



**HAL**  
open science

# Ondes planes tordues et diffusion chaotique

Maxime Ingremeau

► **To cite this version:**

Maxime Ingremeau. Ondes planes tordues et diffusion chaotique. Physique mathématique [math-ph]. Université Paris Saclay (COMUE), 2016. Français. NNT : 2016SACLS477 . tel-01578126

**HAL Id: tel-01578126**

**<https://theses.hal.science/tel-01578126>**

Submitted on 28 Aug 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE DE DOCTORAT

de

L'UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

École doctorale de mathématiques Hadamard (EDMH, ED 574)

*Établissement d'inscription* : Université Paris-Sud

*Laboratoires d'accueil* : Institut de physique théorique de Saclay, URA 2306 CNRS  
Laboratoire de mathématiques d'Orsay, UMR 8628 CNRS

*Spécialité de doctorat* : Mathématiques fondamentales

**Maxime INGREMEAU**

Ondes planes tordues et diffusion chaotique

*Date de soutenance* : 1er Décembre 2016

*Lieu de soutenance* : Université Paris-Sud

*Après avis des rapporteurs* : FRÉDÉRIC NAUD (Laboratoire de Mathématiques d'Avignon)  
STEVEN MORRIS ZELDITCH (Northwestern University)

*Jury de soutenance* :

NICOLAS BURQ	(Laboratoire de Mathématiques d'Orsay) Président du jury
COLIN GUILLARMOU	(Laboratoire de Mathématiques d'Orsay) Invité
FRÉDÉRIC NAUD	(Laboratoire de Mathématiques d'Avignon) Rapporteur
STÉPHANE NONNENMACHER	(Laboratoire de Mathématiques d'Orsay) Directeur de thèse
VESSELIN PETKOV	(Institut de Mathématiques de Bordeaux) Examineur
MACIEJ ZWORSKI	(University of California, Berkeley) Examineur



# Remerciements

Les trois années et demie que je viens de passer n'auraient pas été possibles, ou du moins pas aussi agréables et passionnantes sans de nombreuses personnes que je tiens maintenant à remercier.

Tout d'abord Stéphane, qui a été pour moi un encadrant idéal. Il a su me proposer plusieurs projets très riches, tout en me laissant la liberté de les aborder par mon angle préféré, ou de m'intéresser à d'autres questions. Grâce à sa vaste culture mathématique et physique, il a toujours été capable de m'aiguiller. Il a souvent pris le temps de répondre à mes nombreuses questions, tant sur des points scientifiques qu'administratifs. J'ai beaucoup apprécié l'énorme quantité de temps qu'il a passé à relire les divers manuscrits que je lui ai remis, alors qu'il n'étaient parfois qu'à l'état d'ébauches truffées de fautes...

Je tiens ensuite à remercier Frédéric Naud, pour avoir accepté d'être rapporteur de ma thèse, mais aussi pour avoir toujours été à l'écoute et de très bon conseil au cours de ces trois années. C'est en particulier grâce à ses suggestions et à ses encouragements que j'ai entrepris d'étudier les ensembles nodaux des ondes planes tordues, ce qui s'est avéré être l'un des aspects de ma thèse qui m'a le plus captivé. Sa compréhension profonde de la théorie de la diffusion sur les variétés de courbure constante est pour moi une grande source d'inspiration pour l'étude des variétés de courbure variable. Je suis aussi grandement reconnaissant à Frédéric pour ses nombreuses remarques sur les premières versions du manuscrit, qui ont largement contribué à l'améliorer.

Je veux aussi remercier Steve Zelditch d'avoir accepté d'être rapporteur de ma thèse, et pour l'intérêt qu'il a porté à mes travaux aux cours de ces dernières années. Steve possède une imagination mathématique sans limite, et chaque conversation avec lui a été le point de départ d'innombrables questionnements et projets, dont beaucoup sont encore en germe.

Je souhaite remercier Nicolas Burq, Colin Guillarmou, Vesselin Petkov et Maciej Zworski non seulement car ils ont accepté de faire partie de mon jury de thèse, mais pour bien d'autres raisons.

Cette thèse n'aurait jamais vu le jour sans Nicolas Burq, qui a été un tuteur attentionné lors de mes années à l'ENS. Je me souviens avec émotion du jour où il m'a annoncé : "Ce que tu as toujours voulu faire, c'est du chaos quantique". J'ai alors écouté, d'abord dubitatif, puis passionné, ce qu'il entendait par là. Quelques heures plus tard, je prenais rendez-vous avec Stéphane...

Je souhaite également remercier Colin Guillarmou, qui a été très présent pour moi au cours de ces années, et toujours de bon conseil. Sa grande maîtrise de nombreuses subtilités géométriques m'a été d'une aide précieuse.

Maciej Zworski a su être toujours encourageant, et de m'a poussé à donner le meilleur de moi-même. Son beau livre sur l'analyse semi-classique a été mon livre de chevet lorsque j'ai commencé à découvrir le domaine, et continue de m'être très utile.

Vesselin Petkov m'a montré l'intérêt d'étudier les aspects les plus techniques de mon domaine de recherche, ce que je ne manquerai pas de faire dans les années à venir.

Écrire une thèse de mathématiques est une chose, souhaiter devenir mathématicien en est une autre. Ces années m'ont convaincu que si le métier de mathématicien a un charme inégalable, c'est moins pour les heures de recherches solitaires que pour les discussions passionnantes, enrichissantes et amicales que l'on peut avoir avec les autres mathématiciens. Ainsi, je souhaite remercier, en oubliant sans doute beaucoup de gens, les mathématiciens avec lesquels j'ai beaucoup échangé et qui m'ont beaucoup appris au cours de ces années : Nalini, Yannick, Yaiza, Yves, Viet, Semyon, Fred (futur prix Nobel d'harmonica ?), Jesse, Fabricio, Gabriel, Hans, Bertrand, Henrik, Martin, André, Tobias, Igor...

Si j'ai été entouré de mathématiciens talentueux et sympathiques au cours de ces années, j'ai été grandement aidé par un personnel administratif non moins talentueux et sympathique : Carole, Catherine, Estelle, Florence, Laure, Laurence, Valérie, merci pour votre aide précieuse !

Merci aussi à l'équipe du Centre de Vulgarisation de la Connaissance (CVC) pour leur chaleureux accueil pendant ma mission doctorale lors de ma seconde année de thèse.

Au cours de la dernière année de ma thèse, j'ai eu le plaisir de partager un bureau à Orsay avec Céline, Jeanne, Julien et Gabriele. Quel changement après deux ans tout seul au CEA ! Cette année n'aurait pas été aussi magique sans l'infinie bienveillance de Céline, l'enthousiasme à tout épreuve de Jeanne, l'humour de Julien, et l'inimitable accent de Gabriele quand il me disait : "Maintenant, on arrête de travailler et on joue aux échecs ?" Je mesure la chance que j'ai eue de les avoir pour co-bureaux !

Il me faut remercier l'ensemble des doctorants en mathématiques d'Orsay pour les bons moments passés ensemble, pour le soutien dans les moments difficiles, et pour les conseils face au logiciel ADUM.

Je souhaite aussi à remercier toute ma famille et ma belle-famille, qui m'ont accompagné au cours de ces trois années riches en émotions.

Un grand merci à mes amis pour m'avoir parfois fait oublier que j'avais une thèse à préparer, et parfois m'avoir rappelé que j'avais une thèse à écrire ! Jih-Huang, Julia, Aurélien, Diego, Léa<sup>1</sup>, Cyril, Charles, Cécile, Le Vieux Charles, Jérôme, Lai, Robin, Emilia, Thibault, Raphael et bien d'autres... votre présence a beaucoup compté pour moi ces dernières années.

---

1. Un remerciement tout particulier pour m'avoir appris à tricoter, ce qui m'a été très utile pendant ma thèse !

Enfin, je tiens à remercier mon épouse Clara, qui a été pour moi une source de joie intarissable, et un grand soutien moral pendant l'écriture de cette thèse.



# Introduction

*Qu'est-ce qu'une âme ? Il est facile de la définir négativement : c'est très exactement cela en nous qui se rétracte quand nous entendons parler de séries algébriques. Mais positivement ? Il semble que cela réussisse à échapper à tous les efforts faits pour le saisir.*

Robert Musil, L'Homme sans qualités, tome 1

## 0.1 Le laplacien sur une variété compacte

Soit  $(X, g)$  une variété riemannienne lisse de dimension  $d$ , compacte, connexe et sans bord. On peut considérer l'opérateur de Laplace-Beltrami  $\Delta_g$  agissant sur  $C^\infty(X)$ , en prenant une fois pour toute la convention que  $-\Delta_g$  est un opérateur positif. Il est bien connu qu'il existe une suite croissante de réels positifs  $\lambda_n \rightarrow +\infty$  et une suite de fonctions  $\phi_n \in C^\infty(X)$  formant une base orthonormée de  $L^2(X)$  telles que  $-\Delta_g \phi_n = \lambda_n \phi_n$ .

Ces valeurs propres  $\lambda_n$  et ces fonctions propres  $\phi_n$  ont un sens physique important. Par exemple, en mécanique quantique, les  $\lambda_n$  correspondent aux valeurs que l'énergie d'une particule confinée à la variété  $X$  peut prendre, et les  $\phi_n$  représentent les états quantiques correspondant à ces énergies.

Il existe très peu d'exemples de variétés riemanniennes pour lesquelles on sache calculer explicitement les  $\lambda_n$  et les  $\phi_n$  : ce sont des variétés possédant de nombreuses symétries, comme la sphère ou le tore. Pour une variété  $(X, g)$  quelconque, le mieux que l'on sache faire est donc d'étudier les propriétés qualitatives des valeurs propres et des fonctions propres. Parmi ces propriétés qualitatives, celles qui nous intéresseront le plus seront celles concernant le comportement *semi-classique* des fonctions propres et des valeurs propres, c'est-à-dire les propriétés valables dans la limite où  $n \rightarrow \infty$ .

Certaines de ces propriétés semi-classiques dépendent de la géométrie de  $(X, g)$  de façon assez grossière, et ce sont celles que nous allons présenter dans un premier temps. En revanche, d'autres propriétés semi-classiques des  $\lambda_n$  et  $\phi_n$  ne sont vraies que si le flot géodésique sur  $(X, g)$  est *chaotique* (nous préciserons le sens de ce mot par la suite) : on parle alors de propriétés de *chaos quantique*.



### 0.1.1 Propriétés générales des $\lambda_n$ et $\phi_n$

**Loi de Weyl** Historiquement, la première propriété semi-classique est la *loi de Weyl* concernant les valeurs propres, qui affirme que

$$\#\{n; \lambda_n \leq \lambda\} \sim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\alpha(d)}{(2\pi)^d} \text{Vol}(X) \lambda^{d/2},$$

où  $\alpha(d)$  est le volume de la boule unité dans  $\mathbb{R}^d$ . Une preuve de cette formule peut être trouvée dans [Zwo12, Chapitre 14].

Le comptage des valeurs propres de  $-\Delta_g$  ne dépend donc, du moins au premier ordre en  $\lambda$ , de  $(X, g)$  que de façon très grossière : seuls la dimension et le volume de  $(X, g)$  interviennent dans cette formule.

**Ensembles nodaux** Les propriétés des fonctions propres  $\phi_n$  les plus faciles à observer expérimentalement<sup>2</sup> sont liées aux *ensembles nodaux*, définis par :

$$\mathcal{N}_n := \{x \in X; \phi_n(x) = 0\}.$$

Ces ensembles nodaux ressemblent fort à des variétés de dimension  $d - 1$  plongées dans  $X$ . En fait,  $\mathcal{N}_n$  peut s'écrire comme la réunion disjointe de la variété plongée

$$\{x \in X \text{ tels que } \phi_n(x) = 0 \text{ et } \nabla \phi_n(x) \neq 0\},$$

et de l'ensemble  $\{x \in X \text{ tels que } \phi_n(x) = 0 \text{ et } \nabla \phi_n(x) = 0\}$  dont on peut montrer ([HS89]) qu'il est  $(d - 2)$ -rectifiable. En particulier, la mesure de Hausdorff  $(d - 1)$ -dimensionnelle de  $\mathcal{N}_n$ , notée  $\text{Haus}_{d-1}(\mathcal{N}_n)$  est finie. La façon dont cette mesure de Hausdorff varie avec  $\lambda_n$  semble dictée par la conjecture suivante ([Yau93]), due à Yau :

**Conjecture 0.1** (Yau). *Pour toute variété  $(X, g)$ , il existe des constantes  $C_1, C_2 > 0$  telles que*

$$C_1 \sqrt{\lambda_n} \leq \text{Haus}_{d-1}(\mathcal{N}_n) \leq C_2 \sqrt{\lambda_n}.$$

Notons que cette conjecture ne nous dit rien sur la valeur des constantes  $C_1$  et  $C_2$ . Par conséquent, cet énoncé n'est intéressant que dans la limite où  $n \rightarrow \infty$ .

Dans le cas où  $(X, g)$  est une variété analytique, cette conjecture a été montrée par Donnelly et Fefferman dans [DF88]. Dans le cas où  $(X, g)$  est une surface (pas nécessairement analytique), l'encadrement suivant est connu, où la borne inférieure est due à Brüning ([Brü78]), et une autre preuve a été donnée par Dong ([Don92]), tandis que la borne

---

2. Du moins dans le cas où  $(X, g)$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  (qui aura alors un bord, mais c'est sans importance pour notre propos). Nous suggérons au lecteur d'écrire « figures de Chladni » sur youtube pour voir de telles expériences. Évidemment, les expériences réalisées sont de plus en plus éloignées de la modélisation mathématique quand  $\lambda_n$  devient grand...

### 0.1 Le laplacien sur une variété compacte

supérieure est due à Donnelly et Fefferman ([DF90]) pour  $\delta = 0$ , puis a été améliorée récemment par Logunov et Malinnikova dans [LM16] pour un  $\delta \in ]0; 1/4[$  :

$$C_1 \sqrt{\lambda_n} \leq \text{Haus}_{d-1}(\mathcal{N}_n) \leq C_2 \lambda_n^{3/4-\delta}.$$

La borne inférieure correspond donc bien à la conjecture de Yau, mais la borne supérieure est un peu moins bonne.

Pour les variétés non-analytiques de dimension supérieure ou égale à 3, les résultats connus sont beaucoup moins bons. Ainsi, pendant longtemps, la meilleure borne supérieure connue était celle due à Hardt et Simon ([HS89]), qui nous dit qu'il existe des constantes  $c_1, c_2 > 0$  telles que :

$$\text{Haus}_{d-1}(\mathcal{N}_n) \leq c_1 \lambda_n^{c_2 \sqrt{\lambda_n}}.$$

Récemment, cette borne a été améliorée par Logunov dans [Log16a] en une borne polynômiale en  $\lambda_n$ .

Quant à la borne inférieure, l'une des meilleures estimations connues jusqu'à récemment affirmait qu'il existe  $c > 0$  tel que

$$\text{Haus}_{d-1}(\mathcal{N}_n) \geq c \lambda_n^{\frac{d-3}{4}}. \quad (1)$$

Cette borne inférieure est due à Colding et Minicozzi ([CM11]), et a été prouvée ensuite différemment par Hezari et Zelditch dans [HS12] et par Sogge et Zelditch dans [SZ11a].

Récemment, la borne inférieure dans la conjecture de Yau a été prouvée par Logunov dans [Log16b].

**Domaines nodaux** Plutôt que de considérer les ensembles nodaux dans  $X$ , on peut considérer leur complémentaire. En particulier, on peut s'intéresser à son nombre de composantes connexes :

$$\sharp_n := \text{nombre de composantes connexes de } X \setminus \mathcal{N}_n.$$

Un théorème classique dû à Courant ([CH67, Chapitre VI, §6]) affirme que  $\sharp_n \leq n$ , et donc en particulier, par la loi de Weyl, que

$$\sharp_n = O(\lambda_n^{d/2}). \quad (2)$$

Cette borne supérieure n'est en général pas optimale : on sait depuis le travail de Stern ([Ste25]) qu'il est possible de trouver des fonctions propres du laplacien sur le tore de valeur propre arbitrairement élevée n'ayant que deux domaines nodaux (voir aussi [Lew77], [EJN07] et [HL13, Théorème 2.1.4] pour des résultats analogues concernant les harmoniques sphériques). Néanmoins, il est conjecturé que génériquement, la borne de Courant doit être optimale.

Par exemple, sur le tore de dimension 2, Buckley et Wigman ([BW15]), en utilisant des idées de Bourgain ([Bou14]) ont été capables de construire de nombreuses familles  $(\phi_j)$  de fonctions propres de  $-\Delta$  vérifiant  $\mathcal{N}_j \geq c\lambda_j$  pour un  $c > 0$ , saturant ainsi la borne de Courant. Pour prouver ce résultat, les auteurs ont été capables de relier le comportement local des ensembles nodaux de polynômes trigonométriques aux domaines nodaux d'un champ aléatoire gaussien isoénergétique, et d'utiliser les outils puissants développés par Nazarov et Sodin dans ce cadre ([NS09], [NS15]).

Le tore n'est sans doute pas la seule variété où les domaines nodaux des fonctions propres se comportent comme celles d'un champ libre gaussien isoénergétique : en effet, il est conjecturé depuis les travaux de Berry [Ber77] que les fonctions propres « génériques » de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur des variétés compactes de courbure négative se comportent selon le « modèle des ondes aléatoires ». <sup>3</sup>

**Normes  $L^p$**  Par définition, les fonctions  $\phi_n$  sont normalisées dans  $L^2(X)$ . Comme ces fonctions sont dans  $C^\infty(X)$ , elles sont dans tous les  $L^p(X)$ , et on peut étudier comment leur norme  $L^p$  dépend de  $\lambda_n$ . La borne suivante est due à Sogge ([Sog88]) :

$$\|\phi_n\|_{L^p} \leq C_p \lambda_n^{\delta(p)}, \quad (3)$$

où

$$\begin{aligned} \delta(p) &= d\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2p}\right) - \frac{1}{4} \quad \text{si } \frac{2(d+1)}{d-1} \leq p \leq \infty \\ \delta(p) &= \frac{d-1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2p}\right) \quad \text{si } 2 \leq p \leq \frac{2(d+1)}{d-1}. \end{aligned}$$

Ces estimées sont optimales dans le cas où  $(X, g)$  est la sphère  $\mathbb{S}^2$ , pour une base de fonctions propres bien choisie (cf. [Zel12, §3.2]). Il n'est donc en général pas vrai que  $\|\phi_n\|_{L^\infty} = O(1)$ . En fait, Toth et Zelditch ont montré dans [TZ02] que si une variété  $(X, g)$  a un flot géodésique intégrable, et qu'il y existe une base de fonctions propres du laplacien vérifiant  $\|\phi_n\|_{L^\infty} = O(1)$ , alors  $(X, g)$  est de courbure sectionnelle nulle.

### 0.1.2 Chaos Quantique

Les propriétés que nous avons décrites dans la section précédente dépendent peu des propriétés de  $(X, g)$ . En particulier, elles ne dépendent pas des propriétés de la dynamique classique, c'est-à-dire du flot géodésique sur  $(X, g)$ .

Toutefois, l'analyse semi-classique nous dit qu'à haute fréquence, la propagation d'un paquet d'onde par l'équation de Schrödinger ou l'équation des ondes ressemble à l'évolution par la dynamique classique (ici, au flot géodésique). C'est ce qui explique que l'optique géométrique soit une approximation valable des équations de Maxwell pour la propagation

---

<sup>3</sup>. Les guillemets sont là pour indiquer que nous ne chercherons pas à donner une formulation rigoureuse de cette conjecture

## 0.1 Le laplacien sur une variété compacte

de la lumière à haute fréquence, ou encore que les objets nous entourant nous apparaissent gouvernés par la simple loi de Newton, et non par la mécanique quantique.

Il est donc naturel de penser que certaines des propriétés semi-classiques des fonctions propres et des valeurs propres sont liées aux propriétés du flot géodésique sur  $(X, g)$ . Nous allons donner des exemples de telles propriétés, dans le cas où le flot géodésique est chaotique.

**Dynamique classique** Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , nous noterons  $\Phi^t : T^*X \rightarrow T^*X$  le flot géodésique induit par la métrique  $g$ . Lorsqu'aucune confusion n'est possible, nous noterons par la même lettre sa restriction  $\Phi^t : S^*X \rightarrow S^*X$  à la couche d'énergie 1,  $S^*X = \{(x, \xi) \in T^*X; \|\xi\|_g = 1\}$ .

On notera  $\text{Leb}$  la mesure de Lebesgue induite par  $g$  sur  $X$ , et  $\lambda$  la mesure de Liouville sur  $S^*X$ . Comme  $X$  est compacte, on a  $\text{Leb}(X) < \infty$  et  $\lambda(S^*X) < \infty$ .

**Définition.** On dit que le flot géodésique  $\Phi^t : S^*X \rightarrow S^*X$  est ergodique si pour tout ensemble mesurable  $A \subset S^*X$  tel que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\Phi^t(A) = A$ , on a  $\lambda(A) = 0$  ou  $\lambda(A) = \lambda(S^*X)$ .

La propriété d'ergodicité peut être vue comme une propriété de chaos très faible. Être un flot d'Anosov est une propriété chaotique beaucoup plus forte.

**Définition 0.2.** Soit  $\Lambda \subset S^*X$  un ensemble compact et invariant par  $(\Phi^t)$ . On dit que  $\Lambda$  est un ensemble hyperbolique pour  $\Phi^t$  si pour tout  $\rho \in \Lambda$ , il existe une décomposition de l'espace tangent  $T_\rho S^*X = E_\rho^- \oplus E_\rho^+ \oplus E_\rho^0$ , avec  $E_\rho^-$  et  $E_\rho^+$  de dimension  $d - 1$ , et  $E_\rho^0$  de dimension 1 coïncidant avec la direction du flot, telle que

- (i)  $\Phi^t(E_\rho^\pm) = E_{\Phi^t(\rho)}^\pm$
- (ii) Il existe  $C > 0$  et  $\mu > 0$  tels que pour tout  $\rho \in \Lambda$  :

$$\begin{aligned} \|d\Phi^t v\| &\leq C e^{-\mu t} \|v\| \quad \text{pour tous } v \in E_\rho^- \quad \text{et } t \geq 0 \\ \|d\Phi^t v\| &\geq C e^{\mu t} \|v\| \quad \text{pour tous } v \in E_\rho^+ \quad \text{et } t \leq 0. \end{aligned}$$

**Définition.** On dit que  $\Phi^t : S^*X \rightarrow S^*X$  est un flot d'Anosov si  $S^*X$  est un ensemble hyperbolique.

Un flot géodésique d'Anosov est automatiquement ergodique (cf. [Liv04]). Un exemple important de flots géodésiques d'Anosov est le suivant : si  $(X, g)$  est de courbure sectionnelle strictement négative, alors  $\Phi^t$  est un flot d'Anosov. Une preuve de ce fait peut être trouvée dans [KH95, §17] ou dans [Ebe01].

**Ergodicité quantique** Le théorème suivant, dit d'ergodicité quantique, classiquement attribué à Shnirelman, Zelditch et Colin de Verdière ([Shn74],[CDV85],[Zel87]), fait un lien entre l'ergodicité de  $(\Phi^t)$  et les propriétés des fonctions propres à haute fréquence. Nous

rappellerons la définition et les propriétés de la quantification de Weyl  $Op$  dans l'appendice A.1.

Ce qui est remarquable dans ce théorème, c'est que bien que nous n'ayons aucune formule explicite pour les fonctions propres du laplacien, on peut connaître explicitement leur limite semi-classique, du moins le long d'une sous-suite de densité un.

**Théorème** (Ergodicité quantique). *Soit  $(X, g)$  telle que le flot géodésique  $\Phi^t : S^*X \rightarrow S^*X$  soit ergodique. Alors il existe une suite  $n_k$  de densité 1<sup>4</sup>, telle que pour tout  $f \in C(X)$ , on ait*

$$\int_X f |\phi_{n_k}|^2 d\text{Leb} \rightarrow \frac{1}{\text{Leb}(X)} \int f d\text{Leb}.$$

Plus généralement, on a pour tout  $a \in C_c^\infty(T^*X)$  :

$$\langle Op_{\lambda_{n_k}^{-1/2}}(a)\phi_{n_k}, \phi_{n_k} \rangle \rightarrow \frac{1}{\lambda(S^*X)} \int_{S^*X} a d\lambda.$$

**Unique ergodicité quantique** Il est naturel de se demander si, dans l'énoncé théorème d'ergodicité quantique, il y a vraiment besoin de ne considérer qu'une sous-suite de densité 1, ou bien si on peut considérer toute la suite des fonctions propres. Autrement dit, on peut se demander s'il existe des sous-suites exceptionnelles  $n_j$ , nécessairement de densité zéro, telles que l'on ait

$$\langle Op_{\lambda_{n_j}^{-1/2}}(a)\phi_{n_j}, \phi_{n_j} \rangle \rightarrow \frac{1}{\mu(S^*X)} \int_{S^*X} a d\mu,$$

avec  $\mu$  une mesure sur  $S^*X$  différente de la mesure de Liouville.

Si la seule hypothèse faite sur le flot  $(\Phi^t)$  est qu'il est ergodique, alors de telles sous-suite exceptionnelles peuvent exister. Par exemple, Hassell et Hillairet ont réussi à en construire dans le cas d'un domaine en forme de stade ([HH10]).

Toutefois, si  $(X, g)$  est de courbure sectionnelle strictement négative, alors il est conjecturé qu'il n'existe pas de sous-suite exceptionnelle de fonctions propres. C'est le contenu de la conjecture d'unique ergodicité quantique, formalisée par Rudnick et Sarnak ([RS94]) :

**Conjecture 0.3.** *Si  $(X, g)$  est de courbure sectionnelle strictement négative, alors on a*

$$\langle Op_{\lambda_n^{-2}}(a)\phi_n, \phi_n \rangle \rightarrow \frac{1}{\lambda(S^*X)} \int_{S^*X} a d\lambda.$$

Pour l'instant, les seuls cas où cette conjecture est connue sont en courbure constante, dans des cas particuliers de variétés hyperboliques arithmétiques ([Lin06],[Sou10]). Dans le cas beaucoup plus général de variétés  $(X, g)$  telles que le flot  $(\Phi^t)$  est Anosov, les résultats les plus proches de la conjecture d'unique ergodicité quantique sont sans doute ceux de ([AN07], [Ana08] et [Riv10] en dimension 2).

---

4. C'est-à-dire telle que  $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\#\{k: n_k \leq m\}}{m} = 1$

## 0.1 Le laplacien sur une variété compacte

**Ergodicité quantique à petite échelle** Une autre direction dans laquelle le théorème d'ergodicité quantique pourrait être amélioré est la suivante : dans quelle mesure peut-on prendre des symboles  $a$  dépendants de  $n$  ? Un exemple typique est le suivant : si  $r_n$  est une suite de réels positifs tendant vers 0 quand  $n$  augmente, et si  $x \in X$ , on note  $B(x, r_n)$  la boule géodésique de centre  $x$  et de rayon  $r_n$ . A-t-on alors, au moins le long d'une sous-suite de densité 1

$$\int_{B(x, r_n)} |\phi_n|^2 d\text{Leb} \sim_{n \rightarrow \infty} \text{Vol}(B(x, r_n)) ? \quad (4)$$

Pour qu'un tel résultat puisse être vrai, il est nécessaire que  $r_n \gg \lambda_n^{-1/2}$ . En effet,  $\lambda_n^{-1/2}$  correspond à la longueur typique d'oscillation de la fonction  $\phi_n$ , et on ne peut pas espérer avoir un phénomène d'équidistribution si on ne se place pas à une échelle beaucoup plus grande. On peut néanmoins formuler la conjecture suivante :

**Conjecture 0.4.** *Soit  $(X, g)$  une variété compacte de courbure sectionnelle strictement négative. Alors pour tout  $\alpha < 1/2$  et tout  $x \in X$ , on a*

$$\int_{B(x, \lambda_n^{-\alpha})} |\phi_n|^2 d\text{Leb} \sim_{n \rightarrow \infty} \text{Vol}(B(x, \lambda_n^{-\alpha})) .$$

Sous cette forme, cette conjecture semble largement hors de portée. Toutefois, Hezari et Rivière, ainsi que Han ([HR14], [Han15]) ont réussi à montrer que sur une variété de courbure sectionnelle strictement négative, le long d'une sous-suite de densité 1, (4) est vrai pour  $r_n \geq (\ln(\lambda_n))^{-\beta}$ , où  $\beta > 0$  est une constante explicite. C'est donc une amélioration par rapport à ce que donnerait directement le théorème d'ergodicité quantique.

**Normes  $L^p$  en courbure négative** Si  $(X, g)$  est une variété de courbure négative, certains des résultats de la section précédente peuvent être améliorés. Par exemple, Hassell et Tacy ainsi que Hezari et Rivière ont montré ([HT15], [HR14] voir aussi [Sog16]) que la borne de Sogge (3) peut être améliorée d'un facteur logarithmique en  $\lambda_n$ . Sur les surfaces arithmétiques, un facteur polynomial peut être gagné, comme montré par Iwaniec et Sarnak dans [IS95].

On peut espérer que sur les variétés de courbure négative, les bornes sur les normes  $L^p$  des  $\phi_n$  peuvent être améliorées davantage. Par exemple, Sarnak a fait la conjecture suivante ([Sar95]) :

**Conjecture 0.5.** *Soit  $(X, g)$  une surface hyperbolique<sup>5</sup>. Alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $C_\varepsilon > 0$  tel que*

$$\|\phi_n\|_{L^\infty} \leq C_\varepsilon \lambda_n^\varepsilon.$$

---

5. C'est-à-dire une surface de courbure constante -1

## 0.2 Séries d'Eisenstein et ondes planes tordues

Ce que l'on peut retenir de la section précédente, c'est que :

- Les propriétés des fonctions propres sont souvent mieux comprises dans les cas où on a des formules explicites pour les  $(\phi_n)$ , comme la sphère ou le tore.
- Les propriétés des fonctions propres sont par certains aspects plus intéressantes sur les variétés de courbure négative.

Malheureusement, il n'existe pas de variétés compactes de courbure strictement négative sur lesquelles on connaisse une formule explicite pour les fonctions propres du laplacien. La solution à ce dilemme ? **Enlever l'hypothèse de compacité!** Pour donner un exemple, nous allons considérer dans cette section le cas des surfaces hyperboliques.

### 0.2.1 Séries d'Eisenstein

**Surfaces hyperboliques** Soit  $\mathbb{H}^2$  le plan hyperbolique, que nous verrons dans le modèle du disque de Poincaré :  $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ , muni de la métrique

$$ds^2 = \frac{4dzd\bar{z}}{(1 - |z|^2)^2}.$$

$\mathbb{H}^2$  est alors une surface de courbure constante négative  $-1$ , et son groupe d'isométries préservant l'orientation peut être identifié à  $PSL_2(\mathbb{R})$ .

Un théorème classique dû à Hopf affirme que toute surface de courbure constante  $-1$  est isométrique à  $\mathbb{H}^2 \setminus \Gamma$ , où  $\Gamma$  est un sous-groupe discret de  $PSL_2(\mathbb{R})$  agissant sans point fixe. (Nous renvoyons le lecteur à [Kat92] ou à [Bor07, chapitre 2] pour une introduction à la géométrie hyperbolique.)

Les surfaces hyperbolique qui nous intéresseront ici sont les *surfaces de Schottky*, c'est-à-dire les surfaces hyperboliques  $X$  non compactes dont tous les bouts à l'infini sont de volume infini. Un exemple d'une telle surface est proposé en figure 1. Si  $X = \mathbb{H}^2 \setminus \Gamma$  est une surface de Schottky, on dit que  $\Gamma$  est convexe cocompact.

Si  $\Gamma$  est un tel groupe, on définit son ensemble limite par

$$\Lambda(\Gamma) := \{z \in \partial\overline{\mathbb{H}^2}; \exists(\gamma_n) \in (\Gamma)^{\mathbb{N}} \text{ tel que } \gamma_n \cdot 0 \longrightarrow z\}.$$

Ici,  $\partial\overline{\mathbb{H}^2}$  est identifiée au cercle de rayon 1 centré en l'origine, et la topologie est celle de la métrique euclidienne sur  $B(0, 1)$ .

On note alors  $\delta(\Gamma) \in [0, 2]$  la dimension de Hausdorff de  $\Lambda(\Gamma)$  :

$$\delta(\Gamma) := \text{Haus}_{\dim}(\Lambda(\Gamma)). \tag{5}$$

**Séries d'Eisenstein** Pour tout  $\xi \in \partial\overline{\mathbb{H}^2} \setminus \Lambda(\Gamma)$ , et pour tout  $s \in \mathbb{C}$  tel que  $\Re s > \delta(\Gamma)$  et  $x \in \mathbb{H}^2$ , on pose :

$$E_X(x; \xi, s) := \sum_{\gamma \in \Gamma} \left( \frac{1 - |\gamma x|^2}{4|\gamma x - \xi|^2} \right)^s.$$

## 0.2 Séries d'Eisenstein et ondes planes tordues

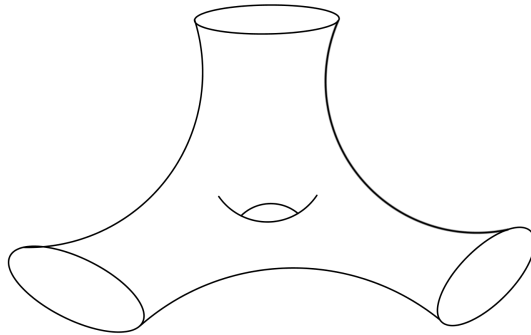


FIGURE 1 – Un exemple de surface de Schottky.

Le fait que  $\Re s > \delta(\Gamma)$  nous assure que cette série converge absolument (voir [GN14] ou [JN15])). De plus, pour tous  $x \in \mathbb{H}^2$ , et  $\gamma \in \Gamma$ , on a  $E_X(\gamma x; \xi, s) = E_X(x; \xi, s)$ . Par conséquent,  $E_X(\cdot; \xi, s)$  définit une fonction sur  $X$ . De plus, on peut montrer que l'on a

$$-\Delta_{\mathbb{H}} E_X(\cdot; \xi, s) = s(1-s)E_X(\cdot; \xi, s).$$

Les  $E_X(\cdot; \xi, s)$  sont donc des « fonctions propres généralisées du laplacien ». Généralisées, car elles ne sont jamais dans  $L^2(X)$ . Les séries d'Eisenstein qui nous intéresseront le plus sont, lorsque  $\delta(\Gamma) < 1/2$ , celles correspondant à des valeurs propres réelles positives, c'est-à-dire pour  $s \in \frac{1}{2} + i\mathbb{R}$ . Nous écrirons donc  $s = \frac{1}{2} + \frac{i}{h}$ .

Les séries d'Eisenstein sont donc un exemple de famille de fonctions propres généralisées du laplacien sur une variété hyperbolique convexe cocompacte, pour lesquelles on a une formule explicite. En un sens, ce sont des fonctions propres généralisées très particulières. Cependant, les séries d'Eisenstein permettent d'avoir une résolution spectrale explicite du Laplacien (voir [Bor07, Chapitre 7]) : ce n'est donc pas un exemple anodin.

### 0.2.2 Propriétés semi-classiques des séries d'Eisenstein

**Bornes uniformes** Comme la série définissant  $E_X(\cdot; \xi, 1/2 + i/h)$  est absolument convergente pour tout  $h > 0$ , on peut montrer facilement que pour tout compact  $K \subset X$ , on a pour tout  $h > 0$  :

$$\|E_X(\cdot; \xi, 1/2 + i/h)\|_{L^\infty(K)} \leq C_K,$$

où  $C_K$  est indépendant de  $h$ . Ainsi, en se restreignant à un compact, toutes les normes  $L^p$  des séries d'Eisenstein sont bornées indépendamment du paramètre spectral  $h$ . Ceci

---

6.  $h$  joue ici à peu près le même rôle que  $\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}$  dans la section précédente. La limite semi-classique correspond donc ici (et dans la suite de ce manuscrit) au régime  $h \rightarrow 0$ .



contraste avec les bornes (3), (ou même avec la conjecture de Sarnak) dans le cas des variétés compactes.

**Limite semi-classique** Dans [GN14], Guillarmou et Naud ont réussi à montrer un résultat analogue à l'unique ergodicité quantique pour les séries d'Eisenstein. Ils montrent que si  $X = \mathbb{H}^2 \setminus \Gamma$  avec  $\delta(\Gamma) < 1/2$  et si  $\xi \in \partial\overline{\mathbb{H}^2}$ , alors pour tout  $A \in \Psi^{comp}(X)$  à support compact, on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \langle AE_X(\cdot; \xi, 1/2 + i/h), E_X(\cdot; \xi, 1/2 + i/h) \rangle = \int_{S^*X} \sigma_h(a) d\nu_\xi.$$

Ici, il n'y a pas besoin d'extraire de sous-suite : toute la famille des séries d'Eisenstein converge vers la même mesure. En revanche, la mesure  $\nu_\xi$  n'est pas la mesure de Liouville : il s'agit d'une mesure supportée sur un ensemble fractal. Nous rappellerons les propriétés de cette mesure dans la section 1.2.2.

Dans [Mun16], Munroe a étudié le comportement semi-classique de certains des moments d'ordres supérieurs des séries d'Eisenstein, c'est-à-dire la valeur pour certains  $p, k$  de

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_X a(x) (E_X(x; \xi, 1/2 + i/h))^k \overline{(E_X(x; \xi, 1/2 + i/h))^{p-k}} dx.$$

**Lignes nodales** Les séries d'Eisenstein étant à valeurs complexes, il n'y a pas de raison a priori qu'elles s'annulent. Pour observer des phénomènes analogues aux lignes nodales sur les variétés compactes, il faut s'intéresser aux zéros de la partie réelle ou de la partie imaginaire de  $E_X(\cdot; \xi, 1/2 + i/h)$ . Si  $K \subset X$  est un compact (et  $\xi \in \partial\overline{\mathbb{H}^2}$  est fixé), on peut par exemple considérer

$$\mathcal{N}_{h,K} := \{x \in K; \Re E_X(x; \xi, 1/2 + i/h) = 0\}.$$

La preuve de Donnelly et Fefferman ([DF88]) étant purement locale, le fait que  $X$  soit analytique implique directement l'existence de constantes  $C_1, C_2 > 0$  telles que

$$\frac{C_1}{h} \leq \text{Haus}_{d-1}(\mathcal{N}_{h,K}) \leq \frac{C_2}{h}. \quad (6)$$

Autrement dit, l'analogie de la conjecture de Yau est vérifié pour la partie réelle des séries d'Eisenstein.

Quant à la borne de Courant (2) pour le nombre de domaines nodaux de  $\Re E_X(x; \xi, 1/2 + i/h)$  dans  $K$ , un analogue en a été prouvé par Jakobson et Naud ([JN15]), à l'aide d'une asymptotique sur le nombre d'intersections entre  $\mathcal{N}_{h,K}$  et une géodésique donnée (voir la section 7.3 pour plus de détails).

### 0.2.3 Vers les ondes planes tordues

Nous avons vu que, sous une hypothèse sur  $\delta(\Gamma)$ , les séries d'Eisenstein ont de nombreuses propriétés sympathiques que n'ont pas forcément les fonctions propres du laplacien sur une variété compacte : unicité de la limite semi-classique, bornes  $L_{loc}^\infty$  uniformes par rapport au paramètre spectral, estimées sur le nombre d'intersection des lignes nodales de leur partie réelle avec une géodésique... Pour prouver ces propriétés, la formule explicite définissant les séries d'Eisenstein comme une série algébrique est très utile.

Pourtant, il est toujours un peu frustrant d'avoir des résultats ne marchant qu'en courbure constante. Si on perturbe un peu la métrique dans un compact, peut-on encore définir l'équivalent des séries d'Eisenstein ? Ces « séries d'Eisenstein perturbées » auront-elles encore certaines des propriétés listées ci-dessus ? La réponse que nous apporterons dans cette thèse est positive.

Les séries d'Eisenstein sont en fait un cas particulier d'*ondes planes tordues*. Nous allons définir et étudier ces ondes planes tordues dans un cadre beaucoup plus général que celui des surfaces de Schottky, incluant par exemple le cas des perturbations compactes de l'espace euclidien. C'est d'ailleurs par ce cas particulier, le plus simple et le plus important en pratique, que nous commencerons notre exposé.



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
0.1 Le laplacien sur une variété compacte . . . . .	v
0.1.1 Propriétés générales des $\lambda_n$ et $\phi_n$ . . . . .	vi
0.1.2 Chaos Quantique . . . . .	viii
0.2 Séries d'Eisenstein et ondes planes tordues . . . . .	xii
0.2.1 Séries d'Eisenstein . . . . .	xii
0.2.2 Propriétés semi-classiques des séries d'Eisenstein . . . . .	xiii
0.2.3 Vers les ondes planes tordues . . . . .	xv
<b>1 Théorie de la diffusion pour les perturbations compactes de <math>\mathbb{R}^d</math></b>	<b>1</b>
1.1 Théorie de la diffusion . . . . .	1
1.2 Théorie de la diffusion dans la limite semi-classique . . . . .	6
1.2.1 Résolvante dans la limite semi-classique . . . . .	7
1.2.2 Ondes planes tordues dans la limite semi-classique . . . . .	8
1.2.3 Opérateur de diffusion dans la limite semi-classique . . . . .	9
1.3 Les résultats principaux de cette thèse . . . . .	13
1.3.1 Équidistribution des décalages de phase en présence de capture . . . . .	13
1.3.2 Ondes planes tordues en présence d'un ensemble capté hyperbolique . . . . .	14
1.3.3 Ondes planes tordues en courbure négative . . . . .	16
1.3.4 Nombre de domaines nodaux de la somme de deux ondes planes tordues sur des surfaces de courbure négative . . . . .	19
1.4 Vers un cadre plus général . . . . .	20
<b>2 Équidistribution des décalages de phase et diffusion piégée</b>	<b>23</b>
2.1 Dynamique classique . . . . .	24
2.2 Formules des traces . . . . .	25
2.3 Preuve du théorème 1.18 . . . . .	30
<b>3 Cadre général de nos résultats sur les ondes planes tordues</b>	<b>33</b>
3.1 Hypothèses géométriques près de l'infini . . . . .	34
3.2 Hyperbolicité . . . . .	36

3.3	Hypothèses sur la variété lagrangienne entrante . . . . .	39
3.4	Résultats concernant la propagation de $\mathcal{L}_0$ . . . . .	41
3.4.1	Résultats en présence d'un ensemble capté hyperbolique . . . . .	42
3.4.2	Résultats en courbure négative . . . . .	43
3.5	Pression topologique . . . . .	43
3.5.1	Un nouveau recouvrement ouvert de $\mathcal{E}$ . . . . .	47
3.6	Hypothèses sur les fonctions propres généralisées . . . . .	49
3.6.1	Ondes planes tordues sur les variétés à infinis euclidiens . . . . .	50
3.6.2	Ondes circulaires tordues . . . . .	52
3.6.3	Ondes planes tordues sur les variétés hyperboliques près de l'infini . . . . .	54
3.7	Résultats concernant les ondes planes tordues . . . . .	59
3.7.1	Résultats en présence d'un ensemble capté hyperbolique . . . . .	59
3.7.2	Résultats en courbure négative . . . . .	61
3.7.3	Résumé des hypothèses et résultats principaux . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Preuve des résultats concernant la propagation de <math>\mathcal{L}_0</math></b>	<b>65</b>
4.1	Preuve du théorème 3.19 . . . . .	65
4.1.1	Coordonnées alternatives . . . . .	66
4.1.2	L'application de Poincaré . . . . .	68
4.1.3	Changements de coordonnées et variétés lagrangiennes . . . . .	69
4.1.4	Propagation durant des temps courts . . . . .	71
4.1.5	Propagation dans les ensembles $\tilde{U}_i$ . . . . .	75
4.1.6	Propriétés des ensembles $(W_a)_{a \in A_1}$ . . . . .	78
4.1.7	Construction et propriétés des ensembles $(W_a)_{a \in A_2}$ . . . . .	80
4.1.8	Structure des suites admissibles . . . . .	80
4.1.9	Fin de la preuve du théorème 3.19 . . . . .	81
4.1.10	Distance entre les lagrangiennes . . . . .	82
4.2	Résultats concernant la propagation de $\mathcal{L}_0$ en courbure négative. . . . .	83
4.2.1	Faits généraux concernant les variétés de courbure négative . . . . .	83
4.2.2	Projection sans caustiques et transversalité . . . . .	87
4.2.3	Preuve du théorème 3.23 . . . . .	91
4.2.4	Distance entre lagrangiennes . . . . .	94
<b>5</b>	<b>Preuve des résultats concernant les ondes planes tordues</b>	<b>95</b>
5.1	Preuve du théorème 3.37 . . . . .	95
5.1.1	Stratégie de preuve . . . . .	95
5.1.2	Partition microlocale de l'unité . . . . .	97
5.1.3	Décomposition de $\hat{\chi}E_h$ . . . . .	97
5.1.4	Évolution des états lagrangiens . . . . .	100
5.2	Preuve des résultats en courbure négative . . . . .	103

TABLE DES MATIÈRES

<b>6</b>	<b>Mesures semi-classiques</b>	<b>109</b>
6.1	Preuve du corollaire 3.40 . . . . .	109
6.2	Mesures semi-classiques en courbure négative . . . . .	113
<b>7</b>	<b>Ensembles nodaux des ondes planes tordues en courbure négative</b>	<b>119</b>
7.1	Une borne inférieure sur la mesure des ensembles nodaux . . . . .	120
7.2	Structure à l'infini des ensembles nodaux des ondes planes tordues . . . . .	124
7.3	Domaines nodaux d'une somme d'onde planes tordues . . . . .	129
7.3.1	Bornes supérieures sur le nombre de domaines nodaux . . . . .	129
7.3.2	Borne inférieure sur le nombre de domaines nodaux de la somme de deux ondes planes tordues sur des surfaces génériques de courbure négative . . . . .	130
7.4	Un critère pour qu'une somme finie d'onde planes sature la borne de Courant	132
7.4.1	Énoncé du critère . . . . .	132
7.4.2	Preuve du théorème 7.15 . . . . .	135
7.4.3	Preuve de la proposition 7.17 . . . . .	139
7.5	Preuve du théorème 1.28 . . . . .	143
<b>Appendices</b>		
<b>Annexe A</b>	<b>Rappels d'analyse semi-classique</b>	<b>151</b>
A.1	Calcul Pseudo-différentiel . . . . .	151
A.2	Distributions lagrangiennes et opérateurs intégraux de Fourier . . . . .	153
A.3	Propriétés locales des opérateurs intégraux de Fourier . . . . .	155
A.3.1	Le propagateur de Schrödinger comme un opérateur intégral de Fourier	157
A.3.2	Itérations d'opérateurs intégraux de Fourier . . . . .	158

*TABLE DES MATIÈRES*

# Chapitre 1

## Théorie de la diffusion pour les perturbations compactes de $\mathbb{R}^d$

*L'objectif de ce chapitre est de présenter la théorie de la diffusion sur les perturbations compactes de  $\mathbb{R}^d$ . Il y a plusieurs raisons pour commencer notre exposé par ce cas particulier. Tout d'abord, la théorie de la diffusion y est particulièrement simple, et c'est dans ce cadre qu'il est le plus simple de définir les ondes planes tordues. Comme la quasi-totalité des résultats présentés dans cette thèse sont vrais et non triviaux dans le cas de perturbations compactes de l'espace euclidien, cela nous permettra de formuler assez rapidement nos résultats sans entrer dans trop de complications techniques. D'autre part, certains de nos résultats, comme ceux du chapitre 2 ne sont vrais que sur les perturbations compactes de  $\mathbb{R}^d$ ; ce chapitre nous permettra d'introduire tous les théorèmes bien connus en théorie de la diffusion dont nous aurons besoin pour leur preuve.*

---

### 1.1 Théorie de la diffusion

Dans cette section, où nous allons introduire les principaux objets de la théorie de la diffusion,  $h \in ]0, +\infty[$  sera toujours un paramètre fixé. Nous étudierons ensuite le comportement de ces objets dans la limite  $h \rightarrow 0$  dans la section suivante.

**Définition 1.1.** *Soit  $(X, g)$  une variété riemannienne complète. Nous dirons que  $(X, g)$  est euclidienne près de l'infini au sens où il existe un compact  $X_0 \subset X$  et un compact  $X'_0 \subset \mathbb{R}^d$  tels que  $(X \setminus X_0, g)$  est isométrique à  $(\mathbb{R}^d \setminus X'_0, g_{eucl})$ <sup>1</sup>.*

---

1. On pourra le plus souvent prendre pour  $X'_0$  une boule suffisamment grande. Ce n'est que dans les sections 1.2.3 1.3.1 et dans le chapitre 2 que nous aurons besoin de choisir précisément les compacts  $X_0$  et  $X'_0$



L'exemple le plus évident (et sans doute le plus important physiquement) d'une telle variété est  $\mathbb{R}^d$  muni de sa métrique euclidienne. Si  $(X, g)$  est une variété euclidienne près de l'infini, on définit sur  $C^\infty(X)$  une famille d'opérateurs, indexée par  $h \in ]0, \infty[$

$$P_h := -h^2 \Delta_g + V,$$

où  $V \in C_c^\infty(X_0)$  est à valeurs réelles.

**Résolvante et résonances** Si  $h > 0$  est fixé, il existe pour  $\lambda \in \mathbb{C}$  avec  $\Im \lambda > 0$  suffisamment grande, un unique opérateur  $R_{\lambda, h} : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$  appelé *résolvante*, tel que

$$(-h^2 \Delta_g + V + \lambda^2) \circ R_{\lambda, h} = Id.$$

A  $h$  fixé, la famille d'opérateurs  $\lambda \mapsto R_{\lambda, h}$  est holomorphe sur son domaine de définition. De plus, si on restreint le domaine des opérateurs  $R_{\lambda, h}$ , et qu'on élargit leur espace d'arrivée, de sorte à les voir comme des opérateurs de  $L_{comp}^2(\mathbb{R}^d)$  dans  $L_{loc}^2(\mathbb{R}^d)$ , alors la famille  $\lambda \mapsto R_{\lambda, h}$  s'étend à une famille méromorphe d'opérateurs pour  $\lambda \in \mathbb{C}$  en dimension impaire, ou pour  $\lambda$  appartenant au recouvrement logarithmique de  $\mathbb{C}$ . Les pôles de cette famille, qui sont nécessairement de rang fini, sont appelés les *résonances*. Par certains aspects, les résonances peuvent être vues comme l'analogie des valeurs propres des opérateurs de Schrödinger, dans le cas où la variété de base  $X$  n'est pas compacte.

Les résonances sont sans doute l'un des aspects les plus fascinants et les plus étudiés de la théorie de la diffusion (voir par exemple [DZ], un ouvrage récent qui leur est dédié), et en particulier dans le cas des systèmes possédant un ensemble capté hyperbolique (voir par exemple [Non11] pour un état des lieux récent).

Pourtant, les résonances sont presque absentes de ce travail, et nous nous intéresserons principalement à la théorie de la diffusion « sur l'axe réel » ; c'est-à-dire que nous considérerons presque exclusivement des paramètres spectraux  $\lambda$  sur l'axe réel. Dans le cas où  $\lambda = 1$ , auquel on se ramènera le plus souvent, on notera simplement  $R_h := R_{1, h}$ .

On peut montrer ([Mel95, Proposition 2.1]) que pour tout  $h > 0$ , et pour tout  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $\lambda$  n'est pas une résonance de  $P_h$ .

**Ondes planes tordues** Avant de définir les ondes planes tordues, nous avons besoin de définir les fonctions sortantes, au moyen de la proposition suivante (cf. [Mel95, Proposition 2.4]) :

**Proposition-Définition 1.2.** *Soit  $(X, g)$  une variété euclidienne près de l'infini, et soit  $f \in C^\infty(X)$ . Fixons  $h > 0$ . Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Il existe une fonction  $g \in C_c^\infty(X)$  telle que*

$$f = R_h g.$$

*g est alors unique.*

## 1.1 Théorie de la diffusion

(ii)

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{(d-1)/2} \left( \frac{\partial}{\partial |x|} - \frac{i}{h} \right) f = 0. \quad (1.1)$$

(iii) En écrivant, pour  $x \in \mathbb{R}^d \setminus X_0$ ,  $x = |x|\omega$ , avec  $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$ , on a

$$f(|x|\omega) = e^{i|x|/h} |x|^{-\frac{1}{2}(d-1)} \left( u(\omega) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right), \quad (1.2)$$

où  $u \in C^\infty(\mathbb{S}^{d-1})$ .

Si l'une des conditions ci-dessus est vérifiée, on dira que  $f$  est une fonction sortante.

Dans la définition suivante, on identifie la sphère  $\mathbb{S}^{d-1}$  à  $\{\omega \in \mathbb{R}^d; |\omega| = 1\}$ .

**Proposition-Définition 1.3.** Soit  $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$  et  $h > 0$ . Il existe une unique fonction  $E_h(\cdot, \omega) \in C^\infty(X)$  solution de

$$(P_h - 1)E_h(\cdot, \omega) = 0$$

telle que l'on a

$$E_h(x, \omega) = e^{ix \cdot \omega / h} + f(x) \quad \text{pour tout } x \in X \setminus X_0,$$

où  $f$  est une fonction sortante au sens de la Proposition-Définition 1.2. La fonction  $E_h(\cdot; \omega)$  s'appelle alors l'onde plane tordue de direction  $\omega$ .

*Démonstration.* Pour l'existence, on prend  $\chi \in C_c^\infty(X)$  valant 1 près de  $X_0$ . On pose alors

$$\begin{aligned} E_h^0(x; \omega) &:= e^{i \frac{x \cdot \omega}{h}} \text{ si } x \in X \setminus X_0, \quad 0 \text{ sinon,} \\ F_h &:= -[P_h, \chi]E_h^0(\cdot, \omega) = -[h^2 \Delta, \chi]E_h^0(\cdot, \omega), \end{aligned} \quad (1.3)$$

où la dernière égalité vient du fait qu'on a supposé que  $\text{supp} V \subset X_0$ .  $F_h$  est alors dans  $C_c^\infty(X)$ , donc on peut bien définir

$$E_h^1(\cdot; \omega) := R_h F_h. \quad (1.4)$$

On pose alors

$$E_h(x; \omega) := (1 - \chi)E_h^0(x; \omega) + E_h^1(x; \omega). \quad (1.5)$$

La fonction  $E_h$  s'écrit bien, en dehors de  $X_0$ , comme la somme d'une onde plane et d'une fonction sortante. Vérifions que  $E_h$  est bien une fonction propre de  $P_h$ . On a

$$\begin{aligned} (P_h - 1)E_h &= (P_h - 1)E_h^0 + [P_h - 1, \chi]E_h^0 + (P_h - 1)R_h F_h \\ &= [P_h, \chi]E_h^0 + F_h \\ &= 0. \end{aligned}$$

Vérifions maintenant l'unicité de la fonction vérifiant ces conditions. Supposons qu'il existe  $g_h^1$  et  $g_h^2$  avec  $(P_h - 1)g_h^i = 0$  pour  $i = 1, 2$ , et  $g_h^i$  s'écrit comme somme d'une onde plane et d'une fonction sortante. La fonction  $g_h := g_h^1 - g_h^2$  est alors une fonction propre sortante de  $P_h$ . 1 serait alors une résonance de l'opérateur  $P_h$ , ce qui contredit le fait mentionné plus haut que  $R_h$  n'a pas de pôles non nuls sur l'axe réel.  $\square$

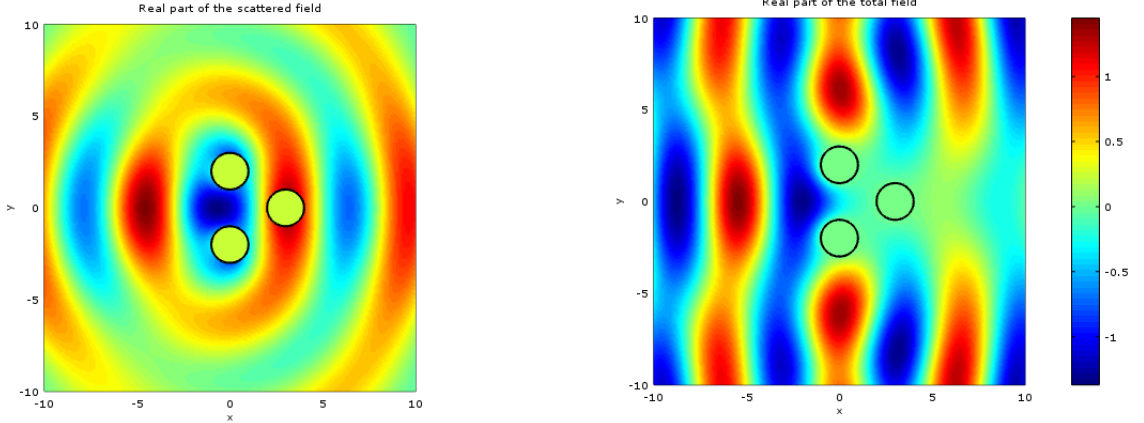


FIGURE 1.1 – La partie réelle de  $E_h^1$  et de  $E_h$  pour la diffusion par trois obstacles circulaires. Ici,  $\omega$  va vers la droite, et  $h = 2\pi$ . Cette simulation a été réalisée sous Octave (cf. [EBHW15]), grâce au package  $\mu$ -diff (cf. [TACA15]).

Les ondes planes tordues seront les personnages principaux de cette thèse, et c'est sur elles que porteront la majeure partie de nos résultats (voir sections 1.3.2 et 1.3.3). Un calcul numérique d'ondes planes tordues est présenté dans la figure 1.1, dans le cas, assez peu différent du nôtre, de diffusion par des obstacles.

Par soucis d'exhaustivité, rappelons une dernière définition des ondes planes tordues, dont la preuve peut être trouvée dans [DG14, §6]. Notons  $R_h(x, x')$  le noyau intégral de l'opérateur  $R_h$ . On a :

$$E_h(x, \omega) = 2ih \left( -2i\pi h \right)^{\frac{d-1}{2}} \lim_{r \rightarrow \infty} \left[ r^{(d-1)/2} e^{ir/h} R_h(x, r\omega) \right].$$

**Amplitude de diffusion** D'après (1.2), on sait que l'on peut écrire pour  $x \in X \setminus X_0$  :

$$E_h(|x|, \omega, \omega') = e^{ix \cdot \omega' / h} + e^{i|x|/h} |x|^{-\frac{1}{2}(d-1)} \left( a(\omega; \omega', h) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right).$$

Il est en fait possible de retrouver  $a(\omega; \omega', h)$  à partir de  $E_h^1$ , comme le dit le lemme suivant, qui est inspiré de [PZ01, §2] (ou encore de [Ale05]).

**Lemme 1.4.** Soient  $\omega, \omega' \in \mathbb{S}^{d-1}$ . Soient  $\chi_1, \chi_2 \in C_c^\infty(X)$  telles que  $\chi_1 = 1$  sur  $X_0$  et  $\chi_2 = 1$  sur le support de  $\chi_1$ . On a alors

$$a(\omega; \omega', h) = c_{d,h} \int_X e^{-i \frac{x \cdot \omega}{h}} \left( [-h^2 \Delta, \chi_2] R_h[-h^2 \Delta, \chi_1] E_h^0(\cdot, \omega') \right) (x) dx, \quad (1.6)$$

où  $c_{d,h} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{2\pi i} \right)^{(d-3)/2} \left( \frac{1}{h} \right)^{(d+1)/2}$ .

## 1.1 Théorie de la diffusion

Autrement dit, en prenant  $\chi = \chi_1$  dans (1.3), et en définissant  $E_h^1$  comme dans (1.4), on a

$$a(\omega; \omega', h) = c_{d,h} \int_X E_h^0(x, \omega; h) [-h^2 \Delta, \chi_2] E_h^1(\cdot, \omega'; h) dx$$

Remarquons que  $[h^2 \Delta, \chi_2] E_h^1(\cdot; \omega'; h)$  est ici supportée dans un compact à l'extérieur de  $X_0$  : on n'intègre donc que sur un domaine borné dans la partie euclidienne.

*Démonstration.* On prend  $\chi = \chi_1$  dans (1.3), et on définit  $E_h^1$  comme dans (1.4). On a alors

$$\begin{aligned} (h^2 \Delta - 1)(1 - \chi_2) E_h^1 &= [h^2 \Delta, \chi_2] E_h^1 + (1 - \chi_2) P_h E_h^1 \\ &= [h^2 \Delta, \chi_2] E_h^1 + (1 - \chi_2) [h^2 \Delta, \chi_1] E_h^0 \\ &= [h^2 \Delta, \chi_2] E_h^1, \end{aligned}$$

car  $(1 - \chi_2)$  et  $[h^2 \Delta, \chi_1] E_h^0$  sont à supports disjoints. Comme  $E_h^1$  vérifie les hypothèses de la Proposition 1.2,  $(1 - \chi_2) E_h^1$  les vérifie aussi (cela se voit facilement grâce à la condition (1.1)). Comme, d'autre part, dans l'équation ci-dessus, les fonctions considérées sont supportées sur  $(X \setminus X_0) \cong (\mathbb{R}^d \setminus X'_0)$ , on peut à chaque terme de l'équation appliquer la résolvante libre sur  $\mathbb{R}^d$ , notée  $R_h^0 = (-h^2 \Delta_{eucl} - 1)^{-1}$ . On en déduit que

$$(1 - \chi_2) E_h^1 = R_h^0 [h^2 \Delta, \chi_2] E_h^1. \quad (1.7)$$

La preuve du lemme découle alors du lemme suivant, dont la preuve est identique à celle de la Proposition 1.1 de [Mel95], ou du Théorème 3.5 de [DG14].  $\square$

**Lemme 1.5.** *Soit  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ . On a*

$$R_h^0 f(|x|\omega) = e^{i|x|\omega/h} |x|^{-(d+1)/2} \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{2\pi i} \right)^{(d-3)/2} \left( \frac{1}{h} \right)^{(d+1)/2} \left( \hat{f}(-\omega/h) + r_h \right), \quad (1.8)$$

où

$$r_h = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad \nabla r_h \leq h^{-1} O\left(\frac{1}{|x|}\right).$$

Remarquons que, dans la preuve de [Mel95], il est montré que

$$R_h^0 f_h(|x|\omega) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2\pi} \right)^d \left( \frac{1}{h} \right)^d \int_{\mathbb{S}^{d-1}} e^{i|x|\omega \cdot \theta/h} \psi_{-\omega}(\theta) \hat{f}_h(-\theta/h) d\theta + R_h, \quad (1.9)$$

où  $R_h \in \mathcal{S}$  et  $R_h = O(h^\infty)$  dans toutes les semi-normes sur  $\mathcal{S}$ , et où  $\psi_{-\omega}$  est supportée sur un petit voisinage de  $-\omega$ . Par la formule de phase stationnaire avec  $|x|^{-1}$  comme petit paramètre, on retrouve immédiatement (1.8). L'équation (1.9) sera utile par la suite, quand on considérera des fonctions  $f_h$  dépendant du paramètre semi-classique  $h$ .

Le lemme 1.4 nous assure que  $a(\omega; \omega', h)$  dépend de façon  $C^\infty$  (et même analytique) de  $\omega$  et de  $\omega'$  (et aussi de  $h > 0$ ). On notera donc plutôt

$$a_h(\omega, \omega') := a(\omega; \omega', h),$$

et on appellera la fonction  $a_h$  l'amplitude de diffusion.

**Opérateur de diffusion** À partir de l'amplitude de diffusion, on définit l'*opérateur de diffusion*  $S_h : L^2(\mathbb{S}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{S}^d)$  comme étant l'opérateur de noyau intégral  $a_h(\omega, \omega') + \delta_{\omega, \omega'}$ . Autrement dit,  $a_h(\omega, \omega')$  est le noyau intégral de  $S_h - Id$ . Comme  $a_h$  est lisse,  $S_h - Id$  est un opérateur à trace.

On peut montrer (cf. [DZ, Théorème 3.40]) que  $S_h$  est un opérateur unitaire. Par conséquent, pour tout  $h > 0$ ,  $S_h$  a un spectre discret inclus dans le cercle unité et ne s'accumulant qu'en 1. Nous discuterons des propriétés de ce spectre à la limite  $h \rightarrow 0$  dans le chapitre 2.

L'opérateur de diffusion possède une interprétation assez simple. On peut montrer (cf. [Mel95, §2.7]) que pour tout  $\phi_{in} \in C^\infty(\mathbb{S}^{d-1})$ , il existe une unique solution à  $(P_h - 1)u = 0$  telle que, pour tout  $x \in (X \setminus X_0) \cong (\mathbb{R}^d \setminus K_0)$  :

$$u(x) = |x|^{-(d-1)/2} (e^{-i|x|/h} \phi_{in}(\omega) + e^{i|x|/h} \phi_{out}(-\omega)) + O(|x|^{(-d+1)/2}).$$

L'opérateur de diffusion est alors donné par

$$S_h(\phi_{in}) := e^{i\pi(d-1)/2} \phi_{out}.$$

Cette normalisation est choisie de telle sorte que, lorsque  $(X, g) = (\mathbb{R}^d, g_{Eucl})$  et  $V \equiv 0$ , on a  $S_h = Id$  pour tout  $h > 0$ .

## 1.2 Théorie de la diffusion dans la limite semi-classique

Par bien des aspects, le comportement de la résolvante, des résonances, des ondes planes tordues et de l'opérateur de diffusion dans la limite semi-classique est lié à la dynamique classique associée. Introduisons donc quelques définitions de dynamique classique avant d'énoncer les principaux résultats sur le sujet.

**Dynamique classique** Dans toute la suite, nous noterons  $p(x, \xi) = |\xi|_g^2 + V(x) : T^*X \rightarrow \mathbb{R}$  le hamiltonien classique, qui est le symbole principal de  $P_h$ . Nous écrivons  $\mathcal{E}$  pour la couche d'énergie 1 :

$$\mathcal{E} = \{(x, \xi) \in T^*X; p(x, \xi) = 1\}.$$

On écrira aussi  $\Phi^t(\rho)$  pour le flot hamiltonien induit par le hamiltonien  $p$ . Les ensembles *sortant* et *entrant* sont définis comme

$$\Gamma^\pm := \{\rho \in \mathcal{E}, \text{ tels que } \Phi^t(\rho) \text{ demeure dans un ensemble compact pour tout } \mp t \geq 0\}.$$

L'*ensemble capté* est l'ensemble compact

$$K = \Gamma^+ \cap \Gamma^-.$$

## 1.2 Théorie de la diffusion dans la limite semi-classique

### 1.2.1 Résolvante dans la limite semi-classique

On a vu dans la section précédente que la résolvante  $R_h$  était bien définie comme un opérateur de  $L^2_{loc}$  dans  $L^2_{comp}$ . En particulier, si  $\chi \in C_c^\infty$ , alors l'opérateur  $\chi R_h \chi$  est borné de  $L^2(X)$  dans  $L^2(X)$ . Il est souvent important de comprendre comment la norme de l'opérateur  $\chi R_h \chi$  dépend de  $h$ . Sans aucune hypothèse sur la dynamique classique, le meilleur résultat que l'on puisse espérer est le suivant, dû à Burq et généralisé par Vodev.

**Théorème 1.6** ([Bur02a],[Vod00]). *Soit  $\chi \in C_c^\infty(X)$ . Il existe  $C_1, C_2 > 0$  tels que pour tout  $h \in ]0, 1]$ , on ait*

$$\|\chi R_h \chi\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C_1 e^{\frac{C_2}{h}}.$$

En pratique, ce résultat est souvent difficile à utiliser. En effet, en analyse semi-classique (dans un cadre  $C^\infty$ ), on travaille généralement à un reste d'ordre  $O(h^\infty)$  près. Hélas, la borne de Burq-Vodev sur la résolvante ne nous garantit pas que quand on applique la résolvante à un terme d'ordre  $O(h^\infty)$ , on obtienne un  $O(h^\infty)$ ... Un cadre beaucoup plus agréable est celui où la résolvante est bornée polynomialement, au sens de la définition suivante.

**Définition 1.7.** *On dit que  $R_h$  est bornée polynomialement s'il existe  $s > 0$  tel que pour tout  $\chi \in C_c^\infty(X)$ , il existe  $C > 0$  tel que*

$$\|\chi R_h \chi\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \frac{C}{h^s}.$$

Pour avoir des estimées polynomiales sur la résolvante, il faut typiquement faire des hypothèses sur la dynamique classique. Par exemple, si  $K = \emptyset$ , on a l'estimée suivante.

**Théorème 1.8.** *Si  $K = \emptyset$ , alors*

$$\|\chi R_h \chi\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \frac{C}{h}.$$

Ce résultat semble être connu depuis assez longtemps (au moins depuis les travaux de Lax et Philips, cf. [LP90]). Une preuve peut être trouvée dans [Bur02b], ainsi que des références sur les versions successives du résultat.

En fait, on ne peut pas se passer de l'hypothèse que  $K = \emptyset$  dans le résultat précédent. En effet, Burq, Bony et Ramond ont montré le résultat suivant.

**Théorème 1.9** ([BBR10]). *Si  $K \neq \emptyset$ , alors on peut trouver  $\chi \in C_c^\infty(X)$  telle que*

$$\|\chi R_h \chi\|_{L^2 \rightarrow L^2} \geq \frac{C |\log h|}{h}.$$

Notons dans le théorème précédent, le support de  $\chi$  doit intersecter la projection de  $K$  sur  $X$ . Au contraire, si le support de  $\chi$  est loin de la région d'interactions, les estimées deviennent analogues au cas où l'ensemble capté est vide, comme le dit le théorème suivant, dû à Burq.

**Théorème 1.10** ([Bur02a]). *Il existe  $R_1 > 0$  tel que pour tout  $R_2 > R_1$ , il existe  $C > 0$  telle que pour tout  $h \in ]0, 1]$ , on ait*

$$\|\mathbf{1}_{R_1 \leq |x| \leq R_2} R_h \mathbf{1}_{R_1 \leq |x| \leq R_2}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \frac{C}{h}.$$

Dans toute la suite, nous travaillerons avec un ensemble capté non vide, mais hyperbolique.

**Le cas où  $K$  est hyperbolique.** Rappelons que la notion d'ensemble hyperbolique a été donnée dans la Définition 0.2. On peut faire la conjecture suivante sur le comportement de la norme de la résolvante dans le cas où l'ensemble capté  $K$  est hyperbolique.

**Conjecture 1.11.** *Supposons que  $K$  soit un ensemble hyperbolique pour  $(\Phi^t)$ . Alors  $R_h$  est bornée polynomialement, au sens de la définition 1.7.*

Un cas particulier important de cette conjecture a été prouvé par Nonnenmacher et Zworski, celui où la pression topologique de la moitié du jacobien instable, notée  $\mathcal{P}(1/2)$  est négative. La définition de la pression topologique sera donnée dans la section 3.5. Notons qu'en dimension  $d = 2$ , cette hypothèse est équivalente à demander que la dimension de Hausdorff de  $K$  soit strictement inférieure à 2. Cette hypothèse est une manière quantitative de dire que « la dynamique est plus instable que complexe ».

**Théorème 1.12** ([NZ09]). *Supposons que  $K$  est un ensemble capté hyperbolique, et que  $\mathcal{P}(1/2) < 0$ , avec  $\mathcal{P}$  comme dans (3.22). Alors pour tout  $\chi \in C_c^\infty(X)$ , il existe  $C > 0$  telle que*

$$\|\chi R_h \chi\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \frac{C |\log h|}{h}.$$

On peut montrer que la conjecture 1.11 reste vraie si la pression topologique est nulle : c'est ce qu'ont montré Petkov et Stoyanov dans [PS10]. Toutefois, il semble difficile d'obtenir par leurs méthodes, basée sur des estimées de Dolgopyat, une valeur explicite pour  $\varepsilon_0$ .

### 1.2.2 Ondes planes tordues dans la limite semi-classique

Le théorème suivant est le résultat principal de [DG14], et donne une description des mesures semi-classiques associées aux ondes planes tordues sous des hypothèses dynamiques très faibles. Ce théorème est évidemment à rapprocher du théorème d'ergodicité quantique de l'introduction. Rappelons que la définition de  $\Psi_h^{comp}$  et de  $\sigma_h$  est redonnée dans l'appendice A.2.

## 1.2 Théorie de la diffusion dans la limite semi-classique

**Théorème 1.13** ([DG14]). *Supposons que  $K$  est de mesure de Liouville nulle. Alors pour presque tout  $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$ , il existe une mesure de Radon  $\mu_\omega$  sur  $S^*X$  telle que pour tout  $A \in \Psi_h^{comp}(X)$  à support compact, on a*

$$\lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} \left\| \langle AE_{\lambda h}(\cdot; \omega), E_{\lambda h}(\cdot; \omega) \rangle_{L^2(X)} - \int_{S^*X} \sigma_h(A) d\mu_\omega \right\|_{L_{\omega, \lambda}^1(\mathbb{S}^{d-1} \times [1, 1+h])} = 0.$$

Remarquons que,  $E_h$  étant définie par (1.5), il n'y a a priori pas de raison pour que  $(E_h(\cdot; \omega))$  soit bornée uniformément par rapport à  $h$  dans  $L_{loc}^2$ . En effet, si le terme  $E_h^0$  ne pose pas de problème à cet égard, le terme  $E_h^1$  défini dans (1.4) est construit à partir de la résolvante, et nous avons vu que les estimées semi-classiques disponibles sur la résolvante dépendent de manière très fine de l'ensemble capté  $K$ , et pas uniquement du fait que  $K$  soit de mesure nulle. C'est donc une partie importante du travail de [DG14] que de montrer que dans ce cas, lorsqu'on intègre les ondes planes tordues sur toutes les directions  $\omega$ , et surtout, sur un intervalle d'énergies de taille  $h$ , on obtient bien un objet borné dans  $L_{loc}^2$  uniformément en  $h$ .

La mesure  $\mu_\omega$  intervenant dans l'énoncé du théorème a une interprétation classique assez simple. La mesure semi-classique associée au terme  $(1 - \chi)E_h^0(\cdot; \omega)$  dans (1.5) est simplement  $|1 - \chi(x)|^2 dx \delta_{\{\xi = \omega\}}$ . Pour obtenir la mesure  $\mu_\omega$ , on propage cette mesure par le flot  $(\Phi^t)$ , et on prend la limite en temps long. Plus précisément, on peut montrer que pour presque tout  $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$ , la limite  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\Phi^t)_*(|1 - \chi(x)|^2 dx \delta_{\{\xi = \omega\}})$  existe, et que cette mesure est alors égale à  $d\mu_\omega$ .

### 1.2.3 Opérateur de diffusion dans la limite semi-classique

Les propriétés de l'opérateur de diffusion dans la limite semi-classique sont très liées à la *relation de diffusion*, que nous introduisons maintenant.

**Relation de diffusion** Puisqu'en dehors de  $X_0$ , les trajectoires de  $\Phi^t$  sont simplement des lignes droites, on a que pour tous  $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$ , et  $\eta \in \omega^\perp \subset \mathbb{R}^d$ , il existe un unique  $\rho_{\omega, \eta} \in \mathcal{E}$  tel que

$$\pi_X(\Phi^t(\rho_{\omega, \eta})) = t\omega + \eta \text{ pour } t \text{ suffisamment petit.} \quad (1.10)$$

Ici,  $\omega$  est la *direction entrante*, et  $\eta$  est le *paramètre d'impact*. Dans la suite, nous identifierons

$$\{(\omega, \eta); \omega \in \mathbb{S}^{d-1}, \eta \in \omega^\perp\} \cong T^*\mathbb{S}^{d-1}.$$

On rappelle que le compact  $X_0 \subset X$  a été introduit dans la définition 1.1, et que  $V$  est supporté dans  $X_0$ . On définit la *région d'interaction* par

$$\mathcal{I} := \{(\omega, \eta) \in T^*\mathbb{S}^{d-1}; \exists t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \pi_X(\Phi^t(\rho_{\omega, \eta})) \in X_0\}.$$



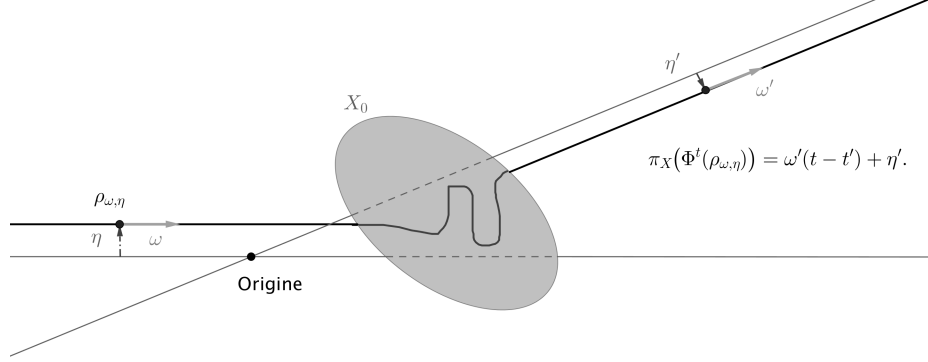


FIGURE 1.2 – La relation de diffusion  $\kappa$ .

Par compacité de  $X_0$ ,  $\mathcal{I}$  est compact.

Si  $\rho_{\omega, \eta} \notin \Gamma^-$ , alors il existe  $\omega' \in \mathbb{S}^{d-1}$ ,  $\eta' \in (\omega')^\perp \subset \mathbb{R}^d$  et  $t' \in \mathbb{R}$  tels que pour tout  $t$  suffisamment grand, on a

$$\pi_X(\Phi^t(\rho_{\omega, \eta})) = \omega'(t - t') + \eta'.$$

La *relation de diffusion*, ou *application de diffusion* est alors définie par  $\kappa(\omega, \eta) = (\omega', \eta')$ , comme représenté sur la Figure 1.2.

On définit l'*ensemble entrant à l'infini* par

$$\tilde{\Gamma}^- := \{(\omega, \eta) \in T^*(\mathbb{S}^{d-1}); \rho_{\omega, \eta} \in \Gamma^-\}.$$

De même, on définit l'*ensemble sortant à l'infini*  $\tilde{\Gamma}^+ \subset T^*(\mathbb{S}^{d-1})$  par :

$$(\omega', \eta') \in \tilde{\Gamma}^+ \Leftrightarrow \exists(x, \xi) \in \Gamma^+; \Phi^t(x, \xi) = t\omega' + \eta' \text{ pour } t \text{ assez grand.}$$

Remarquons que  $\tilde{\Gamma}^\pm$  sont des ensembles compacts de  $T^*\mathbb{S}^{d-1}$ , car si  $\eta$  est suffisamment grand, une trajectoire ayant pour paramètre d'impact  $\eta$  ne rencontrera pas la région d'interactions, et ne pourra donc pas être piégée.

La relation de diffusion peut alors être vue comme une application

$$\kappa : T^*\mathbb{S}^{d-1} \setminus \tilde{\Gamma}^- \longrightarrow T^*\mathbb{S}^{d-1} \setminus \tilde{\Gamma}^+.$$

On peut montrer que c'est un symplectomorphisme pour la forme symplectique canonique de  $T^*\mathbb{S}^{d-1}$  (voir par exemple [Gui77]).

## 1.2 Théorie de la diffusion dans la limite semi-classique

### L'opérateur de diffusion comme un opérateur intégral de Fourier semi-classique

La définition et les propriétés des opérateurs intégraux de Fourier seront rappelées dans l'annexe A.2 : nous invitons le lecteur à s'y référer pour comprendre les notations que nous utilisons.

Le théorème suivant, dû à Alexandrova ([Ale05, Theorem 5]), affirme que microlocalement en dehors de  $\tilde{\Gamma}^-$ , l'opérateur de diffusion peut être vu comme un opérateur intégral de Fourier associé à  $\kappa$ . On peut aussi trouver un résultat analogue dans [HW08] dans un cadre géométrique plus général, mais sous l'hypothèse que  $K = \emptyset$ .

**Théorème 1.14** (Alexandrova 2005). (i) Soit  $(\omega, \eta) \in T^*\mathbb{S}^{d-1} \setminus \tilde{\Gamma}^-$ . Si  $U$  est un voisinage ouvert de  $(\omega, \eta)$  dans  $T^*\mathbb{S}^{d-1}$  n'intersectant pas  $\tilde{\Gamma}^-$ , et soit  $A \in \Psi_h^{comp}(\mathbb{S}^{d-1})$  tel que  $WF_h(A) \subset U$ . On a alors  $S_h A \in I^{comp}(\kappa|_U)$ .

(ii)  $S_h$  est microlocalement égal à l'identité en dehors de la région d'interactions au sens suivant. Si  $a \in S^{comp}(\mathbb{S}^{d-1})$  est tel que  $a \equiv 1$  près de  $\mathcal{I}$ , on a alors

$$\|(S_h - Id)(Id - Op_h(a))\|_{L^2(\mathbb{S}^{d-1}) \rightarrow L^2(\mathbb{S}^{d-1})} = O(h^\infty). \quad (1.11)$$

**Le spectre de l'opérateur de diffusion** Nous avons vu précédemment que pour tout  $h > 0$ ,  $S_h - Id$  était un opérateur à trace, et que  $S_h$  était un opérateur unitaire. En particulier, le spectre de  $S_h$  est constitué de valeurs propres situées sur le cercle unité, et ne s'accumulant qu'en 1. On peut donc identifier le spectre de  $S_h$  à une suite<sup>2</sup>  $(e^{i\beta_{h,n}})_{n \in \mathbb{N}}$  convergeant vers 1. Ces valeurs propres sont parfois appelées les *décalages de phase*.

Pour étudier le comportement du spectre de  $S_h$  dans la limite semi-classique, il est naturel d'introduire une mesure  $\mu_h$  sur  $\mathbb{S}^1$  définie par

$$\langle \mu_h, f \rangle := (2\pi h)^{d-1} \sum_{n \in \mathbb{N}} f(e^{i\beta_{h,n}}),$$

pour toute fonction continue  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ . Cette mesure n'est pas finie, mais  $\langle \mu_h, f \rangle$  est finie dès que 1 n'est pas dans le support de  $f$ .

L'un des principaux résultats sur le comportement de  $\mu_h$  dans la limite  $h \rightarrow 0$ , est dû à Gell-Redman, Hassell et Zelditch ([GRHZ15]). Les auteurs font l'hypothèse que

$$\Gamma^\pm = \emptyset. \quad (1.12)$$

Sous cette hypothèse,  $\kappa : T^*\mathbb{S}^{d-1} \mapsto T^*\mathbb{S}^{d-1}$  est un difféomorphisme, et on peut définir  $\kappa^l$  pour tout  $l \in \mathbb{Z}$ .

Pour tout  $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , l'ensemble suivant est alors bien défini

$$\mathcal{F}_l := \{(\omega, \eta) \in \mathcal{I}; \kappa^l(\omega, \eta) = (\omega, \eta)\}.$$

---

2. Le choix de cette suite n'est pas canonique, et ne jouera pas d'autre rôle que de simplifier un peu quelques notations.

La seconde hypothèse de [GRHZ15] est une *hypothèse de déviation*, qui affirme que

$$\forall l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \text{Vol}(\mathcal{F}_l) = 0, \quad (1.13)$$

où Vol désigne la mesure de Liouville sur  $T^*\mathbb{S}^{d-1}$ .

Cette hypothèse dit que la plupart des trajectoires classiques qui interagissent avec le potentiel ou la perturbation métrique sont effectivement déviées. Dans [GRHZ15], les auteurs travaillent dans le cas où  $(X, g) \equiv (\mathbb{R}^d, g_{Eucd})$ , et où  $X_0 = \text{supp}(V)$ , et ils font la conjecture que cette hypothèse est vérifiée pour un potentiel  $V$  générique. Remarquons que pour que cette équation soit vérifiée, il faut choisir  $X_0$  soigneusement dans la définition 1.1 : si  $X_0$  est choisi un peu plus gros, cette condition ne sera plus vérifiée.

Nous faisons la conjecture que si  $V \equiv 0$  et si  $(\overset{\circ}{X}_0, g)$  est de courbure strictement négative, alors cette hypothèse est vérifiée, où  $\overset{\circ}{X}_0$  désigne l'intérieur de  $X_0$ .

**Théorème 1.15** ([GRHZ15]). *Supposons que la variété  $(X, g)$  et le potentiel  $V$  sont tels que (1.12) et (1.13) sont vérifiées. Soit  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue telle que  $1 \notin \text{supp} f$ . On a alors*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \langle \mu_h, f \rangle = \frac{\text{Vol}(\mathcal{I})}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\theta.$$

Ce théorème a le corollaire suivant, qui décrit l'équidistribution des décalages de phase

**Corollaire 1.16.** *Soient  $0 < \phi_1 < \phi_2 < 2\pi$  deux angles, et soit  $N_h(\phi_1, \phi_2)$  le nombre de valeurs propres  $e^{i\beta_{h,n}}$  de  $S_h$  avec  $\phi_1 \leq \beta_{h,n} \leq \phi_2$  modulo  $2\pi$ . On a alors, sous les hypothèses du théorème précédent :*

$$\lim_{h \rightarrow 0} (2\pi h)^{d-1} N_h(\phi_1, \phi_2) = \text{Vol}(\mathcal{I}) \frac{\phi_2 - \phi_1}{2\pi}.$$

Pour prouver ce corollaire, il suffit d'approcher la fonction indicatrice  $\mathbf{1}_{[\phi_1, \phi_2]}$  par des fonctions continues, et d'utiliser le théorème précédent.

**Remarque 1.17.** *La constante  $\text{Vol}(\mathcal{I})$  apparaissant dans le théorème semble dépendre du choix de  $X_0$ , qui est arbitraire. En fait, la condition (1.13) nous impose de prendre  $X_0$  le plus petit possible. Par exemple, si  $(X, g) \equiv (\mathbb{R}^d, g_{eucd})$ , alors il faut prendre  $X_0 = \text{Vol}(\mathcal{I})$ .*

*Si  $V$  est radial, de sorte que  $\text{supp}(V) = B(0, R) \subset \mathbb{R}^d$ , alors pour chaque  $\omega$ ,  $(\omega, \eta)$  sera dans  $\mathcal{I}$  si et seulement si  $|\eta| \leq R$ . La constante  $\text{Vol}(\mathcal{I})$  est alors égale au volume de la boule de dimension  $d - 1$  et de rayon  $R$ , que multiplie le volume de la sphère de rayon  $d - 1$  et de rayon 1, soit  $\frac{2 \cdot (2\pi)^{d-1}}{(d-1)!}$ . Si  $V$  n'est pas radial, il n'est en général pas facile d'obtenir une expression pour  $\text{Vol}(\mathcal{I})$ .*

L'étude de la distribution des valeurs propres de l'opérateur de diffusion remonte aux années 80 ([BY82], [BY84], [SY85]). Plus récemment, dans le régime (non semi-classique)

### 1.3 Les résultats principaux de cette thèse

des hautes énergies, la distribution des décalages de phase a été étudiée dans [BP12], puis dans [BP13] et [Nak14] pour des hamiltoniens plus généraux. Dans la littérature physique, voir aussi [DS92] pour le cas de la diffusion par des obstacles.

Dans un cadre semi-classique, l'équidistribution des décalages de phase a été prouvée pour la première fois dans [DGRHH14] pour les potentiels à symétrie sphérique. Elle a aussi été étudiée dans [GRH15] pour les potentiels à longue portée, sans hypothèses sur la dynamique classique sous-jacente. Dans [ZZ99], les auteurs obtiennent des résultats beaucoup plus fins sur la distribution des décalages de phases dans la limite semi-classique pour une famille de surfaces de révolution.

Ce résultat est semblable au résultat d'équidistribution des valeurs propres de la transformée de Cayley de l'opérateur Dirichlet-Neumann obtenu par Hassell et Ivrii dans [HI15].

## 1.3 Les résultats principaux de cette thèse

### 1.3.1 Équidistribution des décalages de phase en présence de capture

Nous avons vu dans la section (1.2.3) que le théorème 1.15 avait été prouvé dans [GRHZ15] sous l'hypothèse (1.12) qu'il n'y a pas de directions captées. En fait, en adaptant un peu les méthodes de [GRHZ15], on peut se passer de cette hypothèse, et supposer seulement que

$$\text{Vol}(\tilde{\Gamma}^\pm) = 0. \quad (1.14)$$

Cette hypothèse est très faible : comme nous le verrons dans le chapitre 2, elle est vérifiée dès que le niveau d'énergie  $\mathcal{E}$  est non-dégénéré, au sens où

$$\forall \rho \in \mathcal{E}, \quad d_\rho p \neq 0. \quad (1.15)$$

Cette hypothèse peut donc être vérifiée même dans des situations où l'ensemble capté est de mesure strictement positive, comme dans le cas du « puits dans l'isle », du moment que la composante connexe de  $\Gamma^\pm$  allant à l'infini est de mesure nulle.

Nous avons aussi besoin d'une hypothèse de déviation analogue à (1.13), qui s'écrit ici

$$\forall l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \text{Vol}\left(\{(\omega, \eta) \in \mathcal{I}; \kappa^l(\omega, \eta) \text{ est bien défini et } \kappa^l(\omega, \eta) = (\omega, \eta)\}\right) = 0, \quad (1.16)$$

où  $\text{Vol}$  désigne la mesure de Liouville sur  $T^*\mathbb{S}^{d-1}$ . Nous donnerons plus de détails sur le domaine de définition de  $\kappa^l$  dans la section 2.1.

**Théorème 1.18** ([Ing16]). *Supposons que la variété  $(X, g)$  et le potentiel  $V$  sont tels que (1.14) et (1.16) sont vérifiées. Soit  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue telle que  $1 \notin \text{supp} f$ . On a alors*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \langle \mu_h, f \rangle = \frac{\text{Vol}(\mathcal{I})}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\theta.$$

On peut évidemment déduire de ce théorème l'analogie du corollaire 1.16. Ce théorème sera prouvé dans le chapitre 2.

### 1.3.2 Ondes planes tordues en présence d'un ensemble capté hyperbolique

**Hypothèse de transversalité** Les propriétés de l'onde plane tordue  $E_h(x; \omega)$  sont reliées aux propriétés de la variété lagrangienne

$$\Lambda_\omega := \{(x, \omega); x \in \mathbb{R}^d \setminus X'_0\} \cong \{(x, \omega); x \in X \setminus X_0\} \subset \mathcal{E}. \quad (1.17)$$

Nous aurons besoin de faire l'hypothèse que  $\Lambda_\omega$  est *transverse aux variétés stables*, dans le sens suivant. L'ensemble capté  $K$  étant un ensemble hyperbolique, chaque point  $\rho \in K$  admet une  $(\epsilon)$ -variété fortement stable locale  $W_\epsilon^-(\rho)$ , tangente à  $E_\rho^-$ , définie par

$$W_\epsilon^-(\rho) = \{\rho' \in \mathcal{E}; d(\Phi^t(\rho), \Phi^t(\rho')) < \epsilon \text{ pour tout } t \geq 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\Phi^t(\rho'), \Phi^t(\rho)) = 0\},$$

où  $\epsilon > 0$  est un petit paramètre.

On demande que  $\omega$  soit telle que, pour tout  $\rho \in K$ , pour tout  $\rho' \in \Lambda_\omega$ , pour tout  $t \geq 0$ , et pour  $\epsilon$  suffisamment petit, on a

$$(\Phi^t(\rho') \in W_\epsilon^-(\rho)) \implies W_\epsilon^-(\rho) \text{ et } \Phi^t(\Lambda_\omega) \text{ s'intersectent transversalement en } \Phi^t(\rho'), \quad (1.18)$$

c'est-à-dire que

$$T_{\Phi^t(\rho')} \Lambda_\omega \oplus T_{\Phi^t(\rho')} W_\epsilon^-(\rho) = T_{\Phi^t(\rho')} \mathcal{E}. \quad (1.19)$$

Remarquons que (1.19) équivaut à  $T_{\Phi^t(\rho')} \Lambda_\omega \cap T_{\Phi^t(\rho')} W_\epsilon^-(\rho) = \{0\}$ .

**Ondes planes tordues** Notre résultat principal peut se résumer ainsi : en supposant que l'ensemble capté  $K$  est hyperbolique, que la pression topologique  $\mathcal{P}(1/2)$  que nous définirons dans la section 3.5 est strictement négative et que  $\Lambda_\omega$  vérifie la condition de transversalité ci-dessus, alors au voisinage de tout point  $\rho$  de  $K$ , l'onde plane tordue  $E(\cdot; \omega)$  peut s'écrire, à un reste négligeable près, comme une somme infinie, mais convergente, d'états lagrangiens. Ces états lagrangiens sont associés à des lagrangiennes qui peuvent toutes se projeter sans caustiques sur la variété instable en  $\rho$ . De plus, les symboles des états lagrangiens intervenant dans la somme décrivant  $E_h(\cdot; \omega)$  voient leur norme  $L^2$  décroître exponentiellement avec l'indice de sommation.

Sous les hypothèses sus-mentionnées, ce résultat donne donc une description explicite des ondes planes tordues dans la limite semi-classique, ce qui est beaucoup plus précis que la description des mesures semi-classiques associées comme dans [DG14].

Plus rigoureusement, tout ceci s'écrit :

**Théorème 1.19** ([Ing15a]). *Supposons que  $K$  est un ensemble hyperbolique, vérifiant  $\mathcal{P}(1/2) < 0$ , et que  $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$  est tel que (1.18) soit vérifiée. On peut alors construire :*

— un ensemble fini de points  $(\rho_b)_{b \in B_1} \subset K$  ;

### 1.3 Les résultats principaux de cette thèse

- une famille  $(\Pi_b)_{b \in B_1}$  d'opérateurs pseudo-différentiels microlocalement supportés dans des petits voisinages des  $\rho_b$ , tels que  $\sum_{b \in B_1} \Pi_b = I$  microlocalement dans un voisinage de  $K$  dans  $T^*X$  ;
- pour tout  $b \in B_1$ , un système de coordonnées symplectiques  $(y^{\rho_b}, \eta^{\rho_b})$  dans un voisinage de  $\rho_b$  ;
- une famille  $(\mathcal{U}_b)_{b \in B_1}$  d'opérateurs intégraux de Fourier quantifiant la changement de coordonnées symplectiques  $\kappa_b : (x, \xi) \mapsto (y^{\rho_b}, \eta^{\rho_b})$ , tels que le résultat suivant soit vrai.

Pour tous  $r > 0$ ,  $\ell > 0$ , il existe  $M_{r,\ell} > 0$  tel que l'on ait lorsque  $h \rightarrow 0$  :

$$(\mathcal{U}_b \Pi_b E_h(\cdot; \omega))(y^{\rho_b}) = \sum_{n=0}^{\lfloor M_{r,\ell} |\log h| \rfloor} \sum_{\beta \in \tilde{\mathcal{B}}_n} e^{i\phi_{\beta,b}(y^{\rho_b}; \omega)/h} a_{\beta,b}(y^{\rho_b}; \omega, h) + R_r, \quad (1.20)$$

où  $\phi_{\beta,b}$  appartient à  $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ , et où  $a_{\beta,b} \in S^{comp}(T^*Y)$  est un symbole classique au sens de la définition A.1. Chaque  $\phi_{\beta,b}$  est défini dans un voisinage du support de  $a_{\beta,b}$ . L'ensemble  $\tilde{\mathcal{B}}_n$  sera construit comme un ensemble de mots de longueur environ  $n$  sur un alphabet fini, de sorte que son cardinal croît exponentiellement avec  $n$ .

Quand  $h \rightarrow 0$ , on a

$$\|R_r\|_{C^\ell} = O(h^r).$$

Pour tous  $\ell \in \mathbb{N}$ ,  $\epsilon > 0$ , il existe  $C_{\ell,\epsilon}$  telle que

$$\sum_{\beta \in \mathcal{B}_n} \|a_{\beta,b}\|_{C^\ell} \leq C_{\ell,\epsilon} e^{n(\mathcal{P}(1/2)+\epsilon)}. \quad (1.21)$$

Remarquons que l'hypothèse sur  $\mathcal{P}(1/2)$  nous assure que le terme de gauche dans (1.21) décroît exponentiellement quand  $n \rightarrow \infty$ . On peut utiliser cette propriété pour déduire le corollaire suivant.

**Corollaire 1.20.** *On fait les mêmes hypothèses que dans le théorème 1.19. Soit  $\chi \in C_c^\infty(X)$ . Il existe alors une constante  $C_\chi$  indépendante de  $h$  telle que pour tout  $h > 0$ , on a*

$$\|\chi E_h(\cdot; \omega)\|_{L^2} \leq C_\chi.$$

**Mesures semi-classiques** Il est possible d'utiliser le théorème 1.19 pour décrire la mesure semi-classiques associées à la famille  $E_h(\cdot, \omega)$ . Dans le corollaire suivant,  $\pi_b$  désigne le symbole principal de l'opérateur  $\Pi_b$  introduit dans le théorème 1.19.

**Corollaire 1.21.** *On fait les mêmes hypothèses que dans le théorème 1.19. Il existe une constante  $0 < c \leq 1$  telle que pour tout fonction  $\chi \in C_c^\infty(X)$ , il existe des fonctions  $e_{\beta,b,\chi}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\beta \in \tilde{\mathcal{B}}_n$  et  $b \in B_1$  telles que pour tout  $a \in C_c^\infty(T^*X)$ , on a*

$$\langle Op_h(\pi_b^2 a) \chi E_h, \chi E_h \rangle = \int_{T^*X} a(x, v) d\mu_{\omega,b,\chi}(x, v) + O(h^c),$$

où

$$d\mu_{\omega,b,\chi}(\kappa_b^{-1}(y^{\rho_b}, \eta^{\rho_b})) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\beta \in \mathcal{B}_n} f_{\beta,b,\chi}(y^{\rho_b}) \delta_{\{\eta^{\rho_b} = \partial\phi_{j,n}(y^{\rho_b})\}} dy^{\rho_b},$$

Les fonctions  $f_{\beta,b,\chi}$  vérifient une estimée de décroissance exponentielle analogue à (1.21).

Nous donnerons une preuve de ce corollaire dans le chapitre 6. Nous verrons alors que les fonctions  $e_{n,\beta,b}$  peuvent être construites à partir des  $a_{\beta,b}^0(y^{\rho_b})$ , c'est-à-dire des symboles principaux des  $a_{\beta,b}(y^{\rho_b})$  (au sens de la définition A.1).

Les mesures  $\mu_{\omega,b,\chi}$  sont reliées aux mesures  $\mu_{\omega}$  apparaissant dans le théorème 1.13 : on a

$$d\mu_{\omega,b,\chi}(x, v) = \chi^2(x) \pi_b^2(x, v) d\mu_{\omega}(x, v).$$

On a vu dans la section 1.2.2 que l'on avait  $d\mu_{\omega} = \lim_{t \rightarrow \infty} (\Phi^t)_*(|1 - \chi(x)|^2 dx \delta_{\{\xi = \omega\}})$ . Dans le contexte de la section 1.2.2, cette convergence n'avait lieu que pour presque tout  $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$ . Ici, la convergence a lieu pour tout  $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$  vérifiant l'hypothèse de transversalité : ceci provient du fait que quand l'ensemble capté est hyperbolique, on a toujours  $\mathcal{P}(1) < 0$  (cf. [Non11, §2.2]).

### 1.3.3 Ondes planes tordues en courbure négative

Les résultats de la section précédente peuvent être améliorés si l'on suppose que  $V \equiv 0$ , de sorte que  $\Phi^t$  est le flot géodésique, et que  $(X, g)$  est de courbure sectionnelle négative ou nulle. Par exemple, on peut montrer que l'hypothèse de transversalité est toujours vérifiée sous ces conditions :

**Proposition 1.22.** *Soit  $(X, g)$  une variété euclidienne près de l'infini, de courbure sectionnelle  $\leq 0$ . On suppose que le flot géodésique sur  $(X, g)$  possède un ensemble capté hyperbolique. Alors pour tout  $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$ , (1.18) est vérifiée.*

Énonçons maintenant notre résultat principal sur les ondes planes tordues en courbure négative. Ce théorème est analogue au théorème 1.19. La principale différence est que les états lagrangiens obtenus dans la décomposition de  $E_h$  correspondent à des lagrangiennes qui peuvent toutes se projeter sans caustique sur la variété de base  $X$ . Ceci peut sembler une amélioration assez anecdotique du théorème, mais elle permet de montrer de meilleures estimées sur les ondes planes tordues (Corollaire 1.24), un phénomène d'équidistribution, et une estimée sur la mesure de Hausdorff des ensembles nodaux (voir les corollaires suivant le théorème).

**Théorème 1.23.** *[Ing15b] Supposons que  $(X, g)$  soit une variété euclidienne près de l'infini, de courbure sectionnelle  $\leq 0$ . Supposons que  $K$  soit un ensemble hyperbolique pour  $(\Phi^t)$ , et que  $\mathcal{P}(1/2) < 0$ .*

*Soit  $\mathcal{K} \subset X$  un compact. Il existe alors  $\varepsilon_{\mathcal{K}} > 0$  tel que pour tout  $\chi \in C_c^\infty(X)$  ayant son support dans  $\mathcal{K}$  et de diamètre plus petit que  $\varepsilon_{\mathcal{K}}$ , le résultat suivant est vérifié. Il*

### 1.3 Les résultats principaux de cette thèse

existe un ensemble  $\tilde{\mathcal{B}}^X$  et une fonction  $\tilde{n} : \tilde{\mathcal{B}}^X \rightarrow \mathbb{N}$  telle que le nombre d'éléments dans  $\{\tilde{\beta} \in \tilde{\mathcal{B}}^X; \tilde{n}(\tilde{\beta}) \leq N\}$  croît au plus exponentiellement avec  $N$ , et telle que le résultat suivant soit vérifié.

Pour tous  $r > 0$ ,  $\ell > 0$ , il existe  $M_{r,\ell} > 0$  tel que l'on ait quand  $h \rightarrow 0$  :

$$\chi E_h(x) = \sum_{\substack{\beta \in \tilde{\mathcal{B}}^X \\ \tilde{n}(\tilde{\beta}) \leq M_{r,\ell} |\log h|}} e^{i\varphi_{\tilde{\beta}}(x)/h} a_{\tilde{\beta},\chi}(x; h) + R_r, \quad (1.22)$$

où  $a_{\tilde{\beta}} \in S^{comp}(X)$ , et chaque  $\varphi_{\tilde{\beta}}$  est une fonction lisse définie dans un voisinage du support de  $a_{\tilde{\beta}}$ . On a

$$\|R_r\|_{C^\ell} = O(h^r).$$

Pour tous  $\ell \in \mathbb{N}$ ,  $\epsilon > 0$ , il existe  $C_{\ell,\epsilon}$  tel que

$$\sum_{\substack{\beta \in \tilde{\mathcal{B}}^X \\ \tilde{n}(\tilde{\beta})=n}} \|a_{\tilde{\beta},\chi}\|_{C^\ell} \leq C_{\ell,\epsilon} e^{n(P(1/2)+\epsilon)}. \quad (1.23)$$

De plus, il existe une constante  $C_1$  telle que pour tous  $\tilde{\beta}, \tilde{\beta}' \in \tilde{\mathcal{B}}^X$  avec  $\tilde{\beta} \neq \tilde{\beta}'$ , on a

$$|\partial\varphi_{\tilde{\beta}}(x) - \partial\varphi_{\tilde{\beta}'}(x)| \geq C_1 e^{-\sqrt{b_0} \max(\tilde{n}(\tilde{\beta}), \tilde{n}(\tilde{\beta}'))}, \quad (1.24)$$

où  $-b_0$  est la valeur minimale prise par la courbure sectionnelle sur  $X$ .

Comme corollaire du théorème 1.23, on peut déduire le résultat suivant

**Corollaire 1.24.** *On fait les mêmes hypothèses que dans le théorème 1.23. Soit  $\ell \in \mathbb{N}$  et  $\chi \in C_c^\infty(X)$ . Il existe alors  $C_{\ell,\chi} > 0$  telle que, pour tout  $h > 0$ , on a*

$$\|\chi E_h\|_{C^\ell} \leq \frac{C_{\ell,\chi}}{h^\ell}.$$

En particulier, la suite  $(E_h)_h$  est bornée indépendamment de  $h$  dans  $L_{loc}^\infty$ . Ce résultat est donc bien meilleur que les bornes (3), (ou même que la conjecture de Sarnak) dans le cas des variétés compactes. Ceci est dû au fait que le système est très ouvert, en raison de la condition de pression topologique. Il n'est pas du tout clair qu'une telle estimée puisse encore être vraie sans cette condition de pression topologique.

**Mesures semi-classiques** Là encore, on peut utiliser le théorème 1.23 pour décrire les mesures semi-classiques associées à la famille des  $E_h(\cdot; \omega)$ , de façon un peu plus précise que dans le corollaire 1.21.



**Corollaire 1.25.** *On fait les mêmes hypothèses que dans le théorème 1.23. Soit  $\chi \in C_c^\infty(X)$  et soit  $\epsilon > 0$ . Il existe alors une mesure finie  $\mu_{\omega, \chi}$  sur  $S^*X$  telle que l'on a, pour tout  $a \in C_c^\infty(T^*X)$  :*

$$\langle \text{Oph}(a)\chi E_h, \chi E_h \rangle = \int_{T^*X} a(x, \xi) d\mu_{\omega, \chi}(x, \xi) + O\left(h^{\min\left(1, \frac{|P(1/2)|}{2\sqrt{b_0}} - \epsilon\right)}\right),$$

où  $-b_0$  est la valeur minimale prise par la courbure sectionnelle sur  $X$ .

Si  $\mathcal{K} \subset X$  est un compact et si le support de  $\chi$  est dans  $\mathcal{K}$  et est de diamètre inférieur à  $\epsilon_{\mathcal{K}}$ , on a

$$d\mu_{\omega, \chi}(x, \xi) = \sum_{\tilde{\beta} \in \tilde{\mathcal{B}}^x} |a_{\tilde{\beta}}^0|^2(x) \delta_{\{\xi = \partial\varphi_{\tilde{\beta}}(x)\}} dx,$$

où  $a_{\tilde{\beta}}^0$  est le symbole principal de  $a_{\tilde{\beta}}$  comme défini dans l'annexe A.1.

De plus, pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , il existe  $c_N > 0$  telle que pour tout  $x \in X$  tel que  $\chi(x) = 1$ , on a

$$\sum_{\substack{\tilde{\beta} \in \tilde{\mathcal{B}}^x \\ \tilde{n}(\tilde{\beta}) \geq N}} |a_{\tilde{\beta}}^0|^2(x) \geq c_N. \quad (1.25)$$

Ce corollaire sera prouvé dans le chapitre 6. L'équation (1.25) peut-être vue comme une forme faible d'équidistribution des ondes planes tordues. On a en fait mieux : on a une forme faible de la conjecture 0.4 d'équidistribution à petite échelle.

**Corollaire 1.26.** *Supposons que les hypothèses du théorème 1.23 soient vérifiées. Soit  $\chi \in C_c^\infty(X)$ . Il existe alors des constantes  $C_0, C_1, C_2 > 0$  telles que pour tout  $x_0 \in X$  tel que  $\chi(x_0) = 1$ , pour toute suite  $r_h$  telle que  $1 \gg r_h > C_0 h$ , on a pour  $h$  assez petit :*

$$C_1 r_h^d \leq \int_{B(x_0, r_h)} |E_h|^2(x) dx \leq C_2 r_h^d. \quad (1.26)$$

**Lignes nodales** Fixons un ouvert borné  $\mathcal{O} \subset X$  et un  $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$ , et considérons

$$N_{\mathcal{O}, h} := \{x \in \mathcal{O}; \Re(E_h)(x, \omega) = 0\}.$$

On a alors l'encadrement suivant, qui est l'analogie de la conjecture 0.1.

**Théorème 1.27.** *On fait les mêmes hypothèses que pour le théorème 1.23. Il existe alors  $C_{\mathcal{O}}, C'_{\mathcal{O}} > 0$  indépendantes de  $h$  telles que*

$$\frac{C_{\mathcal{O}}}{h} \leq \text{Haus}_{d-1}(N_{\mathcal{O}, h}) \leq \frac{C'_{\mathcal{O}}}{h},$$

où  $\text{Haus}_{d-1}$  désigne la mesure de Hausdorff  $(d-1)$ -dimensionnelle.

### 1.3 Les résultats principaux de cette thèse

On a bien entendu le même résultat en considérant la partie imaginaire d'ondes planes tordues plutôt que la partie réelle.

La borne inférieure ci-dessus peut être déduite de [Log16b], mais notre preuve a été mise en ligne dans [Ing15b] avant celle de Logunov, utilise des méthodes très différentes, et se déduit assez facilement du théorème 1.23. Quant à la borne supérieure, elle est une conséquence directe du résultat principal de [Hez16] et du corollaire 1.26.

#### 1.3.4 Nombre de domaines nodaux de la somme de deux ondes planes tordues sur des surfaces de courbure négative

Étant donné un ouvert  $\Omega \subset X$ , on peut compter le nombre de domaines nodaux de la partie réelle d'une onde plane tordue, inclus dans  $\Omega$ , c'est-à-dire le nombre de composantes connexes de  $\{x \in \Omega; \Re(E_h)(x; \omega) \neq 0\}$  n'intersectant pas  $\partial\Omega$ .

L'argument de Courant dans [CH67] s'adapte sans peine à ce cadre pour montrer que ce nombre de domaines nodaux est borné par  $Ch^{-d}$  pour un  $C > 0$  indépendant de  $h$  (voir la section 7.3.1 pour plus de détails). Il est naturel, mais difficile, de se demander si on peut minorer cette quantité par  $ch^{-d}$  pour un  $c > 0$ .

Le résultat de cette section nous dit que sur une surface de courbure négative, quitte à perturber légèrement la métrique, on a une telle borne inférieure pour les nombre de domaines nodaux inclus dans  $\Omega$  de la somme de deux ondes planes tordues pour des  $\omega$  assez proches.

#### Perturbations génériques d'une métrique

Soit  $(X, g)$  une variété riemannienne, et soit  $\Omega \subset X$  un ouvert borné. On note  $\mathcal{G}_\Omega$  l'ensemble des métriques lisses sur  $X$  qui coïncident avec  $g$  en dehors de  $\Omega$ . Pour tout  $k \geq 2$ , la distance  $\|g - g'\|_{C^k(\Omega)}$  entre des éléments de  $\mathcal{G}_\Omega$  n'est pas intrinsèque, car on la définit en utilisant des cartes locales. Néanmoins, la topologie induite par cette distance ne dépend pas du choix de coordonnées.

Soit  $P(g')$  une propriété pouvant être vérifiée par une métrique  $g'$  sur  $X$ . On dira que  $P$  est vérifiée pour une perturbation  $C^k(\Omega)$ -générique de  $g$  s'il existe un voisinage ouvert  $G_0$  de  $g$  dans  $\mathcal{G}_\Omega$  tel que l'ensemble  $\{g' \in G_0; P(g') \text{ est vérifiée}\}$  est ouvert et dense dans  $G_0$  pour la topologie  $C^k(\Omega)$ .

#### Énoncé du théorème

**Théorème 1.28** ([Ing]). *Supposons que  $(X, g)$  soit une variété euclidienne près de l'infini de dimension 2, de courbure sectionnelle  $\leq 0$ . Supposons que la courbure sectionnelle est strictement négative sur  $\overset{\circ}{X}_0$ , que  $K \neq \emptyset$ , et que  $\mathcal{P}(1/2) < 0$ .*

*Il existe  $\epsilon > 0$  tel que pour tous  $\omega_0, \omega_1 \in \mathbb{S}^1$  avec  $|\omega_0 - \omega_1| < \epsilon$  et  $\omega_0 \neq \omega_1$ , et pour tout ouvert non-vide  $\Omega \subset X$ , le résultat suivant soit vrai. Il existe un ouvert  $\mathcal{O}_\Omega \Subset X_0$  tel que*

pour une perturbation  $C^k(\mathcal{O}_\Omega)$ -générique  $g'$  de  $g$ , il existe des constantes  $c > 0$  et  $h_0 > 0$  tels que pour tout  $0 < h < h_0$  la fonction  $\Re(E_h(\cdot, \omega_0; g')) + \Re(E_h(\cdot, \omega_1; g'))$  a au moins  $ch^{-2}$  domaines nodaux inclus dans  $\Omega$ .

Ce théorème sera prouvé au chapitre 7.

## 1.4 Vers un cadre plus général

Les résultats précédents ont été formulé pour les ondes planes tordues sur des variétés euclidiennes près de l'infini. Il y a toutefois plusieurs raisons pour vouloir écrire certains de ces résultats dans un cadre plus général :

- Nous avons vu dans la section 0.2.1 que sur les surfaces de Schottky, les séries d'Eisenstein pouvaient être définies comme la somme :

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \left( \frac{1 - |\gamma x|^2}{4|\gamma x - \xi|^2} \right)^s.$$

Chacun des termes de la somme peut se réécrire comme  $\left( \frac{1 - |\gamma x|^2}{4|\gamma x - \xi|^2} \right)^{1/2} e^{\frac{i}{h} \frac{1 - |\gamma x|^2}{4|\gamma x - \xi|^2}}$ , c'est-à-dire comme un état lagrangien de phase  $\frac{1 - |\gamma x|^2}{4|\gamma x - \xi|^2}$ .

Il est toutefois aussi possible de définir les séries d'Eisenstein par une définition analogue à celle de la proposition-définition 1.3. On peut alors retrouver le fait que les séries d'Eisenstein s'écrivent comme une somme d'états lagrangiens par une généralisation du théorème 1.23. L'avantage de cette approche, que nous détaillerons dans la section 3.6.3, est qu'elle marche encore pour les (suffisamment petites) perturbations compactes des surfaces de Schottky.

- Nous avons cherché à écrire nos résultats de la manière la plus axiomatique possible, afin qu'ils s'appliquent à des variétés plus générales que les variétés euclidiennes à l'infini. Par exemple, il est peut-être possible de définir des ondes planes tordues pour des variétés asymptotiquement hyperboliques d'une manière analogue à celle de la proposition-définition 1.3. Si une telle définition est possible, alors l'analogue des théorèmes 1.19 et 1.23 sera encore vrai dans ce cadre.
- Sur les variétés euclidiennes près de l'infini, on peut considérer des fonctions propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami plus générales que les ondes planes tordues : il suffit que la fonction propre s'écrive comme un état lagrangien associé une lagrangienne ayant certaines propriétés d'invariance par le flot, plus un terme « purement sortant » pour que l'analogue du théorème 1.19 s'applique. En particulier, nous montrerons dans la section 3.6.2 qu'en dimension 2, on pourra appliquer l'analogue du théorème 1.19 à des fonctions de la forme

$$\int_{\mathbb{S}^1} E_h(x, \omega) e^{i\omega k/h} d\omega,$$

#### 1.4 Vers un cadre plus général

du moment que  $k/h \in \mathbb{Z}$ . Ce sont des « ondes de moment angulaire  $k$  ». Ceci peut permettre de mieux comprendre la structure de l'opérateur de diffusion dans la limite semi-classique.



## Chapitre 2

# Équidistribution des décalages de phase et diffusion piégée

L'objectif de ce chapitre est de démontrer le théorème 1.18 sur l'équidistribution des décalages de phase. Nous suivons donc de près l'article [Ing16], qui adapte la preuve de [GRHZ15] à un cadre plus général. Ce chapitre est entièrement indépendant des autres chapitres de cette thèse. Libre au lecteur de le sauter pour lire plus vite les chapitres suivants.

---

Commençons par rappeler l'énoncé du théorème 1.18 :

**Théorème.** *Supposons que la variété  $(X, g)$  et le potentiel  $V$  sont tels que (1.14) et (1.16) sont vérifiées. Soit  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue telle que  $1 \notin \text{supp} f$ . On a alors*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \langle \mu_h, f \rangle = \frac{\text{Vol}(\mathcal{I})}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\theta.$$

Rappelons que l'équation (1.14) affirmait que

$$\text{Vol}(\tilde{\Gamma}^\pm) = 0,$$

tandis que l'équation (1.16) affirmait que

$$\forall l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad \text{Vol}\left(\{(\omega, \eta) \in \mathcal{I}; \kappa^l(\omega, \eta) \text{ est bien défini et } \kappa^l(\omega, \eta) = (\omega, \eta)\}\right) = 0.$$

Bien que nous n'ayons pas besoin de ce résultat par la suite, montrons que l'équation (1.14) est toujours vérifiée si le niveau d'énergie  $\mathcal{E}$  est non-dégénéré.

**Lemme 2.1.** *Supposons que  $p : T^*X \rightarrow \mathbb{R}$  est tel que  $\forall \rho \in \mathcal{E}$ , on a  $d_\rho p \neq 0$ . On a alors  $\text{Vol}(\tilde{\Gamma}^\pm) = 0$ .*

*Démonstration.* La preuve est très semblable à celle de [DZ, Proposition 6.5]. Si  $\forall \rho \in \mathcal{E}$ , on a  $d_{\rho}p \neq 0$ , alors  $\mathcal{E}$  est une variété lisse, qui peut être équipée de la mesure de Liouville  $\mu$ . Cette mesure est invariante par le flot hamiltonien  $(\Phi^t)$ .

Remarquons que, en dehors de  $X_0$ , cette mesure est juste la mesure de Lebesgue sur  $S^*(X \setminus X_0)$ , de sorte que, si  $C_{r_0, r_1} := (B(0, r_1) \setminus B(0, r_0)) \subset (\mathbb{R}^d \setminus K_0) \simeq (X \setminus X_0)$ , on a

$$\text{Vol}(\tilde{\Gamma}^{\pm}) = 0 \iff \exists 0 < r_0 < r_1 \text{ suffisamment grand pour que } \mu(\Gamma^{\pm} \cap C_{r_0, r_1}) = 0.$$

Raisonnons par l'absurde, et supposons que l'on peut trouver  $0 < r_0 < r_1$  tels que  $\mu(\Gamma^{\pm} \cap C_{r_0, r_1}) > 0$ . Comme la trajectoire d'un point dans  $\Gamma^{\pm} \cap C_{r_0, r_1}$  est une ligne droite pour  $\pm t \geq 0$ , on peut trouver un temps  $t_0 = t_0(r_0, r_1)$  tel que pour tout  $j \geq 1$ ,  $\Phi^{\mp j t_0}(\Gamma^{\pm} \cap C_{r_0, r_1}) \cap (\Gamma^{\pm} \cap C_{r_0, r_1}) = \emptyset$ . Comme  $\Phi^{t_0}$  est un difféomorphisme, on a alors que pour tous  $j, j' \in \mathbb{N}$  tels que  $j \neq j'$ ,  $(\Phi^{\mp j t_0}(\Gamma^{\pm} \cap C_{r_0, r_1})) \cap (\Phi^{\mp j' t_0}(\Gamma^{\pm} \cap C_{r_0, r_1})) = \emptyset$ .

D'autre part, comme  $\mu$  est invariante par le flot hamiltonien, on a que

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{j=0}^{\infty} \Phi^{\mp j t_0}(\Gamma^{\pm} \cap C_{r_0, r_1})\right) &= \sum_{j=0}^{\infty} \mu\left(\Phi^{\mp j t_0}(\Gamma^{\pm} \cap C_{r_0, r_1})\right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \mu(\Gamma^{\pm} \cap C_{r_0, r_1}) \\ &= +\infty, \end{aligned}$$

par hypothèse. Mais pour tout  $j \geq 0$ ,  $\Phi^{\mp j t_0}(\Gamma^{\pm} \cap C_{r_0, r_1})$  appartient à une région compacte de  $\mathcal{E}$ , où les points de la base sont soit dans  $X_0$ , soit dans  $B(0, r_1) \subset \mathbb{R}^d$ . Par conséquent, on doit avoir  $\mu\left(\bigcup_{j=0}^{\infty} \Phi^{\mp j t_0}(\Gamma^{\pm} \cap C_{r_0, r_1})\right) < +\infty$ , ce qui est absurde.  $\square$

Tâchons maintenant de reformuler plus précisément l'équation (1.16), en explicitant le domaine de  $\kappa^l$ .

## 2.1 Dynamique classique

On définit les « bons » ensembles  $(\mathcal{G}_k^+) \subset T^*\mathbb{S}^{d-1}$  et  $(\mathcal{G}_k^-) \subset T^*\mathbb{S}^{d-1}$  par récurrence sur  $k \in \mathbb{N}$ , par

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_0^+ &:= T^*\mathbb{S}^{d-1} \setminus \tilde{\Gamma}^-, & \mathcal{G}_{k+1}^+ &:= \{(\omega, \eta) \in \mathcal{G}_k^+; \kappa(\omega, \eta) \in \mathcal{G}_0^+\}, \\ \mathcal{G}_0^- &:= T^*\mathbb{S}^{d-1} \setminus \tilde{\Gamma}^+, & \mathcal{G}_{k+1}^- &:= \{(\omega, \eta) \in \mathcal{G}_k^-; \kappa(\omega, \eta) \in \mathcal{G}_0^-\}. \end{aligned}$$

La relation de diffusion peut alors être itérée et inversée, pour obtenir pour tout  $k \geq 1$  des symplectomorphismes

$$\begin{aligned} \kappa^k &: \mathcal{G}_{k-1}^+ \longrightarrow \mathcal{G}_{k-1}^-, \\ \kappa^{-k} &: \mathcal{G}_{k-1}^- \longrightarrow \mathcal{G}_{k-1}^+, \end{aligned}$$

## 2.2 Formules des traces

ou, écrit d'une manière plus condensée,  $\kappa^k : \mathcal{G}_{|k|-1}^{\epsilon(k)} \rightarrow \mathcal{G}_{|k|-1}^{-\epsilon(k)}$ , où  $\epsilon(k)$  est le signe de  $k$ .

On définit aussi les « mauvais » ensembles comme

$$\mathcal{B}_k^\pm := T^*\mathbb{S}^{d-1} \setminus \mathcal{G}_k^\pm. \quad (2.1)$$

**Lemme 2.2.** *Supposons que (1.14) soit vérifiée. Soit  $k \in \mathbb{Z}$ , et  $\epsilon = \pm$ . Alors  $\mathcal{B}_k^\epsilon$  a une mesure de Liouville nulle.*

*Démonstration.* Remarquons qu'il est aussi possible de définir, de manière équivalente, les mauvais ensembles par récurrence par

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0^+ &:= \tilde{\Gamma}^+, & \mathcal{B}_{k+1}^+ &:= \{(\omega, \eta) \in T^*\mathbb{S}^{d-1} \setminus \mathcal{B}_k^+; \kappa(\omega, \eta) \in \mathcal{B}_0^+\} \\ \mathcal{B}_0^- &:= \tilde{\Gamma}^-, & \mathcal{B}_{k+1}^- &:= \{(\omega, \eta) \in T^*\mathbb{S}^{d-1} \setminus \mathcal{B}_k^-; \kappa(\omega, \eta) \in \mathcal{B}_0^-\}. \end{aligned}$$

Puisque, par hypothèse,  $\tilde{\Gamma}^\pm$  a une mesure de Liouville nulle, et puisque  $\kappa$  préserve la mesure de Liouville, le résultat s'ensuit.  $\square$

Pour  $l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , on définit l'ensemble des points interagissants de période  $l$  comme

$$\mathcal{F}_l := \{(\omega, \eta) \in \mathcal{I} \cap \mathcal{G}_{|l|-1}^{\epsilon(l)}; \kappa^l(\omega, \eta) = (\omega, \eta)\}, \quad (2.2)$$

où  $\epsilon(l)$  est le signe de  $l$ . Remarquons que cet ensemble est fermé.

L'hypothèse (1.16) peut alors se reformuler comme suit :

Pour tout  $l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , la mesure de Liouville de  $\mathcal{F}_l$  est nulle.

Remarquons que, comme  $\kappa^l$  préserve le volume, cette hypothèse est équivalente à l'énoncé apparemment plus faible que pour tout  $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , la mesure de Liouville de  $\mathcal{F}_l$  est nulle.

Remarquons aussi que cette hypothèse implique que

$$\text{Vol}(\partial\mathcal{I}) = 0. \quad (2.3)$$

En effet, un point sur la frontière de  $\mathcal{I}$  est dans  $\mathcal{I}$  car  $\mathcal{I}$  est fermé, et ce point est fixé par  $\kappa$ .

## 2.2 Formules des traces

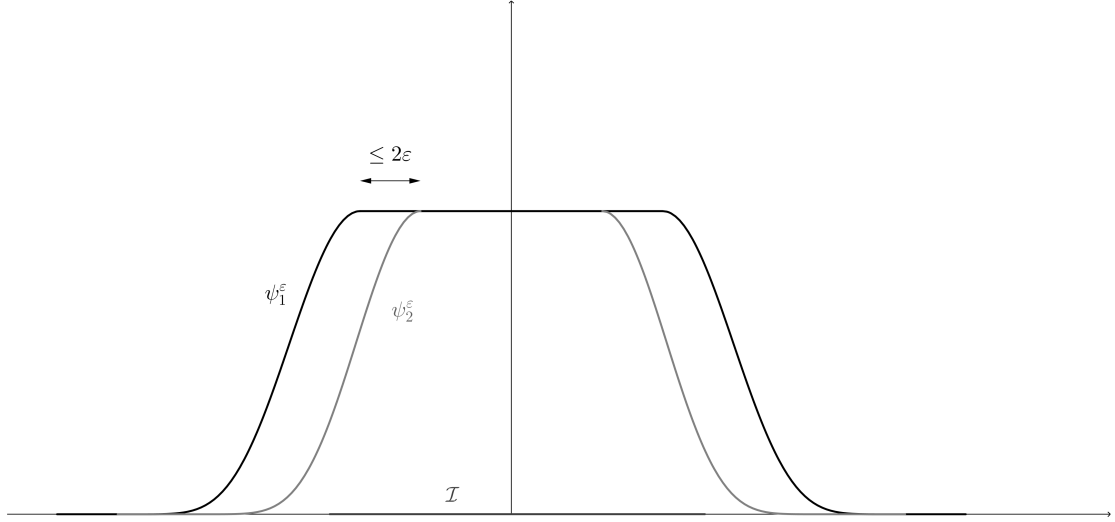
L'objectif de cette section est de prouver la proposition suivante, qui est le point clef de la preuve.

**Proposition 2.3.** *Supposons que la variété  $(X, g)$  et le potentiel  $V$  sont tels que (1.14) et (1.16) sont vérifiées. Soit  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . On a alors*

$$\text{Tr}((S_h^k - Id)) = -\frac{\text{Vol}(\mathcal{I})}{(2\pi h)^{d-1}} + o(h^{-(d-1)}). \quad (2.4)$$

*Démonstration.* Pour prouver cette proposition, on fixe un  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , et on construit une partition de l'unité adaptée, d'une manière analogue à [MO05].




 FIGURE 2.1 – Les fonctions de troncature  $\psi_1^\varepsilon$  et  $\psi_2^\varepsilon$ 

**Partition de l'unité** Rappelons que  $\varepsilon(k)$  désigne le signe de  $k$ . On écrit

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{G}}_k &:= \mathcal{G}_{|k|-1}^{\varepsilon(k)} \\ \tilde{\mathcal{B}}_k &:= T^*\mathbb{S}^{d-1} \setminus \tilde{\mathcal{G}}_k.\end{aligned}$$

$\tilde{\mathcal{G}}_k$  est l'ensemble où  $\kappa^k$  est bien définie. Finalement, on écrit

$$\mathcal{P}_k := \tilde{\mathcal{B}}_k \cup \mathcal{F}_k \subset T^*\mathbb{S}^{d-1},$$

où les  $\mathcal{F}_l$  sont comme dans (2.2). Cet ensemble est fermé, est de mesure nulle par le lemme 2.2 et par (1.16), et  $\kappa^k$  est bien définie et ne possèdent pas de points fixes dans  $\mathcal{I} \setminus \mathcal{P}_k$ .

Comme  $\mathcal{P}_k$  est fermé avec une mesure de Liouville nulle, par régularité extérieure de la mesure de Liouville, on peut trouver pour tout  $\varepsilon > 0$  une fonction de troncature  $\chi_\varepsilon^k \in C_c^\infty(T^*\mathbb{S}^{d-1}; [0, 1])$  telle que  $\chi_\varepsilon^k(\omega, \eta) = 1$  si  $(\omega, \eta) \in \mathcal{P}_k$ , telle que le support de  $\chi_\varepsilon^k$  est contenu dans un  $\varepsilon$ -voisinage de  $\mathcal{I}$ , et tel que la mesure de Liouville du support de  $\chi_\varepsilon^k$  est plus petite que  $\varepsilon$  :

$$\text{Vol}(\text{supp}(\chi_\varepsilon^k)) \leq \varepsilon.$$

On note  $Op_h(\chi_\varepsilon^k)$  la quantification de Weyl de  $\chi_\varepsilon^k$ , comme définie dans la section A.1.

On prend aussi  $\psi_\varepsilon^1 \in C_c^\infty(T^*\mathbb{S}^{d-1}; [0, 1])$  telle que  $\psi_\varepsilon^1 = 1$  près de  $\mathcal{I}$  et  $\psi_\varepsilon^1(\omega, \eta) = 0$  si  $d((\omega, \eta), \mathcal{I}) \geq \varepsilon$  et  $\psi_\varepsilon^2 \in C_c^\infty(T^*\mathbb{S}^{d-1}; [0, 1])$  telle que  $\psi_\varepsilon^2 = 0$  en dehors de  $\mathcal{I}$ , et  $\psi_\varepsilon^2 = 1$  en dehors d'un  $\varepsilon$ -voisinage de  $T^*\mathbb{S}^{d-1} \setminus \mathcal{I}$  (voir la figure 2.1).

## 2.2 Formules des traces

Remarquons que l'on a pour tout  $(\omega, \eta) \in T^*\mathbb{S}^{d-1}$ ,  $\psi_\varepsilon^1(\omega, \eta) \geq \psi_\varepsilon^2(\omega, \eta)$ , et que  $\|\psi_\varepsilon^1 - \psi_\varepsilon^2\|_{L^1} = O(\varepsilon)$  grâce à (2.3).

On a

$$1 = (1 - \psi_\varepsilon^1) + \psi_\varepsilon^2(1 - \chi_\varepsilon^k) + \psi_\varepsilon^2\chi_\varepsilon^k + (\psi_\varepsilon^1 - \psi_\varepsilon^2). \quad (2.5)$$

Le premier terme correspond aux points en dehors de la région d'interactions. Le deuxième correspond aux points de la région d'interaction qui ne sont ni piégés, ni des points fixes, tandis que les deux derniers termes ont un support de volume  $O(\varepsilon)$ . Nous allons calculer la trace de  $(S_h^k - Id)$  à l'aide de cette décomposition.

**Trace à l'intérieur de la région d'interaction** Grâce au théorème 1.14 et à la composition des opérateurs intégraux de Fourier, on a que  $S_h^k Op_h(\psi_\varepsilon^2(1 - \chi_\varepsilon^k))$  est un opérateur intégral de Fourier associé à  $\kappa_{|\mathcal{I} \setminus \mathcal{P}_k}^k$  microlocalement près de  $(\mathcal{I} \setminus \kappa^k(\mathcal{P}_k)) \times (\mathcal{I} \setminus \mathcal{P}_k)$ .

Étant donné que, par définition de  $\mathcal{P}_k$ ,  $\kappa^k$  n'a aucun point fixe dans  $\mathcal{I} \setminus \mathcal{P}_k$ , le lemme A.3 nous assure que

$$\text{Tr}(S_h^k Op_h(\psi_\varepsilon^2(1 - \chi_\varepsilon^k))) = O(h^\infty).$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned} \text{Tr}((S_h^k - Id)Op_h(\psi_\varepsilon^2(1 - \chi_\varepsilon^k))) &= \text{Tr}(Op_h(\psi_\varepsilon^2(1 - \chi_\varepsilon^k))) + O(h^\infty) \\ &= \frac{1}{(2\pi h)^{d-1}} \int_{T^*\mathbb{S}^{d-1}} \psi_\varepsilon^2(1 - \chi_\varepsilon^k) + O(h^{2-d}) \\ &= \frac{1}{(2\pi h)^{d-1}} \text{Vol}(\mathcal{I}) + h^{-(d-1)}r_\varepsilon + O(h^{2-d}), \end{aligned} \quad (2.6)$$

où  $r_\varepsilon$  est indépendant de  $h$ , et est un  $O(\varepsilon)$ . Pour passer de la première ligne à la seconde, on a utilisé la formule (A.1).

**Trace à l'extérieur de la région d'interaction** Pour estimer la trace à l'extérieur de la région d'interactions, considérons une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{S}^{d-1})$  constituée d'harmoniques sphériques  $\phi_\ell^m$  vérifiant  $(\Delta_{\mathbb{S}^{d-1}} - \ell(\ell + d - 1))\phi_\ell^m = 0$ , où  $\ell \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq m \leq d_\ell$ . Ici,  $d_\ell = O(\ell^{d-2})$ , comme on peut le voir en utilisant la loi de Weyl.

Soit  $R > 0$  suffisamment grand pour que

$$\mathcal{I} \subset \{(\omega, \eta) \in T^*\mathbb{S}^{d-1}; |\eta| \leq R\}.$$

Nous aurons besoin du lemme élémentaire suivant :

**Lemme 2.4.** *Pour tout  $R' > R$ ,  $x \in B(0, R) \subset \mathbb{R}^d$ ,  $h > 0$  pour tout  $\ell \geq R'/h$ , et  $m \leq d_\ell$ , on a*

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} e^{i\langle \omega, x \rangle / h} \phi_\ell^m(\omega) d\omega = O\left(\left(\frac{R}{h\ell^2}\right)^\infty\right).$$

*Démonstration.* On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} e^{i\langle \omega, x \rangle / h} \phi_\ell^m(\omega) d\omega = \frac{1}{(\ell(\ell+1))^n} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \phi_\ell^m(\omega) \Delta^n e^{i\langle \omega, x \rangle / h} d\omega.$$

On a que  $\Delta^n e^{i\langle \omega, x \rangle / h}$  est borné par  $\left(\frac{|x|}{h}\right)^{2n}$  fois un polynôme ne dépendant que de  $n$ . Le résultat s'ensuit.  $\square$

Le lemme suivant nous permet d'estimer la trace en dehors de la région d'interactions.

**Lemme 2.5.** *Supposons que (1.14) et (1.16) soient vérifiées. Soit  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . On a*

$$\text{Tr}((S_h^k - Id)(Id - Op_h(\psi_\varepsilon^1))) = O(h^\infty).$$

*Démonstration.* Le second point du théorème 1.14 implique que pour tous  $\varepsilon > 0$ ,  $\ell \in \mathbb{N}$  et  $m = 1, \dots, d_\ell$ , on a

$$\|(S_h^k - Id)(Id - Op_h(\psi_\varepsilon^1))\phi_\ell^m\| = O(h^\infty). \quad (2.7)$$

On a donc

$$\begin{aligned} \text{Tr}(S_h^k - Id)(Id - Op_h(\psi_\varepsilon^1)) &= \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \sum_{m=1}^{d_\ell} \langle \phi_\ell^m, (S_h^k - Id)(Id - Op_h(\psi_\varepsilon^1))\phi_\ell^m \rangle \\ &= \sum_{\ell < R'/h^2} \sum_{m=1}^{d_\ell} \langle \phi_\ell^m, (S_h^m - Id)(Id - Op_h(\psi_\varepsilon^1))\phi_\ell^m \rangle \\ &\quad + \sum_{\ell \geq R'/h^2} \sum_{m=1}^{d_\ell} \langle \phi_\ell^m, (S_h^k - Id)(Id - Op_h(\psi_\varepsilon^1))\phi_\ell^m \rangle \\ &= \sum_{\ell \geq R'/h^2} \sum_{m=1}^{d_\ell} \langle \phi_\ell^m, (S_h^k - Id)\phi_\ell^m \rangle + O(h^\infty), \end{aligned}$$

où  $R' > R + \varepsilon$ . Ici, on a estimé la somme pour  $\ell < R'/h^2$  en utilisant (2.7) et le fait que  $d_\ell = O(\ell^{d-2})$ .

Estimons maintenant la somme pour  $\ell \geq R'/h^2$ . Notons  $a_k(\omega, \omega'; h)$  le noyau intégral de  $S_h^k - Id$ .

En utilisant (1.6), on voit que  $a_1(\omega, \omega'; h) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \omega, x \rangle / h} f_1(x, \omega'; h) dx$ , où  $f_1$  est une fonction lisse de  $x$  et  $\omega'$ , à support en  $x$  dans un compact indépendant de  $\omega'$  et  $h$ . De plus, en utilisant 1.10, on voit que  $f_1$  est bornée polynômialement en  $h$ .

En composant les opérateurs, on voit que de même,  $a_k$  peut se mettre sous la forme  $a_k(\omega, \omega'; h) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \omega, x \rangle / h} f_k(x, \omega'; h) dx$ , où  $f_k$  est une fonction lisse de  $x$  et  $\omega'$ , à support en  $x$  dans un compact indépendant de  $\omega'$  et  $h$ , et bornée polynômialement en  $h$ .

## 2.2 Formules des traces

On a donc

$$\begin{aligned} \langle \phi_\ell^m, (S_h^k - Id)\phi_\ell^m \rangle &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} d\omega \int_{\mathbb{S}^{d-1}} d\omega' \phi_\ell^m(\omega) \phi_\ell^m(\omega') a_k(\omega, \omega', h) \\ &= c(d, h) \int_{\mathbb{S}^{d-1}} d\omega' \phi_\ell^m(\omega') \int_{\mathbb{R}^d} dx e^{i\langle \omega, x \rangle / h} f_k(x, \omega'; h) \int_{\mathbb{S}^{d-1}} d\omega e^{i\langle \omega, x \rangle / h} \phi_\ell^m(\omega). \end{aligned}$$

La dernière intégrale est bornée par  $O\left(\frac{R}{h\ell^2}\right)^\infty$  grâce au lemme 2.4. Par conséquent, comme  $f_k$  est à support en  $x$  dans un compact indépendant de  $h$  et de  $\omega'$ , et est bornée polynomialement en  $h$ , on obtient que  $\langle \phi_\ell, (S_h^k - Id)\phi_\ell \rangle = O\left(\frac{R}{h\ell^2}\right)^\infty$ . Quand on fait la somme pour  $\ell \geq R'/h^2$  on obtient

$$\sum_{\ell \geq R'/h^2} \sum_{m=1}^{d_\ell} \langle \phi_\ell^m, (S_h^k - Id)\phi_\ell^m \rangle = O(h^\infty),$$

ce qui conclut la preuve du lemme.  $\square$

**Rassembler les termes** Grâce à l'équation (2.5), on a que

$$\begin{aligned} \text{Tr}((S_h^k - Id)) &= \text{Tr}((S_h^k - Id)(Id - \text{Op}_h(\psi_\varepsilon^1))) \\ &\quad + \text{Tr}((S_h^k - Id)\text{Op}_h(\psi_\varepsilon^2(1 - \chi_\varepsilon^k))) \\ &\quad + \text{Tr}((S_h^k - Id)\text{Op}_h(\psi_\varepsilon^2\chi_\varepsilon^k + (\psi_\varepsilon^1 - \psi_\varepsilon^2))) + O(h^{2-d}). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Le dernier terme est borné par

$$\begin{aligned} &|\text{Tr}((S_h^k - Id)\text{Op}_h(\psi_\varepsilon^2\chi_\varepsilon^k + (\psi_\varepsilon^1 - \psi_\varepsilon^2)))| \\ &\leq \|(S_h^k - Id)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{S}^{d-1}))} \|\text{Op}_h(\psi_\varepsilon^2\chi_\varepsilon^k + (\psi_\varepsilon^1 - \psi_\varepsilon^2))\| + O(h^{2-d}) \\ &= h^{-(d-1)}r'_\varepsilon + O(h^{2-d}), \end{aligned} \tag{2.9}$$

où  $r'_\varepsilon$  est indépendant de  $h$ , et est un  $O(\varepsilon)$ .

Grâce à (2.6), (2.9) et au lemme 2.5, l'équation (2.8) devient

$$h^{(d-1)}\text{Tr}((S_h^k - Id)) = \frac{\text{Vol}(\mathcal{I})}{(2\pi)^{d-1}} + r_\varepsilon + r'_\varepsilon + O(h).$$

Puisque ceci est vrai pour tout  $\varepsilon > 0$ , on obtient le résultat de la proposition 2.3.  $\square$

**Corollaire 2.6.** *Supposons que (1.14) et (1.16) soient vérifiées. Soit  $p$  un polynôme sur  $\mathbb{C}$  qui est divisible par  $(1 - z)$ . On a alors*

$$\text{Tr}(p(S_h)) = \frac{\text{Vol}(I)}{(2\pi h)^{d-1}} \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathbb{S}^1} p(e^{i\theta}) d\theta + o(h^{-(d-1)}).$$

*Démonstration.* Tout polynôme complexe divisible par  $(1 - z)$  peut être écrit comme une combinaison linéaire de polynômes de la forme  $p(z) = (z^k - 1)$ , avec  $k \in \mathbb{Z}$ , pour lesquels on a prouvé le résultat dans la proposition 2.3.  $\square$

## 2.3 Preuve du théorème 1.18

Définissons

$$C_w^0(\mathbb{S}^1) = \{f \in C^0(\mathbb{S}^1; \mathbb{C}); f(z)/(z-1) \text{ est continue} \}.$$

$$\|f\|_w = \sup_{|z|=1, z \neq 1} \left| \frac{f(z)}{z-1} \right| \quad \text{pour } f \in C_w^0(\mathbb{S}^1).$$

Nous allons maintenant prouver le théorème suivant, qui est une version un peu améliorée du théorème 1.18.

**Théorème 2.7.** *Supposons que la variété  $(X, g)$  and le potentiel  $V$  soient tels que (1.14) et (1.16) soient vérifiées. Soit  $f \in C_w^0(\mathbb{S}^1)$ . On a alors*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \langle \mu_h, f \rangle = \frac{\text{Vol}(\mathcal{I})}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\theta.$$

Avant de passer à la preuve, nous avons besoin d'énoncer deux lemmes techniques. Rappelons que nous notons les valeurs propres de  $S_h$  par  $e^{i\beta_{n,h}}$ . Si  $L > 1$ , nous noterons  $N_{L,h}$  le nombre de  $n \in \mathbb{N}$  tels que  $|e^{i\beta_{n,h}} - 1| \geq e^{-L/h}$ .

**Lemme 2.8.** *Il existe  $C_0 > 0$  telle que pour tout  $L \geq 1$  et tout  $0 < h < 1$ , on a  $N_{h,L} \leq C_0 \left(\frac{L}{h}\right)^{d-1}$*

*Démonstration.* Nous noterons  $s_j(S_h - Id)$ ,  $j \in \mathbb{N}$  les valeurs singulières de  $S_h - Id$ , c'est-à-dire, les racines carrées des valeurs propres de  $(S_h - Id)(S_h - Id)^*$ , avec la convention que  $s_j \geq s_{j+1}$ .

L'estimée (2.3) de [Chr15], qui repose sur les techniques développées dans [Zwo89], nous dit que

$$s_j(S_h - Id) \leq \frac{C}{h^d} \exp\left(\frac{C}{h} - \frac{j^{1/(d-1)}}{C}\right).$$

En particulier, on a que

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^N s_j(S_h - Id) &\leq \left(\frac{C}{h^d}\right)^N \exp\left(\frac{NC}{h} - \frac{1}{C} \sum_{j=1}^N j^{1/(d-1)}\right) \\ &\leq \left(\frac{C}{h^d}\right)^N \exp\left(\frac{NC}{h} - C' N^{d/(d-1)}\right), \end{aligned}$$

pour un  $C' > 0$  indépendant de  $h$  et de  $N$ . Par l'inégalité de Weyl (voir, par exemple, [DZ, Proposition B.22]), on obtient que

$$\prod_{|e^{i\beta_{h,n}} - 1| \geq e^{-L/h}} |e^{i\beta_{h,n}} - 1| \leq \prod_{j=1}^{N_{L,h}} s_j(S_h - Id).$$

### 2.3 Preuve du théorème 1.18

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
e^{-\frac{LN_{L,h}}{h}} &\leq \prod_{|e^{i\beta_{h,n}} - 1| \geq e^{-L/h}} |e^{i\beta_{h,n}} - 1| \\
&\leq \prod_{j=1}^{N_{L,h}} s_j(S_h - Id) \\
&\leq \left(\frac{C}{h^d}\right)^{N_{L,h}} \exp\left(\frac{N_{L,h}C}{h} - C'N_{L,h}^{d/(d-1)}\right).
\end{aligned}$$

En prenant le logarithme de chaque membre de l'équation, on obtient

$$-\frac{LN_{L,h}}{h} \leq N_{L,h} \log\left(\frac{C}{h^d}\right) + \frac{N_{L,h}C}{h} - C'N_{L,h}^{d/(d-1)}.$$

Le premier terme du membre de droite est négligeable devant les autres, dont on a, quitte à changer un peu la constante  $C'$ ,

$$C'N_{L,h}^{d/(d-1)} \leq \frac{N_{L,h}(C+L)}{h},$$

de sorte que  $N_{L,h} \leq \left(\frac{C+L}{C'h}\right)^{d-1} \leq C_0(L/h)^{d-1}$  pour un  $C_0 > 0$  suffisamment grand, mais indépendant de  $L$  et de  $h$ , ce qui conclut la preuve du lemme.  $\square$

**Lemme 2.9.** *Il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $f \in C_w^0(\mathbb{S}^1)$ , on a*

$$|\langle \mu_h, f \rangle| \leq C \|f\|_w$$

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned}
|\langle \mu_h, f \rangle| &= (2\pi h)^{d-1} \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} f(e^{i\beta_{h,n}}) \right| \\
&\leq (2\pi h)^{d-1} \sum_{|e^{i\beta_{h,n}} - 1| \geq e^{-1/h}} |f(e^{i\beta_{h,n}})| + (2\pi h)^{d-1} \sum_{|e^{i\beta_{h,n}} - 1| < e^{-1/h}} |f(e^{i\beta_{h,n}})|. \quad (2.10)
\end{aligned}$$

Considérons tout d'abord la première somme du membre de droite. Par le lemme 2.8, elle comporte au plus  $C_0 h^{-(d-1)}$  termes. Elle est donc bornée par

$$(2\pi h)^{d-1} \sum_{|e^{i\beta_{h,n}} - 1| \geq h} |f(e^{i\beta_{h,n}})| \leq (2\pi h)^{d-1} C_0 h^{-(d-1)} \|f\|_{C^0} \leq C \|f\|_w. \quad (2.11)$$

Considérons maintenant la deuxième somme dans le membre de droite de (2.10). Pour chaque  $k \geq 1$  et  $0 < h < 1$ , on note  $\sigma_{k,h}$  l'ensemble des entiers  $n \in \mathbb{N}$  tels que  $e^{-(k+1)/h} \leq$

$|e^{i\beta_{h,n}} - 1| < e^{-k/h}$ . Par le lemme 2.8,  $\sigma_{k,h}$  contient au plus  $C_0 \left(\frac{k+1}{h}\right)^{d-1}$  éléments. D'autre part, pour chaque  $n \in \sigma_{k,h}$ , on a

$$|f(e^{i\beta_{h,n}})| \leq \|f\|_w e^{-k(d+1)/h}.$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} (2\pi h)^{d-1} \sum_{|e^{i\beta_{h,n}} - 1| < e^{-1/h}} |f(e^{i\beta_{h,n}})| &= (2\pi h)^{d-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n \in \sigma_{k,h}} |f(e^{i\beta_{h,n}})| \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} C_0 \left(\frac{k+1}{h}\right)^{d-1} \|f\|_w e^{-k(d+1)/h} \\ &\leq C \|f\|_w, \end{aligned}$$

pour un  $C$  indépendant de  $h$ . Ceci conclut la preuve du lemme.  $\square$

*Preuve du théorème 2.7.* Nous avons prouvé le résultat pour tous les polynômes divisibles par  $(z - 1)$  dans le corollaire 2.6.

Les polynômes de cette forme sont denses dans  $C_w^0$ . En effet, si  $f \in C_w^0$ , alors  $f/(1-z)$  est continue, donc elle peut être approchée pour la norme  $C^0$  par une suite de polynômes  $P_n$ . Mais alors,  $(1-z)P_n$  approche  $f$  dans la topologie  $C_w^0$ .

Nous avons donc prouvé le théorème pour un sous-ensemble dense dans  $C_w^0$ . Le lemme 2.9 nous donne la continuité nécessaire pour conclure la preuve.  $\square$

## Chapitre 3

# Cadre général de nos résultats sur les ondes planes tordues

Dans ce chapitre, qui suit en partie [Ing15a] et [Ing15b], nous présenterons les hypothèses générales sous lesquelles nos résultats sur les ondes tordues sont vérifiés. Certaines de ces hypothèses portent sur la géométrie de la variété à l'infini (§3.1), d'autres portent sur la dynamique près de l'ensemble capté (§3.2 et §3.5), tandis que d'autres portent sur les fonctions propres  $E_h$  (§3.6), et sur les variétés lagrangiennes qui leurs sont associées (§3.3). Nous présenterons les résultats principaux qui découlent de ces hypothèses dans les sections §3.4 et §3.7.

Les hypothèses sous lesquelles les résultats de la section 1.3.3 peuvent être généralisées concernent la lagrangienne entrante, la variété près de l'infini, l'opérateur  $P_h$ ... Toutefois, la plus importante de ces hypothèses étant que la courbure sectionnelle de  $(X, g)$  est négative ou nulle, ces hypothèses seront toujours contenues dans des paragraphes nommés « hypothèses supplémentaires en courbure négative ».

Dans la section 3.7.3, nous rappelons quels sont les principaux exemples de fonctions propres généralisées que nous considérons, quels sont nos principaux résultats, et un tableau indique quel résultat s'applique à quel exemple. Nous invitons le lecteur à se reporter à ce tableau s'il se perd entre les hypothèses !

---

Soit  $(X, g)$  une variété Riemannienne de dimension  $d$ , complète et non compacte, et soit  $V : X \rightarrow \mathbb{R}$  un potentiel lisse à support compact.

On écrira  $p(x, \xi) = p(\rho) : T^*X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p(x, \xi) = \|\xi\|^2 + V(x)$  pour le hamiltonien classique. Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on notera  $\Phi^t : T^*X \rightarrow T^*X$  le flot hamiltonien au temps  $t$  pour le hamiltonien  $p$ .

On notera

$$\mathcal{E} := \{(x, \xi \in T^*X; p(x, \xi) = 1\}.$$

Toute fonction lisse  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , peut être relevée en une fonction  $f : T^*X \rightarrow \mathbb{R}$ , que



l'on continuera à noter par la même lettre. On peut alors définir  $\dot{f}, \ddot{f} \in C^\infty(T^*X)$  comme étant les dérivées de  $f$  par rapport au flot hamiltonien.

$$\dot{f}(x, \xi) := \left. \frac{df(\Phi^t(x, \xi))}{dt} \right|_{t=0}, \quad \ddot{f}(x, \xi) := \left. \frac{d^2f(\Phi^t(x, \xi))}{dt^2} \right|_{t=0}.$$

### 3.1 Hypothèses géométriques près de l'infini

On supposera toujours que l'hypothèse suivante est vérifiée

**Hypothèse 3.1** (Structure de  $X$  près de l'infini). *On suppose que la variété  $(X, g)$  est telle que les conditions suivantes sont vérifiées :*

(1) *Il existe une compactification  $\bar{X}$  de  $X$ , c'est-à-dire, une variété compacte à bord  $\bar{X}$  telle que  $X$  est difféomorphe à l'intérieur de  $\bar{X}$ .*

(2) *Il existe sur  $X$  une fonction  $b$  définissant le bord, c'est-à-dire une fonction lisse  $b : \bar{X} \rightarrow [0, \infty)$  telle que  $b > 0$  sur  $X$ , et  $b$  s'annule au premier ordre sur  $\partial\bar{X}$ .*

(3) *Il existe une constante  $\epsilon_0 > 0$  telle que pour tout point  $(x, \xi) \in \mathcal{E}$ ,*

$$\text{si } b(x, \xi) \leq \epsilon_0 \text{ et } \dot{b}(x, \xi) = 0 \text{ alors } \ddot{b}(x, \xi) < 0.$$

Remarquons que, bien que la partie (3) de l'hypothèse fasse référence au flot hamiltonien, cette hypothèse ne porte que sur la variété  $(X, g)$  et non sur le potentiel  $V$ , car  $V$  est supposé à support compact, de sorte que  $V \equiv 0$  sur  $\{b \leq \epsilon_0\}$  pour  $\epsilon_0$  suffisamment petit.

**Exemple 3.2.**  $\mathbb{R}^d$  vérifie bien l'hypothèse 3.1, en prenant pour  $b$  la fonction  $b(x) = (1 + |x|^2)^{-1/2}$ . On a alors  $\bar{X} \equiv B(0, 1)$ .

**Exemple 3.3.** L'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^d$  vérifie aussi l'hypothèse 3.1. En effet, dans le modèle de la boule de Poincaré  $B_0(1) = \{x \in \mathbb{R}^d; |x| < 1\}$ , où  $|\cdot|$  dénote la norme euclidienne, on voit que  $\mathbb{H}^d$  se compactifie en la boule unité fermée, et que la fonction  $b(x) = 2 \frac{1-|x|}{1+|x|}$  vérifie les conditions (2) et (3).

On écrira  $X_0 := \{x \in X; b(x) \geq \epsilon_0/2\}$ . Quitte à prendre  $\epsilon_0$  plus petit, on peut supposer que  $\text{supp}(V) \subset \{x \in X; b(x) > \epsilon_0\}$ . On appellera  $X_0$  la région d'interaction. On écrira aussi

$$W_0 := T^*(X \setminus X_0) = \{\rho \in T^*X; b(\rho) < \epsilon_0/2\}, \quad \mathcal{W}_0 = W_0 \cap \mathcal{E}. \quad (3.1)$$

Quitte à prendre  $\epsilon_0$  encore plus petit, on peut aussi demander que

$$\forall \rho \in \mathcal{W}_0, b(\Phi^1(\rho)) < \epsilon_0. \quad (3.2)$$

**Définition 3.4.** Si  $\rho = (x, \xi) \in \mathcal{E}$ , on dira que  $\rho$  s'échappe directement dans le futur, ce que l'on notera  $\rho \in \mathcal{DE}_+$ , si  $b(x) < \epsilon_0/2$  et  $\dot{b}(x, \xi) \leq 0$ .

Si  $\rho = (x, \xi) \in \mathcal{E}$ , on dira que  $\rho$  s'échappe directement dans le passé, ce que l'on notera  $\rho \in \mathcal{DE}_-$ , si  $b(x) < \epsilon_0/2$  et  $\dot{b}(x, \xi) \geq 0$ .

### 3.1 Hypothèses géométriques près de l'infini

Remarquons que l'on a

$$\mathcal{W}_0 = \mathcal{D}\mathcal{E}_- \cup \mathcal{D}\mathcal{E}_+.$$

La partie (3) de l'hypothèse 3.1 implique le résultat suivant qui traduit la *convexité géodésique*, c'est-à-dire le fait qu'une trajectoire ayant quitté la région d'interactions ne peut pas y retourner.

**Lemme 3.5.** *Pour tout  $t \geq 0$ , on a*

$$\Phi^t(\mathcal{E} \cap T^*X_0) \cap \mathcal{D}\mathcal{E}_- = \emptyset.$$

*Démonstration.* Supposons qu'il existe un  $\rho \in \Phi^t(\mathcal{E} \cap T^*X_0) \cap \mathcal{D}\mathcal{E}_-$  pour un  $t \geq 0$ . Il existe alors un  $\rho' \in \mathcal{E} \cap T^*X_0$  tel que  $\rho = \Phi^t(\rho')$ . Considérons la fonction  $f(s) := b(\Phi^s(\rho'))$ . On a alors  $f(0) > \epsilon_0/2$ ,  $f(t) < \epsilon_0/2$  et  $f'(t) \geq 0$  par hypothèse. Ceci est impossible, car d'après l'hypothèse 3.1, point (3), dès que  $f(s) \leq \epsilon_0$  et  $f'(s) = 0$ , on doit avoir  $f''(s) < 0$ .  $\square$

### Hypothèses supplémentaires en courbure négative

Pour que des résultats analogues à ceux de la section 1.3.3 soient vrais, il nous faut faire des hypothèses plus fortes sur  $(X, g)$ . Dans toute la suite, nous noterons  $d_X$  la distance géodésique sur la variété  $X$ .

**Hypothèse 3.6.** (i)  *$(X, g)$  est de courbure sectionnelle négative ou nulle, et le potentiel  $V$  est nul.*

(ii) *La courbure sectionnelle sur  $X$  est bornée inférieurement par une constante  $-b_0$ , avec  $b_0 \in (0, \infty)$ .*

(iii) *Le rayon d'injectivité tend vers l'infini à l'infini, au sens suivant : pour toute suite de points  $(x_n) \subset X$  telle que  $b(x_n)$  tend vers 0, on a  $r_I(x_n) \rightarrow \infty$ .*

Rappelons que si  $x \in X$ , le rayon d'injectivité de  $x$ , noté  $r_i(x)$ , est le plus grand nombre  $r > 0$  tel que l'application exponentielle en  $x$  est injective sur la boule ouverte  $B(0, r)$ . Rappelons aussi que sur une variété de courbure négative ou nulle, dire que  $r_i(x) < \infty$  signifie qu'il existe  $y \in X$  tel que  $d_X(x, y) = r_i(x)$  et qu'il existe deux géodésiques de vitesse 1 minimisant la distance entre  $x$  et  $y$ .

Le point (iii) de l'hypothèse 3.6 implique<sup>1</sup> que

$$r_i := \inf_{x \in X} r_i(x) > 0. \tag{3.3}$$

**Exemple 3.7.** *La variété représentée sur la figure 3.2 est un exemple simple de variété vérifiant l'hypothèse 3.6.*

**Exemple 3.8.** *Tout quotient de l'espace hyperbolique par un groupe convexe cocompact vérifie l'hypothèse 3.6. Si l'on perturbe légèrement la métrique d'une telle variété dans un compact, elle vérifiera encore l'hypothèse 3.6.*

1. On peut en fait montrer que (3.3) découle de l'hypothèse 3.1 et de la partie (i) de l'hypothèse 3.6.

## 3.2 Hyperbolicité

Rappelons que la définition d'ensemble hyperbolique a été donnée dans la définition 0.2, et que  $K$  est l'ensemble capté à énergie 1. Nous ferons toujours l'hypothèse suivante :

**Hypothèse 3.9.**  $K$  est un ensemble hyperbolique pour  $(\Phi^t)$ .

Ceci peut se reformuler à l'aide d'une *métrique adaptée*, comme dans [KH95, Chapitre 17] : il existe une métrique<sup>2</sup>  $g_{ad}$  sur un voisinage de  $K$  dans  $\mathcal{E}$  et un  $\lambda > 0$  ayant la propriété suivante. Pour tout  $\rho \in K$ , il existe une décomposition de l'espace tangent  $T_\rho S^*X = E_\rho^- \oplus E_\rho^+ \oplus E_\rho^0$ , avec  $E_\rho^-$  et  $E_\rho^+$  de dimension  $d - 1$ , et  $E_\rho^0$  de dimension 1 coïncidant avec la direction du flot, telle que

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \Phi^t(E_\rho^\pm) = E_{\Phi^t(\rho)}^\pm \\ \text{(ii)} \quad & \|d\Phi_\rho^t(v)\|_{g_{ad}} \leq e^{-\lambda|t|} \|v\|_{g_{ad}} \text{ pour tout } v \in E_\rho^\mp, \pm t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

On peut ensuite étendre la métrique  $g_{ad}$  en une métrique sur tout  $\mathcal{E}$ , telle que en dehors de la région d'interaction,  $g_{ad}$  coïncide avec la métrique sur  $T^*X$  induite par la métrique sur  $X$ . À partir de maintenant,  $d$  désignera la distance sur  $\mathcal{E}$  associée à cette métrique.

On appelle  $E^\pm$  les espaces *instable* (resp. *stable*) au point  $\rho$ . Ces espaces sont tangents à  $\Gamma^\pm$ . Nous aurons aussi besoin des espaces

$$E_\rho^{+0} := E_\rho^+ \oplus E_\rho^0, \quad E_\rho^{-0} := E_\rho^- \oplus E_\rho^0, \quad (3.5)$$

appelés respectivement espace *faiblement instable* et *faiblement stable* au point  $\rho$ .

Rappelons quelques propriétés des ensembles hyperboliques. Nous renvoyons le lecteur à [KH95, Chapitres 6 et 17] pour la preuve de ces résultats.

i)  $K$  est *structurellement stable*, au sens suivant. Définissons, pour  $E > 0$ , l'ensemble capté à énergie  $E$  comme

$$\mathcal{E}_E := \{(x, \xi) \in T^*X; p(x, \xi) = E\}, \quad (3.6)$$

où  $p$  est le hamiltonien, et

$$K_E := \{\rho \in \mathcal{E}_E \text{ tel que } \Phi^t(\rho) \text{ demeure dans un compact donné pour tout } t \in \mathbb{R}\}. \quad (3.7)$$

On a alors

$$\exists \delta > 0, \forall E \in (1 - \delta, 1 + \delta), \quad K_E \text{ est un ensemble hyperbolique pour } \Phi|_{\mathcal{E}_E}^t. \quad (3.8)$$

$$\text{ii) } d\Phi_\rho^t(E_\rho^\pm) = E_{\Phi^t(\rho)}^\pm.$$

---

2. L'intérêt de changer de métrique est que, par rapport à la définition 0.2, on peut prendre  $C = 1$  dans (3.4).

### 3.2 Hyperbolicité

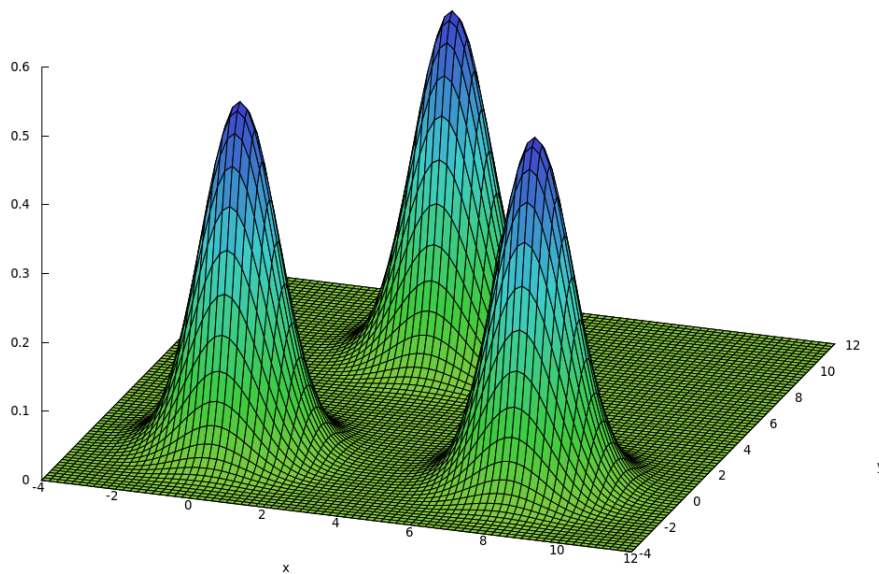


FIGURE 3.1 – Un exemple de potentiel sur  $(\mathbb{R}^2, g_{eucl})$  tel que l'ensemble capté est hyperbolique, pour certains niveaux d'énergie. (Voir [Sjö90, Appendix C] pour plus de détails.)

iii) Il existe  $\mathfrak{p} < 1$  tel que

$$K \ni \rho \mapsto E_\rho^\pm \subset T_\rho(\mathcal{E}_E) \text{ est } \mathfrak{p} \text{ - h\"olderienne.} \quad (3.9)$$

iv) Pour tout  $\rho \in K_E$  et tout  $\epsilon > 0$  suffisamment petit, il existe une variété fortement (in)stable en  $\rho$ , notée  $W_\epsilon^\pm(\rho)$  et définie par

$$W_\epsilon^\pm(\rho) = \{\rho' \in \mathcal{E}_E; d(\Phi^t(\rho), \Phi^t(\rho')) < \epsilon \text{ pour tout } \pm t \leq 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow \mp\infty} d(\Phi^t(\rho'), \Phi^t(\rho)) = 0\}.$$

$W_\epsilon^\pm(\rho)$  est alors tangente à  $E_\rho^\pm$ .

#### Coordonnées adaptées

Nous aurons souvent besoin par la suite de *coordonnées adaptées* aux directions stables et instables du flot, construites dans le lemme suivant, inspiré de [NZ09, Lemme 4.3].

**Lemme 3.10.** *Soit  $\rho \in K$ . Il existe un système de coordonnées symplectiques adaptées*

$(y^\rho, \eta^\rho)$  dans un voisinage de  $\rho$  dans  $T^*X$  telles que l'on ait :

- (i)  $\rho \equiv (0, 0)$
- (ii)  $E_\rho^+ = \text{vect}\left\{\frac{\partial}{\partial y_i^\rho}(\rho), \quad i = 2, \dots, d\right\}$ ,
- (iii)  $E_\rho^- = \text{vect}\left\{\frac{\partial}{\partial \eta_i^\rho}(\rho), \quad i = 2, \dots, d\right\}$ ,
- (iv)  $\eta_1^\rho = p - 1$  est la coordonnée d'énergie,
- (v)  $\left\langle \frac{\partial}{\partial y_i^\rho}(\rho), \frac{\partial}{\partial y_j^\rho}(\rho) \right\rangle_{g_{ad}(\rho)} = \delta_{i,j}, \quad i, j = 2, \dots, d.$

*Démonstration.* On peut identifier  $\rho \in T^*X$  avec un voisinage de  $(0, 0) \in T^*\mathbb{R}^d$ . Prenons  $e_1^\rho = H_p(\rho) := \frac{\partial \Phi^t(\rho)}{\partial t}$ , et complétons-le en une base  $(e_1^\rho, \dots, e_d^\rho)$  de  $E_\rho^+$  telle que  $\langle e_i^\rho, e_j^\rho \rangle_{g_{ad}(\rho)} = 1$  pour  $2 \leq i \leq d$ .

On peut alors trouver des vecteurs  $(f_1^\rho, \dots, f_d^\rho)$  tels que  $E_\rho^- = \text{vect}\{f_2^\rho, \dots, f_d^\rho\}$  et tels que  $\omega(f_j^\rho, e_k^\rho) = \delta_{j,k}$  pour tous  $1 \leq j, k \leq d$ . En particulier, on a  $\omega(f_1^\rho, e_1^\rho) = dp(f_1) = 1$ .

Par le théorème de Darboux, il existe des coordonnées symplectiques (non linéaires)  $(y^\flat, \eta^\flat)$  près de l'origine telles que  $\eta_1^\flat = p - 1$ . Il existe aussi une transformation linéaire symplectique  $A$  telle que les coordonnées  $(y, \eta) = A(y^\flat, \eta^\flat)$  vérifient  $\eta_1 = \eta_1^\flat$  ainsi que

$$\eta_1 = p - 1, \quad \frac{\partial}{\partial y_j}(0, 0) = e_j \text{ et } \frac{\partial}{\partial \eta_j}(0, 0) = f_j, \quad j = 1, \dots, d.$$

□

Pour  $j = 1, \dots, d - 1$ , on écrira

$$u_j^\rho := y_{j+1}^\rho, \text{ et } s_j^\rho := \eta_{j+1}^\rho. \quad (3.10)$$

**Variétés  $\gamma$ -instables** Pour tout  $\epsilon > 0$ , écrivons  $D_\epsilon = \{u \in \mathbb{R}^{d-1}, |u| < \epsilon\}$ . On définit le polydisque centré au point  $\rho$  :

$$U^\rho(\epsilon) \equiv \{(y^\rho, \eta^\rho) : |y_1^\rho| < \epsilon, |\eta_1^\rho| < \delta, u^\rho \in D_\epsilon, s^\rho \in D_\epsilon\}, \quad (3.11)$$

où  $\delta$  est comme dans (3.8).

Nous aurons besoin par la suite de la notion de *variétés lagrangiennes  $\gamma$ -instables*, c'est à dire de variétés lagrangiennes dont les tangentes forment un petit angle avec les directions  $E^+$ .

**Définition 3.11.** Soit  $\Lambda \subset \mathcal{E}$  une variété lagrangienne iso-énergétique (pas nécessairement connexe) incluse dans un petit voisinage  $W$  d'un point  $\rho \in K$ , et soit  $\gamma > 0$ . On dira que  $\Lambda$

### 3.3 Hypothèses sur la variété lagrangienne entrante

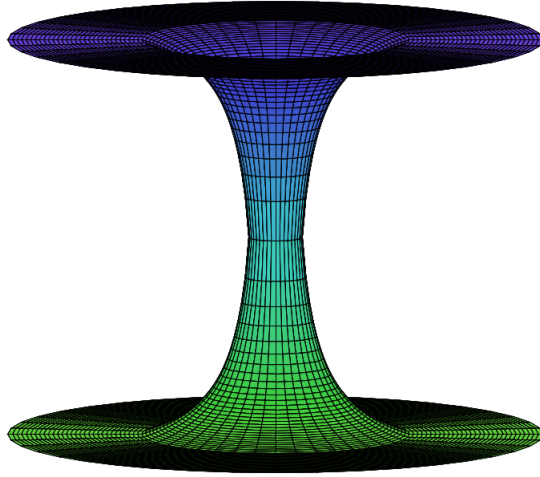


FIGURE 3.2 – Un exemple de surface de courbure négative, isométrique à deux copies de  $\mathbb{R}^d \setminus B(0, R_0)$  en dehors d'un compact. Cette surface vérifie l'hypothèse 3.9 d'hyperbolicité, et l'hypothèse 3.1 près de l'infini, ainsi que l'hypothèse 3.6.

est une variété lagrangienne  $\gamma$ -instable, ou encore que  $\Lambda$  est dans un cône  $\gamma$ -instable, dans les coordonnées  $(y^\rho, \eta^\rho)$  si elle peut être écrite sous la forme

$$\Lambda = \{(y_1^\rho, u^\rho, 0, F(y_1^\rho, u^\rho)); (y_1^\rho, u^\rho) \in D\},$$

où  $D \subset \mathbb{R}^d$  est un ouvert ayant un nombre fini de composantes connexes, et un bord lisse par morceaux, et où  $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  est une fonction lisse telle que  $\|dF\|_{C^0} \leq \gamma$ .

Remarquons que, comme  $\Lambda$  est supposée iso-énergétique et lagrangienne, un calcul immédiat montre que  $F$  ne dépend pas de  $y_1^\rho$ , de sorte que  $\Lambda$  peut en fait s'écrire sous la forme

$$\Lambda = \{(y_1^\rho, u^\rho, 0, f(u^\rho)); (y_1^\rho, u^\rho) \in D\},$$

où  $f : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}^{d-1}$  est une fonction lisse avec  $\|df\|_{C^0} \leq \gamma$ .

Remarquons que, comme  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}^{d-1}$ , une variété  $\gamma$ -instable peut toujours être vue comme un ouvert d'une *variété  $\gamma$ -instable connexe*.

### 3.3 Hypothèses sur la variété lagrangienne entrante

Dans la section 1.1, les ondes planes tordues  $E_h$  étaient construites à partir d'une onde entrante  $E_h^0$ , qui était un état lagrangien associé à la lagrangienne  $\Lambda_\omega$  introduite

dans (1.17). Nous allons procéder de même pour généraliser les ondes planes tordues, et nous allons introduire dans cette section des variétés lagrangiennes ayant des propriétés analogues à celles de  $\Lambda_\omega$ .

Considérons une variété lagrangienne iso-énergétique  $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{E}$  de la forme

$$\mathcal{L}_0 := \{(x, \varphi(x)), x \in X_1\},$$

où  $X_1$  est un sous-ensemble fermé de  $X \setminus X_0$  possédant un nombre fini de composantes connexes, et une frontière lisse par morceaux, et où  $\varphi : X_2 \ni x \rightarrow \varphi(x) \in T_x^*X$  est un champ lisse de covecteurs défini sur un voisinage  $X_2$  de  $X_1$ .

**Hypothèse d'invariance** On fera toujours l'hypothèse suivante sur  $\mathcal{L}_0$  :

**Hypothèse 3.12** (Hypothèse d'invariance). *On suppose que  $\mathcal{L}_0$  vérifie les propriétés d'invariances suivantes :*

$$\forall t \geq 0, \Phi^t(\mathcal{L}_0) \cap \mathcal{DE}_- = \mathcal{L}_0 \cap \mathcal{DE}_-. \quad (3.12)$$

$$\forall t \leq 0, \Phi^t(\mathcal{L}_0) \cap \mathcal{DE}_+ = \mathcal{L}_0 \cap \mathcal{DE}_+. \quad (3.13)$$

Remarquons que cette hypothèse implique que

$$\forall t \leq 0, \Phi^t(\mathcal{L}_0) \cap \mathcal{DE}_- \subset \mathcal{L}_0 \cap \mathcal{DE}_-. \quad (3.14)$$

$$\forall t \geq 0, \Phi^t(\mathcal{L}_0) \cap \mathcal{DE}_+ \subset \mathcal{L}_0 \cap \mathcal{DE}_+. \quad (3.15)$$

**Exemple 3.13.** *Étant donné  $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$ , la variété lagrangienne*

$$\mathcal{L}_0 = \Lambda_\omega := \{(x, \omega), x \notin X_0\}$$

*vérifie l'hypothèse 3.12.*

**Exemple 3.14.** *Supposons que  $(X \setminus X_0, g) \cong (\mathbb{R}^d \setminus B(0, R), g_{Eucl})$  pour un  $R > 0$ . Alors la variété lagrangienne sphérique entrante, définie par*

$$\mathcal{L}_0 = \Lambda_{sph} := \{(x, -\frac{x}{|x|}); |x| > R\},$$

*vérifie l'hypothèse 3.12.*

### 3.4 Résultats concernant la propagation de $\mathcal{L}_0$

**Hypothèse de transversalité** Comme expliqué dans la section 1.3.2, nous aurons besoin de faire l'hypothèse que  $\mathcal{L}_0$  est *transverse aux variétés stables*, dans le sens suivant.

**Hypothèse 3.15** (Hypothèse de Transversalité). *On suppose que  $\mathcal{L}_0$  est telle que, pour tout  $\rho \in K$ , pour tout  $\rho' \in \mathcal{L}_0$ , pour tout  $t \geq 0$ , et pour  $\epsilon$  suffisamment petit, on a*

$$(\Phi^t(\rho') \in W_\epsilon^-(\rho)) \implies W_\epsilon^-(\rho) \text{ et } \Phi^t(\mathcal{L}_0) \text{ s'intersectent transversalement en } \Phi^t(\rho'), \quad (3.16)$$

c'est-à-dire que

$$T_{\Phi^t(\rho')} \mathcal{L}_0 \oplus T_{\Phi^t(\rho')} W_\epsilon^-(\rho) = T_{\Phi^t(\rho')} \mathcal{E}. \quad (3.17)$$

Remarquons que (3.17) est équivalente à  $T_{\Phi^t(\rho')} \mathcal{L}_0 \cap T_{\Phi^t(\rho')} W_\epsilon^-(\rho) = \{0\}$ .

#### Hypothèses supplémentaires en courbure négative

Pour que des résultats analogues à ceux de la section 1.3.3 soient vrais, il nous faut faire des hypothèses plus contraignantes sur  $\mathcal{L}_0$ .

Tout d'abord, on demande que  $\mathcal{L}_0$  ne se dilate pas quand on la propage dans le passé.

**Hypothèse 3.16.** *On suppose que  $\mathcal{L}_0$  est telle que  $\forall \rho_1, \rho_2 \in \mathcal{L}_0, \forall t \leq 0, d_X(\Phi^t(\rho_1), \Phi^t(\rho_2)) \leq d_X(\rho_1, \rho_2)$ .*

**Exemple 3.17.** *Sur  $X = \mathbb{R}^d$ , la variété Lagrangienne  $\Lambda_{\text{circ}}$  de l'exemple 3.14 ne satisfait pas l'hypothèse 3.16.*

Pour que la généralisation du théorème 1.27 soit vraie, on a aussi besoin d'une sorte d'hypothèse de complétude sur  $\mathcal{L}_0$ , qui est la suivante.

**Hypothèse 3.18.** *On suppose que  $\mathcal{L}_0$  est telle que pour tout  $\rho \in \mathcal{D}\mathcal{E}_-$ , on a*

$$\left[ \exists \rho' \in \mathcal{L}_0, \forall t \leq 0, d_X(\Phi^t(\rho), \Phi^t(\rho')) \leq d_X(\rho, \rho') \right] \implies \rho \in \mathcal{L}_0.$$

Il faut avoir à l'esprit que, même si  $\mathcal{L}_0$  vérifie l'hypothèse 3.18, un sous-ensemble de  $\mathcal{L}_0$  ne vérifiera pas nécessairement l'hypothèse 3.18, même s'il vérifie la propriété d'invariance de l'hypothèse 3.12.

## 3.4 Résultats concernant la propagation de $\mathcal{L}_0$

Les hypothèses des trois sections précédentes servent surtout à décrire la propagation de  $\mathcal{L}_0$  par le flot géodésique, qui est l'un des ingrédients principaux de nos résultats sur les ondes planes tordues. Énonçons ces résultats dès à présent.



### 3.4.1 Résultats en présence d'un ensemble capté hyperbolique

Pour prouver les théorèmes 1.19 et 1.23 (et leurs généralisations), nous allons utiliser une méthode WKB, et nous aurons besoin d'étudier la propagation de  $\mathcal{L}_0$  par le flot hamiltonien  $\Phi^t$ . En général, il n'est pas facile d'obtenir une description simple de cette évolution. Ce que nous ferons plutôt, c'est de décrire l'« évolution tronquée » de  $\mathcal{L}_0$  : à chaque pas de temps, nous allons découper  $\Phi^t(\mathcal{L}_0)$  selon une partition de l'unité bien choisie.

**Propagation tronquée de variétés lagrangiennes** Soit  $(W_a)_{a \in A}$  une famille finie d'ouverts de  $T^*X$ . Soit  $N \in \mathbb{N}$ , et soit  $\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{N-1} \in A^N$ . Soit  $\Lambda$  une sous-variété lagrangienne de  $T^*X$ . On définit une suite de variétés lagrangiennes (éventuellement vides)  $(\Phi_\alpha^k(\Lambda))_{0 \leq k \leq N}$  par récurrence :

$$\Phi_\alpha^0(\Lambda) = \Lambda \cap W_{\alpha_0}, \quad \Phi_\alpha^{k+1}(\Lambda) = W_{\alpha_{k+1}} \cap \Phi^1(\Phi_\alpha^k(\Lambda)).$$

Dans la suite, nous considérerons des familles indexées par  $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \{0\}$ . Pour tout  $\alpha \in A^N$  tel que  $\alpha_{N-1} \neq 0$ , on pose

$$\tau(\alpha) := \max\{1 \leq i \leq N-1; \alpha_i = 0\} \tag{3.18}$$

s'il existe  $1 \leq i \leq N-1$  tel que  $\alpha_i = 0$ , et  $\tau(\alpha) = 0$  sinon.

**Théorème 3.19.** *Supposons que la variété  $(X, g)$  vérifie l'hypothèse 3.1 à l'infini, et que le flot hamiltonien  $(\Phi^t)$  vérifie l'hypothèse 3.9, et que la variété lagrangienne  $\mathcal{L}_0$  vérifie l'hypothèse d'invariance 3.12 ainsi que l'hypothèse de transversalité 3.15.*

*Fixons un  $\gamma_{uns} > 0$  arbitrairement petit. Il existe alors  $\varepsilon_0 > 0$  tel que le résultat suivant soit vrai. Soit  $(W_a)_{a \in A_1}$  un recouvrement ouvert de  $K$  dans  $T^*X$  de diamètre  $< \varepsilon_0$ , tel qu'il existe des points  $\rho_a \in W_a \cap K$ , et tel que les coordonnées adaptées  $(y^a, \eta^a)$  centrées en  $\rho^a$  soient bien définies sur  $W_a$  pour tout  $a \in A_1$ . On peut alors compléter ce recouvrement ouvert en un recouvrement ouvert  $(W_a)_{a \in A}$  de  $\mathcal{E}$  dans  $T^*X$  où  $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \{0\}$  (avec  $W_0$  défini comme dans (3.1)) tel que les propriétés suivantes soient vérifiées.*

*Il existe  $N_{uns} \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , pour tout  $\alpha \in A^N$  et tout  $a \in A_1$ , alors  $W_a \cap \Phi_\alpha^N(\mathcal{L}_0)$  est soit vide, soit une variété lagrangienne dans un cône instable dans les coordonnées  $(y^a, \eta^a)$ .*

*De plus, si  $N - \tau(\alpha) \geq N_{uns}$ , alors  $W_a \cap \Phi_\alpha^N(\mathcal{L}_0)$  est une variété lagrangienne  $\gamma_{uns}$ -instable dans les coordonnées  $(y^a, \eta^a)$ .*

**Remarque 3.20.** *Pour une suite  $\alpha \in A^N$ ,  $N - \tau(\alpha)$  correspond au temps passé dans la région d'interaction. La dernière partie du résultat signifie donc que si on propage une partie de  $\mathcal{L}_0$  et qu'elle reste dans la région d'interaction pendant suffisamment longtemps, alors les angles entre ses tangentes et la direction instable en  $\rho^a$  seront petits.*

## 3.5 Pression topologique

### 3.4.2 Résultats en courbure négative

La première conséquence des hypothèses 3.6 et 3.16 est qu'elles impliquent l'hypothèse 3.15, comme le dit le lemme suivant.

**Proposition 3.21.** *Supposons que  $(X, g)$  vérifie l'hypothèse 3.1 près de l'infini, ainsi que l'hypothèse 3.6, et l'hypothèse 3.9 concernant l'hyperbolicité, et que  $\mathcal{L}_0$  est une variété lagrangienne vérifiant l'hypothèse 3.12 d'invariance, ainsi que l'hypothèse 3.16. Alors  $\mathcal{L}_0$  vérifie l'hypothèse 3.15 concernant la transversalité.*

Pour énoncer notre résultat principal sur la propagation de  $\mathcal{L}_0$  en courbure négative, qui est une amélioration du théorème 3.19 dans ce cadre, nous avons besoin de la définition suivante.

**Définition 3.22.** *Soit  $X'$  une sous-variété de  $T^*X$  de dimension  $d$ . On dira que  $X'$  se projette sans caustique sur  $X$  si  $X'$  est contenue dans une section lisse de  $T^*X$ . Autrement dit, si  $X'$  peut s'écrire sous la forme*

$$X' = \{(x, f(x)), x \in \Omega\}, \quad (3.19)$$

où  $\Omega$  est un ouvert de  $X$ , et  $f$  est lisse.

**Théorème 3.23.** *On fait les mêmes hypothèses et on prend les mêmes notations que dans le théorème 3.19. On suppose de plus que  $(X, g)$  vérifie l'hypothèse 3.6, et que  $\mathcal{L}_0$  vérifie l'hypothèse 3.16.*

*Soit  $\mathcal{O} \subset X$  un ensemble ouvert suffisamment petit pour pouvoir y définir des coordonnées locales. Alors pour tout  $N \in \mathbb{N}$  et tout  $\alpha \in A^N$ ,  $\Phi_\alpha^N(\mathcal{L}_0) \cap (T^*\mathcal{O})$  est une variété lagrangienne qui se projette sans caustique sur  $X$ . En particulier, dans des coordonnées locales, la variété  $\Phi_\alpha^N(\mathcal{L}_0) \cap T^*\mathcal{O}$  peut s'écrire sous la forme*

$$\Phi_\alpha^N(\mathcal{L}_0) \cap T^*\mathcal{O} \equiv \{(x, \partial_x \varphi_{\alpha, \mathcal{O}}(x)); x \in \mathcal{O}^\alpha\},$$

où  $\mathcal{O}^\alpha$  est un ouvert de  $\mathcal{O}$ .

*De plus, pour tout  $\ell \in \mathbb{N}$ , il existe un  $C_{\ell, \mathcal{O}} > 0$  tel que pour tous  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in A^N$ , on a*

$$\|\partial_x \varphi_{\alpha, \mathcal{O}}\|_{C^\ell} \leq C_{\ell, \mathcal{O}}. \quad (3.20)$$

## 3.5 Pression topologique

Donnons maintenant la définition de la pression topologique, ainsi que ses principales propriétés et définitions équivalentes, afin de pouvoir énoncer l'hypothèse 3.24.

On suppose que  $K$  est un ensemble hyperbolique pour  $(\Phi^t)$ , comme dans la définition 0.2. Rappelons que les ensembles  $E_\rho^{+0}$  ont été introduits dans (3.5).

**Rappel de la définition de la pression topologique**

Soit  $g_0$  une métrique sur  $\mathcal{E}$ , et soit  $d_0$  la distance associée. On dit qu'un ensemble  $\mathcal{S} \subset K$  est  $(\epsilon, t)$ -séparé si pour tous  $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{S}$ ,  $\rho_1 \neq \rho_2$ , on a  $d_0(\Phi^{t'}(\rho_1), \Phi^{t'}(\rho_2)) > \epsilon$  pour un  $0 \leq t' \leq t$ . (Un tel ensemble est nécessairement fini.)

La métrique  $g_0$  induit une forme volume  $\Omega$  sur tout sous-espace de dimension  $d$  de  $T(T^*\mathbb{R}^d)$ . A partir de cette forme volume, on peut définir le *jacobien instable* sur  $K$  comme suit.

Pour tout  $\rho \in K$ , l'application déterminant

$$\Lambda^n d\Phi^t(\rho)|_{E_\rho^{+0}} : \Lambda^n E_\rho^{+0} \longrightarrow \Lambda^n E_{\Phi^t(\rho)}^{+0}$$

peut être identifiée avec le nombre réel

$$\det(d\Phi^t(\rho)|_{E_\rho^{+0}}) := \frac{\Omega_{\Phi^t(\rho)}(d\Phi^t v_1 \wedge d\Phi^t v_2 \wedge \dots \wedge d\Phi^t v_n)}{\Omega_\rho(v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_n)},$$

où  $(v_1, \dots, v_n)$  est n'importe quelle base de  $E_\rho^{+0}$ . Ce nombre définit le jacobien instable :

$$\exp \lambda_t^+(\rho) := \det(d\Phi^t(\rho)|_{E_\rho^{+0}}). \tag{3.21}$$

On pose alors

$$Z_t(\epsilon, s) := \sup_{\mathcal{S}} \sum_{\rho \in \mathcal{S}} \exp(-s \lambda_t^+(\rho)),$$

où le supremum est pris sur tous les sous-ensembles de  $K$   $(\epsilon, t)$ -séparés. La pression est définie comme

$$\mathcal{P}(s) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log Z_t(\epsilon, s). \tag{3.22}$$

Cette quantité est en fait indépendante de la forme volume  $\Omega$  et de la métrique  $g_0$  choisie : en prenant le logarithme, un changement de  $\Omega$  ou de métrique ajoute simplement un terme d'ordre  $O(\frac{1}{t})$ , qui disparaît à la limite  $t \rightarrow \infty$ .

**Hypothèse 3.24.** *Nous supposons que l'inégalité suivante est vérifiée :*

$$\mathcal{P}(1/2) < 0. \tag{3.23}$$

**Remarque 3.25.** *Si  $d = 2$ , c'est-à-dire si  $X$  est une surface, alors la condition (3.23) est équivalente à*

$$\dim_{Haus}(K) < 2,$$

où  $\dim_{Haus}$  est la dimension de Hausdorff. Si  $d > 2$ , il n'existe pas de lien simple entre le signe de  $\mathcal{P}_{1/2}$  et la dimension de Hausdorff de  $K$ , à moins que le flot ne soit conforme dans les directions stables et instables (voir [PS01]).

### 3.5 Pression topologique

**Remarque 3.26.** Si  $X = \mathbb{H}^d \setminus \Gamma$  est une variété hyperbolique convexe co-compacte, alors la condition (3.23) est équivalente à

$$\delta(\Gamma) < \frac{d}{2},$$

où  $\delta(\Gamma)$  est défini comme dans (5).

#### Autres définitions courantes

Bien que nous ne les utiliserons pas par la suite, rappelons deux autres définitions de la pression topologique (cf. [Wal82, Chapter 9]). Pour  $\rho \in K$ , on pose

$$\varphi^+(\rho) := - \left. \frac{d\lambda_t^+(\rho)}{dt} \right|_{t=0},$$

avec  $\lambda^+$  comme dans (3.21). On a alors la formulation variationnelle suivante :

$$\mathcal{P}(1/2) = \sup_{\mu \in \text{Erg}(K)} \left( h_{KS}(\mu) - \int \frac{\varphi^+}{2} d\mu \right),$$

où  $\text{Erg}(K)$  désigne l'ensemble des mesures invariantes par le flot, ergodiques, et supportées sur  $K$ , et où  $h_{KS}$  désigne l'entropie de Kolmogorov-Sinai d'une telle mesure.

On a une définition plus simple de la pression topologique pour les flots dits Axiome A, en terme d'orbites périodiques. Rappelons qu'un flot est dit Axiome A, si les orbites périodiques sont denses dans  $K$ . Par exemple, le flot est toujours Axiome A si l'hypothèse 3.6 est vérifiée.

Pour chaque orbite périodique  $p$  de  $\Phi^t$ , on note  $T_p$  sa période, et  $\rho_p$  l'un de ses points, et on pose  $\tilde{\varphi}^+(p) := \int_0^{T_p} \varphi^+(\Phi^t(\rho_p)) dt$ .

La pression topologique est alors égale à

$$\mathcal{P}(1/2) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \left( \sum_{T-1 \leq T_p \leq T} \exp \left( \frac{-\tilde{\varphi}^+(p)}{2} \right) \right), \quad (3.24)$$

la somme portant sur les orbites périodiques de période comprise entre  $T - 1$  et  $T$ .

Cette dernière définition permet de comprendre un peu mieux ce que la pression représente. Comme  $K$  est un ensemble hyperbolique la dynamique est *complexe*, et la somme dans (3.24) possède en général un nombre de terme qui croît exponentiellement avec  $T$ . D'autre part, comme  $K$  est hyperbolique, la dynamique est *instable*, et pour une orbite périodique  $p$ ,  $\tilde{\varphi}^+(p)$  croît linéairement avec  $T_p$ . Ainsi, la somme dans (3.24) comporte un nombre exponentiellement grand de termes exponentiellement petits. La condition que nous mettons sur la pression topologique est donc une manière de dire que *la dynamique est plus instable que complexe*.

### Pression topologique sur une petite fenêtre d'énergie

Soit  $\delta > 0$  suffisamment petit pour que (3.8) soit vérifiée. Rappelons que  $\mathcal{E}_E$  et  $K_E$  ont été définis dans (3.6) et (3.6) respectivement ; on définit

$$\mathcal{E}^\delta := \bigcup_{|1-E|<\delta} \mathcal{E}_E, \quad K^\delta := \bigcup_{|1-E|<\delta} K_E.$$

Grâce à (3.8), la fonction  $\lambda_t^+$  introduite dans (3.21) est bien définie sur  $\mathcal{E}^\delta$  une fois qu'on a fixé une métrique sur  $\mathcal{E}^\delta$ . On peut alors comme précédemment, définir

$$Z_t^\delta(\epsilon, s) := \sup_S \sum_{\rho \in \mathcal{S}} \exp(-s\lambda_t^+(\rho)),$$

où le supremum est pris sur tous les sous-ensembles de  $K^\delta$   $(\epsilon, t)$ -séparés. On peut alors poser

$$\mathcal{P}^\delta(s) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log Z_t^\delta(\epsilon, s), \quad (3.25)$$

et remarquer que cette quantité est indépendante de la métrique choisie.

Il est montré dans [NZ09, Lemme 3.1] que

$$\mathcal{P}(s) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{P}^\delta(s). \quad (3.26)$$

### Une définition utile de la pression topologique

Dans la suite, nous aurons besoin d'une autre définition de la pression topologique, qui peut se traduire plus facilement en terme d'estimées sur le propagateur de Schrödinger.

Soit  $\mathcal{W} = (W_\alpha)_{\alpha \in A}$  un recouvrement ouvert fini de  $K^\delta$ , tel que les  $W_\alpha$  sont tous strictement inclus dans  $\mathcal{E}^\delta$ . Pour tout  $T \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $W(T) := (W_\alpha)_{\alpha \in A^T}$  où

$$W_\alpha := \bigcap_{k=0}^{T-1} \Phi^{-k}(W_{a_k}),$$

avec  $\alpha = a_0, \dots, a_{T-1}$ . Soit  $\mathcal{A}'_T$  l'ensemble des  $\alpha \in A^T$  tels que  $W_\alpha \cap K^\delta \neq \emptyset$ . Si  $V \subset \mathcal{E}^\delta$ ,  $V \cap K^\delta \neq \emptyset$ , on définit

$$S_T(V) := - \inf_{\rho \in V \cap K^\delta} \lambda_T^+(\rho), \quad \text{où } \lambda_T^+ \text{ est comme dans (3.21)}. \quad (3.27)$$

$$Z_T(\mathcal{W}, s) := \inf \left\{ \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_T} \exp\{s S_T(W_\alpha)\} : \mathcal{A}_T \subset \mathcal{A}'_T, K^\delta \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}_T} W_\alpha \right\}$$

On a alors, en utilisant [Wal82, Théorème 9.4] :

$$\mathcal{P}^\delta(s) = \lim_{\text{diam } \mathcal{W} \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log Z_T(\mathcal{W}, s).$$

### 3.5 Pression topologique

La pression topologique  $\mathcal{P}$  est alors donnée par (3.26).

Rappelons qu'on a supposé que

$$\mathcal{P}(1/2) < 0.$$

Fixons un  $\epsilon_0 > 0$  tel que  $\mathcal{P}(1/2) + 2\epsilon_0 < 0$ . Il existe alors un  $t_0 > 0$ , et un  $\hat{\mathcal{W}}$  et un recouvrement ouvert de  $K^\delta$  tel que

$$\left| \frac{1}{t_0} \log Z_{t_0}(\hat{\mathcal{W}}, 1/2) - \mathcal{P}^\delta(1/2) \right| \leq \epsilon_0. \quad (3.28)$$

On peut alors trouver  $\mathcal{A}_{t_0}$  tel que  $\{W_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}_{t_0}\}$  est un recouvrement ouvert de  $K^\delta$  dans  $\mathcal{E}^\delta$  et tel que

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{t_0}} \exp\left\{\frac{1}{2} S_{t_0}(W_\alpha)\right\} \leq \exp\{t_0(\mathcal{P}^\delta(1/2) + \epsilon_0)\}.$$

Par conséquent, si on prend  $\delta > 0$  suffisamment petit, on a

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{A}_{t_0}} \exp\left\{\frac{1}{2} S_{t_0}(W_\alpha)\right\} \leq \exp\{t_0(\mathcal{P}(1/2) + 2\epsilon_0)\}.$$

#### 3.5.1 Un nouveau recouvrement ouvert de $\mathcal{E}$

Par hypothèse, le diamètre de  $\hat{\mathcal{W}}$  dans (3.28) est plus petit que  $\epsilon_0$ , de sorte qu'on peut lui appliquer le théorème 3.19. Tout comme dans le théorème 3.19, on peut compléter cette famille d'ouverts en un recouvrement  $(W_\alpha)_{\alpha \in A}$  de  $\mathcal{E}$ , et si  $\alpha \in A^N$  pour un  $N \geq 1$ , on définit comme précédemment  $W_\alpha := \bigcap_{k=0}^{N-1} \Phi^{-k}(W_{\alpha_k})$ .

Renommons  $\{W_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}_{t_0}\}$  en  $\{V_b, b \in B_1\}$ , de sorte qu'on a

$$\sum_{b \in B_1} \exp\left\{\frac{1}{2} S_{t_0}(V_b)\right\} \leq \exp\{t_0(\mathcal{P}(1/2) + 2\epsilon_0)\}. \quad (3.29)$$

Les ensembles  $(V_b)_{b \in B_1}$  forment un recouvrement ouvert de  $K$ . Par compacité, ils forment donc un recouvrement ouvert de  $\{\rho \in \mathcal{E}; d(\rho, K) \leq \epsilon_3\}$  pour un  $\epsilon_3 > 0$ .

Pour chaque  $\alpha \in A^{t_0}$ , écrivons  $\tilde{W}_\alpha := W_\alpha \cap \{\rho \in \mathcal{E}; d(\rho, K) > \epsilon_3/2\}$ .

Nous noterons  $(V_b)_{b \in B_2}$  les ensembles  $(\tilde{W}_\alpha)_{\alpha \in A^{t_0}}$  où  $\alpha \in A^{t_0} \setminus \mathcal{A}_{t_0}$  est tel que  $\alpha_k \neq 0$  pour un  $0 \leq k \leq t_0 - 1$ . On notera aussi  $V_0$  l'ensemble  $W_{0,0,\dots,0}$ .

En écrivant  $B = B_1 \sqcup B_2 \sqcup \{0\}$ , les ensembles  $(V_b)_{b \in B}$  forment un recouvrement de  $\mathcal{E}$  par des ouverts de  $T^*X$  qui intersectent tous  $\mathcal{E}$ .

Si  $\beta = b_0 \dots b_{N-1} \in B^N$  pour un  $N \in \mathbb{N}$ , et si  $\Lambda$  est une variété lagrangienne, on définira pour chaque  $0 \leq k \leq N - 1$  l'ensemble  $\Phi_\beta^{k,t_0}(\Lambda)$  par

$$\begin{aligned} \Phi_\beta^{0,t_0}(\Lambda) &= \Lambda \cap V_{b_0} \\ \Phi_\beta^{k,t_0}(\Lambda) &= V_{b_k} \cap \Phi^{k-1,t_0}(\Phi_\beta^{k-1,t_0}(\Lambda)) \quad \text{for } 1 \leq k \leq N - 1. \end{aligned}$$

Par définition des ensembles  $b \in B$ , on a  $\Phi_\beta^{N,t_0}(\Lambda) = \Phi_{\alpha_\beta}^{N,t_0}(\Lambda)$ , où  $\alpha_\beta \in A^{Nt_0}$  est la concaténation de toutes les suites composant les  $b_k$ ,  $0 \leq k \leq N-1$ .

Par conséquent, une fois qu'on a fixé un point  $\rho^b \in K \cap V_b$  pour chaque  $b \in B_1$ , on a l'analogie suivant du théorème 3.19.

**Corollaire 3.27.** *On fait les mêmes hypothèses que dans le théorème 3.19. Soit  $\gamma_{uns} > 0$ . Il existe  $N'_{uns} \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , pour tout  $\beta \in B^N$  et pour tout  $b \in B_1$ , alors soit  $V_b \cap \Phi_\beta^{N,t_0}(\mathcal{L}_0)$  est vide, soit c'est une variété lagrangienne qui appartient à un cône instable dans les coordonnées  $(y^{\rho^b}, \eta^{\rho^b})$ .*

*De plus, si  $N - \tau(\beta) \geq N'_{uns}$ , alors  $V_b \cap \Phi_\beta^{N,t_0}(\mathcal{L}_0)$  est une variété lagrangienne  $\gamma_{uns}$ -instable dans les coordonnées  $(y^{\rho^b}, \eta^{\rho^b})$ .*

On a aussi l'analogie du théorème 3.23.

**Corollaire 3.28.** *On fait les mêmes hypothèses et on prend les mêmes notations que dans le corollaire précédent. On suppose de plus que  $(X, g)$  vérifie l'hypothèse 3.6, et que  $\mathcal{L}_0$  vérifie l'hypothèse 3.16.*

*Soit  $\mathcal{O} \subset X$  un ensemble ouvert suffisamment petit pour pouvoir y définir des coordonnées locales. Alors pour tout  $N \in \mathbb{N}$  et tout  $\beta \in B^N$ ,  $\Phi_\beta^{N,t_0}(\mathcal{L}_0) \cap (T^*\mathcal{O})$  est une variété lagrangienne qui se projette sans caustique sur  $X$ . En particulier, dans des coordonnées locales, la variété  $\Phi_\beta^{N,t_0}(\mathcal{L}_0) \cap T^*\mathcal{O}$  peut s'écrire sous la forme*

$$\Phi_\beta^{N,t_0}(\mathcal{L}_0) \cap T^*\mathcal{O} \equiv \{(x, \partial_x \varphi_{\beta, \mathcal{O}}(x)); x \in \mathcal{O}^\beta\},$$

où  $\mathcal{O}^\beta$  est un ouvert de  $\mathcal{O}$ .

De plus, pour tout  $\ell \in \mathbb{N}$ , il existe un  $C_{\ell, \mathcal{O}} > 0$  tel que pour tous  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\beta \in B^N$ , on a

$$\|\partial_x \varphi_{\beta, \mathcal{O}}\|_{C^\ell} \leq C_{\ell, \mathcal{O}}. \quad (3.30)$$

Afin d'alléger les notations, on peut maintenant reparamétriser le temps, de sorte que  $t_0 = 1$ . On omettra ainsi la référence à  $t_0$  dans toute la suite. On a alors

$$\sum_{b \in B_1} \exp\left\{\frac{1}{2} S_1(V_b)\right\} \leq \exp\{(\mathcal{P}(1/2) + 2\epsilon_0)\}, \quad (3.31)$$

et on notera  $\Phi_\beta^k(\Lambda)$  au lieu de  $\Phi_\beta^{k,1}(\Lambda)$ .

**Remarque 3.29.** *Dans [NZ09, Proposition 5.2], les auteurs prouvent qu'il existe un  $\gamma_1 > 0$  tel que le résultat suivant d'invariance du cône instable soit vrai. Soit  $b, b' \in B_1$ , et soit  $\Lambda$  une variété lagrangienne incluse dans  $V_b$ ,  $\gamma$ -instable dans les coordonnées  $(y^{\rho^b}, \eta^{\rho^b})$  pour un  $\gamma \leq \gamma_1$ . Alors  $\Phi^1(\Lambda) \cap V_{b'}$  est aussi une variété lagrangienne qui est  $\gamma$ -instable dans les coordonnées  $(y^{\rho^{b'}}, \eta^{\rho^{b'}}$ ).*

### 3.6 Hypothèses sur les fonctions propres généralisées

De plus, l'application  $y^{\rho_b} \mapsto y^{\rho_{b'}}$  obtenue en projetant  $\Phi^1|_\Lambda$  sur les espaces  $\{(y^{\rho_b}, \eta^{\rho_b}); \eta^{\rho_b} = 0\}$  et  $\{(y^{\rho_{b'}}, \eta^{\rho_{b'}}); \eta^{\rho_{b'}} = 0\}$  vérifie l'estimée suivante sur son domaine de définition :

$$\det \left( \frac{\partial y^{\rho_{b'}}}{\partial y^{\rho_b}} \right) = (1 + O(\epsilon^{\mathbf{p}})) e^{\lambda_1^+(\rho_b)},$$

où  $\epsilon$  est le maximum des diamètres des  $V_b$ ,  $b \in B_1$ , où  $\mathbf{p}$  est comme dans (3.9), et  $\lambda_1^+(\rho_b)$  est le jacobien instable en  $\rho_b$ , défini dans (3.21).

Dans toute la suite, nous supposons toujours que  $\gamma_{uns} < \gamma_1$ .

**Remarque 3.30.** Grâce au lemme 3.5, on a pour tout  $b \in B_1 \cup B_2$ , pour tout  $k \geq 1$ ,

$$\Phi^k(\mathcal{L}_0 \cap V_b) \cap \mathcal{W}_0 \cap \mathcal{D}\mathcal{E}_- = \emptyset.$$

### 3.6 Hypothèses sur les fonctions propres généralisées

Sur une variété  $(X, g)$  vérifiant l'hypothèse 3.1, on considère une famille d'opérateurs indexée par  $h$

$$P_h := -h^2 \Delta + V,$$

dont le symbole principal est  $p = |\xi|_g^2 + V(x)$ .

On considère une famille de fonctions propres généralisée de  $P_h$  à énergie 1, c'est-à-dire, une famille de fonctions  $E_h \in C^\infty(X)$  indexée par  $h \in (0, 1]$  vérifiant

$$(P_h - 1)E_h = 0.$$

Nous ferons toujours l'hypothèse que ces fonctions propres généralisées peuvent être décomposées comme suit.

**Hypothèse 3.31.** On suppose que  $E_h$  peut s'écrire sous la forme

$$E_h = E_h^0 + E_h^1, \tag{3.32}$$

où  $E_h^0$  est une distribution tempérée qui est un état lagrangien associé à une variété lagrangienne  $\mathcal{L}_0$  vérifiant l'hypothèse 3.12 d'invariance, ainsi que l'hypothèse 3.15 de transversalité. On suppose que  $E_h^1$  est une distribution tempérée telle que pour tout  $\rho \in WF_h(E_h^1)$ , on a  $\rho \in \mathcal{E}$ .

De plus, on suppose que  $E_h^1$  est sortante au sens où il existe  $\epsilon_2 > 0$  tel que pour tout  $(x, \xi) \in T^*X$  tel que  $b(x) < \epsilon_2$ , on a

$$\rho \in WF_h(E_h^1) \Rightarrow \rho \in \mathcal{D}\mathcal{E}_+. \tag{3.33}$$



**Remarque 3.32.** Remarquons que (3.33) implique que pour tout  $\chi \in C_c^\infty(X)$ , on peut trouver  $\hat{\chi} \in C_c^\infty(X)$  telle que  $\hat{\chi} \equiv 1$  sur  $\text{supp}(\chi) \cup \{x \in X; b(x) \geq \epsilon_2\}$ , et telle que le support de  $\hat{\chi}(1 - \hat{\chi})$  soit suffisamment petit pour que, pour tout  $t \geq 1$ , on ait

$$\Phi^t \left( WF_h((1 - \hat{\chi})E_h^1) \right) \cap T^*\text{supp}(\hat{\chi}) = \emptyset. \quad (3.34)$$

C'est sous cette forme que nous utiliserons le plus souvent (3.33).

Nous allons maintenant donner trois exemples de familles de fonctions propres du laplacien entrant dans ce cadre : les ondes planes tordues sur les variétés à infinis euclidiens, les « ondes circulaires tordues », et les ondes planes tordues sur les variétés hyperboliques près de l'infini. Si le cas des ondes planes tordues, traité en §3.6.1, doit guider le lecteur dans la lecture de cette thèse, les deux autres exemples sont plus techniques, et le lecteur peut sauter les sections 3.6.2 et 3.6.3 en première lecture.

### 3.6.1 Ondes planes tordues sur les variétés à infinis euclidiens

**Définition 3.33.** On dira qu'une variété riemannienne  $(X, g)$  est à infinis euclidiens s'il existe un compact  $X_0 \subset X$  et un  $R_0 > 0$  tel que  $X \setminus X_0$  possède un nombre fini de composantes connexes, notées  $X_1, \dots, X_l$ , ( $l \geq 1$ ) telles que pour tout  $1 \leq i \leq l$ ,  $(X_i, g)$  est isométrique à  $(\mathbb{R}^d \setminus B(0, R_0), g_{Eucl})$ .

Si  $l = 1$  dans la définition précédente, on retrouve bien la définition de variété euclidienne près de l'infini. La surface représentée en figure 3.2 est à infinis euclidiens.

Remarquons que, quitte à prendre  $X_0$  plus grand, on peut supposer que  $\text{supp} V \subset X_0$ . Toute variété à infinis euclidiens vérifie l'hypothèse 3.1. En effet, on peut prendre comme fonction définissant le bord une fonction  $b$  telle que  $b(x) = (1 + |x|^2)^{-1/2}$  si  $x \in X_i$ , que l'on identifie avec  $\mathbb{R}^d \setminus B(0, R_0)$ .

Pour définir les ondes planes tordues dans ce contexte, nous donnerons simplement la définition de chacun des termes intervenant dans la décomposition (3.32).

#### Définition de $E_h^0$

Par définition d'une variété à infinis euclidiens, on a :

$$X = X_0 \sqcup \left( \bigsqcup_{i=1}^l X_i \right),$$

avec  $X_0$  compact, et pour chaque  $1 \leq i \leq l$ , il existe un isomorphisme isométrique

$$x_i : (X_i, g) \longrightarrow (\mathbb{R}^d \setminus B(0, R_0), g_{eucl}). \quad (3.35)$$

### 3.6 Hypothèses sur les fonctions propres généralisées

La frontière de  $\overline{X}$  peut alors être identifiée avec une réunion de sphères :

$$\partial X \cong \bigsqcup_{i=1}^l S_i,$$

avec  $S_i \cong \mathbb{S}^{d-1}$ .

Soit  $\omega \in \partial \overline{X}$ . On a  $\omega \in S_i$  pour un  $1 \leq i \leq m$ . Prenons une fonction lisse  $\tilde{\chi} : X \rightarrow [0; 1]$  qui s'annule en dehors de  $X_i$ , et qui est égale à 1 sur un voisinage de  $S_i$ .

On définit l'onde plane entrante  $E_h^0(\cdot; \omega) : X \rightarrow \mathbb{C}$  par :

$$E_h^0(x; \omega) = \tilde{\chi}(x) e^{i \frac{x_i(x) \cdot \omega}{h}} \text{ si } x \in X_i, \quad 0 \text{ sinon.} \quad (3.36)$$

Si on écrit  $\mathcal{L}_0$  pour la sous-variété lagrangienne (à bords)  $X_i \times \{\omega\} \subset T^*X$ , alors  $E_h^0$  est une distribution lagrangienne associée à  $\mathcal{L}_0$ , qui vérifie l'hypothèse 3.12 d'invariance.

#### Définition de l'onde plane tordue

Posons

$$F_h := -[P_h, \tilde{\chi}] E_h^0(\omega).$$

Remarquons que  $F_h \in S^{comp}(X)$ .

Rappelons que la résolvante sortante  $R_h$  est définie comme  $R_h := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (P_h - (1 + i\epsilon)^2)^{-1}$ , la limite étant prise dans la topologie des opérateurs bornés de  $L_{comp}^2(X)$  dans  $L_{loc}^2(X)$ .

On définit

$$E_h^1 := R_h F_h,$$

qui est une distribution tempérée grâce au théorème 1.12.<sup>3</sup>

On définit alors l'onde plane tordue comme :

$$E_h(\cdot; \omega) := E_h^0 + E_h^1.$$

Il nous faut maintenant vérifier que  $E_h^1$  est sortante, au sens de l'hypothèse 3.31. Il nous faut donc expliquer pourquoi il existe  $\epsilon_2 > 0$  tel que pour tous  $\chi, \chi' \in C_c^\infty(X)$  tels que  $\chi \equiv 1$  sur  $\{x \in X; b(x) \geq \epsilon_2\}$ , il existe  $T_\chi > 0$  tel que pour tout  $t > T_\chi$ , on a

$$\Phi^t(WF_h((1 - \chi)\chi' E_h^1) \cap T^*\text{supp}(\chi)) = \emptyset. \quad (3.37)$$

Notre outil principal sera le lemme suivant, dont la preuve peut être trouvée dans [DG14, §6.2].

**Lemme 3.34.** *On suppose  $(X, g)$  à infinis euclidiens. Pour tout  $\rho \in WF_h(E_h^1)$ , on a  $\rho \in \mathcal{E}$ . De plus, l'une des alternatives suivantes est vérifiée :*

3. Ce théorème s'applique pour les variétés à infinis euclidiens : voir [NZ09, Theorem 5].

- Soit  $\rho \in \Gamma^+$ ,
- Soit il existe  $t > 0$  tel que  $\Phi^{-t}(\rho) = (x, \omega)$  où  $x \in \text{supp}(\partial\tilde{\chi})$ , et où  $\tilde{\chi}$  est comme dans (3.36).

En prenant  $\epsilon_2 < \epsilon_0$  suffisamment petit pour que  $\text{supp}(\tilde{\chi}) \subset \{x \in X, b(x) > \epsilon_2\}$ , l'hypothèse de convexité géodésique implique que (3.33) est vérifié, et donc que  $E_h^1$  est sortante.

Finalement, on vérifie sans problème que l'on a, au sens des EDP :

$$(P_h - 1)E_h = 0.$$

### 3.6.2 Ondes circulaires tordues

Dans cette section, nous considérons  $X$  une variété euclidienne près de l'infini, et nous verrons comment le formalisme décrit dans l'hypothèse 3.31 peut s'appliquer à des « ondes circulaires tordues ». Pour simplifier la discussion, nous nous limiterons au cas des surfaces ( $d = 2$ ). Comme dans le chapitre 1, nous considérerons une fonction  $\chi_0 \in C_c^\infty(X)$  valant 1 dans la région d'interactions  $X_0$ .

Soient  $a, \varphi \in S^{comp}(\mathbb{S}^1)$ , et soit  $L \in \mathbb{R}$  un *moment angulaire classique*. Le paramètre semi-classique sera ici restreint aux valeurs positives telles que  $\frac{L}{h} \in 2\pi\mathbb{Z}$ . Considérons la fonction  $\tilde{E}_h^0$  valant zéro dans  $X_0$ , et telle que

$$\tilde{E}_h^0(x) := \int_{\mathbb{S}^1} a(\omega) e^{iL\omega/h} e^{i\vec{\omega} \cdot x/h} d\omega$$

si  $x \in X \setminus X_0$ . Ici,  $\vec{\omega} \cdot x := |x| \cos(\omega - \hat{x})$ , où  $(|x|, \hat{x})$  sont les coordonnées polaires de  $x$ .

**Remarque 3.35.** *Comme nous allons le voir ci-dessous,  $\tilde{E}_h^0$  correspond une « onde ayant un moment angulaire », c'est-à-dire une fonction s'écrivant comme la somme de deux états lagrangiens associés à des lagrangiennes entrantes et sortante, dont les points ont tous le même moment angulaire. En particulier, pour  $L = 0$ , la définition ci-dessus correspond à une onde circulaire.*

On peut alors faire la même construction que dans le chapitre 1, et poser

$$F_h := -[P_h, \chi_0] \tilde{E}_h^0(\cdot) = -[h^2 \Delta, \chi_0] \tilde{E}_h^0(\cdot).$$

$F_h$  est alors dans  $C_c^\infty(X)$ , donc on peut bien définir

$$\tilde{E}_h^1(\cdot) := R_h F_h.$$

On pose alors

$$E_h(x) := (1 - \chi_0) \tilde{E}_h^0(x) + \tilde{E}_h^1(x).$$

### 3.6 Hypothèses sur les fonctions propres généralisées

On a bien

$$\begin{aligned} (P_h - 1)E_h &= (P_h - 1)\tilde{E}_h^0 + [P_h - 1, \chi]\tilde{E}_h^0 + (P_h - 1)R_h F_h \\ &= [P_h, \chi]\tilde{E}_h^0 + F_h \\ &= 0. \end{aligned}$$

Notre but sera maintenant de montrer que la fonction  $E_h$  est de la forme décrite dans l'hypothèse 3.31.

On peut décrire la fonction  $\tilde{E}_h^0$  par un argument de phase stationnaire.  $x = (|x|, \hat{x})$  étant fixé dans  $X \setminus X_0$ , la phase intervenant dans la définition de  $\tilde{E}_h^0$  sera stationnaire si et seulement si

$$L + |x| \sin(\omega - \hat{x}) = 0. \quad (3.38)$$

L'équation (3.38) a exactement deux solutions, que nous noterons  $\omega_+(x)$  et  $\omega_-(x)$ , qui convergent vers  $\hat{x}$  et  $-\hat{x}$  respectivement quand  $|x| \rightarrow \infty$ .

On a par le lemme de phase stationnaire que

$$(1 - \chi_0(x))\tilde{E}_h^0(x) = b_+(x; h)e^{i(x \cdot \vec{\omega}_+(x) + L\omega_+(x))/h} + b_-(x; h)e^{i(x \cdot \vec{\omega}_-(x) + L\omega_-(x))/h} + O\left(\frac{h}{r}\right)^\infty,$$

où  $b_\pm(x; h)$  sont de l'ordre de  $O\left(\frac{h}{|x|}\right)^{1/2}$ . Notons

$$\psi_\pm(x) := x \cdot \vec{\omega}_\pm(x) + L\omega_\pm(x)$$

$(1 - \chi_0(x))\tilde{E}_h^0(x)$  est donc la somme de deux états lagrangiens, associés à des lagrangiennes  $\Lambda_\pm = \{(x, \nabla\psi_\pm(x), x \in \text{supp}(1 - \chi_0))\}$ .

Comme  $\omega_\pm(x)$  est proche de  $\pm\hat{x}$  quand  $|x| \rightarrow \infty$ , on a, quitte à prendre  $\chi_0 = 1$  sur un ensemble plus grand, que

$$\Lambda_\pm \subset \mathcal{DE}_\pm.$$

On a

$$\begin{aligned} \nabla\psi_\pm(x) &= \vec{\omega}_\pm(x) + L\nabla\omega_\pm(x) + |x| \sin(\omega_\pm - \hat{x})\nabla\omega_\pm(x) \\ &= \vec{\omega}_\pm(x) \end{aligned}$$

D'autre part, si  $\omega$  vérifie (3.38) en  $x$ , alors  $\omega$  vérifie aussi (3.38) en  $x + t\vec{\omega}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . On déduit de ceci que  $\Phi^t(\Lambda_-) \cap \mathcal{DE}_- = \Lambda_- \cap \mathcal{DE}_-$  pour tout  $t \geq 0$ .

Notons  $E_h^0(x) = b_-(x; h)e^{i(x \cdot \vec{\omega}_-(x) + L\omega_-(x))/h}$ . Par ce qui précède,  $E_h^0$  est un état lagrangien associé à  $\Lambda_-$ , qui est une variété lagrangienne qui vérifie l'hypothèse 3.12 d'invariance.

On pose  $E_h^1(x) = E_h - E_h^0 = -b_+(x; h)e^{i(x \cdot \vec{\omega}_+(x) + L\omega_+(x))/h} + R_h F_h + O\left(\frac{h}{|x|}\right)^\infty$ .  $E_h^1$  est une distribution  $h$ -tempérée, qui est sortante.

En effet,  $b_+(x; h)e^{i(x \cdot \vec{\omega}_+(x) + L\omega_+(x))/h}$  est un état lagrangien associé à la variété lagrangienne  $\Lambda_+$ , qui est dans  $\mathcal{DE}_+$ , donc c'est une fonction sortante. Le terme en  $O\left(\frac{h}{|x|}\right)^\infty$  est

bien sortant, car son front d'onde est vide. Le terme  $R_h F_h$  est aussi sortant, car  $R_h$  est la résolvante sortante, comme dans la section précédente.

On peut donc appliquer le théorème 3.37 ci-dessous à  $E_h$ , du moment que  $\Lambda_-$  vérifie l'hypothèse de transversalité 3.15. Ceci peut être intéressant pour décrire les propriétés de la matrice de diffusion, car les  $(e^{iL\omega/h})_{k \in \mathbb{Z}}$  forment une base orthonormale de l'espace  $L^2(\mathbb{S}^1)$  sur lequel la matrice de diffusion agit.

### 3.6.3 Ondes planes tordues sur les variétés hyperboliques près de l'infini

Cette section suit partiellement [DG14, §7].

**Définition 3.36.** *On dira qu'une variété riemannienne  $(X, g)$  est hyperbolique près de l'infini si elle vérifie l'hypothèse 3.1, et si, de plus, dans un voisinage collier de  $\partial\bar{X}$ , la métrique  $g$  est de courbure sectionnelle  $-1$  et peut être mise sous la forme*

$$g = \frac{db^2 + h(b)}{b^2},$$

où  $b$  est la fonction définissant le bord introduite dans l'hypothèse 3.1, et où  $h(b)$  est une famille lisse, indexée par un paramètre, de métriques sur  $\partial\bar{X}$  pour  $b \in [0, \epsilon)$ .

**Construction de  $E_h^0$**  Fixons un  $\omega \in \partial\bar{X}$ . Par définition d'une variété hyperbolique près de l'infini, il existe un voisinage  $\mathcal{V}_\omega$  de  $\omega$  dans  $\bar{X}$ , et un difféomorphisme isométrique  $\psi_\omega$  de  $\mathcal{V}_\omega \cap X$  dans un voisinage  $V_{q_0, \delta}$  du pôle nord  $q_0$  dans la boule unité  $\mathbb{B} := \{q \in \mathbb{R}^d; |q| < 1\}$  équipée de la métrique  $g_0$  :

$$V_{q_0, \delta} := \{q \in \mathbb{B}; |q - q_0| < \delta\}, \quad g_0 = \frac{4dq^2}{(1 - |q|^2)^2},$$

où  $\psi_\omega(\omega) = q_0$ , et où  $|\cdot|$  désigne la distance euclidienne. On choisira une fonction définissant le bord dans la boule  $\mathbb{B}$  égale à

$$b_0 = 2 \frac{1 - |q|}{1 + |q|}, \quad (3.39)$$

et alors la métrique induite  $b_0^2 g_0|_{\mathbb{S}^{d-1}}$  sur  $\mathbb{S}^{d-1} = \partial\mathbb{B}$  est la métrique usuelle de courbure  $+1$ . La fonction  $b_\omega := b_0 \circ \psi_\omega^{-1}$  peut être vue localement comme une fonction définissant le bord dans  $X$ .

Pour chaque  $p \in \mathbb{S}^{d-1}$ , on définit la fonction de Busemann sur  $\mathbb{B}$

$$\phi_p^{\mathbb{B}}(q) = \log \left( \frac{1 - |q|^2}{|q - p|^2} \right).$$

Remarquons que l'on a  $\lim_{p \rightarrow q} \phi_p^{\mathbb{B}}(q) = +\infty$ .

### 3.6 Hypothèses sur les fonctions propres généralisées

Il existe un  $\epsilon > 0$  tel que l'ensemble

$$U_\omega := \{x \in \overline{X}; d_{\bar{g}(x,\omega)} < \epsilon\}$$

est inclus dans  $\mathcal{V}_\omega$ , où  $\bar{g} = b_\omega^2 g$  est la métrique compactifiée. On définit la fonction

$$\phi_\omega(x) := \phi_{q_0}^{\mathbb{B}}(\psi_\omega(x)), \quad \text{pour } x \in U_\omega, \quad 0 \text{ sinon.}$$

Soit  $\hat{\chi} : \overline{X} \rightarrow [0, 1]$  une fonction lisse qui est nulle en dehors de  $U_\omega$ , et qui est égale à un sur un voisinage de  $\omega$ .

L'onde entrante est alors définie comme

$$E_h^0(x, \omega) := \hat{\chi}(x) e^{((d-1)/2 + i/h)\phi_\omega(x)} \quad \text{si } x \in U_\omega, \quad 0 \text{ sinon.}$$

$E_h^0$  est alors un état lagrangien associé à la variété lagrangienne

$$\mathcal{L}'_0 := \{(x, \partial_x \phi_\omega(x)), x \in U_\omega\},$$

représentée dans la figure 3.3.  $\mathcal{L}'_0$  vérifie alors l'hypothèse (3.12) d'invariance, comme on peut le voir facilement en travaillant dans  $\mathbb{B}$ , mais pas l'hypothèse (3.13). Pour obtenir une variété  $\mathcal{L}_0$  vérifiant l'hypothèse (3.13) à partir de  $\mathcal{L}'_0$ , il suffit de continuer à propager les points de  $\mathcal{L}'_0$  qui sont déjà dans  $\mathcal{DE}_+$ , c'est-à-dire qui vont directement à l'infini dans le futur, comme suit :

$$\mathcal{L}_0 := \mathcal{L}'_0 \cup \bigcup_{t \geq 0} \bigcup_{\rho \in \mathcal{L}'_0 \cap \mathcal{DE}_+} \Phi^t(\rho).$$

Si  $U_\omega$  a été choisi suffisamment petit, alors  $\mathcal{L}_0$  sera inclus dans  $\mathcal{V}_\omega$ , et en travaillant dans  $\mathbb{B}$ , on peut voir que les hypothèses 3.16 et 3.18 sont vérifiées.

**Construction de  $E_h^1$**  On pose  $E_h^1 := -R_h F_h$ , où  $R_h$  est la résolvante sortante

$$\left(-h^2 \Delta - \frac{(d-1)^2}{4} h^2 - 1 - i0\right)^{-1},$$

et  $F_h := [h^2 \Delta, \hat{\chi}] e^{((d-1)/2 + i/h)\phi_\omega(x)}$ .

Il nous faut maintenant vérifier que  $E_h^1$  est bien une distribution tempérée. Comme expliqué dans [DG14, §7.2], on a

$$\|b^{-1} F_h\|_{L^2(X)} = O(h). \quad (3.40)$$

Il nous faut donc montrer que pour tout  $\chi \in C_c^\infty(X)$ , il existe  $C, N > 0$  tels que

$$\|\chi R_h b\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq C h^{-N}. \quad (3.41)$$

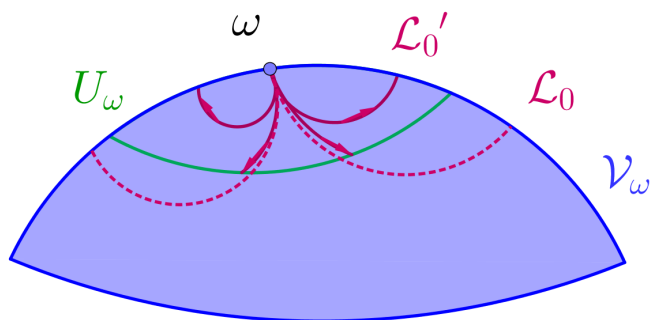


FIGURE 3.3 – Les variétés lagrangiennes  $\mathcal{L}'_0$  et  $\mathcal{L}_0$  pour une variété hyperbolique près de l'infini.

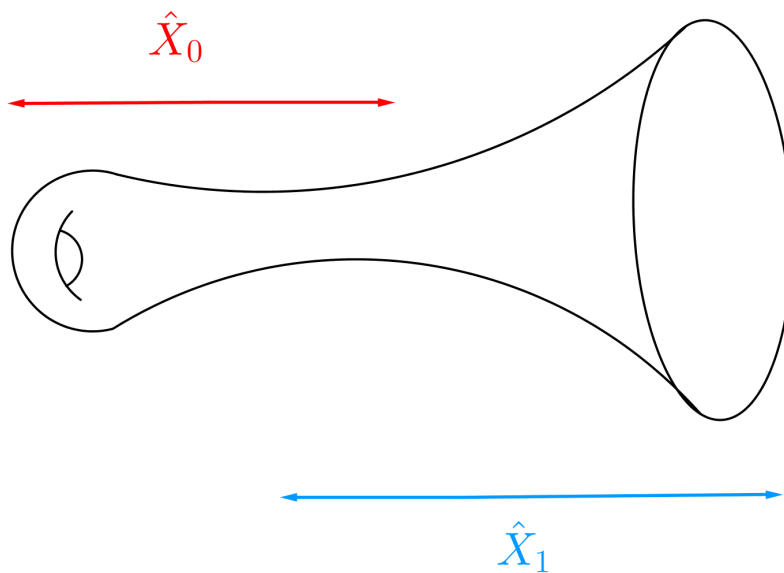


FIGURE 3.4 – Les variétés  $\hat{X}_0$  et  $\hat{X}_1$

### 3.6 Hypothèses sur les fonctions propres généralisées

Pour montrer une telle estimée, on veut utiliser les résultats de [DV12]. Toutefois, le résultat principal de cet article ne s'applique pas ici, et il nous faut l'adapter un peu. Écrivons  $\hat{X}_0 := \{x \in X; b(x) \geq \epsilon_0/4\}$  et  $\hat{X}_1 := \{x \in X; b(x) < \epsilon_0/2\}$ , où  $\epsilon_0$  est comme dans l'hypothèse 3.1. Ces variétés sont représentées dans la figure 3.4.

- Soient  $\rho_0, \rho_1, \rho, \tilde{\rho}_0, \tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}$  des fonctions bornées dans  $C^\infty(X)$  telles que
- $\rho_0, \tilde{\rho}_0 = 1$  sur  $\hat{X}_0$ , et  $\rho_0, \tilde{\rho}_0$  s'annule en dehors de  $\{x \in X; b(x) \leq \epsilon_0/8\}$ .
  - $\rho_1, \tilde{\rho}_1 = 1$  sur  $\hat{X}_0 \cap \hat{X}_1$ ,  $\rho_1, \tilde{\rho}_1$  s'annule sur  $\{x \in X; b(x) \geq \epsilon_0\}$ . On ne précise pas pour l'instant le comportement de  $\rho_1$  et  $\tilde{\rho}_1$  dans  $X_1 \setminus X_0$  : dans la suite, ces deux fonctions auront un comportement différent dans cette région de  $X$ .
  - $\rho, \tilde{\rho} \in C^\infty(X)$  sont telles que  $\rho = \rho_1$  dans  $X_1$ ,  $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_1$  sur  $X_1$  et  $\rho = \tilde{\rho} = 1$  sur  $X \setminus X_1$ .
- Supposons qu'il existe des constantes  $C, N > 0$  telles que pour  $j = 0, 1$ , on a

$$\|\rho_j R_h \tilde{\rho}_j\|_{L^2(X) \rightarrow L^2(X)} \leq C h^{-N}. \quad (3.42)$$

Nous allons montrer qu'il existe alors  $C', N' > 0$  telles que

$$\|\rho R_h \tilde{\rho}\|_{L^2(X) \rightarrow L^2(X)} \leq C' h^{-N'}. \quad (3.43)$$

Dans [DV12], les auteurs prouvent (3.43) uniquement dans le cas où  $\rho_0 = \tilde{\rho}_0$ ,  $\rho_1 = \tilde{\rho}_1$ ,  $\rho = \tilde{\rho}$ . Toutefois, la preuve de (3.43) suit exactement les mêmes lignes. Rappelons-les, par souci de clarté.

Soit  $\chi_0 \in C^\infty(\mathbb{R}; [0, 1])$  telle que  $\chi_0(s) = 1$  si  $s \geq 5\epsilon_0/12$  et  $\chi_0(s) = 0$  si  $s \leq \epsilon_0/3$  et soit  $\chi_1 = 1 - \chi_0$ .

On définit alors une paramétrice pour  $(P_h - 1)$  comme suit. Soit

$$F := \chi_0(b(x) + \epsilon_0/12) R_h \chi_0(b(x)) + \chi_1(b(x) - \epsilon_0/12) R_h \chi_1(b(x)).$$

On pose  $A_0 := [P_h, \chi_0(b(\cdot) + \epsilon_0/12)] R_h (\chi_0 \circ b)$  et  $A_1 := [P_h, \chi_1(b(\cdot) - \epsilon_0/12)] R_h (\chi_1 \circ b)$ . Par les mêmes calculs algébriques que dans [DV12, §3], on a

$$(P_h - 1)(F - F A_0 - F A_1 + F A_0 A_1) = Id - A_1 A_0 + A_1 A_0 A_1 = Id + O_{L^2 \rightarrow L^2}(h^\infty),$$

où la seconde inégalité provient de (3.3) dans [DV12].

Par conséquent, pour  $h$  suffisamment petit, on a

$$\begin{aligned} \|\rho R_h \tilde{\rho}\|_{L^2 \rightarrow L^2} &\leq C \|\rho(F - F A_0 - F A_1 + F A_0 A_1) \tilde{\rho}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \\ &= C \|\rho(F - \chi_0(b(\cdot) + \epsilon_0/12) R_h (\chi_0 \circ b) A_1 \\ &\quad + \chi_1(b(\cdot) - \epsilon_0/12) R_h (\chi_1 \circ b) (-A_0 + A_0 A_1)) \tilde{\rho}\|. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Utilisons l'inégalité triangulaire, et bornons chacun des termes. On a

$$\|\rho F \tilde{\rho}\| \leq \|\rho_0 R_h \tilde{\rho}_0\| + \|\rho_1 R_h \tilde{\rho}_1\| \leq C h^{-N}$$

par (3.42).



Ensuite, on a

$$\begin{aligned} \|\rho(\chi_0(b(\cdot) + \epsilon_0/12)R_h(\chi_0 \circ b)A_1)\tilde{\rho}\| &\leq \|\rho_0R_h(\chi_0 \circ b)[P_h, \chi_1(b(\cdot) - \epsilon_0/12)]R_h\tilde{\rho}_1\| \\ &\leq C\|\rho_0R_h\tilde{\rho}_0\|\|\rho_1R_h\tilde{\rho}_1\| \\ &\leq Ch^{-2N}, \end{aligned}$$

où, pour passer de la première ligne à la seconde, on a utilisé le fait que  $\rho_1 = 1$  sur  $X_0 \cap X_1$  et que l'on a, par des considérations de supports,

$$\begin{aligned} [P_h, \chi_1(b(\cdot) - \epsilon_0/12)](1 - \rho_1) &\equiv 0 \\ (1 - \tilde{\rho}_0)[P_h, \chi_1(b(\cdot) - \epsilon_0/12)] &\equiv 0. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Quant au dernier terme dans (3.44), on peut le majorer par

$$\begin{aligned} &\|\rho\chi_1(x - \epsilon_0/12)R_h\chi_1(-A_0 + A_0A_1)\tilde{\rho}\| \\ &\leq \|\rho_1R_h(\chi_1 \circ b)(- [P_h, \chi_0(b(\cdot)\epsilon_0/12)]R_h(\chi_0 \circ b) \\ &\quad + [P_h, \chi_0(b(\cdot) + \epsilon_0/12)]R_h(\chi_0 \circ b)[P_h, \chi_1(b(\cdot) + \epsilon_0/12)]R_h(\chi_1 \circ b))\tilde{\rho}\| \\ &\leq C(\|\rho_1R_h\tilde{\rho}_1\rho_0R_h\tilde{\rho}_0\| + \|\rho_0R_h\tilde{\rho}_0\rho_1R_h\tilde{\rho}_1\|) \\ &\leq Ch^{-2N}, \end{aligned}$$

où, pour obtenir la seconde inégalité, on a utilisé à nouveau (3.45).

Ceci conclut la preuve de (3.43).

Pour prouver (3.41), on utilise le théorème 5.1 de [Vas12] (pour  $s = 1$ ), qui dit que si  $(X, g)$  est asymptotiquement hyperbolique et sans ensemble capté, alors pour tout  $\sigma \in \mathbb{R}$ , on a

$$\|b^{-(d-1)/2+i\sigma}(-\Delta - (\frac{d-1}{2})^2 - \sigma^2)^{-1}f\|_{H^1_{|\sigma|-1}(X_{0,even})} \leq \frac{C}{|\sigma|} \|b^{-(d+3)/2+i\sigma}f\|_{H^0_{|\sigma|-1}(X_{0,even})}.$$

Dans les notations de [Vas12], on a  $\|f\|_{H^0_{|\sigma|-1}(X_{0,even})} \sim \|b^{(d+1)/2}f\|_{L^2(X)}$ . Comme, de plus, la norme  $L^2$  dans un compact peut être bornée par la norme  $H^1_{|\sigma|-1}(X_{0,even})$ , on obtient que pour tout  $\chi \in C_c^\infty(X)$  on a

$$\|\chi(-h^2\Delta - h^2(\frac{d-1}{2})^2 - 1)^{-1}f\|_{L^2(X)} \leq \frac{C'}{h} \|b^{-1}f\|_{L^2(X)}.$$

Par conséquent, pour tout  $f \in L^2(X)$ , on a

$$\|\chi(-h^2\Delta - h^2(\frac{d-1}{2})^2 - 1)^{-1}bf\|_{L^2(X)} \leq \frac{C'}{h} \|f\|_{L^2(X)},$$

ce qui nous donne (3.41) dans le cas où il n'y a pas d'ensemble capté.

### 3.7 Résultats concernant les ondes planes tordues

Dans le cas où il y a un ensemble capté on colle ensemble les estimées de résolvantes, comme dans la preuve du théorème 6.1 de [DV12], mais en utilisant (3.43) au lieu de [DV12, Theorem 2.1]. Plus précisément, on prend  $\rho_0, \rho_1$  et  $\rho'_0$  à support compact, et  $\rho'_1 = b$ . Ceci nous donne (3.41).

En combinant ceci avec (3.40), nous avons montré que  $E_h^1$  est une distribution tempérée. On vérifie ensuite sans mal que l'on a, au sens des EDP :

$$\left( -h^2 \Delta - h^2 \frac{(d-1)^2}{4} - 1 \right) E_h = 0.$$

**Front d'onde de  $E_h^1$**  Montrons maintenant que  $E_h^1$  est tel qu'il existe  $\epsilon_2 > 0$  tel que pour tout  $(x, \xi) \in T^*X$  tel que  $b(x) < \epsilon_2$ , on a

$$\rho \in WF_h(E_h^1) \Rightarrow \rho \in \mathcal{DE}_+. \quad (3.46)$$

Dans [DG14, §7], les auteurs montrent que le résultat du lemme 3.34 est vrai lorsque  $(X, g)$  est hyperbolique près de l'infini.

Supposons que  $\rho \in WF_h(E_h^1) \cap \mathcal{DE}_-$  est tel qu'il existe  $t \geq 0$  tel que

$$\Phi^{-t}(\rho) \in \{(x, \partial_x \phi_\omega(x)); x \in \text{supp}(\partial \hat{\chi})\}.$$

Alors  $d_{\bar{g}}(\Phi^{-t'}(\rho), \omega)$  sera une fonction décroissante qui tend vers zéro quand  $t' \rightarrow +\infty$ .

Notons  $U'_\omega \subset U_\omega$  un voisinage de  $\omega$  dans  $\bar{X}$  sur lequel  $\hat{\chi}$  vaut un.

Mais alors, comme expliqué dans [DG14, Hypothèse (A7)], si on prend  $\epsilon_2$  suffisamment petit, on peut supposer que pour tout  $\rho' \in S^*X$  tel que  $b(\rho') \leq \epsilon_2$  et tel que  $d_{\bar{g}}(\Phi^{-t'}(\rho), \omega)$  est une fonction décroissante tendant vers zéro quand  $t' \rightarrow +\infty$ , on a  $\pi_X(\rho') \in (U'_\omega)$ . Par conséquent,  $\pi_X(\rho) \in U'_\omega$ , et  $\pi_X(\Phi^{-t}(\rho)) \in U'_\omega$ . Ceci est absurde, car  $\pi_X(\Phi^{-t}(\rho)) \in \text{supp}(\partial \hat{\chi})$ , et  $\hat{\chi} \equiv 1$  sur  $U'_\omega$ . Ceci prouve (3.46).

## 3.7 Résultats concernant les ondes planes tordues

### 3.7.1 Résultats en présence d'un ensemble capté hyperbolique

Notre résultat principal est le suivant, et généralise le théorème 1.19. Rappelons que les ensembles  $(V_b)_{b \in B_1}$  ont été introduits dans la section 3.5.1, et qu'on a fixé pour chaque  $b \in B_1$  un point  $\rho_b \in K \cap V_b$ . Pour chaque  $b \in B_1$ , on note  $\mathcal{U}_b : L^2(X) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$  un opérateur intégral de Fourier quantifiant le changement local de coordonnées symplectiques  $\kappa_b : (x, \xi) \mapsto (y^{\rho_b}, \eta^{\rho_b})$ , et qui est micro-localement unitaire sur  $V_b$ .

**Théorème 3.37.** *Supposons que la variété  $(X, g)$  satisfasse à l'hypothèse 3.1 à l'infini, et que le flot hamiltonien  $(\Phi^t)$  vérifie l'hypothèse 3.9 d'hyperbolicité et l'hypothèse 3.24 concernant la pression topologique. Soit  $(E_h)_{h>0}$  une famille de fonctions propres généralisées de*

$P_h$  de la forme décrite dans l'hypothèse 3.31, où  $E_h^0$  est associé à une variété lagrangienne  $\mathcal{L}_0$  qui vérifie l'hypothèse d'invariance 3.12 ainsi que l'hypothèse de transversalité 3.15.

Alors il existe une famille  $(\Pi_b)_{b \in B_1}$  d'opérateurs dans  $\Psi_h^{comp}(X)$  micro-suppportés dans  $V_b$  tels que  $\sum_{b \in B_1} \Pi_b = I$  micro-localement sur un voisinage de  $K$  dans  $T^*X$ , tels que le résultat suivant soit vrai.

Pour tout  $r > 0$ , il existe  $M_r > 0$  tel que l'on ait

$$\mathcal{U}_b \Pi_b E_h(y^{\rho_b}) = \sum_{n=0}^{\lfloor M_r \ell \log h \rfloor} \sum_{\beta \in \tilde{\mathcal{B}}_n} e^{i\phi_{\beta,b}(y^{\rho_b})/h} a_{\beta,b}(y^{\rho_b}; h) + R_r, \quad (3.47)$$

où  $a_{\beta,b} \in S^{comp}(\mathbb{R}^d)$  est un symbole classique, et où chaque  $\phi_{\beta,b}$  est une fonction lisse indépendante de  $h$ , et définie dans un voisinage du support de  $a_{\beta,b}$ . L'ensemble  $\tilde{\mathcal{B}}_n$  sera défini précisément dans (5.24) comme un ensemble de mots de longueur environ  $n$ . Son cardinal croît donc exponentiellement avec  $n$ .

On a l'estimée suivante sur le reste :

$$\|R_r\|_{L^2} = O(h^r).$$

Pour tous  $\ell \in \mathbb{N}$ ,  $\epsilon > 0$ , il existe  $C_{\ell,\epsilon}$  tels que pour tout  $n \geq 0$ , pour tout  $h \in (0, h_0]$ , on a

$$\sum_{\beta \in \tilde{\mathcal{B}}_n} \|a_{\beta,b}\|_{C^\ell} \leq C_{\ell,\epsilon} e^{n(\mathcal{P}(1/2)+\epsilon)}. \quad (3.48)$$

**Remarque 3.38.** Le lien entre ce théorème et le théorème 3.19, ou plutôt le corollaire 3.27, est le suivant. Si  $\beta \in \tilde{\mathcal{B}}_n$ , on a, par construction de  $\tilde{\mathcal{B}}_n$ ,  $\beta \in B^{n'}$  pour un  $n'$  proche de  $n$ . On a alors

$$\kappa_b^{-1} \left( \{(y^{\rho_b}, \partial\phi_{\beta,b}(y^{\rho_b})); y^{\rho_b} \in \text{supp}(a_{\beta,b})\} \right) \subset V_b \cap \Phi_\beta^{n',t_0}(\mathcal{L}_0).$$

Dit de manière plus informelle, les phases  $\phi_{n,\beta,b}$  introduites dans le théorème 3.37 paramétrisent les lagrangiennes décrites dans le corollaire 3.27, après le changement de coordonnées symplectiques  $\kappa_b$ .

**Remarque 3.39.** Le reste  $R_r$  dans (3.47) est à micro-suppport compact, car les autres termes dans (3.47) sont à micro-suppport compact. Par conséquent, pour tout  $\ell \in \mathbb{N}$ , quitte à prendre  $M_r$  plus grand, on peut demander que

$$\|R_r\|_{C^\ell} = O(h^r).$$

Comme corollaire du théorème 3.37, on peut déduire le corollaire suivant, qui généralise le corollaire 1.21, et nous donne l'unicité de la mesure semi-classique associée à  $(E_h)$ , et donner une expression de cette mesure près de l'ensemble capté. Rappelons que  $\pi_b$  est le symbole principal de l'opérateur  $\Pi_b$  apparaissant dans le théorème 3.37.

### 3.7 Résultats concernant les ondes planes tordues

**Corollaire 3.40.** *Il existe une (unique) mesure borélienne  $\mu$  sur  $S^*X$  telle que, pour tout  $\chi \in C_c^\infty(X)$  et pour tout  $a \in C_c^\infty(T^*X)$ , on a quand  $h \rightarrow 0$  :*

$$\langle Op_h(a)\chi E_h, \chi E_h \rangle = \int_{T^*X} a(x, v)\chi^2(x)d\mu(x, v) + o(1).$$

De plus, il existe une constante  $0 < c \leq 1$  et des fonctions positives  $f_{n,\beta,b} \in S^{comp}(\mathbb{R}^d)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\beta \in \tilde{\mathcal{B}}_n$  et  $b \in B_1$  telles que pour tout  $a \in C_c^\infty(T^*X)$  et pour tout  $\chi \in C_c^\infty(X)$ , on a

$$\langle Op_h(\pi_b^2 a)\chi E_h, \chi E_h \rangle = \int_{T^*X} a(x, v)d\mu_{b,\chi}(x, v) + O(h^c),$$

où

$$d\mu_{b,\chi}(\kappa_b^{-1}(y^{\rho_b}, \eta^{\rho_b})) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\beta \in \tilde{\mathcal{B}}_n} f_{\beta,b}(y^{\rho_b}) \delta_{\{\eta^{\rho_b} = \partial\phi_{j,n}(y^{\rho_b})\}} dy^{\rho_b},$$

Ici, les fonctions  $f_{\beta,b}$  vérifient l'estimée (3.48).

Ce corollaire sera prouvé dans le chapitre 6. Les fonctions  $f_{n,\beta,b}$  qui apparaissent ci-dessus sont construites à partir des  $a_{n,\beta,b}$  du théorème 3.37. En fait,  $f_{n,\beta,b}$  sera presque égal à  $|a_{n,\beta,b}|^2$ .

Ce corollaire sera prouvé dans le chapitre 6.

#### 3.7.2 Résultats en courbure négative

Sur une variété de courbure sectionnelle négative ou nulle sans potentiel, le théorème 3.37 en le résultat suivant, qui généralise le théorème 1.23. La principale différence avec le théorème 3.37 est que le théorème 3.41 ne s'applique pas que dans un voisinage de l'ensemble capté, et que tous les états lagrangiens intervenant correspondent à des lagrangiennes se projetant sans caustique sur  $X$ . Remarquons que les états lagrangiens ont été regroupés par rapport au théorème 3.37, de sorte que (3.51) soit vérifiée.

**Théorème 3.41.** *Soit  $(X, g)$  une variété riemannienne vérifiant l'hypothèse 3.6, ainsi que l'hypothèse 3.1 à l'infini. Supposons que le flot géodésique  $(\Phi^t)$  vérifie l'hypothèse 3.9 d'hyperbolicité, l'hypothèse 3.24 concernant la pression topologique. Soit  $E_h$  une fonction propre généralisée de la forme décrite dans l'hypothèse 3.31, où  $E_h^0$  est associée à une variété lagrangienne  $\mathcal{L}_0$  qui vérifie l'hypothèse d'invariance 3.12 ainsi que l'hypothèse 3.16.*

*Soit  $\mathcal{K} \subset X$  un compact. Il existe  $\varepsilon_{\mathcal{K}} > 0$  tel que pour tout  $\chi \in C_c^\infty(X)$  de support inclus dans  $\mathcal{K}$  et de diamètre plus petit que  $\varepsilon_{\mathcal{K}}$ , le résultat suivant est vrai. Il existe un ensemble  $\tilde{\mathcal{B}}^X$  et une fonction  $\tilde{n} : \tilde{\mathcal{B}}^X \rightarrow \mathbb{N}$  telle que le nombre d'éléments dans  $\{\tilde{\beta} \in \tilde{\mathcal{B}}^X; \tilde{n}(\tilde{\beta}) \leq N\}$  croît au plus exponentiellement avec  $N$ .*

*Pour tous  $r > 0$ ,  $\ell > 0$ , il existe  $M_{r,\ell} > 0$  tel que l'on a, quand  $h \rightarrow 0$  :*

$$\chi E_h(x) = \sum_{\substack{\tilde{\beta} \in \tilde{\mathcal{B}}^X \\ \tilde{n}(\tilde{\beta}) \leq M_{r,\ell} |\log h|}} e^{i\varphi_{\tilde{\beta}}(x)/h} a_{\tilde{\beta},\chi}(x; h) + R_r, \quad (3.49)$$

où  $a_{\tilde{\beta},\chi} \in S^{\text{comp}}(X)$  est un symbole classique, et où chaque  $\varphi_{\tilde{\beta}}$  est une fonction lisse définie dans un voisinage du support de  $a_{\tilde{\beta},\chi}$ . On a

$$\|R_r\|_{C^\ell} = O(h^r).$$

Pour tous  $\ell \in \mathbb{N}$ ,  $\epsilon > 0$ , il existe  $C_{\ell,\epsilon}$  telle que

$$\sum_{\substack{\tilde{\beta} \in \tilde{\mathcal{B}}^x \\ \tilde{n}(\tilde{\beta})=n}} \|a_{\tilde{\beta},\chi}\|_{C^\ell} \leq C_{\ell,\epsilon} e^{n(\mathcal{P}(1/2)+\epsilon)}. \quad (3.50)$$

De plus, il existe une constante  $C_1$  telle que pour tous  $\tilde{\beta}, \tilde{\beta}' \in \tilde{\mathcal{B}}^x$  avec  $\tilde{\beta} \neq \tilde{\beta}'$ , on a

$$|\partial\varphi_{\tilde{\beta}}(x) - \partial\varphi_{\tilde{\beta}'}(x)| \geq C_1 e^{-\sqrt{b_0} \max(\tilde{n}(\tilde{\beta}), \tilde{n}(\tilde{\beta}'))}, \quad (3.51)$$

où  $b_0$  est comme dans l'hypothèse 3.6.

Tout comme le théorème 3.37, le théorème 3.41 peut être rapproché des résultats de la section 3.4, comme le dit la

**Remarque 3.42.** *Le lien entre ce théorème et le corollaire 3.28 du théorème 3.23 est le suivant. Soit  $\chi \in C_c^\infty(X)$  comme dans le théorème, et soit  $\mathcal{O}$  un petit ouvert tel que  $\text{supp}(\chi) \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ . Comme nous le verrons dans la section 5.2, l'ensemble  $\tilde{\mathcal{B}}^x$  est défini comme une classe d'équivalence d'un sous-ensemble de  $\cup_{n \in \mathbb{N}} B^n$ . Soit  $\tilde{\beta} \in \tilde{\mathcal{B}}^x$  et soit  $\beta \in B^n$  un représentant de la classe  $\tilde{\beta}$ . Considérons  $\Phi_\beta^n(\mathcal{L}_0)$ . On a :*

$$\forall x \in \text{supp}(\varphi_{\beta,\mathcal{O}}) \cap \text{supp}(\varphi_\beta), \quad \partial\varphi_{\beta,\mathcal{O}}(x) = \partial\varphi_{\tilde{\beta}}(x).$$

Ainsi, localement, les gradients des phases décrites dans le corollaire 3.28 et dans le théorème 3.41 sont les mêmes.

**Remarque 3.43.** *Dans le théorème 3.41, l'hypothèse que le support de  $\chi$  est suffisamment petit ne joue un rôle que pour obtenir (3.51). Si  $\chi$  est une fonction quelconque dans  $C_c^\infty(X)$ , on peut utiliser le théorème 3.41 et une partition de l'unité pour écrire  $\chi E_h$  sous la forme d'une décomposition analogue à (3.49), avec une estimée comme (3.50). En fait, ceci sera fait de façon plus directe dans la preuve du théorème 3.41 (voir (5.29) et la discussion qui s'ensuit).*

Comme corollaire du théorème 3.41, on peut déduire la borne suivante sur les normes  $C^\ell$  de  $E_h$ .

**Corollaire 3.44.** *On fait les mêmes hypothèses que dans le théorème 3.41. Soit  $\ell \in \mathbb{N}$  et  $\chi \in C_c^\infty(X)$ . Alors il existe  $C_{\ell,\chi} > 0$  telle que, pour tout  $h > 0$ , on a*

$$\|\chi E_h\|_{C^\ell} \leq \frac{C_{\ell,\chi}}{h^\ell}.$$

### 3.7 Résultats concernant les ondes planes tordues

En particulier, la suite  $(E_h)_h$  est uniformément bornée par rapport à  $h$  dans  $L_{loc}^\infty$ .

*Démonstration.* Le corollaire suit de la décomposition (3.49) combinée avec les estimées (3.50) et (3.30).  $\square$

On peut aussi déduire une version améliorée du corollaire 3.40, qui sera elle aussi prouvée au chapitre 6.

**Corollaire 3.45.** *On fait les mêmes hypothèses que dans le théorème 3.41. Soit  $\chi \in C_c^\infty(X)$  et soit  $\epsilon > 0$ . Alors il existe une mesure finie  $\mu_\chi$  sur  $S^*X$  telle que l'on a pour tout  $a \in C_c^\infty(T^*X)$*

$$\langle Op_h(a)\chi E_h, \chi E_h \rangle = \int_{T^*X} a(x, \xi) d\mu_\chi(x, \xi) + O\left(h^{\min\left(1, \frac{|P(1/2)|}{2\sqrt{b_0}} - \epsilon\right)}\right),$$

où  $-b_0$  est la valeur minimale prise par la courbure sectionnelle sur  $X$ .

Si  $\mathcal{K}$  est un ensemble compact et si le support de  $\chi$  est dans  $\mathcal{K}$  et est de diamètre plus petit que  $\varepsilon_{\mathcal{K}}$ , on a

$$d\mu_\chi(x, \xi) = \sum_{\tilde{\beta} \in \tilde{\mathcal{B}}^x} |a_{\tilde{\beta}, \chi}^0|^2(x) \delta_{\{\xi = \partial\varphi_{\tilde{\beta}}(x)\}} dx,$$

où  $a_{\tilde{\beta}, \chi}^0$  est le symbole principal de  $a_{\tilde{\beta}, \chi}$  comme défini dans l'appendice A.1.

De plus, si  $\mathcal{L}_0$  vérifie l'hypothèse 3.18, alors pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , il existe  $c_N > 0$  tel que pour tout  $x \in X$  tel que  $\chi(x) = 1$ , on a

$$\sum_{\substack{\tilde{\beta} \in \tilde{\mathcal{B}}^x \\ \tilde{n}(\tilde{\beta}) \geq N}} |a_{\tilde{\beta}, \chi}^0|^2(x) \geq c_N. \quad (3.52)$$

#### 3.7.3 Résumé des hypothèses et résultats principaux

Le tableau suivant résume quand nos principaux résultats s'appliquent.

	OPTE $K$ hyp	OPTE $\kappa < 0$	OCT $K$ hyp	OCT $\kappa < 0$	OPTH $K$ hyp	OPTH $\kappa < 0$
Th 3.37	Oui si T	Oui	Oui si T	Oui si T	Oui si T	Oui
Cor 3.44	Non	Oui	Non	Oui	Non	Oui
Th 7.1	Non	Oui	Non	Non	Non	Oui
Th 1.28	Non	Non	Non	Non	Non	?

**Les différentes lignes** correspondent aux quatre résultats principaux que nous avons obtenu sur les ondes planes tordues, à savoir

- Le résultat de décomposition de  $E_h$  en somme convergente d'états lagrangiens (théorème 1.19 et théorème 3.37);

- La borne  $C^\ell$  sur  $E_h$  (corollaire 1.24 et corollaire 3.44);
- Les bornes supérieure et inférieure sur le volume des ensembles nodaux de  $\mathfrak{R}(E_h)$  (théorème 1.27 et théorème 7.1);
- La borne inférieure sur le nombre de domaines nodaux de la somme de deux ondes planes tordues pour une métrique générique (théorème 1.28).

**Les différentes colonnes** correspondent aux principales familles d'exemples de fonctions propres que nous avons données :

- **OPTÉ** correspond aux ondes planes tordues sur les variétés à infinis euclidiens, comme définies dans la section 3.6.1;
- **OCT** correspond aux ondes circulaires tordues comme définies dans la section 3.6.2;
- **OPTH** correspond aux ondes planes tordues sur les variétés hyperboliques près de l'infini, comme définies dans la section 3.6.3.

**K hyp** correspond à l'hypothèse 3.9 que  $K$  est un ensemble hyperbolique.  $\kappa < \mathbf{0}$  correspond à l'hypothèse supplémentaire 3.6 (i) que la courbure sectionnelle est négative ou nulle, et que le potentiel  $V$  est nul. Nous supposons de plus toujours que l'hypothèse 3.24 concernant la pression topologique est vérifiée.

**Voici comment lire les différentes cases du tableau :**

- **Oui si T** : le résultat s'applique dans ce cas, si l'hypothèse de transversalité 3.15 est vérifiée.
- **Oui** : l'hypothèse de transversalité 3.15 est automatiquement vérifiée dans ce cas, et le résultat s'applique.
- **Non** : le résultat ne s'applique pas sans hypothèse supplémentaire.
- **?** : pour la dernière case, il est probable que le résultat soit vrai, mais nous n'avons pas écrit la preuve dans ce cadre.

## Chapitre 4

# Preuve des résultats concernant la propagation de $\mathcal{L}_0$

Le but de ce chapitre, qui suit [Ing15a] et [Ing15b] est de prouver les résultats de la section 3.4.

### 4.1 Preuve du théorème 3.19

Le but de cet section est de prouver le théorème 3.19, dont nous rappelons l'énoncé.

**Théorème.** *Supposons que la variété  $(X, g)$  vérifie l'hypothèse 3.1 à l'infini, que le flot hamiltonien  $(\Phi^t)$  vérifie l'hypothèse 3.9 d'hyperbolicité, et que la variété lagrangienne  $\mathcal{L}_0$  vérifie l'hypothèse d'invariance 3.12 ainsi que l'hypothèse de transversalité 3.15.*

*Fixons un  $\gamma_{uns} > 0$  arbitrairement petit. Il existe alors  $\varepsilon_0 > 0$  tel que le résultat suivant soit vrai. Soit  $(W_a)_{a \in A_1}$  un recouvrement ouvert de  $K$  dans  $T^*X$  de diamètre  $< \varepsilon_0$ , tel qu'il existe des points  $\rho_a \in W_a \cap K$ , et tel que les coordonnées adaptées  $(y^a, \eta^a)$  centrées en  $\rho^a$  soient bien définies sur  $W_a$  pour tout  $a \in A_1$ . On peut alors compléter ce recouvrement ouvert en un recouvrement ouvert  $(W_a)_{a \in A}$  de  $\mathcal{E}$  dans  $T^*X$  où  $A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \{0\}$  (avec  $W_0$  défini comme dans (3.1)) tel que les propriétés suivantes soient vérifiées.*

*Il existe  $N_{uns} \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , pour tout  $\alpha \in A^N$  et tout  $a \in A_1$ , alors  $W_a \cap \Phi_\alpha^N(\mathcal{L}_0)$  est soit vide, soit une variété lagrangienne dans un cône instable dans les coordonnées  $(y^a, \eta^a)$ .*

*De plus, si  $N - \tau(\alpha) \geq N_{uns}$ , alors  $W_a \cap \Phi_\alpha^N(\mathcal{L}_0)$  est une variété lagrangienne  $\gamma_{uns}$ -instable dans les coordonnées  $(y^a, \eta^a)$ .*

**Remarque 4.1.** *La constante  $\varepsilon_0$  et les ensembles  $(W_a)_{a \in A_2}$  dépendent de la variété lagrangienne  $\mathcal{L}_0$ . Si on considère toute une famille de variétés lagrangiennes  $(\mathcal{L}_z)_{z \in Z}$  vérifiant les hypothèses 3.12 et 3.15, alors nous aurons besoin de conditions additionnelles sur la famille pour pouvoir trouver un choix commun de  $\varepsilon_0$  et  $(W_a)_{a \in A_2}$  indépendant de  $z \in Z$ . Par*



exemples, les équations (4.17) et (4.18) que nous écrirons plus loin donnent une condition suffisante pour qu'une telle construction soit possible. Remarquons que ces équations sont automatiquement vérifiées si  $Z$  est fini.

*Démonstration.* A partir de maintenant, on fixe un  $\gamma_{uns} > 0$ .

Soit  $\rho_0 \in K$ , et considérons le système de coordonnées adaptées dans un voisinage de  $\rho_0$  construites dans le lemme 3.10. Rappelons que l'ensemble  $U^{\rho_0}(\epsilon)$  a été introduit dans l'équation (3.11). On définit une *section de Poincaré* par

$$\Sigma^{\rho_0} = \Sigma^{\rho_0}(\epsilon) = \{(y^{\rho_0}, \eta^{\rho_0}) \in U^{\rho_0}(\epsilon); y_1^{\rho_0} = \eta_1^{\rho_0} = 0\}.$$

Remarquons que les espaces  $E_{\rho_0}^{\pm}$  sont tangents à  $\Sigma^{\rho_0}$ , et que les coordonnées  $(u^{\rho_0}, s^{\rho_0})$  introduites dans (3.10) forment un système de coordonnées symplectiques (ou coordonnées de Darboux) sur  $\Sigma^{\rho_0}$ .

En fait, on aura souvent besoin d'un système de coordonnées non symplectiques, construit à partir des coordonnées  $(y^{\rho}, \eta^{\rho})$ .

Avant de construire ce système de coordonnées non symplectique, expliquons pourquoi il est indispensable à notre preuve. L'outil principal pour prouver le théorème 3.19 est le « lemme d'inclinaison », qui dit en gros qu'une variété lagrangienne qui intersecte transversalement la variété stable s'approchera de plus en plus de la variété instable quand on la propage dans le futur. Ceci est un résultat très simple dans le cas d'un difféomorphisme hyperbolique linéaire, mais il nous faut ajouter des quantificateurs pour obtenir un résultat rigoureux dans le cas de difféomorphismes non-linéaires. Par exemple, on peut dire, comme dans [NZ09, Proposition 5.1], que, étant donné un  $\gamma > 0$ , il existe  $\epsilon_{\gamma} > 0$  tel que si  $\Lambda$  est une variété lagrangienne  $\gamma$ -instable incluse dans un  $U^{\rho}(\epsilon_{\gamma})$ , alors pour tous  $\rho'$ ,  $\Phi^1(\Lambda) \cap U^{\rho'}(\epsilon_{\gamma})$  est encore  $\gamma$ -instable.

Toutefois, on ne peut pas utiliser ce résultat directement ici, pour la raison suivante. Plus on prend  $\epsilon$  petit, plus les points de la variété lagrangienne  $\mathcal{L}_0$  peuvent passer de temps dans la partie de la région d'interaction qui n'est pas affectée par la dynamique hyperbolique avant d'entrer dans l'un des  $U^{\rho}(\epsilon)$  pour un  $\rho \in K$ . Cependant, si un morceau de  $\mathcal{L}_0$  passe beaucoup de temps dans cette région « intermédiaire », il est possible qu'elle devienne très proche de la direction stable, car nous n'avons fait aucune hypothèse sur ce qui se passe dans la région intermédiaire. Pour éviter un tel raisonnement circulaire, il nous faut introduire un autre système de coordonnées, dans lequel la description de la propagation de variétés lagrangiennes dans la région intermédiaire est plus simple.

#### 4.1.1 Coordonnées alternatives

Dans ce paragraphe, nous allons décrire un système de coordonnées « alternatives » construites à partir de celles introduites dans le lemme 3.10<sup>1</sup>, mais qui en diffèrent un peu. Étant

1. Nous appellerons parfois les coordonnées construites dans le lemme 3.10 « coordonnées droites », pour les différencier des coordonnées alternatives.

#### 4.1 Preuve du théorème 3.19

donné un  $\rho \in K$ , on introduit un système de coordonnées lisses  $(\tilde{y}^\rho, \tilde{\eta}^\rho) = (\tilde{y}_1^\rho, \tilde{u}^\rho, \tilde{\eta}_1^\rho, \tilde{s}^\rho)$  comme suit.

Sur  $\Sigma^\rho$ , ces coordonnées sont telles que

$$W_{loc}^{0+}(\rho) \cap \Sigma^\rho \equiv \{(\tilde{u}^\rho, 0); \tilde{u}^\rho \in D_\epsilon\}, \quad W_{loc}^{0-}(\rho) \cap \Sigma^\rho \equiv \{(0, \tilde{s}^\rho); \tilde{s}^\rho \in D_\epsilon\},$$

et si on désigne par  $L_\rho$  l'application

$$L_\rho : (u^\rho, s^\rho) \mapsto (\tilde{u}^\rho, \tilde{s}^\rho) \tag{4.1}$$

définie dans un voisinage de  $(0, 0)$ , on a

$$dL_\rho(0, 0) = Id_{\mathbb{R}^{2d-2}}. \tag{4.2}$$

Si  $\hat{\rho}$  a pour coordonnées droites  $(y_1^\rho(\hat{\rho}), u^\rho(\hat{\rho}), \eta_1^\rho(\hat{\rho}), s^\rho(\hat{\rho}))$ , on définit  $\hat{\rho}' \in \Sigma^\rho$  comme étant le point dont les coordonnées droites sont  $(0, u^\rho(\hat{\rho}), 0, s^\rho(\hat{\rho}))$ . On définit alors les coordonnées alternatives de  $\hat{\rho}$  par

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1^\rho(\hat{\rho}) &= y_1^\rho(\hat{\rho}), \\ \tilde{\eta}_1^\rho(\hat{\rho}) &= \eta_1^\rho(\hat{\rho}), \\ \tilde{u}^\rho(\hat{\rho}) &= \tilde{u}^\rho(\hat{\rho}'), \\ \tilde{s}^\rho(\hat{\rho}) &= \tilde{s}^\rho(\hat{\rho}'). \end{aligned}$$

Remarquons que ce système de coordonnées n'est pas nécessairement symplectique. On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^\rho}{\partial \tilde{y}_1^\rho} &= \frac{\partial s^\rho}{\partial \tilde{y}_1^\rho} = 0, \\ \frac{\partial y_1^\rho}{\partial \tilde{y}_1^\rho} &= 1. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Étant donné un  $\rho \in K$ , et  $\epsilon, \epsilon' > 0$ , on définit

$$\tilde{U}^\rho(\epsilon, \epsilon') \equiv \{(\tilde{y}^\rho, \tilde{\eta}^\rho) : |\tilde{y}_1^\rho| < \epsilon, |\tilde{\eta}_1^\rho| < \delta, \tilde{u}^\rho \in D_{\epsilon'}, \tilde{s}^\rho \in D_\epsilon\}, \tag{4.4}$$

où  $\delta$  est comme dans (3.8).

Finalement, la section de Poincaré peut être vue dans les coordonnées alternatives comme

$$\tilde{\Sigma}^\rho(\epsilon, \epsilon') := \{(\tilde{y}^\rho, \tilde{\eta}^\rho) \in \tilde{U}^\rho(\epsilon, \epsilon'); \tilde{y}_1^\rho = \tilde{\eta}_1^\rho = 0\}.$$

Dans la suite de cette section, nous travaillerons le plus souvent dans la situation où  $\epsilon' \ll \epsilon$  (c'est-à-dire, avec des ensembles beaucoup plus fins dans la direction instable que stable).

### 4.1.2 L'application de Poincaré

Soit  $\rho_0 \in K$ , et soit  $\epsilon > 0$  suffisamment petit pour que les coordonnées alternatives autour de  $\rho_0$  et de  $\Phi^1(\rho_0)$  sont bien définies dans les voisinages  $\tilde{U}^{\rho_0}(\epsilon, \epsilon)$  et  $\tilde{U}^{\Phi^1(\rho_0)}(\epsilon, \epsilon)$ . L'application de Poincaré  $\kappa_{\rho_0}$  est définie, pour  $\rho \in \tilde{\Sigma}^{\rho_0}(\epsilon)$  proche de  $\rho_0$ , en prenant l'intersection de la trajectoire  $(\Phi^s(\rho))_{|s-1| \leq \epsilon}$  avec la section  $\tilde{\Sigma}^{\Phi^1(\rho_0)}$  (cette intersection consiste en au plus un point). Dans la suite, on omettra parfois la référence à  $\rho_0$ , et nous noterons simplement l'application de Poincaré  $\kappa$ .

L'application  $\kappa_{\rho_0}$  n'est pas nécessairement symplectique, car elle est définie dans les coordonnées alternatives, qui ne sont pas nécessairement symplectiques. Néanmoins, si nous avons défini l'application de Poincaré dans les coordonnées droites, elle aurait automatiquement été symplectique. La linéarisation des deux systèmes de coordonnées est identique en  $\rho_0$  par l'équation (4.2). Par conséquent, en utilisant l'hypothèse que  $K$  est hyperbolique, on voit que la différentielle de  $\kappa$  en  $\rho_0$  prend la forme

$$d\kappa(\rho_0) \equiv \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^t A^{-1} \end{pmatrix},$$

et qu'il existe

$$\nu = e^{-\lambda} < 1 \tag{4.5}$$

telle que la matrice  $A$  vérifie

$$\|A^{-1}\| \leq \nu, \tag{4.6}$$

où  $\|\cdot\|$  correspond à la norme matricielle. Par conséquent, l'application de Poincaré  $\kappa_{\rho_0}$  prend la forme

$$\kappa_{\rho_0}(\tilde{u}^{\rho_0}, \tilde{s}^{\rho_0}) = (A\tilde{u}^{\rho_0} + \tilde{\alpha}(\tilde{u}^{\rho_0}, \tilde{s}^{\rho_0}), {}^t A^{-1}\tilde{s}^{\rho_0} + \tilde{\beta}(\tilde{u}^{\rho_0}, \tilde{s}^{\rho_0})), \tag{4.7}$$

et les fonctions  $\tilde{\alpha}$  et  $\tilde{\beta}$  vérifient :

$$\tilde{\alpha}(0, \tilde{s}^{\rho_0}) = \tilde{\beta}(\tilde{u}^{\rho_0}, 0) \equiv 0 \text{ and } d\tilde{\alpha}(0, 0) = d\tilde{\beta}(0, 0) = 0.$$

On a par conséquent

$$\|\tilde{\alpha}\|_{C^1(V)} \leq C_0\epsilon, \quad \|\tilde{\beta}\|_{C^1(V)} \leq C_0\epsilon, \tag{4.8}$$

pour des constantes  $C_0$ , car  $\kappa$  est uniformément  $C^2$ .

**Remarque 4.2.** Par compacité de l'ensemble capté, les constantes  $C_0$  et  $\nu$  peuvent être choisies indépendamment du point  $\rho_0$ . On peut aussi trouver un  $\mathcal{C} > 1$  tel que, indépendamment de  $\rho_0$  et  $\rho_1$  dans  $K$ , on a

$$\|A\| \leq \mathcal{C}.$$

Finalement, quitte à prendre  $C_0$  plus grand, on peut supposer que toutes les dérivées secondes de l'application  $L_\rho$  définie dans (4.1) sont bornées par  $C_0$  indépendamment de  $\rho \in K$ .

## 4.1 Preuve du théorème 3.19

### 4.1.3 Changements de coordonnées et variétés lagrangiennes

Décrivons maintenant comme une variété lagrangienne sera affectée par un passage des coordonnées alternatives aux coordonnées droites centrées au même point. Le lemme suivant nous dit qu'une variété  $\gamma$ -instable dans les coordonnées alternatives sera  $\gamma'$ -instable dans les coordonnées droites, pour un  $\gamma'$  pas beaucoup plus grand que  $\gamma$ .

**Lemme 4.3.** *Supposons qu'une variété lagrangienne  $\Lambda \subset \tilde{U}^\rho(\epsilon, \epsilon)$  puisse s'écrire dans les coordonnées alternatives centrées en  $\rho \in K$  comme  $\Lambda = \{(\tilde{y}^\rho; 0, \tilde{F}(\tilde{y}^\rho)); \tilde{y}^\rho \in \tilde{D}_\rho\}$ , où  $\tilde{D}_\rho \subset \mathbb{R}^d$  est un petit ouvert, et telle que  $\|d\tilde{F}\|_{C^0} \leq \gamma$ . Supposons de plus que*

$$C_0\epsilon\gamma < 1.$$

*Alors, dans les coordonnées droites,  $\Lambda$  peut s'écrire comme :*

$$\Lambda = \{(y_1^\rho, u^\rho; 0, f(u^\rho)); u^\rho \in D_\rho\},$$

avec  $\|df\|_{C^0} \leq \gamma(1 - C_0\gamma\epsilon)^{-1}(1 + 2C_0\epsilon)$ .

*Démonstration.* Pour alléger les notations, nous n'écrirons pas l'indice  $\rho$ . On note  $L^{-1}$  le changement de coordonnées  $L^{-1}(\tilde{y}, \tilde{\eta}) = (y, \eta)$ , et on note  $L_y^{-1}, L_\eta^{-1}$  ses deux composantes.

Les points sur  $\Lambda$  sont paramétrisés par la coordonnée  $\tilde{y}$ . On peut donc voir leurs coordonnées droites  $y, \eta$  comme des fonctions de  $\tilde{y}$ .

Par les équations (4.2), (4.3) et la remarque 4.2, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} L_y^{-1}(\tilde{y}, \tilde{F}(\tilde{y})) &= \frac{\partial L_y^{-1}}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial L_y^{-1}}{\partial \tilde{\eta}} \frac{\partial \tilde{F}(\tilde{y})}{\partial \tilde{y}} \\ &= I + R \end{aligned}$$

avec  $\|R\| \leq C_0\gamma\epsilon < 1$ .

Par conséquent, sur  $\Lambda$ ,  $\tilde{y} \mapsto y$  est inversible. On peut donc écrire  $s$  comme une fonction de  $y$ , et on a

$$\frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} \left[ \frac{\partial s}{\partial \tilde{y}} + \frac{\tilde{F}(\tilde{y})}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial s}{\partial \tilde{s}} \right] = (I + R)^{-1}(\gamma(I + R')),$$

avec  $\|R'\| \leq 2C_0\epsilon$ . On a donc  $\left\| \frac{\partial s}{\partial y} \right\| \leq \gamma(1 - C_0\gamma\epsilon)^{-1}(1 + 2C_0\epsilon)$ .

Le fait que  $s$  soit en fait indépendante de  $y_1$  vient du fait que  $\Lambda$  est une lagrangienne iso-énergétique, et que l'on travaille dans des coordonnées symplectiques.  $\square$

Décrivons maintenant le changement entre deux systèmes de coordonnées alternatives. Soient  $\rho, \rho' \in K$ . Si ces deux points sont suffisamment proches, l'application  $L : (\tilde{y}^\rho, \tilde{\eta}^\rho) \mapsto (\tilde{y}^{\rho'}, \tilde{\eta}^{\rho'})$  est bien définie sur un ensemble contenant à la fois  $\rho$  et  $\rho'$ , de diamètre  $d(\rho, \rho')$ .

En combinant le fait que les espaces (in)stables  $E_\rho^\pm$  dépendent de façon hölderienne de  $\rho \in K^\delta$  pour un exposant de Hölder  $\mathfrak{p} > 0$ , et le point (v) du lemme 3.10, on obtient :

$$dL_{(0,0)} = \mathbf{L} + R_{\rho,\rho'}, \quad (4.9)$$

où

$$\|R_{\rho,\rho'}\| \leq C d^{\mathfrak{p}}(\rho, \rho') \text{ où } \mathfrak{p} > 0 \text{ est comme dans (3.9),} \quad (4.10)$$

et où  $\mathbf{L}$  est de la forme

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} U_y & 0 \\ 0 & \mathbf{L}_\eta \end{pmatrix},$$

pour une matrice unitaire  $U_y$ . Ici,  $\mathbf{L}_\eta$  peut ne pas être unitaire, mais elle est inversible, et par compacité de  $K$ ,  $\|\mathbf{L}_\eta\|^{-1}$  peut être bornée indépendamment de  $\rho$ .

Par compacité de  $K$ , les dérivées secondes de  $L$  peuvent être bornées indépendamment de  $\rho$  et de  $\rho'$ . Par conséquent, pour tout  $\rho''$  dans un voisinage de  $\rho$ , on a

$$dL_{\rho''} = dL_{(0,0)} + R_{\rho''}, \quad (4.11)$$

où  $R_{\rho''} \leq C' d(\rho, \rho'')$  et  $C'$  est indépendante de  $\rho'$ .

Quitte à prendre  $C_0$  plus grand, on peut supposer que  $\|\mathbf{L}_\eta\|^{-1} \leq C_0$ . On peut aussi supposer que  $C_0/2$  est plus grand que les constantes  $C$  et  $C'$  qui apparaissent dans les bornes sur  $R_{\rho,\rho'}$  et  $R_{\rho''}$ .

Nous utiliserons toutes les remarques précédentes sous la forme du lemme suivant, qui décrit l'effet d'un changement de coordonnées alternatives sur une variété lagrangienne.

**Lemme 4.4.** *Soient  $\rho, \rho' \in K$  tels que  $d(\rho, \rho') < \epsilon$ , et soit  $\Lambda$  une variété lagrangienne qui peut s'écrire dans les coordonnées alternatives centrées en  $\rho$  comme*

$$\Lambda = \{(\tilde{y}_1^\rho, \tilde{u}^\rho; 0, \tilde{F}^\rho(\tilde{y}^\rho)); \tilde{y}^\rho \in \tilde{D}_\rho\},$$

où  $\tilde{D}_\rho \subset \mathbb{R}^d$  est un petit ouvert, et où  $\|d\tilde{F}^\rho\|_{C^0} \leq \gamma < \frac{1}{4C_0\epsilon^{\mathfrak{p}}}$ .

Alors  $\Lambda \cap \tilde{U}^{\rho'}(\epsilon, \epsilon)$  peut s'écrire dans les coordonnées alternatives centrées en  $\rho'$  comme

$$\Lambda \cap \tilde{U}^{\rho'}(\epsilon, \epsilon) = \{(\tilde{y}_1^{\rho'}, \tilde{u}^{\rho'}; 0, \tilde{F}^{\rho'}(\tilde{y}^{\rho'})); \tilde{y}^{\rho'} \in \tilde{D}_{\rho'}\},$$

où  $\tilde{D}_{\rho'} \subset \mathbb{R}^d$  est un petit ouvert, et où

$$\|d\tilde{F}^{\rho'}\|_{C^0} \leq (\gamma(1 + C_0\epsilon^{\mathfrak{p}}) + C_0\epsilon^{\mathfrak{p}})(1 - 2\gamma C_0\epsilon^{\mathfrak{p}})^{-1} < \infty.$$

*Démonstration.* Considérons les points de  $\Lambda$ . Par hypothèse, leur coordonnée  $\tilde{\eta}^\rho$  est une fonction de leur coordonnée  $\tilde{y}^\rho$ . Par conséquent, en utilisant l'application  $L$ , leur coordonnées  $(\tilde{y}^{\rho'}, \tilde{\eta}^{\rho'})$  peuvent être vues comme des fonctions de  $\tilde{y}^\rho$ .

Notons  $L_y$  et  $L_\eta$  les deux composantes de  $L$ . Par définition, on a

$$\tilde{y}^{\rho'} = L_y(\tilde{y}^\rho, \tilde{\eta}^\rho) = L_y(\tilde{y}^\rho, \tilde{F}^\rho(\tilde{y}^\rho)),$$

#### 4.1 Preuve du théorème 3.19

où  $\tilde{F}^\rho(\tilde{y}^\rho)$  satisfait  $\left\| \frac{\partial \tilde{F}^\rho(\tilde{y}^\rho)}{\partial \tilde{y}^\rho} \right\| \leq \gamma$ . Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{y}^\rho}{\partial \tilde{y}^\rho} &= \frac{\partial L_y}{\partial \tilde{y}^\rho} + \frac{\partial \tilde{F}^\rho(\tilde{y}^\rho)}{\partial \tilde{y}^\rho} \frac{\partial L_y}{\partial \tilde{\eta}^\rho} \\ &= U + \tilde{R}, \end{aligned}$$

où  $U$  est unitaire.

Par les équations (4.9) et (4.11), on a  $\|\tilde{R}\| \leq 2\gamma C_0 \epsilon^{\mathbf{p}} < 1$  par hypothèse. Par conséquent,  $\tilde{y}^\rho \mapsto \tilde{y}^{\rho'}$  est inversible, et on a  $\left\| \frac{\partial \tilde{y}^\rho}{\partial \tilde{y}^{\rho'}} \right\| \leq (1 - 2\gamma C_0 \epsilon^{\mathbf{p}})^{-1}$ . On peut voir  $\tilde{\eta}^{\rho'}$  comme une fonction de  $\tilde{y}^{\rho'}$ , et on a

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \tilde{\eta}^{\rho'}}{\partial \tilde{y}^{\rho'}} \right\| &= \left\| \frac{\partial \tilde{y}^\rho}{\partial \tilde{y}^{\rho'}} \frac{\partial \tilde{\eta}^{\rho'}}{\partial \tilde{y}^\rho} + \frac{\partial \tilde{y}^\rho}{\partial \tilde{y}^{\rho'}} \frac{\partial \tilde{\eta}^\rho}{\partial \tilde{y}^\rho} \frac{\partial \tilde{\eta}^{\rho'}}{\partial \tilde{\eta}^\rho} \right\| \\ &\leq (1 - 2\gamma C_0 \epsilon^{\mathbf{p}})^{-1} (C_0 \epsilon^{\mathbf{p}} + \gamma(1 + C_0 \epsilon^{\mathbf{p}})), \end{aligned}$$

et le lemme s'ensuit. □

#### 4.1.4 Propagation durant des temps courts

Fixons un  $\nu_1 \in (\nu, 1)$ , où  $\nu$  a été défini dans (4.5). Rappelons que  $\mathbf{p}$  a été défini dans (4.10) comme l'exposant de Hölder des directions stables et instables. À partir de maintenant, on fixe un  $\epsilon > 0$  suffisamment petit pour que

$$\frac{\nu + C_0 \epsilon^{\mathbf{p}}}{\nu^{-1} - C_0 \epsilon^{\mathbf{p}}} < \nu_1, \text{ et } \frac{C_0 \epsilon^{\mathbf{p}}}{\nu^{-1} - 2C_0 \epsilon^{\mathbf{p}}} < \frac{\gamma_{uns}(1 - \nu_1)}{8}. \quad (4.12)$$

$$\left(1 - \frac{(1 + \nu_1)\gamma_{uns}}{1 + 2C_0 \epsilon^{\mathbf{p}}}\right)^{-1} \left(\gamma_{uns} \frac{(1 + \nu_1)(1 + C_0 \epsilon^{\mathbf{p}})}{2 + 4C_0 \epsilon^{\mathbf{p}}} + C_0 \epsilon^{\mathbf{p}}\right) < \frac{\gamma_{uns}}{1 + 2C_0 \epsilon^{\mathbf{p}}}. \quad (4.13)$$

Ceci est possible, car  $\frac{1 + \nu_1}{2} < 1$ . On demande aussi que  $C_0 \epsilon^{\mathbf{p}} < 1/2$ . Remarquons que, bien que la condition (4.13) semble terriblement compliquée, elle est faite pour bien se combiner avec le lemme 4.4.

Introduisons une première décomposition de la couche d'énergie. Rappelons que nous avons défini  $\mathcal{W}_0$  dans (3.1) comme la partie extérieure de la couche d'énergie. On définit  $\mathcal{W}_1 := \{\rho \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{W}_0 ; d(\rho, K) < \epsilon/2\}$  comme la partie de la couche d'énergie proche de l'ensemble capté, et  $\mathcal{W}_2 := \{\rho \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{W}_0 ; d(\rho, K) \geq \epsilon/2\}$  comme la région d'interaction. On pourra se référer à la figure 4.1 pour une représentation de ces différents ensembles. Remarquons que l'on introduira plus loin un recouvrement ouvert de la couche d'énergie plus fin, en utilisant les ensembles  $W_a$  apparaissant dans l'énoncé du théorème.

Le lemme suivant nous dit que l'ensemble  $\mathcal{W}_2$  est un ensemble transitoire, c'est-à-dire, que les points n'y passent qu'un temps fini.

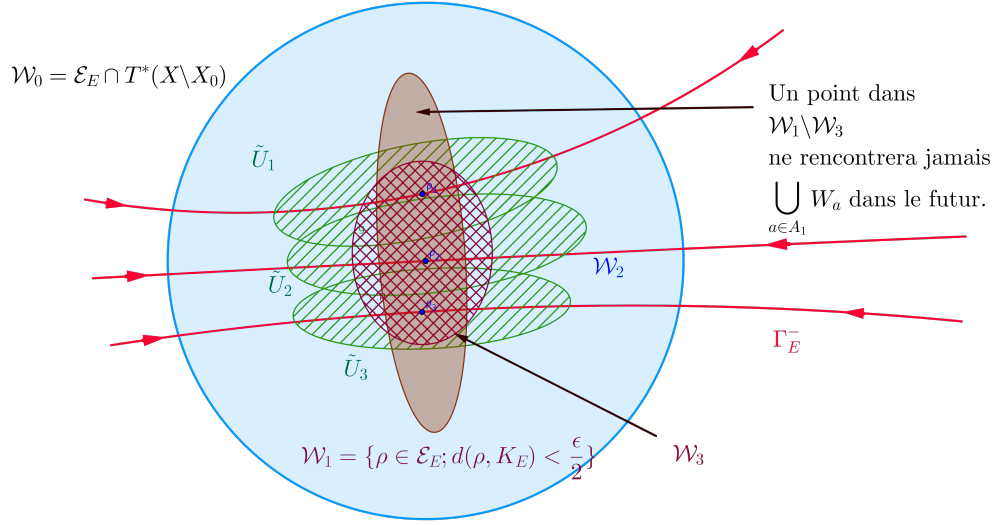


FIGURE 4.1 – Une représentation de certains des ensembles apparaissant dans la preuve du théorème 3.19, intersectés avec la section de Poincaré.

**Lemme 4.5.** *Il existe un entier  $N_\epsilon \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall \rho \in \mathcal{W}_2$ , on a  $\Phi^{N_\epsilon}(\rho) \in \mathcal{W}_0$  ou  $\Phi^{-N_\epsilon}(\rho) \in \mathcal{W}_0$ .*

*Démonstration.* Ce résultat vient de la transversalité uniforme des variétés stables et instables (qui est une conséquence directe de la compacité de  $K$ ).

Celle-ci nous donne l'existence d'un  $d_1(\epsilon) > 0$  tel que, pour tout  $\rho \in \mathcal{W}_2 \cup \mathcal{W}_1$ ,

$$d(\rho, \Gamma^+) + d(\rho, \Gamma^-) \leq 2d_1 \Rightarrow d(\rho, K) \leq \epsilon/2.$$

On peut donc écrire

$$\mathcal{W}_2 = \{\rho \in \mathcal{W}_2; d(\rho, \Gamma^-) > d_1\} \cup \{\rho \in \mathcal{W}_2; d(\rho, \Gamma^+) > d_1\}.$$

Un point dans le premier ensemble quittera la région d'interaction au bout d'un temps fini quand on le propage dans le futur, tandis qu'un point dans le second ensemble quittera la région d'interaction au bout d'un temps fini quand on le propage dans le passé. Par compacité, on peut trouver un  $N_\epsilon$  uniforme comme dans l'énoncé du lemme.  $\square$

La remarque suivante sera utile dans le chapitre prochain.

**Remarque 4.6.** *Dans le chapitre prochain, nous utiliserons les ensembles  $V_b$  introduits dans la section 3.5.1 à partir des ensembles  $W_a$ . En adaptant la preuve précédente, on voit*

#### 4.1 Preuve du théorème 3.19

que, quitte à augmenter  $N'_{uns}$ , on peut supposer que pour tout  $b \in B_2$ , pour tout  $\rho \in V_b$ , on a  $\Phi^{N'_{uns}}(\rho) \in V_0 \setminus (\bigcup_{b \in B_2} V_b)$  ou  $\Phi^{-N'_{uns}}(\rho) \in V_0 \setminus (\bigcup_{b \in B_2} V_b)$ .

Le lemme suivant nous garantit que la transversalité de  $\mathcal{L}_0$  avec les variétés stables fait que l'on peut écrire  $\Phi^t(\mathcal{L}_0)$  comme une union de variétés instables, dans les coordonnées alternatives.

**Lemme 4.7.** *Soit  $N \in \mathbb{N}$ . Il existe  $\mathcal{N}_N \in \mathbb{N}$ ,  $\tilde{\varrho}_N > 0$  et  $\tilde{\gamma}_N > 0$  tels que  $\forall 0 < \varrho \leq \tilde{\varrho}_N$ ,  $\forall \rho \in K$ ,  $\forall 1 \leq t \leq N$ ,  $\Phi^t(\mathcal{L}_0) \cap \tilde{U}^\rho(\epsilon, \varrho)$  peut être écrit dans les coordonnées  $(\tilde{y}^\rho, \tilde{\eta}^\rho)$  comme l'union d'au plus  $\mathcal{N}_N$  variétés lagrangiennes disjointes, qui sont toutes  $\tilde{\gamma}_N$ -instables :*

$$\Phi^t(\mathcal{L}_0) \cap \tilde{U}^\rho(\epsilon, \varrho) \equiv \bigcup_{l=0}^{l(\varrho)} \hat{\Lambda}_l,$$

avec  $l(\varrho) \leq \mathcal{N}_N$  et

$$\hat{\Lambda}_l = \{(\tilde{y}_1^\rho, \tilde{u}^\rho; 0, f^l(\tilde{y}^\rho)), \tilde{u}^\rho \in D_\varrho\},$$

pour des fonctions lisses  $f^l$  avec  $\|df^l(\tilde{y}^\rho)\|_{C^0(D_\varrho)} \leq \tilde{\gamma}_N$ .

*Démonstration.* Soit  $1 \leq t \leq N$ . Tout d'abord,  $\Phi^t$  étant un symplectomorphisme, elle transforme les variétés lagrangiennes en variétés lagrangiennes. Rappelons que la restriction d'une variété lagrangienne à un ouvert de  $T^*X$  est une réunion de variétés lagrangiennes.

Montrons maintenant que, si on prend  $\varrho$  suffisamment petit, ces variétés lagrangiennes sont toutes  $\tilde{\gamma}_N$ -instables, pour un  $\tilde{\gamma}_N > 0$  indépendant de  $\rho$ .

Soit  $\rho \in K$ . Par hypothèse,  $W_{loc}^-(\rho)$  et  $\Phi^t(\mathcal{L}_0)$  s'intersectent transversalement.

Par conséquent, dans un petit voisinage de la variété stable  $\{\tilde{u}^\rho = 0\}$ , chaque composante connexe de  $\Phi^t(\mathcal{L}_0)$  se projette sans caustique sur la variété instable  $\{\tilde{s}^\rho = 0\}$ . Plus précisément, il existe un  $\varrho > 0$  et un  $\gamma > 0$  tels que chaque composante connexe de  $\Phi^t(\mathcal{L}_0) \cap \tilde{U}^\rho(\epsilon, \varrho)$  est  $\gamma$ -instable dans les coordonnées alternatives autour de  $\rho$ , pour un  $\gamma > 0$ .

Étant donné que les changements de coordonnées entre coordonnées alternatives sont continus, on peut utiliser la compacité de  $K$  pour trouver des constantes uniformes  $\varrho > 0$  et  $\gamma > 0$  telles que chaque composante connexe de  $\Phi^t(\mathcal{L}_0) \cap \tilde{U}^\rho(\epsilon, \varrho)$  est  $\gamma$ -instable dans les coordonnées alternatives autour de  $\rho$ , indépendamment de  $\rho \in K$  et de  $1 \leq t \leq N$ .

Par compacité de  $\tilde{U}^\rho(\epsilon, \varrho)$ , le nombre de variétés lagrangiennes composant  $\Phi^t(\mathcal{L}_0) \cap \tilde{U}^\rho(\epsilon, \varrho)$  est fini. Ceci conclut la preuve du lemme.  $\square$

En appliquant ce lemme à  $N = N_\epsilon + 2$ , on définit les constantes suivantes, qui joueront un rôle un peu plus loin dans la preuve du théorème 3.19. (Rappelons que  $\gamma_{uns}$  a été fixé.)

$$(\gamma_0, \varrho_0) := (\tilde{\gamma}_{N_\epsilon+2}, \tilde{\varrho}_{N_\epsilon+2}) \tag{4.14}$$

$$N_1 := \left\lfloor \frac{\log(\gamma_{uns}/4\gamma_0)}{\log((1+\nu_1)/2)} \right\rfloor + 1, \tag{4.15}$$



$$N_{uns} := N_1 + N_\epsilon + 2,$$

$$\varrho_1 := \min\left(\frac{\epsilon}{2\gamma_0}, \varrho_0\right), \quad \varrho_2 := \min\left(\left(C + C_0\epsilon^p\right)^{-N_{uns}} \varrho_1, \tilde{\varrho}_{N_{uns}}\right) \quad (4.16)$$

où  $\mathcal{C}$  vient de la remarque 4.2, et  $C_0$  vient de l'équation (4.8).

**Remarque 4.8.** *Comme expliqué dans le lemme 4.5,  $N_\epsilon$  est le temps maximal passé par une trajectoire dans la région intermédiaire  $\mathcal{W}_2$ . Le temps  $N_1$  sera le temps nécessaire pour incliner une lagrangienne  $\gamma_0$ -instable en une lagrangienne  $\gamma_{uns}$ -instable, comme expliqué dans la proposition 4.12. Quant à la constante  $\varrho_2$ , elle a été choisie suffisamment petite pour qu'à chaque étape de la propagation durant un temps  $N_1$ , les variétés lagrangiennes que l'on considère sont contenues dans une unique carte locale, comme expliqué dans la proposition 4.12.*

**Remarque 4.9.** *La constante  $\epsilon_0$  dans le théorème 3.19 ne dépendra que de  $\gamma_0$  et de  $\varrho_0$ . Par conséquent, la preuve du lemme 4.7 nous dit que si on considère toute une famille de variétés lagrangiennes  $(\mathcal{L}_z)_{z \in Z}$  vérifiant l'hypothèse 3.12 et l'hypothèse 3.15, on pourra trouver une constante  $\epsilon_0 > 0$  uniforme en  $z \in Z$  du moment qu'on a la condition de transversalité uniforme suivante :*

$$\forall t \in N, \forall \rho \in K, \exists \delta, \gamma > 0 \text{ tel que } \forall z \in Z, \Phi^t(\mathcal{L}_z) \cap \tilde{U}^\rho(\epsilon, \delta) \text{ est } \gamma\text{-instable.} \quad (4.17)$$

Pour étudier la propagation de  $\Phi^t(\mathcal{L}_0)$  à des temps supérieurs à  $N_{uns}$ , nous devons maintenant introduire un recouvrement d'un voisinage de  $\Gamma^- \cap \mathcal{W}_1$ .

**Lemme 4.10.** *Il existe un voisinage  $\mathcal{W}_3$  de  $\Gamma^- \cap \mathcal{W}_1$  dans  $\mathcal{E}$ , un ensemble fini de points  $(\rho_i)_{i \in I} \subset K$  et  $0 < \epsilon_1 < \varrho_1$ , tel que l'on ait les résultats suivants.*

- (i) *Les ensembles  $(\tilde{U}_i)_{i \in I} := (\tilde{U}^{\rho_i}(\epsilon, \varrho_2))_{i \in I}$  forment un recouvrement ouvert de  $\mathcal{W}_3$ .*
- (ii)  *$\rho \in [\mathcal{W}_1 \setminus \mathcal{W}_3] \cup \{\rho' \in \mathcal{W}_2; d(\rho', \Gamma^-) > d_1\} \implies \forall t \geq 0, d(\Phi^t(\rho), K) \geq \epsilon_1$ .*
- (iii) *Pour tout ouvert  $W$  de diamètre  $< \epsilon_1$  inclus dans  $\mathcal{W}_3$ , il existe un  $i \in I$  tel que  $W \subset \tilde{U}_i$ .*

*Démonstration.* Les ensembles  $(\tilde{U}^\rho(\epsilon, \varrho_2))_{\rho \in K}$  forment un recouvrement ouvert de  $(\Gamma^- \cap \mathcal{W}_1)$ .

Par compacité, on peut en extraire un recouvrement ouvert fini  $(\tilde{U}_i)_{i \in I} := (\tilde{U}^{\rho_i}(\epsilon, \varrho_2))_{i \in I}$ , qui vérifie encore (i). Notons  $\mathcal{W}_3$  un tel voisinage.

Comme  $\mathcal{W}_3$  est un voisinage de  $\Gamma^- \cap \mathcal{W}_1$ , il existe une constante  $\varrho'_2 > 0$  telle que l'on ait :

$$\forall \rho \in \mathcal{W}_1 \setminus \mathcal{W}_3, \text{ on a } d(\rho, \Gamma^-) > \varrho'_2.$$

Par conséquent, il existe  $0 < \epsilon_1 < \min(\varrho_1, \epsilon)$  tel que

$$\rho \in [\mathcal{W}_1 \setminus \mathcal{W}_3] \cup \{\rho' \in \mathcal{W}_2; d(\rho', \Gamma^-) \geq d_1\} \implies \forall t \geq 0, d(\Phi^t(\rho), K) > \epsilon_1,$$

#### 4.1 Preuve du théorème 3.19

ce qui nous donne (ii). Finalement, comme les ensembles  $\tilde{U}_i$  sont ouverts, on peut diminuer  $\epsilon_1$  de sorte que (iii) soit vérifié.  $\square$

**Remarque 4.11.** *La constante  $\epsilon_0$  qui apparaît dans le théorème 3.19 sera plus petite que  $\epsilon_1$  (voir le lemme 4.15), donc chacun des ensembles  $(W_a)_{a \in A_1}$  sera contenu dans l'un des  $\tilde{U}_i$ . De plus, on aura  $W_a \subset \{\rho \in \mathcal{E}; d(\rho, K) < \epsilon_0\}$ . Par conséquent, un point  $\rho \in [\mathcal{W}_1 \setminus \mathcal{W}_3] \cup \{\rho' \in \mathcal{W}_2; d(\rho', \Gamma^-) \geq d_1\}$  ne sera contenu dans aucun des ensembles  $(W_a)_{a \in A_1}$  quand on le propage dans le futur.*

Le lemme 4.7 nous dit que  $\Phi^{N_\epsilon}(\mathcal{L}_0) \cap \tilde{U}_i$  est composé d'un nombre fini de variétés lagrangiennes  $\gamma_0$ -instables. Notre but sera maintenant de considérer une variété lagrangienne incluse dans l'un des  $\tilde{U}_{i_1}$ , de la propager pendant un temps  $N \geq N_1$ , puis de la restreindre à un  $\tilde{U}_{i_2}$ , avec  $i_1, i_2 \in I$ . La partie restante de la lagrangienne, qui est dans  $\mathcal{W}_1 \setminus \mathcal{W}_3$ , ne rencontrera aucun des ensembles  $(W_a)_{a \in A_1}$  quand elle sera propagée dans le futur, comme expliqué dans la remarque 4.11.

##### 4.1.5 Propagation dans les ensembles $\tilde{U}_i$

La propagation des variétés lagrangiennes dans les ensembles  $\tilde{U}_i$  est décrite dans la proposition suivante, qui est le point clef de la preuve du théorème 3.19. Rappelons que  $\gamma_0$  a été défini dans (4.14), et que  $N_1$  a été défini dans (4.15).

Pour  $N \in \mathbb{N}$  et  $\iota = (i_0 i_1 \dots i_{N-1}) \in I^N$ , on définit

$$\Phi_\iota(\Lambda) := \Phi^1(\tilde{U}_{i_{N-1}} \cap \Phi^1(\dots \Phi^1(\tilde{U}_{i_0} \cap \Lambda) \dots)).$$

**Proposition 4.12.** *Soit  $N \geq N_1$ ,  $\iota = (i_0 i_1 \dots i_{N-1}) \in I^N$  et  $i \in I$ . Soit  $\Lambda^0 \subset \tilde{U}_{i_0}$  une variété lagrangienne iso-énergétique qui est  $\gamma_0$ -instable dans les coordonnées alternatives centrées en  $\rho_{i_0}$ . Alors  $\tilde{U}_i \cap \Phi_\iota(\Lambda)$  est une variété lagrangienne contenue dans  $\tilde{U}_i$ , et elle est  $\frac{\gamma_{uns}}{(1+2C_0\epsilon^p)^2}$ -instable dans les coordonnées alternatives centrées en  $\rho_i$ .*

*Démonstration.* La première partie de la preuve consiste à comprendre comment  $\Phi^n(\Lambda^0)$  se comporte quand  $n \leq N_1$ , dans les coordonnées alternatives centrées en  $\rho_{i_0}$ . C'est le but du lemme suivant, qui est une adaptation du « lemme d'inclinaison » (voir [KH95, Theorem 6.2.8]; voir aussi [NZ09, Proposition 5.1] pour un énoncé plus proche de notre contexte et de nos notations).

**Lemme 4.13.**  $\Phi^{N_1}(\Lambda^0)$  est une variété lagrangienne, qui peut être écrite dans les coordonnées  $(\tilde{y}^{\Phi^{N_1}(\rho_{i_0})}, \tilde{\eta}^{\Phi^{N_1}(\rho_{i_0})})$  sous la forme :

$$\Phi^{N_1}(\Lambda^0) \equiv \{(\tilde{y}_1^{\Phi^{N_1}(\rho_{i_0})}, \tilde{u}^{\Phi^{N_1}(\rho_{i_0})}; 0, f^{N_1}(\tilde{u}^{\Phi^{N_1}(\rho_{i_0})})), \tilde{u}^{\Phi^{N_1}(\rho_{i_0})} \in D_{N_1}\},$$

où  $D_{N_1} \subset B(0, \varrho_1)$  et  $\|df^{N_1}\|_{C^0(D_k)} \leq \frac{(1+\nu_1)\gamma_{uns}}{4}$ .

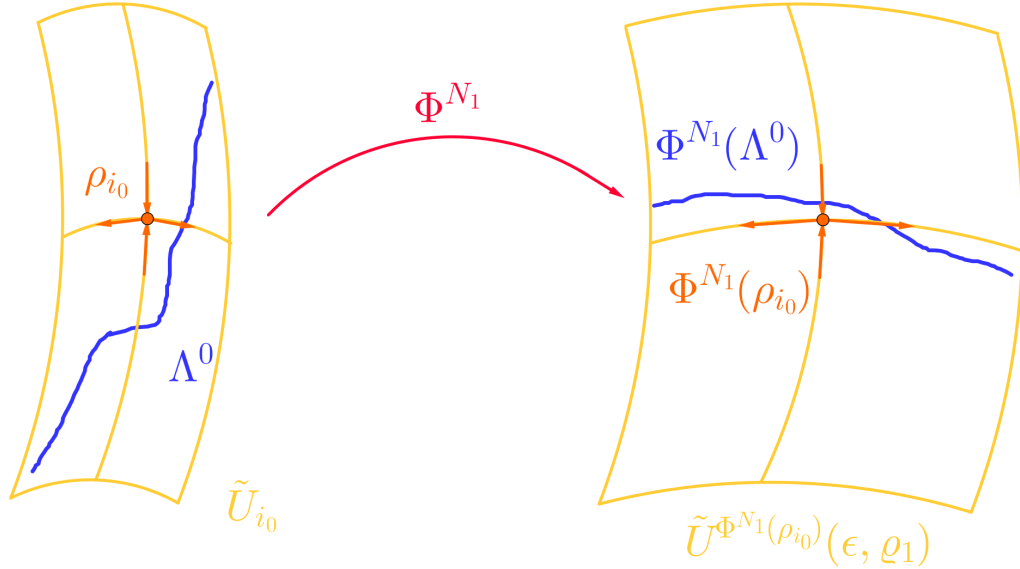


FIGURE 4.2 – Le lemme 4.13, une variante du lemme d’inclinaison.

Remarquons que  $\Phi^{N_1}(\Lambda^0)$  n’est a priori pas contenue dans un unique ensemble  $\tilde{U}_i$ , mais le lemme nous dit qu’elle est contenue dans l’ensemble  $\tilde{U}^{\Phi^{N_1}(\rho_{i_0})}(\epsilon, \varrho_1)$ , où les coordonnées alternatives sont bien définies, comme on peut le voir sur la figure 4.2

*Démonstration.* Par hypothèse,  $\Lambda^0$  peut s’écrire sous la forme

$$\Lambda^0 \equiv \{(\tilde{y}_1^{\rho_{i_0}}, \tilde{u}^{\rho_{i_0}}; 0, f^0(\tilde{u}^{\rho_{i_0}})), |\tilde{u}^{\rho_{i_0}}| < \varrho_2\}, \quad \text{avec } \|df^0(\tilde{u}^{\rho_{i_0}})\|_{C^0} \leq \gamma_0.$$

Nous allons considérer les restrictions des variétés lagrangiennes aux temps intermédiaires aux sections de Poincaré centrées en  $\Phi^k(\rho_{i_0})$  :

$$\Lambda_{sec}^k := \Phi^k(\Lambda^0) \cap \Sigma^{\Phi^k(\rho_{i_0})}(\epsilon, \varrho_0).$$

On a  $\Lambda_{sec}^{k+1} = \kappa^k(\Lambda_{sec}^k)$ , où  $\kappa^k := \kappa_{\Phi^k(\rho_{i_0}), \Phi^{k+1}(\rho_{i_0})}$  est de la forme (4.7). Grâce à l’équation (4.7) et à la définition de  $\mathcal{C}$ , on voit que le taux maximal d’expansion dans la direction instable est borné par  $(\mathcal{C} + C_0\epsilon^p)$ . Par conséquent, la définition de  $\varrho_2$  implique que pour tout  $k \leq N_1$ , la projection de  $\Lambda_{sec}^k$  sur la variété instable est supportée dans  $B(0, \varrho_1)$ .

Pour alléger les notations, on écrira  $\tilde{u}^k$  et  $\tilde{s}^k$  au lieu de  $\tilde{u}^{\Phi^k(\rho_{i_0})}$  et  $\tilde{s}^{\Phi^k(\rho_{i_0})}$ .

Soit  $k \geq 0$ . Supposons que l’on peut écrire

$$\Lambda_{sec}^k \equiv \{(\tilde{u}^k, f^k(\tilde{u}^k)); \tilde{u}^k \in D_k\},$$

avec  $D_k \subset B(0, \varrho_1)$ , et  $\|df^k\|_{C^0} \leq \gamma_k$  pour un  $0 < \gamma_k \leq \gamma_0$ .

#### 4.1 Preuve du théorème 3.19

Remarquons que le point essentiel dans les calculs qui suivent est que, comme on travaille dans les coordonnées alternatives, on a  $d\alpha_s^k(u^k, s^k) \leq C_0 u^k \leq C_0 \varrho_1$ .

La projection de  $\Phi^1_{|\Lambda_{sec}^k}$  sur les sous-espaces horizontaux s'écrit

$$\tilde{u}^k \mapsto \tilde{u}^{k+1} = \pi\Phi^1(\tilde{u}^k, f^k(\tilde{u}^k)) = A_k \tilde{u}^k + \tilde{\alpha}_k(\tilde{u}^k, f^k(\tilde{u}^k)),$$

où, pour chaque  $k$ ,  $A_k$  est une matrice comme dans (4.6).

En différentiant, on obtient :

$$\frac{\partial \tilde{u}^{k+1}}{\partial \tilde{u}^k} = A_k + \frac{\partial \tilde{\alpha}_k}{\partial \tilde{u}^k} + \frac{\partial \tilde{\alpha}_k}{\partial \tilde{s}^k} \frac{\partial f_k}{\partial \tilde{u}^k} = A_k + r_k,$$

où  $r_k$  a ses entrées bornées par  $C_0 \varrho_1 \gamma_0 \leq C_0 \epsilon$ .

Par conséquent, cette application est inversible, et  $\tilde{u}^{k+1} \mapsto \tilde{u}^k$  est contractante. Ceci implique que  $\Lambda_{sec}^{k+1}$  peut être représentée comme le graphe

$$\Lambda_{sec}^{k+1} \equiv \{(\tilde{u}^{k+1}, f^{k+1}(\tilde{u}^{k+1})); \tilde{u}^{k+1} \in D_{k+1}\},$$

avec

$$f^{k+1}(\tilde{u}^{k+1}) = {}^t A_k^{-1} f^k(\tilde{u}^k) + \tilde{\beta}_k(\tilde{u}^k, f^k(\tilde{u}^k)).$$

En différentiant ceci par rapport à  $\tilde{u}^{k+1}$ , on obtient

$$\frac{\partial f^{k+1}}{\partial \tilde{u}^{k+1}} = \left( \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial \tilde{u}^{k+1}} \right) \left[ ({}^t A_k^{-1} + \partial_s \beta^k(\tilde{u}^k, f^k(u^k))) \frac{\partial f^k}{\partial \tilde{u}^k}(\tilde{u}^k) + \partial_u \beta^k(u^k, f^k(u^k)) \right].$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial f^{k+1}}{\partial \tilde{u}^{k+1}} \right\| &\leq \frac{\|{}^t A_k^{-1}\| \gamma_k + |d\beta_u| + |d\beta_s| \gamma_k}{\nu^{-1} - |d\alpha_u^k| - |d\alpha_s^k| \gamma_k} \\ &\leq \frac{\gamma_k \nu + C_0 \epsilon^p (1 + \gamma_k)}{\nu^{-1} - 2C_0 \epsilon^p} \\ &\leq \nu_1 \gamma_k + \frac{(1 - \nu_1) \gamma_{uns}}{8} = \gamma_k \left( \nu_1 + \frac{\gamma_{uns}(1 - \nu_1)}{8\gamma_k} \right), \end{aligned}$$

où la dernière inégalité vient de (4.12). Tout d'abord, le fait que cette pente soit bornée uniformément sur  $\Lambda_{sec}^{k+1}$  implique que  $\Lambda_{sec}^{k+1}$  peut bien être écrite sous la forme

$$\Lambda_{sec}^{k+1} \equiv \{(\tilde{u}^{k+1}, f^{k+1}(\tilde{u}^{k+1})); \tilde{u}^{k+1} \in D_{k+1}\},$$

où  $D_{k+1} \subset B(0, \varrho_1)$ , et  $\|df^{k+1}\|_{C^0} \leq \gamma_{k+1}$ , où  $\gamma_{k+1} \leq \gamma_k \left( \nu_1 + \frac{\gamma_{uns}(1 - \nu_1)}{8\gamma_k} \right)$ .

Maintenant, si  $\gamma_k > \gamma_{uns}/4$ , alors  $\nu_1 + \frac{\gamma_{uns}(1 - \nu_1)}{8\gamma_k} < \frac{1 + \nu_1}{2} < 1$ , de sorte que  $\gamma_k$  décroît exponentiellement vite, tandis que si  $\gamma_k \leq \frac{(1 + \nu_1)\gamma_{uns}}{4}$ , alors  $\gamma_{k+1} < \frac{(1 + \nu_1)\gamma_{uns}}{4}$ .

Le temps  $N_1$  a été choisi suffisamment grand pour que  $\gamma_{N_1} < \frac{(1 + \nu_1)\gamma_{uns}}{4}$ , ce qui conclut la preuve du lemme.  $\square$

Après avoir été propagée pendant des temps  $N > N_1$ , la variété lagrangienne initiale ne sera peut-être plus incluse dans  $\tilde{U}^{\Phi^N(\rho_{i_0})}(\epsilon, \varrho_1)$ . Par conséquent, il nous faut faire un changement de coordonnées. Par le lemme 4.13, au temps  $N_1$ , notre variété lagrangienne  $\Phi^{N_1}(\Lambda^0)$  est incluse dans  $\tilde{U}^{\Phi^{N_1}(\rho_{i_0})}(\epsilon, \varrho_1)$  et est  $\frac{(1+\nu_1)\gamma_{uns}}{4}$ -instable.

On veut étudier  $\tilde{U}_j \cap \Phi^{N_1}(\Lambda^0)$  pour  $j \in I$ , dans les coordonnées centrées en  $\rho_j$ , et appliquer de nouveau les calculs réalisés dans la preuve du lemme 4.13. Voyons comment tout ceci fonctionne.

Si pour un  $j \in I$ ,  $\tilde{U}_j \cap \Phi^{N_1}(\Lambda^0) \neq \emptyset$ , alors  $d(\Phi^{N_1}(\rho_{i_0}), \rho_j) < \epsilon$ . En appliquant le lemme 4.4 et l'équation (4.13), on obtient que  $\Phi^{N_1}(\Lambda^0) \cap \tilde{U}_j$  est  $\frac{\gamma_{uns}}{2}$ -instable dans les coordonnées alternatives centrées en  $\rho_j$ .

On peut itérer cette suite de changements de coordonnées et de propagation pour tout temps  $N \geq N_1$  : on obtient toujours une unique variété lagrangienne, qui est  $\frac{(1+\nu_1)\gamma_{uns}}{4}$ -instable. Ceci conclut la preuve de la proposition 4.12, car nous avons supposé que  $C_0\epsilon^p < 1/2$ .  $\square$

**Remarque 4.14.** Dans [NZ09, Proposition 5.1], les auteurs montrent en utilisant la dérivation de fonctions composées que pour tout  $\ell \in \mathbb{N}$ , il existe une constante  $\mathcal{C}_\ell$  suffisamment grande pour que le résultat suivant soit vrai. Si  $i_1, i_2 \in I$  et si  $\Lambda \subset \tilde{U}_{i_1}$  est une variété lagrangienne dans un cône instable, engendrée par une fonction  $f$  dans les coordonnées  $(\tilde{y}^{\rho_{i_1}}, \tilde{\eta}^{\rho_{i_1}})$  avec  $\|f\|_{C^\ell} \leq \mathcal{C}_\ell$ , alors  $\Phi^1(\Lambda) \cap \tilde{U}_{i_2}$  est la réunion d'un nombre fini de variétés lagrangiennes, qui sont toutes dans des variétés instables dans les coordonnées  $(\tilde{y}^{\rho_{i_2}}, \tilde{\eta}^{\rho_{i_2}})$ , et qui sont engendrées par des fonctions ayant une norme  $C^\ell$  plus petite que  $\mathcal{C}_\ell$ .

En particulier, ceci montre que sur la variété lagrangienne  $\Phi_t^N(\Lambda)$  décrite par la proposition 4.12, la fonction  $s^{\rho_i}(y^{\rho_i})$  a une norme  $C^\ell$  plus petite que  $\mathcal{C}_\ell$ , où  $\mathcal{C}_\ell$  est une constante indépendante de  $N$ .

#### 4.1.6 Propriétés des ensembles $(W_a)_{a \in A_1}$

Le lemme suivant est une adaptation du lemme 4.7 dans les coordonnées droites. Remarquons que la raison principale pour laquelle on veut utiliser les coordonnées droites est qu'elles sont symplectiques, ce qui jouera un rôle essentiel dans la preuve du théorème 1.19.

**Lemme 4.15.** Il existe  $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_1$  tel que, si  $(W_a)_{a \in A_1}$  est un recouvrement de  $K$  de diamètre  $\varepsilon_0$  tel que pour chaque  $a \in A_1$ ,  $W_a \cap W_0 = \emptyset$ , et si on fixe pour tout  $a \in A_1$  un point  $\rho_a \in W_a \cap K \neq \emptyset$ , alors il existe  $\mathcal{N}_{N_{uns}} \in \mathbb{N}$  et  $0 < \gamma'$  tels que le résultat suivant soit vrai.

Pour chaque  $a \in A_1$ , pour chaque  $1 \leq N \leq N_{uns}$ , l'ensemble  $\Phi^N(\mathcal{L}_0) \cap W_a$  est constitué d'au plus  $\mathcal{N}_{N_{uns}}$  variétés lagrangiennes, qui sont toutes  $\gamma'$ -instable dans les coordonnées droites centrées en  $\rho_a$ .

#### 4.1 Preuve du théorème 3.19

*Démonstration.* En appliquant le lemme 4.7, on sait qu'il existe  $\mathcal{N}_{N_{uns}} \in \mathbb{N}$ ,  $\tilde{\varrho}_{N_{uns}} > 0$  et  $\tilde{\gamma}_{N_{uns}} > 0$  tels que  $\forall 0 < \varrho \leq \tilde{\varrho}_{N_{uns}}, \forall \rho \in K, \forall 1 \leq N \leq N_{uns}, \Phi^N(\mathcal{L}_0) \cap \tilde{U}^\rho(\epsilon, \varrho)$  peut s'écrire dans les coordonnées  $(\tilde{y}^\rho, \tilde{\eta}^\rho)$  comme la réunion d'au plus  $\mathcal{N}_{N_{uns}}$  variétés lagrangiennes, qui sont toutes  $\tilde{\gamma}_{N_{uns}}$ -instables.

Choisissons alors  $\varepsilon_0 > 0$  suffisamment petit pour que  $C_0 \varepsilon_0 \tilde{\gamma}_{N_{uns}} < 1$  et tel que tout ensemble de diamètre plus petit que  $\varepsilon_0$  et qui intersecte  $K$  est contenu dans un  $\tilde{U}^\rho(\epsilon, \varrho)$ , avec  $\varrho < \tilde{\varrho}_{N_{uns}}$ . Ceci nous donne le résultat, mais dans les coordonnées alternatives. Pour l'obtenir dans les coordonnées droites, on peut appliquer le lemme 4.3 grâce à l'hypothèse faite sur  $\varepsilon_0$ .  $\square$

Pour tous  $a \in A_1$ , et  $1 \leq k \leq N_{uns}$ ,  $W_a \cap \Phi^k(\mathcal{L}_0)$  est constitué d'un nombre fini de variétés lagrangiennes. Définissons  $d_{a,k}$  comme étant la distance minimale (pour la distance  $d$ ) entre deux des variétés lagrangiennes qui constituent  $W_a \cap \Phi^k(\mathcal{L}_0)$ , avec la convention que cette quantité est égale à  $+\infty$  si  $W_a \cap \Phi^k(\mathcal{L}_0)$  est composée d'une unique variété lagrangienne, ou est vide. On pose alors

$$d := \min(\varepsilon_0, \min_{\substack{a \in A_1 \\ 1 \leq k \leq N_{uns}}} \{d_{a,k}\}) > 0.$$

**Remarque 4.16.** *Si on considère toute une famille de variétés lagrangiennes  $(\mathcal{L}_z)_{z \in Z}$  vérifiant l'hypothèse 3.12 et l'hypothèse 3.15, on pourra lui appliquer le théorème 3.19 avec des ensembles  $(W_a)_{a \in A_2}$  indépendants de  $z \in Z$  à condition que la constante  $d$  est bien définie et positive, autrement dit, à condition que*

$$\inf_{\substack{a \in A_1, z \in Z \\ 1 \leq k \leq N_{uns}}} \{d_{a,k}^z\} > 0, \quad (4.18)$$

où  $d_{a,k}^z$  est la distance minimale entre les variétés lagrangiennes constituant  $W_a \cap \Phi^k(\mathcal{L}_z)$ , avec la convention que cette quantité est égale à  $+\infty$  si  $W_a \cap \Phi^k(\mathcal{L}_z)$  est composée d'une unique variété lagrangienne, ou est vide.

Le flot  $(\Phi^t)$  est  $C^1$  par rapport au temps, donc lipschitzien dans  $[0, N_{uns}]$ . Par conséquent, il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $t \in [0, N_{uns}]$ , pour tous  $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{E}$ , on a

$$d(\Phi^t(\rho_1), \Phi^t(\rho_2)) \leq Cd(\rho_1, \rho_2).$$

On pose alors

$$\varepsilon_2 := d/C.$$

Il nous faut maintenant compléter  $(W_a)_{a \in A_1}$  en un recouvrement ouvert de toute la couche d'énergie.

#### 4.1.7 Construction et propriétés des ensembles $(W_a)_{a \in A_2}$

Rappelons que  $W_0 = T^*(X \setminus X_0)$ , et que  $b$  est la fonction définissant le bord introduite dans l'hypothèse 3.1.

On construit les ensembles  $(W_a)_{a \in A_2}$  de sorte que, si on pose  $A = A_1 \cup A_2 \cup \{0\}$ , on a :

- Chacun des ensembles  $(W_a)_{a \in A_2}$  est de diamètre plus petit que  $\varepsilon_2$ .
- Pour tout  $a \in A_2$ , on a  $d(W_a, K) > \varepsilon_2/2$ .
- $(W_a)_{a \in A}$  est un recouvrement ouvert de  $\mathcal{E}$ .

Le lemme suivant permettra de montrer que  $\Phi_\alpha^N(\mathcal{L}_0)$  est composé d'une unique variété lagrangienne. Il repose sur le fait que les ensembles  $(W_a)_{a \in A_2}$  ont été construits suffisamment petits.

**Lemme 4.17.** *Soit  $k \leq N_{uns}$ ,  $\alpha \in A^k$ , et  $a \in A_1$ . Alors l'ensemble  $W_a \cap \Phi_\alpha^k(\mathcal{L}_0)$  est soit vide, soit constitué d'une unique variété lagrangienne.*

*Démonstration.* Supposons que  $\Phi^k(\mathcal{L}_0) \cap W_a$  est non vide. On a vu dans le lemme 4.15 qu'elle est constituée d'un nombre fini de variétés lagrangiennes, avec une distance entre elles supérieure à  $d$ . Par conséquent, pour tout  $1 \leq k' \leq k$ , les ensembles  $\Phi^{-k'}(\Phi^k(\mathcal{L}_0) \cap W_a)$  sont composés de variétés lagrangiennes qui sont à une distance les unes des autres supérieure à  $\varepsilon_2$ . En raison de la condition (3.2) que l'on a imposée, on a  $\alpha_{k'} \in A_2$  pour un  $k' \leq k$ . Comme les ensembles  $(W_a)_{a \in A_2}$  ont un diamètre plus petit que  $\varepsilon_2$ , ils séparent les variétés lagrangiennes qui composent  $\Phi^{-k'}(\Phi^k(\mathcal{L}_0) \cap W_a)$ . On en déduit le lemme.  $\square$

#### 4.1.8 Structure des suites admissibles

Nous allons maintenant énoncer deux lemmes qui mettent des contraintes sur les suites  $\alpha \in A^N$ , avec  $\alpha_N \in A_1$  et telles que  $\Phi_\alpha^N(\mathcal{L}_0) \neq \emptyset$ .

Le premier de ces lemmes nous dit que l'on peut se restreindre aux suites telles que  $\alpha_k \neq 0$  pour  $k \geq 1$ .

**Lemme 4.18.** *Soit  $N \in \mathbb{N}$ , et soit  $\alpha \in A^N$ , et  $a \in A_1$ . Supposons que  $\alpha_k = 0$  pour un  $1 \leq k \leq N - 1$ , et que  $W_a \cap \Phi_\alpha^N(\mathcal{L}_0) \neq \emptyset$ . Alors  $W_a \cap \Phi_\alpha^N(\mathcal{L}_0) \subset \Phi_{\alpha_{k+1} \dots \alpha_{N-1}}^{N-k}(\mathcal{L}_0)$ .*

*Démonstration.* Par hypothèse,  $\Phi_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^k(\mathcal{L}_0) \subset W_0$ , et cet ensemble intersecte  $\mathcal{W}_1$  dans le futur. On a  $W_0 = \mathcal{DE}_- \cup \mathcal{DE}_+$ , et un point dans  $\mathcal{DE}_+$  ne peut pas intersecter  $\mathcal{W}_1$  dans le futur. Par conséquent, les points dans  $\Phi_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^k(\mathcal{L}_0)$  qui intersectent  $\mathcal{W}_1$  dans le futur sont tous dans  $\mathcal{DE}_-$ . Mais, par le lemme 3.5, les points dans  $\mathcal{DE}_-$  n'ont des pré-images que dans  $W_0$ . On a donc

$$W_a \cap \Phi_\alpha^N(\mathcal{L}_0) \subset W_a \cap \Phi_{0 \dots 0 \alpha_{k+1} \dots \alpha_{N-1}}^N(\mathcal{L}_0) \subset \Phi_{\alpha_{k+1} \dots \alpha_{N-1}}^{N-k}(\mathcal{L}_0),$$

où la seconde inclusion provient de l'hypothèse 3.12.  $\square$

#### 4.1 Preuve du théorème 3.19

Utilisons maintenant la remarque 4.11 pour montrer que, pour des temps  $k \geq N_\epsilon + 2$ , la dynamique intéressante se produit dans  $\mathcal{W}_3$ .

**Lemme 4.19.** *Soit  $N \geq N_\epsilon + 2$ ,  $\alpha \in A^N$  avec  $\alpha_i \neq 0$  pour tout  $i \geq 1$ .*

*Soit  $N_\epsilon + 2 \leq k \leq N$ , et soit  $\rho \in \Phi_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^k(\mathcal{L}_0)$  tel que  $\Phi^{N-k}(\rho) \in W_{a'}$  pour un  $a' \in A_1$ . Alors  $\rho \in \mathcal{W}_3$ .*

*Démonstration.* Si  $\rho \in \mathcal{W}_1$ , alors le résultat suit de la remarque 4.11. Il nous faut donc vérifier que l'on ne peut pas avoir  $\rho \in \mathcal{W}_2 \cup \mathcal{W}_0$ . Tout d'abord, remarquons que le lemme 3.5 implique que l'on ne peut pas avoir  $\rho \in \mathcal{W}_0$ .

Supposons maintenant que  $\rho \in \mathcal{W}_2$ . Étant donné que  $k \geq N_\epsilon + 2$ , et que  $\alpha_i \neq 0$  pour  $i \geq 1$ , on a  $\Phi^{-N_\epsilon-1}(\rho) \in W_{a'}$  pour un  $a' \in A_1 \cup A_2$ . Mais, grâce au lemme 3.5, on sait que pour tout  $a' \in A_1 \cup A_2$ , on a

$$\Phi^1(W_{a'} \setminus W_0) \cap \mathcal{D}\mathcal{E}_- = \emptyset. \quad (4.19)$$

Par conséquent, on a  $\Phi^{-N_\epsilon}(\rho) \notin \mathcal{W}_0$ .

Par la preuve du lemme 4.5, ceci impliquerait que  $d(\rho, \Gamma^-) \geq d_1$ . Par la remarque 4.11, ceci implique qu'on ne pourrait pas avoir  $\Phi^{N-k}(\rho) \in W_{a'}$  pour un  $a' \in A_1$ , ce qui est une contradiction.  $\square$

##### 4.1.9 Fin de la preuve du théorème 3.19

Soit  $N \geq 0$ ,  $\alpha \in A^N$  et  $a \in A_1$ . Si  $N \leq N_{uns}$ , le résultat du théorème 3.19 est une conséquence du lemme 4.15 et du lemme 4.17.

Considérons maintenant  $N \geq N_{uns} > N_\epsilon + 2$ . On supposera que  $W_a \cap \Phi_\alpha^N(\mathcal{L}_0) \neq \emptyset$ . Grâce au lemme 4.18 et à l'hypothèse 3.12, on peut supposer que  $\alpha_i \neq 0$  pour tout  $i \geq 1$ .

On peut déduire du lemme 4.19 que

$$W_a \cap \Phi_\alpha^N(\mathcal{L}_0) \subset \bigcup_{\substack{i \in I^{N-N_\epsilon-1} \\ i_{N-N_\epsilon} = i_\alpha}} \Phi_i(\Phi_{\alpha_1 \dots \alpha_{N_\epsilon+2}}^{N_\epsilon+2}(\mathcal{L}_0)), \quad (4.20)$$

où  $i_\alpha \in I$  est tel que  $W_{\alpha_N} \subset \tilde{U}_{i_\alpha}$ . Définissons

$$\Lambda_k := \{\rho \in \Phi_\alpha^k(\mathcal{L}_0); \forall k' \geq 0, \Phi^{k'}(\rho) \in W_{\alpha_{k+k'}}\}.$$

Par le lemme 4.19, pour tout  $k \geq N_\epsilon + 2$ , on a  $\Lambda_k \subset \mathcal{W}_3 \cap W_{\alpha_k}$ . Par conséquent, par le lemme 4.10 (iii), il existe un  $i_k \in I$  tel que  $\Lambda_k \subset \tilde{U}_{i_k}$ , et on obtient que

$$W_a \cap \Phi_\alpha^N(\mathcal{L}_0) \subset \Phi_{i_{N_\epsilon+2} \dots i_N}^{N-N_\epsilon-2}(\Phi_{\alpha_1 \dots \alpha_{N_\epsilon+2}}^{N_\epsilon+2}(\mathcal{L}_0)).$$

On sait grâce au théorème 4.7 et au lemme 4.17 que  $\Phi_{\alpha_1 \dots \alpha_{N_\epsilon+2}}^{N_\epsilon+2}(\mathcal{L}_0)$  est composé d'une unique variété lagrangienne, qui est  $\gamma_0$ -instable dans les coordonnées alternatives centrées



en tout point de  $K$ . En appliquant la proposition 4.12, on sait que le membre de droite de (4.20) est une variété lagrangienne qui est  $\frac{\gamma_{uns}}{(1+2C_a\epsilon^p)^2}$ -instable dans les coordonnées alternatives centrées en  $\rho_{i_\alpha}$ .

On applique le lemme 4.4 pour écrire cette variété lagrangienne dans les coordonnées alternatives centrées en  $\rho_a$ . Grâce à l'équation (4.13), celle-ci est  $\frac{\gamma_{uns}}{(1+2C_a\epsilon^p)}$ -instable. On utilise alors le lemme 4.3 pour écrire cette variété lagrangienne dans les coordonnées droites centrées en  $\rho_{\alpha_N}$ , et on en déduit qu'elle est  $\gamma_{uns}$ -instable. Ceci conclut la preuve du théorème 3.19.  $\square$

**Remarque 4.20.** Par conséquent, dans les coordonnées  $(y^a, \eta^a)$ ,  $W_a \cap \Phi_\alpha^N(\mathcal{L}_0)$  peut s'écrire sous la forme

$$W_a \cap \Phi_\alpha^N(\mathcal{L}_0) \equiv \{(y_1^a, u^a, 0, f_{N,\alpha,a}(u^a)), y^a \in D_{N,\alpha,a}\},$$

pour un ouvert  $D_{N,\alpha,a} \subset \mathbb{R}^d$ .

La remarque 4.14 nous assure que pour tout  $\ell \in \mathbb{N}$ , les fonctions  $f_{N,\alpha,a}$  ont des normes  $C^\ell$  bornées indépendamment de  $N$ ,  $\alpha$  and  $a$ .

#### 4.1.10 Distance entre les lagrangiennes

Dans le chapitre 6, nous aurons besoin d'une borne inférieure sur la distance entre les variétés lagrangiennes qui composent  $\Phi^n(\mathcal{L}_0) \cap W_a$ . Pour prouver une telle borne inférieure, nous aurons d'abord besoin d'un lemme topologique élémentaire.

**Lemme 4.21.** Il existe  $c_0 > 0$  tel que pour tous  $\rho, \rho' \in T^*X_0 \cap \mathcal{E}$  tels que  $d(\rho, \rho') < c_0$ , il existe  $a \in A$  tel que  $\rho, \rho' \in W_a$ .

*Démonstration.* Supposons par l'absurde que pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\rho_\epsilon, \rho'_\epsilon$  tels que  $d(\rho_\epsilon, \rho'_\epsilon) < \epsilon$  et tels que pour tout  $a \in A$  tel que  $\rho_\epsilon \in W_a$ , on a  $\rho'_\epsilon \notin W_a$ . Par compacité de  $T^*X_0 \cap \mathcal{E}_E$ , on peut supposer que  $\rho_\epsilon$  converge vers un  $\rho$ . On a alors  $\rho'_\epsilon \rightarrow \rho$ , et si  $a \in A$  est tel que  $\rho \in W_a$ , alors  $\rho_\epsilon, \rho'_\epsilon \in W_a$  pour  $\epsilon$  assez petit, ce qui est absurde.  $\square$

Énonçons maintenant notre borne inférieure sur la distance entre les variétés lagrangiennes qui composent  $\Phi^N(\mathcal{L}_0) \cap W_a$ .

Soit  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in A^N$  et  $a \in A_1$ . L'ensemble  $\Phi_\alpha^N(\mathcal{L}_0) \cap W_a$  peut s'écrire sous la forme  $\{(y^{\rho_a}, \partial\tilde{\phi}_{N,\alpha,a}(y^{\rho_a}))\}$ , pour des fonctions lisses  $\tilde{\phi}_{N,\alpha,a}$ .

Pour tous  $\alpha \in A^N$ ,  $\alpha' \in A^{N'}$ , notons  $\sigma(\alpha, \alpha') := \max(N - \tau(\alpha), N' - \tau(\alpha'))$ , avec  $\tau(\alpha)$  défini comme dans (3.18).

**Proposition 4.22.** Il existe des constantes  $C'_1, C'_2 > 0$  telles que pour tous  $N, N' \in \mathbb{N}$ , pour tous  $\alpha \in A^N, \alpha' \in A^{N'}$ , pour tout  $a \in A_1$  et pour tout  $y^{\rho_a}$ , on a soit  $\partial\tilde{\phi}_{N,\alpha,a}(y^{\rho_a}) = \partial\tilde{\phi}_{N',\alpha',a}(y^{\rho_a})$  soit

$$|\partial\tilde{\phi}_{N,\alpha,a}(y^{\rho_a}) - \partial\tilde{\phi}_{N',\alpha',a}(y^{\rho_a})| \geq C'_1 e^{-C'_2 \sigma(\alpha, \alpha')}.$$

## 4.2 Résultats concernant la propagation de $\mathcal{L}_0$ en courbure négative.

*Démonstration.* Comme  $T^*X_0 \cap \mathcal{E}$  est compact, on peut trouver une constante  $C > 0$  telle que pour tous  $\rho, \rho' \in \mathcal{E}_E \cap T^*X_0$ ,

$$d(\Phi^t(\rho), \Phi^t(\rho')) \leq e^{Ct}d(\rho, \rho'). \quad (4.21)$$

Soit  $a \in A_1$ , et  $y^{\rho_a} \in D_{\alpha,a} \cap D_{\alpha',a}$  tel que  $\partial\tilde{\phi}_{N,\alpha,a}(y^{\rho_a}) \neq \partial\tilde{\phi}_{N',\alpha',a}(y^{\rho_a})$ . Notons  $\rho$  le point  $(y^{\rho_a}; \partial\tilde{\phi}_{N,\alpha,a}(y^{\rho_a}))$  et  $\rho'$  le point  $(y^{\rho_a}; \partial\tilde{\phi}_{N',\alpha',a}(y^{\rho_a}))$ .

Montrons qu'il existe  $0 \leq k \leq \sigma(\alpha, \alpha')$  tel que pour tout  $a' \in A$ , si  $\Phi^{-k}(\rho) \in W_{a'}$ , alors  $\Phi^{-k}(\rho') \notin W_{a'}$ . En effet, s'il n'existait pas un tel  $k$ , alors pour tout  $k$ , il existerait  $a_k \in A$  tel que  $\Phi^{-k}(\rho) \in W_{a_k}$  et  $\Phi^{-k}(\rho') \in W_{a_k}$  pour tout  $0 \leq k \leq \sigma(\alpha, \alpha')$ . On aurait alors  $\rho \in \Phi_{\alpha''}^{\max(N, N')}(\mathcal{L}_0)$  et  $\rho' \in \Phi_{\alpha''}^{\max(N, N')}(\mathcal{L}_0)$  pour une suite  $\alpha''$  construite en ajoutant éventuellement des 0 au début des suites  $\alpha$  et  $\alpha'$ . Ceci contredirait le corollaire 3.27.

Grâce au lemme 4.21, on en déduit qu'il existe  $0 \leq k \leq \sigma(\alpha, \alpha')$  tel que

$$d(\Phi^{-k}(\rho), \Phi^{-k}(\rho')) \geq c_0.$$

En combinant ceci avec l'équation (4.21), on obtient

$$d(\rho, \rho') \geq c_0 e^{-C\sigma(\alpha, \alpha')}$$

Comme toutes les métriques sont équivalentes dans un compact, on peut comparer  $d(\rho, \rho')$  avec  $|\partial\tilde{\phi}_{N,\alpha,a}(y^{\rho_a}) - \partial\tilde{\phi}_{N',\alpha',a}(y^{\rho_a})|$  et on en déduit la proposition.  $\square$

## 4.2 Résultats concernant la propagation de $\mathcal{L}_0$ en courbure négative.

### 4.2.1 Faits généraux concernant les variétés de courbure négative

#### Croissance de la distance entre les points sur les variétés de courbure négative

Dans ce paragraphe, nous rappellerons quelques faits concernant la manière dont les distances  $d_X$  et  $d_{ad}$  entre  $\Phi^t(\rho_1)$  et  $\Phi^t(\rho_2)$  dépendent du temps.

La borne la plus élémentaire, quand on travaille dans  $S^*X_0$  vient simplement de la compacité et de la convexité géodésique de  $X_0$ , et est donnée par (4.21) : comme la courbure sectionnelle est bornée inférieurement sur  $X_0$ , on peut trouver une constante  $\mu > 0$  telle que pour tous  $\rho, \rho' \in S^*X_0$  et pour tout  $t \geq 0$  tels que  $\Phi^t(\rho), \Phi^t(\rho') \in S^*X_0$ , on a

$$d_{ad}(\Phi^t(\rho), \Phi^t(\rho')) \leq e^{\mu t}d_{ad}(\rho, \rho').$$

Dans toute la suite, quitte à prendre plus petits la constante  $\varepsilon_0$  et les ensembles  $(W_a)_{a \in A_2}$  qui apparaissent dans le théorème 3.19, on supposera que les ensembles  $W_a$ ,  $a \in A_1 \cup A_2$  ont un diamètre plus petit qu'une constante  $\varepsilon_{max}$  telle que

$$\forall x, y \in X_0, \quad d_{ad}(x, y) < \varepsilon_{max} \implies d_X(\Phi^1(x), \Phi^1(y)) < e^{-\mu}r_i, \quad (4.22)$$

où  $\mu$  est comme dans (4.21).

**Remarque 4.23.** *En fait, quand on travaille près de l'ensemble capté sur une variété de courbure négative, en utilisant les bornes sur la croissance des champs de Jacobi données dans [Ebe01, III.B], on peut montrer qu'il existe  $C > 0$  tel que si  $\rho, \rho' \in S^*X$  et  $T \geq 0$  sont tels que pour tout  $t \in [0, T]$ , on a  $\Phi^t(\rho) \in \bigcup_{a \in A_1} W_a$  et  $\Phi^t(\rho') \in \bigcup_{a \in A_1} W_a$ , alors on a*

$$d_{ad}(\Phi^t(\rho), \Phi^t(\rho')) \leq Ce^{\sqrt{b_0}t} d_X(\rho, \rho'),$$

où  $b_0$  est la plus petite valeur prise par la courbure sectionnelle sur  $X$  comme dans l'hypothèse 3.6.

D'autre part, si deux points sont sur la même variété stable locale, alors ils s'approcheront exponentiellement vite dans le futur. C'est ce que dit le lemme classique suivant, dont la preuve peut être trouvée dans [KH95, Theorem 17.4.3 (3)].

**Lemme 4.24.** *Il existe  $C', \lambda > 0$  tels que pour tous  $\rho \in K$  et  $\rho_1, \rho_2 \in W_\epsilon^-(\rho)$  pour un  $\epsilon > 0$  suffisamment petit, on a pour tout  $t \geq 0$ .*

$$d_{ad}(\Phi^t(\rho_1), \Phi^t(\rho_2)) \leq C'e^{-\lambda t} d_{ad}(\rho_1, \rho_2).$$

Sur une variété de courbure négative, le carré de la distance  $d_X$  entre deux points sur la variété de base sera convexe par rapport au temps, du moment qu'ils restent assez proches l'un de l'autre. C'est ce que dit le corollaire du lemme suivant, lemme dont la preuve peut être trouvée dans [Jos08, §4.8]

**Lemme 4.25.** *Soient  $\gamma, \gamma'$  deux géodésiques sur une variété  $X$  simplement connexe et de courbure sectionnelle négative. Alors  $t \mapsto d_X^2(\gamma(t), \gamma'(t))$  est une fonction convexe.*

*De plus, s'il existe  $-\infty \leq t_1 < t_2 \leq +\infty$  tel que pour tous  $t \in (t_1, t_2)$ ,  $\gamma_1(t)$  et  $\gamma_2(t)$  appartiennent à une région de  $X$  où la courbure sectionnelle est strictement négative, alors sur  $(t_1, t_2)$ ,  $t \mapsto d_X^2(\gamma(t), \gamma'(t))$  est strictement convexe.*

À partir de maintenant, on notera  $\tilde{X}$  le recouvrement universel de  $X$ .

**Corollaire 4.26.** *Supposons que  $\rho_1, \rho_2 \in X$  et  $-\infty \leq t_1 < t_2 \leq +\infty$  sont tels que pour tout  $t \in (t_1, t_2)$ , on a  $d_X(\Phi^t(\rho_1), \Phi^t(\rho_2)) < r_i$ . Alors  $(t_1, t_2) \ni t \mapsto d_X^2(\Phi^t(\rho_1), \Phi^t(\rho_2))$  est une fonction convexe.*

*De plus, si  $\rho_1$  et  $\rho_2$  n'appartiennent pas à la même géodésique et si pour tout  $t \in (t_1, t_2)$ ,  $\Phi^t(\rho_1)$  et  $\Phi^t(\rho_2)$  appartiennent à une région de  $X$  où la courbure sectionnelle est strictement négative, alors sur  $(t_1, t_2)$ ,  $t \mapsto d_X^2(\Phi^t(\rho_1), \Phi^t(\rho_2))$  est strictement convexe.*

*Démonstration.* En utilisant le fait que l'application exponentielle est un revêtement sur les boules de rayon plus petit que le rayon d'injectivité, on peut relever les courbes  $\Phi^t(\rho_i)$ ,  $i = 1, 2$  en des géodésiques  $\tilde{\Phi}^t(\tilde{\rho}_i)$  sur le recouvrement universel  $\tilde{X}$  de  $X$  telles que  $d_{\tilde{X}}(\tilde{\Phi}^t(\tilde{\rho}_1), \tilde{\Phi}^t(\tilde{\rho}_2)) = d_X(\Phi^t(\rho_1), \Phi^t(\rho_2))$ . On peut alors conclure grâce au lemme 4.25.  $\square$

## 4.2 Résultats concernant la propagation de $\mathcal{L}_0$ en courbure négative.

### Recouvrement de $X$ par $\bigcup_{t>0} \Phi^t(\mathcal{L}_0)$

Le lemme suivant peut être trouvé dans [Ebe01, §IV.A]

**Lemme 4.27.** *Soit  $(X, g)$  une variété riemannienne vérifiant l'hypothèse 3.6, et soit  $\rho \in T^*\tilde{X}$  et  $x \in \tilde{X}$ . Alors il existe un unique  $\xi \in T_x^*\tilde{X}$  tel que  $d_{\tilde{X}}(\Phi^t(\rho), \Phi^t(x, \xi))$  demeure borné quand  $t \rightarrow -\infty$ . En particulier, par le lemme 4.25,  $t \mapsto d_{\tilde{X}}(\Phi^t(\rho), \Phi^t(x, \xi))$  est croissante.*

Considérons l'ensemble

$$\Phi^\infty(\mathcal{L}_0) := \bigcup_{t>0} \Phi^t(\mathcal{L}_0).$$

Le corollaire suivant nous dit que si l'hypothèse 3.18 est vérifiée, alors  $X$  est couverte une infinité de fois par  $\Phi^\infty(\mathcal{L}_0)$ . Remarquons que c'est le seul endroit où nous avons directement besoin de l'hypothèse 3.18.

**Corollaire 4.28.** *Soit  $(X, g)$  une variété riemannienne vérifiant l'hypothèse 3.1 à l'infini et l'hypothèse 3.6, et telle que l'ensemble capté  $K$  est non-vide, et satisfait l'hypothèse 3.9 d'hyperbolicité. Soit  $\mathcal{L}_0$  une variété lagrangienne vérifiant les hypothèses 3.12, 3.16 et 3.18, et soit  $x \in X$ . Alors il existe une infinité de  $\xi \in T_x^*X$  tels que  $(x, \xi) \in \Phi^\infty(\mathcal{L}_0)$ .*

*Démonstration.* Fixons un  $(x_0, \xi_0) = \rho_0 \in \mathcal{L}_0 \cap \mathcal{DE}_-$  et un  $x \in X$ .

Comme  $K$  est non-vide et hyperbolique il contient au moins une orbite fermée non-vide. Par conséquent,  $\pi_1(X)$  n'est pas trivial, et est donc infini. (En effet, par [Ebe01, III.G], tout élément non trivial dans le groupe fondamental d'une variété de courbure négative est d'ordre infini.) Par conséquent,  $\rho_0$  a une infinité de pré-images par la projection  $\widetilde{S^*X} \cong S^*\tilde{X} \rightarrow S^*X$ .

Notons-les  $(\tilde{\rho}_0^i)_{i \in I} = (\tilde{x}_0^i, \tilde{\xi}_0^i)_{i \in I}$ , et fixons un point  $\tilde{x}$  tel que  $\pi_{\tilde{X} \rightarrow X}(\tilde{x}) = x$ .

Grâce au lemme 4.27, pour chaque  $i \in I$ , il existe un  $\tilde{\xi}_i \in S_{\tilde{x}}^*\tilde{X}$  tel que  $d_{\tilde{X}}(\Phi^t(\tilde{\rho}_0^i), \Phi^t(\tilde{x}, \tilde{\xi}_i))$  demeure borné quand  $t \rightarrow -\infty$ . Notons  $(x, \xi_i) = \pi_{T^*\tilde{X} \rightarrow T^*X}(\tilde{x}, \tilde{\xi}_i)$ . (Les  $\xi_i$  et  $\tilde{\xi}_i$  peuvent évidemment être identifiés.)

Pour tout  $t \leq 0$ , on a

$$d_X(\Phi^t(\rho_0), \Phi^t(x, \xi_i)) \leq d_{\tilde{X}}(\Phi^t(\tilde{\rho}_0^i), \Phi^t(\tilde{x}_i, \tilde{\xi}_i)),$$

qui est borné quand  $t \rightarrow -\infty$  par hypothèse. Par conséquent, pour la distance de la compactification de  $X$  donnée par l'hypothèse 3.1,  $\Phi^t(\rho_0)$  et  $\Phi^t(x, \xi_i)$  s'approchent l'un de l'autre quand  $t \rightarrow -\infty$ . Comme, par définition de  $\mathcal{L}_0$ , on a  $\rho_0 \in \mathcal{DE}_-$ , on a aussi  $\Phi^t(x, \xi_i) \in \mathcal{DE}_-$  si  $-t$  est suffisamment grand. Par conséquent, en raison de l'hypothèse 3.18,  $\Phi^t(x, \xi_i) \in \mathcal{L}_0$  quand  $-t$  est suffisamment grand.

Pour prouver le corollaire, il nous faut vérifier que les  $\xi_i$  sont tous distincts, et donc que les  $\tilde{\xi}_i$  sont tous distincts. Il suffit de montrer que pour tout  $i \neq i'$ , on a

$$d_{\tilde{X}}(\Phi^t(\tilde{\rho}_0^i), \Phi^t(\tilde{\rho}_0^{i'})) \quad \text{n'est pas borné quand } t \rightarrow -\infty. \quad (4.23)$$

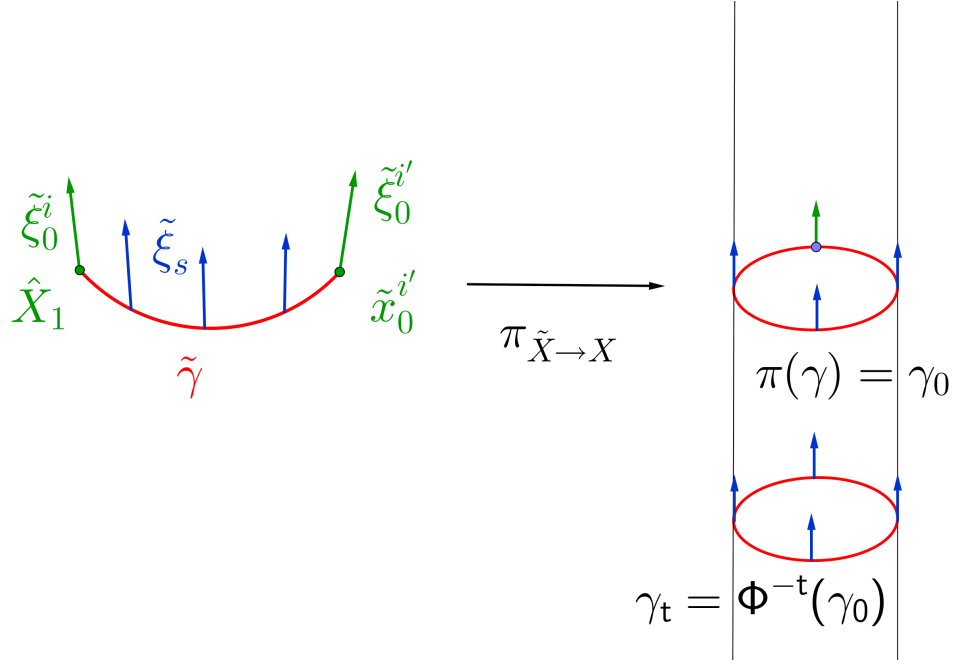


FIGURE 4.3 – Ce qui se passerait si (4.23) n'était pas vérifiée.

Supposons par l'absurde que (4.23) n'est pas vérifié pour un  $i \neq i'$ .

Considérons, comme dans la figure 4.3, la géodésique  $\tilde{\gamma}$  dans  $\tilde{X}$  telle que  $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0^i$  et  $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{x}_0^{i'}$ . D'après le lemme 4.27, pour chaque  $s \in [0, 1]$ , il existe une unique direction  $\tilde{\xi}_s$  telle que  $d_{\tilde{X}}(\Phi^t(\rho_0^i), \Phi^t(\tilde{\gamma}(s), \tilde{\xi}_s))$  est borné quand  $t \rightarrow -\infty$ . Par l'unicité dans le lemme 4.27, et comme on a supposé que (4.23) n'est pas vérifié, on a que  $\tilde{\xi}_1 = \tilde{\xi}_0^{i'}$ .

Considérons  $(\gamma(s), \xi_s) := \pi_{S^*\tilde{X} \rightarrow S^*X}(\tilde{\gamma}(s), \tilde{\xi}_s)$ . On a  $(\gamma(0), \xi_0) = \rho_0$  par hypothèse, et  $\gamma(0) = \gamma(1)$ . De plus,

$$d_X(\Phi^t(\rho_0), \Phi^t(\gamma(s), \xi_s)) \leq d_{\tilde{X}}(\Phi^t(\tilde{\gamma}(0), \xi_0), \Phi^t(\tilde{\gamma}(s), \tilde{\xi}_s)),$$

qui est borné quand  $t \rightarrow -\infty$  par construction de  $\tilde{\xi}_s$ .

Écrivons  $\gamma_t(s) = \Phi^t(\gamma(s), \xi_s)$ . Cette courbe est de longueur bornée indépendamment de  $t$  par ce qui précède, et ses points partent à l'infini quand  $t \rightarrow -\infty$ .

De plus, pour chaque  $t \geq 0$ ,  $\gamma_t$  est une courbe fermée qui n'est pas contractible, car elle joint deux pré-images différentes dans  $\tilde{X}$ .

Par conséquent, pour chaque  $t \geq 0$ , il doit exister un  $s \in [0, 1]$  tel que  $d_X(\gamma_t(0), \gamma_t(s)) \geq r_i(\gamma_t(0))$ . En effet, si ceci n'était pas vrai,  $\gamma_t$  serait contenue dans une carte où l'exponentielle est injective, et serait donc contractible.

Mais comme  $\gamma_t$  est de longueur bornée indépendamment de  $t$ , et comme  $\gamma_t(0)$  part à l'infini quand  $t$  tend vers l'infini, on obtient une contradiction avec le point (iii) de

## 4.2 Résultats concernant la propagation de $\mathcal{L}_0$ en courbure négative.

l'hypothèse 3.6. □

**Remarque 4.29.** *La fin de la preuve montre en fait que, si on note  $(\tilde{\mathcal{L}}_0^j)_{j \in J}$  les différentes pré-images de  $\mathcal{L}_0$  par la projection  $\pi_{S^*\tilde{X} \rightarrow S^*X}$ , alors on a pour tout  $j \neq j' \in J$ ,  $\tilde{\mathcal{L}}_0^j \cap \tilde{\mathcal{L}}_0^{j'} = \emptyset$ .*

### 4.2.2 Projection sans caustiques et transversalité

#### Critères généraux

Rappelons que les variété se projetant sans caustiques ont été introduites dans la définition 3.22. Nous allons maintenant reformuler cette notion en termes de transversalité.

Soient  $L_1, L_2$  deux sous-variétés de  $S^*X$  et soit  $\rho \in L_1 \cap L_2$ . Rappelons que l'on dit que  $L_1$  et  $L_2$  s'intersectent transversalement en  $\rho$  si  $T_\rho(S^*X) = T_\rho L_1 \oplus T_\rho L_2$ .

**Lemme 4.30.** *Soit  $X'$  une sous-variété de  $S^*X$  qui peut s'écrire sous la forme*

$$X' = \{(x, f(x)), x \in \Omega\},$$

où  $\Omega$  est un ouvert de  $X$ , et où  $f$  est  $C^0$ .

*Supposons de plus que pour tout  $x \in \Omega$ , les variétés  $X'$  et  $S_x^*X$  s'intersectent transversalement en  $(x, f(x))$ . Alors  $X'$  se projette sans caustiques sur  $X$ .*

*Démonstration.* Écrivons  $\kappa : X \ni x \mapsto (x, f(x)) \in X'$  et  $\pi : X' \ni (x, f(x)) \mapsto x \in X$ . On a bien sûr  $\pi \circ \kappa = Id$ . L'hypothèse de transversalité nous assure que  $d\pi$  est inversible là où elle est bien définie. Par le théorème d'inversion locale,  $\kappa$  est  $C^\infty$ . Par conséquent, comme  $f$  est la seconde composante de  $\kappa$ , elle est aussi lisse. □

Le lemme suivant nous donne un critère pour vérifier que deux variétés s'intersectent transversalement, et nous l'utiliserons à plusieurs reprises.

**Lemme 4.31.** *Soient  $L_1$  et  $L_2$  deux sous-variétés de  $S^*X$  de dimensions respectives  $d$  et  $d - 1$ , et soit  $\rho \in L_1 \cap L_2$ . On suppose que (i) est vérifié, ainsi que (ii) ou (ii'), où les hypothèses (i), (ii) et (ii') sont comme suit.*

(i) *Pour tout  $\rho_1 \in L_1$ , la fonction  $t \mapsto d_X(\Phi^{-t}(\rho_1), \Phi^{-t}(\rho))$  est décroissante pour  $t \geq 0$ .*

(ii) *Pour tout  $\rho_2 \in L_2$ , on a  $d_X(\rho_2, \rho) = 0$  (c'est-à-dire que  $L_2 \subset S_x^*X$  pour un  $x \in X$ ).*

(ii') *Posons  $x = \pi_{S^*X \rightarrow X}(\rho)$ . Les variétés  $L_1$  et  $S_x^*X$  sont transverses au point  $\rho$ . De plus, il existe  $\nu > 0$ ,  $C > 0$  et  $\epsilon > 0$  tels que pour tout  $\rho_2 \in L_2$  et pour tout  $t \leq 0$  tels que  $d_{ad}(\Phi^t(\rho), \Phi^t(\rho_2)) \leq \epsilon$ , on a :*

$$d_X(\Phi^t(\rho_2), \Phi^t(\rho)) \geq Ce^{-\nu t} d_X(\rho_2, \rho).$$

*Alors  $L_1$  et  $L_2$  s'intersectent transversalement en  $\rho$ .*

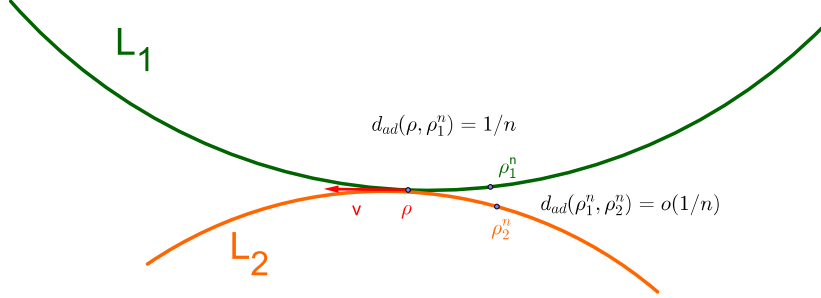


FIGURE 4.4 – Deux variétés non transverses

*Démonstration.* Raisonnons par l'absurde, et supposons que  $L_1$  et  $L_2$  ne s'intersectent pas transversalement en  $\rho$ . Ceci signifierait qu'il existe  $v \in T_\rho(L_1) \cap T_\rho(L_2)$ ,  $v \neq 0$ .

Ainsi, il existerait  $\rho_1^n \in L_1$ ,  $\rho_2^n \in L_2$  tels que  $d_{ad}(\rho_1^n, \rho) = 1/n$  et  $d_{ad}(\rho_2^n, \rho) = 1/n$  mais  $d_{ad}(\rho_1^n, \rho_2^n) = o(1/n)$ , comme dans la figure 4.4.

Nous trouverons une contradiction en trouvant un temps  $t > 0$  tel que

$$d_X(\Phi^{-t}(\rho), \Phi^{-t}(\rho_1^n)) > d_X(\rho, \rho_1^n), \quad (4.24)$$

ce qui est contraire à l'hypothèse (i).

On a

$$d_X(\Phi^{-t}(\rho_1^n), \Phi^{-t}(\rho_2^n)) \leq d_{ad}(\Phi^{-t}(\rho_1^n), \Phi^{-t}(\rho_2^n)) \leq e^{\mu t} o(1/n). \quad (4.25)$$

Supposons tout d'abord que l'hypothèse (ii) est vérifiée, et notons  $\rho = (x, \xi)$  et  $\rho_2^n = (x, \xi_2^n)$ . Alors, comme  $d_{ad}(\rho_2^n, \rho) = 1/n$  et comme les distances induites par toutes les métriques sur  $S^*X$  sont équivalentes dans un voisinage de  $\rho$ , il existe une constante  $c > 0$  telle que  $\|\xi - \xi_2^n\| \geq c/n$  pour tout  $n$  suffisamment grand.

Ainsi,  $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d_X(\Phi^{-t}(\rho), \Phi^{-t}(\rho_2^n)) \geq c/n$ . Comme la dérivée seconde par rapport au temps de la distance entre des géodésiques proches ne dépend que de la métrique dans un compact contenant les géodésiques, et comme les trajectoires de  $\Phi^t(\rho)$  et de  $\Phi^t(\rho_1^n)$  sont proches l'une de l'autre pour  $t$  assez petit et  $n$  assez grand, on peut trouver un temps  $t_0 > 0$  indépendant de  $n$  et un  $c' > 0$  tel que pour tout  $n$  assez grand et tout  $t \in [0, t_0]$ , on a  $d_X(\Phi^{-t}(\rho), \Phi^{-t}(\rho_2^n)) > c't/n$ .

## 4.2 Résultats concernant la propagation de $\mathcal{L}_0$ en courbure négative.

On a donc

$$\begin{aligned} d_X(\Phi^{-t_0}(\rho), \Phi^{-t_0}(\rho_1^n)) &\geq \left| d_X(\Phi^{-t_0}(\rho), \Phi^{-t_0}(\rho_2^n)) - d_X(\Phi^{-t_0}(\rho_2^n), \Phi^{-t_0}(\rho_1^n)) \right| \\ &\geq c't_0/n + o(1/n). \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$d_X(\rho_1^n, \rho) \leq d_X(\rho_2^n, \rho) + d_X(\rho_1^n, \rho_2^n) = d_X(\rho_1^n, \rho_2^n) \leq Cd_{ad}(\rho_1^n, \rho_2^n) = o(1/n).$$

Par conséquent, en prenant  $t_n = t_0$ , on obtient (4.24).

Supposons maintenant que (ii') est vérifiée. Comme on a supposé que les variétés  $L_1$  et  $S_x^*X$  sont transverses en  $\rho$ , il existe une constante  $c > 0$  telle que pour tout  $n$  suffisamment grand, on a

$$cd_{ad}(\rho, \rho_1^n) \leq d_X(\rho, \rho_1^n).$$

Par conséquent,  $d_X(\rho_1^n, \rho) \geq c/n$ . Considérons un  $t \geq 0$  tel que  $Ce^{\nu t} \geq 2$ . Si  $n$  est assez grand, on a  $d_{ad}(\Phi^{-t}(\rho), \Phi^{-t}(\rho_2^n)) \leq \epsilon$ . On a donc

$$d_X(\Phi^{-t}(\rho), \Phi^{-t}(\rho_2^n)) \geq Cc \frac{e^{\nu t}}{n} \geq \frac{2c}{n}.$$

D'autre part,

$$d_X(\Phi^{-t}(\rho_2^n), \Phi^{-t}(\rho_1^n)) \leq e^{\mu t} d_{ad}(\rho_2^n, \rho_1^n) = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} d_X(\Phi^{-t}(\rho), \Phi^{-t}(\rho_1^n)) &\geq \frac{2c}{n} - d_X(\Phi^{-t}(\rho_2^n), \Phi^{-t}(\rho_1^n)) \\ &> \frac{c}{n}. \end{aligned}$$

Ceci nous donne (4.24), et conclut la preuve du lemme.  $\square$

### Trois applications du lemme 4.31

Comme première application du lemme 4.31, énonçons un lemme utile. Il nous semble assez classique, mais nous n'avons pas été capables d'en trouver une preuve dans la littérature.

**Lemme 4.32.** *Soit  $X$  une variété de courbure sectionnelle négative, telle que  $K$  soit un ensemble hyperbolique. Soit  $\rho \in K$ . Alors il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $W_\epsilon^{\pm 0}(\rho)$  se projette sans caustiques sur  $X$ .*



*Démonstration.* Nous allons prouver le lemme pour  $W_\epsilon^{+0}$ . Le résultat pour  $W_\epsilon^{-0}$  en découlera, car les variétés stables et instables sont échangées en changeant le signe des vitesses.

On veut appliquer le lemme 4.30. Vérifions tout d'abord que  $W_\epsilon^{+0}$  peut bien s'écrire comme un graphe. Supposons que  $\rho_i = (x, \xi_i) \in S^*X \cap W_\epsilon^{+0}$ , pour  $i = 1, 2$ . Alors si  $g(t) = d_X(\Phi^t(\rho_1), \Phi^t(\rho_2))$ , on a  $g(0) = 0$  et  $\limsup_{t \rightarrow -\infty} g(t) < \infty$  par définition de la variété instable. Mais, si  $\epsilon$  est suffisamment petit, on a  $g(t) \leq r_i$  pour tout  $t \geq 0$ , de sorte que par le corollaire 4.26, on a  $g(t) = 0$  pour tout  $t$ , et donc  $\xi_1 = \xi_2$ . Par conséquent,  $W_\epsilon^{+0}$  peut s'écrire pour  $\epsilon$  suffisamment petit comme

$$W_\epsilon^{+0} = \{(x, f(x)); x \in \Omega\}$$

pour un ouvert  $\Omega \subset X$ . Le fait que  $W_\epsilon^{+0}$  soit une variété connexe implique que  $f$  est continue.

Il nous faut maintenant prouver la condition de transversalité du lemme 4.30, en appliquant le lemme 4.31 pour  $L_1 = W_\epsilon^{+0}$  et  $L_2 = S_x^*X$ . (ii) est trivialement vérifiée. Vérifions le point (i). Prenons  $\rho_1, \rho_2 \in W_\epsilon^{+0}(\rho)$ , et écrivons  $g(t) := d_X(\Phi^t(\rho_1), \Phi^t(\rho_2))$ . On a  $\limsup_{t \rightarrow -\infty} g(t) < \infty$ , et si  $\epsilon$  est pris suffisamment petit, on peut supposer que  $g(t) \leq r_i$  pour tout  $t \leq 0$ . Par conséquent, par le corollaire 4.26,  $g$  est croissante pour  $t \leq 0$ , et (i) est vérifié. On peut donc appliquer le lemme 4.31 puis le lemme 4.30 pour conclure la preuve.  $\square$

**Remarque 4.33.** *En fait, avec la même preuve, on peut prouver le résultat suivant, qui affirme que quand on propage dans le passé (resp. futur) de petits morceaux de la variété instable (resp. stable), alors ils se projettent sans caustiques sur  $X$  :*

*Soit  $\rho \in K$ . Alors il existe  $\epsilon > 0$  tel que pour tous  $\pm t \geq 0$  et  $\rho' \in W_\epsilon^{\pm 0}(\rho)$ , il existe  $\epsilon' > 0$  tel que  $\Phi^t(\{\rho'' \in W_\epsilon^{\pm 0}(\rho); d_{ad}(\rho'', \rho') < \epsilon'\})$  se projette sans caustiques sur  $X$ .*

Prouvons maintenant un lemme qui est la première étape de la preuve du théorème 3.23.

**Lemme 4.34.** *Soit  $\tau \geq 0$  et soit  $\rho \in \mathcal{L}_0$ . Pour  $\epsilon > 0$  assez petit, la variété  $\Phi^\tau(\{\rho' \in \mathcal{L}_0; d_{ad}(\rho, \rho') < \epsilon\})$  se projette sans caustiques sur  $X$ .*

*Démonstration.* Il nous faut vérifier les hypothèses du lemme 4.30. Si  $\epsilon$  est choisi suffisamment petit, alors pour tout  $t \leq \tau$  et pour tout  $\rho' \in \mathcal{L}_0$  tel que  $d_{ad}(\rho, \rho') < \epsilon$ , on a que  $d_{ad}(\Phi^t(\rho'), \Phi^t(\rho)) \leq r_i$ . Ceci implique que  $\Phi^\tau(\{\rho' \in \mathcal{L}_0; d_{ad}(\rho, \rho') < \epsilon\})$  peut s'écrire comme un graphe au dessus de  $X$ . En effet, supposons que cette variété contienne deux points  $\rho_1 = (x, \xi_1)$  et  $\rho_2 = (x, \xi_2)$ . Alors, par le lemme 4.26,  $t \mapsto d_X^2(\Phi^t(\rho_1), \Phi^t(\rho_2))$  est une fonction convexe sur  $(-\infty; 0)$ . Par l'hypothèse 3.16, cette fonction tend vers une constante quand  $t$  tend vers  $-\infty$ . Cette fonction doit donc être constante nulle, d'où  $\rho_1 = \rho_2$ .

Il nous faut maintenant vérifier que ce graphe est transverse aux fibres verticales. Pour ce faire, on veut appliquer le lemme 4.31 pour  $L_1 = \Phi^\tau(\{\rho' \in \mathcal{L}_0; d_{ad}(\rho, \rho') < \epsilon\})$  et  $L_2 =$

## 4.2 Résultats concernant la propagation de $\mathcal{L}_0$ en courbure négative.

$S_x^*X$ . La condition (ii) du lemme 4.31 est alors trivialement vérifiée. Quant au point (i), il est vérifié par l'hypothèse 3.16 combinée au lemme 4.26. Par conséquent, on peut appliquer le lemme 4.31 et le lemme 4.30 pour conclure la preuve du lemme.  $\square$

Comme dernière application du lemme 4.31, nous allons prouver la proposition 3.21. Rappelons que cette proposition affirme que :

**Proposition 4.35.** *Soit  $(X, g)$  une variété riemannienne vérifiant l'hypothèse 3.6, ainsi que l'hypothèse 3.9 d'hyperbolicité, et que  $\mathcal{L}_0$  vérifie l'hypothèse 3.12. Alors la variété lagrangienne  $\mathcal{L}_0$  vérifie l'hypothèse de transversalité 3.15.*

*Démonstration.* Soit  $\rho \in K$ , et soient  $\tau \geq 0$  et  $\rho' \in \Phi^\tau(\mathcal{L}_0) \cap W_\epsilon^-(\rho)$ . On veut, encore une fois, appliquer le lemme 4.31 à  $\Phi^\tau(\mathcal{L}_0)$  et  $W_\epsilon^-(\rho)$ , ou au moins à la restriction de ces deux variétés à un petit voisinage de  $\rho'$ . Si on prend un voisinage  $V$  de  $\rho'$  suffisamment petit, alors par le lemme 4.26 et l'hypothèse 3.16, on a que  $L_1 = \Phi^\tau(\mathcal{L}_0) \cap V$  vérifie la condition (i) du lemme 4.31.

Vérifions maintenant que la condition (ii') est satisfaite. Le fait que  $L_1$  se projette sans caustiques sur  $X$  vient du lemme 4.34. Quant à la seconde condition, on sait par le lemme 4.24 qu'il existe  $C, \lambda > 0$  tels que pour tous  $\rho \in K$  et  $\rho_1, \rho_2 \in W_\epsilon^-(\rho)$ , on a pour tout  $t \geq 0$ .

$$d_{ad}(\Phi^t(\rho_1), \Phi^t(\rho_2)) \leq C e^{-\lambda t} d_{ad}(\rho_1, \rho_2).$$

On a donc, pour tout  $t \geq 0$  tel que  $\Phi^{-t}(\rho_i) \in W_\epsilon^-(\rho)$  pour  $i = 1, 2$  :

$$d_{ad}(\rho_1, \rho_2) \leq C e^{-\lambda t} d_{ad}(\Phi^{-t}(\rho_1), \Phi^{-t}(\rho_2)).$$

Mais, comme  $W_\epsilon^{-0}(\rho)$  se projette sans caustiques sur  $X$  pour  $\epsilon$  assez petit par le lemme 4.32, il existe une constante  $C'$  telle que pour tous  $\rho_1, \rho_2 \in W_\epsilon^-(\rho)$ , on a

$$\frac{1}{C'} d_X(\rho_1, \rho_2) \leq d_{ad}(\rho_1, \rho_2) \leq C' d_X(\rho_1, \rho_2).$$

Par conséquent, la condition (ii') du lemme 4.31 est vérifiée, et on peut utiliser le lemme 4.31 pour conclure la preuve.  $\square$

### 4.2.3 Preuve du théorème 3.23

*Démonstration.* Tout d'abord, faisons quelques remarques pour montrer que nous n'avons pas besoin de considérer toutes les suites  $\alpha$ . On a  $\mathcal{L}_0 = (\mathcal{L}_0 \cap \mathcal{DE}_-) \cup (\mathcal{L}_0 \cap \mathcal{DE}_+)$ . On a donc

$$\Phi_\alpha^N(\mathcal{L}_0) \cap T^*\mathcal{O} = \left( \Phi_\alpha^N(\mathcal{L}_0 \cap \mathcal{DE}_+) \cap T^*\mathcal{O} \right) \cup \left( \Phi_\alpha^N(\mathcal{L}_0 \cap \mathcal{DE}_-) \cap T^*\mathcal{O} \right).$$

Par l'hypothèse (3.13), on a  $\Phi_\alpha^N(\mathcal{L}_0 \cap \mathcal{DE}_+) \subset \mathcal{L}_0$ . Par conséquent, il nous faut uniquement nous concentrer sur la propagation de  $\mathcal{L}_0 \cap \mathcal{DE}_-$ .

Remarquons que par (3.13), on a que pour tout  $k \geq 1$ ,  $\Phi_{0,\dots,0}^k(\mathcal{L}_0 \cap \mathcal{D}\mathcal{E}_-) \subset \Phi_0^1(\mathcal{L}_0 \cap \mathcal{D}\mathcal{E}_-)$ . On pourra donc, sans perte de généralité, se restreindre dans ce qui suit aux suites  $\alpha$  telles que  $\alpha_2 \neq 0$ .

Par l'hypothèse de convexité géodésique, pour tout ouvert borné  $\mathcal{O}$ , on peut trouver un  $N_{\mathcal{O}}$  tel que pour tout  $N \geq N_{\mathcal{O}}$  et pour tout  $\alpha \in A^N$  tel que  $\alpha_2 \neq 0$  et  $\Phi_{\alpha}^N(\mathcal{L}_0) \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ , on a  $\forall k = 2 \dots N - N_{\mathcal{O}}$ ,  $\alpha_k \neq 0$ .

Comme les ensembles  $W_a$ ,  $a \in A_2$  sont à une distance strictement positive de  $K$ , on peut trouver un  $N_1$  tel que pour tout  $N \geq N_{\mathcal{O}} + 2N_1$  et pour tout  $\alpha \in A^N$  tel que  $\alpha_2 \neq 0$  et  $\Phi_{\alpha}^N(\mathcal{L}_0) \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ , on a  $\forall k = N_1 \dots N - N_1 - N_{\mathcal{O}}$ ,  $\alpha_k \in A_1$ .

Montrons maintenant que chacune des variétés lagrangiennes  $\Phi_{\alpha}^N(\mathcal{L}_0)$  se projette sans caustique sur  $X$ .

**Lemme 4.36.** *Soit  $\mathcal{O} \subset X$  un ouvert borné. Alors pour tous  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in A^N$ ,  $\Phi_{\alpha}^N(\mathcal{L}_0) \cap (T^*\mathcal{O})$  se projette sans caustiques sur  $X$ .*

*Démonstration.* La preuve suit du lemme 4.34, si on peut vérifier que  $\Phi_{\alpha}^N(\mathcal{L}_0) \cap (S^*\mathcal{O})$  peut s'écrire comme un graphe au dessus de  $X$ . Soit  $\rho_i = (x, \xi_i) \in \Phi_{\alpha}^N(\mathcal{L}_0)$ ,  $i = 1, 2$ . Grâce à la condition (4.22), on voit que  $\Phi^t(\rho_1)$  et  $\Phi^t(\rho_2)$  demeurent à une distance plus petite que  $r_i$  l'un de l'autre pour tout  $t \leq 0$ . Par conséquent, par le lemme 4.25, on a  $\Phi^t(\rho_1) \equiv \Phi^t(\rho_2)$ , et  $\xi_1 = \xi_2$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$

Fixons un petit ouvert  $\mathcal{O}$  et des coordonnées locales sur cet ouvert. Grâce au lemme 4.36, dans ces coordonnées locales, la variété  $\Phi_{\alpha}^N(\mathcal{L}_0) \cap T^*\mathcal{O}$ , si elle est non vide, peut s'écrire sous la forme

$$\Phi_{\alpha}^N(\mathcal{L}_0) \cap T^*\mathcal{O} \equiv \{(x, \partial_x \varphi_{\alpha, \mathcal{O}}(x)); x \in \mathcal{O}^{\alpha}\}, \quad (4.26)$$

où  $\mathcal{O}^{\alpha}$  est un ouvert inclus dans  $\mathcal{O}$ , et  $\partial_x \varphi_{\alpha, \mathcal{O}}$  est une fonction lisse.

Nous allons maintenant montrer que les fonctions  $\varphi_{\alpha, \mathcal{O}}$  ont des normes  $C^{\ell}$  bornées indépendamment de  $\alpha$  et de  $N$ .

Commençons par travailler près de l'ensemble capté, c'est-à-dire, dans le cas où  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_a = \pi_X(W_a)$  pour un  $a \in A_1$ .

Notons  $\kappa_a$  le symplectomorphisme transformant  $(x, \xi)$  en  $(y^a, \eta^a)$  dans un voisinage de  $\rho^a$ . Dans les notations du théorème 3.19, on a

$$\{(x, \partial_x \varphi_{\alpha, \mathcal{O}_a}(x)); x \in \mathcal{O}_a^{\alpha}\} = \kappa_a^{-1}(\{(y_1^a, u^a, 0, f_{a, \alpha}(u^a)); (y_1^a, u^a) \in D_{a, \alpha, N}\}).$$

On écrira  $F_{a, \alpha} := (0, f_{a, \alpha})$ , et on notera  $\hat{x}_a$  et  $\hat{\xi}_a$  les composantes de  $\kappa_a^{-1}$ .

Considérons l'application  $\tilde{\kappa}_{\alpha, a}$  envoyant  $x \in \mathcal{O}_a^{\alpha}$  sur le point  $y^a \in \mathbb{R}^d$  tel que

$$\kappa_a(x, \partial \varphi_{\alpha, \mathcal{O}_a}(x)) = (y^a, F_{a, \alpha}(y^a)).$$

## 4.2 Résultats concernant la propagation de $\mathcal{L}_0$ en courbure négative.

**Lemme 4.37.** *Si on prend  $\gamma_{uns}$  suffisamment petit dans le théorème 3.19, on peut trouver une constante  $c > 0$  telle que, pour tout  $a \in A_1$ , pour tout  $N \in \mathbb{N}$  et pour tout  $\alpha \in A^N$ , on a*

$$\left| \frac{\partial \tilde{\kappa}_{\alpha,a}^{-1}}{\partial y^a} \right| > c. \quad (4.27)$$

*Démonstration.* On a

$$\tilde{\kappa}_{\alpha,a}^{-1}(y^a) = \hat{x}_a(y^a, F_{a,\alpha}(y^a)), \quad (4.28)$$

donc

$$\frac{\partial \tilde{\kappa}_{\alpha,a}^{-1}}{\partial y^a} = \frac{\partial \hat{x}_a}{\partial y}(y^a, F_{a,\alpha}(y^a)) + \frac{\partial F_{a,\alpha}(y^a)}{\partial y^a} \frac{\partial \hat{x}_a}{\partial \eta}(y^a, F_{a,\alpha}(y^a)).$$

Mais  $\frac{\partial \hat{x}_a}{\partial y^a}(y^a, 0)$  est inversible en tout  $y^a$ , car les variétés instables locales se projettent sans caustiques sur  $X$ , donc on peut trouver un  $c > 0$  tel que le jacobien  $\left| \frac{\partial \hat{x}_a}{\partial y^a}(y^a, 0) \right| > 2c$  pour tout  $a \in A_1$  et tout  $y^a$ . En utilisant le fait que  $\|F_{a,\alpha}\|_{C^1} \leq \gamma_{uns}$  pour  $\tau(\alpha)$  suffisamment grand, le lemme s'ensuit pour  $\tau(\alpha)$  suffisamment grand, c'est-à-dire, pour  $N$  assez grand, comme on a supposé que  $\alpha_2 \neq 0$ . Pour des valeurs finies de  $N$ , l'inégalité (4.27) est vraie en vertu du lemme 4.34. Le résultat en découle.  $\square$

Revenons à la preuve du théorème 3.23. L'équation (4.28) nous assure que  $\tilde{\kappa}_{\alpha,a}^{-1}$  est borné indépendamment de  $\alpha$  dans n'importe quelle norme  $C^\ell$ . En effet, quand on différencie cette équation, elle ne dépend de  $\alpha$  qu'à travers  $F_{a,\alpha}$ , qui est borné indépendamment de  $\alpha$  dans n'importe quelle norme  $C^\ell$ .

On déduit donc du lemme 4.37 et de la dérivation de fonctions composées que l'on peut borner les normes  $C^\ell$  des fonctions  $\tilde{\kappa}_{\alpha,a}$  indépendamment de  $\alpha$ .

Vérifions ensuite que  $\partial \varphi_{\alpha, \mathcal{O}_a}$  est bornée indépendamment de  $\alpha$  dans n'importe quelle norme  $C^\ell$ . En effet, on a

$$\partial \varphi_{\alpha, \mathcal{O}_a}(x) = \hat{\xi}_a(\tilde{\kappa}_{\alpha,a}(x), F_{a,\alpha}(\tilde{\kappa}_{\alpha,a}(x))).$$

Quand on dérive cette expression, on voit que les seuls termes qui dépendent de  $\alpha$  ne dépendent de  $\alpha$  qu'à travers des dérivées de  $F_{a,\alpha}$  et des dérivées de  $\kappa_{\alpha,a}$ , qui sont toutes bornées indépendamment de  $\alpha$ .

Ceci prouve le théorème dans le cas où  $\mathcal{O} \subset \pi(W_a)$  pour un  $a \in A_1$ .

Considérons maintenant un  $\mathcal{O}$  quelconque. On peut supposer que  $N \geq N_{\mathcal{O}} + 2N_1$ , car pour les petites valeurs de  $N$ , le résultat suit du lemme 4.36. Soit  $\alpha \in A^N$  tel que  $\alpha_2 \neq 0$  et  $\Phi_\alpha^N(\mathcal{L}_0) \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ . Par les remarques préliminaires à la preuve, il existe  $k \leq N$  tel que  $\alpha_k \in A_1$ . On peut supposer que  $N - k \leq N_{\mathcal{O}}$  pour un  $N_{\mathcal{O}}$  ne dépendant pas de  $N$  et  $k$ . On a

$$\Phi_\alpha^N(\mathcal{L}_0) \cap T^*\mathcal{O} \equiv \{(x, \partial_x \varphi_{\alpha, \mathcal{O}}(x))\} = \Phi_{\alpha''}^{N-k}(\{x', \partial \varphi_{\alpha', \mathcal{O}_{\alpha_k}}(x')\}) \cap T^*\mathcal{O},$$

où  $\alpha' = \alpha_0 \dots \alpha_{k-1}$ ,  $\alpha'' = \alpha_k \dots \alpha_{N-1}$  et où les  $x'$  appartiennent à un sous-ensemble de  $\mathcal{O}_a$ .

Notons  $\tilde{\Phi}_{\alpha,k}$  l'application qui envoie  $x$  sur le point  $x'$  tel que

$$(x, \partial_x \varphi_{\alpha, \mathcal{O}}(x)) = \Phi^{N-k}(x', \partial \varphi_{\alpha', \mathcal{O}_{\alpha_k}}(x')).$$

On a  $\partial_x \varphi_{\alpha, \mathcal{O}}(x) = \pi_\xi(\Phi^{N-k}(\tilde{\Phi}_{\alpha,k}(x), \partial \varphi_{\alpha', \mathcal{O}_{\alpha_k}}(\tilde{\Phi}_{\alpha,k}(x))))$ , où  $\pi_\xi$  désigne la projection sur la variable  $\xi$ . Par conséquent, comme  $\varphi_{\alpha', \mathcal{O}_{\alpha_k}}$  est bornée dans n'importe quelle norme  $C^\ell$  indépendamment de  $\alpha$ , il nous faut seulement montrer que  $\tilde{\Phi}_{\alpha,k}$  est borné dans n'importe quelle norme  $C^\ell$  indépendamment de  $\alpha$ .

D'une part, on a  $\tilde{\Phi}_{\alpha,k}^{-1}(x') = \pi_x(\Phi^{N-k}(x', \partial \varphi_{\alpha', \mathcal{O}_{\alpha_k}}(x')))$ . Du coup, comme  $\Phi^{N-k}$  est un difféomorphisme, l'application  $\tilde{\Phi}_{\alpha,k}$  est bornée dans n'importe quelle norme  $C^\ell$  indépendamment de  $\alpha$  tout comme  $\partial \varphi_{\alpha', \mathcal{O}_{\alpha_k}}$ .

D'autre part, si  $(x_1, \dots, x_d)$  sont des coordonnées locales sur  $X$ , alors pour tout  $j = 1 \dots d$ , on a  $|\partial_j \tilde{\Phi}_{\alpha,k}^{-1}| \geq 1$ . En effet, si ce n'était pas le cas, on pourrait trouver deux géodésiques qui restent à une distance strictement inférieure au rayon d'injectivité l'une de l'autre pour tous les temps dans  $(-\infty, N-1)$ , et qui s'approcheraient entre les temps  $N-k$  et  $N-1$ . Ceci contredirait le corollaire 4.26. Le théorème suit maintenant de la dérivation de fonctions composées, car les dérivées de l'inverse sont bornées du moment qu'on les applique à des vecteurs loin de zéro.  $\square$

#### 4.2.4 Distance entre lagrangiennes

Sous les hypothèses de cette section on peut améliorer la proposition 4.22. Dans la preuve de cette proposition, la seule estimée dynamique utilisée était (4.21). Ici, on peut utiliser la remarque 4.23, et une preuve identique à celle de la proposition 4.22, ce qui nous donne le résultat suivant.

**Lemme 4.38.** *Soit  $\mathcal{O}$  un ouvert borné de  $X$ . Il existe une constante  $C_{\mathcal{O}} > 0$  telle que pour tous  $n, n' \in \mathbb{N}$ , pour tous  $\alpha \in A^N, \alpha' \in B^{n'}$ , et pour tout  $x \in \mathcal{O}$  tel que  $x \in \pi_X(\Phi_{\alpha, \mathcal{O}}(\mathcal{L}_0)) \cap \pi_X(\Phi_{\alpha', \mathcal{O}}(\mathcal{L}_0))$ , on a soit  $\partial \varphi_{\alpha, \mathcal{O}}(x) = \partial \varphi_{\alpha', \mathcal{O}}(x)$ , soit*

$$|\partial \varphi_{\alpha, \mathcal{O}}(x) - \partial \varphi_{\alpha', \mathcal{O}}(x)| \geq C_1 e^{-\sqrt{b_0} \max(n-\tau(\alpha), n'-\tau(\alpha'))}, \quad (4.29)$$

avec  $\tau(\alpha)$  défini comme dans (3.18), et où  $b_0$  est comme dans l'hypothèse 3.6.

## Chapitre 5

# Preuve des résultats concernant les ondes planes tordues

### 5.1 Preuve du théorème 3.37

*Le but de ce chapitre, qui suit [Ing15a] et [Ing15b] est de prouver les théorèmes 3.37 et 3.41.*

---

#### 5.1.1 Stratégie de preuve

Pour étudier le comportement asymptotique des ondes planes tordues quand  $h$  tend vers zéro, on a envie d'utiliser le fait que  $E_h$  est une fonction propre de  $P_h$  pour écrire que  $\tilde{U}(t)E_h = E_h$ , où

$$\tilde{U}(t) := e^{it/h}U(t),$$

où  $U$  est le propagateur de Schrödinger  $e^{-itP_h/h}$ .

On montrerait ensuite que  $\tilde{U}(t)E_h^1$  devient plus petit que n'importe quel puissance de  $h$  quand  $t$  est pris assez grand, et on utiliserait la méthode WKB pour décrire  $\tilde{U}(t)E_h^0$  pour des temps longs. Pour cela, on décomposerait  $\tilde{U}(t)$  le long de « trajectoires symboliques », et on utiliserait le théorème 3.19.

Toutefois, l'équation  $\tilde{U}(t)E_h = E_h$  ne peut qu'être formelle, car  $E_h \notin L^2(X)$ . À la place, on utilisera le lemme suivant, dont la preuve peut être trouvée dans [DG14, Lemma 3.10] :

**Lemme 5.1.** *Soit  $\chi \in C_c^\infty(X)$ . Prenons  $t \in \mathbb{R}$ , et une fonction de troncature  $\chi_t \in C_c^\infty(X)$  supportée à l'intérieur d'un compact  $K_t$ , telle que*

$$d_X(\text{supp}\chi, \text{supp}(1 - \chi_t)) > 2|t|,$$

Alors on a

$$\chi E_h = \chi \tilde{U}(t) \chi_t E_h + O(h^\infty \|E_h\|_{L^2(K_t)}). \quad (5.1)$$

Comme, par hypothèse,  $E_h$  est une distribution tempérée, on a pour tous  $t > 0$  et  $\chi \in C_c^\infty(X)$  :

$$\|\chi E_h - \chi \tilde{U}(t) \chi_t E_h\|_{L^2} = O(h^\infty),$$

où  $\chi_t$  est comme dans le lemme 5.1.

On peut alors itérer cette équation comme suit : on écrit que  $\chi_t = \chi + \chi_t(1 - \chi)$ , et on obtient

$$\chi E_h = \chi \tilde{U}(t) ((1 - \chi) \chi_t) E_h + \chi \tilde{U}(t) \chi \tilde{U}(t) \chi_t E_h + O(h^\infty).$$

On peut itérer cette méthode jusqu'à des temps  $Nt \leq M|\log h|$  pour tout  $M > 0$  fixé<sup>1</sup>. On obtient

$$\chi E_h = (\chi \tilde{U}(t))^N \chi_t E_h + \sum_{k=1}^N (\chi \tilde{U}(t))^k (1 - \chi) \chi_t E_h + O(h^\infty). \quad (5.2)$$

Fixons maintenant  $t = 1$ , et choisissons  $\hat{\chi} \in C_c^\infty(X)$  comme dans l'équation (3.34), c'est-à-dire telle que  $\hat{\chi} \equiv 1$  sur  $\text{supp}(\chi) \cup \{x \in X; b(x) \geq \epsilon_2\}$ , et telle que le support de  $\hat{\chi}(1 - \hat{\chi})$  soit suffisamment petit pour que, pour tout  $t \geq 1$ , on ait

$$\Phi^t \left( W F_h((1 - \hat{\chi}) E_h^1) \right) \cap T^* \text{supp}(\hat{\chi}) = \emptyset.$$

On considère alors une fonction  $\hat{\chi}_1$  telle que

$$d_X(\text{supp} \hat{\chi}, \text{supp}(1 - \hat{\chi}_1)) > 2,$$

**Lemme 5.2.** *Soit  $M > 0$ , et  $\hat{\chi} \in C_c^\infty(X)$  comme dans la remarque 3.32. Pour tout  $1 \leq k \leq M|\log h|$ , on a*

$$\|(\hat{\chi} \tilde{U}(1))^k (1 - \hat{\chi}) \hat{\chi}_1 E_h^1\|_{L^2} = O(h^\infty).$$

*Démonstration.* Il nous faut seulement prouver que  $\|(\hat{\chi} \tilde{U}(1))(1 - \hat{\chi}) \hat{\chi}_1 E_h^1\|_{L^2} = O(h^\infty)$ . Ceci est une conséquence de l'équation (3.34).  $\square$

Par conséquent, on a :

$$\hat{\chi} E_h = (\hat{\chi} \tilde{U}(1))^N \hat{\chi}_1 E_h^0 + (\hat{\chi} \tilde{U}(1))^N \hat{\chi}_1 E_h^1 + \sum_{k=1}^N (\hat{\chi} \tilde{U}(1))^k (1 - \hat{\chi}) \chi_1 E_h^0 + O(h^\infty). \quad (5.3)$$

Pour analyser les propagateurs intervenant dans cette formule, nous allons utiliser le recouvrement ouvert de la couche d'énergie  $(V_b)_{b \in B}$  introduit dans la section 3.5.1.

---

1. Ici, on pourrait en fait aller jusqu'à des temps polynômiaux en  $h$ , mais nous aurons besoin de nous restreindre à des temps logarithmiques par la suite.

## 5.1 Preuve du théorème 3.37

### 5.1.2 Partition microlocale de l'unité

Considérons une famille  $(\Pi_b)_{b \in B_1 \cup B_2}$  d'opérateurs dans  $S^{comp}(T^*X)$  avec  $WF_h(\Pi_b) \subset V_b$ , et tels que  $\sum_{b \in B_1 \cup B_2} \Pi_b \equiv 1$  microlocalement près de  $\mathcal{E} \cap T^*X_0$ . On pose alors

$$\Pi_0 := Id - \sum_{b \in B_1 \cup B_2} \Pi_b.$$

On peut décomposer le propagateur au temps 1 comme :

$$\tilde{U}(1) = \sum_{b \in B} \tilde{U}_b, \text{ où } \tilde{U}_b := \Pi_b e^{i/h} U(1).$$

Le propagateur au temps  $N$  peut alors se décomposer comme suit :

$$\tilde{U}(N) = \sum_{\beta \in B^N} \tilde{U}_\beta, \quad (5.4)$$

où  $\tilde{U}_\beta := \tilde{U}_{\beta_{N-1}} \circ \dots \circ \tilde{U}_{\beta_0}$ .

### Estimées de dispersion hyperbolique

Nous ferons usage de l'estimée suivante, dite « estimée de dispersion hyperbolique », dont la preuve peut être trouvée dans [NZ09, Section 7]. Rappelons que  $S_1(V)$  a été défini dans (3.27).

**Lemme 5.3** (Estimée de dispersion hyperbolique). *Fixons  $M > 0$ . Il existe  $h_0 > 0$  et  $C > 0$  tels que pour tout  $0 < h < h_0$ , pour tout  $N < M \log(1/h)$ , et pour tout  $\beta \in B_1^N$ , on a*

$$\|\tilde{U}_\beta\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq Ch^{-d/2} (1 + \epsilon_0)^N \prod_{j=1}^N \exp\left[\frac{1}{2} S_1(V_{\beta_j})\right]. \quad (5.5)$$

### 5.1.3 Décomposition de $\hat{\chi} E_h$

Soit  $\hat{\chi} \in C_c^\infty(X)$  comme dans la remarque 3.32. Alors, par l'équation (5.3), on a :

$$\hat{\chi} E_h = (\hat{\chi} \tilde{U}(1))^N \hat{\chi}_1 E_h + \sum_{k=1}^N (\hat{\chi} \tilde{U}(1))^k (1 - \hat{\chi}) \hat{\chi}_1 E_h^0 + O(h^\infty), \quad (5.6)$$

où la fonction de troncature  $\hat{\chi}_1 \in C_c^\infty(X)$  est telle que

$$d_X(\text{supp } \hat{\chi}, \text{supp}(1 - \hat{\chi}_1)) > 2.$$

Nous aurons besoin du lemme suivant. La preuve de (i) est la même que celle du lemme 4.5, tandis que la preuve de (ii) découle du point (3) de l'hypothèse 3.1.



**Lemme 5.4.** (i) Il existe  $N_{\hat{\chi}} \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , si  $\rho \in \text{supp}(\hat{\chi}_1)$  et  $\Phi^N(\rho) \in \text{supp}(\hat{\chi})$ , alors pour tout  $N_{\hat{\chi}} \leq k \leq N - N_{\hat{\chi}}$ , on a  $\Phi^k(\rho) \in V_b$  pour un  $b \in B_1 \cup B_2$ .

(ii) Si  $\rho \in \mathcal{E}$  est tel que  $\Phi^k(\rho) \in V_0$  pour un  $k \in \mathbb{N}$ , mais  $\Phi^{(k+1)}(\rho) \in V_b$  pour un  $b \in B_1 \cup B_2$ , alors  $\Phi^{k'}(\rho)$  est dans  $\mathcal{DE}_-$  (et donc dans  $V_0$ ) pour tout  $k' \leq k$ .

On déduit du lemme 5.4 que pour tout  $k \geq 2N_{\hat{\chi}} + 2$ , on a

$$(\hat{\chi}\tilde{U}(1))^k = \sum_{l=0}^{N_{\hat{\chi}}+1} (\hat{\chi}\tilde{U}(1))^{N_{\hat{\chi}}+1} \left( \sum_{\beta \in (B_1 \cup B_2)^{k-2N_{\hat{\chi}}-2+l}} \tilde{U}_\beta \right) (\hat{\chi}\tilde{U}_0)^{N_{\hat{\chi}}-l} + O_{L^2 \rightarrow L^2}(h^\infty). \quad (5.7)$$

Pour tout  $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , définissons l'ensemble  $\mathcal{B}_N \subset (B_1 \cup B_2)^N$  comme :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_N &:= (B_1 \cup B_2)^N && \text{si } N \leq 2N'_{uns} + 2 \\ \mathcal{B}_N &:= (B_1 \cup B_2)^{N'_{uns}+1} B_1^{N-2N'_{uns}-2} (B_1 \cup B_2)^{N'_{uns}+1} && \text{sinon.} \end{aligned} \quad (5.8)$$

**Lemme 5.5.** Pour tout  $N \geq 2N'_{uns} + 2$ , pour tout  $\beta \in (B_1 \cup B_2)^N \setminus \mathcal{B}_N$ , on a

$$\|\tilde{U}_\beta\|_{L^2 \rightarrow L^2} = O(h^\infty).$$

*Démonstration.* Soit  $\beta \in (B_1 \cup B_2)^N \setminus \mathcal{B}_N$ . Il existe alors  $N'_{uns} + 2 \leq k \leq N - N'_{uns} + 2$  tel que  $\beta_k \in B_2$ . Rappelons que par la remarque 4.6,  $N'_{uns}$  est tel que pour tout  $\rho \in V_{\beta_k}$ , on a  $\Phi^{N'_{uns}}(\rho) \in V_0 \setminus (\bigcup_{b \in B_2} V_b)$  ou  $\Phi^{-N'_{uns}}(\rho) \in V_0 \setminus (\bigcup_{b \in B_2} V_b)$ . Le résultat suit alors du lemme A.6.  $\square$

L'équation (5.7) peut donc se réécrire comme

$$(\hat{\chi}\tilde{U}(1))^k = \sum_{l=0}^{N_{\hat{\chi}}+1} (\hat{\chi}\tilde{U}(1))^{N_{\hat{\chi}}+1} \left( \sum_{\beta \in \mathcal{B}_{k-2N_{\hat{\chi}}-2+l}} \tilde{U}_\beta \right) (\hat{\chi}\tilde{U}_0)^{N_{\hat{\chi}}-l} + O_{L^2 \rightarrow L^2}(h^\infty) \quad (5.9)$$

En sommant sur  $k$  et en réordonnant les termes, on obtient, pour tout  $K > 2N_{\hat{\chi}} + 3N'_{uns} + 4$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^K (\hat{\chi}\tilde{U}(1))^k &= \sum_{n=1}^{(K-3N'_{uns}-N_{\hat{\chi}}-4)N_{\hat{\chi}}+1} \sum_{l=0}^{N_{\hat{\chi}}+1} (\hat{\chi}\tilde{U}(1))^{N_{\hat{\chi}}+1} \left( \sum_{\beta \in \mathcal{B}_{n+RN'_{uns}+2}} \tilde{U}_\beta \right) (\hat{\chi}\tilde{U}_0)^l \\ &- \sum_{n=K-2N_{\hat{\chi}}-2}^{(K-3N'_{uns}-N_{\hat{\chi}}-4)(K-3N'_{uns}-N_{\hat{\chi}}-4-n)} \sum_{l=0}^{N_{\hat{\chi}}+1} (\hat{\chi}\tilde{U}(1))^{N_{\hat{\chi}}+1} \left( \sum_{\beta \in \mathcal{B}_{n+3N'_{uns}+2}} \tilde{U}_\beta \right) (\hat{\chi}\tilde{U}_0)^l \\ &+ \sum_{l=0}^{3N'_{uns}+N_{\hat{\chi}}+3} (\hat{\chi}\tilde{U}(1))^l + O_{L^2 \rightarrow L^2}(h^\infty). \end{aligned} \quad (5.10)$$

### 5.1 Preuve du théorème 3.37

Remarquons que par le lemme A.4 et par l'hypothèse 3.12, pour tout  $0 \leq l \leq N_{\hat{\chi}}$ , il existe  $\chi_l \in S^{comp}(X)$  tel que

$$(\hat{\chi}\tilde{U}_0)^{N_{\hat{\chi}}-l}(1-\hat{\chi})\hat{\chi}_1 E_h^0 = \chi_l E_h^0 + O(h^\infty). \quad (5.11)$$

Introduisons la notation

$$\bar{\chi} := \sum_{l=0}^{N_{\hat{\chi}}+1} \chi_l. \quad (5.12)$$

Grâce à l'équation (5.10), on peut étudier les différents termes dans l'équation (5.6). Le premier terme dans le membre de droite de (5.6) peut être borné par le lemme suivant.

**Lemme 5.6.** *Soit  $r > 0$ . On peut trouver une constante  $M_r \geq 0$  telle que pour tout  $M > M_r$ , pour tout  $M_r |\log h| \leq N \leq M |\log h|$ , on a :*

$$\|(\hat{\chi}\tilde{U}(1))^N \hat{\chi}_1 E_h\|_{L^2} = O(h^r).$$

*Démonstration.* On utilise l'équation (5.9), le lemme 5.3 et l'hypothèse sur la pression topologique pour obtenir :

$$\begin{aligned} \|(\hat{\chi}\tilde{U}(1))^N \hat{\chi}_1 E_h\|_{L^2} &\leq C \sum_{\beta \in \mathcal{B}_{N-2N_{\hat{\chi}}-2}} \|\tilde{U}_\beta\|_{L^2 \rightarrow L^2} \|\hat{\chi}_1 E_h\| + O(h^\infty) \\ &\leq C \sum_{\beta \in \mathcal{B}_1^{N-2N_{uns}-2N_{\hat{\chi}}-4}} \|\tilde{U}_\beta\| \|\hat{\chi}_1 E_h\| \\ &\leq Ch^{-d/2} (1+\epsilon_0)^N \sum_{\beta \in \mathcal{B}_1^{N-2N_{uns}-2N_{\hat{\chi}}-4}} \prod_{j=1}^{N-2N_{uns}-2} \exp\left[\frac{1}{2} S_1(V_{\beta_j})\right] \|\hat{\chi}_1 E_h\| \\ &\leq Ch^{-d/2} (1+\epsilon_0)^N \left( \sum_{b \in \mathcal{B}_1} \exp\left[\frac{1}{2} S_1(V_b)\right] \right)^N \|\hat{\chi}_1 E_h\| \\ &\leq Ch^{-d/2} (1+\epsilon_0)^N \exp\{N(\mathcal{P}(1/2) + 2N\epsilon_0)\} \|\hat{\chi}_1 E_h\|. \end{aligned}$$

Par hypothèse,  $E_h$  est une distribution tempérée, de sorte que  $\|\hat{\chi}_1 E_h\|_{L^2} \leq C/h^{r''}$ . Par conséquent,

$$\left\| (\hat{\chi}\tilde{U}(1))^N \hat{\chi}_1 E_h \right\|_{L^2} \leq Ch^{-r''-d/2-\epsilon} \exp\{N(\mathcal{P}(1/2) + 2N\epsilon_0)\},$$

pour un petit  $\epsilon$ . Le lemme s'ensuit en prenant  $M_r$  suffisamment grand.  $\square$

En utilisant le lemme 5.6 et l'équation (5.10), on peut réécrire (5.6) comme

$$\begin{aligned}
 \hat{\chi}E_h &= \sum_{n=1}^{M_r|\log h|} \sum_{l=0}^{N_{\hat{\chi}}+1} (\hat{\chi}\tilde{U}(1))^{N_{\hat{\chi}}+1} \left( \sum_{\beta \in \mathcal{B}_{n+3N'_{uns}+2}} \tilde{U}_\beta \right) (\hat{\chi}\tilde{U}_0)^l (1-\hat{\chi})\hat{\chi}_1 E_h^0 \\
 &- \sum_{n=M_r|\log h|-N_{\hat{\chi}}}^{M_r|\log h|} \sum_{l=0}^{M_r|\log h|-N_{\hat{\chi}}-2-n} (\hat{\chi}\tilde{U}(1))^{N_{\hat{\chi}}+1} \left( \sum_{\beta \in \mathcal{B}_{n+3N'_{uns}+2}} \tilde{U}_\beta \right) (\hat{\chi}\tilde{U}_0)^l (1-\hat{\chi})\hat{\chi}_1 E_h^0 \\
 &+ \sum_{l=0}^{3N'_{uns}+N_{\hat{\chi}}+3} (\hat{\chi}\tilde{U}(1))^l (1-\hat{\chi})\hat{\chi}_1 E_h^0 + O_{L^2}(h^r).
 \end{aligned}$$

Le second terme peut être borné par  $O(h^r)$  grâce au lemme 5.6. En utilisant les équations (5.11) et (5.12), on obtient

$$\begin{aligned}
 \hat{\chi}E_h &= \sum_{n=1}^{M_r|\log h|} (\hat{\chi}\tilde{U}(1))^{N_{\hat{\chi}}+1} \left( \sum_{\beta \in \mathcal{B}_{n+3N'_{uns}+2}} \tilde{U}_\beta \right) \bar{\chi}E_h^0 \\
 &+ \sum_{l=0}^{3N'_{uns}+N_{\hat{\chi}}+3} (\hat{\chi}\tilde{U}(1))^l (1-\hat{\chi})\hat{\chi}_1 E_h^0 + O_{L^2}(h^r)
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

### 5.1.4 Évolution des états lagrangiens

#### Construction de $\tilde{\mathcal{B}}_0$

À partir de maintenant, on fixe  $b \in B_1$  et  $r > 1$ . On peut écrire

$$\mathcal{U}_b \Pi_b \sum_{l=0}^{3N'_{uns}+N_{\hat{\chi}}+3} (\hat{\chi}\tilde{U}(1))^l (1-\hat{\chi})\hat{\chi}_1 E_h^0 = \sum_{l=0}^{N_{\hat{\chi}}+3N'_{uns}+3} \sum_{\beta \in B^l} \mathcal{U}_b \Pi_b U_\beta^{\hat{\chi}} (1-\hat{\chi})\hat{\chi}_1 E_h^0, \tag{5.14}$$

où on a utilisé la notation

$$U_\beta^{\hat{\chi}} = \hat{\chi}\tilde{U}_{\beta_1}\hat{\chi}\dots\hat{\chi}\tilde{U}_{\beta_0}. \tag{5.15}$$

Remarquons que chacun des  $\mathcal{U}_b \Pi_b U_\beta^{\hat{\chi}}$  est un opérateur intégral de Fourier de  $L^2(X)$  vers  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Grâce au corollaire 3.27, on peut utiliser le lemme A.4 pour décrire l'action de chacun de ces opérateurs intégraux de Fourier sur les états lagrangiens  $(1-\hat{\chi})\hat{\chi}_1 E_h^0$ . Si on note  $\tilde{\mathcal{B}}_0$  l'ensemble  $\bigcup_{l=0}^{N_{\hat{\chi}}+3N'_{uns}+3} B^l$ , on peut écrire

$$\mathcal{U}_b \Pi_b \sum_{l=0}^{N_{\hat{\chi}}+3N'_{uns}+3} (\hat{\chi}\tilde{U}(1))^l (1-\hat{\chi})\hat{\chi}_1 E_h^0 = \sum_{\beta \in \tilde{\mathcal{B}}_0} e_{0,\beta,b}, \tag{5.16}$$

### 5.1 Preuve du théorème 3.37

où  $e_{0,\beta,b}(y^b) = e^{\phi_{0,\beta,b}(y^b)/h} a_{0,\beta,b}(y^b; h)$ , avec  $a_{0,\beta,b}$  et  $\phi_{0,\beta,b}$  comme dans l'énoncé du théorème 3.37.

Considérons maintenant la première somme du membre de droite de l'équation (5.13), qui seront indexés par  $\tilde{\mathcal{B}}_n$ ,  $n \geq 1$ .

#### Evolution dans la région intermédiaire

Soit  $n \geq 1$ , et soit  $\beta \in \mathcal{B}_{n+3N'_{uns}+2}$ . Par définition de  $\mathcal{B}_{n+3N'_{uns}+2}$ , on a  $\beta_i \in B_1$  pour  $N'_{uns} + 1 \leq i \leq n + 2N'_{uns} + 1$ .

D'après le théorème 3.19,  $\Phi_\beta^{2N'_{uns}+1}(\mathcal{L}_0)$  est composé d'une unique variété lagrangienne qui est  $\gamma_{uns}$ -instable dans les coordonnées symplectiques dans  $V_{\beta_{2N'_{uns}+1}}$ .

Par conséquent, on peut dire que  $\tilde{U}_{\beta_0 \dots \beta_{2N'_{uns}+1}}(\bar{\chi} E_h^0)$  est un état lagrangien associé à la variété lagrangienne  $\Phi_\beta^{2N'_{uns}+1}(\mathcal{L}_0)$ . Grâce au lemme A.5, on peut utiliser le lemme A.4 pour écrire que :

$$(\mathcal{U}_{\beta_{2N'_{uns}+1}} \Pi_{\beta_{2N'_{uns}+1}} \tilde{U}_{\beta_0 \dots \beta_{2N'_{uns}+1}}(\bar{\chi} E_h^0))(y^{\rho_{\beta_{2N'_{uns}+1}}}) = a(y^{\rho_{\beta_{2N'_{uns}+1}}}; h) e^{i\phi(y^{\rho_{\beta_{2N'_{uns}+1}}})/h}$$

pour un  $a \in S^{comp}(\mathbb{R}^d)$ .

#### Propagation des états lagrangiens près de l'ensemble capté

Pour alléger les notations, nous écrivons  $\hat{n} := n + 2N'_{uns} + 1$ .

Pour chaque  $2N'_{uns} + 1 \leq k \leq \hat{n}$ , notons

$$T_{\beta_{k'+1}, \beta_{k'}} := \mathcal{U}_{\beta_{k'+1}} \tilde{U}_{\beta_{k'+1}} \mathcal{U}_{\beta_k}^*.$$

$T_{\beta_{k'+1}, \beta_{k'}}$  est un opérateur quantifiant l'application  $\kappa_{\beta_{k'}, \beta_{k'+1}}$  obtenue en exprimant  $\Phi^1$  dans les coordonnées  $(y^{\beta_{k'}}, \eta^{\beta_{k'}}) \mapsto (y^{\beta_{k'+1}}, \eta^{\beta_{k'+1}})$ . Il est de la forme (A.10).

Nous écrivons

$$T_\beta^{2N'_{uns}+1, \hat{n}} := T_{\beta_{\hat{n}}, \beta_{\hat{n}}} \circ \dots \circ T_{\beta_{2N'_{uns}+2}, \beta_{2N'_{uns}+1}}.$$

En vertu de la remarque 3.29, on peut appliquer la proposition A.7 pour décrire l'action de  $T_\beta^{2N'_{uns}+1, \hat{n}}$  sur l'état lagrangien  $\mathcal{U}_{\beta_{2N'_{uns}+1}} U_{\beta_0 \dots \beta_{2N'_{uns}+1}}(\bar{\chi} E_h^0)$ . Remarquons que

$$T_\beta^{2N'_{uns}+1, \hat{n}} \mathcal{U}_{\beta_{2N'_{uns}+1}} U_{\beta_0 \dots \beta_{2N'_{uns}+1}} = \mathcal{U}_{\beta_{\hat{n}}} \tilde{U}_{\beta_0 \dots \beta_{\hat{n}}}$$

On obtient que  $\mathcal{U}_{\beta_{\hat{n}+1}} \Pi_{\beta_{\hat{n}+1}} \tilde{U}_{\beta_0 \dots \beta_{\hat{n}}}(\bar{\chi} E_h^0) = e_{\hat{n}, \beta}$ , avec

$$e_{\hat{n}, \beta}(y) = a^{\hat{n}, \beta}(y) e^{i\phi_{\hat{n}, \beta}(y)/h}, \quad y \in \mathbb{R}^d. \quad (5.17)$$

Dans les notations de la section A.3.2, on a par la remarque 3.29 que pour tout  $N'_{uns} + 1 \leq k' \leq \hat{n}$   $D_{k'} = S_T(V_{\beta_{k'}})(1 + O(\epsilon^p)) < 1$ . Posons donc

$$J_{\beta_{N'_{uns}+1} \dots \beta_{\hat{n}}} := \prod_{k'=N'_{uns}+1}^{\hat{n}} \left( S_1(V_{\beta_{k'}})(1 + O(\epsilon^p)) \right). \quad (5.18)$$

Grâce à l'équation (A.12) dans la proposition A.7 et à l'équation (A.15), on obtient pour tout  $\ell \in \mathbb{N}$  :

$$\|a^{\hat{n},\beta}\|_{C^\ell} \leq (1 + C_\ell h) C'_\ell J_{\beta_{N'_{uns}+1} \dots \beta_{\hat{n}}} (\hat{n} + 1)^\ell, \quad (5.19)$$

pour des constantes  $C_\ell, C'_\ell$ .

### Fin de la propagation

En utilisant l'équation (5.13) et les résultats du paragraphe précédent, on a

$$\begin{aligned} \hat{\chi} E_h &= \sum_{n=1}^{M_r |\log h|} (\hat{\chi} \tilde{U}(1))^{N_{\hat{\chi}}+1} \left( \sum_{\beta \in \mathcal{B}_{n+3N'_{uns}+2}} \tilde{U}_{\beta_{\hat{n}} \dots \beta_n} \mathcal{U}_{\beta_{\hat{n}}}^* e_{\hat{n},\beta} \right) \\ &+ \sum_{l=0}^{N_{\hat{\chi}}+3N'_{uns}+3} (\hat{\chi} \tilde{U}(1))^l (1 - \hat{\chi}) \hat{\chi}_1 E_h^0 + O_{L^2}(h^r), \end{aligned} \quad (5.20)$$

avec

$$\mathcal{U}_b \Pi_b \sum_{l=0}^{N_{\hat{\chi}}+3N'_{uns}+3} (\hat{\chi} \tilde{U}(1))^l (1 - \hat{\chi}) \hat{\chi}_1 E_h^0 = \sum_{\beta \in \tilde{\mathcal{B}}_0} e_{0,\beta,b}.$$

Pour finir la preuve, il nous faut appliquer  $\mathcal{U}_b \Pi_b (\hat{\chi} \tilde{U}(1))^{N_{\hat{\chi}}+1} \tilde{U}_{\beta_{\hat{n}} \dots \beta_n} \mathcal{U}_{\beta_{\hat{n}}}^*$  à  $e_{\hat{n},\beta}$ . Pour ce faire, il nous faut à nouveau décomposer le propagateur, et étudier

$$\sum_{\beta' \in \mathcal{B}^{N_{\hat{\chi}}+1}} \mathcal{U}_b \Pi_b U_{\beta'}^{\hat{\chi}} \tilde{U}_{\beta_{\hat{n}} \dots \beta_n} \mathcal{U}_{\beta_{\hat{n}}}^* e_{\hat{n},\beta}, \quad (5.21)$$

avec  $U_{\beta'}^{\hat{\chi}}$  comme dans (5.15). Pour décrire chacun des termes du membre de droite de (5.21), on utilise à nouveau le lemme A.4. On peut bien appliquer ce lemme, grâce au théorème 3.19 et au lemme A.5).

On obtient que

$$\mathcal{U}_b \Pi_b U_{\beta'}^{\hat{\chi}} \tilde{U}_{\beta_{\hat{n}} \dots \beta_n} \mathcal{U}_{\beta_{\hat{n}}}^* e_{\hat{n},\beta}(y) = a^{n,\beta,\beta'}(y) e^{i\phi_{n,\beta,\beta'}(y)/h}, \quad y \in \mathbb{R}^d, \quad (5.22)$$

et grâce à l'équation (5.19), on a

$$\|a^{n,\beta,\beta'}\|_{C^\ell} \leq (1 + C_\ell h) C'_\ell J_{\beta_{N'_{uns}+1} \dots \beta_{\hat{n}}} (\hat{n} + 1)^\ell, \quad (5.23)$$

## 5.2 Preuve des résultats en courbure négative

pour des constantes  $C_\ell, C'_\ell$ .

Pour tout  $n \geq 1$ , on écrit

$$\tilde{\mathcal{B}}_n = \mathcal{B}_{n+3N'_{uns}+2} \times B^{N_{\tilde{\chi}}+1}. \quad (5.24)$$

Comme annoncé, le cardinal de  $\tilde{\mathcal{B}}_n$  croît exponentiellement avec  $n$ . Si  $\beta = (\beta', \beta'') \in \tilde{\mathcal{B}}_n$  avec  $\beta' \in \mathcal{B}_{n+3N'_{uns}+1}$ , on pose

$$\begin{aligned} a_{\beta,b} &= a^{N_{n+2N_{\tilde{\chi}}+2,l,\beta,\beta'}} \\ \phi_{\beta,b} &= \phi_{N_{n+2N_{\tilde{\chi}}+2,l,\beta,\beta'}}. \end{aligned}$$

Avec ces notations, en combinant (5.20) avec (5.22), on obtient la décomposition (3.47).

Le point clef pour obtenir l'estimée (3.48) est de remarquer que pour tout  $N \geq N'_{uns} + 1$ , on a grâce à (3.29)

$$\begin{aligned} \sum_{\beta_{N'_{uns}+1} \dots \beta_{\tilde{N}} \in B_1^{N-N'_{uns}-1}} J_{\beta_{N'_{uns}+1} \dots \beta_{\tilde{N}}} &= \left( \sum_{b \in B_1} S_1(V_b) (1 + O(\epsilon^p)) \right)^{N-N'_{uns}-1} \\ &\leq \exp \left[ (N - N'_{uns} - 1) (\mathcal{P}(1/2) (1 + O(\epsilon^p))) \right]. \end{aligned} \quad (5.25)$$

En appliquant (5.25) pour  $N = N_{n+2N_{\tilde{\chi}}+2,l}$ , et en utilisant (5.23), on obtient (3.48). Ceci conclut la preuve du théorème 3.37.

Remarquons que, bien que le théorème 3.37 décrive les fonctions propres généralisées  $E_h$  seulement très près de l'ensemble capté, l'équation (5.20) peut être utilisée pour décrire  $E_h$  dans tout compact, bien que d'une manière moins explicite.

### Distance entre les variétés lagrangiennes

En utilisant la définition de  $\tilde{\mathcal{B}}_n$ , on en déduit le corollaire suivant de la proposition 4.22 concernant les fonctions  $\phi_{n,\beta,b}$  apparaissant dans l'énoncé du théorème 3.37.

**Corollaire 5.7.** *Il existe des constantes  $C'_1, C'_2 > 0$  telles que pour tous  $n, n' \in \mathbb{N}$ , pour tous  $\beta \in \tilde{\mathcal{B}}_n, \beta' \in \tilde{\mathcal{B}}_{n'}$ , pour tout  $b \in B_1$  et pour tout  $y^{\rho_b}$ , on a soit  $\partial \phi_{n,\beta,b}(y^{\rho_b}) = \partial \phi_{n',\beta',b}(y^{\rho_b})$  soit*

$$|\partial \phi_{n,\beta,b}(y^{\rho_b}) - \partial \phi_{n',\beta',b}(y^{\rho_b})| \geq C'_1 e^{C'_2 \min(n,n')}.$$

## 5.2 Preuve des résultats en courbure négative

Prouvons maintenant le théorème 3.41, dont nous rappelons l'énoncé.

**Théorème.** Soit  $(X, g)$  une variété riemannienne vérifiant l'hypothèse 3.6, ainsi que l'hypothèse 3.1 à l'infini. Supposons que le flot géodésique  $(\Phi^t)$  vérifie l'hypothèse 3.9 d'hyperbolicité, l'hypothèse 3.24 concernant la pression topologique. Soit  $E_h$  une fonction propre généralisée de la forme décrite dans l'hypothèse 3.31, où  $E_h^0$  est associée à une variété lagrangienne  $\mathcal{L}_0$  qui vérifie l'hypothèse d'invariance 3.12 ainsi que l'hypothèse 3.16.

Soit  $\mathcal{K} \subset X$  un compact. Il existe  $\varepsilon_{\mathcal{K}} > 0$  tel que pour tout  $\chi \in C_c^\infty(X)$  de support inclus dans  $\mathcal{K}$  et de diamètre plus petit que  $\varepsilon_{\mathcal{K}}$ , le résultat suivant est vrai. Il existe un ensemble  $\tilde{\mathcal{B}}^X$  et une fonction  $\tilde{n} : \tilde{\mathcal{B}}^X \rightarrow \mathbb{N}$  telle que le nombre d'éléments dans  $\{\tilde{\beta} \in \tilde{\mathcal{B}}^X; \tilde{n}(\tilde{\beta}) \leq N\}$  croît au plus exponentiellement avec  $N$ .

Pour tous  $r > 0$ ,  $\ell > 0$ , il existe  $M_{r,\ell} > 0$  tel que l'on a, quand  $h \rightarrow 0$  :

$$\chi E_h(x) = \sum_{\substack{\beta \in \tilde{\mathcal{B}}^X \\ \tilde{n}(\tilde{\beta}) \leq M_{r,\ell} |\log h|}} e^{i\varphi_{\tilde{\beta}}(x)/h} a_{\tilde{\beta}}(x; h) + R_r, \quad (5.26)$$

où  $a_{\tilde{\beta}} \in S^{comp}(X)$ , et où chaque  $\varphi_{\tilde{\beta}}$  est une fonction lisse définie dans un voisinage du support de  $a_{\tilde{\beta}}$ . On a

$$\|R_r\|_{C^\ell} = O(h^r).$$

Pour tous  $\ell \in \mathbb{N}$ ,  $\varepsilon > 0$ , il existe  $C_{\ell,\varepsilon}$  telle que

$$\sum_{\substack{\beta \in \tilde{\mathcal{B}}^X \\ \tilde{n}(\tilde{\beta})=n}} \|a_{\tilde{\beta}}\|_{C^\ell} \leq C_{\ell,\varepsilon} e^{n(P(1/2)+\varepsilon)}. \quad (5.27)$$

De plus, il existe une constante  $C_1$  telle que pour tous  $\tilde{\beta}, \tilde{\beta}' \in \tilde{\mathcal{B}}^X$ , on a

$$|\partial\varphi_{\tilde{\beta}}(x) - \partial\varphi_{\tilde{\beta}'}(x)| \geq C_1 e^{-\sqrt{b_0} \max(\tilde{n}(\tilde{\beta}), \tilde{n}(\tilde{\beta}'))}, \quad (5.28)$$

où  $b_0$  est comme dans l'hypothèse 3.6.

Fixons une fonction  $\chi \in C_c^\infty(X)$ , et prenons une fonction  $\hat{\chi}$  comme dans la remarque 3.32, de sorte que  $\hat{\chi} \equiv 1$  sur  $\text{supp}(\chi)$ . L'équation (5.20) nous dit que, en notant  $n' := n + 2N'_{uns} + 1$ , on a

$$\begin{aligned} \chi E_h &= \chi \hat{\chi} E_h = \chi \sum_{n=1}^{M_r |\log h|} (\hat{\chi} U(1))^{N_{\hat{\chi}}+1} \left( \sum_{\beta \in \mathcal{B}_{n'+N'_{uns}+1}} U_{\beta_{n'} \dots \beta_{n'+N_{uns}+1}} \mathcal{U}_{\beta_{n'}}^* \theta_{n',\beta} \right) \\ &+ \chi \sum_{l=0}^{N_{\chi}+3N'_{uns}+3} (\hat{\chi} U(1))^l (1 - \hat{\chi}) \hat{\chi}_1 E_h^0 + O_{L^2}(h^r) \end{aligned}$$

où les  $\theta_{n',\beta}$  sont des états lagrangiens de la forme

$$\theta_{n',\beta}(y) = a_{n',\beta}(y; h) e^{i\phi_{n',\beta}(y)},$$

## 5.2 Preuve des résultats en courbure négative

avec  $y$  dans un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ .

Les états lagrangiens  $\theta_{n',\beta}$  sont associés aux variétés lagrangiennes décrites dans le théorème 3.19, au sens où on a

$$\{(y^{\beta_{n'}}, \partial\phi_{n',\beta}(y^{\beta_{n'}}))\} \subset \kappa_{\beta_{n'}}(\Phi_{\beta_{n'}}^{n'}(\mathcal{L}_0)).$$

Les opérateurs  $(\hat{\chi}U(1))^{N_{\hat{\chi}}+1}U_{\beta_{n'},\dots,\beta_{n'+N_{un,s}+1}}\mathcal{U}_{\beta_{n'}}^*$  et  $(\hat{\chi}U(1))^l(1-\hat{\chi})\hat{\chi}_1$  sont des opérateurs intégraux de Fourier, et on veut utiliser le lemme A.4 pour décrire leur action sur les états  $e_{n'}$  et  $E_h^0$  respectivement. Le théorème 3.23 nous assure que (A.8) est vérifiée. Vérifions que (A.5) est également satisfaite. Pour les opérateurs  $(\hat{\chi}U(1))^{N_{\hat{\chi}}+1}U_{\beta_{n'},\dots,\beta_{n'+N_{un,s}+1}}\mathcal{U}_{\beta_{n'}}^*$ , cela suit du fait que la propagation dans le futur de petits morceaux de la variété instable se projettent sans caustiques sur  $X$ , comme expliqué dans la remarque 4.33.

Pour appliquer  $(\hat{\chi}U(1))^l(1-\hat{\chi})\hat{\chi}_1$  à  $E_h^0$ , prenons  $\rho \in \mathcal{L}_0 \cap S^*(\text{supp}((1-\hat{\chi})\hat{\chi}_1))$ . On peut prendre des coordonnées sur  $X$  près de  $\pi(x)$  qui induisent des coordonnées symplectiques  $(\hat{x}, \hat{\xi})$  sur un voisinage de  $\rho$  dans  $T^*X$  telles que  $\rho = (0,0)$  dans ces coordonnées, et telles que la variété  $\mathcal{L}_0$  est tangente à  $\{\hat{\xi} = 0\}$ . Dans ce système de coordonnées près de  $\rho$ , et dans n'importe quel système de coordonnées sur  $X$  près de  $\pi(\Phi^t(\rho))$ , nous sommes dans le cadre du lemme A.4. En effet, la condition (A.5) est alors satisfaite grâce au lemme 4.34.

En écrivant

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_n^{\hat{\chi}} &:= \{\beta\beta' \ ; \ \beta \in \mathcal{B}_{n'}, \ \beta' \in B^{N_{\hat{\chi}}+1}\}, \quad \text{si } n \geq 2, \\ \mathcal{B}_1^{\hat{\chi}} &:= \{\beta \in B^{N_{\hat{\chi}}+3N'_{un,s}+1}\}, \end{aligned}$$

on obtient que

$$\chi E_h(x) = \sum_{n=0}^{\lfloor M_{r,\ell} \log h \rfloor} \sum_{\beta \in \mathcal{B}_n^{\hat{\chi}}} e^{i\varphi_\beta(x)/h} a_{\beta,\hat{\chi}}(x;h) + R_{r,\hat{\chi}}, \quad (5.29)$$

où  $a_{\beta,\hat{\chi}} \in S^{comp}(X)$ , et où chaque  $\varphi_\beta$  est une fonction lisse définie dans un voisinage du support de  $a_{\beta,\hat{\chi}}$ , et où on a

$$\|R_{r,\hat{\chi}}\|_{C^\ell} = O(h^r).$$

Pour tous  $\ell \in \mathbb{N}$ ,  $\epsilon > 0$ , il existe  $C_{\ell,\epsilon}$  tel que

$$\sum_{\beta \in \mathcal{B}_n^{\hat{\chi}}} \|a_{\beta,\hat{\chi}}\|_{C^\ell} \leq C_{\ell,\epsilon} e^{n(P(1/2)+\epsilon)}. \quad (5.30)$$

Remarquons que l'expression (5.29) a un intérêt propre, car elle s'applique à des fonctions  $\chi \in C_c^\infty$  ayant un support arbitraire. Nous allons maintenant montrer que si le support de  $\chi$  est suffisamment petit, on peut regrouper les termes de (5.29) d'une manière intelligente, de sorte que (5.28) est vérifiée.



**Regroupement des états lagrangiens**

À partir de maintenant, nous fixons un compact  $\mathcal{K}$ , et nous supposons que  $\hat{\chi} \equiv 1$  sur  $\mathcal{K}$ .

**Lemme 5.8.** *Il existe  $\epsilon_{\mathcal{K}}$  tel que, pour tout ouvert  $\mathcal{O} \subset \mathcal{K}$  de diamètre inférieur à  $\epsilon_{\mathcal{K}}$ , on a :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \beta \in \mathcal{B}_n^{\hat{\chi}}, \forall t \geq 0$  et pour tous  $\rho, \rho' \in \Phi_{\beta}^{|\beta|}(\mathcal{L}_0) \cap S^*\mathcal{O}$ , on a  $d_X(\Phi^{-t}(\rho), \Phi^{-t}(\rho')) < r_i$ .*

*Démonstration.* Remarquons tout d'abord que grâce à l'hypothèse 3.16, il nous faut seulement montrer le résultat pour  $t \leq |\beta|$ , car  $\Phi^{-|\beta|}(\rho)$  et  $\Phi^{-|\beta|}(\rho')$  appartiennent tous deux à  $\mathcal{L}_0$ , et s'approchent donc dans le passé.

Prenons  $\epsilon$  assez petit pour que, pour tous  $\rho_1, \rho_2 \in S^*\mathcal{K}$  avec  $d_{ad}(\rho_1, \rho_2) < \epsilon$ , on a  $d(\Phi^t(\rho_1), \Phi^t(\rho_2)) < r_i$  pour tout  $t \in [0; N_{\mathcal{X}} + 3N_{uns} + 1]$ .

Grâce au théorème 3.23, les variétés lagrangiennes  $\Phi_{\beta}^n(\mathcal{L}_0) \cap S^*\mathcal{K}$  se projettent toutes sans caustiques sur  $X$ , de sorte qu'on peut trouver une constante  $C_{\mathcal{K}}$  telle que,  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \beta \in \mathcal{B}_n^{\hat{\chi}}$  et pour tous  $\rho, \rho' \in \Phi_{\beta}^n(\mathcal{L}_0) \cap S^*\mathcal{O}$ , on a

$$d_{ad}(\rho, \rho') \leq C_{\mathcal{K}} d_X(\rho, \rho').$$

En prenant  $\epsilon_{\mathcal{K}} = \epsilon/C_{\mathcal{K}}$ , cela nous donne le résultat pour  $n = 1$ .

Pour  $n \geq 2$ , le résultat suit de la définition de  $\mathcal{B}_n^{\hat{\chi}}$ , du fait que les ensembles  $(V_b)_{b \in B_1 \cup B_2}$  ont tous un diamètre inférieur à  $r_i$ , et de l'équation (4.22).  $\square$

Soit  $\mathcal{O} \subset \mathcal{K}$  un ouvert de diamètre inférieur à  $\epsilon_{\mathcal{K}}$ .

Fixons  $\tilde{\mathcal{L}}_0$  une pré-image de  $\mathcal{L}_0$  par la projection  $S^*\tilde{X} \rightarrow S^*X$ . Notons  $(\mathcal{O}_j)_{j \in \mathcal{J}}$  les pré-images de  $\mathcal{O}$  par la projection  $\tilde{X} \rightarrow X$ . Si on suppose que le diamètre de  $\mathcal{O}$  est inférieur à  $r_i$ , alors les  $\mathcal{O}_j$  sont tous disjoints.

Pour chaque  $n \in \mathbb{N}$  et chaque  $\beta \in \mathcal{B}_n^{\hat{\chi}}$  tel que  $\Phi_{\beta}^n(\mathcal{L}_0) \cap S^*\mathcal{O} \neq \emptyset$ , nous affirmons qu'il existe un unique  $j_{\beta} \in \mathcal{J}$  tel que  $\Phi_{\beta}^n(\tilde{\mathcal{L}}_0) \subset S^*\mathcal{O}_{j_{\beta}}$ . En effet, par définition, on a  $\Phi_{\beta}^n(\tilde{\mathcal{L}}_0) \subset \bigcup_{j \in \mathcal{J}} S^*\mathcal{O}_j$ . Mais, par le lemme 5.8, on sait que pour tout  $t \leq 0$ ,  $\Phi^{-t}(\Phi_{\beta}^n(\tilde{\mathcal{L}}_0) \cap S^*\mathcal{O})$  est de diamètre inférieur à  $r_i$ , de sorte qu'elle est contenue dans une unique carte locale.

Si  $\beta \in \mathcal{B}_n^{\hat{\chi}}$  et  $\beta' \in \mathcal{B}_n^{\hat{\chi}}$  sont tels que  $\Phi_{\beta}^n(\mathcal{L}_0) \cap S^*\mathcal{O} \neq \emptyset$ ,  $\Phi_{\beta'}^n(\mathcal{L}_0) \cap S^*\mathcal{O} \neq \emptyset$ , on dira que  $\beta \sim_{\mathcal{O}} \beta'$  si  $j_{\beta} = j_{\beta'}$ .  $\sim_{\mathcal{O}}$  est clairement une relation d'équivalence sur  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\beta \in \mathcal{B}_n^{\hat{\chi}}; \Phi_{\beta}^n(\mathcal{L}_0) \cap S^*\mathcal{O} \neq \emptyset\}$ , de sorte qu'on peut définir

$$\tilde{\mathcal{B}}^{\mathcal{O}} := \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\beta \in \mathcal{B}_n^{\hat{\chi}}; \Phi_{\beta}^n(\mathcal{L}_0) \cap S^*\mathcal{O} \neq \emptyset\} \right) \setminus \sim_{\mathcal{O}}. \quad (5.31)$$

On définit alors pour chaque  $\tilde{\beta} \in \tilde{\mathcal{B}}^{\mathcal{O}}$  :

$$\tilde{n}(\tilde{\beta}) := \min\{n \in \mathbb{N}; \exists \beta \in \mathcal{B}_n^{\hat{\chi}} \text{ tel que } \beta \in \tilde{\beta}\}. \quad (5.32)$$

**Lemme 5.9.** *Il existe  $N_{\mathcal{K}}$  tel que pour tous  $n \in \mathbb{N}, \beta \in \mathcal{B}_n^{\hat{\chi}}$ , on a  $\beta \in \tilde{\beta} \implies n \leq \tilde{n}(\tilde{\beta}) + N_{\mathcal{K}}$ .*

## 5.2 Preuve des résultats en courbure négative

Remarquons en particulier que ce lemme implique qu'il n'y a qu'un nombre fini d'éléments dans la classe d'équivalence  $\tilde{\beta}$ .

*Démonstration.* Tout d'abord, par compacité de  $X_0$ , on peut trouver  $N$  tel que pour tout  $\rho \in \mathcal{L}_0 \cap \bigcup_{b \in B_2} V_b$ , on a  $\Phi^{-N}(\rho) \notin \bigcup_{b \in B_2} V_b$ . On pose alors  $N'_\mathcal{K} = \lceil N + \epsilon_\mathcal{K} \rceil$ .

Soit  $\beta, \beta' \in \tilde{\beta}$ , avec  $\beta \in \mathcal{B}_n^{\tilde{\chi}}$  et  $\beta' \in \mathcal{B}_{n'}^{\tilde{\chi}}$ . Supposons que  $n \geq n' + N_\mathcal{K} + 1$ . Soit  $\tilde{\rho} \in \Phi_\beta^n(\mathcal{L}_0) \cap S^*\mathcal{O}_{j_\beta}$  et  $\tilde{\rho}' \in \Phi_{\beta'}^{n'}(\mathcal{L}_0) \cap S^*\mathcal{O}_{j_{\beta'}}$ . Par hypothèse, on a  $d_X(\rho, \rho') \leq \epsilon_\mathcal{K}$ . De plus, par le lemme 4.25,  $d_X(\Phi^{-t}(\rho), \Phi^{-t}(\rho'))$  est décroissante. On a donc

$$d_X(\Phi^{-n}(\rho), \Phi^{-n}(\rho')) \leq \epsilon_\mathcal{K}. \quad (5.33)$$

D'un autre côté, comme  $n \geq n' + N_\mathcal{K} + 1$ , on a  $d_X(\Phi^{-n}(\rho'), \bigcup_{b \in B_2} V_b) \geq \epsilon_\mathcal{K} + 1$ , de sorte que  $d_X(\Phi^{-n}(\rho), \Phi^{-n}(\rho')) \geq \epsilon_\mathcal{K} + 1$ , ce qui contredit (5.33).

Ceci conclut la preuve en prenant pour  $\beta'$  une suite qui réalise le minimum dans (5.32).  $\square$

Donnons maintenant une description plus utile de la relation d'équivalence  $\sim_{\mathcal{O}}$

**Lemme 5.10.** *Soient  $n, n' \in \mathbb{N}$  et soient  $\beta \in \mathcal{B}_n^{\tilde{\chi}}$ ,  $\beta' \in \mathcal{B}_{n'}^{\tilde{\chi}}$  tels que  $\text{supp}(\varphi_{\beta, \mathcal{O}}) \cap \text{supp}(\varphi_{\beta', \mathcal{O}}) \neq \emptyset$ . On a alors*

$$(\beta \sim_{\mathcal{O}} \beta') \Leftrightarrow \left( \forall x \in \text{supp}(\varphi_{\beta, \mathcal{O}}) \cap \text{supp}(\varphi_{\beta', \mathcal{O}}), \text{ on a } \partial\varphi_{\beta, \mathcal{O}}(x) = \partial\varphi_{\beta', \mathcal{O}}(x) \right).$$

*Démonstration.* Supposons tout d'abord que  $\beta \sim_{\mathcal{O}} \beta'$ , et supposons par l'absurde qu'il existe  $x \in \text{supp}(\varphi_{\beta, \mathcal{O}}) \cap \text{supp}(\varphi_{\beta', \mathcal{O}})$  tel que  $\partial\varphi_{\beta, \mathcal{O}}(x) \neq \partial\varphi_{\beta', \mathcal{O}}(x)$ . Notons  $\tilde{x}$  l'unique pré-image de  $x$  par  $\tilde{X} \rightarrow X$  telle que  $\tilde{x} \in \mathcal{O}_{j_\beta}$ . Dans  $\tilde{X}$ , les géodésiques partant de  $\tilde{x}$  avec des vitesses respectives  $\partial\varphi_{\beta, \mathcal{O}}(x)$  et  $\partial\varphi_{\beta', \mathcal{O}}(x)$  s'approchent l'une de l'autre dans le passé, car elles appartiennent à  $\bigcup_{t \geq 0} \Phi^t(\tilde{\mathcal{L}}_0)$ , ce qui contredit le lemme 4.25.

Réciproquement, supposons qu'il existe  $x \in \text{supp}(\varphi_{\beta, \mathcal{O}}) \cap \text{supp}(\varphi_{\beta', \mathcal{O}})$ , tel que l'on ait  $\partial\varphi_{\beta, \mathcal{O}}(x) = \partial\varphi_{\beta', \mathcal{O}}(x)$ . Considérons  $\rho = \Phi^{-n}((x, \partial\varphi_{\beta, \mathcal{O}}(x)) \in \mathcal{L}_0$ . Soit  $\tilde{\rho}$  la pré-image de  $\rho$  par  $S^*\tilde{X} \rightarrow S^*X$  qui est dans  $\tilde{\mathcal{L}}_0$ . Par définition, on a  $\Phi^n(\tilde{\rho}) \in S^*\mathcal{O}_{j_\beta}$ , mais aussi  $\Phi^{n'}(\tilde{\rho}) \in S^*\mathcal{O}_{j_{\beta'}}$ . Par conséquent,  $j_\beta = j_{\beta'}$ , d'où  $\beta \sim_{\mathcal{O}} \beta'$ .  $\square$

Grâce à ce lemme, il est possible pour tout  $\tilde{\beta} \in \tilde{\mathcal{B}}^{\mathcal{O}}$  de construire une fonction de phase

$$\varphi_{\tilde{\beta}} : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$$

telle que pour tout  $\beta \in \tilde{\beta}$ , on a  $\partial\varphi_{\tilde{\beta}}(x) = \partial\varphi_{\beta, \mathcal{O}}(x)$  pour tout  $x \in \text{supp}(\varphi_{\beta, \mathcal{O}})$ .

Soit  $\chi \in C_c^\infty(X)$  tel que  $\text{supp}(\chi) \subset \mathcal{K}$  a un diamètre inférieur à  $\epsilon_\mathcal{K}$ . Définissons  $\tilde{\mathcal{B}}^\chi := \tilde{\mathcal{B}}^{\text{supp}(\chi)}$ . Pour chaque  $\tilde{\beta} \in \tilde{\mathcal{B}}^\chi$ , on pose

$$a_{\tilde{\beta}, \chi} := \sum_{\beta \in \tilde{\beta}} a_{\beta, \chi} e^{i(\varphi_{\tilde{\beta}} - \varphi_{\beta, \text{supp}(\chi)})/h}.$$

Définie de cette manière,  $a_{\tilde{\beta},\chi} \in S^{comp}(X)$ . En effet, par le lemme 5.9, le nombre de termes dans la somme est borné par une constante indépendante de  $\tilde{\beta}$ , et par le lemme 5.10, les exponentielles qui apparaissent dans la somme sont en fait des constantes. Par conséquent, par (5.30), pour tout  $\ell \in \mathbb{N}$  il existe  $C'_{\ell,\epsilon} > 0$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{\substack{\tilde{\beta} \in \tilde{\mathcal{B}}^X \\ \tilde{n}(\tilde{\beta})=n}} \|a_{\tilde{\beta},\chi}\|_{C^\ell} \leq C_{\ell,\epsilon} e^{n(P(1/2)+\epsilon)}. \quad (5.34)$$

À partir de cette construction et de (5.29), on obtient que pour tous  $r > 0$ ,  $\ell > 0$ , il existe  $M_{r,\ell} > 0$  tel que l'on a quand  $h \rightarrow 0$  :

$$\chi E_h(x) = \sum_{\substack{\beta \in \tilde{\mathcal{B}}^X \\ \tilde{n}(\tilde{\beta}) \leq M_{r,\ell} |\log h|}} e^{i\varphi_{\tilde{\beta}}(x)/h} a_{\tilde{\beta}}(x; h) + R_r,$$

avec

$$\|R_r\|_{C^\ell} = O(h^r).$$

Grâce au lemme 4.38 et au fait que si  $\tilde{\beta} \neq \tilde{\beta}'$ , on a  $\partial\varphi_{\tilde{\beta}}(x) \neq \partial\varphi_{\tilde{\beta}'}(x)$  en vertu du lemme 5.10, on déduit qu'il existe une constante  $C_1$  telle que pour tous  $\tilde{\beta}, \tilde{\beta}' \in \tilde{\mathcal{B}}^X$ , on a

$$|\partial\varphi_{\tilde{\beta}}(x) - \partial\varphi_{\tilde{\beta}'}(x)| \geq C_1 e^{-\sqrt{b_0} \max(\tilde{n}(\tilde{\beta}), \tilde{n}(\tilde{\beta}'))}. \quad (5.35)$$

Ceci conclut la preuve du théorème 3.41.

## Chapitre 6

# Mesures semi-classiques

Le but de ce chapitre, qui suit [Ing15a] et [Ing15b], est de prouver les théorèmes corollaires 3.40 et 3.45, ainsi que le corollaire 1.26.

---

L'ingrédient principal dans la preuve des corollaires 3.40 et 3.45 est la phase non stationnaire. Rappelons dans un premier temps les estimées dont nous aurons besoin, et qui peuvent être prouvées par intégration par parties.

Soit  $a \in S^{comp}(X)$ ,  $\phi(x, h) \in S(X)$ . On considère l'intégrale oscillante :

$$I_h(a, \phi) := \int_X a(x) e^{\frac{i\phi(x, h)}{h}} dx.$$

**Proposition 6.1.** *Soit  $\epsilon > 0$ . Supposons qu'il existe  $C > 0$  tel que,  $\forall x \in \text{supp}(a), \forall 0 < h < h_0, |\partial\phi(x, h)| \geq Ch^{1/2-\epsilon}$ . Alors*

$$I_h(a, \phi) = O(h^\infty).$$

### 6.1 Preuve du corollaire 3.40

Nous allons maintenant prouver le corollaire 3.40, que nous rappelons.

**Corollaire 6.2.** *Il existe une (unique) mesure borélienne  $\mu$  sur  $S^*X$  telle que, pour tout  $\chi \in C_c^\infty(X)$  et pour tout  $a \in C_c^\infty(T^*X)$ , on a quand  $h \rightarrow 0$  :*

$$\langle Op_h(a)\chi E_h, \chi E_h \rangle = \int_{T^*X} a(x, v) \chi^2(x) d\mu(x, v) + o(1).$$

De plus, il existe une constante  $0 < c \leq 1$  et des fonctions  $f_{n, \beta, b} \in S^{comp}(\mathbb{R}^d)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\beta \in \tilde{B}_n$  et  $b \in B_1$  telles que pour tout  $a \in C_c^\infty(T^*X)$  et pour tout  $\chi \in C_c^\infty(X)$ , on a

$$\langle Op_h(\pi_b^2 a)\chi E_h, \chi E_h \rangle = \int_{T^*X} a(x, v) d\mu_{b, \chi}(x, v) + O(h^c),$$

où

$$d\mu_{b,\chi}(\kappa_b^{-1}(y^{\rho_b}, \eta^{\rho_b})) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\beta \in \tilde{\mathcal{B}}_n} f_{\beta,b}(y^{\rho_b}) \delta_{\{\eta^{\rho_b} = \partial\phi_{j,n}(y^{\rho_b})\}} dy^{\rho_b},$$

Les fonctions  $f_{\beta,b}$  vérifient l'estimée (3.48).

*Démonstration.* Fixons un petit  $\epsilon > 0$ , et posons

$$M := \frac{1}{2C'_2} - \epsilon,$$

$$c := (M - \epsilon)\mathcal{P}_E(1/2) = \frac{\mathcal{P}_E(1/2)}{2C'_2} - \epsilon$$

où  $C'_2$  provient du corollaire 5.7.

Soit  $a \in C_c^\infty(T^*X)$ ,  $\chi \in C_c^\infty(X)$  et  $b \in B_1$ . En utilisant le fait que  $Op_h(ab) = Op_h(a)Op_h(b) + O_{L^2 \rightarrow L^2}(h)$  pour tous  $a, b \in S^{comp}(X)$ , le fait que  $\Pi_b$  est auto-adjoint, et le caractère unitaire de  $\mathcal{U}_b$  sur le micro-support de  $\Pi_b$ , on voit que l'on a

$$\begin{aligned} \langle Op_h(\pi_b^2 a)\chi E_h, \chi E_h \rangle_{L^2(X)} &= \langle Op_h(a)\Pi_b \chi E_h, \Pi_b \chi E_h \rangle_{L^2(X)} + O(h) \\ &= \langle \mathcal{U}_b Op_h(a)\mathcal{U}_b^* \mathcal{U}_b \Pi_b E_h, \mathcal{U}_b \Pi_b \chi E_h \rangle_{L^2(X)} + O(h). \end{aligned}$$

En utilisant le théorème d'Egorov ([Zwo12, Theorem 11.1]), on a que

$$\mathcal{U}_b Op_h(a)\mathcal{U}_b^* \mathcal{U}_b \Pi_b = Op_h(a_b)\mathcal{U}_b \Pi_b + O_{L^2(X) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)}(h^\infty),$$

où  $a_b = a \circ \kappa_b + O_{L^2}(h)$ . En utilisant la décomposition (3.47), on a

$$\begin{aligned} &\langle Op_h(\pi_b^2 a)\chi E_h, \chi E_h \rangle_{L^2(X)} \\ &= \sum_{n=0}^{\lfloor M_c \rfloor \log h} \sum_{\beta \in \tilde{\mathcal{B}}_n} \left\langle Op_h(a_b) [e^{i\phi_{\beta,b}/h} a_{\beta,b}], \sum_{n'=0}^{\lfloor M_c \rfloor \log h} \sum_{\beta' \in \tilde{\mathcal{B}}_{n'}} e^{i\phi_{\beta',b}/h} a_{\beta',b} \right\rangle + O(h^c), \end{aligned} \quad (6.1)$$

Mais grâce à l'estimée (3.48),

$$\sum_{n=0}^{\lfloor M_c \rfloor \log h} \sum_{\beta \in \tilde{\mathcal{B}}_n} e^{i\phi_{\beta,b}/h} a_{\beta,b} = \sum_{n=0}^{\lfloor M \rfloor \log h} \sum_{\beta \in \tilde{\mathcal{B}}_n} e^{i\phi_{\beta,b}/h} a_{\beta,b} + O_{L^2}(h^c),$$

de sorte que

$$\begin{aligned} &\langle Op_h(\pi_b^2 a)\chi E_h, \chi E_h \rangle_{L^2(X)} \\ &= \sum_{n=0}^{\lfloor M \rfloor \log h} \sum_{\beta \in \tilde{\mathcal{B}}_n} \left\langle Op_h(a_b) [e^{i\phi_{\beta,b}/h} a_{\beta,b}], \sum_{n'=0}^{\lfloor M \rfloor \log h} \sum_{\beta' \in \tilde{\mathcal{B}}_{n'}} e^{i\phi_{\beta',b}/h} a_{\beta',b} \right\rangle + O(h^c), \end{aligned} \quad (6.2)$$

### 6.1 Preuve du corollaire 3.40

Fixons maintenant un  $n \leq M|\log h|$  et un  $\beta \in \tilde{\mathcal{B}}_n$ , et analysons le comportement de

$$\left\langle \mathcal{O}p_h(a_b)[e^{i\phi_{\beta,b}/h}a_{\beta,b}], \sum_{n'=0}^{\lfloor M|\log h| \rfloor} \sum_{\beta' \in \tilde{\mathcal{B}}_n} e^{i\phi_{\beta',b}/h}a_{\beta',b} \right\rangle.$$

Écrivons  $Y_{\beta'} = \{y^{\rho_b} \in \text{supp}(\phi_{\beta,b}) \cap \text{supp}(\phi_{\beta',b}) ; \partial\phi_{\beta',b}(y^{\rho_b}) = \partial\phi_{\beta,b}(y^{\rho_b})\}$ . On a

$$\begin{aligned} & \left\langle \mathcal{O}p_h(a_b)[e^{i\phi_{\beta,b}/h}a_{\beta,b}], e^{i\phi_{\beta',b}/h}a_{\beta',b} \right\rangle \\ &= \int_{Y_{\beta'}} \left( \mathcal{O}p_h(a_b)[e^{i\phi_{\beta,b}/h}a_{\beta,b}] \right)(y^{\rho_b}) e^{i\phi_{\beta',b}(y^{\rho_b})/h} a_{\beta',b}(y^{\rho_b}; h) dy^{\rho_b} \\ &+ \int_{\mathbb{R}^d \setminus Y_{\beta'}} \left( \mathcal{O}p_h(a_b)[e^{i\phi_{\beta,b}/h}a_{\beta,b}] \right)(y^{\rho_b}) e^{i\phi_{\beta',b}(y^{\rho_b})/h} a_{\beta',b}(y^{\rho_b}; h) dy^{\rho_b}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Rappelons que les intégrales ci-dessus sont bien définies, car les fonctions de phases sont bien définies sur un voisinage du support des fonctions  $a_{n,\beta,b}$ .

Montrons que le second terme du membre de droite de (6.3) est un  $O(h^\infty)$ . En effet, l'image d'un état lagrangien par un opérateur pseudo-différentiel est encore un état lagrangien avec la même fonction de phase. Par conséquent, le second terme du membre de droite de (6.3) est le produit scalaire entre des états lagrangiens ayant des phases respectives  $\phi_{\beta,b}$  et  $\phi_{\beta',b}$ .

Mais, par le choix de  $M$ , et par le corollaire 5.7, on sait que pour chaque  $y^{\rho_b} \in \mathbb{R}^d \setminus Y_{\beta'}$ , on a  $|\partial\phi_{\beta,b}(y^{\rho_b}) - \partial\phi_{\beta',b}(y^{\rho_b})| \geq Ch^{1/2+\epsilon}$  pour des constantes  $C, \epsilon > 0$ . Par conséquent, par la proposition 6.1, on en déduit bien que le second terme du membre de droite de (6.3) est un  $O(h^\infty)$ .

Tâchons maintenant de comprendre les propriétés de l'ensemble  $Y_{\beta'}$ .

Tout d'abord,  $Y_{\beta'}$  est un ensemble ouvert. En effet, si  $y^{\rho_b} \in Y_{\beta'}$ , ceci signifie que le point  $\rho = (y^{\rho_b}, \partial\phi_{\beta,b}(y^{\rho_b}))$  (dans les coordonnées centrée en  $\rho_b$ ) appartient à  $\Phi_\beta^{n,t_0}(\mathcal{L}_0)$  ainsi qu'à  $\Phi_{\beta'}^{n',t_0}(\mathcal{L}_0)$  dans les notations de la proposition 4.22. Supposons pour simplifier que  $n = n'$  (le cas général se traite de manière similaire). Alors la condition  $y^{\rho_b} \in Y_{\beta'}$  signifie simplement que pour tout temps intermédiaire  $k$ ,  $\Phi^{n-k}(\rho)$  est à la fois dans  $V_{\beta_k}$  et dans  $V_{\beta'_k}$ . Cette condition est clairement vérifiée sur un ouvert, car les  $V_b$  sont ouverts.

D'un autre côté, par continuité des fonctions de phase,  $Y_{\beta'}$  est un ensemble fermé. Par conséquent,  $Y_{\beta'}$  est composé d'un certain nombre de composantes connexes du support de  $\phi_{\beta',b}$ .

On sait que le support de  $a_{\beta',b}$  est inclus dans le domaine de définition de  $\phi_{\beta',b}$ . Par conséquent, certaines des composantes connexes de  $\text{supp}(a_{\beta',b})$  peuvent être incluses dans  $Y_{\beta'}$ , tandis que d'autres sont incluses dans  $\mathbb{R}^d \setminus Y_{\beta'}$ , mais aucune d'entre elles ne peut intersecter les deux ensembles. Donc, si on note  $a_{\beta',b}^\beta(y^{\rho_b}) := a_{\beta',b}(y^{\rho_b})$  si  $y^{\rho_b} \in Y_{\beta'}$ , 0 autrement,

alors  $a_{\beta',b}^\beta \in S$ , et on a

$$\begin{aligned} & \left\langle Op_h(a_b) [e^{i\phi_{\beta,b}/h} a_{\beta,b}], \sum_{n'=0}^{\lfloor M|\log h| \rfloor} \sum_{\beta' \in \mathcal{B}_n} e^{i\phi_{\beta',b}/h} a_{\beta',b} \right\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left( Op_h(a_b) [e^{i\phi_{\beta,b}/h} a_{\beta,b}] \right) (y^{\rho_b}) e^{-i\phi_{\beta,b}(y^{\rho_b})/h} \left( \sum_{n'=0}^{\lfloor M|\log h| \rfloor} \sum_{\beta' \in \mathcal{B}_n} a_{\beta',b}^\beta \right) (y^{\rho_b}) dy^{\rho_b}. \end{aligned}$$

Écrivons

$$\tilde{a}_{\beta,b} := \sum_{n'=0}^{\lfloor M|\log h| \rfloor} \sum_{\beta' \in \mathcal{B}_n} a_{\beta',b}^\beta.$$

$\tilde{a}_{\beta,b}(y^{\rho_b})$  est la somme de tous les symboles dans la décomposition (3.47) correspondant aux phases  $\phi_{\beta,b}(y^{\rho_b})$ . On voit par les estimées (3.48) que  $\tilde{a}_{\beta,b}$  vérifie elle même une estimée analogue à (3.48), et que

$$\begin{aligned} & \left\langle Op_h(a_b) [e^{i\phi_{\beta,b}/h} a_{\beta,b}], \sum_{n'=0}^{\lfloor M|\log h| \rfloor} \sum_{\beta' \in \mathcal{B}_n} e^{i\phi_{\beta',b}/h} a_{\beta',b} \right\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left( Op_h(a_b) [e^{i\phi_{\beta,b}/h} a_{\beta,b}] \right) (y^{\rho_b}) e^{-i\phi_{\beta,b}(y^{\rho_b})/h} \tilde{a}_{\beta,b}(y^{\rho_b}) dy^{\rho_b} + O(h^\infty). \end{aligned}$$

On peut alors calculer cette expression en utilisant la phase non-stationnaire, de la même manière que pour calculer la mesure semi-classique d'un état lagrangien (voir [Zwo12, §5.1]). On obtient

$$\begin{aligned} & \left\langle Op_h(a_b) [e^{i\phi_{\beta,b}/h} a_{\beta,b}], \sum_{n'=0}^{\lfloor M|\log h| \rfloor} \sum_{\beta' \in \mathcal{B}_n} e^{i\phi_{\beta',b}/h} a_{\beta',b} \right\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} a_b d\mu_{\beta,b}, \end{aligned}$$

où

$$d\mu_{\beta,b} = a_{\beta,b}(y^{\rho_b}) \overline{\tilde{a}_{\beta,b}(y^{\rho_b})} \delta_{\{\eta^{\rho_b} = \partial\phi_{\beta,b}(y^{\rho_b})\}} dy^{\rho_b}.$$

En sommant sur tous les  $n, \beta$  et en utilisant l'équation (6.2), on obtient que

$$\langle Op_h(\pi_b^2 a) E_h, E_h \rangle = \int_{T^*X} a(x, \xi) d\mu_{b,\chi}(x, \xi) + O(h^c),$$

où  $(\kappa_b)^* \mu_{b,\chi} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\beta \in \mathcal{B}_n} \mu_{\beta,b}$ , c'est-à-dire

$$d\mu_{b,\chi}(\kappa_b^{-1}(y^{\rho_b}, \eta^{\rho_b})) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\beta \in \mathcal{B}_n} f_{\beta,b}(y^{\rho_b}) \delta_{\{\eta^{\rho_b} = \partial\phi_{\beta,b}(y^{\rho_b})\}} dy^{\rho_b},$$

## 6.2 Mesures semi-classiques en courbure négative

où  $f_{\beta,b}(y^{\rho_b}) := \sigma_h(a_{\beta,b}\overline{\tilde{a}_{\beta,b}})(y^{\rho_b})$ , et où  $\sigma_h$  désigne le symbole principal comme dans la section A.1. Ceci conclut la preuve de la seconde partie du corollaire 3.40.

La première partie concernant l'unicité de la mesure semi-classique découle de l'analyse ci-dessus près de l'ensemble capté, de (5.20) et du théorème d'Egorov.  $\square$

## 6.2 Mesures semi-classiques en courbure négative

Prouvons maintenant le corollaire 3.45, dont nous rappelons l'énoncé.

**Corollaire.** *On fait les mêmes hypothèses que dans le théorème 3.41. Soit  $\chi \in C_c^\infty(X)$  et soit  $\epsilon > 0$ . Alors il existe une mesure finie  $\mu_\chi$  sur  $S^*X$  telle que l'on a*

$$\langle Op_h(a)\chi E_h, \chi E_h \rangle = \int_{T^*X} a(x, \xi) d\mu_\chi(x, \xi) + O\left(h^{\min\left(1, \frac{|P(1/2)|}{2|\sqrt{b_0}}\right) - \epsilon}\right),$$

où  $-b_0$  est la valeur minimale prise par la courbure sectionnelle sur  $X$ .

Si  $\mathcal{K}$  est un ensemble compact et si le support de  $\chi$  est dans  $\mathcal{K}$  et est de diamètre plus petit que  $\epsilon_{\mathcal{K}}$ , on a

$$d\mu_\chi(x, \xi) = \sum_{\tilde{\beta} \in \tilde{\mathcal{B}}^x} |(a_{\tilde{\beta}}^0)|^2(x) \delta_{\{\xi = \partial\varphi_{\tilde{\beta}}(x)\}} dx.$$

De plus, si  $\mathcal{L}_0$  vérifie l'hypothèse 3.18, alors pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , il existe  $c_N > 0$  tel que pour tout  $x \in X$  tel que  $\chi(x) = 1$ , on a

$$\sum_{\substack{\tilde{\beta} \in \tilde{\mathcal{B}}^x \\ \tilde{n}(\tilde{\beta}) \geq N}} |a_{\tilde{\beta}}^0|^2(x) \geq c_N.$$

*Preuve du corollaire 3.45.* Soit  $a \in C_c^\infty(S^*X)$ . Fixons une fonction  $\chi_a \in C_c^\infty(X)$  qui est égale à 1 sur  $\pi_X(\text{supp}(a))$ . On a alors  $\langle Op_h(a)\chi E_h, \chi E_h \rangle = \langle Op_h(a)\chi_a E_h, \chi_a E_h \rangle + O(h^\infty)$ .

Comme l'énoncé du corollaire 3.45 est linéaire en  $a \in C_c^\infty(S^*X)$ , il suffit de le prouver uniquement lorsque  $a$  est supportée dans un petit ouvert. En particulier, on peut supposer que  $\chi_a$  est supportée dans un ensemble suffisamment petit pour que le théorème 3.41 s'applique.



On a alors (avec  $r = 1, \ell = 0$ ) :

$$\begin{aligned}
 \langle Op_h(a)\chi_a E_h, \chi_a E_h \rangle &= \left\langle Op_h(a) \sum_{\substack{\tilde{\beta} \in \tilde{\mathcal{B}}^{x_a} \\ \tilde{n}(\tilde{\beta}) \leq \tilde{M} |\log h|}} e^{i\varphi_{\tilde{\beta}}(x)/h} a_{\tilde{\beta}}(x; h), \sum_{\substack{\tilde{\beta} \in \tilde{\mathcal{B}}^{x_a} \\ \tilde{n}(\tilde{\beta}) \leq \tilde{M} |\log h|}} e^{i\varphi_{\tilde{\beta}}(x)/h} a_{\tilde{\beta}}(x; h) \right\rangle + O(h) \\
 &= \sum_{\substack{\tilde{\beta} \in \tilde{\mathcal{B}}^{x_a} \\ \tilde{n}(\tilde{\beta}) \leq \tilde{M} |\log h|}} \langle Op_h(a) e^{i\varphi_{\tilde{\beta}}(x)/h} a_{\tilde{\beta}}(x; h), e^{i\varphi_{\tilde{\beta}}(x)/h} a_{\tilde{\beta}}(x; h) \rangle \\
 &+ \sum_{\substack{\tilde{\beta}, \tilde{\beta}' \in \tilde{\mathcal{B}}^{x_a} \\ \tilde{n}(\tilde{\beta}'), \tilde{n}(\tilde{\beta}) \leq \tilde{M} |\log h| \\ \tilde{\beta} \neq \tilde{\beta}'}} \langle Op_h(a) e^{i\varphi_{\tilde{\beta}}(x)/h} a_{\tilde{\beta}}(x; h), e^{i\varphi_{\tilde{\beta}'}(x)/h} a_{\tilde{\beta}'}(x; h) \rangle + O(h).
 \end{aligned}$$

On veut utiliser la proposition 6.1 pour dire que le second terme, constitué de termes non diagonaux, est un  $O(h^\infty)$ .

Grâce à (3.51), on sait que si  $\beta, \beta' \in \mathcal{B}^{x_a}$  sont tels que  $\tilde{n}(\tilde{\beta}), \tilde{n}(\tilde{\beta}') \leq (\frac{1}{2\sqrt{b_0}} - \epsilon) |\log h|$ , alors on a  $|\partial\varphi_{\tilde{\beta}}(x) - \partial\varphi_{\tilde{\beta}'}(x)| \geq Ch^{1/2-\epsilon}$ , de sorte que par la proposition 6.1, on déduit

$$\langle Op_h(a) e^{i\varphi_{\tilde{\beta}}(x)/h} a_{\tilde{\beta}}(x; h), e^{i\varphi_{\tilde{\beta}'}(x)/h} a_{\tilde{\beta}'}(x; h) \rangle = O(h^\infty).$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
 \langle Op_h(a)\chi_a E_h, \chi_a E_h \rangle &= \sum_{\tilde{\beta} \in \tilde{\mathcal{B}}^{x_a}} \langle Op_h(a) e^{i\varphi_{\tilde{\beta}}(x)/h} a_{\tilde{\beta}}(x; h), e^{i\varphi_{\tilde{\beta}}(x)/h} a_{\tilde{\beta}}(x; h) \rangle \\
 &+ \sum_{\substack{\tilde{\beta}, \tilde{\beta}' \in \tilde{\mathcal{B}}^{x_a} \\ \tilde{n}(\tilde{\beta}) \leq \tilde{M} |\log h| \\ \tilde{n}(\tilde{\beta}) \text{ ou } \tilde{n}(\tilde{\beta}') \geq (\frac{1}{2\sqrt{b_0}} - \epsilon) |\log h| \\ \tilde{\beta} \neq \tilde{\beta}'}} \langle Op_h(a) e^{i\varphi_{\tilde{\beta}}(x)/h} a_{\tilde{\beta}}(x; h), e^{i\varphi_{\tilde{\beta}'}(x)/h} a_{\tilde{\beta}'}(x; h) \rangle \\
 &- \sum_{\substack{\tilde{\beta} \in \tilde{\mathcal{B}}^{x_a} \\ \tilde{n}(\tilde{\beta}) \geq \tilde{M} |\log h|}} \langle Op_h(a) e^{i\varphi_{\tilde{\beta}}(x)/h} a_{\tilde{\beta}}(x; h), e^{i\varphi_{\tilde{\beta}}(x)/h} a_{\tilde{\beta}}(x; h) \rangle + O(h).
 \end{aligned}$$

On peut estimer le deuxième et le troisième terme grâce à (3.50). On obtient un reste qui est un  $O\left(h^{\min\left(1, \frac{|P(1/2)|}{2|\sqrt{b_0}} - \epsilon\right)}\right)$ , ce qui nous donne

$$\langle Op_h(a)\chi_a E_h, \chi_a E_h \rangle = \sum_{\tilde{\beta} \in \tilde{\mathcal{B}}^{x_a}} \langle Op_h(a) e^{i\varphi_{\tilde{\beta}}(\cdot)/h} a_{\tilde{\beta}}(\cdot; h), e^{i\varphi_{\tilde{\beta}}(\cdot)/h} a_{\tilde{\beta}}(\cdot; h) \rangle + O\left(h^{\min\left(1, \frac{|P(1/2)|}{2|\sqrt{b_0}} - \epsilon\right)}\right).$$

Chacun des termes dans la première somme est alors la distribution de Wigner associée à un état lagrangien, et la mesure semi-classique associée peut être calculée par la méthode

## 6.2 Mesures semi-classiques en courbure négative

de la phase stationnaire, comme dans [Zwo12, §5.1], ce qui nous donne la première partie du corollaire 3.45. Prouvons maintenant (3.52).

Rappelons que les symboles  $a_{\beta,\chi}(x;h)$  qui apparaissent dans (5.29) sont construits en appliquant la formule (A.9) plusieurs fois à  $E_h^0$ . Dans (A.9), la phase  $\theta$  qui apparaît ne dépend que de la trajectoire du point  $(x_1, \phi_1'(x))$ , de sorte que ces phases sont les mêmes pour  $\beta$  et  $\beta'$  si  $\beta \sim_{\text{supp}(\chi)} \beta'$ . En particulier, pour tout  $\tilde{\beta} \in \tilde{\mathcal{B}}^X$ , pour chaque représentant  $\beta \in \mathcal{B}_n^X$  et pour tout  $x \in X$ , on a que

$$|a_{\tilde{\beta}}(x)| \geq |a_{\beta,\chi}(x)|.$$

Par conséquent, le résultat sera prouvé si on peut montrer que pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , on peut trouver une constante  $c_N > 0$  telle que pour tout  $x \in X$  avec  $\chi(x) = 1$ , on a

$$\sum_{n=N}^{\infty} \sum_{\beta \in \mathcal{B}_n^X} |a_{\beta,\chi}^0|^2(x) \geq c_N. \quad (6.4)$$

De plus, toujours en utilisant (A.9), on voit que  $|a_{\beta,\chi}^0|(x;h)(x) > 0$  du moment qu'il existe  $\xi$  tel que  $(x, \xi) \in \Phi_{\beta}^n(\mathcal{L}_0)$ .

Mais pour chaque  $x \in X$  tel que  $\chi(x) = 1$ , le corollaire 4.28 nous donne une infinité de  $(\xi_i)_{i \in I} \subset T_x^*X$  et  $t_i > 0$  tels que  $(x, \xi) \in \Phi^{t_i}(\mathcal{L}_0)$ . En particulier, pour chacun d'entre eux, il existe un  $n_i \in \mathbb{N}$  et un  $\beta_i \in \mathcal{B}_{n_i}^X$  tels que  $(x, \xi) \in \Phi_{\beta_i}^{n_i}(\mathcal{L}_0)$ .

En utilisant le corollaire 4.26, on voit que si  $i \neq i'$ , on a  $\beta_i \neq \beta_{i'}$  : sinon, on pourrait construire deux géodésiques distinctes qui restent à une distance inférieure à  $r_i$  pour tous les temps négatifs, et dont la distance est 0 à l'instant initial, ce qui contredirait le corollaire 4.25. En conséquence, comme chaque  $\mathcal{B}_n^X$  est fini, il existe un  $\beta \in \mathcal{B}_n^X$  pour un  $n \geq N$  et un  $i \in I$  tels que  $\beta = \beta_i$ .

Par conséquent,  $|a_{\beta_i,\chi}^0|(x;h)(x) > 0$ . Par continuité, ceci est vrai uniformément dans un voisinage de  $x$ . Par compacité de  $\text{supp}(\chi)$ , on obtient (6.4).  $\square$

### Équidistribution à petite échelle

Remarquons que le corollaire 3.45 combiné avec le corollaire 3.44 implique qu'il existe des constantes  $C_1, C_2 > 0$  telles que pour tout  $x_0 \in X$  tel que  $\chi(x_0) = 1$ , pour tout  $r > 0$  suffisamment petit, on a

$$C_1 r^d \leq \int_{B(x_0, r)} |E_h|^2(x) dx \leq C_2 r^d, \quad (6.5)$$

où  $B(x_0, r)$  est la boule de rayon  $r$  dans une carte locale. Ceci peut être vu comme un résultat d'équidistribution de  $E_h$ . En fait, (6.5) est encore vraie si  $r$  dépend de  $h$ , du moment que  $r > Ch$ , du moment que  $C$  est suffisamment grande. C'est le contenu de la proposition suivante, qui généralise le corollaire 1.26.

**Proposition 6.3.** *Supposons que les hypothèses du théorème 3.41 soient vérifiées, et que  $\mathcal{L}_0$  vérifie l'hypothèse 3.18. Soit  $\chi \in C_c^\infty(X)$ . Alors il existe des constantes  $C, C_1, C_2 > 0$  telles que le résultat suivant soit vrai. Pour tout  $x_0 \in X$  tel que  $\chi(x_0) = 1$ , pour toute suite  $r_h$  telle que  $1 \gg r_h > Ch$ , on a pour  $h$  suffisamment petit :*

$$C_1 r_h^d \leq \int_{B(x_0, r_h)} |E_h|^2(x) dx \leq C_2 r_h^d. \quad (6.6)$$

Ce résultat peut être vu comme un résultat d'« équidistribution à petite échelle ».

*Démonstration.* La borne supérieure est une conséquence directe du corollaire 3.44. Expliquons maintenant pourquoi la borne inférieure est vérifiée.

Tout comme dans la preuve du corollaire 3.45, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $|E_h|^2(x)$  peut s'écrire, à un reste d'ordre  $O(\varepsilon)$  près, comme la somme finie de termes de la forme  $a_{\beta, \beta'}(x; h) e^{i\phi_{\beta, \beta'}(x)/h}$ , telle que  $\sum_{\beta, \beta'} |a_{\beta, \beta'}(x)| \leq C_0$ . De plus, il existe  $c(\varepsilon) > 0$  tel pour tous les indices de sommation  $\beta, \beta'$  vérifiant  $\partial\phi_{\beta, \beta'}(x_0) \neq 0$ , on a  $|\partial\phi_{\beta, \beta'}(x_0)| > c(\varepsilon)$ .

Par un changement de variables, et par le théorème de Stokes, on a

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0, r_h)} a_{\beta, \beta'}(x; h) e^{i\phi_{\beta, \beta'}(x)/h} dx &= r_h^d \int_{B(0,1)} a_{\beta, \beta'}(r_h x + x_0; h) e^{i\phi_{\beta, \beta'}(r_h x + x_0)/h} dx \\ &= r_h^d \int_{B(0,1)} \left[ \frac{h}{r_h} \frac{a_{\beta, \beta'}(r_h x + x_0; h)}{|\partial\phi_{\beta, \beta'}(r_h x + x_0)|^2} \right. \\ &\quad \left. \times (\partial\phi_{\beta, \beta'}(r_h x + x_0)) \cdot \partial(e^{i\phi_{\beta, \beta'}(r_h x + x_0)/h}) \right] dx \\ &= r_h^d \int_{\partial B(0,1)} \left[ \frac{h}{r_h} \frac{a_{\beta, \beta'}(r_h x + x_0; h)}{|\partial\phi_{\beta, \beta'}(r_h x + x_0)|^2} \right. \\ &\quad \left. \times e^{i\phi_{\beta, \beta'}(r_h x + x_0)/h} (\partial\phi_{\beta, \beta'}(r_h x + x_0)) \right] \cdot d\vec{n} \\ &\quad - r_h^d \int_{B(0,1)} \left[ \frac{h}{r_h} \partial \cdot \left( \frac{a_{\beta, \beta'}(r_h x + x_0; h)}{|\partial\phi_{\beta, \beta'}(r_h x + x_0)|^2} (\partial\phi_{\beta, \beta'}(r_h x + x_0)) \right) \right. \\ &\quad \left. \times e^{i\phi_{\beta, \beta'}(r_h x + x_0)/h} \right] dx \\ &\leq c'(\varepsilon) h r_h^{d-1} \|a_{\beta, \beta'}(\cdot; h)\|_{C^1}, \end{aligned}$$

où  $c'(\varepsilon)$  est une constante dépendant de  $\varepsilon$ , mais pas de  $h$ . En sommant sur  $\beta$  et  $\beta'$ , on obtient que la somme des termes non-diagonaux est bornée par  $c'(\varepsilon) C_0 h r_h^{d-1} + r_h^d R_\varepsilon$ , où  $R_\varepsilon = O(\varepsilon)$ .

D'autre part, grâce à (3.52), les termes diagonaux donnent une contribution plus grande que  $c_0 r_h^d$  pour un  $c_0 > 0$  indépendant de  $h$  et de  $x$ . En prenant  $\varepsilon$  suffisamment petit pour que  $R_\varepsilon < c_0/3$  et  $C$  suffisamment grand pour que  $c'(\varepsilon) C_0 / C < \varepsilon/3$ , on obtient donc bien le résultat recherché.  $\square$

## 6.2 Mesures semi-classiques en courbure négative

**Remarque 6.4.** Rappelons que le théorème 3.41 nous dit que

$$\chi E_h(x) = \sum_{\substack{\tilde{\beta} \in \tilde{\mathcal{B}}^x \\ \tilde{n}(\tilde{\beta}) \leq \tilde{M}_{r,\ell} |\log h|}} e^{i\varphi_{\tilde{\beta}}(x)/h} a_{\tilde{\beta},\chi}(x; h) + R_r,$$

L'équation (3.52) étant vraie en se limitant aux  $\tilde{\beta}$  tels que  $\tilde{n}(\tilde{\beta}) > N$  pour n'importe quel  $N \geq 0$ , la preuve ci-dessus s'adapte sans peine pour nous donner le résultat suivant.

Pour tout  $N > 0$ , il existe  $C'_0, C'_1, C'_2 > 0$  tels que pour tout  $x_0 \in X$  tel que  $\chi(x_0) = 1$ , pour toute suite  $r_h$  telle que  $1 \gg r_h > C'_0 h$ , on a pour  $h$  suffisamment petit :

$$C'_1 r_h^d \leq \int_{B(x_0, r_h)} \left| \sum_{\substack{\tilde{\beta} \in \tilde{\mathcal{B}}^x \\ N \leq \tilde{n}(\tilde{\beta}) \leq \tilde{M}_{r,\ell} |\log h|}} e^{i\varphi_{\tilde{\beta}}(x)/h} a_{\tilde{\beta},\chi}(x; h) + R_r(x) \right|^2 dx \leq C'_2 r_h^d. \quad (6.7)$$



## Chapitre 7

# Ensembles nodaux des ondes planes tordues en courbure négative

*Dans ce chapitre, nous prouverons des résultats concernant les ensembles nodaux et les domaines nodaux de la partie réelle d'une onde plane tordue, ou la partie réelle d'une somme d'ondes planes tordues, sur une variété de courbure négative ou nulle. Nous prouverons en particulier le corollaire 1.27, et le théorème 1.28. Pour certains des résultats que nous prouverons, nous supposons que la variété est euclidienne à l'infini, car les ensembles nodaux sont plus simples à décrire près de l'infini dans ce cas.*

*La première section de ce chapitre suit [Ing15b]. Une partie de ce chapitre sera contenue dans [Ing].*

---

Dans tout ce chapitre, nous noterons

$$\mathbf{F}_h(x) := \Re(E_h(x)).$$

Dans la plupart du chapitre, nous travaillerons sur des variétés à infinis euclidiens, avec  $E_h$  comme dans la section 3.6.1, et nous écrirons, lorsque  $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$  :

$$\mathbf{F}_h(x; \omega) := \Re(E_h(x; \omega)).$$

Plus généralement, pour  $I$  un ensemble fini non vide,  $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in I} \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^{|I|}$ ,  $\vec{\omega} = (\omega_i)_{i \in I} \in (\mathbb{S}^{d-1})^{|I|}$ , on considérera des fonctions de la forme

$$\mathbf{F}_h(\cdot, \mathbf{a}, \vec{\omega}) := \sum_{i \in I} a_i \mathbf{F}_h(\cdot, \omega_i). \quad (7.1)$$

Si  $\mathcal{O} \subset X$  est un ouvert borné et si  $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$ , on notera

$$\begin{aligned} N_{\mathcal{O},h} &:= \{x \in \mathcal{O}; \mathbf{F}_h(x) = 0\} \\ N_{\mathcal{O},\mathbf{a},\vec{\omega},h} &:= \{x \in \mathcal{O}; \mathbf{F}_h(x, \mathbf{a}, \vec{\omega}) = 0\}. \end{aligned}$$

## 7.1 Une borne inférieure sur la mesure des ensembles nodaux

Le but de cette section est de prouver le théorème suivant. Comme nous l'avons mentionné précédemment, ce résultat peut être déduit de [Log16b], mais notre preuve est parue avant celle de Logunov, utilise des méthodes très différentes, et se déduit assez facilement du théorème 3.41.

**Théorème 7.1.** *(i) Soit  $(X, g)$  une variété qui vérifie l'hypothèse 3.1 à l'infini, et qui vérifie l'hypothèse 3.6. Supposons de plus que le flot géodésique  $(\Phi^t)$  vérifie l'hypothèse 3.9 d'hyperbolicité et l'hypothèse 3.24 concernant la pression topologique. Soit  $E_h$  une fonction propre généralisée de la forme décrite dans l'hypothèse 3.31, où  $E_h^0$  est associé à une variété lagrangienne  $\mathcal{L}_0$  qui vérifie l'hypothèse d'invariance 3.12 et les hypothèses 3.16 et 3.18.*

*Soit  $\mathcal{O} \subset X$  un ouvert borné. Alors il existe  $C_{\mathcal{O}}, C'_{\mathcal{O}} > 0$  telles que*

$$\frac{C_{\mathcal{O}}}{h} \leq \text{Haus}_{d-1}(N_{\mathcal{O},h}) \leq \frac{C'_{\mathcal{O}}}{h}. \quad (7.2)$$

*(ii) Supposons de plus que  $(X, g)$  est à infinis euclidiens. Soit  $I$  un ensemble fini non vide,  $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in I} \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^{|I|}$ ,  $\vec{\omega} = (\omega_i)_{i \in I} \in (\mathbb{S}^{d-1})^{|I|}$ . Il existe alors  $C, C'$  tels que*

$$\frac{C}{h} \leq \text{Haus}_{d-1}(N_{\mathcal{O},\mathbf{a},\vec{\omega},h}) \leq \frac{C'}{h}. \quad (7.3)$$

*Démonstration.* Fixons  $\mathcal{O} \subset X$  un ouvert borné. La preuve des bornes inférieures reposent sur la formule de Dong-Sogge-Zelditch, que nous rappelons maintenant. Soit  $f \in C_0^\infty(X)$ , et soit  $g_h \in C^\infty(X)$  une famille de fonctions lisses telles que  $(-h^2\Delta + 1)g_h = 0$ . Notons  $Z_h := \{x \in X; g_h(x) = 0\}$ . Alors on a

$$\int_X ((-h^2\Delta + 1)f)|g_h|dV = h^2 \int_{Z_h} f|\nabla g_h|dS, \quad (7.4)$$

où  $dS$  désigne la mesure de Hausdorff  $(d-1)$ -dimensionnelle. Une preuve de cette formule peut être trouvée dans [Don92], [SZ11b] dans le cas où  $X$  est compacte, mais la preuve marche de la même manière si  $X$  n'est pas compacte, du moment que  $f$  est à support compact.

### 7.1 Une borne inférieure sur la mesure des ensembles nodaux

Soit  $f \in C_c^\infty(X; [0, 1])$  telle que  $\text{supp}(f) \subset \mathcal{O}$ , et  $f$  n'est pas identiquement zéro. En appliquant (7.4) avec  $g_h = \mathbf{F}_h$  dans le cas (i), ou  $\mathbf{F}_h(\cdot, \mathbf{a}, \vec{\omega})$  dans le cas (ii), on a

$$\begin{aligned} \int_X ((-h^2\Delta + 1)f)|g_h| &= h^2 \int_{Z_h} f|\nabla g_h|dS \\ &\leq Ch \int_{Z_h} f dS \\ &\leq Ch \text{Haus}_{d-1}(\{x \in \mathcal{O}; g_h(x) = 0\}), \end{aligned} \tag{7.5}$$

où on a utilisé le corollaire 3.44 pour aller de la première ligne à la deuxième ligne. Par conséquent, le théorème sera prouvé si on peut trouver une borne inférieure uniforme en  $h$  pour le terme de gauche dans (7.5).

Comme  $f$  n'est pas identiquement nulle, on peut trouver une constante  $c > 0$  et un ouvert  $U \subset X$  tels que  $f \geq c$  sur  $U$ . On a

$$\begin{aligned} \int_X ((-h^2\Delta + 1)f)|g_h| &= \int_X f|g_h| + O(h^2) \\ &\geq c \int_U |g_h| + O(h^2) \\ &\geq \frac{c}{\|g_h\|_{C^0(U)}} \int_U |g_h|^2 \\ &\geq C \int_U |g_h|^2 \text{ grâce au corollaire 3.44.} \end{aligned}$$

Par conséquent, la borne inférieure dans le théorème 7.1 suit de (7.7) dans le lemme suivant.

Quant à la borne supérieure, elle est une conséquence directe du théorème 1.1 dans l'article récent [Hez16], et de(7.6) dans le lemme suivant. En effet, ce théorème affirme que, si une famille de fonctions propres (à valeurs réelles) vérifie (7.6) pour  $r_h = Ch$ , avec  $C > 0$  assez grand, mais indépendant de  $h$ , alors elle vérifie la borne supérieure de (7.2).  $\square$

**Lemme 7.2.** *Soit  $\chi \in C_c^\infty(X)$ . Alors il existe des constantes  $C, C_1, C_2 > 0$  telles que le résultat suivant soit vrai. Pour tout  $x_0 \in X$  tel que  $\chi(x_0) = 1$ , pour toute suite  $r_h$  telle que  $1 \gg r_h > Ch$ , on a pour  $h$  suffisamment petit :*

$$C_1 r_h^d \leq \int_{B(x_0, r_h)} |g_h|^2(x) dx \leq C_2 r_h^d. \tag{7.6}$$

*En particulier, pour tout ouvert borné  $U \subset X$ , il existe  $c(U) > 0$  et  $h_U > 0$  tels que pour tout  $0 < h < h_U$ , on a*

$$\int_U |g_h|^2 \geq c(U). \tag{7.7}$$



Pour prouver le lemme 7.2, il nous faut d'abord prouver le lemme suivant. Dans le cas où  $(X, g)$  est à infinis euclidiens, on note  $\varphi_\beta(\cdot, \omega)$  la phase  $\varphi_\beta(\cdot)$  obtenue en appliquant le théorème 3.41 à  $E_h(\cdot; \omega)$ .

Les cas (i) et (ii) du lemme suivant correspondent aux hypothèses (i) et (ii) du théorème 7.1.

**Lemme 7.3.** (i) *Il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ , pour tout  $n' \in \mathbb{N}$  et pour tous  $\beta \in \mathcal{B}_n^X$ ,  $\beta' \in \mathcal{B}_{n'}^X$ , l'énoncé suivant est vrai. Supposons que  $x \in \text{supp}(\chi)$  est tel que  $\partial\varphi_\beta(x) = -\partial\varphi_{\beta'}(x)$ . Alors il existe un petit voisinage  $V$  de  $x$  tel que pour tout  $y \in V$ , on a*

$$(\partial\varphi_\beta(y) = -\partial\varphi_{\beta'}(y)) \implies (y, \partial\phi_\beta(y)) = \Phi^t(x, \partial\phi_\beta(x)) \quad \text{pour un } t \text{ assez petit.}$$

(ii) *Soient  $\omega, \omega' \in \mathbb{S}^{d-1}$ . Il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ , pour tout  $n' \in \mathbb{N}$  et pour tous  $\beta \in \mathcal{B}_n^X$ ,  $\beta' \in \mathcal{B}_{n'}^X$ , l'énoncé suivant est vrai. Supposons que  $x \in \text{supp}(\chi)$  est tel que  $\partial\varphi_\beta(x; \omega) = -\partial\varphi_{\beta'}(x; \omega')$ . Alors il existe un petit voisinage  $V$  de  $x$  tel que pour tout  $y \in V$ , on a*

$$(\partial\varphi_\beta(y; \omega) = -\partial\varphi_{\beta'}(y; \omega')) \implies (y, \partial\phi_\beta(y)) = \Phi^t(x, \partial\phi_\beta(x)) \quad \text{pour un } t \text{ assez petit.}$$

*Démonstration.* Nous n'écrivons la preuve que le cas (ii), la preuve pour le cas (i) étant essentiellement la même. Nous utiliserons la notation suivante. Si  $\rho = (x, \xi) \in \S^*X$ , on écrira

$$\rho^t = (x, -\xi).$$

Considérons des entiers  $n, n'$  tels que l'énoncé ci-dessus est faux, et montrons que ceci n'est possible que pour un nombre fini de valeurs de  $n$ . Par hypothèse, pour de tels  $n, n'$ , il existe une suite  $y_k$  convergeant vers un  $x \in \text{supp}(\chi)$  telle que  $\partial\varphi_\beta(y_k; \omega) = -\partial\varphi_{\beta'}(y_k; \omega')$ . Écrivons  $\rho_k := (y_k, \partial\varphi_{\beta'}(y_k; \omega))$  et  $\rho = (x, \partial\varphi_{\beta'}(x; \omega'))$ .

Notons  $N' = 1 + \max(n, n')$ . Grâce à (4.21), en prenant  $k$  suffisamment grand, on peut supposer que  $d_X(\Phi^{-t}(\rho_k), \Phi^{-t}(\rho)) < r_i$  pour  $|t| \leq N'$ . D'autre part, comme  $\Phi^{-N'}(\rho_k), \Phi^{-N'}(\rho) \in \Lambda_\omega$ , le point (iii) de l'hypothèse 3.6 nous assure que pour  $t \leq -N'$ , on a aussi  $d_X(\Phi^t(\rho_k), \Phi^t(\rho)) < r_i$ .

Mais, on a aussi  $(\Phi^{N'}(\rho_k))^t, (\Phi^{N'}(\rho))^t$ , de sorte que  $d_X(\Phi^t(\rho_k), \Phi^t(\rho)) < r_i$  pour tout  $t \geq N'$ .

Mais alors, par le corollaire 4.26, on voit que  $d_X(\Phi^t(\rho_k), \Phi^t(\rho))$  doit être constante en temps.

Si  $n$  est suffisamment grand, il existe alors un  $t > 0$  tel que  $\Phi^{-t}(\rho)$  et  $\Phi^{-t}(\rho_k)$  sont dans un petit voisinage de l'ensemble capté  $K$ . Mais alors, à cause de l'hyperbolicité, les deux trajectoires  $\Phi^t(\rho_k)$  et  $\Phi^t(\rho)$  ne peuvent rester à une distance constante l'une de l'autre que si  $\rho$  et  $\rho_k$  appartiennent à une même trajectoire. Ceci prouve le lemme.  $\square$

*Preuve du lemme 7.2.* Là encore, nous n'écrivons la preuve que dans le cas (ii), la preuve du cas (i) étant essentiellement la même. Appliquons le théorème 3.41 avec  $\chi \equiv 1$  sur

## 7.1 Une borne inférieure sur la mesure des ensembles nodaux

$B(x_0, r_h)$ . On a, pour  $x \in B(x_0, r_h)$  :

$$E_h(x; \omega) = \sum_{\substack{\tilde{\beta} \in \tilde{\mathcal{B}}^x \\ \tilde{n}(\tilde{\beta}) \leq \tilde{M}_{r, \ell} |\log h|}} e^{i\varphi_{\tilde{\beta}}(x; \omega)/h} a_{\tilde{\beta}, \chi}(x; \omega, h) + R =: S_1(\omega) + S_2(\omega) + R_h,$$

où  $R_h = O(h)$ , et où  $S_1$  désigne la somme pour  $\tilde{n}(\tilde{\beta}) \leq N$ , et  $S_2$  la somme pour  $\tilde{n}(\tilde{\beta}) > N$ , où  $N$  est comme dans le lemme 7.3.

Ainsi, on a  $g_h = \mathbf{F}_h(\cdot, \mathbf{a}, \vec{\omega}) = \Re(S_1) + \Re(S_2) + R'_h$ , où  $S_j = \sum_{i \in I} a_i S_j(\omega_i)$ .

On peut écrire

$$\begin{aligned} |g_h|^2 &= (\Re(S_1) + (S_2 + \overline{S_2})/2)^2 + R_h \\ &= (\Re S_1)^2 + \frac{S_2^2}{4} + \frac{\overline{S_2^2}}{4} + \frac{|S_2|^2}{2} + 2\Re(S_1)\Re(S_2) + R_h \\ &= (\Re S_1)^2 + \frac{S_2^2}{4} + \frac{\overline{S_2^2}}{4} + \frac{1}{2} \sum_{i \in I} |a_i|^2 |S_2(\omega_i)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i, j \in I, i \neq j} a_i \overline{a_j} S_2(\omega_i) \overline{S_2(\omega_j)} + 2\Re(S_1)\Re(S_2) + R_h \end{aligned} \quad (7.8)$$

Lorsqu'on calcule  $\int_{B(x_0, r_h)} |g_h|^2$ , le terme  $\int_{B(x_0, r_h)} (\Re S_1)^2 + \frac{S_2^2}{4} + \frac{\overline{S_2^2}}{4}$  est évidemment positif. Quant au terme  $\int_{B(x_0, r_h)} \frac{1}{2} \sum_{i \in I} |a_i|^2 |S_2(\omega_i)|^2$ , on peut utiliser (6.7) pour trouver une constante  $c > 0$  indépendante de  $h$  telle que

$$\int_{B(x_0, r_h)} \frac{1}{2} \sum_{i \in I} |a_i|^2 |S_2(\omega_i)|^2 \geq cr_h^d + o_{h \rightarrow 0}(r_h^d).$$

Pour prouver le lemme, il nous suffit donc de montrer que

$$\left| \int_{B(x_0, r_h)} 2\Re(S_2)\Re(S_1) + \frac{1}{2} \sum_{i, j \in I, i \neq j} a_i \overline{a_j} S_2(\omega_i) \overline{S_2(\omega_j)} \right| \leq \frac{cr_h^d}{2}. \quad (7.9)$$

$2\Re(S_2)\Re(S_1) + \frac{1}{2} \sum_{i, j \in I, i \neq j} a_i \overline{a_j} S_2(\omega_i) \overline{S_2(\omega_j)}$  peut s'écrire à un reste d'ordre  $\varepsilon$  près comme une somme finie de termes oscillants de phases  $\pm\varphi_{\tilde{\beta}}(x; \omega_i) \pm \varphi_{\tilde{\beta}'}(x; \omega_j)$  avec  $N < \tilde{n}(\tilde{\beta}) \leq N'(\varepsilon)$  et  $\tilde{n}(\tilde{\beta}') \leq N'(\varepsilon)$ . Grâce au lemme 7.3, on sait que pour chaque  $\beta'$ , la phase ne peut s'annuler que sur un nombre fini de courbes.

De même que dans la preuve de la proposition 6.3, on réécrit

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r_h^d} \int_{B(x_0, r_h)} e^{i\varphi_{\tilde{\beta}}(x; \omega_i)/h} a_{\tilde{\beta}, \chi}(x; \omega_i, h) e^{i\pm\varphi_{\tilde{\beta}'}(x; \omega_j)/h} a_{\tilde{\beta}', \chi}(x; \omega_j, h) dx \\ &= \int_{B(0, 1)} e^{i\varphi_{\tilde{\beta}}(r_h x + x_0; \omega_i)/h} a_{\tilde{\beta}, \chi}(r_h x + x_0; \omega_i, h) e^{i\pm\varphi_{\tilde{\beta}'}(r_h x + x_0; \omega_j)/h} a_{\tilde{\beta}', \chi}(r_h x + x_0; \omega_j, h) dx \end{aligned}$$

Par la méthode de la phase stationnaire, on obtient que chacune de ces intégrales est bornée par  $c_\varepsilon o_{h \rightarrow 0} \left( \left( \frac{h}{r_h} \right)^{(d-1)/2} \right)$ .

En prenant  $\varepsilon = c/4$ , puis  $C$  suffisamment grand, on obtient bien (7.9).  $\square$

## 7.2 Structure à l'infini des ensembles nodaux des ondes planes tordues

Soit  $(X, g)$  une variété euclidienne près de l'infini, au sens de la définition 1.1. Rappelons que l'on peut construire l'onde plane tordue  $E_h(\cdot; \omega)$  comme

$$E_h(x; \omega) := (1 - \chi)E_h^0(x; \omega) + E_h^1(x; \omega),$$

où  $E_h^0(x; \omega) = e^{i\frac{x \cdot \omega}{h}}$  et  $E_h^1(\cdot; \omega) = -R_h[h^2\Delta, \chi]E_h^0(E, \omega)$ .

On définit la zone d'ombre pour la vitesse  $\omega$  comme

$$ZO_\omega := \{x \in \mathbb{R}^d \text{ tel qu'il existe } t \geq 0 \text{ tel que } x - t\omega \in X'_0\},$$

où  $X'_0$  est comme dans la définition 1.1. Pour tout  $\epsilon > 0$ , on notera  $ZO_\omega^\epsilon := \bigcup_{|\omega' - \omega| < \epsilon} ZO_{\omega'}$ .

**Proposition 7.4.** *Soit  $(X, g)$  une variété euclidienne près de l'infini, de courbure négative ou nulle. Supposons que  $K$  soit un ensemble hyperbolique pour  $(\Phi^t)$ , et que  $\mathcal{P}(1/2) < 0$ .*

*Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $C_\epsilon > 0$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}^d \setminus ZO_\omega^\epsilon$ , on a*

$$\begin{aligned} |E_h^1(x)| &\leq \frac{C_\epsilon}{|x|^{(d-1)/2}} \\ |\nabla E_h^1(x)| &\leq \frac{C_\epsilon}{h|x|^{(d-1)/2}}, \end{aligned}$$

où  $C_\epsilon$  est indépendante de  $h$ .

*Démonstration.* Rappelons que par l'équation (1.7), on a pour une fonction  $\chi_2 \in C_c^\infty(X)$

$$(1 - \chi_2)E_h^1 = R_h^0[h^2\Delta, \chi_2]E_h^1.$$

On a donc, en appliquant (1.9) :

$$(1 - \chi_2)E_h^1(|x|\xi) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \left(\frac{1}{h}\right)^d \int_{\mathbb{S}^{d-1}} e^{i|x|\xi \cdot \theta/h} \psi_{-\xi}(\theta) \mathcal{F}([h^2\Delta, \chi_2]E_h^1)(-\theta/h) d\theta + R_h, \quad (7.10)$$

où  $\mathcal{F}$  désigne la transformée de Fourier. Rappelons que  $R_h \in \mathcal{S}$  et  $R_h = O(h^\infty)$  dans toutes les semi-normes sur  $\mathcal{S}$ , et que  $\psi_{-\xi}$  est supportée sur un petit voisinage de  $-\xi$ .

Remarquons qu'il nous suffit de prouver la première inégalité, car on a en dérivant (7.10)

$$\nabla((1 - \chi_2)E_h^1(|x|\xi)) = \frac{\theta}{2h} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^d \left(\frac{1}{h}\right)^d \int_{\mathbb{S}^{d-1}} e^{i|x|\xi \cdot \theta/h} \psi_{-\xi}(\theta) \mathcal{F}([h^2\Delta, \chi_2]E_h^1)(-\theta/h) d\theta + \nabla R_h,$$

d'où l'on déduit facilement la seconde inégalité de la première.

## 7.2 Structure à l'infini des ensembles nodaux des ondes planes tordues

L'intégrale (7.10) peut être évaluée par la méthode de la phase stationnaire, où  $|x|^{-1}$  est vu comme petit paramètre. La phase n'est stationnaire qu'en  $\theta = -\xi$  donc on a

$$|(1 - \chi_2)E_h^1(|x|\xi)| \leq \frac{C}{h^d} \left(\frac{h}{|x|}\right)^{(d-1)/2} \mathcal{F}([h^2\Delta, \chi_2]E_h^1)(\xi/h) + O\left(\frac{1}{|x|^{(d+1)/2}}\right), \quad (7.11)$$

où le reste  $O\left(\frac{1}{|x|^{(d+1)/2}}\right)$  est uniforme en  $h$ .

La proposition sera prouvée si on peut montrer que  $\mathcal{F}([h^2\Delta, \chi_2]E_h^1)(\xi/h) \leq Ch^{(d+1)/2}$ , pour  $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$  avec  $|\xi - \omega| \geq \epsilon$ . Par le théorème 3.41, on sait que  $E_h$ , et donc aussi  $[h^2\Delta, \chi_2]E_h^1$ , peut s'écrire comme une somme d'états lagrangiens, plus un reste arbitrairement petit, ce que l'on peut écrire de manière synthétique comme :

$$([h^2\Delta, \chi_2]E_h^1)(x) = \sum_{n=1}^{N_h} f_n(x; h)e^{i\varphi_n(x)/h} + O(h^{(d+3)/2}),$$

où les  $f_n(x; h)$  sont tous à support dans une couronne  $\Omega$  incluse dans  $X \setminus X_0$ , indépendante de  $n$  et de  $h$ . On a, par (3.50)

$$\sum_{n=1}^{N_h} \|f_n\|_{C^0} \leq Ch.$$

Calculons la transformée de Fourier terme par terme. On a

$$\mathcal{F}(f_n(\cdot; h)e^{i\varphi_n(\cdot)/h})(\xi/h) = \int_{\Omega} f_n(x; h)e^{i(\varphi_n(x) - \xi \cdot x)/h} dx. \quad (7.12)$$

Pour chaque  $n$  et chaque  $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$  avec  $|\xi - \omega| \geq \epsilon$ , l'ensemble  $\{x \in \Omega; \partial\varphi_n(x) = \xi\}$  est soit vide, soit un segment. En effet,  $(x, \partial\varphi_n(x))$  est l'image d'un point de  $\mathcal{L}_0$  par le flot géodésique, qui est passé par différents ouverts à différents instants. Comme les trajectoires sont rectilignes dans la partie euclidienne, pour tout  $x \in \Omega$ ,  $\partial\varphi_n(x + t\partial\varphi_n(x))$  est indépendant de  $t \geq 0$ . D'autre part, il n'existe qu'un seul segment sur lequel  $\partial\varphi_n(x) = \xi$  : sinon, on pourrait construire deux trajectoires qui resteraient proches l'une de l'autre pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , ce qui contredirait le corollaire 4.26.

On en déduit que pour chaque  $n$  et chaque  $\xi$ , l'intégrale (7.12) est stationnaire dans une direction, et non stationnaire dans les directions transverses. On a donc

$$\mathcal{F}(f_n(\cdot; h)e^{i\varphi_n(\cdot)/h})(\xi/h) \leq C \det |\partial^2\varphi_n|^{-1/2} \|f_n\|_{C^k} h^{(d-1)/2},$$

pour un  $k$  assez grand.

Le fait que  $|\xi - \omega| \geq \epsilon$  implique que les points arrivant avec une vitesse  $\xi$  depuis  $\mathcal{L}_0$  ont dû passer par la région de courbure strictement négative. On peut en déduire, par des arguments similaires à ceux de la section 4.2, que  $\det |\partial^2\varphi_n(x_0)|^{-1/2}$  est borné par une constante  $C_\epsilon$

En sommant sur  $n$ , on obtient bien que  $\mathcal{F}([h^2\Delta, \chi_2]E_h^1)(\xi/h) \leq C_\epsilon h^{(d+1)/2}$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$

**Remarque 7.5.** Si  $x$  appartient à la zone d'ombre  $ZO_\omega$ , il est possible que certains des états lagrangiens qui composent  $E_h^1$  soient associés à la lagrangienne  $\mathcal{L}_0$ . L'argument de phase stationnaire ci-dessus ne nous permettra donc plus d'obtenir  $\mathcal{F}([h^2\Delta, \chi_2]E_h^1)(\xi/h) \leq Ch^{(d+1)/2}$ . C'est ce qui explique que, dans la figure 7.1, l'amplitude de  $E_h$  soit plus faible dans la zone d'ombre qu'ailleurs.

Néanmoins, l'équation (7.11) reste vraie, et nous assure que

$$|E_h^1(x)|, |\nabla E_h^1(x)| = O_h\left(\frac{1}{|x|^{(d-1)/2}}\right), \quad (7.13)$$

mais il n'est pas facile d'avoir un contrôle sur la manière dont le  $O$  dépend de  $h$ .

Remarquons que l'équation (7.11), et donc l'équation (7.13) sont vraies dès que  $X$  est une variété à infinis euclidiens, sans aucune hypothèse dynamique.

Le corollaire suivant nous dit que, loin de la région d'interactions, et hors de la zone d'ombre, les ensembles nodaux de  $\Re E_h(\cdot; \omega)$  ressemblent beaucoup à ceux de  $\Re E_h^0(\cdot; \omega)$ , c'est-à-dire à une réunion d'hyperplans orthogonaux à  $\omega$ , espacés d'une distance  $h\pi$ . Cette ressemblance sera d'autant meilleure qu'on s'éloignera de la région d'interactions. Ce phénomène peut-être observé dans la figure 7.1, dans le cas de la diffusion par deux obstacles. On observera que le comportement dans la zone d'ombre est assez différent du comportement dans le reste de la région éloignée des obstacles.

Pour énoncer le résultat, nous munirons  $\mathbb{R}^d$  d'une base orthonormale dont  $\omega$  sera le premier vecteur, et si  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $(x_1, \dots, x_d)$  correspondra aux coordonnées de  $x$  dans cette base.

Dans le corollaire suivant, nous indexerons les ensembles nodaux loin de la région d'interaction (et hors de la zone d'ombre) par un indice  $k \in \mathbb{Z}$ . Les ensembles indexés par  $k$  et  $k+1$  seront typiquement à une distance l'un de l'autre de l'ordre de  $h$  : il est donc naturel de chercher à décrire ces ensembles nodaux dans la limite  $|hk| \rightarrow \infty$ .

**Corollaire 7.6.** On fait les mêmes hypothèses que dans la proposition 7.4. Soit  $\epsilon > 0$ . Il existe alors  $\mathcal{R}_\epsilon > 0$  et, pour tous  $k \in \mathbb{Z}$  et  $0 < h < 1$ , des fonctions  $f_{h,k} \in C^\infty(\mathbb{R}^{d-1}; \mathbb{R})$  avec  $f_{h,k} \leq f_{h,k+1}$  et  $\lim_{|hk| \rightarrow \infty} \|f_{h,k} - hk\pi\|_{C^1} = 0$ , telles que

$$\begin{aligned} & \{x \in \mathbb{R}^d \setminus (B(0; \mathcal{R}_\epsilon) \cup ZO_\omega); \mathbf{F}_h(x; \omega) = 0\} \\ & = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \setminus (B(0; \mathcal{R}_\epsilon) \cup ZO_\omega); \exists k \in \mathbb{Z}; x_1 = f_{h,k}(x_2, \dots, x_d)\}. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Fixons  $(x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^{d-1}$ ,  $h \in ]0, 1[$ , et  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $(hk\pi, x_2, \dots, x_d)$  soit en dehors d'une boule assez grande et de la zone d'ombre.

Pour  $x_1 \in [k\pi h; (k+1)\pi h]$ , notons  $r(x_1)e^{i\theta(x_1)} := E_h(x_1, x_2, \dots, x_d)$ . Comme  $|E_h^1| = o_{|x| \rightarrow \infty}(1)$ ,  $r(x_1)$  ne s'annule pas dès que  $|x|$  est assez grand, et donc  $\theta(x_1)$  est bien définie et continue. En utilisant le fait que  $|E_h^1| = o_{|x| \rightarrow \infty}(1)$  et  $|\nabla E_h^1| = o_{|x| \rightarrow \infty}(1)$ , on voit que quand  $|x|$  est assez grand,  $x_1 \mapsto \theta(x_1)$  est strictement croissante sur  $[k\pi h; (k+1)\pi h]$ , et est

## 7.2 Structure à l'infini des ensembles nodaux des ondes planes tordues

proche de l'identité au sens  $C^1$ . En particulier,  $\theta_1$  prend une unique fois la valeur  $\pi/2$  sur cet intervalle, et ne prend jamais la valeur  $-\pi/2$ . On en déduit donc que  $\Re E_h(\cdot, x_2, \dots, x_d)$  s'annule une unique fois sur  $[(k\pi h; (k+1)\pi h]$ , en un point proche de  $(k+1/2)\pi h$

Les ensembles nodaux peuvent donc bien être écrits comme la réunion des graphes de fonctions,  $C^\infty$  par régularité de  $\Re E_h$ , et proches des ensembles nodaux de  $\Re E_h^0$  au sens  $C^0$  quand on s'éloigne de la région d'interactions. Les tangentes à ces graphes sont perpendiculaires au gradient de  $\Re E_h$ , qui est proche du gradient de  $\Re E_h^1$ , qui est vertical. Par conséquent, les tangentes sont toutes presque horizontales, et donc les  $f'_{h,k}$  tendent bien vers zéro quand  $|hk| \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Remarque 7.7.** *On n'a en général pas  $\lim_{|hk| \rightarrow \infty} \|f_{h,k} - hk\pi\|_{C^2} = 0$ . Ceci se voit, dans le cas de la diffusion par des obstacles, sur la figure 7.1 : même quand on est loin des obstacles, les lignes nodales oscillent rapidement autour de droites verticales.*

*Une manière informelle, mais simple, de comprendre ce phénomène est la suivante : en un point loin de la région d'interactions, toutes les géodésiques provenant de la région d'interactions ont des directions très proches. Ainsi, loin de la zone d'interactions et en dehors de la zone d'ombre,  $\mathbf{F}_h$  est la somme de  $\cos(\omega \cdot x)$ , et de nombreux cosinus donc la somme des amplitudes est petite, et dont les directions de propagations sont très proches.*

*En faisant l'approximation que les directions sont en fait identiques, la fonction  $\mathbf{F}_h$  ressemblera près de  $x$  (avec  $|x| \gg 1$ ) à  $\cos(\omega \cdot x) + \epsilon \cos(\theta \cdot x)$ , où  $\epsilon \sim 1/|x| \ll 1$ , et  $\theta = x/|x|$ . L'équation  $\mathbf{F}_h = 0$  se réécrit donc  $\cos(x_1/h) + \epsilon \cos(x \cdot \theta/h) = 0$ .*

*Dans le cas où  $\theta$  est perpendiculaire à  $\omega$ , les solutions de cette équation sont de la forme  $x_1 = hk + h \arccos(\epsilon \cos(x \cdot \theta/h))$ .*

*On donc bien une réunion de graphes de la forme  $x_1 = f(x_2, \dots, x_d)$ . Quand on dérive une fois l'une des fonctions, on obtient une quantité de l'ordre de  $\epsilon$ , mais on obtient une quantité de l'ordre de  $\epsilon/h$  quand on dérive une seconde fois, qui ne tend donc pas vers zéro quand  $|hk| = h/\epsilon \rightarrow \infty$ .*

*Une manière plus rigoureuse, et plus amusante, de montrer que  $\lim_{|hk| \rightarrow \infty} \|f_{h,k} - hk\pi\|_{C^2} \neq 0$ , consiste à calculer  $I_{h,k} := \int_{G_{h,k}} |\mathbf{F}_h|^2$ , où  $G_{h,k}$  désigne le graphe de  $f_{h,k}$ . On peut alors écrire  $\mathbf{F}_{h,k}$  comme dans le théorème 1.23, et décomposer  $I_{h,k}$  comme une somme de termes diagonaux (dont la somme est strictement positive), et de termes non-diagonaux. Si on avait  $\lim_{|hk| \rightarrow \infty} \|f_{h,k} - hk\pi\|_{C^2} = 0$ , on pourrait appliquer un argument de phase non-stationnaire comme dans le chapitre 6, et montrer que les termes non-diagonaux sont négligeables. On obtiendrait alors que  $I_{h,k} > c + o_{h \rightarrow 0}(1)$ , avec  $c > 0$ , ce qui contredirait le fait que  $\mathbf{F}_h$  est nulle sur  $G_{h,k}$ .*

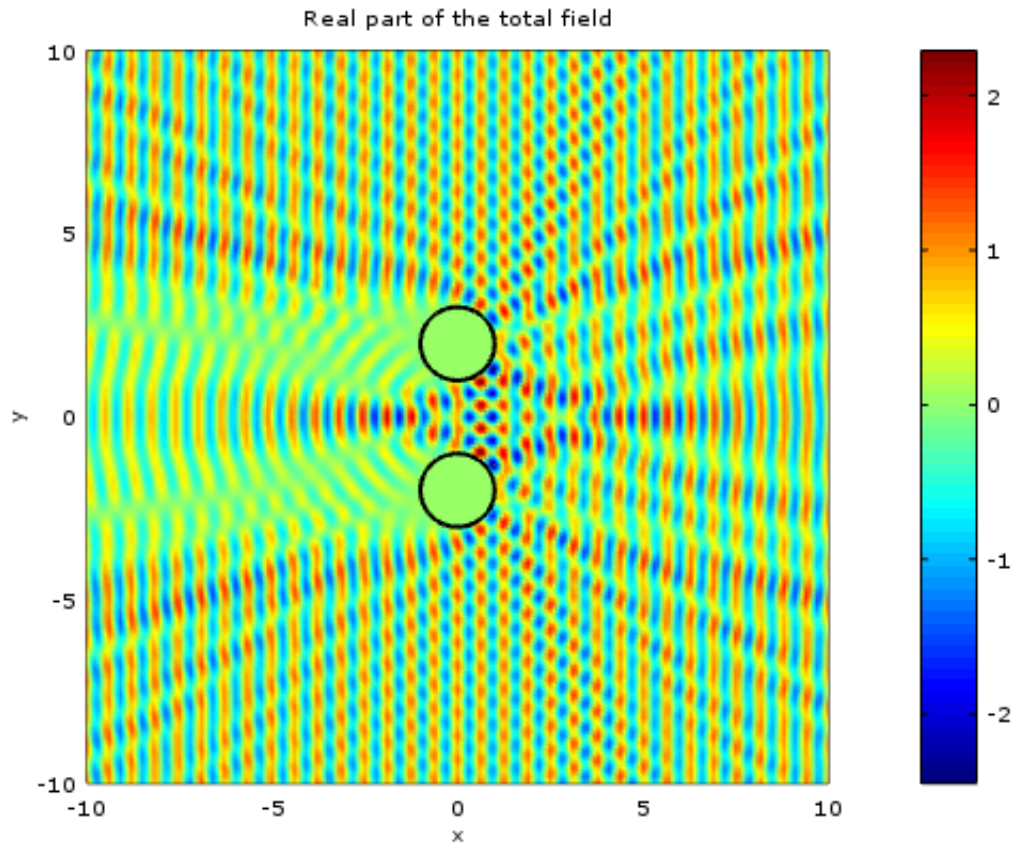


FIGURE 7.1 – La partie réelle d’une onde plane tordue, pour  $\omega = \pi$ , c’est-à-dire pour une onde se propageant depuis la droite, et à longueur d’onde  $10/(2\pi)$ , soit  $h = 2 \cdot \pi/20$ . Cette simulation a été réalisée sous Octave (cf. [EBHW15]), grâce au package  $\mu$ -diff (cf. [TACA15]).

## 7.3 Domaines nodaux d'une somme d'onde planes tordues

### Plusieurs manières de compter les domaines nodaux

**Définition 7.8.** Si  $f \in C^0(X)$ , les domaines nodaux de  $f$  sont les composantes connexes de  $\{x \in X; f(x) \neq 0\}$ .

Si  $\Omega$  est un ouvert borné, on définit les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} N_{\subset\Omega}(f) &= \#\{\text{domaines nodaux de } f \text{ inclus dans } \Omega\} \\ N_{\cap\Omega}(f) &= \#\{\text{domaines nodaux de } f \text{ intersectant } \Omega\} \\ N_{|\Omega}(f) &= \#\{\text{domaines nodaux de } f|_{\Omega}\}. \end{aligned} \tag{7.14}$$

On a toujours

$$N_{\subset\Omega}(f) \leq N_{\cap\Omega}(f) \leq N_{|\Omega}(f).$$

Remarquons que  $N_{\subset\Omega}(f)$  et  $N_{\cap\Omega}(f)$  sont croissantes par rapport à  $\Omega$ , mais que  $N_{|\Omega}(f)$  ne l'est pas forcément.

Dans la suite, on s'intéressera tout particulièrement aux domaines nodaux de  $\mathbf{F}_h(\cdot; \omega)$ , ou plus généralement, pour  $I$  fini,  $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in I} \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^{|I|}$ ,  $\vec{\omega} = (\omega_i)_{i \in I} \in (\mathbb{S}^{d-1})^{|I|}$ , aux domaines nodaux d'une fonction de la forme

$$\mathbf{F}_h(\cdot, \mathbf{a}, \vec{\omega}) := \sum_{i \in I} a_i \mathbf{F}_h(\cdot, \omega_i).$$

#### 7.3.1 Bornes supérieures sur le nombre de domaines nodaux

La première des quantités définies dans (7.14) peut être majorée assez facilement. En effet, pour tout  $\Omega \subset X$  borné et à bord lisse, et pour tous  $\mathbf{a}, \vec{\omega}$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$N_{\subset\Omega}(\mathbf{F}_h(\cdot, \mathbf{a}, \vec{\omega})) \leq \frac{C}{h^d}. \tag{7.15}$$

Pour prouver cette inégalité, il suffit d'utiliser [BM82, Lemme 16] (qui généralise les résultats de [Ple56] et [Pee57]), qui nous donne une constante  $c_\Omega > 0$  telle que pour toute solution de  $(-h^2\Delta - 1)f = 0$ , chaque domaine nodal de  $f$  inclus dans  $\Omega$  a un volume supérieur à  $c_\Omega h^d$ .

La troisième des quantités définies dans (7.14) est très difficile à estimer. Elle est a priori bornée par  $N_{\subset\Omega}(f)$ , plus le nombre d'intersections de l'ensemble nodal de  $f$  avec  $\partial\Omega$ , mais cette borne peut-être infinie... À notre connaissance, le seul cas où une borne supérieure intéressante sur cette quantité soit connue est celui traité dans [JN15] : si  $X$  est une surface hyperbolique convexe cocompacte, si  $\Omega$  est le cœur convexe de  $X$ , et si  $\omega$  est générique. On a alors  $N_{|\Omega}(E_h(\cdot, \omega)) \leq Ch^{-2}$ .



Il est naturel de se demander si, pour tout  $\Omega$  et pour tous  $\mathbf{a}, \omega$ , il existe  $C > 0$  telle que

$$N_{\Omega}(\mathbf{F}_h(\cdot, \mathbf{a}, \vec{\omega})) \leq \frac{C}{h^d}. \quad (7.16)$$

Nous n'apporterons qu'une réponse partielle à cette question, sous la forme de la proposition suivante. Une approche générale pour montrer (7.16) est la suivante. Soit  $\Omega'$  un ouvert tel que  $\Omega \Subset \Omega'$ ; si  $f \in C^0(X)$ , notons  $N_{\Omega, \Omega'}(f)$  le nombre de domaines nodaux de  $f$  intersectant à la fois  $\partial\Omega$  et  $\partial\Omega'$ . On a toujours

$$N_{\Omega}(f) \leq N_{\subset\Omega'} + N_{\Omega, \Omega'}(f).$$

On sait majorer le premier terme du membre de droite par (7.15), pour tout  $\Omega'$ . Il s'agit donc de majorer  $N_{\Omega, \Omega'}(f)$ , pour  $\Omega'$  éventuellement beaucoup plus grand que  $\Omega$ .

**Proposition 7.9.** (i) Soit  $(X, g)$  une variété riemannienne de dimension 2 vérifiant l'hypothèse 3.6 et l'hypothèse 3.1 à l'infini. Supposons que le flot géodésique  $(\Phi^t)$  vérifie l'hypothèse 3.9 d'hyperbolicité, l'hypothèse 3.24 concernant la pression topologique. Soit  $g_h := E_h$  une fonction propre généralisée de la forme décrite dans l'hypothèse 3.31, où  $E_h^0$  est associée à une variété lagrangienne  $\mathcal{L}_0$  qui vérifie l'hypothèse d'invariance 3.12 ainsi que l'hypothèse 3.16.

(ii) Soit  $(X, g)$  une variété riemannienne de dimension 2 à infinis euclidiens vérifiant l'hypothèse 3.6. Supposons que le flot géodésique  $(\Phi^t)$  vérifie l'hypothèse 3.9 d'hyperbolicité, l'hypothèse 3.24 concernant la pression topologique. I un ensemble fini non vide,  $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in I} \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^{|I|}$ ,  $\vec{\omega} = (\omega_i)_{i \in I} \in (\mathbb{S}^1)^{|I|}$ , et soit  $g_h := \mathbf{F}_h(\cdot, \mathbf{a}, \vec{\omega})$  comme dans (7.1). On a alors

$$N_{\Omega}(g_h) \leq \frac{C}{h^2}. \quad (7.17)$$

*Démonstration.* Comme nous l'avons vu précédemment, il suffit d'estimer le nombre de domaines nodaux intersectant à la fois  $\partial\Omega$  et  $\partial\Omega'$  pour un  $\Omega'$  contenant  $\Omega$ . Deux tels domaines nodaux sont séparés par une ligne nodale joignant  $\partial\Omega$  à  $\partial\Omega'$ . Par la borne supérieure dans (7.2) et (7.3), il ne peut pas y avoir plus de  $C/h$  lignes nodales joignant  $\partial\Omega$  à  $\partial\Omega'$ , et donc pas plus de  $C/h$  éléments dans  $N_{\Omega, \Omega'}(g_h)$ .  $\square$

**Remarque 7.10.** La preuve ci-dessus ne fonctionne qu'en dimension 2. Si  $(X, g)$  est une variété euclidienne près de l'infini de dimension supérieure à 2, la proposition 7.4 semble un bon point de départ pour prouver une borne analogue à (7.17).

### 7.3.2 Borne inférieure sur le nombre de domaines nodaux de la somme de deux ondes planes tordues sur des surfaces génériques de courbure négative

Avant de prouver théorème 1.28, rappelons ce que nous entendons par une perturbation générique d'une métrique, ainsi que l'énoncé du théorème.

### 7.3 Domaines nodaux d'une somme d'onde planes tordues

Soit  $(X, g)$  une variété riemannienne, et soit  $\Omega \subset X$  un ouvert borné. On note  $\mathcal{G}_\Omega$  l'ensemble des métriques lisses sur  $X$  qui coïncident avec  $g$  en dehors de  $\Omega$ . Pour tout  $k \geq 2$ , la distance  $\|g - g'\|_{C^k(\Omega)}$  entre des éléments de  $\mathcal{G}_\Omega$  n'est pas intrinsèque, car on la définit en utilisant des cartes locales. Néanmoins, la topologie induite par cette distance ne dépend pas du choix de coordonnées.

Soit  $P(g')$  une propriété pouvant être vérifiée par une métrique  $g'$  sur  $X$ . On dira que  $P$  est vérifiée pour une perturbation  $C^k(\Omega)$ -générique de  $g$  s'il existe un voisinage ouvert  $G_0$  de  $g$  dans  $\mathcal{G}_\Omega$  tel que l'ensemble  $\{g' \in G_0; P(g') \text{ est vérifiée}\}$  est ouvert et dense dans  $G_0$  pour la topologie  $C^k(\Omega)$ .

Rappelons le théorème 1.28 sur le comptage de domaines nodaux, en se souvenant que  $X_0$  est comme dans la définition 1.1.

**Théorème.** *Supposons que  $(X, g)$  soit une variété euclidienne près de l'infini de dimension 2, de courbure sectionnelle  $\leq 0$ . Supposons que la courbure sectionnelle est strictement négative sur  $X_0$ , et que  $\mathcal{P}(1/2) < 0$ .*

*Il existe  $\epsilon > 0$  tel que pour tous  $\omega_0, \omega_1 \in \mathbb{S}^1$  avec  $|\omega_0 - \omega_1| < \epsilon$  et  $\omega_0 \neq \omega_1$ , et pour tout ouvert non-vide  $\Omega \subset X$ , le résultat suivant soit vrai. Il existe un ouvert  $\mathcal{O}_\Omega \Subset X_0$  tel que pour une perturbation  $C^k(\mathcal{O}_\Omega)$ -générique  $g'$  de  $g$ , il existe des constantes  $c > 0$  et  $h_0 > 0$  tels que pour tout  $0 < h < h_0$ , on a*

$$N_{\subset \Omega}(\mathbf{F}_h(\cdot, \omega_0; g') + \mathbf{F}_h(\cdot, \omega_1; g')) \geq h^{-2}. \quad (7.18)$$

#### Idée de la preuve

La preuve du théorème 1.28 sera essentiellement locale. Grâce au théorème 3.41, on sait que localement,  $E_h(\cdot, \omega)$  ressemble à une somme d'ondes planes. Ainsi, si  $x_0 \in \Omega$  et si  $\psi$  est une carte locale d'un voisinage de l'origine dans  $\mathbb{R}^2$  vers un voisinage ouvert de  $x_0$  inclus dans  $\Omega$  telle que  $\psi(0) = x_0$ , nous verrons dans l'équation (7.34) de la section 7.5 que l'on peut écrire, pour tout  $x \in B(0, h^{-1/3})$  et tout  $h$  suffisamment petit

$$\mathbf{F}_h(\psi(hx), \omega_0) + \mathbf{F}_h(\psi(hx), \omega_1) = \sum_{n=0}^M \sum_{\beta \in \mathcal{B}_{\mathcal{K}, n}} \left[ b_\beta \cos(x \cdot k_{\beta, \omega_0} + \theta_{\beta, h}^0) + b_\beta \cos(x \cdot k_{\beta, \omega_1} + \theta_{\beta, h}^1) \right] + R,$$

où  $k_{\beta, \omega_i} = k_{\beta, \omega_i}(x_0) = \nabla_{x_0} \varphi(x_0, \omega_i)$  pour  $i = 0, 1$  et  $b_\beta = b_\beta(x_0) = |a_{n, \beta}(x_0, \omega_0)|$ , et où  $R$  est un reste qui peut être rendu plus petit que toute constante, en prenant  $M$  plus grand, et  $|\omega_0 - \omega_1|$  plus petit.

Dans la section 7.4, nous donnerons un critère sur les amplitudes  $b_\beta$  et les directions  $k_{\beta, \omega_i}$  pour qu'une somme d'ondes planes comme ci-dessus possède au moins  $cr^2$  domaines nodaux dans une boule de rayon  $r$ , pour un  $c > 0$ . Ces domaines nodaux seront stables par petites perturbations, de sorte que l'on pourra négliger le reste  $R$ .

Pour s'assurer que le critère de la section 7.4 soit vérifié, il nous faudra faire une perturbation générique de la métrique. Après cette perturbation, on peut appliquer le

théorème 7.15 de la section 7.4, pour déduire que  $\mathbf{F}_h(\cdot, \omega_0) + \mathbf{F}_h(\cdot, \omega_1)$  possède au moins  $ch^{-2/3}$  domaines nodaux dans  $B(x_0, h^{2/3})$ .

Le critère du théorème 7.15 est stable par petites perturbations. Ainsi, si on prend un point  $x_1$  assez proche de  $x_0$ , les vecteurs et les amplitudes  $k_{\beta, \omega_i}(x_1)$  et  $b_{\beta}(x_1)$  vérifieront encore le critère du théorème 7.17, de sorte que  $\mathbf{F}_h(\cdot, \omega_0) + \mathbf{F}_h(\cdot, \omega_1)$  aura au moins  $ch^{-2/3}$  domaines nodaux dans un voisinage de  $x_1$  de rayon  $h^{2/3}$ .

En recouvrant un petit voisinage de  $x_0$ , de taille indépendante de  $h$ , par  $c'h^{-4/3}$  boules de rayon  $h^{2/3}$ , et en disant que dans chaque boule, on a  $ch^{2/3}$  domaines nodaux, on obtient bien le résultat.

### Optimalité du théorème ?

L'ingrédient principal de la preuve est la proposition 7.17. Notre preuve de cette proposition ne fonctionne qu'en dimension 2, et nous ne savons pas s'il est possible de la généraliser en dimension plus grande. Si ceci était possible, le résultat du théorème 1.28 serait également vrai en dimension plus grande.

Le fait que (7.18) ne soit vrai que pour une perturbation générique de la métrique est sans doute un artefact de la preuve, mais nous ne savons pas prouver le résultat pour toute métrique  $g$  vérifiant les hypothèses du théorème. En revanche, pour que (7.18) soit vérifiée, il est bien indispensable de prendre la somme d'au moins deux ondes planes : nous avons vu dans le corollaire 7.6 que  $\mathbf{F}_h(\cdot, \omega)$  n'avait aucun domaine nodal compact suffisamment loin de la région d'interactions, en dehors de la zone d'ombre. La morale de ce théorème pourrait donc être « pour voir quelque chose d'intéressant, il faut voir double », et le théorème 1.28 pourrait être appelé « théorème de l'ivrogne ».

## 7.4 Un critère pour qu'une somme finie d'onde planes sature la borne de Courant

### 7.4.1 Énoncé du critère

#### Domaines nodaux

Nous aurons besoin d'une définition plus précise des domaines nodaux, tenant compte de leur stabilité par petites perturbations.

**Définition 7.11.** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , et  $f \in C^0(\Omega)$ . Soient  $N \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^2$  et  $\epsilon > 0$ . On dira que  $x_1, \dots, x_N$  appartiennent à des domaines nodaux compacts et  $\epsilon$ -stables de  $f$  différents si pour tout  $g \in C^0(\mathbb{R}^2)$  telle que  $\|g\|_{C^0} \leq \epsilon$ , et pour tout  $i, j = 1, \dots, N$ ,  $x_i$  appartient à une composante connexe compacte de  $\{x \in \Omega; f + g \neq 0\}$ , et si  $x_i$  et  $x_j$  n'appartiennent pas à la même composante connexe de  $\{x \in \Omega; f + g \neq 0\}$ .

Si ceci est vrai pour un choix de  $x_1, \dots, x_N$ , on dira que  $f$  a au moins  $N$  domaines nodaux compacts et  $\epsilon$ -stables. On dira que  $f$  a  $N$  domaines nodaux compacts et  $\epsilon$ -stables

#### 7.4 Un critère pour qu'une somme finie d'onde planes sature la borne de Courant

si  $f$  a au moins  $N$  domaines nodaux compacts et  $\epsilon$ -stables mais n'a pas au moins  $N + 1$  domaines nodaux compacts et  $\epsilon$ -stables.

Si  $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$ , on notera

$$N_{f,\epsilon}(R) = \#\{\text{domaines nodaux compacts et } \epsilon\text{-stables de } f \text{ dans } B(0, R)\}. \quad (7.19)$$

Remarquons que  $R \mapsto N_{f,\epsilon}(R)$  est une fonction croissante.

Nous allons nous intéresser aux domaines nodaux compacts d'une fonction de la forme

$$\sum_{i \in I} a_i \cos(k_i \cdot x + \theta_i). \quad (7.20)$$

Le théorème 7.15 ci-dessous nous donne une borne inférieure sur le nombre de domaines nodaux d'une telle fonction, sous certaines hypothèses sur les directions  $k_i$  et sur les amplitudes  $a_i$ , que nous allons maintenant décrire.

#### $\epsilon$ -indépendance

**Définition 7.12.** Soient  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{R}^2$ , et soit  $\epsilon, T > 0$ . On dira que  $k_1, \dots, k_n$  sont  $(\epsilon, T)$ -indépendants s'il existe  $u \in \mathbb{S}^1$  tel que pour tous  $\theta, \theta' \in \mathbb{T}^n$ , il existe  $t(\theta, \theta') \in [0, T]$  tel que

$$\left(\theta + t(k_1 \cdot u, \dots, k_n \cdot u)\right) \bmod 1 \in B(\theta', \epsilon). \quad (7.21)$$

Nous dirons parfois que  $k_1, \dots, k_n$  sont  $\epsilon$ -indépendants s'il existe  $T > 0$  tel que  $k_1, \dots, k_n$  sont  $(\epsilon, T)$ -indépendants.

Remarquons que si une famille  $\mathbf{k}$  est  $(\epsilon, T)$ -indépendante, toute sous-famille non vide de  $\mathbf{k}$  est aussi  $(\epsilon, T)$ -indépendante.

Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $c(\epsilon) > 0$  tel que le fait qu'une famille de vecteurs  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{R}^2$  soit  $\epsilon$ -indépendante est équivalent au fait qu'il existe un  $u \in \mathbb{S}^1$  tel que

$$\forall p_1, \dots, p_n \in \mathbb{Z}, \left(\sum_i p_i k_i \cdot u = 0\right) \Rightarrow \left(\forall i, |p_i| = 0\right) \text{ ou } \left(\exists i, |k_i| \geq c(\epsilon)\right). \quad (7.22)$$

Nous renvoyons le lecteur à [BBB03, §4] pour une preuve de ce fait, et pour une borne sur  $c(\epsilon)$ .

Ainsi, par la contraposée de (7.22), l'ensemble des vecteurs qui ne sont pas  $\epsilon$ -indépendants sont dans la réunion d'un nombre fini de noyau de formes linéaires non nulles. Par conséquent, une application du théorème de Baire nous donne la remarque suivante.

**Remarque 7.13.** Pour tous  $k_1, \dots, k_N \in \mathbb{R}^d$ , pour tous  $\epsilon, \delta > 0$ , l'ensemble des  $(k'_1, \dots, k'_N) \in \mathbb{R}^{Nd}$  tels que  $(k_1 + k'_1, \dots, k_N + k'_N)$  est  $\epsilon$ -indépendante et  $|k'_i| \leq \delta$  pour tout  $i = 1, \dots, N$  est ouvert et dense dans  $B(0, \delta) \subset \mathbb{R}^{Nd}$ .

De plus, si la famille  $(k_1, \dots, k_{n'})$  est  $\epsilon$ -indépendante pour un  $n' < N$ , alors l'ensemble des  $(k'_{n'+1}, \dots, k'_N) \in \mathbb{R}^{(N-n')d}$  tels que  $(k_1, \dots, k_{n'}, k_{n'+1} + k'_{n'+1}, \dots, k_N + k'_N)$  est  $\epsilon$ -indépendante et  $|k'_i| \leq \delta$  pour tout  $i = n' + 1, \dots, N$  est ouvert et dense dans  $B(0, \delta) \subset \mathbb{R}^{(N-n')d}$ .

### $\epsilon$ -non-domination

Nous allons demander que parmi les  $a_i$ , il n'y ait pas une famille d'amplitude qui domine toutes les autres, au sens de la définition suivante.

**Définition 7.14.** Soit  $\epsilon > 0$  et soit  $(a_i)_{i \in I}$  une famille finie ou dénombrable de nombres réels. On dira que  $(a_i)_{i \in I}$  est  $\epsilon$ -non-dominée s'il existe  $(u_i)_{i \in I} \in \{-1, 1\}^I$  tel que

$$\left| \sum_{i \in I} u_i a_i \right| \leq \epsilon.$$

Par exemple, c'est un exercice standard de montrer que si  $I = \mathbb{N}$  et  $a_i \rightarrow 0$  mais  $\sum_{i \in \mathbb{N}} |a_i| = +\infty$ , alors  $(a_i)$  est  $\epsilon$ -non-dominée pour tout  $\epsilon > 0$ .

Si les  $(a_i)_{i \in I}$  peuvent être regroupés par paires  $a_i, a_{i'}$  avec  $|a_i| = |a_{i'}|$ , alors la famille sera  $\epsilon$ -non-dominée pour tout  $\epsilon > 0$ . C'est dans cette situation que nous serons dans la section suivante, mais nous préférons énoncer notre critère sous la forme la plus générale possible.

### Énoncé du critère

Soit  $\mathbf{k} = (k_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs de  $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$  indexée par un ensemble fini  $I$ , et soit  $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in I}$  un ensemble de nombres réels positifs indexé par  $I$ , tels que  $\sum_{i \in I} |a_i|^2 = 1$ . On définit la mesure

$$\mu_{\mathbf{k}, \mathbf{a}} = \sum_{i \in I} |a_i|^2 (\delta_{k_i} + \delta_{-k_i}),$$

qui est une mesure de probabilité sur  $\mathbb{S}^1$ , symétrique par rapport à l'origine.

Si  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_i)_{i \in I}$  est une famille de nombres réels, on pose

$$f_{\mathbf{a}, \mathbf{k}, \boldsymbol{\theta}}(x) := \sum_{i \in I} a_i \cos(k_i \cdot x + \theta_i).$$

Rappelons que la quantité  $N_{f, \epsilon}(r)$  a été définie dans (7.19).

**Théorème 7.15.** Soient  $I$ ,  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{a}$  et  $\boldsymbol{\theta}$  comme ci-dessus. Supposons que la mesure  $\mu_{\mathbf{k}, \mathbf{a}}$  sur  $\mathbb{S}^1$  ait au moins 6 points dans son support.

Alors il existe des constantes strictement positives  $\mathcal{R}_0, \epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  et  $c$  dépendant uniquement de  $\sup_{i \in I} a_i$ , des 6 points contenus dans le support de  $\mu$  et de leurs amplitudes, telles que le résultat suivant soit vrai.

#### 7.4 Un critère pour qu'une somme finie d'onde planes sature la borne de Courant

Supposons que les vecteurs  $(k_i)_{i \in I}$  soient  $\epsilon_0$ -indépendants. Supposons de plus qu'il existe une partition de  $\mathbb{S}^1 = \bigsqcup_{l=1}^L S_l$  en des ensembles disjoints de diamètres inférieurs à  $\epsilon_1$ , telle que pour tout  $l = 1, \dots, L$ , l'ensemble  $\{a_i; i \in I \text{ et } k_i \in S_l\}$  est  $\epsilon_2$  non-dominé.

Alors pour tout  $r \geq \mathcal{R}_0$ , on a

$$N_{f_{\mathbf{a}, \mathbf{k}, \boldsymbol{\theta}, \epsilon_3/2}}(r) \geq cr^2.$$

**Remarque 7.16.** Ce résultat est stable par petites perturbations de  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{k}$  au sens suivant. Supposons que  $I$ ,  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{a}$  et  $\boldsymbol{\theta}$  vérifient les hypothèses du théorème. Alors il existe  $\epsilon_4 > 0$  tel que, si  $\mathbf{a}'$  et  $\mathbf{k}'$  et  $\boldsymbol{\theta}'$  sont tels que  $|\mathbf{a} - \mathbf{a}'| < \epsilon_4$  et  $|\mathbf{k}' - \mathbf{k}| < \epsilon_4$ , alors

$$N_{f_{\mathbf{a}', \mathbf{k}', \boldsymbol{\theta}', \epsilon_3}}(r) \geq \frac{c}{2}r^2.$$

##### 7.4.2 Preuve du théorème 7.15

La preuve repose essentiellement sur la proposition suivante, que nous prouverons dans la section suivante.

**Proposition 7.17.** Il existe  $\epsilon_5 > 0$  tel que le résultat suivant soit vrai. Soient  $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{S}^1$ ,  $(\epsilon_5, T)$ -indépendants. Alors il existe  $R_0, \epsilon_4 > 0$  tel que pour tout  $N \in \mathbb{N}$  et pour tous  $k'_1, \dots, k'_N \in \mathbb{S}^1$ , il existe un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^{3+N}$  tel que pour tous  $(a_1, a_2, a_3, a'_1, \dots, a'_N) \in \Omega$ , et  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi'_1, \dots, \phi'_N) \in \mathbb{R}^{3+N}$ , la fonction

$$f(x) := \sum_{j=1}^3 a_j \cos(k_j \cdot x + \phi_j) + \sum_{j=1}^N a'_j \cos(k'_j \cdot x + \phi'_j) \quad (7.23)$$

possède un domaine nodal compact  $\epsilon_4$ -stable dans  $B(0, T + R_0)$ .

**Remarque 7.18.** Cette proposition implique que si  $\mu$  est une mesure symétrique sur  $\mathbb{S}^1$  ayant au moins 6 points dans son support, alors la constante de Nazarov-Sodin de  $\mu$ , comme définie dans [KW15] est strictement positive.

**Remarque 7.19.** L'ensemble  $\Omega \subset \mathbb{R}^{3+N}$  donné par la proposition est presque conique, au sens suivant. Si  $(a_1, a_2, a_3, a'_1, \dots, a'_N) \in \Omega$ , alors si  $\lambda > 0$ , la fonction

$$\sum_{j=1}^3 \lambda a_j \cos(k_j \cdot x + \phi_j) + \sum_{j=1}^N \lambda a'_j \cos(k'_j \cdot x + \phi'_j)$$

possède un domaine nodal compact  $\lambda \epsilon_4$ -stable dans  $B(0, T + R_0)$ .

Expliquons de manière informelle l'idée de la preuve du théorème 7.15 à partir de la proposition 7.17.

On veut considérer la fonction  $f_{\mathbf{a},\mathbf{k},\theta}(x+y) = f_x(y) = \sum a_i \cos(k_i \cdot x + k_i \cdot y + \theta_i)$ , en voyant  $y$  comme une variable, et  $x$  comme un paramètre. Pour montrer que  $f$  a au moins  $cr^2$  domaines nodaux dans  $B(O, r)$ , on va montrer que pour tout point  $x_0$ , il existe un paramètre  $x$  proche de  $x_0$ , tel que  $f_x$  a au moins un domaine nodal compact. En recouvrant  $B(O, r)$  par  $cr^2$  boules centrées autour de différents  $x_0$  pour un  $c > 0$ , on aura bien le résultat.

La proposition 7.17 nous dit en gros que si on considère une somme d'ondes planes avec des amplitudes aléatoires indépendantes, on aura un domaine nodal compact avec probabilité  $> 0$ .

A priori, on n'a pas d'amplitudes aléatoires, mais l'hypothèse d' $\epsilon$ -indépendance entre les directions de propagation  $k_i$  nous dit en gros que l'on peut considérer les  $k_i \cdot x$  comme des phases aléatoires indépendantes. Pour passer de phases aléatoires  $\phi_i$  à des amplitudes aléatoires, on veut utiliser l'astuce suivante :

$$\cos(k_i \cdot y + \phi_i) + \cos(k_{i'} \cdot y + \phi_{i'}) = 2 \cos\left(\frac{\phi_i - \phi_{i'}}{2}\right) \cos\left(\frac{k_i + k_{i'}}{2} \cdot y + \frac{\phi_i + \phi_{i'}}{2}\right). \quad (7.24)$$

Le facteur  $2 \cos\left(\frac{\phi_i - \phi_{i'}}{2}\right)$  peut alors être vu comme une amplitude aléatoire. L'équation (7.24) permet donc de passer d'une somme de deux ondes planes ayant des phases aléatoires indépendantes et *ayant la même amplitude* à une onde plane ayant une amplitude aléatoire.

Pour appliquer cette astuce et ramener la fonction  $f_x(y)$  dans le cadre de la proposition 7.17, il faut donc que les amplitudes qui interviennent soient deux à deux égales. C'est l'hypothèse d' $\epsilon$ -non-domination qui nous assure que l'on est presque dans cette situation, et qui permet de prouver le théorème.

*Preuve que la proposition 7.17 implique le théorème 7.15.* Soit  $\epsilon_1 > 0$ , et considérons une partition de  $\mathbb{S}^1 = \bigsqcup_{l=1}^L S_l$  en des ensembles disjoints de diamètres inférieurs à  $\epsilon_1$ . Notons  $I_l \subset I$  le sous-ensemble des indices tels que  $k_i \in S_l$ . Pour chaque  $l$ , on fixe un  $i_l$  tel que  $k_{i_l} \in S_l$ .

Par hypothèse sur  $\mu = \mu_{\mathbf{k},\mathbf{a}}$ , quitte à prendre  $\epsilon_1$  plus petit, on peut supposer qu'il existe 3 ensembles  $S_{l_1}, S_{l_2}, S_{l_3}$  tels que  $S_{l_j} \cap (-S_{l_{j'}}) = \emptyset$  pour tous  $j, j' \in \{1, 2, 3\}$ , et tels que l'on ait

$$\mu(S_{l_j}) > 0. \quad (7.25)$$

Prenons  $x, y \in \mathbb{R}^2$ . On a

$$f(x+y) = \sum_{i \in I} a_i \cos(k_i \cdot y + \theta_i(x)),$$

où

$$\theta_i(x) := k_i \cdot x + \theta_i.$$

Pour chaque  $l = 1, \dots, L$ , écrivons

$$f^l(x) := \sum_{i \in I_l} a_i \cos(k_i \cdot x + \theta_i).$$

#### 7.4 Un critère pour qu'une somme finie d'onde planes sature la borne de Courant

Par conséquent, si  $x, y \in \mathbb{R}^2$ , on a

$$f^l(x + y) = \sum_{i \in I_l} a_i \cos(k_i \cdot y + \theta_i(x)) = \sum_{i \in I_l} a_i (\cos(k_{i_l} \cdot y + \theta_i(x)) + O(|y|\epsilon_1)).$$

**Utilisons la non-dominat** Supposons maintenant que l'ensemble  $\{a_i; i \in I_l\}$  est  $\epsilon_2$ -non-dominé pour un  $\epsilon_2 > 0$ .

On peut alors trouver une partition de  $I_l$  en deux sous-ensembles  $J_l$  et  $J'_l$  tels que

$$\sum_{i \in J_l} a_i = \sum_{i \in J'_l} a_i + r_l, \quad (7.26)$$

où  $|r_l| < \epsilon_2$ .

**Lemme 7.20.** *L'équation (7.26) implique qu'il est possible de construire  $p_i \in \mathbb{N}$  pour chaque  $i \in I_l$  et des poids  $t_1^i, \dots, t_{p_i}^i$  tels que les assertions suivantes soient vérifiées, où l'on note  $\tilde{J}_l := \{(i, j); i \in J_l \text{ et } j \leq p_i\}$ , et  $\tilde{J}'_l := \{(i', j'); i' \in J'_l \text{ et } j' \leq p_{i'}\}$ .*

— Pour tout  $i \in I_l$ ,  $\sum_{j=1}^{p_i} t_j^i = 1$ .

— Il existe une bijection  $\tau : (i, j) \mapsto (i'(i, j), j'(i, j))$  entre  $\tilde{J}_l$  et  $\tilde{J}'_l$  telle que

$$t_j^i a_i = t_{j'(i,j)}^{i'(i,j)} a_{i'(i,j)} + r_j^i,$$

où

$$\sum_{(i,j) \in \tilde{J}_l} |r_j^i| \leq r_l < \epsilon_2.$$

— L'ensemble  $\tilde{J}_l$  a un cardinal inférieur ou égal à  $|I_l|$ .

Ce lemme, un peu technique à énoncer, nous dit simplement qu'il est possible de casser le membre de droite et le membre de gauche dans (7.26) en petits morceaux, de sorte qu'il n'y ait pas plus de  $|I_l|$  morceaux à droite et à gauche de l'équation, et qu'à chaque morceau de droite corresponde un morceau à gauche qui a presque la même amplitude.

*Démonstration.* La preuve se fait par récurrence sur  $|I_l|$ . Si l'ensemble est de cardinal 2, le résultat est évident en prenant  $p_i = 1$ ,  $t_1^i = 1$  pour les deux éléments  $i$ .

Supposons que  $|I_l|$  a au moins trois éléments. Alors il existe au moins un élément minimal parmi les  $a_i$ , pour  $i \in I_l$ , que nous noterons  $a_{i_0}$ . On peut supposer sans perte de généralité que  $i_0 \in J_l$ . Prenons n'importe que  $i'_0 \in J'_l$ . (7.26) peut se réécrire comme

$$\sum_{i \in J_l \setminus \{i_0\}} a_i = \sum_{i \in J'_l \setminus \{i'_0\}} a_i + \left(1 - \frac{a_{i_0}}{a_{i'_0}}\right) a_{i'_0} + r_l.$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence à cette nouvelle équation qui contient un terme de moins, on peut déduire le lemme.  $\square$



On a donc

$$\begin{aligned}
 f^l(x+y) &= \sum_{(i,j) \in \tilde{J}_l} t_j^i a_i (\cos(k_{i_l} \cdot y + \theta_i(x)) + O(|y|\epsilon_1)) \\
 &+ \sum_{(i',j') \in \tilde{J}'_l} t_{j'}^{i'} a_{i'} (\cos(k_{i'_l} \cdot y + \theta_{i'}(x)) + O(|y|\epsilon_1)) \\
 &= \sum_{(i,j) \in \tilde{J}_l} \left[ t_j^i a_i (\cos(k_{i_l} \cdot y + \theta_i(x)) + O(|y|\epsilon_1)) \right. \\
 &\quad \left. + t_j^i a_i (\cos(k_{i_l} \cdot y + \theta_{i'(i,j)}(x)) + O(|y|\epsilon_1)) \right] + r_l(x, y) \\
 &= \sum_{(i,j) \in \tilde{J}_l} 2t_j^i a_i \left[ \cos\left(\frac{\theta_i(x) - \theta_{i'(i,j)}(x)}{2}\right) \right. \\
 &\quad \left. \times \cos\left(k_{i_l} \cdot y + \frac{\theta_i(x) + \theta_{i'(i,j)}(x)}{2}\right) + O(|y|\epsilon_1) \right] + r_l(x, y)
 \end{aligned}$$

où  $|r_l(x, y)| < \epsilon_2$  pour tous  $x, y \in \mathbb{R}^d$ .

### Des vecteurs indépendants aux amplitudes indépendantes

Comme on suppose que les vecteurs  $(k_i)_{i \in I}$  sont  $(\epsilon_0, T_0)$ -indépendants pour un  $T_0 > 0$ , alors pour tout  $\psi_i \in \mathbb{T}^{|I|}$  et tout  $x_0 \in \mathbb{R}^2$ , il existe  $x \in B(x_0, T_0)$  tel que pour tout  $i \in I$ ,  $|\theta_i(x) - \psi_i| \leq \epsilon_0$ .

Comme on a  $|\tilde{J}_l| \leq |I|$ , ceci signifie que les phases  $\frac{\theta_i(x) - \theta_{i'(i,j)}(x)}{2}$  peuvent approcher de moins de  $\epsilon$  n'importe quel  $\psi_i \in \mathbb{T}^{|I|}$  en bougeant  $x$  dans  $B(x_0, T_0)$ .

En particulier, pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  et pour toute suite  $(b_{(i,j)})_{(i,j) \in \bigcup_l \tilde{J}_l}$ , avec  $|b_{(i,j)}| \leq 3|t_j^i a_i|$ , on peut trouver  $x \in B(x_0, T_0)$  tel que pour tout  $(i, j) \in \bigcup_l \tilde{J}_l$ , on a

$$\left| b_{(i,j)} - 2t_j^i a_i \cos\left(\frac{\theta_i(x) - \theta_{i'(i,j)}(x)}{2}\right) \right| \leq 2\epsilon_0 t_j^i a_i \leq C_0 \epsilon_0,$$

avec  $C_0 := \max_{(i,j) \in \bigcup_l \tilde{J}_l} 2t_j^i a_i$ .

### Appliquons la proposition 7.17

Pour chaque  $x \in \mathbb{R}^2$ , posons

$$f_x(y) = \sum_{l=1}^L \sum_{(i,j) \in \tilde{J}_l} \left[ 2t_j^i a_i \cos\left(\frac{\theta_i(x) - \theta_{i'(i,j)}(x)}{2}\right) \right] \cos\left(k_{i_l} \cdot y + \frac{\theta_i(x) + \theta_{i'(i,j)}(x)}{2}\right).$$

On veut appliquer la proposition 7.17 à la fonction  $f_x$ .

#### 7.4 Un critère pour qu'une somme finie d'onde planes sature la borne de Courant

Grâce à (7.25), pour chaque  $S_{l_1}, S_{l_2}, S_{l_3}$ , on peut trouver  $(i, j) \in \tilde{J}_{l_j}$  tel que  $t_j^i a_i \neq 0$ . Ces 3 termes dans la définition de  $f_x$  correspondront aux 3 premiers termes dans (7.23), tandis que les autres termes dans  $f_x$  correspondront aux termes restants dans (7.23).

On veut s'assurer que les amplitudes  $\left[2t_j^i a_i \cos\left(\frac{\theta_i(x) - \theta_{i'}(i,j)(x)}{2}\right)\right]$  sont dans l'ouvert  $\Omega$  décrit dans la proposition 7.17. Grâce au paragraphe précédent, on sait que, si on prend  $\epsilon_0$  suffisamment petit, on peut toujours trouver  $x \in B(x_0, T_0)$  tel que ceci soit vrai.

On obtient que la fonction  $f_x$  a un domaine nodal compact et  $\epsilon_4$ -stable dans  $B(0, T + R_0)$ .

Comme on a

$$|f_x(y) - f_{\mathbf{a}, \mathbf{k}, \theta}(x + y)| \leq \epsilon_2 + O(|y|\epsilon_1),$$

on obtient que si on prend  $\epsilon_1, \epsilon_2$  et  $\epsilon_3$  assez petits, alors  $f_{\mathbf{a}, \mathbf{k}, \theta}$  possède un domaine nodal  $\epsilon_3$ -stable dans  $B(x, T + R_0)$ , et donc un domaine nodal  $\epsilon_3$ -stable dans  $B(x_0, T + R_0 + T_0)$  pour tout  $x_0$ . On peut alors trouver  $c > 0$  tel qu'il y ait  $cR^2$  boules disjointes de rayon  $T + R_0 + T_0$  dans  $B(0, R)$  pour  $R$  assez grand. Comme chacune de ces boules contient un domaine nodal  $\epsilon_3$ -stable pour  $f_{\mathbf{a}, \mathbf{k}, \theta}$ , le théorème s'ensuit.  $\square$

#### 7.4.3 Preuve de la proposition 7.17

Soit  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3) \in (\mathbb{S}^1)^3$  tel que pour tous  $1 \leq j' < j \leq 3$ ,  $j \neq j'$ , on ait  $k_j \neq \pm k_{j'}$ .

Pour toute famille  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ , notons

$$g_{\mathbf{a}}(x) := \sum_{i=1}^3 a_i \cos(k_i \cdot x).$$

La preuve de la proposition 7.17 repose sur le lemme suivant :

**Lemme 7.21.** *Il existe  $\epsilon_6, R_0 > 0$  et un ouvert  $\Omega_{\mathbf{k}} \subset \mathbb{R}^3$  tel que pour tout  $\mathbf{a} \in \Omega_{\mathbf{k}}$ , 0 appartient à un domaine nodal compact  $\epsilon_6$ -stable de  $g_{\mathbf{a}}$ , et ce domaine nodal est inclus dans  $B(0, R_0)$ .*

Remarquons que l'ensemble  $\Omega_{\mathbf{k}}$  est presque un cône, au sens où si  $\mathbf{a} \in \Omega_{\mathbf{k}}$  et si  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , alors zéro appartient à un domaine nodal compact  $(|\lambda|\epsilon_6)$ -stable de  $g_{\lambda \mathbf{a}}$ .

*Preuve que le lemme 7.21 implique la proposition 7.17.* Supposons que les  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_3) \in (\mathbb{S}^1)^3$  soient  $(\epsilon_5, T)$ -indépendants, pour un  $\epsilon_5$  que l'on fixera plus tard.

Soit  $(\phi_1, \dots, \phi_3) \in \mathbb{R}^3$ . On peut trouver  $x \in B(0, T)$  tel que pour tout  $j \in \{1, 2, 3\}$ , on a  $|k_j \cdot x + \phi_j| \leq \epsilon_5$ . On a donc pour tout  $j \in \{1, 2, 3\}$  et pour tout  $y \in \mathbb{R}^2$  :

$$\left| \cos(k_j \cdot (x + y) + \phi_j) - \cos(k_j \cdot y) \right| \leq C\epsilon_5,$$

pour une constante universelle  $C > 0$ .

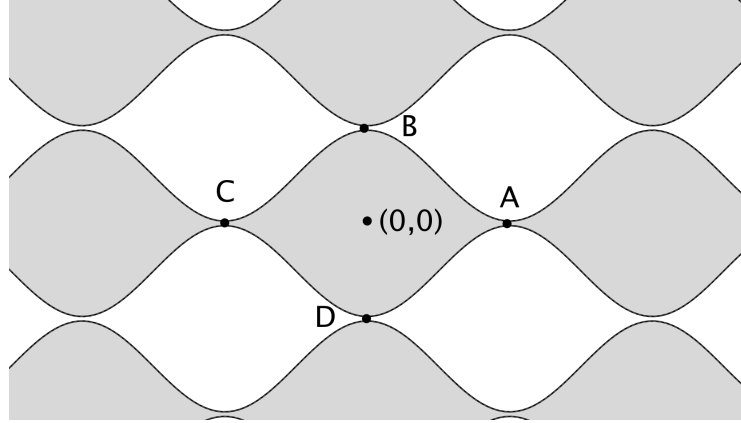


FIGURE 7.2 – Le signe de la fonction  $f(x, y) = a_1 \cos(x) + a_2 \cos(y)$ , avec  $|a_2|$  légèrement supérieur à  $|a_1|$ .  $f$  est positive dans la région en gris, et négative dans la région en blanc. On veut ajouter un troisième cosinus qui soit positif en  $A$  et en  $C$ , et négatif (ou du moins, pas trop positif) en  $B$  et en  $D$ , afin de « refermer » le domaine nodal contenant l'origine.

En particulier, si on prend des coefficients  $a_1, a_2, a_3 \in \Omega_{\mathbf{k}}$  comme dans le lemme 7.21, et si  $\epsilon_5$  est choisi suffisamment petit pour que  $C\epsilon_5 \sup_{i=1,2,3} |a_i| \leq \frac{\epsilon_6}{2}$ , on voit que  $\sum_{j=1}^3 a_j \cos(k_j \cdot x + \phi_j)$  a un domaine nodal compact  $(\epsilon_6/2)$ -stable dans  $B(0, R_0 + T)$ .

Maintenant, si  $N \in \mathbb{N}$ , il nous faut seulement imposer que pour tout  $j = 1, \dots, N$ , on a  $|a'_j| \leq \frac{\epsilon_6}{4N}$  pour nous assurer que la fonction

$$\sum_{j=1}^3 a_j \cos(k_j \cdot x + \phi_j) + \sum_{j=1}^N a'_j \cos(k'_j \cdot x + \phi'_j)$$

a un domaine nodal compact et  $\frac{\epsilon_6}{4}$ -stable compact dans  $B(0, T + R_0)$ . Ceci conclut la preuve de la proposition.  $\square$

Avant de donner la preuve du lemme 7.21, expliquons-la de façon informelle. Considérons la somme de deux cosinus  $a_1 \cos(k_1 \cdot x) + a_2 \cos(k_2 \cdot x)$ . Celle-ci n'aura jamais de domaine nodal compact si  $|a_1| \neq |a_2|$ . Cependant, si  $|a_1|$  et  $|a_2|$  sont suffisamment proches l'un de l'autre, les domaines nodaux sont très fins en certains endroits, comme on le voit dans la figure 7.4.3. En ajoutant un troisième cosinus de façon précise, il est possible de faire changer de signe la fonction à l'endroit où les domaines nodaux sont fins, et ainsi de « fermer » un domaine nodal autour de l'origine.

*Preuve du lemme 7.21.* On a par hypothèse trois nombres réels non-nuls  $\lambda, \mu, \nu$  tels que  $\lambda k_1 + \mu k_2 + \nu k_3 = 0$ . En divisant cette égalité par le coefficient de plus grand module, et

#### 7.4 Un critère pour qu'une somme finie d'onde planes sature la borne de Courant

en échangeant éventuellement les vecteurs, on peut supposer que

$$k_3 = \lambda' k_1 + \mu' k_2,$$

où  $|\lambda'| \leq 1$ ,  $|\mu'| \leq 1$ .

De plus, on doit avoir

$$(|\lambda'| - 1/2) \neq (1/2 - |\mu'|). \quad (7.27)$$

En effet, s'il y avait égalité dans (7.27), alors on aurait  $|\lambda' k_1| + |\mu' k_2| = |\lambda'| + |\mu'| = 1 = |k_3| = |\lambda' k_1 + \mu' k_2|$ , ce qui impliquerait que  $k_1$  et  $k_2$  sont colinéaires.

En particulier, on a  $\cos(\mu'\pi) \neq -\cos(\lambda'\pi)$ . Sans perte de généralité, on peut donc supposer que

$$\text{Si } \cos(\mu'\pi) \text{ et } \cos(\lambda'\pi) \text{ ne sont pas de même signe, alors } |\cos(\lambda'\pi)| < |\cos(\mu'\pi)|. \quad (7.28)$$

Toujours sans perte de généralité, on supposera toujours que  $a_1 > 0$ .

**Étape 1 : comprendre la somme de deux cosinus** À partir de maintenant, on supposera que

$$a_1 - \varepsilon < a_2 < a_1,$$

où  $\varepsilon \ll 1$  sera déterminé par la suite.

Nous noterons  $S_1 := \{x \in \mathbb{R}^2; x \cdot k_1 = \pm\pi \text{ et } x \cdot k_2 \in [-\pi; \pi]\}$ . Si  $x \in S_1$ , on a

$$g_{a_1, a_2, 0}(x) = -a_1 + a_2 \cos(k_2 \cdot x) \leq -\varepsilon < 0.$$

De plus, on a pour  $x \in S_1$ ,

$$g_{a_1, a_2, 0}(x) = -a_1 + a_2(1 - (k_2 \cdot x)^2/2 + o((k_2 \cdot x)^2)) \leq -\varepsilon - (k_2 \cdot x)^2 + o((k_2 \cdot x)^2). \quad (7.29)$$

On en déduit que pour tout  $A > 0$ , il existe  $c_A > 0$  indépendant de  $\varepsilon$  et un  $\varepsilon_A > 0$  tel que pour tout  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_A$  et pour tout  $x \in S_1$ , on a :

$$|x \cdot k_2| \geq c_A \sqrt{\varepsilon} \implies g_{a_1, a_2, 0}(x) < -A\varepsilon. \quad (7.30)$$

Considérons ensuite l'ensemble  $S_2 := \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x \cdot k_2 = \pm\pi \text{ et tel que } x \cdot k_1 \in [-\pi; \pi]\}$ . Si  $x \in S_2$ , on a

$$g_{a_1, a_2, 0}(x) = a_1 \cos(k_1 \cdot x) - a_2 \leq \varepsilon.$$

De plus, comme précédemment, on voit que pour tout  $B > 0$ , il existe un  $c_B > 0$  indépendant de  $\varepsilon$  et un  $\varepsilon_B > 0$  tels que pour tout  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_B$ , et pour tout  $x \in S_2$ , on a

$$|x \cdot k_1| \geq c_B \sqrt{\varepsilon} \implies g_{a_1, a_2, 0}(x) < -B\varepsilon. \quad (7.31)$$

**Étape 2 : ajouter un troisième cosinus** On considère maintenant une fonction  $g_{a_1, a_2, a_3}$ . Du moment que  $|a_3| < 2|a_1| - \varepsilon$ , on a  $g_{a_1, a_2, a_3}(0) > 0$ . Trouvons des conditions sur  $a_3$  qui garantissent que  $g_{a_1, a_2, a_3}(x) < 0$  si  $x \in S_1 \cup S_2$ , ce qui montrera que  $g_{a_1, a_2, a_3}$  a un domaine nodal compact.

Soit  $x \in S_1$  tel que  $|x \cdot k_2| \leq \varepsilon^{1/4}$ . On a alors  $k_3 \cdot x = \lambda' k_1 \cdot x + \mu' k_2 \cdot x = \lambda' \pi + O(\varepsilon^{1/4})$ . Par conséquent, on a

$$|x \cdot k_2| \leq \varepsilon^{1/4} \implies \cos(k_3 \cdot x) = \cos(|\lambda' \pi| + O(\varepsilon^{1/4})). \quad (7.32)$$

De même, pour tout  $x \in S_2$ , on a

$$|x \cdot k_1| \leq \varepsilon^{1/4} \implies \cos(k_3 \cdot x) = \cos(\mu' \pi) + O(\varepsilon^{1/4}). \quad (7.33)$$

**Supposons tout d'abord que  $\cos(\lambda' \pi)$  et  $\cos(\mu' \pi)$  ont le même signe.**

Cela signifie que  $|\lambda'|, |\mu'| \geq 1/2$ , de sorte que le signe de  $\cos(\lambda' \pi)$  doit être négatif. On peut prendre

$$a_3 \in \left[ -\varepsilon - \frac{2\varepsilon}{\min(|\cos(\lambda' \pi)|, |\cos(\mu' \pi)|)}, -\frac{2\varepsilon}{|\cos(\lambda' \pi)|} \right].$$

Si  $a_3$  est choisi ainsi, alors on a  $g_{a_1, a_2, a_3}(0) > 0$  du moment que  $\varepsilon$  est assez petit. Prenons

$$A = B = 2 + 2/\min(|\cos(\lambda' \pi)|, |\cos(\mu' \pi)|),$$

et  $c_A, c_B$  comme ci-dessus. Comme  $|a_3| < A\varepsilon, B\varepsilon$ , on déduit de (7.30) que pour tout  $x \in S_1$  tel que  $|x \cdot k_2| \geq c_A \sqrt{\varepsilon}$ , on a  $g_{a_1, a_2, a_3}(x) < 0$ . De même, on déduit de (7.31) que pour tout  $x \in S_2$  tel que  $|x \cdot k_1| \geq c_B \sqrt{\varepsilon}$ , on a  $g_{a_1, a_2, a_3}(x) < 0$ .

Par conséquent, si  $x \in S_1$  est tel que  $|x \cdot k_2| \leq c_A \sqrt{\varepsilon}$ , ou si  $x \in S_2$  est tel que  $|x \cdot k_1| \leq c_B \sqrt{\varepsilon}$  alors on a par (7.32) et par (7.33) que  $a_3 \cos(k_3 \cdot x) \leq -2\varepsilon$ . Du coup,  $g_{a_1, a_2, a_3}(x) < 0$  pour tout  $x \in S_1 \cup S_2$ . Par conséquent,  $g_{a_1, a_2, a_3}$  a un domaine nodal compact qui est  $\varepsilon_6$ -stable pour  $\varepsilon_6$  assez petit, et qui appartient à  $B(0, R_0)$  pour  $R_0$  assez grand.

En fin de compte, on a montré que  $g_{a_1, a_2, a_3}$  a un domaine nodal compact et  $\varepsilon_6$ -stable inclus dans  $B(0, R_0)$  pour tout  $(a_1, a_2, a_3)$  tels que  $a_1 - a_2 \in (0, \varepsilon_0)$  et

$$a_3 \in (-(a_1 - a_2) - (a_1 - a_2)/c; -(a_1 - a_2)/c),$$

pour un  $c$  dépendant  $k_1, k_2, k_3$ . Ceci est un ensemble ouvert non-vide, ce qui prouve le lemme.

**Supposons que  $\cos(\lambda' \pi)$  et  $\cos(\mu' \pi)$  sont de signes opposés.**

Alors (7.28) implique que  $|\cos(\lambda' \pi)| < |\cos(\mu' \pi)|$ . En particulier, on a  $|\cos(\mu' \pi)| \neq 0$ . Prenons

$$a_3 \in \left[ \frac{-\operatorname{sgn}(\cos(\mu' \pi))\varepsilon}{1/3|\cos(|\mu' \pi|)| + 2/3|\cos(\lambda \pi)|}, \frac{-\operatorname{sgn}(\cos(\mu' \pi))\varepsilon}{2/3|\cos(|\mu' \pi|)| + 1/3|\cos(\lambda \pi)|} \right].$$

## 7.5 Preuve du théorème 1.28

Si  $a_3$  est choisi ainsi, alors on a  $g_{a_1, a_2, a_3}(0) > 0$  du moment que  $\varepsilon$  est assez petit. Prenons

$$A = B = 1/|\cos(\lambda'\pi)|,$$

et  $c_A, c_B$  comme ci-dessus. Comme  $|a_3| < A\varepsilon, B\varepsilon$ , on voit grâce à (7.30) que pour tout  $x \in S_1$  tel que  $|x \cdot k_2| \geq c_A\sqrt{\varepsilon}$ , on a  $g_{a_1, a_2, a_3}(x) < 0$ . De même, par (7.31), on a que pour tout  $x \in S_2$  tel que  $|x \cdot k_1| \geq c_B\sqrt{\varepsilon}$ , on a  $g_{a_1, a_2, a_3}(x) < 0$ .

Maintenant, si  $x \in S_1$  est tel que  $|x \cdot k_2| \leq c_A\sqrt{\varepsilon}$ , on a par (7.32) que

$$0 < a_3 \cos(k_3 \cdot x) \leq \frac{\varepsilon |\cos(|\lambda'\pi)|}{1/3 |\cos(|\mu'\pi)| + 2/3 |\cos(\lambda'\pi)|} + o(\varepsilon).$$

Comme  $\frac{|\cos(|\lambda'\pi)|}{1/3 |\cos(|\mu'\pi)| + 2/3 |\cos(\lambda'\pi)|} < 1$ , on déduit de (7.29) que  $g_{a_1, a_2, a_3} < 0$  sur  $S_1$ .

Si  $x \in S_2$  est tel que  $|x \cdot k_2| \leq c_B\sqrt{\varepsilon}$  on a par (7.33) que

$$|a_3 \cos(k_3 \cdot x)| \geq \frac{\varepsilon |\cos(|\mu'\pi)|}{2/3 |\cos(|\mu'\pi)| + 1/3 |\cos(\lambda\pi)|} + o(\varepsilon).$$

Comme  $\frac{|\cos(|\mu'\pi)|}{2/3 |\cos(|\mu'\pi)| + 1/3 |\cos(\lambda\pi)|} > 1$ , on déduit de (7.33) que  $g_{a_1, a_2, a_3} < 0$  on  $S_2$ .

Par conséquent,  $g_{a_1, a_2, a_3}(x) < 0$  pour tout  $x \in S_1 \cup S_2$ . Du coup,  $g_{a_1, a_2, a_3}$  a un domaine nodal compact, qui est  $\varepsilon_6$ -stable pour  $\varepsilon_6$  assez petit, et est contenu dans  $B(0, R_0)$  pour  $R_0$  assez grand.

En fin de compte, on a montré que  $g_{a_1, a_2, a_3}$  a un domaine nodal compact pour tous  $(a_1, a_2, a_3)$  tels que  $a_1 - a_2 \in (0, \varepsilon_0)$  et  $a_3 \in ((a_1 - a_2)/c; -(a_1 - a_2)/c')$  pour des  $c, c'$  ne dépendant que de  $k_1, k_2, k_3$ . Ceci est un ensemble non vide, ce qui prouve le lemme.  $\square$

## 7.5 Preuve du théorème 1.28

*Démonstration.* Prenons une fonction  $\chi \in C_c^\infty(X)$  valant un sur  $\Omega$ . À partir de maintenant, on fixe un  $x_0 \in \Omega$ , et on considère une carte locale  $\psi$  d'un voisinage de l'origine dans  $\mathbb{R}^2$  vers un voisinage ouvert de  $x_0$  inclus dans  $\Omega$ . Pour tout  $\eta > 0$ , le théorème 3.41, nous donne un  $M_\eta > 0$  tel que pour tout  $h > 0$  suffisamment petit, on a pour tout  $x \in B(0, h^{-1/3})$

$$\begin{aligned} E_h(\psi(hx); \omega) &= \sum_{n=0}^{M_\eta} \sum_{\beta \in \mathcal{B}_{\mathcal{K}, n}} (a_\beta^0(x_0; \omega) + O(|x|h)) e^{\frac{i}{h} \varphi_\beta(x_0; \omega) + i \nabla_{x_0} \varphi_\beta(x_0; \omega) \cdot x + O(|x|^2 h)} + R_\eta \\ &= \sum_{n=0}^{M_\eta} \sum_{\beta \in \mathcal{B}_{\mathcal{K}, n}} a_\beta^0(x_0; \omega) e^{\frac{i}{h} \varphi_\beta(x_0; \omega) + i \nabla_{x_0} \varphi_\beta(x_0; \omega) \cdot x} + R_\eta, \end{aligned}$$

où  $\|R_\eta\|_{C^0(B(0, h^{-1/3}))} \leq \eta$ .

Écrivons  $F_h(x) := \Re(E_h(x, \omega_0)) + \Re(E_h(x, \omega_1))$ . Comme  $\omega \mapsto a_\beta^0(x_0; \omega)$  est continue pour chaque  $\beta$ , on en déduit qu'il existe un  $\epsilon_\eta > 0$  tel que si  $|\omega_0 - \omega_1| \leq \epsilon_\eta$ , on a pour  $x \in B(0, h^{-1/3})$  :

$$\begin{aligned} F_h(\psi(hx)) &= \sum_{n=0}^{M_\eta} \sum_{\beta \in \mathcal{B}_{\mathcal{K},n}} \Re \left[ a_\beta^0(x_0; \omega_0) e^{\frac{i}{h} \varphi_\beta(x_0; \omega_0) + i \nabla_{x_0} \varphi_\beta(x_0; \omega_0) \cdot x} \right. \\ &\quad \left. + a_\beta^0(x_0; \omega_1) e^{\frac{i}{h} \varphi_\beta(x_0; \omega_1) + i \nabla_{x_0} \varphi_\beta(x_0; \omega_1) \cdot x} \right] + 2R_\eta \\ &= \sum_{n=0}^{M_\eta} \sum_{\beta \in \mathcal{B}_{\mathcal{K},n}} \Re \left[ a_\beta^0(x_0; \omega_0) \left( e^{\frac{i}{h} \varphi_\beta(x_0; \omega_0) + i \nabla_{x_0} \varphi_\beta(x_0; \omega_0) \cdot x} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e^{\frac{i}{h} \varphi_\beta(x_0; \omega_1) + i \nabla_{x_0} \varphi_\beta(x_0; \omega_1) \cdot x} \right) \right] + R'_\eta, \end{aligned}$$

où  $\|R'_\eta\|_{C^0(B(0, h^{-1/3}))} \leq 3\eta$ . La valeur de  $\eta > 0$  sera fixée à la fin de la preuve.

On peut réécrire ceci de manière plus condensée comme

$$F_h(\psi(hx)) = \sum_{n=0}^{M_\eta} \sum_{\beta \in \mathcal{B}_{\mathcal{K},n}} \left[ b_\beta \cos(x \cdot k_{\beta, \omega_0} + \theta_{\beta, h}^0) + b_\beta \cos(x \cdot k_{\beta, \omega_1} + \theta_{\beta, h}^1) \right] + R'_\eta(x). \quad (7.34)$$

Ici, on a  $k_{\beta, \omega_i} = k_{\beta, \omega_i}(x_0) = \nabla_{x_0} \varphi(x_0, \omega_i)$  pour  $i = 0, 1$  et  $b_\beta = b_\beta(x_0) = |a_{n, \beta}(x_0, \omega_0)|$ .

**Remarque 7.22.** Si  $\mathcal{O} \Subset X$  est un ouvert, et si  $g'$  est une perturbation suffisamment petite de  $g$  au sens  $C^k(\mathcal{O})$ , alors la variété  $(X, g')$  vérifiera encore les hypothèses du théorème 3.41, et on aura une expression similaire pour  $F_h(\psi(hx))$  sur  $(X, g')$ . De plus, tous les objets apparaissant dans la décomposition (7.34) dépendent continûment de la métrique. Quand nous voudrions insister sur la dépendance en la métrique des objets, et surtout des directions de propagation, nous écrivons  $k_{\beta, \omega_i}(g')$ .

On veut appliquer le théorème 7.15 à la fonction

$$G(x) = G_{x_0}(x) := \sum_{n=0}^{M_\eta} \sum_{\beta \in \mathcal{B}_{\mathcal{K},n}} \left[ b_\beta \cos(x \cdot k_{\beta, \omega_0} + \theta_{\beta, h}^0) + b_\beta \cos(x \cdot k_{\beta, \omega_1} + \theta_{\beta, h}^1) \right]. \quad (7.35)$$

La première des hypothèses du théorème 7.15 est qu'il y ait au moins six différents  $k_{\beta, \omega}$  avec des amplitudes non-nulles. On déduit du corollaire 4.28 que les  $k_{\beta, \omega}$  prennent des valeurs différentes pour les différents  $\beta$ . De plus, on a par (3.52) qu'une infinité des amplitudes  $b_\beta$  sont non nulles. On peut donc trouver une constante  $c_0 > 0$  et six indices  $\beta_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$  tels que  $b_{\beta_i} \geq c_0$ .

Dans le théorème 7.15, les constantes  $\mathcal{R}_0$  et  $\epsilon_3$  dépendent seulement du supremum des amplitudes, et des positions et amplitudes des six points sus-mentionnés. En particulier, si

## 7.5 Preuve du théorème 1.28

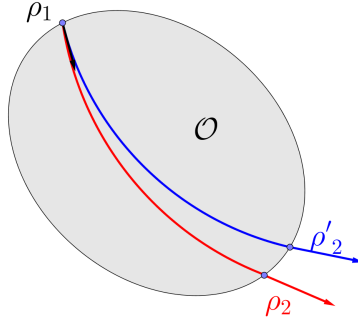


FIGURE 7.3 – La courbe en rouge allant de  $\rho_1$  à  $\rho_2$  est une géodésique pour la métrique  $g$ . En perturbant la métrique dans  $\mathcal{O}$ , on obtient une géodésique allant de  $\rho_1$  à  $\rho'_2$ .

on peut montrer que les deux autres hypothèses du théorème 7.15 sont satisfaites pour des métriques  $g'$  dans un voisinage de  $g$ , alors  $\mathcal{R}_0$  et  $\epsilon_3$  dépendront continûment de  $g'$ .

On peut prendre  $N$  assez grand, et  $h_0$  assez petit pour que pour tout  $h \leq h_0$  et tout  $x_0 \in \mathcal{O}'$ , on a

$$\|R_h + R_\epsilon\|_{C^0(B(0, h^{-1/3}))} \leq \frac{\epsilon_3}{2}. \quad (7.36)$$

Remarquons que la condition d' $\epsilon_1$ -non-domination est toujours vérifiée dès que  $\epsilon$  est choisi assez petit, car les amplitudes devant les cosinus sont égales deux à deux pour des directions de propagations proches.

Pour nous assurer que la condition d' $\epsilon_0$ -indépendance est vérifiée, il nous faut perturber la métrique d'une manière générique.

### Perturbation locale de la métrique

Le lemme suivant peut être déduit de la proposition 5 dans [Rif12]. Remarquons qu'il est vrai en toute dimension. La figure 7.5 illustre l'énoncé du lemme.

**Lemme 7.23.** *Soit  $\mathcal{O} \subset X$  un petit ouvert. Fixons une distance  $d_{S^*X}$  sur  $S^*X$ , et une distance  $d_{C^k(\mathcal{O})}$  induisant la topologie  $C^k$  entre les métriques dans  $\mathcal{G}_{\mathcal{O}}$ .*

*Soient  $\rho_1, \rho_2 \in S^*X$  tels que  $\pi_X(\rho_1), \pi_X(\rho_2) \in \partial\mathcal{O}$ ,  $\pi_X(\rho_1) \neq \pi_X(\rho_2)$ . On suppose qu'il existe  $T \in \mathbb{R}$  avec  $\Phi_g^T(\rho_1) = \rho_2$ , et  $\pi_X(\Phi_g^t(\rho_1)) \in \mathcal{O}$  pour tout  $t \in (0, T)$ . Alors il existe  $\epsilon_0 > 0$  tel que le résultat suivant soit vrai.*

*Soit  $\rho'_2 \in S^*X$  avec  $\pi_X(\rho'_2) \in \partial\mathcal{O}$  tel que  $d_{S^*X}(\rho_2, \rho'_2) = \epsilon \leq \epsilon_0$ . Alors il existe  $g' \in \mathcal{G}_{\mathcal{O}}$  avec  $\|g - g'\|_{C^k(\mathcal{O})} = o_{\epsilon \rightarrow 0}(1)$  et  $T' > 0$  tel que  $\Phi_{g'}^{T'}(\rho_1) = \rho'_2$  et  $\pi_X(\Phi_{g'}^t(\rho_1)) \in \mathcal{O}$  pour tout  $t \in (0, T')$ .*



**Définition 7.24.** On dira que la propriété  $P(g', \epsilon, \omega_0, \omega_1, N)$  est vérifiée s'il existe  $T > 0$  tel que la famille  $\{k_{\beta, \omega_i}(g'); \beta \in \mathcal{B}_{\mathcal{K}, n}, n \leq N, i = 0, 1\}$  est  $(\epsilon, T)$ -indépendante.

**Lemme 7.25.** Il existe un ouvert  $\mathcal{O} \Subset X_0$  tel que pour tous  $\epsilon > 0$ ,  $\omega_0, \omega_1 \in \mathbb{S}^1$  et  $N \in \mathbb{N}$ ,  $P(x, g', \epsilon, \omega_0, \omega_1, N)$  est vraie pour une perturbation générique  $g'$  de  $g$  dans  $\mathcal{O}$  dans toute topologie  $C^k(\mathcal{O})$  pour un  $k \geq 2$ .

*Démonstration.* Rappelons que si l'on note  $\Lambda_\omega = \{(x, \omega), x \notin X_0\}$ , alors  $k_{\beta, \omega}(g)$  est la direction au temps  $n$  de l'unique trajectoire provenant de  $\Lambda_\omega$  à l'instant initial, qui est en  $x_0$  au temps  $n$ , et qui était dans  $V_{b_k}$  aux temps  $k$  pour  $k \leq n - 1$ . Par conséquent,  $k_{\beta, \omega}(g)$  dépend continûment de  $g$  dans la topologie  $C^k(\mathcal{O})$  pour tout  $k \geq 2$ , et donc  $P(x, g', \epsilon, \omega_0, \omega_1, N)$  est vrai pour  $g'$  dans un petit voisinage de  $g$  par la remarque 7.13. Montrons maintenant que cet ouvert est dense.

Remarquons que, si  $X$  est euclidienne près de l'infini, alors pour tout  $x_0 \in X$  et pour tout  $\omega \in \mathbb{S}^1$ , il existe au plus une trajectoire partant de  $\Lambda_\omega$  et passant par  $x_0$  sans passer par  $X_0$ , qui est une ligne droite.

$x_0$  et  $\omega$  étant fixé, on peut trouver un ouvert  $\mathcal{O} \Subset X_0$  tel qu'il existe au plus une trajectoire partant de  $\Lambda_\omega$  et passant par  $x_0$  sans passer par  $X_0$ .  $\mathcal{O}$  étant ouvert, cette propriété restera vraie si on perturbe légèrement la métrique, et si on prend un  $\omega'$  suffisamment proche de  $\omega$ . Si une telle trajectoire existe, alors elle correspond à  $\beta = (0, \dots, 0)$ .

Pour chaque  $\omega_i$ ,  $i = 0, 1$  et chaque  $\beta \in \mathcal{B}_k \neq (0, \dots, 0)$ ,  $k \leq N$ , prenons un petit ouvert  $\mathcal{O}'_{\beta, \omega_i} \subset \mathcal{O}$  tel que

$$\{t \geq 0 ; \pi_X(\Phi^{-t}(x_0, k_{\beta', \omega_j})) \in \mathcal{O}'_{\beta, \omega_i}\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \beta' \neq \beta \text{ ou } i \neq j \\ ]t_1, t_2[ & \text{avec } t_1 < t_2 \text{ si } \beta' = \beta \text{ et } i = j. \end{cases}$$

Il est toujours possible de trouver de tels ouverts, car les trajectoires que l'on considère sont en nombre fini, et toutes disjointes.

Soit  $k$  un vecteur suffisamment proche de  $k_{\beta, \omega_i}$ , de sorte que

$$\{t \geq 0 ; \pi_X(\Phi^{-t}(x_0, k_{\beta, \omega_i})) \in \mathcal{O}'_{\beta, \omega_i}\} = ]t'_1, t'_2[ \neq \emptyset.$$

On a en particulier que  $\Phi^{t'_1}(x_0, k)$  est proche de  $\Phi^{t_1}(x_0, k_{\beta, \omega})$ .

Par le lemme 7.23, on sait qu'il est possible de perturber la métrique dans  $\mathcal{O}'_{\beta, \omega_i}$  de sorte que la trajectoire de  $(\Phi_{g'}^t)$  commençant en  $(\Phi_g^{-t_2}(x_0, k_{\beta, \omega_i}))$  sorte de  $S^*\mathcal{O}'_{\beta, \omega_i}$  dans le futur en  $\Phi_g^{-t'_1}(x_0, k)$ .

En perturbant la métrique de la sorte, on peut donc modifier légèrement  $k_{\beta, \omega_i}$  comme on le souhaite, sans modifier les autres directions  $k_{\beta', j}$ .

Comme d'autre part, pour  $\beta = (0, \dots, 0)$ , la famille  $(k_{\beta, \omega_0}, k_{\beta, \omega_1})$  est  $\epsilon$ -indépendante pour tout  $\epsilon$  dès que l'on prend  $\omega_0$  et  $\omega_1$  suffisamment proches, on en déduit par la remarque 7.13, que l'ensemble des métriques  $g'$  telles que  $P(x, g', \epsilon, \omega_0, \omega_1, N)$  est vérifiée est dense dans un voisinage de  $g$ .  $\square$

**Fin de la preuve du théorème 1.28**

Pour une perturbation  $C^k(\mathcal{O})$ -générique de  $g$ , on peut appliquer le théorème 7.15 à la fonction  $G_{x_0}$  dans (7.35). On obtient qu'il existe  $c > 0$  tel que pour  $r$  assez grand, cette fonction a au moins  $cr^2$  domaines nodaux qui sont  $\epsilon_3$ -stables. En prenant  $\eta < \epsilon_3/6$ , le reste dans (7.34) peut être rendu plus petit que  $\epsilon_3/2$ , on en déduit que  $\mathfrak{R}(E_h(\cdot, \omega_0; g')) + \mathfrak{R}(E_h(\cdot, \omega_1; g'))$  a au moins  $ch^{-2/3}$  domaines nodaux contenus dans une boule de rayon  $h^{2/3}$  autour de  $x_0$ .

Comme les  $k_{\beta, \omega_i}(x_0)$  et  $b_\beta(x_0)$  dépendent de façon continue de  $x_0$ , on peut utiliser la remarque 7.16 pour trouver  $\epsilon_5 > 0$  est assez petit, de sorte que pour tout  $x_1 \in B(x_0, \epsilon_5)$ ,  $G_{x_1}$  possède au moins  $cr^2/2$  domaines nodaux qui sont  $\frac{\epsilon_3}{2}$ -stables, et donc que  $\mathfrak{R}(E_h(\cdot, \omega_0; g')) + \mathfrak{R}(E_h(\cdot, \omega_1; g'))$  a au moins  $ch^{-2/3}$  domaines nodaux contenus dans une boule de rayon  $h^{2/3}$  autour de  $x_1$ .

On peut trouver  $c'h^{-4/3}$  points  $x_i \in B(x_0, \epsilon_5)$ , avec  $c' > 0$  indépendante de  $h$ , tels que les boules  $B(x_i, h^{2/3})$  sont deux à deux disjointes. Par ce qui précède, dans chacune de ces boules,  $\mathfrak{R}(E_h(\cdot, \omega_0; g')) + \mathfrak{R}(E_h(\cdot, \omega_1; g'))$  a au moins  $ch^{-2/3}$  domaines nodaux. Au total,  $\mathfrak{R}(E_h(\cdot, \omega_0; g')) + \mathfrak{R}(E_h(\cdot, \omega_1; g'))$  a au moins  $c'h^{-2}$  domaines nodaux dans  $B(x_0, \epsilon_5)$ . Ceci conclut la preuve du théorème 1.28.  $\square$



# Appendices



# Annexe A

## Rappels d'analyse semi-classique

### A.1 Calcul Pseudo-différentiel

Soit  $Y$  une variété riemannienne.<sup>1</sup> On dira qu'une fonction  $a(x, \xi; h) \in C^\infty(T^*Y \times (0, 1])$  est de classe  $S^{comp}(T^*Y)$  si elle peut être écrite comme

$$a(x, \xi; h) = \tilde{a}_h(x, \xi) + O\left(\left(\frac{h}{\langle \xi \rangle}\right)^\infty\right),$$

où les fonctions  $\tilde{a}_h \in C_c^\infty(T^*Y)$  ont toutes leurs semi-normes et leur support bornés indépendamment de  $h$ . Si  $U$  est un ouvert de  $T^*Y$ , on écrira parfois  $S^{comp}(U)$  pour l'ensemble des fonctions  $a$  dans  $S^{comp}(T^*Y)$  telles que pour tout  $h \in ]0, 1]$ ,  $\tilde{a}_h$  a son support dans  $U$ .

**Définition A.1.** Soit  $a \in S^{comp}(T^*Y)$ . On dira que  $a$  est un symbole classique s'il existe une suite de symboles  $a_k \in S^{comp}(T^*Y)$  tels que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$a - \sum_{k=0}^n h^k a_k \in h^{n+1} S^{comp}(T^*Y).$$

On notera alors  $a^0(x, \xi) := \lim_{h \rightarrow 0} a(x, \xi; h)$  le symbole principal de  $a$ .

On écrira parfois que  $a \in S^{comp}(Y)$  si elle peut être écrite comme

$$a(x; h) = \tilde{a}_h(x) + O(h^\infty),$$

où les fonctions  $\tilde{a}_h \in C_c^\infty(Y)$  ont toutes leurs semi-normes et leur support bornés indépendamment de  $h$ .

---

1. Dans ce texte,  $Y$  sera toujours soit la variété non-compacte  $X$ , soit  $\mathbb{R}^d$  lorsqu'on se place dans des coordonnées locales, soit la sphère  $\mathbb{S}^{d-1}$ .

On associe à  $S^{comp}(T^*Y)$  l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels  $\Psi_h^{comp}(Y)$ , par l'application (surjective) de quantification

$$Op_h : S^{comp}(T^*Y) \longrightarrow \Psi_h^{comp}(Y).$$

Cette quantification est définie en utilisant des coordonnées locales, et dans chaque carte, la quantification de Weyl sur  $\mathbb{R}^d$ . Cette construction n'est donc pas intrinsèque. On peut néanmoins montrer que l'application *symbole principal*

$$\sigma_h : \Psi_h^{comp}(Y) \longrightarrow S^{comp}(T^*Y)/hS^{comp}(T^*Y)$$

est intrinsèque, et on a

$$\sigma_h(A \circ B) = \sigma_h(A)\sigma_h(B)$$

et

$$\sigma_h \circ Op : S^{comp}(T^*Y) \longrightarrow S^{comp}(T^*Y)/hS^{comp}(T^*Y)$$

est la projection naturelle.

Pour plus de détails sur ces applications et leur construction, nous renvoyons le lecteur à [Zwo12, Chapitre 14].

**Trace d'opérateurs pseudo-différentiels** Si  $a \in S^{comp}(T^*Y)$ , alors  $Op_h(a)$  est un opérateur à trace, et on a

$$\text{Tr}Op_h(a) = \frac{1}{(2\pi h)^{d-1}} \left( \int_{T^*Y} \tilde{a}_h(x, \xi) dx d\xi + O(h) \right). \quad (\text{A.1})$$

**Mesures semi-classiques** Soit  $(u_h)$  un famille de fonctions dans  $C^\infty(Y)$ , indexée par  $h$  et soit  $\mu$  une mesure de Radon sur  $T^*X$ . On dit que  $\mu$  est une *mesure semi-classique* associée à  $(u_h)$  s'il existe une suite  $h_n \rightarrow 0$  telle que pour toute fonction  $a \in C_c^\infty(T^*Y)$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle Op_h(a)u_{h_n}, u_{h_n} \rangle_{L^2(Y)} = \int_{T^*Y} a d\mu.$$

On peut montrer que si  $(u_h)$  est bornée dans  $L^2(Y)$ , il existe toujours au moins une mesure semi-classique (cf [Zwo12, Chapitre 5]).

**Front d'onde** Si  $a \in S^{comp}(T^*Y)$ , on dit que son *support essentiel* est égal à un compact  $K \Subset T^*Y$ , ce que l'on note

$$\text{ess supp}_h a = K \Subset T^*Y,$$

si et seulement si, pour tout  $\chi \in C_c^\infty(T^*Y)$ , on a

$$\text{supp} \chi \subset (T^*Y \setminus K) \Rightarrow \chi a \in h^\infty S(T^*Y).$$

Lorsque  $A \in \Psi_h^{comp}(Y)$ ,  $A = Op_h(a)$ , on définit le front d'onde de  $A$  comme étant :

$$WF_h(A) = \text{ess supp}_h a,$$

en remarquant que cette définition ne dépend pas du choix de la quantification.

## A.2 Distributions lagrangiennes et opérateurs intégraux de Fourier

**Équivalence micro-locale** Soient  $U, V$  des ouverts bornés de  $T^*Y$ , et soient  $T, T' : L^2(Y) \rightarrow L^2(Y)$  des opérateurs bornés, on dit que  $T \equiv T'$  *micro-localement* près de  $U \times V$  s'il existe des ouverts bornés  $\tilde{U} \supset \bar{U}$  et  $\tilde{V} \supset \bar{V}$  tels que pour tous  $A, B \in \Psi_h^{comp}(Y)$  avec  $WF_h(A) \subset \tilde{U}$  and  $WF_h(B) \subset \tilde{V}$ , on a

$$A(T - T')B = O_{L^2 \rightarrow L^2}(h^\infty)$$

**Distributions tempérées** Soit  $u = (u(h))$  une famille dépendant de  $h$  de distributions dans  $\mathcal{D}'(Y)$ . On dit que cette famille est *h-tempérée* si pour tout ouvert borné  $U \subset Y$ , il existe  $C > 0$  et  $N \in \mathbb{N}$  tels que

$$\|u(h)\|_{H_h^{-N}(U)} \leq Ch^{-N},$$

où  $\|\cdot\|_{H_h^{-N}(U)}$  est la norme de Sobolev semi-classique.

Si  $u = (u(h))$  est une distribution tempérée, on dit qu'un point  $\rho \in T^*Y$  n'appartient pas au front d'onde  $WF_h(u)$  s'il existe un voisinage  $V$  de  $\rho$  dans  $T^*Y$  tel que pour tout  $A \in \Psi_h^{comp}(Y)$  tel que  $WF_h(a) \subset V$ , on a  $Au = O(h^\infty)$ .

## A.2 Distributions lagrangiennes et opérateurs intégraux de Fourier

Dans cette section, nous rappellerons la définition des opérateurs intégraux de Fourier, avec des notations inspirées de [DG14]. Nous renvoyons le lecteur à cet article et aux références qui s'y trouvent pour les preuves que nous omettons.

**Fonctions de phase** Soit  $\phi(y, \theta)$  une fonction lisse à valeurs réelles définie sur un ouvert  $U_\phi$  de  $Y \times \mathbb{R}^L$ , pour un  $L \in \mathbb{N}$ . On appelle  $y$  les *variables de base* et  $\theta$  les *variables oscillantes*. On dira que  $\phi$  est une *fonction de phase non-dégénérée* si les différentielles  $d(\partial_{\theta_1}\phi) \dots d(\partial_{\theta_L}\phi)$  sont linéairement indépendantes sur l'*ensemble critique*

$$C_\phi := \{(y, \theta); \partial_\theta \phi = 0\} \subset U_\phi.$$

Dans ce cas,

$$\Lambda_\phi := \{(y, \partial_y \phi(y, \theta)); (y, \theta) \in C_\phi\} \subset T^*Y$$

est une variété lagrangienne immergée. Quitte à restreindre le domaine de  $\phi$ , on peut faire de  $\Lambda_\phi$  une variété lagrangienne plongée. On dit alors que  $\phi$  *engendre*  $\Lambda_\phi$ .



**Distributions lagrangiennes** Étant donnée une fonction de phase  $\phi$  et un symbole  $a \in S^{comp}(U_\phi)$ , considérons la famille de fonctions (dépendant de  $h$ )

$$u(y; h) = h^{-L/2} \int_{\mathbb{R}^L} e^{i\phi(y, \theta)/h} a(y, \theta; h) d\theta. \quad (\text{A.2})$$

On dit que  $u = (u(h))$  est une *distribution lagrangienne*, (ou un *état lagrangien*) engendré par  $\phi$ . Par la méthode de la phase non-stationnaire, si *supp*  $a$  est contenu dans un compact  $K \subset U_\phi$  indépendant de  $h$ , alors

$$WF_h(u) \subset \{(x, \partial_x \phi(x, \theta)); (x, \theta) \in C_\phi \cap K\} \subset \Lambda_\phi.$$

Le *symbole principal*  $\sigma_\phi(u) \in S^{comp}(\Lambda_\phi)$  de  $u$  est défini modulo  $O(h)$  par l'expression

$$\sigma_\phi(u)(x, \partial_x \phi(x, \theta); h) = a(x, \theta; h), \quad (x, \theta) \in C_\phi. \quad (\text{A.3})$$

Pour la preuve du fait que  $\sigma_\phi(u)$  est bien défini modulo  $O(h)$ , on pourra se référer à [DG14, Proposition 3.3].

**Définition A.2.** Soit  $\Lambda \subset T^*Y$  une sous-variété Lagrangienne plongée. On dit qu'une famille de fonctions indexée par  $h$   $u(y; h) \in C_c^\infty(Y)$  est une distribution lagrangienne associée à  $\Lambda$  (ou un état lagrangien associé à  $\Lambda$ ), à support compact et à microsupport compact, si elle peut être écrite comme la somme d'un nombre fini de fonctions de la forme (A.2), pour différentes fonctions de phase  $\phi$  paramétrant des ouverts de  $\Lambda$ , plus un reste  $O(h^\infty)$  pour la topologie  $C^\infty(Y)$ . On notera  $I^{comp}(\Lambda)$  l'ensemble de toutes les fonctions de cette forme.

**Opérateurs intégraux de Fourier** Soient  $Y, Y'$  deux variétés ayant la même dimension  $d$ , et soit  $\kappa$  un symplectomorphisme d'un ouvert de  $T^*Y$  dans un ouvert de  $T^*Y'$ . Considérons la variété lagrangienne

$$\Lambda_\kappa = \{(y, \nu; y', -\nu'); \kappa(y, \nu) = (y', \nu')\} \subset T^*Y \times T^*Y' = T^*(Y \times Y').$$

On dira qu'une famille d'opérateurs  $T_h$  est à *support compact* si le support de son noyau de Schwartz de  $T_h$  est contenu dans un compact indépendant de  $h$ . Une famille d'opérateurs à support compact  $T : \mathcal{D}'(Y) \rightarrow C_c^\infty(Y')$  est appelé un *opérateur intégral de Fourier* (semi-classique) associé à  $\kappa$  si son noyau de Schwartz  $K_T(y, y')$  appartient à  $h^{-d/2} I^{comp}(\Lambda_\kappa)$ . On écrit alors  $T \in I^{comp}(\kappa)$ . Remarquons qu'un tel opérateur est automatiquement à trace. Le facteur  $h^{-d/2}$  s'explique comme suit : la normalisation pour une distribution lagrangienne est choisie de sorte que  $\|u\|_{L^2} \asymp 1$ , tandis que la normalisation pour les opérateurs intégraux de Fourier est choisie telle que  $\|T\|_{L^2(Y) \rightarrow L^2(Y')} \asymp 1$ .

Remarquons que si  $\kappa \circ \kappa'$  est bien défini, et si  $T \in I^{comp}(\kappa)$  et  $T' \in I^{comp}(\kappa')$ , alors  $T \circ T' \in I^{comp}(\kappa \circ \kappa')$ .

Si  $U \in I^{comp}(\kappa)$  et  $O \subset T^*Y$  est un ouvert borné, on dira que  $U$  est *micro-localement unitaire* près de  $O$  si  $U^*U \equiv I_{L^2(Y) \rightarrow L^2(Y)}$  micro-localement près de  $O \times \kappa(O)$ .

### A.3 Propriétés locales des opérateurs intégraux de Fourier

**Lemme A.3.** Soit  $\kappa : T^*Y \supset U \rightarrow V \subset T^*Y$  n'ayant aucun point fixe, et soit  $T \in I^{comp}(\kappa)$ . Alors

$$\text{Tr}(T) = O(h^\infty)$$

*Démonstration.* (Esquisse) Par définition, le noyau intégral de  $T$  peut s'écrire comme une somme finie de termes de la forme

$$(2\pi h)^{-L} \int_{\mathbb{R}^L} e^{i\phi(y,y';\theta)/h} a(y,y',\theta,h) d\theta,$$

où  $\phi$  paramétrise localement  $\Lambda_\kappa$  au sens où dans un ouvert  $U \subset T^*(Y \times Y')$ , on a

$$\Lambda_\kappa \cap U = \{(y, \partial\phi_{y'}(y, y', \theta), y', -\partial_y\phi(y, y', \theta)); (y, y', \theta) \text{ such that } \partial_\theta\phi(y, y', \theta) = 0\}.$$

La trace est alors donnée par une somme de termes de la forme

$$\frac{1}{(2\pi h)^{L+d-1}} \int_Y \int_{\mathbb{R}^L} e^{i\frac{\phi(y,y;\theta)}{h}} a(y, y, \theta, h) d\theta dy.$$

Le fait que  $\kappa$  n'ait pas de points fixes implique que si  $(y, y, \theta)$  sont tels que  $\partial_\theta\phi(y, y, \theta) = 0$ , on a  $\frac{d}{dy}\phi(y, y, \theta) \neq 0$ . Alors, par le lemme de phase non-stationnaire, on obtient le résultat.  $\square$

### A.3 Propriétés locales des opérateurs intégraux de Fourier

Dans cette section, nous expliquerons comment, en travaillant localement, on peut décrire de nombreux opérateurs intégraux de Fourier sans l'aide d'intégrales oscillantes. En particulier, en suivant [NZ09, §4.1], nous rappellerons l'action d'un opérateur intégral de Fourier sur une distribution lagrangienne sans caustiques.

Soit  $\kappa : T^*\mathbb{R}^d \rightarrow T^*\mathbb{R}^d$  un difféomorphisme symplectique local. Quitte à effectuer des translations dans l'espace des phases, on peut supposer que  $\kappa$  est défini dans un voisinage de  $(0, 0)$ , et que  $\kappa(0, 0) = (0, 0)$ .

On peut trouver des sous-espaces vectoriels lagrangiens,  $\Gamma_j, \Gamma_j^\perp \subset T^*\mathbb{R}^d$ ,  $j = 0, 1$ , ayant les propriétés suivantes :

- $\Gamma_j^\perp$  est transverse à  $\Gamma_j$  ;
- si  $\pi_j$  (resp.  $\pi_j^\perp$ ) est la projection  $T^*\mathbb{R}^d \rightarrow \Gamma_j$  le long de  $\Gamma_j^\perp$  (resp. la projection  $T^*\mathbb{R}^d \rightarrow \Gamma_j^\perp$  le long de  $\Gamma_j$ ), alors, pour un voisinage  $U$  de 0, l'application

$$\kappa(U) \times U \ni (\kappa(\rho), \rho) \mapsto \pi_1(\kappa(\rho)) \times \pi_0^\perp \in \Gamma_1 \times \Gamma_0^\perp$$

est un difféomorphisme local du graphe de  $\kappa|_U$  vers un voisinage de l'origine dans  $\Gamma_1 \times \Gamma_0^\perp$ .

Soient  $A_j$ ,  $j = 0, 1$  des transformations linéaires symplectiques avec les propriétés que

$$A_j(\Gamma_j) = \{(x, 0)\} \subset T^*\mathbb{R}^d \text{ et } A_j(\Gamma_j^\perp) = \{(0, \xi)\} \subset T^*\mathbb{R}^d,$$

et soient  $M_j$  des *quantifications métaplectiques* des  $A_j$  comme défini dans [DS99, Appendix to chapter 7]. Alors le difféomorphisme tourné

$$\tilde{\kappa} := A_1 \circ \kappa \circ A_0^{-1}$$

est tel que la projection depuis le graphe de  $\tilde{\kappa}$

$$T^*\mathbb{R}^d \times T^*\mathbb{R}^d \ni (x^1, \xi^1; x^0, \xi^0) \mapsto (x^1, \xi^0) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \quad (x^1, \xi^1) = \tilde{\kappa}(x^0, \xi^0), \quad (\text{A.4})$$

est un difféomorphisme près de l'origine. Remarquons que ceci est équivalent à demander que

$$\text{Le bloc } n \times n(\partial x^1 / \partial x^0) \text{ dans l'application tangente } d\kappa(0, 0) \text{ est inversible.} \quad (\text{A.5})$$

Il s'ensuit alors qu'il existe une unique fonction  $\tilde{\psi} \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$  telle que pour  $(x^1, \xi^0)$  près de  $(0, 0)$ ,

$$\tilde{\kappa}(\tilde{\psi}'_\xi(x^1, \xi^0), \xi^0) = (x^1, \tilde{\psi}'_x(x^1, \xi^0)), \quad \det \tilde{\psi}''_{x\xi} \neq 0 \text{ and } \tilde{\psi}(0, 0) = 0.$$

On dit alors que la fonction  $\tilde{\psi}$  *engendre* la transformation  $\tilde{\kappa}$  près de  $(0, 0)$ .

Remarquons que si  $\tilde{T} \in I^{comp}(\tilde{\kappa})$ , alors

$$T := M_1^{-1} \circ \tilde{T} \circ M_0 \in I^{comp}(\kappa). \quad (\text{A.6})$$

Grâce à l'hypothèse (A.4), un opérateur intégral de Fourier  $\tilde{T} \in I^{comp}(\tilde{\kappa})$  peut être écrit sous la forme

$$\tilde{T}u(x^1) := \frac{1}{(2\pi h)^d} \int \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i(\tilde{\psi}(x^1, \xi^0) - \langle x^0, \xi^0 \rangle / h)} \alpha(x^1, \xi^0; h) u(x^0) dx^0 d\xi^0, \quad (\text{A.7})$$

avec  $\alpha \in S^{comp}(\mathbb{R}^{2d})$ .

Énonçons maintenant un lemme dont la preuve se trouve dans [NZ09, lemme 4.1], et qui décrit l'action d'un opérateur intégral de Fourier de la forme (A.7) sur une distribution lagrangienne qui se projette sur la variété de base sans caustiques.

**Lemme A.4.** *Considérons une variété lagrangienne  $\Lambda_0 = \{(x_0, \phi'_0(x_0)); x_0 \in \Omega_0\}$ ,  $\phi_0 \in C_b^\infty(\Omega_0)$ , contenue dans un petit ouvert  $V \subset T^*\mathbb{R}^d$  tel que  $\kappa$  est engendré par  $\psi$  près de  $V$ . On suppose que*

$$\kappa(\Lambda_0) = \Lambda_1 = \{(x, \phi'_1(x)); x \in \Omega_1\}, \quad \phi_1 \in C_b^\infty(\Omega_1). \quad (\text{A.8})$$

### A.3 Propriétés locales des opérateurs intégraux de Fourier

Alors, pour tout symbole  $a \in S^{comp}(\Omega_0)$ , l'application d'un opérateur intégral de Fourier  $T$  de la forme (A.7) à l'état lagrangien

$$a(x)e^{i\phi_0(x)/h}$$

associé à  $\Lambda_0$  peut se décomposer, pour tout  $L > 0$ , comme

$$T(ae^{i\phi_0/h})(x) = e^{i\phi_1(x)/h} \left( \sum_{j=0}^{L-1} b_j(x)h^j + h^L r_L(x, h) \right), \quad (\text{A.9})$$

où  $b_j \in S^{comp}$ , et pour tout  $\ell \in \mathbb{N}$ , on a

$$\begin{aligned} \|b_j\|_{C^\ell(\Omega_1)} &\leq C_{\ell,j} \|a\|_{C^{\ell+2j}(\Omega_0)}, \quad 0 \leq j \leq L-1, \\ \|r_L(\cdot, h)\|_{C^\ell(\Omega_1)} &\leq C_{\ell,L} \|a\|_{C^{\ell+2L+n}(\Omega_0)}. \end{aligned}$$

Les constantes  $C_{\ell,j}$  dépendent seulement de  $\kappa$ ,  $\alpha$  et  $\sup_{\Omega_0} |\partial^\beta \phi_0|$  pour  $0 < |\beta| \leq 2\ell + j$ .

#### A.3.1 Le propagateur de Schrödinger comme un opérateur intégral de Fourier

Expliquons comme le formalisme de la section A.3 peut être utilisé pour décrire le propagateur de Schrödinger  $U(t)$  agissant sur  $L^2(Y)$ . Énonçons un lemme dont la preuve peut être trouvée dans [NZ09, lemme 4.2]. Si  $0 < \delta < 1$ , on pose

$$\mathcal{E}^\delta = \{\rho \in T^*Y; |p(\rho) - 1| < \delta\}$$

**Lemme A.5.** Soient  $V_0 \Subset \mathcal{E}^\delta$ ,  $V_1 \subset \Phi^t(V_0)$  pour  $t > 0$ . Prenons  $\rho_0 \in V_0 \cap \mathcal{E}$  et posons  $\rho_1 = \Phi^t(\rho_0) \in V_1$ . Soient  $f_j : \pi(V_j) \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $j = 0, 1$  des coordonnées locales telles que  $f_0(\pi(\rho_0)) = f_1(\pi(\rho_1)) = 0 \in \mathbb{R}^d$ . Ces coordonnées induisent sur  $V_0$  et  $V_1$  des coordonnées symplectiques

$$F_j(x, \xi) := (f_j(x), (df_j(x)^t)^{-1}\xi - \xi^{(j)}), \quad j = 0, 1,$$

où  $\xi^{(j)} \in \mathbb{R}^d$  est fixé par la condition  $F_j(\rho_j) = (0, 0)$ . Alors l'opérateur sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$ ,

$$T(t) := e^{-i\langle x, \xi^{(1)} \rangle / h} (f_1^{-1})^* U(t) (f_0)^* e^{i\langle x, \xi^{(0)} \rangle / h}$$

est de la forme (A.6) pour un certain choix de  $A_j$  micro-localement près de  $(0, 0) \times (0, 0)$ .

Énonçons maintenant un lemme qui est une conséquence du lemme précédent, ou encore du théorème d'Egorov [Zwo12, Théorème 11.1].

**Lemme A.6.** Soient  $A, B \in \Psi_h^{comp}(Y)$ , et supposons que  $\Phi^t(WF_h(A)) \cap WF_h(B) = \emptyset$ . On a alors

$$AU(t)B = O_{L^2 \rightarrow L^2}(h^\infty).$$

### A.3.2 Itérations d'opérateurs intégraux de Fourier

Nous rappelons ici le principal résultat de [NZ09, §4] concernant l'itération d'opérateurs intégraux de Fourier semi-classiques dans  $T^*\mathbb{R}^d$ .

Soit  $V \subset T^*\mathbb{R}^d$  un voisinage ouvert de 0, et considérons une suite de symplectomorphismes  $(\kappa_i)_{i=1,\dots,N}$  de  $V$  vers  $T^*\mathbb{R}^d$ , telle que  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$ , on a  $\kappa_i(0) \in V$ , et telle que la projection :

$$(x_1, \xi_1; x_0, \xi_0) \mapsto (x_1, \xi_0) \text{ où } (x_1, \xi_1) = \kappa(x_0, \xi_0)$$

est un difféomorphisme près de l'origine. On considère des opérateurs intégraux de Fourier  $(T_i)$  qui quantifient  $\kappa_i$  et qui sont micro-localement unitaires près d'un ouvert  $U \times U$ , où  $U \Subset V$  contient l'origine. Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un ouvert tel que  $U \Subset T^*\Omega$ , et, pour tout  $i$ ,  $\kappa_i(U) \Subset T^*\Omega$ . Pour tout  $i$ , on prend une fonction lisse  $\chi_i \in C_c^\infty(U; [0, 1])$ , et on pose

$$S_i := Op_h(\chi_i) \circ T_i. \quad (\text{A.10})$$

Considérons une famille de sous-variétés lagrangiennes

$$\Lambda_k = \{(x, \phi'_k(x)); x \in \Omega\} \subset T^*\mathbb{R}^d, \quad k = 0, \dots, N$$

telles que :

$$|\partial^\alpha \phi_k| \leq C_\alpha, \quad 0 \leq k \leq N \quad \alpha \in \mathbb{N}^d. \quad (\text{A.11})$$

On suppose qu'il existe une suite d'entiers  $(i_k \in \{1, \dots, J\})_{k=1,\dots,N}$  telle que

$$\kappa_{i_{k+1}}(\Lambda_k \cap U) \subset \Lambda_{k+1}, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

On définit  $g_k$  par

$$g_k(x) = \pi \circ \kappa_{i_k}^{-1}(x, \phi'_k(x)).$$

C'est-à-dire,  $\kappa_{i_k}^{-1}(x, \phi'_k(x)) = (g_k(x), \phi'_{k-1}(g_k(x)))$ .

On dira qu'un point  $x \in \Omega$  est  $N$ -admissible si on peut définir récursivement une suite par  $x^N = x$ , et, pour  $k = N, \dots, 1$ ,  $x^{k-1} = g_k(x^k)$ . Cette procédure est possible si, pour tout  $k$ ,  $x^k$  est dans le domaine de définition de  $g_k$ .

Supposons que, pour toute suite admissible  $(x^N \dots x^0)$ , les matrices jacobiniennes sont uniformément majorées :

$$\left\| \frac{\partial x^k}{\partial x^l} \right\| = \left\| \frac{\partial (g_{k+1} \circ g_{k+2} \circ \dots \circ g_l)}{\partial x^l}(x^l) \right\| \leq C_D, \quad 0 \leq k < l \leq N,$$

où  $C_D$  est indépendante de  $N$ . Cette hypothèse dit grosso modo que les applications  $g_k$  sont (faiblement) contractantes.

Nous utiliserons aussi la notation

$$D_k := \sup_{x \in \Omega} |\det dg_k(x)|^{1/2}, \quad J_k := \prod_{k'=1}^k D_{k'},$$

et supposons que les  $D_k$  sont uniformément bornées :  $1/C_D \leq D_k \leq C_D$ .

La Proposition suivante peut être trouvée dans [NZ09, Proposition 4.1].

### A.3 Propriétés locales des opérateurs intégraux de Fourier

**Proposition A.7.** *Nous utilisons les mêmes notations et faisons les mêmes hypothèses que ci-dessus, et prenons  $N$  arbitrairement grand, et variant éventuellement avec  $h$ . Soit  $a \in S^{\text{comp}}$  et considérons l'état lagrangien  $u = ae^{i\phi_0/h}$  associé à la variété lagrangienne  $\Lambda_0$ . On peut alors écrire :*

$$(S_{i_N} \circ \dots \circ S_{i_1})(ae^{i\phi_0/h})(x) = e^{i\phi_N(x)/h} \left( \sum_{j=0}^{L-1} h^j a_j^N(x) + h^L R_L^N(x, h) \right),$$

où chaque  $a_j^N \in C_c^\infty(\Omega)$  dépend de  $h$  uniquement à travers  $N$ , et où  $R_L^N \in C^\infty((0, 1]_h, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$ . Si  $x^N \in \Omega$  est  $N$ -admissible, et définit une suite  $(x^k), k = N, \dots, 1$ , alors

$$|a_0^N(x^N)| = \left( \prod_{k=1}^N \chi_{i_k}(x^k, \phi'_k(x^k)) |\det dg_k(x^k)|^{\frac{1}{2}} \right) |a(x^0)|,$$

autrement  $a_j^N(x^N) = 0, j = 0, \dots, L-1$ . On a aussi les bornes

$$\|a_j^N\|_{C^\ell(\Omega)} \leq C_{j,\ell} J_N (N+1)^{\ell+3j} \|a\|_{C^{\ell+2j}(\Omega)}, \quad j = 0, \dots, L-1, \ell \in \mathbb{N}, \quad (\text{A.12})$$

$$\|R_L^N\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C_L \|a\|_{C^{2L+d}(\Omega)} (1 + C_0 h)^N \sum_{k=1}^N J_k k^{3L+d}, \quad (\text{A.13})$$

$$\|R_L^N\|_{C^\ell(\mathbb{R}^d)} \leq C_{L,\ell} h^{-d/2-\ell} \|a\|_{C^{2L+d}(\Omega)} (1 + C_0 h)^N \sum_{k=1}^N J_k k^{3L+d}. \quad (\text{A.14})$$

Les constantes  $C_{j,\ell}, C_0$  et  $C_L$  dépendent des constantes dans (A.11) et des opérateurs  $\{S_j\}_{j=1}^J$ .

Nous utiliserons principalement cette proposition dans le cas où pour tous les  $k$ , on a  $D_k \leq \nu < 1$ . Dans ce cas, les estimées (A.12), (A.13) et (A.14) impliquent que pour tout  $\ell \in \mathbb{N}$ , il existe  $C_\ell$  indépendante de  $N$  telle que pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , on a

$$\|a^N\|_{C^\ell} \leq \|a_0^N\|_{C^\ell} (1 + C_\ell h). \quad (\text{A.15})$$



# Bibliographie

- [Ale05] I. Alexandrova. Structure of the semi-classical amplitude for general scattering relations. *Comm. Partial Differential Equations*, 30(10-12) :1505–1535, 2005.
- [AN07] N. Anantharaman and S. Nonnenmacher. Half-delocalization of eigenfunctions for the Laplacian on an Anosov manifold. *Annales de l'institut Fourier*, 57(7) :2465–2523, 2007.
- [Ana08] N. Anantharaman. Entropy and the localization of eigenfunctions. *Annals of Mathematics*, 168 :435–475, 2008.
- [BBB03] M. Berti, L. Biasco, and P. Bolle. Drift in phase space : a new variational mechanism with optimal diffusion time. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 82(6) :613–664, 2003.
- [BBR10] J.-F. Bony, N. Burq, and T. Ramond. Minoration de la résolvante dans le cas captif. *Comptes Rendus Mathématique*, 348(23) :1279–1282, 2010.
- [Ber77] M.V. Berry. Regular and irregular semiclassical wavefunctions. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 10(12) :2083, 1977.
- [BM82] P. Bérard and D. Meyer. Inégalités isopérimétriques et applications. In *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, volume 15, pages 513–541, 1982.
- [Bor07] D. Borthwick. *Spectral theory of infinite-area hyperbolic surfaces*. Birkhäuser, 2007.
- [Bou14] J. Bourgain. On toral eigenfunctions and the random wave model. *Israel Journal of Mathematics*, 201(2) :611–630, 2014.
- [BP12] D. Bulger and A. Pushnitski. The spectral density of the scattering matrix for high energies. *Communications in Mathematical Physics*, 316, Issue 3. :693–704, 2012.
- [BP13] D. Bulger and A. Pushnitski. The spectral density of the scattering matrix of magnetic schrödinger operator for high energies. *J. Spectr. Theory*, 3, Issue 4. :517–534, 2013.



- [Brü78] J. Brüning. Über knoten von eigenfunktionen des Laplace-Beltrami-operators. *Mathematische Zeitschrift*, 158(1) :15–21, 1978.
- [Bur02a] N. Burq. Lower bounds for shape resonances width of long range Schrödinger operators. *Amer. J. Math.*, 124(4) :677–735, 2002.
- [Bur02b] N. Burq. Semi-classical estimates for the resolvent in nontrapping geometries. *International Mathematics Research Notices*, 2002(5) :221–241, 2002.
- [BW15] J. Buckley and I. Wigman. On the number of nodal domains of toral eigenfunctions. *arXiv preprint arXiv :1511.04382*, 2015.
- [BY82] M. Sh. Birman and D. R. Yafaev. Asymptotic behavior of the limiting phase shifts in the case of scattering by a potential without spherical symmetry. *Theoretical and Mathematical Physics*, 51(1) :344–350, 1982.
- [BY84] M. Sh. Birman and D. R. Yafaev. Asymptotic behavior of the spectrum of the scattering matrix. *Journal of Soviet Mathematics*, 25(1) :793–814, 1984.
- [CDV85] Y. Colin De Verdiere. Ergodicité et fonctions propres du laplacien. *Communications in Mathematical Physics*, 102(3) :497–502, 1985.
- [CH67] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics, Vol.I*. Interscience Publishers Inc. N.Y., 1967.
- [Chr15] T.J. Christiansen. A sharp lower bound for a resonance-counting function in even dimensions. *arXiv preprint arXiv :1510.04952*, 2015.
- [CM11] T. Colding and W. P. Minicozzi. Lower bounds for nodal sets of eigenfunctions. *Comm. Math. Phys.*, 306(3) :777–784, 2011.
- [DF88] H. Donnelly and C. Fefferman. Nodal sets of eigenfunctions on Riemannian manifolds. *Inventiones mathematicae*, 93(1) :161–183, 1988.
- [DF90] H. Donnelly and C. Fefferman. Nodal sets of eigenfunctions of the Laplacian on surfaces. *J. Amer. Math. Soc.*, 3 :333–353, 1990.
- [DG14] S. Dyatlov and C. Guillarmou. Microlocal limits of plane waves and Eisenstein functions. *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup*, 47(2) :371–448, 2014.
- [DGRHH14] K. Datchev, J. Gell-Redman, A. Hassell, and P. Humphries. Approximation and equidistribution of phase shifts : spherical symmetry. *Communications in Mathematical Physics*, 326, Issue 3. :209–236, 2014.
- [Don92] R.T. Dong. Nodal sets of eigenfunctions on riemann surfaces. *J. Diff. Geom.*, 36, Part 2 :493–506, 1992.
- [DS92] E. Doron and U. Smilansky. Semiclassical quantization of chaotic billiards : a scattering theory approach. *Nonlinearity*, 5 :1055–1084, 1992.
- [DS99] M. Dimassi and J. Sjöstrand. *Spectral asymptotics in the semi-classical limit*. Number 268. Cambridge university press, 1999.

## BIBLIOGRAPHIE

- [DV12] K. Datchev and A. Vasy. Gluing semiclassical resolvent estimates via propagation of singularities. *International Mathematics Research Notices*, 62 :5409–5443, 2012.
- [DZ] S. Dyatlov and M. Zworski. *Mathematical theory of scattering resonances*. Version 0.03, To appear.
- [Ebe01] P. Eberlein. Geodesic flows in manifolds of nonpositive curvature. In *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, volume 69, pages 525–572. Providence, RI; American Mathematical Society; 1998, 2001.
- [EBHW15] J.W. Eaton, D. Bateman, S. Hauberg, and R. Wehbring. *GNU Octave version 4.0.0 manual : a high-level interactive language for numerical computations*. 2015.
- [EJN07] A. Eremenko, D. Jakobson, and N. Nadirashvili. On nodal sets and nodal domains on  $\mathbb{S}^2$  and  $\mathbb{R}^2$ . In *Annales de l'institut Fourier*, volume 57, pages 2345–2360, 2007.
- [GN14] C. Guillarmou and F. Naud. Equidistribution of Eisenstein series for convex co-compact hyperbolic manifolds. *Amer. J. Math.*, 136 :445–479, 2014.
- [GRH15] J. Gell-Redman and A. Hassell. The distribution of phase shifts for semiclassical potentials with polynomial decay. *arXiv preprint 1509.03468*, 2015.
- [GRHZ15] J. Gell-Redman, A. Hassell, and S. Zelditch. Equidistribution of phase shifts in semiclassical potential scattering. *Journal of the London Mathematical Society*, 91(1) :159–179, 2015.
- [Gui77] V. Guillemin. Sojourn times and asymptotic properties of the scattering matrix. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, 12(Supplement) :69–88, 1977.
- [Han15] X. Han. Small scale quantum ergodicity in negatively curved manifolds. *Nonlinearity*, 28, no. 9 :3263–3288, 2015.
- [Hez16] H. Hezari. Applications of small scale quantum ergodicity in nodal sets. *arXiv preprint arXiv :1606.02057*, 2016.
- [HH10] A. Hassell and L. Hillairet. Ergodic billiards that are not quantum unique ergodic. *Annals of Mathematics*, pages 605–618, 2010.
- [HI15] A. Hassell and V. Ivrii. Spectral asymptotics for the semiclassical Dirichlet to Neumann operator. *arXiv preprint arXiv :1505.04894*, 2015.
- [HL13] Q. Han and F.-H. Lin. *Nodal Sets of Solutions of Elliptic Differential Equations*. Book available on Han’s homepage, 2013.
- [HR14] H. Hezari and G. Riviere.  $L^p$  norms, nodal sets, and quantum ergodicity. *arXiv preprint arXiv :1411.4078*, 2014.
- [HS89] R. Hardt and L. Simon. Nodal sets for solutions of elliptic equations. *J. Differential Geom.*, 30 :505–522, 1989.

- [HS12] H. Hezari and C.D. Sogge. A natural lower bound for the size of nodal sets. *Anal. PDE*, 5 :1133–1137, 2012.
- [HT15] A. Hassell and M. Tacy. Improvement of eigenfunction estimates on manifolds of nonpositive curvature. volume 27, pages 1435–1451, 2015.
- [HW08] A. Hassell and J. Wunsch. The semiclassical resolvent and the propagator for non-trapping scattering metrics. *Adv. Math.*, 217(2) :586–682, 2008.
- [Ing] M. Ingremeau. Lower bounds for the number of nodal domains for sums of two distorted plane waves in non-positive curvature. *To appear*.
- [Ing15a] M. Ingremeau. Distorted plane waves in chaotic scattering. *arXiv preprint :1507.02970*, 2015.
- [Ing15b] M. Ingremeau. Distorted plane waves on manifolds of nonpositive curvature. *arXiv preprint arXiv :1512.06818*, 2015.
- [Ing16] M. Ingremeau. Equidistribution of phase shifts in trapped scattering. *arXiv preprint arXiv :1602.00141*, 2016.
- [IS95] H. Iwaniec and P. Sarnak.  $L^\infty$  norms of eigenfunctions of arithmetic surfaces. *Annals of Mathematics*, 141(2) :301–320, 1995.
- [JN15] D. Jakobson and F. Naud. On the nodal lines of Eisenstein series on Schottky surfaces. *arXiv preprint arXiv :1503.06589*, 2015.
- [Jos08] J. Jost. *Riemannian geometry and geometric analysis*, volume 42005. Springer, 2008.
- [Kat92] S. Katok. *Fuchsian groups*. University of Chicago press, 1992.
- [KH95] A. Katok and B. Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. 1995.
- [KW15] P. Kurlberg and I. Wigman. Non-universality of the Nazarov–Sodin constant. *Comptes Rendus Mathématique*, 353(2) :101–104, 2015.
- [Lew77] H. Lewy. On the minimum number of domains in which the nodal lines of spherical harmonics divide the sphere. *Communications in Partial Differential Equations*, 2(12) :1233–1244, 1977.
- [Lin06] E. Lindenstrauss. Invariant measures and arithmetic quantum unique ergodicity. *Annals of Mathematics*, pages 165–219, 2006.
- [Liv04] C. Liverani. On contact anosov flows. *Annals of mathematics*, pages 1275–1312, 2004.
- [LM16] A. Logunov and E. Malinnikova. Nodal sets of Laplace eigenfunctions : estimates of the Hausdorff measure in dimension two and three. *arXiv preprint arXiv :1605.02595*, 2016.
- [Log16a] A. Logunov. Nodal sets of Laplace eigenfunctions : polynomial upper estimates of the Hausdorff measure. *arXiv preprint arXiv :1605.02587*, 2016.

## BIBLIOGRAPHIE

- [Log16b] A. Logunov. Nodal sets of Laplace eigenfunctions : proof of Nadirashvili's conjecture and of the lower bound in Yau's conjecture. *arXiv preprint arXiv :1605.02589*, 2016.
- [LP90] P.D. Lax and R.S. Phillips. *Scattering theory*, volume 26. Academic press, 1990.
- [Mel95] R.B. Melrose. *Geometric Scattering Theory*. Cambridge University Press, 0995.
- [MO05] J. Marklof and S. O'Keefe. Weyl's law and quantum ergodicity for maps with divided phase space, with an appendix by S. Zelditch. *Nonlinearity*, 18 :277–304, 2005.
- [Mun16] P. Munroe. Moments of Eisenstein series on convex co-compact hyperbolic manifolds. *International Mathematics Research Notices*, page rnv310, 2016.
- [Nak14] S. Nakamura. Microlocal properties of scattering matrices. *arXiv preprint 1407.8299*, 2014.
- [Non11] S. Nonnenmacher. Spectral problems in open quantum chaos. *Nonlinearity*, 24(12) :R123, 2011.
- [NS09] F. Nazarov and M. Sodin. On the number of nodal domains of random spherical harmonics. *American Journal of Mathematics*, pages 1337–1357, 2009.
- [NS15] F. Nazarov and M. Sodin. Asymptotic laws for the spatial distribution and the number of connected components of zero sets of gaussian random functions. *arXiv preprint arXiv :1507.02017*, 2015.
- [NZ09] S. Nonnenmacher and M. Zworski. Quantum decay rates in chaotic scattering. *Acta Math.*, 203 :149–233, 2009.
- [Pee57] J. Peetre. A generalization of Courant's nodal domain theorem. *Mathematica Scandinavica*, pages 15–20, 1957.
- [Ple56] A. Pleijel. Remarks on Courant's nodal line theorem. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 9(3) :543–550, 1956.
- [PS01] Y. B. Pesin and V. Sadovskaya. Multifractal analysis of conformal axiom A flows. *Communications in Mathematical Physics*, 216(2) :277–312, 2001.
- [PS10] V. Petkov and L. Stoyanov. Analytic continuation of the resolvent of the laplacian and the dynamical zeta function. *Analysis & PDE*, 3(4) :427–489, 2010.
- [PZ01] V. Petkov and M. Zworski. Semi-classical estimates on the scattering determinant. *Annales Henri Poincaré*, 2(4) :675–711, 2001.
- [Rif12] L. Rifford. Closing geodesics in  $C^1$  topology. *J. Differential Geom*, 91(3) :361–382, 2012.

- [Riv10] G. Riviere. Entropy of semiclassical measures in dimension 2. *Duke Mathematical Journal*, 155(2) :271–335, 2010.
- [RS94] Z. Rudnick and P. Sarnak. The behaviour of eigenstates of arithmetic hyperbolic manifolds. *Communications in Mathematical Physics*, 161(1) :195–213, 1994.
- [Sar95] P. Sarnak. Arithmetic quantum chaos. the Schur lectures (1992)(tel aviv), 183–236. In *Israel Math. Conf. Proc.*, volume 8, 1995.
- [Shn74] A.I. Shnirelman. Ergodic properties of eigenfunctions. *Usp. Mat. Nauk.*, 29 :181–182, 1974.
- [Sjö90] J. Sjöstrand. Geometric bounds on the density of resonances for semiclassical problems. *Duke mathematical journal*, 60 :1–57, 1990.
- [Sog88] C.D. Sogge. Concerning the  $L^p$  norm of spectral clusters for second-order elliptic operators on compact manifolds. *Journal of functional analysis*, 77(1) :123–138, 1988.
- [Sog16] C.D. Sogge. Localized  $L^p$ -estimates of eigenfunctions : A note on an article of hezari and rivièrè. *Advances in Mathematics*, 289 :384–396, 2016.
- [Sou10] K. Soundararajan. Quantum unique ergodicity for  $SL_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ . *Annals of mathematics*, pages 1529–1538, 2010.
- [Ste25] A. Stern. *Bemerkungen über asymptotisches Verhalten von Eigenwerten und Eigenfunktionen*. W. Fr. Kaestner, 1925.
- [SY85] A. V. Sobolev and D. R. Yafaev. Phase analysis in the problem of scattering by a radial potential. *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI*, 147 :155–178, 1985.
- [SZ11a] C.D. Sogge and S. Zelditch. Lower bounds on the Hausdorff measure of nodal sets. *Math. Res. Lett.*, 18 :25–37, 2011.
- [SZ11b] C.D. Sogge and S. Zelditch. Lower bounds on the hypersurface measure of nodal sets. *Math. Research Letters*, 18 :27–39, 2011.
- [TACA15] B. Thierry, X. Antoine, C. Chniti, and H. Alzubaidi.  $\mu$ -diff : an open-source matlab toolbox for computing multiple scattering problems by disks. *Computer Physics Communications*, 192 :348–362, 2015.
- [TZ02] J.A. Toth and S. Zelditch. Riemannian manifolds with uniformly bounded eigenfunctions. *Duke Mathematical Journal*, 111(1) :97–132, 2002.
- [Vas12] A. Vasy. Microlocal analysis of asymptotically hyperbolic spaces and high energy resolvent estimates. *Inverse problems and applications. Inside Out II*, 60, 2012.
- [Vod00] G. Vodev. Exponential bounds of the resolvent for a class of noncompactly supported perturbations of the laplacian. *Mathematical research letters*, 7(2) :287–298, 2000.

## BIBLIOGRAPHIE

- [Wal82] P. Walters. *An introduction to Ergodic Theory*. Springer, 1982.
- [Yau93] S.-T. Yau. Open problems in geometry. *Proc. Sympos. Pure Math.*, 54, Part 1 :1, 1993.
- [Zel87] S. Zelditch. Uniform distribution of eigenfunctions on compact hyperbolic surfaces. *Duke mathematical journal*, 55(4) :919–941, 1987.
- [Zel12] S. Zelditch. Eigenfunctions and nodal sets. *arXiv preprint arXiv :1205.2812*, 2012.
- [Zwo89] M. Zworski. Sharp polynomial bounds on the number of scattering poles. *Duke Math. J*, 59(2) :311–323, 1989.
- [Zwo12] M. Zworski. *Semiclassical Analysis*. AMS, 2012.
- [ZZ99] S. Zelditch and M. Zworski. Spacing between phase shifts in a simple scattering problem. *Communications in mathematical physics*, 204(3) :709–729, 1999.

**Titre :** Ondes planes tordues et diffusion chaotique

**Mots-clefs :** théorie de la diffusion, analyse semi-classique, chaos quantique

**Résumé :** Ce travail porte sur des questions de théorie de la diffusion, dans la limite semi-classique. Nous commençons par montrer un résultat d'équidistribution des valeurs propres de la matrice de diffusion dans la limite semi-classique, pour des opérateurs de Schrödinger sur des variétés euclidiennes près de l'infini associés à des potentiels à support compact pouvant admettre un ensemble capté.

Nous étudions ensuite les ondes planes tordues associées à de tels opérateurs de Schrödinger. Il s'agit de fonctions propres généralisées, s'écrivant comme la somme d'une onde plane et d'un terme sortant. Sous l'hypothèse que la dynamique classique est hyperbolique près de l'ensemble capté, et qu'une certaine hypothèse de pression topologique est vérifiée, nous montrons que ces ondes planes tordues peuvent s'écrire comme une somme convergente, d'états lagrangiens. Nous en déduisons une caractérisation de la mesure semi-classique des ondes planes tordues.

Nous faisons ensuite l'hypothèse supplémentaire que le potentiel est nul, et que la variété est de courbure négative ou nulle. Nous montrons alors que tous les états lagrangiens apparaissant dans la décomposition des ondes planes tordues correspondent à des variétés lagrangiennes se projetant sans caustiques sur la variété de base. Nous en déduisons des bornes optimales sur les normes des ondes planes tordues, et sur le volume de leur ensemble nodal.

Finalement, nous nous intéressons au nombre de domaines nodaux inclus dans un compact que possèdent les ondes planes tordues. Après avoir montré une borne supérieure de type Courant, nous montrons une borne inférieure du même ordre pour la somme de deux ondes planes tordues en dimension deux, pour une métrique générique.

**Title:** Distorted plane waves in chaotic scattering

**Keywords:** scattering theory, semiclassical analysis, quantum chaos

**Summary:** The topic of this work is scattering theory, in the semiclassical limit. We start by showing an equidistribution result for the eigenvalues of the scattering matrix in the semiclassical limit, for some Schrödinger operators on Euclidean near infinity manifolds, associated to a potential which is compactly supported, and may have a trapped set.

We then study the distorted plane waves of such Schrödinger operators. These are generalised eigenfunctions which can be written as the sum of a plane wave and of an outgoing term. Under the hypothesis that the dynamics is hyperbolic close to the trapped set, and that a certain topological pressure assumption is satisfied, we show that these distorted plane waves can be written as a convergent sum of Lagrangian states. We deduce from this a formula for the semiclassical measure of distorted plane waves.

We then make the additional assumption that the potential is zero, and that the manifold has nonpositive sectional curvature. We show that the Lagrangian states appearing in the decomposition of distorted plane waves correspond to Lagrangian manifolds which project without caustics on the base manifold ; We deduce from this optimal bounds on the distorted plane waves, and on the volume of their nodal set.

Finally, we study the number of nodal domains, contained in a compact set, of distorted plane waves. After showing an upper bound of Courant type, we show a lower bound of the same order for the sum of two distorted plane waves, in dimension two, for a generic metric.