



**HAL**  
open science

# Raffinement de maillage spatio-temporel pour les équations de Maxwell

Thierry Fouquet

► **To cite this version:**

Thierry Fouquet. Raffinement de maillage spatio-temporel pour les équations de Maxwell. Analyse numérique [math.NA]. Université Paris Dauphine, 2000. Français. NNT : . tel-01581160

**HAL Id: tel-01581160**

**<https://theses.hal.science/tel-01581160>**

Submitted on 5 Sep 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE**

présentée à

**L'UNIVERSITÉ DE PARIS IX DAUPHINE**

**U.F.R. MATHÉMATIQUES DE LA DÉCISION**

pour obtenir le titre de

**DOCTEUR EN SCIENCES**

spécialité

**MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES**

par

**Thierry Fouquet**

Sujet de la thèse :

**Raffinement de maillage spatio-temporel  
pour les équations de Maxwell.**

Soutenue le 13 Juin 2000 devant le jury composé de :

MM. <b>Yves Achdou</b>	Rapporteur
<b>Bruno Després</b>	Rapporteur
<b>Patrick Joly</b>	Directeur de thèse
<b>Guy Chavent</b>	Président du jury
<b>Mikhael Balabane</b>	Examineur
<b>Patrick Ciarlet</b>	Examineur
<b>Francis Collino</b>	Examineur
<b>Frédéric Nataf</b>	Examineur



“L’Université n’entend donner aucune approbation ni improbation aux opinions émises dans les thèses : ces opinions doivent être considérées comme propres à leurs auteurs.”



*à mes parents*



Comment remercier Patrick Joly et Francis Collino de leur dévouement, de leur aide précieuse et de leur amitié? Autant essayer de remercier la providence qui m'a permis de pouvoir passer ces quelques années de thèse dans les meilleures conditions possibles.

Merci à Yves Achdou et Bruno Després qui ont accepté d'être rapporteurs de ce travail et dont les remarques judicieuses m'ont été bien utiles.

Non content de me mettre sur les voies de l'analyse numérique, Michael Balabane a également accepté de participer à mon jury, qu'il en soit grandement remercié.

Merci à Guy Chavent qui le premier m'a introduit à l'INRIA et qui a ensuite eu la gentillesse d'être le président de ce jury.

Je remercie également Patrick Ciarlet de s'être intéressé à mes travaux. Il m'a apporté une aide précieuse et a gentiment accepté de faire parti de ce jury.

Merci à Frédéric Nataf d'avoir également accepter de faire partie de ce jury.

Merci à François Clément et Housseem Haddar qui m'ont tour à tour supporté dans leur bureau, et dispensé de judicieux conseils.

Je remercie également tous les membres des projets Ondes et Estime pour leur aide et leur gentillesse. Ce fut un véritable plaisir de travailler avec cette seconde famille.

Enfin merci à Hélène Grandjean de m'avoir appris à lire.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Des schémas de raccord par interpolation, Phénomènes d'instabilités</b>	<b>7</b>
<b>1 Présentation de schémas de raffinement par interpolation</b>	<b>9</b>
1.1 Un survol non exhaustif de la bibliographie sur le raffinement de maillage spatio-temporel pour l'électromagnétisme . . . . .	9
1.2 Présentation explicite et simplifiée de deux stratégies de raccord . . . . .	11
1.2.1 Présentation du problème modèle. . . . .	11
1.2.2 Raccord par interpolation spatiale . . . . .	13
1.2.3 Raccord par interpolation temporelle . . . . .	13
<b>2 Raccord par interpolation temporelle de deux demi-espaces infinis.</b>	<b>17</b>
2.1 Analyse de la stabilité par Fourier-Laplace . . . . .	17
2.1.1 Transformées de Fourier-Laplace : définition et résolution . . . . .	17
2.1.2 Définition et analyse de $r(\omega)$ . . . . .	20
2.1.3 Résolution du problème . . . . .	24
2.1.4 Preuve de l'inégalité (2.24) . . . . .	27
2.1.5 Réinterprétation en terme d'ondes planes . . . . .	29
2.1.6 Cas d'une onde incidente dans la grille fine : une étude analytique . . . . .	30
2.2 Étude de Précision . . . . .	35
2.2.1 Calcul par développements limités de l'erreur de troncature . . . . .	35
2.2.1.1 Erreur de troncature sur l'approximation du schéma . . . . .	35
2.2.1.2 Erreur de troncature sur la continuité de $u$ . . . . .	35
2.2.1.3 Ré-interprétation du schéma : Approximation du Dirac . . . . .	35
2.2.2 Expériences numériques . . . . .	36
2.2.3 Analyse des coefficients de réflexion et de transmission . . . . .	43
2.2.3.1 Calcul de précision des coefficients de réflexion et de transmission . . . . .	43
2.2.3.2 Cas d'un train d'ondes dans la grille grossière : une étude numérique de réflexion . . . . .	46
2.2.3.3 Cas d'un train d'ondes dans la grille fine : une étude numérique de réflexion. . . . .	49
2.2.3.4 Un phénomène curieux. . . . .	52

<b>3</b>	<b>Extension à un raffinement plus fort. Cas de 2 milieux infinis.</b>	<b>55</b>
3.1	Description du schéma. . . . .	55
3.2	Analyse de la stabilité par Fourier-Laplace. . . . .	56
3.2.1	Ré-interprétation de la solution en termes d'ondes planes. . . . .	60
3.2.1.1	Cas d'une onde incidente dans la grille grossière. . . . .	63
3.2.1.2	Cas d'une onde incidente dans la grille fine. . . . .	63
3.3	Étude de précision. . . . .	65
3.3.1	Ordre du Schéma. . . . .	65
<b>4</b>	<b>Cas de la bande finie raffinée: apparition d'instabilités.</b>	<b>71</b>
4.1	Position du problème. . . . .	71
4.2	Rappel des solutions sous forme d'ondes planes. . . . .	75
4.3	Analyse de la bande raffinée. . . . .	77
4.3.1	Analyse par ondes planes, expression de la solution. . . . .	77
4.3.2	Interprétation de la solution ondes planes en terme de stabilité. . . . .	79
4.3.3	Lien entre le pôle de la solution et la stabilité du schéma. . . . .	83
4.3.4	Cas de l'onde parasite évanescence pour un raffinement 1-2. . . . .	90
4.3.5	Cas de l'onde parasite évanescence pour un raffinement 1-n . . . . .	93
4.4	Résultats numériques. . . . .	95
4.4.1	Mise en évidence de l'instabilité. . . . .	95
4.4.2	Caractérisation de l'instabilité. . . . .	96
<b>5</b>	<b>Extension du schéma aux équations de Maxwell</b>	<b>101</b>
5.1	Cas 1D . . . . .	101
5.1.1	Un schéma de raffinement 1-3 . . . . .	102
5.1.2	Un schéma de raffinement 1-2 implicite . . . . .	103
5.1.3	Comment se ramener à l'équation des Ondes . . . . .	104
5.2	Extension du schéma au cas 2D . . . . .	105
<b>II</b>	<b>Des schémas garantissant la stabilité: l'approche différences finies</b>	<b>109</b>
<b>1</b>	<b>Présentation d'un schéma aux différences finies 1 D</b>	<b>111</b>
1.1	Le problème modèle, schéma en l'absence de raffinement . . . . .	111
1.2	Vers la recherche d'un schéma de raffinement 1-2 . . . . .	112
1.2.1	De la conservation d'énergie discrète dans les schémas . . . . .	112
1.2.2	Variation de l'énergie fine $E_f^n$ . . . . .	115
1.2.3	Variation de l'énergie grossière $E_g^{2n}$ . . . . .	117
1.2.4	Variation de l'énergie totale et estimations . . . . .	119
1.2.5	Le schéma conservatif retenu . . . . .	120
1.2.6	Un autre choix possible ... à abandonner . . . . .	121
1.3	Étude du schéma sélectionné. . . . .	122
1.3.1	Une étude numérique d'erreur. . . . .	122
1.3.2	Analyse par ondes planes du schéma retenu. . . . .	127
1.3.3	Une étude sur les ondes parasites. . . . .	128
1.3.4	Comparaison avec un raffinement de maillage spatial pur. . . . .	138
1.3.5	Le schéma de raffinement 1- $p$ . . . . .	141

1.3.5.1	Présentation sommaire d'un schéma de raffinement 1-p. . . . .	142
1.3.5.2	Etude numérique. . . . .	143
1.4	Les schémas linéaires conservatifs . . . . .	146
1.4.1	Schémas linéaires compatibles avec la conservation de l'énergie . . . . .	148
1.4.2	Sélection des bons schémas par analyse par ondes planes . . . . .	151
<b>2</b>	<b>Un schéma conservatif en 2D pour la polarisation transverse électrique.</b>	<b>153</b>
2.1	Présentation du problème modèle. . . . .	153
2.2	Construction d'un schéma de raffinement 1-2. . . . .	154
2.2.1	Variation de l'énergie fine $E_f^n$ . . . . .	156
2.2.2	Variation de l'énergie grossière. . . . .	157
2.2.3	Conservation de l'énergie totale. . . . .	158
2.3	Un schéma de raffinement 1-p en deux dimensions. . . . .	160
2.3.1	Construction du schéma. . . . .	162
2.3.2	Expériences numériques. . . . .	163
<b>III</b>	<b>Des schémas garantissant la stabilité : l'approche éléments finis</b>	<b>167</b>
<b>1</b>	<b>Ré-interprétation variationnelle du schéma de raffinement 1-D</b>	<b>169</b>
1.1	Forme variationnelle du schéma de Yee . . . . .	169
1.2	Présentation d'une méthode variationnelle . . . . .	171
1.3	Lien avec la méthode de raffinement de la partie 2 . . . . .	176
<b>2</b>	<b>Le cas 3D : un problème modèle et sa formulation variationnelle mixte</b>	<b>179</b>
2.1	Problème modèle et notations . . . . .	179
2.2	Formulation sous forme de problème couplé . . . . .	179
2.3	Formulation variationnelle . . . . .	181
2.3.1	Théorème de trace pour $H(\text{rot})$ dans les ouverts polygonaux . . . . .	181
2.3.2	Dérivation de la formulation variationnelle . . . . .	183
<b>3</b>	<b>Discrétisation du problème</b>	<b>187</b>
3.1	Semi discrétisation en Espace. . . . .	187
3.2	Semi discrétisation en temps. . . . .	189
3.2.1	Discrétisation de la formulation variationnelle. . . . .	189
3.2.2	Sur le calcul et l'existence de la solution discrète. . . . .	190
3.2.3	Estimation d'énergie Stabilité. . . . .	192
3.3	Choix des espaces d'approximation. . . . .	194
3.3.1	Description des maillages. . . . .	195
3.3.2	Approximation du champ électrique. . . . .	195
3.3.3	Approximation du champ magnétique. . . . .	196
3.3.4	Approximation du Courant. . . . .	197
3.4	Approximation des formes bilinéaires. . . . .	199
3.4.1	Quadrature et condensation de masse. . . . .	200
3.4.2	Calcul de la condition de stabilité. . . . .	200
3.4.3	Existence du courant. . . . .	202

<b>4</b>	<b>Vers l'implémentation numérique</b>	<b>203</b>
4.1	Construction des opérateurs discrets . . . . .	203
4.1.1	Les Matrices de masse . . . . .	203
4.1.2	Le rotationnel discret . . . . .	204
4.1.3	Matrice de couplage . . . . .	205
4.2	Les équations du schéma . . . . .	207
4.2.1	Remarque sur les schémas à l'intérieur . . . . .	207
4.2.2	Schéma à l'interface: Préambule . . . . .	208
4.2.3	Schéma à l'interface pour la grille grossière . . . . .	209
4.2.4	Schéma à l'interface pour la grille fine . . . . .	211
4.2.5	Résolution. Détermination du Courant . . . . .	214
4.2.6	Propriétés de la matrice . . . . .	215
<b>5</b>	<b>Extension de la méthode en présence de conducteurs parfaits</b>	<b>219</b>
5.1	Position du problème . . . . .	219
5.2	Description des conducteurs. Modification des espaces . . . . .	219
5.3	Discrétisation . . . . .	220
<b>6</b>	<b>Algorithmique</b>	<b>223</b>
6.1	Une implémentation pas à pas . . . . .	223
6.2	Une implémentation un peu optimisée . . . . .	224
6.3	Calcul des Matrices . . . . .	224
6.4	Compléments sur les conducteurs . . . . .	224
<b>7</b>	<b>Application et validation des résultats</b>	<b>227</b>
7.1	Analyse numérique d'erreur . . . . .	227
7.1.1	Domaine vide . . . . .	227
7.1.2	Domaine avec un conducteur . . . . .	230
7.2	Validation à travers quelques expériences numériques . . . . .	233
7.2.1	Une boîte raffinée dans le vide . . . . .	233
7.2.2	Une boîte raffinée coupant une plaque horizontale . . . . .	233
7.2.3	Une boîte raffinée intersectant un cube biseauté . . . . .	234
7.2.4	Une boîte raffinée autour d'une ouverture percée dans un cube . . . . .	235
7.3	Une expérience type d'utilisation de raffinement de maillage. . . . .	239
<b>A</b>	<b>Analyse des effets de dispersion</b>	<b>243</b>
<b>B</b>	<b>Vitesse de groupe</b>	<b>245</b>
<b>C</b>	<b>Annulation du déterminant dans le cas 1/n</b>	<b>247</b>
<b>D</b>	<b>Annexe: Un schéma de raccord dissipatif</b>	<b>249</b>
D.1	Le schéma sans raffinement . . . . .	249
D.1.1	Équation du schéma . . . . .	249
D.2	Calcul de la transformée de Fourier Laplace de la solution . . . . .	250
D.2.1	Étude de $ r(\omega) $ . . . . .	251
D.2.2	Analyse de la dispersion . . . . .	252
D.3	Un schéma de raffinement 1-2 . . . . .	252

D.3.1	Présentation des équations de raccord . . . . .	252
D.3.2	Calcul des transformées de la solution en présence du raffinement . . .	253
D.3.2.1	Étude dans la grille grossière . . . . .	253
D.3.2.2	Étude dans la grille fine . . . . .	254
D.3.2.3	Calcul des coefficients de réflexion . . . . .	255
D.3.2.4	onde incidente dans la grille fine . . . . .	256
<b>E</b>	<b>La formulation variationnelle en 2D</b>	<b>257</b>
E.1	Construction accélérée de la méthode variationnelle . . . . .	257
E.2	Choix d'une discrétisation adéquate . . . . .	260
<b>F</b>	<b>Calcul des valeurs propres de la matrice associée à l'énergie</b>	<b>263</b>
<b>G</b>	<b>Une définition du nombre de points par longueur d'onde</b>	<b>265</b>
G.1	Cas de la Gaussienne . . . . .	265



# Introduction

## Position du problème et motivation

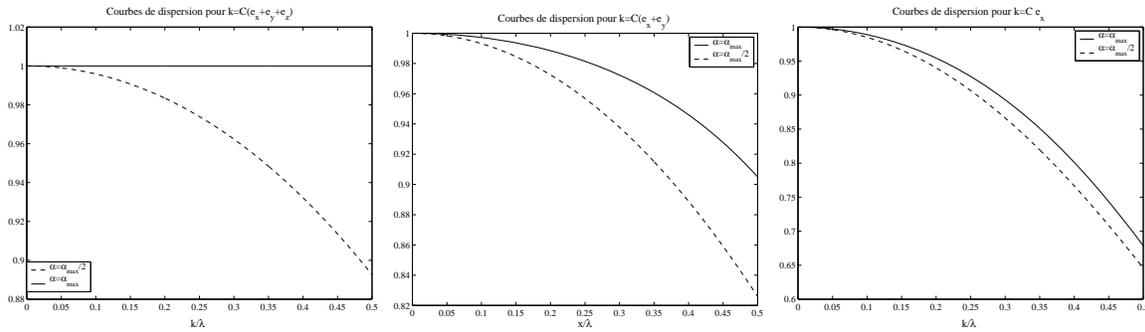
Les techniques de différences finies ou d'éléments finis avec condensation de masse sont largement utilisées pour la simulation de la propagation des ondes ou plus généralement la résolution de systèmes hyperboliques linéaires dont les équations de Maxwell constituent un archétype. Les domaines d'application, nombreux, vont de l'acoustique à l'électromagnétisme en passant par la sismique en géophysique. La méthode permet de se ramener à des équations discrètes dont les inconnues sont les valeurs du ou des champs en des points d'une grille de calcul qui est le plus souvent régulière, de pas  $h$  en espace et  $\Delta t$  en temps. Les schémas numériques qui nous intéressent ici sont des schémas explicites dont il est maintenant communément admis, qu'ils sont préférables aux schémas implicites. Leur mise en oeuvre consiste simplement à appliquer une formule explicite permettant d'évaluer la solution, progressivement, en des temps échantillonnés. Pour les équations de Maxwell, le schéma de Yee constitue le prototype d'un tel schéma. C'est le schéma le plus couramment utilisé jusqu'à nos jours. C'est ce schéma qui constituera le noyau de base de notre étude.

La première propriété que doit satisfaire un schéma numérique est la stabilité, cette propriété exprime le fait que l'on est a priori capable d'obtenir une borne sur une certaine norme de la solution approchée à l'aide de constantes indépendantes des paramètres de discrétisation  $\Delta t$  et  $h$ . Il existe bien sûr différentes notions de stabilité, liées au choix de la norme considérée. Cette norme peut être "discrète" mais doit être un équivalent convenable d'une norme continue. Pour les systèmes hyperboliques linéaires et notamment ceux auxquels est associée une conservation de l'énergie, comme le système de Maxwell, ces normes sont des normes de type  $L^2$ , raison pour laquelle on parle de stabilité  $L^2$ . Il est bien connu que pour un schéma explicite approchant une équation hyperbolique, la stabilité  $L^2$  n'est assurée que si le pas de temps  $\Delta t$  est suffisamment petit devant le pas d'espace  $h$ . Plus précisément la condition de stabilité est une condition de type C.F.L. imposant une borne sur le rapport  $\alpha = \Delta t/h$ . Ainsi, pour le schéma de Yee la condition nécessaire et suffisante de stabilité s'écrit  $\alpha = \Delta t/h \leq \sqrt{d}/d$ ,  $d$  étant la dimension de l'espace, où l'on a supposé implicitement que la vitesse de propagation des ondes était égale à 1. Une fois la stabilité assurée, la convergence du schéma est alors garantie pour peu qu'on sache vérifier sa consistance (c.a.d montrer que l'erreur de troncature du schéma tend vers 0 avec les paramètres de discrétisation.): C'est le théorème d'équivalence de Lax. On peut même obtenir des estimations d'erreurs pour peu que la solution que l'on désire approcher soit suffisamment régulière.

Le coût de calcul de ces méthodes est bien sûr lié à la taille de la grille et augmente avec l'inverse du pas de la grille. Ce pas doit être bien sûr suffisamment fin pour que la précision obtenue sur la solution soit acceptable. Pour quantifier cela, le résultat de convergence ou les estimations d'erreur ne sont pas suffisants. Il faut avoir recours à des études plus fines des

## Introduction

sources d'erreur quitte à se limiter à des situations simples telles que la simulation des ondes en milieu homogène. Pour les schémas conservatifs (c.a.d. conservant un équivalent discret d'une énergie de la solution) comme le schéma de Yee, il n'y a évidemment pas de dissipation numérique. Si on met de côté le problème d'échantillonnage des données (conditions initiales, sources), la seule source d'erreur est alors la dispersion numérique : les hautes fréquences qui composent l'onde numérique ont tendance à aller moins vite que les plus basses entraînant une dé-cohérence du signal d'autant plus grande que la longueur parcourue augmente. On maîtrise ce phénomène en prenant, ce qui est intuitif, suffisamment de points de grille par longueur d'onde pour toutes les longueurs d'onde composant le signal que l'on veut approcher. Ce qui est moins intuitif, c'est que, au moins pour le schéma de Yee (mais cela est aussi vrai pour d'autres schémas), à pas d'espace fixé on va augmenter la dispersion numérique (et donc détériorer la précision du schéma), en diminuant le pas de temps  $\Delta t$ . En d'autres termes la dispersion numérique décroît lorsque le rapport  $\alpha = \Delta t/h$  augmente vers sa valeur maximale autorisée par la condition de stabilité. Il est facile de mettre en évidence des effets de la dispersion sur des expériences numériques.



*Courbes de dispersion :* On représente le rapport de la vitesse numérique sur la vitesse réelle en fonction de la fréquence, pour différentes directions de propagation. La vitesse numérique de propagation des ondes s'éloigne de la vitesse réelle, lorsque les fréquences de l'onde sont plus importantes. Le phénomène s'accroît lorsque le rapport  $\frac{\Delta t}{h}$  diminue, et ce quelque soit la direction du vecteur de propagation.



$$\alpha = 1$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

*Solutions 1D à  $t = 20s$ ,  $t = 100s$  et  $t = 180s$ . La dispersion numérique qui augmente au cours du temps est plus importante lorsque le rapport  $\Delta t/h$  diminue*

La dispersion étant contrôlée, une autre cause d'erreur, liée à des aspects géométriques, peut survenir. Dans les problèmes de diffraction on doit imposer des conditions aux limites appropriées sur la frontière de l'obstacle. Par exemple, pour les équations de Maxwell, on impose que le champ électrique tangent est nul à la surface d'un obstacle parfaitement conducteur. Or la frontière de l'objet ne suit pas nécessairement la grille de calcul et on est amené à considérer une frontière approchée en marches d'escalier. Or ces marches engendrent des diffractions numériques parasites qui peuvent entacher d'une erreur significative le résultat du calcul. D'autres problèmes de géométrie peuvent se poser dans le cas où l'objet diffractant présente une section très faible par rapport aux longueurs d'ondes impliquées (cas des antennes filaires en électromagnétisme). La modélisation de l'objet conduit à choisir un pas très petit pour bien tenir compte de sa géométrie. Si l'on travaille avec une grille régulière, on imagine alors les conséquences désastreuses de la présence du moindre brin de fil.

Une première solution peut être d'utiliser la méthode des domaines fictifs. Celle-ci consiste à introduire un paramètre de Lagrange défini à la surface de l'objet sur un maillage différent et réintroduit dans les équations volumiques. L'inconvénient est alors que la taille du pas de discrétisation de l'obstacle est lié à celui du maillage, et donc si l'obstacle est fin ou possède des aspérités, il contraint à nouveau à utiliser un maillage fin dans tout le domaine.

Une autre idée pour traiter la difficulté consiste à distinguer deux zones pour le calcul. Une zone (la plus importante) où le calcul se fait sur une grille principale et une ou plusieurs zones où l'on utilise des morceaux de grilles raffinées, c'est à dire dont le pas de discrétisation est une fraction du pas de la grille principale. La propagation de l'onde est réalisée principalement dans la grille grossière tandis que les grilles raffinées, localisées au voisinage des aspérités des objets diffractants permettent de bien rendre compte de l'interaction complexe entre l'onde et la structure. De plus, la précision du calcul du point de vue de la dispersion, étant une fonction décroissante du rapport des pas de discrétisation en temps et en espace, il est donc souhaitable que le rapport optimal soit conservé d'une grille à l'autre et par conséquent, de raffiner également en temps, la grille raffinée en espace. Le point délicat est alors le traitement de la frontière entre les grilles.

## Présentation du plan de travail et des principaux résultats obtenus

Au cours du déroulement de la thèse, nous avons tout d'abord été amenés à effectuer l'analyse de certaines méthodes de raffinement de maillage existantes. Ceci nous a permis d'identifier des phénomènes d'instabilité, semble-t-il nouveaux, associés à ce type de schéma. C'est la raison qui nous a conduit à chercher une nouvelle voie pour contourner cette difficulté. Nous avons ensuite construit et analysé une nouvelle méthode fiable de raffinement de grille spatio-temporelle appliquée à la simulation de la propagation des ondes. Nous étudions alternativement les potentialités d'une telle méthode pour les équations de Maxwell et l'équation des ondes, le but ultime imposé par le centre d'étude de Gramat étant de réaliser un code informatique de raffinement de maillage pour le schéma de Yee dans le cas de 3 dimensions.

Cette contrainte nous a donc orienté vers des méthodes de raffinement basées sur des schémas aux différences finies. Nous nous sommes dans un premier temps intéressé à une méthode de raffinement analogue à celles trouvées dans la littérature, c'est à dire utilisant des interpolations spatio-temporelles pour effectuer le raccord entre des grilles de discrétisations différentes. Malheureusement, la stabilité de ces méthodes s'est avérée très mal contrôlée ou au

prix d'une détérioration des résultats non négligeable. La stabilité semblant être le principal écueil pour effectuer le raccord entre deux maillages différents, nous avons donc recherché des schémas permettant de garantir la stabilité via la conservation d'une énergie discrète. Le schéma aux différences finies que nous avons trouvé s'est révélé être stable et précis et nous a donc confirmé le bien-fondé de notre stratégie. Malheureusement, l'approche différences finies de la méthode quoi que conceptuellement simple, conduit à des calculs rapidement inextricables si l'on cherche à construire un schéma dans le cas à trois dimensions. Nous avons donc pensé à élaborer un formalisme abstrait, englobant la méthode trouvée à une dimension, afin de construire une méthode variationnelle très générale. Si, pour des raisons contractuelles, nous présentons cette dernière appliquée au schéma de Yee à 3 dimensions, il ne fait pas de doute que le lecteur saurait y voir des applications à d'autres types de discrétisation.

### Analyse des méthodes par interpolation

Comme pourra le remarquer le néophyte se penchant sur la littérature, notamment la littérature "électromagnétique" (I.E.E.E.), la plupart des schémas de raccords sont basés sur des interpolations spatiales, temporelles ou spatio-temporelle. C'est donc tout naturellement, que nous avons dans un premier temps orienté notre stratégie vers un raffinement spatio-temporel avec un schéma de raccord par interpolation. Afin d'étudier les potentialités de ces schémas, notamment leur stabilité et leur précision, nous avons choisi de nous intéresser à un cas simple à savoir l'équation des ondes 1-D, discrétisée par le schéma aux différences finies appelé 'leap-frog', ou 'saute-mouton'.

Nous traitons tout d'abord le cas d'un raccord de deux grilles infinies où le pas de discrétisation de la grille fine est deux fois plus fin que celui de la grille grossière. A l'aide d'une analyse dans le plan de Fourier-Laplace de la solution du schéma, on montre que le schéma est GKS stable (Gustafsson-Kreiss-Sundström [17]) sous la condition "C.F.L." usuelle, c'est à dire la condition de stabilité en l'absence de raffinement. Une fois la stabilité assurée, on s'intéresse à la précision de la méthode au moyen d'une analyse harmonique. On montre que toute onde harmonique incidente solution du schéma dans la grille grossière donne naissance au contact de l'interface à deux ondes transmises dans la grille raffinée et une onde réfléchie dans la grille grossière. Le fait qu'il y ait deux ondes transmises s'explique par le phénomène de repliement du spectre: une onde de pulsation  $\omega$  est indistinguishable dans la grille grossière d'une onde de pulsation  $\omega + \frac{2\pi}{2\Delta t}$ . Ce n'est pas le cas dans la grille fine ce qui induit un couplage entre les ondes de pulsation  $\omega$  et  $\omega + \frac{\pi}{\Delta t}$ . Ce phénomène est un des points clés pour comprendre les phénomènes d'oscillations parasites (c.à.d. hautes fréquences). L'étude de précision est menée à partir des expressions du coefficient de réflexion et des deux coefficients de transmission. La méthode s'avère d'ordre 1 mais, numériquement, le raccord semble de bonne qualité puisque, l'erreur induite par le raffinement de maillage est négligeable devant l'erreur due au schéma classique qui est pourtant d'ordre 2. Le même type de résultats est ensuite obtenu pour un raffinement 1-n, c'est à dire lorsque le pas de discrétisation de la grille fine est n fois plus fin que celui de la grille grossière.

Ces résultats ont trait au couplage de deux grilles semi-infinies. Notons que ces premiers résultats sont plutôt positifs: le schéma est stable sous la condition CFL usuelle et les réflexions parasites sont faibles et bien maîtrisées. En fait, la situation se révèle changée radicalement lorsque l'on se place en milieu borné. En effet, si l'on s'intéresse au cas où le domaine où l'on raffine le maillage est de longueur finie, ce que l'on cherchera toujours à obtenir en pratique,

on montre alors que la stabilité n'est plus assurée sous la condition usuelle mais dépend de l'occurrence d'un zéro d'une fonction d'une variable complexe, paramétrée par le nombre de mailles de la couche et par le rapport du pas de temps sur le pas d'espace. Un résultat important est que des phénomènes d'explosion ressemblant fortement à de l'instabilité peuvent survenir même si l'on respecte la CFL usuelle. Suivant le problème considéré on montre que cette explosion peut être soit une instabilité forte soit bornée par  $e^{C^{ste} \frac{T}{L}}$  où  $T$  est le temps de simulation et  $L$  la longueur de la bande raffinée. Ceci est confirmé par des expériences numériques où l'on observe des explosions exponentielles qui se développent, quelques fois tardivement, et dégradent bien entendu les résultats du calcul.

Ces phénomènes d'instabilités sont très gênants car la nouvelle CFL dépend de façon complexe du nombre de maille dans la couches ainsi que du nombre de Courant, et ce, bien que l'on se soit placé en dimension 1. On s'attend alors à ce que l'extension de ces schémas à des cas plus compliqués tels les équations de Maxwell 2-D, ne nous permette plus de maîtriser cette instabilité. Ceci est confirmé par des expériences numériques. En effet, si dans un premier temps, les méthodes par interpolations semblent stables, il s'avère que pour des temps de simulation plus longs, une explosion de la solution du système de Maxwell-2D apparaît au voisinage de la grille fine. La condition C.F.L. empirique pour faire disparaître cette instabilité est alors inacceptable.

Cette méthode d'interpolation se révélant trop incertaine pour être utilisée avec confiance dans le cas de raffinement spatio-temporelle, il nous a semblé plus judicieux de se tourner vers des méthodes garantissant la stabilité de manière plus systématique.

### Une méthode de raffinement de maillage stable en différences finies

Nous présentons dans cette partie une nouvelle méthode de raffinement de maillage pour le système de Maxwell 1-D. Cette méthode vise à assurer la stabilité a priori via la conservation d'une énergie électromagnétique discrète. Elle permet le raccord de deux grilles, l'une discrétisée avec un maillage espace-temps  $(2h, 2\Delta t)$ , l'autre avec une discrétisation  $(h, \Delta t)$  sous la condition de stabilité usuelle. Le point clé de la méthode consiste à n'assurer que faiblement la condition de continuité des inconnues entre les deux grilles. On considère en fait qu'à l'interface physique correspond deux interfaces discrètes, une pour la grille grossière et une pour la grille fine. L'étape suivante consiste à dériver une énergie discrète de manière à obtenir une condition de conservation de celle-ci. Ceci permet d'obtenir une relation assurant la stabilité  $L^2$  du schéma. Cette relation quadratique apparaît comme un équivalent discret de l'annulation du saut des inconnues à l'interface. A partir de cette relation on trouve ensuite un schéma linéaire permettant de raccorder les deux grilles de manière stable et précise à condition que le rapport du pas de temps sur le pas d'espace ne soit pas trop proche de 1. Toutefois nous voyons que cette condition n'est pas très pénalisante. L'extension de ce schéma à deux dimensions est ensuite réalisée et donne également de bons résultats, toutefois, elle laisse présager que les calculs nécessaires à la construction du schéma en 3 dimensions, s'avèreraient trop complexes. Cette dernière réflexion nous a incités à rechercher un formalisme abstrait permettant de conduire les calculs plus aisément.

### Une méthode de raffinement de maillage stable en éléments finis

Dans la troisième partie, nous montrons que la méthode n'est qu'un cas particulier et qu'elle entre dans un cadre variationnel général et une approximation appropriée par élé-

ments finis mixtes. Le schéma de raccord s'apparente alors à la méthode des éléments joints. En interprétant la recherche d'une condition de raccord, comme un problème de transmission, on montre que l'introduction d'une variable auxiliaire définie sur l'interface permet la construction d'une condition de raccord permettant la conservation d'un équivalent discret de l'énergie. Cette variable auxiliaire qui n'est autre qu'un multiplicateur de Lagrange, s'assimile dans le cas des équations de Maxwell à un courant défini sur l'interface. On montre que ce courant se calcule grâce à la résolution d'un système linéaire inversible et creux. La méthode construite dans le cadre variationnel est explicitée pour le cas du schéma de Yee, mais pourrait également être étendue à d'autres schémas. On pourrait notamment grâce à cette méthode raccorder des grilles non conformes.

Nous appliquons ensuite notre stratégie en discrétisant les équations de Maxwell à trois dimensions par le schéma de Yee, et présentons les résultats numériques du code informatique que nous avons incorporé dans un logiciel industriel. Les simulations effectuées démontrent l'intérêt et les potentialités du raffinement spatio-temporel local. Dans un premier temps, on constate que dans le vide, l'erreur due au raffinement de maillage est négligeable devant l'erreur classique du schéma de Yee. De plus, en présence de conducteur, grâce à une meilleure prise en compte de la géométrie mais également une meilleure approximation des singularités au voisinage de l'obstacle, le raffinement local permet d'obtenir des résultats quasiment identiques à ceux d'une simulation où l'ensemble du maillage aurait été raffiné.

Première partie

Des schémas de raccord par  
interpolation,  
Phénomènes d'instabilités



# Chapitre 1

## Présentation de schémas de raffinement par interpolation

### 1.1 Un survol non exhaustif de la bibliographie sur le raffinement de maillage spatio-temporel pour l'électromagnétisme

Mis à part l'article pionnier de Kunz et Simpson de 1981, [20], c'est au début des années 1990 que sont apparus les premiers travaux sur le raffinement de maillage spatio-temporel. La modélisation des phénomènes électromagnétiques à l'aide du schéma saute-mouton de Yee ou FDTD, [27], était depuis une vingtaine d'année très couramment pratiquée aussi bien dans les laboratoires de recherche que pour les applications industrielles. La complexité croissante des structures rayonnantes à calculer a posé le problème de l'erreur due à la géométrie de manière de plus en plus aiguë et la méthode de raffinement de grille a semblé toute indiquée. On a ainsi vu paraître une série de travaux, surtout dans des revues comme *IEEE Transaction on Antennas and Propagation* ou encore *IEEE Transaction on Microwave Theory and Technology*, qui en gros suivait la même démarche. Dans un premier temps, on choisit de façon assez arbitraire un rapport de pas de grille (1:2,1:3 voire 1:4), un schéma d'interpolation (centré ou non) puis on code la méthode et on la teste sur des exemples d'intérêt pratique. Le premier article de ce genre a été publié en 1990 par Kim et Hofer, [18]. Les auteurs retiennent un raffinement spatio-temporel de 1:4. Le schéma consiste à utiliser la formule explicite de Yee 4 fois sur la grille fine pour une seule fois sur la grille grossière. Des formules d'interpolation portant sur les deux champs sont utilisées pour clore le système d'équations<sup>1</sup> (ce schéma n'est d'ailleurs pas donné de manière très claire dans l'article). Les conclusions sont que la méthode marche (gain de 73 en temps de calcul) mais les auteurs signalent deux difficultés. Tout d'abord, que des réflexions parasites sont présentes et qu'il faut utiliser une interpolation "conforme au comportement de la solution". Ensuite, dans le cas de sandwiches (grilles grossière-grille fine-grille grossière) des phénomènes indésirables ("a serious interaction") peuvent apparaître. Parallèlement en 1991 Zivanovic *et al.* proposent un schéma d'interpolation pour un raffinement 1:2 puis 1:3. L'interpolation est là encore effectuée sur les champs électriques et magnétiques. Deux exemples, difficiles à interpréter, sont donnés qui semblent montrer que la méthode "marche". On peut reprocher à ce papier son côté un peu péremptoire "...The technique is

---

1. rappelons que le schéma de Yee utilise comme inconnues le champ électrique et le champ magnétique

*shown to be numerically stable and does not entail any extra numerical error.*” (sic). Les résultats ne semblent pourtant pas toujours très bons, surtout pour la grille 1:2 où, pour une expérience numérique particulière, le raffinement entraîne une détérioration des résultats. Les conditions d’interpolation pour la grille 1:3 sont particulièrement sophistiquées (utilisation d’un schéma d’équations d’ondes pour l’interpolation du champ électrique). Elles semblent donner de meilleurs résultats que le raffinement 1:2. Nulle mention de problèmes de stabilité n’est signalée. Dans une communication, Prescott et Shulley, [26], proposent une version légèrement modifiée des équations d’interpolation. Leur méthode est testée sur un calcul de coefficient de réflexion pour un guide d’onde 2-D. Des résultats d’erreur de moins de 0.65 % sont donnés sur une large plage de fréquences, mais il est difficile d’interpréter ces résultats car le rapport de ces fréquences avec le pas de discrétisation n’est pas donné. Un travail similaire est effectué par Shimizu et al., [12]. De nouveau, les auteurs proposent un schéma d’interpolation original et portant à la fois sur le champ électrique et le champ magnétique. Le coefficient de réflexion dû au changement de grille est déterminé expérimentalement sur un exemple de simulation d’un guide d’ondes cylindrique. Ils obtiennent une erreur de moins de 0,6 % pour des fréquences allant jusqu’à 21 points de grilles grossières, Le papier qui nous a semblé le plus abouti est celui de Chevalier, Luebbers et Cable, [10] à propos d’un raffinement de grille 1:3. Son originalité est double. D’une part, l’interpolation entre les grilles ne porte que sur le champ magnétique. Cela permet de traiter convenablement les cas où l’interface entre grille fine et grille principale est traversée par des milieux de permittivité diélectrique variable, c’est à dire des cas où le champ électrique n’est plus une fonction continue de l’espace. D’autre part, ce papier est le premier à exprimer clairement l’existence de difficultés liées à la stabilité du schéma. A deux dimensions d’espace, une diminution d’un facteur 1.2 du pas de temps s’avère indispensable pour avoir la stabilité. Un autre problème est signalé et qui se manifeste par la présence d’un bruit constitué d’oscillations hautes fréquences sur la solution numérique. Les auteurs proposent une méthode pour diminuer ce bruit qui consiste à pondérer leur formules d’interpolation posées sur plusieurs interfaces décalées: au voisinage de l’interface, certains nœuds du maillage sont alors vus comme appartenant à la fois à la grille fine et à la grille grossière. Trois expériences numériques sont présentées, le calcul d’un dipôle puis d’une sphère conductrice et enfin d’un guide d’onde. Les résultats montrent une erreur de l’ordre de 0.5 % pour 10 points par longueurs d’onde par rapport aux résultats des mêmes calculs utilisant la grille fine. Si l’on accepte cette marge d’erreur, le gain en temps de calcul et en occupation mémoire est impressionnant (facteur 10). Les mêmes calculs effectués sur la seule grille grossière aboutissent à plus de 100 % d’erreur pour un temps de calcul uniquement divisé par 2.

La première conclusion de ce bref survol est que le raffinement de maillage spatio-temporel a surtout été abordé d’un point de vue heuristique et étudié d’un point de vue expérimental (analyse de résultats d’expériences numériques). Les résultats des calculs montrent la grande potentialité de la méthode, lorsqu’elle est convenablement utilisée. Le papier de Chevalier et al excepté, le choix de la formule d’interpolation (interpolation spatiale, temporelle, spatio-temporelle) est toujours assez arbitraire. Des problèmes d’instabilités fortes (explosion au bout de quelques pas de temps) ou faible (explosion à la suite de multiples aller-retours de l’onde à l’intérieur de la boîte de calcul) ont été signalés par certains auteurs sans qu’aucune analyse mathématique ne soit donnée.

Nous n’avons pas trouvé de papiers de nature vraiment mathématique sur la question précise du raffinement spatio-temporel pour Maxwell. Néanmoins, il existe des articles sur des sujets connexes comme celui de P. Monk, [21] qui traite du raffinement uniquement spatial

pour l'équation de Maxwell instationnaire. Si l'on se borne à des raffinements en espace il existe maintenant des techniques variationnelles bien maîtrisées qui garantissent la stabilité modulo l'introduction d'inconnues supplémentaires sur l'interface grille fine - grille grossière : ce sont les éléments joints [1], [5]. Une analyse assez complète est présentée par M. Berger dans [3] qui traite du raffinement spatio-temporel de grille 1:n pour l'équation de transport scalaire 1D. Cette analyse est menée à partir d'une formule explicite de la solution du schéma via une transformation de Fourier-Laplace en temps. Elle obtient la stabilité d'un schéma s'appuyant sur un même schéma dissipatif posé sur deux grilles dont les pas sont en rapport de 1 à n, les deux grilles étant couplées par des formules ad hoc. Dans [4], Berger et Leveque présente une méthode de raffinement de maillage espace temps pour des systèmes hyperboliques. La méthode est basée sur un schéma aux volumes finis et permet de faire du maillage adaptatif. L'équation de transport scalaire est toutefois un modèle plus simple que l'équation des ondes. En effet, sa solution se propageant toujours dans une direction privilégiée ne peut rencontrer chaque interface entre grilles fines et grilles grossières qu'une seule fois. Ce n'est pas le cas pour l'équation des ondes ou le système de Maxwell à cause des phénomènes de réflexion d'où l'apparition de nouvelles études nécessaires.

## 1.2 Présentation explicite et simplifiée de deux stratégies de raccord par interpolation pour l'équation des ondes.

### 1.2.1 Présentation du problème modèle.

L'objet de cette partie est d'effectuer une analyse mathématique du raffinement de grille spatio-temporel par interpolation sur un cas simple à savoir l'équation des ondes 1-D

$$(1.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 & x \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0. \end{cases}$$

Pour simplifier l'écriture nous prendrons  $c = 1$ .

Ce modèle est suffisamment élémentaire pour se prêter à des calculs explicites et assez riche pour contenir beaucoup des caractéristiques et des difficultés du modèle plus complexe des équations de Maxwell en 2 ou 3 dimensions.

Nous choisissons de discrétiser cette équation par le schéma aux différences finies le plus classique

$$(1.2) \quad \frac{u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}}{\Delta t^2} - \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} = 0,$$

où  $u_j^k \approx u(jh, k\Delta t)$ . Grâce à ce schéma, on peut, à l'aide des valeurs de  $u$  aux instants  $k$  et  $k - 1$  (points verts sur la figure 1.1), calculer les valeurs de  $u$  à l'instant  $k + 1$  (point rouge).

Pour compléter le schéma, il nous faut préciser le schéma de démarrage aux premiers pas de temps: il nous faut initialiser le schéma avec des conditions initiales en  $k=0$  et 1 pour  $u_j^k$ .

Le premier pas de temps est simplement initialisé par la valeur aux noeuds de la fonction initiale  $u_0$  choisie.

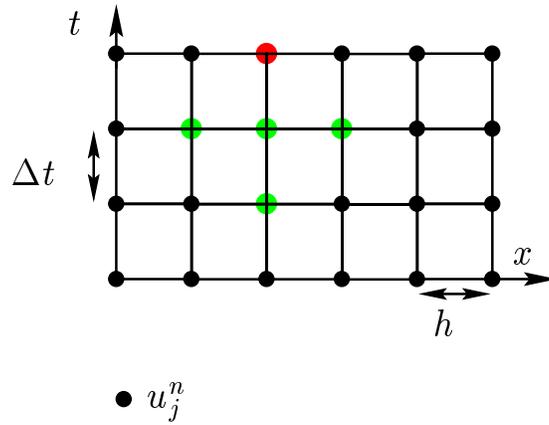


FIG. 1.1 – Schéma 'Saute-mouton'

Pour le deuxième pas de temps on utilise un développement de Taylor à l'ordre 2 ainsi que la condition de vitesse nulle  $\frac{du}{dt}/_{t=0} = 0$  et l'équation des ondes satisfaite par  $u$  pour écrire

$$(1.3) \quad u(jh, \Delta t) \approx u_j^1 = u_0(jh) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{u_0((j+1)h) - 2u_0(jh) + u_0((j-1)h)}{h^2}$$

Cette manière de faire est classique et permet d'approcher les conditions initiales à l'ordre 2.

Il est bien connu (cf. [11] par exemple) que ce schéma est stable dès que  $\Delta t$  est inférieur à  $\Delta x$ . En d'autres termes, le nombre de Courant  $\frac{\Delta t}{\Delta x}$  doit être inférieur ou égal à 1. Si cette condition n'est pas remplie le schéma explose au bout d'un nombre fini d'itérations. Le schéma aux caractéristiques qui correspond au cas limite  $\Delta t = \Delta x$  est intéressant car il n'induit aucune dispersion. Malheureusement ce schéma ne peut se généraliser aux dimensions d'espace supérieures à 1. Les autres schémas possèdent tous un caractère dispersif qui se traduit par une variation de la vitesse de propagation des ondes en fonction des fréquences composant l'onde. Au fur et à mesure de la progression de l'onde, la partie haute fréquence du signal a tendance à traîner en oscillant derrière le front principal. Si l'on veut que cet effet soit faible, il convient de choisir un pas de grille suffisamment fin par rapport aux longueurs d'ondes qui constituent le signal.

On discrétise ensuite l'équation sur deux maillages différents. La grille de discrétisation de droite (indicée  $j > 0$ ) maillée plus finement que la grille de gauche (indicée  $j < 0$ ). Les inconnues de chaque grille seront respectivement indicées par  $g$  et  $f$ . On construit ensuite le schéma à l'aide des approximations suivantes (exemple pour un raffinement 1-2)

$$(1.4) \quad \begin{cases} (u_g)_{2j}^{2k} \approx u(2jh, 2k\Delta t) & j \leq 0 \\ (u_f)_j^k \approx u(jh, k\Delta t) & j > 0, \end{cases}$$

où  $h$  est le pas d'espace,  $\Delta t$  le pas de temps et  $u$  la solution de (1.1)

En  $x < 0$  l'équation est approchée par

$$(1.5) \quad \frac{(u_g)_{2j}^{2k+2} - 2(u_g)_{2j}^{2k} + (u_g)_{2j}^{2k-2}}{4\Delta t^2} - \frac{(u_g)_{2j+2}^{2k} - 2(u_g)_{2j}^{2k} + (u_g)_{2j-2}^{2k}}{4h^2} = 0 \quad \text{pour } j < 0,$$

tandis que pour  $x > 0$  l'équation est approchée par

$$(1.6) \quad \frac{(u_f)_j^{k+1} - 2(u_f)_j^k + (u_f)_j^{k-1}}{\Delta t^2} - \frac{(u_f)_{j+1}^k - 2(u_f)_j^k + (u_f)_{j-1}^k}{h^2} = 0 \quad \text{pour } j > 1.$$

On remarque, qu'avec ce choix le rapport du pas de temps sur le pas d'espace reste constant d'une grille de calcul à l'autre: le nombre de Courant est inchangé entre les deux grilles.

Le choix qui est ici fait de prendre une seule interface en  $x = 0$  se généralise aisément au cas de plusieurs interfaces, par exemple au cas où la grille fine est entre deux grilles grossière.

Restent à définir les approximations de l'équation à l'interface des deux grilles car chaque schéma fait appel aux valeurs de la grille voisine à l'interface. C'est la difficulté du raffinement de maillage spatio-temporelle: trouver une bonne manière de raccorder les deux grilles. Nous présentons ici des schémas très simples, inspirés de la littérature, permettant de résoudre ce problème par interpolation.

### 1.2.2 Raccord par interpolation spatiale

On choisit ici, de construire des schémas d'approximation différents sur l'interface entre les deux grilles en faisant appel à des interpolations spatiales. Plus exactement, les points de l'interface de la grille grossière sont calculés par le schéma classique complété par un point de la grille fine. Les schémas permettant le calcul des points de l'interface de la grille fine (en noir sur la figure 1.2) sont eux complétés par les interpolations spatiales d'ordre 2. Bien évidemment, puisque l'on interpole, on aura nécessairement  $(u_f)_0^{2k} = (u_g)_0^{2k}$ . Nous utiliserons néanmoins les deux notations,  $(u_f)_0^{2k}$  étant utilisé dans un schéma défini sur la grille fine et  $(u_g)_0^{2k}$  dans la grille grossière.

On présente ici les schémas résultants de cette stratégie dans le cas du raffinement 1 – 2. Sur l'interface, le schéma dépend de l'itération.

$$\begin{aligned} & \frac{(u_g)_0^{2k+2} - 2(u_g)_0^{2k} + (u_g)_0^{2k-2}}{4\Delta t^2} - \frac{(u_f)_2^{2k} - 2(u_g)_0^{2k} + (u_g)_{-2}^{2k}}{4h^2} = 0 \\ & \frac{(u_f)_0^{2k+1} - 2(u_f)_0^{2k} + (u_f)_0^{2k-1}}{\Delta t^2} - \frac{(u_f)_1^{2k} - 2(u_f)_0^{2k} + \frac{((u_g)_0^{2k} + (u_g)_{-2}^{2k})}{2}}{h^2} = 0 \end{aligned}$$

### 1.2.3 Raccord par interpolation temporelle

Le principe est à peu près le même, c'est à dire que les points des interfaces de chaque grille sont calculés à l'aide de modification du schéma classique. La différence ici est d'utiliser des interpolations en temps pour compléter le calcul sur la grille la plus fine.

En  $j=0$ , l'équation (1.5) devient

$$(1.7) \quad \frac{(u_g)_0^{2k+2} - 2(u_g)_0^{2k} + (u_g)_0^{2k-2}}{4\Delta t^2} - \frac{(u_f)_2^{2k} - 2(u_g)_0^{2k} + (u_g)_{-2}^{2k}}{4h^2} = 0.$$

En  $j=1$ , l'approximation dépendra de l'itération en temps car les éléments de la grille grossière ne sont calculés qu'une fois sur deux. Ainsi en  $j=1$  pour les itérations impaires l'équation (1.6) devient

$$(1.8) \quad \frac{(u_f)_1^{2k+1} - 2(u_f)_1^{2k} + (u_f)_1^{2k-1}}{\Delta t^2} - \frac{(u_f)_2^{2k} - 2(u_f)_1^{2k} + (u_g)_0^{2k}}{h^2} = 0,$$

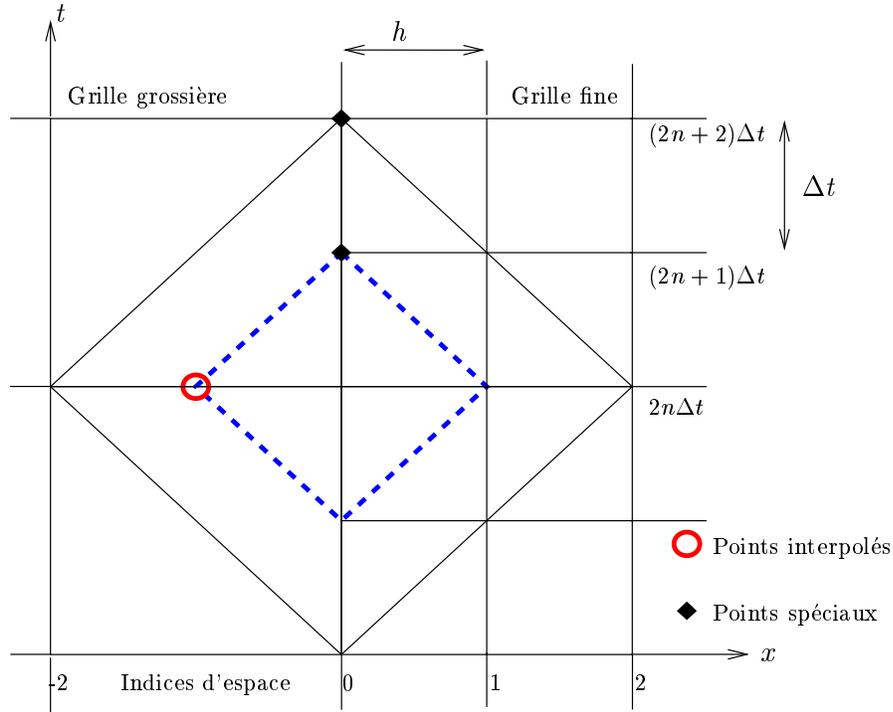


FIG. 1.2 – schéma d'une interpolation spatiale

alors que pour les itérations paires, on approche  $(u_g)_{j-1}^{2k+1} \approx \frac{1}{2}((u_g)_{j-1}^{2k+2} + (u_g)_{j-1}^{2k})$  et on obtient

$$(1.9) \quad \frac{(u_f)_1^{2k+2} - 2(u_f)_1^{2k+1} + (u_f)_1^{2k}}{\Delta t^2} - \frac{(u_f)_2^{2k+1} - 2(u_f)_1^{2k+1} + \frac{1}{2}((u_g)_0^{2k+2} + (u_g)_0^{2k})}{h^2} = 0.$$

La figure 1.3 récapitule les schémas à l'interface entre les deux grilles.

C'est l'analyse de ce schéma que nous allons développer. Ce choix étant fait, il nous faut savoir l'effet induit par le changement de grille sur le schéma: a-t-on toujours stabilité si le nombre de Courant est inférieur à 1?, détériore-t-on la précision du schéma?, comment se compare l'erreur due au changement de grille au phénomène de dispersion? Ces questions seront successivement abordées dans les sections suivantes.

Une première ébauche de réponse peut être faite à la vue de l'expérience numérique présentée tableau 1.1. Le moins que l'on puisse dire c'est qu'une simulation avec raffinement de maillage ne donne manifestement pas les résultats escomptés puisqu'au bout d'un certain temps, la solution dans la grille fine présente ce que l'on peut appeler une anomalie. Peut être est-ce un des phénomènes indésirables mentionnés dans la littérature. Nous tenterons d'apporter quelques lumières sur ce phénomène.

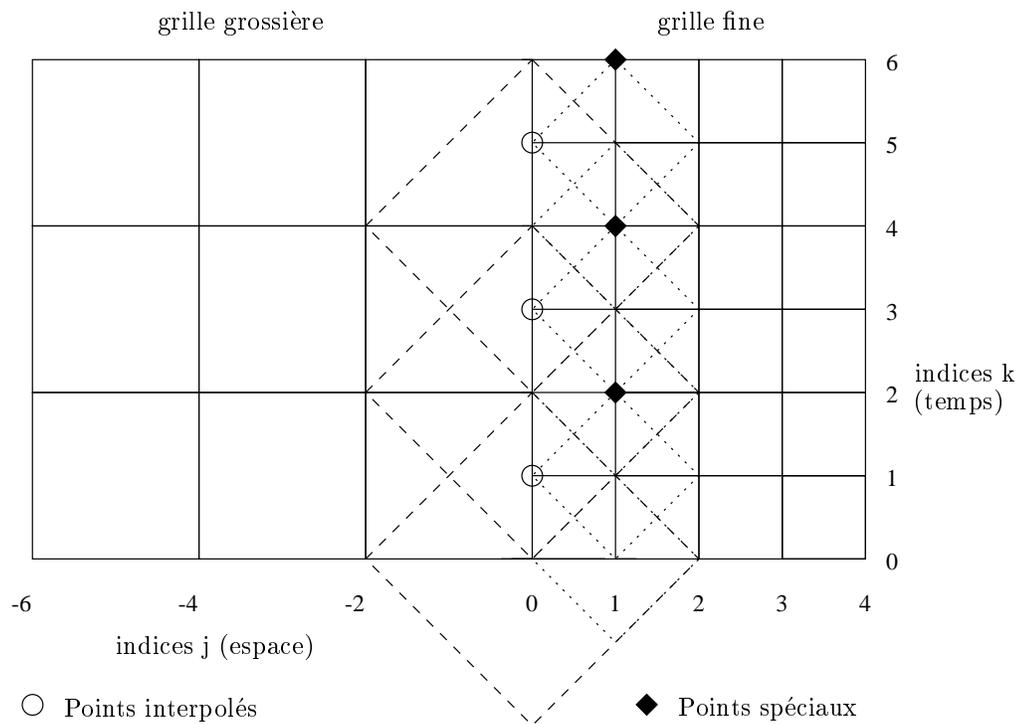
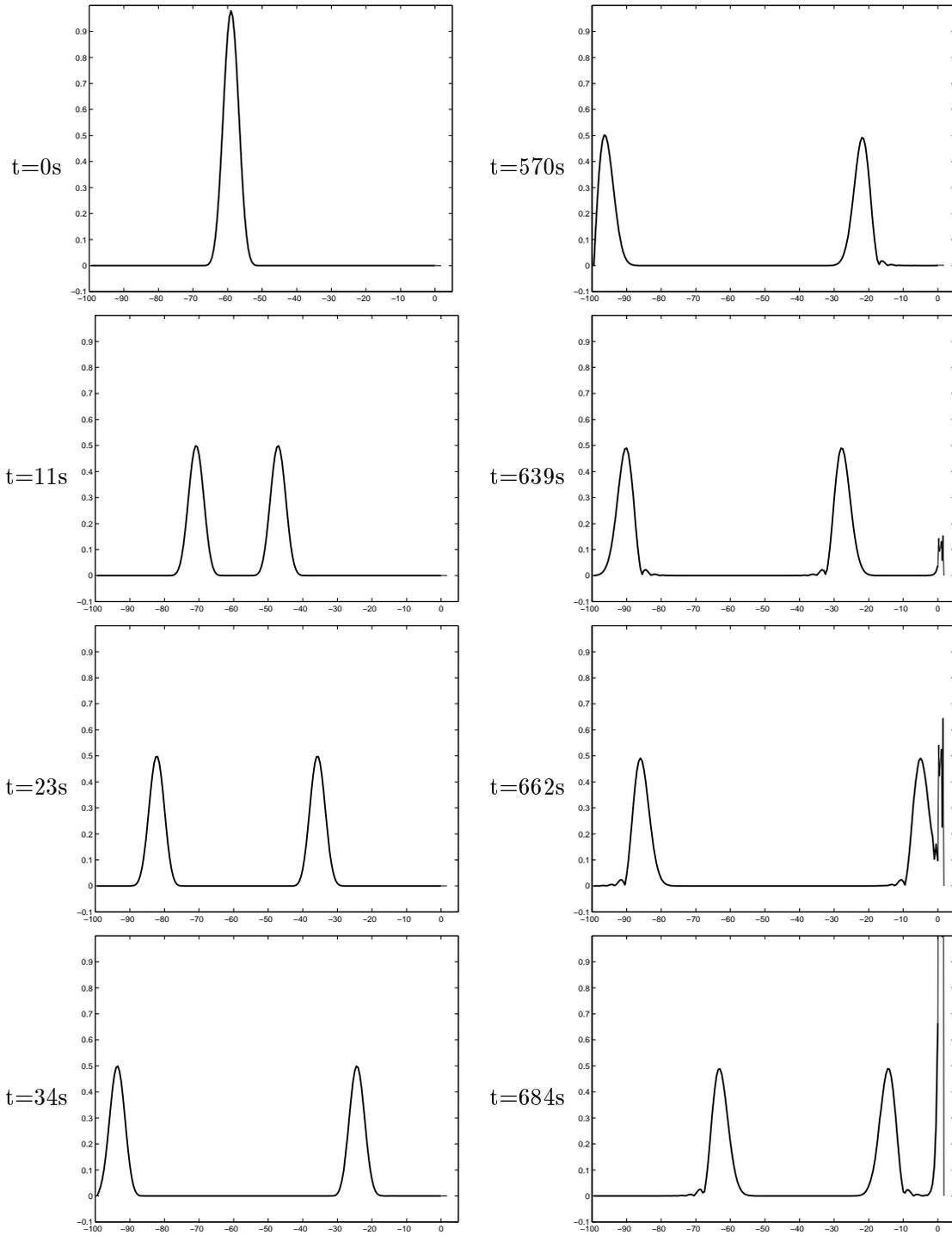


FIG. 1.3 – Schéma de l'interpolation sur la grille pour un raffinement 1-2



TAB. 1.1 – Résultats d’une simulation de raffinement de maillage, pour un nombre de Courant  $\frac{\Delta t}{h} \approx 0.9$ . La grille fine est située à droite et contient 7 points. Les conditions aux bords sont des conditions de Dirichlet. Dans un premier temps, l’onde se propage normalement dans les deux grilles, mais après quelques aller-retours ( $t=639s$ ), la solution dans la grille fine augmente sans raison apparente et finit par exploser. Ce phénomène ressemble à une instabilité...

## Chapitre 2

# Raccord par interpolation temporelle de deux demi-espaces infinis. Analyse du raffinement 1-2

### 2.1 Analyse de la stabilité par Fourier-Laplace

Nous proposons dans cette section de résoudre explicitement les équations du schéma de raccord par interpolation temporelle à l'aide de la transformation de Fourier-Laplace et d'analyser ainsi théoriquement sa stabilité. Cette méthode est en effet particulièrement bien adaptée à l'étude du couplage de deux schémas d'équations d'ondes. Il s'agit d'une technique à la Kreiss comme pour l'étude des schémas de discrétisation des problèmes hyperboliques aux limites (cf. [19], [22] par exemple).

#### 2.1.1 Transformées de Fourier-Laplace : définition et résolution

L'idée de la méthode est d'utiliser les transformées de Fourier-Laplace discrètes en temps des solutions du schéma pour montrer que les normes  $\ell^2$  de ces dernières sont majorées par une constante. Cette constante peut éventuellement dépendre de la durée de simulation ( $n\Delta t$ ).

Nous sommes donc amenés à calculer les transformées de Fourier-Laplace des solutions de (1.5) et (1.7) dans la grille grossière et de (1.6), (1.8) et (1.9) dans la grille fine. Pour simplifier, on suppose que les conditions initiales sont à support dans  $x < 0$  et on cherche la solution dans la grille grossière sous la forme

$$(2.1) \quad (u_g)_{2j}^{2k} = (u_{inc})_{2j}^{2k} + (\tilde{u}_g)_{2j}^{2k},$$

où  $(u_{inc})_{2j}^{2k}$  est l'onde numérique incidente, c'est à dire celle qui vérifie le schéma (1.5) pour  $j \in \mathbb{Z}$  avec les mêmes conditions initiales que  $(u_g)$  en  $k = 0$  et  $k = 1$ . On introduit alors les transformées de Fourier-Laplace discrètes en temps des suites  $(\tilde{u}_g)_{2j}^{2k}$ ,  $(u_{inc})_{2j}^{2k}$ ,  $(u_f)_j^{2k}$  et  $(u_f)_j^{2k+1}$ .

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\hat{u}_g)_{2j}(\omega) = 2\Delta t \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{u}_g)_{2j}^{2k} e^{i\omega 2k \Delta t} \\ (\hat{u}_{inc})_{2j}(\omega) = 2\Delta t \sum_{k=0}^{\infty} (u_{inc})_{2j}^{2k} e^{i\omega 2k \Delta t} \\ (\hat{u}_f)_j^P(\omega) = 2\Delta t \sum_{k=0}^{\infty} (u_f)_j^{2k} e^{i\omega 2k \Delta t} \\ (\hat{u}_f)_j^I(\omega) = 2\Delta t \sum_{k=0}^{\infty} (u_f)_j^{2k+1} e^{i\omega(2k+1)\Delta t}. \end{array} \right.$$

où  $\omega$  (la fréquence) est l'argument complexe de ces suites. Le pas de temps dans la grille fine étant deux fois plus fin, la transformée de la solution dans la grille fine, a donc deux composantes dans la décomposition choisie. On pose

$$(2.3) \quad (\hat{U}_f)_j = \begin{bmatrix} (\hat{u}_f)_j^P \\ (\hat{u}_f)_j^I \end{bmatrix}.$$

On peut justifier l'existence et même l'analyticité des fonctions définies ci-dessus au moins pour la partie imaginaire de  $\omega$  ( $\Im(\omega)$ ) assez grand, car les équations du schéma nous montrent qu'il existe un  $M$  ne dépendant que du rapport des pas de discrétisation tel que

$$\sum_{j \leq 0} |(u_g)_{2j}^{2k}|^2 + \sum_{j > 0} \|(U_f)_j^k\|^2 \leq (M(\gamma))^{2k} \left( \sum_{j \leq 0} |(u_g)_{2j}^0|^2 + \sum_{j \leq 0} |(u_g)_{2j}^2|^2 + \sum_{j > 0} \|(U_f)_j^0\|^2 \right),$$

avec  $\|(U_f)_j^k\|^2 = |(u_f)_j^{2k}|^2 + |(u_f)_j^{2k-1}|^2$  et  $\gamma = \frac{h^2}{\Delta t^2}$ .

En effet, une majoration à la baionnette nous donne que pour tout  $j > 0$

$$|(u_f)_j^{2k+1}|^2 \leq 4 \left( 4(1 - \frac{1}{\gamma})^2 |(u_f)_j^{2k}|^2 + |(u_f)_j^{2k-1}|^2 + \frac{1}{\gamma^2} (|(u_f)_{j-1}^{2k}|^2 + |(u_f)_{j+1}^{2k}|^2) \right)$$

avec  $(u_f)_{j-1}^{2k} = (u_g)_0^{2k}$  lorsque  $j = 1$ , et donc

$$\sum_{j > 0} |(u_f)_j^{2k+1}|^2 \leq C(\gamma) \left( \sum_{j > 0} |(u_f)_j^{2k}|^2 + \sum_{j > 0} |(u_f)_j^{2k-1}|^2 + \sum_{j \leq 0} |(u_g)_{2j}^{2k}|^2 \right)$$

avec, par exemple,  $C(\gamma) = 16((1 - \frac{1}{\gamma})^2 + \frac{8}{\gamma^2} + 4)$ . De même, on montre que

$$\sum_{j > 0} |(u_g)_{2j}^{2k+2}|^2 \leq C(\gamma) \left( \sum_{j \leq 0} |(u_g)_{2j}^{2k}|^2 + \sum_{j \geq 0} |(u_g)_{2j}^{2k-2}|^2 + \sum_{j > 0} |(u_f)_j^{2k}|^2 \right).$$

Enfin,

$$\begin{aligned} & \sum_{j > 0} |(u_f)_j^{2k+2}|^2 \leq \\ & \left( 16(1 - \frac{1}{\gamma})^2 + \frac{8}{\gamma^2} \right) \sum_{j > 0} |(u_f)_j^{2k+1}|^2 + 4 \sum_{j > 0} |(u_f)_j^{2k}|^2 + \frac{2}{\gamma^2} \sum_{j \leq 0} |(u_g)_{2j}^{2k+2}|^2 + \frac{2}{\gamma^2} \sum_{j \leq 0} |(u_g)_{2j}^{2k}|^2 \\ & \leq C'(\gamma) \left( \sum_{j \leq 0} |(u_g)_{2j}^{2k}|^2 + \sum_{j \geq 0} |(u_g)_{2j}^{2k-2}|^2 + \sum_{j > 0} |(u_f)_j^{2k-1}|^2 + \sum_{j > 0} |(u_f)_j^{2k}|^2 \right). \end{aligned}$$

où  $C'(\gamma) = \left(4 + \frac{2}{\gamma^2} + C(\gamma)(16(1 - \frac{1}{\gamma})^2 + \frac{10}{\gamma^2})\right)$ . et  $M(\gamma) = 2C(\gamma) + C'(\gamma) + 1$  convient.

Les séries intervenant dans (2.2) sont donc absolument convergentes dès que  $\Im(\omega) > \log(M(\gamma))/\Delta t$ . En effet, en posant

$$c_0 = \sum_{j \leq 0} |(u_g)_{2j}^0|^2 + \sum_{j \leq 0} |(u_g)_{2j}^2|^2 + \sum_{j > 0} \|(U_f)_j^0\|^2,$$

on a

$$(\hat{u}_g)_{2j}(\omega) + (\hat{u}_f)_j^P(\omega) + (\hat{u}_f)_j^I(\omega) \leq c_0 \sum_k e^{i2k(\omega - i\frac{\log(M(\gamma))}{\Delta t})\Delta t}$$

et la série du second membre est alors absolument convergente dès que  $\Im(\omega) > \log(M(\gamma))/\Delta t$ . On en déduit que les transformées de Fourier Laplace sont bien définies et analytiques, au moins sur un demi-plan de la forme  $\Im(\omega) > S > 0$  pour  $S$  assez grand. De plus, on vérifie facilement que ces fonctions sont bornées à l'infini,  $\Im(\omega) \rightarrow \infty$ .

Une fois ces définitions posées, on va utiliser les équations du schéma pour établir des relations entre les transformations de Fourier-Laplace des fonctions inconnues. Nous venons de voir que tous les calculs qui vont suivre se justifient au moins lorsque la partie imaginaire de  $\omega$  est assez grande.

On multiplie ensuite l'équation (1.5) par  $e^{-i2k\omega\Delta t}$  puis on somme sur les indices  $k$ . En utilisant la relation

$$e^{2i\omega\Delta t} - 2 + e^{-2i\omega\Delta t} = -4 \sin^2(\omega\Delta t),$$

on obtient alors la relation classique pour le schéma intérieur

$$(2.4) \quad \begin{cases} 4 \frac{\sin^2(\omega\Delta t)}{\Delta t^2} (\hat{u}_g)_{2j} + \frac{1}{h^2} ((\hat{u}_g)_{2j+2} - 2(\hat{u}_g)_{2j} + (\hat{u}_g)_{2j-2}) = 0 \\ \text{pour } j < 0, \end{cases}$$

De même on écrit l'équation (1.6) aux instants pairs ( $k = 2k'$ ) et impairs ( $k = 2k' + 1$ ) et on les multiplie respectivement par  $e^{-i2k\omega\Delta t}$  et  $e^{-i(2k+1)\omega\Delta t}$ . Après sommation et en utilisant

$$e^{i\omega\Delta t} + e^{-i\omega\Delta t} = 2 \cos(\omega\Delta t),$$

on trouve

$$(2.5) \quad \begin{cases} \frac{2(\hat{u}_f^P)_j - 2 \cos(\omega\Delta t)(\hat{u}_f^I)_j}{\Delta t^2} + \frac{1}{h^2} ((\hat{u}_f^P)_{j+1} - 2(\hat{u}_f^P)_j + (\hat{u}_f^P)_{j-1}) = 0 \\ \frac{2(\hat{u}_f^I)_j - 2 \cos(\omega\Delta t)(\hat{u}_f^P)_j}{\Delta t^2} + \frac{1}{h^2} ((\hat{u}_f^I)_{j+1} - 2(\hat{u}_f^I)_j + (\hat{u}_f^I)_{j-1}) = 0 \end{cases} \quad \text{pour } j > 1,$$

que l'on peut également réécrire

$$(2.6) \quad \begin{cases} \frac{A_f(\hat{U}_f)_j}{\Delta t^2} + \frac{1}{h^2} ((\hat{U}_f)_{j+1} - 2(\hat{U}_f)_j + (\hat{U}_f)_{j-1}) = 0 \\ \text{pour } j > 1, \end{cases}$$

où

$$A_f = \begin{bmatrix} 2 & -2 \cos(\omega\Delta t) \\ -2 \cos(\omega\Delta t) & 2 \end{bmatrix}.$$

Les équations (1.6) et (1.8) multipliées par  $e^{-i2k\omega\Delta t}$ , et (1.9) par  $e^{-i(2k+1)\omega\Delta t}$ , donnent en les sommant les relations liant les transformées à l'interface.

$$(2.7) \quad \begin{cases} 4 \frac{\sin^2(\omega\Delta t)}{\Delta t^2} (\hat{u}_g)_{2j} + \frac{1}{h^2} \left( (\hat{u}_g)_{2j-2} - 2(\hat{u}_g)_{2j} + (\hat{u}_f)_{2j+2}^P - (\hat{u}_{inc})_{2j+2} \right) = 0 \\ \text{pour } j = 0, \end{cases}$$

$$(2.8) \quad \begin{cases} \frac{A_f(\hat{U}_f)_j}{\Delta t^2} + \frac{1}{h^2} \left( (\hat{u}_f)_{j+1} - 2(\hat{u}_f)_j + \left[ \begin{array}{c} (\hat{u}_g)_0 + (\hat{u}_{inc})_0 \\ \cos(\omega\Delta t)((\hat{u}_g)_0 + (\hat{u}_{inc})_0) \end{array} \right] \right) = 0 \\ \text{pour } j = 1, \end{cases}$$

Les relations (2.4) et (2.6) sont des récurrences à deux niveaux que l'on sait résoudre à l'aide des solutions du polynôme caractéristique

$$(2.9) \quad \begin{cases} r^2(\omega) - 2A(\omega)r(\omega) + 1 = 0 \\ \text{avec } A(\omega) = 1 - 2 \frac{h^2}{\Delta t^2} \sin^2\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right). \end{cases}$$

Ce polynôme possède deux racines données par

$$(2.10) \quad r^\pm(\omega) = A(\omega) \pm \sqrt{A^2(\omega) - 1}$$

et dont le produit vaut 1. Ainsi, à moins que les deux racines ne se trouvent sur le cercle unité, l'une ( $r^-$ ) est de module strictement supérieur à 1, l'autre ( $r^+$ ) est de module strictement inférieur à 1. On montre plus loin que si  $\Im(\omega)$  est assez grande, on est toujours dans le second cas. De ce fait, la solution générale de, disons (2.4) qui s'écrit

$$(2.11) \quad (\hat{u}_g)_{2j} = C^+(\omega) (r^+(2\omega))^j + C^-(\omega) (r^-(2\omega))^j \quad \forall j < 0,$$

et qui a donc deux constantes indéterminées, n'en a en fait qu'une seule car  $C^+$  doit être nulle pour que  $(u_g)$  soit dans  $\ell^2$ . On va préciser tout ceci en définissant dans le plan complexe "la racine de module plus petit que 1 de (2.9)".

### 2.1.2 Définition et analyse de $r(\omega)$

On commence par choisir une détermination de la racine carrée. On prend  $\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\log z}$  où  $\log z = \log|z| + i \arg(z)$  avec  $\arg(z) \in ]-\pi, \pi[$  (détermination principale du logarithme). La fonction  $\sqrt{z}$  est définie analytique sur  $\mathbb{C}$  privé de la coupure  $]-\infty, 0]$ . Si on utilise cette définition, on vérifie que les fonctions  $r^\pm(\omega)$  données par

$$(2.12) \quad r^\pm(\omega) = A(\omega) \pm A(\omega) \sqrt{1 - \frac{1}{A^2(\omega)}}$$

sont analytiques en tous points tels que  $A(\omega)$  ne soit pas un réel de  $[-1, 1]$ . Supposons le pas de temps plus petit que le pas d'espace, un calcul simple montre que la coupure en  $\omega$  pour  $r^\pm(\omega)$  est alors constituée d'une famille de segments de la forme  $[-\theta/\Delta t, \theta/\Delta t] + 2\pi\mathbb{Z}/\Delta t$  où  $\theta = 2 \arcsin(\frac{\Delta t}{\Delta x})$ . Une propriété remarquable est que ces segments correspondent précisément aux valeurs de  $\omega$  pour lesquelles les deux racines sont de module 1. En effet, si (2.9) admet

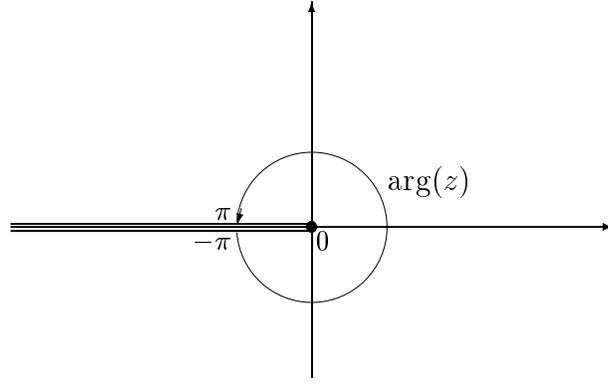


FIG. 2.1 – Coupure pour  $\log(z) = \log(|z|) + i \arg(z)$

deux racines de modules 1, soient  $e^{i\phi}$  et  $e^{-i\phi}$  avec  $\phi$  réel on trouve que  $\cos \phi = A$ ,  $A$  est un réel de  $[-1, 1]$  et  $\omega$  est sur la coupure de  $r^\pm(\omega)$ . En utilisant un argument de continuité, on en déduit que (2.10) définit deux racines de (2.9) dont le module est, globalement sur son domaine, soit plus petit soit plus grand que 1. Comme  $\sqrt{1 - 1/A^2} \sim 1 - 1/(2A^2)$ ,  $|A| \rightarrow \infty$ , il est facile de voir que c'est  $r^+$  qui correspond à la racine de module inférieur à 1. On résume tout ceci dans la

**Propriété 1** *Supposons  $\Delta t$  plus petit que  $h$ , La fonction*

$$(2.13) \quad \begin{aligned} r(\omega) &= A(\omega) - A(\omega) \sqrt{1 - \frac{1}{A^2(\omega)}}. \\ A(\omega) &= 1 - 2 \frac{h^2}{\Delta t^2} \sin^2\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right), \end{aligned}$$

*est définie,  $2\pi/\Delta t$  périodique et analytique sur*

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \left( \left[ -\frac{2}{\Delta t} \arcsin \frac{\Delta t}{\Delta x}, \frac{2}{\Delta t} \arcsin \frac{\Delta t}{\Delta x} \right] + \frac{2\pi}{\Delta t} \mathbb{Z} \right),$$

*où elle vérifie*

$$(2.14) \quad r(\omega)^2 - 2A(\omega)r(\omega) + 1 = 0, \quad |r(\omega)| < 1.$$

**Remarque 1** : *Il y a bien d'autres façons de définir cette racine sur  $\Im(\omega) > 0$ . Le choix qui est fait ici permet de prendre comme coupure les  $\omega$  qui correspondent précisément à  $|r^+(\omega)| = |r^-(\omega)| = 1$ . Le choix plus naturel qui consisterait à définir la racine par  $A(\omega) \pm \sqrt{A^2(\omega) - 1}$  ne permet pas de définir la racine sur l'axe imaginaire pur.*

Il est intéressant de regarder le comportement de cette racine lorsque l'on s'approche de l'axe réel. On voit qu'alors l'expression  $A(\omega)$  va tendre vers un réel, et de même pour  $1 - A(\omega)^{-2}$ . Si cette dernière quantité est positive ( $|A(\omega)| \geq 1$ ), il y a continuité de  $r(\omega)$  et on trouve la racine de module plus petit que 1 du polynôme qui est donnée par  $A(\omega) + \sqrt{A^2(\omega) - 1}$  puisque  $A(\omega)$  est négatif (cf. la formule donnant  $A(\omega)$ ).

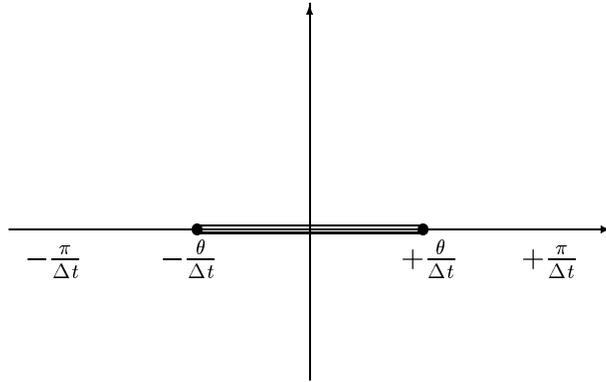


FIG. 2.2 – Représentation du domaine d’analyticité de la fonctions  $r(\omega)$  sur une période. A la traversée de la coupure  $[-\theta/\Delta t, \theta/\Delta t]$ , la fonction  $r(\omega)$  admet un saut et échange les deux racines du polynôme.

Si  $1 - A(\omega)^{-2}$  est négatif, à la limite ( $\omega \rightarrow 0^+$ ), on a deux racines conjuguées de module 1 et il faut faire attention au signe de la partie imaginaire de  $\omega$  au moment du passage à la limite. Plus précisément, on a

$$\left(1 - \frac{1}{(A(\omega) + i\epsilon)^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{A(\omega)^2}\right) + \frac{2i}{A(\omega)^3}\epsilon + O(\epsilon^2)$$

et donc si  $|A(\omega)| < 1$

$$\begin{aligned} r(\omega_r + i\eta) &\sim A(\omega_r) - A(\omega_r) \left[ \left(1 - \frac{1}{A(\omega_r)^2}\right) + \frac{2i}{A(\omega_r)^3}\epsilon \right]^{-\frac{1}{2}} \\ &\sim A(\omega_r) - iA(\omega_r) \text{Signe}(A(\omega_r)) \text{Signe}(\epsilon) \left[ \left(-1 + \frac{1}{A(\omega_r)^2}\right) \right]^{-\frac{1}{2}} \\ &\sim A(\omega_r) - i \text{Signe}(\epsilon) \sqrt{1 - A(\omega_r)^2} \quad (\epsilon \rightarrow 0) \end{aligned}$$

où  $\epsilon$  est tel que  $A(\omega_r + i\eta) \sim A(\omega_r) + i\epsilon$ , c’est-à-dire  $\epsilon = -\eta \sin(\omega_r \Delta t)$  et  $\omega_r = \Re(\omega)$

Maintenant reste à trouver le bon signe pour  $\Im(A(\omega))$  lorsque  $\omega$  tend vers l’axe des réels avec une partie imaginaire positive. On a

$$A(\omega_r + i\eta) = A(\omega_r) - i \sin(\omega_r \Delta t) \eta + O(\eta^2)$$

On a tous les éléments pour comprendre ce qui se passe : lorsque  $\omega$  parcourt le segment  $[-\frac{\pi}{\Delta t}, \frac{\pi}{\Delta t}]$  au dessus de l’axe imaginaire nul,  $A(\omega)$  part d’un point réel négatif plus petit que  $-1$  rejoint le point  $-1$  ( $\omega \Delta t$  vaut alors  $-\theta$ ) puis contourne le segment  $[-1, 1]$  par au-dessus. Le point 1 est alors atteint en  $\omega = 0$ . Ensuite,  $A(\omega)$  rebrousse chemin vers  $-1$  mais par en-dessous cette fois-ci. De  $-1$ , ( $\omega \Delta t$  est alors égal à  $\theta$ ),  $A(\omega)$  revient à son point de départ.

Il est alors facile de déduire l’expression de  $r(\omega)$ , on a

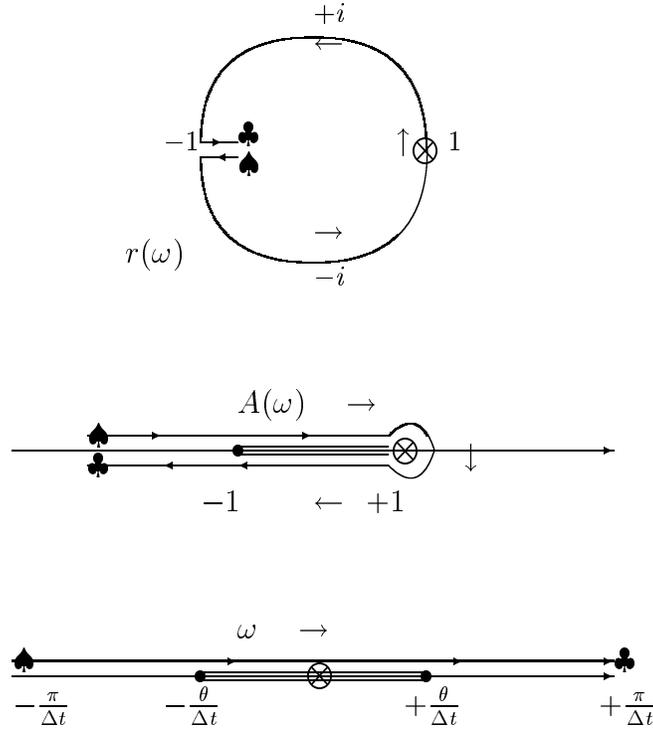


FIG. 2.3 – Représentation des chemins parcourus par  $A(\omega)$  et  $r(\omega)$  (cercle unité) lorsque  $\omega$  parcourt le contour dessiné sur l'axe réel.

$$\begin{aligned}
 (2.15) \quad & \lim_{\Im(\omega) \downarrow 0^+} r(\omega) = A(\omega) - i\sqrt{1 - A(\omega)^2}, \quad \omega\Delta t \in [-\theta, 0] \\
 & \lim_{\Im(\omega) \downarrow 0^+} r(\omega) = A(\omega) + i\sqrt{1 - A(\omega)^2}, \quad \omega\Delta t \in [0, \theta] \\
 & \lim_{\Im(\omega) \downarrow 0^+} r(\omega) = A(\omega) + \sqrt{A(\omega)^2 - 1}, \quad \omega\Delta t \in [-\pi, -\theta] \cup [\theta, \pi]
 \end{aligned}$$

**Remarque 2** On a bien continuité de  $r(\omega)$  en 0, puisque  $A(0) = 1$  et  $r(0) = 1$ .

En remplaçant  $A(\omega)$  par sa valeur, on obtient des expressions fonction de  $\omega$  :

$$\begin{aligned}
 (2.16) \quad & \text{si } \omega\Delta t \in [-\theta, \theta], \\
 & \lim_{\Im(\omega) \downarrow 0^+} r(\omega) = 1 - 2\frac{h^2}{\Delta t^2} \sin^2\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) + 2i\frac{h}{\Delta t} \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) \sqrt{1 - \frac{h^2}{\Delta t^2} \sin^2\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)}, \\
 & \text{si } \omega\Delta t \notin [-\theta, \theta], \\
 & \lim_{\Im(\omega) \downarrow 0^+} r(\omega) = 1 - 2\frac{h^2}{\Delta t^2} \sin^2\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) + 2\frac{h}{\Delta t} \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) \sqrt{\frac{h^2}{\Delta t^2} \sin^2\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) - 1}
 \end{aligned}$$

L'image de l'axe collé au dessus de l'axe réel est alors la réunion du cercle unité parcouru dans le sens trigonométrique et du segment, parcouru deux fois, joignant le point  $r(-\frac{\pi}{\Delta t})$  qui est un nombre réel compris entre -1 et 0.

La figure (2.3) schématise le comportement de  $A(\omega)$  et de  $r(\omega)$ .

### 2.1.3 Résolution du problème

Nous avons tous les éléments pour poursuivre la résolution. La solution de (2.4) non exponentiellement croissante est de la forme

$$(2.17) \quad (\hat{u}_g)_{2j} = R r(2\omega)^{-j} (\hat{u}_{inc})_0 \quad j \leq 0,$$

où  $R$  est une constante à déterminer ; le terme  $(\hat{u}_{inc})_0$  est mis ici pour qu'elle soit adimensionnelle

Pour trouver la solution de (2.6) remarquons que la matrice  $A_f$  a pour valeurs propres  $2(1 - \cos(\omega\Delta t)) = 4 \sin^2(\frac{\omega\Delta t}{2})$  et  $2(1 + \cos(\omega\Delta t)) = 4 \sin^2(\frac{\omega\Delta t + \pi}{2})$  avec respectivement  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  comme vecteur propre. On trouve alors la solution de (2.6)

$$(2.18) \quad (\hat{U}_f)_j = \left\{ T r(\omega)^j \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + T_p r(\omega + \frac{\pi}{\Delta t})^j \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} (\hat{u}_{inc})_0 \quad j \geq 0.$$

où la encore  $T$  et  $T_p$  sont des constantes adimensionnelles à déterminer.

L'onde transmise possède donc 2 composantes une composante 'principale' de pulsation  $\omega$  et une composante de pulsation  $\omega + \frac{\pi}{\Delta t}$ . On peut remarquer que le fait que  $(\hat{u}_f)_j^P$  et  $(\hat{u}_f)_j^I$  soient de signes opposés impliquent que la deuxième composante sera très oscillante puisqu'elle change de signe à chaque itération. Ce phénomène numérique est bien entendu absent pour le problème continu, on qualifiera donc cette deuxième composante d'onde 'parasite'. Le raffinement des grilles a donc pour effet de coupler lors de la transmission chaque fréquence présente dans le signal incident à une fréquence plus haute de  $\pi/\Delta t$ . Ce couplage est un des phénomènes clé pour comprendre l'effet du raffinement de maillage espace-temps sur les solutions du schéma.

Les transformées des solutions à l'intérieur de chaque grille étant explicitées, les équations (2.7) et (2.8) se simplifient. Les équations auxquelles on aboutit vont nous permettre de trouver les constantes à déterminer,

$$(2.19) \quad \begin{cases} (\hat{u}_f)_2^P = (\hat{u}_g)_2 + (\hat{u}_{inc})_2 \\ (\hat{u}_f)_0^P = (\hat{u}_g)_0 + (\hat{u}_{inc})_0 \\ (\hat{u}_f)_0^I = \cos(\omega\Delta t)((\hat{u}_g)_0 + (\hat{u}_{inc})_0). \end{cases}$$

On peut éliminer la quantité  $\hat{u}_2$  si l'on suppose que les sources générant l'onde incidence sont en amont de l'interface. On a alors en absence de source

$$(2.20) \quad \begin{cases} 4 \frac{\sin^2(\omega\Delta t)}{\Delta t^2} (\hat{u}_{inc})_{2j} + \frac{1}{h^2} ((\hat{u}_{inc})_{2j+2} - 2(\hat{u}_{inc})_{2j} + (\hat{u}_{inc})_{2j-2}) = 0 \\ \text{pour } j \geq 0, \end{cases}$$

et le champ incident vérifie

$$(2.21) \quad (\hat{u}_{inc})_{2j} = r(2\omega)^j (\hat{u}_{inc})_0 \quad \forall j \geq 0$$

On aboutit alors à un système linéaire donnant  $R$ ,  $T$  et  $T_p$

$$(2.22) \quad \begin{cases} T + T_p - R = 1 \\ T - T_p - \cos(\omega\Delta t) R = \cos(\omega\Delta t) \\ r^2(\omega) T + r^2(\omega + \frac{\pi}{\Delta t}) T_p - r(2\omega)^{-1} R = r(2\omega) \end{cases}$$

Le déterminant  $\delta(\omega)$  de ce système est appelé déterminant de Kreiss. Ce déterminant va jouer un rôle crucial dans l'analyse de stabilité

$$(2.23) \quad \begin{aligned} \delta(\omega) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -\cos(\omega\Delta t) \\ r^2(\omega) & r^2(\omega + \frac{\pi}{\Delta t}) & -r(2\omega)^{-1} \end{vmatrix} \\ &= 2r(2\omega)^{-1} - r^2(\omega)(1 + \cos(\omega\Delta t)) - r^2(\omega + \frac{\pi}{\Delta t})(1 - \cos(\omega\Delta t)). \end{aligned}$$

Les principales propriétés du déterminant de Kreiss sont résumées dans la proposition suivante

**Propriété 2** *Supposons  $\Delta t \leq \Delta x$ , la fonction  $\delta(\omega)$  donnée par (2.23) est analytique sur  $\Omega$  tel que défini dans la propriété 1. Elle ne s'annule qu'en  $\omega \in \pi\mathbb{Z}$  et vérifie*

$$(2.24) \quad \exists M > 0, \quad \left| \left( \frac{1}{r(2\omega)} - r(2\omega) \right) \frac{1}{\delta(\omega)} \right| \leq M, \quad \text{sur } \Omega$$

où  $M$  ne dépend que de  $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ .

Admettons pour le moment cette proposition, on résout le système (2.22) en

$$(2.25) \quad \begin{aligned} T &= \frac{(1 + \cos(\omega\Delta t)) \left( \frac{1}{r(2\omega)} - r(2\omega) \right)}{\delta(\omega)} \\ T_p &= \frac{(1 - \cos(\omega\Delta t)) \left( \frac{1}{r(2\omega)} - r(2\omega) \right)}{\delta(\omega)} \\ R &= 2 \left( \frac{1}{r(2\omega)} - r(2\omega) \right) \frac{1}{\delta(\omega)} - 1 \end{aligned}$$

Considérons les formules d'inversion de Laplace

$$(2.26) \quad \begin{aligned} (\tilde{u}_g)_{2j}^{2k} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2\Delta t} + iS}^{+\frac{\pi}{2\Delta t} + iS} (\hat{u}_g)_{2j}(\omega) e^{-2i\omega k \Delta t} d\omega \\ (u_f)_j^{2k} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2\Delta t} + iS}^{+\frac{\pi}{2\Delta t} + iS} (\hat{u}_f)_j^P(\omega) e^{-2i\omega k \Delta t} d\omega \\ (u_f)_j^{2k+1} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2\Delta t} + iS}^{+\frac{\pi}{2\Delta t} + iS} (\hat{u}_f)_j^I(\omega) e^{-i(2k+1)\omega \Delta t} d\omega \end{aligned}$$

valables pour  $S$  assez grand et positif. On obtient

$$(2.27) \quad \begin{aligned} (\tilde{u}_g)_{2j}^{2k} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2\Delta t} + iS}^{+\frac{\pi}{2\Delta t} + iS} (\hat{u}_{inc})_0(\omega) R(\omega) r(2\omega)^{-j} e^{-2i\omega k \Delta t} d\omega \\ (u_f)_j^k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2\Delta t} + iS}^{+\frac{\pi}{2\Delta t} + iS} (\hat{u}_{inc})_0(\omega) \left( T(\omega) r(\omega)^j + T_p(\omega) r\left(\omega + \frac{\pi}{\Delta t}\right)^j \right) e^{-2i\omega k \Delta t} d\omega \end{aligned}$$

Les intégrales intervenant dans ces expressions s'interprètent comme des intégrales de contour dans le plan complexe. Or d'après (2.24), on voit que (2.25) définit  $R(\omega)$ ,  $T(\omega)$  et  $T_p(\omega)$  comme des fonctions analytiques et bornées uniformément en la variable  $\omega$  sur  $\Im(\omega) \neq 0$ . Comme on a de plus la périodicité des fonctions impliquées, la formule de Cauchy nous donne que l'on peut remplacer l'intégrale sur  $\Im(\omega) = S$  par une intégrale sur le segment localisé sur l'axe réel. Par exemple

$$(2.28) \quad (\tilde{u}_g)_{2j}^{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2\Delta t}}^{+\frac{\pi}{2\Delta t}} \lim_{\Im(\omega)=0^+} \left( (\hat{u}_{inc})_0(\omega) R(\omega) r(2\omega)^{-j} \right) e^{-2i\omega k \Delta t} d\omega$$

On a alors l'estimation (non optimale)

$$(2.29) \quad |(\tilde{u}_g)_{2j}^{2k}| \leq \frac{2M+1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2\Delta t}}^{+\frac{\pi}{2\Delta t}} |(\hat{u}_{inc})_0(\omega)| d\omega$$

qui montre que la solution est bornée en tout  $k\Delta t$  par une norme de l'onde incidente pour peu que celle-ci soit suffisamment régulière. C'est une façon de dire que le schéma est stable.

Une autre manière est d'interpréter l'équation (2.28) à partir de (2.21) et d'écrire

$$\begin{cases} \forall j < 0 & (u_{inc})_{-2j}^{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2\Delta t}}^{+\frac{\pi}{2\Delta t}} \left( (\hat{u}_{inc})_0(\omega) r(2\omega)^{-j} \right) e^{-2i\omega k \Delta t} d\omega \\ \Rightarrow (\tilde{u}_g)_{2j}^{2k} &= [(u_{inc})_{-2j} * R]^{2k} \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} R^{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2\Delta t}}^{+\frac{\pi}{2\Delta t}} \hat{R}(\omega) e^{-2i\omega k \Delta t} d\omega \\ (f * g)^{2k} = \Delta t \sum_l f^{2(l-k)} g^{2l} \end{cases}$$

C'est à dire que la réflexion apparaît comme la convolution de l'image du champ incident par rapport à l'interface (le signe - de  $-2j$ ) et d'une fonction discrète coefficient de réflexion. Cette fonction a une transformée de Fourier uniformément bornée en  $\omega$  (on peut d'ailleurs montrer qu'elle est causale) et on a la stabilité.

On peut bien sûr utiliser les mêmes arguments pour ce qui concerne l'onde numérique dans la grille fine  $(u_f)_j^k$ , on pourra borner la solution par des normes appropriées de l'onde incidente.

Notons que le point important et qui nous donne la stabilité est tout d'abord l'absence de zéro pour le déterminant de Kreiss dans le plan complexe  $\Im(\omega) > 0$ . En effet, la présence d'un tel zéro aurait entraîné l'existence d'un résidu dans notre formule de Cauchy. Or, ce résidu, s'il existait, serait un terme qui exploserait comme  $A^k$ , avec  $A = |\exp^{-i2\omega(\text{pole})\Delta t}| > 1$  et le schéma s'avèrerait fortement instable. Un deuxième ingrédient pour l'obtention de l'estimation (2.29)

est que l'on peut borner les coefficients de réflexion et de transmission jusque sur l'axe réel. Remarque qu'il s'agit là d'une condition moins forte que celle dite du critère de Kreiss qui demande à ce que le déterminant de Kreiss ne s'annule pas sur l'axe réel. Cette condition n'est pas remplie pour notre schéma: on ne peut pas dire que le schéma est GKS-stable (cf [17]).

Pour clore cette section, il reste à démontrer l'inégalité sur laquelle repose l'estimation. Il s'agit de calculs essentiellement techniques et qui peuvent être sautés, au moins, à la première lecture. Pour les lecteurs courageux, voilà donc la

### 2.1.4 Preuve de l'inégalité (2.24)

On remarque tout d'abord que

$$|\delta(\omega)| \geq \left| 2|r^{-1}(\omega)| - |F(\omega)| \right|$$

où

$$F(\omega) = r^2(\omega)(1 + \cos(\omega\Delta t)) + r^2(\omega + \pi/\Delta t)(1 + \cos(\omega\Delta t + \pi))$$

comme  $|r^{-1}(\omega)| > 1$  sur  $\Im(\omega) > 0$ , si l'on réussit à montrer que  $|F(\omega)| \leq 2$  sur  $\Im(\omega) > 0$  on saura que  $\delta(\omega)$  ne peut s'annuler sur ce domaine. Pour cela, on montre que

$$\begin{aligned} 1 : \quad & \lim_{\Im(\omega) \rightarrow +\infty} |F(\omega)| = 0 \\ 2 : \quad & \lim_{\Im(\omega) \rightarrow 0} |F(\omega)| = 2 \end{aligned}$$

car comme  $F(\omega)$  est analytique, le principe du maximum [13] s'applique et  $\sup_{\omega} |F(\omega)| = 2$ .

Le point 1 se démontre sans trop de difficulté car si  $\Im(\omega) \rightarrow \infty$ ,  $A(\omega) \sim \text{Constante} \cos(\omega\Delta t)$  qui tend vers l'infini et  $r(\omega) \sim 1/2A$  qui tend vers 0. Finalement  $r^2(\omega)(1 + \cos(\omega\Delta t)) \sim \text{Constante} / \cos(\omega\Delta t)$  tend vers 0. Le même résultat appliqué en  $\omega + \pi/\Delta t$  fournit la limite pour  $|F|$  à l'infini.

Le point 2 est immédiat car sur l'axe réel on a

$$\begin{aligned} |F(\omega)| & \leq |r(\omega)|^2(1 + \cos(\omega\Delta t)) + |r(\omega + \pi/\Delta t)|^2(1 - \cos(\omega\Delta t)) \\ & \leq (1 + \cos(\omega\Delta t)) + (1 - \cos(\omega\Delta t)) \leq 2. \end{aligned}$$

avec égalité lorsque  $\omega = 0$ .

On a donc démontré que  $\delta(\omega)$  ne peut s'annuler qu'à la limite, sur l'axe réel. La deuxième étape va consister à trouver les zéros de  $\tilde{\delta}(\omega) = \lim_{\Im(\omega) \rightarrow 0^+} \delta(\omega)$  sur cet axe. On peut également se restreindre à un segment de longueur  $\pi/\Delta t$  car les fonctions impliquées ont cette périodicité (d'après  $\delta(\omega + \pi/\Delta t) = \delta(\omega)$  et  $r(2(\omega + \pi/\Delta t)) = r(2\omega)$ ).

Tout d'abord si  $\lim_{\Im(\omega) \rightarrow 0} |r(\omega)|$  est strictement plus petit que 1 et  $\cos(\omega\Delta t) \neq 1$  ou bien  $\lim_{\Im(\omega) \rightarrow 0} |r(\omega + \pi/\Delta t)| < 1$  et  $\cos(\omega\Delta t) \neq -1$  les inégalités ci-dessus montrent que  $|F(\omega)| < 2$  car l'une des inégalités utilisées est stricte. La fonction  $\tilde{\delta}(\omega)$  ne peut s'annuler pour de tels  $\omega$ ,  $\lim_{\Im(\omega) \rightarrow 0} |r^{-1}(2\omega)|$  étant toujours plus grand ou égal à 2.

Maintenant si  $\lim_{\Im(\omega) \rightarrow 0^+} r(\omega) = e^{i\phi}$  et  $\lim_{\Im(\omega) \rightarrow 0^+} r(\omega + \pi/\Delta t) = e^{i\phi^*}$ , un calcul élémentaire montre que

$$|F(\omega)|^2 = 2(1 + \cos^2(\omega\Delta t)) + 2(1 - \cos^2(\omega\Delta t)) \cos(2(\Phi - \Phi^*))$$

et  $|F(\omega)|$  ne peut valoir 2 que si

$$\begin{aligned} 1 \quad & \cos^2(\omega\Delta t) = 1 \\ 2 \quad & 2\Phi = 2\Phi^* + 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \Phi = \Phi^* + 2\pi\mathbb{Z}, \quad \Phi = \Phi^* + \pi + 2\pi\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Il ne reste donc que les deux seules possibilités décrites ci-dessus pour obtenir un éventuel zéro de  $\tilde{\delta}$ .

Éliminons le deuxième cas: si  $\cos(\Phi) = \cos(\Phi^*)$  nécessairement  $\cos(\omega\Delta t)$  est nul et la fonction  $|F(\omega = \pi/2\Delta t)|$  est bien égale à 2 mais c'est  $|r^{-1}(2\omega = \pi/\Delta t)|$  qui est strictement plus grand que 1 et qui empêche l'annulation de  $\tilde{\delta}$ . Le cas  $\cos(\Phi) = -\cos(\Phi^*)$  s'avère impossible au vue de

$$\begin{aligned} \cos(\Phi) &= 1 - \frac{h^2}{\Delta t^2}(1 - \cos(\omega\Delta t)) \\ \cos(\Phi^*) &= 1 - \frac{h^2}{\Delta t^2}(1 + \cos(\omega\Delta t)) \end{aligned}$$

Finalement le seul zéro de  $\tilde{\delta}(\omega)$  dans  $]-\frac{\pi}{2\Delta t}, \frac{\pi}{2\Delta t}[$  est  $\omega = 0$ . On remarque que cette valeur de  $\omega$  annule également  $r(2\omega) - 1/r(2\omega)$ . En travaillant sur les développements de Taylor, on obtient que

$$\begin{aligned} (2.30) \quad r(2\omega) - r^{-1}(2\omega) &= 4i\frac{h}{\Delta t} \sin(\omega\Delta t) + O(\sin(\omega\Delta t)^2) \\ (1 + \cos(\omega\Delta t))r^2(\omega) &= 2(1 + 2i\sin(\omega\Delta t)\frac{h}{\Delta t}) + O(\sin(\omega\Delta t)^2) \\ (1 - \cos(\omega\Delta t))r^2(\omega + \frac{\pi}{\Delta t}) &= O(\sin(\omega\Delta t)^2) \\ r^{-1}(2\omega) &= 1 - 2i\frac{h}{\Delta t} \sin(\omega\Delta t) + O(\sin(\omega\Delta t)^2) \end{aligned}$$

Et on a,

$$\begin{aligned} (2.31) \quad \text{si } G(\omega) &= \left( r(2\omega\Delta t) - r(2\omega\Delta t)^{-1} \right) \frac{1}{\delta(\omega)} \\ G(\omega) &= -\frac{1}{2} + O(\sin(\omega\Delta t)) \end{aligned}$$

La fonction  $G(\omega)$  est d'après ce qui précède analytique sur  $\Im(\omega) > 0$  continue (puisque  $\delta(\omega)$  ne possède que 0 pour zéro dans le demi-plan  $\Im(\omega) \geq 0$ ) et continue sur  $\Im(\omega) \geq 0$  (d'après (2.31)). Comme elle est bornée à l'infini

$$\begin{aligned} \delta(\omega) &\sim 2r^{-1}(2\omega), \quad \Im(\omega) \rightarrow \infty \\ \Rightarrow G(\omega) &\sim -\frac{1}{2}, \quad \Im(\omega) \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

on en déduit qu'elle est uniformément bornée sur  $\Im(\omega) \geq 0$ . Ce qui établit le résultat recherché.

## 2.1.5 Réinterprétation en terme d'ondes planes

Nous allons, dans cette partie donner une signification aux coefficients  $R$ ,  $T$  et  $T_p$  que nous venons de calculer.

Nous pouvons reprendre les calculs de la section 2.1 pour ré-interpréter la solution comme superposition d'ondes: une onde incidente dans la grille grossière donnant naissance à une onde réfléchi et des ondes transmises dans la grille fine.

Supposons que la condition initiale soit éloignée de l'interface entre les deux grilles. On a vu que le champ incident au voisinage de l'interface s'écrivait

$$(2.32) \quad (u_{inc})_{2j}^{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2\Delta t}}^{+\frac{\pi}{2\Delta t}} (\hat{u}_{inc})_0(\omega) r(2\omega + i0^+)^j e^{-2i\omega k \Delta t} d\omega,$$

cette expression étant valable au moins au delà du support des conditions initiales en temps.

A ce champ, se rajoute dans la grille grossière un champ réfléchi dont l'expression est

$$(2.33) \quad (\tilde{u}_g)_{2j}^{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2\Delta t}}^{+\frac{\pi}{2\Delta t}} (\hat{u}_{inc})_0(\omega) R(\omega + i0^+) r(2\omega + i0^+)^{-j} e^{-2i\omega k \Delta t} d\omega.$$

Enfin, l'onde incidente génère dans la grille fine le champ

$$(2.34) \quad (u_f)_j^k = (\tilde{u}_f)_j^k + (\check{u}_f)_j^k,$$

avec

$$(2.35) \quad \begin{aligned} (\tilde{u}_f)_j^k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2\Delta t}}^{+\frac{\pi}{2\Delta t}} (\hat{u}_{inc})_0(\omega) T(\omega + i0^+) r(\omega + i0^+)^j e^{-i\omega k \Delta t} d\omega \\ (\check{u}_f)_j^k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2\Delta t}}^{+\frac{\pi}{2\Delta t}} (\hat{u}_{inc})_0(\omega) T_p(\omega + i0^+) r(\omega + i0^+ + \frac{\pi}{\Delta t})^j e^{-i\omega k \Delta t} d\omega. \end{aligned}$$

Dans toutes ces formules, les notations sont celles de la section précédente: la fonction  $r(\omega + i0^+)$  est définie par (2.13) et passage à la limite ou, plus explicitement par les formules (2.16), tandis que les coefficients  $R$ ,  $T$  et  $T_p$  sont solutions du système (2.22) et sont donnés par (2.25). Dans la suite, on omet  $+i0^+$  pour alléger l'écriture.

Rappelons que  $k_h(\omega)$  le nombre d'onde numérique, est lié à  $r(\omega)$  par la relation

$$(2.36) \quad r(\omega) = e^{ik_h(\omega)h}.$$

Un calcul simple montre que l'on a

$$(2.37) \quad \sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) = \frac{\Delta t}{h} \sin\left(\frac{k_h(\omega)h}{2}\right),$$

relation, classiquement appelée relation de dispersion.

Ces nouvelles définitions permettent d'expliciter la solution sous forme d'une superposition d'ondes planes numériques. Plus précisément, fixons  $\omega$  et posons

$$(2.38) \quad \begin{aligned} (U_g)_{2j}^{2k} &= \left( e^{ik_h(2\omega)jh} + R(\omega) e^{-ik_h(2\omega)jh} \right) e^{-i\omega 2k \Delta t} \\ (U_f)_j^k &= T(\omega) e^{i(k_h(\omega)jh - \omega k \Delta t)} + T_p(\omega) e^{i(k_h(\omega + \frac{\pi}{\Delta t})jh - (\omega + \frac{\pi}{\Delta t})k \Delta t)} \end{aligned}$$

On vérifie que  $(U_g, U_f)$  est une solution particulière du schéma. Elle est représentée de manière schématique sur la figure 2.12. La partie gauche,  $U_g$ , est composée d'une onde plane numérique incidente et d'une onde plane numérique réfléchie tandis que la partie droite est composée de deux ondes planes transmises, l'une associée à la fréquence  $\omega$ , l'autre à la fréquence  $\omega + \frac{\pi}{\Delta t}$ . Dans ce contexte, les nombres  $R$ ,  $T$  et  $T_p$  s'interprètent comme les coefficients de réflexion et de transmission. À partir de cette famille de solutions, on peut recomposer la solution générale par superposition

$$(u_g)_{2j}^{2k} = \int_{-\frac{\pi}{2\Delta t}}^{+\frac{\pi}{2\Delta t}} (\hat{u}_{inc})_0(\omega)(U_g)_{2j}^{2k} d\omega, \quad (u_f)_j^k = \int_{-\frac{\pi}{2\Delta t}}^{+\frac{\pi}{2\Delta t}} (\hat{u}_{inc})_0(\omega)(U_f)_j^k d\omega,$$

Sur ces formules, on voit que la solution numérique diffère de celle du cas continu par différents aspects. Tout d'abord il existe toujours un effet de dispersion: le nombre d'onde numérique diffère de  $\omega$  par un terme qui, sauf dans le cas du schéma aux caractéristiques, est d'ordre 2 (i.e.  $k_h(\omega) = \omega + O(\omega^2 h^2)$ ). Ensuite, la présence de l'interface génère une onde réfléchie et deux ondes transmises au lieu d'une unique onde transmise dans le cas continu (pour lequel l'interface n'existe pas). Chacune de ces ondes est caractérisée par son coefficient. La mesure de cet effet est donc liée à l'étude de ces coefficients. En particulier, nous verrons dans l'analyse de précision que l'on peut évaluer l'ordre de l'approximation en regardant les développements de Taylor des coefficients au voisinage de  $\omega\Delta t = 0$ .

Nous allons maintenant compléter notre étude du schéma 1/2 en nous intéressant à une onde incidente dans la grille fine. En effet, à l'aide de ces deux cas, on pourra alors comprendre ce qui se passe dans le cas d'une bande raffinée.

### 2.1.6 Cas d'une onde incidente dans la grille fine : une étude analytique

On considère ici le cas où l'onde incidente est dans la grille fine c'est-à-dire à droite dans l'exemple choisi. Nous allons ici nous contenter d'effectuer le calcul des coefficients de réflexion et de transmission. L'analyse de la stabilité est la même que dans le cas où l'onde incidente est dans la grille grossière.

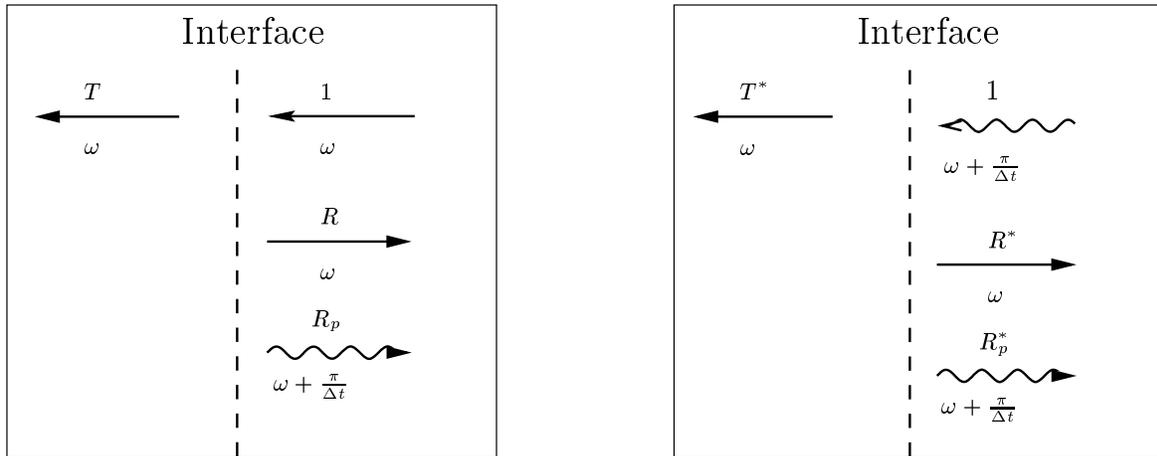


FIG. 2.4 – Schéma représentatif des parties incidentes, réfléchies et transmises à l'interface dans le cas d'une onde incidente dans la grille fine

On doit ici, par analogie avec l'analyse précédente, considérer une onde incidente à deux composantes : une principale et une parasite. Ainsi nous n'avons pas ici 1 coefficient de transmission et 2 de réflexions mais une matrice 2x2 de réflexion donnant l'onde réfléchie (partie principale et partie parasite) et une matrice 2x1 donnant l'onde transmise. Autrement dit une onde incidente 'principale' donne une onde transmise  $t_1^f$  et deux ondes réfléchies (une principale  $R$  et une parasite  $R_p$ ) et de la même façon une onde incidente parasite donne naissance à une onde transmise  $t_2^f$  et deux réfléchies  $R^*$  et  $R_p^*$ . Ces notions d'ondes principale et d'onde parasite n'ont un sens que parce qu'il y a une grille grossière. On pourrait en effet reprocher à cette terminologie l'absurdité de la qualification d'onde parasite incidente, ceci provient simplement de l'analogie faite avec l'analyse faite pour la grille grossière. Nous entendons donc par onde principale une onde dont les fréquences sont discrétisables avec le maillage de la grille grossière et par parasite une onde dont les fréquences sont non discrétisables dans la grille grossière. Ainsi une onde principale a pour fréquence  $\omega\Delta t$  avec  $\omega\Delta t \in [-\pi/2; \pi/2]$ .

Nous définissons alors  $T^f = \begin{pmatrix} t_1^f \\ t_2^f \end{pmatrix}$  et  $R^f = \begin{pmatrix} R & R^* \\ R_p & R_p^* \end{pmatrix}$

Comme l'onde incidente est dans la grille fine on va poser

$$(2.39) \quad (u_f)_j^k = (u_{inc})_j^k + (\tilde{u}_f)_j^k$$

où  $(u_{inc})_j^k$  est l'onde numérique incidente, c'est-à-dire celle qui vérifie le schéma (1.6) pour  $j \in \mathbb{Z}$  avec les mêmes conditions initiales que  $(u_f)$  en  $k = 0$  et  $k = 1$ . On suppose de plus, pour simplifier, que la condition initiale est à plus d'une maille de l'interface. Comme l'on distingue deux ondes incidentes (principale et parasite) on pourrait poser (avec  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels quelconques)

$$(2.40) \quad \hat{U}_j^{inc} = \alpha r(\omega)^{-j} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta r(\omega + \frac{\pi}{\Delta t})^{-j} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Nous allons en fait résoudre le problème en deux temps, c'est à dire calculer les coefficients de réflexion et transmission pour chaque composante de l'onde incidente. Des calculs analogues à ceux de la partie précédente nous conduisent alors à la recherche de solution sous la forme

$$(2.41) \quad \begin{cases} \hat{U}_j^{inc} = r(\omega)^{-j} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ (\hat{U}_f)_j = R r(\omega)^j \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + R_p r(\omega + \frac{\pi}{\Delta t})^j \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ (\hat{u}_g)_{2j} = t_1^f r(2\omega)^{-j} \end{cases}$$

avec

$$(2.42) \quad (\hat{U}_f)_j = \begin{bmatrix} (\hat{u}_f)_j^P \\ (\hat{u}_f)_j^I \end{bmatrix} \quad \hat{U}_j^{inc} = \begin{bmatrix} (\hat{u}_{inc})_j^P \\ (\hat{u}_{inc})_j^I \end{bmatrix},$$

où les définitions de  $(\hat{u}_f)_j^I$ ,  $(\hat{u}_f)_j^P$ ,  $(\hat{u}_{inc})_j^I$  et  $(\hat{u}_{inc})_j^P$  sont calquées sur celles de la section 2.1.1

c'est à dire

$$(2.43) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\hat{u}_g)_{2j}(\omega) = 2\Delta t \sum_{k=0}^{\infty} (u_g)_{2j}^{2k} e^{i\omega 2k \Delta t} \\ (\hat{u}_{inc})_j^P(\omega) = 2\Delta t \sum_{k=0}^{\infty} u_j^{2k} e^{i\omega 2k \Delta t} \\ (\hat{u}_{inc})_j^I(\omega) = 2\Delta t \sum_{k=0}^{\infty} u_j^{2k+1} e^{i\omega(2k+1)\Delta t} \\ (\hat{u}_f)_j^P(\omega) = 2\Delta t \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{u}_f)_j^{2k} e^{i\omega 2k \Delta t} \\ (\hat{u}_f)_j^I(\omega) = 2\Delta t \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{u}_f)_j^{2k+1} e^{i\omega(2k+1)\Delta t} \end{array} \right.$$

En intégrant ses formules, dans les conditions aux interfaces on trouve

$$(2.44) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\hat{u}_f)_0^P + (\hat{u}_{inc})_0^P = (\hat{u}_g)_0 \\ (\hat{u}_f)_0^I + (\hat{u}_{inc})_0^I = (\hat{u}_g)_0 \cos(\omega \Delta t) \\ (\hat{u}_f)_2^P + (\hat{u}_{inc})_2^P = (\hat{u}_g)_2 \end{array} \right.$$

Ce qui permet d'écrire le système donnant  $R$ ,  $R_p$  et  $t_1^f$

$$(2.45) \quad \left\{ \begin{array}{l} R + R_p - t_1^f = -1 \\ R - R_p - \cos(\omega \Delta t) t_1^f = -1 \\ r^2(\omega) R + r^2(\omega + \frac{\pi}{\Delta t}) R_p - r^{-1}(2\omega) t_1^f = -r^{-2}(\omega) \end{array} \right.$$

En posant

$$(2.46) \quad \delta(\omega) = \frac{1 + \cos(\omega \Delta t)}{2} r(\omega)^2 + \frac{1 - \cos(\omega \Delta t)}{2} r(\omega + \frac{\pi}{\Delta t})^2 - r(2\omega)^{-1},$$

On trouve alors les coefficients  $R$ ,  $R_p$  et  $t_1^f$

$$(2.47) \quad \left\{ \begin{array}{l} t_1^f = \frac{r(\omega)^2 - r(\omega)^{-2}}{\delta(\omega)} \\ R = -1 + \frac{1 + \cos(\omega \Delta t)}{2} t_1^f \\ R_p = \frac{1 - \cos(\omega \Delta t)}{2} t_1^f \end{array} \right.$$

Remarquons que  $\delta(\omega)$ , le déterminant du système, est le même que pour une onde incidente dans la grille grossière.

De la même façon en résolvant le système pour l'autre composante de l'onde incidente, c'est à dire en recherchant les solutions de la forme

$$(2.48) \quad \begin{cases} \hat{U}_j^{inc} = r(\omega + \frac{\pi}{\Delta t})^{-j} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ (\hat{U}_f)_j = R^* r(\omega)^j \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + R_p^* r(\omega + \frac{\pi}{\Delta t})^j \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ (\hat{u}_g)_{2j} = t_2^f r(2\omega)^{-j} \end{cases}$$

En intégrant ses formules dans les conditions aux interfaces, on peut écrire le système donnant  $R^*$ ,  $R_p^*$  et  $t_2^f$

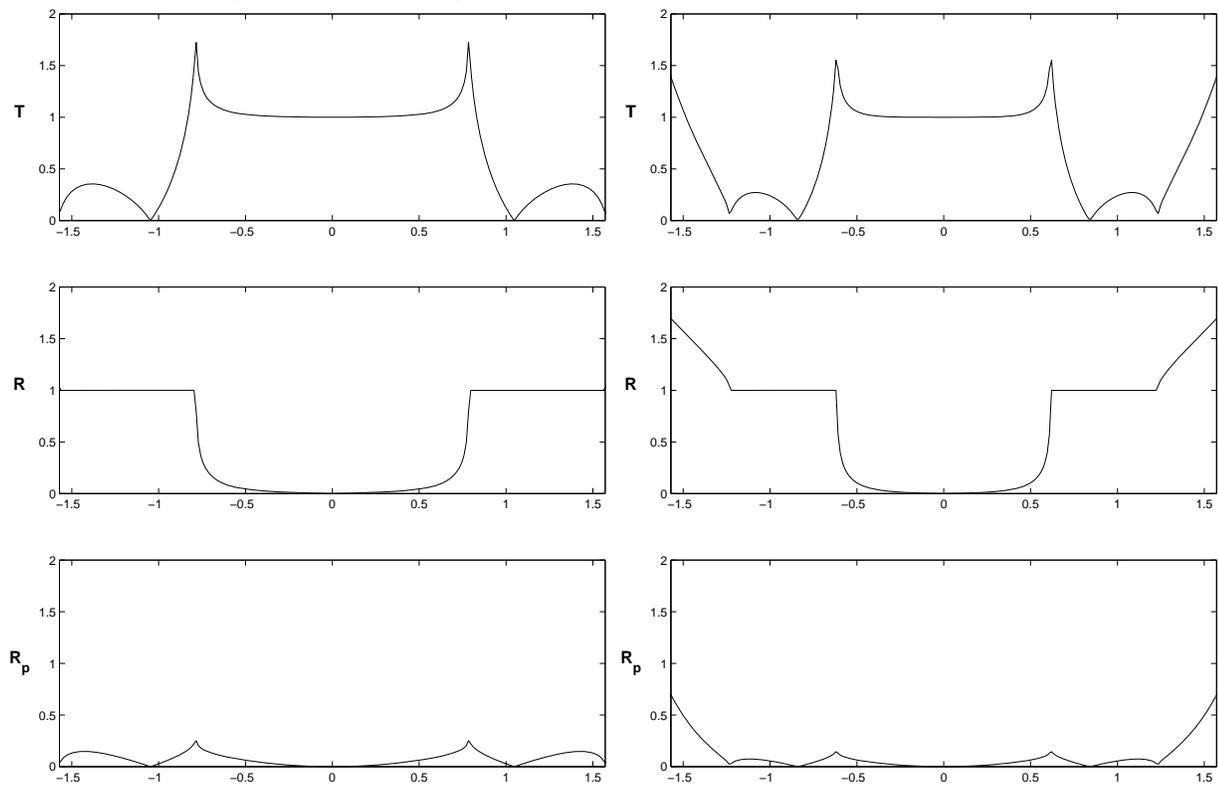
$$(2.49) \quad \begin{cases} R + R_p - t_2^f = -1 \\ R - R_p - \cos(\omega\Delta t)t_2^f = +1 \\ r^2(\omega)R + r^2(\omega + \frac{\pi}{\Delta t})R_p - r^{-1}(2\omega)t_2^f = -r^{-2}(\omega + \frac{\pi}{\Delta t}) \end{cases}$$

Le déterminant  $\delta(\omega)$  de ce système est le même que précédemment. On trouve alors les coefficients  $R^*$ ,  $R_p^*$  et  $t_2^f$

$$(2.50) \quad \begin{cases} t_2^f = \frac{(r(\omega + \frac{\pi}{\Delta t})^2 - r(\omega + \frac{\pi}{\Delta t})^{-2})}{\delta(\omega)} \\ R^* = \frac{1 + \cos(\omega\Delta t)}{2} t_2^f \\ R_p^* = -1 + \frac{1 - \cos(\omega\Delta t)}{2} t_2^f \end{cases}$$

On présente figure 2.5 les coefficients calculés dans le premier cas. On constate que ces coefficients sont bornés pour  $\omega\Delta t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Il y a donc stabilité. Toutefois, le coefficient de réflexion n'est plus inférieur à 1 ce qui risque de poser des problèmes dans le cas de réflexions multiples.

FIG. 2.5 – Coefficients de réflexion-transmission pour une onde incidente dans la grille fine. En abscisse la pulsation adimensionnée ( $\omega\Delta t = 2\pi/N$  où  $N$  est le nombre de points par période), de haut en bas, le coefficient de transmission, la réflexion et la réflexion parasite, à gauche  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , à droite  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .



## 2.2 Étude de Précision

Une fois la stabilité assurée, on s'intéresse ici à la précision de la méthode, le schéma à l'intérieur de chaque grille étant d'ordre 2 et le raccord à l'interface l'étant aussi, on pourrait s'attendre à ce que le schéma global le soit également, nous voyons dans cette section qu'une analyse plus fine est nécessaire pour calculer l'ordre du schéma.

### 2.2.1 Calcul par développements limités de l'erreur de troncature

#### 2.2.1.1 Erreur de troncature sur l'approximation du schéma

En utilisant le développement en série de Taylor de  $u$ , on voit aisément que le schéma de discrétisation de l'équation des ondes sur chacune des deux grilles est centré et donc d'ordre 2 en espace et en temps: on a

$$\begin{aligned} u(x + \Delta x, t) &= u(x, t) + \Delta x \frac{\partial u}{\Delta x}(x, t) + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\Delta x^2}(x, t) + \frac{\Delta x^3}{3} \frac{\partial^3 u}{\Delta x^3}(x, t) + O(\Delta x^4) \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\Delta x^2}(x, t) &= \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2), \end{aligned}$$

et une formule analogue pour l'approximation de la dérivée seconde en temps.

#### 2.2.1.2 Erreur de troncature sur la continuité de $u$

L'interpolation temporelle utilisée à l'interface est elle aussi d'ordre 2. En effet, on a remplacé  $u_g(0, 2k + 1)$  par  $0.5(u_g(0, 2k) + u_g(0, 2k + 2))$ . Or,

$$\begin{aligned} u_g(0, 2k + 2) &= u_g(0, 2k + 1) + \Delta t \frac{\partial u_g}{\Delta t}(0, 2k + 1) + O(\Delta t^2) \\ u_g(0, 2k) &= u_g(0, 2k + 1) - \Delta t \frac{\partial u_g}{\Delta t}(0, 2k + 1) + O(\Delta t^2) \\ \Rightarrow \frac{u_g(0, 2k) + u_g(0, 2k + 2)}{2} &= u_g(0, 2k + 1) + O(\Delta t^2). \end{aligned}$$

Toutes les formules étant centrées, il est légitime d'espérer un schéma d'ordre 2. On va montrer sur des expériences numériques puis sur un calcul théorique de coefficient de réflexion que cette attente est vaine: la méthode est d'ordre 1. Il aurait sans doute fallu assurer la continuité de  $\frac{du}{dx}$  pour obtenir un schéma global d'ordre 2.

#### 2.2.1.3 Ré-interprétation du schéma: Approximation du Dirac

En fait, on constate que modulo un changement de notation évident, l'équation d'interface (1.9) se réécrit

$$\frac{u_1^{2k+2} - 2u_1^{2k+1} + u_1^{2k}}{\Delta t^2} - \frac{u_2^{2k+1} - 2u_1^{2k+1} + u_0^{2k+1}}{h^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta t}{h} \right)^2 \frac{u_0^{2k+2} - 2u_0^{2k+1} + u_0^{2k}}{\Delta t^2} = 0.$$

On reconnaît l'approximation de l'équation des ondes à l'ordre 2 dans les deux premiers termes avec un terme supplémentaire  $\frac{1}{2} \left( \frac{\Delta t}{h} \right)^2 \frac{u_0^{2k+2} - 2u_0^{2k+1} + u_0^{2k}}{\Delta t^2}$ . Ce terme correctif étant supporté par un seul noeud ( $j = 0$ ) peut être vu comme équivalent au terme  $\frac{h}{2} \left( \frac{\Delta t}{h} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta(x)$ .

Le schéma apparaît alors comme une approximation à l'ordre 2 de "l'équation modifiée"

$$(2.51) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h}{2} \alpha^2 \delta(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

qui est une approximation d'ordre 1 (terme en  $\frac{h}{2}$ ) de l'équation des ondes initiales.

**Remarque 3** *On a ici un phénomène analogue à celui du schéma de Dufort-Frankel pour l'équation de la chaleur [9].*

Toutefois, cette erreur d'ordre 1, due au changement de grille, et qui n'augmente pas avec le nombre de longueurs d'ondes parcourues, s'avère de fait moins gênante que l'erreur de dispersion inhérente à chaque grille. C'est ce que nous montrons dans les expériences qui suivent

### 2.2.2 Expériences numériques

Dans cette section nous cherchons à mesurer numériquement l'ordre du schéma. Un programme utilisant le schéma a été mis en oeuvre et validé. On simule la propagation d'une onde sur un segment de longueur fixée. Le schéma est complété aux extrémités par des conditions absorbantes, soient une version discrétisée de

$$(2.52) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial n} = 0,$$

où  $n$  est la normale extérieure au milieu, ( $x$  à droite et  $-x$  à gauche).

Dans l'expérience que nous simulons ici, la vitesse initiale est nulle et l'onde est générée par la valeur du champ à l'instant  $t = 0$ . On a construit cette condition initiale à l'aide de la fonction dite de Harris (cf. [14]) dont l'expression est

$$(2.53) \quad H(x) = \begin{cases} A_0 - A_1 \cos(2\pi x) + A_2 \cos(4\pi x) - A_3 \cos(6\pi x) & \text{pour } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Avec  $A_0 = 0.35875$   $A_1 = 0.48829$   $A_2 = 0.14128$   $A_3 = 0.01168$

La figure 2.6 montre les variations de la fonction de Harris ainsi que celles de son spectre. On voit que les fréquences supérieures à  $F_c = 3.25$  peuvent être considérées comme quasiment inexistantes (amplitude inférieure à 1%).  $F_c$  est appelée la fréquence de coupure du signal. On a donc construit une fonction à support compact et à spectre quasiment compact.

En fait nous allons utiliser cette fonction translatée et dilatée; nous considérerons comme condition initiale la fonction  $u_o$  centrée en  $x_0$  et de support de taille  $L$

$$(2.54) \quad u_o(x) = H\left(\frac{x - x_0}{L}\right),$$

et dont la transformée de Fourier est donnée par

$$(2.55) \quad \hat{u}_0(k) = L e^{2i\pi k x_0} \hat{H}(Lk).$$

La fréquence de coupure de  $u$  est donc  $F = F_c/L$ . Comme la longueur d'onde  $\Lambda$  est reliée à la fréquence via  $\frac{2\pi}{F}$ , la relation entre  $N_\Lambda$  le nombre de points par longueur d'onde de coupure et  $h$  le pas de discrétisation en espace sera

$$(2.56) \quad N_\Lambda = \frac{L}{F_c h}.$$

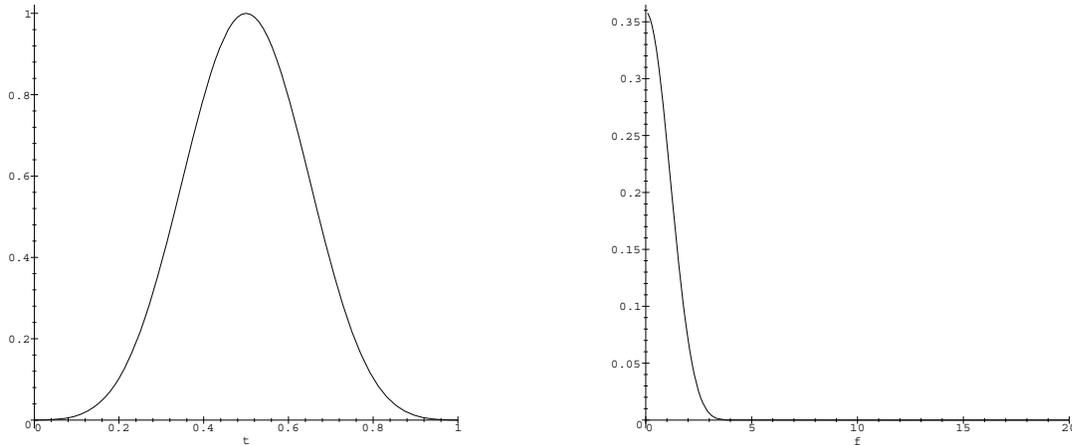


FIG. 2.6 – *Fonction de Harris (à gauche) et sa transformée de Fourier (à droite)*

Dans les expériences présentées, on prend  $L=15$ ; ce qui donne  $N_\Lambda \approx 20$  pour une grille de pas de discrétisation de 0.25. Le point  $x_0$  est localisé à 25 unités de l'interface grille grossière-grille fine. Enfin, on choisit arbitrairement un pas de temps tel que

$$(2.57) \quad \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Rappelons que la solution du problème continu est constituée de deux ondes s'éloignant l'une de l'autre, de même forme que la condition initiale mais d'amplitude moitié. C'est bien ce que l'on observe sur la figure 2.7 où quatre instantanés de la simulation pour une expérience à 20 points de grille grossière par longueur d'onde sont représentées. Du point de vue qualitatif, on remarque que l'interface, matérialisée par une ligne pointillée n'a qu'une influence très peu visible sur l'onde transmise. À vue d'oeil, le champ apparaît bien symétrique et la réflexion à l'interface est quasiment imperceptible. De plus, lorsque l'on poursuit les itérations en temps, on n'observe aucune explosion de la solution: le schéma semble stable.

Afin de tester l'ordre du schéma, on réalise cette même expérience pour des maillages de plus en plus fins, tout en respectant le rapport des pas de 2 entre la grille grossière et la grille fine. Pour effectuer une analyse quantitative des résultats, on retient le dernier instantané de la solution et on subdivise l'espace en trois parties comme montré sur la figure 2.8.

Dans la première partie, l'onde n'a pas traversé l'interface et la restriction de la solution correspond alors à la propagation classique d'une onde calculée avec le schéma sur la grille grossière. Dans la deuxième partie se trouve l'onde réfléchi par l'interface grille fine-grille grossière. Enfin, la troisième partie correspond à l'onde transmise qui se propage dans la grille fine. Ces différentes zones vont nous aider à distinguer les erreurs de réflexion, de transmission et de dispersion et à analyser l'ordre de chacune d'elles.

La figure 2.10 visualise les différences obtenues entre 2 raffinements successifs: de bas en haut, on part d'un pas de 1 dans la grille grossière (donc 0.5 dans la grille fine) et on divise ces pas par 2 puis 4, 8 et 16. Le nombre de points par longueur d'ondes de coupure passe

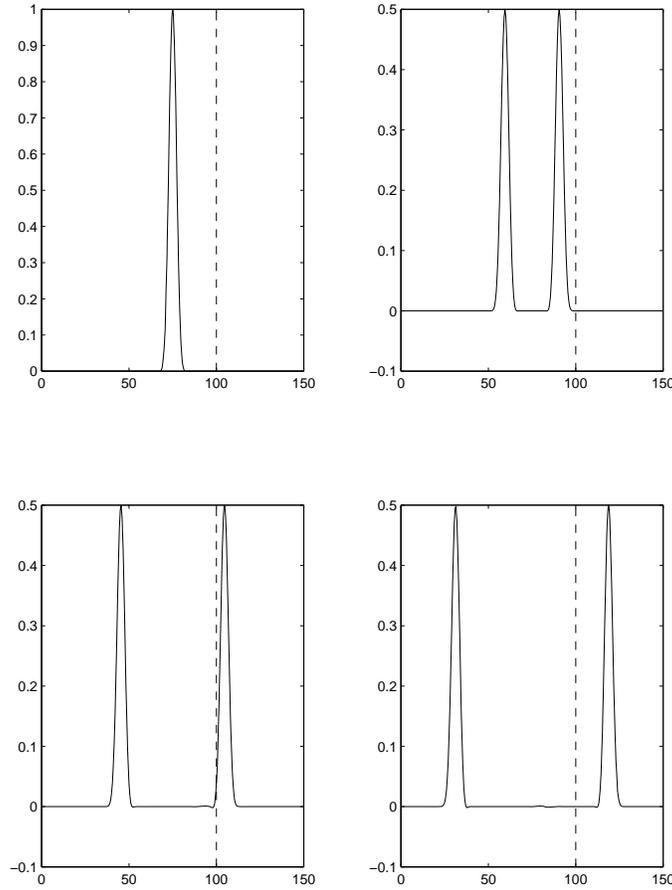


FIG. 2.7 – Solution numérique correspondant à  $\Delta x = 0.25$  à quatre instants distincts ( $t = 0, 20/\sqrt{2}, 40/\sqrt{2}, 60/\sqrt{2}$ ). L'abscisse de chaque courbe est  $x$ , l'interface entre grille fine et grille grossière est représentée par un trait pointillé et vertical.

donc de 5 à 80 dans la grille grossière et de 10 à 160 dans la grille fine. Le maillage le plus fin est 16 fois plus fin que le maillage original. Si l'on raffine plus, les erreurs numériques dues à la machine ne sont plus négligeables. On commence effectivement à remarquer sur la dernière ligne de la figure les hautes fréquences, caractéristiques de l'erreur machine.

Dans la suite nous noterons  $h^{(i)} = \frac{h^{(0)}}{2^i}$  pour  $i = 0, \dots, 4$ , le pas de discrétisation de la  $i$ ème expérience,  $u_h^{(i)}$  la solution de cette expérience et  $\delta^i = u_h^{(i-1)} - u_h^{(i)}$ .

Rappelons qu'un schéma est dit d'ordre  $p$  si la solution numérique pour un pas  $h$  s'écrit

$$u_h = u + h^p e_h, \quad |e_h(x)| < C$$

où  $u$  est la solution exacte et  $C$  une constante indépendante de  $h$ . Dans notre cas, on écrit

$$\delta^i = |u_h^{(i-1)} - u_h^{(i)}| = |(2h^{(i)})^p e_h^{(i-1)}(x) - (h^{(i)})^p e_h^{(i)}(x)| < (2^p + 1)C(h^{(i)})^p.$$

Si notre schéma est d'ordre  $p$ , on aura les différences entre 2 raffinements successifs divisées par  $2^p$ , c'est à dire si  $\frac{\delta^i}{\delta^{i+1}} = 2^p$

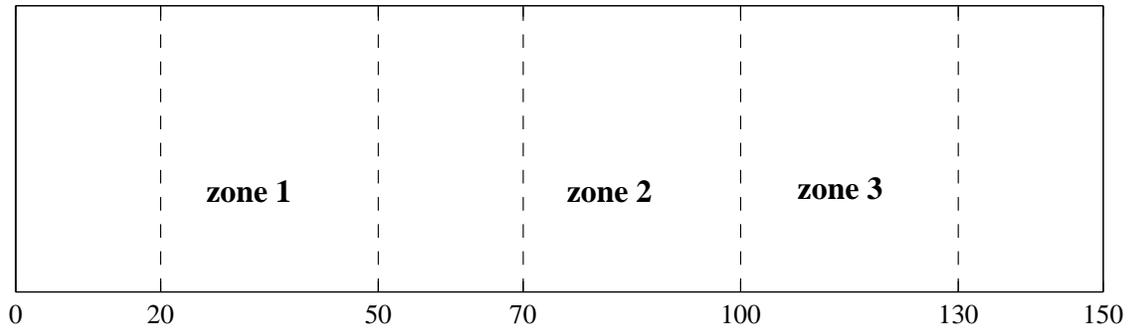


FIG. 2.8 – définition des zones d'intérêt

La colonne de gauche montre l'erreur  $\delta^i$  dans la zone 1, c'est à dire celle qui correspond à la dispersion du schéma classique sans changement de grille; on observe bien une diminution quadratique de l'erreur, celle-ci étant asymptotiquement proportionnelle à l'opposé de la dérivée troisième de l'onde incidente (cf. figure 2.9). On a en effet, cf. annexe A,

$$u_h(jh, n\Delta t) \approx \frac{1}{2} \left( u_o(jh - n\Delta t) - \frac{n\Delta t}{48} h^2 u_o'''(jh + n\Delta t) \right).$$

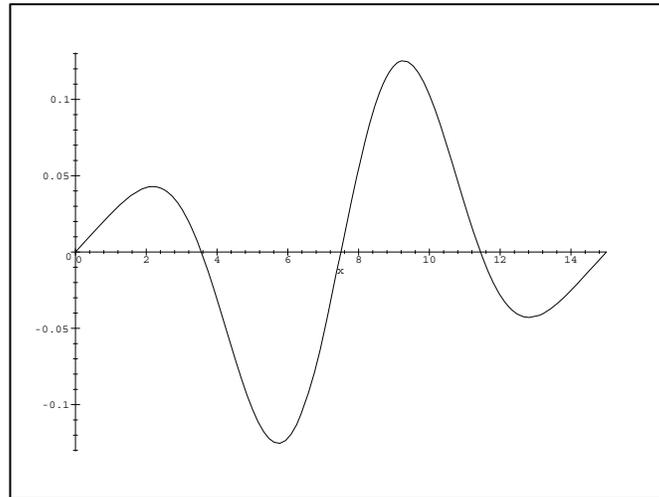


FIG. 2.9 – Dérivée troisième de la fonction de Harris étalée sur une longueur de 15 unités

La colonne du milieu montre l'erreur dans la zone où est localisée la réflexion due au changement de grille (zone 2). L'amplitude de cette réflexion diminue cette fois linéairement. Le schéma est d'ordre 1!. Enfin celle de droite représente l'erreur dans la zone 3 qui cumule erreur de transmission mais également erreur de dispersion. Cette erreur est plus faible que

celle relative à la zone 1 mais est plus difficile à analyser car elle mélange des effets de dispersion et de transmission.

Toutefois, on remarquera que les effets de dispersion (bien que d'ordre 2) sont beaucoup plus importants en valeur absolue que l'erreur due au changement de grille. Les deux effets ne sont comparables que pour l'expérience correspondant aux pas les plus fins. Il est facile d'expliquer ceci en rappelant que l'erreur de dispersion est à peu près proportionnelle au temps de parcours de l'onde, ce qui n'est pas le cas de l'erreur due au changement de grille.

Nous calculons ensuite la norme  $L^2$  en espace sur chacune des zones de la différence entre 2 maillages successifs afin de quantifier la décroissance de l'erreur. On obtient les résultats présentés sur la figure 2.11. La pente moyenne de dispersion est de -2, celle de réflexion de -1.13, tandis que l'erreur sur l'onde transmise de -2.17. Toutefois, il convient de retenir ces chiffres avec précaution car comme nous l'avons vu plus haut, les deux dernières erreurs mélangent l'erreur de dispersion (qui est d'ordre 2) avec l'erreur due au changement de grille. Sur les essais présentés ici, ce n'est qu'à partir de la dernière expérience (80 points par longueur d'onde dans la grille grossière) que ces effets sont de la même grandeur. Pour obtenir l'ordre du schéma, il conviendrait de raffiner encore pour que l'effet de la disparité de grille l'emporte sur l'effet de dispersion (on ne l'a pas fait ici à cause des effets d'erreurs d'arrondi). Toutefois, une des conclusions importantes de ces expériences est que malgré un schéma d'interpolation centré, le coefficient de réflexion n'est pas d'ordre 2. On verra dans une section suivante que ceci est confirmé par l'analyse par ondes planes qui montre une erreur d'ordre 1.

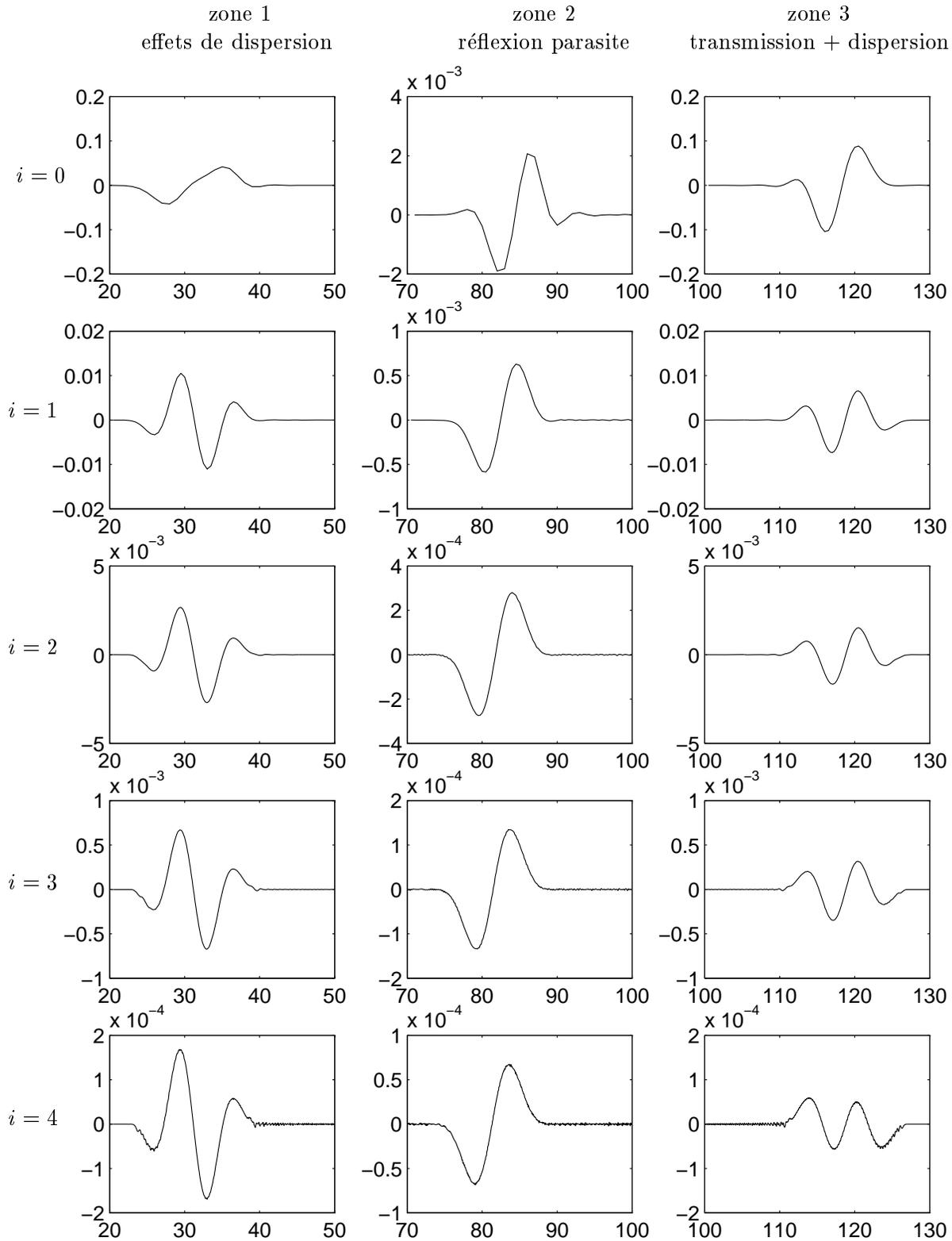


FIG. 2.10 – Tracé des différences entre 2 raffinements successifs

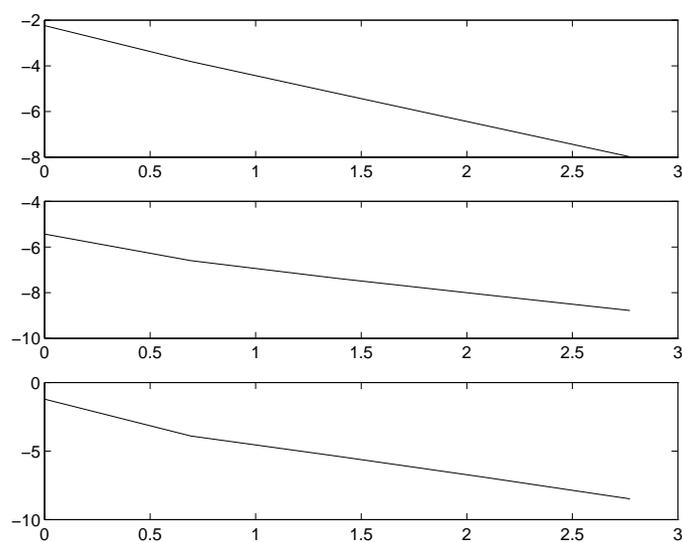


FIG. 2.11 – *Tracé des logarithmes de chaque erreur en fonction du logarithme du raffinement*

### 2.2.3 Analyse des coefficients de réflexion et de transmission

Dans cette section, nous commençons par confirmer que la méthode est d'ordre 1 à travers l'analyse des coefficients de réflexion et de transmission. Puis grâce à quelques expériences numériques nous constatons l'adéquation entre les coefficients de réflexion et de transmission calculés et mesurés.

#### 2.2.3.1 Calcul de précision des coefficients de réflexion et de transmission

Les calculs que nous avons effectués en 2.1.5 nous ont montré qu'une onde incidente de pulsation  $\omega$  dans la grille grossière génère une onde réfléchie de même pulsation dans la grille grossière et deux ondes transmises dans la grille fine, une de pulsation  $\omega\Delta t$  et une autre de pulsation  $\omega\Delta t + \pi$ . Dans le problème continu, la réflexion et la transmission parasite sont nulles tandis que la transmission principale vaut 1. Nous effectuons ici un développement limité au voisinage de  $\omega\Delta t = 0$  afin de vérifier que nous approchons bien le problème continu.

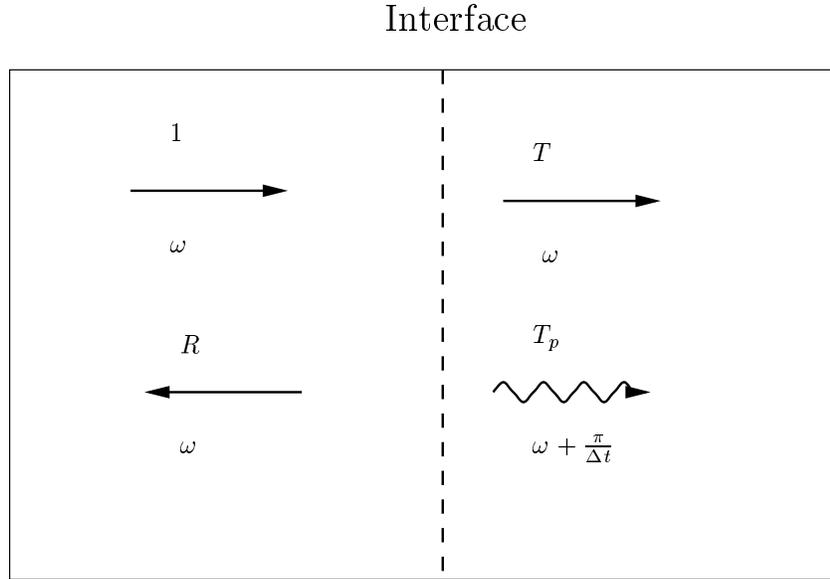


FIG. 2.12 – Schéma représentatif des parties incidente, réfléchie et transmises à l'interface

Prenons  $\Delta t < h$ , soit  $\gamma = \frac{h^2}{\Delta t^2} > 1$ . On effectue un développement limité des coefficients définis par les équations (2.25) autour de  $\omega\Delta t = 0$ , on trouve

$$(2.58) \left\{ \begin{array}{l} T = 1 + \left( \left( 1 - 2\gamma - (1 - 2\gamma) \sqrt{1 - (1 - 2\gamma)^{-2}} \right)^2 - 1 \right) \frac{i\omega\Delta t}{16\sqrt{\gamma}} + O((\omega\Delta t)^2) \\ T_p = \frac{1}{4}(\omega\Delta t)^2 + O((\omega\Delta t)^3) \\ R = \left( \left( 1 - 2\gamma - (1 - 2\gamma) \sqrt{1 - (1 - 2\gamma)^{-2}} \right)^2 - 1 \right) \frac{i\omega\Delta t}{16\sqrt{\gamma}} + O((\omega\Delta t)^2) \end{array} \right.$$

Par exemple dans le cas  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} = \frac{\Delta t}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  (qui est le nombre de Courant maximal utilisé pour un schéma 2D) le développement donne alors :

$$(2.59) \quad \begin{cases} T = 1 + \frac{i(-4 + 3\sqrt{2})\sqrt{2}}{8}\omega\Delta t + O((\omega\Delta t)^2) \\ T_p = \frac{1}{4}(\omega\Delta t)^2 + O((\omega\Delta t)^3) \\ R = \frac{i(-4 + 3\sqrt{2})\sqrt{2}}{8}\omega\Delta t + O((\omega\Delta t)^2) \end{cases}$$

Comme nous l'avons remarqué dans les expériences numériques, malgré des formules d'interpolation centrées, la réflexion et la transmission sont d'ordre 1. On remarquera toutefois que le coefficient devant chaque terme d'ordre 1 est petit lorsque le nombre de Courant n'est pas trop éloigné de 1. Plus exactement, on montre que

$$(2.60) \quad \begin{cases} T = 1 + O(\sqrt{\gamma-1})O(\omega\Delta t) \\ R = O(\sqrt{\gamma-1})O(\omega\Delta t) \end{cases}$$

Sur la figure 2.13, on a représenté le module des coefficients de réflexion-transmission pour les deux nombres de Courant  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  en fonction de  $\omega\Delta t$  sur  $[-\pi, \pi]$ . On retrouve sur ces courbes la période  $\pi$  pour le coefficient de réflexion ainsi que la formule  $T_p(\omega) = T(\omega + \frac{\pi}{\Delta t})$  qui implique que la courbe du coefficient de transmission parasite est simplement traduite de  $\pi$  par rapport à celle du coefficient de transmission physique. D'un point de vue global, la réflexion et la transmission sont toujours plus petites que 1. Tandis qu'au voisinage de  $\omega\Delta t = 0$ , les courbes font apparaître une bonne précision (coefficients de réflexion et d'onde transmise parasite proche de 0 et coefficient de transmission proche de 1) pour les pulsations proches de zéro. Il semble même, au vu de ces figures, que les courbes aient un comportement parabolique au voisinage de  $\omega = 0$ . En fait, il n'en est rien: même si les courbes semblent être d'ordre 2 au voisinage de 0, un zoom (figure 2.14) fait apparaître une portion linéaire synonyme de l'ordre 1.

Pour finir, intéressons nous au cas très particulier du schéma aux caractéristiques pour lequel le paramètre  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} = \frac{\Delta t}{h}$  est égal à 1. Pour ce schéma il n'y a pas de dispersion ( $k_h(\omega) = \omega$ ). Avec les notations de la section précédente, on trouve  $A(\omega) = \cos(\omega\Delta t)$ ,  $r(\omega) = e^{i\omega\Delta t} = r$ ,  $r(\omega + \frac{\pi}{\Delta t}) = -r$  et  $r(2\omega) = r^2$ . On obtient alors

$$(2.61) \quad \delta(\omega) = 2\left(\frac{1}{r^2} - r^2\right)$$

et

$$(2.62) \quad \begin{cases} T = \frac{1 + \cos(\omega\Delta t)}{2} \\ T_p = \frac{1 - \cos(\omega\Delta t)}{2} \\ R = 0 \end{cases}$$

Dans ce cas on a donc une réflexion nulle, la transmission parasite est d'ordre 2 et la transmission vaut 1 à l'ordre 2.

FIG. 2.13 – Coefficients de réflexion-transmission. En abscisse la pulsation adimensionnée ( $\omega\Delta t = 2\pi/N$  où  $N$  est le nombre de points par période), de haut en bas, le coefficient de réflexion, la transmission et la transmission parasite, à gauche  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , à droite  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

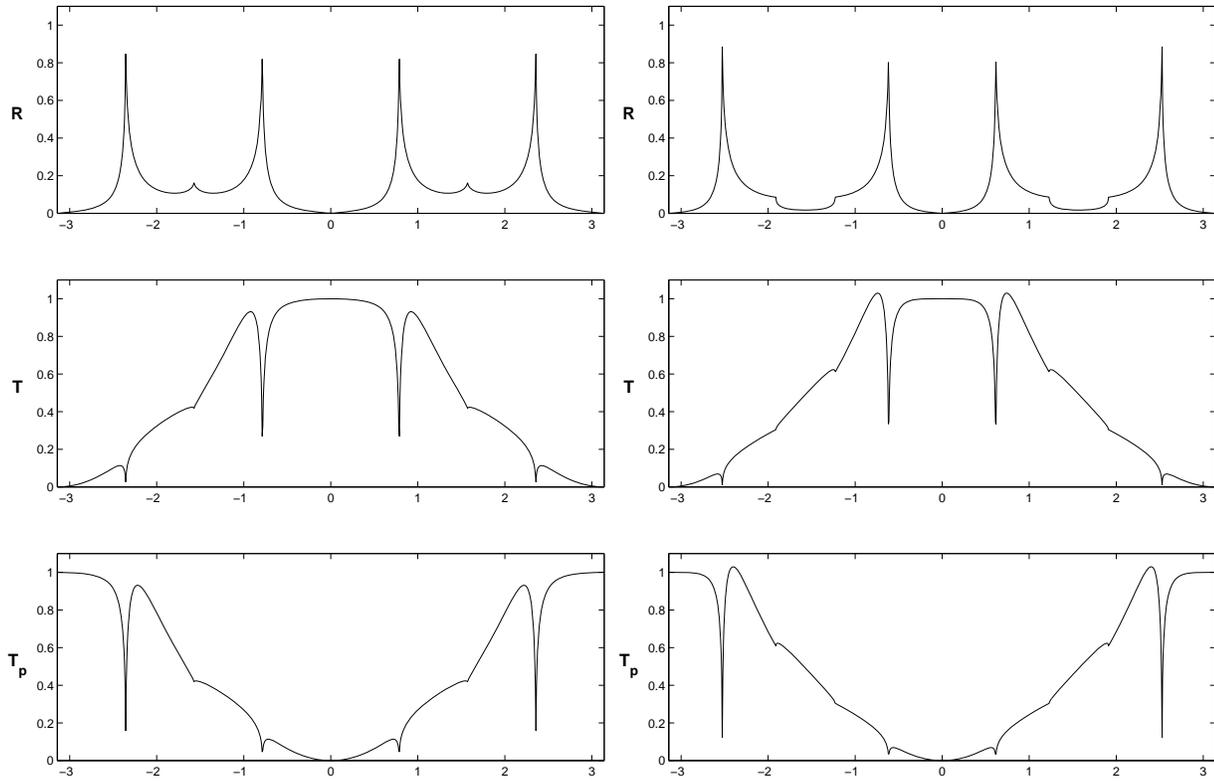
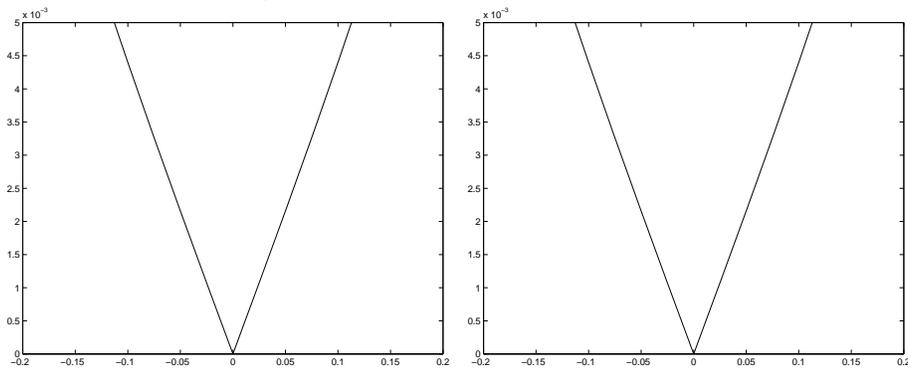


FIG. 2.14 – Zoom du coefficient de réflexion autour de  $\omega\Delta t = 0$  pour des nombres de courants de  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$  (à gauche) et  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$  (à droite).



### 2.2.3.2 Cas d'un train d'ondes dans la grille grossière : une étude numérique de réflexion

Afin de tester la validité des calculs des coefficients, des expériences numériques cherchant à mettre en évidence la réflexion pour différentes pulsation sont effectuées. Nous nous sommes restreint à un nombre de Courant de  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . L'onde plane est approchée par une onde envoyée dans la grille grossière par l'intermédiaire du bord gauche. C'est une fonction harmonique de pulsation  $\omega_0$  supportée par la fonction de Harris de support de longueur  $L = \frac{50}{\sqrt{2}}$  (cf. 2.2.2). On aura donc

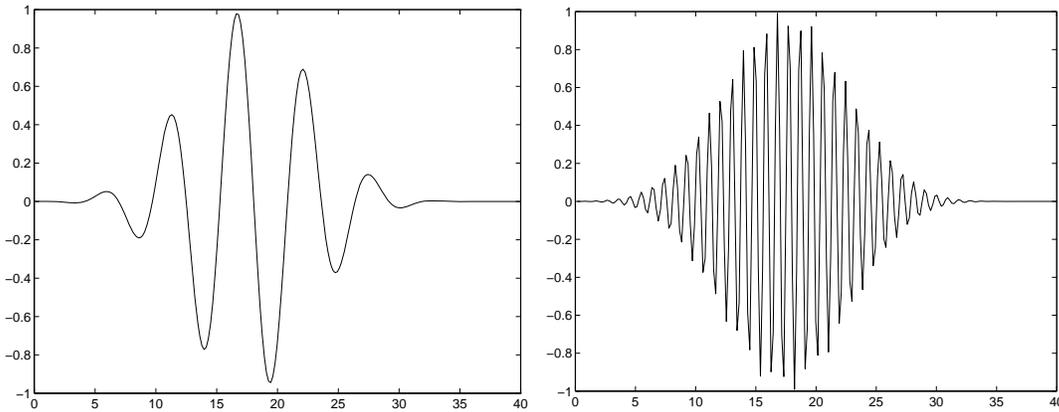
$$u(0, t) = e^{i\omega_0 t} H\left(\frac{t}{L}\right)$$

Cette fonction a son spectre localisé dans une bande étroite autour de  $\omega_0$ . Avec un L suffisamment grand, par exemple  $L = \frac{50}{\sqrt{2}}$ , l'onde incidente a un support fréquentiel essentiellement sur  $[f_0 - \Delta f; f_0 + \Delta f]$  où  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$  et  $\Delta f$  est la fréquence de coupure de H soit  $\Delta f \simeq 0.09$  pour  $L = \frac{50}{\sqrt{2}}$ .

La figure 2.15 représente la partie réelle de cette fonction en fonction du temps pour  $\omega_0 \Delta t = 0.2$ . Le nombre d'oscillations augmentera en même temps que  $\omega_0 \Delta t$

Pour la première expérience, nous tracerons la partie réelle des résultats afin que le lecteur se rende compte du caractère oscillant de l'onde employée. Mais sur les figures suivantes, afin de mieux observer les amplitudes, nous représenterons les modules des ondes résultantes

FIG. 2.15 – Tracé de  $u(0, t)$  pour une pulsation  $\omega_0 \Delta t = 0.2$  et  $\omega_0 \Delta t = \frac{3\pi}{8}$



La première expérience présente les résultats pour une pulsation relativement basse celle-ci correspond à un coefficient de réflexion théorique faible et une onde transmise théorique proche de 1 (cf. figure 2.13). C'est effectivement ce que l'on observe sur la figure 2.16 puisque l'onde ne semble quasiment pas perturbée par l'interface. On peut remarquer que cette pulsation correspond à un nombre de point par longueur d'onde de 20 qui est une valeur généralement utilisée.

Les deuxième et troisième expériences correspondent à des pulsations respectives de  $\frac{3\pi}{8\Delta t}$  et  $\frac{\pi}{2\Delta t} - \frac{0.1}{\Delta t}$  soient des nombres de points par longueur d'onde inférieurs à 4. Rappelons, en effet qu'à  $\omega \Delta t = \frac{\pi}{2}$ , l'onde n'est plus propagative dans la grille fine. Les figures 2.17 et 2.18 nous montrent que malgré des conditions extrêmement défavorables les résultats de réflexion et transmission restent acceptables.

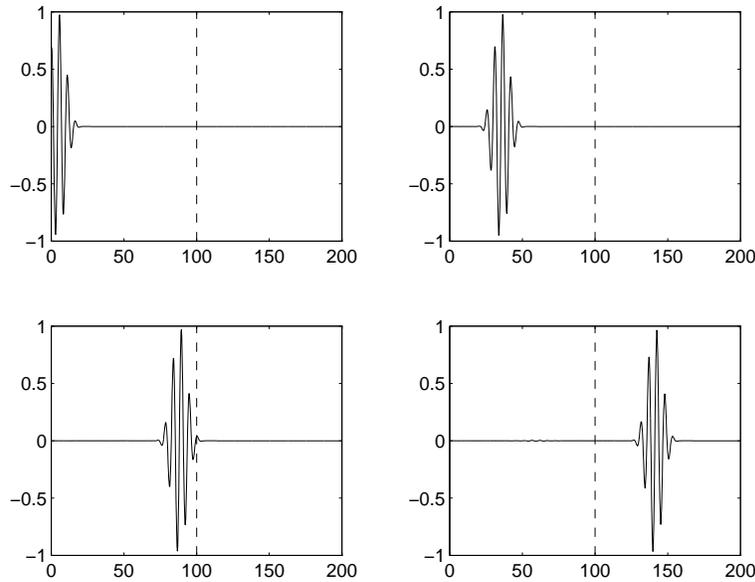


FIG. 2.16 – Solution numérique correspondant à  $\omega_0\Delta t = 0.2$ ,  $\Delta x = 0.25$  à quatre instants distincts ( $t = 18.75/\sqrt{2}$ ,  $75/\sqrt{2}$ ,  $150/\sqrt{2}$ ,  $225/\sqrt{2}$ ). L'abscisse de chaque courbe est  $x$ , l'interface entre grille fine et grille grossière est représentée par un trait pointillé et vertical.

Le tableau ci-dessous montre une bonne corrélation entre les calculs théoriques et les résultats numériques puisqu'il fait apparaître des différences inférieures à 2%.

**Remarque 4** Les coefficients  $T_p$  numériques ne sont pas observables car ils correspondent à des ondes évanescentes

$\omega\Delta t$	$R$ théorique	$R$ numérique	$T$ théorique	$T$ numérique	$T_p$ théorique
0.2	0.0044	0.0044	0.9994	0.9989	0.0025
$\frac{3\pi}{8}$	0.0752	0.0749	0.9443	0.9422	0.0869
$\frac{\pi}{2} - 0.1$	0.2670	0.2627	0.7570	0.7494	0.1123

TAB. 2.1 – Tableau récapitulatif des coefficients numérique et théorique

Ces premiers résultats de réflexion et de transmission sont encourageants puisqu'ils montrent que l'interface n'a qu'une influence limitée sur une onde venant de la grille grossière.

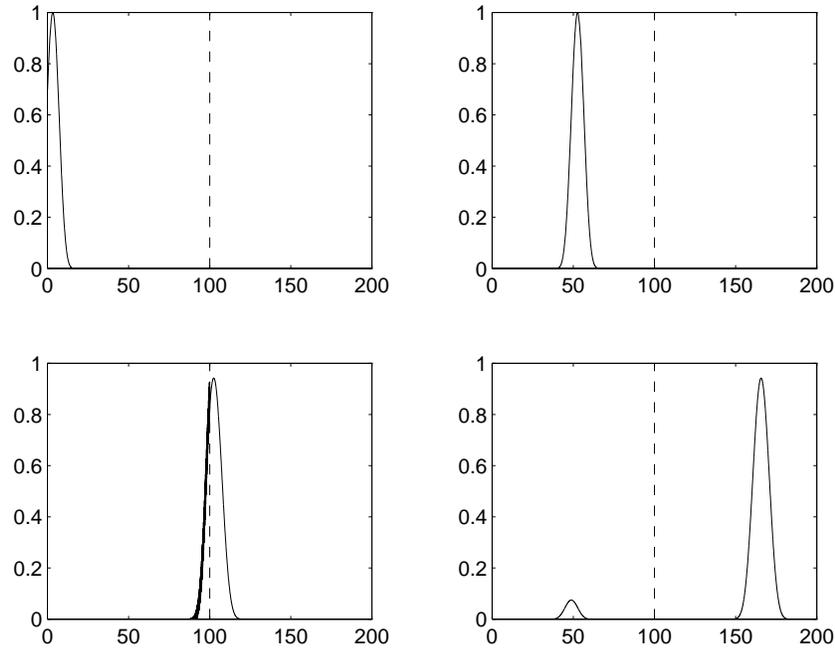


FIG. 2.17 – **Module** de la solution correspondant à  $\omega_0 \Delta t = \frac{3\pi}{8}$ ,  $\Delta x = 0.3125$  à quatre instants distincts ( $t = 18.75/\sqrt{2}$ ,  $125/\sqrt{2}$ ,  $218.75/\sqrt{2}$ ,  $312.5/\sqrt{2}$ ).

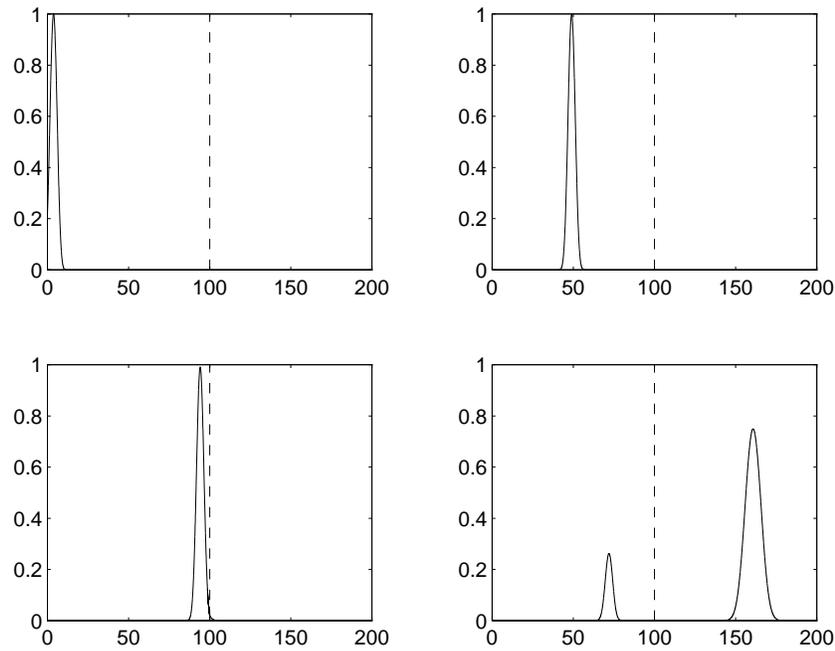
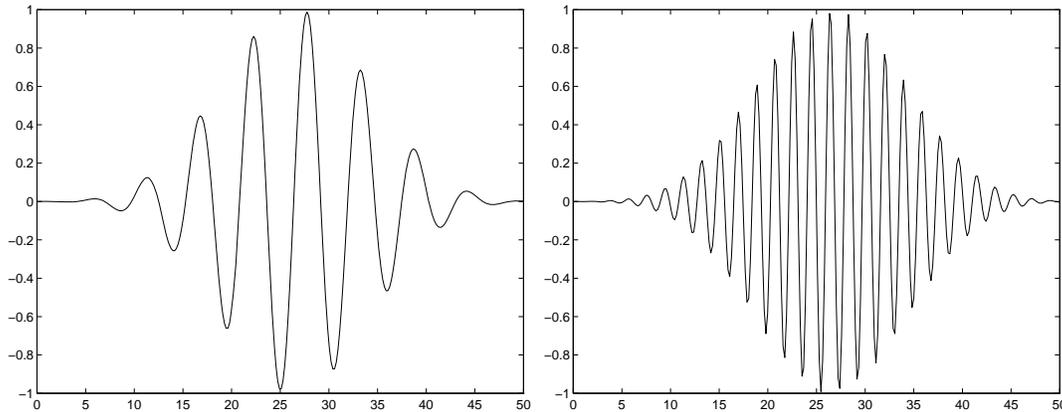


FIG. 2.18 – **Module** de la solution correspondant à  $\omega_0 \Delta t = \frac{\pi}{2} - 0.1$ ,  $\Delta x = \frac{1}{128}$  à quatre instants distincts ( $t = 37.5/\sqrt{2}$ ,  $187.5/\sqrt{2}$ ,  $337.5/\sqrt{2}$ ,  $450/\sqrt{2}$ ).

### 2.2.3.3 Cas d'un train d'ondes dans la grille fine : une étude numérique de réflexion.

On présente ici des expériences numériques permettant de corroborer le calcul des coefficients lorsque l'onde incidente est dans la grille fine. Une onde est envoyée dans la grille raffinée par l'intermédiaire du bord droit. Cette onde a la même structure que dans les exemples de la section 2.2.3.2. La figure 2.19 représente la partie réelle de cette fonction en fonction du temps pour  $\omega_0 \Delta t_f = 0.2$  ; rappelons que le nombre d'oscillations augmente avec  $\omega_0 \Delta t_f$ . Sur les figures 2.20, 2.21, 2.22 et 2.23, la partie harmonique de l'onde n'est pas visible sur les courbes car afin de mieux observer les amplitudes on a représenté les modules de ces nombres complexes ; nous parlerons donc d'enveloppe de solution.

FIG. 2.19 – Tracé de  $u(L,t)$  (bord droit) pour une pulsation  $\omega_0 \Delta t_f = 0.2$  et  $\omega_0 \Delta t = \frac{3\pi}{16}$



La figure 2.20 présente quelques instantanés de la valeur absolue de l'onde propagée. Pour la première pulsation ( $\omega_0 \Delta t_f = 0.2$ ), on remarque que l'onde réfléchi est quasiment nulle, l'onde transmise étant elle, très proche de l'onde incidente. Cette expérience numérique nous donne un coefficient de transmission de  $T=1.0019$  et un coefficient de réflexion  $R=0.0096$  alors que les coefficients théoriques nous donnent  $R=0.0095$  et  $T=1.0027$ . La figure 2.21 présente les résultats avec une onde incidente  $\frac{3\pi}{8}$ . Dans cette expérience, on remarque une légère réflexion à l'interface puisqu'on observe un coefficient de réflexion  $R=0.0763$  pour un  $R$  théorique de  $0.0752$ . Le coefficient de Transmission observé vaut  $1.037$  pour un coefficient théorique de  $1.053$ .

La figure 2.22 présente des instantanés pour une expérience avec une onde incidente de pulsation  $\frac{3\pi}{8}$ . On remarque qu'ici la réflexion à l'interface est quasiment totale. Numériquement on trouve un coefficient de réflexion  $R = 0.96$  et un coefficient de transmission  $T = 5.6 \cdot 10^{-6}$ , alors que les résultats théoriques prévoyaient une réflexion  $R = 1$  et une transmission  $T = 0.07$ . La différence entre le coefficient de transmission théorique et celui observé s'explique par le fait que l'onde transmise dans la grille grossière n'est pas propagative et donc  $T$  ne peut être observé convenablement. En effet, le calcul théorique nous donne  $|r(2\frac{3\pi}{8\Delta t})| < 1$  synonyme d'une onde évanescence.

L'oscillation observée sur la troisième image est simplement due au fait que le cosinus et le sinus (c'est à dire la partie réelle de l'onde et sa partie imaginaire) sont déphasés pendant la réflexion puisque la partie réfléchi rencontre au retour la partie incidente de l'onde. On

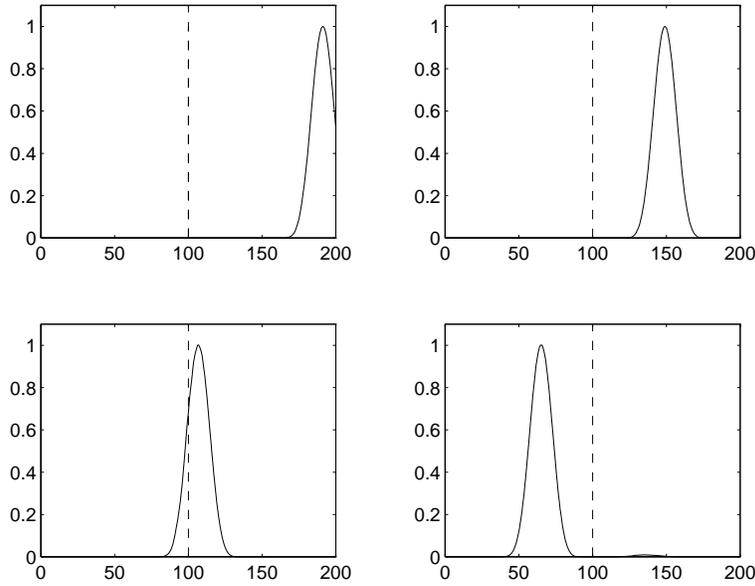


FIG. 2.20 – **Module** de la solution correspondant à  $\omega_0 \Delta t_f = 0.2$ ,  $\Delta x = 0.25$  à quatre instants distincts ( $t = 50/\sqrt{2}$ ,  $110/\sqrt{2}$ ,  $170/\sqrt{2}$ ,  $230/\sqrt{2}$ ). L'abscisse de chaque courbe est  $x$ , l'interface entre grille fine et grille grossière est représentée par un trait pointillé et vertical.

$\omega \Delta t$	$R$ théorique	$R$ numérique	$T$ théorique	$T$ numérique
0.2	0.0095	0.0096	1.0027	1.0019
$\frac{3\pi}{16}$	0.0752	0.0763	1.053	1.037
$\frac{3\pi}{8}$	1	0.96	0.07	5.6e-6

TAB. 2.2 – *Tableau récapitulatif des coefficients*

remarque que pour obtenir l'onde à des positions comparables, nous avons dû choisir des instants plus grands pour les pulsations plus grandes. Ceci est dû au fait que la propagation ne se fait pas à la même vitesse pour toutes les fréquences (cf. Annexe B).

Ces trois expériences nous permettent de valider le calcul des coefficients de réflexion-transmission. En effet, elles mettent en évidence la croissance de la réflexion avec la pulsation ainsi que la bonne représentativité des coefficients de réflexion. De plus, la première expérience nous montre la précision de notre schéma pour les pulsations généralement utilisées. En effet, des pulsations supérieures à  $\frac{0.5}{\Delta t}$  (c'est à dire 2 points par longueur d'onde) ne sont généralement pas utilisées en pratique. Toutefois, ces fréquences sont présentes dans le bruit numérique, et il peut être important de voir leur évolution. Ainsi l'expérience suivante nous présente une anomalie mais elle ne peut être observée que pour des cas limites d'utilisation du schéma.

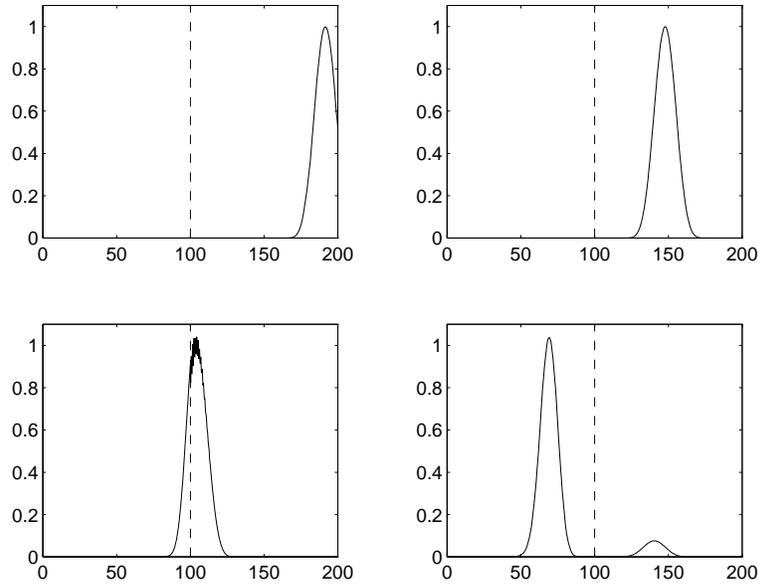


FIG. 2.21 – **Module** de la solution correspondant à  $\omega_0 \Delta t_f = \frac{3\pi}{16}$ ,  $\Delta x = 0.25$  à quatre instants distincts ( $t = 50/\sqrt{2}$ ,  $115/\sqrt{2}$ ,  $180/\sqrt{2}$ ,  $245/\sqrt{2}$ ). L'abscisse de chaque courbe est  $x$ , l'interface entre grille fine et grille grossière est représentée par un trait pointillé et vertical.

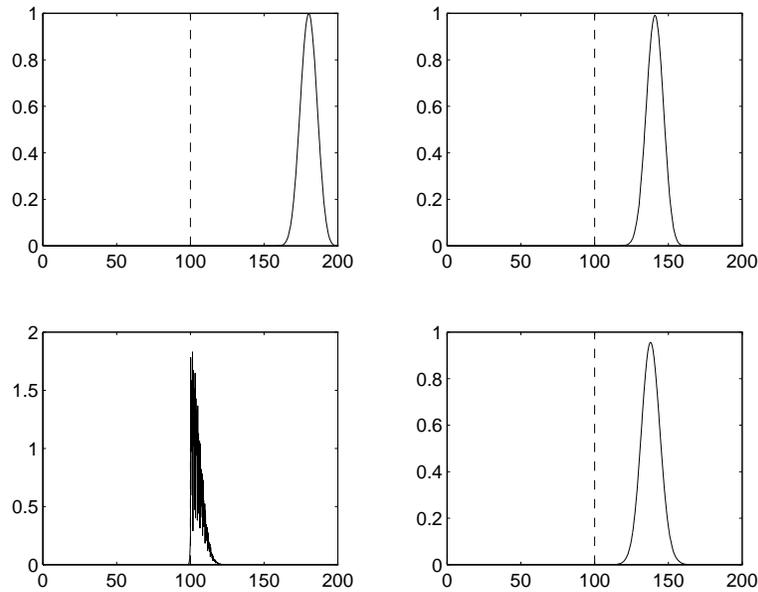


FIG. 2.22 – **Module** de la solution correspondant à  $\omega_0 \Delta t_f = \frac{3\pi}{8}$ ,  $\Delta x = 0.25$  à quatre instants distincts ( $t = 75/\sqrt{2}$ ,  $150/\sqrt{2}$ ,  $225/\sqrt{2}$ ,  $300/\sqrt{2}$ ). L'abscisse de chaque courbe est  $x$ , l'interface entre grille fine et grille grossière est représentée par un trait pointillé et vertical.

### 2.2.3.4 Un phénomène curieux.

Pour  $\omega\Delta t = \frac{\pi}{4}$ , un nombre de Courant de  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , l'expérience nous montre une réflexion mais aussi une traînée ; l'onde transmise est également déformée. On présente ici (figure 2.23) l'expérience révélant ce phénomène. Ce comportement très particulier s'explique en effectuant

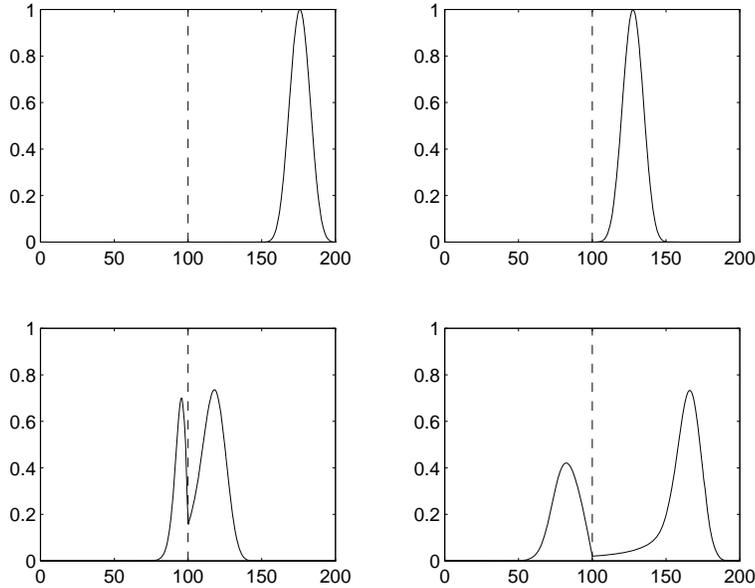


FIG. 2.23 – **Module** de la solution correspondant à  $\omega_0\Delta t_f = \frac{\pi}{4}$ ,  $\Delta x = 0.25$  à quatre instants distincts ( $t = 75/\sqrt{2}$ ,  $150/\sqrt{2}$ ,  $225/\sqrt{2}$ ,  $300/\sqrt{2}$ ). L'abscisse de chaque courbe est  $x$ , l'interface entre grille fine et grille grossière est représentée par un trait pointillé et vertical.

un développement en séries des coefficients de réflexion et de transmission au voisinage de  $\frac{\pi}{4\Delta t}$ , en effet,

$$(2.63) \quad \begin{aligned} R\left(\frac{\pi}{4} + \epsilon\right) &= R_0 + R_1\sqrt{\epsilon} + O(\epsilon) \\ T\left(\frac{\pi}{4} + \epsilon\right) &= T_0 + T_1\sqrt{\epsilon} + O(\epsilon) \end{aligned}$$

C'est le terme en  $\sqrt{\epsilon}$  qui est responsable de cette traînée. En effet, on montre que la partie réfléchie de l'onde s'écrit

$$(2.64) \quad u_h(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{G}_{\omega_0}(\omega) \hat{R}(\omega) e^{i(\omega t - k_h(\omega)x)} d\omega$$

où  $(\hat{U}_g)_{\omega_0}(\omega) = (\hat{U}_g)_0(\omega - \omega_0)$  est l'onde incidente,  $(G_0(t))$  est la fonction de Harris dilatée, et  $k_h(\omega)$  le nombre d'onde. Les développements en séries de l'équation (2.63) ainsi qu'une approximation de  $k_h(\omega) = k_h(\omega_0) + \nabla_{\omega_h} k(\omega_0)(\omega - \omega_0)$  nous donne alors

$$(2.65) \quad u_h(x, t) \simeq e^{i(\omega_0 t - k_h(\omega_0)x)} \left( \frac{R_0}{2\pi} \int \hat{G}_{\omega_0} e^{i(t - \nabla_{\omega_h} kx)(\omega - \omega_0)} d\omega + \frac{R_1}{2\pi} \int (\hat{G}_{\omega_0}(i(\omega - \omega_0)))^{\frac{1}{2}} e^{i(t - \nabla_{\omega_h} kx)(\omega - \omega_0)} d\omega \right),$$

soit

$$(2.66) \quad u_h(x, t) \simeq e^{i(\omega_0 t - k_h(\omega_0)x)} (R_0 G_0 + R_1 G_{1/2})(t - \nabla_{\omega_h} kx)$$

où

$$(2.67) \quad G_{1/2}(t) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{G}_0(\omega) \sqrt{i\omega} e^{i\omega t} d\omega$$

est la demi dérivée de l'onde incidente; elle est représentée sur la figure 2.24. La présence de cette demi dérivée explique donc le phénomène de trainée observé puisqu'elle n'est pas à support compact. La même explication peut être fournie pour l'onde transmise qui de la même façon s'écrira

$$(2.68) \quad u_h(x, t) \simeq e^{i(\omega_0 t - k_h(\omega_0)x)} (T_0 G_0 + T_1 G_{1/2})(t - \nabla_{\omega_h} kx).$$

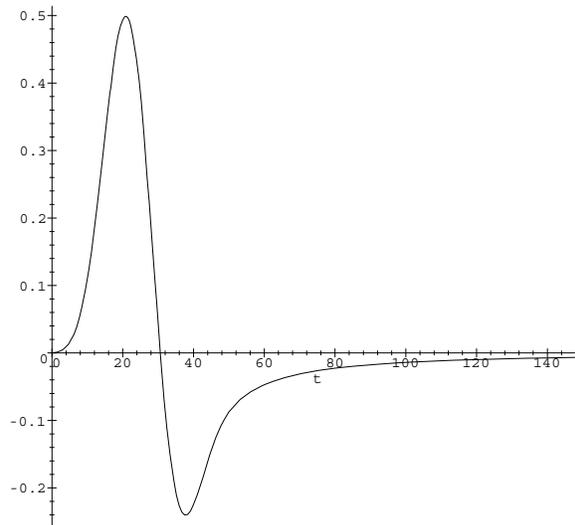


FIG. 2.24 – Demi-dérivée de la porteuse, on retrouve la trainée présente dans l'expérience



## Chapitre 3

# Extension à un raffinement plus fort. Cas de 2 milieux infinis.

Il peut être intéressant lors du raffinement de passer directement d'une grille grossière à une grille raffinée  $n$  fois, notamment pour des raisons d'économie ou de simplicité de mise en oeuvre, cf. [10] par exemple. On présente ici un schéma sur le modèle du précédent permettant un raffinement plus important. On décrit également les calculs de stabilité et de coefficients de réflexion analogues à ceux du schéma précédent.

### 3.1 Description du schéma.

Le schéma est une simple généralisation du schéma précédent, avec des interpolations temporelles légèrement plus compliquées. On a représenté figure 3.1 un exemple dans le cas  $n = 4$ .

On approche ici  $u$ , solution de l'équation (1.1) par

$$(3.1) \quad \begin{cases} (u_g)_{nj}^{nk} \approx u(njh, nk\Delta t) & j \leq 0 \\ (u_f)_j^k \approx u(jh, k\Delta t) & j > 0. \end{cases}$$

Les équations à gauche de l'interface (1.5) et (1.7) deviennent alors

$$(3.2) \quad \frac{(u_g)_{nj}^{nk+n} - 2(u_g)_{nj}^{nk} + (u_g)_{nj}^{nk-n}}{n^2 \Delta t^2} - \frac{(u_g)_{nj+n}^{nk} - 2(u_g)_{nj}^{nk} + (u_g)_{nj-n}^{nk}}{n^2 h^2} = 0 \quad \text{pour } j < 0$$

et

$$(3.3) \quad \frac{(u_g)_{nj}^{nk+n} - 2(u_g)_{nj}^{nk} + (u_g)_{nj}^{nk-n}}{n^2 \Delta t^2} - \frac{(u_f)_{nj+n}^{nk} - 2(u_g)_{nj}^{nk} + (u_g)_{nj-n}^{nk}}{n^2 h^2} = 0 \quad \text{pour } j = 0$$

Tandis que les équations à droite de l'interface (1.6), (1.8) et (1.9) donnent

$$(3.4) \quad \frac{(u_f)_j^{k+1} - 2(u_f)_j^k + (u_f)_j^{k-1}}{\Delta t^2} - \frac{(u_f)_{j+1}^k - 2(u_f)_j^k + (u_f)_{j-1}^k}{h^2} = 0 \quad \text{pour } j > 1$$

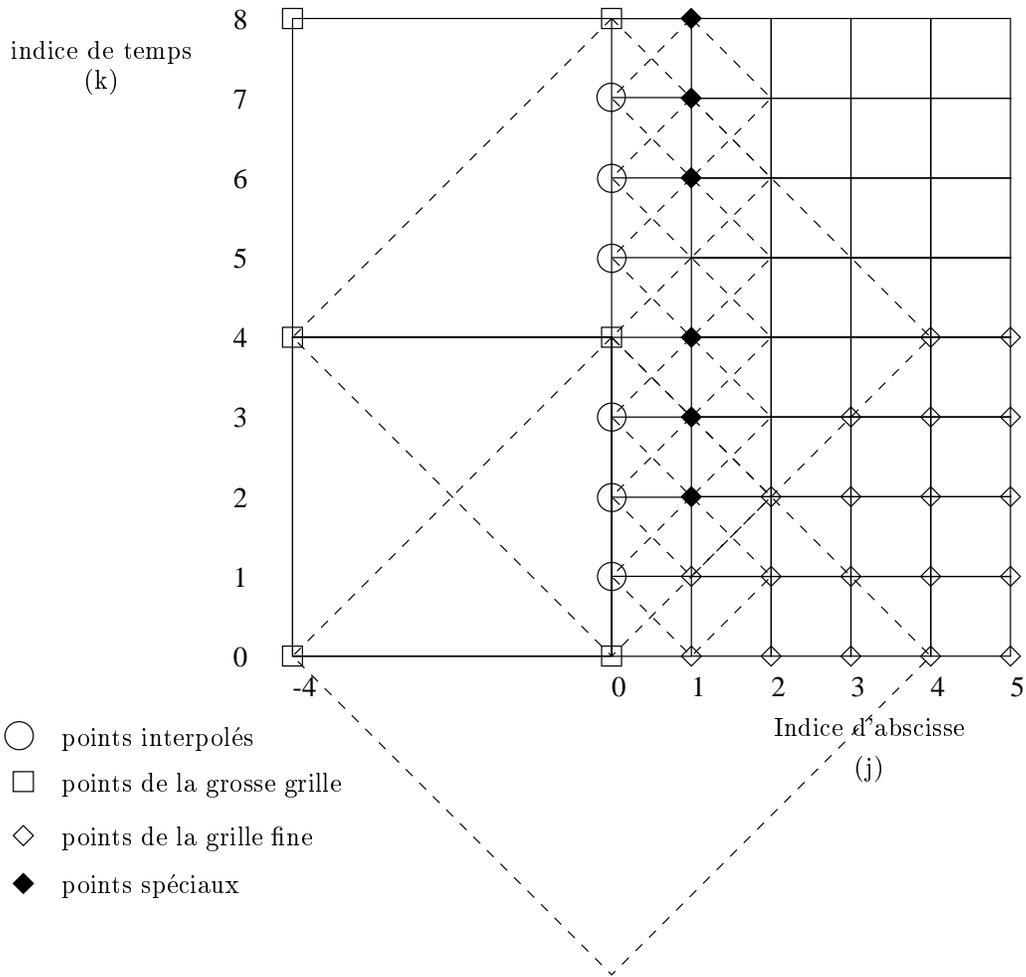


FIG. 3.1 – Schéma de l'interpolation sur la grille 1/4

et

$$(3.5) \quad \begin{cases} \frac{(u_f)_j^{nk+m+1} - 2(u_f)_j^{nk+m} + (u_f)_j^{nk+m-1}}{\Delta t^2} \\ - \frac{(u_f)_{j+1}^{nk+m} - 2(u_f)_j^{nk+m} + \frac{1}{n}((n-m)(u_g)_0^{nk} + m(u_g)_0^{nk+n})}{h^2} = 0 \\ \text{pour } j = 1 \text{ et } m = 0, \dots, n-1 \end{cases}$$

### 3.2 Analyse de la stabilité par Fourier-Laplace.

Nous allons ici appliquer la même méthode d'analyse de stabilité que celle décrite dans la section 2.1. Nous ne démontrerons pas ici la stabilité avec la même rigueur, mais présenterons simplement les grandes lignes des calculs. Ces derniers sont un peu plus compliqués mais le raisonnement est le même. Notons que nous retrouvons des résultats analogue à ceux de M. Berger pour l'équation de transport scalaire 1D [3].

Utilisant les mêmes notations, on pose

$$(3.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\hat{u}_g)_{nj} = n\Delta t \sum_{k=0}^{\infty} \hat{g}_{nj}^{nk} e^{(i\omega nk\Delta t)} \\ (\hat{u}_{inc})_{nj} = n\Delta t \sum_{k=0}^{\infty} (u_{inc})_{nj}^{nk} e^{(i\omega nk\Delta t)} \\ (\hat{u}_f)_j^m = n\Delta t \sum_{k=0}^{\infty} (u_f)_j^{nk+m} e^{(i\omega(nk+m)\Delta t)} \quad \text{pour } m = 0, \dots, n-1. \end{array} \right.$$

et

$$(3.7) \quad (\hat{U}_f)_j = \begin{bmatrix} (\hat{u}_f)_j^0 \\ \vdots \\ (\hat{u}_f)_j^m \\ \vdots \\ (\hat{u}_f)_j^{n-1} \end{bmatrix}.$$

On trouve alors les équations satisfaites par  $\hat{u}_g$  et  $\hat{U}_f$

$$(3.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{4}{\Delta t^2} \sin^2\left(\frac{n\omega\Delta t}{2}\right) (\hat{u}_g)_{nj} + \frac{1}{h^2} ((\hat{u}_g)_{nj+n} - 2(\hat{u}_g)_{nj} + (\hat{u}_g)_{nj-n}) = 0 \\ \text{pour } j < 0, \end{array} \right.$$

$$(3.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{4}{\Delta t^2} \sin^2\left(\frac{n\omega\Delta t}{2}\right) (\hat{u}_g)_{nj} + \frac{1}{h^2} ((\hat{u}_f)_{nj+n}^0 - (\hat{u}_{inc})_{nj+n} - 2(\hat{u}_g)_{nj} + (\hat{u}_g)_{nj-n}) = 0 \\ \text{pour } j = 0, \end{array} \right.$$

$$(3.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{A_n^f (\hat{U}_f)_j}{\Delta t^2} + \frac{1}{h^2} ((\hat{U}_f)_{j+1} - 2(\hat{U}_f)_j + (\hat{U}_f)_{j-1}) = 0 \\ \text{pour } j > 1, \end{array} \right.$$

et

$$(3.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{A_n^f (\hat{U}_f)_j}{\Delta t^2} + \frac{1}{h^2} ((\hat{U}_f)_{j+1} - 2(\hat{U}_f)_j + G((\hat{u}_g)_0 + (\hat{u}_{inc})_0)) = 0 \\ \text{pour } j = 1, \end{array} \right.$$

où

$$A_n^f = \begin{bmatrix} 2 & -e^{-i\omega\Delta t} & 0 & \dots & 0 & -e^{i\omega\Delta t} \\ -e^{i\omega\Delta t} & 2 & -e^{-i\omega\Delta t} & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & -e^{i\omega\Delta t} & 2 & -e^{-i\omega\Delta t} \\ -e^{-i\omega\Delta t} & 0 & \dots & 0 & -e^{i\omega\Delta t} & 2 \end{bmatrix}$$

et

$$G = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \frac{e^{i\omega\Delta t}}{n}((n-1) + e^{-in\omega\Delta t}) & & & \\ & \cdots & & \\ \frac{e^{im\omega\Delta t}}{n}((n-m) + me^{-in\omega\Delta t}) & & & \\ & \cdots & & \\ \frac{e^{i(n-1)\omega\Delta t}}{n}(1 + (n-1)e^{-in\omega\Delta t}) & & & \end{pmatrix}.$$

La partie grille grossière étant identique à celle de la section 2.1, on utilise le même polynôme caractéristique pour résoudre (3.8). Avec  $r(\omega)$  défini par 2.24, la solution est

$$(3.12) \quad (\hat{u}_g)_{nj} = R_0 r(n\omega)^{-j} (\hat{u}_{inc})_0 \quad j \leq 0$$

Par définition, nous dirons que  $R_0$  est le coefficient de réflexion grossier-fin du schéma.

Pour trouver la solution de (3.10), il nous faut diagonaliser la matrice  $A_{nD}$ . Pour cela remarquons que chaque ligne de cette matrice appliquée à un vecteur propre  $u^l$  peut d'écrire sous la forme

$$2u_j^l - e^{-i\omega\Delta t}u_{j+1}^l - e^{i\omega\Delta t}u_{j-1}^l = \lambda u_j^l$$

Ce genre de matrice est appelée matrice tournante ou circulante. Ses vecteurs propres sont de la forme

$$u^l = \begin{bmatrix} 1 \\ \cdots \\ e^{\frac{i2\pi jl}{n}} \\ \cdots \\ e^{\frac{i2\pi(n-1)l}{n}} \end{bmatrix}$$

et sont associés à la valeur propre

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \lambda^l &= 2(1 - \cos(\frac{2\pi l}{n} - \omega\Delta t)) \\ &= 4 \sin^2(\frac{1}{2}(\omega\Delta t - \frac{2\pi l}{n})) \end{aligned}$$

Afin de résoudre (3.10) pour chaque composante de  $(\hat{U}_f)_j$ ,  $(\hat{u}_f)_j^l$ , on est donc amené à considérer la solution à  $\omega$  fixé de

$$(3.14) \quad \begin{cases} r_l^2(\omega) + (\frac{h^2}{\Delta t^2}\lambda^l - 2)r_l(\omega) + 1 = 0 \\ |r_l(\omega)| < 1 \end{cases}$$

soit

$$(3.15) \quad r_l(\omega) = r(\omega - \frac{2\pi l}{n\Delta t})$$

La solution de (3.10) s'écrit donc

$$(3.16) \quad (\hat{U}_f)_j = \sum_{l=0}^{n-1} t_l r_l(\omega)^j \begin{pmatrix} 1 \\ e^{\frac{2i\pi l}{n}} \\ \vdots \\ e^{\frac{2ij\pi l}{n}} \\ \vdots \\ e^{\frac{2i(n-1)\pi l}{n}} \end{pmatrix} (\hat{u}_{inc})_0$$

Par définition, nous dirons que les nombres  $t_l$  sont les coefficients de transmission grossier-fin du schéma et nous appellerons vecteur de transmission grossier-fin le vecteur  $T$  de composantes  $t_l$ . Ces constantes sont déterminées grâce aux équations (3.9) et (3.11) soit

$$(3.17) \quad \begin{cases} (\hat{u}_f)_0^m = G_m ((\hat{u}_{inc})_0 + (\hat{u}_g)_0) & \text{pour } m = 0, \dots, n-1 \\ (\hat{u}_f)_n^0 = (\hat{u}_{inc})_n + (\hat{u}_g)_n \end{cases}$$

On aboutit au système suivant

$$(3.18) \quad \begin{cases} \sum_{l=0}^{n-1} t_l & = G_0 (1 + R_0) \\ \dots & \\ \sum_{l=0}^{n-1} e^{\frac{2ij\pi l}{n}} t_l & = G_j (1 + R_0) \\ \dots & \\ \sum_{l=0}^{n-1} e^{\frac{2i(n-1)\pi l}{n}} t_l & = G_{n-1} (1 + R_0) \\ \hline \sum_{l=0}^{n-1} r_l^n(\omega) t_l & = r(n\omega) + r^{-1}(n\omega) R_0. \end{cases}$$

Afin de résoudre ce système nous allons appliquer une transformée de Fourier inverse discrète aux équations. Posons

$$(3.19) \quad \hat{G}_p(\omega\Delta t) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} G_m e^{-\frac{2i\pi pm}{n}} = \frac{1}{n^2} \frac{\sin(\frac{n\omega\Delta t}{2})^2}{\sin(\frac{\omega\Delta t}{2} - \frac{p\pi}{n})^2} \quad \text{pour } p = 0, \dots, n-1.$$

En multipliant les  $n$  premières équations par  $e^{-\frac{2i\pi pm}{n}}$ ,  $m$  étant le numéro de la ligne, puis en sommant les  $n$  lignes on obtient

$$\sum_{m=0}^{n-1} e^{-\frac{2i\pi pm}{n}} \left\{ \sum_{l=0}^{n-1} t_l e^{\frac{2i\pi lm}{n}} \right\} = \sum_{m=0}^{n-1} G_m (1 + R_0) e^{-\frac{2i\pi pm}{n}}.$$

En intervertissant les deux sommes de gauche on a

$$\sum_{l=0}^{n-1} t_l \sum_{m=0}^{n-1} (e^{\frac{2i\pi(p-l)}{n}})^m = (1 + R_0) n \hat{G}_p(\omega \Delta t),$$

or

$$\sum_{m=0}^{n-1} (e^{\frac{2i\pi(p-l)}{n}})^m = \frac{1 - (e^{\frac{2i\pi(p-l)}{n}})^n}{1 - e^{\frac{2i\pi(p-l)}{n}}} = \frac{1 - e^{2i\pi(p-l)}}{1 - e^{\frac{2i\pi(p-l)}{n}}} = n \delta_l^p.$$

On obtient ainsi la relation

$$(3.20) \quad t_p = (1 + R_0) \hat{G}_p(\omega \Delta t).$$

En remplaçant dans la dernière équation du système on aboutit à

$$(3.21) \quad (1 + R_0) \sum_{l=0}^{n-1} r_l^n \hat{G}_l(\omega \Delta t) = r(n\omega) + r^{-1}(n\omega) R_0,$$

soit

$$(3.22) \quad \left( \frac{1}{r(n\omega)} - \sum_{l=0}^{n-1} r_l^n(\omega) \hat{G}_l(\omega \Delta t) \right) R_0 = \sum_{l=0}^{n-1} r_l^n(\omega) \hat{G}_l(\omega \Delta t) - r(n\omega).$$

On trouve le déterminant du système analogue à celui trouvé par Marsha Berger pour l'équation hyperbolique (cf. [3]).

$$(3.23) \quad \delta(\omega) = \frac{1}{r(n\omega)} - \sum_{l=0}^{n-1} r_l^n(\omega) \hat{G}_l(\omega \Delta t).$$

Sous la condition  $\delta(\omega) \neq 0$ , on a

$$(3.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_0 = \frac{\sum_{l=0}^{n-1} r_l^n(\omega) \hat{G}_l(\omega \Delta t) - r(n\omega)}{\frac{1}{r(n\omega)} - \sum_{l=0}^{n-1} r_l^n(\omega) \hat{G}_l(\omega \Delta t)} \\ t_l = (1 + \frac{\sum_{l=0}^{n-1} r_l^n(\omega) \hat{G}_l(\omega \Delta t) - r(n\omega)}{\frac{1}{r(n\omega)} - \sum_{l=0}^{n-1} r_l^n(\omega) \hat{G}_l(\omega \Delta t)}) \hat{G}_l(\omega \Delta t). \end{array} \right.$$

Pour les mêmes raisons que dans la section 2.1, la stabilité sera démontrée si le déterminant  $\delta(\omega)$  est non nul  $\forall \omega$  tel que  $\Im(\omega) \geq 0$  (Le cas  $\Im(\omega) = 0$  s'obtient par passage à la limite). Plus exactement, notre schéma sera stable si les coefficients  $R_0$  et  $t_l$  sont bornés. On peut démontrer que  $\delta(\omega)$  est non nul sur le demi-plan complexe  $\Im(\omega) > 0$  (cf. Annexe C). La démonstration pour  $\omega$  réelle analogue au schéma 1/2 conduit à des calculs très compliqués, on se contentera ici, d'une vérification numérique apportée par le calcul des coefficients qui montre qu'ils sont effectivement bornés (figure 3.2 et 3.3).

### 3.2.1 Ré-interprétation de la solution en termes d'ondes planes.

On peut comme dans la section 2.1.5 donner une signification aux coefficients calculés dans l'étude de stabilité de la section 3.2.

FIG. 3.2 – Coefficients de réflexion-transmission pour le schéma 1/4. En abscisse la pulsation adimensionnée ( $\omega\Delta t = 2\pi/N$  où  $N$  est le nombre de points par période), pour chaque figure, de haut en bas, le coefficient de réflexion ( $R_0$ ), celui de transmission ( $T_0$ ) puis ceux de transmission parasite, en haut  $\alpha = \Delta t/h = 1$ , à gauche  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , à droite  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

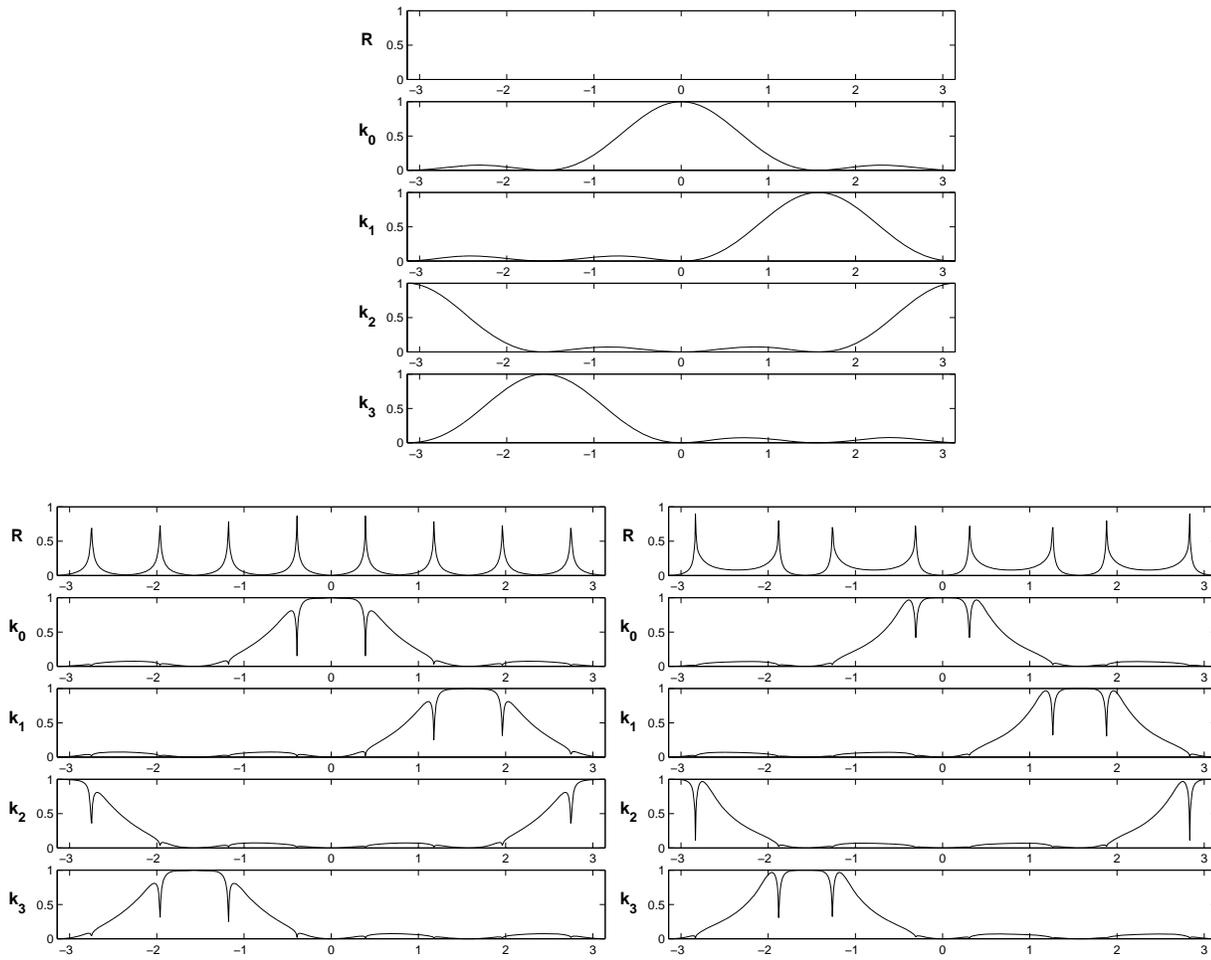
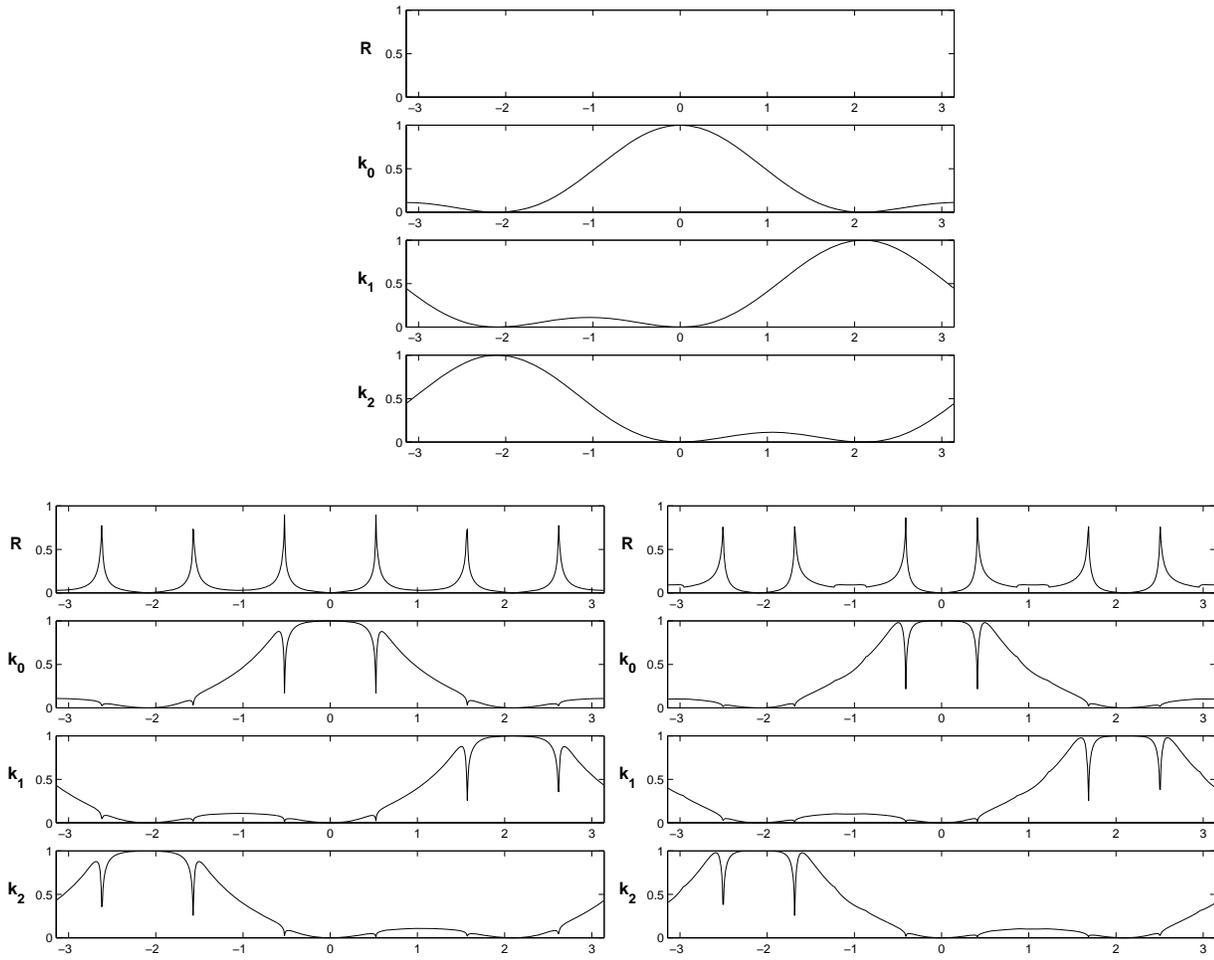


FIG. 3.3 – Coefficients de réflexion-transmission pour le schéma 1-3. En abscisse la pulsation adimensionnée ( $\omega\Delta t = 2\pi/N$  où  $N$  est le nombre de points par période), pour chaque figure, de haut en bas, le coefficient de réflexion ( $R_0$ ), celui de transmission ( $T_0$ ) puis ceux de transmission parasite, en haut  $\alpha = 1$ , à gauche  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , à droite  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .



### 3.2.1.1 Cas d'une onde incidente dans la grille grossière.

Supposons que la condition initiale soit éloignée de l'interface entre les deux grilles. On a vu que le champ incident au voisinage de l'interface s'écrivait

$$(3.25) \quad (u_{inc})_{nj}^{nk} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{n\Delta t}}^{+\frac{\pi}{n\Delta t}} (\hat{u}_{inc})_0(\omega) r(n\omega)^j e^{-ni\omega k \Delta t} d\omega,$$

cette expression étant valable au moins au delà du support des conditions initiales en temps.

A ce champ, se rajoute dans la grille grossière un champ réfléchi dont l'expression est

$$(3.26) \quad (\tilde{u}_g)_{nj}^{nk} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{n\Delta t}}^{+\frac{\pi}{n\Delta t}} (\hat{u}_{inc})_0(\omega) R_0(\omega) r(n\omega)^{-j} e^{-ni\omega k \Delta t} d\omega.$$

Enfin, l'onde incidente génère dans la grille fine le champ

$$(3.27) \quad (u_f)_j^k = \sum_{l=0}^{n-1} ((u_f)_l)_j^k$$

avec

$$(3.28) \quad ((u_f)_l)_j^k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{n\Delta t}}^{+\frac{\pi}{n\Delta t}} (\hat{u}_{inc})_0(\omega) t_l(\omega) r(\omega - \frac{2l\pi}{n\Delta t})^j e^{i\omega k \Delta t} d\omega$$

Dans toutes ces formules, les notations sont celles de la section précédente : la fonction  $r(\omega)$  est définie par les formules (2.16), tandis que les coefficients  $R_0$ , et  $t_l$  sont solutions du système (3.18) et sont donnés par (3.24). En introduisant  $k_h(\omega)$  le nombre d'onde numérique, on peut expliciter la solution sous forme d'une superposition d'ondes planes numériques. Plus précisément, fixons  $\omega$  et posons

$$(3.29) \quad \begin{aligned} (U_g)_{nj}^{nk} &= \left( e^{ik_h(n\omega)jh} + R_0(\omega) e^{-ik_h(n\omega)jh} \right) e^{-i\omega nk \Delta t} \\ (U_f)_j^k &= \sum_{l=0}^{n-1} t_l(\omega) e^{i(k_h(\omega - \frac{2l\pi}{n\Delta t})jh - (\omega - \frac{2l\pi}{n\Delta t})k \Delta t)} \end{aligned}$$

On vérifie que  $(U_g, U_f)$  est une solution particulière du schéma. La partie gauche,  $U_g$ , est composée d'une onde plane numérique incidente et d'une onde plane numérique réfléchie tandis que la partie droite est composée de  $n$  ondes planes transmises, associées aux pulsations  $\omega - \frac{2l\pi}{n\Delta t}$ . Dans ce contexte, les nombres  $R_0$  et  $t_l$  s'interprètent donc bien comme les coefficients de réflexion et de transmission ainsi que nous les avons définis.

### 3.2.1.2 Cas d'une onde incidente dans la grille fine.

Afin de simplifier les calculs dans la grille fine, nous allons nous contenter de faire une analyse par ondes planes, mais les résultats de stabilité sont identiques au cas précédent. On suppose ici que l'onde incidente est une onde plane de pulsation  $\omega_q = \omega - \frac{2q\pi}{n\Delta t}$  dans la grille fine (celle-ci est toujours à droite de la grille grossière). Dans un premier temps  $q$  est fixé.

$$(u_{inc})_j^{nk+m} = r(\omega - \frac{2q\pi}{n\Delta t})^{-j} z_q^m e^{ink\omega \Delta t}$$

Cherchons la solution dans la grille grossière sous la forme

$$(u_{tran})_{nj}^{nk} = t_q r(n\omega)^j e^{ink\omega \Delta t}$$

où par définition  $t_q$  est le coefficient de transmission fin grossier associé à la pulsation incidente  $\omega_q$ . Nous appellerons vecteur de transmission fin-grossier le vecteur T de composantes  $(t_q)_{q=0, n-1}$

Dans la grille fine, on cherche la solution sous la forme

$$(u_{ref})_j^{nk+m} = \sum_{l=0}^{n-1} R(l, q) r(\omega_l)^{-j} z_l^m e^{ink\omega\Delta t}$$

où  $(R(l, q))_{l=0, n-1}$  sont les coefficients de réflexion fin-grossier associés à la pulsation incidente  $\omega_q$ . Nous appellerons matrice de réflexion fin grossier la matrice R de composantes  $(R(l, q))_{l=0, n-1; q=0, n-1}$ .

On a noté

$$\omega_l = \omega - \frac{2l\pi}{n\Delta t} \text{ et } z_l = e^{i(\frac{2l\pi}{n} + \omega\Delta t)}$$

La vérification au point  $j = 0$  de  $(u_{fin})_0^{nq+m} = \frac{n-m}{n}(u_{gro})_0^{nq} + \frac{m}{n}(u_{gro})_0^{nq+n}$  pour  $m = 0, n-1$ , aboutit au système suivant.

$$(3.30) \quad \begin{cases} ((z_q)^m)_m + \sum_{l=0}^{n-1} R(l, q) ((z_l)^m)_m = t_q \left( \frac{n-m}{n} + e^{in\omega\Delta t} \frac{m}{n} \right)_m \\ m = 0, n-1 \end{cases}$$

En multipliant chaque équations par  $\frac{1}{n} e^{-i\frac{2pm\pi}{n}} e^{-im\omega\Delta t}$  et en sommant, on trouve

$$R(p, q) = t_q \hat{G}_p(\omega\Delta t) - \delta_p^{l_0}$$

où on a posé

$$\hat{G}_p(\omega\Delta t) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \left( \frac{n-m}{n} + e^{in\omega\Delta t} \frac{m}{n} \right) e^{-i\frac{2pm\pi}{n}} e^{-im\omega\Delta t} = \frac{1}{n^2} \frac{\sin(\frac{n\omega\Delta t}{2})^2}{\sin(\frac{\omega\Delta t}{2} + \frac{\pi p}{n})^2}$$

La vérification au point  $j = -1$  nous donne

$$r(\omega - \frac{\pi 2q}{n\Delta t})^{-n} + \sum_{l=0}^{n-1} R(l, q) r(\omega - \frac{\pi 2l}{n\Delta t})^n = t_q r(n\omega)^{-1}$$

On trouve alors

$$(3.31) \quad t_q = \frac{r(\omega - \frac{2q\pi}{n\Delta t})^{-n} - r(\omega - \frac{2q\pi}{n\Delta t})^n}{r(n\omega)^{-1} - \sum_{p=0}^{n-1} \hat{G}_p(\omega\Delta t) r(\omega - \frac{\pi 2p}{n\Delta t})^n}$$

et la matrice de réflexion s'écrit

$$(3.32) \quad R(l, q) = \frac{r(\omega - \frac{\pi 2q}{n\Delta t})^{-n} - r(\omega - \frac{\pi 2q}{n\Delta t})^n}{r(n\omega)^{-1} - \sum_{p=0}^{n-1} \hat{G}_p(\omega\Delta t) r(\omega - \frac{\pi 2p}{n\Delta t})^n} \hat{G}_l(\omega\Delta t) - \delta_l^q$$

Le déterminant du système étant identique au cas d'une onde incidente dans la grille grossière, l'analyticité de ces coefficients et donc la stabilité est démontrée de la même façon qu'à la section (3.2).

### 3.3 Étude de précision.

#### 3.3.1 Ordre du Schéma.

Afin de tester l'ordre des schémas 1-n, nous réalisons le même procédé expérimental que dans la section 2.2.2 pour  $n = 4$  et  $n = 3$ . Les courbes sont pratiquement identiques à celles de la section 2.2.2. Toutes les conclusions que nous avons tirées pour le schéma 1-2 restent valables. Le lecteur pourra même trouver remarquable que les résultats soient si similaires. Il est toutefois logique que les erreurs de dispersion (colonne 1 et 3 des figures 3.5 et 3.8) soient les mêmes dans tous les cas de raffinement puisque celles-ci correspondent essentiellement aux erreurs commises lors de la propagation dans la grille grossière.

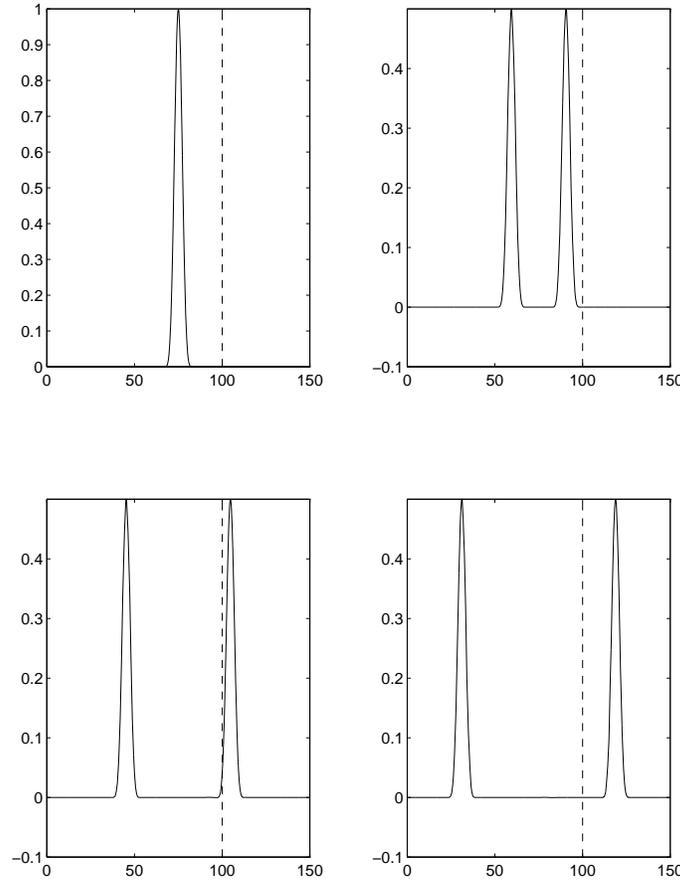


FIG. 3.4 – Solution numérique dans le cas  $1/4$  correspondant à  $\Delta x = 0.25$  à quatre instants distincts ( $t = 0, 20/\sqrt{2}, 40/\sqrt{2}, 60/\sqrt{2}$ ). L'abscisse de chaque courbe est  $x$ , l'interface entre grille fine et grille grossière est représentée par un trait pointillé et vertical.

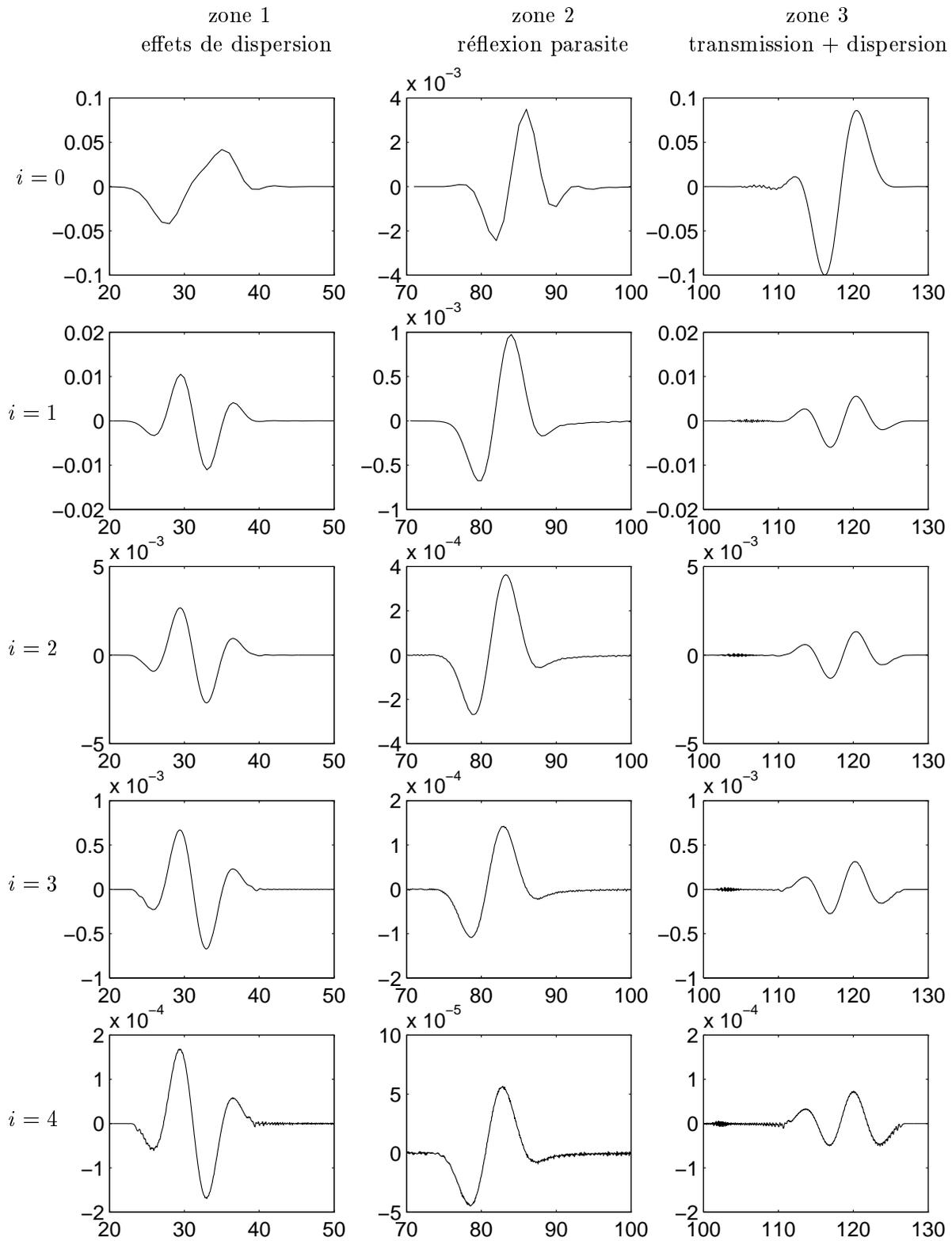


FIG. 3.5 – Tracé des différences entre 2 raffinements successifs dans le cas 1/4

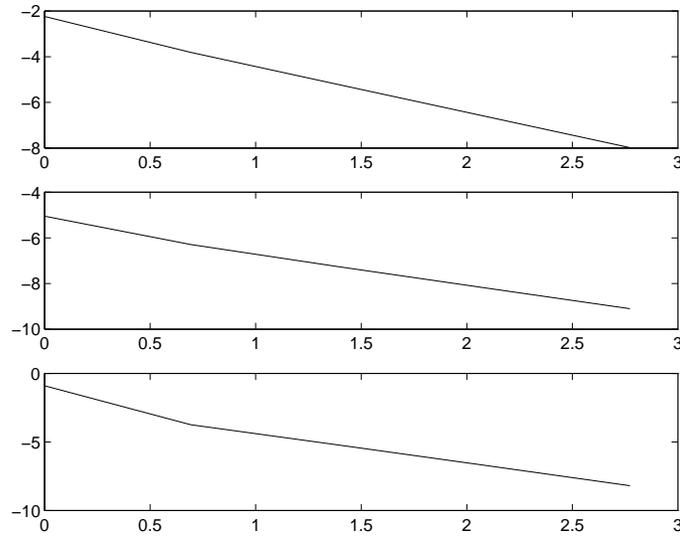


FIG. 3.6 – Tracé des logarithmes de chaque erreur en fonction du logarithme du raffinement dans le cas 1/4

Pente d'erreur	dispersion seule	réflexion seule	Transmission + dispersion
Schéma 1/2	-2.0579	-1.1808	-2.5322
Schéma 1/3	-2.0579	-1.17	-2.5633
Schéma 1/4	-2.0579	-1.4414	-2.5304

TAB. 3.1 – Tableau récapitulatif des différentes pentes des logarithmes des erreurs observées

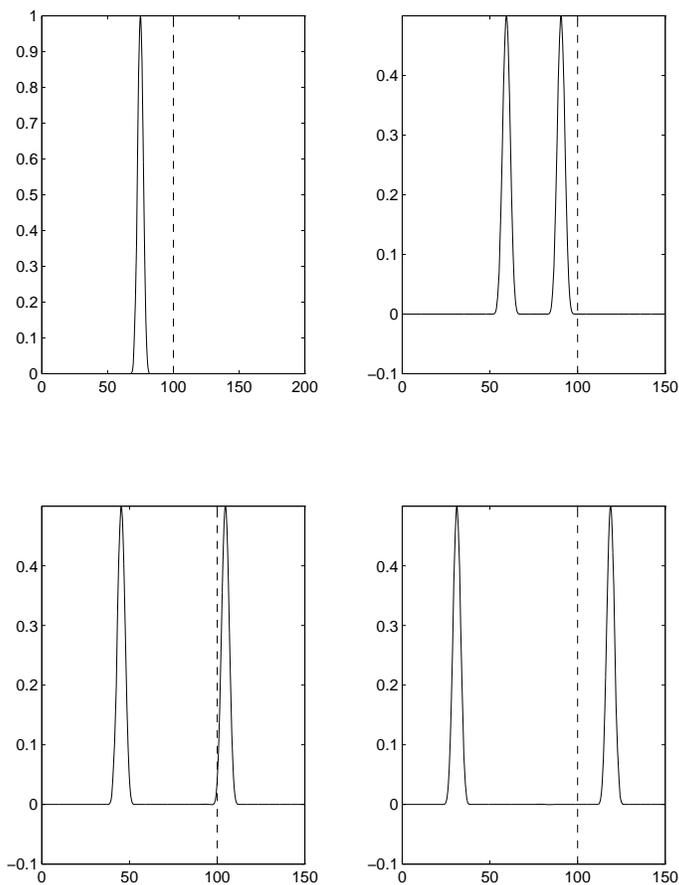


FIG. 3.7 – Solution numérique dans le cas 1/3 correspondant à  $\Delta x = 0.25$  à quatre instants distincts ( $t = 0, 20/\sqrt{2}, 40/\sqrt{2}, 60/\sqrt{2}$ ). L'abscisse de chaque courbe est  $x$ , l'interface entre grille fine et grille grossière est représentée par un trait pointillé et vertical.

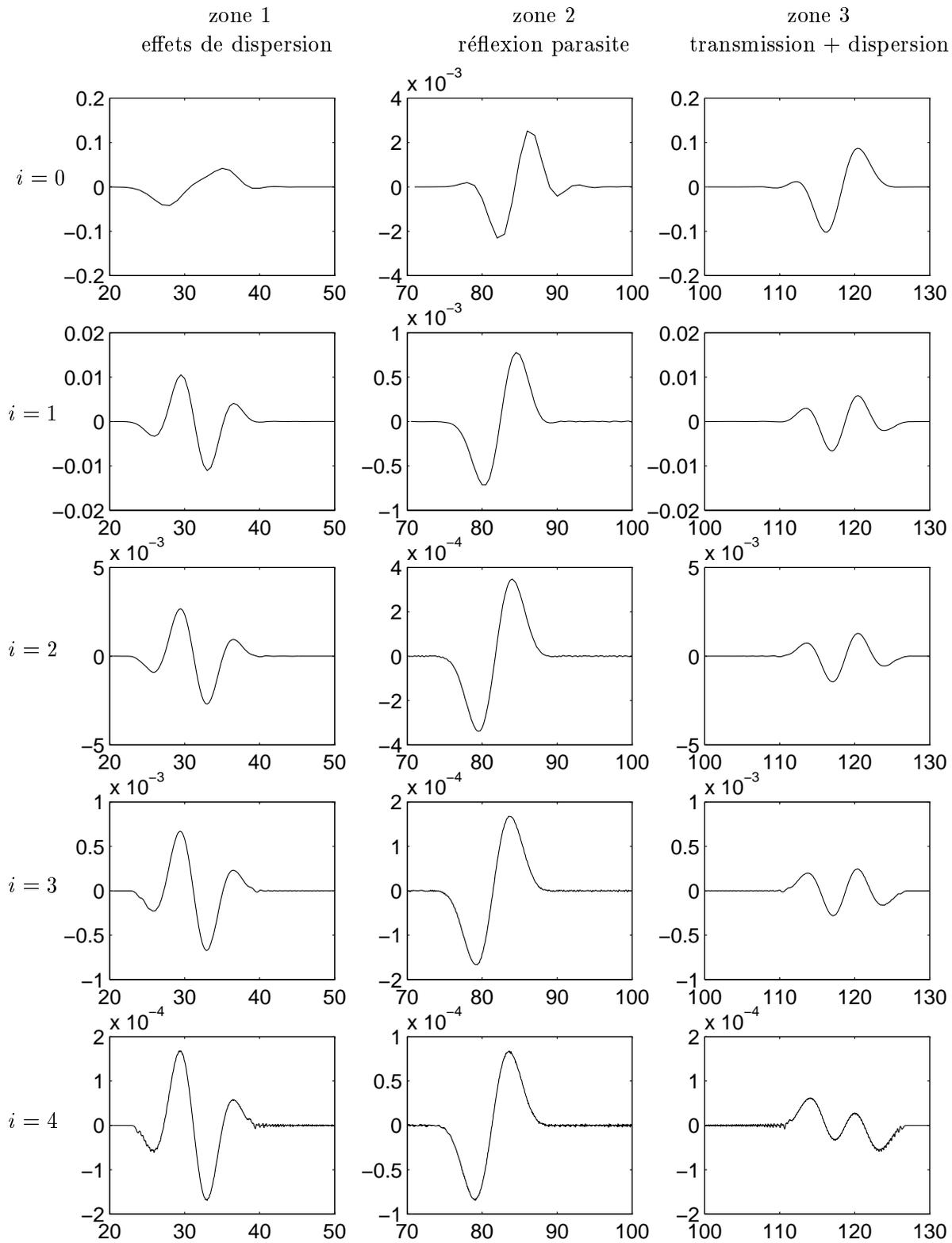


FIG. 3.8 – Tracé des différences entre 2 raffinements successifs dans le cas 1/3

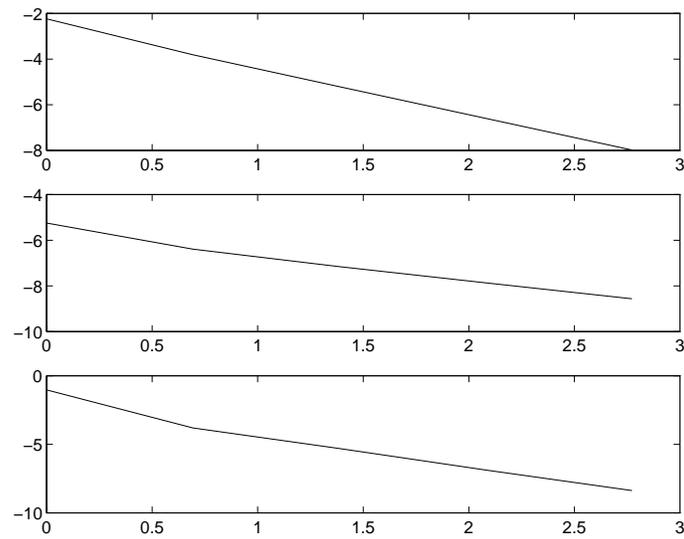


FIG. 3.9 – Tracé des logarithmes de chaque erreur en fonction du logarithme du raffinement dans le cas  $1/3$

## Chapitre 4

# Cas de la bande finie raffinée : apparition d'instabilités.

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés au cas de deux grilles semi-infinies, et la méthode s'est montrée satisfaisante puisque le schéma est précis et stable sous la condition C.F.L. usuelle. Malheureusement cette configuration n'est pas celle qui nous intéresse. En effet, notre désir est, dans le cas à trois dimensions, de pouvoir raffiner autour d'un objet. L'équivalent 1-D de cette situation est le cas de la bande raffinée finie. Nous voyons dans ce chapitre que les conclusions sont radicalement différentes.

### 4.1 Position du problème.

Nous nous proposons ici, d'étudier le schéma proposé dans le cas d'une bande à l'aide d'une analyse par ondes planes inspirée du cas décrit précédemment.

On a représenté sur la figure 4.1 le schéma d'interpolation temporelle 1/4 dans le cas d'une bande. On peut déjà noter qu'il existe une largeur minimale de la bande permettant d'appliquer le schéma précédemment décrit. En effet, la bande doit comporter  $n$  points pour que les schémas d'interpolation soient valables, où  $n$  correspond au degré de raffinement. Dans l'exemple ci-dessous  $n = 4$ .

Le cas de la bande raffinée est un peu plus complexe à analyser. Le simple calcul des coefficients n'est plus suffisant. En effet, comme le montre la figure 4.2, l'onde transmise est ensuite réfléchi sur la deuxième interface, puis re-réfléchi sur la première etc.

Il apparaît donc que lors d'une simulation, il peut y avoir un nombre de réflexions important, surtout si la bande n'est pas large. Ces réflexions multiples sont un phénomène nouveau par rapport au cas d'une interface simple précédemment traité. En fait, nous allons montrer par un calcul théorique que le critère de stabilité s'en trouve modifié. Ce calcul est basé sur la recherche de solutions de type somme d'ondes planes et s'inspire du schéma des réflexions figure 4.2. Afin de simplifier, nous allons considérer une grille fine intercalée entre une grille grossière et une condition de Dirichlet comme indiqué sur la figure 4.3. Cette restriction facilite les calculs mais n'enlève rien à la généralité du résultat.

Les calculs qui vont suivre impliquent des quantités que nous avons déjà rencontrées dans le chapitre précédent. Afin de faciliter leur compréhension, il nous a semblé opportun de les résumer succinctement dans le paragraphe qui va suivre.

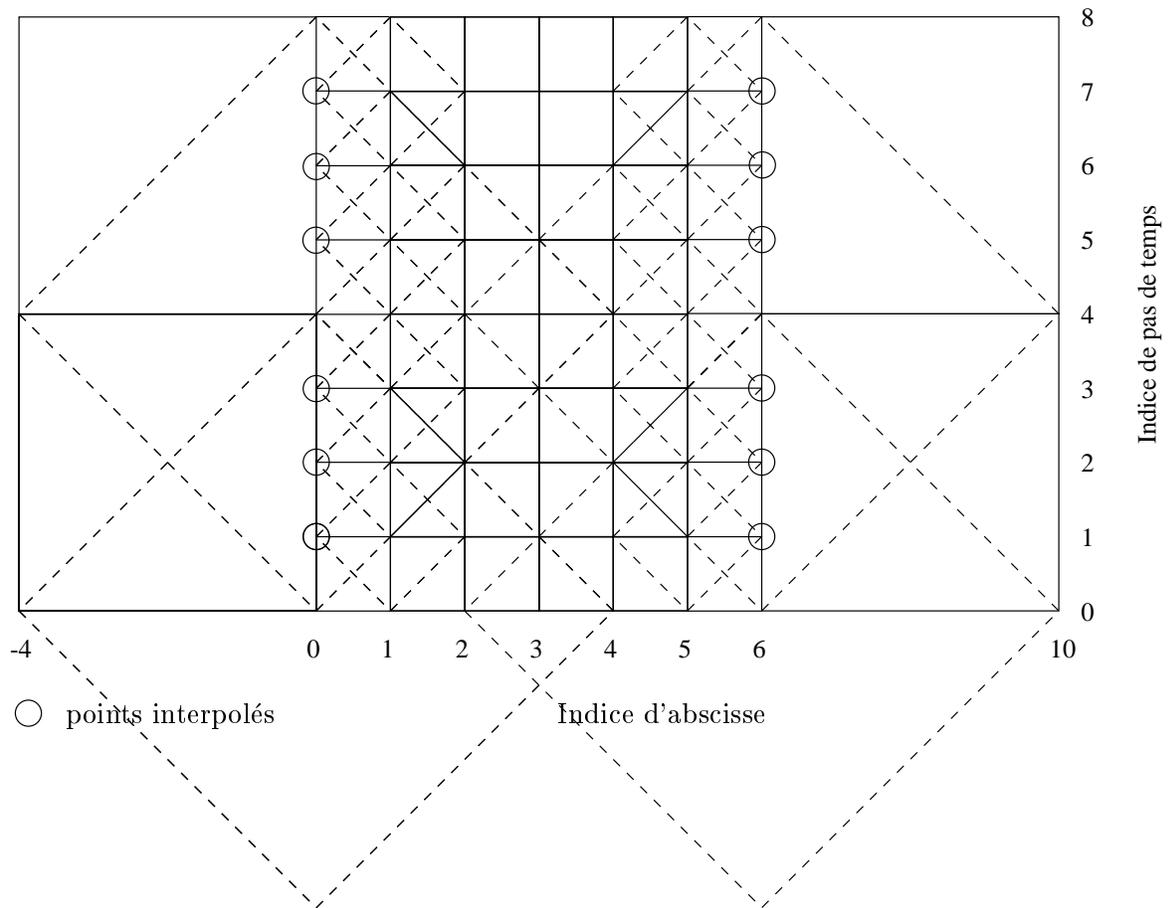
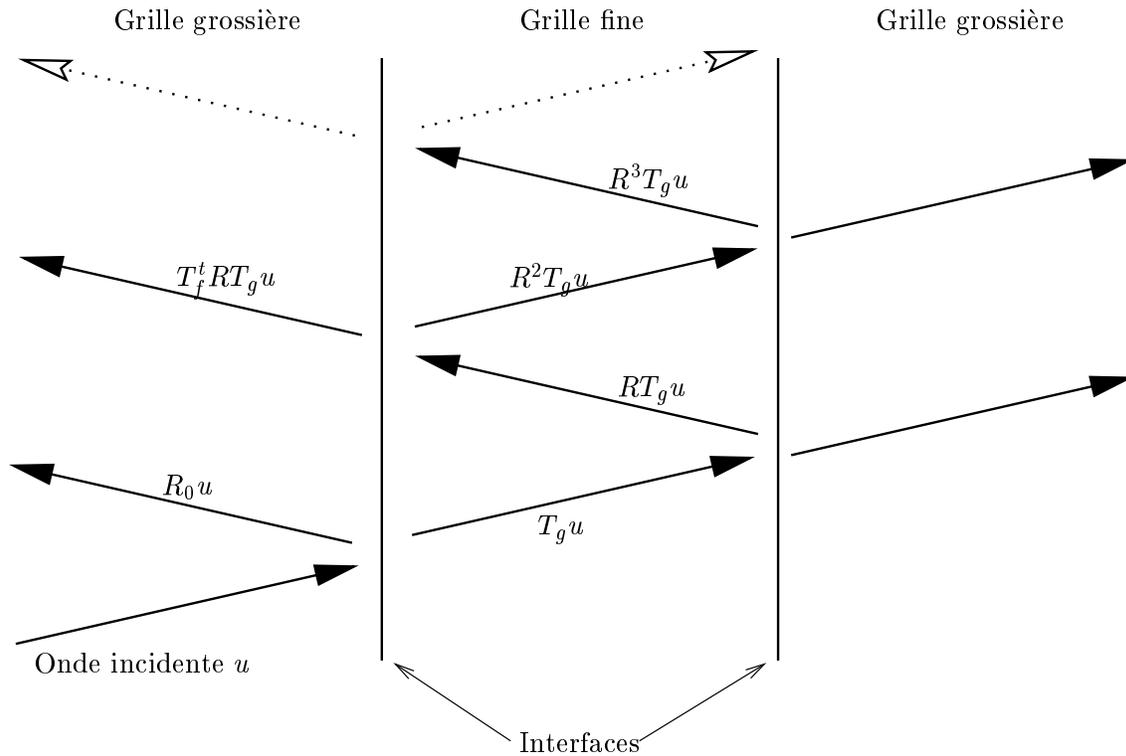


FIG. 4.1 – Exemple de bande 1/4/1



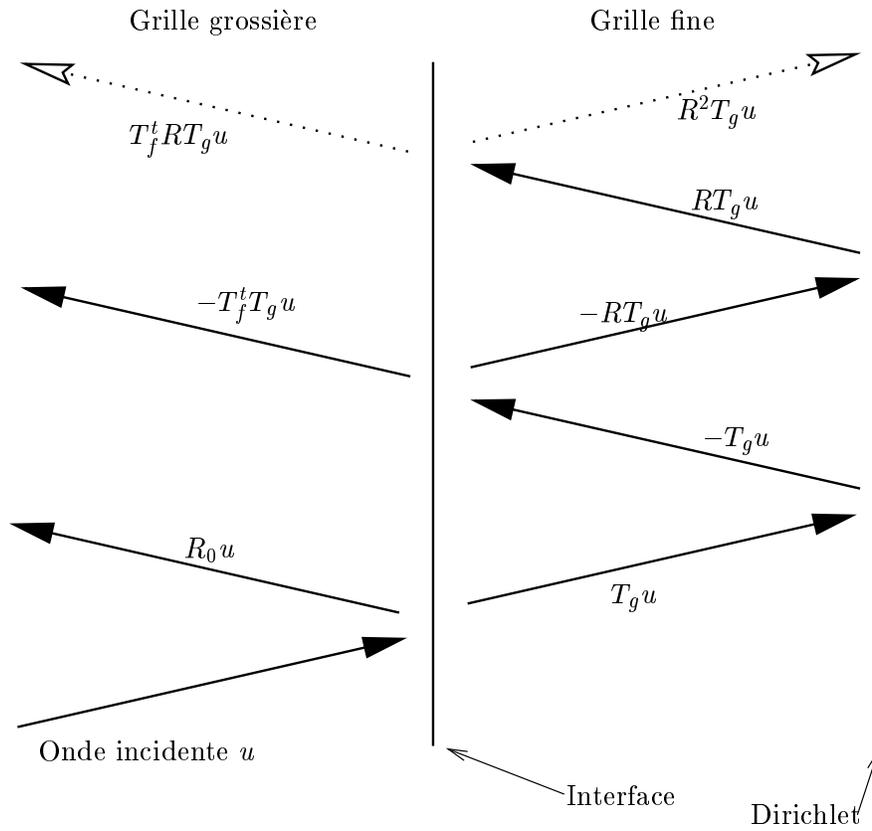
$T_g$ : Vecteur des coefficients de transmission grossier - fin

$R_0$ : Coefficient de réflexion grossier - fin

$T_f$ : Vecteur de transmission fin - grossier

$R$ : Matrice de réflexion fin - grossier

FIG. 4.2 – schéma de réflexions multiples dans une bande



$T_g$  : Vecteur des coefficients de transmission grossier - fin

$R_0$  : Coefficient de réflexion grossier - fin

$T_f$  : Coefficient de transmission fin - grossier

$R$  : Matrice de réflexion fin - grossier

FIG. 4.3 – schéma de réflexions multiples dans une bande avec condition de Dirichlet

## 4.2 Rappel des solutions sous forme d'ondes planes.

Dans le précédent chapitre, nous avons démontré la stabilité et calculé les réflexions engendrées à l'interface par une méthode d'ondes planes d'un schéma de raffinement 1-n pour des ondes incidentes dans la grille grossière ou dans la grille fine. On distingue 2 cas.

**Cas d'une onde incidente dans la grille grossière.** Dans le premier cas, nous avons considéré une onde plane incidente dans la grille grossière de pulsation  $n\omega$ . L'onde incidente s'écrit

$$(4.1) \quad \begin{aligned} (u_{inc})_{nj}^{nk} &= r(n\omega)^j e^{in\omega k \Delta t} \\ &= e^{(ik_h(n\omega)j)} e^{in\omega k \Delta t} \end{aligned}$$

où  $k_h(n\omega)$  le nombre d'onde vérifie la relation de dispersion

$$(4.2) \quad \frac{2}{h} \sin\left(\frac{k_h h}{2}\right) = \frac{2}{\Delta t} \sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right)$$

et  $r(n\omega) = e^{(ik_h(n\omega))}$  est solution du polynôme caractéristique

$$(4.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} r^2(\omega) - 2A(\omega)r(\omega) + 1 = 0 \\ \text{avec } A(\omega) = 1 - 2\frac{h^2}{\Delta t^2} \sin^2\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right). \end{array} \right.$$

Cette onde incidente génère une onde réfléchie dans la grille grossière

$$(4.4) \quad U_{nj}^{nk} = R_0 r(n\omega)^{-j} e^{in\omega k \Delta t}$$

et  $n$  ondes transmises dans la grille fine

$$(4.5) \quad u_j^{nk+m} = \sum_{l=0}^{n-1} t_l^g r(\omega_l)^j z_l^m e^{ink\omega \Delta t}$$

où  $z_l = e^{i(\frac{2l\pi}{n} + \omega \Delta t)}$ .

Les coefficients  $R_0$  et  $(t_l^g)_{l=0, n-1}$  vérifient le système imposé par les conditions à l'interface

$$(4.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{l=0}^{n-1} t_l^g z_l^m = H_m (1 + R_0) \text{ pour } m = 0, n-1 \\ \sum_{l=0}^{n-1} r_l^n(\omega) t_l^g = r(n\omega) + r^{-1}(n\omega) R_0 \end{array} \right.$$

avec

$$(4.7) \quad H_m = \frac{n-m}{n} + e^{in\omega \Delta t} \frac{m}{n}$$

La résolution du système nous donne

$$(4.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_0 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} r_l^n(\omega) \hat{G}_l(\omega \Delta t) - r(n\omega)}{\frac{1}{r(n\omega)} - \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} r_l^n(\omega) \hat{G}_l(\omega \Delta t)} \\ t_l^g = \frac{1}{n} \left( 1 + \frac{\frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} r_l^n(\omega) \hat{G}_l(\omega \Delta t) - r(n\omega)}{\frac{1}{r(n\omega)} - \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} r_l^n(\omega) \hat{G}_l(\omega \Delta t)} \right) \hat{G}_l(\omega \Delta t) \end{array} \right.$$

où on a posé

$$\hat{G}_l(\omega \Delta t) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} H_m e^{-i \frac{2lm\pi}{n}} e^{-im\omega \Delta t} = \frac{1}{n^2} \frac{\sin^2\left(\frac{n\omega \Delta t}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\omega \Delta t}{2} + \frac{\pi l}{n}\right)}$$

**Cas d'une onde incidente dans la grille fine.** Dans le deuxième cas on considère une onde incidente dans la grille fine de pulsation  $\omega_q = \omega + \frac{2q\pi}{n\Delta t}$

$$(4.9) \quad (u_{inc})_j^{nk+m} = r(\omega_q)^{-j} z_q^m e^{ink\omega \Delta t}$$

elle génère une onde transmise dans la grille grossière

$$(4.10) \quad (u_g)_{nj}^{nk} = t_q^f r(n\omega)^{-j} e^{ink\omega \Delta t}$$

et  $n$  ondes réfléchies dans la grille fine

$$(4.11) \quad (u_f^{ref})_j^{nk+m} = \sum_{l=0}^{n-1} R(l, q) r(\omega_l)^j z_l^m e^{ink\omega \Delta t}$$

Les coefficients  $R(l, q)$  et  $t_q$  vérifient le système

$$(4.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} z_q^m + \sum_{l=0}^{n-1} R(l, q) z_l^m = t_q^f H_m \text{ pour } m = 0, n-1 \\ r\left(\omega + \frac{2q\pi}{n\Delta t}\right)^n + \sum_{l=0}^{n-1} R(l, q) r\left(\omega + \frac{\pi 2l}{n\Delta t}\right)^{-n} = t_q^f r(n\omega) \end{array} \right.$$

La résolution du système nous donne la transmission

$$(4.13) \quad t_q^f = \frac{r\left(\omega + \frac{2q\pi}{n\Delta t}\right)^{-n} - r\left(\omega + \frac{2q\pi}{n\Delta t}\right)^n}{r(n\omega)^{-1} - \sum_{l=0}^{n-1} \hat{G}_l(\omega \Delta t) r\left(\omega + \frac{\pi 2l}{n\Delta t}\right)^n}$$

et la matrice de réflexion

$$(4.14) \quad R(l, q) = \frac{r(\omega + \frac{\pi 2q}{n\Delta t})^{-n} - r(\omega + \frac{\pi 2q}{n\Delta t})^n}{r(n\omega)^{-1} - \sum_{p=0}^{n-1} \hat{G}_p(\omega\Delta t) r(\omega + \frac{\pi 2p}{n\Delta t})^n} \hat{G}_l(\omega\Delta t) - \delta_l^q$$

L'analyticité des coefficients  $R_0$ ,  $R$ ,  $t_p^g$  et  $t_q^f$  pour  $\Im(\omega) > 0$ , nous avait permis de démontrer la stabilité dans le cas d'une seule interface, pour deux milieux infinis.

Le cas d'une condition de Dirichlet ou Neumann dans la grille fine ou d'une bande raffinée relève d'une analyse plus fine.

### 4.3 Analyse de la bande raffinée.

#### 4.3.1 Analyse par ondes planes, expression de la solution.

Dans cette section nous calculons la solution ondes planes du schéma afin d'établir un critère de stabilité.

En plus des équations de raccord (3.3) et (3.5), la solution doit vérifier  $u_j^n = 0$  où  $J$  est le nombre de points dans la couche fine. Afin de ré-interpréter la solution du système avec condition de Dirichlet comme une somme de réflexions multiples, écrivons la solution du système complet sous la forme de séries. Dans la grille grossière, on cherche la solution sous la forme

$$U_{nj}^{nk} = r(n\omega)^j + R_0 r(n\omega)^{-j} + \left( \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} t_l^f \left( A^{t-1} T_g \right)_l (-r(\omega_l)^{2J}) \right) r(n\omega)^{-j} e^{i\omega nk\Delta t}$$

et dans la grille fine sous la forme

$$u_j^{nk+m} = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} \left( A^{t-1} T_g \right)_l \left( r(\omega_l)^j - r(\omega_l)^{2J-j} \right) z_l^m e^{i\omega nk\Delta t}$$

On a noté  $T_g = \begin{pmatrix} t_0^g \\ \vdots \\ t_{n-1}^g \end{pmatrix}$  et  $A$  est une matrice  $n \times n$  à définir. On verra dans la suite que

le bon choix pour  $A$  est  $A(p, l) = -R(p, l)r(\omega_l)^{2J}$ . Autrement dit,  $A$  s'interprétera comme le coefficient d'amplification de l'onde après un aller-retour dans la grille fine.

**Remarque 5** *On aurait bien sûr pu chercher les solutions dans chaque grille sans avoir recours à des sommes infinies. Par exemple on aurait pu poser  $U_{nj}^{nk} = K_1 r(n\omega)^j + K_2 r(n\omega)^{-j}$  et chercher les coefficients  $K_1$  et  $K_2$ , et agir de même dans la grille fine, les calculs seraient un peu plus compliqués. En cherchant la solution telle que nous la présentons nous bénéficions des résultats des calculs effectués dans le cas de deux grilles semi-infinies.*

Il est évident que  $u_j^l = 0$ , il nous reste donc à vérifier les conditions sur l'interface grille fine - grille grossière. Les conditions de raccords en  $j = 0$  et  $j = 1$ , nous donne

$$(4.15) \quad \begin{cases} u_0^{nk+m} = U_0^{nk} H_m \\ u_n^{nk} = U_n^{nk} \end{cases}$$

où  $H_m$  est défini par (4.7). Réécrivons  $u_j^{nk+m}$  sous la forme

$$u_j^{nk+m} = \sum_{l=0}^{n-1} \left( t_l^f r(\omega_l)^j + \sum_{t=1}^{\infty} (A^t T_g)_l r(\omega_l)^j - \sum_{t=1}^{\infty} (A^{t-1} T_g)_l r(\omega_l)^{2J-j} \right) z_l^m e^{i\omega_{nk}\Delta t}$$

Le système (4.6) nous permet alors d'éliminer les termes  $\sum_{l=0}^{n-1} t_l^f r(\omega_l)^j$  et  $r(n\omega)^j + R_0 r(n\omega)^{-j}$  dans le système (4.15). En posant  $\Psi = A^{t-1} T_g$ , l'égalité  $u_0^{nk+m} = U_0^{nk} H_m$  revient alors à résoudre pour  $m = 0, n-1$

$$\sum_{t=1}^{\infty} \left( \sum_{l=0}^{n-1} (A\Psi)_l z_l^m - \sum_{l=0}^{n-1} (\Psi)_l r(\omega_l)^{2J} z_l^m - \sum_{l=0}^{n-1} H_m t_l^f (\Psi)_l (-r(\omega_l)^{2J}) \right) = 0$$

$$\sum_{t=1}^{\infty} \left( \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n-1} A(l, p) \Psi_p z_l^m - \sum_{l=0}^{n-1} (\Psi)_l r(\omega_l)^{2J} z_l^m - \sum_{l=0}^{n-1} H_m t_l^f (\Psi)_l (-r(\omega_l)^{2J}) \right) = 0$$

En inter-changeant les noms d'indice  $p$  et  $l$  dans la double somme, l'équation devient

$$\sum_{t=1}^{\infty} \left( \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} A(p, l) \Psi_l z_p^m - \sum_{l=0}^{n-1} (\Psi)_l r(\omega_l)^{2J} z_l^m - \sum_{l=0}^{n-1} H_m t_l^f (\Psi)_l (-r(\omega_l)^{2J}) \right) = 0$$

puis en permutant les sommes sur  $l$  et  $p$

$$\sum_{t=1}^{\infty} \left( \sum_{l=0}^{n-1} \Psi_l \sum_{p=0}^{n-1} A(p, l) z_p^m - \sum_{l=0}^{n-1} (\Psi)_l r(\omega_l)^{2J} z_l^m - \sum_{l=0}^{n-1} H_m t_l^f (\Psi)_l (-r(\omega_l)^{2J}) \right) = 0$$

ainsi on doit avoir

$$\sum_{t=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} \Psi_l (-r(\omega_l)^{2J}) \left( \sum_{p=0}^{n-1} \frac{A(p, l)}{-r(\omega_l)^{2J}} z_p^m + z_l^m - H_m t_l^f \right) = 0$$

Or si l'on choisit  $A(p, l) = R(p, l)(-r(\omega_l)^{2J})$  les équations du système (4.12) nous montrent que  $\forall l = 0, n-1, \forall m = 0, n-1$ ,

$$(4.16) \quad \sum_{p=0}^{n-1} \frac{A(p, l)}{-r(\omega_l)^{2J}} z_p^m + z_l^m - H_m t_l^f = 0$$

Ainsi ce choix de  $A$  permet la vérification des conditions de raccord en  $j = 0$ . De la même façon, On montre que la condition de raccord en  $j=1$ , revient à vérifier

$$\sum_{t=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{n-1} \Psi_l (-r(\omega_l)^{2J}) \left( \sum_{p=0}^{n-1} \frac{A(p, l)}{-r(\omega_l)^{2J}} r(\omega_l)^n + r(\omega_l)^{-n} - t_l^f r(n\omega)^{-1} \right) = 0$$

La dernière équation du système (4.12) nous montre que pour le même choix de  $A$ ,  $\forall l = 0, n-1$ ,

$$\sum_{p=0}^{n-1} \frac{A(p, l)}{-r(\omega_l)^{2J}} r(\omega_l)^n + r(\omega_l)^{-n} - t_l^f r(n\omega)^{-1} = 0$$

On a donc trouvé toute une famille de solutions particulières qui vérifient les équations du schéma de la bande. Ces solutions s'interprètent comme des sommes infinies de réflexions. Dans la grille grossière la solution s'écrit alors

$$(4.17) \quad U_{nj}^{nk} = r(n\omega)^j + R_0 r(n\omega)^{-j} + \sum_{l=0}^{n-1} \left( t_l^f \left( \left( \sum_{t=1}^{\infty} A^{t-1} \right) T_g \right)_l (-r(\omega_l)^{2J}) \right) r(n\omega)^{-j} e^{i\omega nk \Delta t}$$

et dans la grille fine

$$(4.18) \quad u_j^{nk+m} = \sum_{l=0}^{n-1} \left( \sum_{t=1}^{\infty} \left( A^{t-1} \right) T_g \right)_l \left( r(\omega_l)^j - r(\omega_l)^{2J-j} \right) z_l^m e^{i\omega nk \Delta t}$$

avec  $A(p, l) = -R(p, l)r(\omega_l)^{2J}$ . Ce calcul de solutions ondes planes va nous permettre à l'aide de l'analyse de stabilité d'une interface seule (cf. 2.1) d'analyser celle de notre schéma dans le cas de la bande.

### 4.3.2 Interprétation de la solution ondes planes en terme de stabilité.

On peut ré-interpréter ces solutions en ondes planes pour  $\omega$  complexe avec  $\Im(\omega)$  suffisamment grande comme les coefficients de la transformée de Fourier-Laplace.

Ainsi on peut calculer la solution générale (notée  $v_g$  à gauche et  $v_f$  à droite) correspondant à une onde incidente de transformée de Laplace  $g(\omega \Delta t)$  en appliquant la transformée de Laplace inverse

$$(4.19) \quad \begin{cases} (v_g)_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\Delta t} + iA}^{\frac{\pi}{\Delta t} + iA} U_{nj}(\omega \Delta t) g(\omega \Delta t) d\omega \\ (v_f)_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\Delta t} + iA}^{\frac{\pi}{\Delta t} + iA} u_j(\omega \Delta t) g(\omega \Delta t) d\omega \end{cases}$$

On a montré dans le cas d'une seule interface (cf. 2.1), que l'analyticité des solutions ondes planes dans le demi-plan ( $\Im(\omega) > 0$ ) nous permettait de calculer la transformée inverse de Fourier Laplace sur l'axe réel par une d eformation de contour et donc de nous assurer de la stabilité du schéma. L'analyticité des coefficients  $R_0$ ,  $R$ ,  $t_p$  et  $T$  pour  $\Im(\omega) > 0$ , étant d emontr e, il reste à nous occuper de la série.

On remarque que la solution telle que donnée par (4.17) et (4.18) fait intervenir la matrice

$$(4.20) \quad M^J = \sum_{t=1}^{\infty} \left( A^{t-1} \right) (\omega)$$

où A est le produit de la matrice de réflexion définie en (4.14) par la matrice de propagation P définie par

$$(4.21) \quad P = \begin{pmatrix} -r(\omega)^{2J} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & -r\left(\omega + \frac{2l\pi}{n\Delta t}\right)^{2J} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -r\left(\omega + \frac{2(n-1)\pi}{n\Delta t}\right)^{2J} \end{pmatrix}$$

Lorsque  $\omega$  a une partie imaginaire grande et positive, il est facile de vérifier que  $\|A(\omega)\| < 1$  (lorsque  $\Im(\omega) \rightarrow +\infty$ , on a  $A(\omega) \rightarrow 0$ ). La série définie en (4.20) est alors normalement convergente et on peut substituer

$$(4.22) \quad M^J(\omega) = (I - A)^{-1}(\omega)$$

Lorsque l'on va déformer le contour pour se ramener à l'axe réel dans la formule de Laplace inverse, on peut tomber sur un éventuel  $\omega$  du demi plan complexe  $\Im(\omega) > 0$  tel que

$$\exists v \in \mathbb{C}^n / (I - A)v = 0$$

Dans ce cas, la formule des résidus va faire apparaître en plus de l'intégrale sur l'axe réel un terme de la forme  $(e^{\Im(\omega_0)\Delta t})^k$  qui explose exponentiellement avec  $k$ . Dans ce cas, nous reviendrons sur ce point mais il peut y avoir instabilité forte du schéma.

Notre étude de stabilité se réduit donc à chercher  $v \in \mathbb{C}^n$ , tel que  $(I - A)v = 0$ , soit  $v \in \mathbb{C}^n$  tel que  $(I - RP)v = 0$  autrement dit nous devons donc résoudre un problème aux valeurs propres.

Posons

$$\alpha_p = \hat{G}_p(\omega\Delta t)a_l = r\left(\omega + \frac{\pi 2l}{n\Delta t}\right)^{-n} - r\left(\omega + \frac{\pi 2l}{n\Delta t}\right)^n,$$

$$K = r(n\omega)^{-1} - \sum_{l=0}^{n-1} \hat{G}_l(\omega\Delta t)r\left(\omega + \frac{\pi 2l}{n\Delta t}\right)^n,$$

on a alors

$$R = \frac{1}{K}B - I$$

où

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_0 a_0 & \dots & \alpha_0 a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1} a_0 & \dots & \alpha_{n-1} a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$B$  possède une valeur propre nulle multiple (n-1 fois) associée aux vecteurs propres

$$\begin{pmatrix} \prod_{i \neq 0} a_i \\ \dots \\ \prod_{i \neq m} a_i e^{\frac{iml\pi}{n}} \\ \dots \\ \prod_{i \neq n-1} a_i e^{\frac{i(n-1)l\pi}{n}} \end{pmatrix} \text{ pour } l = 1, n-1$$

La dernière valeur propre de B est  $\sum_{l=0}^{n-1} a_l \alpha_l$  associée au vecteur propre  $\begin{pmatrix} \hat{G}_0(\omega\Delta t) \\ \dots \\ \hat{G}_p(\omega\Delta t) \\ \dots \\ \hat{G}_{n-1}(\omega\Delta t) \end{pmatrix}$

Cherchons à résoudre  $(I - RP)v = 0$ . On a

$$\begin{aligned} I - RP &= I - \left(\frac{1}{K}B - I\right)P \\ &= (I + P)(I - (I + P)^{-1}\frac{1}{K}BP) \\ &= (I + P)P^{-1}(P - P(I + P)^{-1}\frac{1}{K}BP) \\ &= (I + P)(I - P(I + P)^{-1}\frac{1}{K}B) \end{aligned}$$

Si  $\Im(\omega\Delta t) > 0$ ,  $|r(\omega + \frac{2il\pi}{n\Delta t})| < 1$ , donc  $I + P$  est inversible Il nous reste donc à résoudre

$$KX = P(I + P)^{-1}BX$$

Posons  $\Lambda = P(I + P)^{-1}$ . C'est une matrice diagonale ce qui simplifie le calcul des valeurs propres de  $\Lambda B$ .

$$\Lambda B = \begin{pmatrix} \alpha_0 \lambda_0 a_0 & \dots & \alpha_0 \lambda_0 a_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1} \lambda_{n-1} a_0 & \dots & \alpha_{n-1} \lambda_{n-1} a_{n-1} \end{pmatrix}$$

a pour valeurs propres 0 et  $\sum_0^{n-1} \alpha_l \lambda_l a_l$ . Les seules pulsations susceptibles de rendre  $I - RP$

non inversible pour  $\Im(\omega) > 0$  annulent donc  $\sum_{l=0}^{n-1} \alpha_l \lambda_l a_l - K$

Les pôles de la transformée de Fourier Laplace de la solution vérifient ainsi dans le demi plan  $\Im(\omega) > 0$

$$(4.23) \quad P(\omega\Delta t, J, \alpha) - 1 = 0$$

avec

$$P(\omega\Delta t, J, \alpha) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{\hat{G}_p(\omega\Delta t) \left( r(\omega + \frac{\pi 2p}{n\Delta t})^{-n} - r(\omega + \frac{\pi 2p}{n\Delta t})^n \right) \frac{-r(\omega + \frac{2p\pi}{n\Delta t})^{2J}}{1 - r(\omega + \frac{2p\pi}{n\Delta t})^{2J}}}{r(n\omega)^{-1} - \sum_{l=0}^{n-1} \hat{G}_l(\omega\Delta t) r(\omega + \frac{\pi 2l}{n\Delta t})^n}$$

Contrairement au cas de deux domaines infinis où la stabilité est assurée sous la condition C.F.L. usuelle, on voit donc que dans le cas d'une bande, une relation supplémentaire intervient pour l'étude de la stabilité. C'est cette relation qui fait toute la différence.

L'équation (4.23) est très difficile à résoudre analytiquement, nous allons donc tenter de caractériser l'éventuel pôle par des résolutions numériques.

La détection systématique de pôles s'est avérée délicate à cause des caractéristiques de  $P$ : même avec un point de départ proche de la solution de (4.23)(lorsqu'on la connaît déjà), la recherche de l'annulation de  $P$  par une méthode de Newton est très difficile, le bassin d'attraction étant très petit. Une méthode de minimisation de  $|P|^2$  s'est également avérée très souvent déficiente à cause de minima locaux très près de la solution.

La solution la plus adaptée a été de représenter les courbes de niveaux de  $\Re(P)$  et  $\Im(P)$  en fonction de  $\omega$  sur des grilles très fines.

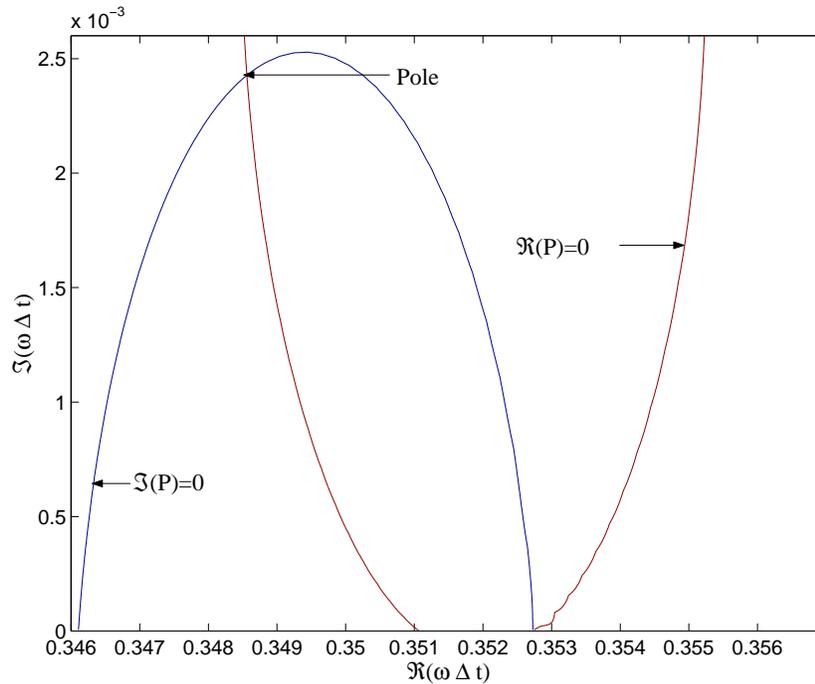


FIG. 4.4 – Courbes de niveaux de  $\Re(P)$  et  $\Im(P)$  en fonction de  $\omega\Delta t$

On a représenté sur la figure 4.4, les courbes de niveaux de  $\Re(P)$  et  $\Im(P)$  dans le cas du schéma 1-4, pour un nombre de Courant  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$  et une bande de 5 points. Une intersection de ces 2 courbes est remarquée au point  $\omega\Delta t = (0.349, 2.43 \cdot 10^{-3})$ , ce qui signifie une annulation de  $P$  et donc un pôle pour la solution. On peut cependant noter que la partie imaginaire de ce pôle est très petite, il se trouve donc très près de l'axe réel, cela montre qu'il faudra un grand nombre de pas de temps pour pouvoir déceler l'éventuelle instabilité.

Cette méthode nous a donc permis de mettre en évidence un pôle. Ce qui implique donc l'explosion exponentielle de la solution. Ce résultat est à comparer avec l'expérience numérique présentée figure (4.8). L'expérience numérique a également donné une explosion de la solution. La partie réelle de ce pôle correspond bien à la pulsation de l'onde numérique trouvée lors de l'explosion. On retrouve également numériquement la partie imaginaire du pôle comme étant la pente de la droite  $y = \log(|u(t)|)$ .

La preuve de l'explosion exponentielle dans ce cas ayant été faite, on peut vouloir chercher une nouvelle condition C.F.L. permettant d'éviter cette explosion. Nous nous sommes donc intéressés à l'évolution du pôle en fonction du nombre de Courant.

On représente figure 4.5 le déplacement du pôle du schéma 1-4 avec le nombre de Courant  $\alpha$  pour une longueur de bande de 5. Les flèches indiquent le sens de décroissance de  $\alpha$ . Le pôle a une partie imaginaire positive pour  $\alpha \in [0.42; 0.45] \cup [0.47; 0.796] \cup [0.8; 0.87]$ . Ce fractionnement du segment  $[0; 1]$  est assez surprenant. Cependant cette figure nous montre qu'il existe une plage de nombres de Courant pour lesquels on a explosion du schéma.

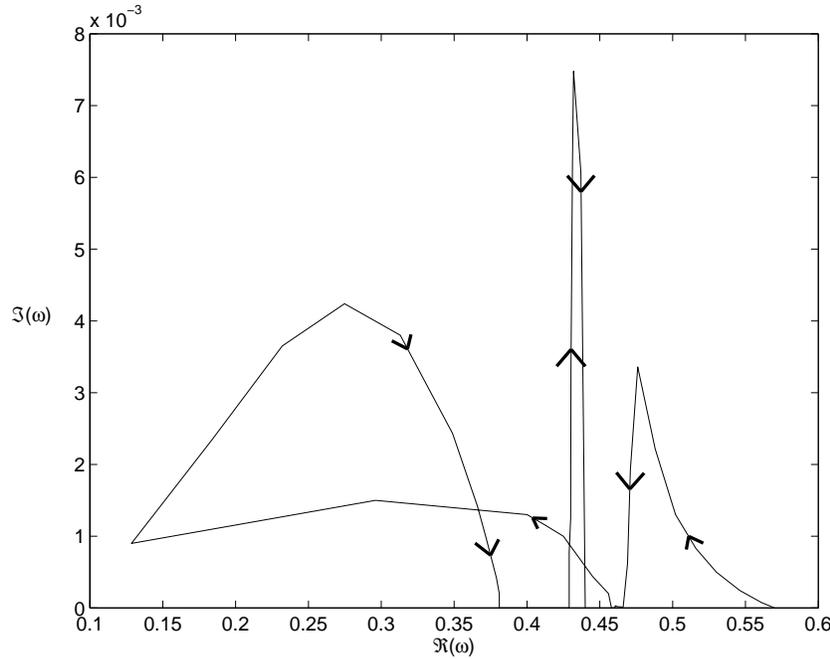


FIG. 4.5 – Évolution du pôle dans le demi-plan complexe ( $\Im\omega > 0$ ) lorsque  $\alpha$  diminue

### 4.3.3 Lien entre le pôle de la solution et la stabilité du schéma.

Jusqu'à présent, nous avons montré que l'existence d'un pôle de la transformée de Fourier-Laplace de la solution était synonyme d'une explosion exponentielle du schéma. Cette explosion est très gênante lors des simulations puisqu'elle interdit l'utilisation de ce type de schéma mais peut ne pas correspondre à un phénomène d'instabilité. Le raisonnement intuitif est simple. Puisque l'étude d'une seule interface a montré que la transition d'une grille à l'autre se faisait de manière stable, il est surprenant qu'en présence d'une bande raffinée, une instabilité apparaisse. Nous avons expliqué que l'explosion provenait des réflexions multiples dans la bande raffinée. Dans ce cas, en temps fini, le nombre de réflexions étant également finis, la solution devrait être bornée. Nous allons tenter de montrer que ce raisonnement est valide suivant le problème considéré.

Nous avons vu qu'un pôle en  $(\omega_p \Delta t)$  de la transformée de Fourier-Laplace de la solution engendrait une explosion en  $e^{\Im(\omega_p \Delta t)k}$  où  $k\Delta t = T$  est le temps de simulation. Il nous faut afin d'étudier la stabilité, savoir comment se comporte cette explosion lorsque  $\Delta t$  tend vers 0. On a vu que  $\omega_p \Delta t$  était solution d'une relation complexe (4.23) dépendant du rapport  $\alpha = \Delta t/h$  et de  $J$  le nombre de points dans la bande raffinée. Il nous faut maintenant étudier le comportement de  $\omega_p$  lorsque  $\Delta t$  tend vers 0 pour conclure. La conclusion va en fait dépendre du problème considéré. On peut en effet s'intéresser à deux problèmes différents. Le premier problème consiste à vouloir raffiner une bande de nombre de mailles  $J$  fixé alors que dans le deuxième problème on considère que c'est la longueur physique  $L = Jh$  qui est fixée. Nous allons voir que les résultats sont radicalement différents.

**Cas de la bande à nombre de mailles fixé.** Dans ce cas, lorsque  $\Delta t$  tend vers 0,  $J$  reste constant et la relation (4.23) qui ne dépend que des variables  $\omega\Delta t, J, \alpha$  admet toujours la même solution  $\omega_p\Delta t$  qui est donc une constante indépendante du pas de temps. On a dans ce cas instabilité, puisque

$$(4.24) \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( e^{\Im(\omega_p)k\Delta t} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( e^{\Im(\omega_p)\Delta t} \right)^k = \infty$$

**Cas de la bande de longueur physique fixée.** Il faut dans ce cas recourir à une analyse plus fine puisque lorsque  $\Delta t$  tend vers 0 à nombre de Courant et longueur de bande fixés,  $J$  tend vers  $\infty$ . Il nous faut alors étudier le comportement du pôle, plus exactement de sa partie imaginaire lorsque  $J \rightarrow \infty$ .

Notons

$$r_J^p(\omega) = r\left(\omega + \frac{2p\pi}{n\Delta t}\right)^{2J}$$

$$P_J(\omega) = P(\omega\Delta t, J, \alpha)$$

$$B_p(\omega) = \frac{\hat{G}_p(\omega\Delta t) \left( r\left(\omega + \frac{\pi 2p}{n\Delta t}\right)^{-n} - r\left(\omega + \frac{\pi 2p}{n\Delta t}\right)^n \right)}{r(n\omega)^{-1} - \sum_{l=0}^{n-1} \hat{G}_l(\omega\Delta t) r\left(\omega + \frac{\pi 2l}{n\Delta t}\right)^n}$$

Notons pour chaque  $J$ ,  $\omega_J$  la (ou une) solution si elle existe de

$$\sum_{p=0}^{n-1} B_p(\omega) \frac{r_J^p(\omega)}{1 - r_J^p(\omega)} - 1 = 0$$

On a  $|r_J^p(\omega)| < 1$ . Il existe donc une sous suite extraite  $r_{J_l}^p$  qui converge. Si la solution de la transformée de Fourier Laplace de la solution possède un pôle lorsque  $J \rightarrow \infty$ , cela signifie qu'il existe des sous suites  $r_{J_l}^p, P_{J_l}$  extraites de  $r_J^p, P_J$  telles que la relation  $P_{J_l} - 1 = 0$  tende vers une équation limite et que cette équation limite possède au moins une solution.

Supposons que  $\omega_{J_l} = \frac{a_{J_l}}{\Delta t} + i \frac{\eta_{J_l}}{\Delta t} + d_{J_l}$ , avec  $d_{J_l} \in \mathbb{C}$ , de partie imaginaire positive et  $|d|$  borné. Afin d'alléger l'écriture, dans la suite nous omettrons les indices  $J_l$ . Nous allons montrer que  $\eta$  tend vers 0 lorsque  $J_l$  tend vers l'infini. En effet, supposons  $\eta \not\rightarrow_{J_l \rightarrow \infty} 0$ , alors

$$\forall p \ 0 \leq p \leq n-1, \quad \forall J_l, \quad \left| r\left(\omega_{J_l} + \frac{2p\pi}{n\Delta t}\right) \right| < 1$$

et donc

$$\forall p \ 0 \leq p \leq n-1, \quad \lim_{J_l \rightarrow \infty} r_{J_l}^p(\omega_{J_l}) = 0.$$

L'équation limite aboutirait alors à  $-1 = 0$  et il n'y aurait pas de pôle. On a donc nécessairement  $\eta \rightarrow 0$ .

Faisons maintenant un développement limité de  $r_{J_l}^p(\omega_{J_l})^{2J}$  lorsque  $J_l$  tend vers  $\infty$ . Rappelons que

$$r(\omega) = A(\omega) - A(\omega) \sqrt{1 - \frac{1}{A^2(\omega)}}$$

avec  $A(\omega) = 1 - 2\frac{h^2}{\Delta t^2} \sin^2\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)$ . On a vu, section 2.1.2, que

$$A\left(\omega_r + \frac{2p\pi}{n\Delta t} + \frac{\epsilon}{\Delta t}\right) \approx_{\epsilon \rightarrow 0} A\left(\omega_r + \frac{2p\pi}{n\Delta t}\right) + i\epsilon \left(\sin\left(\omega_r\Delta t + \frac{2p\pi}{n\Delta t}\right)\right),$$

ainsi

$$r\left(\frac{a}{\Delta t} + \frac{2p\pi}{n\Delta t} + i\frac{\eta}{\Delta t} + d\right) \approx_{J \rightarrow \infty} r\left(\frac{a}{\Delta t} + \frac{2p\pi}{n\Delta t}\right) + ir'\left(\omega_r + \frac{2p\pi}{n\Delta t}\right)\eta + r'\left(\omega_r + \frac{2p\pi}{n\Delta t}\right)d\Delta t.$$

où l'on a noté  $r'(\omega) = \frac{dr(\omega)}{d\omega\Delta t}$ .

On remarque que  $r'(\omega)$  n'est pas défini pour  $|\omega| = \frac{\tau_\alpha}{\Delta t}$  et  $\omega = 0$ , car dans ces cas,  $|A(\omega)| = 1$ . Donc sauf ces valeurs particulières que nous étudions plus loin, on a

$$\begin{aligned} r\left(\frac{a}{\Delta t} + \frac{2p\pi}{n\Delta t} + i\frac{\eta}{\Delta t} + d\right)^{2J} &\approx_{J \rightarrow \infty} \left(r\left(\frac{a}{\Delta t} + \frac{2p\pi}{n\Delta t}\right)^{2J} + (d\Delta t + i\eta)r'\left(\frac{a}{\Delta t} + \frac{2p\pi}{n\Delta t}\right)\right)^{2J} \\ &\approx_{J \rightarrow \infty} e^{2J \log\left(r\left(\frac{a}{\Delta t} + \frac{2p\pi}{n\Delta t}\right)\left(1 + (d\Delta t + i\eta)\frac{r'\left(\frac{a}{\Delta t} + \frac{2p\pi}{n\Delta t}\right)}{r\left(\frac{a}{\Delta t} + \frac{2p\pi}{n\Delta t}\right)}\right)} \end{aligned}$$

Posons  $Q_p(\omega) = \frac{r'\left(\frac{a}{\Delta t} + \frac{2p\pi}{n\Delta t}\right)}{r\left(\frac{a}{\Delta t} + \frac{2p\pi}{n\Delta t}\right)}$

$$r\left(\frac{a}{\Delta t} + \frac{2p\pi}{n\Delta t} + i\frac{\eta}{\Delta t} + d\right)^{2J} \approx_{J \rightarrow \infty} r\left(\frac{a}{\Delta t} + \frac{2p\pi}{n\Delta t}\right)^{2J} e^{2J(d\Delta t + i\eta)Q_p(\omega)}$$

Comme  $J = \frac{L}{h} = \frac{L\alpha}{\Delta t}$

$$r\left(\frac{a}{\Delta t} + \frac{2p\pi}{n\Delta t} + i\frac{\eta}{\Delta t} + d\right)^{2J} \approx_{J \rightarrow \infty} r\left(\frac{a}{\Delta t} + \frac{2p\pi}{n\Delta t}\right)^{2J} e^{2L\alpha Q_p(\omega)} d e^{i2L\alpha Q_p(\omega)\frac{\eta}{\Delta t}}$$

Comme nous le verrons plus loin, pour que l'équation limite ait une solution, il est nécessaire d'avoir  $|r\left(\frac{a}{\Delta t} + \frac{2p\pi}{n\Delta t}\right)| = 1$ . Ceci n'est possible que si (cf. section 2.1.2)

$$\frac{-\tau_\alpha}{\Delta t} \leq \frac{a}{\Delta t} + \frac{2p\pi}{n\Delta t} \leq \frac{\tau_\alpha}{\Delta t}$$

avec  $\tau_\alpha = 2a\sin\frac{\Delta t}{h}$ .

Calculons maintenant  $Q_0(\omega)$  avec  $\omega \in ]\frac{-\tau_\alpha}{\Delta t}, 0[ \cup ]0, \frac{\tau_\alpha}{\Delta t}[$ . Commençons par le cas où  $\omega > 0$ . On a dans ce cas

$$r(\omega) = A(\omega) + i\sqrt{1 - A^2(\omega)}$$

avec

$$\begin{aligned} A(\omega) &= 1 - 2\frac{h^2}{\Delta t^2} \sin^2\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) \\ r'(\omega) &= A'(\omega) - \frac{iA(\omega)A'(\omega)}{\sqrt{1 - A^2(\omega)}} \\ &= \frac{A'(\omega)}{\sqrt{1 - A^2(\omega)}} (\sqrt{1 - A^2(\omega)} - iA(\omega)) \\ &= -i\frac{A'(\omega)}{\sqrt{1 - A^2(\omega)}} (i\sqrt{1 - A^2(\omega)} + A(\omega)) \end{aligned}$$

Ainsi

$$Q_0(\omega) = \frac{r'(\omega)}{r(\omega)} = -i \frac{A'(\omega)}{\sqrt{1-A^2(\omega)}}$$

avec

$$A'(\omega) = -1 \frac{1}{\alpha^2} \sin(\omega \Delta t) < 0$$

et donc si  $\omega > 0$ ,  $Q_0(\omega) = ib_0(\omega)$  avec  $b_0(\omega) > 0$ .

Si  $\omega < 0$ ,

$$\begin{aligned} r(\omega) &= A(\omega) - i\sqrt{1-A^2(\omega)} \\ r'(\omega) &= A'(\omega) + \frac{iA(\omega)A'(\omega)}{\sqrt{1-A^2(\omega)}} \\ &= \frac{A'(\omega)}{\sqrt{1-A^2(\omega)}} (\sqrt{1-A^2(\omega)} + iA(\omega)) \\ &= \frac{iA'(\omega)}{\sqrt{1-A^2(\omega)}} (A(\omega) - i\sqrt{1-A^2(\omega)}), \end{aligned}$$

et donc,

$$Q_0(\omega) = \frac{iA'(\omega)}{\sqrt{1-A^2(\omega)}}$$

Ici  $A'(\omega) > 0$ , on a donc

$$Q_0(\omega) = ib_0(\omega) \text{ avec } b_0(\omega) > 0$$

Dans le cas où  $\omega = 0$ , on peut dans ce cas définir  $b_0(\omega)$  par continuité. En effet,

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \frac{-iA'(\omega)}{\sqrt{1-A^2(\omega)}} = \lim_{\omega \rightarrow 0^-} \frac{iA'(\omega)}{\sqrt{1-A^2(\omega)}} = \alpha,$$

on a donc  $b_0(0) = \alpha$

On a donc  $\forall \omega \in ]\frac{-\tau_\alpha}{\Delta t}, \frac{\tau_\alpha}{\Delta t}]$ ,  $Q_0(\omega) = ib_0(\omega)$  avec  $b_0(\omega) > 0$ . Dans la suite nous noterons  $b_p(\omega) = b_0(\omega + \frac{2p\pi}{n\Delta t}) = \Im(Q_p(\omega))$ . Ainsi

$$r(\frac{a}{\Delta t} + \frac{2p\pi}{n\Delta t} + i\frac{\eta}{\Delta t} + d)^{2J} \approx_{J \rightarrow \infty} r(\frac{a}{\Delta t} + \frac{2p\pi}{n\Delta t})^{2J} e^{iB_p(\omega)} e^{-C_p(\omega)}$$

avec

$$\begin{aligned} d &= d_r + id_I \\ B_p(\omega) &= 2Ld_r \alpha b_p(\omega) \\ C_p(\omega) &= 2L \alpha b_p(\omega) (d_I + \frac{\eta}{\Delta t}) \end{aligned}$$

$d_r$  et  $d_I$  sont des quantités bornées. En dehors des voisinages de  $\frac{-\tau_\alpha}{\Delta t}$ ,  $\frac{\tau_\alpha}{\Delta t}$  que nous étudions plus loin  $b_p(\omega)$  est également bornée.

Afin, que  $r(\omega_J)^{2J}$  ne tende pas vers 0 avec  $\Delta t$ , et que l'équation limite puisse avoir une solution il est donc nécessaire que

$$(4.25) \quad \begin{cases} |r(\frac{a}{\Delta t} + \frac{2p\pi}{n\Delta t})| = 1 \\ \eta \leq C\Delta t \end{cases}$$

Finalement, si pôle il y a lorsque  $\Delta t$  tend vers 0, il est de la forme

$$\omega_J = \frac{a}{\Delta t} + i\mu + d + iO(\Delta t)$$

avec  $\mu \in \mathbb{R}^+$  borné et  $a, d$  deux réels quelconque. L'équation limite de la sous suite extraite  $P_{J_l}$  vérifiée par le pôle est alors de la forme

$$(4.26) \quad \sum_{p \in \mathcal{P}} \hat{G}_p(a) \left( r\left(\frac{a}{\Delta t} + \frac{2p\pi}{n\Delta t}\right)^{-n} - r\left(\frac{a}{\Delta t} + \frac{2p\pi}{n\Delta t}\right)^n \right) \frac{e^{i\theta_p^l} e^{-\mu L b_p(\frac{a}{\Delta t})\alpha}}{1 - e^{i\theta_p^l} e^{-\mu L \alpha b_p(\frac{a}{\Delta t})}} = r\left(n\frac{a}{\Delta t}\right)^{-1} - \sum_{l=0}^{n-1} \hat{G}_l(a) r\left(\frac{a}{\Delta t} + \frac{\pi 2l}{n\Delta t}\right)^n$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \{p, 0 \leq p \leq n-1, |r\left(\frac{a}{\Delta t} + \frac{2p\pi}{n\Delta t}\right)| = 1\} \\ e^{i\theta_p^l} &= e^{i d L \alpha b_p(\frac{a}{\Delta t})} e^{i\theta_0^l} \\ e^{i\theta_0^l} &= \lim_{J_l \rightarrow \infty} r\left(\frac{a}{\Delta t_l} + \frac{2p\pi}{n\Delta t_l}\right)^{2J_l} \end{aligned}$$

En posant  $\mu_0 = \mu L \alpha$ , on peut écrire,

$$(4.27) \quad \sum_{p \in \mathcal{P}} \hat{G}_p(a) \left( r\left(\frac{a}{\Delta t} + \frac{2p\pi}{n\Delta t}\right)^{-n} - r\left(\frac{a}{\Delta t} + \frac{2p\pi}{n\Delta t}\right)^n \right) \frac{e^{i\theta_p} e^{-\mu_0 b_p(\frac{a}{\Delta t})}}{1 - e^{i\theta_p} e^{-\mu_0 b_p(\frac{a}{\Delta t})}} = r\left(n\frac{a}{\Delta t}\right)^{-1} - \sum_{l=0}^{n-1} \hat{G}_l(a) r\left(\frac{a}{\Delta t} + \frac{\pi 2l}{n\Delta t}\right)^n$$

dont la solution s'écrit

$$\omega = \frac{a}{\Delta t} + i\frac{\mu_0}{L\alpha} + d_r$$

Nous pouvons maintenant expliciter l'explosion dont nous avons parlé dans le cas d'un pôle. Nous avons vu que pour une longueur de bande  $J$ , la solution avait un comportement en  $e^{k\mathfrak{S}(\omega_J)\Delta t}$ , avec  $\mathfrak{S}(\omega_J) > 0$ . Nous pouvons maintenant écrire lorsque  $J \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} e^{k\mathfrak{S}(\omega_J)\Delta t} &\approx e^{k\frac{\mu_0}{L\alpha}\Delta t} \\ &\approx e^{\frac{\mu_0 T}{L\alpha}} \end{aligned}$$

La solution est donc bornée par une constante indépendante des pas de discrétisation, seul le rapport  $\alpha$  et les paramètres physiques  $T$  et  $L$  interviennent, on a donc stabilité. Toutefois, cette constante augmente exponentiellement avec le temps de simulation et diminue avec la longueur de la bande. On retrouve le résultat intuitif qui est que l'explosion dépend du nombre d'aller-retour dans la bande raffinée durant le temps de simulation. Ce nombre dépend bien évidemment du rapport  $T/L$ .

**Cas où  $r'(\omega)$  n'est pas défini** Dans le cas où  $\omega = \pm \frac{\tau_\alpha}{\Delta t}$ ,  $r'(\omega)$  n'est pas défini, néanmoins on peut tout de même faire un développement limité au voisinage de ces deux valeurs critiques, tout en restant dans l'intervalle  $[-\frac{\tau_\alpha}{\Delta t}, \frac{\tau_\alpha}{\Delta t}]$ . En supposant que le pôle s'écrive  $\omega_J = \frac{\tau_\alpha}{\Delta t} - \eta$

avec  $\eta$  complexe de partie imaginaire positive, et de partie réelle positive, on écrit ( $A'(\omega)$  est définie).

$$\begin{aligned} A\left(\frac{\tau_\alpha}{\Delta t} - \eta\right) &\approx_{\eta\Delta t \rightarrow 0} A\left(\frac{\tau_\alpha}{\Delta t}\right) - \eta A'\left(\frac{\tau_\alpha}{\Delta t}\right) \\ &\approx_{\eta\Delta t \rightarrow 0} -1 + \eta C \Delta t \end{aligned}$$

avec

$$C = 2 \sin(\text{asin}\alpha) \cos(\text{asin}\alpha) > 0$$

or  $r\left(\frac{\tau_\alpha}{\Delta t} - \eta\right)$  est défini par

$$r\left(\frac{\tau_\alpha}{\Delta t} - \eta\right)^2 + 1 = 2A\left(\frac{\tau_\alpha}{\Delta t} - \eta\right)r\left(\frac{\tau_\alpha}{\Delta t} - \eta\right)$$

Soit

$$\left(r\left(\frac{\tau_\alpha}{\Delta t} - \eta\right) + 1\right)^2 \approx 2\eta C r\left(\frac{\tau_\alpha}{\Delta t} - \eta\right).$$

Comme  $r\left(\frac{\tau_\alpha}{\Delta t} - \eta\right) \approx -1$ ,

$$\begin{aligned} \left(r\left(\frac{\tau_\alpha}{\Delta t} - \eta\right) + 1\right)^2 &\approx -2\eta\Delta t C \\ &\approx -2\Delta t \rho e^{i\theta} C \\ &\approx 2\Delta t \rho e^{i(\theta+\pi)} C \end{aligned}$$

avec  $\eta = \rho e^{i\theta}$ . Donc d'après la définition de la racine carrée choisie (2.1.2), on peut alors écrire

$$r\left(\frac{\tau_\alpha}{\Delta t} - \eta\right) \approx_{\eta\Delta t \rightarrow 0} -1 + i(\sqrt{2\rho\Delta t C} e^{i\frac{\theta+\pi}{2}}).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} r\left(\frac{\tau_\alpha}{\Delta t} - \eta\right)^{2J} &\approx_{J \rightarrow \infty} e^{-2J\sqrt{2\rho\Delta t C} e^{i\frac{\theta+\pi}{2}}} \\ &\approx_{J \rightarrow \infty} e^{-2J\sqrt{2\rho\Delta t C}(\sin(\frac{\theta}{2}) + i \cos(\frac{\theta}{2}))} \end{aligned}$$

Soit, comme  $J = \frac{L\alpha}{\Delta t}$

$$r\left(\frac{\tau_\alpha}{\Delta t} - \eta\right)^{2J} \approx_{\Delta t \rightarrow 0} e^{-2\frac{L\alpha}{\sqrt{\Delta t}}\sqrt{2\rho C}(\sin(\frac{\theta}{2}) + i \cos(\frac{\theta}{2}))}$$

Afin que  $r\left(\frac{\tau_\alpha}{\Delta t} - \eta\right)^{2J}$  ne tende pas vers 0, il est donc nécessaire d'avoir

$$\sqrt{2\rho C} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \leq C^{ste} \sqrt{\Delta t}$$

et donc

$$\Im(\eta) = O(\sqrt{\Delta t})$$

On peut agir de même en  $\frac{-\tau_\alpha}{\Delta t}$ , en supposant que  $\omega_J = \frac{-\tau_\alpha}{\Delta t} + \eta$  avec  $\eta$  complexe de partie imaginaire positive, et de partie réelle positive, on peut écrire

$$A\left(\frac{-\tau_\alpha}{\Delta t} + \eta\right) \approx_{\eta\Delta t \rightarrow 0} -1 + \eta\Delta t C$$

avec

$$C = -\sin(-\text{asin}\alpha) \cos(\text{asin}\alpha) > 0$$

et

$$r\left(\frac{-\tau_\alpha}{\Delta t} + \eta\right)^{2J} \approx_{J \rightarrow \infty} -1 + i(\sqrt{2\rho\Delta t C} e^{i\frac{\theta+\pi}{2}}).$$

On trouve également

$$\Im(\eta) = O(\sqrt{\Delta t})$$

On a donc dans ces deux cas critiques un pôle s'écrivant

$$\omega_J = \frac{\pm\tau_\alpha}{\Delta t} + i\mu\sqrt{\Delta t} + d$$

avec  $\Re(d)$  bornée et  $\Im(d) = O(\Delta t)$ , soit en posant  $\mu_0 = \mu L\alpha$

$$\omega_J = \frac{\pm\tau_\alpha}{\Delta t} + i\frac{\mu_0}{L\alpha}\sqrt{\Delta t} + d$$

Ce pôle vérifie l'équation

$$(4.28) \quad \sum_{p \in \mathcal{P}} \hat{G}_p(\tau_\alpha) \left( r\left(\frac{\tau_\alpha}{\Delta t} + \frac{2p\pi}{n\Delta t}\right)^{-n} - r\left(\frac{\tau_\alpha}{\Delta t} + \frac{2p\pi}{n\Delta t}\right)^n \right) \frac{e^{i\theta_p} e^{-\mu_0 K}}{1 - e^{i\theta_p} e^{-\mu_0 K}} =$$

$$r\left(n\frac{\tau_\alpha}{\Delta t}\right)^{-1} - \sum_{l=0}^{n-1} \hat{G}_l(\tau_\alpha) r\left(\frac{\tau_\alpha}{\Delta t} + \frac{\pi 2l}{n\Delta t}\right)^n$$

où  $K$  et  $\theta_p$  sont des constantes

On résume tout ceci dans le

**Théorème 1** *Si la transformée de Fourier de Laplace de la solution possède un pôle  $\omega_p$  lorsque  $\Delta t \rightarrow 0$ , il vérifie l'équation*

$$(4.29) \quad \sum_{p \in \mathcal{P}} \hat{G}_p(\omega_p) \left( r\left(\omega_p + \frac{2p\pi}{n\Delta t}\right)^{-n} - r\left(\omega_p + \frac{2p\pi}{n\Delta t}\right)^n \right) \frac{e^{i\theta_p} e^{-\mu_0 K}}{1 - e^{i\theta_p} e^{-\mu_0 K}} =$$

$$r(n\omega_p)^{-1} - \sum_{l=0}^{n-1} \hat{G}_l(\omega_p) r\left(\omega_p + \frac{\pi 2l}{n\Delta t}\right)^n$$

avec

- $\Im(\omega_p)$  bornée si  $|\Re(\omega_p)| \neq \frac{2a \sin(\alpha)}{\Delta t}$
- $\Im(\omega_p) = O(\sqrt{\Delta t})$  si  $|\Re(\omega_p)| = \frac{2a \sin(\alpha)}{\Delta t}$

**Corollaire 1** *L'explosion de la solution est bornée par une constante dépendant du rapport  $\frac{T}{L}$*

- $|u_j^k| \leq C_1(\alpha) e^{\mu_0 \frac{T}{L}}$  si la fréquence de l'explosion est différente de  $\frac{2a \sin(\alpha)}{\Delta t}$
- $|u_j^k| \leq C_2(\alpha) e^{\mu_0 \sqrt{\Delta t} \frac{T}{L}}$  si la fréquence de l'explosion est égale à  $\frac{2a \sin(\alpha)}{\Delta t}$

avec  $\mu_0 \in \mathbb{R}^+$  et  $C(\alpha)$  une constante ne dépendant que du rapport  $\frac{\Delta t}{h}$  et des conditions initiales.

#### 4.3.4 Cas de l'onde parasite évanescence pour un raffinement 1-2.

Nous étudions dans cette section les solutions de (4.23) pour un raffinement 1-2, dans le cas où l'onde parasite est évanescence. C'est à dire que si  $\omega \in [\frac{-\pi}{2\Delta t}, \frac{\pi}{2\Delta t}]$  est la pulsation de l'onde incidente,  $|r(\omega + \frac{\pi}{\Delta t})| < 1$ . Pour que ceci soit vrai quelque soit  $\omega$ , ceci est équivalent à prendre  $\alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

En effet,  $\forall \omega \in [\frac{-\pi}{2\Delta t}, \frac{\pi}{2\Delta t}]$ ,  $|\omega + \frac{\pi}{\Delta t}| > \frac{\pi}{2\Delta t}$ , de plus pour que  $\omega + \frac{\pi}{\Delta t}$  corresponde à une onde évanescence cela signifie que  $|\omega + \frac{\pi}{\Delta t}| > \frac{2}{\Delta t} \text{asin}(\alpha)$ . On doit donc avoir

$$2\text{asin}(\alpha) < \frac{\pi}{2}$$

soit

$$(4.30) \quad \frac{\Delta t}{h} < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Nous allons voir que cette restriction, permet d'assurer que la transformée de Fourier Laplace de la solution n'a pas de pôle et qu'il n'y a donc pas explosion exponentielle de la solution.

La relation (4.23) dans le cas  $n = 2$  s'écrit

$$(4.31) \quad \frac{\hat{G}_0(\omega\Delta t) (r^{-2} - r^2) \frac{r^{2J}}{1-r^{2J}} + \hat{G}_1(\omega\Delta t) (r_*^{-2} - r_*^2) \frac{r_*^{2J}}{1-r_*^{2J}}}{R^{-1} - \hat{G}_0(\omega\Delta t)r^2 - \hat{G}_1(\omega\Delta t)r_*^2} = 1$$

où

$$(4.32) \quad \begin{aligned} r &= r(\omega) & \hat{G}_0(\omega\Delta t) &= \frac{1 \sin^2(\omega\Delta t)}{4 \sin^2(\frac{\omega\Delta t}{2})} = \cos^2(\frac{\omega\Delta t}{2}) \\ r_* &= r(\omega + \frac{\pi}{\Delta t}) & \hat{G}_1(\omega\Delta t) &= \frac{1 \sin^2(\omega\Delta t)}{4 \sin^2(\frac{\omega\Delta t}{2} + \pi)} = \sin^2(\frac{\omega\Delta t}{2}) \\ R &= r(2\omega) \end{aligned}$$

Conformément à ce que nous avons vu à la section précédente, on peut supposer que si l'équation (4.31) possède une solution pour une sous-suite extraite  $J_l$ , on a  $\omega_{J_l} \rightarrow a \in \mathbb{R}$  tel que  $r(a) = e^{i\gamma}$ ,  $\gamma$  réel et  $r^{2J_l} \rightarrow_{J_l \rightarrow \infty} \beta = e^{i\theta} e^q$ , avec  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $q \in \mathbb{R}^-$ . On a de plus  $r(a + \frac{\pi}{\Delta t}) = -b$ ,  $0 < b < 1$ , ce qui entraîne  $r_*^{2J_l} \rightarrow_{J_l \rightarrow \infty} 0$ .

L'équation limite s'écrit alors

$$(4.33) \quad \frac{\hat{G}_0(a\Delta t) (r^{-2} - r^2) \frac{\beta}{1-\beta}}{R^{-1} - \hat{G}_0(a\Delta t)r^2 - \hat{G}_1(a\Delta t)r_*^2} = 1$$

Soit

$$\left( \hat{G}_0(a\Delta t) (r^{-2} - r^2) + R^{-1} - \hat{G}_0(a\Delta t)r^2 - \hat{G}_1(a\Delta t)r_*^2 \right) \beta = R^{-1} - \hat{G}_0(a\Delta t)r^2 - \hat{G}_1(a\Delta t)r_*^2$$

Comme  $|\beta| < 1$ , on doit donc avoir

$$\left| \hat{G}_0(a\Delta t) (r^{-2} - r^2) + R^{-1} - \hat{G}_0(a\Delta t)r^2 - \hat{G}_1(a\Delta t)r_*^2 \right|^2 < \left| R^{-1} - \hat{G}_0(a\Delta t)r^2 - \hat{G}_1(a\Delta t)r_*^2 \right|^2$$

C'est-à-dire en notant  $\Phi = R^{-1} - \hat{G}_0(a\Delta t)r^2 - \hat{G}_1(a\Delta t)r_*^2$ ,

$$|\Phi + \hat{G}_0(a\Delta t)(r^{-2} - r^2)|^2 < |\Phi|^2$$

Comme  $r = e^{i\gamma}$ , on a  $r^{-2} - r^2 = -2i \sin(2\gamma)$  et donc

$$|\Phi + \hat{G}_0(a\Delta t)(r^{-2} - r^2)|^2 = |\Phi|^2 + 4 \cos^4\left(\frac{a\Delta t}{2}\right) \sin^2(2\gamma) - 4 \cos^2\left(\frac{a\Delta t}{2}\right) \sin(2\gamma) \Im(\Phi)$$

Ainsi la relation à vérifier est

$$(4.34) \quad \cos^4\left(\frac{a\Delta t}{2}\right) \sin^2(2\gamma) - \cos^2\left(\frac{a\Delta t}{2}\right) \sin(2\gamma) \Im(\Phi) < 0$$

Comme  $a\Delta t \leq 2\arcsin\alpha$  avec  $\alpha \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $a\Delta t < \pi$  et  $\cos\left(\frac{a\Delta t}{2}\right) \neq 0$ . On a donc

$$\cos^2\left(\frac{a\Delta t}{2}\right) \sin^2(2\gamma) - \Im(\Phi) \sin(2\gamma) < 0$$

soit comme  $\Phi = R^{-1} - \cos^2\left(\frac{a\Delta t}{2}\right)e^{i2\gamma} - b^2 \sin^2\left(\frac{a\Delta t}{2}\right)$

$$\Im(\Phi) = \Im(R^{-1}) - \cos^2\left(\frac{a\Delta t}{2}\right) \sin(\gamma)$$

On doit donc vérifier

$$2 \cos^2\left(\frac{a\Delta t}{2}\right) \sin^2(2\gamma) - \Im(R^{-1}) \sin(2\gamma) < 0$$

Maintenant comme  $\omega$  est réel,  $R$  est soit réel soit complexe de module 1. Si  $R$  est réel  $\Im(R^{-1}) = 0$  et l'équation n'a pas de solution. Si  $R$  est de la forme  $e^{i\lambda}$ , alors  $\Im(R^{-1}) = -\sin(\lambda)$

La relation devient donc simplement

$$2 \cos^2\left(\frac{a\Delta t}{2}\right) \sin^2(2\gamma) + \sin(\lambda) \sin(2\gamma) < 0$$

On doit donc nécessairement avoir  $\sin(\lambda) \sin(2\gamma) < 0$ . Nous allons montrer que ceci n'est pas possible car ces deux quantités sont de même signe.

Comme  $|r(a)| = 1$  et  $|r(2a)| = 1$ , on a  $-\tau_\alpha < a\Delta t < \tau_\alpha$  et  $-\tau_\alpha < 2a\Delta t < \tau_\alpha$ . De plus comme  $|r(a + \pi)| < 1$ , on a  $-\pi + \tau_\alpha < a\Delta t < \pi - \tau_\alpha$

Étudions tout d'abord le cas où  $2a\Delta t$  est positif. On a vu section 2.1.2 figure 2.3, que lorsque  $a\Delta t \in [0, \tau_\alpha]$ ,  $r = e^{i\gamma}$  avec  $\gamma$  fonction croissante de  $a$  variant entre 0 et  $\pi$ . Donc lorsque  $2a\Delta t$  décrit  $[0, \tau_\alpha]$ ,  $\lambda$  décrit  $[0, \pi]$  et  $\gamma$  décrit l'intervalle  $[0, \delta]$ . Nous allons déterminer ce  $\delta$ .

Pour poursuivre, rappelons que  $r(a)$  est solution de

$$r(a)^2 - 2\left(1 - \frac{2}{\alpha^2} \sin^2\left(\frac{a\Delta t}{2}\right)\right)r(a) + 1 = 0$$

Donc si  $r = e^{i\gamma}$

$$\begin{aligned} \frac{e^{i\gamma} + e^{-i\gamma}}{2} &= 1 - \frac{2}{\alpha^2} \sin^2\left(\frac{a\Delta t}{2}\right) \\ \cos(\gamma) &= 1 - \frac{2}{\alpha^2} \sin^2\left(\frac{a\Delta t}{2}\right) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\alpha^2 \sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) &= \sin^2\left(\frac{a\Delta t}{2}\right) \\ \alpha^2 \cos^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) &= \alpha^2 - \sin^2\left(\frac{a\Delta t}{2}\right)\end{aligned}$$

de même

$$r(2a) - 2\left(1 - \frac{2}{\alpha^2} \sin^2(a\Delta t)\right)r(2a) + 1 = 0$$

d'où comme  $R = e^{i\lambda}$

$$\begin{aligned}\cos(\lambda) &= 1 - \frac{2}{\alpha^2} \sin^2(a\Delta t) \\ \alpha^2 \sin^2\left(\frac{\lambda}{2}\right) &= \sin^2(a\Delta t) \\ \alpha^2 \cos^2\left(\frac{\lambda}{2}\right) &= \alpha^2 - \sin^2(a\Delta t)\end{aligned}$$

Posons donc  $\lambda = \pi$ , ceci est équivalent à  $2a\Delta t = 2\arcsin(\alpha)$ , et cherchons  $\gamma$ .

On sait donc que  $\cos(\gamma) = 1 - \frac{2}{\alpha^2} \sin^2\left(\frac{a\Delta t}{2}\right)$ , avec  $a$  vérifiant  $\sin(a\Delta t) = \alpha$ .

$$\begin{aligned}\sin^2(a\Delta t) &= \alpha^2 = 4 \sin^2\left(\frac{a\Delta t}{2}\right) \cos^2\left(\frac{a\Delta t}{2}\right) \\ &= 4 \sin^2\left(\frac{a\Delta t}{2}\right) (1 - \sin^2\left(\frac{a\Delta t}{2}\right))\end{aligned}$$

Posons  $X = \sin^2\left(\frac{a\Delta t}{2}\right)$  et résolvons

$$-4X^2 + 4X - \alpha^2 = 0$$

Les deux solutions sont

$$X = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \alpha^2}}{2}$$

or comme  $a\Delta t < \tau_\alpha$  et  $a\Delta t < \pi - \tau_\alpha$  on sait que  $a\Delta t < \frac{\pi}{2}$  et donc  $\sin^2\left(\frac{a\Delta t}{2}\right) < \frac{1}{2}$ . On peut donc choisir la solution qui est

$$\sin^2\left(\frac{a\Delta t}{2}\right) = \frac{1 - \sqrt{1 - \alpha^2}}{2}$$

Et donc

$$\cos(\gamma) = 1 - \frac{1 - \sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha^2}$$

Maintenant, comme  $0 < \alpha < 1$ ,

$$\begin{aligned}\sqrt{1 - \alpha^2} &> 1 - \alpha^2 \\ 1 - \sqrt{1 - \alpha^2} &< \alpha^2 \\ \frac{1 - \sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha^2} &< 1 \\ 1 - \frac{1 - \sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha^2} &> 0\end{aligned}$$

On a donc  $\cos(\gamma) > 0$ , ce qui signifie comme  $\gamma > 0$  que  $\gamma < \frac{\pi}{2}$  et donc que  $\sin(2\gamma) > 0$ .

On a donc montré que si  $\sin(\lambda) > 0$  on a aussi  $\sin(2\gamma) > 0$ , en procédant de la même manière, on montrerait que si  $\sin(\lambda) < 0$  on a également  $\sin(2\gamma) < 0$ . Ainsi  $\sin(\lambda) \sin(2\gamma)$  est toujours positif. Ceci signifie que dans le cas où  $|r_*| < 1$ , la relation (4.23) n'a pas de solution. On peut donc énoncer le

**Théorème 2** *Dans le cas d'un raffinement 1-2, si  $\alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$ , la transformée de Fourier Laplace de la solution n'a pas de pôle et il n'y a pas explosion exponentielle du schéma.*

## 4.3.5 Cas de l'onde parasite évanescente pour un raffinement 1-n

Le même type de résultat peut être obtenu pour un raffinement 1-n. Supposons que si  $\omega \in [\frac{-\pi}{n\Delta t}, \frac{\pi}{n\Delta t}]$  est la pulsation de l'onde incidente,

$$r(\omega + \frac{2\ell\pi}{n\Delta t}) = -b_\ell, \quad 0 < b_\ell < 1 \quad \ell = 1, n-1.$$

Cela signifie que

$$\forall \omega \in [\frac{-\pi}{n\Delta t}, \frac{\pi}{n\Delta t}] \quad \omega + \frac{2\ell\pi}{n\Delta t} > \frac{1}{\Delta t} \tau_\alpha$$

et donc

$$\tau_\alpha < \frac{\pi}{n}$$

Soit

$$\frac{\Delta t}{h} < \sin \frac{\pi}{2n}$$

On a donc  $r(\omega + \frac{2\ell\pi}{n\Delta t})^{2J_l} \rightarrow_{J_l \rightarrow 0} 0 \forall \ell \neq 0$ . Supposons que  $r(\omega_{J_l})^{2J_l} \rightarrow_{J_l \rightarrow \infty} \beta = e^{i\theta} e^{\eta q}$

En supposant que  $\omega_J = \frac{a}{\Delta t} + i\eta + b$  La relation (4.23) se réduit alors à

$$\frac{\hat{G}_0(a) (r(\frac{a}{\Delta t})^{-n} - r(\frac{a}{\Delta t})^n) \beta}{r(n\omega)^{-1} - \sum_{l=0}^{n-1} \hat{G}_l(a) r(\omega + \frac{\pi 2l}{n\Delta t})^n} = 1$$

Posons

$$\Phi = r(n\omega)^{-1} - \sum_{l=0}^{n-1} \hat{G}_l(a) r(\omega + \frac{\pi 2l}{n\Delta t})^n$$

La relation s'écrit donc

$$\hat{G}_0(a) \left( r(\frac{a}{\Delta t})^{-n} - r(\frac{a}{\Delta t})^n \right) \beta = \Phi$$

De la même façon que dans le cas du raffinement 1-2, comme  $|\beta| < 1$ , cette équation revient à vérifier

$$4\hat{G}_0^2(a) \sin^2(n\gamma) - 4\hat{G}_0(a) \sin(n\gamma) \Im(\Phi) < 0$$

Soit comme  $\hat{G}_0(a) = \frac{\sin^2(\frac{n\alpha}{2})}{\sin^2(\frac{\alpha}{2})} > 0$ ,

$$\hat{G}_0(a) \sin^2(n\gamma) - \sin(n\gamma) \Im(\Phi) < 0$$

Or

$$\Im(\Phi) = \Im(r(\frac{na}{\Delta t})^{-1}) - \hat{G}_0(a) \sin(n\gamma)$$

On doit donc vérifier

$$2\hat{G}_0(a) \sin^2(n\gamma) - \Im(r(n\frac{a}{\Delta t})^{-1}) \sin(n\gamma) < 0$$

Deux cas se présentent, soit  $r(n\frac{a}{\Delta t})$  est réel auquel cas l'équation n'a pas de solution, soit  $r(n\frac{a}{\Delta t}) = e^{i\lambda}$  auquel cas  $\Im(r(n\frac{a}{\Delta t})^{-1}) = -\sin(\lambda)$  et la relation revient à vérifier

$$(4.35) \quad 2\hat{G}_0(a) \sin^2(n\gamma) + \sin(\lambda) \sin(n\gamma) < 0$$

Comme  $\hat{G}_0(a) > 0$ , pour que cette équation soit vérifiée, il est nécessaire que  $\sin(\lambda) \sin(n\gamma)$  soient de signes opposés. Nous allons voir que c'est impossible.

Commençons par montrer que si  $\lambda \in [0, \pi]$ ,  $\gamma \in [0, \frac{\pi}{n}]$ . On sait que  $\forall a \in [0, 2a \sin \alpha]$  la fonction qui associe à  $a$   $\arg(r(\frac{a}{\Delta t}))$  est une fonction croissante. Il nous suffit donc de montrer que si  $\lambda = \pi$ ,  $\gamma < \frac{\pi}{n}$ . Nous avons vu que

$$\begin{aligned}\alpha^2 \sin^2(\frac{\lambda}{2}) &= \sin^2(\frac{na}{2}) \\ \alpha^2 \sin^2(\frac{\gamma}{2}) &= \sin^2(\frac{a}{2})\end{aligned}$$

Comme,  $\lambda \in [0, \pi]$  et  $\gamma \in [0, \pi]$  on a donc

$$\begin{aligned}\alpha \sin(\frac{\lambda}{2}) &= \sin(\frac{na}{2}) \\ \alpha \sin(\frac{\gamma}{2}) &= \sin(\frac{a}{2})\end{aligned}$$

et donc

$$\sin(\frac{\gamma}{2}) = \frac{1}{\alpha} \sin(\frac{\text{asin}(\alpha \sin(\frac{\lambda}{2}))}{n})$$

On s'intéresse à  $\gamma$  lorsque  $\lambda = \pi$ , on considère donc la fonction

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \sin(\frac{\text{asin}(\alpha \sin(\frac{\pi}{2}))}{n})$$

On pose  $\phi = \text{asin}(\alpha)$  et

$$F(\phi) = \frac{\sin(\frac{\phi}{n})}{\sin(\phi)}$$

$F(\phi)$  est une fonction croissante. En effet,

$$F'(\phi) = \frac{\frac{1}{n} \cos(\frac{\phi}{n}) \sin(\phi) - \sin(\frac{\phi}{n}) \cos(\phi)}{\sin^2(\phi)}$$

Divisons  $F'(\phi)$  par  $\cos(\frac{\phi}{n}) \cos(\phi)$  (qui est strictement positif car  $\phi \in ]0, \pi[$ ) et posons

$$\begin{aligned}G(\phi) &= \frac{1}{n} \tan(\phi) - \tan(\frac{\phi}{n}) \\ G(0) &= 0\end{aligned}$$

et

$$G'(\phi) = \frac{1}{n \cos^2(\phi)} - \frac{1}{n \cos^2(\frac{\phi}{n})}$$

Comme  $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\frac{\phi}{n} < \phi \Rightarrow \cos^2(\frac{\phi}{n}) > \cos^2(\phi)$  et donc  $G'(\phi) > 0$ , on en déduit que  $G(\phi) > 0$  donc que  $F'(\phi) > 0$  et que  $F(\phi)$  est croissante. Comme  $\phi = \text{asin}(\alpha)$  et que  $\text{asin}$  est une fonction croissante, le maximum de  $f(\alpha)$  est donc atteint pour  $\alpha = 1$ ,  $f(1) = 1$ . On en déduit donc que si  $\lambda \in [0, \pi]$ , alors  $\gamma \in [0, \frac{\pi}{n}]$ . Ainsi si  $\sin(\lambda) > 0$ , alors  $\sin(n\gamma) > 0$ . Le même raisonnement permettrait de démontrer que si  $\sin(\lambda) < 0$ , alors  $\sin(n\gamma) < 0$ .

Ainsi le produit  $\sin(\lambda) \sin(n\gamma)$  est toujours positif et on peut écrire le

**Théorème 3** *Dans le cas d'un raffinement 1-n, si  $\frac{\Delta t}{h} < \sin(\frac{\pi}{2n})$ , la transformée de Fourier Laplace de la solution est analytique.*

**Corollaire 2** *Dans le cas d'un raffinement 1- $n$ , si  $\frac{\Delta t}{h} < \sin(\frac{\pi}{2n})$ , il n'y a pas explosion exponentielle de la solution.*

**Remarque 6** *On peut interpréter ce résultat assez facilement, puisque le nombre de Courant pour lequel l'explosion exponentielle disparaît coïncide avec celui pour lequel toutes les ondes parasites deviennent évanescentes. On peut donc penser que ce sont les ondes parasites qui font exploser le schéma.*

Cette étude nous a donc enfin permis d'apporter une réponse sur la stabilité des schémas d'interpolation temporelle dans le cas d'une bande. Contrairement aux cas d'interface simple qui sont stables sous la condition C.F.L. usuelle  $\Delta t < h$ , le schéma appliqué sur une bande raffinée peut être instable, où exponentiellement croissant sous cette même condition. Une méthode nous permet maintenant de déterminer s'il y aura explosion du schéma. Toutefois, cette méthode n'étant pour le moment pas automatisable, si dans le cas d'une bande à nombre de mailles fixe, on veut trouver des conditions de stabilité reliant par exemple, le nombre de courant à la longueur de la bande il faudra recourir à des expériences numériques.

## 4.4 Résultats numériques.

Dans cette partie, nous étudions l'explosion du schéma. En effet, les résultats de précision du schéma trouvés pour une interface simple sont les mêmes dans le cas d'une bande raffinée. Plus exactement lorsque l'explosion n'apparaît pas, que ce soit parce que le temps de simulation est trop court où parce que le rapport  $\frac{\Delta t}{h}$  est suffisamment petit pour qu'elle soit inexistante, les réflexions aux interfaces sont imperceptibles. L'élément nouveau est véritablement cette explosion. En effet, dans certaines configurations, pour des temps de simulation plus longs, on commence à déceler ce phénomène. Comme nous l'avions vu analytiquement à nombre de points dans la bande fixé, l'explosion rencontrée dépend alors du nombre du nombre de Courant  $\alpha = \frac{\Delta t}{\Delta x}$  de façon très complexe. On cherchera dans la deuxième section à caractériser cette explosion.

### 4.4.1 Mise en évidence de l'instabilité.

On présente ici des enregistrements en un point de la grille fine pour des exemples de simulation pour des raffinements 1-2 1-3 et 1-4, pour 2 nombres de Courant différents. La longueur de la bande est égale à 5. Les temps de simulation étant très grands devant la longueur d'ondes de la source, l'onde incidente apparaît ici très fine mais est tout de même discrétisée correctement (environ 20 points par longueur d'onde). D'autre part, lorsque la solution explose nous sommes obligés pour des raisons évidentes de changer l'échelle des ordonnées et l'onde incidente n'apparaît plus. Sur la figure (4.6) c'est à dire pour un nombre de Courant de  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , la solution pour le schéma 1-4 explose, alors que les deux autres n'explosent pas. Sur la figure (4.7), c'est à dire pour un nombre de Courant de  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  aucune solution n'explose.

L'explosion dépend donc du degré de raffinement choisi ainsi que du nombre de Courant. Nous verrons qu'elle dépend également de la largeur de la bande.

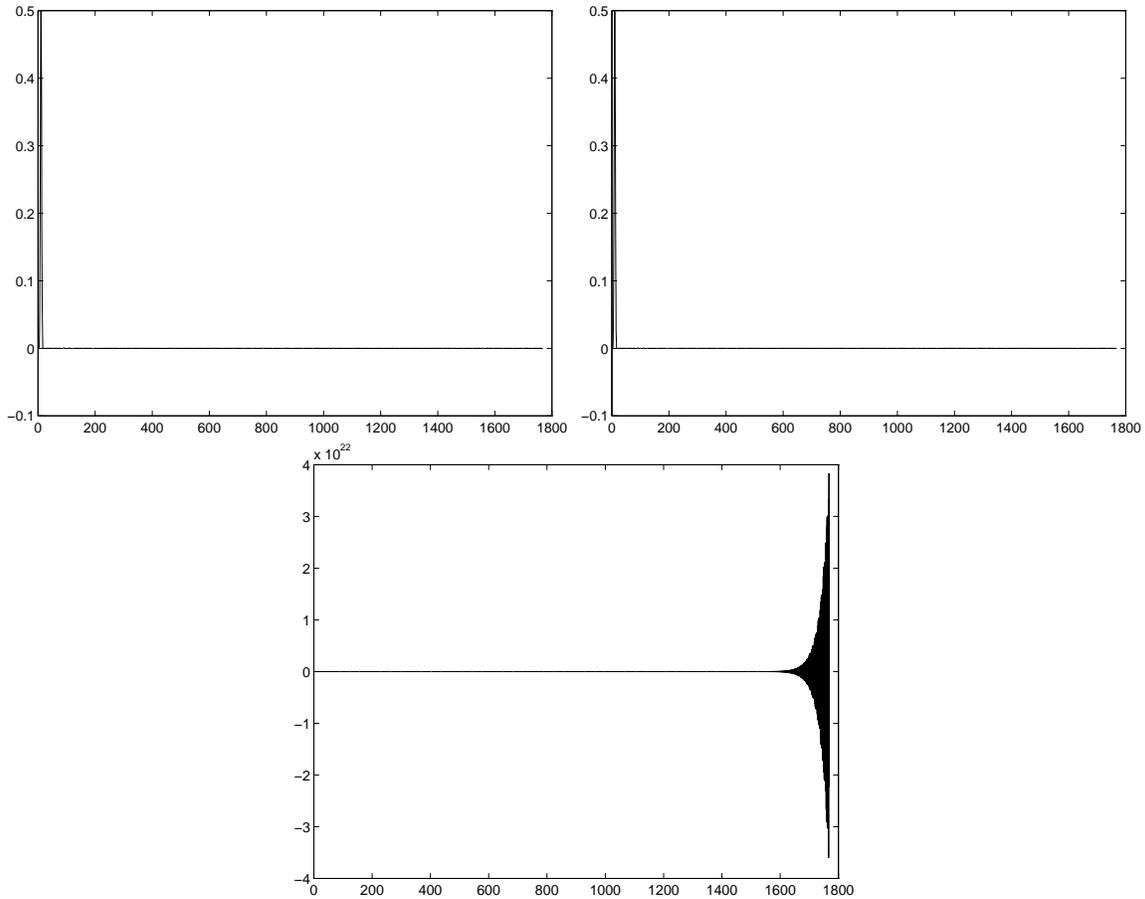


FIG. 4.6 – Résultats de simulation en présence d'une bande raffinée pour les schémas 1/2 (à gauche) 1/3 (au milieu) et 1/4 (à droite) pour un nombre de Courant de  $\frac{1}{\sqrt{2}}$

#### 4.4.2 Caractérisation de l'instabilité.

Afin de valider l'étude théorique de stabilité, on présente figure 4.8 une simulation du schéma 1-4 pour un temps long (200000 pas de temps grossier) avec une bande raffinée de 5 pas d'espace. Le nombre de Courant  $\frac{\Delta t}{\Delta x}$  est de  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . La solution explose en 3500 pas de temps. Nous avons simulé sur un très grand nombre de pas de temps afin de mieux détecter la fréquence qui explose. La transformée de Fourier de la solution nous donne une pulsation d'explosion de  $\frac{0.349}{\Delta t}$  qui est la partie réelle du pôle détecté dans l'étude théorique. Afin de retrouver la partie imaginaire du pôle, on représente également le log du module de la solution en fonction du pas de temps. La droite tracée nous montre le caractère exponentiel de l'explosion. La pente de cette droite ( $2.42 \cdot 10^{-3}$ ) est égale à la partie imaginaire du pôle détecté.

On montre ensuite à l'aide d'expériences numériques réalisées dans le cas de raffinement 1-2 que la pente de cette droite diminue avec le nombre de point dans la grille fine figure 4.9. Le tableau 4.1 qui représente les pentes mesurées des fonctions  $y = \log(|u(t)|)$  pour 2 valeurs de  $J$  et deux valeurs de  $\alpha$  confirme que  $\eta$  est inversement proportionnel à  $J$ , ce que nous

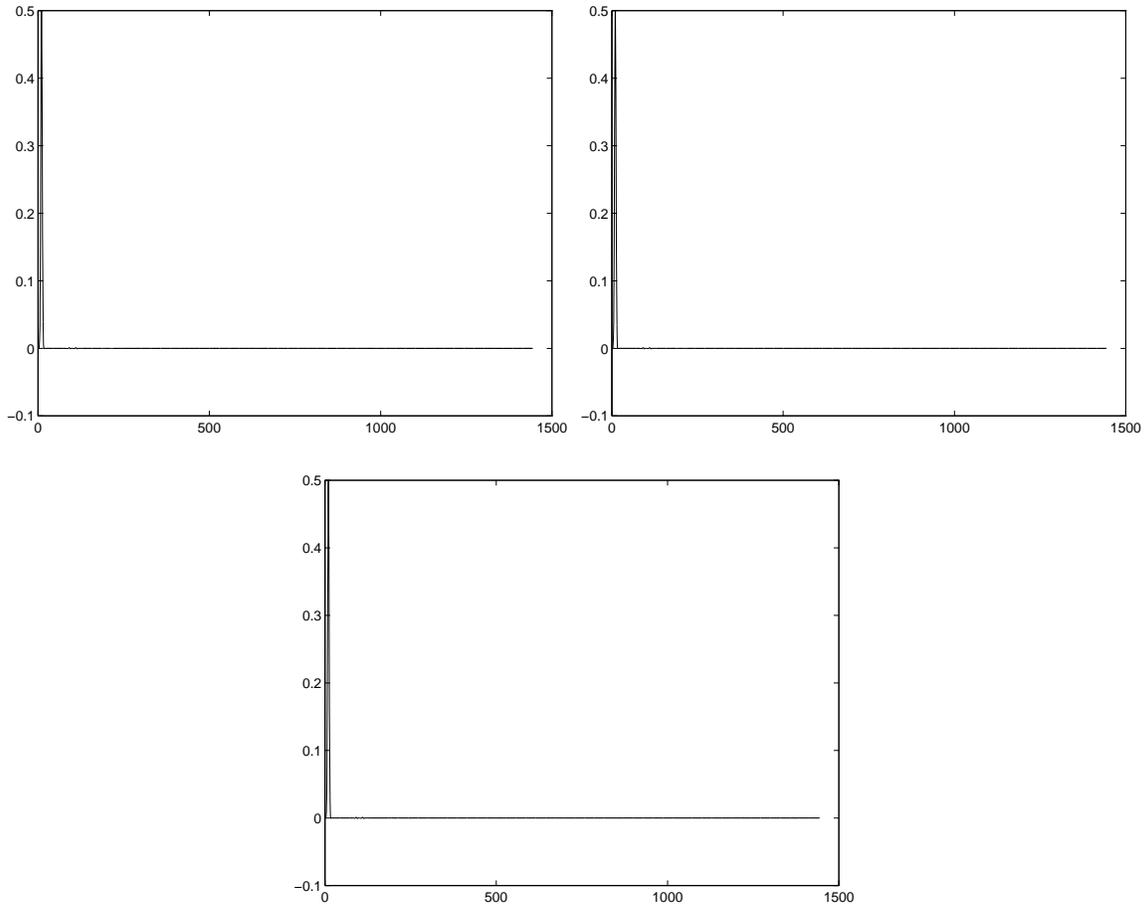


FIG. 4.7 – Résultats de simulation en présence d’une bande raffinée pour les schémas  $1/2$  (à gauche)  $1/3$  (au milieu) et  $1/4$  (à droite) pour un nombre de Courant de  $\frac{1}{\sqrt{3}}$

avons vu dans l’équation (4.25).

L’explosion semblant dépendre de l’épaisseur de la bande, on a cherché à voir si pour chaque longueur de bande, il n’existait pas une condition permettant d’éviter cette explosion, c’est à dire une sorte de condition C.F.L. Pour cela, pour chaque longueur de bande on recherche un nombre de Courant limite par dichotomie. On a représenté figure 4.10 les résultats obtenus.

A la vue de ces résultats, il semblerait donc qu’il n’y ait pas réellement un nombre de Courant limite mais plutôt une bande limite. Ceci peut s’expliquer grâce à la figure 4.5. Le fait que le pôle ne reste pas constamment dans le plan ( $\Im(\omega) > 0$ ) ne favorise pas une recherche de limite par dichotomie et incite donc à considérer les résultats avec prudence. Toutefois il existe toujours des valeurs de  $\alpha$  pour lesquels on est sûr de ne pas avoir explosion. Malgré tout cette condition devient assez contraignante dans le cas du schéma 1-4, et laisse présager des nombres de Courant très petit pour des dimensions supérieures et donc de la dispersion ainsi que des temps de calcul plus longs. On retrouve également le résultat de la section précédente, à propos de l’existence d’une condition de disparition de l’explosion

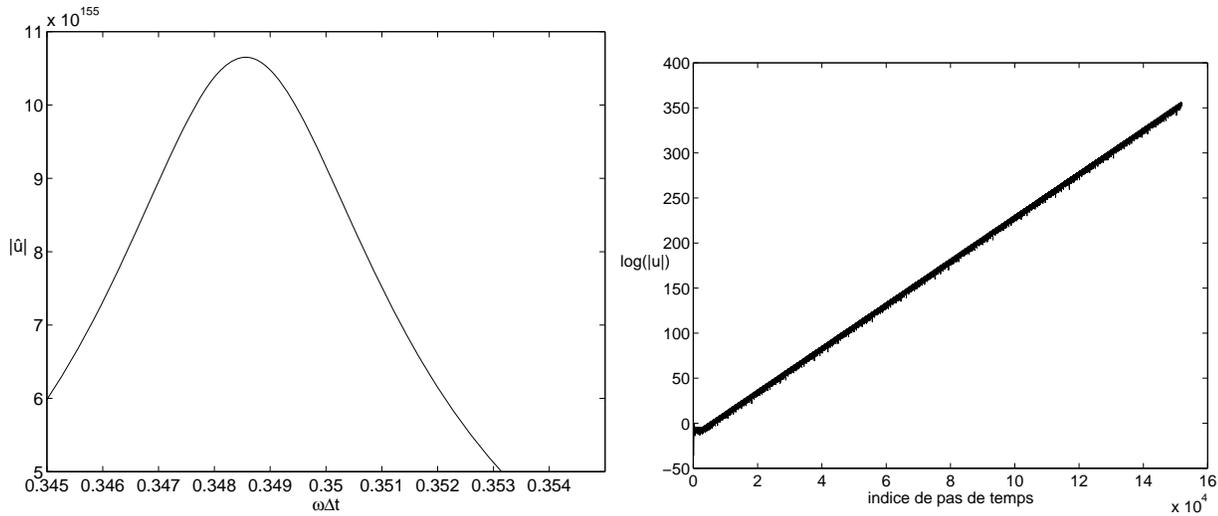


FIG. 4.8 – Résultats de Simulation du schéma 1-4 pour une bande longueur 5 et un nombre de Courant de  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . A gauche un zoom de la transformée de Fourier, à droite le log de la valeur absolue ainsi que la droite de régression

	valeur de $\eta$ mesurée pour $\alpha = 0.9125$	valeur de $\eta$ mesurée pour $\alpha = 0.8$
J=1000	3.249 E-4	4.647E-4
J=2000	1.653 E-4	2.316E-4

TAB. 4.1 – Tableau représentant les pentes mesurées des droites  $y = \log(|u(t)|)$  dans le cas d'un raffinement 1-2 lorsqu'il y a explosion. La pente ( $\eta$ ) est divisée par deux lorsque  $J$  est multiplié par deux, pour  $J$  grand. Ceci illustre donc le résultat de l'équation (4.25)

lorsque  $J$  tend vers l'infini. En effet, dans le cas du raffinement 1-2, la condition  $\Delta t/h < \frac{\sqrt{2}}{2}$  est clairement mise en évidence. Pour les autres raffinements, le résultat est moins clair, mais n'est toutefois pas contradictoire avec les calculs.

Ces expériences numériques nous ont permis de valider la caractérisation de l'explosion mais également de répondre aux questions qui n'avaient pu être résolues théoriquement à propos de l'existence d'une condition C.F.L.

Cette étude nous a donc permis d'analyser le schéma d'interpolation temporelle. Elle fait apparaître qu'il peut être instable ou exploser exponentiellement. Dans les deux cas il est de toutes façons inutilisable et nous incite donc à la recherche d'autres schémas dont la stabilité ou l'explosion serait plus aisée à contrôler.

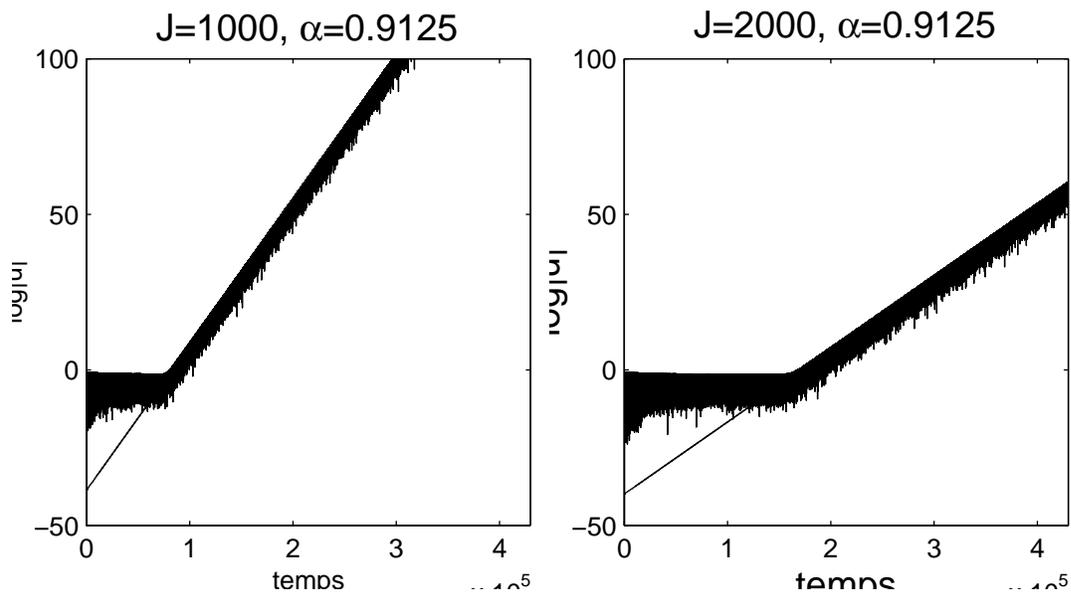


FIG. 4.9 – logarithme népérien de la solution en un point au cours du temps pour deux simulations de raffinement de maillage 1-2, à gauche avec 1000 points dans la grille fine, à droite avec 2000 points. La pente de la droite diminue, une mesure plus précise montre qu'elle est divisée par 2. Ceci confirme que la pente de la droite ( $\eta$ ) est proportionnelle à  $1/J$ .

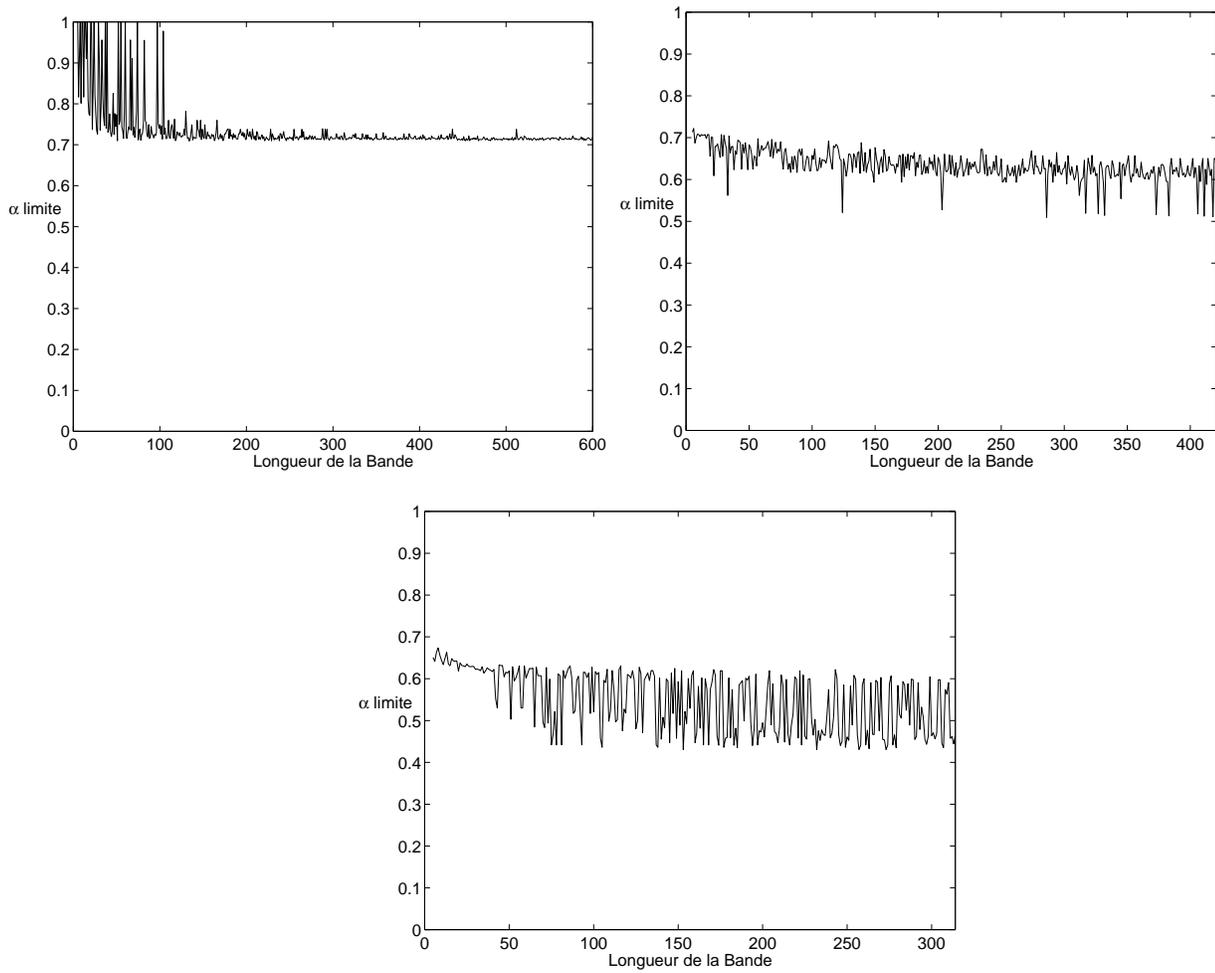


FIG. 4.10 – Conditions de C.F.L. numériques pour les schémas 1-2 1-3 1-4

## Chapitre 5

# Extension du schéma aux équations de Maxwell

Nous avons présenté l'étude de stabilité d'un schéma d'interpolation temporelle pour l'équation des ondes. La même étude peut être faite pour d'autres choix d'interpolation ainsi que pour des schémas de raffinement pour les équations de Maxwell. Mais notre sentiment est que ce type de schéma conduit systématiquement à une instabilité. On présente néanmoins, quelques exemples de schémas possibles pour les équations de Maxwell, ainsi qu'une extension à 2 dimensions. L'analyse théorique de ces schémas n'a pas été faite mais une analyse purement numérique à travers un grand nombre de simulations a été réalisée. Dans tous les cas, nous avons pu trouver au moins un nombre de Courant inférieur à 1, pour lequel l'instabilité a été constatée. Ce nombre a parfois été difficile à déceler.

### 5.1 Cas 1D

On présente ici, diverses propositions de schémas afin d'appliquer le schéma d'interpolation aux équations de Maxwell .

On rappelle que les équations de Maxwell en 1D s'écrivent

$$(5.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad x \in \mathbf{R} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad x \in \mathbf{R} \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ v(x, 0) = v_0(x) \end{array} \right.$$

Dans chaque cas présentés ci-dessous, on résout les équations de Maxwell, en appliquant le schéma de Yee dans 2 grilles de discrétisations différentes. La grille fine est localisée en  $x > 0$ , la grossière pour  $x \leq 0$ .

$$(5.2) \quad \begin{cases} \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - u_{j+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - \frac{v_{j+1}^k - v_j^k}{h} = 0 \\ \frac{v_j^{k+1} - v_j^k}{\Delta t} - \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}}{h} = 0 \end{cases}$$

Il reste ensuite à trouver les équations de raccords entre les grilles. On choisit de raccorder les grilles sur  $v$ . On présente ici trois types de raccord retenu, le premier concerne un rapport de raffinement de 3, mais peut s'étendre à tout raffinement de rapport impair. Les deux suivants concernent un rapport de raffinement de 2.

### 5.1.1 Un schéma de raffinement 1-3

Ce schéma possède l'avantage de ne pas voir se décaler les valeurs de  $u$  entre les grilles fines et grossières

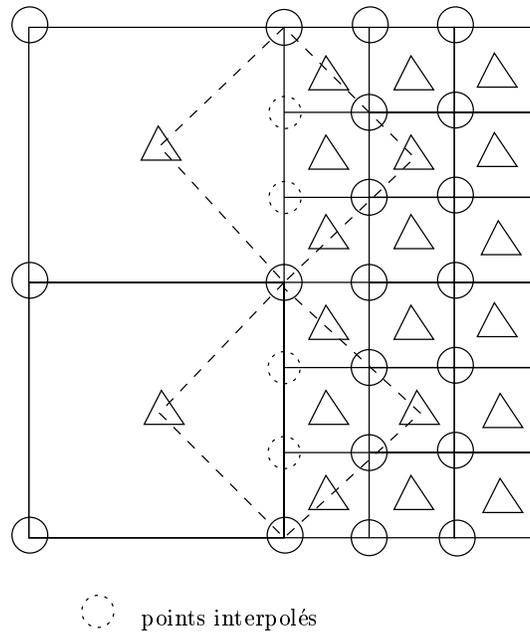


FIG. 5.1 – Schéma de l'interpolation à l'interface pour un raffinement triple

En  $j=0$ , pour le calcul de  $v$  on va simplement prendre le point de la grille fine nécessaire au schéma de Yee sur la grille grossière, l'équation devient alors

$$(5.3) \quad \frac{(v_g)_{3j}^{3(k+1)} - (v_g)_{3j}^{3k}}{\Delta t} - \frac{(u_f)_{3(j+\frac{1}{2})}^{3(k+\frac{1}{2})} - (u_g)_{3(j-\frac{1}{2})}^{3(k+\frac{1}{2})}}{h} = 0 \quad \text{pour } j = 0.$$

Pour le calcul de  $u$  l'approximation dépendra de l'itération en temps car les éléments de la grille grossière ne sont calculés qu'une fois sur trois. Ainsi pour le calcul de  $(u_f)_{j+\frac{1}{2}}^{3k+\frac{1}{2}}$  on a

$$(5.4) \quad \frac{(u_f)_{j+\frac{1}{2}}^{3k+\frac{1}{2}} - (u_f)_{j+\frac{1}{2}}^{3k-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - \frac{(v_f)_{j+1}^{3k} - (v_g)_j^{3k}}{h} = 0 \quad \text{pour } j = 0.$$

Pour le calcul de  $(u_f)_{j+\frac{1}{2}}^{3k+\frac{3}{2}}$  on approche  $(v_g)_{j+1}^{3k+1} \approx \frac{1}{3}(2(v_g)_j^{3k} + (v_g)_j^{3(k+1)})$  et on obtient

$$(5.5) \quad \frac{(u_f)_{j+\frac{1}{2}}^{3k+\frac{3}{2}} - (u_f)_{j+\frac{1}{2}}^{3k+\frac{1}{2}}}{\Delta t} - \frac{(v_f)_{j+1}^{3k+1} - \frac{1}{3}(2(v_g)_j^{3k} + (v_g)_j^{3(k+1)})}{h} = 0 \quad \text{pour } j = 0.$$

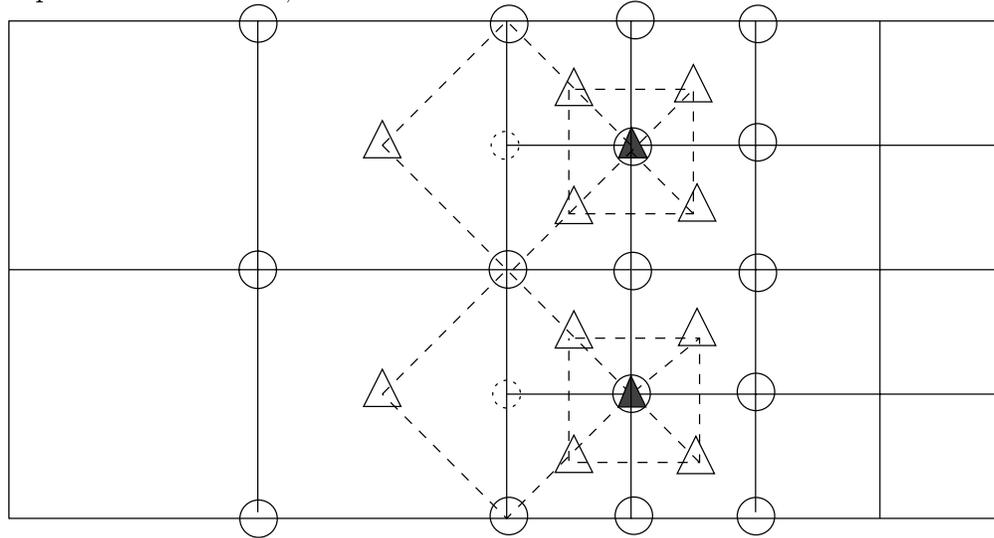
Et pour le calcul de  $(u_f)_{j+\frac{1}{2}}^{3k+\frac{5}{2}}$  on approche  $(v_g)_{j+1}^{3k+2} \approx \frac{1}{3}((v_g)_j^{3k} + 2(v_g)_j^{3(k+1)})$  et on obtient

$$(5.6) \quad \frac{(u_f)_{j+\frac{1}{2}}^{3k+\frac{5}{2}} - (u_f)_{j+\frac{1}{2}}^{3k+\frac{3}{2}}}{\Delta t} - \frac{(v_f)_{j+1}^{3k+2} - \frac{1}{3}((v_g)_j^{3k} + 2(v_g)_j^{3(k+1)})}{h} = 0 \quad \text{pour } j = 0.$$

Pour ce schéma, on obtient des résultats très proches de ceux décrits pour l'équation des ondes. En effet, la stabilité pour une interface seule peut être mise en évidence de la même manière, mais dans le cas d'une bande raffinée, il n'est pas stable pour la condition C.F.L. usuelle. La condition de stabilité devient d'ailleurs de plus en plus handicapante lorsque le degré de raffinement augmente.

### 5.1.2 Un schéma de raffinement 1-2 implicite

Lorsque le raffinement est pair, on ne peut pas adapter le schéma précédent. Une idée est alors d'introduire des valeurs supplémentaires, et d'avoir ainsi aux points voulus ( $j = 1$ ) des valeurs pour  $u$  et  $v$  à la fois, la valeur de  $v$  supplémentaire étant calculée par interpolation spatio-temporelle. Dans ce cas, on écrit alors à l'interface



- points interpolés
- points auxilliaires

FIG. 5.2 – Schéma d'interpolation implicite à l'interface pour le raffinement 1-2

$$(5.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{(v_g)_0^{2(k+1)} - (v_g)_0^{3k}}{\Delta t} - \frac{(u_f)_1^{*,2k+1} - (u_g)_{-1}^{2k+1}}{h} = 0 \\ (u_f)_1^{*,2k+1} = \frac{1}{4}((u_f)_{\frac{1}{2}}^{2k+\frac{1}{2}} + (u_f)_{\frac{1}{2}}^{2k+\frac{3}{2}} + (u_f)_{\frac{3}{2}}^{2k+\frac{1}{2}} + (u_f)_{\frac{3}{2}}^{2k+\frac{3}{2}}) \\ (v_g)_0^{2k+1} = \frac{(v_g)_0^{2k+2} + (v_g)_0^{2k}}{2} \end{array} \right.$$

Le schéma est alors implicite, et il faut résoudre un système linéaire 3x3. L'intuition pourrait nous laisser penser que ce coût supplémentaire aura pour conséquence de rendre le schéma stable sous la condition C.F.L. usuelle. Il n'en est rien. La encore on peut trouver des configurations où bien que le pas de temps soit plus petit que le pas d'espace on ait instabilité. Toutefois, la nouvelle condition de stabilité C.F.L. de ce schéma semble bien meilleure que précédemment quoique toujours dépendant de la taille de la grille fine.

### 5.1.3 Comment se ramener à l'équation des Ondes

Un autre schéma de raffinement 1-2 offre la particularité d'être rigoureusement équivalent au schéma de l'équation des ondes, au moins pour l'un des champs. Il suffit de faire comme dans le schéma précédent, mais en calculant  $(u_f)_1^{*,2k+1}$  comme dans la grille grossière.

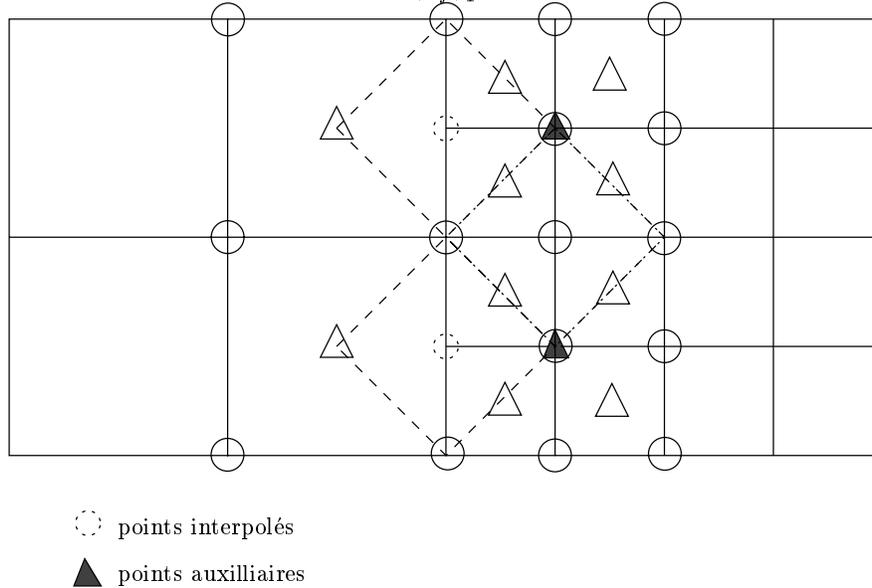


FIG. 5.3 – Schéma d'interpolation explicite à l'interface pour le schéma 1-2

Le schéma à l'interface devient donc

$$(5.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{(v_g)_0^{2(k+1)} - (v_g)_0^{3k}}{\Delta t} - \frac{(u_f)_1^{*,2k+1} - (u_g)_{-1}^{2k+1}}{h} = 0 \\ \frac{(u_f)_1^{*,2k+1} - (u_f)_1^{*,2k-1}}{\Delta t} - \frac{(v_f)_2^{2k} - (v_f)_0^{2k}}{h} = 0 \\ (v_g)_0^{2k+1} = \frac{(v_g)_0^{2k+2} + (v_g)_0^{2k}}{2} \end{array} \right.$$

Il est facile de vérifier que  $v$  satisfait alors le schéma de l'équation des ondes. Toutes les études déjà faites sont alors valables.

Finalement, tous ces schémas ont les mêmes propriétés quant à la stabilité, et ne sont donc pas satisfaisants. On pourrait sans doute démontrer l'instabilité sous la C.F.L. habituelle de la même façon que dans le schéma pour l'équation des ondes. Nous voyons dans la section suivante que le même genre de résultat est rencontré en 2 dimensions.

## 5.2 Extension du schéma au cas 2D

Dans cette section, nous tentons d'étendre la méthode décrite en 5.1.1 en s'inspirant de méthodes rencontrées dans la littérature, notamment par Chevalier [10], afin de résoudre les équations de maxwell en 2 dimensions pour la polarisation électrique avec le schéma de Yee. On choisit d'exposer la méthode pour une interface simple verticale située en  $x = 0$  mais elle s'étend très facilement au cas d'un carré raffiné. On a également choisi la même discrétisation en  $x$  et en  $y$ .

On rappelle que le schéma de Yee peut s'écrire

$$(5.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{H_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - \frac{(E_X)_{i+\frac{1}{2},j+1}^n - (E_X)_{i+\frac{1}{2},j}^n}{h} + \frac{(E_Y)_{i+1,j+\frac{1}{2}}^n - (E_Y)_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{h} = 0 \\ \frac{(E_X)_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - (E_X)_{i+\frac{1}{2},j}^n}{\Delta t} - \frac{H_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{h} = 0 \\ \frac{(E_Y)_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - (E_Y)_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} + \frac{H_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - H_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{h} = 0, \end{array} \right.$$

où  $H$  est le champ magnétique, et  $E_X$  et  $E_Y$  les composantes du champ électriques. On applique ce schéma dans chacune des 2 grilles, reste ensuite à définir les conditions de raccord.

Une difficulté dans ce raccord provient du fait que les champs ne sont pas calculés aux mêmes points d'espace. De plus  $H$  est calculé aux pas de temps  $n + \frac{1}{2}$  alors que  $E_X$  et  $E_Y$  le sont aux temps  $n$ . Chevalier préconise de prendre une grille fine avec une discrétisation 3 fois plus fine que la grille grossière, ceci afin de pouvoir calculer les champs  $E$  et  $H$  aux mêmes instants dans la grille grossière et dans la grille fine. En effet un raffinement 1-2 verrait un décalage des champs  $E_X$ ,  $E_Y$  et  $H$  entre les 2 grilles. Grâce à ce choix on peut trouver des points de la grille fine qui sont également, par extension, des points de la grille grossière. Nous nous intéresserons donc à un raffinement 1-3. Nous choisirons également de placer l'interface sur des noeuds Électrique ( $E_X$  pour une interface horizontale où  $E_Y$  pour une interface verticale).

On représente sur la figure (5.4) une projection de l'interface spatio-temporelle dans le plan de l'espace dans le cas d'une interface verticale. Les gros triangles représentent  $H$  sur la grille grossière, les petits sur la grille fine. Les flèches verticales représentent  $E_Y$  sur la grille fine et sur la grille grossière (en gras pour cette dernière). Les flèches horizontales correspondent aux champs  $E_X$ .

On a entouré de flèches les champs  $E_Y$  qui sont calculés aux pas de temps  $n$  à l'aide d'interpolations spatiales entre les 2 champs  $E_Y$  grossier qui les encadrent.

Sur la figure (5.5), On représente une projection de l'interface spatio-temporelle dans le plan  $(x, t)$ . Les carrés représentent les champs  $E$  ( $E_X$  où  $E_Y$ ), les triangles les champs  $H$ . Les

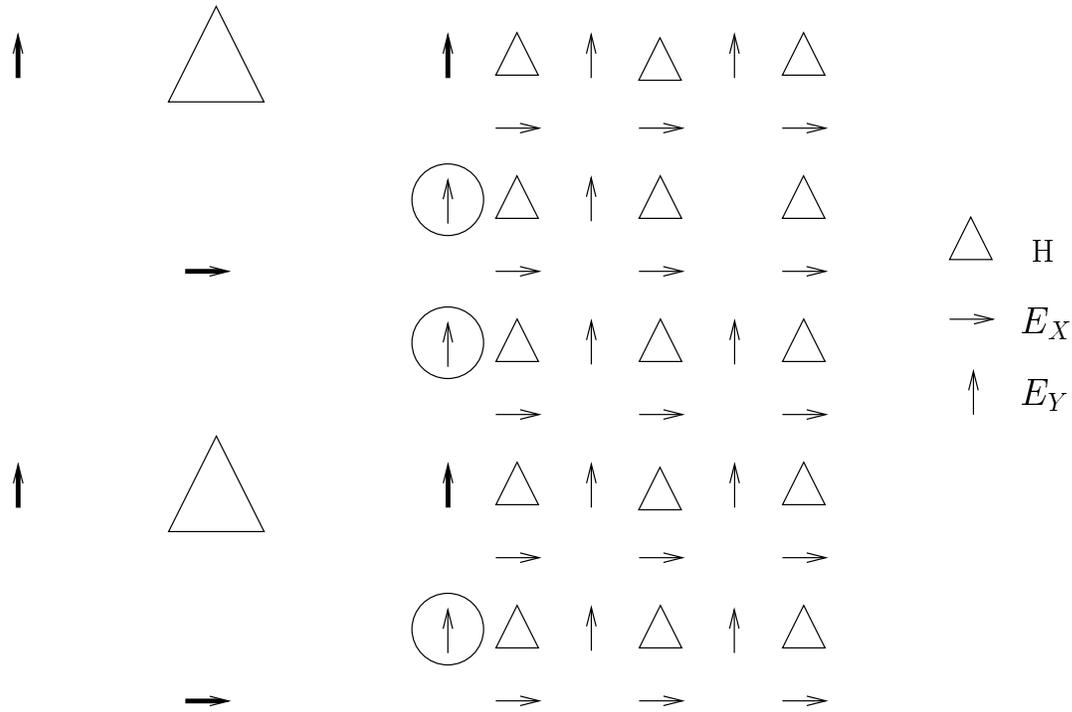


FIG. 5.4 – interface des deux grilles, en abscisse  $x$  ordonnée  $y$

petits éléments représentent les valeurs sur la grille fine, les gros représentent les valeurs de la grille grossière.

On suppose connues les valeurs jusqu'à l'itération  $n$  (coloriées en noir), on présente alors la méthode pour calculer les temps suivants. De manière à faciliter les calculs nous avons choisi une méthode explicite.

On calcule les points 1, 2 et 3 à l'aide du schéma de Yee sur la grille fine. On peut alors calculer les points 4 et 5 à l'aide du schéma de Yee sur la grille grossière. Pour le calcul du point 4 se trouvant à l'interface on utilise le point 3 comme étant un point de la grille grossière. On peut alors calculer les points 6 par interpolation temporelle. Maintenant, On peut calculer les points 7, 8, 9 et 10 en appliquant à nouveau le schéma de Yee dans la grille fine.

Ce schéma a été implémenté dans le cas d'un carré raffiné dans une grille grossière. Du point de vue qualitatif, l'interface n'a qu'une influence quasiment imperceptible sur la solution. Malheureusement, si on simule pour des temps beaucoup plus longs une instabilité apparaît au niveau de l'interface et se transmet ensuite dans tout le domaine. 5.6

Pour palier à cet inconvénient, Chevalier préconise un recouvrement de grilles. Il propose en effet de remplacer les valeurs sur les mailles voisines de l'interface par des moyennes pondérées entre la valeur en ces points en tant que grille grossière et en tant que grille fine. Les coefficients de pondérations semblent être empiriques. Cette méthode n'a pas donné de résultats encourageants dans notre cas, puisque malgré une baisse significative du nombre de Courant, si l'on poursuit la simulation après que l'onde soit sortie de la grille raffinée, on finit par constater une explosion de la solution.

Une autre solution proposée est de modifier le schéma à l'intérieur de la grille fine en  $y$

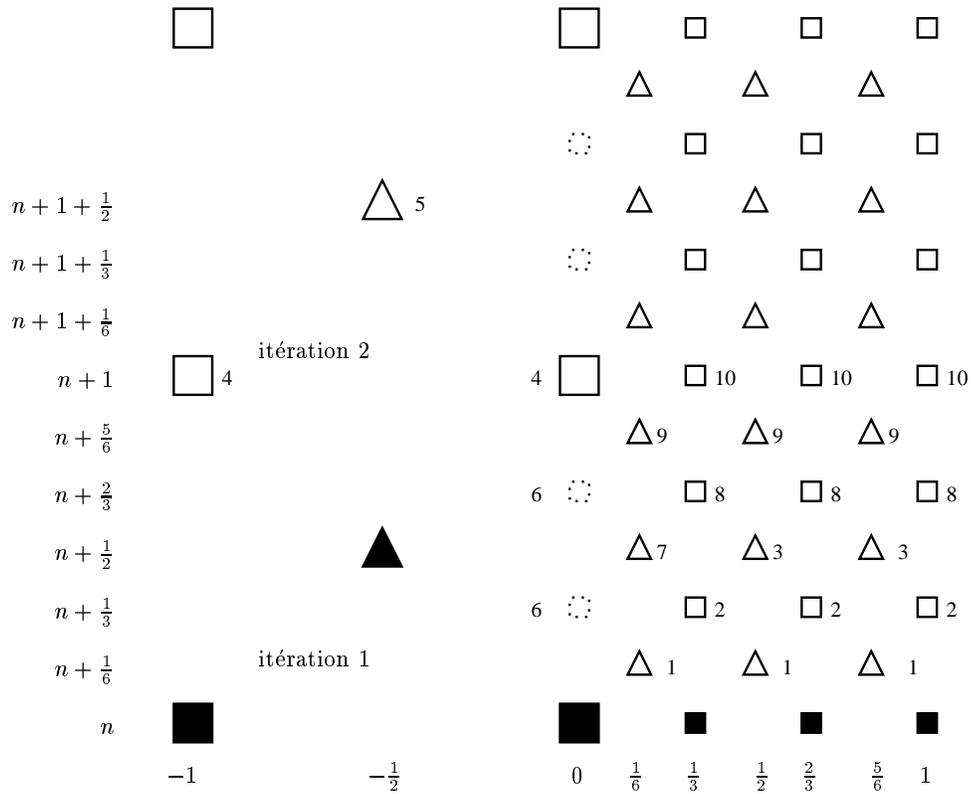


FIG. 5.5 – interface des deux grilles, en abscisse l'espace en ordonnée le temps

ajoutant un terme dissipatif en  $\sigma E$  de manière à éliminer les fréquences d'explosion. Cette solution s'est avérée inefficace dans notre cas. En effet le terme dissipatif nécessaire pour tuer l'instabilité s'est avéré trop important pour une bonne précision du schéma.

En conclusion, il semble que les classes de schéma rencontrées dans la littérature, ne soient pas réellement stables pour des  $\Delta t$  raisonnables. Il est toutefois bon de noter que les instabilités sont parfois détectées pour des temps de simulation très longs. Ceci explique sans doute pourquoi l'instabilité de ces schémas n'a pas été détectée dans les expériences numériques de la littérature. Dans notre cas, le code de simulation devant ensuite être utilisé industriellement pendant des temps de simulations très longs, il nous est nécessaire de trouver des schémas stables sous une condition raisonnable. Il nous faut donc abandonner la classe de schémas précédemment décrite et nous orienter vers d'autres constructions de schéma.

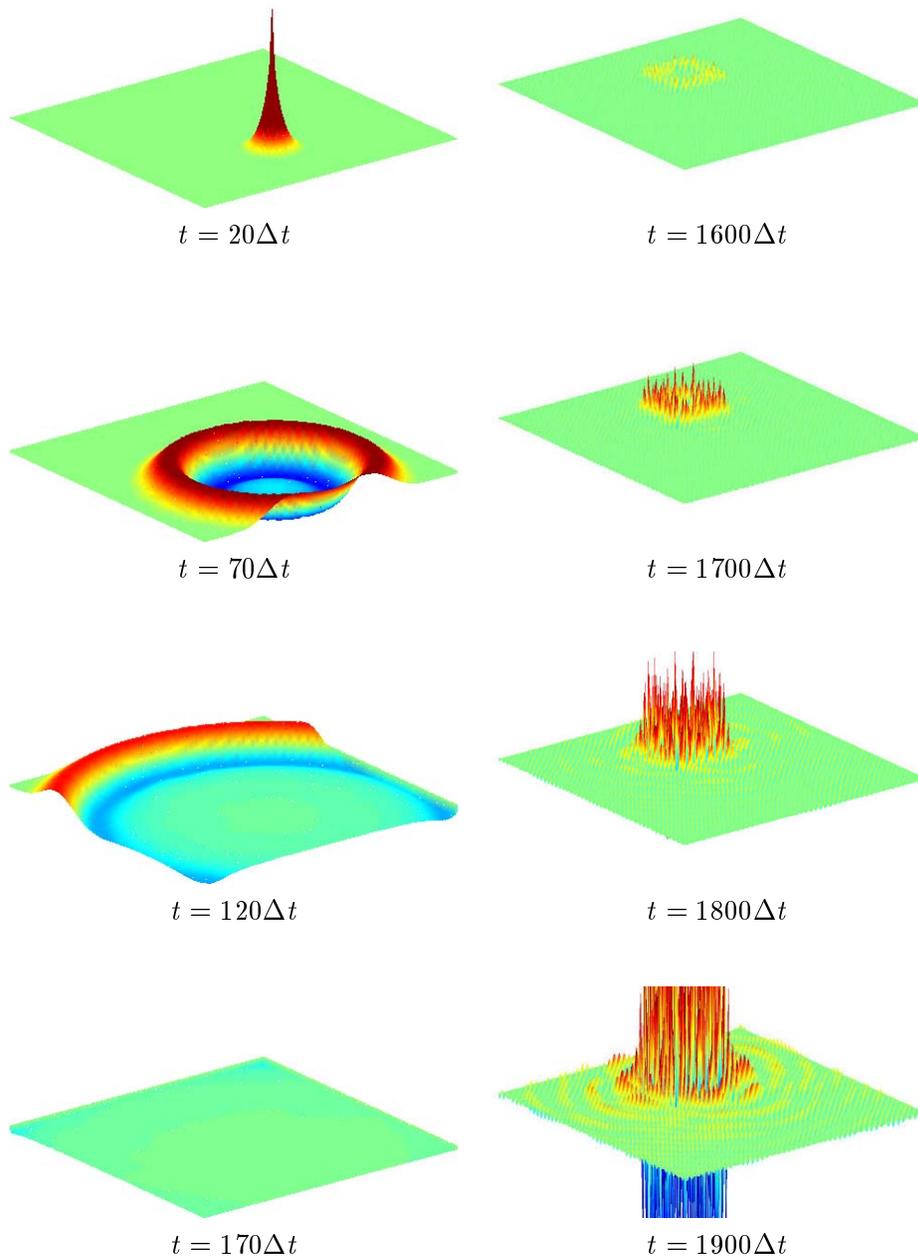


FIG. 5.6 – instantanés d'une expérience 2D de raffinement de maillage par interpolation temporelle

## Deuxième partie

# Des schémas garantissant la stabilité : l'approche différences finies



# Chapitre 1

## Présentation d'un schéma aux différences finies 1 D

Jusqu'à présent, nous avons a priori cherché des schémas consistants, puis essayé de démontrer la stabilité. Les schémas présentés dans ce chapitre relèvent d'une stratégie de construction toute différente. Dans ce chapitre, nous allons construire des schémas permettant la conservation d'une énergie discrète de manière à assurer la stabilité, puis, choisir parmi les candidats les schémas consistants. Nous présentons la construction pour le cas des équations de Maxwell-1D, mais la méthode serait analogue pour l'équation des ondes 1D.

### 1.1 Le problème modèle, schéma en l'absence de raffinement

On cherche ici à trouver un schéma de raffinement de maillage pour le schéma de Yee qui soit stable par construction. Notre objectif est donc d'assurer la stabilité via la conservation d'une énergie discrète. Bruno Després (Communication personnelle) a développé une approche analogue pour des systèmes hyperboliques issus de la dynamique des gaz, et l'a généralisée au système de Maxwell. Nous n'avons pas retenu cette approche pour les raisons suivantes:

- Le schéma numérique dans chaque grille ne correspond plus au schéma de Yee (ce qui était une contrainte pour nous), mais provient du schéma de Godunov [16].
- Ce schéma se révèle dissipatif contrairement à celui que nous allons développer. En d'autres termes, B. Després établit un résultat de décroissance (et non de conservation) d'énergie discrète.

Nous avons par ailleurs mené une analyse de dispersion et de réflexion-transmission à travers l'interface grille fine-grille grossière que nous présentons en annexe (voir D ).

Les équations de Maxwell 1D s'écrivent

$$(1.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Il est bien connu qu'au problème de Cauchy correspondant au système (1.1) est associée la conservation de l'énergie

$$(1.2) \quad E(t) = \frac{1}{2} \int [u(x, t)^2 + v(x, t)^2] dx$$

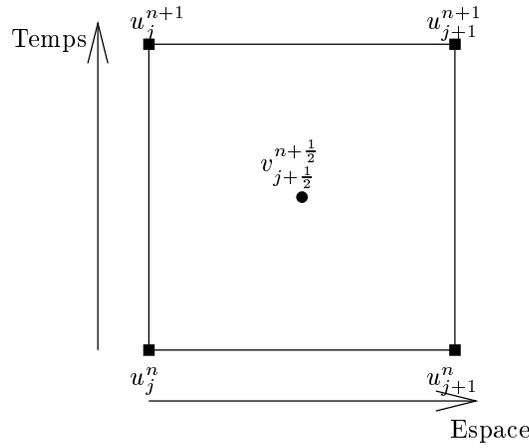


FIG. 1.1 – *Discretisation espace-temps des inconnues*

C'est d'ailleurs une des façons d'exprimer le fait que le système (1.1) est bien posé. L'idée que nous allons poursuivre est de trouver un schéma qui conserve une quantité équivalente en discret, de manière à assurer la stabilité.

Afin d'appliquer le schéma de Yee, on discrétise  $u$  et  $v$  sur deux grilles espace-temps décalées, c'est à dire que  $u$  est estimé en  $(ih, n\Delta t)$  alors que  $v$  est estimé en  $((i+\frac{1}{2})h, (n+\frac{1}{2})\Delta t)$ , comme indiqué sur la figure 1.1. On peut alors écrire le schéma de Yee .

$$(1.3) \quad \begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{v_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{h} = 0 \\ \frac{v_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0 \end{cases}$$

Une énergie discrète que ce schéma conserve s'écrit

$$(1.4) \quad E^n = \frac{1}{2} \sum (u_j^n)^2 h + \frac{1}{2} \sum v_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} v_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} h.$$

Nous baserons notre construction sur la conservation de cette énergie. D'autres choix seraient possibles. Une autre énergie discrète conservée est par exemple (il suffit d'inverser les rôles des inconnues  $u$  et  $v$ )

$$(1.5) \quad E^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sum (v_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}})^2 h + \frac{1}{2} \sum u_i^n u_i^{n+1} h$$

## 1.2 Vers la recherche d'un schéma de raffinement 1-2

### 1.2.1 De la conservation d'énergie discrète dans les schémas

Afin de construire notre raffinement de maillage, nous allons tout d'abord découpler le système (1.1) en un problème de transmission entre deux domaines dont l'interface commune est située en  $x = 0$ , un domaine indicé par  $g$  qui sera ensuite discrétisé grossièrement et un

domaine indicé par  $f$  car discrétisé dans la suite plus finement.

$$(1.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_g}{\partial t} + \frac{\partial v_g}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v_g}{\partial t} + \frac{\partial u_g}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad \text{sur } \Omega_g \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_f}{\partial t} + \frac{\partial v_f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v_f}{\partial t} + \frac{\partial u_f}{\partial x} = 0, \end{array} \right. \quad \text{sur } \Omega_f$$

avec la condition de raccord sur l'interface

$$(1.7) \quad (u_g)_{|0} = (u_f)_{|0}$$

et

$$(1.8) \quad (v_g)_{|0} = (v_f)_{|0}$$

qui assure bien évidemment la continuité de  $u$  et  $v$  à l'interface mais également la conservation de l'énergie définie par (1.2) puisque

$$(1.9) \quad \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\Omega_g} u_g^2 + v_g^2 dx = (u_g)_0 (v_g)_0$$

et

$$(1.10) \quad \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\Omega_f} u_f^2 + v_f^2 dx = -(u_f)_0 (v_f)_0$$

ce qui, joint à (1.7) et (1.8) donne

$$(1.11) \quad \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2 + v^2 dx = 0$$

Nous allons nous intéresser au raffinement suivant. Nous avons 2 grilles. La grille de gauche c.à.d. pour  $j \leq 0$  est 2 fois plus grossière en temps et en espace que la grille de droite (pour  $j \geq 0$ ). Ainsi dans la grille grossière l'équation permettant de calculer  $u_g$  et  $v_g$  (1.3) est écrite avec des pas  $(2h, 2\Delta t)$  tandis que dans la grille on calculera  $u_f$  et  $v_f$  avec les pas  $(h, \Delta t)$ . Le raccord des 2 grilles à construire portera donc sur les valeurs de  $u_0$ . Le point clé de la construction est de ne pas imposer de continuité forte a priori. Ainsi pour  $j = 0$ , on permet à  $u$  d'avoir 2 valeurs différentes suivant que l'on considère que 0 appartient à la grille fine ou à la grille grossière. Autrement dit, à l'interface physique entre les deux domaines correspond deux interfaces discrètes, l'une discrétisée sur un maillage grossier l'autre sur un maillage fin. Aux instants  $t^{2n}$ , on considère donc deux valeurs de  $u$  au point  $x = 0$ . Ce qui n'est pas a priori naturel. Ce choix constitue néanmoins le point clé de notre succès comme on va le voir par la suite. Comme on peut le voir sur la figure (1.2), les valeurs que l'on ne peut calculer avec le schéma de Yee sont celles de  $u$  sur l'interface<sup>1</sup>. Plus exactement, ces valeurs concernent les approximations de  $u$  sur la grille grossière et sur la grille fine en  $j = 0$ , elles sont donc au nombre de trois entre les instants  $t^{2n}$  et  $t^{2n+2}$ . Ces inconnues vont être déterminées par trois relations supplémentaires auxquelles nous demanderons de garantir la stabilité.

Pour cela, nous allons définir une quantité équivalente à une énergie basée sur l'énergie (1.2), et chercher un schéma pour que cette énergie soit constante entre  $t^{2n}$  et  $t^{2n+2}$ . Cette énergie apparaît comme la somme de deux énergies, associées chacune à une grille.

---

1. En fait ceci provient du choix qui a été de placer l'interface entre les deux grilles en  $j=0$ . On pourrait imaginer une stratégie de raccord identique tout en plaçant l'interface sur des  $v$ . Ce choix provient de la littérature où l'on raccorde généralement les champs électriques.

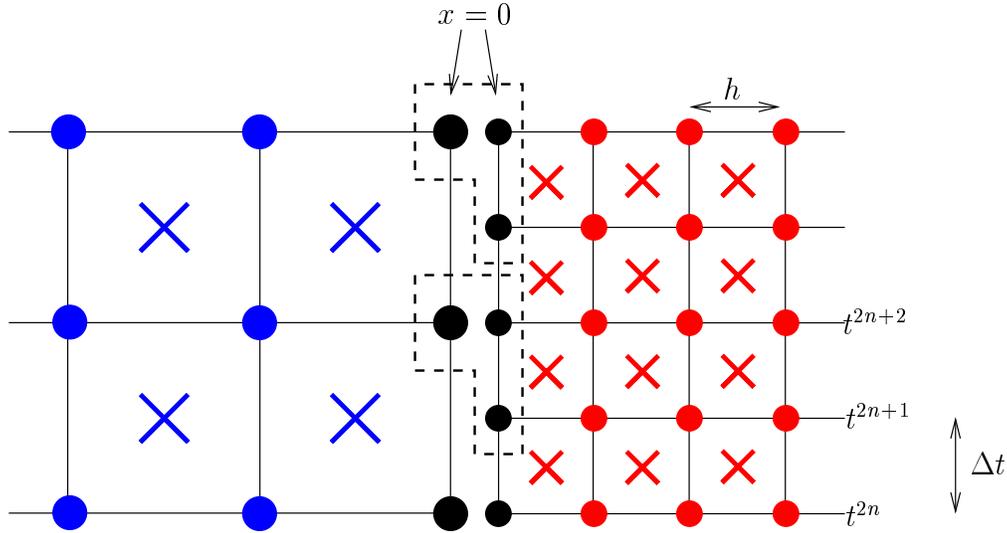


FIG. 1.2 – Présentation des inconnues

La définition de l'énergie discrète est une approximation de l'intégrale de la quantité  $|u|^2 + |v|^2$ . Pour cela, nous associons à la suite  $(v_g)_{2j+1}^{2n+1}$  (resp.  $(v_f)_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ ) la fonction  $v_{g,2h}^{2n+1}$  (resp.  $v_{f,h}^{n+\frac{1}{2}}$ ) constante par morceaux sur un maillage de pas  $2h$  (resp.  $h$ ), les mailles étant centrées aux noeuds  $(2j+1)h$  (resp.  $(j+\frac{1}{2})h$ ) (voir figure 1.3 en bas). De même, nous associons à la suite  $(u_g)_{2j}^{2n}$  (resp.  $(v_f)_j^n$ ) la fonction  $u_{g,2h}^{2n}$  (resp.  $u_{f,h}^n$ ) constante par morceaux sur un maillage de pas  $2h$  (resp.  $h$ ), les mailles étant centrées aux noeuds  $2jh$  (resp.  $jh$ ) (voir figure 1.3 en haut). On définira alors l'énergie discrète dans la grille fine à l'instant  $t^n$  par

$$E_f^n = \frac{1}{2} \int_{\Omega_f} |u_{f,h}^n|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_f} v_{f,h}^{n+\frac{1}{2}} v_{f,h}^{n-\frac{1}{2}} dx,$$

ce qui donne

$$(1.12) \quad E_f^n = \frac{1}{2} \left( \sum_{j \geq 1} |(u_f)_j^n|^2 h + \sum_{j \geq 0} (v_f)_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (v_f)_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} h + \frac{h}{2} |(u_f)_0^n|^2 \right).$$

De même, on définit l'énergie discrète dans la grille grossière à l'instant  $t^{2n}$  par

$$E_g^{2n} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_g} |u_{g,2h}^{2n}|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega_g} v_{g,2h}^{2n+1} v_{g,2h}^{2n-1} dx,$$

ce qui donne

$$(1.13) \quad E_g^{2n} = \frac{1}{2} \left( \sum_{j \leq -1} |(u_g)_{2j}^{2n}|^2 2h + \sum_{j \leq -1} (v_g)_{2j+1}^{2n+1} (v_g)_{2j+1}^{2n-1} 2h + h |(u_g)_0^{2n}|^2 \right).$$

De telle sorte que l'on peut définir une énergie discrète totale aux instants pairs.

$$(1.14) \quad E^{2n} = E_g^{2n} + E_f^{2n}.$$

Pour aller plus avant, nous allons évaluer dans chaque grille la variation de l'énergie associée.

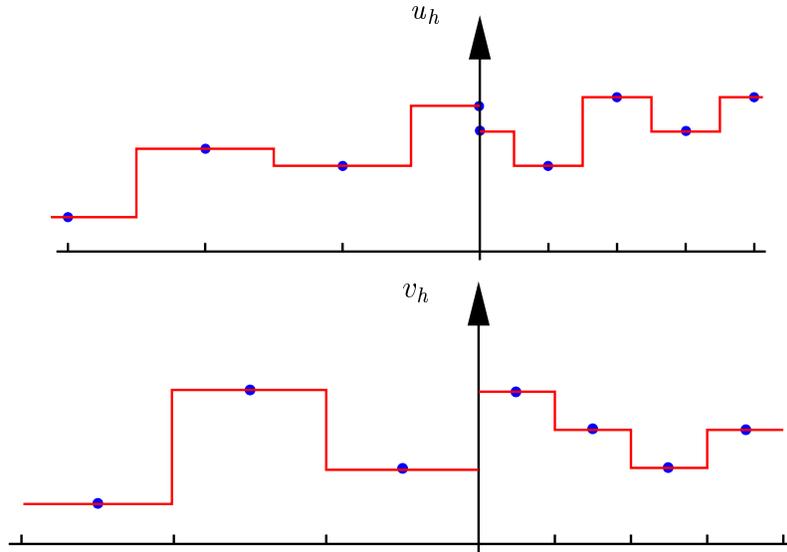


FIG. 1.3 – schéma des intégrations discrètes pour le calcul de l'énergie

### 1.2.2 Variation de l'énergie fine $E_f^n$ .

Afin de calculer l'évolution de cette quantité, on effectue la demi-somme de la deuxième équation du schéma pour la grille fine aux rangs  $n$  et  $n + 1$ , on obtient

$$(1.15) \quad \frac{(v_f)_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}} - (v_f)_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{2\Delta t} + \frac{(u_f)_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - (u_f)_j^{n+\frac{1}{2}}}{h} = 0$$

où on a noté

$$(u_f)_j^{n+\frac{1}{2}} = \frac{(u_f)_j^n + (u_f)_j^{n+1}}{2}.$$

Nous utiliserons par ailleurs l'équation en  $u$

$$(1.16) \quad \frac{(u_f)_j^{n+1} - (u_f)_j^n}{\Delta t} + \frac{(v_f)_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (v_f)_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{h} = 0.$$

On multiplie l'équation (1.16) par  $(u_f)_j^{n+\frac{1}{2}} h$  et on somme pour  $j \geq 1$ , l'équation (1.15) par  $(v_f)_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} h$  et on somme pour  $j \geq 0$ . En ajoutant ensuite les deux équations obtenues, on a alors

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\Delta t} \left( \sum_{j \geq 1} |(u_f)_j^{n+1}|^2 h - \sum_{j \geq 1} |(u_f)_j^n|^2 h + \sum_{j \geq 0} (v_f)_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}} (v_f)_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} h - \sum_{j \geq 0} (v_f)_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (v_f)_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} h \right) \\ & + \sum_{j \geq 1} (u_f)_j^{n+\frac{1}{2}} \frac{(v_f)_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (v_f)_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{h} h + \sum_{j \geq 0} (v_f)_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{(u_f)_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - (u_f)_j^{n+\frac{1}{2}}}{h} h = 0. \end{aligned}$$

Or, une intégration par partie discrète nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}
 \sum_{j \geq 0} (v_f)_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} ((u_f)_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - (u_f)_j^{n+\frac{1}{2}}) &= \sum_{j \geq 0} (v_f)_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (u_f)_{j+1}^{n+\frac{1}{2}} - \sum_{j \geq 0} (v_f)_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (u_f)_j^{n+\frac{1}{2}} \\
 &= \sum_{j \geq 1} (v_f)_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (u_f)_j^{n+\frac{1}{2}} - \sum_{j \geq 0} (v_f)_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (u_f)_j^{n+\frac{1}{2}} \\
 &= \sum_{j \geq 1} \left( (v_f)_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (v_f)_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) (u_f)_j^{n+\frac{1}{2}} - (v_f)_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (u_f)_0^{n+\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

Finalement, on trouve

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\Delta t} \left( \sum_{j \geq 1} |(u_f)_j^{n+1}|^2 h - \sum_{j \geq 1} |(u_f)_j^n|^2 h + \sum_{j \geq 0} (v_f)_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}} (v_f)_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} h - \sum_{j \geq 0} (v_f)_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (v_f)_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} h \right) \\
 = (v_f)_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \left( \frac{(u_f)_0^{n+1} + (u_f)_0^n}{2} \right).
 \end{aligned}$$

D'après (1.12), on a donc

$$\frac{1}{2\Delta t} (E_f^{n+1} - E_f^n) = \frac{(u_f)_0^{2n+1} + (u_f)_0^{2n}}{4} \left( (v_f)_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2\Delta t} \left( (u_f)_0^{2n+1} - (u_f)_0^{2n} \right) \right).$$

Afin de pouvoir comparer cette différence d'énergie avec celle de la grille grossière on va s'intéresser à la différence entre deux indices de temps grossiers.

$$\begin{aligned}
 (1.17) \quad \frac{1}{2\Delta t} (E_f^{2n+2} - E_f^{2n}) &= \frac{(u_f)_0^{2n+1} + (u_f)_0^{2n}}{4} \left( (v_f)_{\frac{1}{2}}^{2n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2\Delta t} \left( (u_f)_0^{2n+1} - (u_f)_0^{2n} \right) \right) \\
 &+ \frac{(u_f)_0^{2n+2} + (u_f)_0^{2n+1}}{4} \left( (v_f)_{\frac{1}{2}}^{2n+\frac{3}{2}} + \frac{h}{2\Delta t} \left( (u_f)_0^{2n+2} - (u_f)_0^{2n+1} \right) \right).
 \end{aligned}$$

En notant

$$\begin{aligned}
 (1.18) \quad (U_f)_0^{2n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} \left( (u_f)_0^{2n+1} + (u_f)_0^{2n} \right) \\
 (U_f)_0^{2n+\frac{3}{2}} &= \frac{1}{2} \left( (u_f)_0^{2n+2} + (u_f)_0^{2n+1} \right) \\
 (V_f)_0^{2n+\frac{1}{2}} &= (v_f)_{\frac{1}{2}}^{2n+\frac{1}{2}} - \frac{h}{2} \frac{(u_f)_0^{2n+1} - (u_f)_0^{2n}}{\Delta t} \\
 (V_f)_0^{2n+\frac{3}{2}} &= (v_f)_{\frac{1}{2}}^{2n+\frac{3}{2}} - \frac{h}{2} \frac{(u_f)_0^{2n+2} - (u_f)_0^{2n+1}}{\Delta t}
 \end{aligned}$$

La relation (1.17) se réécrit

$$(1.19) \quad \frac{1}{2\Delta t} (E_f^{2n+2} - E_f^{2n}) = \frac{1}{2} \left( (U_f)_0^{2n+\frac{1}{2}} (V_f)_0^{2n+\frac{1}{2}} + (U_f)_0^{2n+\frac{3}{2}} (V_f)_0^{2n+\frac{3}{2}} \right)$$

Elle est donc un équivalent discret de (1.10) évalué au temps  $(2n+1)\Delta t$ .

En effet, les quantités définies par (1.18) ne sont autres que des traces discrètes des inconnues sur l'interface. Les termes  $(U_f)_0^{2n+\frac{1}{2}}$  et  $(U_f)_0^{2n+\frac{3}{2}}$  sont bien des équivalents discrets de  $u$  puisque ce sont simplement des moyennes temporelles de  $u$ .

Les  $(V_f)_0^{2n+\frac{1}{2}}$  et  $(V_f)_0^{2n+\frac{3}{2}}$  sont quant à eux des équivalents discrets d'ordre 2 des traces de  $v$  sur l'interface. En effet, effectuons un développement limité de  $v_f$  en  $\frac{h}{2}$ , on trouve

$$v_f\left(\frac{1}{2}, \cdot\right) = v_f(0, \cdot) + \frac{h}{2} \frac{\partial v_f}{\partial x}(0, \cdot) + O(h^2).$$

Or, la première équation de (1.1) nous donne,  $\frac{\partial v_f}{\partial x}(0, \cdot) = -\frac{\partial u_f}{\partial t}(0, \cdot)$ , on a donc

$$\frac{\partial v_f}{\partial x}\left(0, \left(2n + \frac{1}{2}\right)\Delta t\right) = -\frac{(u_f)_0^{2n+1} - (u_f)_0^{2n}}{\Delta t} + O(\Delta t).$$

Ainsi

$$v_f\left(\frac{1}{2}, \left(2n + \frac{1}{2}\right)\Delta t\right) = v_f\left(0, \left(2n + \frac{1}{2}\right)\Delta t\right) - \frac{h}{2} \frac{(u_f)_0^{2n+1} - (u_f)_0^{2n}}{\Delta t} + O(h^2)$$

On a donc

$$(V_f)_0^{2n+\frac{1}{2}} = v_f\left(0, \left(2n + \frac{1}{2}\right)\Delta t\right) + O(h^2)$$

De la même façon on peut montrer que

$$(V_f)_0^{2n+\frac{3}{2}} = v_f\left(0, \left(2n + \frac{3}{2}\right)\Delta t\right) + O(h^2)$$

### 1.2.3 Variation de l'énergie grossière $E_g^{2n}$

De la même façon nous allons étudier l'évolution de l'énergie définie par (1.13) dans la grille grossière, à l'aide du schéma de Yee défini pour  $j \leq -1$ .

$$(1.20) \quad \frac{(u_g)_{2j}^{2n+2} - (u_g)_{2j}^{2n}}{2\Delta t} + \frac{(v_g)_{2j+1}^{2n+1} - (v_g)_{2j-1}^{2n+1}}{2h} = 0$$

$$(1.21) \quad \frac{(v_g)_{2j+1}^{2n+1} - (v_g)_{2j+1}^{2n-1}}{2\Delta t} + \frac{(u_g)_{2j+2}^{2n} - (u_g)_{2j}^{2n}}{2h} = 0.$$

On peut déduire de (1.21) (en prenant la demi-somme de l'équation écrite sur deux pas de temps consécutifs)

$$(1.22) \quad \frac{(v_g)_{2j+1}^{2n+3} - (v_g)_{2j+1}^{2n-1}}{4\Delta t} + \frac{(u_g)_{2j+2}^{2n+1} - (u_g)_{2j}^{2n+1}}{2h} = 0,$$

où l'on a noté

$$(u_g)_{2j}^{2n+1} = \frac{(u_g)_{2j}^{2n} + (u_g)_{2j}^{2n+2}}{2}.$$

En multipliant (1.20) par  $(u_g)_{2j}^{2n+1} 2h$  et (1.22) par  $(v_g)_{2j+1}^{2n+1} 2h$  et en sommant pour  $j \leq -1$  on obtient alors

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\Delta t} \left( \sum_{j \leq -1} |(u_g)_{2j}^{2n+2}|^2 2h - \sum_{j \leq -1} |(u_g)_{2j}^{2n}|^2 2h \right. \\ & \quad \left. + \sum_{j \leq -1} (v_g)_{2j+1}^{2n+3} (v_g)_{2j+1}^{2n+1} 2h - \sum_{j \leq -1} (v_g)_{2j+1}^{2n+1} (v_g)_{2j+1}^{2n-1} 2h \right) \\ & \quad + \sum_{j \leq -1} 2h (u_g)_{2j}^{2n+1} \frac{(v_g)_{2j+1}^{2n+1} - (v_g)_{2j-1}^{2n+1}}{2h} \\ & \quad + \sum_{j \leq -1} 2h (v_g)_{2j+1}^{2n+1} \frac{(u_g)_{2j+2}^{2n+1} - (u_g)_{2j}^{2n+1}}{2h} = 0. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{j \leq -1} (v_g)_{2j+1}^{2n+1} \left( (u_g)_{2j+2}^{2n+1} - (u_g)_{2j}^{2n+1} \right) &= \sum_{j \leq -1} (v_g)_{2j+1}^{2n+1} (u_g)_{2j+2}^{2n+1} - \sum_{j \leq -1} (v_g)_{2j+1}^{2n+1} (u_g)_{2j}^{2n+1} \\ &= \sum_{j \leq 0} (v_g)_{2j-1}^{2n+1} (u_g)_{2j}^{2n+1} - \sum_{j \leq -1} (v_g)_{2j+1}^{2n+1} (u_g)_{2j}^{2n+1} \\ &= \sum_{j \leq -1} \left( (v_g)_{2j-1}^{2n+1} - (v_g)_{2j+1}^{2n+1} \right) (u_g)_{2j}^{2n+1} \\ & \quad + (v_g)_{-1}^{2n+1} \frac{((u_g)_0^{2n+2} + (u_g)_0^{2n})}{2}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\Delta t} \left( \sum_{j \leq -1} |(u_g)_{2j}^{2n+2}|^2 2h - \sum_{j \leq -1} |(u_g)_{2j}^{2n}|^2 2h + \sum_{j \leq -1} (v_g)_{2j+1}^{2n+3} (v_g)_{2j+1}^{2n+1} 2h \right. \\ & \quad \left. - \sum_{j \leq -1} (v_g)_{2j+1}^{2n+1} (v_g)_{2j+1}^{2n-1} 2h \right) = -(v_g)_{-1}^{2n+1} \left( \frac{(u_g)_0^{2n+2} + (u_g)_0^{2n}}{2} \right). \end{aligned}$$

D'après (1.13) on a alors

$$(1.23) \quad \frac{E_g^{2n+2} - E_g^{2n}}{2\Delta t} = \frac{(u_g)_0^{2n+2} + (u_g)_0^{2n}}{2} \left( -(v_g)_{-1}^{2n+1} + \frac{h}{2\Delta t} \left( (u_g)_0^{2n+2} - (u_g)_0^{2n} \right) \right).$$

Notons

$$(1.24) \quad \begin{aligned} (U_g)_0^{2n+1} &= \frac{1}{2} \left( (u_g)_0^{2n+2} + (u_g)_0^{2n} \right) \\ (V_g)_0^{2n+1} &= (v_g)_{-1}^{2n+1} - h \frac{(u_g)_0^{2n+2} - (u_g)_0^{2n}}{2\Delta t}. \end{aligned}$$

En remarquant que  $(U_g)_0^{2n+1} = v_g(0, (2n+1)\Delta t) + O(\Delta t^2)$  et  $(V_g)_0^{2n+1} = v_g(0, (2n+1)\Delta t) + O(h^2)$ , la relation

$$(1.25) \quad \frac{E_g^{2n+2} - E_g^{2n}}{2\Delta t} = (U_g)_0^{2n+1} (V_g)_0^{2n+1}$$

apparaît alors comme un équivalent discret de (1.9).

### 1.2.4 Variation de l'énergie totale et estimations

Afin de garder l'énergie totale  $E^{2n}$  définie par (1.14) constante on doit avoir

$$(1.26) \quad \frac{1}{2\Delta t} (E_g^{2n+2} - E_g^{2n}) + \frac{1}{2\Delta t} (E_f^{2n+2} - E_f^{2n}) = 0$$

soit

$$(1.27) \quad \frac{1}{2} \left( (U_f)_0^{2n+\frac{1}{2}} (V_f)_0^{2n+\frac{1}{2}} + (U_f)_0^{2n+\frac{3}{2}} (V_f)_0^{2n+\frac{3}{2}} \right) = (U_g)_0^{2n+1} (V_g)_0^{2n+1}$$

qui apparaît comme une condition de raccord en moyenne temporelle du produit  $uv$  On peut alors énoncer le

**Théorème 4** *Les quantités  $(U_f)_0^{2n+\frac{1}{2}}$ ,  $(V_f)_0^{2n+\frac{1}{2}}$ ,  $(U_f)_0^{2n+\frac{3}{2}}$ ,  $(V_f)_0^{2n+\frac{3}{2}}$ ,  $(U_g)_0^{2n+1}$  et  $(V_g)_0^{2n+1}$  étant définies par (1.18) et (1.24), si la relation (1.27), est vérifiée et si de plus  $\frac{\Delta t}{h} < 1$ , alors les normes  $L^2$  des fonctions  $u_{f,h}^n$ ,  $v_{f,h}^{n+\frac{1}{2}}$ ,  $u_{g,2h}^{2n}$  et  $v_{g,2h}^{2n+1}$  sont bornées par des constantes ne dépendant que des conditions initiales et du rapport  $\Delta t/h$ .*

**Démonstration** Pour démontrer ce théorème nous allons montrer que la norme  $L^2$  des quantités précitées est bornée pour tout  $n$  par l'énergie discrète que nous avons définie indépendamment de  $\Delta t$  et  $h$ .

Dans un premier temps montrons que  $E_g^{2n} > C(\|u_{g,2h}^{2n}\|_{L^2}^2 + \|v_{g,2h}^{2n}\|_{L^2}^2)$

$$(1.28) \quad E_g^{2n} = \sum_{j \leq -1} |(u_g)_{2j}^{2n}|^2 2h + \sum_{j \leq -1} (v_g)_{2j+1}^{2n+1} (v_g)_{2j+1}^{2n-1} 2h + h|(u_g)_0^{2n}|^2$$

on a donc

$$E_g^{2n} \geq \frac{1}{2} \left( \|u_{g,2h}^{2n}\|_{L^2}^2 + (v_{g,2h}^{2n+1}, v_{g,2h}^{2n-1})_{L^2} \right)$$

or

$$(v_{g,2h}^{2n+1}, v_{g,2h}^{2n-1})_{L^2} = \frac{1}{4} \left( \|v_{g,2h}^{2n+1} + v_{g,2h}^{2n-1}\|_{L^2}^2 - \|v_{g,2h}^{2n+1} - v_{g,2h}^{2n-1}\|_{L^2}^2 \right)$$

En se servant de l'équation (1.21) on montre alors que

$$\|v_{g,2h}^{2n+1} - v_{g,2h}^{2n-1}\|_{L^2}^2 \leq 4 \frac{\Delta t^2}{h^2} \|u_{g,2h}^{2n}\|_{L^2}^2$$

ainsi

$$(1.29) \quad E_g^{2n} \geq \left(1 - \frac{\Delta t^2}{h^2}\right) \|u_{g,2h}^{2n}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4} \|v_{g,2h}^{2n}\|_{L^2}^2$$

donc si  $\Delta t < h$ , comme  $E_g^{2n} < E^{2n}$ , on a bien

$$\|u_{g,2h}^{2n}\|_{L^2}^2 + \|v_{g,2h}^{2n}\|_{L^2}^2 \leq C^{te} E^{2n}$$

Ainsi la conservation de la quantité  $E^{2n}$  assurée par la relation (1.27) entraîne

$$\|u_{g,2h}^{2n}\|_{L^2}^2 + \|v_{g,2h}^{2n}\|_{L^2}^2 \leq C E^0$$

Nous n'avons pas ici, exactement démontré que la suite  $\|v_{g,2h}^{2n+1}\|$ , était bornée, puisque  $v_g^{2n} = \frac{1}{2}(v_g^{2n+1} + v_g^{2n-1})$ , pour cela on utilise à nouveau l'équation (1.21) et

$$(1.30) \quad (v_g)_{i+\frac{1}{2}}^{2n+1} = \frac{(v_g)_{i+\frac{1}{2}}^{2n+1}}{2} + \frac{(v_g)_{i+\frac{1}{2}}^{2n-1} - \frac{\Delta t}{h}(u_g)_{i+1}^{2n} - (u_g)_i^{2n}}{2}$$

ainsi

$$(1.31) \quad \|v_{g,2h}^{2n+1}\|_{L^2}^2 \leq \|v_{g,2h}^{2n}\|_{L^2}^2 + \frac{\Delta t^2}{h^2} \|(u_{g,2h}^{2n})\|_{L^2}^2$$

On a donc finalement

$$(1.32) \quad \|v_{g,2h}^{2n+1}\|_{L^2}^2 + \|u_{g,2h}^{2n}\|_{L^2}^2 \leq \left(1 + \frac{\Delta t^2}{h^2}\right) \max\left(4, \frac{1}{1 - \frac{\Delta t^2}{h^2}}\right) E^{2n}$$

De la même façon on montrerait que

$$\|u_{f,h}^n\|_{L^2}^2 + \|v_{f,h}^n\|_{L^2}^2 \leq C^{te} E_f^n$$

Comme  $E_f^{2n} < E^{2n}$ , on montre que l'on peut borner  $\|u_{f,h}^{2n}\|_{L^2}$  et  $\|v_{f,h}^{2n+\frac{1}{2}}\|_{L^2}$ , de la même façon que pour la grille grossière.

Pour majorer  $\|u_{f,h}^{2n+1}\|_{L^2}$  et  $\|v_{f,h}^{2n+\frac{3}{2}}\|_{L^2}$ , il pourrait être utile de montrer que  $E_f^{2n+1} < C^{te} E^{2n}$  et ainsi clore la démonstration, mais il n'est pas évident que cela soit possible, par contre, en utilisant l'équation 1.15, on écrit que

$$(u_f)_i^{2n+1} = (u_f)_i^{2n} - \frac{\Delta t}{h} \left( (v_f)_{i+\frac{1}{2}}^{2n+\frac{1}{2}} - (v_f)_{i-\frac{1}{2}}^{2n+\frac{1}{2}} \right)$$

ainsi

$$\|u_{f,h}^{2n+1}\|_{L^2} \leq \|u_{f,h}^{2n}\|_{L^2} + 2 \frac{\Delta t}{h} \|v_{f,h}^{2n+\frac{1}{2}}\|_{L^2},$$

de même

$$(v_f)_{i+\frac{1}{2}}^{2n+\frac{3}{2}} = (v_f)_{i+\frac{1}{2}}^{2n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{h} \left( (u_f)_{i+1}^{2n+1} - (u_f)_i^{2n+1} \right)$$

et

$$\|v_{f,h}^{2n+\frac{3}{2}}\|_{L^2} \leq \|v_{f,h}^{2n+\frac{1}{2}}\|_{L^2} + 2 \frac{\Delta t}{h} \|u_{f,h}^{2n+1}\|_{L^2}$$

ainsi  $\|u_{f,h}^{2n+1}\|_{L^2}$  et  $\|v_{f,h}^{2n+\frac{3}{2}}\|_{L^2}$  sont bornées par des constantes ne dépendant que des conditions initiales et du rapport  $\frac{\Delta t}{h}$ . Ceci conclut la démonstration du théorème.

**Remarque 7** *Dans le cas sans raffinement on peut montrer en exploitant la symétrie du schéma en  $u$  et  $v$  que le schéma est toujours stable lorsque  $\alpha$  tend vers 1. Ici, nous n'avons pas su le faire car cette symétrie est rompue par la position de l'interface grille fine-grille grossière.*

### 1.2.5 Le schéma conservatif retenu

A partir de la relation (1.27), il nous faut trouver trois équations linéaires indépendantes permettant de calculer les trois inconnues à l'interface. Un premier choix que nous retiendrons consiste à prendre

$$(1.33) \quad \begin{cases} (V_f)_0^{2n+\frac{1}{2}} = (V_f)_0^{2n+\frac{3}{2}} = (V_g)_0^{2n+1} \\ \frac{1}{2} \left( (U_f)_0^{2n+\frac{1}{2}} + (U_f)_0^{2n+\frac{3}{2}} \right) = (U_g)_0^{2n+1} \end{cases}$$

qui est consistant avec le raccord de  $u$  (1 fois) et le raccord de  $v$  (2 fois).

Comme nous le verrons, d'autres choix permettant la conservation de l'énergie seraient possibles. Ceci conduit au schéma suivant

$$(1.34) \left\{ \begin{array}{l} (v_g)_{-1}^{2n+1} - \frac{h}{2\Delta t} \left( (u_g)_0^{2n+2} - (u_g)_0^{2n} \right) = \left( (v_f)_{\frac{1}{2}}^{2n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2\Delta t} \left( (u_f)_0^{2n+1} - (u_f)_0^{2n} \right) \right) \\ (v_g)_{-1}^{2n+1} - \frac{h}{2\Delta t} \left( (u_g)_0^{2n+2} - (u_g)_0^{2n} \right) = \left( (v_f)_{\frac{1}{2}}^{2n+\frac{3}{2}} + \frac{h}{2\Delta t} \left( (u_f)_0^{2n+2} - (u_f)_0^{2n+1} \right) \right) \\ \frac{(u_f)_0^{2n+1} + (u_f)_0^{2n}}{2} + \frac{(u_f)_0^{2n+2} + (u_f)_0^{2n+1}}{2} = \left( (u_g)_0^{2n+2} + (u_g)_0^{2n} \right) \end{array} \right.$$

Supposons que toutes les quantités à l'instant  $t^{2n}$  soient connues, les inconnues du système sont donc  $(u_g)_0^{2n+2}$ ,  $(u_f)_0^{2n+1}$  et  $(u_f)_0^{2n+2}$  car  $v_{-1}^{2n+1}$  et  $v_{\frac{1}{2}}^{2n+\frac{1}{2}}$  se calculent classiquement à l'aide des données à l'instant  $2n$  tandis que  $v_{\frac{1}{2}}^{2n+\frac{3}{2}}$  s'exprime en fonction de  $(u_f)_0^{2n+1}$  et des données à l'aide du schéma de Yee.

On a donc trouvé un système de 3 équations à 3 inconnues qui nous permet de raccorder les 2 grilles tout en assurant la stabilité. Notons que le fait que ces trois équations entraînent la conservation de l'énergie, garantit que ce système  $3 \times 3$  est bien inversible sous la condition  $\alpha < 1$ . En effet si les inconnues jusqu'à l'instant  $2n$  sont nulles, l'énergie à l'instant  $2n + 2$  sera également nulle, ce qui montre que le noyau est réduit à zéro.

Le schéma présenté vérifie donc la relation (1.27) et paraît, plus pour des raisons intuitives que mathématiques être un bon candidat. Ceci sera confirmé Mais une question reste essentielle, est-ce un schéma consistant? La section 1.3.2 nous permettra de répondre à cette question. Y-a-t-il d'autres schémas? Nous verrons que beaucoup de schémas vérifient l'équation (1.27), mais tous ne sont pas consistants.

### 1.2.6 Un autre choix possible ... à abandonner

Par exemple une autre possibilité serait de prendre

$$(1.35) \left\{ \begin{array}{l} (U_f)_0^{2n+\frac{1}{2}} = (U_f)_0^{2n+\frac{3}{2}} = (U_g)_0^{2n+1} \\ \frac{1}{2} \left( (V_f)_0^{2n+\frac{1}{2}} + (V_f)_0^{2n+\frac{3}{2}} \right) = (V_g)_0^{2n+1} \end{array} \right.$$

ce qui est bien consistant avec le raccord de  $u$  (2 fois) et le raccord de  $v$  (1 fois).

Nous verrons plus tard par l'analyse par ondes planes que ce schéma est inconsistant. Cela peut se voir autrement si l'on se rappelle que  $(U_f)_0^{2n+\frac{1}{2}} = ((u_f)_0^{2n} + (u_f)_0^{2n+1})2$  et  $(U_f)_0^{2n+\frac{3}{2}} = ((u_f)_0^{2n+2} + (u_f)_0^{2n+1})2$ , on réalise que ce schéma conduit à  $(u_f)_0^{2n+2} = (u_f)_0^{2n}$ . Si initialement, les données ne "touchent" pas le bord, cette condition est en fait consistante avec la condition de Dirichlet de part et d'autres de l'interface.

Ainsi 2 conditions de raccord peuvent sembler similaires (le schéma (1.34) raccorde  $u$  en  $O(\Delta t^2)$  et  $v$  en  $O(\Delta t + h^2)$ , tandis que le schéma (1.35) raccorde  $u$  en  $O(\Delta t)$  et  $v$  en  $O(\Delta t^2 + h^2)$ ) et donner des résultats tout à fait différents quant à la précision. Il semblerait qu'il est préférable de "mieux" raccorder l'inconnue  $u$ .

Comme on le voit, après avoir réglé le problème de la stabilité, il faut trouver une solution consistante parmi tous les schémas stables. Les deux schémas (1.33) et (1.35) ne sont pas

les seuls qui conservent l'énergie discrète. L'analyse faite dans les sections 1.4 et 1.4.2 va nous permettre de déterminer de 'bons' schémas satisfaisant l'équation (1.27) et par la même de nous montrer a posteriori que le schéma (1.34) est le meilleur. A l'aide des expériences numériques, que nous décrivons dans la section suivante, nous en aurons déjà une bonne intuition.

### 1.3 Étude du schéma sélectionné.

#### 1.3.1 Une étude numérique d'erreur.

Afin de tester numériquement le schéma pressenti, nous réalisons dans cette section une série de simulations numériques destinées à mesurer la précision de notre schéma. Nous ne présenterons pas de résultat numérique de stabilité puisque l'énergie étant conservée, le schéma décrit est stable.<sup>2</sup>

L'expérience est la suivante. On simule les équations de Maxwell

$$(1.36) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

pour  $x \in [-200; 100]$  sur 2 grilles de rapport de discrétisation 2. La grille grossière a pour support  $[-200; 0]$ , la grille fine  $[0; 100]$ . On choisit un nombre de Courant de  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  (qui est la limite autorisée en dimension 2). On considère une condition initiale  $u_0(x)$  à support dans l'intervalle  $[-80; -35]$  pour  $u$  c'est-à-dire dans la zone discrétisée avec la grille grossière; ( $u_0(x)$  est la fonction de Harris (décrite par (2.53) dans la première partie)  $v$  à l'instant initial est nul partout. On simule ensuite pendant  $125\Delta t$  secondes. On a représenté figure (1.4) l'évolution de  $u$  au cours du temps. On s'intéresse ensuite à l'erreur commise sur  $u$ .

La solution  $u$  du problème continu est constituée de deux ondes s'éloignant l'une de l'autre, de même forme que la condition initiale mais d'amplitude moitié, ceci tant que les bords ne sont pas atteints. C'est bien ce que l'on retrouve numériquement sur la figure (1.4).

Du point de vue qualitatif, on remarque que l'interface, matérialisée par une ligne pointillée n'a qu'une influence très peu visible sur l'onde transmise. À vue d'oeil le champ apparaît bien symétrique et la réflexion à l'interface est quasiment imperceptible. Afin de tester l'ordre du schéma, on réalise cette même expérience pour des maillages de plus en plus fins, tout en respectant le rapport 2 entre le pas de la grille grossière et celui de la grille fine.

Pour effectuer une analyse quantitative des résultats, on observe la solution à un instant donné fixé ( $125\Delta t$ ) après que l'onde physique ait complètement traversé l'interface fictive. On va distinguer trois zone géographiques indiquées sur la figure (1.4) en bas à droite.

Dans la première ([1] sur la figure), l'onde n'a pas traversé l'interface et la restriction de la solution correspond alors à la propagation classique d'une onde calculée avec le schéma sur la grille grossière. Dans la deuxième partie ([2] sur la figure) on s'attend à trouver l'éventuelle onde réfléchi par l'interface grille fine-grille grossière. Enfin, la troisième partie ([3] sur la figure) correspond à l'onde transmise qui se propage dans la grille fine. Ces différentes zones

---

2. Cette propriété nous a d'ailleurs aidé dans la validation du programme informatique, puisque des expériences numériques de temps très longs permettent de détecter d'éventuelles erreurs de codage.

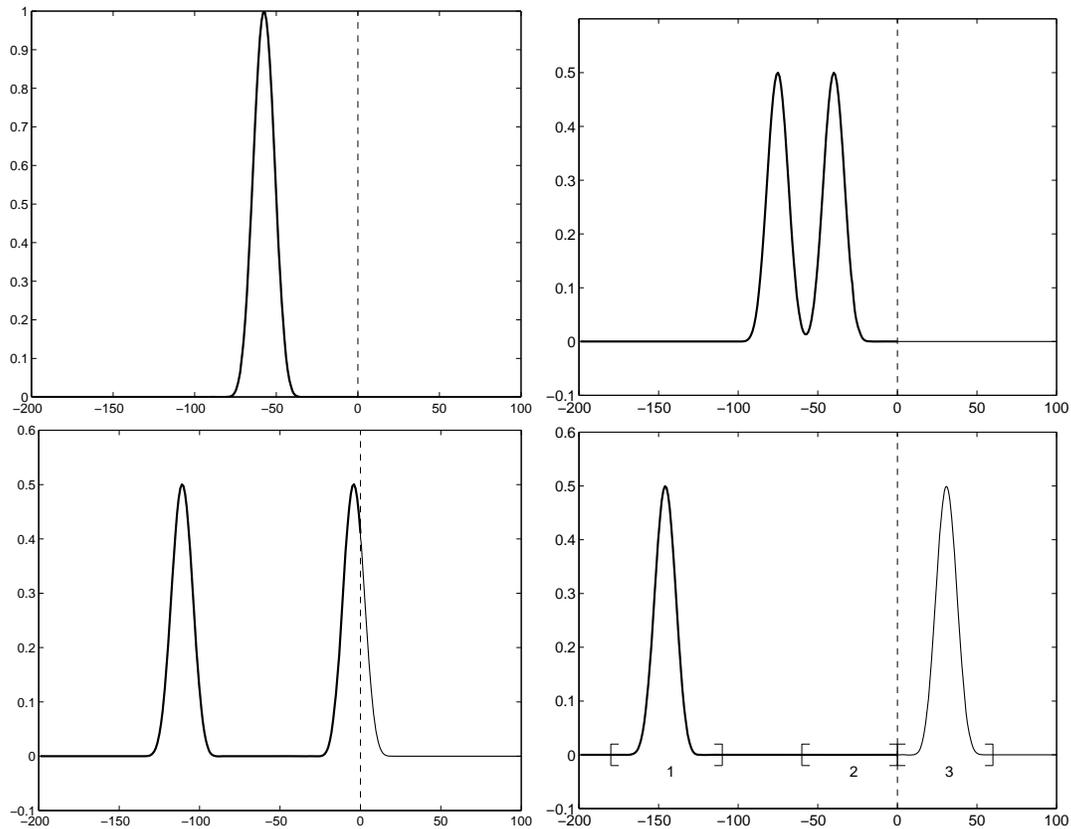


FIG. 1.4 – Instantanés de l'expérience aux temps  $0, \frac{25}{\sqrt{2}}, \frac{75}{\sqrt{2}}, \frac{125}{\sqrt{2}}$ , pour un pas d'espace  $h = 0.5$

vont nous aider à distinguer les erreurs de réflexion, de transmission et de dispersion et à analyser l'ordre de chacune d'elles.

Les figures (1.5) et (1.6) visualisent les différences obtenues entre la solution numérique et la solution exacte ( $\frac{1}{2}(u_0(x-t) + u_0(x+t))$ ) pour différentes discrétisations.

Rappelons qu'un schéma est dit d'ordre  $p$  si la solution numérique pour un pas  $h$  s'écrit

$$u_h = u + Ch^p$$

où  $u$  est la solution exacte et  $C$  une constante indépendante de  $h$ . Notre schéma sera donc d'ordre  $p$ , si les erreurs de 2 raffinements successifs sont divisées par  $2^p$ .

On part d'un pas de 1 dans la grille grossière (donc 0.5 dans la grille fine) et on divise ces pas par 2 (figure 1.5) puis 4, et 8 (figure 1.6) tout en respectant le rapport 2 entre le pas de la grille fine et celui de la grille grossière.

La colonne de gauche montre l'erreur dans la zone 1, c'est à dire celle qui correspond à la dispersion du schéma classique sans changement de grille. On observe bien une diminution quadratique de l'erreur (cf. annexe A pour l'étude de la dispersion)

La colonne du milieu montre l'erreur dans la zone où est localisée la réflexion due au changement de grille (zone 2). L'amplitude de cette réflexion diminue quadratiquement également contrairement au schéma d'interpolation temporelle (cf. partie 1 2.1.5 sur l'étude de précision). La réflexion est donc d'ordre 2 alors qu'elle n'était que d'ordre 1 avec le schéma par

interpolations ce qui constitue donc une amélioration supplémentaire. Enfin celle de droite représente l'erreur dans la zone 3 qui cumule erreur de transmission mais également erreur de dispersion. Cette erreur est voisine de celle de la zone 2 ce qui nous conduit à penser que l'erreur due au changement de grille est négligeable devant l'erreur de dispersion. L'erreur dans cette zone diminue également quadratiquement : puisque l'erreur de dispersion est d'ordre 2, on peut penser que l'erreur de transmission est elle-même d'ordre 2, ou alors, si elle est d'ordre 1 seulement qu'elle est négligeable devant l'erreur de dispersion pour ces valeurs du pas de discrétisation. On peut également remarquer que la réflexion est environ dix fois plus petite que l'erreur de dispersion (cela n'apparaît pas à l'œil, nous avons dû changer les échelles afin que chaque phénomène soit observable). Enfin les oscillations hautes fréquences qui apparaissent figure 1.6 ne sont pas à prendre en compte car elles correspondent à l'erreur de troncature numérique, que l'on appelle également "erreur machine".

Comme nous le voyons dans la section suivante ces résultats numériques seront partiellement confirmés par l'étude de théorie des coefficients de réflexion et de transmission à l'interface, car nous verrons qu'un autre type d'erreur peut venir entacher le résultat. Nous retiendrons toutefois que le schéma est donc 'numériquement' d'ordre 2.

Le schéma présenté dans ce chapitre possède donc le double avantage d'être inconditionnellement stable et plus précis que le schéma d'interpolation temporelle de la première partie.

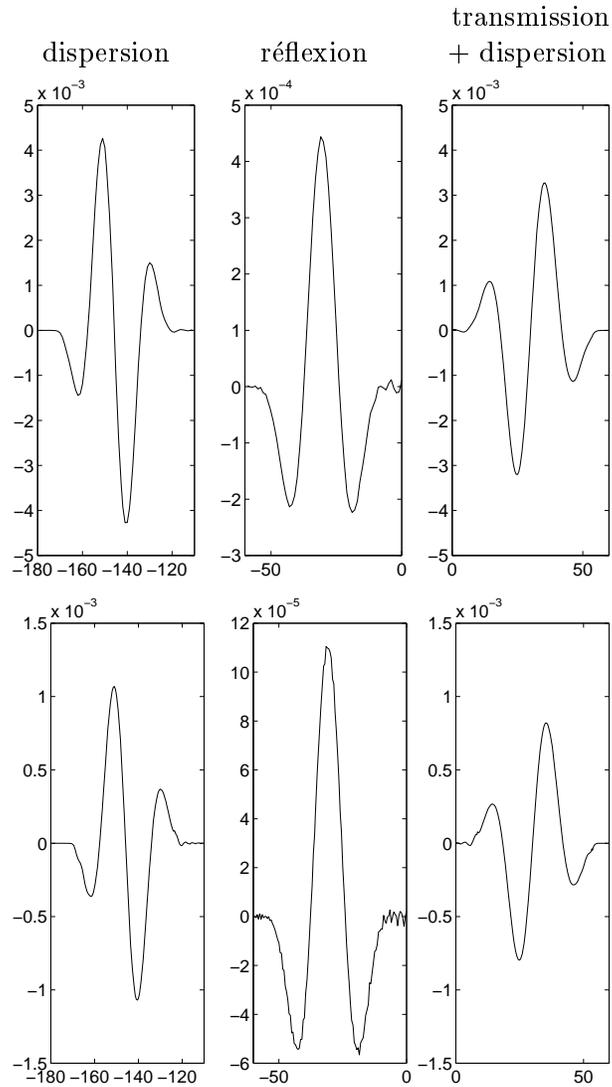


FIG. 1.5 – Différences entre la solution exacte et la solution approchée pour un pas d'espace divisé par 1 (en haut) et 2 (en bas)

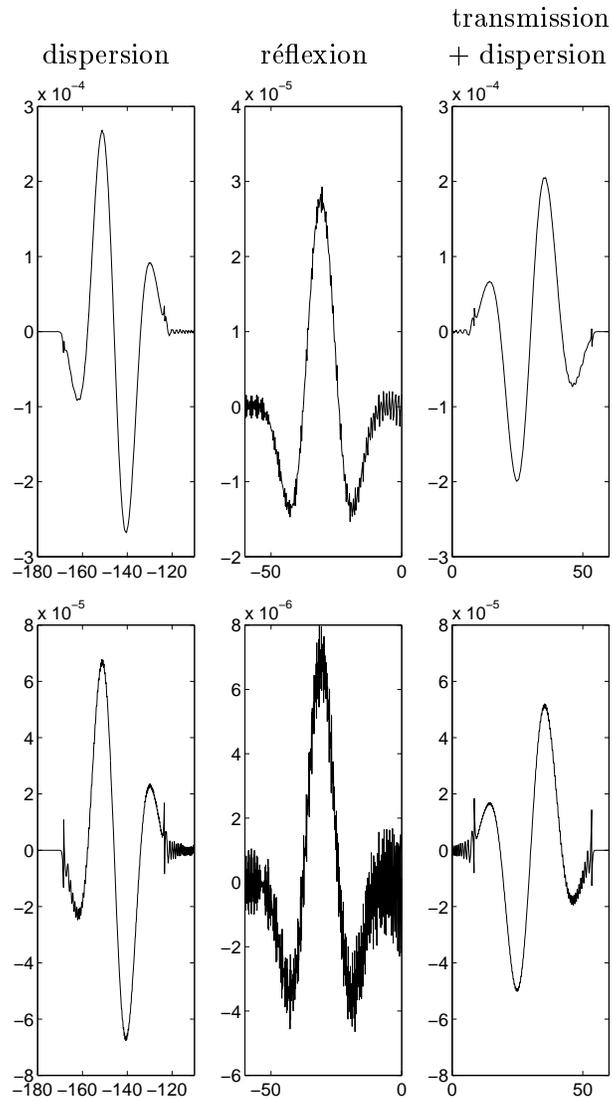


FIG. 1.6 – Différences entre la solution exacte et la solution approchée pour un pas d'espace divisé par 4 (en haut) et 8 (en bas)

## 1.3.2 Analyse par ondes planes du schéma retenu.

On s'intéresse ici aux coefficients de réflexion et de transmission du schéma (1.34). Le calcul des solutions ondes planes effectué pour les schémas par interpolation dans la partie 1 (cf 2.1.3 et 2.1.5), est toujours valable: on sait par exemple que si  $k_h(\omega)^3$  est le nombre d'onde numérique, on peut écrire pour  $\omega$  fixé

$$(1.37) \quad \begin{aligned} u_{2j}^{2k} &= \left( e^{ik_h(2\omega)jh} + R(\omega)e^{-ik_h(2\omega)jh} \right) e^{-i\omega 2k \Delta t} && \text{pour } j \leq 0 \\ u_j^k &= T(\omega)e^{i(k_h(\omega)jh - \omega k \Delta t)} + T_p(\omega)e^{i(k_h(\omega + \frac{\pi}{\Delta t})jh - (\omega + \frac{\pi}{\Delta t})k \Delta t)} && \text{pour } j \geq 0 \end{aligned}$$

On en déduit des expressions analogues pour  $v$  en utilisant le schéma de Yee.

Rappelons la solution exacte correspond à  $k_h(\omega) = k(\omega) = \omega$  et  $R = 0$ ,  $T = 1$  et  $T_p = 0$ . Le schéma est donc d'autant plus précis que ces coefficients sont proches de ces valeurs.

Le système d'équations de raccords à l'interface (1.34) se traduit alors, après quelques calculs laborieux que nous ne détaillons pas ici, en un système permettant de trouver les coefficients  $R$ ,  $T$ , et  $T_p$ .

$$(1.38) \quad M(\alpha, \omega \Delta t) \begin{bmatrix} T \\ T_p \\ R \end{bmatrix} = b(\alpha, \omega \Delta t)$$

où

$$(1.39) \quad \alpha = \frac{\Delta t}{h} \quad M(\alpha, \omega \Delta t) = \begin{bmatrix} a & a_p & -a_r \\ b & b_p & 0 \\ c & c_p & -c_r \end{bmatrix} \quad b(\alpha, \omega \Delta t) \begin{bmatrix} a_r \\ 0 \\ \mu \end{bmatrix}$$

avec

$$(1.40) \quad \begin{cases} a &= 1 + \cos \omega \Delta t \\ a_p &= \cos \omega \Delta t - 1 \\ a_r &= 2 \cos \omega \Delta t \end{cases} \quad \begin{cases} b &= \alpha (r(\omega) - 1) - \frac{\cos \omega \Delta t - 1}{\alpha} \\ b_p &= -\alpha \left( r(\omega + \frac{\pi}{\Delta t}) - 1 \right) - \frac{\cos \omega \Delta t + 1}{\alpha} \end{cases}$$

$$(1.41) \quad \begin{cases} c &= \frac{\alpha (r(\omega) - 1) (1 + e^{i\omega \Delta t})}{e^{2i\omega \Delta t} - 1} + \frac{e^{-i\omega \Delta t} - 1}{2\alpha} \\ c_p &= \frac{\alpha \left( r(\omega + \frac{\pi}{\Delta t}) - 1 \right) (1 - e^{i\omega \Delta t})}{e^{2i\omega \Delta t} - 1} - \frac{e^{-i\omega \Delta t} + 1}{2\alpha} \\ c_r &= \frac{\alpha (1 - r(2\omega))}{e^{2i\omega \Delta t} - 1} - \frac{e^{-2i\omega \Delta t} - 1}{2\alpha} \\ \mu &= \frac{\alpha \left( 1 - \frac{1}{r(2\omega)} \right)}{e^{2i\omega \Delta t} - 1} - \frac{e^{-2i\omega \Delta t} - 1}{2\alpha} \end{cases}$$

Après avoir résolu ce système et déterminé les coefficients  $R$ ,  $T$  et  $T_p$ , on peut alors effectuer des développements limités autour de  $\omega \Delta t = 0$  (ce que nous avons fait à l'aide du logiciel Maple).

---

3. où  $e^{ik_h(\omega \Delta t)} = r(\omega \Delta t)$  et on a la relation de dispersion  $\frac{1}{\Delta t} \sin(\frac{\omega \Delta t}{2}) = \frac{1}{h} \sin(\frac{k_h(\omega \Delta t)}{2})$

**Le cas**  $\alpha = \frac{\Delta t}{h} < 1$ . Cette hypothèse correspond à la condition suffisante de stabilité établie au théorème 4

$$(1.42) \quad \begin{cases} T = 1 - \frac{3}{16} \left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right) (\omega\Delta t)^2 + O\left((\omega\Delta t)^3\right) \\ T_p = -\frac{1}{2} \frac{i\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} (\omega\Delta t) + O\left((\omega\Delta t)^3\right) \\ R = \frac{1}{16} \left(1 - \frac{3}{\alpha^2}\right) (\omega\Delta t)^2 + O\left((\omega\Delta t)^3\right) \end{cases}$$

On a donc

- une réflexion d'ordre 2,
- une transmission d'ordre 2,
- une transmission parasite d'ordre 1

La réflexion et la transmission d'ordre 2 sont un réel progrès par rapport aux schéma d'interpolation, puisque l'on a vu qu'ils engendraient des coefficients d'ordre 1. Ces résultats confirment donc les observations numériques sur l'ordre des coefficients. La transmission parasite d'ordre 1, n'est pas réellement puisque nous verrons qu'elle est bien souvent (c'est-à-dire pour la plupart des fréquences) évanescence, c'est-à-dire qu'elle ne se propage pas dans le domaine et sa profondeur de pénétration est en  $O(h)$ . Nous proposons dans la section suivante une étude numérique de cette onde parasite.

Notons toutefois que le terme principal du développement de  $T_p$  augmente et tend même vers  $\infty$  lorsque  $\alpha$  tend vers 1. Cela laisse entrevoir une détérioration de la précision pour  $\alpha$  proche de 1. Nous verrons en pratique qu'il suffit de s'éloigner que de quelques pour cent des caractéristiques pour éviter le problème.

**Cas particulier du schéma aux caractéristiques**  $\alpha = 1$ . Le calcul des coefficients dans le cas  $\alpha = 1$  est plus simple, on trouve en effet

$$(1.43) \quad \begin{cases} T = \cos \omega\Delta t = 1 - \frac{1}{2}(\omega\Delta t)^2 + \frac{1}{24}(\omega\Delta t)^4 + O\left((\omega\Delta t)^6\right) \\ T_p = -\cos \omega\Delta t = -1 + \frac{1}{2}(\omega\Delta t)^2 - \frac{1}{24}(\omega\Delta t)^4 + O\left((\omega\Delta t)^6\right) \\ R = 0 \end{cases}$$

Le schéma n'est apparemment plus consistant, puisque le coefficient  $T_p$  qui devrait être voisin de 0 est voisin de  $-1$ ! La section qui suit va donner un éclairage sur ce phénomène.

### 1.3.3 Une étude sur les ondes parasites.

La principale source d'inquiétude soulevée par l'analyse de réflexion-transmission menée dans la section précédente est l'existence d'une onde transmise parasite et notamment son comportement lorsque  $\alpha$  se rapproche de 1. Nous avons voulu dans cette section analyser précisément comment cette onde parasite entâche les résultats numériques.

Pour cela on réalise une simulation sur un domaine composé d'une grille fine ( $0 \leq x \leq 25$ ) et d'une grille grossière (domaine  $-100 \leq x \leq 0$ ) dans laquelle les conditions initiales sont non nulles. Plus précisément on choisit  $v(x, 0) = 0$  et  $u(x, 0) = u_0(x)$  où  $u_0(x)$  est la fonction de Harris (décrite par (2.53) dans la première partie) centrée en  $x = -35$  de telle sorte que son support est inclus dans le domaine  $x < 0$ . Les conditions aux limites sont des conditions de Dirichlet en  $x = -100$  et  $x = 25$ . Sur les figures 1.7 et 1.9, la solution dans la grille grossière est matérialisée par un trait plus épais. On enregistre ensuite au cours du temps différents instantanés de la solution, en l'occurrence les courbes  $x \rightarrow u(x, t)$  pour différentes valeurs de  $t$ .

**Cas du schéma aux caractéristiques,  $\alpha = 1$ .** On a représenté figure 1.7 les résultats pour un nombre de Courant  $\alpha = 1$ . Comme l'analyse théorique sur les coefficients de réflexion-transmission le prévoyait, dès que l'onde arrive dans la grille fine une partie haute fréquence apparaît (cf.  $T_p = -\cos(\omega\Delta t)$  dans l'équation 1.43). On observe en effet une solution qui oscille autour de la solution exacte avec une amplitude non négligeable. Le schéma n'est plus convergent. On remarque que cette onde parasite disparaît lorsque l'onde ressort de la grille fine. Ainsi, après quelques itérations, la solution exacte est bien reconstituée. Ce phénomène est assez remarquable et pourrait sans doute être expliqué en étendant l'analyse de réflexion-transmission effectuée au paragraphe précédent au cas où l'onde incidente est dans la grille fine (ce que nous n'avons pas fait par manque de temps). On peut par exemple s'attendre à ce qu'une onde incidente de type parasite dans la grille fine ne donne naissance à aucune réflexion pour  $\alpha = 1$ . Ce phénomène semble particulier au cas  $\alpha = 1$ , nous verrons que pour d'autres valeurs de  $\alpha$  l'onde parasite peut rester piégée dans la grille fine.

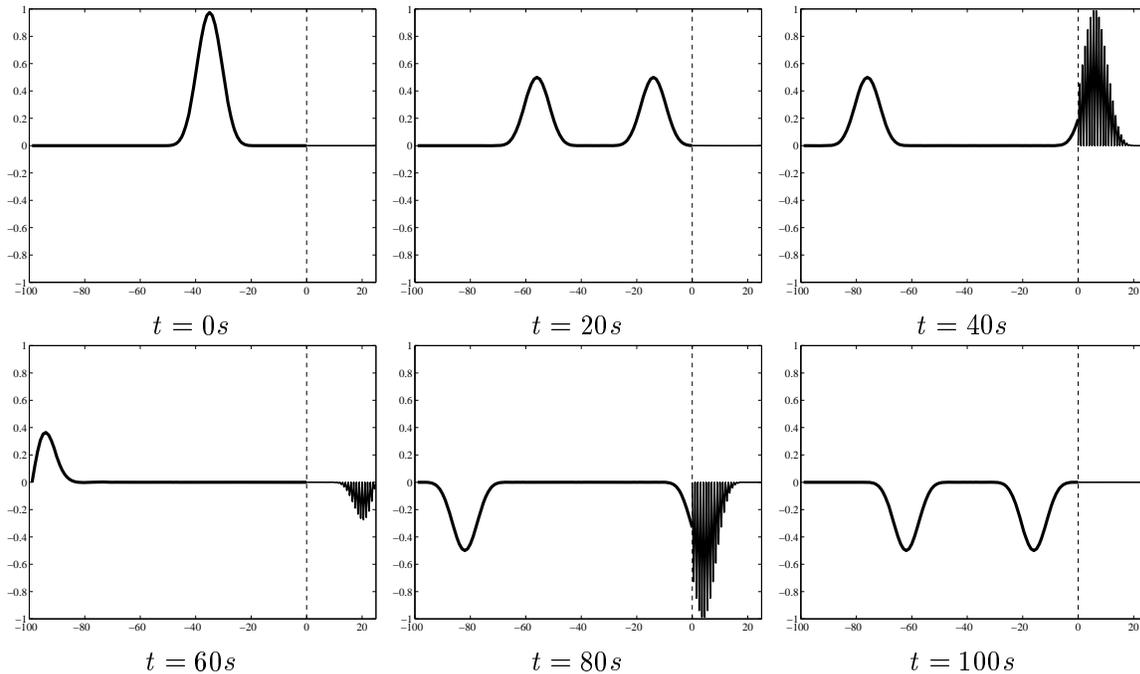


FIG. 1.7 – instantanés de l'expérience avec  $\alpha = 1$

**Effet de la diminution de  $\alpha$ .** Si l'on baisse très légèrement  $\alpha$ , l'onde parasite devient beaucoup moins importante. On a représenté figure 1.8 les instantanés d'une simulation avec un nombre de Courant de 0.99. L'onde parasite a très fortement diminué, même si, contrairement au cas précédent, elle reste piégée dans la grille fine aux temps longs.

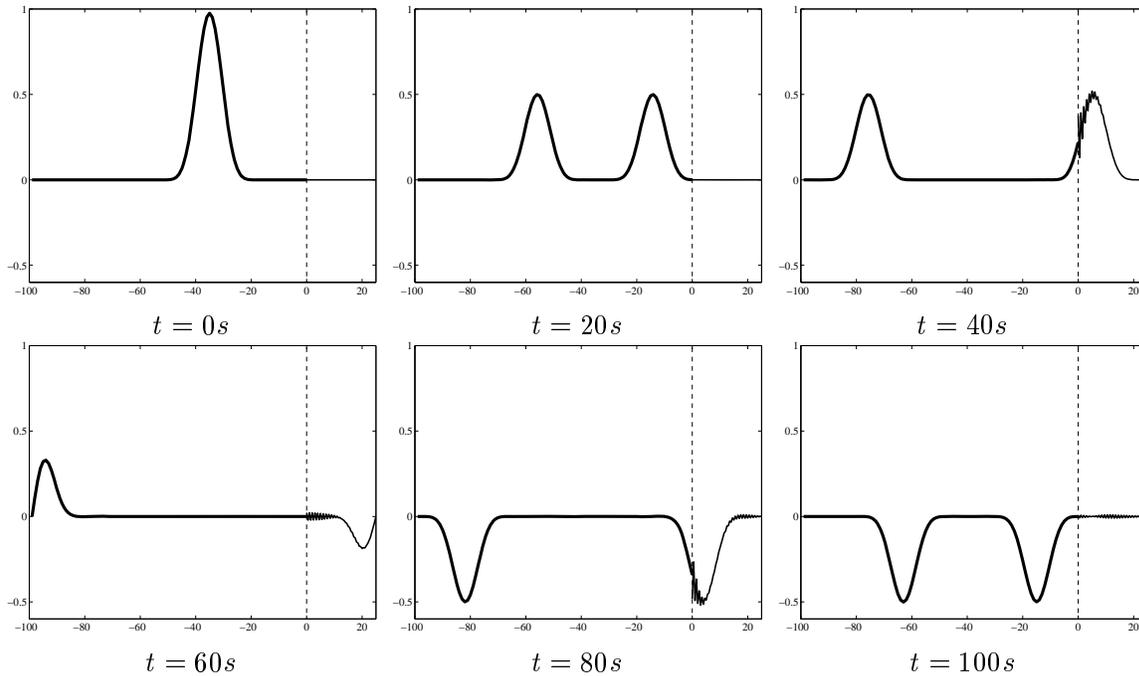


FIG. 1.8 – instantanés de l'expérience avec  $\alpha = 0.99$

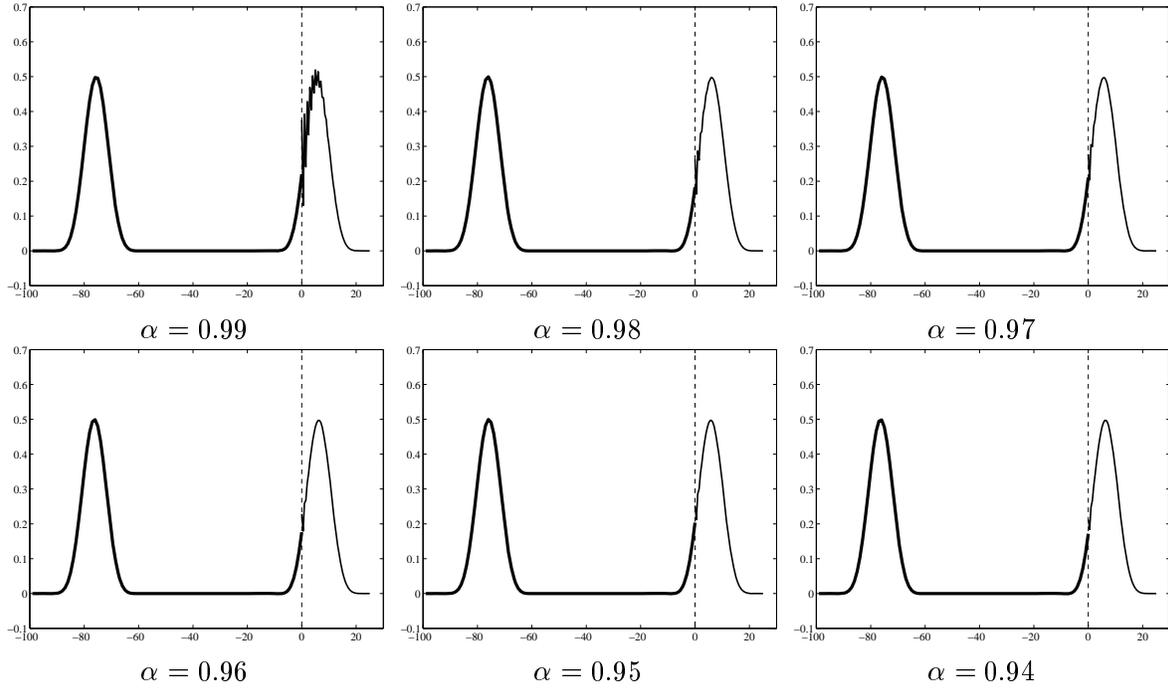
Retenons maintenant l'instantané à 40s et regardons son évolution lorsque  $\alpha$  diminue. On effectue la même simulation pour des nombres de Courant allant de 0.99 à 0.94. Sur la figure 1.9 on a représenté les solutions à l'instant  $t = 40s$ , pour ces nombres de Courant. On remarque que dès 0.99 l'onde parasite a nettement diminué et n'est quasiment plus perceptible à partir de 0.96.

On a vu (cf. 1.42) que le coefficient de cette onde parasite était d'ordre 1 lorsque  $\alpha \neq 1$ . Cela n'explique pas le fait que dans nos expériences numériques, l'onde parasite disparaisse presque complètement lorsque le nombre de Courant diminue très peu car le terme en facteur de  $\omega\Delta t$  dans le développement limité de  $T_p(\omega\Delta t)$  explose lorsque  $\alpha$  tend vers 1. Il faut en fait recourir à une analyse plus fine qui va suivre.

**Explication théorique.** Dans ce qui suit, si  $\omega$  est la pulsation de l'onde incidente, nous noterons  $\omega_p = \omega + \pi/\Delta t$ , la pulsation parasite c'est-à-dire celle de l'onde transmise parasite.

- **Structure des ondes planes numériques.** L'analyse par ondes planes faite dans la première partie va nous être d'une grande utilité. En effet, on a vu que la solution onde plane de pulsation  $\omega\Delta t$  du schéma classique (c'est à dire sans raffinement) s'écrivait sous la forme

$$u_j^n = r(\omega)^j e^{in\omega\Delta t} = e^{ik_h(\omega\Delta t)x_j} e^{in\omega\Delta t}, \quad (r(\omega) = e^{ik_h(\omega\Delta t)h})$$


 FIG. 1.9 – évolution de la solution à 40 secondes avec  $\alpha$ 

où  $r(\omega)$  est solution du polynôme caractéristique

$$\begin{cases} r(\omega)^2 - 2A(\omega)r(\omega) + 1 = 0 \\ \text{avec } A(\omega) = 1 - \frac{2}{\alpha^2} \sin^2\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right). \end{cases}$$

On rappelle (cf. section 2.1.2 de la partie 1) que

- $|r(\omega)| = 1$  pour  $\omega \in \left[-\frac{2}{\Delta t} \arcsin \alpha, \frac{2}{\Delta t} \arcsin \alpha\right]$   
 $\implies k_h(\omega\Delta t)$  est réel, l'onde est alors propagative.
- $|r(\omega)| < 1$  pour  $\omega \in \left[-\frac{\pi}{\Delta t}, -\frac{2}{\Delta t} \arcsin \alpha\right] \cup \left[\frac{2}{\Delta t} \arcsin \alpha, \frac{\pi}{\Delta t}\right]$   
 $\implies k_h(\omega\Delta t)$  est complexe, l'onde est alors évanescence.

On notera plus précisément que lorsque  $r(\omega)$  est de module strictement inférieur à 1, c'est à dire lorsque l'onde est évanescence, il est réel négatif entre -1 et  $r_*(\alpha)$  donné par

$$(1.44) \quad r_*(\alpha) = \frac{\alpha^2 - 2 + 2\sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha^2} \in [-1, 0]$$

ce qui signifie que:

$$k_h(\omega\Delta t) = \pi/h + i \xi_h(\omega\Delta t), \quad \xi_h(\omega\Delta t) = |\text{Log}|r(\omega\Delta t)|| > 0.$$

Les ondes de fréquence  $|\omega\Delta t| > 2 \arcsin(\alpha)$  sont donc exponentiellement décroissantes avec  $x_j$ , la profondeur de pénétration (ou profondeur de peau) étant donnée par :

$$l_h(\omega\Delta t) = \xi_h(\omega\Delta t)^{-1},$$

et oscillent à la fréquence du maillage.

On remarque que lorsque  $\alpha = 1$  toutes les fréquences sont propagatives. De plus, la fonction arcsin étant croissante, on s'aperçoit que plus le nombre de Courant est petit plus l'intervalle où les ondes sont évanescentes est grand. La figure 1.10 nous montre que le phénomène est accentué pour  $\alpha$  proche de 1.

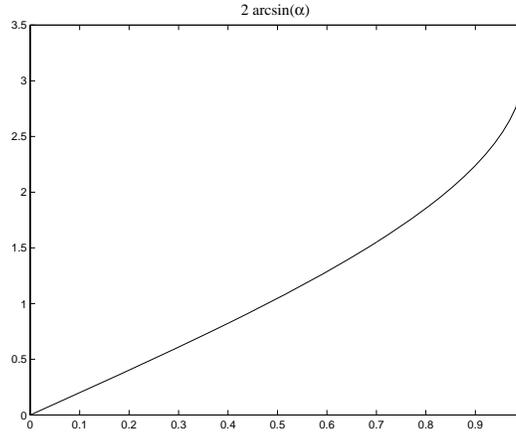


FIG. 1.10 – fonction  $2\arcsin(\alpha)$

– **Cas d'une onde plane incidente monochromatique de pulsation  $\omega$  fixée.**

Si on s'intéresse à une onde plane incidente de fréquence  $\omega > 0$ , pour tout  $\alpha$ , pour  $\Delta t$  assez petit l'onde incidente (et donc les ondes transmises et réfléchies non parasites qui sont de même fréquence) sera nécessairement propagative, en fait dès que  $\omega\Delta t$  est inférieur à  $2 \arcsin(\alpha)$ . Il est facile de voir, nous laissons le raisonnement au lecteur (voir également la figure 1.11), que l'onde transmise parasite de fréquence  $\omega_p = \omega + \pi/\Delta t$  sera évanescente si

$$\omega\Delta t < \pi - 2\arcsin(\alpha) = C(\alpha),$$

ce qui est nécessairement réalisé pour  $\Delta t$  assez petit. En résumé, si on se limite à une onde incidente propagative:

- L'onde transmise parasite sera évanescente si  $\omega\Delta t < \pi - 2\arcsin(\alpha)$ .
- L'onde transmise parasite sera propagative si  $\pi - 2\arcsin(\alpha) \leq \omega\Delta t \leq 2\arcsin(\alpha)$ .

Ce qu'il faut retenir de ce raisonnement c'est que:

- Pour une fréquence incidente fixée, l'onde transmise parasite devient nécessairement évanescente pour  $\Delta t$  assez petit.

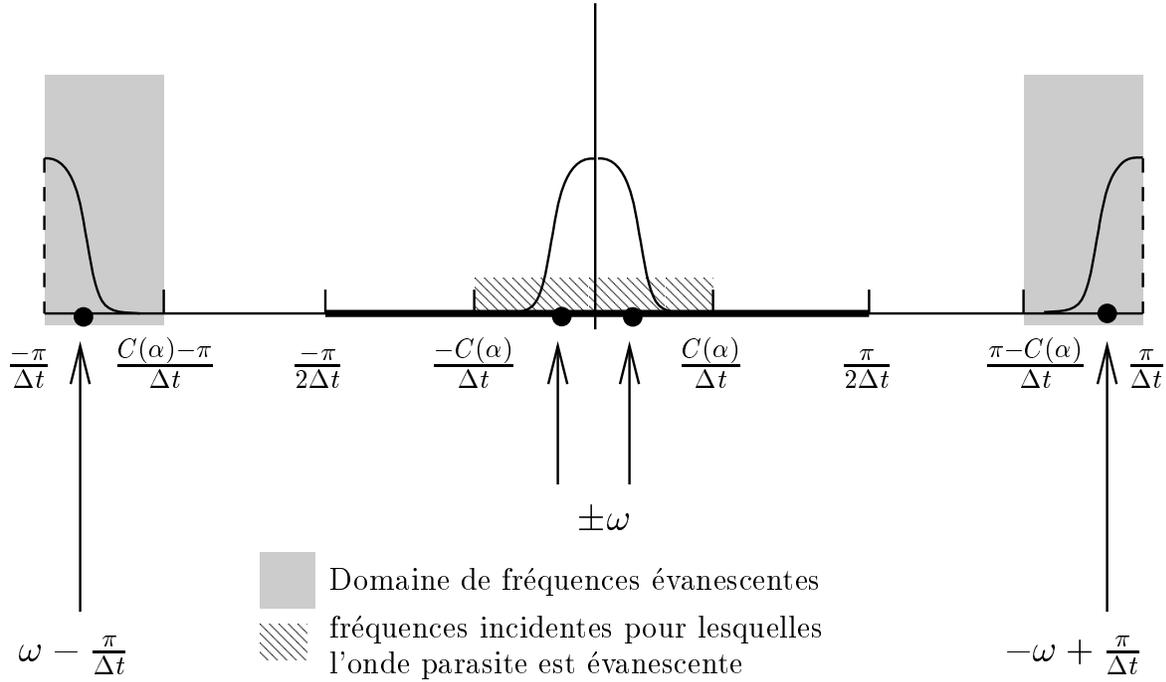


FIG. 1.11 – schéma des fréquences transmises à l'interface ; de l'intervalle de fréquence  $[-\frac{\pi}{2\Delta t}, \frac{\pi}{2\Delta t}]$  dans la grille grossière, on passe à l'intervalle  $[-\frac{\pi}{\Delta t}, \frac{\pi}{\Delta t}]$  dans la grille fine.

- Lorsque  $\Delta t$  tend vers 0 la profondeur de pénétration de l'onde transmise tend vers 0 proportionnellement à  $h$ . Plus précisément :

$$l_h(\omega\Delta t) \sim \tau_\alpha h \quad \Delta t \rightarrow 0$$

où nous avons posé  $\tau_\alpha = |\text{Log}|r_*(\alpha)||^{-1}$ . Sur les figures 1.12 et 1.13 nous étudions la variation de cette profondeur de pénétration en fonction de  $\omega\Delta t$  lorsque  $\alpha = 0.9$ . Sur la figure 1.12 nous considérons des valeurs de  $\omega\Delta t$  proche de la valeur critique  $c_\alpha = 0.902$  ici. Sur la figure 1.13 nous regardons ce qui se passe lorsque  $\omega\Delta t$  tend vers 0, signalons que lorsque  $\alpha = 0.9$ ,  $\tau_\alpha = 0.93$ .

- Si  $\Delta t$  est fixé, l'ensemble des fréquences donnant lieu à des ondes transmises propagatives diminue avec  $\alpha$ .

Ces remarques vont permettre de comprendre les phénomènes numériques observés dans les diverses expériences que nous avons présentées. Il faut toutefois considérer le cas où l'onde plane incidente n'est plus monochromatique mais correspond à un paquet d'ondes.

- **Cas d'un paquet d'ondes incident.** Nous nous intéressons maintenant à une onde incidente de la forme:

$$(1.45) \quad u_j^n = \int a(\omega) e^{ik_h(\omega\Delta t)x_j} e^{in\omega\Delta t} d\omega$$

où  $a(\omega)$  est une fonction décrivant la répartition de l'amplitude des ondes planes qui composent le signal incident. Nous supposons que cette fonction décroît suffisamment pour les grandes valeurs de  $\omega$  ce qui équivaut à une hypothèse de régularité de l'onde

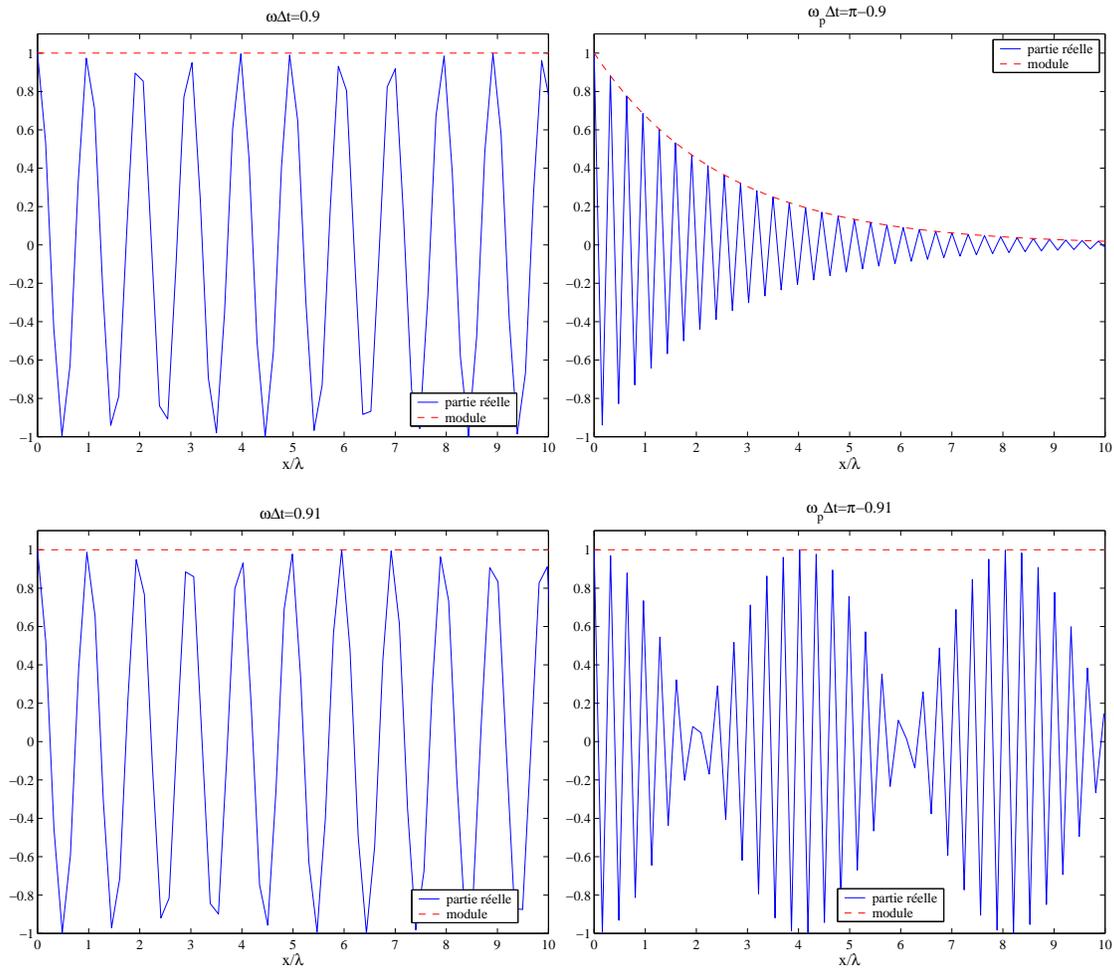


FIG. 1.12 – Profondeur de pénétration de l'onde transmise et de l'onde parasite pour des valeurs de  $\omega\Delta t$  proche de la valeur critique  $C(\alpha)$  (ici  $\alpha = 0.9$ ,  $C(\alpha) \sim 0.902$ ). Pour  $\omega\Delta t > C(\alpha)$ , l'onde parasite est propagative. Pour  $\omega\Delta t < C(\alpha)$ , l'onde parasite est évanescente.

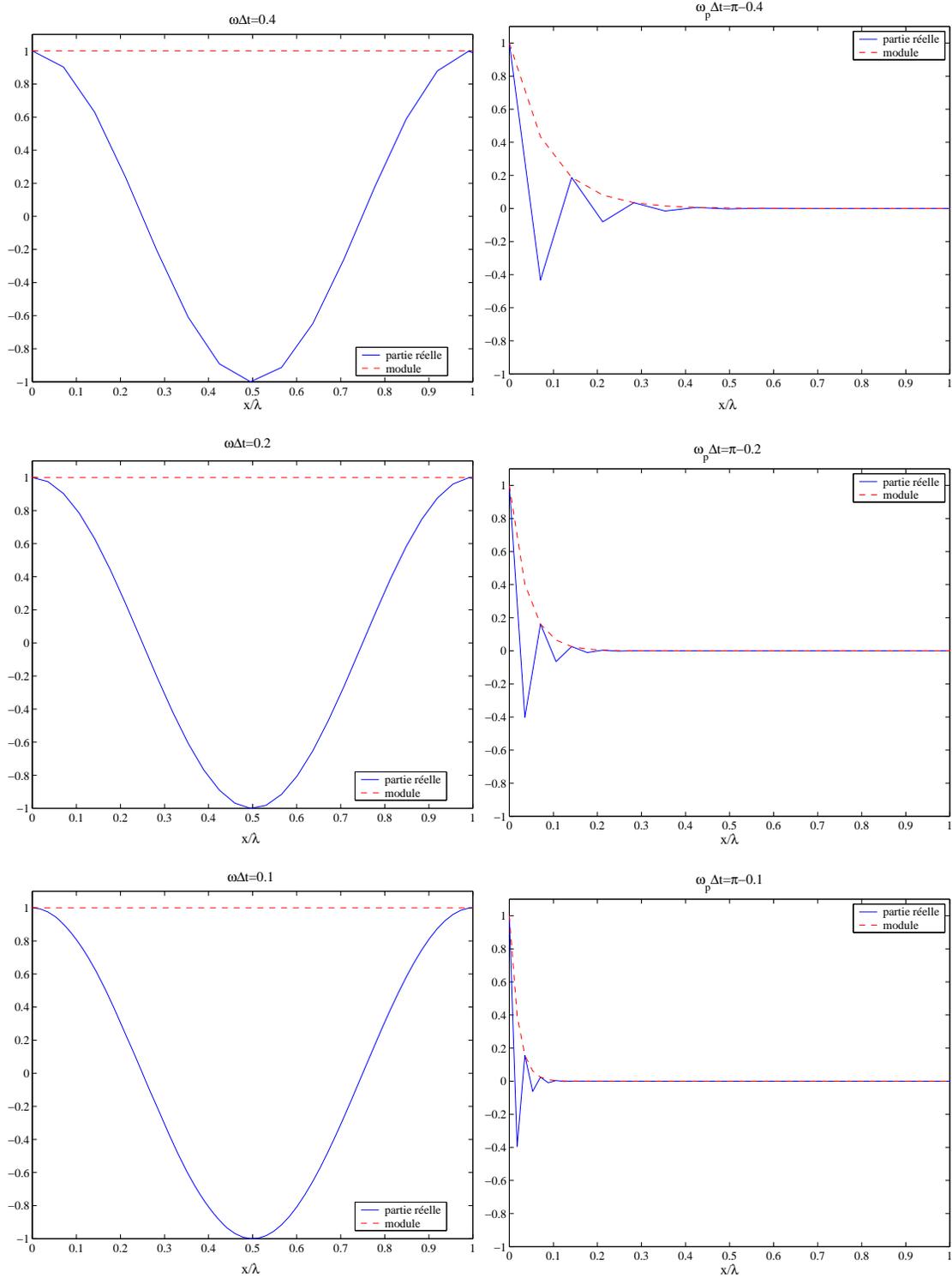


FIG. 1.13 – Profondeur de pénétration de l'onde transmise et de l'onde parasite lorsque  $\Delta t \rightarrow 0$ . En divisant le pas de temps par deux on divise également la profondeur de pénétration de l'onde parasite par deux, cette dernière est donc en  $O(\Delta t)$ .

incidente. Dans les expériences numériques présentées au début de cette section, en faisant baisser légèrement le nombre de Courant on a augmenté l'ensemble des valeurs de  $\omega$  pour lesquelles les ondes parasites sont évanescentes (cf. figure 1.11). De ce fait, l'onde transmise parasite obtenue par superposition de toutes les fréquences est plus faible, surtout lorsque l'on s'éloigne de l'interface, c'est effectivement ce que l'on constate numériquement (pour  $\alpha = 0.99$ ). Si nous supposons que le signal incident a un contenu fréquentiel  $[-\omega_0, \omega_0]$ , c'est à dire que la fonction  $a(\omega)$  est à support dans  $[-\omega_0, \omega_0]$ , nous pouvons maintenant préciser la condition sur le nombre de Courant nécessaire pour que l'onde parasite soit annulée, à savoir:

$$\frac{2}{\Delta t} \arcsin \alpha < \frac{\pi}{\Delta t} - \omega_0$$

Dans l'expérience numérique présentée, le signal incident (signal de Harris donné par (2.53) dans la partie 1) est discrétisé avec 10 points par longueur d'onde, sa fréquence de coupure est environ  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 0.11$  Hertz. Le calcul nous montre que l'onde parasite est évanescence pour un nombre de Courant de 0.99. En pratique, dans les expériences numériques, nous devons prendre un nombre un peu plus faible: ce calcul indiquant que l'onde sera évanescence et ne permet à l'onde de disparaître qu'après la propagation sur quelques mailles. Ce qui explique l'onde parasite proche de l'interface dans le cas d'un nombre de Courant de 0.98. En prenant un nombre un peu plus faible, on rend cette évanescence plus rapidement efficace. Par exemple avec un nombre de Courant de 0.95 on divise l'onde parasite par 2 entre chaque maille.

D'un point de vue plus théorique, on peut expliquer le comportement "à l'ordre 2" observé dans la section 1.3.1, bien que le coefficient de transmission parasite ne soit "que d'ordre 1". A l'onde incidente (1.45) correspond, par principe de superposition:

– une onde réfléchie :

$$(u_R)_{2j}^{2n} = \int R(\omega) a(\omega) e^{ik_h(2\omega\Delta t)x_{2j}} e^{i2n\omega\Delta t} d\omega, \quad j \leq 0,$$

– une onde transmise :

$$(u_T)_j^n = \int T(\omega) a(\omega) e^{ik_h(\omega\Delta t)x_j} e^{in\omega\Delta t} d\omega \quad j \geq 0,$$

– une onde transmise parasite:

$$(u_T^p)_j^n = \int T_p(\omega) a(\omega) e^{ik_h(\omega_p\Delta t)x_j} e^{in\omega_p\Delta t} d\omega \quad j \geq 0,$$

Les coefficients  $R(\omega)$  et  $T(\omega)$  étant en  $O((\omega\Delta t)^2)$  et  $1 - O((\omega\Delta t)^2)$  et  $k_h(\omega\Delta t)$  approchant  $k(\omega) = \omega$  en  $O((\omega\Delta t)^2)$ , le seul terme à examiner est l'onde parasite  $(u_T^p)_j^n$ . Placons nous en un point d'abscisse  $x > 0$ , c'est a dire non situé sur l'interface, tel que  $x_j = x$ . Nous évaluons la quantité :

$$\|(u_T^p)(x, \cdot)\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |(u_T)_j^n|^2 \Delta t$$

qui représente en quelque sorte la norme  $L^2$  en temps de l'onde transmise parasite à l'abscisse  $x$ . Dans ce qui suit, pour tout  $s > 0$ , nous poserons

$$\|a\|_s^2 = \int \omega^{2s} |a(\omega)|^2 d\omega$$

Par le théorème de Plancherel nous avons:

$$\|(u_T^p)(x, \cdot)\|^2 = \int_{|\omega\Delta t| < \pi} |T_p(\omega)|^2 |a(\omega)|^2 |e^{ik_h(\omega_p\Delta t)x_j}|^2 d\omega.$$

Nous avons :

- $|\omega\Delta t| \leq C(\alpha) \Rightarrow |e^{ik_h(\omega_p)x}|^2 = 1$
- $|\omega\Delta t| > C(\alpha) \Rightarrow |e^{ik_h(\omega_p)x}|^2 = e^{-2\xi_h(\omega\Delta t)x}$

L'étude plus précise de la fonction  $r(\omega)$  au voisinage de  $\frac{C(\alpha)}{\Delta t}$  montre en fait que pour tout  $0 < \eta < C(\alpha)$ , il existe  $\rho_\alpha(\eta) > 0$  tel que

$$\omega\Delta t \leq C(\alpha) - \eta, \quad \xi_h(\omega\Delta t) \geq \rho_\alpha(\eta)/\Delta t > 0$$

Par ailleurs, en utilisant les propriétés du coefficient  $T_p$  établies section 1.3.2 (Notamment le développement limité au voisinage de  $\omega\Delta t = 0$ ), il existe une constante  $T_\alpha^* > 0$  telle que

$$|T_p(\omega\Delta t)| \leq T_\alpha^* \cdot \omega\Delta t$$

Nous écrivons alors :

$$\begin{aligned} \|u_T^p(x, \cdot)\|^2 &= \int_{|\omega\Delta t| \leq C(\alpha) - \eta} |T_p(\omega)|^2 |a(\omega)|^2 |e^{ik_h(\omega_p\Delta t)x}|^2 d\omega \\ &+ \int_{|\omega\Delta t| > C(\alpha) - \eta} |T_p(\omega)|^2 |a(\omega)|^2 |e^{ik_h(\omega_p\Delta t)x}|^2 d\omega \\ &\leq |T_\alpha^*|^2 \Delta t^2 e^{-2\frac{\rho_\alpha(\eta)}{\Delta t}} \int_{|\omega\Delta t| \leq C(\alpha) - \eta} \omega^2 |a(\omega)|^2 d\omega \\ &+ |T_\alpha^*|^2 \Delta t^2 \int_{|\omega\Delta t| > C(\alpha) - \eta} \omega^2 |a(\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

Or

$$\int_{|\omega\Delta t| > C(\alpha) - \eta} \omega^2 |a(\omega)|^2 d\omega = \int_{|\omega\Delta t| > C(\alpha) - \eta} \frac{\omega^2 \omega^{2s} |a(\omega)|^2}{\omega^{2s}} d\omega \leq \left(\frac{\Delta t}{C(\alpha) - \eta}\right)^{2s} |a|_{s+1}^2$$

Nous en déduisons

$$\|u_T^p(x, \cdot)\|_{L^2}^2 \leq \frac{T_\alpha^*}{(C(\alpha) - \eta)^{2s}} |a|_{s+1} \Delta t^{s+1} + T_\alpha^* |a|_1 \Delta t e^{-\rho_\alpha(\eta)x/\Delta t}.$$

Ce résultat signifie que pour tout  $x > 0$ , l'onde parasite est en norme  $L^2$  en temps la somme d'un terme en  $\Delta t e^{-\rho_\alpha(\eta)x/\Delta t}$ , donc exponentiellement petit en  $\Delta t$  et d'un terme en  $\Delta t^{s+1}$ . Cette norme décroît donc plus vite que  $\Delta t^2$  dès que  $\|a\|_1 < \infty$ .

Si on se place sur l'interface,  $x = 0$ , le terme en  $\Delta t$  devient prépondérant. Plus exactement, on montre aisément que, si  $T_p(\omega) \approx T_p^0(\alpha) \cdot \omega \Delta t$  ( $(\omega \Delta t \rightarrow 0)$ ) alors

$$\|u_T^P(0, \cdot)\|_{L^2} \approx T_p^0 |a|_1 \Delta t.$$

On peut globaliser le résultat en considérant des normes  $L^1$  locales en espace à valeur  $L^2$  en temps

$$\|u_T^P\|_{L^1(0,L;L^2)} = \sum_{0 \leq x \leq L} \left( \sum_{n=0}^{\infty} |(u_T^P)_j^n|^2 \Delta t \right)^{\frac{1}{2}} h$$

Nous avons alors par un calcul simple,

$$\|u_T^P\|_{L^1(0,L;L^2)} \leq \frac{LT_\alpha^*}{(C(\alpha) - \eta)^{2s}} |a|_{s+1} \Delta t^{s+1} + T_\alpha^* |a|_1 \frac{\Delta t^2}{\rho_\alpha(\eta)}$$

En particulier,

$$\|u_T^P\|_{L^1(0,L;L^2)} \leq T_\alpha^* |a|_1 \left( \frac{1}{\rho_\alpha(\eta)} + \frac{L}{(C(\alpha) - \eta)^2} \right) \Delta t^2$$

On pourra remarquer qu'habituellement on cherche à avoir un minimum d'ondes évanescentes, car elles sont synonymes d'erreurs de dispersion. Ici nous sommes amenés à augmenter légèrement l'erreur de dispersion afin de réduire l'erreur due à notre raccord. La baisse nécessaire du nombre de Courant s'avère tout de même extrêmement faible, surtout si on la compare à la diminution du nombre de Courant dans le cas d'un raffinement spatial qui est d'un facteur 2. C'est cette comparaison que nous effectuons dans la section suivante.

### 1.3.4 Comparaison avec un raffinement de maillage spatial pur.

Dans cette section nous comparons les simulations réalisées avec notre schéma de raffinement spatio-temporelle avec une méthode de raffinement uniquement spatiale. Ceci devrait nous permettre de mettre en évidence les avantages du raffinement local en temps. Dans les deux cas le rapport des raffinements est de 2. Plusieurs choix sont possibles pour raccorder deux maillages de discrétisation spatiale différente, une méthode variationnelle permettrait d'effectuer le raccord de manière stable, mais ce n'est pas le point qui nous intéresse ici. Notre but étant de montrer numériquement la baisse de l'erreur de dispersion entraînée par le raffinement temporel, nous choisissons un raccord des plus simples utilisant une interpolation centrée, et dont l'instabilité, si elle existe ne sera pas gênante si elle n'est pas observée numériquement. Plus exactement, nous ne considérerons ici, que les conditions de stabilité inhérentes à chaque grille sans nous préoccuper d'une éventuelle condition supplémentaire due à l'interface.

Dans chaque grille, la condition de stabilité du schéma de Yee impose d'avoir  $c\Delta t < h$ . De ce fait, si l'on note  $h_f$  le pas de discrétisation de la grille fine et  $h_g$  celui de la grossière, les conditions de stabilité pour chaque grille dans le cas d'un raffinement uniquement spatial sont donc  $c\Delta t \leq h_g$  et  $c\Delta t \leq h_f$ . C'est-à-dire comme  $h_g = 2h_f$ ,  $c\Delta t \leq h_f$ . Ceci impose donc de choisir le pas de temps lié à la grille fine pour tout le maillage.

Or, on sait (cf. Annexe A.11) que l'erreur classique du schéma (appelée aussi erreur de dispersion) est d'autant plus grande que le rapport  $\frac{\Delta t}{h}$  s'éloigne de 1. Rappelons de plus qu'elle

augmente au cours du temps. On a donc toujours intérêt à ce que ce rapport soit proche de 1. Si ce rapport peut être idéalement pris à un dans la grille fine, on aura dans la grille grossière  $\frac{c\Delta t}{h} = 0.5$ , et donc de la dispersion.

Par contre, dans le cas du raffinement spatio-temporelle, si l'on note  $\Delta t_f$  le pas de temps dans la grille fine et  $\Delta t_g$  celui de la grille grossière, on a bien évidemment  $\frac{c\Delta t_f}{h_f} = \frac{c\Delta t_g}{h_g}$ , et l'erreur de dispersion n'augmente pas dans la grille grossière.

L'inconvénient majeur du raffinement spatial qui est de voir augmenter la dispersion dans la grille grossière, devrait donc disparaître avec un raffinement de maillage spatio-temporel puisque dans ce cas, le rapport  $\frac{\Delta t}{h}$  est le même dans les deux grilles. L'expérience que nous décrivons ci-dessous va nous permettre de mettre en évidence ce phénomène.

Le schéma de raffinement spatial choisi est un des plus simples. Les valeurs  $u_g$  et  $v_g$  de la grille grossière sont respectivement discrétisées aux points  $(2ih, n\Delta t)$  et  $((2i+1)h, (n+\frac{1}{2})\Delta t)$  tandis que les valeurs  $u_f$  et  $v_f$  de la grille fine sont aux points  $(ih, n\Delta t)$  et  $((i+\frac{1}{2})h, (n+\frac{1}{2})\Delta t)$ . Le schéma récapitulatif est présenté (figure 1.14). On remarque qu'une seule valeur ne peut se calculer avec un schéma traditionnel, c'est la valeur de  $u$  à l'interface. On choisit de calculer cette dernière à l'aide du schéma de Yee après avoir calculé la valeur de  $v$  manquante ( $i=1$ ) par interpolation spatiale. L'équation ci-dessous est la transcription formulaire du schéma vert.

$$(1.46) \quad \frac{(u_g)_0^{n+1} - (u_g)_0^n}{\Delta t} + \frac{\frac{(v_f)_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + (v_f)_{\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{2} - (v_g)_{-1}^{n+\frac{1}{2}}}{2h} = 0$$

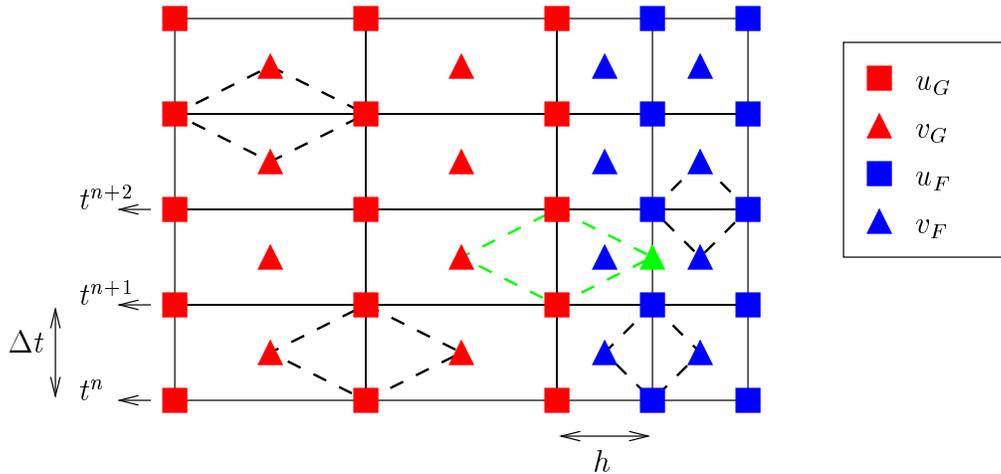
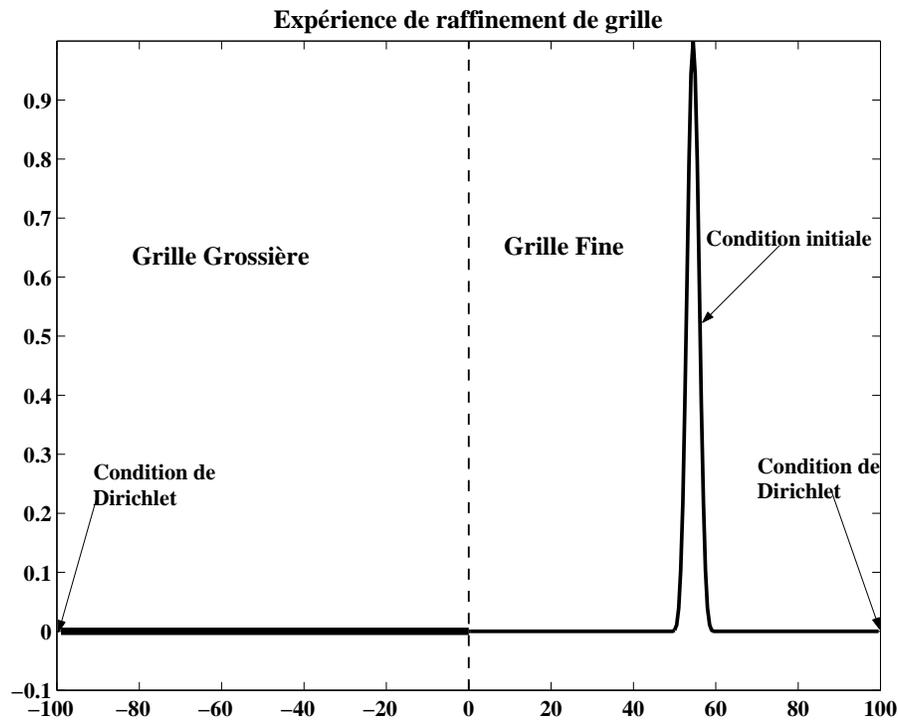
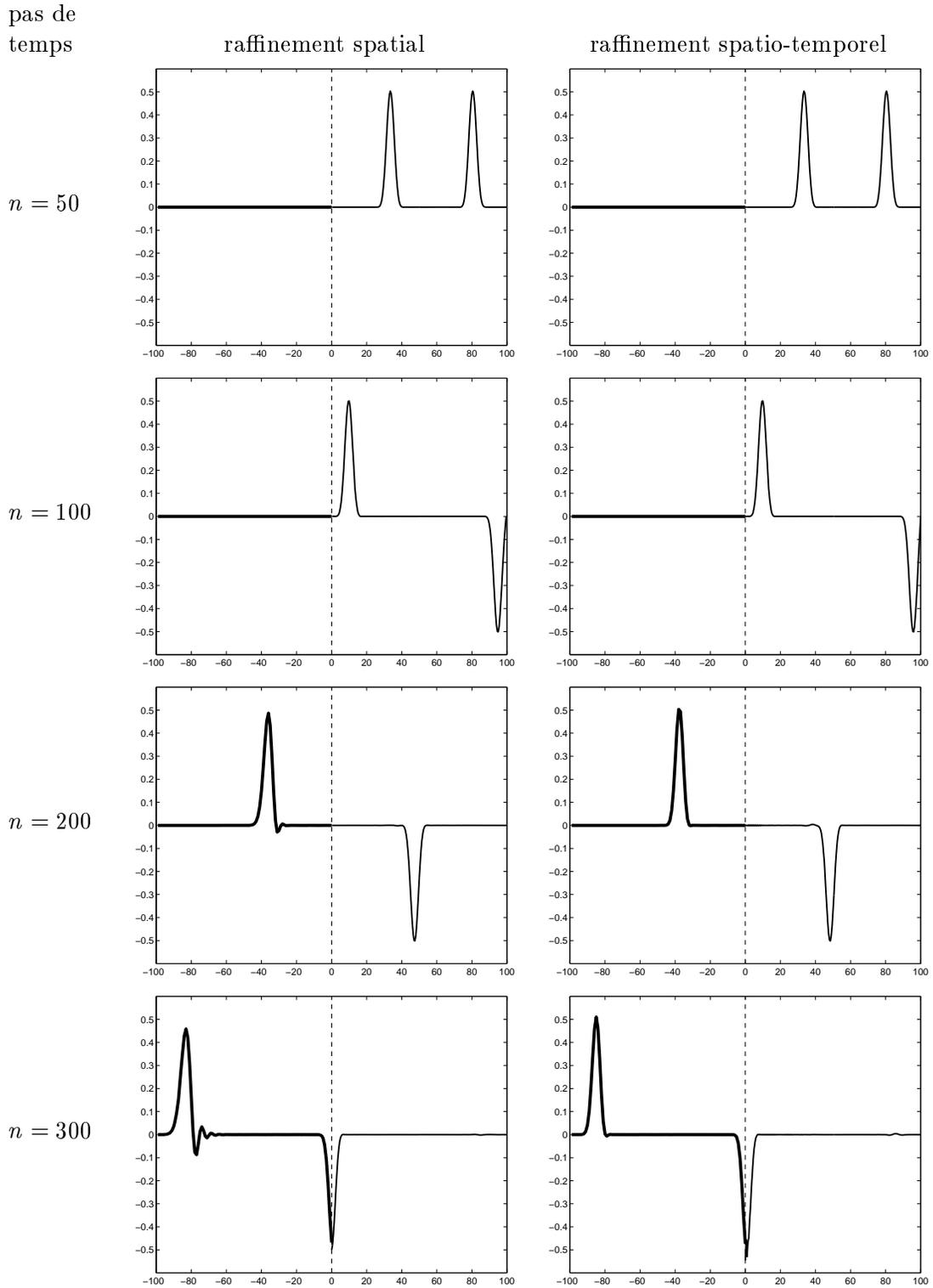


FIG. 1.14 – Schéma de raffinement spatial

Nous réalisons la même expérience numérique pour ces deux stratégies de raffinement. On dispose d'une condition initiale dans la grille fine, les conditions aux limites sont des conditions de Dirichlet. Le schéma de l'expérience est présenté (fig. 1.15). La condition initiale est la fonction de Harris discrétisée avec 20 points fins par longueur d'onde. Le rapport  $\frac{\Delta t}{h}$  dans la grille fine est choisi à 0.95, il sera donc de 0.475 dans la grille grossière du raffinement spatial. On présente ci-dessous les enregistrements des instantanés des deux grilles au cours du temps. Sur les figures de gauche sont présentés les résultats du raffinement spatial, tandis que sur celles de droite, ceux du raffinement spatio-temporel. Si les solutions dans la grille

FIG. 1.15 – *présentation de l'expérience*

fine semblent très proches pour les deux simulations, la solution dans la grille grossière se dégrade beaucoup plus rapidement avec le raffinement spatial puisqu'après 300 pas de temps fins, l'erreur de dispersion n'est plus négligeable, alors qu'elle n'est pas encore perceptible avec le raffinement spatio-temporel, on comprend dès lors l'intérêt du raffinement en temps.



### 1.3.5 Le schéma de raffinement $1-p$ .

La méthode que nous avons présentée se généralise aisément à un raffinement  $1-p$  c'est à dire lorsque la grille fine est  $p$  fois plus fine que la grille grossière. L'intérêt d'un raffinement

1- $p$  est évident il permet, de mieux prendre en compte des détails géométriques, lorsque ceux-ci sont vraiment petits devant la longueur d'onde du signal incident. On ne présente pas ici la construction en détail de cette méthode qui est calquée sur celle du raffinement 1-2. Nous nous contentons d'en donner une présentation sommaire (section 1.3.5.1) puis de présenter des expériences numériques que nous comparons ensuite à des raffinements 1-2 successifs (section 1.3.5.2).

### 1.3.5.1 Présentation sommaire d'un schéma de raffinement 1- $p$ .

Le but ici est donc de trouver un schéma de raccord entre deux grilles, la première étant discrétisée sur un maillage  $(ph, p\Delta t)$ , la deuxième sur un maillage  $(h, \Delta t)$ . La frontière entre ces deux grilles étant au point  $x = 0$ .

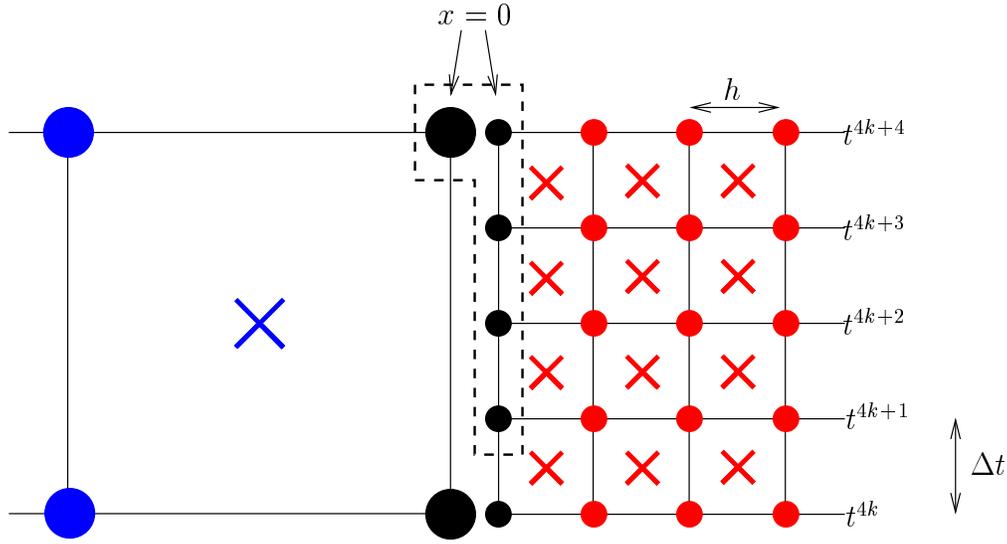


FIG. 1.16 – Présentation des inconnues pour un raffinement 1-4

En introduisant l'énergie discrète de la grille fine définie aux instants  $k$ ,

$$(1.47) \quad E_f^k = \frac{1}{2} \left( \sum_{i \geq 1} |(u_f)_i^k|^2 h + \sum_{j \geq 0} (v_f)_{i+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} (v_f)_{i+\frac{1}{2}}^{k-\frac{1}{2}} h + \frac{h}{2} |(u_f)_0^k|^2 \right),$$

l'énergie discrète de la grille grossière définie aux instants  $pk$

$$(1.48) \quad E_g^{pk} = \frac{1}{2} \left( \sum_{i \leq -1} |(u_g)_{pi}^{pk}|^2 + \sum_{i \geq 0} v_{pi+\frac{p}{2}}^{pk+\frac{p}{2}} v_{pi+\frac{p}{2}}^{pk-\frac{p}{2}} + \frac{ph}{2} |(u_g)_0^{pk}|^2 \right),$$

et l'énergie totale définie aux instants  $pk$ ,

$$(1.49) \quad E_t^{pk} = E_g^{pk} + E_f^{pk},$$

on montre que la condition pour que l'énergie totale  $E_t^{pk}$  se conserve est

$$(1.50) \quad (U_g)_0^{pk+\frac{p}{2}} (V_g)_0^{pk+\frac{p}{2}} = \frac{1}{p} \sum_{l=1}^p (U_f)_0^{pk+\frac{2l-1}{2}} (V_f)_0^{pk+\frac{2l-1}{2}}$$

où

$$\begin{aligned}
 (U_g)_0^{pk+\frac{p}{2}} &= \frac{(u_g)_0^{pk+p} + (u_g)_0^{pk}}{2} \\
 (V_g)_0^{pk+\frac{p}{2}} &= (v_g)_0^{pk+\frac{p}{2}} - \frac{h}{2} \frac{(u_g)_0^{pk+p} - (u_g)_0^{pk}}{\Delta t} \\
 (U_f)_0^{pk+\frac{2l-1}{2}} &= \frac{(u_f)_0^{pk+l} + (u_f)_0^{pk+l-1}}{2} \\
 (V_f)_0^{pk+\frac{2l-1}{2}} &= (v_f)_0^{pk+\frac{2l-1}{2}} + \frac{h}{2} \frac{(u_f)_0^{pk+l} - (u_f)_0^{pk+l-1}}{\Delta t}.
 \end{aligned}
 \tag{1.51}$$

On obtient ainsi le schéma de raccord

$$\begin{cases}
 (U_g)_0^{pk+\frac{p}{2}} = \frac{1}{p} \sum_{l=1}^p (U_f)_0^{pk+\frac{2l-1}{2}} \\
 (V_g)_0^{pk+\frac{p}{2}} = (V_f)_0^{pk+\frac{2l-1}{2}} \quad 1 \leq l \leq p
 \end{cases}
 \tag{1.52}$$

qui est une extension pour  $p \geq 2$  du schéma. Notons que l'on a cette fois à résoudre un système linéaire de  $p + 1$  équations.

### 1.3.5.2 Etude numérique.

**Analyse des ondes transmises parasites.** Nous présentons ici des résultats numériques pour un raffinement 1-4, l'expérience est la même que dans le cas du raffinement 1-2 décrite dans la section (1.3.3). Pour un nombre de Courant de 1, les résultats sont identiques, c'est à dire que le schéma n'est pas consistant. Par contre si l'on prend un nombre de courant de 0.94, les résultats ne s'améliore pas aussi bien que dans le cas du raffinement 1-2. On a représenté figure 1.17 des instantanés de l'expérience (aux temps 0s, 20s, 40s, 60s, 80s et 100s). Non seulement l'onde parasite est toujours présente mais elle persiste dans le temps. Si l'on prolonge l'expérience pendant plus longtemps, on constate que l'onde ne disparaît pas.

L'explication de ce phénomène est simple. On sait (voir partie I section 3.2.1) lorsque la grille fine a un pas de temps  $p$  fois plus fin que celui de la grille grossière, une onde incidente de pulsation  $\omega_0$  génère  $p$  ondes transmises dans la grille fine de pulsation  $(\omega_0 + \frac{2\ell\pi}{p\Delta t})_{l=0,p-1}$ . A la différence du raffinement 1-2, toutes ces pulsations ne sont pas (ou proche de l'être) évanescentes, . Par exemple, on constate (figure 1.18) que deux ondes parasites situées à  $\pm \frac{\pi}{2\Delta t} \pm \omega_0$  sont loin d'être évanescentes (la limite est indiquée par  $\frac{a_*}{\Delta t}$  sur la figure 1.18 avec  $a_* = 2\arcsin(\Delta t/h)$ ). Il faudrait baisser le nombre de Courant, soit diminuer  $\Delta t$ , dans des proportions non négligeables pour arriver à les rendre évanescentes. Un calcul nous indique que dans le cas de notre expérience il faudrait descendre ce rapport à 0.66. La figure 1.20, où l'on a représenté la solution au bout de 40 secondes pour différentes valeurs de  $\alpha$  confirme ce résultat puisqu'il faut effectivement descendre la valeur du nombre de Courant à 0.66 pour voir l'onde parasite disparaître. La figure 1.19 nous montre les courbes  $|r(\omega + \frac{\pi}{\Delta t}, \alpha)|$  et  $|r(\omega + \frac{\pi}{2\Delta t}, \alpha)|$  en fonction du nombre de Courant. Ceci confirme la large plage fréquentielle où la nouvelle onde parasite est propagative.

**Vaut il mieux raffiner deux fois d'un facteur 2 qu'une fois d'un facteur 4?** Une manière de contourner cet inconvénient, si l'on veut obtenir une grille raffinée 4 fois est

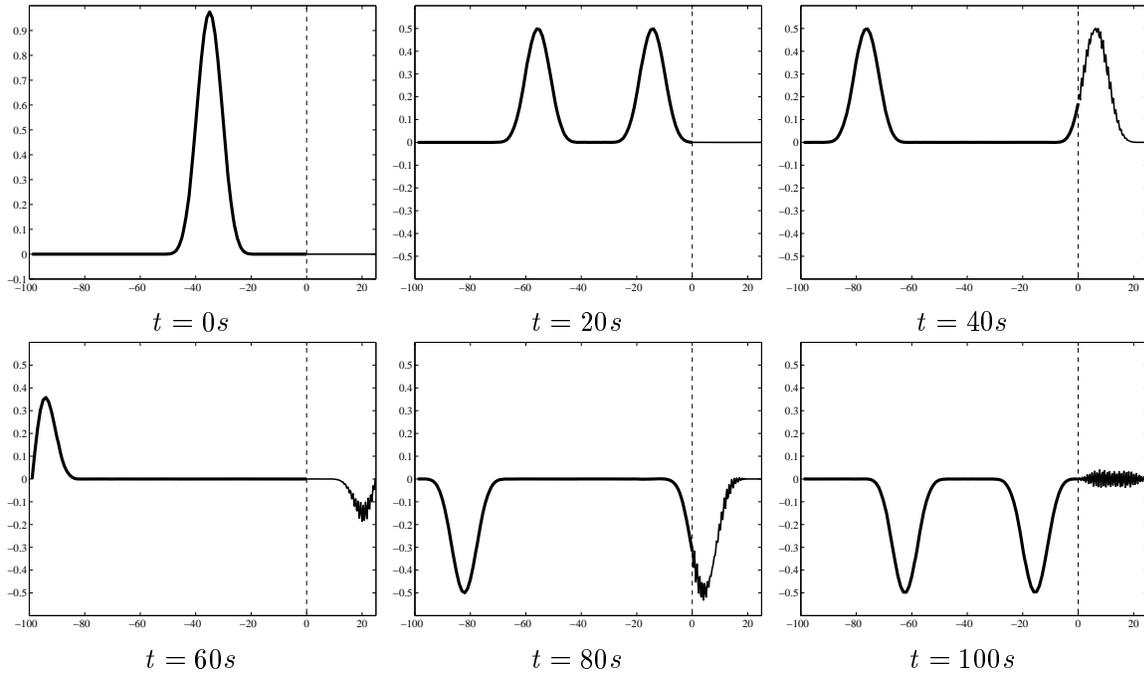
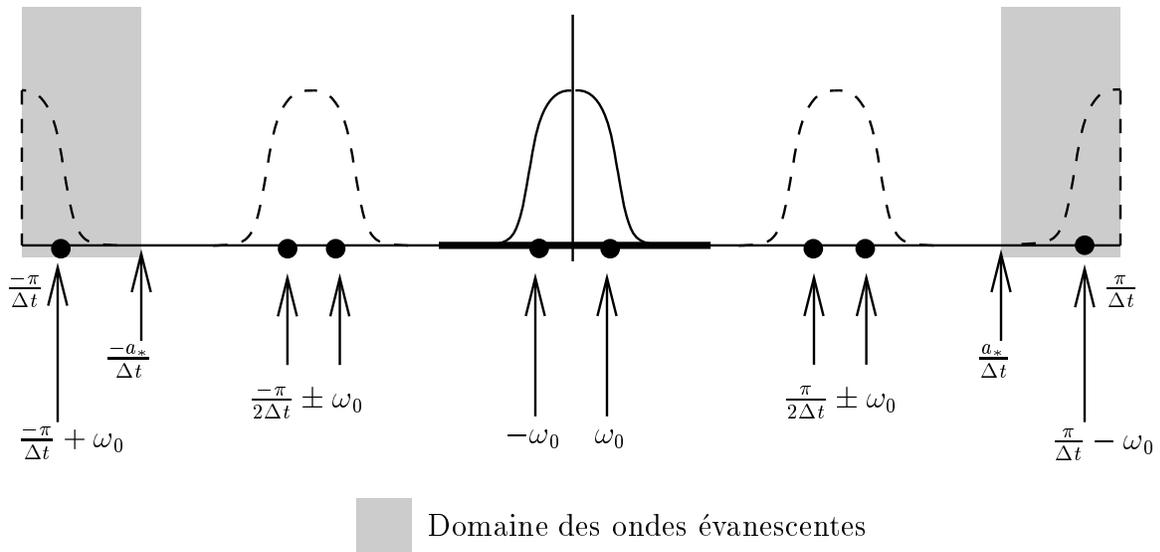


FIG. 1.17 – instantanés de l'expérience avec  $\alpha = 0.94$



Domaine des ondes évanescentes

FIG. 1.18 – schéma des fréquences transmises à l'interface pour un raffinement 1-4; de l'intervalle de fréquence  $[\frac{-\pi}{4\Delta t}, \frac{\pi}{4\Delta t}]$  dans la grille grossière, on passe à l'intervalle  $[\frac{-\pi}{\Delta t}, \frac{\pi}{\Delta t}]$  dans la grille fine.

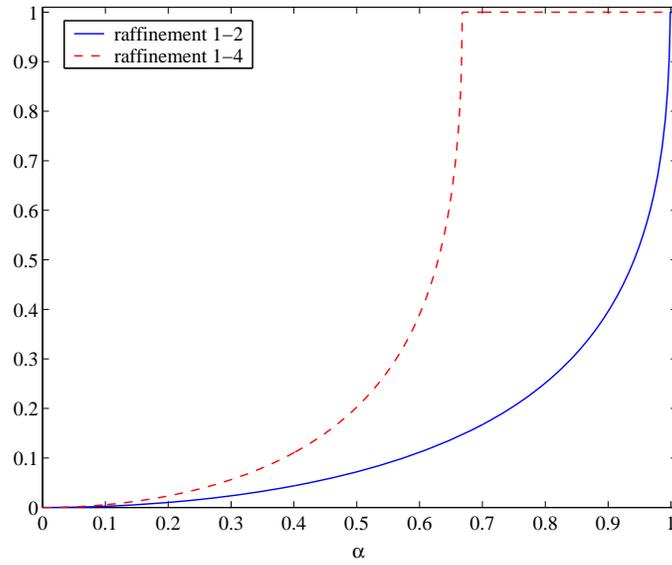


FIG. 1.19 – coefficient multiplicateur entre deux mailles de l'amplitude de l'onde parasite en fonction du nombre de courant, pour  $\omega\Delta t = 0.11$

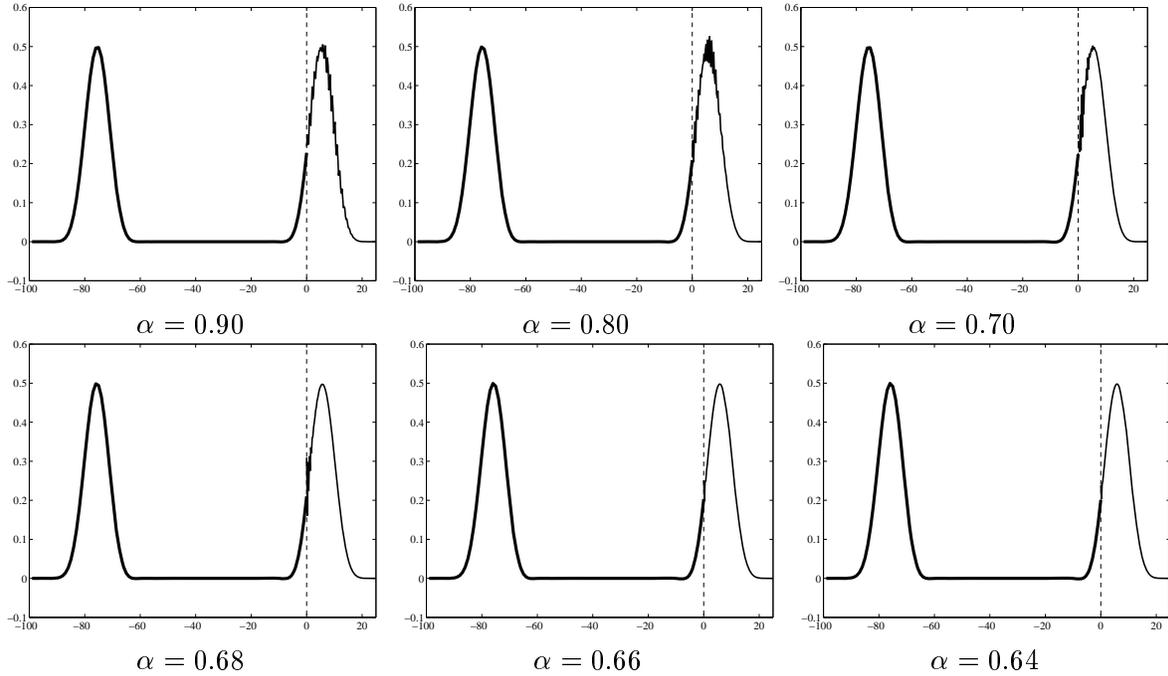


FIG. 1.20 – évolution de la solution à 40 secondes en fonction du nombre de Courant  $\alpha$

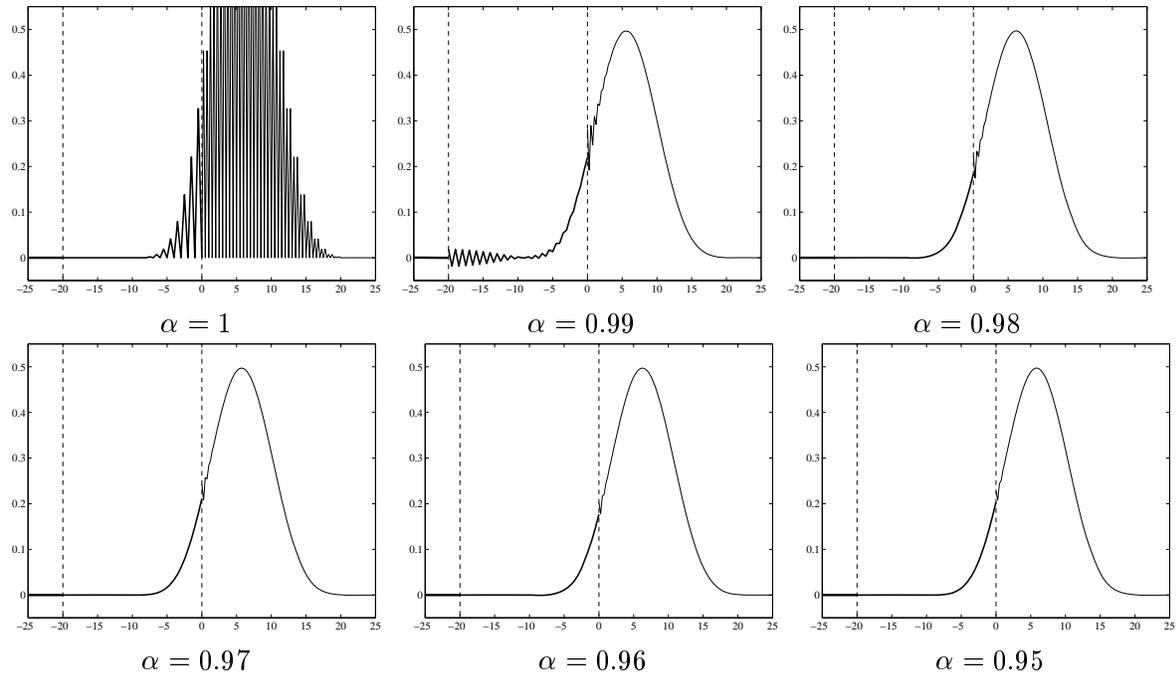


FIG. 1.21 – évolution de la solution à 40 s en fonction de  $\alpha$  pour une grille intercalée de longueur 20

d'intercaler une grille raffinée 2 fois entre la grille grossière et la grille raffinée 4 fois. L'onde parasite localisée en  $\frac{\pi}{2\Delta t}$  dans la grille la plus fine, sera éliminée dans la grille intermédiaire puisqu'elle y sera évanescence (elle sera localisée en  $\frac{\pi}{\Delta t}$ ). Sur les figures 1.21 1.22 et 1.23, on a représenté un zoom autour du raffinement des résultats des simulations effectuées avec différentes tailles de grilles intercalées (respectivement 20 2 et 1 maille(s) grossière(s)) pour différentes valeurs du rapport  $\frac{\Delta t}{h}$ . La grille raffinée 4 fois est située sur le segment  $[0, 25]$ . On constate qu'avec une grille intercalée de longueur 20, les résultats sont similaires à ceux du raffinement 1-2 simple. L'onde parasite de pulsation  $\frac{\pi}{\Delta t}$  dans la grille fine ( $\frac{\pi}{2\Delta t}$  dans la grille raffinée 4 fois) a parcouru suffisamment de mailles pour être atténuée. Par contre si la grille intercalée est très petite, choix qui peut être fait pour des raisons d'économie, il faut baisser le nombre de Courant suffisamment pour que l'onde parasite disparaisse en une voire deux mailles parcourues. Toutefois cette baisse nécessaire est beaucoup plus faible que dans le cas d'un raffinement 1-4 simple. Ces expériences numériques confirment donc l'intérêt d'effectuer des raffinements 1-2 plutôt que 1- $p$ . Ceci ne sera pas pour déplaire au programmeur puisque outre ces résultats de précisions, le raffinement 1-2 est plus simple à coder.

## 1.4 Les schémas linéaires conservatifs

Nous allons ici tenter de caractériser les schémas conservatifs afin de sélectionner le (ou les) schéma(s) adéquat(s). En effet, jusqu'à présent nous nous sommes penchés sur un schéma vérifiant la conservation de l'énergie (1.27), comme nous le voyons ici, il en existe bien d'autres. Nous nous proposons ici de les caractériser puis de les discriminer.

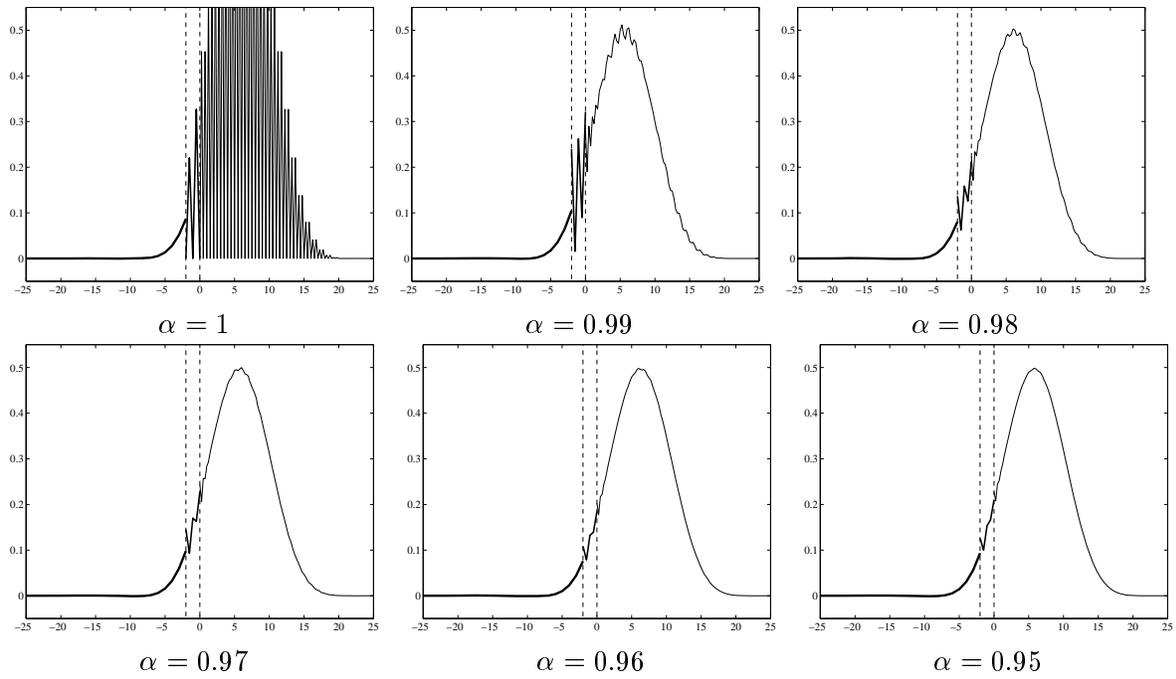


FIG. 1.22 – évolution de la solution à 40 s en fonction de  $\alpha$  pour une grille intercalée de longueur 2

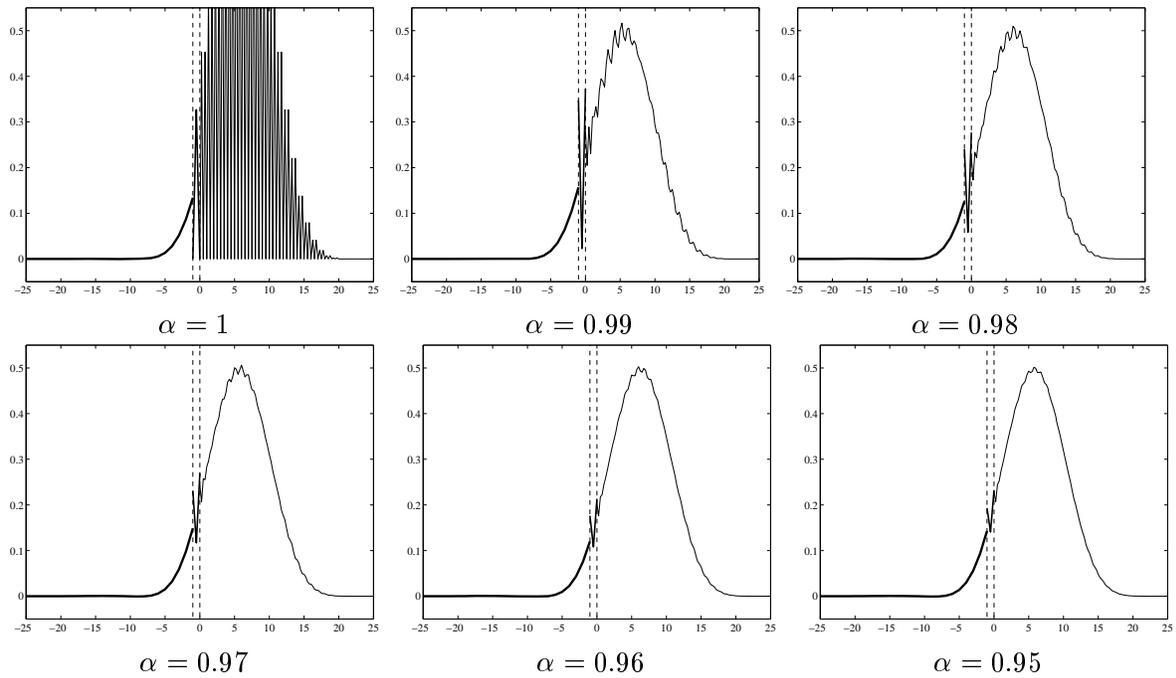


FIG. 1.23 – évolution de la solution à 40 s en fonction de  $\alpha$  pour une grille intercalée de longueur 1

### 1.4.1 Schémas linéaires compatibles avec la conservation de l'énergie

On se propose ici d'exhiber tous les schémas linéaires possibles assurant (1.27), puis de les analyser et de sélectionner les meilleurs selon des critères de consistance et de précision.

$$\text{Posons } U = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(U_f)_0^{2n+\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2}(U_f)_0^{2n+\frac{3}{2}} \\ (U_g)_0^{2n+1} \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} (V_f)_0^{2n+\frac{1}{2}} \\ (V_f)_0^{2n+\frac{3}{2}} \\ (V_g)_0^{2n+1} \end{pmatrix},$$

On peut alors réécrire (1.27) simplement

$$U \cdot V = 0$$

On se pose donc le problème de chercher toutes les relations du type :

$$(1.53) \quad AU + BV = 0$$

où  $(U, V)$  sont des vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  et  $(A, B)$  deux matrices  $3 \times 3$  telles que :

$$(P) \quad \begin{cases} (i) & \text{rang}[A \ B] = 3 \\ (ii) & (U, V) \text{ vérifie (1.53)} \Rightarrow U \cdot V = 0 \end{cases}$$

où  $U \cdot V$  désigne le produit scalaire euclidien de  $\mathbb{R}^3$ .

Pour énoncer le résultat introduisons quelques notations. A tout  $\alpha \in \{0, 1\}^3$ , nous associons l'opérateur isomorphe et involutif ( $P_\alpha \circ P_\alpha = I$ )

$$(1.54) \quad \left| \begin{array}{l} P_\alpha : \quad \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \\ \quad \quad (U, V) \quad \quad \rightarrow \quad P_\alpha(U, V) = (U_\alpha, V_\alpha) \end{array} \right.$$

où  $(U_\alpha, V_\alpha)$  est défini par :

$$(1.55) \quad \begin{aligned} (U_\alpha)_i &= V_i, \quad (V_\alpha)_i = U_i \text{ si } \alpha_i = 1 \\ (U_\alpha)_i &= U_i, \quad (V_\alpha)_i = V_i \text{ si } \alpha_i = 0 \end{aligned}$$

En d'autres termes, les huit couples  $(U_\alpha, V_\alpha)$  lorsque  $\alpha$  décrit  $\{0, 1\}^3$  s'obtiennent à partir de  $U$  et  $V$  par échange d'un certain nombre de coordonnées.

*Exemple :*  $\alpha = (1, 0, 0) \Rightarrow U_\alpha = (V_1, U_2, U_3)^t, V_\alpha = (U_1, V_2, V_3)^t$ .

On remarquera que, de façon évidente,

$$(1.56) \quad \forall \alpha \in \{0, 1\}^3, \quad U_\alpha \cdot V_\alpha = U \cdot V$$

$(A, B)$  désigne maintenant un couple de matrices  $3 \times 3$  dont les vecteurs colonnes sont  $(a^1, a^2, a^3)$  pour  $A$  et  $(b^1, b^2, b^3)$  pour  $B$ . A tout  $\alpha \in \{0, 1\}^3$ , on associe l'opérateur isomorphe et involutif ( $Q_\alpha \circ Q_\alpha = I$ )

$$(1.57) \quad \left| \begin{array}{l} Q_\alpha : \quad \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \quad \rightarrow \quad \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \\ \quad \quad (A, B) \quad \quad \quad \rightarrow \quad Q_\alpha(A, B) = (A_\alpha, B_\alpha) \end{array} \right.$$

où  $A_\alpha$  (resp.  $B_\alpha$ ) a pour colonnes  $(a_\alpha^1, a_\alpha^2, a_\alpha^3) \in (\mathbb{R}^3)^3$  (resp.  $(b_\alpha^1, b_\alpha^2, b_\alpha^3)$ ) où nous avons posé

$$(1.58) \quad \begin{cases} a_\alpha^j = b_j, & b_\alpha^j = a_j, & \text{si } \alpha_j = 1 \\ a_\alpha^j = a_j, & b_\alpha^j = b_j, & \text{si } \alpha_j = 0 \end{cases}$$

Autrement dit,  $A_\alpha$  et  $B_\alpha$  se déduisent de  $A$  et  $B$  par l'échange (sans variation de position dans la matrice) de certaines de leur colonne. Une propriété simple s'en déduit :

$$(1.59) \quad \left. \begin{array}{l} (U_\alpha, V_\alpha) = P_\alpha(U, V) \\ (A_\alpha, B_\alpha) = Q_\alpha \end{array} \right\} \Rightarrow A_\alpha U_\alpha + B_\alpha V_\alpha = AU + BV$$

En effet :

$$\left| \begin{array}{l} A_\alpha U_\alpha + B_\alpha V_\alpha = \sum_j (a_\alpha^j)_i (U_\alpha)_j + \sum_j (b_\alpha^j)_i (V_\alpha)_j \\ = \sum_{\alpha_j=1}^j b_i^j V_j + \sum_{\alpha_j=0}^j a_i^j U_j + \sum_{\alpha_j=1} a_i^j U_j + \sum_{\alpha_j=0} b_i^j V_j \end{array} \right.$$

On conclut en regroupant les sommes portant sur les termes  $a_i^j U_j$  d'une part et  $b_i^j V_j$  d'autre part.

**Lemme 1** *Si la propriété ( $\mathcal{P}$ ) est satisfaite, il existe un élément  $\alpha$  de  $\{0,1\}^3$  tel que, si  $(A_\alpha, B_\alpha) = P_\alpha(A, B)$ ,  $A_\alpha$  est inversible.*

*Preuve :*

- Si  $A$  ou  $B$  est inversible on a le résultat avec  $\alpha = (0, 0, 0)$  ou  $(1, 1, 1)$ . Il reste à examiner les cas où ni  $A$  ni  $B$  n'est inversible.
- Notons tout d'abord que  $A$  et  $B$  ne peuvent être simultanément de rang 1 car  $[AB]$  serait alors de rang  $\leq 2$ , ce qui contredit ( $\mathcal{P}$ ). Nous montrons maintenant que  $A$  et  $B$  ne peuvent être simultanément de rang 2. Nous utiliserons le fait que

$$(1.60) \quad (\mathcal{P}) \Rightarrow \text{Ker}A \perp \text{Ker}B$$

Si  $A$  et  $B$  étaient de rang 2, alors il existerait deux vecteurs unitaires et orthogonaux (grâce à (1.60))  $\mu$  et  $\nu$  tels que  $\text{Ker}A = [\mu]$  et  $\text{Ker}B = [\nu]$ . On aurait  $\text{Im}A \cap \text{Im}B \neq 0$  et il existerait donc un vecteur  $x \neq 0$  dans  $\text{Im}A \cap \text{Im}B$ . On pourrait alors trouver deux vecteurs  $u$  et  $v$  tels que

$$(1.61) \quad \begin{cases} Au = x & u \cdot \mu = 0 \\ Bv = -x & v \cdot \nu = 0 \end{cases}$$

Pour tout couple  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ ,  $A(u + \alpha\mu) + B(v + \beta\nu) = 0$ . Il s'ensuit que  $(u + \alpha\mu) \cdot (v + \beta\nu) = 0$ , soit :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 (u.v) + \alpha(\mu.v) + \beta(\nu.u) = 0$$

d'où nous tirons la triple égalité

$$(1.62) \quad u.v = \mu.v = \nu.u = 0$$

Nous avons donc d'après (1.61) et (1.62)

$$(1.63) \quad \begin{cases} u.\mu = 0, u.\nu = 0 & \Rightarrow u = \gamma(\mu \wedge \nu) \\ v.\mu = 0, v.\nu = 0 & \Rightarrow v = \delta(\mu \wedge \nu) \end{cases}$$

avec  $\gamma \neq 0$  et  $\delta \neq 0$  puisque  $Au = -Bv \neq 0 (x \neq 0)$ . Ceci contredit (1.62) puisque

$$(1.62) \Rightarrow u.v = \gamma.\delta = 0$$

- Supposons que  $\text{rang}A = 2$  et  $\text{rang}B = 1$ . Dans le cas contraire, il suffit d'échanger le rôle de  $A$  et  $B$  dans le raisonnement puis de changer  $\alpha_i$  en  $1 - \alpha_i$  dans le résultat. Puisque  $\text{rang}A = 2$ , il existe un couple  $(i, j) \in \{1, 2, 3\}^2$  tel que  $\dim[Ae_i Ae_j] = 2$ . Il suffit alors de montrer que si  $i, j, k = \{1, 2, 3\}$ ,  $\{Ae_i, Ae_j, Be_k\}$  forment un système libre auquel cas on aura le résultat avec  $\alpha_i = 0$ ,  $\alpha_j = 0$  et  $\alpha_k = 1$ . Comme  $\text{rang}B = 1$ ,  $\text{Im}B = [b]$  avec  $b \neq 0$  et donc  $Be_q = \beta_q b$ ,  $q = 1, 2, 3$ . Le fait que  $\text{rang}[A B] = 3$  entraîne que les vecteurs  $Ae_i$ ,  $Ae_j$  et  $b$  sont linéairement indépendants. Il reste à établir que  $\beta_k \neq 0$ . Si tel était le cas,  $e_k$  appartiendrait à  $\text{Ker}B$ . Supposons que  $\text{Ker}A = [a]$ ,  $a \neq 0$ , nous en déduisons que  $a \cdot e_k = 0$  et donc que  $a = a_i e_i + a_j e_j$ , avec  $(a_i, a_j) \neq 0$ . Par suite  $a_i(Ae_i) + a_j(Ae_j) = 0$  ce qui contredit le fait que  $Ae_i$  et  $Ae_j$  sont linéairement indépendants.

Nous pouvons alors établir le

**Théorème 5** Une relation linéaire de type (1.53) vérifiant la propriété (P) peut nécessairement s'écrire sous la forme

$$(1.64) \quad U_\alpha = \Omega \wedge V_\alpha$$

où  $\Omega$  désigne un vecteur de  $\mathbb{R}^3$  et  $\alpha$  un élément de  $\{0, 1\}^3$  et où  $(U_\alpha, V_\alpha) = P_\alpha(U, V)$ .

*Démonstration* Le fait que la matrice  $M = [A, B]$  soit de rang 3 entraîne d'après le lemme l'existence d'un multi-indice  $\alpha \in \{0, 1\}^3$  tel que la matrice  $A_\alpha$  (avec  $(A_\alpha, B_\alpha) = Q_\alpha(A, B)$ ) soit inversible. Soit alors  $V$  un vecteur quelconque de  $\mathbb{R}^3$  et  $U = -A_\alpha^{-1}B_\alpha V$ . Posons  $(U_\alpha, V_\alpha)P_\alpha(U, V)$ . Comme  $(A_\alpha, B_\alpha) = Q_\alpha(A, B)$  et  $(U, V) = P_\alpha(U_\alpha, V_\alpha)$ , il vient (voir (1.59))

$$(1.65) \quad AU_\alpha + BV_\alpha = A_\alpha U + B_\alpha V = 0$$

Par construction de  $U$ . En utilisant le point (ii) de la propriété (P), on en déduit que

$$U_\alpha \cdot V_\alpha = 0$$

c'est-à-dire, comme  $(U, V) = P_\alpha(U_\alpha, V_\alpha)$

$$(1.66) \quad U \cdot V = 0$$

Autrement dit, on a établi que :

$$\forall V \in \mathbb{R}^3 \quad (A_\alpha^{-1}B_\alpha V, V) = 0$$

Ceci établit que la matrice  $-A_\alpha^{-1}B_\alpha$  est antisymétrique<sup>4</sup> et donc, comme on est dans  $\mathbb{R}^3$ , il existe un vecteur  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$  tel que

$$(-A_\alpha^{-1}B_\alpha)V = \Omega \wedge V$$

On conclut alors aisément car si  $(U_\alpha, V_\alpha) = P_\alpha(U, V)$

$$\begin{aligned} AU + BV = 0 &\Leftrightarrow A_\alpha U_\alpha + B_\alpha V_\alpha = 0 \\ &\Leftrightarrow U_\alpha = -A_\alpha^{-1}B_\alpha V_\alpha \\ &\Leftrightarrow U_\alpha = \Omega \wedge V_\alpha \end{aligned}$$

---

4.  $(M(x+y), x+y) = (Mx, x) + (Mx, y) + (My, x) + (My, y) = 0$ , comme  $(Mx, x) = (My, y) = 0$ ,  $(Mx, y) = -(My, x)$

### 1.4.2 Sélection des bons schémas par analyse par ondes planes

Nous allons maintenant chercher à faire une sélection parmi tous ces schémas pour éventuellement en détecter un meilleur que celui sélectionné. La méthode consiste à effectuer, pour chaque catégorie de schémas, une analyse des coefficients de réflexion et de transmission via une étude par ondes planes identique à celle faite en 1.3.2 pour le schéma que nous avons sélectionné. On s'attachera alors à trouver le schéma optimal en sélectionnant celui dont les coefficients seront constants.

On a décrit dans la section 1.4.1, l'ensemble des schémas admissibles. Nous allons tenter ici d'extraire les plus intéressants. Pour cela, on effectue une étude analogue à la précédente, pour l'ensemble des schémas linéaires, écrits sous la forme  $U_\alpha = \Omega \wedge V_\alpha$  avec  $\Omega = {}^t(a, b, c)$ . Nous avons 8 cas à étudier.

Par exemple, si

$$V_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{(u_f)_0^{2n} + (u_f)_0^{2n+1}}{2} \\ \frac{(u_f)_0^{2n+1} + (u_f)_0^{2n+2}}{2} \\ -v_{-1}^{2n+1} + \frac{h}{2\Delta t} \left( (u_g)_0^{2n+2} - (u_g)_0^{2n} \right) \end{pmatrix}$$

et

$$U_\alpha = \begin{pmatrix} v_{\frac{1}{2}}^{2n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2\Delta t} \left( (u_f)_0^{2n+1} - (u_f)_0^{2n} \right) \\ v_{\frac{1}{2}}^{2n+\frac{3}{2}} + \frac{h}{2\Delta t} \left( (u_f)_0^{2n+2} - (u_f)_0^{2n+1} \right) \\ (u_g)_0^{2n} + (u_g)_0^{2n+2} \end{pmatrix}$$

le développement limité des coefficients donne à l'ordre 1

$$(1.67) \quad \begin{cases} T = -4 \frac{b-a}{4+(b-a)^2} + O(\omega\Delta t) \\ T_p = 4\alpha \frac{-a-ca-b+cb}{(4+(b-a)^2)\sqrt{1-\alpha^2}} + O(\omega\Delta t) \\ R = \frac{(b-a)^2-4}{(b-a)^2+4} + O(\omega\Delta t) \end{cases}$$

Pour avoir, à l'ordre 1,  $T = 1$ , et  $R = T_p = 0$  (nécessaires pour la consistance), on trouve  $a = b + 2$  et  $c = -b - 1$ . Le développement limité devient alors

$$(1.68) \quad \begin{cases} T = 1 + O((\omega\Delta t)^2) \\ T_p = -\frac{i\alpha(b^2+2b+2)}{2\sqrt{1-\alpha^2}}\omega\Delta t + O((\omega\Delta t)^2) \\ R = -\frac{b+1}{2}i\omega\Delta t + O((\omega\Delta t)^2) \end{cases}$$

On s'aperçoit que le terme de premier ordre de  $T_p$  ne peut s'annuler. D'ailleurs on peut vérifier que, pour tout  $b$ , le problème en  $\alpha = 1$  reste le même, et  $T_p = -T = -\cos(\omega\Delta t)$ . En revanche,

on peut annuler le terme du premier ordre de la réflexion en prenant  $b = -1$ . On retombe alors sur le schéma (1.34) choisi précédemment.

Finalement, après étude des 8 cas, on ne trouve que 2 schémas satisfaisants: le schéma (1.34), et un autre moins intuitif, défini par

$$(1.69) \left\{ \begin{array}{l} \frac{(u_g)_0^{2n+2} + (u_g)_0^{2n}}{2} = v_{\frac{1}{2}}^{2n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2\Delta t} \left( (u_f)_0^{2n+1} - (u_f)_0^{2n} \right) \\ \frac{(u_g)_0^{2n+2} + (u_g)_0^{2n}}{2} = v_{\frac{1}{2}}^{2n+\frac{3}{2}} + \frac{h}{2\Delta t} \left( (u_f)_0^{2n+2} - (u_f)_0^{2n+1} \right) \\ \frac{(u_f)_0^{2n+1} + (u_f)_0^{2n}}{2} + \frac{(u_f)_0^{2n+2} + (u_f)_0^{2n+1}}{2} = 2v_{-1}^{2n+1} - \frac{h}{\Delta t} \left( (u_g)_0^{2n+2} - (u_g)_0^{2n} \right) \end{array} \right.$$

Pour ce schéma, le développement limité des coefficients donne

$$(1.70) \left\{ \begin{array}{l} T = 1 - \frac{3}{16} \left( 1 + \frac{1}{\alpha^2} \right) (\omega\Delta t)^2 + O((\omega\Delta t)^3) \\ T_p = -\frac{1}{2} \frac{i\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} (\omega\Delta t) + O((\omega\Delta t)^3) \\ R = \frac{1}{16} \left( 7 - \frac{5}{\alpha^2} \right) (\omega\Delta t)^2 + O((\omega\Delta t)^3) \end{array} \right.$$

On obtient donc des résultats très proches du schéma (1.34). Les 2 schémas paraissent donc équivalents. Ce sont les meilleurs parmi les schémas admissibles puisqu'en terme de réflexion-transmission, ils sont les plus proches du problème continu. Toutefois, le schéma (1.69) que nous venons de découvrir apparaît comme un raccord entre les  $u$  et les  $v$  et ne pourra sans doute pas s'étendre aux dimensions supérieures. Nous continuerons donc avec le schéma (1.34) pressenti lors de la construction. On remarquera que notre intuition sur la non-consistance du schéma (1.35) s'avère juste puisqu'il n'a pas été sélectionné par notre méthode ce qui signifie que les coefficients de réflexion et de transmission associés ne tendent pas vers les valeurs attendues (1 pour  $T$ , 0 pour  $R$  et  $T_p$ ).

## Chapitre 2

# Un schéma conservatif en 2D pour la polarisation transverse électrique.

La construction précédemment présentée s'avère donc efficace pour le raffinement de maillage spatio-temporel, dans le sens où elle est stable et précise. Nous tentons dans ce chapitre d'étudier sa potentialité de généralisation aux dimensions supérieures, c'est-à-dire dans un premier temps au cas de deux dimensions. Nous verrons que si l'extension au cas bi-dimensionnel est possible et qu'il ne pose aucun problème méthodique, les calculs deviennent vite très compliqués si l'on veut généraliser la méthode.

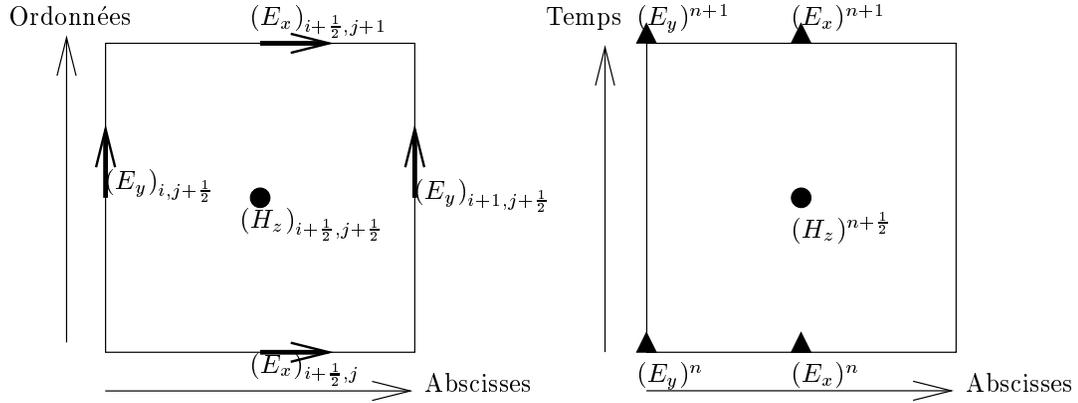
### 2.1 Présentation du problème modèle.

On cherche ici à trouver un schéma de raffinement de maillage pour le schéma de Yee en 2 dimensions qui soit stable par construction en généralisant la méthode présentée pour le 1-D. Lorsque l'on restreint les équations de Maxwell à 2 dimensions, deux polarisations (appelées polarisation transverse électrique et transverse magnétique) découlent, découplant certaines composantes des champs.  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $H_z$  sont solutions d'un système, tandis que  $H_x$ ,  $H_y$  et  $E_z$  sont solution d'un autre système. Toutefois, les rôles de  $E$  et  $H$  sont interchangeables. C'est à dire que les données et solutions pour les parties électriques d'un des deux systèmes sont celles pour les parties magnétiques du deuxième et inversement. Comme c'est souvent le cas dans la littérature électromagnétique, nous avons choisi de faire porter le raccord entre les deux grilles sur le champ électrique. Ceci rompt la symétrie entre les champs électrique et magnétique. Les deux systèmes ne sont plus interchangeables. Néanmoins, Notre but étant de trouver un schéma pour les équations de Maxwell en 3 dimensions, nous restreignons l'étude du cas bi-dimensionnel au cas de la polarisation transverse électrique.

En 2 dimensions les équations de Maxwell pour la polarisation transverse électrique s'écrivent

$$(2.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{\partial H_z}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

On peut démontrer que l'énergie  $\frac{1}{2} \int (E_x)^2 + (E_y)^2 + (H_z)^2 dx$  se conserve. En se basant sur cette propriété on va essayer de trouver un schéma qui conserve une quantité équivalente en discret, de manière à assurer la stabilité lors du raffinement. Afin d'appliquer le schéma de Yee, on discrétise la solution comme indiqué sur les figures ci-dessous.



On écrit alors le schéma de Yee

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{(H_z)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (H_z)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \frac{(E_y)_{i+1, j+\frac{1}{2}}^n - (E_y)_{i, j+\frac{1}{2}}^n}{h} - \frac{(E_x)_{i+\frac{1}{2}, j+1}^n - (E_x)_{i+\frac{1}{2}, j}^n}{h} = 0 \\ \frac{(E_x)_{i+\frac{1}{2}, j}^{n+1} - (E_x)_{i+\frac{1}{2}, j}^n}{\Delta t} - \frac{(H_z)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (H_z)_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{h} = 0 \\ \frac{(E_y)_{i, j+\frac{1}{2}}^{n+1} - (E_y)_{i, j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} + \frac{(H_z)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (H_z)_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{h} = 0 \end{array} \right.$$

Une énergie discrète que ce schéma conserve est

$$(2.3) \quad \frac{1}{2} \left( \sum_{j,i} (H_z)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (H_z)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} h^2 + \sum_{j,i} |(E_x)_{i+\frac{1}{2}, j}^n|^2 h^2 + \sum_{j,i} |(E_y)_{i, j+\frac{1}{2}}^n|^2 h^2 \right)$$

qui est un équivalent discret de  $\frac{1}{2} \int_{\Omega} (E_x)^2 + (E_y)^2 + (H_z)^2 dx dy$

## 2.2 Construction d'un schéma de raffinement 1-2.

Le principe est calqué sur celui du cas 1D, on découple le système en deux problèmes à résoudre dans chaque grille, puis on cherche à conserver la somme de deux énergies discrètes analogues à (2.3)

Nous allons nous intéresser au raffinement suivant. La grille de gauche c.à.d. pour  $i \leq 0$  est 2 fois plus grossière en temps et en espace que la grille de droite pour  $i \geq 0$ . Le raccord des 2 grilles portera donc sur les valeurs de  $(E_y)_0$ . La différence essentielle avec le 1-D vient

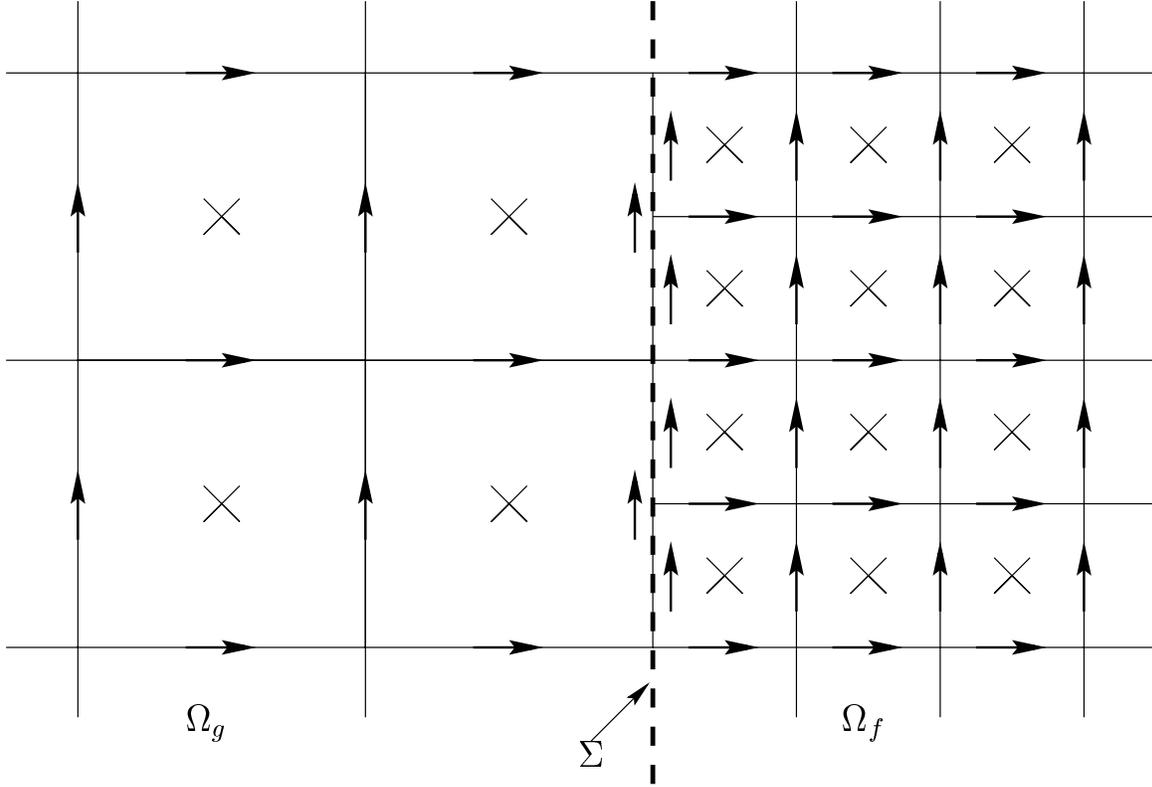


FIG. 2.1 – Domaines et discrétisation

du fait que l'interface n'étant plus un point mais une droite, le schéma à construire pourrait coupler les valeurs de  $(E_y)_0$  sur cette droite. Nous verrons qu'il n'en est rien. Dans la suite, on indicera par  $f$  les inconnues de la grille fine et par  $g$  celles de la grille grossière.

Dans un premier temps, nous allons définir une quantité discrète équivalente à l'énergie  $\frac{1}{2} \int (E_x)^2 + (E_y)^2 + (H_z)^2 dx$  pour chaque grille.

Ainsi dans la grille fine, l'énergie discrète choisie est définie à tous les instants entiers.

$$(2.4) \quad E_f^n = \frac{1}{2} \left( \sum_{j,i \geq 0} |(E_x^f)_{i+\frac{1}{2},j}^n|^2 h^2 + \sum_{j,i \geq 1} |(E_y^f)_{i,j+\frac{1}{2}}^n|^2 h^2 + \sum_j |(E_y^f)_{0,j+\frac{1}{2}}^n|^2 h^2 + \sum_{j,i \geq 0} (H_z^f)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (H_z^f)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} h^2 \right)$$

Tandis que l'énergie associée à la grille grossière n'est définie qu'aux instants pairs.

$$(2.5) \quad E_g^{2n} = \frac{1}{2} \left( \sum_{j,i \leq -1} |(E_x^g)_{2i+1,2j}^{2n}|^2 4h^2 + \sum_{j,i \leq -1} |(E_y^g)_{2i,2j+1}^{2n}|^2 4h^2 + \sum_j |(E_y^g)_{0,2j+1}^{2n}|^2 2h^2 + \sum_{j,i \leq -1} (H_z^g)_{2i+1,2j+1}^{2n+1} (H_z^g)_{2i+1,2j+1}^{2n-1} 4h^2 \right)$$

Ainsi, on peut définir une énergie discrète totale aux instants pairs.

$$(2.6) \quad E^{2n} = E_g^{2n} + E_f^{2n}$$

### 2.2.1 Variation de l'énergie fine $E_f^n$ .

Afin de calculer l'évolution de cette quantité, on remplace la première équation du schéma de Yee par la demi-somme de l'équation écrite aux temps  $n\Delta t$  et  $(n+1)\Delta t$

$$(2.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{(H_z^f)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}} - (H_z^f)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{2\Delta t} \\ + \frac{(E_y^f)_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (E_y^f)_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{h} - \frac{(E_x^f)_{i+\frac{1}{2},j+1}^{n+\frac{1}{2}} - (E_x^f)_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}}{h} = 0 \text{ pour } i \geq 0 \end{array} \right.$$

où l'on a noté

$$(2.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} (E_x^f)_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{(E_x^f)_{i+\frac{1}{2},j}^n + (E_x^f)_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1}}{2} \\ (E_y^f)_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{(E_y^f)_{i,j+\frac{1}{2}}^n + (E_y^f)_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1}}{2} \end{array} \right.$$

On utilise également les équations en  $E_x$  et  $E_y$

$$(2.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{(E_x^f)_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} - (E_x^f)_{i+\frac{1}{2},j}^n}{\Delta t} - \frac{(H_z^f)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (H_z^f)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{h} = 0 \text{ pour } i \geq 0 \\ \frac{(E_y^f)_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} - (E_y^f)_{i,j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} + \frac{(H_z^f)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (H_z^f)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{h} = 0 \text{ pour } i \geq 1 \end{array} \right.$$

On multiplie (2.7) par  $(H_z^f)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} h^2$  puis on somme pour  $i \geq 0$  et  $j$  quelconque, puis, on multiplie la première équation de (2.9) par  $(E_x^f)_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} h^2$  et on somme pour  $i \geq 0$  et  $j$  quelconque, et enfin on multiplie la deuxième de (2.9) par  $(E_y^f)_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} h^2$  et on somme pour  $i \geq 1$  et  $j$  quelconque. En additionnant les 3 équations obtenues, on a alors après simplification des termes  $(H_z^f)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (E_x^f)_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}$ ,

$$(2.10) \quad \begin{aligned} & \frac{E_f^{n+1} - E_f^n}{\Delta t} - \frac{1}{2\Delta t} \sum_j \left( |(E_y^f)_{0,j+\frac{1}{2}}^{n+1}|^2 - |(E_y^f)_{0,j+\frac{1}{2}}^n|^2 \right) \frac{h^2}{2} \\ & + \sum_{i \geq 0, j} (E_y^f)_{i+1,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (H_z^f)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} h \\ & - \sum_{i \geq 0, j} (E_y^f)_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (H_z^f)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} h \\ & + \sum_{i \geq 1, j} (E_y^f)_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \left( (H_z^f)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (H_z^f)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) h = 0 \end{aligned}$$

or

$$\sum_{i \geq 0, j} (E_y^f)_{i+1, j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (H_z^f)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \sum_{i \geq 1, j} (E_y^f)_{i, j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (H_z^f)_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$$

finalement

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \frac{E_f^{n+1} - E_f^n}{\Delta t} &= h \sum_j (E_y^f)_{0, j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} (H_z^f)_{\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{h^2}{2\Delta t} \sum_j (E_y^f)_{0, j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} ((E_y^f)_{0, j+\frac{1}{2}}^{n+1} - (E_y^f)_{0, j+\frac{1}{2}}^n) \\ &= h \sum_j (E_y^f)_{0, j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \left( (H_z^f)_{\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} \frac{(E_y^f)_{0, j+\frac{1}{2}}^{n+1} - (E_y^f)_{0, j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} \right) \end{aligned}$$

On trouve que la différence entre deux pas de temps grossiers de l'énergie discrète définie dans la grille fine s'écrit donc

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \frac{E_f^{2n+2} - E_f^{2n}}{2\Delta t} &= \frac{1}{2} h \sum_j (E_y^f)_{0, j+\frac{1}{2}}^{2n+\frac{3}{2}} \left( (H_z^f)_{\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{2n+\frac{3}{2}} + \frac{h}{2} \frac{(E_y^f)_{0, j+\frac{1}{2}}^{2n+2} - (E_y^f)_{0, j+\frac{1}{2}}^{2n+1}}{\Delta t} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} h \sum_j (E_y^f)_{0, j+\frac{1}{2}}^{2n+\frac{1}{2}} \left( (H_z^f)_{\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{2n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} \frac{(E_y^f)_{0, j+\frac{1}{2}}^{2n+1} - (E_y^f)_{0, j+\frac{1}{2}}^{2n}}{\Delta t} \right) \end{aligned}$$

Ceci est un équivalent discret de l'identité

$$(2.13) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega_f} (|E_x|^2 + |E_y|^2 + |H_z|^2) dx dy \right) = \int_{\Sigma} E_y H_z dy$$

### 2.2.2 Variation de l'énergie grossière.

Le schéma de Yee écrit dans la grille grossière, s'écrit en remplaçant la première équation par sa demi-somme sur deux instants consécutifs

$$(2.14) \quad \begin{aligned} &\frac{(H_z^g)_{2i+1, 2j+1}^{2n+3} - (H_z^g)_{2i+1, 2j+1}^{2n-1}}{4\Delta t} \\ &+ \frac{(E_y^g)_{2i+2, 2j+1}^{2n+1} - (E_y^g)_{2i, 2j+1}^{2n+1}}{2h} - \frac{(E_x^g)_{2i+1, 2j+2}^{2n+1} - (E_x^g)_{2i+1, 2j}^{2n+1}}{2h} = 0 \end{aligned} \quad \text{pour } i \leq -1$$

$$(2.15) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{(E_x^g)_{2i+1, 2j}^{2n+2} - (E_x^g)_{2i+1, 2j}^{2n}}{2\Delta t} - \frac{(H_z^g)_{2i+1, 2j+1}^{2n+1} - (H_z^g)_{2i+1, 2j-1}^{2n+1}}{2h} = 0 \\ &\frac{(E_y^g)_{2i, 2j+1}^{2n+2} - (E_y^g)_{2i, 2j+1}^{2n}}{2\Delta t} + \frac{(H_z^g)_{2i+1, 2j+1}^{2n+1} - (H_z^g)_{2i-1, 2j+1}^{2n+1}}{2h} = 0 \end{aligned} \right. \quad \text{pour } i \leq -1$$

où l'on a noté dans la première équation

$$(2.16) \quad \left\{ \begin{aligned} (E_x^g)_{2i+1, 2j}^{2n+1} &= \frac{(E_x^g)_{2i+1, 2j}^{2n} + (E_x^g)_{2i+1, 2j}^{2n+2}}{2} \\ (E_y^g)_{2i, 2j+1}^{2n+1} &= \frac{(E_y^g)_{2i, 2j+1}^{2n} + (E_y^g)_{2i, 2j+1}^{2n+2}}{2} \end{aligned} \right.$$

On multiplie la première équation par  $(H_z^g)_{2i+1,2j+1}^{2n+1} 4h^2$ , la deuxième par  $(E_x^g)_{2i+1,2j}^{2n+1} 4h^2$  et la troisième par  $(E_y^g)_{2i,2j+1}^{2n+1} 4h^2$  puis on somme chaque équation pour  $i \leq -1, j$ . En additionnant les 3 équations obtenues on a alors

$$(2.17) \quad \begin{aligned} \frac{E_g^{2n+2} - E_g^{2n}}{2\Delta t} &- \frac{1}{2\Delta t} \sum_j \left( |(E_y^g)_{0,2j+1}^{2n+2}|^2 - |(E_y^g)_{0,2j+1}^{2n}|^2 \right) 2h^2 \\ &+ \sum_{i \leq -1, j} (E_y^g)_{2i+2,2j+1}^{2n+1} (H_z^g)_{2i+1,2j+1}^{2n+1} 2h \\ &- \sum_{i \leq -1, j} (E_y^g)_{2i,2j+1}^{2n+1} (H_z^g)_{2i+1,2j+1}^{2n+1} 2h \\ &+ \sum_{i \leq -1, j} (E_y^g)_{2i,2j+1}^{2n+1} \left( (H_z^g)_{2i+1,2j+1}^{2n+1} - (H_z^g)_{2i-1,2j+1}^{2n+1} \right) 2h = 0 \end{aligned}$$

en remarquant que

$$\sum_{i \leq -1, j} (E_y^g)_{2i+2,2j+1}^{2n+1} (H_z^g)_{2i+1,2j+1}^{2n+1} = \sum_{i \leq 0, j} (E_y^g)_{2i,2j+1}^{2n+1} (H_z^g)_{2i-1,2j+1}^{2n+1}$$

On trouve que la différence entre deux pas de temps de l'énergie discrète définie dans la grille grossière s'écrit

$$(2.18) \quad \begin{aligned} \frac{E_g^{2n+2} - E_g^{2n}}{2\Delta t} &= \sum_j -(E_y^g)_{0,2j+1}^{2n+1} (H_z^g)_{-1,2j+1}^{2n+1} 2h \\ &+ \frac{h^2}{\Delta t} \sum_j (E_y^g)_{0,2j+1}^{2n+1} \left( (E_y^g)_{0,2j+1}^{2n+2} - (E_y^g)_{0,2j+1}^{2n} \right) \\ &= \sum_j (E_y^g)_{0,2j+1}^{2n+1} \left( -(H_z^g)_{-1,2j+1}^{2n+1} 2h + h^2 \frac{(E_y^g)_{0,2j+1}^{2n+2} - (E_y^g)_{0,2j+1}^{2n}}{\Delta t} \right) \end{aligned}$$

Ceci est un équivalent discret de l'identité

$$(2.19) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega_f} (|E_x|^2 + |E_y|^2 + |H_z|^2) dx dy \right) = \int_{\Sigma} E_y H_z dy$$

### 2.2.3 Conservation de l'énergie totale.

Afin de garder l'énergie totale  $E^{2n}$  définie par 2.6 constante on doit avoir

$$\frac{\mathcal{E}_g^{2n+2} - \mathcal{E}_g^{2n}}{2\Delta t} + \frac{\mathcal{E}_f^{2n+2} - \mathcal{E}_f^{2n}}{2\Delta t} = 0$$

soit

$$(2.20) \quad \begin{aligned} &\sum_j \left( (E_y^g)_{0,2j+1}^{2n+2} + (E_y^g)_{0,2j+1}^{2n} \right) \left( (H_z^g)_{-1,2j+1}^{2n+1} - h \frac{(E_y^g)_{0,2j+1}^{2n+2} - (E_y^g)_{0,2j+1}^{2n}}{2\Delta t} \right) = \\ &\sum_j \frac{(E_y^f)_{0,j+\frac{1}{2}}^{2n+2} + (E_y^f)_{0,j+\frac{1}{2}}^{2n+1}}{2} \left( (H_z^f)_{\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{2n+\frac{3}{2}} + \frac{h}{2} \frac{(E_y^f)_{0,j+\frac{1}{2}}^{2n+2} - (E_y^f)_{0,j+\frac{1}{2}}^{2n+1}}{\Delta t} \right) \\ &+ \sum_j \frac{(E_y^f)_{0,j+\frac{1}{2}}^{2n+1} + (E_y^f)_{0,j+\frac{1}{2}}^{2n}}{2} \left( (H_z^f)_{\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{2n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} \frac{(E_y^f)_{0,j+\frac{1}{2}}^{2n+1} - (E_y^f)_{0,j+\frac{1}{2}}^{2n}}{\Delta t} \right) \end{aligned}$$

On pose

$$\widetilde{(H_z^f)}^{2n+\frac{1}{2}}_{0,j+\frac{1}{2}} = (H_z^f)^{2n+\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} \frac{(E_y^f)^{2n+1}_{0,j+\frac{1}{2}} - (E_y^f)^{2n}_{0,j+\frac{1}{2}}}{\Delta t}$$

et

$$\widetilde{(H_z^g)}^{2n+1}_{0,2j+1} = (H_z^g)^{2n+1}_{-1,2j+1} - h \frac{(E_y^g)^{2n+2}_{0,2j+1} - (E_y^g)^{2n}_{0,2j+1}}{2\Delta t}$$

**Remarque 8** *Ceci n'est pas réellement un abus de notation. Le lecteur pourra en effet remarquer que ces expressions sont effectivement des approximations d'ordre 2 des traces discrètes des champs magnétiques sur l'interface. Il suffit pour s'en convaincre de remarquer que ces relations sont des discrétisations de la dernière relation du système de Maxwell  $\frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{\partial H_z}{\partial x} = 0$ .*

On décompose ensuite les sommes portant sur les inconnues de la grille fine, de la manière suivantes

$$\sum_j A_j = \sum_j A_{2j} + \sum_j A_{2j+1}$$

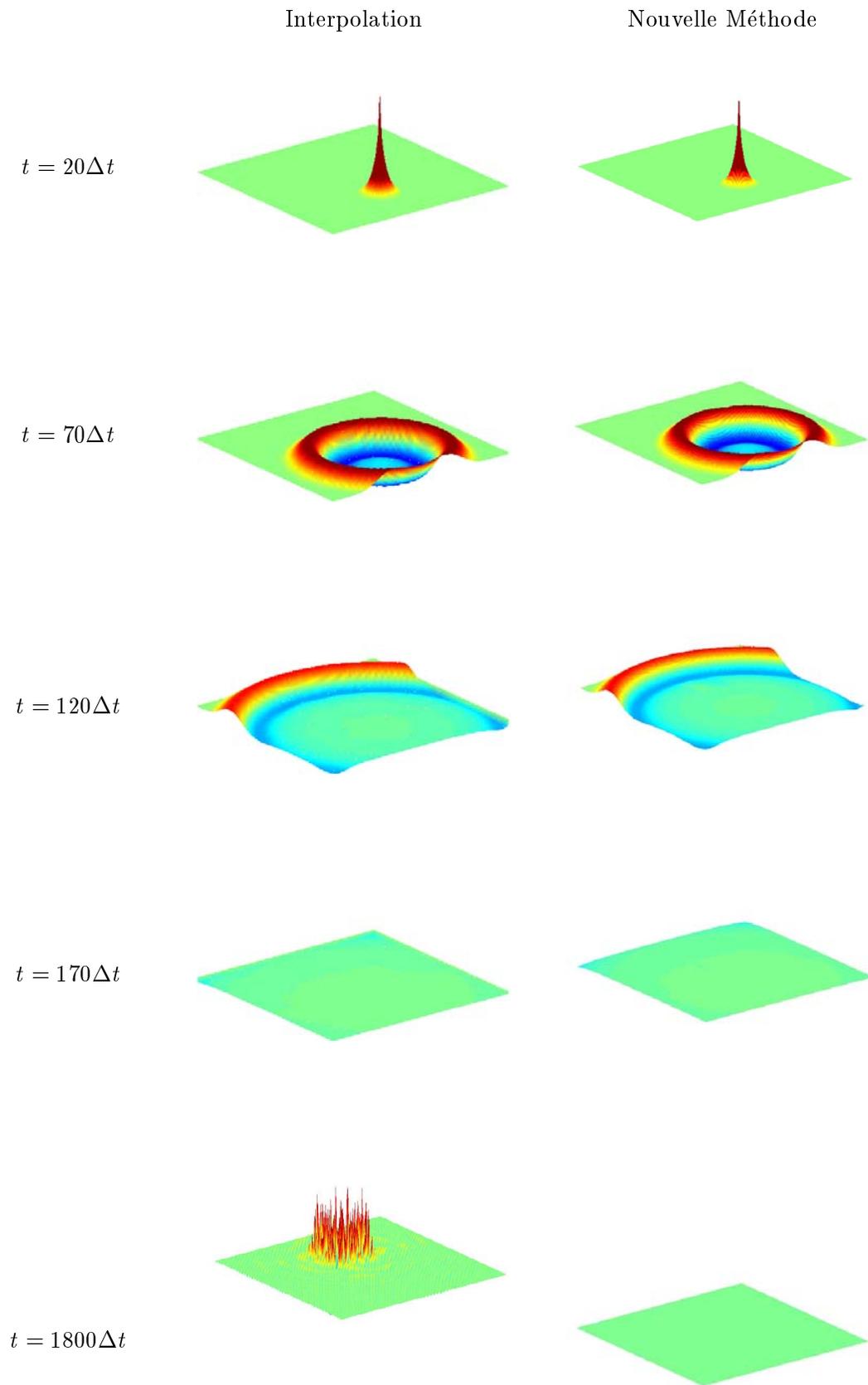
On obtient alors une relation de la forme

$$\sum_j B_j = 0$$

Une manière de vérifier cette relation est d'écrire  $B_j = 0 \quad \forall j$  ce qui donne l'équation non linéaire suivante

$$\begin{aligned} (2.21) \quad & 4 \left( (E_y^g)^{2n+2}_{0,2j+1} + (E_y^g)^{2n}_{0,2j+1} \right) \widetilde{(H_z^g)}^{2n+1}_{0,2j+1} \\ & = \left( (E_y^f)^{2n+2}_{0,2j+\frac{1}{2}} + (E_y^f)^{2n+1}_{0,2j+\frac{1}{2}} \right) \widetilde{(H_z^f)}^{2n+\frac{3}{2}}_{0,2j+\frac{1}{2}} \\ & + \left( (E_y^f)^{2n+1}_{0,2j+\frac{1}{2}} + (E_y^f)^{2n}_{0,2j+\frac{1}{2}} \right) \widetilde{(H_z^f)}^{2n+\frac{1}{2}}_{0,2j+\frac{1}{2}} \\ & + \left( (E_y^f)^{2n+2}_{0,2j+\frac{3}{2}} + (E_y^f)^{2n+1}_{0,2j+\frac{3}{2}} \right) \widetilde{(H_z^f)}^{2n+\frac{3}{2}}_{0,2j+\frac{3}{2}} \\ & + \left( (E_y^f)^{2n+1}_{0,2j+\frac{3}{2}} + (E_y^f)^{2n}_{0,2j+\frac{3}{2}} \right) \widetilde{(H_z^f)}^{2n+\frac{1}{2}}_{0,2j+\frac{3}{2}} \end{aligned}$$





### 2.3.1 Construction du schéma.

Le but est donc de trouver un schéma permettant de raccorder une grille grossière maillée  $(ph, p\Delta t)$  définie pour  $i \leq 0$  à une grille maillée finement  $(h, \Delta t)$  définie pour  $i \geq 0$ . Comme nous l'avons fait précédemment, nous construisons notre schéma en assurant la conservation d'une énergie discrète entre les instants  $pk\Delta t$  et  $(pk + p)\Delta t$ .

Nous définissons donc les quantités

$$E_f^k = \frac{1}{2} \left( h^2 \sum_{i \geq 0, j} \left( |(E_x)_{(i+\frac{1}{2}, j)}^k|^2 + |(E_y)_{(i, j+\frac{1}{2})}^k|^2 \right. \right. \\ \left. \left. + (H_z)_{(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}^{k+\frac{1}{2}} (H_z)_{(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}^{k-\frac{1}{2}} \right) + \frac{h^2}{2} \sum_j |(E_y)_{(0, j+\frac{1}{2})}^k|^2 \right) \\ E_g^{pk} = \frac{1}{2} \left( (ph)^2 \sum_{i \leq 0, j} \left( |(E_x)_{(pi+\frac{p}{2}, pj)}^{pk}|^2 + |(E_y)_{(pi, pj+\frac{p}{2})}^{pk}|^2 \right. \right. \\ \left. \left. + (H_z)_{(pi+\frac{p}{2}, pj+\frac{p}{2})}^{pk+\frac{p}{2}} (H_z)_{(pi+\frac{p}{2}, pj+\frac{p}{2})}^{pk-\frac{p}{2}} \right) + \frac{(ph)^2}{2} \sum_j |(E_y)_{(0, pj+\frac{p}{2})}^{pk}|^2 \right)$$

ainsi que

$$E^{pk} = E_g^{pk} + E_f^{pk}$$

On montre ensuite que

$$\frac{E_f^{pk+p} - E_f^{pk}}{2\Delta t} = h \sum_{l=1}^p \sum_j (E_y^f)_{(0, j+\frac{1}{2})}^{pk+\frac{2l-1}{2}} \left( (H_z^f)_{(\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2})}^{pk+\frac{2l-1}{2}} + \frac{h}{2} \frac{(E_y^f)_{(0, j+\frac{1}{2})}^{pk+l} - (E_y^f)_{(0, j+\frac{1}{2})}^{pk+l-1}}{\Delta t} \right)$$

et

$$\frac{E_g^{pk+p} - E_g^{pk}}{2p\Delta t} = ph \sum_j (E_y^g)_{(0, pj+\frac{p}{2})}^{pk+\frac{p}{2}} \left( -(H_z^g)_{(-\frac{p}{2}, pj+\frac{p}{2})}^{pk+\frac{p}{2}} + \frac{h}{2} \frac{(E_y^g)_{(0, pj+\frac{p}{2})}^{pk+p} - (E_y^g)_{(0, pj+\frac{p}{2})}^{pk}}{\Delta t} \right)$$

où l'on a noté

$$(E_y^f)_{(0, j+\frac{1}{2})}^{pk+\frac{2l-1}{2}} = \frac{(E_y^f)_{(0, j+\frac{1}{2})}^{pk+l} + (E_y^f)_{(0, j+\frac{1}{2})}^{pk+l-1}}{2} \\ (E_y^g)_{(0, pj+\frac{p}{2})}^{pk+\frac{p}{2}} = \frac{(E_y^g)_{(0, pj+\frac{p}{2})}^{pk+p} + (E_y^g)_{(0, pj+\frac{p}{2})}^{pk}}{2}$$

en décomposant les sommes sur  $j$  dans la grille fine

$$\sum_j A_{j+\frac{1}{2}}^f = \sum_{m=1}^p \sum_j A_{pj+\frac{2m-1}{2}}^f,$$

et en posant

$$\widetilde{(H_z^f)}_{(0, pj+\frac{2m-1}{2})}^{pk+\frac{2l-1}{2}} = (H_z^f)_{(\frac{1}{2}, pj+\frac{2m-1}{2})}^{pk+\frac{2l-1}{2}} + \frac{h}{2} \frac{(E_y^f)_{(0, pj+\frac{2m-1}{2})}^{pk+l} - (E_y^f)_{(0, pj+\frac{2m-1}{2})}^{pk+l-1}}{\Delta t} \\ \widetilde{(H_z^g)}_{(0, pj+\frac{p}{2})}^{pk+\frac{p}{2}} = (H_z^g)_{(-\frac{p}{2}, pj+\frac{p}{2})}^{pk+\frac{p}{2}} - \frac{h}{2} \frac{(E_y^g)_{(0, pj+\frac{p}{2})}^{pk+p} - (E_y^g)_{(0, pj+\frac{p}{2})}^{pk}}{\Delta t},$$

on montre que l'extension de la méthode présentée dans la section précédente au cas du raffinement 1-p, conduit au schéma de raccord

$$(2.23) \quad \begin{cases} (\widetilde{H_z^g})_{(0,pj+\frac{p}{2})}^{pk+\frac{p}{2}} = (\widetilde{H_z^f})_{(0,pj+\frac{2m-1}{2})}^{pk+\frac{2l-1}{2}} \text{ pour } (m=1,p) \text{ et } (l=1,p) \\ (E_y^g)_{(0,pj+\frac{p}{2})}^{pk+\frac{p}{2}} = \frac{1}{p^2} \sum_{l=1}^p \sum_{m=1}^p (E_y^f)_{(0,pj+\frac{2m-1}{2})}^{pk+\frac{2l-1}{2}} \end{cases}$$

### 2.3.2 Expériences numériques.

On présente dans cette section les résultats obtenus pour différents raffinements pour les équations de Maxwell en deux dimensions pour la polarisation électrique. Pour cela on simule la propagation d'une source ponctuelle et on enregistre la solution en un point de la grille raffinée et en un point grossier à côté de la grille fine. On se bornera dans cette section à faire une analyse qualitative des solutions obtenues. Nous verrons qu'elle suffira pour conclure.

On présente figure 2.2 les enregistrements en un point du maillage grossier pour des degrés de raffinement de 2,3 et 10 pour un rapport  $\frac{\Delta t}{h}$  maximal ( $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ). La solution semble correcte pour les deux premiers enregistrements (raffinement 1-2 et 1-3), mais quelques légères oscillations apparaissent pour le dernier (raffinement 10).

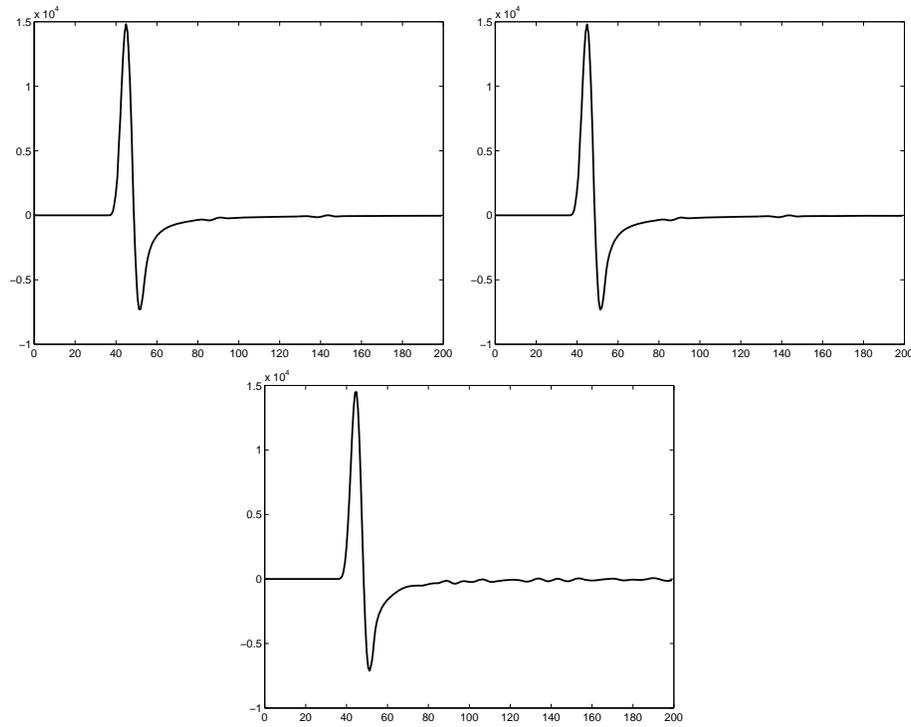


FIG. 2.2 – Enregistrement en 1 point du maillage grossier pour la C.F.L. maximum

Si l'on s'intéresse aux enregistrements en un point du maillage raffiné (figure 2.3), la solution n'est plus satisfaisante. En effet l'onde parasite mentionnée en une dimension est également présente en deux dimensions. Elle reste piégée dans la grille fine sans toutefois

explorer. Comme dans le cas 1-D, une légère baisse du rapport  $\frac{\Delta t}{h}$  fait disparaître l'onde parasite.

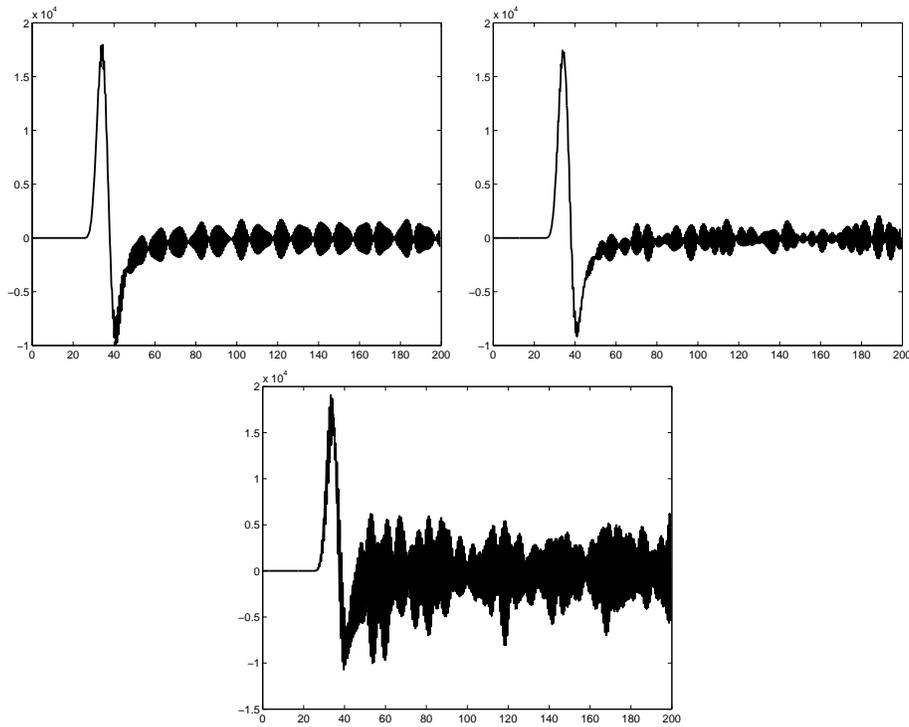


FIG. 2.3 – Enregistrement en 1 point du maillage fin pour la C.F.L. maximum

En effet, sur la figure 2.4 où l'on représenté un enregistrement dans la grille fine pour un raffinement 1-2, on observe qu'en prenant 98% de la C.F.L., l'onde parasite a disparu. Par contre le résultat présenté figure 2.5 montre que cette légère baisse du nombre de courant n'est pas suffisante pour un raffinement 1-3 puisque l'onde parasite persiste.

On constate numériquement que pour chaque degré de raffinement il existe un nombre de Courant limite en dessous duquel l'onde parasite disparaît. On présente figure 2.6 la droite donnant ce nombre limite en fonction du degré de raffinement. Il paraît peu judicieux d'utiliser la méthode telle quelle pour des raffinement 1- $n$  avec  $n > 3$  puisque très rapidement le nombre de Courant nécessaire devient pénalisant. En effet, rappelons que l'erreur numérique de dispersion augmente lorsque le nombre de Courant baisse. Rappelons également qu'une C.F.L. de 50%, correspond à la C.F.L. que l'on doit prendre dans la grille grossière, si l'on fait du raffinement spatial pur d'un facteur 2. On a vu que dans ce cas la dispersion est loin d'être négligeable (section 1.3.4)

Comme dans le cas 1-D, il paraît donc plus judicieux d'utiliser des raffinement 1-2 récursifs. L'analyse théorique par ondes planes n'ayant pas été réalisée, la justification de ce fait peut sembler très intuitive, mais la justification donnée en une dimension s'étend à deux dimensions, à savoir, lors de raffinement 1- $n$  les ondes parasites peuvent être propagatives dans la grille fine.

L'inconvénient de cette méthode est donc facilement contournable, puisque la disparition de l'onde parasite ne nécessite qu'une infime baisse du nombre de Courant. On a dès lors une

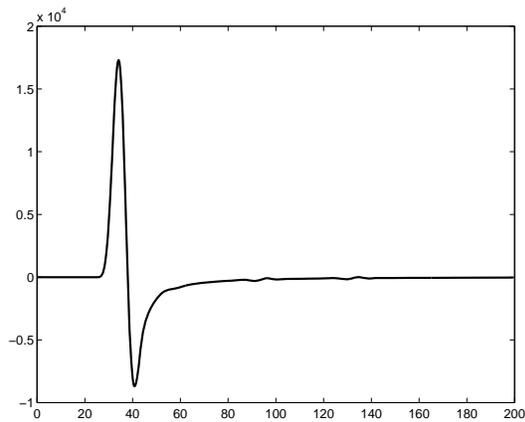


FIG. 2.4 – Enregistrement en 1 point du maillage fin pour 98% de la C.F.L. pour un raffinement 1-2

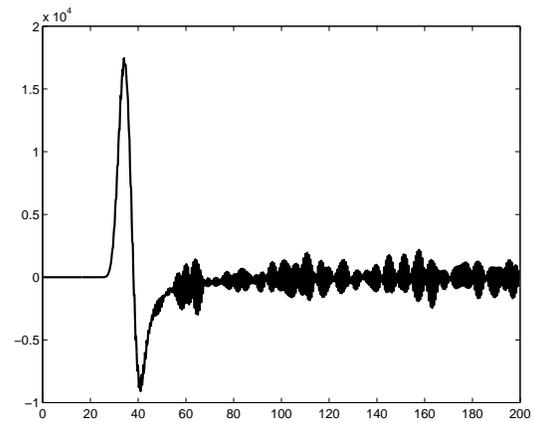


FIG. 2.5 – Enregistrement en 1 point du maillage fin pour 98% de la C.F.L. pour un raffinement 1-3

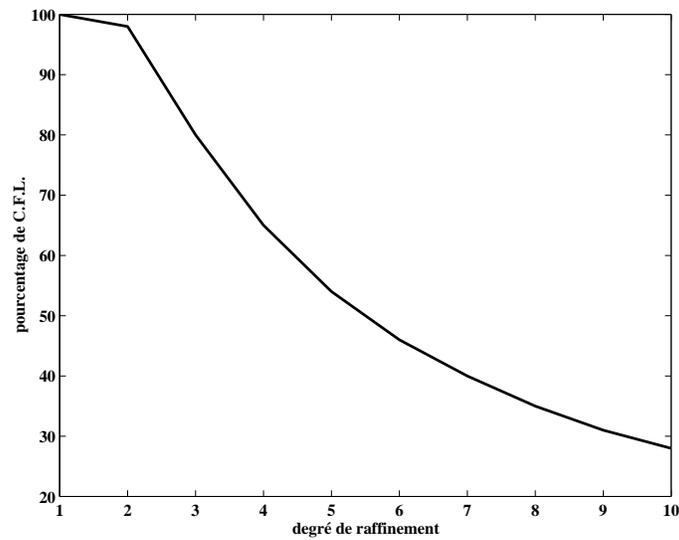


FIG. 2.6 – Pourcentage de C.F.L. maximum nécessaire pour obtenir une solution adéquate

méthode où les problèmes d'instabilité sont inexistantes, et qui est plus précise que les méthodes par interpolation. Le seul écueil qui n'est d'ailleurs pas encore apparu est la complexité des calculs de variation d'énergie lorsque l'on se place à trois dimensions. Afin d'éviter ces calculs laborieux, nous allons tenter d'étendre la méthode en se plaçant dans un cadre plus abstrait.

## Troisième partie

# Des schémas garantissant la stabilité : l'approche éléments finis



# Chapitre 1

## Ré-interprétation variationnelle du schéma de raffinement 1-D

Dans la précédente partie, nous avons proposé un schéma nouveau qui a la particularité d'assurer la stabilité sous la CFL usuelle. En fait, nous allons montrer que ce schéma découle très naturellement d'une formulation variationnelle de problèmes couplés où l'évolution de l'onde est décrite à l'aide de deux champs distincts, une pour chaque grille, l'une fine, l'autre grossière. Ceci n'est pas vraiment surprenant, derrière la "conservation de l'énergie" se cache généralement une formulation variationnelle. Ce chapitre constitue une présentation simplifiée dans le cas 1-D de la méthode variationnelle que nous utiliserons en 3-D.

### 1.1 Forme variationnelle du schéma de Yee

Commençons par montrer que, le schéma de Yee, ou ici son équivalent 1-D découle d'une formulation variationnelle. La démarche est classique. Soit  $(u, v)$  solution du système de Maxwell 1D.

$$(1.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, & \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & \text{dans } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ (u(0), v(0)) = (u_0, v_0), & \text{dans } \mathbb{R}. \end{cases}$$

On cherche  $(u(t), v(t)) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V} = H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ . La formulation variationnelle associée à ce choix d'espaces s'obtient en multipliant scalairement dans  $L^2(\mathbb{R})$  la première équation de 1.1 par  $\tilde{u} \in \mathcal{U}$  et en effectuant une intégration par partie dans le second terme et en multipliant la deuxième équation par  $\tilde{v} \in \mathcal{V}$ . Le problème devient donc

$$(1.2) \quad \begin{aligned} & \text{Trouver } u(t) \in \mathcal{U} \text{ et } v(t) \in \mathcal{V} \text{ tels que,} \\ & \begin{cases} \forall t \geq 0, \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} u \tilde{u} dx - \int_{\mathbb{R}} v \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} dx = 0 & \forall \tilde{u} \in \mathcal{U}, \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} v \tilde{v} dx + \int_{\mathbb{R}} \tilde{v} \frac{\partial u}{\partial x} dx = 0 & \forall \tilde{v} \in \mathcal{V}, \\ (u(0), v(0)) = (u_0, v_0). \end{cases} \end{aligned}$$

**Semi discrétisation en espace:** Soit  $h$  le pas de discrétisation dans  $\mathbb{R}$ . On choisit comme espace d'approximation de  $\mathcal{U}$ , l'espace  $\mathcal{U}_h$  formé par l'ensemble des fonctions continues

dont la restriction à une maille est un polynôme de degré 1. Pour l'espace  $\mathcal{V}$  on choisit l'espace d'approximation  $\mathcal{V}_h$  formé par les fonctions constantes par maille. Le système discret s'écrit alors

$$(1.3) \quad \begin{aligned} & \text{Trouver } u_h(t) \in \mathcal{U}_h \text{ et } v_h(t) \in \mathcal{V}_h \text{ tels que, } \forall t \geq 0, \\ & \begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} u_h \tilde{u}_h dx - \int_{\mathbb{R}} v_h \frac{\partial \tilde{u}_h}{\partial x} dx = 0 & \forall \tilde{u}_h \in \mathcal{U}_h, \\ \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} v_h \tilde{v}_h dx + \int_{\mathbb{R}} \tilde{v}_h \frac{\partial u_h}{\partial x} dx = 0 & \forall \tilde{v}_h \in \mathcal{V}_h. \end{cases} \end{aligned}$$

(plus l'approximation par projection  $L^2$  des conditions initiales). Le système variationnel précédent peut également se réécrire sous forme matricielle. En effet, soit  $(\Psi_i^h)_{i \in \mathbb{Z}}$  (resp.  $(\Phi_{i+\frac{1}{2}}^h)_{i \in \mathbb{Z}}$ ) la base canonique de  $\mathcal{U}_h$  (resp.  $\mathcal{V}_h$ ) (voir figure 1.1). On peut alors écrire

$$u_h(x, t) = \sum_i u_i(t) \Psi_i^h(x), \quad v_h(x, t) = \sum_i v_{i+\frac{1}{2}}(t) \Phi_{i+\frac{1}{2}}^h(x)$$

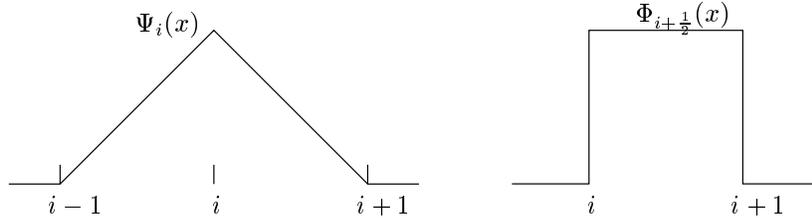


FIG. 1.1 – Fonctions de base

Posons  $U(t) = (u_i(t))_{i \in \mathbb{Z}}$ ,  $V(t) = (v_{i+\frac{1}{2}}(t))_{i \in \mathbb{Z}}$  et

$$\begin{aligned} (M_u)_{(i,j)} &= \int \Psi_i^h(x) \Psi_j^h(x) dx, & (M_v)_{(i,j)} &= \int \Phi_{i+\frac{1}{2}}^h(x) \Phi_{j+\frac{1}{2}}^h(x) dx, \\ B_{(i,j)} &= \int \Phi_{j+\frac{1}{2}}^h(x) \frac{d\Psi_i^h(x)}{dx} dx. \end{aligned}$$

Le système (1.3) s'écrit, en choisissant  $\tilde{u}_h = \Psi_i^h$  et  $\tilde{v}_h = \Phi_i^h$ ,

$$(1.4) \quad \begin{cases} M_u \frac{dU(t)}{dt} - BV(t) = 0 \\ M_v \frac{dV(t)}{dt} + B^*U(t) = 0 \end{cases}$$

**Semi-discrétisation en temps :** On choisit de prendre

$$(1.5) \quad U^n \approx U(n\Delta t) \quad \text{et} \quad V^{n+\frac{1}{2}} \approx V((n + \frac{1}{2})\Delta t)$$

Le schéma en temps est alors basé sur un schéma saute-mouton classiquement utilisé pour les équations de Maxwell.

$$(1.6) \quad \begin{cases} M_u \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} - BV^{n+\frac{1}{2}} = 0 \\ M_v \frac{V^{n+\frac{1}{2}} - V^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + B^*U^n = 0. \end{cases}$$

Pour le calcul des termes de la matrice  $M_u$ , on utilise des formules de quadratures de manière à la rendre diagonale. On parle de condensation de masse. Ainsi on approche

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx \approx \int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx = \sum_i h \frac{1}{2} (\phi(x_i) + \phi(x_{i+1}))$$

Le calcul des matrices donne alors

$$(1.7) \quad \begin{aligned} (M_u)_{(i,j)} &\approx (m_u)_{(i,j)} = h\delta_i^j \\ B_{(i,j)} &= -\delta_i^j + \delta_{i-1}^j \\ (M_v)_{(i,j)} &= h\delta_i^j \end{aligned}$$

où  $\delta_i^j$  est le symbole de Kronecker, c'est-à-dire  $\delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

En remplaçant ces formules dans le système (1.6), on peut expliciter le schéma pour chaque degré de liberté on retrouve le schéma de Yee à une dimension.

$$(1.8) \quad \begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{h} = 0 \\ \frac{v_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{h} = 0 \end{cases}$$

## 1.2 Présentation d'une méthode variationnelle

Dans cette partie nous allons tenter d'adopter la même démarche que celle décrite précédemment, c'est à dire donner un cadre variationnelle à l'approche faite dans la deuxième partie. L'objectif est notamment de pouvoir inscrire la méthode dans un cadre abstrait puis vérifier que cette méthode est équivalente à celle de la partie 2.

Comme nous l'avions vu dans l'approche différences finies, la méthode est basée sur la formulation d'un problème de transmission entre deux domaines. Ce nouveau problème devant bien entendu être équivalent au problème modèle. On partage  $\mathbb{R}$  en deux domaines  $\Omega_f$  et  $\Omega_g$  (nous prenons ici  $\Omega_g = \mathbb{R}^-$  et  $\Omega_f = \mathbb{R}^+$ ) et on découple ensuite le système (1.1) en

$$(1.9) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_g}{\partial t} + \frac{\partial v_g}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v_g}{\partial t} + \frac{\partial u_g}{\partial x} = 0 \\ v_g = j \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{dans } \Omega_g \\ \\ \text{en } 0 \end{array}$$

$$(1.10) \quad \begin{cases} \frac{\partial u_f}{\partial t} + \frac{\partial v_f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v_f}{\partial t} + \frac{\partial u_f}{\partial x} = 0 \\ v_f = j \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{dans } \Omega_f \\ \\ \text{en } 0 \end{array}$$

Cette formulation fait intervenir une nouvelle inconnue  $j$  qui va jouer un rôle important dans la suite. Cette inconnue est choisie comme la valeur (commune) de la trace de  $v$  à l'interface. Si  $j$  était connue, le champ électromagnétique serait complètement déterminé dans chaque domaine indépendamment l'un de l'autre. Maintenant, pour assurer le recollement complet des solutions et ainsi l'équivalence avec le problème (1.1), il est nécessaire (et suffisant) d'imposer la condition supplémentaire à l'interface

$$(1.11) \quad u_g(j; 0, t) = u_f(j; 0, t)$$

où l'on a fait apparaître la dépendance en  $j$  des solutions dans chacune des grilles C'est cette condition qui va déterminer (de façon unique)  $j$ .

Comme dans la section précédente, nous commençons par introduire, les espaces fonctionnels dans lesquelles nous chercherons les solutions des systèmes  $\mathcal{U}_g = H^1(\Omega_g)$ ,  $\mathcal{U}_f = H^1(\Omega_f)$ ,  $\mathcal{V}_g = L^2(\Omega_g)$  et  $\mathcal{V}_f = L^2(\Omega_f)$ . On multiplie respectivement la première équation et la deuxième équation de (1.9) par une fonction test de  $\mathcal{U}_g$  ( $\tilde{u}_g$ ) et de  $\mathcal{V}_g$  ( $\tilde{v}_g$ ) puis, on intègre sur  $\Omega_g$ . On agit de même avec le système (1.10) avec des fonctions tests de  $\mathcal{U}_f$  et  $\mathcal{V}_f$ . Après Une intégration par partie dans la première équation de chaque système, on trouve alors la formulation variationnelle suivante.

*Trouver  $(u_g, v_g, u_f, v_f, j)$  dans  $\mathcal{U}_g \times \mathcal{V}_g \times \mathcal{U}_f \times \mathcal{V}_f \times \mathbb{R}$  tels que*

$$(1.12) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_g} u_g \tilde{u}_g dx - \int_{\Omega_g} v_g \frac{\partial \tilde{u}_g}{\partial x} dx + j u_g(0, t) = 0 & \forall \tilde{u}_g \in \mathcal{U}_g \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_g} v_g \tilde{v}_g dx + \int_{\Omega_g} \tilde{v}_g \frac{\partial u_g}{\partial x} dx = 0 & \forall \tilde{v}_g \in \mathcal{V}_g \end{cases}$$

$$(1.13) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_f} u_f \tilde{u}_f dx - \int_{\Omega_f} v_f \frac{\partial \tilde{u}_f}{\partial x} dx - j u_f(0, t) = 0 & \forall \tilde{u}_f \in \mathcal{U}_f \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_f} v_f \tilde{v}_f dx + \int_{\Omega_f} \tilde{v}_f \frac{\partial u_f}{\partial x} dx = 0 & \forall \tilde{v}_f \in \mathcal{V}_f \end{cases}$$

avec

$$(1.14) \quad u_f(0, t) = u_g(0, t)$$

Cette formulation peut s'écrire de manière plus générale sous la forme

*Trouver  $(u_g, v_g, u_f, v_f, j)$  dans  $\mathcal{U}_g \times \mathcal{V}_g \times \mathcal{U}_f \times \mathcal{V}_f \times J$  tels que*

$$(1.15) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}(u_g, \tilde{u}_g)_{\mathcal{U}_g} - b_g(v_g, \tilde{u}_g) + (j, \gamma_g \tilde{u}_g) = 0 & \forall \tilde{u}_g \in \mathcal{U}_g \\ \frac{d}{dt}(v_g, \tilde{v}_g)_{\mathcal{V}_g} + b_g(\tilde{v}_g, u_g) = 0 & \forall \tilde{v}_g \in \mathcal{V}_g \end{cases}$$

$$(1.16) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}(u_f, \tilde{u}_f)_{\mathcal{U}_f} - b_f(v_f, \tilde{u}_f) - (j, \gamma_f \tilde{u}_f) = 0 & \forall \tilde{u}_f \in \mathcal{U}_f \\ \frac{d}{dt}(v_f, \tilde{v}_f)_{\mathcal{V}_f} + b_f(\tilde{v}_f, u_f) = 0 & \forall \tilde{v}_f \in \mathcal{V}_f \end{cases}$$

avec la condition

$$(1.17) \quad (\tilde{j}, \gamma_g u_g(j)) = (\tilde{j}, \gamma_f u_f(j)) \quad \forall \tilde{j} \in J$$

où

$$b_f(v, u) = \int_{\Omega_f} v \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad b_g(v, u) = \int_{\Omega_g} v \frac{\partial u}{\partial x} dx,$$

$(\cdot, \cdot)_V$  désigne le produit scalaire sur  $V$  et  $(\cdot, \cdot)$  désigne le produit scalaire sur  $J$ , ici  $\mathbb{R}$ .  $\gamma_g$  et  $\gamma_f$  sont des opérateurs de trace de  $\mathcal{U}_g$  et  $\mathcal{U}_f$  dans  $J$ . Dans le cas présenté ici, cette trace est simplement la valeur prise en 0, et  $J = \mathbb{R}$ .

Les inconnues apparaissent donc comme couplées à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de continuité des champs sur la frontière commune. Ici ce multiplicateur est un réel.

A priori, les choix des espaces de discrétisation des formulations (1.15) et (1.16) sont indépendants. Dans le cas particulier présenté ici, nous choisissons de prendre les espaces décrits dans 1.1 avec des pas de discrétisation différents: sur le domaine  $\Omega_g$  avec un pas  $2h$ , sur le domaine  $\Omega_f$  avec un pas  $h$ .

Le courant  $j$  sera en général discrétisé sur un maillage grossier. Dans le cas présent, il s'agit d'un simple scalaire et donc le problème du choix de sa discrétisation spatiale ne se pose pas.

On note  $\mathcal{U}_g^{2h}$ ,  $\mathcal{V}_g^{2h}$ ,  $\mathcal{U}_f^h$ ,  $\mathcal{V}_f^h$  et  $J^{2h}$  les sous espaces d'approximation de  $\mathcal{U}_g$ ,  $\mathcal{V}_g$ ,  $\mathcal{U}_f$ ,  $\mathcal{V}_f$  et  $J$ . Par abus de notation (pour une commodité d'écriture), on continuera à désigner dans la suite par  $u_g$ ,  $v_g$ ,  $u_f$ ,  $v_f$  et  $j$  les solutions discrètes. On introduit alors les vecteurs

$$U_f(t) = (u_f(ih, t))_{i \geq 0}, \quad V_f(t) = (v_f((i + \frac{1}{2})h, t))_{i \geq 0} \\ U_g(t) = (u_g(2ih, t))_{i \leq 0}, \quad V_g(t) = (v_g((2i + 1)h, t))_{i \leq 0}$$

On peut alors, comme dans le cas sans raffinement, écrire le schéma semi-discrétisé sous forme matricielle.

$$(1.18) \quad \begin{cases} M_u^g \frac{dU_g(t)}{dt} - B_g V_g(t) + C_g j(t) = 0 \\ M_v^g \frac{dV_g(t)}{dt} + B_g^* U_g(t) = 0 \end{cases}$$

$$(1.19) \quad \begin{cases} M_u^f \frac{dU_f(t)}{dt} - B_f V_f(t) - C_f j(t) = 0 \\ M_v^f \frac{dV_f(t)}{dt} + B_f^* U_f(t) = 0 \end{cases}$$

avec la condition de raccord

$$(1.20) \quad C_g^* U_g(t) = C_f^* U_f(t)$$

où  $B_f$ ,  $B_g$ ,  $C_f$  et  $C_g$  sont des matrices définies par

$$(B_f)_{i,k} = b_f \left( \Phi_{i+\frac{1}{2}}^h, \Psi_k^h \right), \quad i \geq 0, \quad k \geq 0, \quad (C_f j)_k = \left( j, \gamma_f^{2h} \Psi_k^h \right), \quad k \geq 0, \\ (B_g)_{i,k} = b_g \left( \Phi_{2i+1}^{2h}, \Psi_{2k}^{2h} \right), \quad i \leq 0, \quad k \leq 0, \quad (C_g j)_k = \left( j, \gamma_g^{2h} \Psi_{2k}^{2h} \right), \quad k \leq 0.$$

Ici  $C_f$  et  $C_g$  sont des matrices à une ligne, autrement dit des vecteurs lignes.

$M_u^f$ ,  $M_u^g$ ,  $M_v^f$  et  $M_v^g$ , les matrices de masses seront calculées en appliquant la condensation de masse. On désignera dans la suite  $m_u^f$ ,  $m_u^g$ ,  $m_v^f$  et  $m_v^g$  les matrices diagonales obtenues.

En appliquant le même schéma en temps que dans la section 1.1, avec

$$(1.21) \quad \begin{aligned} U_g^{2n} &\approx U_g(2n\Delta t) & , & \quad U_f^n \approx U_f(n\Delta t) \\ V_g^{2n+1} &\approx V_g((2n+1)\Delta t) & , & \quad V_f^{n+\frac{1}{2}} \approx V_f((n+\frac{1}{2})\Delta t), \end{aligned}$$

La discrétisation en temps naturelle pour les équations (1.18) et (1.19) donnerait alors

$$(1.22) \quad \begin{cases} m_u^g \frac{U_g^{2n+2} - U_g^{2n}}{2\Delta t} - B_g V_g^{2n+1} + C_g j^{2n+1} = 0 \\ m_v^g \frac{V_g^{2n+1} - V_g^{2n-1}}{2\Delta t} + B_g^* U_g^{2n} = 0 \end{cases}$$

$$(1.23) \quad \begin{cases} m_u^f \frac{U_f^{2n+1} - U_f^{2n}}{\Delta t} - B_f V_f^{2n+\frac{1}{2}} - C_f j^{2n+\frac{1}{2}} = 0 \\ m_v^f \frac{V_f^{2n+\frac{1}{2}} - V_f^{2n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + B_f^* U_f^{2n} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_u^f \frac{U_f^{2n+2} - U_f^{2n+1}}{\Delta t} - B_f V_f^{2n+\frac{3}{2}} - C_f j^{2n+\frac{3}{2}} = 0 \\ m_v^f \frac{V_f^{2n+\frac{3}{2}} - V_f^{2n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} + B_f^* U_f^{2n+1} = 0 \end{cases}$$

On voit que cela nous conduit à discrétiser de façon différente  $j$  suivant qu'il se trouve dans un schéma de la grille grossière où dans celui de la grille fine. Nous choisissons afin de contourner ce problème la discrétisation temporelle de la grille grossière, aussi

$$j^{2n+1} = j^{2n+\frac{1}{2}} = j^{2n+\frac{3}{2}}.$$

On remarque que,  $j$  étant connu, chaque problème se résout indépendamment. Il nous reste à définir  $j$  pour que le raccord se fasse de manière stable. En l'absence de raffinement (c'est à dire dans le cas où  $u$  et  $v$  sont solutions des équations de Maxwell dans  $\mathbb{R}$ ), on montre que la quantité

$$\frac{1}{2} (m_u U^{2n}, U^{2n}) + \frac{1}{2} (m_v V^{2n-1}, V^{2n+1}),$$

se conserve. De plus elle définit une norme  $L^2$  de la solution sous la condition CFL, ce qui entraîne la stabilité  $L^2$  du schéma classique. C'est sur cette remarque que va se baser la construction de la méthode.

Pour cela, on commence par définir une énergie discrète, par exemple

$$(1.24) \quad E^{2n} = E_g^{2n} + E_f^{2n}$$

avec

$$(1.25) \quad \begin{cases} E_g^{2n} = \frac{1}{2} (m_u^g U_g^{2n}, U_g^{2n}) + \frac{1}{2} (m_v^g V_g^{2n-1}, V_g^{2n+1}) \\ E_f^{2n} = \frac{1}{2} (m_u^f U_f^{2n}, U_f^{2n}) + \frac{1}{2} (m_v^f V_f^{2n+\frac{1}{2}}, V_f^{2n-\frac{1}{2}}) \end{cases}$$

**Remarque 9** Cette définition n'est qu'une réécriture des formules (1.12) et (1.13) de la partie 2.

A l'aide d'intégration par parties on montre ensuite que

$$(1.26) \quad \begin{cases} \frac{E_g^{2n+2} - E_g^{2n}}{2\Delta t} + (C_g j^{2n+1}, \frac{U_g^{2n} + U_g^{2n+2}}{2}) = 0 \\ \frac{E_f^{2n+2} - E_f^{2n}}{2\Delta t} - (C_f j^{2n+1}, \frac{U_f^{2n} + 2U_f^{2n+1} + U_f^{2n+2}}{4}) = 0 \end{cases}$$

Si l'on veut conserver la quantité  $E^{2n}$ , il faut donc s'assurer de

$$(1.27) \quad (j^{2n+1}, C_g^* \frac{U_g^{2n} + U_g^{2n+2}}{2} - C_f^* \frac{U_f^{2n} + 2U_f^{2n+1} + U_f^{2n+2}}{4}) = 0$$

Or, une façon de discrétiser temporellement la condition de raccord (1.17) est d'assurer que

$$(1.28) \quad \forall \tilde{j} \in J \quad \left( \tilde{j}, C_g^* \frac{U_g^{2n} + U_g^{2n+2}}{2} \right) = \left( \tilde{j}, C_f^* \frac{U_f^{2n} + 2U_f^{2n+1} + U_f^{2n+2}}{4} \right)$$

Ainsi, en prenant  $\tilde{j} = j^{2n+1}$ , on a immédiatement (1.27) c'est à dire la conservation de l'énergie discrète et donc stabilité.

Il nous faut donc trouver  $j$  tel que

$$(1.29) \quad C_g^* \frac{U_g^{2n} + U_g^{2n+2}}{2} = C_f^* \frac{U_f^{2n} + 2U_f^{2n+1} + U_f^{2n+2}}{4},$$

ceci nous permettra de nous assurer à la fois de la conservation de l'énergie et donc de la stabilité, mais aussi du raccord de  $u$  à l'interface.

Une manière de calculer le  $j$  qui permettra de vérifier (1.29) est de remarquer qu'en éliminant  $V_f$  du système de Maxwell discrétisé (1.23), on a

$$(1.30) \quad m_u^f \frac{U_f^{2n+2} - 2U_f^{2n+1} + U_f^{2n}}{\Delta t^2} + B_f^* (m_v^f)^{-1} B_f U_f^{2n+1} = 0$$

ainsi on peut écrire

$$(1.31) \quad \begin{aligned} \frac{U_f^{2n} + 2U_f^{2n+1} + U_f^{2n+2}}{4} &= \frac{U_f^{2n} - 2U_f^{2n+1} + U_f^{2n+2}}{4} + U_f^{2n+1} \\ &= \left( I - \frac{\Delta t^2}{4} (m_u^f)^{-1} B_f^* (m_v^f)^{-1} B_f \right) U_f^{2n+1} \end{aligned}$$

Notons  $A_f$  la matrice défini par

$$(1.32) \quad A_f = I - \frac{\Delta t^2}{4} (m_u^f)^{-1} B_f^* (m_v^f)^{-1} B_f.$$

De plus, en utilisant la première équation de (1.23) on tire

$$(1.33) \quad U_f^{2n+1} = U_f^{2n} + \Delta t (m_u^f)^{-1} \left( B_f V_f^{2n+\frac{1}{2}} + C_f j^{2n+1} \right)$$

De même, l'équation (1.22) nous permet d'écrire

$$(1.34) \quad U_g^{2n+2} = U_g^{2n} + 2\Delta t (m_u^g)^{-1} \left( B_g V_g^{2n+1} - C_g j^{2n+1} \right)$$

Ainsi on peut écrire la relation (1.29)

$$(1.35) \quad \begin{aligned} & C_g^* \left( U_g^{2n} + \Delta t(m_u^g)^{-1} \left( B_g V_g^{2n+1} - C_g j^{2n+1} \right) \right) \\ &= C_f^* A_f \left( U_f^{2n} + \Delta t(m_u^f)^{-1} \left( B_f V_f^{2n+\frac{1}{2}} + C_f j^{2n+1} \right) \right) \end{aligned}$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$(1.36) \quad Mj = b$$

avec

$$(1.37) \quad M = C_g^* \Delta t(m_u^g)^{-1} C_g + C_f^* A_f \Delta t(m_u^f)^{-1} C_f$$

et

$$(1.38) \quad b = C_g^* \left( U_g^{2n} + \Delta t(m_u^g)^{-1} B_g V_g^{2n+1} \right) - C_f^* A_f \left( U_f^{2n} + \Delta t(m_u^f)^{-1} B_f V_f^{2n+\frac{1}{2}} \right)$$

$b$  est un vecteur connu au sens où il ne dépend pas de la valeur de  $j^{2n+1}$ . En effet, il ne s'exprime qu'en fonction de  $U_g^{2n}$  et  $U_f^{2n}$  qui sont des valeurs connues, et de  $V_g^{2n+1}$  et  $V_f^{2n+\frac{1}{2}}$  qui se calculent à l'aide du schéma indépendamment de  $j$ . On peut donc déterminer le courant  $j$  via la résolution de ce système linéaire. Dans le cas qui nous concerne  $M$  et  $j$  sont des scalaires, l'inversion se réduit donc à une division de  $b$  par  $M$ . Ceci étant fait, il ne reste plus qu'à intégrer  $j$  dans les équations (1.22) et (1.23) pour fermer le schéma.

### 1.3 Lien avec la méthode de raffinement de la partie 2

Nous allons maintenant expliciter le schéma trouvé à l'aide des fonctions de base utilisées dans la section (1.1) afin de montrer que le schéma présenté dans la partie 2 entre dans le cadre variationnel ci-dessus décrit. Pour les indices négatifs, les fonctions de bases sont définies sur des intervalles de longueur  $2h$  ( $\Psi_{2i}^{2h}$  et  $\Phi_{2i+1}^{2h}$ ), pour les indices positifs avec des intervalles de longueur  $h$  ( $\Psi_i^h$  et  $\Phi_{i+\frac{1}{2}}^h$ ). A l'interface, la fonction  $\Psi_0$  est dédoublée en une fonction de base discrétisée avec un pas  $2h$  et une autre avec un pas  $h$  (voir figure 1.2). Les solutions  $u_f$  et  $v_f$

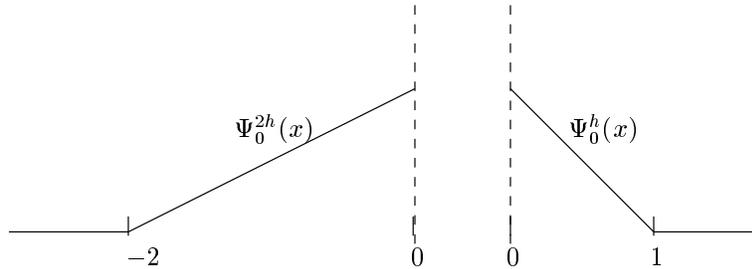


FIG. 1.2 – Fonctions de base sur l'interface

dans la grille fine s'écrivent donc

$$u_f(x) = \sum_i (u_f)_i \Psi_i^f(x) \quad v_f(x) = \sum_i (v_f)_{i+\frac{1}{2}} \Phi_{i+\frac{1}{2}}^f(x)$$

tandis que dans la grille grossière, on écrit

$$u_g(x) = \sum_{i \geq 0} (u_g)_{2i} \Psi_{2i}^{2h}(x) \quad v_g(x) = \sum_{i \geq 0} (v_g)_{2i+1} \Phi_{2i+1}^{2h}(x)$$

Comme nous l'avons fait dans la section 1.1, on explicite les matrices intervenant dans (1.22) et (1.23). A l'intérieur de chaque grille les matrices  $C_f$  et  $C_g$  étant des matrices de relèvement sont nulles, le calcul des autres matrices s'effectuant comme dans la section 1.1, on retrouve bien évidemment le schéma de yee 1D écrit sur un maillage  $(2h, 2\Delta t)$  dans la grille grossière et sur un maillage  $(h, \Delta t)$  dans la grille fine.

$$(1.39) \quad \begin{cases} \frac{(u_f)_i^{n+1} - (u_f)_i^n}{\Delta t} + \frac{(v_f)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (v_f)_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{h} = 0 \\ \frac{(v_f)_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (v_f)_{i+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \frac{(u_f)_i^{n+1} - (u_f)_i^n}{h} = 0 \end{cases}$$

$$(1.40) \quad \begin{cases} \frac{(u_g)_{2i}^{2n+2} - (u_g)_{2i}^{2n}}{2\Delta t} + \frac{(v_g)_{2i+1}^{2n+1} - (v_g)_{2i-1}^{2n+1}}{2h} = 0 \\ \frac{(v_g)_{2i+1}^{2n+1} - (v_g)_{2i+1}^{2n-1}}{2\Delta t} + \frac{(u_g)_{2i}^{2n+2} - (u_g)_{2i}^{2n}}{h} = 0 \end{cases}$$

Seuls les coefficients des matrices écrits à l'interface diffèrent, on a

$$(1.41) \quad \begin{cases} (m_u^f)_{(0,j)} = \frac{h}{2} \delta_0^j \\ (B_f)_{(0,j)} = -\delta_0^j \\ (C_f)_{(0,j)} = \delta_0^j \end{cases} \quad \begin{cases} (m_u^g)_{0,j} = h \delta_0^j \\ (B_g)_{0,j} = \delta_0^j \\ (C_g)_{(0,j)} = \delta_0^j \end{cases}$$

Cette différence qui n'intervient que pour la discrétisation des premières équations de chaque système fait apparaître le schéma de raccord à l'interface

$$(1.42) \quad \begin{cases} \left\{ \begin{aligned} \frac{h}{2} \frac{(u_f)_0^{2n+1} - (u_f)_0^{2n}}{\Delta t} - (v_f)_{\frac{1}{2}}^{2n+\frac{1}{2}} + j^{2n+1} &= 0 \\ \frac{h}{2} \frac{(u_f)_0^{2n+2} - (u_f)_0^{2n+1}}{\Delta t} - (v_f)_{\frac{1}{2}}^{2n+\frac{3}{2}} + j^{2n+1} &= 0 \end{aligned} \right. \\ \frac{h}{2} \frac{(u_g)_0^{2n+2} - (u_g)_0^{2n}}{2\Delta t} + (v_g)_{-1}^{2n+1} - j^{2n+1} = 0 \end{cases}$$

De ces équations, on tire aisément

$$(1.43) \quad \begin{aligned} (v_g)_{-1}^{2n+1} + h \frac{(u_g)_0^{2n+2} - (u_g)_0^{2n}}{2\Delta t} \\ = (v_f)_{\frac{1}{2}}^{2n+\frac{1}{2}} - h \frac{(u_f)_0^{2n+1} - (u_f)_0^{2n}}{2\Delta t} = (v_f)_{\frac{1}{2}}^{2n+\frac{3}{2}} - h \frac{(u_f)_0^{2n+2} - (u_f)_0^{2n+1}}{\Delta t} \end{aligned}$$

On reconnaît ici les deux premières équations du raccord (1.34) que nous avons interprétées comme la condition de raccord discret de l'inconnue  $v$  dans la partie 2. Les matrices  $(C_f)$  et  $C_g$  étant explicitées, la relation 1.29 s'écrit alors

$$(1.44) \quad \frac{u_g^{2n} + u_g^{2n+2}}{2} = \frac{u_f^{2n} + 2u_f^{2n+1} + u_f^{2n+2}}{4}.$$

Cette équation n'est autre que la troisième équation du système (1.34) de la partie 2. Nous avons déjà interprété cette relation comme étant une condition de raccord discrète de  $u$ .

La construction variationnelle du schéma aboutit donc au même schéma que celui de l'approche différences finies mais elle va nous permettre de construire une méthode pour les équations de Maxwell en 3 dimensions beaucoup plus simplement. Mais l'approche variationnelle a un autre avantage. Elle permet d'étendre la méthode à un cadre beaucoup plus large que les différences finies et permettrait également de raccorder une méthode de différences finies à une méthode d'éléments finis. Il est en effet clair que d'autres choix de fonctions de base auraient pu être faits pour l'approximation des espaces de discrétisation, par exemple les fonctions de base de la grille fine auraient pu être différentes de celles de la grille grossière.

## Chapitre 2

# Le cas 3D : un problème modèle et sa formulation variationnelle mixte domaine fin - domaine grossier

Le cadre proposé dans le chapitre précédent est en fait très général, et permet aisément l'extension du raffinement de maillage aux dimensions supérieures. C'est le but des chapitres qui suivent. Nous verrons qu'utilisant cette approche, le traitement du cas de Maxwell à trois dimensions est très simple. Nous verrons également que le traitement des conducteurs parfaits se réalise sans difficultés, ceci n'aurait certainement pas été le cas avec l'approche différences finies.

### 2.1 Problème modèle et notations

Nous nous donnons un parallélépipède rectangle ouvert  $B$ , nous notons  $\Sigma$  sa frontière et  $n(x)$  la normale extérieure au point  $x$  de  $\Sigma$  (c'est-à-dire celle qui pointe vers l'extérieur de  $B$ ). Le couple  $(E_g, H_g)$  désignera un champ électromagnétique défini dans le domaine extérieur à  $B$ , soit  $B^{ext}$  qui est non borné, et  $(E_f, H_f)$  un champ électromagnétique défini dans  $B$ . L'indice  $g$  faisant référence à *grossier* et  $f$  à *fin*: on anticipe ici quelque peu sur la discrétisation du problème qui va être utilisée par la suite (l'extérieur de  $B$  va être maillé de façon grossière et l'intérieur de façon raffinée). La concaténation des deux champs sera notée simplement  $(E, H)$ .

### 2.2 Formulation sous forme de problème couplé

On se donne  $(E, H)$  un champ électromagnétique dans le vide, c'est à dire une solution du système de Maxwell

$$(2.1) \quad \begin{cases} \epsilon_0 \partial_t E(x, t) - \text{rot} H(x, t) = 0, & x \in \mathbf{R}^3 \\ \mu_0 \partial_t H(x, t) + \text{rot} E(x, t) = 0, & x \in \mathbf{R}^3 \end{cases}$$

On a choisi ici de réintroduire les constantes électromagnétiques  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$  que nous avons prises égales à 1 dans les problèmes modèles précédents.

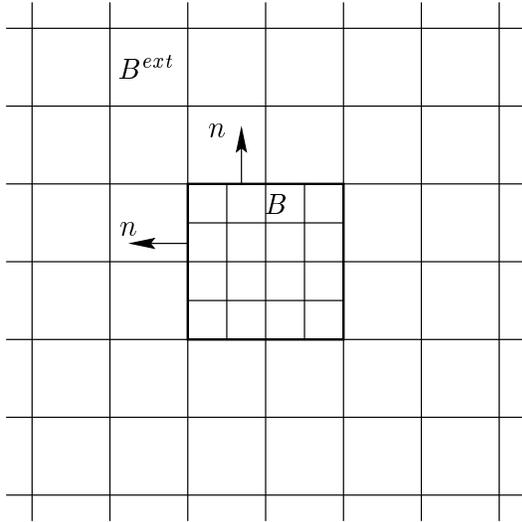


FIG. 2.1 – Coupe en deux dimensions des domaines  $B$  et  $B^{ext}$ . Le domaine  $B^{ext}$  est infini et encadre  $B$ .

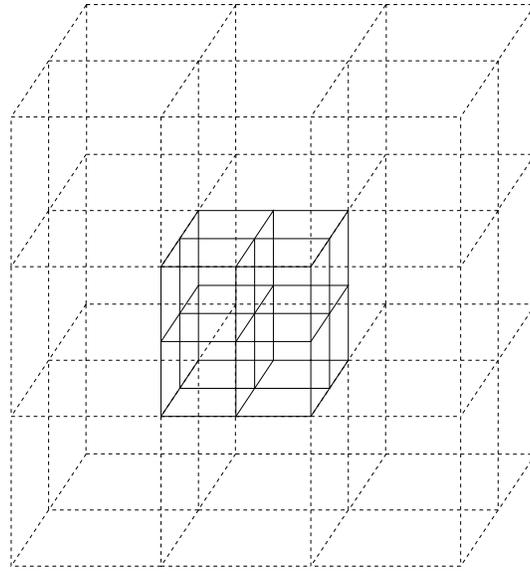


FIG. 2.2 – Vue 3 D du raffinement

Les champs sont initialisés avec des conditions initiales au temps  $t = 0$  appropriées. On pourrait également ajouter des termes sources mais on ne le fait pas ici pour alléger la présentation.

Conformément à ce que nous avons fait au chapitre précédent, nous introduisons comme variable supplémentaire la valeur commune de la trace tangentielle des champs magnétiques  $H_g$  et  $H_f$  sur l'interface fictive à savoir :

$$(2.2) \quad J(x, t) = H_{|\Sigma}(x, t) \wedge n(x),$$

qui s'identifie au courant électrique surfacique parcourant la frontière de la boîte  $B$ . On peut alors réécrire le problème en deux parties suivant

$$(2.3) \quad \begin{cases} \epsilon_0 \partial_t E_f(x, t) - \text{rot} H_f(x, t) = 0, & x \in B \\ \mu_0 \partial_t H_f(x, t) + \text{rot} E_f(x, t) = 0, & x \in B \\ H_f(x, t) \wedge n(x) = J(x, t), & x \in \Sigma = \partial B \end{cases}$$

$$(2.4) \quad \begin{cases} \epsilon_0 \partial_t E_g(x, t) - \text{rot} H_g(x, t) = 0, & x \in B^{ext} \\ \mu_0 \partial_t H_g(x, t) + \text{rot} E_g(x, t) = 0, & x \in B^{ext} \\ H_g(x, t) \wedge n(x) = J(x, t), & x \in \Sigma = \partial B^{ext} \end{cases}$$

avec la condition de raccord

$$(2.5) \quad n(x) \wedge (E_{f|\Sigma}(x, t) \wedge n(x)) = n(x) \wedge (E_{g|\Sigma}(x, t) \wedge n(x))$$

Comme nous l'avons déjà fait dans le cas 1D (section 1.2), on peut interpréter cette formulation équivalente de la façon suivante. Pour chacun des deux domaines, on calcule la solution

du système de Maxwell assujéti à un courant  $\pm J$  sur leur bord (c'est-à-dire avec la valeur du champ magnétique tangent connu sur le bord). La valeur de ce courant est alors uniquement déterminée si l'on assure la continuité des traces tangentielles du champ électrique. Le champ électromagnétique est alors complètement déterminé. L'intérêt de cette formulation est qu'elle découple dans un premier temps ce qui se passe dans chacun des deux domaines ( $J$  étant fixé, je connais le champ dans chacun des deux domaines). Le couplage ne s'effectue qu'à travers l'égalité de contrainte qui assure le raccordement.

## 2.3 Formulation variationnelle

On recherche les champs électriques  $E_g$  et  $E_f$  dans les espaces classiques

$$(2.6) \quad \begin{aligned} E_f \in V_f = \mathbf{H}(\text{rot}; B) \quad \text{et} \quad E_g \in V_g = \mathbf{H}(\text{rot}; B^{ext}) \\ \mathbf{H}(\text{rot}; \Omega) = \{ \phi \in (L^2(\Omega))^3, \text{rot} \phi \in (L^2(\Omega))^3 \}. \end{aligned}$$

On verra plus loin que les espaces de travail pour le champ magnétique sont

$$(2.7) \quad W_f = (L^2(B))^3 \quad \text{et} \quad W_g = (L^2(B^{ext}))^3.$$

La principale difficulté est de donner un sens à (2.5) et donc de définir le bon cadre variationnel pour  $J$ . Nous sommes donc amenés à préciser la notion de trace tangentielle des fonctions à carré sommable et de rotationnel à carré sommable. Dans notre cas, la frontière que nous avons retenue est une boîte, c'est-à-dire un ouvert polygonal. De récents travaux d'Annalisa Buffa et de Patrick Ciarlet [8] traitent précisément de cette question qui donnent les définitions précises des traces tangentielles de  $\mathbf{H}(\text{rot}, B)$  sur une surface  $\Sigma$  polygonale et lipschitzienne (c'est le cas du parallélépipède  $\partial B$ ). On va présenter tout d'abord de manière sommaire leurs résultats, puis, dans une seconde étape, nous donnons la formulation variationnelle proprement dite.

### 2.3.1 Théorème de trace pour $H(\text{rot})$ dans les ouverts polygonaux

Supposons que  $\Sigma$  soit découpée en  $N$  faces  $(\Sigma_j)_{j=1, \dots, N}$ ,  $\Sigma = \cup_{j=1}^N \bar{\Sigma}_j$  et notons  $e_{ij}$  la frontière commune de  $\Sigma_i$  et  $\Sigma_j$ ,  $\tau_{ij}$  est un vecteur unitaire parallèle à  $e_{ij}$ . Notons alors  $n$  la normale extérieure de  $B$ ,  $n_j = n|_{\Sigma_j}$  et  $\tau_i = \tau_{ij} \wedge n_i$ . Dans notre cas on a  $N = 6$  et chaque face est un rectangle. Pour chaque élément  $\phi \in L^2(\Sigma)$  on note  $\phi_j = \phi|_{\Sigma_j}$ .

Nous introduisons alors les espaces de vecteurs surfaciques tangents

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_t^2(\Sigma) &= \{ \phi \in L^2(\Sigma)^3, \phi \cdot n|_{\Sigma} = 0 \} \\ \mathbf{H}_-^{1/2}(\Sigma) &= \{ \phi \in \mathbf{L}_t^2(\Sigma), \phi|_{\Sigma_j} \in H^{1/2}(\Sigma_j), 1 \leq j \leq N \} \end{aligned}$$

et on considère les applications trace  $\pi_\tau : \mathcal{D}(\bar{\Omega})^3 \rightarrow \mathbf{H}_-^{1/2}(\Sigma)$  et  $\gamma_\tau : \mathcal{D}(\bar{\Omega})^3 \rightarrow \mathbf{H}_-^{1/2}(\Sigma)$  définies respectivement par :  $\pi_\tau(u) = n \wedge (u \wedge n)|_{\Sigma}$  et  $\gamma_\tau(u) = u \wedge n|_{\Sigma}$

Pour chaque  $(\Psi_i, \Psi_j) \in \mathbf{H}^{1/2}(\Sigma_i) \times \mathbf{H}^{1/2}(\Sigma_j)$  on notera

$$\Psi_i \stackrel{1/2}{=} \Psi_j \text{ en } e_{ij} \Leftrightarrow \int_{\Sigma_i} \int_{\Sigma_j} \frac{|\Psi_i(x) - \Psi_j(y)|^2}{\|x - y\|^3} d\sigma(x) d\sigma(y) < \infty$$

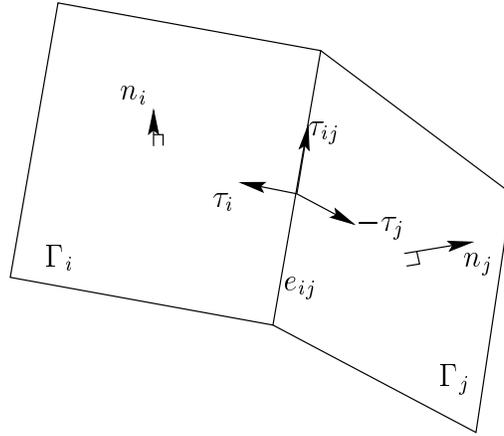


FIG. 2.3 – Joly dessin explicatif des notations

Notons  $\mathcal{I}_j$  l'ensemble des indices  $i$  tels que  $\Sigma_i$  et  $\Sigma_j$  possèdent une arête commune et définissons

$$(2.8) \quad \mathbf{H}_{\parallel}^{1/2}(\Sigma) = \left\{ \Psi \in \mathbf{H}_{-}^{1/2}(\Sigma) \text{ tels que } \Psi_j \cdot \tau_{ij} \stackrel{1/2}{=} \Psi_i \cdot \tau_{ij} \text{ en } e_{ij} \forall j, \forall i \in \mathcal{I}_j \right\}$$

Autrement dit  $\mathbf{H}_{\parallel}^{1/2}(\Sigma)$  est l'ensemble des fonctions  $\mathbf{H}^{1/2}$  par face dont la composante parallèle à chaque arête se raccorde entre chaque face au sens  $\stackrel{1/2}{=}$ .  $\mathbf{H}_{\parallel}^{1/2}(\Sigma)$  est un espace de Hilbert munis de la norme

$$(2.9) \quad \|\Psi\|_{\parallel, 1/2, \Sigma}^2 = \sum_{j=1}^N \|\Psi\|_{1/2, \Sigma}^2 + \sum_{j=1}^N \sum_{i \in \mathcal{I}_j} \mathcal{N}_{i,j}^{\parallel}(\Psi)$$

où

$$\mathcal{N}_{i,j}^{\parallel}(\Psi) = \int_{\Sigma_i} \int_{\Sigma_j} \frac{|\Psi \cdot \tau_{ij}(x) - \Psi \cdot \tau_{ij}|^2}{\|x - y\|^3} d\sigma(x) d\sigma(y)$$

Nous définissons également

$$(2.10) \quad \mathbf{H}_{\perp}^{1/2}(\Sigma) = \left\{ \Psi \in \mathbf{H}_{-}^{1/2}(\Sigma) \text{ tels que } \Psi_j \cdot \tau_i \stackrel{1/2}{=} \Psi_i \cdot \tau_j \text{ en } e_{ij} \forall j, \forall i \in \mathcal{I}_j \right\}$$

Autrement dit  $\mathbf{H}_{\perp}^{1/2}(\Sigma)$  est l'ensemble des fonctions  $\mathbf{H}^{1/2}$  par face dont la composante surfacique normale à chaque arête se raccorde entre chaque face au sens  $\stackrel{1/2}{=}$ .  $\mathbf{H}_{\perp}^{1/2}(\Sigma)$  est un espace de Hilbert munis de la norme

$$(2.11) \quad \|\Psi\|_{\perp, 1/2, \Sigma}^2 = \sum_{j=1}^N \|\Psi\|_{1/2, \Sigma}^2 + \sum_{j=1}^N \sum_{i \in \mathcal{I}_j} \mathcal{N}_{i,j}^{\perp}(\Psi)$$

où

$$\mathcal{N}_{i,j}^{\perp}(\Psi) = \int_{\Sigma_i} \int_{\Sigma_j} \frac{|\Psi_i \cdot \tau_i(x) - \Psi_j \cdot \tau_j|^2}{\|x - y\|^3} d\sigma(x) d\sigma(y)$$

Notons  $\mathbf{H}_{\parallel}^{-1/2}(\Sigma)$  (resp.  $\mathbf{H}_{\perp}^{-1/2}(\Sigma)$ ) l'espace dual de  $\mathbf{H}_{\parallel}^{1/2}(\Sigma)$  (resp.  $\mathbf{H}_{\perp}^{1/2}(\Sigma)$ ).

Si l'on définit

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{\parallel}^{-1/2}(\operatorname{div}_{\Sigma}, \Sigma) &= \left\{ \phi \in \mathbf{H}_{\parallel}^{-1/2}(\Sigma), \operatorname{div}_{\Sigma} \phi \in H^{-1/2}(\Sigma) \right\} \\ \mathbf{H}_{\perp}^{-1/2}(\operatorname{rot}_{\Sigma}, \Sigma) &= \left\{ \phi \in \mathbf{H}_{\perp}^{-1/2}(\Sigma), \operatorname{rot}_{\Sigma} \phi \in H^{-1/2}(\Sigma) \right\},\end{aligned}$$

où  $\operatorname{div}_{\Sigma}$  et  $\operatorname{rot}_{\Sigma}$  sont définis par transposition

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}_{\Sigma} : \mathbf{H}_{\parallel}^{-1/2}(\Sigma) \longrightarrow H^{-3/2}(\Sigma) \\ \quad \langle \operatorname{div}_{\Sigma} \lambda, \phi \rangle_{3/2, \Sigma} = - \langle \lambda, \nabla_{\Sigma} \phi \rangle_{\parallel, 1/2, \Sigma} \quad \forall \phi \in H^{3/2}(\Sigma), \forall \lambda \in \mathbf{H}_{\parallel}^{-1/2}(\Sigma) \\ \operatorname{rot}_{\Sigma} : \mathbf{H}_{\perp}^{-1/2}(\Sigma) \longrightarrow H^{-3/2}(\Sigma) \\ \quad \langle \operatorname{rot}_{\Sigma} \lambda, \phi \rangle_{3/2, \Sigma} = - \langle \lambda, \mathbf{rot}_{\Sigma} \phi \rangle_{\perp, 1/2, \Sigma} \quad \forall \phi \in H^{3/2}(\Sigma), \forall \lambda \in \mathbf{H}_{\perp}^{-1/2}(\Sigma), \end{array} \right.$$

avec

$$\begin{aligned}\nabla_{\Sigma} : \quad H^{3/2}(\Sigma) &\longrightarrow \mathbf{H}_{\parallel}^{1/2}(\Sigma) \\ \phi &\longrightarrow \nabla_{\Sigma} \phi = \pi_{\tau}(\nabla u)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}_{\Sigma} : \quad H^{3/2}(\Sigma) &\longrightarrow \mathbf{H}_{\perp}^{1/2}(\Sigma) \\ \phi &\longrightarrow \mathbf{rot}_{\Sigma} \phi = \gamma_{\tau}(\nabla u)\end{aligned}$$

et où  $u$  est un relèvement de  $\phi$  dans  $H^2(B)$ ,

on peut alors énoncer le théorème (cf. [8] )

**Théorème 6** *Les applications*

$$\begin{aligned}\gamma_{\tau} : \mathbf{H}(\operatorname{rot}, B) &\longrightarrow \mathbf{H}_{\parallel}^{-1/2}(\operatorname{div}_{\Sigma}, \Sigma) \\ \pi_{\tau} : \mathbf{H}(\operatorname{rot}, B) &\longrightarrow \mathbf{H}_{\perp}^{-1/2}(\operatorname{rot}_{\Sigma}, \Sigma)\end{aligned}$$

sont linéaires, continues et surjectives.

De plus les espaces  $\mathbf{H}_{\parallel}^{-1/2}(\operatorname{div}_{\Sigma}, \Sigma)$  et  $\mathbf{H}_{\perp}^{-1/2}(\operatorname{rot}_{\Sigma}, \Sigma)$  sont des espaces duaux et nous avons la formule d'intégration par parties,

$$(2.12) \quad \int_B \{ \operatorname{rot} v \cdot u - \operatorname{rot} u \cdot v \} dB = \langle \gamma_{\tau} u, \pi_{\tau} v \rangle \quad \forall u, v \in \mathbf{H}(\operatorname{rot}, B),$$

où  $\langle \cdot \rangle$  désigne le produit de dualité entre  $\mathbf{H}_{\parallel}^{-1/2}(\operatorname{div}_{\Sigma}, \Sigma)$  et  $\mathbf{H}_{\perp}^{-1/2}(\operatorname{rot}_{\Sigma}, \Sigma)$ .

Dans la suite, nous noterons  $M = \mathbf{H}_{\parallel}^{-1/2}(\operatorname{div}_{\Sigma}, \Sigma)$  et  $M' = \mathbf{H}_{\perp}^{-1/2}(\operatorname{rot}_{\Sigma}, \Sigma)$ . L'égalité (2.5) a donc maintenant un sens dans  $M'$  et nous verrons que nous sommes amenés à chercher  $J(x, t)$  dans  $M$ .

### 2.3.2 Dérivation de la formulation variationnelle

Dans un premier temps, nous supposons les champs  $H_f$  et  $H_g$  suffisamment réguliers c'est à dire au moins dans les espaces  $V_f$  et  $V_g$ . On multiplie chaque équation par une fonction test de  $V_f$  et  $V_g$  ( $\Psi_f$  et  $\Psi_g$ ). On somme ensuite sur le domaine où est posée l'équation. Grâce à la formule d'intégration par parties (2.12), on peut ensuite écrire,

$$\int_{\Theta} \operatorname{rot} H_t \cdot \Psi_t d\Theta = \int_{\Theta} \operatorname{rot} \Psi_t \cdot H_t d\Theta - \langle H_t \wedge \nu|_{\partial\Theta}, \nu \wedge (\Psi_t \wedge \nu)|_{\partial\Theta} \rangle_{M, M'}$$

où  $\langle \cdot \rangle_{M, M'}$  désigne le produit de dualité entre  $M$  et  $M'$ , avec  $\nu = +n$  et  $t = f$  si  $\Theta = B$  et  $\nu = -n$  et  $t = g$  si  $\Theta = B^{ext}$ . La condition à la limite permet alors de remplacer la trace tangentielle du champ magnétique par la donnée  $J$  (en fait  $\pm J$  si l'on tient compte de l'orientation) qui vit donc dans  $M$  d'après le théorème 6.

Si l'on écrit les équations obtenues (par exemple pour la grille fine),

$$(2.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \psi_f \in V_f, \\ \frac{d}{dt} \int_B \epsilon_0 E_f(x, t) \cdot \psi_f(x) dx - \int_B \text{rot} \psi_f(x) \cdot H_f(x, t) dx \\ = \langle J(x, t), n \wedge (\psi_f(x) \wedge n) |_{\Sigma} \rangle_{M, M'} \end{array} \right.$$

$$(2.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \psi_f \in V_f, \\ \frac{d}{dt} \int_B \mu_0 H_f(x, t) \cdot \psi_f(x) dx + \int_B \text{rot} E_f(x, t) \cdot \psi_f(x) dx = 0, \end{array} \right.$$

on s'aperçoit que ces équations ont toujours un sens si on prend  $H_f \in W_f$ , la même remarque peut être faite pour  $H_g$  que l'on peut prendre dans  $W_g$ , ce qui justifie (2.7) ce que nous faisons dans la formulation variationnelle de notre problème.

La formulation variationnelle du problème est alors la suivante

*Trouver  $E_f(t), H_f(t), E_g(t), H_g(t), J(t)$  dans  $V_f \times W_f \times V_g \times W_g \times M$  tels que*

$$(2.15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \psi_f \in V_f, \\ \frac{d}{dt} \int_B \epsilon_0 E_f(x, t) \cdot \psi_f(x) dx - \int_B \text{rot} \psi_f(x) \cdot H_f(x, t) dx \\ = \langle J(x, t), n \wedge (\psi_f(x) \wedge n) |_{\Sigma} \rangle_{M, M'} \end{array} \right.$$

$$(2.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \phi_f \in W_f, \\ \frac{d}{dt} \int_B \mu_0 H_f(x, t) \cdot \phi_f(x) dx + \int_B \text{rot} E_f(x, t) \cdot \phi_f(x) dx = 0 \end{array} \right.$$

$$(2.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \psi_g \in V_g, \\ \frac{d}{dt} \epsilon_0 \int_{B^{ext}} E_g(x, t) \cdot \psi_g(x) dx - \int_{B^{ext}} \text{rot} \psi_g(x) \cdot H_g(x, t) dx \\ = - \langle J(x, t), n \wedge (\psi_g(x) \wedge n) |_{\Sigma} \rangle_{M, M'} \end{array} \right.$$

$$(2.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \phi_g \in W_g, \\ \frac{d}{dt} \mu_0 \int_{B^{ext}} H_g(x, t) \cdot \phi_g(x) dx + \int_{B^{ext}} \text{rot} E_g(x, t) \cdot \phi_g(x) dx = 0 \end{array} \right.$$

$$(2.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall J' \in M, \\ \langle J'(x, t), n \wedge (E_f(x) \wedge n) |_{\Sigma} \rangle_{M, M'} = \langle J'(x, t), n \wedge (E_g(x) \wedge n) |_{\Sigma} \rangle_{M, M'} \end{array} \right.$$

Le crochet de dualité  $M - M'$  ici employé devient une intégrale sur  $\Sigma$  dès que les champs sont un peu plus réguliers. En particulier, dès que l'on passera aux espaces d'approximation, on remplacera les crochets de dualité par des intégrales. Enfin, ce système d'évolution variationnel est bien sûr initialisé par des conditions initiales appropriées au temps  $t = 0$ .

Cette formulation s'inscrit donc dans le même cadre général que celui introduit dans la section précédente. En remplaçant les intégrales par des formes bilinéaires comme nous l'avions fait en une dimension.

*Trouver  $(E_g, H_g, E_f, H_f, J)$  dans  $V_g \times W_g \times V_f \times W_f \times M$  tels que*

$$(2.20) \quad \begin{cases} \epsilon_0 \frac{d}{dt}(E_g, \psi_g)_{V_g} - b_g(H_g, \psi_g) + c_g(J, \psi_g) = 0 & \forall \psi_g \in V_g \\ \mu_0 \frac{d}{dt}(H_g, \phi_g)_{W_g} + b_g(E_g, \phi_g) = 0 & \forall \phi_g \in W_g \end{cases}$$

$$(2.21) \quad \begin{cases} \epsilon_0 \frac{d}{dt}(E_f, \psi_f)_{V_f} - b_f(\psi_f, H_f) - c_f(J, \psi_f) = 0 & \forall \psi_f \in V_f \\ \mu_0 \frac{d}{dt}(H_f, \phi_f)_{W_f} + b_f(E_f, \phi_f) = 0 & \forall \phi_f \in W_f \end{cases}$$

sous la condition

$$(2.22) \quad c_g(\tilde{J}, E_g) = c_f(\tilde{J}, E_f) \quad \forall \tilde{J} \in M$$

où

- $U_g, W_g, U_f$  et  $W_f$  sont des espaces de Hilbert munis de leur produit scalaire  $(\cdot)_{U_g}, (\cdot)_{W_g}, (\cdot)_{U_f}$  et  $(\cdot)_{W_f}$ ,
- $b_g$  (resp.  $b_f$ ) est une application bilinéaire de  $V_g \times W_g$  (resp.  $V_f \times W_f$ ) dans  $\mathbb{R}$ .
- $c_g$  (resp.  $c_f$ ) est une application bilinéaire de  $M \times V_g$  (resp.  $M \times V_f$ ) dans  $\mathbb{R}$

Dans notre cas les espaces de Hilbert sont ceux que nous avons définis en (2.6) et (2.7), les application bilinéaires étant définies par

$$(2.23) \quad \begin{aligned} b_g(\psi, \phi) &= \int_{\Omega_g} \phi \cdot \text{rot} \psi \, d\omega_g & b_f(\psi, \phi) &= \int_{\Omega_f} \phi \cdot \text{rot} \psi \, d\omega_f \\ c_g(j, \psi) &= \langle j, n \wedge (\psi \wedge n) |_{\Sigma} \rangle_{M, M'} & c_f(j, \psi) &= \langle j, n \wedge (\psi \wedge n) |_{\Sigma} \rangle_{M, M'} \end{aligned}$$



## Chapitre 3

# Discrétisation du problème

Dans cette section, nous présentons la démarche suivie pour la discrétisation du système d'évolution explicité dans la section précédente. La démarche est très classique. Elle consiste à choisir des espaces d'éléments finis pour l'approximation en espace (champ électromagnétique puis courant) et un schéma en temps type saute-mouton pour la discrétisation temporelle. La philosophie de la discrétisation en espace est celle de la méthode des éléments joints ([5] pour une présentation générale, [1] pour une application à l'équation des ondes et [2] pour les équations de Maxwell). La spécificité de notre apport réside surtout dans la façon de gérer la discrétisation en temps. La stabilité du schéma est analysée via l'obtention d'une loi de conservation d'une énergie discrète que nous établirons. Nous commençons par présenter la discrétisation dans le cas général, puis nous nous intéressons à un cas de discrétisation particulier, celui équivalent au schéma de Yee 3D.

### 3.1 Semi discrétisation en Espace.

Dans cette section, ainsi que dans celle qui suit nous restons à un niveau abstrait en supposant que les espaces  $V_g, W_g, V_f, W_f$  et  $M$  et les formes bilinéaires  $b_g, b_f, c_g$  et  $c_f$  sont assez généraux. Nous introduisons  $V_g^{2h} \subset V_g, W_g^{2h} \subset W_g, V_f^h \subset V_f, W_f^h \subset W_f$  et  $M^{2h} \subset M$  les sous-espaces discrets d'approximation de  $V_g, W_g, V_f, W_f$  et  $M$ . Dans la suite pour tout espace discret  $X_h$ , nous noterons  $(\cdot)_{X_h}$  le produit scalaire sur  $X_h$  et  $\|\cdot\|_{V_h}$  la norme associée. Dans un premier temps, ce produit scalaire peut être le même que celui de l'espace continu  $X$  que  $X_h$  approche, mais dans la plupart des cas nous sommes amenés à prendre un produit scalaire approché afin d'aboutir à la condensation de masse. De même, on indice les applications bilinéaires par  $h$  ou  $2h$ , car on peut éventuellement choisir de prendre des approximations de ces dernières.

Avec ces notations, nous anticipons le fait que en pratique, on utilisera des espaces d'approximation classiques pour chacun des espaces de fonctions qui intervient dans la formulation variationnelle (2.20). On discrétisera pour cela les domaines  $B$  et  $B^{ext}$  avec des maillages réguliers uniformes mais différents, de pas  $h$  pour  $B$  et  $2h$  pour  $B^{ext}$ . On choisit de discrétiser l'interface où est discrétisé le courant  $J$  sur un maillage grossier, ce choix sera justifié a posteriori; ceci correspond à un choix généralement fait pour ce genre de technique (voir la méthode des éléments joints [2] par exemple). Dans l'application qui suivra, le domaine  $B$  sera maillé 2 fois plus finement que le domaine  $B^{ext}$ . Nous indiquons donc par  $h$  et  $2h$  les espaces discrétisés définis sur  $B$  et  $B^{ext}$ , mais à ce stade de la présentation cet indiçage est purement

formel et pourrait être remplacé par  $V_g^{\pi h}, V_f^H$ . La formulation variationnelle s'écrit alors  
*Trouver  $(E_g^{2h}, H_g^{2h}, E_f^h, H_f^h, J^{2h})$  dans  $V_g^{2h} \times W_g^{2h} \times V_f^h \times W_f^h \times M^{2h}$  tels que*

$$(3.1) \quad \begin{cases} \epsilon_0 \frac{d}{dt} (E_g^{2h}, \psi_g^{2h})_{V_g^{2h}} - b_g^{2h}(\psi_g^{2h}, H_g^{2h}) + c_g^{2h}(J^{2h}, \psi_g^{2h}) = 0 & \forall \psi_g^{2h} \in V_g^{2h} \\ \mu_0 \frac{d}{dt} (H_g^{2h}, \phi_g^{2h})_{W_g^{2h}} + b_g^{2h}(\phi_g^{2h}, E_g^{2h}) = 0 & \forall \phi_g^{2h} \in W_g^{2h} \end{cases}$$

$$(3.2) \quad \begin{cases} \epsilon_0 \frac{d}{dt} (E_f^h, \psi_f^h)_{V_f^h} - b_f^h(\psi_f^h, H_f^h) - c_f^{2h}(J^{2h}, \psi_f^h) = 0 & \forall \psi_f^h \in V_f^h \\ \mu_0 \frac{d}{dt} (H_f^h, \phi_f^h)_{W_f^h} + b_f^h(E_f^h, \phi_f^h) = 0 & \forall \phi_f^h \in W_f^h \end{cases}$$

sous la condition

$$(3.3) \quad c_g^{2h}(J^{2h}, E_g^{2h}) = c_f^{2h}(J^{2h}, E_f^h) \quad \forall J^{2h} \in M^{2h}$$

En choisissant ensuite une base de chaque espace, on décompose les solutions du problème approché dans cette base. Les composantes de chaque solution, appelées degrés de liberté, sont regroupées dans un même vecteur. On notera respectivement  $\mathbb{E}_f, \mathbb{E}_g, \mathbb{H}_f, \mathbb{H}_g$  et  $\mathbb{J}$  les vecteurs contenant les degrés de liberté de  $E_f^h, E_g^{2h}, H_f^h$  et  $H_g^{2h}$  et  $J^{2h}$ . En définissant les matrices  $B_f^h, B_g^{2h}, C_f^{2h}$  et  $C_g^{2h}$  par

$$\begin{aligned} B_f^h w_i \cdot v_j &= b_f^h((\Psi_f)_j, (\Phi_f)_i) \quad \forall i \quad 1 \leq i \leq \dim(W_f^h), \forall j \quad 1 \leq j \leq \dim(V_f^h) \\ C_f^{2h} v_i \cdot m_j &= c_f^{2h}(\Psi_i, M_j) \quad \forall i \quad 1 \leq i \leq \dim(V_f^h), \forall j \quad 1 \leq j \leq \dim(M^{2h}) \end{aligned}$$

où  $(\Phi_f)_i$  (resp.  $(\Psi_f)_i, M_j$ ) est la  $i$ ème fonction de base de  $W_f^h$  (resp.  $V_f^h, M^{2h}$ ),  $w_i$  (resp.  $v_i, m_i$ ) est le  $i$ ème vecteur de base de  $\mathbb{R}^{\dim(W_f^h)}$  (resp.  $\mathbb{R}^{\dim(V_f^h)}, \mathbb{R}^{\dim(M^{2h})}$ ). On définit de la même façon les matrices  $B_g^{2h}$  et  $C_g^{2h}$ . On obtient alors une écriture matricielle de la formulation variationnelle

$$(3.4) \quad \begin{cases} \epsilon_0 M_E^h \frac{d\mathbb{E}_f}{dt} + B_f^h \mathbb{H}_f - (C_f^{2h})^* \mathbb{J}(t) = 0 \\ \mu_0 M_H^h \frac{d\mathbb{H}_f}{dt} - (B_f^h)^* \mathbb{E}_f = 0 \\ \epsilon_0 M_E^{2h} \frac{d\mathbb{E}_g}{dt} + B_g^{2h} \mathbb{H}_g + (C_g^{2h})^* \mathbb{J}(t) = 0 \\ \mu_0 M_H^{2h} \frac{d\mathbb{H}_g}{dt} - (B_g^{2h})^* \mathbb{E}_g = 0 \\ C_g^{2h} \mathbb{E}_g - C_f^{2h} \mathbb{E}_f = 0 \end{cases}$$

On notera que dans le système différentiel (3.4),  $\mathbb{J}(t)$  est implicitement donné et n'apparaît pas à première vue facilement accessible. Pourtant, si on multiplie la première équation de ce système par  $(M_E^h)^{-1}$  puis la troisième par  $(M_E^{2h})^{-1}$ , par différence, on obtient après application

de la contrainte (dérivée en temps)  $C_g^{2h} \frac{d\mathbb{E}_g}{dt} - C_f^{2h} \frac{d\mathbb{E}_f}{dt} = 0$ , l'équation

$$(3.5) \quad \begin{cases} \left( (C_g^{2h}) (M_E^{2h})^{-1} (C_g^{2h})^* + (C_f^{2h}) (M_E^h)^{-1} (C_f^{2h})^* \right) \mathbb{J}(t) \\ = (C_f^{2h}) (M_E^h)^{-1} B_f^h \mathbb{H}_f(t) - (C_g^{2h}) (M_E^{2h})^{-1} B_g^{2h} \mathbb{H}_g(t) \end{cases}$$

Cette équation explicite la relation entre  $\mathbb{J}(t)$  et  $\mathbb{H}_g(t)$ . Elle montre que  $\mathbb{J}(t)$  s'obtient en inversant un système linéaire symétrique positif. Ce système est évidemment inversible dès que

$$(3.6) \quad Ker (C_f^{2h})^* \cap Ker (C_g^{2h})^* = \{0\}$$

Nous montrerons dans le cas de discrétisation choisi, que si  $Ker (C_g^{2h})^*$  n'est pas toujours réduit à 0, le noyau  $Ker (C_f^{2h})^*$  l'est toujours et le problème est alors bien posé. C'est une des raisons qui justifiera plus loin de discrétiser  $J$  sur la grille grossière. La raison intuitive de ce résultat est que la trace du champ électrique raffiné sur la frontière possède beaucoup plus de degrés de liberté que le courant qui lui s'appuie sur la trace de la grille grossière. En d'autres termes, la condition (3.6) est assurée dès que le paramètre de Lagrange est sous-maillé en regard des variables primales. C'est une condition classique que l'on retrouve pour tous les problèmes de points-selles.

## 3.2 Semi discrétisation en temps.

### 3.2.1 Discrétisation de la formulation variationnelle.

On choisit  $\Delta t$  un pas de temps et on discrétise les champs de la façon suivante

$$\begin{aligned} H_f^h & \text{ aux pas de temps } (n + \frac{1}{2})\Delta t & \approx & H_f^{n+\frac{1}{2}} \\ E_f^h & \text{ aux pas de temps } n\Delta t & \approx & E_f^n \\ H_g^{2h} & \text{ aux pas de temps } (2n + 1)\Delta t & \approx & H_g^{2n+1} \\ E_g^{2h} & \text{ aux pas de temps } 2n\Delta t & \approx & E_g^{2n} \\ J^{2h} & \text{ aux pas de temps } (2n + 1)\Delta t & \approx & J^{2n+1} \end{aligned}$$

On écrit

$$(3.7) \quad \begin{cases} \forall \psi_f^h \in V_f^h, & \epsilon_0 \left( \frac{E_f^{n+1} - E_f^n}{\Delta t}, \psi_f^h \right)_{V_f^h} - b_f^h \left( \psi_f^h, H_f^{n+\frac{1}{2}} \right) = c_f^{2h} \left( J^{2[\frac{n}{2}]+1}, \psi_f^h \right) \\ \forall \phi_f^h \in W_f^h, & \mu_0 \left( \frac{H_f^{n+\frac{1}{2}} - H_f^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}, \phi_f^h \right)_{W_f^h} + b_f^h \left( \phi_f^h, E_f^n \right) = 0 \end{cases}$$

$$(3.8) \quad \begin{cases} \forall \psi_g^{2h} \in V_g^{2h}, & \epsilon_0 \left( \frac{E_g^{2n+2} - E_g^{2n}}{2\Delta t}, \psi_g^{2h} \right)_{V_g^{2h}} - b_g^{2h} \left( \psi_g^{2h}, H_g^{2n+1} \right) = c_g^{2h} \left( J^{2n+1}, \psi_g^{2h} \right) \\ \forall \phi_g^{2h} \in W_g^{2h}, & \mu_0 \left( \frac{H_g^{2n+1} - H_g^{2n-1}}{2\Delta t}, \phi_g^{2h} \right)_{W_g^{2h}} + b_g^{2h} \left( E_g^{2n}, \phi_g^{2h} \right) = 0 \end{cases}$$

Reste la contrainte que l'on choisit d'écrire de façon centrée à l'aide de moyennes adéquatement choisies (c'est le point clé) justifiées par le résultat de conservation d'énergie

$$(3.9) \quad \forall J^{2h} \in \mathcal{M}_{2h}, \quad c_f^{2h} \left( J^{2h}, \frac{E_f^{2n+2} + 2E_f^{2n+1} + E_f^{2n}}{4} \right) = c_g^{2h} \left( J^{2h}, \frac{E_g^{2n+2} + E_g^{2n}}{2} \right)$$

On peut ré-interpréter ce système variationnel en regroupant les valeurs des fonctions inconnues en chaque degré de liberté dans un même vecteur, on obtient une discrétisation par différences finies du système d'équations différentielles (3.4). On donne les équations qui permettent de passer du temps  $t^{2n}$  au temps  $t^{2n+2}$

$$(3.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_0 M_E^h \frac{\mathbb{E}_f^{2n+1} - \mathbb{E}_f^{2n}}{\Delta t} + B_f^h \mathbb{H}_f^{2n+\frac{1}{2}} - (C_f^{2h})^* \mathbb{J}^{2n+1} = 0 \\ \mu_0 M_H^h \frac{\mathbb{H}_f^{2n+\frac{1}{2}} - \mathbb{H}_f^{2n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - (B_f^h)^* \mathbb{E}_f^{2n} = 0 \\ \epsilon_0 M_E^h \frac{\mathbb{E}_f^{2n+2} - \mathbb{E}_f^{2n+1}}{\Delta t} + B_f^h \mathbb{H}_f^{2n+\frac{3}{2}} - (C_f^{2h})^* \mathbb{J}^{2n+1} = 0 \\ \mu_0 M_H^h \frac{\mathbb{H}_f^{2n+\frac{3}{2}} - \mathbb{H}_f^{2n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} - (B_f^h)^* \mathbb{E}_f^{2n+1} = 0 \\ \epsilon_0 M_E^{2h} \frac{\mathbb{E}_g^{2n+2} - \mathbb{E}_g^{2n}}{2\Delta t} + B_g^{2h} \mathbb{H}_g^{2n+1} + (C_g^{2h})^* \mathbb{J}^{2n+1} = 0 \\ \mu_0 M_H^{2h} \frac{\mathbb{H}_g^{2n+1} - \mathbb{H}_g^{2n-1}}{2\Delta t} - (B_g^h)^* \mathbb{E}_g^{2n} = 0 \\ (C_g^{2h}) \frac{\mathbb{E}_g^{2n+2} + \mathbb{E}_g^{2n}}{2} - (C_f^{2h}) \frac{\mathbb{E}_f^{2n+2} + 2\mathbb{E}_f^{2n+1} + \mathbb{E}_f^{2n}}{4} = 0 \end{array} \right.$$

Ce système est bien sûr initialisé par la donnée des champs discrets  $\mathbb{E}_f^0, \mathbb{E}_g^0, \mathbb{H}_f^{\frac{1}{2}}$  et  $\mathbb{H}_g^1$  supposé connus.

### 3.2.2 Sur le calcul et l'existence de la solution discrète.

Avant de nous poser la question de l'existence de la solution discrète, il faut se demander comment les équation du système (3.10) permettent de calculer cette solution et notamment le courant, connaissant connues toutes les quantités jusqu'à l'instant  $2n$ . En effet une fois  $\mathbb{J}^{2n+1}$  connu, on calcul  $\mathbb{E}_g^{2n+2}, \mathbb{E}_f^{2n+1}, \mathbb{E}_g^{2n+2}$  et  $\mathbb{H}_f^{2n+\frac{3}{2}}$  explicitement à l'aide des six premières équations de (3.10),  $\mathbb{J}^{2n+1}$  jouant alors un simple rôle de terme source. C'est bien évidemment la dernière équation de (3.10) qui va donner l'équation en  $J$ .

On commence par prendre la différence entre les équations (3.7) prises aux deux instants  $2n+1$  et  $2n$ . On remarque que les termes proportionnels aux courants qui interviennent dans ces deux équations sont identiques et donc disparaissent lors de la différence. On obtient, après multiplication par  $\frac{\mu_0}{\Delta t}$

$$(3.11) \quad \mu_0 \epsilon_0 M_E^h \frac{\mathbb{E}_f^{2n+2} - 2\mathbb{E}_f^{2n+1} + \mathbb{E}_f^{2n}}{\Delta t^2} + B_f^h \mu_0 \frac{\mathbb{H}_f^{n+\frac{1}{2}} - \mathbb{H}_f^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = 0.$$

On en déduit ( $c_0^{-2} = \epsilon_0 \mu_0$ )

$$(3.12) \quad M_E^h \frac{\mathbb{E}_f^{2n+2} - 2\mathbb{E}_f^{2n+1} + \mathbb{E}_f^{2n}}{c_0^2 \Delta t^2} + B^h \left( M_H^h \right)^{-1} \left( B_f^h \right)^* \mathbb{E}_f^{2n+1} = 0,$$

et, finalement,

$$(3.13) \quad \frac{\mathbb{E}_f^{2n+2} + 2\mathbb{E}_f^{2n+1} + \mathbb{E}_f^{2n}}{4} = \left( Id - \frac{c_0^2 \Delta t^2}{4} \left( M_E^h \right)^{-1} B_f^h \left( M_H^h \right)^{-1} \left( B_f^h \right)^* \right) \mathbb{E}_f^{2n+1}.$$

Maintenant, on a

$$(3.14) \quad \mathbb{E}_f^{2n+1} = T_f^{2n+1} + \frac{1}{\epsilon_0} \left( M_E^h \right)^{-1} \left( C_f^{2h} \right)^* \mathbb{J}^{2n+1}$$

où  $T_f^{2n+1}$  est donné explicitement en fonction de quantités indépendantes de  $\mathbb{J}^{2n+1}$ , à savoir  $\mathbb{E}_f^{2n}$ ,  $\mathbb{H}_f^{2n+1}$ , ce dernier étant lié explicitement à  $\mathbb{E}_f^{2n}$ ,  $\mathbb{H}_f^{2n-1}$ .  $T_f^{2n+1}$  est donc connu après le calcul de l'étape  $2n$ .

On procède de même pour  $\mathbb{E}_g^{2n+2}$ , on trouve

$$(3.15) \quad \frac{\mathbb{E}_g^{2n+2} + \mathbb{E}_g^{2n}}{2} = T_g^{2n+1} - \frac{1}{\epsilon_0} \left( M_E^{2h} \right)^{-1} \left( C_g^{2h} \right)^* \mathbb{J}^{2n+1}$$

où, là encore,  $T_g^{2n+1}$  est fonction de quantités indépendantes de  $\mathbb{J}^{2n+1}$ .

Finalement, l'équation de contrainte fournit la relation recherchée, à savoir

$$(3.16) \quad \begin{aligned} & \left( \left( C_g^{2h} \right) \left( M_E^{2h} \right)^{-1} \left( C_g^{2h} \right)^* + \left( C_f^{2h} \right) A_f^h \left( C_f^{2h} \right)^* \right) \mathbb{J}^{2n+1}(t) \\ & = \epsilon_0 \left( \left( C_f^{2h} \right) T_f^{2n+1} - \left( C_g^{2h} \right) T_g^{2n+1} \right) \end{aligned}$$

avec

$$(3.17) \quad A_f^h = \left( \left( M_E^h \right)^{-1} - \frac{c_0^2 \Delta t^2}{4} \left( M_E^h \right)^{-1} B_f^h \left( M_H^h \right)^{-1} \left( B_f^h \right)^* \left( M_E^h \right)^{-1} \right)$$

La condition d'inversibilité du système est donc assurée dès que

$$(3.18) \quad \begin{cases} Ker \left( C_f^{2h} \right)^* \cap Ker \left( C_g^{2h} \right)^* = \{0\} \\ A_f^h > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c_0^2 \Delta t^2}{4} B_f^h \left( M_H^h \right)^{-1} \left( B_f^h \right)^* < M_E^h \end{cases}$$

La première condition était déjà suffisante pour assurer le caractère bien posé du problème semi-discrétisé. La discrétisation en temps requiert de plus une condition supplémentaire qui porte sur le pas de temps qui ne doit pas être trop grand. Nous verrons qu'en pratique la valeur maximale du pas de temps utilisable est intimement liée à celle qui assure la stabilité des deux schémas découplés, l'une dans le grille fine, l'autre dans la grille grossière, le courant étant une donnée du problème.

Nous résumons le résultat obtenu dans le théorème

**Théorème 7** *Le schéma (3.10) convenablement initialisé définit de manière unique les champs électromagnétiques dans les deux grilles ainsi que le courant dès que les conditions (3.18) sont remplies.*

### 3.2.3 Estimation d'énergie Stabilité.

La technique énergétique est une méthode qui permet d'obtenir des estimations a priori sur toute solution du schéma numérique. Cette estimation revient à la conservation d'un équivalent discret de l'énergie électromagnétique. A partir de cette loi de conservation, on obtient sous certaines conditions (condition C.F.L.) une condition suffisante de stabilité du schéma. On suppose ici dans un premier temps que la relation (3.18) est vérifiée.

Plaçons nous tout d'abord dans l'extérieur de  $B$  (domaine maillé grossièrement), on prend  $\psi_g^{2h} = \frac{E_g^{2n+2} + E_g^{2n}}{2}$  dans (3.8) on obtient

$$(3.19) \quad \epsilon_0 \left( \frac{E_g^{2n+2} - E_g^{2n}}{2\Delta t}, \frac{E_g^{2n+2} + E_g^{2n}}{2} \right)_{V_g^{2h}} - b_g^{2h} \left( \frac{E_g^{2n+2} + E_g^{2n}}{2}, H_g^{2n+1} \right) = -c_g^{2h} \left( J^{2n+1}, \frac{E_g^{2n+2} + E_g^{2n}}{2} \right)$$

On fait ensuite la demi-somme entre les deux équations variationnelles de type (3.8) correspondant à deux instants consécutifs. On a

$$(3.20) \quad \forall \phi_g^{2h} \in W_g^{2h}, \quad \mu_0 \left( \frac{H_g^{2n+3} - H_g^{2n-1}}{4\Delta t}, \phi_g^{2h} \right)_{W_g^{2h}} + b_g^{2h} \left( \frac{E_g^{2n+2} + E_g^{2n}}{2}, \phi_g^{2h} \right) = 0$$

d'où, en choisissant  $\phi_g^{2h} = H_g^{2n+1}$

$$(3.21) \quad \frac{\mu_0}{2} \left( \frac{H_g^{2n+3} - H_g^{2n-1}}{2\Delta t}, H_g^{2n+1} \right)_{W_g^{2h}} + b_g^{2h} \left( \frac{E_g^{2n+2} + E_g^{2n}}{2}, H_g^{2n+1} \right) = 0$$

En regroupant les deux équations obtenues, les termes  $b_g^{2h} \left( \frac{E_g^{2n+2} + E_g^{2n}}{2}, H_g^{2n+1} \right)$  disparaissent et il reste

$$(3.22) \quad \frac{\epsilon_0}{2} \left( \|E_g^{2n+2}\|_{V_g^{2h}}^2 - \|E_g^{2n}\|_{V_g^{2h}}^2 \right) + \frac{\mu_0}{2} \left( (H_g^{2n+3}, H_g^{2n+1})_{W_g^{2h}} - (H_g^{2n+1}, H_g^{2n-1})_{W_g^{2h}} \right) = -2\Delta t c_g^{2h} \left( J^{2n+1}, \frac{E_g^{2n+2} + E_g^{2n}}{2} \right)$$

Posons

$$(3.23) \quad \mathcal{E}_g^{2n} = \frac{\epsilon_0}{2} \|E_g^{2n}\|_{V_g^{2h}}^2 + \frac{\mu_0}{2} (H_g^{2n+1}, H_g^{2n-1})_{W_g^{2h}},$$

on obtient la première équation

$$(3.24) \quad \frac{\mathcal{E}_g^{2n+2} - \mathcal{E}_g^{2n}}{2\Delta t} = -c_g^{2h} \left( J^{2n+1}, \frac{E_g^{2n+2} + E_g^{2n}}{2} \right)$$

On peut bien sûr faire le même calcul pour la boîte raffinée. Si

$$(3.25) \quad \mathcal{E}_f^n = \frac{\epsilon_0}{2} \|E_f^n\|_{V_f^h}^2 + \frac{\mu_0}{2} (H_f^{n+\frac{1}{2}}, H_f^{n-\frac{1}{2}})_{W_f^h}$$

on a

$$(3.26) \quad \frac{\mathcal{E}_f^{n+1} - \mathcal{E}_f^n}{\Delta t} = c_f^{2h} \left( J^{2[\frac{n}{2}]+1}, \frac{E_f^{n+1} + E_f^n}{2} \right)$$

(le seul changement provient du signe  $-$  devant  $J$  et le  $2\Delta t$  qui est divisé par 2).

Si l'on écrit maintenant (3.25) aux deux instants  $2n$  et  $2n+1$  on a

$$(3.27) \quad \begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_f^{2n+1} - \mathcal{E}_f^{2n}}{\Delta t} &= c_f^{2h} \left( J^{2n+1}, \frac{E_f^{2n+1} + E_f^{2n}}{2} \right) \\ \frac{\mathcal{E}_f^{2n+2} - \mathcal{E}_f^{2n+1}}{\Delta t} &= +c_f^{2h} \left( J^{2n+1}, \frac{E_f^{2n+2} + E_f^{2n+1}}{2} \right) \end{aligned}$$

D'où en effectuant la demi-somme

$$(3.28) \quad \frac{\mathcal{E}_f^{2n+2} - \mathcal{E}_f^{2n}}{2\Delta t} = c_f^{2h} \left( J^{2n+1}, \frac{E_f^{2n+2} + 2E_f^{2n+1} + E_f^{2n}}{4} \right)$$

C'est la seconde équation. Définissons l'énergie totale à l'instant  $2n$  comme

$$(3.29) \quad \mathcal{E}_T^{2n} = \mathcal{E}_f^{2n} + \mathcal{E}_g^{2n}$$

En regroupant les deux équations obtenues on a

$$(3.30) \quad \frac{\mathcal{E}_T^{2n+2} - \mathcal{E}_T^{2n}}{2\Delta t} = c_f^{2h} \left( J^{2n+1}, \frac{E_f^{2n+2} + 2E_f^{2n+1} + E_f^{2n}}{4} \right) - c_g^{2h} \left( J^{2n+1}, \frac{E_g^{2n+2} + E_g^{2n}}{2} \right)$$

et le second terme est nul d'après (3.9) avec  $J'_{2h} = J^{2n+1} \in \mathcal{M}_{2h}$ . D'où la loi de conservation

$$(3.31) \quad \mathcal{E}_T^{2n+2} = \mathcal{E}_T^{2n}$$

Le schéma en temps retenu pour la contrainte, c'est à dire (3.9), se révèle ainsi être le schéma qui donne précisément la conservation de l'énergie discrète. Cela justifie, a posteriori, notre choix.

À partir de la conservation de l'énergie discrète, il est plus ou moins facile de trouver une condition suffisante de stabilité. La démarche est toujours un peu la même. On utilise l'identité remarquable

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0}{2} (H_f^{n+\frac{1}{2}}, H_f^{n-\frac{1}{2}})_{W_f^h} &= \frac{\mu_0}{2} \frac{\|H_f^{n+\frac{1}{2}} + H_f^{n-\frac{1}{2}}\|_{W_f^h}^2 - \|H_f^{n+\frac{1}{2}} - H_f^{n-\frac{1}{2}}\|_{W_f^h}^2}{4} \\ &= \frac{\|H_f^{n+\frac{1}{2}} + H_f^{n-\frac{1}{2}}\|_{W_f^h}^2}{4} - \frac{\epsilon_0}{2} \frac{\Delta t^2}{4\epsilon_0\mu_0} \left\| \mu_0 \frac{H_f^{n+\frac{1}{2}} - H_f^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \right\|_{W_f^h}^2 \end{aligned}$$

Le but de ce qui suit est de contrôler le terme négatif par la partie en  $E$  de l'énergie. En appliquant successivement l'égalité variationnelle (3.7) à  $\phi_f^h = \frac{\mu_0}{\Delta t} (H_f^{n+\frac{1}{2}} - H_f^{n-\frac{1}{2}})$  puis  $\phi_f^h = \text{rot}(E_f^n) \in W_f^h$ , il vient

$$(3.32) \quad \frac{\mu_0}{2} (H_f^{n+\frac{1}{2}}, H_f^{n-\frac{1}{2}})_{W_f^h} = \frac{\mu_0}{2} \frac{\|H_f^{n+\frac{1}{2}} + H_f^{n-\frac{1}{2}}\|_{W_f^h}^2}{4} - \frac{\epsilon_0}{2} \frac{c_0^2 \Delta t^2}{4} \left\| \text{rot} E_f^n \right\|_{W_f^h}^2$$

Pour aller plus loin, il faut faire l'hypothèse qu'il existe une constante  $C_f$  telle que

$$(3.33) \quad \|\text{rot} \psi\|_{W_f^h}^2 \leq \frac{C_f}{h^2} \|\psi\|_{V_f^h}^2, \quad \forall \psi \in V_f^h.$$

Cette hypothèse est raisonnable dans le sens où pour les espaces d'éléments finis usuels, le rotationnel discret s'écrit en tout degré de liberté comme combinaison linéaire finie des degrés de liberté voisins à la constante  $\frac{1}{h}$  près.

On a alors la majoration

$$(3.34) \quad \frac{\mu_0}{2} (H_f^{n+\frac{1}{2}}, H_f^{n-\frac{1}{2}})_{W_f^h} \geq \frac{\mu_0}{2} \frac{\|H_f^{n+\frac{1}{2}} + H_f^{n-\frac{1}{2}}\|_{W_f^h}^2}{4} - \frac{\epsilon_0}{2} \frac{C_f c_0^2 \Delta t^2}{4h^2} \|E_f^n\|_{V_f^h}^2,$$

ce qui, injecté dans l'expression de l'énergie de la grille fine (3.25) permet d'obtenir

$$(3.35) \quad \left(1 - \frac{C_f c_0^2 \Delta t^2}{4h^2}\right) \frac{\epsilon_0}{2} \|E_f^n\|_{V_f^h}^2 + \frac{\mu_0}{2} \left\| \frac{H_f^{n+\frac{1}{2}} + H_f^{n-\frac{1}{2}}}{2} \right\|_{W_f^h}^2 \leq \mathcal{E}_f^n.$$

On peut bien sûr procéder de manière identique pour la grille grossière. On suppose

$$(3.36) \quad \|\operatorname{rot}\psi\|_{W_g^{2h}}^2 \leq \frac{C_g}{4h^2} \|\psi\|_{V_g^{2h}}^2, \quad \forall \psi \in V_g^{2h}.$$

et on obtient

$$(3.37) \quad \left(1 - \frac{C_g c_0^2 4\Delta t^2}{4 \times 4h^2}\right) \frac{\epsilon_0}{2} \|E_g^{2n}\|_{V_g^{2h}}^2 + \frac{\mu_0}{2} \left\| \frac{H_g^{2n+1} + H_g^{2n-1}}{2} \right\|_{W_g^{2h}}^2 \leq \mathcal{E}_g^{2n}.$$

En rassemblant les deux estimations, on obtient

$$(3.38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(1 - \frac{C_g c_0^2 4\Delta t^2}{4 \times 4h^2}\right) \frac{\epsilon_0}{2} \|E_g^{2n}\|_{V_g^{2h}}^2 + \frac{\mu_0}{2} \left\| \frac{H_g^{2n+1} + H_g^{2n-1}}{2} \right\|_{W_g^{2h}}^2 \\ + \left(1 - \frac{C_f c_0^2 \Delta t^2}{4h^2}\right) \frac{\epsilon_0}{2} \|E_f^{2n}\|_{V_f^h}^2 + \frac{\mu_0}{2} \left\| \frac{H_f^{2n+\frac{1}{2}} + H_f^{2n-\frac{1}{2}}}{2} \right\|_{W_f^h}^2 \\ \leq \mathcal{E}_f^{2n} + \mathcal{E}_g^{2n} = \mathcal{E}_T^{2n} = \mathcal{E}_T^0. \end{array} \right.$$

la dernière égalité provenant de la conservation de l'énergie totale.

On fait alors l'hypothèse que

$$(3.39) \quad \Delta t < \frac{2h}{c_0 C_f}, \quad \text{et} \quad \Delta t < \frac{2h}{c_0 C_g},$$

les quantités du premier membre de l'inégalité sont alors tous positifs et les normes des solutions sont estimées indépendamment de l'instant  $n$ . On procède alors de manière identique à ce que nous avons fait dans la section 1.2.4 et on déduit la stabilité du schéma sous la CFL (3.39).

Une remarque importante est que cette CFL est la même que celle qui assure la stabilité des deux schémas indépendamment de tout couplage. C'est là un point fort de notre méthode.

### 3.3 Choix des espaces d'approximation.

Le cadre général de la méthode étant posé, nous présentons maintenant les discrétisations choisies et nous précisons les conséquences sur la condition de stabilité et le caractère bien posé du problème.

### 3.3.1 Description des maillages.

On choisit de discrétiser les domaines  $B$  et  $B^{ext}$  à l'aide de deux maillages  $\mathcal{T}_h$  et  $\mathcal{T}_{2h}^{ext}$  constitués chacun d'un ensemble de parallélépipèdes identiques. On suppose que la frontière commune (la boîte) colle exactement à la frontière des deux maillages. On suppose de plus que les mailles en  $x$ ,  $y$  et  $z$ , qui sont les trois coordonnées d'espace, sont deux fois plus grosses pour le maillage de l'extérieur de la boîte que pour le maillage de l'intérieur : la boîte est ainsi raffinée 2 fois par rapport à son domaine extérieur.

### 3.3.2 Approximation du champ électrique.

On choisit d'approcher le champ électrique les espaces approché par des éléments finis de plus bas degré de Nédelec, [24], [25], [6].

Nous sommes donc amenés à prendre

$$(3.40) \quad \begin{aligned} V_g^{2h} &= \left\{ E_g^{2h} \in V_g / \forall K \in \mathcal{T}_{2h}^{ext}, E_g^{2h}|_K \in \mathcal{Q}_{0,1,1}^K \times \mathcal{Q}_{1,0,1}^K \times \mathcal{Q}_{1,1,0}^K \right\} \\ V_f^h &= \left\{ E_f^h \in V_f / \forall K \in \mathcal{T}_h, E_f^h|_K \in \mathcal{Q}_{0,1,1}^K \times \mathcal{Q}_{1,0,1}^K \times \mathcal{Q}_{1,1,0}^K \right\} \end{aligned}$$

où  $\mathcal{Q}_{p,q,r}^K$  désigne l'ensemble des fonctions de  $K$  s'écrivant  $P_p(x) \times P_q(y) \times P_r(z)$ ,  $P_p(x)$  désignant l'ensemble des Polynômes de degré  $p$ .

Suite à cela, on peut alors écrire en tout point  $M$  la décomposition de champ  $E_g^{2h}$  (resp.  $E_f^h$ ) appartenant à  $V_g^{2h}$  (resp.  $V_f^h$ )

$$(3.41) \quad \begin{cases} E_g^{2h}(M) &= \sum_{a \in B^{ext}} (E_g)_a^{2h} \hat{\psi}_a^{2h}(M) \\ E_f^h(M) &= \sum_{a \in B} (E_f)_a^h \hat{\psi}_a^h(M) \end{cases}$$

où les sommations sont effectuées sur les arêtes ( $a$ ) du maillage.

Les fonctions  $\hat{\psi}_a^h$  sont les fonctions de base associées au degrés de liberté correspondant à une circulation de  $h_x$ ,  $h_y$  ou  $h_z$  (selon l'orientation) sur l'arête numéro  $a$  et 0 sur les autres arêtes.

On peut préciser un peu plus. On distinguera les arêtes orientées selon  $x$ ,  $y$  ou  $z$ . Si le maillage cubique est constitué des noeuds  $(ih_x, jh_y, kh_z)$ , les arêtes sont repérées par la coordonnée de leur point milieu. Par exemple, une arête en  $x$  sera associée à un point du type  $(i + \frac{1}{2}h_x, jh_y, kh_z)$ . On est donc amené à distinguer trois familles de fonctions de base

$$(3.42) \quad \begin{aligned} a = \text{arête selon } x &\rightarrow \vec{\phi}_a^h = \vec{\phi}_{i+\frac{1}{2},j,k}^h \\ a = \text{arête selon } y &\rightarrow \vec{\phi}_a^h = \vec{\phi}_{i,j+\frac{1}{2},k}^h \\ a = \text{arête selon } z &\rightarrow \vec{\phi}_a^h = \vec{\phi}_{i,j,k+\frac{1}{2}}^h \end{aligned}$$

avec

$$(3.43) \quad \begin{aligned} \vec{\psi}_{i+\frac{1}{2},j,k}^h &= \phi_{i+\frac{1}{2}}^{h_x}(x) \psi_j^{h_y}(y) \psi_k^{h_z}(z) \hat{x} \\ \vec{\psi}_{i,j+\frac{1}{2},k}^h &= \phi_{j+\frac{1}{2}}^{h_y}(y) \psi_k^{h_z}(z) \psi_i^{h_x}(x) \hat{y} \\ \vec{\psi}_{i,j,k+\frac{1}{2}}^h &= \phi_{k+\frac{1}{2}}^{h_z}(z) \psi_i^{h_x}(x) \psi_j^{h_y}(y) \hat{z}, \end{aligned}$$

où  $\phi_{m+\frac{1}{2}}^{h_s}(s)$  est la fonction indicatrice du segment  $[mh_s, (m+1)h_s]$  et  $\psi_m^{h_s}(s)$  est la fonction chapeau

$$\psi_m^{h_s}(s) = \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ (m-1)h_s \quad mh_s \quad (m+1)h_s \end{array} \quad s$$

Chaque fonction de base a donc son support constitué par les quatre cubes qui s'appuient sur l'arête associée. Ceci n'est bien sûr vrai que pour les arêtes qui ne sont pas localisées sur la frontière commune des deux maillages. Pour ces arêtes, il faut enlever les cubes qui ne sont pas internes au domaine considéré. Finalement, les solutions recherchées seront de la forme

$$(3.44) \quad E_f^h(t) = \sum_{i,j,k} E_f^x{}_{i+\frac{1}{2},j,k}(t) \hat{\psi}_{i+\frac{1}{2},j,k}^h + E_f^y{}_{i,j+\frac{1}{2},k}(t) \hat{\psi}_{i,j+\frac{1}{2},k}^h + E_f^z{}_{i,j,k+\frac{1}{2}}(t) \hat{\psi}_{i,j,k+\frac{1}{2}}^h$$

et,

$$(3.45) \quad E_g^{2h}(t) = \sum_{i,j,k} E_g^x{}_{i+\frac{1}{2},j,k}(t) \hat{\psi}_{i+\frac{1}{2},j,k}^{2h} + E_g^y{}_{i,j+\frac{1}{2},k}(t) \hat{\psi}_{i,j+\frac{1}{2},k}^{2h} + E_g^z{}_{i,j,k+\frac{1}{2}}(t) \hat{\psi}_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{2h}$$

### 3.3.3 Approximation du champ magnétique.

Dans la formulation variationnelle, nous avons vu que nous pouvions prendre  $H$  dans  $L^2$ . Nous allons demander un peu plus de régularité en prenant une discrétisation  $H(\text{div})$ -conforme. Ce choix est motivé par le fait qu'il conduit au schéma aux différences finies bien connu, puisque nous verrons que ce choix nous permet de retrouver le schéma de Yee.

$$(3.46) \quad \begin{aligned} W_g^{2h} &= \left\{ H_g^{2h} \in W_g / \forall K \in \mathcal{T}_{2h}^{ext}, H_g^{2h}|_K \in \mathcal{Q}_{1,0,0}^K \times \mathcal{Q}_{0,1,0}^K \times \mathcal{Q}_{0,0,1}^K \right\} \\ W_f^h &= \left\{ H_f^h \in W_f / \forall K \in \mathcal{T}_h, H_f^h|_K \in \mathcal{Q}_{1,0,0}^K \times \mathcal{Q}_{0,1,0}^K \times \mathcal{Q}_{0,0,1}^K \right\} \end{aligned}$$

Ainsi  $\forall (H_g^{2h}, H_f^h) \in W_g^{2h} \times W_f^h$  on peut écrire

$$(3.47) \quad \begin{cases} H_g^{2h}(M) &= \sum_{f \in B^{ext}} (H_g)_f^{2h} \hat{\phi}_f^{2h}(M) \\ H_f^h(M) &= \sum_{f \in B} (H_f)_f^h \hat{\phi}_f^h(M) \end{cases}$$

où les sommations sont effectuées sur les faces ( $f$ ) du maillage.

Les fonctions  $\hat{\phi}_f^h$  sont les fonctions de base associées au degrés de liberté correspondant à un flux normal de  $h^2$  à travers la face  $f$  et 0 pour les autres faces.

Pour les fonctions de base qui engendrent l'espace d'approximation de  $H(\text{div}, B)$  ou encore  $H(\text{div}, B^{ext})$ , on distingue trois familles de fonctions de base selon la nature de la normale à la face qui leur est associée. On repère chaque face par les coordonnées de son centre. À une face de normale orientée selon  $\pm \hat{x}$  correspond un point du type  $(ih_x, (j + \frac{1}{2})h_y, (k + \frac{1}{2})h_z)$ . Les fonctions de bases sont alors

$$(3.48) \quad \begin{aligned} f = \text{face selon } x &\rightarrow \vec{\phi}_f^h = \vec{\phi}_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^h \\ f = \text{face selon } y &\rightarrow \vec{\phi}_f^h = \vec{\phi}_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^h \\ f = \text{face selon } z &\rightarrow \vec{\phi}_f^h = \vec{\phi}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^h. \end{aligned}$$

avec

$$(3.49) \quad \begin{aligned} \vec{\phi}_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^h &= \psi_i^{h_x}(x) \phi_{j+\frac{1}{2}}^{h_y}(y) \phi_{k+\frac{1}{2}}^{h_z}(z) \hat{x} \\ \vec{\phi}_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^h &= \psi_j^{h_y}(y) \phi_{k+\frac{1}{2}}^{h_z}(z) \phi_{i+\frac{1}{2}}^h(x) \hat{y} \\ \vec{\phi}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^h &= \psi_k^{h_z}(z) \phi_{i+\frac{1}{2}}^{h_x}(x) \phi_{j+\frac{1}{2}}^{h_y}(y) \hat{z} \end{aligned}$$

Chaque fonction de base a cette fois-ci son support constitué des deux cubes qui s'appuient sur la face associée, à l'exception bien sûr des fonctions de base accrochées à une face de cube localisée sur la frontière  $\Sigma$  pour lesquelles le support n'est constitué que d'un unique cube. De la même façon que nous avons défini  $\mathcal{E}_h$  et  $\mathcal{E}_{2h}$  les espaces d'approximation pour, respectivement, le champ électrique raffiné défini sur  $B$  et le champ électrique sur  $B^{ext}$ , nous définissons  $\mathcal{H}_h$  et  $\mathcal{H}_{2h}$  leur correspondant pour le champ magnétique.

Finalement, les solutions recherchées seront de la forme

$$(3.50) \quad \begin{aligned} H_f^h(t) &= \sum_{i,j,k} H_{f_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}^x(t) \hat{\phi}_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^h + H_{f_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}}^y(t) \hat{\phi}_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^h \\ &\quad + H_{f_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}^z(t) \hat{\phi}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^h \end{aligned}$$

et,

$$(3.51) \quad \begin{aligned} H_g^{2h}(t) &= \sum_{i,j,k} H_{g_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}^x(t) \hat{\phi}_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{2h} + H_{g_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}}^y(t) \hat{\phi}_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^{2h} \\ &\quad + H_{g_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}}^z(t) \hat{\phi}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{2h} \end{aligned}$$

### 3.3.4 Approximation du Courant.

L'espace  $M$  dans lequel vit le courant est un espace de champs surfaciques définis à la surface de  $\Sigma$ . On considère la trace sur  $\Sigma$  du maillage volumique pour  $B^{ext}$ , c'est à dire celui correspondant au maillage dit grossier ( $\mathcal{T}_{2h}^{ext}$ ). On note  $\mathcal{T}_{2h}(\Sigma)$  cette trace. On obtient, sur chacune des 6 faces un maillage régulier en rectangles.

On choisit ensuite de prendre pour discrétiser  $M$ , l'espace d'approximation de Raviart Thomas [7] de plus bas degrés.

$$(3.52) \quad M^{2h} = \left\{ J^{2h} \in M / \forall T \in \mathcal{T}_{2h}(\Sigma), J|_T^{2h} \in \mathcal{Q}_{1,0}^T \times \mathcal{Q}_{0,1}^T \right\}$$

où si  $e_x$  et  $e_y$  est une base de  $T$ ,  $\mathcal{Q}_{p,q}$  est l'ensemble des fonctions définies sur  $T$  qui s'écrivent  $P_p(x) \times P_q(y)$ .

Plus exactement, cet espace est construit de la manière suivante. Sur chaque rectangle de  $\Sigma$ , on définit 4 demi fonctions de bases qui sont supportées par ce rectangle, chacune d'elles étant associée à l'une des 4 arêtes du rectangle. L'orientation de la demi-fonction de base est constante et perpendiculaire à l'arête considérée. L'intensité est constante le long de la direction de l'arête et linéaire par rapport à la direction perpendiculaire (fonction dont le graphe est en forme de demi tente). La constante de normalisation est fixée de telle sorte que les quatre flux de chaque fonction de base à travers chacune des arêtes sont égaux à la longueur de l'arête si le flux est pris sur l'arête de la fonction de base et 0 sinon. De cette façon les degrés de liberté ne sont rien d'autre que la moyenne des flux du champ à travers chaque arête. On a donc

$$(3.53) \quad J^{2h}(x) = \sum_c \sum_{p=1}^4 J_{c,p} \mathbf{1}_c(x) \vec{j}_{c,p}^{2h}(x)$$

où  $j_{p,c}^{2h}(x)$  est une fonction vectorielle de direction constante et polynômiale de degré inférieur à 1 tandis que  $\mathbf{1}_c$  est la fonction indicatrice du carreau  $c$  du maillage grossier. Si l'on calcule la divergence de  $J^{2h}$ , on trouve

$$(3.54) \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{div} J^{2h}(x) &= \sum_c \sum_{p=1}^4 J_{c,p} \left( \operatorname{div}(j_{c,p}^{2h}) \mathbf{1}_c(x) + \vec{\nabla} \mathbf{1}_c(x) \cdot j_{c,p}^{2h}(x) \right) \\ &= \sum_c \sum_{p=1}^4 J_{c,p} \left( \operatorname{div}(j_{c,p}^{2h}) \mathbf{1}_c(x) + \nu_{\partial c}(x) \cdot j_{c,p}^{2h}(x) \delta_{\partial c}(x) \right) \end{aligned} \right.$$

avec

$$(3.55) \quad \nu_{\partial c}(x) \cdot j_{c,p}^{2h}(x) \delta_{\partial c}(x) = \delta_{A_{c,p}}(x)$$

où  $A_{c,p}$  est l'arête du carreau  $c$  à laquelle est accrochée la  $p$ ième fonction de base. Mais, comme la masse de Dirac sur un segment n'est pas un élément de  $H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)$ , on doit obligatoirement s'assurer que pour toute arête  $a$  du maillage

$$(3.56) \quad \forall a, \quad \sum_{c,p, / A_{c,p}=a} J_{c,p} = 0.$$

C'est une condition classique pour définir des approximation  $H_{\operatorname{div}}$  conforme.

**Remarque 10** *On peut donner une interprétation physique de ceci. La divergence du courant est une charge, la relation (3.56) est appelée loi de Kirtchhoff, il doit y avoir conservation du courant.*

Pour le maillage ici considéré, chaque arête appartient à exactement deux rectangles (non nécessairement sur la même face, néanmoins). On définira donc les fonctions de bases comme la concaténation de deux demi fonction de bases, l'une affectée d'un signe + l'autre d'un signe  $-$ , et cela de façon complètement arbitraire. Cette manière de faire permet de s'assurer automatiquement de (3.56).

L'approche classique consiste à choisir une orientation par carreau des demi-fonctions de base, puis de faire un choix arbitraire du signe des demi-fonctions de base lors de leur concaténation pour créer la fonction de base sur l'arête (cf. figure 3.1)

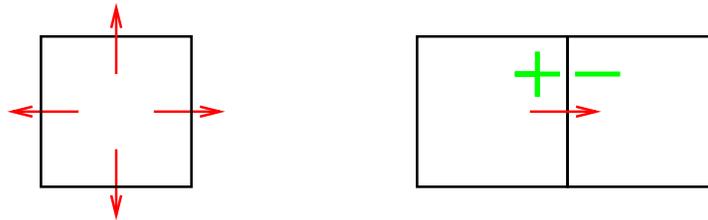


FIG. 3.1 – choix classique pour l'orientation des fonctions de base

D'un point de vue pratique, nous avons choisi de ne pas prendre l'orientation classique pour chaque carreau mais de prendre l'orientation suivant les indices croissants dans chaque direction. L'avantage d'opérer de la sorte réside dans la possibilité d'assurer la loi de Kirtchhoff sur presque toutes les arêtes en affectant un signe + au deux demi-fonctions de base.

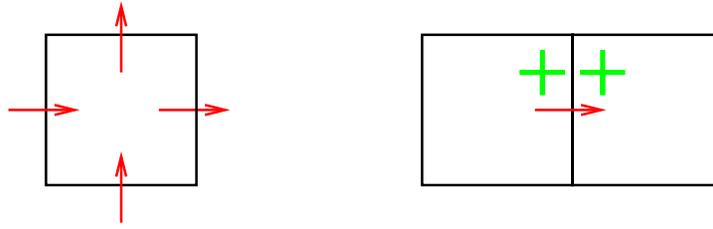


FIG. 3.2 – notre choix d'orientation

Presque, car dans le cas où le courant se trouve sur une arête de la boîte, la discrétisation est un peu moins classique. En effet, une des conséquences des travaux de A. Buffa [2], est qu'une fonction  $\Phi$  appartenant à l'ensemble des fonctions  $\mathcal{C}^1$  par face, appartienne à  $H_{\parallel}^{-1/2}(\text{div}_{\Sigma}, \Sigma)$  doit vérifier à la frontière entre deux faces  $\Sigma_i$  et  $\Sigma_j$  la relation

$$\Phi|_{\Sigma_i} \cdot \tau_i = \Phi|_{\Sigma_j} \cdot \tau_j$$

où  $\tau_i = \tau_{ij} \wedge n_i$ ,  $n_i$  étant le vecteur normal à  $\Sigma_i$ , et  $\tau_{ij}$  un vecteur directeur de l'arête commune à  $\Sigma_i$  et  $\Sigma_j$  (voir figure 3.3). En conséquence il faut également raccorder pour chaque arête de

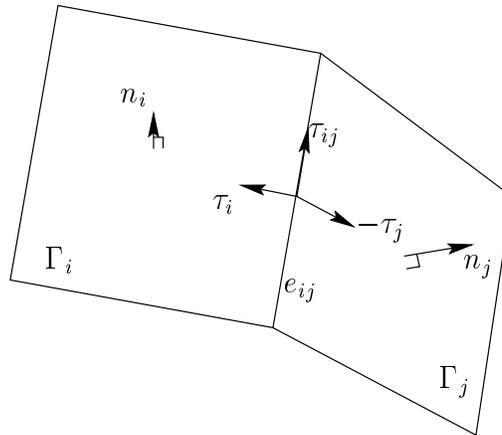


FIG. 3.3 – Définition des vecteurs unitaires à l'interface

la boîte, les composantes normales aux arêtes du courant. Ainsi, un même degré de liberté correspond à deux orientations différentes du courant (voir figure (3.4)). On doit alors affecter un signe  $-$  à l'une des deux fonctions de base pour certains degrés de liberté accrochés à 6 des 12 arêtes du cube. Notre choix, arbitraire, est décrit dans le tableau 4.1.

### 3.4 Approximation des formes bilinéaires. Existence, unicité stabilité des solutions du schéma.

Dans la section, nous avons donné des conditions générales de stabilité et de définition du courant, on se propose ici de préciser celles-ci dans le cas des espaces de discrétisation que nous venons de choisir. Commençons par préciser l'approximation des formes bilinéaires.

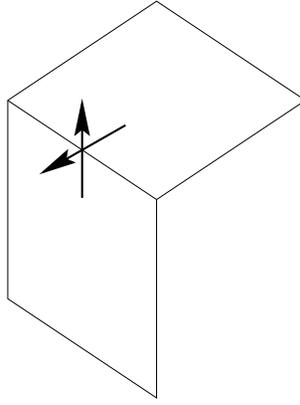


FIG. 3.4 – Degré de liberté sur une arête

### 3.4.1 Quadrature et condensation de masse.

Un point important pour obtenir des schémas explicites donc efficaces est la condensation de masse, [11]. Celle-ci consiste à utiliser une loi de quadrature pour évaluer les intégrales élémentaires dont les points de quadrature dépendent des degrés de liberté. Les bons choix entraînent qu'alors les matrices de masses sont diagonales et le schéma (en absence de couplage grille fine grille grossière) devient explicite.

Précisons tout ceci, si  $\Theta = B$  ou  $B^{ext}$  et  $\phi$  une fonction assez régulière on écrit

$$(3.57) \quad \int_{\Theta} \varphi(x) dx \approx \int_{\Theta} \varphi(x) dx = \sum_{C \subset \Theta} \text{mesure}(C) \frac{1}{8} \sum_{s=1}^8 \varphi|_C(S_s^C)$$

où les  $S_s^C$ ,  $s = 1, \dots, 8$  sont les huit sommets du cube  $C$ . On procédera de même pour les intégrales de surface

$$(3.58) \quad \int_{\Sigma} \varphi(x) dx \approx \int_{\Sigma} \varphi(x) dx = \sum_{C \subset \Sigma} \text{mesure}(C) \frac{1}{4} \sum_{s=1}^4 \varphi|_C(S_s^C)$$

où cette fois-ci les  $C$  désignent des rectangles situés à la surface de  $\Sigma$  et dont  $S_s^C$ ,  $s = 1, \dots, 4$  sont les quatre sommets.

Il est bien connu que de telles formules de quadrature sont précises à l'ordre 2. Ainsi, on ne perd pas de précision à les utiliser et, comme on le verra par la suite, le problème discrétisé en temps présente alors l'immense avantage d'être explicite.

### 3.4.2 Calcul de la condition de stabilité.

Dans la section 3.2.3, nous avons vu que la stabilité était assurée dès que  $\Delta t$  était suffisamment petit, nous voyons ici, la condition de stabilité plus précisément dans le cas qui nous concerne. La relation (3.32) s'écrit en tenant compte des espaces choisis.

$$(3.59) \quad \frac{\mu_0}{2} \int_B H_f^{n+\frac{1}{2}} \cdot H_f^{n-\frac{1}{2}} = \frac{\mu_0}{2} \int_B \left| \frac{H_f^{n+\frac{1}{2}} + H_f^{n-\frac{1}{2}}}{2} \right|^2 - \frac{\epsilon_0}{2} \frac{c_0^2 \Delta t^2}{4} \int_B |\text{rot} E_f^n|^2$$

Maintenant, on a

$$(3.60) \quad \int_B |\text{rot} E_f^n|^2 = \sum_{C \subset B} \frac{\text{mes}(C)}{8} \sum_{s=1}^8 |\text{rot} E_f^n|_C^2 (S_s^C)$$

Pour chaque cube du maillage,  $\sum_s |\text{rot} E_f^n|_C^2 (S_s^C)$  ne fait intervenir que douze degrés de liberté (qui ne sont autres que ceux rattachés aux douze arêtes du cube). Cette fonction peut donc s'interpréter comme une forme quadratique positive dans un espace à 12 dimensions. La matrice associée à cette forme quadratique est diagonalisable et a une valeur propre maximale. On a calculé cette valeur propre en annexe. On montre que

$$(3.61) \quad \frac{1}{8} \sum_{s=1}^8 |\text{rot} E_f^n|_C^2 (S_s^C) \leq 4 \left( \frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} + \frac{1}{h_z^2} \right) \left( \frac{1}{8} \sum_{s=1}^8 |E_f^n|_C^2 (S_s^C) \right)$$

On en déduit la majoration

$$(3.62) \quad \int_B |\text{rot} E_f^n|^2 \leq 4 \left( \frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} + \frac{1}{h_z^2} \right) \int_B |E_f^n|^2$$

et, en particulier

$$(3.63) \quad \begin{aligned} & \frac{\mu_0}{2} \int_B H_f^{n+\frac{1}{2}} \cdot H_f^{n-\frac{1}{2}} \\ & \leq \frac{\mu_0}{2} \int_B \left| \frac{H_f^{n+\frac{1}{2}} + H_f^{n-\frac{1}{2}}}{2} \right|^2 - c_0^2 \Delta t^2 \left( \frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} + \frac{1}{h_z^2} \right) \frac{\epsilon_0}{2} \int_B |E_f^n|^2 \end{aligned}$$

D'où l'estimation

$$(3.64) \quad (1 - \alpha^2) \frac{\epsilon_0}{2} \int_B |E_f^{2n}|^2 + \frac{\mu_0}{2} \int_B \left| \frac{H_f^{2n+\frac{1}{2}} + H_f^{2n-\frac{1}{2}}}{2} \right|^2 \leq E_T^0$$

avec

$$(3.65) \quad \alpha = c_0 \Delta t \sqrt{\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} + \frac{1}{h_z^2}}$$

On peut procéder de la même façon pour l'énergie dans la grille grossière et on obtient

$$(3.66) \quad (1 - \alpha^2) \frac{\epsilon_0}{2} \int_{B^{ext}} |E_g^{2n}|^2 + \frac{\mu_0}{2} \int_{B^{ext}} \left| \frac{H_g^{2n+1} + H_g^{2n-1}}{2} \right|^2 \leq E_T^0.$$

Ces deux estimations fournissent un contrôle de la norme  $L^2$  des solutions du schéma en fonction de la norme  $L^2$  des conditions initiales (l'énergie à l'instant 0) dès que  $\alpha$  est plus petit que 1. On a donc stabilité du schéma dès que  $\Delta t$  est assez petit pour satisfaire la condition, dite condition CFL, (3.65).

Il est bien connu que la condition  $\alpha < 1$  est la condition classique pour assurer la stabilité du schéma de Yee. Le fait d'avoir raffiné à la fois en espace et en temps implique que chacun des deux schémas, pris indépendamment de tout couplage entre eux, est stable sous cette même condition. Ce que nos calculs montrent ici c'est que le couplage des grilles n'a pas d'incidence sur la condition de stabilité commune aux deux schémas, et cela quelle que soit la taille de la boîte raffinée. C'est un résultat fort qui assure une grande maîtrise des phénomènes d'instabilités.

### 3.4.3 Existence du courant.

Toutefois, si on regarde un peu attentivement les calculs précédents, on s'aperçoit qu'une hypothèse a été faite implicitement, à savoir l'existence du courant  $J^{2n+1}$  pour tout  $n$ . Or, nous avons vu précédemment que l'existence du courant n'était assurée que si la matrice  $A_f^h$ , dont l'expression est donnée en (3.17), a le bon goût d'être définie positive. Il nous faut donc en toute rigueur vérifier que si la CFL usuelle est vérifiée alors cette matrice  $A_f^h$  est bien définie positive. Pour cela, il suffit de changer légèrement le point de vue que nous avons adopté pour faire les calculs d'énergie. Ces calculs sont basés sur l'écriture variationnelle des équations. On peut de la même façon écrire les choses sous forme matricielle en faisant tous les calculs à partir de la formulation (3.10). L'énergie s'écrit

$$(3.67) \quad \begin{cases} \mathcal{E}_g^{2n} = \frac{\epsilon_0}{2} (M_E^{2h} E_g^{2n}, E_g^{2n}) + \frac{\mu_0}{2} (M_H^{2h} H_g^{2n+1}, H_g^{2n-1}), \\ \mathcal{E}_f^{2n} = \frac{\epsilon_0}{2} (M_E^h E_f^{2n}, E_f^{2n}) + \frac{\mu_0}{2} (M_H^h H_f^{2n+\frac{1}{2}}, H_f^{2n-\frac{1}{2}}), \end{cases}$$

Et l'équivalent de (3.59) devient

$$(3.68) \quad \begin{cases} \frac{\mu_0}{2} (M_H^h H_f^{2n+\frac{1}{2}}, H_f^{2n-\frac{1}{2}}) = \frac{\mu_0}{2} \left( M_H^h \frac{H_f^{2n+\frac{1}{2}} + H_f^{2n-\frac{1}{2}}}{2}, \frac{H_f^{2n+\frac{1}{2}} + H_f^{2n-\frac{1}{2}}}{2} \right) \\ - \frac{\epsilon_0}{2} \frac{c_0^2 \Delta t^2}{4} \left( (M_H^h)^{-1} (B_f^h)^* E_f^{2n}, (B_f^h)^* E_f^{2n} \right) \end{cases}$$

tandis que (3.62) s'écrit

$$(3.69) \quad B_f^h (M_H^h)^{-1} (B_f^h)^* \leq 4 \left( \frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} + \frac{1}{h_z^2} \right) M_E^h$$

Cette inégalité permet d'assurer que la CFL usuelle entraîne l'inégalité écrite en (3.18) et par voie de conséquence l'existence du courant  $J^{2n+1}$  pour tout  $n$ . Évidemment, pour être tout à fait complet, il faudrait travailler encore un peu pour avoir des estimations du courant (afin d'être sûr que  $J^{2n+1}$  n'explose pas avec  $n$  et n'entâche pas le résultat du calcul). Nous ne le ferons pas ici.

# Chapitre 4

## Vers l'implémentation numérique

### 4.1 Construction des opérateurs discrets

L'avantage de la discrétisation du champ électromagnétique sur un maillage régulier est de pouvoir utiliser la technique de condensation de masse. Comme nous l'avons dit, celle-ci a consisté à user d'une formule de quadrature, exacte pour toute fonction linéaire, dont les points d'appuis coïncident avec les degrés de liberté pour évaluer les intégrales intervenant dans les expressions des coefficients matriciels. On montre que cette manière d'approcher les intégrales ne fait pas perdre de précision (le schéma reste d'ordre 2).

#### 4.1.1 Les Matrices de masse

Cette méthode permet d'obtenir des matrices de masse diagonales comme le montre les expressions suivantes

$$(4.1) \quad M_E^h = h_x h_y h_z \frac{Nc^a}{4}; \quad M_H^h = h_x h_y h_z \frac{Nc^f}{2}$$

où les matrices diagonales  $Nc^a$  et  $Nc^f$  ont pour éléments diagonaux le nombre de cubes appartenant au domaine  $B$  et qui contiennent l'arête (respectivement la face) considérée.

Pour être plus précis, si l'on considère par exemple une ligne de  $M_E^h$  correspondant à une arête  $i + \frac{1}{2}, j, k$  strictement interne au domaine  $B$  (on évite les bords pour simplifier), utilisant les expressions (3.43) on trouve

$$(4.2) \quad \begin{aligned} (M_E^h \vec{\phi}_{i+\frac{1}{2},j,k}^h, \vec{\phi}_{i'+\frac{1}{2},j',k'}^h) &= \Lambda_{i,i'}^x \Xi_{j,j'}^y \Xi_{k,k'}^z \\ (M_E^h \vec{\phi}_{i+\frac{1}{2},j,k}^h, \vec{\phi}_{i',j'+\frac{1}{2},k'}^h) &= 0 \\ (M_E^h \vec{\phi}_{i+\frac{1}{2},j,k}^h, \vec{\phi}_{i',j',k'+\frac{1}{2}}^h) &= 0 \end{aligned}$$

avec

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \Lambda_{m,m'}^s &= \int \psi_{m+\frac{1}{2}}^{h_s}(s) \psi_{m'+\frac{1}{2}}^{h_s}(s) ds = h_s \delta_m^{m'} \\ \Xi_{m,m'}^s &= \int \phi_m^{h_s}(s) \phi_{m'}^{h_s}(s) ds = \sum_k \int_{kh_s}^{(k+1)h_s} \phi_m^{h_s}(s) \phi_{m'}^{h_s}(s) ds \end{aligned}$$

où  $\delta_m^{m'}$  vaut 1 si  $m = m'$  et 0 sinon.

Le terme  $\Xi_{m,m'}^s$  est toujours nul sauf si  $|m' - m| \leq 1$  auquel cas

$$(4.4) \quad \Xi_{m,m}^s = \frac{2}{3} h_s, \quad \Xi_{m,m\pm 1}^s = \frac{1}{6} h_s.$$

Si l'on en reste là, la matrice de masse  $M_E^h$  n'est pas diagonale puisqu'elle couple les noeuds du plan  $ih_x$  aux noeuds des plans voisins immédiats. Mais si l'on substitue au calcul exact de l'intégrale la formule de quadrature

$$(4.5) \quad \int_{kh_s}^{(k+1)h_s} f(s)ds \quad \rightarrow \quad \frac{h_s}{2}(f((k+1)h_s) + f(kh_s))$$

on trouve

$$(4.6) \quad \Xi_{m,m'}^s = h_s \delta_m^{m'}, \text{ et } (M_E \vec{\phi}_{i+\frac{1}{2},j,k}^h, \vec{\phi}_{i'+\frac{1}{2},j',k'}^h) = h_x h_y h_z \delta_i^i \delta_j^j \delta_k^{k'}$$

En procédant de même avec les autres fonctions de base, on montre que  $M_E^h$  et  $M_H^h$  deviennent des matrices diagonales grâce à la condensation.

#### 4.1.2 Le rotationnel discret

De la même façon, la matrice  $R^h$  va devenir beaucoup plus creuse. Par exemple, partant des expressions (3.43), on a pour une arête strictement interne au domaine de calcul,

$$(4.7) \quad \text{rot } \vec{\phi}_{i+\frac{1}{2},j,k}^h = \frac{1}{h_z} \psi_{i+\frac{1}{2}}^x(x) \phi_j^y(y) (\psi_{k-\frac{1}{2}}^z(z) - \psi_{k+\frac{1}{2}}^z(z)) \hat{y} \\ - \frac{1}{h_y} \psi_{i+\frac{1}{2}}^x(x) \phi_k^z(z) (\psi_{j-\frac{1}{2}}^y(y) - \psi_{j+\frac{1}{2}}^y(y)) \hat{z}$$

(la dérivée d'une fonction chapeau est la différence de deux fonctions indicatrices). D'où les expressions

$$(4.8) \quad \begin{aligned} ((R^h)^* \vec{\phi}_{i+\frac{1}{2},j,k}^h, \vec{\psi}_{i',j'+\frac{1}{2},k'+\frac{1}{2}}^h) &= 0 \\ ((R^h)^* \vec{\phi}_{i+\frac{1}{2},j,k}^h, \vec{\psi}_{i'+\frac{1}{2},j',k'+\frac{1}{2}}^h) &= -\frac{1}{h_z} \Lambda_{i,i'}^x \Xi_{j,j'}^y (\Lambda_{k+1,k'}^z - \Lambda_{k,k'}^z) \\ ((R^h)^* \vec{\phi}_{i+\frac{1}{2},j,k}^h, \vec{\phi}_{i'+\frac{1}{2},j'+\frac{1}{2},k'}^h) &= \frac{1}{h_y} \Lambda_{i,i'}^x \Xi_{k,k'}^z (\Lambda_{j+1,j'}^y - \Lambda_{j,j'}^y) \end{aligned}$$

Là encore la condensation est utilisée, ce qui permet d'écrire  $\Xi_{m,m'}^s = \Lambda_{m,m'}^s = h_s \delta_m^{m'}$ . Finalement l'arête  $i + \frac{1}{2}, j, k$  n'est couplée par  $A_h$  qu'aux quatre faces qui la contiennent. Après tous calculs on trouve si  $E$  est décomposé suivant (3.44)

$$(4.9) \quad ((R^h)^* E, \vec{\psi}_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^h) = h_x h_z (E_{i,j+1,k+\frac{1}{2}}^z - E_{i,j,k+\frac{1}{2}}^z) \\ - h_x h_y (E_{i,j+\frac{1}{2},k+1}^y - E_{i,j+\frac{1}{2},k}^y)$$

$$(4.10) \quad ((R^h)^* E, \vec{\psi}_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^h) = h_x h_y (E_{i+\frac{1}{2},j,k+1}^x - E_{i+\frac{1}{2},j,k}^x) \\ - h_y h_z (E_{i+1,j,k+\frac{1}{2}}^z - E_{i,j,k+\frac{1}{2}}^z)$$

$$(4.11) \quad ((R^h)^* E, \vec{\psi}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^h) = h_y h_z (E_{i+1,j+\frac{1}{2},k}^y - E_{i,j+\frac{1}{2},k}^y) \\ - h_x h_z (E_{i+\frac{1}{2},j+1,k}^x - E_{i+\frac{1}{2},j,k}^x)$$

On reconnaît, au facteur  $h_x h_y h_z$  près, le rotationnel discret qui est utilisé dans le schéma de Yee classique (cf [15]): le schéma variationnel avec condensation de masse sur grille régulière s'avère coïncider avec ce schéma aux différences finies. Cette remarque est importante car elle permet de coupler des techniques type différences finies avec d'autres adaptées aux éléments finis.

Tout ceci est jusqu'ici très classique. Le point un peu nouveau vient des degrés de libertés situés à la frontière de chacun des deux domaines. Les calculs sont un peu fastidieux quoique élémentaires. Le résultat trouvé est une modification des expressions (4.9)-(4.11) pour les fonctions de base  $(\vec{\psi}_{\dots}^{2h})$  de  $\mathcal{H}^h$  localisées sur une face frontière. Cette modification consiste à supprimer les degrés de liberté (les  $E_{\dots}$ ) attachés à des arêtes localisées hors du domaine de calcul considéré puis à ajouter un facteur  $\frac{1}{2}$  devant les degrés de libertés attachés à des arêtes localisées sur la face frontière.

### 4.1.3 Matrice de couplage

La technique de condensation de masse est également utilisée pour le calcul des intégrales de surface définies sur  $\Sigma$ . Ces calculs nous donnent les matrices de couplage  $B_g^{2h}$  et  $B_f^{2h}$  qui raccordent l'intérieur et l'extérieur de la boîte en liant le courant aux champs électriques de chaque grille.

Il s'agit de calculer

$$(4.12) \quad \begin{cases} (B_g^{2h})_{a_g, a} &= \int_{\Sigma} \vec{\phi}_{a_g}^{2h} \cdot \vec{J}_a^{2h} d\sigma \\ (B_f^{2h})_{a_f, a} &= \int_{\Sigma} \vec{\phi}_{a_f}^{2h} \cdot \vec{J}_a^{2h} d\sigma \end{cases}$$

où  $a$ ,  $a_g$  sont des arêtes du maillage grossier ( $a$  étant localisée sur la frontière de la boîte),  $a_f$  une arête du maillage fin. Dans ces expressions, on a noté  $\vec{J}_a^{2h}$  la fonction de base de  $\mathcal{M}_{2h}$  associée à l'arête  $a$  (fonction de base pour le courant) et  $\vec{\phi}_{a_g}^{2h}, \vec{\phi}_{a_f}^{2h}$  les fonctions de base de  $\mathcal{E}_{2h}, \mathcal{E}_h$  associées aux arêtes  $a_g$  et  $a_f$ . D'après ce qui précède, la fonction de base  $J_a^{2h}$  est la somme (à un signe près) de deux demi-fonctions de base. Chacune de ces deux demi-fonctions de base est associée à l'un des deux carreaux de  $\Sigma$  ayant  $a$  comme arête commune. Notons  $c_a^+$  et  $c_a^-$  les deux carreaux,  $\epsilon_a^+, \epsilon_a^- (= \pm 1)$  les signes et  $p_a^{\pm}$  ( $= 1, 2, 3$  ou  $4$ ) l'indice dans la numérotation locale liée à  $c^{\pm}$  de l'arête coïncidant avec  $a$  ( $A_{c^{\pm}, p^{\pm}} = a$ ). On a

$$(4.13) \quad \begin{cases} (B_g^{2h})_{a_g, a} &= \epsilon_a^+ \int_{c_a^+} \vec{\phi}_{a_g}^{2h} \cdot \vec{j}_{c_a^+, p_a^+}^{2h} d\sigma + \epsilon_a^- \int_{c_a^-} \vec{\phi}_{a_g}^{2h} \cdot \vec{j}_{c_a^-, p_a^-}^{2h} d\sigma \\ (B_f^{2h})_{a_f, a} &= \epsilon_a^+ \int_{c_a^+} \vec{\phi}_{a_f}^{2h} \cdot \vec{j}_{c_a^+, p_a^+}^{2h} d\sigma + \epsilon_a^- \int_{c_a^-} \vec{\phi}_{a_f}^{2h} \cdot \vec{j}_{c_a^-, p_a^-}^{2h} d\sigma \end{cases}$$

les  $\vec{j}_{c, p}^{2h}$  étant les demi-fonctions de base décrites précédemment (fonctions vectorielles supportées par  $c$  et dont la direction est constante, normale à l'arête  $A_{c, p}$ , leur variation est constante le long de la direction parallèle à  $A_{c, p}$ , et linéaire le long de la direction normale). Chacune des 4 intégrales est très facile à obtenir. Pour la grille grossière on a

$$(4.14) \quad \int_c \vec{\phi}_{a_g}^{2h} \cdot \vec{j}_{c, p}^{2h} d\sigma = \frac{\text{Aire}(c)}{4} \text{ si } a_g = a_g^1(c, p) \text{ ou } a_g^2(c, p) \text{ et } 0 \text{ sinon}$$

où  $a_g^1(c, p)$  et  $a_g^2(c, p)$  sont les deux arêtes du carreau  $c$  perpendiculaires à l'arête numéroté localement  $p$ .

Pour la grille fine le calcul est un petit peu plus compliqué. Il y a 6 arêtes de la grille fine

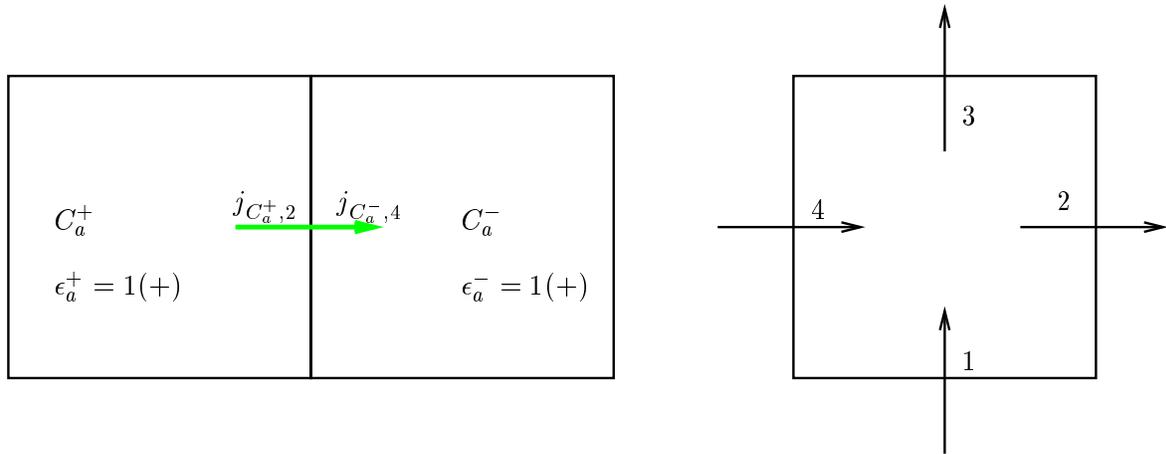


FIG. 4.1 – schéma des fonctions de base sur un carreau

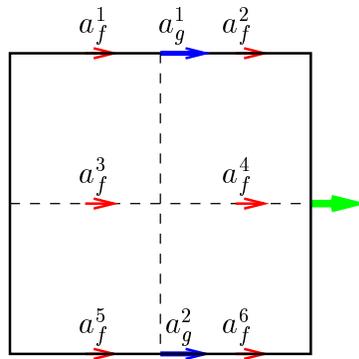


FIG. 4.2 – Positionnement des champs induit par un courant sur une maille

qui vont être couplées à chaque demi-fonction de base

$$\begin{aligned}
 \int_c \vec{\phi}_{a_f}^{2h} \cdot \vec{j}_{c,p}^{2h} d\sigma &= \frac{\text{Aire}(c)}{8} \text{ si } a_f = a_f^1(c, p) \text{ ou } a_f^5(c, p) \\
 \int_c \vec{\phi}_{a_f}^{2h} \cdot \vec{j}_{c,p}^{2h} d\sigma &= \frac{3\text{Aire}(c)}{8} \text{ si } a_f = a_f^2(C, p) \text{ ou } a_f^6(c, p) \\
 \int_c \vec{\phi}_{a_f}^{2h} \cdot \vec{j}_{c,p}^{2h} d\sigma &= \frac{\text{Aire}(c)}{4} \text{ si } a_f = a_f^3(c, p) \\
 \int_c \vec{\phi}_{a_f}^{2h} \cdot \vec{j}_{c,p}^{2h} d\sigma &= \frac{3\text{Aire}(c)}{4} \text{ si } a_f = a_f^4(c, p)
 \end{aligned}
 \tag{4.15}$$

les  $a_f^\ell(c, p)$  étant les 6 arêtes du maillage fin localisées sur  $c$  et qui sont perpendiculaires à l'arête  $A_p$ . (cf Fig. 4.2).

De ces expressions, on déduit facilement que le noyau de  $(B_f^{2h})^*$  est réduit à  $\{0\}$ . En effet, supposons  $J$  tel que  $(B_f^{2h})^* J = 0$ . Pour tout carreau du maillage surfacique, toutes les composantes du champ électrique  $(B_f^{2h})^* J$  doivent être nulles. En particulier cela doit être pour les deux composantes relatives aux deux arêtes centrales notées  $a_f^3$  et  $a_f^4$  sur la figure 4.2. Il est facile de vérifier que ces deux valeurs sont une combinaison linéaire des deux courants accrochés à deux arêtes parallèles de part et d'autre du carreau (l'une des composante du courant est représentée sur la figure, l'autre est son symétrique à gauche). On obtient ainsi un système  $2 \times 2$  dont la matrice associée est à un facteur  $\text{Aire}(C)$  près égale à  $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ .

Comme cette matrice est inversible, on déduit que les deux courants doivent être nuls. En réitérant cette analyse sur chaque carreau et pour chacune des deux directions, on déduit que  $J$  est nul.

Remarquons que ce résultat n'est pas forcément vrai pour  $(B_g^{2h})^*$ . Si le nombre de mailles dans chaque direction est paire, on peut obtenir un champ grossier nul à partir d'un courant valant alternativement 1 et  $-1$  sur les arêtes consécutives.

## 4.2 Les équations du schéma

### 4.2.1 Remarque sur les schémas à l'intérieur

Une fois les matrices assemblées, on reconnaît, pour les les degrés de liberté localisés strictement à l'intérieur de chaque grille, le schéma classique de Yee.

$$(4.16) \left\{ \begin{array}{l} \frac{(E_x)_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+1} - (E_x)_{i+\frac{1}{2},j,k}^n}{\Delta t} \\ + \frac{(H_y)_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (H_y)_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{h_z} - \frac{(H_z)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} - (H_z)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}}{h_y} = 0 \\ \frac{(E_y)_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+1} - (E_y)_{i,j+\frac{1}{2},k}^n}{\Delta t} \\ + \frac{(H_z)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} - (H_z)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x} - \frac{(H_x)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} - (H_x)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}}{h_z} = 0 \\ \frac{(E_z)_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+1} - (E_z)_{i,j,k+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} \\ + \frac{(H_x)_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (H_x)_{i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{h_y} - \frac{(H_y)_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (H_y)_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x} = 0 \end{array} \right.$$

$$(4.17) \left\{ \begin{array}{l} \frac{(H_x)_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (H_x)_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \\ + \frac{(E_z)_{i,j+1,k+\frac{1}{2}} - (E_z)_{i,j,k+\frac{1}{2}}}{h_y} - \frac{(E_y)_{i,j+\frac{1}{2},k+1} - (E_y)_{i,j+\frac{1}{2},k}}{h_z} = 0 \\ \frac{(H_y)_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - (H_y)_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \\ + \frac{(E_x)_{i+\frac{1}{2},j,k+1} - (E_x)_{i+\frac{1}{2},j,k}}{h_z} - \frac{(E_z)_{i+1,j,k+\frac{1}{2}} - (E_z)_{i,j,k+\frac{1}{2}}}{h_x} = 0 \\ \frac{(H_z)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}} - (H_z)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} \\ + \frac{(E_y)_{i+1,j+\frac{1}{2},k} - (E_y)_{i,j+\frac{1}{2},k}}{h_x} - \frac{(E_x)_{i+\frac{1}{2},j+1,k} - (E_x)_{i+\frac{1}{2},j,k}}{h_y} = 0 \end{array} \right.$$

On trouve bien évidemment le même schéma écrit sur un maillage de fois plus gros à l'intérieur de la grille grossière.

#### 4.2.2 Schéma à l'interface : Preamble

Les schémas à l'intérieur de chaque grille étant explicité il nous faut maintenant présenter ceux de l'interface. En fait seuls ceux concernant les champs électriques on besoin d'être explicités. En effet, on pourrait s'attendre à ce que les champs magnétiques définis sur l'interface obéissent à un schéma différent de celui pour les champs strictement à l'intérieur, mais il y a un petit miracle (qui est dû à la quadrature numérique) qui fait que ce sont les mêmes

équations qui donnent les champs magnétiques au cours des itérations. Ceci est dû au fait que même si la matrice de masse à l'interface est divisée par 2, la matrice du rotationnel l'est aussi, ce qui laisse l'équation inchangée par rapport à l'intérieur. On donne donc ici les équations supplémentaires pour les champs électriques localisés sur l'interface. Elles diffèrent des équations à l'intérieur pour deux raisons, d'une part les matrices sont différentes à cause de la troncature des fonctions de base d'autre part en raison de la présence du courant.

La grille fine étant un parallélépipède rectangle, l'interface est composée de 12 arêtes et de 6 faces, qu'on nomme  $X^-$ ,  $X^+$ ,  $Y^-$ ,  $Y^+$ ,  $Z^-$  et  $Z^+$ , où la face  $A^\pm$  a pour vecteur normal sortant de la boîte  $\pm\vec{A}$ . On ne donnera pas ici la liste exhaustive de toutes les équations mais seulement des prototypes à partir desquels il est facile de reconstruire l'ensemble du schéma. Dans la suite, on a omis les indices  $f$  et  $g$  des champs (pour fin et grossier) lorsque aucune confusion n'était possible, ceci, afin d'alléger les notations.

### 4.2.3 Schéma à l'interface pour la grille grossière

On considère dans un premier temps les solutions des équations du schéma en l'absence de courant ( $J^{2n+1} \equiv 0$ ). On note  $\tilde{E}$  ces solutions intermédiaires. Puis on calcule les champs électriques en ajoutant la contribution du courant  $J^{2n+1}$  à  $\tilde{E}$ . Cette opération est licite puisque les équations sont linéaires.

On donne ci-dessous, l'équation actualisant la composante  $\tilde{E}_x$  sur la face  $Y^-$  (hors arêtes).

$$(4.18) \quad \epsilon_0 \frac{(\tilde{E}_x)_{(2i+1,2j,2k)}^{2n+2} - (\tilde{E}_x)_{(2i+1,2j,2k)}^{2n}}{2\Delta t} = \frac{-2(H_z)_{(2i+1,2j-1,2k)}^{2n+1}}{2\Delta y} + \frac{(H_y)_{(2i+2,2j,2k-1)}^{2n+1} - (H_y)_{(2i+1,2j,2k+1)}^{2n+1}}{2\Delta z}$$

tandis que pour  $Y^+$

$$(4.19) \quad \epsilon_0 \frac{(\tilde{E}_x)_{(2i+1,2j,2k)}^{2n+2} - (\tilde{E}_x)_{(2i+1,2j,2k)}^{2n}}{2\Delta t} = \frac{2(H_z)_{(2i+1,2j+1,2k)}^{2n+1}}{2\Delta y} + \frac{(H_y)_{(2i+1,2j,2k-1)}^{2n+1} - (H_y)_{(2i+1,2j,2k+1)}^{2n+1}}{2\Delta z}$$

D'une façon plus générale, la règle est la suivante: on part du schéma de Yee, on supprime les degrés de liberté situés en dehors de la grille et on double le poids de ceux situés strictement à l'intérieur.

Sur les arêtes, la situation diffère du cas général par deux aspects. D'une part, le terme diagonal de la matrice de masse ( $M_E^{2h}$ ) est augmenté (des 4 cubes associés à l'arête, 3 sont localisés dans le domaine grossier au lieu de 2). D'autre part, plus de degrés de libertés interviennent. On donne par exemple l'équation pour l'arête intersection des faces  $Y^-$  et  $Z^-$

$$(4.20) \quad \epsilon_0 \frac{(\tilde{E}_x)_{(2i+1,2j,2k)}^{2n+2} - (\tilde{E}_x)_{(2i+1,2j,2k)}^{2n}}{2\Delta t} = \frac{\frac{4}{6}(H_z)_{(2i+1,2j+1,2k)}^{2n+1} - \frac{4}{3}(H_z)_{(2i+1,2j-1,2k)}^{2n+1}}{2\Delta y} + \frac{\frac{4}{3}(H_y)_{(2i+1,2j,2k-1)}^{2n+1} - \frac{4}{6}(H_y)_{(2i+1,2j,2k+1)}^{2n+1}}{2\Delta z}$$

La règle pour les autres arêtes est la suivante: on part du schéma de Yee, on affecte d'un poids  $\frac{4}{3}$  les degrés de liberté de type  $H$  localisé entièrement dans la grille grossière et d'un poids  $\frac{4}{6}$  ceux situés sur l'interface.

La seconde étape consiste à modifier le champ  $\tilde{E}$  par ajout du courant. Par exemple, pour la composante  $E_x$  sur la face  $Y^-$  (hors voisinage d'arêtes), on a

$$(4.21) \quad (E_x)_{(2i+1,2j,2k)}^{2n+2} = (\tilde{E}_x)_{(2i+1,2j,2k)}^{2n+2} + \frac{\Delta t}{2\epsilon_0 \Delta y} \left( -(J_x)_{(2i,2j,2k+1)}^{2n+1} - (J_x)_{(2i+2,2j,2k+1)}^{2n+1} - (J_x)_{(2i,2j,2k-1)}^{2n+1} - (J_x)_{(2i+2,2j,2k-1)}^{2n+1} \right)$$

Le coefficient devant les courants provient de la matrice  $\frac{2\Delta t}{\epsilon_0} (M_E^{2h})^{-1} (C_g^{2h})^*$  (cf. formule (3.10)).

Lorsque le champ considéré se trouve à une demi-maille d'une arête, deux des courants à ajouter se trouvent alors sur l'arête. Dans ce cas, on doit prendre en compte le signe devant chaque demi-fonction de base pour le courant. Avec les conventions retenues et décrites en (3.3.4), cela revient à un changement de signe dans la formule. Par exemple, lorsque le degré de liberté se trouve sur l'arête intersection des faces  $Y^-$  et  $X^-$  (voir fig. 4.3), l'orientation est déterminée par la face  $Y^-$ , il vient donc un signe  $-$  sur la face  $X^-$ . Le schéma pour le champ  $E_x$  sera alors donné par

$$(4.22) \quad (E_x)_{(2i+1,2j,2k)}^{2n+2} = (\tilde{E}_x)_{(2i+1,2j,2k)}^{2n+2} + \frac{\Delta t}{2\epsilon_0 \Delta y} \left( (J_x)_{(2i,2j,2k+1)}^{2n+1} - (J_x)_{(2i+2,2j,2k+1)}^{2n+1} + (J_x)_{(2i,2j,2k-1)}^{2n+1} - (J_x)_{(2i+2,2j,2k-1)}^{2n+1} \right)$$

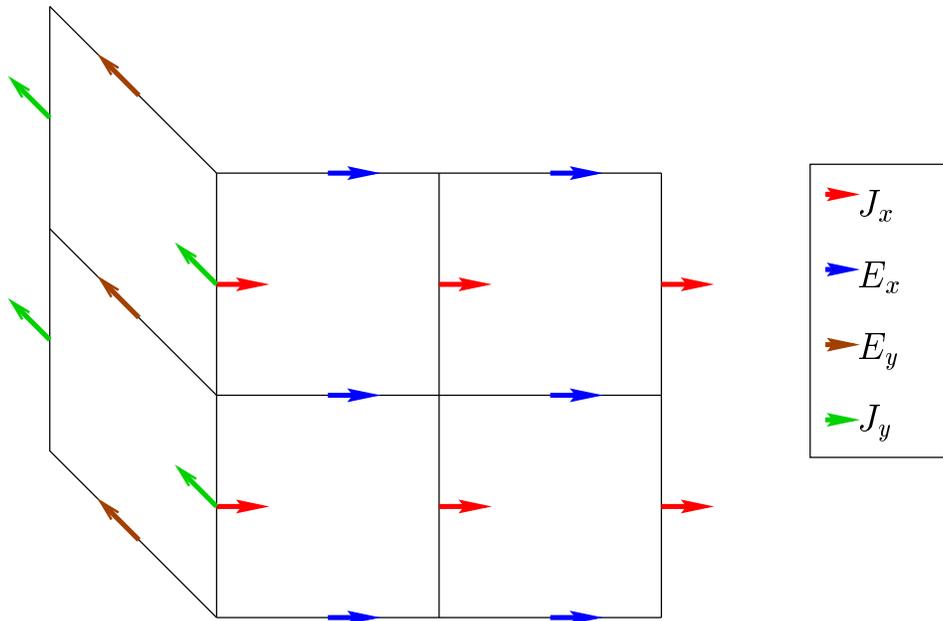


FIG. 4.3 – schéma des champs  $J$  et  $E$  sur une arête

arête	Face déterminante	signe pour le carreau localisé sur la Face déterminante	Signe pour l'autre carreau
$Y^- - X^-$	$Y^-$	+	-
$Y^- - Z^+$	$Y^-$	+	+
$X^- - Y^+$	$X^-$	+	+
$X^- - Z^+$	$X^-$	+	+
$Z^+ - Y^+$	$Z^+$	+	-
$Z^+ - X^+$	$Z^+$	+	-
$X^+ - Z^-$	$X^+$	+	+
$X^+ - Y^-$	$X^+$	+	+
$Z^- - Y^-$	$Z^-$	+	-
$Z^- - X^-$	$Z^-$	+	-
$Y^+ - X^+$	$Y^+$	+	-
$Y^+ - Z^-$	$Y^+$	+	+

TAB. 4.1 – tableau de référence des arêtes

Dans le cas où le champ  $E$  est situé sur une arête, on doit prendre en compte le fait que la masse est différente. On donne ici à titre d'exemple le schéma pour un champ  $E_x$  situé sur l'intersection des faces  $Y^-$  et  $Z^-$ . On notera également que deux degrés de liberté liés au courant sont sur la face  $Y^-$  et deux autres sur  $Z^-$ .

$$(4.23) \quad \begin{aligned} (E_x)_{(2i+1,2j,2k)}^{2n+2} &= (\tilde{E}_x)_{(2i+1,2j,2k)}^{2n+2} + \frac{\Delta t}{3\epsilon_0 \Delta y} \\ &\quad \left( -(J_x)_{(2i,2j,2k+1)}^{2n+1} - (J_x)_{(2i+2,2j,2k+1)}^{2n+1} - (J_x)_{(2i,2j+1,2k)}^{2n+1} - (J_x)_{(2i+2,2j+1,2k)}^{2n+1} \right) \end{aligned}$$

**Remarque 11** De la même façon que précédemment, si un degré de liberté du courant se trouve sur une arête, le signe peut changer suivant le tableau 4.1

#### 4.2.4 Schéma à l'interface pour la grille fine

Dans la grille fine, on procède de la même façon. On commence par calculer la solution relative à un courant nul ( $\tilde{E}$ ), puis on ajoute la contribution du courant.

Comme exemple de l'actualisation d'une composante de champ localisée sur une face (hors arête) on donne l'équation pour la composante  $\tilde{E}_x$  de la face  $Y^-$ :

$$(4.24) \quad \frac{(\tilde{E}_x)_{(i+\frac{1}{2},j,k)}^{n+1} - (\tilde{E}_x)_{(i+\frac{1}{2},j,k)}^n}{\Delta t} = \frac{2(H_z)_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} + \frac{(H_y)_{(i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} - (H_y)_{(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z}$$

ainsi que celle relative à la face  $Y^+$

$$(4.25) \quad \frac{(\tilde{E}_x)_{(i+\frac{1}{2},j,k)}^{n+1} - (\tilde{E}_x)_{(i+\frac{1}{2},j,k)}^n}{\Delta t} = \frac{-2(H_z)_{(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k)}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} + \frac{(H_y)_{(i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} - (H_y)_{(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z}$$

La règle est identique à celle relative à la grille grossière. On écrit le schéma de Yee, on élimine les composantes des champs magnétiques localisées à l'extérieur de la grille fine et on double la contribution des champs magnétiques strictement intérieurs.

Sur les arêtes le schéma est différent, par exemple pour l'arête intersection des faces  $Y^-$  et  $Z^-$

$$(4.26) \quad \epsilon_0 \frac{(\tilde{E}_x)_{(i+\frac{1}{2},j,k)}^{n+1} - (\tilde{E}_x)_{(i+\frac{1}{2},j,k)}^n}{\Delta t} = \frac{2(H_z)_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} + \frac{-2(H_y)_{(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z}$$

La règle est la suivante: on élimine les composantes du champ magnétiques inexistantes dans la grille fine et on double la contribution des composantes restantes.

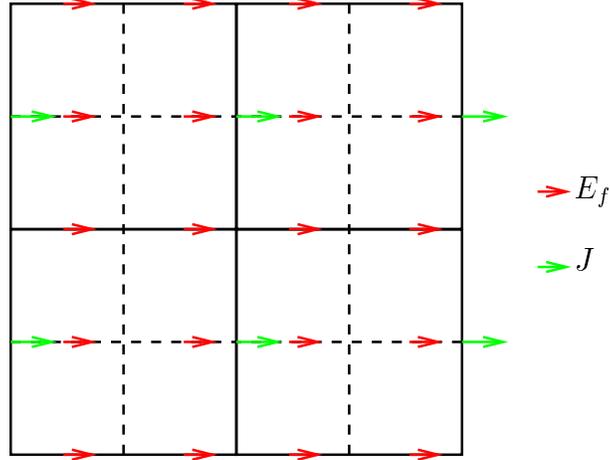


FIG. 4.4 – schéma des champs  $J$  et  $E_f$  sur une maille

Reste ensuite à ajouter le courant. Comme on le voit sur la figure 4.4 un champ électrique fin peut être affecté par deux ou quatre degrés de liberté de courant suivant s'il se trouve à l'intérieur strict ou non d'une maille. De plus, la valeur des produits de fonctions de bases variant d'un champ à l'autre, les coefficients issus de la formule de quadrature pour le calcul des intégrales, ne sont pas les mêmes pour tous les champs fins (voir figure 4.5).

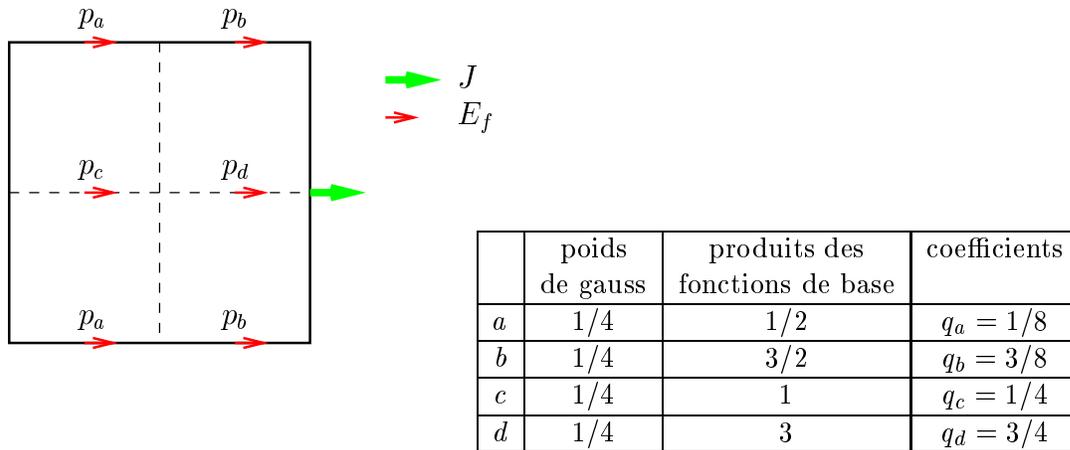


FIG. 4.5 – poids pour les champs fins

On présente par exemple ci-dessous le schéma obtenu à l'itération  $2n + \ell$ ,  $\ell = 1, 2$  pour la

composante  $E_x$  sur la face  $Y^-$ .

$$(4.27) \quad \left\{ \begin{array}{l} (E_x)_{(2i+\frac{1}{2}, 2j, 2k+1)}^{2n+\ell} = (\tilde{E}_x)_{(2i+\frac{1}{2}, 2j, 2k+1)}^{2n+\ell} \\ \quad + \frac{2\Delta t}{\epsilon_0 \Delta y} \left( q_c (J_x)_{(2i+2, 2j, 2k+1)}^{2n+1} + q_d (J_x)_{(2i, 2j, 2k+1)}^{2n+1} \right) \\ (E_x)_{(2i+\frac{3}{2}, 2j, 2k+1)}^{2n+\ell} = (\tilde{E}_x)_{(2i+\frac{3}{2}, 2j, 2k+1)}^{2n+\ell} \\ \quad + \frac{2\Delta t}{\epsilon_0 \Delta y} \left( q_d (J_x)_{(2i+2, 2j, 2k+1)}^{2n+1} + q_c (J_x)_{(2i, 2j, 2k+1)}^{2n+1} \right) \\ (E_x)_{(2i+\frac{1}{2}, 2j, 2k+2)}^{2n+\ell} = (\tilde{E}_x)_{(2i+\frac{1}{2}, 2j, 2k+2)}^{2n+\ell} \\ \quad + \frac{2\Delta t}{\epsilon_0 \Delta y} \left( q_a (J_x)_{(2i+2, 2j, 2k+1)}^{2n+1} + q_b (J_x)_{(2i, 2j, 2k+1)}^{2n+1} \right. \\ \quad \quad \left. + q_a (J_x)_{(2i+2, 2j, 2k+3)}^{2n+1} + q_b (J_x)_{(2i, 2j, 2k+3)}^{2n+1} \right) \\ (E_x)_{(2i+\frac{3}{2}, 2j, 2k+2)}^{2n+\ell} = (\tilde{E}_x)_{(2i+\frac{3}{2}, 2j, 2k+2)}^{2n+\ell} \\ \quad + \frac{2\Delta t}{\epsilon_0 \Delta y} \left( q_b (J_x)_{(2i+2, 2j, 2k+1)}^{2n+1} + q_a (J_x)_{(2i, 2j, 2k+1)}^{2n+1} \right. \\ \quad \quad \left. + q_b (J_x)_{(2i+2, 2j, 2k+3)}^{2n+1} + q_a (J_x)_{(2i, 2j, 2k+3)}^{2n+1} \right) \end{array} \right.$$

On remarque que les formules sont identiques que l'instant soit  $2n+1$  ou  $2n+2$ , puisque l'on a choisi  $J^{2n+\frac{1}{2}} = J^{2n+\frac{3}{2}} = J^{2n+1}$

De la même façon que dans le cas de la grille grossière, si un courant considéré se situe sur une arête le signe peut changer suivant le tableau 4.1.

Lorsque le champ électrique se situe sur une arête, on doit prendre en compte que la masse est différente, de plus la formule fait intervenir des courants de deux faces différentes. On donne ici à titre d'exemple le schéma pour un champ  $E_x$  situé sur l'intersection des faces  $Y^-$  et  $Z^-$ .

$$(4.28) \quad \left\{ \begin{array}{l} (E_x)_{(2i+\frac{1}{2}, 2j, 2k)}^{2n+\ell} = (\tilde{E}_x)_{(2i+\frac{1}{2}, 2j, 2k)}^{2n+\ell} \\ \quad + \frac{4\Delta t}{\epsilon_0 \Delta z} \left( q_a (J_x)_{(2i+2, 2j+1, 2k)}^{2n+1} + q_b (J_x)_{(2i, 2j+1, 2k)}^{2n+1} \right) \\ \quad + \frac{4\Delta t}{\epsilon_0 \Delta y} \left( +q_a (J_x)_{(2i+2, 2j, 2k+1)}^{2n+1} + q_b (J_x)_{(2i, 2j, 2k+1)}^{2n+1} \right) \\ (E_x)_{(2i+\frac{3}{2}, 2j, 2k)}^{2n+\ell} = (\tilde{E}_x)_{(2i+\frac{3}{2}, 2j, 2k)}^{2n+\ell} \\ \quad + \frac{4\Delta t}{\epsilon_0 \Delta z} \left( q_b (J_x)_{(2i+2, 2j+1, 2k)}^{2n+1} + q_a (J_x)_{(2i, 2j+1, 2k)}^{2n+1} \right) \\ \quad + \frac{4\Delta t}{\epsilon_0 \Delta y} \left( q_b (J_x)_{(2i+2, 2j, 2k+1)}^{2n+1} + q_a (J_x)_{(2i, 2j, 2k+1)}^{2n+1} \right) \end{array} \right.$$

Ici encore, si le schéma fait intervenir un courant situé sur une arête, le signe de sa contribution sera déterminé par le tableau 4.1

Les équations présentées permettent donc de calculer les champs électriques grossiers et fins à l'interface dès que le courant est connu.

#### 4.2.5 Résolution. Détermination du Courant

Afin de calculer le courant  $J^{2n+1}$  à l'interface, on décompose le champ électrique en deux parties, la première correspond au champ électrique en l'absence de courant ( $\tilde{E}$ ). Ce champ se calcule explicitement à l'aide de quantités connues car calculées à des instants antérieurs. La seconde correspond à la contribution due au courant seul. On utilise cette décomposition pour écrire la relation de conservation d'énergie à l'interface, qui revient à écrire une égalité de flux de champs électriques,

$$(4.29) \quad \Phi_x^g = (C_g^{2h}) \frac{E_g^{2n+2} + E_g^{2n}}{2} = (C_f^{2h}) \frac{E_f^{2n+2} + 2E_f^{2n+1} + E_f^{2n}}{4} = \Phi_x^f$$

La linéarité des équations nous permet alors d'écrire une relation entre les flux provenant des champs électriques sans courant et les flux induits par ce courant (3.16). On obtient ainsi un système linéaire dont l'inversion nous donne le courant.

Le second membre provient de flux électriques de chaque grille. Les schémas indiqués ici proviennent de la condensation de masse des matrices indiquées en 3.2.1. La discrétisation choisie pour résoudre le problème conduit à prendre les flux dans les mêmes espaces d'approximation que les courants.

On décompose le calcul des flux en deux parties une induite par les champs électriques grossier à l'interface et l'autre par les champs fins

Exemple pour le calcul de flux grossier  $\Phi_x^g$  sur la face  $Y^-$ )

$$(4.30) \quad (\Phi_x^g)_{(2i,2j,2k+1)}^{2n+1} = -\Delta x \Delta z \delta_{2\Delta t} \left\{ (E_x)_{(2i-1,2j,2k)} + (E_x)_{(2i+1,2j,2k)} \right. \\ \left. + (E_x)_{(2i-1,2j,2k+2)} + (E_x)_{(2i+1,2j,2k+2)} \right\}$$

Le signe  $\delta_{2\Delta t}$  signifie que l'on effectue la moyenne des quantités aux instants  $2n$  et  $2n + 2$ .

Lorsque le flux se situe sur une arête, sa fonction de base étant la concaténation de deux demi-fonctions de base issues de deux faces différentes, la formule diffère pour plusieurs raisons. Les deux demi-fonctions de base n'ayant pas la même direction, ce sont deux composantes différentes du champ  $E$  qui interviennent dans le calcul du flux. Ces deux fonctions de bases n'ayant plus des supports égaux, les coefficients de pas d'espace intervenant sont différents. D'autre part, en raison du choix de l'orientation de la fonction de base sur l'arête, le signe de la contribution du champ est déterminé par le tableau 4.1.

Par exemple, le schéma pour le calcul du flux sur l'arête intersection des faces  $Y^-$  et  $X^-$  fait intervenir la composante  $E_x$  de la face  $Y^-$  et la composante  $E_y$  de la face  $X^-$  avec un signe  $-$  puisque l'on a choisi de déterminer le signe de cette arête par la face  $Y^-$ .

$$(4.31) \quad (\Phi_x^g)_{(2i,2j,2k+1)}^{2n+1} = -\delta_{2\Delta t} \left\{ \Delta x \Delta z \left[ (E_x)_{(2i+1,2j,2k)} + (E_x)_{(2i+1,2j,2k+2)} \right] \right. \\ \left. - \Delta y \Delta z \left[ (E_y)_{(2i,2j+1,2k)} - (E_y)_{(2i,2j+1,2k+2)} \right] \right\}$$

La partie du flux provenant de la grille fine fait intervenir la somme de 12 champs électriques fins, pondérée par les poids définis figure 4.5. On donne ici la formule pour la Face

$Y^-$

$$(4.32) \quad (\Phi_x^f)_{(2i,2j,2k+1)}^{2n+1} = \Delta x \Delta z \delta_{\Delta t} \left\{ \begin{aligned} & p_a \left[ (E_x)_{2i-\frac{3}{2},2j,2k} + (E_x)_{2i-\frac{3}{2},2j,2k+2} + (E_x)_{2i+\frac{3}{2},2j,2k} + (E_x)_{2i+\frac{3}{2},2j,2k+2} \right] \\ & + p_b \left[ (E_x)_{2i-\frac{1}{2},2j,2k} + (E_x)_{2i-\frac{1}{2},2j,2k+2} + (E_x)_{2i+\frac{1}{2},2j,2k} + (E_x)_{2i+\frac{1}{2},2j,2k+2} \right] \\ & + p_d \left[ (E_x)_{2i-\frac{1}{2},2j,2k+1} + (E_x)_{2i+\frac{1}{2},2j,2k+1} \right] \\ & + p_c \left[ (E_x)_{2i-\frac{3}{2},2j,2k+1} + (E_x)_{2i+\frac{3}{2},2j,2k+1} \right] \end{aligned} \right\}$$

$$\text{où } \delta_{\Delta t} A = \frac{A^{2n+2} + 2A^{2n+1}A^{2n}}{4}$$

De la même façon que précédemment, la formule sera modifiée si le flux se situe sur une arête, faisant intervenir les champs de deux faces différentes ainsi que les éléments de surface correspondants. Par exemple, pour l'intersection des faces  $Y^-$  et  $X^-$  on aura

$$(4.33) \quad (\Phi_x^f)_{(2i,2j,2k+1)}^{2n+1} = \delta_{\Delta t} \left\{ \begin{aligned} & p_a \left[ \Delta x \Delta z \left( (E_x)_{2i+\frac{3}{2},2j,2k} + (E_x)_{2i+\frac{3}{2},2j,2k+2} \right) \right. \\ & \quad \left. + \Delta y \Delta z \left( (E_y)_{2i,2j+\frac{3}{2},2k} + (E_y)_{2i,2j+\frac{3}{2},2k+2} \right) \right] \\ & + p_b \left[ \Delta x \Delta z \left( (E_x)_{2i+\frac{1}{2},2j,2k} + (E_x)_{2i+\frac{1}{2},2j,2k+2} \right) \right. \\ & \quad \left. + \Delta y \Delta z \left( (E_y)_{2i,2j+\frac{1}{2},2k} + (E_y)_{2i,2j+\frac{1}{2},2k+2} \right) \right] \\ & + p_d \left[ \Delta x \Delta z (E_x)_{2i+\frac{1}{2},2j,2k+1} + \Delta y \Delta z (E_y)_{2i,2j+\frac{1}{2},2k+1} \right] \\ & + p_c \left[ \Delta x \Delta z (E_x)_{2i+\frac{3}{2},2j,2k+1} + \Delta y \Delta z (E_y)_{2i,2j+\frac{3}{2},2k+1} \right] \end{aligned} \right\}$$

Le calcul du second membre étant effectué, il nous reste à présenter la construction de la matrice liant le courant aux flux pour que le schéma soit complet.

La décomposition du champ électrique à l'interface en un champ électrique calculé sans courant et un champ dû uniquement au courant conduit à la même décomposition pour les flux. Pour chaque vecteur courant défini à l'interface on peut calculer le flux qu'il va induire. Une façon simple de construire la matrice est donc de calculer le flux induit par chaque vecteur unitaire de la base des courants. Chaque flux calculé correspondra alors à une colonne de la matrice liant le courant au flux.

#### 4.2.6 Propriétés de la matrice

La matrice ainsi construite, a pour dimension le nombre d'arêtes sur l'interface, elle est très creuse et bien conditionnée.

Chaque colonne de la matrice correspond aux flux induits par un courant situé sur l'arête correspondant au numéro de la colonne. Comme on le voit sur les figures 4.6 et 4.7 le nombre de flux induits par un courant est limité. Dans le cas général, le courant n'induit que neuf flux grossiers et vingt cinq flux fins. La matrice étant donc très creuse elle sera stockée en morse.

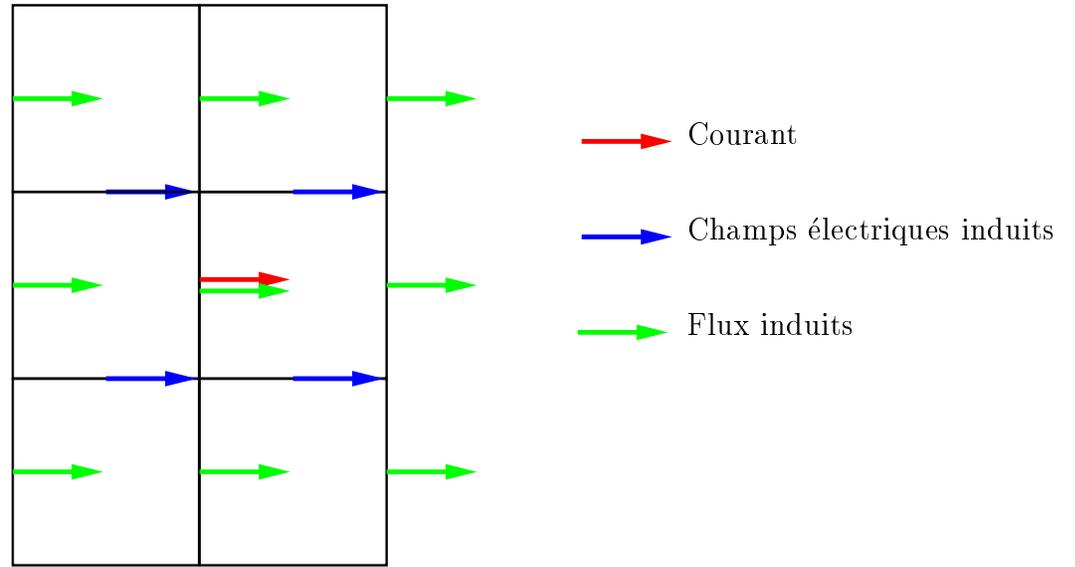


FIG. 4.6 – *influence du courant sur les flux grossiers*

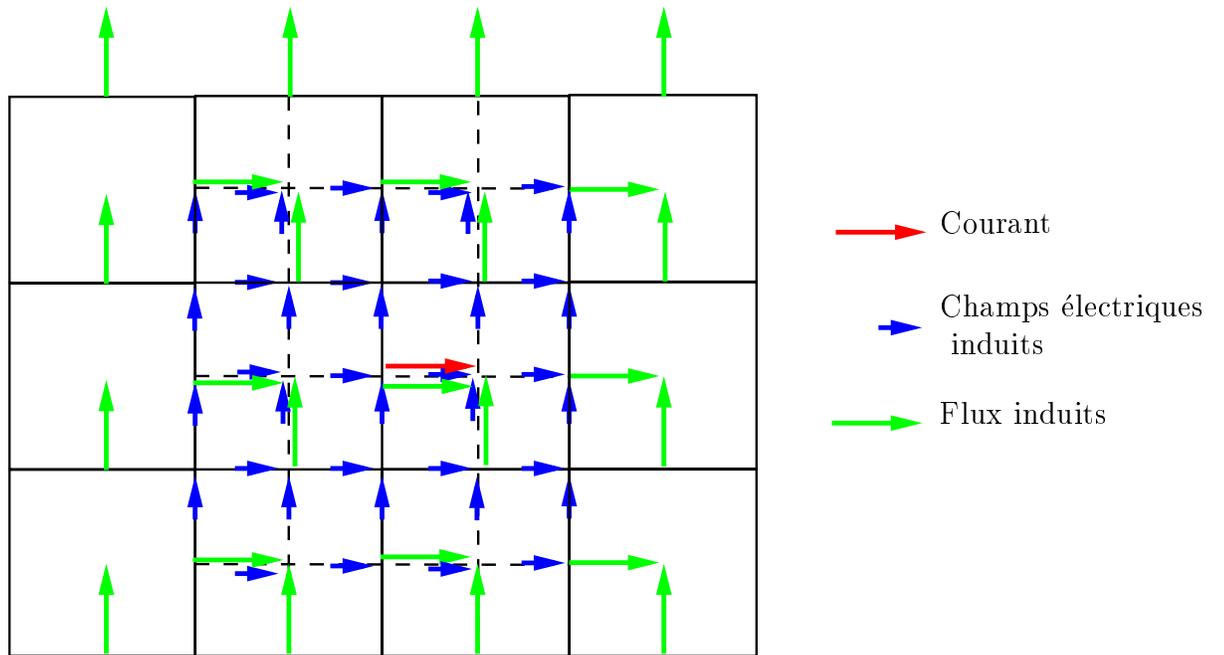


FIG. 4.7 – *influence du courant sur les flux fins*

Le calcul numérique du conditionnement de la matrice fait apparaître un bon conditionnement puisqu'il est compris entre 20 et 30 pour toute valeur de  $\frac{\Delta t}{h}$ . La résolution du système se fait par gradient conjugué. La méthode converge en à peu près 30 itérations vers la précision machine.

On présente, par exemple, figure 4.8 le cas d'une boîte raffinée de dimension 10x12x8, le nombre de degré de liberté vaut alors 1184, le nombre de points non nuls est 30104 soit moins de 26 points non nuls par ligne, mais le nombre de réels stockés sera de 15644 puisque la matrice est symétrique. Une estimation du conditionnement vaut 27.8.

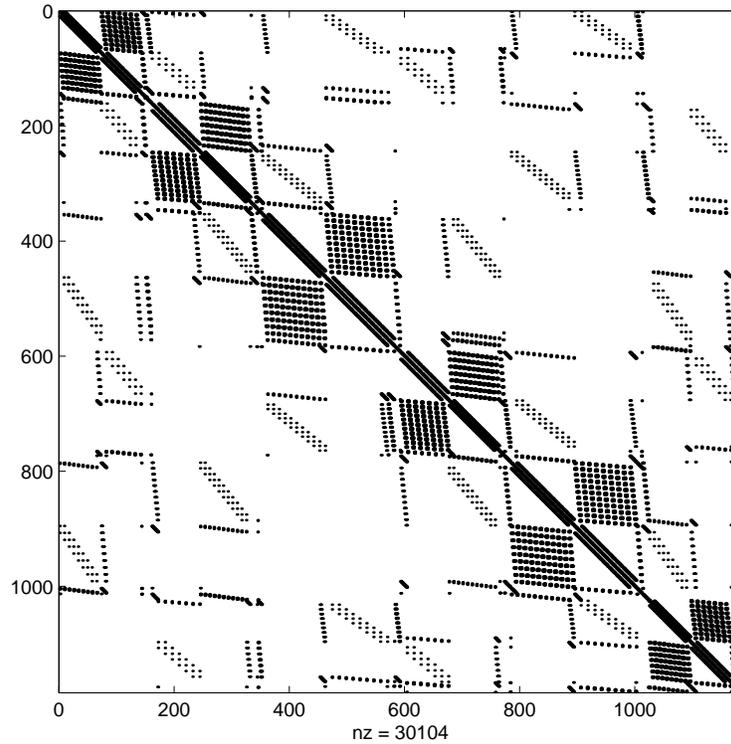


FIG. 4.8 – *Squelette de la matrice de Courant pour une boîte vide*

On a présenté dans cette section les schémas permettant le raccord entre la grille fine et la grille grossière avec une notation “différences finies”. L’avantage de cette présentation est de fournir des schémas plus clairs qu’avec une présentation “éléments finis”, mais il devient difficile de conserver cette méthode dans le cas où des degrés de liberté sont inexistantes par exemple en présence de conducteurs. On choisira alors d’adopter une présentation plus adaptée à un maillage non structuré. Ceci n’est qu’une présentation différente des calculs, ces derniers étant bien sûr identiques.



## Chapitre 5

# Extension de la méthode en présence de conducteurs parfaits

### 5.1 Position du problème

Nous nous intéressons dans cette section à la prise en compte de conducteurs parfaits à l'intérieur du domaine de propagation. Rappelons que c'est là l'un des intérêts du raffinement de maillage: le pas d'espace étant plus petit, le raffinement permet de mieux prendre en compte la géométrie des conducteurs. Il est donc crucial que la méthode permette cette incorporation. Nous verrons que celle-ci s'obtient facilement en modifiant les espaces pour le champ électrique (on met la condition de conducteur parfait dans l'espace) et surtout pour le courant circulant à la surface de la boîte raffinée.

### 5.2 Description des conducteurs. Modification des espaces

La géométrie des conducteurs est supposée coïncider avec un ensemble fini de surfaces planes. On notera  $\mathcal{C}$  cet ensemble. On distinguera  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  les conducteurs respectivement inclus dans la boîte raffinée ou hors de celle-ci.

$$(5.1) \quad \mathcal{C}_f = \mathcal{C} \cap B, \quad \mathcal{C}_g = \mathcal{C} \cap B^{ext}$$

Un ensemble qui va jouer un rôle important est l'intersection des conducteurs avec la surface de la boîte raffinée  $\Sigma$ . On a

$$(5.2) \quad \mathcal{C}_\Sigma = \mathcal{C} \cap \Sigma = \mathcal{C}_f \cap \Sigma = \mathcal{C}_g \cap \Sigma$$

Cet ensemble peut être constitué par des surfaces ou encore par des segments.

Une fois décrites les hypothèses sur les conducteurs, on passe maintenant à la modification des espaces fonctionnels induite par la prise en compte des conducteurs. La condition

$$(5.3) \quad \vec{n} \wedge (\vec{E} \wedge \vec{n}) = 0, \text{ sur } \mathcal{C}$$

est incorporée dans l'espace  $\mathcal{E}$ :

$$(5.4) \quad \mathcal{E} = \left\{ \vec{E} \in H(\text{rot}, \Omega), \vec{n} \wedge (\vec{E} \wedge \vec{n}) = 0 \text{ sur } \mathcal{C} \right\}$$

Lorsque  $\Omega$  est suffisamment régulière, l'espace des traces tangentielles sur  $\Sigma$  des éléments de  $\mathcal{E}$  est

$$(5.5) \quad H_{oo\perp}^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Sigma, \Sigma) = \left\{ \Phi \in H^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Sigma, \Sigma), n_c \wedge \Phi = 0 \text{ sur } \mathcal{C}_\Sigma \right\}$$

où  $n_c$  est la normale à  $\mathcal{C}_\Sigma$ . Ce n'est pas notre cas, puisque  $\Sigma$  est la frontière d'un cube. De récents travaux d'Annalisa Buffa et de Patrick Ciarlet [8] permettent d'étendre cette définition à notre cas et de définir l'espace des traces tangentielle des éléments de  $\mathcal{E}$ . Nous noterons  $H_{oo\perp}^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Sigma, \Sigma)$  cet espace. On a vu que le courant  $J$  appartenait au dual de l'espace des traces tangentielles des champs électriques. On aura donc  $J \in \mathcal{M}$  avec

$$(5.6) \quad \mathcal{M} = \left( H_{oo\perp}^{-\frac{1}{2}}(\text{rot}_\Sigma, \Sigma) \right)'.$$

Une fois, ces espaces construits et modifiés, le système de Maxwell dans un milieu avec conducteurs est obtenu simplement en reprenant le système variationnel constitué des équations (2.15) à (2.19).

### 5.3 Discrétisation

Dans la suite, on supposera que les conducteurs coïncident toujours avec des mailles soit fines soit grossières. On peut remarquer que cette hypothèse implique que la trace des conducteurs sur  $\Sigma$  coïncide avec un ensemble de mailles grossières. Remarquons que ceci n'est possible que parce que l'on a supposé que le maillage fin était un sous maillage du maillage grossier. On a donc

$$(5.7) \quad \mathcal{C}_g = \bigcup_{\ell \in \mathcal{I}_g} M_\ell^{2h}, \quad \mathcal{C}_f = \bigcup_{\ell \in \mathcal{I}_f} M_\ell^h, \quad \mathcal{C}_\Sigma = \bigcup_{\ell \in \mathcal{I}_\Sigma} M_\ell^{2h},$$

Cette hypothèse permet de construire très facilement un espace d'approximation pour  $\mathcal{E}$  : il suffit simplement de supprimer les degrés de liberté qui sont localisés sur les conducteurs. Cela revient à annuler les composantes électriques tangentes aux conducteurs.

Pour le courant, c'est un peu plus délicat. C'est un espace de fonctions définies sur le complémentaire de  $\mathcal{C}_\Sigma$ . On note  $\mathcal{O}_\Sigma$  ce domaine. Le départ est identique à ce que nous avons présenté pour le cas sans conducteur: la restriction du courant à chaque maille de  $\mathcal{O}_\Sigma$  est approchée par une combinaison des 4 demi-fonctions de base rattachées à la maille. La différence réside dans le recollement des demi-fonctions de base.

- l'arête n'est localisée ni à l'intérieur, ni à la frontière d'un conducteur. Dans ce cas, la loi de Kirchoff s'applique : on a un unique degré de liberté sur l'arête.
- L'arête est complètement interne à un conducteur. Dans ce cas, il n'y a pas de courant accroché à cette arête.
- L'arête est localisée à la frontière d'un conducteur, auquel cas deux situations se présentent:
  1. L'une des deux mailles entourant l'arête est incluse entièrement dans un conducteur. Alors, la demi-fonction de base définie sur l'autre maille devient l'unique fonction de base associée à cette arête.

2. Aucune des deux mailles entourant l'arête n'est incluse dans un conducteur. Ceci correspond au cas où la trace sur  $\Sigma$  du conducteur est réduite à un segment. Dans ce cas, on doit doubler le degré de liberté associé à l'arête. En effet la loi de Kirtchoff ne peut s'appliquer au travers d'un conducteur, puisqu'il n'y a aucune raison de conserver la divergence du courant au travers d'un conducteur (il existe une justification mathématique de ceci [8]). Dans cette configuration, on a donc deux degrés de liberté associés à l'arête. Les deux demi-fonctions de base deviennent fonction de base.

La prise en compte de conducteurs peut donc conduire à une augmentation du nombre de degrés de liberté. Nous montrons figure 5.1 un maillage du courant dans l'exemple d'une boîte traversée par une plaque fine, les degrés de liberté indiqués en rouge ont été doublés. Nous verrons dans les applications numériques que cette façon de procéder donne de bons résultats.

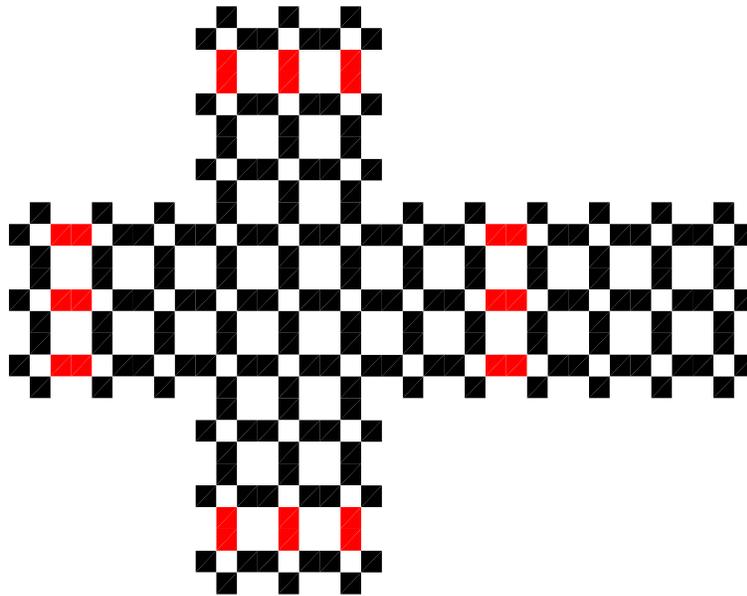


FIG. 5.1 – *Éclatement du maillage du Courant sur l'interface en présence d'une plaque*



# Chapitre 6

## Algorithmique

Deux Algorithmes différents sont possibles pour la gestion de l'interface grille fine-grille grossière. Le premier suit pas à pas la méthode décrite et permet la vérification de la conservation de l'énergie tandis que le deuxième est une version plus rapide.

### 6.1 Une implémentation pas à pas

Dans cette implémentation, à chaque itération grossière, on commence par calculer les inconnues sans courant. Ainsi dans un premier temps, on calcule le champs électrique grossier tangent  $\tilde{E}^{2n+2}$  à l'interface puis les flux électriques grossiers qu'il induit. Dans la grille fine l'opération est un peu plus longue puisqu'il faut calculer les champs électriques et magnétiques dans toutes la grille fine et sur l'interface sur deux pas de temps ( $\tilde{E}^{2n+1}$  et  $\tilde{E}^{2n+2}$ ) à l'aide du schéma de Yee. Pour chaque champ calculé, on soustrait aux flux grossiers les flux fins qu'il induit. A la suite de cette opération, le calcul du flux total permet d'inverser le système linéaire donnant le courant.

La phase suivante consiste à mettre à jour les champs électromagnétiques par prise en compte du courant. Pour le champ grossier, l'opération est simple, il suffit d'ajouter au champ électrique  $\tilde{E}^{2n+2}$  la contribution du courant  $(B_g^{2h})J^{2n+1}$ . Pour le champ électromagnétique dans la grille fine, cette correction est plus délicate car elle nécessite de reprendre le calcul à partir des champs initiaux  $E^{2n}$  et  $H^{2n-\frac{1}{2}}$ , au moins au voisinage du bord. Une manière de faire est de stocker ces 2 champs avant le calcul sans le courant puis de redémarrer le calcul à partir de ces valeurs dès que le courant est connu. On intègre donc, et à nouveau sur deux pas de temps fins, le schéma de Yee mais en ajoutant le courant au champ électrique à chaque pas de temps.

Le gros avantage de cette méthode est qu'elle permet le calcul de l'énergie électromagnétique dans la grille fine. En effet la mise à jour du courant se faisant par itération du schéma de Yee, on dispose des valeurs des champs électromagnétiques intermédiaires de la grille fine nécessaires au calcul de l'énergie fine et des flux. Ceci permet de tester la validité du programme en vérifiant une propriété du schéma valide en l'absence de termes sources : la variation entre deux pas de temps grossiers des énergies de chaque grille doit être égale à la valeur commune, au signe près, des flux électriques à travers l'interface. Ceci induit la conservation de l'énergie totale.

## 6.2 Une implémentation un peu optimisée

Une optimisation possible de l'implémentation précédente réside dans la manière de mettre à jour les champs électromagnétiques fins, elle présuppose d'avoir stocké une matrice creuse donnant directement les champs électriques induits par un courant après deux itérations du schéma de Yee. Cette matrice est calculée lors de la phase d'initialisation. Lorsque que l'on construit la matrice liant les flux électriques aux courants, il suffit de stocker également les champs électriques et magnétiques induits.

Cette implémentation ne permet pas de procéder à la vérification de la conservation de l'énergie, puisque les champs électromagnétiques intermédiaires ne sont pas calculés.

## 6.3 Calcul des Matrices

Comme nous l'avons dit nous devons construire la matrice permettant de calculer le courant à partir des flux électriques. Pour cela, on a adopté une procédure numérique très simple. Pour chaque degré de liberté, on simule le champ électromagnétique induit par le courant qui vaut 1 sur l'arête associée et 0 ailleurs, et cela pendant 1 pas de temps grossier en partant d'un état nul. Le calcul du flux électrique total à travers la boîte donne directement une colonne de la matrice. On optimise cet algorithme en n'effectuant la simulation que dans une boîte de quelques mailles autour de l'arête associée au degré de liberté. Notons, que l'on peut faire un calcul analytique de cette matrice au moins dans le cas d'une boîte non traversée par les conducteurs. Les calculs deviennent vite inextricables pour les situations avec traversée de conducteurs.

Les champs électromagnétiques fins  $E_f^{n=2}$  et  $H_f^{n=\frac{3}{2}}$  induits correspondent précisément aux colonnes des deux matrices qui permettent la mise à jour des champs électromagnétiques fins une fois le courant connu. Cette matrice est réutilisée lors des itérations de l'algorithme optimisé (cf. 6.2).

## 6.4 Compléments sur les conducteurs

En l'absence de conducteur, la construction du maillage d'éléments finis pour le courant consiste à choisir une numérotation des mailles et des arêtes localisées sur l'interface, puis à construire deux tableaux

- Le tableau de correspondance entre chaque carreau et les 4 numéros de ses arêtes
- Le tableau donnant les coordonnées du carreau. En pratique, comme on travaille avec une grille structurée, il suffit d'associer à chaque carreau 4 informations (les 3 indices dans la grille grossière d'un de ses 4 coins et l'orientation de la face frontière à laquelle il appartient).

Avec les conducteurs, c'est un peu plus compliqué. On a vu que leur présence entraînait qu'à chaque arête, on pouvait adjoindre de 0 à 2 degrés de liberté. Afin de discriminer les situations, on doit détecter, pour chaque maille, la présence d'un conducteur sur une de ses arêtes. Une des manière de faire consiste à initialiser les champs électriques grossiers sur l'interface à 1, puis à appeler la procédure traitant les conducteurs, c'est à dire annulant les composantes de champs électriques qui leurs sont tangents.

Pour chaque arête, on distingue alors plusieurs cas.

- L'arête n'est pas localisée sur un conducteur, auquel cas on ajoute un degré de liberté que l'on associe aux deux carreaux dont elle est l'arête commune (c'est exactement ce que l'on fait dans le cas où il n'y a pas de conducteur).
- L'arête est traversée par un conducteur, on compte pour chacun des deux carreaux voisins, le nombre d'arêtes annulées. Trois cas sont alors possibles
  - Les deux carreaux ont toutes leurs arêtes annulées. On ne rajoute pas de degré de liberté: l'arête est complètement interne au conducteur.

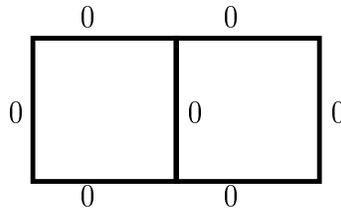


FIG. 6.1 – arête interne au conducteur

- Un seul des deux carreaux, soit  $C_0$ , a au moins une de ses arêtes non annulée. Cette arête est localisée à la frontière d'un conducteur et sépare une zone entièrement conductrice (d'au moins une maille) d'une zone vide. On crée un nouveau degré de liberté associé à l'arête que l'on référence au carreau  $C_0$ .

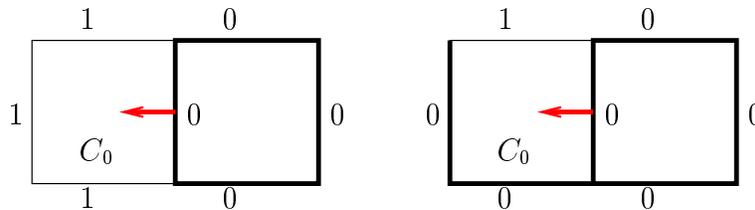


FIG. 6.2 – arête frontière

- Les deux carreaux ont au moins une arête non annulée. C'est le cas par exemple si les conducteurs intersectent la boîte en un segment où se situe précisément l'arête. On peut imaginer des situations plus exotiques (une double encoche tête-bêche filiformée en son milieu par exemple). On crée alors deux nouveaux degrés de liberté associés à cette arête, chacun étant référencé par l'un des deux carreaux.

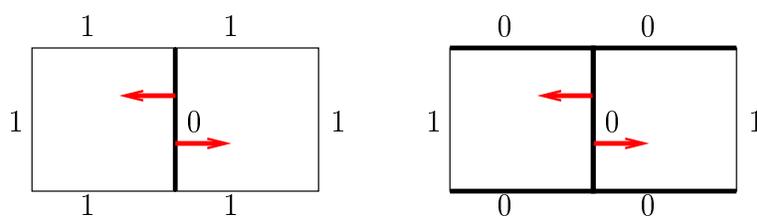


FIG. 6.3 – *trace filaire*

# Chapitre 7

## Application et validation des résultats

La méthode précédemment présentée a été implémentée dans un code informatique de résolution des équations de Maxwell. La prise en compte de conducteurs parfaits traversant l'interface entre les deux grilles a également été codée. Nous présentons ici quelques expériences numériques validant l'intérêt de la méthode et mesurant l'erreur commise.

### 7.1 Analyse numérique d'erreur

#### 7.1.1 Domaine vide

On cherche à connaître l'influence de la taille des boîtes raffinées sur la solution dans le domaine. Pour cela, on réalise plusieurs simulations dans le vide sans boîte raffinée puis avec des boîtes de plus en plus grosses, la boîte grossière étant de dimension fixe. Dans la suite, nous appellerons  $B_f^\ell$  la boîte raffinée de taille  $\ell$  L'onde incidente est une onde plane polarisée en  $y$  et de vecteur  $\vec{z}$ . C'est une gaussienne discrétisée à l'aide de 10 points par longueur d'onde pour une fréquence de coupure à 10 % du maximum. (cf. Annexe G)

Nous nous intéressons ici à la différence entre les solutions numériques simulées pour chaque taille de boîte et la solution numériques sans grille raffinée. Ceci nous permettra de mesurer le "bruit" induit par une boîte et sa dépendance vis à vis de la taille de la boîte. Pour ce faire on choisit un cube  $C$  plus grand que la plus grande des boîtes raffinées  $B_f^\ell$  et on choisit de prendre la norme  $l^1(0, T; l^2(C))$  des différences, c'est à dire que pour chaque chaque simulation, on calcule

$$e^{2n} = \sum_{(2i, 2j, 2k) \in C} \left( (\tilde{E}_x^g)_{2i, 2j, 2k}^{2n} - (\tilde{E}_x^f)_{2i, 2j, 2k}^{2n} \right)^2 + \left( (\tilde{E}_y^g)_{2i, 2j, 2k}^{2n} - (\tilde{E}_y^f)_{2i, 2j, 2k}^{2n} \right)^2 + \left( (\tilde{E}_z^g)_{2i, 2j, 2k}^{2n} - (\tilde{E}_z^f)_{2i, 2j, 2k}^{2n} \right)^2$$

où

$$(\tilde{E}_x^g)_{2i, 2j, 2k}^{2n} = \frac{1}{2} \left( (E_x^g)_{2i+1, 2j, 2k}^{2n} + (E_x^g)_{2i-1, 2j, 2k}^{2n} \right)$$

$$(\tilde{E}_y^g)_{2i, 2j, 2k}^{2n} = \frac{1}{2} \left( (E_y^g)_{2i, 2j+1, 2k}^{2n} + (E_y^g)_{2i, 2j-1, 2k}^{2n} \right)$$

$$(\tilde{E}_z^g)_{2i, 2j, 2k}^{2n} = \frac{1}{2} \left( (E_z^g)_{2i, 2j, 2k+1}^{2n} + (E_z^g)_{2i, 2j, 2k-1}^{2n} \right)$$

$$\begin{aligned}
 (\tilde{E}_x^f)_{2i,2j,2k}^{2n} &= \frac{1}{2} \begin{cases} (E_x^f)_{2i+\frac{1}{2},2j,2k}^{2n} + (E_x^f)_{2i-\frac{1}{2},2j,2k}^{2n} & \text{si } (i,j,k) \in B_f^\ell \\ (E_x^f)_{2i+1,2j,2k}^{2n} + (E_x^f)_{2i-1,2j,2k}^{2n} & \text{sinon.} \end{cases} \\
 (\tilde{E}_y^f)_{2i,2j,2k}^{2n} &= \frac{1}{2} \begin{cases} (E_y^f)_{2i,2j+\frac{1}{2},2k}^{2n} + (E_y^f)_{2i,2j-\frac{1}{2},2k}^{2n} & \text{si } (i,j,k) \in B_f^\ell \\ (E_y^f)_{2i,2j+1,2k}^{2n} + (E_y^f)_{2i,2j-1,2k}^{2n} & \text{sinon.} \end{cases} \\
 (\tilde{E}_z^f)_{2i,2j,2k}^{2n} &= \frac{1}{2} \begin{cases} (E_z^f)_{2i,2j,2k+\frac{1}{2}}^{2n} + (E_z^f)_{2i,2j,2k-\frac{1}{2}}^{2n} & \text{si } (i,j,k) \in B_f^\ell \\ (E_z^f)_{2i,2j,2k+1}^{2n} + (E_z^f)_{2i,2j,2k-1}^{2n} & \text{sinon.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

où  $E^g$  est le champ électrique obtenu avec une simulation sans raffinement,  $E_f$  le champ électrique obtenu par simulation avec la boîte raffinée. On a représenté figure 7.1 l'évolution de  $e^{2n}$  pour différentes tailles de boîte. La norme choisie est ensuite  $e = 20 \log_{10} \sum_n \frac{e^{2n}}{e_0^{2n}}$ . où

$$e_0^{2n} = \sum_{(2i,2j,2k) \in C} ((\tilde{E}_x^g)_{2i,2j,2k}^{2n})^2 + ((\tilde{E}_y^g)_{2i,2j,2k}^{2n})^2 + ((\tilde{E}_z^g)_{2i,2j,2k}^{2n})^2$$

Cette définition va nous permettre de mesurer le bruit induit par une boîte.

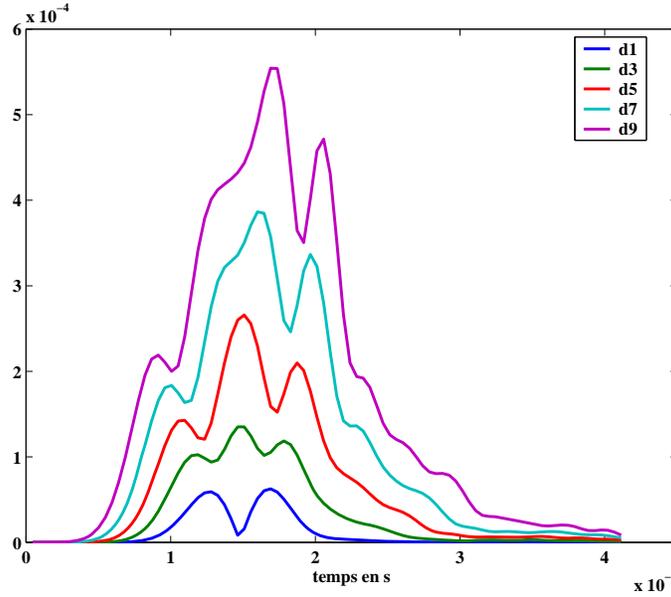


FIG. 7.1 – évolution de la différence du champ électrique au cours du temps pour différentes tailles de boîtes

Ces expériences font apparaître que  $e^{2n}$  (cf. figure 7.1) est une fonction croissante de la taille de la boîte. On pourrait assimiler  $e^{2n}$  à une erreur mais, cette différence n'est en fait pas une erreur due au raffinement. Si l'on réalise la même expérience en remplaçant dans la définition de  $e^{2n}$ ,  $E_g$  par le champ électrique obtenu avec une grille raffinée partout, (on appelle  $f^{2n}$  cette nouvelle mesure) on montre que la croissance de  $e^{2n}$  est en fait due à une diminution de l'erreur de dispersion.

En effet, sur la figure 7.3, où l'on a représenté  $f^{2n}$ , on remarque que plus la grille raffinée est grande moins la différence est importante. Ce qui montre que la différence obtenue sur la

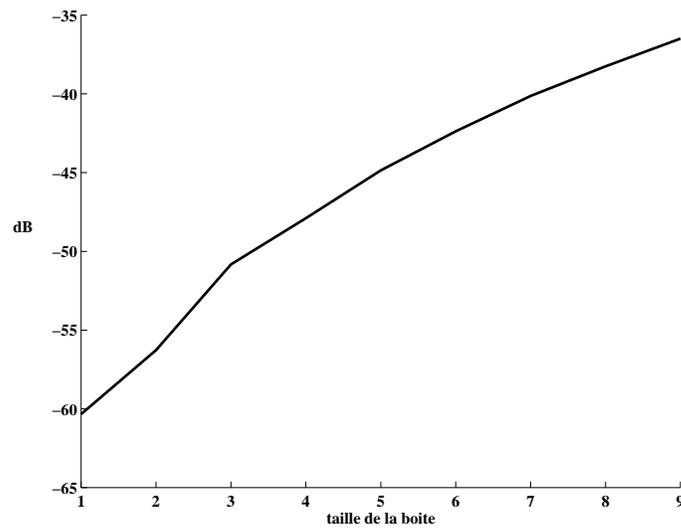
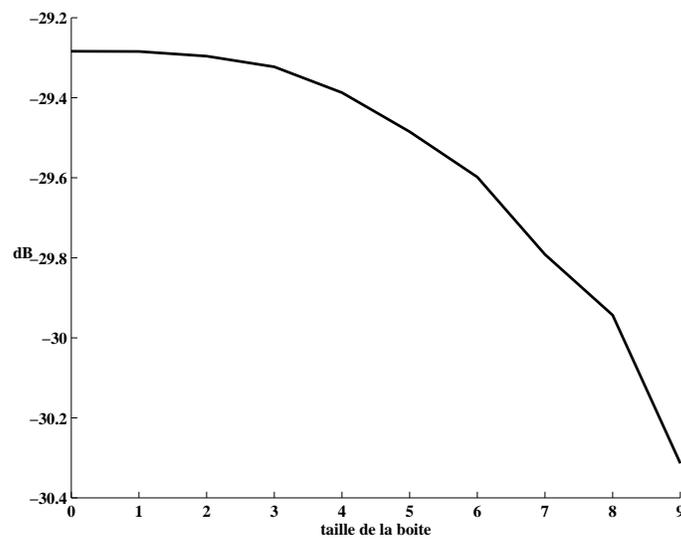
FIG. 7.2 – *différence totale en décibel en fonction de la taille de la boîte*FIG. 7.3 – *différence totale en décibel en fonction de la taille de la boîte*

figure 7.2 n'était pas une erreur mais une amélioration de la solution due à une baisse de la dispersion.

Afin de s'affranchir de cette dernière, nous n'allons pas considérer les différences selon toutes les composantes du champ électrique mais uniquement selon les composantes diffractées par la présence de la boîte, c'est à dire  $E_x$  et  $E_z$ . En l'absence de grille raffinée ces dernières sont nulles. En mesurant la norme définie précédemment de ces composantes, nous devrions obtenir une mesure de l'influence de la boîte. Les résultats présentés figure 7.4 nous montre un bruit de l'ordre de -50 dB quel que soit la taille de la boîte. L'oscillation observée entre taille paire et impaire ne nous paraît pas très importante et ne correspond sans doute qu'à la rupture de symétrie.

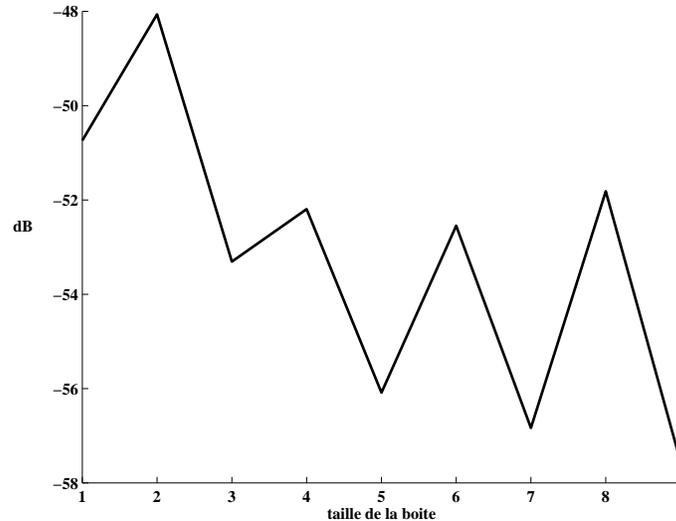


FIG. 7.4 – différence totale pour les composantes  $E_x$  et  $E_z$  en décibels

Le “bruit” induit par la présence d’une boîte raffinée paraît donc très faible. Mais, afin de justifier l’utilisation du raffinement de maillage spatio temporel nous allons comparer ce bruit à celui induit par la présence d’un petit conducteur dans le maillage.

### 7.1.2 Domaine avec un conducteur

Le but de cette expérience n’est pas de montrer la meilleure prise en compte de la géométrie d’un obstacle mais simplement de montrer que le bruit induit par une boîte raffinée est négligeable devant celui induit par un petit objet métallique. Pour cela on réalise la même expérience que précédemment en ajoutant au domaine un conducteur parfait cubique de taille une maille grossière. Dans une première expérience on mesure à l’aide de la norme déjà utilisée l’influence du cube en calculant tout simplement la différence entre deux solutions calculées avec ou sans cube. Le résultat fait apparaître un bruit d’environ -18dB. Le bruit dû à la grille fine est donc négligeable par rapport au bruit dû à un petit cube. On peut donc s’attendre à une amélioration de la solution lors de l’utilisation de boîtes raffinées.

C’est ce que montre les figures 7.5 et 7.6. On y compare la solution trouvée avec une boîte raffinée de plus en plus grande avec la solution trouvée en raffinant tout le domaine. Ce résultat montre l’intérêt du raffinement de maillage puisque la différence avec la solution avec

une grille raffinée partout a nettement diminué en présence d'une grille raffinée localement. De plus on notera que plus la taille de la boîte est importante plus l'erreur diminue, mais cette amélioration n'est significative que jusqu'à 5 mailles, c'est à dire deux mailles entourant l'objet. Ceci peut s'expliquer aisément. La diffraction d'une onde sur un coin provoque une singularité dans la solution, cette singularité est bien sûr mieux discrétisée avec un maillage plus fin, mais comme elle ne se propage pas dans tout le maillage, l'amélioration due au raffinement ne se fait sentir que sur quelques mailles.

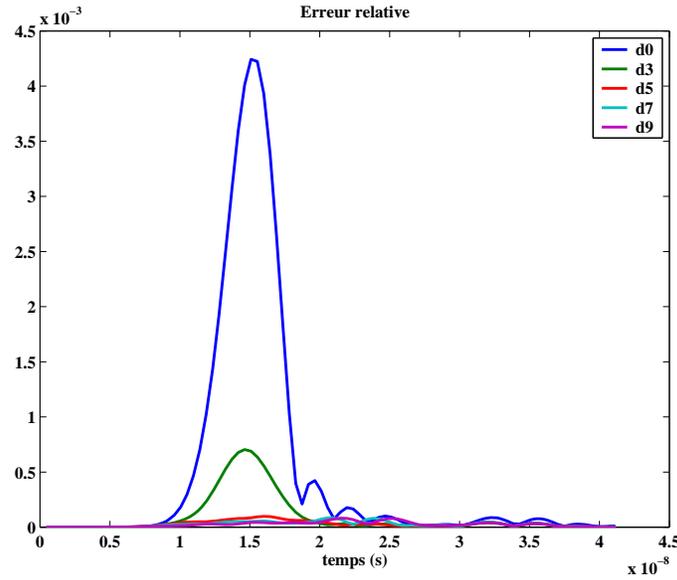


FIG. 7.5 – différences au cours du temps des composantes  $E_x$  et  $E_z$

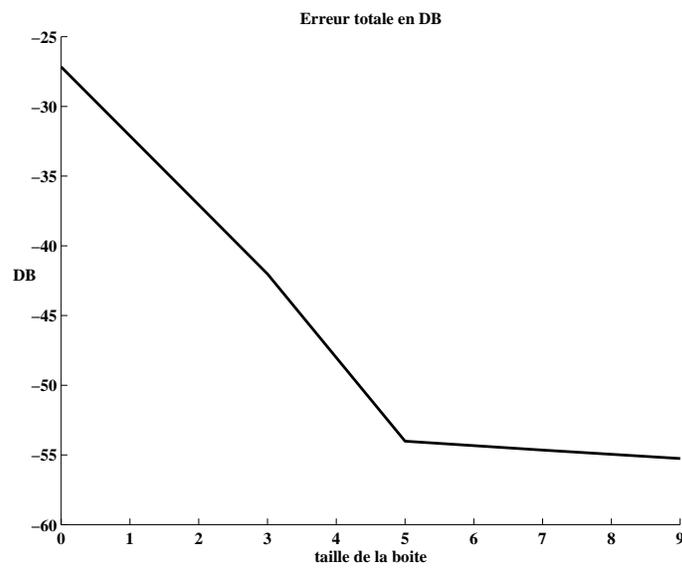


FIG. 7.6 – différence totale pour les composantes  $E_x$  et  $E_z$  en décibel

## 7.2 Validation à travers quelques expériences numériques

Le code de raffinement de maillage pour les équations de Maxwell 3D est validé à l'aide d'expériences numériques. On montre que le raffinement n'induit pas d'erreur supplémentaire significative et que, dans certain cas, le raffinement apporte une amélioration dans la prise en compte de conducteurs.

Pour chaque expérience, nous effectuons plusieurs simulations, l'une avec un maillage grossier, l'autre avec un maillage fin ( $\frac{h}{2}$ ), une avec un raffinement de grille local ( $\frac{h}{2}$ ), enfin une expérience avec une grille très fine nous permet d'obtenir une solution de référence.

### 7.2.1 Une boîte raffinée dans le vide

On effectue ici une simulation de la propagation d'un champ incident dans le vide, avec un raffinement local. Cette expérience ne présente pas un grand intérêt en soi, puisque le raffinement de maillage n'est réellement utile qu'en présence de conducteur, mais elle va nous permettre de mesurer l'influence de la grille raffinée dans l'erreur de discrétisation.

On effectue des enregistrement en divers points du maillage grossier, afin de mesurer l'influence de la grille fine, plus exactement afin de comparer l'erreur due au raffinement seul, à celle du schéma classique.

Le résultat de ces expériences est présenté figure 7.7. La figure du haut montre les solutions pour la grille grossière, la grille fine et la grille raffinée localement. Cette figure montre que la grille fine n'a pas provoqué d'erreur supplémentaire significative. La figure du bas montre les différences de ces résultats avec la solution de référence.

Pour des discrétisations généralement utilisées, (environ 20 points par longueur d'onde), l'erreur due au raffinement est bien que théoriquement d'ordre 1, négligeable devant l'erreur due au schéma classique sans raffinement qui elle est pourtant d'ordre 2.

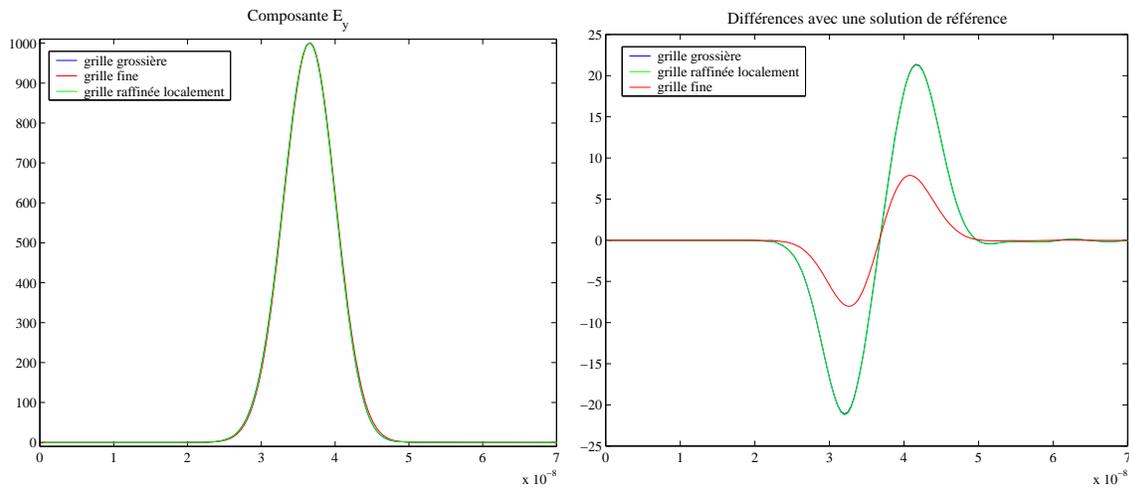


FIG. 7.7 – résultats de l'expérience 1

### 7.2.2 Une boîte raffinée coupant une plaque horizontale

Cette expérience sert à valider la méthode dans le cas où des conducteurs coupent l'interface. On simule la propagation d'un champ incident en présence d'une plaque métallique

perpendiculaire à la direction de propagation du champ incident. La plaque métallique est positionnée sur des points du maillage grossier.

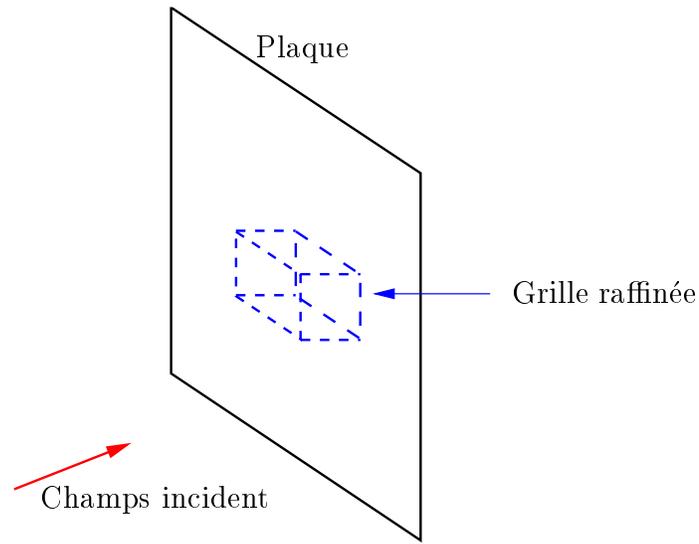


FIG. 7.8 – Schéma de l'expérience 2

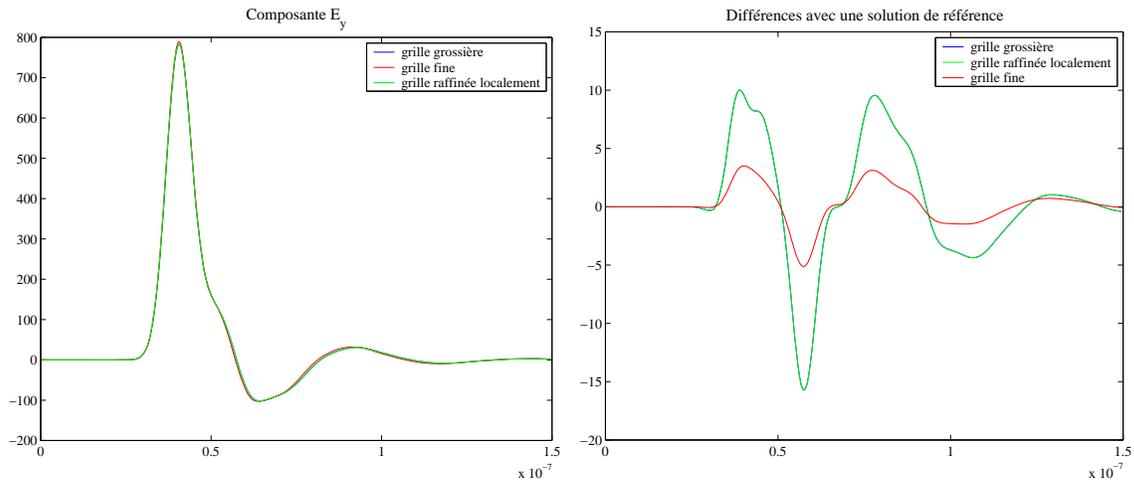


FIG. 7.9 – résultats de l'expérience 2

Les résultats présentés figure 7.9 montrent que la prise en compte de conducteurs à l'intérieur de la grille fine et sur l'interface avec la grille grossière ne génère pas d'erreur supplémentaire, puisque les résultats pour la grille grossière (courbe bleue) sont identiques à ceux obtenus en raffinant le maillage (courbe verte).

### 7.2.3 Une boîte raffinée intersectant un cube biseauté

Cette expérience vise à montrer la meilleure prise en compte d'un plan incliné par une grille raffinée. On simule donc la diffraction d'une onde plane sur un objet biseauté. La partie

de l'objet inclinée est incluse dans une grille maillée plus finement, le dispositif est décrit figure 7.10.

Un inconvénient de la méthode dans un tel cas, vient du fait que la grille fine est rectangulaire et ne peut donc suivre localement la plaque inclinée ce qui oblige à prendre une grille raffinée assez importante.

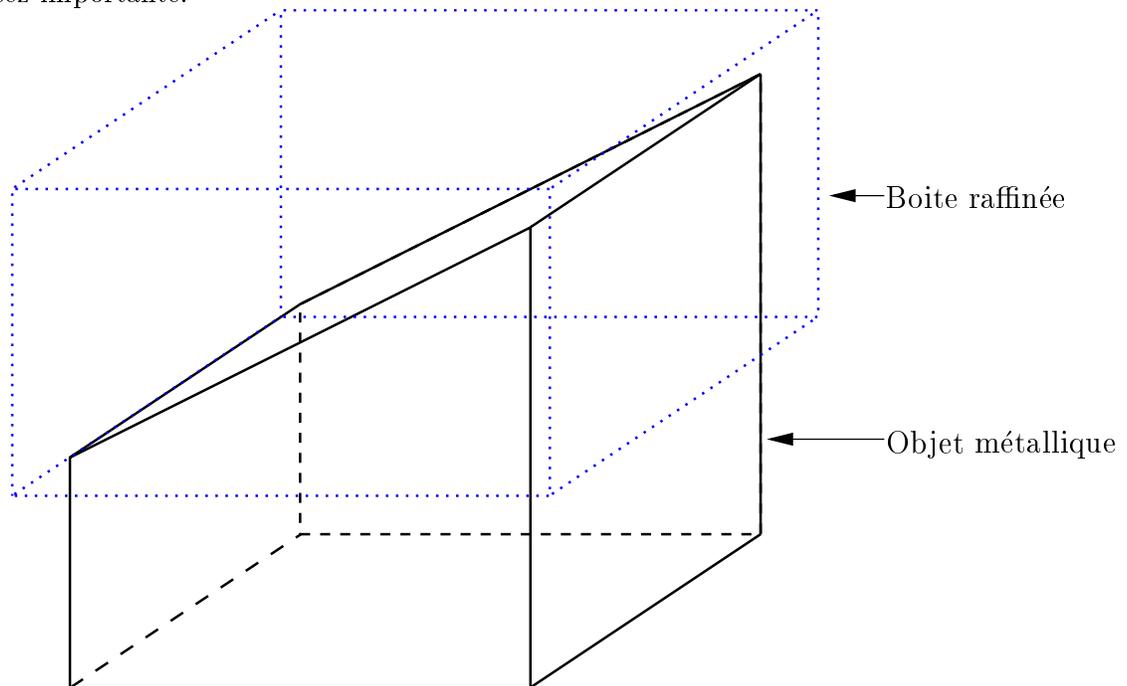


FIG. 7.10 – Schéma de l'expérience 3

Les résultats de cette expérience sont assez délicats à analyser puisque plusieurs phénomènes interagissent lorsque l'on raffine, notamment une meilleure prise en compte du plan incliné mais également une meilleure discrétisation des singularités apparaissant à la frontière de l'obstacle. L'amélioration due au raffinement variera fortement en fonction du point d'enregistrement suivant qu'il se trouve près d'une singularité ou du plan incliné.

La figure 7.11 présente les résultats pour un point d'enregistrement situé à l'avant de l'obstacle (vu du champs incident) et relativement éloigné du plan éloigné. On constate que le raffinement de grille apporte une amélioration des résultats sans toutefois obtenir la précision obtenue avec une grille raffinée dans tout le domaine.

La figure 7.12 présente les résultats pour un point d'enregistrement situé derrière l'obstacle (vu du champs incident) à proximité du sommet du biseau c'est à dire là où la singularité est la plus forte.

On constate que le raffinement local a nettement amélioré les résultats puisqu'ils sont voisins de ceux d'une grille raffinée totalement.

#### 7.2.4 Une boîte raffinée autour d'une ouverture percée dans un cube

Le dernier exemple est une simulation en présence d'un obstacle dont la géométrie provoque localement des singularités difficilement prises en compte avec un maillage grossier.

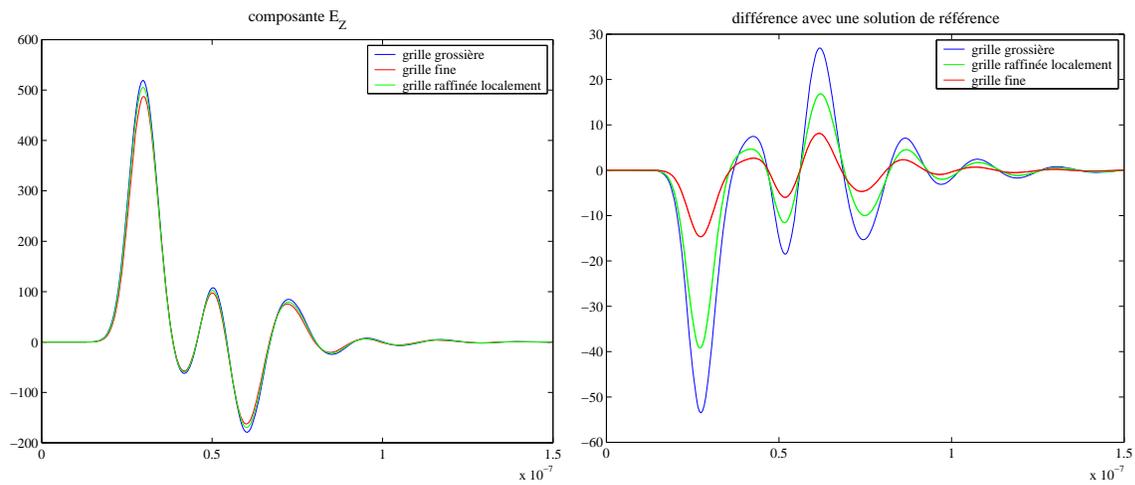


FIG. 7.11 – résultats de l'expérience 3

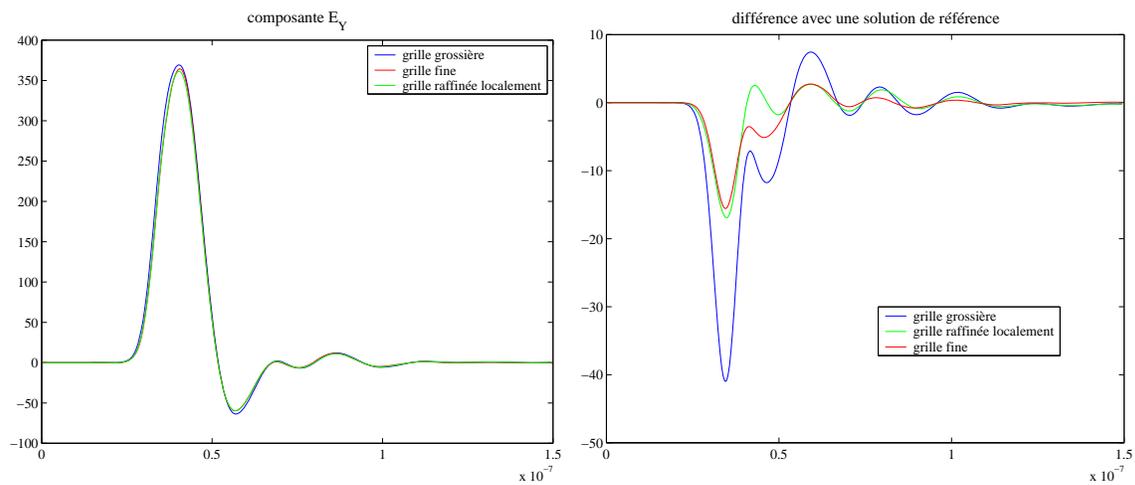


FIG. 7.12 – résultats de l'expérience 3

Nous considérons un conducteur cubique creux avec une ouverture de taille petite devant la longueur d'onde ( $\lambda$ ) du champ incident (figure 7.13). Nous enregistrons ensuite les valeurs du champ électrique en un point à l'intérieur du cube.

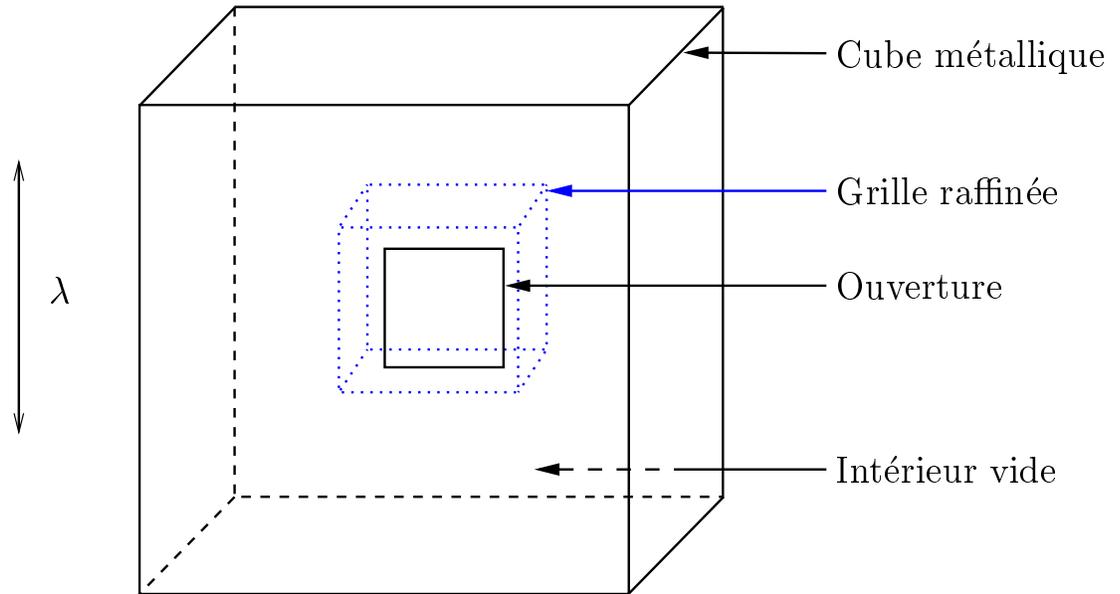


FIG. 7.13 – Schéma de l'expérience 4

Les résultats sont présentés sur la figure 7.14. Ils montrent pleinement l'utilité d'un raffinement de grille, puisque, en présence d'une grille fine, l'erreur due à la géométrie de l'obstacle est équivalente à l'erreur obtenue en raffinant tout le domaine, alors que le temps de calcul pour effectuer le raffinement local n'a augmenté que de 40% contre 800% pour la grille raffinée partout.

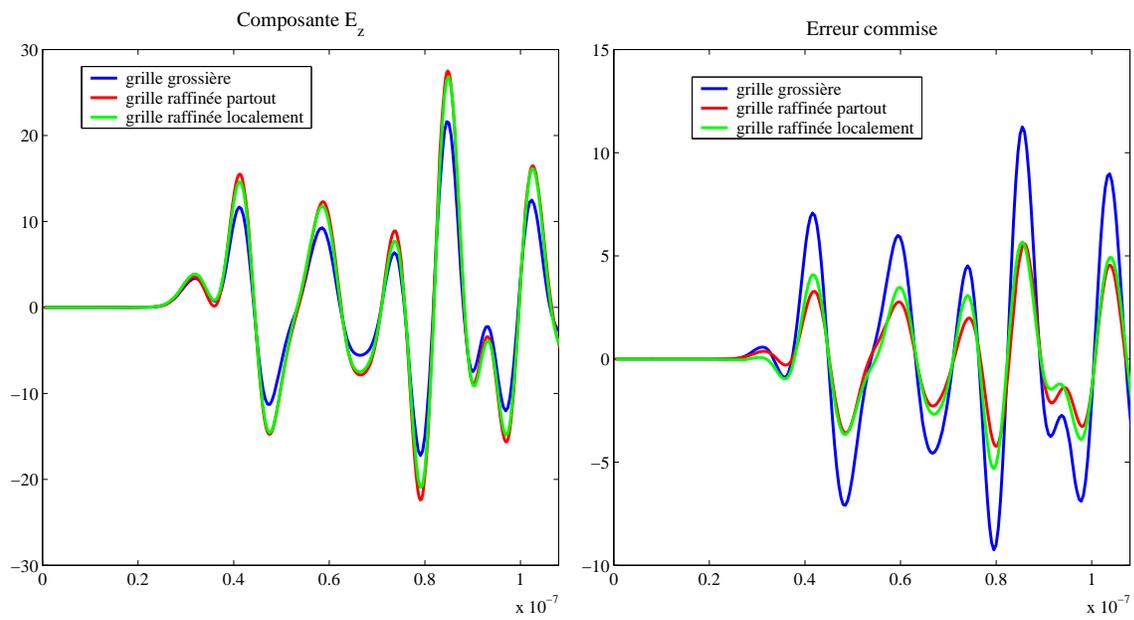


FIG. 7.14 – résultats de l'expérience 4

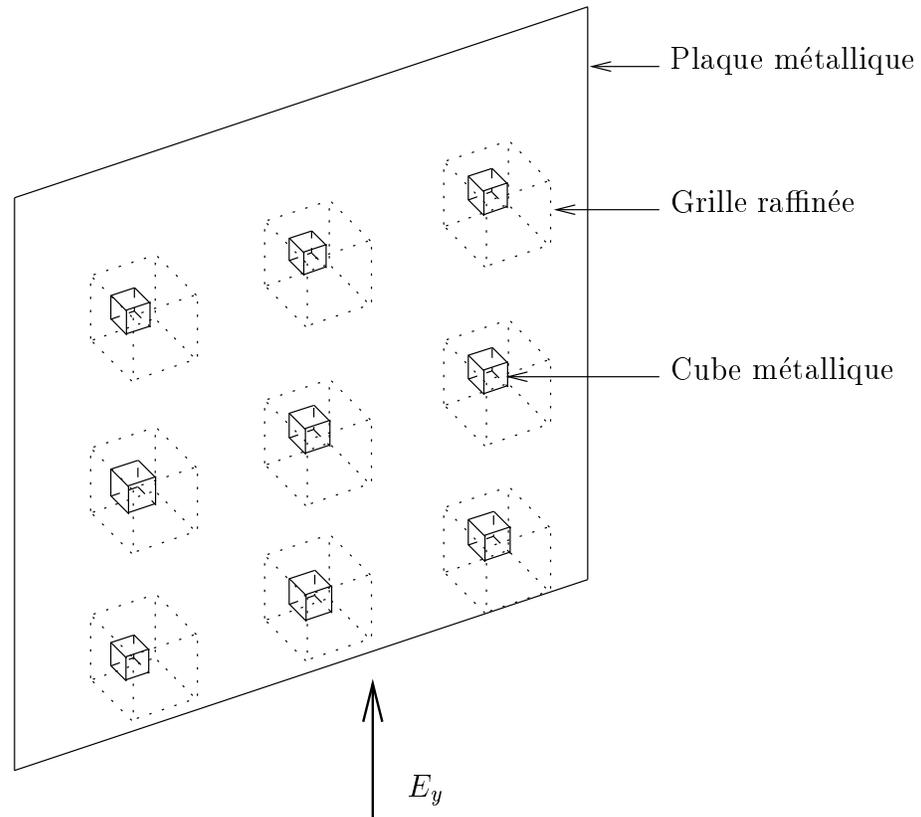


FIG. 7.15 – schéma de l'expérience d'une onde plane rasante diffractant sur une plaque possédant des aspérités.

### 7.3 Une expérience type d'utilisation de raffinement de maillage.

Le code informatique résultant de la méthode décrite implémentée permet donc de résoudre les équations de Maxwell en présence de conducteurs parfaits avec des grilles raffinées là où on le juge nécessaire. On présente ici un exemple d'utilisation de ce code. L'expérience réalisée est la diffraction d'une onde plane incidente sur une plaque possédant des aspérités (pouvant être boulons, rivets) assimilées à des petits cubes.

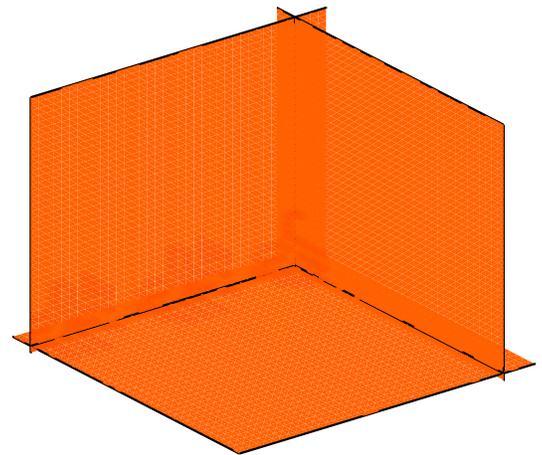
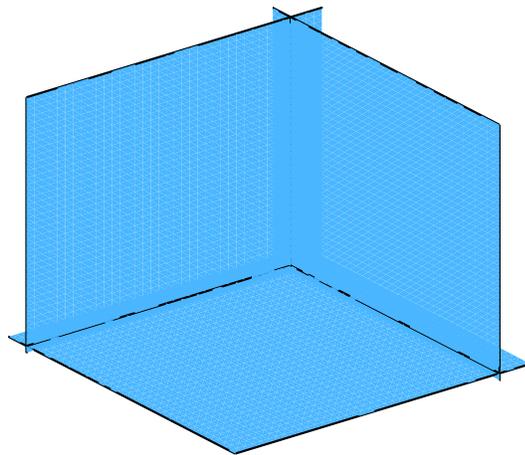
Dans l'expérience réalisée, l'onde incidente est  $\vec{E} = E_y \vec{e}_y$  avec  $E_y = E_0 e^{i(z-ct)}$ . Le conducteur parfait est une plaque verticale, d'équation  $x = x_0$  et possédant 9 petits cubes sur sa surface. La taille de chaque cube est petite (une maille grossière). Nous utilisons des grilles raffinées autour de ces petits cubes afin de mieux prendre en compte la diffraction (voir figure 7.15). Les résultats de la simulation sont présentés sur les figures suivantes. La diffraction du champs incident par la plaque apparaît sur le champ incident  $E_y$  par contre la diffraction sur les petits cubes qui n'apparaît pas sur la composante  $E_y$  en raison de son amplitude trop faible par rapport au champ incident, apparaît clairement sur la composante  $E_x$ . Le raffinement de maillage a donc permis de bien prendre en compte les petits obstacles.

Temps  
 $\times 10^{-9} s$

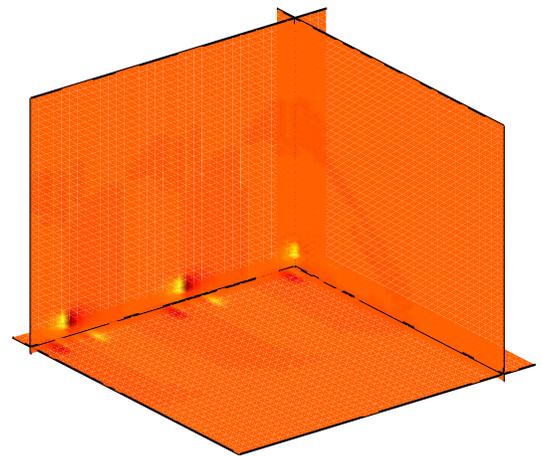
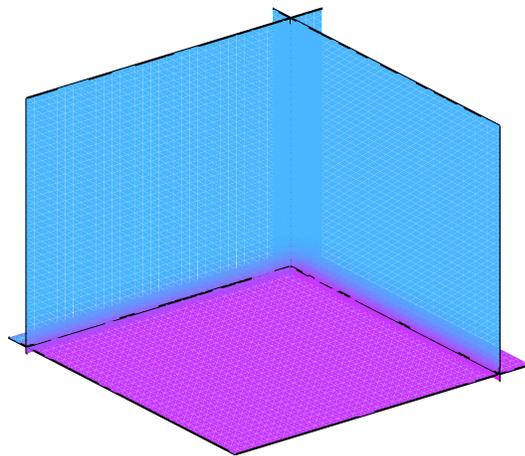
Champs  $E_y$

Champs  $E_x$

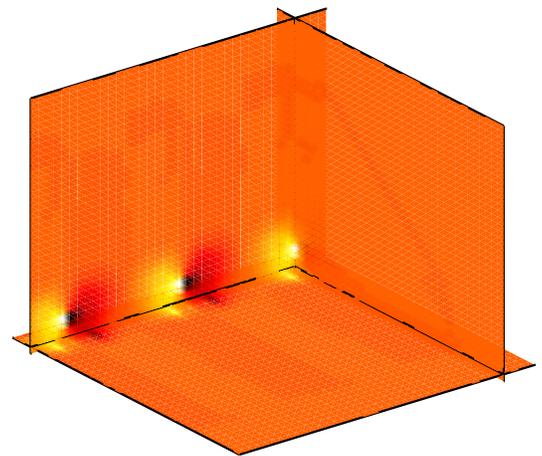
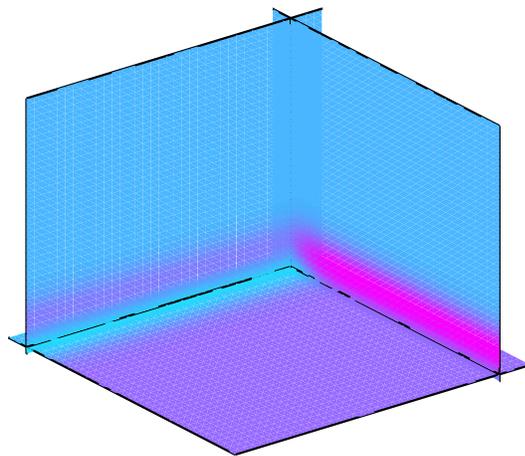
2.4



9.6



14.4



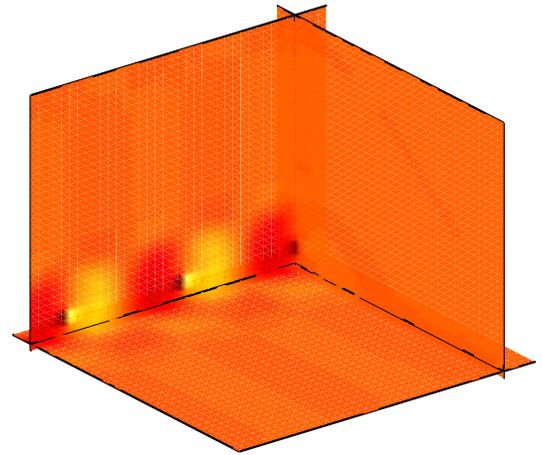
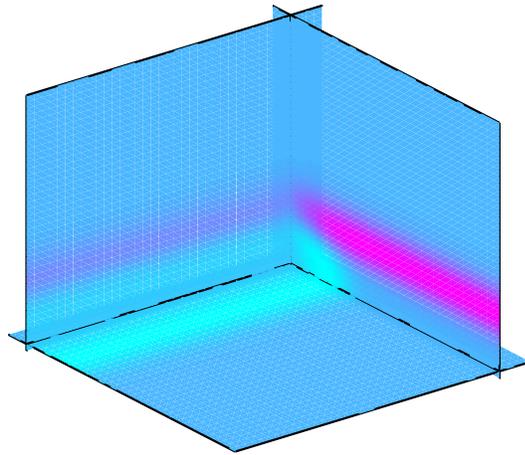
### 7.3 Une expérience type d'utilisation de raffinement de maillage.

Temps  
 $\times 10^{-9} s$

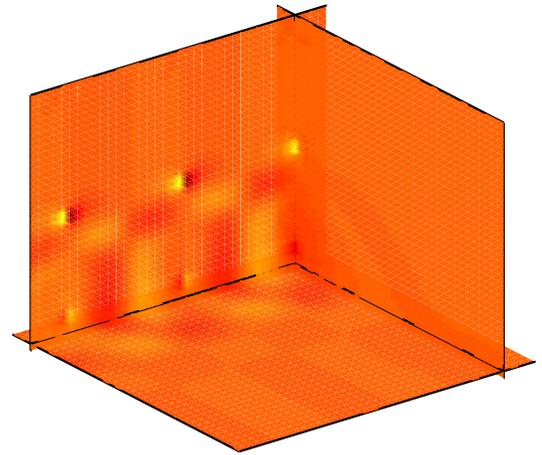
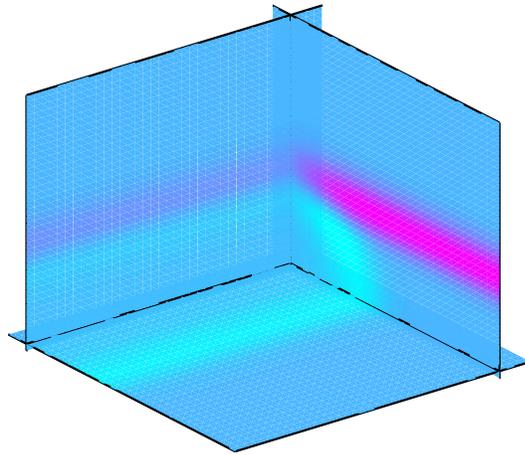
Champs  $E_y$

Champs  $E_x$

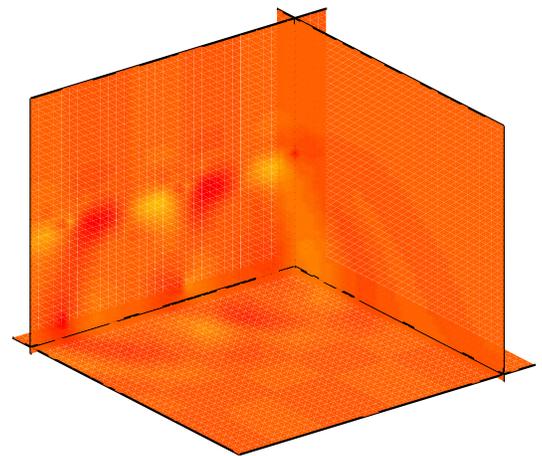
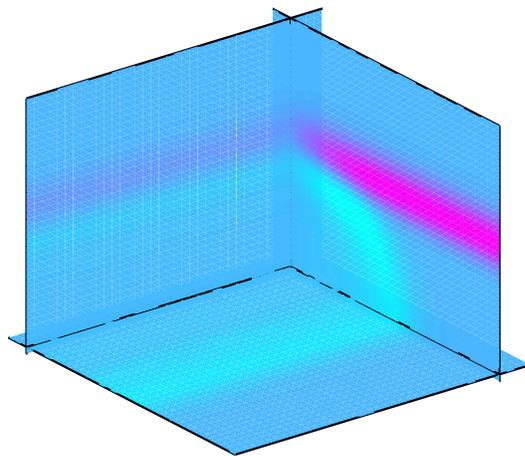
19.3



24.1



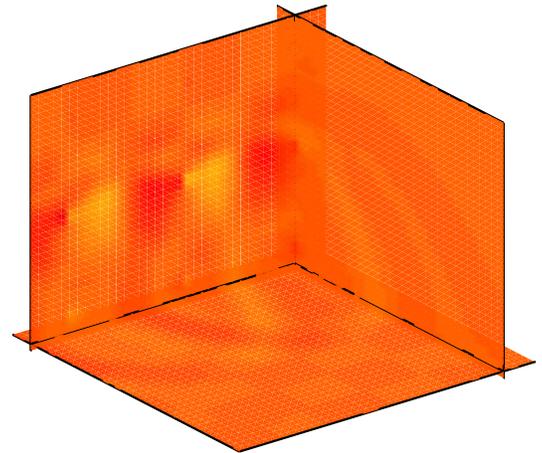
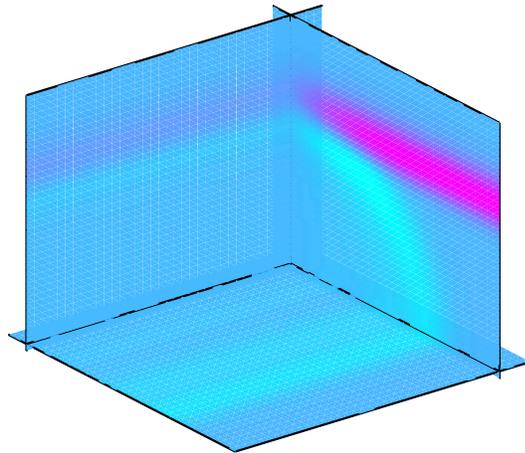
28.9



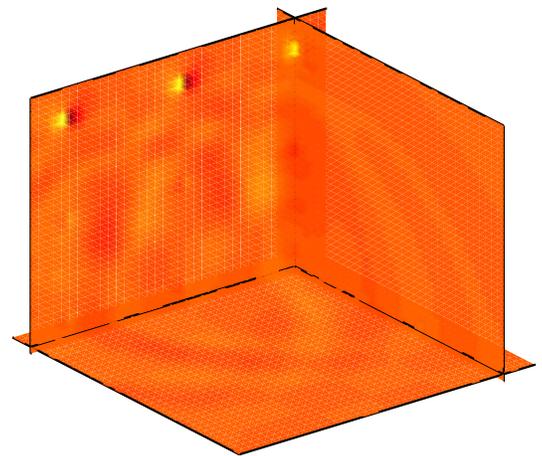
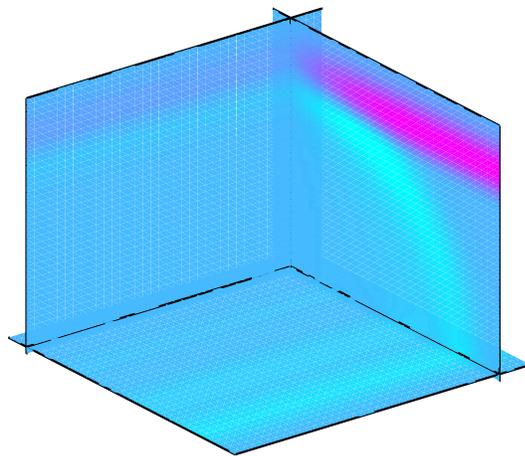
Temps  
 $\times 10^{-9} s$

Champs  $E_y$

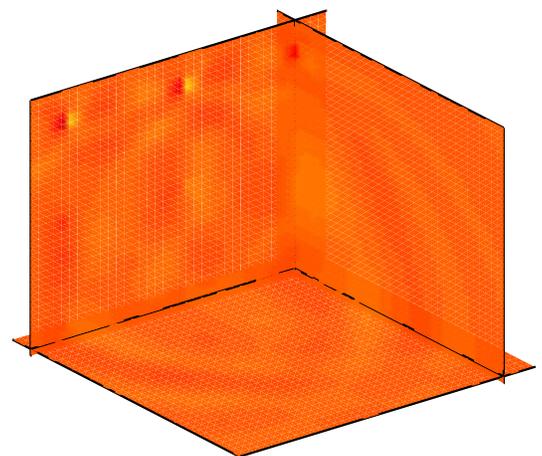
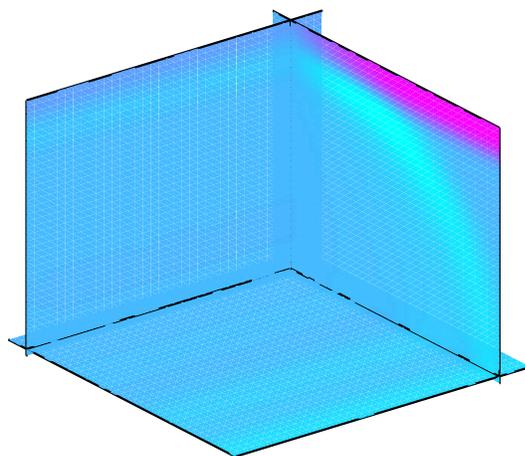
Champs  $E_x$



33.7



38.5



43.3

## Annexe A

# Analyse des effets de dispersion

On se propose ici de donner une expression approchée de l'onde numérique propagée par le schéma classique à cinq points de l'équation des ondes, avec pour schéma de démarrage

$$(A.1) \quad \begin{aligned} u_j^0 &= u_0(jh) \\ u_j^1 &= u_0(jh) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{u_0((j+1)h) - 2u_0(jh) + u_0((j-1)h)}{h^2} \end{aligned}$$

On suppose donnée la transformée de Fourier des conditions initiales

$$(A.2) \quad \hat{u}_o(k) = h \sum_j u_0(jh) e^{ijkh}$$

Le lien entre conditions initiales et la donnée  $\hat{u}_0$  est bien sûr

$$(A.3) \quad \begin{aligned} u_j^0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \hat{u}_o(k) e^{ikjh} dk \\ u_j^1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \hat{u}_o(k) \left( 1 - \frac{2\Delta t^2}{h^2} \sin^2 \left( \frac{kh}{2} \right) \right) e^{ikjh} dk \end{aligned}$$

La solution du schéma est donnée sous forme de combinaison linéaire d'ondes planes

$$(A.4) \quad u_j^n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \hat{u}_-(k) e^{i(kjh - \omega_h(k)n\Delta t)} dk + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \hat{u}_+(k) e^{i(kjh + \omega_h(k)n\Delta t)} dk,$$

avec (relation de dispersion)

$$(A.5) \quad \frac{2}{\Delta t} \sin \left( \frac{\omega_h(k)\Delta t}{2} \right) = \frac{2}{h} \sin \left( \frac{kh}{2} \right)$$

Il est facile de voir que  $u_j^n$  donné ci-dessus vérifie bien le schéma

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta t^2} = 0,$$

Il ne reste qu'à satisfaire le schéma de démarrage. On obtient un système satisfait par  $\hat{u}_d(k)$  et  $\hat{u}_g(k)$

$$(A.6) \quad \begin{aligned} \hat{u}_+ + \hat{u}_- &= \hat{u}_o(k) \\ \hat{u}_+ e^{i\omega_h(k)\Delta t} + \hat{u}_- e^{-i\omega_h(k)\Delta t} &= \hat{u}_o(k) \left( 1 - \frac{2\Delta t^2}{h^2} \sin^2 \left( \frac{kh}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

En utilisant la relation de dispersion

$$1 - 2 \frac{\Delta t^2}{h^2} \sin^2 \left( \frac{kh}{2} \right) = \cos(\omega_h(k)\Delta t)$$

le système se résout simplement en

$$(A.7) \quad \hat{u}_+ = \hat{u}_- = \frac{\hat{u}_o(k)}{2}!!$$

D'où la solution du schéma

$$(A.8) \quad u_j^n = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \hat{u}_o(k) e^{i(kjh - \omega_h(k)n\Delta t)} dk + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \hat{u}_o(k) e^{i(kjh + \omega_h(k)n\Delta t)} dk$$

On s'intéresse à un développement asymptotique de la solution numérique. On part de la relation de dispersion approchée par Taylor

$$(A.9) \quad \omega_h(k) = k - \frac{1}{24}k^3h^2\left(1 - \frac{\Delta t^2}{h^2}\right) = k - Ck^3h^2$$

D'où une expression de la solution

$$(A.10) \quad \begin{aligned} u_j^n &\approx \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \hat{u}_o(k) e^{ik(jh - n\Delta t)} (1 + in\Delta t C k^3 h^2) dk \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \hat{u}_o(k) e^{ik(jh + n\Delta t)} (1 - in\Delta t C k^3 h^2) dk \end{aligned}$$

soit ( $x_j = hj$ ,  $t_n = n\Delta t$ )

$$(A.11) \quad \begin{aligned} u_j^n &\approx \frac{1}{2} \left( u_o(x_j - t_n) - \frac{t_n}{24} h^2 \left(1 - \frac{\Delta t^2}{h^2}\right) u_o'''(x_j - t_n) \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left( u_o(x_j + t_n) + \frac{t_n}{24} h^2 \left(1 - \frac{\Delta t^2}{h^2}\right) u_o'''(x_j + t_n) \right) \end{aligned}$$

On remarque que l'on retrouve ici le résultat bien connu : l'erreur de dispersion augmente lorsque le rapport  $\frac{\Delta t}{h}$  diminue.

Pour  $\frac{\Delta t}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , on obtient

$$(A.12) \quad \begin{aligned} u_j^n &\approx \frac{1}{2} \left( u_o(x_j - t_n) - \frac{t_n}{48} h^2 u_o'''(x_j - t_n) \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left( u_o(x_j + t_n) + \frac{t_n}{48} h^2 u_o'''(x_j + t_n) \right) \end{aligned}$$

On voit que l'erreur due à la dispersion est d'ordre 2 et est d'autant plus grande que le temps de propagation  $t_n$  est grand. D'autre part, l'erreur est au second ordre proportionnelle à la dérivée troisième du signal.

Par exemple, si l'on choisit pour  $u_0$  la fonction de Harris étalée sur un intervalle de longueur  $L = 15$ , le maximum de la dérivée troisième est de l'ordre de 0.13 (cf. figure 2.9) et l'erreur est de l'ordre de  $1/2 \cdot 0.13 \cdot 30/\sqrt{2} / 48 h^2 \approx 0.028h^2$  pour un temps de propagation de  $30/\sqrt{2}$ .

## Annexe B

# Vitesse de groupe

La vitesse de propagation d'une onde est définie par la vitesse de groupe (cf. [23]).

$$(B.1) \quad C(k) = \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

où  $k$  est le nombre d'onde et  $\omega$  la pulsation

est une fonction  $\omega$ .

La relation de dispersion

$$(B.2) \quad \frac{2}{h} \sin\left(\frac{kh}{2}\right) = \frac{2}{\Delta t} \sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right)$$

nous donne alors pour la vitesse de groupe

$$C(k) = \frac{\cos\left(\frac{kh}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right)}.$$

Par ailleurs, un développement de Taylor de  $\omega$  pour  $\Delta t$  petit nous donne

$$\omega = k - \frac{k^3}{24} \Delta t^2 + O(\Delta t^3),$$

d'où

$$(B.3) \quad \begin{aligned} C(k) &\simeq 1 - \frac{k^2 \Delta t^2}{8} \\ &\simeq 1 - \frac{(\omega \Delta t)^2}{8} \end{aligned}$$

On voit donc que les ondes à hautes fréquences se propagent moins vite, ce qui concorde avec le phénomène observé (cf. 2.2.3.3). Ainsi, dans le premier exemple (figure 2.20) avec  $\omega \Delta t = 0.2$ , on trouve une vitesse de groupe  $C(k) = 0.995$ , alors que numériquement, si l'on calcule la vitesse du maximum entre les deux premières images on trouve  $C(k) = 0.9958$ . Dans la troisième expérience (figure 2.22), avec  $\omega \Delta t = \frac{3\pi}{8}$ , on trouve une vitesse de groupe de  $C(k) = 0.83$  pour un calcul numérique entre les deux premières images  $C(k) = 0.84$ .



## Annexe C

# Annulation du déterminant dans le cas $1/n$

On montre ici que le déterminant  $\delta(\omega)$  du système (3.18) ne s'annule pas sur le demi plan complexe  $\Im(\omega) > 0$ . En effet, rappelons que

$$(C.1) \quad \delta(\omega) = \frac{1}{r(n\omega)} - \sum_{l=0}^{n-1} r_l^n(\omega) \hat{G}_l(\omega\Delta t)$$

Si  $\Im(\omega\Delta t) > 0$ , on a alors  $\forall l \ |r_l(\omega) < 1|$  (cf. section 2.1.2), soit comme  $\hat{G}_l(\omega\Delta t) > 0$ ,

$$\left| \sum_{l=0}^{n-1} r_l^n(\omega) \hat{G}_l(\omega\Delta t) \right| < \left| \sum_{l=0}^{n-1} \hat{G}_l(\omega\Delta t) \right|$$

Or,

$$\begin{aligned} \hat{G}_l(\omega\Delta t) &= \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} G_m e^{-\frac{2i\pi lm}{n}} \\ \sum_{l=0}^{n-1} \hat{G}_l(\omega\Delta t) &= \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} G_m e^{-\frac{2i\pi lm}{n}} \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{n} G_m \sum_{l=0}^{n-1} e^{-\frac{2i\pi lm}{n}} \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} G_m \delta_{m=0} \\ &= G_0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

ainsi  $\forall \omega$  tel que  $\Im(\omega) > 0$ ,

$$\left| \sum_{l=0}^{n-1} r_l^n(\omega) \hat{G}_l(\omega\Delta t) \right| < 1$$

et finalement comme  $|r^{-1}(n\omega)| \geq 1$ ,

$$(C.2) \quad |\delta(\omega)| > 0 \quad \forall \omega \text{ tel que } \Im(\omega) > 0$$



## Annexe D

# Annexe : Un schéma de raccord dissipatif

Nous présentons ici une brève étude d'un schéma non centré permettant de raccorder deux grilles de discrétisations différentes. Il nous a été présenté par Bruno Després au cours d'une rencontre informelle à l'INRIA. Le schéma sans raffinement diffère quelque peu du cas qui nous intéresse. Étant une adaptation d'une discrétisation pour la dynamique des gaz, ce schéma est dispersif, mais la stratégie de raccord s'apparentant à celle que nous avons adoptée, nous avons jugé bon de l'inclure dans notre étude. Nous nous contentons de présenter ce schéma et d'en énoncer certaines propriétés.

### D.1 Le schéma sans raffinement

#### D.1.1 Équation du schéma

On cherche à résoudre dans  $\mathbb{R}$  le système suivant

$$(D.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

On discrétise l'espace avec un pas  $h$  et le temps avec un pas  $\Delta t$ . On choisit alors d'approcher  $u$  et  $v$  aux mêmes points,

$$(D.2) \quad u_j^k \approx u(jh, k\Delta t) \quad v_j^k \approx v(jh, k\Delta t).$$

Ce choix de discrétisation étant fait, un schéma des plus simples pour approcher (D.1),

$$(D.3) \quad \begin{cases} \frac{v_j^{k+1} - v_j^k}{\Delta t} = -\frac{u_{j+1}^k - u_{j-1}^k}{2h} \\ \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\Delta t} = -\frac{v_{j+1}^k - v_{j-1}^k}{2h}, \end{cases}$$

est instable. Pour le stabiliser, on ajoute un terme dissipatif d'ordre 1. Le schéma aux différences finies donne alors

$$(D.4) \quad \begin{cases} \frac{v_j^{k+1} - v_j^k}{\Delta t} = -\frac{u_{j+1}^k - u_{j-1}^k}{2h} + \frac{h}{2} \frac{v_{j+1}^k - 2v_j^k + v_{j-1}^k}{h^2} \\ \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\Delta t} = -\frac{v_{j+1}^k - v_{j-1}^k}{2h} + \frac{h}{2} \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2}, \end{cases}$$

que l'on peut également réécrire en posant  $\alpha = \Delta t/h$ ,

$$(D.5) \quad \begin{cases} v_j^{k+1} - v_j^k = -\alpha(u_{j+\frac{1}{2}}^{*,k} - u_{j-\frac{1}{2}}^{*,k}) \\ u_j^{k+1} - u_j^k = -\alpha(v_{j+\frac{1}{2}}^{*,k} - v_{j-\frac{1}{2}}^{*,k}) \end{cases}$$

en posant

$$(D.6) \quad \begin{cases} u_{j+\frac{1}{2}}^{*,k} = \frac{u_j^k + u_{j+1}^k}{2} - \frac{v_{j+1}^k - v_j^k}{2} \\ v_{j+\frac{1}{2}}^{*,k} = \frac{v_j^k + v_{j+1}^k}{2} - \frac{u_{j+1}^k - u_j^k}{2} \end{cases}$$

On peut montrer que ce schéma est dissipatif c'est-à-dire qu'il voit son énergie définie par

$$\sum (u_i^n)^2 + (v_i^n)^2$$

diminuer au cours du temps.

## D.2 Calcul de la transformée de Fourier Laplace de la solution

Dans cette section, nous calculons la transformée de Fourier Laplace de la solution. Pour des raisons pratiques nous considérons la solution du schéma discrétisé sur un maillage  $(2h, 2\Delta t)$ . Ceci est en fait une anticipation sur le raffinement qui sera fait ultérieurement.

On utilise alors les transformées de Fourier discrètes, définies par

$$(D.7) \quad \begin{aligned} \hat{v}_{2j}(\omega) &= 2\Delta t \sum_{k=0}^{\infty} v_{2j}^{2k} e^{i\omega 2k\Delta t} \\ \hat{u}_{2j}(\omega) &= 2\Delta t \sum_{k=0}^{\infty} u_{2j}^{2k} e^{i\omega 2k\Delta t} \end{aligned}$$

En multipliant par  $e^{2ki\omega\Delta t}$  les équations du schéma écrit sur le maillage  $(2h, 2\Delta t)$  et en sommant, on obtient en dehors du support de la source

$$(D.8) \quad \begin{cases} (1 - e^{-2i\omega\Delta t})\hat{v}_{2j} = \frac{\alpha}{2}(\hat{u}_{2j+2} - \hat{u}_{2j-2} - \hat{v}_{2j+2} + 2\hat{v}_{2j} - \hat{v}_{2j-2}) \\ (1 - e^{-2i\omega\Delta t})\hat{u}_{2j} = \frac{\alpha}{2}(\hat{v}_{2j+2} - \hat{v}_{2j-2} - \hat{u}_{2j+2} + 2\hat{u}_{2j} - \hat{u}_{2j-2}) \end{cases}$$

Il est plus facile de faire les calculs pour  $u + v$  et  $u - v$ , car il vient alors

$$(D.9) \quad \begin{cases} (e^{-2i\omega\Delta t} - 1 + \alpha)(\hat{v}_{2j} + \hat{u}_{2j}) = \alpha(\hat{v}_{2j-2} + \hat{u}_{2j-2}) \\ (e^{-2i\omega\Delta t} - 1 + \alpha)(\hat{v}_{2j} - \hat{u}_{2j}) = \alpha(\hat{v}_{2j+2} - \hat{u}_{2j+2}) \end{cases}$$

Si on pose  $r(\omega) = \frac{\alpha}{e^{(-i\omega\Delta t)-1+\alpha}}$ , on peut écrire

$$(D.10) \quad \begin{cases} (\hat{v}_{2j} + \hat{u}_{2j}) = r(2\omega)^j (\hat{v}_0 + \hat{u}_0) \\ (\hat{v}_{2j} - \hat{u}_{2j}) = r(2\omega)^{-j} (\hat{v}_0 - \hat{u}_0). \end{cases}$$

Les solutions s'écrivent donc

$$(D.11) \quad \begin{cases} \hat{v}_{2j} = \frac{r(2\omega)^j (\hat{v}_0 + \hat{u}_0) + r(2\omega)^{-j} (\hat{v}_0 - \hat{u}_0)}{2} \\ \hat{u}_{2j} = \frac{r(2\omega)^j (\hat{v}_0 + \hat{u}_0) - r(2\omega)^{-j} (\hat{v}_0 - \hat{u}_0)}{2} \end{cases}$$

Afin que la solution soit dans  $L^2$  on doit avoir un de ces deux termes nuls. En effet, supposons que les conditions initiales soient à gauche, si  $|r(2\omega)| < 1$ , on doit nécessairement avoir  $(\hat{v}_0 - \hat{u}_0) = 0$  ( $(\hat{v}_0 + \hat{u}_0) = 0$  dans le cas contraire).

### D.2.1 Étude de $|r(\omega)|$

Si  $\omega = x + iy$ , alors

$$(D.12) \quad \begin{aligned} \frac{1}{r(\omega)} &= \frac{e^{y\Delta t} e^{-ix\Delta t} - 1}{\alpha} + 1 \\ \Rightarrow \left| \frac{1}{r(\omega)} \right|^2 &= \left( \frac{e^{y\Delta t} \cos(x\Delta t) - 1}{\alpha} + 1 \right)^2 + \left( \frac{e^{y\Delta t} \sin(x\Delta t)}{\alpha} \right)^2 \\ &= 1 + \frac{Y^2 + 2Y(\alpha - 1) \cos(x\Delta t) - 2\alpha + 1}{\alpha} \quad \text{où } Y = e^{y\Delta t} \end{aligned}$$

On peut chercher les points du plan complexe où  $|r(\omega)| = 1$  afin de délimiter les zones où  $|r(\omega)| > 1$  et celles où  $|r(\omega)| < 1$ . On obtient dans ce cas des résultats géométriques intéressants, selon que  $\alpha \in ]0, \frac{1}{2}[$ ,  $\alpha = \frac{1}{2}$  ou  $\alpha \in ]\frac{1}{2}, 1[$ . Mais la frontière se situe toujours dans le demi-plan  $\Im(\omega) \leq 0$ , et n'intervient donc pas car les transformées de Fourier considérées sont définies et analytiques pour  $\Im(\omega) \geq M > 0$  comme nous l'avions vu dans la section 2.1 de la partie 1. En effet  $|r(\omega)| - 1$  ne s'annule pas sur le demi-plan complexe  $\Im(\omega) > 0$ .

$$\forall y \geq 0, Y = e^{y\Delta t} \geq 1$$

$$(D.13) \quad \begin{aligned} \text{Soit } f(Y) &= Y^2 + 2Y(\alpha - 1) \cos(x\Delta t) + 1 - 2\alpha \\ f(1) &= 2(1 - \alpha)(1 - \cos(x\Delta t)) \geq 0 \\ \text{Or } f'(Y) &= 2[Y - (1 - \alpha) \cos(x\Delta t)] \end{aligned}$$

$$(1 - \alpha) \cos(x\Delta t) < 1 \leq Y \implies f'(Y) > 0$$

donc  $f$  est strictement croissante. Comme  $f(1) \geq 0, \forall y \geq 0, \left| \frac{1}{r(2\omega)} \right| > 1$ .

On peut donc écrire pour l'onde incidente sous la forme

$$(D.14) \quad \forall \alpha \in ]0, 1[, \quad \hat{v}_{2j} = \hat{u}_{2j} = r(2\omega)^j \hat{v}_0$$

## D.2.2 Analyse de la dispersion

Pour faire le lien avec une analyse par ondes planes, on peut écrire  $r(\omega) = e^{ik_h(\omega)h}$ . On peut alors en déduire la relation de dispersion

$$(D.15) \quad \alpha \left( e^{ik_h(\omega)h} - 1 \right) = e^{-i\omega\Delta t} - 1$$

Si on effectue un développement limité de  $k_h(\omega)$  au voisinage de  $\Delta t = 0$ , on trouve

$$(D.16) \quad k_h(\omega) = \omega + \frac{i\omega^2\Delta t}{2} \left( \frac{1-\alpha}{\alpha} \right) + O(\Delta t^2)$$

Donc la dispersion est d'ordre 1, ce à quoi on s'exposait car le schéma est étudié pour que son énergie diminue. De plus, les expériences numériques montrent que cette décroissance est forte. C'est l'inconvénient majeur de ce schéma.

## D.3 Un schéma de raffinement 1-2

### D.3.1 Présentation des équations de raccord

Le schéma de raffinement est basée sur la décroissance de l'énergie pour garantir la stabilité, nous ne présentons pas ici la preuve de cette décroissance, mais uniquement le schéma de raccord. On considère deux grilles de discrétisation, l'une située sur  $\mathbb{R}^+$  maillée avec des pas  $h$  en espace et  $\Delta t$  en temps, l'autre située sur  $\mathbb{R}^-$  maillée avec des pas doublés ( $2h$  et  $2\Delta t$ ). Dans chaque grille on utilise le schéma (D.5) écrit avec la discrétisation correspondante. On note  $(u_f)_j^k$  et  $(v_f)_j^k$ , les solutions dans la grille fine aux points  $(j, k)$  ( $j > 0$ ) et  $(u_g)_{2j}^{2k}$  et  $(v_g)_{2j}^{2k}$  les solutions dans la grille grossière aux points  $(2j, 2k)$  ( $j \leq 0$ ). Pour raccorder les deux grilles, on est amené à modifier les équations en  $j = 1$  pour la grille fine et en  $j = 0$  pour la grille grossière. Pour  $j = 1$ , il suffit de compléter le point manquant pour le schéma dans la grille fine avec un point de la grille grossière. On prend par exemple pour  $v$  (pour  $u$ , il suffit de permuter):

$$(D.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} (v_f)_1^{2k+1} - (v_f)_1^{2k} = -\alpha((u_f)_{\frac{3}{2}}^{*,2k} - (u_f)_{\frac{1}{2}}^{*,2k}) \\ (v_f)_1^{2k+2} - (v_f)_1^{2k+1} = -\alpha((u_f)_{\frac{3}{2}}^{*,2k+1} - (u_f)_{\frac{1}{2}}^{**,2k+1}) \\ \text{avec } (u_f)_{\frac{1}{2}}^{**,2k+1} = \frac{(u_g)_0^{2k} + (u_f)_1^{2k+1}}{2} - \frac{(v_f)_1^{2k} - (v_g)_0^{2k+1}}{2} \end{array} \right.$$

ce qui donne en remplaçant:

$$(D.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} (v_f)_1^{2k+1} - (v_f)_1^{2k} = -\frac{\alpha}{2}((u_f)_2^{2k} - (u_g)_0^{2k} - (v_f)_2^{2k} + 2(v_f)_1^{2k} - (v_g)_0^{2k}) \\ (v_f)_1^{2k+2} - (v_f)_1^{2k+1} = -\frac{\alpha}{2}((u_f)_2^{2k+1} - (u_g)_0^{2k} - (v_f)_2^{2k+1} + 2(v_f)_1^{2k+1} - (v_g)_0^{2k}) \end{array} \right.$$

Et pour  $j = 0$ , on choisit de prendre (exemple pour  $v$ )

$$(D.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} (v_g)_0^{2k+2} - (v_g)_0^{2k} = -\alpha((u_f)_{\frac{1}{2}}^{***,2k} - (u_g)_{-\frac{1}{2}}^{*,2k}) \\ \text{où } (u_f)_{\frac{1}{2}}^{***,2k} = \frac{1}{2} \left( (u_g)_0^{2k} + \frac{(u_f)_1^{2k} + (u_f)_1^{2k+1}}{2} + (v_g)_0^{2k} - \frac{(v_f)_1^{2k} + (v_f)_1^{2k+1}}{2} \right) \end{array} \right.$$

ce qui donne

$$(D.20) \quad (v_g)_0^{2k+2} - (v_g)_0^{2k} = -\frac{\alpha}{2} \left( \frac{(u_f)_1^{2k} + (u_f)_1^{2k+1}}{2} - (u_g)_{-2}^{2k} - \frac{(v_f)_1^{2k} + (v_f)_1^{2k+1}}{2} + 2(v_g)_0^{2k} - (v_g)_{-2}^{2k} \right)$$

On peut ensuite montrer qu'un équivalent discret de la norme de la solution est toujours borné en montrant que ce schéma garde la propriété de décroissance de l'énergie du schéma sans raffinement.

De plus, si on s'intéresse à  $(u + v)$  et  $(u - v)$ , on constate alors facilement à partir de ces équations que  $(u - v)$  reste toujours nul à droite de la condition initiale, et  $(u + v)$  reste nul à gauche de la condition initiale. C'est une propriété du problème continu qui reste exacte pour ce schéma car il est décentré. Ceci constitue toute la différence avec le schéma de Yee, où les maillages décalés empêchent de comparer  $u$  et  $v$ . Cette caractéristique, permet de supposer que la réflexion à l'interface sera nulle. En effet si la condition initiale se trouve à gauche de l'interface, c'est alors " $(u + v)$ " qui se propage vers l'interface, s'il y avait réflexion  $(u + v)$  finirait par se trouver non nul à gauche de la condition initiale. Ceci sera d'ailleurs confirmée par le calcul des coefficients de réflexion-transmission via l'analyse par Fourier-Laplace que nous effectuons dans ce qui suit.

### D.3.2 Calcul des transformées de la solution en présence du raffinement

L'idée ici est d'utiliser les transformées de Fourier-Laplace des solutions des schémas dans la grille fine et dans la grille grossière afin de calculer les coefficients de réflexion et de transmission à l'interface entre les deux grilles. On suppose ici que les conditions initiales sont à support dans  $x < 0$ .

#### D.3.2.1 Étude dans la grille grossière

On cherche la solution dans la grille grossière sous la forme

$$(D.21) \quad \begin{cases} (v_g)_{2j}^{2k} = v_{2j}^{2k} + (\tilde{v}_g)_{2j}^{2k}, \\ (u_g)_{2j}^{2k} = u_{2j}^{2k} + (\tilde{u}_g)_{2j}^{2k} \end{cases}$$

où  $v_{2j}^{2k}$  et  $u_{2j}^{2k}$  sont les ondes numériques incidentes, c'est à dire celles qui vérifient le schéma (1.5) pour  $j \in \mathbb{Z}$  avec les mêmes conditions initiales que  $(u_g)$  et  $(v_g)$  en  $k = 0$ .

On introduit alors les transformées de Fourier-Laplace discrètes en temps définies par

$$(D.22) \quad \begin{cases} (\hat{v}_g)_{2j}(\omega) = 2\Delta t \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{v}_g)_{2j}^{2k} e^{i\omega 2k \Delta t} \\ (\hat{u}_g)_{2j}(\omega) = 2\Delta t \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{u}_g)_{2j}^{2k} e^{i\omega 2k \Delta t} \end{cases}$$

Le support de la condition initiale étant dans  $x < 0$ , les transformées des solutions incidentes  $u$  et  $v$  sont celles définies par (D.14).

On peut faire pour l'onde réfléchie, représentée par  $(\hat{v}_g)$  et  $(\hat{u}_g)$ , la même étude que sans raffinement et on aboutit à

$$(D.23) \quad \forall j \leq 0, \quad (\hat{v}_g)_{2j} = -(\hat{u}_g)_{2j} = r(2\omega)^{-j}(\hat{v}_g)_0 = Rr(2\omega)^{-j}\hat{v}_0$$

où  $R$  est une constante adimensionnée à déterminer.

### D.3.2.2 Étude dans la grille fine

Notons  $(\hat{v}_f)_j^P$  et  $(\hat{v}_f)_j^I$ , les transformées de  $v_f$  définies par

$$(D.24) \quad \begin{cases} (\hat{v}_f)_j^I(\omega) &= 2\Delta t \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{v}_f)_j^{2k+1} e^{i\omega(2k+1)\Delta t} \\ (\hat{v}_f)_j^P(\omega) &= 2\Delta t \sum_{k=0}^{\infty} (v_f)_j^{2k} e^{i\omega 2k\Delta t} \end{cases}$$

Rappelons que les équations dans la grille fine s'écrivent.

$$(D.25) \quad \begin{cases} (v_f)_j^{k+1} - (v_f)_j^k = -\frac{\alpha}{2}((u_f)_{j+1}^k - (u_f)_{j-1}^k - (v_f)_{j+1}^k + 2(v_f)_j^k - (v_f)_{j-1}^k) \\ (u_f)_j^{k+1} - (u_f)_j^k = -\frac{\alpha}{2}((v_f)_{j+1}^k - (v_f)_{j-1}^k - (u_f)_{j+1}^k + 2(u_f)_j^k - (u_f)_{j-1}^k) \end{cases}$$

En prenant ces équations pour  $k = 2n$  et  $k = 2n + 1$ , en multipliant par  $e^{ik\omega\Delta t}$  et en sommant sur  $n$ , on obtient

$$(D.26) \quad \begin{cases} A_f(\widehat{V}_f)_j = -\frac{\alpha}{2} \left( (\widehat{U}_f)_{j+1} - (\widehat{U}_f)_{j-1} - (\widehat{V}_f)_{j+1} + 2(\widehat{V}_f)_j - (\widehat{V}_f)_{j-1} \right) \\ A_f(\widehat{U}_f)_j = -\frac{\alpha}{2} \left( (\widehat{V}_f)_{j+1} - (\widehat{V}_f)_{j-1} - (\widehat{U}_f)_{j+1} + 2(\widehat{U}_f)_j - (\widehat{U}_f)_{j-1} \right) \end{cases}$$

où

$$A_f = \begin{pmatrix} -1 & e^{-i\omega\Delta t} \\ e^{-i\omega\Delta t} & -1 \end{pmatrix}, \quad (\widehat{V}_f)_j = \begin{pmatrix} (\hat{v}_f)_j^P \\ (\hat{v}_f)_j^I \end{pmatrix} \text{ et } (\widehat{U}_f)_j = \begin{pmatrix} (\hat{u}_f)_j^P \\ (\hat{u}_f)_j^I \end{pmatrix}$$

Or les valeurs propres de  $A_f$  sont  $(e^{-i\omega\Delta t} - 1)$  et  $(e^{-i(\omega + \frac{\pi}{\Delta t})\Delta t} - 1)$ , et des vecteurs

propres associés sont  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

On peut alors se ramener au problème de l'onde incidente, et écrire:

$$(D.27) \quad (\widehat{V}_f)_j = (\widehat{U}_f)_j = \hat{v}_0 T r(\omega)^j \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \hat{v}_0 T_p r \left( \omega + \frac{\pi}{\Delta t} \right)^j \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

où  $T$  et  $T_p$  sont des constantes à déterminer.

### D.3.2.3 Calcul des coefficients de réflexion

On utilise ici, les équations de raccord afin de déterminer les constantes  $R$ ,  $T$  et  $T_p$ . On utilise (D.18) et (D.20) et on passe aux transformées de Fourier.

Si l'on compare l'équation de raccord en  $j = 0$  (D.20), avec l'équation écrite dans la grille grossière prolongée d'une maille, on obtient

$$(D.28) \quad (u_g)_2^{2k} - (v_g)_2^{2k} = \frac{(u_f)_1^{2k} + (u_f)_1^{2k+1}}{2} - \frac{(v_f)_1^{2k} + (v_f)_1^{2k+1}}{2}$$

Ce qui donne après multiplication par  $e^{i\omega 2k\Delta t}$  et sommation sur  $k$

$$(D.29) \quad (\hat{u}_g)_2 + \hat{u}_2 - (\hat{v}_g)_2 - \hat{v}_2 = \frac{(\hat{u}_f)_1^P - (\hat{v}_f)_1^P + e^{-i\omega\Delta t}((\hat{u}_f)_1^I - (\hat{v}_f)_1^I)}{2}$$

Comme  $(\widehat{V}_f)_j = (\widehat{U}_f)_j$ , et  $\hat{u}_{2j} = \hat{v}_{2j}$ , on a  $(\hat{u}_g)_2 - (\hat{v}_g)_2 = 0$ . De plus,  $(\hat{u}_g)_{2j} = -(\hat{v}_g)_{2j}$  on a donc  $R = 0$

**Remarque 12** Cette manière de comparer deux équations en prolongeant le schéma écrit à l'intérieur jusque sur l'interface pour calculer  $R$  est complètement équivalente à celle qui consisterait à insérer les solutions générales dans les équations de raccord.

Si l'on compare les équations de raccord en  $j = 1$  (D.18), avec le schéma à l'intérieur de la grille fine vérifié par les  $(v_f)_j^k$  et  $(u_f)_j^k$  et prolongé en  $j = 1$ , on obtient

$$(D.30) \quad \begin{cases} (u_f)_0^{2k} + (v_f)_0^{2k} = (u_g)_0^{2k} + (v_g)_0^{2k} \\ (u_f)_0^{2k+1} + (v_f)_0^{2k+1} = (u_g)_0^{2k} + (v_g)_0^{2k} \end{cases}$$

En multipliant la première équation par  $e^{i\omega 2k\Delta t}$  la deuxième par  $e^{i\omega(2k+1)\Delta t}$ , et en sommant sur  $k$ , on obtient

$$(D.31) \quad \begin{cases} (\hat{v}_f)_0^P + (\hat{u}_f)_0^P = (\hat{v}_g)_0 + \hat{v}_0 + (\hat{u}_g)_0 + \hat{u}_0 \\ (\hat{v}_f)_0^I + (\hat{u}_f)_0^I = e^{i\omega\Delta t} ((\hat{v}_g)_0 + \hat{v}_0 + (\hat{u}_g)_0 + \hat{u}_0) \end{cases} \implies \begin{cases} T + T_p = 1 \\ T - T_p = e^{i\omega\Delta t} \end{cases}$$

Donc finalement les coefficients sont

$$(D.32) \quad \begin{cases} T = \frac{1 + e^{i\omega\Delta t}}{2} \\ T_p = \frac{1 - e^{i\omega\Delta t}}{2} \\ R = 0 \end{cases}$$

La nullité de la réflexion est l'avantage principal de ce schéma, et va lui assurer la stabilité. De plus on a montré que le schéma était consistant, et que les coefficients de transmission étaient d'ordre 1.

### D.3.2.4 onde incidente dans la grille fine

On peut effectuer des calculs similaires pour une onde incidente venant de la grille fine, et on trouve aussi des coefficients de réflexions nuls et une transmission d'ordre 1.

Plus précisément, si  $\widehat{U}_j = -\widehat{V}_j = Ar(\omega)^{-j} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + Br\left(\omega + \frac{\pi}{\Delta t}\right)^{-j} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  à droite,

$$(D.33) \quad \begin{aligned} &(\widehat{V}_f)_j = 0 \quad (\text{onde réfléchie}) \\ &(\widehat{u}_g)_{2j} = -(\widehat{v}_g)_{2j} = Tr(2\omega)^{-j} \quad \text{avec} \quad T = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}r(2\omega)e^{-i\omega\Delta t} \end{aligned}$$

On n'a donc aucune réflexion, ce qui assure la stabilité, même dans le cas d'une bande raffinée.

## Annexe E

# Lien entre la formulation variationnelle et la formulation différences finies pour un problème en deux dimensions.

Dans la deuxième partie de ce document, nous avons présenté une méthode de raffinement de maillage, basée sur la conservation d'une énergie discrète. L'approche différences finies 1D que nous avons faite à été étendue au cas de Maxwell 2D pour la polarisation transverse électrique. Dans la troisième partie de ce document nous avons montré que cette méthode s'inscrivait dans un cadre variationnel plus général et montré que le schéma 1D exhibé dans la deuxième partie aboutissait aux mêmes équations de raccord quelque soit la formulation. Nous tentons ici d'opérer de même en montrant que le schéma aux différences finies exhibé dans la deuxième partie, s'inscrit bien dans le cadre variationnel de la troisième partie.

### E.1 Construction accélérée de la méthode variationnelle

Le lecteur est sans doute maintenant familiarisé avec la problématique, nous ne détaillerons donc pas la méthode mais insisterons simplement sur les points importants, permettant de retrouver le schéma de raccord 2D. On cherche ici à discrétiser les équations de Maxwell pour la polarisation transverse électrique

$$(E.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H_z}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} + \frac{\partial H_z}{\partial x} = 0 \end{array} \right.$$

sur deux grilles de discrétisations différentes. La grille située sur le domaine  $\Omega_g$  ( $x < 0$ ), est 2 fois plus grossière en temps et en espace que la grille située sur le domaine  $\Omega_f$  ( $x > 0$ ). Dans la suite, nous noterons  $\Sigma$  la frontière commune de  $\Omega_g$  et  $\Omega_f$ . La présentation faite en 1.2 est suffisamment générale pour que l'on puisse l'étendre à notre problème sans trop de difficulté.

Nous laissons soin au lecteur d'effectuer la démarche permettant d'obtenir la formulation variationnelle suivante

Trouver  $(E_x^g, E_y^g, H_z^g, E_x^f, E_y^f, H_z^f$  et  $j$ ) dans  $\mathcal{E}_x^g \times \mathcal{E}_y^g \times \mathcal{H}_g \times \mathcal{E}_x^f \times \mathcal{E}_y^f \times \mathcal{H}_f \times J$  tels que

$$(E.2) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}(H_z^g, \tilde{H}_z^g)_{L^2(\Omega_g)} + b_x^g(\tilde{H}_z^g, E_y^g) - b_y^g(\tilde{H}_z^g, E_x^g) = 0 & \forall \tilde{H}_z^g \in \mathcal{H}_g \\ \frac{d}{dt}(E_x^g, \tilde{E}_x^g)_{L^2(\Omega_g)} + b_y^g(H_z^g, \tilde{E}_x^g) = 0 & \forall \tilde{E}_x^g \in \mathcal{E}_y^g \\ \frac{d}{dt}(E_y^g, \tilde{E}_y^g)_{L^2(\Omega_g)} - b_x^g(H_z^g, \tilde{E}_y^g) + (j, \gamma_g \tilde{E}_y^g) = 0 & \forall \tilde{E}_y^g \in \mathcal{E}_x^g \end{cases}$$

$$(E.3) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}(H_z^f, \tilde{H}_z^f)_{L^2(\Omega_f)} + b_x^f(\tilde{H}_z^f, E_y^f) - b_y^f(\tilde{H}_z^f, E_x^f) = 0 & \forall \tilde{H}_z^f \in \mathcal{H}_f \\ \frac{d}{dt}(E_x^f, \tilde{E}_x^f)_{L^2(\Omega_f)} + b_y^f(H_z^f, \tilde{E}_x^f) = 0 & \forall \tilde{E}_x^f \in \mathcal{E}_y^f \\ \frac{d}{dt}(E_y^f, \tilde{E}_y^f)_{L^2(\Omega_f)} - b_x^f(H_z^f, \tilde{E}_y^f) - (j, \gamma_f \tilde{E}_y^f) = 0 & \forall \tilde{E}_y^f \in \mathcal{E}_x^f \end{cases}$$

avec la condition

$$(E.4) \quad (\tilde{j}, \gamma_g E_y^g(j))_{L^2(\Sigma)} = (\tilde{j}, \gamma_f E_y^f(j))_{L^2(\Sigma)} \quad \forall \tilde{j} \in J$$

où

$$\begin{cases} \mathcal{E}_x^g = \left\{ \phi \in L^2(\Omega_g), \frac{\partial \phi}{\partial x} \in L^2(\Omega_g) \right\} \\ \mathcal{E}_y^g = \left\{ \phi \in L^2(\Omega_g), \frac{\partial \phi}{\partial y} \in L^2(\Omega_g) \right\} \\ \mathcal{H}_g = L^2(\Omega_g) \\ \mathcal{E}_x^f = \left\{ \phi \in L^2(\Omega_f), \frac{\partial \phi}{\partial x} \in L^2(\Omega_f) \right\} \\ \mathcal{E}_y^f = \left\{ \phi \in L^2(\Omega_f), \frac{\partial \phi}{\partial y} \in L^2(\Omega_f) \right\} \\ \mathcal{H}_f = L^2(\Omega_f) \\ J = H^{-1/2}(\text{div}, \Sigma) \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} b_x^f(v, u) &= \int_{\Omega_f} v \frac{\partial u}{\partial x} dx dy & b_x^g(v, u) &= \int_{\Omega_g} v \frac{\partial u}{\partial x} dx dy, \\ b_y^f(v, u) &= \int_{\Omega_f} v \frac{\partial u}{\partial y} dx dy & b_y^g(v, u) &= \int_{\Omega_g} v \frac{\partial u}{\partial y} dx dy, \end{aligned}$$

$\gamma_g$  et  $\gamma_f$  sont des opérateurs de trace de  $\mathcal{E}_x^g$  et  $\mathcal{E}_x^f$  dans  $J$ .

Il est ensuite facile de voir que cette formulation permet de conserver l'énergie définie par

$$E(t) = \int_{\Omega_f} |E_x^f|^2 + |E_y^f|^2 + |H_z^f|^2 dx dy + \int_{\Omega_g} |E_x^g|^2 + |E_y^g|^2 + |H_z^g|^2 dx dy$$

car

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_{\Sigma} E_y^g j dy - \int_{\Sigma} E_y^f j dy = 0.$$

Nous ne nous étendons pas sur la discrétisation, le lecteur souhaitant plus de détails peut se référer à la discrétisation du problème 3D (chapitre 3 de la partie 3). On choisit de discrétiser les domaines  $\Omega_f$  et  $\Omega_g$  à l'aide de deux maillages  $\mathcal{T}_h^f$  et  $\mathcal{T}_{2h}^g$  constitués chacun d'un ensemble de rectangles identiques. Afin de retrouver le schéma de Yee à l'intérieur de chaque grille, on choisit ensuite comme espace d'approximation

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{E}_x^f)_h &= \left\{ E_y^f \in \mathcal{E}_x^f / \forall K \in \mathcal{T}_h^f, E_y^f|_K \in \mathcal{Q}_{1,0}^K \right\} \\
 (\mathcal{E}_x^g)_{2h} &= \left\{ E_y^g \in \mathcal{E}_x^g / \forall K \in \mathcal{T}_{2h}^g, E_y^g|_K \in \mathcal{Q}_{1,0}^K \right\} \\
 (\mathcal{E}_y^f)_h &= \left\{ E_x^f \in \mathcal{E}_y^f / \forall K \in \mathcal{T}_h^f, E_x^f|_K \in \mathcal{Q}_{0,1}^K \right\} \\
 (\mathcal{E}_y^g)_{2h} &= \left\{ E_x^g \in \mathcal{E}_y^g / \forall K \in \mathcal{T}_{2h}^g, E_x^g|_K \in \mathcal{Q}_{0,1}^K \right\} \\
 (\mathcal{H}_g)_{2h} &= \left\{ H_z^g \in \mathcal{H}_g / \forall K \in \mathcal{T}_{2h}^g, H_z^g|_K \in \mathcal{Q}_{0,0}^K \right\} \\
 (\mathcal{H}_f)_h &= \left\{ H_z^f \in \mathcal{H}_f / \forall K \in \mathcal{T}_h^f, H_z^f|_K \in \mathcal{Q}_{0,0}^K \right\}
 \end{aligned}$$

où  $\mathcal{Q}_{p,q}^K$  désigne l'ensemble des fonctions de  $K$  s'écrivant  $P_p(x) \times P_q(y)$ ,  $P_p(x)$  désignant l'ensemble des Polynômes de degré  $p$ . Les degrés de liberté de  $H_z$  se situent donc au centre des mailles, ceux de  $E_x$  aux centres des arêtes parallèles à  $e_x$  tandis que ceux de  $E_y$  se situent aux centres des arêtes parallèles à  $e_y$ .

En regroupant ensuite les degrés de liberté de chaque inconnue dans un même vecteur, on aboutit alors au problème matriciel suivant.

$$(E.5) \quad \begin{cases} m_{H_z}^g \frac{(\mathbb{H}_z^g)^{2n+1} - (\mathbb{H}_z^g)^{2n-1}}{2\Delta t} + (B_x^g)^*(\mathbb{E}_y^g)^{2n} - (B_y^g)^*(\mathbb{E}_x^g)^{2n} = 0 \\ m_{E_x}^g \frac{(\mathbb{E}_x^g)^{2n+2} - (\mathbb{E}_x^g)^{2n}}{2\Delta t} + B_y^g(\mathbb{H}_z^g)^{2n+1} \\ m_{E_y}^g \frac{(\mathbb{E}_y^g)^{2n+2} - (\mathbb{E}_y^g)^{2n}}{2\Delta t} - B_x^g(\mathbb{H}_z^g)^{2n+1} + C_g \mathbb{J}^{2n+1} = 0 \end{cases}$$

$$(E.6) \quad \begin{cases} m_{H_z}^f \frac{(\mathbb{H}_z^f)^{2n+\frac{1}{2}} - (\mathbb{H}_z^f)^{2n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} + (B_x^f)^*(\mathbb{E}_y^f)^{2n} - (B_y^f)^*(\mathbb{E}_x^f)^{2n} = 0 \\ m_{E_x}^f \frac{(\mathbb{E}_x^f)^{2n+1} - (\mathbb{E}_x^f)^{2n}}{\Delta t} + B_y^f(\mathbb{H}_z^f)^{2n+\frac{1}{2}} = 0 \\ m_{E_y}^f \frac{(\mathbb{E}_y^f)^{2n+1} - (\mathbb{E}_y^f)^{2n}}{\Delta t} - B_x^f(\mathbb{H}_z^f)^{2n+\frac{1}{2}} - C_f \mathbb{J}^{2n+1} = 0 \end{cases}$$

$$(E.7) \quad \begin{cases} m_{H_z}^f \frac{(\mathbb{H}_z^f)^{2n+\frac{3}{2}} - (\mathbb{H}_z^f)^{2n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} + (B_x^f)^*(\mathbb{E}_y^f)^{2n+1} - (B_y^f)^*(\mathbb{E}_x^f)^{2n+1} = 0 \\ m_{E_x}^f \frac{(\mathbb{E}_x^f)^{2n+2} - (\mathbb{E}_x^f)^{2n+1}}{\Delta t} + B_y^f(\mathbb{H}_z^f)^{2n+\frac{3}{2}} = 0 \\ m_{E_y}^f \frac{(\mathbb{E}_y^f)^{2n+2} - (\mathbb{E}_y^f)^{2n+1}}{\Delta t} - B_x^f(\mathbb{H}_z^f)^{2n+\frac{3}{2}} - C_f \mathbb{J}^{2n+1} = 0 \end{cases}$$

$$(E.7) \quad (C_g) \frac{(\mathbb{E}_y^g)^{2n+2} + (\mathbb{E}_y^g)^{2n}}{2} - (C_f) \frac{(\mathbb{E}_y^f)^{2n+2} + 2(\mathbb{E}_y^f)^{2n+1} + (\mathbb{E}_y^f)^{2n}}{4} = 0$$

L'attention étant portée ici sur les équations à l'interface, nous laissons soin au lecteur de s'assurer que la discrétisation choisie aboutit (après calcul des intégrales par formule de quadrature) à l'intérieur de chaque grille au schéma de Yee 2D.

## E.2 Choix de la discrétisation et lien avec le schéma de raccord aux différences finies

Il nous reste à expliciter les restrictions des matrices sur l'interface pour compléter le schéma. Il nous faut auparavant préciser l'espace de discrétisation pour  $J$ . Nous choisissons tout d'abord de discrétiser l'interface par  $D^{2h}$  l'ensemble des segments de longueur  $2h$  trace du maillage grossier sur l'interface. Une première discrétisation possible serait de prendre l'ensemble des polynômes de degré 1 pour discrétiser  $J$ , c'est-à-dire

$$J^{2h} = \left\{ j^{2h} \in J / \forall S \in D^{2h} j|_S \in P_1(y) \right\}$$

mais cette discrétisation conduirait à des degrés de liberté pour  $j^{2h}$  situés aux sommets des rectangles, et la discrétisation de (E.4) permettant de calculer le courant, lierait les degrés de liberté de  $j$  d'une maille à l'autre et conduirait à la résolution d'un système linéaire. Ce n'est pas le cas du raccord trouvé dans la partie 2. Nous choisissons donc de discrétiser  $J$  à l'aide de

$$J^{2h} = \left\{ j^{2h} \in J / \forall S \in D^{2h} j|_S \in P_0(y) \right\}$$

Ce choix étant fait, le calcul des matrices  $C_g$  et  $C_f$  est simple. On trouve en effet, en notant  $K(k, l)$  le numéro du degré de liberté situé en  $(kh, lh)$  et  $(k(K), l(K))$  les indices de positions du degré de liberté  $K$ .

$$(C_g)_{K,L} = 2h \delta_{l(K)}^{l(L)} \delta_{k(L)}^0$$

$$(C_f)_{K,L} = h \left( \delta_{l(K)+\frac{1}{2}}^{l(L)} + \delta_{l(K)-\frac{1}{2}}^{l(L)} \right) \delta_{k(L)}^0$$

L'équation

$$(C_g) \frac{(\mathbb{E}_y^g)^{2n+2} + (\mathbb{E}_y^g)^{2n}}{2} - (C_f) \frac{(\mathbb{E}_y^f)^{2n+2} + 2(\mathbb{E}_y^f)^{2n+1} + (\mathbb{E}_y^f)^{2n}}{4} = 0$$

s'écrit alors

$$(E.8) \quad h \left( (E_y^g)_{0,2j+1}^{2n+2} + (E_y^g)_{0,2j+1}^{2n} \right) = \frac{h}{4} \left( (E_y^f)_{0,2j+\frac{1}{2}}^{2n+2} + (E_y^f)_{0,2j+\frac{3}{2}}^{2n+2} + 2 \left( (E_y^f)_{0,2j+\frac{1}{2}}^{2n+1} + (E_y^f)_{0,2j+\frac{3}{2}}^{2n+1} \right) + (E_y^f)_{0,2j+\frac{1}{2}}^{2n} + (E_y^f)_{0,2j+\frac{3}{2}}^{2n} \right)$$

On calcule ensuite

$$(B_x^f)_{K(0,l),L(p,m)} = h \delta_m^l \delta_p^{\frac{1}{2}} \quad (B_x^g)_{K(0,l),L(p,m)} = -2h \delta_m^l \delta_p^{-1}$$

$$(m_{E_y}^g)_{K(0,l),L(p,m)} = 2h^2 \delta_m^l \delta_p^0 \quad (m_{E_y}^f)_{K(0,l),L(p,m)} = \frac{h^2}{2} \delta_m^l \delta_p^0$$

Les équations

$$\begin{aligned}
 m_{E_y}^g \frac{(\mathbb{E}_y^g)^{2n+2} - (\mathbb{E}_y^g)^{2n}}{2\Delta t} - B_x^g (\mathbb{H}_z^g)^{2n+1} + C_g \mathbb{J}^{2n+1} &= 0 \\
 m_{E_y}^f \frac{(\mathbb{E}_y^f)^{2n+2} - (\mathbb{E}_y^f)^{2n+1}}{\Delta t} - B_x^f (\mathbb{H}_z^f)^{2n+\frac{3}{2}} - C_f \mathbb{J}^{2n+1} &= 0 \\
 m_{E_y}^f \frac{(\mathbb{E}_y^f)^{2n+2} - (\mathbb{E}_y^f)^{2n+1}}{\Delta t} - B_x^f (\mathbb{H}_z^f)^{2n+\frac{3}{2}} - C_f \mathbb{J}^{2n+1} &= 0
 \end{aligned}$$

s'écrivent alors (après division par  $h$ )

$$\begin{aligned}
 2h \frac{(E_y^g)_{0,2j+1}^{2n+2} - (E_y^g)_{0,2j+1}^{2n}}{2\Delta t} - 2(H_z^g)_{-1,2j+1}^{2n+1} + 2j_{2j+1}^{2n+1} &= 0 \\
 h \frac{(E_y^f)_{0,2j+\frac{1}{2}}^{2n+1} - (E_y^f)_{0,2j+\frac{1}{2}}^{2n}}{2\Delta t} + (H_z^f)_{\frac{1}{2},2j+\frac{1}{2}}^{2n+\frac{1}{2}} - j_{2j+1}^{2n+1} &= 0 \\
 h \frac{(E_y^f)_{0,2j+\frac{1}{2}}^{2n+2} - (E_y^f)_{0,2j+\frac{1}{2}}^{2n+1}}{2\Delta t} + (H_z^f)_{\frac{1}{2},2j+\frac{1}{2}}^{2n+\frac{3}{2}} - j_{2j+1}^{2n+1} &= 0 \\
 h \frac{(E_y^f)_{0,2j+\frac{3}{2}}^{2n+1} - (E_y^f)_{0,2j+\frac{3}{2}}^{2n}}{2\Delta t} + (H_z^f)_{\frac{1}{2},2j+\frac{3}{2}}^{2n+\frac{1}{2}} - j_{2j+1}^{2n+1} &= 0 \\
 h \frac{(E_y^f)_{0,2j+\frac{3}{2}}^{2n+2} - (E_y^f)_{0,2j+\frac{3}{2}}^{2n+1}}{2\Delta t} + (H_z^f)_{\frac{1}{2},2j+\frac{3}{2}}^{2n+\frac{3}{2}} - j_{2j+1}^{2n+1} &= 0
 \end{aligned}$$

De ces équations, on tire aisément

$$\begin{aligned}
 j_{2j+1}^{2n+1} &= (\widetilde{H_z^g})_{0,2j+1}^{2n+1} \\
 j_{2j+1}^{2n+1} &= (\widetilde{H_z^f})_{0,2j+\frac{1}{2}}^{2n+\frac{3}{2}} & j_{2j+1}^{2n+1} &= (\widetilde{H_z^f})_{0,2j+\frac{1}{2}}^{2n+\frac{1}{2}} \\
 j_{2j+1}^{2n+1} &= (\widetilde{H_z^f})_{0,2j+\frac{3}{2}}^{2n+\frac{3}{2}} & j_{2j+1}^{2n+1} &= (\widetilde{H_z^f})_{0,2j+\frac{3}{2}}^{2n+\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{E.9}$$

où l'on a posé

$$(\widetilde{H_z^f})_{0,j+\frac{1}{2}}^{2n+\frac{1}{2}} = (H_z^f)_{\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{2n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} \frac{(E_y^f)_{0,j+\frac{1}{2}}^{2n+1} - (E_y^f)_{0,j+\frac{1}{2}}^{2n}}{\Delta t}$$

et

$$(\widetilde{H_z^g})_{0,2j+1}^{2n+1} = (H_z^g)_{-1,2j+1}^{2n+1} - h \frac{(E_y^g)_{0,2j+1}^{2n+2} - (E_y^g)_{0,2j+1}^{2n}}{2\Delta t}$$

On retrouve bien le schéma décrit dans la section 2 de la partie 2, puisque les équations (E.8) et (E.9) sont identiques à (2.22). Le schéma 2D aux différences finies présenté dans la section (2) entre donc bien dans le cadre variationnel de la troisième partie.



## Annexe F

# Calcul des valeurs propres de la matrice associée à l'énergie

Nous présentons dans cette annexe le calcul effectué grâce à Maple des valeurs propres de la matrice associée à la forme quadratique  $|\text{rot}E|^2$  restreinte à une maille du domaine. La fonction  $|\text{rot}E|^2$  définie sur un cube dépend des valeurs des champs électriques définis sur les douze arêtes du cube.

On commence par définir  $|\text{rot}v|^2$  sur une maille

```
> f:= v -> 1/2*( ( (v[11]-v[9])/dx- (v[2]-v[1])/dz )^2 +
> ( (v[12]-v[10])/dx- (v[4]-v[3])/dz )^2 +
> ( (v[12]-v[11])/dy- (v[8]-v[6])/dz )^2 +
> ( (v[10]-v[9])/dy- (v[7]-v[5])/dz )^2 +
> ( (v[8]-v[7])/dx- (v[4]-v[2])/dy )^2 +
> ( (v[6]-v[5])/dx- (v[3]-v[1])/dy )^2 );
```

$$f : = v \rightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{v_{11} - v_9}{dx} - \frac{v_2 - v_1}{dz} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{v_{12} - v_{10}}{dx} - \frac{v_4 - v_3}{dz} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{v_{12} - v_{11}}{dy} - \frac{v_8 - v_6}{dz} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{v_{10} - v_9}{dy} - \frac{v_7 - v_5}{dz} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{v_8 - v_7}{dx} - \frac{v_4 - v_2}{dy} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{v_6 - v_5}{dx} - \frac{v_3 - v_1}{dy} \right)^2$$

En se servant du fait que les éléments d'une matrice  $M$  associée à une forme quadratique  $Q$  peuvent être calculés

$$(F.1) \quad M(i, j) = \frac{1}{4} (Q(e_i + e_j) - Q(e_i - e_j))$$

on peut construire la matrice  $M$

```
> M:=array(1..12,1..12);
> for i from 1 to 12 do
>   ei:=array(1..12, [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]);
>   ei[i]:=1:
>   for j from 1 to 12 do
>     ej:=array(1..12, [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]);
>     ej[j]:=1:
>     v:=array(1..12);v:=ei+ej : v2:=ei-ej:
>     M[i, j]:=1/4*f(evalm(v))-1/4*f(evalm(v2)):
>   od:
```

> od:

le calcul des valeurs propres se fait alors simplement

> eigenvals(M);

$$0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{dy^2 + dx^2}{dx^2 dy^2}, \frac{dy^2 + dz^2}{dz^2 dy^2}, \frac{dx^2 + dz^2}{dz^2 dx^2}, \frac{dx^2 dz^2 + dy^2 dz^2 + dy^2 dx^2}{dx^2 dy^2 dz^2},$$

$$\frac{dx^2 dz^2 + dy^2 dz^2 + dy^2 dx^2}{dx^2 dy^2 dz^2}$$

La plus grande valeur propre étant  $\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}$  on en déduit la majoration (3.61)

## Annexe G

# Une définition du nombre de points par longueur d'onde

### G.1 Cas de la Gaussienne

On s'intéresse à la définition du nombre de point par longueur d'onde d'une gaussienne et sa relation avec  $\sigma$ . Soit une gaussienne centrée en  $T_0$  et d'écart type  $\sigma$

$$(G.1) \quad g(t) = e^{-\pi \frac{(t-T_0)^2}{\sigma}}$$

Sa transformée de fourier est définie par

$$(G.2) \quad \begin{aligned} \hat{G}(\omega) &= \int g(t) e^{-2i\pi\omega t} dt \\ &= \sqrt{\sigma} e^{-\sigma\pi\omega^2} e^{i\omega T_0} \end{aligned}$$

Nous définissons la fréquence de coupure comme étant la fréquence pour laquelle la transformée de Fourier du signal vaut  $\epsilon$  du maximum. Elle est donnée par

$$(G.3) \quad \omega = \sqrt{\frac{-\ln(\epsilon)}{\sigma\pi}}$$

le nombre de point par longueur d'onde se définit alors par

$$(G.4) \quad N_\Lambda = \frac{\lambda}{h} = \frac{c}{Fh} = \frac{\alpha}{\Delta t \sqrt{\frac{-\ln(\epsilon)}{\sigma\pi}}}$$

où  $\alpha$  est le nombre de Courant.

Ainsi, on peut calculer le  $\sigma$  nécessaire pour obtenir  $N_\Lambda$  points par longueur d'onde à  $\epsilon$  % du signal.

$$(G.5) \quad \sigma = \frac{-\ln(\epsilon) N_\Lambda^2 \Delta t^2}{\alpha^2 \pi}$$



# Table des figures

1.1	Schéma 'Saute-mouton' . . . . .	12
1.2	schéma d'une interpolation spatiale . . . . .	14
1.3	Schéma de l'interpolation sur la grille pour un raffinement 1-2 . . . . .	15
2.1	Coupure pour $\log(z) = \log( z ) + i \arg(z)$ . . . . .	21
2.2	Représentation du domaine d'analyticité de $r(\omega)$ . . . . .	22
2.3	Représentation des chemins parcourus par $A(\omega)$ et $r(\omega)$ (cercle unité) lorsque $\omega$ parcourt le contour dessiné sur l'axe réel. . . . .	23
2.4	Schéma représentatif des parties incidentes, réfléchies et transmises à l'interface dans le cas d'une onde incidente dans la grille fine . . . . .	30
2.5	Coefficients de réflexion-transmission pour une onde incidente dans la grille fine. . . . .	34
2.6	Fonction de Harris (� gauche) et sa transformée de Fourier (� droite) . . . . .	37
2.7	Résultats d'une expérience de raffinement 1-2 . . . . .	38
2.8	définition des zônes d'intérêt . . . . .	39
2.9	Dérivée troisième de la fonction de Harris étalée sur une longueur de 15 unités . . . . .	39
2.10	Tracé des différences entre 2 raffinements successifs . . . . .	41
2.11	Tracé des logarithmes de chaque erreur en fonction du logarithme du raffinement . . . . .	42
2.12	Schéma représentatif des parties incidente, réfléchie et transmises à l'interface . . . . .	43
2.13	Coefficients de réflexion-transmission pour le schéma 1-2 . . . . .	45
2.14	Zoom du coefficient de réflexion 1-2 . . . . .	45
2.15	Tracé de $u(0,t)$ pour une pulsation $\omega_0 \Delta t = 0.2$ et $\omega_0 \Delta t = \frac{3\pi}{8}$ . . . . .	46
2.16	Solution numérique correspondant à $\omega_0 \Delta t = 0.2$ . . . . .	47
2.17	Module de la solution correspondant à $\omega_0 \Delta t = \frac{3\pi}{8}$ . . . . .	48
2.18	Module de la solution correspondant à $\omega_0 \Delta t = \frac{\pi}{2} - 0.1$ . . . . .	48
2.19	Tracé de $u(L,t)$ (bord droit) pour une pulsation $\omega_0 \Delta t_f = 0.2$ et $\omega_0 \Delta t = \frac{3\pi}{16}$ . . . . .	49
2.20	Module de la solution correspondant à $\omega_0 \Delta t_f = 0.2$ . . . . .	50
2.21	Module de la solution correspondant à $\omega_0 \Delta t_f = \frac{3\pi}{16}$ . . . . .	51
2.22	Module de la solution correspondant à $\omega_0 \Delta t_f = \frac{3\pi}{8}$ . . . . .	51
2.23	Module de la solution correspondant à $\omega_0 \Delta t_f = \frac{\pi}{4}$ . . . . .	52
2.24	Demi-dérivée de la porteuse, on retrouve la traînée présente dans l'expérience . . . . .	53
3.1	Schéma de l'interpolation sur la grille 1/4 . . . . .	56
3.2	Coefficients de réflexion-transmission pour le schéma 1-4 . . . . .	61
3.3	Coefficients de réflexion-transmission pour le schéma 1-3 . . . . .	62
3.4	Résultats d'une expérience de raffinement 1-4 . . . . .	65
3.5	Tracé des différences entre 2 raffinements successifs dans le cas 1/4 . . . . .	66

3.6	Tracé des logarithmes de chaque erreur en fonction du logarithme du raffinement dans le cas 1/4 . . . . .	67
3.7	Résultats d'une expérience de raffinement 1-3 . . . . .	68
3.8	Tracé des différences entre 2 raffinements successifs dans le cas 1/3 . . . . .	69
3.9	Tracé des logarithmes de chaque erreur en fonction du logarithme du raffinement dans le cas 1/3 . . . . .	70
4.1	Exemple de bande 1/4/1 . . . . .	72
4.2	schéma de réflexions multiples dans une bande . . . . .	73
4.3	schéma de réflexions multiples dans une bande avec condition de Dirichlet . . . . .	74
4.4	Courbes de niveaux de $\Re(P)$ et $\Im(P)$ en fonction de $\omega\Delta t$ . . . . .	82
4.5	Évolution du pôle dans le demi-plan complexe ( $\Im\omega > 0$ ) lorsque $\alpha$ diminue . . . . .	83
4.6	Résultats de simulation en présence d'une bande raffinée $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . . . . .	96
4.7	Résultats de simulation en présence d'une bande raffinée $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . . . . .	97
4.8	Transformée de Fourier d'une explosion . . . . .	98
4.9	Evolution de l'explosion en fonction de la longueur de la bande . . . . .	99
4.10	Conditions de C.F.L. numériques pour les schémas 1-2 1-3 1-4 . . . . .	100
5.1	Schéma de l'interpolation à l'interface pour un raffinement triple . . . . .	102
5.2	Schéma d'interpolation implicite à l'interface pour le raffinement 1-2 . . . . .	103
5.3	Schéma d'interpolation explicite à l'interface pour le schéma 1-2 . . . . .	104
5.4	interface des deux grilles, en abscisse x ordonnée y . . . . .	106
5.5	interface des deux grilles, en abscisse l'espace en ordonnée le temps . . . . .	107
5.6	instantanés d'une expérience 2D de raffinement de maillage par interpolation temporelle . . . . .	108
1.1	Discretisation espace-temps des inconnues . . . . .	112
1.2	Présentation des inconnues . . . . .	114
1.3	schéma des intégrations discrètes pour le calcul de l'énergie . . . . .	115
1.4	Instantanés d'une expérience avec le nouveau schéma . . . . .	123
1.5	Différences entre la solution exacte et la solution approchée 1 . . . . .	125
1.6	Différences entre la solution exacte et la solution approchée 2 . . . . .	126
1.7	instantanés de l'expérience avec $\alpha = 1$ . . . . .	129
1.8	instantanés de l'expérience avec $\alpha = 0.99$ . . . . .	130
1.9	évolution de la solution à 40 secondes avec $\alpha$ . . . . .	131
1.10	fonction $2\arcsin(\alpha)$ . . . . .	132
1.11	schéma des fréquences transmises à l'interface; de l'intervalle de fréquence $[\frac{-\pi}{2\Delta t}, \frac{\pi}{2\Delta t}]$ dans la grille grossière, on passe à l'intervalle $[\frac{-\pi}{\Delta t}, \frac{\pi}{\Delta t}]$ dans la grille fine. . . . .	133
1.12	Profondeur de pénétration de l'onde transmise et de l'onde parasite pour $\omega\Delta t$ critique . . . . .	134
1.13	Ordre de la profondeur de pénétration de l'onde parasite . . . . .	135
1.14	Schéma de raffinement spatial . . . . .	139
1.15	présentation de l'expérience . . . . .	140
1.16	Présentation des inconnues pour un raffinement 1-4 . . . . .	142
1.17	instantanés de l'expérience avec $\alpha = 0.94$ . . . . .	144

1.18	schéma des fréquences transmises à l'interface pour un raffinement 1-4; de l'intervalle de fréquence $[\frac{-\pi}{4\Delta t}, \frac{\pi}{4\Delta t}]$ dans la grille grossière, on passe à l'intervalle $[\frac{-\pi}{\Delta t}, \frac{\pi}{\Delta t}]$ dans la grille fine. . . . .	144
1.19	coefficient multiplicateur entre deux mailles de l'amplitude de l'onde parasite en fonction du nombre de courant, pour $\omega\Delta t = 0.11$ . . . . .	145
1.20	évolution de la solution à 40 secondes en fonction du nombre de Courant $\alpha$ . . . . .	145
1.21	évolution de la solution à 40 s en fonction de $\alpha$ pour une grille intercalée de longueur 20 . . . . .	146
1.22	évolution de la solution à 40 s en fonction de $\alpha$ pour une grille intercalée de longueur 2 . . . . .	147
1.23	évolution de la solution à 40 s en fonction de $\alpha$ pour une grille intercalée de longueur 1 . . . . .	147
2.1	Domaines et discrétisation . . . . .	155
2.2	Enregistrement en 1 point du maillage grossier pour la C.F.L. maximum . . . . .	163
2.3	Enregistrement en 1 point du maillage fin pour la C.F.L. maximum . . . . .	164
2.4	Enregistrement en 1 point du maillage fin pour 98% de la C.F.L. pour un raffinement 1-2 . . . . .	165
2.5	Enregistrement en 1 point du maillage fin pour 98% de la C.F.L. pour un raffinement 1-3 . . . . .	165
2.6	Pourcentage de C.F.L. maximum nécessaire pour obtenir une solution adéquate . . . . .	165
1.1	Fonctions de base . . . . .	170
1.2	Fonctions de base sur l'interface . . . . .	176
2.1	Coupe en deux dimensions des domaines $B$ et $B^{ext}$ . Le domaine $B^{ext}$ est infini et encadre $B$ . . . . .	180
2.2	Vue 3 D du raffinement . . . . .	180
2.3	Joly dessin explicatif des notations . . . . .	182
3.1	choix classique pour l'orientation des fonctions de base . . . . .	198
3.2	notre choix d'orientation . . . . .	199
3.3	Définition des vecteurs unitaires à l'interface . . . . .	199
3.4	Degré de liberté sur une arête . . . . .	200
4.1	schéma des fonctions de base sur un carreau . . . . .	206
4.2	Positionnement des champs induit par un courant sur une maille . . . . .	206
4.3	schéma des champs $J$ et $E$ sur une arête . . . . .	210
4.4	schéma des champs $J$ et $E_f$ sur une maille . . . . .	212
4.5	poils pour les champs fins . . . . .	212
4.6	influence du courant sur les flux grossiers . . . . .	216
4.7	influence du courant sur les flux fins . . . . .	216
4.8	Squelette de la matrice de Courant pour une boîte vide . . . . .	217
5.1	Éclatement du maillage du Courant sur l'interface en présence d'une plaque . . . . .	221
6.1	arête interne au conducteur . . . . .	225
6.2	arête frontière . . . . .	225

6.3	trace filaire . . . . .	226
7.1	évolution de la différence du champ électrique au cours du temps pour différentes tailles de boîtes . . . . .	228
7.2	différence totale en décibel en fonction de la taille de la boîte . . . . .	229
7.3	différence totale en décibel en fonction de la taille de la boîte . . . . .	229
7.4	différence totale pour les composantes $E_x$ et $E_z$ en décibels . . . . .	230
7.5	différences au cours du temps des composantes $E_x$ et $E_z$ . . . . .	231
7.6	différence totale pour les composantes $E_x$ et $E_z$ en décibel . . . . .	232
7.7	résultats de l'expérience 1 . . . . .	233
7.8	Schéma de l'expérience 2 . . . . .	234
7.9	résultats de l'expérience 2 . . . . .	234
7.10	Schéma de l'expérience 3 . . . . .	235
7.11	résultats de l'expérience 3 . . . . .	236
7.12	résultats de l'expérience 3 . . . . .	236
7.13	Schéma de l'expérience 4 . . . . .	237
7.14	résultats de l'expérience 4 . . . . .	238
7.15	schéma de l'expérience type . . . . .	239

# Bibliographie

- [1] A. Bamberger, R. Glowinski, and Q. H. Tran. A domain decomposition method for the acoustic wave equation with discontinuous coefficients and grid change. *SIAM J. on Num. Anal.*, 34(2):603–639, April 1997.
- [2] F. Ben Belgacem, A. Buffa, and Y. Maday. The mortar finite element method for 3d maxwell equation : First result. *A paraître*.
- [3] Marsha J. Berger. Stability of interfaces with mesh refinement. *Mathematics of Computation*, 45(172):301–318, October 1985.
- [4] Marsha J. Berger and Randall J. Leveque. Adaptive mesh refinement using wave-propagation algorithms for hyperbolic systems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 35(6):2298–2316, 1998.
- [5] C. Bernardi and Y. Maday. Raffinement de maillage en éléments finis par la méthode des joints. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 320(3):373–377, 1995.
- [6] A. Bossavit. Simplicial finite elements for scattering problems in electromagnetism. *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, 76:299–316, 1989.
- [7] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. . Springer Series in Computational Mathematics (15). Springer Verlag, 1991.
- [8] A. Buffa and P. Ciarlet Jr. On traces for fonctionnal spaces related to maxwell’s equations. *A paraître dans Mathematical Methods in the Applied Sciences*.
- [9] Du Fort E. C. and Frankel S. P. *Stability conditions in the numerical treatment of parabolic differential equations.*, pages 135–152. 1953.
- [10] M. W. Chevalier and R. J. Luebbers. FDTD local grid with material traverse. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 45(3):411–421, March 1997.
- [11] G. Cohen. *Méthodes numériques d’ordre élevé pour les ondes en régime transitoire*. Ecole des ondes INRIA, 24-28 Janvier 1994 1994.
- [12] M. Okoniewski D. T. Shimizu and M. A. Stuchly. An efficient subgridding algorithm for fdtd. In *Ann. Rev. Progress Appl. Computat. Electromagn. in Conf. Proc. 11th*, pages 762–766, Monterey CA, Mar. 1995.
- [13] Rudin Walter Traduit de l’anglais par N.Dhombres et F. Hoffman. *Analyse réelle et complexe.*, pages x+397. Masson et Cie, Éditeurs, 1975.

- [14] D. F. Elliot and K. Ramamohan rao. *Fast Transforms Algorithms, Analyses, Applications.*, volume H-19. Academic Press NY, London., 1982.
- [15] S. D. Gedney and F. Lansing. *Computational electrodynamics The Finite-Difference Time-Domain Method*, chapter Explicit Time-Domain Solution of Maxwell's Equations Using Nonorthogonal and Unstructured Grids, pages 343–393. A. Taflove, Artech house boston london edition, 1995.
- [16] S. K Godunov. A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics. *Mat. Sb. (N.S.)*, 47:271–306, 1959.
- [17] B. Gustafsson, H.-O. Kreiss, and A. Sundström. Stability theory of difference approximations for initial boundary value problems. *Math. Comp.*, 26:649–686, 1972.
- [18] I. S. Kim and W. J. R. Hofer. A local mesh refinement algorithm for the time-domain finite-difference method to solve maxwell's equations. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 38(6):812–815, June 1990.
- [19] Heinz-Otto Kreiss. Initial boundary value problems for hyperbolic systems. *Communications on pure and applied mathematics*, 1970.
- [20] K. S. Kunz and L. Simpson. A technique for increasing the resolution of finite-difference solutions to the maxwell equations. *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, EMC-23:419–422, Nov. 1981.
- [21] P. Monk. Sub-gridding FDTD schemes. *ACES Journal*, 11:37–46, 1996.
- [22] Trefethen Lloyd N. Group velocity interpretation of the stability theory of Gustafsson, Kreiss and Sundström. *Journal of Computational Physics*, 1981.
- [23] Trefethen Lloyd N. Group velocity in finite difference schemes. *SIAM review*, 1982.
- [24] J.C. Nedelec. Mixed finite elements in  $\mathbb{R}^3$ . *Num. Math.*, 35:315–341, 1980.
- [25] J.C. Nedelec. A new family of mixed finite elements in  $\mathbb{R}^3$ . *Num. Math.*, 50:57–81, 1986.
- [26] D. T. Prescott and N. V. Shuley. A method for incorporating different sized cells into the finite-difference time-domain analysis technique. *IEEE Microwave Guided Wave Lett.*, 2:434–436, Nov. 1992.
- [27] K.S. Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Trans. on Antennas and propagation*, pages 302–307, 1966.



**Résumé :** Le travail présenté dans ce document concerne la simulation de la propagation d’ondes en milieu complexe. Notre démarche est la suivante. Sur une grande partie du domaine de propagation, nous utilisons des techniques classiques de discrétisation, typiquement le schéma de Yee, pour approcher les équations de Maxwell tandis qu’au voisinage des obstacles, nous utilisons un raffinement de maillage local afin de mieux tenir compte de détails géométriques. Nous sommes alors amenés à prendre un pas de temps local afin d’éviter l’augmentation de la dispersion numérique dans la grille principale. Le problème délicat est alors de trouver un bon schéma de raccord entre les deux grilles. Dans un premier temps nous réalisons une étude mathématique et numérique de la méthode classiquement employée dans la littérature électromagnétique utilisant des interpolations spatio-temporelles à l’interface entre les deux grilles. Les résultats de notre étude mettent en évidence que ce genre de schéma conduit bien souvent à un nouveau type d’instabilité difficilement contrôlable. Dans une deuxième partie, nous présentons une nouvelle stratégie de raccord permettant d’assurer la stabilité. La méthode, repose sur le raccord ‘faible’ des inconnues sur l’interface. Elle permet la conservation d’une énergie discrète, et par suite assure la stabilité. Dans une troisième partie nous montrons que ce schéma s’inscrit dans un cadre variationnel très général. Le schéma de raccord s’apparente à la méthode des éléments joints et s’effectue via l’introduction d’un paramètre de Lagrange défini sur l’interface. Cette généralisation nous permet de réaliser de façon systématique le raffinement de maillage spatio-temporel pour les équations de Maxwell 3D.

**Mots clés :** Equations de Maxwell, Raffinement de Maillage, Pas de temps local, Analyse de Stabilité, Différences Finies, Éléments Joints.

**Abstract:** This work deals with the simulation of waves propagation in complex medium. Our aim is the following one. On most of the propagation domain, we use traditional techniques, typically the Yee’s scheme, to discretize Maxwell’s equations, while, near the obstacle, we use a finer local grid in order to take better account of geometrical details. We are then led to take a local time step in order to avoid the increase of numerical dispersion in the principal grid. The difficulty is then to find a good scheme to connect the two grids. First, we make a mathematical and numerical study on the method classically employed in the electromagnetic literature using space-time interpolations on the interface between the two grids. Our study points out a new kind of instability with this type of approach. In a second part, we present a new strategy based on “weak” continuity relations at the interface that ensures stability via the conservation of a discrete energy. In the third part, we show that this scheme enters a more general class of variational problems. The scheme for gluing the two grids is related to the mortar element method and is carried out via the introduction of a Lagrange parameter defined on the interface. This generalization enables us to carry out more easily the space-time mesh refinement for Maxwell’s equations 3D.

**key words :** Maxwell’s Equations, Mesh Refinement, local time step, Stability Analysis, F.D.T.D., Mortar Elements.