



HAL
open science

Modèles superfluides d'étoiles à neutrons en relativité générale – applications à la dynamique des pulsars

Aurélien Sourie

► **To cite this version:**

Aurélien Sourie. Modèles superfluides d'étoiles à neutrons en relativité générale – applications à la dynamique des pulsars. Phénomènes cosmiques de haute énergie [astro-ph.HE]. Observatoire de Paris, 2017. Français. NNT: . tel-01577433

HAL Id: tel-01577433

<https://theses.hal.science/tel-01577433>

Submitted on 25 Aug 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT

de l'Université de recherche Paris Sciences et Lettres
PSL Research University

Préparée à l'Observatoire de Paris

Modèles superfluides d'étoiles à neutrons en relativité générale – applications à la dynamique des pulsars

École doctorale n°127

ASTRONOMIE & ASTROPHYSIQUE D'ÎLE-DE-FRANCE

Spécialité *Astronomie & Astrophysique*

Soutenue par *Aurélien SOURIE*
le 19 avril 2017

Dirigée par **Jérôme NOVAK**

COMPOSITION DU JURY :

Mme Marie-Christine ANGONIN
SYRTE – Observatoire de Paris, Présidente
du Jury

M. Pierre M. PIZZOCHERO
Università degli studi di Milano, Rapporteur

Mme Natalie A. WEBB
IRAP – Toulouse, Rapporteur

M. Nicolas CHAMEL
Université Libre de Bruxelles, Examinateur

Mme Anthea F. FANTINA
GANIL – Caen, Examinatrice

Mme Micaela OERTEL
LUTH – Observatoire de Paris, Examinatrice

M. Jérôme NOVAK
LUTH – Observatoire de Paris, Directeur de
thèse

À Cécile et Adèle

Remerciements

En tout premier lieu, je voudrais naturellement remercier Jérôme Novak pour avoir accepté de m'encadrer pendant ces trois années. Tout au long de ma thèse, j'ai eu la chance de pouvoir bénéficier de sa grande disponibilité et de ses vastes connaissances en relativité générale et en modélisation numérique. Je tiens à lui exprimer toute ma gratitude pour la grande liberté et la confiance qu'il m'a accordées dans mes recherches. Par la suite, j'espère conserver sa confiance et sa sympathie.

Je remercie vivement Micaela Oertel et Nicolas Chamel, avec qui j'ai eu le plaisir de collaborer sur des sujets passionnants. En particulier, j'ai beaucoup appris au contact de Nicolas, de par sa grande rigueur scientifique, mais également à travers les nombreux échanges que nous avons eus jusqu'à présent sur la physique complexe associée aux glitches des pulsars et à la superfluidité des étoiles à neutrons. Je le remercie également pour l'accueil chaleureux qu'il m'a toujours réservé lors de mes séjours à Bruxelles.

Je suis très reconnaissant à Marie-Christine Angonin, Nicolas Chamel, Anthea Fantina et Micaela Oertel pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse, et plus particulièrement à Pierre Pizzochero et Natalie Webb, qui ont réalisé la lourde tâche de rapporteur. Un grand merci à eux.

Au cours de ces trois années, j'ai pu bénéficier d'un cadre de travail particulièrement agréable au sein du Laboratoire Univers et Théories (LUTH). J'aimerais tout d'abord remercier les autres membres de l'équipe Relativité et Objets Compacts (ROC), notamment Éricourgoulhon, Philippe Grandclément, Alexandre Le Tiec et Silvano Bonazzola pour toutes les discussions que nous avons eues, tant sur un plan professionnel que personnel. Je remercie également l'ensemble des doctorants, post-doctorants et visiteurs de l'équipe : Marion Grould, Miguel Marques, Debarati Chatterjee, Karim Van Aelst, Gyula Fodor, Bruno Peres, Claire Somé et Morgane Fortin pour tous les bons moments passés en leur compagnie. Un très grand merci à Grégoire Martinon, avec qui j'ai eu le plaisir de partager mon bureau au LUTH. Je mesure la chance que j'ai eue d'avoir quelqu'un comme lui à mes côtés au quotidien, que ce soit dans les (quelques) instants de doute, mais également dans les (nombreux) moments joyeux.

Je tiens à exprimer mes profonds remerciements aux autres membres du LUTH que j'ai côtoyés durant mon doctorat, notamment le directeur Stéphane Mazevet, Claire Michaut, Martine Mouchet pour son écoute, ainsi que Zakaria Meliani pour son humour sans limite. Je remercie très vivement les membres de la cellule informatique, et plus spécifiquement Fabrice Roy, Stéphane Méné, Marco Mancini, Jean-Yves Giot et Jean-Denis

Bovas, ainsi que l'ensemble du service administratif, à savoir Annie Le Guevellou, Omur Avcı et Nathalie Ollivier, qui ont tous contribué au bon déroulement de ma thèse. J'ai aussi pris beaucoup de plaisir à échanger avec les doctorants des autres groupes du LUTH, notamment Océane Saincir, Paul de Fromont, Michel-Andrès Breton et Guillaume Voisin. Je n'oublie pas non plus Géraldine Gaillant et Cathie Schmit, qui ont toujours été disponibles pour répondre à mes nombreuses questions d'ordre administratif.

Par ailleurs, je voudrais remercier Loïc Villain, Yves Lansac, Enrick Olive et Jean-Claude Soret pour leur grande gentillesse et pour les différentes discussions que nous avons eues jusqu'à maintenant.

Enfin, une grande pensée pour mes parents et pour mon frère qui m'ont toujours soutenu. Je les remercie notamment pour toute l'aide apportée à la préparation du pot. Merci également à ma cousine Laure et à Romain pour avoir pris le temps de venir assister à ma soutenance. Et, bien sûr, je remercie plus particulièrement ma compagne, Cécile, pour son soutien constant depuis toutes ces années, pour sa patience, pour son écoute et pour tout le reste. Le mot de la fin revient à Adèle qui depuis près de trois mois maintenant illumine de ses sourires chacune de nos journées.

Meudon, le 6 juillet 2017

Table des matières

Introduction	1
I Superfluidité dans les étoiles à neutrons et glitches des pulsars	3
1 Étoiles à neutrons	5
1.1 Observables	6
1.1.1 Masse	6
1.1.2 Rayon	8
1.1.3 Vitesse de rotation	11
1.2 Formation	12
1.2.1 Supernovæ gravitationnelles	12
1.2.2 Enrichissement en neutrons	14
1.2.3 Matière froide	15
1.3 Des objets compacts ...	16
1.3.1 Paramètre de compacité	16
1.3.2 Système Tolman-Oppenheimer-Volkoff	17
1.3.3 Masse maximale	18
1.4 ... et très denses	19
1.4.1 Équations d'état	19
1.4.2 Contraintes expérimentales	21
1.4.3 Diagramme masse-rayon	23
1.5 Structure	23
1.5.1 Atmosphère et surface	25
1.5.2 Écorce	25
1.5.3 Cœur	27
2 Glitches des pulsars	29
2.1 Le phénomène de pulsar	29
2.1.1 Données observationnelles	29
2.1.2 Origine de la périodicité	32

TABLE DES MATIÈRES

2.1.3	Magnétosphère du pulsar	35
2.2	Ralentissement des pulsars	37
2.2.1	Estimation de la température de surface	37
2.2.2	Estimation du champ magnétique de surface	38
2.2.3	Estimation de l'âge	42
2.3	Irrégularités de la période	44
2.3.1	Observations de « soubresauts »	44
2.3.2	Différents types de glitch	48
2.3.3	Bruit de synchronisation	50
2.4	Premiers modèles de glitches	51
2.4.1	Mécanismes externes	51
2.4.2	Tremblements d'écorce	51
3	Superfluidité dans les étoiles à neutrons	53
3.1	Prédictions théoriques	53
3.1.1	Introduction	53
3.1.2	Appariement de nucléons et températures critiques	56
3.1.3	Tourbillons superfluides et tubes de flux	58
3.2	Un cadre naturel pour expliquer les glitches	65
3.2.1	Transferts de moments cinétiques entre deux fluides	65
3.2.2	Ancrage dans l'écorce	68
3.2.3	Ancrage dans le cœur	73
3.3	Autres supports observationnels	76
II	Modèles numériques stationnaires d'étoiles à neutrons superfluides en rotation	85
4	Modèle à deux fluides	87
4.1	Cadre de travail	88
4.2	Tenseur métrique	89
4.2.1	Formalisme 3+1	90
4.2.2	Simplification de l'espace-temps	92
4.3	Hydrodynamique à deux fluides	95
4.4	Équations de structure	97
4.4.1	Équations d'Einstein	97
4.4.2	Termes sources	98
4.4.3	Équations du mouvement	100
4.5	Grandeurs globales	101
4.5.1	Masses baryoniques	101
4.5.2	Masse gravitationnelle	102
4.5.3	Identités du viriel	103
4.5.4	Rayons circonférentiels et rayons moyens	103
4.5.5	Moments cinétiques	104
4.6	Résolution numérique	105

TABLE DES MATIÈRES

4.6.1	Méthodes spectrales et bibliothèque LORENE	106
4.6.2	Procédure numérique et code <code>sfstar</code>	109
5	Équations d'état à deux fluides et configurations d'équilibre	113
5.1	Équations d'état à deux fluides réalistes	113
5.1.1	Modèles de champ moyen relativiste	113
5.1.2	Calcul des équations d'état	116
5.1.3	Implémentation numérique	129
5.1.4	Effets d'entraînement	132
5.2	Configurations d'équilibre	136
5.2.1	Diagrammes masse-rayon	137
5.2.2	Potentiels métriques	141
5.2.3	Profils de densité	142
5.2.4	Profils de vitesse	144
5.2.5	Moments cinétiques et moments d'inertie	146
III	Simulations numériques globales de glitches en relativité générale	149
6	Équations d'évolution	151
6.1	Hypothèses	152
6.1.1	Approche quasi-stationnaire	152
6.1.2	Modèle à deux fluides	153
6.1.3	Espace-temps	153
6.1.4	Compositions chimiques et équations d'état	154
6.2	Équations d'évolution	155
6.2.1	Transfert de moment cinétique en relativité générale	155
6.2.2	Estimation analytique du temps de montée	159
6.3	Configurations stationnaires en rotation	161
6.3.1	Vorticité du superfluide	161
6.3.2	Coefficient κ et facteur ζ	161
6.3.3	Effets d'entraînement et effet Lense-Thirring	165
7	Simulations numériques de glitches	173
7.1	Modélisation numérique	173
7.1.1	Procédure numérique	173
7.1.2	Détermination des conditions initiales	174
7.2	Résultats numériques	176
7.2.1	Évolution dynamique	176
7.2.2	Contribution de la relativité générale	180
7.2.3	Considérations astrophysiques	183
7.3	Émission d'ondes gravitationnelles	186
7.3.1	Quadrupôle de masse	186
7.3.2	Amplitudes des ondes gravitationnelles	189

IV	Friction mutuelle en présence d’ancrage dans le cœur des étoiles à neutrons	193
8	Ancrage des tourbillons aux tubes de flux et friction mutuelle	195
8.1	Origine de la force de friction mutuelle	196
8.1.1	Différentes échelles	196
8.1.2	Hypothèses sur les tourbillons superfluides	197
8.2	Friction mutuelle en l’absence d’ancrage dans le cœur	197
8.2.1	Force de traînée	198
8.2.2	Vitesse moyenne des lignes de tourbillons	199
8.2.3	Force et moment de friction mutuelle	200
8.3	Friction mutuelle en présence d’ancrage dans le cœur	200
8.3.1	Hypothèses sur les tubes de flux	200
8.3.2	Force de Magnus généralisée	202
8.3.3	Coefficient de résistivité	204
8.3.4	Vitesse moyenne des paquets de lignes quantifiées	205
8.3.5	Force et moment de friction mutuelle	206
8.4	Conséquences astrophysiques	209
8.4.1	Temps caractéristique de couplage par friction mutuelle	209
8.4.2	Impact sur la physique des glitches	211
	Conclusions et perspectives	215
A	Détermination et analyse des temps d’arrivée	221
A.1	Mesure des temps d’arrivée	221
A.2	Analyse des temps d’arrivée	222
B	Tourbillon superfluide et quantum de circulation	225
C	Transfert de moment cinétique en mécanique newtonienne	227
C.1	Moments cinétiques	227
C.2	Moment de friction mutuelle	228
C.3	Temps de montée du glitch	229
C.4	Couplages entre les fluides	230
C.5	Quadrupôle de masse	232
D	Contraintes sur les moments d’inertie partiels	233
E	Commentaires sur le coefficient de résistivité	235
E.1	Coefficient de résistivité associé à une ligne unique	235
E.2	Cas d’un paquet formé de tubes de flux superposés	238
E.3	Cas d’un paquet formé de tubes de flux distants	239

TABLE DES MATIÈRES

F Interactions entre tourbillons superfluides et tubes de flux	243
F.1 Force d'interaction et friction mutuelle	243
F.2 Absence d'interaction	245
F.3 Ancrage parfait	246
F.4 Absence de tube de flux	246
F.5 Nombre infini de tubes de flux	247
Liste des tables	249
Liste des figures	251
Bibliographie	255

TABLE DES MATIÈRES

Introduction

Nées de l'effondrement gravitationnel d'étoiles massives sous forme d'explosion de supernova, les étoiles à neutrons comptent parmi les astres les plus compacts de l'Univers (chapitre 1). Avec une masse de l'ordre de celle du Soleil, pour un rayon d'une dizaine de kilomètres seulement, ce sont également des objets extrêmement denses. Ainsi, leur masse volumique centrale, de l'ordre de $10^{15} \text{ g.cm}^{-3}$, dépasse largement celles mesurées dans les noyaux étudiés en laboratoire. En outre, des calculs microscopiques détaillés montrent que ces astres sont susceptibles d'héberger un superfluide de neutrons, à condition que leur température interne soit inférieure à une température critique de l'ordre de $10^8 - 10^{10} \text{ K}$. La superfluidité, caractérisée par un écoulement sans résistance, est l'une des manifestations macroscopiques les plus spectaculaires de la mécanique quantique. Bien que les étoiles à neutrons naissent avec des températures très élevées ($\sim 10^{11} \text{ K}$), les processus de refroidissement par émission de neutrinos sont suffisamment efficaces pour que la température critique soit atteinte au bout de seulement quelques mois ou années. Ces étoiles contiennent alors de la matière superfluide dans leur cœur et leur écorce. Ce scénario a par ailleurs été récemment conforté par l'observation du refroidissement rapide de la jeune étoile à neutrons présente dans le reste de la supernova Cassiopée A. Les étoiles à neutrons constituent ainsi des objets d'étude uniques, permettant non seulement de tester la relativité générale en champ fort, mais également de sonder les propriétés de la matière dans des conditions extrêmes, inaccessibles en laboratoire.

La plupart des étoiles à neutrons connues à ce jour ont été découvertes sous la forme de pulsars, c'est-à-dire de sources compactes de signaux radio pulsant à la période de rotation de l'astre (chapitre 2). Ce phénomène est très intéressant car il permet de mesurer de manière extrêmement précise l'évolution temporelle de la vitesse de rotation des étoiles à neutrons. On observe en général que les pulsars ralentissent lentement, du fait de la perte d'énergie associée à l'émission d'ondes électromagnétiques. Toutefois, il arrive que certains pulsars accélèrent soudainement, avant de retourner dans leur état initial. Ces « soubresauts », appelés glitches, sont les manifestations les plus convaincantes de la présence de matière superfluide dans les étoiles à neutrons, notamment en raison des temps de relaxation très longs qui ne peuvent être expliqués autrement. Les glitches eux-mêmes sont couramment interprétés comme de brusques transferts de moment cinétique entre le superfluide de neutrons et le reste de l'étoile, rendus possibles par un mouvement rapide de tourbillons superfluides à grande échelle (chapitre 3). L'étude de ces petites irrégularités pourrait apporter de nouvelles contraintes très importantes sur l'intérieur

des étoiles à neutrons, à condition de disposer d'un modèle de glitch réaliste. Le travail présenté ici constitue une nouvelle étape dans cette direction.

La seconde partie de ce manuscrit porte sur le développement d'un modèle numérique d'étoiles à neutrons superfluides en rotation, dans le cadre de la relativité générale, basé sur le formalisme variationnel de B. Carter et ses collaborateurs (chapitre 4). En particulier, nous calculons différentes configurations stationnaires et axisymétriques d'étoiles à neutrons composées de deux fluides, à savoir un superfluide de neutrons et un fluide de particules chargées (protons et électrons), tournant à des vitesses de rotation différentes autour d'un même axe. L'utilisation de méthode spectrales, en lien avec la bibliothèque LORENE, permet d'atteindre une précision numérique très élevée. Pour la première fois, ces configurations reposent sur une description réaliste de l'intérieur des étoiles à neutrons, faisant appel à différentes équations d'état calculées à partir de modèles microscopiques et tenant compte des effets d'entraînement mutuel entre les fluides (chapitre 5). Ces calculs sont importants pour étudier les propriétés stationnaires des étoiles à neutrons superfluides, mais ils peuvent également fournir des données initiales dans le cadre de simulations dynamiques d'oscillations d'étoiles à neutrons ou d'effondrement gravitationnel en trous noirs.

Ces configurations sont ensuite utilisées pour construire un modèle numérique global de glitch, en relativité générale. Pour cela, nous déterminons l'évolution temporelle de la vitesse de rotation de chaque fluide, suite au transfert de moment cinétique se déroulant lors de la phase de montée du glitch. Durant cette phase, la dynamique de l'étoile est gouvernée par une force de friction mutuelle, liée à l'interaction des tourbillons superfluides avec les fluides environnants. La relativité générale modifie non seulement la structure de l'étoile, mais elle conduit aussi à l'apparition d'un nouveau couplage entre les fluides, dû aux effets d'entraînement des référentiels inertiels (chapitre 6). Nous montrons ainsi que l'impact de la relativité générale sur le temps caractéristique de montée du glitch est important. Par exemple, les erreurs liées à l'utilisation de la mécanique newtonienne peuvent atteindre 40% d'après les modèles considérés. De plus, nous étudions en détails l'influence de différents paramètres, tels que la masse de l'étoile ou sa composition, sur le temps de montée (chapitre 7). En comparant ces valeurs théoriques aux observations du célèbre pulsar de Vela, nous déduisons une première contrainte sur l'amplitude de la force de friction mutuelle. Les observations de glitches qui seront réalisées par la nouvelle génération de radiotélescopes (tels que FAST, LOFAR ou SKA), plus précises, permettront par la suite d'obtenir des informations essentielles sur l'intérieur des étoiles à neutrons.

Les études précédentes ayant mis en évidence la nécessité d'une description précise de la force de friction mutuelle, nous établissons enfin l'expression de cette force dans le cas où les tourbillons superfluides sont ancrés aux tubes de flux magnétiques présents dans le cœur des étoiles à neutrons (chapitre 8). Les deux fluides sont alors couplés sur un temps qui dépend fortement du nombre de tubes de flux ancrés à chaque tourbillon. Une évolution de ce nombre au cours du glitch permet alors de rendre compte des échelles de temps très différentes associées aux phases de montée et de relaxation. Différentes études récentes ayant montré que le superfluide de neutrons dans l'écorce des étoiles à neutrons n'est pas suffisant pour expliquer certains glitches, tels que ceux du pulsar de Vela, nos résultats confirment que le superfluide dans le cœur pourrait effectivement prendre part à ces événements.

Première partie

Superfluidité dans les étoiles à neutrons et glitches des pulsars

Chapitre 1

Étoiles à neutrons

Sommaire

1.1	Observables	6
1.2	Formation	12
1.3	Des objets compacts ...	16
1.4	... et très denses	19
1.5	Structure	23

Le concept d'*étoiles à neutrons* voit le jour au cours des années 1930 (Baade & Zwicky, 1934; Landau, 1938), peu de temps après la découverte du neutron (Chadwick, 1932). Les premiers calculs de structure d'un tel astre sont réalisés dès 1939, dans le cadre de la relativité générale (Tolman, 1939; Oppenheimer & Volkoff, 1939). Cependant, il apparaît rapidement que les étoiles à neutrons ont un rayon très petit (de l'ordre de la dizaine de kilomètres) et, par conséquent, leur émission thermique semble beaucoup trop faible pour avoir un jour l'espoir de les détecter. Les étoiles à neutrons restent alors, et ce pendant des années, un sujet de recherche réservé aux seuls théoriciens.

C'est en 1967 qu'un véritable tournant a lieu dans l'étude des étoiles à neutrons. Cette année-là, J. Bell et A. Hewish, qui travaillent sur le phénomène de scintillation interstellaire, découvrent le premier *pulsar*¹ *radio* : une source radio périodique, de période extrêmement courte (de l'ordre de la seconde) et d'une très grande stabilité. Ces signaux sont tellement extraordinaires que les découvreurs prennent le temps de valider leurs observations et attendent l'année suivante pour publier (Hewish *et al.*, 1968). Par la suite, les pulsars sont identifiés comme des étoiles à neutrons magnétisées en rotation (Gold, 1968, 1969). Grâce au phénomène de pulsar, les étoiles à neutrons passent alors rapidement du statut de curiosités théoriques (sujettes à de nombreuses spéculations) à celui d'objets astrophysiques observables. Depuis lors, plus de 2500 pulsars ont été détectés dans notre galaxie (voir la base de données ATNF²; Manchester *et al.* (2005)). En outre, l'émission

1. Il s'agit de la contraction de *pulsating star* (étoile pulsante).

2. <http://www.atnf.csiro.au/research/pulsar/psrcat>.

thermique d’une dizaine d’étoiles à neutrons proches a pu être observée (voir e.g. [Haberl \(2007\)](#)).

1.1 Observables

L’étude précise des différents signaux émis par les étoiles à neutrons donne accès à plusieurs grandeurs qui leur sont caractéristiques, telles que la masse, le rayon ou encore la vitesse de rotation. Nous présentons ici un bref aperçu des méthodes actuellement employées pour déterminer ces observables. De plus amples détails sont donnés dans [Thorsett & Chakrabarty \(1999\)](#), [Haensel *et al.* \(2007\)](#), [Özel & Freire \(2016\)](#) ou encore [Oertel *et al.* \(2017\)](#).

1.1.1 Masse

L’observation du rayonnement thermique d’une naine blanche (et des raies atmosphériques associées) est une source d’information cruciale, car elle nous renseigne sur sa température de surface, son rayon, sa gravité de surface et éventuellement sur sa masse. Dans le cas des étoiles à neutrons cependant, la surface beaucoup plus petite rend de telles mesures très difficiles. Ainsi, les méthodes actuelles pour déterminer la masse des étoiles à neutrons sont basées sur l’utilisation de systèmes binaires, qui ne représentent qu’une faible proportion des étoiles à neutrons détectées (de l’ordre de 5%).

Ces méthodes reposent sur le fait que la période de rotation d’un pulsar dans un système binaire est modulée (par effet Doppler) par la période orbitale du système. La précision avec laquelle on mesure cette modulation (via l’analyse des temps d’arrivée des pulses) est telle qu’il est possible de déterminer avec une très grande précision cinq paramètres képlériens, parmi lesquels la période orbitale T et la projection du demi-grand axe de l’orbite du pulsar sur la ligne de visée $a_p \sin i$ (où i est l’angle d’inclinaison entre la ligne de visée et la normale au plan de l’orbite). À partir de ces paramètres, il est alors possible d’obtenir une première relation entre la masse du pulsar M_p et celle de son compagnon M_c , via la fonction de masse du pulsar f_p :

$$f_p = \frac{(M_c \sin i)^3}{(M_p + M_c)^2} = \frac{4\pi^2}{G} \frac{(a_p \sin i)^3}{T^2}, \quad (1.1)$$

où G est la constante gravitationnelle. Notons que la gravité newtonienne ne fournit qu’une combinaison des masses M_p et M_c et de l’angle d’inclinaison i . Pour déterminer M_p , il est donc indispensable de disposer de relations supplémentaires.

Pulsars radio. Les corrections relativistes à la description du mouvement orbital du système binaire sont représentées par différents paramètres post-képlériens caractérisant : l’avance du périastre de l’orbite, l’effet combiné des variations du décalage Doppler transverse et du décalage gravitationnel associées à une orbite elliptique, la diminution de la période orbitale causée par l’émission d’ondes gravitationnelles ainsi que le phénomène de retard de la lumière, ou effet Shapiro, lié à la propagation des signaux émis par le pulsar dans le champ gravitationnel de son compagnon (voir Fig. 1.1). À partir de la connaissance

1.1 Observables

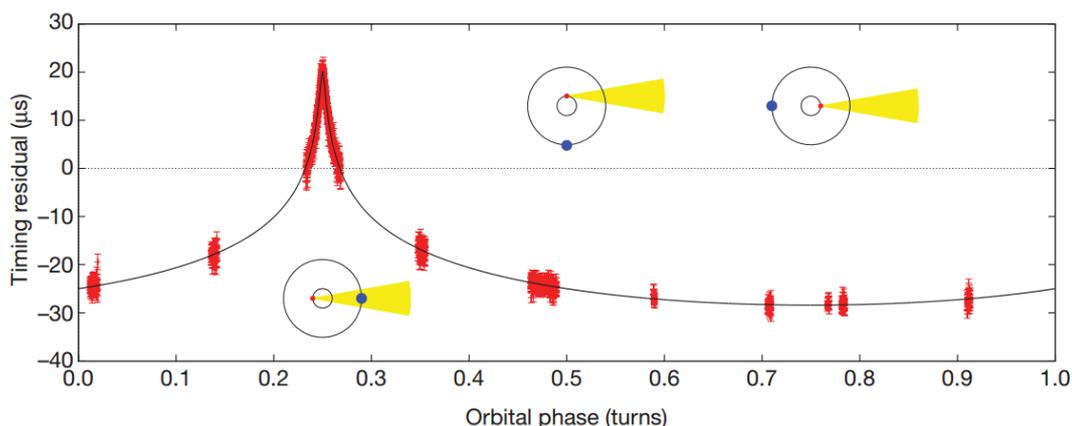


FIGURE 1.1 – **Mesure de l’effet Shapiro associé au pulsar PSR J1614–2230.** Le profil théorique du retard de la lumière en fonction de la phase orbitale (trait noir) est ajusté aux valeurs observées (points rouges). Différentes configurations du système binaire sont schématisées : les points rouges et bleus symbolisent respectivement l’étoile à neutrons et son compagnon (une naine blanche, ici) et le faisceau jaune représente le signal émis par le pulsar dans la direction de la Terre. Le pic à 0,25 tour correspond au retard maximal dans les temps d’arrivée des pulses, lié au passage du compagnon à proximité de la ligne Terre-pulsar. Figure tirée de [Demorest *et al.* \(2010\)](#).

des paramètres képlériens et de deux paramètres post-képlériens¹, on peut alors déterminer les masses M_p et M_c séparément. Cette méthode permet d’atteindre une précision de mesure très élevée : les masses des deux étoiles à neutrons formant le système binaire² PSR B1913+16 ont ainsi été mesurées à $1,4398 \pm 0,0002 M_\odot$ et $1,3886 \pm 0,0002 M_\odot$ ([Weisberg *et al.*, 2010](#)).

Il faut toutefois noter que la mesure des paramètres post-képlériens n’est possible que dans de très rares cas, lorsque le système binaire est suffisamment serré, s’il est constitué d’orbites assez excentriques ou s’il est approximativement observé par la tranche ($i \sim 90^\circ$). Ainsi, pour l’immense majorité des systèmes binaires observés, l’étude des temps d’arrivée ne donne accès qu’à la fonction de masse f_p . Néanmoins, si le compagnon est une naine blanche ou une étoile de la séquence principale, il est parfois possible d’obtenir des relations supplémentaires entre M_p et M_c en étudiant le flux émis par le compagnon par spectroscopie optique. Cela conduit, en général, à des incertitudes de mesure plus importantes qu’en utilisant la méthode précédente.

Binaires X. Une binaire X est composée d’une étoile à neutrons (ou éventuellement d’un trou noir) qui accrete de la matière depuis une étoile compagnon. Ces sources sont brillantes dans le domaine des rayons X à cause du processus d’accrétion. On distingue les binaires X de forte masse (*High-Mass X-ray Binaries* ou *HMXBs*) pour lesquelles $M_p < M_c$

1. Les paramètres post-képlériens supplémentaires permettent de tester la relativité générale, voir [Kramer *et al.* \(2006\)](#), par exemple.

2. Les pulsars sont référencés par l’acronyme PSR pour *Pulsating Source of Radio*, suivi d’une lettre qui désigne l’équinoxe (B pour celui de 1950 et J pour celui de 2000) et enfin l’ascension droite et la déclinaison du pulsar.

et les binaires X de faible masse (*Low-Mass X-ray Binaries* ou *LMXBs*) correspondant à $M_p > M_c$. Dans le cas des binaires X de forte masse, le compagnon est en général une étoile massive de type O ou B. L'étude des émissions radio, optique et X de ces systèmes fournit les fonctions de masse du pulsar et de son compagnon, f_p et f_c . Il n'est donc pas nécessaire de recourir aux effets relativistes, qui sont très faibles compte tenu de la distance entre les deux étoiles. Par ailleurs, les HMXBs sont fréquemment des systèmes à éclipse, à cause de la taille du compagnon. L'absence ou la présence d'éclipse apporte une contrainte supplémentaire sur l'inclinaison i , ce qui permet alors d'estimer la masse du pulsar. Les binaires X de faible masse présentent, quant à elles, beaucoup de variabilité dans leur émission, que l'on observe sous la forme de sursauts X ou d'oscillations quasi-périodiques. L'étude spectrale de ces sursauts X peut fournir une estimation simultanée de la masse et du rayon du pulsar (voir section 1.1.2). Il faut toutefois noter que les mesures de masses effectuées sur des binaires X conduisent, en général, à des erreurs sur la détermination de la masse de l'étoile à neutrons supérieures à 20%.

La détermination des masses des étoiles à neutrons appartenant à différents systèmes binaires est résumée sur la figure 1.2. Les masses s'étendent entre $\sim 1 M_\odot$ et $\sim 2 M_\odot$, avec une moyenne pondérée par les erreurs (traits tiretés) se situant autour de $1,4 M_\odot$.

Jusqu'à présent, les deux étoiles à neutrons les plus massives que l'on a observées font partie de systèmes binaires avec un compagnon naine blanche. Pour le système PSR J1614–2230, la masse du pulsar a été évaluée à $1,928 \pm 0,017 M_\odot$ (Fonseca *et al.*, 2016), par mesure de retard Shapiro (voir Fig. 1.1 et Demorest *et al.* (2010)). Dans le second cas, la détermination de f_p couplée à un modèle de structure de naine blanche a conduit à une masse de $2,01 \pm 0,04 M_\odot$ pour l'étoile à neutrons présente dans PSR J0348+0432 (Antoniadis *et al.*, 2013). Nous verrons dans la section 1.4 que ces mesures apportent des contraintes très importantes sur la composition interne des étoiles à neutrons. Il faut noter qu'on dispose également d'indications d'étoiles à neutrons encore plus massives, notamment dans des binaires X (voir Fig. 1.2), mais les incertitudes liées à ces mesures de masse demeurent très importantes.

D'un autre côté, les observations d'étoiles à neutrons de faible masse peuvent également nous renseigner sur le mécanisme responsable de leur formation (voir section 1.2.1). Les modèles actuels d'effondrement prédisent que les étoiles à neutrons nouvellement formées ont une masse minimum de l'ordre de $0,9 - 1,2 M_\odot$ (voir par exemple Strobel *et al.* (1999)). La masse de ces astres peut augmenter par la suite, par retombée de matière après l'explosion de supernova ou par accrétion depuis une étoile compagnon, mais elle ne peut décroître, sauf lors d'événements catastrophiques tels que la fusion d'étoiles à neutrons. Les mesures actuelles semblent en accord avec ces modèles : une étoile à neutrons de masse $1,230 \pm 0,007 M_\odot$ a été récemment observée (Ferdman *et al.*, 2014) et une autre de masse plus faible ($1,174 \pm 0,004 M_\odot$) pourrait également avoir été détectée (Martinez *et al.*, 2015).

1.1.2 Rayon

Contrairement aux mesures de masse, on ne dispose pour le moment que d'estimations peu précises du rayon d'une étoile à neutrons. Plusieurs phénomènes physiques observés

1.1 Observables

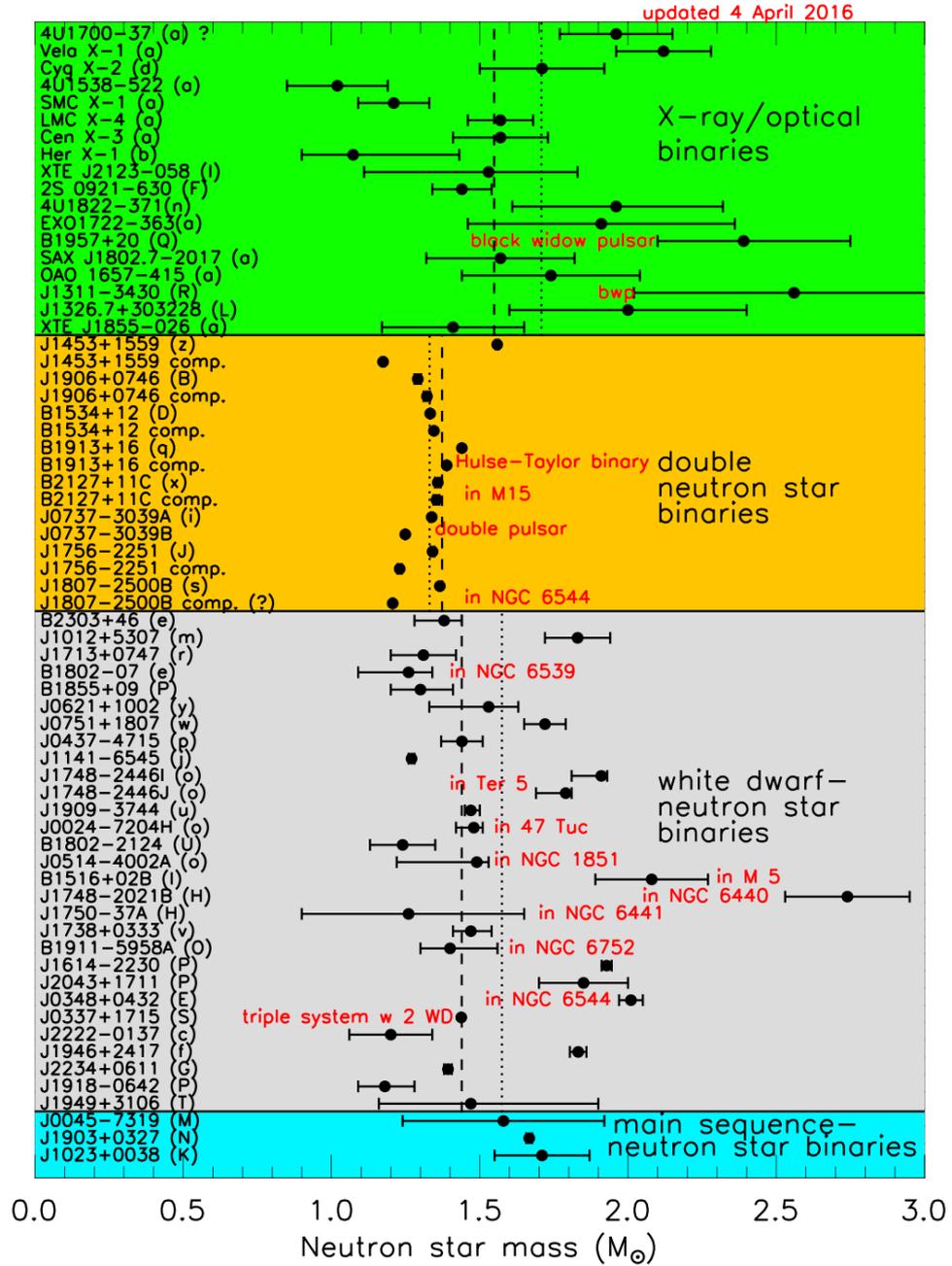


FIGURE 1.2 – **Compilation des masses d'étoiles à neutrons observées dans différents systèmes binaires.** Le cadre vert recense les mesures effectuées sur des binaires X. Les autres mesures sont classées selon le type du compagnon (étoile à neutrons, naine blanche ou étoile de la séquence principale). Les masses sont données en unité de masse solaire M_{\odot} et les barres d'erreur correspondent à une incertitude de $1-\sigma$. Source et références disponibles sur <https://stellarcollapse.org/nsmasses>. Voir également Lattimer (2012).

sont cependant susceptibles d’apporter des contraintes sur le rayon ou sur une combinaison entre le rayon et la masse. Parmi ces observations, on peut citer : l’émission thermique (en rayons X) de surface des étoiles à neutrons isolées ou appartenant à des binaires X de faible masse en phase de quiescence (*qLMXBs*), les sursauts X de type I et les oscillations quasi-périodiques détectés dans des LMXBs, les profils des pulses émis par des pulsars X ou encore les oscillations stellaires associées aux éruptions géantes (*giant flares*) détectées dans des magnétars (des étoiles à neutrons avec un champ magnétique très intense). Jusqu’à présent, les deux premières méthodes ont été les plus couramment utilisées pour estimer le rayon des étoiles à neutrons.

Émission thermique. Les mesures spectroscopiques du rayon d’une étoile à neutrons sont basées sur la détermination du rayon apparent de la source à partir du flux reçu sous forme thermique, de la température effective de surface de l’étoile (déduite de son spectre) et de la distance de l’objet. Il faut ensuite relier ce rayon apparent au rayon de l’étoile, car les étoiles à neutrons agissent comme des lentilles gravitationnelles pour leur propre rayonnement. Cela introduit une correction dépendant de la masse de l’objet. La détermination du rayon est compliquée par la rotation de l’étoile (dont la vitesse peut être très élevée, voir section 1.1.3), la présence de rayonnement non-thermique (lié à la magnétosphère de l’étoile ou à la présence d’un disque pour un système accrétant), le champ magnétique stellaire (qui crée des anisotropies de température à sa surface) et le fait que la distance de l’étoile est généralement très mal connue.

Sursauts X de type I. Ils sont associés à des explosions thermonucléaires à la surface de l’étoile à neutrons. La luminosité augmente rapidement (sur des temps de l’ordre de la seconde) avant de décroître pendant 10 à 100 s. Dans certains cas, la luminosité peut dépasser la luminosité d’Eddington, pour laquelle la pression de radiation est suffisante pour contrebalancer les forces gravitationnelles, et la photosphère de l’étoile à neutrons s’étend, ce qui a une signature observationnelle claire sous la forme d’une seconde augmentation de la luminosité (Lewin *et al.*, 1993). À partir du rayon apparent (obtenu comme précédemment), de la luminosité d’Eddington mesurée lors de la phase d’expansion de la photosphère et de la distance de l’étoile, il est alors possible d’estimer sa masse et son rayon.

La figure 1.3 regroupe quelques estimations récentes du rayon d’une étoile à neutrons de $1,4 M_{\odot}$, obtenues sur divers systèmes en utilisant les méthodes précédemment citées. Ces méthodes faisant appel à de nombreuses hypothèses et grandeurs incertaines, les mesures actuelles de rayons sont peu précises mais suggèrent toutefois des valeurs de l’ordre de $\sim 9 - 14$ km. Les incertitudes demeurent encore trop grandes pour que l’observation des rayons apporte des contraintes sur l’intérieur des étoiles à neutrons aussi fortes que celles liées aux masses. Cependant, un véritable effort est actuellement réalisé pour améliorer ces mesures. Par exemple, on estime que les futures observations en rayons X, réalisées par les projets spatiaux NICER¹ (Arzoumanian *et al.*, 2014; Gendreau *et al.*, 2016) et Athena+² (Nandra *et al.*, 2013), pourraient déterminer les rayons avec une incertitude d’environ 5%, soit 500 m. De même, la détection prochaine d’ondes gravitationnelles

1. <https://www.nasa.gov/nicer>.

2. <http://www.the-athena-x-ray-observatory.eu/>.

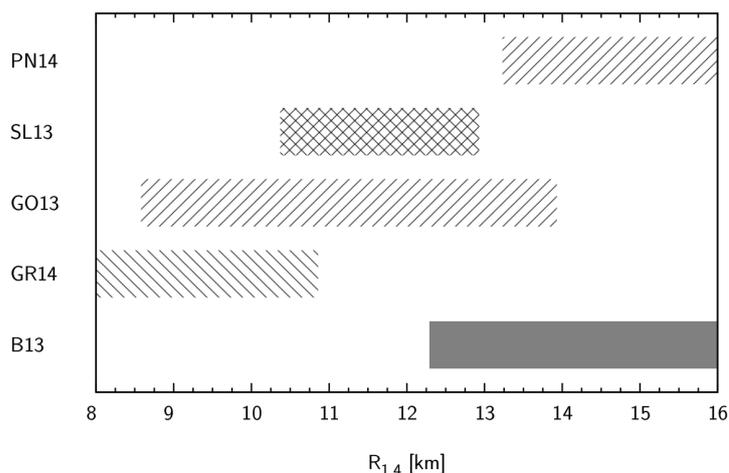


FIGURE 1.3 – **Compilation d’estimations récentes du rayon d’une étoile à neutrons de $1,4 M_{\odot}$.** Les estimations ‘GO13’ (Güver & Özel, 2013) et ‘PN14’ (Poutanen *et al.*, 2014) ont été déduites à partir de l’étude de sursauts X observés dans des LMXBs ; ‘GR14’ (Guillot & Rutledge, 2014) provient de l’étude de l’émission thermique de surface associée à différentes qLMXBs ; ‘SL13’ (Steiner *et al.*, 2013) combine les deux méthodes précédentes ; ‘B13’ (Bogdanov, 2013) a été déterminée à partir de la forme des pulses émis par un pulsar milliseconde. Les barres d’erreur sont données à 2σ . Figure tirée de Fortin *et al.* (2015).

associées à la coalescence de deux étoiles à neutrons devrait améliorer les contraintes actuelles sur les rayons de manière significative.

1.1.3 Vitesse de rotation

Grâce au phénomène de pulsar (voir chapitre 2), le paramètre physique d’une étoile à neutrons que l’on peut mesurer avec la plus grande précision est sa vitesse de rotation Ω . Par exemple, la période de rotation ($P = 2\pi/\Omega$) du pulsar PSR J0437–4715 a été mesurée (à un instant bien précis !) à

$$5,757451924362137 \pm 0,000000000000002 \text{ ms}, \quad (1.2)$$

avec une incertitude extrêmement faible (Verbiest *et al.*, 2008). Actuellement, on a détecté des fréquences de rotation ($f = \Omega/(2\pi)$) comprises entre 0,085 Hz et 716 Hz, correspondant à des périodes allant de 1,40 ms à 11,79 s (voir la base de données ATNF ; Manchester *et al.* (2005)). Les étoiles à neutrons sont donc des astres en rotation très rapide : la fréquence de rotation de 716 Hz associée à un rayon de l’ordre de 12 km indique que la vitesse de l’étoile à sa surface, dans le plan équatorial, est de l’ordre de $c/6$, où c est la vitesse de la lumière dans le vide.

Il existe une vitesse de rotation maximale Ω_K , appelée vitesse képlérienne, au-delà de laquelle une étoile à neutrons est détruite car la force centrifuge à sa surface dépasse les forces gravitationnelles. Comme la vitesse képlérienne dépend de la masse et du rayon de l’étoile, la mesure de vitesses de rotation très élevées pourrait également contraindre les

modèles de structure d'étoiles à neutrons. Toutefois, la fréquence mesurée la plus élevée jusqu'à présent, $f \simeq 716$ Hz (Hessels *et al.*, 2006), reste insuffisante pour être vraiment contraignante (Haensel *et al.*, 2009). De plus, il faut remarquer que certains phénomènes complexes, tels que les processus d'accrétion ou l'émission d'ondes gravitationnelles, sont susceptibles de limiter la vitesse de rotation maximale à des valeurs inférieures à la vitesse képlérienne, *i.e.* $\Omega_{\max} < \Omega_K$.

La précision du chronométrage des pulsars est telle qu'il est possible d'observer les très faibles variations de leur vitesse de rotation au cours du temps, à partir des mesures de $\dot{\Omega}$ et parfois même de $\ddot{\Omega}$ (voir section 2.1.1 et annexe A). Ces observations apportent des informations très importantes sur les mécanismes d'émission se déroulant dans la magnétosphère des pulsars (voir section 2.2) et sur les processus physiques liés à l'intérieur des étoiles à neutrons (voir sections 2.3 et 3.2). Notons par ailleurs que le chronométrage d'un réseau de pulsars ultra-stables est susceptible de rendre possible une détection d'ondes gravitationnelles dans un domaine de fréquence situé autour du nanohertz (on parle de *Pulsar Timing Array*, voir e.g. Hobbs *et al.* (2010a)).

1.2 Formation

1.2.1 Supernovæ gravitationnelles

Le devenir des étoiles dépend principalement de leur masse. Si la masse initiale M_0 d'une étoile est supérieure à $\sim 8 M_\odot$, les réactions nucléaires vont se dérouler successivement jusqu'à l'apparition d'un cœur de fer (voir e.g. Prialnik (2009)). S'agissant du noyau le plus stable, il n'est alors plus possible de produire de l'énergie par fusion dans le cœur et nulle réaction nucléaire ne s'y produit. La masse du cœur de fer augmente alors progressivement à cause des réactions du silicium à sa périphérie. Lorsque sa masse atteint la masse de Chandrasekhar, de l'ordre de $1,2 M_\odot$, la pression de dégénérescence des électrons n'est plus suffisante pour contrebalancer la gravité dans le cœur, et celui-ci s'effondre, conduisant au phénomène de supernova gravitationnelle (ou supernova de type II, Ib ou Ic, selon leur classification spectrale).

L'effondrement du cœur dure environ 200 ms, pendant lesquelles l'enveloppe externe n'a pas le temps de réagir. Au cours de cette contraction très rapide, la densité de matière augmente considérablement et les noyaux sont de plus en plus rapprochés. Lorsque la densité atteint la densité nucléaire (voir section 1.4), l'interaction forte entre les nucléons devient violemment répulsive, ce qui conduit à l'apparition d'un terme de pression supplémentaire. Pour certaines étoiles¹, cette pression reste insuffisante pour arrêter l'effondrement du cœur et l'étoile devient un trou noir. En revanche, pour d'autres, la répulsion par interaction forte permet de stopper l'effondrement et une étoile à neutrons se forme

1. Le(s) critère(s) conduisant à l'apparition d'un trou noir ou d'une étoile à neutrons reste(nt) encore mal connu(s) à l'heure actuelle. On a longtemps cru que les étoiles de masse initiale intermédiaire (*i.e.* comprise entre $\sim 8 M_\odot$ et $\sim 25 - 35 M_\odot$) terminaient leur existence sous la forme d'une étoile à neutrons. Il semble toutefois que la réalité soit plus complexe, et que d'autres paramètres (tels que la métallicité, par exemple) pourraient également avoir un rôle important dans le devenir des étoiles massives (voir e.g. Janka (2012)).

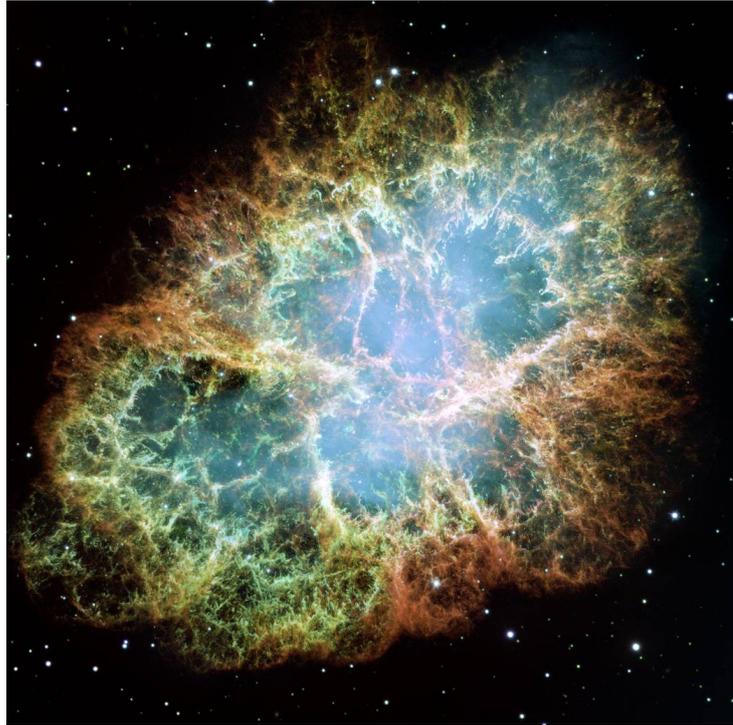


FIGURE 1.4 – **Nébuleuse du Crabe**. Reste d’une supernova observé dans le visible par le télescope spatial Hubble. Crédits : NASA, ESA, J. Hester, A. Loll (ASU).

(voir section 1.2.2). La partie extérieure du cœur en effondrement va alors rebondir sur la proto-étoile à neutrons, ce qui génère une onde de choc qui se propage vers l’extérieur.

On sait aujourd’hui que l’énergie du choc s’épuise avant d’avoir pu atteindre les parties extérieures de l’étoile, car elle est dissipée lors de réactions de photo-dissociation avec la matière traversée et par émission de neutrinos. On pense actuellement que le choc est ensuite revitalisé et redémarre (on observe effectivement des explosions de supernovæ !) grâce un mécanisme complexe mêlant transport de neutrinos, phénomènes de convection et éventuellement action du champ magnétique (voir, par exemple, les articles de revue : [Janka \(2012\)](#) et [Foglizzo *et al.* \(2015\)](#)). Le choc atteint alors l’enveloppe externe qui entre à son tour en expansion, formant ainsi un reste de supernova (voir Fig. 1.4).

L’association entre étoiles à neutrons et supernovæ gravitationnelles, initialement suggérée par [Baade & Zwicky \(1934\)](#), a reçu une confirmation éclatante par la découverte en 1968 du pulsar du Crabe ([Staelin & Reifenstein, 1968](#)) dans la nébuleuse du même nom, qui est un reste de supernova dont l’explosion a été observée sur Terre en 1054 (voir Fig. 1.4). Toutefois, si la détection d’antineutrinos associés à la supernova de 1987 (SN1987A) dans le grand nuage de Magellan a également confirmé la formation d’une région très chaude et très dense lors de l’effondrement, aucun pulsar n’a été détecté dans les restes de cette supernova ([Arnett *et al.*, 1989](#)). On peut invoquer différentes hypothèses pour expliquer cela : l’étoile à neutrons pourrait ne pas émettre comme un pulsar ; la proto-étoile à neutrons pourrait avoir accreté suffisamment de matière pour dépasser sa masse maximale et se serait effondrée en trou noir ; ou l’étoile à neutrons aurait été éjectée au moment de l’explosion, en raison de l’asymétrie probable de celle-ci.

1.2.2 Enrichissement en neutrons

Les raisons pour lesquelles une « étoile à neutrons » se forme au moment où l'effondrement du cœur est stoppé sont les suivantes. Premièrement, à des densités de l'ordre de la densité nucléaire, les noyaux atomiques individuels ne peuvent survivre car la distance typique entre particules est inférieure à la taille d'un noyau lourd. Le milieu est alors constitué grossièrement d'un mélange de protons, neutrons et électrons (voir section 1.5). Ce mélange est le siège des réactions électro-faibles suivantes :

$$\begin{cases} p + e^- \rightarrow n + \nu_e & \text{capture électronique,} \\ n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e & \text{désintégration } \beta, \end{cases} \quad (1.3)$$

où ν_e et $\bar{\nu}_e$ représentent respectivement un neutrino et un antineutrino électroniques. On parle d'équilibre β lorsque ces réactions inverses se déroulent à la même vitesse, ce qu'on traduit par l'égalité $\mu_n = \mu_p + \mu_e$ où μ_n , μ_p et μ_e sont les potentiels chimiques associés aux neutrons, protons et électrons (les potentiels chimiques des neutrinos et antineutrinos sont considérés nuls car ceux-ci s'échappent du système, voir section 1.2.3). Lors de l'effondrement, l'augmentation subite de la densité va déplacer l'équilibre β vers un mélange contenant une grande quantité de neutrons et une faible proportion de protons et électrons, d'où le terme d'« étoile à neutrons ».

Pour comprendre ce processus de neutronisation, considérons simplement un gaz parfait de neutrons, protons et électrons à température nulle (voir Shapiro & Teukolsky (1983) ou Pizzochero (2016), par exemple). Les effets thermiques et les interactions entre particules seront discutés respectivement dans les sections 1.2.3 et 1.4. En désignant par m_X la masse au repos d'une particule X , où $X \in \{n, p, e\}$, la réaction de désintégration β libère une énergie $Q = (m_n - m_p - m_e) c^2 \simeq 0,78 \text{ MeV}$, sous forme d'énergie cinétique portée par les produits de désintégration. À basse densité, les électrons n'ont pas suffisamment d'énergie pour que la réaction inverse se produise : le milieu ne contient aucun neutron à l'équilibre β (voir Fig. 1.5). La présence de neutrons n'est possible qu'au-delà d'une certaine densité seuil ρ_β , de l'ordre de 10^7 g.cm^{-3} , pour laquelle les électrons ont une énergie suffisante pour surmonter le déficit en énergie Q . Au-dessus de ce seuil, la réaction de capture électronique devient beaucoup plus fréquente que la réaction de désintégration β car, pour que cette dernière se réalise, il faut produire un électron au-delà de l'énergie de Fermi E_F^e des électrons (principe d'exclusion de Pauli appliqué à un système de fermions) qui est beaucoup plus élevée que celles des neutrons et des protons. À l'équilibre β , le mélange est donc fortement neutronisé : ainsi, pour des densités de l'ordre de $10^{14} \text{ g.cm}^{-3}$, typiques du cœur des étoiles à neutrons, la proportion relative de neutrons est très grande (voir Fig. 1.5). La présence d'interactions va évidemment modifier les valeurs numériques présentées sur cette figure, mais les conclusions restent inchangées.

Il faut également remarquer que, lorsque le potentiel chimique μ_e des électrons dépasse la masse de repos des muons, de l'ordre de $m_\mu \simeq 105,7 \text{ MeV.c}^{-2}$, des réactions chimiques supplémentaires vont se produire dans le milieu, conduisant à l'apparition stable du muon. De même, pour des densités encore plus élevées, d'autres particules, telles que des pions, kaons ou hypérons, sont susceptibles de coexister dans le milieu, bien qu'elles soient instables dans le vide (voir section 1.5).

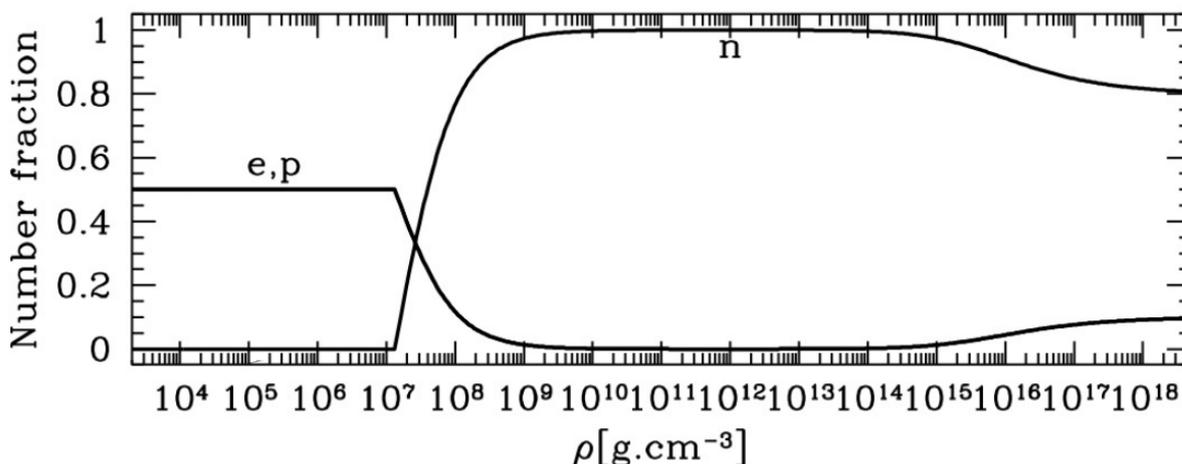


FIGURE 1.5 – **Gaz parfait constitué d’un mélange de neutrons, protons et électrons à température nulle.** Les fractions de neutrons (n_n/n , où $n = n_n + n_p + n_e$) et de protons/électrons ($n_p/n = n_e/n$), sont tracées en fonction de la masse volumique (incluant l’énergie de masse et l’énergie interne) du milieu. Crédits : Frédéric Daigne, IAP ; UPMC.

1.2.3 Matière froide

En fin d’effondrement, la région centrale a une température supérieure à 10¹¹ K et est tellement dense qu’elle est opaque aux neutrinos. L’étoile à neutrons nouvellement formée va alors se refroidir rapidement par émission thermique de neutrinos. Environ 50 s après sa naissance, alors que la température de l’étoile est de l’ordre de 10¹⁰ K, celle-ci devient transparente aux neutrinos (Shapiro & Teukolsky, 1983). L’étoile va alors continuer de se refroidir progressivement. Pendant les $\sim 10^5$ premières années, c’est le processus d’émission de neutrinos qui domine (voir e.g. Yakovlev & Pethick (2004); Page *et al.* (2013)). Ensuite, lorsque la température interne atteint $\sim 10^7$ K, l’émission de photons devient plus efficace. L’évolution du profil de température à l’intérieur d’une étoile à neutrons pendant les 10⁴ ans suivant sa naissance est représentée sur la figure 1.6.

Pour une densité proche de la densité nucléaire ($n_0 \sim 0,16 \text{ fm}^{-3}$, voir chapitre 5), les neutrons ont une énergie de Fermi E_F^n de l’ordre de 60 MeV (Friedman & Stergioulas, 2013), en supposant qu’ils forment un gaz non-relativiste et sans interaction. La température de Fermi associée se situe donc autour de 7×10^{11} K. En outre, la température de Fermi des protons, environ dix fois moins nombreux, est $\sim 2 \times 10^{11}$ K, tandis que celle des électrons, moins massifs et ultra-relativistes, est $\sim 2 \times 10^{12}$ K (les électrons sont dégénérés avant même le processus d’effondrement du cœur de fer). Par conséquent, hormis pendant les premiers instants suivant la naissance d’une étoile à neutrons, les températures à l’intérieur de l’astre sont nettement inférieures à la température de Fermi du milieu (voir Fig. 1.6). Ainsi, bien que les températures soient relativement élevées, la matière à l’intérieur d’une étoile à neutrons peut être considérée comme étant à température nulle.

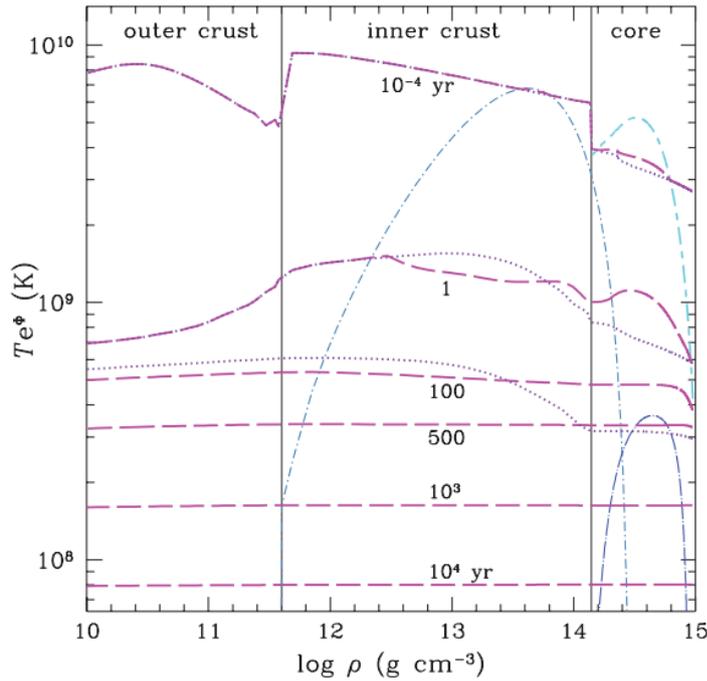


FIGURE 1.6 – **Profils de température en fonction de la densité, pour différentes époques.** Les profils de température apparente (Te^Φ , où Φ est un coefficient métrique donné par la relativité générale) sont représentés à différentes époques (10^{-4} , 1, 100, 500, 10^3 et 10^4 ans) et sont calculés en invoquant (ou non) la présence de matière superfluide dans l'étoile (traits mauves tiretés et pointillés). L'instant initial ($t = 0, Te^\Phi = 10^{10}$ K) correspond au moment où l'étoile devient transparente aux neutrinos. Les courbes de températures critiques en dessous desquelles les neutrons et les protons deviennent respectivement superfluides et supraconducteurs sont tracées en bleu. Figure tirée de [Ho et al. \(2012\)](#).

1.3 Des objets compacts ...

1.3.1 Paramètre de compacité

Le *paramètre de compacité* Ξ d'un astre de masse M et de rayon R ¹ est le nombre sans dimension défini par

$$\Xi = \frac{GM}{Rc^2}. \quad (1.4)$$

Cette quantité donne le rapport de l'énergie gravitationnelle de l'astre à son énergie de masse et mesure également la déviation de la métrique de Schwarzschild par rapport à la métrique de Minkowski au voisinage de la surface du corps. Elle caractérise ainsi à quel point la relativité générale est nécessaire pour décrire l'astre en question. Par exemple, le champ gravitationnel d'une naine blanche ($\Xi \sim 10^{-3}$) et a fortiori celui du Soleil ($\Xi \sim 10^{-6}$) sont très proches du champ gravitationnel newtonien. En revanche, les valeurs

1. En relativité générale, on utilisera plutôt les notions de *masse gravitationnelle* et de *rayon circonférentiel*, qui sont des grandeurs invariantes de jauge (voir section 4.5).

de masse et de rayon observées (voir section 1.1) conduisent à une compacité de l'ordre de $\Xi \sim 0,2$ pour une étoile à neutrons. La relativité générale est donc indispensable pour décrire correctement ces objets. Dans la section suivante, nous détaillons les équations relativistes gouvernant la structure d'une étoile à neutrons statique.

1.3.2 Système Tolman-Oppenheimer-Volkoff

Considérons un espace-temps $(\mathcal{M}, g_{\alpha\beta})$ statique, à symétrie sphérique et asymptotiquement plat¹ pour décrire une étoile à neutrons à l'équilibre, sans rotation. Il existe alors un système de coordonnées $x^\alpha = (t, r, \theta, \varphi)$ dans lequel les coefficients de la métrique s'écrivent

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -N^2 c^2 dt^2 + A^2 dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (1.5)$$

où N et A sont des fonctions de r uniquement, déterminées par l'équation d'Einstein. Cette dernière relie la courbure de l'espace-temps (liée au tenseur métrique $g_{\alpha\beta}$) à son contenu local en masse-énergie, représenté par le tenseur énergie-impulsion $T_{\alpha\beta}$. En modélisant l'intérieur de l'étoile à neutrons par un fluide parfait, pour lequel les effets de viscosité et de conduction thermique sont négligés, le tenseur énergie-impulsion a la forme suivante :

$$T_{\alpha\beta} = (\varepsilon + P)u_\alpha u_\beta + P g_{\alpha\beta}, \quad (1.6)$$

où P et ε désignent respectivement la pression et l'énergie totale par unité de volume (énergie de masse et énergie interne) du fluide mesurées dans son référentiel propre et u^α est la quadri-vitesse du fluide.

Les différentes composantes de l'équation d'Einstein peuvent alors se réécrire sous la forme d'un système d'équations différentielles du premier ordre, appelé système Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) (Tolman, 1939; Oppenheimer & Volkoff, 1939), donné par

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r), \quad (1.7)$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{d\Phi}{dr} \left(\rho(r) + \frac{P(r)}{c^2} \right), \quad (1.8)$$

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{Gm(r)}{r^2} \left(1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2} \right)^{-1} \left(1 + \frac{4\pi P(r)r^3}{m(r)c^2} \right), \quad (1.9)$$

où $\rho = \varepsilon/c^2$ et les quantités $m(r)$ et $\Phi(r)$, qui apparaissent comme des généralisations relativistes de la masse contenue dans une sphère de rayon r et du potentiel gravitationnel en r , sont reliées aux coefficients métriques $N(r)$ et $A(r)$ par les relations

$$N(r) = \exp\left(\frac{\Phi(r)}{c^2}\right) \quad \text{et} \quad A(r) = \left(1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2}\right)^{-1/2}. \quad (1.10)$$

Notons qu'à la limite newtonienne ($c \rightarrow +\infty$, i.e. $Gm(r)/r \ll c^2$ et $P \ll \rho c^2$), les équations (1.7), (1.8) et (1.9) se réduisent aux équations classiques de l'hydrostatique, comme attendu.

1. La condition *asymptotiquement plat* sera décrite dans la section 4.2.2.

Le système TOV doit être complété par la donnée d'une équation d'état, à température nulle, reliant P à ρ :

$$P = P(\rho). \quad (1.11)$$

On peut alors résoudre numériquement le système d'équations (1.7)-(1.9) pour obtenir la structure d'une étoile à neutrons sans rotation. Pour cela, une simple méthode de Runge-Kutta suffit. Les conditions aux limites considérées sont les suivantes :

$$\rho(0) = \rho_c, \quad m(0) = 0 \quad \text{et} \quad \Phi(R) = \frac{c^2}{2} \ln \left(1 - \frac{2GM}{Rc^2} \right), \quad (1.12)$$

où le rayon R de l'astre correspond à la valeur de la coordonnée radiale r pour laquelle $P(r = R) = 0$ (en accord avec l'équilibre local des pressions avec l'extérieur, supposé vide de matière) et la masse gravitationnelle¹ M est donnée par $M = m(R)$. La première condition consiste à choisir la densité de masse-énergie ρ_c au centre de l'étoile, la seconde est équivalente à $dP/dr = 0$ en $r = 0$ et la troisième assure le raccord à la surface de l'étoile entre la solution à l'intérieur de l'astre et celle dans le vide à l'extérieur, donnée par la métrique de Schwarzschild (théorème de Birkhoff; [Misner *et al.* \(1973\)](#)). Quelques exemples de relation masse-densité centrale ($M - \rho_c$) sont présentés sur l'image de gauche de la figure 1.7, pour des équations d'état polytropiques

$$P = Kn^\gamma \quad \text{et} \quad \rho = nm_b + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{P}{c^2}, \quad (1.13)$$

où K est une constante, m_b est la masse au repos des particules considérées, n est la densité volumique de particules et γ est appelé indice adiabatique. Notons que l'on reconnaît la densité de masse au repos ainsi que la densité d'énergie interne dans l'expression (1.13) de la densité de masse-énergie ρ .

1.3.3 Masse maximale

Comme on peut le voir sur la figure 1.7, il existe une différence notable entre le calcul de la structure d'une étoile à neutrons en gravité newtonienne et celui effectué dans le cadre de la relativité générale. En effet, quelle que soit l'équation d'état considérée, le calcul relativiste présente une *masse maximale* M_{\max} , appelée *limite de Oppenheimer-Volkoff*, au-delà de laquelle l'étoile ne peut plus être en équilibre hydrostatique². Cette masse maximale correspond à une certaine valeur de densité centrale ρ_{crit} . Pour $\rho_c > \rho_{\text{crit}}$, où $dM/d\rho_c < 0$, un calcul perturbatif montre que les configurations calculées sont instables vis-à-vis des perturbations radiales.

La valeur de M_{\max} dépend de l'équation d'état. Ainsi, en modélisant l'intérieur d'une étoile à neutrons par un gaz idéal de neutrons dégénérés ou par un mélange de neutrons, protons, électrons et muons dégénérés et sans interaction, on obtient $M_{\max} \simeq 0,7 M_\odot$ ([Oppenheimer & Volkoff, 1939](#)). Cette masse étant trop faible pour rendre compte des observations (voir section 1.1.1), on en déduit que ce n'est pas la pression de dégénérescence des neutrons qui contrebalance la gravité, mais qu'il s'agit plutôt de l'*interaction forte*

1. La différence entre les masses gravitationnelle et baryonique sera précisée dans la section 4.5.

2. L'origine de cette masse maximale est discutée dans [Chamel *et al.* \(2013\)](#), par exemple.

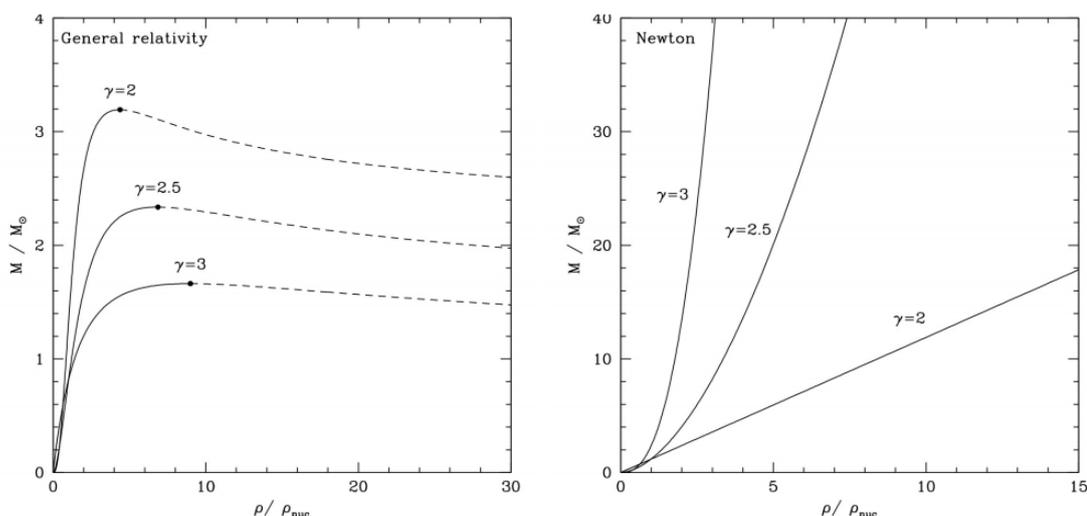


FIGURE 1.7 – **Structure d’une étoile à neutrons avec EoS polytropique.** Relations masse-densité centrale représentées pour différentes équations d’état polytropiques et calculées en relativité générale (à gauche) et en gravité newtonienne (à droite). La densité centrale ρ_c est donnée en unité de la densité nucléaire $\rho_0 \simeq 2,7 \times 10^{14} \text{ g.cm}^{-3}$ (désignée ici par ρ_{nuc}). Les solutions en pointillés correspondent à des configurations instables. Crédits : Frédéric Daigne, IAP ; UPMC.

entre les nucléons. C’est [Cameron \(1959\)](#) qui, le premier, a montré que l’inclusion des forces nucléaires permet d’augmenter considérablement la masse maximale des étoiles à neutrons. Actuellement, la majorité des modèles d’équations d’état compatibles avec les observations d’étoiles à neutrons de $2 M_\odot$ prédisent une masse maximale de l’ordre de $\sim 2 - 2,8 M_\odot$ (voir Fig. 1.9 et [Haensel et al. \(2007\)](#)). Nous verrons dans la section 5.2.1 que M_{\max} dépend également (faiblement) de la vitesse de rotation de l’étoile.

1.4 ... et très denses

Il est possible d’estimer simplement la masse volumique moyenne d’une étoile à neutrons à partir de la formule (newtonienne) classique $\bar{\rho} = 3M/(4\pi R^3)$. En utilisant les valeurs données dans la section 1.1, à savoir $M \sim 1,4 M_\odot$ et $R \sim 12 \text{ km}$, on obtient une masse volumique moyenne de l’ordre de $\bar{\rho} \sim 4 \times 10^{14} \text{ g.cm}^{-3}$, comparable aux densités typiques mesurées dans les noyaux en laboratoire ($\rho_0 \sim 2,7 \times 10^{14} \text{ g.cm}^{-3}$). Le cœur des étoiles à neutrons est donc extrêmement dense.

1.4.1 Équations d’état

La densité à l’intérieur d’une étoile à neutrons varie ainsi de plusieurs ordres de grandeur entre la surface et le cœur, atteignant des valeurs comprises entre 10^{14} et $10^{15} \text{ g.cm}^{-3}$ au centre. Dans la section précédente, nous avons déjà remarqué l’importance de l’équation d’état (EoS), qui décrit la composition interne de l’étoile à neutrons ainsi que les interactions entre ses constituants, dans la détermination de la structure globale de l’étoile. Afin

d'obtenir des configurations réalistes, il faut donc disposer d'une EoS sur toute la gamme de densités rencontrées dans les étoiles à neutrons et dans les conditions extrêmes qui y règnent.

Incertitudes sur la matière à l'intérieur des étoiles à neutrons. Les données expérimentales obtenues jusqu'à présent en laboratoire permettent de déterminer entièrement l'état de la matière dans une étoile à neutrons jusqu'à une densité de l'ordre de 10^{11} g.cm⁻³ (Haensel & Pichon, 1994), ce qui correspond seulement aux régions externes de l'écorce (voir Fig. 1.10). Au-delà, il est nécessaire d'extrapoler des modèles de physique nucléaire en dehors des régimes pour lesquels ils ont été ajustés. Par exemple, les couches les plus internes de l'écorce sont composées de noyaux baignant dans un superfluide de neutrons (voir section 1.5), ce qui n'a pas d'équivalent sur Terre. Les incertitudes sont encore plus grandes dans le cœur de l'étoile, où la densité est plus élevée que dans les noyaux. Dans cette région, la matière est fortement enrichie en neutrons (voir section 1.2.2). Toutefois, les théories de la matière nucléaire homogène infinie sont ajustées sur les propriétés observées des noyaux lourds dont les nombres de neutrons et de protons sont du même ordre.

À ces difficultés d'ordre expérimental s'ajoute l'extrême complexité de la description des interactions entre les nucléons d'un point de vue théorique, qui nécessite de résoudre le problème à N corps en tenant compte non seulement des interactions nucléon-nucléon, mais également des interactions à trois corps. En principe, cette description devrait se faire dans le cadre de la chromodynamique quantique. Toutefois, aucun calcul *ab initio* basé sur cette théorie n'est encore disponible. C'est pourquoi les calculs actuels d'équation d'état reposent sur des *modèles d'interaction*, qui sont partiellement contraints par des expériences en laboratoire.

Modèles d'EoS. Il existe différentes approches pour décrire les interactions nucléaires à l'intérieur d'une étoile à neutrons (voir Haensel *et al.* (2007) ou Oertel *et al.* (2017), pour plus de détails).

Un premier ensemble de modèles repose sur une description microscopique « réaliste » de l'interaction nucléon-nucléon, obtenue à l'aide d'expériences de diffusion dans le vide ou déterminée à partir des propriétés de noyaux contenant peu de nucléons (tels le deutéron). Le problème à N corps peut ensuite être traité par des méthodes basées sur les fonctions de Green ou dans le cadre de la théorie (Dirac-)Brueckner-Hartree-Fock, par exemple. En général, ces méthodes font appel à certaines approximations ou sont limitées par des difficultés techniques.

Une seconde approche, plus phénoménologique, consiste à utiliser des modèles effectifs d'interaction, généralement plus simples que les modèles « réalistes » employés dans les méthodes *ab initio* précédemment citées. Ces interactions dépendent d'un nombre restreint de paramètres, de l'ordre de dix ou quinze, qui sont ajustés sur différentes propriétés de la matière nucléaire. Parmi ces modèles effectifs, on trouve les interactions de type Skyrme ou Gogny, utilisées dans un cadre non-relativiste, ou encore les forces représentées par échange de mésons effectifs, sur lesquelles sont basées les modèles de champ moyen relativiste (voir section 5.1.1). Les équations du problème à N corps sont alors résolues dans l'approximation de champ moyen, ce qui permet d'obtenir une description

relativement précise des noyaux et de la matière nucléaire. Bien que l'extrapolation de ces modèles à des conditions extrêmes doive être considérée avec précaution, les approches phénoménologiques sont les méthodes les plus couramment utilisées pour construire des EoS pertinentes pour décrire l'intérieur des étoiles à neutrons.

1.4.2 Contraintes expérimentales

Les différents modèles d'EoS doivent vérifier un certain nombre de contraintes, principalement obtenues à partir de mesures de propriétés nucléaires effectuées en laboratoire ou déduites d'observations astrophysiques. Ces contraintes permettent de tester différents aspects relatifs aux EoS, de manière indépendante. Dans cette section, nous présentons quelques informations déduites à partir d'expériences sur Terre. Les contraintes données par les observations astrophysiques seront décrites dans la section suivante (voir également la section 1.1).

Développement de l'énergie par baryon. Dans le scénario standard, une étoile à neutrons est formée essentiellement de neutrons, protons et électrons. En considérant que les électrons forment un gaz sans interaction (les forces d'interaction coulombienne étant négligeables par rapport à celles liées à l'interaction forte), la densité d'énergie totale de ce système, à température nulle, est donnée par

$$\varepsilon = n_B E_B(n_n, n_p) + \varepsilon_e(n_e), \quad (1.14)$$

où n_n , n_p et $n_e = n_p$ désignent respectivement les densités particulières de neutrons, protons et électrons (mesurées dans leur référentiel propre), $n_B = n_n + n_p$ est la densité baryonique totale, E_B est l'énergie par baryon et ε_e est la densité d'énergie associée au gaz d'électrons. Les électrons étant dégénérés, ε_e est obtenue simplement à partir du gaz de Fermi relativiste sans interaction. L'énergie par baryon E_B peut être considérée comme une fonction de la densité baryonique totale n_B et du paramètre d'asymétrie d'isospin

$$\alpha_I = \frac{n_n - n_p}{n_n + n_p} = 1 - 2x_p, \quad (1.15)$$

où $x_p = n_p/n_B$ est la fraction de protons. Notons que $\alpha_I = 0$, *i.e.* $x_p = 1/2$, correspond au cas de la matière nucléaire symétrique ($n_n = n_p$) et $\alpha_I = 1$, *i.e.* $x_p = 0$, caractérise la matière pure de neutrons ($n_p = 0$).

Les propriétés de la matière nucléaire sont habituellement caractérisées par certains paramètres intervenant dans le développement de Taylor de l'énergie par baryon E_B en fonction du paramètre¹ α_I :

$$E_B(n_B, \alpha_I) = E_0(n_B) + \alpha_I^2 E_{sym}(n_B) + \mathcal{O}(\alpha_I^4), \quad (1.16)$$

voir e.g. [Haensel et al. \(2007\)](#). L'énergie par baryon de la matière symétrique

$$E_0(n_B) = E_B(n_B, 0) = m_{nuc} - B_{sat} + \frac{1}{2}Kx^2 + \frac{1}{6}Qx^3 + \dots \quad (1.17)$$

1. Les interactions entre nucléons étant symétriques de charge (*i.e.* invariantes par changement neutron-proton, $n_n \leftrightarrow n_p$) en très bonne approximation, les termes associés à des puissances impaires de α_I peuvent être négligés dans le développement de l'énergie par baryon ([Haensel, 1977](#)).

et l'énergie de symétrie

$$E_{sym}(n_B) = J + Lx + \frac{1}{2}K_{sym}x^2 + \dots \quad (1.18)$$

peuvent être développées en fonction de $x = (n_B - n_0)/(3n_0)$, au voisinage de la densité de saturation n_0 . Cette dernière est définie comme la densité pour laquelle la pression de la matière symétrique s'annule, *i. e.*

$$P_{sym}(n_0) = n_B^2 \left. \frac{dE_0}{dn_B} \right|_{n_B=n_0} = 0. \quad (1.19)$$

La quantité m_{nuc} présente dans (1.17) désigne la masse au repos des baryons considérés.

Les coefficients B_{sat} , K , Q , J , L et K_{sym} caractérisent le comportement de l'équation d'état. Toutefois, il faut garder à l'esprit que ces paramètres ne donnent qu'une tendance globale, étant donné qu'ils ne sont pertinents qu'au voisinage de la densité de saturation et pour de la matière nucléaire proche de la matière symétrique.

Contraintes obtenues en laboratoire. Plusieurs données expérimentales permettent de contraindre certains des paramètres présents dans les développements (1.17) et (1.18) (voir, e.g., Tsang *et al.* (2012); Lattimer (2012); Lattimer & Lim (2013); Oertel *et al.* (2017)). Ainsi, différentes propriétés relatives aux noyaux étudiés en laboratoire, telles que leur masse ou leur distribution de densité, conduisent à une *densité de saturation nucléaire*¹ $n_0 = 0,16 \pm 0,01 \text{ fm}^{-3}$ et à une *énergie de liaison à saturation* $B_{sat} = 15,9 \pm 0,3 \text{ MeV}$. L'étude des modes collectifs d'excitation du noyau, appelés résonances géantes, donnent également des informations très importantes sur le *module d'incompressibilité à saturation* K , l'*énergie de symétrie à saturation* J et la *pente de l'énergie de symétrie à saturation* L . Par exemple, l'analyse du phénomène de résonance géante monopolaire isoscalaire, un mode de « respiration » pour lequel les neutrons et les protons du noyau subissent ensemble des mouvements successifs de compression et de dilatation, donne la contrainte² : $K = 240 \pm 10 \text{ MeV}$. De même, l'étude de la résonance géante dipolaire isovectorielle, où le centre de masse des neutrons oscille par rapport à celui des protons, permet de contraindre les coefficients J et L . Ce n'est cependant pas le seul moyen expérimental utilisé pour obtenir des informations sur l'énergie de symétrie. Celle-ci peut également être contrainte à partir de la mesure de la polarisabilité électrique dipolaire du ^{208}Pb , de l'épaisseur de la couche de neutrons à la surface d'isotopes éloignés de la ligne de stabilité β ou grâce à des collisions d'ions lourds. La combinaison de ces différentes mesures conduit à $J = 31 \pm 5 \text{ MeV}$ et $L = 64 \pm 36 \text{ MeV}$. Enfin, le *coefficient de dissymétrie à saturation* Q et le *coefficient d'incompressibilité de symétrie à saturation* K_{sym} sont difficilement accessibles avec des expériences de laboratoire. Les modèles actuels d'EoS donnent $-600 \text{ MeV} \lesssim Q \lesssim 200 \text{ MeV}$ et $-500 \text{ MeV} \lesssim K_{sym} \lesssim 100 \text{ MeV}$.

1. Les valeurs présentées ici, ainsi que leurs incertitudes respectives, sont tirées de Typel *et al.* (2013).

2. Notons que Khan & Margueron (2013) ont récemment montré que l'énergie du centroïde de la résonance géante monopolaire isoscalaire est corrélée à K et Q , de sorte que l'extraction du module d'incompressibilité pourrait être plus complexe que prévu.

1.4.3 Diagramme masse-rayon

Compte tenu des difficultés théoriques mentionnées dans la section 1.4.1 et des incertitudes expérimentales présentées dans la section 1.4.2, il existe une large quantité d'EoS disponibles pour décrire l'intérieur des étoiles à neutrons. On caractérise alors chacune de ces EoS par les profils de pression qu'elles prédisent en fonction de la densité baryonique, dans le cas de la matière nucléaire symétrique et pour la matière pure de neutrons, voir Fig. 1.8.

Plus généralement, la pression du milieu va dépendre des densités particulières des différentes espèces présentes à l'intérieur de l'étoile. Ainsi, pour un mélange homogène de neutrons, protons et électrons, on aura $P = P(n_n, n_p, n_e)$. Pour obtenir une relation du type (1.11), où la pression ne dépend que d'une seule variable, il est alors nécessaire de disposer de relations supplémentaires entre les densités particulières. Ces dernières sont données par l'hypothèse d'électroneutralité du milieu et en supposant que celui-ci est à l'équilibre β , par exemple.

Il est alors intéressant de tracer le *diagramme masse-rayon* ($M - R$) correspondant à chaque EoS (voir Fig. 1.9). Pour des configurations d'étoiles à neutrons statiques, ce diagramme s'obtient en faisant varier la densité centrale ρ_c et en traçant, pour chaque valeur de ρ_c , la masse gravitationnelle en fonction du rayon, ces deux grandeurs étant obtenues à partir de la résolution numérique du système TOV. Il est clair que les différentes prescriptions pour l'interaction nucléon-nucléon (extrapolées à haute densité à partir des propriétés de la matière nucléaire ordinaire par différentes approches théoriques reposant sur certaines approximations) vont conduire à des profils de pression en fonction de la densité très variés (Fig. 1.8) et donc à des diagrammes masse-rayon différents (Fig. 1.9). L'influence de la vitesse de rotation sur le diagramme masse-rayon sera présentée dans la section 5.2.1.

Les modèles récents d'EoS prédisent une masse maximale M_{\max} comprises entre $\sim 1,4$ et $\sim 2,8 M_{\odot}$ (voir Fig. 1.9). Toutefois, pour qu'une EoS soit valable, il est indispensable que la masse maximale qui lui est associée soit compatible avec les masses d'étoiles à neutrons mesurées les plus élevées, qui sont de l'ordre de $2 M_{\odot}$ (voir section 1.1.1). Cette forte contrainte a déjà permis d'éliminer plusieurs EoS non standards, en particulier plusieurs modèles d'étoiles riches en hypérons ou en kaons (voir section 1.5). En revanche, les mesures actuelles de rayon sont encore trop imprécises pour apporter de réelles contraintes sur le diagramme masse-rayon et donc sur l'EoS (voir section 1.1.2). À terme, les mesures précises et conjointes de la masse et du rayon d'une même étoile à neutrons pourraient apporter des informations cruciales sur la matière présente à l'intérieur de ces astres.

1.5 Structure

Une étoile à neutrons présente une structure stratifiée relativement complexe. Outre la magnétosphère qui entoure l'étoile (voir section 2.1.3), on distingue trois régions principales : la surface avec éventuellement une atmosphère, l'écorce solide et le cœur (Haensel *et al.*, 2007). Une représentation schématique de l'intérieur d'une étoile à neutrons est donnée sur la figure 1.10.

Étoiles à neutrons

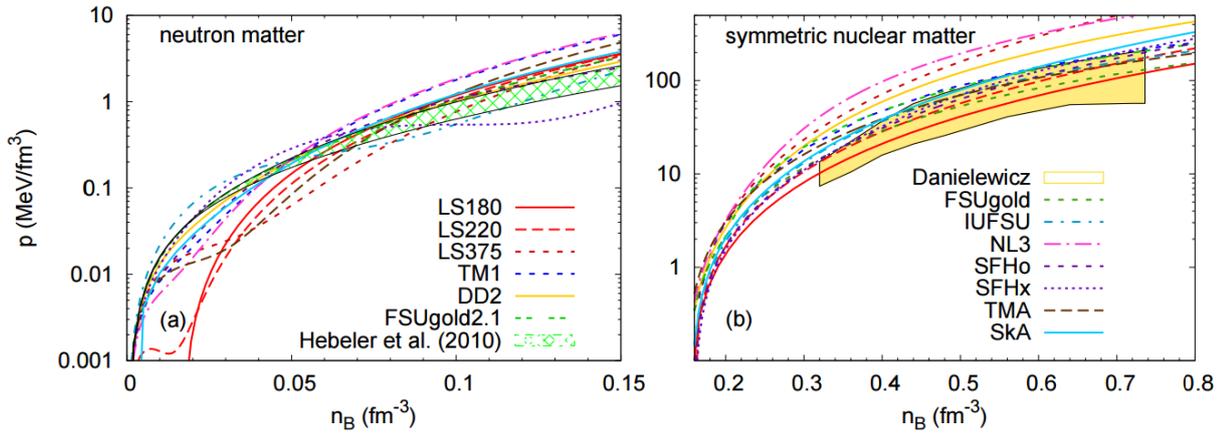


FIGURE 1.8 – **Profils de pression en fonction de la densité baryonique pour différents modèles d’EoS.** Le cas de la matière pure de neutrons ($\alpha_I = 1$) est présenté à gauche, tandis que celui de la matière nucléaire symétrique ($\alpha_I = 0$) est représenté à droite. Ces profils sont comparés à des résultats théoriques obtenus par [Hebeler *et al.* \(2013\)](#) pour la matière de neutrons et à certaines contraintes expérimentales déduites par [Danielewicz *et al.* \(2002\)](#) pour la matière symétrique. Figure tirée de [Oertel *et al.* \(2017\)](#).

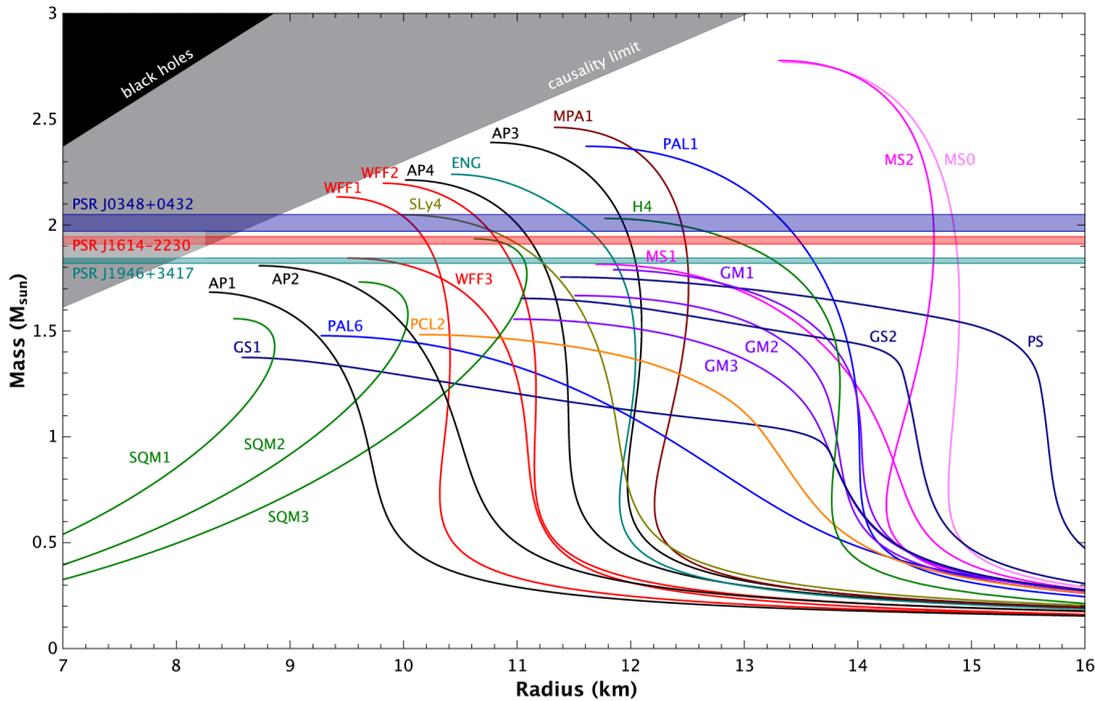


FIGURE 1.9 – **Diagrammes masse-rayon relatifs à différents EoS.** Les barres horizontales correspondent aux masses mesurées d’étoiles à neutrons les plus élevées jusqu’à présent. Les domaines noir et gris représentent des zones interdites par des considérations théoriques (causalité, par exemple). Notons la forme caractéristique des profils associés aux étoiles de quarks (courbes vertes sur la gauche). Source : http://www3.mpifr-bonn.mpg.de/staff/pfreire/NS_masses.html (voir également [Lattimer & Prakash \(2001\)](#)).

1.5.1 Atmosphère et surface

Atmosphère. Une étoile à neutrons est probablement entourée d'une fine atmosphère dont l'épaisseur varie de quelques millimètres à quelques centimètres selon la température de l'étoile. La présence de cette atmosphère est susceptible de perturber le rayonnement thermique émis à la surface de l'étoile à neutrons. La modélisation du spectre d'émission thermique, combinée aux observations en rayons X effectuées par les satellites Chandra et XMM-Newton, permet d'obtenir des renseignements sur la température de surface de l'étoile, la composition chimique de l'atmosphère, l'amplitude et la géométrie du champ magnétique de surface et le rayon de l'étoile. L'atmosphère pourrait être composée essentiellement d'hydrogène, d'hélium ou encore de carbone (Ho & Heinke, 2009). Lorsque le champ magnétique est suffisamment intense ($B_s \gtrsim 10^{10}$ T pour une température de surface $T_s \sim 10^6$ K), la configuration énergétiquement la plus favorable pourrait consister en une couche liquide ou solide d'hydrogène sans atmosphère (Ruderman, 1971), ce qui pourrait expliquer l'absence de raies dans le spectre de certaines étoiles à neutrons.

Surface. Il s'agit de la couche la plus externe de l'étoile, d'une épaisseur de quelques mètres, où la densité est inférieure à la densité critique de neutronisation $\rho_\beta \sim 10^6 - 10^7$ g.cm⁻³ (voir Fig. 1.5). La surface est constituée d'un océan de métal liquide ou d'un solide amorphe de noyaux de ⁵⁶Fe, car la température y est proche de la température de solidification du plasma, T_{crist} (Haensel *et al.*, 2007). Les électrons contenus dans la surface sont non-relativistes. Au fur et à mesure que l'on descend en profondeur dans l'étoile, les effets thermiques et magnétiques sont de moins en moins prononcés.

1.5.2 Écorce

La température de solidification de l'écorce d'une étoile à neutrons est estimée à $T_{crist} \sim 10^8 - 10^9$ K, pour une densité supérieure à $\sim 10^9$ g.cm⁻³ (Chamel & Haensel, 2008). Comme ces températures sont atteintes rapidement après la naissance des étoiles à neutrons (voir section 1.2.3 et Fig. 1.6), une *écorce solide* est susceptible de se former (on parle aussi de *croûte*). Bien que sa taille soit beaucoup plus petite que celle du cœur, l'écorce des étoiles à neutrons est un élément très important pour la physique de ces astres. En effet, la croûte est une véritable interface entre la surface que l'on peut observer et le cœur, inaccessible aux observations : chaque phénomène physique se déroulant au centre de l'étoile est donc affecté par l'écorce qu'il doit traverser avant d'être observé. De plus, certains phénomènes détectés, tels que les oscillations quasi-périodiques ou éventuellement les événements de glitches, pourraient tirer leur origine de la croûte elle-même.

Écorce externe. L'écorce externe correspond à la région de l'étoile où la densité est comprise entre ρ_β et $\rho_{ND} \sim 4 \times 10^{11}$ g.cm⁻³. Son épaisseur est de l'ordre de quelques centaines de mètres. La croûte externe est formée d'un solide coulombien de noyaux sphériques, arrangés selon un réseau cubique face centré de manière à réduire la répulsion coulombienne, en équilibre β avec un gaz d'électrons relativistes (Haensel *et al.*, 2007; Chamel & Haensel, 2008). Dans les couches les moins profondes, la composition des noyaux est voisine de celle des noyaux ordinaires. Toutefois, les noyaux sont de plus en plus lourds

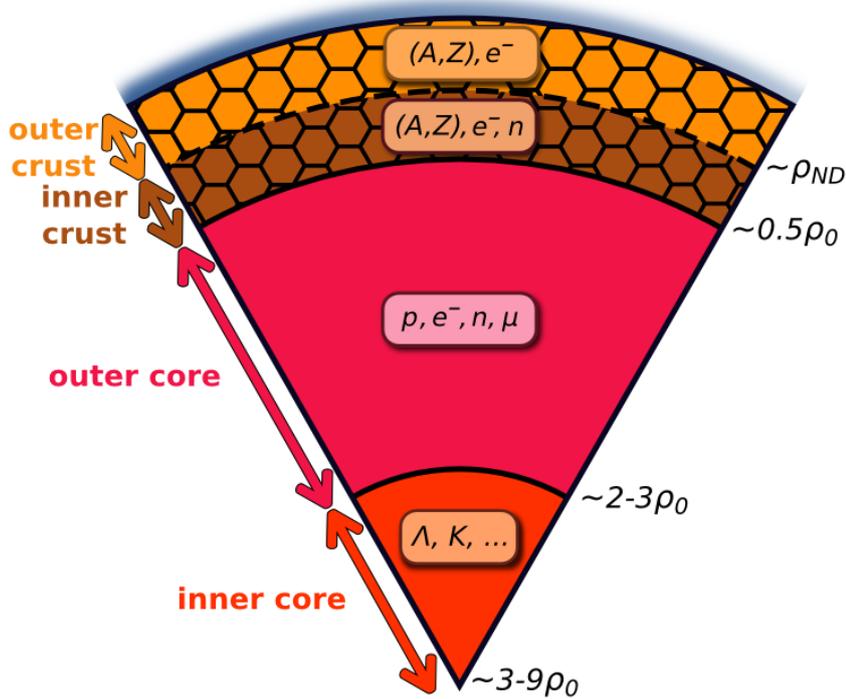


FIGURE 1.10 – Représentation schématique des différentes couches à l’intérieur d’une étoile à neutrons. La densité $\rho_{ND} \simeq 4 \times 10^{11} \text{ g.cm}^{-3}$ correspond à la densité au-delà de laquelle les neutrons s’échappent des noyaux. La densité $\rho_0 \simeq 2,7 \times 10^{14} \text{ g.cm}^{-3}$ désigne la densité de saturation nucléaire.

et enrichis en neutrons à mesure que la profondeur augmente, car l’augmentation de la densité favorise le processus de capture électronique (voir le phénomène de neutronisation discuté dans la section 1.2.2). Jusqu’à une densité de l’ordre de $\sim 10^{11} \text{ g.cm}^{-3}$, tous les noyaux depuis le ^{56}Fe en surface jusqu’à l’isotope ^{80}Zn en profondeur existent sur Terre ou en laboratoire. Au-delà, la composition des noyaux doit être extrapolée à partir des masses des noyaux existants.

Écorce interne. Lorsque la densité atteint $\rho_{ND} \sim 4 \times 10^{11} \text{ g.cm}^{-3}$, le potentiel chimique associé à un neutron dans un noyau devient supérieur à l’énergie de masse $m_n c^2$ (Chamel & Haensel, 2008). Les neutrons peuvent alors s’échapper des noyaux, ce qui conduit à l’apparition d’un gaz de neutrons libres. La densité de l’écorce interne, dont l’épaisseur est d’environ un kilomètre, varie entre ρ_{ND} et $\sim 0,5 \times \rho_0$, où $\rho_0 \sim 2,7 \times 10^{14} \text{ g.cm}^{-3}$ désigne la densité de saturation nucléaire. La matière présente dans cette région est composée d’électrons, de neutrons libres et de noyaux atomiques très riches en neutrons. La fraction de neutrons libres augmente avec la profondeur. L’étude des propriétés de la croûte interne est complexe, car il n’existe pas sur Terre de phases dans lesquelles des noyaux coexistent avec des neutrons libres. De plus, les noyaux étudiés en laboratoire sont essentiellement symétriques. Notons toutefois que l’étude des noyaux à halos de neutrons, éloignés de la vallée de la stabilité β , fournit des indications importantes sur la matière asymétrique. D’un point de vue théorique, les neutrons libres sont

supposés s'apparier pour former un superfluide (voir section 3.1.2). Les noyaux sont alors immergés dans un gaz d'électrons et un superfluide de neutrons. À l'interface avec le cœur, pour des densités proches de $0,5 \times \rho_0$, on pense que les noyaux sont soumis à de telles pressions qu'ils sont fortement déformés en cylindres ou en plaques (voir e.g. [Ravenhall et al. \(1983\)](#); [Chamel & Haensel \(2008\)](#)).

1.5.3 Cœur

Le cœur des étoiles à neutrons, qui représente jusqu'à 99 % de la masse de ces objets, reste encore relativement mal connu (voir [Haensel et al. \(2007\)](#), par exemple).

Cœur externe. Lorsque la densité atteint $\sim 0,5 \times \rho_0$, la pression est tellement élevée que les noyaux se dissolvent en protons et en neutrons. Le cœur externe, qui s'étend sur plusieurs kilomètres, est ainsi formé d'un mélange homogène de neutrons, protons et électrons dégénérés en équilibre β . Pour une densité de l'ordre de 10^{14} g.cm⁻³, cet équilibre se traduit par la présence d'une très grande quantité de neutrons par rapport aux autres constituants (voir Fig. 1.5). Les calculs microscopiques suggèrent que les neutrons sont superfluides et les protons supraconducteurs (voir section 3.1). Pour des densités supérieures à $\sim 2 \times \rho_0$, l'énergie de Fermi des électrons devient proche de l'énergie de masse du muon : un fluide de muons est alors susceptible d'apparaître.

Cœur interne. Le cœur interne, où $\rho \gtrsim (2 - 3) \times \rho_0$, occupe les régions centrales des étoiles à neutrons massives (pour les étoiles de faible masse, le cœur externe s'étend jusqu'au centre). L'épaisseur du cœur interne pourrait atteindre plusieurs kilomètres et sa densité centrale pourrait s'élever à $\rho_c \gtrsim 10 \times \rho_0$. La composition de cette région extrêmement dense est très incertaine et différents scénarios ont été envisagés, prédisant l'apparition de particules supplémentaires suite à une réorganisation des constituants internes des neutrons et des protons (les quarks). Les modèles les plus courants sont ([Haensel et al., 2007](#); [Oertel et al., 2017](#)) :

- *hypéronisation de la matière.* À très haute densité, le potentiel chimique des neutrons peut excéder la masse d'autres baryons, conduisant par exemple à l'apparition d'hypérons Λ et Σ . Toutefois, les interactions entre nucléons et hypérons restent très incertaines et les données expérimentales sont limitées par le fait que les hypérons sont instables dans les conditions de laboratoire.
- *condensation de mésons.* Les régions centrales d'une étoile à neutrons pourraient contenir un condensat de Bose-Einstein de pions ou de kaons.
- *transition de phase vers un plasma de quarks libres et de gluons.* La matière présente au centre des étoiles à neutrons pourrait être suffisamment comprimée pour que les nucléons fusionnent en une soupe de gluons et de quarks (*up*, *down* et *strange*) déconfinés.

Si ces différents modèles restent très spéculatifs, il est intéressant de remarquer que l'apparition d'une nouvelle phase est accompagnée, en général, d'une diminution de la masse maximale prédite par l'EoS. C'est pourquoi l'observation d'étoiles à neutrons de $2 M_\odot$ a permis d'éliminer plusieurs EoS non standards (voir section 1.4.3).

Notons enfin que l'existence d'*étoiles étranges* (ou *étoiles de quarks*), constituées de quarks *up*, *down* et *strange*, a également été avancée. Ces modèles reposent sur l'hypothèse d'E. Witten selon laquelle l'état le plus stable de la matière serait formé d'un ensemble de ces trois quarks (Witten, 1984). Cet état serait toutefois séparé de l'état ordinaire par une barrière de potentiel très élevée, de telle sorte que seuls des phénomènes astrophysiques de très haute énergie pourraient l'atteindre. La structure interne des étoiles étranges est très différente de celle des étoiles à neutrons. En particulier, la densité de surface des étoiles de quarks est énorme, de l'ordre de 10^{15} g.cm⁻³, et n'est pas très éloignée de la densité au centre de ces astres (voir, e.g., Gourgoulhon *et al.* (1999)). En revanche, les masses maximales obtenues ne sont pas très différentes de celles prédites pour les étoiles à neutrons (voir Fig. 1.9).

Glitches des pulsars

Sommaire

2.1	Le phénomène de pulsar	29
2.2	Ralentissement des pulsars	37
2.3	Irrégularités de la période	44
2.4	Premiers modèles de glitches	51

2.1 Le phénomène de pulsar

Si leur rayonnement thermique de surface est relativement difficile à détecter, la grande majorité des étoiles à neutrons sont observées grâce au phénomène de « pulsar ». Depuis la première observation d'un pulsar radio en 1967 par J. Bell et A. Hewish (Hewish *et al.*, 1968), plus de 2500 pulsars ont été détectés dans notre galaxie (Manchester *et al.*, 2005), non seulement en radio, mais également en visible, en rayons X et en rayons γ (Abdo *et al.*, 2013; Caraveo, 2014).

2.1.1 Données observationnelles

Succession périodique de pulses. Un pulsar radio se caractérise par une émission périodique avec une période de grande stabilité. Un exemple de signal détecté est donné sur la figure 2.1. L'amplitude et la forme du pulse peuvent varier d'un pulse à l'autre, comme le montre la figure 2.2. Ces variations sont dues à l'aspect hautement variable de la structure émettrice (la magnétosphère du pulsar, voir section 2.1.3). Toutefois, en moyennant ces pulses sur un grand nombre de périodes, de l'ordre d'une centaine au moins, on obtient un pulse *moyen* très stable (Lorimer & Kramer, 2005; Cognard, 2011). Ce pulse moyen est une caractéristique propre à chaque pulsar (voir Fig. 2.2).

Le pulsar de J. Bell et A. Hewish présente une période P d'environ 1,337 s (voir Fig. 2.1). Parmi les pulsars les plus étudiés, on compte le pulsar du Crabe (PSR B0531+21), découvert dans la nébuleuse du Crabe (voir Fig. 1.4), et le pulsar de Vela (PSR B0833-45), situé dans la constellation des Voiles. Les périodes respectives de ces pulsars sont 33 ms et

Glitches des pulsars

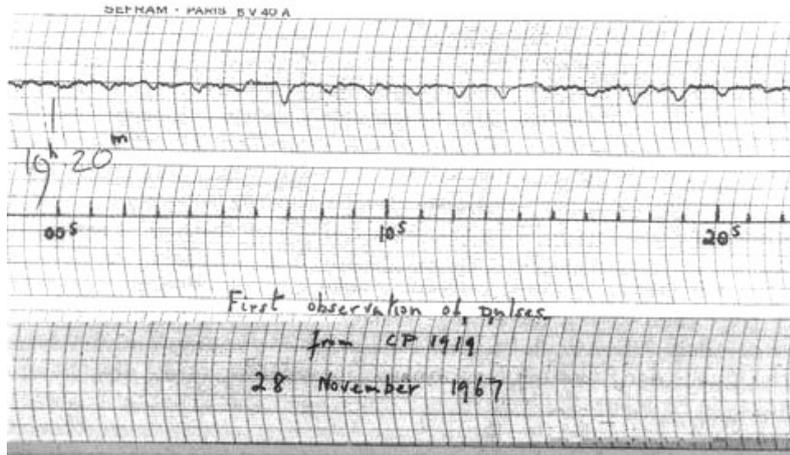


FIGURE 2.1 – **Première détection d'un pulsar radio.** Enregistrement du signal émis par le pulsar PSR B1919+21 (anciennement nommé CP 1919, pour *Cambridge Pulsar*) découvert par J. Bell, datant du 28 novembre 1967. La courbe du haut représente l'évolution du signal radio (observé à 81,5 MHz) en fonction du temps. Une augmentation de la puissance reçue (un pulse) est associée à un pic orienté vers le bas. La seconde ligne correspond à une échelle de temps de 20 s. La période du pulsar est d'environ 1,337 s. Figure tirée de Hewish (1975).

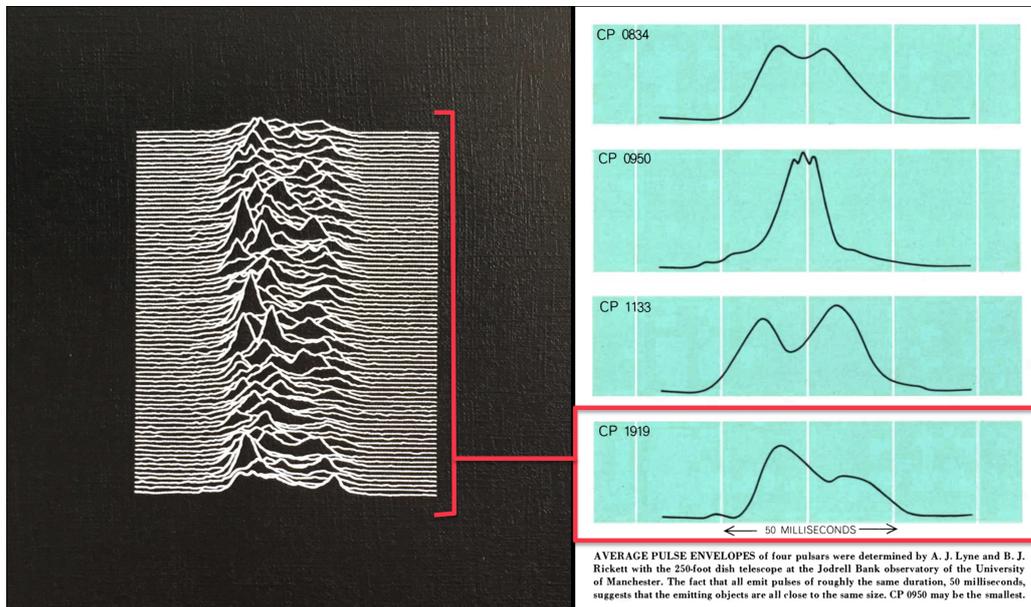


FIGURE 2.2 – **Variabilité des pulses et pulses moyens.** *Gauche* : Pulses successifs reçus depuis le pulsar PSR B1919+21, à 318 MHz. Le temps augmente de la gauche vers la droite et du bas vers le haut. On note la grande variabilité du profil des pulses individuels. Pour l'anecdote, cette figure, extraite de la thèse de H. Craft (1970), a été utilisée comme couverture de l'album *Unknown Pleasures* du groupe post-punk *Joy Division*. *Droite* : Pulses moyens correspondant à quatre pulsars différents. Le pulse moyen du pulsar PSR B1919+21 est représenté en bas. Figure adaptée de Lyne & Rickett (1968).

2.1 Le phénomène de pulsar

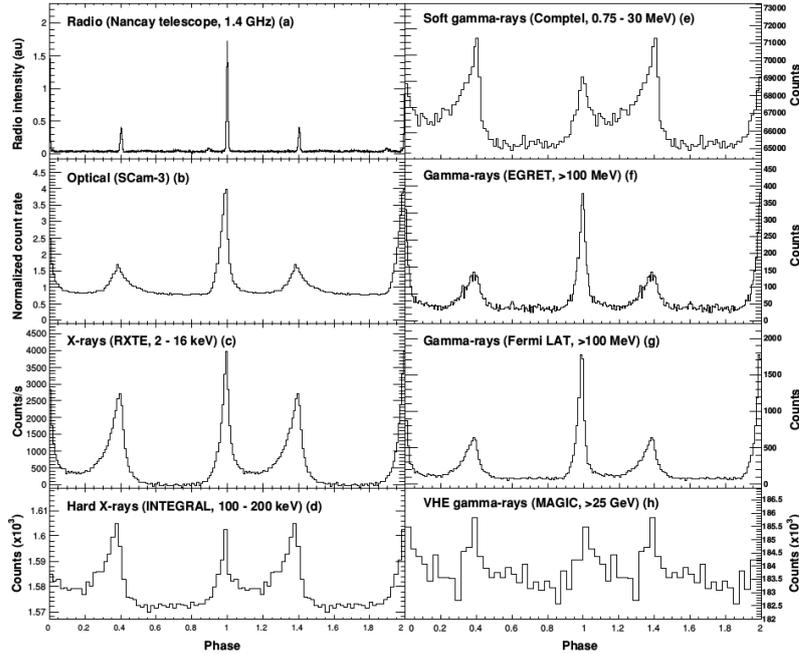


Figure 2. Light curves at different wavelengths. Two cycles are shown. References: (a) from the Nancay radio telescope; (b) Oosterbroek et al. 2008; (c) Rots et al. 2004; (d) Minoce et al. 2006; (e) Kuiper et al. 2001; (f) EGRET, Kuiper et al. 2001; (g) This paper; (h) Aliu et al. 2008.

FIGURE 2.3 – Évolution de la forme du pulse en fonction de la bande spectrale. Profil du pulse du pulsar du Crabe observé sur deux périodes, du domaine radio (en haut à gauche) au domaine du GeV (en bas à droite). Figure tirée de [Abdo et al. \(2010\)](#).

89 ms. Jusqu'à présent les périodes des pulsars qu'on a pu mesurées s'étendent de 1,40 ms pour PSR J1748–2446ad ([Hessels et al., 2006](#)) à 11,79 s pour PSR J1841–0456 ([Dib & Kaspi, 2014](#)), voir section 1.1.3.

Stabilité de la période. Il est possible de mesurer très précisément la période P d'un pulsar car on dispose d'un nombre très élevé de périodes. Cela permet d'accéder à la dérivée de cette période au cours du temps, $\dot{P} = dP/dt$ (voir annexe A). On constate alors que la plupart des pulsars ralentissent ($\dot{P} > 0$). Toutefois, les valeurs mesurées de \dot{P} sont extrêmement faibles : elles s'étendent de 10^{-21} à 10^{-10} (voir Fig. 2.6). Nous verrons dans la section 2.2 que la donnée de P et \dot{P} permet de mettre en évidence différents types de pulsars. Dans quelques cas, la précision est tellement élevée que l'on peut également mesurer la dérivée seconde \ddot{P} . En général, \ddot{P} est négative : la période des pulsars augmente donc de moins en moins vite. Ainsi, pour les pulsars du Crabe et de Vela, on obtient respectivement $\ddot{P} = -2,7 \times 10^{-24} \text{ s}^{-1}$ ([Wong et al., 2001](#)) et $\ddot{P} = -7,6 \times 10^{-26} \text{ s}^{-1}$ ([Dodson et al., 2007](#)). La grande précision de ces mesures et leur confrontation à certains modèles théoriques permettent d'obtenir des renseignements importants sur la physique des pulsars.

Émission aux différentes longueurs d'onde. Bien que les premiers pulsars aient été détectés en radio, on observe désormais de nombreux pulsars dans les domaines visible, X et même γ . La figure 2.3 montre l'évolution du profil du pulse du pulsar du Crabe, de l'optique aux rayons γ de haute énergie, par rapport au pulse observé en radio. Si la

période détectée est bien la même dans chaque bande spectrale, on observe une grande variation de la forme du pulse avec la longueur d’onde. Cela suggère un mécanisme de rayonnement très complexe, invoquant éventuellement la présence de différentes régions d’émission.

Dispersion en fréquence. Outre les effets spectraux intrinsèques que l’on vient de mentionner, les signaux émis par un pulsar sont affectés par un phénomène de dispersion lié à la propagation dans le milieu interstellaire ionisé (Lorimer & Kramer, 2005; Cognard, 2011). Cette dispersion, qui n’est observée que dans le domaine radio, est due à la présence d’électrons libres dans le milieu traversé. Elle se caractérise par un retard dans l’arrivée des pulses, inversement proportionnel au carré de la fréquence à laquelle est faite l’observation, comme le montre la figure 2.4. À partir de l’analyse de ces retards dispersifs, on peut en déduire une grandeur appelée *mesure de dispersion*, DM , que l’on définit par

$$DM = \int_0^L n_e(l) dl, \quad (2.1)$$

où L est la distance entre le pulsar et l’observateur et $n_e(l)$ est la densité locale d’électrons dans le milieu interstellaire. En déterminant la mesure de dispersion DM de pulsars proches, dont on a mesuré la distance par une méthode indépendante (par parallaxe, par exemple), on peut déduire une valeur moyenne de la densité d’électrons libres dans le milieu interstellaire, $\bar{n}_e \sim 0,03 \text{ cm}^{-3}$ (Ables & Manchester, 1976). Cela permet alors d’estimer la distance de pulsars plus lointains en déterminant leur DM . Par exemple, la mesure de dispersion associée au pulsar du Crabe, $DM \simeq 57 \text{ cm}^{-3}.\text{pc}$, conduit à une distance de l’ordre de 2 kpc (voir la base de données ATNF), en très bon accord avec la distance de la nébuleuse du Crabe mesurée par l’analyse de son mouvement propre et de sa vitesse radiale (voir Trimble (1973), par exemple). Toutefois, il faut garder à l’esprit que les distances déterminées par cette méthode peuvent être relativement imprécises. En effet, la mesure de dispersion du pulsar de Vela, $DM \simeq 68 \text{ cm}^{-3}.\text{pc}$ (Dodson *et al.*, 2007), suggérerait une distance bien supérieure à celle mesurée par parallaxe : $L \simeq 287 \text{ pc}$ (Caraveo *et al.*, 2001; Dodson *et al.*, 2003). Cette différence s’explique par une densité en électrons très élevée dans la direction de Vela ($\bar{n}_e \sim 0,2 \text{ cm}^{-3}$), probablement due à la présence de nuages ionisés sur la ligne de visée (Caraveo *et al.*, 2001). Pour disposer de mesures précises de distance à partir de la mesure de dispersion, il est donc indispensable de développer des techniques plus sophistiquées, basées sur des modèles de distribution des électrons dans le milieu interstellaire (voir Yao *et al.* (2017), par exemple).

2.1.2 Origine de la périodicité

Peu de temps après la découverte du premier pulsar, différents modèles ont été proposés pour expliquer la régularité et les courtes périodes des signaux observés.

Oscillations d’étoiles. Une première possibilité, envisagée dès 1968 par A. Hewish et J. Bell, consiste à relier les variations rapides observées à des oscillations radiales (mode fondamental) d’étoiles à neutrons ou de naines blanches¹. Si les naines blanches

1. Il est intéressant de remarquer que la variabilité du signal d’un pulsar suggère que la taille L de

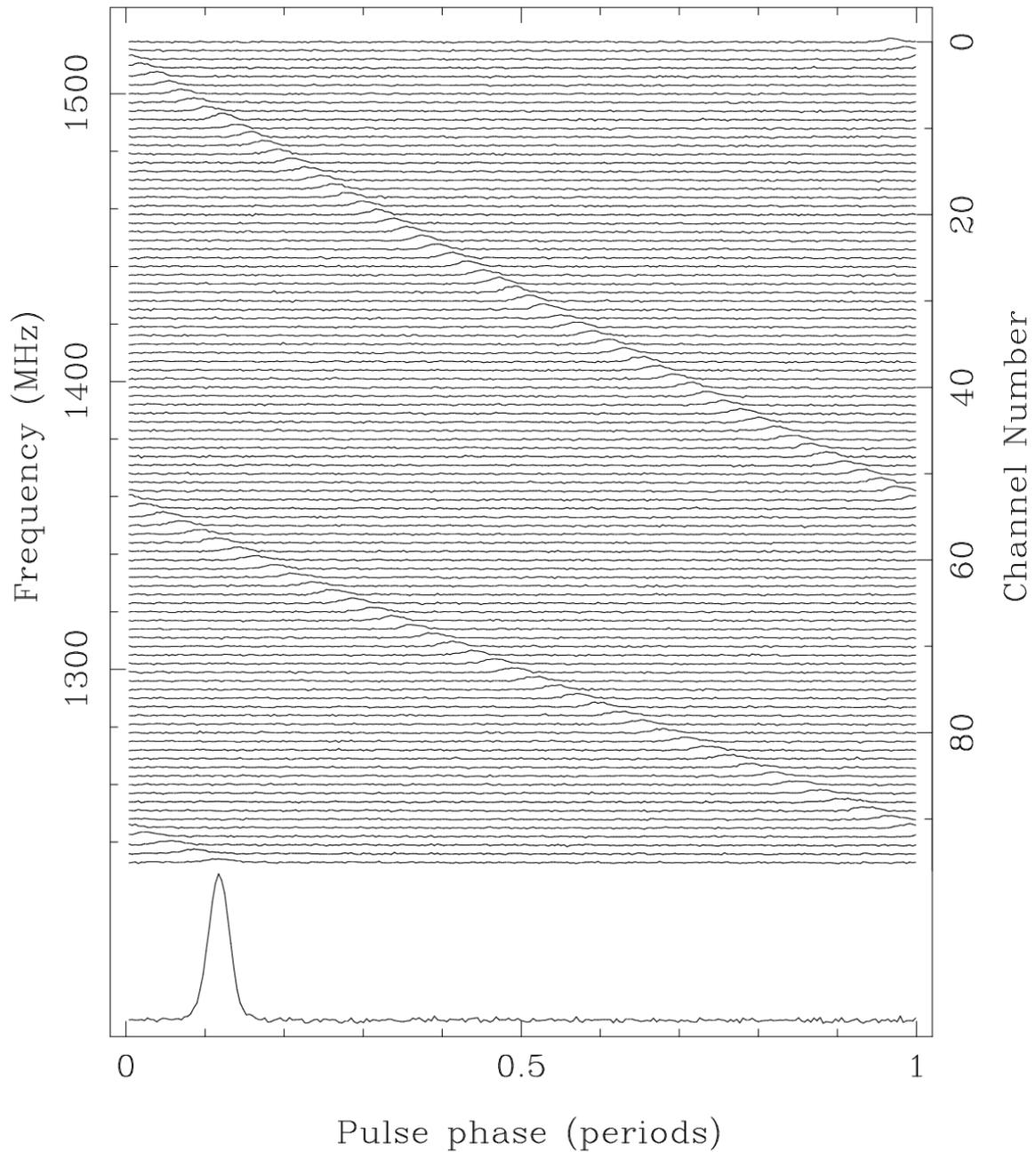


FIGURE 2.4 – **Dispersion en fréquence.** Retard dispersif des pulses de PSR B1356–60, observés dans 96 canaux de largeur 3 MHz, de 1,236 GHz à 1,524 GHz. La dépendance de l'effet de dispersion en fonction du carré de l'inverse de la fréquence apparaît clairement. La mesure de dispersion associée est $DM = 295 \text{ cm}^{-3} \cdot \text{pc}$. Figurée tirée de [Lorimer & Kramer \(2005\)](#).

sont effectivement susceptibles de présenter des périodes d’oscillations de l’ordre de la seconde (Meltzer & Thorne, 1966), elles ne peuvent toutefois pas rendre compte des périodes plus faibles de certains pulsars, tel que le pulsar du Crabe. D’un autre côté, les étoiles à neutrons étant beaucoup plus denses, leurs périodes d’oscillations sont trop courtes (Kokkotas & Schmidt, 1999; Friedman & Stergioulas, 2013). Les périodes observées ne peuvent donc pas s’expliquer par des oscillations d’objets compacts, d’autant plus que la dissipation d’énergie associée à un système en vibration conduit généralement à une décroissance de la période d’oscillations.

Système binaire. Il a également été proposé que la périodicité des pulses pourrait être liée à la présence d’un système de deux étoiles en rotation l’une autour de l’autre. Pour une période orbitale d’une seconde, la troisième loi de Kepler indique que la distance entre deux étoiles de masse proche de celle du Soleil est de l’ordre de quelques milliers de kilomètres. Cela exclut donc la possibilité de systèmes binaires de naines blanches, ces dernières ayant un rayon de l’ordre de celui de la Terre (~ 6400 km). De plus, la perte d’énergie associée à l’émission d’ondes gravitationnelles par un système binaire prédit une augmentation de la période orbitale, au fur et à mesure que les deux étoiles se rapprochent l’une de l’autre. Ceci est en contradiction avec le fait que la plupart des pulsars observés ralentissent (voir section 2.1.1). Enfin, la dissipation d’énergie est tellement intense dans le cas de deux étoiles à neutrons avec une période orbitale de l’ordre de la seconde que le système devrait entrer en coalescence au bout de quelques jours seulement (Shapiro & Teukolsky, 1983). Notons toutefois qu’on observe des systèmes binaires d’étoiles à neutrons (voir section 1.1.1), mais avec des périodes orbitales nettement supérieures à la seconde : par exemple, la période orbitale du pulsar binaire de Hulse & Taylor est d’environ 8 h (Hulse & Taylor, 1975).

Étoiles en rotation. Une troisième possibilité associe la période P des pulses à la vitesse de rotation $\Omega = 2\pi/P$ d’une étoile. On a déjà vu dans la section 1.1.3 qu’une étoile possède une vitesse de rotation maximale, au-delà de laquelle la force centrifuge détruit l’astre. Cette vitesse maximale, appelée *vitesse képlérienne*, est approximativement donnée par

$$\Omega_K = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} = \sqrt{\frac{4\pi G\bar{\rho}}{3}}, \quad (2.2)$$

où M est la masse de l’astre, R son rayon et $\bar{\rho} = 3M/(4\pi R^3)$ sa densité volumique moyenne. La condition $\Omega < \Omega_K$ conduit à une masse volumique minimale

$$\bar{\rho} > \bar{\rho}_{\min} = \frac{3\Omega^2}{4\pi G} \sim 1,4 \times 10^{14} \left(\frac{1 \text{ ms}}{P}\right)^2 \text{ g.cm}^{-3}. \quad (2.3)$$

Ainsi, pour des périodes de l’ordre de la milliseconde, on obtient une densité volumique minimale extrêmement élevée, que seules les étoiles à neutrons peuvent atteindre (voir section 1.4). Cela suggère que les pulsars peuvent raisonnablement être associés à des étoiles à neutrons en rotation. Cette idée s’est vue confirmée par la découverte du pulsar

l’objet émetteur est relativement petite. En effet, une durée Δt des pulses de l’ordre de 50 ms (voir Fig. 2.2) conduit à une taille $L \leq c\Delta t \sim 15000$ km, compatible avec le rayon d’une naine blanche ou d’une étoile à neutrons.

du Crabe en 1968 (Staelin & Reifenstein, 1968), supportant ainsi le modèle proposé par Wheeler (1966) et Pacini (1967) suivant lequel la source d'énergie de la nébuleuse du Crabe était une étoile à neutrons magnétisée en rotation rapide, et par l'observation du ralentissement des pulsars (voir section 2.2), en accord avec les prédictions théoriques de Gold (1968).

2.1.3 Magnétosphère du pulsar

Comme nous le verrons dans la section 2.2.2, une étoile à neutrons possède un champ magnétique de surface B_s très élevé, de l'ordre de 10^{12} G. Ce champ magnétique, couplé à la rotation de l'étoile, induit un champ électrique très intense, capable d'arracher des particules chargées à la surface de l'astre (Goldreich & Julian, 1969). Celles-ci vont alors remplir l'espace entourant le pulsar, créant ainsi une *magnétosphère* chargée (voir Fig. 2.5).

Structure de la magnétosphère. Par couplage magnétique avec la surface, la magnétosphère tend à être en corotation avec l'étoile à neutrons (Lorimer & Kramer, 2005). Toutefois, ceci n'est possible qu'au voisinage du pulsar, où la vitesse de la magnétosphère reste inférieure à la vitesse de la lumière. La distance à l'axe de rotation à laquelle la corotation est rompue est donnée par

$$r_{CL} = \frac{c}{\Omega} = 48 \left(\frac{P}{1 \text{ ms}} \right) \text{ km.} \quad (2.4)$$

La surface cylindrique qui s'appuie sur ce rayon, appelée *cylindre de lumière*, sépare les lignes de champ magnétique en deux groupes (voir Fig. 2.5) : alors que les lignes de champ situées à l'intérieur du cylindre de lumière restent fermées, celles qui traversent cette surface vont s'ouvrir. Les lignes de champ ouvertes définissent une région à la surface de l'étoile appelée *calotte polaire*, centrée autour de l'axe magnétique stellaire, dont la taille va dépendre de la vitesse de rotation du pulsar. À grande distance de l'étoile, ces lignes de champ s'enroulent autour du cylindre de lumière et s'étendent jusqu'à l'infini, permettant à des particules chargées de s'échapper : on parle alors de vent de pulsar¹. La structure toroïdale du champ magnétique situé à l'extérieur du cylindre de lumière est associée à un flux de Poynting non nul : le pulsar perd de l'énergie sous forme de rayonnement électromagnétique. En outre, une certaine quantité d'énergie est également emportée par les particules chargées accélérées. Ces dissipations d'énergie vont conduire le pulsar à ralentir au cours du temps, comme nous le verrons dans la section suivante.

Mécanismes d'émission. Les processus radiatifs associés aux pulsars et les phénomènes d'accélération qui y sont liés restent encore relativement mal connus (voir e.g. Beskin *et al.* (1993); Lorimer & Kramer (2005)). À la surface de l'étoile, les particules chargées sont accélérées à des vitesses extrêmement élevées par le champ électrique parallèle aux lignes de champ magnétique. En se déplaçant le long des lignes de champ courbées, les particules chargées émettent alors des photons γ directement par rayonnement de courbure, ou par diffusion Compton inverse sur des photons de plus basse énergie, eux-mêmes

1. L'interaction de ce vent de pulsar avec le reste de supernova est observée pour certains pulsars, via la présence d'une nébuleuse de vent de pulsar.

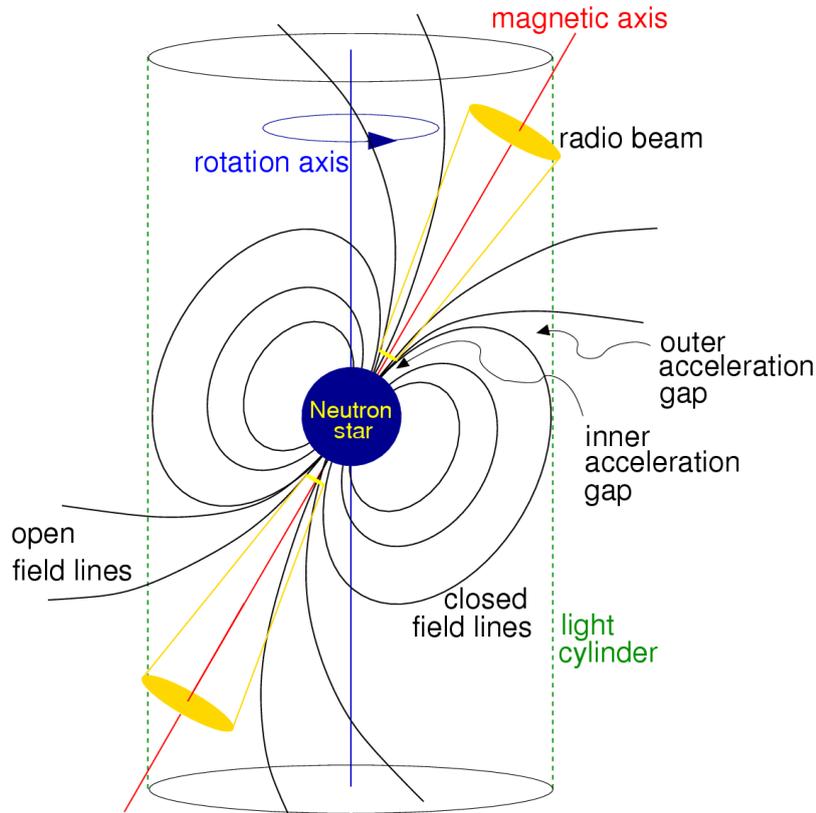


FIGURE 2.5 – Représentation schématique de la structure de la magnétosphère d'un pulsar. Le rayonnement radio est représenté par le cône jaune. Figure tirée de Lorimer & Kramer (2005).

émis par rayonnement de courbure. Ces photons γ sont susceptibles d'interagir avec le champ magnétique (qui reste très élevé au voisinage de la surface de l'étoile) selon le processus $\gamma + \vec{B} \rightarrow e^+e^- + \vec{B}$, créant ainsi une nouvelle génération de particules chargées. À leur tour, ces paires secondaires émettent des photons qui, interagissant avec le champ magnétique, produisent de nouvelles paires électron-positron. Ce processus en cascade se poursuit jusqu'à ce que les photons émis ne soient plus suffisamment énergétiques pour interagir avec le champ magnétique.

L'émission radio des pulsars est communément associée à ces paires secondaires, selon un processus encore incertain se déroulant à proximité de la calotte polaire. Un modèle simple consiste à relier cette émission radio au rayonnement de courbure mentionné précédemment. Les particules chargées étant accélérées à des vitesses relativistes, les photons sont émis de manière très focalisée dans la direction tangente aux lignes de champ ouvertes au point d'émission considéré. L'émission radio se fait alors selon un faisceau ayant la forme d'un cône centré sur l'axe des pôles magnétiques, dont l'angle d'ouverture dépend de la hauteur de la région d'émission. Comme l'axe magnétique n'est généralement pas

2.2 Ralentissement des pulsars

aligné avec l'axe de rotation de l'étoile, le rayonnement émis par le pulsar nous parvient sous la forme de pulses périodiques, correspondant aux moments où le faisceau d'émission croise la ligne de visée, à la manière d'un phare. Ce modèle permet également d'expliquer la forme des pulses observés à partir de la structure interne plus ou moins complexe du cône d'émission et de la manière dont notre ligne de visée croise ce cône.

L'origine des rayonnements X et γ est également très incertaine et différentes régions sont envisagées. Comme nous l'avons vu, une partie de cette émission est produite au voisinage de la calotte polaire. Toutefois, l'étude de la coupure à haute énergie observée dans le spectre d'émission des pulsars suggère un mécanisme d'émission se déroulant dans une zone plus lointaine, où le champ magnétique est nettement plus faible qu'à la surface (la coupure étant alors causée par l'annihilation de photons selon le processus $\gamma\gamma \rightarrow e^+e^-$). Le rayonnement à haute énergie pourrait alors être produit dans la *gap externe*, une zone située à la limite des lignes de champ fermées, ou dans la fine *couche de courant* présente à l'extérieur du cylindre de lumière, dans laquelle le champ magnétique toroïdal subit une inversion de polarité (voir, e.g., [Romani \(1996\)](#); [Cerutti et al. \(2015\)](#)).

2.2 Ralentissement des pulsars

2.2.1 Estimation de la température de surface

En mécanique newtonienne, le ralentissement d'un pulsar ($\dot{\Omega} < 0$) est associé à une perte d'énergie

$$P_{\text{diss}} = -\dot{E}_{\text{rot}} = -I\Omega\dot{\Omega} > 0, \quad (2.5)$$

où $E_{\text{rot}} = I\Omega^2/2$ est l'énergie de rotation de l'étoile et I désigne son moment d'inertie. La grandeur P_{diss} , qui représente la puissance totale extraite de la rotation de l'étoile, est appelée *luminosité de ralentissement*. En supposant que la puissance P_{diss} est intégralement convertie en rayonnement de type corps noir¹, on peut alors estimer la température maximale de la surface de l'étoile :

$$T_s \lesssim T_s^{\text{max}} = \left(-\frac{I\Omega\dot{\Omega}}{4\pi R^2\sigma_B} \right)^{1/4} \simeq 5 \times 10^5 \left(\frac{\dot{P}}{10^{-15}} \right)^{1/4} \left(\frac{P}{1 \text{ s}} \right)^{-3/4} \text{ K}, \quad (2.6)$$

où σ_B désigne la constante de Stefan-Boltzmann et $I \simeq 2MR^2/5 \sim 1,6 \times 10^{38} \text{ kg.m}^2$, pour une masse $M \simeq 1,4 M_\odot$ et un rayon $R \simeq 12 \text{ km}$. Pour les pulsars du Crabe et de Vela, on obtient $T_s \lesssim 10^7 \text{ K}$. En ce qui concerne les pulsars millisecondes (voir section 2.2.3 et Fig. 2.6), la température de surface est encore plus faible. Ces températures de surface, couplées au petit rayon des étoiles à neutrons, indiquent une luminosité extrêmement faible (bien inférieure à celle des naines blanches), principalement rayonnée dans le domaine des rayons X, où la sensibilité des détecteurs n'est pas aussi grande que dans

1. Compte tenu des différents mécanismes invoqués pour expliquer l'émission des pulsars (voir section 2.1.3), il s'agit évidemment d'une hypothèse très grossière. Par ailleurs, le rayonnement thermique d'une étoile à neutrons provient essentiellement de la chaleur déposée dans l'étoile lors de sa formation, et non de l'énergie cinétique de rotation. L'estimation (2.6) est donc à considérer avec beaucoup de précaution.

le visible. C'est pourquoi il est très difficile d'observer l'émission thermique des étoiles à neutrons, sauf dans le cas d'étoiles proches (voir section 3.3). En outre, les calculs de transport radiatif dans les étoiles à neutrons montrent que la température interne est environ 100 fois plus grande que la température de surface (voir e.g. Page *et al.* (2006, 2013)). L'estimation (2.6) appliquée à des pulsars suffisamment âgés conduit donc à des températures internes inférieures à $\sim 10^8 - 10^9$ K, en accord avec les valeurs obtenues à partir de modèles théoriques de refroidissement d'étoiles à neutrons (voir Fig. 1.6). Cela confirme donc la présence de matière dégénérée ($T \ll T_F$) à l'intérieur de ces étoiles (voir section 1.2.3).

2.2.2 Estimation du champ magnétique de surface

Modèle du dipôle magnétique incliné. Nous avons vu au cours des sections précédentes que le phénomène de pulsar est associé à une étoile à neutrons fortement magnétisée, en rotation rapide. Un modèle simple (newtonien) consiste alors à représenter un pulsar par une étoile à neutrons sphérique de rayon R et de masse M , en rotation uniforme à la vitesse angulaire Ω et possédant un moment magnétique dipolaire incliné d'un angle α avec l'axe de rotation. Cette configuration du champ magnétique est justifiée par le fait qu'une distribution de charges en mouvement non-relativiste produit un champ électromagnétique dans le vide dont la composante principale est dipolaire. En désignant par B_p l'amplitude du champ magnétique de surface aux pôles magnétiques, la puissance rayonnée par le dipôle magnétique tournant (dans le vide) est donnée par la relation (voir Pacini (1968); Shapiro & Teukolsky (1983))

$$\dot{E}_{\text{em}} = \frac{4\pi R^6 \Omega^4}{\mu_0 6c^3} (B_p \sin \alpha)^2, \quad (2.7)$$

où μ_0 est la perméabilité magnétique du vide.

En supposant qu'il n'y a aucun autre processus dissipatif mis en jeu (voir section 2.2.3), la conservation de l'énergie donne

$$P_{\text{diss}} = -\dot{E}_{\text{rot}} = \dot{E}_{\text{em}}, \quad (2.8)$$

ce qui conduit à la loi de ralentissement

$$\dot{\Omega} = -\frac{4\pi R^6 (B_p \sin \alpha)^2}{\mu_0 6Ic^3} \Omega^3 < 0. \quad (2.9)$$

À partir des mesures de P et \dot{P} , cette loi de freinage permet d'estimer le champ magnétique à la surface d'une étoile à neutrons :

$$B_p \sin \alpha \simeq 2 \times 10^8 \left(\frac{P}{1 \text{ s}} \right)^{1/2} \left(\frac{\dot{P}}{10^{-15}} \right)^{1/2} \text{ T}, \quad (2.10)$$

où on a utilisé les mêmes hypothèses que pour le calcul de (2.6). L'estimation (2.10) montre que le champ magnétique à la surface d'une étoile à neutrons est extrêmement

2.2 Ralentissement des pulsars

intense. Pour comparaison, le champ magnétique terrestre est seulement de l'ordre du gauss¹, tandis que les champs magnétiques les plus élevés créés en laboratoire jusqu'à présent sont de ~ 50 T en continu et $\sim 10^4$ T sous forme pulsée.

L'origine de ce fort champ magnétique et la rotation très rapide des pulsars peuvent s'interpréter simplement. En effet, la vitesse angulaire Ω et le champ magnétique B d'un astre de rayon R issu de l'effondrement d'une étoile de rayon R_* , de vitesse de rotation Ω_* et de champ magnétique B_* sont amplifiés par un facteur très élevé

$$\frac{B}{B_*} \sim \frac{\Omega}{\Omega_*} \sim \left(\frac{R_*}{R}\right)^2 \simeq 5 \times 10^{11} \left(\frac{R_*}{10 R_\odot}\right)^2 \left(\frac{R}{10 \text{ km}}\right)^{-2}, \quad (2.11)$$

où $R_\odot \simeq 7 \times 10^5$ km désigne le rayon solaire. Cette estimation s'obtient en supposant que le flux magnétique de l'étoile et son moment cinétique sont conservés au cours de l'effondrement, ce qui n'est qu'approximativement vrai en réalité (une certaine quantité de matière est éjectée lors de l'effondrement, par exemple). Notons que ce facteur d'amplification est beaucoup plus important que dans le cas d'une naine blanche ($\sim 10^4$). De même, la puissance dissipée par un pulsar est proportionnelle à $\Omega^4 R^6 B^2$, voir (2.7). Le rayonnement « pulsar » d'une naine blanche serait alors 10^{14} fois plus faible que celui d'une étoile à neutrons. Ces deux types d'objets compacts présentent donc des mécanismes d'émission très différents.

Classification des pulsars. Les pulsars observés sont habituellement classés en fonction de leur période P et de la dérivée de leur période, \dot{P} (voir, e.g., Kaspi (2010) et les références citées). Pour l'immense majorité des pulsars, l'énergie rayonnée est extraite de la rotation de l'étoile : on parle de *rotation-powered pulsars* (RPPs). Sur le diagramme $P - \dot{P}$, voir Fig. 2.6, les lignes de champ magnétique $B_p \sin \alpha$ (2.10) constant apparaissent comme des lignes de produit $P\dot{P}$ fixé. Les RPPs ont des champs magnétiques de surface compris entre 10^8 G et 10^{14} G. Les *pulsars millisecondes* forment une sous-classe de RPPs, pour lesquels la période de rotation et le champ magnétique sont inférieurs à ~ 20 ms et $\sim 10^{10}$ G. Comme on peut le voir sur la figure 2.6, les pulsars millisecondes sont majoritairement observés dans des systèmes binaires et ont une période extrêmement stable ($\dot{P} < 10^{-18}$). L'origine des pulsars millisecondes sera donnée dans la section 2.2.3. À l'opposé dans le diagramme $P - \dot{P}$, on trouve les *magnétars*, possédant des champs magnétiques gigantesques, supérieurs à 10^{14} G, et une période de rotation de l'ordre de la seconde à la dizaine de secondes (Turolla *et al.*, 2015; Mereghetti *et al.*, 2015). Les magnétars sont observés comme des *anomalous X-ray pulsars* (AXPs) ou parfois comme des *soft gamma-ray repeaters* (SGRs). En quiescence, les SGRs et les AXPs sont des pulsars X, dont la luminosité est bien supérieure à la luminosité de ralentissement, ce qui suggère qu'ils tirent leur énergie directement de l'énergie magnétique (*magnetically-powered pulsars*). Les SGRs ont une émission plus importante que les AXPs et ils présentent des sursauts brefs mais intenses d'émission γ et X, à des intervalles irréguliers. Néanmoins, la détection de sursauts X dans certains AXPs a bien confirmé que les AXPs et les SGRs sont de même nature. On pense aujourd'hui que les AXPs sont des SGRs évolués, plus âgés et moins actifs. Notons que l'on ne connaît actuellement qu'un très faible nombre de magnétars (une vingtaine environ sur un total de ~ 2500 pulsars détectés).

1. 1 G = 10^{-4} T.

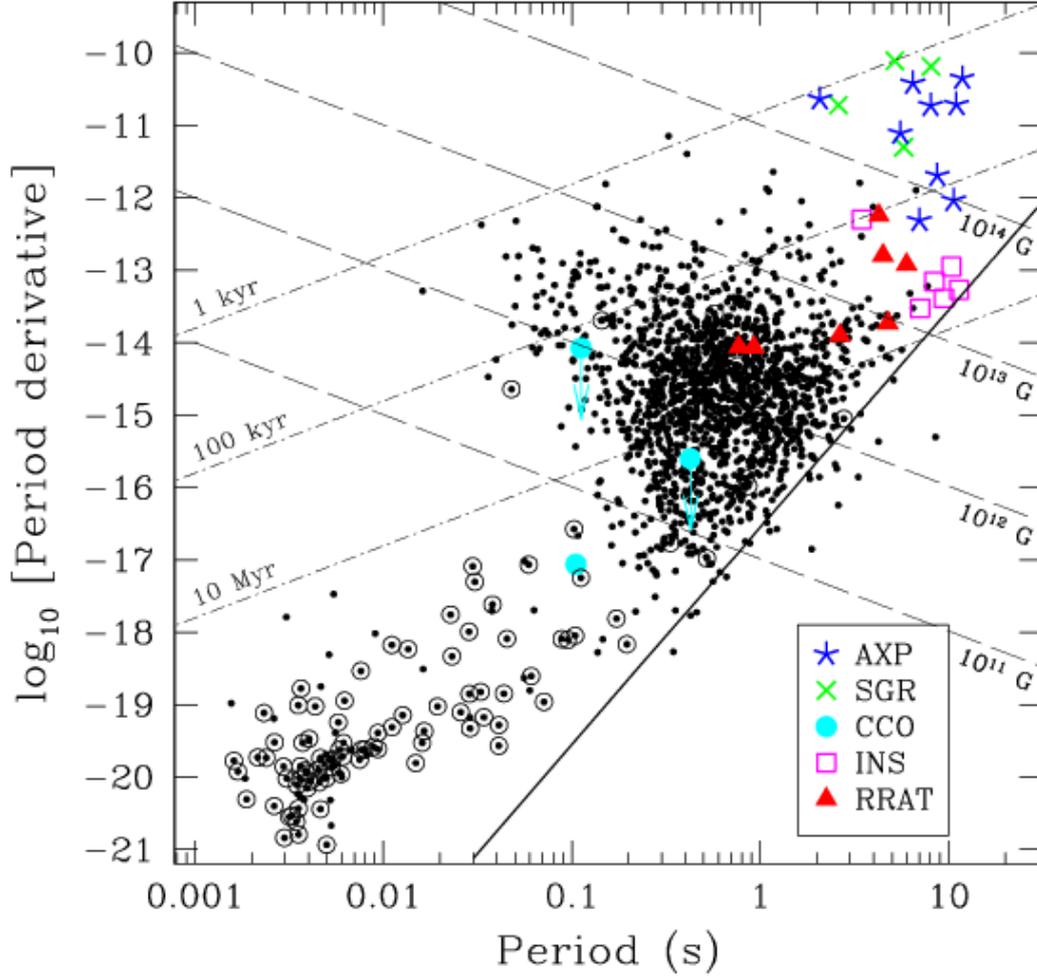


FIGURE 2.6 – **Diagramme $P - \dot{P}$** . Ce diagramme inclut 1674 RPPs (points noirs), 9 AXP (étoiles bleues), 5 SGRs (croix vertes), 3 CCOs (cercles cyan), 6 INSs (carrés magenta) et 7 RRATs (triangles rouges). Les acronymes précédents sont donnés dans le texte. Les pulsars observés dans des systèmes binaires sont représentés avec un cercle ouvert. Les pulsars millisecondes sont des RPPs avec $P \lesssim 20$ ms. Les lignes de champ magnétique $B_p \sin \alpha$ (2.10) et d'âge t_c (2.16) constants sont tracées respectivement avec des tirets et avec des points et des tirets. La ligne en trait plein correspond au « cimetière » des pulsars. Figure tirée de Kaspi (2010).

2.2 Ralentissement des pulsars

En plus des grandes classes de pulsars que l'on vient de mentionner, on a également observé des étoiles à neutrons avec des propriétés d'émission bien particulières. Ainsi, les *isolated neutron stars* (INSs) n'émettent pas comme des pulsars radio, mais sont plutôt caractérisées par un spectre d'émission quasi-thermique, rayonnée dans le domaine des rayons X ($T_s \sim 5 \times 10^5 - 1 \times 10^6$ K), voir e.g. Haberl (2007). Ces étoiles à neutrons présentent également une faible contrepartie optique. Il a été suggéré que les INSs sont des RPPs observés en dehors de leur faisceau d'émission. Ce sont des astres relativement proches, situés à une distance de l'ordre de $\sim 200 - 500$ pc, déduite par mesure de parallaxe. En général, la luminosité X des INSs évolue de manière quasi-périodique au cours du temps, avec des périodes mesurées allant de 3 à 11 s que l'on identifie aux périodes de rotation de ces étoiles. L'étude des courbes de lumière des INSs permet également de déduire leurs valeurs de \dot{P} . En utilisant alors la relation (2.10), il est possible d'estimer leur champ magnétique de surface, qui apparaît très élevé : $B_p \sin \alpha \sim 10^{13}$ G. L'émission des INSs n'étant pas contaminée par des processus d'origine non-thermique (contrairement aux cas des pulsars radio et des binaires X), la modélisation du spectre X de ces objets pourrait apporter des contraintes très importantes sur l'EoS des étoiles à neutrons (voir section 1.1.2). Les *rotating radio transients* (RRATs) sont des pulsars radio émettant de manière sporadique (McLaughlin et al., 2006; Keane et al., 2011). Plus précisément, ces étoiles présentent des pulses périodiques, parfois entrecoupés de phases où aucun pulse n'est détecté. Les RRATs occupent une position spécifique dans le diagramme $P - \dot{P}$ (voir Fig. 2.6) et ont des périodes de rotation plus grandes que la majorité des pulsars radio normaux. La découverte des RRATs suggère qu'une quantité non négligeable d'étoiles à neutrons pourrait avoir été ignorée par les relevés de pulsars, ceux-ci se basant sur la détection de signaux périodiques. En outre, les *central compact objects* (CCOs) représentent une classe hétérogène d'objets ressemblant à des étoiles à neutrons, mais dont les propriétés d'émission particulières font qu'ils ne peuvent être classés dans les catégories précédentes (Chakrabarty et al., 2001; Mereghetti et al., 2002; Kaspi, 2010). Les CCOs sont détectés dans des restes de supernovæ récentes et n'émettent que dans le domaine des rayons X. Ils présentent une émission X constante (*i.e.* non pulsée), de type corps noir, associée à des températures de surface de l'ordre de $T_s \sim 2 \times 10^6 - 4 \times 10^6$ K. Il est intéressant de remarquer que la diversité observée dans les propriétés d'émission des différents groupes d'étoiles à neutrons mentionnés jusqu'à présent pourrait s'expliquer simplement à partir de l'intensité du champ magnétique de surface à la naissance de ces étoiles et de leur âge (voir Kaspi (2010), par exemple).

Dans un souci d'exhaustivité, il est également nécessaire de mentionner les *binaires X*, non représentées sur le diagramme $P - \dot{P}$ (Fig. 2.6). Il s'agit de pulsars présents dans des systèmes binaires en accrétion, dont le rayonnement se situe majoritairement dans le domaine des X (voir section 1.1). L'émission observée depuis ces pulsars a une origine très différente de celle associée aux pulsars radio normaux (voir section 2.1.3). Dans le cas des binaires X, les pulses sont générés par la rencontre de la matière accrétée depuis le compagnon (et canalisée par le champ magnétique du pulsar vers ses pôles magnétiques) avec la surface de l'étoile à neutrons. On parle alors d'*accretion-powered pulsars*. Alors que les pulsars radio ralentissent au cours du temps, l'accrétion de matière est associée à un transfert de moment cinétique (orbital) vers le pulsar, ce qui conduit la vitesse de rotation de ce dernier à augmenter (ou à diminuer, voir e.g. Perna et al. (2006)). Les

pulsars observés sous forme de binaires X présentent ainsi une grande variété de périodes de rotation, allant de $\sim 0,1$ à $\sim 10^3$ s (van Paradijs, 1998).

2.2.3 Estimation de l'âge

Indice de freinage. Pour certains pulsars, il est possible de mesurer non seulement P et \dot{P} , mais également \ddot{P} (voir section 2.1.1). On définit alors l'indice de freinage n par la relation :

$$n = \frac{\Omega \ddot{\Omega}}{\dot{\Omega}^2} = 2 - \frac{P \ddot{P}}{\dot{P}^2}. \quad (2.12)$$

Cet indice permet de caractériser la loi effective de ralentissement du pulsar considéré, selon

$$\dot{\Omega} = -K\Omega^n. \quad (2.13)$$

Ainsi, le modèle du dipôle magnétique oblique dans le vide, traité dans la section 2.2.2, prédit $n = 3$ pour un champ magnétique de surface et un moment d'inertie constants (voir (2.9)). Des simulations numériques ont montré que la loi de ralentissement (2.9) est légèrement modifiée en présence d'une magnétosphère chargée, mais ce modèle conduit également à $n = 3$ (Spitkovsky, 2006).

La table 2.1 recense quelques indices de freinage mesurés. Les valeurs observées pour PSR B1509–58 ($n = 2,839 \pm 0,001$, Livingstone *et al.* (2007)) et PSR J1640–4631 ($n = 3,15 \pm 0,03$, Archibald *et al.* (2016)) semblent en relativement bon accord avec le modèle du dipôle magnétique tournant. Toutefois, la plupart des pulsars présentent un indice de freinage significativement inférieur à 3 : par exemple, $n = 1,7 \pm 0,2$ pour Vela (Espinoza *et al.*, 2017). Cela suggère un mécanisme de ralentissement plus complexe qu'un simple rayonnement dipolaire.

Un premier modèle alternatif consiste à associer le ralentissement du pulsar à l'émission d'ondes gravitationnelles. À partir de la formule du quadrupôle de masse, on peut montrer que la dissipation d'énergie liée à ce processus est donnée par

$$\dot{E}_{\text{GW}} = \frac{32}{5} \frac{G}{c^5} I^2 \epsilon^2 \Omega^6, \quad (2.14)$$

où l'ellipticité ϵ quantifie la déformation de l'étoile (Shapiro & Teukolsky, 1983). Ce mécanisme de ralentissement pourrait être dominant pour les pulsars très jeunes. Toutefois, l'indice de freinage qu'il prédit, à savoir $n = 5$, est clairement en désaccord avec les observations effectuées sur des pulsars âgés de quelques milliers d'années (voir la table 2.1). Pour ces derniers, la condition $\dot{E}_{\text{GW}} < \dot{E}_{\text{em}}$, où $\dot{E}_{\text{em}} = -\dot{E}_{\text{rot}}$, permet d'obtenir une limite supérieure sur l'ellipticité de l'étoile :

$$\epsilon < 1,5 \times 10^{-9} \left(\frac{P}{1 \text{ ms}} \right)^{3/2} \left(\frac{\dot{P}}{10^{-19}} \right)^{1/2}, \quad (2.15)$$

qui peut être contraignante dans le cas des pulsars millisecondes (Haensel *et al.*, 2007).

D'autres mécanismes ont également été suggérés pour tenter d'expliquer les valeurs d'indice de freinage observées. Ainsi, les écarts à la loi $n = 3$ pourraient s'expliquer

2.2 Ralentissement des pulsars

TABLE 2.1 – Indices de freinage mesurés pour quelques pulsars jeunes. Table adaptée de [Lyne et al. \(2015\)](#).

Pulsar	n
B0531+21 (Crabe)	$2, 51 \pm 0, 01$
B0540–69	$2, 14 \pm 0, 01$
B0833–45 (Vela)	$1, 7 \pm 0, 2$
J1119–6127	$2, 684 \pm 0, 002$
B1509–58	$2, 839 \pm 0, 001$
J1734–3333	$0, 9 \pm 0, 2$
J1833–1034	$1, 857 \pm 0, 001$
J1846–0258	$2, 65 \pm 0, 01$
J1640–4631	$3, 15 \pm 0, 03$

par la présence d’un vent de particules relativistes ([Michel, 1969](#)), une augmentation de la fraction de l’étoile sous forme superfluide ([Ho & Andersson, 2012](#)), une variation de l’angle entre l’axe de rotation et l’axe magnétique ([Lyne et al., 2013](#)), une augmentation du champ magnétique de surface ([Gourgouliatos & Cumming, 2015](#)) ou encore la contribution d’ordres supérieurs (non dipolaire) dans la configuration du champ magnétique proche de la surface de l’étoile et dans sa magnétosphère ([Pétri, 2015](#)). Il est probable que le mécanisme exact de ralentissement soit lié à plusieurs de ces processus.

Âge des pulsars. Il est possible de déterminer l’évolution temporelle de la vitesse de rotation d’un pulsar en intégrant la relation (2.13). En supposant que la période initiale P_0 était nettement inférieure à la période P actuellement mesurée (ce qui est discutable dans le cas de pulsars très jeunes), on peut estimer l’âge du pulsar à partir des mesures de P et de \dot{P} uniquement. Dans le cas où $n = 3$, l’âge caractéristique du pulsar est donné par la relation

$$t_c = -\frac{\Omega}{2\dot{\Omega}} = \frac{P}{2\dot{P}}. \quad (2.16)$$

Pour le pulsar du Crabe, on obtient ainsi un âge caractéristique $t_c \sim 1200$ ans, en bon accord avec l’âge réel (~ 950 ans) connu précisément par l’observation en 1054 de la supernova lui donnant naissance (voir section 1.2.1). Toutefois, il faut garder à l’esprit qu’il s’agit seulement d’une estimation, parfois très grossière étant donné les incertitudes sur P_0 et sur n .

Les lignes d’âge caractéristique constant sont tracées sur la figure 2.6. Suite à l’explosion de supernova, les pulsars qui viennent de naître sont situés en haut à gauche du diagramme $P - \dot{P}$ (vitesse de rotation élevée et fort ralentissement). Ils vont ensuite se déplacer vers la droite et le bas de ce diagramme, en suivant approximativement les lignes de champ magnétique constant, traversant progressivement les lignes $t_c = cte$. La majorité des pulsars observés ont un âge caractéristique compris entre $\sim 10^5$ et $\sim 10^8$ ans. Les magnétars semblent être relativement jeunes ($t_c \sim 10^3 - 10^5$ ans). Comme nous l’avons

déjà vu dans la section 2.2.2, les pulsars millisecondes occupent une place privilégiée dans le diagramme $P - \dot{P}$, suggérant des âges caractéristiques voisins de l'âge de notre galaxie ($\sim 10^9 - 10^{10}$ ans). Toutefois, l'âge caractéristique suppose implicitement que le ralentissement du pulsar a toujours eu la même origine, et qu'aucun autre processus physique n'a affecté sa rotation, ce qui n'est pas vrai dans le cas des pulsars millisecondes. Ainsi, la relation (2.16) ne saurait être utilisée pour estimer l'âge de ces pulsars.

Recyclage des pulsars millisecondes. La position des pulsars millisecondes dans le diagramme $P - \dot{P}$ semble s'expliquer par un scénario d'évolution complexe, impliquant un processus de *recyclage* de pulsars normaux présentant initialement des périodes de rotation beaucoup plus grandes (voir e.g. [Phinney & Kulkarni \(1994\)](#); [Wolszczan \(1999\)](#)).

On pense que les pulsars ne peuvent émettre en radio que si la différence de potentiel ΔV_c requise pour que le mécanisme de production de paires¹ ait lieu est inférieure à la valeur maximale de ΔV qu'il est possible d'atteindre dans la magnétosphère ([Chen & Ruderman, 1993](#)). Sur le diagramme $P - \dot{P}$, cela se traduit par la condition suivante :

$$B \gtrsim 0,17 \times 10^{12} \left(\frac{P}{1 \text{ s}} \right)^2 \text{ G}, \quad (2.17)$$

ou, de manière équivalente, par $P_{\text{diss}} \gtrsim 10^{23} \text{ W}$ ([Bhattacharya *et al.*, 1992](#); [Faucher-Giguère & Kaspi, 2006](#)). Au terme de leur phase de ralentissement, les pulsars traversent alors cette « ligne de mort » et cessent donc d'émettre en radio (on parle de « cimetière des pulsars », voir Fig. 2.6). Cependant, certaines étoiles à neutrons membres de systèmes binaires entrent ensuite dans une nouvelle phase pendant laquelle elles accrètent de la matière depuis leur compagnon (phase de binaires X), ce qui conduit à augmenter leur vitesse de rotation et à diminuer leur champ magnétique. Une fois le processus d'accrétion terminé, ces étoiles pourraient à nouveau émettre en tant que pulsars radio, d'où le terme de *pulsars recyclés*. Ce modèle est supporté par le fait que la grande majorité des pulsars millisecondes sont observés dans des systèmes binaires (voir Fig. 2.6) et qu'ils ont tendance à être plus massifs que les pulsars normaux.

2.3 Irrégularités de la période

2.3.1 Observations de « soubresauts »

Nous venons de décrire en détails le lent ralentissement des pulsars radio au cours du temps, selon un processus associé à la magnétosphère de ces astres. Cependant, on observe parfois de minuscules irrégularités dans l'évolution temporelle de la vitesse de rotation d'un pulsar, appelées *glitches* (ou « soubresauts »), pendant lesquelles le pulsar accélère soudainement, avant de relaxer sur des temps beaucoup plus longs, de l'ordre du jour ou même de l'année (voir Figs. 2.7 et 2.8). Les premiers glitches ont été détectés dès 1969 dans les pulsars de Vela ([Radhakrishnan & Manchester, 1969](#); [Reichley & Downs, 1969](#)) et du Crabe ([Boynton *et al.*, 1969](#); [Richards *et al.*, 1969](#)). Depuis lors, ces pulsars emblématiques ont respectivement rencontré (au moins) 19 et 25 épisodes de glitches.

1. Selon le processus $\gamma + \vec{B} \rightarrow e^+e^- + \vec{B}$, voir section 2.1.3.

2.3 Irrégularités de la période

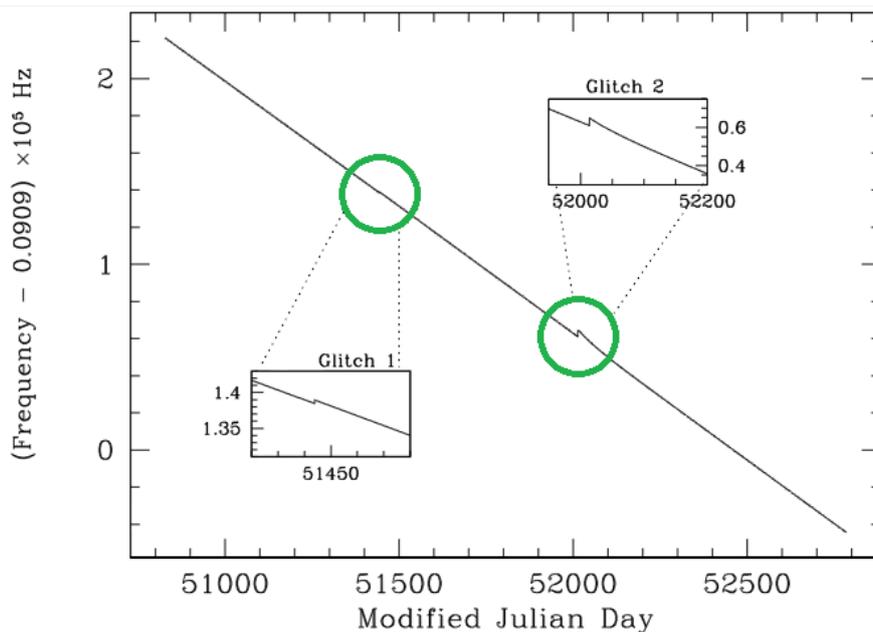


FIGURE 2.7 – **Deux glitches observés dans un magnétar.** Évolution de la fréquence de rotation de l’AXP 1RXS J1708–4009 en fonction du temps (en jours juliens modifiés). Les amplitudes des glitches observés sont $\Delta\Omega/\Omega = 5,5 \times 10^{-7}$ et $4,2 \times 10^{-6}$. On peut noter la différence entre les phases de relaxation des deux glitches, respectivement associées à $\Delta\dot{\Omega}/\dot{\Omega} = 0,01$ (sans décroissance exponentielle) et $\Delta\dot{\Omega}/\dot{\Omega} = 0,55$ (décroissance exponentielle sur 50 jours). Figure adaptée de [Kaspi & Gavriil \(2003\)](#).

Jusqu’à présent, on a observé 482 glitches dans 168 pulsars¹ ([Espinoza et al., 2011](#)), y compris dans des magnétars et des pulsars millisecondes, avec des fréquences de rotation $\nu = f = \Omega/(2\pi)$ comprises entre 0,09 Hz et 327 Hz (voir, par exemple, la base de données ATNF²; [Manchester et al. \(2005\)](#)). La grande quantité de données recueillies sur ces événements permet de mettre en évidence les tendances générales suivantes.

Amplitudes. Les glitches sont associés à une brusque accélération du pulsar caractérisée par une amplitude relative $\Delta\Omega/\Omega$ s’étendant entre $\sim 10^{-11}$ et $\sim 10^{-5}$ ([Wong et al., 2001](#); [Espinoza et al., 2011](#)). Une analyse récente des glitches du Crabe suggère une amplitude minimum située autour de $\Delta\Omega/\Omega \sim 10^{-9}$, sensiblement supérieure à la limite de résolution des détecteurs ([Espinoza et al., 2014](#)). L’étude des glitches de faible amplitude est particulièrement délicate car ceux-ci sont généralement contaminés par un autre type d’irrégularité, appelée *bruit de synchronisation* (voir section 2.3.3). Les glitches sont parfois accompagnés d’une variation abrupte de leur taux de ralentissement, $\Delta\dot{\Omega}/\dot{\Omega} \sim 10^{-4} - 10^{-2}$.

Phase de montée. Comme on le voit très clairement sur la figure 2.8, un glitch est composé de deux phases associées à des temps caractéristiques très différents. La phase de

1. <http://www.jb.man.ac.uk/pulsar/glitches.html>.

2. <http://www.atnf.csiro.au/research/pulsar/psrcat>.

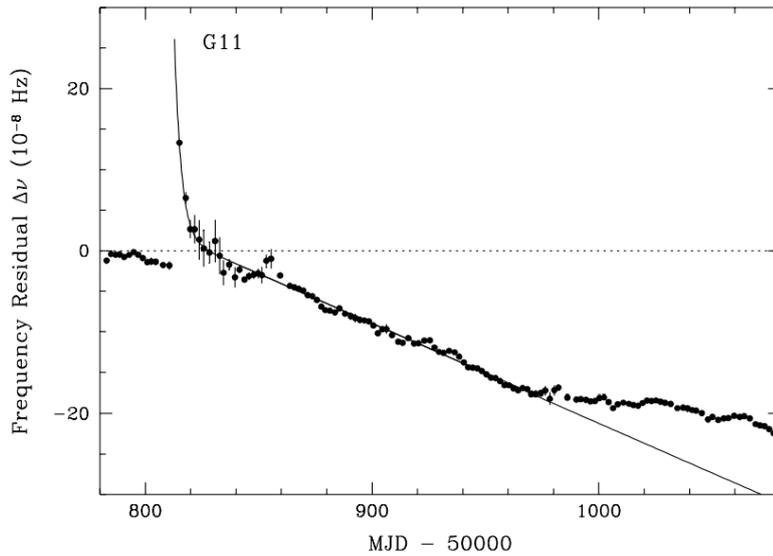


FIGURE 2.8 – **Glitch observé dans le pulsar du Crabe.** Résidus en fréquences $\nu(t) - \nu_0(t)$, où $\nu_0(t)$ est un modèle d'évolution ajusté sur le ralentissement du pulsar pendant 300 jours avant le glitch, en fonction du temps (en jours juliens modifiés). La relaxation, ajustée sur la loi (2.18) (trait plein), indique une amplitude $\Delta\Omega/\Omega = 9 \times 10^{-9}$, une augmentation du taux de ralentissement $\Delta\dot{\Omega}/\dot{\Omega} = 3 \times 10^{-3}$ et une relaxation exponentielle avec un temps caractéristique de 2,9 jours. Il est intéressant de remarquer une seconde accélération (30 jours après le glitch), ainsi qu'un changement en $\dot{\nu}$ apparaissant au bout de ~ 150 jours. Ce dernier semble lié au phénomène de bruit de synchronisation. Figure tirée de [Wong et al. \(2001\)](#).

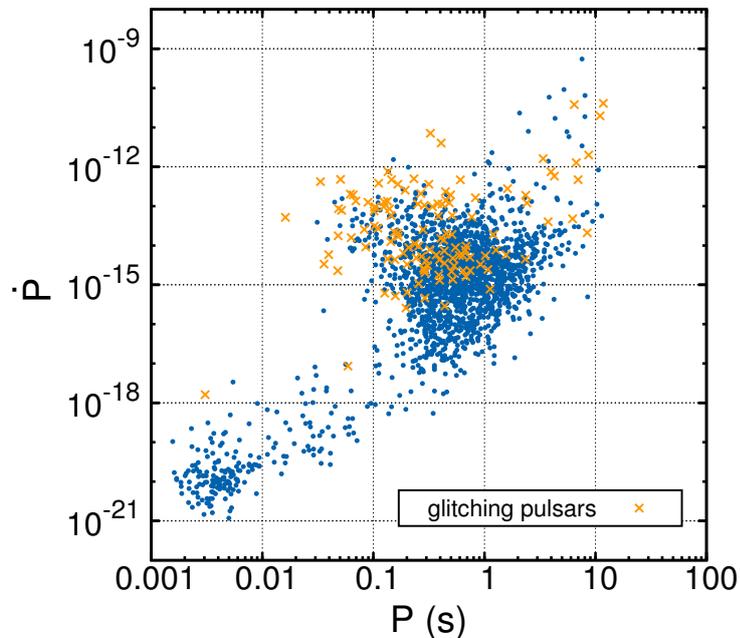


FIGURE 2.9 – **Position des pulsars présentant des glitches dans le diagramme $P - \dot{P}$.** Figure réalisée à partir des données recueillies par l'ATNF Pulsar Database.

2.3 Irrégularités de la période

montée est généralement trop rapide pour être résolue par les radiotélescopes actuels et les glitches apparaissent donc souvent sous la forme de sauts de fréquence. Certains glitches du Crabe partiellement résolus ont mis en évidence des temps de montée de l'ordre de $\tau_r \simeq 0,5 - 2$ jours (Lyne *et al.*, 1992; Wong *et al.*, 2001). Cependant, il a été suggéré que ces glitches « mous » pourraient avoir une origine différente des glitches habituels¹. Actuellement, la meilleure contrainte que l'on a sur τ_r provient de l'observation des glitches de Vela (en 2000 et 2004), conduisant à la limite : $\tau_r \lesssim 30 - 40$ s (Dodson *et al.*, 2002, 2007). La détermination des temps de montée est particulièrement ardue, car elle nécessite d'une part un suivi en continu du pulsar et, d'autre part, de disposer de temps d'arrivée (TOAs) extrêmement précis sur de très courtes durées (inférieures au temps de montée). Toutefois, on peut espérer que le radiotélescope LOFAR (*Low Frequency Array*, Stappers *et al.* (2011)) et le futur SKA (*Square Kilometer Array*, Watts *et al.* (2015)) apporteront des contraintes beaucoup plus fortes sur le temps de montée τ_r .

Phase de relaxation. On dispose de beaucoup plus de données observationnelles sur la phase de relaxation. Cette phase est généralement décrite par une loi du type

$$\nu(t) = \nu_0(t) + \Delta\nu_p + \Delta\dot{\nu}_p t + \sum_i \Delta\nu_i \exp(-t/\tau_i), \quad (2.18)$$

où $\nu_0(t)$ représente l'évolution de la fréquence de rotation du pulsar lors de son ralentissement (*i.e.* en l'absence de glitch) et $t = 0$ correspond à l'instant où le glitch est déclenché (sans tenir compte de la brève phase de montée). Les quantités $\Delta\nu_p$ et $\Delta\dot{\nu}_p$ correspondent à des sauts de fréquence et de taux de ralentissement « permanents », tandis que les termes $\Delta\nu_i$ représentent des contributions exponentiellement décroissantes, associée chacune à un temps caractéristique τ_i . L'amplitude totale du glitch est alors donnée par

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega} = \frac{\nu(0) - \nu_0(0)}{\nu_0(0)} = \frac{\Delta\nu_p + \sum_i \Delta\nu_i}{\nu_0(0)}, \quad (2.19)$$

tandis que la variation du taux de ralentissement est définie par :

$$\frac{\Delta\dot{\Omega}}{\dot{\Omega}} = \frac{\dot{\nu}(0) - \dot{\nu}_0(0)}{\dot{\nu}_0(0)} = \frac{\Delta\dot{\nu}_p - \sum_i \Delta\nu_i/\tau_i}{\dot{\nu}_0(0)}. \quad (2.20)$$

En général, la mesure de $\Delta\dot{\Omega}/\dot{\Omega}$ est assez imprécise, car elle dépend fortement de l'échantillonnage des mesures prises au voisinage du glitch (la mesure n'étant pas exactement réalisée à $t = 0$, certaines contributions exponentielles peuvent avoir déjà disparu). En outre, on définit également le paramètre de relaxation (*healing factor*) par la relation

$$Q = \frac{\sum_i \Delta\nu_i}{\Delta\nu_p + \sum_i \Delta\nu_i} = 1 - \frac{\Delta\nu_p}{\Delta\nu_p + \sum_i \Delta\nu_i}, \quad (2.21)$$

afin de quantifier le degré de relaxation du glitch.

1. Ces temps de montée étant bien supérieurs aux limites de résolution, il peut paraître surprenant de ne pas observer de glitches se déroulant sur des temps plus courts (avec $\tau_r \sim 0,01 - 0,1$ jour, par exemple), que l'on attendrait en plus grande quantité (Melatos *et al.*, 2008; Haskell & Melatos, 2015).

L'évolution de la vitesse de rotation lors de la phase de relaxation varie d'un pulsar à un autre, et peut même être différente entre deux glitches d'une même étoile. Pour certains pulsars, la relaxation peut être convenablement ajustée par des simples sauts de fréquence et de dérivée de la fréquence, mais cela est souvent lié à l'imprécision des mesures qui ne peuvent rendre compte de contributions exponentielles associées à des temps trop courts. Pour d'autres pulsars, tels que le Crabe ou Vela, la qualité des mesures permet de décrire cette phase avec une grande précision. Ainsi, certains glitches de Vela, très précisément résolus, nécessitent jusqu'à quatre termes exponentiels (par exemple, $\tau_i \sim 1$ min, 0,3 jour, 2,1 jours et 26 jours, voir [Dodson *et al.* \(2007\)](#)). Les observations montrent une grande variété de valeurs du paramètre de relaxation Q allant de $\sim 10^{-4}$ à ~ 1 ([Lyne *et al.*, 2000](#); [Yu *et al.*, 2013](#)). Les glitches de grande amplitude sont généralement associés à des petites valeurs de Q , typiquement $Q \sim 0,01$. Les grandes valeurs de paramètre de relaxation sont davantage observées pour des petits glitches, mais également pour les glitches géants détectés dans les magnétars. Bien que la relaxation des magnétars soit similaire à celle des RPPs, beaucoup présentent de larges augmentations du taux de ralentissement ($\Delta\dot{\Omega}/\dot{\Omega} \sim 0,5$), qui persistent sur des périodes de plusieurs semaines ou mois.

Activité et âge caractéristique. Moins de 10 % de la population totale de pulsars présente des glitches. Ces événements sont principalement observés dans des pulsars jeunes, comme on peut le voir sur la figure 2.9 (voir également la figure 2.6 pour les courbes d'âge caractéristique constant). On quantifie communément le comportement d'un pulsar par son *activité moyenne* \mathcal{A} , définie à partir des amplitudes de glitches cumulées

$$\mathcal{A} = \frac{1}{T_{\text{obs}}} \sum_j \frac{\Delta\Omega_j}{\Omega}, \quad (2.22)$$

où la sommation est réalisée sur les différents glitches rencontrés par le pulsar et T_{obs} désigne la durée d'observation considérée. Par exemple, on obtient $\mathcal{A} \simeq 2,25 \times 10^{-14} \text{ s}^{-1}$ pour Vela (voir Fig. 2.10), tandis que $\mathcal{A} \simeq 1 \times 10^{-16} \text{ s}^{-1}$ pour le Crabe ([Wong *et al.*, 2001](#)). En général, ce sont les pulsars avec un âge caractéristique $t_c \sim 10^4$ ans qui glitchent le plus. L'activité décroît avec l'âge, les vieux pulsars présentant des glitches d'amplitude plus faible ([Haskell & Melatos, 2015](#)).

2.3.2 Différents types de glitch

Pulsars radio. Au moins deux comportements de glitches différents ont été identifiés parmi les RPPs ([Espinoza *et al.*, 2011](#); [Yu *et al.*, 2013](#)). Un petit nombre de pulsars exhibe des glitches géants, avec une distribution en amplitude très étroite, se produisant de manière quasi-périodique. Par exemple, le pulsar de Vela présente des glitches d'amplitude $\Delta\Omega/\Omega \sim 10^{-6}$, tous les 2 – 3 ans environ (voir Fig. 2.11). Cependant, la majorité des pulsars, dont le Crabe, subissent des glitches d'amplitude plus faible, avec une large distribution en amplitude, espacés aléatoirement dans le temps. Ces différences de comportement sont mises en évidence sur la figure 2.11, à travers les exemples de Vela et du Crabe. Ces pulsars ont des activités hautement distinctes. De plus, leurs paramètres de relaxation sont également très différents ($Q \geq 0,8$ pour le Crabe, $Q \lesssim 0,2$ pour Vela, voir

2.3 Irrégularités de la période

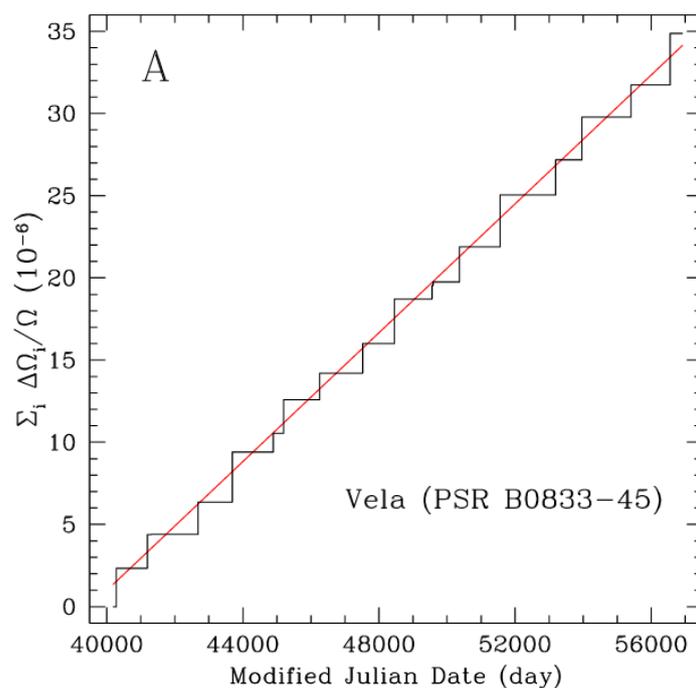


FIGURE 2.10 – Amplitudes de glitches cumulées en fonction du temps pour le pulsar de Vela. La pente de la loi d’ajustement (courbe rouge) correspond à l’activité moyenne du pulsar. Figure tirée de [Ho et al. \(2015\)](#).

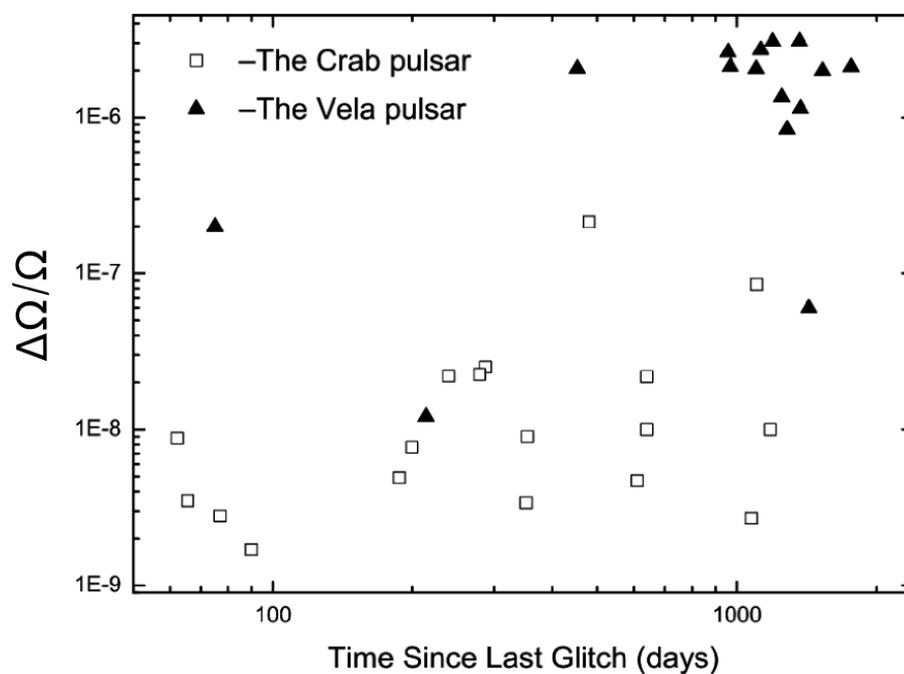


FIGURE 2.11 – Amplitudes des glitches de Vela et du Crabe en fonction du temps depuis le glitch précédent. Figure tirée de [Wang et al. \(2012\)](#).

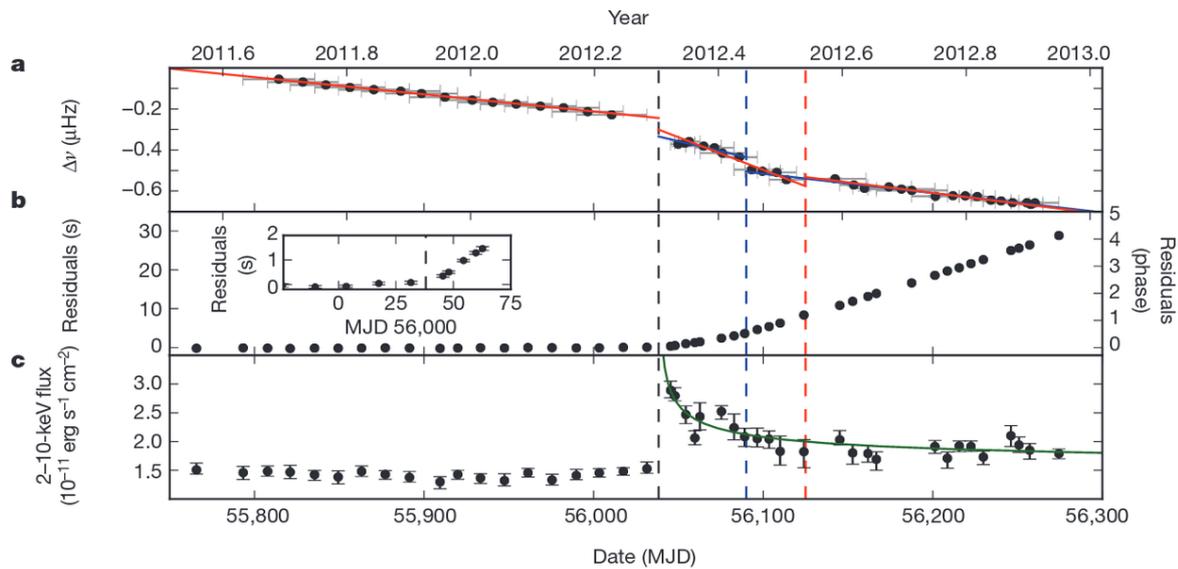


FIGURE 2.12 – **Anti-glitch observé dans le magnétar 1E 2259+586.** (a) Évolution de la fréquence de rotation du magnétar en fonction du temps (en jours juliens modifiés). Les lignes rouges et bleues correspondent à deux modèles d’ajustement envisagés. (b) Résidus obtenus après ajustement par un modèle basé uniquement sur l’évolution avant l’anti-glitch. (c) Variation temporelle du flux X (dans la bande 2-10 keV). Les lignes pointillées verticales indiquent les différentes dates de glitch : la ligne noire correspond à l’anti-glitch tandis que les deux autres sont associées à un second (anti-?)glitch. Figure tirée de [Archibald *et al.* \(2013\)](#).

[Crawford & Demiański \(2003\)](#)), bien que la détermination de Q pour Vela soit compliquée par le fait qu’une partie non négligeable du glitch n’a pas encore relaxé lorsque le glitch suivant a lieu.

Magnétars. Pour la majorité des RPPs, on n’observe aucune corrélation entre les épisodes de glitches et d’éventuelles variations dans le profil des pulses ou dans le flux émis par ces pulsars. Néanmoins, dans le cas des magnétars, ou de certains RPPs possédant un champ magnétique très intense, les glitches sont clairement associés à des changements dans le rayonnement émis par ces astres (voir, par exemple, [Kaspi *et al.* \(2003\)](#); [Livingstone *et al.* \(2011\)](#); [Weltevrede *et al.* \(2011\)](#)). De plus, un événement très particulier a été récemment observé dans un magnétar, au cours duquel la fréquence de rotation du pulsar a subitement diminué (au lieu d’augmenter) : cet *anti-glitch* est présenté sur la figure 2.12.

2.3.3 Bruit de synchronisation

En plus du phénomène de glitch, un second type d’irrégularité, appelée bruit de synchronisation (ou *timing noise*), est parfois détecté au cours du lent ralentissement des pulsars. Ce bruit de synchronisation se manifeste par des fluctuations aléatoires de la vitesse de rotation du pulsar sur de longues échelles de temps, allant de plusieurs jours à quelques années. Par exemple, les fluctuations visibles sur la figure 2.8, à la fin de la

période de relaxation, sont attribuées à ce second type d'irrégularité. Le timing noise est davantage marqué pour les pulsars jeunes (où le ralentissement est plus fort). Le présent manuscrit étant focalisé sur une modélisation du phénomène de glitch, nous n'aborderons pas le bruit de synchronisation dans la suite. Plus de détails sur les aspects observationnels du timing noise, ainsi que sur ses origines possibles, sont donnés dans [Hobbs *et al.* \(2010b\)](#); [Haskell & Melatos \(2015\)](#).

2.4 Premiers modèles de glitches

2.4.1 Mécanismes externes

Peu de temps après leur découverte, différents scénarios ont été envisagés pour tenter d'expliquer le phénomène de glitch (voir [Ruderman \(1972\)](#) pour une revue sur ces premiers modèles). Par exemple, il a été proposé que les glitches pourraient être associés à des explosions de plasma dans la magnétosphère, à la présence d'une planète au voisinage du pulsar ou encore à la collision d'objets massifs avec l'étoile. Toutefois, pour les pulsars radio normaux, l'absence de corrélation entre épisodes de glitches et éventuelles variations du rayonnement émis par le pulsar suggère plutôt un mécanisme lié à l'intérieur de l'étoile (voir sections [2.4.2](#) et [3.2](#)). La situation est différente pour les magnétars et les RPPs avec un champ magnétique élevé, où de telles corrélations sont couramment observées (voir section [2.3.2](#)). Il est clair que la magnétosphère joue un rôle important pour ces systèmes, bien que son action reste mal connue, le temps dynamique de la magnétosphère (de l'ordre de la période de rotation de l'étoile) étant beaucoup plus court que le temps typique entre deux glitches.

2.4.2 Tremblements d'écorce

Dès 1969, M. Ruderman suggérait que les glitches étaient la manifestation de *tremblements de croûte* (voir [Ruderman \(1969\)](#) et [Baym & Pines \(1971\)](#), pour plus de détails). Une étoile à neutrons en rotation à la vitesse angulaire Ω n'est pas sphérique, mais est déformée par les forces centrifuges, comme on peut le voir sur la figure [5.12](#). Si l'étoile était complètement fluide, une diminution de sa vitesse de rotation (lors du ralentissement du pulsar, par exemple) s'accompagnerait d'un réajustement de la forme de l'étoile, afin d'adopter une structure plus sphérique. Toutefois, la présence d'une écorce solide empêche une modification continue de la structure de l'étoile et des contraintes solides s'accumulent dans la croûte. Lorsque ces contraintes atteignent une valeur critique, l'écorce se brise et l'étoile adopte une configuration plus sphérique. En faisant l'hypothèse que le moment cinétique est conservé pendant le tremblement de croûte, la diminution $\Delta I < 0$ du moment d'inertie I de l'étoile est alors accompagnée d'une augmentation de sa vitesse de rotation $\Delta\Omega > 0$, selon

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega} = -\frac{\Delta I}{I}, \quad (2.23)$$

ce qui conduit à l'observation d'un glitch.

Les arguments suivants sont tirés de [Lyne \(1992\)](#). Pour une étoile à neutrons entièrement fluide, le moment d'inertie est donné par

$$I = I_0 (1 + \epsilon), \quad (2.24)$$

où I_0 est le moment d'inertie d'une étoile sphérique (sans rotation) et le paramètre ϵ , proportionnel à Ω^2 , est typiquement très petit. Par exemple, l'aplatissement ϵ associé aux pulsars du Crabe et de Vela est d'environ 10^{-3} et 10^{-4} respectivement. Le ralentissement $\delta\Omega \simeq \dot{\Omega} \delta t < 0$ du pulsar, entre deux glitches successifs séparés d'une durée δt , devrait alors s'accompagner d'un réajustement $\delta\epsilon < 0$ et donc d'une diminution du moment d'inertie

$$\delta I = I_0 \delta\epsilon = 2\epsilon I_0 \frac{\delta\Omega}{\Omega}. \quad (2.25)$$

En raison de la présence de l'écorce solide, la diminution du moment d'inertie du pulsar lors d'un glitch est alors, au maximum, égale à celle qu'aurait subie une étoile fluide depuis le glitch précédent, ce qui conduit à $|\Delta I| < |\delta I|$. L'amplitude du glitch $\Delta\Omega/\Omega$ (2.23) vérifie alors

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega} \lesssim -\frac{\delta I}{I_0} = -2\epsilon \frac{\delta\Omega}{\Omega} \simeq \epsilon \frac{\delta t}{t_c}, \quad (2.26)$$

où on a fait apparaître l'âge caractéristique t_c du pulsar, défini par (2.16). Ce modèle de tremblement de croûte prédit donc une amplitude maximale de glitch

$$\left. \frac{\Delta\Omega}{\Omega} \right|_{\max} \simeq \epsilon \frac{\delta t}{t_c}. \quad (2.27)$$

Pour le pulsar du Crabe, on a $\delta t \sim 10^2 - 10^3$ jours (voir Fig. 2.11) et $t_c \sim 10^3$ ans (voir section 2.2.3), de telle sorte que l'amplitude maximale prédite est de l'ordre de $\sim 10^{-7} - 10^{-6}$, en accord avec les observations. En revanche, en ce qui concerne Vela ($\delta t \sim 10^3$ jours et $t_c \sim 10^4$ ans), on obtient des amplitudes de glitches inférieures à $\sim 10^{-8}$. Ce modèle n'est donc pas suffisant pour expliquer les glitches géants du pulsar de Vela. De plus, en supposant que chaque glitch est accompagné d'une réduction de l'aplatissement de l'ordre de $\Delta\epsilon \sim -\Delta\Omega/\Omega \sim -10^{-6}$, l'aplatissement actuel de l'étoile disparaîtrait en seulement une centaine d'épisodes de glitches ($\sim \epsilon/|\Delta\epsilon|$), c'est-à-dire au bout d'environ $100 \times \delta t \simeq 300$ ans, ce qui ne représente qu'une petite fraction de l'âge de Vela.

Nous verrons dans le chapitre suivant que l'ingrédient manquant pour expliquer les glitches géants du pulsar de Vela est la prise en compte de matière superfluide au sein de l'étoile à neutrons. Notons toutefois que le modèle décrit dans cette section n'est pas pour autant à rejeter, car les différences observées entre les glitches du Crabe et de Vela (voir section 2.3.2) pourraient être reliées à deux mécanismes distincts.

Superfluidité dans les étoiles à neutrons

Sommaire

3.1	Prédictions théoriques	53
3.2	Un cadre naturel pour expliquer les glitches	65
3.3	Autres supports observationnels	76

3.1 Prédictions théoriques

3.1.1 Introduction

Supraconductivité dans les métaux. Le phénomène de supraconductivité a été découvert¹ par H. K. Onnes, en 1911 (Onnes, 1911a,b,c). Ce dernier a constaté que la résistivité électrique du mercure devient nulle en dessous d’une température critique T_c , de l’ordre de 4,2 K, conduisant ainsi à l’apparition de courants permanents. Quelques années plus tard, en 1933, W. Meissner et R. Ochsenfeld ont montré que la supraconductivité ne correspond pas uniquement à un comportement de conducteur parfait, mais qu’elle constitue un nouvel état thermodynamique à part entière (Meissner & Ochsenfeld, 1933). En effet, en refroidissant du plomb, initialement placé en présence d’un champ magnétique, en dessous d’une température $T_c \simeq 7,2$ K, ils ont observé que le flux magnétique est expulsé en dehors du métal. Cette transition vers un état de diamagnétisme parfait est appelée *effet Meissner-Ochsenfeld*. Les expériences en laboratoire ont mis en évidence deux types de supraconducteurs (voir, par exemple, Tilley & Tilley (1990) ou Tinkham (2004) pour une introduction à la supraconductivité). Pour ces deux types, on observe que la supraconductivité disparaît si le champ magnétique appliqué dépasse une valeur critique, comme on peut le voir sur la figure 3.1. Le diagramme de phase des supraconducteurs de type I comporte une phase normale et une phase supraconductrice. Cette dernière, atteinte pour $H \leq H_c(T)$, correspond à un état où le flux magnétique est totalement expulsé de l’intérieur du supraconducteur. En revanche, les supraconducteurs de type II présentent une phase supplémentaire, appelée *phase mixte*, atteinte lorsque le champ magnétique

1. Voir van Delft & Kes (2010) pour l’histoire de cette découverte.

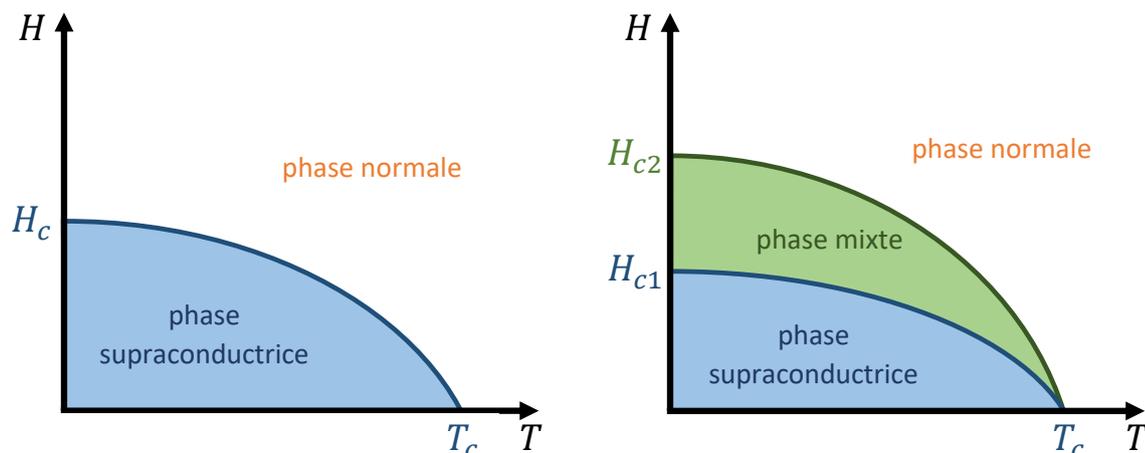


FIGURE 3.1 – **Supraconducteurs de type I et II.** Représentations schématiques du diagramme de phase d’un supraconducteur de type I (à gauche) et d’un supraconducteur de type II (à droite), dans le plan $H - T$ (champ magnétique appliqué - température).

appliqué est compris entre deux champs critiques $H_{c1}(T)$ et $H_{c2}(T)$. Dans cet état mixte, le flux magnétique pénètre le supraconducteur grâce à la formation de *tubes de flux quantifiés* (ou *fluxoïdes*), au sein desquels la supraconductivité est localement détruite (on parle alors d’effet Meissner incomplet).

La première description microscopique de la supraconductivité a été réalisée en 1957 par J. Bardeen, L. Cooper et J. R. Schrieffer ([Bardeen *et al.*, 1957](#)). La théorie BCS de la supraconductivité repose sur le couplage entre les électrons et les vibrations du réseau (phonons), qui conduit à une interaction effective attractive entre les électrons, malgré leur répulsion coulombienne. Les électrons sont alors susceptibles de s’assembler sous la forme de paires de Cooper, qui se comportent comme des bosons. En dessous d’une certaine température critique (liée à l’énergie à fournir pour briser les paires d’électrons), ces paires de Cooper condensent alors dans le même état quantique de plus basse énergie (dès leur formation). La supraconductivité des métaux peut ainsi être perçue comme une condensation de Bose-Einstein de paires d’électrons liés. Toutefois, cette analogie ne doit pas être poursuivie trop loin. Par exemple, l’existence d’une interaction attractive entre particules est indispensable à la formation de paires de Cooper et donc à la supraconductivité, tandis que la condensation de Bose-Einstein existe indépendamment des interactions. Par ailleurs, les paires de Cooper ont une extension spatiale très grande devant la distance moyenne entre particules et sont enchevêtrées les unes dans les autres. La condensation de Bose-Einstein et le régime BCS sont maintenant interprétés comme deux limites différentes d’un même phénomène. La transition entre ces deux limites a été récemment observée dans des gaz de Fermi d’atomes ultra-froids, pour lesquels on peut varier l’importance des interactions en utilisant un champ magnétique ajustable, grâce au phénomène de résonance de Feshbach (voir [Zwierlein *et al.* \(2005\)](#); [Combescot \(2006\)](#), par exemple).

Superfluidité en laboratoire. La superfluidité a été observée pour la première fois¹ par P. Kapitza, J. Allen et D. Misener dans un liquide d'hélium 4, en 1937 (Kapitza, 1938; Allen & Misener, 1938). Au lieu de se solidifier, l'hélium 4 subit une transition de phase superfluide en dessous de la température critique $T_c \simeq 2,17$ K, associée à une brusque variation de sa capacité calorifique massique. De nombreuses expériences ont été réalisées par la suite pour caractériser ce nouvel état thermodynamique (voir e.g. Allen & Jones (1938); Woods & Hallett (1963); Reppy & Depatie (1964); Hess & Fairbank (1967)). Celles-ci ont montré qu'un superfluide s'écoule sans dissipation à température nulle (ce qui est lié à une absence de viscosité et à une conductivité thermique très importante). D'un autre côté, un superfluide à température finie s'écoule de manière visqueuse dans de fins capillaires (du moins sa composante « normale »). Par ailleurs, ces expériences ont également mis en évidence un effet analogue à l'effet Meissner dans les supraconducteurs, appelé *effet Hess-Fairbank* dans le cas superfluide, caractérisé par une diminution du moment d'inertie du liquide en rotation lorsque la température de celui-ci est abaissée sous la température critique de transition superfluide. De même qu'il existe un champ magnétique limite au-dessus duquel la supraconductivité est détruite, la superfluidité disparaît au-delà d'une certaine vitesse critique. Pour décrire les différentes propriétés de l'hélium superfluide, L. Tisza a proposé un premier *modèle à deux fluides* (Tisza, 1938), amélioré ensuite par L. Landau (Landau, 1941). Suivant ce modèle, l'hélium superfluide serait alors composé de deux fluides distincts : un superfluide ne transportant aucune entropie et un fluide normal responsable du transport de la chaleur, formé par différents types de quasi-particules (états d'excitation élémentaires). Au zéro absolu, l'hélium superfluide ne contiendrait que la phase superfluide, correspondant ainsi à l'état fondamental du système. Ce modèle à deux fluides a été étendu au cas des supraconducteurs par C. J. Gorter en 1955 (Gorter, 1955). Tout comme la supraconductivité, la superfluidité est fortement liée au phénomène de condensation de Bose-Einstein. Davantage de détails sur la superfluidité sont donnés dans les livres suivants : Khalatnikov (1988); Tilley & Tilley (1990).

L'hélium 3, le second isotope stable de l'hélium, présente également une transition de phase superfluide, mais à une température beaucoup plus faible, de l'ordre de 2 mK (Osheff *et al.*, 1972b,a). Contrairement aux atomes d'hélium 4, les atomes d'hélium 3 sont des fermions et il est donc indispensable pour ces atomes de s'apparier pour permettre une condensation de Bose-Einstein. On explique ainsi la superfluidité de l'hélium 3 par un mécanisme similaire à l'appariement des électrons dans la théorie BCS des supraconducteurs, l'interaction attractive entre les atomes ayant cette fois-ci pour origine l'interaction d'échange entre les moments magnétiques de spin portés par les atomes. C'est notamment à cause de cette formation de paires que les condensats fermioniques ont des températures de transition généralement plus faibles que celles des condensats bosoniques. En ce qui concerne la supraconductivité des métaux, l'interaction attractive entre électrons créée par les phonons étant approximativement isotrope, elle donne lieu à la formation de paires de Cooper dont l'étendue spatiale est isotrope, avec des spins anti-parallèles (le spin total de la paire est nul). Le paramètre d'ordre de ces paires est donc singulet, de type s. Dans le cas de l'hélium 3, en revanche, l'interaction d'échange tend à appairer deux atomes ayant des spins parallèles (le spin total de la paire est alors non nul). De

1. Voir Balibar (2007) pour une note historique sur cette découverte.

plus, le potentiel attractif étant anisotrope, l'étendue spatiale de la paire l'est également. Les paires d'atomes d'hélium 3 ont alors un paramètre d'ordre triplet, de type p (voir, e.g., [Vollhardt & Wölfle \(1990\)](#); [Annett \(2004\)](#); [Lévy-Bertrand & van der Beek \(2013\)](#)).

Étoiles à neutrons. Peu de temps après sa formulation, la théorie BCS a été appliquée avec succès aux noyaux ([Bohr *et al.*, 1958](#); [Belyaev, 1959](#)). Dans un article consacré à l'étude du moment d'inertie des noyaux, A. B. Migdal a été le premier à suggérer la possibilité que la matière soit superfluide dans le cœur des étoiles à neutrons ([Migdal, 1959](#)). Par la suite, cette hypothèse a été étudiée plus en détails par [Ginzburg & Kirzhnits \(1965\)](#), puis par [Wolf \(1966\)](#). Il est intéressant de noter que la présence de matière superfluide/supraconductrice dans les étoiles à neutrons a été prédite théoriquement avant même la première détection des pulsars en 1967. Notons toutefois que la superfluidité et la supraconductivité dans les étoiles à neutrons, décrites dans la section suivante, présentent des différences notables avec ces mêmes phénomènes observés en laboratoire.

3.1.2 Appariement de nucléons et températures critiques

Dans les couches les plus externes des étoiles à neutrons, où la densité est similaire à celle des solides ordinaires, la température critique en dessous de laquelle les électrons deviennent supraconducteurs est de l'ordre de quelques K ([Ginzburg, 1969](#); [Chamel & Haensel, 2008](#)), ce qui est nettement inférieur aux températures de surface attendues et observées (voir section 2.2). Par conséquent, les électrons présents dans l'écorce des étoiles à neutrons, et a fortiori dans le cœur, ne sont pas supraconducteurs.

L'existence d'une interaction attractive, nécessaire à la formation de paires de Cooper, est au cœur de la théorie BCS. Pour les supraconducteurs conventionnels, cette interaction est indirecte et faible (voir section 3.1.1). Cependant, dans le cas de la matière nucléaire, l'interaction forte entre les nucléons est naturellement attractive sur des distances de l'ordre de quelques fermis, selon différents canaux d'appariement. Suivant la notation spectroscopique habituelle, chacun de ces canaux est désigné par les lettres $^{2S+1}L_J$, où S est le spin total des deux particules, L est le moment cinétique orbital associé à leur mouvement relatif et J est le moment cinétique total. Les calculs d'appariement relatifs aux étoiles à neutrons suggèrent que, pour des densités inférieures à $\sim \rho_0/2$, les neutrons s'apparient de la même manière que les électrons dans un supraconducteur conventionnel (état singulet de spin, de type s : 1S_0). On s'attend donc à ce que la croûte (interne) et éventuellement une petite partie du cœur externe abritent un *superfluide de neutrons isotrope*. Toutefois, pour des densités plus élevées, le canal 3P_2 (état triplet de spin, de type p) est le plus attractif, comme on peut le voir sur la figure 3.2. Le cœur des étoiles à neutrons est ainsi susceptible de contenir un *superfluide de neutrons anisotrope* (analogue au cas de l'hélium 3). En outre, on pense que les protons dans le cœur forment un *supraconducteur isotrope* (canal 1S_0). En principe, des paires neutron-proton pourraient également exister, mais leur formation n'est pas favorisée étant donné l'asymétrie de la matière composant l'intérieur des étoiles à neutrons. Enfin, d'autres phases superfluides/supraconductrices, reposant sur l'appariement d'hypérons ou d'un hypéron et d'un nucléon par exemple, pourraient être présentes dans le cœur interne, mais cela reste très spéculatif.

3.1 Prédictions théoriques

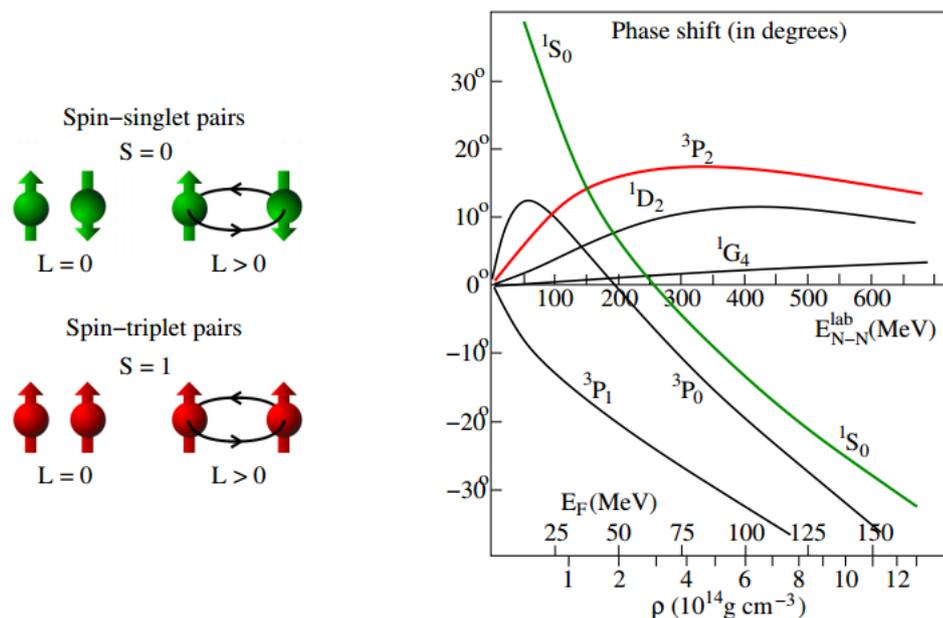


FIGURE 3.2 – **Canaux d'appariement.** *Gauche* : Combinaisons possibles de spin et de moment cinétique orbital pour les paires de Cooper. *Droite* : Décalage de phase associé à la diffusion neutron-neutron, tracé en fonction de l'énergie de Fermi des neutrons E_F et de la densité ρ . Différents canaux JLS sont considérés. Un décalage de phase positif correspond à une interaction attractive. Figure tirée de [Page et al. \(2013\)](#).

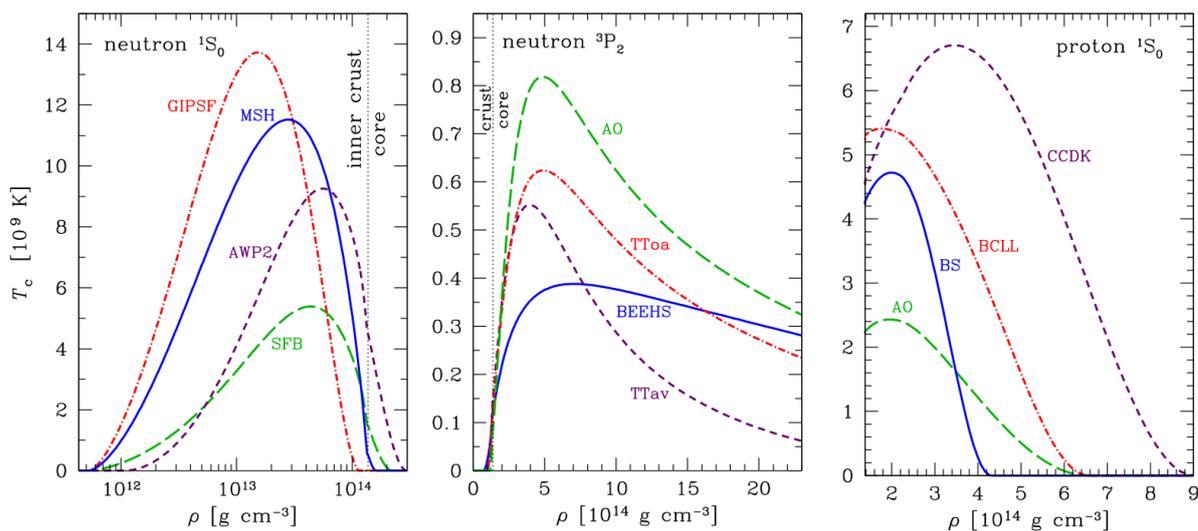


FIGURE 3.3 – **Températures critiques de transition superfluide/supraconductrice en fonction de la densité.** Profils correspondant à l'état singulet de neutrons (à gauche), triplet de neutrons (au milieu) et singulet de protons (à droite), pour différents modèles de superfluidité, dans l'écorce interne et le cœur des étoiles à neutrons. Figure tirée de [Potekhin et al. \(2015\)](#).

Les températures critiques de transition vers les phases superfluides et supraconductrices précédemment citées demeurent incertaines et dépendent du modèle microscopique utilisé pour décrire les interactions entre nucléons (voir Fig. 3.3). Les calculs d'appariement actuels suggèrent des températures maximales de transition de l'ordre de

$$T_{c,s}^{n, \max} \sim 10^9 - 10^{10} \text{ K}, \quad T_{c,p}^{n, \max} \sim 10^8 - 10^9 \text{ K} \quad \text{et} \quad T_{c,s}^{p, \max} \sim 10^9 - 10^{10} \text{ K}, \quad (3.1)$$

où $T_{c,s}^{n, \max}$, $T_{c,p}^{n, \max}$ et $T_{c,s}^{p, \max}$ désignent respectivement les températures critiques associées au superfluide de neutrons isotrope (1S_0), au superfluide de neutrons anisotrope (3P_2) et au supraconducteur de protons isotrope (1S_0). Il est intéressant de remarquer que ces températures sont nettement supérieures aux températures de transition superfluide observées en laboratoire (voir section 3.1.1). Les températures critiques (3.1) étant atteintes rapidement après la naissance des étoiles à neutrons (voir section 1.2.3), on s'attend donc effectivement à la présence de différentes phases superfluides à l'intérieur de ces astres.

Davantage de détails sur la présence de matière superfluide et sur les calculs microscopiques d'appariement dans les étoiles à neutrons sont donnés dans les articles de revues suivants : Sauls (1989); Dean & Hjorth-Jensen (2003); Sedrakian & Clark (2006); Chamel & Haensel (2008); Page *et al.* (2013); Graber *et al.* (2016).

3.1.3 Tourbillons superfluides et tubes de flux

Tourbillons superfluides. Un superfluide est décrit par une fonction d'onde macroscopique donnée par

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sqrt{n_\Psi} \times \exp(i\varphi(\mathbf{r})), \quad (3.2)$$

où n_Ψ est la densité de particules dans le condensat et $\varphi(\mathbf{r})$ est une phase locale. En appliquant l'opérateur $-i\hbar\nabla$ à cette fonction d'onde (où \hbar est la constante de Planck réduite), on déduit que l'impulsion par particule de superfluide est proportionnelle au gradient de la phase superfluide :

$$\boldsymbol{\pi} = \hbar\nabla\varphi. \quad (3.3)$$

En l'absence d'effets d'entraînement (voir partie II), l'impulsion du superfluide est simplement donnée par sa vitesse \mathbf{v} multipliée par la masse au repos m des particules¹ qui le constituent. L'équation (3.3) implique donc que le superfluide s'écoule de manière irrotationnelle, *i.e.*

$$\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (3.4)$$

Par conséquent, un superfluide placé dans un récipient en rotation reste au repos par rapport au référentiel du laboratoire : cet état est appelé *état de Landau*. Toutefois, les expériences montrent que lorsque la vitesse de rotation dépasse une valeur critique, le superfluide tourne de manière similaire à un fluide ordinaire. Cela signifie donc que la condition (3.4) peut être violée localement, via la formation de défauts topologiques appelés *tourbillons superfluides* (ou *vortex*), au sein desquels la superfluidité est détruite (Onsager, 1949; Feynman, 1955).

1. Dans le cas d'un superfluide fermionique, les particules de superfluide sont des paires de fermions. Ainsi, pour un superfluide de neutrons, on aura $m = 2m_n$, où m_n désigne la masse des neutrons au repos.

3.1 Prédictions théoriques

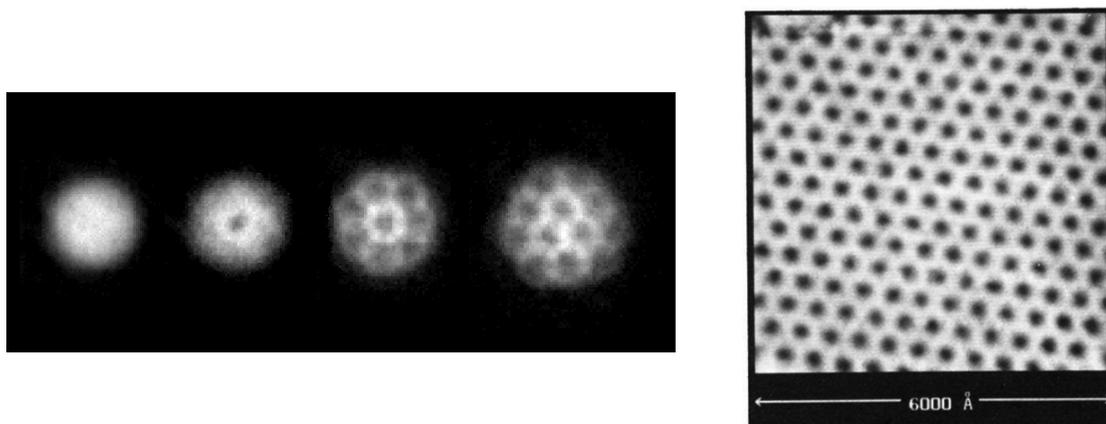


FIGURE 3.4 – **Observations de réseaux de tourbillons et de tubes de flux.** *Gauche* : Tourbillons dans un condensat de Bose-Einstein d’atomes de ^{87}Rb en rotation. La vitesse de rotation augmente de la gauche vers la droite. *Droite* : Tubes de flux dans un échantillon de NbSe_2 à 1,8 K, pour un champ magnétique appliqué de 1 T. Figures tirées de [Madison et al. \(2000\)](#) et [Hess et al. \(1989\)](#).

La phase du superfluide étant définie à 2π près, la circulation de la vitesse \mathbf{v} le long d’un circuit fermé \mathcal{C} vérifie nécessairement

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\hbar}{m} \oint_{\mathcal{C}} \nabla \varphi \cdot d\mathbf{l} = N \frac{h}{m}, \quad (3.5)$$

où $N \in \mathbb{N}$ et h désigne la constante de Planck. Cette équation implique donc que la circulation de la vitesse est quantifiée (nous reconnaissons ici la loi semi-classique de Bohr-Sommerfeld). Le cas $N = 0$ correspond à l’état de Landau. Ainsi, un superfluide ne peut entrer en rotation qu’en formant des *lignes de tourbillons quantifiées*, chacune étant associée à un quantum de circulation $\kappa = h/m$, l’entier N désignant le nombre de tourbillons présents à l’intérieur de la boucle \mathcal{C} considérée (on peut montrer qu’il est plus favorable énergétiquement d’avoir N tourbillons portant un quantum de circulation κ , qu’un unique tourbillon associé à une circulation $N\kappa$, voir annexe B). Notons que l’intégrale (3.5) est indépendante du choix du circuit fermé \mathcal{C} enfermant les N lignes de tourbillons.

La présence de lignes de tourbillons quantifiées a été confirmée par leur observation directe dans un superfluide d’hélium 4 en rotation, une vingtaine d’années après leur prédiction théorique ([Williams & Packard, 1974](#); [Yarmchuk et al., 1979](#)). Depuis, ces vortex ont également été observés dans différents condensats de Bose-Einstein en rotation ([Madison et al., 2000](#); [Abo-Shaeer et al., 2001](#); [Zwierlein et al., 2005](#)), comme on peut le voir sur la figure 3.4. Les expériences montrent que les tourbillons ont tendance à former un réseau triangulaire régulier, ainsi que [Tkachenko \(1966\)](#) l’avait prédit. Sur des échelles grandes devant la distance typique entre deux vortex, d_v , la superposition des écoulements associés à chacun des vortex fait que le superfluide présente un champ de vitesse analogue à celui d’un solide en rotation (voir Fig. 3.5), à la vitesse de rotation Ω , de telle sorte que

$$\nabla \times \mathbf{v} = 2\Omega, \quad (3.6)$$

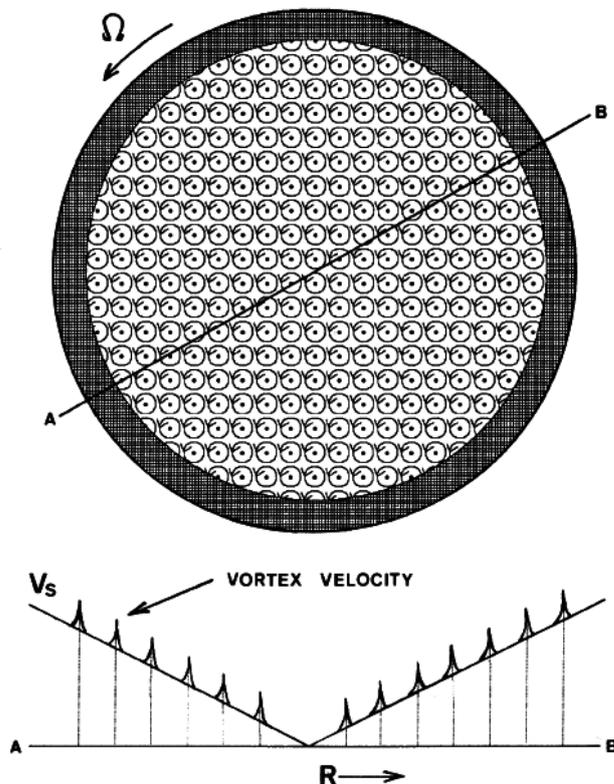


FIGURE 3.5 – **Représentation schématique du réseau de tourbillons à l’intérieur d’une étoile à neutrons.** *Haut* : Coupe dans le plan perpendiculaire à l’axe de rotation de l’étoile. *Bas* : Profil de vitesse du superfluide en fonction de la coordonnée radiale. La superposition des écoulements associés à chaque tourbillon conduit le superfluide à adopter un champ de vitesse analogue à celui d’un solide en rotation, $v \simeq r\Omega$, où r désigne la distance à l’axe de rotation. Figure tirée de [Sauls \(1989\)](#).

ce qui n’est valable qu’en l’absence d’entraînement et pour Ω constante. De plus, à ces mêmes échelles, la présence de tourbillons superfluides (3.5) implique une modification de la condition (3.4) comme suit :

$$\nabla \times \mathbf{v} = \mathcal{N}_v \boldsymbol{\kappa}, \quad (3.7)$$

où \mathcal{N}_v est la densité surfacique (locale) de tourbillons et $\boldsymbol{\kappa}$ désigne un vecteur de norme κ , aligné avec la direction (locale) des vortex, qui correspond à la direction de l’axe de rotation du superfluide. Des deux équations précédentes, on déduit que la densité surfacique de tourbillons est simplement donnée par

$$\mathcal{N}_v = \frac{2\Omega}{\kappa}. \quad (3.8)$$

Dans le cas des étoiles à neutrons, le superfluide de neutrons présent dans l’écorce interne et le cœur externe contient une multitude de tourbillons, chacun portant un quantum de circulation

$$\kappa = \frac{h}{2m_n} \simeq 2 \times 10^{-3} \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}, \quad (3.9)$$

3.1 Prédictions théoriques

où $m_n = 1,7 \times 10^{-27}$ kg est la masse au repos du neutron. La densité surfacique moyenne (3.8) de tourbillons contenus dans ce superfluide vérifie (Ginzburg & Kirzhnits, 1965)

$$\mathcal{N}_n = \frac{4m_n\Omega_n}{h} \simeq 6 \times 10^5 \left(\frac{P}{10 \text{ ms}} \right)^{-1} \text{ cm}^{-2}, \quad (3.10)$$

où on a fait l'hypothèse raisonnable que la vitesse de rotation Ω_n du superfluide est très proche de celle du pulsar, $\Omega = 2\pi/P$ (voir (7.7)). Ainsi, cette estimation suggère que le pulsar de Vela ($P \simeq 89$ ms et $R \sim 12$ km) contient environ 10^{17} lignes de tourbillons ! La distance moyenne entre deux vortex de neutrons est alors approximativement donnée par

$$d_n \simeq \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}_n}} \sim 1 \times 10^{-3} \left(\frac{P}{10 \text{ ms}} \right)^{1/2} \text{ cm}. \quad (3.11)$$

Il est intéressant de noter que la taille du cœur d'une ligne de tourbillon, donnée par la longueur de cohérence ξ_n du superfluide, est quant à elle beaucoup plus petite ($\xi_n \sim 10 - 10^2$ fm), voir Graber *et al.* (2016), par exemple.

Si la présence de tourbillons superfluides semble bien établie à l'intérieur des étoiles à neutrons, il faut garder à l'esprit que leur géométrie et leur orientation demeurent incertaines. L'hypothèse la plus simple consiste à supposer que ces tourbillons sont rigides, alignés avec l'axe de rotation du pulsar et qu'ils traversent l'étoile de part en part. Toutefois, la réalité pourrait être plus complexe. Par exemple, les vortex pourraient être courbés localement, en raison des interactions avec différents sites d'ancrage. Par ailleurs, une région non-superfluide pourrait exister au voisinage de l'interface cœur-croûte, entre les superfluides de neutrons isotrope et anisotrope (Ruderman, 1976), même si cette situation ne semble pas être favorisée d'après les modèles récents (Zhou *et al.*, 2004; Taranto *et al.*, 2016). Enfin, il a également été suggéré que les tourbillons superfluides pourraient être emmêlés les uns dans les autres, au lieu d'être simplement droits et parallèles entre eux. Une telle configuration serait alors susceptible de conduire à l'apparition de turbulence au sein de l'étoile (Peralta *et al.*, 2006; Andersson *et al.*, 2007). Ces différents phénomènes pourraient avoir un impact significatif sur la dynamique du superfluide dans les étoiles à neutrons.

Supraconducteur de type II et tubes de flux. En raison de la conductivité électrique très élevée de la matière nucléaire à l'intérieur des étoiles à neutrons, le temps caractéristique de diffusion du champ magnétique est très long, de l'ordre de 10^6 ans (Baym *et al.*, 1969a). Par conséquent, l'apparition de la supraconductivité dans ces astres n'est pas accompagnée d'une expulsion du flux magnétique, contrairement à ce que l'on observe dans les supraconducteurs étudiés en laboratoire lorsque le champ magnétique appliqué est inférieur à une certaine valeur critique (voir section 3.1.1). Le supraconducteur de protons présent dans le cœur peut donc être pénétré par le champ magnétique, quelle que soit son intensité. Cela peut se faire de deux manières différentes : soit en créant une phase mixte contenant un réseau périodique de tubes de flux, soit par l'apparition d'un état intermédiaire composé d'une succession de régions normales, dans lesquelles le flux est confiné, et supraconductrices, où l'effet Meissner est total. Ces deux situations correspondent respectivement à un supraconducteur de type II et à un supraconducteur de type I.

On définit deux longueurs caractéristiques dans un supraconducteur : la *longueur de cohérence* ξ_p , correspondant à la taille typique d'une paire de Cooper, et la *longueur de pénétration de London* Λ_* , qui est la distance sur laquelle le champ magnétique porté par un tube de flux pénètre dans le milieu environnant. Dans le cœur des étoiles à neutrons, ces grandeurs sont approximativement données par (Mendell, 1991)

$$\Lambda_* \simeq 1,3 \times 10^{-11} (1 - \varepsilon_p)^{1/2} \left(\frac{\rho}{10^{14} \text{ g.cm}^{-3}} \right)^{-1/2} \left(\frac{x_p}{0,05} \right)^{-1/2} \text{ cm}, \quad (3.12)$$

et

$$\xi_p \simeq 3,9 \times 10^{-12} (1 - \varepsilon_p)^{-1} \left(\frac{\rho}{10^{14} \text{ g.cm}^{-3}} \right)^{1/3} \left(\frac{x_p}{0,05} \right)^{1/3} \left(\frac{10^9 \text{ K}}{T_c^p} \right) \text{ cm}, \quad (3.13)$$

où ρ est la masse volumique du milieu, x_p désigne la fraction de protons et T_c^p est la température de transition supraconductrice (voir Éq. (3.1)). Le terme ε_p , relatif aux protons, quantifie les effets d'entraînement mutuel entre nucléons qui seront étudiés en détails dans la section 5.1.4. Notons que, pour le cœur externe, *i.e.* pour des densités baryoniques comprises entre $\sim 0,5 \times n_0$ et $\sim 2 \times n_0$, des estimations réalistes de ce paramètre¹ conduisent à $\varepsilon_p \sim 0,1 - 0,5$ (voir, e.g., Chamel & Haensel (2006); Chamel (2008) ou encore la figure 5.9). Le type de supraconducteur est alors déterminé par le paramètre de Ginzburg-Landau, κ_{NS} , défini par

$$\kappa_{\text{NS}} = \frac{\Lambda_*}{\xi_p}. \quad (3.14)$$

L'état mixte (type II) est favorisé si $\kappa_{\text{NS}} > 1/\sqrt{2} \simeq 0,707$, tandis que l'état intermédiaire (type I) apparaît si $\kappa_{\text{NS}} < 1/\sqrt{2}$. Compte tenu de (3.12) et (3.13), le paramètre de Ginzburg-Landau vérifie

$$\kappa_{\text{NS}} \simeq 3,3 (1 - \varepsilon_p)^{3/2} \left(\frac{\rho}{10^{14} \text{ g.cm}^{-3}} \right)^{-5/6} \left(\frac{x_p}{0,05} \right)^{-5/6} \left(\frac{T_c^p}{10^9 \text{ K}} \right). \quad (3.15)$$

Le comportement de κ_{NS} est représenté sur la figure 3.6, pour une EoS spécifique. Ainsi, on s'attend à la présence d'une phase mixte de supraconducteur de protons de type II dans le cœur externe. Toutefois, pour des densités supérieures à

$$\rho_{\text{crit, II} \rightarrow \text{I}} \simeq 6,4 \times 10^{14} (1 - \varepsilon_p)^{9/5} \left(\frac{0,05}{x_p} \right) \left(\frac{T_c^p}{10^9 \text{ K}} \right)^{6/5} \text{ g.cm}^{-3}, \quad (3.16)$$

ce qui correspond aux régions les plus denses de l'étoile, les protons sont plutôt susceptibles d'être dans un état intermédiaire de supraconducteur de type I.

L'impulsion par particule du supraconducteur est donnée par

$$\boldsymbol{\pi} = m\mathbf{v} + q\mathbf{A}, \quad (3.17)$$

1. Nous verrons plus tard qu'il existe également un paramètre d'entraînement associé aux neutrons, ε_n . Toutefois, compte tenu de la relation (C.5), cette grandeur vérifie $\varepsilon_n \simeq x_p \times \varepsilon_p \ll 1$, de sorte qu'elle a été négligée dans les différentes expressions données dans cette section.

3.1 Prédictions théoriques

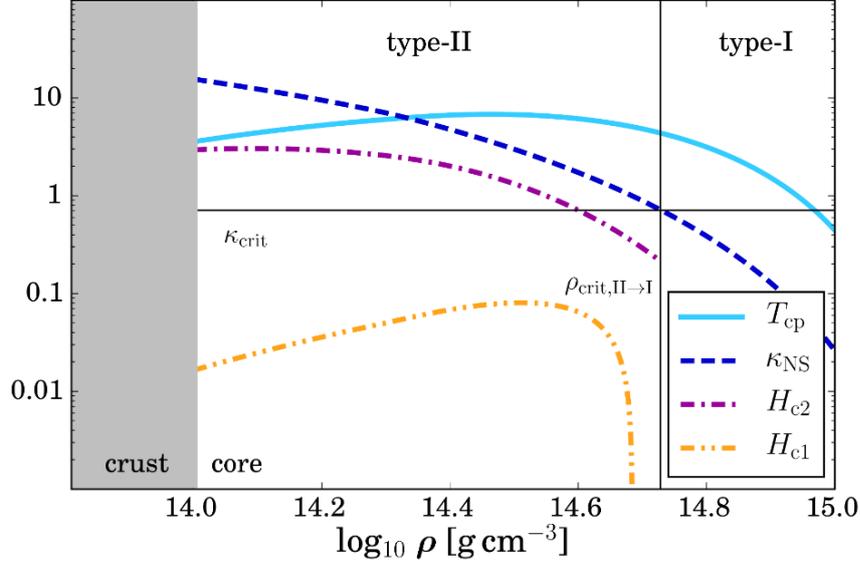


FIGURE 3.6 – **Paramètres relatifs au supraconducteur de protons dans le cœur des étoiles à neutrons en fonction de la densité.** La ligne cyan (trait plein) correspond à la température critique (en unités de 10^9 K) de transition supraconductrice. Le paramètre de Ginzburg-Landau κ_{NS} ainsi que les deux champs critiques H_{c1} et H_{c2} (normalisés à 10^{16} G) sont respectivement tracés en bleu (tirets), violet (un point entre tirets) et orange (deux points entre tirets). La ligne horizontale correspond à $\kappa_{\text{crit}} = 1/\sqrt{2}$ et la ligne verticale est associée à la densité de transition $\rho_{\text{crit,II}\rightarrow\text{I}}$, en dessous de laquelle les protons forment un supraconducteur de type II. Ces différentes grandeurs sont calculées pour une EoS spécifique. Figure tirée de [Graber *et al.* \(2016\)](#).

où \mathbf{v} est la vitesse du supraconducteur et \mathbf{A} est le potentiel vecteur, lié au champ d'induction magnétique \mathbf{B} par la relation $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ (la charge q étant exprimée en unités SI). Considérant ici un supraconducteur de protons, la masse et la charge des « particules » sont données par $m = 2m_p$ et $q = 2e$, où e désigne la charge élémentaire. L'impulsion d'un supraconducteur est également proportionnelle au gradient d'une phase φ ,

$$\boldsymbol{\pi} = 2m_p \mathbf{v} + 2e\mathbf{A} = \hbar \nabla \varphi, \quad (3.18)$$

de sorte que la condition

$$\nabla \times \boldsymbol{\pi} = \mathbf{0} \quad (3.19)$$

s'applique aussi. Cependant, dans le cas d'un supraconducteur de type II, cette relation peut être violée localement par la formation de tubes de flux, dans lesquels la supraconductivité est détruite. En effet, de manière similaire au cas superfluide, la quantification de la circulation de l'impulsion le long d'un circuit fermé \mathcal{C} conduit à

$$\frac{m_p}{e} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} + \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\hbar}{2e} \oint_{\mathcal{C}} \nabla \varphi \cdot d\mathbf{l} = N \frac{\hbar}{2e}, \quad (3.20)$$

où $N \in \mathbb{N}$ s'interprète comme le nombre de tubes de flux inclus dans le contour \mathcal{C} . Rappelons que les intégrales précédentes sont indépendantes du choix de \mathcal{C} , à condition que

le contour considéré contienne toujours le même nombre de tubes de flux. Contrairement aux lignes de tourbillons, pour lesquelles la vitesse diminue en $1/r$ où r est la distance au centre d'un vortex (voir annexe B), la vitesse décroît exponentiellement, *i.e.* $v \sim \exp(-r/\Lambda_\star)$. Ainsi, en choisissant un contour suffisamment éloigné du centre des tubes de flux, la contribution de l'intégrale sur la vitesse est nulle et l'équation (3.20) devient

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint_{\mathcal{S}} B \, dS = \phi = N\phi_0, \quad (3.21)$$

où \mathcal{S} désigne la surface sur laquelle s'appuie le contour \mathcal{C} et ϕ_0 est le quantum de flux magnétique associé à chaque tube de flux, donné par¹

$$\phi_0 = \frac{h}{2e} \simeq 2 \times 10^{-7} \text{ G.cm}^2. \quad (3.22)$$

Les quanta de flux portés par chaque tube de flux s'additionnent pour donner le flux ϕ total traversant le supraconducteur. La densité surfacique moyenne de tubes de flux dans le supraconducteur de protons est alors (Mendell, 1991)

$$\mathcal{N}_p = \frac{B}{\phi_0} \simeq 5 \times 10^{18} \left(\frac{B}{10^{12} \text{ G}} \right) \text{ cm}^{-2}, \quad (3.23)$$

où B est l'amplitude du champ magnétique interne de l'étoile à neutrons. Il est important de noter que le nombre de tubes de flux présents dans le cœur est très grand par rapport au nombre de tourbillons superfluides (3.10). La distance moyenne entre deux tubes de flux est alors simplement donnée par

$$d_p \simeq \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}_p}} \sim 4 \times 10^{-10} \left(\frac{B}{10^{12} \text{ G}} \right)^{-1/2} \text{ cm}. \quad (3.24)$$

Bien que très petite, cette distance reste généralement plus grande que la longueur caractéristique de décroissance du champ magnétique à l'intérieur du supraconducteur, Λ_\star (3.12), et que la taille typique ξ_p du cœur d'un tube de flux (3.13).

Par ailleurs, les champs magnétiques critiques H_{c1} et H_{c2} (voir section 3.1.1) s'expriment de la manière suivante (Graber *et al.*, 2016) :

$$H_{c1} = \frac{\phi_0}{4\pi\Lambda_\star^2} \ln \left(\frac{\Lambda_\star}{\xi_p} \right) \simeq 2,0 \times 10^{14} (1 - \varepsilon_p)^{-1} \left(\frac{\rho}{10^{14} \text{ g.cm}^{-3}} \right) \left(\frac{x_p}{0,05} \right) \text{ G}, \quad (3.25)$$

et

$$H_{c2} = \frac{\phi_0}{2\pi\xi_p^2} \simeq 2,2 \times 10^{15} (1 - \varepsilon_p)^2 \left(\frac{\rho}{10^{14} \text{ g.cm}^{-3}} \right)^{-2/3} \left(\frac{x_p}{0,05} \right)^{-2/3} \left(\frac{T_c^p}{10^9 \text{ K}} \right)^2 \text{ G}. \quad (3.26)$$

Le champ critique H_{c2} correspond au champ magnétique pour lequel les tubes de flux sont en contact ($d_p \sim \xi_p$). Il est intéressant de remarquer que le champ magnétique à

1. La charge électrique est ici exprimée dans les unités du système international. En unités CGS Gaussien, où $\varepsilon_0 = 1/(4\pi c^2)$ et $\mu_0 = 4\pi$, habituellement utilisées par la communauté, la charge électrique est donnée par $e_{\text{CGS}} = e_{\text{SI}} \times c$, de sorte que l'équation (3.22) devient $\phi_0 = hc/(2e_{\text{CGS}})$.

l'intérieur des magnétars pourrait dépasser H_{c2} . Dans une telle situation, la supraconductivité serait alors détruite, ce qui pourrait avoir un effet important sur la dynamique de ces étoiles (Sedrakian, 2016). Pour comparaison, le champ moyen porté par un tube de flux est

$$B_p \simeq \frac{\phi_0}{\pi \Lambda_*^2} \sim H_{c1}. \quad (3.27)$$

Pour un supraconducteur de type II en laboratoire, l'état mixte où les tubes de flux sont présents n'est accessible que pour $H_{c1} < B < H_{c2}$. Toutefois, dans le cas des étoiles à neutrons, cet état peut également persister pour des champs magnétiques inférieurs à H_{c1} (état mixte métastable). Ainsi, le champ critique de transition H_{c1} n'est pas réellement important dans ces systèmes.

De manière identique aux tourbillons superfluides, les expériences réalisées en laboratoire montrent que les tubes de flux tendent à adopter une configuration régulière triangulaire, appelée réseau d'Abrikosov, comme on peut le voir sur la figure 3.4 (Essmann & Träuble, 1967; Hess *et al.*, 1989). Toutefois, les tubes de flux, dont la direction correspond à celle du champ magnétique local, sont susceptibles de présenter une configuration beaucoup plus complexe dans le cœur des étoiles à neutrons. En effet, on pense que ceux-ci adoptent une structure très enchevêtrée, associée à celle du champ magnétique qui existait dans l'étoile avant que la supraconductivité apparaisse (Ruderman *et al.*, 1998).

Enfin, mentionnons que la formation de tubes de flux est défavorable d'un point de vue énergétique dans le cœur interne des étoiles à neutrons. Dans cet état intermédiaire de type I, le champ magnétique est confiné dans des régions de protons normaux de grande dimension et de formes variées (Sedrakian *et al.*, 1997; Sedrakian, 2005). La forme exacte de ces régions dépend également de la distribution du champ magnétique à l'intérieur de l'étoile au moment de la transition supraconductrice. L'absence de structure bien définie rend l'étude de cet état intermédiaire relativement compliquée (voir également Jones (2006b)).

3.2 Un cadre naturel pour expliquer les glitches

La présence de matière superfluide à l'intérieur des étoiles à neutrons a été rapidement invoquée pour expliquer les temps de relaxation très longs observés lors des événements de glitches (Baym *et al.*, 1969a). Nous allons voir dans cette section que la superfluidité propose un cadre naturel pour rendre compte du phénomène de glitch.

3.2.1 Transferts de moments cinétiques entre deux fluides

En première approximation, l'intérieur des étoiles à neutrons superfluides est composé de deux fluides associés à des dynamiques différentes (Baym *et al.*, 1969b). Les particules chargées (protons, électrons, noyaux dans l'écorce, ...) sont fortement couplées entre elles par le champ magnétique interne et forment un premier fluide (Easson, 1979; Glampedakis *et al.*, 2011). Ce dernier contient également toute partie du superfluide de neutrons couplée

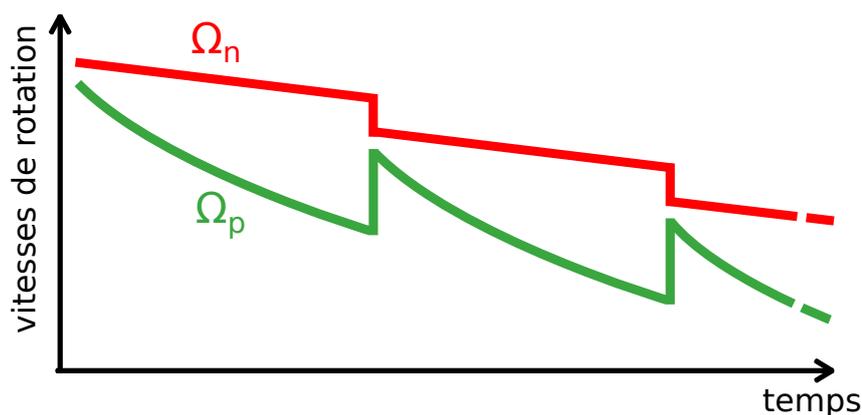


FIGURE 3.7 – **Modèle à deux fluides.** Représentation schématique de l'évolution temporelle de la vitesse de rotation Ω du pulsar et de la vitesse angulaire Ω_n du superfluide de neutrons. Deux événements de glitches sont ici représentés.

aux particules chargées sur des temps très courts¹. Par couplage magnétique, ce premier fluide est en corotation avec la magnétosphère du pulsar, à la vitesse angulaire Ω observée. En revanche, les neutrons sont électriquement neutres et sont superfluides. Une certaine partie d'entre eux, faiblement couplée aux particules chargées par friction mutuelle, va alors posséder sa propre dynamique et former un second fluide², tournant à la vitesse angulaire Ω_n , a priori différente de Ω .

En 1975, P. W. Anderson et N. Itoh ont proposé que les glitches pourraient correspondre à des transferts de moment cinétique entre ces deux fluides, initiés par le désancrage soudain de lignes de tourbillons (Anderson & Itoh, 1975). L'idée est la suivante. Lorsque le pulsar ralentit (voir section 2.2), les lignes de tourbillons tendent à s'éloigner de l'axe de rotation, afin de diminuer leur densité surfacique et donc la vitesse de rotation du superfluide de neutrons (voir Éq. (3.10)). Cependant, certains vortex pourraient rester ancrés aux noyaux présents dans l'écorce (Anderson & Itoh, 1975; Alpar *et al.*, 1981) et/ou aux tubes de flux dans le cœur si les protons forment un supraconducteur de type II (Baym *et al.*, 1969a; Sauls, 1989; Ruderman *et al.*, 1998). Par conséquent, alors que la vitesse angulaire Ω du fluide de particules chargées continue de diminuer, une partie du superfluide est découplée du reste de l'étoile et maintient approximativement³ la même vitesse de rotation $\Omega_n > \Omega$ (voir Fig. 3.7). La différence de vitesse $\delta\Omega = \Omega_n - \Omega > 0$ induit alors une force radiale de type Magnus sur les tourbillons, dont l'amplitude augmente avec $\delta\Omega$. Lorsque la différence de vitesse atteint une certaine valeur critique $\delta\Omega_0$, cette force de Magnus excède la force d'ancrage des vortex, et les lignes de tourbillons sont soudainement libérées vers l'extérieur. Ce mouvement radial des vortex est alors accompagné

1. Par temps « très courts », on entend ici « bien inférieurs aux temps caractéristiques mesurés lors des glitches ». Plus généralement, cette notion va dépendre de la dynamique du phénomène que l'on souhaite modéliser.

2. Une étoile à neutrons pourrait contenir plusieurs types de superfluides/supraconducteurs (d'hypérons ou de quarks, par exemple) avec autant de fluides associés à des dynamiques différentes. Le modèle à deux fluides décrit ici est donc le plus simple, mais il faut garder à l'esprit que la réalité pourrait être plus complexe.

3. Aux effets d'entraînement près.

3.2 Un cadre naturel pour expliquer les glitches

d'une diminution de la vitesse angulaire du superfluide $\Delta\Omega_n < 0$ et, par conservation du moment cinétique total¹, d'une accélération du second fluide selon

$$\Delta\Omega = -\frac{I_n}{I_p}\Delta\Omega_n > 0, \quad (3.28)$$

où I_n et I_p désignent les moments d'inertie du superfluide initialement découplé et du fluide de particules chargées (incluant également tous les constituants qui leur sont couplés sur des temps courts devant le temps de montée). Un glitch est alors observé (voir Fig. 3.7). Durant la phase de relaxation qui suit, on pense que les tourbillons se réancrent progressivement, donnant ainsi naissance à une nouvelle différence de vitesse $\delta\Omega$.

Il est important de remarquer que le modèle de tremblement d'étoile détaillé dans la section 2.4.2 et celui décrit précédemment ne sont pas nécessairement indépendants. En effet, la présence de matière superfluide est susceptible d'engendrer des tremblements de croûte. Par exemple, l'ancrage des tourbillons dans l'écorce pourrait être suffisamment fort pour que cette dernière craque avant que les lignes de tourbillons ne soient libérées (Ruderman, 1976, 1991a,b,c). Il a également été montré que le seul fait que les fluides ne tournent pas à la même vitesse conduit à l'apparition de contraintes solides dans l'écorce, et donc éventuellement à la rupture de celle-ci, même en l'absence d'ancrage des lignes de tourbillons (Carter *et al.*, 2000; Chamel & Carter, 2006). Réciproquement, les tremblements d'étoile peuvent aussi générer des mouvements soudains de vortex (Ruderman, 1991c; Chau & Cheng, 1993; Alpar *et al.*, 1994, 1996; Eichler & Shaisultanov, 2010).

Dans le modèle de *fluage* (ou *creep*) développé par Alpar *et al.* (1984c), la phase de relaxation post-glitch s'explique par la reptation des lignes de tourbillons, analogue au phénomène de glissement des tubes de flux magnétique observé dans les supraconducteurs de type II (voir Beasley *et al.* (1969), par exemple). Par fluctuations thermiques ou par effet tunnel (Link *et al.*, 1993), les vortex ancrés dans l'écorce ont une certaine probabilité de se déplacer d'un site d'ancrage à un autre, bien que la différence de vitesse $\delta\Omega$ soit inférieure au seuil critique $\delta\Omega_0$. Il existe alors un courant de vortex dirigé le long de la force de Magnus, qui est d'autant plus important que la température est élevée. Dans les pulsars très jeunes, ce courant pourrait être suffisamment important pour empêcher l'accumulation de larges contraintes dans l'écorce et ainsi expliquer la faible activité de ces pulsars. Selon sa température, une région donnée à l'intérieur de l'étoile, associée à une certaine énergie d'ancrage, pourra être dans un régime de fluage linéaire ou non-linéaire (Alpar *et al.*, 1989). Au début de la phase de relaxation, si la température est grande par rapport à l'énergie d'ancrage, dans une certaine région i , la différence de vitesse locale $\delta\Omega_i = \Omega_n^i - \Omega$ sera suffisamment petite pour que la réponse du taux de ralentissement à la perturbation initiale (correspondant à l'accélération soudaine du pulsar) soit linéaire en l'amplitude du glitch. Dans ce cas, la contribution de cette région à la variation totale du taux de ralentissement sera donnée par (Alpar *et al.*, 1990)

$$\frac{\Delta\dot{\Omega}_i(t)}{\dot{\Omega}} = \frac{I_i}{I} \times \frac{\Delta\Omega}{\Omega} \times \frac{2t_c}{\tau_i} \times \exp(-t/\tau_i), \quad (3.29)$$

1. Les temps de montée des glitches étant très courts devant le temps caractéristique lié au ralentissement du pulsar (voir section 2.3.1), il semble légitime de supposer que le moment cinétique total de l'étoile est conservé lors de cette phase.

où I_i et I désignent le moment d'inertie du superfluide ancré dans la région i et le moment d'inertie total, $\Delta\Omega/\Omega$ est l'amplitude du glitch, t_c est l'âge du pulsar (2.16) et τ_i est un temps caractéristique associé à la région considérée. En revanche, si la température est suffisamment faible par rapport à l'énergie d'ancrage, la différence $\delta\Omega_i$ sera grande et la réponse sera non-linéaire. La plupart des temps caractéristiques observés lors des phases de relaxation des glitches de Vela (voir section 2.3.1) sont interprétés comme des réponses linéaires relatives à différentes régions, tandis que seuls les temps de relaxation les plus longs sont associés à des contributions non-linéaires (Alpar *et al.*, 1993). Le modèle de fluage a été récemment appliqué au cas où les tourbillons superfluides peuvent s'ancrer sur les tubes de flux présents dans le cœur externe (Sidery & Alpar, 2009; Link, 2012, 2014; Gügercinoğlu & Alpar, 2014; Akbal *et al.*, 2015; Gügercinoğlu & Alpar, 2016).

La description précédente constitue la base du modèle communément accepté pour expliquer les glitches des pulsars, tout au moins ceux de Vela, pour lesquels le mécanisme présenté dans la section 2.4.2 n'est pas suffisant. Ce scénario est supporté par des expériences réalisées avec de l'hélium superfluide, dans lesquelles des phénomènes similaires aux glitches ont été observés (Tsakadze & Tsakadze, 1979, 1980), et par la capacité du modèle de fluage à reproduire les phases de relaxation de différents pulsars (Alpar *et al.*, 1984c,a, 1993, 1996; Gügercinoğlu & Alpar, 2014).

Toutefois, de nombreux points restent à éclaircir avant que ce modèle atteigne le rang de théorie totalement cohérente et prédictive. En particulier, le mécanisme qui déclenche le mouvement des lignes de tourbillons est encore mal connu. Celui-ci pourrait être lié à l'accumulation de vortex dans une région où l'ancrage est intense (Cheng *et al.*, 1988; Pizzochero, 2011), à un effet domino lors d'avalanches de tourbillons (Warszawski & Melatos, 2013), à la présence d'instabilités hydrodynamiques (Andersson *et al.*, 2003; Peralta *et al.*, 2006; Glampedakis & Andersson, 2009), à des tremblements d'écorce (Ruderman, 1976; Alpar *et al.*, 1994) ou encore à une perturbation de température (Link & Epstein, 1996). En outre, le détail de l'ancrage dans l'écorce et dans le cœur est assez incertain, tout comme la proportion de superfluide prenant part au phénomène de glitch.

3.2.2 Ancrage dans l'écorce

Rôle de l'écorce. À cause d'un effet d'entraînement mutuel entre neutrons et protons (voir partie II), les tourbillons superfluides dans le cœur portent un quantum de flux magnétique fractionnaire ϕ_n (Sedrakian & Shakhbasian, 1980; Alpar *et al.*, 1984b), donné par

$$\phi_n = -\frac{\varepsilon_p}{1 - \varepsilon_n}\phi_0 \simeq -\varepsilon_p\phi_0, \quad (3.30)$$

où ϕ_0 correspond au quantum de flux magnétique (3.22). La diffusion des électrons par le champ magnétique porté par les lignes de tourbillons conduit à un fort couplage entre le superfluide de neutrons présent dans le cœur et le fluide de particules chargées (Alpar *et al.*, 1984b), sur des temps très courts par rapport aux temps de relaxation post-glitch (voir Éq. (8.59)). Par conséquent, la dynamique des glitches semble plutôt associée au superfluide de neutrons contenu dans l'écorce. Par la suite, ce scénario a également été supporté par l'analyse des données recueillies lors d'événements de glitches. Ainsi, l'étude

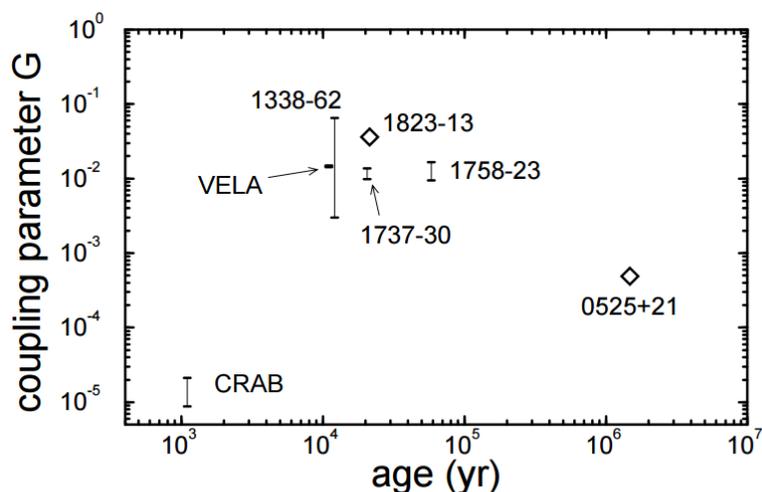


FIGURE 3.8 – Paramètre de couplage \mathcal{G} mesuré pour différents pulsars. Pour chaque pulsar, le paramètre \mathcal{G} (3.32) est donné en fonction de l'âge caractéristique (2.16). Figure tirée de Chamel & Haensel (2008).

de la relaxation post-glitch associée à différents pulsars (en utilisant l'équation (3.29), par exemple) a montré que le rapport du moment d'inertie I_n du superfluide participant aux glitches sur le moment d'inertie total I est de l'ordre de quelques pourcents (Alpar *et al.*, 1990, 1993), en accord avec la quantité de superfluide contenu dans la croûte attendue pour une étoile à neutrons de $\sim 1,4 M_\odot$ (voir e.g. Page *et al.* (2013); Delsate *et al.* (2016)). De plus, on peut montrer que le rapport I_n/I est contraint par la relation (Link *et al.*, 1999)

$$\frac{I_n}{I} \gtrsim \mathcal{G}, \quad (3.31)$$

valable uniquement en l'absence d'entraînement. Le paramètre de couplage \mathcal{G} est un nombre sans dimension qui dépend uniquement de grandeurs observables. Il est défini par la relation

$$\mathcal{G} = \mathcal{A} \times \frac{\Omega}{|\dot{\Omega}|}. \quad (3.32)$$

où \mathcal{A} est l'activité du pulsar (2.22). Ce paramètre est représenté sur la figure 3.8 pour différents pulsars. Les études statistiques réalisées par Lyne *et al.* (2000) et Espinoza *et al.* (2011) mettent en évidence un paramètre de couplage compris entre 0,005 et 0,016 pour les pulsars d'âge intermédiaire. En particulier, une analyse des glitches de Vela montre que $\mathcal{G} = 0,014$ pour ce pulsar. Ces résultats soutiennent eux aussi l'idée selon laquelle l'écorce seule serait responsable du processus de glitch. En général, les pulsars jeunes ($t_c \lesssim 10^3$ ans) et âgés ($t_c \gtrsim 10^6$ ans) sont associés à des valeurs de \mathcal{G} beaucoup plus faibles (voir Fig. 3.8). Ainsi, la très faible activité du pulsar du Crabe suggère que seule une toute petite partie du superfluide est impliquée dans les événements de glitches qu'il rencontre (voir également Alpar *et al.* (1996)).

Force d’ancrage dans l’écorce et modèle du « chasse-neige ». La force caractérisant l’ancrage des tourbillons aux noyaux présents dans la croûte est un ingrédient fondamental dans l’étude du mécanisme de glitch. En effet, celle-ci détermine la quantité de moment cinétique que le superfluide découplé peut emmagasiner, avant que la force de Magnus libère les lignes de tourbillons et déclenche le glitch (voir section 3.2.1).

Alors que les premiers modèles théoriques se concentraient sur l’interaction microscopique entre une ligne de tourbillon et un unique site d’ancrage (voir e.g. Ruderman (1976); Alpar (1977); Alpar *et al.* (1984c); Epstein & Baym (1988)), c’est la *force d’ancrage par unité de longueur du vortex*, beaucoup plus complexe à calculer, qui contrebalance la force de Magnus. La force associée à un site d’ancrage dépend uniquement de la différence d’énergie entre l’état où le noyau est situé à l’intérieur du vortex et celui où le noyau est en dehors. En revanche, la force par unité de longueur dépend, entre autres choses, de la rigidité de la ligne de tourbillon, de sa géométrie (tourbillon droit ou entortillé?) et de son orientation, qui sont relativement mal connues. Basés sur des géométries très simplifiées, les premiers travaux ont mis en évidence une force par unité de longueur maximale de l’ordre de¹ quelques 10^{18} dyn.cm⁻¹ (Alpar, 1977). Cependant, Jones (1997) a suggéré qu’en considérant un vortex infiniment long, la force d’ancrage pourrait être complètement négligeable après avoir moyenné sur les différentes orientations possibles. Plus récemment, des calculs détaillés ont été réalisés par Link (2009), qui a modélisé l’écorce comme un potentiel créé par un ensemble d’ions placés aléatoirement, et par Seveso *et al.* (2016), qui ont moyenné sur toutes les orientations possibles d’une ligne de tourbillon par rapport à un réseau cristallin de type cubique centré. Ces deux études ont confirmé que, pour une rigidité non infinie, la force d’ancrage par unité de longueur maximale est fortement réduite par le processus de moyennage, devenant de l’ordre de $\sim 10^{15} - 10^{16}$ dyn.cm⁻¹ (voir Fig. 3.9), mais qu’elle reste toutefois suffisamment importante pour expliquer le phénomène de glitch (Pizzochero, 2011; Link, 2014; Seveso *et al.*, 2016). En équilibrant la force d’ancrage avec la force de Magnus, ces modèles réalistes prédisent qu’une différence de vitesse maximale $\delta\Omega_0^{\max} \sim 10^{-2}$ rad.s⁻¹ peut s’établir entre les deux fluides avant que les tourbillons superfluides ne soient désancrés, ce qui est compatible avec les valeurs suggérées par les glitches de Vela. Le profil typique de $\delta\Omega_0$ en fonction de la coordonnée radiale est représenté sur la figure 3.10. On remarque que cette vitesse critique varie fortement dans l’écorce interne et qu’elle possède un maximum dans les régions où l’ancrage est le plus intense (correspondant à $\rho \sim (4 - 6) \times 10^{13}$ g.cm⁻³).

À partir du profil de vitesse critique obtenu (voir Fig. 3.10), P. Pizzochero et ses collaborateurs ont présenté un scénario raffiné pour expliquer les glitches, appelé modèle du « chasse-neige » ou *snowplow model* (Pizzochero, 2011; Seveso *et al.*, 2012; Haskell *et al.*, 2013; Ducci *et al.*, 2015). Suivant ce modèle, les tourbillons se désancrent lorsque le seuil critique local $\delta\Omega_0$ est atteint, et se réancrent dans une région où les forces d’ancrage sont plus intenses. Ainsi, les vortex se déplacent progressivement vers l’extérieur au fur et à mesure que la différence de vitesse entre les fluides augmente. Un glitch² se produit

1. $1 \text{ dyn} = 10^{-5} \text{ N}$.

2. À la différence de beaucoup de modèles de glitches, où le transfert de moment cinétique a lieu entre le superfluide de neutrons dans l’écorce interne et le reste de l’étoile (voir e.g. Chamel (2013)), le mécanisme du « chasse-neige » repose sur le fait que la majorité du superfluide de neutrons dans le cœur est couplé au fluide de particules chargées sur des temps trop longs pour rendre compte de la phase de

3.2 Un cadre naturel pour expliquer les glitches

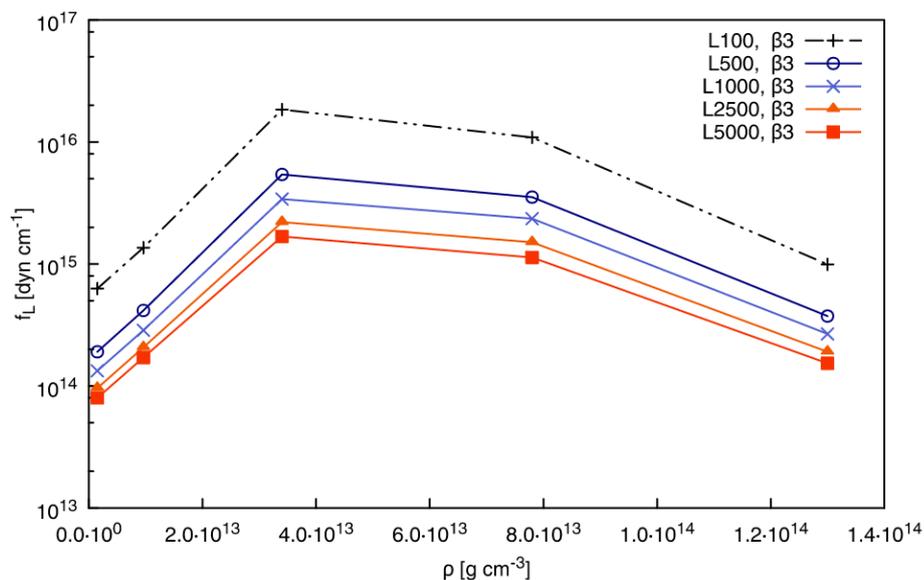


FIGURE 3.9 – **Force d’ancrage par unité de longueur en fonction de la densité.** Les résultats présentés correspondent à différents choix de longueurs L (en unités du rayon de la cellule de Wigner-Seitz) sur lesquelles le tourbillon peut être considéré comme rigide. Figure tirée de [Seveso et al. \(2016\)](#).

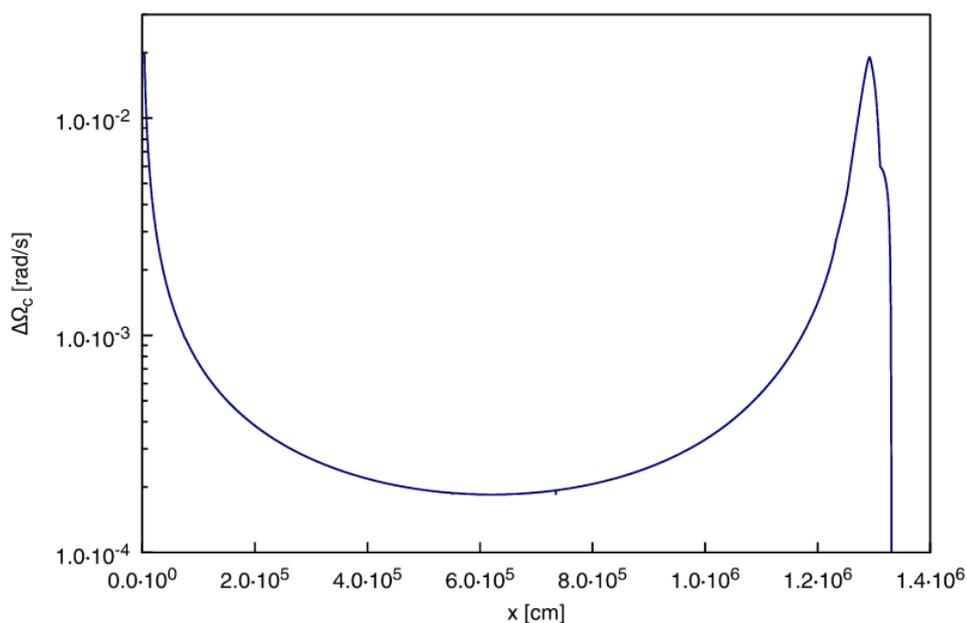


FIGURE 3.10 – **Différence de vitesse $\delta\Omega_0$ au moment du désancrage.** La quantité $\delta\Omega_0$ est tracée en fonction de la distance à l’axe de rotation, pour une étoile à neutrons de $1,4 M_\odot$. Cette courbe est obtenue à partir d’un modèle réaliste d’ancrage (voir Fig. 3.9) et pour une EoS donnée. Figure tirée de [Seveso et al. \(2016\)](#).

alors dès que la différence de vitesse atteint $\delta\Omega_0^{\max}$. Dans ce cas, le temps τ_{inter} entre deux glitches est simplement donné par

$$\tau_{\text{inter}} = \frac{\delta\Omega_0^{\max}}{|\dot{\Omega}|}. \quad (3.33)$$

[Haskell *et al.* \(2012b\)](#) ont obtenu un bon accord entre les valeurs données par cette équation et celles mesurées dans les pulsars présentant des glitches géants. Il est toutefois important de remarquer que ce modèle ne peut s'appliquer qu'aux pulsars dont les glitches se produisent de manière périodique, comme pour le pulsar de Vela (voir section 2.3.2). Ainsi, il ne peut rendre compte du comportement de la majorité des pulsars, pour lesquels la distribution en amplitude $\Delta\Omega/\Omega$ et celle en temps interglitch τ_{inter} sont respectivement décrites par une loi de puissance et une loi exponentielle ([Melatos *et al.*, 2008](#)). Par conséquent, on s'attend à ce que le modèle du « chasse-neige » établisse la taille maximum des glitches d'un pulsar donné (voir e.g. [Antonelli & Pizzochero \(2017\)](#); [Pizzochero *et al.* \(2017\)](#)), d'autres mécanismes étant requis pour expliquer les glitches plus petits et plus fréquents.

Rôle possible du cœur. La plupart des modèles de glitches associent la dynamique de ces événements à l'écorce interne des étoiles à neutrons et reposent donc sur l'ancrage des tourbillons superfluides sur les noyaux (voir e.g. [Anderson & Itoh \(1975\)](#); [Ruderman \(1976\)](#); [Pines & Alpar \(1985\)](#)). Toutefois, ce scénario a été remis en cause récemment. La prise en compte des effets d'entraînement dans la croûte modifie la contrainte (3.31) de la manière suivante :

$$\frac{I_n}{I} \gtrsim \mathcal{G} \times (1 - \langle \varepsilon_n \rangle), \quad (3.34)$$

où $\langle \varepsilon_n \rangle$ désigne la valeur moyenne du paramètre d'entraînement des neutrons dans la région où le découplage se produit ([Chamel & Carter, 2006](#); [Andersson *et al.*, 2012](#); [Chamel, 2013](#); [Delsate *et al.*, 2016](#)). La diffraction de Bragg des neutrons libres par les noyaux de l'écorce conduit à des effets d'entraînement beaucoup plus marqués dans l'écorce interne que dans le cœur ([Chamel, 2004](#); [Carter *et al.*, 2005](#); [Chamel, 2005, 2012](#)), comme on peut le voir sur la figure 3.11. En particulier, la contrainte (3.34) appliquée aux glitches de Vela excède largement la quantité de superfluide contenue dans la croûte¹ ([Andersson *et al.*, 2012](#); [Chamel, 2013](#); [Delsate *et al.*, 2016](#)). Il a été suggéré que les effets d'entraînement dans la croûte pourraient être beaucoup plus faibles ([Martin & Urban, 2016](#)), à condition que la longueur de cohérence du superfluide de neutrons soit bien inférieure à la taille caractéristique des noyaux dans l'écorce interne (qui peuvent présenter différentes géométries selon leur déformation, voir section 1.5.2). Cependant, comme ces auteurs le soulignent, cette condition n'est généralement pas satisfaite (voir également [Chamel & Haensel \(2008\)](#); [Pearson *et al.* \(2012\)](#)). En outre, les analyses des glitches détectés en 2007

montée du glitch et ne participe donc pas à celle-ci. Le transfert de moment cinétique se déroule ainsi uniquement entre le superfluide présent dans une région de la croûte où l'ancrage est maximal et le fluide de particules chargées (auquel on associe également une petite part du superfluide dans le cœur, inférieure à 10%).

1. En prenant une valeur moyenne $1 - \langle \varepsilon_n \rangle \simeq 4 - 6$ sur l'ensemble de l'écorce interne, la contrainte (3.34) conduit à $I_n/I \gtrsim 0,06 - 0,08$ pour Vela, en désaccord avec la proportion de superfluide contenue dans l'écorce interne.

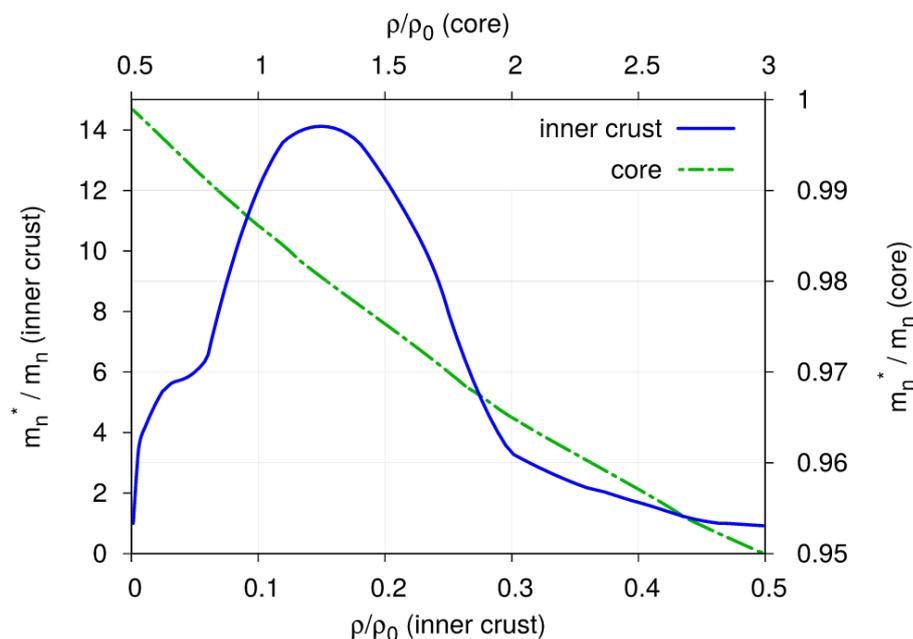


FIGURE 3.11 – **Masses effectives des neutrons dans l'écorce interne et dans le cœur.** Les résultats relatifs à la croûte interne sont obtenus à partir des valeurs fournies par [Chamel \(2012\)](#), tandis que ceux correspondant au cœur proviennent de [Chamel & Haensel \(2006\)](#). La masse effective m_n^* est reliée au paramètre d'entraînement ε_n par la relation : $m_n^* = m_n (1 - \varepsilon_n)$. L'interface entre la croûte et le cœur se situe à $\rho \simeq 0,47\rho_0$. Figure tirée de [Antonelli & Pizzochero \(2017\)](#).

dans PSR J1119–6127 et en 2010 dans PSR B2334+61, effectuées dans le cadre du modèle de fluage présenté dans la section 3.2.1, indiquent qu'une grande quantité du superfluide de neutrons prend part à ces événements, de l'ordre de $I_n/I \sim 10 - 20\%$ ([Yuan et al. \(2010\)](#); [Alpar \(2011\)](#); [Akbal et al. \(2015\)](#), voir également [Jahan-Miri \(2005\)](#)). Le réservoir de moment cinétique associé au superfluide dans l'écorce interne n'est donc pas suffisant pour expliquer ces glitches, même en l'absence d'entraînement. Les études récentes que l'on vient de mentionner suggèrent ainsi que *le superfluide de neutrons contenu dans le cœur joue un rôle plus important que prévu* dans la dynamique des glitches, au moins pour certains pulsars comme Vela. Il semble donc pertinent de s'intéresser à l'ancrage des tourbillons superfluides dans le cœur des étoiles à neutrons.

3.2.3 Ancrage dans le cœur

La présence de matière superfluide et supraconductrice dans le cœur des étoiles à neutrons est supportée à la fois par les calculs d'appariement (voir section 3.1) et par les observations (voir section 3.3). En particulier, les modèles récents prédisent que les protons forment un supraconducteur de type II dans le cœur externe (voir section 3.1.3), de telle sorte que ce dernier contient à la fois des lignes de tourbillons superfluides et des tubes de flux magnétiques.

Interactions entre tourbillons superfluides et tubes de flux. Toute modification de la vitesse de rotation du superfluide de neutrons est accompagnée d'un mouvement radial des lignes de tourbillons qu'il contient. Puisque la densité de tubes de flux dans le cœur externe est très grande devant celle de vortex et compte tenu du fait que les tubes de flux ne sont pas alignés avec l'axe de rotation mais plutôt avec la direction du champ magnétique local (voir section 3.1.3), une ligne de tourbillon en mouvement est susceptible de rencontrer une grande quantité de tubes de flux magnétiques. Différentes études ont montré que la jonction entre une ligne de vortex et un tube de flux est favorisée d'un point de vue énergétique, dans le sens où le recouvrement de la matière normale présente au cœur de ces deux lignes diminue à la fois l'énergie de condensation et l'énergie magnétique (Muslimov & Tsygan, 1985; Sauls, 1989; Mendell, 1991; Jones, 1991; Chau *et al.*, 1992). Cela suggère que *les tourbillons superfluides pourraient s'ancrer aux tubes de flux* dans le cœur des étoiles à neutrons.

Étant donné les incertitudes actuelles sur l'énergie d'ancrage associée à la jonction vortex-tube de flux, dont l'ordre de grandeur se situe autour de $E_p \sim 0,1 - 50$ MeV (Gügercinoğlu & Alpar, 2016), différentes situations peuvent apparaître. Par exemple, si le tourbillon possède une vitesse très élevée, son énergie cinétique pourrait être suffisante pour surmonter la barrière d'énergie E_p . Dans ce cas, la ligne de tourbillon traverserait simplement les tubes de flux, générant éventuellement une certaine dissipation d'énergie (Haskell *et al.*, 2014). Au contraire, les interactions de courte portée entre un vortex et un tube de flux pourraient être tellement intenses que ces deux types de lignes seraient fortement ancrées l'une à l'autre, se déplaçant alors avec la même vitesse. Entre ces deux cas extrêmes, le mouvement radial des tourbillons superfluides pourrait également être activé par fluctuations thermiques, malgré l'ancrage sur les tubes de flux, généralisant ainsi le modèle de fluage présenté dans la section 3.2.1 (Chau *et al.*, 1992; Ding *et al.*, 1993; Sidery & Alpar, 2009; Link, 2014; Gügercinoğlu & Alpar, 2014, 2016). Par ailleurs, le courant de protons entraînés autour de chaque tourbillon pourrait engendrer au voisinage de ce dernier un champ magnétique (voir Éq. (3.30)) supérieur au champ critique H_{c1} (3.25). Dans ce cas, il a été suggéré qu'un grand nombre de tubes de flux pourraient être générés à proximité de chaque vortex, conduisant alors à l'apparition d'amas de fluxoïdes fortement ancrés aux lignes de tourbillons qu'ils entourent (Sedrakian, 1982; Sedrakian *et al.*, 1983; Sedrakian & Sedrakian, 1995; Sedrakian *et al.*, 1995). Cette situation est schématisée sur la figure 3.12.

Conséquences astrophysiques. L'ancrage des tourbillons superfluides aux tubes de flux est susceptible d'affecter significativement l'évolution de la vitesse de rotation et du champ magnétique de l'étoile (voir, e.g., Sauls (1989); Srinivasan *et al.* (1990); Ruderman *et al.* (1998); Jahan-Miri (2000); Link (2003); Jones (2006a); Jahan-Miri (2010)). Par exemple, Ruderman *et al.* (1998) ont proposé un modèle de glitch tenant compte de la présence de tubes de flux dans le cœur externe. Dans ce modèle, le ralentissement du pulsar induit une migration des lignes de tourbillons vers l'extérieur, entraînant avec elles plusieurs tubes de flux (et coupant parfois certains d'entre eux). Les fluxoïdes étant attachés à la croûte par leurs extrémités, leur déplacement donne naissance à des contraintes dans l'écorce. Ces contraintes sont finalement relâchées lors de tremblements d'étoile, qui s'accompagnent de mouvements de plaques en surface (au sein desquelles le champ

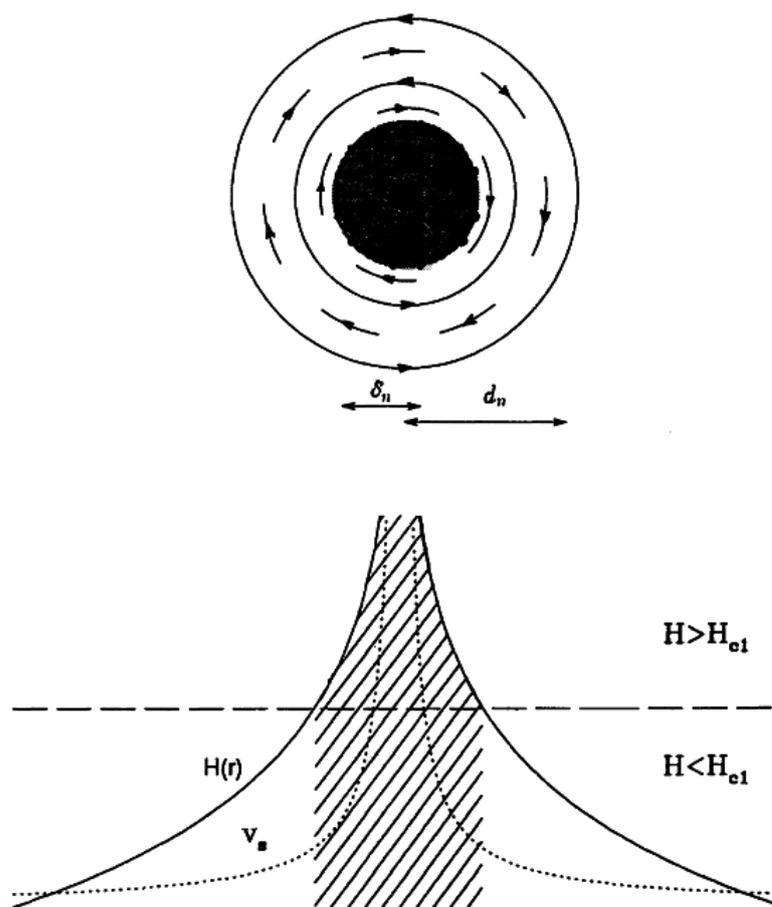


FIGURE 3.12 – **Représentation schématique d’un amas de tubes de flux autour d’un tourbillon superfluide.** *Haut* : Amas vu du dessus. Les cercles concentriques représentent les lignes de courant des neutrons (traits pleins) et des protons entraînés (traits tiretés). Les protons et les neutrons se déplacent en sens inverse. Les quantités δ_n et d_n désignent respectivement la taille d’un amas et la distance typique entre deux amas (les échelles ne sont pas respectées). *Bas* : Profils de vitesse et de champ magnétique au voisinage d’un amas. La zone hachurée correspond à la région où la création de tubes de flux est énergétiquement favorable ($H > H_{c1}$). Figure tirée de [Sedrakian et al. \(1995\)](#).

magnétique est piégé). Ce mécanisme explique naturellement l’augmentation du taux de ralentissement observé lors des glitches, par une augmentation de l’angle α entre le champ magnétique et l’axe de rotation (voir Éq. (2.7)). Toutefois, il semblerait que l’écorce ne puisse pas présenter de craquements capables d’induire un mouvement de plaques à sa surface ([Jones, 2003](#)). De plus, ce modèle prédit que les pulsars de longue période, indépendamment de leur âge, devraient avoir une activité faible, ce qui n’est pas vérifié par les observations (voir e.g. [Kaspi & Gavriil \(2003\)](#)).

Il faut remarquer que le modèle classique, suivant lequel un superfluide de neutrons coexiste avec un supraconducteur de protons de type II dans le cœur externe (voir section 3.1.3), a été remis en question par certaines études. Ainsi, les phénomènes de précession observés chez certains pulsars (voir e.g. [Stairs et al. \(2000\)](#)) semblent incompatibles

avec l’hypothèse d’ancrage des tourbillons dans le cœur (voir e.g. [Link \(2003, 2006\)](#)). De même, [Haskell *et al.* \(2013\)](#) ont montré que le modèle du « chasse-neige » ne permet pas de reproduire les glitches de Vela lorsqu’une large part du superfluide dans le cœur reste ancrée aux tubes de flux pendant le glitch. Ces travaux suggèrent donc que les interactions entre vortex et fluxoïdes seraient beaucoup plus faibles que prévu, ou alors que le supraconducteur de protons serait de type I dans tout le cœur, en désaccord avec les calculs microscopiques. Toutefois, il faut garder à l’esprit que ces études reposent sur plusieurs ingrédients mal connus (tels que la force de friction mutuelle agissant entre les deux fluides) et sur certaines hypothèses incertaines concernant les interactions entre les deux types de lignes. De plus, les arguments mentionnés par B. Link ne s’appliquent peut-être pas au pulsar de Vela, car celui-ci ne présente aucune précession.

D’un autre côté, les interactions entre lignes de tourbillons et tubes de flux pourraient conduire le superfluide de neutrons dans le cœur à être découplé du reste de l’étoile sur des temps suffisamment longs pour prendre part au phénomène de glitch (voir e.g. [Sedrakian *et al.* \(1995\)](#)). En outre, [Gügercinoglu & Alpar \(2014\)](#) ont montré récemment que le modèle de fluage appliqué à l’ancrage dans le cœur permet de rendre compte des glitches de Vela. Il paraît donc nécessaire d’étudier plus en détails le rôle du superfluide dans le cœur afin de comprendre le processus de glitch.

3.3 Autres supports observationnels

Le phénomène de glitch constitue actuellement la meilleure preuve observationnelle supportant la présence de superfluidité dans les étoiles à neutrons. Cependant, plusieurs autres phénomènes astrophysiques semblent également liés au contenu supraconducteur et superfluide de ces astres.

Refroidissement des étoiles à neutrons. Il y a quelques étoiles à neutrons proches pour lesquelles on connaît à la fois l’âge et la température de surface (voir Fig. [3.13](#)). L’âge peut être estimé à partir du taux de ralentissement du pulsar observé (voir Éq. [\(2.16\)](#)), ou bien à partir de l’évolution dynamique du reste de supernova entourant l’étoile. Le spectre X détecté fournit quant à lui une estimation de la température de surface apparente T_e^∞ , qui correspond à la température de surface T_e décalée vers le rouge par le champ gravitationnel intense de l’étoile à neutrons : $T_e^\infty = \sqrt{1 - 2\Xi} \times T_e$, où Ξ est la compacité de l’astre en question [\(1.4\)](#). La détermination de T_e^∞ est complexe car elle dépend à la fois de la distance de l’astre à la Terre, du contenu du milieu interstellaire en particules absorbant le rayonnement émis par cet astre, de la gravité à la surface de l’étoile et de la composition chimique de son atmosphère (voir également la section [1.5.1](#)). L’émission thermique des jeunes étoiles à neutrons est généralement occultée par la composante magnétosphérique, qui émet également dans les rayons X. De plus, le rayonnement thermique des pulsars âgés est souvent trop faible pour être détecté. C’est pourquoi les cibles d’étude privilégiées sont des étoiles à neutrons isolées d’âge intermédiaire pour lesquelles on n’observe pas d’activité magnétosphérique, telles que les CCOs ou les INSs (voir section [2.2.2](#)). La comparaison des courbes de refroidissement théoriques avec les valeurs de température de surface et d’âge déduites à partir d’observations pourrait apporter des contraintes importantes sur l’intérieur des étoiles à neutrons et sur leur contenu en matière superfluide.

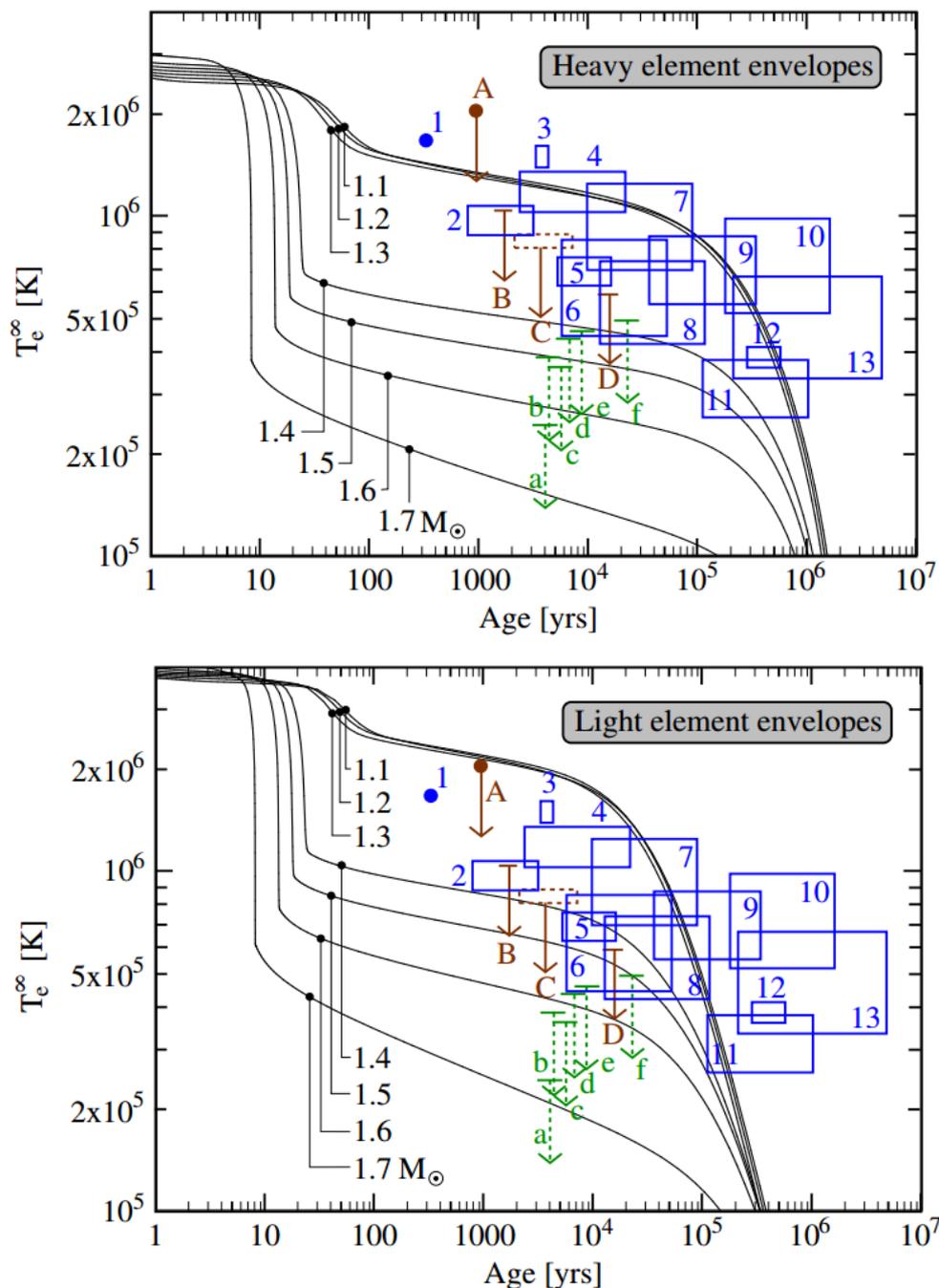


FIGURE 3.13 – **Refroidissement des étoiles à neutrons.** Différentes courbes de refroidissement théoriques, donnant la température de surface en fonction de l'âge de l'étoile, sont comparées aux observations (représentées en couleurs). Chaque courbe correspond à une masse et une composition chimique de l'enveloppe données. Dans le scénario considéré ici, le processus Urca direct (associé à un refroidissement très efficace) ne se produit que pour des masses supérieures à $1,35 M_{\odot}$. Ces courbes tiennent compte de la superfluidité des neutrons dans l'écorce interne et dans le cœur, ainsi que de la supraconductivité des protons. Figures tirées de [Page et al. \(2013\)](#). Les observations, ainsi que les estimations d'âges et de températures, sont détaillées dans [Page et al. \(2004, 2009\)](#).

La plupart des sources observées ayant un âge inférieur à 10^6 ans (voir Fig. 3.13), leur refroidissement est principalement associé à l'émission de neutrinos (voir section 1.2.3). La superfluidité et la supraconductivité modifient l'évolution thermique des étoiles à neutrons de manière importante (voir e.g. [Yakovlev & Pethick \(2004\)](#); [Yakovlev et al. \(2008\)](#); [Page et al. \(2013\)](#)). D'une part, ces phénomènes réduisent significativement la capacité thermique de l'étoile et suppriment certains processus d'émission de neutrinos. Pour $T \ll T_c$, ces réductions sont exponentielles. D'autre part, la formation de paires de Cooper donne naissance à de nouveaux processus d'émission de neutrinos, très efficaces pour $T \lesssim T_c$, qui accélèrent le refroidissement des étoiles à neutrons sur de courtes durées. Ces processus, appelés *pair breaking and formation (PBF) processes*, sont associés à la recombinaison de paires de Cooper détruites par fluctuations thermiques ([Flowers et al., 1976](#)).

Pour reproduire la température de surface de certaines étoiles à neutrons, il est nécessaire d'inclure des épisodes de forte émission de neutrinos dans leur courbe de refroidissement théorique ([Yakovlev et al., 2008](#); [Page et al., 2013](#)). Ces épisodes de refroidissement rapide peuvent être associés à une transition superfluide (processus PBF) ou bien à une émission de neutrinos accrue, engendrée par un processus de type Urca direct¹ (DUrca). Cependant, ce dernier n'est permis que sous certaines conditions, qui ne sont généralement pas remplies pour les étoiles dont la masse est inférieure à une masse critique de l'ordre de $\sim 1,4 - 1,8 M_\odot$ selon l'EoS considérée (voir Fig. 3.13). En considérant uniquement le processus DUrca, les modèles de refroidissement prédisent des températures généralement trop faibles par rapport aux observations ([Yakovlev et al., 2008](#); [Page et al., 2013](#)). Il semble donc nécessaire de tenir compte de la présence de matière superfluide et/ou supraconductrice dans ces modèles. Toutefois, comme plusieurs jeux de paramètres (profil de température critique, masse, composition de l'enveloppe, processus DUrca considéré) parviennent à reproduire les données (voir Fig. 3.13 par exemple), il est difficile d'obtenir des contraintes précises sur l'intérieur des étoiles à neutrons.

Le scénario de refroidissement minimal, développé par [Page et al. \(2004\)](#) tient compte de la superfluidité et de la supraconductivité, mais n'inclut pas de processus DUrca. Dans ce cas, la plupart des observations peuvent être expliquées par les modèles théoriques. L'ajustement des valeurs observées nécessite de considérer des atmosphères avec différentes compositions chimiques (formées d'éléments légers tels que l'hydrogène ou l'hélium, ou d'éléments lourds) et conduit à une température maximale de transition comprise entre $\sim 5 \times 10^8$ K et $\sim 2 \times 10^9$ K pour le superfluide de neutrons dans le cœur ([Page et al., 2013](#)). Notons que les températures critiques liées au superfluide de neutrons présent dans l'écorce et au supraconducteur de protons dans le cœur sont trop élevées pour être contraintes par les observations actuelles (voir Éq. (3.1)). Pour cela, il faudrait disposer de mesures de température de surface pour des étoiles à neutrons beaucoup plus jeunes. Cependant, pour expliquer l'ensemble des observations (et le pulsar de Vela, en particulier), il semblerait qu'il faille également tenir compte du processus DUrca. Le mécanisme de refroidissement dominant (PBF ou DUrca) pourrait alors dépendre de la masse de l'étoile.

1. Il existe différents processus DUrca, impliquant par exemple des nucléons et/ou des hypérons ([Page et al., 2013](#)). Ces processus de refroidissement sont beaucoup plus efficaces que le processus Urca modifié (MUrca), qui nécessite la participation de 6 particules (voir section 6.1.4).

3.3 Autres supports observationnels

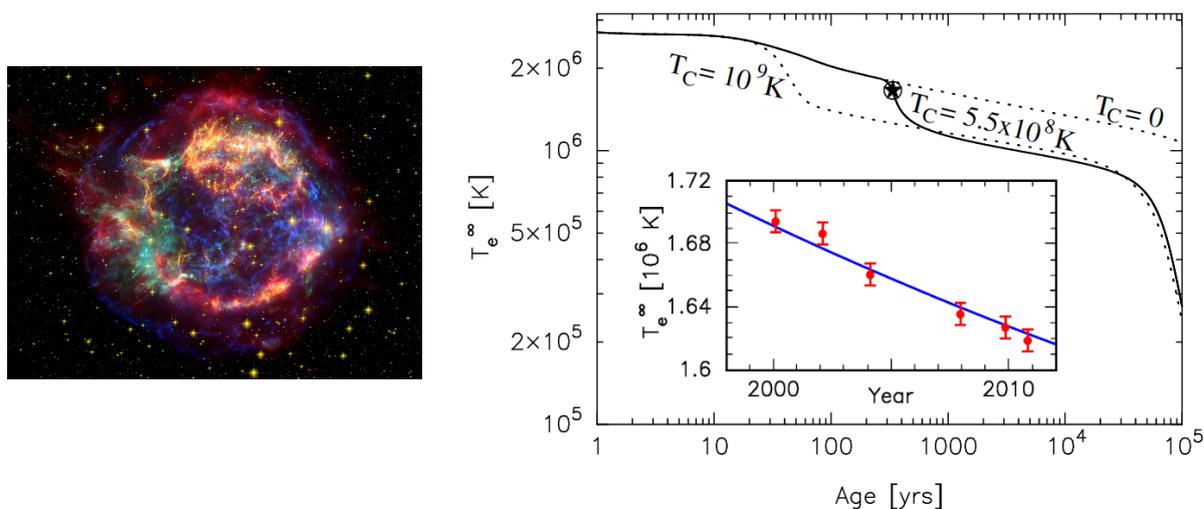


FIGURE 3.14 – **Étoile à neutrons dans Cassiopée A.** *Gauche* : Image composite du reste de supernova réalisée à partir d’observations effectuées par les télescopes spatiaux Spitzer (infrarouge), Hubble (visible) et Chandra (rayons X). *Droite* : Courbe de refroidissement théorique ajustée aux observations relatives à l’étoile à neutrons située dans Cassiopée A. Le modèle théorique correspond à une étoile à neutrons de $1,4 M_{\odot}$, décrite par une équation d’état spécifique (Akmal *et al.*, 1998) et par une atmosphère de carbone (cette atmosphère permettant d’ajuster convenablement le spectre observé, voir Ho & Heinke (2009)). Dans le scénario considéré ici, les protons deviennent supraconducteurs très tôt ($T_c^{p, \max} \gg 10^9$ K). Le meilleur ajustement est obtenu pour une température maximale de transition superfluide $T_C = T_c^{n, \max} = 5,5 \times 10^8$ K, pour les neutrons dans le cœur. Les points d’observation sont présentés dans l’encart. Les lignes pointillées correspondent aux cas où $T_C = 1 \times 10^9$ K et $T_C = 0$ K (pas de transition superfluide). Sources : https://en.wikipedia.org/wiki/Cassiopeia_A et Page *et al.* (2013).

L’étoile à neutrons au centre du reste de supernova Cassiopée A (voir Fig. 3.14), situé à environ 3,4 kpc de la Terre, a été découverte par le télescope spatial Chandra en 1999 (Tananbaum, 1999). L’étude de la vitesse d’expansion et de la distribution spatiale des couches éjectées par la supernova permet de dater l’explosion autour de 1680 (Fesen *et al.*, 2006). Âgée d’environ 335 ans, il s’agit ainsi de l’étoile à neutrons la plus jeune détectée jusqu’à présent. Celle-ci n’émet pas comme un pulsar radio, mais présente un rayonnement similaire aux CCOs (voir section 2.2.2). C’est également la première étoile à neutrons pour laquelle le refroidissement a pu être suivi au cours du temps (voir Fig. 3.14). Les données recueillies par Chandra ont montré que la température de surface de cet astre avait diminué de quelques pourcents en seulement 10 ans (Heinke & Ho, 2010; Shternin *et al.*, 2011). Ce fort taux de refroidissement indique¹ la présence d’un superfluide de neutrons dans le cœur, apparu récemment et grâce auquel le processus PBF est très actif, et d’un supraconducteur de protons formé auparavant (dans le cœur également). Ces

1. Les processus de type DUrca sont exclus, car ils conduiraient à des températures de surface trop faibles par rapport aux observations de Cassiopée A.

observations ont permis d’apporter les contraintes suivantes sur les températures maximales de transition superfluide et supraconductrice dans le cœur des étoiles à neutrons : $T_c^{n, \max} \sim (5 - 9) \times 10^8$ K et $T_c^{p, \max} \sim (2 - 3) \times 10^9$ K (Page *et al.*, 2011; Shternin *et al.*, 2011). Toutefois, des analyses plus récentes des données de Chandra suggèrent que le taux de refroidissement serait plus faible que Heinke & Ho (2010) l’avaient estimé (voir Elshamouty *et al.* (2013); Posselt *et al.* (2013)). Il faut également remarquer que d’autres scénarios ont été proposés pour expliquer le refroidissement de l’étoile à neutrons dans Cassiopée A (voir e.g. Yang *et al.* (2011); Blaschke *et al.* (2013); Negreiros *et al.* (2013); Sedrakian (2013); Noda *et al.* (2013); Bonanno *et al.* (2014)), mais la plupart d’entre eux nécessite la présence de matière superfluide et/ou supraconductrice.

Relaxation thermique d’étoiles à neutrons accrétantes en phase de quiescence. On a vu dans la section 1.1 que l’accrétion de matière à la surface d’une étoile à neutrons engendre des réactions de fusion thermonucléaire potentiellement explosives, que l’on peut observer sous la forme de sursauts X, pendant lesquels la luminosité X de ces objets atteint¹ $L_X \sim 10^{36} - 10^{39}$ erg.s⁻¹. Les *Soft X-ray Transients (SXTs)* sont des étoiles à neutrons appartenant à des binaires X de faible masse, pour lesquelles les sursauts X sont suivis par de longues phases de quiescence où la luminosité X diminue fortement ($L_X < 10^{34}$ erg.s⁻¹).

Lors de ces phases de quiescence, la matière accrétée depuis le compagnon remplit progressivement un disque d’accrétion environnant l’étoile à neutrons (le transfert de matière depuis le disque vers l’étoile à neutrons demeurant très faible). Toutefois, lorsqu’une certaine densité critique est atteinte dans le disque, la viscosité de la matière qu’il contient augmente fortement, ce qui induit une élévation de température suffisamment importante pour ioniser la matière du disque. Ces brusques modifications de composition donnent alors naissance à une instabilité qui, se propageant vers les zones internes du disque, conduit ce dernier à se « vider ». Commence alors la phase dite accrétante, lors de laquelle le transfert de masse depuis le disque vers la surface de l’étoile à neutrons est important, ce que se manifeste par une forte augmentation de la luminosité X (sursauts X) (pour plus de détails, voir Lasota (2001) et les références citées). Dans certains cas, la phase d’accrétion dure tellement longtemps (plusieurs années) que l’écorce de l’étoile, fortement chauffée par les phénomènes d’accrétion (par capture électronique et réactions de fusion pycnonucléaire), n’est plus en équilibre thermique avec le cœur. Lorsque cette phase cesse, la température de l’écorce relaxe alors vers une situation d’équilibre thermique (voir e.g. Chamel & Haensel (2008); Page & Reddy (2012)).

On a pu observer cette phase de relaxation thermique pour quelques SXTs (voir Fig. 3.15 et Waterhouse *et al.* (2016), par exemple). Le temps caractéristique de relaxation dépend des propriétés de la croûte et principalement de sa capacité thermique. En l’absence de superfluidité, les neutrons peuvent emmagasiner une quantité d’énergie thermique tellement grande (capacité thermique très élevée) que la phase de relaxation serait probablement plus longue que ce qu’indiquent les observations (voir Fig. 3.15). Les observations actuelles semblent donc favoriser l’hypothèse d’un superfluide de neutrons présent dans l’écorce interne des étoiles à neutrons (voir e.g. Shternin *et al.* (2007); Brown & Cumming (2009); Page & Reddy (2013); Turlione *et al.* (2015)). Cependant, le phénomène de

1. 1 erg = 10⁻⁷ J.

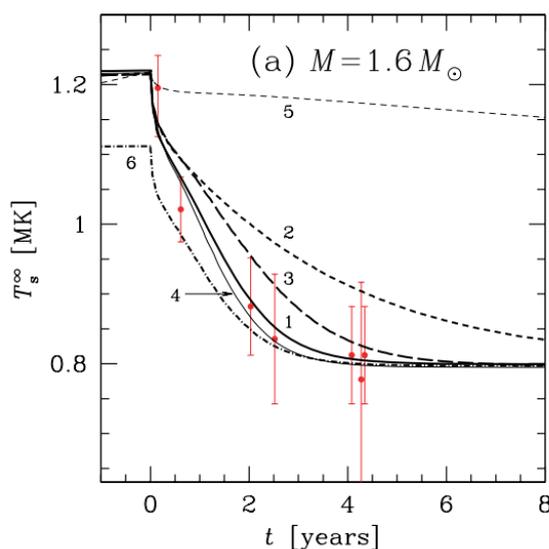


FIGURE 3.15 – **Relaxation thermique de SXT KS 1731–260.** Différents modèles de relaxation (courbes noires) sont comparés aux observations (points rouges). Les cas 1, 3 et 4 correspondent à une écorce cristalline contenant un superfluide de neutrons. La courbe 2 est obtenue à partir de la courbe 3, en ignorant la présence de matière superfluide. Le modèle 5 est calculé pour une écorce amorphe (*i.e.* avec une conductivité thermique plus faible) avec superfluidité. Enfin, la courbe 6 est basée sur les mêmes hypothèses que la courbe 1, mais le taux de masse accrétée (pendant la phase accrétante) est réduit. Figure tirée de [Shternin *et al.* \(2007\)](#).

relaxation thermique dans les SXTs n’est pas encore parfaitement compris. Par exemple, il est nécessaire d’introduire des sources d’apport d’énergie thermique, dont l’origine est incertaine, pour reproduire l’ensemble des données recueillies ([Degenaar *et al.*, 2013](#); [Turlione *et al.*, 2015](#)). Certains de ces effets pourraient être liés à notre méconnaissance des propriétés du superfluide ([Turlione *et al.*, 2015](#)).

Oscillations quasi-périodiques observées à la suite d’éruptions géantes dans des SGRs. Les SGRs sont des magnétars (voir section 2.2.2) qui présentent des épisodes d’émission violents et récurrents, mais irréguliers, dans le domaine des rayons X et γ (< 100 keV). Ces sursauts d’émission sont généralement très brefs, d’une durée typique de l’ordre de quelques dizaines à quelques centaines de millisecondes, et sont associés à des pics de luminosité compris entre $\sim 10^{38}$ erg.s $^{-1}$ et $\sim 10^{43}$ erg.s $^{-1}$. Quelques sursauts extrêmes ont également été observés dans certains SGRs, avec des pics de luminosité beaucoup plus élevés, atteignant $\sim 10^{45} - 10^{47}$ erg.s $^{-1}$ (voir e.g. [Mazets *et al.* \(1979\)](#); [Hurley *et al.* \(1999\)](#); [Palmer *et al.* \(2005\)](#)). Ces « éruptions géantes » sont détectées sous la forme d’un pulse de rayonnement γ de courte durée ($\sim 0,2 - 0,5$ s), suivi d’une longue phase d’émission X sur plusieurs dizaines ou centaines de secondes (voir Fig. 3.16). On pense que ces événements très intenses sont associés à des réarrangements globaux du champ magnétique stellaire ([Duncan & Thompson, 1992](#)), causés par un mécanisme encore incertain (voir [Turolla *et al.* \(2015\)](#) pour une revue récente sur ce sujet). Le champ

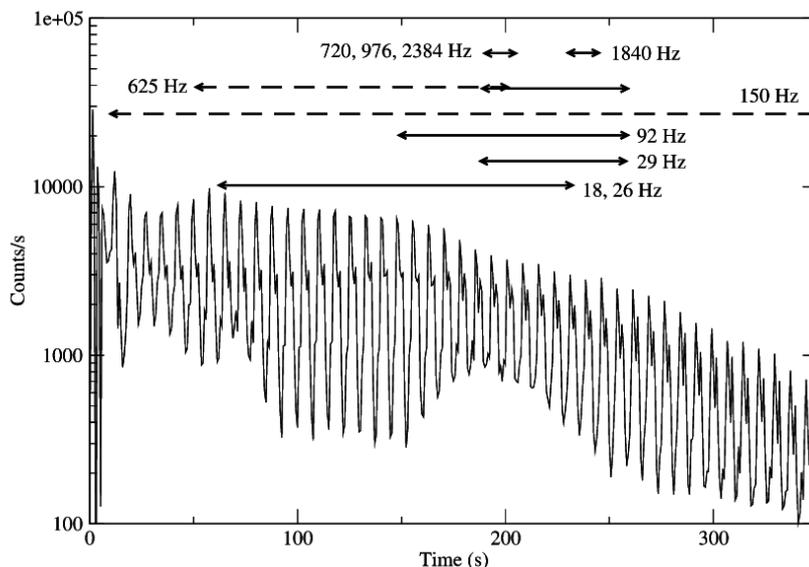


FIGURE 3.16 – **Oscillations quasi-périodiques détectées lors d’une éruption géante de SGR 1806–20.** Évolution temporelle de l’intensité reçue dans le domaine des rayons X, lors de l’éruption géante de décembre 2004. Les fréquences d’oscillations mesurées, ainsi que les plages temporelles sur lesquelles elles sont présentes, sont indiquées en haut de la figure. Figure tirée de [Strohmayer & Watts \(2006\)](#).

magnétique étant fortement couplé à l’écorce solide, [Duncan \(1998\)](#) a été le premier à suggérer qu’une telle réorganisation à grande échelle pourrait induire des fractures de la croûte, déclenchant alors des oscillations de la surface de l’étoile visibles sous la forme de modulations périodiques du flux reçu. Par la suite, ce modèle a été confirmé par la détection d’oscillations quasi-périodiques (QPOs) dans le rayonnement X observé lors des éruptions géantes de deux SGRs, comme on peut le voir sur la figure 3.16. Les analyses de ces QPOs ont mis en évidence les fréquences d’oscillations suivantes : 28, 53, 84 et 155 Hz pour le sursaut subi en 1998 par SGR 1900+14 ([Strohmayer & Watts, 2005](#)) et 18, 26, 30, 92, 150, 625 et 1840 Hz pour l’éruption géante de SGR 1806–20 en 2004 ([Israel *et al.*, 2005](#); [Watts & Strohmayer, 2006](#); [Strohmayer & Watts, 2006](#)). Plus récemment, d’autres QPOs ont été détectées lors d’une éruption de moindre envergure dans SGR J1550–5418 ([Huppenkothen *et al.*, 2014](#)). L’étude de ces fréquences d’oscillations pourrait apporter des informations importantes sur la valeur du champ magnétique à l’intérieur des magnétars, mais également sur leur composition interne, à condition d’être capable d’identifier les modes de vibration observés (voir e.g. [Samuelsson & Andersson \(2007\)](#); [Watts & Reddy \(2007\)](#); [Sotani *et al.* \(2012\)](#)).

Le point de vue actuel, basé sur des modèles précis tenant compte du couplage magnétique entre l’écorce et le cœur, consiste à associer les QPOs à des oscillations magnéto-élastiques axiales de l’étoile (voir e.g. [Glampedakis *et al.* \(2006\)](#); [Steiner & Watts \(2009\)](#); [Andersson *et al.* \(2009\)](#); [Colaiuda & Kokkotas \(2011\)](#); [van Hoven & Levin \(2011, 2012\)](#); [Passamonti & Lander \(2013, 2014\)](#); [Gabler *et al.* \(2011, 2012, 2013\)](#)). Ces modes d’oscillations expliquent naturellement les fréquences de QPOs inférieures à ~ 150 Hz. Toutefois,

jusqu'à récemment, il était très difficile d'expliquer les QPOs de plus hautes fréquences (supérieures à ~ 500 Hz¹). La superfluidité modifiant significativement le spectre d'oscillations des magnétars (voir e.g. [Andersson *et al.* \(2009\)](#)), une solution envisagée serait d'inclure la présence d'un superfluide de neutrons dans ces modèles ([Gabler *et al.*, 2013, 2016](#); [Passamonti & Lander, 2013, 2014](#)). En particulier, [Gabler *et al.* \(2013\)](#) ont montré que cela permettait alors de rendre compte des QPOs de basse et haute fréquence grâce au même mécanisme, en considérant seulement le fondamental et les premiers harmoniques de certains modes magnéto-élastiques superfluides, pour des valeurs de champ magnétique en accord avec ceux déduits des taux de ralentissement (voir section [2.2.2](#)). Cette piste intéressante doit néanmoins être étudiée de manière plus approfondie avant d'éliminer d'autres mécanismes potentiels pour expliquer les QPOs de haute fréquence.

Autres phénomènes observés. La superfluidité et la supraconductivité sont également susceptibles de jouer un rôle important dans plusieurs autres phénomènes observés, tels que la précession de certains pulsars ([Stairs *et al.*, 2000](#); [Sedrakian *et al.*, 1999](#); [Link, 2003, 2006, 2007](#); [Glampedakis *et al.*, 2008](#)), les vitesses de rotation élevées des LMXBs malgré l'instabilité des modes r ([Haskell *et al.*, 2009, 2012a, 2014](#); [Gusakov *et al.*, 2014a,b](#)) ou encore les indices de freinage anormaux de quelques pulsars ([Johnston & Galloway, 1999](#); [Alpar & Baykal, 2006](#); [Ho & Andersson, 2012](#)). Des analyses plus poussées sont nécessaires pour identifier clairement le rôle de la superfluidité dans ces phénomènes.

1. Bien que certains modes de cisaillement dans la croûte existent dans cette gamme de fréquence, ceux-ci sont amortis trop rapidement pour expliquer les observations ([Gabler *et al.*, 2012](#); [van Hoven & Levin, 2012](#)).

Deuxième partie

Modèles numériques stationnaires
d'étoiles à neutrons superfluides en
rotation

Chapitre 4

Modèle à deux fluides

Sommaire

4.1	Cadre de travail	88
4.2	Tenseur métrique	89
4.3	Hydrodynamique à deux fluides	95
4.4	Équations de structure	97
4.5	Grandeurs globales	101
4.6	Résolution numérique	105

La présence de matière superfluide à l'intérieur des étoiles à neutrons est généralement prise en compte dans le cadre de modèles à deux fluides (voir section 3.2.1). Basés sur l'approche variationnelle développée par B. Carter et plusieurs collaborateurs (voir e.g. Carter (1989); Carter & Langlois (1998); Langlois *et al.* (1998)), de nombreux progrès ont été réalisés ces dernières années dans le but d'obtenir des configurations d'équilibre réalistes d'étoiles à neutrons à deux fluides, en relativité générale. Ces modèles sont importants non seulement pour l'étude des propriétés stationnaires des étoiles à neutrons superfluides, mais ils peuvent également être utilisés comme états initiaux (non perturbés) de simulations dynamiques d'oscillations d'étoiles à neutrons ou d'effondrement en trous noirs.

Les premières configurations stationnaires à deux fluides ont été obtenues par Anderson & Comer (2001) dans l'approximation de rotation lente¹, pour une EoS analytique. Ces travaux ont ensuite été améliorés pour tenir compte d'un modèle nucléaire simplifié, incluant les effets d'entraînement mutuel entre les fluides (Comer & Joynt, 2003; Comer, 2004). Plus récemment, différentes EoSs à deux fluides ont été calculées, reposant sur des interactions plus réalistes entre les nucléons présents dans le cœur des étoiles à neutrons (Chamel, 2008; Gusakov *et al.*, 2009a; Kheto & Bandyopadhyay, 2014, 2015). Parallèlement à ces travaux, Prix *et al.* (2005) ont obtenu les premières solutions numériques complètes d'étoiles à neutrons superfluides à l'équilibre, pour n'importe quelle vitesse de

1. Cette approximation sera précisée dans l'équation (6.20).

rotation considérée. Il est particulièrement intéressant de s'affranchir de l'approximation de rotation lente, étant donné les vitesses de rotation très élevées de certains pulsars (voir section 1.1.3). Toutefois, ces auteurs se sont limités à l'utilisation d'EoSs polytropiques, afin de minimiser les erreurs numériques.

Cette seconde partie est consacrée au calcul de configurations stationnaires et axisymétriques réalistes d'étoiles à neutrons superfluides en rotation, effectué dans le cadre de la relativité générale. Ces modèles étendent ceux obtenus par [Prix *et al.* \(2005\)](#) à l'utilisation de deux nouvelles EoSs réalistes, qui seront décrites dans le chapitre suivant. Les travaux présentés dans la suite sont résumés dans [Sourie *et al.* \(2016\)](#).

4.1 Cadre de travail

Dans cette section, nous présentons les différentes hypothèses sur lesquelles sont basés les modèles stationnaires que nous avons calculés.

Tout d'abord, nous considérons un système formé uniquement d'un mélange de *neutrons*, de *protons* et d'*électrons*. Les calculs microscopiques montrent qu'une telle composition est susceptible de se trouver dans le cœur externe des étoiles à neutrons, pour des densités comprises entre $\sim \rho_0/2$ et $\sim (2-3)\rho_0$ (voir section 1.5.3). Ici, nous faisons donc l'hypothèse que cette composition¹ reste la même quelle que soit la densité considérée. En particulier, la composition du cœur interne étant très incertaine (voir section 1.5.3), nous ne nous préoccupons pas de l'apparition éventuelle d'autres particules. De plus, nous négligeons également la présence de l'écorce solide (voir section 1.5.2). Bien qu'une description relativiste unifiant le cœur et la croûte des étoiles à neutrons existe dans un contexte à deux fluides ([Carter & Samuelsson, 2006](#)), l'inclusion de l'écorce dans un modèle réaliste d'étoiles à neutrons superfluides nécessiterait, d'une part, de considérer une EoS adaptée et, d'autre part, de rendre compte des propriétés élastiques de cette région, ces deux points allant bien au-delà de l'objectif de ce travail.

Nous avons vu dans la section 1.2.3 que la température interne d'une étoile à neutrons tombe rapidement en dessous de sa température de Fermi, suggérant alors que les effets de température finie (*i.e.* non nulle) sont négligeables sur l'EoS. Les étoiles à neutrons peuvent donc être perçues comme des objets froids, que l'on peut modéliser à l'aide d'une EoS à température nulle. Nous supposons également que la température interne est très inférieure aux températures de transition superfluide (3.1), de telle sorte que tous les neutrons sont superfluides et qu'il est légitime de négliger l'influence éventuelle de la température sur les effets d'entraînement (voir [Gusakov *et al.* \(2009b\)](#) pour une discussion à ce sujet).

Dans notre modèle, nous ne considérons la présence du champ magnétique de l'étoile qu'en supposant que les particules chargées se déplacent à la même vitesse ([Easson, 1979](#); [Glampedakis *et al.*, 2011](#)). Par conséquent, le système que nous étudions peut être décrit par deux fluides : un superfluide de neutrons et un fluide normal composé de protons et d'électrons. Les effets du champ magnétique de l'étoile sur sa composition interne et sur

1. Bien que notre modèle pourrait facilement être adapté pour rendre compte de la présence de muons, l'influence de ces particules sur les propriétés globales de l'étoile est probablement très faible.

sa structure globale sont très faibles, sauf peut-être pour quelques magnétars extrêmes¹ (voir e.g. [Bocquet *et al.* \(1995\)](#); [Lattimer & Prakash \(2007\)](#); [Chatterjee *et al.* \(2015\)](#)). La prise en compte du champ magnétique nécessitant une meilleure compréhension des phénomènes liés à la supraconductivité des protons dans le cœur des étoiles à neutrons, nous laissons cet aspect de côté dans notre modèle.

Ayant pour objectif de modéliser des configurations d'équilibre, nous négligeons la présence de tout mécanisme dissipatif susceptible d'empêcher l'étoile d'être dans un état stationnaire. Par conséquent, nous ne tenons compte d'aucun écart à une situation où la pression est isotrope, qui pourrait être associé à l'existence de contraintes élastiques ou magnétiques par exemple, et nous négligeons tout phénomène de transport de chaleur (voir ci-dessus). Le transfert possible de matière entre les fluides, connu sous le nom de processus de transfusion ([Langlois *et al.*, 1998](#)), est ignoré dans notre modèle et nous supposons également que la viscosité des particules chargées est négligeable. Par ailleurs, nous ne considérons pas non plus les phénomènes dissipatifs liés à l'interaction des lignes de tourbillons superfluides avec les fluides qui les entourent (voir parties [III](#) et [IV](#)). Nous faisons donc l'hypothèse que les étoiles à neutrons superfluides en rotation stationnaire peuvent être correctement décrites par deux fluides *parfaits* ([Friedman & Stergioulas, 2013](#)). Ce faisant, nous ne prenons pas directement en compte la présence des tourbillons superfluides dans notre modèle. Cette hypothèse est justifiée à condition que les échelles d'étude considérées soient grandes devant la distance typique entre deux tourbillons ([3.11](#)).

Enfin, nous supposons que les deux fluides sont en *rotation rigide* autour d'un même axe. Bien que l'on s'attende à ce que les étoiles à neutrons présentent de la rotation différentielle au moment de leur naissance, différents mécanismes, associés au champ magnétique ou à la présence de viscosité par exemple, pourraient conduire à l'établissement d'une rotation rigide dans ces astres au bout d'un temps caractéristique allant de quelques dizaines de secondes à plusieurs années ([Flowers & Itoh, 1976](#); [Hegyi, 1977](#); [Shapiro, 2000](#)). Il semble donc raisonnable de supposer que la vitesse de rotation Ω_p du fluide de particules chargées est uniforme. Ce fluide pourrait toutefois présenter une rotation différentielle si les échelles de temps considérées sont inférieures aux temps caractéristiques que l'on vient de citer, comme cela pourrait se produire lors de glitches ou d'oscillations par exemple. En outre, nous considérons également que la vitesse de rotation Ω_n du superfluide de neutrons est uniforme, bien que les mécanismes mentionnés précédemment ne s'appliquent pas au cas d'un superfluide.

4.2 Tenseur métrique

Dans le cadre de la relativité générale, l'espace-temps considéré est caractérisé par la donnée d'une variété différentielle \mathcal{M} de dimension 4 et d'un tenseur métrique $g_{\alpha\beta}$, dont la signature sera notée $(-, +, +, +)$. Nous présentons ici la métrique utilisée dans notre modèle pour décrire une étoile à neutrons en rotation à l'équilibre. Davantage de détails sont fournis dans les références suivantes : [Bonazzola *et al.* \(1993\)](#) et [Gourgoulhon \(2010\)](#).

1. Un calcul simple, réalisé en égalisant l'énergie du champ magnétique à l'énergie potentielle gravitationnelle de l'étoile, montre que ces effets sont importants pour un champ magnétique supérieur à $\sim 10^{18}$ G.

Par la suite, les indices grecs (α, β, \dots) feront référence à l'ensemble de l'espace-temps $(0, 1, 2, 3)$ alors que les indices latins (i, j, \dots) représenteront les termes d'espace $(1, 2, 3)$. Nous utiliserons la convention de sommation d'Einstein sur les indices répétés, sauf pour les lettres X et Y faisant référence aux deux fluides. La vitesse de la lumière c , la constante de gravitation G et la constante de Planck réduite \hbar seront prises égales à 1.

4.2.1 Formalisme 3+1

Dans cette section, nous introduisons le *formalisme 3+1* de décomposition des équations d'Einstein, qui donne un caractère particulier à une coordonnée (le temps ici), très largement employé en relativité numérique (voir e.g. [Baumgarte & Shapiro \(2010\)](#); [Gourgoulhon \(2012\)](#)).

Feuilletage de l'espace-temps. Le formalisme 3+1 consiste à réaliser un feuilletage de l'espace-temps \mathcal{M} par une famille $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ d'hypersurfaces de genre espace (voir l'image de gauche de la figure 4.1). Cela signifie qu'il est possible de trouver une famille de sous-variétés Σ_t de dimension 3 dont les vecteurs tangents sont de genre espace telle que $\mathcal{M} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \Sigma_t$, avec $\Sigma_t \cap \Sigma_{t'} = \emptyset$ pour $t \neq t'$. En identifiant t à la coordonnée temporelle, un élément Σ_t apparaît comme une surface décrivant la partie spatiale de \mathcal{M} au temps t . Chaque Σ_t étant de genre espace, il existe, en chaque point, un unique vecteur \mathbf{n}^α normal unitaire de genre temps et orienté vers le futur (*i.e.* dans la direction où t augmente) tel que

$$\mathbf{n}^\alpha \mathbf{n}_\alpha = -1, \quad (4.1)$$

où $\mathbf{n}_\alpha = g_{\alpha\beta} \mathbf{n}^\beta$. Les vecteurs \mathbf{n}^α et $\nabla^\alpha t = g^{\alpha\beta} \nabla_\beta t$, où $\nabla_\alpha t$ est la 1-forme associée au gradient de t , sont donc colinéaires. On peut alors définir la fonction *lapse* N par

$$\mathbf{n}^\alpha = -N \nabla^\alpha t, \quad (4.2)$$

où le signe $-$ est choisi pour que $N > 0$ si t augmente vers le futur.

Les observateurs dont la quadri-vitesse est \mathbf{n}^α sont appelés *observateurs eulériens* ou *ZAMOs* (*zero-angular-momentum observers*). À partir de la définition de N (4.2), le temps propre τ d'un observateur eulérien est relié à t par la relation

$$d\tau = N dt. \quad (4.3)$$

Sur chaque Σ_t , on peut alors définir la métrique $\gamma_{\alpha\beta}$ induite par $g_{\alpha\beta}$. Puisque les hypersurfaces Σ_t sont de genre espace, $\gamma_{\alpha\beta}$ est définie positive. Les composantes de $\gamma_{\alpha\beta}$ s'expriment à partir de celles de $g_{\alpha\beta}$ et du vecteur normal \mathbf{n}^α comme suit :

$$\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + \mathbf{n}_\alpha \mathbf{n}_\beta. \quad (4.4)$$

Coordonnées adaptées et expression de la métrique. Un système de coordonnées (x^α) est dit *adapté au feuilletage* $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ si, et seulement si, $(x^\alpha) = (t, x^1, x^2, x^3)$. Dans ce cas, le triplet (x^1, x^2, x^3) constitue un système de coordonnées sur chaque Σ_t , appelé coordonnées spatiales. On peut alors décomposer le vecteur de la base naturelle ∂_t^α de la manière suivante :

$$\partial_t^\alpha = N \mathbf{n}^\alpha + \beta^\alpha, \quad (4.5)$$

4.2 Tenseur métrique

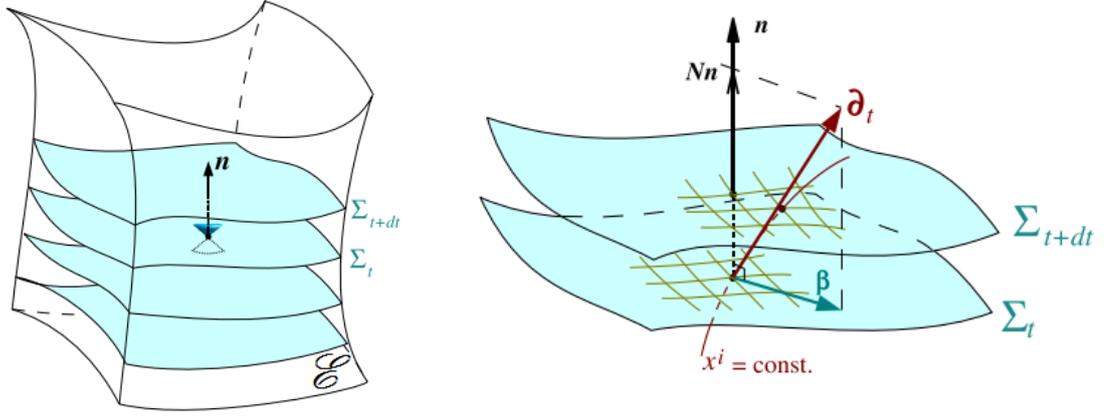


FIGURE 4.1 – **Formalisme 3+1.** *Gauche* : Feuilletage de l'espace-temps par une famille d'hypersurfaces de genre espace. La variété est ici désignée par la lettre \mathcal{E} . *Droite* : Le vecteur shift β^α mesure le décalage local entre la normale \mathbf{n}^α à une hypersurface Σ_t et le vecteur temps ∂_t^α . Figures tirées de [Gourgoulhon \(2010\)](#).

avec $\mathbf{n}^\alpha \beta_\alpha = 0$. Le vecteur β^α , de genre espace, est appelé *shift*. Il mesure la déviation des lignes de coordonnées spatiales constantes par rapport à la normale aux hypersurfaces Σ_t (voir image de droite de la figure 4.1). Le vecteur shift étant tangent à Σ_t , sa composante β^0 est nulle. Par conséquent, l'équation (4.5) conduit à l'expression suivante pour les composantes de \mathbf{n}^α :

$$\mathbf{n}^\alpha = \left(\frac{1}{N}, -\frac{\beta^1}{N}, -\frac{\beta^2}{N}, -\frac{\beta^3}{N} \right). \quad (4.6)$$

Les composantes \mathbf{n}_α sont obtenues à partir de (4.2) :

$$\mathbf{n}_\alpha = (-N, 0, 0, 0). \quad (4.7)$$

Les composantes $g_{\alpha\beta}$ de la métrique sur \mathcal{M} s'expriment alors en fonction des composantes γ_{ij} de la métrique induite sur Σ_t , des composantes du vecteur shift et de la fonction lapse par

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -N^2 dt^2 + \gamma_{ij} (dx^i + \beta^i dt) (dx^j + \beta^j dt). \quad (4.8)$$

Décomposition 3+1 du tenseur énergie-impulsion. La relativité générale est gouvernée par l'équation d'Einstein,

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}, \quad (4.9)$$

qui relie la *courbure* de l'espace-temps \mathcal{M} , représentée par le tenseur de Ricci $R_{\alpha\beta}$ et le scalaire de courbure R , à son *contenu énergétique* lié au tenseur énergie-impulsion $T_{\alpha\beta}$.

La densité d'énergie E , la densité d'impulsion π_α et le tenseur de contraintes $S_{\alpha\beta}$ mesurés par un observateur eulérien \mathcal{O}_n sont définis par

$$\begin{cases} E &= T_{\alpha\beta} \mathbf{n}^\alpha \mathbf{n}^\beta, \\ \pi_\alpha &= -T_{\mu\nu} \mathbf{n}^\nu \perp^\mu{}_\alpha, \\ S_{\alpha\beta} &= T_{\mu\nu} \perp^\mu{}_\alpha \perp^\nu{}_\beta, \end{cases} \quad (4.10)$$

où les composantes du projecteur sur l'espace orthogonal à \mathbf{n}^α , *i.e.* Σ_t , ont pour expressions :

$$\perp^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha{}_\beta + \mathbf{n}^\alpha \mathbf{n}_\beta = \gamma^\alpha{}_\beta. \quad (4.11)$$

La décomposition 3+1 du tenseur énergie-impulsion est alors donnée par

$$T_{\alpha\beta} = E \mathbf{n}_\alpha \mathbf{n}_\beta + \pi_\alpha \mathbf{n}_\beta + \mathbf{n}_\alpha \pi_\beta + S_{\alpha\beta}. \quad (4.12)$$

Les expressions de $T_{\alpha\beta}$, E , π_α et $S_{\alpha\beta}$ dans le contexte à deux fluides seront données dans les sections 4.3 et 4.4.2.

4.2.2 Simplification de l'espace-temps

Comme il est très difficile d'établir un modèle décrivant la structure des étoiles à neutrons dans le cas général, il convient de simplifier l'espace-temps de ces étoiles, en invoquant différentes symétries. Par exemple, le système d'équations TOV, qui néglige la rotation, est basé sur un espace-temps statique et à symétrie sphérique, ce qui permet d'obtenir une première description d'une étoile à neutrons en relativité générale (voir section 1.3.2).

Dans la suite, nous nous concentrons sur le cas d'une étoile isolée *en rotation*, à l'équilibre. L'espace-temps $(\mathcal{M}, g_{\alpha\beta})$ correspondant est alors *asymptotiquement plat*¹ et *stationnaire*. De plus, ne pouvant pas être à symétrie sphérique à cause de la rotation, il est raisonnable de supposer que l'espace-temps est *axisymétrique* (voir également Lindblom (1976)). Si sa vitesse de rotation est constante (cas stationnaire), une étoile axisymétrique présente un moment quadrupolaire non nul constant. En revanche, si l'étoile n'est pas axisymétrique, son moment quadrupolaire va varier au cours du temps, engendrant alors une émission d'ondes gravitationnelles, ce qui va empêcher l'étoile d'être dans un état stationnaire. Enfin, nous faisons également l'hypothèse que l'espace-temps est *circulaire* (voir ci-dessous).

Stationnarité et axisymétrie. Un espace-temps stationnaire et axisymétrique vérifie différentes propriétés, liées respectivement aux invariances par translation dans le temps et par rotation autour d'un certain axe, appelé axe de rotation. D'un point de vue simplifié², l'espace-temps $(\mathcal{M}, g_{\alpha\beta})$ est dit *stationnaire* s'il existe un système de coordonnées $(x^\alpha) = (t, x^1, x^2, x^3)$ tel que :

- (i) les composantes de la métrique $g_{\alpha\beta}$ sont indépendantes du temps,
- (ii) le vecteur ∂_t^α associé aux coordonnées (x^α) est du genre temps.

1. Pour que l'espace-temps $(\mathcal{M}, g_{\alpha\beta})$ soit *asymptotiquement plat*, il faut que $g_{\alpha\beta}$ tende vers la métrique de Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$, définie par $\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -dt^2 + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$ en coordonnées sphériques, lorsqu'on s'éloigne à l'infini spatial de l'objet central, *i.e.* pour $r \rightarrow +\infty$. Par ailleurs, les dérivées des coefficients métriques et les composantes du tenseur de courbure extrinsèque doivent également vérifier certaines conditions (Gourgoulhon, 2012).

2. La stationnarité et l'axisymétrie peuvent être définies dans un cadre plus formel, indépendant du choix des coordonnées, comme invariances sous certaines actions de groupe sur l'espace-temps (voir Gourgoulhon (2010)).

4.2 Tenseur métrique

La propriété (i) confère à ∂_t^α le rôle de générateur de symétrie sur l'espace-temps $(\mathcal{M}, g_{\alpha\beta})$, on lui donne alors le nom de *vecteur de Killing*. Plus précisément, l'expression mathématique de (i) se fait via la notion de dérivée de Lie : l'hypothèse de stationnarité signifie qu'il existe un vecteur de Killing ξ^α tel que

$$\mathcal{L}_\xi g_{\alpha\beta} = 0, \quad (4.13)$$

c'est-à-dire que la variation de $g_{\alpha\beta}$ le long du champ de vecteurs ξ^α est nulle. L'espace-temps étant asymptotiquement plat, la stationnarité implique que $\xi^\alpha \xi_\alpha \rightarrow -1$ à l'infini spatial, ce qui détermine ξ^α de manière unique. Par conséquent, le paramètre t associé à ce vecteur coïncide avec le temps propre d'un observateur à l'infini, au repos par rapport à l'objet central.

De même, l'hypothèse d'*axisymétrie* implique l'existence d'un vecteur χ^α tel que

$$\mathcal{L}_\chi g_{\alpha\beta} = 0. \quad (4.14)$$

En particulier, le vecteur χ^α s'annule sur l'axe de rotation, qui est une surface à 2 dimensions de genre temps.

[Carter \(1970\)](#) a montré qu'on ne perd aucune généralité en supposant que les deux vecteurs de Killing ξ^α et χ^α commutent. Par conséquent, il est possible de choisir un système de coordonnées $(x^0 = t, x^1, x^2, x^3 = \varphi)$, tel que $\xi^\alpha = \partial_t^\alpha$ et $\chi^\alpha = \partial_\varphi^\alpha$. Nous pouvons alors compléter ces coordonnées en choisissant $(x^1 = r, x^2 = \theta)$ afin que les coordonnées spatiales (r, θ, φ) soient de type sphérique : $r \in [0, +\infty[$, $\theta \in [0, \pi]$ avec $\theta = 0$ ou π sur l'axe de rotation. Ce choix de coordonnées permet de réduire les expressions (4.13) et (4.14) à :

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \varphi} = 0. \quad (4.15)$$

On dit que ce système de coordonnées est adapté aux différentes symétries de l'espace-temps.

Circularité et coordonnées quasi-isotropes. Les relations (4.15), imposées par les symétries de l'espace-temps $(\mathcal{M}, g_{\alpha\beta})$, laissent une grande liberté dans le choix des coefficients métriques. Afin de simplifier davantage le modèle, nous voudrions annuler certains de ces coefficients¹. C'est pourquoi nous allons maintenant utiliser l'hypothèse de *circularité*.

Soit $\mathcal{S}_{r\theta}$ (resp. $\mathcal{S}_{t\varphi}$) la 2-surface sur laquelle les valeurs de r et θ (resp. t et φ) sont constantes. L'espace-temps est dit *circulaire* si les surfaces $\mathcal{S}_{r\theta}$ et $\mathcal{S}_{t\varphi}$ sont orthogonales. Par conséquent, les termes suivants sont identiquement nuls :

$$g_{tr} = 0, \quad g_{t\theta} = 0, \quad g_{\varphi r} = 0, \quad g_{\varphi\theta} = 0. \quad (4.16)$$

Il s'agit là d'une hypothèse très importante, dans le sens où celle-ci diminue considérablement le nombre d'inconnues dans la métrique. Cependant, elle n'est pas très restrictive : on peut montrer que pour qu'un espace-temps soit circulaire, il suffit que le

1. Remarquons que $g_{\alpha\beta} = 0$ est une condition d'orthogonalité entre les vecteurs ∂_α^μ et ∂_β^μ .

tenseur énergie-impulsion $T_{\alpha\beta}$ vérifie certaines conditions¹, qui correspondent à ne considérer que des mouvements *purement circulaires* autour de l'axe de rotation de l'étoile à neutrons, dans le cas où l'intérieur de celle-ci est modélisé par un (ou des) fluide(s) parfait(s) (voir Éq. (4.41)). Le phénomène de convection n'est donc pas autorisé. Dans le cas où on souhaiterait également inclure le champ magnétique dans un modèle d'étoile à neutrons, l'hypothèse de circularité autoriserait seulement la possibilité d'un champ purement toroïdal ou purement poloïdal. Des exemples d'espace-temps stationnaires et axisymétriques non-circulaires ont été étudiés par [Gourgoulhon & Bonazzola \(1993\)](#).

Notons de plus qu'il est toujours possible de choisir (r, θ) telles que la métrique induite par $g_{\alpha\beta}$ sur $\mathcal{S}_{t\varphi}$ prenne la forme suivante :

$$g_{ab} dx^a dx^b = A^2(r, \theta) (dr^2 + r^2 d\theta^2), \quad (4.17)$$

où a et $b \in \{1, 2\}$. Ainsi, le terme $g_{r\theta}$ sera également identiquement nul. Les coordonnées (t, r, θ, φ) permettant ces simplifications supplémentaires sont appelées *coordonnées quasi-isotropes* (QI).

À partir des vecteurs de Killing ξ^α et χ^α , on peut définir une fonction scalaire $\omega(r, \theta)$ par la relation

$$\omega = -\frac{\xi^\alpha \chi_\alpha}{\chi^\mu \chi_\mu}. \quad (4.18)$$

Le signe $-$ assure que $\omega \geq 0$, pour une étoile en rotation. En utilisant alors le fait que $g_{t\varphi} = \xi^\alpha \chi_\alpha$ et $g_{\varphi\varphi} = \chi^\alpha \chi_\alpha$, cette équation peut se réécrire sous la forme

$$g_{t\varphi} = -\omega g_{\varphi\varphi}. \quad (4.19)$$

Introduisons également la fonction scalaire $B(r, \theta)$ telle que

$$B^2 = \frac{g_{\varphi\varphi}}{r^2 \sin^2 \theta}. \quad (4.20)$$

À l'aide des relations (4.16), (4.17), (4.19) et (4.20), les différentes composantes de la métrique associée à l'espace-temps d'une étoile à neutrons en rotation, à l'équilibre, en coordonnées QI² sont données par

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -N^2 dt^2 + A^2(dr^2 + r^2 d\theta^2) + B^2 r^2 \sin^2 \theta (d\varphi - \omega dt)^2, \quad (4.21)$$

où N , A , B et ω sont quatre fonctions scalaires de r et θ , qui seront déterminées par les équations d'Einstein (4.44)-(4.47).

Lien avec le formalisme 3+1. Les coordonnées QI présentent l'avantage de faire un lien direct entre le modèle théorique et sa résolution numérique, effectuée dans le cadre du formalisme 3+1. La comparaison entre les équations (4.21) et (4.8) conduit immédiatement à

- (i) identifier le potentiel métrique N comme la fonction lapse,

1. Il s'agit du théorème généralisé de Papapetrou, voir [Gourgoulhon \(2010\)](#).

2. Un exemple de simulations numériques basées sur les mêmes hypothèses mais réalisées dans un autre choix de coordonnées, en jauge de Dirac, est présenté dans [Lin & Novak \(2006\)](#).

4.3 Hydrodynamique à deux fluides

(ii) exprimer les composantes des vecteurs β^i et \mathbf{n}^α comme suit :

$$\beta^i = (0, 0, -\omega), \quad (4.22)$$

et

$$\mathbf{n}^\alpha = \left(\frac{1}{N}, 0, 0, \frac{\omega}{N} \right), \quad (4.23)$$

(iii) l'expression suivante de la métrique induite¹ $\gamma_{\alpha\beta}$ sur Σ_t :

$$\gamma_{ij} dx^i dx^j = A^2(dr^2 + r^2 d\theta^2) + B^2 r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (4.24)$$

Notons enfin que la relation (4.5) devient

$$\xi^\alpha = N\mathbf{n}^\alpha - \omega\chi^\alpha. \quad (4.25)$$

4.3 Hydrodynamique à deux fluides

Le système étudié est formé d'un fluide de neutrons et d'un second fluide auquel nous nous référerons par la suite sous le nom de « protons », respectivement étiquetés par les lettres « n » et « p ». Pour décrire ce système en relativité générale, le modèle développé par B. Carter *et al.* repose sur un principe variationnel (Carter, 1989; Carter & Langlois, 1998; Langlois *et al.*, 1998). Cela revient à supposer que la dynamique de ce mélange est gouvernée par une densité lagrangienne Λ qui ne dépend que des quadri-courants de particules des deux fluides, à savoir n_n^α et n_p^α . La grandeur Λ est généralement appelée *fonction maîtresse*, car elle contient toutes les informations relatives à l'état d'équilibre thermodynamique local du système. En utilisant des considérations de covariance, on peut montrer que Λ ne dépend que des trois scalaires que l'on peut former à partir des quadri-courants de particules :

$$n_n^2 = -n_n^\alpha n_{n\alpha}, \quad n_p^2 = -n_p^\alpha n_{p\alpha} \quad \text{et} \quad x^2 = -n_n^\alpha n_{p\alpha}. \quad (4.26)$$

Par conséquent, la densité lagrangienne peut s'exprimer sous la forme

$$\Lambda(n_n^\alpha, n_p^\alpha) = -\mathcal{E}(n_n^2, n_p^2, x^2), \quad (4.27)$$

où \mathcal{E} désigne l'équation d'état (EoS) du système. Soient u_n^α et u_p^α les quadri-vitesses des deux fluides. Les conditions de normalisation de ces quadri-vitesses,

$$u_n^\alpha u_{n\alpha} = -1 \quad \text{et} \quad u_p^\alpha u_{p\alpha} = -1, \quad (4.28)$$

conduisent à exprimer les composantes des quadri-courants comme suit :

$$n_n^\alpha = n_n u_n^\alpha \quad \text{et} \quad n_p^\alpha = n_p u_p^\alpha, \quad (4.29)$$

1. En pratique, les coefficients A et B sont très proches (voir Fig. 5.17). En prenant $A = B$ dans l'équation (4.24), la métrique devient $\gamma_{ij} dx^i dx^j = A^2(r, \theta)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2)$, qui est l'expression d'une métrique (spatialement) isotrope. Nous voyons ainsi l'origine du terme *quasi-isotrope*.

où on interprète la quantité n_X , $X \in \{\text{n}, \text{p}\}$, comme la densité de particules du fluide¹ X , mesurée dans son référentiel propre de repos².

À partir des variations de la densité lagrangienne (considérées en maintenant fixe la métrique), les moments conjugués, ou *impulsions généralisées*, p_α^n et p_α^p , sont définis par la relation

$$d\Lambda = p_\alpha^n dn_\alpha^n + p_\alpha^p dn_\alpha^p. \quad (4.30)$$

En utilisant (4.27), il est possible d'exprimer ces quadri-impulsions en fonction des quadri-courants de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} p_\alpha^n \\ p_\alpha^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{K}^{\text{nn}} & \mathcal{K}^{\text{np}} \\ \mathcal{K}^{\text{pn}} & \mathcal{K}^{\text{pp}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_\alpha^n \\ n_\alpha^p \end{pmatrix}, \quad (4.31)$$

où les composantes de la *matrice d'entraînement* \mathcal{K}^{XY} sont définies à partir de l'EoS par

$$\mathcal{K}^{\text{nn}} = 2 \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial n_\alpha^n} \right)_{n_\alpha^p, x}, \quad \mathcal{K}^{\text{pp}} = 2 \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial n_\alpha^p} \right)_{n_\alpha^n, x}, \quad \text{et} \quad \mathcal{K}^{\text{np}} = \mathcal{K}^{\text{pn}} = \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x^2} \right)_{n_\alpha^n, n_\alpha^p}. \quad (4.32)$$

La présence du terme croisé \mathcal{K}^{np} implique que l'impulsion généralisée d'un fluide n'est pas simplement proportionnelle à sa quadri-vitesse, mais dépend également de la quadri-vitesse du second fluide (Andreev & Bashkin, 1976). Cela traduit un *effet d'entraînement* mutuel non-dissipatif entre les fluides, dont l'origine microscopique sera précisée dans le chapitre suivant. À partir d'arguments de stabilité, on peut montrer que les coefficients d'entraînement \mathcal{K}^{XY} doivent nécessairement vérifier les conditions suivantes (Andreev & Bashkin, 1976) :

$$\mathcal{K}^{\text{nn}} > 0, \quad \mathcal{K}^{\text{pp}} > 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{K}^{\text{nn}} \mathcal{K}^{\text{pp}} - (\mathcal{K}^{\text{np}})^2 > 0, \quad (4.33)$$

ce qui implique, en particulier, que la matrice d'entraînement est inversible. Par conséquent, les effets d'entraînement peuvent également être décrits par

$$\begin{pmatrix} n_\alpha^n \\ n_\alpha^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{Y}_{\text{nn}} & \mathcal{Y}_{\text{np}} \\ \mathcal{Y}_{\text{pn}} & \mathcal{Y}_{\text{pp}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_\alpha^n \\ p_\alpha^p \end{pmatrix}, \quad (4.34)$$

où les coefficients de la matrice inverse \mathcal{Y}_{XY} sont donnés par

$$\mathcal{Y}_{\text{nn}} = \frac{\mathcal{K}^{\text{pp}}}{\mathcal{K}^{\text{nn}} \mathcal{K}^{\text{pp}} - (\mathcal{K}^{\text{np}})^2}, \quad \mathcal{Y}_{\text{pp}} = \frac{\mathcal{K}^{\text{nn}}}{\mathcal{K}^{\text{nn}} \mathcal{K}^{\text{pp}} - (\mathcal{K}^{\text{np}})^2} \quad \text{et} \quad \mathcal{Y}_{\text{np}} = -\frac{\mathcal{K}^{\text{np}}}{\mathcal{K}^{\text{nn}} \mathcal{K}^{\text{pp}} - (\mathcal{K}^{\text{np}})^2}. \quad (4.35)$$

Dans la limite newtonienne, la matrice \mathcal{Y}_{XY} est reliée à la matrice densité ρ_{XY} , utilisée par exemple dans Comer & Joynt (2003) et Chamel & Haensel (2006), par $\rho_{XY} = \mathcal{Y}_{XY} \times m_X \times m_Y$, où m_X désigne la masse au repos des particules X . On déduit de (4.33) que les coefficients de la matrice inverse vérifient à leur tour les conditions (voir e.g. Gusakov *et al.* (2009a))

$$\mathcal{Y}_{\text{nn}} > 0, \quad \mathcal{Y}_{\text{pp}} > 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{Y}_{\text{nn}} \mathcal{Y}_{\text{pp}} - (\mathcal{Y}_{\text{np}})^2 > 0. \quad (4.36)$$

1. En plus de supposer que les particules chargées sont comobiles, on fait également l'hypothèse implicite que les densités de protons et d'électrons, n_{prot} et n_{elec} sont égales (électronneutralité du mélange) : $n_{\text{p}} = n_{\text{prot}} = n_{\text{elec}}$.

2. Il s'agit ici du référentiel associé à un observateur dont la quadri-vitesse est u_X^α .

4.4 Équations de structure

Pour quantifier la différence de vitesses entre les deux fluides, on définit un facteur de Lorentz relatif à partir des relations (4.26) et (4.29) :

$$\Gamma_{\Delta} = -u_n^{\alpha} u_p_{\alpha} = \frac{x^2}{n_n n_p}, \quad (4.37)$$

auquel on associe la vitesse relative Δ via

$$\Gamma_{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{1 - \Delta^2}}. \quad (4.38)$$

La quantité Δ^2 apparaît comme le carré de la norme de la vitesse « physique » des neutrons dans le référentiel des protons (4.58), ou inversement. Cette vitesse s'exprimant en fonction des trois scalaires (4.26), nous pouvons considérer l'EoS sous la forme $\mathcal{E}(n_n, n_p, \Delta^2)$. Dans le cas où la température est nulle (voir section 4.1), la première loi de la thermodynamique s'écrit :

$$d\mathcal{E} = \mu^n dn_n + \mu^p dn_p + \alpha d\Delta^2, \quad (4.39)$$

où μ^n et μ^p désignent les potentiels chimiques des deux fluides¹ et α caractérise les effets d'entraînement. Les différents termes \mathcal{K}^{XY} s'expriment alors en fonction de ces trois variables conjuguées de la manière suivante :

$$\mathcal{K}^{nn} = \frac{\mu^n}{n_n} - \frac{2\alpha}{n_n^2 \Gamma_{\Delta}^2}, \quad \mathcal{K}^{pp} = \frac{\mu^p}{n_p} - \frac{2\alpha}{n_p^2 \Gamma_{\Delta}^2}, \quad \text{et} \quad \mathcal{K}^{np} = \frac{2\alpha}{n_n n_p \Gamma_{\Delta}^3}. \quad (4.40)$$

Le tenseur énergie-impulsion $T_{\alpha\beta}$ d'un mélange de deux fluides parfaits est donné par (Langlois *et al.*, 1998)

$$T_{\alpha\beta} = n_n \alpha p_{\beta}^n + n_p \alpha p_{\beta}^p + \Psi g_{\alpha\beta}, \quad (4.41)$$

où Ψ est la pression généralisée du système, reliée à l'EoS par la relation de Gibbs-Duhem

$$\Psi(\mu^n, \mu^p, \Delta^2) = -\mathcal{E} + n_n \mu^n + n_p \mu^p. \quad (4.42)$$

On peut montrer que l'expression (4.41) redonne celle du tenseur énergie-impulsion du fluide parfait (1.6) dans la limite où les deux fluides sont comobiles. On déduit des relations thermodynamiques (4.39) et (4.42) que

$$n_n = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mu^n} \right)_{\mu^p, \Delta^2}, \quad n_p = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \mu^p} \right)_{\mu^n, \Delta^2} \quad \text{et} \quad \alpha = - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \Delta^2} \right)_{\mu^n, \mu^p}. \quad (4.43)$$

4.4 Équations de structure

4.4.1 Équations d'Einstein

En réalisant différentes projections de l'équation d'Einstein (4.9), on peut montrer que les termes métriques N , A , B et ω intervenant dans (4.21) sont reliés aux termes sources (4.10) par les équations suivantes (Gourgoulhon, 2010; Prix *et al.*, 2005) :

1. Le potentiel chimique μ^p du fluide de particules chargées correspond à la somme des potentiels chimiques des protons, μ^{prot} , et des électrons, $\mu^{\text{élec}}$: $\mu^p = \mu^{\text{prot}} + \mu^{\text{élec}}$.

$$\Delta_2 [(NB - 1)r \sin \theta] = 8\pi NA^2 Br \sin \theta (S^r_r + S^\theta_\theta), \quad (4.44)$$

$$\Delta_2 (\ln A + \nu) = 8\pi A^2 S^\varphi_\varphi + \frac{3B^2 r^2 \sin^2 \theta}{4N^2} \partial\omega\partial\omega - \partial\nu\partial\nu, \quad (4.45)$$

$$\Delta_3 \nu = 4\pi A^2 (E + S) + \frac{B^2 r^2 \sin^2 \theta}{2N^2} \partial\omega\partial\omega - \partial\nu\partial(\nu + \ln B), \quad (4.46)$$

$$\tilde{\Delta}_3 (\omega r \sin \theta) = -16\pi \frac{NA^2 \pi_\varphi}{B^2 r \sin \theta} + r \sin \theta \partial\omega\partial(\nu - 3 \ln B), \quad (4.47)$$

où on a utilisé les notations : $\nu = \ln N$ et $\partial u \partial v = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial \theta}$. Les opérateurs Δ_2 et Δ_3 représentent respectivement le laplacien en espace plat à deux dimensions en coordonnées polaires et le laplacien en espace plat à trois dimensions, en tenant compte de l'axisymétrie. L'opérateur $\tilde{\Delta}_3$ est défini par $\tilde{\Delta}_3 = \Delta_3 - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}$. On peut remarquer que la présence des deux fluides n'intervient que dans les termes sources E , S , S^r_r , S^θ_θ , S^φ_φ et π_φ qui seront décrits dans la suite.

Notons que, contrairement au cas sphérique présenté dans la section 1.3.2 où la métrique est connue en dehors de l'étoile (métrique de Schwarzschild), les conditions aux bords dans le cas étudié ici sont seulement connues à l'infini. L'espace-temps $(\mathcal{M}, g_{\alpha\beta})$ étant asymptotiquement plat, les potentiels métriques vérifient les conditions aux limites :

$$\begin{cases} N(r, \theta) \rightarrow 1, \\ A(r, \theta) \rightarrow 1, \\ B(r, \theta) \rightarrow 1, \\ \omega(r, \theta) \rightarrow 0, \end{cases} \quad (4.48)$$

quand $r \rightarrow +\infty$. Par ailleurs, on pourra noter que certains termes apparaissant à droite du signe “=” dans les équations d'Einstein (faisant intervenir les potentiels métriques) sont à support non-compact.

4.4.2 Termes sources

L'espace-temps considéré étant circulaire (voir section 4.2.2), les quadri-vitesses u_n^α et u_p^α appartiennent au plan engendré par les deux vecteurs de Killing ξ^α et χ^α (Bonazzola *et al.*, 1993; Gourgoulhon, 2010). Ces quadri-vitesses peuvent alors s'exprimer sous la forme

$$u_n^\alpha = u_n^t (\xi^\alpha + \Omega_n \chi^\alpha) \quad \text{et} \quad u_p^\alpha = u_p^t (\xi^\alpha + \Omega_p \chi^\alpha), \quad (4.49)$$

où

$$\Omega_n = \frac{u_n^\varphi}{u_n^t} \quad \text{et} \quad \Omega_p = \frac{u_p^\varphi}{u_p^t} \quad (4.50)$$

désignent les vitesses angulaires des deux fluides, mesurées par un observateur statique placé à l'infini spatial. Les équations (4.49) décrivent bien un mouvement purement circulaire autour de l'axe de rotation. On peut également remarquer que la quadri-vitesse d'un observateur eulérien \mathcal{O}_n a pour expression (voir Éq. (4.25))

$$\mathbf{n}^\alpha = \frac{1}{N} (\xi^\alpha + \omega \chi^\alpha), \quad (4.51)$$

4.4 Équations de structure

ce qui permet d'interpréter ω comme la vitesse angulaire de \mathcal{O}_n mesurée par un observateur statique à l'infini. La présence du coefficient ω dans cette équation correspond au célèbre *effet Lense-Thirring*, ou *effet d'entraînement des référentiels inertiels*, qui sera étudié plus en détails dans la suite.

Les facteurs de Lorentz des deux fluides par rapport à \mathcal{O}_n sont alors donnés par

$$\Gamma_n = -\mathbf{n}_\alpha u_n^\alpha = N u_n^t \quad \text{et} \quad \Gamma_p = -\mathbf{n}_\alpha u_p^\alpha = N u_p^t, \quad (4.52)$$

où on a remplacé \mathbf{n}_α par l'expression (4.7). En injectant les équations (4.52) et (4.25) dans (4.49), on obtient

$$u_n^\alpha = \Gamma_n \left(\mathbf{n}^\alpha + \frac{\Omega_n - \omega}{N} \chi^\alpha \right) \quad \text{et} \quad u_p^\alpha = \Gamma_p \left(\mathbf{n}^\alpha + \frac{\Omega_p - \omega}{N} \chi^\alpha \right). \quad (4.53)$$

Comme $\mathbf{n}_\alpha \chi^\alpha = \mathbf{n}_\varphi = 0$, ces équations correspondent à des décompositions orthogonales de la quadri-vitesse de chaque fluide par rapport à la quadri-vitesse \mathbf{n}^α de l'observateur eulérien \mathcal{O}_n :

$$u_n^\alpha = \Gamma_n (\mathbf{n}^\alpha + U_n^\alpha) \quad \text{et} \quad u_p^\alpha = \Gamma_p (\mathbf{n}^\alpha + U_p^\alpha), \quad (4.54)$$

où les vecteurs

$$U_n^\alpha = \frac{\Omega_n - \omega}{N} \chi^\alpha \quad \text{et} \quad U_p^\alpha = \frac{\Omega_p - \omega}{N} \chi^\alpha \quad (4.55)$$

sont les (3-)vitesses « physiques » des fluides par rapport à \mathcal{O}_n . On définit alors U_n et U_p comme les normes de ces vitesses physiques, à savoir

$$U_n = \sqrt{U_{n\alpha} U_n^\alpha} = \frac{B}{N} (\Omega_n - \omega) r \sin \theta \quad \text{et} \quad U_p = \sqrt{U_{p\alpha} U_p^\alpha} = \frac{B}{N} (\Omega_p - \omega) r \sin \theta. \quad (4.56)$$

Les conditions de normalisation de \mathbf{n}^α , u_n^α et u_p^α conduisent aux expressions habituelles

$$\Gamma_n = (1 - U_n^2)^{-1/2} \quad \text{et} \quad \Gamma_p = (1 - U_p^2)^{-1/2}. \quad (4.57)$$

En outre, la vitesse relative Δ (4.38) peut s'exprimer en fonction de U_n et U_p selon

$$\Delta^2 = \frac{(U_n - U_p)^2}{(1 - U_n U_p)^2}. \quad (4.58)$$

Les termes sources impliqués dans les équations d'Einstein (4.44)-(4.47) sont obtenus à partir des définitions (4.10) et du tenseur énergie-impulsion (4.41) :

$$E = \Gamma_n^2 \mathcal{K}^{nn} n_n^2 + \Gamma_p^2 \mathcal{K}^{pp} n_p^2 + 2\Gamma_n \Gamma_p \mathcal{K}^{np} n_n n_p - \Psi, \quad (4.59)$$

$$\pi_\varphi = Br \sin \theta \left(\Gamma_n^2 \mathcal{K}^{nn} n_n^2 U_n + \Gamma_p^2 \mathcal{K}^{pp} n_p^2 U_p + \Gamma_n \Gamma_p \mathcal{K}^{np} n_n n_p (U_n + U_p) \right), \quad (4.60)$$

$$S^r_r = S^\theta_\theta = \Psi, \quad (4.61)$$

$$S^\varphi_\varphi = \Psi + \Gamma_n^2 \mathcal{K}^{nn} n_n^2 U_n^2 + \Gamma_p^2 \mathcal{K}^{pp} n_p^2 U_p^2 + 2\Gamma_n \Gamma_p \mathcal{K}^{np} n_n n_p U_n U_p, \quad (4.62)$$

$$S = S^r_r + S^\theta_\theta + S^\varphi_\varphi = 3\Psi + \Gamma_n^2 \mathcal{K}^{nn} n_n^2 U_n^2 + \Gamma_p^2 \mathcal{K}^{pp} n_p^2 U_p^2 + 2\Gamma_n \Gamma_p \mathcal{K}^{np} n_n n_p U_n U_p. \quad (4.63)$$

Dans le cas où les deux fluides se déplacent ensemble, les équations précédentes redonnent les équations attendues à un fluide (voir e.g. [Gourgoulhon \(2010\)](#)). De plus, dans la limite statique (cas sphérique), on peut montrer que les équations d'Einstein (4.44)-(4.47) se réduisent au système TOV, moyennant un changement de coordonnées adapté, des coordonnées isotropes vers la jauge radiale ([Gourgoulhon, 2010](#)).

4.4.3 Équations du mouvement

Le mouvement des fluides est gouverné par les lois de conservation des quadri-courants de particules,

$$\nabla_\alpha n_n^\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \nabla_\alpha n_p^\alpha = 0, \quad (4.64)$$

qui sont trivialement satisfaites étant donné les symétries de l'espace-temps, et par deux équations de type équations d'Euler ayant la forme suivante ([Langlois et al., 1998](#); [Prix et al., 2005](#)) :

$$n_n^\alpha \nabla_\alpha p_\beta^n - n_n^\alpha \nabla_\beta p_\alpha^n = 0 \quad \text{et} \quad n_p^\alpha \nabla_\alpha p_\beta^p - n_p^\alpha \nabla_\beta p_\alpha^p = 0. \quad (4.65)$$

Les équations précédentes assurent que la loi de conservation en énergie-impulsion est satisfaite, *i.e.*

$$\nabla^\alpha T_{\alpha\beta} = 0. \quad (4.66)$$

Dans le cas de rotation rigide considéré ici (voir section 4.1), on peut montrer que les équations d'Euler (4.65) conduisent à deux intégrales premières du mouvement,

$$\frac{\mu^n}{\Gamma_n} N = \tilde{C}_n \quad \text{et} \quad \frac{\mu^p}{\Gamma_p} N = \tilde{C}_p, \quad (4.67)$$

où \tilde{C}_n et \tilde{C}_p sont des constantes sur toute l'étoile. En introduisant les log-enthalpies

$$H^n = \ln \left(\frac{\mu^n}{m_n} \right) \quad \text{et} \quad H^p = \ln \left(\frac{\mu^p}{m_p} \right), \quad (4.68)$$

où $m_n = 939,6$ MeV et $m_p = 938,3 + 0,5 = 938,8$ MeV désignent les masses au repos des particules de chaque fluide¹, on peut alors réécrire (4.67) de la manière suivante :

$$H^n + \ln N - \ln \Gamma_n = C_n \quad \text{et} \quad H^p + \ln N - \ln \Gamma_p = C_p, \quad (4.69)$$

où C_n et C_p sont deux nouvelles constantes formées à partir de \tilde{C}_n et \tilde{C}_p . En appliquant ces équations au centre de l'étoile, où aucune rotation n'a lieu ($\Gamma_{nc} = \Gamma_{pc} = 1$), on en déduit alors que

$$H^n + \ln N - \ln \Gamma_n = H_c^n + \ln N_c \quad \text{et} \quad H^p + \ln N - \ln \Gamma_p = H_c^p + \ln N_c, \quad (4.70)$$

où l'indice « *c* » désigne les valeurs pour $r = 0$.

Dans le chapitre suivant, nous nous concentrerons uniquement sur des configurations pour lesquelles l'équilibre chimique (équilibre β , voir section 1.2.2) est vérifié au centre de l'étoile, *i.e.*

$$\mu_c^p = \mu_c^n, \quad (4.71)$$

1. Tout comme $\mu^p = \mu^{\text{prot}} + \mu^{\text{elec}}$, la masse au repos associée au fluide de particules chargées m_p est égale à la somme des masses au repos des protons $m_{\text{prot}} \simeq 938,9$ MeV et des électrons $m_{\text{elec}} \simeq 0,5$ MeV.

4.5 Grandeurs globales

ou, de manière équivalente,

$$H_c^n = H_c^p + \ln \left(\frac{m_p}{m_n} \right). \quad (4.72)$$

En appliquant (4.67) au centre de l'étoile, on déduit que $\tilde{C}_n = \tilde{C}_p$ si ce dernier est à l'équilibre β . Dans ce cas, les potentiels chimiques sont alors reliés par

$$\frac{\mu^n}{\Gamma_n} = \frac{\mu^p}{\Gamma_p}. \quad (4.73)$$

Il est possible de montrer que l'équilibre β ne peut être vérifié dans l'ensemble de l'étoile que si les deux fluides sont en corotation (Andersson & Comer, 2001). Sous cette dernière condition, imposer l'équilibre chimique au centre de l'étoile suffit à ce qu'il soit vérifié dans toute l'étoile, comme on peut le voir sur l'équation (4.73). En revanche, dans le cas où $\Omega_n \neq \Omega_p$, nous devrions prendre en compte certaines réactions de conversion de particules entre les fluides dans notre modèle, qui induiraient alors une dissipation d'énergie jusqu'à ce que $\Delta^2 = 0$, où l'étoile peut atteindre un état d'équilibre β global (Langlois *et al.*, 1998; Prix *et al.*, 2002). Toutefois, nous négligeons simplement ce processus de transfusion dans nos calculs de configurations stationnaires (voir section 4.1 et (4.64)). Cette hypothèse semble raisonnable étant donné (i) la lenteur des réactions électrofaibles responsables de l'équilibre chimique (voir section 6.1.4 et Yakovlev *et al.* (2001) par exemple) et (ii) le fait que les deux fluides sont susceptibles d'être toujours dans une situation voisine de la corotation (voir équation (7.7)). Des exemples de configurations avec $\mu_c^p \neq \mu_c^n$ sont présentés dans Prix *et al.* (2005). Davantage de détails sur l'équilibre chimique seront fournis dans la section 6.1.4, dans un contexte dynamique.

4.5 Grandeurs globales

4.5.1 Masses baryoniques

Les nombres de neutrons et de protons contenus dans l'étoile sont donnés par

$$\mathcal{N}_n = - \int_{\Sigma_t} n_n^\alpha \mathbf{n}_\alpha \sqrt{\gamma} \, dr \, d\theta \, d\varphi \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_p = - \int_{\Sigma_t} n_p^\alpha \mathbf{n}_\alpha \sqrt{\gamma} \, dr \, d\theta \, d\varphi, \quad (4.74)$$

où $\sqrt{\gamma} = A^2 B r^2 \sin \theta$ correspond à la racine carrée du déterminant de la métrique induite γ_{ij} (4.24). On peut montrer à l'aide du théorème de Green-Ostrogradski que, les quadri-courants de particules vérifiant les équations (4.64), les intégrales précédentes ne dépendent pas du choix de Σ_t . Chaque terme $-n_X^\alpha \mathbf{n}_\alpha$ désigne la densité de particules du fluide X mesurée par l'observateur eulérien \mathcal{O}_n . En utilisant (4.52), on peut réécrire les intégrales (4.74) de la manière suivante :

$$\mathcal{N}_n = \int_{\Sigma_t} \Gamma_n n_n A^2 B r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_p = \int_{\Sigma_t} \Gamma_p n_p A^2 B r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi. \quad (4.75)$$

On définit alors les masses baryoniques de neutrons et de protons par les relations

$$M_n^B = m_n \mathcal{N}_n \quad \text{et} \quad M_p^B = m_p \mathcal{N}_p, \quad (4.76)$$

à partir desquelles on forme la *masse baryonique* totale de l'étoile :

$$M^B = M_n^B + M_p^B. \quad (4.77)$$

4.5.2 Masse gravitationnelle

La *masse gravitationnelle* M_G est la masse ressentie par une particule test en orbite autour de l'étoile. En raison de l'équivalence masse-énergie, la masse M_G doit contenir toutes les formes d'énergie, en particulier celle associée au champ gravitationnel. Toutefois, cette dernière n'étant pas localisable, on ne peut pas définir M_G comme l'intégrale d'une certaine « densité de masse » sur Σ_t , comme on l'a fait pour les masses baryoniques. En relativité générale, deux concepts sont généralement utilisés pour définir la masse : la *masse ADM*, qui s'applique pour n'importe quel espace-temps asymptotiquement plat, et la *masse de Komar*, qui n'est définie que pour des espace-temps stationnaires. Dans le cas présent, les deux définitions coïncident. Ainsi, dans la suite, nous nous focalisons uniquement sur la masse de Komar.

Étant donné le vecteur de Killing ξ^α associé à la stationnarité (voir section 4.2.2), l'expression volumique de la masse de Komar est donnée par (Gourgoulhon, 2012)

$$M_K = \int_{\Sigma_t} [2T_{\alpha\beta} \mathbf{n}^\alpha \xi^\beta - g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} \mathbf{n}_\mu \xi^\mu] d^3 \Sigma, \quad (4.78)$$

où le volume élémentaire $d^3 \Sigma$ est défini par $d^3 \Sigma = \sqrt{\gamma} dr d\theta d\varphi = A^2 B r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$. En utilisant la décomposition 3+1 (4.12) du tenseur-énergie impulsion, la masse gravitationnelle s'exprime alors par

$$M_G = M_K = \int_{\Sigma_t} [N(E + S) + 2\omega\pi_\varphi] d^3 \Sigma, \quad (4.79)$$

où les termes E , π_φ et S sont donnés par les équations (4.59), (4.60) et (4.63). Il est également possible de montrer que cette masse correspond, au signe près, au coefficient devant le terme en $1/r$ dans le développement de N à l'infini spatial :

$$N \underset{r \rightarrow +\infty}{=} 1 - \frac{M_G}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right). \quad (4.80)$$

À la limite newtonienne, les coefficients métriques sont donnés par $\omega = 0$ et $N = 1$, le volume élémentaire $d^3 \Sigma$ tend vers le volume élémentaire de l'espace-temps plat $d^3 \Sigma_f = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ et les termes sources vérifient $S \ll E$ et $E \simeq m_n n_n + m_p n_p$, de telle sorte que (4.79) devient

$$M_G^{\text{newt}} = \int_{\Sigma_t} (m_n n_n + m_p n_p) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = M_{\text{newt}}^B, \quad (4.81)$$

comme on peut s'y attendre.

En relativité générale, on définit également l'énergie de liaison E_L de l'étoile comme la différence entre sa masse gravitationnelle et sa masse baryonique :

$$E_L = M_G - M^B. \quad (4.82)$$

La quantité $|E_L|$ correspond à l'énergie qu'il faudrait fournir aux particules (baryoniques) de l'étoile pour les disperser à l'infini. L'étoile est donc liée si $E_L < 0$.

4.5.3 Identités du viriel

S. Bonazzola et E. Gourgoulhon ont exhibé deux identités du viriel en relativité générale, à deux et à trois dimensions (Bonazzola & Gourgoulhon, 1994; Gourgoulhon & Bonazzola, 1994). En particulier, cette dernière redonne le théorème du viriel classique à la limite newtonienne. Ces relations sont couramment utilisées pour mesurer les erreurs associées à la résolution numérique des équations d'Einstein (voir chapitre 5). Pour cela, on décompose chacune de ces identités sous la forme de deux intégrales I_{mat} et I_{pot} respectivement liées à des termes de matière et aux seuls potentiels métriques. On quantifie alors la violation d'une identité du viriel par la grandeur sans dimension

$$GRV = \frac{I_{\text{mat}} + I_{\text{pot}}}{I_{\text{mat}}}. \quad (4.83)$$

Si la relation du viriel considérée est parfaitement vérifiée, le GRV correspondant est nul.

4.5.4 Rayons circonférentiels et rayons moyens

Le *rayon circonférentiel* d'un fluide est la grandeur invariante de jauge définie par

$$R_{\text{circ}}^X = \frac{\mathcal{C}^X}{2\pi}, \quad (4.84)$$

où \mathcal{C}^X est la circonférence de ce fluide dans le plan équatorial ($\theta = \pi/2$). Si r_{eq}^X désigne la valeur de la coordonnée radiale r à la surface du fluide¹ dans le plan équatorial, \mathcal{C}^X est donnée par

$$\mathcal{C}^X = \oint_{r=r_{\text{eq}}^X, \theta=\pi/2} \sqrt{g_{\alpha\beta}} dx^\alpha dx^\beta. \quad (4.85)$$

En utilisant (4.21), on obtient alors

$$R_{\text{circ}}^X = B(r_{\text{eq}}^X, \pi/2) r_{\text{eq}}^X. \quad (4.86)$$

Comme $B > 1$ (voir Fig. 5.17), on en déduit que $R_{\text{circ}}^X > r_{\text{eq}}^X$. Notons que, à la limite newtonienne, $B = 1$ et $R_{\text{circ}}^X = r_{\text{eq}}^X$.

Une seconde définition du rayon d'un fluide, également indépendante du choix de coordonnées, fait appel à sa surface dans un plan méridien, plutôt qu'à sa circonférence. On définit ainsi le *rayon moyen* du fluide X par

$$R_{\text{moy}}^X = \sqrt{\frac{\mathcal{S}^X}{4\pi}}, \quad (4.87)$$

où la surface \mathcal{S}^X de ce fluide s'exprime en fonction de $r_s^X(\theta)$, la coordonnée radiale associée à sa surface, de la manière suivante :

$$\mathcal{S}^X = 4\pi \int_0^{\pi/2} AB \left[\left(\frac{dr_s^X}{d\theta} \right)^2 + (r_s^X)^2 \right]^{1/2} r_s^X \sin \theta d\theta. \quad (4.88)$$

1. La surface d'un fluide sera définie dans la section 4.6.

On pourra vérifier que dans le cas sphérique, $A = B$ et $r_s^X = r_{\text{eq}}^X$, de telle sorte que les deux définitions coïncident :

$$R_{\text{circ}}^X = R_{\text{moy}}^X. \quad (4.89)$$

Le rayon circulaire (ou moyen) de l'étoile correspond alors au rayon circulaire (ou moyen) du fluide le plus externe :

$$R_{\text{circ}} = \max(R_{\text{circ}}^{\text{n}}, R_{\text{circ}}^{\text{p}}) \quad \text{et} \quad R_{\text{moy}} = \max(R_{\text{moy}}^{\text{n}}, R_{\text{moy}}^{\text{p}}). \quad (4.90)$$

Dans la suite, nous utiliserons le rayon circonférentiel R_{circ} pour définir la compacité de l'étoile, en relativité générale :

$$\Xi = \frac{GM_G}{R_{\text{circ}}c^2}, \quad (4.91)$$

où on a réintroduit la constante de gravitation et la vitesse de la lumière dans le vide. Cette définition généralise celle donnée par l'équation (1.4) à la limite newtonienne.

4.5.5 Moments cinétiques

Grâce au vecteur de Killing χ^α associé à l'axisymétrie, il est également possible de définir le moment cinétique de l'étoile, de manière indépendante de jauge. Ainsi, le *moment cinétique* de Komar est donné par une intégrale similaire à celle utilisée dans l'expression de la masse de Komar (4.78), mais qui fait intervenir cette fois-ci le vecteur χ^α :

$$J_K = - \int_{\Sigma_t} \left[T_{\alpha\beta} \mathbf{n}^\alpha \chi^\beta - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} \mathbf{n}_\mu \chi^\mu \right] d^3 \Sigma. \quad (4.92)$$

Comme χ^α est un vecteur tangent à Σ_t , on en déduit que $\mathbf{n}_\mu \chi^\mu = 0$, $\perp^\alpha_\beta \chi^\beta = \chi^\alpha$ et $T_{\alpha\beta} \mathbf{n}^\alpha \chi^\beta = -\pi_\varphi$, de telle sorte que le moment cinétique de Komar est simplement donné par

$$J_K = \int_{\Sigma_t} \pi_\varphi d^3 \Sigma. \quad (4.93)$$

Pour le système de deux fluides couplés considéré ici, les équations (4.10), (4.41) et (4.52) conduisent à

$$\pi_\varphi = \Gamma_n n_n p_\varphi^n + \Gamma_p n_p p_\varphi^p. \quad (4.94)$$

On définit alors le moment cinétique de chaque fluide par (Langlois *et al.*, 1998)

$$J_n = \int_{\Sigma_t} j_\varphi^n d^3 \Sigma \quad \text{et} \quad J_p = \int_{\Sigma_t} j_\varphi^p d^3 \Sigma, \quad (4.95)$$

où

$$j_\varphi^n = \Gamma_n n_n p_\varphi^n \quad \text{et} \quad j_\varphi^p = \Gamma_p n_p p_\varphi^p. \quad (4.96)$$

On peut alors interpréter p_φ^n (resp. p_φ^p) comme le moment cinétique par neutron (resp. proton) et $\Gamma_n n_n$ (resp. $\Gamma_p n_p$) comme la densité de neutrons (resp. protons) mesurés par \mathcal{O}_n . Les densités de moment cinétique (4.96) peuvent s'exprimer en fonction des vitesses physiques (4.56) mesurées par \mathcal{O}_n comme suit :

$$\begin{cases} j_\varphi^n = Br \sin \theta (\Gamma_n^2 n_n^2 \mathcal{K}^{\text{nn}} U_n + \Gamma_n n_n \Gamma_p n_p \mathcal{K}^{\text{np}} U_p), \\ j_\varphi^p = Br \sin \theta (\Gamma_p^2 n_p^2 \mathcal{K}^{\text{pp}} U_p + \Gamma_n n_n \Gamma_p n_p \mathcal{K}^{\text{np}} U_n). \end{cases} \quad (4.97)$$

La limite newtonienne des moments cinétiques partiels, étudiée dans l'annexe C.1, est en parfait accord avec les expressions obtenues par [Sidery et al. \(2010\)](#).

En supposant que la vitesse de rotation de chaque fluide est constante dans l'étoile, on peut donner une première définition du moment d'inertie total,

$$I = \frac{J_K}{\Omega_p}, \quad (4.98)$$

où Ω_p est la vitesse de rotation du pulsar, et du moment d'inertie de chaque fluide,

$$I_n = \frac{J_n}{\Omega_n} \quad \text{et} \quad I_p = \frac{J_p}{\Omega_p}. \quad (4.99)$$

Toutefois, ces définitions n'ont réellement de sens que si les fluides sont en corotation¹. Pour traiter le cas où $\Omega_n \neq \Omega_p$, une autre définition des moments d'inertie sera utilisée dans la partie III.

4.6 Résolution numérique

Les équations gouvernant la structure d'une étoile à neutrons superfluide en rotation ont été présentées dans la section 4.4. Les modèles que nous avons calculés reposent sur :

- (i) Les équations d'Einstein (4.44)-(4.47), que l'on peut réécrire symboliquement

$$\Delta_p u = \sigma_u^{\text{source}} + \sigma_u^{\text{non-linéaires}}, \quad (4.100)$$

où u est une variable formée à partir des différents potentiels métriques, Δ_p représente un opérateur linéaire (faisant intervenir le laplacien à deux ou à trois dimensions) de l'espace-temps plat, σ_u^{source} contient les termes *sources* associés à la présence de matière et $\sigma_u^{\text{non-linéaires}}$ ne comporte que des termes quadratiques en les coefficients métriques. Compte tenu de la donnée de Ω_n et Ω_p , les quatre équations d'Einstein (4.44)-(4.47) font intervenir, pour chaque valeur de r et de θ , les dix variables suivantes : $N, A, B, \omega, \Psi, \mu^n, \mu^p, \alpha, n_n, n_p$.

- (ii) Les équations du mouvement mises sous la forme de deux intégrales premières du mouvement (4.70). Ces relations fournissent deux relations supplémentaires entre certaines des variables citées précédemment, moyennant un choix de μ_c^n et de μ_c^p ou, de manière équivalente, de H_c^n et de H_c^p (4.68).
- (iii) Une EoS reliant la pression généralisée aux potentiels chimiques et à la différence de vitesses entre les fluides, $\Psi(\mu^n, \mu^p, \Delta^2)$, ou bien exprimée sous la forme d'une relation donnant l'opposé de la fonction maîtresse en fonction des densités de particule et de Δ^2 , *i.e.* $\mathcal{E}(n_n, n_p, \Delta^2)$. La donnée de cette EoS ainsi que l'utilisation des trois équations (4.43) permettent alors de clore le système d'équations.

La résolution numérique de ces équations, décrite dans la suite, conduit à l'obtention de configurations stationnaires pour des valeurs données de $\Omega_n, \Omega_p, \mu_c^n$ et μ_c^p et pour une EoS bien choisie.

1. En relativité générale, il n'existe pas de décomposition naturelle de J_X sous la forme (C.6). En supposant que $\Delta^2 = 0$, nous nous assurons alors que $I_n + I_p = I$.

4.6.1 Méthodes spectrales et bibliothèque LORENE

Les équations (4.44)-(4.47) étant fortement non-linéaires, l'outil numérique s'avère indispensable pour les résoudre. Alors que le système TOV présenté dans la section 1.3.2 ne nécessite qu'un traitement numérique simple (une méthode de Runge-Kutta suffit), la résolution des équations d'Einstein requiert ici une méthode plus conséquente.

Dans notre choix de jauge (4.21), les équations d'Einstein forment un ensemble de quatre équations aux dérivées partielles elliptiques (EDPE) couplées, de genre équations de Poisson (4.100), qui admettent une solution unique pour des conditions aux limites appropriées. Si les termes σ_u^{source} sont à support compact¹, les termes $\sigma_u^{\text{non-linéaires}}$ sont présents dans tout l'espace. En outre, les seules conditions aux limites connues² sont données en $+\infty$ (4.48). Il est donc nécessaire de disposer d'une méthode de résolution capable de traiter ces EDPE pour $r \in [0; +\infty]$. Une technique particulièrement intéressante pour résoudre ce genre d'équations différentielles est l'utilisation de *méthodes spectrales multi-domaines*, qui permettent d'atteindre une très grande précision numérique avec seulement un petit nombre de coefficients (voir e.g. Bonazzola *et al.* (1998); Grandclément & Novak (2009)). C'est sur ces méthodes que repose la bibliothèque LORENE³ développée par le groupe *Relativité et Objets Compacts* du Laboratoire Univers et Théories.

Surfaces des fluides et choix des domaines. Dans le cas d'un seul fluide à température nulle, la surface de l'étoile est couramment définie comme le lieu où la pression du fluide, ou de manière équivalente sa log-enthalpie, s'annule (voir section 1.3.2 et Bonazzola *et al.* (1993)). La méthode de résolution utilisée consiste alors à séparer l'espace en différents domaines, par exemple : une première zone représentant l'intérieur de l'étoile jusqu'à sa surface ; une seconde à l'extérieur de l'astre, s'étendant jusqu'à quelques rayons équatoriaux (où les coefficients de la métrique varient de manière importante) ; une dernière pour le reste de l'espace jusqu'à l'infini. On compactifie alors ce dernier domaine par un changement de coordonnées du type $r = \frac{1}{\alpha(1-\zeta)}$ avec $\zeta \in [-1; 1]$, afin de pouvoir imposer les conditions (4.48) à l'infini. Notons que les opérateurs elliptiques sont très bien adaptés à ce genre de compactification de l'espace, contrairement à d'autres opérateurs (hyperboliques, par exemple).

Pour un système de deux fluides, il n'est plus possible de définir la surface du fluide interne par une annulation de sa log-enthalpie, en raison des interactions entre les fluides (voir Fig. 5.7). La surface de chaque fluide est alors définie comme le lieu où la densité n_X correspondante devient nulle (Prix *et al.*, 2005). Par conséquent, les modèles que nous avons calculés supposent que les deux fluides existent au centre de l'étoile, puis que l'un d'entre eux disparaît, de sorte qu'il existe une région externe de l'étoile où seul un fluide est présent. La surface de l'étoile à neutrons correspond alors à celle du fluide de plus grande extension spatiale et coïncide avec la surface où la pression généralisée Ψ s'annule. Pour des configurations réalistes, où $\Omega_n \simeq \Omega_p$ et $\mu^n \simeq \mu^p$ (4.73), les surfaces des fluides sont très proches l'une de l'autre. La zone à un fluide, située entre ces deux surfaces, risque

1. Les termes sources sont évidemment nuls en l'absence de matière, en dehors de l'étoile.

2. Dans le cas sphérique, les termes métriques sont connus à l'extérieur de l'étoile : il s'agit du *théorème de Birkhoff*.

3. <http://www.lorene.obspm.fr/>.

alors d'être très mal décrite par la grille utilisée pour modéliser l'étoile. Pour surmonter tout problème éventuel de ce genre, nous avons considéré un domaine supplémentaire comportant un grand nombre de points de grille, afin de représenter avec précision la mince couche à un fluide présente sous la surface de l'étoile. Cette solution améliore significativement la détermination de la surface du fluide interne et la précision globale des résultats obtenus (Prix *et al.*, 2005). Dans le cas des étoiles à neutrons superfluides, deux domaines sont ainsi utilisés pour décrire leur intérieur (un premier pour représenter le cœur et un second pour les régions externes de l'étoile), portant à quatre le nombre total de domaines considérés pour décrire l'ensemble de l'espace (voir Fig. 5.12).

Méthodes spectrales. Les équations d'Einstein sont alors résolues sur chaque domaine à l'aide de *méthodes spectrales* (Grandclément & Novak, 2009). Celles-ci consistent à exprimer la fonction f , solution du problème que l'on étudie, sous la forme d'un développement sur une base finie $\{\phi_i(x)\}_{i=0,\dots,N}$ de fonctions connues¹ :

$$f(x) \simeq I_N f(x) = \sum_{i=0}^N c_i \phi_i(x). \quad (4.101)$$

Il s'agit d'une approximation de f , car une fonction (appartenant à un ensemble infini) est ici représentée par une somme finie de $N+1$ termes. Il est alors possible d'exprimer f' , la dérivée de f par rapport à x , en fonction des coefficients c_i et des dérivées $\phi'_i(x)$. En injectant ces différentes expressions dans les équations à résoudre, on peut alors déterminer l'ensemble des coefficients $\{c_i\}_{i=0,\dots,N}$ à l'aide de techniques adaptées, et ainsi estimer la fonction solution f (voir Fig. 4.2). Les méthodes spectrales sont en général plus difficiles à mettre en œuvre que les méthodes classiques de différences finies. Cependant, l'un des principaux avantages de ces méthodes est une décroissance très rapide de l'erreur $\max_x |f(x) - I_N f(x)|$ lorsque N augmente. En effet, celle-ci décroît plus vite que N^p , $\forall p < 0$, si la fonction est \mathcal{C}^∞ (voir Fig. 4.3). Il est donc possible d'obtenir une très bonne précision avec un nombre restreint de coefficients.

Le choix de la base de fonctions utilisée dans le développement (4.101) dépend du cas considéré. Pour le calcul des configurations stationnaires d'étoiles à neutrons, toutes les fonctions sont décomposées sur des polynômes de Tchebychev pour la partie radiale et sur des polynômes de Legendre² ou trigonométriques pour la partie angulaire.

Il faut également remarquer que lorsque la fonction que l'on souhaite représenter possède des discontinuités, certaines oscillations numériques sont susceptibles d'apparaître dans le calcul de $I_N f$, empêchant alors la convergence vers la solution exacte f quand N augmente : c'est le *phénomène de Gibbs*. Une solution consiste alors à choisir les différents domaines d'intégration des équations d'Einstein avec soin, afin de placer les discontinuités aux frontières de ces domaines. C'est pour cette raison que le second domaine utilisé dans la description de l'étoile est adapté à la surface de celle-ci, comme on peut le voir sur la figure 5.12.

1. Dans le cas d'une fonction périodique, une telle représentation correspond à la série de Fourier tronquée de f .

2. Les harmoniques sphériques forment une base de décomposition naturelle des solutions correspondant à la partie angulaire de l'opérateur laplacien (voir cours de mécanique quantique).

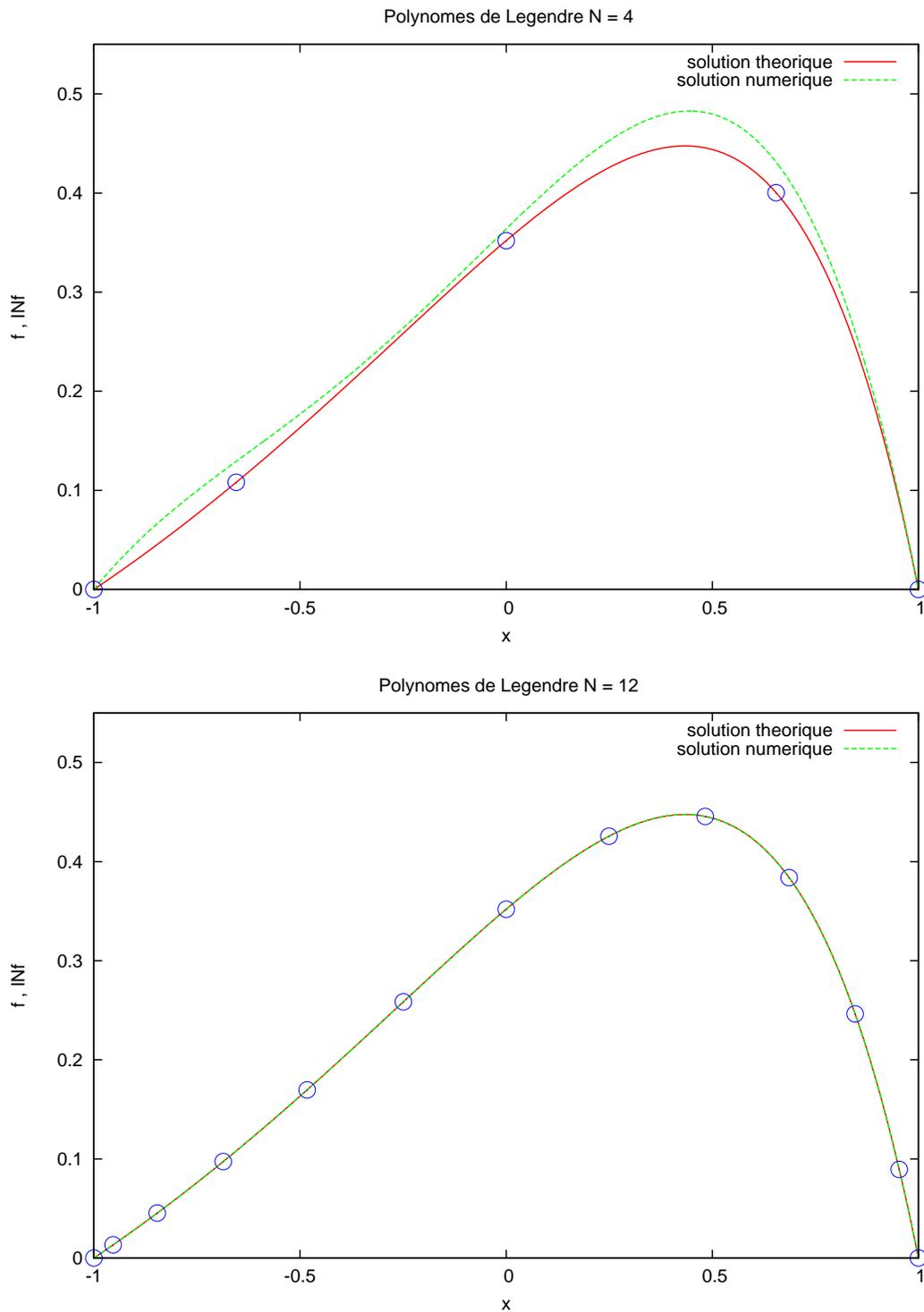


FIGURE 4.2 – **Résolution d’une équation différentielle par méthodes spectrales.** Comparaison entre la solution exacte f (en rouge) et la solution numérique $I_N f$ (en vert) de l’équation différentielle : $f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = \exp x + C$, où $C = -4e/(1 + e^2)$, sur l’intervalle $[-1; 1]$. Les conditions aux limites imposées sont $f(-1) = f(1) = 0$. La résolution numérique est réalisée par la méthode de collocation, à l’aide de polynômes de Legendre, avec $N = 4$ (en haut) et $N = 12$ (en bas).

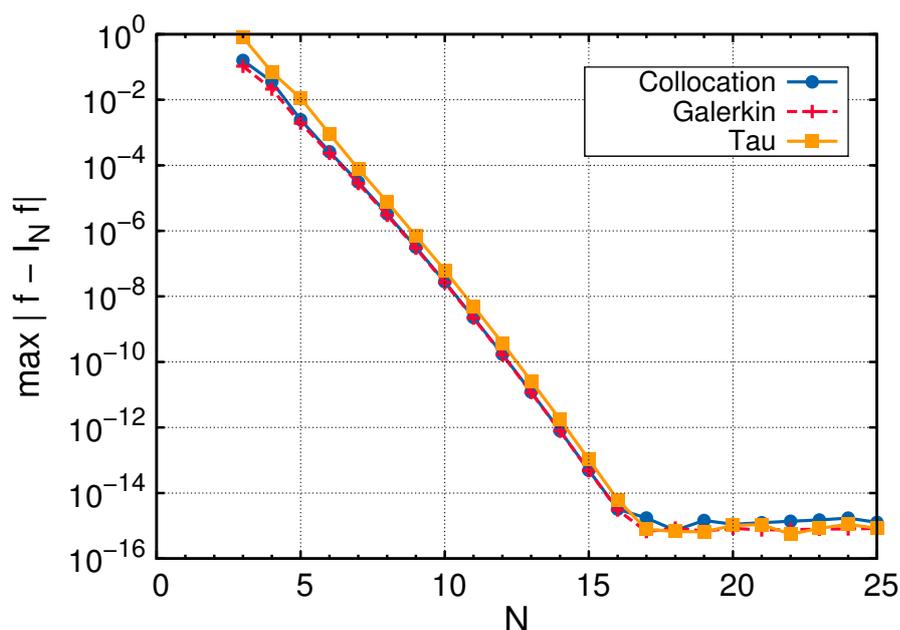


FIGURE 4.3 – **Convergence spectrale.** Erreur relative $\max_x |f(x) - I_N f(x)|$ en fonction du nombre N de coefficients utilisés dans la résolution numérique, où f est la solution exacte de l'équation différentielle mentionnée dans la légende de la figure 4.2 et $I_N f$ est la solution numérique. Différentes méthodes de calcul des coefficients spectraux sont employées. La précision machine est atteinte dès $N = 17$.

4.6.2 Procédure numérique et code `sfstar`

La résolution des équations de structure décrites dans les sections précédentes a été implémentée dans le code `sfstar`, basé sur la bibliothèque LORENE, par [Prix et al. \(2005\)](#). Les termes à droite du signe “=” dans l'équation (4.100) dépendant de manière non triviale des inconnues du problème, le code `sfstar` est basé sur une méthode de résolution itérative appelée *méthode du point fixe* ou *méthode du champ auto-cohérent*.

Cette méthode, résumée sur le diagramme 4.4, consiste à initialiser la valeur des grandeurs à déterminer, en partant d'un espace-temps plat, de deux fluides au repos et d'une forme donnée (parabolique) pour $H^n(r, \theta)$ et $H^p(r, \theta)$, et à améliorer ces estimations à chaque étape de résolution, jusqu'à ce qu'un critère de convergence soit satisfait. Le code conduit alors à une unique solution pour une EoS et des valeurs de Ω_n , Ω_p , H_c^n et H_c^p données. En considérant différents choix de ces paramètres d'entrée, il est alors possible de calculer tout un ensemble de configurations stationnaires d'étoiles à neutrons superfluides en rotation. L'analyse mathématique de la méthode du point fixe appliquée aux équations d'Einstein (4.44)-(4.47) a été réalisée par U. Schaudt & H. Pfister ([Schaudt & Pfister, 1996](#); [Pfister & Schaudt, 2000](#)). En particulier, ces derniers ont montré une convergence exponentielle de cette méthode (voir Fig. 4.5). La violation des identités du viriel, présentées dans la section 4.5.3, permet alors de quantifier la précision des configurations obtenues. Différents tests de validation du code `sfstar` ont été effectués par [Prix et al. \(2005\)](#).

En pratique, la résolution numérique est légèrement plus subtile (voir Fig. 4.5). Par exemple, le code commence par résoudre les équations dans le cas où les vitesses de rotation sont nulles (afin que les valeurs supposées initialement ne soient pas trop éloignées des valeurs à déterminer), avant d'augmenter celles-ci progressivement jusqu'à Ω_n et Ω_p . En outre, nous avons également rajouté la possibilité de converger vers une configuration correspondant à une masse gravitationnelle ou à une masse baryonique totale donnée (en supposant que le centre de l'étoile est à l'équilibre β), ou bien associée à des masses baryoniques de neutrons et de protons fixées (l'équilibre β n'étant plus nécessairement vérifié).

Jusqu'à présent, le code développé par [Prix et al. \(2005\)](#) permettait de calculer des configurations d'équilibre d'étoiles à neutrons superfluides, en rotation, à la fois dans un cadre newtonien et dans le contexte de la relativité générale. Afin d'avoir une bonne maîtrise sur les erreurs numériques engendrées par le code, ces auteurs se sont cependant limités à l'utilisation d'EoS analytiques, ayant la forme suivante :

$$\mathcal{E}(n_n, n_p, \Delta^2) = (m_n n_n + m_p n_p) c^2 + \frac{1}{2} \kappa_n n_n^{\gamma_1} + \frac{1}{2} \kappa_p n_p^{\gamma_2} + \kappa_{np} n_n^{\gamma_3} n_p^{\gamma_4} + \kappa_\Delta n_n^{\gamma_5} n_p^{\gamma_6} \Delta^2, \quad (4.102)$$

où les termes $(\gamma_i)_{i \in \{1, \dots, 6\}}$, κ_n , κ_p , κ_{np} et κ_Δ sont des constantes librement choisies. Cette expression est une généralisation à deux fluides d'une EoS polytropique (1.13). Il est cependant important de noter que ces EoS sont peu réalistes et peu motivées par la microphysique.

4.6 Résolution numérique

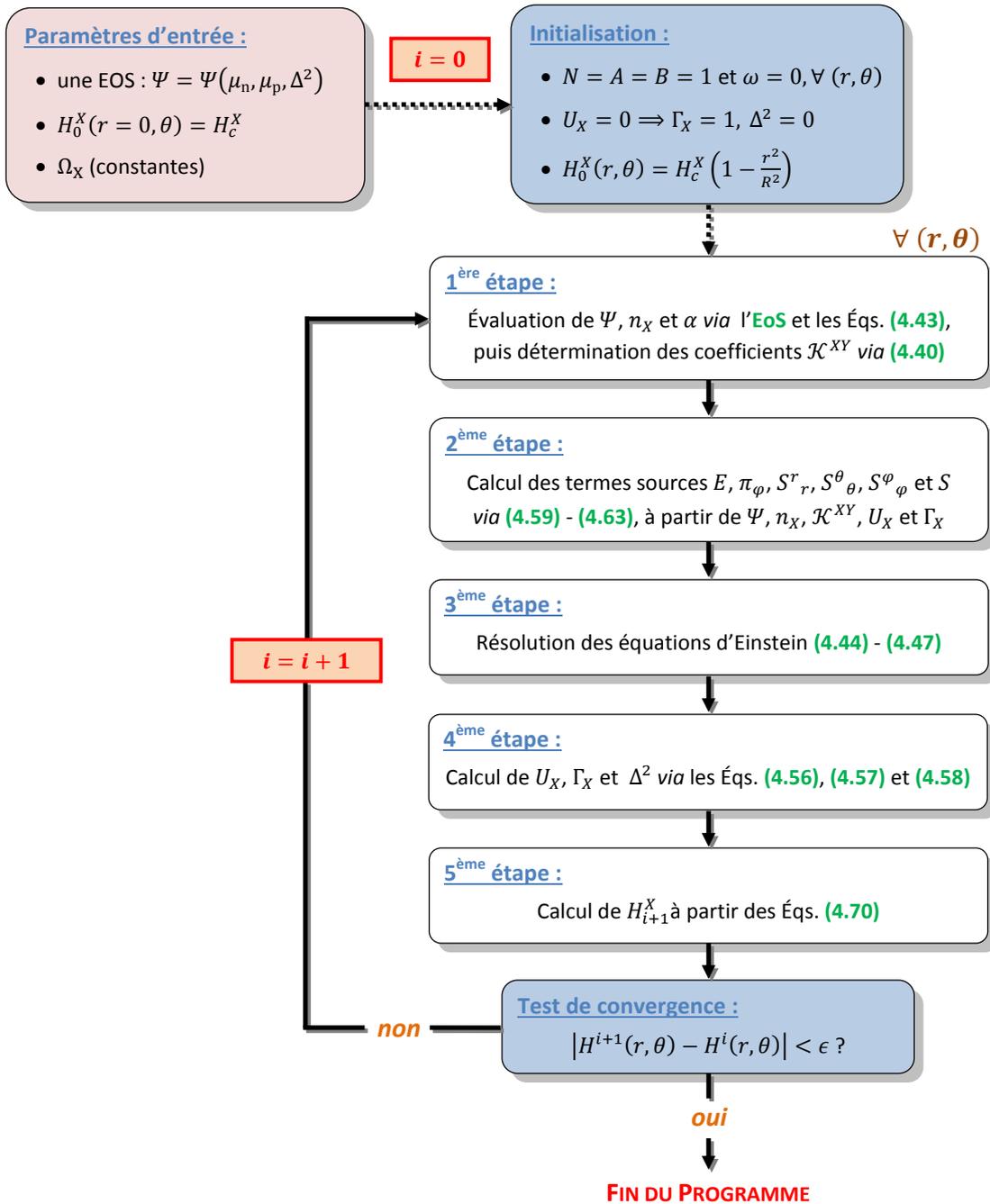


FIGURE 4.4 – **Méthode du point fixe.** Diagramme illustrant le principe de la *méthode du point fixe*, utilisée dans le code `sfstar`. Cette méthode consiste à faire une première estimation sur la valeur des fonctions qu'on cherche à déterminer (*initialisation*), qu'on raffine progressivement par un processus itératif. On débute l'itération i en calculant les termes sources présents dans la partie droite des équations d'Einstein (*étapes 1 et 2*); la résolution des équations d'Einstein nous permet alors d'obtenir une nouvelle estimation pour les coefficients de la métrique, en évaluant les termes quadratiques à l'aide des estimations réalisées lors de l'itération précédente (*étape 3*); les champs de vitesses et les facteurs de Lorentz (*étape 4*) sont ensuite évalués, menant à des nouvelles valeurs de H^X en tout point *via* les intégrales premières du mouvement (*étape 5*). La procédure s'arrête lorsque le critère de convergence est satisfait (voir Fig. 4.5). Notons que la première étape est légèrement différente si l'EoS est utilisée sous la forme $\mathcal{E}(n_n, n_p, \Delta^2)$.

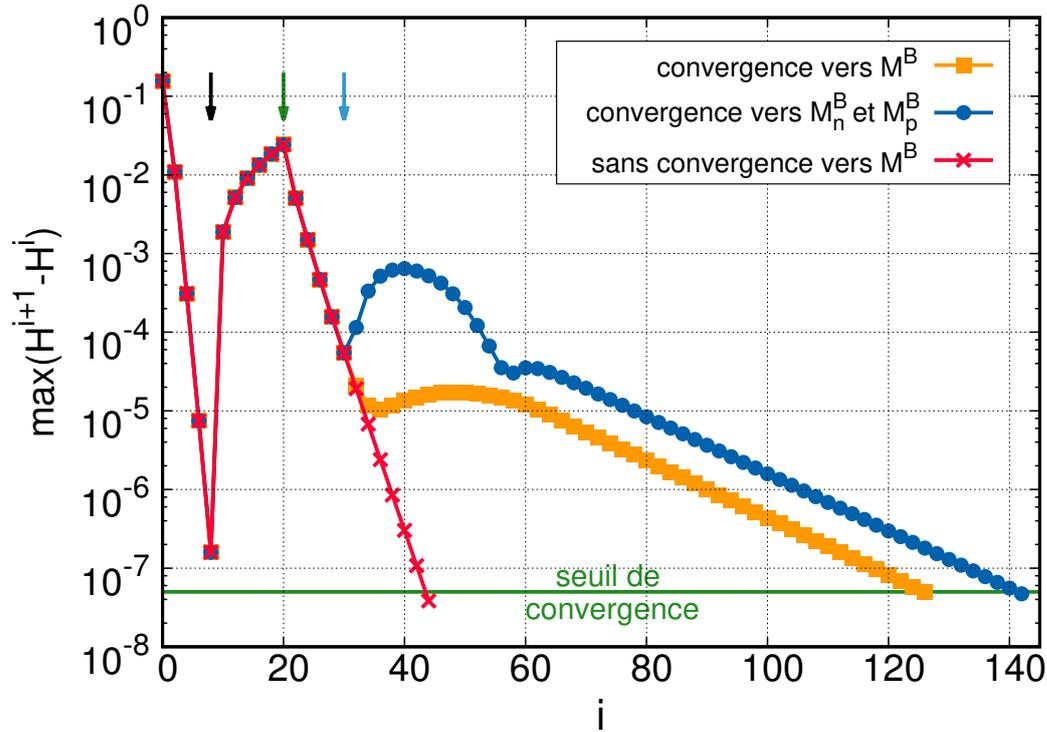


FIGURE 4.5 – **Convergence en fonction du nombre d'itérations.** La quantité $\max_{r,\theta} |H^{i+1} - H^i|$, où $H^i(r, \theta) = [H_i^n(r, \theta) + H_i^p(r, \theta)] / 2$, est tracée en fonction du numéro i de l'itération. La résolution numérique est d'abord effectuée sans prendre en compte la rotation. À partir de la huitième itération (flèche noire), les vitesses de rotation sont peu à peu augmentées, jusqu'à atteindre Ω_n et Ω_p à la vingtième itération (flèche verte). Les résultats sont présentés pour trois résolutions différentes : en imposant une masse baryonique totale (courbe jaune), en faisant converger la solution vers des valeurs données des masses baryoniques partielles (courbe bleue) ou en n'imposant aucune contrainte supplémentaire (courbe rouge). Dans les deux premiers cas, la convergence supplémentaire vers une (ou des) masse(s) baryonique(s) souhaitée(s) ne débute qu'à la trentième itération (flèche cyan). Le seuil de convergence est fixé à $\varepsilon = 5 \times 10^{-8}$ (ligne verte) pour l'ensemble de ces configurations. On pourra remarquer la décroissance exponentielle de l'écart maximal en log-enthalpie sur différentes plages d'itérations.

Chapitre 5

Équations d'état à deux fluides et configurations d'équilibre

Sommaire

5.1	Équations d'état à deux fluides réalistes	113
5.2	Configurations d'équilibre	136

Afin d'obtenir des configurations stationnaires et axisymétriques *réalistes* d'étoiles à neutrons superfluides en rotation, en relativité générale, nous avons alors implémenté deux nouvelles EoSs, calculées à partir de modèles microscopiques, dans le code `sfstar`.

5.1 Équations d'état à deux fluides réalistes

5.1.1 Modèles de champ moyen relativiste

Bien que des modèles microscopiques non-relativistes soient suffisants pour décrire le cœur des étoiles à neutrons de faible masse¹, une formulation dans le cadre de la relativité *restreinte* est néanmoins indispensable pour modéliser l'intérieur des étoiles à neutrons massives et assure une meilleure cohérence avec la résolution globale des équations de structure effectuée en relativité *générale*. Sur les échelles spatiales pertinentes pour réaliser les moyennes thermodynamiques nécessaires au calcul de l'EoS, il est tout à fait raisonnable de considérer la métrique comme étant (localement) plate (ce qui est lié au principe d'équivalence ; voir la section 3.4 de [Glendenning \(2000\)](#) pour plus de détails à ce sujet). Par conséquent, nous utiliserons la métrique de Minkowski, $\eta_{\mu\nu}$, dans le reste de cette section. Par ailleurs, l'appariement des nucléons étant un effet associé à la surface de

1. Pour des densités inférieures à $\sim 3\rho_0$, les nucléons sont essentiellement non-relativistes ([Chamel, 2008](#)). Par conséquent, l'intérieur des étoiles à neutrons de faible masse, pour lesquelles la densité ne dépasse par $\sim 3\rho_0$, peut être décrit dans un cadre newtonien.

Fermi qui n'a qu'une très faible influence sur l'EoS¹, nous négligeons la prise en compte de la superfluidité dans nos calculs d'EoS. Si cela peut paraître surprenant, nous rappelons que nous ne cherchons pas ici à rendre compte de la superfluidité d'un point de vue microscopique, mais nous étudions plutôt les conséquences macroscopiques associées à la présence de matière superfluide au sein des étoiles à neutrons, dans le cadre d'un modèle à deux fluides.

Dans cette section, nous présentons deux EoSs basées sur un *modèle de champ moyen relativiste* (RMF). Bien que ces modèles reposent sur une approche phénoménologique, ils peuvent toutefois être considérés comme « réalistes » dans le sens où ils cherchent à décrire aussi bien que possible les propriétés connues de la matière nucléaire. L'idée de base, inspirée par les modèles d'échange de mésons pour décrire l'interaction nucléon-nucléon, est de modéliser l'interaction entre les baryons par différents champs de mésons *effectifs*. Les constantes de couplage sont alors ajustées sur un ensemble d'observables nucléaires données. Alors que les premiers modèles introduisaient des termes non-linéaires de couplage des champs de mésons afin de reproduire correctement les propriétés de la matière nucléaire à saturation, la plupart des modèles RMF utilisés actuellement représentent les couplages entre les baryons et les champs de mésons par des termes dépendant de la densité. C'est sur ces derniers que nous nous concentrerons dans la suite. La littérature sur les modèles RMF est relativement conséquente et de nombreuses paramétrisations existent (voir, e.g., [Dutra et al. \(2014\)](#); [Oertel et al. \(2017\)](#)).

Densité lagrangienne microscopique. Nous supposons alors que l'intérieur d'une étoile à neutrons peut être décrit par une densité lagrangienne microscopique du type :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{nuc}} + \mathcal{L}_{\text{mes}} + \mathcal{L}_{\text{int}}, \quad (5.1)$$

où la contribution des nucléons \mathcal{L}_{nuc} est donnée par

$$\mathcal{L}_{\text{nuc}} = \sum_{X=(n,p)} -\bar{\psi}_X (\gamma_\mu \partial^\mu + m_X) \psi_X. \quad (5.2)$$

Dans cette équation, ψ_X représente le champ associé au baryon² X , dont la masse de repos est notée m_X . Les matrices de Dirac γ_μ vérifient les relations d'anticommutation $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$ et on a posé $\bar{\psi}_X = \psi_X^\dagger \gamma^0$.

L'EoS à deux fluides calculée par [Comer & Joynt \(2003\)](#) est également basée sur une approche RMF. Dans leur modèle, ces auteurs considèrent uniquement la présence des mésons scalaire σ et vecteur ω , qui décrivent respectivement l'attraction à longue portée et la répulsion à courte portée de l'interaction nucléaire. Toutefois, ces mésons étant *isoscalaires*³, ils ne sont adaptés qu'à la description de la matière nucléaire symétrique (même nombre de neutrons et de protons) et ne peuvent donc pas reproduire correctement

1. L'effet relatif de la superfluidité sur l'EoS à des densités supérieures à ρ_0 est inférieur à $10^{-4} - 10^{-2}$ (voir section 5.16 de [Haensel et al. \(2007\)](#)).

2. Les quantités “ (n, p) ” présentes dans (5.2) se réfèrent aux particules (neutrons, protons) et non aux fluides. Les électrons seront inclus plus loin.

3. Bien que présentant des charges électriques différentes, les neutrons et les protons sont grossièrement affectés de la même manière par l'interaction forte. Cette symétrie est caractérisée par le nombre quantique d'isospin, qui présente les mêmes propriétés mathématiques que le spin. On peut alors voir les neutrons et

les propriétés de la matière présente dans le cœur des étoiles à neutrons. Le modèle de [Comer & Joynt \(2003\)](#) a ensuite été amélioré par [Khetoo & Bandyopadhyay \(2014\)](#) afin d'inclure le méson vecteur *isovecteur* ρ , permettant ainsi de décrire convenablement un système présentant une asymétrie neutron-proton (voir également [Chamel \(2008\)](#) et [Gusakov *et al.* \(2009a\)](#)). Il faut noter que la présence des trois mésons cités précédemment, à savoir les mésons σ , ω et ρ , suffit à rendre compte des propriétés générales de l'interaction entre les baryons. Certains modèles incluent toutefois un méson supplémentaire, le méson scalaire isovecteur δ , afin de différencier les masses effectives de Dirac des neutrons et des protons (5.13). En revanche, les masses effectives de Landau (5.14) de ces deux types de nucléons sont distinctes même en l'absence du méson δ .

Dans ce qui suit, nous considérons deux modèles nucléaires, appelés DDH ([Typel & Wolter, 1999](#)) et DDH δ ([Gaitanos *et al.*, 2004](#); [Avancini *et al.*, 2004, 2009](#)), reposant sur une approche RMF tenant compte des mésons σ , ω et ρ pour le premier, et des mésons σ , ω , ρ et δ pour le second. La contribution des mésons libres au lagrangien (5.1) est alors donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{mes}} = & -\frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma - \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 - \frac{1}{2}\partial_\mu\vec{\delta}\partial^\mu\vec{\delta} - \frac{1}{2}m_\delta^2\vec{\delta}^2 \\ & -\frac{1}{4}W_{\mu\nu}^\dagger W^{\mu\nu} - \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_\mu\omega^\mu - \frac{1}{4}\vec{R}_{\mu\nu}^\dagger \cdot \vec{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}m_\rho^2\vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\rho}^\mu. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Les mésons σ , ω , ρ et δ sont représentés par les champs scalaire isoscalaire σ , vecteur isoscalaire ω^μ , vecteur isovecteur¹ $\vec{\rho}^\mu = (\rho_1^\mu, \rho_2^\mu, \rho_3^\mu)$ et scalaire isovecteur $\vec{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, et sont respectivement associés aux masses m_σ , m_ω , m_ρ et m_δ . Les termes faisant intervenir le champ de méson $\vec{\delta}$ ne sont pris en compte que dans le modèle DDH δ . Les tenseurs $W^{\mu\nu}$ et $\vec{R}^{\mu\nu}$ sont définis par

$$W^{\mu\nu} = \partial^\mu\omega^\nu - \partial^\nu\omega^\mu \quad \text{et} \quad \vec{R}^{\mu\nu} = \partial^\mu\vec{\rho}^\nu - \partial^\nu\vec{\rho}^\mu. \quad (5.4)$$

En outre, on suppose que les mésons sont couplés aux nucléons de manière minimale, conduisant à une densité lagrangienne d'interaction :

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \sum_{X=(n,p)} \bar{\psi}_X \left(g_\sigma\sigma + g_\delta\vec{\delta}\cdot\vec{I}_X + ig_\omega\gamma_\mu\omega^\mu + ig_\rho\gamma_\mu\vec{\rho}^\mu\cdot\vec{I}_X \right) \psi_X. \quad (5.5)$$

La quantité \vec{I}_X désigne l'opérateur d'isospin associé au baryon X et le terme g_M , pour $M \in \{\sigma, \omega, \rho, \delta\}$, caractérise le couplage entre les nucléons et le méson M . Dans le modèle DDH, g_δ est simplement fixé à 0.

Paramètres de couplage. Les termes de couplage g_M dépendent de la densité considérée,

$$g_M(n_B) = g_M(n_0)h_M(x), \quad (5.6)$$

les protons comme deux états distincts d'une même particule, associés à des nombres d'isospin différents. Un méson isoscalaire (isovecteur) représente un état singulet (triplet) avec un isospin total égal à 0 (égal à 1) et une troisième composante d'isospin nulle (valant 1, 0 ou -1), similaire à l'état singulet (triplet) obtenu lors de l'addition du spin de deux particules.

1. Un méson isovecteur M possède trois composantes d'isospin : (M_1, M_2, M_3) .

où n_0 désigne une constante de normalisation, prise comme étant la densité de saturation de la matière symétrique, et $x = n_B/n_0$. La densité baryonique n_B est définie comme le scalaire $n_B = \sqrt{-n_B^\mu n_{B\mu}}$, où $n_B^\mu = n_p^\mu + n_n^\mu$ est le quadri-courant de baryons. Par ailleurs, nous supposons que les couplages isoscalaires ($M = \sigma, \omega$) sont exprimés par

$$h_M(x) = a_M \frac{1 + b_M(x + d_M)^2}{1 + c_M(x + d_M)^2}, \quad (5.7)$$

tandis que les couplages isovecteurs ($M = \rho, \delta$) sont représentés par

$$h_M(x) = a_M \exp[-b_M(x - 1)] - c_M(x - d_M), \quad (5.8)$$

où a_M, b_M, c_M et d_M sont des constantes (voir [Avancini et al. \(2009\)](#)).

5.1.2 Calcul des équations d'état

Cas d'un seul fluide

Équations d'Euler-Lagrange. Les différents champs considérés vérifient les équations d'Euler-Lagrange, obtenues à partir de la densité lagrangienne (5.1). Dans l'approximation de champ moyen, les expressions des champs de mésons sont remplacées par leurs valeurs moyennes respectives ([Haensel et al., 2007](#); [Glendenning, 2000](#)). En supposant que toutes les particules se déplacent à la même vitesse, *i.e.* dans le cas d'un seul fluide, les équations d'Euler-Lagrange sont alors données par ([Gaitanos et al., 2004](#))

$$m_\sigma^2 \bar{\sigma} = g_\sigma \sum_{X=(n,p)} \langle \bar{\psi}_X \psi_X \rangle = g_\sigma (n_p^s + n_n^s), \quad (5.9a)$$

$$m_\delta^2 \bar{\delta} = g_\delta \sum_{X=(n,p)} \langle \bar{\psi}_X t_{3X} \psi_X \rangle = g_\delta (n_p^s - n_n^s), \quad (5.9b)$$

$$m_\omega^2 \bar{\omega} = g_\omega \sum_{X=(n,p)} i \langle \bar{\psi}_X \gamma^0 \psi_X \rangle = g_\omega (n_p + n_n), \quad (5.9c)$$

$$m_\rho^2 \bar{\rho} = g_\rho \sum_{X=(n,p)} i \langle \bar{\psi}_X \gamma^0 t_{3X} \psi_X \rangle = g_\rho (n_p - n_n), \quad (5.9d)$$

où on a posé $\bar{\sigma} = \langle \sigma \rangle$, $\bar{\delta} = \langle \delta_3 \rangle$, $\bar{\rho} = \langle \rho_3^0 \rangle$ et $\bar{\omega} = \langle \omega^0 \rangle$. Le terme t_{3X} désigne la troisième composante d'isospin, avec la convention $t_{3p} = 1$ et $t_{3n} = -1$. Notons que seules les troisièmes composantes d'isospin des champs de mésons isovecteurs contribuent à ces équations ([Glendenning, 2000](#)). En outre, nous nous plaçons dans le référentiel de repos du fluide (dans lequel la 3-vitesse de ce fluide est nulle), de telle sorte que seules les composantes "0" des champs vectoriels sont non-nulles.

En supposant que les champs de nucléons sont représentés par des ondes planes, les densités scalaires sont données par

$$n_X^s = \langle \bar{\psi}_X \psi_X \rangle = 2 \int f(e_X(k_\nu)) \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{m_X^*}{e_X(k_\nu)}, \quad (5.10)$$

5.1 Équations d'état à deux fluides réalistes

et les densités de particules par

$$n_X = n_X^0 = i \langle \bar{\psi}_X \gamma^0 \psi_X \rangle = 2 \int f(e_X(k_\nu)) \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} = \frac{(k_{F,X})^3}{3\pi^2}, \quad (5.11)$$

où $k_{F,X}$ désigne l'impulsion de Fermi du fluide X et e_X correspond à l'énergie *effective* d'un état propre de quadri-impulsion $k^\nu = (e_X, k^i)$. Les équations d'Euler-Lagrange associées aux champs de nucléons (équations de Dirac) conduisent à ([Avancini et al., 2009](#))

$$e_X(k_\nu) = \sqrt{k^i k_i + (m_X^*)^2}, \quad (5.12)$$

où la *masse effective de Dirac*, m_X^* , est donnée par

$$m_X^* = m_X - g_\sigma \bar{\sigma} - g_\delta t_{3X} \bar{\delta}. \quad (5.13)$$

Ainsi, la présence du méson δ conduit à des masses de Dirac différentes pour les neutrons et les protons. La quantité scalaire f , présente dans (5.10) et (5.11), désigne la fonction de distribution de Fermi-Dirac associée aux états d'énergie e_X . À température nulle, celle-ci est donnée par une fonction de Heaviside, $\theta(k_{F,X} - k)$, où $k^2 = k^i k_i$, valant 1 pour les états occupés (d'impulsion $k \leq k_{F,X}$) et 0 pour les états non-occupés. L'argument de f peut s'écrire de manière covariante sous la forme $\mu_*^X + k_\nu u^\nu$, où u^ν est la quadri-vitesse associée au référentiel considéré et μ_*^X est le potentiel chimique effectif des particules X , également appelé *masse effective de Landau* ([Glendenning, 2000](#)), défini par

$$\mu_*^X = \sqrt{(k_{F,X})^2 + (m_X^*)^2}. \quad (5.14)$$

Dans le référentiel du fluide, où $u^i = 0$, $\mu_*^X + k_\nu u^\nu$ se réduit alors à $\mu_*^X - e_X$, de telle sorte que la fonction de distribution f vérifie simplement

$$f(e_X) = \theta(\mu_*^X - e_X). \quad (5.15)$$

Notons que dans le cas d'un seul fluide, les potentiels chimiques effectifs μ_*^X sont reliés aux potentiels chimiques μ^X par les relations ([Avancini et al., 2009](#))

$$\mu^n = \mu_*^n + a_+ n_n + a_- n_p + \Sigma^R, \quad (5.16a)$$

$$\mu^p = \mu_*^p + a_+ n_p + a_- n_n + \Sigma^R, \quad (5.16b)$$

où $a_\pm = g_\omega^2/m_\omega^2 \pm g_\rho^2/m_\rho^2$. Le terme de réarrangement Σ^R , présent dans les modèles dépendant de la densité pour assurer la cohérence thermodynamique, est donné par

$$\Sigma^R = \frac{\partial g_\omega}{\partial n_B} \frac{g_\omega}{m_\omega^2} n_B^2 + \frac{\partial g_\rho}{\partial n_B} \frac{g_\rho}{m_\rho^2} n_I^2 - \frac{\partial g_\sigma}{\partial n_B} \bar{\sigma} (n_p^s + n_n^s) - \frac{\partial g_\delta}{\partial n_B} \bar{\delta} (n_p^s - n_n^s), \quad (5.17)$$

où la densité baryonique n_B vérifie $n_B = n_p + n_n$ et nous avons introduit la densité d'isospin n_I , telle que $n_I^2 = -n_I^\mu n_{I\mu}$ avec $n_I^\mu = n_p^\mu - n_n^\mu$.

La résolution (auto-cohérente) des équations d'Euler-Lagrange (5.9a)-(5.9d) permet alors d'obtenir les valeurs des champs de mésons $\bar{\sigma}$, $\bar{\delta}$, $\bar{\rho}$ et $\bar{\omega}$ pour différentes valeurs du couple (n_n, n_p) .

Propriétés de la matière nucléaire. En négligeant les gradients des champs de mésons moyennés, le tenseur énergie-impulsion microscopique $\tau^{\mu\nu}$ s'exprime en fonction de la densité lagrangienne \mathcal{L} (5.1) de la manière suivante :

$$\tau^{\mu\nu} = \sum_X \frac{1}{2} (\bar{\psi}_X \gamma^\mu \partial^\nu \psi_X + (\partial^\mu \bar{\psi}_X) \gamma^\nu \psi_X) + \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (5.18)$$

Ce tenseur est relié au tenseur énergie-impulsion macroscopique $T_{\mu\nu}$ impliqué dans les équations d'Einstein (4.9) par la relation $\langle \tau_{\mu\nu} \rangle = T_{\mu\nu}$, où $\langle \tau_{\mu\nu} \rangle$ correspond aux valeurs moyennées des différentes composantes du tenseur $\tau_{\mu\nu}$ sur une échelle macroscopique. Dans le cas d'un fluide parfait et en se plaçant dans un référentiel inertiel local, le tenseur $T_{\mu\nu}$ est donné par

$$T_{\mu\nu} = (\varepsilon + P)u_\mu u_\nu + P\eta_{\mu\nu}, \quad (5.19)$$

où la densité d'énergie ε par unité de volume et la pression P du fluide, mesurées dans le référentiel propre de ce dernier, vérifient

$$\varepsilon = T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \langle \tau_{\mu\nu} \rangle u^\mu u^\nu = \langle \tau_{00} \rangle, \quad (5.20)$$

et

$$P = \frac{1}{3} (T^\mu_\mu + \varepsilon) = \frac{1}{3} \langle \tau^i_i \rangle. \quad (5.21)$$

Il est alors possible d'exprimer la densité d'énergie (baryonique¹) ε_B et la pression (baryonique) P_B en fonction des champs $\bar{\sigma}$, $\bar{\delta}$, $\bar{\rho}$ et $\bar{\omega}$ et de leurs termes de couplage avec les baryons, grâce aux formules précédentes (voir, e.g., [Typel & Wolter \(1999\)](#); [Glendenning \(2000\)](#); [Avancini et al. \(2009\)](#)). Cela permet de calculer les profils de densité d'énergie et de pression prédits par les EoS considérées, en fonction des densités n_n et n_p . L'expression des termes de couplage g_M et la valeur des masses m_M doivent être choisies avec soin, afin de reproduire correctement les données expérimentales connues sur la matière nucléaire, présentées dans la section 1.4.2. Les différentes constantes impliquées dans les expressions (5.7) et (5.8) que nous avons utilisées dans les modèles DDH et DDH δ proviennent respectivement des travaux de [Typel & Wolter \(1999\)](#) et [Avancini et al. \(2009\)](#), et sont résumées dans la table 5.1. Les termes de couplage g_M correspondant sont tracés en fonction de la densité baryonique sur la figure 5.1.

Sur la figure 5.2, nous présentons les profils d'énergie par baryon $E/A = \varepsilon_B/n_B - m_{nuc}$ associés à la matière nucléaire symétrique (SNM) et à la matière pure de neutrons (PNM), donnés par les modèles DDH et DDH δ . En introduisant $E_B(n_B, \alpha_I) = \varepsilon_B/n_B$, comme on l'a fait dans la section 1.4.2, l'énergie par baryon de la matière symétrique est donnée par

$$(E/A)_{SNM}(n_B) = E_B(n_B, 0) - m_{nuc} = E_0(n_B) - \frac{m_n + m_p}{2}, \quad (5.22)$$

1. La contribution des électrons à la densité d'énergie totale sera prise en compte dans l'équation (5.46).

5.1 Équations d'état à deux fluides réalistes

mésons M	σ	ω	ρ_{DDH}	$\rho_{\text{DDH}\delta}$	δ
m_M [MeV]	550	783	763	763	980
$g_M(n_0)$	10,72854	13,29015	7,32196	11,727	7,58963
a_M	1,365469	1,402488	1	0,095268	0,01984
b_M	0,226061	0,172577	0,515	2,171	3,4732
c_M	0,409704	0,344293	0	0,05336	-0,0908
d_M	0,901995	0,983955	0	17,8431	-9,811

TABLE 5.1 – **Termes de couplage utilisés dans les EoSs DDH et DDH δ .** Le modèle DDH fait appel aux mésons σ , ω et ρ_{DDH} , tandis que le modèle DDH δ est associé aux mésons σ , ω , $\rho_{\text{DDH}\delta}$ et δ . Pour chacun de ces mésons M , on donne la masse m_M , la valeur de g_M à la densité de saturation nucléaire n_0 (5.6) et les constantes a_M , b_M , c_M et d_M intervenant dans les expressions (5.7) et (5.8). On pourra remarquer que les deux modèles considérés ne diffèrent que par les choix des paramètres liés aux mésons isovecteurs. Valeurs tirées de [Typel & Wolter \(1999\)](#) et [Avancini *et al.* \(2009\)](#).

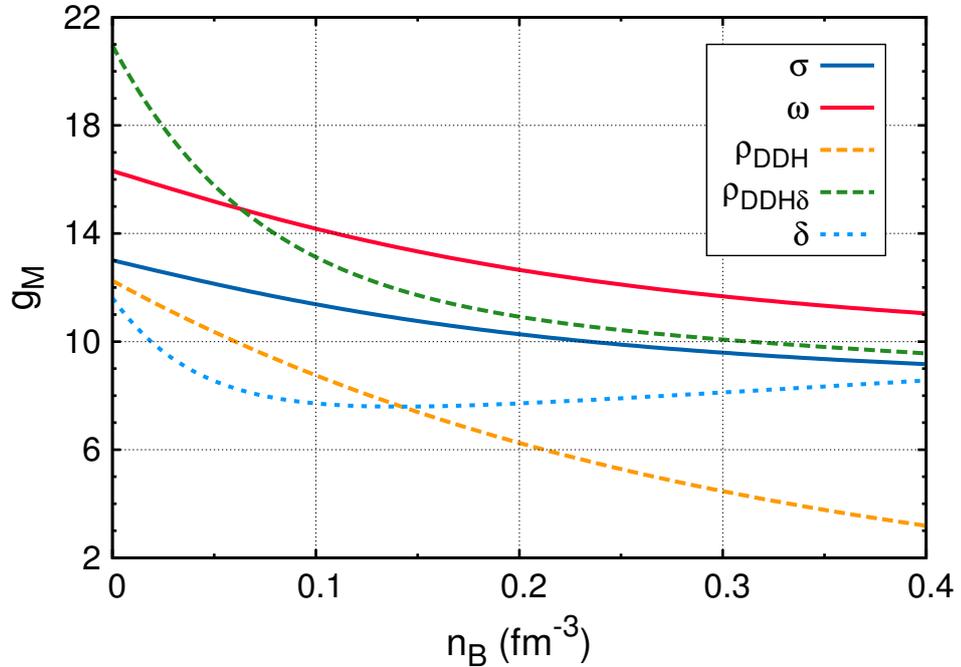


FIGURE 5.1 – **Couplages dépendant de la densité.** Termes de couplage g_M (5.6) tracés en fonction de la densité baryonique n_B pour les différents mésons considérés dans les modèles DDH et DDH δ (voir table 5.1).

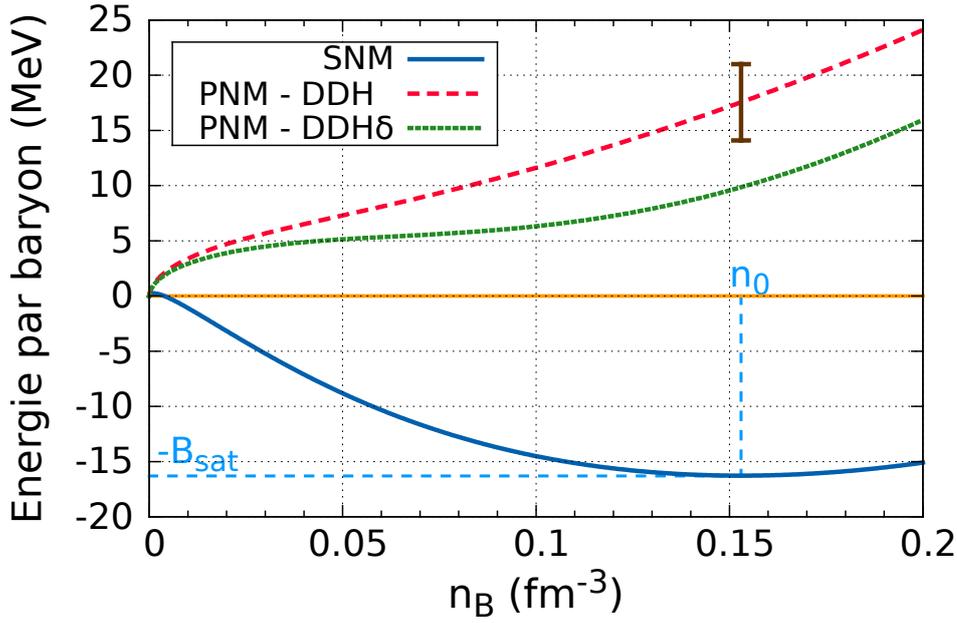


FIGURE 5.2 – Profils d'énergie par baryon prédits par les modèles DDH et DDH δ . Les énergies par baryon de la matière symétrique $(E/A)_{SNM}$ (5.22) et de la matière pure de neutrons $(E/A)_{PNM}$ (5.23) sont tracées en fonction de la densité baryonique n_B . La quantité n_0 désigne la densité de saturation de la matière symétrique et $B_{sat} = -(E/A)_{SNM}(n_0)$. Le segment marron représente l'intervalle de valeurs de $(E/A)_{PNM}(n_0)$ déduit des calculs microscopiques réalisés par Krüger *et al.* (2013).

où le paramètre d'isospin α_I est nul ($n_n = n_p$; $n_B = 2n_n$), $E_0(n_B)$ est donnée par (1.17) et on a remplacé la constante m_{nuc} par la masse moyenne des nucléons (m_p désignant ici la masse au repos du proton). L'énergie par baryon de la matière pure de neutrons, quant à elle, est exprimée par

$$(E/A)_{PNM}(n_B) = E_B(n_B, 1) - m_n, \quad (5.23)$$

où $\alpha_I = 1$ ($n_p = 0$; $n_B = n_n$).

Les EoSs DDH et DDH δ utilisant les mêmes couplages pour les mésons isoscalaires (voir table 5.1), elles conduisent à un même profil $(E/A)_{SNM}(n_B)$ et donc aux mêmes propriétés pour la matière symétrique. En raison de l'effet conjugué de la répulsion à courte distance et de l'attraction à longue distance de l'interaction forte, cette courbe présente un minimum correspondant à un état d'équilibre lié à pression nulle (voir (1.19) et Fig. 5.4). Les quantités n_0 et $-B_{sat}$ désignent les valeurs de densité et d'énergie par baryon associées à ce minimum. Le module d'incompressibilité à saturation K caractérise la courbure de l'énergie par baryon de la matière symétrique au voisinage de la densité de saturation n_0 , voir (1.17). Comme on peut le voir sur la table 5.2, les valeurs de n_0 , B_{sat} et K obtenues sont en bon accord avec les données expérimentales présentées dans la section 1.4.2. En outre, on pourra remarquer que les modèles DDH et DDH δ prédisent des états non liés ($E/A > 0$) pour la matière pure de neutrons, quelle que soit la densité considérée. Dans la table 5.2, nous indiquons les valeurs de $(E/A)_{PNM}(n_0)$ obtenues avec

5.1 Équations d'état à deux fluides réalistes

	DDH	DDH δ	contraintes exp.	[unités]
n_0	0,153	0,153	$0,16 \pm 0,01$	[fm ⁻³]
B_{sat}	16,3	16,3	$15,9 \pm 0,3$	[MeV]
K	240	240	240 ± 10	[MeV]
$(E/A)_{PNM} (n_0)$	17,8	10,0	$17,6 \pm 3,5$	[MeV]
J	32,0	25,1	31 ± 5	[MeV]
L	55	44	64 ± 36	[MeV]
$M_G^{\max} (0 \text{ Hz})$	2,08	2,16	$\gtrsim 2,05$	[M _⊙]
$M_G^{\max} (716 \text{ Hz})$	2,12	2,21	$\gtrsim 2,05$	[M _⊙]

TABLE 5.2 – **Propriétés de la matière nucléaire pour les modèles DDH et DDH δ .**

La quantité n_0 désigne la densité de saturation nucléaire. L'énergie de liaison de la matière symétrique B_{sat} , le module d'incompressibilité K , l'énergie par nucléon de la matière pure de neutrons $(E/A)_{PNM} (n_0)$, l'énergie de symétrie J et la pente de l'énergie de symétrie L sont donnés à saturation. Ces différentes quantités sont définies dans la section 1.4.2. Les contraintes expérimentales (tirées de [Typel *et al.* \(2013\)](#)) sont également détaillées dans la section 1.4.2, sauf celle sur $(E/A)_{PNM} (n_0)$ qui provient de [Krüger *et al.* \(2013\)](#). Par ailleurs, nous indiquons les masses gravitationnelles maximales obtenues pour des étoiles à neutrons statiques et tournant à 716 Hz, en supposant que les deux fluides sont en corotation et à l'équilibre β (voir section 5.2.1). Celles-ci sont comparées à la masse la plus élevée mesurée jusqu'à présent : $2,01 \pm 0,04 M_{\odot}$ ([Antoniadis *et al.*, \(2013\)](#)).

ces modèles, qui peuvent être comparées avec la contrainte

$$14,1 \lesssim (E/A)_{PNM} (n_0) \lesssim 21,0 \text{ MeV}, \quad (5.24)$$

déduite par [Krüger *et al.* \(2013\)](#) à partir de calculs microscopiques basés sur l'utilisation de forces nucléaires chirales.

Les profils d'énergie de symétrie associés aux deux modèles nucléaires étudiés sont représentés sur la figure 5.3. Notons qu'ici nous ne traçons pas directement $E_{sym} (1.18)$, mais plutôt la quantité $E_B(n_B, 1) - E_B(n_B, 0)$ qui, en vertu de l'équation (1.16), constitue une bonne approximation de l'énergie de symétrie. Les grandeurs J et L caractérisent respectivement l'énergie de symétrie et sa pente, à saturation. En utilisant la relation $E_{sym} (n_B) \simeq E_B(n_B, 1) - E_B(n_B, 0)$, on en déduit que $J \simeq (E/A)_{PNM} (n_0) + B_{sat}$. Les EoS DDH et DDH δ ne reposant pas sur les mêmes couplages isovectoriels (voir table 5.1), les propriétés de la matière nucléaire asymétrique qu'elles prédisent sont relativement différentes. La dépendance en isospin de l'EoS est très importante, étant donné que la matière présente dans le cœur des étoiles à neutrons est proche de la matière pure de neutrons (voir Fig. 5.5). L'EoS DDH δ conduit à des valeurs de J , L et $(E/A)_{PNM} (n_0)$ légèrement trop faibles par rapport aux contraintes expérimentales actuelles, voir table 5.2. Ces différentes grandeurs sont plus élevées dans le cas du modèle DDH et sont en meilleur accord avec les

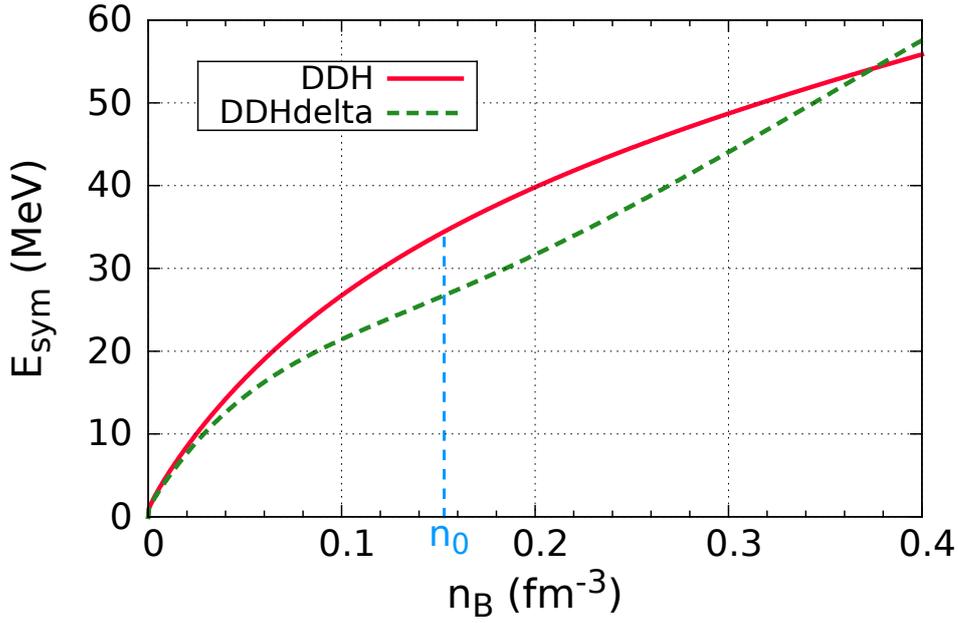


FIGURE 5.3 – Énergie de symétrie associée aux modèles DDH et DDH δ . La quantité $E_B(n_B, 1) - E_B(n_B, 0) \simeq E_{sym}$ est tracée en fonction de la densité. Les grandeurs J et L désignent l'énergie de symétrie et la pente de l'énergie de symétrie, à saturation. On notera également la convexité différente de ces courbes pour $n_B = n_0$: alors que l'EoS DDH prédit une valeur de K_{sym} négative, l'EoS DDH δ conduit à $K_{sym} > 0$, voir (1.18).

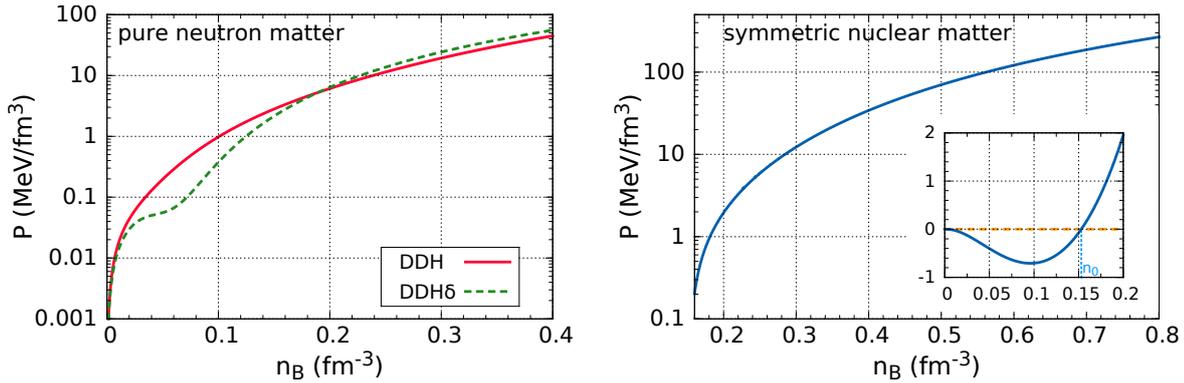


FIGURE 5.4 – Profils de pression. La pression de la matière pure de neutrons (à gauche) et de la matière nucléaire symétrique (à droite) est représentée en fonction de la densité baryonique, pour les EoS DDH et DDH δ . Comme pour l'énergie par baryon, ces deux modèles conduisent au même profil de pression pour la matière symétrique. L'encart est un agrandissement à basse densité. On pourra remarquer que la pression de la matière symétrique est nulle à la densité de saturation n_0 .

5.1 Équations d'état à deux fluides réalistes

données nucléaires. L'utilisation de ces deux EoS nous permettra néanmoins d'explorer l'influence des interactions entre nucléons sur les configurations stationnaires présentées dans la section 5.2.

Par ailleurs, les profils de pression prédits par les EoSs DDH et DDH δ sont donnés sur la figure 5.4 pour la matière nucléaire symétrique et pour la matière pure de neutrons. Ces courbes peuvent être comparées à celles obtenues avec d'autres modèles d'EoS, visibles sur la figure 1.8.

Enfin, les variations de la fraction de protons $x_p = n_p/n_B$ avec la densité baryonique n_B sont tracées sur la figure 5.5, en supposant qu'il y a équilibre β entre les particules. Il est intéressant de noter que les profils obtenus avec les EoSs DDH et DDH δ sont très différents. Pour comprendre cela, commençons par exprimer la différence des potentiels chimiques des neutrons et des protons, $\mu^n - \mu^p$. En utilisant (1.16), on obtient :

$$\mu^n - \mu^p = \frac{\partial \varepsilon_B}{\partial n_n} - \frac{\partial \varepsilon_B}{\partial n_p} \simeq 4E_{sym}(n_B) [1 - 2x_p]. \quad (5.25)$$

D'un autre côté, le potentiel chimique des électrons est donné par¹

$$\mu^e = \sqrt{m_e^2 + k_{F,e}^2}, \quad (5.26)$$

où m_e est la masse au repos des électrons et $k_{F,e}$ est l'impulsion de Fermi, reliée à la densité d'électrons $n_e = n_p$ par $k_{F,e} = (3\pi^2 n_p)^{1/3}$. Pour les densités considérées, on a

$$\mu^e \simeq k_{F,e} = (3\pi^2 x_p n_B)^{1/3}. \quad (5.27)$$

À l'équilibre β , où $\mu^n = \mu^p + \mu^e$ (voir sections 1.2.2 et 4.4.3), l'égalité des équations (5.25) et (5.27) conduit à

$$\frac{x_p^{1/3}}{1 - 2x_p} = \frac{4E_{sym}(n_B)}{(3\pi^2 n_B)^{1/3}}. \quad (5.28)$$

La fraction de protons vérifiant généralement $x_p \ll 1$, on en déduit alors que

$$x_p \simeq \frac{64 [E_{sym}(n_B)]^3}{3\pi^2 n_B} \simeq 4,75 \times 10^{-2} \left(\frac{n_0}{n_B} \right) \left(\frac{E_{sym}(n_B)}{30 \text{ MeV}} \right)^3. \quad (5.29)$$

Ainsi, la fraction de protons à l'équilibre β dépend fortement de l'énergie de symétrie de l'EoS considérée et donc des valeurs de J et L . C'est ce qui explique les différences dans les profils de x_p calculés à partir des EoSs DDH et DDH δ . En particulier, à la densité de saturation, la formule précédente conduit à $x_p \simeq 0,058$ pour DDH et $x_p \simeq 0,028$ pour DDH δ , en accord avec les résultats présentés sur la figure 5.5.

1. Les électrons sont considérés comme un gaz de Fermi sans interaction, uniquement présent pour assurer la neutralité électrique du milieu. Cette hypothèse est justifiée par le fait que les électrons ne sont pas sensibles à l'interaction forte et parce que les forces d'interaction entre les baryons sont beaucoup plus importantes que les forces coulombiennes.

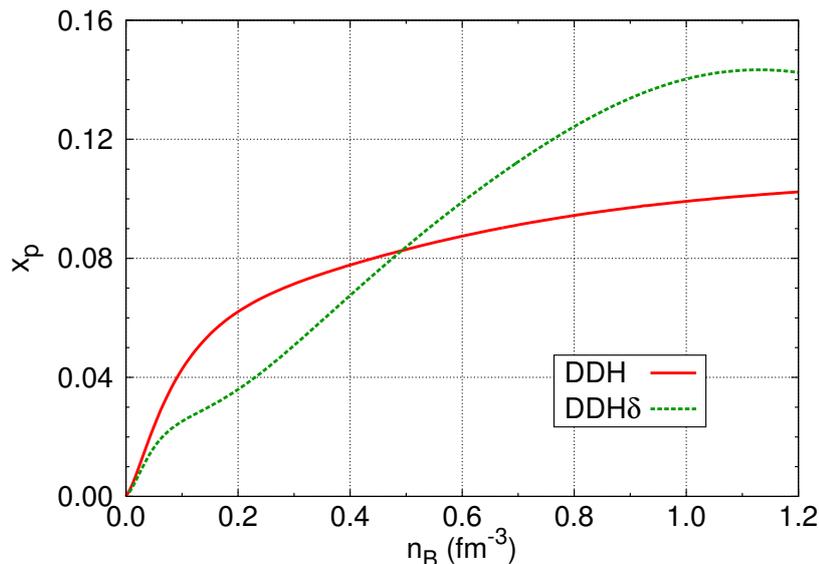


FIGURE 5.5 – Fractions de protons prédites par les modèles DDH et DDH δ . Les particules sont supposées comobiles et à l'équilibre β .

Cas à deux fluides

Dans le cadre à deux fluides, il n'est plus possible de définir un référentiel de repos commun à toutes les particules et l'EoS du système dépend alors de la vitesse relative Δ (4.58) entre le (super)fluide de neutrons et le fluide de particules chargées. Les modèles non-relativistes se basent généralement sur la théorie du liquide de Fermi pour calculer la matrice d'entraînement (4.31), voir, e.g., [Chamel & Haensel \(2006\)](#); [Chamel \(2008\)](#). Jusqu'à présent, deux approches différentes ont été suivies pour modéliser des systèmes à deux fluides relativistes. D'un côté, [Gusakov *et al.* \(2009a, 2014c\)](#) ont utilisé une généralisation relativiste de la théorie du liquide de Fermi afin de calculer les coefficients d'entraînement pour un mélange comprenant des électrons, des nucléons et, plus généralement, l'octet des baryons. Certains résultats obtenus dans le cadre de ce modèle, adapté à la présence de couplage dépendant de la densité, sont présentés dans [Urban & Oertel \(2015\)](#). D'un autre côté, [Comer & Joynt \(2003\)](#) ont introduit un formalisme permettant d'évaluer la fonction maîtresse Λ à partir des composantes du tenseur-énergie impulsion $\tau_{\mu\nu}$ moyennées sur des échelles macroscopiques et l'ont appliqué à un modèle nucléaire de type RMF contenant uniquement des termes d'interaction isoscalaires. La matrice d'entraînement est ensuite calculée en utilisant les définitions (4.32). Ce formalisme a été appliqué au cas d'un modèle RMF plus réaliste, incluant une interaction isovectorielle, par [Khetu & Bandyopadhyay \(2014\)](#). Dans la suite, nous suivons la stratégie proposée par [Comer & Joynt \(2003\)](#), que nous adaptons afin que la matrice d'entraînement résultante soit en accord avec celle obtenue à partir de la théorie du liquide de Fermi dans la limite à faible vitesse relative, comme on l'attend. Notre but est alors de calculer la fonction maîtresse $\Lambda = -\mathcal{E}$ (4.27), qui dépend des trois scalaires n_n , n_p et Δ^2 , pour les EoS DDH et DDH δ présentées précédemment.

5.1 Équations d'état à deux fluides réalistes

Équations d'Euler-Lagrange. Par commodité, nous nous plaçons dans le référentiel où la 3-vitesse du fluide de neutrons est nulle (*i.e.* $u_n^i = 0$, voir section 5.1.4), dans lequel le fluide de protons acquiert une 3-vitesse v^i non-nulle. Sans perdre en généralité, il est possible de choisir v^i orientée selon la direction z pour simplifier les calculs, de sorte que $v^i = (0, 0, \Delta)$. En utilisant les conditions de normalisation (4.28), la décomposition orthogonale de la quadri-vitesse des protons par rapport à celle des neutrons conduit alors à

$$u_p^\alpha = \Gamma_\Delta (u_n^\alpha + v^\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 - \Delta^2}} (1, 0, 0, \Delta), \quad (5.30)$$

où la quantité $\Gamma_\Delta = -u_p^\alpha u_{n\alpha} = 1/\sqrt{1 - \Delta^2}$ désigne le facteur de Lorentz relatif (4.37). Les quadri-courants de particules étant donnés par $n_X^\alpha = n_X u_X^\alpha$, on en déduit que

$$n_n^\alpha = (n_n, 0, 0, 0) \quad \text{et} \quad n_p^\alpha = \frac{n_p}{\sqrt{1 - \Delta^2}} (1, 0, 0, \Delta), \quad (5.31)$$

où seul le courant de protons a une composante spatiale non-nulle.

Les équations d'Euler-Lagrange relatives aux champs de mésons sont maintenant données par

$$m_\sigma^2 \bar{\sigma} = g_\sigma \sum_{X=(n,p)} \langle \bar{\psi}_X \psi_X \rangle = g_\sigma (n_p^s + n_n^s), \quad (5.32a)$$

$$m_\delta^2 \bar{\delta} = g_\delta \sum_{X=(n,p)} \langle \bar{\psi}_X t_{3X} \psi_X \rangle = g_\delta (n_p^s - n_n^s), \quad (5.32b)$$

$$m_\omega^2 \bar{\omega} = g_\omega \sum_{X=(n,p)} i \langle \bar{\psi}_X \gamma^0 \psi_X \rangle = g_\omega (n_p^0 + n_n^0), \quad (5.32c)$$

$$m_\rho^2 \bar{\rho} = g_\rho \sum_{X=(n,p)} i \langle \bar{\psi}_X \gamma^0 t_{3X} \psi_X \rangle = g_\rho (n_p^0 - n_n^0), \quad (5.32d)$$

$$m_\omega^2 \bar{\omega}^i = g_\omega \sum_{X=(n,p)} i \langle \bar{\psi}_X \gamma^i \psi_X \rangle = g_\omega (n_p^i + n_n^i), \quad (5.32e)$$

$$m_\rho^2 \bar{\rho}^i = g_\rho \sum_{X=(n,p)} i \langle \bar{\psi}_X \gamma^i t_{3X} \psi_X \rangle = g_\rho (n_p^i - n_n^i), \quad (5.32f)$$

où $\bar{\rho}^i = \langle \rho_3^i \rangle$ et $\bar{\omega}^i = \langle \omega^i \rangle$. Notons que les champs moyennés des mésons vecteurs présentent maintenant une composante spatiale z non-nulle, en raison de la vitesse non-nulle des protons dans le référentiel considéré, voir Éq. (5.31). Afin que les équations précédentes soient vérifiées, nous allons maintenant nous assurer que les quadri-courants de protons et de neutrons, définis ici par $n_X^\alpha = i \langle \bar{\psi}_X \gamma^\alpha \psi_X \rangle$, redonnent bien les expressions attendues (5.31).

Les calculs suivants diffèrent légèrement de ceux réalisés par [Comer & Joynt \(2003\)](#) et [Khetu & Bandyopadhyay \(2014\)](#). Ces derniers se sont placés dans le référentiel¹ où les

1. Dans le cas d'un seul fluide, le référentiel où les composantes spatiales de la quadri-vitesse du fluide sont nulles est confondu avec celui dans lequel les composantes spatiales de la quadri-impulsion de ce fluide s'annulent. Ce n'est plus vrai dans le contexte à deux fluides, en raison des effets d'entraînement (4.31). Par conséquent, on peut définir deux référentiels de repos pour chaque fluide : (i) celui où $u_X^i = 0$ et (ii) celui où $p_X^i = 0$ ([Prix et al., 2002](#)).

composantes spatiales p_n^i de la quadri-impulsion des neutrons sont nulles et ont décalé l'impulsion de Fermi des protons d'une quantité K , afin de rendre compte du mouvement du fluide de protons dans ce référentiel. Toutefois, en suivant cette stratégie, la déformation relativiste de la sphère de Fermi, qui intervient au second ordre en les vitesses, n'est pas correctement reproduite. De notre point de vue, c'est la raison pour laquelle les résultats obtenus par Comer & Joynt (2003) et Kheto & Bandyopadhyay (2014) ne coïncident pas avec ceux de Gusakov *et al.* (2009a), basés sur la théorie du liquide de Fermi. Par conséquent, nous utilisons ici une autre méthode (Baym & Chin, 1976), utilisant les propriétés des transformations de Lorentz des différentes quantités nécessaires pour calculer la fonction maîtresse, que nous appliquons dans le référentiel où $u_n^i = 0$. Cette approche permet alors de calculer Λ pour n'importe quelle vitesse relative Δ considérée¹ et inclut naturellement la déformation de la sphère de Fermi.

Commençons par calculer les termes $n_X^0 = i \langle \bar{\psi}_X \gamma^0 \psi_X \rangle$. Les composantes spatiales des champs mésoniques n'étant plus nulles, l'énergie effective d'un état propre associé à la quadri-impulsion k^ν (5.12) vérifie maintenant

$$\begin{aligned} e_X(k_\nu) &= \sqrt{(k^z - g_\omega \omega^z - g_\rho t_{3X} \rho^z)^2 + (m_X^*)^2} \\ &\equiv \sqrt{k'_i k'^i + (m_X^*)^2}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Un simple changement de variable $k_i \rightarrow k'_i$ montre que $n_n^0 = n_n = k_{F,n}^3 / (3\pi^2)$ pour les neutrons, comme on s'y attend. Les protons ayant une vitesse non-nulle dans le référentiel considéré, les différentes impulsions impliquées dans l'intégrale (5.11) subissent une transformation de Lorentz, de sorte que

$$n_p^0 = 2 \int \frac{d^3 \tilde{k}}{(2\pi)^3} f \left[e_p(\tilde{k}_\nu) \right], \quad (5.34)$$

où les quantités dans le référentiel des neutrons (où $u_n^i = 0$) sont notées par un tilde. En utilisant le fait que la fonction de distribution est scalaire avec un argument scalaire et que k^ν se transforme comme un vecteur lors d'une transformation de Lorentz, il est possible d'exprimer l'intégrande comme suit (Baym & Chin, 1976) :

$$n_p^0 = 2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} J(k, \tilde{k}) \theta(\mu_*^p - e_p(k_\nu)), \quad (5.35)$$

où $J(k, \tilde{k})$ est le jacobien associé au changement de variable d'intégration $\tilde{k} \rightarrow k$, correspondant au passage du référentiel où $u_n^i = 0$ à celui où $u_p^i = 0$, donné par

$$J(k, \tilde{k}) = \frac{1}{\sqrt{1 - \Delta^2}} \left(1 + \Delta \frac{\partial e_p(k_\nu)}{\partial k^z} \right). \quad (5.36)$$

1. Il faut cependant remarquer que nous ne considérons aucune modification de la température critique de superfluidité avec la vitesse relative. Les calculs présentés ici n'ont donc de sens que pour des vitesses relatives inférieures à la vitesse critique, qui est de l'ordre de 10^7 cm.s^{-1} dans les étoiles à neutrons (Gusakov & Kantor, 2013), au-delà de laquelle la superfluidité est brisée. Cette limite est toutefois peu contraignante, étant donné les différences de vitesses maximales entre les fluides suggérées par le phénomène de glitch (voir (7.7)).

5.1 Équations d'état à deux fluides réalistes

L'intégrale (5.35) conduit alors à $n_p^0 = n_p/\sqrt{1-\Delta^2} = n_p u_p^0$, où $n_p = k_{F,p}^3/(3\pi^2)$. De la même manière, les composantes z des quadri-courants vérifient

$$\begin{aligned} n_n^z &= \int d^3 k \theta(\mu_*^n - e_n(k^\nu)) \times \frac{k^z - g_\omega \omega^z - g_\rho \rho^z}{e_n(k^\nu)} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} n_p^z &= \int d^3 k \theta(\mu_*^p - e_p(k^\nu)) J(k, \tilde{k}) \times \frac{e_p(k^\nu) \Delta + k^z - g_\omega \omega^z + g_\rho \rho^z}{e_p(k^\nu) + \Delta(k^z - g_\omega \omega^z + g_\rho \rho^z)} \\ &= n_p \frac{\Delta}{\sqrt{1-\Delta^2}}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Ainsi, on retrouve bien les expressions attendues (5.31).

On remarquera également que les densités baryonique n_B et d'isospin n_I sont maintenant données par

$$n_B = \sqrt{-n_B^\mu n_{B\mu}} = \sqrt{n_n^2 + n_p^2 + 2\Gamma_\Delta n_n n_p}, \quad (5.39)$$

et

$$n_I = \sqrt{-n_I^\mu n_{I\mu}} = \sqrt{n_n^2 + n_p^2 - 2\Gamma_\Delta n_n n_p}. \quad (5.40)$$

Fonction maîtresse et matrice d'entraînement. Dans le cadre à deux fluides, la densité lagrangienne $\Lambda = -\mathcal{E}$ et la pression Ψ peuvent s'exprimer de la manière suivante (Comer & Joynt, 2003)

$$\mathcal{E} = -\Lambda = \langle \tau_{00} \rangle + \langle \tau_{xx} \rangle - \langle \tau_{zz} \rangle, \quad (5.41)$$

et

$$\Psi = \frac{1}{3} (\langle \tau_\mu^\mu \rangle + \mathcal{E}), \quad (5.42)$$

où le tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu} = \langle \tau_{\mu\nu} \rangle$ est donné par (4.41). Ces expressions généralisent les équations (5.20) et (5.21) à un système de deux fluides parfaits. En utilisant (5.18) et les équations d'Euler-Lagrange gouvernant les champs de mésons et de baryons, la contribution des baryons à la densité d'énergie \mathcal{E} est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_B &= 6 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \theta(\mu_*^n - e_n(k^\nu)) \times \frac{(k^x)^2 + (m_n^*)^2/3}{e_n(k^\nu)} \\ &+ 6 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \theta(\mu_*^p - e_p(k^\nu)) J(k, \tilde{k}) \times \frac{(k^x)^2 + (m_p^*)^2/3}{\frac{1}{\sqrt{1-\Delta^2}}(e_p(k^\nu) + \Delta(k^z - g_\omega \omega^z + g_\rho \rho^z))} \\ &+ \frac{1}{2} m_\sigma^2 \bar{\sigma}^2 + \frac{1}{2} m_\delta^2 \bar{\delta}^2 - \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu - \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_\mu \rho^\mu. \end{aligned} \quad (5.43)$$

En appliquant (5.36), on obtient alors

$$\mathcal{E}_B = \epsilon_n(n_n) + \epsilon_p(n_p) + \frac{1}{2} m_\sigma^2 \bar{\sigma}^2 + \frac{1}{2} m_\delta^2 \bar{\delta}^2 - \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu - \frac{1}{2} m_\rho^2 \rho_\mu \rho^\mu, \quad (5.44)$$

où $\epsilon_X(n_X)$ correspond à la densité d'énergie d'un gaz de Fermi libre, calculée ici avec les masses effectives de Dirac (5.13) et de Landau (5.14) des protons et des neutrons :

$$\epsilon_X(n_X) = \frac{1}{8\pi^2} \left(k_{F,X} \mu_*^X [(m_X^*)^2 + 2k_{F,X}^2] - (m_X^*)^4 \ln \left[\frac{k_{F,X} + \mu_*^X}{m_X^*} \right] \right). \quad (5.45)$$

En considérant que les électrons forment un gaz de Fermi sans interaction, couplé aux baryons uniquement par la condition de neutralité de charge ($n_e = n_p$), la densité d'énergie \mathcal{E} est alors donnée par

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_B + \epsilon_e(n_p) , \quad (5.46)$$

où $k_{F,e} = k_{F,p}$, $m_e^* = m_e$ et $\mu_*^e = \mu^e = \sqrt{m_e^2 + k_{F,e}^2}$.

Nous pouvons maintenant exprimer les coefficients de la matrice d'entraînement (4.31) à partir des dérivées de \mathcal{E} . Pour cela, remarquons que, grâce aux équations d'Euler-Lagrange (5.32c)-(5.32f), les deux derniers termes apparaissant dans l'équation (5.44) peuvent se réécrire sous la forme suivante

$$m_\omega^2 \omega_\alpha \omega^\alpha = \frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} n_B^\alpha n_{B\alpha} = -\frac{g_\omega^2}{m_\omega^2} n_B^2, \quad (5.47)$$

$$m_\rho^2 \rho_\alpha \rho^\alpha = \frac{g_\rho^2}{m_\rho^2} n_I^\alpha n_{I\alpha} = -\frac{g_\rho^2}{m_\rho^2} n_I^2, \quad (5.48)$$

où les densités n_B et n_I sont données par (5.39) et (5.40). En utilisant le fait que le potentiel chimique effectif μ_*^X vérifie

$$\mu_*^X = \frac{\partial \epsilon_X}{\partial n_X}, \quad (5.49)$$

où $\epsilon_X(n_X)$ est défini par (5.45), les dérivées (4.39) de \mathcal{E} sont alors données¹ par

$$\mu^n = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial n_n} = \mu_*^n + n_n a_+ + n_p a_- \Gamma_\Delta + \Sigma^R \frac{\partial n_B}{\partial n_n}, \quad (5.50a)$$

$$\mu^p = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial n_p} = \mu_*^p + n_p a_+ + n_n a_- \Gamma_\Delta + \Sigma^R \frac{\partial n_B}{\partial n_p} + \mu^e, \quad (5.50b)$$

$$\alpha = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \Delta^2} = \frac{1}{2} n_n n_p a_- \Gamma_\Delta^3 + \Sigma^R \frac{\partial n_B}{\partial \Delta^2}, \quad (5.50c)$$

où les quantités Σ^R , a_- et a_+ ont la même expression que dans le contexte à un fluide. Pour un système de deux fluides, où $n_B = n_B(n_n, n_p, \Delta^2)$, l'équation (5.39) conduit à

$$\frac{\partial n_B}{\partial n_n} = \frac{1}{n_B} (n_n + n_p \Gamma_\Delta), \quad (5.51a)$$

$$\frac{\partial n_B}{\partial n_p} = \frac{1}{n_B} (n_p + n_n \Gamma_\Delta), \quad (5.51b)$$

$$\frac{\partial n_B}{\partial \Delta^2} = \frac{1}{2n_B} n_n n_p \Gamma_\Delta^3. \quad (5.51c)$$

En utilisant les relations (4.40), nous obtenons finalement les expressions suivantes pour

1. On pourra remarquer que le potentiel chimique μ^p utilisé ici est associé au fluide de particules chargées, et non plus aux seuls protons.

les coefficients d'entraînement :

$$\mathcal{K}^{\text{nn}} = \frac{\mu_*^{\text{n}}}{n_{\text{n}}} + a_+ + \frac{\Sigma^R}{n_B}, \quad (5.52\text{a})$$

$$\mathcal{K}^{\text{pp}} = \frac{\mu_*^{\text{p}}}{n_{\text{p}}} + a_+ + \frac{\Sigma^R}{n_B} + \frac{\mu^{\text{e}}}{n_{\text{p}}}, \quad (5.52\text{b})$$

$$\mathcal{K}^{\text{np}} = a_- + \frac{\Sigma^R}{n_B}. \quad (5.52\text{c})$$

Ces résultats appellent différentes remarques. Tout d'abord, les coefficients d'entraînement calculés ici sont, dans la limite où la vitesse relative Δ est faible, en accord avec les expressions obtenues¹ par [Urban & Oertel \(2015\)](#) à partir de la théorie du liquide de Fermi appliquée au premier ordre en Δ . De plus, les équations (5.50a) et (5.50b) se réduisent aux expressions (5.16a) et (5.16b) obtenues à un fluide, dans le cas où $\Delta = 0$. Enfin, les conditions $u_X^\alpha p_\alpha^X = -\mu^X$ ([Prix et al., 2005](#)), exprimées ici sous la forme

$$\mu^{\text{n}} = \mathcal{K}^{\text{nn}} n_{\text{n}} + \mathcal{K}^{\text{np}} \Gamma_\Delta n_{\text{p}} \quad \text{et} \quad \mu^{\text{p}} = \mathcal{K}^{\text{pp}} n_{\text{p}} + \mathcal{K}^{\text{np}} \Gamma_\Delta n_{\text{n}}, \quad (5.53)$$

sont bien satisfaites, contrairement aux résultats obtenus par [Comer & Joynt \(2003\)](#) et [Khetu & Bandyopadhyay \(2014\)](#).

5.1.3 Implémentation numérique

À chaque itération rencontrée lors de la résolution numérique, les termes sources des équations d'Einstein sont calculés à partir des valeurs de H^{n} , H^{p} et Δ^2 à chaque point de grille considéré (voir section 4.6.2 et [Prix et al. \(2005\)](#)). Par conséquent, nous utilisons l'EoS sous la forme $\Psi(\mu^{\text{n}}, \mu^{\text{p}}, \Delta^2)$ (4.42), plutôt que $\mathcal{E}(n_{\text{n}}, n_{\text{p}}, \Delta^2)$. Dans le cas où les fluides sont comobiles, la vitesse relative est trivialement nulle ($\Delta^2 = 0$) et il est possible de trouver une relation entre les densités n_{n} et n_{p} , ou de manière équivalente entre μ^{n} et μ^{p} , en supposant que la matière est à l'équilibre β , de sorte que l'EoS ne dépend plus que d'un seul paramètre (voir (1.11), par exemple). Toutefois, ceci n'est pas possible dans le cadre à deux fluides considéré ici et il est donc nécessaire d'utiliser une EoS dépendant de trois variables. Dans le code `sfstar`, l'EoS est alors implémentée sous la forme d'une table, à interpoler. Bien que l'utilisation d'une EoS tabulée permette de gagner beaucoup de temps de calcul par rapport à la situation où l'EoS serait calculée en direct à chaque point de grille, cela conduit cependant à l'apparition de nouvelles sources d'erreurs numériques, liées à la précision avec laquelle la table a été calculée et au schéma d'interpolation utilisé, qu'il va falloir maîtriser.

Ainsi, pour chaque EoS, nous construisons une table basée sur une grille parallélépipédique en la vitesse relative Δ^2 et les potentiels chimiques μ^{n} et μ^{p} , voir figure 5.6, qui contient, pour une valeur donnée de ce triplet, l'ensemble des variables requises pour effectuer l'interpolation. Les coefficients d'entraînement et les termes sources s'expriment en fonction des valeurs interpolées de Ψ , n_{n} , n_{p} et α , nous devons considérer un schéma

1. Dans nos notations, les éléments de la matrice M utilisée par [Urban & Oertel \(2015\)](#) sont donnés par $M_{XY} = \mathcal{K}^{XY} n_Y$, sans sommation sur les indices répétés.

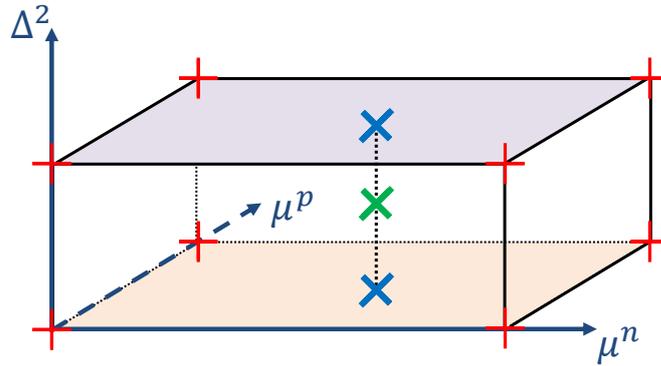


FIGURE 5.6 – **Schéma d'interpolation à trois dimensions.** Représentation schématique de la méthode d'interpolation utilisée sur une grille parallélépipédique (croix rouges), en un point correspondant à une valeur donnée de (μ^n, μ^p, Δ^2) (croix verte). Sur chaque plan $\Delta^2 = cte$, les différentes quantités sont interpolées via une méthode thermodynamiquement cohérente à deux dimensions en les potentiels chimiques (croix bleues). À partir des deux valeurs ainsi calculées, une interpolation linéaire selon la variable Δ^2 fournit alors les valeurs des quantités requises par le code au point souhaité.

capable d'interpoler une fonction et ses dérivées premières (4.43) avec une très grande précision. Pour ce faire, nous faisons appel à la méthode d'interpolation thermodynamiquement cohérente développée par Swesty (1996), basée sur les polynômes de Hermite. Il n'est cependant pas possible d'utiliser directement ce schéma très précis sur le triplet (μ^n, μ^p, Δ^2) , car cela nécessiterait la présence de dérivées d'ordre 3 dans la table, qui sont très difficiles à obtenir avec une précision suffisante d'un point de vue numérique. À la place, le schéma d'interpolation à trois dimensions que nous avons implémenté dans le code `sfstar` est le suivant (voir Fig. 5.6) :

1. On commence par localiser, dans la table, le triplet (Δ^2, μ^n, μ^p) où l'on souhaite interpoler.
2. Sur chaque plan $\Delta^2 = cte$ entourant ce point, on réalise ensuite une interpolation thermodynamiquement cohérente à deux dimensions en les potentiels chimiques. On applique cette méthode à la pression Ψ , ce qui donne également les valeurs de n_n et n_p , et au paramètre d'entraînement α .
3. On utilise enfin une interpolation linéaire selon la variable Δ^2 sur Ψ , n_n , n_p et α .

Pour utiliser la méthode d'interpolation à deux dimensions lors de l'étape 2., il est nécessaire de fournir dans la table certaines valeurs de la fonction à interpoler, de ses deux dérivées premières et de la dérivée croisée. Dans le cas de α , la dérivée croisée est donc une dérivée d'ordre 3 en la pression, que nous ne pouvons fournir avec une précision suffisante. Par conséquent, nous employons le même schéma pour Ψ et α , sans considérer la dérivée croisée dans le second cas. La précision de la méthode globale d'interpolation

5.1 Équations d'état à deux fluides réalistes

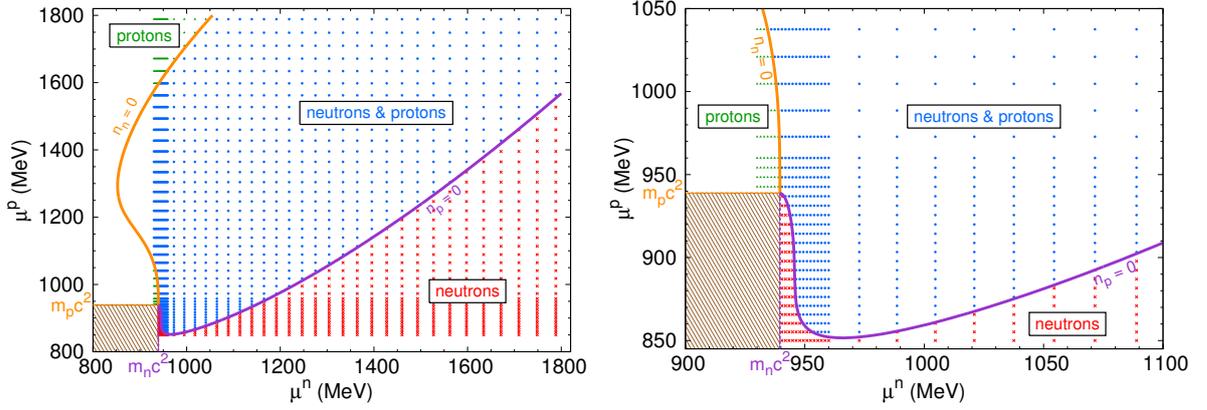


FIGURE 5.7 – **Coupe de la table associée à l'EoS DDH δ** . Les régions à un fluide (croix rouges et triangles verts) et à deux fluides (points bleus) sont représentées dans le plan (μ^n, μ^p) , pour $\Delta^2 = 0$. La zone où les deux fluides sont présents est délimitée par les courbes $n_n = 0$ (orange) et $n_p = 0$ (violet), au-delà desquelles un des fluides disparaît. Aucun fluide n'est présent pour des valeurs de potentiels chimiques inférieures aux masses de repos $m_n = 939,6$ MeV et $m_p = 938,8$ MeV, comme on peut le voir sur l'agrandissement à droite. Pour une meilleure lisibilité, seule une petite proportion des données contenues dans la table est ici représentée. Par ailleurs, nous utilisons un maillage resserré à faibles densités, afin de reproduire correctement les variations rapides des grandeurs dans cette région. Enfin, les configurations réalistes étant proches de la corotation et de l'équilibre β , les données appelées dans le code se situent majoritairement le long de la ligne $\mu^n = \mu^p$.

reste très satisfaisante. Notons que nous utilisons simplement une interpolation linéaire en la vitesse relative, car cette dernière est très proche de zéro pour une configuration réaliste d'étoile à neutrons superfluide. Il n'est donc pas nécessaire de fournir de dérivées par rapport à Δ^2 dans la table.

Nous avons étudié la cohérence de ce schéma d'interpolation à trois dimensions en comparant les résultats obtenus avec le code `sfstar` en utilisant directement une EoS analytique du type (4.102) et en interpolant une table construite à partir de la même EoS (calculée avec la précision machine). Les différences relatives des résultats calculés à partir de ces deux méthodes se sont révélées très faibles, validant ainsi la méthode d'interpolation implémentée.

Les tables que nous avons utilisées pour décrire les EoSs DDH et DDH δ contiennent 11 valeurs de Δ^2 , espacées de manière logarithmique entre 0 et $0,01c^2$, et 297 points en les potentiels chimiques, compris entre 850 MeV (930 MeV) et 1800 MeV. La figure 5.7 est une coupe dans le plan $\Delta^2 = 0$ de la table associée à l'EoS DDH δ , dans laquelle nous indiquons les régions où les protons et/ou les neutrons sont présents. Comme on peut le voir sur cette figure, les neutrons (et les protons) peuvent apparaître dans le système pour des valeurs du potentiel chimique correspondant inférieures à leur masse de repos, en raison de l'interaction forte entre les nucléons (voir (5.50a)-(5.50b)). L'EoS DDH présente des caractéristiques similaires.

5.1.4 Effets d'entraînement

Les effets d'entraînement sont caractérisés par la grandeur α (4.39), qui s'annule en l'absence d'entraînement. Comme l'écorce n'est pas prise en compte dans nos modèles¹, l'entraînement provient uniquement ici de l'interaction forte entre les nucléons (5.50c). Dans la littérature, deux approches différentes ont été suivies pour quantifier ces effets : (i) en étudiant les coefficients de la matrice d'entraînement (voir, e.g., [Gusakov et al. \(2009a\)](#)) ou (ii) en faisant appel à des masses effectives *dynamiques*, différentes des masses effectives de Dirac et de Landau introduites dans la section 5.1.2 (voir, e.g., [Chamel & Haensel \(2006\)](#)).

Les éléments de la matrice d'entraînement \mathcal{K}^{XY} (4.31), et de son inverse \mathcal{Y}_{XY} (4.34), dépendent de trois quantités, e.g., n_n, n_p et Δ^2 . Pour pouvoir comparer facilement les effets d'entraînement prédits par différentes EoSs, il est intéressant de se placer dans le cas de corotation² (*i.e.* $\Delta^2 = 0$), avec équilibre β . Par conséquent, nous introduisons les coefficients d'entraînement suivants ([Gusakov et al., 2009a](#))

$$Y_{XY} = \mathcal{Y}_{XY}|_{\Delta^2=0, \mu^n=\mu^p}, \quad (5.54)$$

qui ne dépendent que d'un seul paramètre, que l'on peut choisir librement comme étant la densité baryonique totale $n_B = n_n + n_p$. Notons qu'il est préférable d'étudier les coefficients de la matrice d'entraînement inverse plutôt que les coefficients \mathcal{K}^{XY} , car ces derniers tendent vers l'infini à la limite $n_B = 0$ (4.40). Les coefficients Y_{XY} sont tracés en fonction de n_B sur la figure 5.8, pour les deux EoSs considérées. Ces résultats sont à comparer avec ceux obtenus par [Gusakov et al. \(2009a\)](#), Fig. 1, et par [Khetoo & Bandyopadhyay \(2014\)](#), Figs. 4 et 5. L'analyse de ces profils n'est toutefois pas immédiate, car les grandeurs Y_{XY} font intervenir les potentiels chimiques, les densités ainsi que les effets d'entraînement. Pour quantifier plus clairement ces derniers, nous allons donc plutôt nous concentrer sur une deuxième méthode, reposant sur l'introduction de masses effectives dynamiques.

L'idée de cette seconde approche est de décrire la dynamique de chaque fluide comme s'il était seul, les interactions avec le second fluide étant alors contenues dans une masse effective \tilde{m}_X , définie par

$$p_X^i = \tilde{m}_X u_X^i, \quad (5.55)$$

où p_X^i et u_X^i sont les composantes spatiales de l'impulsion généralisée et de la quadri-vitesse du fluide X . Une telle définition n'a de sens que dans le référentiel de repos du second fluide Y .

Comme nous l'avons déjà remarqué dans la section 5.1.2, il n'est pas possible de définir le référentiel de repos du fluide Y de manière unique. Dans le référentiel où la 3-vitesse

1. Des effets d'entraînement sont également présents dans l'écorce interne. Toutefois, à la différence de l'entraînement dans le cœur qui provient de l'interaction forte entre les nucléons ([Chamel, 2008](#)), l'entraînement dans la croûte est lié à la diffusion de Bragg des neutrons s'échappant des noyaux sur ces derniers ([Chamel, 2005, 2012](#)), ce qui conduit alors à des effets beaucoup plus importants (voir Fig. 3.11).

2. La condition $\Delta^2 = 0$ est évidemment imposée après avoir calculé les dérivées (5.50a)-(5.50c). La notion d'entraînement n'a pas de sens à un fluide.

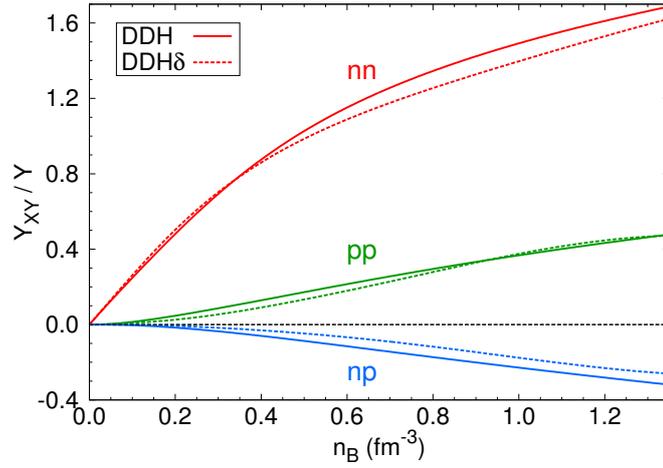


FIGURE 5.8 – Coefficients d’entraînement Y_{XY} en fonction de la densité baryonique. Les traits pleins (tiretés) correspondent aux résultats obtenus avec l’EoS DDH(δ). Suivant la prescription proposée par [Gusakov *et al.* \(2009a\)](#), ces coefficients sont normalisés par la constante $Y = 3n_0/\mu^n(3n_0)$, où $n_0 = 0,16 \text{ fm}^{-3}$. Pour DDH(δ), on a $Y = 2,55 \times 10^{41} \text{ erg}^{-1}.\text{cm}^{-3}$ ($Y = 2,47 \times 10^{41} \text{ erg}^{-1}.\text{cm}^{-3}$).

du fluide Y est nulle, *i.e.* $u_Y^i = 0$, les relations (4.31) conduisent à

$$p_X^i = \mathcal{K}^{XX} n_X u_X^i, \quad (5.56)$$

de sorte que

$$\tilde{m}_X = \mathcal{K}^{XX} n_X. \quad (5.57)$$

En utilisant (4.40), on obtient alors

$$\tilde{m}_X = \mu^X (1 - \varepsilon_X), \quad (5.58)$$

où on a introduit le paramètre d’entraînement du fluide,

$$\varepsilon_X = \frac{2\alpha}{n_X \mu^X \Gamma_\Delta^2}. \quad (5.59)$$

Cette dernière définition généralise la relation habituelle (C.5) au cadre relativiste. En supposant à nouveau la corotation¹ et l’équilibre chimique des fluides, nous pouvons alors introduire la masse effective suivante ([Prix *et al.*, 2002](#); [Chamel & Haensel, 2006](#)) :

$$m_X^0 = \mathcal{K}^{XX} |_{\Delta^2=0, \mu^n=\mu^p} n_X = \mu_0^X (1 - \varepsilon_X^0), \quad (5.60)$$

où l’indice (ou l’exposant) “0” signifie “ $|_{\Delta^2=0, \mu^n=\mu^p}$ ”.

1. Il est important de remarquer que la corotation implique que $u_Y^i = u_X^i = 0$, de telle sorte qu’il n’est pas possible de définir une masse effective à partir de l’équation (5.55). À strictement parler, la quantité m_X^0 n’a donc pas de réel sens physique, mais elle reste très pratique pour comparer les EoS. Ceci dit, la vitesse relative étant très faible dans les étoiles à neutrons, on a $\tilde{m}_X \simeq m_X^0$ en bonne approximation. Des remarques similaires s’appliquent également à $m_X^\#$, à condition que \tilde{m}_X désigne cette fois-ci la masse effective (5.62), définie dans le référentiel où $p_Y^i = 0$.

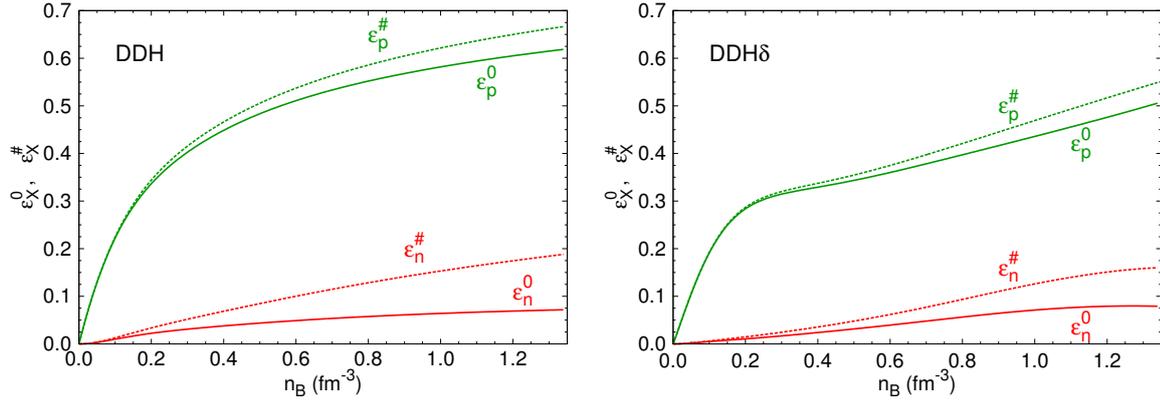


FIGURE 5.9 – **Paramètres d'entraînement.** Les paramètres d'entraînement obtenus avec l'EoS DDH(δ) sont tracés à gauche (à droite). Les grandeurs relatives aux protons (neutrons) sont représentées en vert (rouge) et les quantités définies dans le référentiel où $u_Y^i = 0$ ($p_Y^i = 0$), à savoir ε_X^0 ($\varepsilon_X^\#$), sont dessinées en trait plein (tireté).

Dans le référentiel où l'impulsion du fluide Y est nulle, *i.e.* $p_Y^i = 0$, l'équation (4.34) conduit à

$$p_X^i = \frac{n_X}{\mathcal{Y}_{XX}} u_X^i, \quad (5.61)$$

de sorte que

$$\tilde{m}_X = \frac{n_X}{\mathcal{Y}_{XX}}. \quad (5.62)$$

En utilisant les relations (4.35), on obtient cette fois-ci

$$\tilde{m}_X = \mu^X \left(1 - \varepsilon_X \frac{1 - \varepsilon_Y \Delta^2}{1 - \varepsilon_Y} \right). \quad (5.63)$$

Cela nous amène donc à introduire une nouvelle masse effective pour le fluide X (Prix *et al.*, 2002; Chamel & Haensel, 2006) :

$$m_X^\# = \frac{n_X}{\mathcal{Y}_{XX}|_{\Delta^2=0, \mu^n=\mu^p}} = \frac{n_X}{Y_{XX}} = \mu_0^X \left(1 - \varepsilon_X^\# \right), \quad (5.64)$$

où

$$\varepsilon_X^\# = \frac{\varepsilon_X^0}{1 - \varepsilon_Y^0}. \quad (5.65)$$

Les quantités m_n^0 et $m_n^\#$ définies ici sont reliées aux grandeurs ε_{mom} et ε_{vel} étudiées par Comer & Joynt (2003) par les équations suivantes :

$$m_n^0 = \varepsilon_{\text{vel}} m_n \quad \text{et} \quad m_n^\# = \frac{1}{\varepsilon_{\text{mom}}} m_n. \quad (5.66)$$

Les paramètres d'entraînement ε_X^0 et $\varepsilon_X^\#$ relatifs aux EoS DDH et DDH δ sont tracés en fonction de la densité baryonique sur la figure 5.9. Comme attendu, les effets d'entraînement augmentent avec la densité, là où les interactions entre nucléons sont de plus

5.1 Équations d'état à deux fluides réalistes

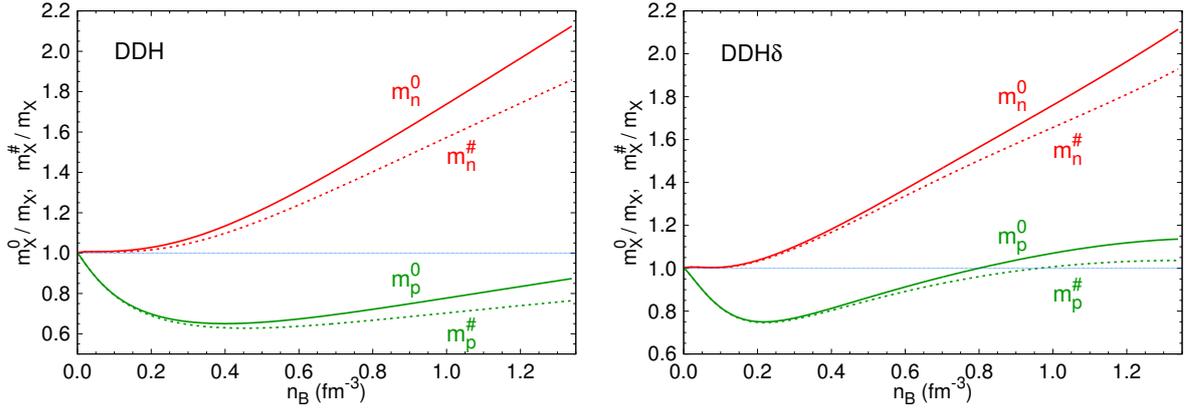


FIGURE 5.10 – **Masses effectives dynamiques.** Les masses effectives dynamiques obtenues avec l'EoS DDH(δ) sont tracées à gauche (à droite). Les grandeurs relatives aux protons (neutrons) sont représentées en vert (rouge) et les quantités définies dans le référentiel où $u_Y^i = 0$ ($p_Y^i = 0$), à savoir m_X^0 ($m_X^\#$), sont dessinées en trait plein (tireté).

en plus fortes. On pourra remarquer que ces effets sont relativement importants sur le fluide de protons, pour des densités supérieures à la densité de saturation, tandis que le fluide de neutrons est beaucoup moins affecté. Il s'agit simplement d'une conséquence de la proportion relative des deux fluides, $\varepsilon_n^0 = n_p/n_n \times \varepsilon_p^0 \simeq x_p \varepsilon_p^0$ (voir Fig. 5.5), lorsque l'équilibre β est imposé. Par ailleurs, nous avons également vérifié que les conditions de stabilité (4.33), que l'on peut réécrire de la manière suivante (Chamel & Haensel, 2006) :

$$0 \leq \varepsilon_n^0 < x_p \quad \text{et} \quad 0 \leq \varepsilon_p^0 < 1 - x_p, \quad (5.67)$$

sont bien satisfaites dans nos modèles. Les différences dans les profils de ε_X^0 obtenus avec les EoSs DDH et DDH δ , visibles à haute densité sur la figure 5.9, s'expliquent principalement par les comportements très différents de la fraction de proton x_p prédits par ces modèles. En effet, pour $n_B \gg n_0$, on observe que $\alpha^{\text{DDH}} \simeq \alpha^{\text{DDH}\delta}$ et $\mu_{\text{DDH}}^X \simeq \mu_{\text{DDH}\delta}^X$, de sorte que $\varepsilon_p^0_{\text{DDH}} \simeq x_p^{\text{DDH}\delta}/x_p^{\text{DDH}} \times \varepsilon_p^0_{\text{DDH}\delta}$. Les résultats présentés sur la figure (5.5), à savoir $x_p^{\text{DDH}\delta} \gtrsim x_p^{\text{DDH}}$ à haute densité, conduisent alors à $\varepsilon_p^0_{\text{DDH}} \gtrsim \varepsilon_p^0_{\text{DDH}\delta}$. Remarquons enfin que les quantités ε_X^0 et $\varepsilon_X^\#$, définies respectivement dans les référentiels où $u_Y^i = 0$ et $p_Y^i = 0$, présentent un comportement similaire. On notera toutefois un écart significatif pour des densités baryoniques très élevées.

Les masses effectives dynamiques m_X^0 (5.60) et $m_X^\#$ (5.64) sont représentées sur la figure 5.10 pour les deux EoSs. Contrairement aux masses effectives de Landau (voir, e.g., Fig. 2 de Gusakov *et al.* (2009a) et Fig. 3 de Kheto & Bandyopadhyay (2014)), les masses effectives dynamiques (relativistes) peuvent dépasser les masses de repos des particules considérées. Les masses m_X^0 et $m_X^\#$ contiennent non seulement des effets d'entraînement, à travers les paramètres ε_X^0 et $\varepsilon_X^\#$, mais également des corrections liées à la prise en compte de la relativité restreinte. En effet, en l'absence d'entraînement, les masses effectives (5.60) et (5.64) se réduisent aux potentiels chimiques (toute forme d'énergie contribuant à la masse), et non aux masses de repos¹. Les effets d'entraînement étant relativement faibles

1. En mécanique newtonienne, les masses effectives (5.60) et (5.64) sont respectivement données par

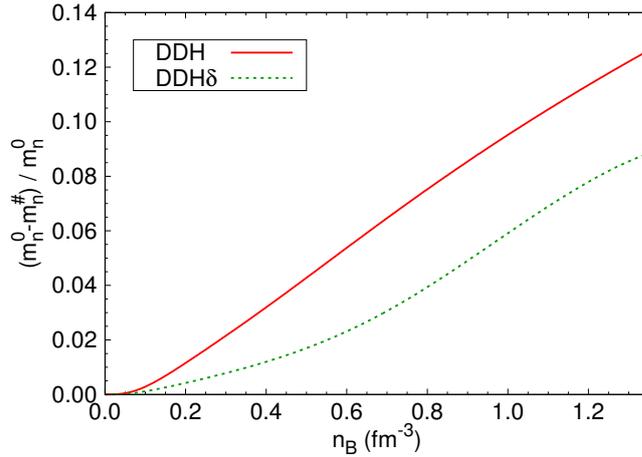


FIGURE 5.11 – **Comparaison entre les masses effectives dynamiques définies dans les deux référentiels.** La différence relative $(m_n^0 - m_n^{\#})/m_n^0$ est tracée en fonction de la densité baryonique pour les deux EoS considérées.

sur les neutrons (voir Fig. 5.9), les masses m_n^0 et $m_n^{\#}$ reflètent, en bonne approximation, le comportement de μ^n . En revanche, le profil des masses effectives dynamiques des protons s'explique principalement par la prise en compte des effets d'entraînement à faibles densités, le potentiel chimique ne jouant un rôle significatif qu'à des densités suffisamment élevées. Les potentiels chimiques associés aux deux modèles étant relativement proches, les différences dans les profils de m_p^0 et $m_p^{\#}$ prédits par les deux EoS sont dues au comportement des paramètres d'entraînement ε_p^0 et $\varepsilon_p^{\#}$. Les courbes de m_X^0 présentées ici peuvent être comparées aux résultats obtenus par Chamel (2008), Figs. 10, 11, 12 et 15, et par Kheto & Bandyopadhyay (2014), Fig. 2. De manière similaire aux grandeurs ε_X^0 et $\varepsilon_X^{\#}$, les masses dynamiques m_X^0 et $m_X^{\#}$ sont relativement proches. La différence relative entre m_n^0 et $m_n^{\#}$ atteint toutefois $\sim 10\%$ à haute densité, comme on peut le voir sur la figure 5.11.

5.2 Configurations d'équilibre

Nous présentons ici les configurations d'équilibre réalistes d'étoiles à neutrons superfluides en rotation obtenues avec le code `sfstar` décrit dans la section 4.6. Plusieurs résultats généraux ayant déjà été discutés dans l'article de Prix *et al.* (2005), nous nous intéressons principalement aux conséquences engendrées par la prise en compte des EoS DDH et DDH δ dans ce qui suit. Les violations des identités du viriel (voir section (4.5.3)) associées au calcul de ces configurations dépendent de la masse et de la vitesse de rotation de l'étoile, mais également de la grille utilisée pour décrire celle-ci. En particulier, les *GRV* obtenus avec l'EoS DDH (DDH δ) sont typiquement de l'ordre de $10^{-9} - 10^{-8}$ ($10^{-7} - 10^{-6}$) à faible vitesse de rotation, et augmentent légèrement pour atteindre $\sim 10^{-7} - 10^{-6}$

$m_X^0 = m_X (1 - \varepsilon_X^0)$ et $m_X^{\#} = m_X (1 - \varepsilon_X^{\#})$, de sorte que ces masses sont toujours inférieures à la masse de repos m_X (voir, e.g., Chamel & Haensel (2006); Chamel (2008)).

5.2 Configurations d'équilibre

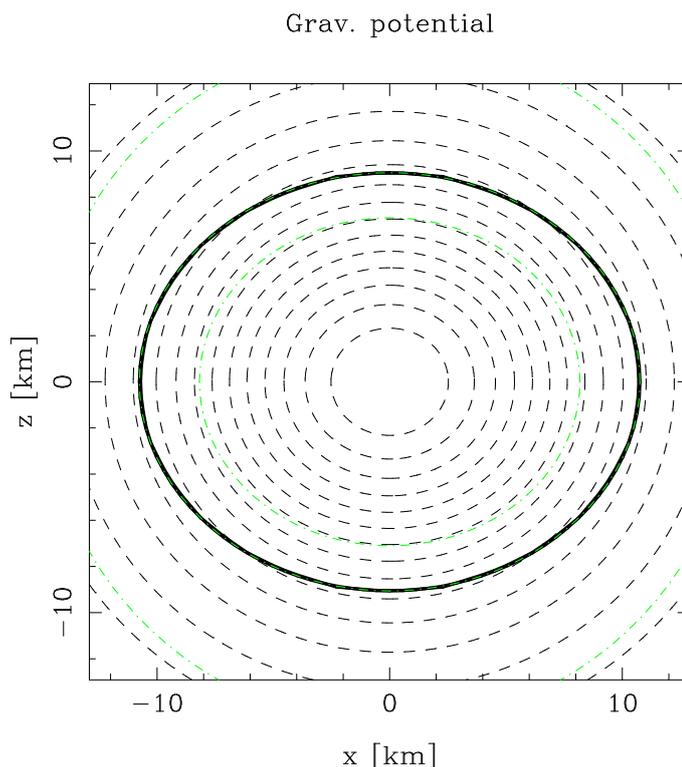


FIGURE 5.12 – Isocontours de $\ln N$ pour une étoile à neutrons en rotation rapide, dans le plan méridien $\varphi = 0$. Cette configuration, obtenue avec l'EoS DDH, correspond à une masse gravitationnelle de $1,4 M_{\odot}$ et à une vitesse de rotation de 716 Hz, l'axe de rotation étant ici vertical. Les coordonnées (x, z) sont données par $x = r \cos \theta$ et $z = r \sin \theta$. Les frontières des quatre domaines d'intégration sont représentées par des tirets verts. La surface stellaire (trait noir épais) est superposée à la limite entre le deuxième et le troisième domaines. Notons que les surfaces des deux fluides sont quasi-confondues. L'aplatissement r_p/r_{eq} de l'étoile vaut $\sim 0,84$.

($\sim 10^{-6} - 10^{-5}$) au-delà de 500 Hz. Ainsi, les erreurs numériques relatives à nos modèles devraient être inférieures à ces ordres de grandeur. Dans la suite, nous nous plaçons dans le cas où les potentiels chimiques des deux fluides sont égaux au centre de l'étoile (équilibre β) et nous supposons que les deux fluides sont en corotation, sauf mention contraire.

5.2.1 Diagrammes masse-rayon

En supposant que $\Omega_n = \Omega_p$ et $\mu_c^n = \mu_c^p$, on observe que le fluide de protons est toujours le plus externe, et la surface de l'étoile coïncide donc avec celle de ce fluide¹. La surface d'une étoile à neutrons superfluide en rotation rapide est représentée sur la figure 5.12. Cette configuration, calculée avec l'EoS DDH, correspond à une étoile de $1,4 M_{\odot}$, tournant à la fréquence de rotation la plus élevée mesurée jusqu'à présent, à

1. Notons qu'un modèle plus réaliste tiendrait également compte de l'écorce solide sous la surface stellaire (voir section 1.5.2).

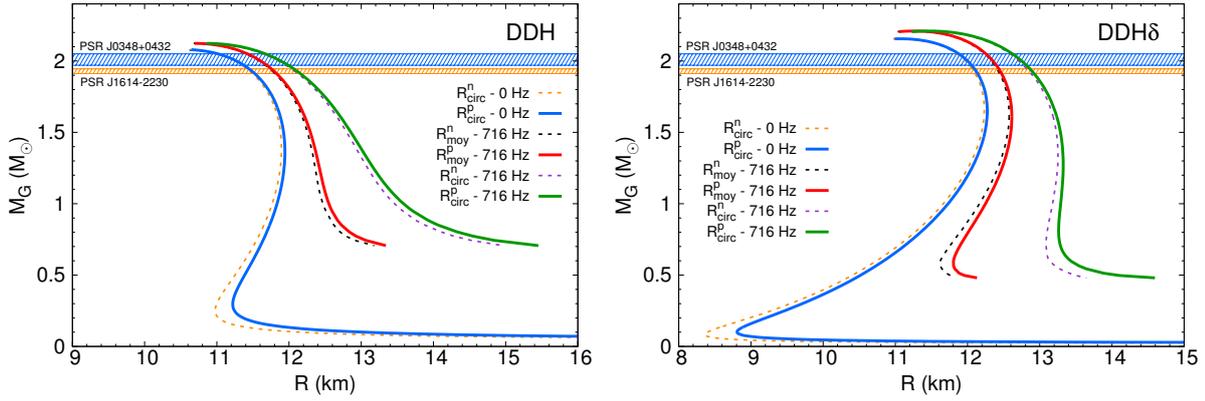


FIGURE 5.13 – **Diagrammes masse-rayon pour les EoSs DDH et DDH δ .** La masse gravitationnelle M_G , en unité de masse solaire, est tracée en fonction des rayons circonferentiels R_{circ}^X et moyens R_{moy}^X des neutrons et des protons, pour deux vitesses de rotation différentes (0 et 716 Hz). Les rayons du fluide externe, *i.e.* de la surface de l'étoile, sont représentés en gras. Les rayons circonferentiels dans le plan équatorial et les rayons moyens sont confondus dans le cas statique. Les rectangles hachurés correspondent aux mesures réalisées par [Antoniadis *et al.* \(2013\)](#) et [Fonseca *et al.* \(2016\)](#).

savoir 716 Hz (voir section 1.1.3). Les courbes en tirets noirs sont associées à des valeurs constantes de $\ln N$. Remarquons qu'à la limite newtonienne, le terme métrique $\ln N$ se réduit au potentiel gravitationnel Φ de l'étoile (voir l'équation (1.10), par exemple). En raison des forces centrifuges très élevées, la surface stellaire apparaît très déformée. Ainsi, l'aplatissement $a = r_p/r_{\text{eq}}$ de l'étoile, où r_p et r_{eq} désignent respectivement les coordonnées radiales associées à sa surface le long de l'axe de rotation ($\theta = 0$) et dans le plan équatorial ($\theta = \pi/2$), vaut environ 0,84.

Les diagrammes masse-rayon correspondant aux EoSs DDH et DDH δ sont tracés sur la figure 5.13. Plus précisément, la masse gravitationnelle M_G (4.79) est donnée en fonction des rayons circonferentiels (4.84) et moyens (4.87) de chaque fluide. Pour une même masse gravitationnelle, la présence d'effets centrifuges de plus en plus intenses conduit ces rayons à augmenter de manière significative avec la vitesse de rotation. Pour des configurations en rotation rapide, le rayon moyen dans un plan méridien est (très) inférieur au rayon circonferentiel dans le plan équatorial, en raison du fort aplatissement de l'étoile. La masse maximale prédite par l'EoS DDH δ est 2,16 M_\odot dans le cas statique et augmente jusqu'à atteindre 2,21 M_\odot à 716 Hz. Les masses maximales obtenues avec l'EoS DDH sont légèrement plus faibles, valant respectivement 2,08 M_\odot et 2,12 M_\odot à 0 et 716 Hz. Ces EoSs permettent donc de modéliser des étoiles à neutrons de plus de 2 M_\odot , en accord avec les contraintes actuelles mentionnées dans la section 1.1.1. Les différences que l'on peut observer dans les profils masse-rayon prédits par ces deux modèles sont principalement dues aux valeurs de L et de K_{sym} qui leur sont associées, voir figure 5.3. Par ailleurs, il est important de noter que la prise en compte de l'écorce est susceptible de modifier significativement les valeurs des rayons obtenues, surtout à petite masse gravitationnelle.

L'influence d'une différence de vitesse entre les fluides sur le diagramme masse-rayon est présentée sur la figure 5.14. Ainsi, un écart relatif $(\Omega_n - \Omega_p) / \Omega_p \sim 1,4 \times 10^{-3}$ conduit

5.2 Configurations d'équilibre

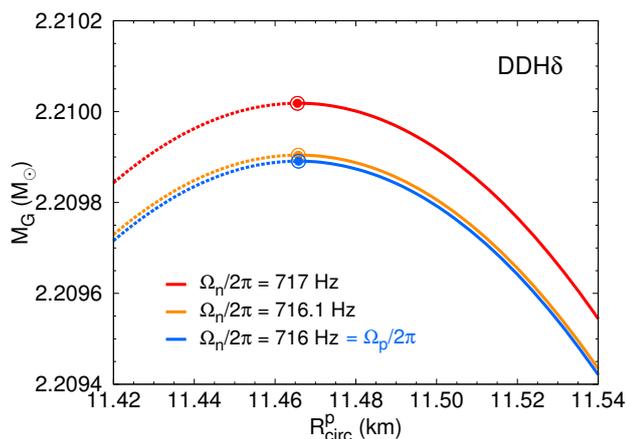


FIGURE 5.14 – **Influence d'un écart de vitesse sur le diagramme masse-rayon.** Agrandissement du diagramme masse-rayon prédit par l'EoS DDH δ autour de la masse maximale. Les différentes configurations ont été calculées en imposant l'équilibre chimique au centre de l'étoile et $f_n = \Omega_n/(2\pi) = 716$ Hz. Les courbes bleue, orange et rouge sont obtenues pour les valeurs de $f_p = \Omega_p/(2\pi)$ suivantes : 716, 716,1 et 717 Hz. On notera la faible augmentation de la masse maximale avec l'écart en vitesse. Les lignes pointillées correspondent à des configurations instables. La seconde EoS conduit à des résultats similaires.

à une augmentation relative de la masse maximale de l'ordre de $\sim 6 \times 10^{-5}$. Notons qu'un tel écart de vitesse est bien au-delà de ce que l'on s'attend à trouver dans les étoiles à neutrons (voir (7.7)). La masse maximale est donc déterminée très précisément dans l'approximation $\Omega_n = \Omega_p$.

La compacité et l'énergie de liaison sont étudiées sur la figure 5.15. La compacité Ξ , définie par l'équation (4.91), quantifie le caractère relativiste de l'objet que l'on modélise (voir section 1.3.1). Comme on s'y attend, la compacité augmente bien avec la masse gravitationnelle de l'étoile. Les deux EoS donnent $\Xi \simeq 0,17$ pour une étoile à neutrons statique de $1,4 M_\odot$ et $\Xi \simeq 0,25 - 0,26$ à $2 M_\odot$. Pour une masse gravitationnelle donnée, une augmentation de la vitesse de rotation implique une augmentation du rayon équatorial de l'étoile (voir Fig. 5.13) et donc une diminution de la compacité, comme on peut le voir sur l'image de gauche de la figure 5.15. En outre, l'EoS DDH prédisant des rayons légèrement plus faibles que l'EoS DDH δ , les compacités associées à ce modèle sont un peu plus élevées. L'énergie de liaison E_L , c'est-à-dire la différence entre la masse gravitationnelle et la masse baryonique (4.82), augmente (en valeur absolue) avec M_G , car les forces d'attraction deviennent de plus en plus importantes. Les EoS DDH et DDH δ présentent des résultats similaires. L'énergie E_L représente une fraction non négligeable de la masse gravitationnelle de l'objet considéré. Ainsi, une étoile statique de $2 M_\odot$ possède une énergie de liaison de l'ordre de $-0,35 M_\odot \cdot c^2$. Pour une masse baryonique fixée, la masse gravitationnelle de l'astre croît avec sa vitesse de rotation, car son énergie cinétique augmente. Par conséquent, en raisonnant à M_G constant, la masse baryonique d'une configuration tournant à 716 Hz est plus faible que dans le cas statique, ce qui conduit à une diminution de la valeur absolue de l'énergie de liaison.

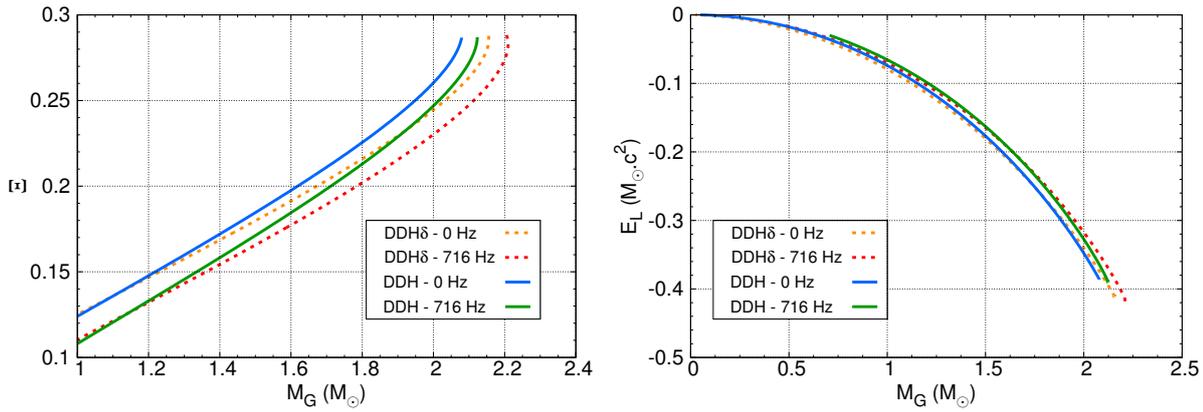


FIGURE 5.15 – **Compacité et énergie de liaison.** La compacité Ξ (à gauche) et l'énergie de liaison E_L (à droite) sont tracées en fonction de la masse gravitationnelle pour les deux modèles nucléaires et pour deux vitesses de rotation différentes.

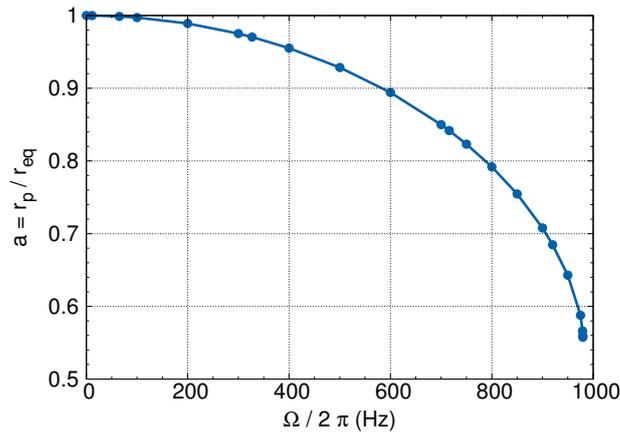


FIGURE 5.16 – **Aplatissement de l'étoile en fonction de sa vitesse de rotation.** La quantité $a = r_p/r_{\text{eq}}$ est tracée en fonction de la fréquence de rotation $\Omega_n/(2\pi) = \Omega_p/(2\pi)$, pour une masse gravitationnelle fixée, $M_G = 1,4 M_\odot$, et pour l'EoS DDH. Remarquons que a faisant intervenir les rayons coordonnées, il ne s'agit pas d'une grandeur invariante de jauge. La diminution rapide de l'aplatissement observée pour des vitesses de rotation très élevées semble indiquer une vitesse képlérienne de l'ordre de 980 Hz pour $1,4 M_\odot$.

Enfin, nous représentons l'aplatissement $a = r_p/r_{\text{eq}}$ de l'étoile en fonction de sa vitesse de rotation sur la figure 5.16. Ces résultats sont obtenus avec l'EoS DDH, en maintenant $M_G = 1,4 M_\odot$. Comme attendu, l'aplatissement augmente, *i.e.* a diminue, lorsque la vitesse de rotation est de plus en plus importante en raison des effets centrifuges (voir également la figure 5.12). En particulier, on pourra remarquer qu'au-delà de ~ 950 Hz, ces configurations présentent un rayon polaire r_p presque deux fois plus petits que le rayon dans le plan équatorial r_{eq} .

5.2 Configurations d'équilibre

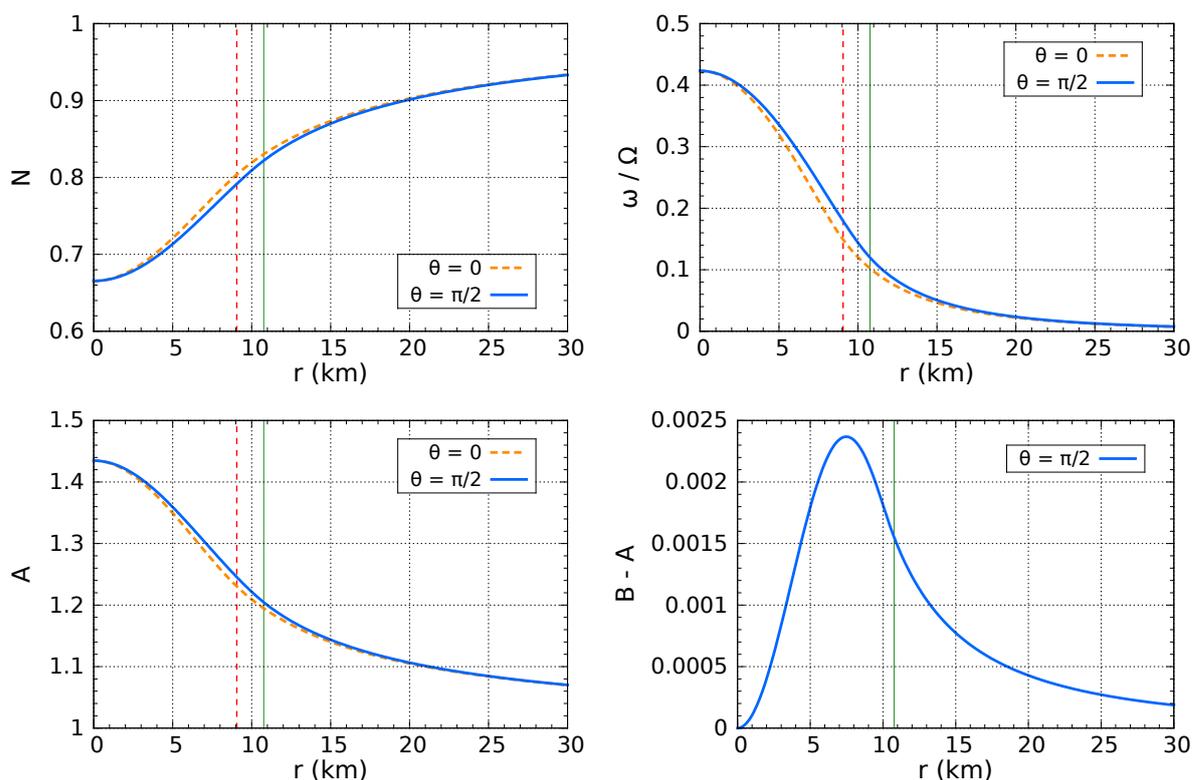


FIGURE 5.17 – **Termes métriques en fonction de la coordonnée radiale.** Les coefficients N , ω/Ω , A et $B - A$ sont tracés en fonction de r , le long de l'axe de rotation (courbe orange tiretée) et dans le plan équatorial (courbe bleue pleine). La configuration considérée a été obtenue avec l'EoS DDH, pour une masse gravitationnelle de $1,4 M_{\odot}$ et une vitesse de rotation $\Omega/(2\pi) = 716$ Hz. Le terme $B - A$ est identiquement nul pour $\theta = 0$. Les lignes verticales indiquent la surface de l'étoile, les rayons polaires et équatoriaux (r_p et r_{eq}) étant respectivement tracés avec des tirets rouges et des traits verts pleins.

5.2.2 Potentiels métriques

Les potentiels métriques N , ω/Ω , A et $B - A$ sont représentés en fonction de la coordonnée radiale r sur la figure 5.17, pour $M_G = 1,4 M_{\odot}$, $\Omega/(2\pi) = 716$ Hz et l'EoS DDH. Bien que la vitesse de rotation considérée soit très élevée, les profils le long de l'axe de rotation ($\theta = 0$) et dans le plan équatorial ($\theta = \pi/2$) sont très proches. On observe que les déformations de l'espace-temps, *i.e.* les écarts à la métrique de Minkowski ($N = A = B = 1$, $\omega = 0$), sont maximales au centre de l'étoile. Aucun changement notable dans les valeurs des coefficients métriques n'est visible au passage de la surface de l'étoile (traits verticaux). De plus, les différents potentiels métriques vérifient les conditions aux limites (4.48) relatives à l'espace-temps plat, loin de l'étoile ($r \rightarrow +\infty$). Les termes A et B coïncident sur l'axe de rotation et sont extrêmement proches dans le plan équatorial.

Une variation de la masse gravitationnelle de l'étoile modifie significativement ces profils, comme on peut le voir sur la figure 5.18. Les configurations sont ici représentées

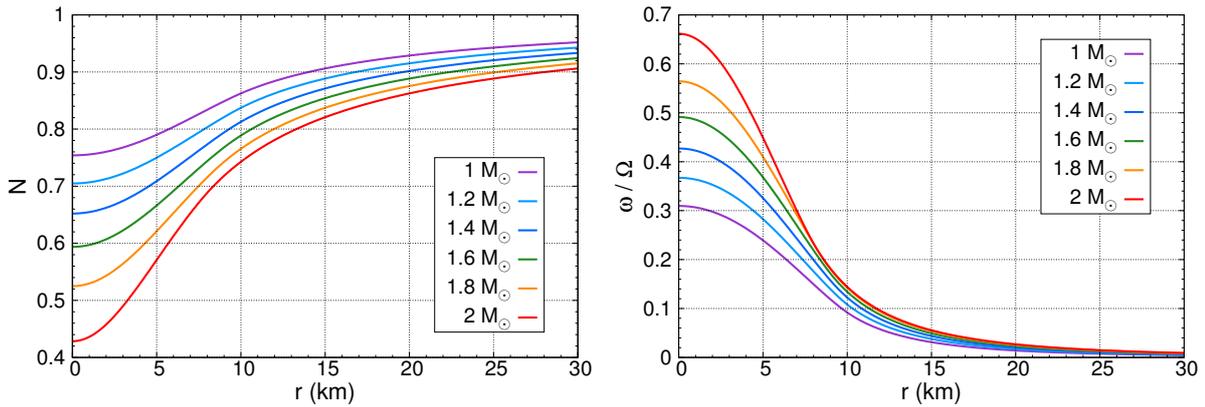


FIGURE 5.18 – **Influence de la masse gravitationnelle sur les termes métriques.** Les potentiels N et ω/Ω sont tracés en fonction de r , dans le plan équatorial, pour différentes valeurs de M_G . La vitesse de rotation considérée est $\Omega/(2\pi) = 10$ Hz et l'EoS utilisée est DDH. Des résultats similaires sont obtenus avec DDH δ .

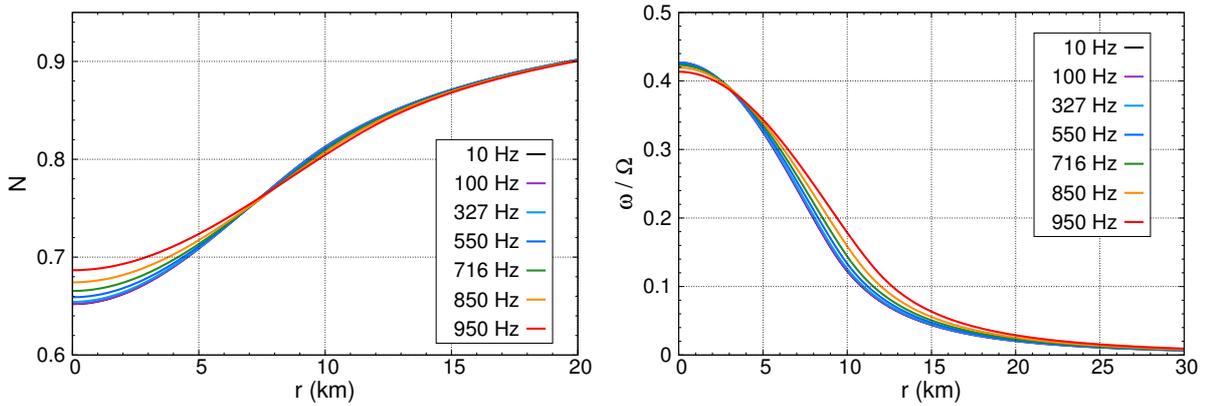


FIGURE 5.19 – **Influence de la vitesse de rotation sur les termes métriques.** Les potentiels N et ω/Ω sont tracés en fonction de r , dans le plan équatorial, pour différentes valeurs de $\Omega/(2\pi)$. La masse gravitationnelle considérée est $M_G = 1,4 M_\odot$ et l'EoS utilisée est DDH. L'EoS DDH δ conduit à des résultats analogues.

à 10 Hz, avec l'EoS DDH. Lorsque M_G augmente, la compacité croît fortement (voir Fig. 5.15) de sorte que les déviations à la métrique de Minkowski sont de plus en plus importantes. En revanche, l'influence de la vitesse de rotation sur les termes métriques est nettement moindre (voir Fig. 5.19). En augmentant Ω à M_G fixée, la compacité de l'étoile diminue légèrement (voir Fig. 5.15) : les termes métriques adoptent alors des profils de plus en plus plats et leurs valeurs en $r = 0$ se rapprochent progressivement de celles de l'espace-temps plat.

5.2.3 Profils de densité

Les profils de densité obtenus avec les deux modèles nucléaires sont tracés en fonction de la coordonnée radiale r sur la figure 5.20, pour $M_G = 1,4 M_\odot$ et $f_n = f_p = 716$ Hz,

5.2 Configurations d'équilibre

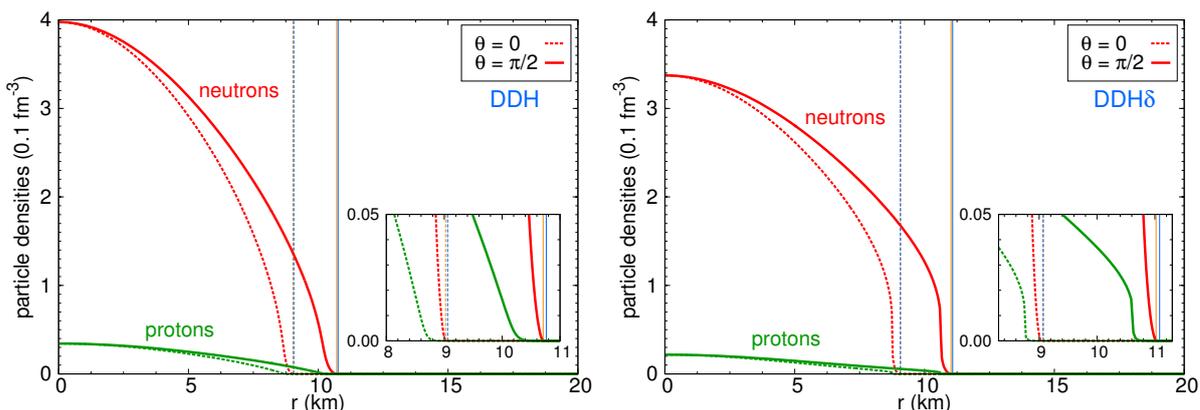


FIGURE 5.20 – **Profils de densité.** Les quantités n_n et n_p sont tracées en fonction de r , pour une étoile de masse gravitationnelle $M_G = 1,4 M_\odot$, tournant à $f_n = f_p = 716 \text{ Hz}$, et pour les EoS DDH (à gauche) et DDH δ (à droite). Les densités de neutrons et de protons sont représentées en rouge et en vert. En outre, les courbes pointillées et pleines correspondent aux valeurs le long de l'axe de rotation et dans le plan équatorial. Les lignes verticales orange et bleues désignent les coordonnées où $n_n = 0$ et $n_p = 0$ et l'encart est un agrandissement autour de la surface de l'étoile.

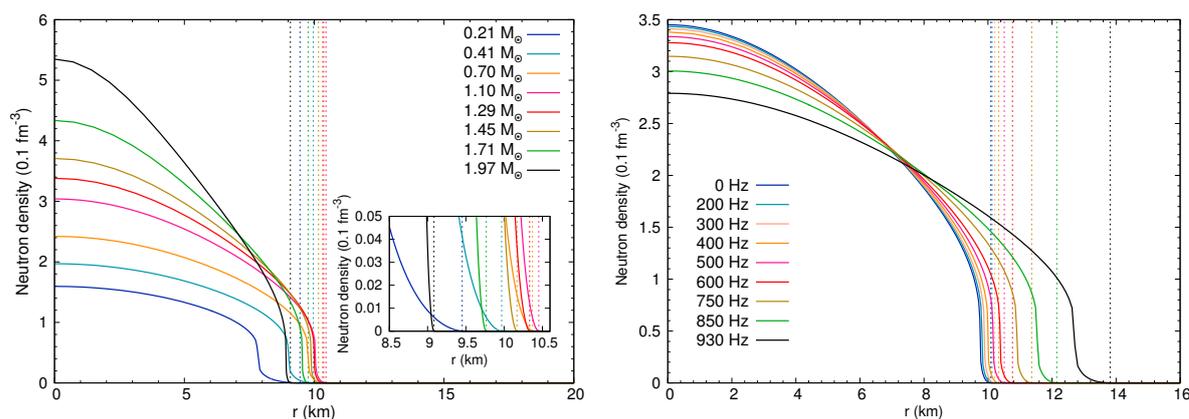


FIGURE 5.21 – **Influence de la masse gravitationnelle et de la vitesse de rotation sur le profil de densité de neutrons.** La quantité n_n est tracée en fonction de r , dans le plan équatorial, pour l'EoS DDH δ . À gauche, différentes valeurs de M_G sont considérées, avec $f = \Omega/(2\pi) = 400 \text{ Hz}$. À droite, la vitesse évolue entre 0 et 930 Hz, pour une masse baryonique fixée à $M^B = 1,42 M_\odot$ (ce qui correspond à $M_G \simeq 1,3 M_\odot$).

où $f_X = \Omega_X/(2\pi)$. Les densités de neutrons n_n et de particules chargées n_p sont respectivement représentées en rouge et en vert. Comme on peut le voir sur les encarts, le fluide le plus externe est le fluide de protons. Au centre de l'étoile, la fraction de protons $x_p = n_p/n_B$ vaut environ 0,086 pour l'EoS DDH et 0,064 pour DDH δ . Par ailleurs, la densité baryonique centrale prédite par le modèle DDH est $n_B(r = 0) \simeq 0,44 \text{ fm}^{-3}$, ce qui est proche de trois fois la densité de saturation $n_0 = 0,153 \text{ fm}^{-3}$, tandis que l'EoS DDH δ conduit à une densité légèrement plus faible, $n_B(r = 0) \simeq 0,36 \text{ fm}^{-3}$. On peut comprendre cette différence de la manière suivante. Pour une densité baryonique donnée, de l'ordre

de celle que l'on rencontre au centre des étoiles à neutrons, la pression prédite par l'EoS DDH δ est plus importante que celle associée à DDH (voir Fig. 5.4). Par conséquent, pour une même masse gravitationnelle, la densité baryonique centrale sera plus faible.

Les densités atteintes dans l'étoile sont de plus importantes lorsque la masse gravitationnelle augmente (voir Fig. 5.21), la matière étant davantage comprimée. De plus, à masse baryonique fixée, la densité centrale diminue lorsque la vitesse de rotation Ω augmente. En effet, les forces centrifuges tendent à éloigner de plus en plus la matière de l'axe de rotation.

5.2.4 Profils de vitesse

La vitesse du fluide de neutrons U_n (4.56), mesurée par l'observateur eulérien \mathcal{O}_n , est représentée sur la figure 5.22 dans le plan équatorial. À gauche, différentes masses gravitationnelles sont considérées pour $f_n = f_p = 10$ Hz. Les deux fluides étant en corotation, on a alors $U_n = U_p$. Les profils de vitesse obtenus ressemblent beaucoup au profil newtonien, à savoir $r \times \Omega_n$ (trait en pointillés noirs), mais avec une pente moyenne légèrement plus grande. Cette pente est approximativement constante, en raison d'une compensation numérique des termes B/N et $1 - \omega/\Omega_n$ intervenant dans l'expression (4.56). On observe que le profil de vitesse s'écarte de plus en plus du profil newtonien, au fur et à mesure que la masse gravitationnelle de l'astre (et donc la compacité) augmente. Ainsi, on passe de $U_n \simeq 1,21 \times r \times \Omega_n$ pour $M_G = 1 M_\odot$ à $U_n \simeq 1,56 \times r \times \Omega_n$ pour $M_G = 2 M_\odot$. Remarquons également qu'à la surface de l'étoile, la valeur de U_n est une fraction non-négligeable de la vitesse de la lumière (voir l'image de droite de la figure 5.22). Par exemple, on obtient $U_n(r_{\text{eq}}) \simeq 0,32 \times c$ à 950 Hz, pour l'EoS DDH et $M_G = 1,4 M_\odot$.

Sur la figure 5.23, nous étudions un cas où les fréquences de rotation des fluides sont différentes, à savoir $f_n = 10$ Hz et $f_p = 0$ Hz. La configuration est obtenue avec l'EoS DDH, pour $M_G = 1,4 M_\odot$ et en supposant que l'équilibre chimique est réalisé au centre de l'étoile. On observe que le profil de U_n calculé est très proche de celui obtenu dans le cas mentionné précédemment, où $f_n = f_p = 10$ Hz. Ceci s'explique par le fait que les particules chargées sont statiques et beaucoup moins nombreuses que les neutrons. En bonne approximation, la déformation de l'espace-temps est donc gouvernée par ce second fluide. La vitesse de rotation des protons étant nulle, la grandeur U_p (4.56) vérifie alors

$$U_p = -\frac{B}{N}r\omega < 0, \quad (5.68)$$

pour $\theta = \pi/2$. Ainsi, bien que le fluide de particules chargées soit immobile par rapport à un observateur statique placé à l'infini spatial, ce fluide se déplace dans le sens opposé aux neutrons par rapport à \mathcal{O}_n . Il s'agit là d'une conséquence remarquable de l'effet Lense-Thirring¹, qui est dû ici à la rotation du fluide de neutrons. Nous présentons également le profil de la vitesse relative Δ (4.58) sur la figure 5.23.

1. L'effet d'entraînement des référentiels inertiels, aussi appelé effet Lense-Thirring, est un effet classique de la relativité générale caractérisant le fait qu'une particule-test en chute radiale vers un corps en rotation acquiert un mouvement suivant φ , de sorte que sa trajectoire ne peut rester purement radiale.

5.2 Configurations d'équilibre

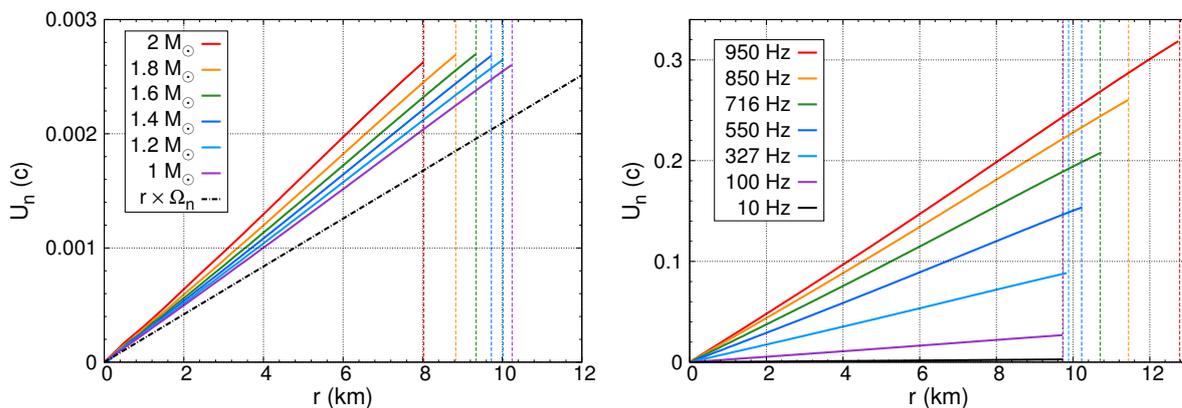


FIGURE 5.22 – **Profils de vitesse.** La vitesse U_n mesurée par l'observateur eulérien \mathcal{O}_n est tracée en fonction de r dans le plan équatorial, pour l'EoS DDH. Les résultats considérés ici sont obtenus avec $\Omega_n = \Omega_p = \Omega$. À gauche, différentes masses gravitationnelles sont étudiées pour $f = 10$ Hz. À droite, U_n est représentée pour différents f , pour une étoile de $1,4 M_\odot$. Les lignes verticales correspondent aux coordonnées radiales où $n_n = 0$.

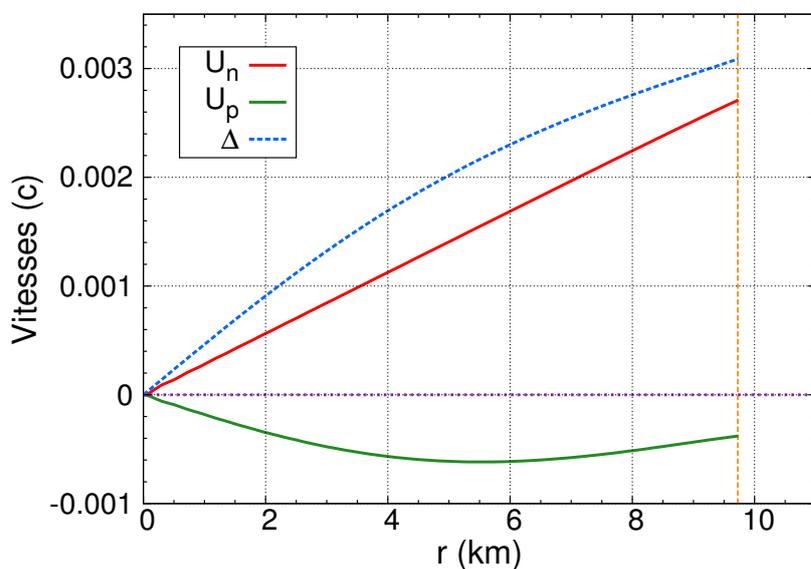


FIGURE 5.23 – **Profils de vitesse pour $\Omega_n \neq \Omega_p$.** Les vitesses physiques des neutrons U_n et des protons U_p mesurées par l'observateur eulérien, ainsi que la vitesse relative Δ entre les fluides, sont données en fonction de r dans la plan équatorial pour une étoile à neutrons de $1,4 M_\odot$, tournant à $f_n = 10$ Hz et $f_p = 0$ Hz. Cette configuration est calculée avec l'EoS DDH. Pour ces vitesses de rotation, les surfaces des deux fluides (trait vertical) sont quasiment confondues.

5.2.5 Moments cinétiques et moments d'inertie

Les moments cinétiques de l'étoile J (4.93) et de chaque fluide J_X (4.95) sont tracés en fonction de la vitesse de rotation de l'étoile sur la figure 5.24, en supposant que $\Omega_n = \Omega_p$. Les comportements des moments d'inertie total I (4.98) et partiels I_X (4.99) sont également présentés. Nous considérons ici une séquence à masse baryonique constante, correspondant à une masse gravitationnelle proche de $1,4 M_\odot$. À faible vitesse de rotation, les moments d'inertie sont approximativement constants, de telle sorte que les moments cinétiques augmentent linéairement avec Ω_X . Lorsqu'on se rapproche de la vitesse képlérienne, l'étoile est alors très déformée et les moments d'inertie croissent très rapidement. Comme attendu, le moment cinétique total est en très grande partie gouverné par celui du fluide de neutrons.

Remarquons enfin que, dans le cas à deux fluides, le moment cinétique d'un fluide peut être non-nul même si sa vitesse de rotation s'annule. Deux effets différents sont à l'origine de ce phénomène. Tout d'abord, comme on l'a déjà mentionné dans la section précédente, la vitesse U_p mesurée par \mathcal{O}_n est non-nulle, même si $\Omega_p = 0$, en raison de l'effet d'entraînement des référentiels inertiels. Pour $\Omega_n > 0$, cet effet de relativité générale conduit alors à $U_p < 0$, et donc à $J_p \neq 0$, voir (4.97). La seconde contribution provient de la dépendance du moment cinétique des protons en la vitesse U_n des neutrons, en raison des effets d'entraînement mutuel entre nucléons (voir (4.97) ou (C.1)). Notons qu'à la limite newtonienne, seul ce deuxième phénomène joue un rôle, comme on peut le voir sur l'équation (C.4). Pour illustrer cela, deux séquences d'étoiles (correspondant aux deux EoSs) sont représentées sur la figure 5.25 en fonction de $\Omega_n/(2\pi)$, en supposant que $\Omega_p/(2\pi) = 0$ Hz, pour une masse baryonique fixée. Bien que la vitesse de rotation des protons soit nulle, le moment cinétique de ce fluide est non-nul et augmente linéairement avec Ω_n . La quantité J_p étant positive, les effets d'entraînement dominant par rapport à l'effet Lense-Thirring¹, mais la contribution de ce dernier est loin d'être négligeable. Les couplages entre les fluides seront étudiés plus en détails dans la partie suivante.

1. Le choix de vitesses de rotation $\Omega_n > 0$ et $\Omega_p = 0$ conduit à $U_n > 0$ et $U_p < 0$, voir Fig. (5.23). Ainsi, en l'absence d'entraînement, les relations (4.95) et (4.97) conduiraient à $J_p < 0$. En revanche, la contribution de l'entraînement tend plutôt à imposer $J_p > 0$. Le moment cinétique du fluide de protons est donc donné par l'équilibre entre ces deux phénomènes. Les conclusions seraient similaires en inversant le rôle des deux fluides.

5.2 Configurations d'équilibre

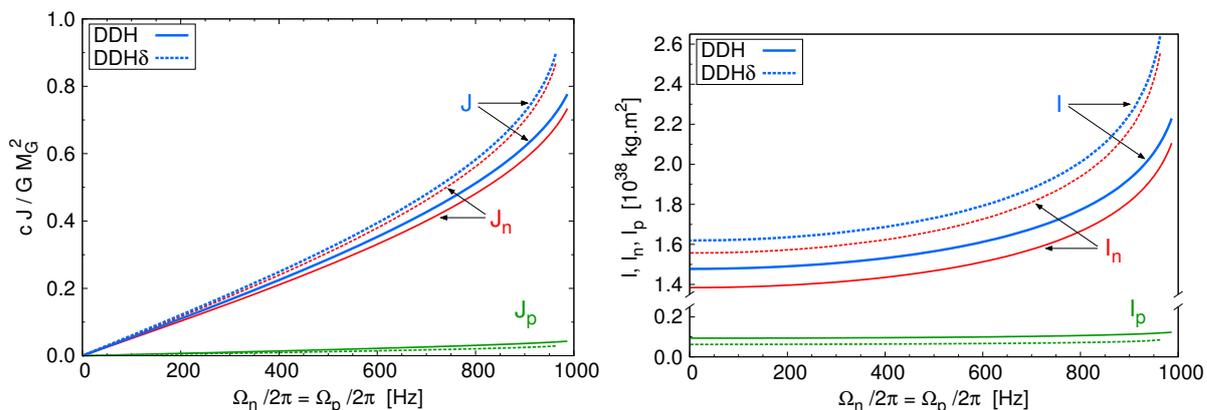


FIGURE 5.24 – **Moments cinétiques et moments d'inertie.** Ces différentes quantités sont tracées en fonction de $f_n = f_p$, à l'équilibre β , pour une masse baryonique fixée $M^B = 1,542 M_\odot$ correspondant à $M_G \simeq 1,4 M_\odot$. Les résultats obtenus avec l'EoS DDH(δ) sont représentés par des lignes pleines (pointillées). Les grandeurs relatives à l'étoile sont dessinées en bleu, tandis que celles associées au fluide de neutrons (protons) sont tracées en rouge (vert).

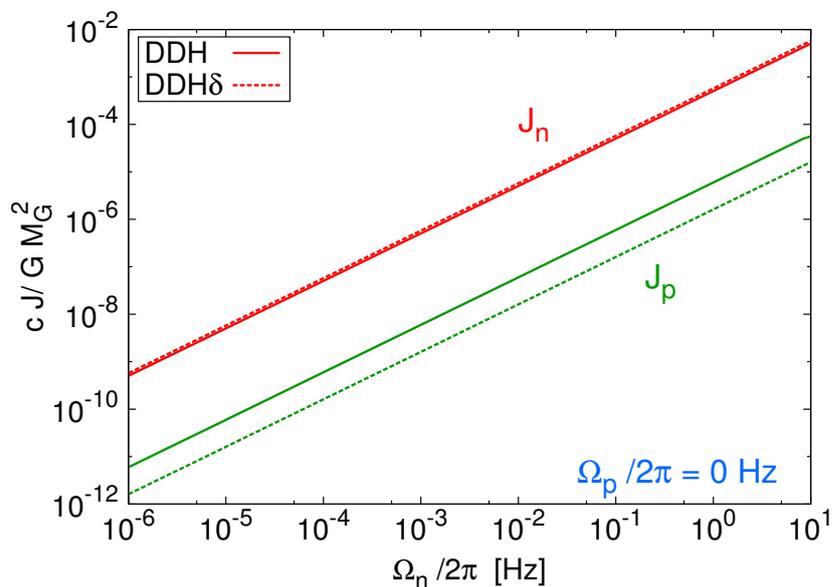


FIGURE 5.25 – **Moments cinétiques pour $\Omega_n \neq \Omega_p$.** Les moments cinétiques des neutrons (en rouge) et des protons (en vert) sont tracés en fonction de Ω_n , en supposant que le fluide de protons est au repos par rapport à un observateur statique, placé à l'infini spatial ($\Omega_p/(2\pi) = 0$ Hz). Les résultats obtenus avec l'EoS DDH(δ) sont dessinés en lignes pleines (pointillées). Ces configurations ont été calculées pour $M^B = 1,542 M_\odot$, en imposant l'équilibre chimique au centre.

Troisième partie

Simulations numériques globales de glitches en relativité générale

Chapitre 6

Équations d'évolution

Sommaire

6.1	Hypothèses	152
6.2	Équations d'évolution	155
6.3	Configurations stationnaires en rotation	161

Les glitches géants et réguliers de certains pulsars, tels que Vela, semblent pouvoir s'expliquer par un mouvement de lignes de tourbillons superfluides à grande échelle (voir section 3.2.1). Des travaux ont été récemment initiés afin d'aller au-delà de simples modèles qualitatifs et de réaliser des simulations de glitches de plus en plus réalistes. L'intérêt est double. D'une part, la comparaison de ces modèles quantitatifs aux observations précises de glitches est susceptible d'apporter des contraintes fortes sur le mécanisme à l'origine de ce phénomène. D'autre part, l'analyse de ces soubresauts pourrait nous renseigner sur les étoiles à neutrons, et plus particulièrement sur leur masse (voir, e.g., [Ho *et al.* \(2015\)](#); [Antonelli & Pizzochero \(2017\)](#); [Pizzochero *et al.* \(2017\)](#)).

Bien que l'étude du mouvement d'une grande quantité ($\sim 10^2 - 10^4$) de tourbillons fournisse des informations intéressantes (voir, e.g., [Warszawski & Melatos \(2011, 2013\)](#)), la modélisation du phénomène de glitch nécessite de suivre la dynamique de toutes les lignes de tourbillons superfluides contenues dans l'étoile. Étant donné leur nombre extrêmement élevé, de l'ordre de $\sim 10^{17}$ pour Vela (voir section 3.1.3), le transfert de moment cinétique entre le superfluide de neutrons et le reste de l'étoile peut raisonnablement être étudié selon une approche hydrodynamique, faisant toutefois intervenir des paramètres microscopiques déterminés par la dynamique locale de vortex individuels (voir [Bulgac *et al.* \(2013\)](#) par exemple). Alors que le cadre théorique permettant la description de tremblements d'écorce en relativité générale a été développé il y a de nombreuses années ([Carter & Quintana, 1975](#)), la formulation relativiste du modèle de glitch associé au mouvement des tourbillons superfluides est nettement plus récente ([Langlois *et al.*, 1998](#)). Il est important de noter que, jusqu'à présent, la grande majorité des simulations numériques globales de glitches ont été réalisées dans un contexte newtonien (voir, e.g., [Larson & Link \(2002\)](#));

Peralta *et al.* (2006); Sidery *et al.* (2010); Haskell *et al.* (2012b)). Récemment, Seveso *et al.* (2012) et Antonelli & Pizzochero (2017) ont développé un modèle hydrodynamique non-relativiste pour décrire les différentes étapes d'un glitch, basé sur la structure statique de l'étoile à neutrons calculée en relativité générale (via le système TOV (1.7)-(1.9)). Toutefois, la relativité générale pourrait également jouer un rôle important sur la dynamique de l'étoile pendant le glitch.

Dans la suite, nous présentons des simulations numériques globales de glitches, reposant sur le déplacement de lignes de tourbillons. Ces simulations se concentrent sur la phase de montée et ne cherchent donc pas à rendre compte du mécanisme à l'origine du désancrage des tourbillons superfluides (voir section (3.2.1)). D'un autre côté, nous étudions en détails l'impact de la relativité générale sur la dynamique des glitches géants. Par ailleurs, nous donnons également quelques estimations des amplitudes et des fréquences caractéristiques associées aux ondes gravitationnelles émises lors de ces événements. Ces travaux, résumés dans l'article Sourie *et al.* (2017), constituent ainsi une nouvelle étape vers l'obtention de modèles de glitches toujours plus réalistes.

6.1 Hypothèses

6.1.1 Approche quasi-stationnaire

Un événement de glitch se décompose en trois phases distinctes : l'évolution précédant le glitch, la phase de montée et la relaxation post-glitch (voir section 2.3.1). En première approximation, chacune de ces étapes peut être modélisée séparément, car les temps caractéristiques (et donc les processus physiques) qui leur sont associés sont relativement différents. Ainsi, lorsque le pulsar accélère (phase de montée du glitch, voir schéma 3.7), c'est-à-dire une fois que certaines lignes de tourbillons se sont désancrées et sont libres de se mouvoir, la dynamique de l'étoile est principalement gouvernée par la force de friction mutuelle qui s'exerce entre le superfluide de neutrons et le reste de l'étoile (voir partie IV pour davantage de détails à ce sujet). Cette force agit sur une échelle de temps caractéristique correspondant au *temps de montée* du glitch, τ_r . Comme nous l'avons mentionné dans la section 2.3.1, ce temps n'a jamais été résolu lors des observations effectuées jusqu'à maintenant et la meilleure contrainte que nous avons sur τ_r provient de l'analyse des glitches de 2000 et 2004 du pulsar de Vela : $\tau_r < 30 - 40$ s (Dodson *et al.*, 2002, 2007). On peut également remarquer que la non-détection d'ondes gravitationnelles associées au glitch de 2006 de ce même pulsar conduit à la limite inférieure : $\tau_r > 10^{-4}$ ms (Warszawski & Melatos, 2012).

Le temps *hydrodynamique* τ_h est le temps que met l'étoile à revenir dans son état d'équilibre hydrodynamique, après avoir été contrainte de s'en éloigner par une modification de sa vitesse de rotation. Cette échelle de temps est grossièrement donnée par (Shapiro & Teukolsky, 1983)

$$\tau_h \sim (G\bar{\rho})^{-\frac{1}{2}} \simeq 0,1 \left(\frac{R}{12 \text{ km}} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{M}{1,4 M_\odot} \right)^{-\frac{1}{2}} \text{ ms}, \quad (6.1)$$

où M est la masse de l'étoile, R son rayon et $\bar{\rho} = 3M/(4\pi R^3)$ sa masse volumique moyenne.

L'expression de τ_h correspond également au temps typique que met une onde sonore de célérité c_s à se propager d'un bout à l'autre de l'étoile, *i.e.* $\tau_h \sim R/c_s$ (Epstein, 1988).

Dans ce qui suit, nous ferons l'hypothèse que $\tau_r \gg \tau_h$, comme de récentes études le suggèrent (Haskell *et al.*, 2012b). L'évolution dynamique du pulsar pourra alors être modélisée par une séquence quasi-stationnaire de configurations d'équilibre.

6.1.2 Modèle à deux fluides

Différents travaux, résumés dans les sections 3.2.2 et 3.2.3, suggèrent que le superfluide dans le cœur joue un rôle important dans les glitches de certains pulsars, tels que ceux de Vela. Par conséquent, nos simulations numériques portent sur l'étude de la dynamique du cœur des étoiles à neutrons, que nous décrivons par le même modèle que celui présenté dans la partie II. L'astre est alors composé de deux fluides, à savoir un superfluide de neutrons et un fluide de particules chargées (protons et électrons), couplés par des effets d'entraînement mutuel (non-dissipatifs). Là encore, nous supposons implicitement que les lignes de tourbillons s'étendent sur toute l'étoile¹, de telle sorte que le superfluide de neutrons est présent partout à l'intérieur de l'astre. Puisque nous ne considérons pas l'écorce dans nos modèles, nous ne tenons compte d'aucun mécanisme de couplage entre le cœur et la croûte, tel que le pompage d'Ekman. Ces couplages pourraient toutefois avoir un impact important sur la dynamique des glitches, en particulier lors de la phase de relaxation post-glitch (voir, e.g., van Eysden & Melatos (2010); Haskell & Melatos (2015)).

6.1.3 Espace-temps

Nos simulations de glitches reposant sur les configurations d'équilibre discutées dans la partie II, l'étoile à neutrons est axisymétrique et en rotation stationnaire. En négligeant le (très faible) mouvement radial du superfluide de neutrons engendré par le déplacement des lignes de tourbillons superfluides pendant le glitch (Langlois *et al.*, 1998), nous faisons l'hypothèse que les deux fluides tournent autour d'un même axe avec des vitesses de rotation potentiellement différentes. Alors que la vitesse de rotation $\Omega_p = \Omega$ du fluide de particules chargées peut raisonnablement être considérée comme uniforme², celle du fluide de neutrons, Ω_n , est susceptible de varier dans l'étoile. En particulier, le temps de couplage entre les fluides, par friction mutuelle, dépend de la densité considérée et donc de la position au sein de l'étoile (voir, e.g., (8.59)). Toutefois, par simplicité, nous considérons ici un modèle *global* de glitch, dans lequel la vitesse de rotation de chaque fluide est supposée constante dans l'étoile, de la même manière que dans le modèle étudié par Sidery *et al.* (2010) dans un contexte newtonien. Il s'agit là d'une approximation relativement forte, étant donné que seule une partie du superfluide semble être impliquée

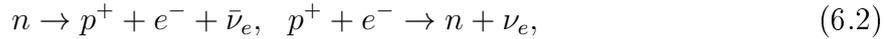
1. Des calculs microscopiques récents portant sur l'appariement des neutrons ne montrent aucune coquille de matière normale susceptible de séparer les superfluides présents dans le cœur et l'écorce et donc de déconnecter les tourbillons respectifs (Taranto *et al.*, 2016).

2. Cette hypothèse pourrait toutefois ne pas être vérifiée si le temps de montée est très inférieur à la seconde.

dans la dynamique des glitches (voir section 3.2), dont il faudra s'affranchir dans un travail futur. Dans la suite, la fréquence de rotation de chaque fluide, $\Omega_X/(2\pi)$, sera notée f_X .

6.1.4 Compositions chimiques et équations d'état

Les processus électrofaibles gouvernant la composition d'une étoile à neutrons, formée par un mélange de neutrons (n), protons (p^+) et électrons (e^-), sont les processus β Urca direct (DU) :



et Urca modifié (MU) :



où ν_e ($\bar{\nu}_e$) désigne un (anti)neutrino électronique et N est un nucléon spectateur (neutron ou proton), voir e.g. [Yakovlev *et al.* \(2001\)](#). Parmi ces deux processus, celui qui domine dépend des conditions du système : ainsi, le processus DU n'est permis que pour des fractions de protons x_p supérieures à $\sim 0,11 - 0,14$, ce qui correspond (éventuellement) au cœur d'étoiles à neutrons très massives (voir [Fig. 5.5](#)). La situation d'équilibre β est alors atteinte lorsque les processus inverses se déroulent à la même vitesse. Dans l'approximation de rotation rigide, en présence d'une différence de vitesse $\delta\Omega = \Omega_n - \Omega_p \neq 0$, cet équilibre n'est possible que sur l'axe de rotation ([Andersson & Comer, 2001](#)), voir également la section 4.4.3. Dans le cas où $\delta\Omega = 0$, et en l'absence de superfluidité, les temps de relaxation vers l'équilibre β associés aux processus DU et MU sont grossièrement donnés par ([Yakovlev *et al.*, 2001](#)) :

$$\tau_\beta^{(DU)} \simeq 20 \left(\frac{T}{10^9 \text{ K}} \right)^{-4} \text{ s}, \quad (6.4)$$

$$\tau_\beta^{(MU)} \simeq \left(\frac{T}{10^9 \text{ K}} \right)^{-6} \text{ mois}, \quad (6.5)$$

où T est la température interne de l'étoile. Pour les pulsars qui présentent des glitches, dont l'âge caractéristique $t_c > 10^3$ ans ([Espinoza *et al.*, 2011](#)) implique $T < 10^9$ K (voir [Fig. 1.6](#)), ces estimations conduisent à des temps de relaxation supérieurs à la dizaine de secondes et au mois respectivement pour les processus DU et MU. En principe, un écart de vitesse $\delta\Omega \neq 0$ peut modifier l'équilibre chimique ([Langlois *et al.*, 1998](#)), mais de tels effets sont probablement négligeables, étant donné que $\delta\Omega \ll \Omega$ (voir (7.7)). En revanche, les taux de réaction associés aux processus β peuvent être fortement réduits en présence de matière superfluide ([Villain & Haensel, 2005](#)), conduisant alors à des temps de retour à l'équilibre chimique τ_β encore plus longs que ceux prédits par les équations (6.4) et (6.5). Par conséquent, il est possible que l'équilibre β ne soit pas atteint au centre de l'étoile pendant la phase de montée.

Les taux de réaction des processus DU et MU étant mal connus, nous faisons l'hypothèse que τ_β est toujours beaucoup plus court que le temps moyen séparant deux événements de glitch¹, de sorte que l'équilibre chimique est vérifié sur l'axe de rotation de

1. Ce temps est de l'ordre de 2-3 ans pour le pulsar de Vela, voir [Fig. 2.11](#).

l'étoile au début d'un glitch. Afin d'estimer l'erreur causée par notre manque de connaissance sur τ_β , nous nous restreignons aux deux cas limites (non-dissipatifs) suivants pour modéliser la phase de montée :

- (i) $\tau_\beta \gg \tau_r$, *i.e.* aucune réaction n'a lieu durant le glitch. La masse baryonique de chaque fluide, M_n^B et M_p^B , demeure constante, ce qui conduit la matière sur l'axe de rotation à s'éloigner (faiblement) de la situation d'équilibre β .
- (ii) $\tau_\beta \ll \tau_r$, *i.e.* la matière sur l'axe de rotation de l'étoile retourne immédiatement à l'équilibre chimique, de sorte que les potentiels chimiques vérifient $\mu^n = \mu^p$. Dans nos simulations, il est suffisant d'imposer cette condition au centre de l'étoile, *i.e.* $\mu_c^n = \mu_c^p$, voir section 4.4.3. Dans ce cas, seule la masse baryonique totale $M^B = M_n^B + M_p^B$ est conservée.

Pour tenir compte de ces deux cas limites, la possibilité de converger vers une configuration d'équilibre correspondant à une masse baryonique totale M^B donnée (avec $\mu_c^n = \mu_c^p$), ou à des masses baryoniques partielles M_n^B et M_p^B fixées, a été implémentée dans le code `sfstar` (voir également section 4.6.2). Selon le cas considéré, les quantités $(\Omega_n, \Omega_p, M^B)$ ou $(\Omega_n, \Omega_p, M_n^B, M_p^B)$ pourront ainsi être utilisées comme paramètres d'entrée, au lieu de $(\Omega_n, \Omega_p, H_c^n, H_c^p)$. Par ailleurs, les EoS que nous considérons sont les mêmes que celles présentées dans le chapitre 5, à savoir DDH et DDH δ .

6.2 Équations d'évolution

6.2.1 Transfert de moment cinétique en relativité générale

Pour décrire l'évolution temporelle de la vitesse de rotation de chaque fluide lors d'un glitch, il est nécessaire de tenir compte d'un ingrédient physique supplémentaire dans nos modèles : la présence de friction mutuelle entre le superfluide de neutrons et le fluide de particules chargées, qui provient de l'interaction des tourbillons superfluides avec les deux fluides qui les entourent. En supposant que ce processus domine durant la phase de montée, nous négligeons toute autre source potentielle de dissipation, telle que l'émission d'ondes électromagnétiques et d'ondes gravitationnelles, la présence de fluage (ou *creep*, voir section 3.2.1) ou de contraintes élastiques dans l'écorce, ou encore la dissipation d'énergie associée aux réactions chimiques, qui pourrait être incluse dans un modèle de glitch plus réaliste. En introduisant la notation habituelle

$$\dot{J}_X = \frac{dJ_X}{dt}, \quad (6.6)$$

où J_X désigne le moment cinétique (4.95) du fluide X , la dynamique des fluides de neutrons et de protons durant la phase de montée est simplement gouvernée par les équations (Lan-glois *et al.*, 1998; Sidery *et al.*, 2010)

$$\begin{cases} \dot{J}_n = + \Gamma_{mf}, \\ \dot{J}_p = - \Gamma_{mf}, \end{cases} \quad (6.7)$$

où Γ_{mf} représente le moment associé à la force de friction mutuelle.

Expression relativiste de Γ_{mf} . Une expression covariante du moment de friction mutuelle Γ_{mf} a été obtenue par [Langlois *et al.* \(1998\)](#) dans le cadre de la relativité générale, en considérant que les tourbillons superfluides forment un ensemble de lignes droites et parallèles à l'axe de rotation disposées selon un arrangement régulier¹. Dans le travail réalisé par [Langlois *et al.* \(1998\)](#), le mouvement des lignes de tourbillons désancrées est simplement déterminé par l'équilibre entre une force de Magnus due au fluide de neutrons et une force (dissipative) de traînée liée au fluide de protons (plus de détails seront donnés dans la partie [IV](#)). En négligeant la petite contribution liée au mouvement non-circulaire des tourbillons superfluides, l'expression 3+1 du moment de friction mutuelle est donnée par

$$\Gamma_{\text{mf}} = \int_{\Sigma_t} \mathcal{B} \Gamma_n n_n \varpi_n \chi_\perp^2 d^3 \Sigma \times (\Omega_p - \Omega_n), \quad (6.8)$$

en l'absence de dissipation associée aux réactions chimiques, voir les équations (72) et (89) de [Langlois *et al.* \(1998\)](#). Le volume élémentaire $d^3 \Sigma$ de l'hypersurface Σ_t vérifie $d^3 \Sigma = A^2 B r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ (voir section [4.5.2](#)), n_n est la densité de neutrons dans le référentiel où la 3-vitesse de ce fluide est nulle, $u_n^i = 0$, et le facteur de Lorentz Γ_n des neutrons par rapport à l'observateur eulérien \mathcal{O}_n est donné par l'équation (4.57). On pourra remarquer que le moment (6.8) est proportionnel à l'écart de vitesse $\delta\Omega$ et tend donc à imposer la corotation des deux fluides. Le paramètre de friction mutuelle \mathcal{B} , la vorticité macroscopique du superfluide ϖ_n et le terme géométrique χ_\perp^2 seront détaillés dans la suite. Il convient de noter qu'une expression plus réaliste du moment de force de friction mutuelle tiendrait également compte d'une contribution magnétique (incluant la supraconductivité des protons, voir section [3.1](#)), de la tension des lignes de vortex et des interactions éventuelles entre les différents tourbillons et entre chaque ligne de tourbillon et les sites d'ancrage.

Vorticité superfluide. La vorticité du fluide de neutrons est donnée par²

$$\varpi_n = \sqrt{\frac{\varpi_{\alpha\beta} \varpi^{\alpha\beta}}{2}}, \quad (6.9)$$

où la 2-forme de vorticité $\varpi_{\alpha\beta}$ est définie par

$$\varpi_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha p_\beta^n - \nabla_\beta p_\alpha^n, \quad (6.10)$$

la quantité p_α^n désignant l'impulsion généralisée du superfluide (voir (4.30)). Sur des échelles spatiales inférieures à la distance moyenne d_n entre deux lignes de tourbillons, de l'ordre de $\sim 10^{-3}$ cm ([3.11](#)), $\varpi_{\alpha\beta}$ est identiquement nulle car l'impulsion p_μ^n est localement proportionnelle au gradient d'une phase scalaire, voir  q. (3.3). Néanmoins, sur les grandes  chelles³ considérées ici, la 2-forme $\varpi_{\alpha\beta}$ est non-nulle, tout comme son amplitude scalaire ϖ_n .

1. Notons toutefois que l'évolution dynamique du superfluide pourrait conduire à la formation d'un enchevêtrement de lignes de vortex ([Peralta *et al.*, 2006](#); [Andersson *et al.*, 2007](#)). L'apparition de la turbulence dans les étoiles à neutrons reste cependant hautement spéculative et, par conséquent, nous n'envisageons pas cette possibilité ici.

2. Comme dans la partie [II](#), nous utilisons des lettres grecques pour les indices d'espace-temps.

3. Notons que l'approche hydrodynamique utilisée dans ce chapitre n'a de sens que sur des échelles grandes devant d_n (voir également la section [3.1.3](#)).

6.2 Équations d'évolution

Le terme géométrique χ_{\perp}^2 est défini par

$$\chi_{\perp}^2 = \chi_{\perp}^{\alpha} \chi_{\perp \alpha}, \quad \chi_{\perp}^{\alpha} = \tilde{\perp}_{\beta}^{\alpha} \chi^{\beta}, \quad (6.11)$$

où χ^{α} est le vecteur de Killing associé à l'axisymétrie (voir section 4.2.2) et $\tilde{\perp}_{\alpha\beta}$ est le tenseur lié à la projection orthogonale sur la feuille d'espace-temps à deux dimensions représentant le cœur des tourbillons, vérifiant (Langlois *et al.*, 1998)

$$\tilde{\perp}_{\beta}^{\alpha} = \frac{\varpi^{\alpha\gamma} \varpi_{\beta\gamma}}{\varpi_{\text{n}}^2}. \quad (6.12)$$

Paramètre de friction mutuelle. Le paramètre \mathcal{B} , qui caractérise l'efficacité du transfert de moment cinétique entre les fluides par friction mutuelle, est donné par¹ (voir e.g., Langlois *et al.* (1998); Carter (2001))

$$\mathcal{B} = \frac{\xi}{1 + \xi^2} \quad (6.13)$$

en fonction de la grandeur ξ sans dimension, appelée *rapport traînée/portance* (voir Éq. (8.10)). La valeur de ξ est susceptible de varier dans l'étoile, étant donné que le mécanisme dissipatif à l'origine de la force de friction mutuelle n'est pas le même dans tout l'astre. Ainsi, dans le cœur des étoiles à neutrons, la principale source de dissipation provient de la diffusion des électrons par le champ magnétique porté par les lignes de tourbillons superfluides magnétisées par entraînement, en l'absence de tubes de flux. Ce phénomène conduit à $\xi \simeq 10^{-4}$ (voir (8.11) et Alpar *et al.* (1984b)). Notons toutefois que les interactions entre tubes de flux et tourbillons superfluides peuvent modifier cette estimation de manière significative, comme nous le verrons dans la partie IV. Dans l'écorce, la force de traînée est due à l'interaction entre phonons et lignes de tourbillons superfluides (Jones, 1990a), si la vitesse des tourbillons est faible par rapport au réseau cristallin, et à l'excitation d'ondes de Kelvin le long des lignes de vortex, si la vitesse est grande (Jones, 1992; Epstein & Baym, 1992). Le premier mécanisme prédit un coefficient ξ de l'ordre de $\sim 10^{-9} - 10^{-7}$, tandis que le second, beaucoup plus dissipatif, conduit à $\xi \sim 10^{-3} - 10^{-1}$.

Étant donné les incertitudes actuelles sur l'origine microscopique de la force de friction mutuelle et les valeurs de ξ , et puisque nous nous intéressons à un modèle global² de glitch,

1. Le coefficient c_r introduit par Langlois *et al.* (1998), Éq. (86), fait en réalité intervenir certains effets relativistes. Toutefois, ces corrections sont beaucoup plus faibles que les incertitudes théoriques sur le rapport traînée/portance ξ mentionnées dans la suite, de sorte qu'on pourra raisonnablement considérer que $c_r \simeq \xi$.

2. Un modèle plus réaliste tiendrait compte du fait que seule une partie des tourbillons est libre de se déplacer une fois que le glitch a été déclenché. Nous pourrions considérer cela simplement en remplaçant le coefficient ξ par un coefficient effectif $\xi_{\text{eff}} = \gamma \xi$, où γ représente la fraction locale de vortex désancrés durant l'événement de glitch (voir, e.g., Jahan-Miri (2006); Haskell *et al.* (2012b); Haskell & Melatos (2015)). Dans ce cas, une région où les vortex restent ancrés ($\gamma \simeq 0$) ne participerait pas au transfert de moment cinétique, *i.e.* $\mathcal{B}_{\text{eff}} = 0$.

nous introduisons la grandeur suivante, moyennée sur toute l'étoile,

$$\bar{\mathcal{B}} = \frac{\int_{\Sigma_t} \mathcal{B} \Gamma_n n_n \varpi_n \chi_\perp^2 d^3 \Sigma}{\int_{\Sigma_t} \Gamma_n n_n \varpi_n \chi_\perp^2 d^3 \Sigma}, \quad (6.14)$$

que nous considérons comme un paramètre d'entrée de nos simulations numériques, qui peut être choisi librement. Bien que l'on s'attende à ce que ξ varie en fonction du temps lors du glitch (en raison de la variation de la vitesse des vortex ou du réancrage de certaines lignes de tourbillons, par exemple), nous faisons l'hypothèse que $\bar{\mathcal{B}}$ ne dépend pas du temps, par simplicité. Le moment de friction mutuelle (6.8) est alors donné par

$$\Gamma_{\text{mf}} = -\bar{\mathcal{B}} \int_{\Sigma_t} \Gamma_n n_n \varpi_n \chi_\perp^2 d^3 \Sigma \times \delta\Omega, \quad (6.15)$$

où $\delta\Omega = \Omega_n - \Omega_p$ désigne l'écart de vitesse entre les fluides. La limite newtonienne de cette expression est étudiée dans l'annexe C.2 et est en accord parfait avec celle obtenue par [Sidery et al. \(2010\)](#), Éq. (58).

Moments d'inertie partiels. Afin de décrire tout transfert de moment cinétique, il est pratique d'introduire les moments d'inertie suivants

$$I_{XX} = \left(\frac{\partial J_X}{\partial \Omega_X} \right)_{\Omega_Y} \quad \text{et} \quad I_{XY} = \left(\frac{\partial J_X}{\partial \Omega_Y} \right)_{\Omega_X}, \quad (6.16)$$

où les lettres majuscules X et $Y \neq X$ se réfèrent au fluide de neutrons ou de protons. Selon l'hypothèse choisie sur la composition chimique de l'étoile (voir section 6.1.4), ces dérivées sont calculées soit pour des masses baryoniques partielles M_n^B et M_p^B fixées (cas i) ou pour une valeur donnée de la masse baryonique totale M^B , avec $\mu_c^n = \mu_c^p$ (cas ii). Il est possible de montrer que $I_{np} = I_{pn}$, voir l'équation (3.10) de [Carter \(1975\)](#). De plus, certaines conditions de stabilité impliquent que les moments d'inertie partiels vérifient les inégalités

$$I_{nn} > 0, \quad I_{pp} > 0 \quad \text{et} \quad I_{nn} I_{pp} > I_{np}^2, \quad (6.17)$$

voir annexe D pour plus de détails.

Nous définissons alors les moments d'inertie des neutrons et du fluide de particules chargées, \hat{I}_n et \hat{I}_p , par les relations

$$\hat{I}_n = I_{nn} + I_{np} \quad \text{et} \quad \hat{I}_p = I_{pp} + I_{np}, \quad (6.18)$$

et le moment d'inertie total \hat{I} par

$$\hat{I} = \hat{I}_n + \hat{I}_p. \quad (6.19)$$

Ces définitions sont plus générales que celles utilisées dans les chapitres 4 et 5 dans le cas de corotation. Comme nous le verrons sur la figure 6.3, les deux définitions coïncident cependant dans l'approximation de rotation lente, *i.e.*

$$\Omega_n, \Omega_p \ll \Omega_K, \quad (6.20)$$

6.2 Équations d'évolution

où Ω_K désigne la vitesse képlérienne (voir section 1.1.3).

À l'aide de (6.16), les dérivées temporelles des moments cinétiques s'expriment sous la forme

$$\begin{cases} \dot{J}_n = I_{nn}\dot{\Omega}_n + I_{np}\dot{\Omega}_p, \\ \dot{J}_p = I_{np}\dot{\Omega}_n + I_{pp}\dot{\Omega}_p. \end{cases} \quad (6.21)$$

En injectant alors ces relations, ainsi que l'expression (6.15) du moment de friction mutuelle, dans les équations (6.7) gouvernant le transfert de moment cinétique entre les fluides, on en déduit que

$$\begin{cases} \dot{\Omega}_n = - \frac{\hat{I}_p}{I_{nn}I_{pp} - I_{np}^2} \times \bar{\mathcal{B}} \kappa \delta\Omega, \\ \dot{\Omega}_p = + \frac{\hat{I}_n}{I_{nn}I_{pp} - I_{np}^2} \times \bar{\mathcal{B}} \kappa \delta\Omega, \end{cases} \quad (6.22)$$

où la quantité κ (à ne pas confondre avec le quantum de circulation introduit dans le chapitre 3) est définie par

$$\kappa = \int_{\Sigma_t} \Gamma_n n_n \varpi_n \chi_{\perp}^2 d^3 \Sigma. \quad (6.23)$$

Il est intéressant de remarquer que les conditions (6.17), auxquelles obéissent les moments d'inertie partiels, impliquent que le dénominateur apparaissant dans les équations précédentes ne s'annule jamais. L'évolution temporelle de l'écart de vitesse $\delta\Omega = \Omega_n - \Omega_p$ est donc simplement régie par

$$\frac{\delta\dot{\Omega}}{\delta\Omega} = - \frac{\hat{I}}{I_{nn}I_{pp} - I_{np}^2} \times \bar{\mathcal{B}} \times \kappa. \quad (6.24)$$

6.2.2 Estimation analytique du temps de montée

Quel que soit le pulsar considéré, les amplitudes de glitches vérifient $\Delta\Omega/\Omega \ll 1$, où $\Delta\Omega$ désigne l'augmentation de la vitesse de rotation de l'étoile lors de la phase de montée (voir section 2.3.1). Il paraît donc raisonnable de négliger toute variation des différentes quantités apparaissant dans le membre de droite de l'équation (6.24). Partant d'un écart initial $\delta\Omega_0$ au début du glitch (voir section 7.1.2), la différence de vitesse $\delta\Omega$ entre les fluides évolue alors approximativement selon une loi exponentielle,

$$\delta\Omega(t) \simeq \delta\Omega_0 \times \exp(-t/\tau_r), \quad (6.25)$$

associée au temps caractéristique

$$\tau_r = \frac{\hat{I}_n \hat{I}_p - \hat{I} I_{np}}{\hat{I} \bar{\mathcal{B}} \kappa}. \quad (6.26)$$

De plus, l'évolution temporelle de la vitesse de rotation de chaque fluide est donnée par

$$\begin{aligned} \Omega_n(t) &\simeq \Omega_n^0 + \frac{\hat{I}_p}{\hat{I}} \times \delta\Omega_0 \times (\exp(-t/\tau_r) - 1), \\ \Omega_p(t) &\simeq \Omega_p^0 - \frac{\hat{I}_n}{\hat{I}} \times \delta\Omega_0 \times (\exp(-t/\tau_r) - 1), \end{aligned} \quad (6.27)$$

où Ω_n^0 et Ω_p^0 désignent les valeurs respectives de Ω_n et Ω_p , au moment où le glitch est déclenché.

Par analogie avec la limite newtonienne (C.14), nous introduisons la quantité ζ par la relation

$$\kappa = 2\zeta\hat{I}_n\Omega_n, \quad (6.28)$$

où κ est définie par (6.23). Il faut toutefois remarquer que les corrections dues à la relativité générale ne sont pas uniquement contenues dans ζ , mais interviennent également dans \hat{I}_n . En utilisant (6.28), le temps de montée relativiste (6.26) vérifie alors

$$\tau_r = \frac{\hat{I}_p}{\hat{I}} \times \frac{1}{2\zeta\bar{\mathcal{B}}\Omega_n} \times \left(1 - \frac{I_{np}\hat{I}}{\hat{I}_n\hat{I}_p}\right). \quad (6.29)$$

Comme nous le montrons dans l'annexe C.3, la limite newtonienne de cette expression, appliquée dans l'approximation de rotation lente (6.20), est cohérente avec les résultats obtenus par [Sidery *et al.* \(2010\)](#). Notons que l'approximation de rotation lente est en fait plutôt légitime, étant donné les vitesses de rotation des pulsars présentant des glitches (voir section 2.3.1) et les valeurs théoriques de la fréquence képlérienne $\Omega_K/(2\pi)$, dont l'ordre de grandeur est compris entre ~ 900 et ~ 1800 Hz, pour des étoiles à neutrons de masse supérieure à $1,4 M_\odot$ (voir, e.g., [Haensel *et al.* \(2009\)](#); [Fantina *et al.* \(2013\)](#); [Haensel *et al.* \(2016\)](#)).

L'expression analytique (6.29) du temps de montée appelle différentes remarques. Tout d'abord, la vitesse radiale des lignes de tourbillons augmentant avec le paramètre de friction mutuelle¹, le transfert de moment cinétique est d'autant plus rapide que $\bar{\mathcal{B}}$ est grand, ce qui est cohérent avec (6.29). Comme l'a fait remarquer B. Carter ([Carter, 2001](#)), le paramètre $\bar{\mathcal{B}}$ ne peut pas prendre une valeur arbitraire. La relation (6.13) indique que $\bar{\mathcal{B}} \leq 1/2$, ce qui implique alors la limite inférieure suivante sur le temps de montée :

$$\tau_r \geq \frac{\hat{I}_p}{\hat{I}} \times \frac{1}{\zeta\Omega_n} \times \left(1 - \frac{I_{np}\hat{I}}{\hat{I}_n\hat{I}_p}\right). \quad (6.30)$$

atteinte uniquement pour $\xi = 1$. De plus, dans l'approximation de rotation lente, on observe également que τ_r est inversement proportionnel à Ω_n . Cela provient du fait que le moment de friction mutuelle dépend linéairement de la densité surfacique des lignes de vortex (voir Éq. (8.22)), qui est proportionnelle à Ω_n en très bonne approximation, voir équation (3.10). Ainsi, lorsque Ω_n augmente, davantage de tourbillons sont impliqués dans l'événement de glitch, qui se déroule ainsi plus rapidement. Enfin, l'expression (6.29) brise la symétrie apparente dans les rôles des deux fluides visible sur l'équation (6.26). Le temps de montée est grossièrement proportionnel à $\hat{I}_p/\hat{I} = 1 - \hat{I}_n/\hat{I}$, ce qui signifie que le transfert de moment cinétique est d'autant plus efficace que la fraction de protons est faible. La présence du moment d'inertie du fluide de neutrons dans le moment de friction mutuelle (6.23) (voir également (6.28)) provient de la force de Magnus exercée par les neutrons sur les lignes de tourbillons, dont l'amplitude est proportionnelle à la densité de

1. Voir l'équation (8.17), ou Éq. (36) de [Carter \(2001\)](#), dans le cas newtonien et l'équation (85) de [Langlois *et al.* \(1998\)](#) dans le cadre de la relativité générale.

ce fluide (voir, e.g., [Langlois et al. \(1998\)](#); [Carter et al. \(2002\)](#) ou l'équation (8.5)). Pour des valeurs données de ξ , Ω_n et Ω_p , la force de friction mutuelle agissant entre les neutrons et les protons est alors d'autant plus grande que la densité de neutrons est importante (voir Éq. (8.20)), réduisant ainsi la valeur de τ_r . Les rôles de ζ et de I_{np} sont étudiés plus en détails dans la suite.

6.3 Configurations stationnaires en rotation

Dans cette section, nous présentons plusieurs résultats numériques concernant la vorticité du superfluide de neutrons et les couplages entre les fluides, qui jouent un rôle important dans le transfert de moment cinétique lors d'un événement de glitch. Ces quantités sont obtenues directement à partir des configurations d'équilibre étudiées dans la partie II.

6.3.1 Vorticité du superfluide

Sur la figure 6.1, la vorticité du superfluide ϖ_n (6.9) est représentée en fonction de la coordonnée radiale, pour une étoile à neutrons tournant à la fréquence de rotation du pulsar de Vela, *i.e.* $f_n = f_p = 11,19$ Hz, et à l'équilibre β . La vorticité est normalisée à son expression newtonienne, $\varpi_n^{\text{newt}} = 2m_n\Omega_n$ (C.10). Les résultats obtenus avec les deux EoSs sont comparés sur la figure de gauche, tandis que celle de droite montre les profils de vorticité prédits par l'EoS DDH pour différentes valeurs de la masse gravitationnelle.

Ces profils peuvent s'interpréter à l'aide de la compacité Ξ (4.91) de l'étoile considérée. Pour une étoile à neutrons de $1,4 M_\odot$ tournant à $11,19$ Hz, l'EoS DDH  prédit un rayon équatorial plus grand que DDH, ce qui conduit à $\Xi_{\text{DDH}} \gtrsim \Xi_{\text{DDH}\delta}$ (voir Fig. 5.15). Par conséquent, les écarts au cas non-relativiste sont légèrement plus importants dans le cas de DDH, comme on peut le voir sur l'image de gauche de la figure 6.1. De même, puisque le paramètre de compacité Ξ augmente avec la masse de l'étoile, la différence par rapport aux résultats attendus en mécanique newtonienne est d'autant plus marquée que la valeur de M_G est grande. En particulier, cet écart (relatif) atteint $\sim 30\%$ pour une étoile de $2 M_\odot$, modélisée par l'EoS DDH (voir l'image de droite de la figure 6.1). Il est intéressant de remarquer que, le paramètre Ξ diminuant lorsque Ω augmente à M_G fixée (voir Fig. 5.15), les corrections relativistes sont moins importantes pour des étoiles à neutrons en rotation très rapide, comme on peut l'observer sur la figure 6.2. Dans tous les cas, on pourra noter que les profils de vorticité dépendent fortement de l'angle considéré.

6.3.2 Coefficient κ et facteur ζ

Le moment d'inertie \hat{I}_n (6.18) du fluide de neutrons est tracé en fonction de la fréquence de rotation du superfluide sur la figure 6.3. Les valeurs de f_n étudiées s'étendent de $0,09$ à 327 Hz, de manière à correspondre aux fréquences de rotation des pulsars exhibant des glitches (voir section 2.3.1). Afin d'obtenir une précision élevée, les moments d'inertie partiels sont déterminés à partir des équations (6.16) en utilisant une méthode de différences finies d'ordre 4. Les dérivées ont ici été calculées dans le cas (ii) (voir section 6.1.4),

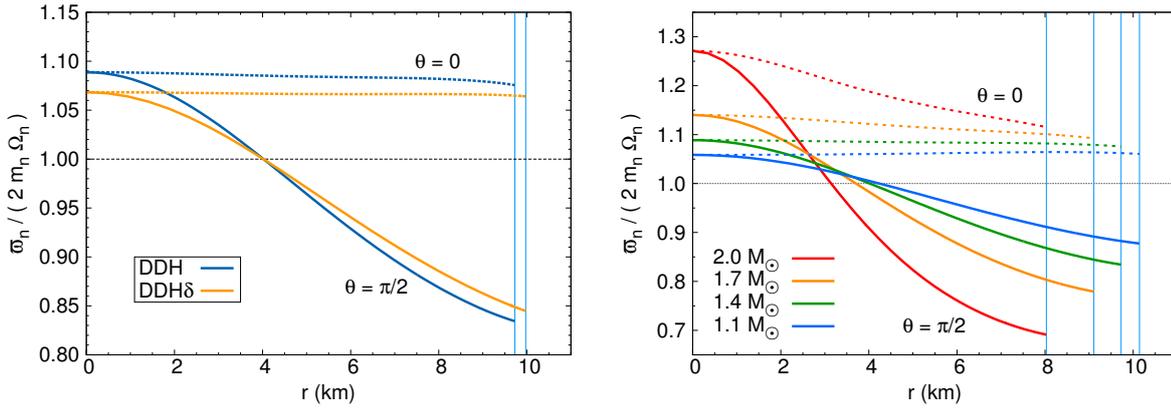


FIGURE 6.1 – **Vorticité du superfluide de neutrons.** La quantité ϖ_n est tracée en fonction de la coordonnée radiale r , dans le plan équatorial ($\theta = \pi/2$) et le long de l'axe de rotation ($\theta = 0$), pour $f_n = f_p = 11, 19$ Hz. Ces configurations sont calculées à l'équilibre β . La vorticité du superfluide est normalisée par sa valeur attendue à la limite newtonienne, dans le cas de corotation, $2 m_n \Omega_n$ (lignes horizontales noires). Les traits bleus verticaux désignent les rayons pour lesquels $n_n = 0$, à la fois dans le plan équatorial et le long de l'axe de rotation, compte tenu du fait que l'étoile est approximativement sphérique pour la faible vitesse de rotation considérée. *Gauche* : Profils de vorticité pour une étoile de masse gravitationnelle $M_G = 1,4 M_\odot$, obtenus avec les EoSs DDH (en bleu) et DDH δ (en orange). *Droite* : Influence de la masse gravitationnelle sur les profils de vorticité, étudiée en utilisant l'EoS DDH.

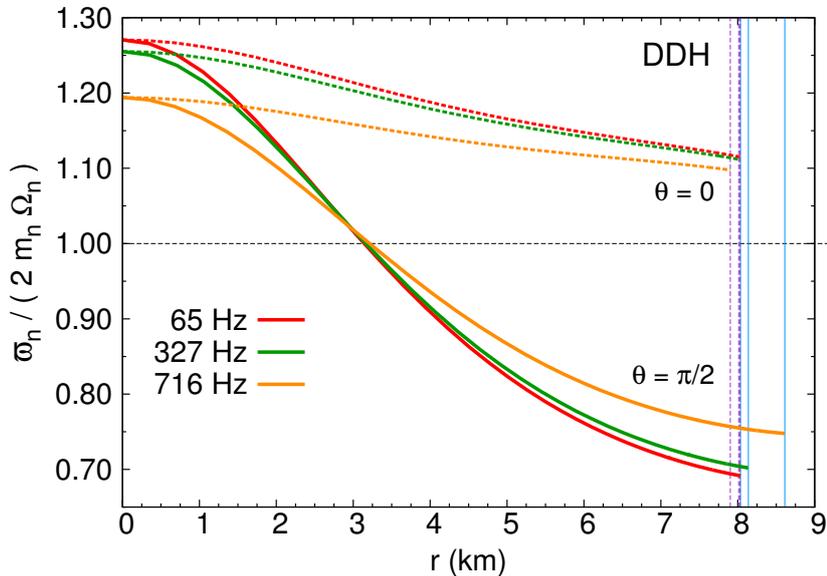


FIGURE 6.2 – **Profils de vorticité pour différentes vitesses de rotation.** La vorticité ϖ_n du superfluide est tracée en fonction de r pour différentes valeurs de $f_n = f_p$. La masse gravitationnelle est fixée à $2 M_\odot$ et les calculs sont effectués avec l'EoS DDH. Les rayons r_{eq} et r_p , correspondant à $n_n = 0$ dans le plan équatorial et le long de l'axe de rotation, sont respectivement indiqués par des traits verticaux pleins (bleus) et en pointillés (violets). On pourra remarquer que $r_{\text{eq}} \simeq r_p$ à faible vitesse de rotation, tandis que r_{eq} augmente et r_p diminue lorsque l'étoile tourne sur elle-même de plus en plus rapidement.

6.3 Configurations stationnaires en rotation

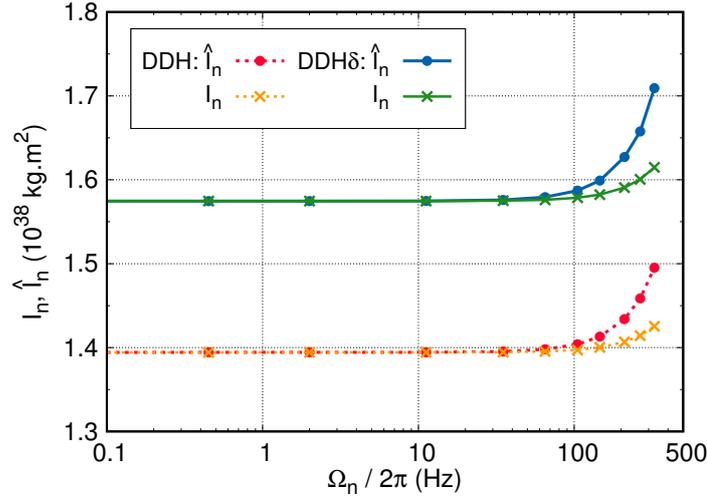


FIGURE 6.3 – **Moment d’inertie du superfluide.** La quantité \hat{I}_n (points bleus et rouges), définie par (6.18), est tracée en fonction de la fréquence de rotation $f_n = f_p$. Pour chaque vitesse de rotation considérée, \hat{I}_n est calculée pour une masse baryonique fixée (en maintenant l’équilibre chimique au centre), de sorte que $M_G = 1,4 M_\odot$ pour $f_n = f_p$. Les résultats associés à l’EoS DDH(δ) sont représentés en traits pointillés (pleins). Pour comparaison, nous traçons également la grandeur I_n , calculée à partir de (4.99) pour une même masse gravitationnelle.

i.e. pour une masse baryonique donnée, choisie de sorte que la configuration obtenue dans le cas de corotation vérifie $M_G = 1,4 M_\odot$, quelle que soit la vitesse de rotation considérée. La quantité \hat{I}_n est constante avec une très bonne approximation à faible vitesse de rotation, et augmente fortement lorsqu’on se rapproche de la fréquence képlérienne. Pour $M_G = 1,4 M_\odot$ et une vitesse de rotation donnée, l’EoS DDH prédit un rayon légèrement plus petit que l’EoS DDH δ (voir Fig. 5.13). Par conséquent, les moments d’inertie obtenus sont plus faibles. Les moments d’inertie I_n définis par (4.99) sont également représentés sur la figure 6.3, pour un même choix de masse gravitationnelle. Comme attendu, les définitions introduites dans ce chapitre et celles utilisées dans la partie II coïncident à faible vitesse de rotation, mais s’écartent l’une de l’autre au fur et à mesure que cette dernière augmente.

Nous représentons le coefficient κ (6.23), intervenant dans l’expression du moment de friction mutuelle, en fonction de la fréquence de rotation du superfluide sur la figure 6.4. En très bonne approximation, on observe que κ est proportionnelle à Ω_n , à faible fréquence de rotation. Les moments d’inertie étant approximativement constants sur cette gamme de vitesse (voir Fig. 6.3), on en déduit alors que τ_r (6.29) est inversement proportionnel à Ω_n . On observe toutefois un léger écart à la loi $\kappa \propto \Omega_n$ à plus haute vitesse de rotation. Notons que le terme géométrique χ_\perp^2 impliqué dans le calcul de κ est approximativement donné par $\chi_\perp^2 = B^2 r^2 \sin^2 \theta$.

À partir du calcul de \hat{I}_n et de κ , il est alors possible de déterminer le facteur ζ intervenant dans l’expression du temps de montée, voir Éq. (6.29), en utilisant la relation (6.28). Pour une fréquence de rotation donnée, on observe sur l’image de gauche de la figure 6.5

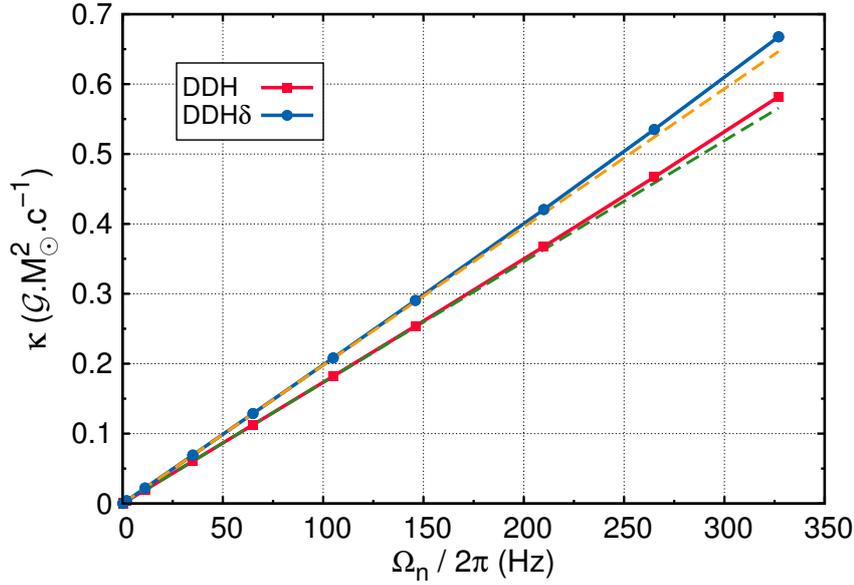


FIGURE 6.4 – **Coefficient κ .** La quantité κ (6.23) est tracée en fonction de la fréquence de rotation du fluide de neutrons, pour une étoile de masse gravitationnelle $M_G = 1,4 M_\odot$, en supposant que les deux fluides sont en corotation et à l'équilibre chimique. Les résultats obtenus avec l'EoS DDH(δ) sont dessinés en rouge (bleu). Les lignes pointillées correspondent à $\kappa \propto \Omega_n$.

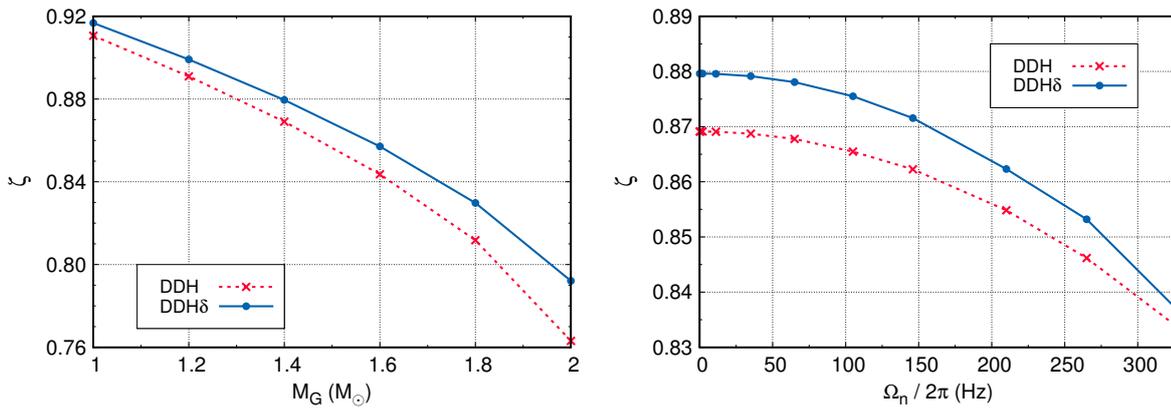


FIGURE 6.5 – **Influence de la masse et de la vitesse de rotation sur le facteur ζ .** *Gauche* : La quantité ζ est tracée en fonction de la masse gravitationnelle, pour $f_n = 11, 19$ Hz. *Droite* : ζ est représentée en fonction de la fréquence de rotation du superfluide, pour $M_G = 1,4 M_\odot$. Pour les deux figures, les résultats ont été obtenus pour une masse baryonique totale fixée (cas ii) et pour $f_n = f_p$. Les calculs effectués avec l'EoS DDH(δ) sont dessinés en rouge (en bleu).

que ζ décroît lorsque la masse augmente, et tend vers 1 pour de faibles valeurs du paramètre de compacité, comme attendu à la limite newtonienne (voir (C.14)). En particulier, pour une étoile tournant à la fréquence de rotation du pulsar de Vela (11,19 Hz), ζ varie de 0,869 (0,880) pour $M_G = 1,4 M_\odot$ à 0,763 (0,792) pour $2 M_\odot$, avec l'EoS DDH(δ). La quantité ζ ne dépend toutefois pas uniquement de la compacité. Ainsi, à masse gravitationnelle constante, ζ est approximativement indépendante de la vitesse de rotation dans l'hypothèse de rotation lente, comme on peut le voir sur l'image de droite de la figure 6.5. Pour des vitesses de rotation largement supérieures à celle du pulsar de Vela, les moments d'inertie augmentent plus rapidement que le coefficient κ (voir Fig. 6.4), de sorte que le facteur ζ décroît faiblement lorsque f_n augmente. Par exemple, l'EoS DDH(δ) conduit à $\zeta = 0,834$ ($\zeta = 0,837$) pour une fréquence de rotation de 327 Hz et une masse gravitationnelle de $1,4 M_\odot$. Remarquons enfin que, dans les différents cas étudiés ici, les valeurs de ζ prédites par les EoSs DDH et DDH δ sont toujours très proches.

6.3.3 Effets d'entraînement et effet Lense-Thirring

Le moment d'inertie croisé I_{np} introduit dans l'équation (6.16) contient tous les couplages possibles entre les neutrons et les protons. Un premier couplage est dû aux *effets d'entraînement*, qui dans le cœur des étoiles à neutrons tirent leur origine des interactions entre les nucléons (par interaction forte). Ces effets ont été étudiés en détails dans la section 5.1.4 pour les EoSs DDH et DDH δ . Dans le cadre de la mécanique newtonienne, l'entraînement est le principal couplage entre les fluides, à faible vitesse de rotation (voir annexe C.4). Néanmoins, comme nous l'avons déjà mentionné dans la section 5.2.5, un nouveau couplage apparaît en relativité générale, en lien avec l'*effet Lense-Thirring*, aussi appelé *effet d'entraînement des référentiels inertiels* (voir également Carter (1975)). Il est important de remarquer que, contrairement à la force de friction mutuelle, ces deux couplages sont *non-dissipatifs*.

Dans la suite, nous caractérisons les couplages entre les fluides par les quantités

$$\hat{\epsilon}_n = \frac{I_{np}}{\hat{I}_n} \quad \text{et} \quad \hat{\epsilon}_p = \frac{I_{np}}{\hat{I}_p}. \quad (6.31)$$

Étant donné les conditions de stabilité (6.17), ces paramètres ne peuvent prendre des valeurs arbitraires mais doivent nécessairement satisfaire l'inégalité suivante :

$$\left(\frac{1}{\hat{\epsilon}_p} - 1 \right) \left(\frac{1}{\hat{\epsilon}_n} - 1 \right) > 1. \quad (6.32)$$

Expression des paramètres de couplage. Nous allons voir qu'il est possible d'obtenir une expression simple pour les termes de couplage $\hat{\epsilon}_p$ et $\hat{\epsilon}_n$, sous certaines approximations raisonnables. Le moment cinétique du fluide X est donné par

$$J_X = \int_{\Sigma_t} \left[\Gamma_X^2 n_X \mu^X U_X + 2\alpha \frac{\Gamma_X^2}{\Gamma_\Delta^2} \left(\frac{\Gamma_Y}{\Gamma_\Delta \Gamma_X} U_Y - U_X \right) \right] \times Br \sin \theta d^3 \Sigma, \quad (6.33)$$

voir Éqs. (C.1) et (4.95). Dans l'approximation de rotation lente ($\Omega_n, \Omega_p \ll \Omega_K$) et au premier ordre en la différence de vitesse $\delta\Omega = \Omega_n - \Omega_p$, les facteurs de Lorentz vérifient simplement $\Gamma_X \simeq \Gamma_Y \simeq \Gamma_\Delta \simeq 1$. Par conséquent, en remplaçant les termes U_X

et U_Y par (4.56) et en faisant appel au paramètre d'entraînement ε_X , défini par (5.59), l'expression de J_X devient alors

$$J_X \simeq \int_{\Sigma_t} n_X \mu^X \frac{B^2}{N} r^2 \sin^2 \theta (\Omega_X - \omega) d^3 \Sigma + \int_{\Sigma_t} n_X \mu^X \frac{B^2}{N} r^2 \sin^2 \theta \varepsilon_X (\Omega_Y - \Omega_X) d^3 \Sigma, \quad (6.34)$$

où les couplages par entraînement et effet Lense-Thirring sont clairement visibles à travers les termes ε_X et ω . Nous introduisons à présent les grandeurs suivantes :

$$\tilde{I}_X = \int_{\Sigma_t} n_X \mu^X \frac{B^2}{N} r^2 \sin^2 \theta d^3 \Sigma, \quad (6.35)$$

$$\tilde{\varepsilon}_X \tilde{I}_X = \int_{\Sigma_t} n_X \mu^X \frac{B^2}{N} r^2 \sin^2 \theta \varepsilon_X d^3 \Sigma, \quad (6.36)$$

et

$$\tilde{\omega}_X \tilde{I}_X = \int_{\Sigma_t} n_X \mu^X \frac{B^2}{N} r^2 \sin^2 \theta \omega d^3 \Sigma, \quad (6.37)$$

de telle sorte que J_X (6.34) peut se réécrire sous la forme compacte :

$$J_X = \tilde{I}_X (\Omega_X - \tilde{\omega}_X) + \tilde{\varepsilon}_X \tilde{I}_X (\Omega_Y - \Omega_X). \quad (6.38)$$

Les quantités $\tilde{\varepsilon}_X$ et $\tilde{\omega}_X$ caractérisent respectivement¹ les effets d'entraînement et Lense-Thirring (moyens) agissant sur le fluide X . Notons qu'à la limite newtonienne, \tilde{I}_X et $\tilde{\varepsilon}_X$ sont donnés par les relations (C.7) et (C.8), tandis que $\tilde{\omega}_X$ s'annule simplement : l'équation précédente tend alors vers (C.6).

On observe à l'aide de l'outil numérique que $\tilde{\omega}_X$ peut être approximé par la relation

$$\tilde{\omega}_X = \varepsilon_{XX}^{\text{LT}} \Omega_X + \varepsilon_{YX}^{\text{LT}} \Omega_Y, \quad (6.39)$$

avec une précision meilleure que $\sim 0,1\%$ pour une étoile dont la fréquence de rotation est inférieure à ~ 65 Hz². Dans cette équation, le terme $\varepsilon_{YX}^{\text{LT}}$ représente la contribution du fluide Y à l'effet d'entraînement des référentiels inertiels agissant sur le fluide X et $\varepsilon_{XX}^{\text{LT}}$ caractérise l'effet Lense-Thirring créé par le fluide X sur lui-même. En utilisant les différentes grandeurs introduites jusqu'à présent, résumées sur la table 6.1, le moment cinétique du fluide X est donné par

$$J_X = \tilde{I}_X (1 - \varepsilon_{XX}^{\text{LT}} - \tilde{\varepsilon}_X) \Omega_X + \tilde{I}_X (\tilde{\varepsilon}_X - \varepsilon_{YX}^{\text{LT}}) \Omega_Y. \quad (6.40)$$

Cette expression généralise ainsi les relations (C.6) au cadre de la relativité générale. On pourra remarquer que les effets d'entraînement des référentiels inertiels conduisent à un couplage ayant une forme similaire aux effets d'entraînement.

1. Il est important de remarquer que, sous les hypothèses considérées ici, les potentiels chimiques (5.50a) et (5.50b) ne dépendent pas de la différence de vitesse entre les fluides, et donc des effets d'entraînement. Ainsi, les grandeurs $\tilde{\varepsilon}_X$ et $\tilde{\omega}_X$ caractérisent bien chaque effet séparément.

2. La précision de l'ajustement des résultats numériques obtenus à 327 Hz par la loi (6.39) est moindre, de l'ordre de $\sim 1 - 10\%$. On peut toutefois atteindre une précision de $\sim 0,1\%$ en ajustant ces résultats avec une relation contenant un terme croisé du type : $\tilde{\omega}_X = \varepsilon_{XX}^{\text{LT}} \Omega_X + \varepsilon_{YX}^{\text{LT}} \Omega_Y + \alpha_X \Omega_X \Omega_Y$.

6.3 Configurations stationnaires en rotation

Quantité	Description	Définition
$\hat{\varepsilon}_X$	couplage total entre les fluides	(6.31)
ε_X	paramètre d'entraînement mutuel <i>local</i>	(5.59)
$\tilde{\varepsilon}_X$	paramètre d'entraînement mutuel <i>global</i>	(6.36)
$\varepsilon_{YX}^{\text{LT}}$	contribution de Y à l'effet Lense-Thirring sur X	(6.39)
$\varepsilon_{XX}^{\text{LT}}$	contribution de X à l'effet Lense-Thirring sur X	(6.39)

TABLE 6.1 – **Tableau récapitulatif des différentes grandeurs associées au couplage entre les fluides.** Ces quantités sont définies par rapport au fluide X .

À ce niveau d'approximation, les moments d'inertie partiels vérifient

$$I_{\text{nn}} = \tilde{I}_{\text{n}} (1 - \varepsilon_{\text{nn}}^{\text{LT}} - \tilde{\varepsilon}_{\text{n}}), \quad I_{\text{pp}} = \tilde{I}_{\text{p}} (1 - \varepsilon_{\text{pp}}^{\text{LT}} - \tilde{\varepsilon}_{\text{p}}), \quad (6.41)$$

et

$$I_{\text{np}} = \tilde{I}_{\text{n}} (\tilde{\varepsilon}_{\text{n}} - \varepsilon_{\text{pn}}^{\text{LT}}) = I_{\text{pn}} = \tilde{I}_{\text{p}} (\tilde{\varepsilon}_{\text{p}} - \varepsilon_{\text{np}}^{\text{LT}}), \quad (6.42)$$

de sorte que les moments d'inertie des fluides sont donnés par

$$\hat{I}_{\text{n}} = I_{\text{nn}} + I_{\text{np}} = \tilde{I}_{\text{n}} (1 - \varepsilon_{\text{nn}}^{\text{LT}} - \varepsilon_{\text{pn}}^{\text{LT}}) \quad \text{et} \quad \hat{I}_{\text{p}} = I_{\text{pp}} + I_{\text{pn}} = \tilde{I}_{\text{p}} (1 - \varepsilon_{\text{pp}}^{\text{LT}} - \varepsilon_{\text{np}}^{\text{LT}}). \quad (6.43)$$

Notons que la relation $\tilde{I}_{\text{n}}\tilde{\varepsilon}_{\text{n}} = \tilde{I}_{\text{p}}\tilde{\varepsilon}_{\text{p}}$, déduite de (6.36), conduit à $\tilde{I}_{\text{n}}\varepsilon_{\text{pn}}^{\text{LT}} = \tilde{I}_{\text{p}}\varepsilon_{\text{np}}^{\text{LT}}$ (voir Fig. 6.7). À l'aide des relations précédentes, nous déduisons alors que le coefficient total de couplage $\hat{\varepsilon}_X$ (6.31) est donné par

$$\hat{\varepsilon}_X = \frac{\tilde{\varepsilon}_X - \varepsilon_{YX}^{\text{LT}}}{1 - \varepsilon_{YX}^{\text{LT}} - \varepsilon_{XX}^{\text{LT}}}. \quad (6.44)$$

Les différents termes impliqués dans cette relation étant tous positifs, on remarque que l'action de l'effet Lense-Thirring est opposée à celle associée aux effets d'entraînement dans le cœur. La présence d'un signe “−” devant chaque terme relatif à l'effet Lense-Thirring s'explique par le fait qu'un observateur de *moment cinétique nul* tourne dans le même sens que l'étoile dans son ensemble, de sorte qu'un observateur statique, *i.e.* avec une *vitesse de rotation nulle*, aura un moment cinétique de signe contraire à celui de l'étoile (voir Carter (1975) et la table 6.2). Par conséquent, en l'absence d'entraînement ($\tilde{\varepsilon}_X = 0$), on s'attend à ce que le coefficient de couplage $\hat{\varepsilon}_X$ soit non-nul et négatif. Bien que les effets d'entraînement soient susceptibles d'être faibles dans les régions externes du cœur des étoiles à neutrons (Carter *et al.*, 2006b; Chamel & Haensel, 2006), leur contribution moyennée sur l'étoile n'est pas nécessairement négligeable et la grandeur $\hat{\varepsilon}_X$ peut donc être positive ou négative.

Équations d'évolution

particule liée à	\mathcal{O}_s (statique)	\mathcal{O}_n (eulérien)	\mathcal{O}_X (fluide X)
u^α	$u_s^\alpha = \frac{1}{\sqrt{-g_{tt}}} \partial_t^\alpha$	$u_n^\alpha = \frac{1}{N} (\partial_t^\alpha + \omega \partial_\varphi^\alpha)$	$u_X^\alpha = \frac{\Gamma_X}{N} (\partial_t^\alpha + \Omega_X \partial_\varphi^\alpha)$
u^φ/u^t	0	ω	$\Omega_X (> 0)$
l	≤ 0	0	> 0

TABLE 6.2 – **Vitesse de rotation et moment cinétique d'une particule-test associée à différents observateurs.** On considère une particule-test, *i.e.* sans action sur la métrique, associée à un observateur statique (\mathcal{O}_s), eulérien (\mathcal{O}_n) ou comobile avec le fluide X (\mathcal{O}_X). La quadri-vitesse u^α de chacun de ces observateurs est exprimée sur la première ligne. Les deuxième et troisième lignes donnent la vitesse de rotation u^φ/u^t et le moment cinétique par unité de masse $l = \chi^\alpha u_\alpha$ de la particule-test par rapport à un observateur statique, placé à l'infini spatial (dont la quadri-vitesse est $u_\infty^\alpha = \partial_t^\alpha$). Les vecteurs de la base naturelle ∂_t^α et ∂_φ^α correspondent respectivement aux vecteurs de Killing ξ^α et χ^α , voir section 4.2.2. On pourra noter que le moment cinétique d'une particule-test associée aux observateurs eulériens est nul, d'où le nom de *zero-angular-momentum observers* donné à ces derniers.

Résultats numériques. Sauf mention contraire, les résultats présentés dans la suite sont calculés pour une masse baryonique totale fixée, en maintenant l'équilibre β au centre de l'étoile (cas ii, mentionné dans la section 6.1.4). Il est toutefois important de noter que le cas (i), réalisé en fixant les masses baryoniques partielles, conduirait à des résultats sensiblement identiques, à condition que la vitesse de rotation ne soit pas trop élevée (voir l'image de droite de la figure 6.9). Afin d'étudier l'importance relative des effets d'entraînement et Lense-Thirring sur le coefficient total de couplage $\hat{\varepsilon}_p$, les quantités $\tilde{\varepsilon}_p$ et ε_{np}^{LT} sont tracées sur la figure 6.6 en fonction de la masse gravitationnelle. Étant donné que $\delta\Omega \ll \Omega_n, \Omega_p$, les vitesses de rotation considérées ici sont $\Omega_n = \Omega_p = 2\pi \times 11, 19 \text{ rad.s}^{-1}$. Le paramètre d'entraînement moyen $\tilde{\varepsilon}_p$ relatif au fluide de particules chargées augmente avec la masse, car les densités atteintes dans l'étoile sont de plus en plus importantes (voir Fig. 5.9). De même, les effets de relativité générale sont d'autant plus forts que la masse gravitationnelle est grande (voir Fig. 5.15), de sorte que ε_{np}^{LT} croît également avec M_G . Il est intéressant de noter que, pour les deux EoS considérées, les quantités $\tilde{\varepsilon}_p$ et ε_{np}^{LT} sont du même ordre de grandeur. Par conséquent, les effets d'entraînement et Lense-Thirring sont tous les deux importants dans le calcul du coefficient total de couplage. Pour une vitesse de rotation donnée, les EoS DDH et DDH δ conduisent à des compacités similaires, avec toutefois de faibles écarts à masse gravitationnelle élevée (voir Fig. 5.15). Ainsi, les valeurs de ε_{np}^{LT} prédites par ces deux EoS sont très peu différentes. En revanche, les effets d'entraînement sont moins marqués avec DDH δ (voir Fig. 5.9). Par ailleurs, puisque ε_{nn}^{LT} et ε_{np}^{LT} caractérisent tous les deux la contribution du fluide de neutrons aux effets d'entraînement des référentiels inertiels, ces deux coefficients sont très proches l'un

6.3 Configurations stationnaires en rotation

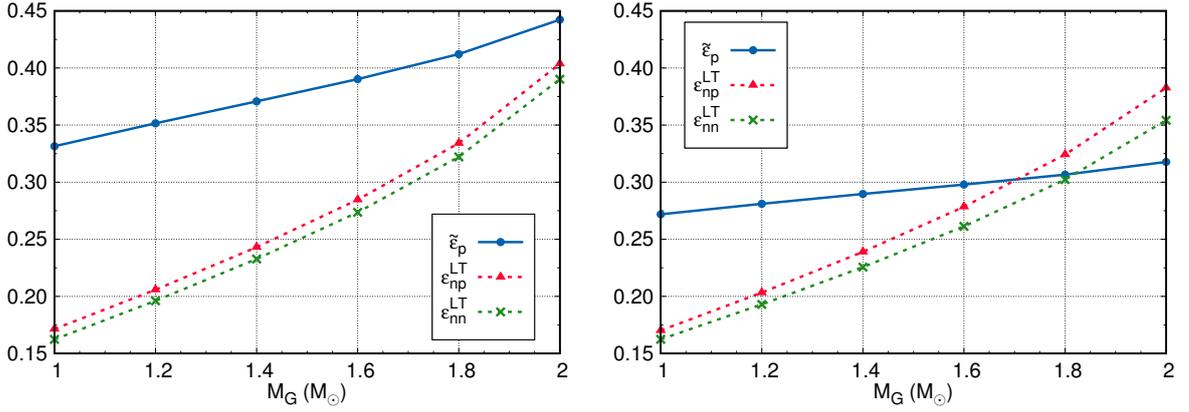


FIGURE 6.6 – **Couplage entre les fluides.** Paramètre d'entraînement $\tilde{\varepsilon}_p$ et coefficients ε_{np}^{LT} et ε_{nn}^{LT} associés à l'effet Lense-Thirring en fonction de la masse gravitationnelle de l'étoile, pour $f_n = f_p = 11, 19$ Hz. Les résultats obtenus avec l'EoS DDH sont représentés sur l'image de gauche tandis que l'image de droite correspond à DDH δ .

de l'autre, comme on peut le voir sur la figure 6.6. Pour les mêmes raisons, on a $\varepsilon_{pn}^{LT} \simeq \varepsilon_{pp}^{LT}$. En outre, on observe numériquement que $\varepsilon_{pp}^{LT} \simeq \hat{I}_p / \hat{I}_n \times \varepsilon_{nn}^{LT} \ll \varepsilon_{nn}^{LT}$, ce qui signifie que la contribution des deux fluides à l'effet Lense-Thirring dépend principalement de leur proportion relative, comme on peut s'y attendre. À partir de considérations de dimensions, Carter (1975) a proposé une relation approximative entre les coefficients relatifs à cet effet qui, avec nos notations et dans l'approximation de rotation lente¹, s'écrit :

$$\tilde{I}_n \varepsilon_{pn}^{LT} = \tilde{I}_p \varepsilon_{np}^{LT} = k \frac{G}{R^3 c^2} \tilde{I}_n \tilde{I}_p (1 - \varepsilon_{nn}^{LT}) (1 - \varepsilon_{pp}^{LT}), \quad (6.45)$$

où k est une grandeur sans dimension de l'ordre de l'unité et R est un rayon caractéristique de l'étoile. En prenant $R = R_{\text{circ}}^p$, nous pouvons voir sur la figure 6.7 que cette relation est très bien satisfaite par nos résultats numériques, à condition d'imposer $k \simeq 4$ pour les EoSs DDH et DDH δ .

L'égalité des moments d'inertie croisés I_{np} et I_{pn} (voir section 6.2.1) calculés avec le code `sfstar` est vérifiée avec une précision numérique meilleure que $\sim 0,1\%$ ($\sim 7\%$) pour $f \leq 327$ Hz, en utilisant l'EoS DDH(δ). Dans la suite, nous nous concentrons principalement sur l'étude du coefficient total de couplage $\hat{\varepsilon}_p$ lié au fluide de protons. La grandeur $\hat{\varepsilon}_n$ relative aux neutrons pourra alors être déduite de $\hat{\varepsilon}_p$ en utilisant l'équation (6.31), à savoir $\hat{\varepsilon}_n = \hat{I}_p / \hat{I}_n \times \hat{\varepsilon}_p \ll \hat{\varepsilon}_p$. Comme nous pouvons l'observer sur la figure 6.8 pour $f_n = f_p = 11, 19$ Hz, le coefficient de couplage $\hat{\varepsilon}_p$ diminue de manière significative lorsque la masse gravitationnelle augmente. Cela signifie que, bien que les effets d'entraînement soient de plus en plus importants, la contribution de l'effet Lense-Thirring croît encore plus rapidement avec M_G (voir Fig. 6.6). L'écart entre les paramètres d'entraînement et les coefficients de couplage, qui provient de la prise en compte de la relativité générale, est clairement visible sur la figure 6.8. Les effets d'entraînement prédits par l'EoS DDH étant

1. Les moments d'inertie I^{AA} et I^{AB} introduits par Carter (1975) sont différents des moments d'inertie partiels I_{XX} et I_{XY} que nous utilisons ici. Toutefois, ces définitions coïncident dans l'approximation de rotation lente.

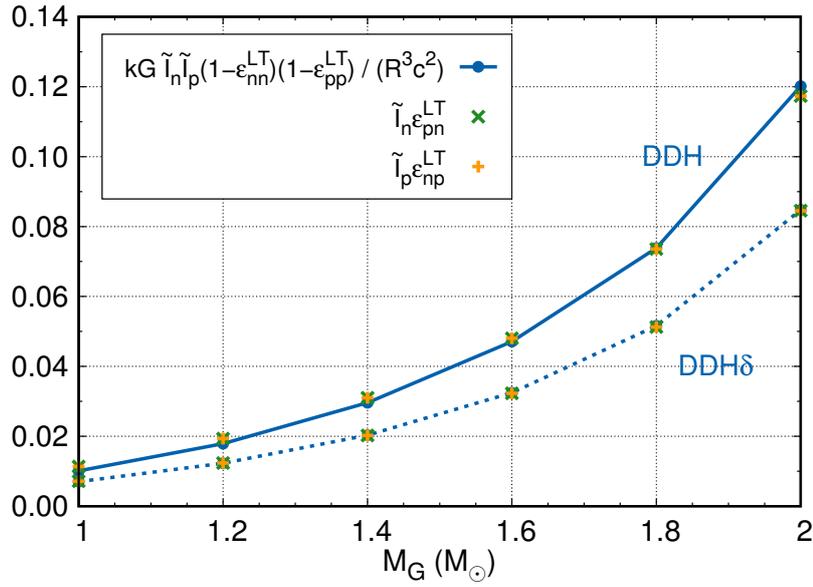


FIGURE 6.7 – **Test de la relation proposée par Carter (1975)**. Les quantités $\tilde{I}_n \varepsilon_{pn}^{LT}$, $\tilde{I}_p \varepsilon_{np}^{LT}$ et $kG \tilde{I}_n \tilde{I}_p (1 - \varepsilon_{nn}^{LT}) (1 - \varepsilon_{pp}^{LT}) / (R^3 c^2)$ sont tracées en fonction de la masse gravitationnelle, pour $f_n = f_p = 11,19$ Hz. L'unité de l'axe des ordonnées est 10^{38} kg.m². On pourra remarquer que l'égalité $\tilde{I}_n \varepsilon_{pn}^{LT} = \tilde{I}_p \varepsilon_{np}^{LT}$ est vérifiée en très bonne approximation pour les deux EoS. En prenant $k = 3,8$ ($k = 3,7$) pour l'EoS DDH(δ), la relation (6.45) apparaît correctement satisfaite.

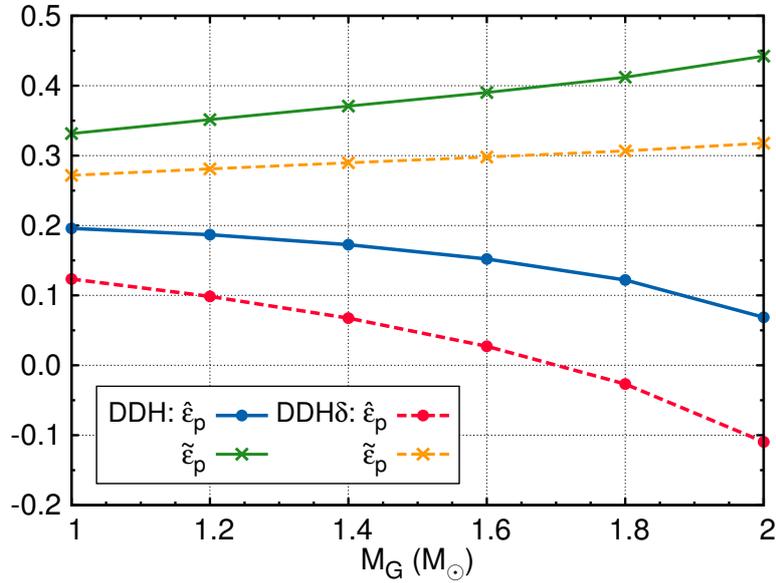


FIGURE 6.8 – **Couplage total**. Le coefficient total de couplage $\hat{\varepsilon}_p$ et le paramètre d'entraînement $\tilde{\varepsilon}_p$ sont représentés en fonction de la masse gravitationnelle, pour une étoile tournant à 11,19 Hz. Les résultats correspondants à l'EoS DDH(δ) sont dessinés en traits pleins (pointillés) et ont été obtenus en supposant que les deux fluides sont comobiles et à l'équilibre β .

plus importants que ceux associés à $\text{DDH}\delta$, voir Fig. 6.6, le coefficient total de couplage est plus grand pour DDH que pour $\text{DDH}\delta$. Notons par ailleurs qu'à faible fréquence de rotation ($f \lesssim 50$ Hz), les résultats obtenus à partir des équations (6.31) et (6.44) coïncident avec une précision meilleure que $\sim 0,1\%$ pour l'EoS DDH et $\sim 0,3\%$ pour $\text{DDH}\delta$, comme on peut le voir sur l'image de droite de la figure 6.9.

En utilisant (6.31), le temps de montée relativiste (6.29) est donné par

$$\tau_r = \frac{\hat{I}_p}{\hat{I}} \times \frac{1 - \hat{\varepsilon}_p - \hat{\varepsilon}_n}{2\zeta\mathcal{B}\Omega_n}, \quad (6.46)$$

dont l'expression est similaire à celle obtenue dans le cadre newtonien (C.17). Il est important de noter que les effets de relativité générale ne sont pas seulement contenus dans le facteur ζ , mais ceux-ci interviennent également dans le calcul de \hat{I}_p/\hat{I} , $\hat{\varepsilon}_p$ et $\hat{\varepsilon}_n$ (plus de détails seront donnés dans la section 7.2.2). De plus, en injectant l'équation (6.44) dans la relation précédente et en supposant que $\varepsilon_{np}^{\text{LT}} \simeq \varepsilon_{nn}^{\text{LT}}$ et $\varepsilon_{pn}^{\text{LT}} \simeq \varepsilon_{pp}^{\text{LT}}$, le temps de montée vérifie approximativement

$$\tau_r \simeq \frac{\hat{I}_p}{\hat{I}} \times \frac{1 - \tilde{\varepsilon}_p - \tilde{\varepsilon}_n}{1 - \varepsilon_{pp}^{\text{LT}} - \varepsilon_{nn}^{\text{LT}}} \times \frac{1}{2\zeta\mathcal{B}\Omega_n}, \quad (6.47)$$

sous l'hypothèse de rotation lente. Cette expression met clairement en évidence le fait que l'effet Lense-Thirring a tendance à ralentir le transfert de moment cinétique, alors que les effets d'entraînement dans le cœur l'accélèrent au contraire. Notons cependant que l'entraînement dans l'écorce interne, dû à la diffusion de Bragg des neutrons sur les noyaux, conduirait plutôt à $\tilde{\varepsilon}_X < 0$ (Chamel, 2005, 2012). Dans ce cas, les effets d'entraînement ralentiraient également le transfert de moment cinétique lors du glitch.

Jusqu'à présent, nous nous sommes concentrés uniquement sur l'approximation de rotation lente, dans laquelle les deux fluides sont seulement couplés par entraînement et effet Lense-Thirring. Bien que cette hypothèse soit pleinement justifiée pour le pulsar de Vela, elle pourrait ne pas être valide pour certains pulsars dont la vitesse de rotation est plus élevée. En particulier, à des fréquences de rotation supérieures à ~ 100 Hz, la déformation de l'étoile par effets centrifuges conduit à un couplage supplémentaire entre les fluides par gravité, qui est également présent dans le contexte newtonien (voir annexe C.4). Au-delà de ~ 100 Hz, on observe que le coefficient de couplage $\hat{\varepsilon}_p$ varie fortement lorsque la vitesse de rotation augmente et qu'il dépend significativement de l'hypothèse choisie sur l'équilibre chimique, voir Fig. 6.9.

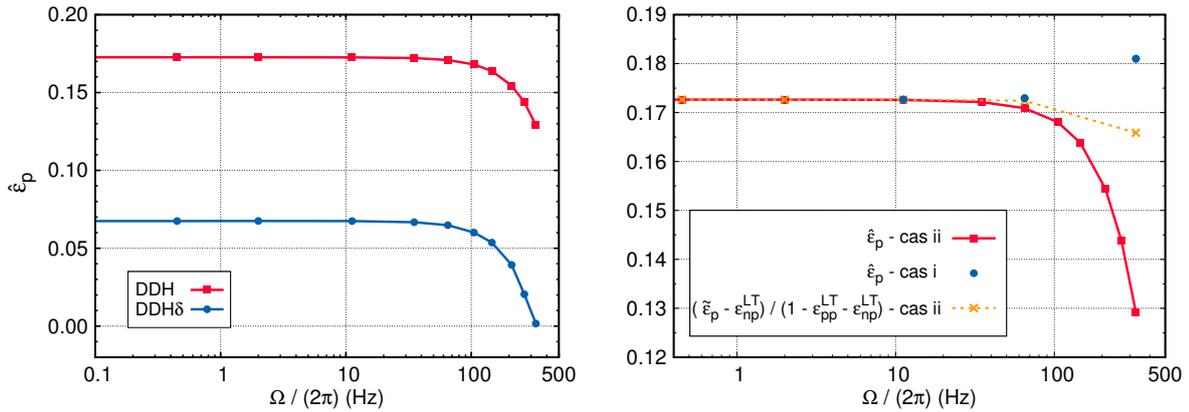


FIGURE 6.9 – **Coefficient total de couplage en fonction de la vitesse de rotation.** *Gauche* : Le coefficient $\hat{\varepsilon}_p$, donné par (6.31), est tracé en fonction de $f_n = f_p$ pour une étoile à neutrons de $1,4 M_\odot$. Les résultats obtenus avec l'EoS DDH(δ) sont représentés en rouge (en bleu), pour une masse baryonique totale fixée avec équilibre β au centre (cas ii). Les profils sont tracés jusqu'à 327 Hz, qui correspond à la fréquence de rotation mesurée la plus élevée d'un pulsar présentant des événements de glitches. *Droite* : La courbe rouge est identique à celle donnée sur l'image de gauche, pour l'EoS DDH. Le rapport $(\tilde{\varepsilon}_p - \varepsilon_{np}^{LT}) / (1 - \varepsilon_{pp}^{LT} - \varepsilon_{np}^{LT})$ est tracé en pointillés orange, pour une étoile à neutrons de $1,4 M_\odot$, modélisée par l'EoS DDH en appliquant le cas (ii). On pourra ainsi remarquer que l'égalité (6.44), reposant sur l'approximation de rotation lente, est très bien vérifiée pour $f \lesssim 50$ Hz. Les points bleus correspondent aux valeurs de $\hat{\varepsilon}_p$ (6.31) obtenues dans le cas (i), *i.e.* en fixant les masses baryoniques partielles à celles correspondant à la situation où les fluides sont comobiles et à l'équilibre β . Comme attendu, les effets liés au choix de la composition chimique n'ont un rôle important qu'à des vitesses de rotation élevées.

Simulations numériques de glitches

Sommaire

7.1	Modélisation numérique	173
7.2	Résultats numériques	176
7.3	Émission d'ondes gravitationnelles	186

Afin de valider l'expression analytique (6.46) obtenue dans le chapitre précédent, nous avons développé un code numérique qui permet de résoudre les équations du transfert de moment cinétique lors de la phase de montée d'un glitch et donc de déterminer le profil d'évolution temporelle de la vitesse de rotation de chaque fluide. Les résultats numériques de ce code sont présentés dans ce chapitre. Nous étudions également l'émission d'ondes gravitationnelles associée à cet événement, à l'aide de la formule classique du quadrupôle.

7.1 Modélisation numérique

7.1.1 Procédure numérique

La procédure numérique utilisée pour résoudre les équations de transfert de moment cinétique est la suivante :

1. Les vitesses de rotation initiales Ω_n^0 et Ω_p^0 , *i.e.* au moment où le glitch est déclenché, sont déterminées en suivant la méthode décrite dans la section 7.1.2.
2. À un instant t donné, la connaissance des vitesses de rotation $\Omega_n(t)$ et $\Omega_p(t)$ permet de calculer la configuration d'équilibre correspondante à l'aide du code `sfstar`, et d'en déduire la valeur du moment de friction mutuelle $\Gamma_{mf}(t)$, via la relation (6.15).
3. Les dérivées temporelles $\dot{\Omega}_X(t)$ des vitesses de rotation sont calculées à partir des équations (6.22).
4. Les vitesses de rotation au temps $t + \delta t$ sont ensuite déterminées par une méthode

d'Adams-Bashforth explicite à deux pas,

$$\Omega_X(t + \delta t) = \Omega_X(t) + \delta t \left(\frac{3}{2} \dot{\Omega}_X(t) - \frac{1}{2} \dot{\Omega}_X(t - \delta t) \right), \quad (7.1)$$

à partir de la donnée des dérivées temporelles aux temps t et $t - \delta t$.

5. Les étapes 2 à 4 sont alors répétées jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt, sur le temps t ou sur la différence de vitesse $\delta\Omega = \Omega_n - \Omega_p$, soit satisfait.

De cette manière, il est possible d'établir le profil d'évolution temporelle de chaque vitesse de rotation, de proche en proche, à l'aide d'une succession d'états d'équilibre (voir section 6.1.1), en gardant fixe la masse baryonique totale M^B avec $\mu_c^n = \mu_c^p$ (cas ii) ou pour des masses baryoniques partielles M_n^B et M_p^B constantes (cas i). Les moments d'inertie impliqués dans les équations (6.22) sont calculés par une méthode de différences finies d'ordre 4 ou à l'aide d'une interpolation spectrale reposant sur des polynômes de Tchebychev. Dans le premier cas, les grandeurs I_{XY} sont supposées constantes et sont évaluées à la fin du glitch (pour $\Omega_n^f = \Omega_p^f$, voir section suivante). En revanche, dans le second cas, les moments d'inertie sont calculés pour les vitesses de rotation correspondant à l'instant t considéré. Pour les différents résultats présentés dans la section 7.2, le pas de temps δt choisi est typiquement de l'ordre de $\sim \tau_r/10^4 - \tau_r/10^2$, où le temps de montée τ_r est estimé à partir de (6.29), de telle sorte que¹ $\delta t \ll \tau_r$. Notons enfin que, pour les différentes simulations réalisées, la masse baryonique totale M^B et le moment cinétique total J sont conservés lors du glitch avec une précision relative meilleure que 10^{-10} .

7.1.2 Détermination des conditions initiales

En principe, l'écart de vitesse $\delta\Omega_0 = \Omega_n^0 - \Omega_p^0$ au début du glitch devrait être déterminé à partir des forces d'ancrage agissant sur les lignes de tourbillons superfluides pendant l'évolution antérieure au glitch (voir section 3.2.2 ou Haskell *et al.* (2012b), par exemple). Nous allons voir qu'il est néanmoins possible d'estimer les vitesses de rotation initiales Ω_n^0 et Ω_p^0 à partir d'arguments simples, indépendamment des mécanismes physiques qui donnent naissance à la différence de vitesse $\delta\Omega$ et qui déclenchent le glitch.

Soient Ω_n^f et Ω_p^f , les vitesses de rotation à la fin de la phase de montée, *i.e.* lorsque la relaxation post-glitch débute. En supposant que le système relaxe complètement suite à la phase d'accélération du pulsar, comme le suggère l'équation (6.25), nous avons

$$\Omega_n^f = \Omega_p^f = \Omega^f. \quad (7.2)$$

Ainsi, après avoir choisi la valeur de Ω^f , on peut déduire simplement la vitesse angulaire initiale du fluide de particules chargées, Ω_p^0 , à partir du choix de l'amplitude

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega} = \frac{\Omega^f - \Omega_p^0}{\Omega_p^0} \quad (7.3)$$

1. En toute rigueur, le pas de temps devrait également vérifier $\delta t \gg \tau_h$, voir section 6.1.1, pour avoir le droit d'utiliser une suite d'états d'équilibre. Toutefois, choisir $\delta t \lesssim \tau_h$ ne change rien en pratique (hormis éventuellement la précision atteinte lors de la résolution numérique).

du glitch que l'on souhaite modéliser (voir section 2.3.1). Notons que pour Vela, $\Delta\Omega/\Omega$ est de l'ordre de $\sim 10^{-6}$ (Dodson *et al.*, 2007).

En outre, le moment cinétique total $J = J_n + J_p$ étant conservé pendant toute la phase de montée, voir (6.7), la dernière inconnue Ω_n^0 est alors obtenue à partir de la relation

$$J(\Omega_n^0, \Omega_p^0) = J(\Omega_n^f, \Omega_p^f). \quad (7.4)$$

Puisque les amplitudes de glitches sont très faibles, les vitesses de rotation finales Ω_X^f sont très proches des valeurs initiales Ω_X^0 . Un développement de J au premier ordre en les vitesses angulaires est donc suffisant pour déterminer Ω_n^0 avec une très bonne précision :

$$\Omega_n^0 \simeq \Omega^f \left(1 + \frac{\hat{I}_p}{\hat{I}_n} \frac{\Delta\Omega}{\Omega} \right), \quad (7.5)$$

où les moments d'inertie sont déterminés¹ à la fin du glitch, *i.e.* pour $\Omega_p^f = \Omega_n^f = \Omega^f$.

La différence initiale de vitesse $\delta\Omega_0$ est alors donnée par

$$\delta\Omega_0 = \Omega_n^0 - \Omega_p^0 \simeq \Omega^f \frac{\hat{I}}{\hat{I}_n} \frac{\Delta\Omega}{\Omega}, \quad (7.6)$$

ce qui conduit à $\sim 7 \times 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$ pour le pulsar de Vela, en prenant $\Omega^f/(2\pi) = 11,19 \text{ Hz}$. On en déduit que l'écart de vitesse entre les fluides vérifie à tout instant la condition

$$\frac{\delta\Omega}{\Omega} \leq \frac{\delta\Omega_0}{\Omega} \simeq \frac{\Delta\Omega}{\Omega} \ll 1, \quad (7.7)$$

de sorte que, lors d'un événement de glitch, l'étoile à neutrons reste extrêmement proche du cas où les deux fluides sont comobiles.

En résumé, les simulations numériques de glitches que l'on a réalisées requièrent les ingrédients macroscopiques suivants :

- la vitesse de rotation Ω^f de l'étoile (dont la valeur sera simplement dénotée par Ω dans la suite),
- sa masse gravitationnelle M_G (ou plutôt sa masse baryonique M^B),
- l'amplitude du glitch $\Delta\Omega/\Omega$,

qui peuvent potentiellement être obtenus directement à partir des observations. Par ailleurs, il est également nécessaire de spécifier certaines données microscopiques, à savoir :

- l'EoS utilisée pour décrire l'intérieur de l'étoile,
- l'hypothèse réalisée sur la composition chimique (voir section 6.1.4),
- le paramètre de friction mutuelle $\bar{\mathcal{B}}$.

1. En pratique, les moments d'inertie sont ici calculés par différences finies. Dans le cas (ii), où la masse baryonique totale est fixée avec équilibre chimique au centre, le choix de M^B correspond à la valeur obtenue par le code `sfstar` pour une masse gravitationnelle donnée et pour $\Omega_n^f = \Omega_p^f = \Omega^f$. Par simplicité, les valeurs de Ω_n^0 et Ω_p^0 que nous utiliserons dans le cas (i) seront identiques à celles obtenues dans le cas (ii) à partir des mêmes paramètres d'entrée. Pour les amplitudes de glitches observées, la valeur de $\delta\Omega_0$ n'a aucune influence sur le temps de montée.

Contrairement à la masse baryonique M^B , la masse gravitationnelle M_G , qui correspond à la masse observée du pulsar, est susceptible de varier pendant la phase de montée. Toutefois, on constate que la variation relative de M_G associée au transfert de moment cinétique est inférieure à quelques 10^{-10} pour les différents tests réalisés.

7.2 Résultats numériques

Nous présentons ici plusieurs résultats obtenus à partir du modèle numérique que l'on vient de décrire. Dans la suite, nous nous intéressons principalement au cas d'étoiles à neutrons en rotation lente, comme le pulsar de Vela, pour lesquelles l'hypothèse choisie sur la composition chimique est sans importance (en pratique, les calculs numériques sont effectués dans le cas (ii), voir section 6.1.4). L'impact de l'équilibre chimique sur l'évolution des étoiles à neutrons de plus grande vitesse de rotation sera discuté à la fin de la section 7.2.1.

7.2.1 Évolution dynamique

Nous montrons, sur la figure 7.1, l'évolution temporelle de la vitesse de rotation de chaque fluide et de l'écart en vitesse $\delta\Omega = \Omega_n - \Omega_p$ pour des conditions propres au pulsar de Vela. La masse gravitationnelle de ce pulsar étant mal connue, nous avons choisi la valeur canonique $M_G = 1,4 M_\odot$ dans cet exemple. De plus, le paramètre de friction mutuelle est arbitrairement fixé à $\bar{\mathcal{B}} = 10^{-4}$. On observe que les résultats obtenus avec les EoSs DDH et DDH δ sont relativement proches¹. Comme on peut le voir sur l'image de droite de la figure 7.1, l'évolution de $\delta\Omega$ peut être décrite en très bonne approximation par une loi exponentielle, comme attendu (voir section 6.2.2). Pour les paramètres considérés ici, les EoSs DDH et DDH δ prédisent respectivement $\tau_r = 4,23$ s et $\tau_r = 2,92$ s. Il est important de remarquer que ces temps caractéristiques, déduits de l'évolution de l'écart en vitesse, correspondent bien aux temps de montée qui pourraient être mesurés à l'aide d'observations de glitches très précises, ces dernières n'ayant accès qu'à la vitesse de rotation du pulsar $\Omega = \Omega_p$ (voir équation (6.27)).

Afin d'étudier la dépendance du temps de montée en les différents paramètres d'entrée de notre modèle, nous avons réalisé un ensemble de simulations pour lesquelles nous avons fait varier le paramètre de friction mutuelle $\bar{\mathcal{B}}$, la vitesse de rotation Ω de l'étoile ou encore sa masse gravitationnelle M_G . Pour des valeurs données de Ω et M_G , on observe sur l'image de gauche de la figure 7.2 que le temps de montée τ_r est inversement proportionnel à $\bar{\mathcal{B}}$, comme attendu (voir équation (6.46)). Sur l'image de droite de la figure 7.2, nous traçons τ_r en fonction de la fréquence de rotation du pulsar $f = \Omega/(2\pi)$, pour deux valeurs différentes de la masse gravitationnelle et pour les deux EoSs, en supposant que l'amplitude du glitch est $\Delta\Omega/\Omega = 10^{-6}$. Le temps de montée est inversement proportionnel à f en bonne approximation, en accord avec (6.46). Il est toutefois possible de remarquer un très faible écart à la loi $\tau_r \propto \Omega^{-1}$ pour $f \gtrsim 100$ Hz, dû au fait que les moments d'inertie augmentent fortement avec la vitesse de rotation dans cette gamme de valeurs (voir Fig. 6.4). Les

1. L'influence de l'EoS sera étudiée plus en détails dans la suite.

7.2 Résultats numériques

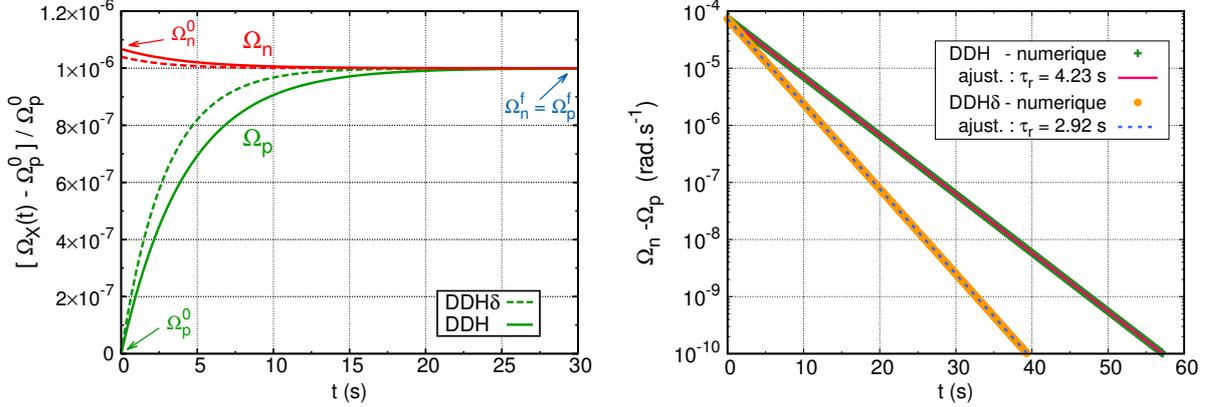


FIGURE 7.1 – **Évolution temporelle des vitesses de rotation lors de la phase de montée d'un glitch.** *Gauche* : Les vitesses de rotation du superfluide de neutrons (en rouge) et du fluide de particules chargées (en vert) sont tracées en fonction du temps, pour des paramètres d'entrée réalistes correspondant au pulsar de Vela ($f = \Omega/(2\pi) = 11,19$ Hz, $\Delta\Omega/\Omega = 10^{-6}$). La masse gravitationnelle et le paramètre de friction mutuelle considérés sont $M_G = 1,4 M_\odot$ et $\bar{\mathcal{B}} = 10^{-4}$. La dynamique de chaque fluide est représentée en termes de $(\Omega_X(t) - \Omega_p^0)/\Omega_p^0$. Les résultats obtenus avec l'EoS DDH(δ) sont dessinés en traits pleins (tiretés). *Droite* : Évolution temporelle de la différence de vitesse $\delta\Omega = \Omega_n - \Omega_p$ pour les mêmes paramètres d'entrée. Les données numériques sont ajustées par une loi exponentiellement décroissante, du type (6.25).

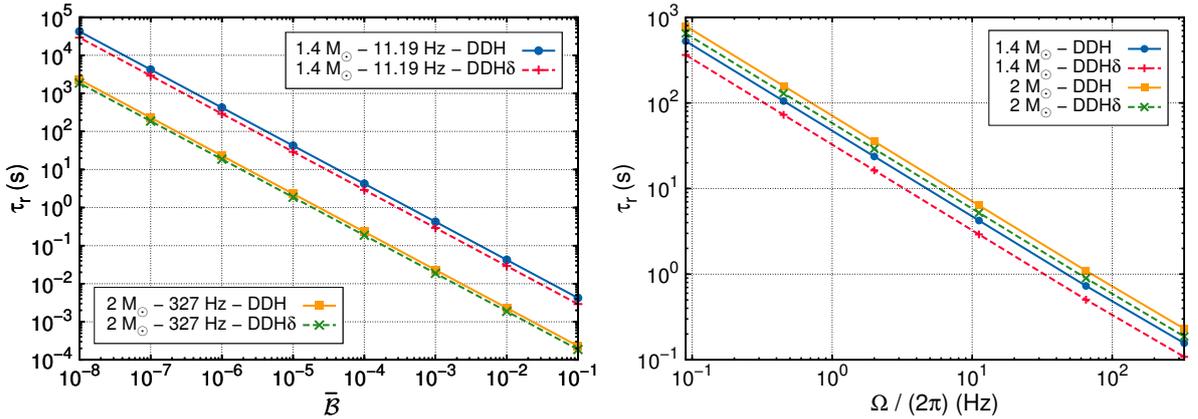


FIGURE 7.2 – **Influence du paramètre de friction mutuelle et de la vitesse de rotation du pulsar sur le temps de montée.** *Gauche* : Le temps de montée du glitch, τ_r , est tracé en fonction de $\bar{\mathcal{B}}$. Deux masses gravitationnelles et deux vitesses de rotation sont considérées. *Droite* : τ_r est représenté en fonction de la fréquence de rotation du pulsar, $f = \Omega/(2\pi)$, pour $\bar{\mathcal{B}} = 10^{-4}$ et pour deux valeurs de M_G . Pour les deux images, l'amplitude du glitch est fixée à $\Delta\Omega/\Omega = 10^{-6}$ et les résultats obtenus avec l'EoS DDH(δ) sont dessinés en traits pleins (tiretés).

résultats numériques que l'on vient de présenter conduisent aux estimations suivantes sur les temps de montée :

$$\begin{aligned}\tau_r^{\text{DDH}} &\simeq 4,23 \left(\frac{10^{-4}}{\bar{\mathcal{B}}} \right) \left(\frac{2\pi \times 11,19 \text{ Hz}}{\Omega} \right) \text{ s}, \\ \tau_r^{\text{DDH}\delta} &\simeq 2,92 \left(\frac{10^{-4}}{\bar{\mathcal{B}}} \right) \left(\frac{2\pi \times 11,19 \text{ Hz}}{\Omega} \right) \text{ s},\end{aligned}\tag{7.8}$$

pour $M_G = 1,4 M_\odot$ et $\Delta\Omega/\Omega \ll 1$. Ces temps caractéristiques sont plus élevés à $2 M_\odot$, les coefficients numériques 4,23 et 2,92 devant alors être remplacés par 6,35 et 5,20 (voir également la figure 7.4).

Pour les différents cas représentés sur la figure 7.2, les résultats numériques sont en excellent accord avec les valeurs prédites par la formule (6.29), avec une précision (relative) supérieure à ¹ $\sim 5 \times 10^{-6}$. Cette limite de précision provient des erreurs numériques associées à la discrétisation temporelle (choix de δt) utilisée dans les simulations dynamiques et de la précision du calcul des moments d'inertie. La raison pour laquelle la formule (6.29) donne une estimation aussi précise du temps de montée réside dans le fait que les amplitudes de glitches observées sont extrêmement faibles. Ainsi, pour des paramètres de glitches réalistes, nous en déduisons qu'il est possible d'obtenir très précisément le temps de montée à l'aide de (6.29), dont le calcul ignore la variation des moments d'inertie pendant le glitch et ne nécessite que l'utilisation de configurations stationnaires (voir section 6.3).

Dans le but d'étudier l'influence de $\Delta\Omega/\Omega$ sur τ_r , nous avons réalisé différentes simulations avec des amplitudes de glitches allant jusqu'à $\Delta\Omega/\Omega = 0,1$, ce qui est bien au-delà des valeurs mesurées (voir section 2.3.1). Pour cette gamme d'amplitude, l'écart de vitesse entre les fluides peut toujours être ajusté par une loi exponentielle avec une précision suffisante. L'expression (6.29) n'est cependant plus valide et τ_r dépend alors des conditions initiales et donc de l'amplitude du glitch (Sidery *et al.*, 2010). Sur la figure 7.3, nous traçons les variations relatives du temps de montée obtenu numériquement (τ_r^{num}) pour différentes valeurs de l'amplitude du glitch par rapport au temps de montée τ_r^{ref} mesuré à $\Delta\Omega/\Omega = 10^{-6}$, pour une étoile à neutrons tournant à 11,19 Hz. On observe que ces différences croissent linéairement avec $\Delta\Omega/\Omega$, comme on l'attend dans le cadre newtonien (voir les équations (65) et (67) de Sidery *et al.* (2010)). Par ailleurs, ces résultats confirment que, pour des amplitudes de glitches réalistes, l'influence de $\Delta\Omega/\Omega$ sur τ_r est tout à fait négligeable.

Comme illustré sur l'image de gauche de la figure 7.4, le temps de montée augmente avec la masse gravitationnelle de l'étoile, lorsque tous les autres paramètres d'entrée sont maintenus fixés. Ceci s'explique de la manière suivante. Tout d'abord, la fraction de protons $x_p = n_p/(n_n + n_p)$ augmente avec M_G , car les densités atteintes à l'intérieur de l'étoile sont de plus en plus importantes (voir Fig. 5.5). Par conséquent, le rapport \hat{I}_p/\hat{I} est d'autant plus grand que la masse gravitationnelle est élevée (voir l'image de droite de

1. Pour les paramètres considérés ici, les différences relatives entre les résultats obtenus en maintenant ou non les moments d'inertie constants durant le glitch (voir section 7.1.1) sont typiquement bien inférieures à $\sim 5 \times 10^{-6}$. Par conséquent, les moments d'inertie sont maintenus fixes dans la plupart des simulations présentées dans ce chapitre.

7.2 Résultats numériques

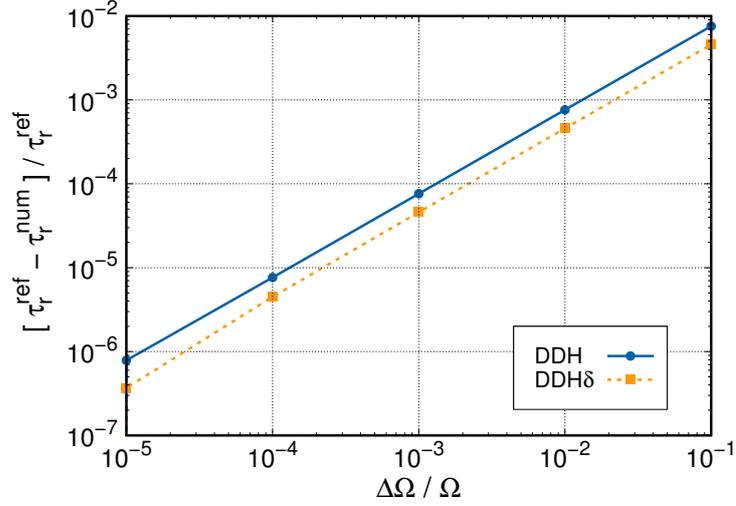


FIGURE 7.3 – **Influence de l'amplitude du glitch sur le temps de montée.** Les variations relatives du temps de montée obtenu numériquement (τ_r^{num}) par rapport au temps de montée de référence τ_r^{ref} , mesuré à $\Delta\Omega/\Omega = 10^{-6}$, sont tracées en fonction de l'amplitude du glitch considérée. Les résultats sont donnés ici pour une étoile à neutrons de $1,4 M_\odot$ tournant à 11,19 Hz et pour $\bar{B} = 10^{-4}$.

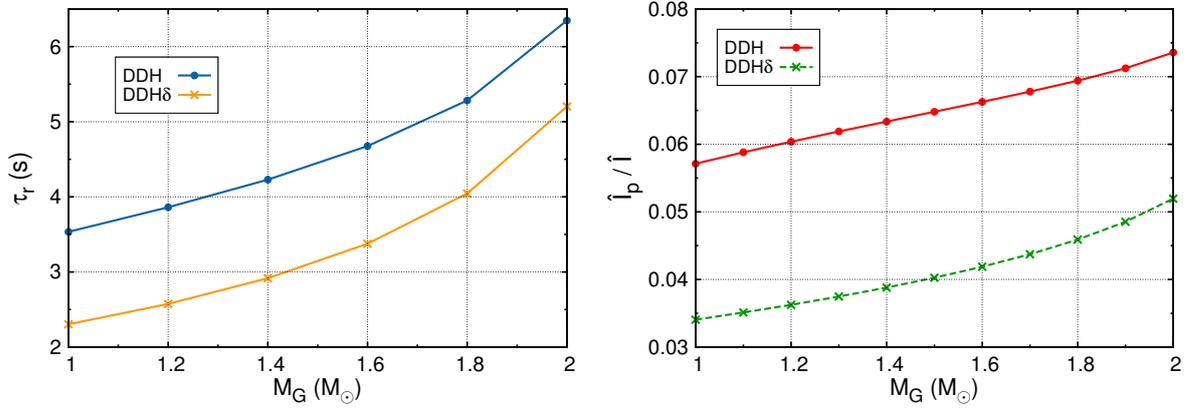


FIGURE 7.4 – **Temps de montée et rapport \hat{I}_p/\hat{I} pour différentes masses gravitationnelles.** Le temps de montée τ_r (à gauche) et le rapport du moment d'inertie du fluide de protons \hat{I}_p sur le moment d'inertie total \hat{I} (à droite) sont tracés en fonction de la masse gravitationnelle M_G , pour $f = 11, 19$ Hz. Les paramètres \bar{B} et $\Delta\Omega/\Omega$ sont respectivement fixés à 10^{-4} et 10^{-6} . Pour les deux images, les résultats obtenus avec l'EoS DDH(δ) sont dessinés à l'aide de points (croix).

la figure 7.4). En outre, le facteur ζ et les coefficients de couplage $\hat{\epsilon}_X$ diminuent fortement lorsque M_G augmente (voir Figs. 6.5 et 6.8). Ces différents phénomènes conduisent à freiner progressivement le transfert de moment cinétique au fur et à mesure que la masse de l'étoile croît (voir (6.46)). Par ailleurs, on observe que τ_r est systématiquement plus long

avec l'EoS DDH, bien que le couplage entre les fluides soit plus important pour DDH que pour DDH δ . Ceci est dû au fait que la densité centrale est toujours plus élevée avec DDH (voir, e.g., Fig. 5.20) et que, pour les densités correspondant à l'intérieur des étoiles à neutrons, l'EoS DDH prédit une fraction de protons plus importante que DDH δ (voir Fig. 5.5), de sorte qu'on a $(\hat{I}_p/\hat{I})_{\text{DDH}} > (\hat{I}_p/\hat{I})_{\text{DDH}\delta}$, comme on peut le voir sur l'image de droite de la figure 7.4.

Nous avons enfin réalisé quelques tests dans le but d'étudier l'impact de l'hypothèse choisie au niveau de l'évolution de la composition chimique sur le temps de montée (voir section 6.1.4). À faible vitesse de rotation, les différences obtenues sur τ_r en considérant les masses baryoniques partielles constantes (cas i), ou en fixant la masse baryonique totale avec équilibre chimique au centre de l'étoile (cas ii), sont complètement négligeables, comme on peut s'y attendre (voir Fig. 6.9). Par exemple, pour $f = 11, 19$ Hz, la différence relative $(\tau_r^{ii} - \tau_r^i)/\tau_r^{ii}$ est inférieure à $\sim 7 \times 10^{-5}$ avec les deux EoSs, en supposant que $\Delta\Omega/\Omega \ll 1$ et que les moments d'inertie sont constants¹. Néanmoins, l'influence de cette hypothèse augmente fortement avec la vitesse de rotation. Ainsi, pour les deux EoSs, les écarts relatifs entre les cas (i) et (ii) sont de l'ordre de $\sim 2 \times 10^{-3}$ à 65 Hz et de $\sim 5 \times 10^{-2}$ à 327 Hz. Il est toutefois important de noter que l'influence de l'hypothèse relative à la composition chimique sur τ_r reste beaucoup plus faible que la dépendance du temps de montée en chacun des autres paramètres d'entrée, tels que la masse ou la vitesse de rotation. C'est la raison pour laquelle nous n'avons considéré que le cas (ii) dans la plupart des résultats présentés ici.

7.2.2 Contribution de la relativité générale

Afin d'étudier la contribution globale de la relativité générale sur la dynamique des glitches, nous comparons ici les temps de montée obtenus dans le cadre newtonien et dans le contexte relativiste pour des paramètres d'entrée similaires. Par simplicité, nous considérons à présent deux EoSs polytropiques², de forme similaire à celles déjà implémentées dans le code `sfstar` par [Prix et al. \(2005\)](#). Ces EoSs, que nous désignerons par EoS I et EoS II dans la suite, sont respectivement caractérisées par une densité lagrangienne $\Lambda = -\mathcal{E}$ vérifiant

$$\mathcal{E}(n_n, n_p, \Delta^2) = \frac{1}{2}\kappa_n n_n^2 + \frac{1}{2}\kappa_p n_p^2 + \kappa_{np} n_n n_p + \kappa_\Delta n_n n_p \Delta^2 \quad (+ \rho c^2), \quad (7.9)$$

et

$$\mathcal{E}(n_n, n_p, \Delta^2) = \frac{1}{2}\kappa_n n_n^{2,1} + \frac{1}{2}\kappa_p n_p^{2,3} + \kappa_\Delta n_n n_p \Delta^2 \quad (+ \rho c^2), \quad (7.10)$$

1. Nous avons précisé la méthode de calcul des moments d'inertie pour le cas (ii) dans la note de bas de page donnée dans la section 7.1.2. En ce qui concerne le cas (i), les masses baryoniques partielles M_n^B et M_p^B , avec lesquelles les moments d'inertie sont calculés (pour $\Omega_n = \Omega_p = \Omega^f$), sont déterminées au début du glitch par le code `sfstar` pour les mêmes valeurs de Ω_n^0 et Ω_p^0 que celles prédites dans le cas (ii) avec des paramètres d'entrée identiques.

2. L'utilisation d'EoSs réalistes nécessiterait entre autres d'adapter la partie du code `sfstar` faisant appel à une EoS tabulée aux équations de la mécanique newtonienne.

7.2 Résultats numériques

	κ_n	κ_p	κ_{np}	κ_Δ
EoS I	0,05	0,5	0,025	0,02
EoS II	0,046	1,4	-	0,1

TABLE 7.1 – **Paramètres définissant les EoSs I et II.** Pour l’EoS I, les grandeurs κ_n , κ_p et κ_{np} sont données en unité de $\rho_* c^2 n_*^{-2}$, où $n_* = 0,1 \text{ fm}^{-3}$ et $\rho_* = 1,66 \times 10^{17} \text{ kg.m}^{-3}$. Les termes κ_n et κ_p sont respectivement exprimés en unités de $\rho_* c^2 n_*^{-2,1}$ et $\rho_* c^2 n_*^{-2,3}$ pour la deuxième EoS. Pour les deux EoSs, l’unité utilisée pour κ_Δ est $\rho_* n_*^{-2}$.

où nous avons utilisé les mêmes notations que dans (4.102). Notons que le terme d’énergie de masse $\rho c^2 = (m_n n_n + m_p n_p) c^2$ n’est présent que dans le cadre de la relativité générale¹. Les paramètres κ_n , κ_p et κ_{np} sont choisis de sorte que les EoSs I et II prédisent des valeurs « réalistes » pour la masse, le rayon et la fraction de protons associés aux étoiles modélisées (voir Table 7.1). Ainsi, l’EoS I conduit à une fraction de protons constante dans l’étoile, avec $x_p = 0,05$ (voir (C.19)). En revanche, la fraction de protons obtenue avec l’EoS II varie et est typiquement comprise entre $\sim 0,05$ et $\sim 0,1$, pour une étoile (relativiste) de $1,4 M_\odot$ tournant à 10 Hz. Pour ces valeurs de masse gravitationnelle et de vitesse de rotation, le rayon circonférentiel de l’étoile dans le plan équatorial vaut environ $R_{\text{circ}} \simeq 13 \text{ km}$ pour les deux EoSs, en relativité générale. L’entraînement est caractérisé par le coefficient κ_Δ . La forme des EoSs considérées, voir Éqs. (7.9) et (7.10), a été adoptée de manière cohérente avec le fait que les effets d’entraînement s’annulent lorsque l’un des deux fluides disparaît. Pour l’EoS I, nous prenons $\kappa_\Delta = 0,02$ afin de satisfaire les conditions de stabilité (5.67). Ce choix conduit à $\tilde{\varepsilon}_p \simeq 0,07$, pour une étoile à neutrons relativiste, avec $M_G = 1,4 M_\odot$ et $f = 10 \text{ Hz}$. Bien que cette valeur soit relativement petite par rapport à celles prédites par des EoS réalistes (voir Fig. 6.6, par exemple), elle correspond toutefois aux régions externes du cœur des étoiles à neutrons, où les effets d’entraînement sont très faibles. En revanche, nous supposons que $\kappa_\Delta = 0,1$ pour l’EoS II. Cette valeur permet d’obtenir des effets d’entraînement plus importants et plus réalistes, de l’ordre de $\tilde{\varepsilon}_p \simeq 0,29$ pour les mêmes masse et vitesse de rotation, tout en vérifiant les conditions (5.67). Ainsi, le choix de ces deux EoSs permet d’étudier l’influence des effets d’entraînement sur la différence entre calculs relativiste et newtonien.

Sur la figure 7.5, nous traçons les différences relatives entre les valeurs de τ_r calculées en mécanique newtonienne (τ_r^{newt}) et en relativité générale (τ_r^{GR}) pour une même masse gravitationnelle en fonction du paramètre de compacité (4.91), en utilisant les EoSs I (à gauche) et II (à droite). Ces valeurs, représentées en gras et par des points bleus, ont été obtenues par le code d’évolution décrit dans la section 7.1 pour une fréquence de rotation de 10 Hz, en modifiant progressivement la masse (gravitationnelle) de l’étoile modélisée. Remarquons que la relativité générale est susceptible de jouer un rôle important dans la détermination des moments d’inertie \hat{I}_p et \hat{I} , du facteur ζ et des coefficients de couplage $\hat{\varepsilon}_X$ intervenant dans l’expression (6.46) du temps de montée. Pour mettre en évidence l’importance des effets relativistes sur chacun de ces termes, nous traçons

1. Plus de détails sur les différences liées au calcul des configurations en mécanique newtonienne et en relativité générale sont donnés dans la section IV-A de Prix *et al.* (2005).

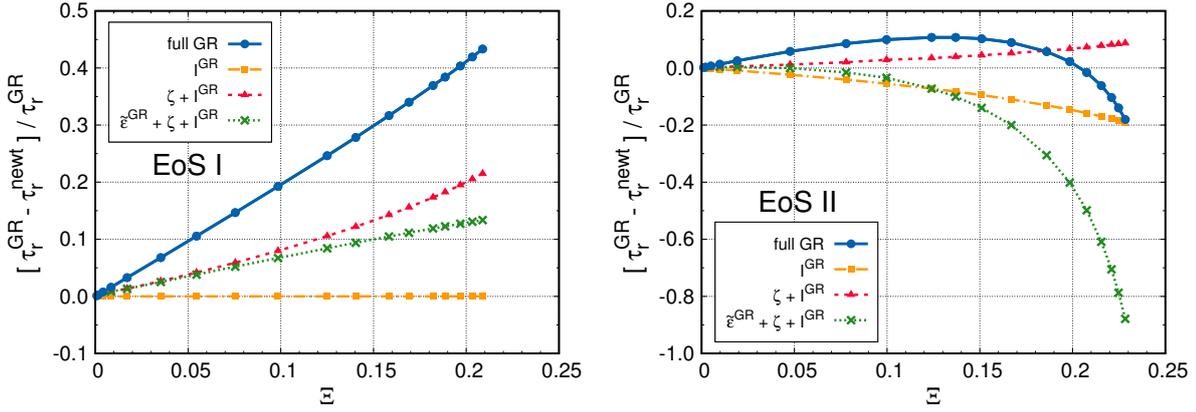


FIGURE 7.5 – **Importance des effets de relativité générale sur le calcul du temps de montée.** Les différences relatives entre les temps de montée newtonien (τ_r^{newt}) et relativiste (τ_r^{GR}) sont tracées (traits pleins bleus) en fonction du paramètre de compacité (obtenu en relativité générale), pour une étoile à neutrons tournant à 10 Hz. En pratique, ces valeurs sont calculées pour $\Delta\Omega/\Omega = 10^{-6}$, $\bar{\mathcal{B}} = 10^{-4}$ et une composition chimique gouvernée par le cas (ii), même si ces paramètres n'ont pas d'influence notable sur les courbes étudiées. Les résultats sont présentés pour les deux EoSs polytropiques décrites dans le texte, l'image de gauche (droite) correspondant à l'EoS I (II). Les autres courbes mettent en évidence la contribution de la relativité générale sur le calcul des différents termes impliqués dans l'expression (6.46) du temps de montée. Ainsi, les résultats tenant compte uniquement des corrections relativistes sur le rapport \hat{I}_p/\hat{I} sont dessinés à l'aide de carrés orange, tandis que les courbes en tirets rouges (avec des triangles) contiennent également les corrections sur le facteur ζ . Les lignes en pointillés verts (avec des croix) incluent les corrections additionnelles sur les paramètres d'entraînement $\tilde{\varepsilon}_X$, mais ne tiennent pas compte de la contribution de l'effet Lense-Thirring dans le calcul des coefficients de couplage $\hat{\varepsilon}_X$ (voir Éq. (6.44)).

également les quantités suivantes sur la figure 7.5 :

- $1 - \frac{\hat{I}_p^{\text{newt}}}{\hat{I}_p^{\text{GR}}} \frac{\hat{I}^{\text{GR}}}{\hat{I}^{\text{newt}}}$ (carrés orange), qui tient uniquement compte des corrections relativistes sur le rapport \hat{I}_p/\hat{I} , où les valeurs calculées dans les cadres newtonien et de la relativité générale sont respectivement désignées par « newt » et « GR »,
- $1 - \frac{\hat{I}_p^{\text{newt}}}{\hat{I}_p^{\text{GR}}} \frac{\hat{I}^{\text{GR}}}{\hat{I}^{\text{newt}}} \zeta$ (triangles rouges), qui considère les effets relativistes à la fois sur le rapport des moments d'inertie et sur le facteur ζ ,
- $1 - \frac{\hat{I}_p^{\text{newt}}}{\hat{I}_p^{\text{GR}}} \frac{\hat{I}^{\text{GR}}}{\hat{I}^{\text{newt}}} \frac{1 - \tilde{\varepsilon}_p^{\text{newt}} - \tilde{\varepsilon}_n^{\text{newt}}}{1 - \tilde{\varepsilon}_p^{\text{GR}} - \tilde{\varepsilon}_n^{\text{GR}}} \zeta$ (croix vertes), qui contient les corrections relativistes sur les moments d'inertie, ζ et les paramètres d'entraînement $\tilde{\varepsilon}_X$, mais qui n'inclut pas la contribution de l'effet Lense-Thirring dans le calcul des coefficients de couplage $\hat{\varepsilon}_X$ en relativité générale.

Notons que la différence relative des temps de montée vérifie la relation :

$$\frac{\tau_r^{\text{GR}} - \tau_r^{\text{newt}}}{\tau_r^{\text{GR}}} = 1 - \frac{\hat{I}_p^{\text{newt}}}{\hat{I}_p^{\text{GR}}} \frac{\hat{I}_p^{\text{GR}}}{\hat{I}_p^{\text{newt}}} \frac{1 - \tilde{\varepsilon}_p^{\text{newt}} - \tilde{\varepsilon}_n^{\text{newt}}}{1 - \hat{\varepsilon}_p^{\text{GR}} - \hat{\varepsilon}_n^{\text{GR}}} \zeta, \quad (7.11)$$

voir équation (6.46).

Comme attendu, les corrections associées à la prise en compte de la relativité générale tendent vers zéro lorsque la compacité diminue, voir Fig. 7.5. En ce qui concerne l'EoS I, on observe que les effets relativistes sur le rapport \hat{I}_p/\hat{I} sont extrêmement faibles. Cela est dû au fait que la fraction de protons x_p est constante dans l'étoile et que $\hat{I}_p/\hat{I} \simeq x_p$ en relativité générale et en mécanique newtonienne, dans l'approximation de rotation lente, en supposant que les fluides sont comobiles et à l'équilibre β . À la limite newtonienne, le facteur ζ est égal à 1 (voir annexe C.2). Comme nous l'avons vu sur la figure 6.5, la relativité générale conduit à $\zeta \lesssim 1$, ce qui allonge le temps de montée (les courbes rouges sont donc situées au-dessus des courbes orange apparaissant dans la figure 7.5). De plus, les paramètres d'entraînement relativistes sont plus élevés que leurs équivalents newtoniens, car les densités baryoniques atteintes dans l'étoile sont plus importantes quand la relativité générale entre en jeu (*i.e.* le rayon stellaire est plus faible pour une même masse gravitationnelle). Par conséquent, les effets relativistes sur $\tilde{\varepsilon}_X$ réduisent le temps de montée (et les courbes vertes sont logiquement en dessous des rouges). Enfin, la contribution de l'effet Lense-Thirring sur les coefficients de couplage $\hat{\varepsilon}_X$ (6.44) augmente également la valeur de τ_r , voir Éq. (6.47) (de sorte que les courbes bleues sont au-dessus des vertes). Des remarques similaires s'appliquent à l'EoS II, avec deux différences notables. D'une part, la relativité générale modifie légèrement le rapport des moments d'inertie (voir l'image de droite de la figure 7.5). D'autre part, les effets d'entraînement associés à cette EoS sont beaucoup plus importants que ceux prédits par l'EoS I, de sorte que le temps de montée est davantage réduit (voir la courbe verte). En conclusion, les corrections relativistes sont importantes sur tous les termes impliqués dans le calcul du temps de montée (6.46), mais leurs valeurs respectives dépendent fortement de l'EoS considérée. En particulier, on observe que l'influence de l'effet Lense-Thirring sur le couplage entre les fluides n'est pas négligeable.

Pour des valeurs du paramètre de compacité pertinentes pour les étoiles à neutrons, *i.e.* $\Xi \sim 0,15 - 0,25$ (voir Fig. 5.15), ces deux EoS prédisent que l'erreur commise en prenant le temps de montée newtonien à la place de sa valeur relativiste est de l'ordre de $\sim 20 - 40\%$, à 10 Hz, comme on peut le voir sur la figure 7.5. Il est donc indispensable de se placer dans le cadre de la relativité générale si l'on souhaite calculer précisément les temps de montée relatifs aux événements de glitches. En outre, il est important de mentionner que ces erreurs dépendent également de la vitesse de rotation considérée. Par exemple, la différence relative $(\tau_r^{\text{GR}} - \tau_r^{\text{newt}})/\tau_r^{\text{GR}}$ mesurée pour une étoile à neutrons de $1,4 M_\odot$ varie de $\sim 30\%$ à 10 Hz à $\sim -10\%$ à 327 Hz, en utilisant l'EoS I (voir Fig. 7.6).

7.2.3 Considérations astrophysiques

Sur la figure 7.7, plusieurs lignes $\tau_r = cte$ sont représentées dans un plan $\bar{B} - M_G$, pour les EoSs DDH et DDH δ . Ces résultats sont calculés pour $f = 11, 19$ Hz et $\Delta\Omega/\Omega = 10^{-6}$,

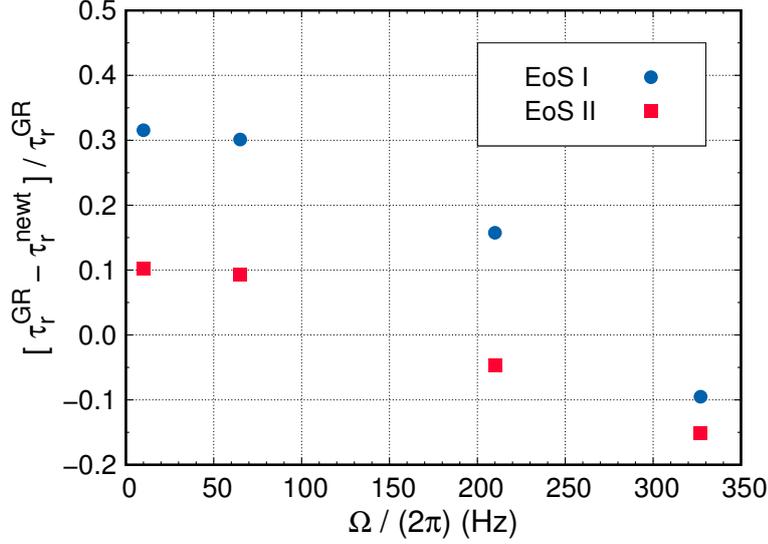


FIGURE 7.6 – **Importance des effets relativistes en fonction de la fréquence de rotation.** La différence relative $(\tau_r^{\text{GR}} - \tau_r^{\text{newt}}) / \tau_r^{\text{GR}}$ est tracée en fonction de la fréquence de rotation, pour une étoile à neutrons de $1,4 M_{\odot}$. Les résultats correspondant à l’EoS I (II) sont indiqués par des points bleus (carrés rouges).

typiques du pulsar de Vela. La limite supérieure actuelle, $\tau_r < 30$ s (Dodson *et al.*, 2007), indique que le paramètre de friction mutuelle moyen $\bar{\mathcal{B}}$ doit être plus grand que $\sim 10^{-5}$ pour expliquer les glitches de ce pulsar. En introduisant alors le paramètre traînée/portance moyen $\bar{\xi}$, tel que

$$\bar{\mathcal{B}} = \frac{\bar{\xi}}{1 + \bar{\xi}^2}, \quad (7.12)$$

voir Éq. (6.13), cette limite implique que $\bar{\xi}$ doit vérifier $10^{-5} \lesssim \bar{\xi} \lesssim 10^5$, ce qui n’est pas très contraignant étant donné la diversité des mécanismes dissipatifs susceptibles de donner naissance à la force de friction mutuelle et aux incertitudes qui leur sont associées (voir section 6.2.1). Notons qu’une conclusion similaire a également été obtenue par Glampedakis *et al.* (2009). La dépendance du temps de montée en M_G étant beaucoup moins prononcée qu’en $\bar{\mathcal{B}}$, on peut s’attendre à ce que de futures observations précises de glitches, résolvant le temps de montée τ_r , apportent des contraintes très importantes sur le paramètre de friction mutuelle et donc, plus généralement, sur les processus gouvernant le transfert de moment cinétique durant la phase de montée.

On peut remarquer sur la figure 7.8 que le plus petit temps de montée associé aux glitches de Vela, donné par l’équation (6.30), vaut environ $\sim 0,6 - 0,8$ ms, pour une étoile à neutrons de $1,4 M_{\odot}$. Bien que ces valeurs minimales soient comparables au temps hydrodynamique (6.1), les valeurs réalistes de τ_r sont probablement plus grandes, si l’on en croit les estimations actuelles du paramètre de friction mutuelle (voir section 6.2.1). Par conséquent, l’évolution dynamique de l’étoile pendant la phase de montée peut effectivement être décrite par une succession de configurations stationnaires, ce qui valide a posteriori l’hypothèse avancée dans la section 6.1.1.

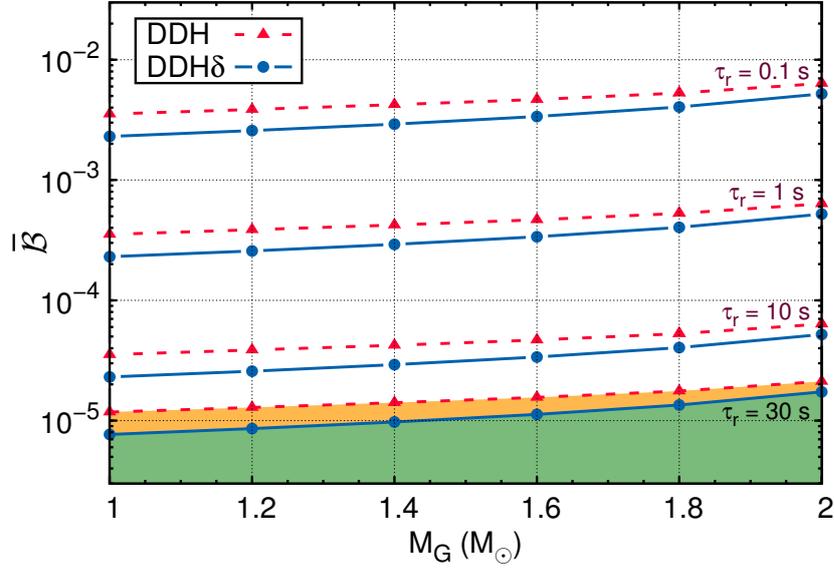


FIGURE 7.7 – **Contraintes sur le paramètre de friction mutuelle.** Courbes de temps de montée constant dans un diagramme $\bar{B} - M_G$, pour $f = 11, 19$ Hz et $\Delta\Omega/\Omega = 10^{-6}$. Les résultats donnés par l'EoS DDH(δ) sont représentés par des traits pleins (tiretés). La ligne $\tau_r = 30$ s correspond à la limite observationnelle obtenue par [Dodson et al. \(2007\)](#).

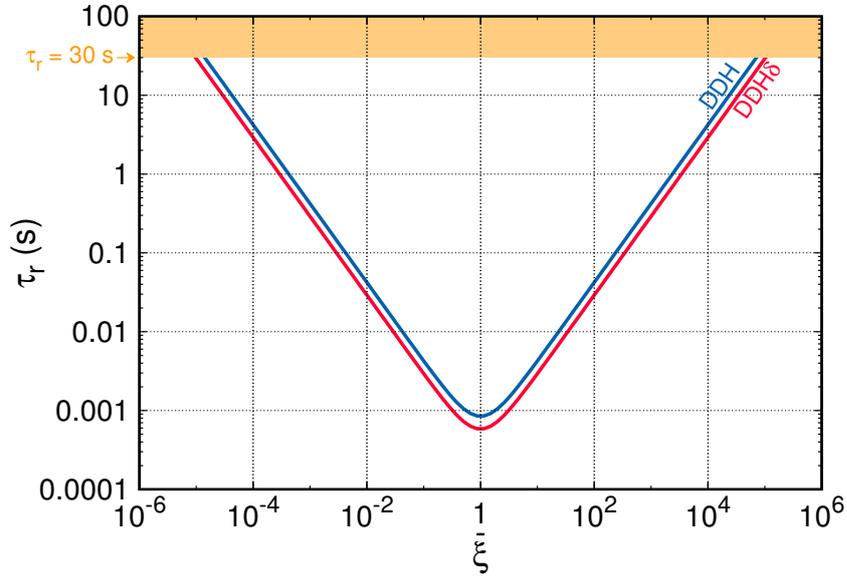


FIGURE 7.8 – **Temps de montée en fonction du rapport traînée/portance moyen.** La quantité τ_r est représentée en fonction du paramètre moyen $\bar{\xi}$, pour $f = 11, 19$ Hz et $M_G = 1,4 M_\odot$. L'amplitude de glitch considérée est $\Delta\Omega/\Omega = 10^{-6}$. Les résultats obtenus avec l'EoS DDH(δ) sont présentés en bleu (rouge). La limite supérieure de 30 s est également dessinée.

7.3 Émission d'ondes gravitationnelles

L'étude des signaux d'ondes gravitationnelles a déjà commencé avec la récente observation de la coalescence de deux trous noirs par Advanced LIGO (Abbott *et al.*, 2016a). Les étoiles à neutrons figurent également parmi les sources privilégiées des interféromètres actuels et futurs. Parmi les différents processus d'émission associés à ces astres qui ont été suggérés (voir, e.g., Lasky (2015)), les écoulements et/ou oscillations de fluide(s) qui ont lieu durant un glitch sont susceptibles d'engendrer un rayonnement gravitationnel potentiellement détectable dans un futur proche (Abadie *et al.*, 2011; Stopnitzky & Profumo, 2014).

Dans ce qui suit, nous nous intéressons plus particulièrement à la quantité d'ondes gravitationnelles émises lors de la phase de montée du glitch, en étudiant l'évolution temporelle du quadrupôle de masse de l'étoile durant cette période. Étant donné que l'étoile reste constamment axisymétrique dans notre modèle et que les changements des vitesses de rotation des fluides sont minces, on s'attend à ce que les variations du moment quadrupolaire de masse soient très faibles. Par conséquent, nous nous focalisons principalement sur la modélisation de glitches de forte amplitude à l'aide de l'EoS DDH, pour laquelle les configurations d'équilibre obtenues sont suffisamment précises pour mettre en évidence ces petites variations (voir section 5.2).

7.3.1 Quadrupôle de masse

Suivant la prescription proposée par Pappas & Apostolatos (2012) - Éq. (11) (voir également Bonazzola &ourgoulhon (1996) et Friedman & Stergioulas (2013)), le quadrupôle de masse Q de l'étoile est donné par¹

$$Q = \bar{Q} - \frac{4}{3} \left(b + \frac{1}{4} \right) \frac{G^2}{c^4} M_G^3. \quad (7.13)$$

Les quantités \bar{Q} et b s'obtiennent à partir des développements asymptotiques à l'infini spatial des coefficients métriques $\nu = \ln N$ et NB , *i.e.*

$$\nu \underset{r \rightarrow +\infty}{=} -\frac{GM_G}{r} + \frac{b}{3} \left(\frac{GM_G}{r} \right)^3 - \frac{G\bar{Q}}{r^3} P_2(\cos \theta) + O\left(\frac{1}{r^4}\right), \quad (7.14)$$

et

$$NB \underset{r \rightarrow +\infty}{=} 1 + b \left(\frac{GM_G}{r} \right)^2 + O\left(\frac{1}{r^4}\right), \quad (7.15)$$

où P_2 désigne le polynôme de Legendre d'ordre 2, tel que $P_2(\cos \theta) = 3/2 \times (\cos^2 \theta - 1/3)$. En utilisant (7.14) et (4.46), on peut montrer que \bar{Q} s'exprime sous la forme suivante (Salgado *et al.*, 1994; Prix *et al.*, 2005)

$$\bar{Q} = \frac{3}{8\pi G} \int_{\Sigma_t} \sigma_\nu r^2 \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{3} \right) d^3 \Sigma_f, \quad (7.16)$$

1. Notons que, contrairement à la grandeur \bar{Q} qui était utilisée jusqu'à maintenant pour calculer le moment quadrupolaire de l'étoile dans LORENE, la définition de Q est invariante de jauge (Pappas & Apostolatos, 2012). La correction liée à b sur le calcul du moment quadrupolaire est étudiée dans la suite.

7.3 Émission d'ondes gravitationnelles

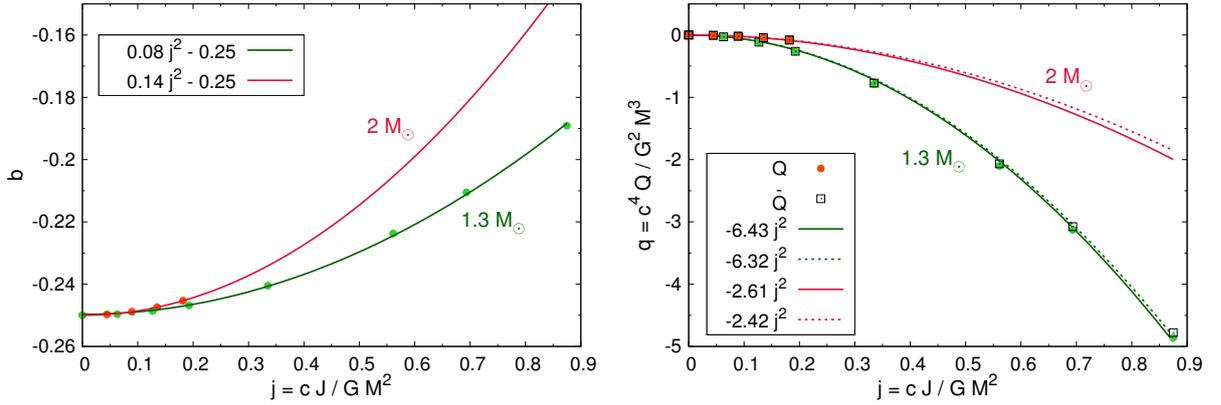


FIGURE 7.9 – **Moment quadrupolaire en fonction du moment cinétique.** *Gauche* : La quantité b est tracée en fonction du moment cinétique normalisé $j = cJ/(GM_G^2)$, pour l'EoS DDH. Ces valeurs ont été obtenues en faisant varier la fréquence de rotation f , en supposant que les deux fluides sont en corotation et à l'équilibre β , à masse baryonique fixée. Les points verts (orange) correspondent à $M^B = 1,42 M_\odot$ ($M^B = 2,37 M_\odot$), *i.e.* à une masse gravitationnelle $M_G \simeq 1,3 M_\odot$ ($M_G \simeq 2,0 M_\odot$). *Droite* : Les grandeurs Q (points) et \bar{Q} (carrés), normalisées sous la forme $q = c^4 Q / (G^2 M_G^3)$, sont représentées en fonction du moment cinétique réduit j pour les mêmes paramètres que pour l'image de gauche. Pour les deux figures, les courbes tracées sont des ajustements quadratiques.

où $d^3 \Sigma_f = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ et σ_ν désigne le terme source de l'équation d'Einstein relative à ν . De la même manière, les équations (7.15) et (4.44) conduisent à (Friedman & Stergioulas, 2013)

$$b = -\frac{8}{\pi G M_G^2} \int_{\Sigma_t} \Psi N r \sin \theta d^3 \Sigma, \quad (7.17)$$

où l'élément de volume sur Σ_t est donné par $d^3 \Sigma = A^2 B d^3 \Sigma_f$.

Les grandeurs b , \bar{Q} et Q sont tracées sur la figure 7.9 en fonction du moment cinétique de l'étoile, pour deux masses gravitationnelles différentes. Comme attendu, le moment quadrupolaire de masse est nul pour une étoile sphérique. Par ailleurs, on pourra noter que $b = -1/4$ dans ce cas. Le signe du quadrupôle de masse a été choisi de manière à ce que $Q < 0$ pour une étoile oblate (voir également l'annexe C.5). Puisque la déformation de l'étoile due aux effets centrifuges augmente avec la vitesse de rotation, la valeur de Q devient de plus en plus négative, comme on peut l'observer sur l'image de droite de la figure 7.9. Les ajustements réalisés sur les profils de ces différentes grandeurs en fonction du moment cinétique réduit $j = cJ/(GM_G^2)$ correspondent aux lois empiriques exhibées par Laarakkers & Poisson (1999) et Pappas & Apostolatos (2012). Ainsi, on observe que

$$Q \simeq -a \frac{J^2}{M_G c^2}, \quad (7.18)$$

où a est un paramètre de l'ordre de l'unité qui dépend de la masse de l'étoile et de l'EoS considérée. On pourra également remarquer, à l'aide de ces ajustements, que la correction liée à b sur le calcul du moment quadrupolaire est typiquement de l'ordre de $\sim 5\%$, de sorte qu'on a $Q \simeq \bar{Q}$.

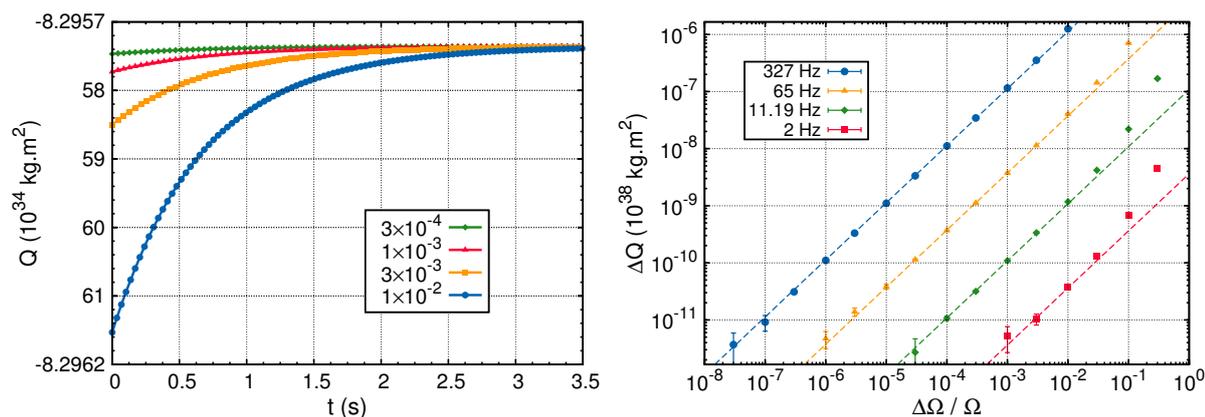


FIGURE 7.10 – **Variations du quadrupôle de masse lors d'un glitch.** *Gauche* : Évolution temporelle de Q obtenue avec l'EoS DDH, pour $M_G = 1,4 M_\odot$ et $f = 65$ Hz. Les amplitudes de glitches considérées ici sont $\Delta\Omega/\Omega = 3 \times 10^{-4}$, 10^{-3} , 3×10^{-3} et 10^{-2} . Le coefficient de friction mutuelle est fixé à 10^{-4} . *Droite* : La quantité ΔQ (7.19) est tracée en fonction de l'amplitude du glitch $\Delta\Omega/\Omega$, pour différentes fréquences de rotation (2, 11,19, 65 et 327 Hz). Les résultats sont obtenus avec l'EoS DDH, pour une étoile à neutrons de $1,4 M_\odot$. Pour $\Delta\Omega/\Omega \lesssim 10^{-2}$, les valeurs numériques vérifient $\Delta Q \propto \Delta\Omega/\Omega$ (traits pointillés) en très bonne approximation. Les barres d'erreurs illustrent la précision avec laquelle ΔQ est calculée à partir de (7.19). Pour les deux figures, l'équilibre β est imposé au centre de l'étoile durant toute la phase de montée (cas ii).

Lors d'un glitch, l'évolution de la vitesse de rotation de chaque fluide engendre une (faible) modification de la surface de l'étoile, *i.e.* de ses rayons équatorial et polaire et donc de son aplatissement, qui à son tour conduit à une variation de Q (voir, e.g., l'équation (C.29) dans un contexte simplifié). L'évolution temporelle du quadrupôle de masse Q d'une étoile à neutrons de $1,4 M_\odot$ tournant à 65 Hz est représentée sur l'image de gauche de la figure 7.10, pour différentes amplitudes (non réalistes) de glitch. Pour l'EoS DDH, $|Q|$ décroît au cours de temps car l'aplatissement de l'étoile diminue progressivement¹. Quelle que soit l'amplitude du glitch considérée, on observe que le profil temporel de Q est très bien approximé par la relation

$$Q(t) = \Delta Q \times \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_r}\right) \right) + Q_0, \quad (7.19)$$

à condition que $\Delta\Omega/\Omega \ll 1$. Le temps caractéristique apparaissant dans cette équation correspond au temps de montée (6.46) déduit à partir de l'évolution de la différence de vitesse au cours du temps. En gardant les autres paramètres d'entrée fixes, la variation ΔQ du moment quadrupolaire associée au glitch vérifie $\Delta Q \propto \Omega^2 \times \Delta\Omega/\Omega$ (voir image de droite de la figure 7.10). Bien que l'évolution dynamique de Q dépende du paramètre de friction mutuelle à travers τ_r , le terme ΔQ ne dépend pas de $\bar{\mathcal{B}}$ car cette quantité n'intervient pas dans la détermination des configurations d'équilibre initiale et finale. Par ailleurs, l'hypothèse choisie sur la composition chimique (voir section 6.1.4) a également

1. Au contraire, $|Q|$ augmente dans le temps pour l'EoS DDH δ .

7.3 Émission d'ondes gravitationnelles

une influence sur ΔQ . Ainsi, en supposant que $\Delta\Omega/\Omega = 10^{-4}$ et $M_G = 1,4 M_\odot$, les différences relatives entre les valeurs de ΔQ obtenues dans les cas (i) et (ii) sont de l'ordre de $\sim 1\%$ pour $f = 65$ Hz et de $\sim 15\%$ à 327 Hz.

7.3.2 Amplitudes des ondes gravitationnelles

Au premier ordre dans un développement multipolaire, la champ de rayonnement gravitationnel est donné par la formule du quadrupôle (voir, e.g., [Bonazzola & Gourgoulhon \(1996\)](#); [Le Tiec & Novak \(2017\)](#))

$$h_{ij} = \frac{2G}{c^4 D} \left[P_i^k P_j^l - \frac{1}{2} P_{ij} P^{kl} \right] \ddot{Q}_{kl} \left(t - \frac{D}{c} \right), \quad (7.20)$$

où D est la distance au pulsar, P_{ij} est le tenseur de projection transverse à la ligne de visée et Q_{ij} est le tenseur associé au moment quadrupolaire de masse Q . En particulier, il existe un système de coordonnées $x^\alpha = (t, x, y, z)$ dans lequel Q_{ij} a pour expression

$$Q_{ij} = \begin{pmatrix} -Q/2 & 0 & 0 \\ 0 & -Q/2 & 0 \\ 0 & 0 & Q \end{pmatrix}, \quad (7.21)$$

où l'axe z correspond à l'axe de rotation de l'étoile. Soit i l'angle entre cet axe et la direction n^i du centre de l'étoile à la Terre. En choisissant les coordonnées x^α de sorte que n^i appartienne au plan $x = 0$, le tenseur de projection P_{ij} vérifie alors ([Bonazzola & Gourgoulhon, 1996](#))

$$P_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 i & -\sin i \cos i \\ 0 & -\sin i \cos i & \sin^2 i \end{pmatrix}. \quad (7.22)$$

En toute généralité, le tenseur h_{ij} peut se décomposer sur deux modes de polarisation, $+$ et \times , tels que

$$h_{ij} = h_+ e_{ij}^+ + h_\times e_{ij}^\times, \quad (7.23)$$

où

$$e_{ij}^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos^2 i & \sin i \cos i \\ 0 & \sin i \cos i & -\sin^2 i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_{ij}^\times = \begin{pmatrix} 0 & \cos i & -\sin i \\ \cos i & 0 & 0 \\ -\sin i & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.24)$$

En appliquant les expressions précédentes à (7.20), on en déduit que $h_\times = 0$, l'étoile étant constamment axisymétrique durant la phase de montée. En revanche, la composante $+$ est donnée par

$$h_+(t) = -\frac{3}{2} \frac{G}{c^4 D} \sin^2 i \times \ddot{Q}(t - D/c). \quad (7.25)$$

En utilisant alors l'équation (7.19), on peut réécrire cette expression de la manière suivante

$$h_+(t) = h_0 \sin^2 i \times \exp(-(t - D/c)/\tau_r), \quad (7.26)$$

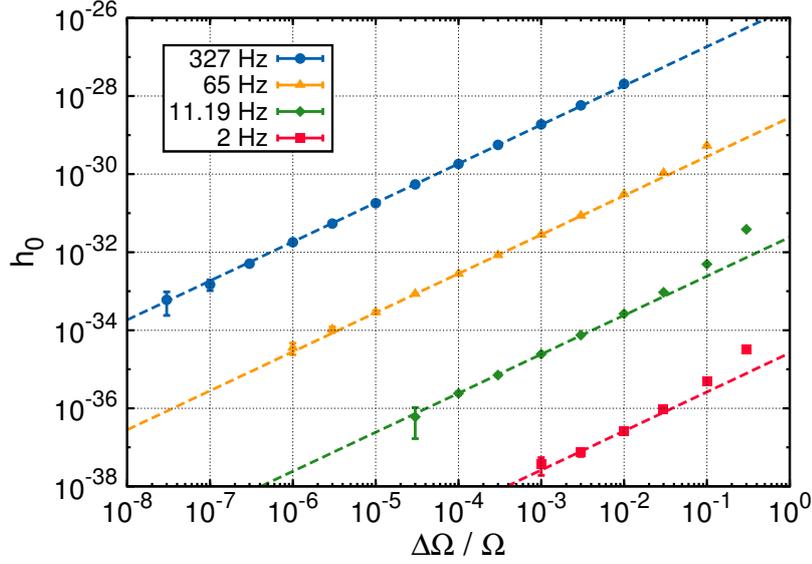


FIGURE 7.11 – **Amplitude caractéristique du rayonnement gravitationnel pour différentes amplitudes de glitches.** La quantité h_0 (7.27) est tracée en fonction de $\Delta\Omega/\Omega$, en considérant les mêmes paramètres que sur l'image de droite de la figure 7.10. Le paramètre de friction mutuelle est ici fixé à $\bar{\mathcal{B}} = 10^{-3}$ et la distance D vaut 1 kpc.

où l'amplitude caractéristique de l'onde gravitationnelle, h_0 , est définie par

$$h_0 = \frac{3}{2} \frac{G}{Dc^4} \frac{\Delta Q}{\tau_r^2}. \quad (7.27)$$

Dans le domaine fréquentiel, la déformation caractéristique $h_c(f_{\text{GW}})$ correspondante est donnée à partir de la transformée de Fourier $\tilde{h}(f_{\text{GW}})$ du signal $h_+(t)$, par la relation

$$h_c(f_{\text{GW}}) = 2f_{\text{GW}} \times |\tilde{h}(f_{\text{GW}})|, \quad (7.28)$$

voir, e.g., [Moore et al. \(2015\)](#). L'équation (7.26) conduit alors à

$$h_c(f_{\text{GW}}) = \frac{h_0 \sin^2 i}{\pi} \times \frac{f_{\text{GW}}/f_0}{\sqrt{1 + (f_{\text{GW}}/f_0)^2}}, \quad (7.29)$$

où nous avons introduit la fréquence caractéristique

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\tau_r}. \quad (7.30)$$

L'amplitude h_0 est tracée sur la figure 7.11 en fonction de $\Delta\Omega/\Omega$, pour une étoile de $1,4 M_\odot$, en supposant que $D = 1$ kpc et $\bar{\mathcal{B}} = 10^{-3}$. Étant donné les faibles variations de Q obtenues pour des amplitudes de glitches réalistes, en particulier à petite vitesse de rotation (voir figure 7.10), nous considérons principalement des amplitudes $\Delta\Omega/\Omega$ nettement plus élevées que celles observées afin d'atteindre une précision numérique suffisante. Il est alors possible de déduire les valeurs de h_0 associées à des amplitudes de glitches réalistes en extrapolant celles calculées à plus grand $\Delta\Omega/\Omega$ à l'aide d'une simple loi linéaire.

7.3 Émission d'ondes gravitationnelles

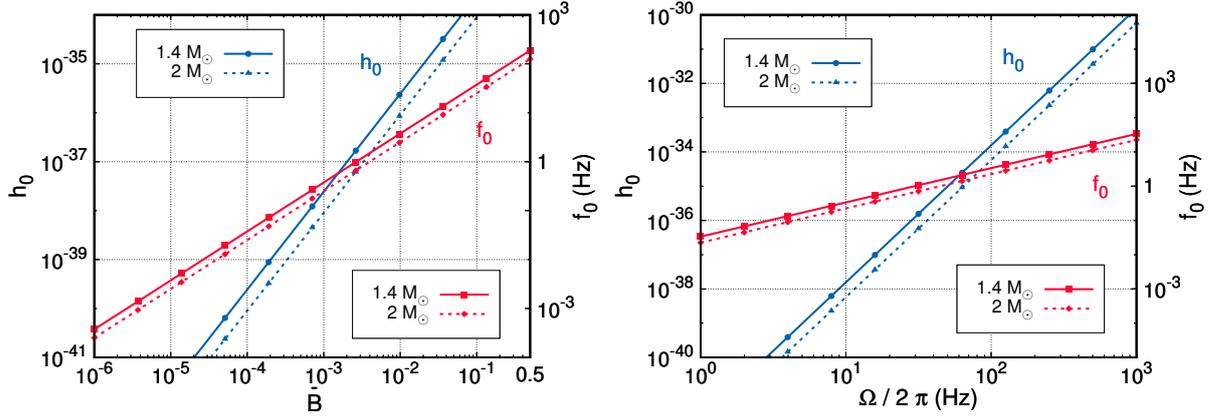


FIGURE 7.12 – **Influences de la vitesse de rotation et du paramètre de friction mutuelle sur l'amplitude et la fréquence caractéristiques.** Les grandeurs h_0 (7.31) et f_0 (7.32) sont tracées en fonction du paramètre de friction mutuelle $\bar{\mathcal{B}}$ (à gauche) et de la fréquence de rotation $\Omega/(2\pi)$ (à droite). Ces résultats sont donnés pour $M_G = 1,4 M_\odot$ et $2 M_\odot$ et ont été obtenus avec l'EoS DDH, en imposant l'équilibre β au centre de l'étoile. L'amplitude du glitch est fixée à 10^{-6} et l'étoile est située à une distance $D = 1$ kpc. Pour l'image de gauche, la fréquence de rotation considérée est $f = 11,19$ Hz, tandis qu'on a pris $\bar{\mathcal{B}} = 10^{-3}$ pour l'image de droite.

Pour une étoile dont la masse gravitationnelle vaut $1,4 M_\odot$, modélisée par l'EoS DDH dans le cas (ii), l'amplitude (7.27) et la fréquence (7.30) caractéristiques du rayonnement gravitationnel émis lors d'un glitch sont approximativement données par

$$h_0 \simeq 1,0 \times 10^{-37} \left(\frac{D}{1 \text{ kpc}} \right)^{-1} \left(\frac{\bar{\mathcal{B}}}{10^{-3}} \right)^2 \left(\frac{\Omega}{10^2 \text{ rad.s}^{-1}} \right)^4 \left(\frac{\Delta\Omega/\Omega}{10^{-6}} \right), \quad (7.31)$$

et

$$f_0 \simeq 0,535 \left(\frac{\bar{\mathcal{B}}}{10^{-3}} \right) \left(\frac{\Omega}{10^2 \text{ rad.s}^{-1}} \right) \text{ Hz}, \quad (7.32)$$

en supposant que $\Delta\Omega/\Omega \ll 1$. Pour des étoiles à neutrons de faible fréquence de rotation, avec $f \lesssim 65$ Hz, ces relations estiment h_0 et f_0 avec une précision meilleure que quelques pourcents et $\sim 0,1\%$, respectivement. Cette précision diminue à environ 10% pour $f = 327$ Hz. Il est intéressant de remarquer que les préfacteurs apparaissant dans les équations (7.31) et (7.32) décroissent lorsque la masse gravitationnelle augmente, principalement parce que le temps de montée devient de plus en plus long (voir Fig. 7.4). Ainsi, pour $M_G = 2 M_\odot$, on obtient les coefficients suivants : $3,7 \times 10^{-38}$ et 0,357. Les estimations (7.31) et (7.32) sont illustrées sur la figure 7.12.

Il est important de souligner que la formule du quadrupôle (7.20) n'est valable que dans l'approximation de mouvement lent, ce qui implique que la fréquence f_{GW} de l'onde gravitationnelle considérée doit satisfaire la condition $f_{\text{GW}} \times R \ll c$, où R désigne une taille caractéristique de la source. En prenant $R \simeq 10^4$ m pour le rayon de l'étoile, cette condition devient alors $f_{\text{GW}} \ll 3$ kHz. Compte tenu de (7.32), celle-ci est pleinement vérifiée pour les pulsars présentant des glitches (voir également la figure 7.12). Par ailleurs,

on peut vérifier simplement que la perte d'énergie associée à l'émission de ce rayonnement gravitationnel est complètement négligeable par rapport à la quantité d'énergie dissipée par friction mutuelle, de sorte que les équations (6.7) sont valides.

En appliquant les estimations (7.31) et (7.32) au pulsar de Vela, pour lequel $\Delta\Omega/\Omega = 10^{-6}$, $f = 11,19$ Hz et $D \simeq 287$ pc (Dodson *et al.*, 2003), la contrainte sur le paramètre de friction mutuelle $\bar{\mathcal{B}}$ présentée dans la section 7.2.3, *i.e.* $10^{-5} < \bar{\mathcal{B}} < 0,5$, conduit à

$$h_0 \sim 10^{-41} - 10^{-32} \quad \text{et} \quad f_0 \sim 4 \text{ mHz} - 200 \text{ Hz}. \quad (7.33)$$

Bien que le pic de fréquence f_0 prédit soit dans la bande de sensibilité de Advanced LIGO et Advanced Virgo (Acernese *et al.*, 2015; LIGO Scientific Collaboration *et al.*, 2015; Abbott *et al.*, 2016b), le signal gravitationnel correspondant est beaucoup trop faible pour être détecté par les détecteurs actuels. Toutefois, d'autres mécanismes associés aux glitches, tel que le pompage d'Ekman ou l'excitation de certains modes d'oscillations, qui ne sont pas considérés dans notre modèle, pourraient conduire à une émission d'ondes gravitationnelles beaucoup plus importante (voir, e.g., Sedrakian *et al.* (2003); van Eysden & Melatos (2008); Bennett *et al.* (2010); Sidery *et al.* (2010); Stopnitzky & Profumo (2014); Melatos *et al.* (2015)).

Quatrième partie

Friction mutuelle en présence d'ancrage
dans le cœur des étoiles à neutrons

Ancrage des tourbillons aux tubes de flux et friction mutuelle

Sommaire

8.1	Origine de la force de friction mutuelle	196
8.2	Friction mutuelle en l'absence d'ancrage dans le cœur	197
8.3	Friction mutuelle en présence d'ancrage dans le cœur	200
8.4	Conséquences astrophysiques	209

Dans le chapitre 7, nous avons mis en évidence l'importance des effets relativistes sur la dynamique des étoiles à neutrons lors de la phase de montée d'un glitch. Il faut toutefois garder à l'esprit que l'utilisation de la mécanique newtonienne n'est probablement pas la source principale d'incertitude dans les modèles de glitches actuels. En particulier, dans la partie III, nous avons utilisé l'expression du moment de friction mutuelle (6.8) obtenue par Langlois *et al.* (1998) en l'absence d'interaction entre les tourbillons superfluides et les tubes de flux présents dans le cœur des étoiles à neutrons (voir section 3.1.3). Or, comme nous l'avons mentionné dans la section 3.2.3, différents travaux suggèrent que ces lignes quantifiées sont susceptibles d'interagir entre elles, ce qui pourrait avoir des conséquences astrophysiques importantes, notamment sur la physique des glitches.

Dans ce chapitre, nous étudions l'influence de l'ancrage des tourbillons superfluides aux tubes de flux sur l'expression de la force de friction mutuelle. Pour cela, nous considérons qu'un certain nombre de tubes de flux sont *parfaitement* ancrés à chaque tourbillon superfluide, dans le sens où les deux types de lignes se déplacent localement à la même vitesse. Ainsi, nous ne tiendrons compte d'aucun effet de fluage (ou *creep*) et/ou d'un éventuel déplacement des lignes de tourbillons dans une direction parallèle aux lignes de champ magnétique (comme étudié par Sidery & Alpar (2009)). Notons qu'un effort parallèle a été récemment initié par Glampedakis & Andersson (2011), en suivant toutefois une approche différente. Bien que la prise en compte de la relativité générale soit indispensable pour construire un modèle de glitch réaliste, notre étude fait appel à la mécanique newtonienne, dans un premier temps. Une version relativiste de ces calculs est actuellement

en cours de rédaction.

8.1 Origine de la force de friction mutuelle

8.1.1 Différentes échelles

Équations d’Euler et force de friction mutuelle. Nous avons déjà vu au cours des chapitres précédents qu’en raison du champ magnétique stellaire, les particules chargées à l’intérieur d’une étoile à neutrons sont fortement couplées entre elles et sont essentiellement en corotation avec l’écorce et la magnétosphère, à la vitesse de rotation Ω observée. Par conséquent, sur des échelles grandes devant la distance moyenne d_n entre deux tourbillons superfluides (3.11), le cœur externe des étoiles à neutrons peut être raisonnablement décrit par un modèle à deux fluides, faisant intervenir (i) un superfluide de neutrons se déplaçant à la vitesse v_n^i et (ii) un fluide « normal » composé de protons et d’électrons, de charge électrique totale nulle, associé à la vitesse v_p^i .

En négligeant d’éventuels effets de température, la dynamique de ces fluides est gouvernée par les équations d’Euler suivantes (voir, e.g., Prix (2004); Haskell & Melatos (2015))

$$(\partial_t + v_n^j \nabla_j) (v_n^i + \varepsilon_n w_{pn}^i) + \nabla^i (\tilde{\mu}^n + \Phi) + \varepsilon_n w_j^{pn} \nabla^i v_n^j = f_{v \rightarrow n}^i / \rho_n, \quad (8.1)$$

$$(\partial_t + v_p^j \nabla_j) (v_p^i - \varepsilon_p w_{pn}^i) + \nabla^i (\tilde{\mu}^p + \Phi) - \varepsilon_p w_j^{pn} \nabla^i v_p^j = f_{v \rightarrow p}^i / \rho_p, \quad (8.2)$$

où $w_{pn}^i = v_p^i - v_n^i$, Φ est le potentiel gravitationnel newtonien et ρ_X est la masse volumique du fluide X (où $X \in \{n, p\}$). La quantité $\tilde{\mu}^X$ est définie à partir du potentiel chimique μ^X du fluide par la relation $\tilde{\mu}^X = \mu^X / m$, où m désigne la masse de repos des nucléons¹. Les termes ε_p et ε_n , reliés par $\varepsilon_p \rho_p = \varepsilon_n \rho_n$, quantifient l’importance des effets d’entraînement (voir Éq. (C.5)). Dans le cœur externe des étoiles à neutrons, *i.e.* pour des densités baryoniques comprises entre $\sim 0,5 \times n_0$ et $\sim 2 \times n_0$ (voir section 1.5.3), des estimations réalistes de ε_p conduisent à $\varepsilon_p \sim 0,1 - 0,5$ (voir, e.g., Chamel & Haensel (2006); Chamel (2008) ou encore la figure 5.9).

Aux échelles considérées ici, la présence de tourbillons superfluides n’intervient que par l’existence des forces volumiques $f_{v \rightarrow X}^i$. Ainsi, les termes $f_{v \rightarrow n}^i$ et $f_{v \rightarrow p}^i$ représentent respectivement l’action exercée par les tourbillons superfluides contenus dans une particule de fluide de taille $L \gg d_n$ sur les fluides de neutrons et de particules chargées. En l’absence d’autres sources de dissipation, ces forces vérifient

$$f_{v \rightarrow n}^i = -f_{v \rightarrow p}^i. \quad (8.3)$$

On définit alors la *force de friction mutuelle* comme la force macroscopique exercée par les tourbillons sur le superfluide de neutrons, *i.e.*

$$f_{mf}^i = f_{v \rightarrow n}^i. \quad (8.4)$$

1. Dans ce qui suit, nous négligeons la différence entre la masse du neutron et celle du proton, de sorte que $m = m_p = m_n$ (avec $m_e \ll m_{\text{prot}}$, *i.e.* $m = m_p = m_{\text{prot}}$).

En appliquant (8.3) aux équations d'Euler (8.1) et (8.2), on peut interpréter f_{mf}^i comme une force exercée par le fluide de particules chargées sur le superfluide, induite par la présence des lignes de tourbillons.

Force de Magnus. La taille du cœur d'un tourbillon superfluide est sensiblement de l'ordre de grandeur de la longueur de pénétration de London¹, $\Lambda_\star \simeq 130$ fm (voir équation (3.12)). Sur une échelle microscopique L' , telle que $\Lambda_\star \ll L' \ll d_n$, une ligne de tourbillon subit une force de type Magnus de la part du superfluide, provenant de la différence entre v_n^i et la vitesse de cette ligne. En désignant par v_L^i la vitesse moyenne des lignes de tourbillons présentes dans la particule de fluide de volume $\mathcal{V} = L^3$, où $L \gg d_n$, l'action du superfluide sur *chaque* tourbillon contenu dans ce volume macroscopique est alors caractérisée par une force de Magnus moyenne *par unité de longueur*, donnée par

$$\mathcal{F}_M^i = -\varepsilon^{ijk} \rho_n \kappa_j (v_{nk} - v_{Lk}). \quad (8.5)$$

La norme du vecteur $\kappa^i = \kappa \hat{\kappa}^i$ introduit ici est le quantum de circulation κ , défini par l'équation (3.9), et sa direction correspond à celle des tourbillons moyennée sur \mathcal{V} .

Par principe d'action-réaction, la force de friction mutuelle (8.4) vérifie alors

$$f_{\text{mf}}^i = f_{\text{v} \rightarrow \text{n}}^i = -f_{\text{n} \rightarrow \text{v}}^i = -n_{\text{v}} \mathcal{F}_M^i, \quad (8.6)$$

où n_{v} est la densité surfacique de tourbillons associée au volume \mathcal{V} considéré.

8.1.2 Hypothèses sur les tourbillons superfluides

La densité surfacique n_{v} dépend de la distribution locale des vortex superfluides, *i.e.* de leur orientation et de leur géométrie. L'étude de cette grandeur, qui nécessiterait de rendre compte de la dynamique locale d'un nombre restreint de tourbillons, va au-delà du travail présenté ici, dont l'objectif est de déterminer \mathcal{F}_M^i . Ainsi, dans la suite, nous considérerons simplement que les lignes de tourbillons sont rigides et toutes alignées avec l'axe de rotation de l'étoile, de sorte que $n_{\text{v}} = \mathcal{N}_n$ (3.10). Par ailleurs, nous supposons également que le mouvement des fluides est quasi-stationnaire, axisymétrique et circulaire (autour d'un même axe de rotation). Les vitesses des fluides, dans le plan équatorial, seront alors données par

$$v_n^i = r \Omega_n u_\varphi^i \quad \text{et} \quad v_p^i = r \Omega_p u_\varphi^i, \quad (8.7)$$

où (r, φ) représentent les coordonnées polaires dans le plan $\theta = \pi/2$ (r étant la distance à l'axe de rotation) et $\Omega_p = \Omega$.

8.2 Friction mutuelle en l'absence d'ancrage dans le cœur

Les lignes de tourbillons étant supposées rigides, nous ne tiendrons pas compte d'une éventuelle force de tension. En outre, dans cette section, nous négligeons également toute

1. Il s'agit plus exactement de la longueur caractéristique sur laquelle le champ magnétique porté par un tourbillon/tube de flux est confiné au voisinage de la ligne.

interaction possible entre les vortex superfluides et les tubes de flux. L'influence de ces interactions sera étudiée plus en détails dans la section 8.3 et dans l'annexe F. Compte tenu de ces simplifications, le mouvement d'une ligne de tourbillon est alors simplement décrit par l'équilibre entre la force de Magnus précédemment citée et une force de traînée associée au fluide de particules chargées.

8.2.1 Force de traînée

On a vu dans la section 3.2.2 qu'en raison des effets d'entraînement mutuel entre protons et neutrons, les tourbillons superfluides portent un quantum de flux magnétique fractionnaire ϕ_n , dont l'expression est donnée par (3.30). En l'absence d'interaction entre tourbillons et tubes de flux, Alpar *et al.* (1984b) ont montré que la principale source de dissipation dans le cœur des étoiles à neutrons provient de la diffusion des électrons par le champ magnétique associé aux lignes de tourbillons. Notons toutefois que ce mécanisme n'est présent que si le fluide de protons est supraconducteur. En effet, en l'absence de courants permanents, la circulation de protons engendrée autour de chaque vortex par effets d'entraînement serait dissipée par viscosité, de sorte que les lignes de tourbillons ne sauraient être magnétisées. C'est également la raison pour laquelle ce processus dissipatif n'a pas lieu dans l'écorce interne des étoiles à neutrons.

Le mécanisme que l'on vient de mentionner s'accompagne d'une force dissipative, de type force de traînée, qui oppose le mouvement d'une ligne de tourbillon, se déplaçant à la vitesse v_L^i , à celui du fluide de particules chargées. Pour des vitesses relatives suffisamment faibles, la force de traînée *par unité de longueur* du tourbillon s'écrit sous la forme

$$\mathcal{F}_d^i = -\mathcal{R} (v_L^i - v_p^i), \quad (8.8)$$

où \mathcal{R} est une grandeur positive, appelée *coefficient de résistivité*. Dans le contexte étudié ici, cette quantité est donnée par¹ (Alpar *et al.*, 1984b)

$$\mathcal{R}_n = \frac{3\pi e^2 n_e c}{64\Lambda_\star E_F} \times \phi_n^2, \quad (8.9)$$

où $n_e = n_p$ et E_F désignent respectivement la densité et l'énergie de Fermi des électrons. Plus de détails sur l'origine physique de cette expression sont donnés dans l'annexe E.1.

À partir du coefficient de résistivité \mathcal{R} , on définit le *rapport traînée/portance* par la relation

$$\xi = \frac{\mathcal{R}}{\rho_n \kappa}. \quad (8.10)$$

Ce nombre sans dimension compare les amplitudes respectives de la force de traînée (8.8) et de celle de Magnus (8.5), qui s'appliquent toutes les deux sur une ligne de tourbillon. Compte tenu de (8.9), le rapport traînée/portance est donné par (voir, e.g., Mendell (1991); Andersson *et al.* (2006))

$$\xi_n = \frac{\mathcal{R}_n}{\rho_n \kappa} \simeq 4 \times 10^{-4} (\varepsilon_p)^2 (1 - \varepsilon_p)^{-1/2} \left(\frac{x_p}{0,05} \right)^{7/6} \left(\frac{\rho}{10^{14} \text{ g.cm}^{-3}} \right)^{1/6}, \quad (8.11)$$

1. Notons que nous utilisons ici la chargée électrique en unités SI, *i.e.* $e_{\text{SI}} = e_{\text{CGS}}/c$, contrairement à Alpar *et al.* (1984b) et, plus généralement, à l'ensemble de la littérature qui font plutôt appel aux unités CGS Gaussien.

où $\rho = \rho_n + \rho_p$ et x_p est la fraction de protons. Comme attendu, ξ_n est nul en l'absence d'entraînement ($\varepsilon_p = 0$).

8.2.2 Vitesse moyenne des lignes de tourbillons

Le déplacement quasi-stationnaire d'une ligne de tourbillon est simplement gouverné par le bilan de forces

$$\mathcal{F}_d^i + \mathcal{F}_M^i = 0. \quad (8.12)$$

La résolution de cette équation permet alors d'obtenir l'expression suivante pour la vitesse moyenne des lignes de tourbillons contenues dans la particule de fluide considérée (Hall & Vinen, 1956; Andersson *et al.*, 2006) :

$$v_L^i = v_p^i + \frac{\rho_n \kappa}{\mathcal{R}_n} (\mathcal{B}' \varepsilon^{ijk} \hat{\kappa}_j w_k^{pn} + \mathcal{B} \varepsilon^{ijk} \hat{\kappa}_j \varepsilon_{klm} \hat{\kappa}^l w_{pn}^m), \quad (8.13)$$

où les coefficients de friction mutuelle \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont donnés en fonction du rapport traînée/portance (8.11) par

$$\mathcal{B} = \frac{\xi_n}{1 + \xi_n^2} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}' = \frac{\xi_n^2}{1 + \xi_n^2}. \quad (8.14)$$

Notons que, quelle que soit la valeur de ξ considérée, ces paramètres vérifient les conditions suivantes :

$$\mathcal{B} \leq 1/2 \quad \text{et} \quad \mathcal{B}' \leq 1, \quad (8.15)$$

le cas d'égalité n'étant atteint que pour $\xi = 1$.

En supposant que les fluides décrivent un mouvement circulaire autour d'un même axe, la vitesse moyenne des lignes de tourbillons dans le plan équatorial de l'étoile peut se décomposer en une petite partie radiale \dot{r} et une partie orthoradiale plus importante selon

$$v_L^i = \dot{r} \delta_r^i + r \Omega_v \delta_\varphi^i, \quad (8.16)$$

où Ω_v s'interprète comme la vitesse de rotation du réseau de tourbillons, en $(r, \theta = \pi/2, \varphi)$. En injectant les relations (8.7) dans (8.13), on obtient alors

$$\dot{r} = -\frac{\xi_n}{1 + \xi_n^2} r (\Omega_p - \Omega_n) = -\mathcal{B} r (\Omega_p - \Omega_n), \quad (8.17)$$

et

$$\Omega_v = \frac{\Omega_n + \xi_n^2 \Omega_p}{1 + \xi_n^2}, \quad (8.18)$$

ce qui correspond aux équations (36) et (37) de Carter (2001).

Il est particulièrement intéressant de remarquer le double rôle de ξ_n dans l'expression du coefficient \mathcal{B} , apparaissant à la fois au numérateur et au dénominateur. Dans le régime de *faible* traînée, *i.e.* pour $\xi \rightarrow 0$, les composantes de la vitesse des tourbillons tendent vers $\dot{r} = 0$ et $\Omega_v = \Omega_n$. Les vortex sont alors en corotation avec le superfluide de neutrons. Dans la limite de *forte* traînée, *i.e.* pour $\xi \rightarrow +\infty$, \dot{r} s'annule également et on a $\Omega_v = \Omega_p$. Dans ce cas, les lignes de tourbillons sont ancrées au fluide de particules chargées et se déplacent donc avec ce dernier.

8.2.3 Force et moment de friction mutuelle

Compte tenu de (8.12), la force de friction mutuelle (8.6) vérifie

$$f_{\text{mf}}^i = -\mathcal{N}_n \mathcal{F}_M^i = \mathcal{N}_n \mathcal{F}_d^i. \quad (8.19)$$

En injectant (8.13) dans (8.8), on obtient alors l'expression suivante

$$f_{\text{mf}}^i = -\mathcal{N}_n \rho_n \kappa \left(\mathcal{B}' \varepsilon^{ijk} \hat{\kappa}_j w_k^{\text{pn}} + \mathcal{B} \varepsilon^{ijk} \hat{\kappa}_j \varepsilon_{klm} \hat{\kappa}^l w_{\text{pn}}^m \right). \quad (8.20)$$

Le moment Γ_{mf}^i associé à cette force de friction mutuelle est donné par (Sidery *et al.*, 2010; Glampedakis & Andersson, 2011)

$$\Gamma_{\text{mf}}^i = \int_{\Sigma_t} \varepsilon^{ijk} x_j f_k^{\text{mf}} d^3 \Sigma_f. \quad (8.21)$$

En utilisant les relations (8.20) et (8.7), la composante du moment de friction mutuelle dans la direction des lignes de tourbillons, *i.e.* selon l'axe de rotation, s'exprime ainsi :

$$\Gamma_{\text{mf}} = \Gamma_{\text{mf}}^z = \int_{\Sigma_t} \mathcal{N}_n \rho_n \kappa \mathcal{B} (\Omega_p - \Omega_n) r^2 \sin^2 \theta d^3 \Sigma_f, \quad (8.22)$$

où seule la partie dissipative de f_{mf}^i (contenant le terme \mathcal{B}) joue un rôle. En introduisant alors la vorticité de superfluide,

$$\varpi_n = \mathcal{N}_n m_n \kappa \simeq 2\Omega_n m_n, \quad (8.23)$$

nous pouvons réecrire cette relation de la manière suivante

$$\Gamma_{\text{mf}} = \int_{\Sigma_t} \mathcal{B} n_n \varpi_n r^2 \sin^2 \theta (\Omega_p - \Omega_n) d^3 \Sigma_f, \quad (8.24)$$

qui est bien la limite newtonienne attendue de l'expression (6.8) obtenue par Langlois *et al.* (1998) dans le cadre de la relativité générale (voir également l'annexe C.2).

8.3 Friction mutuelle en présence d'ancrage dans le c eur

8.3.1 Hypothèses sur les tubes de flux

Afin de sonder l'influence des interactions entre tubes de flux et tourbillons superfluides sur l'expression de la force de friction mutuelle, nous considérons un modèle simple dans lequel N_p tubes de flux sont fortement ancrés à chaque ligne de tourbillon superfluide présente dans le c eur externe des étoiles à neutrons. Notre objectif n'est pas d'étudier les mécanismes physiques susceptibles de donner naissance à une telle situation (voir section 3.2.3), mais plutôt d'explorer les conséquences astrophysiques liées à la présence d'ancrage dans le c eur, en particulier sur la dynamique du superfluide de neutrons. Dans l'approche suivie ici, l'entier $N_p \geq 0$ est un paramètre inconnu, dont la valeur maximale est de l'ordre de

$$N_p^{\max} \sim \frac{\mathcal{N}_p}{\mathcal{N}_n} \simeq 10^{13} \times \left(\frac{B}{10^{12} \text{ G}} \right) \times \left(\frac{P}{10 \text{ ms}} \right), \quad (8.25)$$

où \mathcal{N}_n et \mathcal{N}_p sont les densités surfaciques de tourbillons et de tubes de flux, respectivement données par les expressions (3.10) et (3.23).

Bien que le réseau de tubes de flux ait probablement une structure très complexe dans le cœur externe des étoiles à neutrons, voir section 3.1.3, nous faisons également l'hypothèse (très naïve !) que les tubes de flux sont rigides et alignés avec la direction des lignes de tourbillons, de sorte que les configurations étudiées soient bien stationnaires et axisymétriques. Nous supposons alors que les N_p tubes de flux et le tourbillon qu'ils entourent forment un « paquet » cylindrique de lignes quantifiées, dont le rayon caractéristique sera désigné par la grandeur d_c . Par ailleurs, les tubes de flux étant supposés rigides, nous ne tenons compte d'aucune force de tension associée à ces lignes.

Compte tenu des incertitudes actuelles sur les interactions entre tourbillons superfluides et tubes de flux, et afin d'étudier différents scénarios d'ancrage possibles dans notre modèle, nous nous intéressons dans ce qui suit à deux structures différentes de ces paquets, à savoir :

- 1) *Scénario 1* : Les N_p tubes de flux sont tous superposés au tourbillon superfluide (malgré la répulsion mutuelle associée au champ magnétique des tubes de flux). Dans ce cas, la taille typique de l'ensemble de ces lignes quantifiées est de l'ordre de grandeur de la taille caractéristique d'une seule ligne, *i.e.*

$$d_{c,1} \sim \Lambda_\star. \quad (8.26)$$

- 2) *Scénario 2* : Les tubes de flux sont situés de part et d'autre de la ligne de tourbillon et sont régulièrement séparés par une distance d_p^{pin} . La taille caractéristique du paquet est alors donnée par

$$d_{c,2} \sim d_p^{\text{pin}} \times \sqrt{N_p}. \quad (8.27)$$

En tenant compte de l'ancrage des tourbillons et de la répulsion entre les tubes de flux, la distance moyenne d_p^{pin} entre deux tubes de flux ancrés est de l'ordre de $\sim 10^{-11}$ cm (Srinivasan *et al.*, 1990; Sedrakian & Sedrakian, 1995). Notons que la distance d_p^{pin} est logiquement inférieure à la distance moyenne d_p (3.24) entre deux tubes libres.

Ces deux configurations, illustrées sur la figure 8.1, correspondent respectivement au cas où l'ancrage se produirait par *intersection* de la ligne de tourbillon avec les tubes de flux et au modèle développé par Sedrakian & Sedrakian (1995), dans lequel les tubes de flux sont *dynamiquement* couplés au tourbillon, voir section 3.2.3.

Les estimations précédentes de d_c indiquent que les interactions entre deux tourbillons voisins peuvent être raisonnablement ignorées, étant donné que $d_c \ll d_n$, sauf peut-être pour $N_p \sim N_p^{\max}$. Ainsi, les différents paquets de lignes quantifiées sont supposés indépendants¹. Enfin, nous négligeons également toute interaction possible entre les paquets de lignes quantifiées et les tubes de flux non ancrés, *i.e.* non liés à un tourbillon donné.

1. Là encore, il s'agit d'une simplification importante. En réalité, un tube de flux ancré interagit probablement avec plusieurs lignes de tourbillons en raison de sa géométrie très complexe.

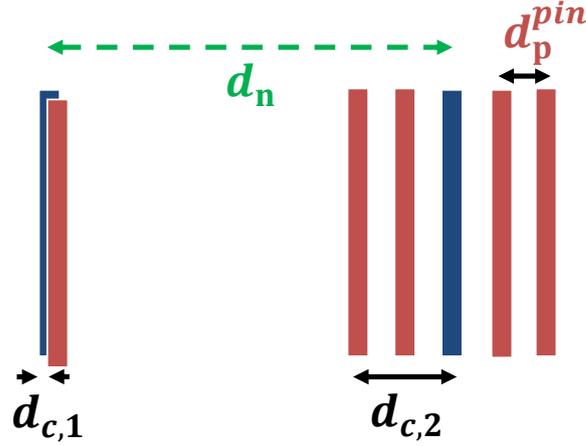


FIGURE 8.1 – **Représentation schématique de la structure des paquets de tubes de flux considérés.** Les N_p tubes de flux (en rouge) sont tous superposés à la ligne de tourbillon (en bleu) dans le premier scénario (à gauche). Par conséquent, la taille de l'ensemble est de l'ordre de celle d'une seule ligne, *i.e.* $d_{c,1} \sim \Lambda_*$. Dans le deuxième modèle (à droite), en revanche, les tubes de flux sont disposés autour du tourbillon et sont régulièrement espacés par une distance d_p^{pin} . La grandeur d_n est la distance typique entre deux tourbillons.

Malgré les différentes hypothèses invoquées, nous espérons que notre modèle simplifié reste capable de reproduire les principaux aspects astrophysiques associés à l'ancrage des tourbillons superfluides aux tubes de flux présents dans le cœur externe des étoiles à neutrons.

8.3.2 Force de Magnus généralisée

Formule de Joukowski. La formule de Joukowski correspondant à la force de Magnus généralisée ressentie par une ligne de tourbillon plongée dans un mélange de différentes espèces superfluides a été obtenue par [Carter *et al.* \(2002\)](#) dans le cadre de la relativité générale, puis adaptée par [Carter & Chamel \(2005\)](#) au cas newtonien. Dans notre modèle, où un superfluide de neutrons coexiste avec un supraconducteur de protons, la force de Magnus généralisée par unité de longueur s'exerçant sur un tourbillon ou, plus précisément, sur un ensemble de lignes quantifiées est donnée par

$$\mathcal{F}_J^i = \mathcal{F}_{Mn}^i + \mathcal{F}_{Mp}^i, \quad (8.28)$$

où les forces \mathcal{F}_{Mn}^i et \mathcal{F}_{Mp}^i (moyennées) caractérisent la contribution respective de chaque espèce superfluide. Ces deux forces ont pour expression

$$\mathcal{F}_{Mn}^i = -\varepsilon^{ijk} n_n \mathcal{C}_n \hat{k}_j (v_{nk} - v_{Lk}) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_{Mp}^i = -\varepsilon^{ijk} n_p \mathcal{C}_p \hat{k}_j (v_{pk} - v_{Lk}), \quad (8.29)$$

où le vecteur v_L^i correspond ici à la vitesse moyenne des paquets composés de N_p tubes de flux et d'un tourbillon, contenus dans un certain volume de fluide. Notons que, dans cette section, l'indice "p" se réfère au supraconducteur de protons, et non plus au fluide

de particules chargées (qui inclut également les électrons). La grandeur \mathcal{C}_X désigne la circulation de l'impulsion généralisée π_X^i du superfluide X le long d'un circuit fermé \mathcal{C} entourant le groupe de lignes considéré, de direction $\hat{\kappa}^i$. Par définition, on a

$$\mathcal{C}_n = \oint_{\mathcal{C}} \pi_n^i dx^i \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_p = \oint_{\mathcal{C}} \pi_p^i dx^i, \quad (8.30)$$

où, en mécanique newtonienne, les impulsions généralisées par particule associées aux neutrons et aux protons vérifient¹ (Prix, 2004)

$$\pi_n^i = p_n^i = m(1 - \varepsilon_n)v_n^i + m\varepsilon_n v_p^i, \quad (8.31)$$

$$\pi_p^i = p_p^i + eA^i = m(1 - \varepsilon_p)v_p^i + m\varepsilon_p v_n^i + eA^i, \quad (8.32)$$

la grandeur A^i désignant le potentiel vecteur lié au champ magnétique. Il est important de remarquer que les expressions données ci-dessus ont été obtenues à partir d'une approche perturbative reposant sur une configuration stationnaire et axisymétrique dans laquelle une seule ligne (ou un seul paquet de lignes) est considérée. Ces formules sont donc parfaitement applicables à notre modèle, compte tenu des hypothèses sur lesquelles celui-ci est basé (voir sections 8.1.2 et 8.3.1).

Chaque ensemble de lignes quantifiées ne comportant qu'un seul tourbillon superfluide, la quantité \mathcal{C}_n est donnée par (voir Éq. (3.5))

$$\mathcal{C}_n = m\kappa \left(= \frac{h}{2} \right), \quad (8.33)$$

de sorte que \mathcal{F}_{Mn}^i est égale à (8.5), comme attendu.

Force de Magnus associée aux protons. Concentrons-nous à présent sur le calcul de \mathcal{C}_p . On s'attend à ce que toute circulation associée à un constituant non-superfluide, qui pourrait éventuellement apparaître autour d'une ligne quantifiée, soit supprimée par effets de viscosité. Ainsi, dans les régions où les protons ne sont pas supraconducteurs, nous aurons $\mathcal{C}_p = 0$. D'un autre côté, si les protons forment un fluide supraconducteur, la circulation d'impulsion \mathcal{C}_p le long de n'importe quel contour fermé sera simplement donnée par le nombre de tubes de flux présents dans ce contour, multiplié par la masse de repos m et par le quantum de circulation κ (voir Éq. (3.20)). Par conséquent, dans le cas d'un supraconducteur de type I (correspondant aux régions les plus denses du cœur des étoiles à neutrons, voir section 3.1.3), ou si les tourbillons superfluides n'interagissent pas avec les tubes de flux² (voir section 8.2), la quantité \mathcal{C}_p sera également nulle. Néanmoins,

1. La charge électrique intervient dans l'expression (8.32) car cette dernière correspond à l'impulsion généralisée du fluide de protons (et non du mélange neutre de protons et d'électrons considéré, par exemple, dans l'équation (4.31)). On notera toutefois que l'impulsion généralisée des électrons est donnée par $\pi_e^i = p_e^i - eA^i = m_e v_p^i - eA^i$, de sorte que l'impulsion du fluide de particules chargées vérifie $\pi_e^i + \pi_p^i = p_e^i + p_p^i \simeq p_p^i$, en accord avec l'équation (4.31).

2. Dans ce cas, chaque tourbillon rencontrerait différents tubes de flux au cours de son mouvement, de sorte que la situation étudiée ne serait plus stationnaire à proprement parler, ce qui sort du cadre bien défini de notre modèle.

dans le contexte étudié ici, où chaque ligne de tourbillon est entourée de N_p tubes de flux, nous aurons plutôt

$$\mathcal{C}_p = N_p \times m\kappa, \quad (8.34)$$

à condition que le contour \mathcal{C} soit grand devant la taille d_c du paquet, mais toujours petit par rapport à la distance typique d_n entre deux lignes de tourbillons. La force de Magnus associée au fluide de protons aura alors la forme suivante :

$$\mathcal{F}_{M_p}^i = -\rho_p N_p \varepsilon^{ijk} \kappa_j (v_{pk} - v_{Lk}). \quad (8.35)$$

Finalement, nous notons qu'une force de traînée transversale a parfois été considérée dans la littérature, en supplément de la force de traînée longitudinale donnée par l'équation (8.8). Par exemple, on pourra remarquer la présence de cette force à travers le terme η' intervenant dans l'équation (82) de [Sedrakian & Sedrakian \(1995\)](#) ou dans l'équation (2) de [Link \(2006\)](#). Toutefois, le coefficient η' est généralement supposé très petit devant le coefficient de résistivité \mathcal{R} , de sorte que la force de traînée transversale est simplement négligée. Nous constatons ici que la contribution du supraconducteur de protons à la force de Magnus généralisée (voir (8.35)) a une forme similaire à cette force de traînée transversale, tout en revêtant une signification physique très différente, à condition de prendre $\eta' = -n_p \mathcal{C}_p$ (la composante transversale de la force de traînée n'entraînant aucune dissipation, η' peut être positif ou négatif).

8.3.3 Coefficient de résistivité

La présence de la force supplémentaire (8.35) n'est pas la seule modification à apporter aux calculs exposés dans la section 8.2 afin de rendre compte de l'ancrage des tourbillons dans le cœur des étoiles à neutrons. En effet, dans ce contexte, la principale source de dissipation n'est plus liée à la diffusion des électrons par le champ magnétique porté par chaque tourbillon, mais est plutôt associée à la diffusion des électrons par le champ magnétique porté par les N_p tubes de flux environnant le tourbillon. Par conséquent, l'expression du coefficient de résistivité doit également être corrigée.

Un tube de flux *isolé* se déplaçant à travers le gaz d'électrons dans le cœur des étoiles à neutrons est sujet à une force de traînée, dont le coefficient de résistivité est donné par ([Muslimov & Tsygan, 1985](#); [Harvey et al., 1986](#); [Jones, 1987](#))

$$\mathcal{R}_p = \frac{3\pi e^2 n_e c}{64\Lambda_\star E_F} \times \phi_0^2 \simeq \frac{\mathcal{R}_n}{\varepsilon_p^2}, \quad (8.36)$$

voir également l'annexe E.1. Par rapport à (8.9), le flux ϕ_n porté par une ligne de tourbillon a simplement été remplacé par le quantum de flux magnétique ϕ_0 . L'expression du rapport traînée/portance devient alors

$$\xi_p = \frac{\mathcal{R}_p}{\rho_n \kappa} \simeq 4 \times 10^{-4} (1 - \varepsilon_p)^{-1/2} \left(\frac{x_p}{0,05} \right)^{7/6} \left(\frac{\rho}{10^{14} \text{ g.cm}^{-3}} \right)^{1/6}. \quad (8.37)$$

Cette relation n'est toutefois valable que dans l'approximation où les tubes de flux sont indépendants. Ce n'est évidemment pas le cas dans le modèle que l'on étudie ici, et il est

donc indispensable d'inclure certains effets collectifs dans les expressions précédentes, afin de considérer la présence de N_p tubes de flux à l'intérieur de chaque ensemble de lignes quantifiées. Néanmoins, tenir compte de ces effets n'est pas simple, et reste controversé. Ainsi, dans la suite, nous présentons deux estimations différentes du coefficient de résistivité en présence d'ancrage, correspondant respectivement aux deux scénarios envisagés pour la structure des paquets de tubes de flux (voir section 8.3.1).

En supposant que toutes les lignes sont superposées (scénario 1), le coefficient de résistivité s'obtient naïvement à partir de l'équation (8.36), en remplaçant ϕ_0 par le flux magnétique porté par l'ensemble des lignes, à savoir $\phi_{c,1} \simeq (N_p - \varepsilon_p) \times \phi_0$ (voir également Ding *et al.* (1993)). Dans ce cas, le rapport traînée/portance est donné par

$$\xi_{c,1}(N_p) \simeq \xi_p \times (N_p - \varepsilon_p)^2 \simeq \frac{\xi_n}{\varepsilon_p^2} \times (N_p - \varepsilon_p)^2. \quad (8.38)$$

Ainsi, pour $N_p = 0$, cette relation se réduit à (8.11), comme il se doit. En revanche, dans le second scénario, Sedrakian *et al.* (1985) et Sedrakian & Sedrakian (1995) ont montré que cette quantité vérifie

$$\xi_{c,2}(N_p) \simeq \xi_p \times N_p + \xi_n \simeq \frac{\xi_n}{\varepsilon_p^2} \times (N_p + \varepsilon_p^2), \quad (8.39)$$

où nous avons rajouté de manière *ad hoc* la contribution du champ magnétique porté par le tourbillon superfluide au coefficient de résistivité total.

Il est important de garder à l'esprit que ces estimations sont assez naïves et qu'elles ne sont probablement pas valables pour de grandes valeurs de N_p (voir la discussion donnée dans les annexes E.2 et E.3). Nous verrons dans la section 8.4 que ces relations permettent toutefois de faire ressortir certains aspects généraux liés à l'ancrage dans le cœur sur la dynamique du superfluide de neutrons. Remarquons enfin que, pour $N_p \gg 1$, les estimations (8.38) et (8.39) conduisent à $\xi_c \gg \xi_n$, soulignant ainsi le fait que les mécanismes de dissipation sont beaucoup plus importants en présence d'interaction entre les tourbillons superfluides et les tubes de flux.

8.3.4 Vitesse moyenne des paquets de lignes quantifiées

En tenant compte des effets d'ancrage dans le cœur des étoiles à neutrons, le déplacement quasi-stationnaire d'un ensemble de N_p tubes de flux entourant une ligne de tourbillon est maintenant régi par le bilan de forces

$$\mathcal{F}_d^i + \mathcal{F}_{Mn}^i + \mathcal{F}_{Mp}^i = 0. \quad (8.40)$$

En résolvant cette équation de la même manière que précédemment (voir Éq. (8.13)), la vitesse moyenne de ces paquets est alors donnée par

$$v_L^i = v_p^i + \frac{1}{\xi_c} \left(\tilde{\mathcal{B}}' \varepsilon^{ijk} \hat{\kappa}_j w_k^{pn} + \tilde{\mathcal{B}} \varepsilon^{ijk} \hat{\kappa}_j \varepsilon_{klm} \hat{\kappa}^l w_{pn}^m \right), \quad (8.41)$$

faisant intervenir les coefficients de friction mutuelle renormalisés suivants

$$\tilde{\mathcal{B}} = \frac{\tilde{\xi}_c}{1 + \tilde{\xi}_c^2} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{B}}' = \frac{\tilde{\xi}_c^2}{1 + \tilde{\xi}_c^2}, \quad (8.42)$$

où

$$\tilde{\xi}_c = \xi_c \left(1 + \frac{n_p \mathcal{C}_p}{\rho_n \kappa} \right)^{-1}. \quad (8.43)$$

En introduisant la quantité X définie par

$$X = \frac{n_p \mathcal{C}_p}{n_n \mathcal{C}_n} = \frac{n_p \mathcal{C}_p}{\rho_n \kappa}, \quad (8.44)$$

le rapport traînée/portance renormalisé s'écrit simplement sous la forme

$$\tilde{\xi}_c = \frac{\xi_c}{1 + X}. \quad (8.45)$$

Compte tenu de l'expression (8.34) de \mathcal{C}_p , la quantité X vérifie approximativement

$$X = \frac{n_p}{n_n} N_p \simeq x_p N_p. \quad (8.46)$$

Par un calcul similaire au cas sans ancrage, nous déduisons de (8.41) que la vitesse moyenne des paquets de lignes quantifiées (voir équation (8.16)) est désormais donnée par

$$\dot{r} = -\frac{\xi_c}{(1 + X)^2 + \xi_c^2} r (\Omega_p - \Omega_n), \quad (8.47)$$

et

$$\Omega_v = \frac{\Omega_n + (X + \tilde{\xi}_c^2 + X\tilde{\xi}_c^2)\Omega_p}{1 + X + \tilde{\xi}_c^2 + X\tilde{\xi}_c^2}. \quad (8.48)$$

En l'absence d'interaction entre les tubes de flux et les tourbillons, *i.e.* pour $N_p = 0$, les équations précédentes conduisent à $X = 0$, $\tilde{\xi}_c(0) = \xi_c(0) = \xi_n$ et les composantes (8.47) et (8.48) de la vitesse des paquets redonnent bien les équations (8.17) et (8.18), comme attendu. En outre, à la limite $N_p \rightarrow +\infty$, les estimations (8.38) et (8.39) et l'expression (8.46) de X indiquent que $v_L^i \rightarrow v_p^i$, de manière similaire à la limite de forte traînée mentionnée dans la section 8.2.2.

8.3.5 Force et moment de friction mutuelle

L'équation (8.19) n'est plus valable en présence d'ancrage dans le cœur, et la force de friction mutuelle (8.6) est maintenant donnée par

$$f_{mf}^i = -\mathcal{N}_n \mathcal{F}_{Mn}^i = \mathcal{N}_n (\mathcal{F}_d^i + \mathcal{F}_{Mp}^i). \quad (8.49)$$

En remplaçant v_L^i par (8.41) dans les termes \mathcal{F}_d^i et \mathcal{F}_{Mp}^i , l'expression de la force de friction mutuelle devient alors

$$f_{mf}^i = -\mathcal{N}_n \rho_n \kappa \left(\beta' \varepsilon^{ijk} \hat{\kappa}_j w_k^{pn} + \beta \varepsilon^{ijk} \hat{\kappa}_j \varepsilon_{klm} \hat{\kappa}^l w_{pn}^m \right), \quad (8.50)$$

où nous avons introduit les quantités

$$\beta = \tilde{\mathcal{B}} \left(\frac{1}{1 + X} \right) = \frac{\xi_c}{(1 + X)^2 + \xi_c^2}, \quad (8.51)$$

et

$$\beta' = \tilde{\beta}' \left(1 + \frac{X(1+X)}{\xi_c^2} \right) = \frac{X(1+X) + \xi_c^2}{(1+X)^2 + \xi_c^2} = 1 - \frac{1+X}{(1+X)^2 + \xi_c^2}. \quad (8.52)$$

Cette force de friction mutuelle a donc une forme identique à celle obtenue en l'absence d'interaction entre tubes de flux et tourbillons superfluides (voir Éq. (8.20)), mais fait toutefois intervenir des coefficients renormalisés. Ainsi, le moment de friction mutuelle (8.21) devient

$$\Gamma_{\text{mf}} = \int_{\Sigma_t} \beta n_n \varpi_n r^2 \sin^2 \theta (\Omega_p - \Omega_n) d^3 \Sigma_f, \quad (8.53)$$

d'où nous déduisons que l'étude réalisée dans la partie III reste valable, à condition de ne plus supposer que l'équation (6.13) est vérifiée.

Nous pouvons remarquer que les expressions (8.50), (8.51) et (8.52) sont similaires à celles obtenues par Sedrakian *et al.* (1999), voir leurs Éqs. (29), (37) et (38), en effectuant l'identification $X = -\eta'/(\rho_s \kappa)$, où ρ_s correspond à la masse volumique du superfluide de neutrons (désignée ici par ρ_n). Néanmoins, les contextes physiques étudiés sont très différents et la force supplémentaire que nous considérons n'est pas liée à la présence d'une force de traînée transversale, mais tire plutôt son origine de la contribution des N_p tubes de flux ancrés à chaque tourbillon à la force de Magnus totale agissant sur un paquet de lignes quantifiées (voir section 8.3.2).

De plus, l'expression (8.41) de la vitesse moyenne des paquets a été récemment obtenue par K. Glampedakis et N. Andersson (voir l'équation (9) de Glampedakis & Andersson (2011)) dans un contexte similaire au nôtre, mais en suivant toutefois une approche différente. En effet, dans Glampedakis & Andersson (2011), les auteurs s'intéressent aux bilans de force gouvernant le déplacement des lignes de tourbillons et des tubes de flux dans le cœur externe des étoiles à neutrons, en supposant que ces lignes sont *a priori* non-comobiles. Ces équations sont couplées par l'intermédiaire d'une force d'« ancrage » inconnue, qui rend compte des interactions possibles entre vortex et tubes de flux. En résolvant ces bilans de force, la vitesse moyenne des tourbillons associée à la présence d'ancrage entre les lignes est ensuite déterminée en considérant le cas limite où les deux types de lignes quantifiées partagent la même vitesse. Ici, au contraire, nous nous concentrons directement sur les différentes forces agissant sur un paquet formé de N_p tubes de flux ancrés à un tourbillon et nous donnons un sens physique clair à leur paramètre α , à savoir $\alpha = 1/N_p$. Le lien entre nos deux approches est présenté dans l'annexe F. Nous notons également que la modification du coefficient de résistivité dans le cas d'ancrage n'était pas incluse dans l'étude réalisée par Glampedakis & Andersson (2011).

Comme on peut le voir sur l'expression de la force de friction mutuelle, l'ancrage des tourbillons aux tubes de flux ne modifie pas seulement le coefficient de résistivité (voir section 8.3.3), mais change également l'expression des coefficients β (8.51) et β' (8.52), à travers la présence additionnelle de la quantité $X \simeq x_p N_p$ (8.46). Étant donné les incertitudes actuelles sur les interactions entre les deux types de lignes quantifiées, cette dernière grandeur peut être relativement importante (voir Éq. (8.25)). Les coefficients β et β' sont représentés en fonction du nombre N_p de tubes de flux ancrés à chaque ligne de tourbillon superfluide sur les figures 8.2 et 8.3, pour les deux scénarios d'ancrage

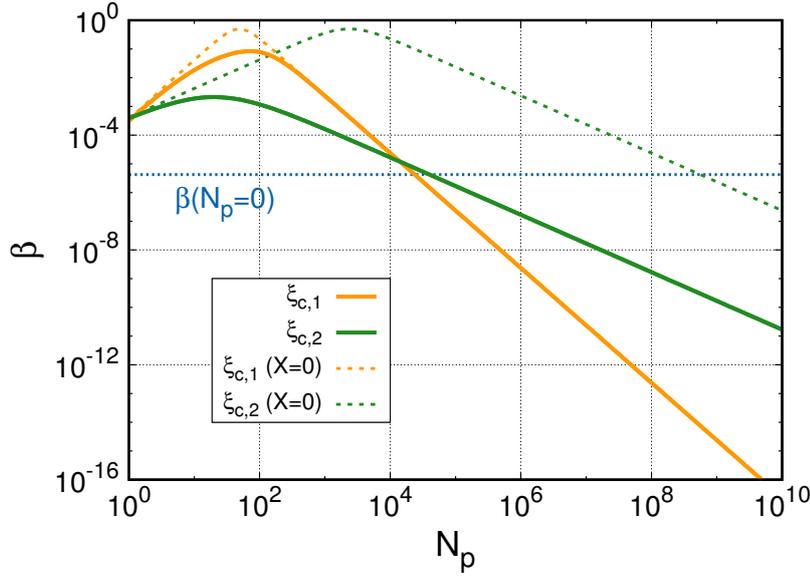


FIGURE 8.2 – Coefficient β en fonction du nombre de tubes de flux ancrés à chaque tourbillon. La quantité β est tracée en fonction de N_p (traits pleins), en utilisant $\xi_{c,1}$ (en orange) et $\xi_{c,2}$ (en vert), pour $\varepsilon_p = 0, 1$, $x_p = 0, 05$ et $\rho = 10^{14}$ g.cm $^{-3}$. Ces profils sont comparés aux valeurs de β calculées en négligeant la force de Magnus associée au fluide de protons, *i.e.* obtenues en prenant $X = 0$ (traits tiretés). Le résultat attendu en l'absence d'ancrage, $\beta(N_p = 0) = \mathcal{B}$ (8.14), est indiqué en pointillés bleus.

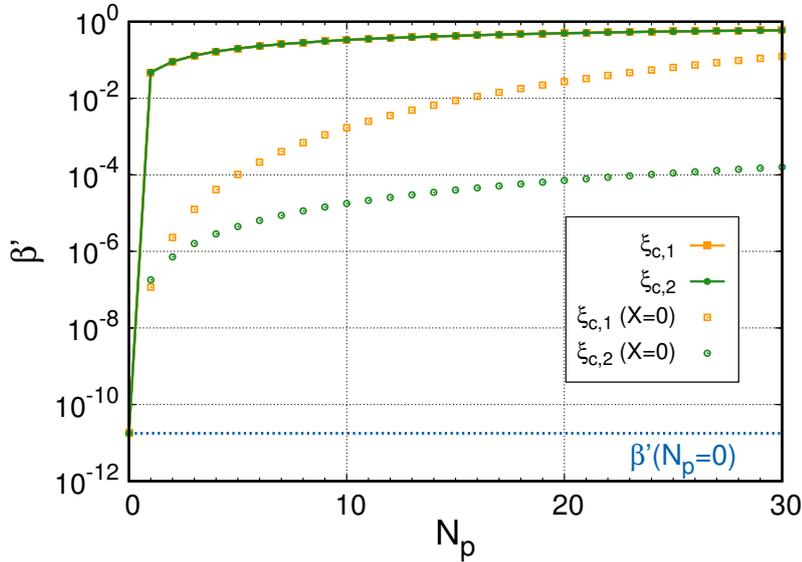


FIGURE 8.3 – Coefficient β' en fonction du nombre de tubes de flux ancrés à chaque tourbillon. La quantité β' est tracée en fonction de N_p (traits pleins), en utilisant $\xi_{c,1}$ (en orange) et $\xi_{c,2}$ (en vert), pour $\varepsilon_p = 0, 1$, $x_p = 0, 05$ et $\rho = 10^{14}$ g.cm $^{-3}$. Ces profils sont comparés aux valeurs de β' calculées en négligeant la force de Magnus associée au fluide de protons, *i.e.* obtenues en prenant $X = 0$. Le résultat attendu en l'absence d'ancrage, $\beta'(N_p = 0) = \mathcal{B}'$ (8.14), est indiqué en pointillés bleus.

considérés (8.38) et (8.39). Ces calculs ont été réalisés en considérant une masse volumique totale $\rho = 10^{14} \text{ g.cm}^{-3}$, une fraction de protons $x_p = 0,05$ et un paramètre d'entraînement $\varepsilon_p = 0,1$, typiques du cœur externe des étoiles à neutrons. Bien que les valeurs de β dépendent du modèle d'ancrage considéré, on observe toutefois un profil semblable dans les deux cas. Ainsi, on pourra remarquer que $\beta \gg \mathcal{B}$ pour $N_p \ll 10^4$, où \mathcal{B} (8.14) correspond à la valeur de β attendue en l'absence d'interaction entre tubes de flux et tourbillons, tandis que $\beta \ll \mathcal{B}$ pour des valeurs très importantes de N_p . En particulier, $\beta \rightarrow 0$ lorsque $N_p \rightarrow +\infty$. Si l'influence du paramètre d'entraînement ε_p est plutôt faible sur β , la prise en compte de l'effet Magnus associé au supraconducteur de protons peut avoir une grande influence sur ce coefficient. Cette force supplémentaire a notamment pour effet de diminuer la valeur de β , comme on peut le voir sur la figure 8.2, de sorte que β^{\max} reste toujours strictement inférieur à $1/2$ (voir Éq. (8.15)). En outre, les deux scénarios d'ancrage conduisent à un profil de β' quasi-identique, en raison de l'effet Magnus lié aux protons, dominant à faible valeur de N_p (voir (8.52) et Fig. 8.3). On notera que β' est toujours proche de 1, contrairement à la valeur attendue en l'absence d'ancrage, *i.e.* $\beta'(N_p = 0) = \mathcal{B}'$ (8.14), qui est extrêmement faible. L'ancrage des tourbillons superfluides aux tubes de flux dans le cœur externe des étoiles à neutrons a donc un impact très important sur la valeur de coefficients β et β' , et donc sur la force de friction mutuelle.

8.4 Conséquences astrophysiques

Dans la suite, nous étudions l'influence de l'ancrage dans le cœur sur la dynamique des pulsars, en particulier lors d'un événement de glitch.

8.4.1 Temps caractéristique de couplage par friction mutuelle

En utilisant l'hypothèse d'axisymétrie et en supposant que les vitesses des fluides sont données par (8.7) dans le plan équatorial, les équations d'Euler (8.1) et (8.2) se réduisent simplement au système d'équations

$$\partial_t v_n^\varphi + \varepsilon_n \partial_t w_{pn}^\varphi = f_{mf}^\varphi / \rho_n, \quad (8.54)$$

$$\partial_t v_p^\varphi - \varepsilon_p \partial_t w_{pn}^\varphi = -f_{mf}^\varphi / \rho_p, \quad (8.55)$$

où $v_n^\varphi = r \Omega_n$, $v_p^\varphi = r \Omega_p$ et f_{mf}^φ correspond à la composante de la force de friction mutuelle (8.50) selon le vecteur u_φ^i . La direction commune κ^i des tubes de flux et des tourbillons étant orthogonale à la vitesse relative w_{pn}^i , f_{mf}^φ est alors donnée par $f_{mf}^\varphi = \mathcal{N}_n \rho_n \kappa \beta w_{pn}^\varphi$, de telle sorte que les équations précédentes peuvent se réécrire sous la forme suivante (voir, e.g., Andersson *et al.* (2006))

$$\frac{\partial w_{pn}^\varphi}{\partial t} = -\frac{\mathcal{N}_n \kappa}{x_p (1 - \varepsilon_n - \varepsilon_p)} \times \beta \times w_{pn}^\varphi, \quad (8.56)$$

qui est la version *locale* et *newtonienne* de l'équation (6.24) rencontrée dans la partie III (la quantité κ désignant ici le quantum de circulation associé à un tourbillon superfluide). Le

temps caractéristique local τ_c sur lequel le superfluide de neutrons et le fluide de particules chargées sont dynamiquement couplés par friction mutuelle est donc approximativement donné par

$$\tau_c = \frac{x_p(1 - \varepsilon_n - \varepsilon_p)}{\mathcal{N}_n \kappa} \times \frac{1}{\beta} \simeq \frac{x_p(1 - \varepsilon_p)}{2\Omega} \times \frac{1}{\beta}, \quad (8.57)$$

où nous avons utilisé le fait que $\varepsilon_n \ll \varepsilon_p$, voir section 5.1.4, et $\mathcal{N}_n \kappa \simeq 2\Omega$, voir Éq. (3.10). La version globale et relativiste de ce temps de couplage est donnée par (6.46).

En l'absence d'ancrage dans le cœur, *i.e.* pour $N_p = 0$, le temps de couplage se réduit à

$$\tau_c^0 = \frac{x_p(1 - \varepsilon_p)}{2\Omega} \times \frac{1 + \xi_n^2}{\xi_n} \simeq \frac{x_p(1 - \varepsilon_p)}{2\Omega \xi_n}, \quad (8.58)$$

où le rapport traînée/portance est donné par (8.11). En remplaçant ξ_n par son expression, ce temps caractéristique vérifie alors

$$\tau_c^0 \simeq 10(1 - \varepsilon_p)^{3/2} (\varepsilon_p)^{-2} \left(\frac{x_p}{0,05} \right)^{-1/6} \left(\frac{\rho}{10^{14} \text{ g.cm}^{-3}} \right)^{-1/6} \left(\frac{P}{1 \text{ s}} \right) \text{ s}, \quad (8.59)$$

où $P = 2\pi/\Omega$ est la période de rotation du pulsar. On pourra remarquer que cette estimation conduit à un temps de couplage environ un ordre de grandeur plus faible que celui prédit par le calcul classique réalisé par Alpar & Sauls (1988), voir leurs équations (11) et (12). Néanmoins, Jahan Miri (1998) a montré que l'analyse de ces derniers était incomplète et que leur estimation devait être multipliée par la fraction de protons x_p , ce qui conduit alors à un résultat très proche de (8.59). Par ailleurs, le terme $1 - \varepsilon_p$ apparaissant au numérateur de l'équation (8.57), qui provient de la présence d'effets d'entraînement dans les impulsions généralisées des fluides (8.31) et (8.32), est également absent du calcul effectué par Alpar & Sauls (1988), ces derniers n'ayant tenu compte de l'entraînement que dans le rapport traînée/portance. Notons que cette correction supplémentaire n'est pas correctement prise en compte dans l'équation (70) de Andersson *et al.* (2006).

Dans le cas où N_p tubes de flux sont ancrés à chaque ligne de tourbillon, le temps de couplage (8.57) a pour expression

$$\tau_c = \frac{x_p(1 - \varepsilon_p)}{2\Omega} \times \frac{(1 + x_p N_p)^2 + \xi_c^2}{\xi_c}, \quad (8.60)$$

où le rapport traînée/portance ξ_c est donné par (8.38) ou (8.39), selon le scénario d'ancrage considéré. La grandeur τ_c est tracée en fonction de N_p sur la figure 8.4, pour les modèles d'ancrage 1 et 2. Ces profils ont été calculés pour $\rho = 10^{14} \text{ g.cm}^{-3}$, $x_p = 0,05$, $\varepsilon_p = 0,1$ et une fréquence de rotation de 11,19 Hz, *i.e.* $P = 1/f = 0,089 \text{ s}$, correspondant au pulsar de Vela. De manière similaire au coefficient β (voir Fig. 8.2), τ_c dépend significativement du scénario d'ancrage étudié. Dans les deux cas, on observe toutefois que $\tau_c \ll \tau_c^0$ pour $N_p \ll 10^4$. En revanche, pour $N_p \gg 10^5$, le temps de couplage est beaucoup plus long qu'en l'absence d'ancrage. Ce comportement s'explique principalement par le rôle double de ξ_c dans le coefficient β , apparaissant en même temps à son numérateur et à son

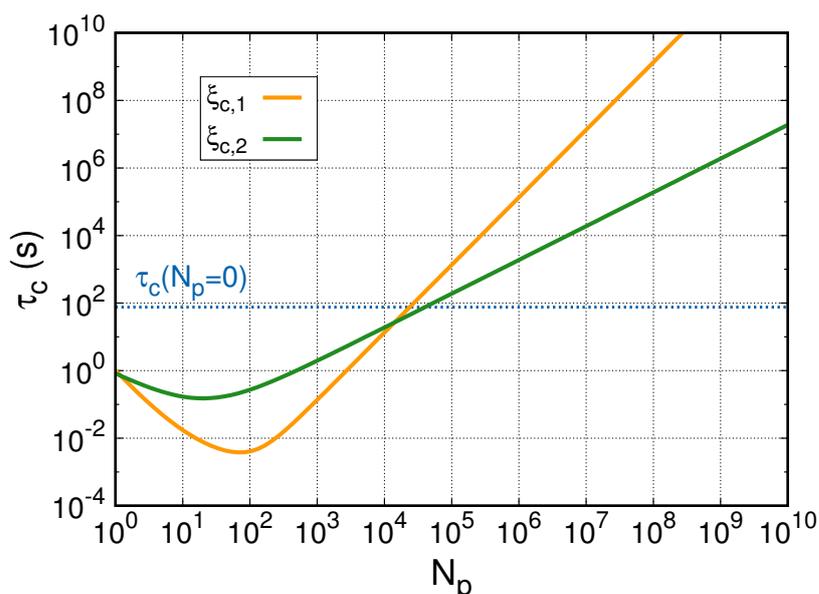


FIGURE 8.4 – **Temps de couplage en fonction du nombre de tubes de flux ancrés à chaque tourbillon.** Le temps τ_c est tracé en fonction de N_p (traits pleins), en utilisant $\xi_{c,1}$ (en orange) et $\xi_{c,2}$ (en vert). Ces profils ont été calculés pour $\varepsilon_p = 0, 1$, $x_p = 0, 05$, $\rho = 10^{14} \text{ g.cm}^{-3}$ et $P = 89 \text{ ms}$, *i.e.* $f = \Omega/(2\pi) = 11, 19 \text{ Hz}$. Le temps de couplage en l'absence d'ancrage τ_c^0 (8.59) est indiqué en pointillés bleus.

dénominateur. En outre, compte tenu du fait que $\beta < 1/2$, voir Fig. 8.2, le temps de couplage vérifie la condition

$$\tau_c > 8 \times 10^{-3} (1 - \varepsilon_p) \left(\frac{x_p}{0,05} \right) \left(\frac{P}{1 \text{ s}} \right) \text{ s}, \quad (8.61)$$

ce qui conduit à $\tau_c > 0,64 \text{ ms}$ pour le pulsar de Vela (en prenant $\varepsilon_p = 0, 1$ et $x_p = 0,05$).

8.4.2 Impact sur la physique des glitches

En l'absence d'interaction entre tubes de flux et lignes de tourbillons, le superfluide de neutrons présent dans le cœur est couplé au fluide de particules chargées par friction mutuelle sur un temps typique τ_c^0 donné par (8.59). Ainsi, si le superfluide dans le cœur des étoiles à neutrons peut éventuellement jouer un rôle dans la phase de montée des glitches, les temps de relaxation post-glitch sont généralement beaucoup plus grands que τ_c^0 (voir section 2.3.1). C'est l'une des raisons pour lesquelles les glitches ont longtemps été associés à un processus se déroulant uniquement dans l'écorce des étoiles à neutrons (voir section 3.2.2).

Suivant le scénario standard, la phase de montée s'explique alors par un mouvement rapide de lignes de tourbillons superfluides dans l'écorce, possiblement lié à l'excitation d'ondes de Kelvin¹. La phase de relaxation peut quant à elle s'interpréter de deux manières

1. Ce mécanisme dissipatif, mentionné dans la section 6.2.1, prédit un rapport traînée/portance de l'ordre de $\xi \sim 10^{-3} - 10^{-1}$.

différentes. Selon le modèle le plus répandu, une fois réancrés aux noyaux, les tourbillons peuvent néanmoins se déplacer d'un site d'ancrage à un autre par fluctuations thermiques ou par effet tunnel (ce mécanisme de fluage a été présenté dans la section 3.2.1). D'un autre côté, si les forces d'ancrage aux noyaux sont faibles, la dynamique du pulsar lors de la relaxation est dominée par le mécanisme de friction mutuelle (voir, e.g., Jones (1990a,b, 1993)). Dans ce second cas, le transfert de moment cinétique entre le superfluide de neutrons et le reste de l'étoile (incluant éventuellement une partie du superfluide de neutrons couplée au fluide de particules chargées sur des temps courts devant le(s) temps de relaxation) est gouverné en bonne approximation par les équations suivantes (Haskell *et al.*, 2012b)

$$\begin{cases} \dot{J}_n &= I_n (1 - \tilde{\varepsilon}_n) \dot{\Omega}_n + I_n \tilde{\varepsilon}_n \dot{\Omega}_p = +\Gamma_{\text{mf}}, \\ \dot{J}_p &= I_p (1 - \tilde{\varepsilon}_p) \dot{\Omega}_p + I_p \tilde{\varepsilon}_p \dot{\Omega}_n = -\Gamma_{\text{mf}} + \Gamma_{\text{ext}}, \end{cases} \quad (8.62)$$

où le moment extérieur Γ_{ext} , associé à l'émission d'ondes électromagnétiques, a pour expression

$$\Gamma_{\text{ext}} = -\mathcal{A} \times \Omega_p^3, \quad \mathcal{A} = \frac{4\pi R^6}{\mu_0 6c^3} (B_p \sin \alpha)^2, \quad (8.63)$$

voir également l'équation (2.7). Le moment de friction mutuelle Γ_{mf} est donné par

$$\Gamma_{\text{mf}} = -\bar{\mathcal{B}} I_n 2\Omega_n (\Omega_n - \Omega_p), \quad (8.64)$$

où $\bar{\mathcal{B}}$ est de l'ordre de $\sim 10^{-9} - 10^{-7}$ pour le processus d'excitation de phonons dans le réseau cristallin (voir annexe C.2 et section 6.2.1). En résolvant le système d'équations (8.62) pour $\bar{\mathcal{B}}$ constant, l'évolution temporelle de la différence de vitesse $\delta\Omega = \Omega_n - \Omega_p$ lors de la relaxation post-glitch suit alors la loi

$$\delta\Omega(t) \simeq (\delta\Omega_0 - \delta\Omega_\infty) \times \exp\left(-\frac{t}{\tau_{\text{relax}}}\right) + \delta\Omega_\infty, \quad (8.65)$$

où $t = 0$ correspond à la fin de la phase de montée, *i.e.* au début de la phase de relaxation. Le temps caractéristique de relaxation τ_{relax} introduit ici correspond au temps (global) de couplage par friction mutuelle,

$$\tau_{\text{relax}} = \frac{I_p}{I} \times \frac{(1 - \tilde{\varepsilon}_p - \tilde{\varepsilon}_n)}{2\bar{\mathcal{B}}\Omega_n}, \quad (8.66)$$

voir (C.17), et la différence de vitesse $\delta\Omega_\infty$ est donnée par

$$\delta\Omega_\infty = \frac{\mathcal{A}\Omega_p^3}{2I\bar{\mathcal{B}}\Omega_n} \sim \frac{1}{4t_c\bar{\mathcal{B}}}, \quad (8.67)$$

où t_c est l'âge du pulsar (2.16). Étant donné que le paramètre de friction mutuelle $\bar{\mathcal{B}}$ est très faible lors de la relaxation, et en supposant que la différence de vitesse $\delta\Omega_0$ est approximativement nulle à la fin de la phase de montée (voir section 7.1.2), nous avons $\delta\Omega_\infty \gg \delta\Omega_0$ et la différence de vitesse (8.65) croît donc au cours du temps¹, comme

1. Lors de la phase de montée, au contraire, la différence de vitesse diminue au cours du temps, voir Éq. (6.25).

attendu. On pourra noter que, sur des durées suffisamment courtes, le moment extérieur Γ_{ext} n'affecte pas la dynamique de l'étoile (voir (8.66)). C'est pourquoi nous avons négligé ce moment dans l'étude de la phase de montée du glitch, présentée dans la partie III. Ici, en revanche, considérer Γ_{ext} est nécessaire pour rendre compte de l'augmentation de la différence de vitesse $\delta\Omega$ au cours du temps (qui à son tour est indispensable pour qu'un nouvel événement de glitch puisse se dérouler). Par ailleurs, il est intéressant de remarquer que le modèle de fluage linéaire peut être grossièrement décrit par les mêmes équations que précédemment. Dans ce cas, le paramètre traînée/portance vérifie $\xi \gg 1$ (*i.e.* les tourbillons se déplacent approximativement avec le fluide de particules chargées) de sorte que le paramètre $\bar{\mathcal{B}}$ est également très faible (voir (8.14)).

La présence d'interactions entre les tourbillons et les tubes de flux permet alors d'envisager un autre scénario possible de glitch, dans lequel le superfluide de neutrons dans le cœur joue un rôle primordial. Cela est particulièrement intéressant dans la mesure où ce superfluide est susceptible de participer aux glitches de certains pulsars, tels que le pulsar de Vela, comme nous l'avons vu dans la section 3.2.2. Suivant ce scénario, la dynamique du pulsar lors des phases de montée et de relaxation serait alors gouvernée par le mécanisme de friction mutuelle, à l'instar du second modèle que l'on vient de mentionner, et reposerait sur une variation du nombre N_p de tubes de flux ancrés à chaque tourbillon superfluide durant l'événement de glitch. En effet, comme on peut le voir sur la figure 8.4, une faible quantité de tubes de flux ancrés permet d'expliquer les temps de montée très courts, tandis que, pour de grandes valeurs de N_p , le superfluide dans le cœur pourrait être découplé du reste de l'étoile sur des temps suffisamment longs pour rendre compte de la phase de relaxation post-glitch (voir également Sedrakian *et al.* (1995)). Un modèle complet et précis de glitch en présence d'ancrage dans le cœur reste toutefois à identifier¹.

1. De possibles éléments de réponse peuvent se trouver dans le modèle de Ruderman *et al.* (1998) abordé dans la section 3.2.3.

Conclusions et perspectives

La présence de matière superfluide à l'intérieur des étoiles à neutrons est indiquée à la fois par des calculs microscopiques détaillés et par différentes observations. La superfluidité est donc un ingrédient important qui doit être pris en compte dans la construction de modèles réalistes d'étoiles à neutrons, indispensables pour étudier les phénomènes de refroidissement, de glitches et d'oscillations associés à ces astres. Les travaux exposés ici constituent une nouvelle étape vers la réalisation de cet objectif.

Dans un premier temps, nous avons étendu le modèle numérique proposé par [Prix *et al.* \(2005\)](#) afin d'obtenir des configurations stationnaires d'étoiles à neutrons superfluides, en relativité générale, reposant sur l'utilisation d'EoSs réalistes ([Sourie *et al.*, 2016](#)). Pour cela, nous avons supposé que l'étoile est composée de deux fluides, à savoir un superfluide de neutrons et un fluide de particules chargées, tournant de manière uniforme autour d'un même axe avec différentes vitesses de rotation (Ω_n et Ω_p). Ces configurations peuvent être calculées pour n'importe quelle vitesse de rotation et s'affranchissent donc de l'approximation de rotation lente utilisée par [Andersson & Comer \(2001\)](#), [Comer \(2004\)](#) et [Kheto & Bandyopadhyay \(2015\)](#). Dans le but d'atteindre une précision numérique élevée, deux EoSs tabulées ont été interpolées à l'aide d'un schéma thermodynamiquement cohérent d'ordre élevé, que nous avons testé sur des EoSs analytiques. Nous avons ainsi obtenu une précision relative globale de l'ordre de $10^{-8} - 10^{-7}$, mesurée par la violation des identités du viriel, similaire à celle liée aux calculs de configurations d'étoiles à un fluide avec une EoS réaliste.

Ces modèles numériques nécessitant la donnée d'une EoS dépendant de la densité de chaque fluide et du carré de la vitesse relative, Δ^2 , nous avons présenté un formalisme permettant de déterminer l'EoS pour une valeur arbitraire de Δ^2 et de calculer les paramètres d'entraînement correspondants. Dans le cas où Δ^2 est faible, les résultats présentés ici sont parfaitement cohérents avec ceux obtenus à partir de la théorie du liquide de Fermi, à l'ordre le plus bas en la vitesse relative ([Urban & Oertel, 2015](#)). Les désaccords observés entre les calculs réalisés par [Comer & Joynt \(2003\)](#) et [Kheto & Bandyopadhyay \(2014\)](#), d'un côté, et par [Gusakov *et al.* \(2009a, 2014c\)](#), d'un autre côté, proviennent alors du fait que la déformation relativiste des sphères de Fermi n'a pas été correctement prise en compte par les premiers. Nous avons ensuite appliqué ce nouveau formalisme à deux modèles nucléaires de type RMF, DDH et DDH δ , dont les couplages dépendant de la densité ont été ajustés sur différentes propriétés connues de la matière nucléaire symé-

trique et de la matière pure de neutrons. À l'aide de ces deux EoSs, nous avons calculé différentes configurations d'équilibre réalistes d'étoiles à neutrons superfluides en rotation. Nous avons alors étudié certaines grandeurs globales caractérisant ces étoiles, telles que leur masse ou leur moment d'inertie. En particulier, les masses maximales obtenues sont compatibles avec les observations d'étoiles à neutrons de $2 M_{\odot}$.

Lors de cette étude, nous nous sommes principalement intéressés aux propriétés relatives au cœur des étoiles à neutrons, en considérant simplement une composition interne homogène. Comme nous l'avons déjà mentionné dans la section 3.2.2, les effets d'entraînement associés à l'écorce interne, dus à la diffraction de Bragg des neutrons libres par les noyaux, sont beaucoup plus importants que dans le cœur (voir Chamel (2005, 2012) et Fig. 3.11). Il serait donc particulièrement intéressant d'inclure la présence de l'écorce solide dans nos modèles. Notons que le formalisme pour cela est déjà disponible (Carter *et al.*, 2006a; Carter & Samuelsson, 2006). Il sera alors nécessaire de tenir compte d'une EoS adaptée. Cela pourrait par exemple être réalisé en utilisant une EoS unifiée, *i.e.* décrivant les différentes régions de l'étoile de manière thermodynamiquement cohérente (voir, e.g. Fantina *et al.* (2013)), convenablement modifiée pour décrire un système de deux fluides couplés par effets d'entraînement.

Nous avons ensuite examiné en détails l'impact de la relativité générale sur la dynamique globale des glitches géants, tels que ceux rencontrés par le pulsar de Vela (Sourie *et al.*, 2017). À cette fin, nous avons étudié le transfert de moment cinétique se déroulant entre le superfluide de neutrons dans le cœur et le reste de l'étoile, suite au désancrage d'une grande quantité de lignes de tourbillons superfluides. Lors de la phase de montée du glitch, la dynamique de l'étoile est gouvernée par un mécanisme de friction mutuelle (Languis *et al.*, 1998), associé à l'interaction des tourbillons avec les fluides dans lesquels ils sont plongés. L'échelle de temps hydrodynamique étant nettement plus courte que le temps d'action de cette force de friction mutuelle, nous avons modélisé l'évolution temporelle de la vitesse de rotation de chaque fluide à l'aide d'une séquence quasi-stationnaire de configurations d'équilibre, à masse baryonique totale fixée.

Par une approche analytique simple, nous avons montré que la différence de vitesse entre les fluides, $\delta\Omega = \Omega_n - \Omega_p$, évolue approximativement selon une loi exponentiellement décroissante, dont le temps caractéristique τ_r a une forme similaire au temps de montée obtenu à la limite newtonienne (voir, e.g., Carter (2001); Sidery *et al.* (2010)). Toutefois, la prise en compte de la relativité générale modifie la structure de l'étoile et joue également un rôle important dans la dynamique des fluides. Ainsi, les effets d'entraînement des référentiels inertiels induisent un couplage supplémentaire entre les fluides, dont l'action est opposée aux effets d'entraînement mutuel entre les nucléons dans le cœur.

Afin de tester la validité de cette approximation analytique et pour déterminer l'importance des effets relativistes, nous avons résolu numériquement les équations gouvernant le transfert de moment cinétique. Notre code fait appel à différents paramètres d'entrée, macroscopiques d'une part (la masse et la fréquence de rotation de l'étoile, l'amplitude du glitch) et microscopiques d'autre part (choix de l'EoS, paramètre de friction mutuelle moyen \mathcal{B}). Nous avons alors exploré en détails l'influence de ces différents paramètres sur le temps de montée, en utilisant les EoSs DDH et DDH δ . Nous avons observé que les résultats déduits de l'approche analytique reproduisent en très bonne approximation ceux

obtenus à partir des simulations numériques. En particulier, le temps de montée τ_r fait intervenir différents moments d'inertie partiels, qui peuvent être déterminés en faisant seulement appel aux configurations d'équilibre. En outre, nous avons étudié l'influence de la relativité générale sur τ_r en utilisant deux EoS polytropiques différentes. Les erreurs liées à l'utilisation de la mécanique newtonienne à la place de la relativité générale peuvent atteindre $\sim 20 - 40\%$, selon l'EoS considérée. Les effets relativistes sur la structure de l'étoile et sur le couplage entre les fluides étant tous les deux très importants, nous en déduisons qu'un modèle réaliste de glitch doit nécessairement être réalisé dans un cadre relativiste. Il faut toutefois garder à l'esprit que l'utilisation de la mécanique newtonienne n'est probablement pas la source principale d'incertitude dans les modèles de glitches actuels. En effet, nos calculs reposent sur l'expression du moment de friction mutuelle Γ_{mf} obtenue par [Langlois *et al.* \(1998\)](#) en supposant que les tourbillons sont rigides et alignés avec l'axe de rotation. La géométrie et l'orientation de ces lignes pourraient toutefois être plus complexes, modifiant alors fortement l'expression de Γ_{mf} . En outre, il convient de rappeler que les incertitudes sur l'EoS peuvent également être importantes.

Afin de satisfaire la contrainte $\tau_r < 30$ s ([Dodson *et al.*, 2007](#)), le paramètre de friction mutuelle doit nécessairement être supérieur à $\sim 10^{-5}$ pour expliquer les glitches du pulsar de Vela. Néanmoins, la valeur de $\bar{\mathcal{B}}$ étant moyennée sur toute l'étoile, le paramètre de friction mutuelle peut être localement plus important (voir, e.g., [Sedrakian \(2005\)](#) et [Haskell *et al.* \(2014\)](#)). De plus, pour des estimations réalistes de ce paramètre, le temps de montée τ_r obtenu est plus grand que le temps hydrodynamique, de sorte qu'il est possible de décrire précisément la dynamique d'un glitch par une succession de configurations d'équilibre.

Par ailleurs, nous nous sommes également intéressés à la quantité d'ondes gravitationnelles émises lors de la phase de montée du glitch, en étudiant les variations temporelles du quadrupôle de masse de l'étoile. Bien que les fréquences caractéristiques associées à ce rayonnement soient situées dans la bande de sensibilité des interféromètres actuels, tels que Advanced LIGO et Advanced Virgo, les amplitudes correspondantes sont trop faibles pour pouvoir observer ces ondes. Par exemple, pour les glitches du pulsar de Vela, l'amplitude caractéristique maximale est de l'ordre de $\sim 10^{-32}$, pour $\bar{\mathcal{B}} = 1/2$ (à comparer avec l'amplitude minimale détectable par aLIGO, $h_{\min} \sim 10^{-22}$ à 100 Hz). Les sources d'ondes gravitationnelles les plus prometteuses, si elles existent, seraient alors des étoiles en rotation très rapide et rencontrant des glitches de grande amplitude.

S'il paraît peu probable de détecter les glitches par l'émission gravitationnelle qui leur est liée, les radiotélescopes FAST (Five-hundred Aperture Spherical radio Telescope, [Smits *et al.* \(2009\)](#)), LOFAR (Low Frequency Array, [Stappers *et al.* \(2011\)](#)) et SKA (Square Kilometer Array, [Watts *et al.* \(2015\)](#)) seront bientôt capables d'observer la phase de montée avec une précision sans précédent. Cela permettra alors d'apporter des contraintes très fortes sur τ_r et donc sur les mécanismes physiques gouvernant le phénomène de glitch. Dans cette optique, il est donc indispensable de construire des modèles de glitches plus complets, tenant compte par exemple des propriétés magnéto-élastiques et superfluides de l'écorce. En outre, il est également crucial de considérer un modèle dans lequel seule une partie du superfluide participe aux événements de glitches (voir, e.g. [Haskell *et al.* \(2012b\)](#); [Antonelli & Pizzochero \(2017\)](#)).

Nous avons enfin étudié la dynamique du superfluide de neutrons dans le cœur externe des étoiles à neutrons, dans le cas où les interactions mutuelles entre tourbillons superfluides et tubes de flux magnétiques sont importantes. Nous avons alors déterminé l’expression de la force de friction mutuelle associée au déplacement de paquets de lignes quantifiées formés d’une ligne de tourbillon et d’un certain nombre N_p (potentiellement très important) de tubes de flux ancrés à celle-ci. En particulier, nous avons montré que le scénario standard, basé sur l’action d’une force de Magnus liée aux neutrons et d’une force de traînée, n’est plus valide en présence d’ancrage dans le cœur et qu’une force supplémentaire doit être considérée afin de rendre compte de l’effet Magnus associé aux protons supraconducteurs. Nos résultats sont en accord avec l’expression de la vitesse moyenne des tourbillons obtenue par [Glampedakis & Andersson \(2011\)](#) dans le même contexte, mais en suivant une approche différente. En outre, la principale source de dissipation ne provient plus ici de la diffusion des électrons par les tourbillons superfluides magnétisés par entraînement mais plutôt de la diffusion des électrons par le champ magnétique porté par les tubes de flux ancrés à chaque ligne de tourbillon. Afin de tenir compte des incertitudes actuelles sur le détail de l’interaction entre tourbillons et tubes de flux, nous avons considéré deux scénarios d’ancrage très simplifiés et deux expressions très naïves du coefficient de résistivité associé à un unique paquet de lignes.

Nous avons alors obtenu une estimation du temps caractéristique τ_c sur lequel le superfluide de neutrons dans le cœur externe est couplé au reste de l’étoile par friction mutuelle. Bien que la valeur exacte de τ_c dépende fortement des détails du mécanisme d’ancrage et du coefficient de résistivité, il est néanmoins possible de tirer certaines conclusions générales des différents cas étudiés. Par exemple, pour de faibles valeurs de N_p , nous avons observé que le temps de couplage τ_c est beaucoup plus court que la valeur attendue en l’absence d’ancrage, $\tau_c^0 \sim 10 - 100$ s ([Alpar *et al.*, 1984b](#); [Andersson *et al.*, 2006](#)). En revanche, τ_c peut être nettement plus long que τ_c^0 dans le cas où chaque paquet contient au moins $\sim 10^4 - 10^5$ tubes de flux. Une variation du nombre de tubes de flux ancrés à chaque tourbillon au cours du glitch pourrait ainsi expliquer les différentes échelles de temps associées à ce phénomène. En particulier, nos résultats suggèrent que le superfluide dans le cœur pourrait être découplé du reste de l’étoile sur des temps suffisamment longs pour rendre compte de la phase de relaxation post-glitch. Notons que, si notre étude a pour l’instant été réalisée dans le cadre newtonien, une version relativiste de ces calculs est actuellement en cours de rédaction.

Plusieurs travaux ayant récemment montré que le superfluide de neutrons dans l’écorce des étoiles à neutrons n’est pas suffisant pour expliquer certains glitches ([Jahan-Miri, 2005](#); [Yuan *et al.*, 2010](#); [Alpar, 2011](#); [Andersson *et al.*, 2012](#); [Chamel, 2013](#); [Akbal *et al.*, 2015](#)), nos résultats confirment que le superfluide dans le cœur pourrait effectivement prendre part à ces événements (voir, e.g., [Sedrakian *et al.* \(1995\)](#); [Gügercinoğlu & Alpar \(2014\)](#) pour des conclusions similaires). Un modèle de glitch complet basé sur la présence d’ancrage dans le cœur reste toutefois à établir précisément.

Enfin, mentionnons également que les interactions entre tourbillons superfluides et tubes de flux sont susceptibles d’avoir une influence significative sur d’autres phénomènes physiques associés aux étoiles à neutrons, tels que la précession ([Stairs *et al.*, 2000](#); [Sedrakian *et al.*, 1999](#); [Link, 2003, 2006, 2007](#); [Glampedakis *et al.*, 2008](#)) ou l’instabilité de certains modes de vibration, appelés modes r ([Haskell *et al.*, 2009, 2012a, 2014](#); [Gusakov](#)

et al., 2014a,b). L'impact exact de la présence d'ancrage dans le cœur sur ces différents processus reste à déterminer.

Conclusion

Détermination et analyse des temps d'arrivée

A.1 Mesure des temps d'arrivée

Les pulsars étant des sources radio relativement faibles, il est nécessaire d'utiliser des radiotélescopes de très grand diamètre (de l'ordre de la centaine de mètres) pour capter un nombre suffisant de photons. De plus, pour avoir un rapport signal sur bruit satisfaisant, il est indispensable d'intégrer le signal en temps et en fréquence. L'*intégration en fréquence* se fait sur une bande de fréquence de l'ordre de la centaine de MHz, pour la majorité des observations autour de 1,4 GHz. Toutefois, le phénomène de dispersion mentionné précédemment (voir Fig. 2.4) fait que le signal intégré sur toute cette gamme de fréquence sera étalé dans le temps, voire même rendu apériodique, si aucune correction n'est apportée. Deux méthodes de *dédispersion* différentes sont utilisées :

- La *dédispersion incohérente* effectue une correction après détection du signal, la phase n'ayant pas été enregistrée. Elle consiste à séparer la bande de fréquence observée en différents canaux (de largeur ~ 1 MHz) et à appliquer un décalage temporel approprié à chacun de ces canaux, avant intégration. Cette méthode est limitée par la présence de dispersion résiduelle à l'intérieur de chaque canal et par le phénomène de scintillation (chromatique) du signal liée à la nature turbulente du milieu interstellaire.
- La *dédispersion cohérente* consiste à traiter le signal en manipulant la phase de celui-ci. Le principe est d'appliquer au signal reçu l'inverse de la fonction de transfert du milieu interstellaire, ce dernier agissant comme un filtre de phase. Bien qu'elle soit plus difficile à mettre en œuvre que la dédispersion incohérente, la technique de dédispersion cohérente n'engendre aucune dispersion résiduelle, ce qui permet d'effectuer une chronométrie très précise des pulsars.

Après dédispersion du signal, celui-ci est ensuite « empilé » de manière cohérente sur des courtes durées, correspondant à une centaine ou à un millier de périodes. Pour réaliser cette étape, que l'on nomme *foldng*, il faut disposer au préalable d'une première estimation de la période du pulsar, qui peut être fournie par la transformée de Fourier rapide du signal par exemple. On obtient alors des profils de pulse moyens très stables (voir Fig. 2.2) avec un bon rapport signal sur bruit. Notons que cet empilement temporel

se fait généralement en temps réel pour gagner de l'espace disque : il n'y a alors plus moyen de revenir à l'intérieur de la durée d'intégration.

Les temps d'arrivée (ou TOAs, pour *times of arrival*) des impulsions moyennes enregistrées sont déterminés de manière très précise par corrélation croisée avec un profil de pulse « modèle » sur lequel un point de référence a été positionné. En général, cette impulsion « modèle » est obtenue à partir de l'intégration d'un très grand nombre d'observations antérieures, mais elle peut également être construite numériquement à l'aide d'une somme de profils gaussiens. La précision avec laquelle est déterminé chaque TOA est approximativement donnée par la largeur du pulse W (donnée en unité de la période P du pulsar), divisée par le rapport signal sur bruit SNR : $\sigma_{TOA} \simeq WP/SNR$. Par conséquent, les TOAs les plus précis sont obtenus pour des pulsars rapides, associés à une émission forte et dont les pulses sont très fins.

A.2 Analyse des temps d'arrivée

Il est alors possible d'étudier l'évolution de la fréquence $f = 1/P$ du pulsar au cours du temps grâce à la mesure extrêmement précise des TOAs. Dans un référentiel comobile avec le pulsar, la fréquence $f(t)$ est donnée en bonne approximation par les premiers termes de son développement de Taylor en $t - t_0$, où t_0 est une époque de référence. Comme $f = dN/dt$, où N représente le « numéro » d'un pulse, on obtient l'expression suivante pour $N(t)$:

$$N(t) = N_0 + f_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\dot{f}_0(t - t_0)^2 + \frac{1}{6}\ddot{f}_0(t - t_0)^3 + \dots, \quad (\text{A.1})$$

où $N_0 = N(t_0)$ et les termes f_0 , \dot{f}_0 et \ddot{f}_0 désignent respectivement la fréquence, sa dérivée première et sa dérivée seconde au temps t_0 . Si la date t_0 coïncide avec l'arrivée d'un pulse, les pulses suivants, dont on connaît les numéros et les TOAs, doivent correspondre à des valeurs entières de N . C'est en ajustant la relation (A.1) aux TOAs mesurés qu'on déduit les valeurs de f_0 , \dot{f}_0 et \ddot{f}_0 .

Remarquons enfin qu'il est nécessaire d'appliquer différentes corrections aux TOAs mesurés avant d'utiliser (A.1). En effet, les différents pulses sont observés à l'aide d'un radiotélescope sur Terre et sont donc mesurés avec une horloge locale. Il est alors possible de transformer ces TOAs dits *topocentriques* en TOAs *barycentriques*, *i.e.* mesurés dans le référentiel associé au centre de masse du système solaire, ce dernier étant supposé galiléen et approximativement comobile avec le pulsar. La transformation entre temps topocentriques t_{topo} et temps barycentriques t_{bar} s'écrit sous la forme

$$t_{bar} = t_{topo} + \Delta_{corr} - \Delta_{DM} + \Delta_{R\odot} + \Delta_{S\odot} + \Delta_{E\odot}. \quad (\text{A.2})$$

Le terme Δ_{corr} se réfère à une correction d'horloge tenant compte de la différence entre le temps local de l'observatoire (mesuré à l'aide d'horloges atomiques au césium ou d'horloges à maser d'hydrogène) et le temps terrestre. La quantité Δ_{DM} correspond au retard dû au phénomène de dispersion. Les trois derniers termes sont des retards liés à la propagation dans le système solaire : $\Delta_{R\odot}$ correspond au temps de parcours classique de la lumière entre le radiotélescope et le centre de masse du système solaire, tandis que les quantités

A.2 Analyse des temps d'arrivée

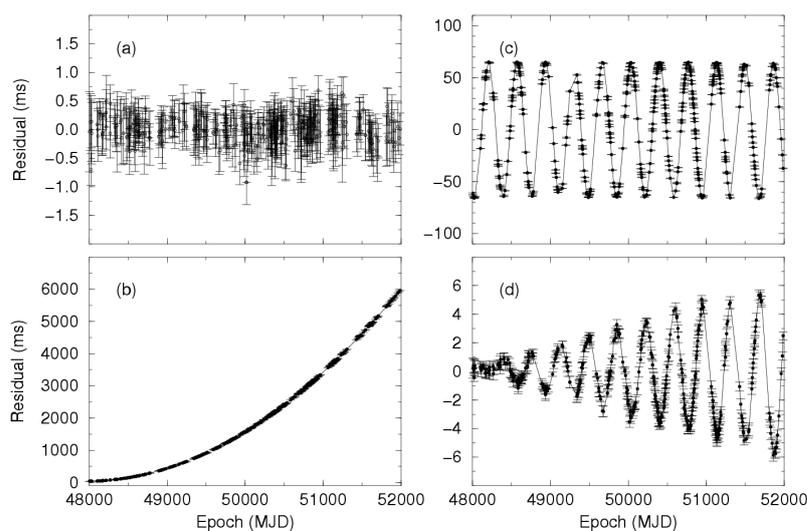


FIGURE A.1 – **Résidus de l’ajustement des TOAs du pulsar PSR B1133+16.** Évolution temporelle (en jours juliens modifiés) des résidus obtenus après avoir ajusté différents modèles aux TOAs mesurés. Un modèle satisfaisant conduit à des résidus aléatoirement distribués autour de 0, voir résidus (a). Les formes caractéristiques observées dans les résidus (b), (c) et (d) signalent respectivement une erreur dans l’estimation de la dérivée première, une erreur dans la position du pulsar et l’effet de l’absence de prise en compte du mouvement propre du pulsar. Figure tirée de [Lorimer & Kramer \(2005\)](#).

$\Delta_{S\odot}$ et $\Delta_{E\odot}$ désignent différentes corrections relativistes (retards Shapiro et Einstein). Des corrections supplémentaires doivent enfin être prises en compte pour décrire le mouvement propre du pulsar par rapport au référentiel du centre de masse du système solaire ou si le pulsar fait partie d’un système binaire. Outre le fait que les temps intervenant dans (A.1) sont les TOAs barycentriques, ces derniers sont aussi intéressants car ils peuvent être combinés facilement avec des TOAs mesurés par d’autres observatoires utilisant différentes horloges locales. Il est très important d’étudier les résidus obtenus après avoir ajusté les TOAs barycentriques avec la loi (A.1). Une erreur dans n’importe laquelle des corrections mentionnées précédemment, ou liée à d’autres grandeurs telles que la fréquence du pulsar, sa dérivée ou sa position aura une signature nettement visible dans ces résidus, voir Fig. A.1. Si l’ajustement est correct, les résidus montrent une distribution gaussienne autour de 0, avec un écart-type de l’ordre de l’incertitude associée à la mesure des TOAs. De plus amples détails sur la chronométrie des pulsars sont donnés, par exemple, dans [Lorimer & Kramer \(2005\)](#) et [Cognard \(2011\)](#).

Tourbillon superfluide et quantum de circulation

L'objectif de cette partie est de montrer qu'il est énergétiquement plus favorable pour un superfluide de contenir N lignes de tourbillons portant chacune un quantum de circulation $\kappa = h/m$, plutôt que d'être composé d'un unique tourbillon portant une circulation $N\kappa$.

La relation de quantification (3.5) permet de déterminer le profil de vitesse au voisinage d'une ligne de tourbillon portant une circulation κ ($N = 1$). Dans le cas le plus simple où le vortex est droit et infiniment long, les lignes de courant sont des cercles contenus dans le plan perpendiculaire à la ligne de vortex, dont le centre correspond à la position de cette dernière. La circulation le long d'une telle courbe est $2\pi r v$, de sorte que

$$v(r) = \frac{\kappa}{2\pi r}, \quad (\text{B.1})$$

r désignant la distance à la ligne de tourbillon.

Considérons maintenant un superfluide placé dans un récipient cylindrique de hauteur L et de rayon R en rotation à la vitesse angulaire Ω . La formation d'un tourbillon (avec $N = 1$) est associée à une variation ΔE de l'énergie du liquide donnée par

$$\Delta E = \int \frac{1}{2} \rho v^2 dV = \frac{1}{4\pi} \rho L \kappa^2 \int \frac{dr}{r}, \quad (\text{B.2})$$

où ρ est la masse volumique du liquide. L'intégrale par rapport à r est prise entre un rayon $r \sim a$, où a désigne la taille du cœur du vortex, et $r = R$. Cela conduit à

$$\Delta E = \frac{1}{4\pi} \rho L \kappa^2 \ln \left(\frac{R}{a} \right). \quad (\text{B.3})$$

D'un autre côté, le moment cinétique du superfluide en rotation vérifie

$$\mathcal{L} = \int \rho r v dV \simeq \frac{1}{2} \rho L \kappa R^2, \quad (\text{B.4})$$

où on a utilisé le fait que $a \ll R$. L'apparition d'une ligne de tourbillon est donc favorable d'un point de vue énergétique si l'énergie du superfluide dans le référentiel en rotation à la vitesse angulaire Ω est abaissée, *i.e.*

$$\Delta E_{\text{rot}} = \Delta E - \mathcal{L}\Omega < 0. \quad (\text{B.5})$$

Cela impose donc une vitesse de rotation minimale :

$$\Omega > \Omega_c = \frac{\kappa}{2\pi R^2} \ln \left(\frac{R}{a} \right). \quad (\text{B.6})$$

Supposons à présent que le superfluide est composé de N lignes de vortex, chacune portant un quantum κ . La variation d'énergie $\Delta E_{\text{rot}}(N, \kappa)$ associée s'exprime alors simplement de la manière suivante :

$$\Delta E_{\text{rot}}(N, \kappa) = N \times (\Delta E - \mathcal{L}\Omega), \quad (\text{B.7})$$

où ΔE et \mathcal{L} , donnés par (B.3) et (B.4), correspondent à la variation d'énergie et au moment cinétique liés à la formation d'un vortex portant un unique quantum κ . Le cas d'une unique ligne de tourbillon avec N quanta de circulation est obtenue en effectuant la substitution $\kappa \rightarrow N\kappa$ dans les équations (B.3) et (B.4), ce qui conduit à une variation d'énergie

$$\Delta E_{\text{rot}}(1, N\kappa) = N^2 \times \Delta E - N \times \mathcal{L}\Omega. \quad (\text{B.8})$$

Quel que soit $N > 1$, on en déduit que $\Delta E_{\text{rot}}(N, \kappa) < \Delta E_{\text{rot}}(1, N\kappa)$, indiquant ainsi qu'il est énergétiquement plus favorable pour un superfluide de contenir N lignes de tourbillons portant chacune un quantum de circulation κ , plutôt que d'être composé d'un unique tourbillon portant une circulation $N\kappa$. Les arguments précédents sont tirés de [Landau et al. \(1980\)](#).

Transfert de moment cinétique en mécanique newtonienne

C.1 Moments cinétiques

En injectant (4.40) dans (4.97), on obtient

$$\begin{cases} j_\varphi^n &= \left[n_n \Gamma_n^2 \mu^n U_n + 2\alpha \frac{\Gamma_n^2}{\Gamma_\Delta^2} \left(\frac{\Gamma_p}{\Gamma_\Delta \Gamma_n} U_p - U_n \right) \right] Br \sin \theta, \\ j_\varphi^p &= \left[n_p \Gamma_p^2 \mu^p U_p + 2\alpha \frac{\Gamma_p^2}{\Gamma_\Delta^2} \left(\frac{\Gamma_n}{\Gamma_\Delta \Gamma_p} U_n - U_p \right) \right] Br \sin \theta. \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

À la limite newtonienne, $\Gamma_n \simeq \Gamma_p \simeq \Gamma_\Delta \simeq 1$, $B \simeq 1$, $\mu^n \simeq m_n$ et $\mu^p \simeq m_p$, de telle sorte que le système d'équations (C.1) devient

$$\begin{cases} j_\varphi^n &= [n_n m_n U_n + 2\alpha (U_p - U_n)] r \sin \theta, \\ j_\varphi^p &= [n_p m_p U_p + 2\alpha (U_n - U_p)] r \sin \theta, \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

où les vitesses physiques (4.56) vérifient

$$U_n \simeq \Omega_n r \sin \theta \quad \text{and} \quad U_p \simeq \Omega_p r \sin \theta. \quad (\text{C.3})$$

En remplaçant (C.2) dans (4.95), le moment cinétique de chaque fluide, à la limite non relativiste, est donné par

$$\begin{cases} J_n &= \int_{\Sigma_t} n_n m_n (\Omega_n + \varepsilon_n (\Omega_p - \Omega_n)) r^2 \sin^2 \theta d^3 \Sigma_f, \\ J_p &= \int_{\Sigma_t} n_p m_p (\Omega_p + \varepsilon_p (\Omega_n - \Omega_p)) r^2 \sin^2 \theta d^3 \Sigma_f, \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

où $d^3 \Sigma_f = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ et les paramètres d'entraînement ε_n et ε_p sont définis par

$$\varepsilon_n n_n m_n = 2\alpha = \varepsilon_p n_p m_p, \quad (\text{C.5})$$

voir également (5.59).

Dans le cas où les vitesses de rotation des fluides sont constantes dans l'étoile, les moments cinétiques newtoniens sont alors donnés par

$$\begin{cases} J_n &= I_n \Omega_n + I_n \tilde{\varepsilon}_n (\Omega_p - \Omega_n), \\ J_p &= I_p \Omega_p + I_p \tilde{\varepsilon}_p (\Omega_n - \Omega_p), \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

où on a introduit le moment d'inertie de chaque fluide,

$$I_X = \int_{\Sigma_t} n_X m_X r^2 \sin^2 \theta \, d^3 \Sigma_f, \quad (\text{C.7})$$

et le terme de couplage par effets d'entraînement correspondant, moyenné sur le fluide considéré,

$$\tilde{\varepsilon}_X = \frac{\int_{\Sigma_t} \varepsilon_X n_X m_X r^2 \sin^2 \theta \, d^3 \Sigma_f}{\int_{\Sigma_t} n_X m_X r^2 \sin^2 \theta \, d^3 \Sigma_f} = \frac{1}{I_X} \int_{\Sigma_t} \varepsilon_X n_X m_X r^2 \sin^2 \theta \, d^3 \Sigma_f. \quad (\text{C.8})$$

Notons que les termes d'entraînement moyennés sont reliés par la relation $I_n \tilde{\varepsilon}_n = I_p \tilde{\varepsilon}_p$, qui découle de (C.5). Les expressions précédentes sont en parfait accord avec celles obtenues par [Sidery *et al.* \(2010\)](#).

C.2 Moment de friction mutuelle

À la limite newtonienne, le terme géométrique χ_\perp^2 (6.11) qui apparaît dans l'expression (6.15) du moment de friction mutuelle vérifie

$$\chi_\perp^2 = r^2 \sin^2 \theta. \quad (\text{C.9})$$

En outre, dans le cas où les termes d'entraînement sont *constants* dans l'étoile, on peut montrer que la vorticité (non-relativiste) du superfluide (6.9) est donnée par

$$\varpi_n = 2m_n [\Omega_n + \varepsilon_n (\Omega_p - \Omega_n)], \quad (\text{C.10})$$

où m_n est la masse de repos des neutrons et ε_n est défini par (C.5). Notons qu'en l'absence d'effets d'entraînement, on retrouve ainsi l'équation (3.6), à la différence près que cette dernière fait intervenir le rotationnel de la vitesse du superfluide et non son impulsion.

En utilisant le fait que $d^3 \Sigma \rightarrow d^3 \Sigma_f = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$ et $\Gamma_n \rightarrow 1$ à la limite newtonienne, le moment de friction mutuelle se réduit alors à

$$\Gamma_{\text{mf}}^{\text{newt}} = -\bar{\mathcal{B}} I_n \omega_n \delta\Omega, \quad (\text{C.11})$$

où le moment d'inertie I_n des neutrons est donné par (C.7) et la vorticité du superfluide par unité de masse ω_n par

$$\omega_n = \frac{\varpi_n}{m_n} = 2 [\Omega_n + \varepsilon_n (\Omega_p - \Omega_n)]. \quad (\text{C.12})$$

L'expression (C.11) correspond à l'équation (58) obtenue par [Sidery *et al.* \(2010\)](#).

Sous les mêmes hypothèses, la quantité κ (6.23) tend vers

$$\kappa^{\text{newt}} = I_n \omega_n. \quad (\text{C.13})$$

Plus généralement, il est important de remarquer que, même si les paramètres d'entraînement varient dans l'étoile, la différence de vitesse entre les neutrons et les protons est très faible, de sorte que $\omega_n \simeq 2\Omega_n$ et donc

$$\kappa^{\text{newt}} \simeq 2I_n \Omega_n. \quad (\text{C.14})$$

C.3 Temps de montée du glitch

En utilisant les relations (C.6), les moments d'inertie partiels (6.16), à la limite newtonienne, sont (en très bonne approximation) donnés par

$$\begin{aligned} I_{nn} &= I_n (1 - \tilde{\varepsilon}_n) + \Omega_p \frac{\partial I_n}{\partial \Omega_n}, \\ I_{np} &= I_n \tilde{\varepsilon}_n + \Omega_p \frac{\partial I_n}{\partial \Omega_p}, \\ I_{pn} &= I_p \tilde{\varepsilon}_p + \Omega_p \frac{\partial I_p}{\partial \Omega_n}, \\ I_{pp} &= I_p (1 - \tilde{\varepsilon}_p) + \Omega_p \frac{\partial I_p}{\partial \Omega_p}, \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

où on a utilisé le fait que $\Omega_n \simeq \Omega_p$ dans ces expressions. Dans l'hypothèse de rotation lente (6.20), les moments d'inertie I_n et I_p sont approximativement indépendants des vitesses de rotation (voir, e.g., Fig. 5.24), de sorte que les quantités introduites dans la section 6.2.1 vérifient

$$\hat{I}_n \simeq I_n, \quad \hat{I}_p \simeq I_p, \quad \hat{I} \simeq I_n + I_p = I \quad \text{et} \quad I_{np} \simeq I_n \tilde{\varepsilon}_n = I_p \tilde{\varepsilon}_p. \quad (\text{C.16})$$

La comparaison de (6.28) et (C.14) conduit alors à $\zeta = 1$, à la limite non-relativiste. Par conséquent, la mécanique newtonienne prédit un temps de montée (6.29) donné par l'expression suivante

$$\tau_r = \frac{I_p}{I} \times \frac{(1 - \tilde{\varepsilon}_p - \tilde{\varepsilon}_n)}{2\bar{\mathcal{B}}\Omega_n}, \quad (\text{C.17})$$

qui coïncide avec l'équation (69) de [Sidery *et al.* \(2010\)](#). Il est toutefois important de garder à l'esprit que cette expression n'est valable que pour des faibles vitesses de rotation.

Les dépendances du temps de montée en Ω_n et en $\bar{\mathcal{B}}$ sont (approximativement) les mêmes qu'en relativité générale (voir, e.g., (6.46)) et ont été vérifiées numériquement dans ce cadre (voir section 7.2.1). Nous cherchons ici à mettre en évidence la relation de proportionnalité entre τ_r et I_p/I d'une part, et entre τ_r et $1 - \tilde{\varepsilon}_p - \tilde{\varepsilon}_n$, d'autre part. Pour cela, nous avons utilisé le code d'évolution décrit dans la section 7.1 pour modéliser des glitches dans le contexte newtonien. L'EoS considérée est la suivante :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \kappa_n n_n^2 + \frac{1}{2} \kappa_p n_p^2 + \kappa_{np} n_n n_p + \kappa_\Delta n_n \Delta^2. \quad (\text{C.18})$$

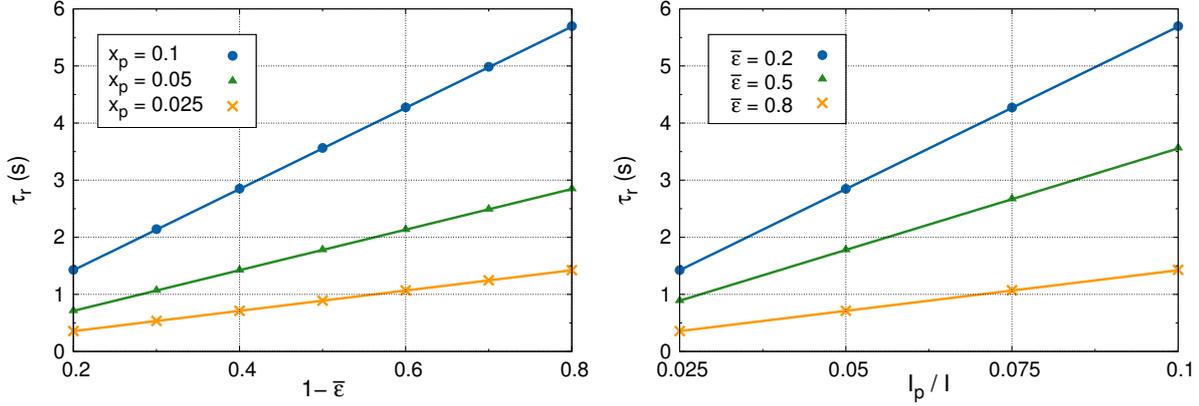


FIGURE C.1 – **Comparaison entre résultats numériques et valeurs théoriques.** Les valeurs de τ_r déduites de l'évolution temporelle de l'écart en vitesse durant un glitch d'amplitude $\Delta\Omega/\Omega = 10^{-6}$ sont tracées en fonction de $1 - \bar{\epsilon}_p - \bar{\epsilon}_n$ (à gauche) et $I_p/I \simeq x_p$ (à droite), pour une étoile de $1,4 M_\odot$ tournant à 11,19 Hz. Le paramètre de friction mutuelle \bar{B} est fixé à 10^{-4} et le cas (ii) est considéré (équilibre β maintenu au centre). Les droites correspondent aux valeurs théoriques, obtenues à partir de (C.17).

Cette EoS a été choisie de sorte que, à l'équilibre β et en corotation (*i.e.* $\mu^n = \mu^p$), la fraction de protons est donnée par

$$x_p = \frac{\kappa_n - \kappa_{np}}{\kappa_n + \kappa_p - 2\kappa_{np}}. \quad (\text{C.19})$$

Celle-ci est donc constante dans l'étoile. De plus, les paramètres d'entraînement (C.5) sont tels que

$$\varepsilon_p = \frac{2\kappa_\Delta}{m_p} \quad \text{et} \quad \varepsilon_n = \frac{2\kappa_\Delta}{m_n} \frac{x_p}{1 - x_p}, \quad (\text{C.20})$$

et sont donc également indépendants de la position. En modifiant les variables κ_n , κ_p , κ_{np} et κ_Δ , on peut alors choisir librement x_p et la quantité $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}_p + \bar{\epsilon}_n = \varepsilon_n + \varepsilon_p$. Le temps de montée τ_r est tracé en fonction de I_p/I et de $1 - \bar{\epsilon}$ sur la figure C.1, pour une étoile de masse $1,4 M_\odot$ et de fréquence de rotation $f_n = f_p = 11,19$ Hz (à la fin du glitch). Les résultats numériques obtenus (cercles, croix, triangles) sont en parfait accord avec les valeurs attendues (C.17) (lignes bleues, vertes, orange).

C.4 Couplages entre les fluides

En utilisant les équations (C.15), le coefficient de couplage $\hat{\varepsilon}_p$ (6.31) associé au fluide de protons est donné par

$$\hat{\varepsilon}_p = \frac{I_{np}}{\hat{I}_p} = \frac{\tilde{\varepsilon}_p + \frac{\Omega_p}{I_p} \frac{\partial I_p}{\partial \Omega_n}}{1 + \frac{\Omega_p}{I_p} \left(\frac{\partial I_p}{\partial \Omega_p} + \frac{\partial I_p}{\partial \Omega_n} \right)}, \quad (\text{C.21})$$

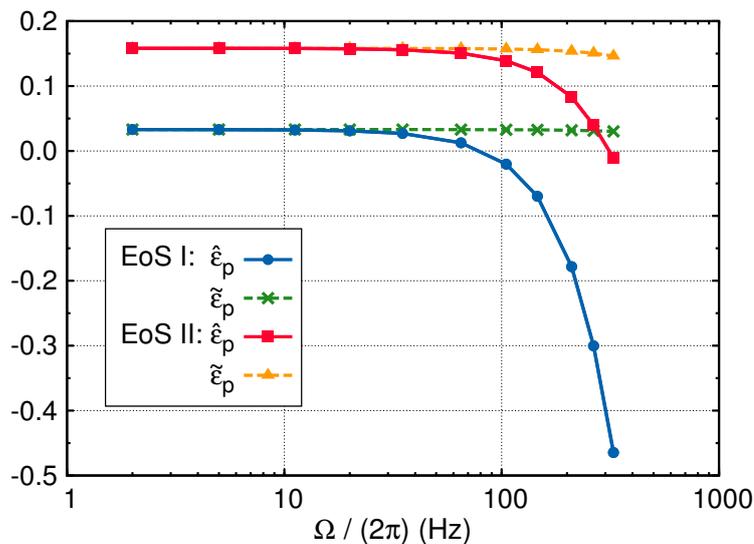


FIGURE C.2 – **Influence de la vitesse de rotation sur les couplages entre les fluides.** Le coefficient de couplage $\hat{\epsilon}_p$ et le paramètre d'entraînement $\tilde{\epsilon}_p$ sont tracés en fonction de la fréquence de rotation $f = \Omega/(2\pi)$ pour une étoile à neutrons de $1,4 M_\odot$, en supposant que les fluides sont en corotation et à l'équilibre β (cas ii). Les deux EoS considérées sont des versions newtoniennes de celles utilisées dans la section 7.2.2.

à la limite non-relativiste. En utilisant une version newtonienne du code `sfstar`, développée par [Prix et al. \(2005\)](#), nous avons réalisé quelques calculs de configurations d'équilibre non-relativistes d'étoiles à neutrons superfluides en rotation. Sur la figure C.2, nous traçons alors les coefficients $\hat{\epsilon}_p$ et $\tilde{\epsilon}_p$ en fonction de la fréquence de rotation f , pour une étoile de $1,4 M_\odot$, en supposant que les fluides sont comobiles et à l'équilibre β (cas ii). Les EoS considérées sont des versions newtoniennes de (7.9) et (7.10). Comme attendu, à faible vitesse de rotation, on observe que $\hat{\epsilon}_p \simeq \tilde{\epsilon}_p$ en très bonne approximation car le moment d'inertie I_p est approximativement constant. Les fluides sont donc uniquement couplés par des effets d'entraînement. En revanche, pour des fréquences supérieures à ~ 100 Hz, les effets de la rotation sur la structure de l'étoile deviennent non-négligeables et sont doubles. D'une part, le paramètre d'entraînement $\tilde{\epsilon}_p$ diminue faiblement car les densités atteintes décroissent légèrement. D'autre part, les moments d'inertie varient de manière significative de sorte qu'on observe alors une différence notable entre $\hat{\epsilon}_p$ et $\tilde{\epsilon}_p$. On met ainsi en évidence un couplage supplémentaire entre les fluides, qui intervient à haute vitesse de rotation par effets centrifuges (voir également l'image de gauche de la figure 6.9). En effet, une variation de la vitesse de rotation d'un fluide va conduire à des changements dans le profil de densité de ce fluide. Cela entraîne alors une modification du potentiel gravitationnel de l'étoile qui, à son tour, va perturber le profil de densité du second fluide. Comme en relativité générale, le profil de $\hat{\epsilon}_p$ dépend fortement de l'hypothèse choisie sur l'équilibre chimique (voir l'image de droite de la figure 6.9).

C.5 Quadrupôle de masse

À la limite newtonienne, l'équation d'Einstein (4.46) tend vers l'équation de Poisson $\Delta_3 \Phi = 4\pi G \rho = \sigma_\nu$, de sorte que la quantité \bar{Q} vérifie

$$\bar{Q}^{\text{newt}} = \frac{3}{2} \int_{\Sigma_t} \rho r^2 \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{3} \right) d^3 \Sigma_f. \quad (\text{C.22})$$

Compte tenu de

$$\frac{4}{3} \left(b + \frac{1}{4} \right) \frac{G^2}{c^4} M^3 \ll \bar{Q}^{\text{newt}}, \quad (\text{C.23})$$

dans cette même limite, on en déduit que le moment quadrupolaire Q^{newt} de la mécanique newtonienne est simplement donné par l'équation (C.22).

En supposant que l'axe de rotation est confondu avec l'axe des z , on introduit les moments d'inertie suivants, définis respectivement par rapport aux axes Ox , Oy et Oz , où O désigne le centre de l'étoile :

$$I_{xx} = \int_{\Sigma_t} \rho r^2 (\sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta) d^3 \Sigma_f, \quad (\text{C.24})$$

$$I_{yy} = \int_{\Sigma_t} \rho r^2 (\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \cos^2 \theta) d^3 \Sigma_f, \quad (\text{C.25})$$

et

$$I_{zz} = \int_{\Sigma_t} \rho r^2 \sin^2 \theta d^3 \Sigma_f, \quad (\text{C.26})$$

où I_{zz} correspond à (C.7). L'étoile étant axisymétrique, la masse volumique ρ ne dépend pas de φ et, par conséquent, les moments d'inertie I_{xx} et I_{yy} sont égaux. En injectant les relations précédentes dans (C.22), le quadrupôle de masse est alors donné par

$$Q^{\text{newt}} = I_{xx} - I_{zz}. \quad (\text{C.27})$$

Notons que, pour une étoile sphérique, nous aurions $I_{xx} = I_{zz}$, de sorte que le moment quadrupolaire de l'étoile serait nul.

En faisant maintenant l'hypothèse supplémentaire que l'étoile est un ellipsoïde de révolution, de demi-grand axe R_{eq} , de demi-petit axe R_{pol} et de masse volumique constante, on obtient

$$I_{xx} = \frac{1}{5} M (R_{\text{eq}}^2 + R_{\text{pol}}^2) \quad \text{et} \quad I_{zz} = \frac{2}{5} M R_{\text{eq}}^2. \quad (\text{C.28})$$

L'équation (C.27) conduit alors à

$$Q^{\text{newt}} = \frac{1}{5} M R_{\text{eq}}^2 (a^2 - 1), \quad (\text{C.29})$$

où $a = R_{\text{pol}}/R_{\text{eq}}$ désigne l'aplatissement de l'étoile. Un astre de forme oblate (déformé par effets centrifuges, par exemple) sera ainsi caractérisé par $a \leq 1$ ou, de manière équivalente, par $Q^{\text{newt}} < 0$. Lors de la phase de montée d'un glitch, l'évolution de la vitesse de rotation de chaque fluide est susceptible d'entraîner de légères variations de R_{eq} et de a , et donc du quadrupôle de masse.

Contraintes sur les moments d'inertie partiels

En appliquant une méthode de type principe variationnel aux états stationnaires et asymptotiquement plats d'une étoile axisymétrique composée de deux fluides en mouvement circulaire avec des vitesses de rotation indépendantes de la position, la variation d'énergie de l'étoile entre deux états voisins est donnée par

$$\delta E = \sum_X \Omega_X \delta J_X, \quad (\text{D.1})$$

pour une masse baryonique totale fixée, voir Éq. (3.5) de [Carter \(1975\)](#). La définition (6.16) des moments d'inerties partiels conduit à ce que la variation du moment cinétique de chaque fluide vérifie

$$\delta J_X = \sum_Y I_{XY} \delta \Omega_Y. \quad (\text{D.2})$$

En se rappelant que $I_{XY} = I_{YX}$, l'équation (D.1) devient

$$\delta E = \sum_{X,Y} I_{XY} \Omega_X \delta \Omega_Y \quad (\text{D.3})$$

$$= \frac{1}{2} (I_{nn} \delta (\Omega_n^2) + 2I_{np} \delta (\Omega_n \Omega_p) + I_{pp} \delta (\Omega_p^2)). \quad (\text{D.4})$$

Pour des vitesses de rotation suffisamment faibles, l'énergie E d'un état en rotation est donc approximativement donnée par

$$E = E_0 + \frac{1}{2} (I_{nn} \Omega_n^2 + 2I_{np} \Omega_n \Omega_p + I_{pp} \Omega_p^2), \quad (\text{D.5})$$

où E_0 est l'énergie associée à une configuration statique. En réécrivant cette relation de la manière suivante :

$$E - E_0 = \frac{1}{2} I_{nn} \left(\Omega_n + \frac{I_{np}}{I_{nn}} \Omega_p \right)^2 + \frac{1}{2} \left(I_{pp} - \frac{I_{np}^2}{I_{nn}} \right) \Omega_p^2, \quad (\text{D.6})$$

la stabilité de la configuration statique implique que le membre de droite de cette équation soit toujours strictement positif. Cela conduit alors à

$$I_{nn} > 0 \quad \text{et} \quad I_{nn} I_{pp} - I_{np}^2 > 0, \quad (\text{D.7})$$

ce qui, à son tour, donne $I_{pp} > 0$.

Commentaires sur le coefficient de résistivité

E.1 Coefficient de résistivité associé à une ligne unique

Nous donnons ici quelques arguments physiques permettant d'estimer le coefficient de résistivité associé à la diffusion des électrons par le champ magnétique porté par une ligne de tourbillon superfluide ou par un tube de flux. Les idées présentées dans la suite sont tirées de [Harvey *et al.* \(1986\)](#) et de [Jahan-Miri \(1996\)](#).

Puisque les électrons sont ultra-relativistes et dégénérés dans le cœur des étoiles à neutrons (voir section [1.2.3](#)), leur longueur d'onde est approximativement donnée par

$$\lambda_e \simeq \frac{hc}{E_F}, \quad (\text{E.1})$$

où E_F désigne l'énergie de Fermi du gaz d'électrons (correspondant à l'énergie des électrons les plus mobiles). Cette dernière s'exprime en fonction de la densité d'électrons n_e par la relation

$$E_F = \hbar (3\pi^2 n_e)^{1/3} c. \quad (\text{E.2})$$

Pour des densités typiques du cœur externe des étoiles à neutrons, *i.e.* de l'ordre de $n_e \simeq 0,1 \times n_0 \sim 0,02 \text{ fm}^{-3}$, les expressions précédentes conduisent à $E_F \sim 100 \text{ MeV}$ et $\lambda_e \sim 10^{-12} \text{ cm}$. En caractérisant la taille du cœur d'un tube de flux et d'un tourbillon par la quantité $\Lambda_\star \sim 10^{-11} \text{ cm}$ ([3.12](#)), qui correspond à la longueur caractéristique sur laquelle le champ magnétique porté par la ligne quantifiée est confiné, on observe que $\lambda_e \ll \Lambda_\star$, de sorte que le mouvement des électrons au voisinage de cette ligne pourra être décrit par des trajectoires classiques, sans faire appel à la mécanique quantique.

Nous nous intéressons à présent à la force de traînée $F_{e \rightarrow v}^i$ engendrée par les électrons diffusés par le champ magnétique d'un tourbillon superfluide sur ce dernier. Soit dp_e^i/dt la variation par unité de temps de la quantité de mouvement des électrons traversant le cœur de la ligne. En désignant la vitesse du tourbillon par rapport au gaz d'électrons par le vecteur v_v^i (de norme v_v), la composante de la force de traînée selon la direction de v_v^i est donnée par

$$F_{e \rightarrow v} = - \frac{dp_e^i v_{vi}}{dt v_v}. \quad (\text{E.3})$$

Le libre parcours moyen l_e des électrons étant nettement plus grand¹ que Λ_\star , les électrons sont supposés libres, et seule l'interaction de ces particules avec le champ magnétique du tourbillon est à prendre en compte. Par conséquent, dp_e^i/dt s'exprime de la manière suivante

$$\frac{dp_e^i}{dt} = \frac{dN_e}{dt} \times \langle \Delta p_e^i \rangle, \quad (\text{E.4})$$

où dN_e/dt représente le nombre d'électrons traversant le tourbillon par unité de temps et $\langle \Delta p_e^i \rangle$ est la variation moyenne de la quantité de mouvement d'un seul électron, associée à la diffusion de ce dernier. Le premier terme est approximativement donné par

$$dN_e = v_v dt \times S_{\text{eff}} \times n_e \simeq v_v dt \times 2\Lambda_\star L \times n_e, \quad (\text{E.5})$$

où $S_{\text{eff}} \simeq 2\Lambda_\star L$ est la surface effective d'un tourbillon de hauteur L . Par ailleurs, en supposant que la diffusion d'un électron se traduit par la présence d'un angle θ entre les quantités de mouvement incidente et diffusée (voir figure E.1), nous obtenons

$$\langle \Delta p_e^i \rangle \frac{v_{vi}}{v_v} = p_e \times \langle 1 - \cos \theta \rangle, \quad (\text{E.6})$$

où $p_e = h/\lambda_e = E_F/c$ et la notation $\langle . \rangle$ indique une moyenne prise sur l'ensemble des électrons traversant la ligne.

En injectant les relations précédentes dans l'équation (E.3), la force de traînée par unité de longueur est alors donnée par

$$\frac{F_{e \rightarrow v}}{L} = -\mathcal{R} \times v_v, \quad (\text{E.7})$$

où on a introduit le coefficient de résistivité \mathcal{R} par la relation

$$\mathcal{R} \simeq 2\Lambda_\star n_e p_e \langle 1 - \cos \theta \rangle, \quad (\text{E.8})$$

que nous cherchons à expliciter dans la suite. Compte tenu du champ magnétique porté par le tourbillon,

$$B_v = \frac{\phi_n}{2\pi\Lambda_\star^2} \simeq -\varepsilon_p \frac{\phi_0}{2\pi\Lambda_\star^2}, \quad (\text{E.9})$$

voir (3.30), l'électron traversant le cœur de la ligne quantifiée se met à suivre un mouvement circulaire, caractérisé par le rayon de giration

$$a = \frac{p_e}{e|B_v|} = \frac{E_F 4\pi\Lambda_\star^2}{hc\varepsilon_p} \simeq 10^{-9} - 10^{-8} \text{ cm}, \quad (\text{E.10})$$

comme illustré sur la figure E.1.

Étant donné que $a \gg \Lambda_\star$, chaque électron est dévié d'un angle très faible vérifiant environ

$$\theta_0 \sim -\frac{\Lambda_\star}{a} \simeq -\frac{\varepsilon_p}{2\Lambda_\star k_e} \ll 1, \quad (\text{E.11})$$

1. Par exemple, la viscosité de cisaillement conduit à $l_e \simeq 4 \times 10^{-3} \text{ cm}$ (Glampedakis *et al.*, 2011).

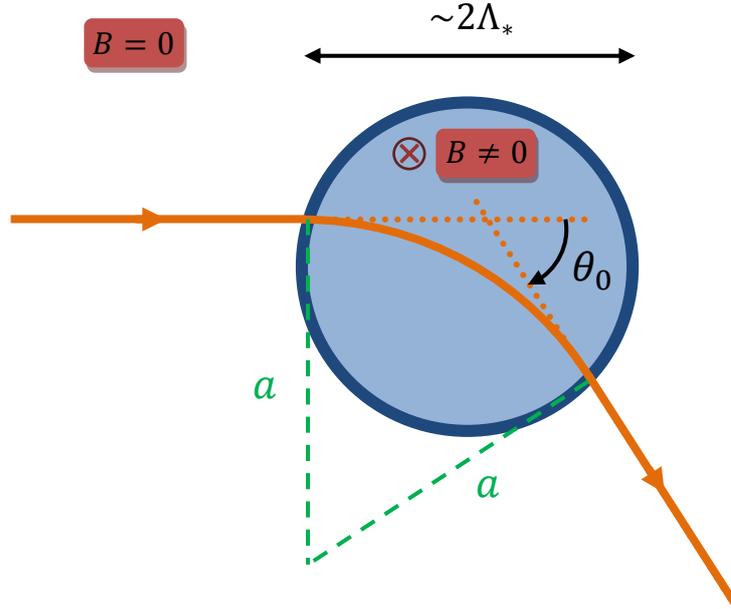


FIGURE E.1 – **Déviation d'un électron par le champ magnétique porté par un tourbillon superfluide.** La trajectoire suivie par l'électron est dessinée en orange et la section du tourbillon est représentée en vue de dessus par le cercle bleu. La direction du champ magnétique porté par la ligne est indiquée par la croix et les angles sont comptés positivement dans le sens trigonométrique.

où $k_e = 2\pi/\lambda_e$, ce qui conduit à

$$\langle 1 - \cos \theta \rangle \simeq 1 - \cos \theta_0 \simeq \frac{\theta_0^2}{2} \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{\Lambda_*}{a} \right)^2. \quad (\text{E.12})$$

En remplaçant cette expression dans (E.8), le coefficient de résistivité associé à la diffusion des électrons sur un unique tourbillon est alors donné par

$$\mathcal{R}_n = \frac{e^2 n_e c}{4\pi^2 \Lambda_* E_F} \times \phi_n^2. \quad (\text{E.13})$$

Notons que dans le cas où les électrons sont diffusés par le champ magnétique porté par un seul tube de flux, le coefficient de résistivité s'obtient simplement en effectuant la substitution $\phi_n \rightarrow \phi_0$, *i.e.*

$$\mathcal{R}_p = \frac{e^2 n_e c}{4\pi^2 \Lambda_* E_F} \times \phi_0^2 = \frac{\mathcal{R}_n}{\varepsilon_p^2}. \quad (\text{E.14})$$

Il est intéressant de remarquer que les estimations (E.13) et (E.14) sont très proches (à un facteur numérique près) des expressions (8.9) et (8.36), respectivement obtenues par [Alpar *et al.* \(1984b\)](#) et [Jones \(1987\)](#) en suivant un modèle plus précis.

En négligeant¹ la composante de $F_{e \rightarrow v}^i$ transverse à v_v^i , la force de traînée vérifie simplement

$$\frac{F_{e \rightarrow v}^i}{L} = -\mathcal{R} \times v_v^i, \quad (\text{E.15})$$

voir (E.7). La force de traînée \mathcal{F}_d^i par unité de longueur s'exerçant sur un tourbillon (ou un tube de flux), moyennée sur un certain volume \mathcal{V} de fluide, s'obtient alors à partir de cette expression (i) en remplaçant v_v^i par la différence entre la vitesse moyenne v_L^i des tourbillons contenus dans \mathcal{V} et la vitesse moyenne des électrons $v_e^i = v_p^i$ (définies toutes les deux par rapport à un référentiel galiléen) et (ii) en supposant que les termes prenant part au coefficient de résistivité sont constants dans le volume \mathcal{V} . Dans ce cas, l'équation (E.15) devient alors

$$\mathcal{F}_d^i = \frac{\bar{F}_{e \rightarrow v}^i}{L} = -\mathcal{R} (v_L^i - v_p^i), \quad (\text{E.16})$$

où $\bar{\cdot}$ désigne une moyenne prise sur \mathcal{V} , ce qui redonne bien l'expression attendue, à savoir (8.8).

E.2 Cas d'un paquet formé de tubes de flux superposés

Nous cherchons maintenant à obtenir une expression approchée du coefficient de résistivité associé à un unique paquet contenant N_p tubes de flux superposés à un tourbillon superfluide, en utilisant des arguments similaires à ceux présentés dans la section E.1. Cette situation correspond au premier scénario d'ancrage considéré dans la section 8.3.1. L'idée ici est de montrer les limites de la formule (8.38), très naïve.

Le paquet de lignes quantifiées ayant un rayon caractéristique $d_{c,1}$ de l'ordre de Λ_* , la quantité dN_e est toujours donnée par (E.5). En revanche, le rayon de giration a_1 vérifie maintenant

$$a_1 = \frac{E_F}{ec|B_{c,1}|}, \quad (\text{E.17})$$

où le champ magnétique porté par le paquet a pour expression

$$B_{c,1} = \frac{N_p \phi_0 - \varepsilon_p \phi_0}{2\pi d_{c,1}^2} \simeq \frac{N_p - \varepsilon_p}{2\pi \Lambda_*^2} \times \phi_0 = \left(1 - \frac{N_p}{\varepsilon_p}\right) B_v = (N_p - \varepsilon_p) B_t, \quad (\text{E.18})$$

le champ magnétique B_t d'un tube de flux étant simplement relié à celui d'un tourbillon, B_v , par la relation $B_v = -\varepsilon_p B_t$, voir Éq. (3.30). Pour $a_1 \gg d_{c,1}$, un électron traversant le paquet de lignes quantifiées est dévié d'un angle

$$\theta_1 \sim \epsilon \frac{d_{c,1}}{a_1} = \left(1 - \frac{N_p}{\varepsilon_p}\right) \theta_0 = \frac{1}{2\Lambda_* k_e} (N_p - \varepsilon_p), \quad (\text{E.19})$$

où $\epsilon = -1$ pour $N_p = 0$ et $\epsilon = 1$ pour $N_p > 0$. On pourra remarquer que, pour $N_p > 0$, l'angle de déviation a un sens opposé à l'angle θ_0 (E.11) associé à un unique tourbillon,

1. Bien que l'amplitude de la composante transversale de la force de traînée soit plus importante que celle de la composante longitudinale étudiée ici, on peut montrer que l'influence de la composante transversale sur la vitesse moyenne des tourbillons et donc sur la force de friction mutuelle est extrêmement faible.

E.3 Cas d'un paquet formé de tubes de flux distants

en raison du fait que les deux types de lignes ont des champs magnétiques de directions opposées. Nous allons maintenant considérer deux cas :

- $\theta_1 \ll 1 \iff N_p \ll 200$. Sous cette hypothèse, nous avons $a_1 \gg \Lambda_\star \gg \lambda_e$ et

$$\langle 1 - \cos \theta \rangle \simeq \frac{\theta_1^2}{2} \simeq \left(\frac{N_p}{\varepsilon_p} - 1 \right)^2 \times \frac{\theta_0^2}{2}. \quad (\text{E.20})$$

Le coefficient de résistivité (E.8) est alors donné par

$$\mathcal{R}_{c,1} \simeq \frac{\mathcal{R}_n}{\varepsilon_p^2} \times (N_p - \varepsilon_p)^2 = \mathcal{R}_p \times (N_p - \varepsilon_p)^2, \quad (\text{E.21})$$

comme attendu, voir (8.38).

- $d_{c,1} \gg a_1 \iff N_p \gg 200$. Le rayon de giration a_1 est alors beaucoup plus faible que dans le cas précédent et devient même inférieur à λ_e lorsque N_p est suffisamment grand. L'équation (E.20) n'est plus satisfaite et l'expression (E.21) n'est donc plus valable. En faisant encore appel à des trajectoires classiques, les électrons entrant dans un paquet vont être suffisamment déviés pour ressortir directement de ce dernier, sans le traverser. Dans le cas très simplifié où l'angle θ de déviation des électrons couvre régulièrement l'intervalle $[\pi/2; 3\pi/2]$, la quantité $\langle 1 - \cos \theta \rangle$ est alors approximativement donnée par $1 + 2/\pi \sim 2$. Sous ces hypothèses, le coefficient de résistivité serait donc plutôt donné par la relation

$$\mathcal{R}_{c,1} \simeq 16 (\Lambda_\star k_e)^2 \mathcal{R}_p \simeq 10^5 \times \mathcal{R}_p, \quad (\text{E.22})$$

indépendante de N_p .

E.3 Cas d'un paquet formé de tubes de flux distants

Dans cette section, nous nous intéressons au second scénario d'ancrage envisagé dans la section 8.3.1, dans lequel les N_p tubes de flux entourant le tourbillon sont séparés par une distance d_p^{pin} , afin d'étudier la validité de l'expression (8.39).

Dans ce cas, dN_e est encore donné par (E.5), mais la surface effective doit être remplacée par celle d'un paquet, à savoir $S_{\text{eff}} \simeq 2d_{c,2} \times L$. En utilisant (8.27), on obtient

$$dN_{e,2} = dN_{e,0} \times \frac{d_p^{pin}}{\Lambda_\star} \times \sqrt{N_p} \simeq dN_{e,0} \times \sqrt{N_p}, \quad (\text{E.23})$$

où $dN_{e,0}$ est défini par (E.5) et on a utilisé le fait que $\Lambda_\star \sim d_p^{pin}$, voir section 8.3.1. Par ailleurs, le rayon de giration a_2 vérifie à présent

$$a_2 = \frac{E_F}{ec|B_{c,2}|}, \quad (\text{E.24})$$

où le champ magnétique porté par le paquet a pour expression

$$B_{c,2} = \frac{N_p \phi_0 - \varepsilon_p \phi_0}{2\pi d_{c,2}^2} \simeq \frac{N_p - \varepsilon_p}{2\pi \Lambda_\star^2 N_p} \times \phi_0 \times \left(\frac{\Lambda_\star}{d_p^{pin}} \right)^2 \sim \frac{\phi_0}{2\pi \Lambda_\star^2} \left(\frac{\Lambda_\star}{d_p^{pin}} \right)^2 \sim B_t, \quad (\text{E.25})$$

pour $N_p \neq 0$. En supposant que $a_2 \gg d_{c,2}$ et $N_p > 0$, un électron traversant le paquet de lignes quantifiées sera dévié par un angle

$$\theta_2 \sim \frac{d_{c,2}}{a_2} = \frac{1}{2\Lambda_\star k_e} \times \sqrt{N_p}. \quad (\text{E.26})$$

Cette relation s'interprète simplement de la manière suivante : au cours de sa traversée du paquet, l'électron rencontre environ $\sqrt{N_p}$ tubes de flux, chacun déviant la particule d'un angle $1/(2\Lambda_\star k_e)$. L'étude du coefficient de résistivité peut alors être poursuivie dans différents cas limites :

- $\theta_2 \ll 1 \iff N_p \ll 4 \times 10^4$. Dans ce cas, nous avons $a_2 \gg d_{c,2} \gg \lambda_e$ et

$$\langle 1 - \cos \theta \rangle \simeq \frac{\theta_2^2}{2} \simeq \frac{N_p}{\varepsilon_p^2} \times \frac{\theta_0^2}{2}. \quad (\text{E.27})$$

Le coefficient de résistivité (E.8) s'exprime alors de la manière suivante

$$\mathcal{R}_{c,2} \simeq \frac{\mathcal{R}_n}{\varepsilon_p^2} \times N_p^{3/2} = \mathcal{R}_p \times N_p^{3/2}. \quad (\text{E.28})$$

où \mathcal{R}_p est donné par (E.14). On pourra remarquer que cette relation est légèrement différente de l'estimation (8.39). Toutefois, il est important de noter que l'expression (E.28) n'est valable que pour $N_p \gg 1$. En effet, les lois $d_{c,2} \propto \sqrt{N_p}$ et $\theta_2 \propto \sqrt{N_p}$ n'ont pas réellement de sens physique pour $N_p \sim 1 - 10$, car la première suppose que le nombre de tubes de flux est suffisamment grand pour que le paquet ait une forme cylindrique et la seconde fait explicitement appel au processus de diffusion multiple.

- Pour de très faibles valeurs de N_p , de l'ordre de $N_p \sim 1 - 10$, il semble raisonnable de se placer dans l'approximation de cible mince, qui consiste à supposer qu'un électron traversant le paquet n'est diffusé qu'une seule fois. Dans ce contexte, le nombre de chocs par unité de temps vérifie maintenant

$$dN_e = N_p \times \frac{2\Lambda_\star L}{S} \times n_e S v_\nu dt, \quad (\text{E.29})$$

où $S = 2d_{c,2} \times L$ est la taille effective du paquet de lignes quantifiées. Le coefficient de résistivité (E.8) est alors donné par

$$\mathcal{R}_{c,2} = 2\Lambda_\star N_p n_e p_e \langle 1 - \cos \theta \rangle, \quad (\text{E.30})$$

où $\langle 1 - \cos \theta \rangle$ vaut approximativement $[2 \times (2\Lambda_\star k_e)^2]^{-1}$, comme attendu pour une diffusion sur un unique tube de flux. En rajoutant la contribution du tourbillon superfluide, on obtient alors :

$$\mathcal{R}_{c,2} = 2\Lambda_\star n_e p_e \left[\frac{N_p}{\varepsilon_p^2} \times \frac{\theta_0^2}{2} + \frac{\theta_0^2}{2} \right]. \quad (\text{E.31})$$

Compte tenu de (E.11), le coefficient de résistivité, pour de faibles valeurs de N_p , est donc approximativement donné par

$$\mathcal{R}_{c,2} \simeq \mathcal{R}_p \times (N_p + \varepsilon_p^2). \quad (\text{E.32})$$

On remarquera que cette expression, obtenue dans l'approximation de cible mince, correspond à (8.39). En particulier, pour $N_p = 0$, on retrouve (8.9), comme il se doit.

- $N_p \gg 4 \times 10^4 \iff d_{c,2} \gg a_2 \gg \lambda_e$. En suivant les mêmes hypothèses simplificatrices que celles que nous avons utilisées pour le scénario 1 à grande valeur de N_p , *i.e.* en prenant $\langle 1 - \cos \theta \rangle \sim 2$, le coefficient de résistivité s'exprimerait plutôt comme suit :

$$\mathcal{R}_{c,2} \simeq 16 (\Lambda_* k_e)^2 \mathcal{R}_p N_p^{1/2} \simeq 10^5 \times \mathcal{R}_p \times N_p^{1/2}. \quad (\text{E.33})$$

Ainsi, les résultats précédents, obtenus dans un cadre très simpliste, suggèrent que les estimations (8.38) et (8.39) ne sont valables que pour de faibles valeurs de N_p . Toutefois, les conclusions générales que nous présentons dans les sections 8.3 et 8.4 concernant le coefficient β et le temps de couplage τ_c restent vraies, même si \mathcal{R}_c est constant à grande valeur de N_p . En effet, dans ce cas, la présence du terme $X \simeq x_p N_p$ associé à la force de Magnus du supraconducteur de protons assurera que $\beta \rightarrow 0$ et $\tau_c \rightarrow +\infty$ lorsque $N_p \rightarrow +\infty$.

Interactions entre tourbillons superfluides et tubes de flux

F.1 Force d'interaction et friction mutuelle

Nous déterminons ici l'expression de la force de friction mutuelle dans le cas où les interactions entre tourbillons superfluides et tubes de flux peuvent être simplement représentées par une force linéaire en la différence de vitesse entre les deux lignes. Les résultats obtenus seront ainsi plus généraux que ceux présentés dans la section 8.3, dans le cas où les tubes de flux sont parfaitement ancrés aux tourbillons superfluides.

Soient u_n^i et u_p^i les vitesses moyennes des tourbillons et des tubes de flux contenus dans un certain volume de fluide. En l'absence d'ancrage dans le cœur des étoiles à neutrons, on s'attend a priori à $u_n^i \neq u_p^i$. En supposant que ces lignes sont rigides, le déplacement quasi-stationnaire des tourbillons et des tubes de flux est respectivement gouverné par les bilans de force (Glampedakis & Andersson, 2011) :

$$\mathcal{F}_{Mn}^i + \mathcal{F}_{dn}^i + \mathcal{F}_{int\ n}^i = 0, \quad (\text{F.1})$$

$$\mathcal{F}_{Mp}^i + \mathcal{F}_{dp}^i + \mathcal{F}_{int\ p}^i = 0. \quad (\text{F.2})$$

Sur chaque ligne s'exercent ainsi :

- (i) une force de type Magnus, donnée par $\mathcal{F}_{MX}^i = \varepsilon^{ijk} \rho_X \kappa_j^X (u_k^X - v_k^X)$, voir Éqs. (8.5) et (8.35),
- (ii) une force de traînée $\mathcal{F}_{dX}^i = \mathcal{R}_X (v_p^i - u_X^i)$ qui tire son origine d'un processus dissipatif associé au fluide normal, formé d'électrons (*i.e.* $v_e^i = v_p^i$),
- (iii) une force d'interaction $\mathcal{F}_{int\ X}^i$ traduisant les interactions entre un unique tourbillon (tube de flux) et un nombre donné de tubes de flux (tourbillons). Cette force provient principalement des interactions à courte portée dues aux champs magnétiques portés par ces lignes quantifiées (voir, e.g., Sauls (1989)). En supposant que N_n tourbillons interagissent avec N_p tubes de flux, le principe d'action-réaction conduit alors à

$$N_n \mathcal{F}_{int\ n}^i + N_p \mathcal{F}_{int\ p}^i = 0, \quad (\text{F.3})$$

que l'on peut réécrire sous une forme similaire à l'équation (3) de [Glampedakis & Andersson \(2011\)](#), à savoir

$$\mathcal{F}_{\text{int p}}^i = -\alpha \mathcal{F}_{\text{int n}}^i, \quad (\text{F.4})$$

où $\alpha = N_n/N_p$ est un paramètre inconnu.

On pourra remarquer qu'aucune force de Magnus liée au fluide de protons n'apparaît dans l'équation (F.1). En fait, dans le cas général où $u_n^i \neq u_p^i$, la valeur exacte de \mathcal{C}^p (8.30) est incertaine et les calculs réalisés par [Carter et al. \(2002\)](#) ne sont plus valides à strictement parler. Par simplicité, nous supposons que $\mathcal{C}^p = 0$. Nous verrons que les résultats obtenus dans la limite où les deux types de lignes sont comobiles sont en parfait accord avec ceux présentés dans la section 8.3 en présence d'ancrage.

[Glampedakis & Andersson \(2011\)](#) ont utilisé les équations précédentes pour obtenir les expressions de u_X^i et donc de la force de friction mutuelle, sans spécifier la forme de la force d'interaction $\mathcal{F}_{\text{int n}}^i$. L'expression de u_X^i qu'ils obtiennent dépend alors de la vitesse relative $u_{\text{rel}}^i = u_n^i - u_p^i$. Cela n'est pas très satisfaisant, à moins de supposer que l'ancrage est effectif, auquel cas $u_{\text{rel}}^i = 0$. D'un autre côté, en l'absence d'ancrage, la vitesse relative u_{rel}^i est inconnue.

Dans la suite, nous faisons l'hypothèse que la force d'interaction $\mathcal{F}_{\text{int n}}^i$ est donnée par l'expression linéaire

$$\mathcal{F}_{\text{int n}}^i = C_v (u_p^i - u_n^i), \quad (\text{F.5})$$

voir également l'équation (124) de [Glampedakis et al. \(2011\)](#). En utilisant les équations (F.1), (F.2), (F.4) et (F.5), il est alors possible d'exprimer les vitesses u_X^i en fonction de C_v , au lieu de u_{rel}^i . Ainsi, en supposant que $\kappa_i^n = \kappa_i^p = \kappa_i = \kappa \hat{\kappa}_i$ et $\kappa_i (v_X^i - u_X^i) = 0$, la vitesse moyenne des tourbillons a pour expression

$$u_n^i = v_p^i + \frac{1}{1 + \beta^2} [\beta \varepsilon^{ijk} \hat{\kappa}_j (v_k^p - V_k) + \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{klm} \hat{\kappa}_j \hat{\kappa}^l (v_p^m - V^m) + \beta \mathcal{F}_n^i + \varepsilon^{ijk} \hat{\kappa}_j \mathcal{F}_{nk}^i], \quad (\text{F.6})$$

où

$$\beta = \frac{C_v (\alpha \mathcal{R}_n + \mathcal{R}_p) + \mathcal{R}_p \mathcal{R}_n - \rho_n \rho_p \kappa^2}{C_v (\alpha \rho_n + \rho_p) + \mathcal{R}_p \rho_n + \mathcal{R}_n \rho_p} \frac{1}{\kappa}, \quad (\text{F.7})$$

$$V_k = \frac{\rho_p v_k^p (C_v + \mathcal{R}_n) + \rho_n v_k^n (\alpha C_v + \mathcal{R}_p)}{\rho_p (C_v + \mathcal{R}_n) + \rho_n (\alpha C_v + \mathcal{R}_p)}, \quad (\text{F.8})$$

et

$$\mathcal{F}_n^i = \frac{\rho_n \rho_p \kappa}{\rho_p (C_v + \mathcal{R}_n) + \rho_n (\alpha C_v + \mathcal{R}_p)} (v_p^i - v_n^i). \quad (\text{F.9})$$

De même, la vitesse moyenne des tubes de flux est donnée par

$$u_p^i = v_p^i + \frac{1}{1 + \beta^2} [\beta \varepsilon^{ijk} \hat{\kappa}_j (v_k^p - V_k) + \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{klm} \hat{\kappa}_j \hat{\kappa}^l (v_p^m - V^m) + \beta \mathcal{F}_p^i + \varepsilon^{ijk} \hat{\kappa}_j \mathcal{F}_{pk}^i], \quad (\text{F.10})$$

où

$$\mathcal{F}_p^i = \frac{\rho_n \mathcal{R}_p}{\rho_p (C_v + \mathcal{R}_n) + \rho_n (\alpha C_v + \mathcal{R}_p)} \varepsilon^{ijk} \hat{\kappa}_j (v_k^n - v_k^p). \quad (\text{F.11})$$

F.2 Absence d'interaction

Par ailleurs, la force de friction mutuelle (8.6) vérifie

$$f_{\text{mf}}^i = -\mathcal{N}_n \mathcal{F}_{\text{Mn}}^i = \mathcal{N}_n \mathcal{F}_{\text{dn}}^i + \mathcal{N}_n \mathcal{F}_{\text{int n}}^i = \mathcal{N}_n \mathcal{R}_n (v_p^i - u_n^i) + \mathcal{N}_n C_v (u_p^i - u_n^i). \quad (\text{F.12})$$

En injectant les relations (F.6) et (F.10) dans l'équation précédente, la force de friction mutuelle est alors donnée par

$$f_{\text{mf}}^i = -\mathcal{N}_n \rho_n \kappa (\mathfrak{B}' \varepsilon^{ijk} \hat{\kappa}_j w_k^{\text{pn}} + \mathfrak{B} \varepsilon^{ijk} \hat{\kappa}_j \varepsilon_{klm} \hat{\kappa}^l w_{\text{pn}}^m), \quad (\text{F.13})$$

de forme similaire aux expressions obtenues en présence ou en l'absence d'ancrage. En introduisant les quantités adimensionnées suivantes

$$C_n = \frac{C_v}{\rho_n \kappa}, \quad \xi_n = \frac{\mathcal{R}_n}{\rho_n \kappa}, \quad \xi_p = \frac{\mathcal{R}_p}{\rho_p \kappa} \quad \text{et} \quad X = \frac{1}{\alpha} \frac{\rho_p}{\rho_n}, \quad (\text{F.14})$$

les coefficients \mathfrak{B} et \mathfrak{B}' ont pour expression

$$\mathfrak{B} = \frac{(\xi_n + C_n) X^2 + (C_n + X \xi_p) [C_n \xi_n + \xi_p X (\xi_n + C_n)]}{[X (\xi_p + \xi_n) + C_n (1 + X)]^2 + [(X \xi_p + \xi_n) C_n + X (\xi_n \xi_p - 1)]^2}, \quad (\text{F.15})$$

et

$$\mathfrak{B}' = \frac{X C_n^2 + (\xi_n + C_n)^2 X^2 + [X \xi_n \xi_p + (X \xi_p + \xi_n) C_n]^2}{[X (\xi_p + \xi_n) + C_n (1 + X)]^2 + [(X \xi_p + \xi_n) C_n + X (\xi_n \xi_p - 1)]^2}. \quad (\text{F.16})$$

Nous allons maintenant appliquer ces formules à différents cas limites.

F.2 Absence d'interaction

L'absence d'interaction entre tubes de flux et lignes de tourbillon correspond à $C_v = 0$. Dans ce cas, on obtient

$$\beta = \frac{\mathcal{R}_p \mathcal{R}_n - \rho_n \rho_p \kappa^2}{\mathcal{R}_p \rho_n + \mathcal{R}_n \rho_p} \frac{1}{\kappa}, \quad V_k = \frac{\rho_p v_k^{\text{p}} \mathcal{R}_n + \rho_n v_k^{\text{n}} \mathcal{R}_p}{\rho_p \mathcal{R}_n + \rho_n \mathcal{R}_p}, \quad (\text{F.17})$$

$$\mathcal{F}_n^i = \frac{\rho_n \rho_p \kappa}{\rho_p \mathcal{R}_n + \rho_n \mathcal{R}_p} (v_p^i - v_n^i) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_p^i = \frac{\rho_n \mathcal{R}_p}{\rho_p \mathcal{R}_n + \rho_n \mathcal{R}_p} \varepsilon^{ijk} \hat{\kappa}_j (v_k^{\text{n}} - v_k^{\text{p}}). \quad (\text{F.18})$$

Les vitesses moyennes des tourbillons et des tubes de flux sont différentes, et sont respectivement données par

$$u_n^i = v_p^i + \frac{\xi_n}{1 + \xi_n^2} \varepsilon^{ijk} \hat{\kappa}_j (v_k^{\text{p}} - v_k^{\text{n}}) + \frac{1}{1 + \xi_n^2} \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{klm} \hat{\kappa}_j \hat{\kappa}^l (v_p^m - v_n^m), \quad (\text{F.19})$$

et

$$u_p^i = v_p^i, \quad (\text{F.20})$$

Notons que la relation (F.19) redonne bien l'équation (8.13) obtenue en l'absence d'ancrage, comme il se doit. Par ailleurs les coefficients (F.15) et (F.16) vérifient simplement

$$\mathfrak{B} = \frac{\xi_n}{1 + \xi_n^2} \quad \text{et} \quad \mathfrak{B}' = \frac{\xi_n^2}{1 + \xi_n^2}, \quad (\text{F.21})$$

comme attendu (voir Éq. (8.14)).

F.3 Ancrage parfait

La situation dans laquelle les tourbillons et les tubes de flux sont parfaitement ancrés les uns aux autres correspond à la limite $C_v \rightarrow +\infty$. Cela conduit à

$$\beta = \frac{\alpha \mathcal{R}_n + \mathcal{R}_p}{\alpha \rho_n + \rho_p} \frac{1}{\kappa}, \quad V_k = \frac{\rho_p v_k^p + \rho_n v_k^n \alpha}{\rho_p + \rho_n \alpha}, \quad (\text{F.22})$$

et

$$\mathcal{F}_p^i = \mathcal{F}_n^i = 0. \quad (\text{F.23})$$

En posant

$$\xi = \frac{\mathcal{R}_n + \mathcal{R}_p/\alpha}{\rho_n \kappa} = \frac{\mathcal{R}}{\rho_n \kappa} = \xi_n + X \xi_p, \quad (\text{F.24})$$

nous avons

$$u_n^i = u_p^i = v_p^i + \frac{\xi}{(1+X)^2 + \xi^2} \varepsilon^{ijk} \hat{\kappa}_j (v_k^p - v_k^n) + \frac{1+X}{(1+X)^2 + \xi^2} \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{klm} \hat{\kappa}_j \hat{\kappa}^l (v_p^m - v_n^m), \quad (\text{F.25})$$

ce qui correspond à l'équation (8.41). Ainsi, comme on l'attend en présence d'ancrage, les deux types de lignes partagent la même vitesse. En outre, les coefficients de friction mutuelle (F.15) et (F.16) vérifient à présent

$$\mathfrak{B} = \frac{\xi}{(1+X)^2 + \xi^2} \quad \text{et} \quad \mathfrak{B}' = \frac{\xi^2 + X(1+X)}{(1+X)^2 + \xi^2}, \quad (\text{F.26})$$

en accord avec les expressions (8.51) et (8.52) obtenues dans la section 8.3. Dans ce cas, on pourra remarquer que le coefficient ξ est donné par¹ $\xi = \xi_n + X \xi_p$. Par conséquent, en supposant que ξ_n et $\xi_p \times \rho_p / \rho_n$ s'expriment respectivement par les relations (8.11) et (8.37), le rapport traînée/portance sera alors donné par (8.39). Cela provient du fait qu'à la base de nos calculs (voir équation (F.2)), les tubes de flux sont supposés indépendants.

F.4 Absence de tube de flux

Le cas $N_p = 0$ correspond à la limite $\alpha \rightarrow +\infty$ ($X = 0$). Nous avons alors

$$\beta = \frac{\mathcal{R}_n}{\rho_n \kappa} = \xi_n, \quad V_k = v_k^n \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_n^i = \mathcal{F}_p^i = 0. \quad (\text{F.27})$$

La vitesse moyenne des tourbillons est donnée par l'expression

$$u_n^i = v_p^i + \frac{\xi_n}{1 + \xi_n^2} \varepsilon^{ijk} \hat{\kappa}_j (v_k^p - v_k^n) + \frac{1}{1 + \xi_n^2} \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{klm} \hat{\kappa}_j \hat{\kappa}^l (v_p^m - v_n^m), \quad (\text{F.28})$$

comme attendu (8.13). De plus, les coefficients (F.15) et (F.16) se réduisent également à

$$\mathfrak{B} = \frac{\xi_n}{1 + \xi_n^2} \quad \text{et} \quad \mathfrak{B}' = \frac{\xi_n^2}{1 + \xi_n^2}, \quad (\text{F.29})$$

voir (8.14).

1. Attention, le coefficient ξ_p est ici défini par rapport à ρ_p , voir équation (F.14), contrairement au cas de la section 8.3.3, où ξ_p est défini par rapport à ρ_n (8.37).

F.5 Nombre infini de tubes de flux

Dans cette dernière section, nous supposons que $N_p/N_n \rightarrow +\infty$, ce qui correspond à $\alpha = 0$ ou $X \rightarrow +\infty$. Nous obtenons alors

$$\beta = \frac{\mathcal{R}_p(C_v + \mathcal{R}_n) - \rho_n \rho_p \kappa^2}{\mathcal{R}_p \rho_n + (C_v + \mathcal{R}_n) \rho_p} \frac{1}{\kappa}, \quad V_k = \frac{\rho_p v_k^p (C_v + \mathcal{R}_n) + \rho_n v_k^n \mathcal{R}_p}{\rho_p (C_v + \mathcal{R}_n) + \rho_n \mathcal{R}_p}, \quad (\text{F.30})$$

$$\mathcal{F}_n^i = \frac{\rho_n \rho_p \kappa}{\rho_p (C_v + \mathcal{R}_n) + \rho_n \mathcal{R}_p} (v_p^i - v_n^i), \quad (\text{F.31})$$

et

$$\mathcal{F}_p^i = \frac{\rho_n \mathcal{R}_p}{\rho_p (C_v + \mathcal{R}_n) + \rho_n \mathcal{R}_p} \varepsilon^{ijk} \hat{\kappa}_j (v_k^n - v_k^p). \quad (\text{F.32})$$

On remarquera que les équations précédentes sont similaires à celles obtenues dans la section F.2, à condition de remplacer \mathcal{R}_n par $\mathcal{R}_n + C_v$. Par conséquent, la vitesse moyenne des tubes de flux se réduit simplement à

$$u_p^i = v_p^i, \quad (\text{F.33})$$

tandis que la vitesse moyenne des tourbillons est donnée par

$$u_n^i = v_p^i + \frac{\xi_n + C_n}{1 + (\xi_n + C_n)^2} \varepsilon^{ijk} \hat{\kappa}_j (v_k^p - v_k^n) + \frac{1}{1 + (\xi_n + C_n)^2} \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{klm} \hat{\kappa}_j \hat{\kappa}^l (v_p^m - v_n^m), \quad (\text{F.34})$$

Par ailleurs, les coefficients de friction mutuelle (F.15) et (F.16) vérifient

$$\mathfrak{B} = \frac{\xi_n + C_n}{1 + (\xi_n + C_n)^2} \quad \text{et} \quad \mathfrak{B}' = \frac{(\xi_n + C_n)^2}{1 + (\xi_n + C_n)^2}. \quad (\text{F.35})$$

Dans ce cas, les interactions entre tubes de flux et tourbillons superfluides agissent comme une force de traînée supplémentaire.

Les résultats précédents doivent toutefois être considérés avec précaution, car le coefficient C_v est susceptible de dépendre du rapport N_p/N_n . En particulier, le comportement de C_v est inconnu à la limite $N_p/N_n \rightarrow +\infty$.

Liste des tables

Glitches des pulsars

2.1 Indices de freinage mesurés pour quelques pulsars jeunes	43
--	----

Équations d'état à deux fluides et configurations d'équilibre

5.1 Termes de couplage utilisés dans les EoSs DDH et DDH δ	119
5.2 Propriétés de la matière nucléaire pour les modèles DDH et DDH δ	121

Équations d'évolution

6.1 Tableau récapitulatif des différentes grandeurs associées au couplage entre les fluides	167
6.2 Vitesse de rotation et moment cinétique d'une particule-test associée à différents observateurs	168

Simulations numériques de glitches

7.1 Paramètres définissant les EoSs I et II	181
---	-----

LISTE DES TABLES

Liste des figures

Étoiles à neutrons

1.1	Mesure de l'effet Shapiro associé au pulsar PSR J1614–2230	7
1.2	Compilation des masses d'étoiles à neutrons observées dans différents systèmes binaires	9
1.3	Compilation d'estimations récentes du rayon d'une étoile à neutrons de $1,4 M_{\odot}$	11
1.4	Nébuleuse du Crabe	13
1.5	Gaz parfait constitué d'un mélange de neutrons, protons et électrons à température nulle	15
1.6	Profils de température en fonction de la densité, pour différentes époques	16
1.7	Structure d'une étoile à neutrons avec EoS polytropic	19
1.8	Profils de pression en fonction de la densité baryonique pour différents modèles d'EoS	24
1.9	Diagrammes masse-rayon relatifs à différentes EoSs	24
1.10	Représentation schématique des différentes couches à l'intérieur d'une étoile à neutrons	26

Glitches des pulsars

2.1	Première détection d'un pulsar radio	30
2.2	Variabilité des pulses et pulses moyens	30
2.3	Évolution de la forme du pulse en fonction de la bande spectrale	31
2.4	Dispersion en fréquence	33
2.5	Représentation schématique de la structure de la magnétosphère d'un pulsar	36
2.6	Diagramme $P - \dot{P}$	40
2.7	Deux glitches observés dans un magnéstar	45
2.8	Glitch observé dans le pulsar du Crabe	46
2.9	Position des pulsars présentant des glitches dans le diagramme $P - \dot{P}$	46
2.10	Amplitudes de glitches cumulées en fonction du temps pour le pulsar de Vela	49
2.11	Amplitudes des glitches de Vela et du Crabe en fonction du temps depuis le glitch précédent	49
2.12	Anti-glitch observé dans le magnéstar 1E 2259+586	50

Superfluidité dans les étoiles à neutrons

3.1	Supraconducteurs de type I et II	54
3.2	Canaux d'appariement	57
3.3	Températures critiques de transition superfluide/supraconductrice en fonction de la densité	57
3.4	Observations de réseaux de tourbillons et de tubes de flux	59
3.5	Représentation schématique du réseau de tourbillons à l'intérieur d'une étoile à neutrons	60
3.6	Paramètres relatifs au supraconducteur de protons dans le cœur des étoiles à neutrons en fonction de la densité	63
3.7	Modèle à deux fluides	66
3.8	Paramètre de couplage \mathcal{G} mesuré pour différents pulsars	69
3.9	Force d'ancrage par unité de longueur en fonction de la densité	71
3.10	Différence de vitesse $\delta\Omega_0$ au moment du désancrage	71
3.11	Masses effectives des neutrons dans l'écorce interne et dans le cœur	73
3.12	Représentation schématique d'un amas de tubes de flux autour d'un tourbillon superfluide	75
3.13	Refroidissement des étoiles à neutrons	77
3.14	Étoile à neutrons dans Cassiopée A	79
3.15	Relaxation thermique de SXT KS 1731–260	81
3.16	Oscillations quasi-périodiques détectées lors d'une éruption géante de SGR 1806–20	82

Modèle à deux fluides

4.1	Formalisme 3+1	91
4.2	Résolution d'une équation différentielle par méthodes spectrales	108
4.3	Convergence spectrale	109
4.4	Méthode du point fixe	111
4.5	Convergence en fonction du nombre d'itérations	112

Équations d'état à deux fluides et configurations d'équilibre

5.1	Couplages dépendant de la densité	119
5.2	Profils d'énergie par baryon prédits par les modèles DDH et DDH δ	120
5.3	Énergie de symétrie associée aux modèles DDH et DDH δ	122
5.4	Profils de pression	122
5.5	Fractions de protons prédites par les modèles DDH et DDH δ	124
5.6	Schéma d'interpolation à trois dimensions	130
5.7	Coupe de la table associée à l'EoS DDH δ	131
5.8	Coefficients d'entraînement Y_{XY} en fonction de la densité baryonique	133
5.9	Paramètres d'entraînement	134
5.10	Masses effectives dynamiques	135
5.11	Comparaison entre les masses effectives dynamiques définies dans les deux référentiels	136

LISTE DES FIGURES

5.12 Isocontours de $\ln N$ pour une étoile à neutrons en rotation rapide, dans le plan méridien $\varphi = 0$	137
5.13 Diagrammes masse-rayon pour les EoSs DDH et DDH δ	138
5.14 Influence d'un écart de vitesse sur le diagramme masse-rayon	139
5.15 Compacité et énergie de liaison	140
5.16 Aplatissement de l'étoile en fonction de sa vitesse de rotation	140
5.17 Termes métriques en fonction de la coordonnée radiale	141
5.18 Influence de la masse gravitationnelle sur les termes métriques	142
5.19 Influence de la vitesse de rotation sur les termes métriques	142
5.20 Profils de densité	143
5.21 Influence de la masse gravitationnelle et de la vitesse de rotation sur le profil de densité de neutrons	143
5.22 Profils de vitesse	145
5.23 Profils de vitesse pour $\Omega_n \neq \Omega_p$	145
5.24 Moments cinétiques et moments d'inertie	147
5.25 Moments cinétiques pour $\Omega_n \neq \Omega_p$	147

Équations d'évolution

6.1 Vorticité du superfluide de neutrons	162
6.2 Profils de vorticité pour différentes vitesses de rotation	162
6.3 Moment d'inertie du superfluide	163
6.4 Coefficient κ	164
6.5 Influence de la masse et de la vitesse de rotation sur le facteur ζ	164
6.6 Couplage entre les fluides	169
6.7 Test de la relation proposée par Carter (1975)	170
6.8 Couplage total	170
6.9 Coefficient total de couplage en fonction de la vitesse de rotation	172

Simulations numériques de glitches

7.1 Évolution temporelle des vitesses de rotation lors de la phase de montée d'un glitch	177
7.2 Influence du paramètre de friction mutuelle et de la vitesse de rotation du pulsar sur le temps de montée	177
7.3 Influence de l'amplitude du glitch sur le temps de montée	179
7.4 Temps de montée et rapport \hat{I}_p/\hat{I} pour différentes masses gravitationnelles	179
7.5 Importance des effets de relativité générale sur le calcul du temps de montée	182
7.6 Importance des effets relativistes en fonction de la fréquence de rotation	184
7.7 Contraintes sur le paramètre de friction mutuelle	185
7.8 Temps de montée en fonction du rapport traînée/portance moyen	185
7.9 Moment quadrupolaire en fonction du moment cinétique	187
7.10 Variations du quadrupôle de masse lors d'un glitch	188
7.11 Amplitude caractéristique du rayonnement gravitationnel pour différentes amplitudes de glitches	190

LISTE DES FIGURES

7.12 Influences de la vitesse de rotation et du paramètre de friction mutuelle sur l'amplitude et la fréquence caractéristiques	191
Ancrage des tourbillons aux tubes de flux et friction mutuelle	
8.1 Représentation schématique de la structure des paquets de tubes de flux considérés	202
8.2 Coefficient β en fonction du nombre de tubes de flux ancrés à chaque tourbillon	208
8.3 Coefficient β' en fonction du nombre de tubes de flux ancrés à chaque tourbillon	208
8.4 Temps de couplage en fonction du nombre de tubes de flux ancrés à chaque tourbillon	211
Détermination et analyse des temps d'arrivée	
A.1 Résidus de l'ajustement des TOAs du pulsar PSR B1133+16	223
Transfert de moment cinétique en mécanique newtonienne	
C.1 Comparaison entre résultats numériques et valeurs théoriques	230
C.2 Influence de la vitesse de rotation sur les couplages entre les fluides	231
Commentaires sur le coefficient de résistivité	
E.1 Déviation d'un électron par le champ magnétique porté par un tourbillon superfluide	237

Bibliographie

- Abadie, J., Abbott, B. P., Abbott, R., *et al.*, Search for gravitational waves associated with the August 2006 timing glitch of the Vela pulsar, *Physical Review D*, **83(4)** : 042001 (2011). [186](#)
- Abbott, B. P., Abbott, R., Abbott, T. D., *et al.*, Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger, *Physical Review Letters*, **116(6)** : 061102 (2016a). [186](#)
- Abbott, B. P., Abbott, R., Abbott, T. D., *et al.*, Prospects for Observing and Localizing Gravitational-Wave Transients with Advanced LIGO and Advanced Virgo, *Living Reviews in Relativity*, **19** (2016b). [192](#)
- Abdo, A. A., Ackermann, M., Ajello, M., *et al.*, Fermi Large Area Telescope Observations of the Crab Pulsar And Nebula, *The Astrophysical Journal*, **708** : 1254–1267 (2010). [31](#)
- Abdo, A. A., Ajello, M., Allafort, A., *et al.*, The Second Fermi Large Area Telescope Catalog of Gamma-Ray Pulsars, *The Astrophysical Journal Supplement*, **208** : 17 (2013). [29](#)
- Ables, J. G., Manchester, R. N., Hydrogen-line absorption observations of distant pulsars, *Astronomy and Astrophysics*, **50** : 177–184 (1976). [32](#)
- Abo-Shaeer, J. R., Raman, C., Vogels, J. M., Ketterle, W., Observation of Vortex Lattices in Bose-Einstein Condensates, *Science*, **292** : 476–479 (2001). [59](#)
- Acernese, F., Agathos, M., Agatsuma, K., *et al.*, Advanced Virgo : a second-generation interferometric gravitational wave detector, *Classical and Quantum Gravity*, **32(2)** : 024001 (2015). [192](#)
- Akbal, O., Gügerçinoğlu, E., Şaşmaz Muş, S., Alpar, M. A., Peculiar glitch of PSR J1119-6127 and extension of the vortex creep model, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **449** : 933–941 (2015). [68](#), [73](#), [218](#)
- Akmal, A., Pandharipande, V. R., Ravenhall, D. G., Equation of state of nucleon matter and neutron star structure, *Physical Review C*, **58** : 1804–1828 (1998). [79](#)

BIBLIOGRAPHIE

- Allen, J., Jones, H., New phenomena connected with heat flow in helium II, *Nature*, **141(3562)** : 243–244 (1938). [55](#)
- Allen, J., Misener, A., Flow of liquid helium II, *Nature*, **141(3558)** : 75 (1938). [55](#)
- Alpar, M. A., Pinning and Threading of Quantized Vortices in the Pulsar Crust Superfluid, *The Astrophysical Journal*, **213** : 527–530 (1977). [70](#)
- Alpar, M. A., The largest pulsar glitch and the universality of glitch behavior, *AIP Conference Proceedings*, **1379(1)** : 166–174 (2011). [73](#), [218](#)
- Alpar, M. A., Anderson, P. W., Pines, D., Shaham, J., Giant glitches and pinned vorticity in the VELA and other pulsars, *The Astrophysical Journal Letters*, **249** : L29–L33 (1981). [66](#)
- Alpar, M. A., Anderson, P. W., Pines, D., Shaham, J., Vortex creep and the internal temperature of neutron stars. II - VELA pulsar, *The Astrophysical Journal*, **278** : 791–805 (1984a). [68](#)
- Alpar, M. A., Baykal, A., Pulsar braking indices, glitches and energy dissipation in neutron stars, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **372** : 489–496 (2006). [83](#)
- Alpar, M. A., Chau, H. F., Cheng, K. S., Pines, D., Postglitch relaxation of the VELA pulsar after its first eight large glitches - A reevaluation with the vortex creep model, *The Astrophysical Journal*, **409** : 345–359 (1993). [68](#), [69](#)
- Alpar, M. A., Chau, H. F., Cheng, K. S., Pines, D., Postglitch relaxation of the Crab pulsar : Evidence for crust cracking, *The Astrophysical Journal Letters*, **427** : L29–L31 (1994). [67](#), [68](#)
- Alpar, M. A., Chau, H. F., Cheng, K. S., Pines, D., Postglitch Relaxation of the Crab Pulsar after Its First Four Major Glitches : The Combined Effects of Crust Cracking, Formation of Vortex Depletion Region and Vortex Creep, *The Astrophysical Journal*, **459** : 706 (1996). [67](#), [68](#), [69](#)
- Alpar, M. A., Cheng, K. S., Pines, D., Vortex creep and the internal temperature of neutron stars - Linear and nonlinear response to a glitch, *The Astrophysical Journal*, **346** : 823–832 (1989). [67](#)
- Alpar, M. A., Langer, S. A., Sauls, J. A., Rapid postglitch spin-up of the superfluid core in pulsars, *The Astrophysical Journal*, **282** : 533–541 (1984b). [68](#), [157](#), [198](#), [218](#), [237](#)
- Alpar, M. A., Pines, D., Anderson, P. W., Shaham, J., Vortex creep and the internal temperature of neutron stars. I - General theory, *The Astrophysical Journal*, **276** : 325–334 (1984c). [67](#), [68](#), [70](#)
- Alpar, M. A., Pines, D., Cheng, K. S., On the fast recovery of the VELA pulsar from its Christmas 1988 glitch, *Nature*, **348** : 707 (1990). [67](#), [69](#)

BIBLIOGRAPHIE

- Alpar, M. A., Sauls, J. A., On the dynamical coupling between the superfluid interior and the crust of a neutron star, *The Astrophysical Journal*, **327** : 723–725 (1988). [210](#)
- Anderson, P. W., Itoh, N., Pulsar glitches and restlessness as a hard superfluidity phenomenon, *Nature*, **256** : 25–27 (1975). [66](#), [72](#)
- Andersson, N., Comer, G. L., Slowly rotating general relativistic superfluid neutron stars, *Classical and Quantum Gravity*, **18** : 969–1002 (2001). [87](#), [101](#), [154](#), [215](#)
- Andersson, N., Comer, G. L., Prix, R., Are Pulsar Glitches Triggered by a Superfluid Two-Stream Instability?, *Physical Review Letters*, **90(9)** : 091101 (2003). [68](#)
- Andersson, N., Glampedakis, K., Ho, W. C. G., Espinoza, C. M., Pulsar Glitches : The Crust is not Enough, *Physical Review Letters*, **109(24)** : 241103 (2012). [72](#), [218](#)
- Andersson, N., Glampedakis, K., Samuelsson, L., Superfluid signatures in magnetar seismology, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **396** : 894–899 (2009). [82](#), [83](#)
- Andersson, N., Sidery, T., Comer, G. L., Mutual friction in superfluid neutron stars, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **368** : 162–170 (2006). [198](#), [199](#), [209](#), [210](#), [218](#)
- Andersson, N., Sidery, T., Comer, G. L., Superfluid neutron star turbulence, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **381** : 747–756 (2007). [61](#), [156](#)
- Andreev, A. F., Bashkin, E. P., Three-velocity hydrodynamics of superfluid solutions, *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, **42** : 164 (1976). [96](#)
- Annett, J. F., *Superconductivity, superfluids, and condensates*, Oxford master series in condensed matter physics, Oxford University Press, New York, pages 1 vol. (XI–186 p.) (2004). [56](#)
- Antonelli, M., Pizzochero, P. M., Axially symmetric equations for differential pulsar rotation with superfluid entrainment, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **464** : 721–733 (2017). [72](#), [73](#), [151](#), [152](#), [217](#)
- Antoniadis, J., Freire, P. C. C., Wex, N., *et al.*, A Massive Pulsar in a Compact Relativistic Binary, *Science*, **340** : 448 (2013). [8](#), [121](#), [138](#)
- Archibald, R. F., Gotthelf, E. V., Ferdman, R. D., *et al.*, A High Braking Index for a Pulsar, *The Astrophysical Journal Letters*, **819** : L16 (2016). [42](#)
- Archibald, R. F., Kaspi, V. M., Ng, C.-Y., *et al.*, An anti-glitch in a magnetar, *Nature*, **497** : 591–593 (2013). [50](#)
- Arnett, W. D., Bahcall, J. N., Kirshner, R. P., Woosley, S. E., Supernova 1987A, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, **27** : 629–700 (1989). [13](#)

BIBLIOGRAPHIE

- Arzoumanian, Z., Gendreau, K. C., Baker, C. L., *et al.*, The neutron star interior composition explorer (NICER) : mission definition, *Space Telescopes and Instrumentation 2014 : Ultraviolet to Gamma Ray*, volume 9144 of *Proceedings of the SPIE Conference*, page 914420 (2014). [10](#)
- Avancini, S. S., Brito, L., Marinelli, J. R., *et al.*, Nuclear “pasta” phase within density dependent hadronic models, *Physical Review C*, **79(3)** : 035804 (2009). [115](#), [116](#), [117](#), [118](#), [119](#)
- Avancini, S. S., Brito, L., Menezes, D. P., Providência, C., Instabilities in asymmetric nuclear matter, *Physical Review C*, **70(1)** : 015203 (2004). [115](#)
- Baade, W., Zwicky, F., Cosmic rays from super-novae, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **20(5)** : 259–263 (1934). [5](#), [13](#)
- Balibar, S., The discovery of superfluidity, *Journal of Low Temperature Physics*, **146(5)** : 441–470 (2007). [55](#)
- Bardeen, J., Cooper, L. N., Schrieffer, J. R., Theory of Superconductivity, *Physical Review*, **108** : 1175–1204 (1957). [54](#)
- Baumgarte, T. W., Shapiro, S. L., *Numerical relativity solving Einstein’s equations on the computer*, Cambridge University Press, Cambridge New York, pages 1 vol. (XVIII–698 p.) (2010). [90](#)
- Baym, G., Chin, S. A., Landau theory of relativistic Fermi liquids, *Nuclear Physics A*, **262** : 527–538 (1976). [126](#)
- Baym, G., Pethick, C., Pines, D., Superfluidity in Neutron Stars, *Nature*, **224** : 673–674 (1969a). [61](#), [65](#), [66](#)
- Baym, G., Pethick, C., Pines, D., Ruderman, M., Spin Up in Neutron Stars : The Future of the Vela Pulsar, *Nature*, **224** : 872–874 (1969b). [65](#)
- Baym, G., Pines, D., Neutron starquakes and pulsar speedup., *Annals of Physics*, **66** : 816–835 (1971). [51](#)
- Beasley, M. R., Labusch, R., Webb, W. W., Flux Creep in Type-II Superconductors, *Physical Review*, **181** : 682–700 (1969). [67](#)
- Belyaev, S. T., Effect of pairing correlations on nuclear properties, *Konglige Danske Videnskabernes Selskab Matematisk-Fysiske Meddelelser*, **31** (1959). [56](#)
- Bennett, M. F., van Eysden, C. A., Melatos, A., Continuous-wave gravitational radiation from pulsar glitch recovery, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **409** : 1705–1718 (2010). [192](#)
- Beskin, V. S., Gurevich, A. V., Istomin, Y. N., *Physics of the pulsar magnetosphere*, Cambridge University Press, Cambridge New York Oakleigh, pages 1 vol. (XXIII–408 p.) (1993). [35](#)

- Bhattacharya, D., Wijers, R. A. M. J., Hartman, J. W., Verbunt, F., On the decay of the magnetic fields of single radio pulsars, *Astronomy and Astrophysics*, **254** : 198–212 (1992). [44](#)
- Blaschke, D., Grigorian, H., Voskresensky, D. N., Nuclear medium cooling scenario in light of new Cas A cooling data and the 2Msol pulsar mass measurements, *Physical Review C*, **88(6)** : 065805 (2013). [80](#)
- Bocquet, M., Bonazzola, S., Gourgoulhon, E., Novak, J., Rotating neutron star models with a magnetic field., *Astronomy and Astrophysics*, **301** : 757 (1995). [89](#)
- Bogdanov, S., The Nearest Millisecond Pulsar Revisited with XMM-Newton : Improved Mass-radius Constraints for PSR J0437-4715, *The Astrophysical Journal*, **762** : 96 (2013). [11](#)
- Bohr, A., Mottelson, B. R., Pines, D., Possible Analogy between the Excitation Spectra of Nuclei and Those of the Superconducting Metallic State, *Physical Review*, **110** : 936–938 (1958). [56](#)
- Bonanno, A., Baldo, M., Burgio, G. F., Urpin, V., The neutron star in Cassiopeia A : equation of state, superfluidity, and Joule heating, *Astronomy and Astrophysics*, **561** : L5 (2014). [80](#)
- Bonazzola, S., Gourgoulhon, E., A virial identity applied to relativistic stellar models, *Classical and Quantum Gravity*, **11** : 1775–1784 (1994). [103](#)
- Bonazzola, S., Gourgoulhon, E., Gravitational waves from pulsars : emission by the magnetic-field-induced distortion., *Astronomy and Astrophysics*, **312** : 675–690 (1996). [186](#), [189](#)
- Bonazzola, S., Gourgoulhon, E., Marck, J.-A., Numerical approach for high precision 3D relativistic star models, *Physical Review D*, **58(10)** : 104020 (1998). [106](#)
- Bonazzola, S., Gourgoulhon, E., Salgado, M., Marck, J. A., Axisymmetric rotating relativistic bodies : A new numerical approach for 'exact' solutions, *Astronomy and Astrophysics*, **278** : 421–443 (1993). [89](#), [98](#), [106](#)
- Boynton, P. E., Groth, III, E. J., Partridge, R. B., Wilkinson, D. T., Apparent change in frequency of NP 0532., *IAU Circular*, **2179** (1969). [44](#)
- Brown, E. F., Cumming, A., Mapping Crustal Heating with the Cooling Light Curves of Quasi-Persistent Transients, *The Astrophysical Journal*, **698** : 1020–1032 (2009). [80](#)
- Bulgac, A., Forbes, M. M., Sharma, R., Strength of the Vortex-Pinning Interaction from Real-Time Dynamics, *Physical Review Letters*, **110(24)** : 241102 (2013). [151](#)
- Cameron, A. G., Neutron Star Models., *The Astrophysical Journal*, **130** : 884 (1959). [19](#)
- Caraveo, P. A., Gamma-Ray Pulsar Revolution, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, **52** : 211–250 (2014). [29](#)

- Caraveo, P. A., De Luca, A., Mignani, R. P., Bignami, G. F., The Distance to the Vela Pulsar Gauged with Hubble Space Telescope Parallax Observations, *The Astrophysical Journal*, **561** : 930–937 (2001). [32](#)
- Carter, B., The commutation property of a stationary, axisymmetric system, *Communications in Mathematical Physics*, **17** : 233–238 (1970). [93](#)
- Carter, B., Application of continuous variation formulas and discrete invariance principles to black holes and neutron star models, *Annals of Physics*, **95** : 53–73 (1975). [158](#), [165](#), [167](#), [169](#), [170](#), [233](#)
- Carter, B., Covariant theory of conductivity in ideal fluid or solid media, *Lecture Notes in Mathematics, Berlin Springer Verlag*, **1385** : 1 (1989). [87](#), [95](#)
- Carter, B., Relativistic Superfluid Models for Rotating Neutron Stars, Blaschke, D., Glendenning, N. K., Sedrakian, A. (eds.), *Physics of Neutron Star Interiors*, volume 578 of *Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag*, page 54 (2001). [157](#), [160](#), [199](#), [216](#)
- Carter, B., Chachoua, E., Chamel, N., Covariant Newtonian and relativistic dynamics of (magneto)-elastic solid model for neutron star crust, *General Relativity and Gravitation*, **38** : 83–119 (2006a). [216](#)
- Carter, B., Chamel, N., Covariant analysis of newtonian multi-fluid models for neutron stars ii : stress-energy tensors and virial theorems, *International Journal of Modern Physics D*, **14(05)** : 717–748 (2005). [202](#)
- Carter, B., Chamel, N., Haensel, P., Entrainment coefficient and effective mass for conduction neutrons in neutron star crust : simple microscopic models, *Nuclear Physics A*, **748** : 675–697 (2005). [72](#)
- Carter, B., Chamel, N., Haensel, P., Entrainment Coefficient and Effective Mass for Conduction Neutrons in Neutron Star Crust : Macroscopic Treatment, *International Journal of Modern Physics D*, **15** : 777–803 (2006b). [167](#)
- Carter, B., Langlois, D., Relativistic models for superconducting-superfluid mixtures, *Nuclear Physics B*, **531** : 478–504 (1998). [87](#), [95](#)
- Carter, B., Langlois, D., Prix, R., Relativistic solution of Iordanskii problem in multi-constituent superfluid mechanics, *Vortices in unconventional superconductors and superfluids*, Springer, pages 167–173 (2002). [161](#), [202](#), [244](#)
- Carter, B., Langlois, D., Sedrakian, D. M., Centrifugal buoyancy as a mechanism for neutron star glitches, *Astronomy and Astrophysics*, **361** : 795–802 (2000). [67](#)
- Carter, B., Quintana, H., Relativistic formulation of the neutron starquake theory of pulsar glitches, *Annals of Physics*, **95** : 74–89 (1975). [151](#)
- Carter, B., Samuelsson, L., Relativistic mechanics of neutron superfluid in (magneto)elastic star crust, *Classical and Quantum Gravity*, **23** : 5367–5388 (2006). [88](#), [216](#)

BIBLIOGRAPHIE

- Cerutti, B., Philippov, A., Parfrey, K., Spitkovsky, A., Particle acceleration in axisymmetric pulsar current sheets, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **448** : 606–619 (2015). [37](#)
- Chadwick, J., The Existence of a Neutron, *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, **136** : 692–708 (1932). [5](#)
- Chakrabarty, D., Pivovarov, M. J., Hernquist, L. E., Heyl, J. S., Narayan, R., The Central X-Ray Point Source in Cassiopeia A, *The Astrophysical Journal*, **548** : 800–810 (2001). [41](#)
- Chamel, N., *Entrainment in Neutron-Star Crusts*, Ph.D. thesis, Université Paris VI, France (2004). [72](#)
- Chamel, N., Band structure effects for dripped neutrons in neutron star crust, *Nuclear Physics A*, **747** : 109–128 (2005). [72](#), [132](#), [171](#), [216](#)
- Chamel, N., Two-fluid models of superfluid neutron star cores, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **388** : 737–752 (2008). [62](#), [87](#), [113](#), [115](#), [124](#), [132](#), [136](#), [196](#)
- Chamel, N., Neutron conduction in the inner crust of a neutron star in the framework of the band theory of solids, *Physical Review C*, **85(3)** : 035801 (2012). [72](#), [73](#), [132](#), [171](#), [216](#)
- Chamel, N., Crustal Entrainment and Pulsar Glitches, *Physical Review Letters*, **110(1)** : 011101 (2013). [70](#), [72](#), [218](#)
- Chamel, N., Carter, B., Effect of entrainment on stress and pulsar glitches in stratified neutron star crust, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **368** : 796–808 (2006). [67](#), [72](#)
- Chamel, N., Haensel, P., Entrainment parameters in a cold superfluid neutron star core, *Physical Review C*, **73(4)** : 045802 (2006). [62](#), [73](#), [96](#), [124](#), [132](#), [133](#), [134](#), [135](#), [136](#), [167](#), [196](#)
- Chamel, N., Haensel, P., Physics of Neutron Star Crusts, *Living Reviews in Relativity*, **11** : 10 (2008). [25](#), [26](#), [27](#), [56](#), [58](#), [69](#), [72](#), [80](#)
- Chamel, N., Haensel, P., Zdunik, J. L., Fantina, A. F., On the Maximum Mass of Neutron Stars, *International Journal of Modern Physics E*, **22** : 1330018 (2013). [18](#)
- Chatterjee, D., Elghozi, T., Novak, J., Oertel, M., Consistent neutron star models with magnetic-field-dependent equations of state, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **447** : 3785–3796 (2015). [89](#)
- Chau, H. F., Cheng, K. S., Correlated creep rate of a vortex line under the effect of vortex tension and its relation to the glitches of pulsars, *Physical Review B*, **47** : 2707–2714 (1993). [67](#)

BIBLIOGRAPHIE

- Chau, H. F., Cheng, K. S., Ding, K. Y., Implications of 3P2 superfluidity in the interior of neutron stars, *The Astrophysical Journal*, **399** : 213–217 (1992). [74](#)
- Chen, K., Ruderman, M., Pulsar death lines and death valley, *The Astrophysical Journal*, **402** : 264–270 (1993). [44](#)
- Cheng, K. S., Pines, D., Alpar, M. A., Shaham, J., Spontaneous superfluid unpinning and the inhomogeneous distribution of vortex lines in neutron stars, *The Astrophysical Journal*, **330** : 835–846 (1988). [68](#)
- Cognard, I., Chronométrie des pulsars : De la métrologie en radioastronomie, *Ecole de Goutelas*, **30** : 93–111 (2011). [29](#), [32](#), [223](#)
- Colaiuda, A., Kokkotas, K. D., Magnetar oscillations in the presence of a crust, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **414** : 3014–3022 (2011). [82](#)
- Combescot, R., Ultracold Fermi Gases : The BEC-BCS Crossover, *Journal of Low Temperature Physics*, **145** : 267–276 (2006). [54](#)
- Comer, G. L., Slowly rotating general relativistic superfluid neutron stars with relativistic entrainment, *Physical Review D*, **69(12)** : 123009 (2004). [87](#), [215](#)
- Comer, G. L., Joynt, R., Relativistic mean field model for entrainment in general relativistic superfluid neutron stars, *Physical Review D*, **68(2)** : 023002 (2003). [87](#), [96](#), [114](#), [115](#), [124](#), [125](#), [126](#), [127](#), [129](#), [134](#), [215](#)
- Crawford, F., Demiański, M., A Comparison of Measured Crab and Vela Glitch Healing Parameters with Predictions of Neutron Star Models, *The Astrophysical Journal*, **595** : 1052–1057 (2003). [50](#)
- Danielewicz, P., Lacey, R., Lynch, W. G., Determination of the Equation of State of Dense Matter, *Science*, **298** : 1592–1596 (2002). [24](#)
- Dean, D. J., Hjorth-Jensen, M., Pairing in nuclear systems : from neutron stars to finite nuclei, *Reviews of Modern Physics*, **75(2)** : 607 (2003). [58](#)
- Degenaar, N., Wijnands, R., Brown, E. F., *et al.*, Continued Neutron Star Crust Cooling of the 11 Hz X-Ray Pulsar in Terzan 5 : A Challenge to Heating and Cooling Models?, *The Astrophysical Journal*, **775** : 48 (2013). [81](#)
- Delsate, T., Chamel, N., Gürlebeck, N., *et al.*, Giant pulsar glitches and the inertia of neutron star crusts, *Physical Review D*, **94(2)** : 023008 (2016). [69](#), [72](#)
- Demorest, P. B., Pennucci, T., Ransom, S. M., Roberts, M. S. E., Hessels, J. W. T., A two-solar-mass neutron star measured using Shapiro delay, *Nature*, **467** : 1081–1083 (2010). [7](#), [8](#)
- Dib, R., Kaspi, V. M., 16 yr of RXTE Monitoring of Five Anomalous X-Ray Pulsars, *The Astrophysical Journal*, **784** : 37 (2014). [31](#)

BIBLIOGRAPHIE

- Ding, K. Y., Cheng, K. S., Chau, H. F., Magnetic field decay from the core of neutron stars - Effects of interpinning of 3P2 neutron superfluid and 1S0 proton superconducting fluid, *The Astrophysical Journal*, **408** : 167–178 (1993). [74](#), [205](#)
- Dodson, R., Legge, D., Reynolds, J. E., McCulloch, P. M., The Vela Pulsar's Proper Motion and Parallax Derived from VLBI Observations, *The Astrophysical Journal*, **596** : 1137–1141 (2003). [32](#), [192](#)
- Dodson, R., Lewis, D., McCulloch, P., Two decades of pulsar timing of Vela, *Astrophysics and Space Science*, **308** : 585–589 (2007). [31](#), [32](#), [47](#), [48](#), [152](#), [175](#), [184](#), [185](#), [217](#)
- Dodson, R. G., McCulloch, P. M., Lewis, D. R., High Time Resolution Observations of the January 2000 Glitch in the Vela Pulsar, *The Astrophysical Journal Letters*, **564** : L85–L88 (2002). [47](#), [152](#)
- Ducci, L., Pizzochero, P. M., Doroshenko, V., *et al.*, Properties and observability of glitches and anti-glitches in accreting pulsars, *Astronomy and Astrophysics*, **578** : A52 (2015). [70](#)
- Duncan, R. C., Global Seismic Oscillations in Soft Gamma Repeaters, *The Astrophysical Journal Letters*, **498** : L45–L49 (1998). [82](#)
- Duncan, R. C., Thompson, C., Formation of very strongly magnetized neutron stars - Implications for gamma-ray bursts, *The Astrophysical Journal Letters*, **392** : L9–L13 (1992). [81](#)
- Dutra, M., Lourenço, O., Avancini, S. S., *et al.*, Relativistic mean-field hadronic models under nuclear matter constraints, *Physical Review C*, **90(5)** : 055203 (2014). [114](#)
- Easson, I., Postglitch behavior of the plasma inside neutron stars, *The Astrophysical Journal*, **228** : 257–267 (1979). [65](#), [88](#)
- Eichler, D., Shaisultanov, R., Dynamical Oscillations and Glitches in Anomalous X-ray Pulsars, *The Astrophysical Journal Letters*, **715** : L142–L145 (2010). [67](#)
- Elshamouty, K. G., Heinke, C. O., Sivakoff, G. R., *et al.*, Measuring the Cooling of the Neutron Star in Cassiopeia A with all Chandra X-Ray Observatory Detectors, *The Astrophysical Journal*, **777** : 22 (2013). [80](#)
- Epstein, R. I., Acoustic properties of neutron stars, *The Astrophysical Journal*, **333** : 880–894 (1988). [153](#)
- Epstein, R. I., Baym, G., Vortex pinning in neutron stars, *The Astrophysical Journal*, **328** : 680–690 (1988). [70](#)
- Epstein, R. I., Baym, G., Vortex drag and the spin-up time scale for pulsar glitches, *The Astrophysical Journal*, **387** : 276–287 (1992). [157](#)

BIBLIOGRAPHIE

- Espinoza, C. M., Antonopoulou, D., Stappers, B. W., Watts, A., Lyne, A. G., Neutron star glitches have a substantial minimum size, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **440** : 2755–2762 (2014). [45](#)
- Espinoza, C. M., Lyne, A. G., Stappers, B. W., New long-term braking index measurements for glitching pulsars using a glitch-template method, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **466** : 147–162 (2017). [42](#)
- Espinoza, C. M., Lyne, A. G., Stappers, B. W., Kramer, M., A study of 315 glitches in the rotation of 102 pulsars, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **414** : 1679–1704 (2011). [45](#), [48](#), [69](#), [154](#)
- Essmann, U., Träuble, H., The direct observation of individual flux lines in type II superconductors, *Physics Letters A*, **24** : 526–527 (1967). [65](#)
- Fantina, A. F., Chamel, N., Pearson, J. M., Goriely, S., Neutron star properties with unified equations of state of dense matter, *Astronomy and Astrophysics*, **559** : A128 (2013). [160](#), [216](#)
- Faucher-Giguère, C.-A., Kaspi, V. M., Birth and Evolution of Isolated Radio Pulsars, *The Astrophysical Journal*, **643** : 332–355 (2006). [44](#)
- Ferdman, R. D., Stairs, I. H., Kramer, M., *et al.*, PSR J1756-2251 : a pulsar with a low-mass neutron star companion, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **443** : 2183–2196 (2014). [8](#)
- Fesen, R. A., Hammell, M. C., Morse, J., *et al.*, The Expansion Asymmetry and Age of the Cassiopeia A Supernova Remnant, *The Astrophysical Journal*, **645** : 283–292 (2006). [79](#)
- Feynman, R. P., Chapter II - Application of quantum mechanics to liquid helium, *Progress in low temperature physics*, **1** : 17–53 (1955). [58](#)
- Flowers, E., Itoh, N., Transport properties of dense matter, *The Astrophysical Journal*, **206** : 218–242 (1976). [89](#)
- Flowers, E., Ruderman, M., Sutherland, P., Neutrino pair emission from finite-temperature neutron superfluid and the cooling of young neutron stars, *The Astrophysical Journal*, **205** : 541–544 (1976). [78](#)
- Foglizzo, T., Kazeroni, R., Guilet, J., *et al.*, The Explosion Mechanism of Core-Collapse Supernovae : Progress in Supernova Theory and Experiments, *Publications of the Astronomical Society of Australia*, **32** : e009 (2015). [13](#)
- Fonseca, E., Pennucci, T. T., Ellis, J. A., *et al.*, The NANOGrav Nine-year Data Set : Mass and Geometric Measurements of Binary Millisecond Pulsars, *The Astrophysical Journal*, **832** : 167 (2016). [8](#), [138](#)

BIBLIOGRAPHIE

- Fortin, M., Zdunik, J. L., Haensel, P., Bejger, M., Neutron stars with hyperon cores : stellar radii and equation of state near nuclear density, *Astronomy and Astrophysics*, **576** : A68 (2015). [11](#)
- Friedman, J. L., Stergioulas, N., *Rotating relativistic stars*, Cambridge monographs on mathematical physics, Cambridge University Press, Cambridge, pages 1 vol. (XXIV–409 p.) (2013). [15](#), [34](#), [89](#), [186](#), [187](#)
- Gabler, M., Cerdá Durán, P., Font, J. A., Müller, E., Stergioulas, N., Magneto-elastic oscillations and the damping of crustal shear modes in magnetars, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **410** : L37–L41 (2011). [82](#)
- Gabler, M., Cerdá-Durán, P., Stergioulas, N., Font, J. A., Müller, E., Magnetoelastic oscillations of neutron stars with dipolar magnetic fields, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **421** : 2054–2078 (2012). [82](#), [83](#)
- Gabler, M., Cerdá-Durán, P., Stergioulas, N., Font, J. A., Müller, E., Imprints of Superfluidity on Magnetoelastic Quasiperiodic Oscillations of Soft Gamma-Ray Repeaters, *Physical Review Letters*, **111(21)** : 211102 (2013). [82](#), [83](#)
- Gabler, M., Cerdá-Durán, P., Stergioulas, N., Font, J. A., Müller, E., Coherent magneto-elastic oscillations in superfluid magnetars, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **460** : 4242–4257 (2016). [83](#)
- Gaitanos, T., Di Toro, M., Typel, S., *et al.*, On the Lorentz structure of the symmetry energy, *Nuclear Physics A*, **732** : 24–48 (2004). [115](#), [116](#)
- Gendreau, K. C., Arzoumanian, Z., Adkins, P. W., *et al.*, The Neutron star Interior Composition Explorer (NICER) : design and development, *Space Telescopes and Instrumentation 2016 : Ultraviolet to Gamma Ray*, volume 9905 of *Proceedings of the SPIE Conference*, page 99051H (2016). [10](#)
- Ginzburg, V., Kirzhnits, D., On the superfluidity of neutron stars, *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, **20** : 1346 (1965). [56](#), [61](#)
- Ginzburg, V. L., Superfluidity and superconductivity in the universe, *Journal of Statistical Physics*, **1** : 3–24 (1969). [56](#)
- Glampedakis, K., Andersson, N., Hydrodynamical Trigger Mechanism for Pulsar Glitches, *Physical Review Letters*, **102(14)** : 141101 (2009). [68](#)
- Glampedakis, K., Andersson, N., Magneto-rotational Neutron Star Evolution : The Role of Core Vortex Pinning, *The Astrophysical Journal Letters*, **740** : L35 (2011). [195](#), [200](#), [207](#), [218](#), [243](#), [244](#)
- Glampedakis, K., Andersson, N., Jones, D. I., Stability of Precessing Superfluid Neutron Stars, *Physical Review Letters*, **100(8)** : 081101 (2008). [83](#), [218](#)

BIBLIOGRAPHIE

- Glampedakis, K., Andersson, N., Jones, D. I., Do superfluid instabilities prevent neutron star precession?, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **394** : 1908–1924 (2009). [184](#)
- Glampedakis, K., Andersson, N., Samuelsson, L., Magnetohydrodynamics of superfluid and superconducting neutron star cores, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **410** : 805–829 (2011). [65](#), [88](#), [236](#), [244](#)
- Glampedakis, K., Samuelsson, L., Andersson, N., Elastic or magnetic? A toy model for global magnetar oscillations with implications for quasi-periodic oscillations during flares, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **371** : L74–L77 (2006). [82](#)
- Glendenning, N. K., *Compact stars nuclear physics, particle physics, and general relativity*, Astronomy and astrophysics library, Springer, New York, 2nd edition edition, pages 1 vol. (xviii–467 p.) (2000). [113](#), [116](#), [117](#), [118](#)
- Gold, T., Rotating Neutron Stars as the Origin of the Pulsating Radio Sources, *Nature*, **218** : 731–732 (1968). [5](#), [35](#)
- Gold, T., Rotating Neutron Stars and the Nature of Pulsars, *Nature*, **221** : 25–27 (1969). [5](#)
- Goldreich, P., Julian, W. H., Pulsar Electrodynamics, *The Astrophysical Journal*, **157** : 869 (1969). [35](#)
- Gorter, C. J., Chapter I - The Two Fluid Model for Superconductors and Helium II, *Progress in Low Temperature Physics*, **1** : 1–16 (1955). [55](#)
- Gourgoulhon, E., An introduction to the theory of rotating relativistic stars, *ArXiv e-prints*, *arXiv :1003.5015* (2010). [89](#), [91](#), [92](#), [94](#), [97](#), [98](#), [100](#)
- Gourgoulhon, E., *3+1 formalism in general relativity bases of numerical relativity*, Lecture notes in physics 846, Springer, Berlin Heidelberg, pages 1 vol. (xvii–294 p.) (2012). [90](#), [92](#), [102](#)
- Gourgoulhon, E., Bonazzola, S., Noncircular axisymmetric stationary spacetimes, *Physical Review D*, **48** : 2635–2652 (1993). [94](#)
- Gourgoulhon, E., Bonazzola, S., A formulation of the virial theorem in general relativity, *Classical and Quantum Gravity*, **11** : 443–452 (1994). [103](#)
- Gourgoulhon, E., Haensel, P., Livine, R., *et al.*, Fast rotation of strange stars, *Astronomy and Astrophysics*, **349** : 851–862 (1999). [28](#)
- Gourgouliatos, K. N., Cumming, A., Hall drift and the braking indices of young pulsars, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **446** : 1121–1128 (2015). [43](#)
- Graber, V., Andersson, N., Hogg, M., Neutron Stars in the Laboratory, *ArXiv e-prints*, *arXiv :1610.06882* (2016). [58](#), [61](#), [63](#), [64](#)

BIBLIOGRAPHIE

- Grandclément, P., Novak, J., Spectral Methods for Numerical Relativity, *Living Reviews in Relativity*, **12** : 1 (2009). [106](#), [107](#)
- Gügercinoğlu, E., Alpar, M. A., Vortex Creep Against Toroidal Flux Lines, Crustal Entrainment, and Pulsar Glitches, *The Astrophysical Journal Letters*, **788** : L11 (2014). [68](#), [74](#), [76](#), [218](#)
- Gügercinoğlu, E., Alpar, M. A., Microscopic vortex velocity in the inner crust and outer core of neutron stars, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **462** : 1453–1460 (2016). [68](#), [74](#)
- Guillot, S., Rutledge, R. E., Rejecting Proposed Dense Matter Equations of State with Quiescent Low-mass X-Ray Binaries, *The Astrophysical Journal Letters*, **796** : L3 (2014). [11](#)
- Gusakov, M. E., Chugunov, A. I., Kantor, E. M., Instability Windows and Evolution of Rapidly Rotating Neutron Stars, *Physical Review Letters*, **112(15)** : 151101 (2014a). [83](#), [218](#)
- Gusakov, M. E., Chugunov, A. I., Kantor, E. M., Explaining observations of rapidly rotating neutron stars in low-mass x-ray binaries, *Physical Review D*, **90(6)** : 063001 (2014b). [83](#), [219](#)
- Gusakov, M. E., Haensel, P., Kantor, E. M., Physics input for modelling superfluid neutron stars with hyperon cores, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **439** : 318–333 (2014c). [124](#), [215](#)
- Gusakov, M. E., Kantor, E. M., Velocity-dependent energy gaps and dynamics of superfluid neutron stars, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **428** : L26–L30 (2013). [126](#)
- Gusakov, M. E., Kantor, E. M., Haensel, P., Relativistic entrainment matrix of a superfluid nucleon-hyperon mixture : The zero temperature limit, *Physical Review C*, **79(5)** : 055806 (2009a). [87](#), [96](#), [115](#), [124](#), [126](#), [132](#), [133](#), [135](#), [215](#)
- Gusakov, M. E., Kantor, E. M., Haensel, P., Relativistic entrainment matrix of a superfluid nucleon-hyperon mixture. II. Effect of finite temperatures, *Physical Review C*, **80(1)** : 015803 (2009b). [88](#)
- Güver, T., Özel, F., The Mass and the Radius of the Neutron Star in the Transient Low-mass X-Ray Binary SAX J1748.9-2021, *The Astrophysical Journal Letters*, **765** : L1 (2013). [11](#)
- Haberl, F., The magnificent seven : magnetic fields and surface temperature distributions, *Astrophysics and Space Science*, **308** : 181–190 (2007). [6](#), [41](#)
- Haensel, P., Charge symmetry breaking nuclear forces and the properties of nuclear matter, *Journal of Physics G : Nuclear Physics*, **3** : 373–380 (1977). [21](#)

BIBLIOGRAPHIE

- Haensel, P., Bejger, M., Fortin, M., Zdunik, L., Rotating neutron stars with exotic cores : masses, radii, stability, *European Physical Journal A*, **52** : 59 (2016). [160](#)
- Haensel, P., Pichon, B., Experimental nuclear masses and the ground state of cold dense matter, *Astronomy and Astrophysics*, **283** : 313–318 (1994). [20](#)
- Haensel, P., Potekhin, A. Y., Yakovlev, D. G., *Neutron stars 1 Equation of state and structure*, Astrophysics and space science library 326, Springer, New York, pages 1 vol. (XXII–619 p.) (2007). [6](#), [19](#), [20](#), [21](#), [23](#), [25](#), [27](#), [42](#), [114](#), [116](#)
- Haensel, P., Zdunik, J. L., Bejger, M., Lattimer, J. M., Keplerian frequency of uniformly rotating neutron stars and strange stars, *Astronomy and Astrophysics*, **502** : 605–610 (2009). [12](#), [160](#)
- Hall, H. E., Vinen, W. F., The Rotation of Liquid Helium II. II. The Theory of Mutual Friction in Uniformly Rotating Helium II, *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, **238** : 215–234 (1956). [199](#)
- Harvey, J. A., Ruderman, M. A., Shaham, J., Effects of neutron-star superconductivity on magnetic monopoles and core field decay, *Physical Review D*, **33** : 2084–2091 (1986). [204](#), [235](#)
- Haskell, B., Andersson, N., Passamonti, A., r modes and mutual friction in rapidly rotating superfluid neutron stars, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **397** : 1464–1485 (2009). [83](#), [218](#)
- Haskell, B., Degenaar, N., Ho, W. C. G., Constraining the physics of the r-mode instability in neutron stars with X-ray and ultraviolet observations, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **424** : 93–103 (2012a). [83](#), [218](#)
- Haskell, B., Glampedakis, K., Andersson, N., A new mechanism for saturating unstable r modes in neutron stars, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **441** : 1662–1668 (2014). [74](#), [83](#), [217](#), [218](#)
- Haskell, B., Melatos, A., Models of pulsar glitches, *International Journal of Modern Physics D*, **24** : 1530008 (2015). [47](#), [48](#), [51](#), [153](#), [157](#), [196](#)
- Haskell, B., Pizzochero, P. M., Seveso, S., Investigating Superconductivity in Neutron Star Interiors with Glitch Models, *The Astrophysical Journal Letters*, **764** : L25 (2013). [70](#), [76](#)
- Haskell, B., Pizzochero, P. M., Sidery, T., Modelling pulsar glitches with realistic pinning forces : a hydrodynamical approach, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **420** : 658–671 (2012b). [72](#), [152](#), [153](#), [157](#), [174](#), [212](#), [217](#)
- Hebeler, K., Lattimer, J. M., Pethick, C. J., Schwenk, A., Equation of State and Neutron Star Properties Constrained by Nuclear Physics and Observation, *The Astrophysical Journal*, **773** : 11 (2013). [24](#)

BIBLIOGRAPHIE

- Hegyi, D. J., The upper mass limit for neutron stars including differential rotation, *The Astrophysical Journal*, **217** : 244–247 (1977). [89](#)
- Heinke, C. O., Ho, W. C. G., Direct Observation of the Cooling of the Cassiopeia A Neutron Star, *The Astrophysical Journal Letters*, **719** : L167–L171 (2010). [79](#), [80](#)
- Hess, G. B., Fairbank, W., Measurements of angular momentum in superfluid helium, *Physical Review Letters*, **19(5)** : 216 (1967). [55](#)
- Hess, H. F., Robinson, R. B., Dynes, R. C., Valles, Jr., J. M., Waszczak, J. V., Scanning-tunneling-microscope observation of the Abrikosov flux lattice and the density of states near and inside a fluxoid, *Physical Review Letters*, **62** : 214–216 (1989). [59](#), [65](#)
- Hessels, J. W. T., Ransom, S. M., Stairs, I. H., *et al.*, A Radio Pulsar Spinning at 716 Hz, *Science*, **311** : 1901–1904 (2006). [12](#), [31](#)
- Hewish, A., Pulsars and high density physics, *Reviews of Modern Physics*, **47** : 567–572 (1975). [30](#)
- Hewish, A., Bell, S. J., Pilkington, J. D. H., Scott, P. F., Collins, R. A., Observation of a Rapidly Pulsating Radio Source, *Nature*, **217** : 709–713 (1968). [5](#), [29](#)
- Ho, W. C. G., Andersson, N., Rotational evolution of young pulsars due to superfluid decoupling, *Nature Physics*, **8** : 787–789 (2012). [43](#), [83](#)
- Ho, W. C. G., Espinoza, C. M., Antonopoulou, D., Andersson, N., Pinning down the superfluid and measuring masses using pulsar glitches, *Science Advances*, **1** : e1500578–e1500578 (2015). [49](#), [151](#)
- Ho, W. C. G., Glampedakis, K., Andersson, N., Magnetars : super(ficially) hot and super(fluid) cool, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **422** : 2632–2641 (2012). [16](#)
- Ho, W. C. G., Heinke, C. O., A neutron star with a carbon atmosphere in the Cassiopeia A supernova remnant, *Nature*, **462** : 71–73 (2009). [25](#), [79](#)
- Hobbs, G., Archibald, A., Arzoumanian, Z., *et al.*, The International Pulsar Timing Array project : using pulsars as a gravitational wave detector, *Classical and Quantum Gravity*, **27(8)** : 084013 (2010a). [12](#)
- Hobbs, G., Lyne, A. G., Kramer, M., An analysis of the timing irregularities for 366 pulsars, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **402** : 1027–1048 (2010b). [51](#)
- Hulse, R. A., Taylor, J. H., Discovery of a pulsar in a binary system, *The Astrophysical Journal Letters*, **195** : L51–L53 (1975). [34](#)
- Huppenkothen, D., D’Angelo, C., Watts, A. L., *et al.*, Quasi-periodic Oscillations in Short Recurring Bursts of the Soft Gamma Repeater J1550-5418, *The Astrophysical Journal*, **787** : 128 (2014). [82](#)

BIBLIOGRAPHIE

- Hurley, K., Cline, T., Mazets, E., *et al.*, A giant periodic flare from the soft γ -ray repeater SGR1900+14, *Nature*, **397** : 41–43 (1999). [81](#)
- Israel, G. L., Belloni, T., Stella, L., *et al.*, The Discovery of Rapid X-Ray Oscillations in the Tail of the SGR 1806-20 Hyperflare, *The Astrophysical Journal Letters*, **628** : L53–L56 (2005). [82](#)
- Jahan-Miri, M., *The evolution of the magnetic fields of neutron stars : The role of the superfluid states in their interiors.*, Ph.D. thesis, Indian Institute of Science, Bangalore (1996). [235](#)
- Jahan Miri, M., Dynamical Coupling of the Core-Superfluid in Neutron Stars, *The Astrophysical Journal Letters*, **501** : L185–L187 (1998). [210](#)
- Jahan-Miri, M., Flux Expulsion and Field Evolution in Neutron Stars, *The Astrophysical Journal*, **532** : 514–529 (2000). [74](#)
- Jahan-Miri, M., Observational constraints on the role of the crust in the post-glitch relaxation, *New Astronomy*, **11** : 157–165 (2005). [73](#), [218](#)
- Jahan-Miri, M., The Spin-down Rate of a Pinned Superfluid, *The Astrophysical Journal*, **650** : 326–331 (2006). [157](#)
- Jahan-Miri, M., Rotational Coupling of the Pinned Core Superfluid, *The Astrophysical Journal*, **725** : 29–35 (2010). [74](#)
- Janka, H.-T., Explosion Mechanisms of Core-Collapse Supernovae, *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, **62** : 407–451 (2012). [12](#), [13](#)
- Johnston, S., Galloway, D., Pulsar braking indices revisited, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **306** : L50–L54 (1999). [83](#)
- Jones, P. B., Neutron star magnetic field decay - Flux expulsion from the superconducting interior, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **228** : 513–520 (1987). [204](#), [237](#)
- Jones, P. B., Rotation of the neutron-drip superfluid in pulsars - The resistive force, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **243** : 257–262 (1990a). [157](#), [212](#)
- Jones, P. B., Rotation of the Neutron Drip Superfluid in Pulsars - Period Discontinuities and Internal Temperatures, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **246** : 315 (1990b). [212](#)
- Jones, P. B., Neutron superfluid spin-down and magnetic field decay in pulsars, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **253** : 279–286 (1991). [74](#)
- Jones, P. B., Rotation of the neutron-drip superfluid in pulsars - The Kelvin phonon contribution to dissipation, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **257** : 501–506 (1992). [157](#)

BIBLIOGRAPHIE

- Jones, P. B., Rotation of the Neutron Drip Superfluid in Pulsars - Evidence for Corotating Vortices, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **263** : 619 (1993). [212](#)
- Jones, P. B., Motion of Neutron Vortices in the Inner Crust of a Neutron Star, *Physical Review Letters*, **79** : 792–795 (1997). [70](#)
- Jones, P. B., Nature of Fault Planes in Solid Neutron Star Matter, *The Astrophysical Journal*, **595** : 342–345 (2003). [75](#)
- Jones, P. B., Type II superconductivity and magnetic flux transport in neutron stars, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **365** : 339–344 (2006a). [74](#)
- Jones, P. B., Type I and two-gap superconductivity in neutron star magnetism, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **371** : 1327–1333 (2006b). [65](#)
- Kapitza, P., Viscosity of liquid helium below the λ -point, *Nature*, **141(3558)** : 74 (1938). [55](#)
- Kaspi, V. M., Grand unification of neutron stars, *Proceedings of the National Academy of Science*, **107** : 7147–7152 (2010). [39](#), [40](#), [41](#)
- Kaspi, V. M., Gavriil, F. P., A Second Glitch from the “Anomalous” X-Ray Pulsar 1RXS J170849.0-4000910, *The Astrophysical Journal Letters*, **596** : L71–L74 (2003). [45](#), [75](#)
- Kaspi, V. M., Gavriil, F. P., Woods, P. M., *et al.*, A Major Soft Gamma Repeater-like Outburst and Rotation Glitch in the No-longer-so-anomalous X-Ray Pulsar 1E 2259+586, *The Astrophysical Journal Letters*, **588** : L93–L96 (2003). [50](#)
- Keane, E. F., Kramer, M., Lyne, A. G., Stappers, B. W., McLaughlin, M. A., Rotating Radio Transients : new discoveries, timing solutions and musings, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **415** : 3065–3080 (2011). [41](#)
- Khalatnikov, I. M., *An introduction to the theory of superfluidity*, Advanced book classics, Addison-Wesley Pub. Co., Redwood City, Calif., pages xvi, 206 p. (1988). [55](#)
- Khan, E., Margueron, J., Determination of the density dependence of the nuclear incompressibility, *Physical Review C*, **88(3)** : 034319 (2013). [22](#)
- Kheto, A., Bandyopadhyay, D., Isospin dependence of entrainment in superfluid neutron stars in a relativistic model, *Physical Review D*, **89(2)** : 023007 (2014). [87](#), [115](#), [124](#), [125](#), [126](#), [129](#), [132](#), [135](#), [136](#), [215](#)
- Kheto, A., Bandyopadhyay, D., Slowly rotating superfluid neutron stars with isospin dependent entrainment in a two-fluid model, *Physical Review D*, **91(4)** : 043006 (2015). [87](#), [215](#)
- Kokkotas, K. D., Schmidt, B. G., Quasi-Normal Modes of Stars and Black Holes, *Living Reviews in Relativity*, **2** : 2 (1999). [34](#)

BIBLIOGRAPHIE

- Kramer, M., Stairs, I. H., Manchester, R. N., *et al.*, Tests of General Relativity from Timing the Double Pulsar, *Science*, **314** : 97–102 (2006). [7](#)
- Krüger, T., Tews, I., Hebeler, K., Schwenk, A., Neutron matter from chiral effective field theory interactions, *Physical Review C*, **88(2)** : 025802 (2013). [120](#), [121](#)
- Laarakkers, W. G., Poisson, E., Quadrupole Moments of Rotating Neutron Stars, *The Astrophysical Journal*, **512** : 282–287 (1999). [187](#)
- Landau, L., Origin of Stellar Energy, *Nature*, **141** : 333–334 (1938). [5](#)
- Landau, L., Theory of the Superfluidity of Helium II, *Physical Review*, **60(4)** : 356 (1941). [55](#)
- Landau, L. D., Lifshitz, E. M., Pitaevskij, L. P., *Statistical physics, part 2 - Theory of the condensed state*, Course of theoretical physics v. 9, Pergamon Press, Oxford New York, page 1 vol. (387 p.) (1980). [226](#)
- Langlois, D., Sedrakian, D. M., Carter, B., Differential rotation of relativistic superfluid in neutron stars, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **297** : 1189–1201 (1998). [87](#), [89](#), [95](#), [97](#), [100](#), [101](#), [104](#), [151](#), [153](#), [154](#), [155](#), [156](#), [157](#), [160](#), [161](#), [195](#), [200](#), [216](#), [217](#)
- Larson, M. B., Link, B., Simulations of glitches in isolated pulsars, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **333** : 613–622 (2002). [151](#)
- Lasky, P. D., Gravitational Waves from Neutron Stars : A Review, *Publications of the Astronomical Society of Australia*, **32** : e034 (2015). [186](#)
- Lasota, J.-P., The disc instability model of dwarf novae and low-mass X-ray binary transients, *New Astronomy Reviews*, **45** : 449–508 (2001). [80](#)
- Lattimer, J. M., The Nuclear Equation of State and Neutron Star Masses, *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, **62** : 485–515 (2012). [9](#), [22](#)
- Lattimer, J. M., Lim, Y., Constraining the Symmetry Parameters of the Nuclear Interaction, *The Astrophysical Journal*, **771** : 51 (2013). [22](#)
- Lattimer, J. M., Prakash, M., Neutron Star Structure and the Equation of State, *The Astrophysical Journal*, **550** : 426–442 (2001). [24](#)
- Lattimer, J. M., Prakash, M., Neutron star observations : Prognosis for equation of state constraints, *Physics Reports*, **442** : 109–165 (2007). [89](#)
- Le Tiec, A., Novak, J., *Theory of Gravitational Waves*, World Scientific Publishing Co, pages 1–41 (2017). [189](#)
- Lévy-Bertrand, F., van der Beek, K., Les supraconducteurs ferromagnétiques, *Reflets de la Physique*, (**32**) : 4–7 (2013). [56](#)

BIBLIOGRAPHIE

- Lewin, W. H. G., van Paradijs, J., Taam, R. E., X-Ray Bursts, *Space Science Reviews*, **62** : 223–389 (1993). [10](#)
- LIGO Scientific Collaboration, Aasi, J., Abbott, B. P., *et al.*, Advanced LIGO, *Classical and Quantum Gravity*, **32(7)** : 074001 (2015). [192](#)
- Lin, L.-M., Novak, J., Rotating star initial data for a constrained scheme in numerical relativity, *Classical and Quantum Gravity*, **23** : 4545–4561 (2006). [94](#)
- Lindblom, L., Stationary stars are axisymmetric, *The Astrophysical Journal*, **208** : 873–880 (1976). [92](#)
- Link, B., Constraining Hadronic Superfluidity with Neutron Star Precession, *Physical Review Letters*, **91(10)** : 101101 (2003). [74](#), [76](#), [83](#), [218](#)
- Link, B., Incompatibility of long-period neutron star precession with creeping neutron vortices, *Astronomy and Astrophysics*, **458** : 881–884 (2006). [76](#), [83](#), [204](#), [218](#)
- Link, B., Precession as a probe of the neutron star interior, *Astrophysics and Space Science*, **308** : 435–441 (2007). [83](#), [218](#)
- Link, B., Dynamics of Quantum Vorticity in a Random Potential, *Physical Review Letters*, **102(13)** : 131101 (2009). [70](#)
- Link, B., Instability of superfluid flow in the neutron star core, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **421** : 2682–2691 (2012). [68](#)
- Link, B., Thermally Activated Post-glitch Response of the Neutron Star Inner Crust and Core. I. Theory, *The Astrophysical Journal*, **789** : 141 (2014). [68](#), [70](#), [74](#)
- Link, B., Epstein, R. I., Thermally Driven Neutron Star Glitches, *The Astrophysical Journal*, **457** : 844 (1996). [68](#)
- Link, B., Epstein, R. I., Baym, G., Superfluid vortex creep and rotational dynamics of neutron stars, *The Astrophysical Journal*, **403** : 285–302 (1993). [67](#)
- Link, B., Epstein, R. I., Lattimer, J. M., Pulsar Constraints on Neutron Star Structure and Equation of State, *Physical Review Letters*, **83** : 3362–3365 (1999). [69](#)
- Livingstone, M. A., Kaspi, V. M., Gavriil, F. P., *et al.*, New phase-coherent measurements of pulsar braking indices, *Astrophysics and Space Science*, **308** : 317–323 (2007). [42](#)
- Livingstone, M. A., Ng, C.-Y., Kaspi, V. M., Gavriil, F. P., Gotthelf, E. V., Post-outburst Observations of the Magnetically Active Pulsar J1846-0258. A New Braking Index, Increased Timing Noise, and Radiative Recovery, *The Astrophysical Journal*, **730** : 66 (2011). [50](#)
- Lorimer, D. R., Kramer, M., *Handbook of pulsar astronomy*, Cambridge observing handbooks for research astronomers 4, Cambridge University Press, Cambridge, pages 1 vol. (IX–301 p.) (2005). [29](#), [32](#), [33](#), [35](#), [36](#), [223](#)

BIBLIOGRAPHIE

- Lyne, A., Graham-Smith, F., Weltevrede, P., *et al.*, Evolution of the Magnetic Field Structure of the Crab Pulsar, *Science*, **342** : 598–601 (2013). [43](#)
- Lyne, A. G., Glitches as Probes of Neutron Star Interiors, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, **341** : 29–37 (1992). [52](#)
- Lyne, A. G., Jordan, C. A., Graham-Smith, F., *et al.*, 45 years of rotation of the Crab pulsar, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **446** : 857–864 (2015). [43](#)
- Lyne, A. G., Rickett, B. J., Measurements of the Pulse Shape and Spectra of the Pulsating Radio Sources, *Nature*, **218** : 326–330 (1968). [30](#)
- Lyne, A. G., Shemar, S. L., Smith, F. G., Statistical studies of pulsar glitches, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **315** : 534–542 (2000). [48](#), [69](#)
- Lyne, A. G., Smith, F. G., Pritchard, R. S., Spin-up and recovery in the 1989 glitch of the Crab pulsar, *Nature*, **359** : 706 (1992). [47](#)
- Madison, K. W., Chevy, F., Wohlleben, W., Dalibard, J., Vortex Formation in a Stirred Bose-Einstein Condensate, *Physical Review Letters*, **84** : 806–809 (2000). [59](#)
- Manchester, R. N., Hobbs, G. B., Teoh, A., Hobbs, M., The australia telescope national facility pulsar catalogue, *The Astronomical Journal*, **129(4)** : 1993 (2005). [5](#), [11](#), [29](#), [45](#)
- Martin, N., Urban, M., Superfluid hydrodynamics in the inner crust of neutron stars, *Physical Review C*, **94(6)** : 065801 (2016). [72](#)
- Martinez, J. G., Stovall, K., Freire, P. C. C., *et al.*, Pulsar J0453+1559 : A Double Neutron Star System with a Large Mass Asymmetry, *The Astrophysical Journal*, **812** : 143 (2015). [8](#)
- Mazets, E. P., Golentskii, S. V., Ilinskii, V. N., Aptekar, R. L., Guryan, I. A., Observations of a flaring X-ray pulsar in Dorado, *Nature*, **282** : 587–589 (1979). [81](#)
- McLaughlin, M. A., Lyne, A. G., Lorimer, D. R., *et al.*, Transient radio bursts from rotating neutron stars, *Nature*, **439** : 817–820 (2006). [41](#)
- Meissner, W., Ochsenfeld, R., Ein neuer Effekt bei Eintritt der Supraleitfähigkeit, *Naturwissenschaften*, **21** : 787–788 (1933). [53](#)
- Melatos, A., Douglass, J. A., Simula, T. P., Persistent Gravitational Radiation from Glitching Pulsars, *The Astrophysical Journal*, **807** : 132 (2015). [192](#)
- Melatos, A., Peralta, C., Wyithe, J. S. B., Avalanche Dynamics of Radio Pulsar Glitches, *The Astrophysical Journal*, **672** : 1103–1118 (2008). [47](#), [72](#)
- Meltzer, D. W., Thorne, K. S., Normal Modes of Radial Pulsation of Stars at the End Point of Thermonuclear Evolution, *The Astrophysical Journal*, **145** : 514 (1966). [34](#)

BIBLIOGRAPHIE

- Mendell, G., Superfluid hydrodynamics in rotating neutron stars. I - Nondissipative equations. II - Dissipative effects, *The Astrophysical Journal*, **380** : 515–540 (1991). [62](#), [64](#), [74](#), [198](#)
- Mereghetti, S., Pons, J. A., Melatos, A., Magnetars : Properties, Origin and Evolution, *Space Science Reviews*, **191** : 315–338 (2015). [39](#)
- Mereghetti, S., Tiengo, A., Israel, G. L., The X-Ray Source at the Center of the Cassiopeia A Supernova Remnant, *The Astrophysical Journal*, **569** : 275–279 (2002). [41](#)
- Michel, F. C., Relativistic Stellar-Wind Torques, *The Astrophysical Journal*, **158** : 727 (1969). [43](#)
- Migdal, A. B., Superfluidity and the moments of inertia of nuclei, *Nuclear Physics*, **13** : 655–674 (1959). [56](#)
- Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A., *Gravitation*, pages 1 vol. (XXVI–1279 p.) (1973). [18](#)
- Moore, C. J., Cole, R. H., Berry, C. P. L., Gravitational-wave sensitivity curves, *Classical and Quantum Gravity*, **32(1)** : 015014 (2015). [190](#)
- Muslimov, A. G., Tsygan, A. I., Vortex lines in neutron star superfluids and decay of pulsar magnetic fields, *Astrophysics and Space Science*, **115** : 43–49 (1985). [74](#), [204](#)
- Nandra, K., Barret, D., Barcons, X., *et al.*, The Hot and Energetic Universe : A White Paper presenting the science theme motivating the Athena+ mission, *ArXiv e-prints*, *arXiv :1306.2307* (2013). [10](#)
- Negreiros, R., Schramm, S., Weber, F., Impact of rotation-driven particle repopulation on the thermal evolution of pulsars, *Physics Letters B*, **718** : 1176–1180 (2013). [80](#)
- Noda, T., Hashimoto, M.-a., Yasutake, N., *et al.*, Cooling of Compact Stars with Color Superconducting Phase in Quark-hadron Mixed Phase, *The Astrophysical Journal*, **765** : 1 (2013). [80](#)
- Oertel, M., Hempel, M., Klähn, T., Typel, S., Equations of state for supernovae and compact stars, *Reviews of Modern Physics*, **89(1)** : 015007 (2017). [6](#), [20](#), [22](#), [24](#), [27](#), [114](#)
- Onnes, H. K., The resistance of pure mercury at helium temperatures, *Communications from the Laboratory of Physics at the University of Leiden*, **12(120)** : 1 (1911a). [53](#)
- Onnes, H. K., The superconductivity of mercury, *Communications from the Laboratory of Physics at the University of Leiden*, **122** : 124 (1911b). [53](#)
- Onnes, H. K., Further experiments with liquid helium, *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, volume 13, pages 1910–1911 (1911c). [53](#)
- Onsager, L., Statistical hydrodynamics, *Il Nuovo Cimento*, **6** : 279–287 (1949). [58](#)

BIBLIOGRAPHIE

- Oppenheimer, J. R., Volkoff, G. M., On Massive Neutron Cores, *Physical Review*, **55** : 374–381 (1939). [5](#), [17](#), [18](#)
- Osheroff, D. D., Gully, W. J., Richardson, R. C., Lee, D. M., New Magnetic Phenomena in Liquid He³ below 3 mK, *Physical Review Letters*, **29** : 920–923 (1972a). [55](#)
- Osheroff, D. D., Richardson, R. C., Lee, D. M., Evidence for a New Phase of Solid He³, *Physical Review Letters*, **28** : 885–888 (1972b). [55](#)
- Özel, F., Freire, P., Masses, Radii, and the Equation of State of Neutron Stars, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, **54** : 401–440 (2016). [6](#)
- Pacini, F., Energy Emission from a Neutron Star, *Nature*, **216** : 567–568 (1967). [35](#)
- Pacini, F., Rotating Neutron Stars, Pulsars and Supernova Remnants, *Nature*, **219** : 145–146 (1968). [38](#)
- Page, D., Geppert, U., Weber, F., The cooling of compact stars, *Nuclear Physics A*, **777** : 497–530 (2006). [38](#)
- Page, D., Lattimer, J. M., Prakash, M., Steiner, A. W., Minimal Cooling of Neutron Stars : A New Paradigm, *The Astrophysical Journal Supplement*, **155** : 623–650 (2004). [77](#), [78](#)
- Page, D., Lattimer, J. M., Prakash, M., Steiner, A. W., Neutrino Emission from Cooper Pairs and Minimal Cooling of Neutron Stars, *The Astrophysical Journal*, **707** : 1131–1140 (2009). [77](#)
- Page, D., Lattimer, J. M., Prakash, M., Steiner, A. W., Stellar Superfluids, *ArXiv e-prints*, *arXiv :1302.6626* (2013). [15](#), [38](#), [57](#), [58](#), [69](#), [77](#), [78](#), [79](#)
- Page, D., Prakash, M., Lattimer, J. M., Steiner, A. W., Rapid Cooling of the Neutron Star in Cassiopeia A Triggered by Neutron Superfluidity in Dense Matter, *Physical Review Letters*, **106(8)** : 081101 (2011). [80](#)
- Page, D., Reddy, S., Thermal and transport properties of the neutron star inner crust, *ArXiv e-prints*, *arXiv :1201.5602* (2012). [80](#)
- Page, D., Reddy, S., Forecasting Neutron Star Temperatures : Predictability and Variability, *Physical Review Letters*, **111(24)** : 241102 (2013). [80](#)
- Palmer, D. M., Barthelmy, S., Gehrels, N., *et al.*, A giant γ -ray flare from the magnetar SGR 1806 - 20, *Nature*, **434** : 1107–1109 (2005). [81](#)
- Pappas, G., Apostolatos, T. A., Revising the Multipole Moments of Numerical Spacetimes and its Consequences, *Physical Review Letters*, **108(23)** : 231104 (2012). [186](#), [187](#)
- Passamonti, A., Lander, S. K., Stratification, superfluidity and magnetar QPOs, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **429** : 767–774 (2013). [82](#), [83](#)

BIBLIOGRAPHIE

- Passamonti, A., Lander, S. K., Quasi-periodic oscillations in superfluid magnetars, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **438** : 156–168 (2014). [82](#), [83](#)
- Pearson, J. M., Chamel, N., Goriely, S., Ducoin, C., Inner crust of neutron stars with mass-fitted Skyrme functionals, *Physical Review C*, **85(6)** : 065803 (2012). [72](#)
- Peralta, C., Melatos, A., Giacobello, M., Ooi, A., Transitions between Turbulent and Laminar Superfluid Vorticity States in the Outer Core of a Neutron Star, *The Astrophysical Journal*, **651** : 1079–1091 (2006). [61](#), [68](#), [152](#), [156](#)
- Perna, R., Bozzo, E., Stella, L., On the Spin-up/Spin-down Transitions in Accreting X-Ray Binaries, *The Astrophysical Journal*, **639** : 363–376 (2006). [41](#)
- Pétri, J., Multipolar electromagnetic fields around neutron stars : exact vacuum solutions and related properties, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **450** : 714–742 (2015). [43](#)
- Pfister, H., Schaudt, U., Steps towards an existence proof for rotating stars solutions in general relativity, *Annalen der Physik*, **11** : 507 (2000). [109](#)
- Phinney, E. S., Kulkarni, S. R., Binary and Millisecond Pulsars, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, **32** : 591–639 (1994). [44](#)
- Pines, D., Alpar, M. A., Superfluidity in neutron stars, *Nature*, **316** : 27–32 (1985). [72](#)
- Pizzochero, P. M., Angular Momentum Transfer in Vela-like Pulsar Glitches, *The Astrophysical Journal Letters*, **743** : L20 (2011). [68](#), [70](#)
- Pizzochero, P. M., Exploring fundamental physics with neutron stars, *ArXiv e-prints*, *arXiv :1609.07587* (2016). [14](#)
- Pizzochero, P. M., Antonelli, M., Haskell, B., Seveso, S., Constraints on pulsar masses from the maximum observed glitch, *Nature Astronomy*, **1** : 0134 (2017). [72](#), [151](#)
- Posselt, B., Pavlov, G. G., Suleimanov, V., Kargaltsev, O., New Constraints on the Cooling of the Central Compact Object in Cas A, *The Astrophysical Journal*, **779** : 186 (2013). [80](#)
- Potekhin, A. Y., Pons, J. A., Page, D., Neutron Stars - Cooling and Transport, *Space Science Reviews*, **191** : 239–291 (2015). [57](#)
- Poutanen, J., Nättilä, J., Kajava, J. J. E., *et al.*, The effect of accretion on the measurement of neutron star mass and radius in the low-mass X-ray binary 4U 1608-52, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **442** : 3777–3790 (2014). [11](#)
- Prialnik, D., *An introduction to the theory of stellar structure and evolution*, Cambridge University Press, New York, 2nd ed. edition, pages 1 vol. (XV–314 p.) (2009). [12](#)
- Prix, R., Variational description of multifluid hydrodynamics : Uncharged fluids, *Physical Review D*, **69(4)** : 043001 (2004). [196](#), [203](#)

BIBLIOGRAPHIE

- Prix, R., Comer, G. L., Andersson, N., Slowly rotating superfluid Newtonian neutron star model with entrainment, *Astronomy and Astrophysics*, **381** : 178–196 (2002). [101](#), [125](#), [133](#), [134](#)
- Prix, R., Novak, J., Comer, G. L., Relativistic numerical models for stationary superfluid neutron stars, *Physical Review D*, **71(4)** : 043005 (2005). [87](#), [88](#), [97](#), [100](#), [101](#), [106](#), [107](#), [109](#), [110](#), [129](#), [136](#), [180](#), [181](#), [186](#), [215](#), [231](#)
- Radhakrishnan, V., Manchester, R. N., Detection of a Change of State in the Pulsar PSR 0833-45, *Nature*, **222** : 228–229 (1969). [44](#)
- Ravenhall, D. G., Pethick, C. J., Wilson, J. R., Structure of Matter below Nuclear Saturation Density, *Physical Review Letters*, **50** : 2066–2069 (1983). [27](#)
- Reichley, P. E., Downs, G. S., Observed Decrease in the Periods of Pulsar PSR 0833-45, *Nature*, **222** : 229–230 (1969). [44](#)
- Reppy, J. D., Depatie, D., Persistent Currents in Superfluid Helium, *Physical Review Letters*, **12** : 187–189 (1964). [55](#)
- Richards, D. W., Pettengill, G. H., Roberts, J. A., Counselman, C. C., Rankin, J., Np 0532., *IAU Circular*, **2181** (1969). [44](#)
- Romani, R. W., Gamma-Ray Pulsars : Radiation Processes in the Outer Magnetosphere, *The Astrophysical Journal*, **470** : 469 (1996). [37](#)
- Ruderman, M., Neutron Starquakes and Pulsar Periods, *Nature*, **223** : 597–598 (1969). [51](#)
- Ruderman, M., Matter in Superstrong Magnetic Fields : The Surface of a Neutron Star, *Physical Review Letters*, **27** : 1306–1308 (1971). [25](#)
- Ruderman, M., Pulsars : Structure and Dynamics, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, **10** : 427 (1972). [51](#)
- Ruderman, M., Crust-breaking by neutron superfluids and the VELA pulsar glitches, *The Astrophysical Journal*, **203** : 213–222 (1976). [61](#), [67](#), [68](#), [70](#), [72](#)
- Ruderman, M., Neutron star crustal plate tectonics. I - Magnetic dipole evolution in millisecond pulsars and low-mass X-ray binaries, *The Astrophysical Journal*, **366** : 261–269 (1991a). [67](#)
- Ruderman, M., Neutron star crustal plate tectonics. II - Evolution of radio pulsar magnetic fields. III - Cracking, glitches, and gamma-ray bursts, *The Astrophysical Journal*, **382** : 576–586 (1991b). [67](#)
- Ruderman, M., Neutron Star Crustal Plate Tectonics. III. Cracking, Glitches, and Gamma-Ray Bursts, *The Astrophysical Journal*, **382** : 587 (1991c). [67](#)

BIBLIOGRAPHIE

- Ruderman, M., Zhu, T., Chen, K., Neutron Star Magnetic Field Evolution, Crust Movement, and Glitches, *The Astrophysical Journal*, **492** : 267–280 (1998). [65](#), [66](#), [74](#), [213](#)
- Salgado, M., Bonazzola, S., Gourgoulhon, E., Haensel, P., High precision rotating neutron star models 1 : Analysis of neutron star properties, *Astronomy and Astrophysics*, **291** : 155–170 (1994). [186](#)
- Samuelsson, L., Andersson, N., Neutron star asteroseismology. Axial crust oscillations in the Cowling approximation, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **374** : 256–268 (2007). [82](#)
- Sauls, J., Superfluidity in the interiors of neutron stars, Ögelman, H., van den Heuvel, E. P. J. (eds.), *NATO Advanced Science Institutes (ASI) Series C*, volume 262, page 457 (1989). [58](#), [60](#), [66](#), [74](#), [243](#)
- Schaudt, U. M., Pfister, H., The Boundary Value Problem for the Stationary and Axisymmetric Einstein Equations is Generically Solvable, *Physical Review Letters*, **77** : 3284–3287 (1996). [109](#)
- Sedrakian, A., Type-I superconductivity and neutron star precession, *Physical Review D*, **71(8)** : 083003 (2005). [65](#), [217](#)
- Sedrakian, A., Rapid cooling of Cassiopeia A as a phase transition in dense QCD, *Astronomy and Astrophysics*, **555** : L10 (2013). [80](#)
- Sedrakian, A., Rapid rotational crust-core relaxation in magnetars, *Astronomy and Astrophysics*, **587** : L2 (2016). [65](#)
- Sedrakian, A., Clark, J. W., *Nuclear Superconductivity in Compact Stars : BCS Theory and Beyond*, World Scientific Publishing Co, page 135 (2006). [58](#)
- Sedrakian, A., Wasserman, I., Cordes, J. M., Precession of Isolated Neutron Stars. I. Effects of Imperfect Pinning, *The Astrophysical Journal*, **524** : 341–360 (1999). [83](#), [207](#), [218](#)
- Sedrakian, A. D., Sedrakian, D. M., Superfluid Core Rotation in Pulsars. I. Vortex Cluster Dynamics, *The Astrophysical Journal*, **447** : 305 (1995). [74](#), [201](#), [204](#), [205](#)
- Sedrakian, A. D., Sedrakian, D. M., Cordes, J. M., Terzian, Y., Superfluid Core Rotation in Pulsars. II. Postjump Relaxations, *The Astrophysical Journal*, **447** : 324 (1995). [74](#), [75](#), [76](#), [213](#), [218](#)
- Sedrakian, D. M., The magnetic field of pulsars, *Astrophysics*, **18** : 253–256 (1982). [74](#)
- Sedrakian, D. M., Benacquista, M., Shahabassian, K. M., Sadoyan, A. A., Hairapetyan, M. V., Gravitational Radiation from Fluctuations in Rotating Neutron Stars, *Astrophysics*, **46** : 445–454 (2003). [192](#)

BIBLIOGRAPHIE

- Sedrakian, D. M., Sedrakian, A. D., Zharkov, G. F., Type I superconductivity of protons in neutron stars, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **290** : 203–207 (1997). [65](#)
- Sedrakian, D. M., Shakhbasian, K. M., On a mechanism of magnetic field generation in pulsars, *Astrofizika*, **16** : 727–736 (1980). [68](#)
- Sedrakian, D. M., Shakhbasyan, K. M., Movsisyan, A. G., Thermodynamics of superfluid solutions in the npe phase of a neutron star, *Astrophysics*, **19** : 175–182 (1983). [74](#)
- Sedrakian, D. M., Shakhbasyan, K. M., Movsisyan, A. G., Relaxation times in superfluid cores of neutron stars, *Astrophysics*, **22** : 84–88 (1985). [205](#)
- Seveso, S., Pizzochero, P. M., Grill, F., Haskell, B., Mesoscopic pinning forces in neutron star crusts, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **455** : 3952–3967 (2016). [70](#), [71](#)
- Seveso, S., Pizzochero, P. M., Haskell, B., The effect of realistic equations of state and general relativity on the 'snowplough' model for pulsar glitches, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **427** : 1089–1101 (2012). [70](#), [152](#)
- Shapiro, S. L., Differential Rotation in Neutron Stars : Magnetic Braking and Viscous Damping, *The Astrophysical Journal*, **544** : 397–408 (2000). [89](#)
- Shapiro, S. L., Teukolsky, S. A., *Black holes, white dwarfs, and neutron stars the physics of compact objects*, J. Wiley, New York Chichester, pages 1 vol. (xvii–645 p.) (1983). [14](#), [15](#), [34](#), [38](#), [42](#), [152](#)
- Shternin, P. S., Yakovlev, D. G., Haensel, P., Potekhin, A. Y., Neutron star cooling after deep crustal heating in the X-ray transient KS 1731-260, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **382** : L43–L47 (2007). [80](#), [81](#)
- Shternin, P. S., Yakovlev, D. G., Heinke, C. O., Ho, W. C. G., Patnaude, D. J., Cooling neutron star in the Cassiopeia A supernova remnant : evidence for superfluidity in the core, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **412** : L108–L112 (2011). [79](#), [80](#)
- Sidery, T., Alpar, M. A., The effect of quantized magnetic flux lines on the dynamics of superfluid neutron star cores, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **400** : 1859–1867 (2009). [68](#), [74](#), [195](#)
- Sidery, T., Passamonti, A., Andersson, N., The dynamics of pulsar glitches : contrasting phenomenology with numerical evolutions, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **405** : 1061–1074 (2010). [105](#), [152](#), [153](#), [155](#), [158](#), [160](#), [178](#), [192](#), [200](#), [216](#), [228](#), [229](#)
- Smits, R., Lorimer, D. R., Kramer, M., *et al.*, Pulsar science with the Five hundred metre Aperture Spherical Telescope, *Astronomy and Astrophysics*, **505** : 919–926 (2009). [217](#)

BIBLIOGRAPHIE

- Sotani, H., Nakazato, K., Iida, K., Oyamatsu, K., Probing the Equation of State of Nuclear Matter via Neutron Star Asteroseismology, *Physical Review Letters*, **108(20)** : 201101 (2012). [82](#)
- Sourie, A., Chamel, N., Novak, J., Oertel, M., Global numerical simulations of the rise of vortex-mediated pulsar glitches in full general relativity, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **464** : 4641–4657 (2017). [152](#), [216](#)
- Sourie, A., Oertel, M., Novak, J., Numerical models for stationary superfluid neutron stars in general relativity with realistic equations of state, *Physical Review D*, **93(8)** : 083004 (2016). [88](#), [215](#)
- Spitkovsky, A., Time-dependent Force-free Pulsar Magnetospheres : Axisymmetric and Oblique Rotators, *The Astrophysical Journal Letters*, **648** : L51–L54 (2006). [42](#)
- Srinivasan, G., Bhattacharya, D., Muslimov, A. G., Tsygan, A. J., A novel mechanism for the decay of neutron star magnetic fields, *Current Science*, **59** : 31–38 (1990). [74](#), [201](#)
- Staelin, D. H., Reifenstein, III, E. C., Pulsating Radio Sources near the Crab Nebula, *Science*, **162** : 1481–1483 (1968). [13](#), [35](#)
- Stairs, I. H., Lyne, A. G., Shemar, S. L., Evidence for free precession in a pulsar, *Nature*, **406** : 484–486 (2000). [75](#), [83](#), [218](#)
- Stappers, B. W., Hessels, J. W. T., Alexov, A., *et al.*, Observing pulsars and fast transients with LOFAR, *Astronomy and Astrophysics*, **530** : A80 (2011). [47](#), [217](#)
- Steiner, A. W., Lattimer, J. M., Brown, E. F., The Neutron Star Mass-Radius Relation and the Equation of State of Dense Matter, *The Astrophysical Journal Letters*, **765** : L5 (2013). [11](#)
- Steiner, A. W., Watts, A. L., Constraints on Neutron Star Crusts from Oscillations in Giant Flares, *Physical Review Letters*, **103(18)** : 181101 (2009). [82](#)
- Stopnitzky, E., Profumo, S., Gravitational Waves from Gamma-Ray Pulsar Glitches, *The Astrophysical Journal*, **787** : 114 (2014). [186](#), [192](#)
- Strobel, K., Schaab, C., Weigel, M. K., Properties of non-rotating and rapidly rotating protoneutron stars, *Astronomy and Astrophysics*, **350** : 497–512 (1999). [8](#)
- Strohmayer, T. E., Watts, A. L., Discovery of Fast X-Ray Oscillations during the 1998 Giant Flare from SGR 1900+14, *The Astrophysical Journal Letters*, **632** : L111–L114 (2005). [82](#)
- Strohmayer, T. E., Watts, A. L., The 2004 Hyperflare from SGR 1806-20 : Further Evidence for Global Torsional Vibrations, *The Astrophysical Journal*, **653** : 593–601 (2006). [82](#)
- Swesty, F. D., Thermodynamically consistent interpolation for equation of state tables, *Journal of Computational Physics*, **127(1)** : 118–127 (1996). [130](#)

- Tananbaum, H., Cassiopeia A, *IAU Circular*, **7246** (1999). [79](#)
- Taranto, G., Burgio, G. F., Schulze, H.-J., Cassiopeia A and direct Urca cooling, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **456** : 1451–1458 (2016). [61](#), [153](#)
- Thorsett, S. E., Chakrabarty, D., Neutron Star Mass Measurements. I. Radio Pulsars, *The Astrophysical Journal*, **512** : 288–299 (1999). [6](#)
- Tilley, D. R., Tilley, J., *Superfluidity and superconductivity*, Graduate student series in physics, IOP Publ., Bristol Philadelphia, 3e edition, pages 1 vol. (X–470 p.) (1990). [53](#), [55](#)
- Tinkham, M., *Introduction to superconductivity*, Dover books on physics, Dover, New York, 2nd edition edition, pages 1 vol. (XXI–454 p.) (2004). [53](#)
- Tisza, L., Transport phenomena in helium II, *Nature*, **141(3577)** : 913 (1938). [55](#)
- Tkachenko, V. K., On Vortex Lattices, *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, **22** : 1282 (1966). [59](#)
- Tolman, R. C., Static Solutions of Einstein’s Field Equations for Spheres of Fluid, *Physical Review*, **55** : 364–373 (1939). [5](#), [17](#)
- Trimble, V., The Distance to the Crab Nebula and NP 0532, *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, **85** : 579 (1973). [32](#)
- Tsakadze, D. S., Tsakadze, S. D., Simulation of pulsar behavior in a low-temperature laboratory /Review/, *Astrofizika*, **15** : 533–547 (1979). [68](#)
- Tsakadze, J. S., Tsakadze, S. J., Properties of slowly rotating helium II and the superfluidity of pulsars, *Journal of Low Temperature Physics*, **39** : 649–688 (1980). [68](#)
- Tsang, M. B., Stone, J. R., Camera, F., *et al.*, Constraints on the symmetry energy and neutron skins from experiments and theory, *Physical Review C*, **86(1)** : 015803 (2012). [22](#)
- Turlione, A., Aguilera, D. N., Pons, J. A., Quiescent thermal emission from neutron stars in low-mass X-ray binaries, *Astronomy and Astrophysics*, **577** : A5 (2015). [80](#), [81](#)
- Turolla, R., Zane, S., Watts, A. L., Magnetars : the physics behind observations. A review, *Reports on Progress in Physics*, **78(11)** : 116901 (2015). [39](#), [81](#)
- Typel, S., Oertel, M., Klaehn, T., CompOSE - CompStar Online Supernovae Equations of State, *ArXiv e-prints*, *arXiv :1307.5715* (2013). [22](#), [121](#)
- Typel, S., Wolter, H. H., Relativistic mean field calculations with density-dependent meson-nucleon coupling, *Nuclear Physics A*, **656** : 331–364 (1999). [115](#), [118](#), [119](#)
- Urban, M., Oertel, M., Collective modes in the superfluid inner crust of neutron stars, *International Journal of Modern Physics E*, **24** : 1541006 (2015). [124](#), [129](#), [215](#)

BIBLIOGRAPHIE

- van Delft, D., Kes, P., The discovery of superconductivity, *Physics Today*, **63(9)** : 38 (2010). [53](#)
- van Eysden, C. A., Melatos, A., Gravitational radiation from pulsar glitches, *Classical and Quantum Gravity*, **25(22)** : 225020 (2008). [192](#)
- van Eysden, C. A., Melatos, A., Pulsar glitch recovery and the superfluidity coefficients of bulk nuclear matter, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **409** : 1253–1268 (2010). [153](#)
- van Hoven, M., Levin, Y., Magnetar oscillations - I. Strongly coupled dynamics of the crust and the core, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **410** : 1036–1051 (2011). [82](#)
- van Hoven, M., Levin, Y., Magnetar oscillations - II. Spectral method, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **420** : 3035–3046 (2012). [82](#), [83](#)
- van Paradijs, J., Neutron Stars and Black Holes in X-Ray Binaries, volume 515 of *NATO Advanced Science Institutes (ASI) Series C*, page 279 (1998). [42](#)
- Verbiest, J. P. W., Bailes, M., van Straten, W., *et al.*, Precision Timing of PSR J0437-4715 : An Accurate Pulsar Distance, a High Pulsar Mass, and a Limit on the Variation of Newton’s Gravitational Constant, *The Astrophysical Journal*, **679** : 675–680 (2008). [11](#)
- Villain, L., Haensel, P., Non-equilibrium beta processes in superfluid neutron star cores, *Astronomy and Astrophysics*, **444** : 539–548 (2005). [154](#)
- Vollhardt, D., Wölfle, P., *The superfluid phases of helium 3*, Taylor & Francis, London New York, pages xix, 619 p. (1990). [56](#)
- Wang, J., Wang, N., Tong, H., Yuan, J., Recent glitches detected in the Crab pulsar, *Astrophysics and Space Science*, **340** : 307–315 (2012). [49](#)
- Warszawski, L., Melatos, A., Gross-Pitaevskii model of pulsar glitches, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **415** : 1611–1630 (2011). [151](#)
- Warszawski, L., Melatos, A., Gravitational-wave bursts and stochastic background from superfluid vortex avalanches during pulsar glitches, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **423** : 2058–2074 (2012). [152](#)
- Warszawski, L., Melatos, A., Knock-on processes in superfluid vortex avalanches and pulsar glitch statistics, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **428** : 1911–1926 (2013). [68](#), [151](#)
- Waterhouse, A. C., Degenaar, N., Wijnands, R., *et al.*, Constraining the properties of neutron star crusts with the transient low-mass X-ray binary Aql X-1, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **456** : 4001–4014 (2016). [80](#)

- Watts, A., Espinoza, C. M., Xu, R., *et al.*, Probing the neutron star interior and the Equation of State of cold dense matter with the SKA, *Advancing Astrophysics with the Square Kilometre Array (AASKA14)*, page 43 (2015). [47](#), [217](#)
- Watts, A. L., Reddy, S., Magnetar oscillations pose challenges for strange stars, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **379** : L63–L66 (2007). [82](#)
- Watts, A. L., Strohmayer, T. E., Detection with RHESSI of High-Frequency X-Ray Oscillations in the Tail of the 2004 Hyperflare from SGR 1806-20, *The Astrophysical Journal Letters*, **637** : L117–L120 (2006). [82](#)
- Weisberg, J. M., Nice, D. J., Taylor, J. H., Timing Measurements of the Relativistic Binary Pulsar PSR B1913+16, *The Astrophysical Journal*, **722** : 1030–1034 (2010). [7](#)
- Weltevrede, P., Johnston, S., Espinoza, C. M., The glitch-induced identity changes of PSR J1119-6127, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **411** : 1917–1934 (2011). [50](#)
- Wheeler, J. A., Superdense Stars, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, **4** : 393 (1966). [35](#)
- Williams, G. A., Packard, R. E., Photographs of Quantized Vortex Lines in Rotating He II, *Physical Review Letters*, **33** : 280–283 (1974). [59](#)
- Witten, E., Cosmic separation of phases, *Physical Review D*, **30** : 272–285 (1984). [28](#)
- Wolf, R. A., Some Effects of the Strong Interactions on the Properties of Neutron-Star Matter, *The Astrophysical Journal*, **145** : 834 (1966). [56](#)
- Wolszczan, A., Astronomy : Life beyond the pulsar death valley, *Nature*, **400** : 812–813 (1999). [44](#)
- Wong, T., Backer, D. C., Lyne, A. G., Observations of a Series of Six Recent Glitches in the Crab Pulsar, *The Astrophysical Journal*, **548** : 447–459 (2001). [31](#), [45](#), [46](#), [47](#), [48](#)
- Woods, A., Hallett, A. H., The viscosity of liquid helium II between 0.79 K and the lambda point, *Canadian Journal of Physics*, **41**(4) : 596–609 (1963). [55](#)
- Yakovlev, D. G., Gnedin, O. Y., Kaminker, A. D., Potekhin, A. Y., Theory of cooling neutron stars versus observations, Bassa, C., Wang, Z., Cumming, A., Kaspi, V. M. (eds.), *40 Years of Pulsars : Millisecond Pulsars, Magnetars and More*, volume 983 of *American Institute of Physics Conference Series*, pages 379–387 (2008). [78](#)
- Yakovlev, D. G., Kaminker, A. D., Gnedin, O. Y., Haensel, P., Neutrino emission from neutron stars, *Physics Reports*, **354** : 1–155 (2001). [101](#), [154](#)
- Yakovlev, D. G., Pethick, C. J., Neutron Star Cooling, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, **42** : 169–210 (2004). [15](#), [78](#)

BIBLIOGRAPHIE

- Yang, S.-H., Pi, C.-M., Zheng, X.-P., Rapid Cooling of the Neutron Star in Cassiopeia A and r-mode Damping in the Core, *The Astrophysical Journal Letters*, **735** : L29 (2011). [80](#)
- Yao, J. M., Manchester, R. N., Wang, N., A New Electron-density Model for Estimation of Pulsar and FRB Distances, *The Astrophysical Journal*, **835** : 29 (2017). [32](#)
- Yarmchuk, E. J., Gordon, M. J. V., Packard, R. E., Observation of Stationary Vortex Arrays in Rotating Superfluid Helium, *Physical Review Letters*, **43** : 214–217 (1979). [59](#)
- Yu, M., Manchester, R. N., Hobbs, G., *et al.*, Detection of 107 glitches in 36 southern pulsars, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **429** : 688–724 (2013). [48](#)
- Yuan, J. P., Manchester, R. N., Wang, N., *et al.*, A Very Large Glitch in PSR B2334+61, *The Astrophysical Journal Letters*, **719** : L111–L115 (2010). [73](#), [218](#)
- Zhou, X.-R., Schulze, H.-J., Zhao, E.-G., Pan, F., Draayer, J. P., Pairing gaps in neutron stars, *Physical Review C*, **70(4)** : 048802 (2004). [61](#)
- Zwierlein, M. W., Abo-Shaeer, J. R., Schirotzek, A., Schunck, C. H., Ketterle, W., Vortices and superfluidity in a strongly interacting Fermi gas, *Nature*, **435** : 1047–1051 (2005). [54](#), [59](#)

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

Résumé

Le ralentissement de certains pulsars s'accompagne de petites irrégularités, caractérisées par une soudaine accélération, suivie d'une lente phase de relaxation. Ces « glitches » sont couramment interprétés comme de brusques transferts de moment cinétique entre deux fluides présents dans l'étoile à neutrons, rendus possibles par un mouvement rapide de tourbillons superfluides à grande échelle. Incluant pour la première fois tous les effets de la relativité générale dans un modèle numérique de glitch, le travail présenté ici constitue une étape essentielle vers la compréhension de ce phénomène. Une première partie se concentre sur le calcul numérique de configurations stationnaires d'étoiles à neutrons formées par un superfluide de neutrons et un fluide de particules chargées tournant à des vitesses différentes. Ces calculs de structure, réalisés en relativité générale, reposent sur des équations d'état réalistes tenant compte des effets d'entraînement mutuel entre les fluides. Nous présentons ensuite un modèle numérique de glitch faisant appel à ces configurations. En particulier, nous étudions en détails le temps caractéristique associé à la phase de montée du glitch, au cours de laquelle la dynamique de l'étoile est gouvernée par une force de friction mutuelle liée à l'interaction des tourbillons superfluides avec les fluides environnants. La prise en compte de la relativité générale, qui conduit notamment à l'apparition d'un nouveau couplage entre les fluides par effet d'entraînement des référentiels inertiels, a un impact significatif sur la valeur de ce temps de montée. Nous établissons enfin l'expression de la force de friction mutuelle dans le cas où les tourbillons superfluides sont ancrés aux tubes de flux magnétiques présents dans le cœur des étoiles à neutrons. Une variation du nombre de tubes de flux ancrés à chaque tourbillon lors du glitch permet alors de rendre compte des échelles de temps très différentes associées aux phases de montée et de relaxation.

Mots Clés

Étoiles à neutrons, relativité générale, modèles numériques, glitches des pulsars, superfluidité, modèle à deux fluides, entraînement.

Abstract

The long-term braking of pulsars is sometimes accompanied with tiny irregularities, during which the neutron star suddenly spins up, before slowly relaxing. These “glitches” are commonly interpreted as angular momentum transfers occurring between two fluids present in the stellar interior, triggered by the rapid motion of superfluid vortex lines at large scales. Considering for the first time all general relativistic effects in a numerical model for glitches, this work is a major step towards the full understanding of this phenomenon. A first part is dedicated to the numerical calculation of stationary configurations of neutron stars composed of a neutron superfluid and a fluid made of charged particles, spinning with different rotation rates. These general relativistic calculations are based on realistic equations of state accounting for entrainment effects between the fluids. These configurations are then used to build a numerical model for pulsar glitches in full general relativity. In particular, we study in details the characteristic time scale associated with the spin-up stage, during which the stellar dynamics are governed by a mutual friction force arising from the interactions between the superfluid vortices and the surrounding fluids. Taking general relativity into account leads to an additional coupling between the fluids through frame-dragging effects and is shown to affect significantly the actual value of the spin-up time scale. Finally, the expression of the mutual friction force is derived assuming that the superfluid vortex lines are pinned to the magnetic flux tubes present in the core of neutron stars. The different time scales associated with the spin-up stage and the subsequent relaxation period may be explained by a variation of the number of flux tubes pinned to each vortex line during the glitch event.

Keywords

Neutron stars, general relativity, numerical models, pulsar glitches, superfluidity, two-fluid model, entrainment.