



**HAL**  
open science

# Modélisation et simulation de l'interaction fluide-structure élastique : application à l'atténuation des vagues

Julien Deborde

► **To cite this version:**

Julien Deborde. Modélisation et simulation de l'interaction fluide-structure élastique : application à l'atténuation des vagues. Mécanique [physics]. Université de Bordeaux, 2017. Français. NNT : 2017BORD0606 . tel-01578165

**HAL Id: tel-01578165**

**<https://theses.hal.science/tel-01578165>**

Submitted on 28 Aug 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE PRÉSENTÉE  
POUR OBTENIR LE GRADE DE

**DOCTEUR DE  
L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX**

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR  
SPÉCIALITÉ : MÉCANIQUE

par **Julien DEBORDE**

---

**Modélisation et simulation de l'interaction fluide-structure  
élastique : application à l'atténuation des vagues**

---

Sous la direction de : Pierre LUBIN  
(co-directeur : Thomas MILCENT et Stéphane GLOCKNER)

*Soutenue* : le 12 Juin 2017

Membre du Jury :

|    |                   |                                                  |              |
|----|-------------------|--------------------------------------------------|--------------|
| M. | Pierre LUBIN      | Professeur, Bordeaux INP                         | Directeur    |
| M. | Thomas MILCENT    | Maître de conférence, ENSAM                      | Co-directeur |
| M. | Stéphane GLOCKNER | Ingénieur de recherche, Bordeaux INP             | Co-directeur |
| M. | Aurélien BABARIT  | Maître de conférence, École Centrale Nantes      | Rapporteur   |
| M. | Cédric GALUSINSKI | Professeur, Université de Toulon                 | Rapporteur   |
| M. | Mario RICCHIUTO   | Directeur de recherches, INRIA                   | Examineur    |
| M. | Mourad ISMAÏL     | Maître de conférences, Université Grenoble Alpes | Examineur    |
| M. | Fabrice VÉRON     | Professeur, University of Delaware               | Examineur    |





---

## Modélisation et simulation de l'interaction fluide-structure élastique : application à l'atténuation des vagues

### Résumé :

Une méthode complètement Eulérienne reposant sur un modèle 1-fluide est présentée afin de résoudre les problèmes d'interaction fluide-structure élastique. L'interface entre le fluide et la structure élastique est représentée par une fonction level-set, transportée par le champ de vitesse du fluide et résolue par un schéma d'ordre élevé WENO 5. Les déformations élastiques sont calculées sur la grille eulérienne à l'aide des caractéristiques rétrogrades. Nous utilisons différents modèles d'hyperélasticité, afin de générer puis d'intégrer les forces élastiques comme terme source des équations de Navier Stokes. Le couplage vitesse/pression est résolu par une méthode de correction de pression et les équations sont discrétisées par la méthode des volumes finis sur la grille eulérienne. La principale difficulté réside dans les grands déplacements de fluide autour du solide, source d'instabilités numériques. Afin d'éviter ces problèmes, nous effectuons périodiquement une redistanciation de la level-set et une extrapolation linéaire des caractéristiques rétrogrades. Dans un premier temps, nous effectuons la vérification et la validation de notre approche à l'aide de plusieurs cas tests comme celui proposé par Turek. Ensuite, nous appliquons notre méthode à l'étude du phénomène d'atténuation des vagues par des structures élastiques. Il s'agit d'une des voies possibles pour réduire l'impact des fortes houles sur notre littoral. De plus dans la littérature et à notre connaissance, seules des structures élastiques rigides ou élastiques mais monodimensionnelles ont été utilisées pour réaliser ces études. Nous proposons de placer des structures élastiques sur les fonds marins et analysons leur capacité d'absorption de l'énergie produite par les vagues.

### Mots-clés :

Amortissement des vagues ; Formulation Eulérienne ; Volumes finis ; Interaction fluide-structure ; Matériau hyper-élastique.

---

## Modelisation and simulation of fluid-structure interaction : application to the wave damping phenomena

### Abstract :

A fully Eulerian method is developed to solve the problem of fluid-elastic structure interactions based on a 1-fluid method. The interface between the fluid and the elastic structure is captured by a level set function, advected by the fluid velocity and solved with a WENO 5 scheme. The elastic deformations are computed in an Eulerian framework thanks to the backward characteristics. We use the Neo Hookean or Mooney Rivlin hyperelastic models and the elastic forces are incorporated as a source term in the incompressible Navier-Stokes equations. The velocity/pressure coupling is solved with a pressure-correction method and the equations are discretized by finite volume schemes on a Cartesian grid. The main difficulty resides in that large deformations in the fluid cause numerical instabilities. In order to avoid these problems, we use a re-initialization process for the level set and linear extrapolation of the backward characteristics. First, we verify and validate our approach on several test cases, including the benchmark of FSI proposed by Turek. Next, we apply this method to study the wave damping phenomenon which is a mean to reduce the waves impact on the coastline. So far, to our knowledge, only simulations with rigid or one dimensional elastic structure has been studied in the literature. We propose to place elastic structures on the seabed and we analyse their capacity to absorb the wave energy.

### Keywords :

Damping wave ; Eulerian formulation ; Finite volume ; Fluid-structure interaction ; Hyper-elastic material.

---

### Unité de recherche

[ Institut de Mécanique et d'Ingénierie de Bordeaux (I2M) - UMR 5295,  
Département TREFLE - 16 avenue Pey-Berland, 33607 PESSAC Cedex ]

---

# Table des matières

|                                                                                                             |           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Table des figures                                                                                           | vii       |
| <b>Introduction</b>                                                                                         | <b>1</b>  |
| <b>1 Modèle Eulérien pour l'interaction fluide-structure élastique</b>                                      | <b>5</b>  |
| 1.1 État de l'art . . . . .                                                                                 | 6         |
| 1.1.1 Méthodes lagrangiennes . . . . .                                                                      | 6         |
| 1.1.2 Méthodes lagrangiennes-eulériennes . . . . .                                                          | 6         |
| 1.1.3 Méthodes eulériennes . . . . .                                                                        | 8         |
| 1.1.4 Notre modèle . . . . .                                                                                | 9         |
| 1.2 Modèle eulérien pour l'interaction fluide-structure élastique . . . . .                                 | 9         |
| 1.2.1 Modèle pour le mouvement fluide . . . . .                                                             | 10        |
| 1.2.2 Mécanique du solide . . . . .                                                                         | 13        |
| 1.3 Élasticité . . . . .                                                                                    | 19        |
| <b>2 Modèle numérique</b>                                                                                   | <b>35</b> |
| 2.1 Formulation mathématique du problème . . . . .                                                          | 36        |
| 2.2 Méthode de correction de pression pour la résolution numérique des équations de Navier-Stokes . . . . . | 36        |
| 2.2.1 Discrétisation en temps . . . . .                                                                     | 37        |
| 2.2.2 Découplage vitesse-pression . . . . .                                                                 | 37        |
| 2.2.3 Discrétisation en espace . . . . .                                                                    | 38        |
| 2.2.4 Calcul de la force élastique . . . . .                                                                | 39        |
| 2.2.5 Résolution numérique du système linéaire et calculs parallèles . . . . .                              | 42        |
| 2.3 La méthode level set de suivi d'interface . . . . .                                                     | 43        |
| 2.4 Résolution des équations de transport . . . . .                                                         | 46        |
| 2.4.1 Discrétisation spatiale WENO 5 . . . . .                                                              | 47        |
| 2.4.2 Discrétisation temporelle et résolution des EDO . . . . .                                             | 51        |
| 2.4.3 Vitesse des ondes et contraintes CFL . . . . .                                                        | 53        |
| 2.5 Limites de la méthode . . . . .                                                                         | 55        |
| 2.5.1 Redistanciation de la level set . . . . .                                                             | 55        |
| 2.5.2 Extrapolations des caractéristiques rétrogrades . . . . .                                             | 59        |
| 2.5.3 Représentation de l'apport des corrections . . . . .                                                  | 62        |
| <b>3 Validation</b>                                                                                         | <b>65</b> |
| 3.1 Validation de l'interaction fluide/structure élastique . . . . .                                        | 66        |
| 3.1.1 Réponse oscillatoire en couches parallèles de fluide et de solide élastique                           | 66        |
| 3.1.2 Réversibilité de forme d'une particule hyper-élastique . . . . .                                      | 74        |

---

|          |                                                                                                                                |            |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 3.1.3    | Solide élastique en cavité entraînée . . . . .                                                                                 | 95         |
| 3.1.4    | Structure élastique dans une allée de Bénard-Von Karman . . . . .                                                              | 105        |
| <b>4</b> | <b>Simulations et applications</b>                                                                                             | <b>123</b> |
| 4.1      | Simulations . . . . .                                                                                                          | 125        |
| 4.1.1    | Structures rectangulaires homogènes . . . . .                                                                                  | 126        |
| 4.1.2    | Structures rectangulaires hétérogènes . . . . .                                                                                | 134        |
| 4.1.3    | Structures en forme de "Y" . . . . .                                                                                           | 136        |
| 4.1.4    | Structures en forme de "T" . . . . .                                                                                           | 138        |
| 4.1.5    | Énergie élastique . . . . .                                                                                                    | 140        |
| 4.1.6    | Comparaisons à volumes équivalents et variables . . . . .                                                                      | 141        |
| 4.1.7    | Visualisations . . . . .                                                                                                       | 143        |
|          | <b>Conclusion et perspectives</b>                                                                                              | <b>149</b> |
|          | <b>Bibliographie</b>                                                                                                           | <b>153</b> |
|          | <b>Annexes</b>                                                                                                                 | <b>159</b> |
| <b>A</b> | <b>Solution analytique pour le problème de réponse oscillatoire en couches<br/>parallèles de fluide et de solide élastique</b> | <b>161</b> |
| <b>B</b> | <b>Méthodes à un pas vs méthodes multi pas</b>                                                                                 | <b>165</b> |
| <b>C</b> | <b>Observations et résultats pour le cas T1</b>                                                                                | <b>175</b> |

---

# Table des figures

|      |                                                                                                                                                                                                              |    |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1    | Barrières d’algues artificielles en Barbade . . . . .                                                                                                                                                        | 3  |
| 1.1  | Caractéristiques directes . . . . .                                                                                                                                                                          | 14 |
| 1.2  | Caractéristiques rétrogrades et caractéristiques directes . . . . .                                                                                                                                          | 15 |
| 1.3  | Schéma des contraintes exercées sur un plan imaginaire . . . . .                                                                                                                                             | 18 |
| 1.4  | Exemple de diagramme de traction d’un matériau quelconque . . . . .                                                                                                                                          | 20 |
| 1.5  | Principes d’indifférence matériel et d’isotropie . . . . .                                                                                                                                                   | 23 |
| 1.6  | Cisaillement simple . . . . .                                                                                                                                                                                | 24 |
| 1.7  | Compression uniforme . . . . .                                                                                                                                                                               | 24 |
| 1.8  | Traction simple . . . . .                                                                                                                                                                                    | 25 |
| 1.9  | Correspondance entre coefficients d’élasticité . . . . .                                                                                                                                                     | 26 |
| 1.10 | Tableau de correspondance entre les coefficients pour chaque modèle d’élasticité non linéaire pour le théorème de Rivlin Ericksen . . . . .                                                                  | 33 |
| 2.1  | Grille décalée de type MAC . . . . .                                                                                                                                                                         | 39 |
| 2.2  | Positionnement du tenseur des contraintes élastique sur la grille MAC . . . . .                                                                                                                              | 40 |
| 2.3  | Extrapolations du gradient à la limite gauche . . . . .                                                                                                                                                      | 41 |
| 2.4  | Extrapolation du gradient en fonction de la limite . . . . .                                                                                                                                                 | 41 |
| 2.5  | Gestion des conditions limites périodiques . . . . .                                                                                                                                                         | 42 |
| 2.6  | Représentation d’une fonction de Heaviside diffusée . . . . .                                                                                                                                                | 46 |
| 2.7  | Décentrement selon l’axe $Ox_1$ du schéma WENO 5 . . . . .                                                                                                                                                   | 48 |
| 2.8  | Décentrement sur les nœuds à la limites du domaine . . . . .                                                                                                                                                 | 50 |
| 2.9  | Zone limite gauche où le schéma WENO 5 ne peut être utilisé, le calcul des dérivées est différent . . . . .                                                                                                  | 51 |
| 2.10 | Domaine de stabilité des méthodes testées . . . . .                                                                                                                                                          | 54 |
| 2.11 | Déformations hétérogènes de la level set autour du solide et ré-initialisation . . . . .                                                                                                                     | 58 |
| 2.12 | Un exemple de cisaillement du fluide autour du solide. De haut en bas, les caractéristiques à $t = 0$ , $t = 4$ sans extrapolation et l’apparition de forts gradients, $t = 4$ avec extrapolation . . . . .  | 61 |
| 2.13 | Représentation de la force élastique par extension 3D. En haut pour une solution sans corrections et en bas avec corrections. Les pics de force peuvent atteindre $10^4$ . . . . .                           | 62 |
| 3.1  | Schéma 2D du cas test . . . . .                                                                                                                                                                              | 66 |
| 3.2  | Tableau des maillages et des notations utilisés . . . . .                                                                                                                                                    | 68 |
| 3.3  | Méthode des caractéristiques et méthode de Sugiyama : profil de vitesse resp. à $t = 0$ , $t = 1$ , $t = 0.5$ et $t = 0.8$ . La vitesse horizontale $v_y$ est tracée en fonction de la hauteur $y$ . . . . . | 70 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                      |     |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.4  | Méthode des caractéristiques : profil de vitesse resp. à $t^* = 0$ , $t^* = 1$ , $t^* = 0.5$ et $t^* = 0.8$ . La vitesse horizontale $v_y$ est tracée en fonction de la hauteur $y$ . . . . .                                                                                        | 73  |
| 3.5  | Schéma du cas test 2D de la réversibilité de forme d'une particule élastique                                                                                                                                                                                                         | 74  |
| 3.6  | Comparaison de deux solutions à coefficient de diffusion différent pour un maillage unique de $128 \times 32$ points à $t = 4$ s . . . . .                                                                                                                                           | 75  |
| 3.7  | Nombre de corrections apportées en fonction de la condition apportée sur $ \nabla\varphi $ pour un maillage constitué de $128 \times 32$ points . . . . .                                                                                                                            | 77  |
| 3.8  | Nombre de corrections apportées en fonction de la condition apportée sur $ \nabla\varphi $ pour un maillage constitué de $512 \times 128$ points . . . . .                                                                                                                           | 77  |
| 3.9  | Comparaison de solutions obtenues pour différentes tolérances de déformation : 10% (rouge), 20% (orange), 30% (jaune), 60% (vert) et $\infty$ (noir). Captures réalisées au temps $t = 0, 2, 4, 5, 9$ s sur maillage $128 \times 32$ . . . . .                                       | 79  |
| 3.10 | Comparaison de solutions obtenues pour différentes tolérances de déformation : 10% (rouge), 20% (orange), 30% (jaune), 60% (vert) et $\infty$ (noir). Captures réalisées au temps $t = 0, 2, 4, 5, 9$ sec sur maillage $512 \times 128$ . . . . .                                    | 81  |
| 3.11 | Modélisation de la déformation sur maillage $1024 \times 256$ sur une échelle $[0; 1]$ aux temps $t = 0$ s, 0.5 s, 2 s et 4 s avant le retour. Puis sur une échelle $[0; 0.381]$ aux temps $t = 4.1$ s, 4.3 s, 4.6 s et 50 s. On visualise les caractéristiques rétrogrades. . . . . | 83  |
| 3.12 | Modélisation de la déformation sur maillage $1024 \times 256$ sur une échelle $[0; 1]$ aux temps $t = 0$ s, 0.5 s, 2 s et 4 s avant le retour. Puis sur une échelle $[0; 0.381]$ aux temps $t = 4.1$ s, 4.3 s, 4.6 s et 50 s. On visualise le champ de vitesse vectorisé. . . . .    | 84  |
| 3.13 | Tableau des maillages et des notations utilisés . . . . .                                                                                                                                                                                                                            | 85  |
| 3.14 | Représentation de $R_0$ amplitude modale d'ordre 0 en fonction du temps pour différents maillages . . . . .                                                                                                                                                                          | 87  |
| 3.15 | Observation de la convergence en maillage pour le calcul de $R_0$ selon les normes $L_2$ et $L_\infty$ . . . . .                                                                                                                                                                     | 88  |
| 3.16 | Représentation de $R_n$ amplitude modale d'ordre $n$ en fonction du temps pour différents maillages . . . . .                                                                                                                                                                        | 91  |
| 3.17 | Représentation de l'erreur sur l'amplitude modale d'ordre $n$ en norme infinie et $L_2$ ainsi que de l'ordre associé . . . . .                                                                                                                                                       | 93  |
| 3.18 | Énergie élastique en fonction du temps sur maillage $128 * 32$ (haut) et $512 * 128$ (bas) . . . . .                                                                                                                                                                                 | 94  |
| 3.19 | Schéma 2D de la configuration initiale de la cavité entraînée. Le domaine de calcul est $[0, 1] \times [0, 1]$ m. . . . .                                                                                                                                                            | 95  |
| 3.20 | Mouvement d'un solide élastique dans une cavité entraînée aux temps $t = 0$ ; 1.17; 2.34; 3.52; 4.69; 5.86; 7.03 et 20 . . . . .                                                                                                                                                     | 97  |
| 3.21 | Comparaison de la déformation d'un solide élastique dans une cavité entraînée avec les résultats de Sugiyama aux temps $t = 0$ ; 1.17; 2.34; 3.52; 4.69; 5.86; 7.03 et 8.20 s . . . . .                                                                                              | 98  |
| 3.22 | Étude de l'évolution de la position du centroïde pour différents maillages. Résultats obtenus en haut sans extrapolation, en bas avec extrapolations. . . . .                                                                                                                        | 100 |
| 3.23 | Comparaisons des résultats obtenus sans et avec extrapolations. . . . .                                                                                                                                                                                                              | 101 |

|      |                                                                                                                                                                                                                |     |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.24 | Étude de l'évolution de la position du centroïde pour différents maillages. Comparaisons des résultats obtenus avec extrapolations en lignes pleines et ceux de Sugiyama en pointillés. . . . .                | 102 |
| 3.25 | Mesure de l'erreur sur différents maillages en norme $L_\infty$ et en norme $L_2$ . . .                                                                                                                        | 103 |
| 3.26 | Erreur en norme $L_\infty$ et $L_2$ à gauche ainsi que les calculs d'ordre associés à droite . . . . .                                                                                                         | 104 |
| 3.27 | Schéma 2D de la configuration initiale requise pour le cas test T1 de Turek sur le domaine $[0, 1.25] \times [0, 0.41]$ m. Le cas test T2 est effectué sur le domaine $[0, 1.25] \times [0, 0.40]$ m . . . . . | 105 |
| 3.28 | Représentation schématique de la position des points en bout de drapeau .                                                                                                                                      | 108 |
| 3.29 | Représentation d'une période d'oscillation prise au temps $t = 2, 13.96, 14.06, 14.12, 16.04, 16.12, 16.18, 18.06$ sec . . . . .                                                                               | 110 |
| 3.30 | Représentation du déplacement horizontal puis vertical en fonction du temps pour le cas <b>T2</b> . . . . .                                                                                                    | 112 |
| 3.31 | Phénomène de double compression du solide en fonction du temps pour le cas <b>T2</b> . . . . .                                                                                                                 | 113 |
| 3.32 | Fréquences horizontales et verticales . . . . .                                                                                                                                                                | 114 |
| 3.33 | Amplitudes horizontales et verticales aux différents points . . . . .                                                                                                                                          | 114 |
| 3.34 | Trajectoires des points A, B, C, D, E, F et G . . . . .                                                                                                                                                        | 115 |
| 3.35 | Représentation des amplitudes verticales et horizontales en fonction des points A, B, C, D, E, F, et G. . . . .                                                                                                | 116 |
| 3.36 | Représentation de l'évolution de la level set au temps $t = 0, 16.04, 18.06$ sec                                                                                                                               | 117 |
| 3.37 | Représentation de l'évolution des caractéristiques rétrogrades au temps $t = 16.04, 18, 18.06$ sec . . . . .                                                                                                   | 118 |
| 4.1  | Schéma de la configuration 2D pour l'ensemble des cas tests. . . . .                                                                                                                                           | 126 |
| 4.2  | Évolution de l'énergie élastique traversant la zone d'amortissement Z3 pour différentes valeurs d'élasticité . . . . .                                                                                         | 128 |
| 4.3  | Évolution de l'élévation de la vague mesurée sur les jauges G1 (en haut) et G4 (en bas) pour différentes valeurs d'élasticité . . . . .                                                                        | 129 |
| 4.4  | Évolution de l'énergie cinétique dans les zones Z1 (en haut) et Z2 (en bas) pour différentes valeurs d'élasticité . . . . .                                                                                    | 130 |
| 4.5  | Évolution de l'élévation de la vague mesurée sur les jauges G1, G2, G3 et G4 (de gauche à droite) pour le coefficient d'élasticité optimal $\chi = 300$ . . .                                                  | 131 |
| 4.6  | Durée de passage de la vague en fonction des paramètres élastiques . . . . .                                                                                                                                   | 131 |
| 4.7  | Paramètre élastique et volume élastique . . . . .                                                                                                                                                              | 132 |
| 4.8  | Évolution de l'élévation de la vague mesurée sur la jauge G4 (en haut) et de l'énergie cinétique dans la zone Z2 (en bas) . . . . .                                                                            | 133 |
| 4.9  | Paramètre élastique et volume élastique . . . . .                                                                                                                                                              | 134 |
| 4.10 | Évolution de l'élévation de la vague mesurée sur la jauge G4 (en haut) et de l'énergie cinétique dans la zone Z2 (en bas) . . . . .                                                                            | 135 |
| 4.11 | Paramètre élastique et volume élastique . . . . .                                                                                                                                                              | 136 |
| 4.12 | Évolution de l'élévation de la vague mesurée sur la jauge G4 (en haut) et de l'énergie cinétique dans la zone Z2 (en bas) . . . . .                                                                            | 137 |
| 4.13 | Paramètre élastique et volume élastique . . . . .                                                                                                                                                              | 138 |
| 4.14 | Évolution de l'élévation de la vague mesurée sur la jauge G4 (en haut) et de l'énergie cinétique dans la zone Z2 (en bas) . . . . .                                                                            | 139 |
| 4.15 | Énergie élastique dans la zone Z3 pour toutes les configurations . . . . .                                                                                                                                     | 140 |



|      |                                                                                                                                                                                                  |     |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.16 | Valeurs maximales d'énergie élastique pour les différents cas . . . . .                                                                                                                          | 140 |
| 4.17 | Comparaison des volumes élastiques entre les différentes configurations . .                                                                                                                      | 141 |
| 4.18 | Comparaison de l'amplitude entre configuration peu dense et dense . . . .                                                                                                                        | 142 |
| 4.19 | Simulation du passage d'un soliton sur la configuration VF-1 . . . . .                                                                                                                           | 143 |
| 4.20 | Simulation du passage d'un soliton sur la configuration ZF-1 . . . . .                                                                                                                           | 144 |
| 4.21 | Simulation du passage d'un soliton sur la configuration VF-2 . . . . .                                                                                                                           | 144 |
| 4.22 | Simulation du passage d'un soliton sur la configuration ZF-2 . . . . .                                                                                                                           | 145 |
| 4.23 | Simulation du passage d'un soliton sur la configuration $3_a$ . . . . .                                                                                                                          | 145 |
| 4.24 | Simulation du passage d'un soliton sur la configuration $3_b$ . . . . .                                                                                                                          | 146 |
| 4.25 | Simulation du passage d'un soliton sur la configuration VF-4 . . . . .                                                                                                                           | 146 |
| 4.26 | Simulation du passage d'un soliton sur la configuration ZF-4 . . . . .                                                                                                                           | 147 |
| 4.27 | Comparaison des volumes, des taux d'amortissement de la vague, des taux<br>de réduction d'énergie cinétique et de production d'énergie élastique pour<br>l'ensemble des configurations . . . . . | 148 |
| 4.28 | Configuration pour la création de vagues déferlantes . . . . .                                                                                                                                   | 151 |
| 4.29 | Simulation 3D du retour de forme d'une structure élastique soumise à un<br>champ de vitesse cisailé . . . . .                                                                                    | 152 |
|      |                                                                                                                                                                                                  |     |
| B.1  | Ordre des méthodes explicites pour une vitesse explicite non constante . .                                                                                                                       | 170 |
| B.2  | Ordre des méthodes explicites pour une vitesse inconnue non linéaire et<br>extrapolée à l'ordre 1 . . . . .                                                                                      | 171 |
| B.3  | Tableau des coefficients nécessaires aux extrapolations des vitesses au temps<br>$n + 1$ et $n + 1/2$ en fonction de l'ordre désiré . . . . .                                                    | 172 |
| B.4  | Ordre des méthodes explicites pour une vitesse inconnue non linéaire et<br>extrapolée à l'ordre 2 . . . . .                                                                                      | 173 |
| B.5  | Ordre des méthodes explicites pour une vitesse inconnue non linéaire et<br>extrapolée à l'ordre 3 . . . . .                                                                                      | 173 |
|      |                                                                                                                                                                                                  |     |
| C.1  | Représentation du déplacement horizontal puis vertical du point A en<br>fonction du temps pour le cas <b>T1</b> . . . . .                                                                        | 176 |
| C.2  | Comparaison du déplacement horizontal et vertical du point A pour les<br>tests T1 et T2. Pour améliorer la lisibilité, la solution T2 est décalée de 4.7s                                        | 178 |

# Introduction

## Contexte

Les phénomènes d'interaction fluide-structure sont très largement répandus dans le monde qui nous entoure. Ils sont parfois non visibles comme l'écoulement sanguin dans un cœur ou alors plus remarquables comme le mouvement oscillant de la posidonie aquatique. Des études ont révélé l'impact de la présence de ces végétations sous marines sur l'écoulement marin mais très peu d'entre elles ne traitent de structures élastiques artificielles. C'est dans ce contexte biomécanique d'interaction fluide-structure élastique que s'inscrivent les travaux menés durant cette thèse. Nous souhaitons l'appliquer à l'atténuation des vagues à des fins de préservation du littoral.

Le littoral est un environnement sensible regroupant à lui seul plus de 25% de la population mondiale, soit environ 2 milliards d'habitants se concentrant dans une bande côtière de 100 km. Bombay, Tokyo, Séoul ou encore Djakarta sont autant de villes principalement exposées aux risques de submersion et dont la densité de population dépasse aisément les 15000 *hbts/km<sup>2</sup>*.

Outre l'aspect démographique, il s'agit aussi de zones d'activités touristiques et portuaires primordiales pour l'économie d'un pays. Rappelons qu'en France, 85% des échanges commerciaux se font par voie maritime tandis que le tourisme balnéaire participe au rayonnement culturel du pays.

Depuis quelques décennies, l'Homme se confronte à des difficultés à grandes et petites échelles :

- les tsunamis du 26 décembre 2004 au sud de l'Indonésie ou plus récemment au Japon le 11 mars 2011 restent encore ancrés dans les mémoires pour leurs tristes records de victimes. On dénombre plus de 270 000 tués pour seulement 10 catastrophes au cours des 20 dernières années, preuve de la violence de ces cataclysmes. Les conséquences aussi bien sur le littoral que sur la biosphère peuvent être dévastatrices à court comme à long terme, en atteste la fuite radioactive au niveau des réacteurs de la centrale nucléaire de Fukushima Daiichi ;
- l'érosion des littoraux, un phénomène souvent négligé et pourtant potentiellement dévastateur, provoqué par le déferlement des vagues sur la côte. Les impacts répétés et souvent violents sur les ouvrages côtiers sont souvent sous-estimés parce que moins impressionnants que les phénomènes à grandes échelles précédemment cités ;
- enfin, la communauté scientifique s'accorde à penser que le réchauffement climatique actuel accompagné de la montée progressive des eaux mènera à une multiplica-

tion ainsi qu'à une amplification de ces phénomènes au cours des prochaines années. Des études prévoient une élévation de 0.24 m à 1.5 m du niveau des océans au cours du XXI<sup>e</sup> siècle. Des nouveaux outils tels que des cartes interactives construites à partir de la Google Maps sont disponibles sur le net à des fins de sensibilisation et permettent de visualiser les conséquences de cette progression sur la surface du globe (<http://flood.firetree.net/?ll=44.5905,-40.0781&z=14&m=14>). Ces anticipations s'appuient sur des récentes publications de données servant à des modèles d'estimation qui se veulent de plus en plus précis.

La submersion soudaine (tsunami) ou progressive (érosion ou montée des eaux) de vastes territoires ont conduit l'Homme à réfléchir à des solutions pour ralentir ou contrer ces dégradations. Globalement on dénombre deux types de protections :

- les méthodes dites dures s'apparentant à des ouvrages de défense tel que les murs, les enrochements ou les brise-lames. L'objectif étant de maintenir la position de la ligne de côte. Cependant elles accroissent l'érosion à proximité de la zone protégée, décalant le problème en espace et en temps. Elles s'avèrent également esthétiquement intrusives dans le paysage ;

- les méthodes douces ont été envisagées dans l'esprit de vouloir composer avec la nature plutôt que de la combattre.

Concernant les plages, diverses techniques ont vu le jour. Le réapprovisionnement des plages en sable et sédiments permet de conserver temporairement l'attractivité balnéaire. Les techniques de by-passing (ou pontage sédimentaire) s'avèrent très efficaces en permettant d'équilibrer les zones d'accrétion et d'érosion par transfert de sable. Plus récemment encore, les techniques de drainages des plages permettent, via un réseau de drain, d'assécher le sable dans les zones de déferlement des vagues. Déshydratés, les grains de sable se resserrent, augmentant la résistance à l'érosion par dissipation de l'énergie de la nappe de retrait. Le sable ne repart plus, ou moins, avec le reflux.

Ces méthodes parfois très coûteuses, ne sont plus utilisables au niveau des côtes urbanisées où on préfère utiliser des Géo-textiles. Il s'agit de grandes nappes de tissus à structure alvéolée que l'on croise parfois aussi le long des routes. Elles permettent le développement de la végétation, laquelle par ses racines, vient s'entremêler avec la nappe. Elle forme ainsi une dense barrière naturelle végétale stabilisant le sol.

Des idées novatrices existent comme l'implantation d'algues artificielles ( ex. en Barbade figure (1)). Elles permettraient d'atténuer ou de dévier les courants de fond générés par la houle et les marées. Cependant elles restent encore au stade expérimental et surtout peu adaptées aux régions où les algues naturelles sont déjà abondantes et protégées. De plus les résultats semblent peut concluants du fait de la nature très souple des matériaux employés.

Malgré cet ensemble d'ouvrages, les submersions et l'érosion n'ont toujours pas disparu, en témoigne le récent effondrement de l'arche rocheuse de Malte. Il nous faut encore mieux étudier le comportement des systèmes de protection contre les submersions marines.

L'atténuation des vagues par des structures élastiques posées sur le fond marin tirerait profit des avantages liées au méthodes dures et douces sans en posséder les inconvénients. Il s'agirait de barrières en caoutchouc peu coûteuses en terme de fabrication et d'installation, pérennes dans le temps et esthétiquement non invasives pour le paysage côtier. Elles oscilleraient au gré du courant, capturant une partie de l'énergie de l'écoulement au passage.

---



**Figure 1** – Barrières d’algues artificielles en Barbade

## Réalisation

Plusieurs types d’approches peuvent être employés afin d’appréhender l’étude de l’amortissement des vagues.

Les études effectuées à partir d’observations (par exemple par satellite) ont permis d’améliorer la compréhension du phénomène. Néanmoins cette approche est globale et incomplète. L’étude expérimentale s’est également considérablement développée. Cependant il reste difficile de reproduire en laboratoire des phénomènes à grandes échelles tels que le déferlement des vagues ou les tsunamis. Hors laboratoire, cette approche est onéreuse, fastidieuse et parfois controversée par la communauté scientifique de part la complexité de recueillir des données précises.

Nous avons donc recours à la simulation numérique par la modélisation de l’interaction fluide-structure appliquée à des solides élastiques. Elle permet une représentation détaillée et complète de l’écoulement. Même si les phénomènes regroupent d’importantes difficultés (description de la surface libre, grandes déformations du solides, fortes variations des champs de vitesse et de pression, cisaillement...), les récents progrès des méthodes numériques permettent de les aborder.

L’objectif de cette thèse est, d’une part, l’implémentation et la validation d’un modèle d’interaction fluide-structure au sein du code numérique Thétis, et d’autre part, d’appliquer cet outil à l’étude de l’amortissement d’une vague par des structures élastiques.

D’un point de vue de l’analyse physique du phénomène, cette étude permet d’une part la quantification précise de l’absorption d’énergie ainsi que d’une mesure de l’atténuation de la vague, et d’autre part de mettre en évidence la complexité de l’interaction entre la houle et les écosystèmes par la création de reflux tourbillonnaires par exemple.

## Plan de la thèse

Le document s'articule autour de 4 chapitres.

Dans le chapitre 1 figure dans un premier temps un point bibliographique sur les modèles et méthodes numériques existants pour la représentation de l'interaction fluide-structure en général. Dans un second temps est abordé le modèle complètement Eulérien retenu pour réaliser notre étude. L'approche est monolithique, les milieux sont seulement différenciés par leurs équations d'état. Nous nous intéressons d'une part aux équations régissant le mouvement fluide supposé incompressible, et d'autre part aux modèles de comportement des solides déformables. Ces derniers sont soumis à de grandes déformations et sont donc décrits suivant le modèle de l'élasticité non-linéaire.

Le chapitre 2 traite des méthodes numériques utilisées pour résoudre le modèle précédemment introduit. Les schémas numériques utilisés doivent être précis, robustes et simple d'implémentation tout en étant capables de modéliser les mouvements des matériaux en grandes déformations.

Le chapitre 3 sert à la vérification et à la validation de la méthode. Seront présentés des cas tests présents dans la littérature et proches de notre application. Le comportement cisailé d'un fluide autour d'une structure est recherché afin de vérifier le modèle sur des configurations proches de l'interaction entre une vague et une structure élastique.

Enfin le chapitre 4 concerne l'étude de l'atténuation d'une vague. Nous utilisons tous les outils précédemment introduits dans les chapitres précédents afin de mettre en œuvre la simulation de l'interaction entre une vague et des structures élastiques implantées sur le fond marin.

Enfin nous concluons ce travail et des perspectives seront développées quant aux améliorations qui pourraient être apportées à cette étude à court et long terme.

---

# Chapitre 1

## Modèle Eulérien pour l'interaction fluide-structure élastique

### Introduction et présentation

De nombreux problèmes soulevés par la recherche fondamentale et les applications aux sciences de l'ingénieur biomédicales ou environnementales requièrent une description précise des phénomènes d'interaction fluide-structure élastique. Bien qu'active, la recherche est confrontée à la complexité de certains phénomènes difficiles à appréhender. Par exemple, comprendre l'écoulement sanguin à l'intérieur d'un cœur ou du cortex cérébral afin d'en prévenir ses dysfonctionnements ou appréhender les perturbations de l'écoulement d'un fluide issu de l'interaction entre des vagues et des structures élastiques. Autant d'études qu'il est parfois analytiquement et expérimentalement impossible à réaliser.

Cependant les connaissances générales et la compréhension des phénomènes d'interaction fluide-structure élastique progressent, en particulier grâce à la simulation numérique. Actuellement certaines technologies telle que les prothèses cardiaque Carmat [Carpentier et al., 2015] en tirent pleinement bénéfice. Néanmoins, il reste encore beaucoup de travail notamment sur la simplification des modèles mathématiques et numériques à employer ainsi que sur l'amélioration de la précision apportée à la représentation de ces interactions. La gestion de l'interface fluide-structure élastique est une des difficultés à traiter du fait des discontinuités physiques inhérentes à la présence de deux milieux aux propriétés physiques très différentes.

Dans ce chapitre, nous effectuons un état de l'art sur les différentes méthodes proposées par la littérature pour modéliser l'interaction entre un fluide et une structure élastique. Puis nous introduisons et décrivons le modèle 1-fluide complètement eulérien choisi.

## 1.1 État de l'art

D'un point de vue numérique, la difficulté majeure de l'interaction fluide-structure (FSI dans la littérature anglophone) réside dans la différence de formulation utilisée pour modéliser un solide élastique et un fluide. Le fluide est habituellement écrit de manière eulérien tandis que le formalisme lagrangien est préféré pour le solide. De nombreuses stratégies ont été développées dans la littérature pour aborder ce problème. Nous choisissons de répertorier quelques approches suivant le traitement réservé au couplage entre les dynamiques du solide élastique et du fluide à l'interface.

### 1.1.1 Méthodes lagrangiennes

Les méthodes SPH (Smoothed particle hydrodynamics) sont un exemple de méthodes purement lagrangiennes proposées par [Monaghan, 1988]. L'ensemble des équations sont écrites dans le formalisme lagrangien et calculées sur des particules dotées d'une masse et représentatives du mouvement du milieu continu. Cette particularité lui vient de son but initial : la représentation de problèmes d'astrophysiques telle que la rotation des étoiles. La méthode a ensuite été appliquée à l'interaction fluide-structure par [Marti et al., 2006] et plus récemment par [Amanifard et al., 2011] pour la simulation de l'impact d'une vague sur un mur hypo-élastique.

### 1.1.2 Méthodes lagrangiennes-eulériennes

L'approche probablement la plus répandue est l'ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) où le solide est suivi de manière lagrangienne. La particularité du schéma consiste à déplacer le maillage afin de suivre l'interface fluide-solide [Donea et al., 1982], [Hirt et al., 1974]. Les lois de conservation sont ré-écrites pour prendre en compte la vitesse de déplacement des cellules de calculs. Cette vitesse est donc introduite dans les équations de Navier-Stokes formant la formulation ALE du problème. L'approche peut être considérée comme monolithique mais pas 1-fluide comme nous l'observerons pour les méthodes IBM. Cette méthode est précise notamment pour le suivi d'interface par l'adaptation du maillage au mouvement du solide. Les quantités sensibles sont résolues de manière précise le long de l'interface de l'objet déformé. Grâce à ce suivi du solide, on s'attend donc à obtenir une représentation précise des phénomènes modélisés.

Ces méthodes ont déjà été appliquées et fait leurs preuves pour des études diverses et variées. Nous pouvons citer la modélisation d'écoulement sanguin [Taylor et al., 1998]. Dans cet article, Taylor *et al.* mettent en évidence l'impact des paramètres tel que le caractère élastique de la carotide, son aspect arborescent ou encore sa géométrie bien particulière, sur l'écoulement sanguin. Il apparaît des zones de reflux notamment lors des pics systoliques (correspondant à la phase périodique de contraction du système cardiaque). L'écoulement est modélisé par les équations de Navier-Stokes en incompressible.

Dans le même contexte, [Watanabe et al., 2004] se sont intéressés aux mécanismes cardiaques par la résolution des équations de Navier-Stokes. Le cœur est modélisé par un solide hyper-élastique suivant la loi de Lin et Jin puis est mis en mouvement par une fonction représentative de l'excitation des cellules du myocarde. L'étude permet une bonne

représentation de l'écoulement sanguin et de la distribution de pression intra-ventriculaire. Dans [Turek and Hron, 2006] les auteurs utilisent les méthodes ALE et proposent un cas test que nous mentionnerons plus en détail dans le chapitre 3 de cette thèse. Il s'agit de la déformation d'une fine barre élastique dans des allées de Von Karman. Dans la littérature, ce cas test fait office de référence et est reconnu pour sa complexité.

Dans [Wang et al., 2014] les auteurs reprennent le cas test de Turek pour un solide quasi incompressible puis s'intéressent à la flexion d'une fine tige élastique. C'est une configuration propice à la création de cisaillement fluide autour du solide et donc proche de celle que nous retrouvons lors de l'interaction entre une vague et une structure élastique.

Il existe également des études plus formelles [Gao and Hu, 2009] s'intéressant aux propriétés géométriques d'une collision entre deux particules incompressibles élastiques Néo-Hookéennes.

Les méthodes ALE sont ainsi très largement utilisées dans la littérature pour leur précision. Cependant elles se révèlent non seulement complexes à implémenter mais aussi coûteuses en temps de calcul de part la nécessité de remailler régulièrement le domaine.

### Méthodes IBM

Une alternative proposée par [Peskin, 1972] [Peskin, 2002] est la méthode de frontières immergées (IBM : Immersed Boundary Method). Des marqueurs lagrangiens sont utilisés afin de suivre la déformation du solide élastique. La force élastique apparaît comme un terme source dans les équations du fluide et est distribuée sur la grille eulérienne à l'aide d'une masse de Dirac de la manière suivante :

$$\mathbf{f}(x, t) = \int \mathbf{F}(\xi, t) \delta(x - X(\xi, t)) d\xi$$

$\mathbf{f}$  représente la force élastique eulérienne calculée à partir de l'extrapolation de la force élastique lagrangienne  $\mathbf{F}$  par l'intermédiaire de la masse de Dirac entre nœuds eulériens  $x$  et marqueurs lagrangiens  $\xi$ . Ces derniers sont déplacés à l'aide du champ de vitesse par l'E.D.O. suivante :

$$X_t(\xi, t) = \mathbf{v}(X(\xi, t, t))$$

La méthode a fait l'objet par la suite de multiple améliorations notamment par [Lee and LeVeque, 2003] où une partie de la force élastique est ajoutée comme condition de saut sur la pression afin d'éviter l'apparition de termes dipolaires (négatifs et positifs) affectant considérablement la précision de la solution.

Dans la littérature, la méthode IBM est essentiellement combinée avec les équations de Navier-Stokes en incompressible. Ainsi [Huang and Sung, 2009] l'applique pour la simulation de la nage d'une méduse ou à la modélisation de la déformation d'un anneau élastique dans une conduite rétrécie. Ce cas est comparable au passage d'un globule rouge dans une artère bouchée.

Cette dernière application a également intéressé [Eggletona and Popel, 1998], ou ils étudient la déformation d'un globule rouge assimilé à un corps élastique de type Néo Hookéen. [Zhao et al., 2008] utilisent les IBM pour l'étude de phénomènes biologiques d'interaction entre un fluide incompressible et un solide élastique telle que la nage de la méduse ou la



déformation d'une algue dans un canal soumis à un champ de vitesse oscillant. Sa méthode combine méthode des éléments finis pour le solide et méthode des différences finies pour le fluide sur grille eulérienne fixe.

De la même manière, dans [Bhardwaj and Mittal, 2012] les auteurs proposent une méthode semblable et effectuent une étude paramétrique du cas test de Turek pour un fluide incompressible. Il met en évidence l'impact de l'augmentation de la rigidité du matériau sur l'amplitude et la fréquence du mouvement.

Dans le même registre des méthodes de frontières immergées, on trouve également dans la littérature une méthode dite des domaines fictifs (FDM : Fictitious Domain Method) introduite par [Glowinski et al., 1994], puis reprise dans les travaux de [Zhang et al., 2012]. L'interaction entre un fluide incompressible et des solides élastiques Néo Hookéen où de Saint Venant Kirchoff est appliquée à des cas tests connus comme la cavité entraînée ou encore la flexion d'une tige élastique également effectuée par [Wang et al., 2014] en ALE. Comme toutes méthodes lagrangiennes, elles restent délicates à utiliser en présence de larges déformations par la nécessité d'ajouter, ou tout du moins de mieux répartir les marqueurs dans le solide afin de conserver une discrétisation précise de la force élastique.

### 1.1.3 Méthodes eulériennes

Afin de pouvoir traiter les grandes déformations et de s'affranchir des difficultés liées au génération de maillage ou redistribution de particules, une nouvelle approche possible consiste à décrire l'élasticité de manière eulérienne. La force élastique est calculée à partir de quantités eulériennes lesquelles sont advectées par le champ de vitesse du milieu continu. Ces forces sont discrétisées sur la même grille que le fluide et, à l'instar des méthodes de frontières immergées, elles sont ensuite ajoutées comme terme source aux équations fluide. La méthode a été initialement proposée par [Cottet and Maitre, 2004], [Cottet and Maitre, 2006] pour le cas de membranes élastiques immergées dans un fluide incompressible. Elle a ensuite été employée pour la modélisation de la déformation d'une hématie [Maitre et al., 2009]. Plus récemment, [Milcent and Maitre, 2016] ont généralisé le modèle afin de pouvoir prendre en compte les effets de cisaillement sur une membrane élastique.

Le modèle a été généralisé aux volumes élastiques [Cottet et al., 2008] afin de calculer la force élastique appliquée à un solide élastique à l'aide des caractéristiques rétrogrades  $\mathbf{Y}$ . Elle a indépendamment été développée par d'autres équipes comme [Dunne and Rannacher, 2006], [Kamrin et al., 2012], puis [Richter, 2013] où les caractéristiques rétrogrades sont nommées "reference map" dans [Kamrin et al., 2012] et "set of initial positions (IP)" dans [Dunne, 2006].

Son principe repose sur l'utilisation de la fonction caractéristiques rétrogrades permettant la corrélation entre la position d'un point matériel avec sa position initiale. Cette fonction est quand à elle simplement advectée composante par composante (2 en 2D et 3 en 3D).

$$\mathbf{Y}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{Y} = \mathbf{0}$$

Le calcul du tenseur élastique de Green Cauchy  $B$  se fait ensuite à partir de  $\nabla \mathbf{Y}$ . À contrario, dans [Sugiyama et al., 2011] les auteurs utilisent une équation eulérienne basée

directement sur le transport du tenseur élastique de Green Cauchy  $B$ .

$$B_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)B = \nabla \mathbf{v} \cdot B + B \cdot \nabla \mathbf{v}^T$$

Cette équation possède 3 composantes en 2D (6 en 3D) et nécessite également les calculs du gradient de la vitesse et du gradient du tenseur  $B$ .

D'un point de vue purement numérique, Les méthodes d'éléments finis sont souvent plus adaptées à prendre compte les géométries quelconques lors d'interaction entre fluide et structure rigide (body fitted). Cependant dans le cas de solide déformable, si on désire conserver la précision offerte par ces méthodes, il est nécessaire d'avoir recours à des algorithmes adaptatifs assez contraignants à implémenter (spécialement en 3D). C'est ce que propose Dunne [Dunne and Rannacher, 2006].

Les méthodes des différences finies ou des volumes finis sur une grille fixe et cartésienne ont l'avantage de minimiser le stockage de données tout en permettant une gestion plus simple des calculs parallèles. Cependant la représentation de l'interface s'avère moins précise. De plus la perte de masse du solide ou la création de perturbations parasites sont souvent observées au fur et à mesure des itérations. Pour surmonter ces difficultés, il est possible d'avoir recours à des méthodes de suivi d'interface plus précises. Ces dernières sont abordées et détaillées dans le chapitre 2.

### 1.1.4 Notre modèle

Notre domaine d'application est la simulation de l'interaction entre des algues et une vague. Ce type d'interaction ne fait pas intervenir des structures à géométrie complexe cependant elles peuvent être nombreuses. Passer par des étapes de remaillage pourrait s'avérer couteux en temps de calcul. De plus cette technique n'est pas proposée dans le code de calcul Thétis où seul les calculs sur grilles cartésiennes sont effectués. L'implémentation de maillage adapté requiert des connaissances spécifiques et ne constitue pas l'objectif de nos travaux.

De plus, lors du passage de la vague, nous nous attendons à observer de fortes déformations des structures élastiques. L'ensemble de ces critères nous conduit à préférer l'utilisation d'un modèle eulérien pour le calcul des forces élastiques. Nous avons choisi la méthode des "caractéristiques rétrogrades" [Cottet et al., 2008] moins coûteuse en calcul que la méthode proposée par Sugiyama [Sugiyama et al., 2011].

## 1.2 Modèle eulérien pour l'interaction fluide-structure élastique

Dans cette section nous décrivons le modèle 1-fluide complètement eulérien choisi.

Dans un premier temps nous étudions le mouvement fluide supposé continu et incompressible. Dans le cas de la mécanique des milieux continus, nous évoquerons les principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Ces résultats nous permettront d'aboutir aux équations de Navier-Stokes incompressible. Puis nous décrirons quelques principes relatifs à la mécanique du solide afin de se consacrer en dernière partie à l'étude des solides élastiques soumis à de grandes déformations.

### 1.2.1 Modèle pour le mouvement fluide

Un milieu continu peut-être décrit de deux manières différentes :

- suivant la description lagrangienne consistant à suivre des particules fluides contenant les grandeurs physiques caractérisant l'écoulement ;
- suivant la description eulérienne en définissant les grandeurs physiques sur des points géométriques de l'espace fixés.

Cette dernière description est plus apte à décrire les grandes déformations du fluide, c'est pourquoi elle est généralement utilisée pour représenter le mouvement fluide. Elle utilise des variables définies sur des points fixes de l'espace déformé noté  $\Omega_t$ .

Suivant le formalisme employé, les calculs différentiels se font de manière différente. C'est le cas pour la dérivée particulaire  $\frac{D}{Dt}$ . Il s'agit d'un calcul purement lagrangien dont l'équivalent eulérien pour une quantité  $f$  quelconque est donné par :

$$\frac{Df}{Dt} = f_t + \mathbf{v} \cdot \nabla_x f$$

Où  $\mathbf{v}$  représente le champ de vitesse du fluide.

Ce résultat permet de rappeler la formule classique de Reynolds pour les volumes :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f dV = \int_{\Omega_t} (f_t + \operatorname{div}(f\mathbf{v})) dV. \quad (1.1)$$

Cette formule traduit la déformation du domaine  $\Omega_t$  par le champ de vitesse du fluide  $\mathbf{v}$  au cours du temps. Elle est habituellement utilisée pour les principes de conservation de la masse et du mouvement que nous abordons à présent.

#### Conservation de la masse

La masse  $m$  d'un système matériel  $\Omega_t$  est déterminée à partir de  $\rho(t, x)$ , la densité au point  $x$  et à l'instant  $t$ , tel que

$$m(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} \rho(t, x) dV$$

Le principe de conservation de la masse stipule que la masse d'un solide, que l'on suit dans son mouvement au cours du temps, se conserve. Autrement dit sa variation au cours du temps est nulle :

$$\frac{d}{dt} m(\Omega_t) = 0.$$

D'où la formule :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(t, x) dV = 0.$$

Enfin en utilisant la formule de Reynolds (1.1) nous obtenons l'équation de conservation de la masse en description eulérienne :

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0. \quad (1.2)$$

### Conservation de la quantité de mouvement

Le principe fondamental de la dynamique énonce l'égalité entre la variation de la quantité de mouvement d'un système avec la somme des forces extérieures s'exerçant sur ce système. Nous appliquons ce principe à un volume  $\Omega_t$ . Les forces notées  $\mathbf{f}_V$  sont volumiques lorsqu'elles s'appliquent sur  $\Omega_t$  et surfaciques  $\mathbf{f}_S$  lorsqu'elles s'appliquent sur les bords du domaine  $\Omega_t$  que l'on note  $\partial\Omega_t$ . Nous définissons les torseurs suivant

(i) Les torseurs de quantité de mouvement :

$$\rightarrow \text{La résultante } \mathcal{R} = \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{v} dV$$

$$\rightarrow \text{Le Moment } \mathcal{M} = \int_{\Omega_t} \mathbf{OM} \wedge \rho \mathbf{v} dV$$

(ii) Les torseurs des forces volumiques et surfaciques :

$$\rightarrow \text{La résultante } \mathcal{R} = \int_{\Omega_t} \mathbf{f}_V dV + \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{f}_S(\mathbf{n}) dS$$

$$\rightarrow \text{Le Moment } \mathcal{M} = \int_{\Omega_t} \mathbf{OM} \wedge \mathbf{f}_V dV + \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{OM} \wedge \mathbf{f}_S(\mathbf{n}) dS$$

Le théorème de Cauchy, que nous exprimerons plus en détail en seconde partie lors de l'étude de la mécanique du solide, stipule que les forces surfaciques dépendent linéairement de la normale  $\mathbf{n}$ , i.e. que l'on écrit les forces surfaciques tel que :

$$\mathbf{f}_S(x, t, \mathbf{n}) = \sigma(x, t) \cdot \mathbf{n}(x, t)$$

avec  $\sigma$  le tenseur des contraintes de Cauchy sur lequel nous reviendrons plus en détail par la suite.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué sur les moments implique la symétrie du tenseur  $\sigma$ . Ce même principe appliqué sur les résultantes permet d'obtenir les équations sur les vitesses :

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega_t} \rho(x, t) \mathbf{v}(x, t) dV \right) = \int_{\partial\Omega_t} \sigma(x, t) \mathbf{n}(x, t) dS + \int_{\Omega_t} \mathbf{f}_V(x, t) dV$$

A l'aide de la formule de Reynolds (1.1) avec  $\mathbf{f} = \rho \mathbf{v}$  et de la conservation de la masse (1.2), nous obtenons les équations de conservation de la quantité de mouvement en configuration eulérienne :

$$\rho(\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}) = \text{div}(\sigma) + \mathbf{f}_V \quad (1.3)$$

### Équations de Navier Stokes incompressible et modèle 1-fluide

Nous nous intéressons aux écoulements de fluides incompressibles (isochore) c'est à dire à densité constante dans chaque milieu composant le domaine  $\Omega_t$ . En considérant  $\rho$  constant dans la formule (1.2) il vient la condition d'incompressibilité sur la vitesse :

$$\text{div}(\mathbf{v}) = 0 \quad (1.4)$$

Nous obtenons les équations de conservation du mouvement incompressible en configuration eulérienne dans un domaine quelconque :

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{v}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) - \operatorname{div}(\sigma) = \mathbf{f}_V \\ \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

Ces équations sont complétées par des conditions initiales sur la densité et la vitesse et des conditions limites portant sur la vitesse ou sur le tenseur des contraintes  $\sigma$ . Afin de fermer le système, nous avons besoin de lois de comportement permettant de relier le tenseur des contraintes  $\sigma$  aux inconnues du problème.

Une extension de la méthode des frontières immergées (Immersed Boundary Method) introduite par Peskin [Peskin, 2002] est appliquée. Nous considérons un domaine  $\Omega$  comportant un solide élastique  $\Omega_S$  immergé dans un domaine fluide  $\Omega_F$  supposé Newtonien. Il s'agit d'un modèle monolithique dans le sens où nous supposons que le solide élastique est également visqueux. Les forces élastiques sont également contenues dans le tenseur des contraintes, ce qui permet de le scinder en deux parties fluide et solide :

$$\sigma = \sigma_F + \mathcal{H}\sigma_S \quad (1.6)$$

Avec  $\sigma_F$  (resp.  $\sigma_S$ ) le tenseur des contraintes fluide (resp. solide).  $\mathcal{H}$  est une fonction cut-off de type Heaviside permettant d'exercer la force élastique dans notre domaine élastique.

Le fluide est supposé Newtonien et son comportement entre contrainte et tenseur des vitesses de déformation est linéaire. Nous écrivons le tenseur des contraintes :

$$\sigma_F = 2\mu D(\mathbf{v}) + \lambda \operatorname{Tr}(D(\mathbf{v}))I_d - pI_d,$$

avec  $D(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T)$ .

Remarquons que sous les hypothèses d'incompressibilité nous avons :

$$\operatorname{Tr}(D(\mathbf{v})) = \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0.$$

La viscosité  $\mu$  et la densité  $\rho$  peuvent être exprimées en fonction des viscosités du fluide et du solide ( $\mu_f, \mu_s$ ) et des densités du fluide et du solide ( $\rho_f, \rho_s$ ) :

$$\begin{cases} \rho = (1 - \mathcal{H})\rho_f + \mathcal{H}\rho_s \\ \mu = (1 - \mathcal{H})\mu_f + \mathcal{H}\mu_s \end{cases} \quad (1.7)$$

Cette notation permet de pouvoir considérer un solide élastique non visqueux lors de la validation du modèle i.e. en imposant  $\mu_s = 0$  dans le solide.

Finalement dans le cas d'un solide élastique visqueux le système 1-fluide devient :

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}) - \operatorname{div}(2\mu D(\mathbf{v})) + \nabla p = \operatorname{div}(\mathcal{H}\sigma_S) \\ \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

Le calcul de la force élastique est indépendant de la vitesse, c'est pourquoi il apparaît dans le second membre des équations de Navier Stokes. L'objectif des parties suivantes est d'explicitier le tenseur des contraintes du solide élastique  $\sigma_S$ . Pour se faire, nous avons d'abord recours à la mécanique du solide.

## 1.2.2 Mécanique du solide

L'étude microscopique d'un matériau est très importante pour la découverte et la compréhension des phénomènes physiques mais est parfois trop complexe à modéliser. Nous lui préférons une approche macroscopique basée sur la méthode de la mécanique des milieux continus i.e. dont la masse et le volume sont considérés comme continus. Cette hypothèse nous permet d'appréhender plus facilement des phénomènes physiques complexes en ignorant les contraintes liées aux micro structures internes.

Dans cette partie nous cherchons à étudier le comportement des particules au cours du temps. Nous cherchons dans un premier temps à estimer les déformations à partir d'une configuration déformée à un instant  $t$ , c'est à dire à mesurer les déplacements entre chaque particule. Puis cette mesure permettra par la suite de quantifier la force élastique  $\text{div}(\sigma_S)$  laquelle sera introduite en second membre des équations de Navier Stokes incompressible (1.8).

### Déformations lagrangiennes

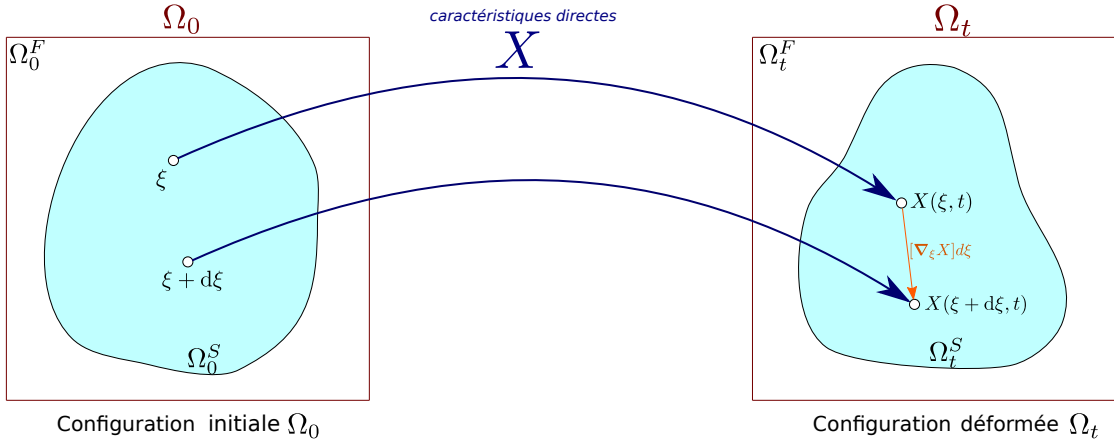
Pour décrire le mouvement solide il est plus naturel de privilégier le formalisme lagrangien. Il permet de suivre les particules au cours d'une transformation afin de pouvoir en mesurer la déformation. Pour cela nous considérons un domaine matériel de référence (ou initial)  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$  à  $t = 0$  et avec  $n = 2$  ou  $3$ . Il est soumis à des contraintes quelconques le transformant en une configuration  $\Omega_t \subset \mathbb{R}^n$  à un instant  $t$ . Afin de suivre le mouvement d'une particule  $\xi \in \Omega_0$ , nous introduisons la fonction de déformation nommée *caractéristiques directes* :

$$\begin{aligned} \mathbf{X} : \Omega_0 \times [0, T] &\longrightarrow \Omega_t \\ (\xi, t) &\longrightarrow x = \mathbf{X}(\xi, t). \end{aligned}$$

Une particule  $\xi \in \Omega_0$  de la configuration de référence se retrouve après déformation à la position  $x = \mathbf{X}(\xi, t)$  de la configuration déformée  $\Omega_t$ . Les caractéristiques permettent de décrire les transformations figure (1.1). Elles doivent répondre à quelques hypothèses :

-(**H1**) bijectives pour éviter les phénomènes d'imbrication de matière lors des grandes déformations.

-(**H2**) suffisamment régulières afin non seulement de ne prendre en compte que des déformations continues mais aussi de permettre les multiples dérivations auxquelles elles seront soumises (opérateurs  $\text{div}$  et  $\nabla$ ).



**Figure 1.1** – Caractéristiques directes

Le déplacement des particules lagrangiennes est calculé à partir de l'EDO suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{X}_t(\xi, t) = \mathbf{v}(\mathbf{X}(\xi, t), t) \\ \mathbf{X}(\xi, 0) = \xi. \end{cases} \quad (1.9)$$

avec  $\mathbf{v}$  le champ de vitesse fluide.

Nous souhaitons caractériser les déformations locales subies par les particules à un instant  $t$ . Nous cherchons à apprécier l'évolution de la distance entre deux particules relativement proches  $\xi$  et  $\xi + d\xi$  de  $\Omega_0$  au cours d'une déformation (figure 1.2.2), autrement dit nous souhaitons calculer dans la configuration déformée le vecteur :

$$dx = \mathbf{X}(\xi + d\xi, t) - \mathbf{X}(\xi, t) = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi}(\xi, t)d\xi + o(d\xi).$$

Nous obtenons le gradient des déformations (ou tenseur des déformations)

$$F = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi}(\xi, t) = [\nabla_{\xi} \mathbf{X}(\xi, t)].$$

C'est un tenseur traduisant le comportement de la transformation mais pas la déformation à proprement parler. En effet, le tenseur  $F$  associé à un solide qui n'a subi aucune déformation est l'identité i.e.  $F = I_d$ . A présent, supposons que nous faisons subir une transformation solide au corps élastique. Nous rappelons qu'une transformation est qualifiée de solide si elle est uniquement composée de translation et de rotation. Ce type de déformation modifie les positions des particules solides sans en modifier l'espacement entre elles. Il n'y a donc pas de déformation, cependant le tenseur  $F$  associé n'est plus l'identité mais est égal à une matrice de rotation.

Comme le tenseur  $F$  ne nous permet pas de caractériser les déformations d'un domaine matériel, il nous faudra avoir recours à d'autres tenseurs que nous aborderons plus tard.

Notons également que le déterminant du tenseur  $F$  doit satisfaire quelques propriétés :

- $\det F > 0$  afin de préserver l'orientation de l'espace lors de la transformation ;
- $\det F = 1$  dans le cas d'un matériau incompressible, comme il le sera précisé par la suite.

Dans la littérature l'expression du déplacement d'une particule s'exprime parfois en fonction des caractéristiques directes :

$$\mathbf{u}(\xi, t) = \mathbf{X}(\xi, t) - \xi. \quad (1.10)$$

### Déformations eulériennes

Afin d'obtenir un modèle complètement eulérien, il est impératif de pouvoir suivre les déformations de manière eulérienne. La méthode choisie est issue des travaux effectués par [Cottet et al., 2008]. Considérons la fonction caractéristiques rétrogrades  $\mathbf{Y}$ , permettant de retrouver la position initiale  $\xi \in \Omega_0$  d'un point de la configuration déformée  $x \in \Omega_t$  :

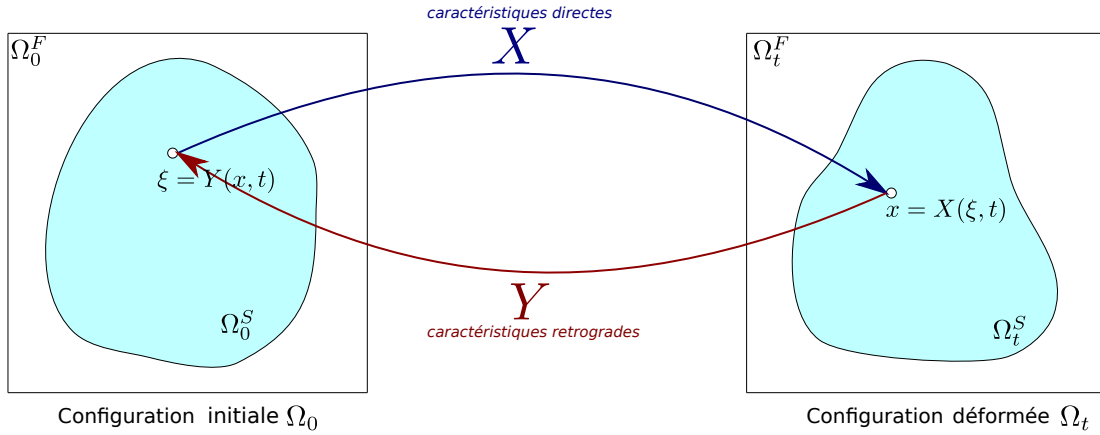
$$\begin{aligned} \mathbf{Y} : \Omega_t \times [0, T] &\longrightarrow \Omega_0 \\ (x, t) &\longrightarrow \xi = \mathbf{Y}(x, t) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Les caractéristiques rétrogrades offrent la possibilité, à partir d'une configuration déformée quelconque  $\Omega_t$ , de retourner à la configuration initiale associée  $\Omega_0$ .

D'un point de vue mathématique nous pouvons écrire :

$$\mathbf{X}(\mathbf{Y}(x, t), t) = x \quad \text{et} \quad \mathbf{Y}(\mathbf{X}(\xi, t), t) = \xi. \quad (1.12)$$

Autrement dit, les caractéristiques rétrogrades  $\mathbf{Y}$  sont les inverses des caractéristiques directes  $\mathbf{X}$  (i.e.  $\mathbf{Y} = \mathbf{X}^{-1}$ ). Une égalité rendue possible grâce aux hypothèses **(H1)** et **(H2)** effectuées sur les caractéristiques directes  $\mathbf{X}$  et également faites sur les caractéristiques rétrogrades  $\mathbf{Y}$ .



**Figure 1.2** – Caractéristiques rétrogrades et caractéristiques directes

En dérivant la seconde équation de (1.12) par rapport au temps, nous obtenons l'équation de transport des caractéristiques rétrogrades  $\mathbf{Y}$

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_t(x, t) + (\mathbf{v}(x, t) \cdot \nabla_x) \mathbf{Y}(x, t) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{Y}(x, 0) &= x \end{cases} \quad (1.13)$$



Il s'agit de l'équivalent eulérien de l'équation (1.9) portant sur les caractéristiques directes.

De plus, en dérivant (1.12) par rapport à  $\xi$  (respectivement  $x$ ), on obtient la nouvelle expression du tenseur gradient des déformations :

$$F = [\nabla_{\xi} \mathbf{X}(\xi, t)] = [\nabla_x \mathbf{Y}(x, t)]^{-1}$$

Cette relation d'inverse entre les gradients sera d'une grande utilité. Elle permettra d'établir un lien entre les différents formalismes, lesquels permettront d'exprimer des quantités eulériennes à partir de quantités initialement lagrangiennes (et inversement). Nous le verrons pour les transformations ou encore pour l'expression du tenseur des contraintes élastiques.

### Correspondance lagrangien-eulérien

Par la suite, il peut être utile de pouvoir passer entre les différentes configurations. C'est le cas notamment pour les calculs intégrales volumiques et surfaciques. Des calculs plus commodes à effectuer sur la configuration de référence  $\Omega_0$  indépendante du temps et donc facilement dérivable. Nous écrivons ici les formules associées au changement de variables  $x = \mathbf{X}(\xi, t)$  que nous utiliserons de manière implicite dans cette thèse.

Les intégrales volumiques s'écrivent

$$\int_{\mathbf{X}(\Omega_0, t) = \Omega_t} f(x, t) dV = \int_{\Omega_0} f(\mathbf{X}(\xi, t), t) \det(\nabla_{\xi} \mathbf{X}(\xi, t)) dV_0 \quad (1.14)$$

l'équivalent surfacique devient, pour un élément de surface  $dS_0$  de la configuration initiale et  $dS$  de la configuration déformée :

$$\int_{\mathbf{X}(\partial\Omega_0, t) = \partial\Omega_t} \sigma(x, t) \mathbf{n}(x, t) dS = \int_{\partial\Omega_0} \sigma(\mathbf{X}(\xi, t), t) \text{Cof}(\nabla_{\xi} \mathbf{X}(\xi, t)) \mathbf{n}_0(\xi) dS_0 \quad (1.15)$$

où  $\mathbf{n}$  désigne la normale en  $x \in \Omega_t$  et  $\mathbf{n}_0$  la normale en  $\xi \in \Omega_0$ .

### Transformation

Qu'on utilise des modèles compressibles ou incompressibles, il peut être utile de quantifier les variations de volumes ou de surfaces au cours des transformations. Les formules de Nanson permettent de relier des éléments de volume ou de surface appartenant à différentes configurations. Ces formules sont un cas particulier des formules de changement de variables volumiques (1.14) et surfaciques (1.15). Elles s'appuient sur le calcul du jacobien de la transformation, noté  $J$ , tel que

$$J = \det(F).$$

Il mesure la variation entre un élément de la configuration initiale de volume  $dV_0$  et son équivalent déformé  $dV$ . La relation s'écrit

$$dV = J(\xi, t) dV_0 \quad (1.16)$$

De la même manière, afin de relier également les éléments de surface  $S_0$  de la configuration initiale et  $S$  de la configuration déformée, nous observons une ligne matérielle  $dl_0$  qui se transforme en  $dl$  suivant les normales de chaque configuration. La variation eulérienne du volume s'écrit

$$dV = dS \cdot dl = JdS_0 \cdot dl_0$$

De plus on sait que  $dl = Fdl_0$ , on obtient finalement

$$\begin{aligned} dS &= JF^{-T}dS_0 \\ &= \text{Cof}(F)dS_0 \end{aligned} \quad (1.17)$$

Notons que la condition d'incompressibilité sur le solide peut être un résultat utile pour la validation du modèle et des méthodes de résolution numérique. Elle s'exprime simplement par :

$$J = 1.$$

### Tenseurs des déformations

Nous avons vu que le tenseur  $F$  ne permettait pas à lui seul de caractériser les déformations d'un solide. Ils s'agit donc de trouver un tenseur capable de quantifier les variations de longueur ou d'angle.

On introduit pour cela  $C = F^T F$  le tenseur de Cauchy-Green à droite ou tenseur des dilatations de Cauchy-Green. Une manière élégante de le présenter est de calculer le produit scalaire entre deux vecteurs élémentaires  $dl$  et  $dl'$  de la configuration déformée en fonction de leurs expressions dans la configuration de référence  $dl_0$  et  $dl'_0$ . Ce qui revient à examiner les variations entre deux configurations de la distance et des angles initialement existantes entre deux points matériels arbitraires.

$$dl \cdot dl' = (Fdl_0) \cdot (Fdl'_0) = \underbrace{(F^T F)}_C dl_0 \cdot dl'_0$$

Notons que lorsque le solide est soumis à une déformation rigide (i.e. translation et/ou rotation) nous obtenons  $C = I$ . Contrairement au tenseur  $F$ , la configuration de référence est préservée, le solide ne subit aucune déformation.

$C$  est un tenseur lagrangien car il s'applique à des vecteurs de la configuration de référence. Nous pouvons définir son équivalent eulérien  $B = FF^T$  nommé tenseur de Cauchy-Green à gauche. il est obtenu de manière inverse à partir de deux vecteurs  $dl_0$  et  $dl'_0$  de la configuration de référence :

$$dl_0 \cdot dl'_0 = (F^{-1}dl) \cdot (F^{-1}dl') = \underbrace{((FF^T)^{-1})}_B dl \cdot dl'.$$

En s'intéressant aux allongements entre ces vecteurs élémentaires  $dl^T dl' - dl_0^T dl'_0$  nous retrouvons le tenseur de Green Lagrange  $E = \frac{1}{2}(C - I_d)$ . Il est utilisé pour l'expression du modèle d'élasticité non linéaire de Saint venant Kirchhoff. Il traduit les variations par rapport aux déformations rigides. On peut exprimer  $E$  en fonction des déplacements en remarquant que  $C = (\nabla \mathbf{u} - I_d)^T (\nabla \mathbf{u} - I_d)$  :

$$E(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}([\nabla \mathbf{u}]^T [\nabla \mathbf{u}]) + \underbrace{\frac{1}{2}([\nabla \mathbf{u}]^T + [\nabla \mathbf{u}])}_{\epsilon(\mathbf{u})} \quad (1.18)$$

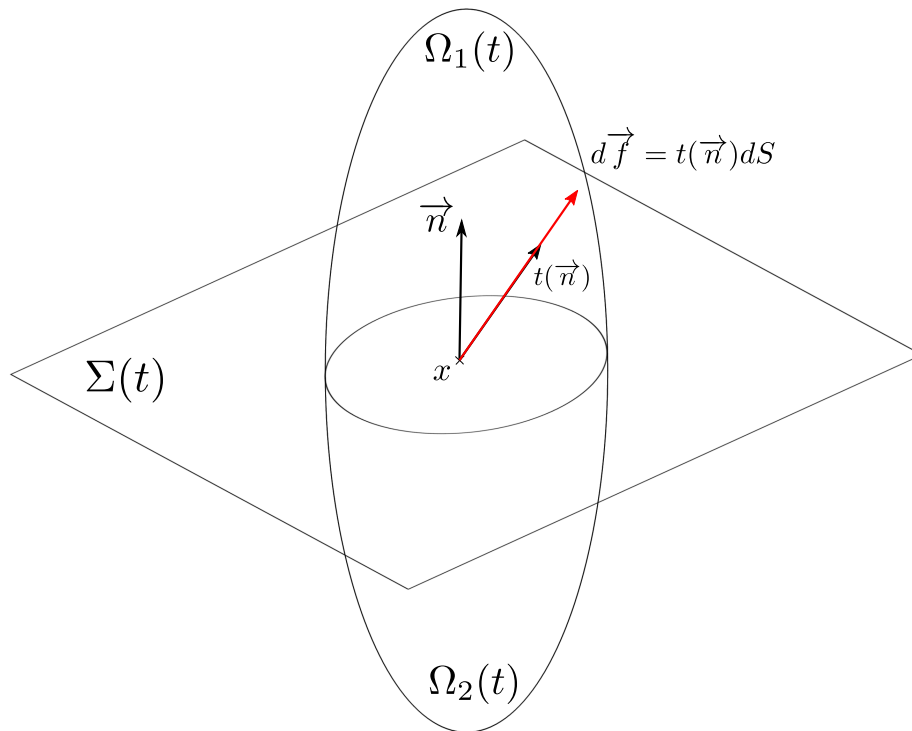
Cette écriture permet de scinder le tenseur en une partie linéaire  $\epsilon(\mathbf{u})$  et une partie non linéaire.  $\epsilon(\mathbf{u})$  est appelé tenseur des déformations linéarisées de Green Lagrange, couramment utilisé pour l'étude de l'élasticité linéaire.

$E$  est un tenseur lagrangien, tout comme  $C$ , et de la même manière nous pouvons obtenir son homologue eulérien  $A = \frac{1}{2}(I_d - B^{-1})$  nommé tenseur d'Euler Almansi.

Un tenseur lagrangien et son équivalent eulérien expriment toujours les mêmes caractéristiques de la déformation mais sur des configurations différentes.

### Tenseur des contraintes de déformations

Les parties précédentes ont permis de comprendre et de quantifier les déformations grâce à des tenseurs gradient de déformation, de dilatation ou de déplacement. Ces déformations donnent naissance à des interactions entre les éléments constituant le volume matériel considéré. Ces interactions sont à l'origine des contraintes elles même responsables de la déformation du matériau.



**Figure 1.3** – Schéma des contraintes exercées sur un plan imaginaire

Soit un solide déformable  $\Omega_t$  que l'on scinde fictivement en 2 systèmes matériels  $\Omega_1(t)$  et  $\Omega_2(t)$  par une surface de contact plane  $\Sigma(t)$  comme représenté sur la figure (1.3).

Soit  $\mathbf{n}(x, t)$  la normale unitaire au point  $x \in \Sigma(t)$ , dirigée de  $\Omega_2(t)$  vers  $\Omega_1(t)$ . L'hypothèse de Cauchy stipule qu'en plus des forces extérieures agissant sur la surface du solide, il existe des forces internes agissant sur cette surface imaginaire dépendant uniquement de

la normale. Soit  $df$  une force résultante agissant sur une infime portion  $dS$  du plan fictif.

Grâce au principe de Cauchy, nous définissons le vecteur des contraintes de Cauchy  $t$  par :

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \frac{df}{dS}. \quad (1.19)$$

Il s'agit d'une force mesurée par unité de surface dépendant de la normale  $\mathbf{n}$  à l'interface  $dS$ . Par ailleurs, le théorème de Cauchy stipule que cette dépendance est linéaire. Il existe un tenseur d'ordre 2 appelé tenseur des contraintes de Cauchy et noté  $\sigma$  tel que :

$$\mathbf{t}(x, t, \mathbf{n}) = \sigma(x, t) \cdot \mathbf{n} \quad (1.20)$$

Le tenseur de Cauchy est un tenseur eulérien qui contient les vecteurs contraintes de Cauchy dans la configuration déformée  $\Omega_t$ .

Nous retrouvons son équivalent lagrangien, le premier tenseur de Piola-Kirchhoff et noté  $\mathcal{T}$  capable d'exprimer la force appliquée à un élément de surface  $dS_0$  de normale  $\mathbf{n}_0$  de la configuration initiale  $\Omega_0$  :

$$df = \mathcal{T} \mathbf{n}_0 dS_0 \quad (1.21)$$

Enfin la formule de Nanson (1.16) permet d'établir une relation entre les deux tenseurs  $\sigma$  et  $\mathcal{T}$  :

$$\mathcal{T} = J\sigma F^{-T} \quad \text{et} \quad \sigma = J^{-1}\mathcal{T}F^T. \quad (1.22)$$

Ce passage de  $\sigma$  à  $\mathcal{T}$  et inversement est connu sous le nom de transformation de Piola. Notons que  $\sigma$  est symétrique tandis que  $\mathcal{T}$  ne l'est pas forcément.

Nous pouvons également introduire le second tenseur de Piola-Kirchhoff  $\Sigma$ . Bien qu'il ne soit pas représentable physiquement en tant que force de traction agissant sur la surface, il est utilisé pour l'analyse de l'élasticité non linéaire. Il permet de relier la force  $df_0 = F \cdot df$  dans l'état initial à la surface  $dS_0$  de normale  $n_0$  tel que :

$$F \cdot df = \Sigma \cdot n_0 dS_0 \quad (1.23)$$

On obtient le second tenseur de Piola-Kirchhoff  $\Sigma$  en fonction du premier tenseur de Piola-Kirchhoff  $\mathcal{T}$  ou du tenseur des contraintes de Cauchy  $\sigma$  et inversement

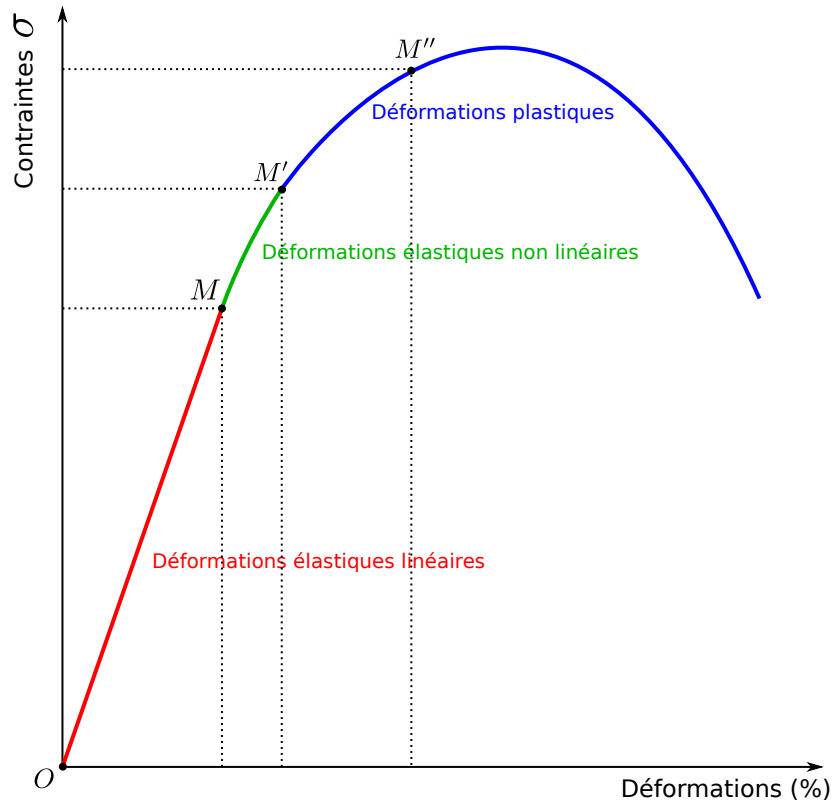
$$\Sigma = F^{-1}\mathcal{T} = JF^{-1}\sigma F^{-T} \quad \text{et} \quad \sigma = J^{-1}F\Sigma F^T. \quad (1.24)$$

## 1.3 Élasticité

Dans cette partie, un soin particulier sera apporté à la compréhension de l'élasticité, afin de pouvoir sélectionner une loi de comportement adaptée à la modélisation des matériaux élastiques.

Afin de mieux appréhender l'élasticité, il est important de comprendre le comportement

d'un solide élastique soumis à un champ de contraintes. C'est pourquoi l'approche linéaire ou l'élasticité linéaire (zone  $OM$  de la figure (1.8) ) sera abordée dans un premier temps. Cette étude mettra en lumière le rôle de certains coefficients d'élasticité connus qui interviendront dans les lois de comportement non linéaires. Alors nous aborderons le modèle non linéaire plus complexe (zone  $MM'$  de la figure (1.8)) de manière plus naturelle. Enfin les déformations plastiques (zone  $M'M''$  de la figure (1.8)) n'entrent pas dans le cadre des travaux de recherche effectués dans cette thèse et ne seront pas traités. Ce sont des déformations non élastiques et non réversibles provoquées par d'intenses contraintes.



**Figure 1.4** – Exemple de diagramme de traction d'un matériau quelconque

Tout d'abord, un solide est qualifié d'élastique s'il est réversible i.e. qu'il est capable de retourner à sa configuration d'origine après avoir été déformé. Son comportement est caractérisé par une fonction appelée loi de comportement notée  $W$ . Ainsi pour un solide élastique, les contraintes élastiques s'écrivent :

$$\sigma(x, t) = W(F(x, t), x) \quad (1.25)$$

Où  $W$  dépend uniquement du gradient des déformations  $F$  au point  $x$ . La loi de comportement contient toutes les informations matérielles propres au matériau étudié. C'est la raison pour laquelle nous focalisons notre attention sur son expression ainsi que sur les critères qu'elle doit respecter. Les hypothèses que nous formulons ici pourront être retrouvées dans les travaux effectués sur l'élasticité par [Ogden, 1986] ou encore [Holzapfel, 2002].

**(i) Hypothèse de continuité et d'homogénéité :**

Nous considérons un matériau continu et homogène i.e. dans lequel la densité de masse  $\rho_0$

est indépendante de  $\xi$ . Cela permet de s'affranchir de la dépendance en espace de la loi de comportement  $\mathcal{G}$  et d'écrire

$$\sigma = \sigma(F). \quad (1.26)$$

**(ii) Hypothèse de processus adiabatique :**

Nous supposons également des transformations adiabatiques. Nous savons que les échanges thermiques lors des déformations sont bien réels mais seront négligeables dans notre application. Cette hypothèse permet d'éviter d'avoir à gérer le couplage entre effets mécaniques des déformations et effets thermiques.

**(iii) Matériau de Green ou Hyper élasticité :**

Un matériau élastique est considéré comme hyper-élastique si le premier tenseur de Piola-Kirchhoff dérive de la densité d'énergie élastique :

$$\mathcal{T} = \frac{\partial W}{\partial F}(F) \quad (1.27)$$

En hyper-élasticité, la loi de comportement s'exprime alors par le biais de la densité d'énergie  $W$ . Cette dernière doit néanmoins répondre à quelques critères :

- la condition de normalisation  $W(I_d) = 0$  assure que l'énergie élastique soit nulle dans la configuration de référence et atteint un unique minimum global pour  $f = I_d$  comme point stationnaire. Cette propriété sera notamment utilisée pour l'élasticité incompressible que nous aborderons plus bas.
- La positivité  $W(F) \geq 0$  traduit les observations physiques de croissance de l'énergie au cours des déformations.
- La condition de croissance tel que  $\lim_{J \rightarrow \infty} W(F) = \lim_{J \rightarrow 0^+} W(F) = +\infty$  avec  $J$  le volume du solide tel que  $J = \det F$ . Cela se traduit physiquement par la nécessité d'utiliser une énergie infinie pour réduire le volume du matériau à 0 par compression ou l'infini par extension.

**(iv) Axiome d'indifférence matérielle (AIM) et de symétrie :**

Les lois de comportement doivent répondre au principe d'indifférence matérielle. Physiquement il traduit l'indépendance du comportement du matériau face à l'orientation ou encore l'invariance de l'énergie élastique face aux déformations rigides. D'un point de vue mathématique nous considérons une transformation  $\mathbf{X}$  à laquelle nous superposons une transformation rigide de translation  $a$  et de rotation  $Q$ . La nouvelle déformation obtenue s'écrit  $\mathbf{X}' = a + Q\mathbf{X}$ . En dérivant par rapport à  $\xi$  il vient

$$F' = QF$$

On dit qu'une application  $W$  respecte le principe d'indifférence matérielle si et seulement si

$$\mathcal{W}(QF) = W(F) \quad (1.28)$$

Remarquons que c'est en partie à cause de cet axiome qu'il est nécessaire de considérer des modèles d'élasticité non linéaires. Le tenseur de Lagrange 1.18 linéarisé  $\epsilon$  ne satisfait pas le principe, à l'inverse de sa version non linéaire  $E = \frac{1}{2}(C - I)$ .

Si nous appliquons le principe à la densité d'énergie d'un matériau élastique  $W$ , nous pouvons écrire  $W(F') = W(F)$  et montrer que l'énergie élastique associée à ce matériau ne dépend que du tenseur de Cauchy à droite  $C = F^T F$  tel que

$$\mathcal{E}^e = \int_{\Omega_0} \tilde{W}(C(\xi, t)) d\xi \quad (1.29)$$

C'est à dire que pour un matériau hyper-élastique, la densité d'énergie  $W$  ne dépend que de  $C$  :

$$W = W(C)$$

**(v) Hypothèse de symétrie matérielle et d'isotropie :**

Dans un premier temps, la seconde loi de Cauchy permet de conserver l'équilibre en rotation de tout volume élémentaire. De plus le matériau est considéré comme étant isotrope i.e. que ses propriétés mécaniques sont considérées comment étant les mêmes dans toutes les directions de l'espace. Mathématiquement la propriété est assez proche de l'axiome d'indifférence matérielle. Il s'agit de vérifier l'indépendance du matériau face aux transformations rigides quelconques  $\mathbf{X}' = a + \mathbf{X}Q$  ayant lieu avant la déformation (et non pas après comme se fut le cas pour l'AIM). On dit qu'une application  $W$  est isotrope si et seulement si :

$$W(FQ) = W(F) \quad (1.30)$$

De plus un résultat important est obtenu si on considère un matériau isotrope  $\mathcal{G}$  satisfaisant l'AIM. On peut montrer que son énergie ne dépend que des invariants de  $C$  notés  $\iota_C = (I_1, I_2, I_3)$  tel que

$$\mathcal{E}^e = \int_{\Omega_0} \tilde{W}(\iota_C) d\xi \quad (1.31)$$

avec les invariants de  $C$  définis par :

$$I_1 = \text{Tr } C \quad (1.32)$$

$$I_2 = \text{Tr}(\text{Cof}(C)) = \frac{1}{2}(\text{Tr}(C)^2 - \text{Tr}(C^2)) \quad (1.33)$$

$$I_3 = \det(C) \quad (1.34)$$

Il s'agit des coefficients du polynôme caractéristique de  $C$ .

Pour un matériau élastique, nous obtenons que la densité d'énergie  $W$  ne dépend que des invariants de  $C$  :

$$W = W(\iota_C)$$

Pour finir, les principes d'indifférence matérielle et d'isotropie sont schématiquement représentés (1.5).

Même si toutes ces hypothèses ont été formulées de manière lagrangienne nous pouvons également les transposer au formalisme eulérien.

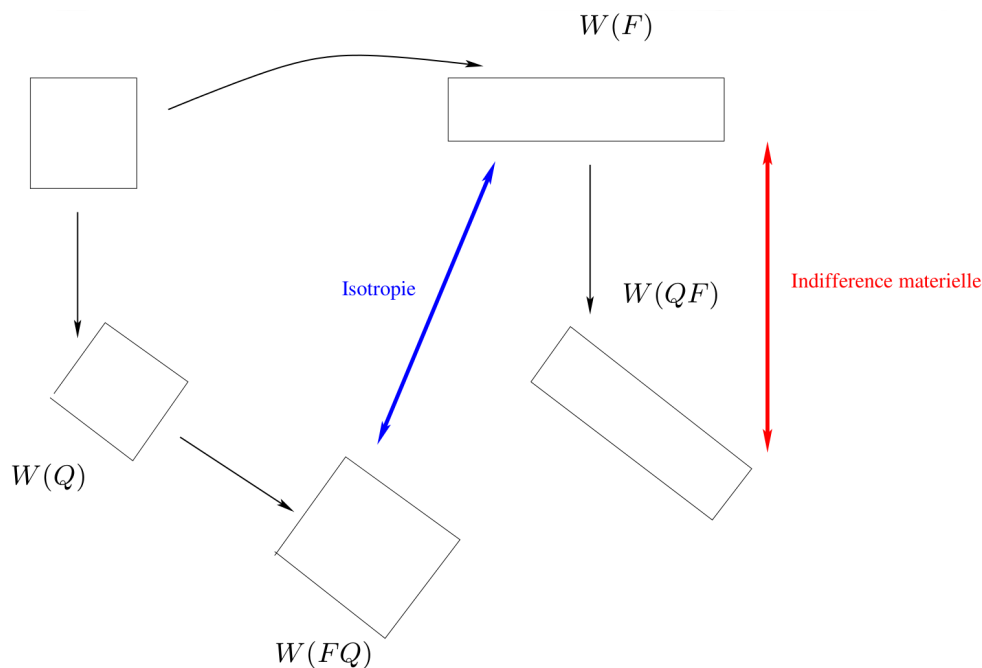


Figure 1.5 – Principes d’indifférence matériel et d’isotropie

## Élasticité linéaire

### Solide et loi de Hooke

L’élasticité linéaire a été introduite par Hooke et est résumée par ([Gould, 1994]). Nous considérons ici des faibles déformations se traduisant par de faible déplacement. Autrement dit, nous considérons que les configurations déformées d’un système restent proches de la configuration initiale. Cette hypothèse permet de fusionner formalisme lagrangien et formalisme eulérien.

A l’aide des hypothèses précédentes, la loi de Hooke pour un matériau hyper-élastique isotrope s’exprime simplement en fonction de deux constantes

$$\mathcal{T}(\epsilon) = \lambda \text{Tr}(\epsilon)I_d + 2\mu\epsilon \quad (1.35)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  désignent les constantes élastiques de Lamé tandis que  $\epsilon$  désigne la partie linéaire du tenseur de Green Lagrange (1.18). Cette loi caractérise le comportement d’un solide élastique de Hooke isotrope. L’élasticité linéaire permet également d’établir une loi de comportement directement sur la densité d’énergie  $W$  tel que

$$W(\epsilon) = \frac{1}{2}(\lambda \text{Tr}(\epsilon)^2 + 2\mu \text{Tr}(\epsilon^2)) \quad (1.36)$$

### Rôles et relations entre les coefficients

En élasticité, chaque type de déformation est caractérisé et quantifié à l’aide de coefficients. Nous présentons ici les plus utilisés dans la littérature. Ils sont conventionnellement introduit à travers les trois déformations primaires suivantes : le cisaillement, la compression et la traction. La combinaison de ces trois déformations peuvent donner naissance à



l'ensemble des déformations envisageables.

- **Le cisaillement simple :**

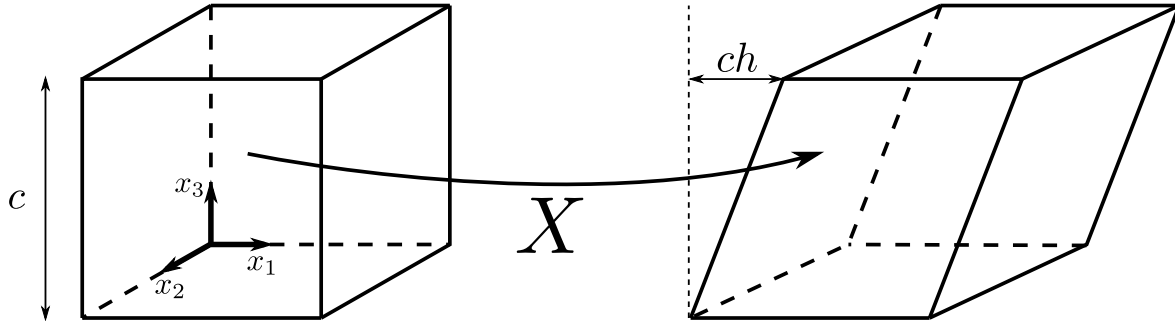


Figure 1.6 – Cisaillement simple

Cette déformation fait apparaître le coefficient de Lamé  $\mu$ . Il mesure la résistance au matériau au cisaillement et est appelé module de cisaillement (aussi noté  $G$  dans la littérature). Les forces nécessaires pour obtenir une déformation de cisaillement seront d'autant plus grandes que  $\mu$  sera grand.

- **la compression uniforme :**

La compression d'un solide élastique de Hooke sphérique homogène et isotrope (1.7) par

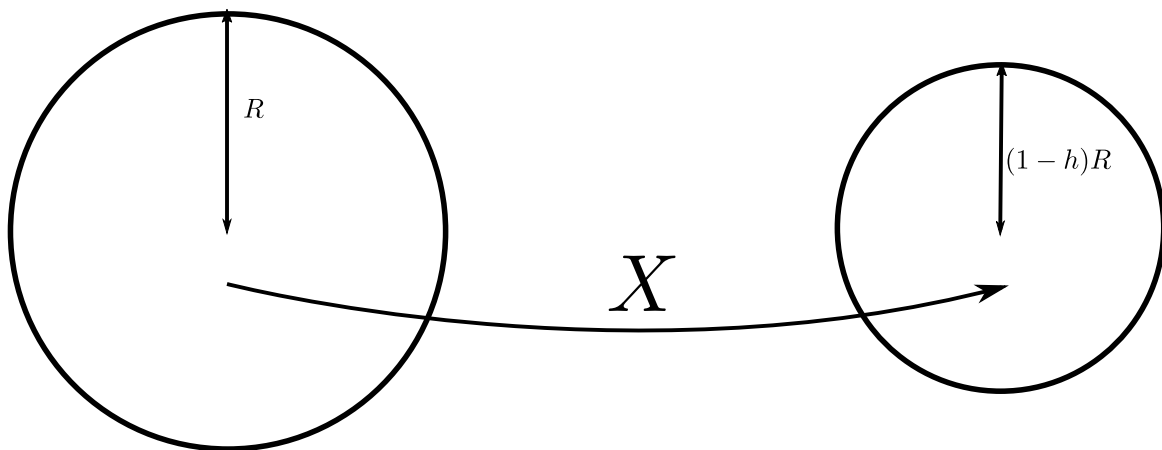


Figure 1.7 – Compression uniforme

exemple plongé dans un fluide qui exerce sur lui une pression constante  $p$  fait apparaître le module de compressibilité (bulk modulus) ou module d'élasticité isostatique  $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ . Il mesure la résistance du matériau à la compression. Plus  $K$  est grand, plus la pression exercée pour compresser le solide sera élevée. Un solide est considéré incompressible quand  $K \rightarrow \infty$ .

- **La traction simple :**

Le cas de la traction simple est un peu plus complexe et permet d'exhiber  $\nu$  nommé

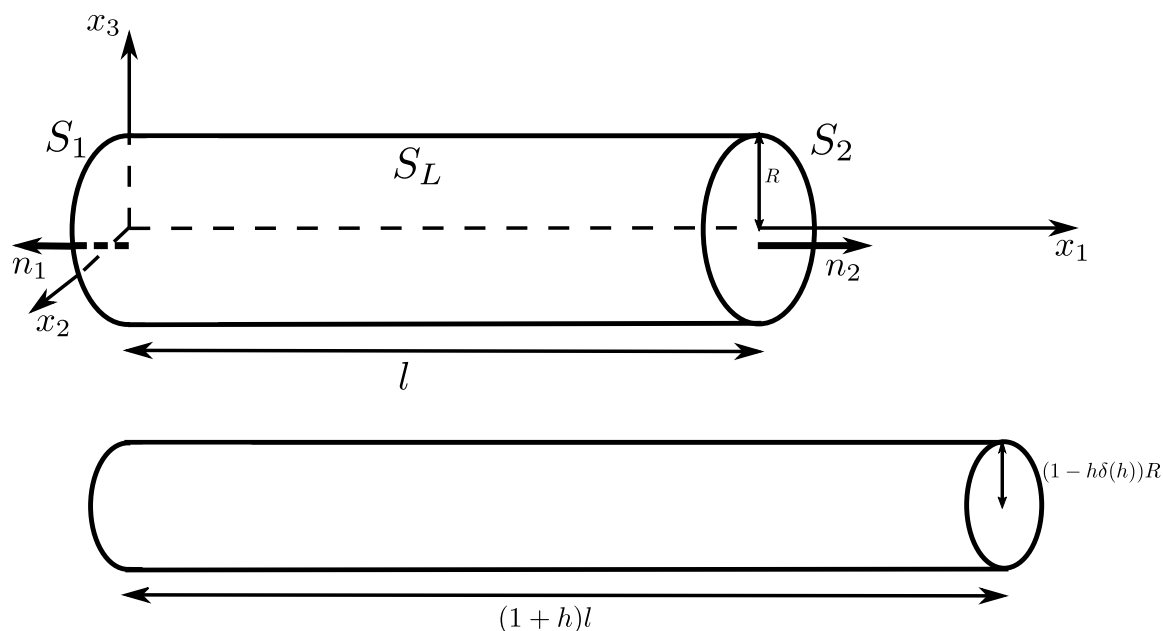


Figure 1.8 – Traction simple

coefficient de Poisson. Il caractérise l'amincissement d'un matériau élastique lorsque qu'on l'étire. A contrario, il permet d'élargir le solide lors d'une compression. Notons que  $\nu < 0.5$  et que le solide élastique est considéré incompressible lorsque  $\nu = 0.5$ .

De plus les tractions effectuées sur les surfaces du cylindre  $S_1$  et  $S_2$  font également apparaître le module de Young  $E$ . Il mesure la résistance du matériau à la traction. Plus il est grand, plus les forces nécessaires pour étirer le solide devront être importantes.

L'ensemble de ces coefficients  $K$ ,  $\nu$  et  $E$  peuvent s'exprimer en fonction des constantes de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  tel que

$$K = \frac{1}{3}(2\mu + 3\lambda) > 0 \quad E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda} > 0 \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)} > 0$$

Ces équations sont inversibles et permettent de dresser le tableau (1.9) de correspondance pour un matériau élastique linéaire, homogène et isotrope.

Ce tableau sera par la suite fort utile pour la validation de notre modèle afin de le faire correspondre avec ceux proposés dans la littérature. Exprimer le rôle des coefficients permet aussi de mieux comprendre le comportement physique des structures élastiques et justifier nos choix numériques futurs. Cependant si l'élasticité linéaire est plus facile à appréhender, elle se limite à l'étude de faibles déformations et ne satisfait pas l'invariance par rotation. Ainsi toute rotation est interprétée comme une augmentation de l'énergie élastique se traduisant par une déformation supplémentaire qui n'a pas lieu d'être. Le modèle d'élasticité linéaire n'est donc pas adapté à notre domaine d'application.

|             | $(\lambda, \mu)$                             | $(E, \mu)$                       | $(\lambda, \nu)$                         | $(\mu, \nu)$               | $(E, \nu)$                         |
|-------------|----------------------------------------------|----------------------------------|------------------------------------------|----------------------------|------------------------------------|
| $E =$       | $\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$ | .                                | $\frac{\lambda(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{\nu}$ | $2\mu(1 + \nu)$            | .                                  |
| $\lambda =$ | .                                            | $\frac{\mu(E - 2\mu)}{3\mu - E}$ | .                                        | $\frac{2\mu\nu}{1 - 2\nu}$ | $\frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$ |
| $\mu =$     | .                                            | .                                | $\frac{\lambda(1 - 2\nu)}{2\nu}$         | .                          | $\frac{E}{2(1 + \nu)}$             |
| $\nu =$     | $\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$           | $\frac{E}{2\mu} - 1$             | .                                        | .                          | .                                  |

Figure 1.9 – Correspondance entre coefficients d'élasticité

### Élasticité non-linéaire lagrangienne

L'élasticité linéaire montre trop vite ses limites pour notre domaine d'application qui nécessite de pouvoir considérer de grandes déformations. La loi de comportement  $W$  qui caractérise le comportement du solide élastique est à présent considérée comme étant non linéaire. Le modèle se veut plus complexe mais à l'instar du modèle linéaire nous pouvons le simplifier en ayant recours aux hypothèses précédentes.

- les hypothèses (i) + (ii) + (iii) nous permettent de considérer un solide élastique hyper-élastique. Nous pouvons alors écrire le tenseur de Piola-Kirchhoff  $\mathcal{T}$  en fonction de la densité d'énergie ainsi que l'énergie élastique du matériau  $\mathcal{E}^e$

$$\mathcal{T} = \frac{\partial W(F)}{\partial F} \quad (1.37)$$

$$\mathcal{E}^e = \int_{\Omega_0} \tilde{W}(F(\xi, t)) dV_0 \quad (1.38)$$

- L'axiome d'indifférence matérielle (v) appliqué à la densité d'énergie permet d'exprimer la densité d'énergie élastique associée à un matériau en fonction du tenseur de Cauchy à droite  $C = F^T F$  tel que

$$W = \tilde{W}(C) \quad (1.39)$$

Sachant que le premier tenseur de Piola-Kirchhoff s'exprime en fonction de  $F$  (1.37), il semble naturel de penser qu'on puisse l'écrire également en fonction de  $C$ . Pour cela nous

considérons deux matrices  $F$  et  $H$  et nous effectuons un développement limité de  $W$  à l'ordre 1

$$W(F + H) = W(F) + \mathcal{T}(F) : H + o(|H|)$$

En introduisant  $W(F) = \tilde{W}(F^T F)$  combiné avec la propriété d'objectivité du matériau (1.30)(1) on obtient

$$\begin{aligned} W(F + H) &= \tilde{W}(F^T F + F^T H + (F^T H)^T + H^T H) \\ &= \tilde{W}(F^T F) + 2F \frac{\partial \tilde{W}}{\partial F^T F}(F^T F) : H + o(|H|) \end{aligned}$$

Par identification on en déduit la nouvelle expression du premier tenseur de Piola-Kirchhoff

$$\mathcal{T} = \frac{\partial W(F)}{\partial F} = 2F \frac{\partial \tilde{W}(C)}{\partial C} \quad (1.40)$$

Grâce au principe d'indifférence matériel, la loi de comportement et par suite le tenseur  $\mathcal{T}$  également, s'écrivent donc en fonction du tenseur de Cauchy à droite  $C$ .

- En plus de l'AIM, nous supposons le matériaux isotrope ( $vi$ ). Par cette hypothèse, nous pouvons restreindre les paramètres de la densité d'énergie  $W$  aux invariants de  $C$ . La densité d'énergie élastique s'écrit :

$$W = \hat{W}(\iota_C) \quad (1.41)$$

ou  $\iota_C = (I_1, I_2, I_3)$  sont les invariants de  $C$ .

S'il est simple de démontrer qu'une énergie qui dépend des invariants de  $C$  vérifie les hypothèses ( $v$ ) et ( $vi$ ), la réciproque est moins triviale. Nous laissons le soin aux lecteurs intéressés de la découvrir dans [Holzapfel, 2002].

Ce dernier résultat offre la description du comportement élastique de notre matériau en fonction d'une loi de comportement s'exprimant à travers la densité d'énergie  $W$ . Cependant cette dernière est exprimée de façon lagrangienne à l'aide du tenseur lagrangien de Cauchy à droite  $C$ .

### Élasticité non-linéaire eulérienne

Nous allons exprimer les contraintes élastiques de manière eulérienne suivant la méthode proposée par [Cottet et al., 2008]. La méthode repose sur l'introduction des caractéristiques rétrogrades  $\mathbf{Y}$  précédemment présentées. Nous considérons un solide hyper-élastique.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^e &= \int_{\Omega_0} W(F) dV_0 \\ &= \int_{\Omega_t} W(F) J^{-1} dV \end{aligned}$$

Rappelons que  $F = [\nabla_{\xi} \mathbf{X}]$  en lagrangien et  $F = [\nabla_x \mathbf{Y}]^{-1}$  en eulérien. D'où  $J^{-1} = \det([\nabla_x \mathbf{Y}])$ .

• Il est assez immédiat de montrer que la densité d'énergie  $W$  vérifie aussi bien le principe d'indifférence matérielle que la propriété d'isotropie. L'équivalent de  $C$  tenseur de Cauchy à droite en configuration eulérienne est  $B$  le tenseur de Cauchy à gauche. En transposant le développement limité de  $W$  en eulérien combiné avec le choix de  $\tilde{W}(B) = W(F)$  il vient :

$$W(F + H) = \tilde{W}(B) + 2 \frac{\partial \tilde{W}(B)}{\partial B} F : H + o(|H|)$$

Par identification nous obtenons une nouvelle expression du premier tenseur de Piola-Kirchhoff en fonction de  $B$ , ce qui nous offre la chaîne d'égalités suivante

$$\mathcal{T} = \frac{\partial W(F)}{\partial F} = 2F \frac{\partial \tilde{W}(C)}{\partial C} = 2 \frac{\partial \tilde{W}(B)}{\partial B} F$$

Enfin 1.24(2) nous permet d'exprimer le tenseur des contraintes de Cauchy en configuration eulérienne.

$$\sigma = 2J^{-1} \frac{\partial \tilde{W}(B)}{\partial B} B$$

De plus les deux tenseurs de Cauchy  $B$  et  $C$  ont le même polynôme caractéristique et par suite, les mêmes invariants. Nous pouvons également écrire :

$$\mathcal{E}^e = \int_{\Omega_0} W(\iota_C(\xi, t)) dV_0 = \int_{\Omega_0} W(\iota_B(\xi, t)) dV_0$$

où  $\iota_C$  et  $\iota_B$  sont les invariants de resp.  $C$  et  $B$ . En utilisant la formule sur les changements de variable (1.14), nous obtenons la formule de l'énergie d'un matériau hyper-élastique isotrope dans la configuration déformée.

$$\mathcal{E}^e = \int_{\Omega_t} W(\iota_B(x, t)) J^{-1}(x, t) dV \tag{1.42}$$

### Cas incompressible

Dans le cas d'une transformation quelconque, le solide est susceptible de changer de volume et de forme. C'est à partir de ce constat que [Flory, 1961] a choisi de scinder la densité d'énergie en deux parties :

$$W(\iota_B(\xi, t)) = W_{iso}(I_1, I_2) + W_{vol}(I_3)$$

où :

- $W_{iso}$  est la partie isochore liée aux déformations de type cisaillement du solide. Elle ne dépend que des deux premiers invariants de  $B$
- $W_{vol}$  est la partie volumique liée au changement de volume du solide au cours de la

déformation. Comme nous traitons le cas des solides incompressibles, ce terme peut être explicité simplement.

Un solide est incompressible s'il satisfait la contrainte d'incompressibilité

$$J = 1$$

Ogden [Ogden, 1986] a été l'un des premiers à s'intéresser à la théorie des solides hyper-élastiques isotropes incompressibles en cherchant l'expression de la densité d'énergie maximale délivrée à volume constant. Il s'agit de répondre à un problème de minimisation sous contrainte. Ce qui permet de définir la densité d'énergie totale pour  $I_3 = \det F = J = 1$  par

$$W_{vol} = W_{vol}(I_3) = -\frac{1}{2}p(I_3 - 1)$$

Le scalaire  $p/2$  est introduit comme multiplicateur de Lagrange et est appelé pression hydrostatique. Physiquement, il représente une réaction à la contrainte de déformation sans travail. Nous observons que pour un matériau hyper-élastique isotrope, la densité d'énergie ne dépend à présent que des deux premiers invariants  $I_1$  et  $I_2$  de  $B$ . Cette décomposition ne modifie en rien le déroulement de la méthode précédemment décrite quand bien même nous remarquerions que les tenseurs de Piola Kirchhoff pourraient s'écrire :

$$\mathcal{T} = -pF^{-T} + \frac{\partial W(F)}{\partial F} \quad \text{et} \quad \Sigma = -pF^{-1}F^{-T} + F^{-1}\frac{\partial W(F)}{\partial F} \quad (1.43)$$

À l'aide de (1.24) et (1.43), nous exprimons le tenseur de contraintes de Cauchy pour un matériau élastique incompressible :

$$\sigma = -pI_d + 2B \left( \frac{\partial W(B)}{\partial B} \right)^T \quad (1.44)$$

$$= -pI_d + 2B \left( \frac{\partial W(B)}{\partial I_1} : \frac{\partial I_1}{\partial B} + \frac{\partial W(B)}{\partial I_2} : \frac{\partial I_2}{\partial B} \right)^T \quad (1.45)$$

$$(1.46)$$

Avec l'aide des égalités suivantes :

$$\frac{\partial I_1}{\partial B} = \frac{\partial \text{Tr} B}{\partial B} = \frac{\partial B : I_d}{\partial B} = I_d \quad (1.47)$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial B} = \frac{1}{2} \left( 2 \text{Tr}(B)I_d - \frac{\partial \text{Tr}(B^2)}{\partial B} \right) = \text{Tr}(B)I_d - B \quad (1.48)$$

$$(1.49)$$

nous obtenons l'expression générale du tenseurs de Cauchy pour un matériau hyper-élastique isotrope incompressible en fonction de sa loi de comportement.

$$\sigma = -pI_d + 2 \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) B - 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} B^2 \quad (1.50)$$

Nous pouvons également exprimer la loi en fonction de  $(I_d, B, B^{-1})$ . Pour cela nous rappelons un résultat classique de l'algèbre linéaire : le théorème de Cayley Hamilton. Il stipule que toute matrice carrée annule  $P$  son polynôme caractéristique définie par

$$P(X) = \det(A - XI_d)$$

En 2D, ce polynôme peut s'écrire en fonction des invariants de la matrice tel que

$$A^2 - I_1 A + I_2 I_d = 0 \quad (1.51)$$

avec les invariants définis par :

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{Tr}(A) \\ I_3 &= \det(A) \end{aligned}$$

Ou de manière équivalente en 3D

$$A^3 - I_1 A^2 + I_2 A - I_3 I_d = 0 \quad (1.52)$$

avec les invariants définis par :

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{Tr}(A) \\ I_2 &= \text{Tr}(\text{Cof } A) \\ I_3 &= \det(A) \end{aligned}$$

Ces résultats nous permettent d'exprimer  $A^{-1}$  en fonction de  $A^2$ . En les appliquant à  $B$  il vient :

$$\sigma = -p'I_d + 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} B - 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} B^{-1} \quad (1.53)$$

Les équations (1.50) et (1.53) illustrent le théorème de représentation de Rivlin Ericksen que nous abordons lors de l'étude des lois de comportement.

Remarquons que les termes de pressions hydrostatiques dans l'ensemble des tenseurs ne sont pas indispensables. En effet, ils disparaîtront dans la pression lors du calcul de la force élastique  $\text{div}(\sigma_s)$ .

### Lois de comportement

Les lois de comportement ont une importance primordiale pour la modélisation du comportement d'un matériau élastique. C'est pourquoi elles ont fait l'objet de nombreuses études. Il existe une multitude de lois de comportement, chacune d'elles ayant une réponse différente face aux sollicitations [Holzapfel, 2002]. L'objectif de cette partie n'est pas de les lister toutes mais de seulement aborder celles que nous avons fréquemment rencontrées et utilisées dans cette thèse.

Un premier exemple de loi de comportement a été introduit pour la modélisation de matériau hyper-élastique linéaire isotrope. Il s'agit de la loi de comportement de Hooke dont les paramètres physiques (coefficients de Lamé) sont tous déduits par approche expérimentale. Une extension à la théorie de l'élasticité non linéaire est néanmoins possible en considérant le tenseur de Green Lagrange  $E$  (1.18) sans l'hypothèse de petite déformation. Il s'agit de la loi de Saint Venant Kirchhoff. La densité d'énergie associée s'écrit

$$W(E) = \frac{\lambda}{2}(\text{Tr}(E))^2 + \mu \text{Tr}(E^2)$$

Afin de continuer à travailler en terme d'invariants de  $B$  nous cherchons à écrire  $W = W(I_B)$  en remarquant que

$$\begin{aligned}\text{Tr}(E) &= \frac{1}{2} \text{Tr}(B - I_d) \\ \text{Tr}(E^2) &= \frac{1}{4} \text{Tr}(B - I_d)^2\end{aligned}$$

Rappelons que sous les hypothèses d'incompressibilité, les invariant de  $B$  peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}I_1 &= \text{Tr} B \\ I_2 &= \text{Tr}(\text{Cof}(B)) = \frac{1}{2}(\text{Tr}(B)^2 - \text{Tr}(B^2)) = \text{Tr} B^{-1} \text{ en incompressible} \\ I_3 &= \det(B) = 1\end{aligned}$$

Nous obtenons finalement  $W$  en fonction des invariants de  $B$

$$W = \frac{1}{8}(\lambda + 2\mu)I_1^2 - \frac{1}{4}(\lambda + 2\mu)I_1 - \frac{\mu}{2}I_2 + \frac{3}{8}(3\lambda + 2\mu)$$

Nous sommes à présent capable d'exprimer le tenseur de Cauchy d'un matériau suivant la loi de Saint Venant Kirchhoff

$$\sigma = -pI_d + \frac{1}{4}(\lambda(\text{Tr}(B) - 3) + \mu)B + \frac{\mu}{2}B^2$$

De la même manière Ogden [Ogden, 1972] a introduit des lois de comportement plus sophistiquées entrant dans le cadre de l'élasticité non linéaire. Cette loi se veut capable de modéliser un matériau hyper-élastique non linéaire isotrope et incompressible telle que la



gomme ou d'autre type de caoutchouc. Elle est définie à partir d'une densité d'énergie  $W$  dépendante des directions principales  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  (ou valeurs propres) du tenseur à gauche  $B$ . Pour un matériau en trois dimensions elle s'écrit :

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} (\lambda_1^{\alpha_p} + \lambda_2^{\alpha_p} + \lambda_3^{\alpha_p} - 3) \quad (1.54)$$

où  $\mu = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N \mu_p \alpha_p$  tel que  $\mu_p \alpha_p > 0, p = 1, \dots, N$ . On reconnaît le coefficient de cisaillement (de Lamé)  $\mu$  introduit en élasticité linéaire.

Notons que les invariants de  $B$  s'expriment en fonction des valeurs propres

$$\begin{aligned} I_1(B) &= \text{Tr}(B) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ I_2(B) &= \frac{1}{2}(\text{Tr}(B)^2 - \text{Tr}(B^2)) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 \\ I_3(B) &= \det(B) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \end{aligned}$$

et que sous la condition d'incompressibilité  $\det(B) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$ , le second invariant s'écrit  $I_2 = \lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_3^{-2}$

C'est à partir de la formule générale d'Ogden (1.54) que nous obtenons les modèles d'élasticité suivant :

- Le modèle Néo-Hookéen est obtenu pour  $N = 1$  et  $\alpha_1 = 2$  :

$$\begin{aligned} W &= \frac{\mu_1}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) \\ &= c_1 (I_1 - 3) \end{aligned}$$

avec  $c_1 = \frac{\mu_1}{2}$  et  $\mu_1 = \mu$  le coefficient de cisaillement de Lamé. Nous prenons l'habitude de noter  $\chi = c_1$  pour ce modèle. Avec (1.50) ou (1.53), nous obtenons l'expression finale du tenseur des contraintes d'un matériau hyper-élastique isotrope incompressible pour le modèle Néo-Hookéen :

$$\sigma = -pI_d + 2\chi B$$

- Le modèle de Mooney-Rivlin est obtenu pour  $N = 2$ ,  $\alpha_1 = 2$  et  $\alpha_2 = -2$  :

$$\begin{aligned} W &= \frac{\mu_1}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) - \frac{\mu_2}{2} (\lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_3^{-2} - 3) \\ &= c_1 (I_1 - 3) + c_2 (I_2 - 3) \end{aligned}$$

avec  $c_1 = \frac{\mu_1}{2}$  et  $c_2 = -\frac{\mu_2}{2}$  tel que le module de cisaillement  $\mu = \mu_1 - \mu_2$ . Il vient l'expression du tenseur des contraintes

---

$$\sigma = -pI_d + 2c_1B + 2c_2(\text{Tr}(B)B - B^2)$$

Notons qu'en deux dimensions et par le théorème de Cayley Hamilton (1.51), le terme  $2c_2(\text{Tr}(B)B - B^2) = 2c_2I$  est absorbé par le terme de pression hydrostatique. Dans ce cas, le modèle de Mooney-Rivlin est équivalent au modèle Néo-Hookéen.

Au cours de notre validation, nous serons amenés à faire correspondre dans la mesure du possible une loi non linéaire de Saint Venant Kirchhoff avec une loi Néo-Hookéen. L'équation (1.50) résume le théorème de représentation de Rivlin-Ericksen lequel nous sera d'une aide précieuse. Il stipule que le tenseur de Cauchy d'un matériau élastique s'écrit toujours sous la forme suivante :

$$\sigma = \alpha_0 I_d + \alpha_1 B + \alpha_2 B^2 \quad (1.55)$$

Ce résultat permet d'expliciter les coefficients simplement par identification. Il devient alors possible de faire correspondre de manière exacte ou approximative les différents modèles utilisés dans la littérature avec notre modèle Néo-Hookéen en faisant correspondre les coefficients  $\alpha_i$  entre eux (avec  $i = 1, 2, 3$ ). Remarquons que  $\sigma$  peut-être également exprimé en fonction de  $B^{-1}$ ,  $B$  et  $I_d$  en utilisant le théorème de Cayley Hamilton (1.51) ou (1.52) selon la dimension considérée, comme précédemment effectué pour (1.53).

Finalement, grâce à ce résultat, nous pouvons dresser un tableau récapitulatif utile (1.10) des coefficients pour le théorème de représentation de Rivlin Ericksen pour différents modèles :

| Modèle                 | $\alpha_0$ | $\alpha_1$                                     | $\alpha_2$                               |
|------------------------|------------|------------------------------------------------|------------------------------------------|
| Saint Venant Kirchhoff | $-p$       | $\frac{1}{4}(\lambda(\text{Tr}(B) - 3) + \mu)$ | $\frac{\mu}{2}$                          |
| Mooney Rivlin          | $-p$       | $\frac{\mu_1}{2}$                              | $-\frac{\mu_2}{2}$ $\mu = \mu_1 - \mu_2$ |
| Néo Hookeen            | $-p$       | $\chi = \frac{\mu}{2}$                         | 0                                        |

**Figure 1.10** – Tableau de correspondance entre les coefficients pour chaque modèle d'élasticité non linéaire pour le théorème de Rivlin Ericksen

## Résumé et conclusion

Dans ce chapitre ont été présentés différents modèles de résolution de l'interaction entre un fluide et une structure élastique. Le modèle 1-fluide complètement eulérien a été retenu pour sa simplicité d'implémentation, sa polyvalence et surtout par sa capacité à représenter les grandes déformations. Ce dernier atout est important pour la modélisation de l'interaction entre une vague et un corps élastique qui peut potentiellement être fortement déformé.

Dans ce modèle les forces élastiques sont représentées par un terme source dans les équations de Navier Stokes en incompressible. Ces équations sont couplées à une équation de transport sur les caractéristiques rétrogrades (définies sur la configuration déformée). Ces dernières permettent le calcul complètement eulérien des forces élastiques par l'intermédiaire d'une loi de comportement. Nous avons observé l'importance de ces lois dans la description du comportement élastique du solide et choisi d'utiliser le modèle d'élasticité non linéaire Néo-Hookéen parce qu'aucune loi n'a jusqu'à présent été corrélée avec des matériaux réels.

Nous avons par ailleurs pris le soin d'établir un parallèle entre différents modèles d'élasticité afin de se comparer à des cas tests utiles pour la vérification et la validation de notre modèle (voir chapitre 4).

Le modèle complet pour un solide élastique visqueux s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(v_t + (v \cdot \nabla)v) - \mathbf{div}(2\mu D(v)) + \nabla p = \mathbf{div}(\mathcal{H}_\epsilon \sigma_S) \\ \mathbf{div}(v) = 0 \\ Y_t + v \cdot \nabla Y = 0 \\ \sigma_S = \sigma_S(F) \\ F = [\nabla_x Y]^{-1} \end{array} \right.$$

# Chapitre 2

## Modèle numérique

### Introduction et présentation

Les problèmes d'interaction entre un fluide et une structure élastique ont été présentés dans le chapitre précédent. Parce qu'il est impossible d'obtenir des solutions analytiques pour ces phénomènes complexes, nous avons recours à des méthodes de résolution numériques développées dans le code de calcul Thétis au sein du laboratoire I2M.

L'une des contributions apportées par ce travail se situe dans l'implémentation du terme élastique comme second membre des équations et des différentes équations servant à le calculer. Dans un premier temps, sont décrits la méthode de résolution des équations de Navier-Stokes en incompressible et les schémas de discrétisation utilisés dans Thétis.

Dans un second temps la mise en œuvre numérique effectuée pour permettre le calcul de la force élastique est expliquée. Nous abordons successivement :

- le calcul de la force élastique ;
- la méthode de suivi d'interface utilisée pour suivre l'interface fluide-structure élastique afin de diffuser la force élastique dans le domaine solide ;
- les méthodes numériques utilisées pour la résolution des équations de transport ;
- les améliorations apportées à la méthode sous la forme d'extrapolations.

## 2.1 Formulation mathématique du problème

Le modèle 1-fluide complètement eulérien a été choisi pour représenter l'interaction entre un fluide et une structure élastique. Soit  $\mathbf{v}$  le champ de vitesse,  $p$  la pression,  $t$  le temps,  $\rho$  la densité et  $\mu$  la viscosité dynamique du fluide. Le modèle s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}) - \operatorname{div}(2\mu D(\mathbf{v})) + \nabla p = \operatorname{div}(\mathcal{H}_\epsilon(\varphi)\sigma_S(\nabla\mathbf{Y})) \\ \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0 \\ C_t + \mathbf{v} \cdot \nabla C = 0 \\ \varphi_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi = 0 \\ \mathbf{Y}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{Y} = \mathbf{0} \\ \sigma_S = \sigma_S(F) \\ F = [\nabla_x \mathbf{Y}]^{-1} \\ +\text{C.I.} + \text{C.L.} \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Il s'agit des équations de Navier-Stokes en incompressible. Elles sont complétées par la force élastique exprimée en second membre et préalablement calculée à l'aide du modèle d'élasticité. Une fois les équations résolues, les champs de pression et de vitesse de l'écoulement fluide sont obtenus. Cette dernière permet d'effectuer le transport des caractéristiques rétrogrades ainsi que de la level set (abordé dans la section concernant le suivi d'interface) afin d'obtenir leurs évolutions à l'itération suivante. La viscosité et la densité dépendent de la fonction couleur, elle-même utilisée pour la représentation des phénomènes diphasiques.

## 2.2 Méthode de correction de pression pour la résolution numérique des équations de Navier-Stokes

Cette partie traite uniquement de la résolution numérique du système d'équations de Navier-Stokes avec terme source dont les inconnues sont la vitesse  $\mathbf{v}$  et la pression  $p$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}) - \operatorname{div}(2\mu D(\mathbf{v})) + \nabla p = \operatorname{div}(\mathcal{H}_\epsilon \sigma_S) \\ \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0 \\ +\text{C.I.} \text{ et } \text{C.L.} \end{array} \right. \quad (2.2)$$

### 2.2.1 Discrétisation en temps

Un traitement semi-implicite est appliqué au système d'équations (2.2). La dérivée en temps est discrétisée selon le schéma d'Euler du premier ordre. Il est également possible de prendre en compte des schémas d'ordre plus élevé tel que le schéma de Gear d'ordre 2. Le choix de l'utilisation de l'un des deux schémas sera précisé par la suite. L'intervalle de temps est discrétisé par un nombre fini de pas de temps  $[t_n, t_{n+1}]$ . La suite des solutions  $\mathbf{v}$  et  $p$  du problème est exprimée à chaque instant  $t$  par  $(\mathbf{v}(\cdot, t^n))_{0 \leq n \leq N}$  et  $(p(\cdot, t^n))_{0 \leq n \leq N}$ . À chaque itération, la solution est temporellement avancée par le pas de temps  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ .

Le traitement du système d'équations se fait de manière implicite, les quantités sont évaluées à  $t_{n+1}$  à l'exception des paramètres  $\rho$  et  $\mu$  (considérés constants) ainsi que de la force élastique. Le terme non linéaire est linéarisé et remplacé par  $(\tilde{\mathbf{v}}^{n+1} \cdot \nabla)\mathbf{v}^{n+1}$  avec :

$$\tilde{\mathbf{v}}^{n+1} = \begin{cases} \mathbf{v}^n & \text{pour le schéma d'Euler} \\ \text{ou} \\ 2\mathbf{v}^n - \mathbf{v}^{n-1} & \text{pour le schéma Gear} \end{cases}$$

Les équations sont traitées de manière semi implicite afin d'obtenir un système linéaire en vitesse. Le problème consiste alors à calculer les suites  $(\mathbf{v}^n)_{0 \leq n \leq N}$  et  $(p^n)_{0 \leq n \leq N}$  solutions du problème semi-discrétisé en temps suivant :

$$\begin{cases} \rho \frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\Delta t} + (\tilde{\mathbf{v}}^{n+1} \cdot \nabla)\mathbf{v}^{n+1} - \operatorname{div}(2\mu D(\mathbf{v}^{n+1})) + \nabla p^{n+1} = \operatorname{div}(\mathcal{H}_\epsilon \sigma_S^n) & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div}(\mathbf{v}^{n+1}) = 0 & \text{dans } \Omega \\ +\text{C.I. et C.L.} & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

### 2.2.2 Découplage vitesse-pression

Les équations de Navier-Stokes sont découplées suivant les méthodes de time-splitting initialement proposées par [Témam, 1969] puis améliorées par [Goda, 1979]. Il s'agit de découpler la résolution de la vitesse et de la pression afin d'obtenir une solution précise du problème à moindre coût. Ce découplage s'effectue au moyen d'un schéma numérique à pas fractionnaires, puis de rechercher une solution satisfaisant la contrainte d'incompressibilité. L'état de l'art concernant ces méthodes a été effectué dans l'article de [Guermond et al., 2006].

L'algorithme général de la méthode est décrit dans la thèse de [Poux, 2012] dans le cadre de la résolution du problème de Stokes par le code de calcul Thétis utilisé pour cette thèse.

#### Méthode de correction de pression : le schéma de Goda

Comme précédemment évoqué, le principe de la méthode consiste à scinder la résolution en deux étapes. La première étape résout un problème de prédiction. Il s'agit de calculer

une estimation du champ de vitesse à l'instant  $n + 1$  contenant la physique de l'écoulement sans satisfaire la contrainte d'incompressibilité. Le schéma incrémental de Goda propose de chercher  $\mathbf{v}^*$  tel que :

$$\begin{cases} \rho \frac{\mathbf{v}^* - \mathbf{v}^n}{\Delta t} + (\tilde{\mathbf{v}}^{n+1} \cdot \nabla) \mathbf{v}^* - \operatorname{div}(2\mu D(\mathbf{v}^*)) + \nabla p^n = \operatorname{div}(\mathcal{H}_\epsilon \sigma_S^n) & \text{dans } \Omega \\ +\text{C.I. et C.L.} & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

La seconde étape dite de correction consiste à corriger les erreurs commises lors de l'étape précédente sur la pression et la vitesse. Au terme de cette correction, le champ de vitesse devient solénoïdal.

On définit l'incrément de pression  $\psi$  par :

$$\psi^{n+1} = p^{n+1} - p^n$$

L'étape de correction consiste d'une part à chercher  $\psi^{n+1}$  tel que :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left( \frac{\Delta t}{\rho} \nabla \psi^{n+1} \right) = \operatorname{div}(\mathbf{v}^*) & \text{dans } \Omega \\ +\text{C.L.}(\psi^{n+1}) & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Puis la pression et la vitesse sont mises à jour :

$$\begin{aligned} p^{n+1} &= p^n + \psi^{n+1} \\ \mathbf{v}^{n+1} &= \mathbf{v}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla \psi^{n+1} \end{aligned}$$

Le choix des conditions limites imposées sur  $\psi$  est également important. Dans le cas de conditions limite de type Dirichlet sur  $\mathbf{v}$ , une condition de Neumann est appliquée sur  $\psi$ . A l'inverse pour des conditions limites de type Neumann sur  $\mathbf{v}$ , la condition  $\psi = 0$  est imposée.

### 2.2.3 Discrétisation en espace

Le système d'équations découplées obtenu est ensuite discrétisé en espace.

#### Grille MAC

La discrétisation spatiale s'effectue par un schéma des volumes finis sur une grille décalée de type Marker and Cells (MAC) initialement présentée par Harlow et Welch en 1965 [Harlow and Welch, 1965]. L'intérêt majeur de cette grille particulière est de limiter les fluctuations de la pression que l'on peut observer lors de la résolution des équations sur grille colocalisée, rendant le schéma numérique moins stable. Comme illustré sur la figure (2.1), les différents champs sont positionnés à des endroits différents sur les volumes de contrôle :

- les composantes du champ de vitesse sur ses faces (flèches vertes et rouges) ;
- les champs scalaires sur ses coins comme la pression et les caractéristique rétrogrades (ronds noirs) ;
- Les nœuds aux centres additionnels (croix bleues) sont utiles pour le positionnement des tenseurs des contraintes.

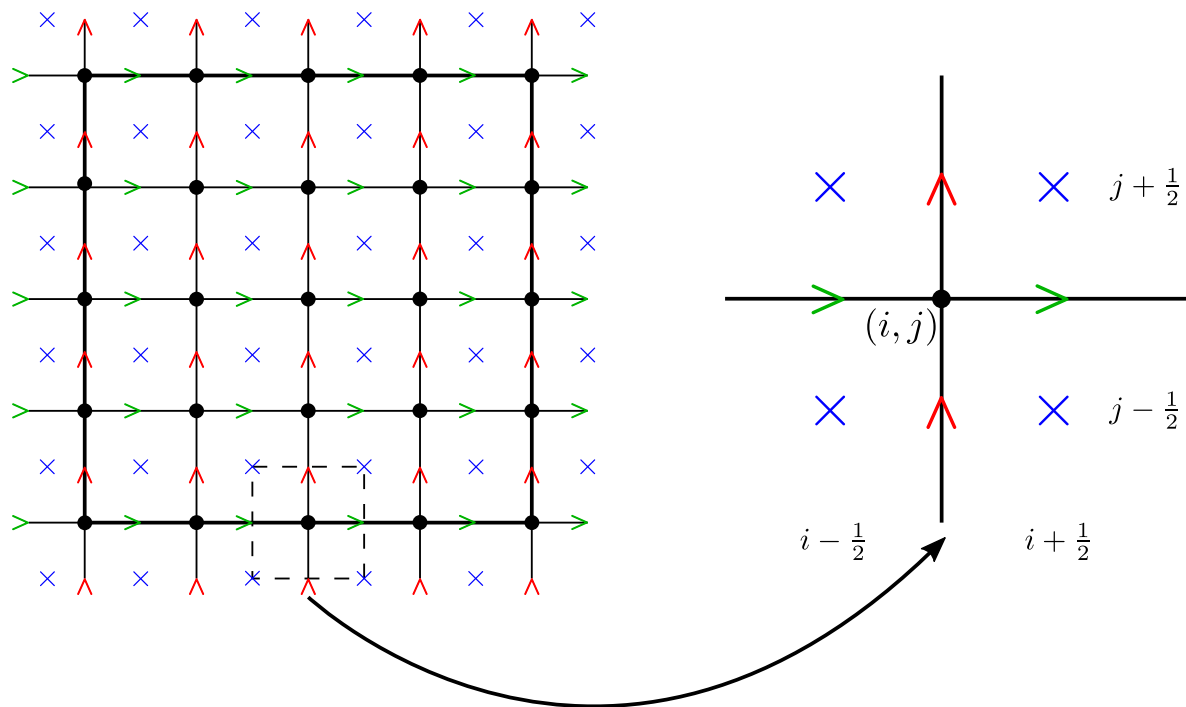


Figure 2.1 – Grille décalée de type MAC

Des schémas centrés sont utilisés pour les calculs du terme non linéaire et du terme visqueux.

## 2.2.4 Calcul de la force élastique

Nous nous intéressons à la discrétisation de la force élastique représentée par le terme source des équations de Navier-Stokes. Ce second membre s'écrit :

$$\operatorname{div}(\sigma_S(\nabla \mathbf{Y})).$$

Deux opérateurs sont donc à discrétiser sur la grille MAC :

- la divergence appliquée au tenseur des contraintes élastiques
- le gradient appliqué aux caractéristiques rétrogrades.

- L'opérateur divergence

Afin de garantir l'ordre 2 du schéma de discrétisation spatiale pour le calcul de la force élastique  $\operatorname{div}(\mathcal{H}_\epsilon \sigma_S)$ , les différentes composantes du tenseur des contraintes élastiques  $\sigma_S$



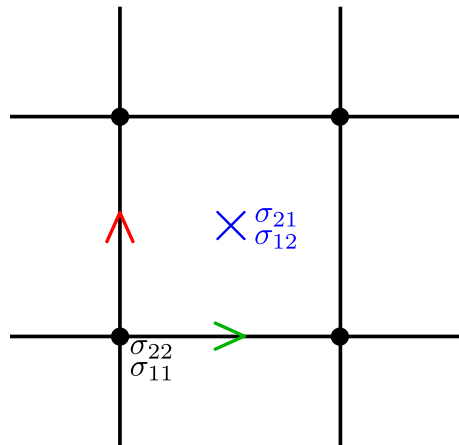
doivent être positionnées de manière adéquate sur la grille MAC. Considérons le cas 2D et un tenseur de contrainte quelconque

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$$

alors nous obtenons

$$\operatorname{div}(\sigma) = \begin{pmatrix} \partial_1 \sigma_{11} + \partial_2 \sigma_{12} \\ \partial_1 \sigma_{21} + \partial_2 \sigma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\operatorname{div} \sigma)_1 \\ (\operatorname{div} \sigma)_2 \end{pmatrix}$$

Afin d'éviter les interpolations, le vecteur  $\operatorname{div}(\sigma)$  doit être discrétisé sur les mêmes points que la vitesse. Cette contrainte amène à construire le tenseur des contraintes sur deux grilles différentes. Comme illustré sur la figure (2.2), les composantes diagonales de  $\sigma$  seront calculées sur les nœuds de pression tandis que les autres seront évaluées sur les nœuds de viscosité.

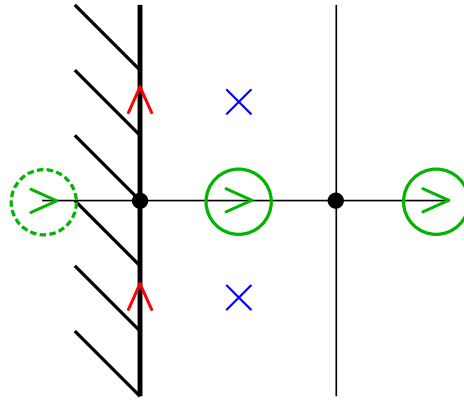


**Figure 2.2** – Positionnement du tenseur des contraintes élastique sur la grille MAC

- L'opérateur gradient (sur des quantités définies aux nœuds de pression)

L'opérateur gradient est utilisé pour déterminer le gradient de pression, la normale à l'interface (ce point sera abordé plus tard) ou encore de la force élastique dépendant du gradient des caractéristiques rétrogrades.

Comme pour l'opérateur divergence, un vecteur (ou une matrice) défini sur la grille de vitesse est obtenu. Cette discrétisation pose néanmoins problème aux limites du domaine lors du calcul de  $\nabla \mathbf{Y}$  lorsqu'il est nécessaire d'estimer la force élastique d'un solide proche des bords. La figure (2.3) illustre cette difficulté sur la limite gauche.



**Figure 2.3** – Extrapolations du gradient à la limite gauche

Sur cette limite, il n'est pas possible d'obtenir  $\partial_1 \mathbf{Y}$  sur un nœud de vitesse extérieur normal à la limite. En effet ce calcul nécessite un nœud de pression inexistant (hors du domaine). Pour pallier cette difficulté, tous les calculs sont effectués dans un premier temps sur l'intérieur du domaine. Puis une extrapolation à l'ordre 2 est réalisée sur les valeurs extérieures. Ces dernières sont opérées à l'aide des valeurs intérieures préalablement calculées à l'ordre 2 également.

Dans le cas de correction à la limite gauche du terme  $f = \partial_1 \mathbf{Y}$ , ces extrapolations se font suivant le schéma décentré à droite suivant :

$$f_{i,j} = 2f_{i+1,j} - f_{i+2,j}$$

La direction du décentrement est adapté à chaque limite du domaine comme précisé sur le tableau ci-dessous :

$$\text{limite gauche} \quad (\partial_1 \mathbf{Y})_{i,j} = 2(\partial_1 \mathbf{Y})_{i+1,j} - (\partial_1 \mathbf{Y})_{i+2,j} \quad i = 1$$

$$\text{limite droite} \quad (\partial_1 \mathbf{Y})_{i,j} = 2(\partial_1 \mathbf{Y})_{i-1,j} - (\partial_1 \mathbf{Y})_{i-2,j} \quad i = N_{x_1}$$

$$\text{limite bas} \quad (\partial_2 \mathbf{Y})_{i,j} = 2(\partial_2 \mathbf{Y})_{i,j+1} - (\partial_2 \mathbf{Y})_{i,j+2} \quad j = 1$$

$$\text{limite haut} \quad (\partial_2 \mathbf{Y})_{i,j} = 2(\partial_2 \mathbf{Y})_{i,j-1} - (\partial_2 \mathbf{Y})_{i,j-2} \quad j = N_{x_2}$$

**Figure 2.4** – Extrapolation du gradient en fonction de la limite

### Conditions limites périodiques

Afin de représenter des phénomènes non bornés, il peut être pratique d'avoir recours aux conditions aux limites de type périodique. Ces dernières posent des difficultés pour la méthode des caractéristiques. En effet par définition, les caractéristiques rétrogrades ne répondent pas à cette propriété par leur caractère linéaire (i.e. initialisées sur la grille eulérienne à  $t = 0$ ). Le calcul de la quantité  $\nabla \mathbf{Y}$  aux limites selon un schéma centré n'est plus possible aux limites. Outre le décentrement possible à la limite, nous pouvons également extrapoler les caractéristiques rétrogrades à partir des valeurs opposées.

Supposons le cas périodique 1D représenté sur la figure (2.5) constitué d'un domaine  $[0; 1]$  divisé en  $N_{x_1}$  sous-domaines. Soit  $f$  un scalaire (représentant les caractéristiques rétrogrades) défini sur les nœuds de pression. Nous souhaitons calculer  $f'$  au dernier nœud de vitesse numéroté  $N_{x_1} + \frac{3}{2}$  tel que :

$$f'_{N_{x_1} + \frac{3}{2}} = \frac{f_{N_{x_1}+2} - f_{N_{x_1}+1}}{\Delta x_{N_{x_1}+1}}$$

$f$  étant linéaire (propriété des caractéristiques rétrogrades à  $t = 0$ ), la méthode consiste à calculer  $f_{N_{x_1}+2}$  à partir de  $f_1$  et  $f_2$  en considérant  $\Delta_1 = f_2 - f_1$ . On obtient alors :

$$f_{N_{x_1}+2} = f_{N_{x_1}+1} + \Delta_1$$

La méthode est la même quelque soit la direction et reste simple à étendre en multi dimension.



Figure 2.5 – Gestion des conditions limites périodiques

### 2.2.5 Résolution numérique du système linéaire et calculs parallèles

Nous reprenons par étape le déroulement de l'algorithme général :

- Étape 1 - calcul de la force élastique pour le modèle Néo-Hookéen :

$$\sigma_S^n = 2\chi B$$

- Étape 2 - prédiction : chercher  $\mathbf{v}^*$  tel que :

$$\rho \frac{\alpha \tilde{\mathbf{v}}^{n+1} + \beta \mathbf{v}^n + \gamma \mathbf{v}^{n-1}}{\Delta t} + (\tilde{\mathbf{v}}^{n+1} \cdot \nabla) \mathbf{v}^* - \text{div}(2\mu D(\mathbf{v}^*)) + \nabla p^n = \text{div}(\mathcal{H}_e \sigma_S^n)$$

avec :

- $\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = 0$  pour le schéma d'Euler du premier ordre ;
- $\alpha = \frac{3}{2}, \beta = -2, \gamma = \frac{1}{2}$  pour le schéma de Gear du second ordre.

- Étape 3 - correction : chercher  $\psi^{n+1}$  tel que :

$$\operatorname{div} \left( \frac{\Delta t}{\rho} \nabla \psi^{n+1} \right) = \operatorname{div}(\mathbf{v}^*)$$

Calculer  $(\mathbf{v}^{n+1}, p^{n+1})$  :

$$p^{n+1} = p^n + \psi^{n+1}$$

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^* - \frac{\Delta t}{\rho} \nabla \psi^{n+1}$$

- Étape 5 - transports : calculer  $\mathbf{Y}^{n+1}$  et  $\varphi^{n+1}$  (traité dans les parties 2.3 et 2.4)
- Étape 6 - Corrections i.e. extrapolations des caractéristiques rétrogrades et ré-initialisation de la level set (traité dans la partie 2.5)

Les systèmes linéaires sont résolus par l'algorithme GMRES de la librairie HYPRE ([Falgout and Yang, 2002] et [Falgout et al., 2006]) avec un pré-conditionnement de Jacobi pour l'étape 2, et un pré-conditionnement multi-grille pour l'étape 3. Enfin par l'étape 4, la vitesse est corrigée afin de forcer la condition d'incompressibilité et la pression est mise à jour.

Le code de calcul Thétis étant massivement parallèle, la totalité des méthodes et calculs mentionnée par la suite (calcul de la force élastique, transports, corrections...) a donc été implémentée en conséquence et ce à l'aide de la bibliothèque MPI. À l'initialisation du calcul, l'ensemble du domaine est décomposé en sous-domaines eux-même associés à chaque processeur. Cette répartition cartésienne des processeurs s'effectue automatiquement en fonction du nombre de nœuds dans chaque direction de l'espace. De cette manière, le système linéaire n'est jamais construit sur un seul processeur mais réparti sur plusieurs, chacun effectuant sa tâche et garantissant une réduction des temps de calcul. La résolution sur l'ensemble du domaine est possible grâce à l'échange de données au moment de la résolution des systèmes linéaires.

Afin de pouvoir discrétiser les équations sur les interfaces entre les sous-domaines, des cellules fantômes sont ajoutées créant des zones de recouvrement entre les sous-domaines. Le nombre de cellules fantômes dans chaque direction est fonction de la taille du stencil des schémas et des méthodes de transport d'interface utilisées. Il est fixé à 3 cellules dans notre cas pour l'utilisation du schéma WENO 5 lui-même décrit dans la partie suivante.

## 2.3 La méthode level set de suivi d'interface

Le calcul de la force élastique à l'intérieur du solide élastique nécessite de connaître la position exacte de l'interface. C'est la raison pour laquelle il a fallu s'intéresser aux méthodes de suivi d'interface.

Il existe un grand nombre de méthodes numériques développées pour le réaliser. Dans

cette partie sont uniquement évoquées les méthodes utilisées pour notre étude. Différents critères peuvent aider à évaluer une méthode de suivi d'interface plutôt qu'une autre.

- une localisation précise de l'interface peut permettre d'aborder plus simplement les conditions aux frontières entre deux milieux différents. Une précision d'autant plus importante qu'elle influera directement sur le mouvement du solide élastique ainsi que sur l'écoulement du fluide ;

- l'utilisation de méthode robuste apte à décrire le mouvement à partir de champ de vitesse calculé est également important. Notamment dans les cas particuliers ou l'interaction entre un fluide et un solide peut engendrer des forts gradients de vitesse. Ces phénomènes sont physiquement naturels mais peuvent être un frein à la stabilité des méthodes de suivi d'interface ;

- l'utilisation de méthode aux bonnes propriétés algébriques peut aussi faciliter le calcul de la courbure ou de la normale à l'interface en particulier.

En conclusion, l'essentiel est de trouver le compromis idéal entre précision, robustesse et flexibilité d'utilisation. Pour cela il existe deux classes de représentation d'interface : les méthodes lagrangiennes (front tracking) et les méthodes eulériennes (front capturing). Ces dernières sont préférées aux méthodes lagrangienne en particulier pour leur simplicité d'implémentation. Elles définissent l'interface de manière implicite via une fonction scalaire  $\varphi$ , laquelle est ensuite déplacée à l'aide d'une équation de transport. Les méthodes diffèrent entre elles suivant le choix de cette fonction :

- Les méthodes VOF (Volume-Of-Fluid) ([Hirt and Nichols, 1981]) constituent une classe d'approche très utilisée dans la littérature. La fonction  $\varphi$ , appelée fonction couleur, représente la fraction volumique du solide (ou fluide) contenue dans une cellule du maillage. Ainsi si  $\varphi = 1$ , la cellule est entièrement constituée de solide. Inversement la cellule est entièrement remplie de fluide si  $\varphi = 0$ . L'interface est alors située dans les cellules contenant une fraction volumique comprise entre 0 et 1. Le schéma VOF-PLIC (Piecewise Linear Interface Calculation) proposé par ([Youngs, 1982]) permet un suivi précis de l'interface par reconstruction linéaire. Par définition, ces méthodes garantissent une bonne conservation des volumes tout en étant extensibles à la 3D, bien que fastidieuses à implémenter.

Il s'agit de la méthode de calcul utilisé dans le code de calcul Thétis pour la représentation de phénomène diphasique tel que l'interaction entre l'air et l'eau.

- Les méthodes level set ont initialement été proposées par [Osher and Sethian, 1988] en 1988. Elles sont, avec les méthodes VOF précédemment citées, très largement employées pour les problèmes de suivi d'interface. Ses domaines d'application sont multiples, aussi bien employées en mécanique des fluides, qu'en combustion, ou encore pour la propagation des ondes. C'est ce caractère éclectique qui les ont enrichies de diverses améliorations portant aussi bien sur sa précision que sur la rapidité des temps de calculs.

Dans le cadre d'une recherche de méthodes complètement eulériennes, notre choix s'est naturellement porté sur les méthodes de front capturing. L'emploi de la méthode level set se justifie par le besoin d'un accès simple et rapide à la normale à l'interface. De plus l'aspect continu de la fonction la rend non seulement numériquement plus stable mais elle permet aussi de diffuser la force élastique à l'interface de manière régulière.

Une fonction level set  $\varphi$  est une fonction distance constituée de lignes de niveaux telle que :

$$\begin{cases} \varphi(x, t) < 0 & \text{pour } x \in \Omega_S(t) \\ \varphi(x, t) > 0 & \text{pour } x \in \Omega_F(t) \\ \varphi(x, t) = 0 & \text{pour } x \in \Gamma(t) \end{cases}$$

ou l'interface  $\Gamma$  entre un solide et un fluide est représentée par la ligne de niveau 0 de la level set :

$$\Gamma(t) = \{x \in \Omega \text{ t.q. } \varphi(x, t) = 0\}.$$

Enfin, le déplacement de la frontière est obtenu à partir de l'évolution en temps de la fonction level set. Comprenons que par cette méthode, l'ensemble des lignes de niveaux constituant la fonction distance sont transportées et pas seulement l'interface. Un atout supplémentaire pour la diffusion homogène autour du solide abordé par la suite. Le déplacement de la level set se fait naturellement à l'aide du champ de vitesse  $\mathbf{v}$  selon l'équation de transport :

$$\begin{cases} \varphi_t(x, t) + (\mathbf{v}(x, t) \cdot \nabla)\varphi(x, t) & = \mathbf{0} \\ \varphi(x, 0) & = \varphi^0(x) \end{cases} \quad (2.3)$$

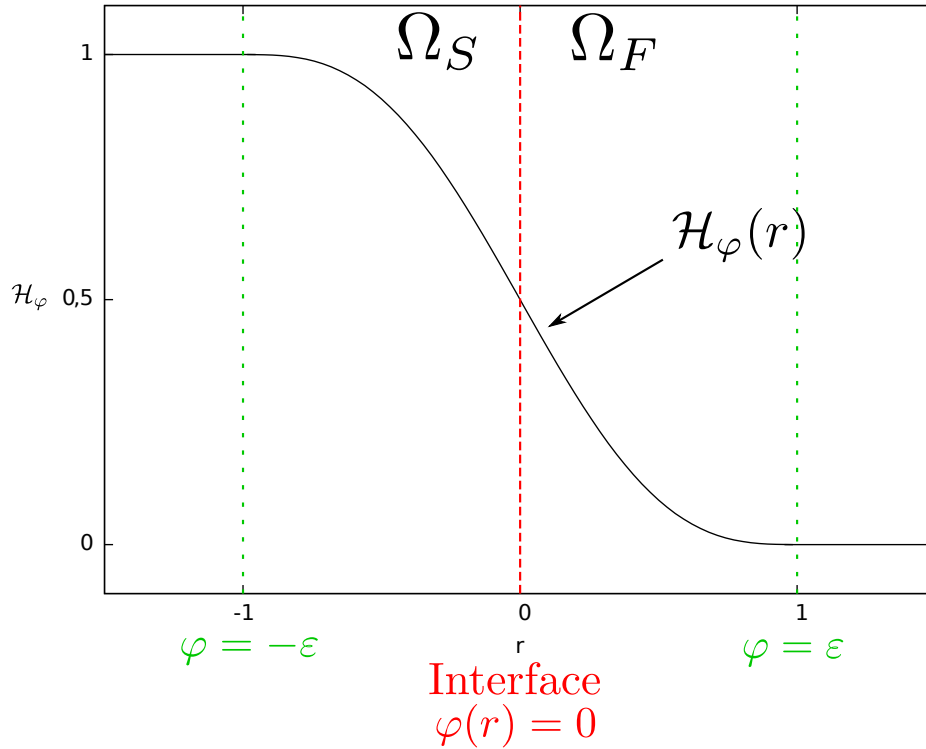
avec  $\varphi^0$  la level set initiale définissant la position de l'interface entre le solide élastique et le fluide à  $t = 0$ .

Comme précédemment évoqué, lorsque l'interface est utilisée pour modéliser la frontière entre deux milieux différents, elle est physiquement d'épaisseur nulle. Cependant, d'un point de vue numérique, cette épaisseur nulle de l'interface est perçue comme une discontinuité sur les caractéristiques physiques des milieux considérés. De telles discontinuités sont parfois un frein à la résolution numérique des problèmes, c'est pourquoi il est utile de diffuser l'interface sur plusieurs mailles. On parle alors d'interface dite diffuse. La fonction de Heaviside  $\mathcal{H}$  précédemment introduite (1.6) est numériquement diffusée à l'interface suivant un paramètre  $\varepsilon$ . Elle est à présent notée  $\mathcal{H}_\varepsilon$  et est construite à partir de la level set de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{H}_\varepsilon(r_\varepsilon) = 0 & \text{pour } r_\varepsilon \in \Omega_S(t) \\ \mathcal{H}_\varepsilon(r_\varepsilon) = 1 - \frac{1}{2}\left(1 + r_\varepsilon + \frac{1}{\pi} \sin(\pi r_\varepsilon)\right) & \text{pour } r_\varepsilon \in \Gamma(t) \\ \mathcal{H}_\varepsilon(r_\varepsilon) = 1 & \text{pour } r_\varepsilon \in \Omega_F(t) \end{cases}$$

$$\text{avec } r_\varepsilon = \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}, x \in \Omega.$$

Des illustrations de diffusion 2D du domaine solide sont données ci-dessous (2.6) avec pour coefficient de diffusion fixé  $\varepsilon = 2h$ . Valeur conservée tout au long de nos travaux sauf contre indication, auquel cas nous le mentionnerons.



**Figure 2.6** – Représentation d'une fonction de Heaviside diffusée

Pour conclure cette partie, nous rappelons que deux équations de transport sont à résoudre. Une portant sur la level set  $\varphi$  et une autre sur les caractéristiques rétrogrades  $\mathbf{Y}$ . Leurs résolutions numériques sont à présent abordées.

## 2.4 Résolution des équations de transport

Dans cette partie sont exposées les méthodes de résolutions utilisées pour résoudre les équations de transport appliquées aux caractéristiques rétrogrades et à la level set. L'équation de transport est un problème d'EDP naturellement hyperbolique qui ne peut être résolu de manière exacte, excepté dans de rares cas particuliers, comme celui de l'équation de transport linéaire, i.e. en considérant le champ de vitesse  $\mathbf{v}$  constant. L'enjeu numérique ici est de pouvoir déplacer des quantités, parfois à fort gradient telle que les caractéristiques rétrogrades, en minimisant leur diffusion ou la propagation d'erreurs numériques. C'est pourquoi des méthodes numériques à la fois d'ordre élevé et stables ont été privilégiées. Notons que dans notre cas et grâce à la résolution des équations de Navier-Stokes, les vitesses utilisées pour le transport seront toujours continues réduisant les problèmes d'instabilité.

Deux équations de transport sont à résoudre. La première est vectorielle et porte sur les caractéristiques rétrogrades (1.13). La seconde est scalaire et traite l'évolution de la level set (2.3). Toutes deux sont discrétisées sur la grille en pression. Quelque soit la quantité transportée, la méthode utilisée sera la même. C'est pourquoi par soucis de clarté, seule la

résolution du transport de la level set (2.3) est décrite ici. La résolution étant trivialement transposable aux caractéristiques rétrogrades  $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)^T$  en la traitant composante par composante.

Il faut trouver  $\varphi$  tel que

$$\begin{cases} \varphi_t(x, t) + (\mathbf{v}(x, t) \cdot \nabla)\varphi(x, t) & = \mathbf{0} \\ \varphi(x, 0) & = \varphi^0(x) \end{cases} \quad (2.4)$$

Dans cette étude, les discrétisations explicites sont préférées aux discrétisations implicites, même si elles demandent une certaine attention au niveau de leurs conditions de stabilité. Elles permettent une implémentation plus simple et des calculs plus rapides. L'équation de transport (2.3) peut être vue comme une EDO à résoudre sur  $[t_0; t_0 + T]$  de la forme :

$$\begin{cases} \varphi_t = F(t, \varphi) \\ \varphi(t_0) = \varphi^0 \end{cases} \quad (2.5)$$

avec

$$F(t, \varphi(x, t)) = -(\mathbf{v}(x, t) \cdot \nabla)\varphi(x, t). \quad (2.6)$$

Le problème est découpé en deux parties :

- le calcul de la fonction  $F$  (2.6) par un schéma décentré WENO 5 en espace reconnu pour sa précision et sa stabilité;
- la résolution de l'EDO (2.5) à l'aide de schémas numériques en temps répondant aux mêmes critères de précision et de robustesse.

### 2.4.1 Discrétisation spatiale WENO 5

Utiliser des schémas centrés de différences finies classiques est très instable lorsqu'on les applique à des équations hyperboliques. En prenant en compte des valeurs parfois largement différentes de chaque côté d'une discontinuité lors du calcul différentiel, ils favorisent le développement des singularités. Des techniques basées sur le décentrement ont du être développées pour assurer la stabilité du système. C'est dans ce contexte de recherche de méthodes à la fois robustes et précises qu'ont été proposées les méthodes ENO (Essentially Non Oscillatory) pour la première fois en 1988 par [Shu and Osher, 1988a]. Ils ont par la suite apporté une amélioration considérable en 1994 : les méthodes WENO (pour Weight Essentially Non Oscillatory) d'ordre élevé (3 et 5). Actuellement il s'agit encore d'une des méthodes d'ordre élevé de référence. Elles ont fait leur preuve dans de nombreuses applications, tout particulièrement celle qui nous intéresse ici : la discrétisation de l'équation de transport d'une quantité quelconque. La précision obtenue grâce à la discrétisation d'ordre élevé permet une représentation fine de l'interface ou des caractéristiques, tandis que sa robustesse assure la minimisation des erreurs numériques susceptibles



de faire diverger le calcul.

Le schéma WENO 5 est utilisé pour la discrétisation du terme  $F^n = \mathbf{v}^n \cdot \nabla \varphi^n$  de l'équation de transport (2.3). Comme précédemment évoqué, il s'agit d'une discrétisation décentrée construite à partir d'une combinaison linéaire de schémas décentrés à l'ordre 1. Il emprunte le principe des méthodes upwind en utilisant différents stencils suivant le signe de la vitesse au nœud considéré.

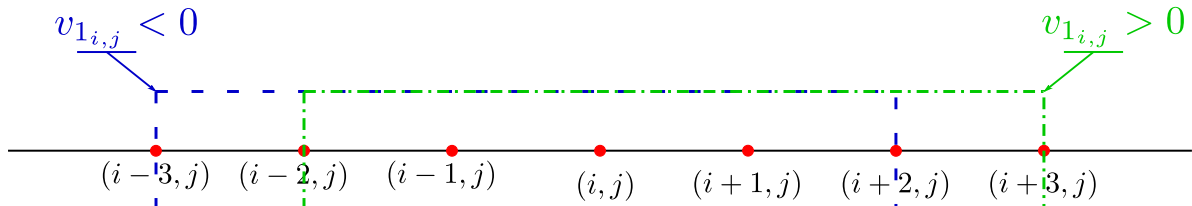
Soit  $\Omega = [0; Lx_1] \times [0; Lx_2]$  un domaine à discrétiser. Afin d'alléger les notations, la discrétisation est effectuée à partir d'un maillage cartésien uniforme. C'est à dire que les deux intervalles  $[0; Lx_1]$  et  $[0; Lx_2]$  sont subdivisés en respectivement  $Nx_1$  et  $Nx_2$  intervalles de longueurs égales. Notons  $h_1 = \Delta x_1 = Lx_1/Nx_1$  le pas d'espace suivant la direction  $x_1$  et  $h_2 = \Delta x_2 = Lx_2/Nx_2$  le pas d'espace suivant la direction  $x_2$ .

Le domaine  $\Omega$  est donc découpé suivant un maillage où chaque point  $(x_{1_i}, x_{2_j})_{i=0,1,Nx_1}^{j=0,1,Nx_2}$  est repéré sur les axes  $x_1$  et  $x_2$  selon la position  $x_{1_i} = ih_1$  et  $x_{2_j} = jh_2$ .

Nous souhaitons évaluer la quantité  $F$  au nœud  $(i, j)$  selon le schéma WENO 5.

$$F_{i,j}^n = \mathbf{v}_{i,j}^n \cdot \nabla \varphi_{i,j}^n$$

Le schéma consiste à utiliser un stencil de 5 points suivant le signe de la vitesse  $\mathbf{v}_{i,j}$  comme illustré sur la figure (2.7) ci-dessous.



**Figure 2.7** – Décentrement selon l'axe  $Ox_1$  du schéma WENO 5

Dans un premier temps les dérivées en espace de  $\varphi^n$  sont calculées en fonction du stencil considéré, i.e.

$$\rightarrow \{\varphi_{i-3,j}^n, \varphi_{i-2,j}^n, \varphi_{i-1,j}^n, \varphi_{i,j}^n, \varphi_{i+1,j}^n, \varphi_{i+2,j}^n\} \text{ si } \mathbf{v}_{1,i,j}^n < 0$$

$$\rightarrow \{\varphi_{i-2,j}^n, \varphi_{i-1,j}^n, \varphi_{i,j}^n, \varphi_{i+1,j}^n, \varphi_{i+2,j}^n, \varphi_{i+3,j}^n\} \text{ si } \mathbf{v}_{1,i,j}^n > 0$$

et

$$\rightarrow \{\varphi_{i,j-3}^n, \varphi_{i,j-2}^n, \varphi_{i,j-1}^n, \varphi_{i,j}^n, \varphi_{i,j+1}^n, \varphi_{i,j+2}^n\} \text{ si } \mathbf{v}_{2,i,j}^n < 0$$

$$\rightarrow \{\varphi_{i,j-2}^n, \varphi_{i,j-1}^n, \varphi_{i,j}^n, \varphi_{i,j+1}^n, \varphi_{i,j+2}^n, \varphi_{i,j+3}^n\} \text{ si } \mathbf{v}_{2,i,j}^n > 0$$

Les calculs se font par un schéma décentré à l'ordre 1 suivant chaque direction de la manière suivante :

→ si  $\mathbf{v}_{1,i,j}^n < 0$  :

$$v_1^1 = \frac{\varphi_{i-2,j}^n - \varphi_{i-3,j}^n}{h_1} \quad v_1^2 = \frac{\varphi_{i-1,j}^n - \varphi_{i-2,j}^n}{h_1}$$

$$v_1^3 = \frac{\varphi_{i,j}^n - \varphi_{i-1,j}^n}{h_1} \quad v_1^4 = \frac{\varphi_{i+1,j}^n - \varphi_{i,j}^n}{h_1}$$

$$v_1^5 = \frac{\varphi_{i+2,j}^n - \varphi_{i+1,j}^n}{h_1}$$

→ si  $\mathbf{v}_{2,i,j}^n < 0$  :

$$v_2^1 = \frac{\varphi_{i,j-2}^n - \varphi_{i,j-3}^n}{h_2} \quad v_2^2 = \frac{\varphi_{i,j-1}^n - \varphi_{i,j-2}^n}{h_2}$$

$$v_2^3 = \frac{\varphi_{i,j}^n - \varphi_{i,j-1}^n}{h_2} \quad v_2^4 = \frac{\varphi_{i,j+1}^n - \varphi_{i,j}^n}{h_2}$$

$$v_2^5 = \frac{\varphi_{i,j+2}^n - \varphi_{i,j+1}^n}{h_2}$$

→ si  $\mathbf{v}_{1,i,j}^n > 0$  :

$$v_1^1 = \frac{\varphi_{i+3,j}^n - \varphi_{i+2,j}^n}{h_1} \quad v_1^2 = \frac{\varphi_{i+2,j}^n - \varphi_{i+1,j}^n}{h_1}$$

$$v_1^3 = \frac{\varphi_{i+1,j}^n - \varphi_{i,j}^n}{h_1} \quad v_1^4 = \frac{\varphi_{i,j}^n - \varphi_{i-1,j}^n}{h_1}$$

$$v_1^5 = \frac{\varphi_{i-1,j}^n - \varphi_{i-2,j}^n}{h_1}$$

→ si  $\mathbf{v}_{2,i,j}^n > 0$  :

$$v_2^1 = \frac{\varphi_{i,j+3}^n - \varphi_{i,j+2}^n}{h_2} \quad v_2^2 = \frac{\varphi_{i,j+2}^n - \varphi_{i,j+1}^n}{h_2}$$

$$v_2^3 = \frac{\varphi_{i,j+1}^n - \varphi_{i,j}^n}{h_2} \quad v_2^4 = \frac{\varphi_{i,j}^n - \varphi_{i,j-1}^n}{h_2}$$

$$v_2^5 = \frac{\varphi_{i,j-1}^n - \varphi_{i,j-2}^n}{h_2}$$

Puis des combinaisons linéaires de ces quantités sont réalisées pour chaque direction  $k$  de l'espace.

$$s_1^k = \frac{13}{12}(v_1^k - 2v_2^k + v_3^k)^2 + \frac{1}{4}(v_1^k - 4v_2^k + 3v_3^k)^2$$

$$s_2^k = \frac{13}{12}(v_2^k - 2v_3^k + v_4^k)^2 + \frac{1}{4}(v_2^k - v_4^k)^2$$

$$s_3^k = \frac{13}{12}(v_3^k - 2v_4^k + v_5^k)^2 + \frac{1}{4}(3v_3^k - 4v_4^k + v_5^k)^2$$

$$\alpha_1^k = \frac{0.1}{(s_1^k + \epsilon)^2}$$

$$\alpha_2^k = \frac{0.6}{(s_2^k + \epsilon)^2}$$

$$\alpha_3^k = \frac{0.3}{(s_3^k + \epsilon)^2}$$

avec  $\epsilon$  un résidu numérique créé afin d'éviter les divisions par 0. Il est d'ordinaire fixé à  $10^{-6}$ .

$$\omega_1^k = \frac{\alpha_1^k}{\sum_{i=1}^3 \alpha_i^k}$$

$$\omega_2^k = \frac{\alpha_2^k}{\sum_{i=1}^3 \alpha_i^k}$$

$$\omega_3^k = \frac{\alpha_2^k}{\sum_{i=1}^3 \alpha_i^k}$$

Enfin la dérivée partielle est calculée suivant la direction  $k$  à l'ordre 5 :

$$\partial_k \varphi_{i,j} = \frac{w_1^k}{6}(2v_1^k - 7v_2^k + 11v_3^k) + \frac{w_2^k}{6}(-v_2^k + 5v_3^k + 2v_4^k) + \frac{w_3^k}{6}(2v_3^k + 5v_4^k - v_5^k).$$

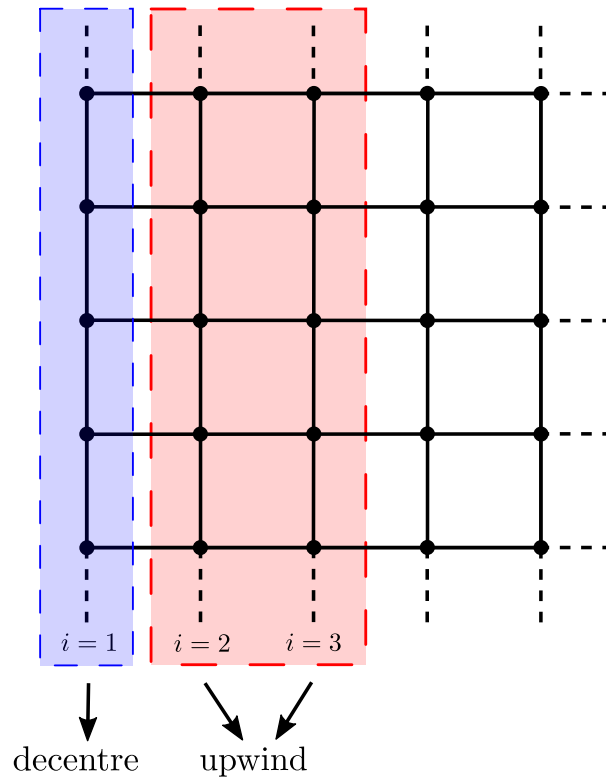
Le gradient de  $\varphi$  à l'ordre 5 suivant la méthode WENO 5 est finalement obtenu. Cependant ce schéma n'est plus utilisable aux limites du domaine sur des bandes constituées de 2 à 3 points suivant le signe de la vitesse. La figure (2.9) illustre ce problème sur la condition limite gauche suivant la direction  $x_1$ .

Pour résoudre cette difficulté, les schémas décentrés à l'ordre 1 classiques sont utilisés sur les bords physiques du domaine en fonction des nœuds disponibles (Zone bleue figure (2.9)).

|               |                                                                            |               |
|---------------|----------------------------------------------------------------------------|---------------|
| Limite gauche | $(\partial_1 \varphi)_{i,j} = \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j}}{h_1}$ | $i = 1$       |
| Limite droite | $\frac{\varphi_{i,j} - \varphi_{i-1,j}}{h_1}$                              | $i = N_{x_1}$ |
| Limite bas    | $\frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j}}{h_2}$                              | $j = 1$       |
| Limite haut   | $\frac{\varphi_{i,j} - \varphi_{i,j-1}}{h_2}$                              | $j = N_{x_2}$ |

**Figure 2.8** – Décentrement sur les nœuds à la limites du domaine

Enfin un schéma upwind à l'ordre 1 (i.e. décentré suivant le signe de la vitesse) pour les nœuds proches de la limite (zone rouges sur le schéma (2.9)) est utilisé plutôt que des schémas centrés. Ces derniers sont fortement déconseillés du fait de leur caractère instable.



**Figure 2.9** – Zone limite gauche où le schéma WENO 5 ne peut être utilisé, le calcul des dérivées est différent

## 2.4.2 Discrétisation temporelle et résolution des EDO

Dans la partie précédente le terme  $\nabla \varphi$  de l'équation (2.3) a été calculé suivant le schéma d'ordre élevé WENO 5.

Dans le cadre de la résolution de l'EDO (2.5), sont proposées ici 3 méthodes explicites elles-mêmes toutes soumises à une condition de CFL abordée en fin de chapitre. Les schémas d'Euler explicites sont les cas les plus simples et répondent assez bien au problème bien que parfois peu précises. C'est pourquoi dans la littérature le couplage méthode de Runge Kutta (2, 3 ou 4) / Weno 5 est souvent mentionné. Néanmoins il s'agit d'une méthode à un pas, nécessitant de connaître le champ de vitesse à un temps  $t_{n+1/2}$ . Ce choix, largement répandu dans la littérature, n'est possible qu'en prenant certaines précautions étudiées dans cette partie.

Nous nous sommes également aussi aux méthodes multi pas ne nécessitant pas de demi temps comme celle proposée par Adam Bashford [Demailly, 2016].

### Méthode Euler explicite

La méthode classique de résolution des EDO à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned}\varphi^{n+1} &= \varphi^n + \Delta t F^n(t^n, \varphi^n) \\ &= \varphi^n - \Delta t (\mathbf{v}^n \cdot \nabla) \varphi^n.\end{aligned}$$

C'est une méthode peu coûteuse et simple d'implémentation. Cependant elle peut s'avérer insuffisante pour la représentation de phénomènes complexes nécessitant de nombreuses itérations. En effet, l'accumulation d'erreurs au cours des itérations peut nuire à la précision de la solution et peut même conduire à la divergence du calcul. Néanmoins, dans la plupart des cas, nous ne considérerons que des phénomènes se produisant sur des laps de temps courts et avec des pas de temps suffisamment petits minimisant l'accumulation d'erreurs. Dans le cadre de notre étude, cette méthode s'avèrerait donc suffisante.

### Méthode multi pas d'Adam Bashford

Afin de monter en ordre dans la résolution des EDO, nous pouvons avoir recours aux méthodes explicites multi-pas d'Adam Bashford d'ordre 2. Elles nécessitent seulement de stocker les vitesses aux itérations précédentes ( $F^n$  et  $F^{n-1}$ ) sans calculs itératifs supplémentaires. Le schéma s'écrit :

$$\begin{aligned}\varphi^{n+1} &= \varphi^n + \frac{\Delta t}{2} (3F^n(t^n, \varphi^n) - F^{n-1}(t^{n-1}, \varphi^{n-1})) \\ &= \varphi^n + \frac{\Delta t}{2} (-3(\mathbf{v}^n \cdot \nabla) \varphi^n + (\mathbf{v}^{n-1} \cdot \nabla) \varphi^{n-1}).\end{aligned}$$

À la première itération, un schéma d'Euler explicite est appliqué ce qui est équivalent à imposer  $F^1 = F^0$ .

Cette méthode reste donc simple et peu coûteuse tout en permettant d'améliorer la précision de la solution. Cependant l'algorithme est moins stable et la contrainte de CFL associée est d'autant plus impactée.

### Méthode à un pas de Runge Kutta TVD

Intéressons nous à présent aux méthodes de Runge Kutta TVD. Historiquement, Shu et Osher ont d'abord démontré que le couplage WENO5 / Runge Kutta 3 était la combinaison optimale pour la résolution du problème de transport appliqué à des quantités discontinues. Par la suite, ils ont ajouté la propriété TVD (pour Total Variation Diminishing) au schémas RK3 ([Shu and Osher, 1988a]), améliorant la stabilité de la méthode. Cette propriété est décrite plus en détail dans l'annexe B. Notons également que [Gottlieb et al., 2001] ont introduit la notion de méthode RK3 SSP (pour Strong Stability Preserving). Il s'agit d'une méthode RK TVD avec calcul de condition CFL optimale pour une vitesse  $\mathbf{v}$  analytique connue. Une amélioration peu utile pour nous dans la mesure où la CFL sera d'avantage contrainte par la vitesse de propagation des ondes élastiques que par la vitesse du fluide. Bien que la méthode RK3 soit d'ordinaire utilisée, la méthode RK2 a également été

implémentée afin de constater par nous-même les différences sur les solutions obtenues. Pour soucis de clarté, l'étude est mise en annexe B. Seul les schémas RK3 TVD et RK2 TVD implémentés sont donnés ci-dessous.

Le schéma RK3 TVD s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} K^1 = \varphi^n - \Delta t(\mathbf{v}^n \cdot \nabla)\varphi^n \\ K^2 = -\Delta t(\mathbf{v}^{n+1} \cdot \nabla)K^1 \\ K^3 = \frac{3}{4}\varphi^n + \frac{1}{4}K^1 + \frac{1}{4}K^2 \\ K^4 = -\Delta t(\mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \nabla)K^3 \\ \varphi^{n+1} = \frac{1}{3}\varphi^n + \frac{2}{3}K^3 + \frac{2}{3}K^4 \end{array} \right.$$

Le schéma RK2 TVD s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} K^1 = Y^n - \Delta t(\mathbf{v}^n \cdot \nabla)Y^n \\ K^2 = -\Delta t(\mathbf{v}^{n+1} \cdot \nabla)K^1 \\ Y^{n+1} = \frac{1}{2}(Y^n + K^1 + K^2) \end{array} \right.$$

Finalement, en appliquant les méthodes à notre problème, i.e.  $F(\varphi) = -\mathbf{v} \cdot \nabla\varphi$ , nous nous apercevons qu'il est nécessaire de connaître les vitesses aux instants  $n+1$  et  $n+\frac{1}{2}$ . Cependant, par la résolution des équations de Navier-Stokes, il est impossible d'avoir accès à ces vitesses. Se pose alors la question de la légitimité d'employer des méthodes d'ordre élevé en ayant uniquement recours à la vitesse de la  $n$ -ième itérations. À notre connaissance, nous n'avons trouvé aucun travaux pointant cette difficulté, c'est pourquoi elle a particulièrement retenu notre attention. Après quelques études numériques sur ces méthodes figurant en annexe B, nous avons finalement choisi d'opter pour une méthode de résolution RK2 en temps couplée avec une extrapolation de la vitesse à l'ordre 2 en temps. Une extrapolation effectuée à partir des vitesses obtenues aux itérations précédentes selon schéma figurant dans l'annexe B. Par suite, Les équations de Navier-Stokes sont résolues par une schéma en temps Gear 2.

### 2.4.3 Vitesse des ondes et contraintes CFL

Les méthodes de résolution précédemment étudiées sont toutes explicites. Elles sont donc soumises à des contraintes sur les pas de temps afin que les solutions restent bornées au fur et à mesure des itérations.

Ces contraintes sont propres à chaque méthode et sont plus ou moins limitantes. Elles

peuvent être approchées à travers l'étude d'un cas simple tel que celui du problème linéaire

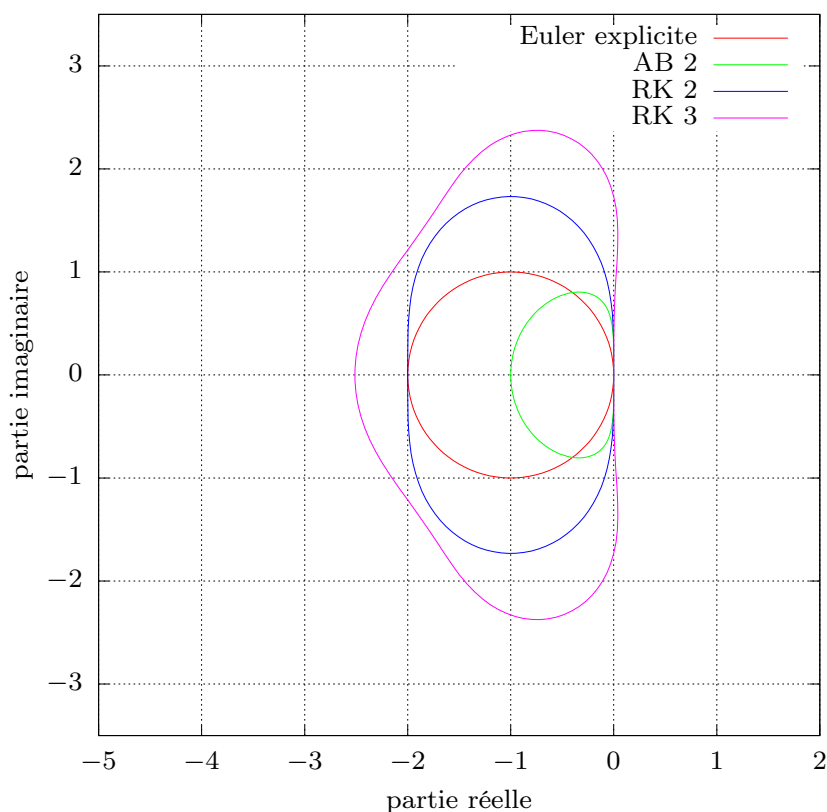
$$f' = \lambda f.$$

Le critère consiste à exprimer  $f^{n+1}$  en fonction de  $f^n$  tel que

$$f^{n+1} = R(z)f^n.$$

Où  $R(z)$  définit la fonction de stabilité de la méthode ou également la raison d'une suite géométrique.

Par exemple, pour une méthode d'Euler explicite nous obtenons  $R(z) = 1+z$  avec  $z = \lambda\Delta t$ . Dans la littérature on retrouve souvent des représentations graphiques des domaines de stabilité (voir figure (2.10)) ; il correspond à la partie du plan complexe pour laquelle la suite géométrique reste bornée i.e.  $|R(z)| \leq 1$ .



**Figure 2.10** – Domaine de stabilité des méthodes testées

Sur la figure (2.10) il apparaît que les méthodes à un pas de type RK gagnent en stabilité au fur et à mesure de la montée en ordre contrairement aux méthodes multi-pas qui ont tendance à perdre en stabilité.

De façon générale, dans le cas d'un transport classique effectuée à partir de la vitesse  $\mathbf{v}$  d'un fluide, ces contraintes s'écrivent de la manière suivante

$$\Delta t \leq C_{max} \frac{\Delta x}{|\mathbf{v}|},$$

avec  $C_{max}$  une condition de restriction habituellement fixé à 0.1 dans nos simulations. Le pas de temps dépend directement de la finesse du maillage et de la vitesse du fluide. Cependant dans le cas d'interaction fluide-structure élastique, il est primordial de prendre en compte la vitesse de propagation des ondes élastiques. Une étude quantitative de cette vitesse est effectuée afin de constater son impact sur les contraintes de stabilité.

Dans le cas de l'élasticité linéaire, la vitesse des ondes de cisaillement est donnée par la relation suivante :

$$c = \sqrt{\frac{\chi}{\rho}}$$

et son équivalent en formulation eulérienne est estimé par :

$$c = |\mathbf{v}| + \sqrt{\frac{\chi}{\rho}}. \quad (2.7)$$

Une étude récente effectuée par [Gorsse et al., 2014] s'est intéressée à l'estimation de la vitesse des ondes élastiques pour le modèle Néo Hookéen en milieu compressible. Bien que les hypothèses soient différentes, il est naturel de penser qu'en incompressible, ces vitesses ont les mêmes ordres de grandeur. Ils estiment la vitesse de la manière suivante :

$$c = \mathbf{v} + \sqrt{\frac{\chi}{\rho} \Psi(\nabla \mathbf{Y})}.$$

La vitesse des ondes élastiques dépend directement du gradient des caractéristiques  $\nabla \mathbf{Y}$ . Ce dernier étant généralement proche de l'identité en petites déformations ( $\nabla \mathbf{Y} \approx I_d$ ), la vitesse des ondes est approchée selon la formule (2.7).

De manière qualitative nous obtenons l'ordre de grandeur du pas de temps à utiliser :

$$\Delta t \leq C_{max} \frac{\Delta x}{|\mathbf{v}| + \sqrt{\frac{\chi}{\rho}}} \quad (2.8)$$

Dans la pratique nous constatons que la vitesse des ondes élastiques, imposée par le module de cisaillement  $\chi$ , est nettement supérieure à la vitesse du fluide. La valeur de  $\chi$  devient alors la contrainte principale sur le pas de temps.

## 2.5 Limites de la méthode

### 2.5.1 Redistanciation de la level set

Les équations de transport des caractéristiques rétrogrades et de la level set ont été résolues par des schémas d'ordre élevés. Cependant, les grandes déformations du fluide autour du solide peuvent poser des difficultés à notre méthode. Dans le cas de la level set par exemple, elles peuvent créer de fortes compressions ou dilatations des lignes de niveaux de la fonction level set. Ces propos sont illustrés sur la figure (2.11). Il s'agit d'un exemple de déformations hétérogènes de la level set le long de l'interface fluide-solide. Le déplacement



des lignes de niveaux étant plus rapide dans le domaine fluide que dans le domaine solide, il se crée une discontinuité à l'interface. Il s'en suit une perte de la propriété de distance de la level set. Il s'agit d'un réel problème, car la level set nous permet d'appliquer la force élastique sur un domaine précis puis de la diffuser à l'interface de façon homogène et uniforme sur quelques mailles par une fonction de Heaviside. Dans ce cas, nous constatons que la force élastique de la zone A (en rouge) sera beaucoup plus dissipée que la zone B (verte) où les lignes de niveaux sont compressées. Par très grand cisaillement, la dilatation des lignes de niveaux est telle qu'il se crée de la force élastique sur des zones éloignées à l'extérieur du solide élastique. Cette dissipation est la source d'instabilité numérique se propageant au cours du temps conduisant à la divergence du calcul.

Il est donc nécessaire de réduire ces instabilités, c'est pourquoi nous avons recours aux méthodes de redistanciation (ou ré-initialisation) de la level set. Ces méthodes ont très largement été abordées dans la littérature. Nous savons que leur principal défaut est de perdre la précision sur l'interface. Une faiblesse conséquente puisque la physique de l'écoulement fluide ou même la déformation du solide en sont perturbées. Cependant, pour notre méthode, l'ensemble des lignes de niveaux ne nous intéresse pas. Seule compte la ligne de niveau 0 représentant l'interface, et une zone en proche paroi du solide étalée suivant le coefficient de diffusion de la force élastique. Un coefficient généralement compris entre  $\Delta_x$  et  $4\Delta_x$ . La ré-initialisation de la level set peut donc uniquement être effectuée à l'extérieur du solide afin de conserver l'interface qui n'est pas concernée par les perturbations engendrées par l'écoulement.

Nous choisissons d'utiliser une méthode de réinitialisation initialement proposée par [Sussman et al., 1994], puis améliorée par [Russo and Smereka, 2000]. Il s'agit d'une méthode décentrée (upwind) permettant de ne pas perturber les valeurs de la level set à l'intérieur du solide par les valeurs situées à l'extérieur. La méthode est écrite ici en deux dimensions. Son principe repose sur le système suivant :

$$\begin{aligned}\varphi_t + Sgn(\varphi_0)G(\varphi) &= 0 \\ \varphi(\mathbf{x}, t = 0) &= \varphi_0(\mathbf{x})\end{aligned}\quad (2.9)$$

Où  $\varphi^0$  est la level set à re-distancer,  $Sgn(\varphi^0)$  son signe et la fonction  $G$  est décrite par l'équation (2.10) .

L'équation (2.9) est une équation de transport et est résolue suivant les mêmes méthodes numériques précédemment citées. Par exemple, pour un schéma d'Euler explicite, elle s'écrit :

$$\varphi_{i,j}^{n+1} = \varphi_{i,j}^n - \Delta t Sgn(\varphi_{i,j}^0) G(\varphi_{i,j}^n)$$

avec

$$G(\varphi_{i,j}^n) = \begin{cases} \sqrt{\max((a^+)^2, (b^-)^2) + \max((c^+)^2, (d^-)^2)} - 1 & \text{if } \varphi_{i,j}^0 > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.10)$$

La fonction nulle est imposée quand  $\varphi_{i,j}^0 \leq 0$  afin de conserver l'interface au cours de la ré-initialisation. Nous définissons :

$$\begin{aligned}
 a &= \partial_{x_1}^- \varphi_{i,j} = \frac{\varphi_{i,j} - \varphi_{i-1,j}}{\Delta x_1} & c &= \partial_{x_2}^- \varphi_{i,j} = \frac{\varphi_{i,j} - \varphi_{i,j-1}}{\Delta x_2} \\
 b &= \partial_{x_1}^+ \varphi_{i,j} = \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j}}{\Delta x_1} & d &= \partial_{x_2}^+ \varphi_{i,j} = \frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j}}{\Delta x_2},
 \end{aligned}$$

et

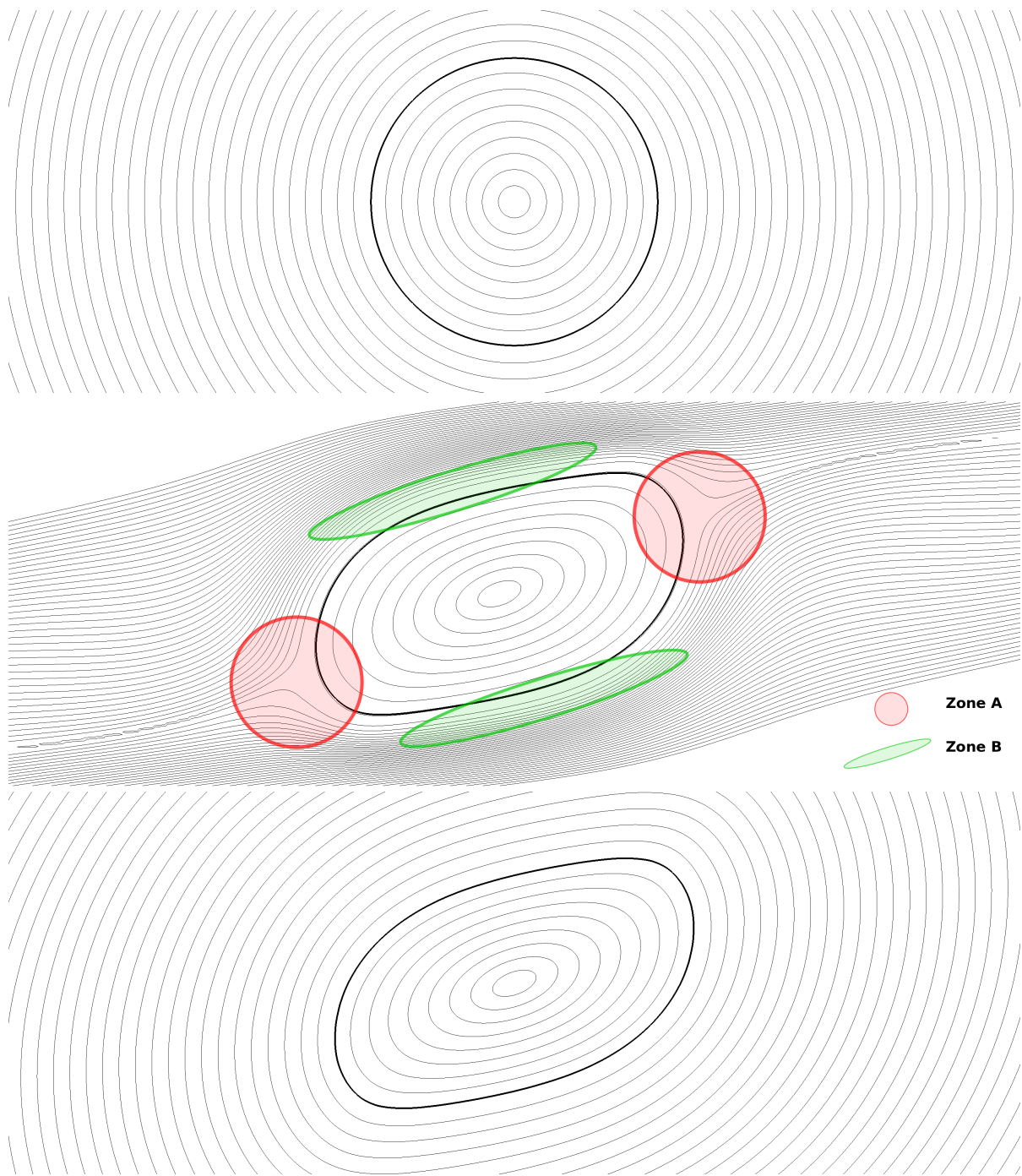
$$f^+ = \max(f, 0) \quad f^- = \min(f, 0)$$

Notons que la fonction signe est calculée de la manière suivante :

$$\text{Sgn}(\varphi_{i,j}^0) = \frac{\varphi_{i,j}^0}{\sqrt{(\varphi_{i,j}^0)^2 + \epsilon^2}},$$

où  $\epsilon$  est le même artifice numérique utilisé pour le schéma WENO 5 afin d'éviter toute division par 0 proche de l'interface quand  $\varphi^0 = 0$ .

Un exemple de ré-initialisation est représenté également sur la figure (2.11).



**Figure 2.11** – Déformations hétérogènes de la level set autour du solide et ré-initialisation

## 2.5.2 Extrapolations des caractéristiques rétrogrades

Les caractéristiques rétrogrades sont transportées à l'aide du champ de vitesse obtenu par la résolution des équations de Navier-Stokes. De plus, comme pour la level set, nous rencontrons les mêmes limitations lors des grandes déformations. Le cisaillement du fluide autour du solide crée de fortes discontinuités sur les caractéristiques rétrogrades comme illustré sur la figure (2.12). Ces discontinuités se propagent au cours du temps et génèrent des gradients incohérents au niveau de l'interface aboutissant finalement à la divergence du calcul. L'interface est donc une zone très sensible à laquelle il faut apporter numériquement le plus grand soin. En effet lorsque l'on écrit notre force élastique de la manière suivante :

$$\operatorname{div}(\mathcal{H}_\varepsilon(\varphi)\sigma_S) = \mathcal{H}_\varepsilon(\varphi) \operatorname{div}(\sigma_S) + \nabla\mathcal{H}_\varepsilon(\varphi)\sigma_S,$$

le terme  $\nabla\mathcal{H}_\varepsilon(\varphi)\sigma_S$  apparaît comme un Dirac situé uniquement à l'interface. De fait, si les gradients des caractéristiques  $\nabla\mathbf{Y}$ , compris dans  $\sigma_S$ , sont mal calculés, alors l'impact sur la solution à l'interface est quasiment immédiat.

Une première solution serait de décentrer le calcul de la force à l'interface en ne prenant en compte que les points intérieurs au solide. Cependant cette idée n'est pas suffisante. En effet par transport, les valeurs aux nœuds incohérentes à l'extérieur du solide finissent toujours par polluer la solution à l'intérieur du solide. Il faudrait alors également modifier le schéma WENO 5 et décentrer les gradients à l'interface pendant le transport quel que soit le signe de la vitesse. Nous perdrons non seulement l'ordre de la méthode, mais aussi sa stabilité. Le décentrement ne semble donc pas la solution adéquate.

Pour pallier ces difficultés, [Dunne, 2006] propose un prolongement continu du champ de vitesse solide vers l'extérieur i.e. vers le domaine fluide. La méthode a été testée mais n'a pas été retenue dans la mesure où elle ne faisait que repousser le problème dans le temps, les caractéristiques rétrogrades étant de plus en plus déformées.

Nous choisissons d'effectuer des extrapolations des caractéristiques rétrogrades. La méthode a été construite par [Aslam, 2004] et utilisée pour l'interaction fluide-structure par [Valkov et al., 2015]. Elle consiste à extrapoler les valeurs connues et cohérentes contenues à l'intérieur du domaine solide  $\Omega_S$  sur une bande extérieure au solide appartenant au domaine fluide  $\Omega_F$ . Cette bande enveloppant le solide devra être suffisamment épaisse pour permettre les calculs nécessaires à la résolution du schéma décentré WENO5 puis de la force élastique.

[Aslam, 2004] décrit différentes d'extrapolations : constante, linéaire, quadratique ou encore cubique. Les extrapolations constantes sont immédiatement exclues car elles généreraient des gradients nuls i.e. une nouvelle discontinuité à l'interface. Les extrapolations linéaires ont été préférées aux autres. En effet, elles traduisent parfaitement le comportement linéaire des caractéristiques rétrogrades. A l'équilibre ou à l'instant initial, ces dernières ne sont rien d'autre que la grille eulérienne (i.e. linéaire par construction). Les extrapolations quadratiques ou cubiques sont donc écartées car non nécessaires et aussi plus coûteuses en temps de calcul.

Nous écrivons l'algorithme pour réaliser les extrapolations linéaires des caractéristiques rétrogrades  $\mathbf{Y}$ . La méthode est itérative et nécessite de connaître la normale à l'interface. Son calcul est rendu possible grâce à la level set de la manière suivante :

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla\varphi}{\|\nabla\varphi\|} \quad (2.11)$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme  $L_2$ . La normale à l'interface est calculée sur la grille de vitesse par un schéma aux différences finies centrées, à partir de la level set écrite sur les nœuds de pression.

Nous avons à présent à résoudre deux EDP l'une après l'autre. Il s'agit encore une fois d'équation de transport dirigées par la normale à l'interface  $\mathbf{n}$ . Elles sont résolues suivant le même schéma numérique que les précédentes. La première permet d'obtenir  $\bar{Y}$ . Il s'agit de la dérivée directionnelle des caractéristiques rétrogrades  $Y$  suivant la direction normale à l'interface telle que :

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{Y} + \tilde{\mathcal{H}}(\varphi) \mathbf{n} \cdot \nabla \bar{Y} &= 0 \\ \bar{Y}(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{n} \cdot \nabla Y^0(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (2.12)$$

où  $\tilde{\mathcal{H}}$  est une fonction de Heaviside discontinue définie par

$$\tilde{\mathcal{H}}(r) = \begin{cases} 0 & \text{if } r \leq 0 \\ 1 & \text{if } r > 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

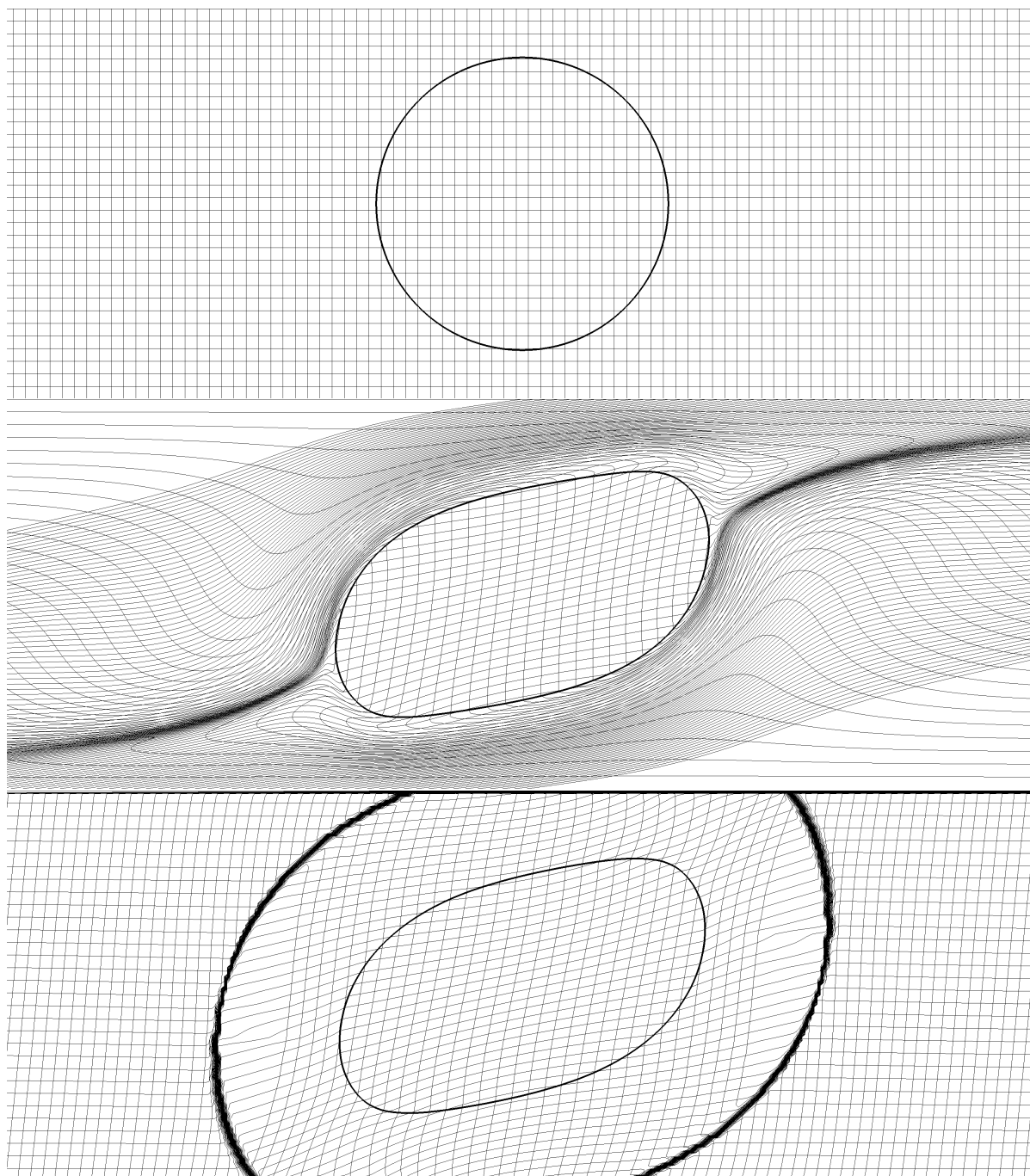
Elle permet d'effectuer les extrapolations uniquement dans le domaine fluide sans modifier les informations contenues dans le domaine solide.  $Y^0$  est définie comme les caractéristiques rétrogrades initiales à extrapoler. Notons que pour réaliser le transport, une interpolation de la normale sur les nœuds de pression est réalisée afin de la faire coïncider avec les caractéristiques rétrogrades.

Pour terminer, la dernière EDP est résolue afin d'obtenir le résultat final

$$\begin{aligned} \partial_t Y + \tilde{\mathcal{H}}(\varphi) (\mathbf{n} \cdot \nabla Y - \bar{Y}) &= 0 \\ Y(\mathbf{x}, 0) &= Y^0(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Le système itératif reste coûteux en temps de calcul et n'est pas effectué à chaque pas de temps mais seulement quand les gradients deviennent trop aberrants (selon un critère étudié dans le chapitre 3). De plus, le raccord entre les caractéristiques extrapolées et les non extrapolées génèrent parfois des discontinuités qui peuvent également se propager si elles ne sont pas traitées. Elles sont supprimées par ré-initialisation de ses valeurs à celles de la grille eulérienne (i.e. valeurs des caractéristiques rétrogrades à  $t = 0$ ).

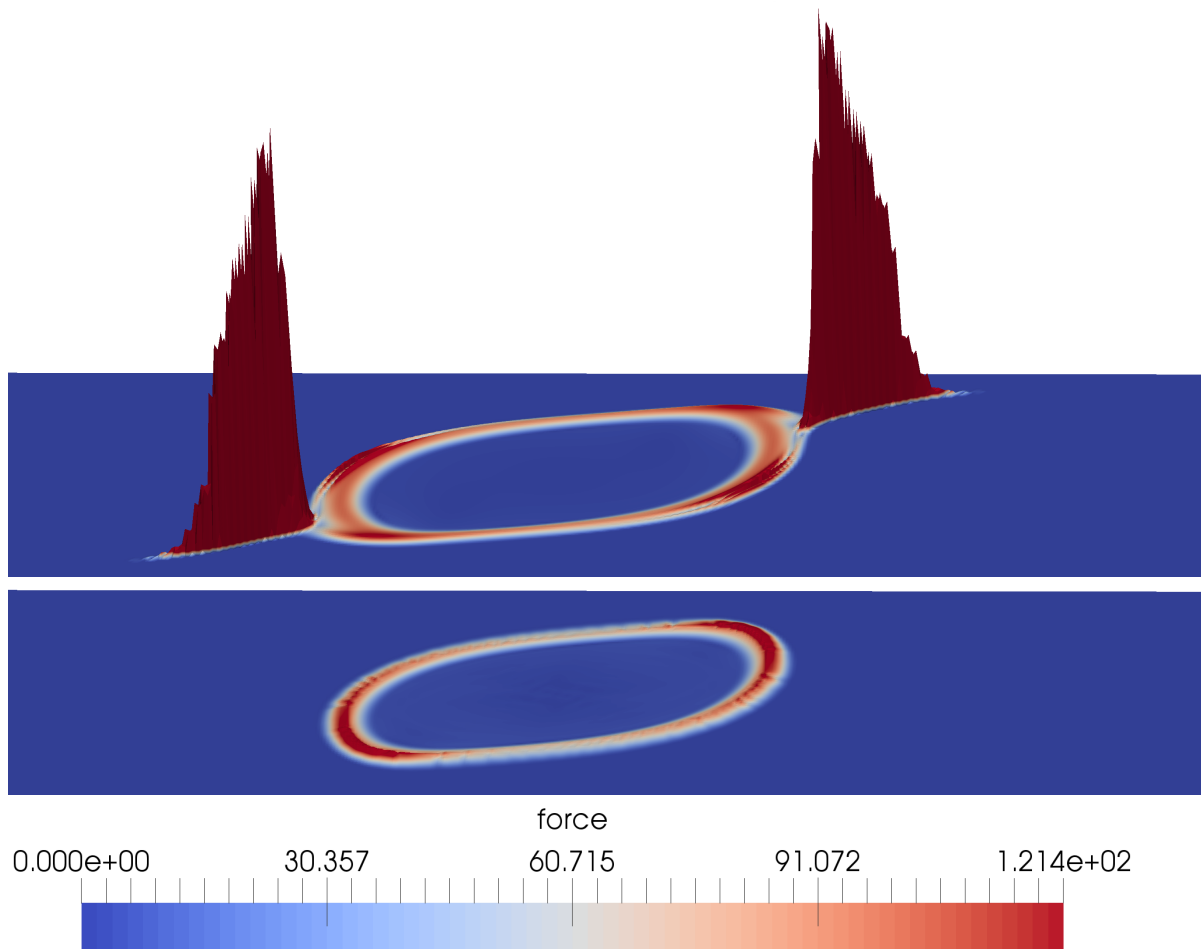
Les caractéristiques extrapolées de façon linéaire sont alors obtenues sur la zone de diffusion puis laissées à leurs valeurs initiales dans le reste du domaine i.e. la ou elles ne sont d'aucune utilité. Un exemple d'extrapolation des caractéristiques rétrogrades est représenté également sur la figure (2.12).



**Figure 2.12** – Un exemple de cisaillement du fluide autour du solide. De haut en bas, les caractéristiques à  $t = 0$ ,  $t = 4$  sans extrapolation et l'apparition de forts gradients,  $t = 4$  avec extrapolation

### 2.5.3 Représentation de l'apport des corrections

Pour finir, nous présentons une dernière illustration de l'importance de l'apport des corrections pendant la résolution. La figure (2.13) montre une représentation 3D de la force élastique (second membre des équations de Navier-Stokes) pour le même exemple précédemment utilisé. Sur la première image nous constatons deux excroissances (erreurs numériques) de la force de l'ordre de  $10^4$  en dehors du solide élastique. Deux anomalies responsables de l'instabilité numérique voir même de la divergence du calcul et dont les causes ont déjà été mentionnées précédemment. Sur la seconde image, représentative d'une solution obtenue après corrections, nous observons la répartition homogène de la force le long de l'interface fluide-solide élastique.



**Figure 2.13** – Représentation de la force élastique par extension 3D. En haut pour une solution sans corrections et en bas avec corrections. Les pics de force peuvent atteindre  $10^4$ .

## Résumé et conclusion

Une description détaillée des méthodes numériques dédiées à la résolution de notre modèle complètement eulérien pour la représentation des phénomènes d'interaction fluide-structure élastique a été présentée.

Le code de calcul massivement parallèle Thétis résout le couplage vitesse-pression par une méthode de correction de pression pour garantir l'incompressibilité de l'écoulement. Il utilise une discrétisation selon un schéma volumes finis sur grille décalée de type MAC afin d'éviter les phénomènes d'oscillation de pression. Le suivi d'interface entre deux fluides est assuré par la méthode VOF-PLIC.

Nos travaux ont conduit à mettre en œuvre des algorithmes nécessaires au calcul de la force élastique dans le domaine solide.

Dans un premier temps cette force est appliquée au système linéaire sous la forme d'un terme source. Puis par sa robustesse et sa souplesse d'utilisation, la méthode level set a été sélectionnée pour représenter l'interface fluide-solide élastique. Elle, ainsi que les caractéristiques rétrogrades, sont déplacées à l'aide d'une équation de transport implémentée et résolue par un couplage schéma Gear 2 explicite en temps et schéma WENO 5 en espace.

Enfin nous avons aperçu les limites de la méthode lors des écoulements fortement cisailés. Des solutions ont été cherchées pour surmonter les difficultés liées aux importantes déformations des lignes de niveaux et des caractéristiques rétrogrades. Nous nous sommes orientés vers des méthodes de ré-initialisation de la level set et d'extrapolation des caractéristiques rétrogrades à l'extérieur de l'interface.

Dans le chapitre suivant, nous nous intéresserons à la validation de notre modèle.





# Chapitre 3

## Validation

### Introduction

Un modèle complètement Eulérien est utilisé pour modéliser l'interaction entre un fluide et une structure élastique répondant au modèle de l'élasticité non linéaire multidimensionnel Néo Hookéen. Les équations de Navier-Stokes en incompressible sont résolues par une méthode de correction de pression. Un couplage RK2-WENO5 est utilisé pour résoudre les équations de transport. Enfin l'extrapolation des caractéristiques rétrogrades et ré-initialisation de la level set sont effectuées.

Avant d'être utilisé à des fins de simulation de l'amortissement des vagues, cet ensemble modèle mathématique-méthodes de résolution numérique doit être vérifié et validé. Cette étape primordiale dans le processus de développement d'un code de calcul est décrite dans ce chapitre.

Pour se faire, il a fallu dans un premier temps rechercher dans la littérature des résultats à la fois précis, bien documentés et correspondant au mieux à notre modèle d'élasticité et à nos objectifs futurs. En effet, si l'étude de l'interaction fluide-structure élastique est un domaine bien présent dans la littérature, les modèles employés sont souvent bien différents. De plus, dans le cadre de notre domaine d'application, la vérification du modèle sur des d'écoulements fortement cisailés est particulièrement souhaité.

Notons que la validation des méthodes de résolution des équations de transport concernant les caractéristiques rétrogrades et la level set a été réalisée au travers les différents cas tests proposés dans la littérature tels que [Enright et al., 2002] et [Baraldi et al., 2014]. Néanmoins nous choisissons de ne pas les mentionner dans ce document, par soucis de clarté.

Nous élaborons aussi dans ce chapitre un critère autorisant les étapes de corrections (sur les caractéristiques rétrogrades et la level set) uniquement à des fréquences contrôlées.

## 3.1 Validation de l'interaction fluide/structure élastique

Nos choix se sont portés dans un premier temps sur les travaux menés par [Sugiyama et al., 2011] que nous avons évoqué au chapitre 1 lors de l'état de l'art. Son modèle et sa méthode sont assez proches des nôtres. Il utilise un modèle de comportement de Moonley Rivlin qui se réduit en 2D au modèle de comportement Néo Hookéen (comme précisé dans la partie traitant des lois de comportement du chapitre 1). Enfin ses cas d'études sont intéressants de part la graduation vis à vis de l'intensité du cisaillement fluide autour du solide élastique.

Nous évoquerons successivement un cas 1D simplifié permettant le calcul d'une solution analytique, l'étude du mouvement d'un solide élastique dans une cavité entraînée puis l'observation du retour de forme d'une particule élastique. Pour finir nous proposons également d'étudier le cas test de [Turek and Hron, 2006] souvent cité dans la littérature.

### 3.1.1 Réponse oscillatoire en couches parallèles de fluide et de solide élastique

Le premier cas proposé par Sugiyama considère l'interaction fluide-structure élastique suivante : une bande solide élastique enveloppée de deux bandes parallèles fluides soumises chacune à un champ de vitesses oscillant. La géométrie est représentée sur la figure (3.1) ci-dessous.

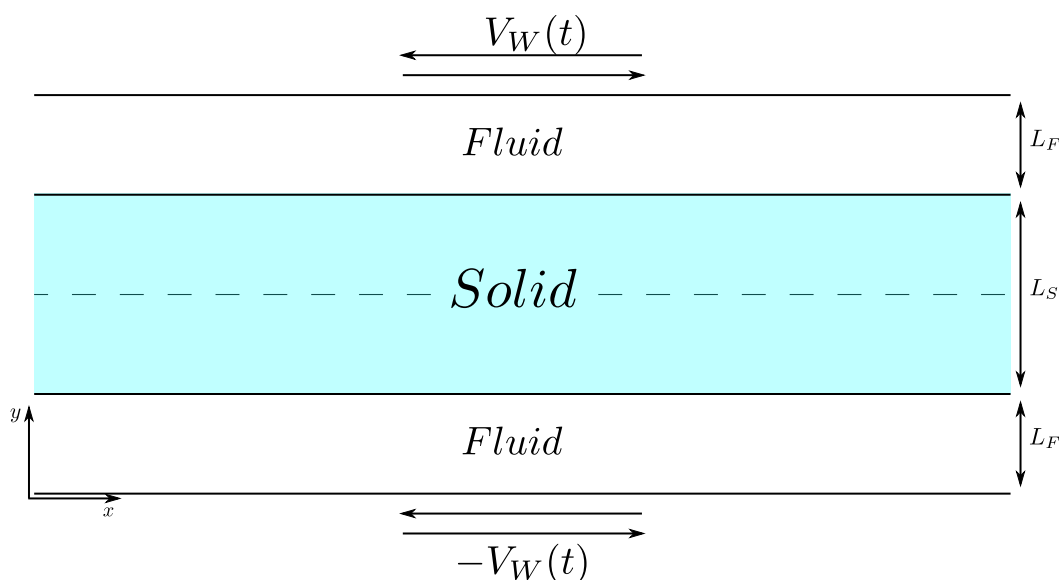


Figure 3.1 – Schéma 2D du cas test

Le problème est homogène suivant la direction  $x_1$ . Les quantités observées dépendront uniquement de  $x_2$  et du temps  $t$ . Le problème est également symétrique selon l'axe  $x_2 = 0$ , permettant de restreindre le domaine d'étude à la partie supérieure du domaine

i.e.  $[-x_1; x_2] \times [0; L_s + L_f]$ .

La vitesse fluide sur la condition limite supérieure est définie par  $V_W(t) = \text{Im}(\widehat{V}_W \exp(i\omega t))$ , tandis que la partie inférieure est considérée comme une condition de non glissement.

Le domaine infini est supposé infini suivant la direction  $x_1$ , i.e. que l'on impose les conditions limites périodiques à gauche et à droite. Les caractéristiques rétrogrades étant par construction linéaires, ce genre de condition engendre des problèmes. Cette difficulté a déjà été mentionnée dans le chapitre 2, et une extrapolation des caractéristiques rétrogrades  $Y$  sur les nœuds aux limites périodiques a été proposée.

Si le problème ainsi posé peut paraître au premier abord très simpliste, il permet de calculer par analyse spectrale une solution analytique pour la vitesse sur l'ensemble du domaine. Cette résolution est à l'origine présentée dans l'annexe de l'article de [Sugiyama et al., 2011] pour un solide à viscosité nulle. Cependant nous souhaiterions pouvoir considérer des solides de viscosité non nulle, souvent retrouvés dans la littérature notamment pour les modèles 1-fluide. C'est pourquoi l'analyse mathématique originale proposée par Sugiyama a du être modifiée afin d'intégrer le terme visqueux aussi bien dans le domaine fluide que solide. Elle est présentée ici de manière succincte, le lecteur sera libre de se référer à l'annexe A pour obtenir plus de précision.

Supposons à présent la solution analytique calculée, la résolution numérique du problème peut être abordée.

## Résultats

Dans un premier temps, la solution numérique  $2\pi$ -périodique se construit pas à pas et est calculée sur l'intervalle de temps  $[0, 40]$ .

Le solide élastique suit le modèle Néo Hookéen de coefficient d'élasticité  $\chi = 2.5\text{Pa}$ . Un pas de temps  $\Delta t = 10^{-4}$  s est choisi pour l'ensemble des simulations. Les paramètres physiques sont donnés par le tableau (3.1) tandis que le lissage à l'interface s'effectue sur deux mailles  $2h$  quelque soit le maillage. L'importance de ce paramètre sera démontré ultérieurement.

| Milieu | $\rho$ ( $kg.m^{-3}$ ) | $\mu$ (Pa.s) | $\chi$ (Pa) |
|--------|------------------------|--------------|-------------|
| Fluide | 1                      | 1            | —           |
| Solide | 1                      | 0            | 2.5         |

**Table 3.1** – Paramètres physiques des milieux

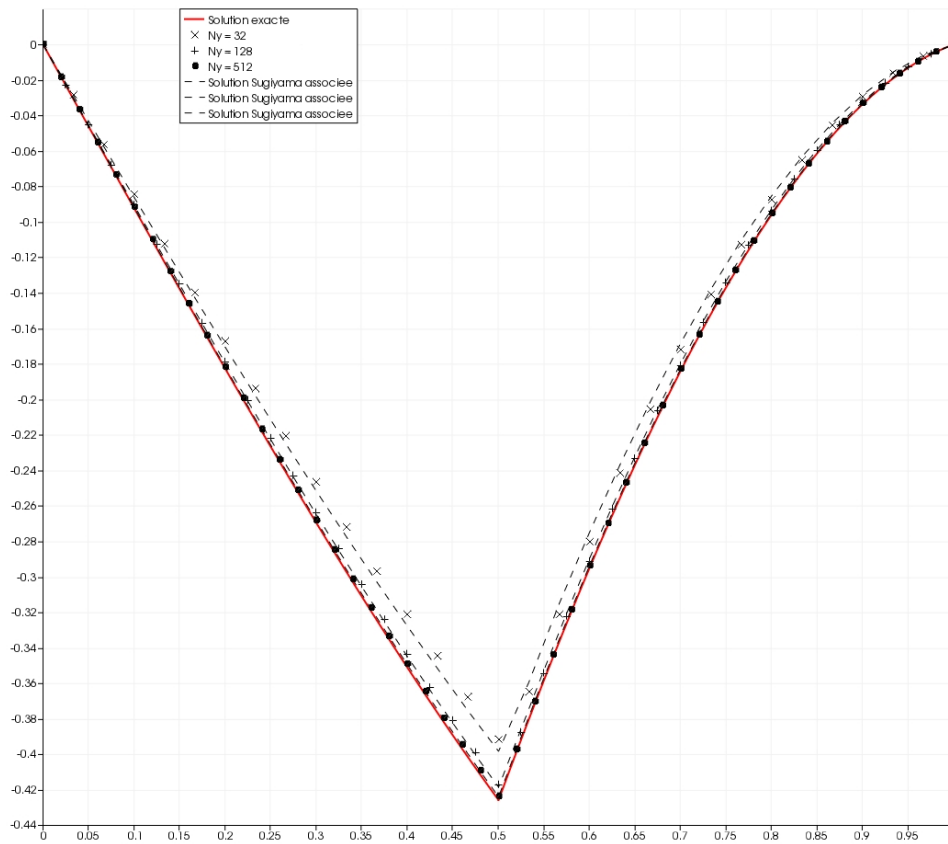
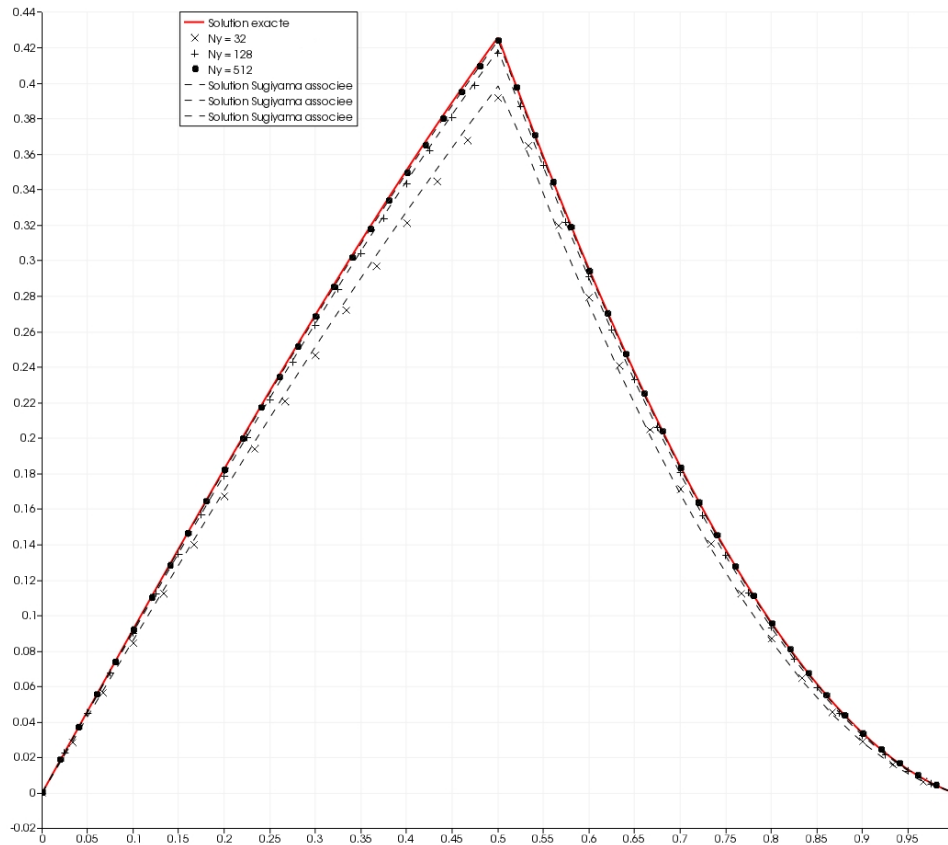
La solution exacte est construite sur un maillage de  $8 \times 512$  points. Les résultats obtenus sur 3 maillages différents sont présentés (3.3). La vitesse étant constante suivant l'axe  $x_1$ , il n'est pas utile d'augmenter le nombre de points suivant cette direction.

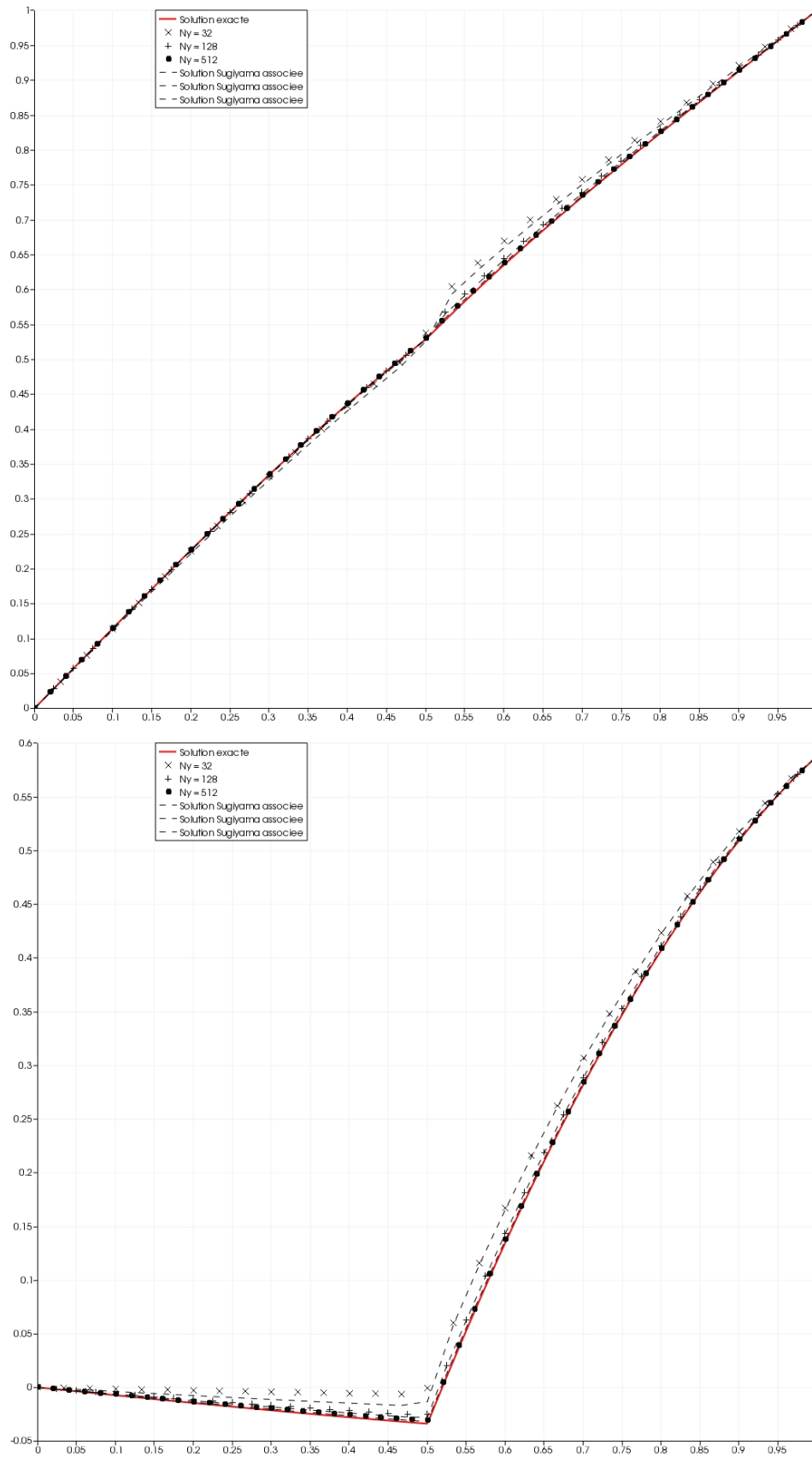
|                 | $N_x$ |   | $N_y$ |
|-----------------|-------|---|-------|
| $\mathcal{M}_1$ | 8     | × | 32    |
| $\mathcal{M}_2$ | 8     | × | 128   |
| $\mathcal{M}_3$ | 8     | × | 512   |

**Figure 3.2** – Tableau des maillages et des notations utilisés

Le profil de vitesse en  $x_1 = 0$  est représenté sur la figure (3.3). La vitesse étant  $2\pi$ -périodique, elle est tracée aux temps  $t\%2 = 0\text{s}$ ,  $t\%2 = 1\text{s}$ ,  $t\%2 = 0.5\text{s}$  et  $t\%2 = 0.8\text{s}$ . Cependant la solution est initialisée à  $\mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ m.s}^{-1}$ . Les profils de vitesse sont donc tracés figure (3.3) une fois la périodicité établie selon l'axe  $x_1 = 0$  aux temps  $t = 16 \text{ s}$ ,  $t = 15 \text{ s}$ ,  $t = 14.5 \text{ s}$  et  $t = 14.8 \text{ s}$ .

Un déphasage est constaté entre la vitesse fluide et la vitesse solide. Un phénomène du à un milieu élastique moins malléable que le fluide et plus dur à mettre en mouvement. Une grande discontinuité sur le profil à l'interface est aussi observée bien qu'elle ne semble pas impacter la solution. Le paramètre de lissage à l'interface ne joue donc pas un rôle important pour ce genre d'écoulement périodique à faible taux de cisaillement. La méthode des caractéristiques converge en espace aussi bien que la méthode proposée par Sugiyama.





**Figure 3.3** – Méthode des caractéristiques et méthode de Sugiyama : profil de vitesse resp. à  $t\%2 = 0$ ,  $t\%2 = 1$ ,  $t\%2 = 0.5$  et  $t\%2 = 0.8$ . La vitesse horizontale  $v_y$  est tracée en fonction de la hauteur  $y$

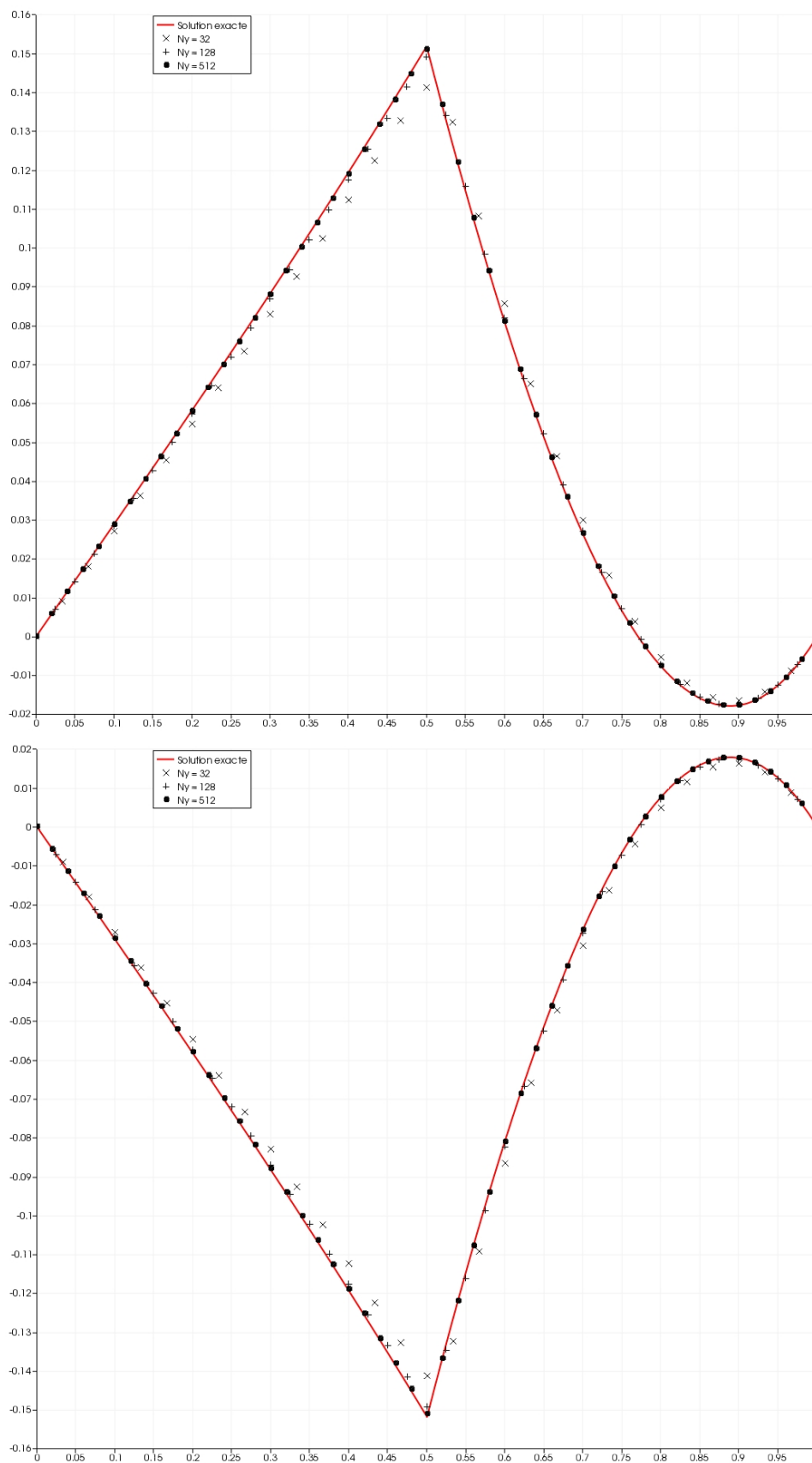
A présent l'étude est reprise en considérant de la viscosité dans le solide élastique fixée à  $\mu_s = 1 \text{ Pa.s}$  (3.2). Les autres paramètres sont conservés :

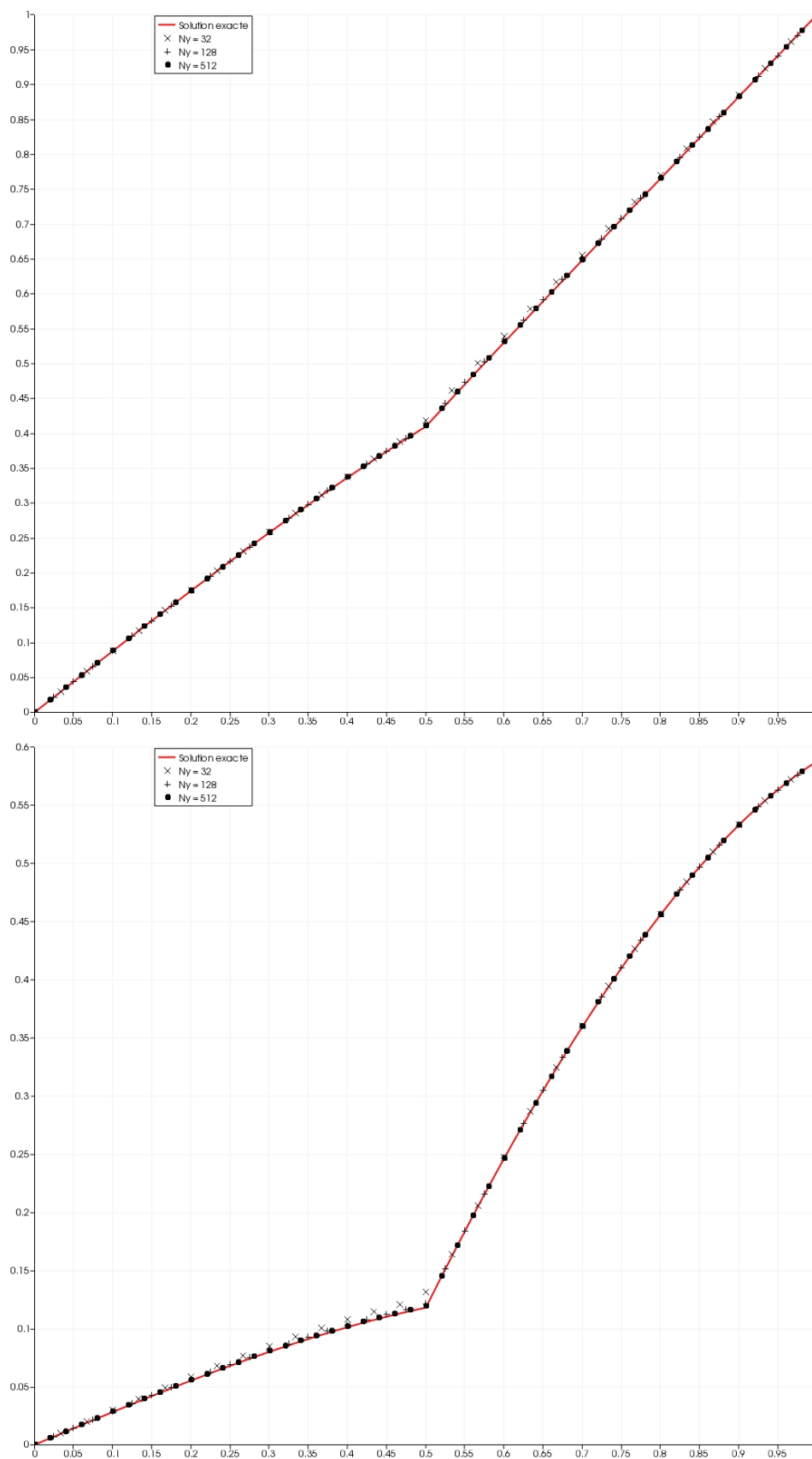
| Milieu | $\rho$ ( $\text{kg.m}^{-3}$ ) | $\mu$ (Pa.s) | $\chi$ (Pa) |
|--------|-------------------------------|--------------|-------------|
| Fluide | 1                             | 1            | –           |
| Solide | 1                             | 1            | 2.5         |

**Table 3.2** – Paramètres physiques des milieux

Comme précédemment, les solutions obtenues sur 3 maillages différents sont représentées sur la figure (3.4). La présence de viscosité dans le solide amortit la vitesse au sein du solide élastique de façon considérable (presque 3 fois inférieure). Une atténuation expliquée par l'ajout de force visqueuse supplémentaire ralentissant le mouvement. Il s'en suit un comportement du profil de vitesse légèrement différent car plus retardé et moins déformé. L'absence d'hétérogénéité sur la viscosité permet de converger plus rapidement vers la solution exacte.







**Figure 3.4** – Méthode des caractéristiques : profil de vitesse resp. à  $t = 0$ ,  $t = 1$ ,  $t = 0.5$  et  $t = 0.8$ . La vitesse horizontale  $v_y$  est tracée en fonction de la hauteur  $y$

### 3.1.2 Réversibilité de forme d'une particule hyper-élastique

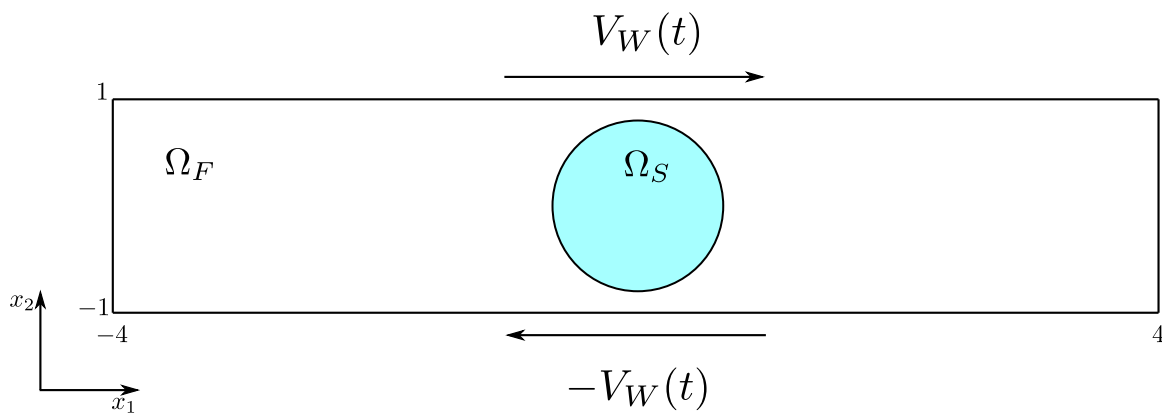
Le second cas de validation proposé par Sugiyama ([Sugiyama et al., 2011]) est présenté. Il s'intéresse au retour de forme d'un matériau hyper-élastique libéré des contraintes extérieures. Le principe du test consiste à contraindre une particule élastique par un champ de vitesse cisailé pendant un laps de temps prédéfini. Puis l'écoulement est stoppé afin d'observer la réversibilité de forme. Un premier résultat est donc immédiatement obtenu en observant le bon retour du solide élastique à sa configuration initiale.

Le cas test est représenté par la figure (3.5). Le solide élastique au repos est une particule centrée en  $O = (0, 0)$  et de rayon  $r = 0.75\text{m}$  dans le domaine  $\Omega = [-4, 4] \times [-1, 1]$ . Les propriétés physiques sont indiquées dans le tableau (3.3) ci-dessous :

| Milieu | $\rho$ ( $kg.m^{-3}$ ) | $\mu$ (Pa.s) | $\chi$ (Pa) |
|--------|------------------------|--------------|-------------|
| Fluide | 1                      | 1            | –           |
| Solide | 1                      | 0            | 4           |

**Table 3.3** – Paramètres physiques des milieux

Le cas test propose d'étudier un matériau Néo Hookeen (équivalent au modèle de Mooney Rivlin en 2D) avec  $\chi = 4$  Pa. Les conditions périodiques sont imposées suivant la direction  $x_1$  aussi bien pour le fluide que pour les caractéristiques. Le mouvement fluide est défini tel que, pour une période  $0 \leq t \leq 4$ , la partie supérieure et inférieure se déplacent respectivement à la vitesse  $V^{sup} = 1 \text{ m.s}^{-1}$  et  $V^{inf} = -1 \text{ m.s}^{-1}$  suivant la direction  $x_1$  engendrant une déformation de cisaillement sur le solide (ce mouvement nous intéresse tout particulièrement ici). Le retour du solide est ensuite analysé en le libérant des contraintes de mouvement imposées au fluide i.e. en stoppant le mouvement des parois tel que  $V^{sup} = 0 \text{ m.s}^{-1}$  et  $V^{inf} = 0 \text{ m.s}^{-1}$  pour  $t > 4$ .



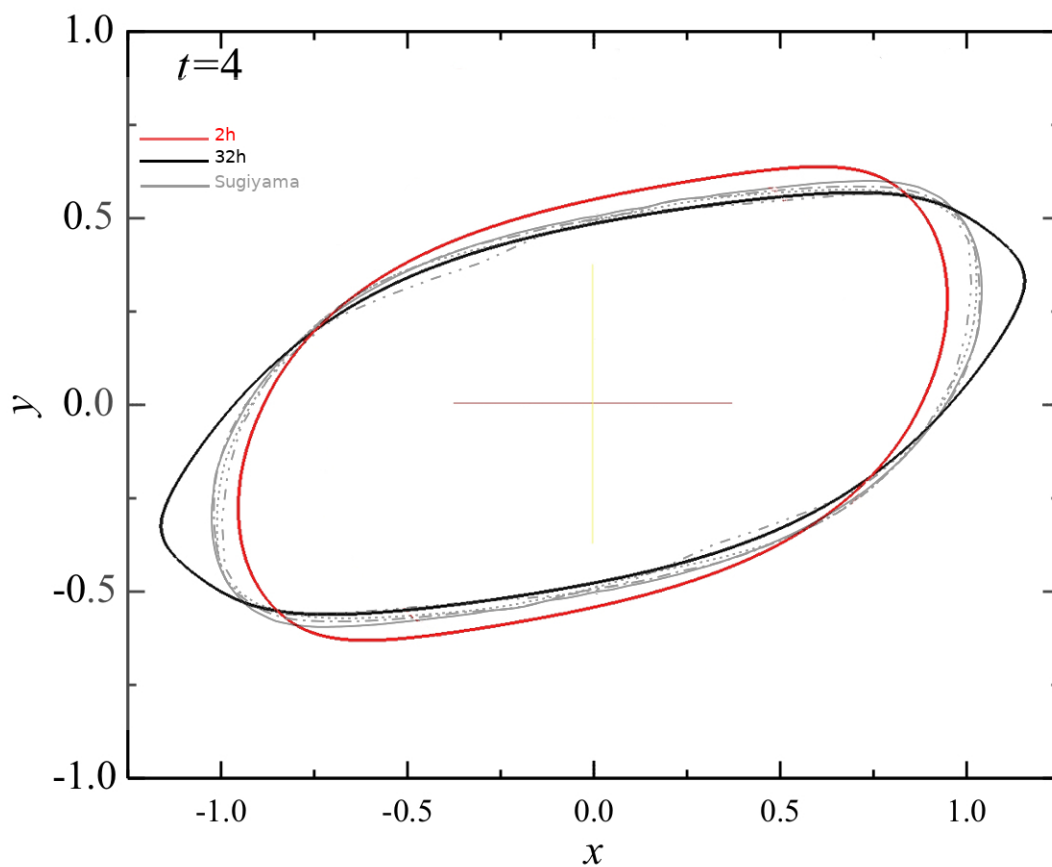
**Figure 3.5** – Schéma du cas test 2D de la réversibilité de forme d'une particule élastique

Si ce cas test est intéressant parce qu'il met en lumière un des comportements propres des matériaux élastiques (la réversibilité), il l'est aussi parce qu'il permet de percevoir les

limites de notre méthode sur lesquelles nous portons à présent notre attention.

### L'importance du lissage à l'interface

Comme déjà mentionné, une fonction de Heaviside, créée à partir de la level set, est utilisée afin d'imposer une force élastique dans le domaine fluide et de la diffuser à l'interface sur une largeur choisie de taille  $\varepsilon$ . Puisque cette diffusion traduit la présence de solide à l'extérieur de l'interface, elle aura un impact direct sur la déformation du solide élastique. La figure (3.6) illustre ces différences en représentant la position de l'interface au temps de coupure  $t = 4$  s pour différentes diffusions de l'interface (épaisseur  $32h$  et  $2h$ ). Les calculs sont effectués sur un maillage de  $1024 \times 256$  points.



**Figure 3.6** – Comparaison de deux solutions à coefficient de diffusion différent pour un maillage unique de  $128 \times 32$  points à  $t = 4$ s

Il apparaît clairement un changement de comportement du solide élastique et a posteriori, du mouvement fluide. L'interface la plus diffuse (en noir sur la figure (3.6)) est plus étirée que son homologue moins diffuse (en rouge). Ce phénomène se comprend facilement puisque dans ce cas de diffusion exagérée, l'interface ne représente plus les bords du domaine élastique et s'étend au delà de manière dégressive. Cette large bande de diffusion se traduit par une dilatation du domaine solide se répercutant directement sur le

mouvement fluide.

Afin de limiter ce phénomène, il conviendra de limiter l'épaisseur du lissage afin de rendre l'interface moins diffuse et coïncider au mieux avec la physique naturellement discontinue. C'est pourquoi, dans le reste de nos simulations, le paramètre de lissage est fixé à  $2h$ .

### Ré-initialisation et extrapolations d'Aslam

Nous avons précédemment évoqué la sensibilité de la méthode aux écoulements cisailés rasants pour lesquels nous avons apporté des illustrations concrètes se rapportant précisément à ce cas test (figures (2.11) et (2.12)). Il devient alors nécessaire d'effectuer l'extrapolation des caractéristiques rétrogrades ainsi que la ré-initialisation de la level set à l'extérieur du domaine solide. Cependant effectuer ces algorithmes à chaque itération peut se révéler :

- inutile parce que les déformations des lignes de niveaux ou des caractéristiques rétrogrades entre chaque pas de temps  $\Delta t$  sont négligeables ;
- coûteux en calculs parce qu'il s'agit d'algorithmes itératifs et multiples notamment pour les extrapolations linéaires.

C'est pourquoi il est intéressant d'identifier une quantité qui soit capable de nous renseigner sur le moment opportun où il serait nécessaire d'effectuer ces corrections. Nous choisissons d'analyser le comportement de la norme du gradient de la level set  $|\nabla\varphi|$  uniquement dans la zone de diffusion. Pour une fonction distance,  $|\nabla\varphi|$  doit être égale à 1. Dans le cas contraire, les distances sont soit étirées i.e.  $|\nabla\varphi| > 1$  soit comprimées i.e.  $|\nabla\varphi| < 1$ .

Notons que le critère de correction aurait pu porter sur le gradient des caractéristiques rétrogrades  $\nabla\mathbf{Y}$ . Il aurait permis de quantifier la déformation dans la zone de diffusion afin de la comparer à celle ayant lieu à l'intérieur du solide. Néanmoins cette méthode s'avère moins intuitive que l'approche utilisant le gradient de la level set.

Les simulations sont effectuées sur deux maillages différents  $\mathcal{M}_2$  et  $\mathcal{M}_4$  constitués de respectivement  $128 \times 32$  et  $512 \times 128$  (voir figure (3.13)) points. Elle est calculée avec des pas de temps fixés à  $\Delta t = 10^{-3}$  pour 200000 itérations (i.e. 20 s de simulation). Les corrections sont effectuées lorsque  $|\nabla\varphi|$  dans une zone de diffusion dépasse de 100%, 80%, 60%, 50%, 30%, 20% ou 10% sa valeur exacte théorique (égale à 1). Ces valeurs comprennent aussi bien les dilatations que les compressions des lignes de niveau. Notons que la valeur minimale 10% a été choisie parce que l'algorithme de ré-initialisation utilisé ne permet que d'obtenir une fonction distance qu'à une erreur de 5% près. Descendre cette valeur minimale solliciterait les corrections à chaque itération.

Avant de s'intéresser aux résultats à proprement parlé, les figures (3.7) et (3.8) illustrent le nombre de corrections effectuées pour chaque condition sur  $|\nabla\varphi|$  sur les maillages  $\mathcal{M}_2$ , resp.  $\mathcal{M}_4$ . La tolérance infinie représente l'absence totale de correction. Plus la tolérance est faible, plus le nombre d'itérations sera élevé. Un résultat attendu puisque restreindre  $|\nabla\varphi|$  à plus de 100% correspond à autoriser la level set à doubler l'espacement entre ses lignes de niveaux. La condition est donc moins stricte que si on autorise un dépassement

de 10% de sa valeur unitaire. Du fait de cette augmentation du nombre d'itérations et d'un champ de vitesse relativement constant, on peut dégager une valeur moyenne de correction par nombre d'itération. Un calcul de fréquence effectué uniquement sur l'intervalle de temps  $[0; 4]$  durant lequel l'écoulement génère le plus de cisaillement. Ce phénomène étant quasi nul lors du retour du solide à sa configuration d'origine, les corrections y sont beaucoup moins fréquentes.

Nous remarquons également que l'augmentation du nombre de points va de pair avec :

- une augmentation attendu des temps de calcul pour chaque correction. Passant d'un calcul d'environ 3 secondes pour le maillage  $\mathcal{M}_2$  effectué sur 2 cœurs à 15 secondes pour le maillage  $\mathcal{M}_4$  sur 4 cœurs ;
- une globale diminution de la fréquence des corrections excepté pour la tolérance fixée à 10% certainement parce que la limite en précision de l'algorithme de ré-initialisation est presque atteinte.

| Tolérance sur $ \nabla\varphi $ | $\infty$ | 100% | 80%  | 60% | 50% | 30% | 20% | 10% |
|---------------------------------|----------|------|------|-----|-----|-----|-----|-----|
| Nbr itérations $t \in [0; 4]$   | 0        | 3    | 4    | 7   | 9   | 17  | 26  | 48  |
| Itération moyenne               | 0        | 1733 | 1154 | 652 | 503 | 274 | 186 | 106 |

**Figure 3.7** – Nombre de corrections apportées en fonction de la condition apportée sur  $|\nabla\varphi|$  pour un maillage constitué de  $128 \times 32$  points

| Tolérance sur $ \nabla\varphi $ | $\infty$ | 100% | 80%  | 60% | 50% | 30% | 20% | 10% |
|---------------------------------|----------|------|------|-----|-----|-----|-----|-----|
| Nbr itérations $t \in [0; 4]$   | 0        | 0    | 1    | 4   | 5   | 11  | 18  | 39  |
| Itération moyenne               | 0        | 0    | 2000 | 856 | 572 | 310 | 218 | 101 |

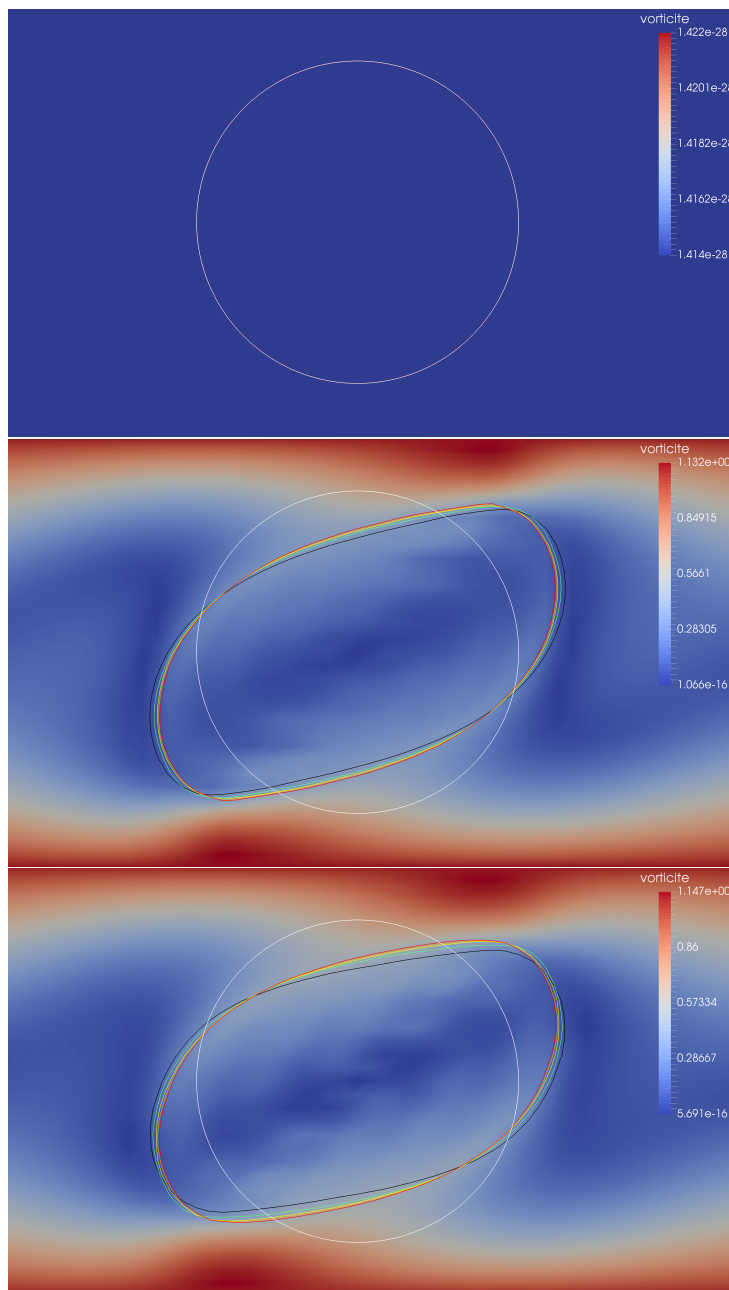
**Figure 3.8** – Nombre de corrections apportées en fonction de la condition apportée sur  $|\nabla\varphi|$  pour un maillage constitué de  $512 \times 128$  points

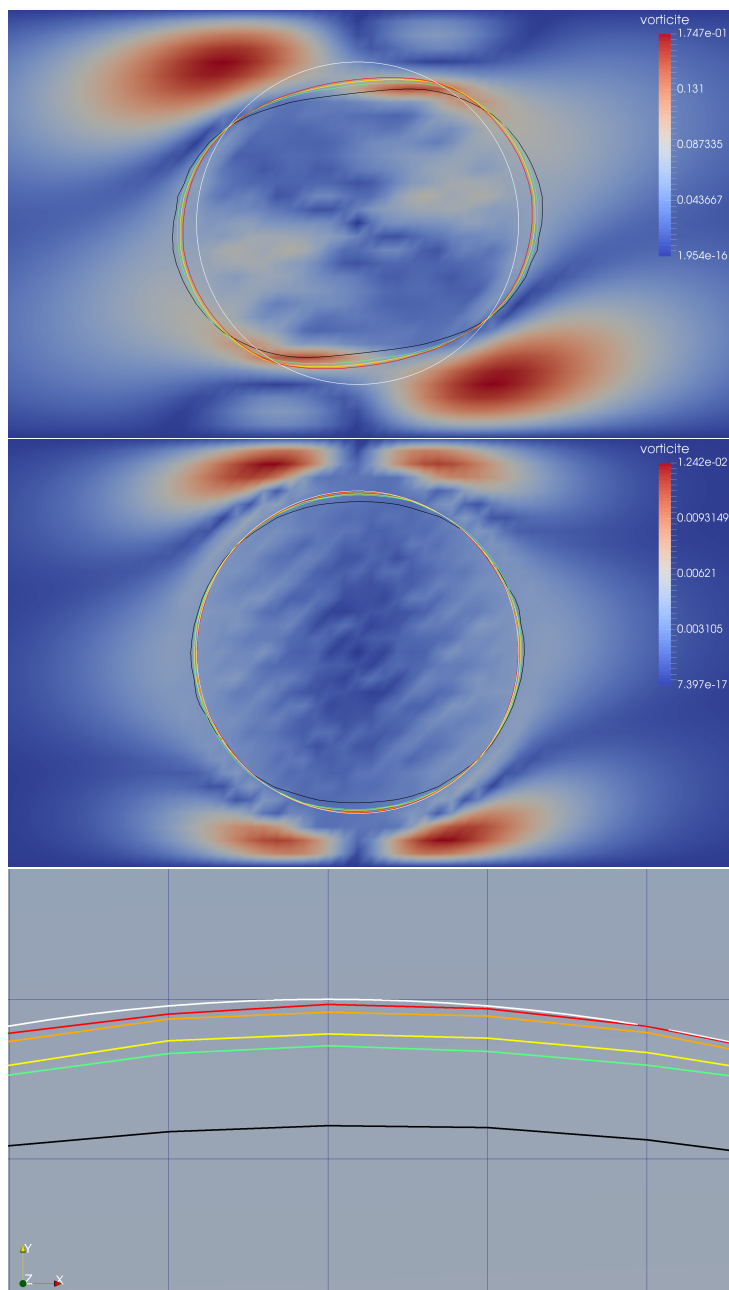
A présent intéressons nous à la précision apportée à l'interface. Sur la figure suivante (3.9), l'évolution des interfaces est présentée pour diverses tolérances. Seules les tolérances 10% (en rouge), 20% (en orange), 30% (en jaune) et 60% (en vert) sont représentées. Un choix assumé pour améliorer la lisibilité des images après avoir observé que les solutions obtenues sous les tolérances 30% – 50% étaient similaires, de même pour l'ensemble 60% – 80% – 100%. Enfin la solution sans extrapolation est représentée en noire tandis qu'en blanc figure la configuration d'origine.

Pour les deux maillages, l'apport des extrapolations quand à la précision de la géométrie obtenue à la fin de la simulation (à 200 s) est non négligeable. En effet, le retour à la configuration d'origine (blanc) des solides élastiques soumis aux extrapolations (rouge, orange, jaune et vert) est meilleur, tandis que la solution sans extrapolation (noire) s'aplatit tout en faisant apparaître des oscillations sur son interface.

Pour conclure, au vu des résultats, les solutions apportées par les tolérances de 10% et 20% semblent proches. Cependant la plus précise nécessite un temps de calcul presque deux fois supérieur et se situe parfois à la limite de la précision apportée par les algorithmes de

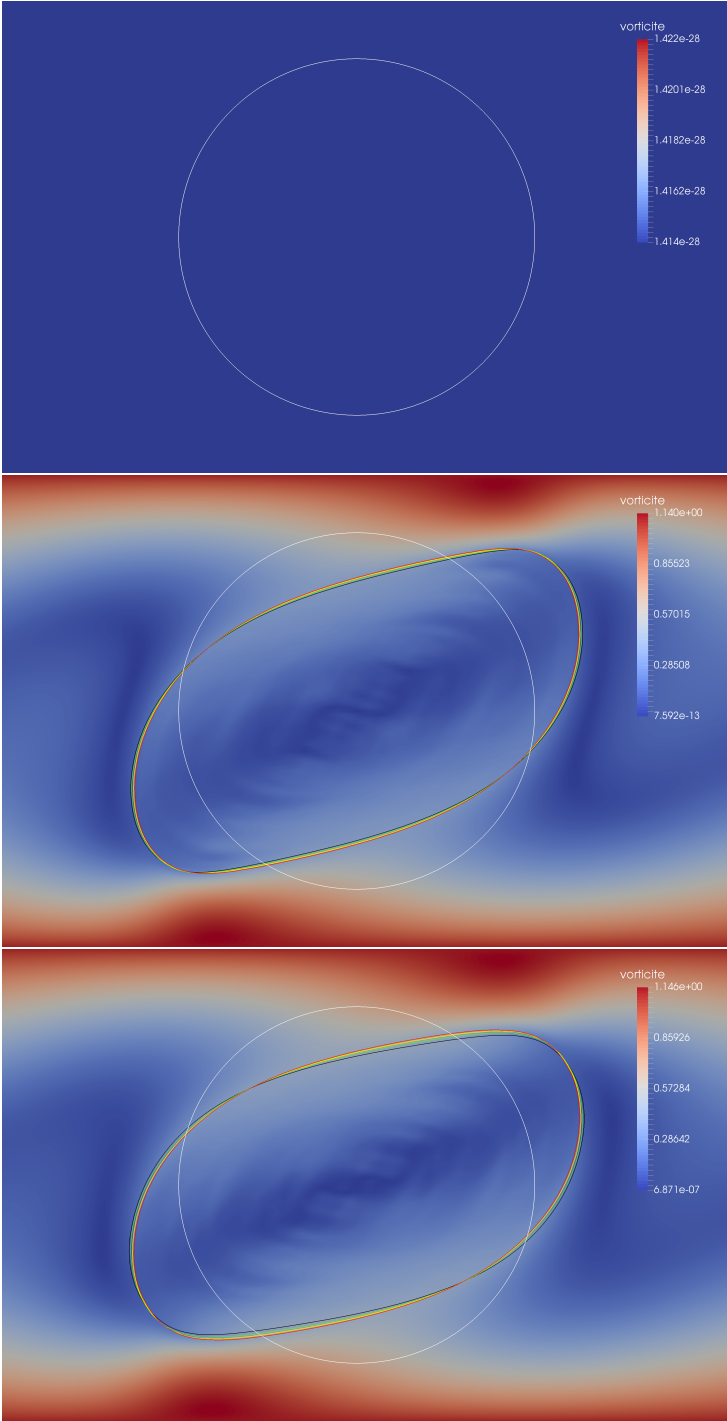
correction. Un compromis fixé à 15% sera utilisé par la suite autorisant un minimum de déformation sans être contraints par les erreurs de ré-initialisation pouvant être parfois plus importantes. C'est par exemple le cas pour des géométries initialement peut enclines à respecter les propriétés de distance telle que des structures rectangulaires.

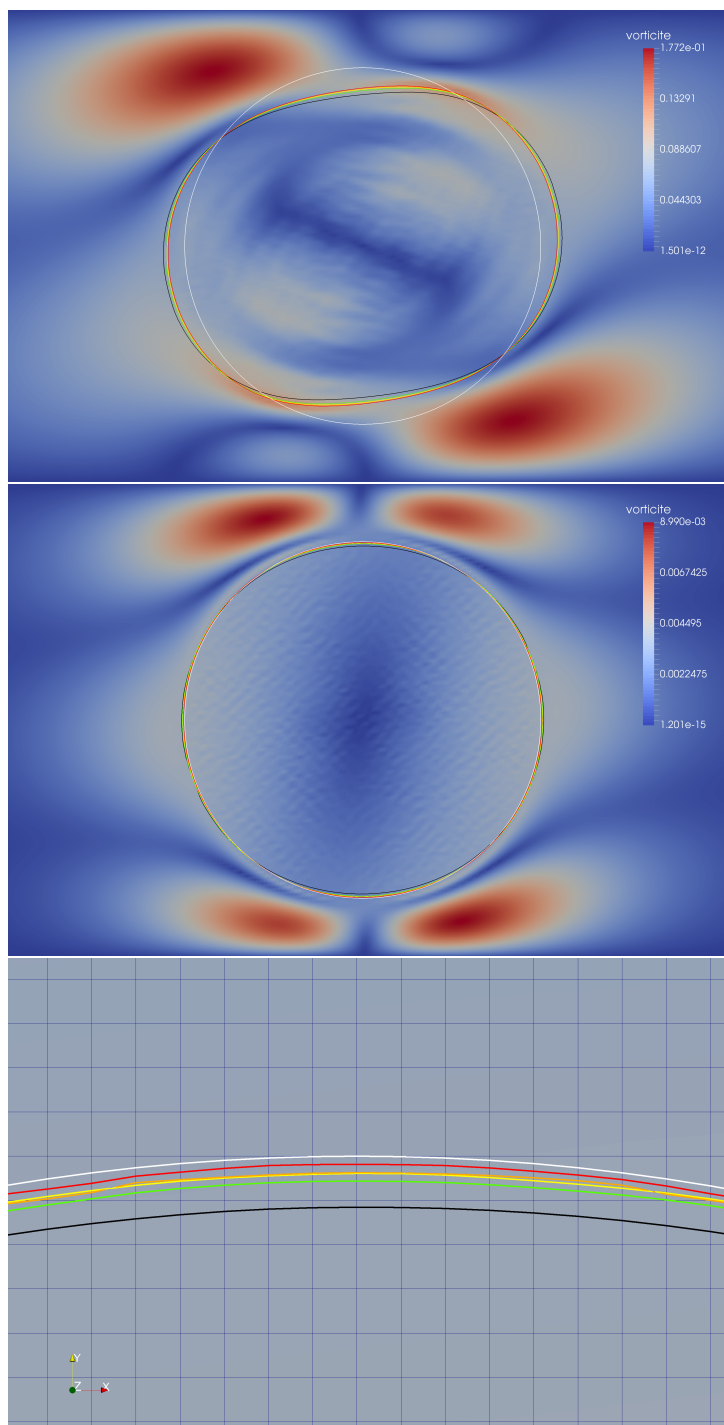




**Figure 3.9** – Comparaison de solutions obtenues pour différentes tolérances de déformation : 10% (rouge), 20% (orange), 30% (jaune), 60% (vert) et  $\infty$  (noir). Captures réalisées au temps  $t = 0, 2, 4, 5, 9$  s sur maillage  $128 \times 32$







**Figure 3.10** – Comparaison de solutions obtenues pour différentes tolérances de déformation : 10% (rouge), 20% (orange), 30% (jaune), 60% (vert) et  $\infty$  (noir). Captures réalisées au temps  $t = 0, 2, 4, 5, 9$  sec sur maillage  $512 \times 128$

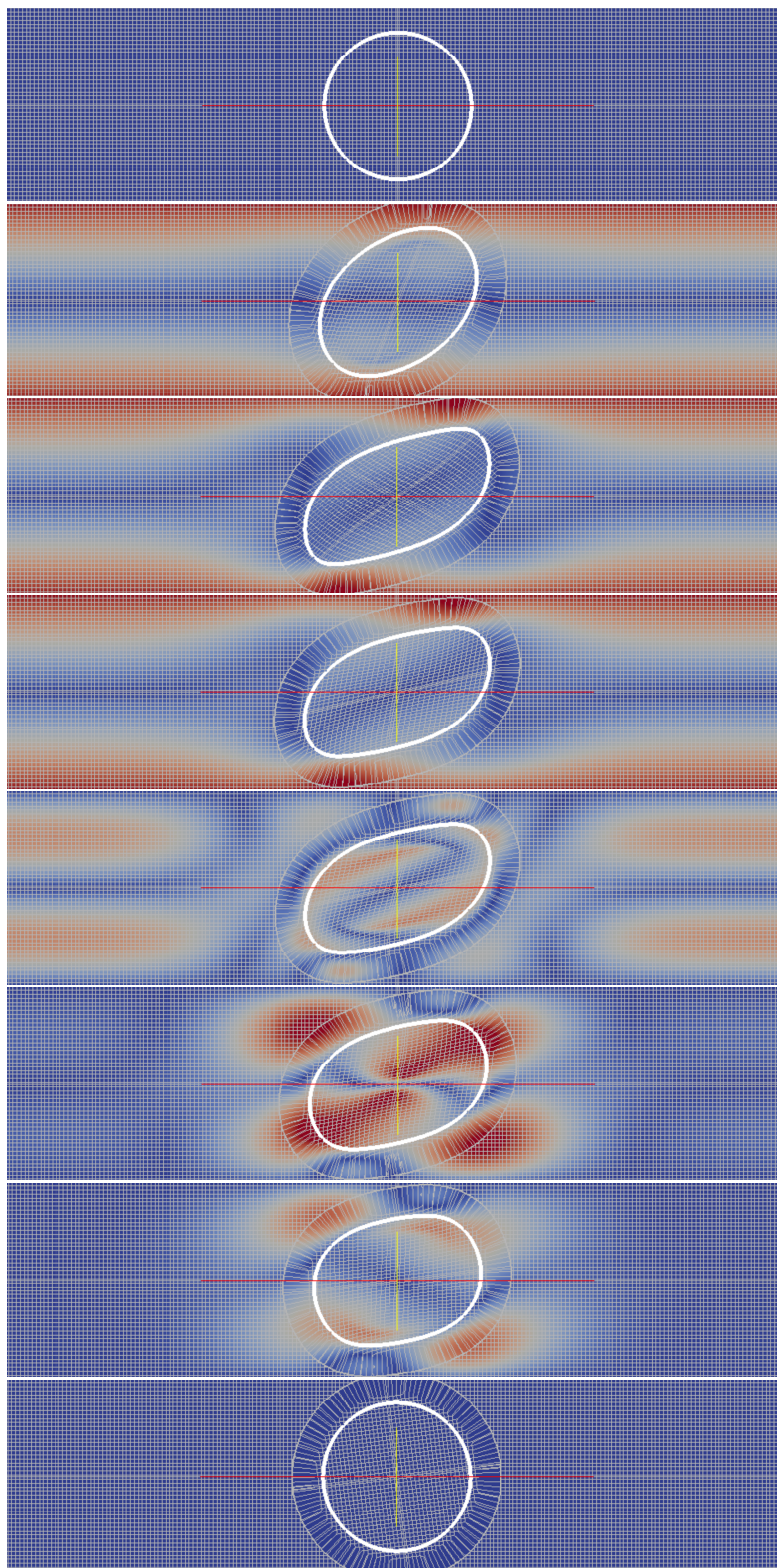
## Résultats

Les résultats finaux de la simulation obtenus pour le maillage  $\mathcal{M}_5$  constitué de  $1024 \times 256$  points sont présentés aux temps  $t = 0, 0.5, 2, 4, 4.1, 4.3, 4.6, 50$  s. L'ensemble des images constituant les figures (3.11) et (3.12) ont pour fond la vorticité du champ de vitesse fluide dont l'échelle est différente suivant que l'on se situe avant ou après le temps de coupure  $t = 4$  s (échelle précisée dans les légendes).

Les figures (3.11) représentent l'évolution des caractéristiques rétrogrades initialement définies sur la grille eulérienne. Nous observons leurs déformations à l'intérieur du solide élastique puis leur prolongement linéaire par extrapolation dans la zone de diffusion. Cela se traduit visuellement par une couronne autour du solide. Celle-ci est toujours choisie suffisamment large pour qu'il y ait assez de points nécessaires aux calculs du transport et des forces élastiques. En dehors de cette couronne, les caractéristiques ne sont plus essentielles, elles ne sont donc pas advectées et restent à la position d'origine correspondant à la grille eulérienne.

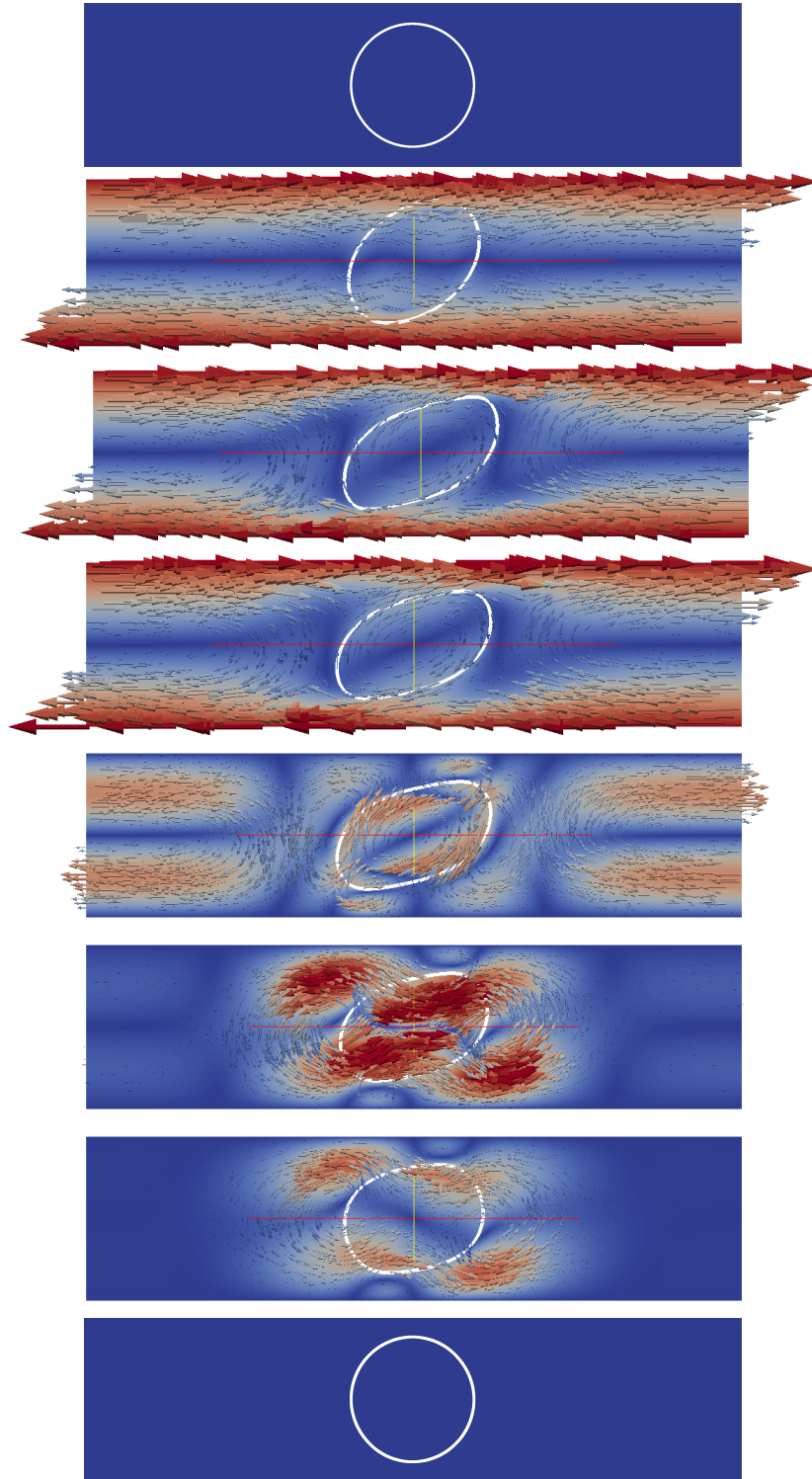
Sur les figures (3.12) nous représentons l'évolution du champ de vitesse et mettons en évidence la formation de vortex.

Globalement le cisaillement de la particule élastique est observé. Cette dernière étant relativement rigide, elle atteint sa déformation maximale entre 2 s et 3 s. Après quoi l'écoulement fluide n'a plus d'impact sur la déformation, et un certain équilibre est atteint. Puis s'effectue le retour de forme à partir du temps de coupure. L'écoulement fluide est stoppé (i.e. la vitesse sur les parois inférieures et supérieures devient nulle), la particule solide n'est plus contrainte et cherche à retrouver sa forme originelle. Il s'en suit des oscillations du corps élastique qui s'estompent assez rapidement pour faire place à des micro-oscillations difficilement perceptibles pendant un certain moment. Le solide est considéré à l'équilibre à partir de  $t = 12$  s. Sur un tel maillage et à l'équilibre, la forme finale coïncide parfaitement avec la forme originale. Cependant le solide a subi une légère rotation, un comportement également retrouvé dans la littérature.



**Figure 3.11** – Modélisation de la déformation sur maillage  $1024 \times 256$  sur une échelle  $[0; 1]$  aux temps  $t = 0$  s,  $0.5$  s,  $2$  s et  $4$  s avant le retour. Puis sur une échelle  $[0; 0.381]$  aux temps  $t = 4.1$  s,  $4.3$  s,  $4.6$  s et  $50$  s. On visualise les caractéristiques rétrogrades.





**Figure 3.12** – Modélisation de la déformation sur maillage  $1024 \times 256$  sur une échelle  $[0; 1]$  aux temps  $t = 0$  s,  $0.5$  s,  $2$  s et  $4$  s avant le retour. Puis sur une échelle  $[0; 0.381]$  aux temps  $t = 4.1$  s,  $4.3$  s,  $4.6$  s et  $50$  s. On visualise le champ de vitesse vectorisé.

### Convergence de la solution

Afin de vérifier la convergence, Sugiyama réalise l'analyse modale de la déformation du solide. Cette décomposition est appliquée à notre méthode et nous reprenons ici succinctement ses calculs. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer à l'article ([Sugiyama et al., 2011]).

La distance du centroïde  $X_C = (x_C, y_C)$  à l'interface  $X_I = (x_I, y_I)$  est définie par :

$$R(\theta) = |X_I - X_C|, \quad (3.1)$$

avec  $\theta$  solution du système  $\cos \theta = \frac{x_I - x_C}{R(\theta)}$  et  $\sin \theta = \frac{y_I - y_C}{R(\theta)}$  tel que  $\theta = \arctan \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ .

La distance est décomposée sous forme de séries de Fourier

$$R(\theta) = R_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (R_{cn} \cos n\theta + R_{sn} \sin n\theta),$$

ou  $n$  représente l'ordre du mode de la déformation. Les coefficients de Fourier sont définis par

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R(\theta) d\theta \\ R_{cn} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} R(\theta) \cos(n\theta) d\theta \\ R_{sn} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} R(\theta) \sin(n\theta) d\theta \end{aligned}$$

Nous cherchons à estimer l'amplitude modale  $|R_n| = \sqrt{R_{cn}^2 + R_{sn}^2}$

Comme détaillé dans l'article, l'intégrale est évaluée numériquement de la manière suivante

$$\int_0^{2\pi} R(\theta) f(\theta) d\theta \approx \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \Delta_x \Delta_y |\nabla \mathcal{H}_{\varphi_{i,j}}| f(\theta_{i,j})$$

Ainsi la valeur de l'intégrale sera sensible à l'approximation faite sur la masse de Dirac  $\nabla \mathcal{H}_{\varphi}$ . Elle même dépendante de la level set et des ré-initialisations. Un Dirac est toujours une quantité extrêmement sensible. C'est uniquement en utilisant les mêmes méthodes de suivi d'interface, ou les mêmes coefficients de diffusion que nous pourrions garantir la correspondance entre différentes masse de Dirac. Malheureusement ces données manquent souvent dans la littérature, c'est pourquoi parfois une légère différence avec les résultats obtenus par Sugiyama est observée, comme se fût le cas pour la position de l'interface.

|                 | $N_x$ |   | $N_y$ |
|-----------------|-------|---|-------|
| $\mathcal{M}_1$ | 64    | × | 16    |
| $\mathcal{M}_2$ | 128   | × | 32    |
| $\mathcal{M}_3$ | 256   | × | 64    |
| $\mathcal{M}_4$ | 512   | × | 128   |
| $\mathcal{M}_5$ | 1024  | × | 256   |

**Figure 3.13** – Tableau des maillages et des notations utilisés

Nous présentons les résultats obtenus sur différents maillages composés de respectivement  $64 \times 16$ ,  $128 \times 32$ ,  $256 \times 64$ ,  $512 \times 128$  et  $1024 \times 256$  points suivant les notation indiquées sur le tableau (3.13) ci-dessus. Les paramètres de calcul restent inchangés. Le pas de temps est fixé à  $\Delta t = 10^{-4}$  s. Les extrapolations et ré-initialisations sont effectuées sous la condition de dépassement de 15% sur l'espacement des lignes de niveau de la level set. Enfin la fonction de Heaviside est diffusée sur 2 mailles.

Afin d'examiner la convergence en espace nous utilisons une extrapolation de Richardson de la solution notée  $\tilde{f}$ . Cette dernière se calcule à partir de l'ordre de convergence  $p$  obtenu à partir des solutions  $f_k$  pour  $k \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$  construites sur 4 maillages différents vérifiant  $\frac{h_1}{h_3} = \frac{h_2}{h_4}$  tel que

$$p = \frac{\ln \left( \frac{f_{h_1} - f_{h_3}}{f_{h_2} - f_{h_4}} \right)}{\ln \left( \frac{h_1}{h_2} \right)}$$

L'extrapolation de Richardson permet d'obtenir une solution d'ordre supérieure à celles des solutions discrètes sous la condition que ces dernières soient suffisamment continues et qu'elles se trouvent dans la zone asymptotique de convergence. Un problème rencontré par la suite et qui sera traité plus en détail.

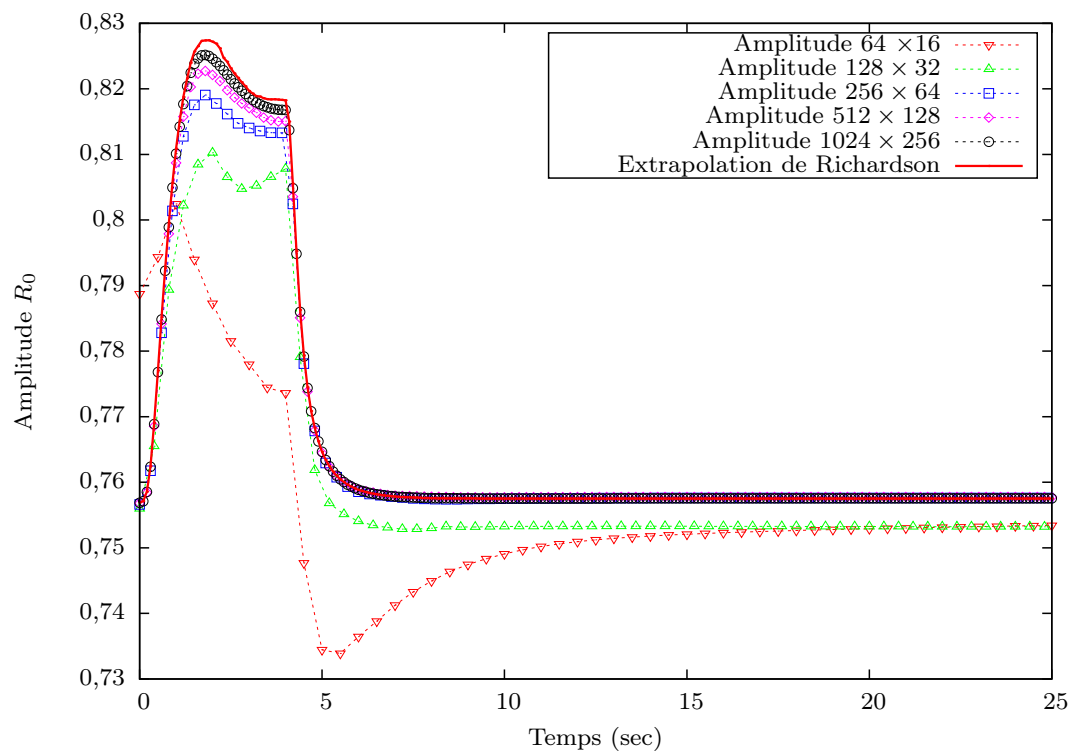
La construction s'effectue à partir des plus fines solutions discrètes utilisées pour le calcul de l'ordre de convergence, .i.e. 2 grilles  $i$  et  $j$  telle que  $h_j/h_i < 1$ . L'extrapolation de Richardson est donnée par :

$$\tilde{f} = f_j + \frac{f_i - f_j}{1 - \left( \frac{h_i}{h_j} \right)^p} + O(h_i^{p+1}) + O(h_j^{p+1})$$

L'extrapolation est ensuite calculée pour chaque pas de temps. Puis l'erreur  $L_\infty$  et  $L_2$  en temps est calculée pour chaque solution construite sur les maillages  $\mathcal{M}_i$  tel que :

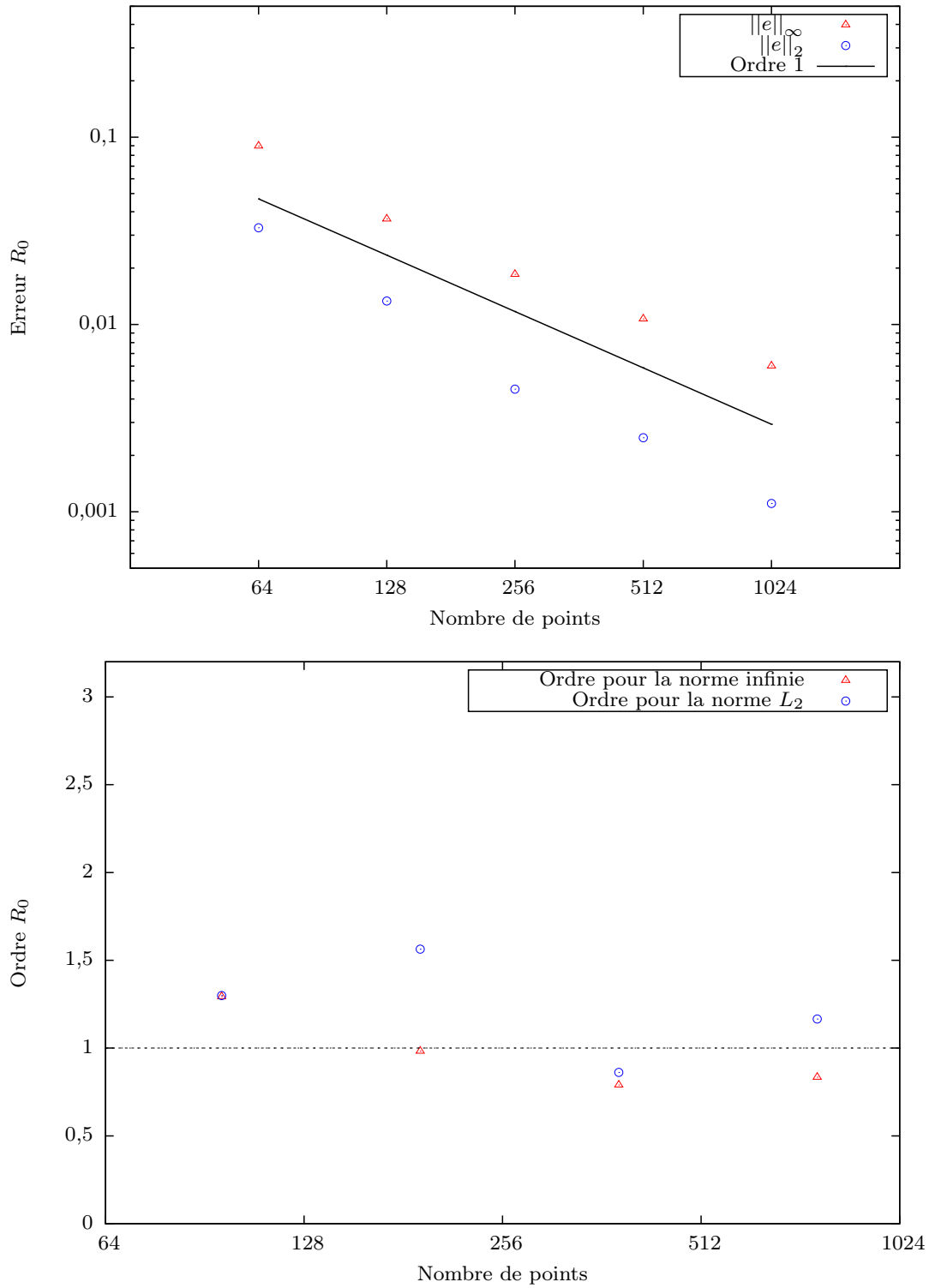
$$\|e\|_\infty^i = \max_{t \in [0, T]} |R_0(t, \mathcal{M}_i) - \tilde{R}_0(t)|$$

$$\|e\|_{L_2}^i = \frac{1}{T} \int_0^T |R_0(t, \mathcal{M}_i) - \tilde{R}_0(t)|^2 dt$$



**Figure 3.14** – Représentation de  $R_0$  amplitude modale d'ordre 0 en fonction du temps pour différents maillages





**Figure 3.15** – Observation de la convergence en maillage pour le calcul de  $R_0$  selon les normes  $L_2$  et  $L_\infty$

Dans un premier temps seul le calcul du premier mode  $R_0$  est présenté parce que le plus simple à appréhender : il s'agit de l'évolution du rayon maximal de la particule au cours du temps (figure (3.14)). Une élongation brutale du rayon est observée sur la période de déformation s'étalant sur les deux premières secondes. Après quoi le solide répond à la sollicitation et atteint un certain équilibre se traduisant par une légère décroissance du rayon. Enfin, à  $t = 4$  s la vitesse fluide est stoppée, le solide revient brusquement à sa position initiale et le rayon reprend sa valeur originale.

Ces résultats montrent que le maillage  $\mathcal{M}_1$  n'est pas suffisant pour réaliser cette étude, la variation de rayon étant trop en discordance avec les autres résultats. Une insuffisance de points s'observant clairement dans les simulations où nous constatons que l'interface fluide-solide et sa zone de diffusion sont trop proches des limites physiques du domaine de calcul. Des phénomènes de bords apparaissent et perturbent le calcul. Notre méthode nécessite donc plus de  $64 \times 16$  points.

Une légère différence de l'ordre de 1% est observée entre la valeur théorique du rayon fixée à 0.75 et la valeur obtenue dans nos simulations (0.757535). Cette surestimation est imputable à la méthode de calcul du rayon (équation (3.1)) par l'intermédiaire de la fonction de Heaviside, laquelle est diffusée à l'interface et donc épaissit légèrement le solide. Un écart néanmoins peu important puisque l'essentiel étant que les rayons en début et fin de simulation soient identiques.

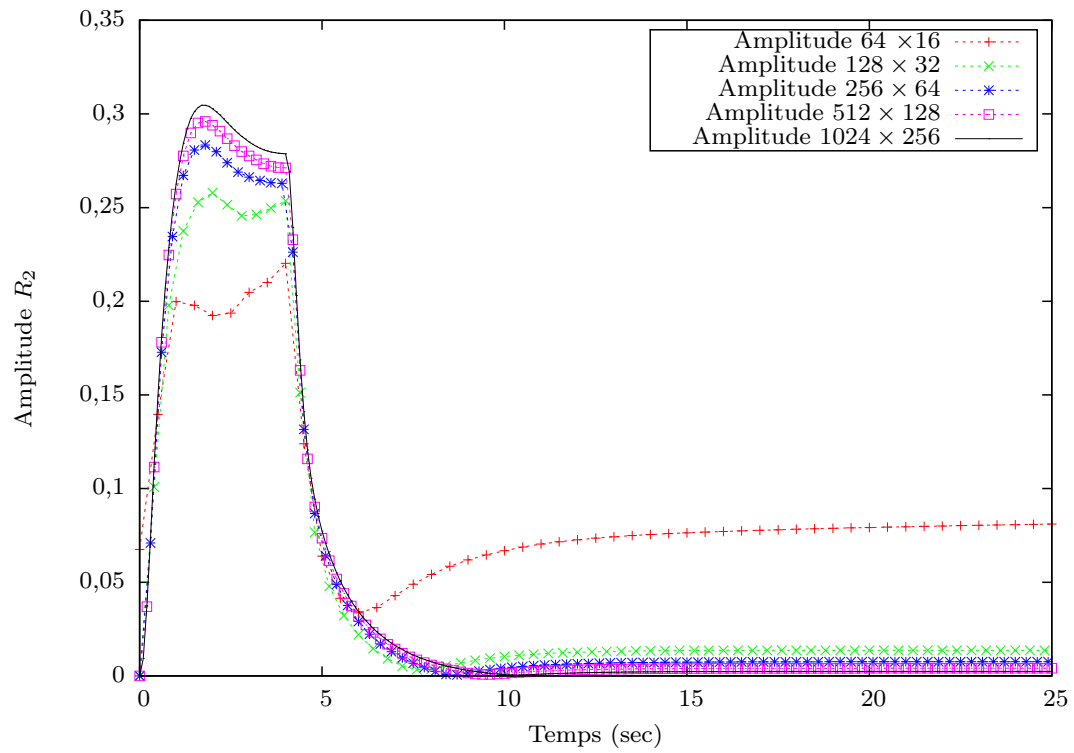
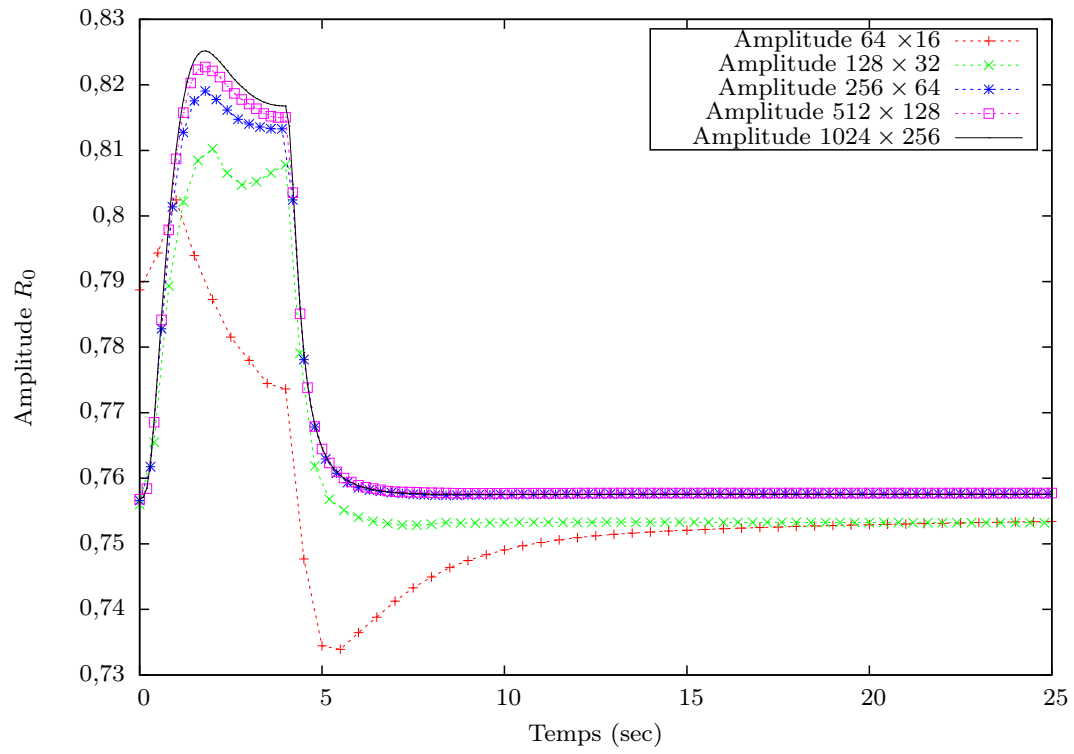
Dans ce cas, l'extrapolation de Richardson est bien construite 3.14 malgré le caractère discontinu des fonctions au temps  $t = 4$  s. Nous traçons les erreurs afin de constater la convergence à l'ordre 1 attendue pour les deux normes  $L_2$  et  $L_\infty$  (figure (3.15)).

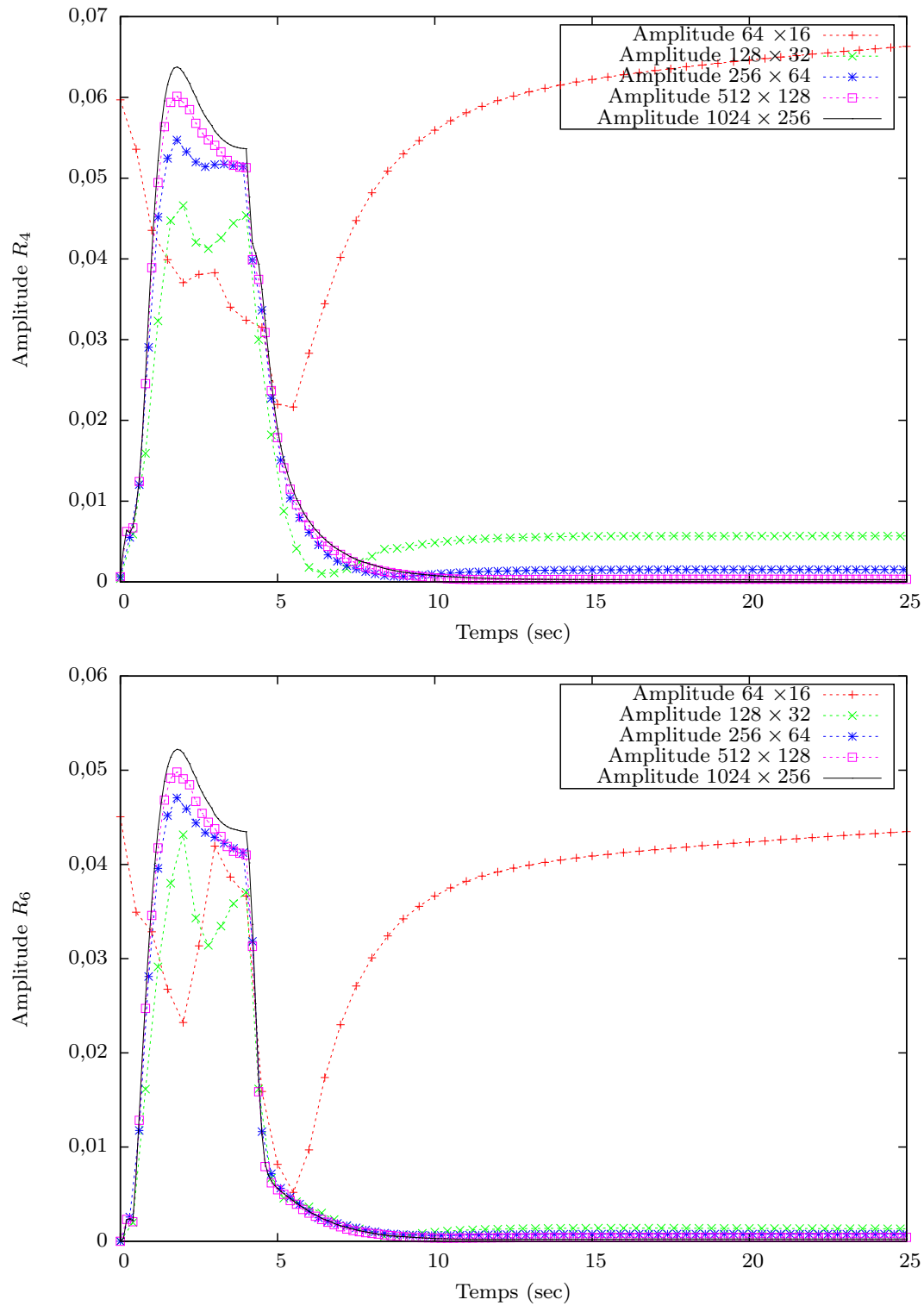
A présent nous regardons les modes suivants. Malheureusement, les fortes variations des quantités autour de la discontinuité entraînent des intersections entre les solutions rendant les calculs d'ordre impossibles. C'est le cas ici (3.16), où l'amplitude modale croît pour  $0 < t < 2.5$  et décroît à partir de  $t = 4$  s avec de forts gradients dus au changement radical de la forme de la structure élastique revenant brutalement à sa configuration d'origine. Cette discontinuité aurait pu être isolée afin de calculer l'extrapolation de Richardson uniquement sur l'intervalle de temps correspondant au retour de la particule élastique. Cependant cette étude n'entre pas dans le contexte de cette thèse et on lui préfère une étude de convergence classique effectuée en prenant pour référence la solution la plus fine. La méthode s'avérant différente et bien que nous ayons déjà étudié le premier mode  $R_0$  avec l'extrapolation de Richardson, nous ré-effectuons l'étude ici afin de pouvoir constater d'éventuelles différences. L'erreur et l'ordre sont calculés de la manière suivante :

$$\|e\|_\infty^{i,k} = \max_{t \in [0, T]} |R_n(t, \mathcal{M}_i) - R_n(t, \mathcal{M}_k)|$$

$$\|e\|_{L_2}^{i,k} = \frac{1}{T} \int_0^T |R_n(t, \mathcal{M}_i) - R_n(t, \mathcal{M}_k)|^2 dt$$

avec  $k = 1024$  tel que  $R_n(t, \mathcal{M}_k)$  soit l'amplitude modale d'ordre  $n$  prise sur le maillage le plus fin constitué de  $1024 \times 256$  points.





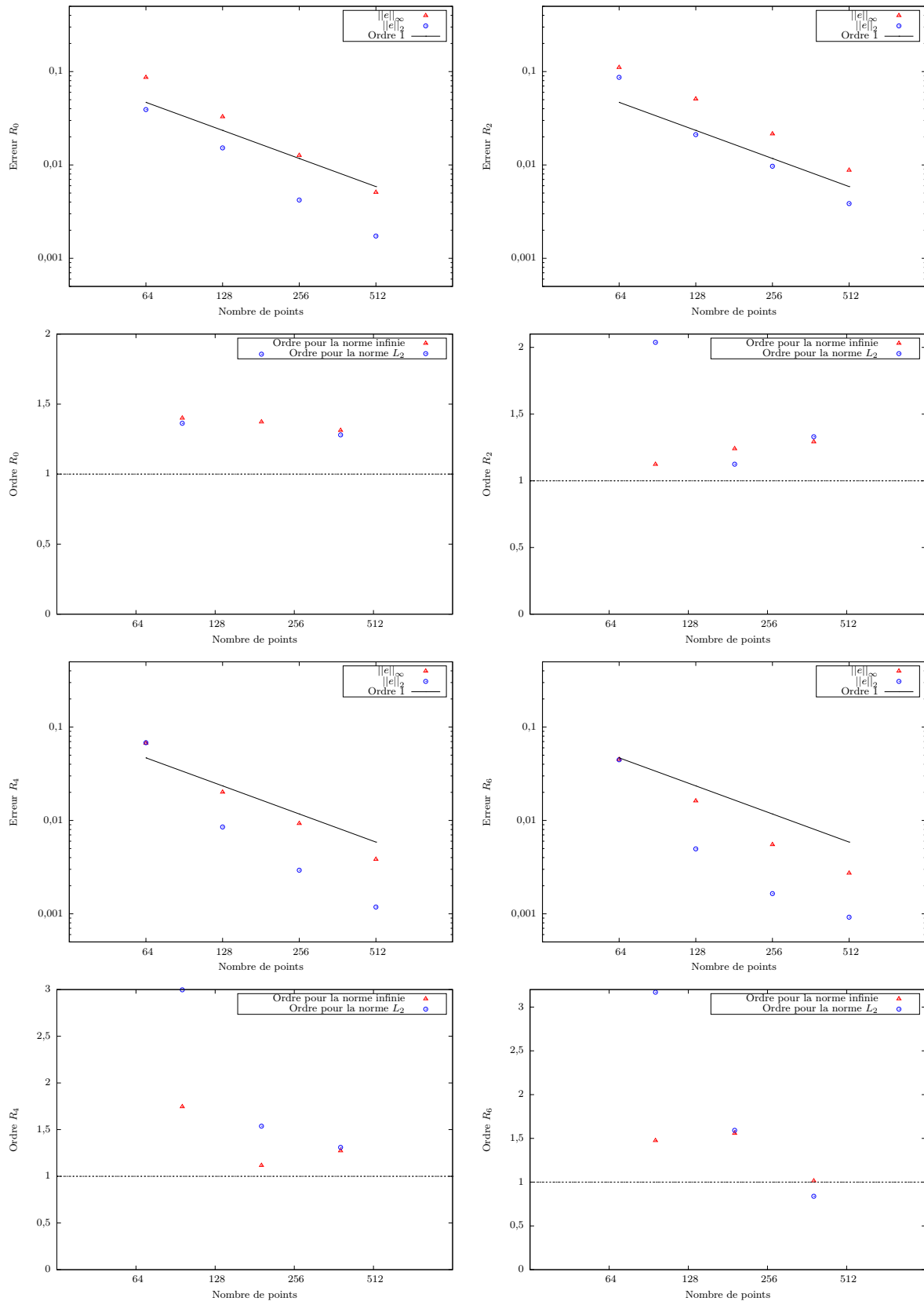
**Figure 3.16** – Représentation de  $R_n$  amplitude modale d'ordre  $n$  en fonction du temps pour différents maillages

La description du premier mode  $R_0$  a déjà été effectuée. Les autres modes suivent la même évolution et on observe bien le retour à 0 i.e. la valeur initiale. La convergence en maillage est visuellement constatée.

Sans surprise les calculs des erreurs et des ordres associés soulignent encore une fois la nécessité d'effectuer le calcul sur plus de  $64 \times 16$  points.

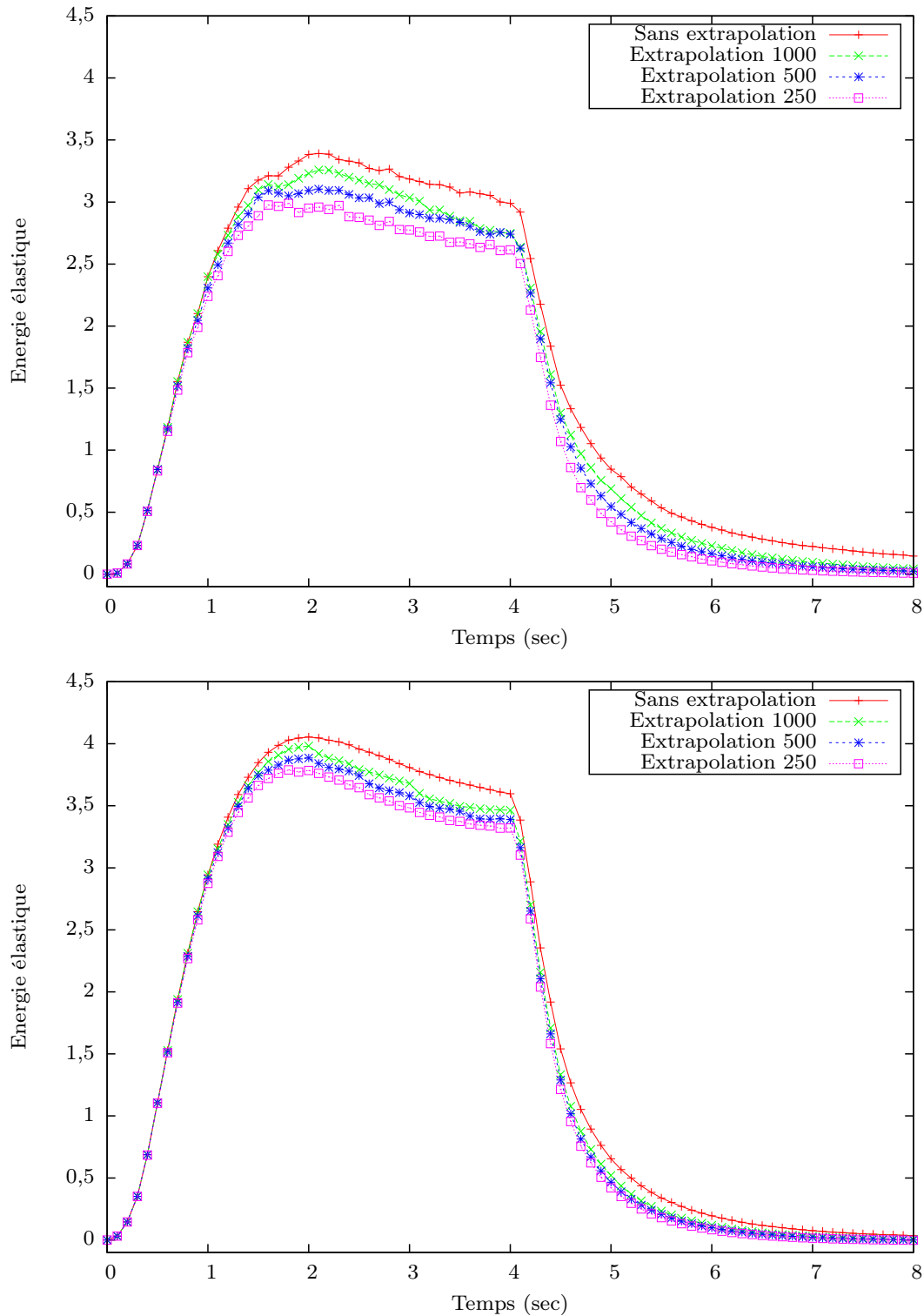
Les résultats sont également proches de ceux obtenus par Sugiyama. Une différence expliquée par une méthode de suivi et une diffusion de l'interface différentes.

La figure (3.17) illustre la convergence de la solution à un ordre sensiblement supérieur à 1. De plus, en comparant avec la première étude effectuée sur  $R_0$  avec une extrapolation de Richardson, une différence est constatée avec un ordre de convergence légèrement supérieur dans la seconde étude.



**Figure 3.17** – Représentation de l'erreur sur l'amplitude modale d'ordre  $n$  en norme infinie et  $L_2$  ainsi que de l'ordre associé

Afin de laisser quelques résultats supplémentaires, nous pouvons également observer l'évolution de la quantité d'énergie élastique au cours du temps. Celle-ci est définie par  $E_s = \int_{\Omega_S} \chi(\text{Tr}(B) - 2) dx$ .

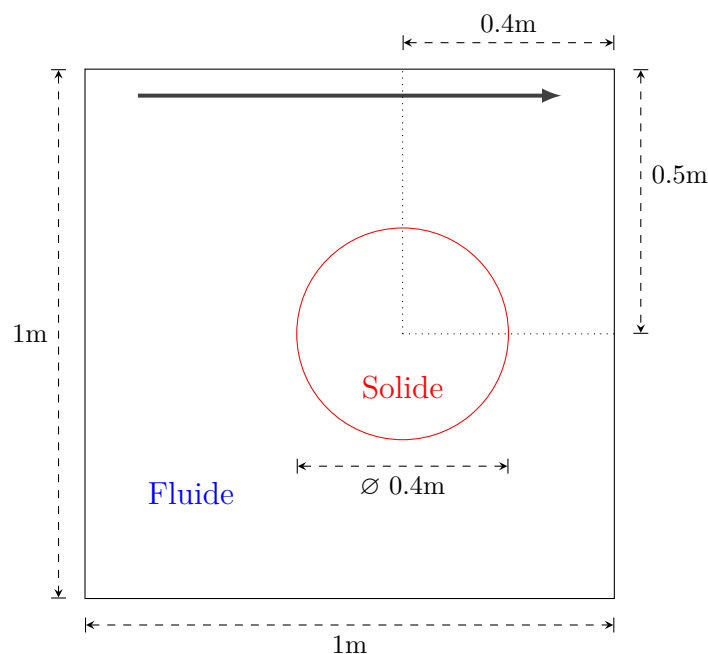


**Figure 3.18** – Énergie élastique en fonction du temps sur maillage  $128 * 32$  (haut) et  $512 * 128$  (bas)

Les résultats sont en parfaite adéquation avec ceux précédemment observés. Une augmentation de la quantité d'énergie élastique est observée au cours des deux premières secondes de la simulation. Une énergie produite par la déformation du solide élastique. Elle stagne lorsque le solide atteint sa première position d'équilibre sous contrainte, puis se diffuse dans le milieu environnant pour redevenir nulle lorsque le solide, libéré de toute contrainte, retrouve sa configuration initiale. Nous avons pu également constater que l'évaluation de la quantité d'énergie était sensible à la fréquence des extrapolations, si bien que les courbes ont tendance à se lisser. Ce phénomène peut s'expliquer facilement, l'énergie dépend de la trace du tenseur de Cauchy à gauche qui s'exprime en fonction des gradients des caractéristiques. Les extrapolations étant plus fréquentes, les gradients sont plus souvent lissés, l'énergie s'en retrouve directement impactée et légèrement amoindrie.

### 3.1.3 Solide élastique en cavité entraînée

Le mouvement de la cavité entraînée est un cas test de référence connu pour les solveurs de Navier-Stokes. [Zhao et al., 2008], puis [Sugiyama et al., 2011] ont étudié ce problème en y insérant initialement un solide élastique circulaire de rayon  $r = 0.2$  m et centré en  $C = (0.6, 0.5)$  m dans une cavité  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  m. La géométrie est donnée par la figure (3.19). À  $t = 0$  s le solide est en position d'équilibre et la paroi supérieure commence son mouvement à la vitesse unitaire horizontale  $v = (1, 0)^T m.s^{-1}$ . Les conditions de non glissement sont imposées sur les autres limites. Les propriétés physiques sont données par le tableau (3.4). Le solide est un matériau Néo-Hookeen de module d'élasticité  $\chi = 0.05$  Pa. La diffusion à l'interface est de l'ordre de  $2h$ .



**Figure 3.19** – Schéma 2D de la configuration initiale de la cavité entraînée. Le domaine de calcul est  $[0, 1] \times [0, 1]$  m.

Même si ce cas test a été pour la première fois utilisé par Zhao, nos résultats sont



| Milieu | $\rho$ ( $kg.m^{-3}$ ) | $\mu$ (Pa.s) | $\chi$ (Pa) |
|--------|------------------------|--------------|-------------|
| Fluide | 1                      | $10^{-2}$    | –           |
| Solide | 1                      | $10^{-2}$    | 0.1         |

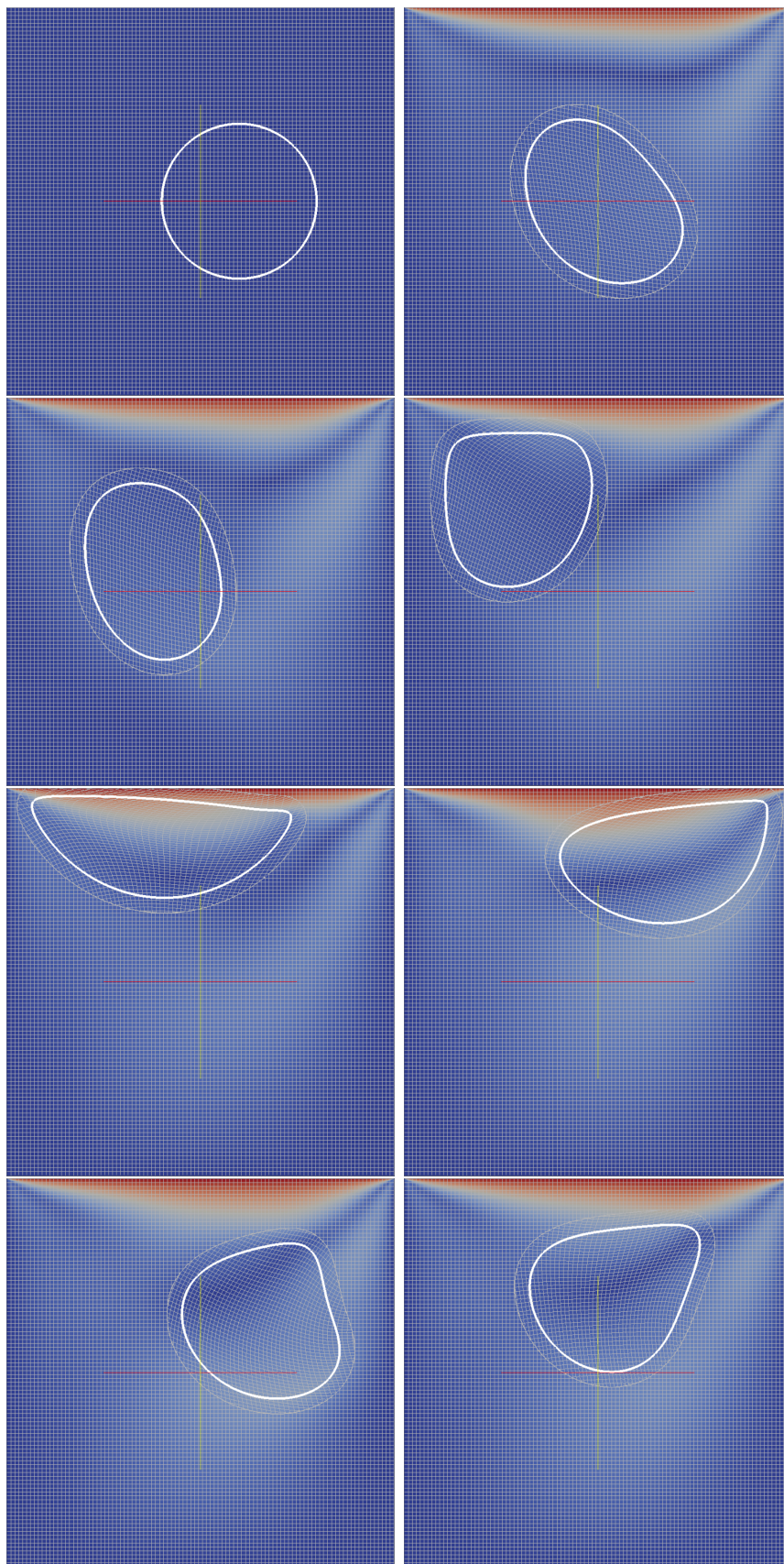
**Table 3.4** – Paramètres physiques des milieux

comparés à ceux obtenus par Sugiyama pour un même maillage de  $1024 \times 1024$  points. Les extrapolations des caractéristiques rétrogrades et ré-initialisation de la level set sont effectuées dès que  $|\nabla\varphi - 1| > 15\%$ . Dans ce cas test, elles ne sont pas nécessaires pour la convergence du calcul car le champ de vitesse n’engendre que très peu de cisaillement à l’interface solide-fluide. Contrairement au cas précédent, le solide est entraîné par le fluide limitant les écoulements rasants et les caractéristiques rétrogrades suivent le mouvement solide. Cependant nous verrons qu’elles apportent une plus grande précision (figure (3.22)), en particulier pour les solutions obtenues avec peu de nœud de calcul. Le pas de temps de la simulation est fixé à  $\Delta t = 10^{-4}$  s.

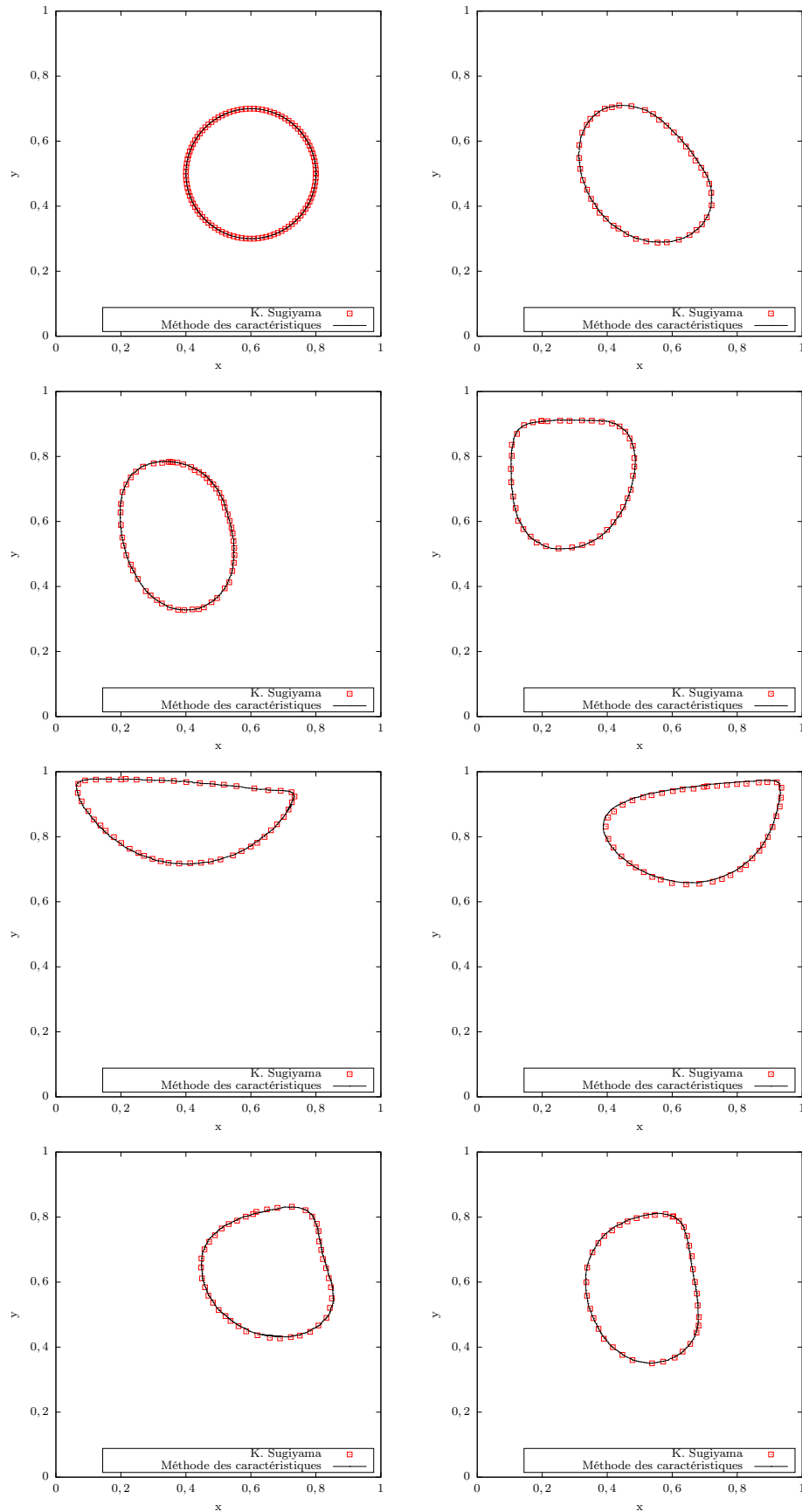
La vorticité et la déformation de la particule sont représentées au fil du temps en plus de la déformation des caractéristiques rétrogrades (3.20). A  $t = 0$  s les caractéristiques sont habituellement initialisées sur la grille cartésienne. Puis elles se déplacent, transportées par le champ de vitesse. La couronne à l’extérieur de la surface, d’une épaisseur dépendant de la durée d’extrapolation, contient les prolongements linéaires des caractéristiques rétrogrades à partir des valeurs contenues à l’intérieur du solide.

Dans un premier temps la paroi supérieure commence à se déplacer entraînant le fluide dans un mouvement circulaire. Ce dernier va ensuite écraser le solide élastique sur la paroi supérieure, laquelle lui infligera de fortes déformations. Le solide, toujours en rotation dans la cavité, s’éloigne progressivement de la paroi, les forces élastiques vont alors contraindre le solide à retrouver sa forme originale. Cette dernière ne sera jamais vraiment atteinte car le fluide en mouvement exerce continuellement une force de pression sur l’interface.

Notons également qu’aucune condition limite spéciale n’a été implémentée pour éviter la fusion entre le solide et la paroi. Les deux corps se repoussent naturellement du   la condition de non glissement.



**Figure 3.20** – Mouvement d'un solide élastique dans une cavité entraînée aux temps  $t = 0$  ; 1.17 ; 2.34 ; 3.52 ; 4.69 ; 5.86 ; 7.03 et 20



**Figure 3.21** – Comparaison de la déformation d'un solide élastique dans une cavité entraînée avec les résultats de Sugiyama aux temps  $t = 0$ ; 1.17; 2.34; 3.52; 4.69; 5.86; 7.03 et 8.20 s

La figure (3.21) montre que nos résultats concernant le suivi d'interface (en ligne continue noire) sont très proches de ceux obtenus par K. Sugiyama (en carrés rouges). Afin d'observer la convergence en espace et comparer nos résultats plus précisément, on étudie le mouvement du centroïde  $\mathbf{x}_c$  que l'on approche de la manière suivante

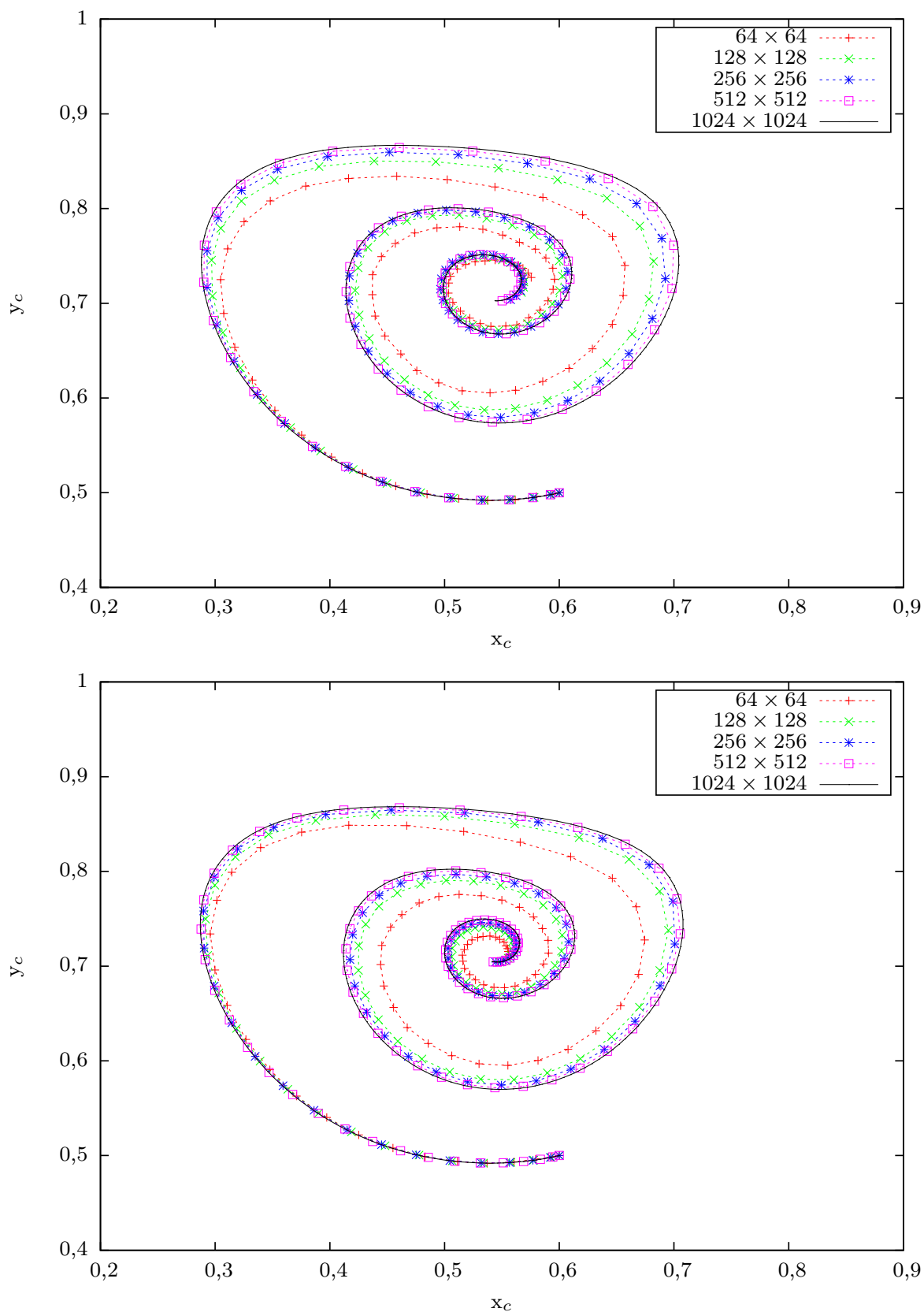
$$\mathbf{x}_c(t) \approx \frac{\sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \Delta_x \Delta_y \mathbf{x}_{i,j} \mathcal{H}_\varphi(\mathbf{x}_{i,j}, t)}{\sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \Delta_x \Delta_y \mathcal{H}_\varphi(\mathbf{x}_{i,j}, t)} \quad (3.2)$$

ou  $\mathcal{H}_\varphi$  est une fonction de Heaviside (ou fonction couleur valant 1 dans le solide et 0 dans le fluide) construite à chaque itération à partir de la level set  $\varphi$  et lissée sur  $2h$ . À l'inverse, la méthode proposée par K. Sugiyama impose un transport de la fonction couleur. Afin de se rapprocher de cette méthode, l'advection de la fonction couleur a été testée mais rapidement abandonnée du fait de la forte diffusion numérique engendrée lors des grandes déformations. Sa ré-initialisation étant moins évidente que pour une fonction level set, l'épaisseur constante du lissage de la fonction couleur était plus difficilement contrôlable.

Dans un premier temps, nous choisissons de mettre encore une fois en évidence l'apport des extrapolations des caractéristiques rétrogrades et ré-initialisations de la level set. Les résultats obtenus sont comparés sur différents maillages avec et sans ces corrections.

Visuellement, il apparaît que les extrapolations permettent une convergence plus rapide. Comme en témoignent les figures (3.22) et (3.23) où est comparée au cas par cas l'évolution de la position du centroïde pour chaque maillage. Sur un maillage très fin de l'ordre de  $1024 * 1024$  points, les solutions sont très proches. En revanche la diminution du nombre de nœuds de calcul inflige une perte de précision non négligeable sur la méthode sans extrapolation. Un résultat très intéressant puisqu'il permet d'obtenir des solutions précises sans être dans l'obligation d'augmenter la densité du maillage et à posteriori les temps de calcul.

Les résultats corrigés sont comparés avec ceux de Sugiyama sur la figure (3.24). Tout d'abord d'un point de vue purement visuel, dans les deux cas la convergence en espace est constatée. Il est à noter un petit décalage sur le calcul de la position du centroïde. Ces différences ont déjà été mentionnées et sont dues au calcul du centroïde (3.2) et tout particulièrement à l'estimation de la fonction de Heaviside  $\mathcal{H}_\varphi$ . Laquelle n'est encore une fois pas calculée de la même manière, d'autant plus que nous avons constaté sur la figure (3.21) que l'évolution de l'interface était quasi identique.



**Figure 3.22** – Étude de l'évolution de la position du centroïde pour différents maillages. Résultats obtenus en haut sans extrapolation, en bas avec extrapolations.

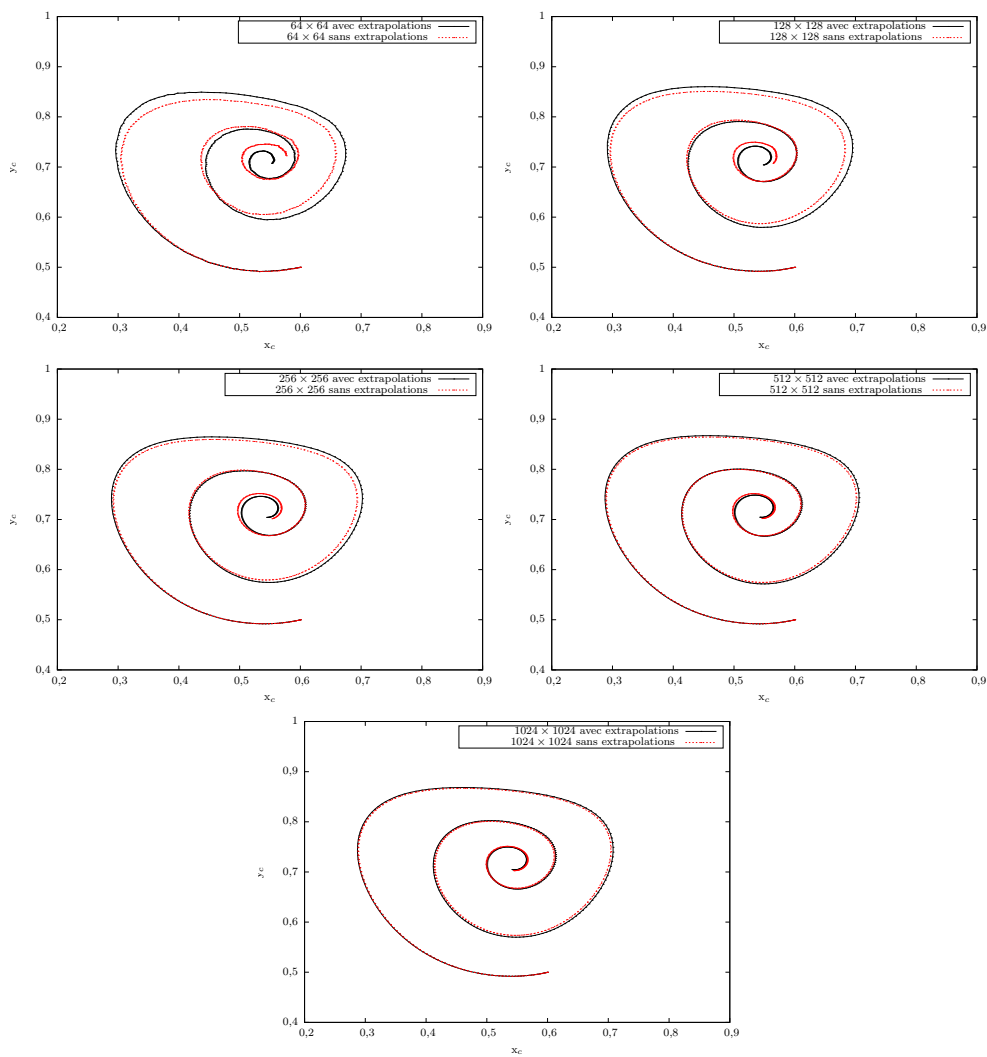
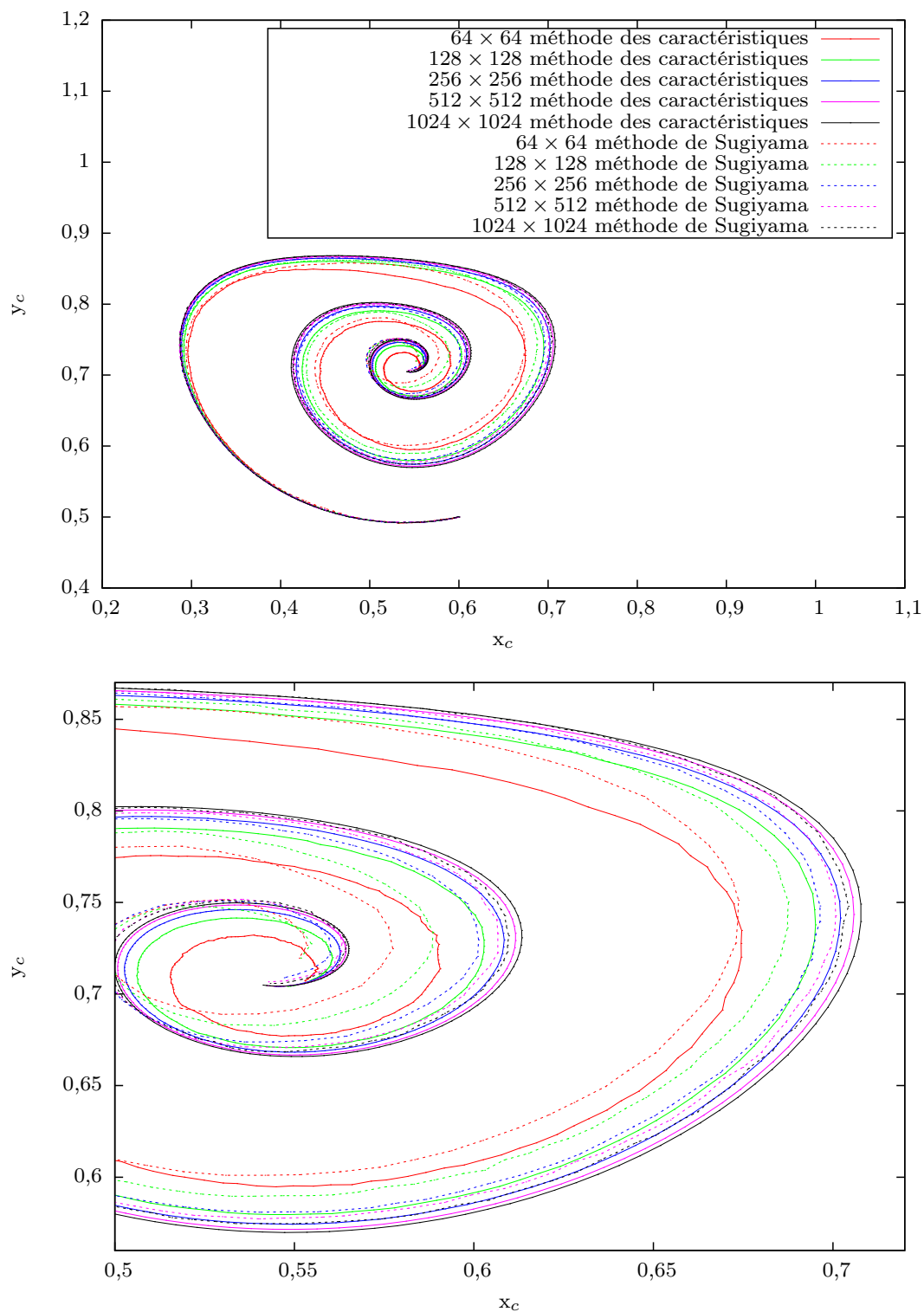


Figure 3.23 – Comparaisons des résultats obtenus sans et avec extrapolations.



**Figure 3.24** – Étude de l'évolution de la position du centroïde pour différents maillages. Comparaisons des résultats obtenus avec extrapolations en lignes pleines et ceux de Sugiyama en pointillés.

L'ordre de convergence peut être calculé en observant la distance du centroïde  $\mathbf{x}_c$  par rapport à la résolution la plus fine  $N_x = 1024$ . Les erreurs sont estimées suivant les normes  $L_\infty$  et  $L_2$  :

$$\|\epsilon\|_\infty^{i,k} = \max_{t \in [0, T]} |\mathbf{x}_c(t, \mathcal{M}_i) - \mathbf{x}_c(t, \mathcal{M}_k)|$$

$$\|\epsilon\|_{L_2}^{i,k} = \left( \frac{1}{T} \int_0^T |\mathbf{x}_c(t, \mathcal{M}_i) - \mathbf{x}_c(t, \mathcal{M}_k)|^2 dt \right)$$

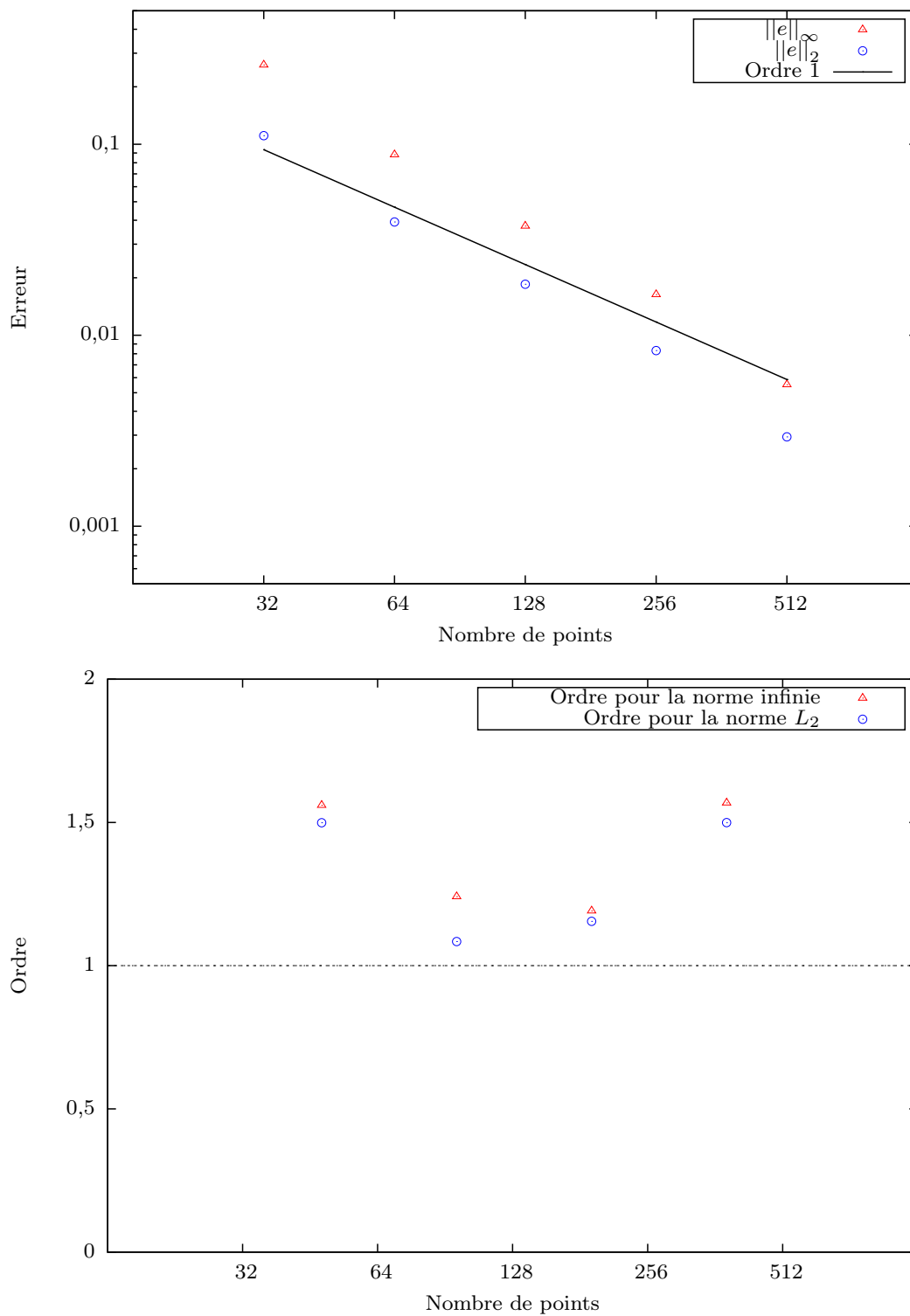
La figure (3.26) montre une convergence légèrement supérieure à l'ordre 1 en prenant pour référence la solution obtenue sur le maillage  $\mathcal{M}_{1024}$ . Le tableau des valeurs des erreurs suivant les deux normes (3.25) est également donné.

| $\mathcal{M}_i$ | $\ \epsilon\ _\infty^{i,k}$ | $\ \epsilon\ _{L_2}^{i,k}$ |
|-----------------|-----------------------------|----------------------------|
| 32              | 0.2601054                   | 0.1108329                  |
| 64              | 8.8217780E-02               | 3.9209943E-02              |
| 128             | 3.7322562E-02               | 1.8495437E-02              |
| 256             | 1.6342938E-02               | 8.3059249E-03              |
| 512             | 5.5121845E-03               | 2.9374890E-03              |

**Figure 3.25** – Mesure de l'erreur sur différents maillages en norme  $L_\infty$  et en norme  $L_2$

Finalement l'étude de l'évolution du centroïde et les ordres obtenus cohérents avec notre méthode de résolution (à l'ordre 1) permettent de conclure sur la validité de notre modèle. Pour aller plus loin, un dernier cas test est proposé.



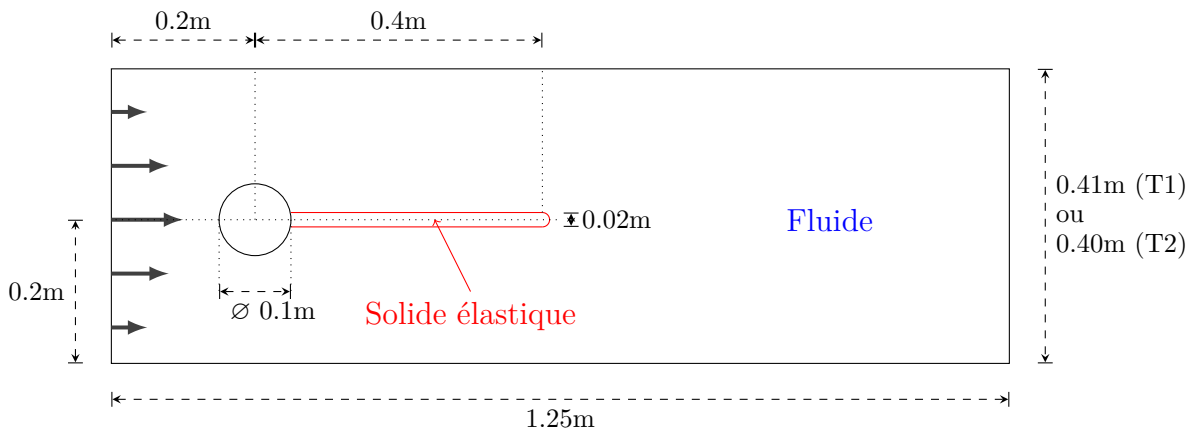


**Figure 3.26** – Erreur en norme  $L_\infty$  et  $L_2$  à gauche ainsi que les calculs d'ordre associés à droite

### 3.1.4 Structure élastique dans une allée de Bénard-Von Karman

Le dernier cas test que étudié ici fait figure de référence dans la littérature pour la représentation des phénomènes d'interaction fluide-structure élastique. Il a été initialement introduit par [Turek and Hron, 2006] mais aussi repris par [Dunne and Rannacher, 2006] et [Bhardwaj and Mittal, 2012]. Ce dernier propose des variantes intéressantes en effectuant une étude paramétrique sur le solide. Notons que parmi le grand nombre de chercheurs utilisant ce cas test pour la validation de leurs codes de calcul, tous n'utilisent pas les paramètres originaux établis par Turek. Une variété dans l'approche qui rend parfois difficile le choix de l'implémentation adéquate du modèle. C'est pourquoi nous proposons à la fin de cette section un bref résumé des articles dont nous nous sommes inspirés.

L'étude consiste à analyser le mouvement d'un drapeau 2D élastique attaché à un solide rigide circulaire immergé dans une allée de fluide. Afin de générer les tourbillons de Von Karman il est nécessaire de perturber l'écoulement fluide. Cette perturbation peut se faire de deux manières différentes lesquelles donnent lieu à deux études : cas **T1** et cas **T2**.



**Figure 3.27** – Schéma 2D de la configuration initiale requise pour le cas test T1 de Turek sur le domaine  $[0, 1.25] \times [0, 0.41]$ m. Le cas test T2 est effectué sur le domaine  $[0, 1.25] \times [0, 0.40]$ m

Quelque soit le cas étudié, le solide cylindrique est traité par une pénalisation à l'ordre 1 i.e. que la vitesse fluide est directement annulée à l'intérieur du système.

Nous considérons sur les bords supérieurs et inférieurs une condition de non-glissement (paroi) et à droite une condition de sortie de type Neumann.

Nous choisissons de nous rapprocher du cas *FSI2* proposé par [Turek and Hron, 2006] pour un fluide régi par le nombre de Reynolds  $Re = 100$ . Les viscosités fluide et solide sont égales  $\mu_F = \mu_S = 1 Pa.s$  tandis que les densités sont fixées à  $\rho_F = 10^3 kg.m^{-3}$  pour le fluide et  $\rho = 10^4 kg.m^{-3}$  pour le solide. La gravité n'est pas pris en compte.

• CAS T1 :

Une première méthode consiste à légèrement décentrer le solide afin de créer une petite perturbation de l'écoulement. La configuration initiale est illustrée sur la figure (3.27).

La vitesse initiale est nulle sur l'ensemble du domaine puis progressivement une condition d'entrée parabolique à la limite gauche de type Poiseuille est imposée :

$$\mathbf{v}_g(t) = \begin{cases} 1.5 \frac{y(H-y)}{\left(\frac{H}{2}\right)^2} \left( \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)}{2} \right) & \text{si } t < 2 \\ 1.5 \frac{y(H-y)}{\left(\frac{H}{2}\right)^2} & \text{si } t \geq 2, \end{cases} \quad (3.3)$$

avec  $\mathbf{v}_g$  vitesse d'entrée à la limite gauche,  $H = 0.41\text{m}$  la hauteur totale du domaine et  $1.5 \text{ m.s}^{-1}$  la vitesse maximale nous octroyant la vitesse moyenne  $\mathbf{v}_{moy} = 1 \text{ m.s}^{-1}$  également notée  $\bar{U} = 1 \text{ m.s}^{-1}$  dans la littérature.

Notons que l'instauration progressive de la vitesse à l'aide d'un cosinus est une idée initialement proposée par [Turek and Hron, 2006] pas toujours reprise par la communauté. Elle est à l'origine utilisée pour favoriser la stabilité du calcul en limitant les effets de compression du solide élastique conduisant à un mouvement initiale plus progressif.

• CAS T2 :

Pour ce second la configuration initiale est définie parfaitement symétrique sur le domaine  $[0; 1.25] \times [0; 0.40]$  m (au lieu du domaine  $[0; 1.25] \times [0; 0.41]$  m pour le cas **T1**). Seule la hauteur du domaine est modifiée en conservant la configuration initiale représentée sur la figure (3.27).

La perturbation de l'écoulement à lieu cette fois sur la vitesse initiale imposée au fluide. À  $t = 0$  s la vitesse est fixée à :

$$\mathbf{v}_g(0) = \begin{cases} 1.4 & \text{si } y > 0.2 \\ 1.6 & \text{si } y \leq 0.2, \end{cases}$$

puis la dépendance en temps sur la condition d'entrée est supprimée :

$$\mathbf{v}_g(t) = 1.5 \frac{y(H-y)}{\left(\frac{H}{2}\right)^2} \quad (3.4)$$

Le cas test devient alors nettement plus raide et soumet directement le solide élastique à de fortes contraintes. Nous souhaitons observer la réponse du modèle numérique soumis

à cette intense sollicitation.

Ces caractéristiques physiques de l'écoulement cisailé rasant à la limite de la turbulence, ainsi que des temps de simulations étalées sur plus de 30 s en font un cas difficile à traiter. L'interface doit impérativement être précisément suivie, car toute perte de masse aura des répercussions négatives sur le mouvement du solide. Notre méthode de transport d'ordre élevé couplée à un nombre de points conséquent et des corrections fréquentes sont parfaitement aptes à gérer cette difficulté. En effet, comme déjà évoqué, le caractère fortement cisailé du fluide est un frein considérable pour notre méthode. De l'ensemble des cas tests présentés dans ce chapitre, il s'agit de celui qui dépend le plus de ces algorithmes de reconstruction. Les extrapolations des caractéristiques rétrogrades et ré-initialisation de la level set seront effectuées pour toute perte sur les informations de distances supérieures à 20% (environ une correction toutes les 150 itérations). Une conditions nécessaire pour la minimisation de l'accumulation des erreurs au cours du temps. La zone de diffusion est fixée à  $2h$ .

Signalons dès à présent les différences par rapport au cas test de référence :

- la structure élastique est arrondie aux bords, ceci afin d'éviter les discontinuités sur le calcul de la normale à l'interface nécessaire aux algorithmes de correction. Cette forme permet de minimiser en outre l'erreur commise lors des étapes de reconstruction de la fonction distance ;

- une autre complication rencontrée est liée à la loi de comportement de Saint Venant Kirchhoff utilisée pour ce cas test. Il s'agit d'un modèle d'élasticité compressible que nous ne sommes pas en mesure de traiter avec notre modèle 1-fluide incompressible complètement eulérien. C'est pour quoi nous avons remplacé ce modèle par celui utilisé jusqu'à présent : le modèle Néo Hookéen.

Afin de faire correspondre au mieux ces deux lois de comportement, l'ordre de grandeur des coefficients d'élasticité à employer a été estimé à l'aide du théorème de Rivlin Ericksen (1.55) et du tableau de correspondance des coefficients (1.9). Nous savons que Turek utilise les coefficients de Lamé suivant :

→ le coefficient de poisson fixé  $\nu_S = 0.4$  traduisant la compressibilité du solide ;

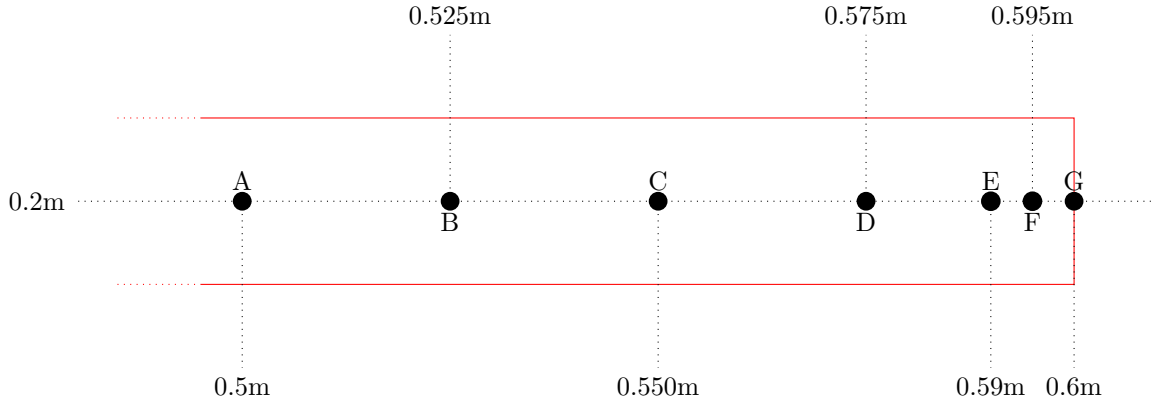
→ le module de cisaillement  $\mu_S = \frac{1}{2}10^5 Pa.s$ .

Ce qui nous amène à estimer un module de cisaillement pour le modèle Néo Hookéen de l'ordre de  $\mu_S = \frac{3}{4} \cdot 10^6 Pa.s$ . Il s'agit d'une légère surestimation arbitraire de  $\mu_S$  pour compenser l'absence de dépendance suivant la trace de  $B$  (et donc de  $\lambda_S$ ).

Le matériau est donc fortement rigide. De faibles pas de temps sont alors nécessaire pour la résolution des équations afin de capter les ondes élastiques. Dans ce cas particulier, pour un maillage cartésien dont le pas d'espace minimum atteint  $h = 10^{-3}$  m, nous sommes contraint d'utiliser un pas de temps fixé à  $\Delta t = 10^{-5}$  s après estimation de la vitesse des ondes suivant la formule précédemment écrite (2.7). Les temps de calcul pour une visualisation de l'ordre de 20 s s'en trouveront très fortement impactés (2000000 d'itérations et 50 jours de calcul) ;

- Le maillage est composé de  $1100 \times 400$  points répartis sur un domaine de taille  $[0; 1.25] \times [0; 0.41]$  de manière non uniforme de tel sorte que 30 cellules soient présentes sur l'épaisseur du corps élastique. Il s'agit d'une valeur minimum pour garantir un modélisation acceptable. Une région plus dense en cellule est également positionnée dans les zones de déplacement

du drapeau. Une telle densité est certes suffisante pour cette simulation mais néanmoins pas garante d'une conservation de masse totale optimale au cours des nombreuses itérations que nous nous apprêtons à effectuer. C'est pourquoi le point  $A(0.2; 0.6)$  (initialement positionné par Turek afin de mesurer des amplitudes de déformation horizontale et verticale (3.5) ainsi que les fréquences) a été re-positionné en  $(0.2; 0.5)$  pour cas **T1**. Le cas **T2** ayant été effectué ultérieurement nous avons placé plus de points comme représenté sur la figure (3.28).



**Figure 3.28** – Représentation schématique de la position des points en bout de drapeau

Afin de pouvoir se comparer avec la littérature, l'amplitude des oscillations est calculée en fonction des valeurs maximales et minimales atteintes par les différents points :

$$\text{Amplitude} = \frac{1}{2}(\text{Max} - \text{Min}) \quad (3.5)$$

Période et fréquence sont toujours calculées à partir de la dernière période d'oscillation.

A des fins de clarté, l'ensemble des paramètres physiques utilisé est représenté dans le tableau (3.5).

| Milieu | $\rho$ ( $kg.m^{-3}$ ) | $\mu$ (Pa.s) | $\chi$ (Pa)  |
|--------|------------------------|--------------|--------------|
| Fluide | $10^3$                 | 1            | –            |
| Solide | $10^4$                 | 1            | $0.375.10^6$ |

**Table 3.5** – Paramètres physiques du matériau pour les deux cas étudiés **T1** et **T2**

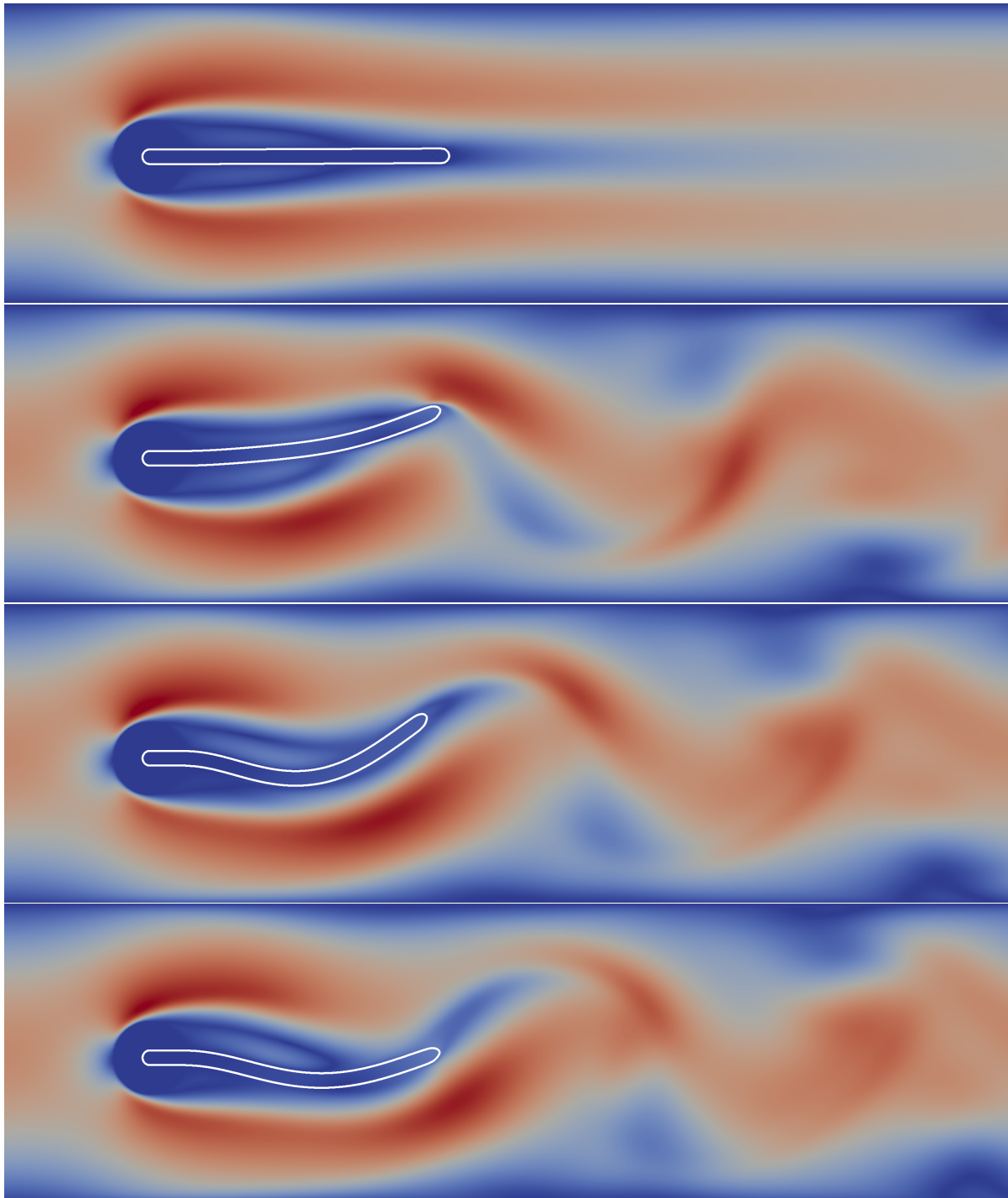
### Observations et résultats pour le cas **T1**

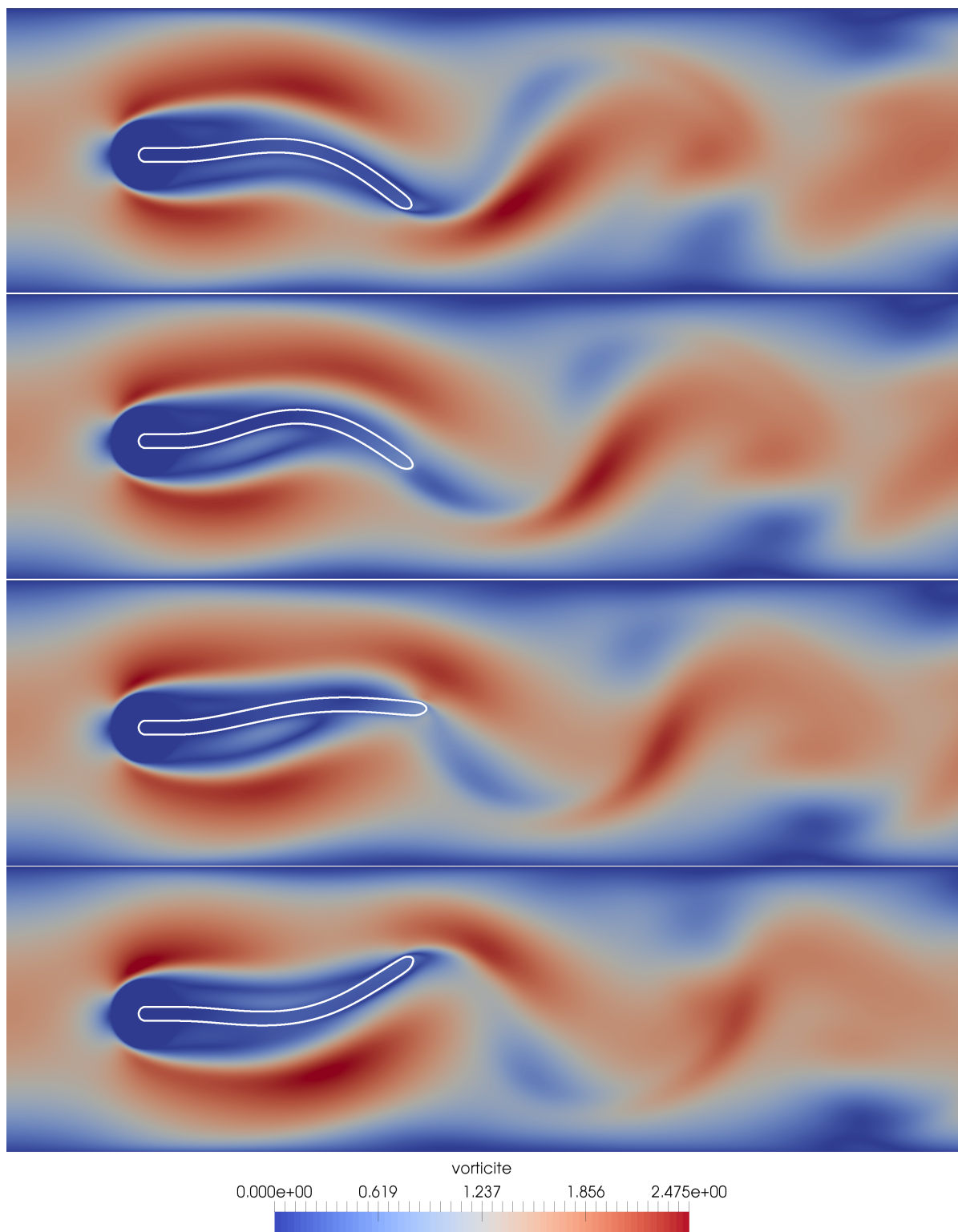
Quand le régime périodique est atteint, les résultats obtenus par le cas **T1** sont en tout point similaires avec ceux obtenus par le cas **T2**. Bien que les solutions soient décalées de part la mise en mouvement progressive du fluide, les fréquences et amplitudes sont identiques. Ce décalage d'environ 5s est illustré par la figure (C.2) de l'annexe C. Le cas

**T2**, grâce à l'utilisation d'une condition limite immédiate sur la vitesse, permet un gain considérable en temps de calcul. C'est pourquoi les résultats obtenus à partir du cas **T1** figurent uniquement dans l'annexe C, à la vue du lecteur intéressé.

### Observations et résultats pour le cas **T2**

A présent nous nous intéressons au second cas d'étude **T2** où la vitesse du fluide est immédiatement imposée (3.4).





**Figure 3.29** – Représentation d’une période d’oscillation prise au temps  $t = 2, 13.96, 14.06, 14.12, 16.04, 16.12, 16.18, 18.06$  sec

La dynamique périodique du solide au cours du temps est observée sur la figure (3.29) pour le cas **T2** avec une condition initiale sur la vitesse décalée (3.4). Dans un premier temps, le fluide contourne le cylindre et les déformations du solide sont

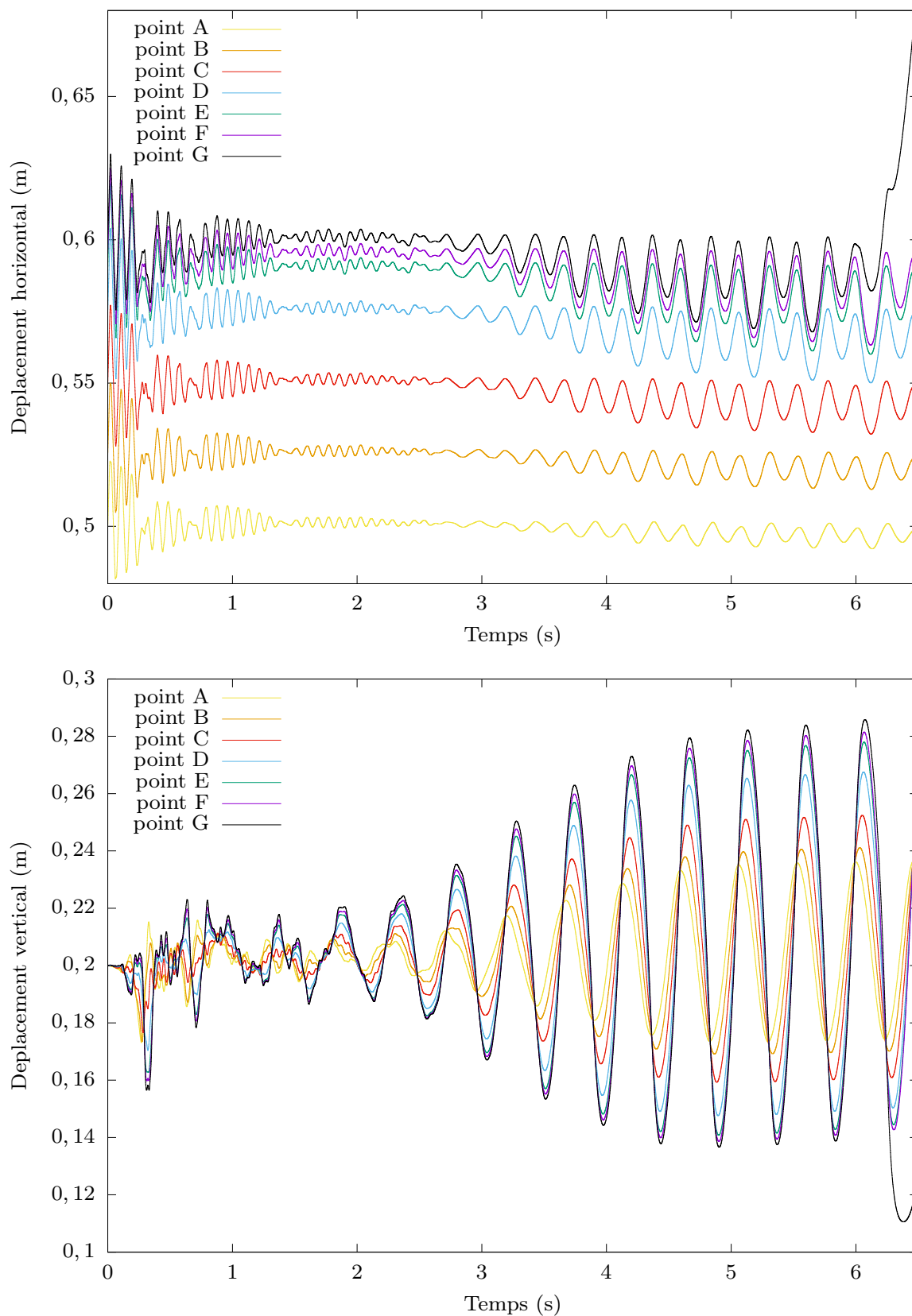
importantes en raison de l'établissement brutal de l'écoulement et de la forte résistance du matériau. Le sillage est chaotique pendant environ  $t = 1.5$  s, période durant laquelle le solide est également fortement comprimé et étiré. Un phénomène observable sur la figure (3.30) uniquement. Puis une instabilité périodique se crée au bout du drapeau. Le solide élastique se déforme en oscillant essentiellement selon l'axe  $0x_2$  pendant 1s avant d'à nouveau se comprimer. L'écoulement génère les premières oscillations verticales réellement périodiques du solide (3.30). Ces dernières s'amplifient jusqu'à atteindre une amplitude limite à environ  $t = 4$  s dictée par les instabilités tourbillonnaires symétriques et périodiques de Bénard-Von Karman elles-mêmes générées par l'écoulement de Poiseuille autour du cylindre en régime laminaire.

Pour conclure, visuellement le phénomène est beaucoup plus chaotique en début de simulation que le cas **T1**. Le régime périodique est en revanche identique mais est atteint beaucoup plus rapidement.

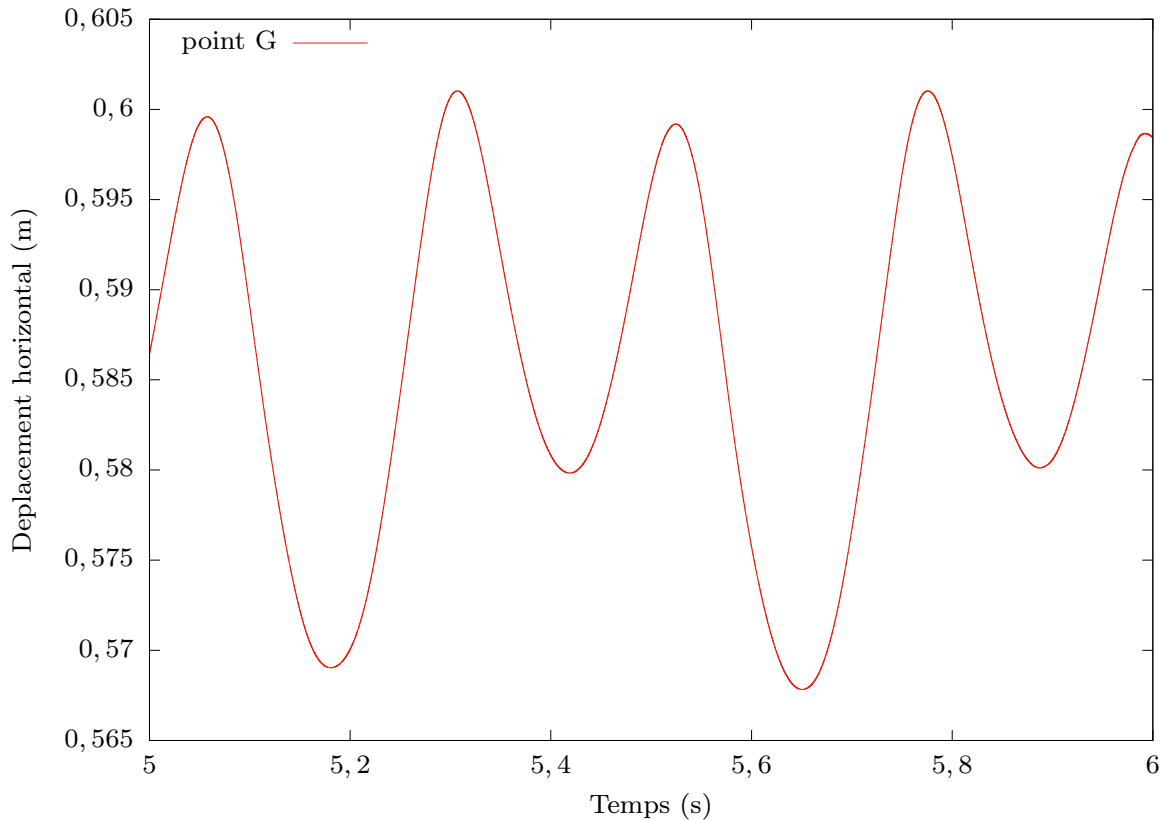
(3.30)

---





**Figure 3.30** – Représentation du déplacement horizontal puis vertical en fonction du temps pour le cas **T2**



**Figure 3.31** – Phénomène de double compression du solide en fonction du temps pour le cas **T2**

L'observation des déplacements des points A, B, C, D, E, F et G renseigne beaucoup plus précisément sur les différences apportées par un cisaillement sur la vitesse en condition initiale (3.30) et permettent de valider nos précédentes observations.

Dans un premier temps, le mouvement chaotique initiale est observé, aussi bien pour le déplacement horizontal que vertical. Les ondes élastiques longitudinales et transversales s'entremêlent immédiatement et viennent fortement chahuter le solide élastique. Il se comprime et se tord violemment sous l'effet des ondes de compression. On devine que les contraintes générées sont très importantes.

Contre toute attente le phénomène s'adoucit progressivement, les tourbillons de Von Karman apparaissent et le régime périodique est atteint plus rapidement. Notons qu'une fois le régime périodique établi, seul des effets de compression apparaissent, le solide ne s'étire plus et ne dépasse plus jamais sa longueur initiale. Ce comportement est également présent dans la littérature.

Notons également que, comme attendu, la perte de masse imputable à notre méthode fait perdre dans l'ordre chronologique la position des points G (aux alentours des 6.2 sec), F (6.7 sec) et E (7.6 sec). Ce départ est visible à la fin de la figure (3.30). La perte est évaluée à 2% de la masse totale après 6 s de temps physique correspondant à 600000 itérations et 20 jours de calcul.

Pour chaque point les fréquences sont naturellement égales i.e. verticalement  $2.11 \text{ s}^{-1}$  et

horizontalement  $4.303 \text{ s}^{-1}$  (3.32). Il n'en est pas de même pour les amplitudes et nous les représentons sur le tableau (3.33). Comme attendu, plus les points sont situés proche de l'extrémité du drapeau plus l'amplitude est importante. L'amplitude verticale maximale obtenue par le point G situé en bout de drapeau (correspondant au point A de Turek) est de l'ordre de 0.073m contre 0.08m pour Turek. Des résultats très proches que l'on compare avec la littérature dans le tableau (3.6).

Notons que l'amplitude horizontale est compliquée à obtenir de part le comportement à double compression du solide i.e. que le solide se comprime périodiquement suivant deux phases qui apparaissent sur la figure (3.31); lesquelles donnent lieu à deux amplitudes. On donne dans le tableau (3.33) pour chaque point :

- les calculs des amplitudes moyennes obtenues entre 5.4 s et 5.8 s ;
- les calculs des fréquences calculées à partir d'une seule phase de compression entre 5.8 s et 6.1 s.

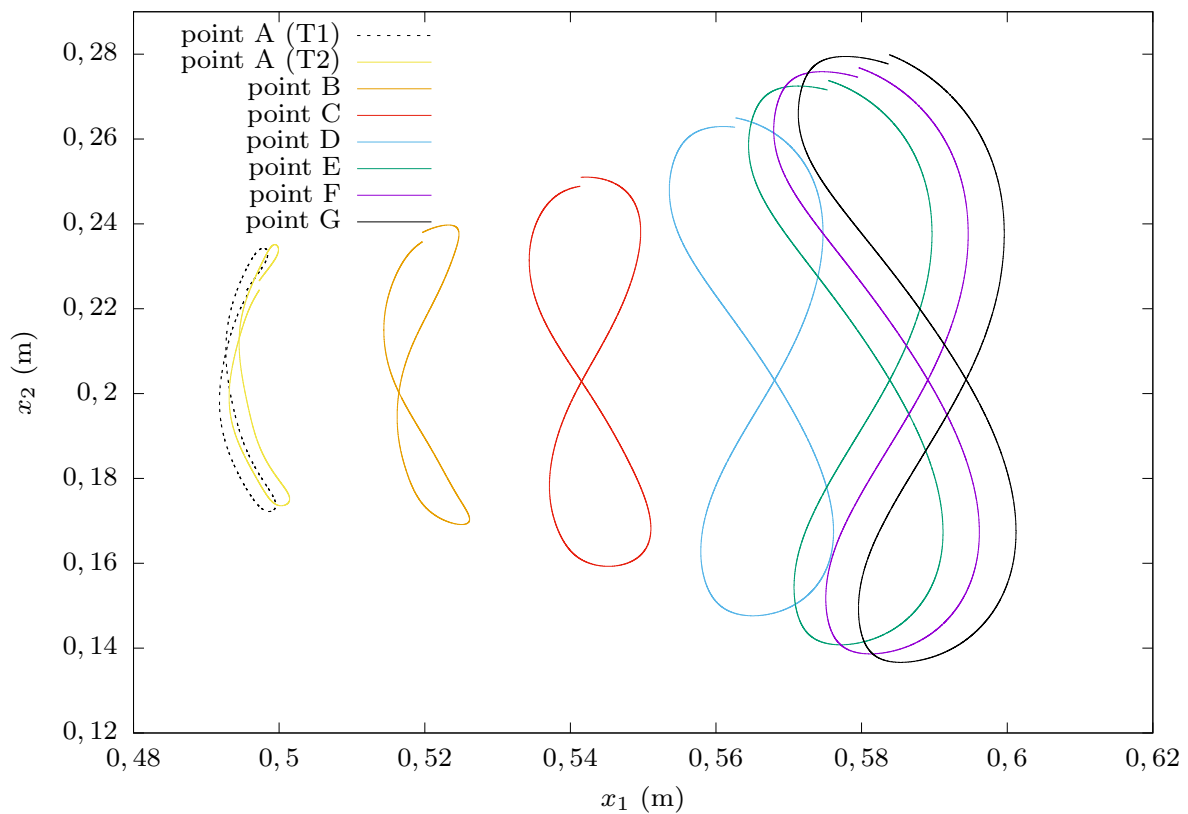
| Fréquence horizontale ( $s^{-1}$ ) | Fréquence verticale ( $s^{-1}$ ) |
|------------------------------------|----------------------------------|
| 4.3                                | 2.11                             |

**Figure 3.32** – Fréquences horizontales et verticales

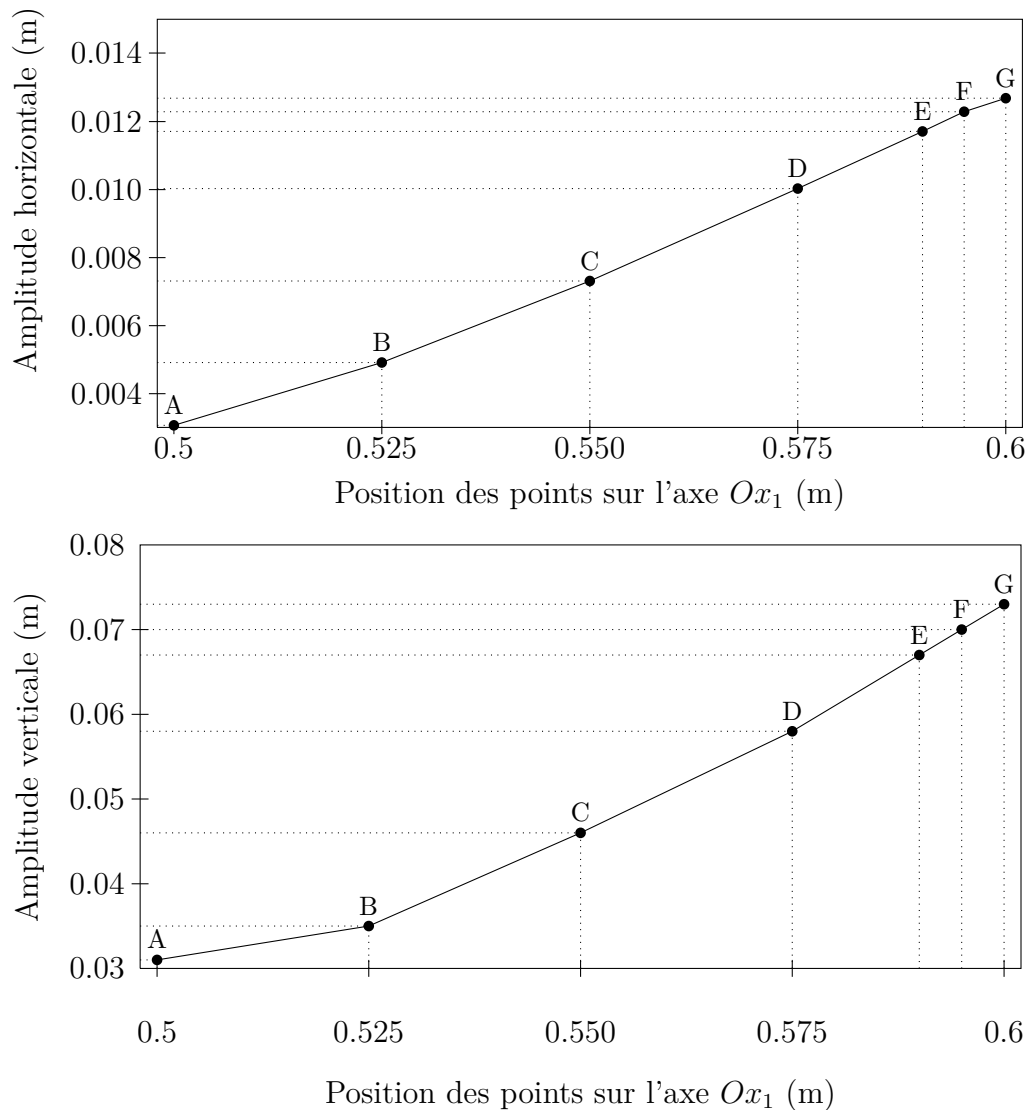
| Point | Amplitude horizontale moyenne $m$ | Amplitude verticale $m$ |
|-------|-----------------------------------|-------------------------|
| A     | 0.00307                           | 0.031                   |
| B     | 0.00492                           | 0.035                   |
| C     | 0.00731                           | 0.046                   |
| D     | 0.01002                           | 0.058                   |
| E     | 0.01171                           | 0.067                   |
| F     | 0.01228                           | 0.07                    |
| G     | 0.01268                           | 0.073                   |

**Figure 3.33** – Amplitudes horizontales et verticales aux différents points

Une dernière remarque est à faire sur le comportement élastique du solide. En traçant les amplitudes maximales horizontales et verticales en fonction de la position de chaque points sur l'axe  $Ox_1$  (3.35), nous constatons que la déformation n'est pas uniforme le long de la structure mais quasi-linéaire. C'est-à-dire que plus on se rapproche de l'extrémité du drapeau plus les déformations sont importantes. Des informations qui confirment l'intuition qui veut que le solide se déforme peu dans la zone proche du cylindre, cette dernière étant plus isolée de l'écoulement. On peut également tirer la même conclusion en observant les trajectoires des point sur une période comprise entre  $4.66629 < t < 5.13256$  s (3.34). Notons que



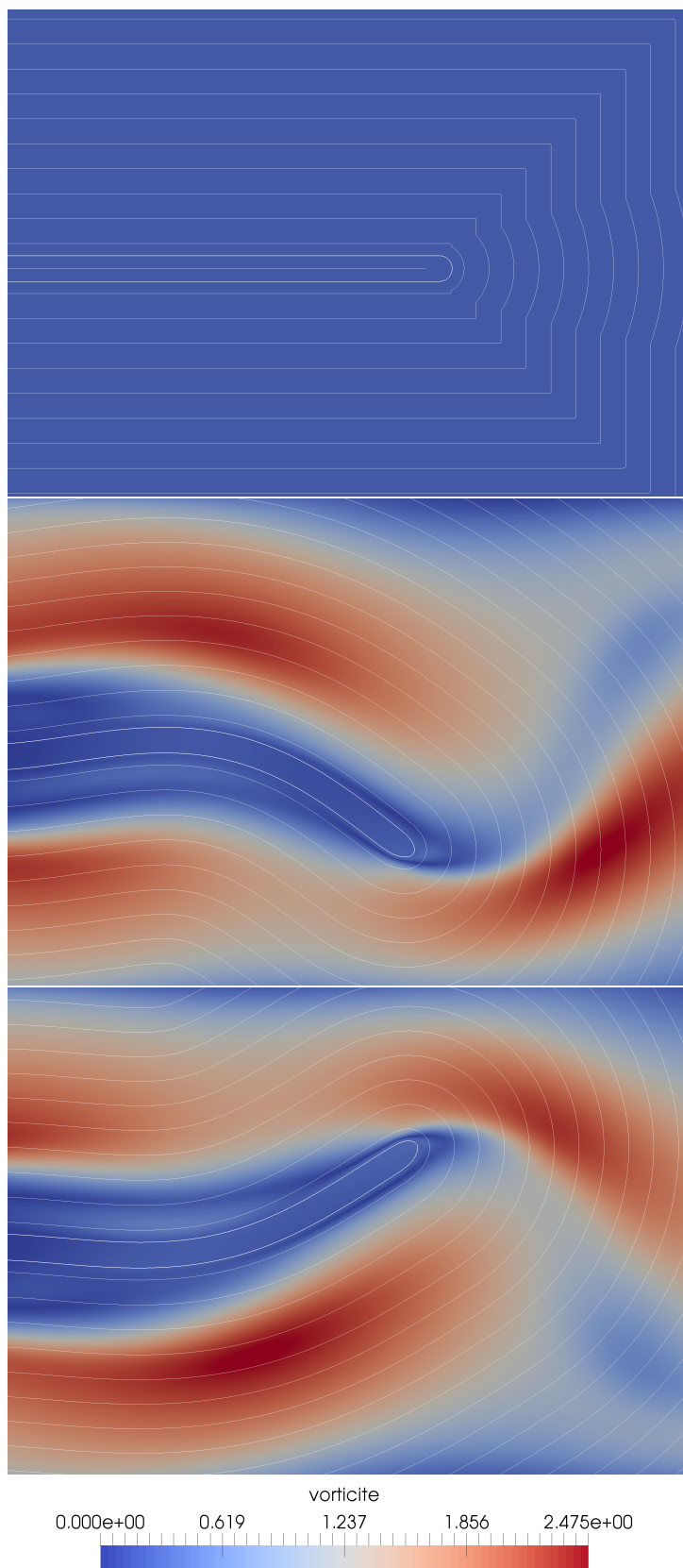
**Figure 3.34** – Trajectoires des points A, B, C, D, E, F et G



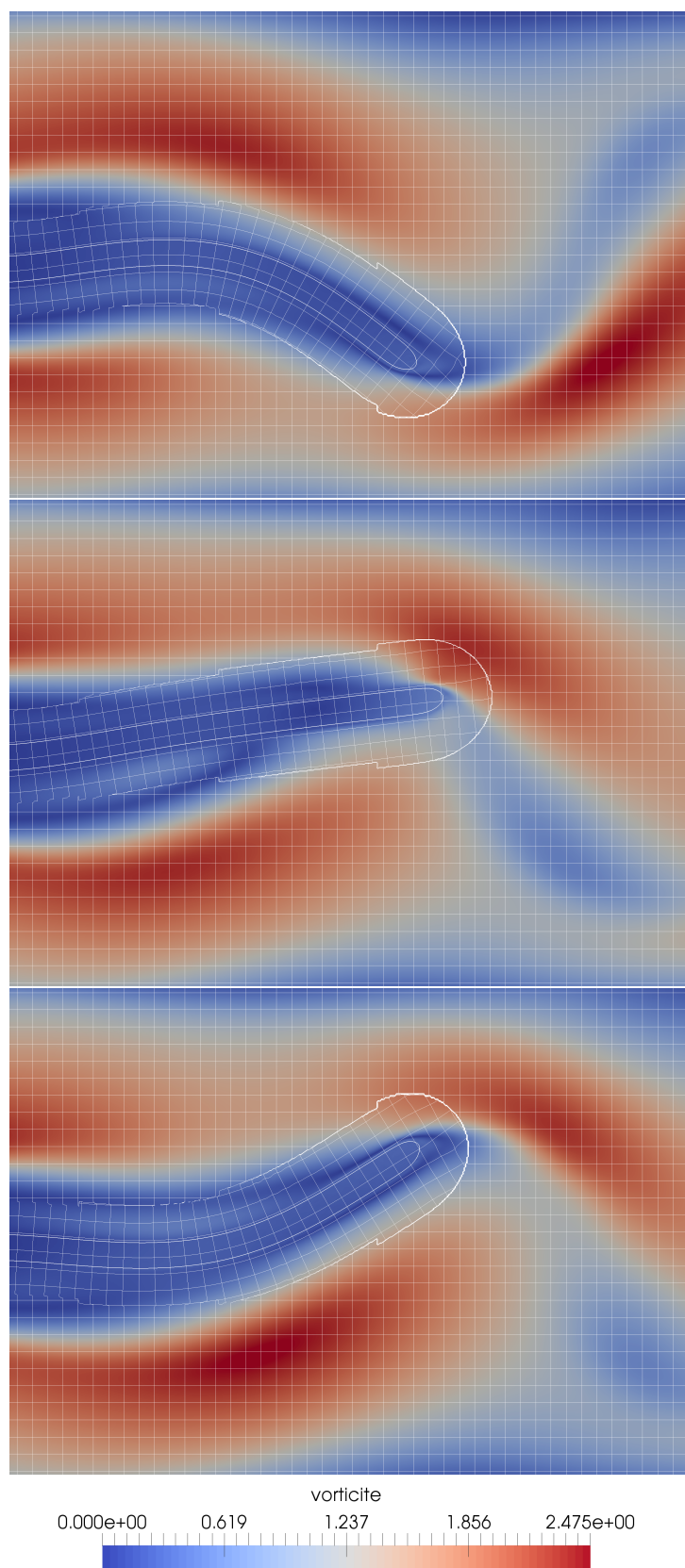
**Figure 3.35** – Représentation des amplitudes verticales et horizontales en fonction des points A, B, C, D, E, F, et G.

Pour finir nous visualisons le comportement de la level set figure (3.36) et des caractéristiques rétrogrades figure(3.37) au cours du temps, correction après correction. Concernant la level set, l'algorithme de reconstruction est puissant et permet la nette conservation de l'interface mais aussi d'obtenir une redistanciation toujours cohérente avec le mouvement du drapeau. Même constatation sur les extrapolations des caractéristiques rétrogrades en particulier sur la zone sensible au bout du drapeau. Précisons qu'il ne se s'agit pas de la zone de diffusion représentée sur ces figures, une case étant composée de plus de 20 cellules.

Ce cas met encore plus en lumière l'importance de l'interaction entre ces deux algorithmes de corrections, les calculs divergeant très rapidement en l'absence de l'un d'entre eux. Les extrapolations dépendant de la précision apportée au calcul de la normale à l'interface (formule (2.11)). Une précision certes liée en grande partie au choix de la finesse du maillage mais également à la construction d'une level set suffisamment régulière malgré les grandes déformations infligées au solide.



**Figure 3.36** – Représentation de l'évolution de la level set au temps  $t = 0,16.04,18.06$  sec



**Figure 3.37** – Représentation de l'évolution des caractéristiques rétrogrades au temps  $t = 16.04, 18, 18.06$  sec

Pour conclure, nos résultats sont proches de ceux obtenus par [Turek and Hron, 2006], [Bhardwaj and Mittal, 2012] ou encore [Dunne and Rannacher, 2006]. La comparaison est effectuée sur les figures (3.6) et (3.7). Un même ordre de grandeur obtenu malgré les modifications effectuées. Elles sont rappelées ici par importance croissante selon nous :

- un solide au bord arrondi n'ayant certainement que très peu d'impact sur les résultats ;
- la présence de viscosité dans le solide ajoutant une légère résistance supplémentaire ;
- un modèle d'élasticité Néo-Hookéen avec un coefficient d'élasticité approché ainsi que l'utilisation d'un modèle incompressible ayant très certainement un impact direct sur le comportement du solide.

| Auteurs                            | Cas/méthode  | Amplitude ( $m$ ) | $f$ ( $s^{-1}$ ) |
|------------------------------------|--------------|-------------------|------------------|
| Turek [Turek and Hron, 2006]       | FSI2         | 0.083             | 1.9              |
| Dunne [Dunne and Rannacher, 2006]  | Eulérien     | 0.082             | 1.92             |
|                                    | ALE          | 0.089             | 1.95             |
| Mittal [Bhardwaj and Mittal, 2012] | 1a           | 0.092             | 1.9              |
|                                    | 2            | 0.076             | 2.4              |
|                                    | 3            | 0.002             | 2.9              |
| Deborde                            | T2 (point G) | 0.073             | 2.11             |

**Table 3.6** – Tableau comparatif des résultats obtenus sur le comportement vertical pour le cas test de Turek dans la littérature

| Auteurs                            | Cas/méthode  | Amplitude ( $m$ )       | $f$ ( $s^{-1}$ ) |
|------------------------------------|--------------|-------------------------|------------------|
| Turek [Turek and Hron, 2006]       | FSI2         | 0.012                   | 3.87             |
| Dunne [Dunne and Rannacher, 2006]  | Eulérien     | 0.011                   | ×                |
|                                    | ALE          | 0.013                   | ×                |
| Mittal [Bhardwaj and Mittal, 2012] | 1a           | $0.0164 < A_H < 0.0178$ | 3.88             |
| Deborde                            | T2 (point G) | $0.01 < A_H < 0.016$    | 4.3              |

**Table 3.7** – Tableau comparatif des résultats obtenus sur le comportement horizontal pour le cas test de Turek dans la littérature

De plus [Dunne and Rannacher, 2006] effectue une comparaison entre ses deux codes de calculs utilisés. Ses résultats obtenus avec le modèle Eulérien (plus proche du notre) sont 1.6% supérieurs que pour l'approche ALE, elle-même plus représentative du modèle utilisé par Turek.

De son côté [Bhardwaj and Mittal, 2012] effectue une analyse paramétrique du cas test en doublant progressivement la rigidité du drapeau élastique. Partant d'un matériau de module de Young adimensionné initial fixé à  $E = 1.4 \cdot 10^3$  (cas Turek), puis  $E = 2.8 \cdot 10^3$



(cas 2) et enfin avec  $E = 5.6.10^3$  (cas 3). Comme attendu, une augmentation de la rigidité du matériau amoindri les amplitudes de déformation mais augmente la fréquence des oscillations de l'ordre de 21%. Ces résultats mettent en lumière l'importance du coefficient d'élasticité choisi et permettent de conclure que nous pourrions tendre à des résultats plus proches en jouant sur la valeur du module d'élasticité  $\chi$ .

---

## Conclusion

Dans ce chapitre nous avons porté une attention particulière à la validation de notre modèle par l'intermédiaire de cas tests rapportés de la littérature. Les choix des cas tests ont été fait selon deux critères :

- ils devaient permettre de valider notre modèle sur des écoulements cisailés, lesquels sont retrouvés dans les phénomènes d'interaction entre l'eau et une structure élastique artificielle ;
- ils devaient être suffisamment proches de notre modèle (fluide incompressible, matériau Néo Hookéen...) afin de pouvoir comparer les résultats.

Nous avons trouvé des études proposées par Sugiyama [Sugiyama et al., 2011] dont le modèle et le comportement cisailé du fluide les rendent particulièrement intéressantes. Les diverses comparaisons et étude de convergence permettent de conclure quant à la validation de notre modèle, et ce malgré l'apparition de quelques différences imputables à des méthodes différentes de suivi et de diffusion de l'interface.

Finalement nous avons terminé la validation par le cas test de [Turek and Hron, 2006] reconnu pour sa complexité de part les grandes déformations infligées au solide élastique mais aussi par un taux de cisaillement fluide très important, plus important même que ceux concernant notre domaine d'application. Cependant les différences de loi de comportement élastique ne permettent pas de comparer exactement nos résultats. Néanmoins Ils sont cohérents avec ceux figurant dans la littérature. Nous avons choisi de les laisser figurer dans ce manuscrit comme nouveau résultat pour l'interaction fluide-structure élastique incompressible.

La méthode est donc à présent considérée comme vérifiée, validée et a priori apte à modéliser l'interaction entre des vagues et des structures élastiques.



# Chapitre 4

## Simulations et applications

### Introduction

Dans la littérature, les études portant sur la problématique de la préservation du littoral face aux phénomènes naturels tels que l'érosion sont nombreuses. Les prairies marines comme la posidonie ont d'ores et déjà prouvé leurs rôles sur l'amortissement des vagues [Asano et al., 1993]. Suite aux événements de 2004 en Indonésie et du Japon en 2011, la recherche s'est considérablement intensifiée. Dans un premiers temps, des premières études observatoires sur les côtes du Sri Lanka, de la Thaïlande ou de l'Inde [Tanaka et al., 2007], [Kandasamy and Narayanasamy, 2005] ont permis de mettre en lumière l'importance des forêts de mangroves pour la sauvegarde du littoral face à ces désastres. Puis des études numériques [Harada and Kawata, 2005], [Ohira et al., 2012] effectuées à partir de données recueillies sur le terrain ou par satellite, sont venues appuyer ces premières conclusions. Récemment Rodriguez *et al.* [Rodríguez et al., 2016] citent un exemple de village chilien sauvé d'un tsunami par une forêt placée en amont. D'autres exemples de préservation de vie humaine ou d'activité économique par ces végétations sont présents dans la littérature [Mazda et al., 2006], [Tanaka et al., 2007], [Takagi et al., 2016] où sont également effectuées des mesures de force de traînée, d'absorption d'énergie ou d'amortissement des vagues en fonction des types de mangrove présents sur place (*Sonneratia*, *nucifera*, *odoratissimus* etc...).

À partir de ces observations, de nombreux chercheurs ont utilisé l'approche expérimentale pour tenter de reproduire ces phénomènes puis d'essayer d'identifier des caractéristiques physiques sur les végétations garantissant une atténuation des vagues optimale. Ces expériences ont donc été effectuées par exemple sur la posidonie [Manca et al., 2010], [John et al., 2015] ou sur la mangrove [Husrin et al., 2012], [Ismail et al., 2012]. La densité, la hauteur, l'épaisseur, l'étalement des forêts de mangroves ou encore le taux de submersion sont autant de paramètres jouant un rôle majeur pour l'amortissement.

Cependant les méthodes expérimentales s'avèrent parfois onéreuses et ne permettent pas de rendre compte des effets de grandes échelles, c'est pourquoi les chercheurs ont eu recours à la simulation numérique ; dans un premier temps

pour la simulation de l'interaction entre une vague (soliton) et la posidonie [Maza et al., 2013], puis pour l'interaction entre un tsunami et des structures artificielles rigides cylindriques [Tsai et al., 2016], [Wen et al., 2016] ou encore [Maza et al., 2015] s'appuyant sur les données expérimentales obtenues par [Huang et al., 2011].

Cependant les études concernant l'interaction entre une vague et des structures élastiques artificielles totalement immergées sont très peu présentes dans la littérature. Nous avons seulement trouvé des travaux proposés par [Maza et al., 2013] où les auteurs utilisent un modèle d'élasticité 1D issu de la théorie des poutres (équations de Morrison). L'élasticité volumique ne semble pas traitée, c'est pourquoi nous proposons une étude portant sur l'amortissement d'une vague par des structures élastiques volumiques totalement immergées et mouvantes i.e. oscillant suivant l'intensité de l'écoulement. Les objectifs sont multiples :

- estimer l'avantage de l'utilisation de structures élastiques plutôt que de structures rigides ;
- identifier des caractéristiques des structures idéales pour une atténuation des vagues optimale ;
- simuler pour mieux comprendre la dynamique de la vague et les reflux générés après son passage sur les zones d'amortissements (i.e. zones constituées de structures élastiques).

Nous verrons que le second point est complexe à traiter. Même si les structures élastiques n'ont pas le même comportement dynamique que des structures rigides ou que les algues marines, on s'attend à retrouver les paramètres influants sur l'atténuation cités par la littérature [Ismail et al., 2012]. Ils peuvent être classés parmi les catégories suivantes :

- les paramètres de la vague comme sa célérité, son amplitude, sa fréquence ou son incidence par rapport aux structures (non traité ici) ;
- les paramètres d'implantation comme l'arrangement (rectiligne, aléatoire etc...), la taille totale du banc ou la densité de structure dans une zone ;
- la géométrie des structures telle que la hauteur, l'épaisseur ou la forme ;
- les paramètres physiques du matériau traduisant sa rigidité tels que son module d'élasticité ou sa masse volumique.

Pour finir, il est difficile d'aborder dans notre étude l'ensemble des paramètres figurant dans cette liste en partie parce qu'ils sont tous étroitement liés mais aussi parce qu'une telle étude n'entre pas dans le cadre de nos travaux. En effet nous souhaitons avant tout démontrer le potentiel de l'outil numérique développé durant cette thèse ainsi que montrer sa capacité à répondre à la problématique avec précision.

## 4.1 Simulations

Par soucis de simplification, nous abordons une configuration 2D, d'une unique onde solitaire se propageant sur un fond plat.

Les paramètres d'implantation sont aussi déjà très largement étudiés pour des structures rigides. Un arrangement des structures aléatoire [Maza et al., 2015], des structures plus compactes [Tanaka et al., 2007], [Ohira et al., 2012] et dont la densité est plus élevée [Manca et al., 2010], [Ismail et al., 2012] permettent une meilleure atténuation. Une étude sur la densité sera effectuée afin de constater une éventuelle similitude entre l'utilisation de structures rigides et élastiques.

La géométrie des structures telle que des diamètres plus importants [Tanaka et al., 2007] ou une hauteur plus élevée [Mazda et al., 2006], [Manca et al., 2010] ont une influence directe sur l'amortissement. Cependant la hauteur est limitée afin de rendre l'implantation de structures moins invasive mais aussi parce que nous ne gérons actuellement pas la ligne triple. Le rôle du facteur de forme, notamment sur les mangroves [Tanaka et al., 2007], conduit à l'analyse de l'écoulement sur différentes géométries. Enfin les paramètres élastiques restent à déterminer puisque non abordés par la littérature, où seules des structures rigides ou des algues 1D sont analysées.

Ce chapitre s'articule donc sur 3 axes principaux. Dans un premier temps, l'influence des structures élastiques est analysée et comparée avec celle des structures rigides. Puis nous étudions l'amortissement d'une vague par différentes géométries et différentes densités de structures. De plus, selon la littérature, l'étalement des zones d'amortissement a un impact direct sur l'amortissement i.e. plus elles s'étendent et plus la vague est amortie. Cependant l'implantation de structures élastiques est limitée par la place disponible sur le fond marin. Cette contrainte nous amène donc à fixer un domaine qui se voudra représentatif de cette place maximale disponible. Se pose alors la question de l'importance de la densité des structures ou encore de leurs formes.

Concernant les paramètres de la vague, notre choix se porte sur un soliton décrit dans [Lubin and Lemonnier, 2004] dont la configuration initiale est présentée sur la figure (4.1). La hauteur de l'eau est fixée à 0.5 m. Les paramètres du soliton sont fixés pour l'ensemble des simulations : l'amplitude de l'onde est de  $a = 0.03322$  m pour une célérité  $c = 2.29$   $m \cdot s^{-1}$  calculée à l'ordre 3 [Lubin and Lemonnier, 2004].

Dans ce domaine est fixé un sous-domaine  $Z3 = [11, 18] \times [0, 0.8]$  appelé "zone d'amortissement" ou "domaine d'amortissement" contenant les structures élastiques.

2 zones supplémentaires sont utilisées pour effectuer des mesures de variation d'énergie potentielle ou cinétique, et sont situées en amont ( $Z1$ ) et en aval ( $Z2$ ) de la zone d'amortissement, afin de pouvoir quantifier les pertes d'énergie.

Des jauges  $G1$ ,  $G2$ ,  $G3$  et  $G4$  sont également placées tout le long de la configuration, comme en témoigne le schéma (4.1), afin de mesurer l'élévation de la vague en fonction du temps.

Les paramètres physiques des milieux utilisés (air et eau) sont donnés dans le tableau (4.1).

Les calculs sont effectués sur un maillage composé de  $7000 \times 230$  nœuds répartis sur 32 processeurs. Le pas de temps dynamique est initialisé à  $\Delta t = 10^{-4}$  s sous contrainte CFL

fixée à 0.1. Le phénomène est simulé sur 18 s par 25000 itérations nécessitant environ 10h de calcul.

Notons que chaque configuration est établie sur un sol élastique d'une épaisseur de 0.01m servant à faciliter la gestion des extrapolations des caractéristiques rétrogrades aux bords du domaine.

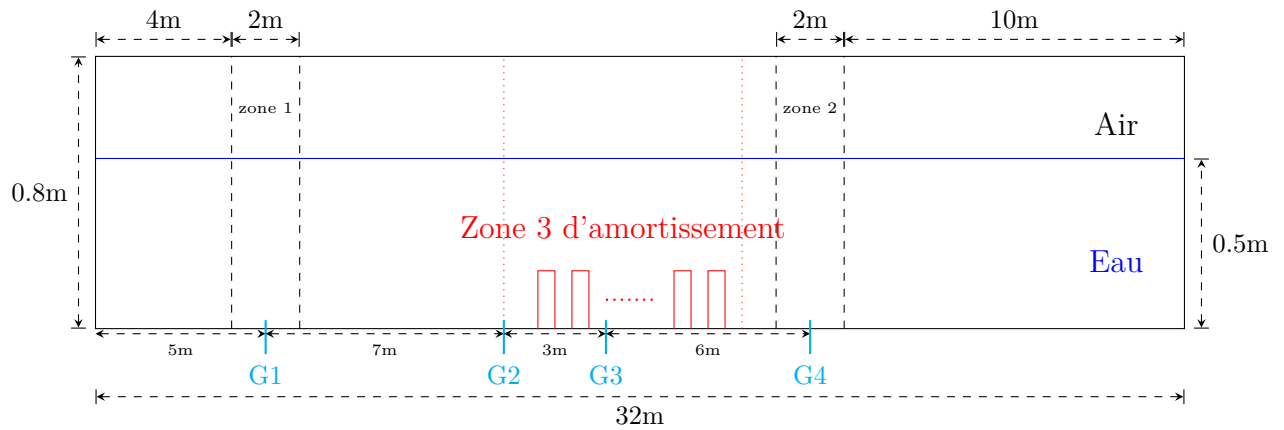


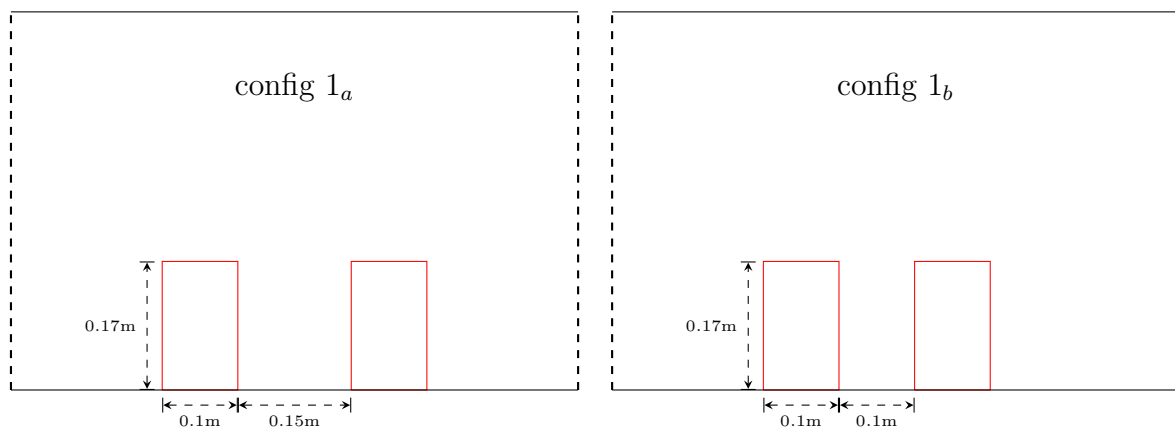
Figure 4.1 – Schéma de la configuration 2D pour l'ensemble des cas tests.

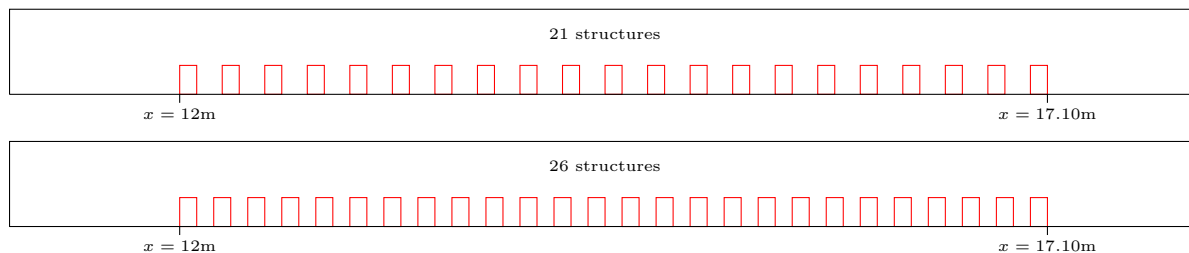
| Milieu | $\rho$ ( $kg.m^{-3}$ ) | $\mu$ (Pa.s)         |
|--------|------------------------|----------------------|
| Air    | 1.177                  | $1.85 \cdot 10^{-5}$ |
| Eau    | $10^3$                 | $10^{-3}$            |
| Solide | $10^3$                 | $10^{-3}$            |

Table 4.1 – Paramètres physiques des milieux

#### 4.1.1 Structures rectangulaires homogènes

Schéma des configurations  $1_a$  et  $1_b$





### Étude du paramètre d'élasticité $\chi$

L'objectif de cette première étude est de justifier l'apport de l'utilisation de structures élastiques par rapport à des structures rigides. Intuitivement, des structures trop molles auraient tendance à subir l'écoulement plutôt que de le ralentir conduisant à un amortissement réduit de la vague.

L'étude consiste à faire varier le coefficient d'élasticité  $\chi$  suivant les valeurs données dans le tableau (4.2) ci-dessous :

|             |     |     |     |     |     |     |        |
|-------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|--------|
| Cas         | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7      |
| $\chi$ (Pa) | 100 | 150 | 200 | 250 | 300 | 350 | Rigide |

**Table 4.2** – Coefficients élastiques utilisés pour chaque cas

Le cas 7 représente une structure complètement rigide traitée par méthode de pénalisation à l'ordre 1 [Khadra et al., 2000].

### Analyses des résultats

Les figures (4.3) et (4.4) permettent d'observer l'amortissement de la vague en observant la réduction de l'amplitude de la vague entre les jauges  $G1$  et  $G4$  puis en suivant la perte d'énergie cinétique entre les zones  $Z1$  et  $Z2$ . Les figures (4.3.a) et (4.4.a) montrent l'égalité des élévations ou des énergies cinétiques entre chaque cas en début de simulation i.e. avant de franchir la zone d'amortissement. Par la suite nous prendrons ce résultat pour acquis et ces figures n'apparaîtront plus afin de simplifier la lecture.

Dans un premier temps, l'apport de l'utilisation de structures élastiques est immédiatement constaté. Les atténuations d'amplitude de la vague et de l'énergie cinétique sont supérieures à celles obtenues par des structures rigides, et ce, pour toutes les configurations et géométries proposées. Ensuite bien que l'amortissement généré par les structures les plus souples (cas 1) soit plus important, elles ralentissent également la vague, allongeant ainsi le temps de passage de la vague initiale comme indiqué dans le tableau (4.6). Notons que ce temps de passage est mesuré à partir des temps où l'élévation de l'eau est supérieure à son niveau initial de  $0.5m$ .

Notons que ces tests ont été effectués pour toutes les géométries étudiées par la suite. Pour certaines d'entre elles, une valeur de  $\chi$  inférieure à 200 Pa génère de trop grandes déformations ainsi que des collisions entre structures nuisant à la stabilité du calcul. Afin

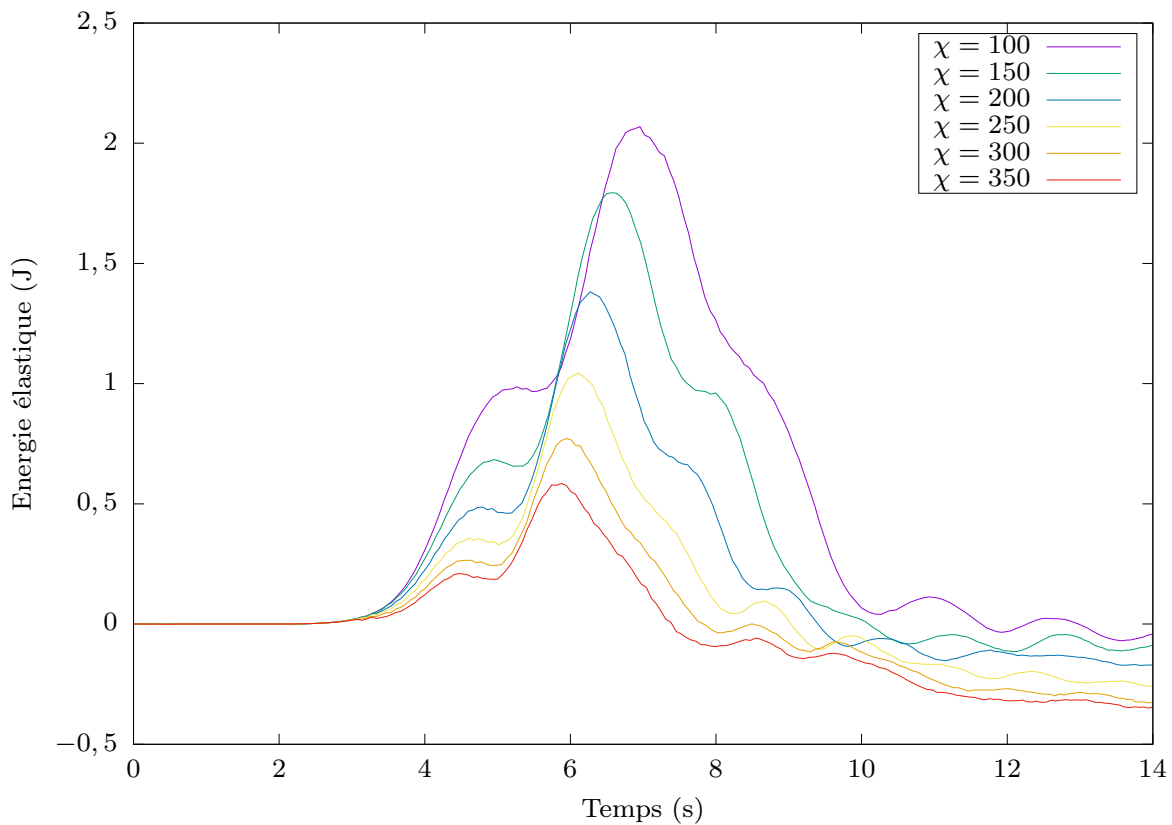


de pouvoir constater l'influence des géométries sur l'écoulement nous conserverons la valeur de  $\chi = 300$  Pa pour le reste de nos études.

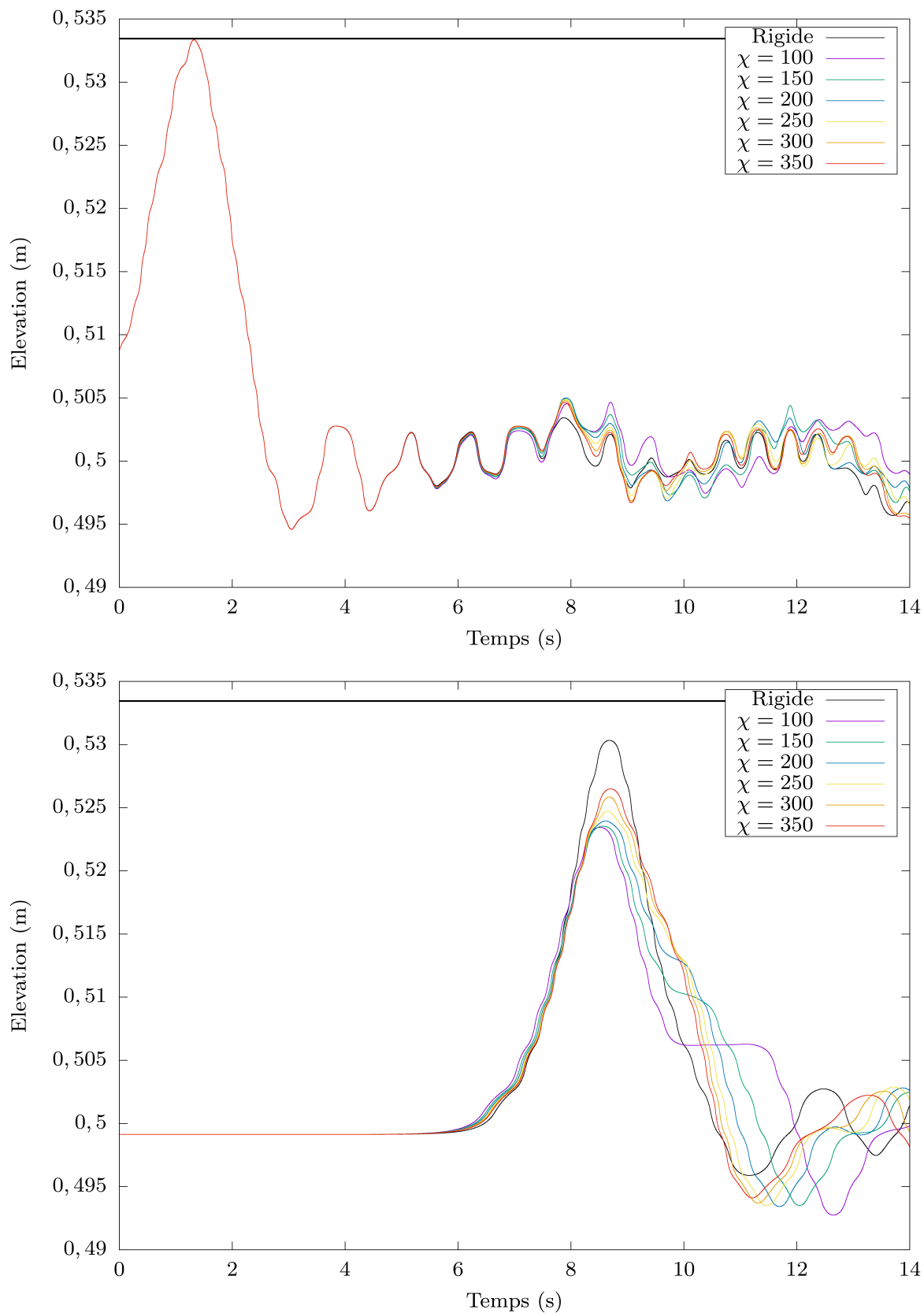
La figure (4.2) illustre les quantités d'énergie élastique générées par le passage de la vague dans la zone 3 d'amortissement. Rappelons que l'énergie élastique est donnée par la formule (1.42) pour un matériau Néo Hookéen incompressible :

$$\mathcal{E}^e = \int_{\Omega_s} \chi(\text{Tr}(B) - 2)dx \quad (4.1)$$

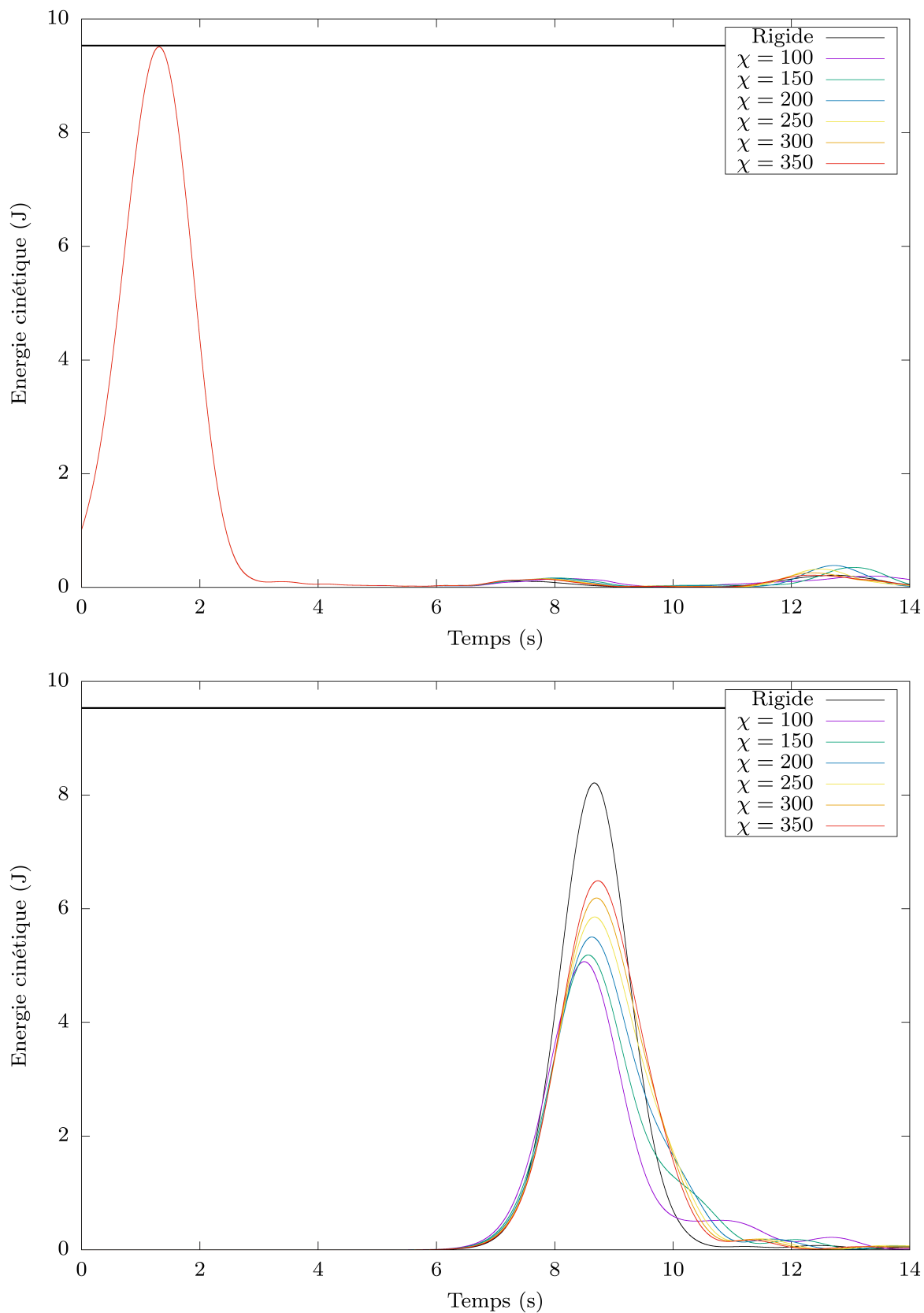
La croissance de l'énergie est constatée et de manière inversement proportionnelle à l'évolution des valeurs des coefficients d'élasticité, i.e. que l'énergie élastique croît au fur et à mesure que l'on réduit la rigidité des structures. Ces résultats mettent en lumière la prédominance de l'intensité des contraintes liées aux déformations des structures par rapport au simple coefficient d'élasticité.



**Figure 4.2** – Évolution de l'énergie élastique traversant la zone d'amortissement Z3 pour différentes valeurs d'élasticité

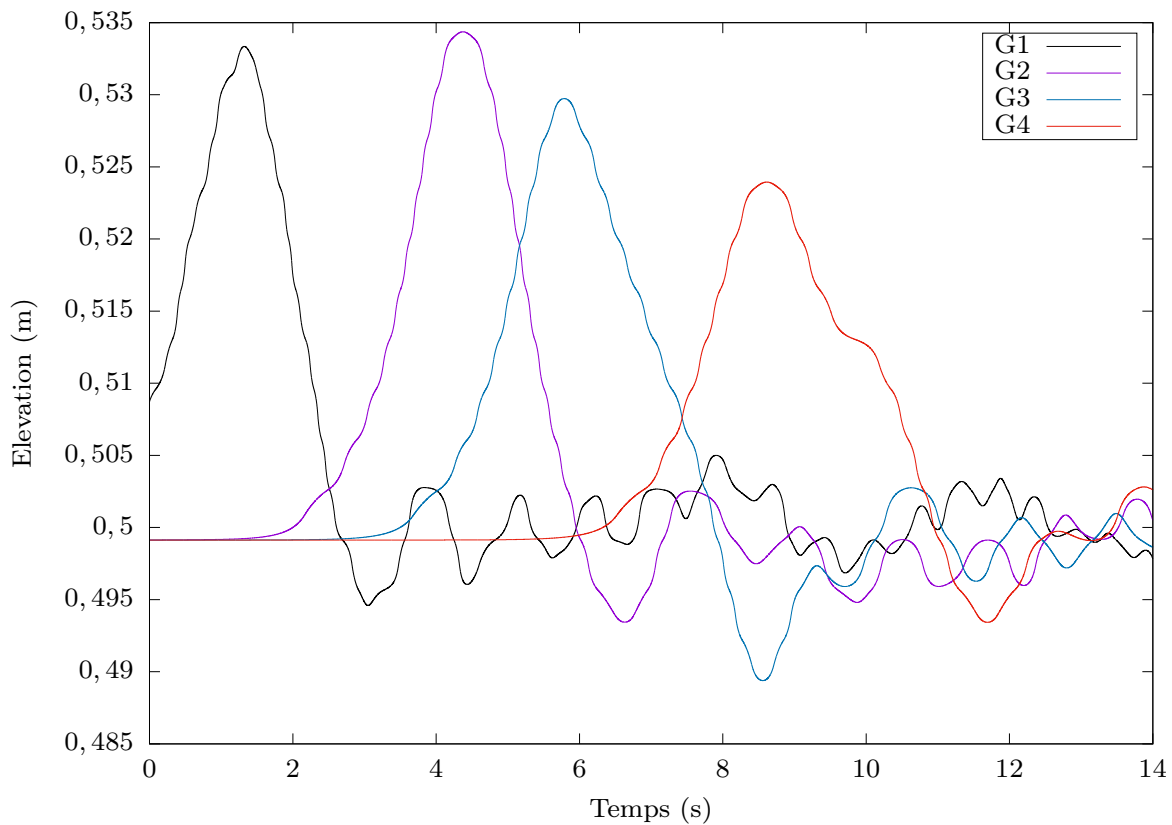


**Figure 4.3** – Évolution de l'élevation de la vague mesurée sur les jauges G1 (en haut) et G4 (en bas) pour différentes valeurs d'élasticité



**Figure 4.4** – Évolution de l'énergie cinétique dans les zones Z1 (en haut) et Z2 (en bas) pour différentes valeurs d'élasticité

L'évolution de l'amplitude (4.5) au cours du temps au niveau des jauges G1, G2, G3, et G4 permet de constater une élévation de la vague au niveau de la jauge G2 positionnée juste en amont des structures, une élévation probablement due à l'accumulation de l'eau à l'approche de la zone d'amortissement. Il s'en suit l'amortissement progressif de la vague d'abord au niveau de la jauge G3 située au milieu de la zone d'amortissement puis au niveau de la jauge G4 en sortie. Il est particulièrement marqué en présence de structures rigides ou moins souples. Il est donc certainement provoqué par un effet "barrage" i.e. par l'impact de la vague et l'accumulation d'eau par ralentissement du front de l'onde. Enfin, la courbe représentative de l'élévation de la jauge G1 montre qu'une partie de la vague est réfléchiée.



**Figure 4.5** – Évolution de l'élévation de la vague mesurée sur les jauges G1, G2, G3 et G4 (de gauche à droite) pour le coefficient d'élasticité optimal  $\chi = 300$

| $\chi$ (Pa) | Temps de passage (s) | Amortissement |
|-------------|----------------------|---------------|
| 0           | 3.84                 | ×             |
| 100         | 5.71 (+48.70%)       | -22.97%       |
| 150         | 5.03 (+30.99%)       | -22.72%       |
| 200         | 4.63 (+20.57%)       | -21.80%       |
| 250         | 4.43 (+15.36%)       | -19.97%       |
| 300         | 4.30 (+11.98%)       | -17.39%       |
| 350         | 4.21 (+9.64%)        | -15.91%       |
| $\infty$    | 4.07 (+5.99%)        | -7.09%        |

**Figure 4.6** – Durée de passage de la vague en fonction des paramètres élastiques

## Conclusion

Cette première étude a mis en évidence des différences de comportement en terme d'absorption d'énergie, d'amortissement de la vague ou même d'augmentation de son temps de passage.

Comme mentionné, les études ont été effectuées pour l'ensemble des configurations en essayant de garantir un compromis entre bon amortissement et absence de collision entre les structures. Par soucis de clarté, ces tests ne figurent pas dans ce document mais ils ont permis de constater que chaque configuration possède sa constante d'élasticité optimale dépendant du nombre de structures, de leur géométrie etc... Ces paramètres sont donc à étudier au cas par cas en fonction de l'espace disponible, de sa topographie etc...

Afin d'analyser l'influence des géométries ainsi que de la densité de structure,  $\chi$  est à présent fixé à 300 Pa.

## Étude de la densité

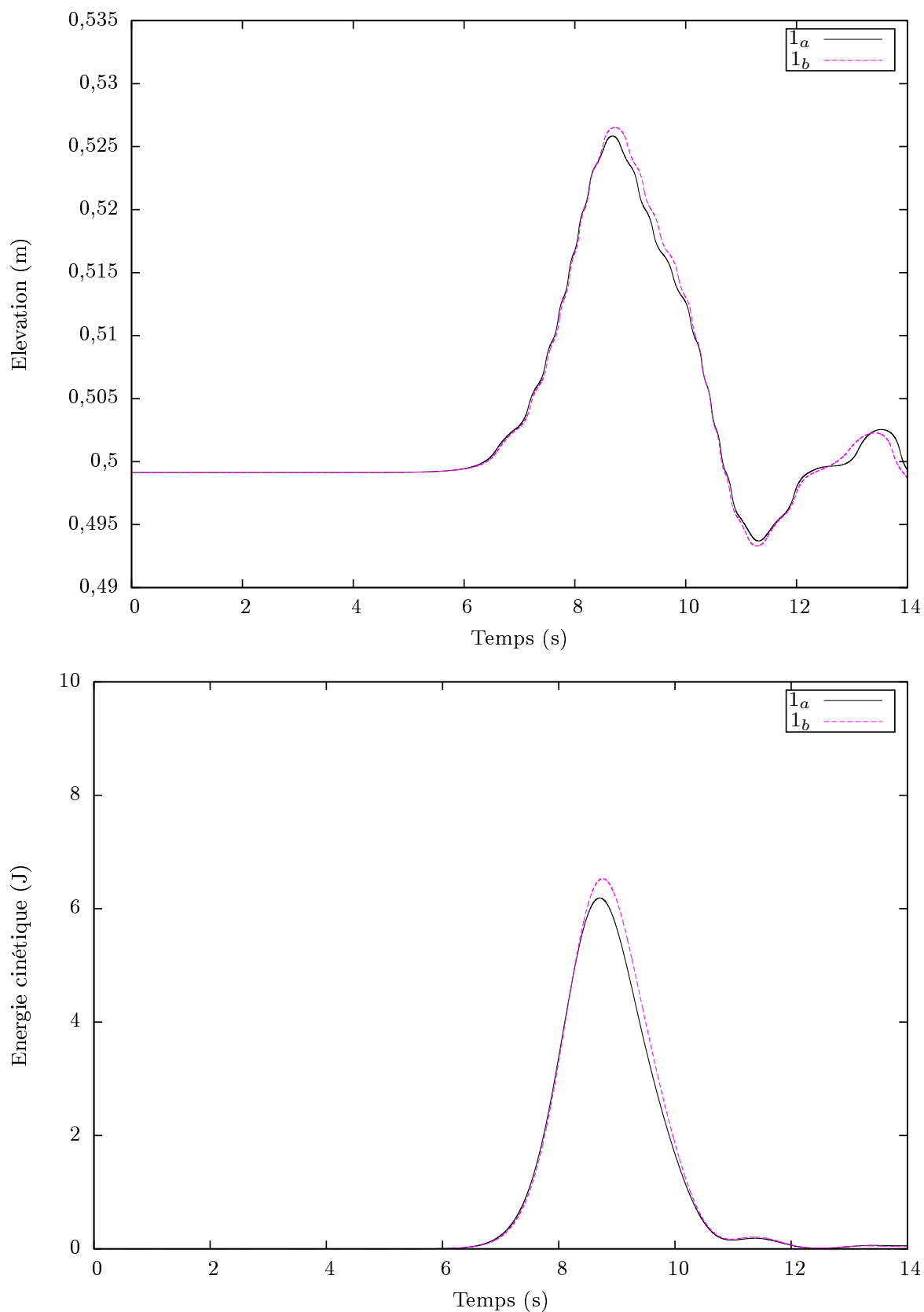
Nous souhaitons évaluer l'impact de l'augmentation de la densité de structures sur une zone fixée. Les cas  $1_a$  et  $1_b$  contiennent 21 structures (i.e.  $3 \text{ str.m}^{-2}$ ) et resp. 26 structures (i.e.  $3.7 \text{ str.m}^{-2}$ ) dont les volumes élastiques sont donnés par le tableau (4.7).

|                  |       |       |
|------------------|-------|-------|
| Cas              | $1_a$ | $1_b$ |
| $\chi$ (Pa)      | 300   | 300   |
| Volume ( $m^2$ ) | 0.351 | 0.442 |

**Figure 4.7** – Paramètre élastique et volume élastique

La première figure (4.8) représente l'évolution de l'amplitude de la vague au niveau de la jauge  $G4$ . L'écart est faible mais mesurable. Les 26 structures du cas  $1_b$  amortissent 15.77% de la vague tandis que les 21 structures l'amortissent à 17.32%. Le même comportement est observé sur la figure du bas (4.8) où l'évolution de l'énergie cinétique est représentée. Une diminution de l'ordre de 34.93% est mesurée pour le cas  $1_a$  et de 31.33% pour le cas  $1_b$ .

Ces résultats permettent de conclure qu'à structures élastiques identiques de formes rectangulaires et de tailles homogènes, rien ne sert de multiplier leur nombre dans une zone fixée. Au contraire, l'amortissement de la vague est dans ce cas légèrement amoindri. L'espace entre chacune d'elle a donc probablement son importance dans le processus d'amortissement.



**Figure 4.8** – Évolution de l'élévation de la vague mesurée sur la jauge  $G4$  (en haut) et de l'énergie cinétique dans la zone  $Z2$  (en bas)

## 4.1.2 Structures rectangulaires hétérogènes

### Schéma des configurations $2_a$ et $2_b$

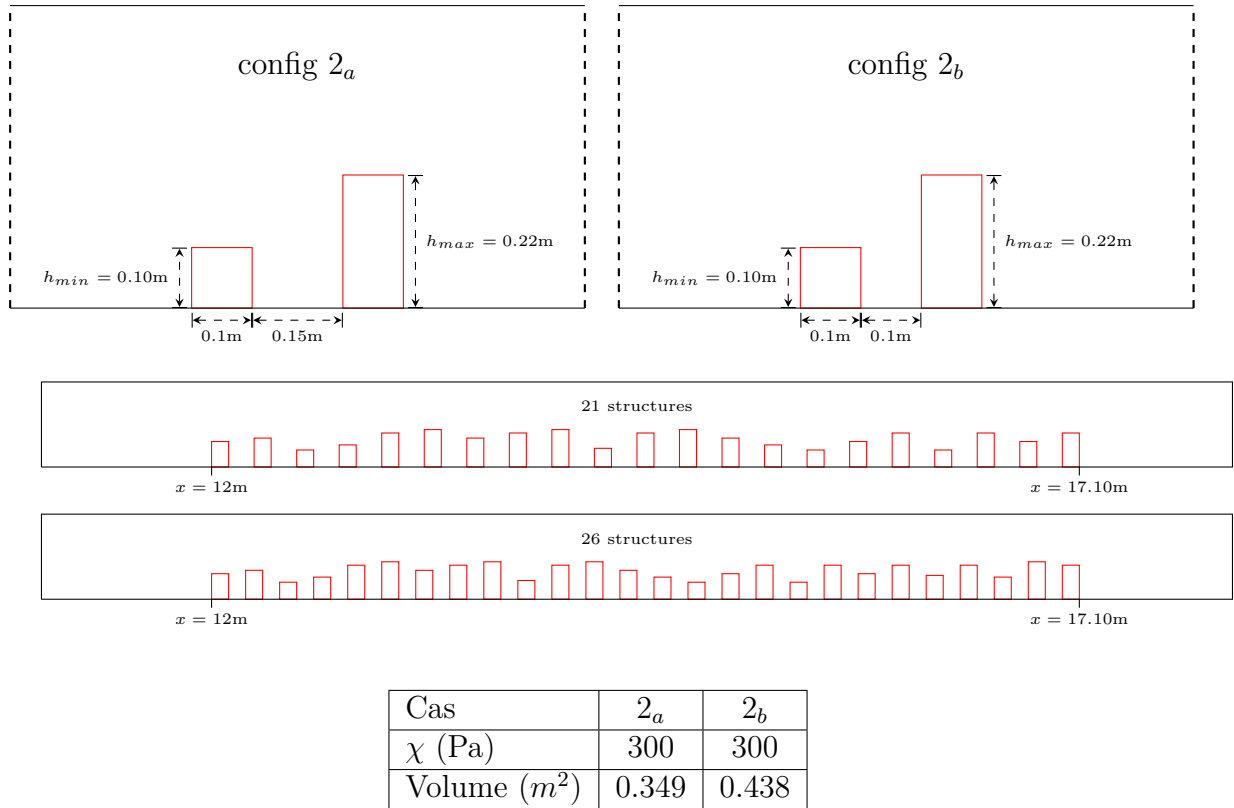


Figure 4.9 – Paramètre élastique et volume élastique

### Étude de la densité

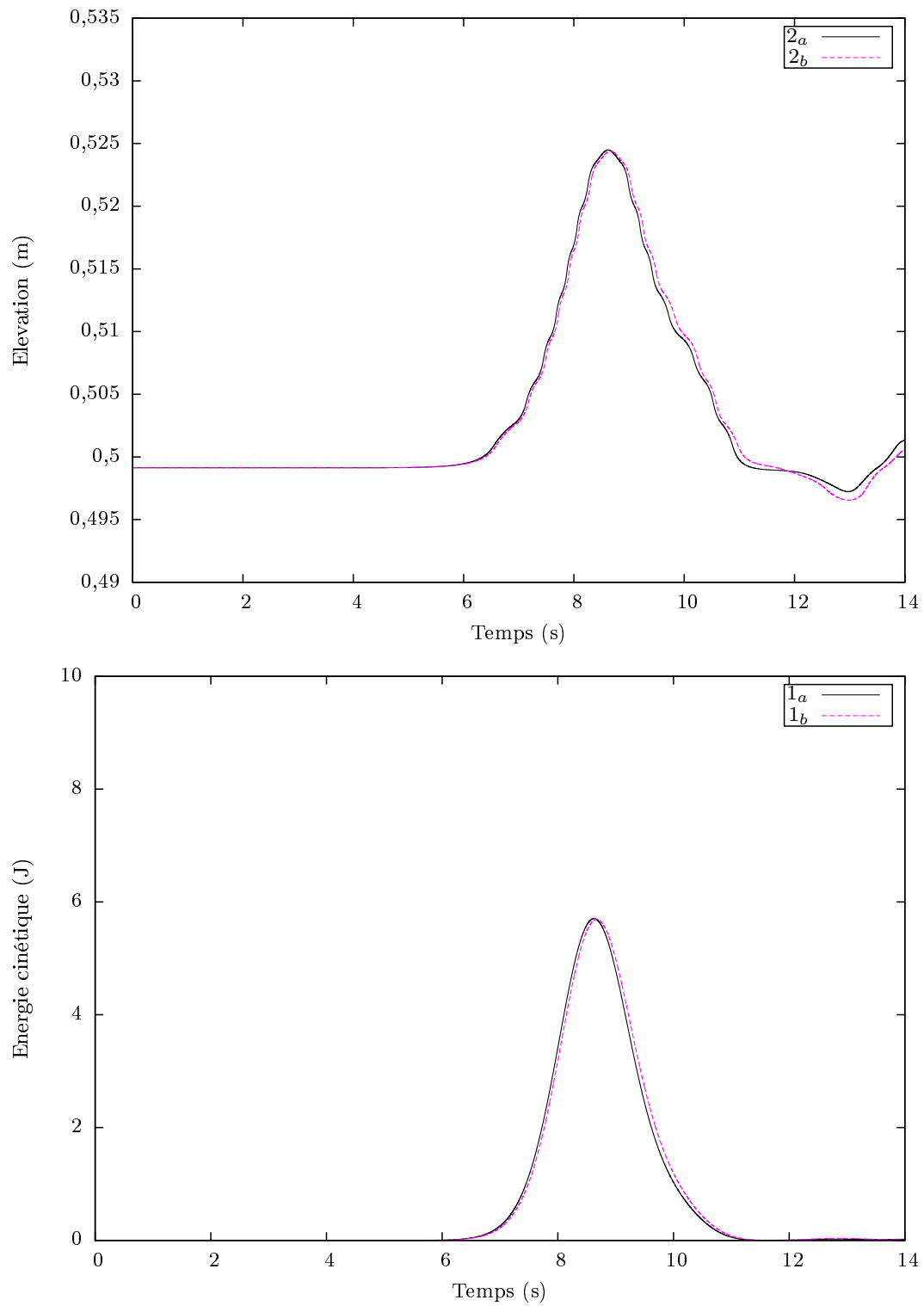
L'étude réalisée précédemment sur les paramètres élastiques a été effectuée. Les conclusions étant similaires, nous rappelons que nous avons choisi de ne pas les faire à nouveau apparaître.

Suivant la même procédure que pour le cas précédent, nous souhaitons évaluer l'impact de l'augmentation de la densité de structures sur une zone fixée. Les cas  $2_a$  et  $2_b$  contiennent 21 structures (i.e.  $3 \text{ str.m}^{-2}$ ) resp. 26 structures (i.e.  $3.7 \text{ str.m}^{-2}$ ) dont les volumes élastiques sont donnés par le tableau (4.9).

La figure du haut (4.10) représente l'évolution de l'amplitude de la vague au niveau de la jauge  $G4$ . Comme précédemment les écarts restent faibles cependant le cas  $2_b$  offre cette fois des résultats légèrement meilleurs que le cas  $2_a$ . Ainsi les 21 structures du cas  $1_a$  amortissent 20.48% de la vague tandis que les 26 structures en amortissent 20.70%. Un comportement similaire est observé sur la figure du bas (4.10) où l'évolution de l'énergie cinétique est représentée. Des diminutions de l'ordre de 40.03% et 40.17% sont mesurées pour les cas  $2_a$  et resp.  $2_b$ .

Encore une fois, l'augmentation de la densité ne semble pas nécessaire, en témoignent des résultats très proches. Les conclusions sont donc identiques à celles du cas test précédent.

Cependant l'amortissement de l'amplitude de la vague ainsi que la diminution d'énergie cinétique sont nettement supérieurs à ceux obtenus par les structures de taille homogène. Un tableau global regroupant l'ensemble des résultats est donnée en conclusion (4.27).



**Figure 4.10** – Évolution de l'élévation de la vague mesurée sur la jauge  $G4$  (en haut) et de l'énergie cinétique dans la zone  $Z2$  (en bas)



### 4.1.3 Structures en forme de "Y"

Schéma des configurations  $3_a$  et  $3_b$

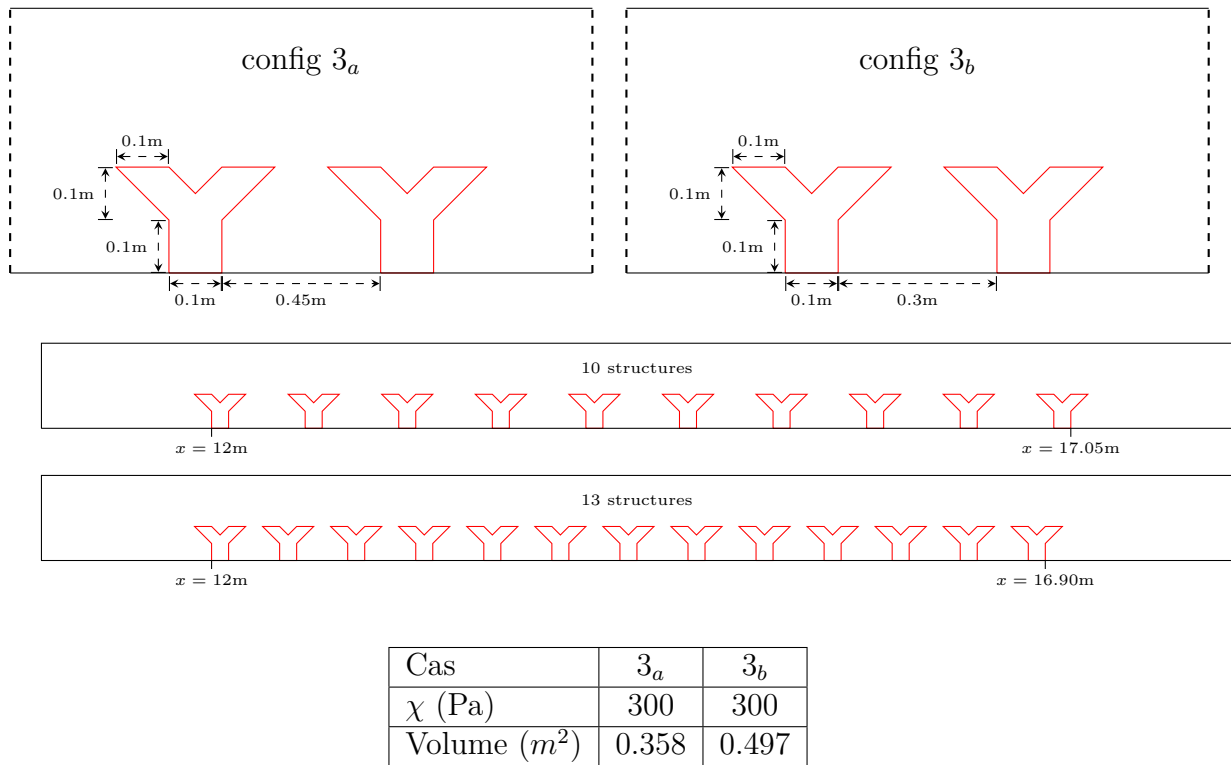


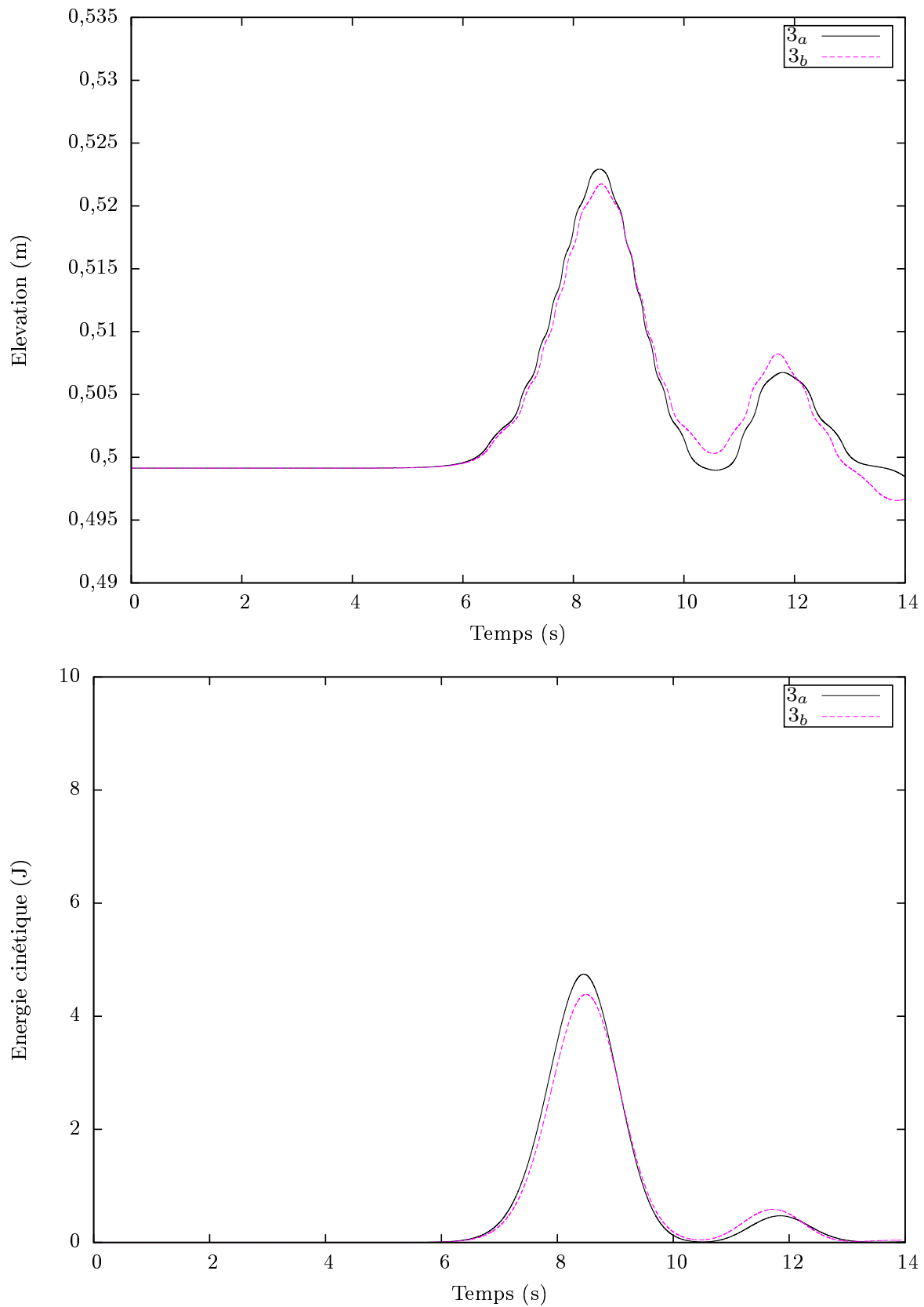
Figure 4.11 – Paramètre élastique et volume élastique

### Étude de la densité

L'impact de l'augmentation de la densité de structures sur une zone fixée est cette fois étudié sur des structures en forme de *Y*. Les cas  $3_a$  et  $3_b$  contiennent 10 structures (i.e.  $1.4 \text{ str.m}^{-2}$ ) resp. 13 structures (i.e.  $1.9 \text{ str.m}^{-2}$ ) dont les volumes élastiques sont donnés par le tableau (4.11).

L'évolution de l'amplitude de la vague au niveau de la jauge *G4* (4.12 en haut) montre cette fois des résultats différents et meilleurs pour le cas  $3_b$  plus dense. Ainsi les 13 structures du cas  $3_a$  amortissent 26.81% de la vague tandis que les 10 structures amortissent 24.09%. De même pour l'évolution de l'énergie cinétique (4.12 en bas) où des diminutions de 50.17% et 53.88% sont mesurées pour les cas  $3_a$  et resp.  $3_b$ .

Ainsi, dans le cas de structures à géométries plus complexes et légèrement plus volumineuses, l'augmentation de la densité améliore l'amortissement de la vague. Qui plus est, ces résultats sont en plus bien meilleurs que ceux précédemment obtenus par des structures rectangulaires.



**Figure 4.12** – Évolution de l'élévation de la vague mesurée sur la jauge  $G4$  (en haut) et de l'énergie cinétique dans la zone  $Z2$  (en bas)

### 4.1.4 Structures en forme de "T"

Schéma des configurations  $4_a$  et  $4_b$

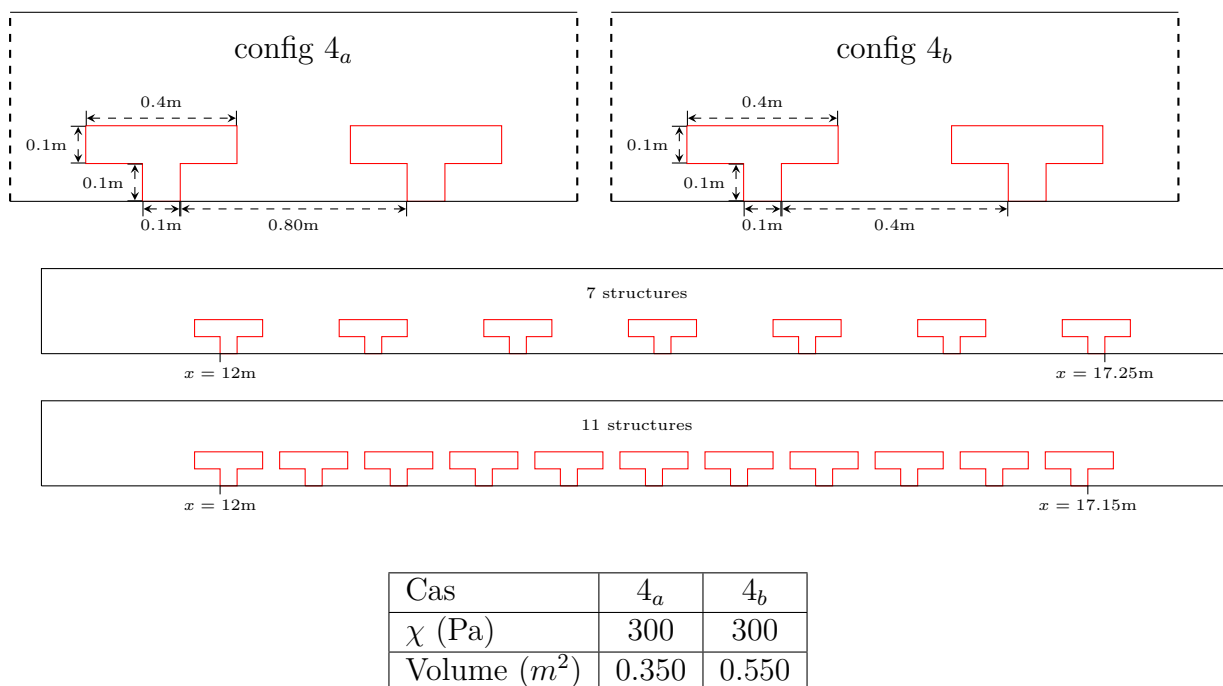
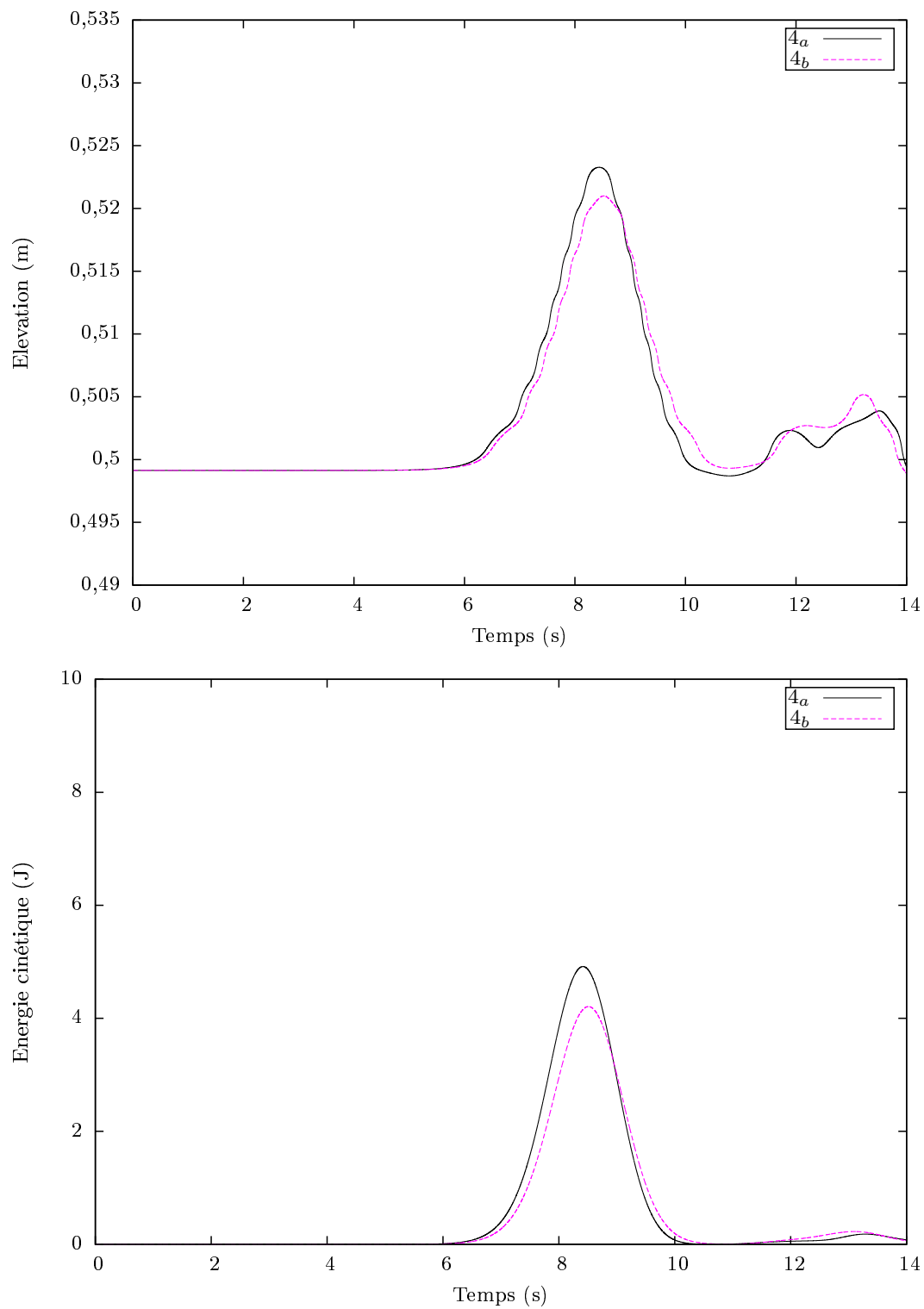


Figure 4.13 – Paramètre élastique et volume élastique

#### Étude de la densité

Pour finir, l'impact de l'augmentation de la densité de structures sur une zone fixée est étudié sur des structures en forme de  $T$ . Les cas  $4_a$  et  $4_b$  contiennent 7 structures (i.e.  $1 \text{ str.m}^{-2}$ ) resp. 11 structures (i.e.  $1.6 \text{ str.m}^{-2}$ ) dont les volumes élastiques sont donnés par le tableau (4.13).

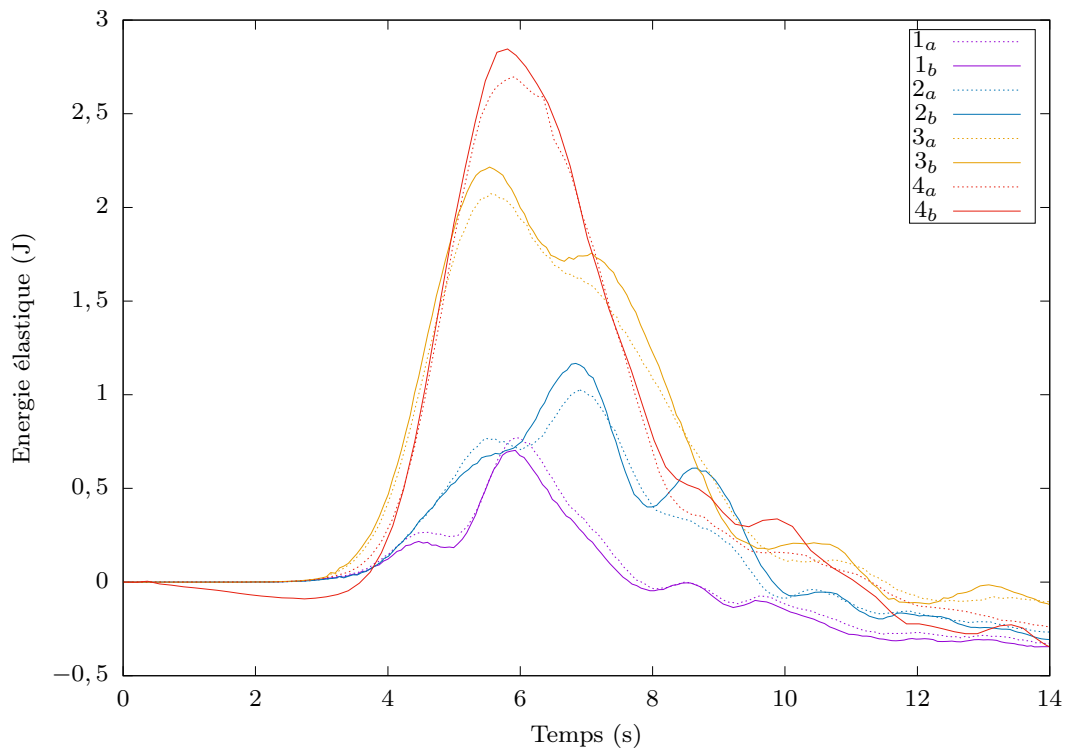
L'évolution de l'amplitude de la vague au niveau de la jauge  $G4$  (4.14 en haut) montre des résultats meilleurs pour le cas le moins dense  $4_a$ . Les 7 structures du cas  $4_a$  amortissent 23.26% de la vague tandis que les 11 structures amortissent 28.54%. L'évolution de l'énergie cinétique (4.14 en bas) montre des diminutions de 51.68% et 55.77% mesurées pour les cas  $4_a$  et resp.  $4_b$ . En terme d'amortissement, le cas  $4_b$  se place comme le plus performant tandis que le cas  $4_a$  offre des résultats proches de ceux obtenus par les structures en  $Y$ . Notons que le volume élastique utilisé est supérieur pour des structures en forme de  $T$ . Cependant il est difficile d'établir un lien direct entre volume totale, amortissement et densité.



**Figure 4.14** – Évolution de l'élévation de la vague mesurée sur la jauge  $G4$  (en haut) et de l'énergie cinétique dans la zone  $Z2$  (en bas)

### 4.1.5 Énergie élastique

Pour l'ensemble des cas, l'énergie élastique maximale a été mesurée (figure (4.16)) dans la zone d'amortissement  $Z3$  et représentée sur la figure (4.15). Globalement il apparaît que des configurations plus denses génèrent plus d'énergie élastique que les moins denses. L'exception du cas 1 montre qu'il existe une densité limite pour laquelle la déformation peut également jouer un rôle plus important que l'addition des énergies créées par un nombre de structures plus important. Quoi qu'il en soit ces résultats mettent également en évidence que l'amélioration de l'amortissement de la vague semble coïncider avec l'augmentation d'énergie élastique, elle-même liée à l'intensité des déformations.



**Figure 4.15** – Énergie élastique dans la zone  $Z3$  pour toutes les configurations

| Cas   | Énergie élastique ( $J$ ) |
|-------|---------------------------|
| $1_a$ | 0.77                      |
| $1_b$ | 0.70                      |
| $2_a$ | 1.03                      |
| $2_b$ | 1.17                      |
| $3_a$ | 2.08                      |
| $3_b$ | 2.31                      |
| $4_a$ | 2.70                      |
| $4_b$ | 2.85                      |

**Figure 4.16** – Valeurs maximales d'énergie élastique pour les différents cas

### 4.1.6 Comparaisons à volumes équivalents et variables

Les cas  $1_a$ ,  $2_a$ ,  $3_a$  et  $4_a$  sont des configurations dont les volumes élastiques sont quasi identiques (4.17). Dans ce cas, l'absorption du soliton est meilleure pour des structures en forme de Y. En revanche, en s'affranchissant de la contrainte sur les volumes élastiques i.e. en comparant l'élévation pour les configurations  $1_b$ ,  $2_b$ ,  $3_b$  et  $4_b$ , on observe cette fois l'efficacité des structures en forme de T.

Dans tous les cas les structures non rectangulaires offrent un meilleur amortissement du soliton quelque soit la densité ou le volume élastique utilisé. Ce résultat est à nuancer car le potentiel maximal d'atténuation n'est pas atteint pour toutes les configurations puisque la valeur de  $\chi$  est imposée et est fixée à 300 Pa. Nous savons que chaque configuration possède sa constante d'élasticité propre et dans un tel cas, les structures en forme de Y sont les plus efficaces.

| Cas test | Volume élastique ( $m.s^{-2}$ ) |
|----------|---------------------------------|
| $1_a$    | 0.351                           |
| $1_b$    | 0.442                           |
| $2_a$    | 0.349                           |
| $2_b$    | 0.438                           |
| $3_a$    | 0.358                           |
| $3_b$    | 0.497                           |
| $4_a$    | 0.350                           |
| $4_b$    | 0.550                           |

**Figure 4.17** – Comparaison des volumes élastiques entre les différentes configurations

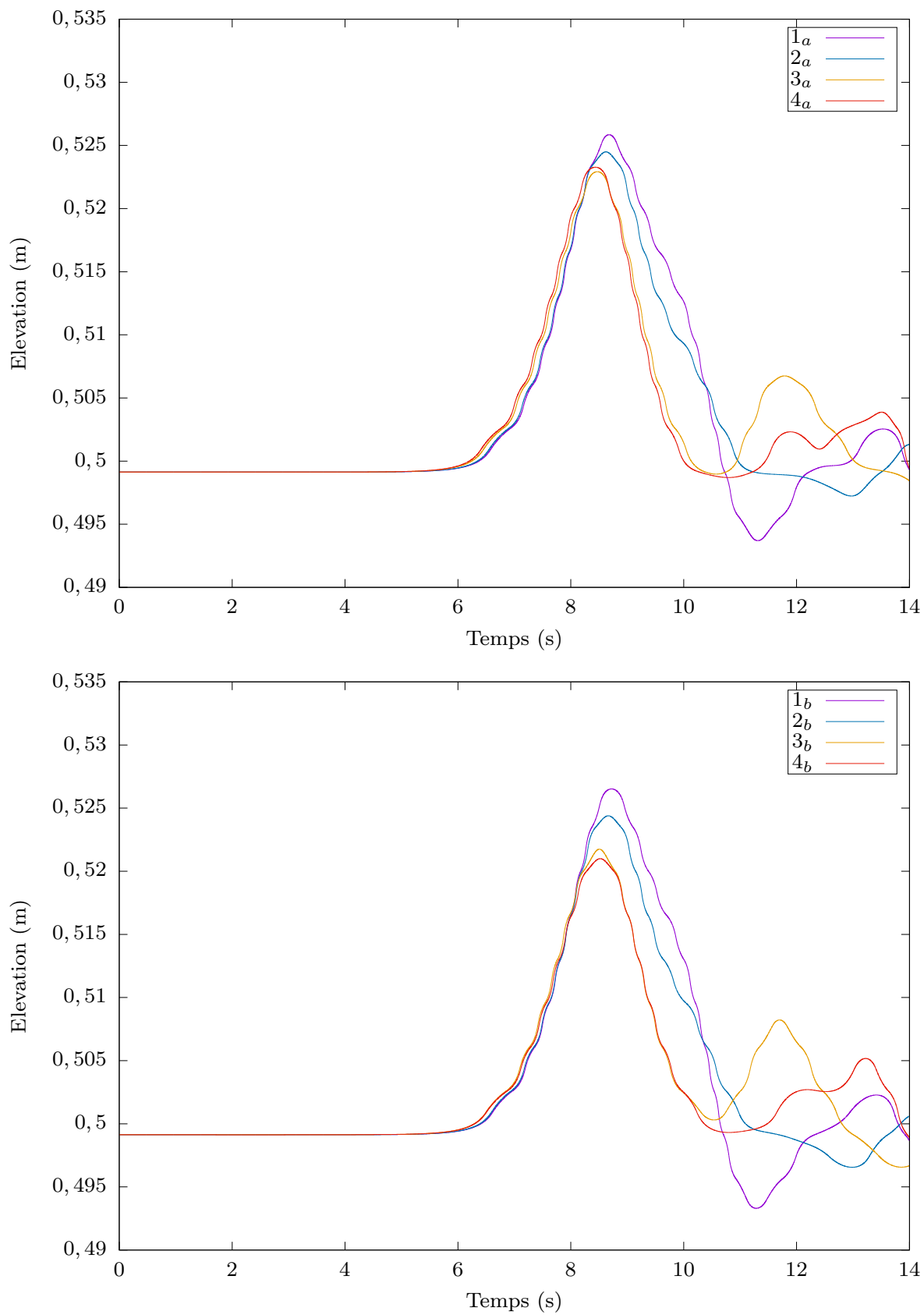
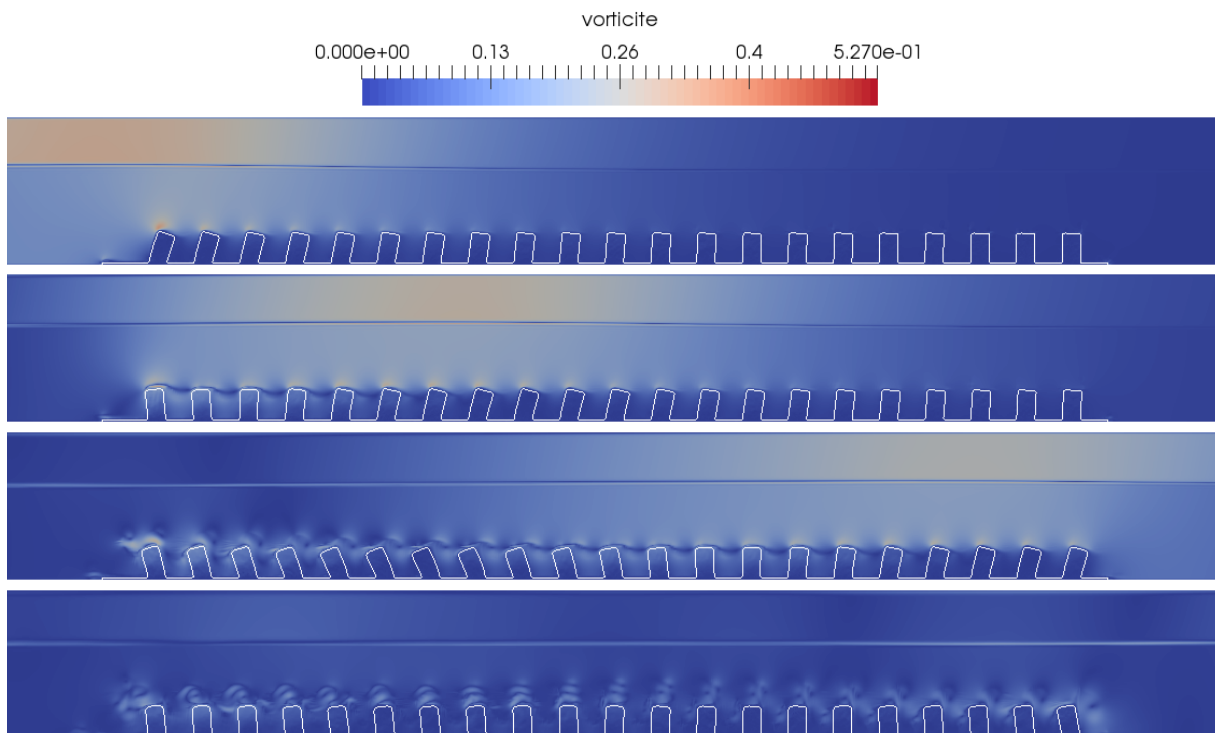


Figure 4.18 – Comparaison de l'amplitude entre configuration peu dense et dense

### 4.1.7 Visualisations

Les simulations obtenues pour chaque configuration précédemment étudiées sont présentées. Les grandes déformations successives des structures élastiques sont observables au cours du passage de la vague de la gauche vers la droite. Dans un premier temps, leur résistance à l'écoulement provoque des accélérations locales du fluide au niveau de leurs arêtes. Puis lors du retour à la configuration d'origine, elles amènent un partie du fluide générant ainsi des vortex. Ces derniers se situent essentiellement en amont des structures. Un positionnement plus visible sur les cas  $3_a$  (4.23) et  $4_a$  (4.25), certainement du à la géométrie plus épaisse. Notons cependant un positionnement plus chaotique des vortex sur les configurations plus denses en structure (4.24) et (4.26). De plus les reflux à la surface y sont également multipliés.

#### Simulation $1_a$ et $1_b$



**Figure 4.19** – Simulation du passage d'un soliton sur la configuration VF-1



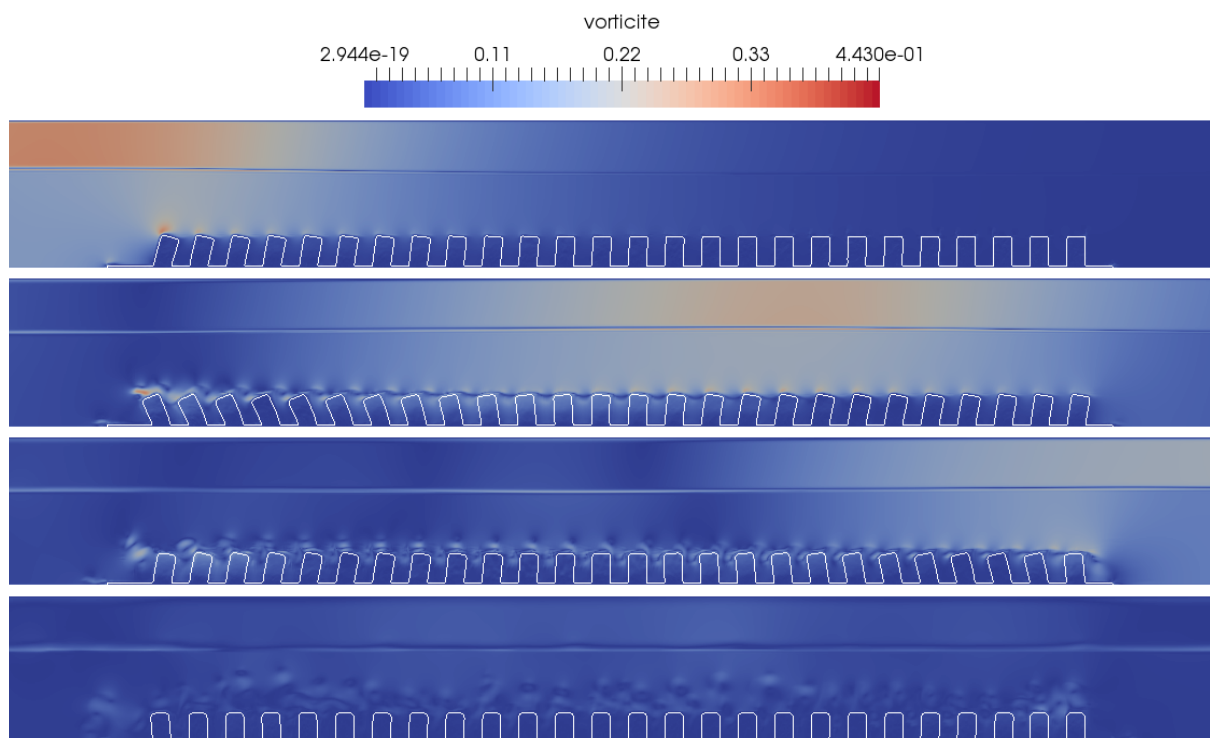


Figure 4.20 – Simulation du passage d'un soliton sur la configuration ZF-1

### Simulation $2_a$ et $2_b$

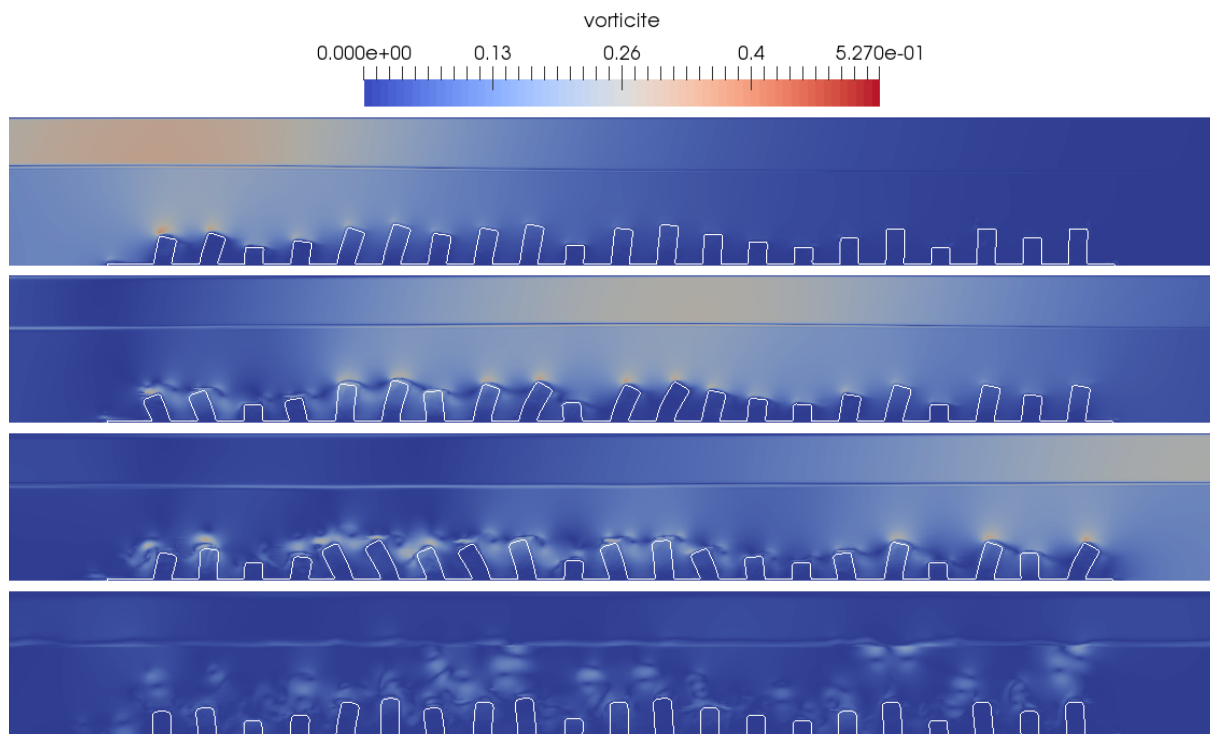


Figure 4.21 – Simulation du passage d'un soliton sur la configuration VF-2

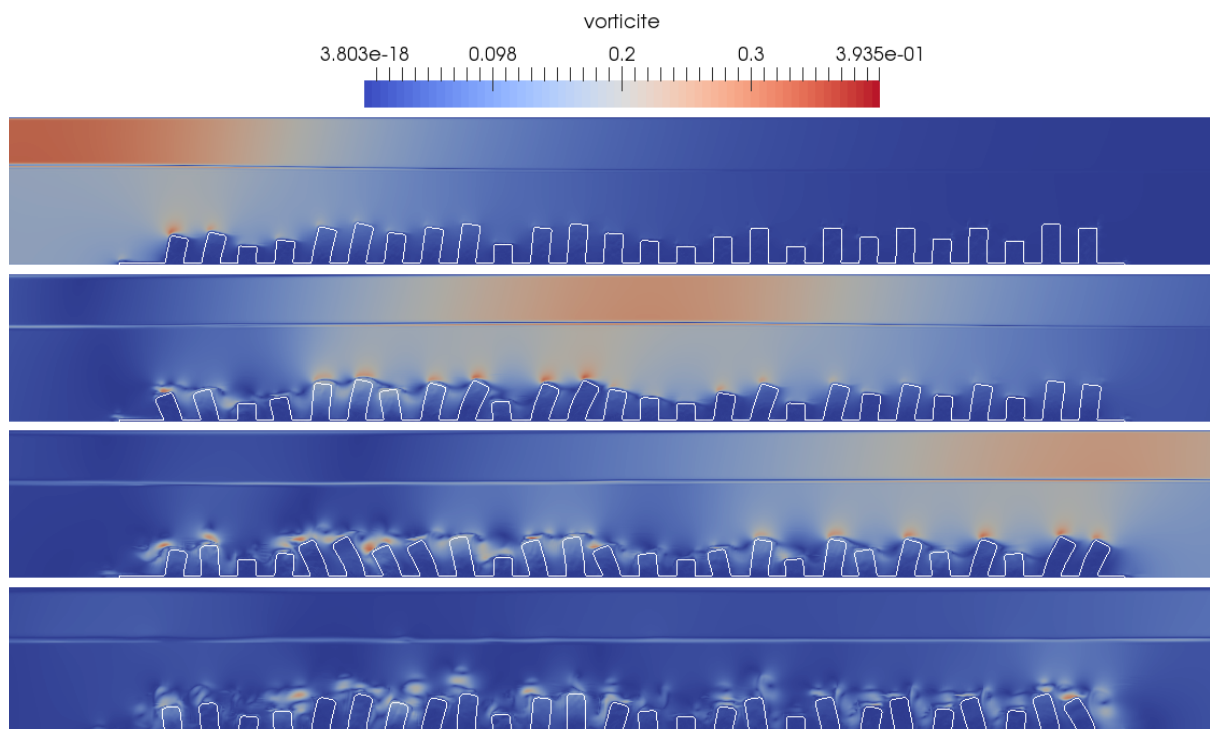


Figure 4.22 – Simulation du passage d'un soliton sur la configuration ZF-2

### Simulation $3_a$ et $3_b$

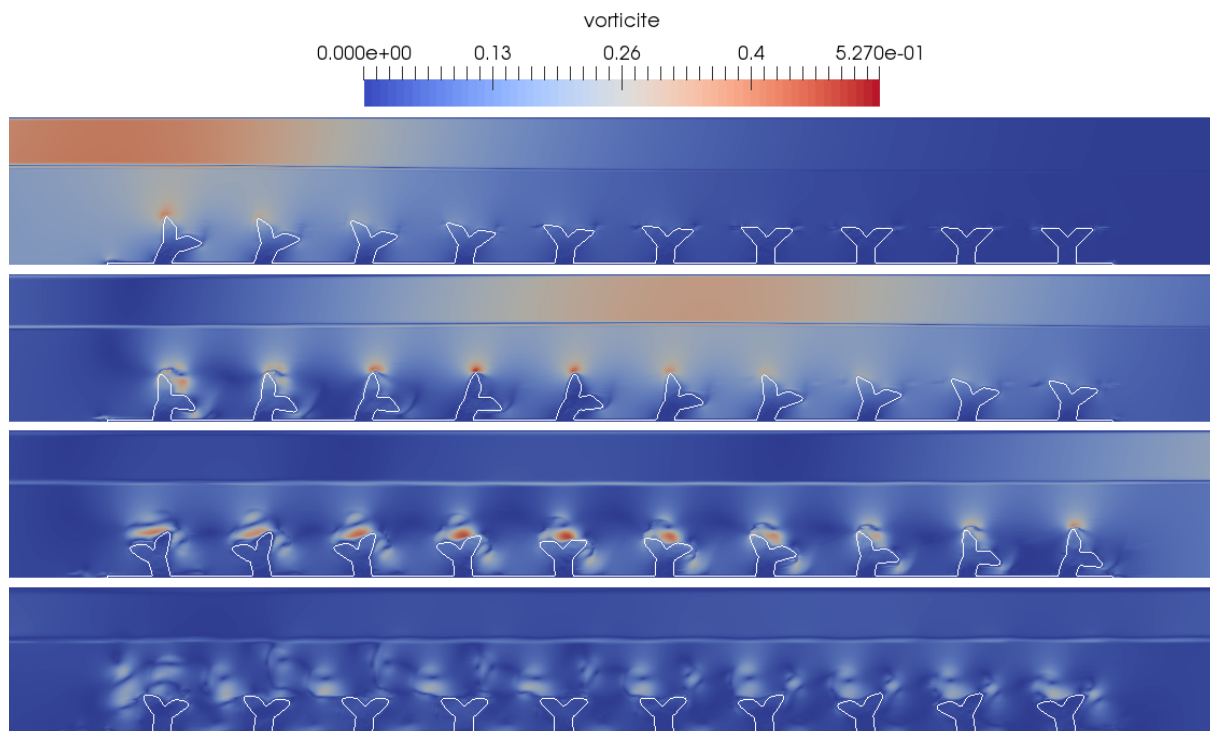


Figure 4.23 – Simulation du passage d'un soliton sur la configuration  $3_a$

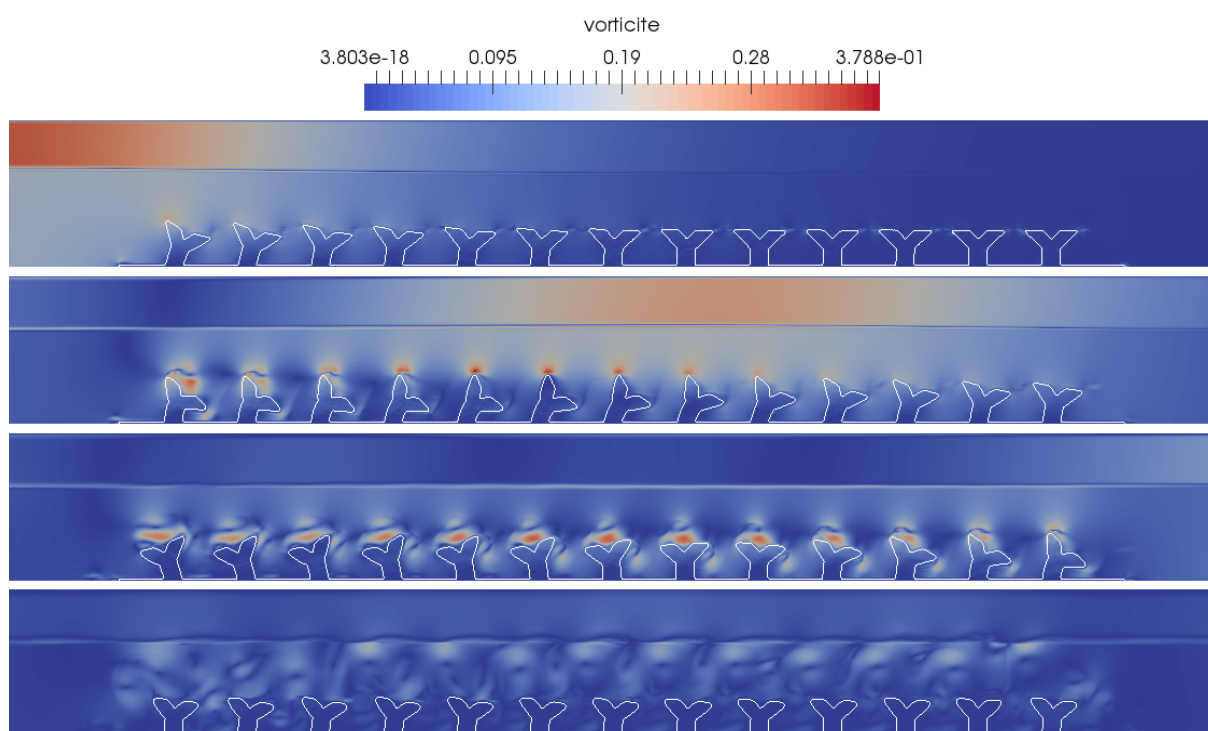


Figure 4.24 – Simulation du passage d'un soliton sur la configuration  $3_b$

#### Simulation $4_a$ et $4_b$

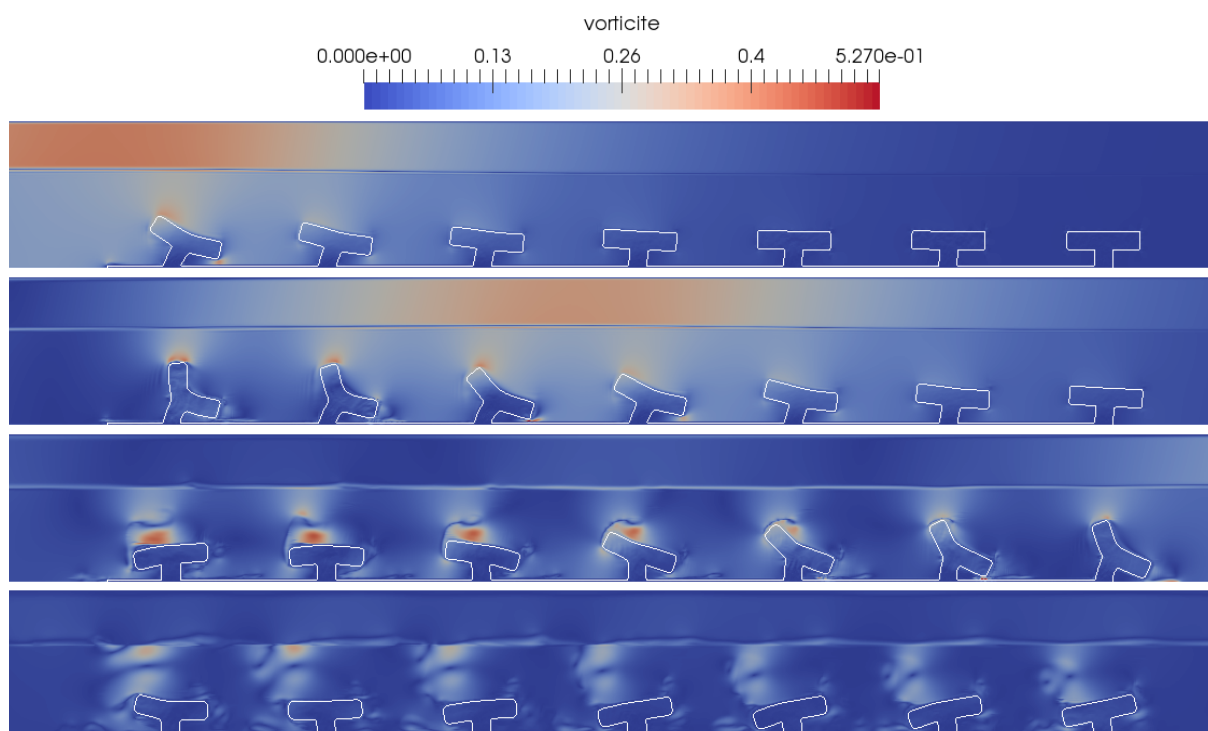


Figure 4.25 – Simulation du passage d'un soliton sur la configuration VF-4

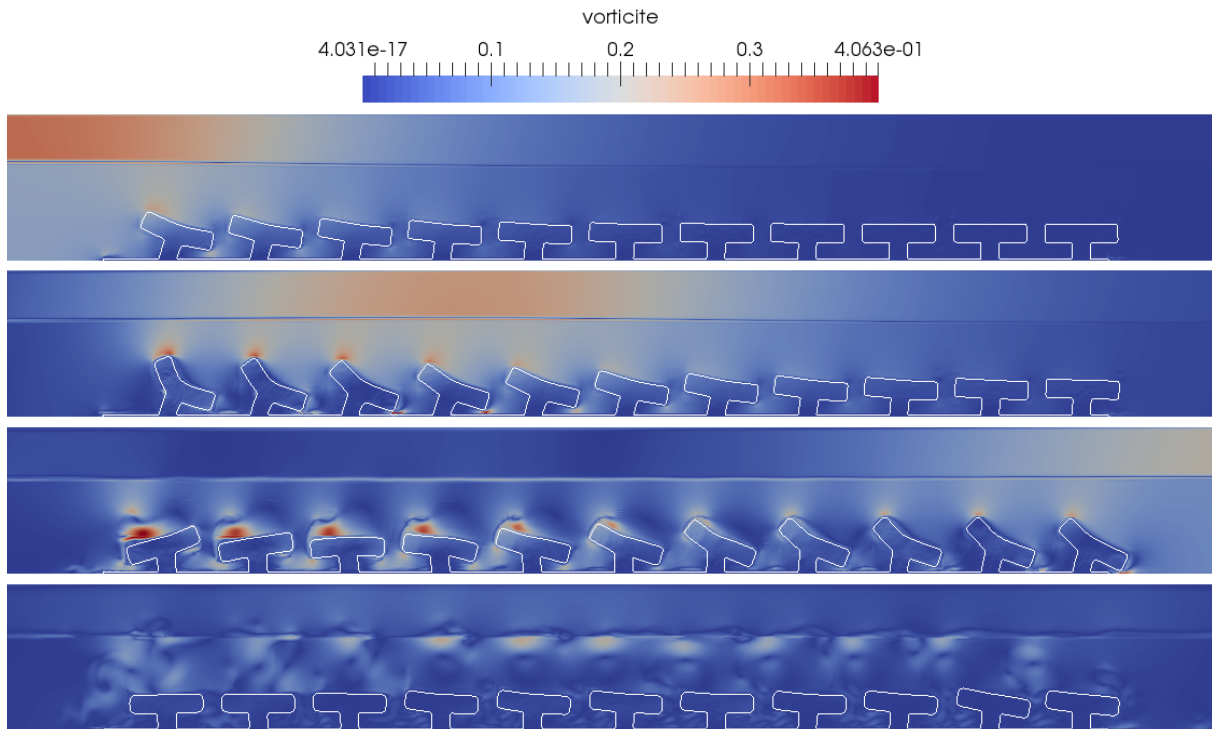


Figure 4.26 – Simulation du passage d'un soliton sur la configuration ZF-4

## Conclusion

Dans ce chapitre, l'interaction fluide-structure a été appliquée à la simulation de l'amortissement d'un soliton par des structures élastiques. Dans un premier temps nous avons mis en avant l'intérêt de l'utilisation de structures élastiques plutôt que rigides. Des matériaux plus rigides ont tendance à créer une seconde vague par effet "barrage" tandis que des matériaux trop souples allongent le temps de passage de l'onde.

Puis l'intérêt a été porté sur l'impact sur l'écoulement des géométries des structures ainsi que leur densité dans une zone fixée. À partir de ces résultats (4.27), plusieurs constats ont pu être effectués :

- Bien que nous ayons fixé la valeur de  $\chi$  à 300, chaque structure possède son propre coefficient d'élasticité assurant une atténuation maximale. Cette identification ne peut se faire que par de multiples tests que nous avons choisi de ne pas faire figurer ici.
- L'étude sur la densité révèle que dans le cas de structures rectangulaires, rien ne sert de surcharger la zone d'amortissement. Une densité de structures plus élevée n'est pas garante d'une meilleure absorption de l'énergie. C'est en revanche le contraire pour des structures plus complexes.
- Globalement, l'augmentation de l'énergie élastique traduisant l'intensité des déformations contribue à l'amélioration de l'amortissement de la vague. Néanmoins ce résultat n'est pas toujours vrai. En effet, la comparaison du cas  $4_a$  avec les cas  $3_a$  et  $3_b$  sur le tableau récapitulatif (4.27) fait apparaître que pour une énergie élastique supérieure ( $4_a$ ) l'absorption est légèrement in-

férieure à celle obtenue par les structures  $Y$  des cas  $3_a$  et  $3_b$ .

- De même, en observant les volumes élastiques et les élévations (4.27), il semble que l'amortissement soit généralement meilleur pour des structures plus volumineuses. En revanche encore une fois, ces observations sont à nuancer pour les cas des structures rectangulaires.

D'un point de vue général, cette étude montre que l'amortissement d'une vague par des structures élastiques est un phénomène complexe qu'il est nécessaire d'appréhender en prenant d'abord en compte l'ensemble des paramètres géologiques (espace disponible, pente etc...), géométriques (géométrie des structures, densité,...) ou encore physique (coefficient élastique, masse volumique,...). Bien que notre étude ne soit pas complète, les structures de formes non rectangulaires implantées (et particulièrement suivant la configuration 4) semblent offrir les meilleurs résultats en terme d'amortissement de la vague.

| Cas test | Vol. élastique ( $m.s^{-2}$ ) | Élévation | Énergie cinétique | Énergie élastique ( $J$ ) |
|----------|-------------------------------|-----------|-------------------|---------------------------|
| $1_a$    | 0.351                         | -17.32%   | -34.93%           | 0.77                      |
| $1_b$    | 0.442                         | -15.17%   | -31.33%           | 0.70                      |
| $2_a$    | 0.349                         | -20.48%   | -40.03%           | 1.03                      |
| $2_b$    | 0.438                         | -20.70%   | -40.17%           | 1.17                      |
| $3_a$    | 0.358                         | -24.09%   | -50.17%           | 2.08                      |
| $3_b$    | 0.497                         | -26.81%   | -53.88%           | 2.31                      |
| $4_a$    | 0.350                         | -23.26%   | -51.68%           | 2.70                      |
| $4_b$    | 0.550                         | -28.54%   | -55.77%           | 2.85                      |

**Figure 4.27** – Comparaison des volumes, des taux d'amortissement de la vague, des taux de réduction d'énergie cinétique et de production d'énergie élastique pour l'ensemble des configurations

# Conclusion et perspectives

## Conclusion

Les phénomènes d'interaction fluide-structure sont complexes à modéliser en particulier quand il s'agit de reproduire les grandes déformations du solide. Afin de résoudre ce problème, nous nous sommes intéressés à un modèle complètement eulérien. Ce modèle, décrit dans le chapitre 1, repose sur les équations de Navier-Stokes en incompressible dont le second membre intègre la force élastique est calculée à l'aide du gradient des caractéristiques rétrogrades. Ces dernières sont des fonctions advectées par la vitesse du fluide et qui permettent de récupérer l'information sur les déformations de manière Eulérienne. Les lois de comportement élastique utilisées sont non linéaires et nous avons privilégié le modèle Néo-Hookéen.

La résolution du système complet est décrite dans le chapitre 2. La contribution principale de nos travaux se situe dans l'implémentation de l'ensemble des méthodes numériques nécessaires au calcul de la force élastique dans le code parallèle Thétis. Dans ce code, les équations de Navier-Stokes sont résolues par une méthode de correction de pression et à l'aide d'une discrétisation selon un schéma volumes finis sur grille MAC. Le suivi de l'interface fluide-structure élastique est assuré par une méthode level set. Cette dernière ainsi que les caractéristiques rétrogrades sont transportées suivant un schéma RK2 en temps et WENO5 en espace. Cependant, dans le cas de grandes déformations générant de fortes contraintes de cisaillement, les lignes de niveau de la level set sont étirées et les caractéristiques rétrogrades sont fortement déformées. Le calcul de la force élastique est alors perturbé et peut conduire à la divergence du calcul. Ces difficultés soulignent l'importance de la mise en place d'un traitement à appliquer sur la fonction distance et les caractéristiques rétrogrades. La ré-initialisation de la level set est effectuée afin de garantir une diffusion homogène de la force élastique. La contribution apportée au modèle consiste à extrapoler les caractéristiques rétrogrades à l'extérieur du domaine solide afin d'obtenir un calcul précis de la force élastique.

Dans le chapitre 3, le modèle mathématique ainsi que la méthode numérique ont pu être validés sur différents cas tests proposés dans la littérature. Ces derniers ont été choisis pour leur pertinence et parce qu'ils représentent des phénomènes où le fluide est fortement cisailé près du solide. Ils ont permis de tester notre modèle sur des configurations proches de l'interaction entre une vague et des algues. Le dernier cas test repose sur le benchmark de Turek et a été adapté à notre modèle incompressible Néo-Hookéen. Il fait interagir un drapeau élastique très rigide ( $\chi$  grand) avec un fluide fortement cisailé. Les contraintes générées sont plus fortes que dans les cas tests précédents, démontrant ainsi la robustesse du modèle.

Dans le dernier chapitre, le modèle numérique a été utilisé pour simuler l'amortissement

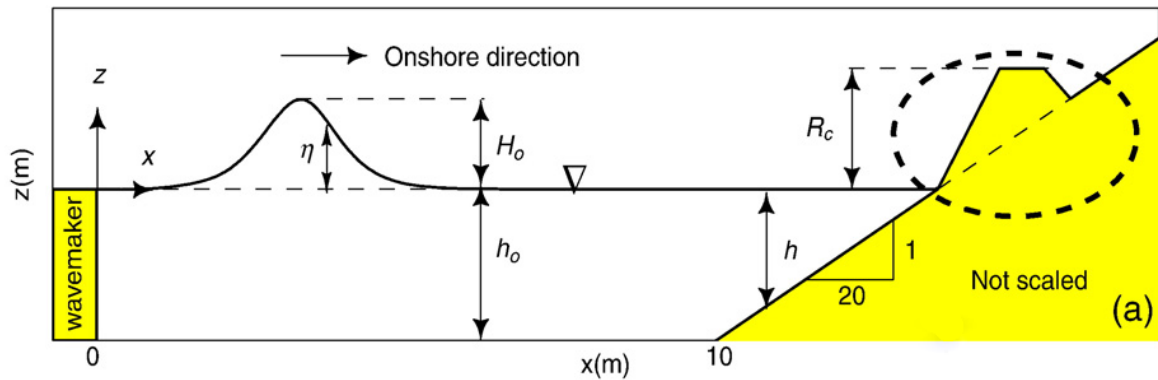


d'une vague par des structures élastiques volumiques. Dans un premier temps nous avons montré que l'utilisation de structures élastiques offre un amortissement supérieur à celui créé par des structures rigides. Dans un second temps, nous avons montré qu'il n'est pas nécessaire de multiplier le nombre de structures pour améliorer cet amortissement. Enfin l'étude sur la géométrie a mis en évidence l'efficacité des structures en forme de "T". Finalement, ces études ont permis non seulement de constater la complexité du phénomène d'interaction simulé mais aussi de montrer l'intérêt et le potentiel de l'outil numérique développé durant cette thèse. Nous abordons à présent les perspectives liées à ce travail.

## Perspectives

D'un point de vue numérique, si les modèles numériques proposés sont parfaitement adaptés à l'application visée, des verrous restent à lever pour diminuer les temps de calcul tant en garantissant la stabilité des schémas numériques. Le découplage explicite en temps des équations de transport et de quantité de mouvement conduit à des conditions de stabilité du type  $\Delta t \leq C \frac{\Delta x}{c_S}$  où  $c_S$  correspond à la vitesse de propagation des ondes élastiques. Cette vitesse des ondes est élevée dans notre application, ce qui impose un pas de temps très faible pour les simulations numériques. Lorsque l'on s'intéresse à des problèmes transitoires, il est important de respecter la condition de stabilité pré-citée, afin de capter toutes les ondes élastiques se propageant, car elles contiennent l'énergie physique du système. Dans les applications qui nous intéressent, les temps physiques de simulation sont longs et ces restrictions sur le pas de temps rendent les simulations numériques 3D très coûteuses, même avec une grande puissance de calcul sur des milliers de cœurs. Dans le cadre de l'interaction fluide-structure en incompressible, il est naturel de s'intéresser aux vitesses eulériennes du fluide et du solide plutôt qu'aux vitesses de propagation des ondes. Il est raisonnable de penser que l'énergie associée aux ondes les plus rapides est faible comparée à l'énergie cinétique du solide. Une première idée pour utiliser des pas de temps plus grands est d'utiliser un couplage des équations complètement implicite mais ce type de schéma conduit à des équations fortement non linéaires très délicates à résoudre (car les systèmes sont mal conditionnés) et très coûteuses en temps de calcul. Une perspective de ce travail serait donc de développer des schémas plus simples où l'on va impliquer une partie seulement des inconnues afin d'obtenir des systèmes linéaires. Il existe peu de travaux sur le sujet et les points de départ de notre étude seront les travaux de [Li et al., 2011], où un modèle semi-implicite pour les solides volumiques est proposé, et ceux de [Cottet and Maitre, 2016], où un schéma semi-implicite pour les membranes est proposé. Ces deux méthodes donnent des systèmes linéaires à inverser et des premiers résultats encourageants montrent que l'on peut espérer des gains jusqu'à 10 fois le pas de temps sur certains cas tests.

D'un point de vue applicatif, l'étude effectuée sur un soliton pourrait être rapidement étendue à plusieurs vagues déferlantes 2D comme proposé dans [Lubin and Glockner, 2012]. Cette configuration serait plus représentative des phénomène d'érosion ayant lieu sur notre littoral comme le schématise la figure (4.28).



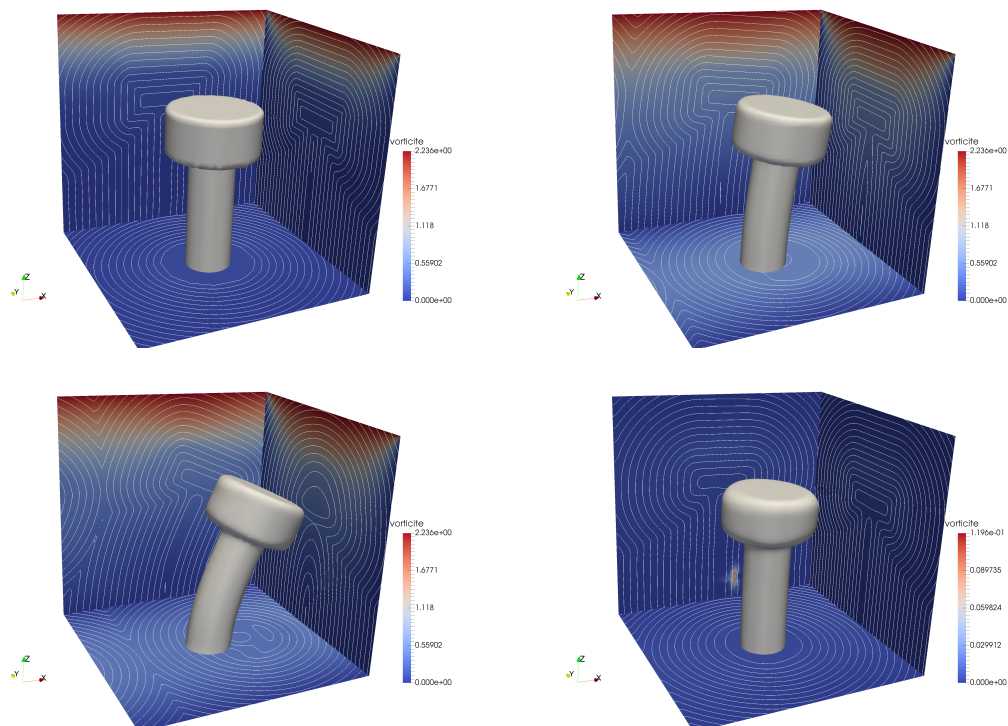
**Figure 4.28** – Configuration pour la création de vagues déferlantes

Bien que les simulations présentées soient 2D pour le moment, le développement numérique réalisé au cours de cette thèse a été effectué en 3D. De plus le déferlement des vagues a également été réalisé dans le code de calcul Thétis en 3D [Lubin and Glockner, 2015]. Nous pourrions donc envisager d'introduire des structures élastiques à cette configuration afin d'étudier l'amortissement des vagues. La simulation 3D permet une représentation plus réaliste de ces interactions et peut apporter plus de précision aux études de l'écoulement. En effet, en se déplaçant autour d'une structure, l'écoulement fluide peut générer des phénomènes de reflux plus complexes ainsi qu'un nombre plus important de vortex se déplaçant dans toutes les directions. Ces derniers peuvent avoir une influence sur la dynamique d'une structure voisine qu'on ne peut retrouver en 2D. De plus, nous pourrions étudier l'influence de la géométrie des structures élastiques, de leur densité mais aussi de leur disposition dans l'espace. En effet d'après la littérature, l'amortissement de la vague est améliorée pour des répartitions aléatoires des structures rigides plutôt que des implantations rectilignes. Un comportement lié à l'absorption de différente longueur d'onde permettant de réduire les phénomènes de résonance. Il serait donc intéressant d'introduire l'élasticité dans ces études afin de comparer l'efficacité sur l'amortissement.

Dans un premier temps nous pourrions tester le modèle sur une unique structure élastique soumise au passage d'un soliton. C'est dans cette perspective d'extension de notre étude à la 3D, que nous avons effectué une pré-simulation (4.29) sur  $32^3$  points. Nous observons l'interaction entre de l'eau et une structure élastique située sous la surface libre. Le champ de vitesse utilisé correspond à celui de la cavité entraînée étendue en 3D. La vitesse est fixée à  $2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  sur le plan supérieur pendant 1 seconde puis est annulée pour observer le retour de forme de la structure. Cette vitesse se veut être représentative des contraintes fluides exercées par le passage du soliton.

Dans un second temps nous pourrions envisager de multiplier le nombre des structures, étudier l'influence des géométries, des dispositions sur le fond marin etc... pour ensuite les soumettre au déferlement d'une puis de plusieurs vagues.





**Figure 4.29** – Simulation 3D du retour de forme d'une structure élastique soumise à un champ de vitesse cisailé

# Bibliographie

- [Amanifard et al., 2011] Amanifard, N., Hesani, M., and Rahbar, B. (2011). An sph approach for fluid-hypoelastic structure interaction with free surfaces. In *Proceedings of the world congress on Engineering*, volume 3.
- [Asano et al., 1993] Asano, T., Deguchi, H., and Kobayashi, N. (1993). Interaction between water waves and vegetation. In *Coastal Engineering 1992*, pages 2709–2723.
- [Aslam, 2004] Aslam, T. D. (2004). A partial differential equation approach to multidimensional extrapolation. *Journal of Computational Physics*, 193(1) :349–355.
- [Baraldi et al., 2014] Baraldi, A., Dodd, M., and Ferrante, A. (2014). A mass-conserving volume-of-fluid method : Volume tracking and droplet surface-tension in incompressible isotropic turbulence. *Computers and Fluids*, 96 :322 – 337.
- [Bhardwaj and Mittal, 2012] Bhardwaj, R. and Mittal, R. (2012). Benchmarking a coupled immersed-boundary-finite-element solver for large-scale flow-induced deformation. *AIAA journal*, 50(7) :1638–1642.
- [Brauer, 2015] Brauer, A. d. (2015). *Simulation of multimaterial models on Cartesian grid*. Theses, Université de Bordeaux.
- [Carpentier et al., 2015] Carpentier, A., Latrémouille, C., Cholley, B., Smadja, D. M., Roussel, J.-C., Boissier, E., Trochu, J.-N., Gueffet, J.-P., Treillot, M., Bizouarn, P., et al. (2015). First clinical use of a bioprosthetic total artificial heart : report of two cases. *The Lancet*, 386(10003) :1556–1563.
- [Cottet and Maitre, 2004] Cottet, G.-H. and Maitre, E. (2004). A level-set formulation of immersed boundary methods for fluid–structure interaction problems. *Comptes Rendus Mathématique*, 338(7) :581–586.
- [Cottet and Maitre, 2006] Cottet, G.-H. and Maitre, E. (2006). A level set method for fluid-structure interactions with immersed surfaces. *Mathematical models and methods in applied sciences*, 16(03) :415–438.
- [Cottet and Maitre, 2016] Cottet, G.-H. and Maitre, E. (2016). A semi-implicit level set method for multiphase flows and fluid–structure interaction problems. *Journal of Computational Physics*, 314 :80–92.
- [Cottet et al., 2008] Cottet, G.-H., Maitre, E., and Milcent, T. (2008). Eulerian formulation and level set models for incompressible fluid-structure interaction. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 42(3) :471–492.
- [Couderc, 2007] Couderc, F. (2007). *Development of a numerical code for the simulation of non-miscible fluid flow. Application to the air-assisted disintegration of a liquid jet*. Theses, Ecole nationale supérieure de l’aéronautique et de l’espace.

- [Demailly, 2016] Demailly, J.-P. (2016). *Analyse numérique et équations différentielles-4ème Ed.* EDP sciences.
- [Donea et al., 1982] Donea, J., Giuliani, S., and Halleux, J.-P. (1982). An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 33(1-3) :689–723.
- [Dret, 2003] Dret, H. L. (2002-2003). Méthodes mathématiques en élasticité.
- [Dunne, 2006] Dunne, T. (2006). An eulerian approach to fluid–structure interaction and goal-oriented mesh adaptation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 51(9-10) :1017–1039.
- [Dunne and Rannacher, 2006] Dunne, T. and Rannacher, R. (2006). Adaptive finite element approximation of fluid-structure interaction based on an eulerian variational formulation. In *Fluid-structure interaction*, pages 110–145. Springer.
- [Eggletona and Popel, 1998] Eggletona, C. D. and Popel, A. S. (1998). Large deformation of red blood cell ghosts in a simple shear flow. *Phys. Fluids*, 10(8) :1834–1845.
- [Enright et al., 2002] Enright, D., Fedkiw, R., Ferziger, J., and Mitchell, I. (2002). A hybrid particle level set method for improved interface capturing. *Journal of Computational physics*, 183(1) :83–116.
- [Falgout et al., 2006] Falgout, R. D., Jones, J. E., and Yang, U. M. (2006). *The Design and Implementation of hypre, a Library of Parallel High Performance Preconditioners*, pages 267–294. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- [Falgout and Yang, 2002] Falgout, R. D. and Yang, U. M. (2002). *hypre : A Library of High Performance Preconditioners*, pages 632–641. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- [Flory, 1961] Flory, P. (1961). Thermodynamic relations for high elastic materials. *Transactions of the Faraday Society*, 57 :829–838.
- [Gao and Hu, 2009] Gao, T. and Hu, H. H. (2009). Deformation of elastic particles in viscous shear flow. *Journal of Computational Physics*, 228(6) :2132–2151.
- [Glowinski et al., 1994] Glowinski, R., Pan, T.-W., and Periaux, J. (1994). A fictitious domain method for external incompressible viscous flow modeled by navier-stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 112(1) :133–148.
- [Goda, 1979] Goda, K. (1979). A multistep technique with implicit difference schemes for calculating two-or three-dimensional cavity flows. *Journal of Computational Physics*, 30(1) :76–95.
- [Gorsse et al., 2014] Gorsse, Y., Iollo, A., Milcent, T., and Telib, H. (2014). A simple cartesian scheme for compressible multimaterials. *Journal of Computational Physics*, 272 :772–798.
- [Gottlieb et al., 2001] Gottlieb, S., Shu, C.-W., and Tadmor, E. (2001). Strong stability-preserving high-order time discretization methods. *SIAM review*, 43(1) :89–112.
- [Gould, 1994] Gould, P. L. (1994). *Introduction to linear elasticity*. Springer.
- [Guermond et al., 2006] Guermond, J.-L., Mineev, P., and Shen, J. (2006). An overview of projection methods for incompressible flows. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 195(44) :6011–6045.
-

- [Harada and Kawata, 2005] Harada, K. and Kawata, Y. (2005). Study on tsunami reduction effect of coastal forest due to forest growth. *Annuals of Disaster Prevention Research Institute, Kyoto Univ., Kyoto*.
- [Harlow and Welch, 1965] Harlow, F. H. and Welch, J. E. (1965). Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *The physics of fluids*, 8(12) :2182–2189.
- [Hirt et al., 1974] Hirt, C., Amsden, A. A., and Cook, J. (1974). An arbitrary lagrangian-eulerian computing method for all flow speeds. *Journal of computational physics*, 14(3) :227–253.
- [Hirt and Nichols, 1981] Hirt, C. W. and Nichols, B. D. (1981). Volume of fluid (vof) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of computational physics*, 39(1) :201–225.
- [Holzapfel, 2002] Holzapfel, G. A. (2002). Nonlinear solid mechanics : a continuum approach for engineering science. *Meccanica*, 37(4) :489–490.
- [Huang and Sung, 2009] Huang, W.-X. and Sung, H. J. (2009). An immersed boundary method for fluid–flexible structure interaction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(33) :2650–2661.
- [Huang et al., 2011] Huang, Z., Yao, Y., Sim, S. Y., and Yao, Y. (2011). Interaction of solitary waves with emergent, rigid vegetation. *Ocean Engineering*, 38(10) :1080–1088.
- [Husrin et al., 2012] Husrin, S., Strusińska, A., and Oumeraci, H. (2012). Experimental study on tsunami attenuation by mangrove forest. *Earth, planets and space*, 64(10) :973–989.
- [Ii et al., 2011] Ii, S., Sugiyama, K., Takeuchi, S., Takagi, S., and Matsumoto, Y. (2011). An implicit full eulerian method for the fluid–structure interaction problem. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 65(1-3) :150–165.
- [Irtem et al., 2009] Irtem, E., Gedik, N., Kabdasli, M. S., and Yasa, N. E. (2009). Coastal forest effects on tsunami run-up heights. *Ocean Engineering*, 36(3) :313–320.
- [Ismail et al., 2012] Ismail, H., Wahab, A. A., and Alias, N. E. (2012). Determination of mangrove forest performance in reducing tsunami run-up using physical models. *Natural hazards*, 63(2) :939–963.
- [John et al., 2015] John, B. M., Shirlal, K. G., and Rao, S. (2015). Effect of artificial sea grass on wave attenuation-an experimental investigation. *Aquatic Procedia*, 4 :221–226.
- [Kamrin et al., 2012] Kamrin, K., Rycroft, C. H., and Nave, J.-C. (2012). Reference map technique for finite-strain elasticity and fluid–solid interaction. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 60(11) :1952–1969.
- [Kandasamy and Narayanasamy, 2005] Kandasamy, K. and Narayanasamy, R. (2005). Coastal mangrove forests mitigated tsunami. *Estuarine, Coastal and Shelf Science*, 65(3) :601 – 606.
- [Khadra et al., 2000] Khadra, K., Angot, P., Parneix, S., and Caltagirone, J.-P. (2000). Fictitious domain approach for numerical modelling of navier–stokes equations. *International journal for numerical methods in fluids*, 34(8) :651–684.
- [Lee and LeVeque, 2003] Lee, L. and LeVeque, R. J. (2003). An immersed interface method for incompressible navier–stokes equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 25(3) :832–856.
-

- [Li and Lai, 2001] Li, Z. and Lai, M.-C. (2001). The immersed interface method for the navier–stokes equations with singular forces. *Journal of Computational Physics*, 171(2) :822–842.
- [Lubin and Glockner, 2012] Lubin, P. and Glockner, S. (2012). Numerical simulations of breaking solitary waves. *Coastal Engineering Proceedings*, 1(33) :59.
- [Lubin and Glockner, 2015] Lubin, P. and Glockner, S. (2015). Numerical simulations of three-dimensional plunging breaking waves : generation and evolution of aerated vortex filaments. *Journal of Fluid Mechanics*, 767 :364–393.
- [Lubin and Lemonnier, 2004] Lubin, P. and Lemonnier, H. (2004). Test-case no 33 : Propagation of solitary waves in constant depths over horizontal beds (pa, pn, pe). *Multiphase Science and Technology*, 16(1-3).
- [M., 1982] M., Fortin, R. G. (1982). *Méthodes de Lagrangien Augmenté - applications à la résolution numérique de problèmes aux limites*, volume 9. Dunod.
- [Maitre, 2006] Maitre, E. (2006). Review of numerical methods for free interfaces. *Les Houches*, 27 :31.
- [Maitre et al., 2009] Maitre, E., Milcent, T., Cottet, G.-H., Raoult, A., and Usson, Y. (2009). Applications of level set methods in computational biophysics. *Mathematical and Computer Modelling*, 49(11) :2161–2169.
- [Manca et al., 2010] Manca, E., Stratigaki, V., and Prinos, P. (2010). Large scale experiments on spectral wave propagation over posidonia oceanica seagrass. In *Proc. of 6th International Symposium on Environmental Hydraulics*, volume 1, pages 463–469.
- [Marti et al., 2006] Marti, J., Idelsohn, S., Limache, A., Calvo, N., and D’Elia, J. (2006). A fully coupled particle method for quasi-incompressible fluid hyperelastic structure interactions. *Mecanica Computacional*, 25 :809–827.
- [Maza et al., 2013] Maza, M., Lara, J. L., and Losada, I. J. (2013). A coupled model of submerged vegetation under oscillatory flow using navier–stokes equations. *Coastal Engineering*, 80 :16 – 34.
- [Maza et al., 2015] Maza, M., Lara, J. L., and Losada, I. J. (2015). Tsunami wave interaction with mangrove forests : A 3-d numerical approach. *Coastal Engineering*, 98 :33–54.
- [Mazda et al., 2006] Mazda, Y., Magi, M., Ikeda, Y., Kurokawa, T., and Asano, T. (2006). Wave reduction in a mangrove forest dominated by sonneratia sp. *Wetlands Ecology and Management*, 14(4) :365–378.
- [Milcent and Maitre, 2016] Milcent, T. and Maitre, E. (2016). Eulerian model of immersed elastic surfaces with full membrane elasticity. *Communications in the Mathematical Sciences*, 14(3) :857–881.
- [Monaghan, 1988] Monaghan, J. J. (1988). An introduction to sph. *Computer physics communications*, 48(1) :89–96.
- [Ogden, 1972] Ogden, R. (1972). Large deformation isotropic elasticity-on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. In *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 326, pages 565–584. The Royal Society.
- [Ogden, 1986] Ogden, R. (1986). Recent advances in the phenomenological theory of rubber elasticity. *Rubber Chemistry and Technology*, 59(3) :361–383.
-

- [Ohira et al., 2012] Ohira, W., Honda, K., and Harada, K. (2012). Reduction of tsunami inundation by coastal forests in yogyakarta, indonesia : a numerical study. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 12(1) :85.
- [Olsson and Kreiss, 2005] Olsson, E. and Kreiss, G. (2005). A conservative level set method for two phase flow. *Journal of Computational Physics*, 210(1) :225 – 246.
- [Osher and Sethian, 1988] Osher, S. and Sethian, J. A. (1988). Fronts propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *Journal of computational physics*, 79(1) :12–49.
- [Peskin, 1972] Peskin, C. S. (1972). Flow patterns around heart valves : a numerical method. *Journal of computational physics*, 10(2) :252–271.
- [Peskin, 2002] Peskin, C. S. (2002). The immersed boundary method. *Acta numerica*, 11 :479–517.
- [Poux, 2012] Poux, A. (2012). *Conditions limites de sortie pour les méthodes de time-splitting appliquées aux équations Navier-Stokes*. PhD thesis. Thèse de doctorat dirigée par Azaïez, Mejdî et Glockner, Stéphane Mécanique Bordeaux 1 2012.
- [Richter, 2013] Richter, T. (2013). A fully eulerian formulation for fluid–structure-interaction problems. *Journal of Computational Physics*, 233 :227–240.
- [Rodríguez et al., 2016] Rodríguez, R., Encina, P., Espinosa, M., and Tanaka, N. (2016). Field study on planted forest structures and their role in protecting communities against tsunamis : experiences along the coast of the biobío region, chile. *Landscape and Ecological Engineering*, 12(1) :1–12.
- [Russo and Smereka, 2000] Russo, G. and Smereka, P. (2000). A remark on computing distance functions. *Journal of Computational Physics*, 163(1) :51–67.
- [Shu, 2003] Shu, C.-W. (2003). High-order finite difference and finite volume weno schemes and discontinuous galerkin methods for cfd. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 17(2) :107–118.
- [Shu and Osher, 1988a] Shu, C.-W. and Osher, S. (1988a). Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes. *Journal of Computational Physics*, 77(2) :439–471.
- [Shu and Osher, 1988b] Shu, C.-W. and Osher, S. (1988b). Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes. *Journal of Computational Physics*, 77(2) :439–471.
- [Sugiyama et al., 2011] Sugiyama, K., Ii, S., Takeuchi, S., Takagi, S., and Matsumoto, Y. (2011). A full eulerian finite difference approach for solving fluid–structure coupling problems. *Journal of Computational Physics*, 230(3) :596–627.
- [Sussman et al., 1994] Sussman, M., Smereka, P., and Osher, S. (1994). A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *Journal of Computational physics*, 114(1) :146–159.
- [Takagi et al., 2016] Takagi, H., Mikami, T., Fujii, D., Esteban, M., and Kurobe, S. (2016). Mangrove forest against dyke-break-induced tsunami on rapidly subsiding coasts. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 16 :1629–1638.
- [Tanaka et al., 2007] Tanaka, N., Sasaki, Y., Mowjood, M., Jinadasa, K., and Homchuen, S. (2007). Coastal vegetation structures and their functions in tsunami protection : experience of the recent indian ocean tsunami. *Landscape and Ecological Engineering*, 3(1) :33–45.
-

- [Taylor et al., 1998] Taylor, C. A., Hughes, T. J., and Zarins, C. K. (1998). Finite element modeling of blood flow in arteries. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 158(1-2) :155–196.
- [Témam, 1969] Témam, R. (1969). Sur l’approximation de la solution des équations de navier-stokes par la méthode des pas fractionnaires (ii). *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 33(5) :377–385.
- [Temam, 1984] Temam, R. (1984). *Navier-stokes equations*, volume 2. North-Holland Amsterdam.
- [Tsai et al., 2016] Tsai, C.-P., Chen, Y.-C., Sihombing, T. O., and Lin, C. (2016). Simulations of moving effect of coastal vegetation on tsunami damping. *Natural Hazards and Earth System Sciences Discussions*, 2016 :1–15.
- [Turek and Hron, 2006] Turek, S. and Hron, J. (2006). Proposal for numerical benchmarking of fluid-structure interaction between an elastic object and laminar incompressible flow. In *Fluid-structure interaction*, pages 371–385. Springer Berlin Heidelberg.
- [Unverdi and Tryggvason, 1992] Unverdi, S. O. and Tryggvason, G. (1992). A front-tracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows. *Journal of computational physics*, 100(1) :25–37.
- [Valkov et al., 2015] Valkov, B., Rycroft, C. H., and Kamrin, K. (2015). Eulerian method for fluid-structure interaction and submerged solid-solid contact problems.
- [Wang et al., 2014] Wang, S., Khoo, B., Liu, G., Xu, G., and Chen, L. (2014). Coupling gsm/ale with es-fem-t3 for fluid–deformable structure interactions. *Journal of Computational Physics*, 276 :315 – 340.
- [Watanabe et al., 2004] Watanabe, H., Sugiura, S., Kafuku, H., and Hisada, T. (2004). Multiphysics simulation of left ventricular filling dynamics using fluid-structure interaction finite element method. *Biophysical journal*, 87(3) :2074–2085.
- [Wen et al., 2016] Wen, H., Ren, B., Dong, P., and Wang, Y. (2016). A sph numerical wave basin for modeling wave-structure interactions. *Applied Ocean Research*, 59 :366–377.
- [Youngs, 1982] Youngs, D. L. (1982). Time-dependent multimaterial flow with large fluid distortion. *K.W. Morton and M.J. Baines, Numerical Methods for Fluid Dynamics*, Academic Press, New-York.
- [Zhang et al., 2012] Zhang, Z.-Q., Liu, G., and Khoo, B. C. (2012). Immersed smoothed finite element method for two dimensional fluid–structure interaction problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 90(10) :1292–1320.
- [Zhao et al., 2008] Zhao, H., Freund, J. B., and Moser, R. D. (2008). A fixed-mesh method for incompressible flow–structure systems with finite solid deformations. *Journal of Computational Physics*, 227(6) :3114–3140.
-

# Annexes





# Annexe A

## Solution analytique pour le problème de réponse oscillatoire en couches parallèles de fluide et de solide élastique

Nous reprenons le calcul de la solution analytique pour le problème 1D proposé par ([Sugiyama et al., 2011]) dans le cas de la présence de viscosité fluide dans le solide.

- Dans un premier temps, le problème est scindé en deux parties afin d'exprimer les vitesses fluide et solide de la manière suivante :

$$\mathbf{v}(x_2, t) = \begin{cases} \mathbf{v}_F(x_2, t), & x_2 \in \Omega_F \\ \mathbf{v}_S(x_2, t), & x_2 \in \Omega_S \end{cases}$$

- Dans un deuxième temps, le raccord de la solution à l'interface est effectué à l'aide de la continuité du tenseur des contraintes;
- puis les résultats numériques sont comparés à la solution analytique.

### Domaine fluide

On s'intéresse à la vitesse fluide définie sur le domaine  $[-x_1, x_1] \times [L_s, L_f]$ . On pose

$$\mathbf{v}_F(\tilde{x}_2, t) = V_I(t) + \frac{\tilde{x}_2}{L_f} (V_W(t) - V_I(t)) + \sum_{k=1}^{\infty} v_{f,k}(t) \sin\left(\frac{\pi k \tilde{x}_2}{L_f}\right) \quad (\text{A.1})$$

avec :

$\tilde{y} = x_2 - L_s$  le changement de variable tel que  $\tilde{x}_2 \in [0, L_f]$ ,

$V_I(t)$  la vitesse à l'interface ( $\tilde{x}_2 = 0$  i.e.  $x_2 = L_s$ ),

$\widehat{V}_W = 1$  la vitesse fluide, unitaire dans nos simulations. On a besoin des équations du

mouvement fluide :

$$\begin{cases} \rho_f(\partial_t \mathbf{v}_F + \mathbf{v}_F \cdot \nabla \mathbf{v}_F) = \text{div}(\sigma_f) \\ \sigma_f = 2\mu_f D(\mathbf{v}_F) \\ D(\mathbf{v}_F) = \frac{1}{2}([\nabla \mathbf{v}_F] + [\nabla \mathbf{v}_F]^T) \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Les hypothèses énoncées précédemment permettent de considérer un problème mono-dimensionnel ainsi que de négliger la seconde composante de la vitesse i.e.  $v = (v(x_2, t), 0)^T$ . Les équations du mouvement (A.2) se simplifient, et s'affranchissent du terme inertiel :

$$\partial_t \mathbf{v}_F = \frac{\mu_f}{\rho_f} \partial_2^2 \mathbf{v}_F \quad (\text{A.3})$$

on injecte l'expression (A.1) de  $\mathbf{v}_F$  dans (A.3)

$$\frac{d}{dt} V_I(t) + \frac{\tilde{x}_2}{L_f} \left( \frac{d}{dt} V_W(t) - \frac{d}{dt} V_I(t) \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{d}{dt} v_{f,k}(t) + \frac{\mu_f}{\rho_f} \left( \frac{\pi k}{L_f} \right)^2 v_{f,k}(t) \right) \sin\left(\frac{\pi k \tilde{x}_2}{L_f}\right) = 0$$

Nous utilisons les propriétés d'orthogonalité de la fonction sinus puis l'équation est intégrée sur  $[0, L_f]$  après l'avoir multiplié par  $\sin\left(\frac{\pi p \tilde{x}_2}{L_f}\right)$ , avec  $p \in \mathbb{N}$  fixé. Il s'en suit :

$$\frac{2}{\pi k} \left( \frac{d}{dt} V_I(t) - (-1)^k \frac{d}{dt} V_W(t) \right) + \frac{d}{dt} v_{f,k}(t) + \frac{\mu_f}{\rho_f} \left( \frac{\pi k}{L_f} \right)^2 v_{f,k}(t) = 0$$

Nous utilisons les transformées de Fourier :

$$\begin{aligned} v_{f,k}(t) &= \text{Im}(\hat{v}_{f,k} \exp(i\omega t)) \\ V_I(t) &= \text{Im}(\hat{V}_I \exp(i\omega t)) \\ V_W(t) &= \text{Im}(\hat{V}_W \exp(i\omega t)). \end{aligned}$$

Nous trouvons alors :

$$\hat{v}_{f,k} = \frac{((-1)^k \hat{V}_W - \hat{V}_I)}{\pi k} \alpha_k$$

$$\text{avec } \alpha_k = \frac{2i\omega}{\frac{\mu_f \pi^2 k^2}{\rho_f + L_f^2} + i\omega}.$$

Le résultat obtenu est le même que celui de Sugiyama. A présent la partie solide est abordée à laquelle la viscosité fluide est ajoutée.

## Domaine Solide

Un solide élastique de type Mooney Rivlin à viscosité non nulle est utilisé. La méthode est la même que précédemment. La vitesse solide sur est définie sur  $[0, L_s]$  telle que :

$$\mathbf{v}_S(x_2, t) = \frac{1}{L_s} V_I(t) + \sum_{k=1}^{\infty} v_{s,k}(t) \sin\left(\frac{\pi k x_2}{L_s}\right). \quad (\text{A.4})$$

Les équations du mouvement solide deviennent :

$$\begin{cases} \rho_s(\partial_t \mathbf{v}_S + \mathbf{v}_S \cdot \nabla \mathbf{v}_S) = \operatorname{div}(\sigma) \\ \sigma = 2\mu_F D(\mathbf{v}_F) + \sigma_S \\ D(\mathbf{v}_F) = \frac{1}{2}([\nabla \mathbf{v}_F] + [\nabla \mathbf{v}_F]^T) \\ \sigma_S = \sigma_S(\hat{B}) \\ B := B(\mathbf{u}(x_2, t)) \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Avec  $B$  le tenseur de Green-Cauchy à gauche, s'exprimant en fonction du déplacement  $\mathbf{u}$  définit par :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{u}(t) = \mathbf{v}(t)$$

Par la suite, il est plus commode de travailler avec le déplacement  $\mathbf{u}$  exprimé à partir de (A.4)

$$\mathbf{u}(x_2, t) = \frac{U_I(t)}{L_s} x_2 + \sum_{k=1}^{\infty} u_{s,k}(t) \sin \frac{\pi k x_2}{L_s} \quad (\text{A.6})$$

L'équation (A.6) est insérée dans les équations du mouvement solide (A.5) :

$$\frac{x_2}{L_s} \frac{d}{dt} V_I(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{d^2}{dt^2} u_{s,k}(t) + \frac{2(c_1 + c_2)}{\rho_s} \left( \frac{\pi k}{L_s} \right)^2 u_{s,k}(t) + \frac{\mu_s}{\rho_s} \left( \frac{\pi k}{L_s} \right)^2 v_{s,k}(t) \right) \sin \frac{\pi k x_2}{L_s} = 0.$$

Enfin, avec l'orthogonalité du sinus il vient :

$$\frac{-2(-1)^k}{\pi k} \frac{d}{dt} V_I(t) + \frac{d^2}{dt^2} u_{s,k}(t) + \frac{2(c_1 + c_2)}{\rho_s} \left( \frac{\pi k}{L_s} \right)^2 u_{s,k}(t) + \frac{\mu_s}{\rho_s} \left( \frac{\pi k}{L_s} \right)^2 v_{s,k}(t) = 0$$

De la même manière, les transformées de Fourier sont utilisées et nous écrivons :

$$\begin{aligned} v_{s,k}(t) &= \frac{d}{dt} u_{s,k}(t) \implies \hat{v}_{s,k} = i\omega \hat{u}_{s,k} \\ V_I(t) &= \operatorname{Im}(\hat{V}_I \exp(i\omega t)) \\ u_{s,k}(t) &= \operatorname{Im}(\hat{u}_{s,k} \exp(i\omega t)), \end{aligned}$$

Pour finalement obtenir :

$$\hat{u}_{s,k} = \frac{i(-1)^k}{\pi \omega k} \beta_k$$

$$\text{avec } \beta_k = \frac{2\omega^2}{\frac{2(c_1+c_2)\pi^2 k^2}{\rho L_s^2} - \omega^2 + \frac{\mu_s}{\rho_s} \left( \frac{\pi k}{L_s} \right)^2 i\omega}.$$

De cette manière les vitesses sont acquises sur les deux milieux différents. Il reste à expliciter la vitesse à l'interface  $V_I$ .

## L'interface

Nous nous plaçons au niveau de l'interface  $x_2 = L_s$  afin de déterminer la vitesse à l'interface  $V_I$  et d'assurer la continuité de la vitesse sur l'ensemble du domaine.

La relation de continuité du tenseur des contraintes sur l'interface impose :

$$\sigma = \mu_f \partial_2 \mathbf{v}_F \quad (\text{A.7})$$

$$= \mu_s \partial_2 \mathbf{v}_S + 2(c_1 + c_2) \partial_2 u_s \quad (\text{A.8})$$

À l'interface nous avons  $x_2 = L_s$  i.e.  $\tilde{x}_2 = 0$  ainsi que l'égalité entre (A.7) et (A.8)

$$\begin{aligned} A &= B \\ C &+ D \\ E \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} &\frac{\mu_f}{L_f} (V_W(t) - V_I(t)) - \frac{\mu_s}{L_s} V_I(t) - \frac{2(c_1 + c_2)}{L_s} U_I \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{\mu_f \pi k}{L_f} v_{f,k}(t) - (-1)^k \left( \frac{2(c_1 + c_2)}{L_s} u_{s,k}(t) + \frac{\mu_s \pi k}{L_s} \frac{d}{dt} u_{s,k}(t) \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Considérons les transformées de Fourier suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{U}_I &= \frac{\hat{V}_I}{i\omega} \text{car} \frac{d}{dt} U_I(t) = V(t) \\ \frac{d}{dt} \hat{u}_{s,k} &= i\omega \hat{u}_{s,k} \\ \hat{v}_{f,k} &= \frac{((-1)^k \hat{V}_W - \hat{V}_I)}{\pi k} \alpha_k \\ \hat{u}_{s,k} &= \frac{i(-1)^k}{\pi \omega k} \beta_k \end{aligned}$$

La vitesse à l'interface est obtenue :

$$\hat{V}_I = \frac{\frac{\mu_f \hat{V}_W}{L_f} \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \alpha_k \right)}{\frac{\mu_f}{L_f} \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \right) + \frac{2(c_1 + c_2)}{i\omega L_s} \left( 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \right) + \frac{\mu_s}{L_s} \left( 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \right)}$$

Ce dernier résultat termine le calcul de la solution analytique du champ de vitesse sur l'ensemble du domaine, laquelle est utilisée pour l'étude de convergence du cas considéré.

# Annexe B

## Méthodes à un pas vs méthodes multi pas

### Problématique

Nous souhaitons ici faire apparaître les travaux effectués pour la résolution de la problématique engendrée par les méthodes à un pas. Même si ces recherches ne constituent pas l'essence même de notre domaine d'application, elles ont quand même attisé notre curiosité.

Dans un premier temps nous rappelons le principe des méthodes à un pas RK TVD utilisées dans nos travaux. Puis nous abordons la problématique suivante : comprendre l'intérêt d'utiliser une méthode à un pas, coûteuse en temps de calcul, quand il n'est pas possible de connaître toutes les données nécessaires aux pas de temps fractionnaires. En l'occurrence, ici la vitesse est obtenue à partir des équations de Navier-Stokes et est donc connue uniquement au temps  $n$  ainsi qu'aux itérations précédentes. Il n'est pas non plus possible d'effectuer une résolution intermédiaire, par exemple au pas de temps  $\Delta t/2$ . En effet, en plus de l'augmentation en temps calcul que cela générerait, la force élastique n'est pas estimée à ce même temps intermédiaire. Cette dernière étant calculée à partir de l'équation de transport réalisée sur les caractéristiques. Il en va de même pour le calcul de  $v^{n+1}$  et de l'estimation de la force à ce même temps. Intuitivement, 2 solutions sont analysées dans cette partie :

- utiliser uniquement les vitesses connues à l'étape  $n$  (i.e. extrapolation à l'ordre 1) ;
- effectuer une extrapolation de la vitesse à l'itération  $n + \frac{1}{2}$  à partir des vitesses obtenues aux itérations précédentes.

## Méthodes à un pas RK TVD

Nous décrivons ici le principe des méthodes RK TVD utilisées dans nos travaux à l'ordre 2 et 3.

Les méthodes RK sont considérées comme des méthodes à un pas, c'est à dire qu'elles permettent de calculer  $\varphi^{n+1}$  à partir de  $\varphi^n$  et sont de la forme :

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n + \Delta t_n \Phi(t_n, \varphi^n, \Delta t_n).$$

Notons cependant que dans la littérature elles sont parfois assimilées à des méthodes multi-pas dû aux évaluations aux temps  $t_n + c_i \Delta t_n$  (avec  $c_i \in [0, 1]$ ) de la fonction  $F(t, \varphi) = -\mathbf{v}(x, t) \nabla \varphi(x, t)$ . Cela nécessite de connaître la vitesse ou au minimum aux pas de temps fractionnaires requis. Il s'agit de la principale limitation constituant cette méthode pour la résolution de notre problème. Elle est abordée à présent en écrivant l'algorithme d'une méthode RK pour un ordre quelconque  $q$ .

Le principe des méthodes RK est décrit dans le livre de ([Demailly, 2016]), il faut calculer  $(t_n, \varphi^n)$  à partir des points intermédiaires  $(t_{n,i}, \varphi^{n,i})$  avec :

$$t_{n,i} = t_n + \theta_i \Delta t_n.$$

Pour  $\theta_i \in [0, 1]$ ,  $1 \leq i \leq q$  avec  $q$  donnant l'ordre de la méthode.

Le problème est discrétisé selon les subdivisions suivantes  $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_0 + T$

À chacun de ces points est associée la pente suivante

$$P_{n,i} = F(t_{n,i}, \varphi^{n,i})$$

Par soucis de clarté, les grandeurs sont écrites sans la dépendance en espace tel que  $\varphi(t_n, x) = \varphi^n(x) = \varphi^n$ . La forme générale des méthodes RK d'ordre  $q$  s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} t_{n,i} = t_n + \theta_i \Delta t_n \\ P_{n,i} = F(t_{n,i}, \varphi^{n,i}) \\ \varphi^{n,i} = \varphi^n + \Delta t_n \sum_{1 \leq j < i} \alpha_{i,j} P_{n,j} \end{array} \right] 1 \leq i \leq q \\ t_{n+1} = t_n + \Delta t_n \\ \varphi^{n+1} = \varphi^n + \Delta t_n \sum_{1 \leq j \leq q} \beta_j P_{n,j} \end{array} \right.$$

On la représente conventionnellement par le tableau de Butcher :

|          |            |               |               |          |                 |           |
|----------|------------|---------------|---------------|----------|-----------------|-----------|
| $(M1)$   | $\theta_1$ | 0             | 0             | $\dots$  | 0               | 0         |
| $(M2)$   | $\theta_2$ | $\alpha_{21}$ | 0             | $\dots$  | 0               | 0         |
| $\vdots$ | $\vdots$   | $\vdots$      | $\vdots$      | $\ddots$ | $\vdots$        | $\vdots$  |
| $\vdots$ | $\vdots$   | $\vdots$      | $\vdots$      |          | 0               | 0         |
| $(M_q)$  | $\theta_q$ | $\alpha_{q1}$ | $\alpha_{q2}$ | $\dots$  | $\alpha_{qq-1}$ | 0         |
| $(M)$    |            | $\beta_1$     | $\beta_2$     | $\dots$  | $\beta_{q-1}$   | $\beta_q$ |

A présent, intéressons nous à la propriété TVD d'un schéma RK qui constitue l'amélioration majeure apportée par Shu et Osher. Cette propriété assure l'absence de phénomène d'oscillation par le contrôle de la variation totale de la solution au cours du temps.

En partant du problème suivant :

$$\varphi_t = F(\varphi)$$

La propriété TVD impose le contrôle de la variation totale de la solution numérique exprimée par  $TV(\varphi) = \sum_i |\varphi_{i+1} - \varphi_i|$ . En d'autres termes, elle doit être bornée et décroissante, ce qui revient à écrire la condition suffisante suivante :

$$TV(\varphi^{n+1}) < TV(\varphi^n).$$

Dans [Shu and Osher, 1988a], Shu et Osher montrent que les schémas RK TVD peuvent alors s'écrire :

$$\begin{aligned} K^i &= \varphi^n + \sum_{k=0}^{i-1} c_{ik} F(K^k, t^n + d_k \Delta t) \quad i = 1, 2, \dots, m \\ K^0 &= \varphi^n, \quad K^m = \varphi^{n+1}. \end{aligned}$$

avec  $d_k = \sum_{l=0}^{k-1} c_{kl}$ .

Notons que l'on retrouve souvent dans la littérature, la forme équivalente suivante :

$$\begin{aligned} K^i &= \sum_{k=0}^{i-1} (\alpha_{ik} K^k + \beta_{ik} \Delta t F(K^k + d_k \Delta t)) \quad i = 1, 2, \dots, m \\ K^0 &= \varphi^n, \quad K^m = \varphi^{n+1}. \end{aligned}$$

avec  $\alpha_{ik} \geq 0$ ,  $\sum_{k=0}^{i-1} \alpha_{ik} = 1$ , et  $\beta_{ik} = c_{ik} - \sum_{l=k+1}^{i-1} c_{lk} \alpha_{il}$

Ces différences de formulation sont à l'origine de nombreuses versions de méthode RK qui sont cependant toutes équivalentes. Ci-dessous est donné l'exemple de 4 versions de schéma RK3 TVD couramment retrouvées dans la littérature dont nous avons prouvé l'équivalence :



$$\begin{array}{l}
1. \quad \left\{ \begin{array}{l}
K^1 = \varphi^n - \Delta t(\mathbf{v}^n \cdot \nabla)\varphi^n \\
K^2 = \frac{3}{4}\varphi^n + \frac{1}{4}K^1 - \frac{\Delta t}{4}(\mathbf{v}^{n+1} \cdot \nabla)K^1 \\
\varphi^{n+1} = \frac{1}{3}\varphi^n + \frac{2}{3}K^2 - \frac{2\Delta t}{3}(\mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \nabla)K^2
\end{array} \right.
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
2. \quad \left\{ \begin{array}{l}
K^1 = \varphi^n - \Delta t(\mathbf{v}^n \cdot \nabla)\varphi^n \\
K^2 = K^1 - \Delta t(\mathbf{v}^{n+1} \cdot \nabla)K^1 \\
K^3 = \frac{3}{4}\varphi^n + \frac{1}{4}K^2 \\
K^4 = K^3 - \Delta t(\mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \nabla)K^3 \\
\varphi^{n+1} = \frac{1}{3}\varphi^n + \frac{2}{3}K^4
\end{array} \right.
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
3. \quad \left\{ \begin{array}{l}
K^1 = \varphi^n - \Delta t(\mathbf{v}^n \cdot \nabla)\varphi^n \\
K^2 = \varphi^n - \frac{\Delta t}{4}(\mathbf{v}^n \cdot \nabla)\varphi^n - \frac{\Delta t}{4}(\mathbf{v}^{n+1} \cdot \nabla)K^1 \\
\varphi^{n+1} = \varphi^n - \Delta t \left( \frac{1}{6}(\mathbf{v}^n \cdot \nabla)\varphi^n + \frac{1}{6}(\mathbf{v}^{n+1} \cdot \nabla)K^1 + \frac{2}{3}(\mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \nabla)K^2 \right)
\end{array} \right.
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
4. \quad \left\{ \begin{array}{l}
K^1 = \varphi^n - \Delta t(\mathbf{v}^n \cdot \nabla)\varphi^n \\
K^2 = -\Delta t(\mathbf{v}^{n+1} \cdot \nabla)K^1 \\
K^3 = \frac{3}{4}\varphi^n + \frac{1}{4}K^1 + \frac{1}{4}K^2 \\
K^4 = -\Delta t(\mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \nabla)K^3 \\
\varphi^{n+1} = \frac{1}{3}\varphi^n + \frac{2}{3}K^3 + \frac{2}{3}K^4
\end{array} \right.
\end{array}$$

Rappelons que nous utilisons le 4-ième algorithme pour sa simplicité d'implémentation (bien qu'il nécessite légèrement plus de calculs).

## Problématique

L'étude est réalisée sur la résolution des équations de transport des caractéristiques rétrogrades 2D. Les calculs sont effectués sur un domaine  $\Omega = [-1, 1]^2$  et sur l'intervalle de temps  $t \in [0; 0.1]$ .

Nous cherchons  $\mathbf{Y}$  tel que :

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{Y} = 0 \\ \mathbf{Y}(x, t_0) = \mathbf{Y}_0(x) = x \end{cases}$$

Le choix de la vitesse est délicat. Dans un premier temps il doit idéalement permettre le calcul d'une solution exacte afin d'effectuer une analyse de convergence. De plus, cette vitesse se veut représentative des vitesses que nous obtiendrons par la résolution des équations de Navier-Stokes incompressible. C'est à dire que nous la souhaiterions la moins linéaire possible aussi bien en espace qu'en temps. C'est pourquoi la vitesse suivante est utilisée pour  $p \in \mathbb{N}$  :

$$\mathbf{v}(x, t) = (-yt^p, xt^p)^T \quad (\text{B.1})$$

La solution exacte est donnée par :

$$\mathbf{Y}_{exact}(x, t) = \begin{pmatrix} x \cos\left(\frac{t^{p+1}}{p+1}\right) + y \sin\left(\frac{t^{p+1}}{p+1}\right) \\ y \cos\left(\frac{t^{p+1}}{p+1}\right) - x \sin\left(\frac{t^{p+1}}{p+1}\right) \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Le choix des notations permet d'écrire  $\mathbf{v}^n(x_n) = \mathbf{v}(x_n, t_n)$  avec  $t_n = t_0 + n\Delta t$ .

Afin d'utiliser les schémas numériques en temps précédemment cités, le problème à résoudre est écrit sous la forme de l'EDO suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_t = -\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{Y} \\ \mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{Y}_0 = x \end{cases}$$

Avec  $F(\mathbf{Y}) = -\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{Y}$  et  $\nabla \mathbf{Y}$  discrétisé par un schéma WENO5. La résolution WENO 5 étant d'ordre 5 en espace et calculée sur un maillage fixe constitué de  $64 \times 64$  cellules, il est naturel de penser qu'elle ne perturbera pas la résolution de l'EDO.

Afin d'évaluer l'erreur commise, une fonction  $f$  est utilisée et est définie par :

$$f(\mathbf{Y}) = f(Y_1, Y_2) = |Y_1 + Y_2|,$$

afin de se ramener à une grandeur scalaire.

L'erreur en espace est calculée à l'instant  $n$  :

—en norme  $L_\infty$

$$e_\infty^n = \max_{i,j} (|f(\mathbf{Y}_{exact}(x_{i,j}, t^n)) - f(\mathbf{Y}^n(x_{i,j}))|)$$

—en norme  $L_2$

$$e_{L_2}^n = \int_{\Omega} (|f(\mathbf{Y}_{exact}(x_{i,j}, t^n)) - f(\mathbf{Y}^n(x_{i,j}))|)^2 dx$$

Puis l'erreur en temps est calculée selon la norme  $L_\infty$  sur l'intervalle  $[0; 0.1]$ .

Enfin l'ordre de la méthode est déterminé à l'aide de la formule :

$$o(k) = \frac{\log\left(\frac{e_{\Delta t_k}}{e_{\Delta t_{k-1}}}\right)}{\log\left(\frac{\Delta t_k}{\Delta t_{k-1}}\right)}$$

Avec  $e_{\Delta t_k}$  et  $e_{\Delta t_{k-1}}$  les erreurs obtenues aux pas de temps  $\Delta t_k$ , resp.  $\Delta t_{k-1}$  tels que  $\Delta t_k = 2\Delta t_{k-1}$ .

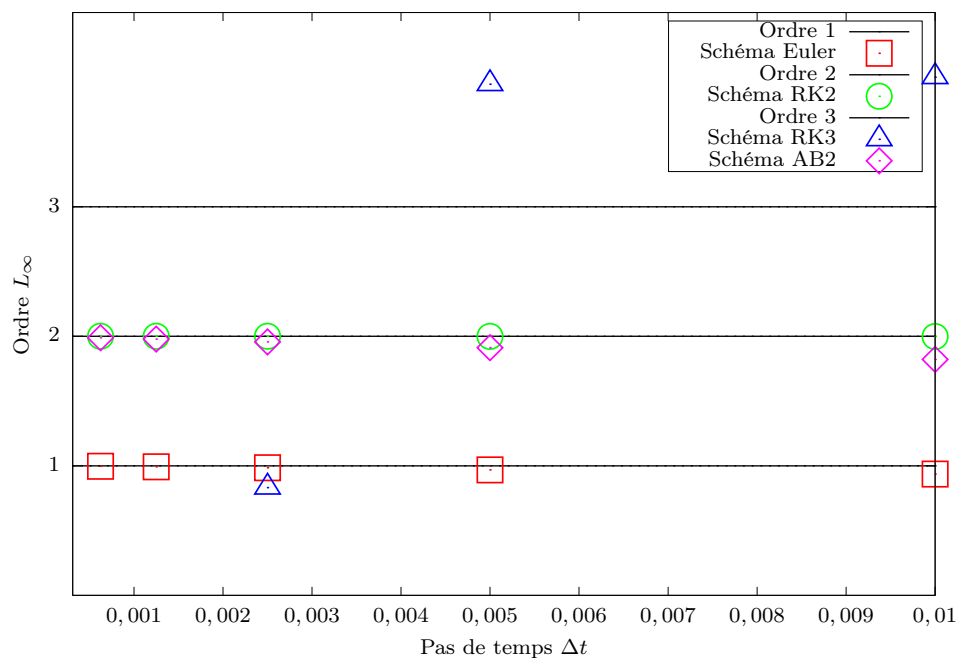
Les calculs sont effectués pour un pas de temps initial fixé à  $\Delta t = 10^{-2}$  s. Il est ensuite successivement divisé par 2 de telle sorte que l'ensemble des pas de temps utilisés soit le suivant :

$$\left\{ \frac{\Delta t}{2^n}, \text{ t.q. } n \in \llbracket 0, 5 \rrbracket \right\}$$

Le nombre de points est fixé à  $64 \times 64$  permettant d'obtenir une évaluation de  $\nabla \mathbf{Y}$  à la précision machine ( $10^{-14}$ ).

## Vitesse non constante mais connue de manière explicite

Premièrement, pour s'assurer du bon fonctionnement des méthodes en utilisant une vitesse dépendante du temps supposée connue de manière explicite. On pose  $p = 4$ , la vitesse et la solution exacte du problème sont données par les équations (B.1) et (B.2). Les ordres de convergence sont observés (B.2) :

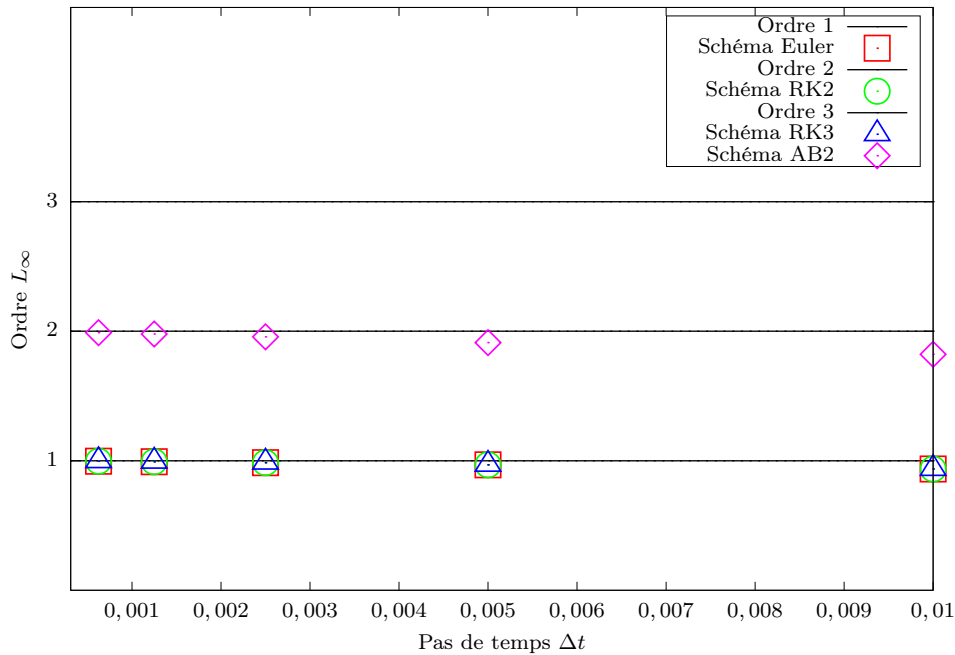


**Figure B.1** – Ordre des méthodes explicites pour une vitesse explicite non constante

Les ordres de convergence sont respectés, aussi bien pour les méthodes multi pas que pour les méthodes à un pas. Notons que les méthodes RK3 atteignent rapidement la précision machine, c'est pourquoi l'ordre s'effondre sur ce schéma (la lecture s'effectuant de la droite vers la gauche i.e. en suivant la diminution du pas de temps).

## Vitesse non constante et inconnue aux pas fractionnaires

A présent, nous souhaitons souligner le comportement des méthodes RK lorsque les vitesses  $\mathbf{v}^{n+1/2}$  ou  $\mathbf{v}^{n+1}$  ne sont plus connues. Il s'agit de la retranscription de la problématique précédemment mentionnée. Ainsi nous posons  $\mathbf{v}^{n+1/2} = \mathbf{v}^n$  et  $\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^n$ . En d'autre terme, les données inconnues sont extrapolées à l'ordre 0. L'étude de convergence est réalisée uniquement pour les méthodes RK (B.4)



**Figure B.2** – Ordre des méthodes explicites pour une vitesse inconnue non linéaire et extrapolée à l'ordre 1

Comme attendu, aucun impact n'est constaté sur les méthodes multi pas comme Euler explicite ou AB2. Ces dernières empruntant des vitesses définies à des temps antérieurs toujours connus. Les ordres sont conservés. Il n'en est pas de même pour les méthodes RK qui se réduisent à une convergence à l'ordre 1. Dans ce cas précis, les méthodes RK2 et RK3 sont donc du même ordre que la méthode d'Euler explicite mais 2 fois, resp. 3 fois, plus coûteuses en temps de calcul. Se pose alors la question de la pertinence de les utiliser sans effectuer de travail a posteriori sur les vitesses fractionnaires. C'est ce que nous proposons à présent.

## Vitesse non constante et inconnue aux pas fractionnaires et extrapolée

Pour finir, cette étude consiste à se rapprocher au maximum de la configuration qui sera la notre lors d'une simulation d'un cas réel avec résolution des équations de Navier-Stokes. Cette résolution peut garantir une vitesse calculée à l'ordre 1 ou 2. Cette même vitesse, située sur sa grille, est ensuite interpolée à l'ordre 2 en espace sur la grille de pression afin d'effectuer le transport des diverses quantités (level set et caractéristiques rétrogrades). Il paraît alors peu cohérent d'effectuer des extrapolations en temps des vitesses aux pas fractionnaires supérieures à l'ordre 2.

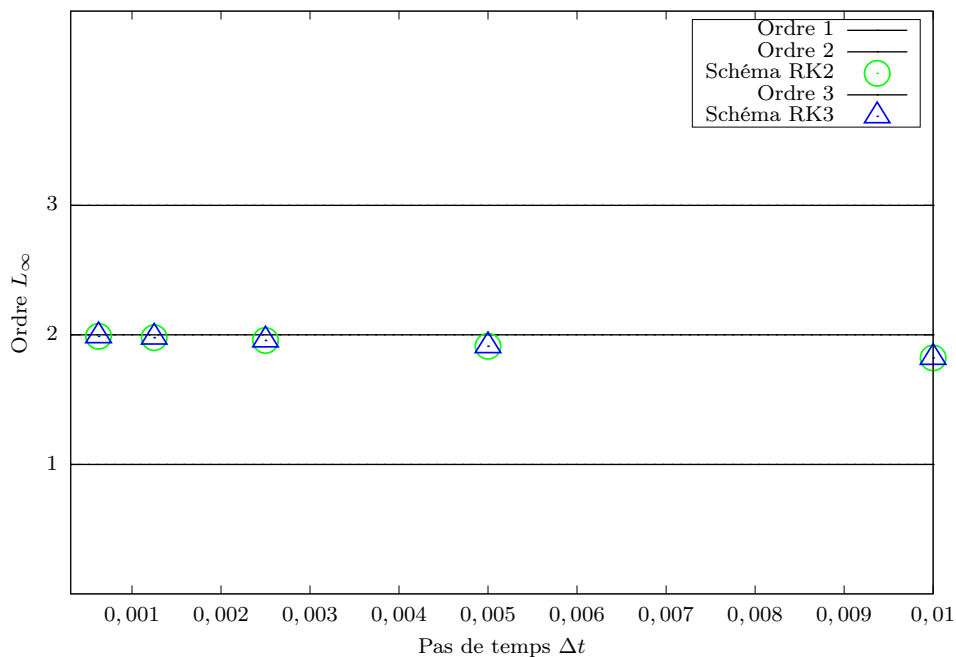
Nous vérifions cette hypothèse en effectuant des extrapolations suivant les schémas indiqués dans le tableau ci-dessous (B.3). Les calculs de convergence ont également été effectués pour des extrapolations d'ordre supérieur (jusqu'à 6). Nous choisissons de ne pas les présenter ici.

|                     | $u^n$ | $u^{n-1}$ | $u^{n-2}$ |
|---------------------|-------|-----------|-----------|
| ORDRE 1             |       |           |           |
| $u^{n+1}$           | 1     |           |           |
| $u^{n+\frac{1}{2}}$ | 1     |           |           |
| ORDRE 2             |       |           |           |
| $u^{n+1}$           | 2     | -1        |           |
| $u^{n+\frac{1}{2}}$ | 3/2   | -1/2      |           |
| ORDRE 3             |       |           |           |
| $u^{n+1}$           | 3     | -3        | 1         |
| $u^{n+\frac{1}{2}}$ | 15/8  | -5/4      | 3/8       |

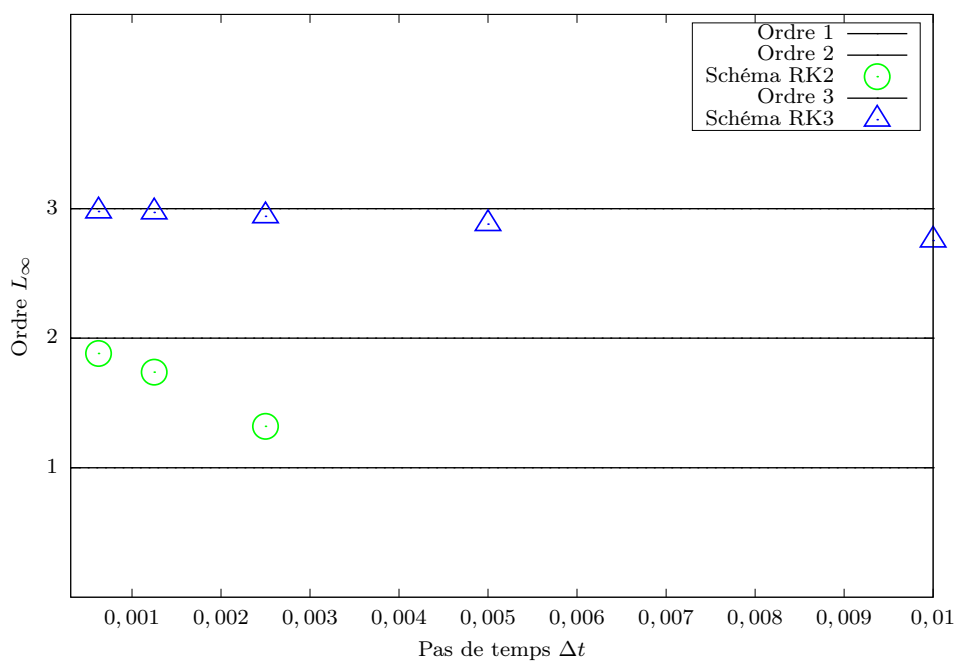
**Figure B.3** – Tableau des coefficients nécessaires aux extrapolations des vitesses au temps  $n + 1$  et  $n + 1/2$  en fonction de l'ordre désiré

Les résultats obtenus sont présentés pour une extrapolation à l'ordre 2, puis à l'ordre 3. Les méthodes multi pas ayant déjà fait leurs preuves, ils ne sont plus concernés et ne figurent pas dans cette étude.

Commençons par l'analyse des résultats de convergence obtenus pour les extrapolations de la vitesse à l'ordre 2 représentés sur la figure (B.4). Comme attendu, elles suffisent à garantir le fonctionnement optimal des méthodes RK2. A l'inverse les méthodes RK3 sont bridées à l'ordre 2, montrant l'insuffisance de la précision apportée à la vitesse. Un résultat appuyé par la convergence à l'ordre 3 bel et bien obtenu lorsqu'on extrapole la vitesse à l'ordre 3 comme illustré sur la figure (B.5).



**Figure B.4** – Ordre des méthodes explicites pour une vitesse inconnue non linéaire et extrapolée à l'ordre 2



**Figure B.5** – Ordre des méthodes explicites pour une vitesse inconnue non linéaire et extrapolée à l'ordre 3

## Conclusion

Pour conclure, ces résultats permettent d'établir une corrélation importante entre précision apportée au calcul du champ de vitesse et méthode de résolution numérique en temps employée pour le transport de nos quantités. Ainsi il est inutile et incohérent d'utiliser des méthodes de transport d'ordre élevé si le champ de vitesse est résolu à ordre inférieur. Dans notre code de calcul, la résolution des équations de Navier-Stokes incompressible peut se faire soit par un schéma d'Euler à l'ordre 1 soit par un schéma Gear à l'ordre 2 en temps. Par conséquent les méthodes RK3 sont d'ores et déjà écartées. Pour ce qui est de l'ordre 2, un choix peut-être à faire entre les méthodes AB2 et RK2 TVD. Comme évoqué dans la partie traitant des conditions de stabilité, ces dernières étant par construction plus stable, elles sont donc privilégiées.

---

# Annexe C

## Observations et résultats pour le cas T1

Les résultats obtenus pour le premier cas T1 sont présentés dans cette annexe. Dans un premier temps le phénomène est décrit visuellement puis nous corrélons avec T2 ces observations à partir de l'étude du mouvement du point A.

La dynamique périodique du solide au cours du temps pour le cas T1 est visuellement identique à celle du cas T2 et n'est pas représentée ici. En revanche le début de la simulation est différent en raison d'une condition limite sur la vitesse différente (3.3).

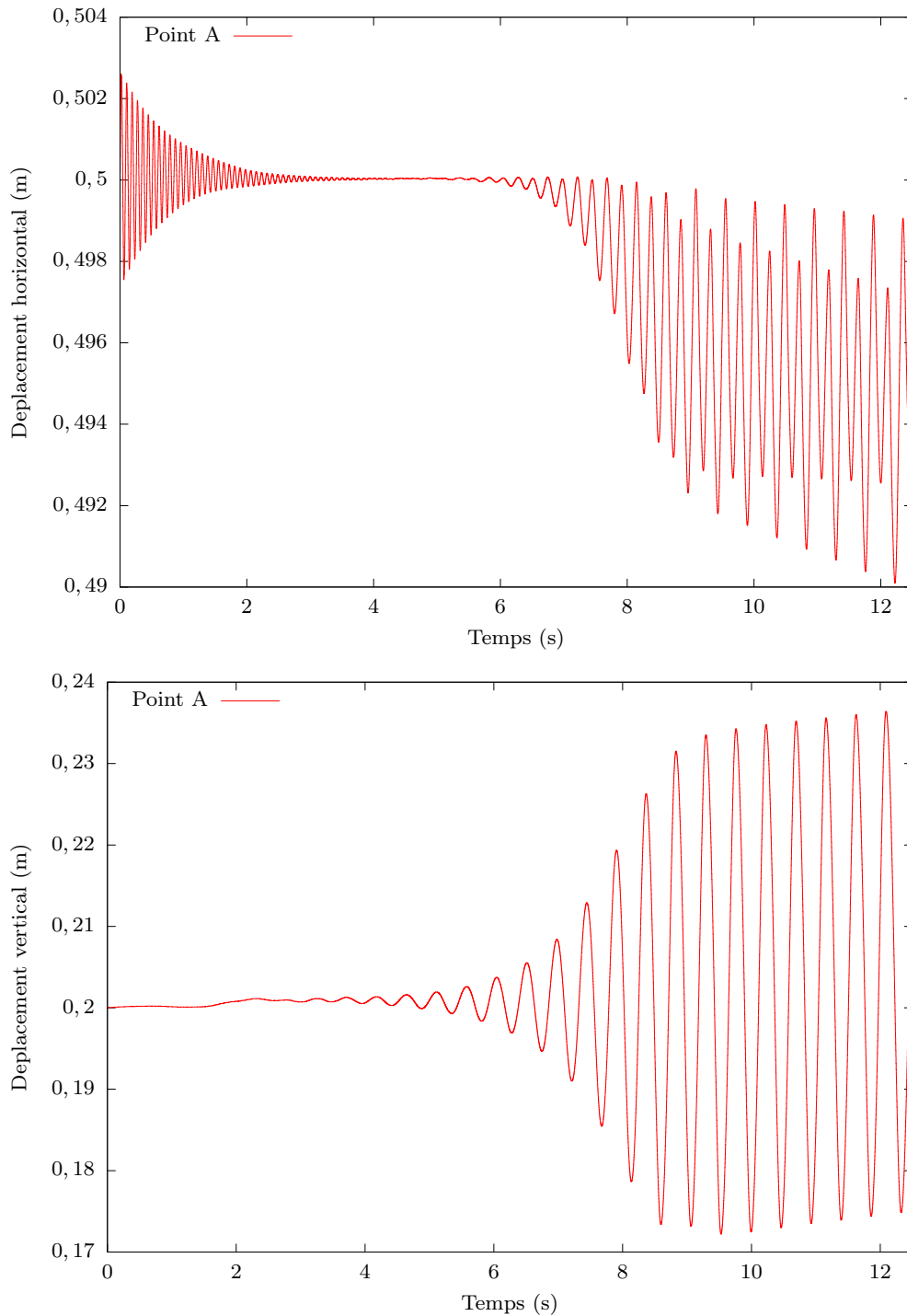
Dans un premier temps, le fluide contourne le cylindre et les déformations du solide sont presque imperceptibles en raison de l'établissement progressif de l'écoulement et de la forte résistante du matériau. Au fur et à mesure que le mouvement s'instaure le solide élastique se déforme en oscillant uniquement selon l'axe  $0x_1$ . Les ondes longitudinales se propagent plus lentement que pour le cas T2 et le mouvement est nettement moins chaotique. Le solide se comprime et s'étire très faiblement de manière à faire apparaître les prémices du premier phénomène d'oscillation i.e. des oscillations horizontales observées plus facilement sur la figure (C.1). Ce sillage est rectiligne jusqu'à environ  $t = 4$  s, puis une instabilité se crée au bout du faisceau. L'écoulement génère les premières oscillations verticales du solide (C.1). Ces dernières s'amplifient jusqu'à atteindre une amplitude limite à environ  $t = 6$  s dictée par les instabilités tourbillonnaires symétriques et périodiques de Bénard-Von Karman ; elles-mêmes générées par l'écoulement de Poiseuille autour du cylindre en régime laminaire.

Sur les figures (C.1) nous observons le déplacement vertical et horizontal du point A au cours de la simulation pour le cas T1. La première courbe représentant le déplacement horizontal du point A traduit les effets de compression du solide élastique. Ces effets sont prédominants au début de la simulation et immédiatement périodiques. Ils corroborent les observations précédemment effectuées. Ce phénomène tend à s'atténuer jusqu'à devenir quasi nul pour  $4 < t < 5$ . Parallèlement apparaissent les premières oscillations verticales du solide lesquelles s'amplifient au fur et à mesure jusqu'à atteindre une valeur limite de 0.031m pour une fréquence de  $2.16 \text{ s}^{-1}$ . De même les effets de compression ressurgissent et s'amplifient suivant une fréquence presque deux fois plus rapide. Ainsi on observe une amplitude moyenne en compression de l'ordre 0.0034 m pour une fréquence de  $4.26 \text{ m.s}^{-1}$ . La mesure des amplitudes de compression est délicate, elle est abordée plus en détail pour

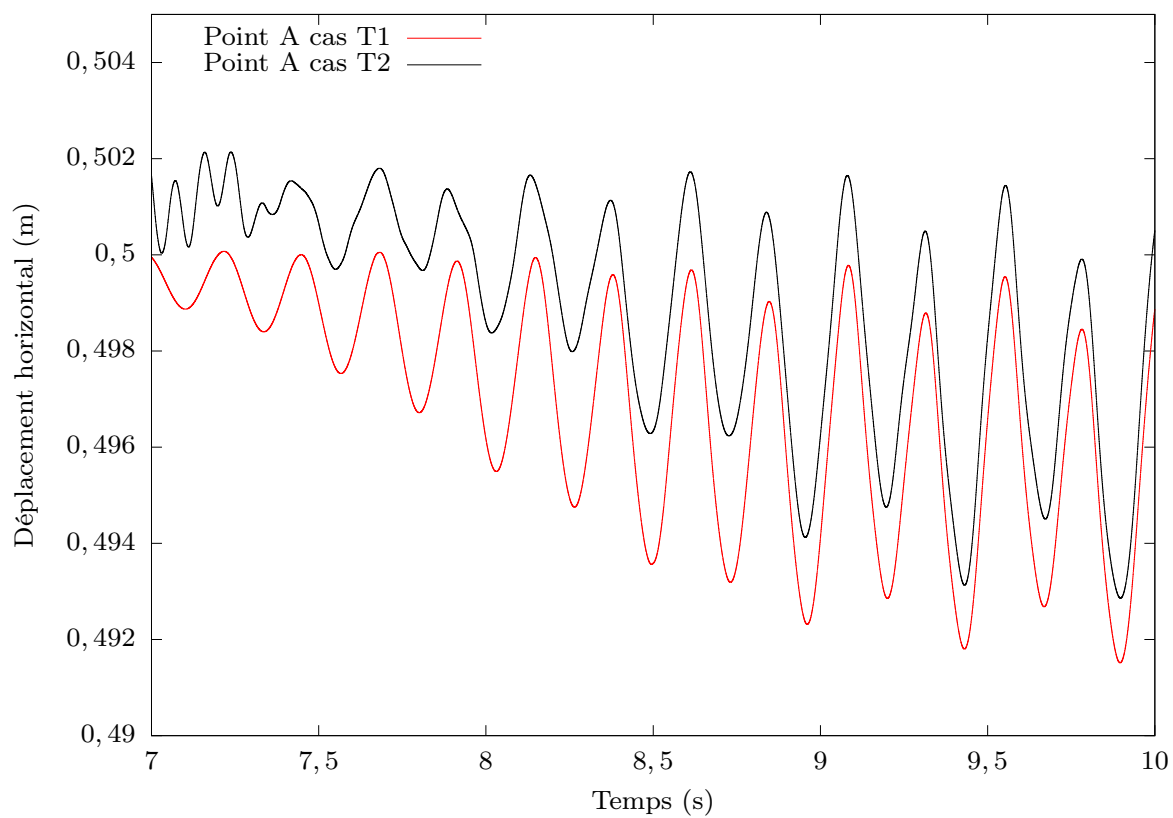
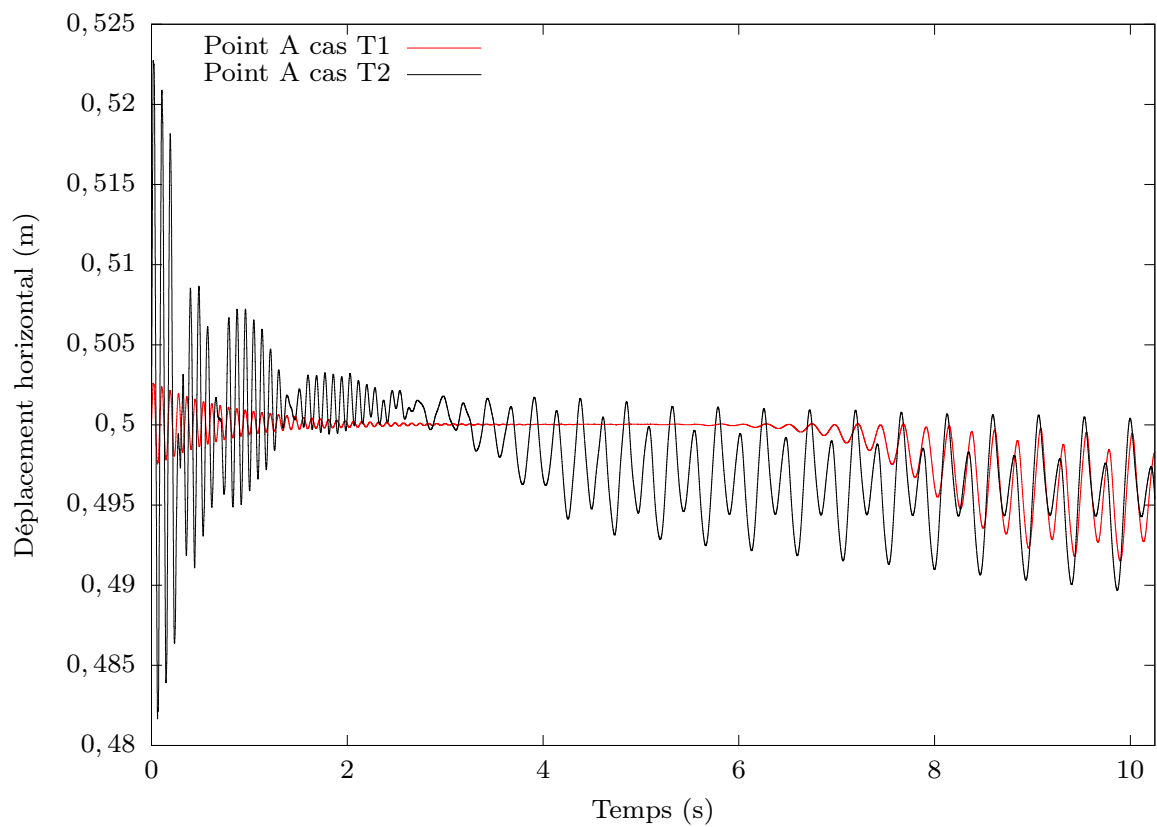


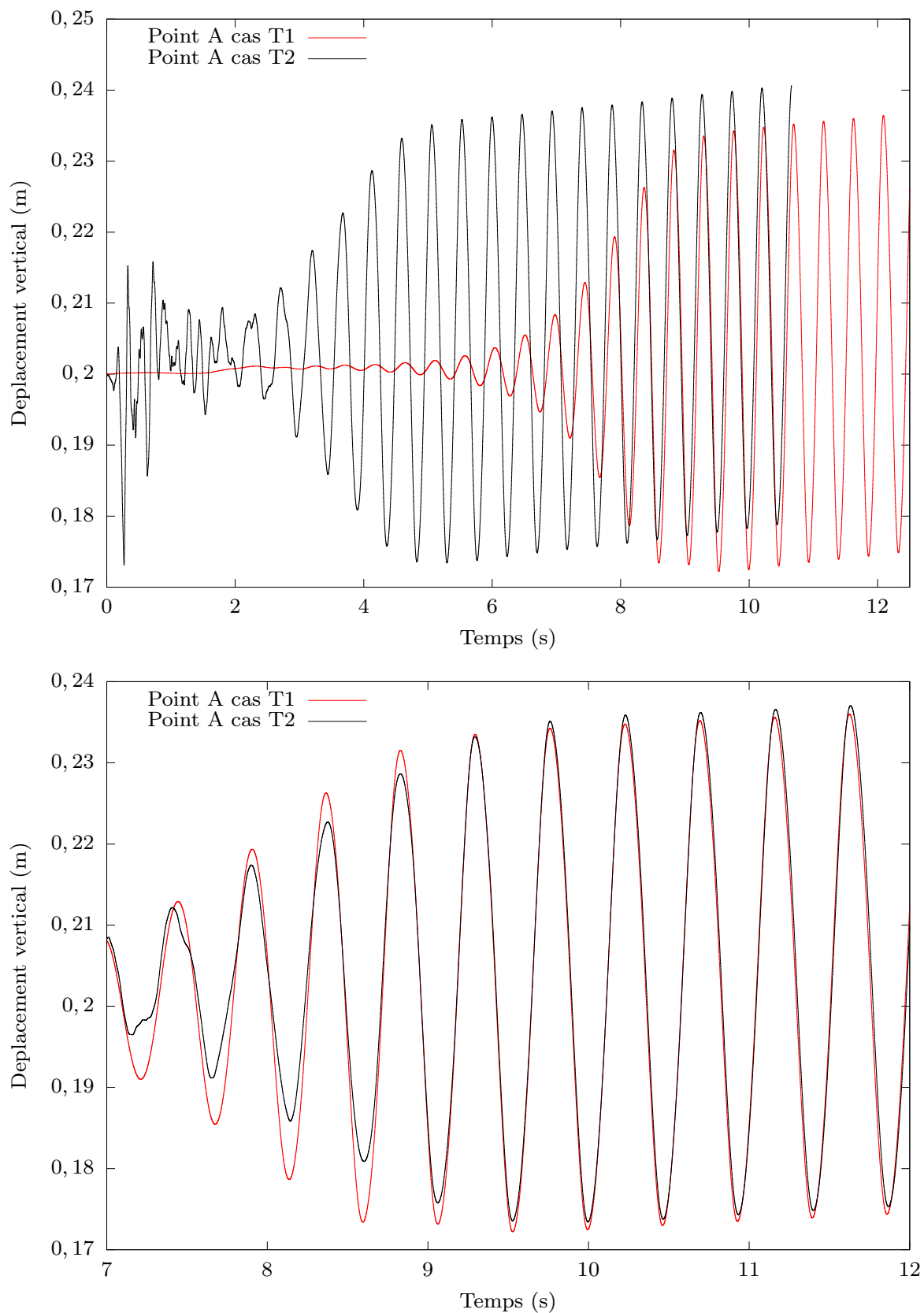
le cas **T2**.

En comparant l'évolution du point A entre nos deux cas **T1** et **T2** (C.2), bien que déphasés en temps ( $\approx 4.2$  s) et légèrement en espace ( $\approx 0.003$  m) du fait d'une vitesse d'initialisation différente, nous constatons que les amplitudes et fréquences coïncident parfaitement.



**Figure C.1** – Représentation du déplacement horizontal puis vertical du point A en fonction du temps pour le cas **T1**





**Figure C.2** – Comparaison du déplacement horizontal et vertical du point A pour les tests T1 et T2. Pour améliorer la lisibilité, la solution T2 est décalée de 4.7s