i> . . . . .	149
6.2	Décomposition des effets des facteurs sur la variance totale, pour quatre facteurs, et exemples de complémentarité des indices de sensibilité . . . . .	152
6.3	Profil de base de la génération des scénarios dynamiques . . . . .	156
6.4	Convergence des estimateurs des effets des facteurs expliquant la variance du temps de pré-traitement pour le graphe <i>CSsta</i> . . . . .	157
6.5	Convergence des estimateurs des effets des facteurs expliquant la variance du temps de résolution de 10000 requêtes pour le graphe <i>CSsta</i> . . . . .	158
6.6	Convergence des estimateurs des effets des facteurs expliquant la variance du ratio de création d'arcs dans le graphe <i>CSsta</i> . . . . .	159
6.7	Décomposition de la variance du temps de pré-traitement vis-à-vis des quatre coefficients étudiés, cas <i>CSdyn</i> . . . . .	160
6.8	Profil du temps de requêtage total en fonction des valeurs des coefficients (graphe <i>G20dyn</i> ) . . . . .	162
6.9	Décomposition de la variance du ratio de création d'arc vis-à-vis des quatre coefficients étudiés, cas <i>G20sta</i> . . . . .	163
6.10	Évolution de la meilleure solution pour chaque départ de la recherche locale .	168
7.1	Exemple de concaténation de politiques de routage $\mathcal{P}_x^1$ et $\mathcal{P}_x^2$ impliquant la formation d'un chemin cyclique . . . . .	176

7.2	Différence agrégée entre le nombre de chemins optimaux identifiés par l'algorithme <i>SPOTAR</i> et celui issu des contractions hiérarchiques stochastiques, pour 1000 politiques de routage . . . . .	187
7.3	Coefficient d'accélération du calcul d'un lot de 1000 requêtes sélectionnées aléatoirement, comparaison entre les contractions hiérarchiques stochastiques et l'algorithme <i>SPOTAR</i> . . . . .	188
C.1	Cercles de corrélation de l'ACP (Portland), pour chaque couple de facteurs . . .	VIII
C.2	Cercles de corrélation de l'ACP (Lyon), pour chaque couple de facteurs . . . .	IX
D.1	Exemple de politique de routage, réseau de Sioux Falls, $T_{max} = 60$ , $\Delta_t = 60$ . . .	XII
E.1	Proportions des situations pour le premier indicateur (distance OD faible) . . .	XIV
E.2	Proportions des situations pour le premier indicateur (distance OD moyenne) . .	XV
E.3	Proportion des situations pour le premier indicateur (distance OD élevée) . . .	XVI
E.4	Proportions des chemins équivalents entre cas déterministe et cas stochastiques (distance OD faible) . . . . .	XVII
E.5	Proportions des chemins équivalents entre cas déterministe et cas stochastiques (distance OD moyenne) . . . . .	XVIII
E.6	Proportions des chemins équivalents entre cas déterministe et cas stochastiques (distance OD élevée) . . . . .	XIX
E.7	Proportions d'arcs en commun pour chaque binôme de modèles (distance OD faible) . . . . .	XX
E.8	Proportions d'arcs en commun pour chaque binôme de modèles (distance OD moyenne) . . . . .	XXI
E.9	Proportions d'arcs en commun pour chaque binôme de modèles (distance OD élevée) . . . . .	XXII
F.1	Distributions des indicateurs de similarité des hiérarchies de nœuds pour des hiérarchies-types . . . . .	XXIV



# Liste des tableaux

2.1	Revue des estimateurs des paramètres des lois détaillées dans la section 2.1.2	40
2.2	Sélection du nombre de facteurs pour les analyses en composantes principales	53
2.3	Déciles des distributions des ratios de moments $\delta_1$ et $\delta_2$ , pour chaque site test	68
2.4	Domaine de définition des paramètres de chaque loi lors du processus d'échantillonnage . . . . .	69
2.5	Analyse de régression entre les paramètres des lois sommées et ceux de la loi de la somme, pour différents modèles statistiques . . . . .	72
2.6	Analyse de régression entre les coordonnées du $\delta$ -MRD associées aux échantillons de temps de parcours mesurés par le dispositif LAPI . . . . .	77
4.1	Estimateurs des paramètres des lois Gamma, lognormale et normale, selon la méthode des moments . . . . .	102
4.2	Taille $p^*(t,  e )$ de l'information sur les prédécesseurs, pour un budget $t$ et un nombre d'arc $ e $ dans l'itinéraire à reconstituer . . . . .	112
4.3	Extraits du tableau d'expérimentations . . . . .	115
4.4	Profils de discrétisation des distributions retenus pour les expérimentations . .	117
4.5	Valeurs des niveaux retenus pour la distance entre l'origine et la destination (en nombre d'arcs) . . . . .	118
4.6	Couples de modèles pour lesquels les proportions d'arcs communs sont comparées . . . . .	119
4.7	Temps d'exécution moyen par requête de l'algorithme <i>SPOTAR</i> . . . . .	125
4.8	Temps d'exécution par groupe de requêtes de l'algorithme <i>SPOTAR</i> . . . . .	126
6.1	Moyenne des effets des facteurs issus de la décomposition de la variance sur le critère <i>temps de pré-traitement</i> , pour chaque graphe . . . . .	160
6.2	Moyenne des effets des facteurs issus de la décomposition de la variance sur le critère <i>temps de requêtage</i> , pour chaque graphe . . . . .	161
6.3	Moyenne des effets des facteurs issus de la décomposition de la variance sur le critère <i>ratio de création d'arc</i> , pour chaque graphe . . . . .	164
6.4	Coefficients de régression standardisés ( <i>cf</i> Saltelli [138]), par critère et par graphe	164
6.5	Paramétrages pris comme points de départ de la recherche locale . . . . .	166
6.6	10 meilleures solutions obtenues à l'issue du processus d'optimisation . . . . .	167
7.1	Durée du pré-traitement des contractions hiérarchiques stochastiques . . . . .	185
7.2	Durée d'exécution d'un lot de 1000 requêtes de plus courts chemins via les contractions hiérarchiques stochastiques . . . . .	185



---

7.3	Évolution du nombre d'arcs après le pré-traitement des contractions hiérarchiques stochastiques . . . . .	186
B.1	Corrélation des indicateurs donnés par le $\delta$ -MRD avec les métriques de fiabilité classiques (données Portland) . . . . .	IV
B.2	Similarité des rangs des indicateurs donnés par le $\delta$ -MRD avec les métriques de fiabilité classiques (données Portland) . . . . .	IV
B.3	Corrélation des indicateurs donnés par le $\delta$ -MRD avec les métriques de fiabilité classiques (données Lyon) . . . . .	V
B.4	Similarité des rangs des indicateurs donnés par le $\delta$ -MRD avec les métriques de fiabilité classiques (données Lyon) . . . . .	V

# Liste des algorithmes

1	( <i>SPOTAR, version pseudo-code</i> ) Recherche du plus court chemin stochastique (d'après Nie <i>et al.</i> [113]) . . . . .	113
2	( <i>HIERARCHIE</i> ) Hiérarchisation des nœuds, d'après Geisberger [59] . . . . .	135
3	( <i>SIMUCONTRACT</i> ) Évaluation de la priorité d'un nœud (critère unique : différence dans le nombre d'arcs), d'après Geisberger [59] . . . . .	135
4	( <i>AJOUTRACCOURCI</i> ) Rajout de raccourcis dans le graphe $G$ , à partir de la contraction des nœuds qui le composent . . . . .	137
5	( <i>RECHBIDIR</i> ) Requête effectuée au sein du graphe de recherche entre un nœud source $s$ et un nœud destination $d$ . . . . .	139
6	( <i>CHRECHLOCALE</i> ) Algorithme de recherche locale utilisé pour optimiser les coefficients de la fonction de hiérarchisation . . . . .	155
7	( <i>CONCATCHEMIN</i> ) Opération de concaténation entre deux chemins . . . . .	173
8	( <i>AJOUTCHEMIN</i> ) Ajout d'un chemin dans une politique de routage . . . . .	174
9	( <i>EXTENPOL</i> ) Complétion d'une politique via l'extension de la politique associée à un nœud prédécesseur . . . . .	175
10	( <i>REINITPOL</i> ) Réinitialisation d'une politique de routage . . . . .	175
11	( <i>CONCATPOL</i> ) Concaténation de deux politiques dont les nœuds destinations sont équivalents . . . . .	176
12	( <i>FUSIONPOL</i> ) Fusion de deux politiques dont les nœuds destinations sont équivalents . . . . .	177
13	( <i>RECHBIDIRSTOC</i> ) Parcours bidirectionnel dans un graphe stochastique hiérarchisé . . . . .	179
14	( <i>RESOLREQ</i> ) Reconstruction de la politique de routage optimale, pour relier un nœud source $s$ à un nœud destination $d$ , à partir de sous-politiques calculés via une recherche bidirectionnelle et d'un ensemble de nœuds communs . . . . .	180
15	( <i>PRETRAITCHSTOC</i> ) Phase de pré-traitement de la technique des contractions hiérarchiques adaptée aux graphes stochastiques, d'après Batz [10] . . . . .	181
16	( <i>CONTRACT</i> ) Contraction d'un nœud . . . . .	183
17	( <i>SIMUCONTRACTSTOC</i> ) Calcul du coût de contraction d'un nœud dans un graphe stochastique . . . . .	184



## Abréviations

Les abréviations suivantes sont classées par ordre d'apparition dans le manuscrit :

<b>SIM</b> .....	Système d'Information Multimodale
<b>PCC</b> .....	Plus Court Chemin
<b>PCCS</b> .....	Plus Court Chemin Stochastique
<b>CH</b> .....	Contractions Hiérarchiques
<b>SP</b> .....	<i>Stated-Preference</i>
<b>RP</b> .....	<i>Revealed-Preference</i>
<b>TTW</b> .....	<i>Travel Time Window</i>
<b>CV</b> .....	Coefficient de variation
<b>VI</b> .....	Indice de variabilité
<b>BT</b> .....	<i>Buffer Time</i>
<b>BTI</b> .....	<i>Buffer Time Index</i>
<b>PTI</b> .....	<i>Planning Time Index</i>
<b>IFF (ou IF)</b> .....	Indicateur de Fiabilité Floridien
<b>MI</b> .....	<i>Misery Index</i>
<b>ATTV</b> .....	<i>Accepted Travel Time Variability</i>
<b>DTTR</b> .....	<i>Desired Travel Time Reduction</i>
<b><math>\delta</math>-MRD</b> .....	Diagramme des ratios des moments $\delta_1$ - $\delta_2$
<b>G</b> .....	Loi Gamma
<b>GI</b> .....	Loi Gamma Inverse
<b>HA</b> .....	Loi Halphen de type A
<b>Har</b> .....	Loi Harmonique
<b>T</b> .....	Loi de Tweedie
<b>HB</b> .....	Loi Halphen de type B
<b>HIB</b> .....	Loi Halphen de type $B^{-1}$
<b>LN2</b> .....	Loi lognormale à deux paramètres
<b>MV</b> .....	Maximum de vraisemblance
<b>N</b> .....	Loi normale
<b>LN3</b> .....	Loi lognormale à trois paramètres
<b>B3</b> .....	Loi de Burr de type <i>XII</i> à trois paramètres
<b>W</b> .....	Loi de Weibull
<b>LAPI</b> .....	Lecture Automatique de Plaque d'Immatriculation
<b>DIR</b> .....	Direction Interdépartementale des Routes
<b>TT</b> .....	Temps de parcours standard

<b>TDF</b> .....	Délais par rapport à un temps de référence fixe
<b>TD</b> .....	Délais par rapport à un temps de référence adaptatif
<b>FC</b> .....	Fréquence de congestion
<b>RS</b> .....	Score de similarité des rangs
<b>ACP</b> .....	Analyse en Composantes Principales
<b>PAM</b> .....	<i>Partitioning Around Medoids</i>
<b>BIC</b> .....	<i>Bayesian Inference Criterion</i>
<b>RMSE</b> .....	<i>Root Mean Square Error</i>
<b>KS</b> .....	Distance de Kolmogorov-Smirnov
<b>SSPP</b> .....	<i>Stochastic Shortest Path Problem</i>
<b>LET</b> .....	<i>Least-Expected Time</i>
<b>SOTA</b> .....	<i>Stochastic On-Time Arrival</i>
<b>ORP</b> .....	<i>Optimal Routing Policy</i>
<b>SPOTAR</b> .....	<i>Shortest path Problem with On-Time Arrival Reliability</i>
<b>VRP</b> .....	<i>Vehicle Routing Problem</i>
<b>OP</b> .....	<i>Orienteering Problem</i>
<b>PUE</b> .....	<i>Probabilistic User Equilibrium</i>
<b>RSPP</b> .....	<i>Reliable Shortest Path Problem</i>
<b>MRCP</b> .....	<i>Minimum Robust Cost Path</i>
<b>MRP</b> .....	<i>Most Reliable Path</i>
<b>RASP</b> .....	<i>Reliable A priori Shortest Path</i>
<b>MPTTB</b> .....	<i>Minimum Path Travel Time Budget</i>
<b>k-SPP</b> .....	<i>k-Shortest Path Problem</i>
<b>G</b> .....	Graphe (plan d'expérience)
<b>V</b> .....	Niveau de variance (plan d'expérience)
<b>H</b> .....	Précision de la discrétisation (plan d'expérience)
<b>Pb</b> .....	Problème (plan d'expérience)
<b>R</b> .....	Réplication (plan d'expérience)
<b>I</b> .....	Instance (plan d'expérience)
<b>M</b> .....	Modèle statistique (plan d'expérience)
<b>P</b> .....	Politique de routage (plan d'expérience)
<b>D</b> .....	Distance origine-destination (plan d'expérience)
<b>C</b> .....	Chemin optimal (plan d'expérience)
<b>Q</b> .....	Probabilité d'être à l'heure (plan d'expérience)
<b>Cf</b> .....	Configuration (plan d'expérience)
<b>SF</b> .....	Réseau de Sioux Falls
<b>CS</b> .....	Réseau de Chicago simplifié
<b>G10</b> .....	Réseau en grille 10*10
<b>G20</b> .....	Réseau en grille 20*20
<b>FIFO</b> .....	<i>First In First Out</i>
<b>EA</b> .....	<i>Early Arrival</i>
<b>TTP</b> .....	<i>Travel Time Profile</i>
<b>EQ</b> .....	<i>Edge Quotient</i>
<b>SSD</b> .....	<i>Search Space Depth</i>
<b>OEQ</b> .....	<i>Original Edge Quotient</i>
<b>CQ</b> .....	<i>Complexity Quotient</i>
<b>LHS</b> .....	<i>Latin Hypercube Sampling</i>
<b>LIFO</b> .....	<i>Last In First Out</i>
<b>G5</b> .....	Réseau en grille 5*5

## Étude de la similarité entre indicateurs de fiabilité

Les tableaux [B.1](#) à [B.4](#) présentent l'ensemble des coefficients de corrélation et des scores de rang liant les métriques de fiabilité classiques et les indicateurs issus du  $\delta$ -MRD, complétant ainsi l'étude décrite dans la section [2.3.2](#).

Ces différents éléments confirment la correspondance des coordonnées cartésiennes  $\delta_1$  et  $\delta_2$  ainsi que celle de la distance par rapport à l'origine  $\theta$  avec les indicateurs de fiabilité les plus utilisés. Cette ressemblance est la plus marquée pour le modèle TT, signifiant par là même la nécessité de considérer l'ensemble de la distribution des temps de parcours plutôt que leurs délais pour traiter de fiabilité.

À titre de remarque, les relations identifiées par les coefficients de corrélation sont comparables à celles identifiées par les scores de rang, impression qui est renforcée par une régression linéaire simple entre les deux ensembles : pour le jeu de données de Portland, le coefficient de régression vaut -0.97, contre -0.81 pour les données de Lyon. En somme, plus un coefficient de corrélation entre deux métriques est élevé, et plus le score de rang les reliant est proche de 0. Inversement, plus le coefficient de corrélation est élevé en valeur absolue, mais de signe négatif, et plus le score de rang tend vers 1.

TABLEAU B.1 – Corrélation des indicateurs donnés par le  $\delta$ -MRD avec les métriques de fiabilité classiques (données Portland)

	Modèle TT				Modèle TDF				Modèle TD			
	$\delta_1$	$\delta_2$	$\theta$	$\rho$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\theta$	$\rho$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\theta$	$\rho$
$q$	-0.28	-0.29	-0.29	0.04	-0.30	-0.31	-0.30	-0.02	-0.29	-0.11	-0.12	0.08
$\bar{v}$	0.68	0.63	0.67	-0.34	0.77	0.73	0.76	-0.20	0.34	0.09	0.10	-0.20
$T_{50}$	-0.71	-0.65	-0.70	0.44	-0.77	-0.72	-0.76	0.33	-0.43	-0.07	-0.08	0.31
$\bar{T}$	-0.45	-0.40	-0.44	0.24	-0.54	-0.52	-0.54	0.12	-0.21	-0.03	-0.04	0.17
$\sigma_T$	0.87	0.85	0.86	-0.45	0.80	0.76	0.79	-0.39	0.60	0.20	0.22	-0.23
$CV_T$	0.97	0.91	0.95	-0.56	0.96	0.90	0.95	-0.43	0.61	0.18	0.20	-0.29
$\lambda_{var}$	0.91	0.90	0.91	-0.28	0.88	0.86	0.88	-0.22	0.56	0.16	0.18	-0.25
$\lambda_{skew}$	0.52	0.42	0.48	-0.49	0.49	0.36	0.44	-0.53	0.37	-0.01	0.01	-0.38
$PTI$	0.95	0.93	0.95	-0.36	0.92	0.90	0.92	-0.27	0.62	0.21	0.23	-0.24
$BT$	0.71	0.66	0.70	-0.50	0.63	0.56	0.61	-0.49	0.56	0.18	0.19	-0.27
$BTI$	0.88	0.81	0.86	-0.57	0.85	0.75	0.82	-0.53	0.61	0.16	0.19	-0.35
$MI$	0.96	0.92	0.95	-0.50	0.94	0.88	0.92	-0.42	0.66	0.22	0.25	-0.28
$IF$	0.46	0.49	0.48	-0.06	0.47	0.49	0.48	-0.02	0.31	-0.01	0.00	-0.22
$FC$	0.82	0.90	0.85	-0.04	0.79	0.87	0.83	0.03	0.53	0.15	0.16	-0.18
$L_{VA}$	-0.50	-0.56	-0.52	0.03	-0.44	-0.49	-0.46	0.06	-0.35	-0.04	-0.05	0.21
$L_{TD}$	0.09	0.22	0.14	0.56	0.08	0.23	0.14	0.65	-0.11	0.10	0.09	0.29

TABLEAU B.2 – Similarité des rangs des indicateurs donnés par le  $\delta$ -MRD avec les métriques de fiabilité classiques (données Portland)

	Modèle TT				Modèle TDF				Modèle TD			
	$\delta_1$	$\delta_2$	$\theta$	$\rho$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\theta$	$\rho$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\theta$	$\rho$
$q$	0.79	0.78	0.78	0.62	0.79	0.80	0.79	0.65	0.77	0.69	0.70	0.63
$\bar{v}$	0.34	0.35	0.35	0.74	0.29	0.30	0.30	0.70	0.52	0.66	0.65	0.72
$T_{50}$	0.92	0.92	0.92	0.53	0.94	0.94	0.94	0.58	0.82	0.65	0.68	0.56
$\bar{T}$	0.85	0.86	0.86	0.60	0.88	0.89	0.88	0.64	0.74	0.64	0.65	0.62
$\sigma_T$	0.23	0.26	0.24	0.82	0.28	0.32	0.30	0.79	0.39	0.59	0.57	0.76
$CV_T$	0.09	0.16	0.12	0.83	0.11	0.18	0.14	0.79	0.37	0.61	0.59	0.75
$\lambda_{var}$	0.20	0.20	0.20	0.72	0.22	0.22	0.22	0.69	0.40	0.59	0.57	0.76
$\lambda_{skew}$	0.54	0.58	0.55	0.81	0.56	0.61	0.58	0.83	0.49	0.69	0.67	0.77
$PTI$	0.14	0.16	0.14	0.78	0.16	0.20	0.17	0.74	0.38	0.59	0.57	0.77
$BT$	0.36	0.40	0.38	0.83	0.40	0.44	0.42	0.82	0.41	0.61	0.60	0.77
$BTI$	0.24	0.29	0.26	0.85	0.27	0.33	0.30	0.83	0.36	0.63	0.61	0.79
$MI$	0.11	0.17	0.14	0.82	0.15	0.21	0.18	0.78	0.35	0.60	0.58	0.77
$IF$	0.49	0.47	0.48	0.65	0.48	0.46	0.47	0.63	0.54	0.65	0.64	0.74
$FC$	0.21	0.18	0.20	0.68	0.21	0.19	0.20	0.64	0.41	0.58	0.56	0.75
$L_{VA}$	0.84	0.86	0.85	0.69	0.84	0.85	0.84	0.70	0.81	0.69	0.71	0.59
$L_{TD}$	0.61	0.57	0.59	0.46	0.61	0.56	0.59	0.41	0.74	0.51	0.53	0.51

TABLEAU B.3 – Corrélation des indicateurs donnés par le  $\delta$ -MRD avec les métriques de fiabilité classiques (données Lyon)

	Modèle TT				Modèle TDF				Modèle TD			
	$\delta_1$	$\delta_2$	$\theta$	$\rho$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\theta$	$\rho$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\theta$	$\rho$
$q$	-0.00	-0.05	-0.02	-0.56	-0.45	-0.56	-0.54	-0.63	0.18	-0.22	-0.20	-0.54
$\bar{v}$	-0.43	-0.44	-0.44	0.37	0.39	0.45	0.44	0.54	-0.54	-0.20	-0.23	0.13
$T_{50}$	0.28	0.32	0.30	-0.06	-0.15	-0.15	-0.15	-0.17	0.32	0.25	0.26	0.07
$\bar{T}$	0.32	0.35	0.34	-0.10	-0.14	-0.16	-0.16	-0.20	0.35	0.25	0.26	0.05
$\sigma_T$	0.67	0.70	0.69	-0.17	0.07	-0.05	-0.01	-0.19	0.52	0.30	0.32	0.05
$CV_T$	0.93	0.90	0.92	-0.34	0.45	0.17	0.25	-0.19	0.71	0.33	0.36	0.06
$\lambda_{var}$	0.93	0.88	0.92	-0.33	0.41	0.13	0.21	-0.20	0.70	0.27	0.31	-0.01
$\lambda_{skew}$	0.54	0.41	0.49	-0.69	-0.08	-0.36	-0.29	-0.59	0.53	-0.02	0.02	-0.38
$PTI$	0.97	0.95	0.97	-0.30	0.41	0.15	0.22	-0.17	0.68	0.28	0.31	0.01
$BT$	0.70	0.69	0.70	-0.30	0.06	-0.10	-0.06	-0.28	0.57	0.26	0.29	-0.03
$BTI$	0.86	0.75	0.82	-0.58	0.24	-0.08	0.01	-0.40	0.68	0.15	0.20	-0.19
$MI$	0.90	0.84	0.88	-0.50	0.32	0.02	0.10	-0.35	0.74	0.25	0.29	-0.09
$IF$	0.34	0.34	0.34	-0.40	-0.04	-0.22	-0.18	-0.49	0.45	0.07	0.09	-0.25
$FC$	0.84	0.89	0.86	-0.19	0.23	0.03	0.08	-0.16	0.52	0.21	0.23	-0.02
$L_{VA}$	-0.67	-0.68	-0.67	0.14	-0.10	0.03	-0.01	0.14	-0.44	-0.24	-0.26	-0.03
$L_{TD}$	0.37	0.45	0.41	0.04	-0.01	-0.03	-0.03	-0.06	0.26	0.21	0.22	0.07

TABLEAU B.4 – Similarité des rangs des indicateurs donnés par le  $\delta$ -MRD avec les métriques de fiabilité classiques (données Lyon)

	Modèle TT				Modèle TDF				Modèle TD			
	$\delta_1$	$\delta_2$	$\theta$	$\rho$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\theta$	$\rho$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\theta$	$\rho$
$q$	0.78	0.80	0.79	0.92	0.87	0.90	0.90	0.91	0.62	0.82	0.81	0.91
$\bar{v}$	0.65	0.63	0.64	0.42	0.34	0.32	0.33	0.33	0.79	0.65	0.66	0.54
$T_{50}$	0.59	0.61	0.60	0.81	0.87	0.88	0.88	0.88	0.50	0.62	0.61	0.72
$\bar{T}$	0.62	0.64	0.63	0.88	0.90	0.93	0.92	0.93	0.49	0.67	0.65	0.78
$\sigma_T$	0.18	0.22	0.20	0.71	0.58	0.65	0.63	0.72	0.42	0.47	0.46	0.62
$CV_T$	0.05	0.10	0.07	0.64	0.46	0.53	0.51	0.63	0.46	0.45	0.45	0.58
$\lambda_{var}$	0.20	0.22	0.21	0.67	0.49	0.56	0.54	0.66	0.45	0.50	0.49	0.63
$\lambda_{skew}$	0.68	0.71	0.69	0.94	0.87	0.91	0.90	0.93	0.55	0.74	0.73	0.86
$PTI$	0.18	0.20	0.19	0.65	0.45	0.52	0.50	0.63	0.46	0.48	0.48	0.60
$BT$	0.48	0.51	0.50	0.90	0.76	0.82	0.81	0.88	0.45	0.63	0.61	0.79
$BTI$	0.46	0.50	0.48	0.89	0.72	0.79	0.77	0.86	0.46	0.63	0.61	0.79
$MI$	0.29	0.33	0.31	0.80	0.60	0.68	0.66	0.77	0.43	0.54	0.53	0.70
$IF$	0.50	0.52	0.51	0.86	0.75	0.81	0.79	0.87	0.48	0.64	0.62	0.79
$FC$	0.61	0.62	0.62	0.70	0.66	0.68	0.67	0.70	0.61	0.63	0.62	0.66
$L_{VA}$	0.68	0.68	0.68	0.67	0.66	0.67	0.67	0.66	0.67	0.66	0.66	0.66
$L_{TD}$	0.66	0.66	0.66	0.68	0.67	0.67	0.67	0.68	0.65	0.65	0.65	0.65





## Cercles de corrélation des analyses en composantes principales

Les figures C.1 et C.2 résument les informations produites par les ACP effectuées respectivement pour les jeux de données de Portland et de Lyon. Les tendances identifiées dans la section 2.3 peuvent être aisément reconnues dans ces cercles de corrélations.

Pour le jeu de données de Portland, on note ainsi que les indicateurs produits par le  $\delta$ -MRD selon les modèles *TT* et *TD* sont corrélés essentiellement au facteur 1 de l'ACP, à l'exception des valeurs d'angle  $\theta$ , qui sont associées aux facteurs 2 et 4. En ce qui concerne les indicateurs issus du  $\delta$ -MRD et du modèle *TDF*,  $\delta_2$  et  $\rho$  sont absorbées en grande partie dans les facteurs 3 et 4. Il est possible de retrouver la similarité des premières citées avec les métriques usuelles telles que l'écart-type, le coefficient de variation,  $\lambda_{var}$ , le *Planning Time Index* ou encore le *Misery Index*, qui sont corrélées principalement avec le facteur 1.

Pour ce qui est des données de Lyon, les différents modèles de temps de parcours proposent des indicateurs tirés du  $\delta$ -MRD ayant des comportements très distincts : ceux issus du modèle *TT* sont ainsi surtout corrélés avec le facteur 1, constatation qui est transposable également avec le modèle *TDF* et le facteur 2, ou encore avec le modèle *TD* et le facteur 4. Dans ce second jeu de données, les métriques usuelles sont une nouvelle fois proches des indicateurs issus du modèle *TT*, dénotant par là la capacité de ces derniers à représenter la variabilité des temps de parcours.

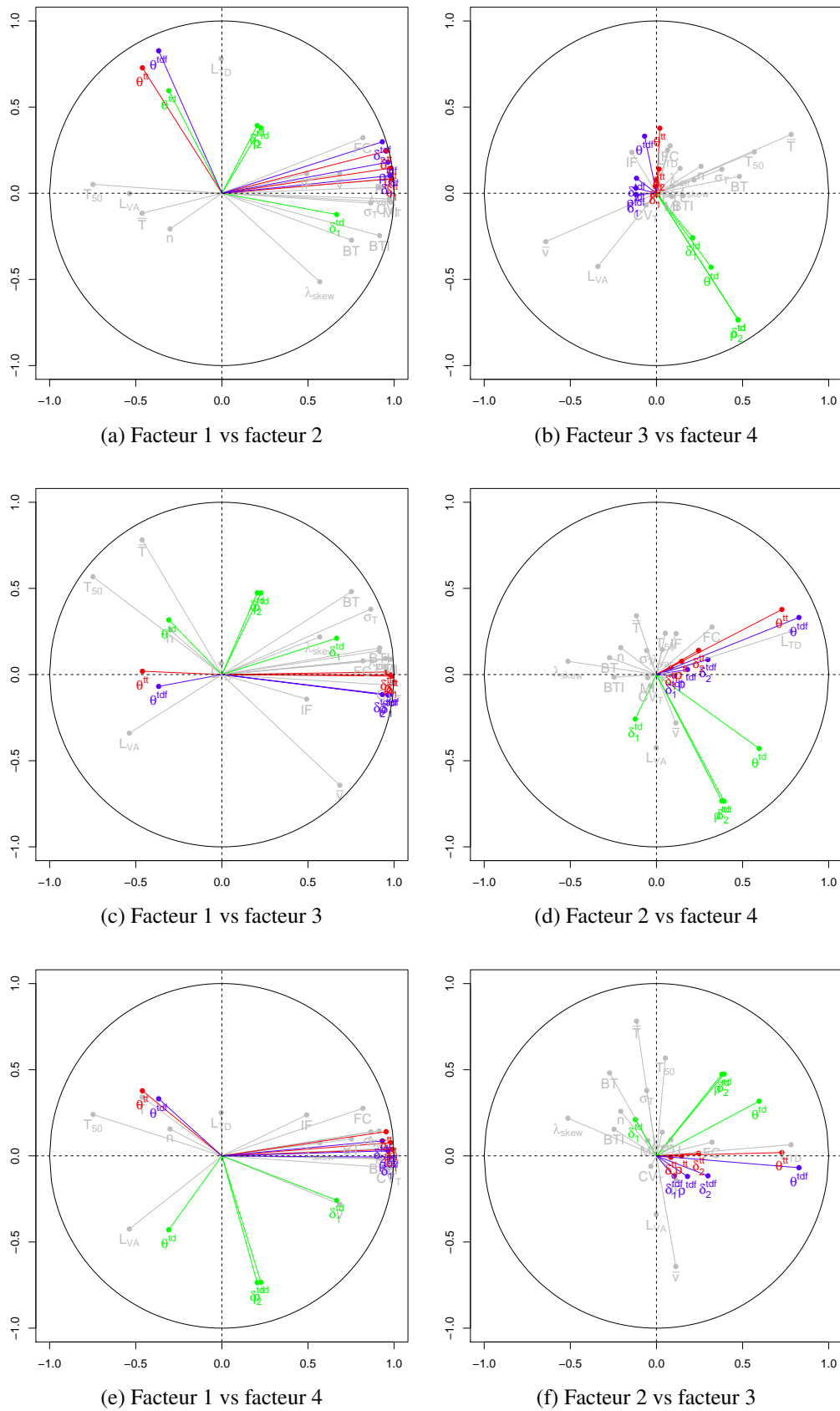


FIGURE C.1 – Cercles de corrélation de l'ACP (Portland), pour chaque couple de facteurs : en rouge, vert et bleu, les métriques du  $\delta$ -MRD correspondant respectivement aux modèles  $TT$ ,  $TD$  et  $TDF$ , en gris, les indicateurs usuels

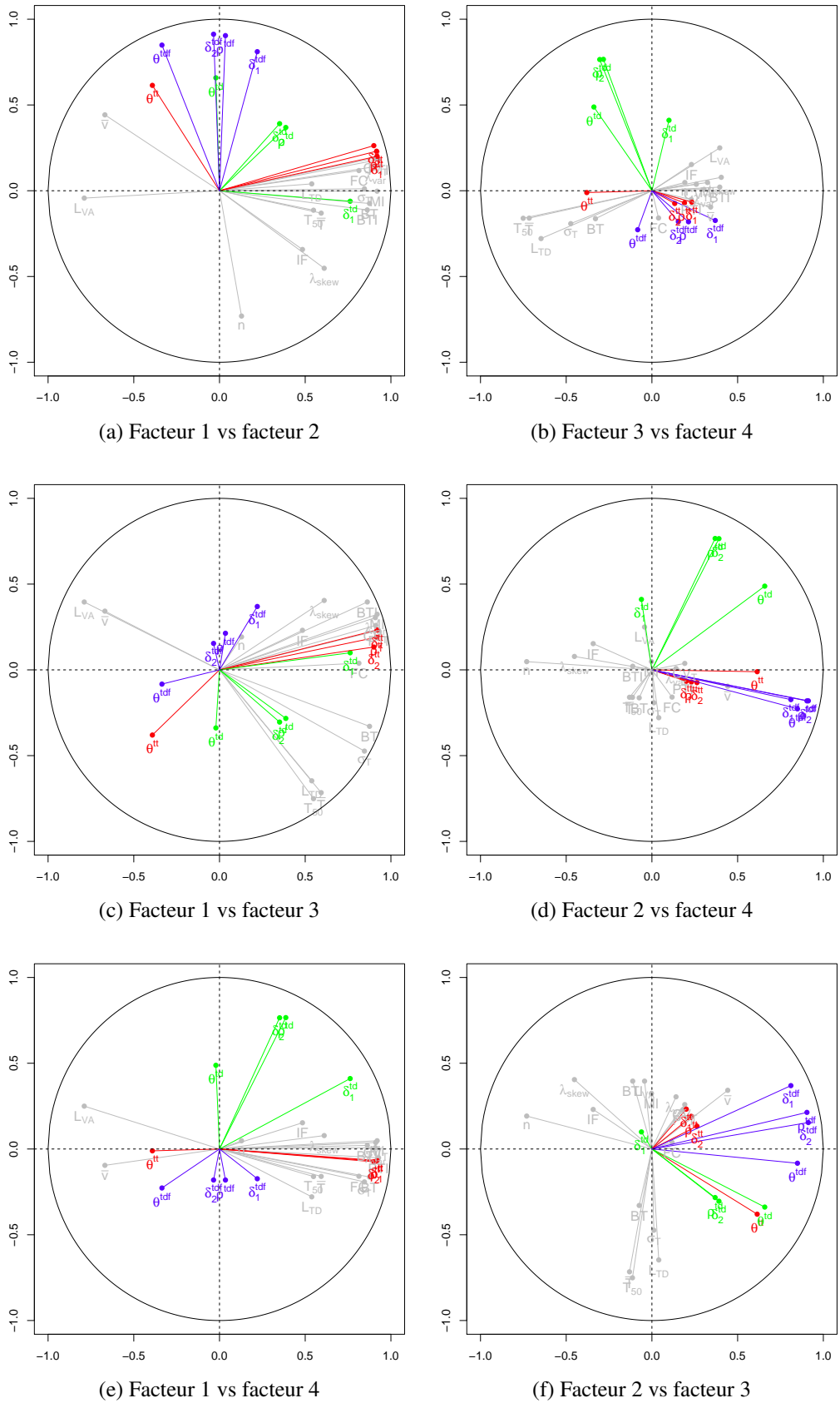


FIGURE C.2 – Cercles de corrélation de l'ACP (Lyon), pour chaque couple de facteurs : en rouge, vert et bleu, les métriques du  $\delta$ -MRD correspondant respectivement aux modèles  $TT$ ,  $TD$  et  $TDF$ , en gris, les indicateurs usuels



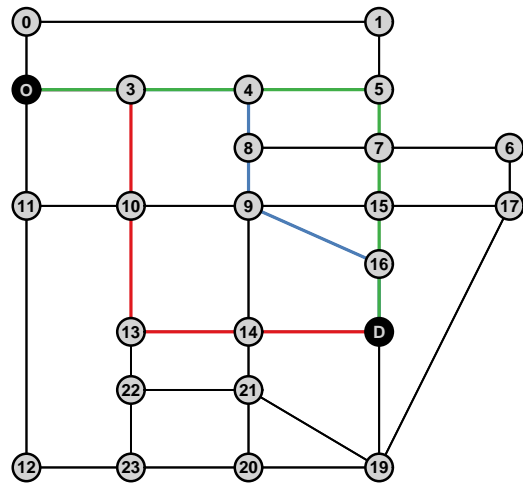
## Illustration d'une politique de routage

Une politique de routage décrit la stratégie de choix d'itinéraire optimale entre une origine  $O$  et une destination  $D$ , compte tenu de temps de parcours distribués selon des lois de probabilité. Telles que présentées dans le chapitre 4, elles sont représentées par un ensemble de chemins  $c^*$  qui constituent les meilleurs choix pour au moins un budget-temps. Un exemple est proposé dans la figure D.1 : une politique de routage décrivant la stratégie optimale entre les nœuds  $N2$  et  $N18$  au sein du réseau de Sioux Falls y est décomposée.

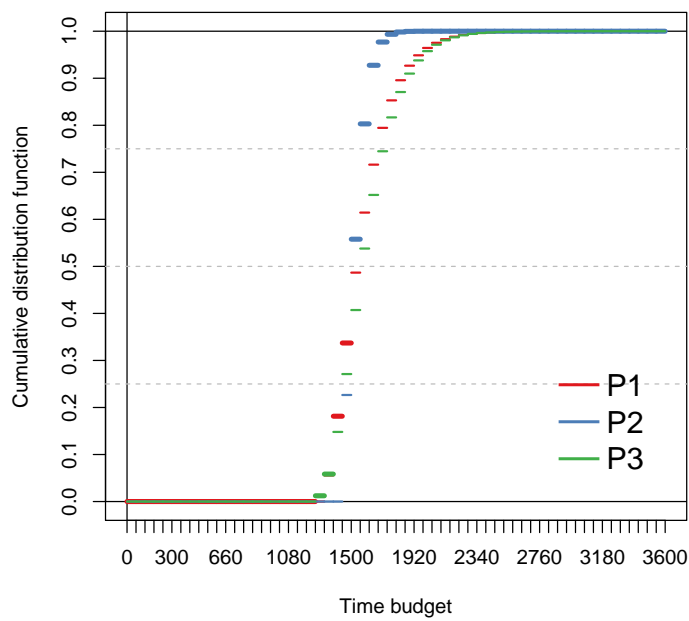
On note que cette politique est composée de trois chemins optimaux, qui sont les séquences  $P1 = N2 \rightarrow N3 \rightarrow N10 \rightarrow N13 \rightarrow N14 \rightarrow N18$  en rouge,  $P2 = N2 \rightarrow N3 \rightarrow N4 \rightarrow N8 \rightarrow N9 \rightarrow N16 \rightarrow N18$  en bleu et  $P3 = N2 \rightarrow N3 \rightarrow N4 \rightarrow N5 \rightarrow N7 \rightarrow N15 \rightarrow N16 \rightarrow N18$  en vert.

En examinant les fonctions de répartition associées à ces trois séquences de nœuds, il est possible de retrouver la frontière de Pareto de la politique de routage, donnée par l'enveloppe supérieure de l'ensemble des courbes. Dans le détail, il apparaît que le chemin  $P3$  est le meilleur chemin pour des budgets compris entre 1260 et 1380 unités de temps, le chemin  $P1$  est le meilleur pour des budgets compris entre 1380 et 1500 unités de temps, et le chemin  $P2$  est optimal pour les budgets supérieurs. Un usager qui veut effectuer ce parcours n'aura aucune chance d'arriver à destination en moins de 1260 unités de temps. Concrètement, ces différents chemins permettent de maximiser la probabilité d'être à l'heure, pour chacun des budgets-temps sus-mentionnés.

Il est aussi possible d'inverser la perspective, et de considérer des probabilités d'être à l'heure en guise d'entrée, pour les usagers. Ainsi, le choix le plus risqué consiste à sélectionner le chemin  $P3$ , qui permet une minimisation du budget nécessaire en acceptant une probabilité d'être à l'heure inférieure à 18.1%. Pour les usagers légèrement moins adeptes du risque, le chemin  $P1$  permet de minimiser le budget nécessaire au parcours, avec des probabilités d'être à l'heure comprise entre 18.1% et 55.8%. Pour la catégorie d'usagers la plus averse au risque, *i.e.* celle qui désire parvenir à destination dans la limite de son budget dans au moins 55.8% des cas, le chemin  $P2$  est le plus indiqué.



(a)



(b)

FIGURE D.1 – Exemple de politique de routage, réseau de Sioux Falls,  $T_{max} = 60$ ,  $\Delta_t = 60$  : (a) itinéraires optimaux, (b) fonctions de répartition des chemins inclus dans la politique

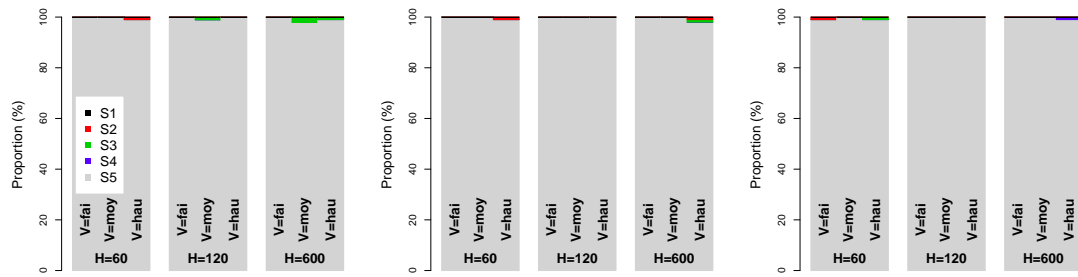
## Analyse des plus courts chemins stochastiques au regard de la loi de probabilité utilisée

Les figures [E.1](#) à [E.9](#) proposent la description complète des résultats mis en avant au sein du chapitre [4](#). Dans cet ensemble de figures, l'aperçu donné dans la section [4.3](#) est confirmé : le facteur le plus important à propos de la convergence des chemins identifiés dans les graphes stochastiques est d'abord la taille du graphe, avec une nuance importante donnée par la comparaison entre les graphes *G20* et *CS*, ce dernier étant plus propice à l'identification de chemins différents.

La précision de la discrétisation est également mise en valeur : les configurations correspondant aux niveaux de précision faibles amènent à l'identification de plus courts chemins stochastiques différents en fonction des modèles.

Enfin, la relative stabilité observée vis-à-vis de la probabilité d'être à l'heure est confirmée par l'ensemble de ces graphiques.

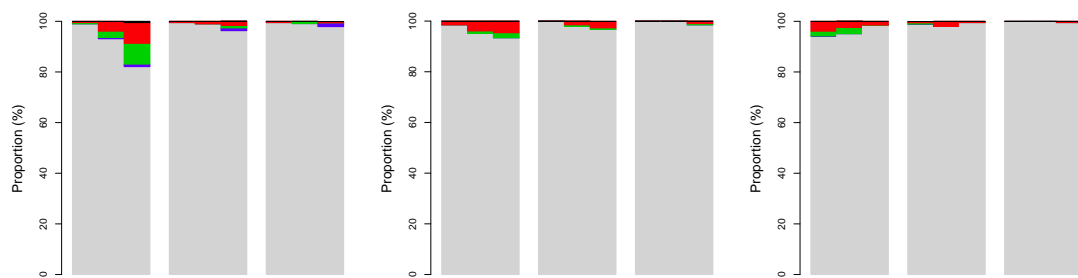




(a) G=SF ; D=C10 ; Q=C10

(b) G=SF ; D=C10 ; Q=C50

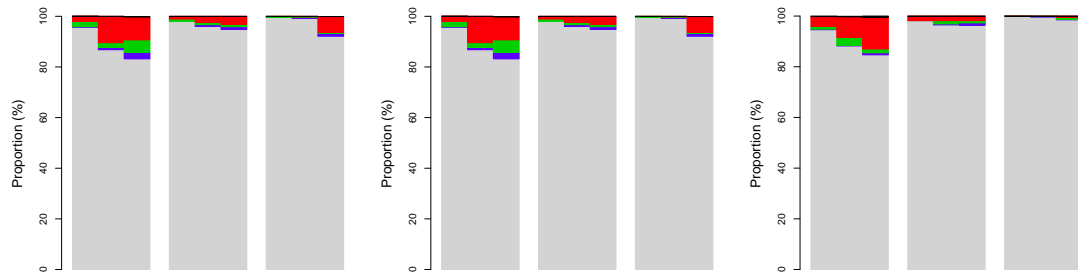
(c) G=SF ; D=C10 ; Q=C90



(d) G=G10 ; D=C10 ; Q=C10

(e) G=G10 ; D=C10 ; Q=C50

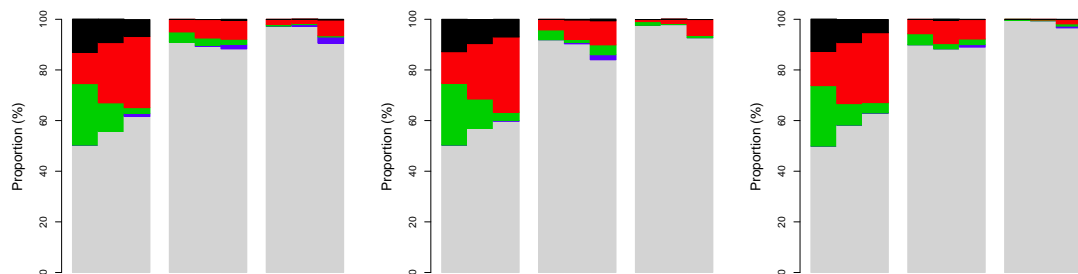
(f) G=G10 ; D=C10 ; Q=C90



(g) G=G20 ; D=C10 ; Q=C10

(h) G=G20 ; D=C10 ; Q=C10

(i) G=G20 ; D=C10 ; Q=C90



(j) G=CS ; D=C10 ; Q=C10

(k) G=CS ; D=C10 ; Q=C50

(l) G=CS ; D=C10 ; Q=C90

FIGURE E.1 – Proportions des situations pour le premier indicateur (distance OD faible)

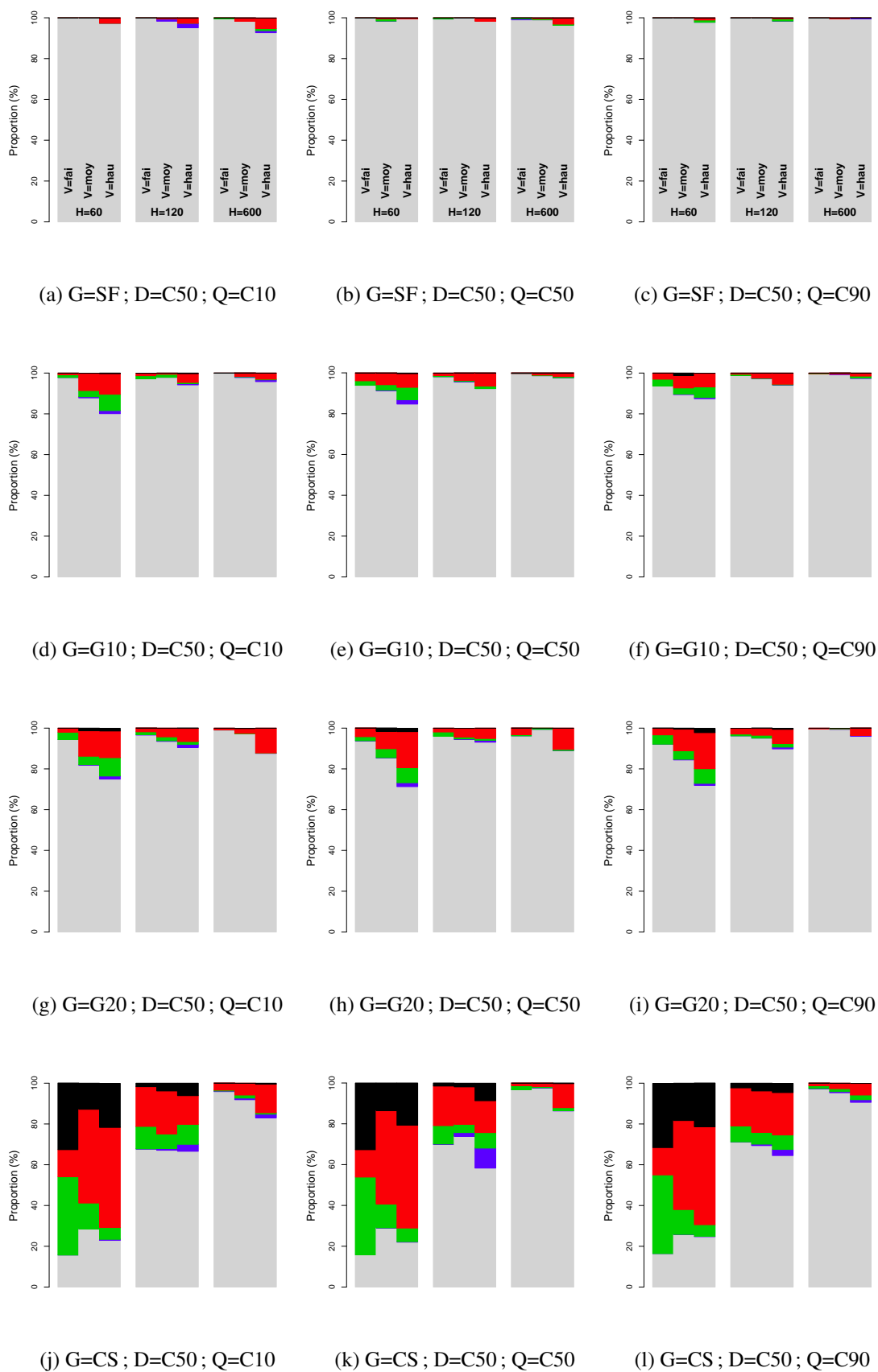


FIGURE E.2 – Proportions des situations pour le premier indicateur (distance OD moyenne)

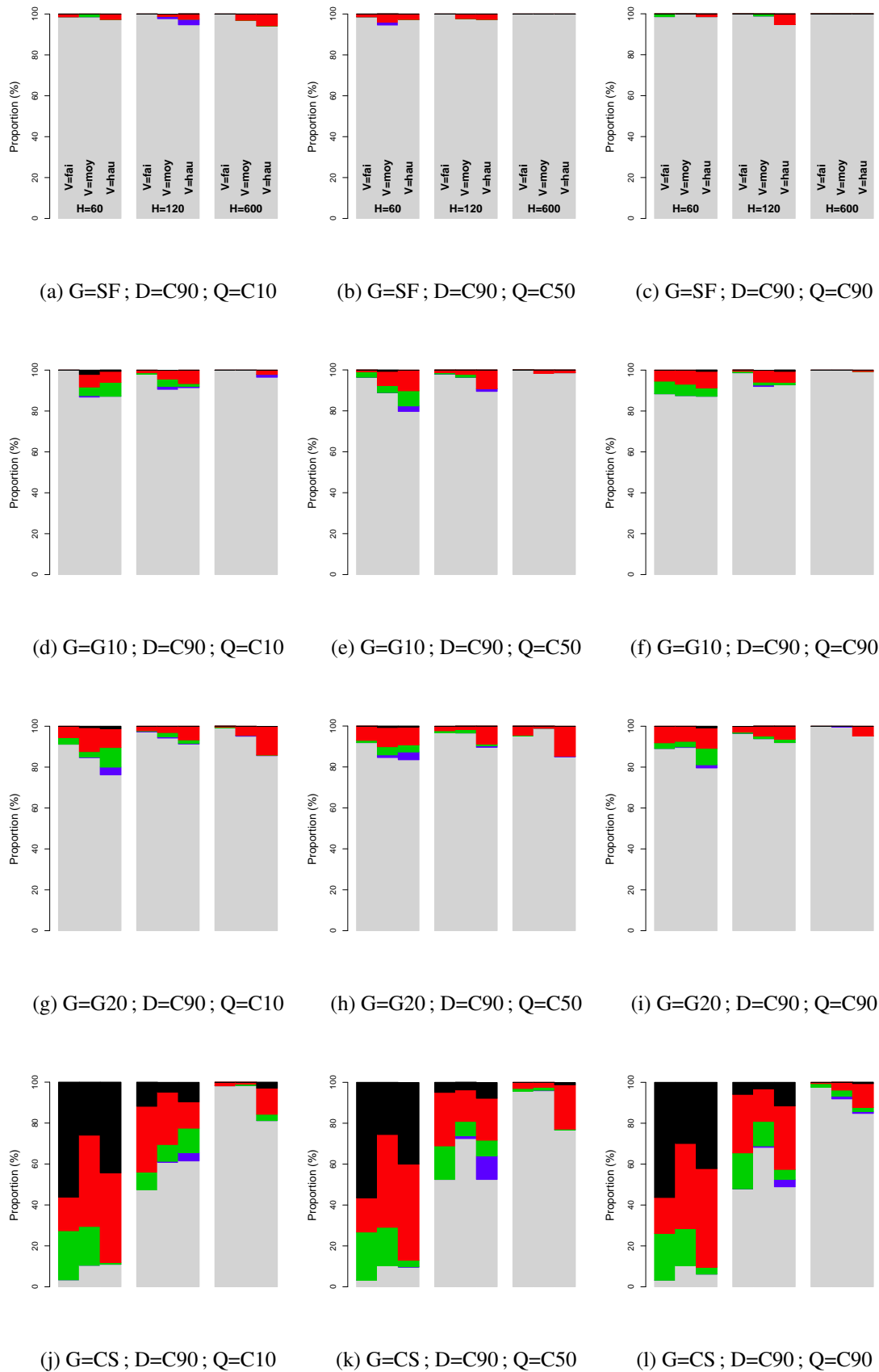


FIGURE E.3 – Proportion des situations pour le premier indicateur (distance OD élevée)

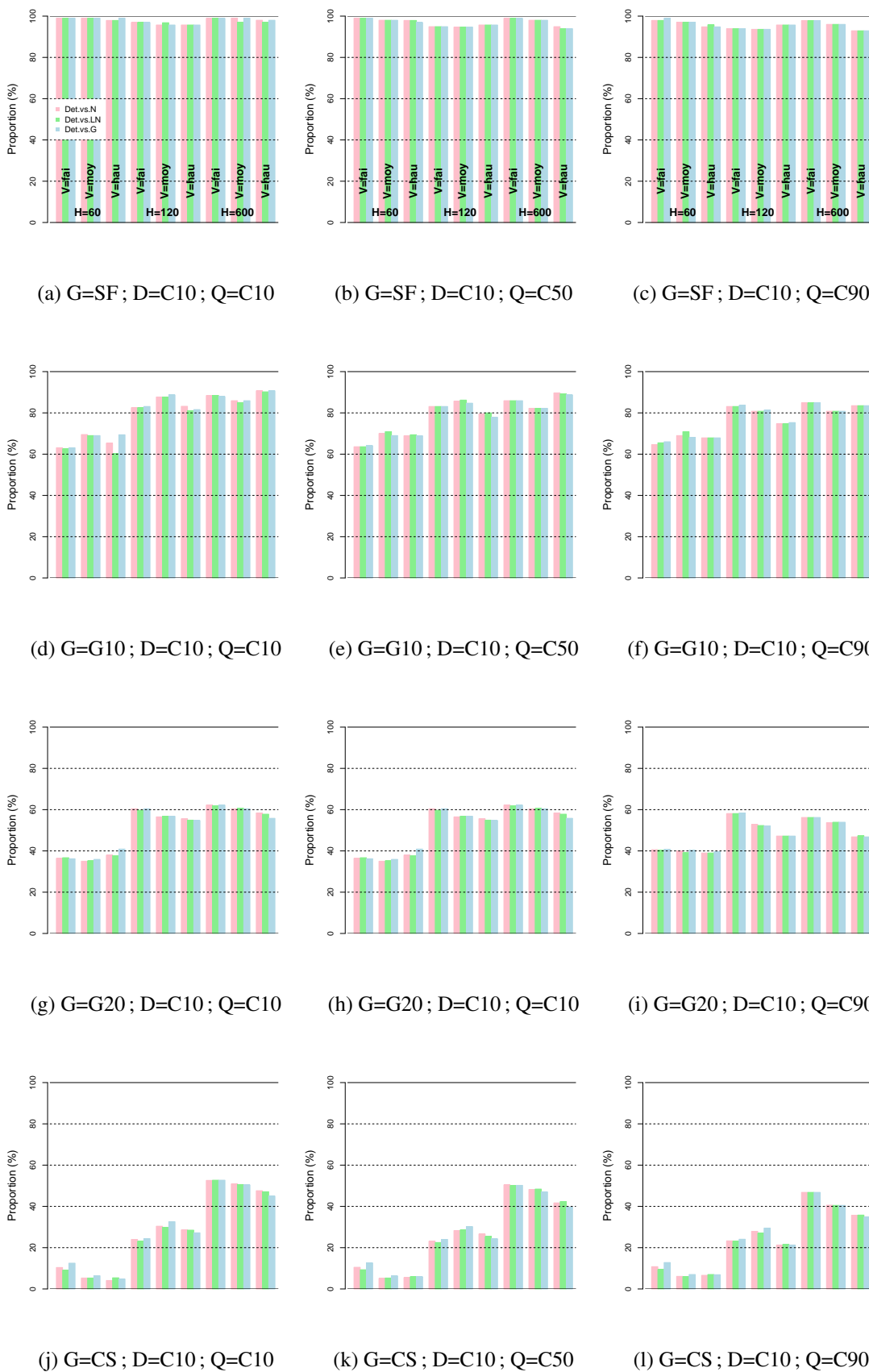
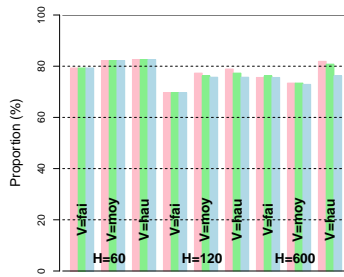
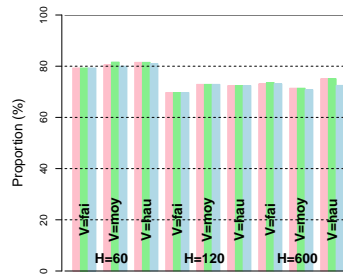


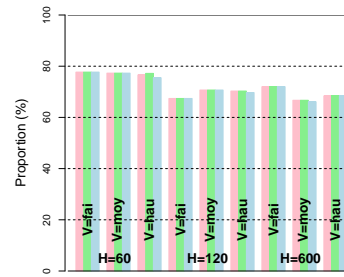
FIGURE E.4 – Proportions des chemins équivalents entre cas déterministe et cas stochastiques (distance OD faible)



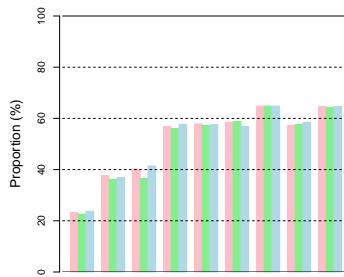
(a) G=SF ; D=C50 ; Q=C10



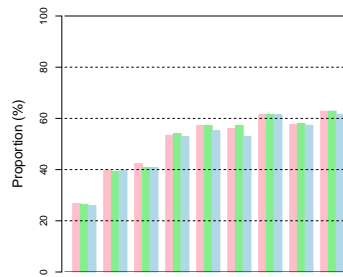
(b) G=SF ; D=C50 ; Q=C50



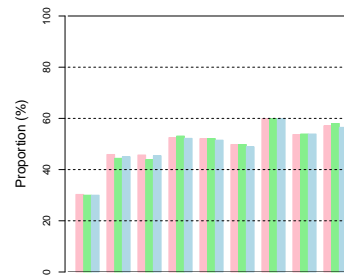
(c) G=SF ; D=C50 ; Q=C90



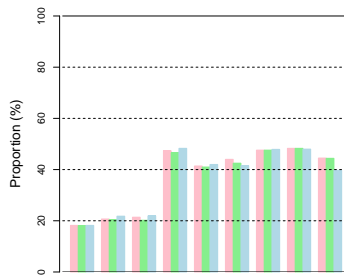
(d) G=G10 ; D=C50 ; Q=C10



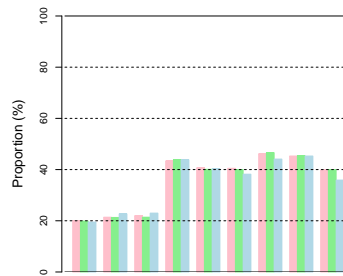
(e) G=G10 ; D=C50 ; Q=C50



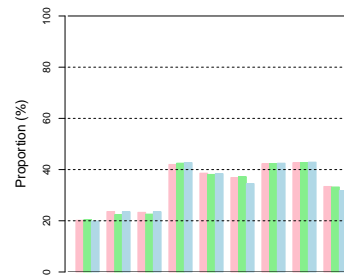
(f) G=G10 ; D=C50 ; Q=C90



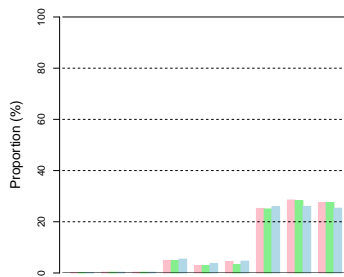
(g) G=G20 ; D=C50 ; Q=C10



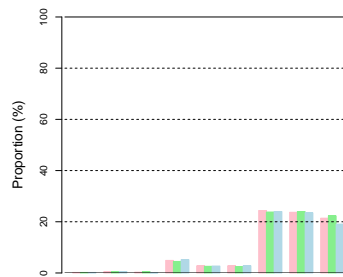
(h) G=G20 ; D=C50 ; Q=C50



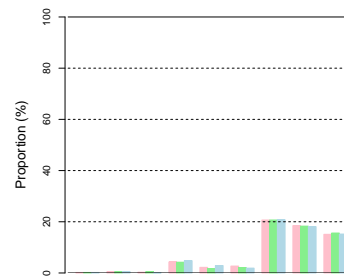
(i) G=G20 ; D=C50 ; Q=C90



(j) G=CS ; D=C50 ; Q=C10



(k) G=CS ; D=C50 ; Q=C50



(l) G=CS ; D=C50 ; Q=C90

FIGURE E.5 – Proportions des chemins équivalents entre cas déterministe et cas stochastiques (distance OD moyenne)

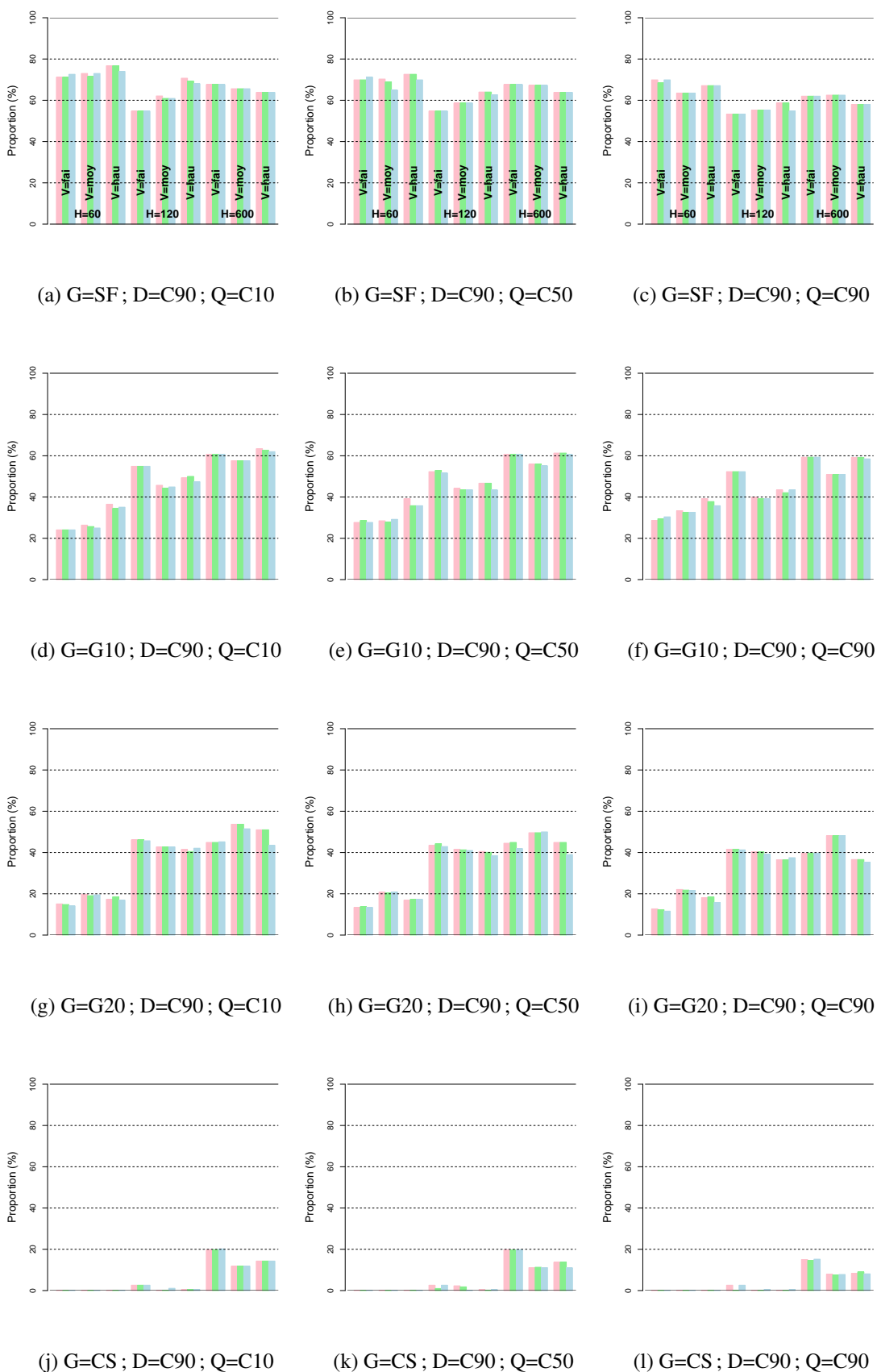
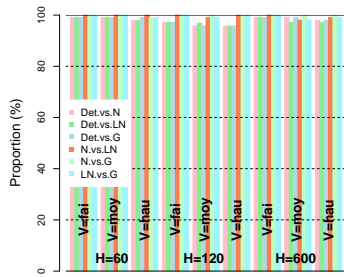
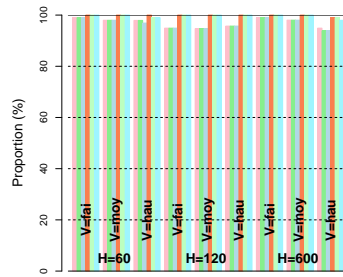


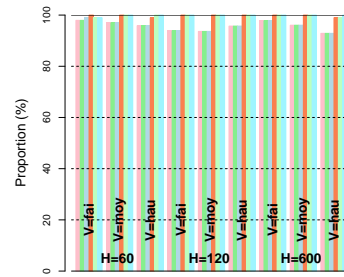
FIGURE E.6 – Proportions des chemins équivalents entre cas déterministe et cas stochastiques (distance OD élevée)



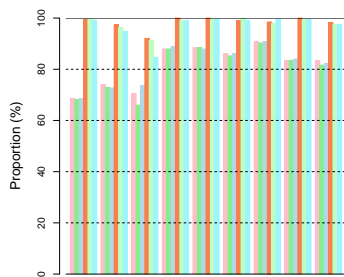
(a) G=SF ; D=C10 ; Q=C10



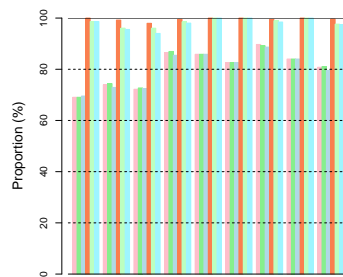
(b) G=SF ; D=C10 ; Q=C50



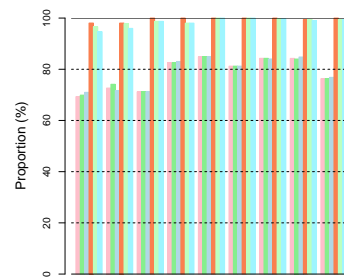
(c) G=SF ; D=C10 ; Q=C90



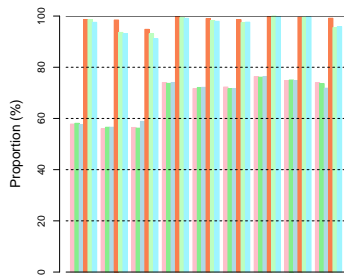
(d) G=G10 ; D=C10 ; Q=C10



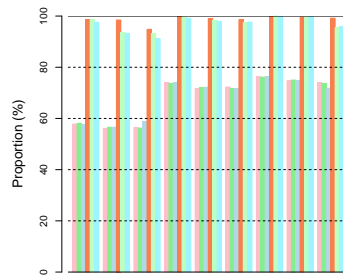
(e) G=G10 ; D=C10 ; Q=C50



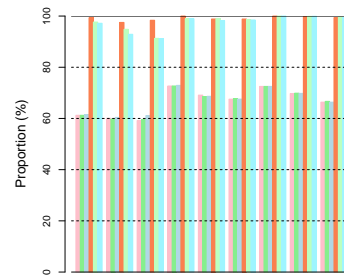
(f) G=G10 ; D=C10 ; Q=C90



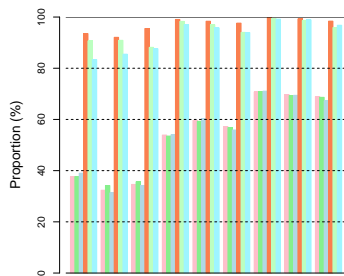
(g) G=G20 ; D=C10 ; Q=C10



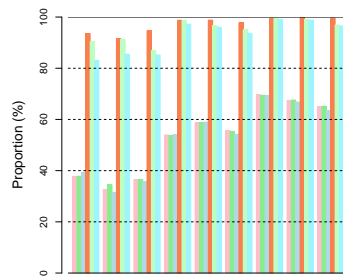
(h) G=G20 ; D=C10 ; Q=C10



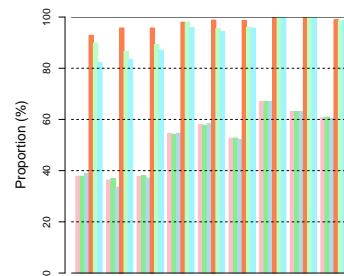
(i) G=G20 ; D=C10 ; Q=C90



(j) G=CS ; D=C10 ; Q=C10



(k) G=CS ; D=C10 ; Q=C50



(l) G=CS ; D=C10 ; Q=C90

FIGURE E.7 – Proportions d’arcs en commun pour chaque binôme de modèles (distance OD faible)

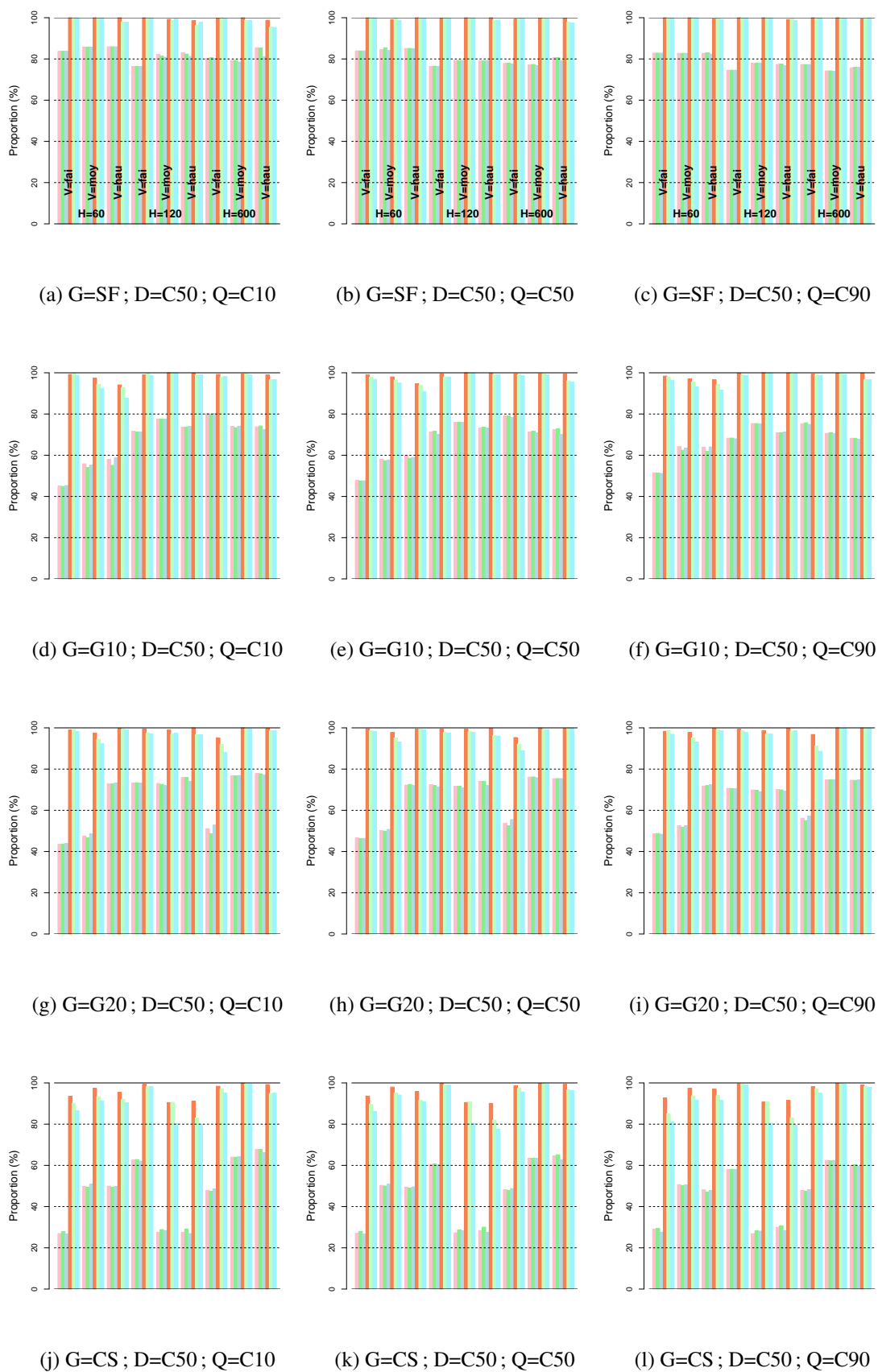
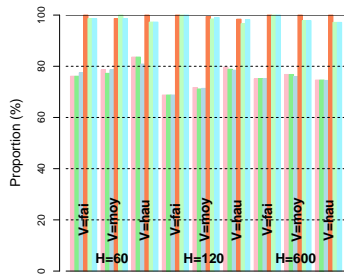
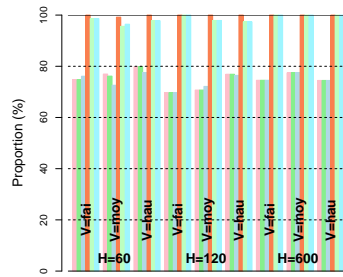


FIGURE E.8 – Proportions d'arcs en commun pour chaque binôme de modèles (distance OD moyenne)

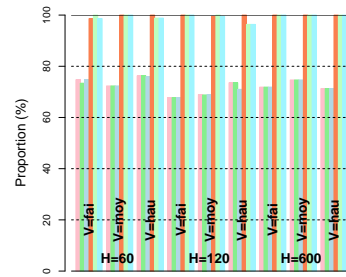




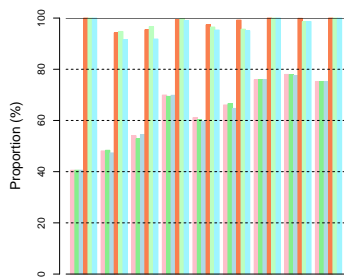
(a) G=SF ; D=C90 ; Q=C10



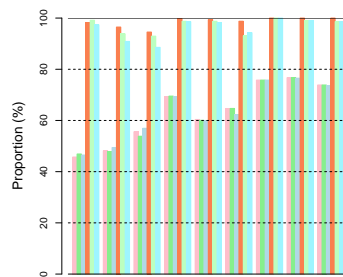
(b) G=SF ; D=C90 ; Q=C50



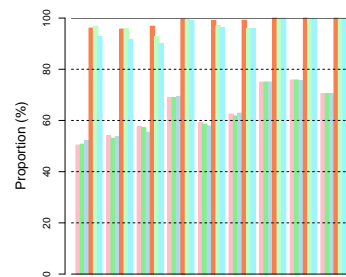
(c) G=SF ; D=C90 ; Q=C90



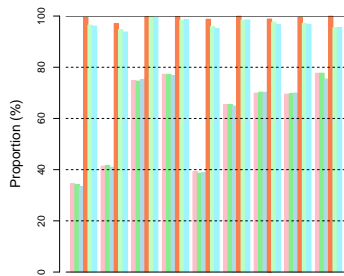
(d) G=G10 ; D=C90 ; Q=C10



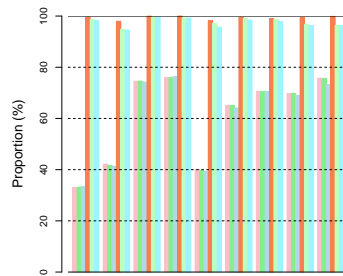
(e) G=G10 ; D=C90 ; Q=C50



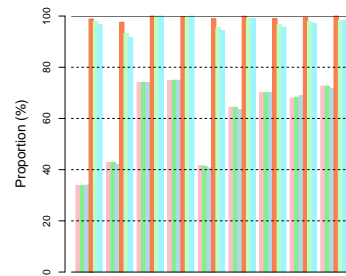
(f) G=G10 ; D=C90 ; Q=C90



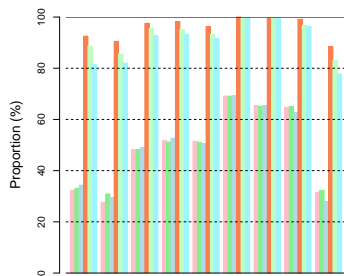
(g) G=G20 ; D=C90 ; Q=C10



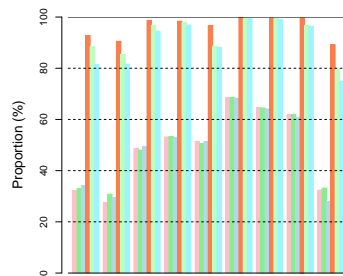
(h) G=G20 ; D=C90 ; Q=C50



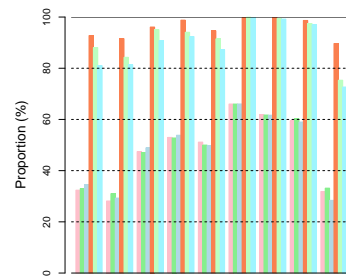
(i) G=G20 ; D=C90 ; Q=C90



(j) G=CS ; D=C90 ; Q=C10



(k) G=CS ; D=C90 ; Q=C50



(l) G=CS ; D=C90 ; Q=C90

FIGURE E.9 – Proportions d’arcs en commun pour chaque binôme de modèles (distance OD élevée)

## Stabilité des hiérarchies de nœuds

Une question émerge de l'analyse de sensibilité réalisée dans le chapitre 6 : la hiérarchie de nœuds est-elle stable, ou évolue-t-elle radicalement selon les paramètres en entrée et/ou les temps de parcours observés sur les arcs du graphe ? Cette interrogation pourrait constituer une question de recherche en soi, notamment si l'on considère des temps de parcours dynamiques et une hiérarchie de nœuds adaptée en temps réel. Relancer la routine de pré-traitement en continu donnerait probablement des résultats différents en termes de hiérarchie, la question étant de déterminer l'ampleur de ces différences (une autre question implicite étant : *le choix de conserver la même hiérarchie de nœuds malgré l'évolution des temps de parcours est-il acceptable ?*). L'analyse conduite précédemment permet de poser quelques jalons intéressants autour de ces questions.

En admettant l'hypothèse selon laquelle des paramétrisations voisines engendrent des temps de pré-traitement et de requêtage proches, il est possible de comparer toutes les hiérarchies de nœuds deux à deux au regard du temps de calcul total qui accompagne leur conception. Pour effectuer la comparaison, le score de rang évoqué dans la partie 2.3 est réutilisé. Cet indicateur exprime une normalisation de la somme des distances entre les rangs des éléments de deux vecteurs. Les vecteurs sont jugés proches lorsque la métrique tend vers 0, et éloignés si elle tend vers 1. En particulier, la figure F.1 illustre une comparaison entre quatre hiérarchies-type et le reste des situations, pour le graphe *CSdyn* et un calcul tel que ceux réalisés dans la sous-section 6.3.2 (pré-traitement et résolution de 10000 requêtes) : les hiérarchies-types sont la hiérarchie obtenue avec la configuration produisant le temps de calcul minimal, celle qui donne au contraire le temps maximal, celle qui donne un temps médian et enfin celle correspondant à un temps de calcul équivalent au neuvième décile.

Dans chacun des quatre cas, les scores de similarité des rangs varient entre 0.1 et 0.45, ce qui correspond à des distances moyennes de 25 à 125 rangs environ pour chaque nœud entre les couples de hiérarchies, pour un total de 546 nœuds. En outre, les hiérarchies se rapprochant le plus de la hiérarchie dite de référence sont celles caractérisées par des temps de calcul comparables (le score de rang minimal vaut environ 0.1 pour certaines d'entre elles, alors qu'il peut aller au-delà de 0.4 dans le reste des situations).

À la vue de ces résultats, et sous l'hypothèse que des paramétrisations ressemblantes engendrent des temps de calcul proches, la hiérarchie de nœuds apparaît d'autant plus stable que les paramètres de configuration de l'algorithme n'évoluent pas. L'évaluation de la matrice de score complète est une poursuite possible de ce travail, tout comme l'analyse de l'évolution de la hiérarchie au regard de la dynamique des temps de parcours.

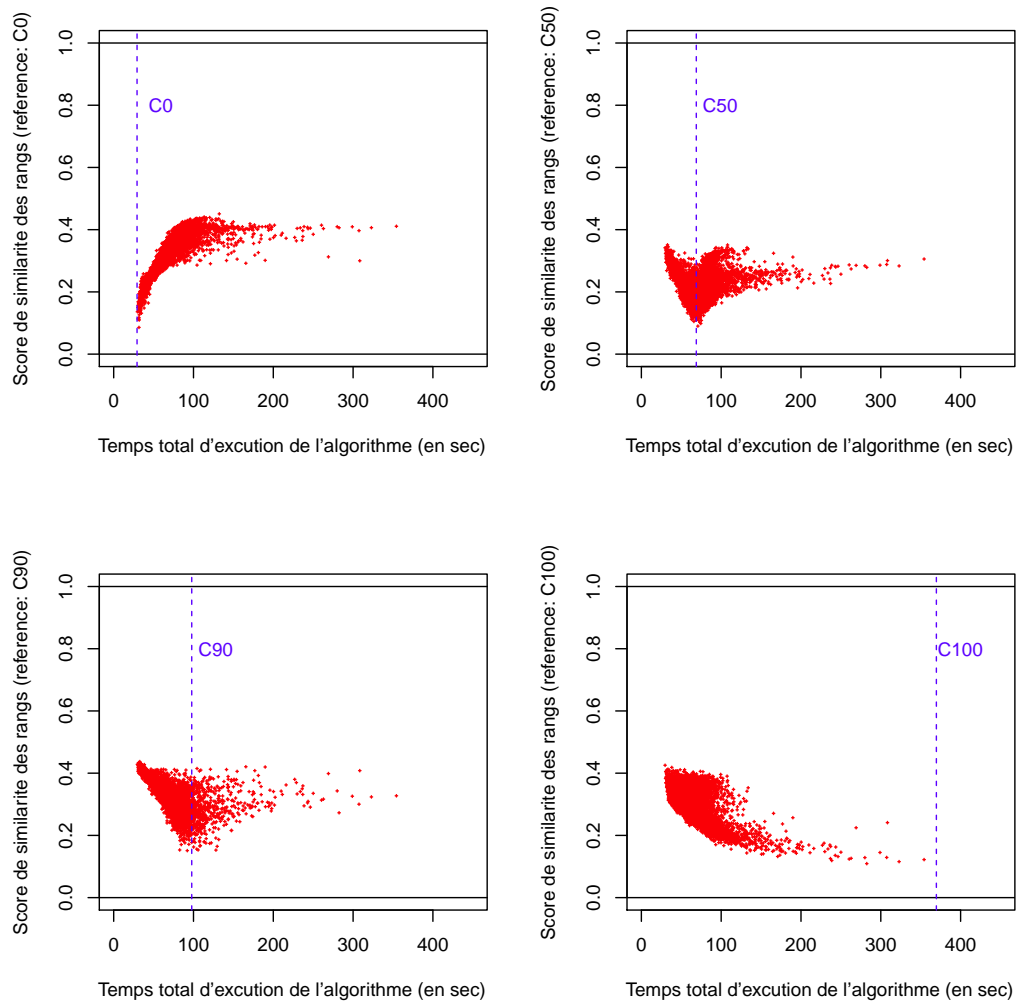


FIGURE F.1 – Distributions des indicateurs de similarité des hiérarchies de nœuds pour des hiérarchies-types correspondant aux configurations donnant les centiles (a) C0, (b) C50, (c) C90 et (d) C100 des temps de total d'exécution de l'algorithme (instance *CSdyn*)



## FOLIO ADMINISTRATIF

### THÈSE SOUTENUE DEVANT L'ÉCOLE NATIONALE DES TRAVAUX PUBLICS DE L'ÉTAT

**NOM :** DELHOME

**DATE DE SOUTENANCE :** 01/12/2016

(avec précision du nom de jeune fille le cas échéant)

**Prénoms :** Raphaël, Pierre-André

**TITRE :** Modélisation de la variabilité des temps de parcours et son intégration dans des algorithmes de recherche du plus court chemin stochastique

**École doctorale :** Mécanique, Énergétique, Génie civil, Acoustique (MEGA)

**NATURE :** Doctorat

**Numéro d'ordre :** 2016LYSET010

**Spécialité :** Génie civil

**Code B.I.U.** - /

et bis

**CLASSE :**

**RÉSUMÉ :** La représentation des temps de parcours est un enjeu influençant la qualité de l'information transmise aux usagers des réseaux de transport. En particulier, la congestion constitue un inconvénient majeur dont la prise en compte n'est pas toujours maîtrisée au sein des calculateurs d'itinéraires. De même, les événements comme les réductions de capacité, les perturbations climatiques, ou encore les pics de fréquentation incitent à dépasser la définition *statique* des temps de parcours. Des travaux antérieurs se sont focalisés sur des temps *dynamiques*, *i.e.* dépendant de la date de départ, de manière à affiner le détail de la représentation, et à prendre notamment en compte le caractère périodique des congestions. La considération d'informations en *temps réel* est aussi une amélioration indéniable, que ce soit lors de la préparation du trajet, ou lorsqu'il s'agit de s'adapter à des perturbations rencontrées en cours de route. Ceci dit, aussi fines qu'elles soient dans les calculateurs disponibles, ces modélisations présentent un inconvénient majeur : elles ne prennent pas en compte toutes les facettes de la variabilité des temps de parcours. Cette variabilité est très importante, en particulier si l'on considère le niveau d'aversion au risque des usagers. En outre, dans un réseau multimodal, les correspondances éventuelles rendent encore plus critique l'incertitude associée aux temps de parcours. En réponse à ces enjeux, les présents travaux de thèse ont ainsi été consacrés à l'étude de temps de parcours *stochastiques*, *i.e.* vu comme des variables aléatoires distribuées.

Dans une première étape, nous nous intéressons à la modélisation statistique des temps de parcours et à la quantification de leur variabilité. Nous proposons l'utilisation d'un système de lois développé dans le domaine de l'hydrologie, la famille des lois de Halphen. Ces lois présentent les caractéristiques typiques des distributions de temps de parcours, elles vérifient par ailleurs la propriété de fermeture par l'addition sous certaines hypothèses afférentes à leurs paramètres. En exploitant les ratios de moments associés aux définitions de ces lois de probabilité, nous mettons également au point de nouveaux indicateurs de fiabilité, que nous confrontons avec la palette d'indicateurs classiquement utilisés. Cette approche holistique de la variabilité des temps de parcours nous semble ainsi ouvrir de nouvelles perspectives quant au niveau de détail de l'information, notamment à destination des gestionnaires de réseaux.

Par la suite, nous étendons le cadre d'analyse aux réseaux, en utilisant les résultats obtenus à l'étape précédente. Différentes lois de probabilité sont ainsi testées dans le cadre de la recherche du plus court chemin stochastique. Cette première étude nous permet de dresser un panorama des chemins identifiés en fonction du choix de modélisation. S'il est montré que le choix du modèle est important, il s'agit surtout d'affirmer que le cadre stochastique est pertinent. Ensuite, nous soulevons la relative inefficacité des algorithmes de recherche du plus court chemin stochastique, ceux-ci nécessitant des temps de calcul incompatibles avec un passage à l'échelle industrielle. Pour pallier cette difficulté, un nouvel algorithme mettant en œuvre une technique d'accélération tirée du cadre déterministe est développé dans la dernière partie de la thèse. Les résultats obtenus soulignent la pertinence de l'intégration de modèles stochastiques au sein des calculateurs d'itinéraires.

**MOTS-CLES :** Temps de parcours ; Variabilité ; Plus courts chemins ; Accélération algorithmique

**Laboratoire(s) de recherche :** Laboratoire d'Ingénierie Circulation Transport (LICIT)

**Directeur de thèse :** Nour-Eddin El Faouzi

**Composition du jury :** Aziz Moukrim (UTC), Rapporteur

Mustapha Rachdi (Université Grenoble-Alpes), Rapporteur

Christine Solnon (INSA Lyon), Examinatrice (**présidente du jury**)

Marie-Jo Huguet (INSA Toulouse), Examinatrice

Olivier Courtin (OSLANDIA), Invité

Nour-Eddin El Faouzi (ISFTTAR/ENTPE), Directeur de thèse

Romain Billot (Télécom Bretagne), Co-directeur de thèse