



**HAL**  
open science

# Modélisation, observation et commande de robots vasculaires magnétiques

Lounis Sadelli

► **To cite this version:**

Lounis Sadelli. Modélisation, observation et commande de robots vasculaires magnétiques. Autre. Université d'Orléans, 2016. Français. NNT : 2016ORLE2065 . tel-01581319

**HAL Id: tel-01581319**

**<https://theses.hal.science/tel-01581319v1>**

Submitted on 4 Sep 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES ET TECHNOLOGIES**  
**LABORATOIRE PRISME**

**Thèse** présentée par :

**Lounis SADELLI**

soutenue le : **25 Novembre 2016**

pour obtenir le grade de : **Docteur en sciences de l'Université d'Orléans**

Discipline : **Automatique**

**Modélisation, observation et commande de robots  
vasculaires magnétiques**

**Thèse dirigée par :**

**Antoine FERREIRA**

Professeur, INSA-CVL de Bourges

**RAPPORTEURS :**

**Gildas BESANÇON**

Professeur, INP de Grenoble

**Nicolas ANDREFF**

Professeur, Université de Franche-Comté

---

**JURY :**

**Mohamed DAROUACH**

Professeur, Université de Lorraine, Président du jury

**Gildas BESANÇON**

Professeur, INP de Grenoble, Rapporteur

**Nicolas ANDREFF**

Professeur, Université de Franche-Comté, Rapporteur

**Nacim RAMDANI**

Professeur, Université d'Orléans, Examineur

**Laurent ARCESE**

Maître de conférences, Université de Reims Champagne-Ardenne,  
Examineur

**Antoine FERREIRA**

Professeur, INSA-CVL de Bourges, Directeur de Thèse

**Matthieu FRUCHARD**

Maître de conférences, Université d'Orléans, Co-encadrant



# Remerciements

Je tiens à remercier le directeur du laboratoire Monsieur Azeddine Kourta de m'avoir permis de faire ma thèse au sein du laboratoire PRISME. Je remercie aussi Monsieur Gérard Poisson de m'avoir accueilli au sein de l'IUT de Bourges en me permettant d'accomplir ma thèse dans les meilleurs conditions.

Je voudrais remercier mes rapporteurs de thèse Monsieur Gildas Besançon et Monsieur Nicolas Andreff pour le soin qu'ils ont apporté à ce travail, pour leurs conseils et pour leurs critiques constructives. La version finale de ce mémoire a bénéficié de leur lecture très attentive et de leurs remarques précieuses. Je tiens à remercier Monsieur Mohamed Darouach d'avoir accepté d'être le président du jury. Je remercie également Monsieur Nacim Ramdani et Monsieur Laurent Arcese d'avoir accepté d'en être les examinateurs.

Je remercie mon directeur de thèse Antoine Ferreira pour le temps qu'il a consacré à diriger ce travail de thèse. Je remercie spécifiquement Matthieu Fruchard qui m'a encadré tout au long de ces trois années de thèse. Je lui suis très reconnaissant de m'avoir fait bénéficier tout au long de ce travail de sa grande compétence, de sa rigueur intellectuelle, de son dynamisme, et de son efficacité certaine que je n'oublierai jamais. Il a toujours été disponible, à l'écoute de mes nombreuses questions, et s'est toujours intéressé à l'avancée de mes travaux. Les nombreuses discussions que nous avons eues ainsi que ses conseils sont pour beaucoup dans le résultat final de ce travail. Sa capacité d'analyse et son enthousiasme m'ont montré que le monde de la recherche pouvait être un univers passionnant. Enfin, ses nombreuses relectures et corrections de cette thèse ont été très appréciables. Cette thèse lui doit beaucoup. Pour tout cela merci.

Je remercie tous les chercheurs du laboratoire PRISME à l'IUT de Bourges. Je tiens à remercier Madame Cathy Poulain pour son aide au niveau de la paperasse. Un grand merci pour Madame Laure Spina pour sa sympathie et son efficacité dans l'organisation et la résolution des problèmes administratifs, mais aussi pour les bons moments lors des pauses café.

Je remercie aussi tous les enseignants du département génie civil, où j'ai eu le plaisir d'enseigner.

Je remercie également tous les thésards de Bourges, notamment Nabil, Arnaud, Sonia, Mohamed, Adina, Myriam, Juan, etc... tout simplement pour les bons moments partagés. Enfin, je remercie également toutes les personnes qui m'ont permis d'oublier momentanément le travail dans des soirées, repas, sorties vélo. Je remercie tous mes amis Salim, Faouzi, Djamel, Zoubir, Seif Eddine, Louenas, Sofiane, etc.. pour les moments partagés.

Je remercie aussi les professeurs Cyril Novales, Pierre Vieyres, Mame William-louis, etc... pour leurs conseils durant ces trois de thèse. Mes remerciements vont à Sophie Seuillet, Didier Aubry, Sylvain Miossec, Léo Courty, etc...

Finalement, je remercie toute ma famille pour son soutien qui m'a été bien utile durant ma thèse. Un grand merci pour mes parents, mes frères, et sœurs, ma belle-sœur et ma grand-mère pour leur amour et pour m'avoir toujours soutenu tout le long de mon parcours, m'offrant ainsi les meilleures conditions pour en arriver là aujourd'hui.

Je dédie cette thèse à toute ma famille en particulier, à mes chers parents, mes neveux Younes et Youcef ainsi que mes nièces Dassine, Céline et Anya.

Merci à toutes et à tous.

*A mon père et ma mère...*

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>iii</b>
<b>Introduction Générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Etat de l'art</b>	<b>11</b>
1.1 Introduction . . . . .	13
1.2 Génération de champs et gradients de champs magnétiques . . . . .	13
1.2.1 Loi de Biot et Savart . . . . .	14
1.2.2 Champ magnétique créé par une spire circulaire . . . . .	15
1.2.3 Bobines de Helmholtz . . . . .	16
1.2.4 Bobines de Maxwell . . . . .	17
1.3 Vaisseaux sanguins . . . . .	19
1.3.1 Complexité du système sanguin . . . . .	20
1.3.2 Imageurs . . . . .	23
1.4 Expression des Forces . . . . .	25
1.4.1 Distance algébrique . . . . .	25
1.4.2 Force hydrodynamique . . . . .	25
1.4.2.1 Navier-Stokes . . . . .	26
1.4.2.2 Nombre de Reynolds . . . . .	27
1.4.2.3 Coefficient de traînée . . . . .	28
1.4.2.4 Effet des parois . . . . .	29
1.4.2.5 La vitesse du sang et le modèle de Womersley . . . . .	30
1.4.3 Force électrostatique . . . . .	33
1.4.4 Force de contact . . . . .	35
1.4.4.1 Modèle de Voigt . . . . .	35
1.4.4.2 Modèle de Hertz . . . . .	36
1.4.5 Poids Apparent . . . . .	37
1.4.6 Forces négligeables . . . . .	38

1.4.6.1	Force de van der Waals . . . . .	38
1.4.6.2	Force stérique . . . . .	38
1.4.7	Force motrice et interactions . . . . .	39
1.4.7.1	Aimantation . . . . .	39
1.4.7.2	Force magnétique . . . . .	40
1.4.7.3	Couple magnétique . . . . .	41
1.4.7.4	Interactions magnétiques . . . . .	41
1.4.7.5	Imagerie par Résonance Magnétique . . . . .	42
1.4.7.6	Octomag . . . . .	43
1.5	Différents concepts de propulsion . . . . .	43
1.5.1	Flagelle élastique . . . . .	44
1.5.2	Flagelle hélicoïdale . . . . .	46
1.5.3	Bead pulling . . . . .	48
1.6	Conclusion . . . . .	49
<b>2</b>	<b>Modélisation</b> . . . . .	<b>51</b>
2.1	Introduction . . . . .	52
2.2	Rappels d'automatique . . . . .	52
2.2.1	Représentation d'état . . . . .	53
2.2.1.1	Systèmes non linéaires . . . . .	53
2.2.1.2	Systèmes linéaires . . . . .	53
2.2.2	Stabilité . . . . .	55
2.3	Notations . . . . .	59
2.4	Représentation d'état pour la commande . . . . .	60
2.4.1	Représentation d'état pour un microrobot . . . . .	60
2.4.1.1	Représentation en 1D . . . . .	60
2.4.1.2	Représentation en 2D . . . . .	63
2.4.2	Représentation d'état pour deux microrobots . . . . .	66
2.4.2.1	Représentation en 1D . . . . .	66
2.4.2.2	Représentation en 2D . . . . .	67
2.4.3	Représentation d'état pour $m$ microrobots en 1D . . . . .	69
2.5	Représentation d'état pour l'observation . . . . .	71
2.5.1	Modèles de la vitesse du sang . . . . .	71
2.5.2	Système étendu . . . . .	73
2.6	Conclusion . . . . .	76
<b>3</b>	<b>Commande</b> . . . . .	<b>79</b>
3.1	Introduction . . . . .	81
3.2	Commandabilité . . . . .	81
3.2.1	Commandabilité des systèmes linéaires et non linéaires . . . . .	81

3.2.1.1	Systèmes non linéaires . . . . .	81
3.2.1.2	Systèmes linéaires . . . . .	83
3.2.2	Formes canoniques de commandabilité . . . . .	84
3.2.2.1	Systèmes linéaires . . . . .	84
3.2.2.2	Systèmes non linéaires . . . . .	86
3.3	Commande des systèmes non linéaires . . . . .	89
3.3.1	Commande par retour d'état . . . . .	89
3.3.1.1	Placement de pôles . . . . .	90
3.3.1.2	Constante de Lipschitz . . . . .	90
3.3.1.3	Loi de commande . . . . .	91
3.3.2	Commande par linéarisation exacte . . . . .	92
3.3.3	Commande par backstepping . . . . .	93
3.3.3.1	Backstepping adaptatif . . . . .	93
3.4	Commande d'un microrobot . . . . .	95
3.4.1	Modèle 1D du microrobot . . . . .	96
3.4.1.1	Backstepping . . . . .	96
3.4.1.2	Backstepping adaptatif . . . . .	97
3.4.2	Modèle 2D du microrobot . . . . .	98
3.4.2.1	Backstepping . . . . .	99
3.4.2.2	Backstepping adaptatif . . . . .	100
3.5	Commande de 2 microrobots . . . . .	101
3.5.1	Modèle 1D . . . . .	101
3.5.1.1	Linéarisation autour d'une trajectoire . . . . .	101
3.5.1.2	Planification de trajectoire . . . . .	105
3.5.1.3	Loi de commande . . . . .	106
3.5.2	Modèle 2D . . . . .	111
3.5.2.1	Linéarisation autour d'une trajectoire . . . . .	111
3.5.2.2	Planification de trajectoire . . . . .	113
3.5.2.3	Loi de commande . . . . .	114
3.5.2.4	Conclusion . . . . .	119
3.6	Conclusion . . . . .	120
<b>4</b>	<b>Observation</b> . . . . .	<b>121</b>
4.1	Introduction . . . . .	123
4.2	Observabilité . . . . .	123
4.2.1	Introduction . . . . .	123
4.2.2	Observabilité des systèmes linéaires et non linéaires . . . . .	123
4.2.2.1	Systèmes non linéaires . . . . .	124
4.2.2.2	Systèmes linéaires . . . . .	125

4.2.3	Formes canoniques d'observabilité . . . . .	126
4.2.3.1	Introduction . . . . .	126
4.2.3.2	Systèmes non linéaires . . . . .	126
4.2.3.3	Systèmes linéaires . . . . .	127
4.3	Observateurs de systèmes non linéaires . . . . .	130
4.3.1	Introduction . . . . .	130
4.3.2	Observateur basé sur la résolution de Ricatti . . . . .	130
4.3.2.1	Systèmes non linéaires . . . . .	130
4.3.3	Observateur de Luenberger . . . . .	133
4.3.4	Observateur à grand gain . . . . .	133
4.3.4.1	Système sous forme de Gauthier-Kupka . . . . .	133
4.3.4.2	Système affine en commande . . . . .	135
4.3.5	Observateur MVT . . . . .	135
4.3.5.1	Les inégalités matricielles . . . . .	135
4.3.5.2	Observateur basé sur le théorème de la valeur moyenne . . . . .	136
4.3.6	Observateur par immersion . . . . .	137
4.4	Observation du modèle étendu du microrobot . . . . .	139
4.4.1	Modèle 1D . . . . .	139
4.4.1.1	Introduction . . . . .	139
4.4.1.2	Paramètres connus . . . . .	139
4.4.1.3	Incertitude paramétrique . . . . .	142
4.4.2	Modèle 2D . . . . .	145
4.4.3	Conclusion . . . . .	147
4.5	Estimation de la vitesse du sang et de la pulsation cardiaque . . . . .	148
4.5.1	Introduction . . . . .	148
4.5.2	Observateur par immersion et singularité structurelle . . . . .	149
4.5.2.1	Changement de variables et observateur . . . . .	150
4.5.2.2	Extension dynamique et observateur en coordonnées naturelles . . . . .	153
4.5.3	Observateur par immersion semi-globalement stable . . . . .	154
4.5.4	Conclusion . . . . .	157
4.6	Commande d'un microrobot par retour de sortie . . . . .	158
4.6.1	Introduction . . . . .	158
4.6.2	Problème de commande par retour de sortie . . . . .	158
4.6.3	Stabilité du retour de sortie . . . . .	161
4.6.3.1	Stabilité asymptotique . . . . .	161
4.6.3.2	Stabilité pratique . . . . .	164
4.6.4	Conclusion . . . . .	166
4.7	Conclusion . . . . .	167

<b>5 Résultats de simulation</b>	<b>169</b>
5.1 Introduction . . . . .	170
5.2 Cadre général de l'étude . . . . .	170
5.3 Commande d'un microrobot en 1D . . . . .	172
5.3.1 Commande par backstepping adaptatif . . . . .	172
5.3.2 Commande par retour de sortie . . . . .	175
5.3.2.1 Robustesse aux bruits de mesure (RBM) . . . . .	175
5.3.2.2 Robustesse aux incertitudes paramétriques (RIP) . . . . .	183
5.3.2.3 Robustesse aux erreurs de modélisation $n = 2$ et $n^* = 4$ . . . . .	186
5.3.3 Pulsation cardiaque inconnue . . . . .	188
5.4 Commande par retour de sortie d'un microrobot en 2D . . . . .	191
5.4.1 Robustesse aux bruits de mesure (RBM) . . . . .	191
5.4.2 Robustesse aux incertitudes paramétriques (RIP) . . . . .	195
5.4.3 Robustesse aux erreurs de modélisation (REM) . . . . .	199
5.5 Commande de deux microrobots . . . . .	202
5.5.1 Modèle 1D . . . . .	202
5.5.1.1 Trajectoire fixe (TF) . . . . .	202
5.5.1.2 Trajectoire variable . . . . .	205
5.5.2 Modèle 2D . . . . .	210
5.5.2.1 Trajectoire fixe (TF) . . . . .	210
5.5.2.2 Trajectoire variable (TV) . . . . .	212
5.6 Synthèse des simulations . . . . .	214
5.7 Conclusion . . . . .	216
<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>216</b>
<b>A Annexe A</b>	<b>221</b>
A.1 Preuve de l'équation (2.20) . . . . .	221
A.2 Preuve de l'équation (2.23) . . . . .	221
A.3 Preuve de l'équation (2.42) . . . . .	222
A.4 Preuve du système $(\mathcal{F}_\omega^n)$ . . . . .	222
A.5 Solution de l'équation (3.98) pour un choix de $f(t)$ . . . . .	224
A.6 Preuve du lemme 4.4.5 . . . . .	225
<b>Bibliographie</b>	<b>229</b>



# Introduction Générale

## 1. Contexte et objectifs de la thèse

La chirurgie minimalement invasive est un domaine de recherche particulièrement actif car elle offre la possibilité d'observer ou de traiter localement des pathologies, avec moins ou pas d'incision, de traumatisme ou de risque d'infection. Le ciblage permet aussi de diminuer les effets secondaires dans le reste de l'organisme, la souffrance, et le temps de convalescence. En particulier, le développement de systèmes miniaturisés actionnés à distance et d'une imagerie médicale de plus en plus précise permet d'envisager la navigation dans le système cardiovasculaire, et ainsi de cibler des organes peu accessibles sans utiliser de chirurgie lourde.

Cette thèse<sup>1</sup> s'inscrit dans cette thématique de recherche avec un regard d'automaticien. L'objectif de cette thèse est de proposer *i)* un état de l'art sur la modélisation des forces s'exerçant sur un ou plusieurs microrobots naviguant dans des vaisseaux sanguins, *ii)* des représentations d'état exploitables à des fins de commande et d'observation, *iii)* différentes synthèses de lois de commande pour stabiliser un ou plusieurs microrobots le long d'une trajectoire de référence, *iv)* des observateurs d'état pour reconstruire les états non mesurables du système.

La chirurgie minimalement invasive a été rendue possible dès les années 1960 avec les premiers cathéters contrôlés par des champs magnétiques extérieurs [Seldinger, 1953] et l'utilisation de l'endoscopie développée par Hopkins. Puis, avec le progrès scientifique et technologique, le développement des microsystèmes électromécaniques (MEMS pour MicroElectroMechanical Systems) dans les années 1990 ont permis un changement d'échelle. La faisabilité de l'actionnement de ces microsystèmes a été étudiée par [Quate et al., 1991] sur les particules superparamagnétiques et par [Gillies et al., 1994] sur les particules magnétiques. Ces micro ou nanosystèmes offrent la possibilité d'accéder en profondeur dans le corps humain ou dans

---

1. Thèse financée par le projet européen NANOMA (European Union's 7th Framework Program and its research area ICT-2007.3.6 Micro/nanosystems under the project NANOMA (Nano-Actuators and Nano-Sensors for Medical Applications))

des zones sensibles, comme vecteurs médicaux, que ce soit à des fins de diagnostic ou de thérapie.

Jusqu'aux années 2000, les études ont principalement concerné la faisabilité de tels vecteurs. Même s'il existe de nombreux travaux de recherche sur de nouveaux concepts de tels systèmes, le domaine souffre surtout d'un manque de modélisation et d'outils de commande et d'observation adaptés à ce contexte. Le système sanguin est particulièrement complexe avec ses embranchements et bifurcations : sans contrôle, un microrobot serait rapidement entraîné par le flux sanguin loin de sa cible. Il est donc nécessaire non seulement de posséder une image fidèle de ce réseau grâce aux imageurs médicaux, mais aussi de bien connaître les lois physiques qui dominent cet environnement. L'ensemble des forces qui agissent sur un microrobot naviguant dans les vaisseaux sanguins doit être étudié, puis représenté sous forme d'état afin de proposer des lois de commande adéquates en fonction de la structure, des non linéarités, des incertitudes paramétriques du système. Ces lois de commande requièrent en général la connaissance de l'état complet du système, or la mesure se limite souvent à la seule position du microrobot qui est, de plus, fortement bruitée. Il faut donc reconstruire ces états non mesurés et proposer des retours de sortie qui permettent la stabilisation du ou des microrobots le long de trajectoires de références pré planifiées. L'objectif de cette thèse est de partir de ce cadre multiphysique pour proposer une modélisation de la dynamique des microrobots et du flux sanguin, puis des lois de commande et des observateurs afin d'améliorer la navigation des microrobots endovasculaires.

## 2. Etat de l'art

Nous proposons un état de l'art sur les différents types de microrobots pouvant être utilisés à des fins médicales, puis sur les forces auxquelles un tel robot fait face dans le système sanguin. Nous exposons ensuite une revue sur la commande et l'observation de ces systèmes. Cet état de l'art permet de situer notre travail en regard des recherches actuelles.

### Les microrobots médicaux

Les robots à actionnement interne sont des systèmes ayant une source d'énergie embarquée ou qui exploitent une source d'énergie locale. A petite échelle, on peut citer le robot millimétrique de [Dario et al., 1998], mais les dimensions de la batterie handicapent la miniaturisation de tels robots. On peut cependant citer le microrobot décrit dans [Edd et al., 2003] équipé d'un micromoteur actionnant des flagelles de synthèse en nanotubes de carbone afin de se propulser dans le système urinaire pour éliminer les calculs rénaux. A l'échelle micrométrique, il existe surtout des microrobots utilisant des bactéries comme actionneurs. [Martel et al., 2009] utilise des bactéries magnétotactiques, qui contiennent naturellement des particules magnétiques. Ces bactéries se propulsent grâce à leur flagelle, et sont guidées par l'application de gradients dans la direction voulue. Dans [Darnton et al., 2004], [Behkam and Sitti, 2007], des bactéries sont attachées à un microrobot et lui assurent une propulsion qui est contrôlée par les équilibres

ioniques locaux.

La propulsion des microrobots par une source d'énergie déportée favorise la miniaturisation des microrobots puisque ces derniers n'ont besoin ni de batterie, ni d'actionneurs embarqués. C'est évidemment dans cette catégorie qu'on trouve la plupart des microrobots à vocation médicale. Selon les applications et le mode de propulsion, il en existe de différents types. L'actionnement électrostatique est utilisé pour courber des microrobots flexibles asymétriques, comme dans [Donald et al., 2006], et les faire ainsi ramper. Dans [Sul et al., 2006] est décrit un microrobot marcheur à pattes actionné par la chaleur apportée par un laser. Dans le cadre médical, c'est l'actionnement magnétique qui domine, sous trois formes principales. Le biomimétisme et les travaux de Purcell [Purcell, 1977] ont inspiré deux principes de propulsion largement utilisés : les microrobots à flagelle hélicoïdale et les microrobots à flagelle élastique. Les microrobots à flagelle hélicoïdale sont actionnés en rotation par un champ magnétique tournant : la flagelle hélicoïdale en rotation produit alors une force propulsive [Zhang et al., 2009], [Zhang et al., 2010a], [Xu et al., 2015], [Diller and Sitti, 2013]. Les microrobots à flagelle élastique utilisent le battement de la flagelle pour se mouvoir. Ce battement est produit par l'application d'une force qui fait osciller la base de la flagelle, ou d'un couple magnétique qui la fait pivoter [Lagomarsino et al., 2003], [Dreyfus et al., 2005]. Dans une catégorie proche, on trouve aussi les microrobots à flagelle plane comme dans [Behkam and Sitti, 2006]. Enfin, on peut simplement pousser le microrobot en utilisant la force magnétique : c'est le bead pulling [Mathieu et al., 2006], [Martel et al., 2007], [Yesin, 2006], [Abbott et al., 2009], [Arcese et al., 2013]. Comme cette méthode de propulsion ne nécessite pas de champ instationnaire important, elle se prête bien à l'utilisation d'IRM (Imageur à Résonance Magnétique) pour à la fois localiser et propulser le microrobot [Mathieu et al., 2006, Tamaz et al., 2008]. La navigation dans des vaisseaux sanguins dont le diamètre diminue à mesure que le microrobot progresse impose que ce dernier voie son rayon diminuer lui aussi pour ne pas causer d'embolie. C'est pourquoi l'utilisation d'agrégats composés de micro ou de nanoparticules magnétiques liées par un polymère est d'un intérêt notable dans le cadre de la navigation endovasculaire car l'agrégat peut se décomposer lors de la navigation [Mathieu and Martel, 2009]. Propulser ne suffit pas : il faut pouvoir localiser les microrobots sans quoi aucune boucle fermée n'est envisageable. In vitro, on utilise des caméras, mais pour une implémentation in-vivo, il faut compter sur les imageurs médicaux. Un cas à part est celui de l'IRM puisqu'il est par définition sensible aux perturbations magnétiques, or des microrobots magnétiques induisent un « blop » sur l'image IRM. Ceci peut être considéré comme un obstacle à la localisation [Gimi et al., 2007, Olamaei et al., 2010], ou comme un atout car cela induit une signature plus large que la dimension du microrobot [Shapiro et al., 2004], [Wortmann et al., 2010].

## Modélisation des forces

Les microrobots naviguant dans les vaisseaux sanguins sont soumis à diverses forces qui affectent leur dynamique. De nombreux travaux ont été menés sur la modélisation de ces forces : force électrostatique [Matsuyama and Yamamoto, 1998], force de contact [Gilardi and Sharf, 2002], force de van der Waals [Iimura et al., 2009], force stérique [Decuzzi et al., 2005], force magnétique [Vartholomeos and Mavroidis, 2012]. Mais celle qui domine et qui est la plus affectée par des perturbations est la force hydrodynamique que le flux sanguin exerce sur un microrobot. La résolution numérique de Navier-Stokes ne se prêtant pas à l'application, il faut utiliser des approximations de solutions ou des approximations de modèle. Parmi les approximations de solutions, nous trouvons le modèle empirique de la force de traînée. En le corrigeant pour prendre en compte les effets de bord, on obtient une approximation satisfaisante pour le microrobot, même si de nombreux travaux travaillent seulement en loi de Stokes. La force de traînée dépend en général non linéairement de la vitesse relative du microrobot dans le sang. Or la vitesse du sang est difficilement accessible à la mesure. Pour modéliser pertinemment le flux sanguin, il est préférable de se pencher sur des approximations de modèle et de les résoudre analytiquement [Figuerola et al., 2006], [Tzirtzilakis, 2005], [Chakravarty and Sannigrahi, 1999]. On trouvera des études générales dans [Yung et al., 1998, Abbott et al., 2009, Arcese et al., 2012] qui soulignent le caractère non linéaire du système. La modélisation des systèmes vivants se caractérise aussi par de nombreux paramètres fortement incertains et la difficulté de la mesure. Ces caractéristiques posent alors la question de la synthèse de lois de commande et d'observateurs pour les microrobots propulsés dans les vaisseaux sanguins.

## Commande des microrobots

Le modèle d'un ou plusieurs microrobots en mouvement dans un vaisseau sanguin est non linéaire et affine en commande ; ce modèle dépend non linéairement de la vitesse du fluide ; contient des paramètres physiologiques généralement incertains comme la viscosité dynamique et la vitesse du sang. De plus la mesure ne concerne que la position du microrobot et ces imageurs se caractérisent par une faible résolution au regard de l'échelle considérée, d'où un bruit de mesure important. Le but est alors de trouver des lois de commandes qui stabilisent le ou les microrobots le long d'une ou des trajectoires de références, en prenant en compte les caractéristiques du modèle. On trouve plusieurs lois de commande non linéaires dans la littérature, par exemple la commande par platitude qui s'applique aux systèmes différentiellement plats [Fliess et al., 1997, Fliess et al., 1995, Fliess et al., 1992], ou la commande linéarisante par bouclage des entrées et des sorties du système [Isidori, 1995]. Ces deux approches ne sont pas nécessairement bien adaptées à notre problème car la commande est obtenue en utilisant les sorties et leurs dérivées successives, or la position du microrobot est fortement bruitée. Une autre méthode de synthèse de commande se base sur la résolution d'une équation de Ricatti [Willems, 1971],

mais on se heurte ici à la difficulté de résolution pour un système complexe. La commande par backstepping adaptatif [Krstić et al., 1995, Kokotovic, 1992, Kokotović et al., 1997] ne présente pas ces difficultés pour notre problème d'étude, et permet la construction de la loi de commande d'une façon récursive, avec une prise en compte des paramètres incertains du système dans la synthèse de la loi de commande stabilisante.

Bien que la dynamique d'un microrobot immergé dans le flux sanguin possède de fortes non linéarités et des paramètres biologiques incertains, la plupart des approches développées dans la littérature pour la commande d'un microrobot reposent sur la linéarisation de son modèle. Dans [Belharet et al., 2011] les auteurs utilisent une loi de commande prédictive sur un modèle linéarisé autour d'un point. Un contrôleur Proportionnel Intégral Dérivé (PID) est utilisé par [Mathieu et al., 2006] et par [Martel et al., 2006] en boucle ouverte. Dans [Tamaz et al., 2008] les auteurs utilisent une commande par PID pour contrôler la navigation d'un microrobot ferromagnétique en  $2D$  le long d'une trajectoire de référence dans un flux pulsatile. Un contrôleur basé sur la logique floue a été proposé par [Peng, 2011] pour commander des microparticules ou des agrégats dans le système cardiovasculaire, en utilisant un modèle linéaire. Dans [Mehrtash and Khamesee, 2011] les auteurs synthétisent un contrôleur LQG (Linear-Quadratic-Gaussian) pour un modèle linéaire de microrobot en  $3D$ . Ils ont comparé les performances de ce contrôleur à celles d'un contrôleur PID. Une commande basée sur le modèle prédictif est proposée par [Ou et al., 2012] pour commander un microrobot (Tetrahymena) en minimisant une fonction de coût pour que le microrobot atteigne le point d'arrivée sans notion de trajectoire. Ces études rapportent des problèmes d'instabilité et d'oscillations autour du point d'équilibre, surtout lorsque le flux sanguin est pulsatile, et le manque de robustesse aux bruits de mesure et aux erreurs de modélisation est souligné dans les expériences de [Martel et al., 2007]. Ces méthodes ne répondent pas à la problématique de commande de microrobots endovasculaires soumis aux forces non linéaires et incertitudes paramétriques. Les auteurs dans [Arcese et al., 2012, Arcese et al., 2013] synthétisent des lois de commande par backstepping et backstepping adaptatif pour un modèle non linéaire de microrobot afin de le stabiliser le long d'une trajectoire de référence. De plus la loi de commande est utilisée avec un observateur grand gain. Si la stabilité de cette paire a été illustrée par plusieurs simulations et expérimentations, la stabilité du retour de sortie n'y est en revanche pas étudiée.

Certains tâches dans les vaisseaux sanguins nécessitent l'utilisation de plusieurs microrobots : un grand challenge est de les contrôler par les mêmes entrées de commande. On parle alors de système sous-actionné. On trouve dans la littérature des travaux qui traitent le problème de commande de plusieurs microrobots dans les vaisseaux sanguins. Par exemple, dans [Vartholomeos et al., 2012], les auteurs proposent un algorithme de planification de trajectoire et une commande en boucle ouverte, néanmoins le contrôle en boucle ouverte n'assure aucune robustesse. Une autre méthode est proposée par [Floyd et al., 2011, Diller et al., 2012], dans la-

quelle les auteurs exploitent la différence de fréquence entre les microrobots afin de les propulser, mais l'objectif d'une telle commande est un simple suivi point à point. Dans [A. Eqtami, 2014], les auteurs proposent une commande pour stabiliser deux microrobots en un point fixe. Ils utilisent un modèle prédictif en minimisant une fonction de coût. Mais pour avoir une solution à ce problème de minimisation, les auteurs supposent la faisabilité du contrôle optimal à l'instant initial, or les auteurs négligent les forces d'interactions entre les microrobots, car ces derniers sont suffisamment loins. Les auteurs n'ont pas étudié la notion de commandabilité du système non linéaire, dont le linéarisé n'est en l'état pas stabilisable.

### Observation des microrobots

Les lois de commande par retour d'état d'un microrobot ne sont pas exploitables en l'état, car seule la position du microrobot est accessible à la mesure par un imageur. De plus, la force de traînée dépend non linéairement de la vitesse relative du microrobot par rapport à la vitesse du sang. Toutefois, la vitesse du sang est difficile à mesurer pour des raisons de coûts et surtout de limitations technologiques. On peut citer l'utilisation d'un capteur qui se base sur l'effet de Doppler [Ponzini et al., 2010], [Holloway and Watkins, 1977], ou bien l'utilisation d'un IRM [Gatehouse et al., 2005], mais l'inconvénient majeur de ces deux méthodes est que les résolutions temporelle et spatiale [Feng et al., 2005, Zhang et al., 2011] ne sont pas assez précises pour pouvoir exploiter la mesure de la vitesse du sang lors du contrôle. Il existe dans la littérature plusieurs approches pour calculer la vitesse du sang. La résolution de Navier-Stokes étant illusoire dans le cas général, on peut utiliser des hypothèses simplificatrices comme la modélisation du flux sanguin [Womersley, 1955], [Figueroa et al., 2006], [Tzirtzilakis, 2005], [Chakravarty and Sannigrahi, 1999] où l'on obtient une expression analytique de la vitesse du sang.

Une approche pertinente est alors de synthétiser un observateur d'état pour estimer les états non accessibles du microrobot ainsi que la vitesse du flux sanguin. Ce système, que nous appelons étendu, se compose de deux sous-systèmes : le modèle de microrobot et le modèle du flux sanguin. Il se caractérise par des non linéarités, des paramètres incertains et de grandes constantes de Lipschitz, et sa dimension croît avec le nombre d'harmoniques utilisé pour la modélisation du flux sanguin. Il existe plusieurs approches dans la littérature pour la synthèse d'observateurs non linéaires. Il existe les techniques basées sur la linéarisation de la dynamique de l'erreur [Bestle and Zeitz, 1983, Guay, 2002, Krener and Respondek, 1985]. Cette méthode n'est pas très adaptée à notre système étendu (les dynamiques du microrobot et du flux sanguin) à cause de sa forte sensibilité aux bruits de mesure. Les observateurs grand gain [Gauthier et al., 1992, Bornard and Hammouri, 1991, Besançon, 2007] qui sont applicables à une large catégorie de systèmes non linéaires, mais souffrent d'une sensibilité aux bruits de mesure qui augmente avec la dimension du système, même s'il est possible de réduire

cette sensibilité comme par exemple avec un grand gain variable [Andrieu et al., 2009]. Dans [Arcese et al., 2013], les auteurs proposent un observateur grand gain pour estimer les états non accessibles de la dynamique d'un microrobot en  $2D$ . Un autre observateur grand gain est proposé par [Fruchard et al., 2014] pour estimer les états non mesurables d'un microrobot ainsi que la vitesse du sang et est comparé à une approche prédictive à modèle interne. Cet observateur grand gain donne des bonnes estimations mais son problème majeur est sa sensibilité aux bruits de mesure surtout lorsque la dimension du système augmente. D'autres observateurs se basent sur les techniques des inégalités matricielles (LMI : Linear Matrix inequalities) [Arcak and Kokotović, 2001, Cho and Rajamani, 1997, Zemouche and Boutayeb, 2013]. Cet observateur est moins sensible aux bruits de mesure, simple à appliquer aux systèmes de dimension élevée, mais souffre du problème d'existence de conditions suffisantes pour garantir la faisabilité des LMI.

Le principe de séparation (certainty equivalence) lors de la synthèse d'une loi de commande et d'un observateur s'applique sur les systèmes linéaires ; ce n'est pas le cas pour les systèmes non linéaires. Une loi de commande par retour d'état globalement stabilisante, dans laquelle on substitue aux états réels les états estimés par un observateur globalement stabilisant n'évite pas nécessairement le problème d'explosion en temps fini [Kokotovic, 1992] ni ne mène nécessairement à un retour de sortie globalement stabilisant [Mazenc et al., 1994]. Pour remédier à ce problème, soit on synthétise le bouclage de sortie de sorte à stabiliser à la fois le système et l'observateur, soit on utilise une approche d'erreur de commande (ou certainty equivalence) en utilisant la robustesse du système aux erreurs d'entrée ou des corrections additionnelles. Dans [Kokotović et al., 1997], les auteurs donnent des conditions sur la croissance des non linéarités du système pour élargir les régions d'attraction. Dans [Teel and Praly, 1995], les auteurs développent des méthodes pour obtenir la stabilité semiglobale avec un retour d'état partiel et un retour de sortie, ils montrent que la stabilité semiglobale par un retour d'état uniformément observable est une condition suffisante pour obtenir la stabilité pratique semiglobale du retour de sortie. Dans [Praly and Jiang, 1993], les auteurs montrent que, pour les systèmes qui peuvent se mettre sous une forme normale dans laquelle les non linéarités dépendent uniquement de la sortie mesurée du système et dont la dynamique inverse est ISS (Input-to-State-Stability), si la condition du gain fini est satisfaite, alors un bouclage de sortie peut assurer la stabilité asymptotique globale du système.

### 3. Organisation du manuscrit et contributions

Nous exposons maintenant l'organisation de ce manuscrit, composé de cinq chapitres, dont nous résumons les contenus et explicitons les contributions.

**Chapitre 1 :** Le premier chapitre est dédié à un état de l'art global vu l'aspect pluridisciplinaire du travail : il décrit tout d'abord les méthodes utilisées pour créer des champs et des gradients de champ magnétiques. Il décrit ensuite des caractéristiques du système cardiovasculaire dans lequel les microrobots naviguent. Nous listons et explicitons les différentes forces qui s'exercent sur un ou plusieurs microrobots en mouvement dans les vaisseaux sanguins, à savoir les forces magnétiques et d'interaction magnétique, la force hydrodynamique, les forces de van der Waals et stérique, le poids apparent et les forces de contact. Nous exposons aussi différents modèles utilisés pour modéliser le caractère pulsatile et périodique du flux sanguin. Enfin nous présentons comment sont conçus et propulsés trois types courants de microrobots magnétiques.

**Chapitre 2 :** Le deuxième chapitre est consacré à l'exploitation des forces données dans le premier chapitre pour aboutir à des représentations d'état exploitables pour la commande et l'observation. Nous donnons tout d'abord les représentations d'état qui décrivent la navigation d'un ou plusieurs microrobots dans les vaisseaux sanguins, ce que nous qualifions de système réduit. Ensuite nous proposons deux représentations d'état l'une linéaire et l'autre non linéaire pour modéliser le flux pulsatile sanguin, que nous appelons système fluïdique. Nous combinons enfin les sous-systèmes réduit et fluïdique pour aboutir au système dit étendu. L'intérêt de ce chapitre est de classifier les différents systèmes qui sont utilisés d'une part pour la commande et d'autre part pour l'observation.

**Chapitre 3 :** La première partie de ce chapitre est dédiée à des rappels sur les notions de commandabilité, et différentes lois de commande utilisées dans la littérature pour les systèmes non linéaires afin d'étayer nos choix ultérieurs. La deuxième partie de ce chapitre est consacrée à la synthèse des lois de commande par backstepping adaptatif pour le système réduit d'un microrobot donné dans le deuxième chapitre dans les cas  $1D$  et  $2D$ . L'intérêt d'une telle commande est la prise en compte des paramètres biologiques incertains présents dans le système. La dernière partie de ce chapitre est consacrée à la commande de deux microrobots. Nous effectuons une étude de commandabilité –partielle, car sur le système linéarisé le long d'une trajectoire instationnaire– de la dynamique des microrobots en interaction. Nous donnons les trajectoires et les commandes admissibles pour le système linéarisé, et proposons une loi de commande par backstepping afin d'assurer la convergence des trajectoires réelles des deux microrobots vers leurs trajectoires de références.

**Chapitre 4 :** Le quatrième chapitre est tout d'abord consacré au rappel des notions d'observabilité, de formes canoniques, et de grandes classes d'observateurs utilisés dans la littérature pour les systèmes non linéaires. Comme seule la position du microrobot est donnée par l'imageur, ces retours d'état ne sont pas utilisables en l'état. Selon les harmoniques présentes dans l'expression de la vitesse du sang, la dimension du système étendu augmente. Nous proposons donc un observateur basé sur le théorème de la valeur moyenne, dont le gain est obtenu en résolvant plusieurs inégalités matricielles. Nous

proposons aussi des observateurs par immersion dans le cas où la pulsation cardiaque est inconnue. Nous proposons enfin des lois de commande par retour de sortie pour le système réduit en  $1D$  et  $2D$  dont nous démontrons la stabilité asymptotique ou pratique en présence d'erreurs de modélisation.

**Chapitre 5 :** Le dernier chapitre est dédié à l'illustration des résultats présentés dans ce manuscrit par plusieurs simulations. Nous supposons d'abord avoir accès à l'état complet du système pour montrer les résultats obtenus par backstepping adaptatif. Nous illustrons ensuite les performances et limitations de l'approche par bouclage de sortie et comparons les performances du grand gain et l'observateur basé sur le théorème de la valeur moyenne. Les simulations valident également l'utilisation de l'observateur par immersion dans le cas où la pulsation du flux sanguin est inconnue. Enfin, les dernières simulations illustrent la commande de deux microrobots par une entrée de commande selon différents choix de trajectoires de référence admissibles.

Ces travaux ont été publiés dans plusieurs conférences et journaux internationaux et une conférence nationale :

1. **Lounis Sadelli**, Matthieu Fruchard, and Antoine Ferreira, "2D Observer-Based Control of a Vascular Microrobot," in IEEE Transactions on Automatic Control, DOI : 10.1109/TAC.2016.2604045 sera publié en 2017 Août
2. **Lounis Sadelli**, Matthieu Fruchard, Antoine Ferreira, "Estimation de la pulsation cardiaque et la vitesse du sang", in 6èmes Journées Doctorales / Journées Nationales MACS, Jun. 2015, Bourges (France).
3. **Lounis Sadelli**, Matthieu Fruchard, and Antoine Ferreira. "Adaptive control of microrobot in pulsatile flow", in 2014 IEEE Conference on Control Applications (CCA), pp.1982-1987, 8-10 Oct. 2014, Antibes (France).
4. **Lounis Sadelli**, Matthieu Fruchard, and Antoine Ferreira. "Observer-based controller for microrobot in pulsatile blood flow", in 2014 IEEE 53rd Annual Conference on Decision and Control (CDC), pp.6993-6998, 15-17 Dec. 2014, Los Angeles (USA)



# Chapitre 1

## Etat de l'art

### Contenu du chapitre

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>13</b>
<b>1.2</b>	<b>Génération de champs et gradients de champs magnétiques</b>	<b>13</b>
1.2.1	Loi de Biot et Savart	14
1.2.2	Champ magnétique créé par une spire circulaire	15
1.2.3	Bobines de Helmholtz	16
1.2.4	Bobines de Maxwell	17
<b>1.3</b>	<b>Vaisseaux sanguins</b>	<b>19</b>
1.3.1	Complexité du système sanguin	20
1.3.2	Imageurs	23
<b>1.4</b>	<b>Expression des Forces</b>	<b>25</b>
1.4.1	Distance algébrique	25
1.4.2	Force hydrodynamique	25
1.4.2.1	Navier-Stokes	26
1.4.2.2	Nombre de Reynolds	27
1.4.2.3	Coefficient de traînée	28
1.4.2.4	Effet des parois	29
1.4.2.5	La vitesse du sang et le modèle de Womersley	30
1.4.3	Force électrostatique	33
1.4.4	Force de contact	35
1.4.4.1	Modèle de Voigt	35
1.4.4.2	Modèle de Hertz	36
1.4.5	Poids Apparent	37
1.4.6	Forces négligeables	38
1.4.6.1	Force de van der Waals	38
1.4.6.2	Force stérique	38
1.4.7	Force motrice et interactions	39

---

1.4.7.1	Aimantation . . . . .	39
1.4.7.2	Force magnétique . . . . .	40
1.4.7.3	Couple magnétique . . . . .	41
1.4.7.4	Interactions magnétiques . . . . .	41
1.4.7.5	Imagerie par Résonance Magnétique . . . . .	42
1.4.7.6	Octomag . . . . .	43
<b>1.5</b>	<b>Différents concepts de propulsion . . . . .</b>	<b>43</b>
1.5.1	Flagelle élastique . . . . .	44
1.5.2	Flagelle hélicoïdale . . . . .	46
1.5.3	Bead pulling . . . . .	48
<b>1.6</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>49</b>

---

## 1.1 Introduction

Notre étude concerne la navigation de microrobots magnétiquement actionnés dans les vaisseaux sanguins. Afin de bien situer ce cadre, ce premier chapitre s'organise de la manière suivante. Nous rappelons d'abord comment sont générés les champs et gradients de champs magnétiques qui permettent l'actionnement et donc la propulsion des microrobots autonomes. Puis, nous exposons les spécificités du milieu dans lequel évoluent ces microrobots, à savoir le système sanguin. Enfin, nous présentons les moyens de localiser un microrobot dans le corps. La section 1.4 présente les différentes forces qui s'exercent sur un et entre des microrobots naviguant dans le système sanguin et leurs expressions analytiques : force hydrodynamique, force électrostatique, poids apparent, forces, couples et interactions magnétiques. Une attention particulière est portée à l'expression du flux sanguin car il est difficile d'en mesurer la vitesse avec la précision et les résolutions attendues. Enfin, la section conclut ce chapitre par un tour d'horizon critique des différentes méthodes utilisées pour propulser à distance des microrobots.

## 1.2 Génération de champs et gradients de champs magnétiques

La navigation des microrobots dans les vaisseaux sanguins nécessite une source d'énergie soit embarquée soit déportée pour pouvoir propulser les microrobots dans le système cardiovasculaire. Ainsi, une batterie embarquée sert de source d'énergie pour actionner un microrobot à flagelles dans [Dario et al., 1998] ou [Kosa et al., 2007]. Néanmoins, une source d'énergie embarquée et le moteur associé posent un problème d'encombrement et représentent le principal handicap de ce type de robots, dont les dimensions sont de l'ordre de plusieurs millimètres. Ces dispositifs sont donc appropriés pour naviguer dans le système digestif, pas dans le système sanguin. Par conséquent, les solutions à actionnement embarqué restreignent la navigation du robot aux réseaux dont les vaisseaux ont un diamètre important ; elle induit aussi, à moins de l'extraire, de forts risques d'embolie : un tel microrobot va nécessairement boucher l'un des vaisseaux, et par conséquent bloquer la circulation sanguine.

Pour remédier à ces problèmes, une solution pertinente est d'utiliser soit une source d'énergie in situ (par exemple chimique dans [Sitti, 2009]) soit une source d'énergie déportée, comme l'utilisation des champs magnétiques pour l'actionnement à distance. L'actionnement par champ ou par gradient de champ magnétique produit une force magnétique motrice ou un couple magnétique moteur exploitable pour la propulsion.

Cette section est consacrée à la présentation de différents concepts de systèmes magnétiques utilisés pour la génération de champs ou de gradients de champs magnétiques, qui pourront être source de propulsion avec actionnement déporté. Tout d'abord, nous rappelons la loi de Biot et Savart pour un fil conducteur, ensuite nous calculons le champ magnétique créé par une spire circulaire puis par une paire de bobines en configuration d'Helmholtz et de Maxwell.

### 1.2.1 Loi de Biot et Savart

On considère un fil conducteur décrivant une courbe  $(C)$  parcouru par un courant d'intensité  $I$  comme illustré sur la figure 1.1.

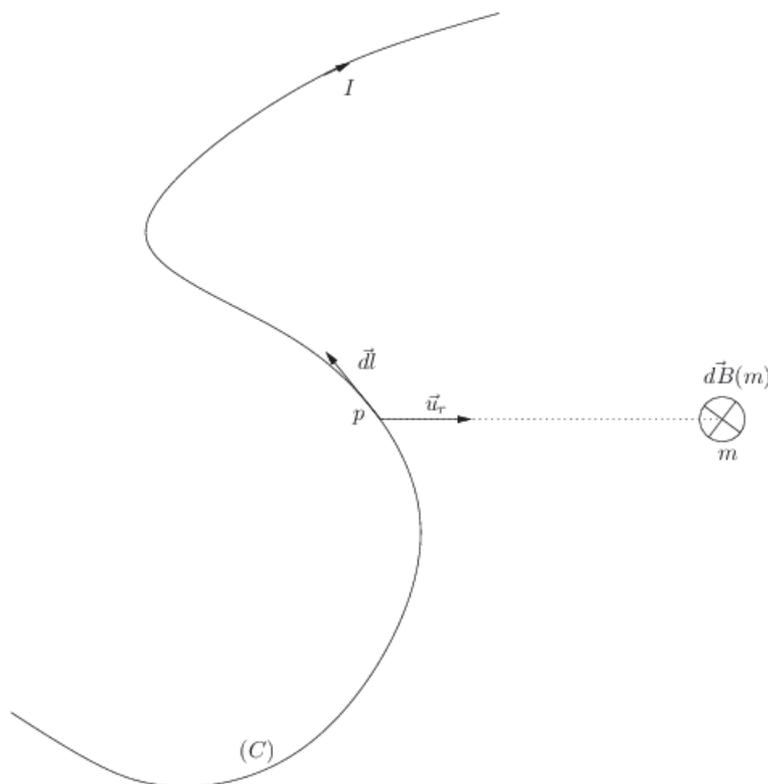


FIGURE 1.1 – Champ magnétique  $\vec{B}(m)$  créé au point  $m$  par un fil conducteur

Soit  $p$  un point appartenant au fil conducteur et une longueur élémentaire  $\vec{dl}$  orientée. On note  $\vec{r}$  le vecteur position d'un point  $m$  relativement à  $p$  :  $\vec{r} = \overrightarrow{pm} = r \vec{u}_r$ . Le champ magnétique élémentaire  $d\vec{B}(m)$  créé en  $m$  est donné par :

$$d\vec{B}(m) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \vec{dl} \wedge \overrightarrow{pm}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \vec{dl} \wedge \vec{u}_r}{r^2}, \quad r = \|\vec{r}\| \quad (1.1)$$

où  $\mu_0$  est la perméabilité magnétique du vide reliée à la permittivité du vide  $\varepsilon_0$  et à la célérité de la lumière par la relation  $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ . Le champ magnétique total produit en un point  $m$  est la contribution des champs élémentaires produits par tous les éléments de fil :

$$\vec{B}(m) = \int_{p \in (C)} d\vec{B}(m) = \int_{p \in (C)} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \vec{dl} \wedge \vec{u}_r}{r^2} \quad (1.2)$$

### 1.2.2 Champ magnétique créé par une spire circulaire

Un conducteur parcouru par un courant électrique produit en tout point de l'espace un champ magnétique  $\vec{B}$  donné par la loi de Biot et Savart. On considère maintenant le cas particulier d'une spire circulaire de rayon  $r_s$  parcourue par un courant électrique d'intensité  $I$  comme illustré sur la figure 1.2, et nous nous intéressons au champ magnétique résultant sur l'axe  $Ox$ .

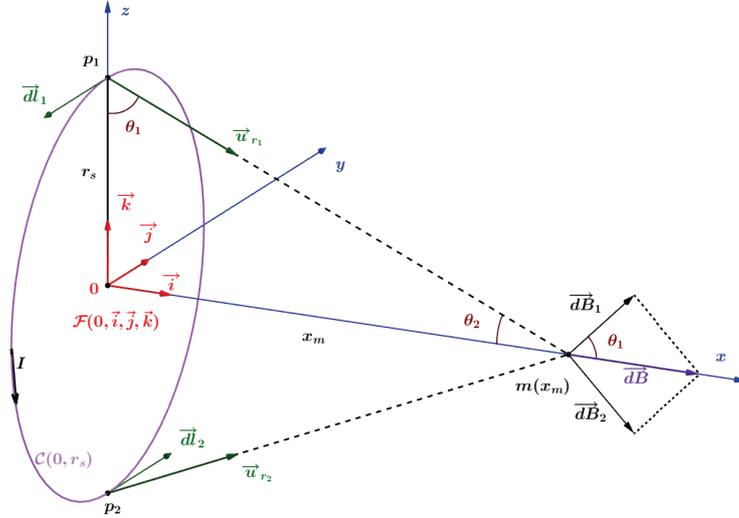


FIGURE 1.2 – Spire circulaire parcourue par un courant  $I$

On considère deux longueurs élémentaires  $\vec{dl}_1$  et  $\vec{dl}_2$  de la spire situées de façon symétrique par rapport à l'axe  $y$  en deux points  $p_1$  et  $p_2$  respectivement. Le champ magnétique élémentaire  $\vec{dB}_i$  créé par la longueur élémentaire  $\vec{dl}_i$  est donné par la loi de Biot et Savart :

$$\vec{dB}_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \vec{dl}_i \wedge \vec{u}_{r_i}}{r_i^2}, \quad r_i = \|\vec{r}_i\| \quad (1.3)$$

Comme  $\vec{dl}_i$  et  $\vec{u}_{r_i}$  sont perpendiculaires et que  $\vec{u}_{r_i}$  est unitaire, alors  $\|\vec{dl}_i \wedge \vec{u}_{r_i}\| = dl_i$ . En tout point  $m$  de l'axe  $Ox$ , le champ élémentaire  $\vec{dB}$  induit par le passage du courant dans les éléments infinitésimaux  $\vec{dl}_1$  et  $\vec{dl}_2$  est alors donné par  $\vec{dB} = dB\vec{i}$  avec :

$$dB = 2dB_{1x} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I dl_1}{r_1^2} \sin(\theta_2), \quad \cos(\theta_1) = \sin(\theta_2). \quad (1.4)$$

On intègre sur le demi cercle  $\mathcal{C}^+$  de la spire de rayon  $r_s$  avec  $z \geq 0$ . Il en résulte :

$$B(m) = \int_{p_1 \in \mathcal{C}^+} \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I dl_1}{r_1^2} \sin(\theta_2) \quad (1.5)$$

Or tous les termes de (1.5) sont constants quel que soit  $p_1 \in \mathcal{C}^+$  et  $\int_{p_1 \in \mathcal{C}^+} dl_1 = \pi r_s$ . On obtient donc :

$$B(m) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r_1^2} \sin(\theta_2) \int_{p_1 \in \mathcal{C}^+} dl_1 = \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{r_1^2} \sin(\theta_2) r_s \quad (1.6)$$

D'après la figure 1.2, on a  $\sin(\theta_2) = \frac{r_s}{r_1}$ , d'où  $B(m) = \frac{\mu_0 I}{2r_s} \sin^3(\theta_2)$ . De plus, comme  $\sin(\theta_2) = \frac{r_s}{\sqrt{r_s^2 + x_m^2}}$ , le champ magnétique total  $\vec{B}(m)$  est donné par :

$$\vec{B}(m) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{r_s^2}{(x_m^2 + r_s^2)^{(3/2)}} \vec{i} \quad (1.7)$$

En supposant le point  $m$  suffisamment éloigné de la bobine, on peut négliger la géométrie de l'enroulement des  $N$  spires. Le champ magnétique résultant d'une bobine contenant  $N$  spires sur l'axe  $Ox$  est alors donné par :

$$\vec{B}_{bobine}(m) = \frac{N\mu_0 I}{2} \frac{r_s^2}{(x_m^2 + r_s^2)^{(3/2)}} \vec{i} \quad (1.8)$$

### 1.2.3 Bobines de Helmholtz

On considère deux bobines parcourues par des courants d'intensité  $I$  en phase ou en opposition de phase. Chaque bobine possède  $N$  spires, la distance entre les bobines est notée  $d$ , et le rayon de chaque spire est égal à  $r_s$ , comme illustré sur la figure 1.3.

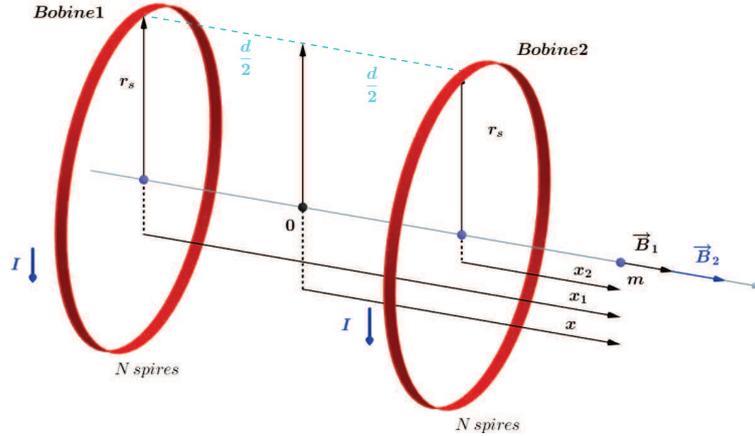
Le champ magnétique  $\vec{B}_i$  créé par chaque bobine  $i$  au point  $m$  est donné par l'équation (1.8) en remplaçant  $x_m$  par  $x_i$ . On obtient alors le champ magnétique total  $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$  au point  $m$ , on remarque sur la figure 1.3 que  $x_2 = x - d/2$  et  $x_1 = x + d/2$ . On obtient alors :

$$\vec{B} = \frac{N\mu_0 I r_s^2}{2} \left[ \frac{1}{\left( \left( x - \frac{d}{2} \right)^2 + r_s^2 \right)^{(3/2)}} + \frac{1}{\left( \left( x + \frac{d}{2} \right)^2 + r_s^2 \right)^{(3/2)}} \right] \vec{i} \quad (1.9)$$

On considère 3 paires de bobines sur les axes  $x$  (axe 1),  $y$  (axe 2) et  $z$  (axe 3), et on néglige les interactions entre les bobines. Pour chaque axe  $i$  : chaque bobine possède  $N_i$  spires de rayon  $r_{s_i}$  parcourues par un courant d'intensité  $I_i$  et la distance entre les deux bobines est notée  $d_i$ .

En utilisant l'équation (1.9) sur chaque axe  $i$  on obtient le champ total suivant les trois axes :

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \frac{\mu_0}{2} \begin{pmatrix} \frac{a_1}{\left( \left( x - \frac{d_1}{2} \right)^2 + r_{s_1}^2 \right)^{(3/2)}} + \frac{a_1}{\left( \left( x + \frac{d_1}{2} \right)^2 + r_{s_1}^2 \right)^{(3/2)}} \\ \frac{a_2}{\left( \left( y - \frac{d_2}{2} \right)^2 + r_{s_2}^2 \right)^{(3/2)}} + \frac{a_2}{\left( \left( y + \frac{d_2}{2} \right)^2 + r_{s_2}^2 \right)^{(3/2)}} \\ \frac{a_3}{\left( \left( z - \frac{d_3}{2} \right)^2 + r_{s_3}^2 \right)^{(3/2)}} + \frac{a_3}{\left( \left( z + \frac{d_3}{2} \right)^2 + r_{s_3}^2 \right)^{(3/2)}} \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

FIGURE 1.3 – Deux bobines parcourues par des courants en phase d'intensité  $I$ 

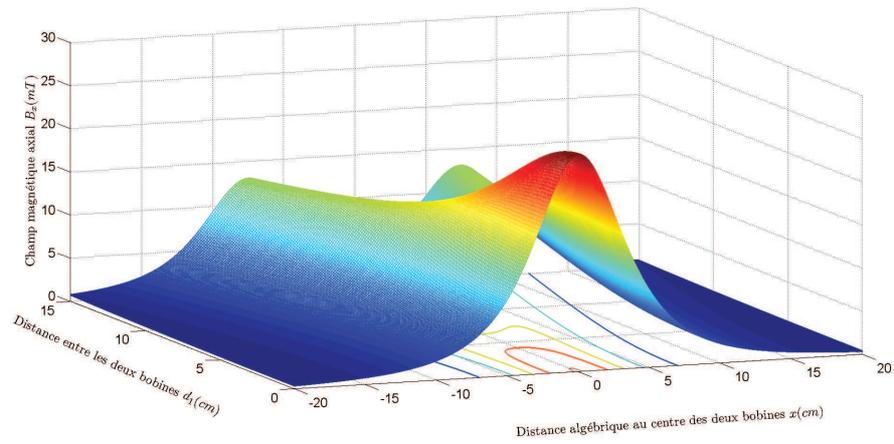
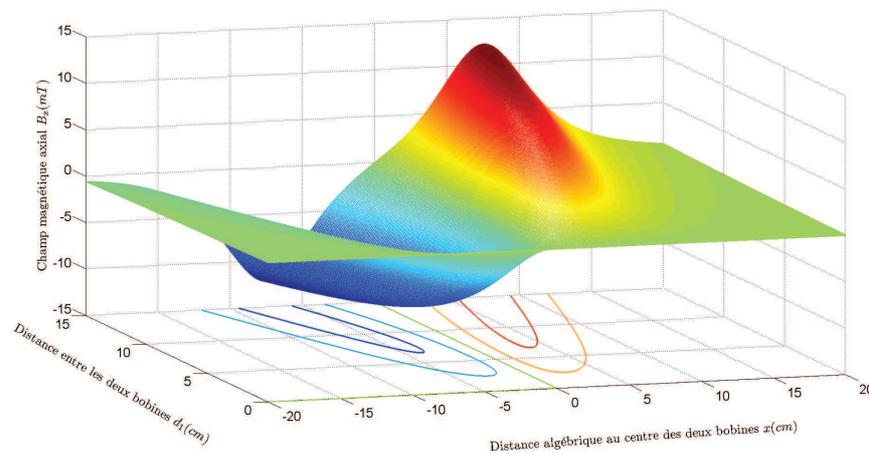
où  $a_i = N_i I_i r_{s_i}^2$ .

A titre d'exemple, nous prenons  $N_1 = 100$  spires pour chaque bobine, un rayon de spire  $r_s = 5\text{ cm}$ , un courant d'intensité  $I_1 = 10\text{ A}$ , une distance entre les deux bobines  $d_1 \in [0, 15]\text{ cm}$  et une distance algébrique au centre des deux bobines  $x \in [-20, 20]\text{ cm}$ . Le champ magnétique  $B_x(x, d_1)$  en un point  $m$  de l'axe des bobines est représenté sur la figure 1.4, dans le cas de courants en phase (figure 1.4(a)) et en opposition de phase (figure 1.4(b)).

Nous remarquons sur la figure 1.4(a) que l'intensité du champ magnétique  $B_x$  décroît en s'éloignant du centre des bobines ou bien en augmentant la distance  $d_1$  entre les deux bobines, nous constatons aussi que l'intensité maximale du champ magnétique  $B_x$  est atteinte au centre des bobines (point 0) pour une distance  $d_1 \in [0, \varepsilon]$  car il y a une zone de linéarité du champ au voisinage de 0. L'intensité du champ magnétique est presque constante dans la zone où la distance  $d_1$  est inférieure à  $5\text{ cm}$  et  $x$  au voisinage de zéro, donc il est préférable de travailler dans cette zone pour avoir des couples magnétiques plus importants. Sur la figure 1.4(b), nous constatons que l'intensité du champ magnétique  $B_x$  diminue lorsque la distance  $d_1$  diminue aussi, et sa valeur tend vers zéro pour des  $|x|$  supérieures à  $15\text{ cm}$ , quelle que soit la valeur de  $d_1$ . De plus nous observons une variation linéaire du champ magnétique  $B_x$  pour  $x$  compris entre  $-5\text{ cm}$  et  $5\text{ cm}$ , valeurs pour lesquelles l'intensité du champ magnétique atteint ses valeurs minimale et maximale.

#### 1.2.4 Bobines de Maxwell

La configuration des bobines de Maxwell est la même que celle des bobines de Helmholtz, en revanche dans ce cas, c'est le gradient du champ magnétique  $\vec{\nabla} \vec{B}$  qui sera étudié. Comme, d'après l'expression (1.10), les trois composantes  $B_x$ ,  $B_y$  et  $B_z$  sont indépendantes, il en résulte

(a) Le courant  $I$  est en phase dans les deux bobines(b) Le courant  $I$  est en opposition de phase dans les deux bobinesFIGURE 1.4 – Champ magnétique axial  $B_x$  créé par deux bobines

que :

$$\frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial B_z}{\partial y} = 0$$

Le gradient du champ magnétique est alors :

$$\vec{\nabla} \vec{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial B_y}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

avec

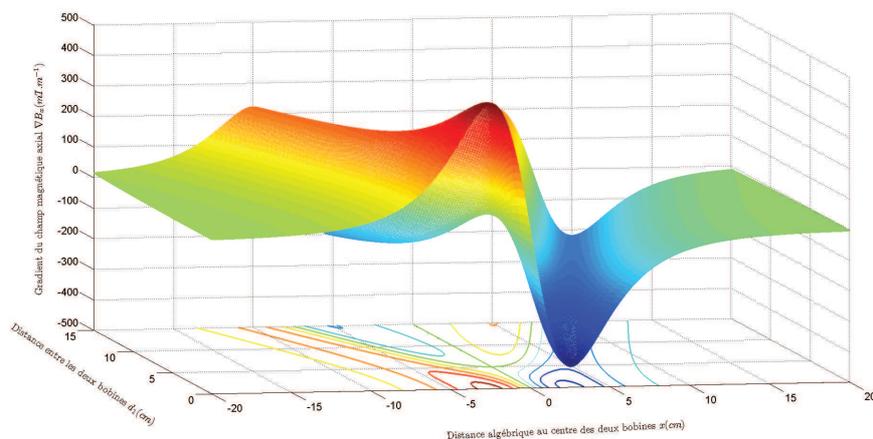
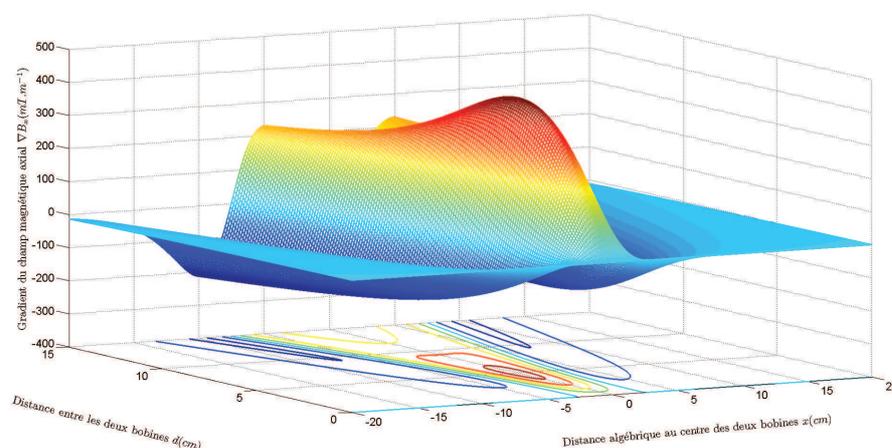
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial B_x}{\partial x} \\ \frac{\partial B_y}{\partial y} \\ \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \frac{3\mu_0}{4} \begin{bmatrix} \frac{a_1(d_1 - 2x)}{\left(\left(x - \frac{d_1}{2}\right)^2 + r_{s_1}^2\right)^{(5/2)}} - \frac{a_1(d_1 + 2x)}{\left(\left(x + \frac{d_1}{2}\right)^2 + r_{s_1}^2\right)^{(5/2)}} \\ \frac{a_2(d_2 - 2y)}{\left(\left(y - \frac{d_2}{2}\right)^2 + r_{s_2}^2\right)^{(5/2)}} - \frac{a_2(d_2 + 2y)}{\left(\left(y + \frac{d_2}{2}\right)^2 + r_{s_2}^2\right)^{(5/2)}} \\ \frac{a_3(d_3 - 2z)}{\left(\left(z - \frac{d_3}{2}\right)^2 + r_{s_3}^2\right)^{(5/2)}} - \frac{a_3(d_3 + 2z)}{\left(\left(z + \frac{d_3}{2}\right)^2 + r_{s_3}^2\right)^{(5/2)}} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

Plaçons nous dans le même cas d'étude que dans la section précédente 1.2.3. Le gradient magnétique  $\nabla B_x(x, d_1)$  est représenté sur la figure 1.5 avec des courants en phase (voir figure 1.5(a)) et en opposition de phase (voir figure 1.5(b)).

Il existe une zone de variation linéaire de l'intensité du gradient du champ magnétique pour  $|x| \leq 2.5cm$  et  $d$  entre  $0cm$  et  $5cm$  (voir figure 1.5(a)). L'intensité de  $\nabla B_x$  tend vers zéro pour des valeurs  $|x| \geq 15cm$ , et ce quelle que soit la valeur de  $d_1$ . Pour des valeurs de  $d_1$  proches de zéro, le gradient du champ magnétique atteint ses extrema aux points  $x = -2,5cm$  et  $x = 2,5cm$  et, au voisinage de ces deux extrema, nous remarquons que la valeur de  $\nabla B_x$  est presque constante. Sur la figure 1.5(b), la valeur de  $\nabla B_x$  tend vers zéro pour  $|x| \geq 15cm$ , quelle que soit la valeur de  $d_1$  comme dans le premier cas (courant en phase). Le gradient  $\nabla B_x$  atteint sa valeur minimale pour  $x$  égal à  $5cm$  ou  $-5cm$ . Pour avoir des forces magnétiques maximales, il est préférable de travailler dans la zone autour de  $x = 0$  pour un  $d_1 = 5cm$ , pour laquelle la valeur de  $\nabla B_x$  est constante et maximale.

### 1.3 Vaisseaux sanguins

L'objectif est de contrôler des microrobots dans le système cardiovasculaire afin d'effectuer des mesures ou diagnostics in situ, d'effectuer des tâches de microchirurgie, ou de délivrer des médicaments de manière ciblée. Le sang est propulsé périodiquement par le cœur dans ce réseau et agit donc comme une perturbation instationnaire sur le système robotique via la force hydrodynamique qui sera présentée dans la section 1.4.2. De plus, la complexité du réseau et la variabilité des paramètres biologiques qui influent sur le comportement et l'amplitude de cette perturbation sont un problème supplémentaire. Il est donc important de catégoriser les vaisseaux dans lesquels le robot navigue afin de modéliser au mieux cette perturbation. Enfin, nous montrerons les contraintes que les imageurs médicaux induisent sur la qualité de la mesure que nous pourrons utiliser afin de synthétiser des bouclages de sortie.

(a) Le courant  $I$  est en phase dans les deux bobines(b) Le courant  $I$  en opposition de phase dans les deux bobinesFIGURE 1.5 – Gradient du champ magnétique axial  $\nabla B_x$  créé par les deux bobines

### 1.3.1 Complexité du système sanguin

Il suffit de voir la figure 1.6 pour avoir une idée de la complexité du réseau sanguin. Le système cardiovasculaire est très complexe en raison du nombre important de vaisseaux sanguins, de bifurcations, l'enchevêtrement, etc. Les artères et les veines forment le système vasculaire ; les gaz et les nutriments sont diffusés entre le sang et les tissus à travers les capillaires. Le mouvement du sang dans les artères est causé par la contraction périodique des muscles du cœur : ce dernier pompe le sang du système veineux vers le système artériel. Ce processus périodique fait apparaître deux grandes phases : la systole (contraction du cœur) et la diastole (relaxation du cœur). Durant la systole, la pression dans le ventriculaire gauche devient supérieure à celle de l'aortique, dont la valve s'ouvre : le sang est expulsé dans l'aorte. Cette phase se caractérise donc par une pression et une vitesse élevée du sang dans le système artériel. Durant la diastole,

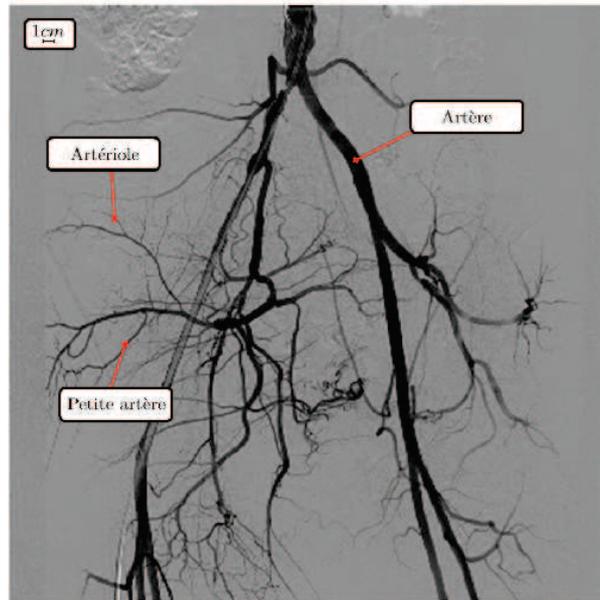


FIGURE 1.6 – Réseau sanguin (Source : archives radiologiques du Centre Hospitalier Universitaire Vaudois, Lausanne, Suisse)

la pression du ventriculaire est équilibrée par celle de l'aortique, la valve de cette dernière se ferme et la pression ventriculaire chute rapidement contrairement à celle de l'aortique qui décroît lentement ; enfin le sang s'écoule vers les zones secondaires. La diastole se caractérise donc par des pressions et vitesses faibles dans les artères, voire par des reflux. Les différents types de vaisseaux sanguins sont résumés ci-dessous :

- Les artères transportent le sang sortant des ventricules du cœur. On distingue deux circulations, ce qu'illustre la figure 1.7 : la circulation systémique, dans laquelle les artères et les veines systémiques transportent respectivement le sang oxygéné et désoxygéné<sup>1</sup> ; la circulation pulmonaire où les artères pulmonaires acheminent le sang désoxygéné tandis que les veines pulmonaires convoient le sang oxygéné. Le réseau artériel se caractérise par une vitesse du sang qui varie fortement dans le temps, et peut même se caractériser par des reflux temporaires. On peut distinguer trois catégories d'artères :
  - **Les artères élastiques (conductrices)** sont de grosses artères qui se trouvent près du cœur, par exemple l'aorte et ses principales ramifications. Elles sont caractérisées par un grand diamètre et une grande élasticité pour bien supporter et compenser les grandes fluctuations de pression en sortie du cœur. Les artères élastiques se dilatent fortement durant la phase de systole et se contractent durant la phase de diastole.

---

1. Pauvre en  $O_2$  et riche en  $CO_2$ .

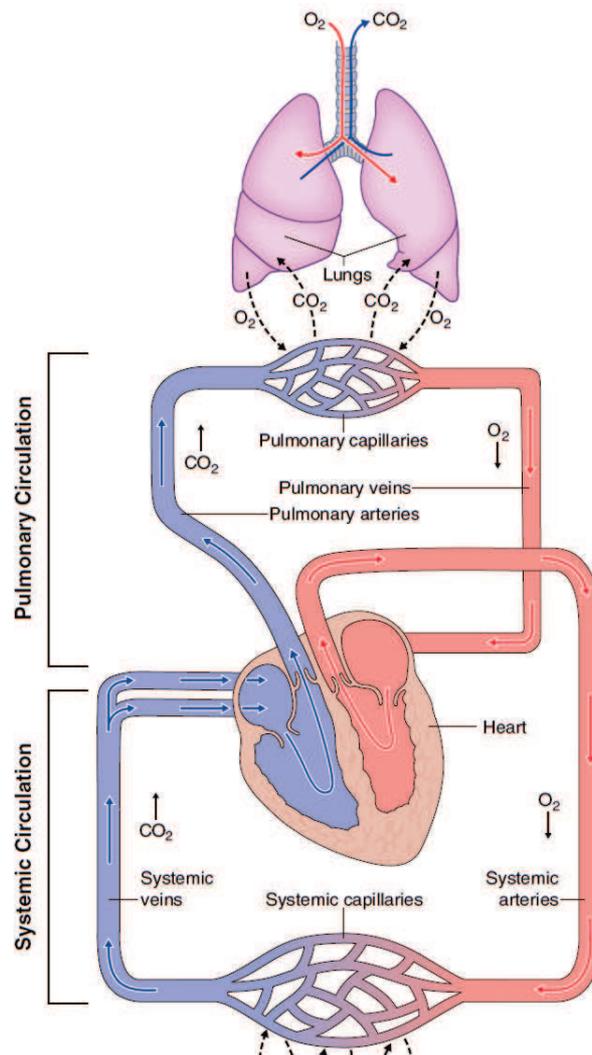


FIGURE 1.7 – Circulation du sang (Source : [Plowman and Smith, 1997])

- **Les artères musculaires (distributrices)** sont issues des artères élastiques et de diamètre millimétrique. La fonction de ces artères est de transporter le sang vers d'autres organes du corps humain.
- **Les artérioles (conductrices)** sont les plus petites artères et contrôlent l'écoulement du sang dans les capillaires. Le rôle des artérioles est de contrôler l'écoulement du sang dans les lits capillaires et leur diamètre varie en fonction de leur vasoconstriction<sup>2</sup> sous l'effet de stimuli nerveux ou chimiques locaux.
- Les capillaires sont les plus petits des vaisseaux sanguins, leur longueur moyenne est de  $1mm$  et leur diamètre varie entre  $5\mu m$  et  $10\mu m$ . Ils ne possèdent qu'une seule couche interne formée de cellules endothéliales, leur fonction est d'échanger des substances ( $O_2$ ,

2. Mécanisme physiologique de diminution du diamètre des vaisseaux sanguins.

$CO_2$ , nutriments..etc.) entre le sang et liquide interstitiel, puis entre ce dernier et les cellules. Les capillaires se rassemblent en réseaux afin de former les lits capillaires, ces derniers relient les artérioles aux veinules.

- Les veines transportent le sang des lits capillaires vers le coeur et se caractérisent par de faibles pressions, relativement stationnaires. Le réseau veineux possède deux types de vaisseaux :
  - **Les veinules** sont les veines les plus petites et relient les capillaires aux veines. Les plus grosses des veinules possèdent des valves anti-reflux qui permettent au sang de ne circuler que dans un seul sens : des organes vers le cœur.
  - **Les veines** ont une paroi plus mince que celle des artères et sont moins élastiques. Elles contiennent un volume de sang important mais qui s'écoule à relativement faible vitesse.

Le tableau 1.1 donne les caractéristiques principales de ces vaisseaux : rayon moyen, section totale cumulée, vitesse moyenne du sang, et nombre de Reynolds de l'écoulement.

Vaisseau	Rayon ( <i>mm</i> )	Nombre	Surface ( $cm^2$ )	Vitesse du sang ( $mm.s^{-1}$ )	<i>Re</i>
Aorte	12.5	1	4.5	500(−200/1200)	$3400 - 10^4$
Artères	0.5 – 5	~ 150	20	200(−50/500)	500
Artérioles	0.02 – 0.05	$5,7 \times 10^7$	400	< 50	0,7
Capillaires	0.004	$1,6 \times 10^{10}$	4500	< 0,3	0,002
Veinules	0.01 – 0.5	$1,3 \times 10^9$	4000	< 2	0,01
Veines	2.5	~ 200	40	3 – 50	140
Veine cave	15	1	18	150(50/400)	3300

TABLE 1.1 – Caractéristiques des vaisseaux sanguins [Schmidt-Nielsen, 1984] et [Plowman and Smith, 1997]. Les valeurs entre parenthèses indiquent les valeurs minimales et maximales selon les phases de systole et diastole.

Le sang qui circule à travers les vaisseaux sanguins est un fluide visqueux, composé principalement de trois cellules : globules rouges et blancs et les plaquettes, immergées dans le plasma. Le sang se comporte comme un fluide newtonien ou non selon les vaisseaux dans lesquels il circule puisque sa viscosité varie fortement (du simple au cinquantuple) chez un même individu [Chaplin et al., 1953, Pries et al., 1996].

### 1.3.2 Imageurs

La mesure de la position du microrobot à travers un circuit microfluidique transparent peut être réalisée à l'aide d'un système de caméras. Deux caméras suffisent à déterminer la position exacte du microrobot dans l'espace. Néanmoins, la navigation du microrobot dans l'organisme

rend impossible l'utilisation d'un tel système. La navigation du microrobot dans le système cardiovasculaire exige un système imageur approprié, qui fournit à la fois une carte locale détaillée de l'environnement, ainsi que la mesure de la position du microrobot. L'utilisation d'imageurs médicaux représente une voie prometteuse pour le développement d'applications médicales automatisées. Parmi ces imageurs, nous pouvons citer les appareils produisant des rayons X, technique utilisée en tomodensitométrie (TDM) par exemple ([Achenbach et al., 2006]), la tomographie par cohérence optique ou les IRM ([Uecker et al., 2010], [Zhang et al., 2011]).

Deux paramètres importants permettent de classer les différents systèmes imageurs : la résolution spatiale et le temps d'acquisition pour la reconstruction d'une image, pour en déduire ensuite la position du microrobot. Le Tableau 1.2 donne la résolution spatiale et le temps d'acquisition nécessaire pour obtenir une telle résolution dans le cas d'un imageur IRM. Globalement, on note qu'une diminution de la résolution spatiale entraîne une augmentation du temps d'acquisition.

Résolution spatiale en $mm$	Temps d'acquisition en $ms$	Source
2	40	[Steeden et al., 2010]
2	20 à 90	[Nezafat et al., 2004]
1,5	20	[Uecker et al., 2010]
1	52	[Zhang et al., 2010b]
1	100	[Feng et al., 2005]
0,75	330	[Zhang et al., 2011]

TABLE 1.2 – Résolution spatiale et temps d'acquisition à partir d'un imageur d'IRM (source [Arcese, 2011]).

Le Tableau 1.3 résume les contraintes techniques d'autres systèmes imageurs. Ce tableau permet de définir le type de système qu'il est envisageable d'utiliser en fonction du type de vaisseau sanguin dans lequel le microrobot navigue. Si celui-ci navigue dans une artère ou dans une petite artère, le diamètre du microrobot (de l'ordre de la centaine de  $\mu m$ ) est suffisamment important pour que l'IRM puisse le localiser. Dans de plus petits vaisseaux sanguins, le système imageur doit atteindre des résolutions spatiales de l'ordre de la dizaine de  $\mu m$ . Néanmoins, peu de systèmes imageurs sont capables d'une telle résolution comme le montre le Tableau 1.3.

1. CT : Computed Tomography (tomodensitométrie)
2. Ne peut être utilisé sur des animaux vivants
3. OCT : Optical Coherence Tomography (tomographie par cohérence optique)
4. Profondeur de pénétration limitée
5. US : Ultrasound (Appareil à ultrasons)

Vaisseau sanguin	Résolution d'imageurs en $\mu m$					
	MRI	$\mu$ -MRI	CT <sup>1</sup>	$\mu$ -CT <sup>2</sup>	OCT <sup>34</sup>	US <sup>54</sup>
	$< 10^3$	$< 10^2$	$< 10^3$	$< 50$	$< 1$	$< 10^3$
Artère	X	X	X	X	X	X
Petite artère	X	X	X	X	X	X
Artériole	-	X	-	X	X	-
Capillaire	-	-	-	-	X	-

TABLE 1.3 – Résolution spatiale de systèmes imageurs.  
(X représente un matériel compatible)

## 1.4 Expression des Forces

Un microrobot navigant dans les vaisseaux sanguins est soumis à plusieurs forces : *i*) la force de traînée exercé par le fluide en mouvement qui s'oppose au mouvement du robot ; *ii*) la force d'interaction électrostatique avec la paroi du vaisseau sanguin, qui attire le microrobot vers la paroi ; *iii*) la force de contact avec la paroi du vaisseau sanguin lors d'une collision du microrobot qui tend à le faire rebondir ; *iv*) le poids apparent, qui est la résultante de la poussée d'Archimède et de la pesanteur ; *v*) les forces d'interactions de van der Waals (attractive) et stérique (répulsive), ces deux dernières forces seront négligées lors dans notre étude. Enfin, le microrobot est soumis à une force motrice d'origine magnétique déportée qui lui permet de se propulser dans le sang.

### 1.4.1 Distance algébrique

Nous introduisons ici une convention géométrique qui sera utilisée dans la suite du manuscrit. Les distances  $\delta$  et  $\Delta$  sont représentées sur la figure 1.8.  $\Delta$  représente la distance entre le centre du microrobot sphérique et l'axe du vaisseau sanguin ;  $\delta = \vec{NC} \cdot \vec{n}$  est la distance algébrique entre la surface du microrobot et la paroi du vaisseau sanguin, avec  $\vec{n}$  le vecteur unitaire normal à la paroi du vaisseau sanguin. Comme indiqué sur la figure 1.8,  $\delta$  est positif en cas d'impact, et  $\delta$  est négatif si le microrobot circule librement (pas de contact avec la paroi).  $r$  et  $C_0$  sont respectivement le rayon et le centre du microrobot sphérique.

### 1.4.2 Force hydrodynamique

Un corps navigant dans un fluide en mouvement est soumis à une force de traînée qui s'oppose à son mouvement. Dans cette section, nous abordons brièvement l'équation de Navier-Stokes qui régit la dynamique des fluides et rappelons donc la notion de nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement d'un fluide. Nous nous intéresserons d'une part à l'influence de l'écoulement sur le microrobot et donnons différentes expressions du coefficient et de la force de traînée

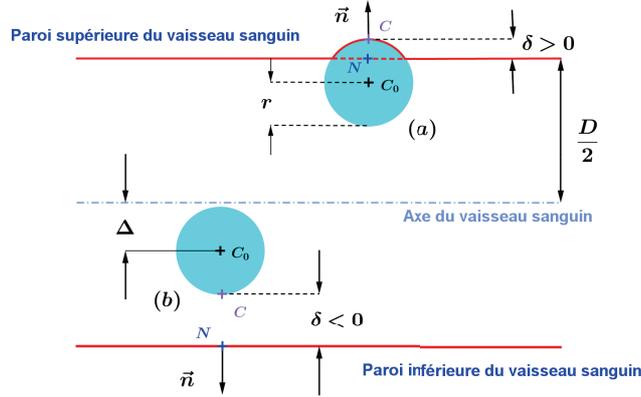


FIGURE 1.8 – Les points  $C_0$ ,  $C$  et  $N$  avec contact (a) et sans contact (b)

dans un milieu infini avant d'aborder la notion d'effet de bord, en analysant comment la présence de parois modifie l'expression de la force hydrodynamique subie par le robot. D'autre part, nous nous intéressons à l'influence de l'écoulement sur la vitesse du sang. En effet, la force hydrodynamique est très sensible à la vitesse du flux sanguin. Or cette dépendance est non linéaire, le flux sanguin est pulsatile dans le réseau artériel, et ce flux varie selon que l'on se place ou non à proximité de la paroi. Enfin, la vitesse du sang est difficilement mesurable avec une résolution spatiale et temporelle adéquates. Nous verrons donc comment, sous certaines hypothèses, il est possible d'obtenir des solutions analytiques qui permettent de justifier la modélisation de la vitesse du sang par une série de Fourier en facteur d'un profil spatial.

#### 1.4.2.1 Navier-Stokes

La dynamique d'un fluide est régie par l'équation de Navier-Stokes :

$$\begin{aligned} \rho_f \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho_f (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} &= -\vec{\nabla} p + \rho_f \vec{\mathcal{F}} + \eta \nabla^2 \vec{v} & m \in \Omega, t > 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= 0 & m \in \Omega, t > 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

où  $\rho_f$  et  $\eta$  sont respectivement la masse volumique et la viscosité dynamique du fluide.  $\vec{v}(m, t) = (v_x(m, t), v_y(m, t), v_z(m, t))$  est la vitesse du fluide avec  $m = (x, y, z)$  un point appartenant au domaine d'étude  $\Omega$  et  $\vec{\mathcal{F}}$  la force volumique par unité de masse. Les opérateurs  $\vec{\nabla}$  et  $\nabla^2$  sont respectivement le gradient et le laplacien définis comme suit :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned}$$

Le sens physique de chaque terme de l'équation de Navier-Stokes est le suivant :

- $\rho_f \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$  représente l'accélération d'une particule de fluide.
- $\rho_f (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$  est le terme d'advection de la quantité de mouvement d'une particule du fluide. Ce terme est non linéaire.
- $\rho_f \vec{\mathcal{F}}$  est l'ensemble des forces volumiques appliquées au fluide.
- $-\vec{\nabla} p$  est la force de pression associée aux contraintes normales.
- $\eta \nabla^2 \vec{v}$  est la force de viscosité due à la déformation des éléments de fluide, dans le cas d'un fluide compressible.

Cette équation n'est valable que sous l'hypothèse de continuité du milieu. Si cette hypothèse est mise en défaut, le dynamique des fluides est régie par des modèles de mécanique statistiques, comme les mouvements browniens. Afin de vérifier si l'hypothèse est valable, il suffit de vérifier si le nombre de Knudsen  $K_{nu} \leq 10^{-2}$  [Knudsen, 1934]. Or il s'avère que le nombre de Knudsen dans le réseau sanguin varie de  $10^{-19}$  dans des artères à  $10^{-10}$  dans des capillaires. Enfin, la résolution analytique de l'équation de Navier-Stokes dans le cas général étant un problème non résolu, il est possible de la résoudre au moins numériquement. Cependant, les codes CFD (Computational Fluid Dynamics) sont longs et ne se prêtent donc pas à une implémentation en temps réel, d'où une inadaptabilité à notre étude.

#### 1.4.2.2 Nombre de Reynolds

La nature de l'écoulement d'un fluide est caractérisée par son nombre de Reynolds  $Re$ , un nombre adimensionnel égal au rapport des forces d'inerties et visqueuses, de deux termes de l'équation de Navier stokes (1.13) :

$$Re = \frac{\|\rho_f (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}\|}{\eta \nabla^2 \vec{v}} \Rightarrow Re = \frac{\rho_f \|\vec{v}_{r_\infty}\| L}{\eta} \quad (1.14)$$

où  $\rho_f$ ,  $\eta$  sont respectivement la masse volumique et la viscosité dynamique du fluide,  $\vec{v}_{r_\infty}$  la vitesse relative du corps par rapport au fluide à l'infini (loin des parois), et  $L$  la dimension caractéristique.

La nature de l'écoulement d'un fluide est caractérisée en fonction de la valeur de  $Re$  :

- Si  $Re \ll 1$ , on parle d'écoulement de Stokes.
- Si  $Re \leq 2000$ , on parle d'écoulement laminaire.
- Si  $2000 \leq Re \leq 3000$ , on parle d'écoulement transitoire.
- Si  $Re \geq 3000$ , on parle d'écoulement turbulent.

Dans notre étude, nous considérons le mouvement des microrobots dans les artères, dans lesquelles l'écoulement est considéré laminaire (voir table 1.1), cependant ce type d'écoulement n'exclut pas des recirculations locales. Lorsque les microrobots naviguent dans les capillaires, ou veinules, on peut alors considérer l'écoulement comme un écoulement de Stokes, car  $Re \ll 1$ .

### 1.4.2.3 Coefficient de traînée

Le coefficient de traînée, noté  $C_d$ , est un nombre adimensionnel qui quantifie la force de résistance d'un objet dans un fluide en mouvement et dépend de sa géométrie, et de son état de surface. Un corps se déplaçant dans un fluide est caractérisé par son coefficient de traînée donné par :

$$C_d = \frac{\|\vec{F}_d\|}{\frac{1}{2}\rho_{f_\infty}\|\vec{v}_{r_\infty}\|^2 S} \quad (1.15)$$

où  $\vec{F}_d$  est la force de traînée exercé par le fluide sur le corps,  $S$  la surface frontale du corps par rapport à l'écoulement,  $\rho_{f_\infty}$  la masse volumique du fluide prise à l'infini<sup>3</sup> et  $\vec{v}_{r_\infty}$  la vitesse relative du corps par rapport au fluide prise à l'infini. La force de traînée  $\vec{F}_d$  dans un milieu infini est donnée par :

$$\vec{F}_d = -\frac{1}{2}C_d\rho_f\|\vec{v}_{r_\infty}\|^2 S \frac{\vec{v}_{r_\infty}}{\|\vec{v}_{r_\infty}\|} \quad (1.16)$$

Pour un écoulement autour d'une sphère de rayon  $r$ , en utilisant l'équation (1.16) avec la surface frontale d'une sphère  $S = \pi r^2$ , alors le coefficient de traînée à bas Reynolds  $\text{Re} \ll 1$  est donnée par [Stokes, 1851] :

$$C_d = \frac{12\eta}{\rho_f\|\vec{v}_{r_\infty}\|r} = \frac{24}{\text{Re}}$$

D'où la force de Stokes associée :

$$\vec{F}_d = -k\eta\vec{v}_{r_\infty}, \quad k = 6\pi r \quad (1.17)$$

Pour des plages de Reynolds plus larges, d'autres formules pour le coefficient de traînée pour un corps sphérique sont données par [Nguyen and Schulze, 2003] :

$$\begin{aligned} C_d &= \frac{24}{\text{Re}} \left[1 + \frac{\text{Re}}{16}\right] & \text{Re} \leq 0,0398 \\ C_d &= \frac{24}{\text{Re}} \left[1 + 0,1315\text{Re}^{0,82-0,05\log_{10}(\text{Re})}\right] & 0,0398 \leq \text{Re} \leq 25,6 \\ C_d &= \frac{24}{\text{Re}} [1 + 0,1935\text{Re}^{0,6305}] & 25,6 \leq \text{Re} \leq 259,8 \\ C_d &= 44,005\text{Re}^{-1,1242+0,1558\log_{10}(\text{Re})} & 259,8 \leq \text{Re} \leq 1524,5 \end{aligned} \quad (1.18)$$

Pour un nombre de Reynolds plus grand, les formules empiriques suivantes donnent le coefficient de traînée pour un corps sphérique :

$$C_d = \frac{24}{\text{Re}} + \frac{6}{1 + \sqrt{\text{Re}}} + 0,4 \quad 0 < \text{Re} \leq 2 \times 10^5 \quad (1.19a)$$

$$C_d = \frac{24}{\text{Re}} (1 + 0,15\text{Re}^{0,687}) \quad 0 < \text{Re} \leq 2 \times 10^5 \quad (1.19b)$$

---

3. loin des perturbations locales

#### 1.4.2.4 Effet des parois

Les expressions données jusqu'ici sont valables à l'infini, *i.e.* loin des parois. Dans le cas de la navigation endovasculaire, l'influence des parois des vaisseaux sur l'écoulement ne peut être négligé. On caractérise en général l'effet des parois ou effet de bord par l'introduction d'un ratio  $\beta$  entre vitesse à l'infini et vitesse réelle (en milieu fini) [Clift, 1978] :

$$\beta = \frac{\|\vec{v}_r\|}{\|\vec{v}_{r_\infty}\|} \quad (1.20)$$

où  $\vec{v}_r$  et  $\vec{v}_{r_\infty}$  sont respectivement les vitesses relatives du corps en présence et en absence de parois. Physiquement, ce ratio traduit le fait que l'obturation partielle du vaisseau par le microrobot provoque une pression accrue sur ce dernier, qui gêne l'écoulement du fluide dans ce milieu fini.

Dans la littérature on trouve plusieurs formules empiriques pour  $\beta$  en fonction du facteur géométrique  $\lambda = 2r/D$  où  $r$  est le rayon du corps sphérique et  $D$  diamètre du tube.

- A bas Reynolds [Clift, 1978], [Chhabra, 1993], [Haberman et al., 1958], par exemple dans [Haberman et al., 1958] le paramètre  $\beta$  est donné par :

$$\beta = \frac{1 - 2,105\lambda + 2,0865\lambda^3 - 1,7068\lambda^5 + 0,72603\lambda^6}{1 - 0,75857\lambda^5} \quad 0 \leq \lambda \leq 0,9$$

- A très grand nombre de Reynolds [Felice et al., 1995], [Chhabra et al., 1996], mais cela n'est pas pertinent pour notre étude.
- A des nombres de Reynolds intermédiaires [Wham et al., 1996], [Kehlenbeck and Felice, 1999], [Felice, 1996]. Dans [Felice, 1996], le paramètre  $\beta$  est donné comme suit :

$$\beta = \left( \frac{1 - \lambda}{1 - 0,33\lambda} \right)^{\delta_0} \quad \delta_0 = \frac{8,5\text{Re}_\infty + 330}{10\text{Re}_\infty + 100}$$

et dans [Kehlenbeck and Felice, 1999], les auteurs ont proposé une autre formule :

$$\beta = \frac{1 - \lambda^{\alpha_0}}{1 + \left( \frac{\lambda}{\lambda_0} \right)^{\alpha_0}} \quad (1.21)$$

où  $\alpha_0$  et  $\lambda_0$  sont des paramètres sans dimension :

$$\alpha_0 = 1,44 + 0,5466\text{Re}_\infty^{0,434} \quad \text{si } \text{Re}_\infty \leq 35$$

$$\alpha_0 = 2,3 + 37,3\text{Re}_\infty^{-0,8686} \quad \text{si } \text{Re}_\infty > 35$$

$$\lambda_0 = \frac{49,2\text{Re}_\infty^{0,524} + 283}{41\text{Re}_\infty^{0,524} + 1000}$$

Comme le remarquent les auteurs dans [Chhabra et al., 2003], si le paramètre  $\alpha_0 = 2,2$  est utilisé dans l'équation (1.21), alors l'expression de  $\lambda_0$  se simplifie :

$$\lambda_0 = \frac{6\text{Re}_\infty^{0,65} + 27}{5\text{Re}_\infty^{0,65} + 100}$$

En prenant en compte l'effet des parois modélisé par le paramètre  $\beta$ , et en utilisant l'équation (1.16), la force de traînée dans un milieu fini est donnée par :

$$\vec{F}_d = -\frac{1}{2}C_d\rho_f \left( \frac{\|\vec{v}_r\|}{\beta} \right)^2 S \frac{\vec{v}_r}{\|\vec{v}_r\|} \quad (1.22)$$

où, dans notre cas, la vitesse relative  $\vec{v}_r = \vec{v} - \vec{v}_f(x, t)$  dépend de la vitesse  $\vec{v}$  du microrobot et de la vitesse  $\vec{v}_f(x, t)$  du flux sanguin. Cette dernière dépend génériquement de l'espace et du temps. La force de traînée dépend donc non linéairement –de façon générique– de la vitesse du flux sanguin.

#### 1.4.2.5 La vitesse du sang et le modèle de Womersley

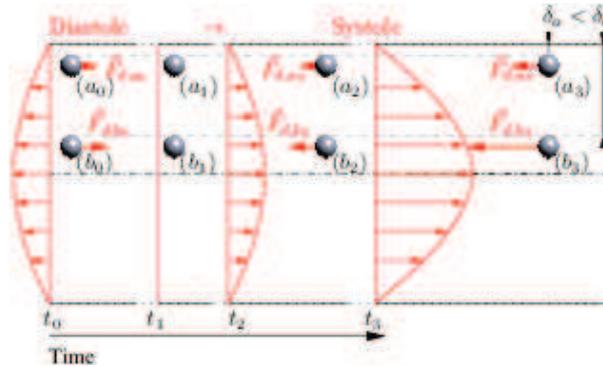


FIGURE 1.9 – La dépendance spatio-temporelle de la vitesse du sang  $v_f(x, t)$

Nous nous intéressons maintenant à la vitesse du sang  $\vec{v}_f(x, t)$ , schématisée sur la figure 1.9, qui apparaît dans l'équation de la force de traînée qui s'exerce sur le microrobot. Nous montrons tout d'abord que cette vitesse est difficilement accessible à la mesure, d'où l'intérêt d'en modéliser le comportement. Il n'est bien entendu pas question de travailler directement sur les équations de Navier-Stokes, mais d'analyser les expressions analytiques que l'on peut obtenir sous certaines hypothèses.

**1.4.2.5.1 Mesure de la vitesse du sang** La vitesse du sang dépend à la fois de l'espace et du temps. C'est une information locale et par conséquent difficile à mesurer en pratique. Les sondes à ultrasons classiques permettent d'obtenir une information moyenne (spatialement et temporellement) sur la vitesse du sang ; les systèmes optiques, d'excellente résolution spatiale,

sont limités à une profondeur de l'ordre du millimètre. La mesure est généralement obtenue en profitant de l'effet Doppler. Des travaux récents ont été menés afin de mesurer avec davantage de précision la vitesse du sang. Dans [Ponzini et al., 2010], les auteurs utilisent un appareil à ultrasons pour obtenir une bonne résolution temporelle ( $20ms$ ) mais avec peu d'information spatiale, et réussissent à discriminer des vitesses de l'ordre du  $mm s^{-1}$ . Cependant, les temps de post-traitement (déconvolution, ondelettes, filtrage) ne sont pas spécifiés. Dans [Ferrara et al., 1996], c'est un IRM qui est utilisé pour mesurer la vitesse du sang en utilisant un produit de contraste (toujours en utilisant l'effet Doppler). La résolution spatiale est bien meilleure, mais la seule mesure dure  $10mn$ , auxquelles il faut ajouter le temps de post-traitement. Quel que soit l'appareil de mesure utilisé, la qualité de la mesure dépend de celle de l'asservissement du capteur durant l'acquisition (pour l'IRM, cela correspond plutôt à la sélection de la tranche). De plus, quand le microrobot pénètre plus profondément dans le corps, la résolution de la mesure est affectée par les perturbations issues des tissus qui séparent le capteur de la zone où doit être mesurée la vitesse du sang. Enfin, les temps d'acquisition et post-traitement sont rédhibitoires pour une application temps réel. Notre approche est radicalement différente puisqu'elle vise à modéliser la vitesse du sang vue comme une perturbation qu'il s'agira d'estimer.

**1.4.2.5.2 Écoulement de Hagen et Poiseuille** Un écoulement de Hagen et Poiseuille, est un écoulement d'un fluide incompressible, supposé laminaire. Le gradient de pression est supposé indépendant de la hauteur de l'écoulement, et la vitesse du fluide instationnaire.

Soit un fluide de masse volumique  $\rho_f$  et de viscosité dynamique  $\eta$  et cinématique  $\nu = \eta/\rho_f$ . On suppose que l'écoulement de ce fluide dans un vaisseau cylindrique de rayon  $R$  et de longueur  $L$ . En coordonnées cylindriques  $r$ ,  $\theta$  et  $z$  sont respectivement les coordonnées radiale, polaire et longitudinale, et la vitesse du fluide  $v$  est de coordonnées  $(v_r, v_\theta, v_z)$ . Nous considérons un écoulement de type Hagen et Poiseuille dans un cylindre de rayon  $R$  et de longueur  $L$ . En utilisant les hypothèses citées précédemment, l'équation de Navier-Stokes (1.13) devient alors :

$$\begin{aligned} v_r &= 0 \\ v_\theta &= 0 \\ \frac{d^2 v_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_z}{dr} + \frac{p_1 - p_2}{\eta} &= 0 \end{aligned} \tag{1.23}$$

où  $p_1$  et  $p_2$  sont respectivement les pressions à l'entrée et à la sortie du vaisseau. Dans ce cas, le gradient de la pression est constant et égal à  $(p_1 - p_2)/L$ . Le profil de la vitesse du fluide est alors donné par :

$$v_r = 0 \quad v_\theta = 0 \quad v_z = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L} (R^2 - r^2) \tag{1.24}$$

D'où un profil spatialement parabolique. Cependant, les hypothèses ne sont pas totalement satisfaisantes au regard de notre application. Notamment, l'hypothèse d'instationnarité est aberrante car le flux sanguin est pulsatile. Nous allons donc présenter une variante de cet écoulement qui est plus adaptée à l'étude du flux sanguin.

**1.4.2.5.3 Ecoulement de Womersley** Dans le cas d'un écoulement de Womersley, les hypothèses sont les mêmes que celles d'un écoulement de Hagen et Poiseuille, sauf que dans ce cas le gradient de pression est supposé être variable en fonction du temps, et par conséquent la vitesse du fluide aussi. L'équation (1.13) se simplifie alors sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} v_r &= 0 \\ v_\theta &= 0 \\ \frac{1}{\nu} \frac{\partial v_z}{\partial t} &= \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{p_1 - p_2}{\eta} \end{aligned} \quad (1.25)$$

Le gradient de pression considéré par [Womersley, 1955] est donné par :

$$\frac{p_1 - p_2}{L} = \Re(Ae^{2\pi f i t})$$

où  $f$  est la fréquence et  $\Re(\cdot)$  la partie réelle. On pose  $v_z = u(r)e^{\omega i t}$ , avec  $\omega = 2\pi f$ . La fonction  $u(r)$  vérifie alors l'équation suivante :

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \frac{i^3 \omega}{\nu} u = -\frac{A}{\eta}$$

dont la solution  $u(r)$  est donnée ci-dessous :

$$u = \frac{A}{\rho_f} \frac{1}{i\omega} \left[ 1 - \frac{3}{J_0\left(i\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} R\right)} \frac{J_0\left(i\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} r\right)}{3} \right] \quad (1.26)$$

où  $J_0$  est la fonction de Bessel d'ordre 0. On définit le paramètre de Womersley  $\alpha = R\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$  et un facteur de forme  $y = \frac{r}{R}$ . La vitesse longitudinale  $v_z$  est alors :

$$v_z = \Re \left( \frac{A}{\rho_f} \frac{1}{i\omega} \left[ 1 - \frac{J_0(i^{1,5}\alpha y)}{J_0(i^{1,5}\alpha)} \right] e^{i\omega t} \right) \quad (1.27)$$

En généralisant, si l'on prend un gradient de pression exprimé sous forme de série de Fourier tronquée à l'ordre  $n$  :  $\frac{p_1 - p_2}{L} = \sum_{k=0}^n A_k e^{2\pi f k i t}$ , on obtient alors la vitesse  $v_z$  comme suit :

$$v_z = \sum_{k=0}^n \Re \left( \frac{A_k}{\rho_f} \frac{1}{ik\omega} \left[ 1 - \frac{J_0(i^{1,5}\sqrt{k}\alpha y)}{J_0(i^{1,5}\sqrt{k}\alpha)} \right] e^{ik\omega t} \right) \quad (1.28)$$

où la dépendance temporelle est contenue dans le seul terme exponentiel, et la dépendance spatiale dans le facteur de l'exponentielle. On peut donc exprimer la vitesse du sang comme une série de Fourier dont les coefficients dépendent de l'espace. En calculant les premières valeurs

de ces coefficients, on s'aperçoit que l'on peut –sans trop d'erreur comme l'illustre la figure 1.10– approcher la vitesse du sang par le produit d'une série de Fourier  $v_t(t)$  par un un profil parabolique  $v_s(r)$  :

$$v_f(r, t) = v_s(r)v_t(t) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L} (R^2 - r^2) \sum_{k=0}^n A_k e^{ki\omega t} \quad (1.29)$$

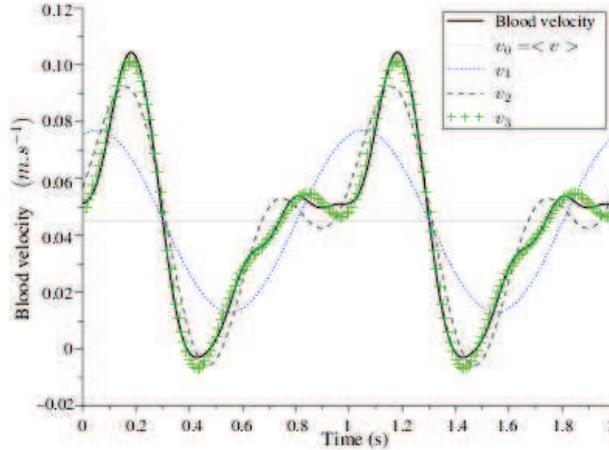


FIGURE 1.10 – Vitesse maximale du sang (au centre du vaisseau)  $v_t(t)$  en noir. Approximations par séries de Fourier tronquées aux ordres 1, 2, 3 et 4 en gris, pointillés bleus, tirets et croix vertes, respectivement.

### 1.4.3 Force électrostatique

Un microrobot sphérique naviguant dans un vaisseau sanguin subit une force électrostatique notée  $\vec{F}_e$ , cette force est l'interaction entre le microrobot et la paroi du vaisseau sanguin. Elle est modélisée comme la force d'attraction entre le microrobot sphérique chargé  $q^+$  et son miroir chargé  $q^-$  par rapport à la paroi. En notant que la distance entre le centre du microrobot et le centre de son miroir est égale à  $2(r + |\delta|)$ , comme illustré sur la figure 1.11, l'expression de la force électrostatique est donnée par [Matsuyama and Yamamoto, 1998] :

$$\vec{F}_e = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0(r + |\delta|)^2} H(-\delta) \vec{n} \quad (1.30)$$

où  $\epsilon_0$ ,  $\epsilon_r$  sont respectivement la permittivité diélectrique du vide et la permittivité diélectrique relative du milieu,  $\delta$  et  $\vec{n}$  sont définis sur la figure 1.8 dans la section 1.4.1, et  $H$  représente la fonction d'Heaviside :

$$H(\delta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \delta > 0 \\ 0,5 & \text{si } \delta = 0 \\ 1 & \text{si } \delta < 0 \end{cases}$$

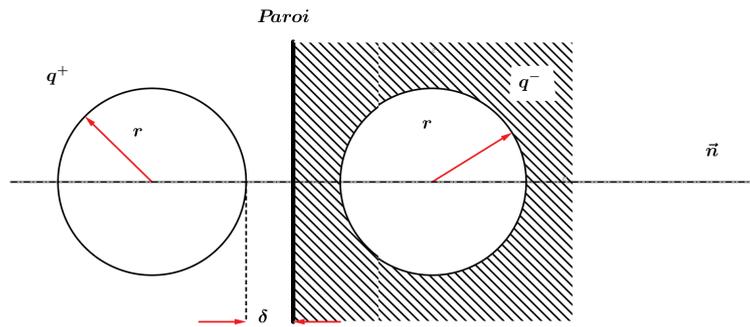


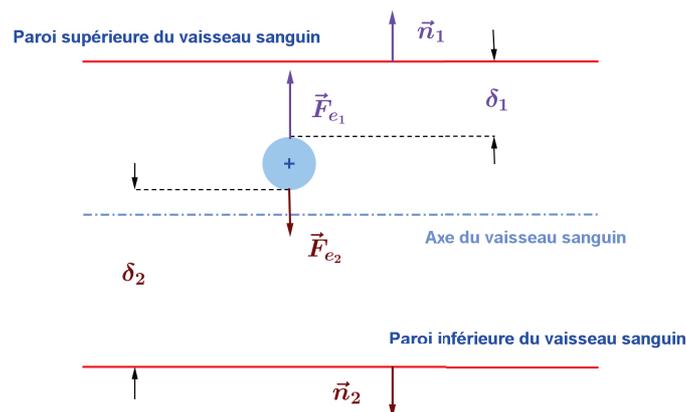
FIGURE 1.11 – Interaction d'une sphère avec la paroi

La charge  $q$  est donnée par [Hays, 1991] en fonction de la densité de charge surfacique  $\sigma_q < 30(10rR)^{0,3}$  :

$$q = 4\pi r^2 \sigma_q \quad (1.31)$$

La résultante de la force électrostatique exercée sur le microrobot par les parois supérieure et inférieure, comme illustré sur la figure 1.12, est donnée par :

$$\vec{F}_e = \vec{F}_{e_1} + \vec{F}_{e_2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \left( \frac{1}{(r + |\delta_1|)^2} H(-\delta_1) \vec{n}_1 + \frac{1}{(r + |\delta_2|)^2} H(-\delta_2) \vec{n}_2 \right)$$

FIGURE 1.12 – Forces électrostatiques  $\vec{F}_{e_1}$  et  $\vec{F}_{e_2}$  exercées sur le microrobot respectivement par les parois supérieure et inférieure du vaisseau sanguin

#### 1.4.4 Force de contact

Lorsque le microrobot percute la paroi du vaisseau sanguin il rebondit en raison de la force de contact, notée  $\vec{F}_c$ . Le modèle de la force de contact est basé sur la théorie Hertzienne. L'analyse du contact peut être effectuée selon deux méthodes différentes : le modèle de Voigt se base sur le fait que les forces d'interactions au contact agissent d'une manière continue, en revanche le modèle de Hertz considère que l'interaction entre les objets se produit dans une courte durée et que la configuration des objets ne change pas de façon significative.

##### 1.4.4.1 Modèle de Voigt

Ce modèle décrit la force de contact entre un corps sphérique et une surface plane ou sphérique, et en étudie les composantes normale et tangentielle. La force de contact est modélisée par un ressort de raideur  $K$  en parallèle avec un amortisseur de coefficient d'amortissement  $b$ . Les composantes normale et tangentielle de la force de contact seront détaillées ci-dessous.

**1.4.4.1.1 Force normale contact sphère-plan** La force normale de contact  $\vec{F}_{c_n}$  entre une sphère de rayon  $r$  et une surface plane est donnée par [Tijskens et al., 2003], [Shäfer et al., 1996] :

$$\vec{F}_{c_n} = -(K_n \delta^i + b_n \dot{\delta}) H(\delta) \vec{n}, \quad i \in [1, \frac{3}{2}] \quad (1.32)$$

où  $K_n$ ,  $b_n$  sont respectivement les coefficients de raideur et d'amortissement normaux, et  $\vec{n}$  le vecteur unitaire normal à la surface de contact dirigé du centre de la sphère vers la paroi (voir figure 1.8).

Les paramètres  $K_n$  et  $b_n$  sont donnés par [Tsuji et al., 1992] :

$$\begin{cases} K_n = \frac{4\sqrt{r}}{3} \frac{1 - \sigma_s^2}{E_s} + \frac{1 - \sigma_w^2}{E_w} \\ b_n = 2\sqrt{mK_n} \end{cases} \quad (1.33)$$

où  $m$  est la masse de la sphère,  $\sigma_*$  et  $E_*$  sont respectivement le coefficient de Poisson et le module de Young de  $*$  avec  $*$  =  $s$  pour la sphère de rayon  $r$  et  $*$  =  $w$  pour la paroi du vaisseau sanguin.

**1.4.4.1.2 Force normale contact sphère-sphère** Lorsque deux sphères  $j$  et  $k$  entrent en collision, il en résulte une force de contact  $\vec{F}_{c_j}$  sur la sphère  $j$ , et  $-\vec{F}_{c_j}$  sur la sphère  $k$  :

$$\vec{F}_{nc_j} = \max \left\{ 0, (k_{nj} \xi_{kj}^{3/2} + b_{nj} \xi_{kj}^{1/2} \dot{\xi}_{kj}) \vec{n}_{kj} \right\} \quad (1.34)$$

où  $\xi_{kj} = r_j + r_k - r_{kj}$  est la déformation mutuelle des sphères  $j$  et  $k$ ,  $\vec{n}_{kj} = \vec{u}_{kj}$ .  $k_{nj}$  et  $b_{nj}$  sont respectivement les coefficients de raideur et d'amortissement le long de la direction normale (voir [Vartholomeos and Mavroidis, 2012] pour plus de détails).

**1.4.4.1.3 Force tangentielle contact sphère-plan** La force tangentielle est présente lorsque la sphère est en rotation ou bien en collision oblique avec la paroi du vaisseau sanguin. Elle est donnée par [Tijskens et al., 2003] :

$$\vec{F}_{ct} = -(K_t\zeta + b_t\dot{\zeta})H(\delta)\vec{t} \quad (1.35)$$

où  $\vec{t}$  et  $\zeta$  sont respectivement le vecteur unitaire et le déplacement tangentiels et  $K_t$ ,  $b_t$  sont respectivement les coefficients de raideur et d'amortissement tangentiels donnés par [Tsuji et al., 1992] :

$$\begin{cases} K_t &= \frac{8\sqrt{r}G_s}{2-\sigma_s}\delta^{\frac{1}{2}} \\ G_s &= \frac{E_s}{2(1+\sigma)} \\ b_t &= 2\sqrt{mK_t} \end{cases} \quad (1.36)$$

avec  $G_s$  le module de cisaillement de la sphère.

#### 1.4.4.2 Modèle de Hertz

Le modèle de Hertz est limité aux impacts avec déformation élastique, le processus de contact pour ce modèle étant représenté par deux corps rigides interagissant via un ressort non linéaire le long de la ligne d'impact. La déformation est supposée limitée au point de contact et le mouvement des ondes élastiques est négligée. La force d'impact est modélisée en deux phases. La première est la phase de compression, la force de contact durant cette phase donnée par [Gilardi and Sharf, 2002] :

$$\vec{F}_{cc} = -K_n|\delta|^{\frac{3}{2}}H(\delta)\vec{n} \quad (1.37)$$

où  $K_n$  donné par (1.33). L'équation (1.37) est utilisée pour des impacts des corps rigides à faible vitesse.

La deuxième est la phase de restitution, la force de contact durant cette phase est donnée par [Gilardi and Sharf, 2002] :

$$\vec{F}_{cr} = -F_{c_{max}} \left| \frac{\delta - \delta_r}{\delta_{max} - \delta_r} \right|^{n_p} H(\delta)\vec{n} \quad (1.38)$$

où  $F_{c_{max}}$  est la force normale de contact maximale atteinte lors de la phase de compression pour une déformation maximale  $\delta_{max}$  de la paroi du vaisseau sanguin.  $\delta_r$  est la déformation permanente (dans le cas d'une déformation plastique). L'exposant  $n_p$  est donné par [Zhao et al., 2012] :

$$n_p = 1.5 \left( \frac{\delta_{max}}{\delta_c} \right)^{e_p} = 1.5(\delta_{max}^*)^{e_p}$$

où  $\delta_{max}^*$  est un nombre sans dimension qui caractérise le contact maximum d'interférence avant la phase de décompression,  $\delta_c$  le contact au début de la déformation plastique et  $e_p$  un exposant donné ci-dessous :

$$e_p = 0.07071n_0^2 - 0.041n_0 - 0.02955 \quad 0 \leq n_0 \leq 1$$

Le paramètre  $\delta_{max}^*$  est donné comme suit :

$$\delta_{max}^* = \begin{cases} \left( \frac{1}{1 - \sqrt{\delta_{rm}}} \right)^{e_d} & \text{si } 0 \leq \delta_{rm} < 1 \\ +\infty & \text{si } \delta_{rm} = 1 \end{cases}$$

où  $\delta_{rm} = \delta_r / \delta_{max}$  et  $e_d$  est donné ci-après :

$$e_d = -0.22471n_0^2 - 0.17406n_0 + 0.39877 \quad 0 \leq n_0 \leq 1$$

Un processus de décompression purement plastique correspond à  $n_0 = 0$  et  $\delta_{max} = \delta_r$  ; pour un contact purement élastique, on a  $n_0 = 1$  et  $\delta_r = 0$ .

La pénétration maximale  $\delta_{max}$  d'une sphère avec la paroi du vaisseau sanguin est donnée par [Barthel, 2013] :

$$\delta_{max} = \left( \frac{5mv_0^2}{4K_n} \right)^{\frac{2}{5}} \quad (1.39)$$

où  $v_0$  est la vitesse de la sphère de masse  $m$  lors du contact avec la paroi.

### 1.4.5 Poids Apparent

Tout corps immergé dans un fluide subit une force appelée poids apparent, qui est la contribution de la force de la pesanteur et de la poussée d'Archimède :

$$\vec{F}_w = V(\rho - \rho_f)\vec{g} = mF'_w\vec{k} \quad (1.40)$$

où  $\rho$ ,  $\rho_f$  sont respectivement les masses volumiques du corps et du fluide,  $V$  le volume du corps et  $\vec{g}$  l'accélération de la pesanteur. La masse volumique d'un corps composé d'un matériau magnétique de masse volumique  $\rho_m$  et non magnétique de masse volumique  $\rho_c$  est donnée par :

$$\rho = \tau_m\rho_m + (1 - \tau_m)\rho_c \quad (1.41)$$

où  $\tau_m$  est le ratio magnétique volumique, égal au rapport entre le volume total et le volume de matériau magnétique du corps.

### 1.4.6 Forces négligeables

Nous regroupons ici deux forces dont l'influence peut être négligée dans la navigation artérielle. Cependant, la force de van der Waals ne pourra être négligée si le microrobot doit naviguer dans les capillaires à proximité de la paroi, car son amplitude est alors proche de celle de la force électrostatique. Voir par exemple [Arcese et al., 2012] pour plus de détails.

#### 1.4.6.1 Force de van der Waals

Un microrobot sphérique de rayon  $r$  naviguant dans un vaisseau sanguin interagit avec la paroi de ce dernier via la force d'interaction de van der Waals. Le potentiel de cette force est donné par [Bhattacharjee and Elimelech, 1997] :

$$\vec{P}_{vdw} = -\frac{A_h}{6} \left[ \frac{r}{|\delta|} + \frac{r}{|\delta| + 2r} + \ln \left( \frac{|\delta|}{|\delta| + 2r} \right) \right] \vec{n} \quad (1.42)$$

où  $A_h$  est la constante d'Hamaker. La force de van der Waals est donnée alors par [Iimura et al., 2009] :

$$\vec{F}_{vdw} = -\vec{\nabla} \vec{P}_{vdw} H(-\delta) \quad (1.43)$$

Cette force d'interaction est attractive mais n'opère de façon perceptible qu'à très proche proximité d'une paroi, pour une distance de l'ordre du nanomètre.

#### 1.4.6.2 Force stérique

Les particules injectées dans le corps humain pour délivrer des médicaments sont généralement couvertes par des chaînes de polymère. La présence de ces chaînes affecte l'interaction de la particule avec le glycocalix de l'endothélium et avec d'autres particules constituant le sang. Le potentiel répulsif par unité de surface entre la particule couverte de chaînes de polymère et l'endothélium pour  $2R_g \leq |\delta| \leq 8R_g$  est donné par [Decuzzi et al., 2005] :

$$\vec{P}_{sr} = -36\Gamma_p k_B T e^{-\frac{|\delta|}{R_g}} \vec{n} \quad (1.44)$$

où  $k_B$  est la constante de Boltzmann,  $T$  est la température absolue,  $\Gamma_p$  le nombre de chaînes de polymère greffé par unité de surface, et  $R_g$  est le rayon de giration non perturbé d'un polymère donné par :

$$R_g = L \sqrt{\frac{n_m}{6}}$$

où  $L$  est la longueur d'un monomère<sup>4</sup> et  $n_m$  le nombre des monomères. Le paramètre  $\Gamma_p = d_c^{-2}$ , avec  $d_c$  est la distance entre deux chaînes adjacentes. Pour  $d_c > R_g$ , on a  $d_c = 10R_g$  et  $\Gamma_p = 0,01R_g^{-2}$ , la force stérique répulsive est donnée alors par :

---

4. Une substance organique utilisée dans la synthèse des oligomères et des polymères

$$\vec{F}_{sr} = -0,36\pi \frac{R}{R_g^2} k_B T e^{-\frac{|\delta|}{R_g}} \vec{n} \quad (1.45)$$

La force stérique est une force répulsive de très faible amplitude, 4 ordres de grandeur en dessous de la force électrostatique, et à très courte portée. Elle est donc négligeable à l'échelle micrométrique.

### 1.4.7 Force motrice et interactions

Les différents systèmes magnétiques que nous avons présentés peuvent créer des forces ou des couples magnétiques qui seront utilisés pour la propulsion des microrobots dans les vaisseaux sanguins. Nous rappelons d'abord la définition de l'aimantation d'un matériau magnétique, ensuite nous donnons les expressions de la force et du couple magnétique exercés sur une charge  $q$  par un champ magnétique extérieur  $\vec{B}$ . Nous explicitons aussi les forces d'interaction magnétiques qui se produisent entre deux dipôles placés dans un champ extérieur. Nous exposons ensuite deux types de dispositifs qui se basent sur les champs et les gradients du champ magnétique pour la mesure de position et la commande d'un microrobot.

#### 1.4.7.1 Aimantation

L'aimantation  $\vec{M}$  d'un matériau, représentée sur la figure 1.13, est le moment magnétique macroscopique induit par unité de volume  $V$  du matériau :  $\vec{M} = \frac{d\vec{\mathcal{M}}}{dV}$ , avec  $\vec{\mathcal{M}} = \sum_{i=1}^n \vec{\mathcal{M}}_i$ , et  $\vec{\mathcal{M}}_i$  les moments magnétiques des atomes constituant le matériau. On obtient alors :

$$\vec{\mathcal{M}} = \tau_m V \vec{M} \quad (1.46)$$

où  $\tau_m$  est le ratio entre le volume de matériau magnétique et le volume total du corps.

On définit la susceptibilité magnétique  $\chi_m$  d'un milieu linéaire.<sup>5</sup>

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (1.47)$$

où  $\vec{H}$  est l'excitation magnétique,  $\mu_0$  et  $\mu = \mu_0 \mu_r$  sont respectivement les perméabilités magnétiques du vide et du matériau et  $\mu_r = 1 + \chi_m$  est la perméabilité relative du matériau. En fonction de la valeur de  $\chi_m$ , on distingue 4 cas :

- $\chi_m < 0$ . Le matériau est diamagnétique, il s'aimante faiblement dans le sens opposé au champ magnétique et perd son aimantation lorsque ce champ magnétique est absent. Ce caractère diamagnétique est dû au fait que les orbites électroniques agissent chacune comme des petites spires de courant.

---

5. Un milieu est dit "linéaire" lorsque l'aimantation induite par le champ magnétique  $\vec{B}$  est proportionnelle à  $\vec{B}$

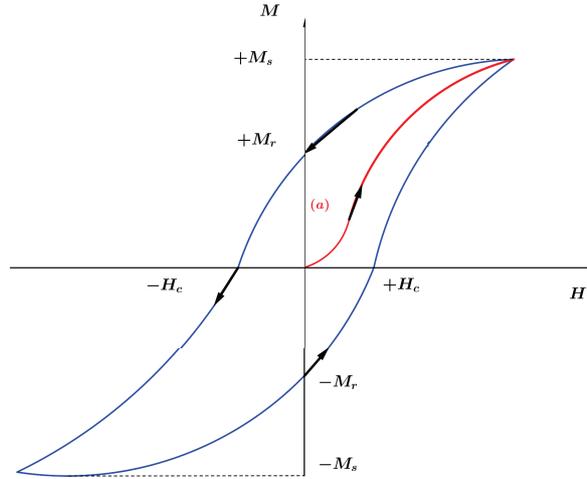


FIGURE 1.13 – Aimantation  $M$  d'un matériau ferromagnétique en fonction du champ appliqué  $H$ . La courbe (a) est la première aimantation.  $H_c$  est le champ coercitif.  $M_r$  et  $M_s$  sont respectivement les aimantations rémanente et de saturation du matériau.

- $\chi_m > 0$ . Le matériau est paramagnétique : les moments magnétiques  $\vec{M}_i$  des atomes s'orientent dans le sens du champ magnétique appliqué  $\vec{B}$  faisant apparaître un moment magnétique macroscopique  $\vec{M}$ . En revanche, en l'absence du champ  $\vec{B}$ , les moments magnétiques  $\vec{M}_i$  s'orientent aléatoirement et se compensent mutuellement de sorte que l'aimantation globale est nulle.
- $\chi_m \gg 1$ . Le matériau est ferromagnétique : il existe un fort couplage entre les moments magnétiques propres qui sont orientés localement dans la même direction. Les moments magnétiques de ce matériau s'orientent en présence du champ magnétique extérieur.

#### 1.4.7.2 Force magnétique

Une charge  $q$  qui se déplace avec une vitesse  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$  dans un champ magnétique donné par  $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$  subit une force magnétique appelée force de Lorentz, notée  $\vec{F}_m$ , donnée par :

$$\vec{F}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$\begin{pmatrix} F_{m_x} \\ F_{m_y} \\ F_{m_z} \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} v_y B_z - v_z B_y \\ v_z B_x - v_x B_z \\ v_x B_y - v_y B_x \end{pmatrix} \quad (1.48)$$

Un dipôle magnétique est un système physique décrit par son moment magnétique  $\vec{\mathcal{M}}$  donné par (1.46), ce dipôle subit une force  $\vec{F}$  magnétique donnée par :

$$\vec{F}_m = (\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \quad (1.49)$$

L'expression détaillée de la force  $\vec{F}_m$  exercée sur un dipôle magnétique est :

$$\begin{pmatrix} F_{m_x} \\ F_{m_y} \\ F_{m_z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + \mathcal{M}_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + \mathcal{M}_z \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ \mathcal{M}_x \frac{\partial B_y}{\partial x} + \mathcal{M}_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + \mathcal{M}_z \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \mathcal{M}_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + \mathcal{M}_y \frac{\partial B_z}{\partial y} + \mathcal{M}_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

### 1.4.7.3 Couple magnétique

Le dipôle magnétique subit aussi un couple  $\vec{\Gamma}_m$  magnétique donné par :

$$\vec{\Gamma}_m = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} \quad (1.50)$$

qui tend donc à orienter le moment magnétique d'un dipôle le long du champ extérieur.

On constate que les composantes  $B_x$ ,  $B_y$  et  $B_z$  du champ magnétique  $\vec{B}$  données par (1.10) sont proportionnelles à  $d_1^{-3}$ ,  $d_2^{-3}$  et  $d_3^{-3}$  respectivement, en revanche les composantes  $\nabla B_x$ ,  $\nabla B_y$  et  $\nabla B_z$  du gradient du champ magnétique  $\vec{\nabla} \vec{B}$  données par (1.12) sont proportionnelles à  $d_1^{-4}$ ,  $d_2^{-4}$  et  $d_3^{-4}$ . On peut conclure alors que le gradient du champ magnétique décroît plus rapidement que le champ magnétique en fonction de la distance entre les deux paires de bobines, comme illustré sur la figure 1.3. Les auteurs dans [Abbott et al., 2009] ont évoqué deux approches pour contrôler les microrobots. La première consiste à fixer une hélice hélicoïdale au microrobot sphérique, ce dernier sera alors propulsé par un couple magnétique  $\Gamma_m$  appliqué sur l'hélice. Ce couple magnétique est généré par un champ magnétique uniforme au centre du dispositif en appliquant un courant en phase dans les deux bobines suivant chaque axe  $j$ . La seconde approche consiste à appliquer un courant en opposition de phase dans les deux bobines suivant chaque axe  $j$  pour générer un gradient du champ magnétique uniforme au centre du dispositif, ce gradient magnétique génère une force magnétique  $\vec{F}_m$  pour propulser directement le microrobot sphérique sans utiliser d'hélice. Les valeurs du rayon  $r_{s_j}$  permettant de maximiser le champ magnétique dans le premier cas et le gradient du champ magnétique dans le second cas au centre du dispositif sont respectivement égales à  $\frac{\sqrt{2}}{2}d_j$  et  $\frac{\sqrt{6}}{6}d_j$  pour chaque axe  $j$ . Les différentes méthodes de propulsion des microrobots seront détaillées dans la section 1.5.

### 1.4.7.4 Interactions magnétiques

Soient deux dipôles magnétiques ( $j$ ) et ( $k$ ) qui se trouvent dans un champ magnétique extérieur. Le dipôle magnétique ( $k$ ) exerce une force d'interaction sur le dipôle ( $j$ ) donnée par [Vartholomeos and Mavroidis, 2012] :

$$\vec{F}_{kj} = \frac{3\mu_0\mathcal{M}_j\mathcal{M}_k}{4\pi r_{kj}^4} \left[ \vec{u}_{kj}(\vec{u}_j \cdot \vec{u}_k) + \vec{u}_j(\vec{u}_{kj} \cdot \vec{u}_k) + \vec{u}_k(\vec{u}_{kj} \cdot \vec{u}_j) - 5\vec{u}_{kj}(\vec{u}_{kj} \cdot \vec{u}_j)(\vec{u}_{kj} \cdot \vec{u}_k) \right] \quad (1.51)$$

où  $\cdot$  est le produit scalaire et les vecteurs unitaires  $\vec{u}_{kj}$  et  $\vec{u}_j$  sont définis par :

$$\vec{u}_{kj} = \frac{\vec{r}_{kj}}{\|\vec{r}_{kj}\|} \quad \vec{u}_j = \frac{\vec{\mathcal{M}}_j}{\|\vec{\mathcal{M}}_j\|} \quad (1.52)$$

où  $\mathcal{M}_j = \|\vec{\mathcal{M}}_j\|$  est le moment magnétique du microrobot  $j$  et  $r_{kj} = \|\vec{r}_{kj}\|$  la distance entre les centres de gravité des deux dipôles ( $j$ ) et ( $k$ ).

Considérons maintenant  $n$  dipôles en interaction, la résultante de la force d'interaction magnétique exercée par les dipôles  $k$  sur le dipôle  $j$ , notée  $\vec{F}_j$ , est donnée par :

$$\vec{F}_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \vec{F}_{kj} \quad (1.53)$$

avec  $\vec{F}_{kj}$  la force exercé par le microrobot ( $k$ ) sur le microrobot ( $j$ ) donnée par (1.51).

#### 1.4.7.5 Imagerie par Résonance Magnétique

L'imagerie par résonance magnétique (IRM) est une technique d'imagerie non invasive, basée sur le principe de la résonance magnétique nucléaire. Cette technique permet d'obtenir des images du corps humain en 2D ou bien 3D dans le but de faire un diagnostic médical. L'obtention des images est issue de la superposition de trois champs électromagnétiques. Le premier est un champ magnétique statique  $\vec{B}_0$  généré soit par un aimant permanent (matériau paramagnétique) ou bien un aimant résistif (électro-aimant) : son objectif est d'orienter le spin des protons du corps le long de ce champ. Ce champ est de forte intensité puisqu'il est généralement de l'ordre du Tesla. Le deuxième est le champ magnétique variable dans l'espace généré par trois paires de bobines parcourues par un courant continu. Ces trois paires de bobines génèrent trois variations graduelles du champ magnétique statique, permettant l'obtention de coupes dans les trois plans de l'espace. Le troisième est le champ électrique radiofréquence ( $f \approx 42,5 \text{ MHz}$  par Tesla) appliqué aux tissus, qui fait entrer les noyaux d'hydrogène en résonance : le spin des protons s'écarte alors de son équilibre le long de  $\vec{B}_0$ . L'énergie électromagnétique libérée par les protons, une fois retournés à leur état d'équilibre, est captée par des antennes situées dans le voisinage de la zone imagée, puis analysée et traduite par une image.

Les données sur la résolution spatiale et temporelle de ces dispositifs sont données dans le tableau 1.2 dans la section 1.3.2. Cet outil de mesure peut également servir d'actionnement magnétique [Mathieu et al., 2006]. En effet, le champ constant élevé permet d'assurer la magnétisation d'un dipôle, tandis que les bobines de gradient –à l'origine utilisées pour effectuer

les coupes– peuvent être utilisées afin de produire une force magnétique propulsive (1.49). Les bobines de gradient d’un IRM (en configuration de Maxwell et de Golay) ont des amplitudes maximales de l’ordre de 40 à  $80mT.m^{-1}$ ; certaines sont « dopées » afin d’atteindre  $200mT.m^{-1}$ . Cette solution impose alors un multiplexage [Tamaz et al., 2008] puisqu’il faut alterner entre des phases de mesure et des phases de propulsion.

#### 1.4.7.6 Octomag

La direction du champ et du gradient du champ magnétique pour la configuration de bobines d’Helmholtz et de Maxwell sont mutuellement dépendants, par conséquent le mouvement d’un microrobot non sphérique est contraint. Plus précisément, le microrobot ne peut se déplacer instantanément dans certaines directions à cause des contraintes imposées par le système de bobines. Un tel système n’est pas donc holonome.

Pour s’affranchir de ce problème et pouvoir contrôler un microrobot dans plusieurs directions (avec un degré de liberté supérieur à 3), les systèmes magnétiques Octomag et Minimag [Kummer et al., 2010], [Schuerle et al., 2013] destinés au contrôle de microrobots avec 5 degrés de libertés (3 en translation et 2 en orientation) ont été développés à l’ETH de Zurich par l’Institute of Robotics and Intelligent Systems sous la direction Bradley J. Nelson. L’espace de travail d’Octomag est de  $15mm \times 15mm$ ; conçu pour les applications médicales en ophtalmologie, il peut créer un gradient maximum de  $1,5T.m^{-1}$  avec un champ de l’ordre de  $50mT$ .

Ce système est constitué de huit électroaimants. Chaque électroaimant  $e$  crée en un point  $m$  de l’espace de travail un champ magnétique  $\vec{B}_e(m)$  donnée par [Kummer et al., 2010], [Schürle et al., 2013] :

$$\vec{B}_e(m) = \vec{B}_e(m)i_e \quad (1.54)$$

où  $\vec{B}_e$  est un vecteur unitaire normalisé par le courant et l’électroaimant  $e$  est parcouru par le courant  $i_e$ . En dépit des complexités issues des nonlinéarités du champ, et donc des gradients associés, cet actionneur permet d’obtenir des entrées de commande importantes et d’éviter les problèmes de multiplexage qui apparaissent sur l’IRM. En revanche, ce type de dispositif ne constitue qu’un actionneur et il est donc nécessaire de recourir à un imageur dédié afin d’accéder à la mesure.

## 1.5 Différents concepts de propulsion

L’idée de microrobots endovasculaires n’est pas récente puisque Purcell [Purcell, 1977] proposait déjà différents concepts de robots pouvant naviguer dans des fluides à bas Reynolds. Il existe dans la littérature de nombreux concepts, dont un grand nombre qui sont bio-inspirés, et on trouvera une synthèse assez exhaustive dans [Nelson et al., 2010], qui présente égale-

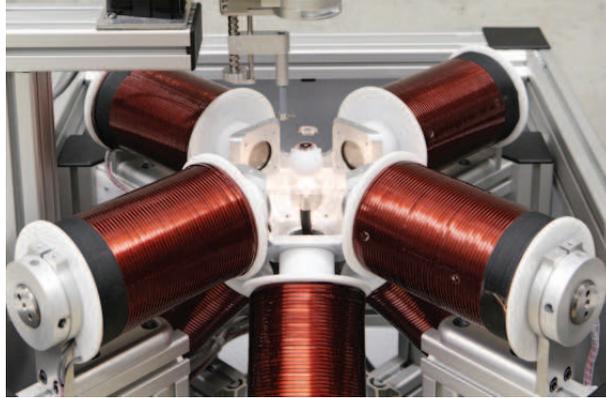


FIGURE 1.14 – OctoMag prototype ETH Zurich

ment de nombreuses applications médicales : chimiothérapie ciblée en utilisant les microrobots pour convoyer des drogues localement au lieu de les répandre dans tout l'organisme [Delvin, 2007, Pouponneau et al., 2011], nécrose contrôlée par thérapie afin de brûler des métastases [Andrä and Nowak, 2007], pose de stent [Zhang et al., 2005], capteur embarqué (comme dans [Ergeneman et al., 2008] pour la mesure du taux d'oxygène dans les tissus), etc...

Nous avons présenté dans les sections précédentes de ce chapitre les lois qui régissent la dynamique d'un microrobot endovasculaire, et notamment comment générer des champs magnétiques permettant de fournir, à distance et sans lien mécanique, de l'énergie à des microrobots. Nous allons maintenant étudier comment cette énergie peut être mise à profit afin de propulser un microrobot. Nous exposerons trois des principes majeurs de la propulsion par actionnement magnétique déporté : les robots à flagelles élastiques [Lagomarsino et al., 2003], [Evans and Lauga, 2010], [Dreyfus et al., 2005]; les robots à flagelle hélicoïdale [Edd et al., 2003], [Abbott et al., 2009], [Diller and Sitti, 2013]; et enfin la technique de bead pulling [Quate et al., 1991], [Honda et al., 1996], [Mathieu et al., 2006]. Ces trois types de propulsion reposent sur le fait qu'un corps, soumis à un champ magnétique extérieur et constitué d'un matériau magnétique avec un taux volumique  $\tau_m$  et une aimantation  $\vec{M}$  subit une force  $\vec{F}_m$  et un couple  $\vec{\Gamma}_m$  magnétiques donnés par :

$$\vec{F}_m = \tau_m V (\vec{M} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \quad (1.55)$$

$$\vec{\Gamma}_m = \tau_m V \vec{M} \wedge \vec{B} \quad (1.56)$$

### 1.5.1 Flagelle élastique

Les microrobots à flagelles élastiques sont inspirés des cellules eucaryotes. Ces dernières se propulsent grâce à des ondes de déformation qui se diffusent de leur tête jusqu'à l'extrémité de leur(s) flagelle(s) élastique(s). La déformation des flagelles donne naissance à une force de propulsion permettant à la cellule de se déplacer dans le fluide car la tête brise la symétrie

de diffusion de ces ondulations. Le fluide doit être assez visqueux pour que la force résultante permette la propulsion, ce qui rend ce type de propulsion avantageux à bas Reynolds.

Considérons un microrobot constitué d'une tête sphérique de rayon  $r$  possédant une aimantation  $\vec{M}$ , munie d'une flagelle élastique de rayon  $r_f \ll r$ . Afin de créer un battement de la flagelle, plusieurs techniques sont possibles : on peut exercer soit une force soit un couple sur la tête afin d'exercer respectivement une force ou un couple sur la base de la flagelle. Un gradient de champ magnétique ou un champ magnétique oscillant périodique avec une pulsation  $\omega$ , de normes respectives notées  $f_0 = \tau_m V \|\vec{M}\| \|\vec{\nabla} B\|$  et  $\gamma_0 = \tau_m V \|\vec{M}\| \|B\|$ , peuvent donc être utilisés pour propulser le microrobot. Les entrées de commande sont donc ici  $\omega$  et l'amplitude de la force ou du couple selon le choix d'actionnement pour contrôler l'amplitude de la force propulsive, et l'axe du gradient ou du couple pour le contrôle en orientation.

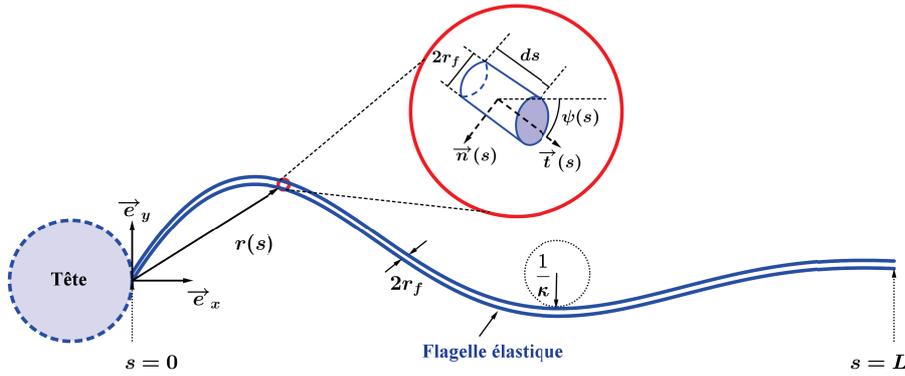


FIGURE 1.15 – Microrobot à flagelle élastique

La modélisation de la force induite par le battement de la flagelle est ardue, que ce soit par approche analytique [Taylor, 1951, Wiggins et al., 1998, Evans and Lauga, 2010] ou par approche numérique [Lagomarsino et al., 2003]. Nous nous plaçons ici dans le cadre d'une approche analytique et présentons brièvement les résultats de [Wiggins et al., 1998, Evans and Lauga, 2010] dans le cadre de la dynamique de petites déformations. Notons  $y(x, t)$  le déplacement de la flagelle sur un axe normal à celui de la flagelle (voir figure 1.15). Par une approche énergétique dans le plan, [Wiggins et al., 1998] a montré que l'élastohydrodynamique est régie par l'équation d'hyperdiffusion linéaire :

$$y_{1t} = -\frac{k}{\zeta_n} y_{4x} \quad (1.57)$$

avec la notation  $y_{i*} = \frac{\partial^i y}{\partial x^i}$ ,  $k$  le coefficient de raideur de la flagelle de longueur  $L$ , et  $\zeta_n$  le coefficient de traînée visqueuse normale. Suivant [Evans and Lauga, 2010], afin d'étudier la dynamique en

régime établi, on pose  $y(x, t) = \Re(\tilde{y}(x)e^{-i\omega t})$ . Afin d'adimensionner le système, on définit le nombre de sperme  $S_p = L\left(\frac{\zeta_n \omega}{k}\right)^{\frac{1}{4}}$  et on définit les grandeurs suivantes :

$$\tilde{t} = t/\omega, \quad \tilde{x} = x/L, \quad \tilde{y} = y/y_0 \quad (1.58)$$

où  $y_0 = \frac{f_0 L^3}{k}$  pour le cas actionné en force (AF), et  $y_0 = \frac{\gamma_0 L^2}{k}$  pour le cas actionné en couple (AC).

A l'extrémité de la flagelle, les conditions aux limites sont alors données par :

$$\begin{aligned} y_{2x}(L, t) &= 0 & \tilde{y}^{(2)}(1) &= 0 \\ y_{3x}(L, t) &= 0 & \tilde{y}^{(3)}(1) &= 0 \end{aligned} \quad (1.59)$$

et les conditions aux limites à l'extrémité actionnée par la tête du microrobot :

$$\begin{aligned} y(0, t) &= 0 & \tilde{y}(0) &= 0 \\ y_{2x}(0, t) &= \frac{\gamma_0}{k} \cos \omega t & \tilde{y}^{(2)}(0) &= 1 \text{ (AC)} \\ y_{3x}(0, t) &= \frac{f_0}{k} \cos \omega t & \tilde{y}^{(3)}(0) &= 1 \text{ (AF)} \end{aligned} \quad (1.60)$$

Lauga montre alors que les forces propulsives moyennées sur une période sont de la forme :

$$\vec{F}_{m,f} = -\frac{\omega \zeta_n f_0^2 L^6}{4k^2} I_f(S_p) \vec{e}_x \quad \text{(AF)} \quad (1.61)$$

$$\vec{F}_{m,c} = -\frac{\omega \zeta_n \gamma_0^2 L^4}{4k^2} I_c(S_p) \vec{e}_x \quad \text{(AC)} \quad (1.62)$$

pour un actionnement en force et en couple respectivement, où les fonction  $I_f$  et  $I_c$  sont des intégrales qui décroissent en fonction du nombre de sperme, donc de l'entrée de commande  $\omega$ , et dépendent aussi fortement de la distance aux parois  $\delta$  dont la présence modifie la valeur de  $\zeta_n$ .

Si le cadre théorique est maintenant bien posé dans le cas de petites déformations, il n'en va pas de même pour le cas de déplacements de plus grande amplitude, ni pour l'influence des effets de bord sur la force motrice. Des expérimentations sur les microrobots à flagelle élastique ont été menées par [Sudo, 2006] et [Guo et al., 2007]. Dans le cas [Dreyfus et al., 2005], il s'agit d'une version légèrement différente puisque l'actionnement est distribué sur la flagelle, composée d'une chaîne de particules magnétiques attachées à une tête magnétiquement inerte. [Behkam and Sitti, 2006] ont également travaillé sur un actionnement réparti sur une flagelle plane et non filaire : les forces résultantes sont plus importantes, mais l'actionnement réparti, qui est utilisé par les bactéries, reste encore un verrou technologique.

### 1.5.2 Flagelle hélicoïdale

Le concept de microrobot à flagelle hélicoïdale est lui aussi bio-inspiré par certaines bactéries qui utilisent une rotation de leur flagelle pour se propulser. Ce type de microrobot est bien adapté

pour un écoulement à bas Reynolds [Purcell, 1977] puisqu'il repose lui aussi sur une viscosité élevée du fluide. En faisant tourner une tête sur laquelle est encastré une flagelle hélicoïdale, on crée une force motrice— à l'image de la rotation d'un tire-bouchon qui induit une force de rotation —qui dépend de la vitesse angulaire de rotation  $\omega$  et de la vitesse relative  $v_r$  du microrobot dans le fluide car la queue exerce une traînée additionnelle sur le fluide. Il est connu depuis bien longtemps [Purcell, 1977] que la dynamique d'un tel microrobot est donnée par :

$$\begin{bmatrix} F_m \\ \Gamma_m \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a & -b \\ -b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_r \\ \omega \end{bmatrix} \quad (1.63)$$

avec les paramètres  $a$ ,  $b$  et  $c$  donnés ci-dessous :

$$\begin{cases} a = 2\pi nr \left( \frac{\zeta_t \cos^2(\theta) + \zeta_n \sin^2(\theta)}{\sin(\theta)} \right) \\ b = 2\pi nr^2 (\zeta_n - \zeta_t) \cos(\theta) \\ c = 2\pi nr^3 \left( \frac{\zeta_n \cos^2(\theta) + \zeta_t \sin^2(\theta)}{\sin(\theta)} \right) \end{cases} \quad (1.64)$$

avec  $\zeta_n \approx 2\zeta_t$  les coefficients de traînée visqueux normal et tangentiel,  $n$  le nombre de tours de l'hélice de rayon  $R_h$ , et  $\theta$  l'angle d'attaque de l'hélice comme illustré sur la figure 1.16.

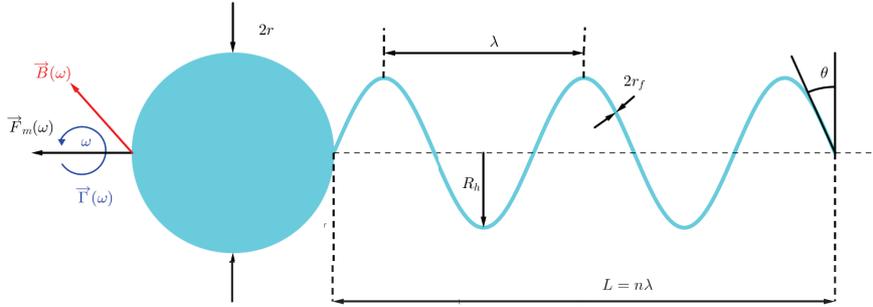


FIGURE 1.16 – Microrobot à flagelle hélicoïdale

En utilisant pour tête un dipôle placé dans un champ magnétique  $\vec{B}(t)$  tournant à pulsation  $\omega$ , l'équation (1.50) montre que ce champ crée un couple  $\vec{\Gamma}_m$  qui tend à aligner le moment magnétique du dipôle selon l'axe du champ et l'on fait ainsi tourner la tête à pulsation  $\omega$  si ce champ est assez puissant. Les entrées de commande d'un tel système sont alors  $\omega$  pour contrôler

l'amplitude de la force, et l'axe du couple pour contrôler son orientation :

$$\vec{F}_m = 2\pi nr \left( r(\zeta_n - \zeta_t) \cos(\theta) \omega \frac{\vec{\Gamma}_m}{\|\vec{\Gamma}_m\|} - \frac{\zeta_t \cos^2(\theta) + \zeta_n \sin^2(\theta)}{\sin(\theta)} \vec{v}_r \right) \quad (1.65)$$

Le premier terme, propulsif, croît au carré du rayon  $r$  du microrobot tandis que le second terme, résistif car associé à la traînée de la queue, ne croît que linéairement en fonction de  $r$ . Il est ici tentant d'utiliser une pulsation la plus grande possible, mais outre les problèmes techniques, cela pose trois problèmes majeurs : il ne faut pas que l'aimantation du microrobot ne « décroche » du couple magnétique ; la traînée de l'hélice est ici modélisée en utilisant la loi de Stokes –donc un bas Reynolds– or une augmentation de la fréquence de rotation fait augmenter le nombre de Reynolds ; enfin des phénomènes de cavitation peuvent apparaître à haute fréquence. En pratique, on observe donc une fréquence maximale au delà de laquelle le rendement de ce type de propulsion s'effondre [Zhang et al., 2010a].

Que ce soit théoriquement [Arcese et al., 2012] ou en pratique [Zhang et al., 2010a], [Mahoney et al., 2011], [Xu et al., 2015], l'efficacité des microrobots à flagelle hélicoïdale dépasse celle des microrobots à flagelle élastique (du moins à actionnement non distribué) à bas Reynolds, d'où son utilisation croissante. De plus, comme le soulignent les auteurs dans [Abbott et al., 2009], ces deux designs de microrobot permettent d'exploiter le couple magnétique, qui ne décroît qu'en fonction du cube de la distance de la bobine au microrobot, alors que la force magnétique décroît en fonction de cette distance à la puissance 4.

### 1.5.3 Bead pulling

C'est le concept le plus simple de propulsion d'un microrobot. Il n'est pas bio-inspiré mais découle naturellement de l'expression de la force magnétique (1.49). Ce type de microrobot est soit un simple dipôle, soit un agrégat de dipôles comme l'illustre la figure 1.17, qui est simplement poussé par la force magnétique : les entrées de commande sont donc les gradients de champ magnétique, qui contrôlent à la fois l'amplitude et l'orientation de la force de propulsion :

$$\vec{F}_m = \tau_m V (\vec{M} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \quad (1.66)$$

Afin de pallier le fait que les gradients de champ décroissent plus rapidement que le champ, il est crucial d'utiliser ici des matériaux à forte aimantation. Cependant, comme cette force est fonction du cube du rayon du microrobot, alors que les expressions des forces propulsives pour les microrobots à flagelle (1.61) et (1.65) montrent une dépendance en  $r^2$ , la propulsion par bead pulling perd de son intérêt à petites dimensions (la dizaine de micromètres). L'avantage de cette propulsion, c'est qu'elle ne requiert pas de champ magnétique très important, même si un champ important lui est bénéfique en augmentant son aimantation. Cette propulsion est donc bien adaptée à l'utilisation en IRM [Mathieu et al., 2006, Tamaz et al., 2008] ou avec un

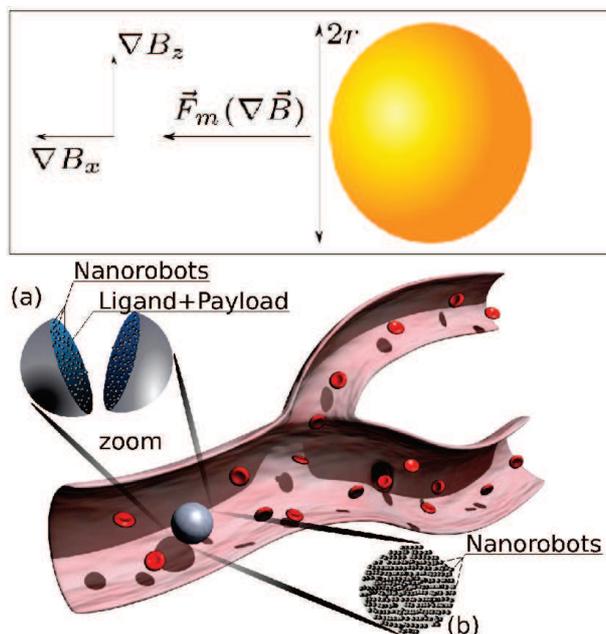


FIGURE 1.17 – Microrobot sphérique (bead pulling) sous forme simple ou agrégée

dispositif expérimental de type Octomag [Kratochvil et al., 2010, Arcese et al., 2013]. De plus cette approche permet d'utiliser des agrégats, et ainsi d'adapter le rayon du microrobot à celui des vaisseaux sanguins qu'il traverse, ce qui est plus problématique pour la flagelle élastique, et plus encore pour la flagelle hélicoïdale puisqu'il faudrait diminuer son rayon. Il en résulte un risque faible d'embolie, mais aussi l'exploitation d'une poussée maximale en fonction des dimensions de la vasculature si la désagrégation est contrôlée.

## 1.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons d'abord présenté comment peuvent être générés des champs et gradients de champs magnétiques en vue d'actionner des microrobots. Ces microrobots étant destinés à parcourir le système sanguin, nous en avons exposé quelques caractéristiques ainsi que celles des imageurs utilisés dans le domaine médical. Nous avons ensuite présenté une synthèse des expressions analytiques des différentes forces qui agissent sur la dynamique de microrobots immergés dans le système sanguin. Enfin, nous avons donné un aperçu des différents systèmes de propulsion de microrobots magnétiques actionnés à distance. L'intérêt de ce chapitre ne réside aucunement dans l'originalité, mais dans la synthèse de l'ensemble de ces forces.

Une attention particulière a été portée sur la modélisation des forces dérivant de la mécanique des fluides. En effet, un microrobot naviguant dans les vaisseaux sanguins fait face à une force qui est dominante : la force hydrodynamique exercée par le flux sanguin sur

le microrobot. Cette force est non linéaire et dépend très fortement de la vitesse du flux sanguin. Or cette dernière varie dans le temps et l'espace, et est difficilement accessible à la mesure avec une résolution adéquate. Nous avons donc exploité la solution analytique de l'écoulement de Womersley pour proposer un modèle de vitesse du sang qui sera développé dans le chapitre suivant afin de permettre la synthèse de deux observateurs de la vitesse du sang.

Le chapitre suivant exploite les expressions données ici afin d'exhiber des modèles dynamiques propres à la synthèse ultérieure de lois de commande et d'observateurs, ce qui est l'objectif de ce mémoire.

# Chapitre 2

## Modélisation

### Contenu du chapitre

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>52</b>
<b>2.2</b>	<b>Rappels d'automatique</b>	<b>52</b>
2.2.1	Représentation d'état	53
2.2.1.1	Systèmes non linéaires	53
2.2.1.2	Systèmes linéaires	53
2.2.2	Stabilité	55
<b>2.3</b>	<b>Notations</b>	<b>59</b>
<b>2.4</b>	<b>Représentation d'état pour la commande</b>	<b>60</b>
2.4.1	Représentation d'état pour un microrobot	60
2.4.1.1	Représentation en 1D	60
2.4.1.2	Représentation en 2D	63
2.4.2	Représentation d'état pour deux microrobots	66
2.4.2.1	Représentation en 1D	66
2.4.2.2	Représentation en 2D	67
2.4.3	Représentation d'état pour $m$ microrobots en 1D	69
<b>2.5</b>	<b>Représentation d'état pour l'observation</b>	<b>71</b>
2.5.1	Modèles de la vitesse du sang	71
2.5.2	Système étendu	73
<b>2.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>76</b>

---

## 2.1 Introduction

Ce chapitre sera dédié à l'exploitation de la modélisation des forces effectuée dans le chapitre 1. Nous introduisons quelques rappels de base en automatique. Nous élaborerons des représentations d'état des systèmes étudiés à des fins de contrôle et d'observation (dans les chapitres 3 et 4). Nous donnerons tout d'abord les représentations d'état d'un microrobot en  $1D$  et  $2D$  (système réduit), puis celles correspondant à plusieurs microrobots. Nous expliciterons ensuite des modèles de flux pulsatile sanguin. Enfin, nous combinerons les représentations d'état du système réduit avec celles de la vitesse du sang pour obtenir les représentations d'état du système étendu. Nous obtiendrons deux modèles réduit et étendu, le premier sera exploité pour la synthèse de lois de commande dans le but de contrôler les états du microrobot le long d'une trajectoire de référence  $x_{ref}$ , et le deuxième sera utilisé pour synthétiser un observateur d'état afin de reconstituer les états non accessibles du modèle étendu, c'est-à-dire les vitesses du microrobot et du sang, voire aussi la pulsation cardiaque lorsque celle-ci est supposée inconnue.

Nous introduisons d'abord quelques rappels de base en automatique

## 2.2 Rappels d'automatique

Dans cette section, je vais effectuer un rappel sur les notions de représentation d'état des systèmes linéaires et non linéaires, et de leur stabilité [Isidori, 1995], [Yang et al., 2012], [Khalil, 2001]. Un système est défini en général par ses entrées  $u_i$ , ses sorties  $y_i$  et ses états  $x_i$ , lesquels ne sont pas toujours accessibles, comme l'illustre la figure 2.1.

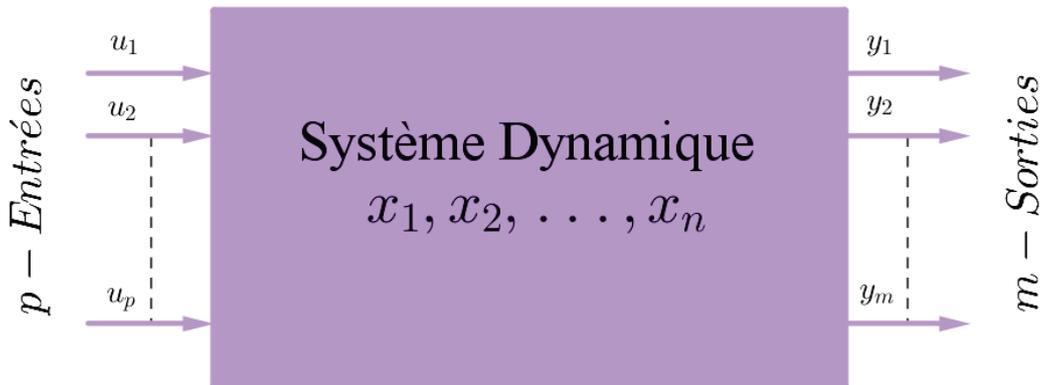


FIGURE 2.1 – Système dynamique  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^p$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$

### 2.2.1 Représentation d'état

Nous nous concentrons ici sur les systèmes décrits par des équations différentielles continues. Une représentation d'état contient les variables d'état  $x_1, \dots, x_n$  qui représentent l'ensemble de variables nécessaires pour décrire le système ; leur connaissance à l'instant  $t_0$  ainsi que celle du signal d'entrée  $u$  permettent de calculer la sortie  $y$  du système pour tout  $t \geq t_0$ . Il est possible de classer ces représentations selon leur linéarité : linéaire à temps invariant (LTI) pour un système linéaire stationnaire, linéaire temps variant (LTV) pour un système linéaire non stationnaire, et non linéaire sinon. Ces représentations d'état permettent l'étude de propriétés intrinsèques du système : sa stabilité, sa commandabilité et son observabilité.

#### 2.2.1.1 Systèmes non linéaires

Un système est généralement modélisé sous forme d'une représentation d'état non linéaire donnée ci-dessous :

$$\Sigma_{NL} : \begin{cases} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x, u) \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^p$ ,  $y \in \mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^m$  sont respectivement les vecteurs d'état, de commande et de sortie et  $f^T = [f_1 \ \dots \ f_n]$ ,  $h^T = [h_1 \ \dots \ h_m]$  des champs de vecteurs dans  $\mathbb{F} \subset \mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{H} \subset \mathbb{R}^m$  respectivement. On distingue les points suivants du système :

- les points d'équilibre  $x_e$  du système (2.1), qui satisfont  $f(x_e, 0) = 0$ .
- les points de fonctionnement  $(x_f, u_f)$  du système (2.1), qui satisfont  $f(x_f, u_f) = 0$ .

La trajectoire du système (2.1), d'état initial  $x_0 = x(t_0)$ , est notée par  $\mathcal{X}_u(t, x_0)$  pour une commande  $u$  appliquée sur l'intervalle  $[t_0, t]$ .

#### 2.2.1.2 Systèmes linéaires

Les systèmes linéaires sont généralement obtenus par linéarisation des systèmes non linéaires donnés par (2.1).

Soit  $\bar{U}(t)$ , une entrée nominale et soit  $\bar{X}(t)$  l'état correspondant :  $\dot{\bar{X}}(t) = f(\bar{X}(t), \bar{U}(t))$ . La sortie nominale  $\bar{Y}(t)$  est donnée par  $\bar{Y}(t) = g(\bar{X}(t), \bar{U}(t))$ . Soient des perturbations faibles  $u(t)$  affectant  $\bar{U}(t)$  :  $U(t) = \bar{U}(t) + u(t)$  : ces perturbations affectent le vecteur d'état  $X(t) = \bar{X}(t) + x(t)$  et la sortie  $Y(t) = \bar{Y}(t) + y(t)$ . On obtient alors :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) &= f(\bar{X}(t) + x(t), \bar{U}(t) + u(t)) \\ Y(t) &= g(\bar{X}(t) + x(t), \bar{U}(t) + u(t)) \end{cases} \quad (2.2)$$

En réalisant un développement de Taylor au premier ordre de  $f$  et  $g$  du système (2.2), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}(t) = \dot{\bar{X}}(t) + \dot{x}(t) \approx f(\bar{X}(t), \bar{U}(t)) + \underbrace{\left( \frac{\partial f}{\partial X} \Big|_{\bar{X}, \bar{U}} \right)}_{F_X} x(t) + \underbrace{\left( \frac{\partial f}{\partial U} \Big|_{\bar{X}, \bar{U}} \right)}_{F_U} u(t) \\ Y(t) = \bar{Y}(t) + y(t) \approx g(\bar{X}(t), \bar{U}(t)) + \underbrace{\left( \frac{\partial g}{\partial X} \Big|_{\bar{X}, \bar{U}} \right)}_{G_X} x(t) + \underbrace{\left( \frac{\partial g}{\partial U} \Big|_{\bar{X}, \bar{U}} \right)}_{G_U} u(t) \end{array} \right.$$

On obtient alors le système linéaire en  $x(t)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = F_X x(t) + F_U u(t) \\ y(t) = G_X x(t) + G_U u(t) \end{array} \right.$$

**2.2.1.2.1 Système LTV** Un système linéaire à temps variant est obtenu par linéarisation du système (2.1) autour d'une trajectoire de référence  $(x_r(t), u_r(t))$  :

$$\Sigma_{LTV} : \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = A(t)x + B(t)u \\ y = C(t)x + D(t)u \end{array} \right. \quad (2.3)$$

où les matrices  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  et  $D(t)$  sont données ci-dessous :

$$\begin{aligned} A(t) &= \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, u) \right]_{(x(t)=x_r(t), u(t)=u_r(t))} & B(t) &= \left[ \frac{\partial f}{\partial u}(x, u) \right]_{(x(t)=x_r(t), u(t)=u_r(t))} \\ C(t) &= \left[ \frac{\partial h}{\partial x}(x, u) \right]_{(x(t)=x_r(t), u(t)=u_r(t))} & D(t) &= \left[ \frac{\partial h}{\partial u}(x, u) \right]_{(x(t)=x_r(t), u(t)=u_r(t))} \end{aligned} \quad (2.4)$$

On suppose que les coefficients des matrices définies ci-dessus sont continus par morceaux. Alors pour une condition initiale  $x_0 = x(t_0)$  et une entrée intégrable  $u(\tau)$ , il existe une trajectoire unique  $\mathcal{X}_u(t, x_0)$  solution du système (2.3) :

$$\mathcal{X}_u(t, x_0) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \quad (2.5)$$

avec  $\Phi(., .)$  la matrice de transition du système (2.3), solution du système suivant :

$$\dot{\Phi}(t, \tau) = A(t)\Phi(t, \tau) \quad (2.6)$$

$$\Phi(\tau, \tau) = I_n \quad (2.7)$$

**2.2.1.2.2 Système LTI** Un système linéaire invariant dans le temps, ou système stationnaire, est donné par :

$$\Sigma_{LTI} : \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{array} \right. \quad (2.8)$$

où les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont données comme suit :

$$\begin{aligned} A &= \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x, u) \right]_{(x=x^*, u=u^*)} & B &= \left[ \frac{\partial f}{\partial u}(x, u) \right]_{(x=x^*, u=u^*)} \\ C &= \left[ \frac{\partial h}{\partial x}(x, u) \right]_{(x=x^*, u=u^*)} & D &= \left[ \frac{\partial h}{\partial u}(x, u) \right]_{(x=x^*, u=u^*)} \end{aligned} \quad (2.9)$$

où  $(x^*, u^*)$  est un point de fonctionnement du système.

Connaissant l'état initial  $x_0 = x(t_0)$  du système (2.8) et la commande  $u(\tau)$  sur l'intervalle  $[t_0, t]$ , alors sa trajectoire  $\mathcal{X}_u(t, x_0)$  est un cas particulier plus simple de (2.5) :

$$\mathcal{X}_u(t, x_0) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (2.10)$$

avec :

$$e^{(t-t_0)A} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} (t-t_0)^k A^k \quad (2.11)$$

par définition de la série entière d'exponentielle.

### 2.2.2 Stabilité

Dans cette section, on considère la stabilité des systèmes autonomes ( $u = 0$ ).

**Définition 2.2.1 [Boule]** : Soit  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  et  $\varepsilon > 0$ , la boule du centre  $x_0$  et de rayon  $\varepsilon$  est définie comme suit :

$$\mathcal{B}_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq \varepsilon\}$$

**Définition 2.2.2 [Convexe]** : Un ensemble  $Co \subset \mathbb{R}^n$  est dit convexe si :

$$\forall (x, y) \in Co^2, \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad \lambda x + (1 - \lambda)y \in Co$$

On note alors  $Co(x, y) = \{z \in \mathbb{R}^n : z = \lambda x + (1 - \lambda)y, 0 \leq \lambda \leq 1\}$ .

**Définition 2.2.3 [Stabilité au sens de Lyapunov]** : Le point d'équilibre  $x_e = 0$  du système (2.1) est stable au sens de Lyapunov si pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$  tel que :

$$\|x(t_0)\| < \delta \implies \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 \quad (2.12)$$

Si  $\delta$  est indépendant de  $t_0$ , on parle alors de stabilité uniforme.

**Définition 2.2.4 [Stabilité asymptotique]** : Le point d'équilibre  $x_e = 0$  du système (2.1) est asymptotiquement stable si :

1.  $x_e$  est stable, et

2.  $x_e$  est localement attractif; c'est-à-dire, il existe  $\delta(t_0)$  tel que :

$$\|x(t_0)\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0 \quad (2.13)$$

Si  $\delta$  est indépendant de  $t_0$ , on parle alors de stabilité asymptotique uniforme.

**Définition 2.2.5 [Stabilité exponentielle]** : Le point d'équilibre  $x_e = 0$  du système (2.1) est exponentiellement stable s'il existe  $\alpha, \beta > 0$  :

$$\|x(t_0)\| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 : \|x(t)\| \leq \beta e^{-\alpha(t-t_0)} \|x(t_0)\| \quad (2.14)$$

La plus grande constante  $\alpha$  est appelée le taux de convergence. Le système (2.1) est dit globalement exponentiellement stable si (2.14) est vérifiée pour tout  $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$ .

**Définition 2.2.6 [Lyapunov exponentielle stabilité]** : Soit  $x_e = 0$  un point d'équilibre pour le système autonome (2.1). On dit que  $x_e$  est exponentiellement stable s'il existe  $\varepsilon > 0$  et une fonction  $V \in \mathcal{C}^1$  telle qu'il existe des constantes positives  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  :

- $\alpha_1 \|x\|^2 \leq V(x) \leq \alpha_2 \|x\|^2$  ;
- $\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x}(x) f(x, 0) \leq -\alpha_3 \|x\|^2$  ;
- $\left\| \frac{\partial V}{\partial x}(x) \right\| \leq \alpha_4 \|x\|$ .

$\forall x \in \mathcal{B}_\varepsilon(x_e)$ . Si les conditions ci-dessus sont valables pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , on dit alors que  $x_e$  est globalement exponentiellement stable.

**Définition 2.2.7 [Critère algébrique]** : On considère un système LTI donné par (2.8). Soient  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$  les valeurs propres de  $A$  avec  $m_{\lambda_i}$  et  $d_{\lambda_i}$  leurs ordres de multiplicité algébrique et géométrique, on dit alors que le système (2.8) est :

1. **asymptotiquement stable** si seulement si  $\forall i, \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ .
2. **marginalement stable** si seulement si :
  - $\forall i : \operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0$ , **et**
  - $\exists i : \operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$ , et  $m_{\lambda_i} = d_{\lambda_i}$  pour tout  $\operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$ .
3. **instable** si et seulement si :
  - $\exists i : \operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$ , **ou bien**
  - $\exists i : \operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$ , et  $d_{\lambda_i} < m_{\lambda_i}$ .

**Définition 2.2.8 [Fonction définie positive ou négative]** : Soit une application  $Q : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$  et  $D \subset \mathbb{R}^s$  contenant l'origine, on dit que :

- $Q$  est semi-définie positive sur  $D$ , noté  $Q(z) \geq 0$ , si  $Q(0) = 0$  et  $Q(z) \geq 0 \quad \forall z \in D^*$  ;
- $Q$  est définie positive sur  $D$ , noté  $Q(z) > 0$ , si  $Q(0) = 0$  et  $Q(z) > 0 \quad \forall z \in D^*$ .

- $Q$  est semi-définie négative sur  $D$ , noté  $Q(z) \leq 0$ , si  $Q(0) = 0$  et  $Q(z) \leq 0 \quad \forall z \in D^*$  ;
- $Q$  est définie négative sur  $D$ , noté  $Q(z) < 0$ , si  $Q(0) = 0$  et  $Q(z) < 0 \quad \forall z \in D^*$ .

**Définition 2.2.9 [Fonction candidate de Lyapunov]** : Une fonction  $V \in \mathcal{C}^1(D \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$  est appelée fonction candidate de Lyapunov si elle est définie positive sur  $D$ .

**Théorème 2.2.10 [Théorème de Lyapunov]** : Soit  $x_e = 0 \in \mathbb{X}$  un point d'équilibre du système (2.1). On suppose qu'il existe une fonction  $V(x)$  de classe  $\mathcal{C}^1$  définie positive sur  $\mathbb{X}$ . Le long des trajectoires de (2.1), on a :

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \frac{\partial V}{\partial x} f(x, 0) \\ &= \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n\end{aligned}$$

On dit que le point  $x_e$  est :

1. **stable** si  $\dot{V}(x)$  est semi-définie négative sur  $\mathbb{X}$
2. **asymptotiquement stable** si  $\dot{V}(x)$  est définie négative sur  $\mathbb{X}$
3. **globalement asymptotiquement stable** si
  - (a)  $x_e$  est asymptotiquement stable et
  - (b)  $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$  et
  - (c)  $V(x)$  radialement non bornée :  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty$

**Définition 2.2.11 [Stabilité des systèmes linéaires à temps variant]** : Soit  $V$  la fonction de Lyapunov donnée par  $V(x) = x^T P(t)x$  avec  $P(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice symétrique définie positive. La dérivée de  $V$  le long des trajectoires du système (2.3) (autonome) est donnée par :

$$\dot{V}(x) = x^T [A^T(t)P(t) + P(t)A(t) + \dot{P}(t)]x$$

On dit alors que le système (2.3) est stable si, pour une matrice bornée  $Q(t) = Q^T(t) \geq 0$ , il existe une unique matrice bornée  $P(t) = P^T(t) > 0$  solution de l'équation suivante :

$$A^T(t)P(t) + P(t)A(t) + \dot{P}(t) = -Q(t) \quad (2.15)$$

**Définition 2.2.12 [Stabilité des systèmes linéaires stationnaires]** : Soit  $V$  la fonction de Lyapunov donnée par  $V(x) = x^T P x$  avec  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice symétrique définie positive. La dérivée de  $V$  le long des trajectoires du système (2.8) (autonome) est donnée par :

$$\dot{V}(x) = x^T [A^T P + P A]x$$

On dit alors que le système (2.8) est stable si pour une matrice  $Q = Q^T \geq 0$ , il existe une unique matrice  $P = P^T > 0$  solution de l'équation suivante dite équation de Lyapunov :

$$A^T P + P A = -Q \quad (2.16)$$

**Définition 2.2.13 [Lemme de Barbalat]** : Soit  $\psi : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \psi(t) \in \mathbb{R}$  une fonction uniformément continue donc de dérivée  $\dot{\psi}$  bornée. On suppose que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \psi(\tau) d\tau$  existe et est finie. Alors on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) = 0$$

**Définition 2.2.14 [Lemme de Lyapunov Barbalat]** : Soit une fonction  $V(t, x)$  qui satisfait les conditions suivantes :

- $V(t, x)$  est minorée (i.e. admet une borne inférieure).
- $\dot{V}(t, x)$  est semi-définie négative.
- $\dot{V}(t, x)$  est uniformément continue en  $t$  (condition suffisante pour avoir  $\ddot{V}(t, x)$  bornée) alors on a  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{V}(t, x) = 0$ .

**Définition 2.2.15 [Fonction Lipschitzienne]** : Soit  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . La fonction  $f$  est dite  $\gamma$ -lipschitzienne sur  $I$  si et seulement si :

$$\exists \gamma > 0, \quad \forall (x, y) \in I^2, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq \gamma \|x - y\|$$

**Définition 2.2.16 [Bornitude et convergence d'un ensemble]** : Soit  $\dot{x} = f(t, x)$ , avec  $f(t, x)$  continue par morceaux par rapport à  $t$ , localement lipschitz par rapport à  $x \in \mathbb{X}$  et telle que  $f(t, 0)$  est uniformément bornée pour  $t \geq 0$ . Soit  $V(t, x) \in \mathcal{C}^1$  telle que :

$$W_1(x) \leq V(x, t) \leq W_2(x)$$

$$\frac{d}{dt} V = \frac{\partial}{\partial t} V(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} V(t, x) \dot{x} \leq -W_3(x)$$

avec des fonctions  $W_1(x)$  et  $W_2(x)$  continues, définies positives et radialement non bornées, et  $W_3(x)$  continue et semi définie positive.

Prenons  $r : \mathcal{B}_r(0) \subset \mathbb{X}$  et  $\rho = \min_{\|x\|=r} \{W_1(x)\}$ . Alors,  $\forall x(t_0) \in \{W_2(x) \leq \rho\}$  :

- $x(t)$  est borné  $\forall t \geq t_0$
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} W_3(x(t)) = 0$

**Définition 2.2.17 [Ensemble invariant]** : Soit  $D$  un sous-ensemble de  $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$ , on dit que  $D$  est un :

- Ensemble invariant pour le système autonome (2.1) si :

$$\forall x(0) \in D, \quad x(t) \in D, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

- Ensemble positivement invariant pour le système autonome (2.1) si :

$$\forall x(0) \in D, \quad x(t) \in D, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

**Définition 2.2.18 [Fonction de classe  $\mathcal{K}$ ]** : Soit une fonction  $\psi(t) : [0, a) \rightarrow \mathbb{R}_+$ . On dit que la fonction  $\psi$  est de :

- classe  $\mathcal{K}$  si  $\psi(0) = 0$  et  $\forall t_1, t_2 : 0 \leq t_1 < t_2, \psi(t_1) < \psi(t_2)$  ;
- classe  $\mathcal{K}_\infty$  si elle est de classe  $\mathcal{K}$ ,  $a = \infty$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi(t) = +\infty$ .

**Définition 2.2.19 [Fonction de classe  $\mathcal{KL}$ ]** : Soit une fonction  $\varphi(x, t) : [0, a) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ . On dit que la fonction  $\varphi$  est de  $\mathcal{KL}$  si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. pour  $t = t_0$ , la fonction  $\varphi(x, t_0)$  est de classe  $\mathcal{K}$  par rapport à  $x$  ;
2. pour  $x = x_0$ ,  $\forall t_1, t_2 : 0 \leq t_1 < t_2 : \varphi(x_0, t_1) > \varphi(x_0, t_2)$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(x_0, t) = 0$

**Théorème 2.2.20 [Valeur de la moyenne pour les fonctions scalaires]** : Soit une fonction  $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et  $(a, b) \in \mathbb{R}^{2n}$  tel que  $\psi$  est différentiable sur  $Co(a, b)$ . Alors il existe une constante  $c \in Co(a, b)$ ,  $c \neq a$ ,  $c \neq b$ , telle que :

$$\psi(a) - \psi(b) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(c)(a - b) \quad (2.17)$$

**Théorème 2.2.21 [Valeur de la moyenne pour les fonctions vectorielles]** : Soit une fonction  $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$  et  $(a, b) \in \mathbb{R}^{2n}$  tel que  $\psi$  est différentiable sur  $Co(a, b)$ . Alors il existe des constantes  $c_1, \dots, c_q \in Co(a, b)$ ,  $c_i \neq a$ ,  $c_i \neq b$  pour  $i = 1, \dots, q$ , telles que :

$$\psi(a) - \psi(b) = \left( \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^n e_q(i) e_n^T(j) \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}(c_i) \right) (a - b) \quad (2.18)$$

avec  $\psi_i$  la  $i$ ème composante de  $\psi$  et  $e_q(i)$  le  $i$ -ème vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^q$ .

## 2.3 Notations

Dans cette section, nous donnons toutes les notations qui seront utilisées par la suite, afin de simplifier la lecture.

1. On note la force normalisée par la masse  $F' = \frac{F}{m}$ , avec  $F$  la force et  $m$  la masse.
2. On note la position et la vitesse du microrobot ( $j$ ) respectivement  $p_{a_j}, \dot{p}_{a_j}$  le long de l'axe  $a$  avec  $a \in \{x, z\}$ . Si un seul microrobot est considéré, on notera  $p_a$  et  $\dot{p}_a$ .
3. Le modèle réduit d'un seul microrobot est noté :
  - (a)  $\mathcal{R}^1$  en 1D et  $\mathcal{R}^2$  en 2D.
  - (b)  $\mathcal{R}_s^1$  en 1D, dans le cas où la force de traînée est régie par la loi de Stokes (donc à bas Reynolds).
4. Le modèle réduit de  $m$  microrobots en interaction est noté par  $\mathcal{R}^{1m}$  en 1D et  $\mathcal{R}^{2m}$  en 2D.
5. Le modèle fluidique est noté :

- (a)  $\mathcal{F}^n$  dans le cas général d'une vitesse du sang composée de  $n$  harmoniques, caractérisée par une pulsation inconnue.
  - (b)  $\mathcal{F}_\omega^n$  dans le cas particulier où la pulsation  $\omega$  de la vitesse du sang est connue.
6. Le modèle étendu obtenu à partir des modèles réduit et fluide est noté :
- (a)  $\mathcal{E}_\omega^{1,n}$  dans le cas  $1D$  avec  $\omega$  connue.
  - (b)  $\mathcal{E}_\omega^{2,n}$  dans le cas  $2D$  avec  $\omega$  connue.
  - (c)  $\mathcal{E}^{1,n}$  dans le cas  $1D$  avec  $\omega$  inconnue.

En résumé, les modèles réduit, fluide et étendu sont notés respectivement par  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{E}$ . L'exposant est relativement lié à la dimension du modèle et l'indice désigne un cas particulier du modèle.

## 2.4 Représentation d'état pour la commande

Nous élaborerons des représentations d'état réduites, elles seront exploitées pour la synthèse de lois de commande dans le but de stabiliser un ou plusieurs microrobots le long des trajectoires de références définies par les tâches assignées aux microrobots.

### 2.4.1 Représentation d'état pour un microrobot

Dans cette section, nous allons exploiter toutes les forces définies dans le chapitre précédent et cela dans le but d'obtenir des modèles exploitables pour la commande et l'observation. Nous élaborerons tout d'abord la représentation d'état en  $1D$  d'un microrobot, pour le cas simplifié en prenant la force de traînée linéaire, et pour le cas général où la force de traînée est non linéaire. Ensuite nous donnerons la représentation d'état en  $2D$  pour un microrobot, en considérant la navigation de ce dernier dans un vaisseau sanguin de forme cylindrique.

#### 2.4.1.1 Représentation en 1D

Dans cette section, nous distinguons deux cas pour le mouvement d'un microrobot sphérique de rayon  $r$  :

1. **Cas simple.** Nous considérons le mouvement d'un microrobot le long de l'axe  $\vec{i}$  à bas Reynolds (donc par exemple à très faibles vitesses) comme illustré sur la figure 2.2. La force de traînée peut donc être modélisée par la loi de Stokes (1.17). On obtient alors un système linéaire. De plus, nous considérons ici un déplacement le long de l'axe  $\vec{i}$  de sorte que le microrobot n'est affecté que par la force de traînée et la force motrice. D'après le tableau 1.1, l'hypothèse d'un écoulement de Stokes n'est valable que dans les capillaires et les veinules, mais pour notre étude nous considérons la navigation d'un microrobot dans une artère. L'hypothèse d'un écoulement de Stokes est cependant toujours valide si  $\text{Re} = \frac{2\rho_f v_r r}{\eta} < 1$  donc si la vitesse relative du microrobot par rapport au fluide est très faible.

2. **Cas plus général.** Nous étudierons le mouvement d'un microrobot le long de l'axe  $\vec{k}$  (voir figure 2.2) pour une large plage de nombres de Reynolds, donc avec un modèle non linéaire de la force de traînée donné par (1.22). De plus, nous allons prendre en considération le poids apparent du microrobot  $\vec{F}_w$  donné par (1.40). Dans ce cas, nous généralisons le cas simple d'une part en prenant plus de forces en considération (poids apparent), d'autre part pour une force de traînée non linéaire donc pour des écoulements à Reynolds très faible ou élevé .

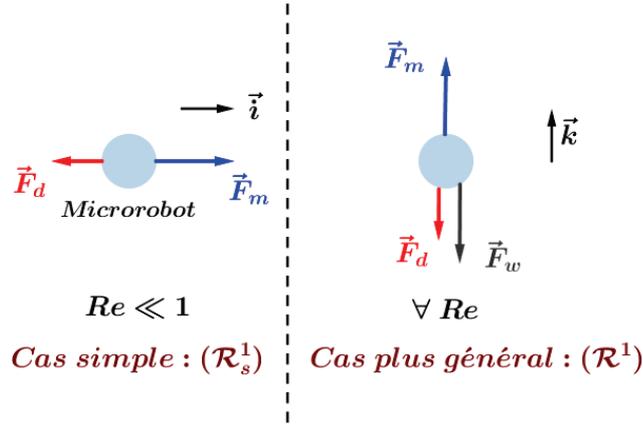


FIGURE 2.2 – Cas simple et cas plus général en 1D

Premièrement dans le cas simple, le microrobot est soumis à la force de traînée régie par la loi de Stokes (1.17) et la force magnétique  $\vec{F}_m$  donnée par (1.66). En utilisant l'expression de la force de traînée donnée par (1.17) pour un mouvement à faible Reynolds dans un milieu infini et l'effet des parois d'un vaisseau sanguin caractérisé par le paramètre  $\beta$  donné par (1.20), la force de traînée le long de l'axe  $\vec{i}$  est alors donnée par :

$$\vec{F}_d = -ma(\dot{p}_x - v_f(p_x, t))\vec{i}, \quad a = \frac{9\eta}{2\beta\rho r^2} \quad (2.19)$$

avec  $v_f(p_x, t)$  la vitesse du flux sanguin à l'instant  $t$  et à la position  $p_x$ .

La force magnétique motrice  $\vec{F}_m$  exercée sur le microrobot est donnée par (1.66), l'expression simplifiée de cette force est donnée par (voir Annexe A.1) :

$$\vec{F}_m = m\beta'_1 \vec{u}, \quad \beta'_1 = \frac{\tau_m M}{\rho} \quad (2.20)$$

Le mouvement du microrobot le long de l'axe  $\vec{i}$  est alors régi par :

$$m\ddot{p}_x \vec{i} = \vec{F}_d + \vec{F}_m \quad (2.21)$$

Prenons comme vecteur d'état  $x = [x_1 \ x_2]^T = [p_x \ \dot{p}_x]^T$ . En utilisant (2.21) et les expressions des forces  $\vec{F}_d$  et  $\vec{F}_m$  données par (2.19) et (2.20), on obtient le système linéaire suivant :

$$(\mathcal{R}_s^1) : \begin{cases} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta'_1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ a\xi_1 \end{bmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases} \quad (2.22)$$

Deuxièmement dans le cas plus général, le mouvement du microrobot sera étudié le long de l'axe  $\vec{k}$ , le microrobot sera soumis à son poids apparent  $\vec{F}_w$  donné par (1.40), à la force de traînée non linéaire  $\vec{F}_d$  donnée par (1.22) et à la force magnétique  $\vec{F}_m$  donnée par (1.66). On se place dans le cas d'un écoulement ayant un nombre de Reynolds  $Re$  inférieur à  $2 \times 10^5$ , nous remplaçons le coefficient de traînée  $C_d$  dans (1.22) par son expression donnée par (1.19a), et en utilisant les équations (1.14) et (1.20), nous obtenons l'expression simplifiée de la force de traînée  $\vec{F}_d$  le long de l'axe  $\vec{k}$  (voir annexe A.2) :

$$\vec{F}_d = -m \left[ a|\dot{p}_z - \xi_1| + b(\dot{p}_z - \xi_1)^2 + c \frac{(\dot{p}_z - \xi_1)^2}{1 + d\sqrt{|\dot{p}_z - \xi_1|}} \right] \text{sign}(\dot{p}_z - \xi_1) \vec{k} \quad (2.23)$$

avec les paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  donnés ci-après :

$$a = \frac{9\eta}{2\beta\rho r^2} \quad b = \frac{3\rho_f}{20r\beta^2\rho} \quad c = \frac{9\rho_f}{4r\beta^2\rho} \quad d = \sqrt{\frac{2r\rho_f}{\beta\eta}} \quad (2.24)$$

Appliquons le principe fondamental de la dynamique sur le microrobot le long de l'axe  $\vec{k}$  :

$$m\ddot{p}_z \vec{k} = \vec{F}_d + \vec{F}_m + \vec{F}_w \quad (2.25)$$

Prenons comme vecteur d'état  $x = [x_1 \ x_2]^T = [p_z \ \dot{p}_z]^T$ . En utilisant (2.25) et les expressions des forces  $\vec{F}_d$ ,  $\vec{F}_w$  et  $\vec{F}_m$  données par (2.23), (1.40) et (2.20), on obtient le système non linéaire suivant :

$$(\mathcal{R}^1) : \begin{cases} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \beta'_1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi(x, \xi) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \vartheta \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases} \quad (2.26)$$

où  $\vartheta = F'_w = \frac{\rho - \rho_f}{\rho} g$  et  $\Phi(x, \xi) = \phi^T(x, \xi)\theta$  avec  $\theta = [a \ b \ c]^T$  et la fonction  $\phi(x, \xi)$  donnée par :

$$\phi^T(x, \xi) = -\text{sign}(x_2 - \xi_1) \left[ |x_2 - \xi_1|, \ (x_2 - \xi_1)^2, \ \frac{(x_2 - \xi_1)^2}{1 + d\sqrt{|x_2 - \xi_1|}} \right] \quad (2.27)$$

Le système réduit  $(\mathcal{R}^1)$  sera utilisé pour la synthèse de lois de commande dans le but de stabiliser le microrobot le long d'une trajectoire de référence. Nous distinguerons alors différents cas, selon que les paramètres  $\vartheta$  et  $\theta$  sont connus ou non. D'après l'équation (2.24), les paramètres

$a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  dépendent de  $r$ ,  $\beta$ ,  $\rho$ ,  $\rho_f$  et  $\eta$ , et comme la viscosité du sang  $\eta$  varie selon le type de vaisseau, le taux d'hématocrite, et le paramètre adimensionnel  $\beta$  qui caractérise l'effet des parois varie aussi en fonction des rayons du microrobot et du vaisseau sanguin, il est alors important de prendre en considération le caractère incertain des paramètres du système réduit lors de la synthèse de lois de commande et d'observateurs.

#### 2.4.1.2 Représentation en 2D

Considérons le mouvement d'un microrobot en 2D dans un vaisseau sanguin cylindrique, où  $\vec{p} = (p_x, p_z)$  et  $\vec{v} = (\dot{p}_x, \dot{p}_z)$  sont respectivement les positions et les vitesses du microrobot le long des axes  $\vec{i}$  et  $\vec{k}$ . Le microrobot est soumis à plusieurs forces, comme l'illustre la figure 2.3.

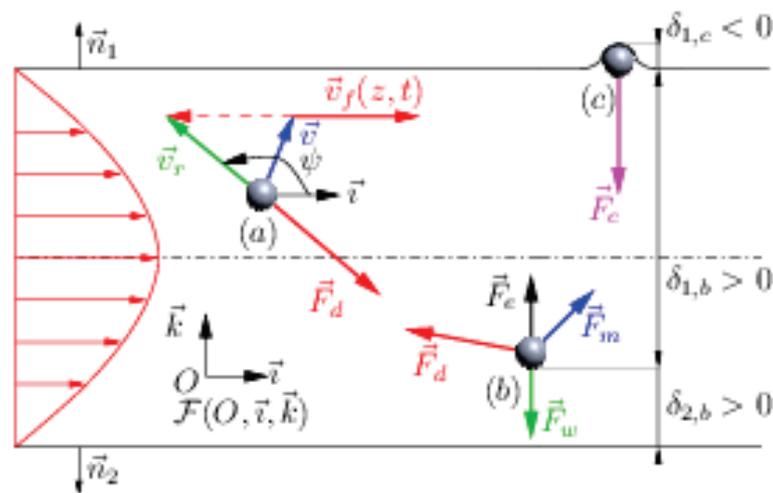


FIGURE 2.3 – Les forces exercées sur un microrobot en 2D dans un vaisseau sanguin cylindrique. Les distances algébriques de la surface du microrobot aux parois supérieure et inférieure sont notées  $\delta_1$  et  $\delta_2$  respectivement. La vitesse relative  $\vec{v}_r$  du microrobot par rapport au fluide est caractérisée par un angle  $\psi$  dans le repère  $\mathcal{F}(O, \vec{i}, \vec{k})$ . Le microrobot subit la force de traînée  $\vec{F}_d$ , la force magnétique  $\vec{F}_m$ , son poids apparent  $\vec{F}_w$ , la force électrostatique  $\vec{F}_e$  et la force de contact  $\vec{F}_c$  illustrées par (b)-(c).

Le flux sanguin possède un caractère pulsatile périodique, et cela est dû aux deux phases de systole et de diastole du cœur. Donc la vitesse du sang sera variable en fonction du temps et de l'espace comme illustré sur la figure 2.4 .

En prenant en compte l'effet des parois, la vitesse du fluide s'annule à la surface des deux parois et elle est maximale sur l'axe du vaisseau sanguin. Le profil spatial de la vitesse du fluide peut être compliqué si le fluide est non newtonien, nous supposons que le sang est newtonien, nous modélisons par exemple le profil spatial du flux sanguin comme un profil parabolique, ce dernier est caractérisé par un facteur de forme noté  $v_s(x)$ . La variation de la vitesse temporelle notée  $v_t(t) = \xi_1$  sera modélisée par un modèle inspiré du modèle de Wormesley donné dans

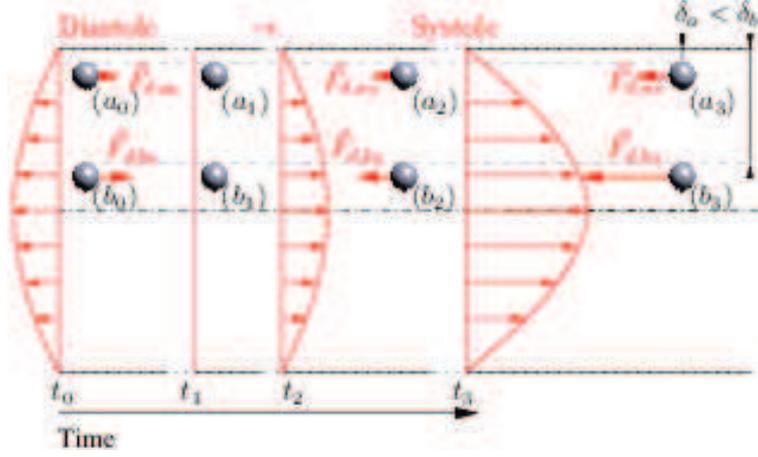


FIGURE 2.4 – Profil parabolique du flux sanguin. La vitesse du sang est minimale à l'instant  $t_0$  (phase de diastole), est maximale à l'instant  $t_3$  (phase de systole). Les micro-robots  $a_i$  et  $b_i$  ne subissent pas la même force de traînée car  $\delta_{a_i} < \delta_{b_i}$ , sauf à l'instant  $t_1$  lorsque  $\vec{F}_{d,b_1} = \vec{F}_{d,b_2} = 0$ . Les micro-robots  $(b_0)$ ,  $(b_1)$ ,  $(b_2)$  et  $(b_3)$  ne subissent pas la même force de traînée à cause du caractère pulsatile du flux sanguin.

le chapitre 1. Donc la vitesse du fluide notée  $v_f(x, t)$ , sera donnée comme le produit du profil spatial et la vitesse temporelle à l'apex.

Pour simplifier l'étude du mouvement d'un micro-robot, nous considérons un vaisseau sanguin cylindrique pour qu'on projette uniquement la force de traînée suivant les deux axes  $Ox$  et  $Oz$ . Nous prenons aussi un profil parabolique pour le profil spatial  $v_s(x)$  :

$$v_s(p_z) = \left[ 1 - 4 \left( \frac{p_z}{D} \right)^2 \right] \quad (2.28)$$

Le profil parabolique donné par (2.28) est déduit du modèle de Womersley donné par (1.27). La vitesse du fluide est alors donnée par  $v_f(x, t) = \xi_1 v_s(p_z)$ , avec  $\xi_1$  solution d'un système autonome d'équations différentielles qui sera donné par la suite. La norme de la vitesse relative du micro-robot par rapport à la vitesse du sang et l'angle  $\psi$  sont donnés par :

$$\|\vec{v}_r\| = v_r = \sqrt{(\dot{p}_x - v_f)^2 + \dot{p}_z^2} \quad \psi = \arctan \left[ \frac{\dot{p}_z}{\dot{p}_x - v_f} \right] \quad (2.29)$$

Comme  $\vec{v}_r = \vec{v} - \vec{v}_f$ , nous remplaçons le coefficient de traînée  $C_d$  dans (1.22) par son expression donnée par (1.19a), nous obtenons l'expression de la force de traînée  $\vec{F}_d$  dans le repère  $\mathcal{F}(0, \vec{i}, \vec{k})$  :

$$\begin{cases} \vec{F}_d &= m(F'_d \cos \psi \vec{i} + F'_d \sin \psi \vec{k}) = m(F'_{d,x} \vec{i} + F'_{d,z} \vec{k}) \\ F'_d &= -(av_r + bv_r^2 + c \frac{v_r^2}{1 + d\sqrt{v_r}}) \end{cases} \quad (2.30)$$

où  $a, b, c, d, v_r$  et  $\psi$  sont donnés par (2.24) et (2.29). La force électrostatique et la force de contact, issues respectivement des équations (1.30) et (1.37), s'écrivent comme :

$$\begin{aligned}\vec{F}_e &= meF'_e\vec{k} = me \left( \frac{H(\delta_1)}{(r+\delta_1)^2} - \frac{H(\delta_2)}{(r+\delta_2)^2} + \frac{H(-\delta_1) - H(-\delta_2)}{r^2} \right) \vec{k} \\ \vec{F}_c &= mfF'_c\vec{k} = mf (|\delta_2|^{3/2}H(-\delta_2) - |\delta_1|^{3/2}H(-\delta_1)) \vec{k}\end{aligned}\quad (2.31)$$

avec les distances algébriques  $\delta_1$  et  $\delta_2$ , et les paramètres  $e$  et  $f$  suivants :

$$\delta_1 = \frac{D}{2} - r - p_z \quad \delta_2 = \frac{D}{2} - r + p_z \quad e = \frac{3q^2}{16\pi^2 r^3 \rho \varepsilon \varepsilon_0} \quad f = \frac{3K}{4\pi r^3 \rho} \quad (2.32)$$

Appliquons le principe fondamental de la dynamique sur le microrobot :

$$m\dot{v} = \vec{F}_d + \vec{F}_m + \vec{F}_w + \vec{F}_e + \vec{F}_c. \quad (2.33)$$

Prenons comme vecteur d'état  $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [p_x \ p_z \ \dot{p}_x \ \dot{p}_z]^T$ . En utilisant (2.33) et les expressions des forces données par (2.30), (2.31), (2.20) et (1.40), on obtient la représentation suivante :

$$(\mathcal{R}^2) : \begin{cases} \dot{x} &= A_r x + B_r(\beta'_1 u + g(x, \xi)) + b_\vartheta \vartheta \\ y &= C_r x \end{cases} \quad (2.34)$$

avec :

$$A_r = \begin{bmatrix} 0_2 & I_2 \\ 0_2 & 0_2 \end{bmatrix}, \quad B_r = \begin{bmatrix} 0_2 \\ I_2 \end{bmatrix}, \quad b_\vartheta = \begin{bmatrix} 0_{31} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_r^T = \begin{bmatrix} I_2 \\ 0_2 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

où  $\vartheta = F'_w$ ,  $z \in \mathbb{R}^4$ ,  $u = [u_1 \ u_2]^T$  est l'entrée de commande et la sortie  $y = [x_1 \ x_2]^T$  est mesurée par un imageur. La fonction  $g(x, \xi) = [g_1 \ g_2]^T$  est donnée par :

$$\begin{cases} g_1(x, \xi) &= F'_{d,x} \\ g_2(x, \xi) &= F'_{d,z} + F'_e + F'_c \end{cases} \quad (2.36)$$

Dans le cas où le vecteur de paramètres  $\theta = [a \ b \ c]^T$  est incertain, nous introduisons la notation suivante :

$$g(x, \xi) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \vartheta = \Phi^T(x, \xi)\theta + \Psi(x)$$

avec les fonctions  $\Phi$  et  $\Psi$  suivantes :

$$\begin{aligned}\Phi^T(x, \xi) &= \begin{pmatrix} -\cos(\psi) \\ -\sin(\psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_r, & v_r^2, & \frac{v_r^2}{1 + d\sqrt{v_r}} \end{pmatrix} \\ \Psi^T(x) &= \left( 0, \ F'_e + F'_c + \vartheta \right)\end{aligned}\quad (2.37)$$

Le système  $\mathcal{R}^2$  possède des non linéarités complexes, des paramètres incertains, donc un tel système présente des difficultés lors d'une synthèse d'une loi de commande ou bien d'un observateur.

## 2.4.2 Représentation d'état pour deux microrobots

Nous avons vu précédemment les représentations d'état d'un unique microrobot. Si, certaines tâches peuvent être accomplies par un seul microrobot ; en revanche l'accomplissement d'autres tâches, comme le traitement d'une tumeur, exige que suffisamment de médicament soit libéré au voisinage de la tumeur. Or la quantité de médicament incorporée dans un seul microrobot est insuffisante pour traiter une tumeur, d'autant qu'un trop grand microrobot emboliserait l'artère, d'où l'intérêt de contrôler plusieurs microrobots avec les mêmes entrées de commande. Cette section sera consacrée à la détermination des représentations d'état en 1D et 2D de deux microrobots liés par la force magnétique d'interaction.

### 2.4.2.1 Représentation en 1D

On considère deux microrobots magnétiques ( $j$ ) et ( $k$ ), sphériques de rayons respectifs  $r_j$  et  $r_k$ . Les deux sphères sont soumises aux forces magnétiques, hydrodynamiques et d'interactions magnétiques comme illustré sur la figure 2.5.

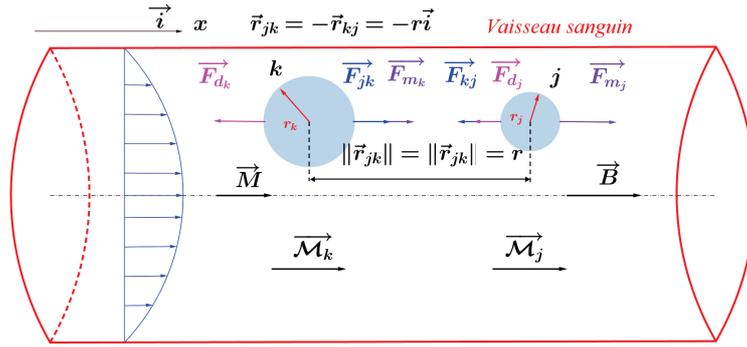


FIGURE 2.5 – Deux microrobots naviguant dans un vaisseau sanguin cylindrique

Afin de simplifier l'étude, on suppose ici que la vitesse du fluide est nulle (fluide statique), et que les vitesses relatives sont faibles. Dans ce cas, la navigation n'est plus endovasculaire mais plutôt dans le système urinaire ou rachidien. On peut alors modéliser la force de traînée subie par les microrobots par la loi de Stokes (1.17). On obtient alors les expressions simplifiées des forces pour les microrobots ( $j$ ) et ( $k$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{m_j} = m_j \alpha_j u \vec{i} \\ \vec{F}_{d_j} = -m_j a_j \dot{p}_{x_j} \vec{i} \\ \vec{F}_{k_j} = -\frac{m_j e_{jk}}{(p_{x_j} - p_{x_k})^4} \vec{i} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{m_k} = m_k \alpha_k u \vec{i} \\ \vec{F}_{d_k} = -m_k a_k \dot{p}_{x_k} \vec{i} \\ \vec{F}_{j_k} = \frac{m_k e_{kj}}{(p_{x_j} - p_{x_k})^4} \vec{i} \end{array} \right. \quad (2.38)$$

où  $\vec{F}_{m_j}$  représente la force magnétique,  $\vec{F}_{d_j}$  est la force de traînée exercée sur le microrobot ( $j$ ), et  $\vec{F}_{kj} = -\vec{F}_{jk}$  est l'interaction magnétique entre les microrobots ( $j$ ) et ( $k$ ). Ces expressions utilisent les notations suivantes :

- $m_j$  est la masse du microrobot ( $j$ ).
- $p_{x_j}$  est la position du microrobot ( $j$ ).
- $\mathcal{M}_j$  représente le moment magnétique du microrobot magnétique ( $j$ ).
- $a_j = \frac{9\eta}{2\beta_j\rho_j r_j^2}$  est le coefficient de traînée de la force  $\vec{F}_{d_j}$ .
- $\alpha_j = \frac{\tau_{m_j} M}{\rho_j}$  est le coefficient de la force magnétique  $\vec{F}_{m_j}$ .
- $e_{jk} = \frac{3\mu_0 \mathcal{M}_j \mathcal{M}_k}{2\pi m_j}$  avec  $j \neq k$  est le coefficient de l'interaction magnétique  $\vec{F}_{jk}$ .

Appliquons le principe fondamental de la dynamique sur le microrobot ( $j$ ) le long de l'axe  $\vec{i}$  :

$$m_j \ddot{p}_{x_j} \vec{i} = \vec{F}_{m_j} + \vec{F}_{d_j} + \vec{F}_{kj} \quad j, k = 1, 2, j \neq k \quad (2.39)$$

Prenons  $x^T = [p_{x_j} \quad p_{x_k} \quad \dot{p}_{x_j} \quad \dot{p}_{x_k}]$  comme vecteur d'état. En utilisant (2.38) dans (2.39), on obtient la représentation d'état non linéaire de la dynamique des deux microrobots en interaction :

$$(\mathcal{R}^{12}) : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = -a_j x_3 - \frac{e_{jk}}{(x_1 - x_2)^4} + \alpha_j u \\ \dot{x}_4 = -a_k x_4 + \frac{e_{kj}}{(x_1 - x_2)^4} + \alpha_k u \end{cases} \quad (2.40)$$

Le système  $(\mathcal{R}^{12})$  possède une seule entrée de commande  $u = \nabla B_x$  et d'un point de vue commande, ce système est sous-actionné. Les non linéarités de ce système proviennent de la force d'interaction entre les microrobots, et rendent difficile l'étude de sa commandabilité. La synthèse de commande pour un tel système n'est pas très évidente, car il n'existe pas de méthodes systématiques pour la commande des systèmes non linéaires sous-actionnés. Donc dans un premier temps, on pourra étudier sa commandabilité locale le long d'une trajectoire.

#### 2.4.2.2 Représentation en 2D

Nous étudions maintenant l'extension de l'exemple précédent au cas  $2D$ , pour lequel nous devons introduire d'avantage de géométrie. On considère deux microrobots sphériques de rayons  $r_j$  et  $r_k$  comme illustré sur la figure 2.6. Chaque microrobot ( $j$ ) est soumis aux forces hydrodynamique  $\vec{F}_{d_j}$ , magnétique  $\vec{F}_{m_j}$ , à son poids apparent  $\vec{F}_{w_j}$  et la force d'interaction magnétique  $\vec{F}_{kj}$  qui lie le microrobot ( $j$ ) au microrobot ( $k$ ).

Les expressions des forces sont données dans le chapitre 1, section 1.4.7.4. Pour notre étude, les vecteurs unitaires  $\vec{u}_i$  et  $\vec{u}_{kj}$  sont donnés en fonction de la distance  $r_{kj}$  qui sépare les centres de gravité des deux microrobots ( $j$ ) et ( $k$ ) :

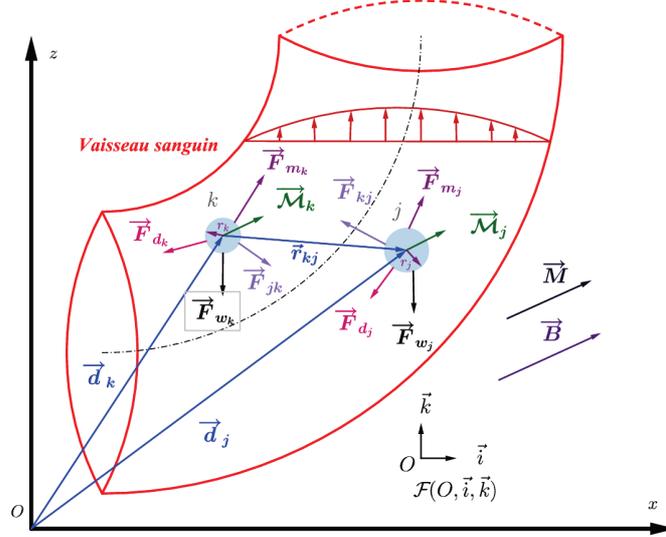


FIGURE 2.6 – Deux microrobots naviguant dans un vaisseau sanguin. Le microrobot ( $j$ ) subit la force de traînée notée  $\vec{F}_{d_j}$ , son poids apparent  $\vec{F}_{w_j}$ , la force magnétique  $\vec{F}_{m_j}$  et à la force d'interaction magnétique  $\vec{F}_{k_j}$  exercée par le microrobot ( $k$ ) sur ( $j$ ).  $\vec{M}_j$  et  $\vec{d}_j$  représentent respectivement le moment magnétique et le vecteur position du microrobot ( $j$ ) dans le repère  $\mathcal{F}(O, \vec{i}, \vec{k})$ .  $\vec{M}$  et  $\vec{B}$  sont respectivement l'aimantation et le champ magnétique externe.

$$\begin{aligned} \vec{u}_i &= \vec{i}, \quad i \in \{j, k\} \\ \vec{u}_{kj} &= \frac{1}{\underbrace{\sqrt{(p_{x_j} - p_{x_k})^2 + (p_{z_j} - p_{z_k})^2}}_{r_{kj}}} \left[ (p_{x_j} - p_{x_k})\vec{i} + (p_{z_j} - p_{z_k})\vec{k} \right] \end{aligned} \quad (2.41)$$

En utilisant l'expression (1.51) de la force  $\vec{F}_{k_j}$  donnée dans le chapitre 1 et l'équation (2.41), l'expression simplifiée de la force d'interaction magnétique  $\vec{F}_{k_j}$  entre les microrobots ( $k$ ) et ( $j$ ) est donnée ci-dessous (voir annexe A.3) :

$$\vec{F}_{k_j} = \frac{3\mu_0 \mathcal{M}_j \mathcal{M}_k}{4\pi r_{kj}^5} \left( \begin{bmatrix} 3(p_{x_j} - p_{x_k}) \\ (p_{z_j} - p_{z_k}) \end{bmatrix} - \frac{5(p_{x_j} - p_{x_k})^2}{r_{kj}^2} \begin{bmatrix} (p_{x_j} - p_{x_k}) \\ (p_{z_j} - p_{z_k}) \end{bmatrix} \right) \quad (2.42)$$

Appliquons le principe fondamental de la dynamique sur le microrobot  $i \in \{j, k\}$ . Son mouvement est gouverné par :

$$m_i \ddot{\vec{d}}_i = \vec{F}_{d_i} + \vec{F}_{w_i} + \vec{F}_{m_i} + \vec{F}_{l_i} \quad (i, l) \in \{j, k\}^2, \quad l \neq i \quad (2.43)$$

Prenons comme vecteur d'état  $x = \begin{bmatrix} p_{x_j} & p_{z_j} & p_{x_k} & p_{z_k} & \dot{p}_{x_j} & \dot{p}_{z_j} & \dot{p}_{x_k} & \dot{p}_{z_k} \end{bmatrix}^T$ . En injectant (2.42) dans l'équation du principe fondamental de la dynamique, on obtient la représentation d'état non linéaire suivante :

$$(\mathcal{R}^{22}) : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_5 \\ \dot{x}_2 = x_6 \\ \dot{x}_3 = x_7 \\ \dot{x}_4 = x_8 \\ \dot{x}_5 = -a_j x_5 + \frac{e_{jk}}{r_{kj}^5} \left[ 3(x_1 - x_3) - 5 \frac{(x_1 - x_3)^3}{r_{kj}^2} \right] + \alpha_j u_1 \\ \dot{x}_6 = -a_j x_6 + \frac{e_{jk}}{r_{kj}^5} \left[ (x_2 - x_4) - 5 \frac{(x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_4)}{r_{kj}^2} \right] + w_j + \alpha_j u_2 \\ \dot{x}_7 = -a_k x_7 - \frac{e_{kj}}{r_{jk}^5} \left[ 3(x_1 - x_3) - 5 \frac{(x_1 - x_3)^3}{r_{jk}^2} \right] + \alpha_k u_1 \\ \dot{x}_8 = -a_k x_8 - \frac{e_{kj}}{r_{jk}^5} \left[ (x_2 - x_4) - 5 \frac{(x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_4)}{r_{jk}^2} \right] + w_k + \alpha_k u_2 \end{cases} \quad (2.44)$$

avec les paramètres suivants :

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{9\eta}{2\beta_i \rho_i r_i^2} & \alpha_i &= \frac{\tau_{m_i} M}{\rho_i} \\ w_i &= \frac{\rho_f - \rho_i}{\rho_i} & e_{il} &= \frac{3\mu_0 \mathcal{M}_i \mathcal{M}_l}{4\pi m_i}, \quad (i, l) \in \{j, k\}^2, \quad l \neq i \end{aligned} \quad (2.45)$$

Le système  $\mathcal{R}^{22}$  représente la dynamique en  $2D$  du mouvement de deux microrobots en interaction. Ce système est sous-actionné comme le système précédent  $\mathcal{R}^{12}$ , parce qu'il ne possède que deux entrées de commande pour huit variables d'état. Les non linéarités que possède le système sont plus complexes que celle du système  $\mathcal{R}^{12}$  en  $1D$ . Dans ce cas aussi, le problème de commandabilité se pose, autrement dit il est difficile de trouver des entrées de commandes  $u_1$  et  $u_2$  qui assurent la stabilité globale du système. En revanche, on pourra étudier sa commandabilité locale, en le linéarisant autour d'une trajectoire.

### 2.4.3 Représentation d'état pour $m$ microrobots en $1D$

Sur la base de la section 2.4.2.1, nous étudions désormais le modèle dynamique de  $m$  microrobots en interaction. On considère  $m$  microrobots sphériques de rayons  $r_1, \dots, r_m$ . Chaque microrobot ( $j$ ) est soumis aux forces hydrodynamique  $\vec{F}_{d_j}$ , magnétique  $\vec{F}_{m_j}$ , à son poids apparent  $\vec{F}_{w_j}$  et aux forces d'interaction  $\vec{F}_{kj}$ ,  $k = 1, \dots, m$  et  $k \neq j$ . Dans le cas  $1D$  d'un mouvement le long de l'axe  $\vec{i}$ , les vecteurs unitaires  $\vec{u}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  et  $\vec{u}_{kj}$  pour  $j, k = 1, \dots, m$ ,  $j \neq k$  sont les suivants :

$$\begin{aligned}\vec{u}_i &= \vec{i} \\ \vec{u}_{kj} &= \begin{cases} \vec{i} & \text{si } p_{x_k} < p_{x_j} \\ -\vec{i} & \text{si } p_{x_k} > p_{x_j} \end{cases}\end{aligned}$$

La résultante des interactions magnétiques des  $(m - 1)$  microrobots  $k \in \{1, \dots, m\}$ ,  $k \neq j$ , exercée sur le microrobot  $(j)$ , notée  $\vec{F}_j$  est alors :

$$\vec{F}_j = -m_j \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \left( \frac{3\mu_0 \mathcal{M}_j \mathcal{M}_k}{2\pi m_j (p_{x_j} - p_{x_k})^4} \text{sign}(p_{x_j} - p_{x_k}) \vec{i} \right)$$

Posons  $e_{jk} = \frac{3\mu_0 \mathcal{M}_j \mathcal{M}_k}{2\pi m_j}$ . Appliquons le principe fondamental de la dynamique sur le  $j$ ème microrobot, il vient :

$$m_j \ddot{p}_{x_j} \vec{i} = \vec{F}_{m_j} + \vec{F}_{d_j} + \vec{F}_j \quad (2.46)$$

Prenons  $x^T = [p_{x_1}, \dots, p_{x_m}, \dot{p}_{x_1}, \dots, \dot{p}_{x_m}]$  comme vecteur d'état. En utilisant (2.46) pour  $j = 1, \dots, m$ , on obtient la représentation d'état non linéaire de la dynamique des  $m$  microrobots en interaction.

$$(\mathcal{R}^{1_m}) : \begin{cases} \dot{x}_1 &= x_{m+1} \\ \vdots & \\ \dot{x}_m &= x_{2m} \\ \dot{x}_{m+1} &= -a_1 x_{m+1} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^m \frac{e_{1k}}{(x_1 - x_k)^4} \text{sign}(x_1 - x_k) + \alpha_1 u \\ \vdots & \\ \dot{x}_{2m} &= -a_m x_{2m} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^m \frac{e_{mk}}{(x_m - x_k)^4} \text{sign}(x_m - x_k) + \alpha_m u \end{cases} \quad (2.47)$$

Le système  $(\mathcal{R}^{1_m})$  est la généralisation pour  $m$  microrobots du système  $(\mathcal{R}^{1_2})$ , ce système possède les mêmes non linéarités que celle de la dynamique de deux microrobots en interaction. Ce système est sous-actionné, vue qu'il possède qu'une seule entrée de commande  $u = \nabla B_x$  pour  $2m$  variables d'état. Comme dans le cas de deux microrobots, le problème de commande ici se pose aussi, c'est-à-dire qu'il est difficile de trouver une commande  $u$  qui va assurer la stabilité globale du système. En revanche, il est plus simple de trouver une commande qui stabilisera son système linéarisé autour d'une trajectoire, donc on parle de la commandabilité locale du système  $\mathcal{R}^{1_m}$ .

## 2.5 Représentation d'état pour l'observation

Nous avons élaboré dans la section 2.4 des représentations d'état destinées à la commande d'un ou plusieurs microrobots. Ces représentations d'état dépendent d'une façon non linéaire, en général, de la vitesse du sang  $v_f(x, t)$ , d'où la nécessité de connaître la valeur de la vitesse du sang. La vitesse du sang est difficile à mesurer pour des raisons de coûts des capteurs ou bien des limitations technologiques, par exemple l'utilisation d'un capteur qui se base sur l'effet de Doppler [Ponzini et al., 2010], [Holloway and Watkins, 1977], ou bien l'utilisation d'un IRM (imagerie à résonance magnétique) [Gatehouse et al., 2005], mais l'inconvénient majeur de ces deux méthodes est que les résolutions temporelle et spatiale ne sont pas assez précises, c'est-à-dire que la mesure n'est pas exploitable lors du contrôle de la navigation des microrobots dans les vaisseaux sanguins. Pour pallier ce problème une solution est de modéliser la vitesse du sang sous forme d'une représentation d'état, cette dernière sera combinée avec celle de la dynamique d'un ou plusieurs microrobots dans le but de synthétiser un observateur qui remplacera les capteurs physiques, en utilisant la seule mesure de position du microrobot donnée par un imageur. Dans cette section, nous donnerons différentes représentations d'état du flux sanguin, qui seront utilisées dans le chapitre 4 pour la synthèse d'un observateur.

### 2.5.1 Modèles de la vitesse du sang

Comme expliqué déjà dans le chapitre 1, la mesure de la vitesse du sang par des capteurs ultrasons ou son calcul via la discrétisation de l'équation de Navier Stokes, n'est pas exploitable pour des fins de commande en temps réel. Une solution à ce problème est alors de s'inspirer du modèle de Wormersley, rappelé dans le chapitre 1 ; la vitesse du sang s'écrit alors  $v_f(x, t) = v_s(x)\xi_1$ , avec  $v_s(x)$  un facteur de forme qui caractérise le profil du flux sanguin et  $\xi_1$  la vitesse temporelle solution d'un système d'équations différentielles autonome.

On suppose que la vitesse du sang  $\xi_1$  est modélisée par une série de Fourier d'ordre 1 :

$$\xi_1 = A_0 + A_1 \cos(\omega t + \phi) \quad (2.48)$$

où  $A_0$  et  $A_1$  sont respectivement la valeur moyenne et l'amplitude du signal  $\xi_1$  et  $\omega$ ,  $\phi$  sont respectivement la pulsation cardiaque et le déphasage. En dérivant  $\xi_1$  donné par (2.48), on obtient alors :

$$\xi_2 = \dot{\xi}_1 = -\omega A_1 \sin(\omega t + \phi) \quad (2.49)$$

Nous dérivons  $\xi_2$ , il en résulte :

$$\xi_3 = \dot{\xi}_2 = -\omega^2 A_1 \cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 \left( \xi_1 - 2\frac{A_0}{2} \right) \quad (2.50)$$

On pose  $\xi_3 = \frac{A_0}{2}$  alors  $\dot{\xi}_3 = 0$ , en utilisant (2.49) et (2.50), on obtient :

$$(\mathcal{F}_\omega^1) \begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = -\omega^2(\xi_1 - 2\xi_3) \\ \dot{\xi}_3 = 0 \end{cases} \quad (2.51)$$

La vitesse du sang  $\xi_1$  est alors solution du système  $(\mathcal{F}_\omega^1)$  avec  $A_0 = 2\xi_3$ .

Maintenant si la vitesse du sang est donnée par  $\xi_1 = A_0 + \sum_{i=1}^n A_i \cos(i\omega t + \phi_i)$ , on peut généraliser le résultat précédent en suivant la même procédure pour obtenir le système  $(\mathcal{F}_\omega^n)$  suivant : (voir démonstration en Annexe A.4)

$$(\mathcal{F}_\omega^n) : \begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = -\omega^2(\xi_1 - 2\xi_3) \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{2k-1} = \xi_{2k} \\ \dot{\xi}_{2k} = -\omega^2(k^2\xi_{2k-1} - k(k+1)\xi_{2k+1}) \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{2n+1} = 0 \end{cases} \quad (2.52)$$

**Remarque 2.5.1 :** Le système  $(\mathcal{F}_\omega^n)$  est linéaire, autonome, et la pulsation cardiaque  $\omega$  est supposée connue dans ce cas. Par construction, nous remarquons que le vecteur  $\xi$  évolue dans un ensemble borné  $\mathcal{K}_\xi$  inclus dans  $\mathbb{R}^{2n+1}$ , la vitesse moyenne du signal  $\xi_1$  notée  $v_m$ , est donnée par  $v_m = \langle \xi_1 \rangle = (n+1)\xi_{2n+1}$ . Nous pourrions par la suite combiner le système  $(\mathcal{F}_\omega^n)$  avec la représentation d'état du microrobot afin de synthétiser un observateur d'état pour reconstruire les états non accessibles du microrobot ainsi que la vitesse du sang  $\xi_1$ , et cela en utilisant la seule mesure de position du microrobot.

Généralement la pulsation cardiaque varie suivant l'état dans lequel le patient se trouve, par exemple au repos ou bien stressé...etc. Pour y avoir accès, on peut se reposer soit sur la mesure de cette pulsation au niveau global en utilisant un capteur du pouls. Une autre solution est de construire un observateur pour estimer sa valeur. On suppose maintenant que la pulsation cardiaque  $\omega$  dans le signal (2.48), est inconnue. En dérivant le signal (2.48) quatre fois par rapport au temps, nous obtenons le système suivant :

$$(\mathcal{F}^1) \begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \xi_3 \\ \dot{\xi}_3 = -\xi_2\xi_4 \\ \dot{\xi}_4 = 0 \end{cases} \quad (2.53)$$

où  $\xi_4 = \omega^2$ . Ce cas d'étude peut se généraliser dans le cas où le signal  $\xi_1$  est une série de Fourier tronquée à l'ordre  $n$ , on obtient alors le système suivant :

$$(\mathcal{F}^n) \begin{cases} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3 \\ \dot{\xi}_3 &= -\xi_{2n+2}(\xi_2 - 2\xi_4) \\ \vdots & \\ \dot{\xi}_{2k} &= \xi_{2k+1} \\ \dot{\xi}_{2k+1} &= -\xi_{2n+2}(k^2\xi_{2k} - k(k+1)\xi_{2k+2}) \\ \vdots & \\ \dot{\xi}_{2n} &= \xi_{2n+1} \\ \dot{\xi}_{2n+1} &= -n^2\xi_{2n+2}\xi_{2n} \\ \dot{\xi}_{2n+2} &= 0 \end{cases} \quad (2.54)$$

où  $\xi_{2n+2} = \omega^2$ .

Le système  $(\mathcal{F}^n)$  représente la dynamique du flux sanguin dans le cas général où la pulsation cardiaque  $\omega$  est inconnue. Ce système est fortement non linéaire, de plus il n'est pas uniformément observable, par conséquent il sera difficile d'appliquer les méthodes usuelles d'observations sur ce système. Le système  $(\mathcal{F}_\omega^n)$  est un cas particulier du système  $(\mathcal{F}^n)$ , lorsque la pulsation cardiaque  $\omega$  est connue.

Ma contribution dans ce chapitre est la modélisation du flux sanguin par des représentations d'état : la première est donnée par (2.52) dans le cas où la pulsation cardiaque  $\omega$  est connue, la deuxième est donnée par (2.54) dans le cas où la pulsation cardiaque est inconnue.

### 2.5.2 Système étendu

Puisque la mesure se limite à la seule position du microrobot et que la vitesse du sang  $\xi_1$  intervient dans le système réduit, la commande de ce système réduit nécessite soit une bonne robustesse à l'incertitude sur  $\xi_1$ , soit de compenser ce terme, ce qui nécessite son estimation. A cette fin, nous donnons ici des modèles issus de la dynamique du système réduit modélisant le microrobot et de la dynamique du flux sanguin. Ce système étendu aura donc un vecteur d'état

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}.$$

1. Dans le cas d'une navigation en  $1D$ , si la pulsation cardiaque est connue, on obtient le système étendu  $\mathcal{E}_\omega^{1,n}$  issu des systèmes  $\mathcal{R}^1$  et  $\mathcal{F}_\omega^n$ . Le vecteur d'état  $\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+3}$  est solution du système suivant :

$$(\mathcal{E}_\omega^{1,n}) : \begin{cases} \dot{\bar{x}} &= A(0)\bar{x} + B(\beta'_1 u + f(\bar{x}) + \vartheta) \\ y &= C\bar{x} \end{cases} \quad (2.55)$$

avec  $B^T = [0 \ 1 \ 0_{1 \times 2n+1}]$ ,  $C = [1 \ 0 \ 0_{1 \times 2n+1}]$ . La fonction  $f(\bar{x})$  est donnée par :

$$f(\bar{x}) = \Phi(\bar{x}) + a(\bar{x}_2 - \bar{x}_3) \quad (2.56)$$

La matrice  $A(\alpha)$  est donnée par :

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & O_{2 \times 1} & \cdots & O_{2 \times 1} \\ O_2 & A_3 & A_{n+3} & \cdots & O_{2 \times 1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O_2 & \cdots & O_{2 \times 1} & A_{n+2} & A_{2n+2} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

avec les sous matrices :

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a - \alpha \end{bmatrix} & A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a + \alpha & 0 \end{bmatrix} \\ A_{2+i} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -i^2 \omega^2 & 0 \end{bmatrix} & A_{n+2+i} &= \begin{bmatrix} 0 \\ i(i+1)\omega^2 \end{bmatrix} \quad i \in \{1, \dots, n\} \end{aligned} \quad (2.58)$$

2. Le deuxième système est un cas particulier du système  $(\mathcal{E}_\omega^{1,n})$  lorsque  $v_m$  est connue, il est noté  $(\mathcal{E}_{\omega, v_m}^{1,n})$ , son état étendu  $\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+2}$ .

$$(\mathcal{E}_{\omega, v_m}^{1,n}) : \begin{cases} \dot{\bar{x}} &= A(0)\bar{x} + B(\beta'_1 u + f(\bar{x}) + \vartheta) + V_m \\ y &= C\bar{x} \end{cases} \quad (2.59)$$

où  $A(0)$  est obtenue par l'expression (2.57) en supprimant la dernière ligne et colonne de la matrice  $A(\alpha)$ ,  $B^T = [0 \ 1 \ 0_{1 \times 2n}]$ ,  $C = [1 \ 0 \ 0_{1 \times 2n}]$  et  $V_m^T = [0_{1 \times (2n+1)} \ \bar{v}_m]$ , avec  $\bar{v}_m = \omega^2 n v_m$ .

3. Dans le cas d'une navigation du microrobot en  $2D$ , et en supposant que la pulsation cardiaque connue, on obtient une seconde représentation d'état. Ce système est issu des sous-systèmes  $(\mathcal{R}^2)$  et  $(\mathcal{F}_\omega^n)$ , noté  $(\mathcal{E}_\omega^{2,n})$ , d'état étendu  $\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+5}$  solution du système suivant :

$$(\mathcal{E}_\omega^{2,n}) : \begin{cases} \dot{\bar{x}} &= A(0)\bar{x} + B(\bar{g}(\bar{x}) + \beta'_1 u) + B_\vartheta \vartheta \\ y &= C\bar{x} \end{cases} \quad (2.60)$$

avec  $B^T = \begin{bmatrix} B_r^T & 0_{2 \times (2n+1)} \end{bmatrix}$ ,  $B_\vartheta^T = \begin{bmatrix} b_\vartheta^T & 0_{1 \times (2n+1)} \end{bmatrix}$  et  $C = \begin{bmatrix} C_r & 0_{2 \times (2n+1)} \end{bmatrix}$ . La fonction  $\bar{g} = \begin{bmatrix} \bar{g}_1 & \bar{g}_2 \end{bmatrix}^T$  est donnée ci-après :

$$\begin{cases} \bar{g}_1(\bar{x}) = g_1(\bar{x}) + a(\bar{x}_3 - \bar{x}_5) \\ \bar{g}_2(\bar{x}) = g_2(\bar{x}) + a\bar{x}_4 \end{cases} \quad (2.61)$$

La matrice  $A(\alpha)$  est donnée par :

$$A(p) = \begin{bmatrix} 0_2 & I_2 & 0_2 & 0_2 & \dots & 0_2 & 0_{21} \\ A_1 & A_2 & A_3 & 0_2 & \dots & 0_2 & \vdots \\ 0_2 & 0_2 & A_4 & A_{n+4} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0_2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & A_{n+2} & A_{2n+2} & 0_{21} \\ 0_2 & 0_2 & \dots & \dots & 0_2 & A_{n+3} & A_{2n+3} \\ 0_{12} & \dots & \dots & \dots & \dots & 0_{12} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

avec les sous-matrices  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, 2n + 3$  :

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & p_1 \\ 0 & p_5 \end{bmatrix} & A_2 &= \begin{bmatrix} p_2 - a & p_3 \\ p_3 & p_6 - a \end{bmatrix} \\ A_3 &= \begin{bmatrix} p_4 + a & 0 \\ p_7 & 0 \end{bmatrix} & A_{3+k} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k^2\omega^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad 1 \leq k \leq n \\ A_{n+3+k} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k(k+1)\omega^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad 1 \leq k \leq n-1 & A_{2n+3} &= \begin{bmatrix} 0 \\ n(n+1)\omega^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.63)$$

où  $p_1, \dots, p_7$  sont des paramètres, dont le rôle sera expliqué dans le chapitre 4.

4. Enfin, dans le cas d'une navigation en  $1D$  mais lorsque la pulsation cardiaque est inconnue, on obtient un troisième système  $(\mathcal{E}^{1,n})$  issu des sous-systèmes  $(\mathcal{R}^1)$  et  $(\mathcal{F}^n)$ , son état étendu  $\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+4}$  est solution du système suivant :

$$(\mathcal{E}^{1,n}) : \begin{cases} \dot{\bar{x}} &= f(\bar{x}) + gu \\ y &= h(\bar{x}) \end{cases} \quad (2.64)$$

où  $h(\bar{x}) = \bar{x}_1$ ,  $g = [0 \ \beta'_1 \ 0_{1 \times (2n+2)}]^T$  et la fonction  $f$  est donnée par :

$$f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ \Phi(\bar{x}) + \vartheta \\ \bar{x}_4 \\ \bar{x}_5 \\ -\bar{x}_{2n+4}(\bar{x}_4 - 2\bar{x}_6) \\ \vdots \\ \bar{x}_{2k+3} \\ -\bar{x}_{2n+4}(k^2\bar{x}_{2k+2} - k(k+1)\bar{x}_{2k+4}) \\ \vdots \\ \bar{x}_{2n+3} \\ -n^2\bar{x}_{2n+4}\bar{x}_{2n+2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

Les deux systèmes étendus  $(\mathcal{E}_\omega^{1,n})$  et  $(\mathcal{E}_\omega^{2,n})$  possèdent des non linéarités juste au niveau des états du système réduit, ils sont algébriquement semblables, c'est-à-dire que la complexité lors de l'étude de la commandabilité et d'observabilité est fondamentalement similaire. En revanche le système  $(\mathcal{E}^{1,n})$  possède des non linéarités qui proviennent du système réduit  $(\mathcal{R}^1)$ , et d'autres qui proviennent directement du système fluide  $(\mathcal{F}^n)$ , ce qui le rend plus complexe par rapport aux deux autres systèmes  $(\mathcal{E}_\omega^{1,n})$  et  $(\mathcal{E}_\omega^{2,n})$  au niveau de la synthèse d'un observateur pour estimer la vitesse du sang  $\xi_1$ . Ce dernier système n'est pas uniformément observable et il sera prêté une attention particulière lors de la synthèse d'un observateur non linéaire dédié.

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé quelques notions de stabilité concernant les systèmes linéaires et non linéaires. Nous avons donné plusieurs représentations d'état qui seront utilisées pour des fins de commande ou d'observation dans les chapitres suivants. Des représentations d'états réduites modélisent le mouvement d'un microrobot en  $1D$  et  $2D$ . Pour chaque représentation d'état, nous avons explicité les non linéarités qui dépendent de plusieurs paramètres généralement incertains; il est donc très important de prendre en considération le caractère incertain des paramètres lors de la synthèse de lois de commande pour stabiliser le système réduit car ces commandes doivent être robustes vis-à-vis des incertitudes paramétriques. De plus, le système réduit dépend fortement de la vitesse du sang, et il est donc nécessaire de la connaître pour pouvoir la compenser dans la loi de commande. Cependant, la vitesse du sang est difficile à mesurer par des capteurs physiques, cela nous a alors motivé à modéliser le flux sanguin par un modèle exploitable pour l'observation. Nous avons alors proposé deux modèles fluidiques, le premier est linéaire lorsque la pulsation cardiaque est connue, en revanche le deuxième expose le cas le plus général pour une pulsation cardiaque inconnue. Des modèles étendus sont issus

directement des modèles réduit et fluïdique, et seront utilisés pour la synthèse d'un observateur dans le chapitre 4. Dans le cas où la pulsation cardiaque est connue, la synthèse d'un observateur pour le système étendu est plus facile que dans le cas où la pulsation est inconnue à cause des non linéarités qui proviennent du système fluïdique. De plus, la dimension du système étendu croît rapidement avec le nombre d'harmoniques utilisées pour la modélisation de flux sanguin, donc un observateur à grand gain n'est pas très adapté à ce système étendu, vu que l'observateur à grand gain devient très sensibles aux bruits de mesure pour les systèmes à grandes dimensions.

Dans certaines applications médicales, comme la chimiothérapie ciblée, la tâche ne peut être accompli par un seul microrobot : nous avons donc modélisé plusieurs microrobots en interaction, nous avons obtenu des représentations non linéaires en  $1D$  et  $2D$ , qui représentent des systèmes sous-actionnés et par conséquent difficiles à commander. Dans les chapitres suivants, nous allons proposer des solutions aux problèmes exposés ici à savoir la synthèse des lois de commande pour un ou plusieurs microrobots et la synthèse d'un observateur pour le modèle étendu dans les deux cas où la pulsation cardiaque est connue ou non.



# Chapitre 3

## Commande

### Contenu du chapitre

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>81</b>
<b>3.2</b>	<b>Commandabilité</b>	<b>81</b>
3.2.1	Commandabilité des systèmes linéaires et non linéaires	81
3.2.1.1	Systèmes non linéaires	81
3.2.1.2	Systèmes linéaires	83
3.2.2	Formes canoniques de commandabilité	84
3.2.2.1	Systèmes linéaires	84
3.2.2.2	Systèmes non linéaires	86
<b>3.3</b>	<b>Commande des systèmes non linéaires</b>	<b>89</b>
3.3.1	Commande par retour d'état	89
3.3.1.1	Placement de pôles	90
3.3.1.2	Constante de Lipschitz	90
3.3.1.3	Loi de commande	91
3.3.2	Commande par linéarisation exacte	92
3.3.3	Commande par backstepping	93
3.3.3.1	Backstepping adaptatif	93
<b>3.4</b>	<b>Commande d'un microrobot</b>	<b>95</b>
3.4.1	Modèle 1D du microrobot	96
3.4.1.1	Backstepping	96
3.4.1.2	Backstepping adaptatif	97
3.4.2	Modèle 2D du microrobot	98
3.4.2.1	Backstepping	99
3.4.2.2	Backstepping adaptatif	100
<b>3.5</b>	<b>Commande de 2 microrobots</b>	<b>101</b>
3.5.1	Modèle 1D	101
3.5.1.1	Linéarisation autour d'une trajectoire	101

---

3.5.1.2	Planification de trajectoire . . . . .	105
3.5.1.3	Loi de commande . . . . .	106
3.5.2	Modèle $2D$ . . . . .	111
3.5.2.1	Linéarisation autour d'une trajectoire . . . . .	111
3.5.2.2	Planification de trajectoire . . . . .	113
3.5.2.3	Loi de commande . . . . .	114
3.5.2.4	Conclusion . . . . .	119
<b>3.6</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>120</b>

---

### 3.1 Introduction

Dans la première partie de ce chapitre, nous rappellerons d'abord les notions de commandabilité pour les systèmes linéaires et non linéaires ; nous présenterons ensuite les formes canoniques de commandabilité ; enfin nous exposerons différentes lois de commande utilisées dans la littérature pour les systèmes dynamiques. La deuxième partie de ce chapitre sera consacrée à la commande des microrobots, nous allons d'abord synthétiser des lois de commande par backstepping et backstepping adaptatif pour un microrobot en  $1D$  et  $2D$ , enfin nous proposons une loi de commande pour 2 microrobots dans les cas  $1D$  et  $2D$ .

### 3.2 Commandabilité

La notion de commandabilité est fondamentale pour la commande des systèmes. Une étude préliminaire de cette notion nous permet de savoir a priori si le système est commandable le long d'une trajectoire de référence, autrement dit si il existe des commandes admissibles permettant de stabiliser les états ou bien les sorties d'un système le long d'une trajectoire de référence admissible donnée.

#### 3.2.1 Commandabilité des systèmes linéaires et non linéaires

**Définition 3.2.1 [Commandabilité]** : Un système dynamique est commandable dans un intervalle de temps  $[t_0, t_1]$  si  $\forall (x_0, x_1) \in \mathbb{X}^2 \subset \mathbb{R}^{2n}, \exists u(\cdot) \in \mathbb{U}$  tel que :

$$x_1 = s(t_1, t_0, x_0, u)$$

où  $x_0$  et  $x_1$  sont respectivement l'état initial et l'état final du système.

##### 3.2.1.1 Systèmes non linéaires

On considère les systèmes non linéaires donnés par (2.1) et on suppose que le champ de vecteur  $f$  est affine en la commande, alors on peut réécrire le système (2.1) sous la forme suivante :

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^p u_i g_i(x) \quad (3.1)$$

où  $f_0$  et  $g_1, \dots, g_p$  sont des champs de vecteurs définis de  $\mathbb{X}$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Avant d'étudier la commandabilité du système (3.1), on rappelle les définitions de la dérivée et du crochet de Lie [Isidori, 1995].

**Théorème 3.2.2 [Fonctions implicites]** : [Nijmeijer and van der Schaft, 1990]

Soit un ouvert  $W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  et  $\varphi \in \mathcal{C}^k(W, \mathbb{R}^m)$ ,  $k \geq 1$  tels que  $\exists (x^*, y^*) \in W : \varphi(x^*, y^*) = 0$ .

Si  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x^*, y^*)$  est non singulière, alors il existe un voisinage  $\mathcal{W}^* \subset W$  de  $(x^*, y^*)$ , un voisinage  $\mathcal{V}^*$  de  $x^*$ , et une unique application  $\psi \in \mathcal{C}^k(\mathcal{V}^*, \mathbb{R}^m)$  :

$$\psi(x^*) = y^* \text{ et } \{(x, y) \in \mathcal{W}^* : \varphi(x, y) = 0\} = \{(x, \psi(x)) : x \in \mathcal{V}^*\}$$

En particulier  $\varphi(x, \psi(x)) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{V}^*$ .

**Définition 3.2.3 [Dérivée de Lie] :** On note  $\mathcal{T}_x M$  l'espace tangent à une variété différentielle  $M$  au point  $x$ , qui est un espace vectoriel de dimension  $n = \dim M$ . On note  $\mathcal{T}M$  le fibré tangent à  $M$ . On appelle champ de vecteurs une application  $f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathcal{T}M)$ . On a alors :

$$\begin{aligned} f &: M \rightarrow \mathcal{T}M \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Soit  $h \in \mathcal{C}^1(M, \mathbb{R})$ . La dérivée de Lie de  $h$  le long du champ  $f$  est notée  $L_f^h$  :

$$\begin{aligned} L_f h &: M \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto L_f h(x) = \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i} f_i \right)(x) \end{aligned}$$

Par récurrence, on note  $L_f^k h = L_f(L_f^{k-1} h)$  avec la convention  $L_f^0 h = h$ .

**Définition 3.2.4 [Algèbre de Lie] :** Une algèbre de Lie  $\mathcal{L}$  est un espace vectoriel muni du crochet de lie de  $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$  dans  $\mathcal{L}$ , noté  $[\cdot, \cdot]$ , qui possède les propriétés de bilinéarité, d'antisymétrie et vérifie l'identité de Jacobi. Si  $f$  et  $g$  sont deux champs de vecteurs de  $M$  dans  $\mathcal{T}M$ , alors  $[f, g]$  est le champ de vecteurs défini par :

$$\begin{aligned} [f, g](x) &: \mathcal{C}(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(M, \mathbb{R}) \\ \lambda &\mapsto (L_f L_g \lambda - L_g L_f \lambda)(x) \end{aligned}$$

c'est à dire que  $[f, g] = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g$ . On définit alors l'opérateur adjoint par :

$$\begin{cases} ad_f^0 g(x) = g(x) \\ ad_f^k g(x) = [f, ad_f^{k-1} g] \quad k \geq 1 \end{cases} \quad (3.2)$$

**Définition 3.2.5 [Distribution de champs de vecteurs] :** Soient  $\{g_1, \dots, g_k\}$  des champs de vecteurs. On appelle distribution de ces champs de vecteurs l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &: M \rightarrow \mathcal{T}_x M \\ x &\mapsto \mathcal{D}(x) = \text{Vect}\{g_1(x), \dots, g_k(x)\} \end{aligned}$$

Soit  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $M$ , la distribution  $\mathcal{D}$  est non singulière si :

$$\forall x \in \mathcal{U}, \quad \dim \mathcal{D}(x) = k$$

La distribution  $\mathcal{D}$  est dite involutive si et seulement si :

$$\forall (g_i, g_j) \in \mathcal{D}^2, [g_i, g_j] \in \mathcal{D}$$

La clôture involutive  $\overline{\mathcal{D}}$  d'une distribution  $\mathcal{D}$  non involutive est la plus petite distribution involutive contenant  $\mathcal{D}$ . On peut obtenir  $\overline{\mathcal{D}}$  comme suit :

$$\mathcal{D}_0 = \mathcal{D} \quad , \quad \mathcal{D}_i = \mathcal{D}_{i-1} + \sum_{j=1}^k [g_j, \mathcal{D}_{i-1}], \quad i \geq 1$$

S'il existe  $i^* : \mathcal{D}_{i^*} = \mathcal{D}_{i^*+1}$ , alors  $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{D}_{i^*}$ .

Considérons maintenant le système donné par (3.1). On construit les distributions  $\mathcal{D}_i$  comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0 &= \text{Vect}\{g_1, \dots, g_p\} \\ \mathcal{D}_i &= [f_0, \overline{\mathcal{D}}_i] + \overline{\mathcal{D}}_i \quad i \geq 1 \end{aligned} \tag{3.3}$$

où  $\overline{\mathcal{D}}_i$  est la clôture involutive de la distribution  $\mathcal{D}_i$ . Les distributions vérifient  $\overline{\mathcal{D}}_i \subset \overline{\mathcal{D}}_{i+1}$ ,  $\forall i \geq 0$  et s'il existe  $n^* \in \mathbb{N} : \overline{\mathcal{D}}_{n^*} = \overline{\mathcal{D}}_{n^*+r} = \mathcal{D}^*$ ,  $\forall r \geq 0$ , alors on prend  $\mathcal{D}^* = \overline{\mathcal{D}}_{n^*}$ , la distribution  $\mathcal{D}^*$  vérifie les deux propriétés suivantes :

- $\text{Vect}\{g_1, \dots, g_p\} \subset \mathcal{D}^*$
- $[f_0, \mathcal{D}^*] \subset \mathcal{D}^*$

1. Si pour tout voisinage  $\mathcal{V}_{x^*}$  de  $x^* \in \mathbb{X}$  on a :  $\text{Rang}(\mathcal{D}^*(x)) = n$ ,  $\forall x \in \mathcal{V}_{x^*}$ , on dit alors que le système (3.1) est localement accessible, ce qui est une condition nécessaire mais pas suffisante pour que le système (3.1) soit localement commandable.
2. Si le système (3.1) est localement accessible et  $f_0 \equiv 0$  (système sans dérive), alors le système (3.1) est localement commandable.
3. Dans [Sussmann, 1987], l'auteur a donné les conditions suffisantes que doit vérifier un système non linéaire affine en la commande avec dérive, pour qu'il soit localement commandable en un point. Ces conditions concernent les champs de vecteurs du système et l'algèbre de Lie générée par ces champs de vecteurs.

### 3.2.1.2 Systèmes linéaires

**3.2.1.2.1 Système LTV** Considérons le système à temps variant donné par (2.3), on suppose que les matrices  $A(t)$ ,  $B(t)$  sont de classe  $C^{n-1}$  dans  $\mathcal{V}_\varepsilon$  un voisinage d'un point  $\varepsilon \in [t_0, t_1]$ . Soient les matrices  $\Gamma_i(t)$  définies ci-après [Silverman and Meadows, 1967] :

$$\begin{cases} \Gamma_0(t) &= B(t) \\ \Gamma_{i+1}(t) &= A(t)\Gamma_i(t) - \frac{d}{dt}\Gamma_i(t) \quad i = 0, \dots, n-2 \end{cases} \tag{3.4}$$

La matrice de commandabilité  $\Gamma(t)$  du système  $\Sigma_{LTV}$  donné par (2.3), est alors :

$$\Gamma(t) = \begin{bmatrix} \Gamma_0 & \Gamma_1 & \dots & \Gamma_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

**Définition 3.2.6 [Condition de commandabilité]** : Le système (2.3) est commandable dans l'intervalle  $[t_0, t_1]$  si :

$$\text{Rang}(\Gamma(t)) = n, \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

**3.2.1.2.2 Système LTI** Considérons le système linéaire stationnaire donné par (2.8). La matrice de commandabilité  $\Gamma$  de ce système se réduit à :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

**Définition 3.2.7 [Critère de Kalman]** : On présente ici deux conditions équivalentes de commandabilité.

1. On dit que le système (2.8) est commandable si pour un temps  $T > 0$  donné et  $\forall (x_0, x_T) \in \mathbb{X}^2 \subset \mathbb{R}^{2n} : \exists u^* : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^p$  continue par morceaux, telle que la trajectoire  $\mathcal{X}_u(t, x_0)$  donnée par (2.10) en remplaçant  $u$  par  $u^*$  avec  $t_0 = 0$  et  $x_0 = x(t_0)$ , vérifie :

$$\mathcal{X}_{u^*}(T, x_0) = x_T$$

2. La condition nécessaire et suffisante pour que le système (2.8) soit commandable est :

$$\text{Rang}(\Gamma) = n$$

## 3.2.2 Formes canoniques de commandabilité

### 3.2.2.1 Systèmes linéaires

**3.2.2.1.1 Système SISO** On considère le système stationnaire mono entrée mono sortie donné par :

$$\begin{cases} \dot{x} = A_x x + B_x u \\ y = C_x x + D_x u \end{cases} \quad (3.6)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $(y, u) \in \mathbb{R}$ ,  $A_x \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $B_x \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$ ,  $C_x \in \mathcal{M}_{1 \times n}(\mathbb{R})$  et  $D_x \in \mathbb{R}$ . Soit  $\Gamma_x = \begin{bmatrix} B_x & \dots & A_x^{n-1}B_x \end{bmatrix}$  la matrice de commandabilité de la paire  $(A_x, B_x)$  et  $P_{A_x}(\lambda)$  le polynôme caractéristique de  $A_x$  :

$$P_{A_x}(\lambda) = |\lambda I_n - A_x| = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i) = \lambda^n + \sigma_1 \lambda^{n-1} + \dots + \sigma_{n-1} \lambda + \sigma_n \quad (3.7)$$

où  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sont les valeurs propres de la matrice  $A_x$ , et  $\sigma_i \in \mathbb{R}$ . Si  $\text{Rang}(\Gamma_x) = n$ , alors il existe une matrice  $T_z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  inversible avec  $z = T_z x$ , telle que le système en  $z$  est donné par :

$$\begin{cases} \dot{z} &= A_z z + B_z u \\ y &= C_z z + D_z u \end{cases} \quad (3.8)$$

avec  $C_z = C_x T_z^{-1}$ ,  $D_z = D_x$  et les matrices  $A_z = T_z A_x T_z^{-1}$  et  $B_z = T_z B_x$  :

$$A_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\sigma_n & -\sigma_{n-1} & \dots & -\sigma_1 \end{pmatrix} \quad B_z = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

On note  $\Gamma_z$  la matrice de commandabilité de la paire  $(A_z, B_z)$ , la transformation  $T_z$  est alors donnée par :

$$T_z = \Gamma_z \Gamma_x^{-1} \quad (3.10)$$

**3.2.2.1.2 Système MIMO** On considère le système stationnaire multi entrées multi sorties donné par :

$$\begin{cases} \dot{x} &= A_x x + B_x u \\ y &= C_x x + D_x u \end{cases} \quad (3.11)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^p$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ ,  $A_x \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $B_x = [b_1 \dots b_p] \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{R})$ ,  $C_x \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$  et  $D_x \in \mathcal{M}_{m \times p}(\mathbb{R})$ . Supposons que la matrice de commandabilité  $\Gamma_x$  est de rang  $n$  et soient  $\mu_1, \dots, \mu_p$  les indices de commandabilité des entrées  $u_1, \dots, u_p$ , respectivement avec  $\mu_1 + \dots + \mu_p = n$ . Soit la matrice  $\mathcal{W}$  de rang  $n$  définie comme suit :

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} b_1 & \dots & A_x^{\mu_1-1} b_1 & b_2 & \dots & A_x^{\mu_2-1} b_2 & \dots & b_p & \dots & A_x^{\mu_p-1} b_p \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

On note  $L_1, L_2, \dots, L_p$  respectivement la  $\mu_1, (\mu_1 + \mu_2), \dots, (\mu_1 + \dots + \mu_p)$ -ème lignes de  $\mathcal{W}^{-1}$ , on définit alors la matrice  $T_z$  comme suit :

$$T_z = \left( L_1^T \quad \dots \quad (L_1 A_x^{\mu_1-1})^T \quad \dots \quad L_p^T \quad \dots \quad (L_p A_x^{\mu_p-1})^T \right)^T \quad (3.13)$$

En posant  $z = T_z x$ , on obtient le système (3.8) avec les matrices  $A_z = T_z A_x T_z^{-1}$  et  $B_z = T_z B_x$  de la forme suivante :

$$A_z = \left( \begin{array}{cccc|ccc} 0 & 1 & 0 & \dots & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & & & \\ * & \dots & \dots & * & * & \dots & * \\ \hline & & & & & & \\ \hline & & & & 0 & 1 & 0 & \dots \\ & & & & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & 0 & \dots & 0 & 1 \\ * & \dots & \dots & * & \dots & \dots & * & \dots \end{array} \right) \quad B_z = \left( \begin{array}{cccccc} 1 & * & \dots & \dots & & * \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 & * & * \\ \hline & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{array} \right)$$

### 3.2.2.1.2.1 Système partiellement commandable

**Théorème 3.2.8 [Décomposition de Kalman] :** Supposons que la matrice de commandabilité  $\Gamma$  de la paire  $(A, B)$  du système (2.8) est de rang  $n_c < n$ . Il existe alors une transformation  $T$  inversible,  $x = Tz$  :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{z}_c \\ \dot{z}_{nc} \end{bmatrix} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu = \begin{bmatrix} A_c & A_{12} \\ 0 & A_{nc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_c \\ z_{nc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_c \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = CTz + Du = \begin{bmatrix} C_c & C_{nc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_c \\ z_{nc} \end{bmatrix} + Du \end{cases} \quad (3.14)$$

où  $z_c \in \mathbb{R}^{n_c}$ ,  $z_{nc} \in \mathbb{R}^{n-n_c}$ ,  $A_c \in \mathcal{M}_{n_c}(\mathbb{R})$  et  $B_c \in \mathcal{M}_{n_c \times p}(\mathbb{R})$ .

- La paire  $(A_c, B_c)$  est commandable.
- Les valeurs propres de  $A_c$  sont les modes commandables.
- Les valeurs propres de  $A_{nc}$  sont les modes non commandables.

Si la matrice  $A_{nc}$  est Hurwitz alors le système (3.14) est stabilisable.

La transformation  $T$  est composée des  $n_c$  colonnes  $\gamma_j$ ,  $j = 1, \dots, n_c$  linéairement indépendantes de la matrice  $\Gamma$ , complétée par une famille de  $n - n_c$  vecteurs  $v_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, n - n_c$  :

$$T = [\gamma_1 \ \dots \ \gamma_{n_c} \ v_1 \ \dots \ v_{n-n_c}], \quad |T| \neq 0$$

### 3.2.2.2 Systèmes non linéaires

Un système non linéaire peut admettre plusieurs formes normales de commandabilité [Isidori, 1995], [Krstić et al., 1995]. Dans cette section nous présenterons une forme normale d'un système MIMO. On considère les systèmes non linéaires multi entrées multi sorties affines en la commande avec le nombre de sorties égal au nombre d'entrées. Leur représentation d'état



$$\Phi(x) = \left[ \begin{array}{cccccccc} \phi_{11}(x) & \dots & \phi_{1r_1}(x) & \dots & \phi_{m1}(x) & \dots & \phi_{mr_m}(x) & \phi_{s+1}(x) & \dots & \phi_n(x) \end{array} \right]$$

Les fonctions  $\phi_i(x)$ ,  $s+1 \leq i \leq n$  sont choisies de telle sorte à obtenir un difféomorphisme  $\Phi(x)$ .

Le vecteur  $\Phi(x)$  est une transformation de coordonnées locales dans  $\mathcal{V}_{x^*}$  pour le système (3.15). Les fonctions  $\phi_{ij}(x)$  vérifient le système différentiel ci-après :

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_{i1}(x)}{dt} &= \phi_{i2}(x) \\ &\vdots \\ \frac{d\phi_{i(r_i-1)}(x)}{dt} &= \phi_{ir_i}(x) \\ \frac{d\phi_{ir_i}(x)}{dt} &= L_f^{r_i} h_i(x) + \sum_{k=1}^m L_{g_k} L_f^{r_i-1} h_i(x) u_k \end{aligned} \quad (3.18)$$

Posons :

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^s \quad z_i = \begin{bmatrix} z_{i1} \\ \vdots \\ z_{ir_i} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r_i} \quad \zeta = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_{n-s} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n-s} \quad z_{ij} = \phi_{ij}(x) \quad \zeta_i = \phi_{i+s}(x) \quad (3.19)$$

On obtient alors :

$$\begin{bmatrix} z \\ \zeta \end{bmatrix} = \Phi(x)$$

En utilisant (3.18), alors la dynamique de  $z$  est donnée par :

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_m \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_m \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

où  $A_i \in \mathcal{M}_{r_i}(\mathbb{R})$ ,  $B_i \in \mathcal{M}_{r_i \times m}(\mathbb{R})$  et  $D_i \in \mathcal{M}_{r_i \times 1}(\mathbb{R})$  :

$$\begin{aligned} A_i &= \begin{bmatrix} 0 & I_{r_i-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ B_i &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ b_{i1}(z, \zeta) & \dots & b_{ip}(z, \zeta) \end{bmatrix}, \quad b_{ij} = L_{g_j} L_f^{r_i-1} h_i(\Phi^{-1}(z, \zeta)) \\ D_i &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & d_i(z, \zeta) \end{bmatrix}^T, \quad d_i(z, \zeta) = L_f^{r_i} h_i(\Phi^{-1}(z, \zeta)) \end{aligned}$$

Pour la dynamique de  $\zeta$  il n'existe pas de forme standard. On distingue deux cas :

- Si la distribution  $\mathcal{D} = \text{Vect}\{g_1, \dots, g_m\}$  n'est pas involutive, la dynamique de  $\zeta$  est donnée alors ci-après :

$$\dot{\zeta} = \psi(z, \zeta) + \sum_{i=1}^m \gamma_i(z, \zeta) u_i \quad (3.21)$$

- Si la distribution  $\mathcal{D}$  est involutive, alors les fonctions  $\phi_i(x)$ ,  $s+1 \leq i \leq n$  peuvent être choisies comme suit :

$$L_{g_j} \phi_i(x) = 0 \quad \forall (s+1) \leq i \leq n, \quad \forall 1 \leq j \leq m, \quad \forall x \in \mathcal{V}_{x^*}$$

Par conséquent, on obtient :

$$\dot{\zeta} = \psi(z, \zeta) \quad (3.22)$$

D'après la forme du système en  $z$  donnée par (3.20), on pourra facilement trouver les commandes  $u_1, \dots, u_m$  pour stabiliser les vecteurs d'état  $z_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Les zéros dynamiques du système (3.15) sont régis par (3.22), si les zéros sont asymptotiquement stables alors le système (3.15) est à phase minimale, dans le cas contraire ce système est à phase non minimale.

### 3.3 Commande des systèmes non linéaires

#### 3.3.1 Commande par retour d'état

On considère le problème du contrôle des systèmes non linéaires de classe Lipschitz suivants :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + f(x, u) \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.23)$$

où  $x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^p$  et  $y \in \mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^m$ . On suppose que le système (3.23) vérifie les hypothèses ci-après :

**H1** :  $\|f(x, u)\| \leq \gamma \|x\|$ ,  $\forall u \in \mathbb{U}$  et  $x \in \mathbb{X}$  où  $\gamma$  est la constante de Lipschitz du système (3.23).

**H2** : La paire  $(A, B)$  est commandable.

Avant de donner la loi de commande par retour d'état pour le système non linéaire (3.23), on rappelle quelques définitions :

**Définition 3.3.1 [Distance algébrique]** : Soient  $M$  et  $N$  deux matrices à coefficients dans  $\mathbb{R}$ , le nombre  $\delta(M, N)$  est défini par :

$$\delta(M, N) = \min_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\min} \begin{pmatrix} i\omega I - M \\ N \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

où  $i^2 = -1$  et  $I$  est la matrice identité.

**Définition 3.3.2 [Equation de Ricatti]** : Soit l'équation de Ricatti donnée ci-après :

$$A^T P + PA + PRP + Q = 0 \quad (3.25)$$

L'équation (3.25) admet une solution unique  $P = P^T > 0$  si :

- $R = R^T \geq 0$ ,  $Q = Q^T$  et  $A$  est Hurwitz.
- La matrice Hamiltonienne  $\mathcal{H}$  :

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} A & R \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

associée à l'équation de Ricatti (3.25) est hyperbolique.<sup>1</sup>

Les étapes de la synthèse d'une loi de commande par retour d'état pour le système (3.23) sont résumées ci-après :

### 3.3.1.1 Placement de pôles

Lorsque la matrice  $A$  du système (3.23) n'est pas Hurwitz, alors on réécrit le système (3.23) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = \underbrace{(A - BK_1)}_{A_1} x + B(u + K_1 x) + f(x, u) \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.27)$$

où  $K_1 \in \mathcal{M}_{p \times n}(\mathbb{R})$  est choisie de telle sorte à avoir  $A_1$  Hurwitz.

### 3.3.1.2 Constante de Lipschitz

Lorsqu'un système non linéaire est mis sous forme canonique de commandabilité, et que la dérivée du dernier état ne dépend pas de lui même alors la constante de Lipschitz de ce système peut être diminuée en utilisant une transformation linéaire [Rajamani and Cho, 1998]. On pose alors  $x = T_c z$  avec  $T_c \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice non singulière. En utilisant (3.27), on obtient alors la représentation d'état en  $z$  :

$$\begin{cases} \dot{z} = \underbrace{T_c^{-1}(A - BK_1)T_c}_{A_c} z + \underbrace{T_c^{-1}B}_{B_c} (u + K_1 T_c z) + T_c^{-1} f(x, u) \\ y = \underbrace{CT_c}_{C_c} z \end{cases} \quad (3.28)$$

Dans ce cas, l'hypothèse **(H1)** devient alors :

$$\|T_c^{-1} f(T_c z, u)\| \leq \gamma_c \|z\|, \forall u \in \mathbb{R}^p \quad (3.29)$$

---

1. ne possède pas de valeurs propres purement imaginaires

### 3.3.1.3 Loi de commande

Sous les hypothèses (H1) et (H2) pour le système (3.28), la loi de commande  $u$  par retour d'état est donnée ci-après :

$$u = -K_1 T_c z - \frac{K_c}{\|B_c\|^2} z \quad (3.30)$$

où le gain  $K_c \in \mathcal{M}_{p \times n}(\mathbb{R})$  sera explicité par la suite. En remplaçant la commande  $u$  donnée par (3.30) dans (3.28), on obtient le système en boucle fermée pour  $z$  :

$$\begin{cases} \dot{z} = \underbrace{(A_c - B_c K_c / \|B_c\|^2)}_{A_{cf}} z + T_c^{-1} f(x, u) \\ y = C_c z \end{cases} \quad (3.31)$$

Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_c(z) = z^T P_c z \quad , \quad P_c = P_c^T > 0 \quad (3.32)$$

La dérivée de  $V_c(z)$  le long des trajectoires du système (3.31) est alors :

$$\begin{aligned} \dot{V}_c(z) &= z^T (A_{cf}^T P_c + P_c A_{cf}) z + 2z^T P_c T_c^{-1} f(T_c z, u) \\ &\leq z^T (A_{cf}^T P_c + P_c A_{cf}) z + 2\|P_c z\| \|T_c^{-1} f(T_c z, u)\| \end{aligned} \quad (3.33)$$

En utilisant (3.29) et l'inégalité  $2ab \leq a^2 + b^2$  on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_c(z) &\leq z^T (A_{cf}^T P_c + P_c A_{cf}) z + 2\gamma_c \|P_c z\| \|z\| \\ &\leq z^T (A_{cf}^T P_c + P_c A_{cf} + P_c P_c + \gamma_c^2 I_n) z \end{aligned}$$

S'il existe une matrice  $P_c = P_c^T > 0$  solution de :

$$A_{cf}^T P_c + P_c A_{cf} + P_c P_c + \gamma_c^2 I_n = -\eta_c I_n \quad (3.34)$$

avec  $\eta_c > 0$ , alors il vient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_c(z) &\leq -\eta_c z^T z \\ &\leq -\frac{\eta_c}{\lambda_{P_c}} V_c(z) \end{aligned}$$

Prenons  $K_c$  comme suit :

$$K_c = \frac{B_c^T P_c}{2} \quad (3.35)$$

L'équation (3.34) devient alors :

$$A_c^T P_c + P_c A_c + P_c (I_n - B_c B_c^T / \|B_c\|^2) P_c + (\gamma_c^2 + \eta_c) I_n = 0 \quad (3.36)$$

En utilisant la définition 3.3.2, on obtient alors la matrice hamiltonienne  $\mathcal{H}_c$  pour l'équation (3.36) :

$$\mathcal{H}_c = \begin{bmatrix} A_c & I_n - B_c B_c^T / \|B_c\|^2 \\ -(\gamma_c^2 + \eta_c) I_n & -A_c^T \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Comme  $(I_n - B_c B_c^T / \|B_c\|^2) = (I_n - B_c B_c^T / \|B_c\|^2)^T \geq 0$ ,  $((\gamma_c^2 + \eta_c) I_n) = ((\gamma_c^2 + \eta_c) I_n)^T > 0$  et  $A_c$  est Hurwitz alors l'équation de Ricatti (3.36) admet une solution unique  $P_c = P_c^T > 0$  si et seulement si la matrice  $\mathcal{H}_c$  est hyperbolique. Dans [Rajamani and Cho, 1998], [Pagilla and Zhu, 2004], on a :

$$\mathcal{H}_c \text{ est hyperbolique} \iff \sqrt{\gamma_c^2 + \eta_c} < \delta(A_c^T, \sqrt{\gamma_c^2 + \eta_c} B_c^T / \|B_c\|) \quad (3.38)$$

La commande  $u$  pour le système d'origine est alors :

$$u = - \left[ K_1 + \frac{B^T}{2 \|T_c^{-1} B\|^2} T_c^{-T} P_c T_c^{-1} \right] x$$

### 3.3.2 Commande par linéarisation exacte

Dans (3.15) supposons que le rang de la matrice  $g(x^*)$  égal à  $m$ . Si le système (3.15) admet un vecteur de degré relatif  $r = [r_1, \dots, r_m]$  au point  $x^*$ , avec  $s = r_1 + \dots + r_m = n$ , alors il existe une transformation  $z = \Phi(x)$  définie sur  $\mathcal{V}_{x^*}$  permettant d'écrire le système en  $z$  sous la forme suivante :

$$\dot{z} = A_z z + B_z v \quad (3.39)$$

où  $v = [v_1 \dots v_m]^T$ ,  $A_z = \text{diag}(A_{z_1}, \dots, A_{z_m})$  et  $B_z = \text{diag}(B_{z_1}, \dots, B_{z_m})$  avec  $A_{z_i}$  et  $B_{z_i}$  données ci-après :

$$A_{z_i} = \begin{pmatrix} 0 & I_{r_i-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_{z_i} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$$

Le vecteur  $z$  est donné par (3.19) et (3.17) et la commande  $u$  linéarisante :

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v \quad (3.40)$$

avec  $\alpha(x)$  et  $\beta(x)$  définies sur  $\mathcal{V}_{x^*}$  données par :

$$\alpha(x) = -A^{-1}(x)b(x) \quad \beta(x) = A^{-1}(x) \quad (3.41)$$

avec  $A(x)$  donnée dans (3.16) et  $b(x) = [L_f^{r_1} h_1(x) \dots L_f^{r_m} h_m(x)]^T$ .

On peut alors synthétiser une loi de commande  $v$  linéaire pour le système (3.39), et en utilisant (3.40) on détermine la commande non linéaire  $u$  pour le système (3.15).

La commande linéarisante  $u$  donnée par (3.40) et la transformation  $z = \Phi(x)$  permettent de transformer le système non linéaire d'origine donné par (3.15) en un système linéaire donné par (3.39) dans lequel, la commande  $v$  est synthétisée facilement et la commande  $u$  pour le système d'origine est obtenue par l'expression (3.40).

### 3.3.3 Commande par backstepping

Les premiers travaux sur la commande par backstepping ont été menés par [Krstić et al., 1995, Kokotović et al., 1997]. Cette technique de commande s'applique sur les systèmes sous forme triangulaire, elle permet de construire une commande étape par étape pour avoir à la dernière étape la dérivée de la fonction de Lyapunov définie négative. De plus la commande par backstepping adaptatif permet d'assurer la stabilité du système le long d'une trajectoire, malgré la présence d'incertitudes paramétriques dans la dynamique de ce système.

#### 3.3.3.1 Backstepping adaptatif

**Proposition 3.3.3 :** [Zhou and Wen, 2010] On considère le système non linéaire ci-après :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 + \phi_1^T(\bar{x}_1)\theta + \psi_1(\bar{x}_1) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_i &= x_{i+1} + \phi_i^T(\bar{x}_i)\theta + \psi_i(\bar{x}_i) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{n-1} &= x_n + \phi_{n-1}^T(\bar{x}_{n-1})\theta + \psi_{n-1}(\bar{x}_{n-1}) \\
 \dot{x}_n &= bu + \phi_n^T(x)\theta + \psi_n(x)
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

où  $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{x}_i = [x_1, \dots, x_i]^T \in \mathbb{R}^i$ ,  $\phi_i$  et  $\psi_i$  sont des fonctions dans  $\mathbb{R}^q$  et  $\mathbb{R}$  respectivement, et  $\theta \in \mathbb{R}^q$  et  $b \in \mathbb{R}$  sont des paramètres incertains. L'objectif de la commande pour le système (3.42) est de contrôler  $x$  et le stabiliser vers une trajectoire de référence  $x_{ref} = (x_r, \dot{x}_r, \dots, x_r^{(n-1)})$ , malgré la présence d'incertitudes paramétriques sous les hypothèses ci-après :

- Le signe de  $b$  est connu
- $x_r$  est de classe  $C^n$

La loi de commande  $u$  donnée par :

$$\begin{aligned}
 u &= \hat{p}\bar{u} & \bar{u} &= \alpha_n + x_r^{(n)} \\
 \dot{\hat{\theta}} &= \Gamma\tau_n & \dot{\hat{p}} &= -\gamma \text{sign}(b)\bar{u}\tilde{x}_n
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

stabilise le système (3.42) le long d'une trajectoire de référence  $x_{ref}$ .

**Démonstration:**

La synthèse d'une loi de commande par backstepping adaptatif pour le système (3.42) est obtenue étape par étape jusqu'à la  $n$ -ème étape dans laquelle la commande  $u$  est obtenue. On pose  $\tilde{x}_1 = x_1 - x_r$ ,  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$  et  $\tilde{x}_i = x_i - \alpha_{i-1} - x_r^{(i-1)}$  pour  $i = 2, \dots, n$  avec  $\alpha_i$  des commandes virtuelles. Les étapes de la synthèse de loi de commande sont résumées ci-après :

**Étape 1 :** On considère  $x_2$  comme une commande virtuelle. Soit la fonction de Lyapunov :

$$V_1 = \frac{1}{2}\tilde{x}_1^2 + \frac{1}{2}\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \quad (3.44)$$

sachant que  $\dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 + \alpha_1 + \phi_1^T \theta + \psi_1$ , on pose  $\alpha_1 = -k_1 \tilde{x}_1 - \phi_1^T \hat{\theta} - \psi_1$ ,  $k_1 > 0$ . La dérivée de  $V_1$  le long des trajectoires du système (3.42) après simplification est :

$$\dot{V}_1 = -k_1 \tilde{x}_1^2 + \tilde{\theta}^T (\tau_1 - \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}}) + \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \quad (3.45)$$

où  $\tau_1 = \phi_1 \tilde{x}_1$  est une première fonction de réglage.

**Étape 2 :** Pour cette étape l'état  $x_3$  est considéré comme une commande virtuelle et le but est de stabiliser la paire  $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ . Soit la fonction de Lyapunov  $V_2$  :

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2}\tilde{x}_2^2 \quad (3.46)$$

La dérivée de  $V_2$  le long des trajectoires du système (3.42) est :

$$\dot{V}_2 = -k_1 \tilde{x}_1^2 - k_2 \tilde{x}_2^2 + \tilde{\theta}^T (\tau_2 - \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}}) + \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 + \tilde{x}_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} (\Gamma \tau_2 - \dot{\hat{\theta}}) \quad (3.47)$$

avec :

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \tau_1 + \left( \phi_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \phi_1 \right) \tilde{x}_2 \\ \alpha_2 &= -\tilde{x}_1 - k_2 \tilde{x}_2 - \psi_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} (x_2 + \psi_1) \\ &\quad - \hat{\theta}^T \left( \phi_2 - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \phi_1 \right) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \hat{\theta}} \Gamma \tau_2 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_r} \dot{x}_r \end{aligned} \quad (3.48)$$

**Étape  $i$  :** Pour cette étape, le but est de stabiliser  $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_i)$ . La fonction de Lyapunov est donnée ci-après :

$$V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2}\tilde{x}_i^2 \quad , \quad i = 3, \dots, n-1 \quad (3.49)$$

La dérivée de  $V_i$  le long des trajectoires du système (3.42) est donnée par :

$$\dot{V}_i = -\sum_{j=1}^i k_j \tilde{x}_j^2 + \tilde{x}_i \tilde{x}_{i+1} + \left( \sum_{j=2}^i \tilde{x}_j \frac{\partial \alpha_{j-1}}{\partial \hat{\theta}} \right) (\Gamma \tau_i - \dot{\hat{\theta}}) + \tilde{\theta}^T (\tau_i - \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}}) \quad (3.50)$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \tau_i &= \tau_{i-1} + \left( \phi_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} \phi_j \right) \tilde{x}_i \\
 \alpha_i &= -\tilde{x}_{i-1} - k_i \tilde{x}_i - \psi_i + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} (x_{j+1} + \psi_j) + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_r^{(j-1)}} x_r^{(j)} \\
 &\quad - \hat{\theta}^T \left( \phi_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} \phi_j \right) + \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}} \Gamma \tau_i + \left( \sum_{j=2}^{i-1} \tilde{x}_j \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}} \right) \Gamma \left( \phi_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} \phi_j \right) \\
 &\quad i = 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

**Étape  $n$  :** Pour cette dernière étape, la loi de commande  $u$  et les lois de mise à jour pour  $\hat{\theta}$  et  $\hat{p}$  sont données par (3.43). Avec  $\alpha_n, \tau_n$  sont données par (3.51),  $\gamma > 0$ ,  $\hat{p}$  est l'estimée de  $p = 1/b$  et  $\tilde{p} = p - \hat{p}$ . Soit la fonction de Lyapunov  $V_n$  donnée par :

$$V_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \tilde{x}_i^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} + \frac{|b|}{2\gamma} \tilde{p}^2 \tag{3.52}$$

La dérivée de  $V_n$  le long des trajectoires du système (3.42) est donnée alors par :

$$\dot{V}_n = - \sum_{i=1}^n k_i \tilde{x}_i^2 + \left( \sum_{i=2}^n \tilde{x}_i \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\theta}} \right) (\Gamma \tau_n - \dot{\hat{\theta}}) + \tilde{\theta}^T (\tau_n - \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}}) - \frac{|b|}{\gamma} \tilde{p} (\dot{\hat{p}} + \gamma \text{sign}(b) \bar{u} \tilde{x}_n) \tag{3.53}$$

En utilisant l'équation (3.43) dans (3.53) on obtient :

$$\dot{V}_n = - \sum_{i=1}^n k_i \tilde{x}_i^2 \leq 0$$

Par conséquent  $\tilde{x}_i$  converge vers zéro et  $x_i$  converge vers  $x_r^{(i-1)}$ .

□

### 3.4 Commande d'un microrobot

Dans cette section, nous considérons les systèmes réduits ( $\mathcal{R}^1$ ) et ( $\mathcal{R}^2$ ) explicités dans le chapitre 2, ces systèmes sont localement accessibles et affines en la commande. Plusieurs paramètres biologiques interviennent dans la dynamique de ces systèmes, et souvent ces paramètres sont incertains, de plus comme on travaille à petite échelle, la position mesurée du microrobot est très affectée par le bruit de mesure. Cela explique notre choix de commande par backstepping

adaptatif, pour assurer la stabilité de ces systèmes en dépit des incertitudes paramétriques. Les auteurs dans [Arcese et al., 2012] ont étudié la planification de trajectoire pour la dynamique du microrobot en  $2D$ , dans le but de minimiser les efforts de commande, par exemple en naviguant près de la paroi pour compenser le poids apparent du microrobot avec la force électrostatique.

**Hypothèse 3.4.1 :** *L'état du système étendu est complètement accessible, c'est-à-dire la position et la vitesse du microrobot sont mesurables et la vitesse du sang aussi.*

### 3.4.1 Modèle 1D du microrobot

#### 3.4.1.1 Backstepping

Cette section sera consacrée à la synthèse d'une loi de commande par backstepping, pour stabiliser le microrobot le long d'une trajectoire de référence donnée. Pour cela on considère le lemme et la proposition suivants :

**Lemme 3.4.2 :** *Soit  $x_{ref} = [x_r(t), \dot{x}_r(t), \ddot{x}_r(t)]$  une trajectoire de référence continue et bornée, et  $\mathcal{K}_x \subset \mathbb{R}^2$  un voisinage de  $(x_r, \dot{x}_r)$ . Supposons que  $\forall (x, \xi) \in \mathcal{K} = \mathcal{K}_x \times \mathcal{K}_\xi$ , le système  $(\mathcal{R}^1)$  vérifie les hypothèses ci-après :*

**H1 :** *Système  $(\mathcal{R}^1)$  est localement commandable le long de  $x_{ref}$ .*

**H2 :**  *$\Phi$  est localement lipschitz sur  $\mathcal{K}$ , avec  $\gamma$  sa constante de lipschitz.*

Les hypothèses H1 et H2 ont été respectivement démontrées dans [Arcese et al., 2013] et [Fruchard et al., 2014]. En particulier la commandabilité locale du système  $(\mathcal{R}^1)$  est obtenue de la commandabilité de son système linéarisé à temps variable le long d'une trajectoire de référence  $x_{ref}(t)$  [Isidori, 1995, Silverman and Meadows, 1967].

**Proposition 3.4.3 [Commande par Backstepping] :** *Sous les hypothèses 3.4.1 et H1 du lemme 3.4.2, la loi de commande par backstepping  $u = \kappa(x, \xi)$  donnée par :*

$$\kappa(x, \xi) = -\frac{(k_2 + k_1)z_2 + (1 - k_1^2)z_1 + \Phi(x, \xi) + \vartheta - \ddot{x}_r}{\beta_1^l} \quad (3.54)$$

*stabilise le système  $(\mathcal{R}^1)$  le long de la trajectoire de référence  $x_{ref}$  de classe  $\mathcal{C}^0$  pour toute valeur initiale  $(x(0), \xi(0)) \in \mathcal{K}_x \times \mathcal{K}_\xi$ , avec les gains positifs  $k_1, k_2 > 0$ .*

**Démonstration:**

Soit  $z_1 = x_1 - x_r$  et  $z_2 = x_2 - \dot{x}_r - \alpha$ , où  $\alpha$  est une fonction stabilisante qui sera donnée dans la suite de la preuve.

- Prenons comme fonction de Lyapunov  $V_1$  la fonction suivante :

$$V_1 = \frac{1}{2}z_1^2 \quad (3.55)$$

La dérivée de  $V_1$  le long des trajectoires du système  $(\mathcal{R}^1)$  est donnée par :

$$\dot{V}_1 = z_1(x_2 - \dot{x}_r) = z_1(z_2 + \alpha) \quad (3.56)$$

Prenons  $\alpha = -k_1 z_1$ , alors  $\dot{V}_1 = -k_1 z_1^2 + z_1 z_2$ .

Sachant que  $\dot{z}_1 = x_2 - \dot{x}_r = z_2 + \alpha = z_2 - k_1 z_1$ , on obtient alors :

$$\dot{z}_2 = \Phi(x, \xi) + \vartheta + \beta'_1 u + k_1(z_2 - k_1 z_1) - \ddot{x}_r \quad (3.57)$$

- Soit  $V_2 = V_1 + \frac{1}{2}z_2^2$ . En utilisant (3.56) et (3.57), la dérivée de  $V_2$  est alors donnée par :

$$\dot{V}_2 = -k_1 z_1^2 + z_2(\Phi(x, \xi) + \vartheta + \beta'_1 u + k_1 z_2 + (1 - k_1^2)z_1 - \ddot{x}_r) \quad (3.58)$$

En remplaçant l'expression de  $u$  donnée par (3.54) dans l'équation (3.58), on obtient :

$$\dot{V}_2 = -k_1 z_1^2 - k_2 z_2^2 \quad (3.59)$$

par conséquent  $(z_1, z_2)$  converge exponentiellement vers  $(0, 0)$ , et ainsi  $(x_1, x_2)$  converge exponentiellement vers  $(x_r, \dot{x}_r)$ .

□

### 3.4.1.2 Backstepping adaptatif

Dans certains cas la magnétisation  $M$  du microrobot n'est pas connue, de plus la viscosité dynamique  $\eta$  du sang varie en fonction de type du vaisseau sanguin. Par conséquent, le système  $(\mathcal{R}^1)$  contient des paramètres incertains, qu'il faut prendre en considération lors de la synthèse d'une loi de commande, nous proposons alors ici une loi de commande par backstepping adaptatif, qui est robuste par rapport aux incertitudes paramétriques. Supposons que les paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $\beta'_1$  donnés par (2.24) et (2.20) sont inconnus mais constants avec  $\beta'_1 > 0$ .

**Proposition 3.4.4 [Commande par Backstepping adaptatif]** : Soit  $x_{ref} = [x_r(t), \dot{x}_r(t), \ddot{x}_r(t)]$  une trajectoire de référence continue et bornée, et  $\mathcal{K}_x \subset \mathbb{R}^2$  un voisinage de  $(x_r, \dot{x}_r)$ .  $\forall (x, \xi) \in \mathcal{K} = \mathcal{K}_x \times \mathcal{K}_\xi$ ,  $\forall \hat{\theta} \in \mathcal{K}_\theta$  et  $\forall \hat{p} \in \mathcal{K}_p$  avec  $p = 1/\beta'_1$ , les lois de commande par backstepping adaptatif  $u = \hat{p}\bar{u}(x, \xi, \hat{\theta})$  et de mise à jour suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{u} &= -(k_2 + k_1)z_2 - (1 - k_1^2)z_1 - \phi^T(x, \xi)\hat{\theta} - \vartheta + \ddot{x}_r \\ \dot{\hat{\theta}} &= \Gamma\phi z_2 \\ \dot{\hat{p}} &= -\gamma \text{sign}(\beta'_1)\bar{u}(x, \xi, \hat{\theta})z_2 \end{aligned} \quad (3.60)$$

stabilisent le système  $(\mathcal{R}^1)$  le long de la trajectoire de référence  $x_{ref}$  de classe  $\mathcal{C}^0$  pour toute valeur initiale  $(x(0), \xi(0), \hat{\theta}(0), \hat{p}(0))$  bornée, avec les gains positifs  $k_1, k_2 > 0$ ,  $\gamma > 0$  et  $\Gamma \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) > 0$  non singulière.

**Démonstration:**

Soit  $z_1 = x_1 - x_r$ ,  $z_2 = x_2 - \dot{x}_r - \alpha$ , où  $\alpha$  est une fonction stabilisante qui sera donnée dans la suite de la preuve,  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$  et  $\tilde{p} = p - \hat{p}$ .

- Prenons comme fonction de Lyapunov  $V_1$  :

$$V_1 = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}\tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \quad (3.61)$$

Comme  $\theta$  est constant, alors  $\dot{\tilde{\theta}} = -\dot{\hat{\theta}}$ . La dérivée de  $V_1$  le long des trajectoires du système  $(\mathcal{R}^1)$  est donnée par :

$$\dot{V}_1 = z_1(x_2 - \dot{x}_r) - \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}} = z_1(z_2 + \alpha_1) - \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}} \quad (3.62)$$

Le choix  $\alpha = -k_1 z_1$  implique  $\dot{V}_1 = -k_1 z_1^2 + z_1 z_2 - \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}}$ .

Sachant que  $\dot{z}_1 = x_2 - \dot{x}_r = z_2 + \alpha = z_2 - k_1 z_1$ , on obtient alors :

$$\dot{z}_2 = \phi^T(x, \xi)\theta + \vartheta + \beta'_1 u + k_1(z_2 - k_1 z_1) - \ddot{x}_r \quad (3.63)$$

- Soit  $V_2 = V_1 + \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{\beta'_1}{2\gamma}\tilde{p}^2$ . En utilisant (3.62) et (3.63), la dérivée de  $V_2$  est alors donnée par :

$$\dot{V}_2 = -k_1 z_1^2 + z_2(\phi^T \theta + \vartheta + \beta'_1 u + k_1 z_2 + (1 - k_1^2)z_1 - \ddot{x}_r) - \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}} - \frac{\beta'_1}{\gamma} \tilde{p} \dot{\tilde{p}} \quad (3.64)$$

Posons  $\beta'_1 u = \beta'_1 \hat{p} \bar{u} = \bar{u} - \beta'_1 \tilde{p} \bar{u}$ , la dérivée de  $V_2$  devient alors :

$$\dot{V}_2 = -k_1 z_1^2 + z_2(\phi^T \hat{\theta} + \vartheta + \bar{u} + k_1 z_2 + (1 - k_1^2)z_1 - \ddot{x}_r) - \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} (\dot{\hat{\theta}} - \Gamma \phi z_2) - \frac{\beta'_1}{\gamma} \tilde{p} (\dot{\hat{p}} + \gamma \bar{u} z_2) \quad (3.65)$$

En remplaçant  $\bar{u}$ ,  $\dot{\hat{\theta}}$  et  $\dot{\hat{p}}$  données dans la proposition 3.4.4 par (3.60) dans l'équation (3.65), on obtient  $\dot{V}_2$  semi définie négative :

$$\dot{V}_2 = -k_1 z_1^2 - k_2 z_2^2 \quad (3.66)$$

par conséquent la paire  $(z_1, z_2)$  converge asymptotiquement vers  $(0, 0)$ , et ainsi  $(x_1, x_2)$  converge asymptotiquement vers  $(x_r, \dot{x}_r)$ , pour tout  $(\hat{\theta}, \hat{p})$  dans  $\mathcal{K}_\theta \times \mathcal{K}_p$ .

□

### 3.4.2 Modèle 2D du microrobot

Dans cette section, nous synthétisons des lois de commande par backstepping et backstepping adaptatif pour la dynamique du microrobot en 2D représentée par le système  $(\mathcal{R}^2)$ .

### 3.4.2.1 Backstepping

**Lemme 3.4.5 :** Soit  $x_{ref} = [x_r(t), \dot{x}_r(t), \ddot{x}_r(t)]$  une trajectoire de référence continue et bornée, et  $\mathcal{K}_x \subset \mathbb{R}^4$  un voisinage de  $(x_r, \dot{x}_r)$ . Supposons que  $\forall (x, \xi) \in \mathcal{K} = \mathcal{K}_x \times \mathcal{K}_\xi$ , le système  $(\mathcal{R}^2)$  vérifie les hypothèses ci-après :

**H1 :** Le système  $(\mathcal{R}^2)$  est localement commandable le long de  $x_{ref}$ .

**H2 :**  $g_i$  est localement lipschitz sur  $\mathcal{K}$ , avec  $\gamma_i$  sa constante de lipschitz.

**Proposition 3.4.6 [Commande par Backstepping] :** Sous les hypothèses 3.4.1 et H1 du lemme 3.4.5, la loi de commande par backstepping  $u_i = \kappa_i(x, \xi)$ ,  $i = 1, 2$  donnée ci-après :

$$\kappa_i(x, \xi) = -\frac{(k_{i+2} + k_i)z_{i+2} + (1 - k_i^2)z_i + g_i(x, \xi) + (i - 1)\vartheta - \ddot{x}_{i,r}}{\beta_1'} \quad (3.67)$$

stabilise le système  $(\mathcal{R}^2)$  le long de la trajectoire de référence  $x_{ref} = [x_r, \dot{x}_r, \ddot{x}_r]$  de classe  $\mathcal{C}^0$  pour toute valeur initiale  $(x(0), \xi(0))$  bornée, avec les gains positifs  $k_i, k_{i+2} > 0$

**Démonstration :**

Soit  $z_i = x_i - x_{ir}$  et  $z_{i+2} = x_{i+2} - \dot{x}_{ir} - \alpha_i$ , et  $\alpha_i$  des fonctions stabilisantes qui seront données dans la suite de la preuve.

- Prenons comme fonction de Lyapunov  $V_{1i}$  :

$$V_{1i} = \frac{1}{2}z_i^2 \quad (3.68)$$

La dérivée de  $V_{1i}$  le long des trajectoires du système  $(\mathcal{R}^2)$  est donnée par :

$$\dot{V}_{1i} = z_i(x_{i+2} - \dot{x}_{ir}) = z_i(z_{i+2} + \alpha_i) \quad (3.69)$$

Prenons  $\alpha_i = -k_i z_i$ , alors  $\dot{V}_{1i} = -k_i z_i^2 + z_i z_{i+2}$ .

Sachant que  $\dot{z}_i = x_{i+2} - \dot{x}_{ir} = z_{i+2} + \alpha_i = z_{i+2} - k_i z_i$ , on obtient alors :

$$\dot{z}_{i+2} = g_i(x, \xi) + (i - 1)\vartheta + \beta_1' u_i + k_i(z_{i+2} - k_i z_i) - \ddot{x}_{ir} \quad (3.70)$$

- Soit  $V_{2i} = V_{1i} + \frac{1}{2}z_{i+2}^2$ . En utilisant (3.69) et (3.70), la dérivée de  $V_{2i}$  devient :

$$\dot{V}_{2i} = -k_i z_i^2 + z_{i+2}(g_i(x, \xi) + (i - 1)\vartheta + \beta_1' u_i + k_i z_{i+2} + (1 - k_i^2)z_i - \ddot{x}_{ir}) \quad (3.71)$$

En remplaçant l'expression de  $u_i$  donnée par (3.67) dans l'équation (3.71), on obtient :

$$\dot{V}_{2i} = -k_i z_i^2 - k_{i+2} z_{i+2}^2 \leq -k_{ci} V_{2i} \quad (3.72)$$

avec  $k_{ci} = 2\min(k_i, k_{i+2})$  par conséquent la paire  $(z_i, z_{i+2})$  converge exponentiellement vers  $(0, 0)$  et  $(x_i, x_{i+2})$  converge exponentiellement vers  $(x_{ir}, \dot{x}_{ir})$ . Donc

$$V_c = V_{21} + V_{22} \quad (3.73)$$

En utilisant (3.72), on obtient :

$$\dot{V}_c \leq -2 \min_{i=1..4} (k_i) V_c = -k_c V_c \quad (3.74)$$

et, par conséquent,  $z$  converge exponentiellement vers zéro d'où  $x$  converge vers  $(x_r, \dot{x}_r)$ .

□

### 3.4.2.2 Backstepping adaptatif

Supposons que les paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $\beta'_1$  donnés par (2.24) et (2.20) sont inconnus mais constants avec  $\beta'_1 > 0$ . On pose  $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ,  $X_2 = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$  et  $X_r = \begin{pmatrix} x_{1r} \\ x_{2r} \end{pmatrix}$  pour simplifier la proposition suivante :

**Proposition 3.4.7 [Commande par Backstepping adaptatif]** : Soit  $X_{ref} = [X_r(t), \dot{X}_r(t), \ddot{X}_r(t)]$  une trajectoire de référence continue et bornée, et  $\mathcal{K}_x \subset \mathbb{R}^4$  un voisinage de  $(X_r, \dot{X}_r)$ .  $\forall (x, \xi) \in \mathcal{K} = \mathcal{K}_x \times \mathcal{K}_\xi$ ,  $\forall \hat{\theta} \in \mathcal{K}_\theta$  et  $\forall \hat{p} \in \mathcal{K}_p$  avec  $p = 1/\beta'_1$ . Les lois de commande par backstepping adaptatif  $u = \hat{p}\bar{u}(x, \xi, \hat{\theta})$  et de mise à jour  $\dot{\hat{\theta}}$  et  $\dot{\hat{p}}$  suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{u} &= -(k_2 + k_1)Z_2 - (1 - k_1^2)Z_1 - \Phi^T(x, \xi)\hat{\theta} - \Psi(x) + \ddot{X}_r \\ \dot{\hat{\theta}} &= \Gamma\Phi Z_2 \\ \dot{\hat{p}} &= -\gamma \text{sign}(\beta'_1) Z_2^T \bar{u}(x, \xi, \hat{\theta}) \end{aligned} \quad (3.75)$$

stabilisent le système  $(\mathcal{R}^2)$  le long de la trajectoire de référence  $X_{ref}$  de classe  $C^0$  pour toute valeur initiale  $(Z(0), \xi(0), \hat{\theta}(0), \hat{p}(0))$  bornée, avec les gains positifs  $k_1, k_2 > 0$ ,  $\gamma > 0$  et  $\Gamma \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) > 0$  non singulière.

**Démonstration:**

Soit  $Z_1 = X_1 - X_r$ ,  $Z_2 = X_2 - \dot{X}_r - \alpha_1$ , où  $\alpha_1$  est une fonction stabilisante qui sera donnée dans la suite de la preuve,  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$  et  $\tilde{p} = p - \hat{p}$ .

- Prenons comme fonction de Lyapunov  $V_1$  :

$$V_1 = \frac{1}{2} Z_1^T Z_1 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \quad (3.76)$$

La dérivée de  $V_1$  le long des trajectoires du système  $(\mathcal{R}^2)$  est donnée par :

$$\dot{V}_1 = Z_1^T (X_2 - \dot{X}_r) = Z_1^T (Z_2 + \alpha_1) - \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}} \quad (3.77)$$

Prenons  $\alpha_1 = -k_1 Z_1$  alors,  $\dot{V}_1 = -k_1 Z_1^T Z_1 + Z_2^T Z_1 - \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}}$ .

Sachant que  $\dot{Z}_1 = X_2 - \dot{X}_r = Z_2 + \alpha_1 = Z_2 - k_1 Z_1$ , on obtient alors :

$$\dot{Z}_2 = \Phi^T(x, \xi)\theta + \Psi(x) + \beta'_1 u + k_1 (Z_2 - k_1 Z_1) - \ddot{X}_r \quad (3.78)$$

- Soit  $V_2 = V_1 + \frac{1}{2}Z_2^T Z_2 + \frac{\beta'_1}{2\gamma}\tilde{p}^2$ . En utilisant (3.77) et (3.78), on obtient la dérivée de  $V_2$  :

$$\dot{V}_2 = -k_1 Z_1^T Z_1 + Z_2^T (\Phi^T \theta + \Psi + \beta'_1 u + k_1 Z_2 + (1 - k_1^2) Z_1 - \ddot{X}_r) - \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \dot{\hat{\theta}} - \frac{\beta'_1}{\gamma} \tilde{p} \dot{\hat{p}} \quad (3.79)$$

Posons  $\beta'_1 u = \beta'_1 \hat{p} \bar{u} = \bar{u} - \beta'_1 \tilde{p} \bar{u}$ , la dérivée de  $V_2$  devient alors :

$$\dot{V}_2 = -k_1 Z_1^T Z_1 + Z_2^T (\Phi^T \hat{\theta} + \Psi + \bar{u} + k_1 Z_2 + (1 - k_1^2) Z_1 - \ddot{X}_r) - \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} (\dot{\hat{\theta}} - \Gamma \Phi Z_2) - \frac{\beta'_1}{\gamma} \tilde{p} (\dot{\hat{p}} + \gamma Z_2^T \bar{u}) \quad (3.80)$$

En remplaçant  $\bar{u}$ ,  $\dot{\hat{\theta}}$  et  $\dot{\hat{p}}$  par les expressions (3.75) données dans la proposition 3.4.7 dans l'équation (3.80), on obtient  $\dot{V}_2$  semi définie négative :

$$\dot{V}_2 = -k_1 Z_1^T Z_1 - k_2 Z_2^T Z_2 \quad (3.81)$$

par conséquent la paire  $(Z_1, Z_2)$  converge asymptotiquement vers zéro et  $(X_1, X_2)$  converge asymptotiquement vers  $(X_r, \dot{X}_r)$ , pour tout  $(\hat{\theta}, \hat{p}) \in \mathcal{K}_\theta \times \mathcal{K}_p$ .

□

## 3.5 Commande de 2 microrobots

Nous avons synthétisé des lois de commande pour un seul microrobot dans les sections précédentes, et comme certains tâches nécessitent plusieurs microrobots, nous allons étudier alors dans cette section la commandabilité de deux microrobots en  $1D$  et  $2D$  avec les mêmes entrées de commande. Les systèmes réduits  $(\mathcal{R}^{12})$  et  $(\mathcal{R}^{22})$ , qui représentent la dynamique de deux microrobots en interaction respectivement en  $1D$  et  $2D$ , sont non linéaires et affines en la commande, et sont plus sous-actionnés. L'étude de la commandabilité non linéaire pour ces systèmes réduits n'est pas triviale avec la condition de [Sussmann, 1987], parce que ces systèmes possèdent des dérivées non nulles. Dans cette section, nous allons donc étudier la commandabilité locale des systèmes réduits le long d'une trajectoire de référence, via l'étude de la commandabilité du système linéarisé autour de cette trajectoire de référence.

### 3.5.1 Modèle $1D$

#### 3.5.1.1 Linéarisation autour d'une trajectoire

L'objectif est d'étudier la commandabilité des deux microrobots le long d'une trajectoire de référence donnée. Pour cela on considère la trajectoire de référence ci-après :

$$x_{ref}(t) = [x_{jr}(t), x_{kr}(t), \dot{x}_{jr}(t), \dot{x}_{kr}(t)] \quad (3.82)$$

Il existe alors une fonction  $f(t) \in \mathcal{F} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  :

$$f(t) = x_{jr}(t) - x_{kr}(t) \quad (3.83)$$

**3.5.1.1.1 Système linéaire** Le système linéarisé de  $(\mathcal{R}^{12})$  le long d'une trajectoire de référence  $x_{ref}$  vérifiant (3.83) est donné par :

$$(\mathcal{R}_{L_x}^{12}) : \dot{x}(t) = A_x(t)x(t) + B_x(t)u(t) \quad (3.84)$$

avec les matrices  $A_x(t)$  et  $B_x(t)$  données par :

$$A_x(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{4e_{jk}}{f^5(t)} & -\frac{4e_{jk}}{f^5(t)} & -a_j & 0 \\ -\frac{4e_{kj}}{f^5(t)} & \frac{4e_{kj}}{f^5(t)} & 0 & -a_k \end{bmatrix} \quad B_x(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha_j \\ \alpha_k \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

**3.5.1.1.2 Etude de commandabilité** L'étude de commandabilité du système  $(\mathcal{R}_{L_x}^{12})$  donné par (3.84), consiste à déterminer le rang de la matrice de commandabilité de la paire  $(A_x(t), B_x(t))$ . On distingue alors deux cas selon que  $f(t)$  est constante ou instationnaire.

#### 3.5.1.1.2.1 $f(t)$ une constante

**Lemme 3.5.1 [Condition suffisante de non commandabilité]** : Le système  $(\mathcal{R}_{L_x}^{12})$  n'est pas commandable si l'une des conditions suivantes est satisfaite.

1.  $e_{jk} = e_{kj} = 0, j \neq k$  : le système  $(\mathcal{R}_{L_x}^{12})$  est non commandable et non stabilisable.
2. Les deux microrobots sont identiques ( $a_j = a_k$  et  $\alpha_j = \alpha_k, j \neq k$ ),  $\forall f \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
3. La valeur de  $f$  égale à  $f^*$  :

$$f^* = \sqrt[5]{\frac{4\chi_3^2\chi_1}{\chi_2\chi_4}}$$

où

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \alpha_k e_{jk} + \alpha_j e_{kj} & \chi_2 &= \alpha_j \alpha_k (a_j - a_k) \\ \chi_3 &= \alpha_j - \alpha_k & \chi_4 &= \alpha_k a_j - \alpha_j a_k \end{aligned} \quad (3.86)$$

**Démonstration:**

1. Dans le cas où  $e_{jk} = e_{kj} = 0$ , la matrice de commandabilité du système  $(\mathcal{R}_{L_x}^{1_2})$  est donnée par :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_j & -\alpha_j a_j & \alpha_j a_j^2 \\ 0 & \alpha_k & -\alpha_k a_k & \alpha_k a_k^2 \\ \alpha_j & -\alpha_j a_j & \alpha_j a_j^2 & -\alpha_j a_j^3 \\ \alpha_k & -\alpha_k a_k & \alpha_k a_k^2 & -\alpha_k a_k^3 \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

on a :

$$\text{Rang}(\Omega) = \begin{cases} 3 & \text{si } a_j \neq a_k \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par conséquent le système est non commandable. Dans le cas où  $a_j \neq a_k$ , d'après le théorème 3.2.8, il existe une transformation  $T$  donnée par :

$$T = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_j & -\alpha_j a_j & 1 \\ 0 & \alpha_k & -\alpha_k a_k & 0 \\ \alpha_j & -\alpha_j a_j & \alpha_j a_j^2 & 0 \\ \alpha_k & -\alpha_k a_k & \alpha_k a_k^2 & 0 \end{bmatrix}$$

avec la transformation  $T$  choisie, on obtient alors :

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -a_j a_k \\ 0 & 1 & -a_j - a_k \end{pmatrix} \quad B_c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A_{nc} = 0 \quad (3.88)$$

Les modes commandables sont associés aux valeurs propres de  $A_c$  :  $0, -a_j, -a_k$  ; le mode non commandable est associé à la valeur propre 0. Comme  $A_{nc}$  n'est pas Hurwitz, le système  $(\mathcal{R}_{L_x}^{1_2})$  n'est pas stabilisable. Par conséquent, le système  $(\mathcal{R}_{L_x}^{1_2})$  n'est pas commandable sans la prise en compte des forces d'interactions entre les microrobots. Donc pour pouvoir commander les deux microrobots avec la même entrée de commande, il est nécessaire de prendre en considération les forces d'interaction entre les microrobots dans le modèle dynamique.

2. Dans le cas où  $e_{jk} \neq 0$  et  $e_{kj} \neq 0$ , la matrice de commandabilité est donnée ci-après :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_j & -\alpha_j a_j & \alpha_j a_j^2 + 4e_{jk}\chi_3 f^{-5} \\ 0 & \alpha_k & -\alpha_k a_k & \alpha_k a_k^2 - 4e_{kj}\chi_3 f^{-5} \\ \alpha_j & -\alpha_j a_j & \alpha_j a_j^2 + 4e_{jk}\chi_3 f^{-5} & -\alpha_j a_j^3 - 4e_{jk}[(2a_j + a_k)\chi_3 + \chi_4] f^{-5} \\ \alpha_k & -\alpha_k a_k & \alpha_k a_k^2 - 4e_{kj}\chi_3 f^{-5} & -\alpha_k a_k^3 + 4e_{kj}[(a_j + 2a_k)\chi_3 + \chi_4] f^{-5} \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

On obtient alors :

$$|\Gamma| = 4\chi_1 f^{-10} [\chi_2 \chi_4 f^5 - 4\chi_3^2 \chi_1]$$

Si  $(a_j = a_k$  et  $\alpha_j = \alpha_k)$ , alors on a  $|\Gamma| = 0$ ,  $\forall f \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  : le système  $(\mathcal{R}_{L_x}^{1_2})$  n'est pas commandable.

3. Si  $f = f^*$  alors  $|\Gamma| = 0$ , et le système  $(\mathcal{R}_{L_x}^{1_2})$  n'est pas commandable.

En résumé, le système  $(\mathcal{R}_{L_x}^{1_2})$  est commandable si les deux microrobots ne sont pas identiques et si la valeur de  $f$  choisie est différente de  $f^*$ . Attention toutefois, car si la commandabilité du système  $(\mathcal{R}_{L_x}^{1_2})$  implique celle du système non linéaire  $(\mathcal{R}^{1_2})$ , la non commandabilité du système  $(\mathcal{R}_{L_x}^{1_2})$  n'implique pas nécessairement la non commandabilité du système  $(\mathcal{R}^{1_2})$ .

□

### 3.5.1.1.2.2 $f(t)$ variable dans le temps

**Lemme 3.5.2 [Condition suffisante de non commandabilité]** : Le système  $(\mathcal{R}_{L_x}^{1_2})$  n'est pas commandable si l'une des conditions suivantes est satisfaite.

1. La condition 1 ou 2 du lemme (3.5.1) est satisfaite.
2.  $f(t)$  est solution de l'équation différentielle suivante :

$$5\chi_2\chi_3\dot{f}(t)f^4(t) - \chi_2\chi_4f^5(t) + 4\chi_1\chi_3^2 = 0 \quad (3.90)$$

**Démonstration:**

En utilisant (3.4), on obtient la matrice de commandabilité  $\Gamma(t)$  pour le système  $(\mathcal{R}_{L_x}^{1_2})$  donnée par (3.84) :

$$\Gamma(t) = \Gamma + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20e_{jk}\chi_3\dot{f}f^{-6} \\ 0 & 0 & 0 & -20e_{kj}\chi_3\dot{f}f^{-6} \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

où  $\Gamma$  est donnée par (3.89), le déterminant de  $\Gamma(t)$  est donné ci-après :

$$|\Gamma(t)| = -\frac{4\chi_1(4\chi_1\chi_3^2 - \chi_2\chi_4f^5(t) + 5\chi_2\chi_3\dot{f}(t)f^4(t))}{f^{10}(t)}$$

1. Si  $e_{jk} = e_{kj} = 0$  alors  $\chi_1 = 0$  et donc  $|\Gamma(t)| = 0$ .
2. Si les deux microrobots sont identiques ( $\chi_2 = \chi_3 = 0$ ), alors  $|\Gamma(t)| = 0$ .
3. Si la fonction  $f(t)$  est solution de (3.90), on obtient alors  $|\Gamma(t)| = 0$ .

Dans les 3 cas on obtient  $|\Gamma(t)| = 0$ , par conséquent le système  $(\mathcal{R}_{L_x}^{1_2})$  n'est pas commandable.

Dans ce cas aussi, le système  $(\mathcal{R}_{L_x}^{1_2})$  est commandable le long d'une trajectoire de référence si les deux microrobots ne sont pas identiques et si la fonction  $f(t)$  choisie ne vérifie pas l'équation différentielle (3.90). La conclusion est la même que le cas précédent, c'est-à-dire le système  $(\mathcal{R}^{1_2})$  est localement commandable lorsque son système linéarisé  $(\mathcal{R}_{L_x}^{1_2})$  est commandable.

□

### 3.5.1.2 Planification de trajectoire

La planification de trajectoire est une étape importante avant de synthétiser une loi de commande pour ce type de système. Cette étape nous permet de définir toutes les trajectoires admissibles du système, ainsi que les commandes de référence permettant d'atteindre les trajectoires admissibles. L'étude sera divisée en deux cas : trajectoire constante ( $f(t)$  constante) et trajectoire variable ( $f(t)$  variable dans le temps). En remplaçant  $x$  et  $u$  respectivement par  $x_r = x_{ref}(t)$  et  $u_r$  dans (3.84), on obtient alors :

$$(\mathcal{R}_{Lx_r}^{12}) : \dot{x}_r(t) = A_x(t)x_r(t) + B_x(t)u_r(t) \quad (3.92)$$

On développe (3.92), et on obtient :

$$\begin{cases} \ddot{x}_{jr} = \frac{4e_{jk}}{f^5}(x_{jr} - x_{kr}) - a_j\dot{x}_{jr} + \alpha_j u_r \\ \ddot{x}_{kr} = -\frac{4e_{kj}}{f^5}(x_{jr} - x_{kr}) - a_k\dot{x}_{kr} + \alpha_k u_r \end{cases} \quad (3.93)$$

**3.5.1.2.1 Trajectoire constante** Dans ce cas, la fonction  $f(t)$  est une constante par conséquent :

$$\begin{aligned} x_{jr} - x_{kr} &= f \\ \dot{x}_{jr} - \dot{x}_{kr} &= 0 \\ \ddot{x}_{jr} - \ddot{x}_{kr} &= 0 \end{aligned} \quad (3.94)$$

En utilisant l'équation (3.93), les trajectoires de référence admissibles sont solutions de l'équation différentielle linéaire ci-après :

$$\chi_3\ddot{x}_{ir} - \chi_4\dot{x}_{ir} = -\frac{4\chi_1}{f^4}, \quad i \in \{j, k\} \quad (3.95)$$

1. Si  $\chi_3 \neq 0$  et  $\chi_4 \neq 0$ , la position de référence  $x_{ir}$  est obtenue ainsi :

$$x_{ir}(t) = x_{ir}(0) + \frac{\chi_3}{\chi_4} \left( \dot{x}_{ir}(0) - \frac{4\chi_1}{\chi_4 f^4} \right) \left( e^{\frac{\chi_4}{\chi_3} t} - 1 \right) + \frac{4\chi_1}{\chi_4 f^4} t$$

2. Si  $\chi_3 = 0$  et  $\chi_4 \neq 0$ , la position de référence  $x_{ir}$  est donnée par :

$$x_{ir}(t) = \frac{4\chi_1}{\chi_4 f^4} t + x_{ir}(0)$$

3. Si  $\chi_3 \neq 0$  et  $\chi_4 = 0$ , la position de référence  $x_{ir}$  est donnée par :

$$x_{ir}(t) = -\frac{2\chi_1}{\chi_3 f^4} t^2 + \dot{x}_{ir}(0)t + x_{ir}(0)$$

**3.5.1.2.2 Trajectoire variable** Dans ce cas plus général, nous avons :

$$\begin{aligned} x_{jr} - x_{kr} &= f(t) \\ \dot{x}_{jr} - \dot{x}_{kr} &= \dot{f}(t) \\ \ddot{x}_{jr} - \ddot{x}_{kr} &= \ddot{f}(t) \end{aligned} \quad (3.96)$$

En utilisant l'équation (3.93), les trajectoires de référence admissibles sont solutions de l'équation différentielle linéaire suivante :

$$\chi_3 \ddot{x}_{ir} - \chi_4 \dot{x}_{ir} = \underbrace{\alpha_i \ddot{f} + \alpha_i a_l \dot{f}}_{g_i(t)} - \frac{4\chi_1}{f^4}, \quad (i, l) \in \{j, k\}^2, \quad i \neq l \quad (3.97)$$

1. Si  $\chi_3 \neq 0$  et  $\chi_4 \neq 0$ , la position de référence  $x_{ir}$  est donnée par (voir Annexe A.5 pour un exemple du choix de  $f(t)$ ) :

$$x_{ir}(t) = \dot{x}_{ir}(0) \frac{\chi_3}{\chi_4} \left[ e^{\frac{\chi_4}{\chi_3} t} - 1 \right] + x_{ir}(0) + \frac{1}{\chi_4} \left[ \int_0^t g_i(\tau) e^{-\frac{\chi_4}{\chi_3} \tau} d\tau \right] e^{\frac{\chi_4}{\chi_3} t} - \frac{1}{\chi_4} \int_0^t g_i(\tau) d\tau \quad (3.98)$$

2. Si  $\chi_3 = 0$  et  $\chi_4 \neq 0$ , la position de référence  $x_{ir}$  est donnée par :

$$x_{ir}(t) = -\frac{1}{\chi_4} \int_0^t g_i(\tau) d\tau + x_{ir}(0) \quad (3.99)$$

3. Si  $\chi_3 \neq 0$  et  $\chi_4 = 0$ , la position de référence  $x_{ir}$  est donnée par :

$$x_{ir}(t) = \frac{1}{\chi_3} \int_0^t \left[ \int_0^x g_i(\tau) d\tau \right] dx + \dot{x}_{ir}(0)t + x_{ir}(0) \quad (3.100)$$

### 3.5.1.3 Loi de commande

Dans le cas où  $f(t)$  est une constante, le système  $(\mathcal{R}_{Lx}^{1_2})$  donné par (3.84) est stationnaire. On peut alors facilement synthétiser une loi de commande par retour d'état. Posons alors  $u = \bar{u} + u_r$  et  $\bar{x} = x - x_r$ , la représentation d'état en  $\bar{x}$  est déduite alors de celle de  $(\mathcal{R}_{Lx}^{1_2})$  et  $(\mathcal{R}_{Lx_r}^{1_2})$  données respectivement par (3.84) et (3.92) :

$$(\mathcal{R}_{L\bar{x}}^{1_2}) : \dot{\bar{x}}(t) = A_x(t)\bar{x}(t) + B_x(t)\bar{u}(t) \quad (3.101)$$

où  $\bar{u}$  est calculé par un retour d'état et  $u_r$  en utilisant (3.93) :

$$\begin{aligned}
 \bar{u} &= -K_x \bar{x} \\
 u_r &= \frac{1}{\alpha_j} \left[ \ddot{x}_{jr} + a_j \dot{x}_{jr} - \frac{4e_{jk}}{f^4} \right] \\
 &= \frac{1}{\alpha_k} \left[ \ddot{x}_{kr} + a_k \dot{x}_{kr} + \frac{4e_{kj}}{f^4} \right]
 \end{aligned} \tag{3.102}$$

où  $K_x \in \mathcal{M}_{1 \times 4}(\mathbb{R})$  est calculé pour que la matrice  $(A_x - B_x K_x)$  soit Hurwitz.

Dans le cas où  $f(t)$  est variable dans le temps, le système  $(\mathcal{R}_{L_x}^{1_2})$  donné par (3.84) est à temps variant, par conséquent la synthèse d'une loi de commande par retour d'état nécessite la résolution d'une équation différentielle de Ricatti, or cette dernière n'est pas facile à résoudre analytiquement. Pour remédier à ce problème, la commande sera obtenue par la méthode du backstepping que nous détaillons maintenant.

**3.5.1.3.1 Mise sous forme triangulaire** Ce paragraphe sera consacré à la mise sous forme triangulaire du système  $(\mathcal{R}_{L_x}^{1_2})$  donné par (3.84). On considère le lemme suivant :

**Lemme 3.5.3 :** Soit  $T_z(t) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  une matrice inversible. On pose  $z(t) = T_z(t)x(t)$  et en utilisant la représentation d'état du système  $(\mathcal{R}_{L_x}^{1_2})$  donnée par (3.84), on obtient :

$$(\mathcal{R}_{L_z}^{1_2}) : \dot{z}(t) = A_z(t)z(t) + B_z(t)u(t) \tag{3.103}$$

où les matrices  $A_z(t) = T_z(t)A_x(t)T_z^{-1}(t) + \dot{T}_z(t)T_z^{-1}(t)$ ,  $B_z(t) = T_z(t)B_x(t)$  sont données ici :

$$A_z(t) = \begin{bmatrix} q_{11}(t) & 1 & 0 & 0 \\ q_{21}(t) & 0 & 1 & 0 \\ q_{31}(t) & 0 & 0 & 1 \\ q_{41}(t) & q_{42}(t) & q_{43}(t) & q_{44}(t) \end{bmatrix} \quad B_z(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.104}$$

et la matrice  $T_z^{-1}(t)$  est donnée par :

$$T_z^{-1}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{4\chi_1}{f^5(t)} & \alpha_j a_k & \alpha_j & 0 \\ -\frac{4\chi_1}{f^5(t)} & \alpha_k a_j & \alpha_k & 0 \\ -\frac{20\chi_1 f(t)}{f^6(t)} & -\frac{4\chi_1}{f^5(t)} & \alpha_j a_k & \alpha_j \\ -\frac{20\chi_1 f(t)}{f^6(t)} & -\frac{4\chi_1}{f^5(t)} & \alpha_k a_j & \alpha_k \end{bmatrix} \tag{3.105}$$

Les coefficients  $q_{ij}(t)$  dont l'expression est peu digeste sont donnés par (3.106) :

$$\begin{aligned}
D_c &= 5\chi_2\chi_3f^4\dot{f} + 4\chi_1\chi_3^2 - \chi_2\chi_4f^5 \\
q_{11}(t) &= \frac{5(8\chi_1\chi_3^2\dot{f} + 6\chi_2\chi_3f^4\dot{f}^2 - \chi_2\chi_3f^5\ddot{f} - \chi_2\chi_4f^5\dot{f})}{fD_c} \\
q_{21}(t) &= -\frac{20\chi_1\chi_3(4\chi_3\dot{f}^2 + \chi_3f\ddot{f} - \chi_4f\dot{f})}{f^2D_c} \\
q_{31}(t) &= -\frac{20\chi_1\chi_4(4\chi_3\dot{f}^2 + \chi_3f\ddot{f} - \chi_4f\dot{f})}{f^2D_c} \\
q_{41}(t) &= -\frac{20\chi_1(\chi_4^2f^5\ddot{f} - 4(a_j - a_k)\chi_1\chi_3\dot{f} + f^5\dot{f}((a_j + a_k)\chi_4^2 + a_ja_k\chi_3\chi_4) + (4\chi_4^2 - 5(a_j - a_k)\chi_2)f^4\dot{f}^2)}{f^6D_c} \\
q_{42}(t) &= \frac{4(a_je_{kj} + a_ke_{jk})}{f^5} \\
q_{43}(t) &= -a_ja_k + \frac{4(e_{jk} + e_{kj})}{f^5} \\
q_{44}(t) &= -(a_j + a_k)
\end{aligned}$$

(3.106)

### 3.5.1.3.2 Stabilité du contrôleur

**Proposition 3.5.4 :** Soit  $x_{ref}(t)$  donnée par (3.82) vérifiant (3.83),  $z_{ref}(t) = [z_r(t), \dot{z}_r(t)] = [T_z x_{ref}, A_z z_r + B_z u_r]$ , et les matrices  $A_z$ ,  $B_z$  et  $T_z$  données dans le lemme 3.5.3. La loi de commande par backstepping  $u(t) = \kappa(z(t), z_r(t))$  donnée par :

$$\kappa(z(t), z_r(t)) = \sum_{i=1}^4 \delta_i(t) [z_i(t) - z_{ir}(t)] + u_r(t) \quad (3.107)$$

$$\begin{aligned}
u_r(t) &= \frac{1}{\alpha_j} \left[ \ddot{x}_{jr}(t) + a_j \dot{x}_{jr} - \frac{4e_{jk}}{f^4} \right] \\
&= \frac{1}{\alpha_k} \left[ \ddot{x}_{kr}(t) + a_k \dot{x}_{kr} + \frac{4e_{kj}}{f^4} \right]
\end{aligned} \quad (3.108)$$

$$\begin{aligned}
 \delta_4 &= - \left[ \sum_{i=1}^4 k_i + q_{11} + q_{44} \right], \quad \delta_3 = - \left[ \left( \sum_{i=1}^4 k_i \right) q_{11} + \left( \sum_{i=1}^4 \sum_{j=i+1}^4 k_i k_j \right) + q_{11}^2 + q_{21} + 3\dot{q}_{11} + q_{43} + 3 \right] \\
 \delta_2 &= - \left[ \left( \sum_{i=1}^4 k_i \right) \left( 1 + q_{11}^2 + 2\dot{q}_{11} + q_{21} \right) + \left( \sum_{i=1}^4 \sum_{j=i+1}^4 k_i k_j \right) q_{11} + q_{11}^3 + 3q_{11} + 3\ddot{q}_{11} + 2\dot{q}_{21} + 2q_{11}q_{21} \right. \\
 &\quad \left. + 5q_{11}\dot{q}_{11} + k_1 + k_4 + q_{31} + q_{42} + \left( \sum_{i=1}^4 \sum_{j=i+1}^4 \sum_{h=j+1}^4 k_i k_j k_h \right) \right] \\
 \delta_1 &= - \left[ \left( \sum_{i=1}^4 k_i \right) \left( q_{11}^3 + \dot{q}_{21} + q_{11} + \ddot{q}_{11} + 3q_{11}\dot{q}_{11} + 2q_{11}q_{21} + q_{31} \right) + \left( \sum_{i=1}^4 \sum_{j=i+1}^4 k_i k_j \right) \left( q_{11}^2 + q_{21} + \dot{q}_{11} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left( \sum_{i=1}^4 \sum_{j=i+1}^4 \sum_{h=j+1}^4 k_i k_j k_h \right) q_{11} + q_{11}^4 + 3q_{11}^2 + q_{21}^2 + 3q_{21} + q_{11}^{(3)} + 3\dot{q}_{11}^2 + 3\dot{q}_{11} + \ddot{q}_{21} + \dot{q}_{31} + 3q_{11}\dot{q}_{21} \right. \\
 &\quad \left. + 2q_{11}q_{31} + 4q_{11}\ddot{q}_{11} + 4q_{21}\dot{q}_{11} + 6q_{11}^2\dot{q}_{11} + q_{41} + 3q_{11}^2q_{21} + 1 + k_1k_2 + k_1k_4 + k_3k_4 + k_1k_2k_3k_4 + (k_1 + k_4)q_{11} \right] \\
 &\quad k_i > 0
 \end{aligned} \tag{3.109}$$

avec les coefficients  $\delta_i(t)$  donnés par (3.109), et  $u_r(t)$  par (3.108), stabilise le système  $(\mathcal{R}_{L_z}^{12})$  donné par (3.103) le long de la trajectoire  $z_{ref}$ . On obtient donc la stabilité du système  $(\mathcal{R}_{L_x}^{12})$  le long de  $x_{ref}$ .

**Démonstration:**

Soient  $y_i = z_i - z_{ir}$ ,  $\bar{z}_1 = y_1$  pour  $i = 1, \dots, 4$  et  $\bar{z}_j = y_j - z_{jd}$ , avec  $z_{jd}$  des fonctions stabilisantes pour  $j = 2, 3, 4$ .

**Étape 1 :** Soit  $V_1 = \frac{1}{2}\bar{z}_1^2$  une fonction de Lyapunov. Sa dérivée le long des trajectoires du système  $(\mathcal{R}_{L_z}^{12})$  est :

$$\dot{V}_1 = \bar{z}_1(y_2 + q_{11}\bar{z}_1) = \bar{z}_1(\bar{z}_2 + q_{11}\bar{z}_1 + z_{2d}) \tag{3.110}$$

Prenons  $z_{2d} = -(k_1 + q_{11})\bar{z}_1$  avec  $k_1 > 0$ , on obtient :

$$\dot{V}_1 = -k_1\bar{z}_1^2 + \bar{z}_1\bar{z}_2$$

Les dérivées de  $\bar{z}_1$  et  $\bar{z}_2$  sont :

$$\begin{aligned}
 \dot{\bar{z}}_1 &= \bar{z}_2 - k_1\bar{z}_1 \\
 \dot{\bar{z}}_2 &= y_3 + (k_1 + q_{11})\bar{z}_2 - [k_1(k_1 + q_{11}) - \dot{q}_{11} - q_{21}]\bar{z}_1
 \end{aligned} \tag{3.111}$$

**Étape 2 :** Soit  $V_2 = V_1 + \frac{1}{2}\bar{z}_2^2$ . En utilisant (3.111), on obtient :

$$\dot{V}_2 = -k_1\bar{z}_1^2 + \bar{z}_2[\bar{z}_3 + z_{3d} + (k_1 + q_{11})\bar{z}_2 - (k_1(k_1 + q_{11}) - \dot{q}_{11} - q_{21} - 1)\bar{z}_1] \tag{3.112}$$

Prenons

$$z_{3d} = - \left[ \sum_{i=1}^2 k_i + q_{11} \right] \bar{z}_2 + \left[ k_1(k_1 + q_{11}) - \dot{q}_{11} - q_{21} - 1 \right] \bar{z}_1$$

on obtient :

$$\dot{V}_2 = - \sum_{i=1}^2 k_i \bar{z}_i^2 + \bar{z}_2 \bar{z}_3$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}}_2 &= \bar{z}_3 - k_2 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 \\ \dot{\bar{z}}_3 &= y_4 + q_{31} \bar{z}_1 - \dot{z}_{3d} \\ &= \left[ \sum_{i=1}^2 k_i + q_{11} \right] \bar{z}_3 - \left[ \sum_{i=1}^2 k_i^2 + k_1 k_2 - 1 + \left( \sum_{i=1}^2 k_i \right) q_{11} - 2\dot{q}_{11} - q_{21} \right] \bar{z}_2 \\ &\quad - \left[ \sum_{i=1}^2 (3-i)k_i - k_1^3 + (1-k_1^2)q_{11} + 2k_1\dot{q}_{11} - \ddot{q}_{11} + k_1 q_{21} - \dot{q}_{21} - q_{31} \right] \bar{z}_1 + \bar{z}_4 + z_{4d} \end{aligned} \quad (3.113)$$

**Étape 3 :** Soit  $V_3 = V_2 + \frac{1}{2}\bar{z}_3^2$ . En utilisant (3.113), il vient :

$$\dot{V}_3 = - \sum_{i=1}^2 k_i \bar{z}_i^2 + \bar{z}_3(\dot{\bar{z}}_3 + \bar{z}_2) \quad (3.114)$$

En posant  $z_{4d} = -k_3 \bar{z}_3 - \bar{z}_2 - \dot{\bar{z}}_3$ , on obtient :

$$\dot{V}_3 = - \sum_{i=1}^3 k_i \bar{z}_i^2 + \bar{z}_3 \bar{z}_4$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}}_3 &= \bar{z}_4 - k_3 \bar{z}_3 - \bar{z}_2 \\ \dot{\bar{z}}_4 &= u - u_r + \sum_{i=1}^4 q_{4i} y_i - \dot{z}_{4d} \end{aligned} \quad (3.115)$$

**Étape 4 :** Soit  $V_4 = V_3 + \frac{1}{2}\bar{z}_4^2$ . En utilisant (3.115), on a enfin :

$$\dot{V}_4 = - \sum_{i=1}^3 k_i \bar{z}_i^2 + \bar{z}_4 \left( u - u_r + \sum_{i=1}^4 q_{4i} y_i - \dot{z}_{4d} + \bar{z}_3 \right) \quad (3.116)$$

Le choix de l'entrée de commande  $u$  donnée par (3.107) conduit alors à :

$$\begin{aligned} \dot{V}_4 &= - \sum_{i=1}^4 k_i \bar{z}_i^2 \\ \implies \dot{V}_4 &\leq -2\min(2k_i)V_4 \end{aligned}$$

Par conséquent  $\bar{z}_i$  converge exponentiellement vers zéro, il en va de même pour  $z_i - z_{ir}$ , et donc  $x_i$  converge exponentiellement vers  $x_{ir}$ .

□

### 3.5.2 Modèle 2D

Dans cette section, nous allons étudier la commandabilité du système linéarisé de  $(\mathcal{R}^{22})$  le long d'une trajectoire de référence.

#### 3.5.2.1 Linéarisation autour d'une trajectoire

L'objectif est d'étudier la commandabilité des deux microrobots ( $j$ ) et ( $k$ ) le long d'une trajectoire de référence donnée. Pour cela, on considère la trajectoire de référence  $x_{ref} = [x_r(t), \dot{x}_r(t), \ddot{x}_r(t)]$ , avec  $x_r(t) = [x_{jr}(t), z_{jr}(t), x_{kr}(t), z_{kr}(t)]$ . Pour une trajectoire en position  $x_r(t)$  donnée, il existe deux fonctions  $f_x(t) \in \mathcal{F}_x \subset \mathbb{R}$  et  $f_z(t) \in \mathcal{F}_z \subset \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  telles que :

$$\begin{cases} f_x(t) &= x_{jr}(t) - x_{kr}(t) \\ f_z(t) &= z_{jr}(t) - z_{kr}(t) \end{cases} \quad (3.117)$$

**3.5.2.1.1 Système linéaire** Le système linéarisé de  $(\mathcal{R}^{22})$  donné par (2.44), autour d'une trajectoire de référence  $x_{ref}$  vérifiant le système (3.117) est donné par :

$$(\mathcal{R}_{LX}^{22}) : \dot{X} = A(t)X + B(t)U + W \quad (3.118)$$

où  $U = [u_1 \ u_2]^T$  et les matrices  $A(t)$ ,  $B(t)$  et  $W$  sont données par :

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0_2 & 0_2 & I_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & 0_2 & I_2 \\ e_{jk}\Delta(t) & -e_{jk}\Delta(t) & -a_j I_2 & 0_2 \\ -e_{kj}\Delta(t) & e_{kj}\Delta(t) & 0_2 & -a_k I_2 \end{bmatrix} \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0_2 \\ 0_2 \\ \alpha_j I_2 \\ \alpha_k I_2 \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} 0_{21} \\ 0_{21} \\ W_j \\ W_k \end{bmatrix} \quad (3.119)$$

La matrice  $\Delta(t)$  et le vecteur  $W_i$  sont donnés ci-dessous :

$$\Delta(t) = \begin{bmatrix} \delta_1(t) & \delta_2(t) \\ \delta_3(t) & \delta_4(t) \end{bmatrix} \quad W_i = \begin{bmatrix} 0 \\ w_i \end{bmatrix}, \quad i \in \{j, k\} \quad (3.120)$$

En posant  $\sigma_{xz} = \sqrt{f_x^2(t) + f_z^2(t)}$ , les paramètres  $\delta_i(t)$  sont donnés ci-après :

$$\begin{aligned} \delta_1(t) &= \frac{8f_x^4 - 24f_x^2 f_z^2 + 3f_z^4}{\sigma_{xz}^9} & \delta_3(t) &= \frac{-12\sigma_{xz}^4 + 15f_z^2 \sigma_{xz}^2 - 10f_z^3 f_x + 25f_z f_x^3}{\sigma_{xz}^9} \\ \delta_2(t) &= \frac{5f_x f_z (4f_x^2 - 3f_z^2)}{\sigma_{xz}^9} & \delta_4(t) &= -\frac{5f_x (3f_z \sigma_{xz}^2 + f_x^3 - 6f_z^2 f_x)}{\sigma_{xz}^9} \end{aligned} \quad (3.121)$$

**3.5.2.1.2 Etude de commandabilité** On s'intéresse dans notre étude à des conditions suffisantes de commandabilité du système  $(\mathcal{R}_{L_X}^{22})$  donné par (3.118). Cette étude consiste à déterminer le rang de la matrice de commandabilité de la paire  $(A(t), B(t))$ . On distingue alors deux cas selon que les fonctions  $f_x$  et  $f_z$  sont stationnaires ou non.

**3.5.2.1.2.1  $f_x$  et  $f_z$  sont constantes** Dans ce cas, le système donné par (3.118) est stationnaire, et sa matrice de commandabilité  $\Gamma$  est donnée par le critère de Kalman :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^7 B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{10} & B_{11} & \dots & B_{17} \\ B_{20} & B_{21} & \dots & B_{27} \\ B_{30} & B_{31} & \dots & B_{37} \\ B_{40} & B_{41} & \dots & B_{47} \end{bmatrix} \quad (3.122)$$

où les sous matrices  $B_{ih}$  pour  $1 \leq i \leq 4$  et  $0 \leq h \leq 7$  sont les suivantes :

$$\begin{cases} B_{1(h+1)} = B_{3h} \\ B_{2(h+1)} = B_{4h} \\ B_{3(h+1)} = e_{jk}\Delta(t)(B_{1h} - B_{2h}) - a_j B_{3h} \\ B_{4(h+1)} = -e_{kj}\Delta(t)(B_{1h} - B_{2h}) - a_k B_{4h} \end{cases} \quad (3.123)$$

avec  $B_{10} = B_{20} = 0_2$ ,  $B_{30} = \alpha_j I_2$  et  $B_{40} = \alpha_k I_2$ .  $0_2$  et  $I_2$  sont respectivement les matrices nulle et identité dans  $\mathbb{R}^2$ .

On extrait la sous matrice  $\Gamma_3 = [B \ AB \ A^2 B \ A^3 B]$  de la matrice  $\Gamma$ . Le déterminant de la matrice  $\Gamma_3$  est :

$$|\Gamma_3| = \chi_1^2 |\Delta| \left[ \chi_2^2 \chi_4^2 + \chi_3^4 \chi_1^2 |\Delta| - \chi_2 \chi_1 \chi_4 \chi_3^2 [\delta_1 + \delta_4] \right] \quad (3.124)$$

où  $|\cdot|$  représente le déterminant d'une matrice et les paramètres  $\chi_1$ ,  $\chi_2$ ,  $\chi_3$  et  $\chi_4$  sont donnés par (3.86).

La condition  $|\Gamma_3| \neq 0$  est suffisante pour que le système  $(\mathcal{R}_{L_X}^{22})$  donnée par (3.118) soit commandable le long de la trajectoire de référence  $x_{ref}$ .

**3.5.2.1.2.2  $f_x$  et  $f_z$  sont instationnaires** Dans ce cas, le système donné par (3.118) est temps variant, et sa matrice de commandabilité  $\Gamma(t)$  est donnée par :

$$\begin{cases} \Gamma(t) = [\Gamma_0(t) \ \dots \ \Gamma_7(t)] \\ \Gamma_0(t) = B(t) \\ \Gamma_{i+1}(t) = A(t)\Gamma_i(t) - \frac{d}{dt}\Gamma_i(t) \end{cases} \quad (3.125)$$

On extrait la sous matrice  $\Gamma_{13}(t) = [\Gamma_0(t) \ \Gamma_1(t) \ \Gamma_2(t) \ \Gamma_3(t)]$  de la matrice  $\Gamma(t)$ . Le déterminant de la matrice  $\Gamma_{13}(t)$  a pour expression :

$$\begin{aligned} |\Gamma_{13}| = & \chi_1^2 \left[ \chi_1^2 \chi_3^4 |\Delta|^2 + \chi_2 \chi_4 \left( \chi_2 \chi_4 - \chi_3^2 \chi_1 [\delta_1 + \delta_4] \right) |\Delta| + \left( \chi_2 \chi_3 \right)^2 |\dot{\Delta}| \right. \\ & \left. + \chi_2 \chi_3 \left( \chi_2 \chi_4 \text{Tr} [|\Delta| \Delta^{-1} \dot{\Delta}] - \chi_3^2 \chi_1 \text{Tr} [|\dot{\Delta}| \dot{\Delta}^{-1} \Delta^2] \right) \right] \end{aligned} \quad (3.126)$$

Tr désigne la trace d'une matrice, les paramètres  $\chi_1$ ,  $\chi_2$ ,  $\chi_3$  et  $\chi_4$  sont donnés par (3.86) et la matrice  $\Delta$  est donnée par (3.120) et (3.121).

Dans la suite pour simplifier l'étude de commandabilité, on prend  $\alpha_j = \alpha_k = \alpha$  on aura alors  $\chi_3 = 0$ ,  $\chi_4 = \alpha n_a$  et  $\chi_1 = \alpha n_e$  avec  $n_a = a_j - a_k$  et  $n_e = e_{jk} + e_{kj}$ . Les déterminants simplifiés des matrices  $\Gamma_3$  et  $\Gamma_{13}$  sont égaux à  $\alpha^8 n_e^2 n_a^4 |\Delta|$ . La condition suffisante de commandabilité dans les deux cas (système stationnaire et à temps variant) est  $|\Delta| \neq 0$  et  $n_a \neq 0$ .

### 3.5.2.2 Planification de trajectoire

Ce paragraphe sera consacré à la planification de trajectoire, pour cela on pose  $F = [f_x \ f_z]^T$  et  $X_{*r}(t) = [x_{*r}(t) \ z_{*r}(t)]^T$  avec  $* = j, k$ . Remplaçons dans (3.118)  $X$  et  $U$  respectivement par  $X_r$  et  $U_r$ , on obtient :

$$(\mathcal{R}_{LX_r}^{22}) : \dot{X}_r = A(t)X_r + B(t)U_r + W \quad (3.127)$$

Après simplification on obtient les équations suivantes :

$$\ddot{X}_{jr} = e_{jk} \Delta (X_{jr} - X_{kr}) - a_j \dot{X}_{jr} + \alpha_j I_2 U_r + W_j \quad (3.128)$$

$$\ddot{X}_{kr} = -e_{kj} \Delta (X_{jr} - X_{kr}) - a_k \dot{X}_{kr} + \alpha_k I_2 U_r + W_k \quad (3.129)$$

En multipliant (3.128) par  $\alpha_k$  et (3.129) par  $\alpha_j$  puis faisant la soustraction des deux équations et sachant que  $X_{jr} - X_{kr} = F$  on obtient alors les deux équations suivantes en  $j$  et  $k$  :

$$\chi_3 \ddot{X}_{jr} - \chi_4 \dot{X}_{jr} = \alpha_j \ddot{F} + \alpha_j a_k \dot{F} - \chi_1 \Delta F + \alpha_j W_k - \alpha_k W_j \quad (3.130)$$

$$\chi_3 \ddot{X}_{kr} - \chi_4 \dot{X}_{kr} = \alpha_k \ddot{F} + \alpha_k a_j \dot{F} - \chi_1 \Delta F + \alpha_j W_k - \alpha_k W_j \quad (3.131)$$

**3.5.2.2.1 Trajectoires constantes** Les équations (3.130) et (3.131) deviennent alors comme suit :

$$\chi_3 \ddot{X}_{jr} - \chi_4 \dot{X}_{jr} = s_m \quad (3.132)$$

$$\chi_3 \ddot{X}_{kr} - \chi_4 \dot{X}_{kr} = s_m \quad (3.133)$$

où  $s_m = -\chi_1 \Delta F + \alpha_j W_k - \alpha_k W_j$ . Les trajectoires admissibles dans ce cas sont solutions de (3.132) et (3.133), ce qui donne le résultat suivant :

- Si  $\chi_3 \neq 0$  et  $\chi_4 \neq 0$ , on obtient :

$$X_{ir}(t) = \left[ \frac{\chi_3 s_m}{\chi_4^2} + \frac{\chi_3 \dot{X}_{ir}(0)}{\chi_4} \right] \left[ e^{\frac{\chi_4}{\chi_3} t} - 1 \right] - \frac{s_m}{\chi_4} t + X_{ir}(0), \quad i \in \{j, k\} \quad (3.134)$$

- Si  $\chi_3 = 0$  et  $\chi_4 \neq 0$ , on obtient :

$$X_{ir}(t) = -\frac{s_m}{\chi_4} t + X_{ir}(0), \quad i \in \{j, k\} \quad (3.135)$$

- Si  $\chi_3 \neq 0$  et  $\chi_4 = 0$ , on obtient :

$$X_{ir}(t) = \frac{s_m}{2\chi_3} t^2 + \dot{X}_{ir}(0)t + X_{ir}(0), \quad i \in \{j, k\} \quad (3.136)$$

**3.5.2.2.2 Trajectoire instationnaire** Posons  $s_j(t) = \alpha_j \ddot{F}(t) + \alpha_j a_k \dot{F}(t) + s_m(t)$  et  $s_k(t) = \alpha_k \ddot{F}(t) + \alpha_k a_j \dot{F}(t) + s_m(t)$ . Les équations (3.130) et (3.131) deviennent alors :

$$\chi_3 \ddot{X}_{ir} - \chi_4 \dot{X}_{ir} = s_i, \quad i \in \{j, k\} \quad (3.137)$$

Les trajectoires admissibles dans ce cas sont solutions de (3.137) pour  $i \in \{j, k\}$ . On distingue alors trois cas :

- Si  $\chi_3 \neq 0$  et  $\chi_4 \neq 0$ , on obtient pour  $i \in \{j, k\}$  :

$$X_{ir}(t) = \dot{X}_{ir}(0) \frac{\chi_3}{\chi_4} \left[ e^{\frac{\chi_4}{\chi_3} t} - 1 \right] + \frac{e^{\frac{\chi_4}{\chi_3} t}}{\chi_4} \int_0^t \left[ s_i(\tau) e^{-\frac{\chi_4}{\chi_3} \tau} \right] d\tau - \frac{1}{\chi_4} \int_0^t s_i(\tau) d\tau + X_{ir}(0) \quad (3.138)$$

- Si  $\chi_3 = 0$  et  $\chi_4 \neq 0$ , on obtient pour  $i \in \{j, k\}$  :

$$X_{ir}(t) = -\frac{1}{\chi_4} \int_0^t s_i(\tau) d\tau + X_{ir}(0) \quad (3.139)$$

- Si  $\chi_3 \neq 0$  et  $\chi_4 = 0$ , on obtient pour  $i \in \{j, k\}$  :

$$X_{ir}(t) = \frac{1}{\chi_3} \int_0^t \left[ \int_0^x s_i(\tau) d\tau \right] dx + \dot{X}_{ir}(0)t + X_{ir}(0) \quad (3.140)$$

### 3.5.2.3 Loi de commande

Cette section sera consacrée à la détermination d'une loi de commande permettant de contrôler les deux microrobots le long de la trajectoire de référence. Dans le cas d'une distance fixe entre les deux microrobots, le système  $(\mathcal{R}_{LX}^{22})$  donné par (3.118) est stationnaire. La loi de commande

est facile à obtenir par retour d'état. En posant  $U = \bar{U} + U_r$  et  $\bar{X} = X - X_r$ , la représentation d'état en utilisant (3.118) et (3.127) est :

$$\dot{\bar{X}} = A\bar{X} + B\bar{U} \quad (3.141)$$

Calculons  $\bar{U}$  par retour d'état et  $U_r$  en utilisant (3.128) , on obtient alors :

$$\begin{aligned} \bar{U} &= -K\bar{X} \\ U_r &= \frac{\ddot{X}_{jr} + a_j \dot{X}_{jr} - e_{jk} \Delta F - W_j}{\alpha_j} \end{aligned} \quad (3.142)$$

où le gain  $K \in \mathcal{M}_{2 \times 8}(\mathbb{R})$  est calculé pour avoir la matrice  $(A - BK)$  Hurwitz.

Dans le cas général, le système  $(\mathcal{R}_{L_X}^{22})$  donné par (3.118) est à temps variant et nous détaillons la synthèse dans la suite.

**3.5.2.3.1 Mise sous forme triangulaire (feedback form)** La synthèse d'une loi de commande directement pour le système  $(\mathcal{R}_{L_X}^{22})$  à temps variant est difficile à calculer. Pour remédier à ce problème, on peut transformer le système donné par (3.118) sous forme triangulaire dans le but de synthétiser une loi de commande par backstepping.

Pour simplifier l'étude, on prend  $\alpha_j = \alpha_k = \alpha$ ,  $n_a \neq 0$  et  $|\Delta| \neq 0$  : le système  $(\mathcal{R}_{L_X}^{22})$  est donc commandable. On pose  $U_\alpha = \alpha U$  et  $U_{\alpha r} = \alpha U_r$ . On note  $B_\alpha = [b_1 \ b_2] = B/\alpha$  avec  $b_1 = [0_{14} \ 1 \ 0 \ 1 \ 0]^T$  et  $b_2 = [0_{14} \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]^T$ . Les indices de commandabilité  $\mu_{u_1}$  et  $\mu_{u_2}$  sont égaux à 4. On construit la matrice  $\Lambda$  suivante :

$$\begin{aligned} \Lambda &= \begin{bmatrix} b_1 & \dots & A^{\mu_{u_1}-1} & b_2 & \dots & A^{\mu_{u_2}-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -a_j & a_j^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a_j & a_j^2 \\ 0 & 1 & -a_k & a_k^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a_k & a_k^2 \\ 1 & -a_j & a_j^2 & -a_j^3 - e_{jk} n_a \delta_1 & 0 & 0 & 0 & -e_{jk} n_a \delta_2 \\ 0 & 0 & 0 & -e_{jk} n_a \delta_3 & 1 & -a_j & a_j^2 & -a_j^3 - e_{jk} n_a \delta_4 \\ 1 & -a_k & a_k^2 & -a_k^3 + e_{kj} n_a \delta_1 & 0 & 0 & 0 & e_{kj} n_a \delta_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_{kj} n_a \delta_3 & 1 & -a_k & a_k^2 & -a_k^3 + e_{kj} n_a \delta_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.143)$$

On note  $L_{u_1}$  la  $\mu_{u_1}$ -ème ligne et  $L_{u_2}$  la  $\mu_{u_1} + \mu_{u_2}$ -ème ligne de la matrice  $\Lambda^{-1}$ . On construit la matrice  $T_z^T = [L_{u_1}^T \ L_{u_2}^T \ \dots \ (L_{u_1} A^{\mu_{u_1}})^T \ (L_{u_2} A^{\mu_{u_2}})^T]$ , dont l'expression est :

$$T_z = \frac{1}{n_a n_e} \begin{bmatrix} -a_j \Delta^{-1}(t) & a_k \Delta^{-1}(t) & -\Delta^{-1}(t) & \Delta^{-1}(t) \\ -n_e I_2 & n_e I_2 & 0_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & -n_e I_2 & n_e I_2 \\ -n_e^2 \Delta(t) & n_e^2 \Delta(t) & n_e a_j I_2 & -n_e a_k I_2 \end{bmatrix} \quad (3.144)$$

et celle de son inverse est :

$$T_z^{-1} = \begin{bmatrix} -n_e \Delta(t) & a_k I_2 & I_2 & 0_2 \\ -n_e \Delta(t) & a_j I_2 & I_2 & 0_2 \\ 0_2 & -n_e \Delta(t) & a_k I_2 & I_2 \\ 0_2 & -n_e \Delta(t) & a_j I_2 & I_2 \end{bmatrix} \quad (3.145)$$

Posons  $\bar{Z} = Z - Z_r = T_z \bar{X}$ , la dynamique en  $\bar{Z}$  est alors :

$$(\mathcal{R}_{L\bar{Z}}^{22}) : \dot{\bar{Z}} = A_z(t) \bar{Z} + B_z(t) \bar{U}_\alpha \quad (3.146)$$

où  $\bar{U}_\alpha = \alpha[u_1 - u_{1r} \quad u_2 - u_{2r}]^T$  et les matrices  $A_z(t) = T_z(t)A(t)T_z^{-1}(t) + \dot{T}_z(t)T_z^{-1}(t)$  et  $B_z(t) = T_z(t)B_\alpha(t)$  sont alors :

$$A_z(t) = \begin{bmatrix} A_{z11} & I_2 & 0_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & I_2 & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & 0_2 & I_2 \\ 0_2 & A_{z42} & A_{z43} & A_{z44} \end{bmatrix} \quad (3.147)$$

$$B_z^T(t) = \begin{bmatrix} 0_2 & 0_2 & 0_2 & I_2 \end{bmatrix}$$

Posons  $\chi_5 = a_j e_{kj} + a_k e_{jk}$ , les matrices  $A_{zih}$  s'expriment comme :

$$\begin{aligned} A_{z11} &= -\Delta^{-1}(t) \dot{\Delta}(t) & A_{z42} &= n_e \dot{\Delta}(t) + \chi_5 \Delta(t) \\ A_{z43} &= n_e \Delta(t) - a_j a_k I_2 & A_{z44} &= -(a_j + a_k) I_2 \end{aligned} \quad (3.148)$$

**3.5.2.3.2 Stabilité du contrôleur** Cette section est consacrée à la synthèse d'une loi de commande par backstepping pour le système  $(\mathcal{R}_{L\bar{Z}}^{22})$  donné par (3.146).

**Proposition 3.5.5 :** Soit  $X_{ref}(t) = [x_r(t), \dot{x}_r(t)]$  vérifiant (3.117) et  $Z_{ref}(t) = [Z_r(t), \dot{Z}_r(t)]$  :

$$Z_{ref}(t) = [T_z X_{ref}, A_z Z_r + B_z U_{\alpha r} + W]$$

et les matrices  $A_z$  et  $B_z$  données par (3.147) et (3.148). La loi de commande par backstepping  $\bar{U}_\alpha = \kappa(\bar{Z}, \tilde{Z})$  donnée par :

$$\kappa(\bar{Z}, \tilde{Z}) = \sum_{i=1}^4 \Delta_i \tilde{Z}_i - \sum_{i=2}^4 A_{z4i} \bar{Z}_i \quad (3.149)$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_4 &= -\left[ \sum_{i=1}^4 K_i + A_{z_{11}} \right] \\
 \Delta_3 &= \left[ \sum_{i=1}^3 K_i^2 + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=i+1}^3 K_i K_j + A_{z_{11}} \left( \sum_{i=1}^3 K_i \right) - 3\dot{A}_{z_{11}} - 3I_2 \right] \\
 \Delta_2 &= \left[ 3K_1 + 4K_2 + K_3 - \sum_{i=1}^2 K_i^3 - K_1 \left( \sum_{i=1}^2 K_i \right) K_2 + A_{z_{11}} \left( 2I_2 - K_1 K_2 - \sum_{i=1}^2 K_i^2 \right) \right. \\
 &\quad \left. + 3\dot{A}_{z_{11}} \left( \sum_{i=1}^2 K_i \right) - 3\ddot{A}_{z_{11}} \right] \\
 \Delta_1 &= \left[ A_{z_{11}} \left( K_1^3 - 2K_1 - K_2 \right) + 3\dot{A}_{z_{11}} \left( I_2 - K_1^2 \right) + 3\ddot{A}_{z_{11}} K_1 - A_{z_{11}}^{(3)} + 2I_2 + K_1^4 \right. \\
 &\quad \left. - 2K_1^2 - (K_1 + K_2)^2 \right]
 \end{aligned} \tag{3.150}$$

où les matrices  $\Delta_i$  sont données par (3.150), stabilise le système  $(\mathcal{R}_{L\bar{Z}}^{22})$  à zéro et donc la commande  $U_\alpha = \bar{U}_\alpha + U_{\alpha r}$  stabilise le système  $(\mathcal{R}_{LX}^{22})$  le long de la trajectoire de référence  $x_{ref}$ .

**Démonstration:**

Posons  $\bar{Z}^T = [\bar{Z}_1^T \ \bar{Z}_2^T \ \bar{Z}_3^T \ \bar{Z}_4^T]$ ,  $\tilde{Z}_1 = \bar{Z}_1$ ,  $\tilde{Z}_2 = \bar{Z}_2 - Z_{2d}$ ,  $\tilde{Z}_3 = \bar{Z}_3 - Z_{3d}$  et  $\tilde{Z}_4 = \bar{Z}_4 - Z_{4d}$  avec  $Z_{id}$  des fonctions stabilisantes données dans la construction de la preuve.

**Étape 1** Soit  $V_1$  une fonction de Lyapunov :

$$V_1 = \frac{1}{2} \tilde{Z}_1^T \tilde{Z}_1$$

La dérivée de  $V_1$  le long des trajectoires du système (3.146) est :

$$\dot{V}_1 = \tilde{Z}_1^T (A_{z_{11}} \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2) = \tilde{Z}_1^T (A_{z_{11}} \tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2 + Z_{2d})$$

En posant  $Z_{2d} = -(K_1 + A_{z_{11}}) \tilde{Z}_1$  avec  $K_1 > 0 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , on obtient alors :

$$\dot{V}_1 = -\tilde{Z}_1^T K_1 \tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2^T \tilde{Z}_1$$

Les dérivées de  $\tilde{Z}_1$  et  $Z_{2d}$  sont :

$$\begin{aligned}
 \dot{\tilde{Z}}_1 &= -K_1 \tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2 \\
 \dot{Z}_{2d} &= [(K_1 + A_{z_{11}}) K_1 - \dot{A}_{z_{11}}] \tilde{Z}_1 - [K_1 + A_{z_{11}}] \tilde{Z}_2
 \end{aligned}$$

**Étape 2** Soit  $V_2$  une fonction de Lyapunov donnée par :

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} \tilde{Z}_2^T \tilde{Z}_2$$

En dérivant  $V_2$  le long des trajectoires du système (3.146) on obtient :

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2 &= \dot{V}_1 + \tilde{Z}_2^T \dot{\tilde{Z}}_2 \\
&= \dot{V}_1 + \tilde{Z}_2^T (\bar{Z}_3 - \dot{Z}_{2d}) \\
&= -\tilde{Z}_1^T K_1 \tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2^T (\tilde{Z}_3 + Z_{3d} - \dot{Z}_{2d} + \tilde{Z}_1)
\end{aligned}$$

En posant  $Z_{3d} = -K_2 \tilde{Z}_2 - \tilde{Z}_1 + \dot{Z}_{2d}$  avec  $K_2 > 0 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , il vient :

$$\dot{V}_2 = -\sum_{i=1}^2 \tilde{Z}_i^T K_i \tilde{Z}_i + \tilde{Z}_3^T \tilde{Z}_2$$

En remplaçant  $\dot{Z}_{2d}$  par son expression dans  $Z_{3d}$ , on obtient :

$$Z_{3d} = [(K_1 + A_{z_{11}})K_1 - \dot{A}_{z_{11}} - I_2] \tilde{Z}_1 - [K_1 + K_2 + A_{z_{11}}] \tilde{Z}_2$$

Les dérivées de  $\tilde{Z}_2$  et  $Z_{3d}$  sont alors les suivantes :

$$\dot{\tilde{Z}}_2 = -K_2 \tilde{Z}_2 - \tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_3$$

$$\begin{aligned}
\dot{Z}_{3d} &= -[K_1 + K_2 + A_{z_{11}}] \tilde{Z}_3 + [K_2^2 + (K_1 + A_{z_{11}})(K_1 + K_2) - 2\dot{A}_{z_{11}} - I_2] \tilde{Z}_2 \\
&\quad + [(K_1 + A_{z_{11}})(I_2 - K_1^2) + 2\dot{A}_{z_{11}} K_1 - \ddot{A}_{z_{11}} + K_1 + K_2] \tilde{Z}_1
\end{aligned}$$

**Etape 3** Soit  $V_3$  une fonction de Lyapunov :

$$V_3 = V_2 + \frac{1}{2} \tilde{Z}_3^T \tilde{Z}_3$$

La dérivée de  $V_3$  le long des trajectoires du système (3.146) est :

$$\begin{aligned}
\dot{V}_3 &= \dot{V}_2 + \tilde{Z}_3^T \dot{\tilde{Z}}_3 \\
&= \dot{V}_2 + \tilde{Z}_3^T (\bar{Z}_4 - \dot{Z}_{3d}) \\
&= -\sum_{i=1}^2 \tilde{Z}_i^T K_i \tilde{Z}_i + \tilde{Z}_3^T (\tilde{Z}_4 + Z_{4d} - \dot{Z}_{3d} + \tilde{Z}_2)
\end{aligned}$$

Prenons  $Z_{4d} = -K_3 \tilde{Z}_3 - \tilde{Z}_2 + \dot{Z}_{3d}$  avec  $K_3 > 0 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , on obtient alors :

$$\dot{V}_3 = -\sum_{i=1}^3 \tilde{Z}_i^T K_i \tilde{Z}_i + \tilde{Z}_4^T \tilde{Z}_3$$

En remplaçant  $\dot{Z}_{3d}$  par son expression dans  $Z_{4d}$ , il vient :

$$\begin{aligned}
Z_{4d} &= -[K_1 + K_2 + K_3 + A_{z_{11}}] \tilde{Z}_3 + [K_2^2 + (K_1 + A_{z_{11}})(K_1 + K_2) - 2\dot{A}_{z_{11}} - 2I_2] \tilde{Z}_2 \\
&\quad + [(K_1 + A_{z_{11}})(I_2 - K_1^2) + 2\dot{A}_{z_{11}} K_1 - \ddot{A}_{z_{11}} + K_1 + K_2] \tilde{Z}_1
\end{aligned}$$

Les dérivées de  $\tilde{Z}_3$  et  $Z_{4d}$  sont alors :

$$\dot{\tilde{Z}}_3 = -K_3\tilde{Z}_3 - \tilde{Z}_2 + \tilde{Z}_4$$

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{4d} = & -\left[\sum_{i=1}^3 K_i + A_{z_{11}}\right]\tilde{Z}_4 + \left[\sum_{i=1}^3 K_i^2 + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=i+1}^3 K_i K_j + A_{z_{11}}\left(\sum_{i=1}^3 K_i\right) - 3\dot{A}_{z_{11}} - 2I_2\right]\tilde{Z}_3 \\ & + \left[3K_1 + 4K_2 + K_3 - \sum_{i=1}^2 K_i^3 - K_1\left(\sum_{i=1}^2 K_i\right)K_2 + A_{z_{11}}\left(2I_2 - K_1K_2 - \sum_{i=1}^2 K_i^2\right)\right. \\ & + 3\dot{A}_{z_{11}}\left(\sum_{i=1}^2 K_i\right) - 3\ddot{A}_{z_{11}}\left.\right]\tilde{Z}_2 + \left[A_{z_{11}}\left(K_1^3 - 2K_1 - K_2\right) + 3\dot{A}_{z_{11}}\left(I_2 - K_1^2\right)\right. \\ & \left.+ 3\ddot{A}_{z_{11}}K_1 - A_{z_{11}}^{(3)} + 2I_2 + K_1^4 - 2K_1^2 - (K_1 + K_2)^2\right]\tilde{Z}_1 \end{aligned}$$

**Etape 4** Soit  $V_4$  donnée par :

$$V_4 = V_3 + \frac{1}{2}\tilde{Z}_4^T \tilde{Z}_4$$

La dérivée de  $V_4$  le long des trajectoires du système (3.146) vérifie :

$$\begin{aligned} \dot{V}_4 &= \dot{V}_3 + \tilde{Z}_4^T \dot{\tilde{Z}}_4 \\ &= \dot{V}_3 + \tilde{Z}_4^T (\dot{\tilde{Z}}_4 - \dot{Z}_{4d}) \\ &= -\sum_{i=1}^3 \tilde{Z}_i^T K_i \tilde{Z}_i + \tilde{Z}_4^T (A_{z_{42}}\bar{Z}_2 + A_{z_{43}}\bar{Z}_3 + A_{z_{44}}\bar{Z}_4 + \bar{U}_\alpha - \dot{Z}_{4d} + \tilde{Z}_3) \end{aligned}$$

Prenons  $\bar{U}_\alpha$  donnée par (3.149), on obtient alors :

$$\dot{V}_4 = -\sum_{i=1}^4 \tilde{Z}_i^T K_i \tilde{Z}_i < 0$$

On note  $\underline{\lambda}_{K_i}$  la plus petite valeur propre de  $K_i$ , par conséquent :

$$\dot{V}_4 \leq -2 \min_{i=1\dots 4} \underline{\lambda}_{K_i} V_4$$

On en conclut que  $\tilde{Z}$  converge exponentiellement vers zéro.

□

### 3.5.2.4 Conclusion

Dans cette section nous avons linéarisé les modèles 1D et 2D de deux microrobots le long d'une trajectoire de référence, puis une étude a été faite sur les conditions de commandabilité du

système linéarisé des deux microrobots le long des trajectoires de références, et les expressions de ces dernières ont été données en résolvant des équations différentielles. Enfin des lois de commande ont été synthétisées par backstepping pour contrôler les deux microrobots en utilisant les mêmes entrées de commande ( $u$  dans le cas  $1D$  et  $u_1$  et  $u_2$  dans le cas  $2D$ ).

### 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, après un rappel des notions de commandabilité et de synthèse de lois de commande, nous avons synthétisé des lois de commande par backstepping et backstepping adaptatif pour les modèles  $1D$  et  $2D$  d'un microrobot, dont le rôle est de stabiliser le microrobot le long d'une trajectoire de référence, pour que le microrobot puisse effectuer la tâche demandée. Nous avons ensuite proposé une loi de commande par backstepping pour commander 2 microrobots le long d'une trajectoire de référence avec les mêmes entrées de commande, cette méthode a été appliquée pour les modèles  $1D$  et  $2D$  des 2 microrobots. Nous avons pris plus de paramètres incertains par rapport aux travaux qui ont été menés par [Arcese et al., 2013] lors de la synthèse d'une commande par backstepping adaptatif pour les modèles réduits d'un microrobot en  $1D$  et  $2D$ . Nous avons fait une étude de commandabilité partielle car en linéaire seulement sur la dynamique de deux microrobots en interaction, ce qui n'existait pas dans la littérature. Nous avons explicité les trajectoires de référence admissibles et nous avons proposé des lois de commande par backstepping pour le système linéarisé à temps variant. Les commandes synthétisées pour la commande d'un seul microrobot ne sont pas utilisables en l'état, car seule la position du microrobot est accessible, nous allons donc proposer dans le chapitre suivant des observateurs pour estimer tous les états non accessibles pour pouvoir utiliser des commandes par retour de sortie.

# Chapitre 4

## Observation

### Contenu du chapitre

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>123</b>
<b>4.2</b>	<b>Observabilité</b>	<b>123</b>
4.2.1	Introduction	123
4.2.2	Observabilité des systèmes linéaires et non linéaires	123
4.2.2.1	Systèmes non linéaires	124
4.2.2.2	Systèmes linéaires	125
4.2.3	Formes canoniques d'observabilité	126
4.2.3.1	Introduction	126
4.2.3.2	Systèmes non linéaires	126
4.2.3.3	Systèmes linéaires	127
<b>4.3</b>	<b>Observateurs de systèmes non linéaires</b>	<b>130</b>
4.3.1	Introduction	130
4.3.2	Observateur basé sur la résolution de Ricatti	130
4.3.2.1	Systèmes non linéaires	130
4.3.3	Observateur de Luenberger	133
4.3.4	Observateur à grand gain	133
4.3.4.1	Système sous forme de Gauthier-Kupka	133
4.3.4.2	Système affine en commande	135
4.3.5	Observateur MVT	135
4.3.5.1	Les inégalités matricielles	135
4.3.5.2	Observateur basé sur le théorème de la valeur moyenne	136
4.3.6	Observateur par immersion	137
<b>4.4</b>	<b>Observation du modèle étendu du microrobot</b>	<b>139</b>
4.4.1	Modèle 1D	139
4.4.1.1	Introduction	139
4.4.1.2	Paramètres connus	139

---

4.4.1.3	Incertitude paramétrique . . . . .	142
4.4.2	Modèle 2D . . . . .	145
4.4.3	Conclusion . . . . .	147
<b>4.5</b>	<b>Estimation de la vitesse du sang et de la pulsation cardiaque . . . . .</b>	<b>148</b>
4.5.1	Introduction . . . . .	148
4.5.2	Observateur par immersion et singularité structurelle . . . . .	149
4.5.2.1	Changement de variables et observateur . . . . .	150
4.5.2.2	Extension dynamique et observateur en coordonnées naturelles . . . . .	153
4.5.3	Observateur par immersion semi-globalement stable . . . . .	154
4.5.4	Conclusion . . . . .	157
<b>4.6</b>	<b>Commande d'un microrobot par retour de sortie . . . . .</b>	<b>158</b>
4.6.1	Introduction . . . . .	158
4.6.2	Problème de commande par retour de sortie . . . . .	158
4.6.3	Stabilité du retour de sortie . . . . .	161
4.6.3.1	Stabilité asymptotique . . . . .	161
4.6.3.2	Stabilité pratique . . . . .	164
4.6.4	Conclusion . . . . .	166
<b>4.7</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>167</b>

---

## 4.1 Introduction

Ce chapitre sera structuré comme suit : tout d'abord nous allons rappeler la notion d'observabilité pour les systèmes linéaires et non linéaires, nous exposerons ensuite les principaux observateurs non linéaires utilisés dans la littérature (Luenberger, grand gain, par immersion...etc). Puis nous allons présenter nos résultats sur la synthèse d'un observateur pour les modèles 1D et 2D du microrobot en utilisant un observateur basé sur le théorème de la valeur moyenne ; nous exposerons aussi nos travaux sur l'estimation de la pulsation cardiaque et de la vitesse du sang. Enfin nous terminerons le chapitre par la commande d'un microrobot par retour de sortie c'est-à-dire en utilisant les états estimés par l'observateur dans les lois de commande synthétisées précédemment dans le chapitre 3. De plus, nous démontrerons la stabilité asymptotique et la stabilité pratique en présence d'erreurs de modélisation.

## 4.2 Observabilité

### 4.2.1 Introduction

La notion d'observabilité permet de savoir a priori si, par la connaissance des sorties et des entrées d'un système, il est possible d'en reconstruire les états non mesurables. Si un système est observable, nous verrons comment synthétiser un observateur afin d'estimer les états inaccessibles du système. Comme ce procédé permet de se passer de certains capteurs physiques, on parle alors aussi de capteur logiciel. Différentes notions d'observabilité en non linéaire ont été établies dans la littérature [Hermann and Krener, 1977],[Besançon, 2007], [Fliess, 1982]. Nous rappelons dans la section suivante quelques notions d'observabilité des systèmes non linéaires.

### 4.2.2 Observabilité des systèmes linéaires et non linéaires

**Définition 4.2.1 [Indistinguabilité]** : La paire  $(x_0, x'_0) \in \mathbb{X}^2 \subset \mathbb{R}^{2n}$  est indistinguable pour le système  $\Sigma_{NL}$  donné par (2.1), si :

$$\forall u \in \mathbb{U}, \quad \forall t \geq 0, \quad h(\mathcal{X}_u(t, x_0), u) = h(\mathcal{X}_u(t, x'_0), u)$$

où  $\mathbb{U}$  est l'ensemble des commandes admissibles et  $x_0$  et  $x'_0$  deux états initiaux du système  $\Sigma_{NL}$ .

**Définition 4.2.2 [Observabilité globale]** : Le système  $\Sigma_{NL}$  est observable si :

$$\forall (x_0, x'_0) \in \mathbb{X}^2, \quad (x_0, x'_0) \text{ sont distinguables}$$

où  $\mathbb{X}$  est l'ensemble des états initiaux du système.

**Définition 4.2.3 [Observabilité locale]** : Soit  $x$  l'état du système  $\Sigma_{NL}$  :

- $x$  est localement observable en  $x_0$  s'il existe un voisinage  $\mathcal{V}_{x_0}$  de  $x_0$  tel que, pour tout voisinage  $\mathcal{V}'_{x_0} \subset \mathcal{V}_{x_0}$ , et tout  $x'_0 \in \mathcal{V}'_{x_0}$ ,  $h(\mathcal{X}_u(t, x_0), u) = h(\mathcal{X}_u(t, x'_0), u) \quad \forall t$  implique  $x'_0 = x_0$ .

- Si le système  $\Sigma_{NL}$  est localement observable pour tout  $x_0$ , alors on dit que le système  $\Sigma_{NL}$  est localement observable.

Cela signifie que le système  $\Sigma_{NL}$  n'est localement observable que si l'on peut distinguer chaque état  $x_0$  de ses voisins  $x'_0$  tant que les trajectoires du système restent proches de  $x_0$ , i.e l'application entrée-sortie  $\mathcal{I} : \mathbb{X} \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{Y}$  est localement injective par rapport aux conditions initiales.

**Définition 4.2.4 [Observabilité uniforme]** : Le système  $\Sigma_{NL}$  est uniformément observable si :

$$\forall x_0 \neq x'_0 \in \mathbb{X}, \exists t \geq 0 : h(\mathcal{X}_u(t, x_0), u) \neq h(\mathcal{X}_u(t, x'_0), u), \quad \forall u \in \mathbb{U}$$

**Définition 4.2.5 [Système détectable]** : Le système  $\Sigma_{NL}$  est détectable si :  $\forall (x_0, x'_0) \in \mathbb{X}^2 \subset \mathbb{R}^{2n}$  indistinguable (voir définition 4.2.1), alors on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{\|\mathcal{X}_u(t, x_0) - \mathcal{X}_u(t, x'_0)\|\} = 0$$

#### 4.2.2.1 Systèmes non linéaires

Considérons le système  $\Sigma_{NL}$  affine en la commande :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, u) = f_0(x) + \sum_{i=1}^p u_i g_i(x) \\ y &= h(x) = [h_1(x), \dots, h_m(x)]^T \end{cases} \quad (4.1)$$

Les définitions qui suivent sont issues de [Isidori, 1995, Nijmeijer and van der Schaft, 1990]. L'espace d'observation du système (4.1) est donné par :

**Définition 4.2.6 [Espace d'observation et Codistribution]** : L'espace d'observation  $\mathcal{O}$  du système (4.1) est l'espace linéaire des fonctions dans  $\mathbb{X}$  contenant  $h_1, \dots, h_m$  et les dérivées de Lie suivantes  $L_{\tau_1} L_{\tau_2} \dots L_{\tau_k} h_j$ ,  $j \leq m$ ,  $k \geq 1$  :

$$\mathcal{O} = \text{Vect}\{h_j, L_{\tau_1} L_{\tau_2} \dots L_{\tau_k} h_j\}$$

avec  $\tau_i \in \{f_0, g_1, \dots, g_p\}$  pour  $i = 1, \dots, k$ .

La codistribution de l'espace d'observation  $\mathcal{O}$ , notée  $d\mathcal{O}$ , est donnée par :

$$d\mathcal{O}(x) = \text{Vect}\{dH(x) | H \in \mathcal{O}\}, \quad x \in \mathbb{X}$$

où  $H = [h, \dot{h}, \dots, h^{(k)}, \dots]^T = [h, L_f h, \dots, L_f^k h, \dots]^T$ . L'espace d'observation d'un système contient la sortie et ses dérivées successives le long des trajectoires du système.

On peut construire la codistribution involutive  $d\mathcal{O}$  de manière analogue à celle d'accessibilité (voir définition 3.2.5 dans le chapitre 3) :

- La codistribution initiale est donnée par :

$$d\mathcal{O}_0 = \text{Vect}\{dh_1, \dots, dh_m\}$$

- La codistribution d'ordre  $k$  est donnée par :

$$d\mathcal{O}_k = d\mathcal{O}_{k-1} + \sum_{i=1}^p L_{g_i} d\mathcal{O}_{k-1} + L_{f_0} d\mathcal{O}_{k-1}$$

S'il existe  $k^* : d\mathcal{O}_{k^*+r} = d\mathcal{O}_{k^*}, \forall r > 0$ . On pose alors  $d\mathcal{O} = d\mathcal{O}_{k^*}$

La condition suffisante d'observabilité locale du système (4.1) est donnée par la condition de rang d'observabilité :

**Théorème 4.2.7 :** Soit le système (4.1) avec  $\dim \mathbb{X} = n$ . Si  $\dim d\mathcal{O}(x^*) = \dim \mathbb{X} = n$  alors le système (4.1) est localement observable en  $x^*$ . On a équivalence dans le cas où le système (4.1) est localement accessible.

#### 4.2.2.2 Systèmes linéaires

**4.2.2.2.1 Système LTV** Considérons le système à temps variant donné par (2.3), avec  $B(t) = 0$  et  $D(t) = 0$ , soit un système autonome. La paire  $(A(t), C(t))$  est observable sur l'intervalle  $[t_0, t_f]$  si et seulement si la matrice du grammien d'observabilité  $W_o(t_0, t_f)$  est inversible [Silverman and Meadows, 1967] :

$$W_o(t_0, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \Phi^T(t, t_0) C^T(t) C(t) \Phi(t, t_0) dt$$

où  $\Phi(., .)$  est la matrice de transition de la matrice  $A(t)$  donnée par (2.6) et (2.7). La matrice d'observabilité du système (2.3), notée  $\mathcal{O}(t)$ , est un cas particulier de la codistribution  $d\mathcal{O}$ , et est donc donnée par  $\mathcal{O}(t) = [\mathcal{O}_0(t)^T \dots \mathcal{O}_{n-1}(t)^T]^T$ , avec  $\mathcal{O}_i(t)$  donnée ci-après :

$$\begin{cases} \mathcal{O}_0(t) &= C(t) \\ \mathcal{O}_i(t) &= \mathcal{O}_{i-1}(t)A(t) + \frac{d}{dt}\mathcal{O}_{i-1}(t) \quad i = 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

On dit que la paire  $(A(t), C(t))$  est :

1. Complètement observable si  $\text{Rang}(\mathcal{O}(t)) = n$  pour un certain  $t \in \mathbb{R}^+$
2. Uniformément observable si  $\text{Rang}(\mathcal{O}(t)) = n$  pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$

**4.2.2.2.2 Système LTI** Considérons le système linéaire stationnaire donné par (2.8), sa matrice d'observabilité  $\mathcal{O}$  est donnée ci-après :

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C^T & (CA)^T & \dots & (CA^{n-1})^T \end{bmatrix}^T$$

En linéaire, les champs de vecteurs étant constants, leurs dérivées de Lie ne contribuent pas à augmenter la dimension de  $d\mathcal{O}$ , d'où la limitation de  $\mathcal{O}$  à  $n$  lignes.

**Théorème 4.2.8 [Critère d'observabilité de Kalman] :** [Kalman, 1963] Les deux propositions suivantes sont des conditions nécessaires et suffisantes d'observabilité du système (2.8).

1. La connaissance de  $y(t)$  et  $u(t)$  pour tout  $t \in [0, \tau]$ ,  $\tau > 0$  permet de déterminer d'une façon unique la condition initiale  $x(0)$ , par conséquent la détermination de  $x(t)$  en utilisant (2.10).
2. La matrice d'observabilité du système (2.8) est de rang plein :

$$\text{Rang}(\mathcal{O}) = n$$

### 4.2.3 Formes canoniques d'observabilité

#### 4.2.3.1 Introduction

La synthèse d'observateurs pour les systèmes linéaires a été abordée par [Kalman and Bucy, 1961] et [Luenberger, 1971], ces auteurs ont donné des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un observateur pour les systèmes linéaires invariants. Cependant, la synthèse d'observateurs pour les systèmes non linéaires est souvent difficile, à cause de la complexité des non linéarités. Plusieurs approches ont été proposées pour la synthèse d'observateurs non linéaires, entre autres : par la linéarisation de la dynamique de l'erreur [Bestle and Zeitz, 1983, Krener and Isidori, 1983], [Krener and Respondek, 1985, Guay, 2002, Hou and Pugh, 1999] pour que les non linéarités soient dépendantes uniquement des entrées et des sorties mesurables du système ; les observateurs à grand gain [Gauthier et al., 1992, Bornard and Hammouri, 1991], ou encore les observateurs se basant sur les inégalités matricielles (LMI : Linear Matrix inequalities) [Rajamani and Cho, 1998, ArcaK and Kokotović, 2001]. L'application de certaines de ces méthodes d'observation pour un système non linéaire nécessite de mettre ce dernier sous une forme canonique linéaire [Luenberger, 1967] ou non linéaire [Besançon, 2007, Boutat et al., 2010] d'observabilité. Dans cette section, nous allons rappeler quelques formes normales d'observabilité pour les systèmes linéaires et non linéaires.

#### 4.2.3.2 Systèmes non linéaires

On considère les systèmes non linéaires donnés par la représentation d'état suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x, u) \end{aligned} \tag{4.2}$$

où  $x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^p$  et  $y \in \mathbb{Y} \subset \mathbb{R}$ . La synthèse d'un observateur non linéaire pour le système (4.2) est généralement ardue ; pour remédier à cette difficulté, il est préférable de mettre le système (4.2) sous forme canonique (normale) d'observabilité [Hammouri et al., 2010]. Nous en citerons ici deux.

**4.2.3.2.1 Forme canonique pour les systèmes affines en la commande** Considérons les systèmes non linéaires mono sortie affines en la commande :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \tag{4.3}$$

Si le système (4.3) est uniformément observable, alors le choix de la transformation bijective  $\Phi$  [Isidori, 1995] :

$$z = \Phi(x) = \left( h(x) \quad L_f h(x) \quad \dots \quad L_f^{n-1} h(x) \right)^T \quad (4.4)$$

permet de mettre le système (4.3) sous la forme canonique d'observabilité suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= z_2 + \bar{g}_1(z_1)u \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n + \bar{g}_{n-1}(z_1, \dots, z_{n-1})u \\ \dot{z}_n &= \bar{f}_n(z_1, \dots, z_n) + \bar{g}_n(z_1, \dots, z_n)u \\ y &= z_1 = Cz \end{cases} \quad (4.5)$$

Soit  $\dot{z} = Az + \bar{g}(z)u$  avec  $\bar{g}_i(z_1, \dots, z_i)$  et  $A$  la matrice dont les seules entrées non nulles est la surdiagonale formée de 1. On dit alors que  $(A, C)$  est sous forme normale d'observabilité de Brunovsky.

**4.2.3.2.2 Forme canonique de Gauthier-Kupka** [Gauthier and Kupka, 2011] Le système (4.2) admet une forme canonique de Gauthier-Kupka s'il existe un difféomorphisme  $\Phi : x \mapsto z = \Phi(x)$  tel que le système (4.2) peut se mettre sous la forme feedforward suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= \bar{f}_1(z_1, z_2, u) \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= \bar{f}_{n-1}(z_1, \dots, z_n, u) \\ \dot{z}_n &= \bar{f}_n(z_1, \dots, z_n, u) \\ y &= \bar{h}(z_1, u) \end{cases} \quad (4.6)$$

avec les applications  $\bar{h}(z_1, u)$  et  $\bar{f}_i(z_1, \dots, z_{i+1}, u)$  qui vérifient :

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial z_1} \neq 0, \quad \text{et} \quad \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial z_{i+1}} \neq 0 \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, n-1 \quad (4.7)$$

La condition  $\frac{\partial \bar{f}_i}{\partial z_{i+1}} \neq 0$  est nécessaire pour que le système (4.6) satisfasse en tout point la condition de rang d'observabilité.

### 4.2.3.3 Systèmes linéaires

**4.2.3.3.1 Système SISO** On considère le système stationnaire mono entrée mono sortie donné par (3.6). Soit  $\mathcal{O}_x$  la matrice d'observabilité de la paire  $(A_x, C_x)$  :

$$\mathcal{O}_x = \left[ C_x^T \quad A_x^T C_x^T \quad \dots \quad (A_x^{n-1})^T C_x^T \right]^T$$

Supposons que  $\text{Rang}(\mathcal{O}_x) = n$ , alors il existe une matrice  $T_z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  inversible avec  $z = T_z x$ , telle que le système en  $z$  est donné par :

$$\begin{cases} \dot{z} = A_z z + B_z u \\ y = C_z z + D_z u \end{cases} \quad (4.8)$$

avec  $B_z = T_z B_x$ ,  $D_z = D_x$  et les matrices  $A_z = T_z A_x T_z^{-1}$  et  $C_z = C_x T_z^{-1}$  suivantes :

$$A_z = \begin{pmatrix} -\sigma_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\sigma_2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ -\sigma_n & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad C_z^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

où  $\sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  sont les coefficients du polynôme caractéristique de  $A_x$  donnée par (3.7).

Notons  $\mathcal{O}_z$  la matrice d'observabilité de la paire  $(A_z, B_z)$ , la transformation  $T_z$  est alors donnée par :

$$T_z = \mathcal{O}_z^{-1} \mathcal{O}_x \quad (4.10)$$

**4.2.3.3.2 Système MIMO** [Prätzel-Wolters, 1983] On considère le système stationnaire multi entrées multi sorties donné par (3.11). Supposons que la paire  $(A_x, C_x)$  est observable. On pose  $C_x = [C_1^T \dots C_m^T]^T$  et  $\mu_1, \dots, \mu_m$  respectivement les indices d'observabilité des sorties  $y_1, \dots, y_m$ . On construit la matrice d'observabilité  $\mathcal{O}$  :

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C_1^T & \dots & (C_1 A_x^{\mu_1 - 1})^T & C_2^T & \dots & (C_2 A_x^{\mu_2 - 1})^T & \dots & C_m^T & \dots & (C_m A_x^{\mu_m - 1})^T \end{bmatrix}^T \quad (4.11)$$

On note  $c_1, c_2, \dots, c_m$  respectivement la  $\mu_1, (\mu_1 + \mu_2), \dots, (\mu_1 + \dots + \mu_m)$ -ème colonne de  $\mathcal{O}^{-1}$ , la matrice  $T_z$  est donnée par :

$$T_z = \begin{bmatrix} c_1 & \dots & A_x^{\mu_1 - 1} c_1 & c_2 & \dots & A_x^{\mu_2 - 1} c_2 & \dots & c_m & \dots & A_x^{\mu_c - 1} c_m \end{bmatrix}^{-1} \quad (4.12)$$

Avec la transformation  $T_z$  donnée par (4.12), on obtient les matrices  $A_z = T_z A_x T_z^{-1}$  et  $C_z = C_x T_z^{-1}$  sous la forme suivante :

$$A_z = \left( \begin{array}{cccc|ccc} 0 & \dots & 0 & * & * & & * \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & * & * & & * \\ \hline & & & & & & \\ \hline & & & * & * & 0 & \dots & 0 & * \\ & & & \vdots & \vdots & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ & & & * & * & \vdots & \ddots & 1 & * \end{array} \right) \quad C_z^T = \left( \begin{array}{cccccc} * & * & \dots & \dots & \dots & * \\ \hline 1 & * & \dots & \dots & & * \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 & * & * \\ * & * & \dots & \dots & \dots & * \\ \hline 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{array} \right)$$

4.2.3.3.3 Système partiellement observable

**Théorème 4.2.9 [Décomposition de Kalman] :** [Kalman, 1963] Supposons que la matrice d'observabilité  $\mathcal{O}$  de la paire  $(A, C)$  du système (2.8) soit de rang  $n_o < n$ . Il existe alors une transformation inversible  $T$ ,  $x = Tz$  :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{z}_o \\ \dot{z}_{no} \end{bmatrix} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu = \begin{bmatrix} A_o & 0 \\ A_{21} & A_{no} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_o \\ z_{no} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_o \\ B_{no} \end{bmatrix} u \\ y = CTz + Du = \begin{bmatrix} C_o & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_o \\ z_{no} \end{bmatrix} + Du \end{cases} \quad (4.13)$$

où  $z_o \in \mathbb{R}^{n_o}$ ,  $z_{no} \in \mathbb{R}^{n-n_o}$ ,  $A_o \in \mathcal{M}_{n_o}(\mathbb{R})$  et  $C_o \in \mathcal{M}_{m \times n_o}(\mathbb{R})$  sont tels que la paire  $(A_o, C_o)$  soit observable. On dit alors que les valeurs propres de  $A_o$  sont les modes observables, et que les valeurs propres de  $A_{no}$  sont les modes non observables. Si la matrice  $A_{no}$  est Hurwitz alors le système (4.13) est détectable (voir définition 4.2.5).

La transformation  $T$  est composée des  $n_o$  colonnes  $o_j$ ,  $j = 1, \dots, n_o$  indépendantes de la matrice  $\mathcal{O}$ , complétée par une famille de  $n - n_o$  vecteurs  $v_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, n - n_o$  en utilisant le théorème de la base incomplète :

$$T = [o_1 \dots o_{n_o} v_1 \dots v_{n-n_o}], \quad |T| \neq 0$$

L'espace d'observation du système (4.13), de dimension  $n_o$ , est le sous espace vectoriel engendré par les vecteurs  $o_i$ . L'espace des états non observables est engendré par les vecteurs  $v_i$ ; sa dimension est égale à  $n - n_o$ .

## 4.3 Observateurs de systèmes non linéaires

### 4.3.1 Introduction

La commande d'un système exige généralement la connaissance des variables d'état du système, or celles-ci ne sont pas toutes accessibles à la mesure pour des raisons de coût des capteurs ou en raison de contraintes technologiques. Pour remédier à ce problème, un observateur sera synthétisé pour le système afin d'estimer les états non mesurables du système. Les premiers observateurs pour les systèmes linéaires invariant dans le temps ont été donnés par [Kalman and Bucy, 1961] et [Luenberger, 1971]. Cependant la plupart des systèmes sont non linéaires. Bien qu'il n'existe pas de méthode générale pour la synthèse d'observateurs non linéaires, contrairement aux observateurs linéaires, on peut catégoriser différentes approches. Le filtre de Kalman étendu [Sorenson and Stubberud, 1968, Anderson and Moore, 1979], connu pour sa simplicité d'utilisation et reposant sur la linéarisation du système, ne converge que sous des hypothèses très limitantes. Nous trouvons aussi les observateurs qui se basent sur la linéarisation de la dynamique de l'erreur [Zeitz, 1987, Krener and Isidori, 1983, Krener and Respondek, 1985], les observateurs obtenus par la résolution d'une équation de Ricatti [Rajamani and Cho, 1998, Pagilla and Zhu, 2004], les observateurs à grand gain [Besançon, 2007, Hammouri et al., 2002, Gauthier et al., 1992] où le principe est de dominer les non linéarités par l'innovation. Dans cette section, nous rappellerons le principe de quelques observateurs utilisés dans la littérature.

### 4.3.2 Observateur basé sur la résolution de Ricatti

#### 4.3.2.1 Systèmes non linéaires

On considère le système non linéaire donné par (3.23), et on suppose qu'il vérifie les hypothèses suivantes :

**H1)**  $f(x, u)$  est Lipchitzienne par rapport à  $x$  et uniformément en  $u$ , *i.e*  $\exists \gamma > 0$  :

$$\|f(x_1, u) - f(x_2, u)\| \leq \gamma \|x_1 - x_2\|, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^p \quad (4.14)$$

où  $\gamma$  est la constante de Lipschitz du système (3.23).

**H2)** La paire  $(A, C)$  est observable.

**4.3.2.1.1 Placement de pôles** Lorsque la matrice  $A$  du système (3.23) n'est pas Hurwitz, alors on réécrit le système (3.23) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} &= \underbrace{(A - L_1 C)}_{A_1} x + Bu + L_1 y + f(x, u) \\ y &= Cx \end{cases} \quad (4.15)$$

où  $L_1 \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$  est choisie de sorte à avoir  $A_1$  Hurwitz.

**4.3.2.1.2 Constante de Lipschitz** La constante de Lipschitz de certains systèmes peut être diminuée avec une transformation linéaire (voir [Rajamani and Cho, 1998] pour plus de détails). On pose alors  $x = T_o z$  avec  $T_o \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  une matrice non singulière. En utilisant (4.15), on obtient alors la représentation d'état en  $z$  :

$$\begin{cases} \dot{z} &= \underbrace{T_o^{-1}(A - L_1 C)T_o}_{A_o} z + \underbrace{T_o^{-1}B}_{B_o} u + T_o^{-1}L_1 y + T_o^{-1}f(T_o z, u) \\ y &= \underbrace{CT_o}_{C_o} z \end{cases} \quad (4.16)$$

Pour le système (4.16), l'hypothèse **H1**) devient alors :

$$\|T_o^{-1}f(T_o z_1, u) - T_o^{-1}f(T_o z_2, u)\| \leq \gamma_o \|z_1 - z_2\|, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^p \quad (4.17)$$

avec  $\gamma_o$  la constante de Lipschitz du système (4.16).

**4.3.2.1.3 Synthèse d'observateur** Sous les hypothèses **(H1)** et **(H2)** pour le système (4.16), le système ci-après est un observateur pour (4.16) [Pagilla and Zhu, 2004] :

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}} &= A_o \hat{z} + B_o u + T_o^{-1}L_1 y + T_o^{-1}f(T_o \hat{z}, u) + (\gamma_o^2 + \varepsilon_o)L_o(y - C_o \hat{z})/\|C_o\|^2 \\ \hat{y} &= C_o \hat{z} \end{cases} \quad (4.18)$$

où  $\varepsilon_o \geq -\gamma_o^2$  et  $L_o \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$  le gain d'innovation précisé par la suite.

**Démonstration:**

Soit  $\tilde{z} = z - \hat{z}$  l'erreur d'observation. En utilisant les représentations d'état données par (4.16) et (4.18), on obtient la dynamique de l'erreur :

$$\dot{\tilde{z}} = \underbrace{\left( A_o - \frac{\gamma_o^2 + \varepsilon_o}{\|C_o\|^2} L_o C_o \right)}_{A_{of}} \tilde{z} + T_o^{-1} \left( f(T_o z, u) - f(T_o \hat{z}, u) \right) \quad (4.19)$$

Considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V_o(\tilde{z}) = \tilde{z}^T P_o \tilde{z} \leq \bar{\lambda}_{P_o} \tilde{z}^T \tilde{z} \quad , \quad P_o = P_o^T > 0 \quad (4.20)$$

La dérivée de  $V_o(\tilde{z})$  le long des trajectoires du système (4.19) est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V}_o(\tilde{z}) &= \tilde{z}^T (A_{of}^T P_o + P_o A_{of}) \tilde{z} + 2\tilde{z}^T P_o T_o^{-1} (f(T_o z, u) - f(T_o \hat{z}, u)) \\ &\leq \tilde{z}^T (A_{of}^T P_o + P_o A_{of}) \tilde{z} + 2\|P_o \tilde{z}\| \|T_o^{-1}f(T_o z, u) - T_o^{-1}f(T_o \hat{z}, u)\| \end{aligned} \quad (4.21)$$

En utilisant (4.17) et en complétant les carrés ( $2ab \leq a^2 + b^2$ ) on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_o(\tilde{z}) &\leq \tilde{z}^T (A_{of}^T P_o + P_o A_{of}) \tilde{z} + 2\gamma_o \|P_o \tilde{z}\| \|\tilde{z}\| \\ &\leq \tilde{z}^T (A_{of}^T P_o + P_o A_{of} + P_o P_o + \gamma_o^2) \tilde{z} \end{aligned} \quad (4.22)$$

S'il existe une matrice  $P_o = P_o^T$  solution de :

$$A_{of}^T P_o + P_o A_{of} + P_o P_o + \gamma_o^2 I_n = -\eta_o I_n \quad (4.23)$$

avec  $\eta_o > 0$ , alors il vient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_o(\tilde{z}) &\leq -\eta_o \tilde{z}^T \tilde{z} \\ &\leq -\frac{\eta_o}{\lambda_{P_o}} V_o(\tilde{z}) \end{aligned} \quad (4.24)$$

et par conséquent  $\tilde{z}$  converge exponentiellement vers 0 et  $\hat{z}$  converge vers  $z$ .

En utilisant le gain :

$$L_o = \frac{1}{2} P_o^{-1} C_o^T \quad (4.25)$$

l'équation (4.23) devient :

$$A_o^T P_o + P_o A_o + P_o P_o + (\gamma_o^2 + \eta_o) I_n - (\gamma_o^2 + \varepsilon_o) C_o^T C_o / \|C_o\|^2 = 0 \quad (4.26)$$

En utilisant la définition 3.3.2, on obtient alors la matrice hamiltonienne  $\mathcal{H}_o$  pour l'équation (4.26) :

$$\mathcal{H}_o = \begin{bmatrix} A_o & I_n \\ \underbrace{-(\gamma_o^2 + \eta_o) I_n + (\gamma_o^2 + \varepsilon_o) C_o^T C_o / \|C_o\|^2}_{-\bar{C}} & -A_o^T \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

On a :

- $A_o$  est Hurwitz par construction.
- $I_n = I_n^T > 0$  et  $\bar{C} = \bar{C}^T > 0$  pour  $\eta_o > \max(0, \varepsilon_o)$ .

D'après la définition 3.3.2, il reste à vérifier que la matrice  $\mathcal{H}_o$  est hyperbolique pour que l'équation de Ricatti (4.26) admette une solution unique  $P_o = P_o^T > 0$ . Or on a

$$\mathcal{H}_o \text{ est hyperbolique} \iff \sqrt{\gamma_o^2 + \eta_o} < \delta(A_o^T, \sqrt{\gamma_o^2 + \varepsilon_o} C_o / \|C_o\|) \quad (4.28)$$

□

En utilisant (4.18) et  $\hat{x} = T_o \hat{z}$ , le système ci-après est donc un observateur du système (3.23) :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + f(\hat{x}, u) + \left[ L_1 + \frac{\gamma_o^2 + \varepsilon_o}{\|C_o\|^2} L_o \right] (y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= C\hat{x} \end{cases} \quad (4.29)$$

Nous remarquons que l'observateur (4.29) possède deux gains d'innovation  $L_1$  et  $L_o$ , le rôle du premier gain est de stabiliser la matrice  $A$ , et le rôle de deuxième est d'assurer la convergence de l'erreur d'observation à zéro, il est obtenue par l'expression (4.25) avec la matrice  $P_o$  solution de l'équation de Ricatti (4.26).

### 4.3.3 Observateur de Luenberger

Cette section sera consacrée à un rappel concernant la synthèse d'observateurs de Luenberger (voir [Thau, 1973] et [Rajamani and Cho, 1998] pour plus de détails) pour les systèmes non linéaires Lipschitz de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + \phi(x, u) \\ y &= Cx \end{cases} \quad (4.30)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^p$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$  tels que la paire  $(A, C)$  est détectable et la fonction  $\phi(x, u)$  est  $\gamma_\phi$ -lipschitz (voir (H1) section 4.3.2.1).

**Théorème 4.3.1 [Observateur de Luenberger] :** [Thau, 1973] On considère l'observateur de type de Luenberger pour le système (4.30) :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + \phi(\hat{x}, u) + K(y - C\hat{x}) \\ \hat{y} &= C\hat{x} \end{cases} \quad (4.31)$$

Le système (4.31) est un observateur exponentiel pour le système (4.30) si le gain  $K \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$  est choisi de sorte que  $(A - KC)$  soit Hurwitz et que :

$$\gamma_\phi < \frac{\lambda_Q}{2\lambda_P} \quad (4.32)$$

Les matrices  $P = P^T > 0$ ,  $Q = Q^T > 0$  et le gain  $K$  sont solutions de l'équation de Lyapunov :

$$(A - KC)^T P + P(A - KC) + Q = 0 \quad (4.33)$$

### 4.3.4 Observateur à grand gain

Les observateurs à grand gain s'appliquent sur les systèmes uniformément observables, qui possèdent une forme triangulaire complète ou partielle. Le gain de l'observateur à grand gain consiste à écraser la constante de lipschitz globale du système. Nous présentons deux méthodes de synthèse d'un observateur à grand gain pour deux formes triangulaires d'un système.

#### 4.3.4.1 Système sous forme de Gauthier-Kupka

Considérons les systèmes non linéaires sous la forme canonique d'observabilité de Gauthier-Kupka donnée par (4.6). Notons  $\bar{z}_i = [z_1, \dots, z_i]^T$  et supposons que :

1. Les fonctions  $\bar{f}_i(\bar{z}_i, z_{i+1}, u)$  sont globalement Lipschitz par rapport à  $\bar{z}_i$  et uniformément en  $z_{i+1}$  et  $u$  :

$$\|\bar{f}_i(\bar{z}_i, z_{i+1}, u) - \bar{f}_i(\hat{\bar{z}}_i, z_{i+1}, u)\| \leq \gamma \|\bar{z}_i - \hat{\bar{z}}_i\|, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

2. Il existe  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ , avec  $0 < \alpha < \beta$  tel que :

$$\alpha \leq \left| \frac{\partial \bar{h}}{\partial z_1} \right| \leq \beta, \quad \text{et} \quad \alpha \leq \left| \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial z_{i+1}} \right| \leq \beta \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n, \quad \forall u \in \mathbb{R}^p$$

L'observateur à grand gain pour le système (4.6) est donné par la proposition suivante :

**Proposition 4.3.2 :** [Hammouri et al., 2002] *Le système suivant :*

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_1 &= \bar{f}_1(\hat{z}_1, \hat{z}_2, u) + lk_1(y - \bar{h}(\hat{z}_1, u)) \\ &\vdots \\ \dot{\hat{z}}_{n-1} &= \bar{f}_{n-1}(\hat{z}_{n-1}, \hat{z}_n, u) + l^{n-1}k_{n-1}(y - \bar{h}(\hat{z}_1, u)) \\ \dot{\hat{z}}_n &= \bar{f}_n(\hat{z}_n, u) + l^n k_n(y - \bar{h}(\hat{z}_1, u)) \\ \hat{y} &= \bar{h}(\hat{z}_1, u) \end{cases} \quad (4.34)$$

est un observateur asymptotique pour le système (4.6) s'il existe des réels  $k_1, \dots, k_n$ ,  $\eta > 0$  et une matrice  $S = S^T > 0$ , avec  $\eta$  et  $S$  dépendant uniquement de  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :

$$A(t)S + SA^T(t) \leq -\eta I_n \quad (4.35)$$

avec :

$$A(t) = \begin{pmatrix} -k_1 a_1(t) & a_2(t) & 0 & \dots & 0 \\ -k_2 a_1(t) & 0 & a_3(t) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -k_{n-1} a_1(t) & \vdots & & \ddots & a_n(t) \\ -k_n a_1(t) & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

où les fonctions  $a_i(t)$  sont issues de l'application du théorème de la valeur moyenne 2.2.20 aux fonctions  $\bar{h}$  et  $\bar{f}_i$  pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  :

$$\begin{aligned} a_1(t) &= \frac{\partial \bar{h}}{\partial z_1}(\delta_0(t), u(t)) \\ a_{i+1}(t) &= \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial z_{i+1}}(\bar{z}_i(t), \delta_i(t), u(t)) \quad \text{pour } i = 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

avec  $\delta_i(t) \in [\hat{z}_{i+1}(t), z_{i+1}(t)]$ .

On a alors  $\alpha \leq a_i(t) \leq \beta$ , pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,  $\forall t \geq 0$ . Posons  $\varepsilon_i = \frac{\hat{z}_i}{l^i}$ . Le choix d'une fonction de Lyapunov  $V = \varepsilon^T S \varepsilon$  conduit alors à  $\dot{V} \leq 0$  pour tout gain  $l > \max(1, l^*)$  avec  $l^*$  donné par :

$$l^* = \frac{2\|S\|\gamma\sqrt{n}}{\eta}$$

L'appellation de "grand gain" est issue du fait que le gain  $l^*$  nécessaire pour écraser la constante de Lipschitz  $\gamma$  doit souvent être importante. De ce fait, comme l'innovation dans (4.34) fait apparaître des puissances croissantes de  $l$ , le gain final peut être important.

L'inconvénient majeur de l'observateur à grand gain est sa sensibilité aux bruits de mesure, vu le gain très élevé  $l^n$  sur la composante  $x_n$  pour un système de dimension  $n$  élevée.

#### 4.3.4.2 Système affine en commande

Soit le système non linéaire affine en commande donné par (4.5), on le réécrit sous la forme suivante [Hammouri et al., 2002] :

$$\begin{cases} \dot{z} &= Az + \bar{F}(z) + \bar{G}(z)u \\ y &= Cz \end{cases} \quad (4.36)$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0_{(n-1) \times 1} & I_{n-1} \\ 0 & 0_{1 \times (n-1)} \end{pmatrix} \quad C^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0_{(n-1) \times 1} \end{pmatrix} \quad \bar{F}(z) = \begin{pmatrix} 0_{(n-1) \times 1} \\ \bar{f}_n(\bar{z}_n) \end{pmatrix} \quad \bar{G}(z) = \begin{pmatrix} \bar{g}_1(\bar{z}_1) \\ \vdots \\ \bar{g}_n(\bar{z}_n) \end{pmatrix}$$

**Proposition 4.3.3** : [Hammouri et al., 2002] Le système :

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}(t) &= A\hat{z}(t) + \bar{F}(\hat{z}(t)) + \bar{G}(\hat{z}(t)) + S_l^{-1}C^T(y - C\hat{z}(t)) \\ \hat{y} &= C\hat{z}(t) \end{cases} \quad (4.37)$$

est un observateur exponentiel pour le système (4.36), avec  $S_l = S_l^T > 0$  solution de :

$$lS_l + A^T S_l + S_l A = C^T C \quad (4.38)$$

En posant  $S_l = \Delta_l^{-1} S \Delta_l^{-1}$  avec  $S$  solution de l'équation (4.38) pour  $l = 1$ , on trouve alors  $S_l^{-1} C^T = \Delta_l S^{-1} \Delta_l C^T = \Delta_l K$  avec  $K = S^{-1} \Delta_l C^T$ , par conséquent on trouve ici aussi des puissances croissantes de  $l$  dans le terme de l'innovation de (4.37).

#### 4.3.5 Observateur MVT

##### 4.3.5.1 Les inégalités matricielles

**Définition 4.3.4 [Inégalité matricielle]** : Une inégalité matricielle linéaire (LMI) est de la forme suivante :

$$G(x) = G_0 + \sum_{i=1}^m x_i G_i > 0 \quad (4.39)$$

où  $x \in \mathbb{R}^m$  et  $G_i = G_i^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  pour  $i = 0, \dots, m$ . L'inégalité matricielle (4.39) est une contrainte convexe en  $x$ .

**Définition 4.3.5 [Complément de Schur]** : Soit la matrice  $M(x)$  donnée par :

$$M(x) = \begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & R(x) \end{bmatrix}$$

avec  $Q(x) = Q^T(x)$ ,  $R(x) = R^T(x)$  et  $S(x)$  est affine en  $x$ . Si  $R(x)$  est inversible alors :

1.  $M(x) > 0$  si  $R(x) > 0$  et  $Q(x) - S(x)R^{-1}(x)S^T(x) > 0$ .
2.  $M(x) \geq 0$  si  $R(x) > 0$  et  $Q(x) - S(x)R^{-1}(x)S^T(x) \geq 0$

### 4.3.5.2 Observateur basé sur le théorème de la valeur moyenne

On considère les systèmes non linéaires sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bf(x, y, u) \\ y &= Cx \end{cases} \quad (4.40)$$

où  $x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^p$  et  $y \in \mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^m$ . Supposons que la fonction  $f(x, y, u) = [f_1(x, y, u) \dots f_q(x, y, u)]^T$  est différentiable par rapport à  $x$  et de plus  $f_i$  vérifie l'hypothèse suivante.

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \exists a_{ij}, b_{ij} < \infty : a_{ij} \leq \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x, u, y) \leq b_{ij}, \quad \forall x \in \mathbb{X}, u \in \mathbb{U}, y \in \mathbb{Y}. \quad (4.41)$$

Soit la matrice  $\mathcal{A}(h(t))$  donnée par :

$$\mathcal{A}(h(t)) = A + B \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^n e_q(i) e_n^T(j) h_{ij}(t) \quad (4.42)$$

où  $h(t)$  évolue dans le convexe  $\mathcal{H}_{qn}$  défini par :

$$\mathcal{H}_{qn} = \{h(t) = (h_{11}, \dots, h_{1n}, \dots, h_{qn}), \quad a_{ij} \leq h_{ij} \leq b_{ij}\}$$

Les sommets  $\beta_k$  du convexe  $\mathcal{H}_{qn}$  sont dans l'ensemble  $\mathcal{V}_{\mathcal{H}_{qn}}$  suivant :

$$\mathcal{V}_{\mathcal{H}_{qn}} = \left\{ \beta_k = (\beta_{k1}, \dots, \beta_{kn}, \dots, \beta_{kn}) : \beta_{ij} \in \{a_{ij}, b_{ij}\}, 1 \leq k \leq 2^{qn} \right\}$$

Un observateur de type Luenberger pour le système (4.40) est alors donné par la proposition suivante :

**Proposition 4.3.6 :** [*Zemouche and Boutayeb, 2013*] Le système :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bf(\hat{x}, y, u) + K(y - Cx) \\ \hat{y} &= C\hat{x} \end{cases} \quad (4.43)$$

est un observateur exponentiel pour le système (4.40), s'il existe des matrices  $P = P^T > 0$ ,  $Q = Q^T > 0$  et  $R$  vérifiant les inégalités matricielles suivantes :

$$\mathcal{A}^T(\beta_k)P + P\mathcal{A}(\beta_k) - C^T R - R^T C < -Q, \quad \forall \beta_k \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}_{qn}}, 1 \leq k \leq 2^{qn} \quad (4.44)$$

avec  $K = P^{-1}R^T$ .

**Démonstration:**

Pour démontrer la proposition ci-dessus, on note  $\tilde{x} = x - \hat{x}$  l'erreur d'observation en  $x$ . En utilisant les représentations d'état données par (4.40) et (4.43), on obtient alors la dynamique de l'erreur :

$$\dot{\tilde{x}} = (A - KC)\tilde{x} + f(x, y, u) - f(\hat{x}, y, u) \quad (4.45)$$

Appliquons le théorème de la valeur moyenne 2.2.21 à la fonction  $f$  sur  $Co(x, \hat{x})$  : il existe des vecteurs  $\tau_i(t) \in Co(x, \hat{x})$ ,  $i \in \{1, \dots, q\}$ , tels que :

$$f(x, y, u) - f(\hat{x}, y, u) = \left( \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^n e_q(i) e_n^T(j) \underbrace{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\tau_i(t), y, u)}_{h_{ij}(t)} \right) \tilde{x}$$

L'équation (4.45) devient :

$$\dot{\tilde{x}} = (\mathcal{A}(h(t)) - KC)\tilde{x} \quad (4.46)$$

où la matrice  $\mathcal{A}(h(t))$  est donnée par (4.42). Soit la fonction de Lyapunov  $V(\tilde{x}) = \tilde{x}^T P \tilde{x}$ , sa dérivée le long du système (4.46) est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{V}(\tilde{x}) &= \tilde{x}^T F(h(t)) \tilde{x} \\ F(h(t)) &= (\mathcal{A}(h(t)) - KC)^T P + P(\mathcal{A}(h(t)) - KC) \end{cases}$$

Pour que  $\dot{V}(\tilde{x}) < -\tilde{x}^T Q \tilde{x}$ , il faut que  $F(h(t)) < -Q$ ,  $\forall h(t) \in \mathcal{H}_{qn}$ . De plus, comme  $F(h(t))$  est affine en  $h(t)$ , en utilisant alors le principe de convexité on peut conclure alors que  $\dot{V}(\tilde{x}) < -\tilde{x}^T Q \tilde{x}$  si pour tout  $\beta_k \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}_{qn}}$ ,  $k \leq 2^{qn}$  on a  $F(\beta_k) < -Q$ .

Donc s'il existe des matrices  $P = P^T > 0$ ,  $Q = Q^T > 0$  et  $R$  solutions de (4.44) alors on aura :

$$\dot{V}(\tilde{x}) < -\tilde{x}^T Q \tilde{x} < -\frac{\lambda_Q}{\lambda_P} \dot{V}(\tilde{x})$$

Par conséquent  $\tilde{x}$  converge exponentiellement vers zéro, donc le système (4.43) est un observateur exponentiel pour le système (4.40).

□

En comparant l'observateur basé sur le théorème de la valeur moyenne et l'observateur à grand gain, on constate que le gain  $K$  de l'observateur  $MVT$  est synthétisé de sorte à écraser les constantes de lipschitz locales de chaque sous-fonction  $f_i$ . En revanche pour l'observateur à grand gain, c'est la constante de lipschitz globale de la fonction  $f$ , phénomène amplifié par l'utilisation d'un gain  $l^i$  croissant en fonction de  $i$ . On peut donc s'attendre à des gains moins élevés en utilisant l'observateur  $MVT$ , et par conséquent une moindre sensibilité aux bruits de mesure.

### 4.3.6 Observateur par immersion

Une immersion  $\phi$  est une application différentiable d'une variété  $N$  de dimension  $n$  dans une variété  $M$  de dimension  $m$  dont la différentielle est injective, *i. e.* telle que  $\text{Rang}(\phi) = n \leq m$ . Si elle est injective, alors elle définit un difféomorphisme de  $N$  dans  $M' = \phi(N) \subset M$ . Cette application permet donc de projeter un système dynamique initial dans un autre système cible, dont on espère des propriétés adéquates par transformation des champs de vecteurs  $f$  du système initial en champs de vecteurs  $f' = L_f \phi$  pour le système cible : c'est ainsi que l'on peut voir

la linéarisation par retour d'état statique ou dynamique ou la commande adaptative. On pose souvent  $n = m$  car cela facilite le retour aux coordonnées naturelles (dans  $N$ ), mais ce n'est parfois pas suffisant pour exhiber un système cible dont les propriétés sont celles voulues : nous considérons ici le cas où  $n < m$ .

**Hypothèse 4.3.7 :** Soit le système non linéaire affine en commande (4.1). S'il existe  $m \geq n$  et une immersion injective Lipschitz continue de  $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$  dans  $M \subset \mathbb{R}^m$  telle que :

$$L_{f_0}\phi = f' \quad , \quad L_g\phi = g'$$

alors  $z = \phi(x)$  vérifie le système cible :

$$\dot{z} = f'(z, x, y) + g'(y)u, \quad x = \phi^*(z) \quad (4.47)$$

avec  $\phi^*$  l'inverse à gauche de  $\phi$ .

Par exemple, dans [Andrieu and Praly, 2004, Praly et al., 2006], les auteurs exhibent un système cible sous forme linéaire stable (avec une matrice d'état Hurwitz) pour un oscillateur harmonique de pulsation inconnue, en prenant  $m = n + 1$  ([Marconi et al., 2007] ont montré qu'on pouvait localement viser un système stable linéaire pour  $m = 2 + 2n$ ). Il n'est en outre pas nécessaire de viser un système stable : ainsi viser un système linéaire permet de lui appliquer un observateur type Luenberger ou de Kalman dans les coordonnées cibles. On doit alors vérifier la condition de convergence suivante :

**Hypothèse 4.3.8 :** Soit  $\mathcal{X}_u(t, x_0) \in \mathbb{X}$  solution du système (4.1), on suppose qu'on connaît des champs de vecteurs  $f'$  et  $g'$  et une immersion injective  $\phi$  telle que la solution  $(\mathcal{X}_u(t, x_0), \hat{\mathcal{Z}}_u(t, \phi(x_0), \hat{z}))$  du système

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad , \quad \dot{\hat{z}} = f'(\hat{z}, \phi^*(\hat{z}), y) + g'(y)u$$

est définie pour toute condition initiale  $(x_0, \hat{z}_0) \in \mathbb{X} \times \mathbb{R}^m$  et vérifie :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(\mathcal{X}) - \hat{\mathcal{Z}}\| = 0 \quad (4.48)$$

Un observateur dans les coordonnées naturelles peut même être construit, à condition –si  $n < m$ – de compléter l'immersion  $\phi$  de sorte à obtenir un difféomorphisme  $\phi_e$  :

**Théorème 4.3.9 :** [Bernard et al., 2015] Sous les hypothèses 4.3.7 et 4.3.8 et , s'il existe un ensemble  $M' \subset \mathbb{R}^m$  tel que  $\mathbb{X} \times \{0\} \subset M'$ , et un difféomorphisme  $\phi_e$  :

$$\phi_e(x, 0) = \phi(x), \quad \forall x \in \mathbb{X} \quad (4.49)$$

qui est surjectif de  $M'$  dans  $\phi_e(M') = \mathbb{R}^m$ , en posant  $x_e = \begin{pmatrix} x \\ \tau \end{pmatrix}$ , on a

$$\dot{\hat{x}}_e = \left[ \frac{\partial \phi_e}{\partial x_e}(\hat{x}_e) \right]^{-1} \left( f'(\phi_e(\hat{x}_e), \hat{x}_e, y) + g'(y)u \right) \quad (4.50)$$

est un observateur du système (4.1) pour toute condition initiale  $\hat{x}_e \in M'$ .

**Remarque 4.3.10 :** Le problème est ici l'inversion de la différentielle de  $\phi_e$ . Dans le cas où  $m = n$ , cette inverse existe à condition de rester dans le domaine  $\mathbb{X}$  or rien ne garantit que  $\hat{x}$  reste dans ce domaine. Dans le cas où  $m > n$ , il faut non seulement compléter la différentielle mais aussi assurer son inversibilité sur tout le domaine.

## 4.4 Observation du modèle étendu du microrobot

Dans le chapitre 3, nous avons synthétisé des lois de commande afin de commander le microrobot le long d'une trajectoire de référence et nous avons supposé que tous les états du système (position et vitesse du microrobot ainsi que la vitesse du sang) sont mesurables c'est-à-dire sous l'hypothèse 3.4.1. Cependant seule la position du microrobot est donnée par l'imageur. Cette section sera donc consacrée à la synthèse d'un observateur d'état pour reconstruire les états non accessibles (vitesses du microrobot et du sang donc dans le cas où l'hypothèse 3.4.1 n'est pas satisfaite). Premièrement, nous allons proposer un observateur pour le modèle 1D du microrobot dans le cas de paramètres connus, puis incertains. Deuxièmement, nous allons étendre l'approche au modèle 2D du microrobot dans le cas d'incertitudes paramétriques.

### 4.4.1 Modèle 1D

#### 4.4.1.1 Introduction

Dans le chapitre 3 section 3.4.1.1, nous avons synthétisé une loi de commande donnée par (3.54) pour stabiliser la position et la vitesse du microrobot le long d'une trajectoire de référence. Cette loi de commande  $\kappa(x, \xi)$  n'est utilisable que lorsque les trois premiers états (les position et vitesse du microrobot et la vitesse du sang) du système étendu  $(\mathcal{E}_\omega^{1,n})$  donné par (2.55) sont accessibles. Or ce n'est pas le cas puisque seule la position du microrobot est mesurée par un imageur. Cette section est donc consacrée à la synthèse d'un observateur pour le système étendu  $(\mathcal{E}_\omega^{1,n})$  dans les cas où le paramètre  $\vartheta$  est connu, et pour le système  $(\mathcal{E}_{\omega, v_m}^{1,n})$  dans lequel le paramètre  $\vartheta$  est supposé incertain.

#### 4.4.1.2 Paramètres connus

La loi de commande donnée par la proposition 3.4.3 nécessite que les états du microrobot (position et vitesse) et la vitesse du sang soient accessibles, ce qui n'est pas le cas. Pour remédier à ce problème, un observateur d'état pour le système  $(\mathcal{E}_\omega^{1,n})$  est nécessaire afin de reconstruire

les états non mesurables du système (les vitesses du microrobot et du sang). On considère alors le lemme suivant :

**Lemme 4.4.1 [lemme ( $\mathcal{E}_\omega^{1,n}$ )]** : *Le système ( $\mathcal{E}_\omega^{1,n}$ ) vérifie les propriétés suivantes :*

**P1 )** *Les paires ( $A_1, C$ ) et ( $A_2, C$ ) sont observables :*

$$A_1 = A(0) \quad A_2 = A(\gamma - a) \quad (4.51)$$

avec  $\gamma$  la constante de lipchitz de la fonction  $\Phi$  et  $a$  est le terme linéaire de la force de traînée  $\vec{F}_d$ .

**P2)** *La fonction  $f$  est différentiable par rapport à  $x$  et pour  $j = 1, \dots, 2n+3$ ,  $\exists (a_j, b_j) \in \mathbb{R}^2$  borné tel que :*

$$a_j \leq \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_j}(\bar{x}) \leq b_j \quad \forall \bar{x} \in \mathcal{K} \quad (4.52)$$

**Démonstration:**

**P1)** Soit  $\Upsilon$  le déterminant de la matrice d'observabilité de la paire  $(C, A(\alpha))$ , avec  $C$  la matrice de sortie du système ( $\mathcal{E}_\omega^{1,n}$ ) et  $A(\alpha)$  donnée par (2.57). On peut facilement vérifier que  $\Upsilon$  est donné par :

$$\Upsilon = \left[ (a + \alpha)^{2n+1} \prod_{i=0}^{n-1} \left( [(i+1)(i+2)]^{2n-2i-1} \omega^{4i} \right) \right] \omega^{2n} \quad (4.53)$$

On constate que  $\forall \alpha \in [0, \gamma - a]$ , le déterminant  $\Upsilon \neq 0$  par conséquent les deux paires  $(A_1, C)$  et  $(A_2, C)$  sont observables.

**P2)** On remarque dans l'expression de  $f$  donnée par (2.56) que :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{x}_2}(\bar{x}) = \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}_2}(\bar{x}) + a \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_3}(\bar{x}) = \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}_3}(\bar{x}) - a \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}_2}(\bar{x}) = -\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}_3}(\bar{x}) \quad (4.54)$$

En utilisant le lemme 1 de [Fruchard et al., 2014],  $\forall \bar{x} \in \mathcal{K}$  :

$$a \leq \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}_3}(\bar{x}) \leq \gamma \quad (4.55)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}_j}(\bar{x}) = 0 \quad j = 1, 4, 5, \dots, 2n+3$$

En utilisant (4.54) et (4.55) on obtient alors

$$0 \leq \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_3}(\bar{x}) = -\frac{\partial f}{\partial \bar{x}_2}(\bar{x}) \leq \gamma - a \quad (4.56)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{x}_j}(\bar{x}) = 0 \quad \forall j \notin \{2, 3\}$$

□

Dans le cas où le poids apparent est connu (le paramètre  $\vartheta$  de l'équation (2.56) est connu), on obtient alors la proposition suivante.

**Proposition 4.4.2 [Observateur ( $\mathcal{E}_\omega^{1,n}$ )]:** Soit  $\mathbb{U}$  l'ensemble des commandes admissibles. Sous les hypothèses des lemmes 3.4.2 et 4.4.1,  $\forall \bar{x}(0) \in \mathcal{K}, \forall \hat{x}(0) \in \mathcal{K}, \forall u \in \mathbb{U}$ , le système :

$$(\hat{\mathcal{E}}_\omega^{1,n}) : \begin{cases} \dot{\hat{x}} &= A(0)\hat{x} + B(\beta'_1 u + f(\hat{x}) + \vartheta) + K_o(y - C\hat{x}) \\ \hat{y} &= C\hat{x} \end{cases} \quad (4.57)$$

est un observateur exponentiel pour le système ( $\mathcal{E}_\omega^{1,n}$ ) sur  $\mathcal{K}$  si et seulement si il existe des matrices symétriques définies positives  $P_o, Q_o \in \mathcal{M}_{2n+3}(\mathbb{R})$  et le gain  $K_o \in \mathcal{M}_{(2n+3) \times 1}(\mathbb{R})$  :

$$(A_i - K_o C)^T P_o + P_o (A_i - K_o C) < -Q_o, \quad \forall i \in \{1, 2\} \quad (4.58)$$

où les matrices  $A_i$  sont données dans le lemme 4.4.1.

**Démonstration:**

Soit  $\tilde{x} = \bar{x} - \hat{x}$  l'erreur d'estimation, le convexe  $Co(\bar{x}, \hat{x}) = \{\lambda \bar{x} + (1 - \lambda) \hat{x}, 0 \leq \lambda \leq 1\}$ , et son enveloppe  $\bar{C}o(\bar{x}, \hat{x})$ . Appliquons le théorème de la valeur moyenne 2.2.20 à la fonction  $f$  :

$$\exists \varrho(t) \in \bar{C}o(\bar{x}, \hat{x}) : \tilde{f} = f(\bar{x}) - f(\hat{x}) = \left( \sum_{j=1}^{2n+3} e_{2n+3}(j)^T h_j(t) \right) \tilde{x}(t) \quad (4.59)$$

avec  $h_j(t) = \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_j}(\varrho(t))$ .

En utilisant ( $\mathcal{E}_\omega^{1,n}$ ) et ( $\hat{\mathcal{E}}_\omega^{1,n}$ ) et l'équation (4.59), on obtient la dynamique de l'erreur :

$$(\tilde{\mathcal{E}}_\omega^{1,n}) : \dot{\tilde{x}}(t) = (\mathcal{A}(h(t)) - K_o C) \tilde{x}(t) \quad (4.60)$$

avec :

$$\mathcal{A}(h(t)) = A(0) + B \sum_{j=1}^{2n+3} h_j(t) e_j^T \quad (4.61)$$

La propriété (P2) du lemme 4.4.1 implique que le vecteur  $h(t) = [h_1(t), \dots, h_{2n+3}(t)]$  évolue dans un ensemble borné  $\mathcal{H}$  dont les sommets  $\mathcal{V}$  sont donnés par :

$$\mathcal{V} = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2n+3}) \mid \alpha_j \in \{a_j, b_j\}\} \quad (4.62)$$

D'après l'équation (4.56), l'ensemble  $\mathcal{V}$  peut être réduit à 2 sommets :

$$\mathcal{V} = \{(-a_3, a_3, 0, \dots, 0), (-b_3, b_3, 0, \dots, 0)\} \quad (4.63)$$

Soit  $P_o = P_o^T > 0$  et la fonction de Lyapunov donnée par :

$$V_o(\tilde{x}) = \tilde{x}^T P_o \tilde{x} \leq \bar{\lambda}_{P_o} \|\tilde{x}\|^2 \quad (4.64)$$

La dérivée de  $V_o$  le long des trajectoires du système  $(\tilde{\mathcal{E}}_\omega^{1,n})$  est donnée ci-après :

$$\dot{V}_o(\tilde{x}) = \tilde{x}^T Q(h(t)) \tilde{x} \quad (4.65)$$

où  $Q(h(t))$  est une matrice affine en  $h(t)$  :

$$Q(h(t)) = (\mathcal{A}(h(t)) - K_o C)^T P_o + P_o (\mathcal{A}(h(t)) - K_o C) \quad (4.66)$$

Comme  $\mathcal{A}(a_3) = A_1$  et  $\mathcal{A}(b_3) = A_2$  alors s'il existe  $K_o$ ,  $P_o$  et  $Q_o$  solutions des deux LMI (4.58), on a :

$$Q(\alpha) < -Q_o \quad \forall \alpha \in \mathcal{V}$$

Comme  $Q(h(t))$  est affine en  $h(t)$ , d'après le principe de convexité, il vient :

$$Q(\alpha) < -Q_o \quad \forall \alpha \in \mathcal{V} \implies Q(h(t)) < -Q_o \quad \forall h(t) \in \mathcal{H}$$

On obtient alors :

$$\dot{V}_o(\tilde{x}) < -\tilde{x}^T Q_o \tilde{x} < -\lambda_{Q_o} \|\tilde{x}\|^2 \leq -\frac{\lambda_{Q_o}}{\lambda_{P_o}} V_o(\tilde{x}) \quad (4.67)$$

D'après (4.67) le système  $(\hat{\mathcal{E}}_\omega^{1,n})$  est un observateur exponentiel pour le système  $(\mathcal{E}_\omega^{1,n})$ .

□

#### 4.4.1.3 Incertitude paramétrique

On suppose maintenant que le poids apparent est inconnu ( $\vartheta$  est inconnu dans l'équation (2.59)), un observateur est synthétisé pour estimer les états non accessibles du microrobot, le paramètre  $\vartheta$  ainsi que la vitesse du sang. On considère alors le lemme suivant :

**Lemme 4.4.3 [lemme  $(\mathcal{E}_{\omega, v_m}^{1,n})$ ]** : Le système  $(\mathcal{E}_{\omega, v_m}^{1,n})$  vérifie les propriétés suivantes :

**P1**) Les paires  $(\bar{A}_1, \bar{C})$  et  $(\bar{A}_2, \bar{C})$  sont observables, avec  $\bar{A}_1 = \bar{A}(0)$  et  $\bar{A}_2 = \bar{A}(\gamma - a)$ , les matrices  $\bar{A}(\alpha)$  et  $\bar{C}$  étant données par :

$$\bar{A}(\alpha) = \begin{bmatrix} A(\alpha) & B \\ 0_{1 \times (2n+2)} & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

où  $A(\alpha)$  est obtenue en supprimant les dernières ligne et colonne de la matrice donnée par (2.57) et  $C$  la matrice de sortie du système  $(\mathcal{E}_{\omega, v_m}^{1,n})$ .

**P2**) La fonction  $f$  est différentiable par rapport à  $\bar{x}$  et pour  $j = 1, \dots, 2n+2$ ,  $\exists (a_j, b_j) \in \mathbb{R}^2$  borné tel que :

$$a_j \leq \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_j}(\bar{x}) \leq b_j \quad \forall \bar{x} \in \mathcal{K} \quad (4.69)$$

**Démonstration:**

**P1)** Soit  $\Upsilon$  le déterminant de la matrice d'observabilité de la paire  $(\bar{C}, \bar{A}(\alpha))$ , on peut vérifier facilement que  $\Upsilon$  est donné par :

$$\Upsilon = (a + \alpha)^{2n} \prod_{i=1}^{n-1} \left( [i(i+1)]^{2n-2i} \omega^{4(i-1)} \right) \quad (4.70)$$

On constate que, pour tout  $\alpha \in [0, \gamma - a]$ , le déterminant  $\Upsilon$  est non nul. Par conséquent les deux paires  $(\bar{A}_1, \bar{C})$  et  $(\bar{A}_2, \bar{C})$  sont observables.

**P2 )** Pour la propriété P2 , la démonstration est la même que celle du lemme 4.4.1.

□

Un observateur pour le système  $(\mathcal{E}_{\omega, v_m}^{1,n})$  est donné dans la proposition suivante dans le cas d'incertitudes paramétriques.

**Proposition 4.4.4 [Observateur  $(\mathcal{E}_{\omega, v_m}^{1,n})$ ]** : Soit  $\mathbb{U}$  l'ensemble des commandes admissibles. Sous les hypothèses des lemmes 3.4.2 et 4.4.3,  $\forall \bar{x}(0) \in \mathcal{K}, \forall \hat{x}(0) \in \mathcal{K}, \forall \hat{\vartheta}(0) \in \mathcal{K}_{\vartheta}, \forall u \in \mathbb{U}$ , le système :

$$(\hat{\mathcal{E}}_{\omega, v_m}^{1,n}) : \begin{cases} \dot{\hat{x}} &= A(0)\hat{x} + B(\beta'_1 u + f(\hat{x}) + \hat{\vartheta}) + K_o(y - C\hat{x}) + V_m \\ \hat{y} &= C\hat{x} \\ \dot{\hat{\vartheta}} &= K_{\vartheta}(y - C\hat{x}) \end{cases} \quad (4.71)$$

est un observateur exponentiel pour le système  $(\mathcal{E}_{\omega, v_m}^{1,n})$  sur  $\mathcal{K} \times \mathcal{K}_{\vartheta}$  si et seulement si il existe des matrices symétriques définies positives  $P_o, Q_o \in \mathcal{M}_{2n+3}(\mathbb{R})$  et un gain  $\bar{K} = \begin{bmatrix} K_o \\ K_{\vartheta} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{(2n+3) \times 1}(\mathbb{R})$  :

$$(\bar{A}_i - \bar{K}\bar{C})^T P_o + P_o(\bar{A}_i - \bar{K}\bar{C}) < -Q_o, \quad \forall i \in \{1, 2\} \quad (4.72)$$

où les matrices  $\bar{A}_i$  sont données dans le lemme 4.4.3.

**Démonstration:**

Soient  $\tilde{x} = \bar{x} - \hat{x}$  et  $\tilde{\vartheta} = \vartheta - \hat{\vartheta}$  respectivement les erreurs d'observations de l'état  $\bar{x}$  et du paramètre  $\vartheta$ . Appliquons le théorème de la valeur moyenne 2.17 à la fonction  $f$  :

$$\exists \varrho(t) \in \bar{C}o(\bar{x}, \hat{x}) : \tilde{f} = f(\bar{x}) - f(\hat{x}) = \left( \sum_{j=1}^{2n+2} e_{2n+2}(j)^T h_j(t) \right) \tilde{x}(t) \quad (4.73)$$

avec  $h_j(t) = \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_j}(\varrho(t))$ . En utilisant  $(\mathcal{E}_{\omega, v_m}^{1,n})$  et  $(\hat{\mathcal{E}}_{\omega, v_m}^{1,n})$  et l'équation (4.73), on obtient la dynamique de l'erreur :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) &= (\mathcal{A}(h(t)) - K_o C) \tilde{x}(t) + B \tilde{\vartheta} \\ \dot{\tilde{\vartheta}} &= -K_{\vartheta}(y - C\hat{x}) \end{cases} \quad (4.74)$$

avec

$$\mathcal{A}(h(t)) = A(0) + B \sum_{j=1}^{2n+2} h_j(t) e_{2n+2}(j)^T \quad (4.75)$$

Posons  $\tilde{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{x}} \\ \tilde{\tilde{v}} \end{bmatrix}$ . Le système donné par (4.74) peut alors se mettre sous la forme suivante :

$$(\tilde{\mathcal{E}}_{\omega, v_m}^{1, n}) : \dot{\tilde{\tilde{x}}} = (\bar{\mathcal{A}}(h(t)) - \bar{K}\bar{C})\tilde{\tilde{x}} \quad (4.76)$$

avec :

$$\bar{\mathcal{A}}(h(t)) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}(h(t)) & B \\ 0_{1 \times (2n+2)} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

La propriété (P2) du lemme 4.4.3 implique que le vecteur  $h(t) = [h_1(t), \dots, h_{2n+2}(t)]$  évolue dans un ensemble borné  $\mathcal{H}$  dont les sommets  $\mathcal{V}$  sont donnés par :

$$\mathcal{V} = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2n+2}) \mid \alpha_j \in \{a_j, b_j\}\} \quad (4.78)$$

L'ensemble  $\mathcal{V}$  peut être réduit à 2 sommets :  $\mathcal{V} = \{(-a_3, a_3, 0, \dots, 0), (-b_3, b_3, 0, \dots, 0)\}$ .

Soit  $P_o = P_o^T > 0$  et la fonction de Lyapunov donnée par :

$$V_o(\tilde{\tilde{x}}) = \tilde{\tilde{x}}^T P_o \tilde{\tilde{x}} \leq \bar{\lambda}_{P_o} \|\tilde{\tilde{x}}\|^2 \quad (4.79)$$

On a alors

$$\dot{V}_o(\tilde{\tilde{x}}) = \tilde{\tilde{x}}^T Q(h(t)) \tilde{\tilde{x}} \quad (4.80)$$

où  $Q(h(t))$  est la matrice affine en  $h(t)$  donnée par :

$$Q(h(t)) = (\bar{\mathcal{A}}(h(t)) - \bar{K}\bar{C})^T P_o + P_o (\bar{\mathcal{A}}(h(t)) - \bar{K}\bar{C}) \quad (4.81)$$

Comme  $\bar{\mathcal{A}}(a_3) = \bar{A}_1$  et  $\bar{\mathcal{A}}(b_3) = \bar{A}_2$ , si les matrices  $\bar{K}$ ,  $P_o$  et  $Q_o$  sont solutions des LMI (4.72) existent, cela implique que :

$$Q(\alpha) < -Q_o \quad \forall \alpha \in \mathcal{V}$$

Comme  $Q(h(t))$  est affine en  $h(t)$ , d'après le principe de convexité on a :

$$Q(\alpha) < -Q_o \quad \forall \alpha \in \mathcal{V} \implies Q(h(t)) < -Q_o \quad \forall h(t) \in \mathcal{H}$$

On obtient alors :

$$\dot{V}_o(\tilde{\tilde{x}}) < -\tilde{\tilde{x}}^T Q_o \tilde{\tilde{x}} < -\underline{\lambda}_{Q_o} \|\tilde{\tilde{x}}\| \leq -\frac{\underline{\lambda}_{Q_o}}{\bar{\lambda}_{P_o}} V_o(\tilde{\tilde{x}}) \quad (4.82)$$

Le système  $(\tilde{\mathcal{E}}_{\omega, v_m}^{1, n})$  est donc un observateur exponentiel pour le système  $(\mathcal{E}_{\omega, v_m}^{1, n})$ .

□

#### 4.4.2 Modèle 2D

Cette section est consacrée à la synthèse d'un observateur pour le système  $(\mathcal{E}_\omega^{2,n})$  dont le paramètre  $\vartheta$  est inconnu. Dans ce cas, la loi de commande donnée dans la proposition 3.4.6 requiert la connaissance des 5 premiers états du système étendu  $(\mathcal{E}_\omega^{2,n})$ , alors que seuls les deux premiers sont mesurés. On considère alors le lemme suivant :

**Lemme 4.4.5 [lemme  $(\mathcal{E}_\omega^{2,n})$ ]** : *Le système  $(\mathcal{E}_\omega^{2,n})$  vérifie les propriétés suivantes :*

**P1)** *La paire  $(\bar{A}(p), \bar{C})$  est observable  $\forall p \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^7 \setminus \{p_4 + a = 0\}$ , avec  $\mathcal{P}$  un convexe borné et les matrices  $\bar{A}(p)$  et  $\bar{C}$  données ci-dessous :*

$$\bar{A}(p) = \begin{bmatrix} A(p) & B_\vartheta \\ 0_{1 \times (2n+5)} & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} C & 0_{2 \times 1} \end{bmatrix}. \quad (4.83)$$

**P2)** *La fonction  $\bar{g}$  est différentiable par rapport à  $\bar{x}$  :*

$$\exists (a_{ij}, b_{ij}) \in \mathbb{R}^2 : a_{ij} \leq \frac{\partial \bar{g}_i}{\partial \bar{x}_j} \leq b_{ij}, \quad a_{ij} b_{ij} \leq 0, \quad \forall \bar{x} \in \mathcal{K}, \forall i \in \{1, 2\}, \forall j \in \{1, \dots, 2n+5\} \quad (4.84)$$

La preuve du lemme 4.4.5 est donnée dans l'annexe A.6.

Nous proposons un observateur pour le système  $(\mathcal{E}_\omega^{2,n})$ , donné par la proposition suivante.

**Proposition 4.4.6** : *Sous les hypothèses des lemmes 3.4.5 et 4.4.5,  $\forall \bar{x}(0) \in \mathcal{K}_0 : \bar{x}(t) \in \mathcal{K} \supset \mathcal{K}_0$ ,  $\forall \hat{\tau}(0) \in \mathcal{K}, \forall \hat{\theta}(0) \in \mathcal{K}_\vartheta, \forall u \in \mathbb{U}$  :*

$$\begin{cases} \dot{\hat{\tau}} = A(0)\hat{\tau} + B(\bar{g}(\hat{x}) + \beta'_1 u) + B_\vartheta \hat{\theta} + K_o(y - C\hat{\tau}) & (4.85a) \\ \dot{\hat{\theta}} = K_\theta(y - C\hat{\tau}) & (4.85b) \\ \hat{x} = \text{sat}_{\mathcal{K}}(\hat{\tau}) & (4.85c) \\ \hat{\vartheta} = \text{sat}_{\mathcal{K}_\vartheta}(\hat{\theta}) & (4.85d) \end{cases}$$

avec  $\text{sat}_{\mathcal{K}}$  une fonction de saturation sur  $\mathcal{K}$ .  $(\hat{\mathcal{E}}_\omega^{2,n})$  est un observateur asymptotique exponentiel pour le système  $(\mathcal{E}_\omega^{2,n})$  sur  $\mathcal{K} \times \mathcal{K}_\vartheta$  s'il existe des matrices symétriques définies positives  $P_o, Q_o$

et un gain  $\bar{K} = \begin{bmatrix} K_o \\ K_\theta \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{(2n+6) \times 2}(\mathbb{R})$  solutions des LMI suivantes :

$$(\bar{A}_i - \bar{K}\bar{C})^T P_o + P_o(\bar{A}_i - \bar{K}\bar{C}) < -Q_o, \quad \forall i \leq 128 \quad (4.86)$$

avec  $\bar{A}_i = \bar{A}(V_i)$  et  $V_i$  les sommets du convexe  $\mathcal{P}$ .

**Démonstration:**

Soient  $\varepsilon_1 = \bar{x} - \hat{\tau}$  l'erreur d'estimation de l'état  $\bar{x}$  et  $\varepsilon_2 = \vartheta - \hat{\theta}$  l'erreur d'estimation du paramètre  $\vartheta$ . Appliquons le théorème de la valeur moyenne 2.2.20 à la fonction  $\bar{g}_i$  :

$$\exists \varrho_i(t) \in \bar{C}o(\bar{x}, \hat{x}) : \bar{g}_i(\bar{x}) - \bar{g}_i(\hat{x}) = \left( \sum_{j=1}^{2n+5} e_{2n+5}^T(j) \frac{\partial \bar{g}_i}{\partial \bar{x}_j}(\varrho_i(t)) \right) (\bar{x} - \hat{x}) \quad (4.87)$$

Comme  $(\bar{x}, \hat{x}) \in \mathcal{K}^2$ ,  $\exists \Gamma(t) = \text{diag}(\Gamma_j(t))$  avec  $\Gamma_j(t) \in (0, 1]$  :

$$\tilde{x} = \bar{x} - \hat{x} = \Gamma(t)\varepsilon_1 \quad (4.88)$$

On a  $\bar{g}(\bar{x}) = \sum_{i=1}^2 e_2(i) \bar{g}_i(\bar{x})$ , donc en utilisant la représentation d'état du système  $(\mathcal{E}_\omega^{2,n})$  et les équations (4.85a), (4.85b), (4.87) et (4.88), on obtient la représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_1 &= (\mathcal{A}(\bar{p}(t)) - K_o C)\varepsilon_1 + B_\vartheta \varepsilon_2 \\ \dot{\varepsilon}_2 &= -K_\theta C \varepsilon_1 \end{cases} \quad (4.89)$$

avec :

$$\mathcal{A}(\bar{p}(t)) = A(0) + B \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{2n+5} e_2(i) e_{2n+5}^T(j) \bar{p}_{ij}(t) \quad (4.90)$$

où  $\bar{p}_{ij}(t) = \Gamma_j(t) \frac{\partial \bar{g}_i}{\partial \bar{x}_j}(\varrho_i(t))$ . Posons  $\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}$ , le système (4.89) peut se mettre sous la forme LTV suivante :

$$(\tilde{\mathcal{E}}_\omega^{2,n}) : \dot{\varepsilon} = (\bar{\mathcal{A}}(\bar{p}(t)) - \bar{K}\bar{C})\varepsilon \quad (4.91)$$

avec :

$$\bar{\mathcal{A}}(\bar{p}(t)) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}(\bar{p}(t)) & B_\vartheta \\ 0_{1 \times (2n+5)} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

D'après la propriété (P2) du lemme 4.4.5 et d'après la définition de  $\Gamma_i(t)$ , le paramètre  $\bar{p}(t)$  évolue dans un convexe borné  $\bar{\mathcal{P}}$  dont les sommets sont définis par :

$$\mathcal{V} = \{(v_{11}, \dots, v_{12n+5}, v_{21}, \dots, v_{22n+5}) : v_{ij} \in \{a_{ij}, b_{ij}\}\} \quad (4.93)$$

En tenant compte de la symétrie détaillée dans l'annexe A, l'ensemble  $\bar{\mathcal{P}}$  peut être réduit à l'ensemble  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^7$  dont les  $2^7$  sommets  $V_k$  sont donnés par :

$$\mathcal{V}_{\mathcal{P}} = \left\{ V_k = (v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{22}, v_{24}, v_{25}) : v_{ij} \in \{a_{ij}, b_{ij}\}, k \leq 2^7 \right\} \quad (4.94)$$

Soit  $P_o = P_o^T > 0$  et la fonction de Lyapunov donnée par :

$$V_o(\varepsilon) = \varepsilon^T P_o \varepsilon \leq \bar{\lambda}_{P_o} \|\varepsilon\|^2 \quad (4.95)$$

La dérivée de  $V_o$  le long des trajectoires du système  $(\hat{\mathcal{E}}_\omega^{2,n})$  est alors donnée par :

$$\dot{V}_o(\varepsilon) = \varepsilon^T \underbrace{(\bar{A}(h(t)) - \bar{K}\bar{C})^T P_o + P_o(\bar{A}(h(t)) - \bar{K}\bar{C})}_{Q(h(t))} \varepsilon \quad (4.96)$$

On note que  $Q(h(t))$  est une matrice affine en  $h(t)$ . D'après la propriété (P1) du lemme 4.4.5, la paire  $(\bar{A}(p), \bar{C})$  est observable pour  $p \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^7 \setminus \{p_4 + a = 0\}$ . Cette condition est nécessaire mais hélas pas suffisante pour garantir l'existence de matrices  $\bar{K}$ ,  $P_o$  et  $Q_o$  solutions de (4.86). Si les matrices  $\bar{K}$ ,  $P_o$  et  $Q_o$  existent, cela implique que  $Q(V_k) < -Q_o, \forall V_k \in \mathcal{V}_\mathcal{P}$ . En utilisant le principe de convexité, on a alors  $Q(p(t)) < -Q_o, \forall p \in \mathcal{P}$  par conséquent :

$$\begin{aligned} \dot{V}_o(\varepsilon) &< -\varepsilon^T Q_o \varepsilon \\ &< \lambda_{Q_o} \|\varepsilon\|^2 \\ &\leq -\frac{\lambda_{Q_o}}{\lambda_{P_o}} V_o(\varepsilon) = -k_o V_o(\varepsilon) \end{aligned} \quad (4.97)$$

Par conséquent le système  $(\hat{\mathcal{E}}_\omega^{2,n})$  est un observateur exponentiel pour le système  $(\mathcal{E}_\omega^{2,n})$ .

□

### 4.4.3 Conclusion

Nous avons synthétisé un observateur d'état pour les modèles 1D et 2D du microrobot en présence et en absence d'incertitudes paramétriques. Nous avons aussi démontré la stabilité de l'observateur proposé. Pour notre étude, nous avons utilisé un observateur MVT au lieu d'un observateur à grand gain pour deux raisons. La première est que notre système n'est pas sous une forme normale d'observabilité pour pouvoir appliquer directement les méthodes de synthèse d'observateur à grand gain. La deuxième est que la dimension de notre système est élevée, par conséquent l'observateur à grand gain sera très sensible aux bruits en raison des puissances croissantes du gain dans l'innovation. Par contre l'inconvénient majeur de l'observateur MVT est que son gain d'innovation est obtenu en résolvant plusieurs inégalités matricielles, mais le problème est qu'il n'existe pas de condition nécessaire et suffisante pour assurer l'existence d'une solution.

Dans le modèle de la vitesse du sang utilisé dans l'observateur, nous avons ici supposé que la pulsation cardiaque  $\omega$  est connue, par conséquent que le modèle de la vitesse du sang est linéaire. En revanche, si la pulsation cardiaque n'est pas connue, la dynamique du flux sanguin devient non linéaire (voir section 2.5.1 du chapitre 2), et la complexité de la synthèse d'un observateur est donc accrue. La section suivante sera consacrée à la synthèse d'un observateur pour le système étendu (microrobot et flux sanguin) dans le cas plus difficile où la pulsation cardiaque  $\omega$  est inconnue.

## 4.5 Estimation de la vitesse du sang et de la pulsation cardiaque

### 4.5.1 Introduction

Dans la section précédente 4.4, nous avons proposé un observateur pour le système étendu avec l'hypothèse que la pulsation cardiaque est fixe et connue. Dans cette section, nous allons synthétiser un observateur pour le système  $(\mathcal{E}^{1,n})$ , dans lequel la pulsation cardiaque est supposée inconnue. Nous nous intéressons d'abord au cas du système  $(\mathcal{E}_{s,v_m}^{1,1})$ , qui est un cas particulier du système  $(\mathcal{E}^{1,n})$  lorsque la force de traînée est linéaire et la vitesse moyenne du sang  $v_m$  est connue : la dimension du système  $(\mathcal{E}_{s,v_m}^{1,n})$  égale à  $2n + 3$ . Nous nous inspirons de [Andrieu et al., 2014] pour proposer un observateur à grand gain après immersion du système  $(\mathcal{E}_{s,v_m}^{1,1})$ , défini dans  $\mathbb{R}^5$ , dans  $\mathbb{R}^m$  avec  $m > 5$ . Il existe d'autres moyens d'arriver à cette fin : [Marino and Tomei, 2000, Obregón-Pulido et al., 2002] utilisent des immersions vers des systèmes cibles linéaires de dimension  $m = 5n + 1$  et  $m = 3n + 2$ , et [Hou, 2005] un filtre adaptatif, mais nous désirons limiter la dimension du système afin de limiter la sensibilité au bruit.

La codistribution d'observabilité  $d\mathcal{O}$  du système  $(\mathcal{E}_{s,v_m}^{1,1})$  et celle à l'ordre 4, notée  $d\mathcal{O}_4$ , sont données par :

$$d\mathcal{O}_4 = Vect \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & a & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & -a^2 & a & 0 \\ 0 & -a^3 & a^3 - a\bar{x}_5 & -a^2 & -a\bar{x}_3 \end{pmatrix}$$

$$d\mathcal{O} = Vect \begin{pmatrix} d\mathcal{O}_4 \\ 0 & a^4 & -a^2(a^2 - \bar{x}_5) & a(a^2 - \bar{x}_5) & a(a\bar{x}_3 - \bar{x}_4) \\ \dots \end{pmatrix}$$

Le système  $(\mathcal{E}_{s,v_m}^{1,1})$  satisfait donc la condition de rang d'observabilité si  $\bar{x}_3^2 + \bar{x}_4^2 \neq 0$ , cette condition est donc satisfaite  $\forall \bar{x} \in \mathcal{K}_x \times \mathcal{K}_\xi$  mais pas sur  $\mathcal{K}_x \times \mathbb{R}^3$  et le système  $(\mathcal{E}_{s,v_m}^{1,1})$  n'est donc pas localement observable sur cet espace. Le problème de linéarisation de la dynamique de l'erreur n'est donc pas solvable globalement par les méthodes classiques [Krener and Isidori, 1983, Krener and Respondek, 1985]. Il en va de même globalement pour la mise sous forme canonique dans la dimension  $n = 5$ .

En effet,  $|d\mathcal{O}_4| = -a^3\bar{x}_3 \Rightarrow \dim d\mathcal{O}_4 = 4 < 5$ ,  $\forall \bar{x} : \bar{x}_3 = 0 \in \mathcal{K}_x \times \mathcal{K}_\xi$ , c'est-à-dire lorsque la vitesse temporelle du sang est nulle. Si l'on pose  $z = \phi(\bar{x}) \in \mathbb{R}^5$  avec  $\phi_i$  donnée par  $L_f^{i-1}h$ , on obtient :

$$z = \phi(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ -a(\bar{x}_2 - \bar{x}_3) \\ a^2(\bar{x}_2 - \bar{x}_3) + a\bar{x}_4 \\ -a^3(\bar{x}_2 - \bar{x}_3) - a^2\bar{x}_4 - a\bar{x}_3\bar{x}_5 \end{pmatrix}, \quad \dot{z} = Az + Bu + \beta(z)$$

sous forme canonique d'observabilité de Brunovski. S'il est alors aisé de synthétiser un observateur pour ce système, le problème est le retour aux coordonnées naturelles par  $\hat{x} = \phi^{-1}(\hat{z})$  puisque  $\phi^{-1}$  n'est pas définie pour  $\hat{x}_3 = \hat{z}_2 + \frac{\hat{z}_3}{a} = 0$  :

$$\phi^{-1} : \hat{z} \mapsto \hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{z}_2 \\ \hat{z}_2 + \frac{\hat{z}_3}{a} \\ \hat{z}_3 + \frac{\hat{z}_4}{a} \\ \frac{\hat{z}_4 + \frac{\hat{z}_5}{a}}{\hat{z}_2 + \frac{\hat{z}_3}{a}} \end{pmatrix}$$

Ceci met en évidence deux obstructions. La première est que la variété  $\bar{x}_3 = 0$  appartient à  $\mathcal{K}_x \times \mathcal{K}_\xi$ , ce qui signifie en pratique que cet observateur divergerait à chaque fois que  $\bar{x}_3$  s'annule. D'autre part, on voit qu'en réalité le retour aux coordonnées naturelles n'est pas défini lorsque  $\hat{x}_3 = \hat{z}_2 + \frac{\hat{z}_3}{a} = 0$  or rien, dans la synthèse de l'observateur, ne s'oppose à ce que  $\hat{z}$  prenne ces valeurs, quand bien même on aurait  $\bar{x}_3 = 0 \notin \mathcal{K}_x \times \mathcal{K}_\xi$ .

Nous allons procéder en levant successivement ces obstructions. Nous allons d'abord immerger ce système dans une dimension  $m > 5$ , afin d'exploiter le fait que, structurellement, ce système ne perd son observabilité qu'en  $\bar{x}_3^2 + \bar{x}_4^2 = 0$ , variété qui n'appartient pas au domaine dans lequel évolue  $\bar{x}$ . Cependant, nous verrons que cette immersion  $\phi : \mathcal{K}_x \times \mathcal{K}_\xi \subset \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^m$  pose à son tour un problème quant à son inversion (à gauche) lorsque  $\hat{x}_3^2 + \hat{x}_4^2 = 0$ , ce qui nous ramène à la seconde obstruction.

Afin de lever celle-ci, nous verrons dans un second temps, par une extension dynamique et une extension de l'image de  $\phi$ , comment assurer un retour aux coordonnées naturelles en tout point  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ .

#### 4.5.2 Observateur par immersion et singularité structurelle

L'immersion d'un système de dimension  $n$  permet de se ramener à un système de dimension  $m$  supérieure à  $n$ , où ce nouveau système peut être soit linéaire [Levine and Marino, 1986], soit sous une forme normale [Andrieu and Praly, 2006], [Back and Seo, 2006]. Dans ces deux cas, la synthèse d'un observateur pour le système de dimension  $m$ , sera alors aisée. Cependant, la difficulté réside dans le retour aux coordonnées d'origines du système de dimension  $n$ .

#### 4.5.2.1 Changement de variables et observateur

Pour notre étude, considérons simplement  $m = 6$ . Ce choix permet, en prenant  $\phi_i : \bar{x} \mapsto L_f^{i-1}h(\bar{x})$ , d'exploiter le fait que  $d\mathcal{O} = d\mathcal{O}_5$  et ainsi de n'avoir pour singularité que la singularité structurelle du système  $(\mathcal{E}_{s,v_m}^{1,1})$ .

Soit un borné  $\mathcal{S} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^5 : \bar{x}_3^2 + \bar{x}_4^2 \in ]\delta^{-1}, \delta[, \bar{x}_5 \in ]-\delta, \delta[, \delta > 0\}$ . L'inverse à gauche de  $\phi$  est notée  $\phi^* : \phi^*(\phi(\bar{x})) = \bar{x}, \forall \bar{x} \in \mathcal{S}$ . En posant :

$$\begin{aligned} \phi & : \mathcal{S} & \rightarrow & \mathbb{R}^6 \\ \bar{x} & \mapsto & z & = \phi(\bar{x}) \end{aligned}$$

le changement de variables suivant :

$$z = \phi(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ -a(\bar{x}_2 - \bar{x}_3) \\ a^2(\bar{x}_2 - \bar{x}_3) + a\bar{x}_4 \\ -a^3(\bar{x}_2 - \bar{x}_3) - a^2\bar{x}_4 - a\bar{x}_3\bar{x}_5 \\ a^4(\bar{x}_2 - \bar{x}_3) + a^3\bar{x}_4 + a^2\bar{x}_3\bar{x}_5 - a\bar{x}_4\bar{x}_5 \end{pmatrix} \quad (4.98)$$

donne une jacobienne  $J_\phi(\bar{x}) = \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}}(\bar{x})$ , formée des lignes de  $d\mathcal{O}_5(\bar{x})$ , qui est alors de rang plein hors de la singularité :

$$D_\phi = \det(J_\phi^T(\bar{x})J_\phi(\bar{x})) = a^6 \left[ (a\bar{x}_3\bar{x}_5 - \bar{x}_4)^2 + (a\bar{x}_4 - \bar{x}_3)^2(1 + \bar{x}_5^2) + a^2\bar{x}_3^2 + \bar{x}_4^2\bar{x}_5^2 \right] \quad (4.99)$$

Il est aisé de vérifier que  $D_\phi \neq 0$  pour tout  $\bar{x}$  dans  $\mathcal{S}$  par conséquent le rang de  $J_\phi(\bar{x})$  égal à 5 sur  $\mathcal{S}$ , de plus  $\phi$  est injective sur  $\mathcal{S}$  :

$$\phi(\bar{x}) = \phi(\bar{x}') \implies \bar{x} = \bar{x}', \quad \forall (\bar{x}, \bar{x}') \in \mathcal{S}^2$$

La représentation d'état en  $z$  est alors sous forme normale d'observabilité (4.5) :

$$(\mathcal{S}_z) : \begin{cases} \dot{z} & = Az + \beta(\bar{x}) + Bu \\ y & = Cz \end{cases} \quad (4.100)$$

avec  $(A, C)$  sous forme de Brunovski et  $B, \beta(\cdot)$  données par :

$$\begin{aligned} B & = \begin{bmatrix} 0 & \beta'_1 & -a\beta'_1 & a^2\beta'_1 & -a^3\beta'_1 & a^4\beta'_1 \end{bmatrix}^T \\ \beta(z) = \beta(\bar{x}) & = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{x}_5(z_5 + az_4) - az_6 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} -\bar{x}_5(z_5 + az_4) - az_6 & = -a^5(\bar{x}_2 - \bar{x}_3) - a^4\bar{x}_4 + a\bar{x}_3\bar{x}_5^2 - a^3\bar{x}_3\bar{x}_5 + a^2\bar{x}_4\bar{x}_5 \\ & = \frac{(z_5 + az_4)((z_3 + az_2)(z_5 + az_4) + (z_4 + az_3)(z_6 + az_5))}{(z_3 + az_2)^2 + (z_4 + az_3)^2} - az_6 \end{aligned}$$

La forme triangulaire du système  $(\mathcal{S}_z)$  permet la synthèse d'un observateur à grand gain suivant la proposition 4.3.3 :

**Proposition 4.5.1 [Observateur pour  $(\mathcal{S}_z)$ ] :** Le système :

$$(\hat{\mathcal{S}}_z) : \begin{cases} \dot{\hat{z}} &= A\hat{z} + \beta(\text{sat}_{\mathcal{S}}(\hat{x})) + Bu + \Delta_l KC(z - \hat{z}) \\ \hat{y} &= C\hat{z} \end{cases} \quad (4.101)$$

est un observateur asymptotique pour  $(\mathcal{S}_z)$ , pour tout  $l > l^*$ , avec :

$$\begin{cases} \Delta_l &= \text{diag} \left( [l \ l^2 \ l^3 \ l^4 \ l^5 \ l^6] \right) \\ K^T &= [k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4 \ k_5 \ k_6] \\ l^* &= \max \left( 1, \frac{2\gamma_z \|P\|}{\lambda_Q} \right) \end{cases} \quad (4.102)$$

où  $\gamma_z = \max_{z \in \phi(\mathcal{S})} \left( \left\| \frac{\partial \phi}{\partial z} \right\| \right) \gamma_\beta$ ,  $\gamma_\beta$  est la constante de Lipchitz de la fonction  $\beta$  par rapport à  $\bar{x}$ . Les matrices  $Q = Q^T > 0$  et  $P = P^T > 0$  solution de l'équation de Lyapunov suivante :

$$(A - KC)^T P + P(A - KC) = -Q \quad (4.103)$$

**Démonstration :**

Soit  $\tilde{z} = z - \hat{z}$  l'erreur d'observation en  $z$ . En utilisant  $(\mathcal{S}_z)$  et  $(\hat{\mathcal{S}}_z)$ , on obtient :

$$(\tilde{\mathcal{S}}_z) : \begin{cases} \dot{\tilde{z}} &= (A - \Delta_l KC)\tilde{z} + \tilde{\beta} \\ \tilde{\beta} &= \beta(\bar{x}) - \beta(\text{sat}_{\mathcal{S}}(\hat{x})) \end{cases} \quad (4.104)$$

La fonction  $\beta(\cdot)$  étant  $\gamma_\beta$ -localement Lipschitz par rapport à  $\bar{x}$ , on a :

$$\begin{aligned} \|\beta(\bar{x}) - \beta(\text{sat}_{\mathcal{S}}(\hat{x}))\| &\leq \gamma_\beta \|\bar{x} - \hat{x}\|, & \forall (\bar{x}, \hat{x}) \in \mathcal{S}^2 \\ &\leq \gamma_\beta \|\phi^*(z) - \phi^*(\hat{z})\| \\ &\leq \underbrace{\gamma_\beta \max_{z \in \phi(\mathcal{S})} \left( \left\| \frac{\partial \phi^*}{\partial z} \right\| \right)}_{\gamma_z} \|\tilde{z}\| \end{aligned} \quad (4.105)$$

Posons  $\varepsilon_i = \frac{\tilde{z}_i}{l^i}$  pour  $i = 1, \dots, m$ . On obtient :

$$(\mathcal{S}_\varepsilon) \begin{cases} \dot{\varepsilon} &= l \underbrace{(A - KC)}_{A_\varepsilon} \varepsilon + \frac{\tilde{\beta}}{l^m} \\ \|\tilde{\beta}\| &\leq l^m \gamma_z \|\varepsilon\| \end{cases} \quad (4.106)$$

avec le gain  $K$  choisi pour que  $A_\varepsilon$  soit Hurwitz.

Soit  $P = P^T > 0$ . Considérons la fonction de Lyapunov :

$$V(\varepsilon) = \varepsilon^T P \varepsilon \quad (4.107)$$

La dérivée de  $V(\varepsilon)$  par rapport au temps le long des trajectoires du système  $(\mathcal{S}_\varepsilon)$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V}(\varepsilon) &= l\varepsilon^T (A_\varepsilon^T P + P A_\varepsilon) \varepsilon + 2\varepsilon^T P l^{-m} \tilde{\beta} \\ &\leq l\varepsilon^T (A_\varepsilon^T P + P A_\varepsilon) \varepsilon + 2\|P\| \|\varepsilon\| l^{-m} \|\tilde{\beta}\| \\ &\leq l\varepsilon^T (A_\varepsilon^T P + P A_\varepsilon) \varepsilon + 2\gamma_z \|P\| \varepsilon^T \varepsilon \end{aligned} \quad (4.108)$$

En utilisant (4.103), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(\varepsilon) &\leq -l\varepsilon^T Q \varepsilon + 2\gamma_z \|P\| l^{-m} \varepsilon^T \varepsilon \\ &\leq -l\varepsilon^T (\lambda_Q - 2\gamma_z \|P\| l^{-1}) \varepsilon \end{aligned} \quad (4.109)$$

Prenons  $l > l^*$  avec  $l^*$  donné par (4.102), on obtient alors :

$$\dot{V}(\varepsilon) \leq -k_o V(\varepsilon), \quad k_o = \frac{l(\lambda_Q - 2\gamma_z \|P\| l^{-1})}{\bar{\lambda}_P}$$

Alors, l'erreur d'observation  $\varepsilon$  converge exponentiellement vers zéro, donc l'erreur d'observation  $\tilde{z}$  converge aussi vers zéro. Par conséquent  $\hat{z}$  converge vers  $z$ .

□

**Remarque 4.5.2 :** L'estimée  $\hat{x}$  peut être obtenue en utilisant l'inverse à gauche  $\phi^*$  de  $\phi$  qui minimise l'erreur  $e$  :

$$e = (\hat{z} - \phi(\bar{x}))^2 \quad (4.110)$$

L'obtention de  $\phi^*$  est en général ardue, et surtout la minimisation (4.110) est délicate : elle peut mener à des discontinuités de l'estimation de  $\bar{x}$  car la dimension de  $\bar{x}$  est inférieure à celle de  $z$ . Ici, l'inverse à gauche de la fonction  $\phi$  donnée par (4.98) est la suivante :

$$\bar{x} = \phi^*(z) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \frac{z_3}{a} + z_2 \\ \frac{z_4}{a} + z_3 \\ -\frac{(z_5 + az_4)(z_3 + az_2) + (z_6 + az_5)(z_4 + az_3)}{(z_4 + az_3)^2 + (z_3 + az_2)^2} \end{bmatrix} \quad (4.111)$$

Pour remédier au problème d'inversion à gauche de la fonction  $\phi$ , la section suivante sera consacrée à la recherche d'une extension dynamique  $\phi_e$  de  $\phi$ , où  $\phi_e$  est un difféomorphisme sur un ensemble donné.

#### 4.5.2.2 Extension dynamique et observateur en coordonnées naturelles

Afin de remédier au problème de l'inversion à gauche de  $\phi$ , nous suivons l'idée de [Andrieu et al., 2014] qui consiste à augmenter le système initial  $(\mathcal{E}_{\bar{s}, v_m}^{1,1})$  afin de construire un difféomorphisme  $\phi_e$  sur la base de la connaissance de l'immersion  $\phi$ . L'idée est alors non plus d'inverser  $\hat{z}$  pour retrouver l'estimée en coordonnées naturelles  $\hat{x}$  mais de synthétiser directement l'observateur en coordonnées naturelles. On considère l'extension dynamique de  $\phi$  donnée par la proposition suivante :

**Proposition 4.5.3 [Extension dynamique] :** [Andrieu et al., 2014] Soit  $\tau \in \mathcal{S}_\tau \subset \mathbb{R}^{m-5}$  une variable auxiliaire. Considérons l'extension dynamique  $\phi_e$  de  $\phi$  définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} \times \mathcal{S}_\tau &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \phi_e : (\bar{x}, \tau) &\longmapsto \phi_e(\bar{x}, \tau) = \phi(\bar{x}) + \psi(\bar{x})\tau \end{aligned} \quad (4.112)$$

avec  $\psi$  une fonction continue définie de  $\bar{\mathcal{S}}$  dans  $\mathbb{R}^{m(m-5)}$ . L'extension dynamique  $\phi_e$  est un difféomorphisme sur  $\mathcal{S} \times \mathcal{S}_\tau$  si la fonction  $\psi$  est choisie pour que :

$$J = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}}(\bar{x}) & \psi(\bar{x}) \end{bmatrix} \neq 0 \quad \forall \bar{x} \in \bar{\mathcal{S}} \quad (4.113)$$

Comme  $\phi_e$  est un difféomorphisme, la convergence de  $\phi_e(\hat{x}, \hat{\tau})$  vers  $\phi(\bar{x})$  implique la convergence de  $\tau$  et  $\hat{x}$  vers zéro tant que  $(\bar{x}, \hat{x}) \in \bar{\mathcal{S}}^2$  et  $\tau \in \mathcal{S}_\tau$ .

**Démonstration:**

Prenons la fonction  $\phi(\bar{x})$  donnée par (4.98), on obtient le déterminant  $J$  donné par (4.113) :

$$J = a^3 \left[ (\psi_5 + a\psi_4)\bar{x}_4 - (\psi_6 + a\psi_5)\bar{x}_3 - (\psi_4 + a\psi_3)\bar{x}_3\bar{x}_5 + (\psi_3 + a\psi_2)\bar{x}_4\bar{x}_5 \right]$$

Le choix  $J = a^3(\bar{x}_3^2 + \bar{x}_4^2) \neq 0 \quad \forall \bar{x} \in \bar{\mathcal{S}}$  implique alors :

$$\begin{cases} \psi_6(\bar{x}) + a\psi_5(\bar{x}) &= -\bar{x}_3 \\ \psi_5(\bar{x}) + a\psi_4(\bar{x}) &= \bar{x}_4 \\ \psi_4(\bar{x}) + a\psi_3(\bar{x}) &= 0 \\ \psi_3(\bar{x}) + a\psi_2(\bar{x}) &= 0 \end{cases} \quad (4.114)$$

Le système (4.114) est notamment vérifié avec le choix de la fonction  $\psi$  définie par :

$$\begin{cases} \psi_1(\bar{x}) &= \psi_2(\bar{x}) = \psi_3(\bar{x}) = \psi_4(\bar{x}) = 0 \\ \psi_5(\bar{x}) &= \bar{x}_4 \\ \psi_6(\bar{x}) &= -\bar{x}_3 - a\bar{x}_4 \end{cases}$$

On obtient alors

$$z = \phi_e(\bar{x}, \bar{\omega}) = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ -a(\bar{x}_2 - \bar{x}_3) \\ a^2(\bar{x}_2 - \bar{x}_3) + a\bar{x}_4 \\ -a^3(\bar{x}_2 - \bar{x}_3) - a^2\bar{x}_4 - a\bar{x}_3\bar{x}_5 + \bar{x}_4\tau \\ a^4(\bar{x}_2 - \bar{x}_3) + a^3\bar{x}_4 + a^2\bar{x}_3\bar{x}_5 - a\bar{x}_4\bar{x}_5 - (\bar{x}_3 + a\bar{x}_4)\tau \end{pmatrix} \quad (4.115)$$

□

Nous montrons maintenant comment, en utilisant  $\phi_e$  et l'observateur de la proposition 4.5.1, synthétiser un observateur directement dans les coordonnées naturelles. Posons  $x_e = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \tau \end{bmatrix}$ , on a  $z = \phi_e(x_e)$  par conséquent :

$$\dot{x}_e = \left( \frac{\partial \phi_e}{\partial x_e}(x_e) \right)^{-1} \dot{z} \quad \forall x_e \in \bar{\mathcal{S}}_{x_e} = \bar{\mathcal{S}} \times \bar{\mathcal{S}}_\tau \quad (4.116)$$

En utilisant  $(\hat{\mathcal{S}}_z)$  et l'équation (4.116), on obtient alors un observateur dans les coordonnées naturelles :

$$(\mathcal{S}_{\hat{x}_e}) : \begin{cases} \dot{\hat{x}}_e &= \left[ \frac{\partial \phi_e}{\partial x_e}(\hat{x}_e) \right]^{-1} [A\phi_e(\hat{x}_e) + \beta(\text{sat}_{\mathcal{S}_{x_e}}(\hat{x}_e)) + Bu + \Delta_l KC(\phi_e(x_e) - \phi_e(\hat{x}_e))] \\ \hat{y} &= C\phi_e(\hat{x}_e) \end{cases} \quad (4.117)$$

La convergence de  $\hat{z} = \phi_e(\hat{x}_e)$  vers  $z = \phi_e(x_e)$  implique la convergence de  $\hat{x}_e$  vers  $x_e$  tant que ces derniers états restent dans  $\mathcal{S}_{x_e}$ , dans lequel l'extension dynamique  $\phi_e$  est un difféomorphisme. Cependant, l'observateur donné par (4.117) ne garantit pas que  $\hat{x}_e$  reste dans  $\mathcal{S}_{x_e}$  : l'observabilité du système aux points de singularité de la condition de rang d'observabilité pose donc toujours problème.

### 4.5.3 Observateur par immersion semi-globalement stable

Nous généralisons maintenant l'approche au cas du système  $(\mathcal{E}^{1,1})$  modélisant le système étendu formé d'un microrobot soumis à une force de traînée non linéaire et d'une vitesse du sang de pulsation inconnue dont la composante temporelle suit une série de Fourier tronquée à l'ordre 1. Ce système est de dimension  $n = 6$ . Nous nous intéressons ici particulièrement à la résolution, en utilisant le théorème 4.3.9, du problème de singularité des deux observateurs précédents : celui de la proposition 4.5.1 couplé à l'inverse à gauche (4.111), et l'observateur en

coordonnées naturelles (4.117).

Notons, pour simplifier et se rapprocher du cas précédent,  $a'(\bar{x})$  la dérivée de la force de traînée non linéaire  $a(\bar{x})$  par rapport à la vitesse du sang : il a été démontré dans [Fruchard et al., 2014] que cette dérivée ne s'annulait pas. La codistribution d'observabilité du système  $(\mathcal{E}^{1,1})$  a alors le même type de singularité structurelle que dans le cas précédent, en  $\bar{x}_4^2 + \bar{x}_5^2 = 0$ . L'immersion précédente utilisait les dérivées de Lie successives de la sortie : ce choix s'avère ici peu judicieux car il ferait apparaître les dérivées successives de  $a(\bar{x})$  et compliquerait les expressions de l'immersion. Nous choisissons ici la transformation suivante, qui préserve davantage la structure du système d'origine :

$$z = \phi(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \\ \bar{x}_5 \\ -\bar{x}_4\bar{x}_6 \\ -\bar{x}_5\bar{x}_6 \end{pmatrix} \quad (4.118)$$

Il n'est pas difficile de montrer que cette immersion est injective de  $\mathcal{S}$  dans  $\mathbb{R}^7$  avec l'ensemble  $\mathcal{S}$  suivant :

$$\mathcal{S} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^6 : \bar{x}_4^2 + \bar{x}_5^2 \in ]\delta^{-1}, \delta[, \bar{x}_6 \in ]-\delta, \delta[, \delta > 0\} \subset \mathcal{K}_x \times \mathcal{K}_\xi \quad (4.119)$$

On a alors :

$$\dot{z} = f_z(z) + Bu, \quad f_z = \begin{pmatrix} z_2 & a(z_2, z_3) & z_4 & \dots & z_7 & \frac{z_6^2}{z_4} \end{pmatrix}^T \quad (4.120)$$

avec  $B$  dont la seule entrée non nulle est  $b_2 = \beta'_1$ . Il est également direct que la jacobienne de  $\phi$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}}(\bar{x}) &= \begin{pmatrix} I_5 & 0_{5,1} \\ J_1(\bar{x}) & J_2(\bar{x}) \end{pmatrix} \\ J_1(\bar{x}) &= \begin{pmatrix} 0_{2,3} & -\bar{x}_6 I_2 \end{pmatrix}, \quad J_2(\bar{x}) = \begin{pmatrix} -\bar{x}_4 \\ -\bar{x}_5 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.121)$$

où l'on voit clairement apparaître la singularité structurelle dans  $J_2$ , d'où la même obstruction que dans l'étude précédente.

Afin de contourner cette singularité, en suivant l'idée proposée dans [Bernard et al., 2015], nous proposons de modifier le système initial hors de son espace de définition  $\mathcal{S}$  en lui ajoutant une sortie fictive  $y' = h'(\bar{x})$  définie par :

$$h' : \bar{x} \mapsto \rho(\bar{x})\bar{x}_6, \quad \rho : \bar{x} \mapsto \max\left(0, \delta^{-1} - (\bar{x}_4^2 + \bar{x}_5^2)\right)^2 \quad (4.122)$$

On a alors  $y'$  identiquement nulle sur  $\mathcal{S}$  et le système n'est donc pas modifié sur  $\mathcal{S}$ . En revanche, si nous définissons maintenant une nouvelle immersion  $\bar{\phi}$  par :

$$\bar{\phi} : \bar{x} \mapsto \bar{z} = \begin{pmatrix} \phi(\bar{x}) \\ y' \end{pmatrix} \quad (4.123)$$

, sa jacobienne est de la forme (4.121) avec les matrices  $J_1$  et  $J_2$  suivantes :

$$J_1(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0_{2,3} & -\bar{x}_6 I_2 \\ 0_{1,3} & \rho_4 \bar{x}_6 & \rho_5 \bar{x}_6 \end{pmatrix}, \quad J_2(\bar{x}) = \begin{pmatrix} -\bar{x}_4 \\ -\bar{x}_5 \\ \rho \end{pmatrix} \quad (4.124)$$

où  $\rho_i = \frac{\partial \rho}{\partial \bar{x}_i}(\bar{x})$ . Cette jacobienne est donc de rang plein si  $J_2$  l'est aussi. Or on a  $\det J_2^T J_2 = \bar{x}_4^2 + \bar{x}_5^2 + \rho^2 \neq 0$  par définition de la sortie fictive  $y'$  donnée par (4.122). La singularité structurelle est donc contournée et la jacobienne de  $\bar{\phi}$  est de rang plein sur tout borné de  $\mathbb{R}^6$ .

Afin de compléter l'immersion pour obtenir un difféomorphisme, on peut s'inspirer de la complétion de  $J_2$  et de la proposition 4.5.3. En effet, pour construire une bijection à partir de  $J_2$ , il suffit de remarquer que la famille suivante est libre en tout point :

$$J_2(\bar{x}) = \begin{pmatrix} -\bar{x}_4 \\ -\bar{x}_5 \\ \rho \end{pmatrix}, \quad N_1(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \bar{x}_4 \end{pmatrix}, \quad N_2(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \bar{x}_5 \end{pmatrix} \quad (4.125)$$

Il est alors direct que la matrice

$$J = \begin{pmatrix} I_5 & 0_{5,1} & O_{5,1} & O_{5,1} \\ J_1(\bar{x}) & J_2(\bar{x}) & N_1(\bar{x}) & N_2(\bar{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}}(\bar{x}) & \psi(\bar{x}) \end{pmatrix} \quad (4.126)$$

est de rang plein pour tout  $\bar{x}$ . On complète donc l'immersion en utilisant l'extension proposée par la proposition 4.5.3 :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^8 &\rightarrow \mathbb{R}^8 \\ \phi_e(\bar{x}, \tau) &\mapsto \bar{\phi}(\bar{x}) + \psi(\bar{x})\tau \quad \psi : \bar{x} \mapsto \begin{pmatrix} 0_{5,2} \\ N_1(\bar{x}) \ N_2(\bar{x}) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.127)$$

L'application  $\phi_e$  est injective. En effet, posons  $\phi_e(\bar{x}, \tau) = \phi_e(\bar{x}', \tau')$  : il est direct qu'on a alors  $\bar{x}_i = \bar{x}'_i, \forall i \leq 5$ , donc  $\rho = \rho'$ . En manipulant les trois dernières égalités :

$$\begin{aligned} -\bar{x}_4 \bar{x}_6 + \tau_1 &= -\bar{x}_4 \bar{x}'_6 + \tau'_1 \\ -\bar{x}_5 \bar{x}_6 + \tau_2 &= -\bar{x}_5 \bar{x}'_6 + \tau'_2 \\ \rho \bar{x}_6 + \bar{x}_4 \tau_1 \bar{x}_5 \tau_2 &= \rho \bar{x}'_6 + \bar{x}_4 \tau'_1 \bar{x}_5 \tau'_2 \end{aligned} \quad (4.128)$$

on obtient  $(\bar{x}_6 - \bar{x}'_6)(\rho + \bar{x}_4^2 + \bar{x}_5^2) = 0$ , d'où  $\bar{x}_6 = \bar{x}'_6$  puisque  $\rho + \bar{x}_4^2 + \bar{x}_5^2 \neq 0$  par définition. Il s'ensuit que  $\tau_i = \tau'_i$ , d'où l'injectivité de  $\phi_e$  sur  $\mathbb{R}^8$ . Enfin,  $\phi_e$  est surjective sur  $\mathbb{R}^8$  puisque :

$$\forall \bar{z} \in \mathbb{R}^8, \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \vdots \\ \bar{z}_5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{x}_6 \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho + \bar{z}_4^2 + \bar{z}_5^2} \begin{pmatrix} -\bar{z}_4 & -\bar{z}_5 & 1 \\ \bar{z}_5^2 + \rho & -\bar{z}_4\bar{z}_5 & \bar{z}_4 \\ -\bar{z}_4\bar{z}_5 & \bar{z}_4^2 + \rho & \bar{z}_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{z}_6 \\ \bar{z}_7 \\ \bar{z}_8 \end{pmatrix} \quad (4.129)$$

où cette dernière matrice est inversible en tout point.

La dynamique de  $\bar{z} = \phi_e(\bar{x}, \tau)$  est dérivée de (4.120) et du choix, arbitraire, de la dynamique de  $\bar{z}_8 = y'$ . Comme le système (4.120) est sous forme canonique de Gauthier-Kupka (voir section 4.2.3.2.2), on peut proposer un observateur grand gain [Hammouri et al., 2002] pour ce sous-système, et fixer la dynamique de la dernière composante :  $\dot{\hat{z}}_8 = -k\hat{z}_8$ . On a donc un observateur grand gain  $\dot{\hat{z}} = \varphi_l(\hat{z}, \phi_e^{-1}(\hat{z}), y) + Bu$  de gain  $l$ . On peut alors synthétiser un observateur en coordonnées naturelles et ainsi ne pas inverser  $\phi_e$  :

**Proposition 4.5.4 :** *Pour toute condition initiale  $(x_0, \hat{x}_0, \tau_0) \in (\mathcal{K}_x \times \mathcal{K}_\xi)^2 \times \mathcal{K}_\tau$  bornée, et toute commande  $u$  bornée, si  $\varphi_l$  est un observateur grand gain donné par la proposition 4.3.2 avec un gain  $l$  assurant la domination de la constante de Lipschitz locale du système  $(\mathcal{E}^{1,1})$  sur  $\mathcal{K}_x \times \mathcal{K}_\xi$ , l'observateur par immersion en coordonnées naturelles*

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}} &= \varphi_l(\hat{z}, \phi_e^{-1}(\hat{z}), y) + Bu \\ \dot{\hat{x}}_e &= J^{-1}(\varphi_l(\phi_e(\hat{x}_e), \hat{x}_e, y) + Bu), \quad x_e = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.130)$$

avec  $\phi_e$  définie par (4.118), (4.123) et (4.127), et la matrice  $J$  définie par (4.126), est un observateur semi globalement stable du système  $(\mathcal{E}^{1,1})$ .

#### 4.5.4 Conclusion

Les méthodes d'observation données dans la section 4.3 ne sont pas directement applicables sur le système  $(\mathcal{E}^{1,n})$ , formé du système réduit en dimension 1 et d'un système sanguin dont la pulsation est inconnue. Dans cette section, nous avons d'abord considéré le cas épuré d'une force de traînée à bas Reynolds et d'une vitesse moyenne nulle, donc le modèle  $(\mathcal{E}_{s,v_m}^{1,1})$ . Nous avons immergé par une injection locale  $\phi$  ce système vers un système cible de plus grande dimension  $m > n$ , permettant une mise sous forme normale d'observabilité. Nous avons ensuite synthétisé un observateur à grand gain pour le système cible en  $z = \phi(\bar{x})$ , l'estimée  $\hat{x}$  est alors obtenue par l'inverse à gauche  $\phi^*$  de  $\phi$  avec  $\hat{x} = \phi^*(\hat{z})$ . Toutefois, l'obtention de  $\phi^*$  peut poser problème : pour s'en affranchir, nous avons introduit une variable auxiliaire  $\tau$ , de sorte que l'extension dynamique  $\phi_e$  de  $\phi$  soit un difféomorphisme sur le domaine  $\mathcal{S}_{x_e}$ . Dans ce cas, l'observateur pour l'état étendu  $x_e$  est obtenu en inversant la jacobienne de  $\phi_e$  par rapport à

$x_e$ . Cette première approche, publiée dans [Sadelli et al., 2015], reste incomplète du fait que l'observateur ne garantit pas que les états estimés restent dans l'ensemble borné où la jacobienne du difféomorphisme est inversible.

Nous avons par conséquent proposé une deuxième approche permettant de résoudre le problème de la singularité structurelle dans le cas plus général du système  $(\mathcal{E}^{1,1})$  où la pulsation du flux sanguin est inconnue et le sang est modélisé par une série de Fourier tronquée à l'ordre 1. Par l'ajout d'une sortie fictive et la complétion de la jacobienne, nous pouvons obtenir la stabilité semi-globale de l'observateur en coordonnées naturelles par une preuve constructive dans la proposition 4.5.4.

## 4.6 Commande d'un microrobot par retour de sortie

### 4.6.1 Introduction

Comme nous l'avons rappelé en introduction de ce chapitre, les lois de commande proposées dans le chapitre 3 ne sont exploitables que lorsque tous les états sont mesurables (hypothèse 3.4.1). Comme seule la position du microrobot est mesurable, nous allons modifier les lois de commande proposées dans le chapitre 3 en utilisant les états estimés par l'observateur dans la section 4.4 : on parle alors d'une commande par retour de sortie par l'approche certainty equivalence ou approche par erreur de commande. Nous allons donc démontrer la stabilité conjointe de la paire observateur contrôleur, asymptotique ou pratique selon que le système est considéré comme exempt ou non d'erreurs de modélisation. Nous présenterons ici uniquement le cas du modèle  $2D$ , qui se transpose au cas  $1D$  très simplement.

### 4.6.2 Problème de commande par retour de sortie

Contrairement aux systèmes linéaires, le principe de superposition ne s'applique pas aux systèmes non linéaires. Il ne suffit donc pas d'avoir une loi de commande  $\kappa(x)$  et un observateur d'état qui soient tous deux globalement stabilisants pour avoir la stabilité globale du système. Nous illustrons ce phénomène par deux obstructions : l'explosion infinie en temps fini et le mirage du grand gain. Commençons par l'exemple introductif emprunté à [Kokotovic, 1992] :

$$\dot{x} = -x + \xi x^2, \quad x(0) = x_0 \quad (4.131a)$$

$$\dot{\xi} = u, \quad \xi(0) = \xi_0 \quad (4.131b)$$

Avec la commande par retour d'état partiel donnée par  $u(\xi) = -k\xi$  avec  $k > 0$ , qui place les valeurs propres du sous-système (4.131b) en  $-k$ , il est aisé de montrer que le système (4.131a) a pour solution :

$$x(t) = \frac{(k+1)x_0}{(k+1 - x_0\xi_0)e^t + x_0\xi_0 e^{-kt}} \quad (4.132)$$

On remarque que si  $x_0\xi_0 > (k+1)$ , alors le dénominateur de l'expression (4.132) s'annule à l'instant  $t^* = -\frac{1}{k+1} \ln\left(\frac{x_0\xi_0 - k - 1}{x_0\xi_0}\right)$  donc  $x$  diverge en temps fini. En revanche, toute solution bornée converge et on a donc stabilité semiglobale (pour des conditions initiales satisfaisant  $x_0\xi_0 < (k+1)$ ) puisqu'on peut étendre ce domaine par l'accroissement du gain de commande  $k$ . Ceci n'est pas vrai en général, comme l'illustre cet autre exemple :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + \xi_2 x^2 & , & \quad x(0) = x_0 \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2 & , & \quad \xi_1(0) = \xi_0 \\ \dot{\xi}_2 &= u & , & \quad \xi_2(0) = 0 \end{aligned}$$

Le choix du retour d'état partiel  $u(\xi) = -k^2\xi_1 - 2k\xi_2$  place les pôles du sous-système  $\xi$  en  $-k < 0$ . Cependant, ce choix conduit à obtenir  $\xi_2(t) = -k^2\xi_0 t e^{-kt}$  qui passe de 0 à  $t_0 = 0$  à une valeur maximale  $\xi_2^* = -k\xi_0 e^{-1}$  en  $t^* = k^{-1}$  : c'est le phénomène de peaking. Le sous système en  $x$  a alors pour solution :

$$x(t) = \frac{x_0(k+1)^2}{[k^2x_0\xi_0 + (k+1)^2]e^t - k^2x_0\xi_0[(k+1)t+1]e^{-kt}}$$

dont le dénominateur s'annule si les coefficients de  $e^t$  et  $e^{-kt}$  sont positifs. Or la condition  $x_0\xi_0 > \frac{2}{k}$  est suffisante pour l'assurer. On voit donc qu'en augmentant ici le gain, on réduit le domaine de stabilité du système.

Illustrons maintenant le lien avec le retour de sortie avec le système suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 x_1^2 + u \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_1^2 \end{aligned} \tag{4.133}$$

Si  $x_1$  et  $x_2$  sont accessibles, alors la commande  $u = -x_2 x_1^2$  assure la stabilité asymptotique globale du point d'équilibre  $x_1 = x_2 = 0$  du système (4.133). En revanche, si  $y = x_1$  alors la loi de commande "certainty equivalence" est  $u = -\hat{x}_2 x_1^2$ , avec  $\hat{x}_2$  l'état estimé de l'observateur globalement stabilisant  $\dot{\hat{x}}_2 = -\hat{x}_2 + x_1^2$ . Posons  $\xi = x_2 - \hat{x}_2$ , alors avec  $u = -\hat{x}_2 x_1^2$  on obtient

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + \xi x_1^2 \\ \dot{\xi} &= -\xi \end{aligned} \tag{4.134}$$

Le système (4.134) est équivalent au système (4.131) pour  $u(\xi) = -\xi$  et  $x = x_1$ . Il est donc évident que le système diverge si  $x_0\xi_0 > 2$  : la commande  $u = -\hat{x}_2 x_1^2$  par retour de sortie n'assure pas la stabilité asymptotique globale de  $x_1 = x_2 = \hat{x}_2 = 0$ .

Pour remédier à ce problème il faut synthétiser une loi de commande par retour de sortie qui stabilise le système et l'observateur au même temps. Pour le système (4.133), si on rajoute un terme  $v$  à la commande "certainty equivalence", on obtient  $u = -\hat{x}_2 x_1^2 + v$  :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + \xi x_1^2 + v \\ \dot{\xi} &= -\xi \end{aligned}$$

Soit  $V = \frac{1}{2}(x_1^2 + \xi^2)$ , alors  $\dot{V} = -x_1^2 - \xi^2 + \xi x_1^3 + x_1 v$ . Le choix  $v = -x_1 w$  conduit à :

$$\dot{V} = - \begin{bmatrix} x_1 & \frac{\xi}{2} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1+w & -x_1^2 \\ -x_1^2 & 1 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ \frac{\xi}{2} \end{bmatrix} - \frac{3}{4}\xi^2$$

Pour  $w = x_1^4$ , la matrice  $A$  est définie positive, et par conséquent la loi de commande  $u = -\hat{x}_2 x_1^2 - x_1^5$  assure la stabilité asymptotique globale de  $x_1 = x_2 = \hat{x}_2 = 0$ .

Maintenant, on s'intéresse aux conditions suffisantes pour la stabilisation globale par une commande par retour de sortie du système suivant :

$$\dot{x} = f(x) + \psi(x, \xi) = \tilde{f}(x, \xi) \quad (4.135a)$$

$$\dot{\xi} = \alpha(\xi, u) \quad (4.135b)$$

On considère les hypothèses suivantes pour le système (4.135) :

**H1) [Stabilité des sous-systèmes]** Le point d'équilibre  $x = 0$  de  $\dot{x} = f(x)$  est globalement asymptotiquement stable et il existe  $u = k(\xi) \in \mathcal{C}^1$  tel que le point d'équilibre  $\xi = 0$  de (4.135b) est globalement asymptotiquement stable.

**H2) [Croissance linéaire de  $\psi$ ]** Il existe deux fonctions  $\beta_1(\cdot)$  et  $\beta_2(\cdot)$  de classe  $\mathcal{K}$ , dérivables au point  $\xi = 0$  telles que :

$$\|\psi(x, \xi)\| \leq \beta_1(\|\xi\|)\|x\| + \beta_2(\|\xi\|)$$

**H3) [Locale exponentielle stabilité]** Le système linéarisé du sous-système (4.135b) au point  $\xi = 0$  est stabilisable, ce qui veut dire que le sous-système (4.135b) est localement exponentiellement stable.

Le théorème suivant donne deux conditions équivalentes pour qu'un système soit ISS (Input-to-State Stable).

**Théorème 4.6.1 :** [Kokotović et al., 1997] *Le sous-système (4.135a) est ISS.*

- S'il existe deux fonctions  $\beta \in \mathcal{KL}$  et  $\gamma \in \mathcal{K}$  telles que, pour chaque entrée  $\xi(\cdot)$  bornée et un état initial  $x(0)$ , la solution  $x(t)$  du système (4.135a) existe pour tout  $t \geq 0$  :

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x(0)\|, t) + \gamma \left( \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|\xi(\tau)\| \right)$$

- Si et seulement si il existe une fonction  $V(x) \in \mathcal{C}^1$  radialement non bornée et des fonctions  $(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{K}^2$  :

$$\|x\| \geq \gamma_1(\|\xi\|) \implies \frac{\partial V}{\partial x} \tilde{f}(x, \xi) \leq -\gamma_2(\|x\|)$$

La première condition implique la bornitude de l'état et prévient donc l'explosion infinie. La conséquence directe du fait que le sous-système (4.135a) soit ISS est que sous l'hypothèse H1, la commande  $u = k(\xi)$  garantit que  $(x, \xi) = (0, 0)$  du système (4.135) est globalement

asymptotiquement stable. Donc la notion ISS d'un système permet de s'affranchir des deux hypothèses  $H2$  et  $H3$  pour avoir une stabilité globale avec commande par retour de sortie.

Dans la section suivante, nous allons modifier les lois de commande synthétisées précédemment, en utilisant les états estimés par l'observateur, afin de démontrer la stabilité du retour de sortie.

### 4.6.3 Stabilité du retour de sortie

#### 4.6.3.1 Stabilité asymptotique

Nous allons modifier la loi de commande donnée par la proposition 3.4.6 pour le système  $(\mathcal{R}^2)$  en présence d'incertitudes paramétriques.

Le paramètre  $\vartheta$  du système  $(\mathcal{R}^2)$  est inconnu et, comme les états du système  $(\mathcal{E}_\omega^{2,n})$  ne sont pas tous accessibles, la loi de commande donnée par la proposition 3.4.6 pour le système  $(\mathcal{R}^2)$  n'est pas utilisable en l'état. En utilisant les états estimés par l'observateur donné dans la proposition 4.4.6, on obtient le retour de sortie explicité dans la proposition qui suit :

**Proposition 4.6.2 [Commande par Backstepping]** : *Sous les hypothèses des propositions 4.4.6 et 3.4.6, la loi de commande par retour de sortie  $\hat{u}_i = \kappa_i(\hat{x}, \hat{\vartheta})$ ,  $i = 1, 2$ , donnée ci-après :*

$$\kappa_i(\hat{x}, \hat{\vartheta}) = -\frac{(k_{i+2} + k_i)\hat{z}_{i+2} + (1 - k_i^2)\hat{z}_i + g_i(\hat{x}) + (i - 1)\hat{\vartheta} - \ddot{x}_{i,r}}{\beta_1'} \quad (4.136)$$

assure la stabilité asymptotique exponentielle semiglobale pour le système  $(\mathcal{R}^2)$  le long de la trajectoire de référence  $x_{ref} = [x_r, \dot{x}_r, \ddot{x}_r]$  de classe  $C^0$  pour toute valeur initiale  $(\bar{x}(0), \hat{\tau}(0)) \in \mathcal{K}_0 \times \mathcal{K}$ ,  $\forall \hat{\theta}(0) \in \mathcal{K}_\vartheta$  avec les gains  $k_i, k_{i+2} > 0$ .

**Démonstration:**

Posons  $\hat{z}_i = \hat{x}_i - x_{ir}$ ,  $\hat{z}_{i+2} = \hat{x}_{i+2} - \dot{x}_{ir} + k_i \hat{z}_i$ ,  $\tilde{x} = x - \hat{x}$  et  $\tilde{\vartheta} = \vartheta - \hat{\vartheta}$ .

Remplaçons  $u_i$  par  $\hat{u}_i$  dans (3.71) et posons  $\tilde{g}_i = g_i(\bar{x}) - g_i(\hat{x})$ , on obtient :

$$\dot{V}_{2i} = -k_i z_i^2 - k_{i+2} z_{i+2}^2 + z_{i+2} \underbrace{(\tilde{g}_i + (k_i + k_{i+2})\tilde{z}_{i+2} + (1 - k_i^2)\tilde{z}_i + (i - 1)\tilde{\vartheta})}_{h_{i+2}(z, \varepsilon)} \quad (4.137)$$

La preuve sera décomposée en trois parties :

**Partie 1 bornitude et domaine d'attraction :** Montrons que  $\forall x(0) \in \mathcal{K}_{x0} = \{x : V_c(z) \leq \mu_{c0}\}$ ,  $x(t) \in \mathcal{K}_x = \{x : V_c(z) \leq \mu_{c0} + \mu_c\}$ . Comme  $\xi \in \mathcal{K}_\xi$  par construction (voir remarque 2.5.1) par conséquent  $\bar{x}(t) \in \mathcal{K} = \mathcal{K}_x \times \mathcal{K}_\xi$ .

Soit  $V_o(\varepsilon(0)) \leq \mu_{o0}$ ,  $\mathcal{K}_\varepsilon = \{\varepsilon : V_o(\varepsilon) \leq \mu_{o0} + \mu_o\}$  et  $\chi = \begin{bmatrix} z \\ \varepsilon \end{bmatrix}$ . En utilisant (3.73) et (4.95),

on définit alors la fonction de Lyapunov  $W_1(\chi)$  :

$$W_1(\chi) = \frac{\zeta_c V_c(z)}{\mu_{c0} + \mu_c - V_c(z)} + \frac{\zeta_o V_o(\varepsilon)}{\mu_{o0} + \mu_o - V_o(\varepsilon)} \quad (4.138)$$

Supposons que  $W_1(\chi) \leq \bar{w} = \frac{\mu_{c0}}{\mu_c} \zeta_c + \frac{\mu_{o0}}{\mu_o} \zeta_o + 1$ , par conséquent  $W_1(z(0), \varepsilon(0)) < \bar{w}$  et l'on obtient :

$$W_1(\chi) \leq \bar{w} \Rightarrow V_c(z) < \mu_{c0} + \mu_c \text{ et } V_o(\varepsilon) < \mu_{o0} + \mu_o \quad (4.139)$$

La dérivée de  $W_1(\chi)$  par rapport au temps est donnée par :

$$\dot{W}_1 = \frac{\zeta_c(\mu_{c0} + \mu_c)}{(\mu_{c0} + \mu_c - V_c)^2} \dot{V}_c(z) + \frac{\zeta_o(\mu_{o0} + \mu_o)}{(\mu_{o0} + \mu_o - V_o)^2} \dot{V}_o(\varepsilon) \quad (4.140)$$

Soient les bornes inférieures et supérieures des facteurs de  $\dot{V}_*$ , où \* désigne  $c$  ou  $o$ , données ci-après :

$$\frac{\zeta_*}{(\mu_{*0} + \mu_*)} \leq \frac{\zeta_*(\mu_{*0} + \mu_*)}{(\mu_{*0} + \mu_* - V_*)^2} \leq \frac{(\zeta_* + \bar{w})^2}{\zeta_*(\mu_{*0} + \mu_*)} \quad (4.141)$$

Soit  $h(z, \varepsilon) = [0 \ 0 \ h_3(z, \varepsilon) \ h_4(z, \varepsilon)]^T$ , en utilisant (4.97), (3.72), (4.137) et (4.140), on obtient :

$$\dot{W}_1 \leq \Psi_c(\chi) - \Phi_{co}(\chi) \quad (4.142)$$

avec les fonctions  $\Psi_c(\chi)$  et  $\Phi_{co}(\chi)$  choisies ainsi :

$$\begin{aligned} \Phi_{co}(\chi) &= \frac{\zeta_c}{2(\mu_{c0} + \mu_c)} k_c V_c(z) + \frac{\zeta_o}{2(\mu_{o0} + \mu_o)} k_o V_o(\varepsilon) \\ \Psi_c(\chi) &= -\Phi_{co} + \left\| \frac{\zeta_c(\mu_{c0} + \mu_c)}{(\mu_{c0} + \mu_c - V_c(z))^2} z^T [h(z, \varepsilon) - h(z, 0)] \right\| \end{aligned} \quad (4.143)$$

On obtient alors  $\forall \underline{w} \in [0, \bar{w})$  :

$$\mathcal{K}_\chi = \{\chi : \underline{w} \leq W_1(\chi) \leq \bar{w}\} \subset \mathcal{K}_x \times \mathcal{K}_\varepsilon \quad (4.144)$$

Comme les fonctions de Lyapunov  $V_c(z)$  et  $V_o(\varepsilon)$  sont continues et vérifient (4.139),  $\Psi_c$  est continue et son second terme est nul le long de  $\varepsilon = 0$  et  $z = 0$ . Par continuité, on a alors  $\chi \in \mathcal{K}_\chi$  implique que  $\Psi_c < 0$  pour des gains  $k_o$  et  $k_c$  assez grands et on a alors :

$$\dot{W}_1 \leq -\Phi_{co}(\chi), \quad \forall \chi \in \mathcal{K}_\chi \quad (4.145)$$

De plus, comme  $\Phi_{co}$  est définie positive sur  $\mathcal{K}_\chi$ , alors l'ensemble  $\{\chi : W_1(\chi) \leq \bar{w}\}$  est un bassin d'attraction c'est-à-dire :

$$\bar{x}(0) \in \mathcal{K}_0 \implies \bar{x}(t) \in \mathcal{K} \quad (4.146)$$

L'état étendu  $\chi$  est capturé par l'ensemble  $\mathcal{K}_\chi^c$  défini comme suit :

$$\mathcal{K}_\chi^c = \{\chi : W_1(\chi) \leq \underline{w}\} \quad (4.147)$$

**Partie 2 stabilité pratique :** Maintenant que nous garantissons que  $\bar{x}$  reste borné dans  $\mathcal{K}$ , nous spécifions la stabilité pratique dans l'ensemble  $\mathcal{K}_x^c$ . Puisque  $\forall \bar{x} \in \mathcal{K}, \bar{x} = \text{sat}_{\mathcal{K}}(\bar{x})$ ,  $\hat{\bar{x}} = \text{sat}_{\mathcal{K}}(\hat{\tau})$  et  $\tilde{g}_i$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ , en utilisant (4.87) et (4.88), on obtient :

$$\|h_{i+2}(z, \varepsilon)\| = \varsigma_i(\|\varepsilon\|), \quad \forall z \in \mathcal{K}_x, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{2n+6}, i \in \{1, 2\} \quad (4.148)$$

où la fonction  $\varsigma_i$  est bornée et continue, avec  $\varsigma_i(0) = 0$ . De plus  $\exists \nu_i$  tel que :

$$z \in \mathcal{K}_x \Rightarrow \|z_{i+2}\| \leq \nu_i \quad (4.149)$$

En utilisant (3.72) et (4.137), on obtient alors :

$$\dot{V}_{2i} \leq -k_{ci}V_{2i}(z) + \nu_i\varsigma_i(\|\varepsilon\|) \quad (4.150)$$

On considère la fonction de Lyapunov  $W_2(z, \varepsilon)$  donnée, pour un certain  $\zeta > 0$  :

$$W_2(z, \varepsilon) = \zeta V_c(z) + V_o(\varepsilon) \quad (4.151)$$

En utilisant (4.97) et (4.150), on obtient

$$\dot{W}_2(z, \varepsilon) \leq -\zeta k_c V_c(z) - \underbrace{[-\zeta\varsigma(\|\varepsilon\|) + \frac{\lambda_{Q_o}}{\sigma(\varepsilon)}\|\varepsilon\|^2]}_{\sigma(\varepsilon)} \quad (4.152)$$

avec  $\varsigma(\|\varepsilon\|) = \nu_1\varsigma_1(\|\varepsilon\|) + \nu_2\varsigma_2(\|\varepsilon\|)$ . Comme  $\varsigma$  est continue et bornée, alors il existe  $\varepsilon_0$  tel que  $\sigma(\varepsilon)$  est positive pour tout  $\varepsilon \geq \varepsilon_0$ . De plus,  $\varepsilon_0$  peut être choisi arbitrairement petit en choisissant le rapport  $\frac{\zeta}{\lambda_{Q_o}}$  petit. Par conséquent on obtient la stabilité pratique semiglobale de la paire contrôleur observateur.

**Partie 3 :** Nous allons enfin démontrer la stabilité asymptotique locale. Pour un  $\varepsilon$  petit, on aura  $\hat{\bar{x}} = \hat{\tau} \in \mathcal{K}$  et  $\hat{\vartheta} = \hat{\theta}$ . En utilisant l'hypothèse (H2) du lemme 3.4.5, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{2i} \leq & -k_i\|z_i\|^2 - k_{i+2}\|z_{i+2}\|^2 + (k_i + k_{i+2})\|z_{i+2}\|\|\tilde{z}_{i+2}\| \\ & + \gamma_i\|z_{i+2}\|\|\tilde{\bar{x}}\| + (1 - k_i^2)\|z_{i+2}\|\|\tilde{z}_i\| + (i - 1)\|z_{i+2}\|\|\tilde{\vartheta}\| \end{aligned} \quad (4.153)$$

Or on a, par l'inégalité triangulaire :

$$\tilde{z}_{i+2} = \tilde{x}_{i+2} + k_i\tilde{z}_i \implies \|\tilde{z}_{i+2}\| \leq \|\tilde{x}_{i+2}\| + k_i\|\tilde{z}_i\| \quad (4.154)$$

En utilisant (4.154), (4.153), (4.88) et  $\|\tilde{\vartheta}\| \leq \|\varepsilon_2\|$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{2i} \leq & -k_i\|z_i\|^2 - k_{i+2}\|z_{i+2}\|^2 + (k_i + k_{i+2})\|z_{i+2}\|\|\tilde{x}_{i+2}\| \\ & + \gamma_i\|z_{i+2}\|\|\tilde{\bar{x}}\| + (1 + k_i k_{i+2})\|z_{i+2}\|\|\tilde{z}_i\| + (i - 1)\|z_{i+2}\|\|\varepsilon_2\| \\ \leq & -\eta_{i,1}\|z\|^2 + \eta_{i,2}\|z\|\|\varepsilon\| \end{aligned} \quad (4.155)$$

avec  $\eta_{i,1} = \min(k_i, k_{i+2})$  et  $\eta_{i,2} = (i + \gamma_i + k_i + k_{i+2} + k_i k_{i+2})$ .

En utilisant (4.97) et (4.155), on obtient

$$\dot{W}_2(z, \varepsilon) \leq -\zeta \eta_1 \|z\|^2 + \zeta \eta_2 \|z\| \|\varepsilon\| - \lambda_{Q_o} \|\varepsilon\|^2 \quad (4.156)$$

avec  $\eta_1 = \eta_{1,1} + \eta_{2,1} \leq \eta_2 = \eta_{1,2} + \eta_{2,2}$ . En choisissant  $\zeta = \frac{\eta_1 \lambda_{Q_o}}{\eta_2^2}$ , on obtient alors :

$$\dot{W}_2(z, \varepsilon) \leq -\zeta \eta_1 \frac{\|z\|^2}{2} - \lambda_{Q_o} \frac{\|\varepsilon\|^2}{2} \quad (4.157)$$

Posons  $\mu_1 = \max(\zeta/2, \bar{\lambda}_{P_o})$  et  $\mu_2 = \min(\zeta \eta_1, \lambda_{Q_o})/2 = \frac{\lambda_{Q_o} \eta_1^2}{2 \eta_2^2}$ . Il vient :

$$\left. \begin{array}{l} W_2(z, \varepsilon) \leq \mu_1 (\|z\|^2 + \|\varepsilon\|^2) \\ \dot{W}_2(z, \varepsilon) \leq -\mu_2 (\|z\|^2 + \|\varepsilon\|^2) \end{array} \right\} \implies \dot{W}_2(z, \varepsilon) \leq -\frac{\mu_2}{\mu_1} W_2(z, \varepsilon) \quad (4.158)$$

Par conséquent  $z$  et  $\varepsilon$  convergent exponentiellement vers zéro, par conséquent  $\hat{x}$  et  $\hat{\vartheta}$  convergent respectivement vers  $\bar{x}$  et  $\vartheta$ , et  $x$  converge vers  $(x_r \ \dot{x}_r)^T$ , donc le retour de sortie (4.136) garantit la stabilité asymptotique semiglobale du système  $(\mathcal{R}^2)$  le long de la trajectoire  $x_{ref}$ .

□

#### 4.6.3.2 Stabilité pratique

Nous nous intéressons maintenant à la stabilité du retour de sortie en présence d'erreurs de modélisation, qui sont particulièrement susceptibles d'apparaître dans notre système biophysique. Nous nous intéressons ici en particulier au flux sanguin. La vitesse réelle du sang, notée  $\xi_1^*$ , est solution du système  $(\mathcal{F}_\omega^{n^*})$  pour un nombre d'harmoniques  $n^*$  généralement mal connu et qui peut varier suivant l'état physiologique (repos, stress, etc). Enfin, si ce nombre  $n^*$  est élevé, l'extension dynamique  $(\mathcal{F}_\omega^{n^*})$  sera de dimension élevée, ce qui peut poser des problèmes numériques alors que les dernières harmoniques ne sont pas nécessairement déterminantes dans l'expression globale du flux sanguin. C'est pourquoi il peut être intéressant de synthétiser un observateur en se basant sur une vitesse du sang solution du système  $(\mathcal{F}_\omega^n)$  avec  $n < n^*$ . Les dynamiques associées aux harmoniques d'ordre  $k \in \{n+1, \dots, n^*\}$  seront alors négligées dans la dynamique de l'observateur, d'où l'erreur de modélisation. Dans ce cas, les lignes impaires du système  $(\mathcal{F}_\omega^n)$  seront affectées par une perturbation harmonique bornée et proportionnelle à  $d_{nn^*}(t) = \dot{\xi}_{1,n}^*$  où  $\xi_{1,n}^*$  représente la vitesse réelle du sang privée des harmoniques basses fréquences.

Notons  $\bar{D}_{\xi_1^*}$  la borne supérieure du signal  $\xi_{1,n}^*$ , on obtient alors :

$$\|d_{nn^*}(t)\| \leq d_M = \omega \frac{n^* + n + 1}{2} \bar{D}_{\xi_1^*} \quad (4.159)$$

Le système  $(\mathcal{E}_\omega^{2,n^*})$  peut être réécrit sous la forme suivante :

$$(\mathcal{E}_\omega^{2,nn^*}) : \begin{cases} \dot{\bar{x}} &= A(0)\bar{x} + B(\bar{g}(\bar{x}) + \beta'_1 u) + B_\vartheta \vartheta + B_d d_{nn^*}(t) \\ y &= C\bar{x} \end{cases} \quad (4.160)$$

avec  $B_d \in \mathbb{R}^{2n+5}$  dont les seules composantes non nulles sont les composantes  $B_{d,2k+5} = \frac{1}{(k+1)}$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

**Proposition 4.6.3 [Stabilité pratique par retour de sortie] :** Soit  $d_M$  la borne supérieure du signal  $d_{nn^*}(t)$  dans (4.160). Sous les hypothèses de la proposition 4.4.6, le système  $(\hat{\mathcal{E}}_\omega^{2,n})$  est un observateur pratique exponentiel pour le système  $(\mathcal{E}_\omega^{2,nn^*})$ . De plus la loi de commande par retour de sortie  $\hat{u}_i = \kappa_i(\hat{x}, \hat{\vartheta})$ ,  $i = 1, 2$  donnée par (4.136) assure une stabilité pratique semiglobale pour le système  $(\mathcal{R}^2)$  dans une boule de rayon  $R_d$  donné par :

$$R_d = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\eta_2^2 \pi \omega (n^* + n + 1) \bar{D}_{\xi_1^*}}{\eta_1^2 k_0} \quad (4.161)$$

La boule de rayon  $R_d$  est centrée le long de la trajectoire de référence  $x_{ref} = [x_r(t), \dot{x}_r(t), \ddot{x}_r(t)]$  de classe  $\mathcal{C}^0$ .

**Démonstration:**

La preuve de la proposition 4.6.3 est similaire à celle de la proposition 4.4.6. En utilisant  $(\mathcal{E}_\omega^{2,nn^*})$  et  $(\hat{\mathcal{E}}_\omega^{2,n})$ , et en posant  $\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}$  avec  $\varepsilon_1 = \bar{x} - \hat{\tau}$ , et  $\varepsilon_2 = \vartheta - \hat{\theta}$ , la dynamique du système d'erreur d'observation est régie par :

$$\dot{\varepsilon} = (\bar{\mathcal{A}}(\bar{p}(t)) - \bar{K}\bar{C})\varepsilon + \bar{B}_d d_{nn^*}(t) \quad (4.162)$$

avec  $\bar{B}_d = \begin{bmatrix} B_d \\ 0 \end{bmatrix}$ . Considérons alors la fonction de Lyapunov  $V_o(\varepsilon)$  donnée par (4.95), sa dérivée le long du système (4.162) vérifie l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \dot{V}_o(\varepsilon) &\leq \varepsilon^T Q(h(t))\varepsilon + 2\varepsilon^T P_o \bar{B}_d d_{nn^*}(t) \\ &< -\varepsilon^T Q_o \varepsilon + 2\|\varepsilon\| \|P\| \|\bar{B}_d\| \|d_{nn^*}\| \end{aligned}$$

En utilisant (4.159) et sachant que  $\|\bar{B}_d\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{(i+1)^2}} \leq \sqrt{\frac{\pi^2}{6}}$ , on obtient l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \dot{V}_o(\varepsilon) &< -\lambda_{Q_o} \|\varepsilon\|^2 + 2\|\varepsilon\| \bar{\lambda}_{P_o} d_M \frac{\pi}{\sqrt{6}} \\ &< -\lambda_{Q_o} \|\varepsilon\| (\|\varepsilon\| - r_d) \end{aligned} \quad (4.163)$$

Le rayon  $r_d$  est alors donné par :

$$r_d = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \frac{2d_M}{k_0} = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \frac{\omega(n^* + n + 1)\bar{D}_{\xi_1^*}}{k_0}, \quad k_o = \frac{\lambda_{Q_o}}{\bar{\lambda}_{P_o}} \quad (4.164)$$

Considérons la fonction de Lyapunov  $W_1(\chi)$  donnée par (4.138) pour le système  $(\mathcal{R}^2)$  avec la loi de commande par retour de sortie donnée par (4.136). On obtient alors les mêmes résultats dans les parties 1 et 2 de la démonstration de la proposition 4.6.2 avec, dans la fonction  $\Psi_c$ , un terme additionnel dépendant de  $\varepsilon$  et où la fonction  $\varsigma(\|\varepsilon\|)$  est remplacée par  $\bar{\varsigma}(\|\varepsilon\|) = -\zeta\varsigma(\|\varepsilon\|) - \lambda_{Q_o}r_d\|\varepsilon\|$ .

Soit alors  $W_2(z, \varepsilon)$  donnée par (4.151). En utilisant (4.163), (4.155) et, avec un choix approprié des constantes  $\zeta$  et  $\mu_2$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{W}_2(z, \varepsilon) &\leq -\frac{\zeta\eta_1}{2}\|z\|^2 - \lambda_{Q_o}\|\varepsilon\| \left( \frac{\|\varepsilon\|}{2} - r_d \right) \\ &\leq -\mu_2(\|z\|^2 + \|\varepsilon\|^2) + \lambda_{Q_o}r_d\|\varepsilon\| \end{aligned} \quad (4.165)$$

Notons  $\chi = \begin{bmatrix} z \\ \varepsilon \end{bmatrix}$  et  $\mu_2 = \frac{\lambda_{Q_o}\eta_1^2}{2\eta_2^2}$ , l'équation (4.165) devient :

$$\begin{aligned} \dot{W}_2(z, \varepsilon) &\leq -\mu_2\|\chi\|^2 + \lambda_{Q_o}r_d\|\chi\| \\ &\leq -\mu_2\|\chi\| \left( \|\chi\| - 2r_d \left( \frac{\eta_2}{\eta_1} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (4.166)$$

Donc  $\chi$  converge exponentiellement dans la boule  $B(0, R_d)$  avec  $R_d$  donné par (4.161). Par conséquent  $\tilde{x}$  et  $\tilde{v}$  convergent dans la boule  $B(0, R_d)$  et  $x$  converge dans la boule  $B((x_r, \dot{x}_r)^T, R_d)$ .

□

#### 4.6.4 Conclusion

Dans la littérature les auteurs de [Kokotovic, 1992, Mazenc et al., 1994] ont montré que l'implémentation "certainty-equivalence" d'une loi de commande par retour d'état, globalement stabilisante en utilisant les états estimés par l'observateur peut conduire à des explosions infinies des états en temps fini et donc à un rétrécissement des domaines de stabilité. Les auteurs de [Kokotović et al., 1997] ont donné des conditions sur la croissance des non linéarités du système pour élargir les régions d'attraction. Dans [Teel and Praly, 1995], les auteurs ont développé des méthodes pour avoir la stabilité semiglobale avec un retour d'état partiel et un retour de sortie ils ont montré que la stabilité semiglobale par un retour d'état uniformément observable

est une condition suffisante pour obtenir la stabilité pratique semiglobale avec un retour de sortie.

Dans cette section, après avoir rappelé les écueils de la synthèse de bouclages de sortie pour les systèmes non linéaires, nous avons modifié les lois de commande globalement stabilisantes du chapitre 3 afin de prouver la stabilité semiglobale du bouclage de sortie. Nous avons également démontré la stabilité pratique dans le cas d'erreurs de modélisation.

## 4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons tout d'abord proposé des observateurs pour les systèmes étendus donnés dans le chapitre 2 dans le cas où la pulsation cardiaque est connue. Ces travaux ont été publiés dans deux conférences internationales CDC 2014 (Conference on Decision and Control) [Sadelli et al., 2014b] et MSC 2014 (Multi-Conference on Systems and Control) [Sadelli et al., 2014a]. L'observateur MVT que nous avons synthétisé est plus performant que l'observateur à grand gain en raison de sa sensibilité plus faible aux bruits de mesures notamment dans notre cas où la dimension élevée du système peut être prohibitive pour le grand gain. Cependant, l'existence d'un observateur par MVT repose sur l'existence d'une solution pour plusieurs inégalités matricielles, et il n'existe malheureusement pas à notre connaissance de conditions suffisantes pour en garantir l'existence.

Ensuite, nous avons proposé un observateur à grand gain pour le modèle étendu dans le cas où la pulsation cardiaque est inconnue. Ce résultat est publié dans une conférence nationale (6èmes Journées Doctorales / Journées Nationales MACS à Bourges 2015) [Sadelli et al., 2015]. Enfin, nous avons utilisé une loi de commande par retour de sortie, dont nous avons démontré la stabilité semiglobale : ces résultats ont été publiés dans la revue IEEE TAC (Transactions on Automatic Control) [Sadelli et al., 2016]. L'observateur par immersion que nous avons proposé dans [Sadelli et al., 2015], synthétisé dans le cas où la pulsation cardiaque est inconnue, est incomplet puisqu'il ne garantit pas que les états restent dans un ensemble borné. Nous avons depuis résolu le problème et généralisé cet observateur à une classe plus vaste de systèmes, même si le travail est encore en cours. Sur le plan pratique, ce type d'observateur est très attractif pour des diagnostics médicaux afin d'estimer en ligne des paramètres sanguins locaux. Les informations reconstruites –vitesse du sang et sa pulsation– permettent de diagnostiquer une éventuelle thrombose artérielle ou un dysfonctionnement au niveau d'un vaisseau. Nous illustrerons l'ensemble de nos résultats par différentes simulations dans le chapitre suivant.



# Chapitre 5

## Résultats de simulation

### Contenu du chapitre

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>170</b>
<b>5.2</b>	<b>Cadre général de l'étude</b>	<b>170</b>
<b>5.3</b>	<b>Commande d'un microrobot en 1D</b>	<b>172</b>
5.3.1	Commande par backstepping adaptatif	172
5.3.2	Commande par retour de sortie	175
5.3.2.1	Robustesse aux bruits de mesure (RBM)	175
5.3.2.2	Robustesse aux incertitudes paramétriques (RIP)	183
5.3.2.3	Robustesse aux erreurs de modélisation $n = 2$ et $n^* = 4$	186
5.3.3	Pulsation cardiaque inconnue	188
<b>5.4</b>	<b>Commande par retour de sortie d'un microrobot en 2D</b>	<b>191</b>
5.4.1	Robustesse aux bruits de mesure (RBM)	191
5.4.2	Robustesse aux incertitudes paramétriques (RIP)	195
5.4.3	Robustesse aux erreurs de modélisation (REM)	199
<b>5.5</b>	<b>Commande de deux microrobots</b>	<b>202</b>
5.5.1	Modèle 1D	202
5.5.1.1	Trajectoire fixe (TF)	202
5.5.1.2	Trajectoire variable	205
5.5.2	Modèle 2D	210
5.5.2.1	Trajectoire fixe (TF)	210
5.5.2.2	Trajectoire variable (TV)	212
<b>5.6</b>	<b>Synthèse des simulations</b>	<b>214</b>
<b>5.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>216</b>

---

## 5.1 Introduction

Ce chapitre illustre par différentes simulations nos résultats obtenus dans le domaine de la commande et de l'observation, développés dans les chapitres 3 et 4. Nous commençons tout d'abord par le modèle  $1D$  du microrobot ; tout d'abord sans utiliser d'observateur d'état afin d'illustrer les résultats obtenus par une commande par backstepping adaptatif, puis avec un bouclage de sortie afin d'en illustrer la robustesse vis-à-vis des bruits de mesures, incertitudes paramétriques et erreurs de modélisation. Nous comparons également les résultats obtenus par les observateurs MVT et à grand gain. Ensuite, nous présenterons les résultats obtenus par l'observateur par immersion dans le cas où la pulsation cardiaque est inconnue.

La seconde partie sera dédiée aux résultats de simulation pour le modèle  $2D$  du microrobot, dans ce cas aussi la robustesse de la paire observateur contrôleur sera étudiée en présence des bruits de mesures, incertitudes paramétriques et erreurs de modélisation. Par la suite, nous illustrerons nos résultats de commande de deux microrobots dans le cas  $1D$ , dans le cas d'une trajectoire fixe puis variable. Enfin, nous terminerons le chapitre par les résultats de l'approche de commande de deux microrobots en  $2D$ , avec deux exemples : trajectoire fixe et variable.

## 5.2 Cadre général de l'étude

La dynamique d'un microrobot dans les vaisseaux sanguins fait intervenir de nombreux paramètres. Certains, comme le rayon du microrobot ou son aimantation, et par extension les paramètres associés à un objet manufacturé sont moins susceptibles d'incertitude (ou faible), d'autres, comme la viscosité du sang, sa masse volumique, le module d'Young des vaisseaux, et par extension les paramètres associés au vivant sont connus avec des incertitudes importantes et peuvent fortement varier non seulement d'un individu à l'autre, mais aussi en fonction du temps (la fréquence cardiaque) ou l'espace (la viscosité du sang varie du simple au cinquantuple selon que le sang traverse une artériole, une artère ou un capillaire). La robustesse aux erreurs paramétriques est donc cruciale pour tout système biologique, et pour notre application en particulier car la plupart de ces incertitudes affectent la force de traînée hydrodynamique, qui est prépondérante dans le modèle.

A l'échelle micrométrique et plus encore à l'échelle nanométrique, les mesures sont entachées d'un bruit important par rapport aux dimensions en jeu. Ceci est encore renforcé par l'utilisation d'imageurs médicaux, où il y a un compromis à faire entre résolution spatiale et résolution temporelle. Il est donc important d'avoir une bonne robustesse aux bruits de mesure. Nous nous plaçons dans le cas d'une navigation dans une petite artère d'un ou plusieurs robots micrométriques actionnés selon le concept "bead pulling". Dans l'ensemble des simulations, nous utiliserons pour données nominales celles fournies dans le tableau 5.1. Les simulations sont effectuées de sorte à prendre en compte les limitations des actionneurs du système magnétique qui génère les gradients de champ magnétique dont la saturation est donnée par  $u_{sat} = \nabla B_{sat}$ . Pour

ne pas détériorer le système, la loi de commande  $u_a(t)$  appliqué au système est donc saturée comme suit :

$$u_a(t) = \frac{u(t)}{k(t)}, \quad k(t) = \max\left(1, \frac{|u(t)|}{u_{sat}}\right)$$

avec  $u(t)$  la commande obtenue par retour d'état ou de sortie. Dans toutes les simulations, la

Viscosité du sang	$\eta$	$16 \times 10^{-3} [Pa.s]$
Densité du sang	$\rho_f$	$1060 [kg.m^{-3}]$
Densité du matériau magnétique	$\rho_m$	$7500 [kg.m^{-3}]$
Rayon du microrobot	$r$	$2,5 \times 10^{-4} [m]$
Diamètre du vaisseau	$D$	$3 \times 10^{-3} [m]$
Densité polymère	$\rho_p$	$1500 [kg.m^{-3}]$
Rapport ferromagnétique	$\tau_m$	0,75
Aimantation	$M$	$1,23 \times 10^6 [A.m^{-1}]$
Rapport d'occlusion	$\beta$	0,65
Raideur	$K$	$2,19 \times 10^3 [Pa.m^{\frac{1}{2}}]$
Charge	$q$	$7,13 \times 10^{-11} [C]$
Densité diélectrique du sang	$\varepsilon$	$70 [C^2.N^{-1}.m^{-2}]$
Constante diélectrique	$\varepsilon_0$	$8,85 \times 10^{-12} [C^2.N^{-1}.m^{-2}]$
Gains de commande en $1D$	$(k_1, k_2)$	(7, 14)
Gains de commande en $2D$	$(k_1, k_2, k_3, k_4)$	(7, 40, 14, 20)
Saturation de l'actionneur	$u_{sat}$	0.2 $[T.m^{-1}]$

TABLE 5.1 – Valeurs nominales des paramètres

mesure est affectée d'un bruit blanc gaussien d'écart-type  $500\mu m$  en  $1D$  ( $100\mu m$  en  $2D$ ) à partir de  $t = 8s$ . En  $1D$ , afin de simplifier l'étude, mais sans que cela ne soit limitatif, nous avons pris pour trajectoire de référence un point fixe : l'origine, *i.e* ( $x_r = \dot{x}_r = \ddot{x}_r = 0$ ). En  $2D$ , nous utilisons une trajectoire non  $\mathcal{C}^2$  qui vise à limiter les efforts de commande, elle est donnée par :

$$\begin{cases} x_{1,r}(t) = 0.04t \\ x_{2,r}(t) = \begin{cases} D/4 & \text{If } t \leq 5 \\ D/3 & \text{If } t > 5 \end{cases} \end{cases} \quad (5.1)$$

La vitesse  $\xi_1$  du flux sanguin est modélisée par la série de Fourier suivante :

$$\xi_1 = a_0 + \sum_{i=1}^{n^*} [a_i \cos(i\omega t) + b_i \sin(i\omega t)]$$

avec :

$$\begin{aligned}
a_0 &= 50 \text{ mm.s}^{-1} & a_1 &= 17,84 \text{ mm.s}^{-1} & a_2 &= -10,84 \text{ mm.s}^{-1} & a_3 &= -8,899 \text{ mm.s}^{-1} \\
a_4 &= 0,9231 \text{ mm.s}^{-1} & b_1 &= 6,144 \text{ mm.s}^{-1} & b_2 &= 9,425 \text{ mm.s}^{-1} & b_3 &= -7,388 \text{ mm.s}^{-1} \\
b_4 &= -2,536 \text{ mm.s}^{-1} & \omega &= 2\pi \text{ rad.s}^{-1}
\end{aligned}$$

- Pour  $n^* = 1$ , on a  $\xi_1 \in [31, 12 \quad 68, 87] \text{ mm.s}^{-1}$ .
- Pour  $n^* = 2$ , on a  $\xi_1 \in [20, 06 \quad 77, 9] \text{ mm.s}^{-1}$ .
- Pour  $n^* = 3$ , on a  $\xi_1 \in [16, 6 \quad 87, 9] \text{ mm.s}^{-1}$ .
- Pour  $n^* = 4$ , on a  $\xi_1 \in [17, 8 \quad 90, 5] \text{ mm.s}^{-1}$ .

### 5.3 Commande d'un microrobot en 1D

Nous illustrons la commande d'un microrobot dans un environnement 1D à des fins de simplification : la plupart des difficultés sont déjà présentes ici. Nous commencerons tout d'abord par une commande par backstepping adaptatif afin d'illustrer l'intérêt de l'approche pour un modèle biophysique, tout en supposant que l'état entier est accessible à la mesure. Dans un second temps, les simulations illustreront les résultats obtenus par notre bouclage de sortie, afin d'en montrer la robustesse vis-à-vis des bruits de mesure, d'incertitudes paramétriques et erreurs de modélisation. Seront également comparées les performances obtenues par l'utilisation d'un observateur MVT et d'un observateur grand gain. Enfin, cette section se clôt par une présentation des résultats obtenus en utilisant un observateur par immersion dans le cas où la pulsation cardiaque est inconnue.

#### 5.3.1 Commande par backstepping adaptatif

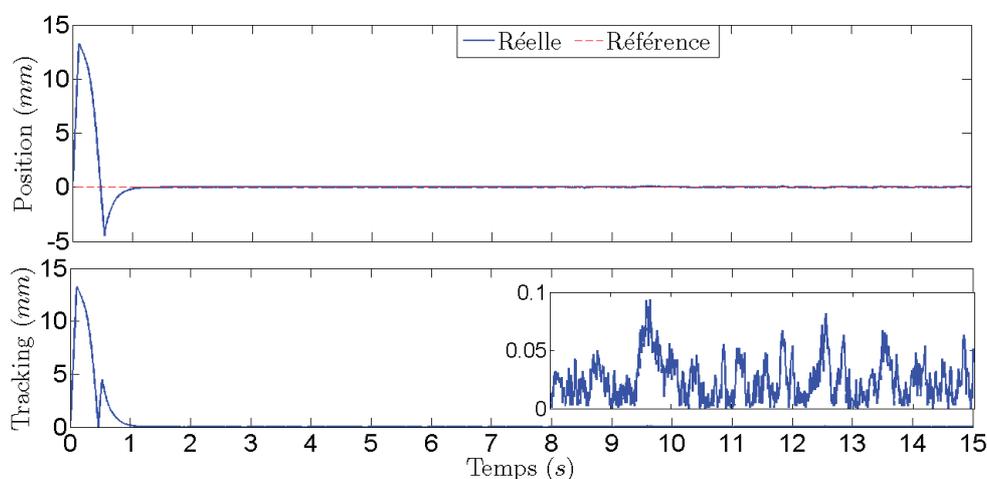
Dans cette section, nous intéressons à la commande du système réduit ( $\mathcal{R}^1$ ) du microrobot dans lequel la force de traînée est affectée par les incertitudes paramétriques issues des paramètres du flux sanguin et du microrobot comme la viscosité dynamique  $\eta$  du sang (qui varie en fonction du diamètre du vaisseau), sa masse volumique  $\rho_f$ , le rayon  $r$  du microrobot peut également être incertain, ainsi que son aimantation  $M$ . Par conséquent les paramètres  $\theta$  et  $\beta_1'$  sont ici considérés incertains. La commande  $u$  est donnée par la proposition 3.4.4, et les conditions initiales sont données dans le tableau 5.2.

$(x_r(0) \quad \dot{x}_r(0))$	$x_0$	$\theta, p$	$\hat{\theta}(0), \hat{p}(0)$
$(0 \quad 0)$	$(0 \quad 0)^T$	$(295, 78 \quad 251, 56 \quad 3773, 32)^T, 0, 006504$	$(10 \quad 15 \quad 200)^T, 10$

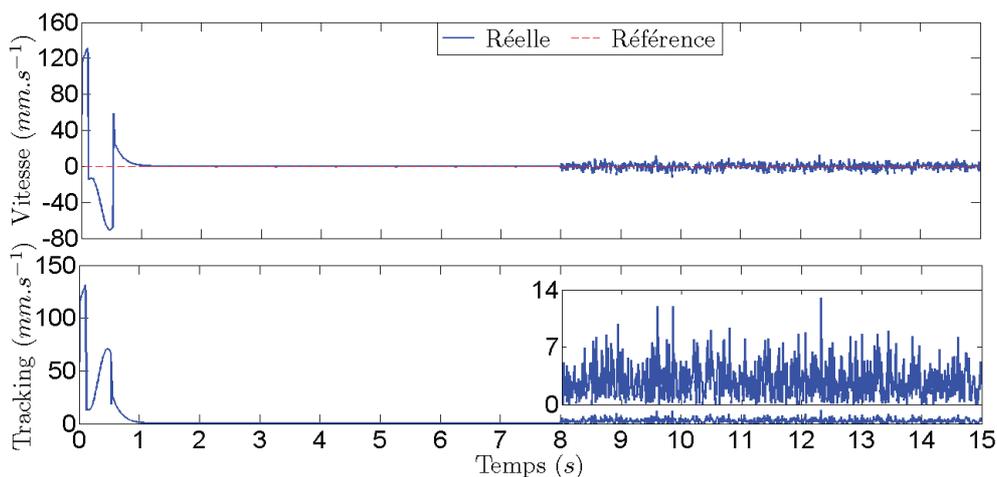
TABLE 5.2 – Commande par backstepping adaptatif en 1D : conditions initiales

La figure 5.1(a) (resp. 5.1(b)) illustre la position réelle et de référence et son erreur de suivi (resp. la vitesse). Pendant la phase transitoire, le suivi en position et en vitesse est mauvais en

raison de la saturation de la commande (voir figure 5.2). Après 1 seconde, la position et la vitesse du microrobot convergent respectivement vers leurs valeurs de référence  $x_r(t) = 0$  et  $\dot{x}_r(t) = 0$ . Nous remarquons que le bruit de mesure n'affecte pas trop la position réelle du microrobot, avec une erreur de suivi en position inférieure à  $100\mu m$ . Cependant la vitesse réelle du microrobot est très affectée par le bruit de mesure, avec une erreur de suivi en vitesse inférieure à  $14mm.s^{-1}$ . La forte sensibilité de la vitesse du microrobot au bruit de mesure s'explique d'une part par la sensibilité des paramètres adaptatifs  $\hat{\theta}$  et  $\hat{p}$  au bruit de mesure (ces paramètres affectant directement l'accélération du microrobot) et d'autre part par la sensibilité de la commande  $u$  au paramètre adaptatif  $\hat{p}$ .



(a) Position du microrobot et son erreur de suivi



(b) Vitesse du microrobot et son erreur de suivi

FIGURE 5.1 – Position et vitesse réelles et de références

La commande  $u = \nabla B_z$  et les paramètres adaptatifs  $\hat{\theta}$ ,  $\hat{p}$  sont respectivement représentés sur les figures 5.2 et 5.3. Nous remarquons qu'en début de simulation, la commande atteint sa valeur de saturation ( $\pm 200 \text{mT.m}^{-1}$ ) en raison de l'erreur initiale sur les paramètres. Elle est également très affectée par le bruit de mesure. Nous constatons que si les paramètres adaptatifs  $\hat{\theta}$  et  $\hat{p}$  ne convergent pas vers leurs vraies valeurs, en revanche leurs lois de mise à jour permettent de stabiliser la position et la vitesse du microrobot respectivement le long de  $x_r(t)$  et  $\dot{x}_r(t)$ . La simulation montre que la loi de commande par backstepping adaptatif donnée par la proposition 3.4.4 stabilise le microrobot le long d'une trajectoire de référence en dépit des incertitudes paramétriques.

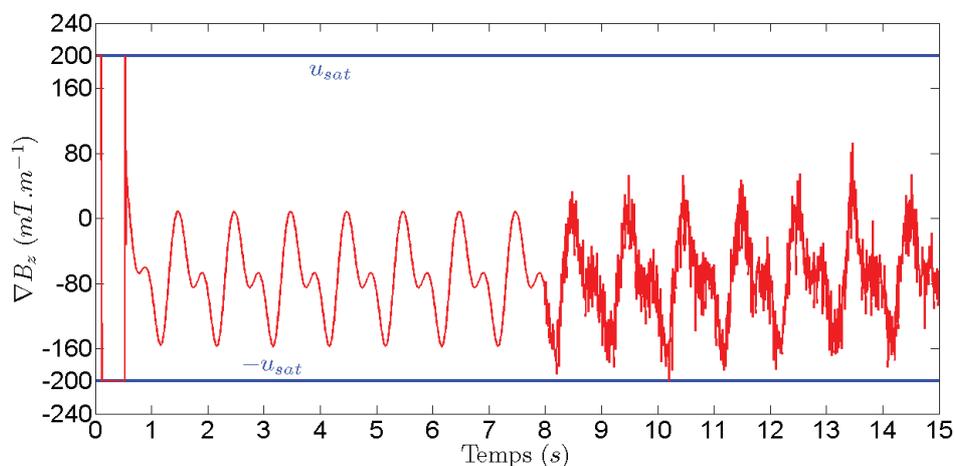


FIGURE 5.2 – Entrée de commande  $\nabla B_z$  par backstepping adaptatif

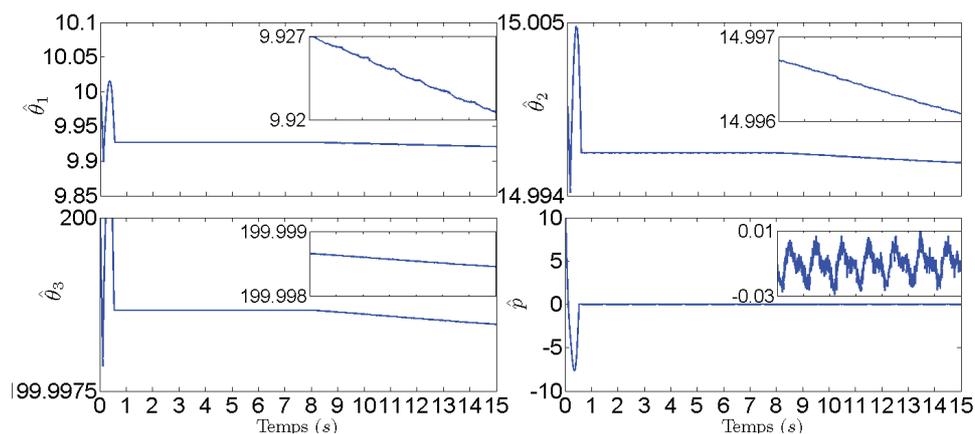


FIGURE 5.3 – Les paramètres estimés  $\hat{\theta}$  et  $\hat{p}$

### 5.3.2 Commande par retour de sortie

Nous illustrerons successivement la robustesse aux bruits de mesure en comparant l'observateur MTV à l'observateur grand gain, puis la robustesse aux incertitudes paramétriques et enfin la robustesse aux erreurs de modélisation en supposant que la vitesse du sang réelle est modélisé par le système  $(\mathcal{F}_\omega^{n^*})$  pour le système étendu  $(\mathcal{E}_\omega^{1,n^*})$ , et par  $(\mathcal{F}_\omega^n)$  pour le modèle de l'observateur MVT  $(\hat{\mathcal{E}}_\omega^{1,n})$ , avec  $n^* > n$ .

Pour les simulations suivantes, les écarts types des erreurs d'estimation pour la position et la vitesse du microrobot, la vitesse du sang et le paramètre  $\vartheta$  sont donnés dans le tableau 5.4.

#### 5.3.2.1 Robustesse aux bruits de mesure (RBM)

Afin de dissocier les effets des différentes perturbations qui affectent le système, nous allons d'abord illustrer par des simulations la robustesse au bruit de mesure en considérant que tous les paramètres sont connus. La loi de commande par retour de sortie  $u$  est donnée par la proposition 3.4.3 couplée avec un observateur MVT donné par la proposition 4.4.2 ou un observateur grand gain donné par la proposition 4.3.2.

**5.3.2.1.1 Flux pulsatile tronqué à l'ordre  $n = 1$**  Nous supposons que le flux sanguin est ici correctement modélisé par une vitesse moyenne superposée à un oscillateur harmonique  $n = n^* = 1$ . Les simulations ci-dessous illustrent les résultats obtenus par l'observateur MVT et l'observateur à grand gain.

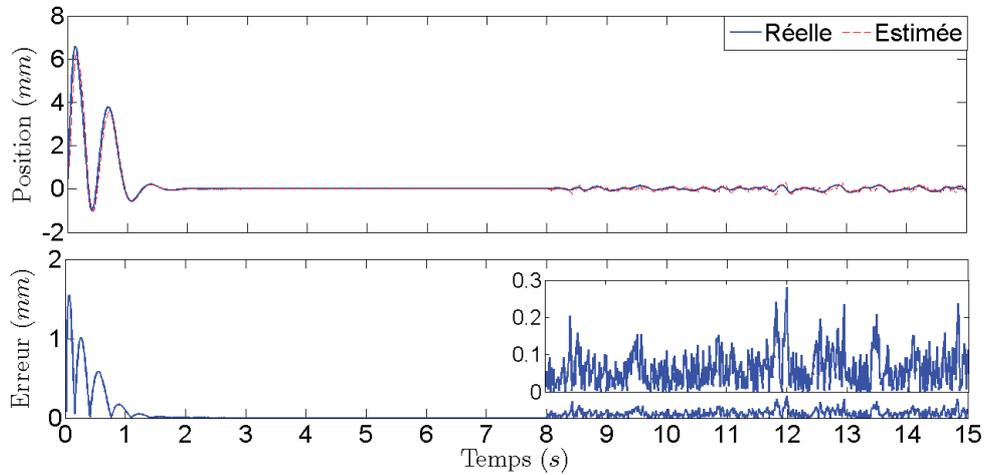
**5.3.2.1.1.1 Observateur MVT** Les résultats obtenus par l'observateur MTV sont illustrés sur les figures 5.4 et 5.5. Les positions (respectivement les vitesses) réelle et estimée du microrobot et leur erreurs d'observation sont représentées sur la figure 5.4(a) (respectivement figure 5.4(b)). Les conditions initiales  $\bar{x}_0, \hat{\bar{x}}_0$  du système  $(\mathcal{E}_\omega^{1,n})$  et l'observateur  $(\hat{\mathcal{E}}_\omega^{1,n})$ , ainsi que le gain  $K_o$  de l'observateur sont donnés dans le tableau 5.3.

$\bar{x}_0$	$(0 \ 0 \ 6,78 \ 3,86 \ 2,5) \times 10^{-2}$
$\hat{\bar{x}}_0$	$(0,1 \ 1 \ 0 \ 0,1 \ 1) \times 10^{-2}$
$K_o^T$	$(0,3004 \ 4,807 \ 3,949 \ 22,97 \ 2,041) \times 10^{+2}$

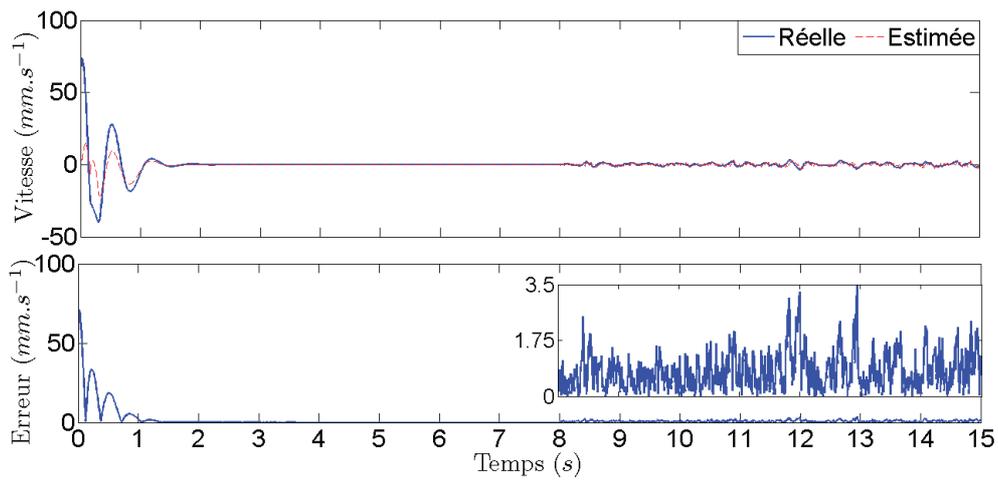
TABLE 5.3 – Conditions initiales et gain  $K_o$  de l'observateur MVT pour  $n = n^* = 1$

On remarque sur la figure 5.4 que la position et la vitesse du microrobot convergent vers zéro après 1 seconde, leur erreurs d'observation sont respectivement inférieures à  $300\mu m$  et  $3,5mm.s^{-1}$ . On constate sur la figure 5.5(a) que la vitesse du sang estimée par l'observateur converge vers la vitesse réelle du sang en 1 seconde, avec une erreur d'observation de la vitesse du sang inférieure à  $4mm.s^{-1}$ . La figure 5.5(b) illustre l'entrée de commande obtenue pour stabiliser la position et la vitesse du microrobot en zéro : au début de la simulation, la commande  $u = \nabla B_z$

atteint sa saturation négative ce qui explique les erreurs de suivi initiales, et la commande n'est que affectée par le bruit de mesure, ce qui s'explique par l'effet de lissage de l'observateur.

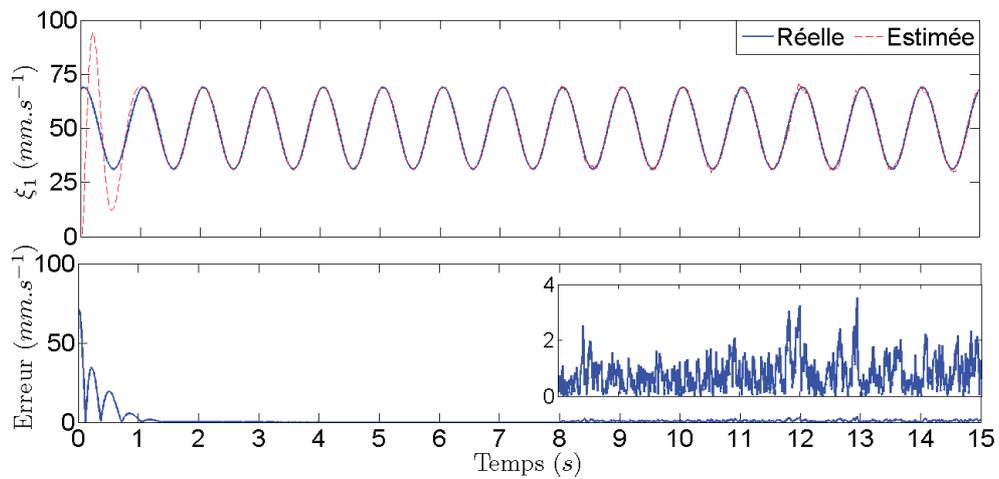


(a) Position du microrobot et son erreur d'observation

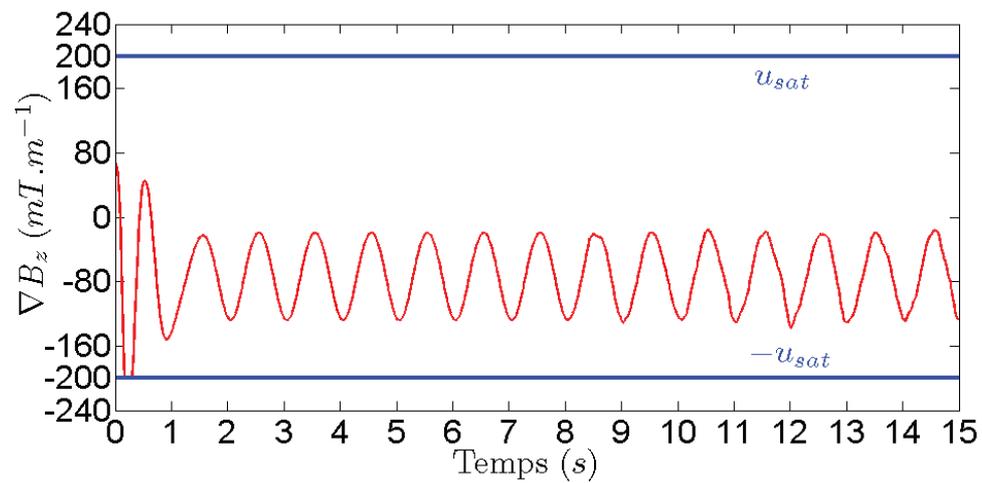


(b) Vitesse du microrobot et son erreur d'observation

FIGURE 5.4 – Position et vitesse du microrobot estimées par l'observateur MVT pour  $n = n^* = 1$



(a) Vitesse du sang et son erreur d'observation



(b) Entrée de commande  $\nabla B_z$

FIGURE 5.5 – Vitesse du sang estimée et signal de commande obtenu par l'observateur MVT pour  $n = n^* = 1$

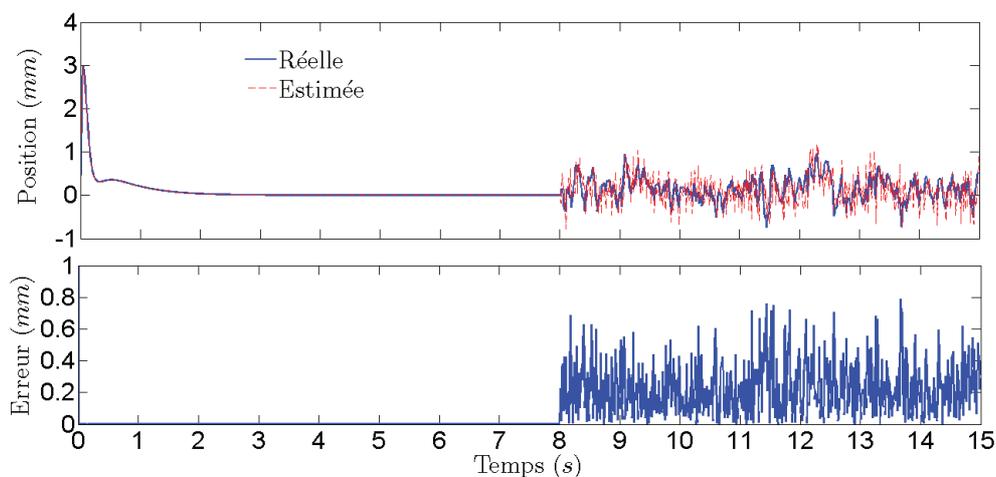
$\sigma$	Simulations			
		RBM	RIP	REM
$y(\mu m)$	MVT $n = 1$	500	500	500
	MVT $n = 2$	500	500	500
	GG $n = 1$	500	500	500
$\tilde{x}_1(\mu m)$	MVT $n = 1$	73,4	-	-
	MVT $n = 2$	83,1	80,1	994,4
	GG $n = 1$	271,5	-	-
$\tilde{x}_2(mm.s^{-1})$	MVT $n = 1$	0,95	-	-
	MVT $n = 2$	1,45	3,17	23,81
	GG $n = 1$	19,3	-	-
$\tilde{x}_3(mm.s^{-1})$	MVT $n = 1$	0,95	-	-
	MVT $n = 2$	1,47	1,27	24,42
	GG $n = 1$	21,88	-	-
$\tilde{\vartheta}(m.s^{-2})$	MVT $n = 1$	-	-	-
	MVT $n = 2$	-	0,034	-
	GG $n = 1$	-	-	-

TABLE 5.4 – Les écarts types des erreurs d’observation en 1D obtenus par l’observateur MVT pour  $n = 1$  et  $n = 2$  et par l’observateur GG pour  $n = 1$

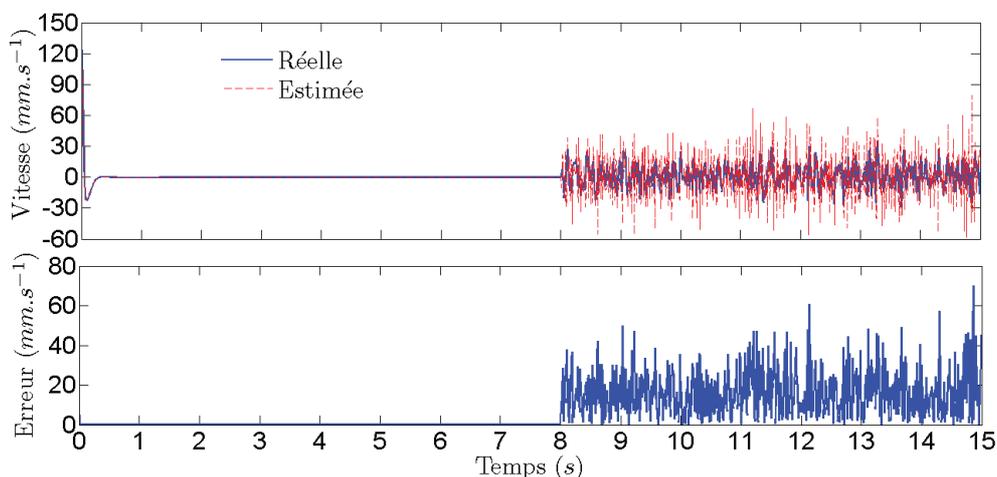
**5.3.2.1.1.2 Observateur à Grand Gain** Les figures 5.6 et 5.7 illustrent les résultats obtenus par l’observateur à grand gain donné par la proposition 4.3.2 dans les mêmes conditions que celles de l’observateur MVT. La figure 5.6(a)(respectivement 5.6(b)) illustre les positions réelle et estimée du microrobot (respectivement les vitesses) ainsi que leurs erreurs d’observation.

La position et la vitesse estimées du microrobot convergent très rapidement vers les valeurs réelles (moins de 0,5 seconde). Nous constatons que l’observateur à grand gain est très sensible au bruit de mesure, cette sensibilité est remarquable sur les figures 5.6(a) et 5.6(b), dans lesquelles nous remarquons que les erreurs d’observation pour la position et la vitesse du microrobot sont respectivement inférieures à  $800\mu m$  et  $70mm.s^{-1}$ . Cela s’explique par le gain élevé  $l^5$  sur la dernière composante de l’état  $\hat{x}$  et la convergence très rapide de l’observateur grand gain, cela conduit à un compromis entre la vitesse de convergence de l’observateur et sa sensibilité au bruit de mesure.

Les vitesses réelle et estimée du sang ainsi que la commande obtenue en utilisant l’observateur à grand gain sont illustrées respectivement sur les figures 5.7(a) et 5.7(b). On remarque sur la figure 5.7(a) que la vitesse du sang estimée par l’observateur converge rapidement vers la vitesse réelle du sang, son erreur d’observation est inférieure à  $70mm.s^{-1}$ . On remarque aussi sur la figure 5.7(b) que l’entrée de commande  $u$  est très affectée par le bruit de mesure car les vitesses



(a) Position du microrobot et son erreur d'observation

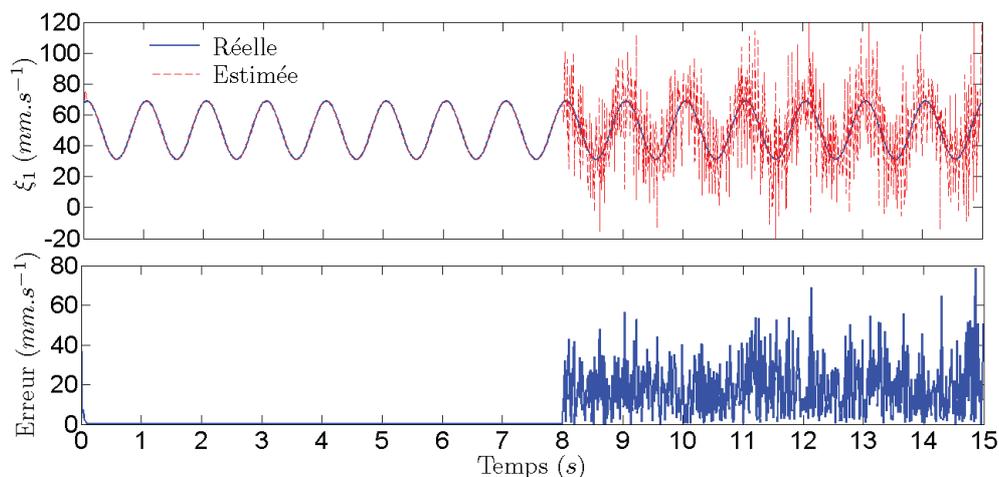


(b) Vitesse du microrobot et son erreur d'observation

FIGURE 5.6 – Position et vitesse du microrobot estimées par l'observateur à grand gain

estimées du microrobot et du sang par l'observateur grand gain sont très bruitées, donc affectent la commande par retour de sortie.

**5.3.2.1.1.3 Comparaison** En comparant les résultats de simulation obtenus par l'observateur MVT et l'observateur à grand gain ( voir figures 5.4, 5.5, 5.6 et 5.7), nous remarquons que la convergence de l'observateur à grand gain est beaucoup plus rapide que celle de l'observateur MVT, cela est dû au grand gain dans le terme de correction. En revanche cette convergence rapide de l'observateur à grand gain le rend très sensible au bruit de mesure par rapport à l'observateur MVT. Les erreurs d'observation obtenues par l'observateur MVT sont ici meilleures que celles obtenues par l'observateur grand gain. L'entrée de commande dans le cas de l'observateur à grand gain est plus affectée par le bruit de mesure (Figure 5.7(b)) que celle obtenue



(a) Vitesse du sang et son erreur d'observation

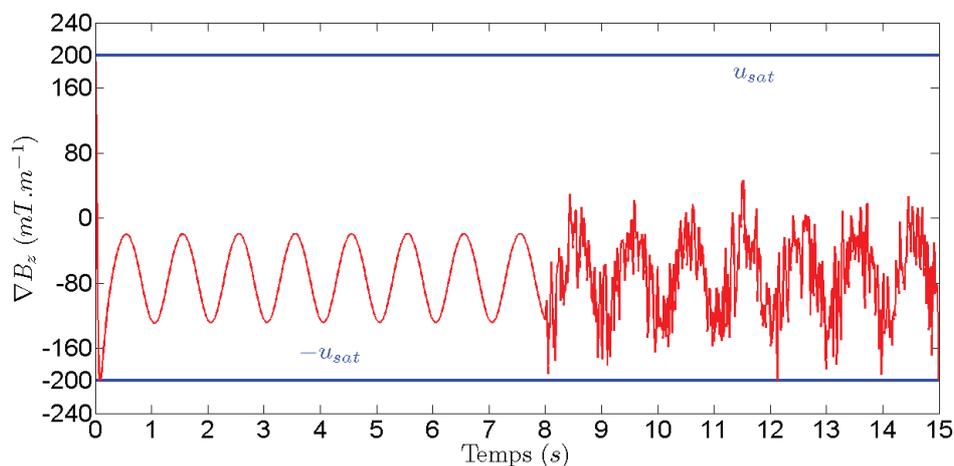
(b) Entrée de commande  $\nabla B$ 

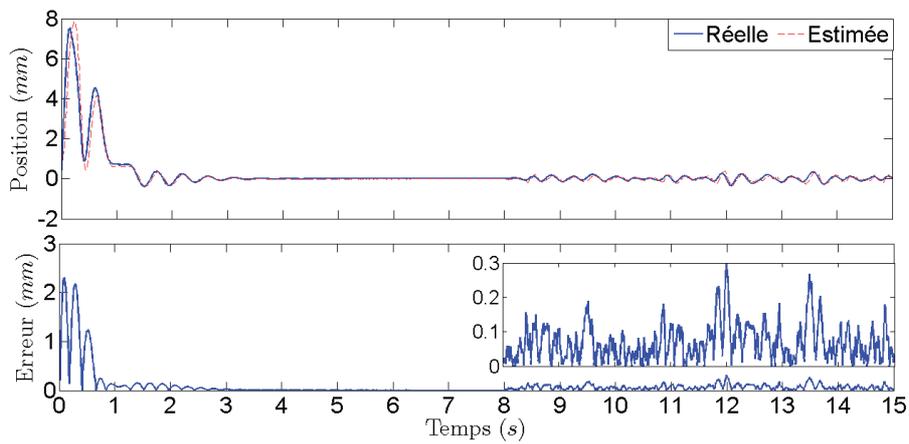
FIGURE 5.7 – Vitesse du sang estimée et signal de commande obtenu par l'observateur à grand gain

par l'observateur MVT ( Figure 5.5(b)). Ceci s'explique par le gain plus élevé dans le terme de correction de l'observateur grand gain que dans celui de l'observateur MVT : si la convergence est alors plus rapide pour le grand gain, le prix à payer est une forte sensibilité au bruit de mesure, notamment visible sur les estimées des vitesses et sur la commande par retour de sortie. Le suivi en position et en vitesse obtenu par l'observateur MVT est meilleur que celui obtenu par l'observateur à grand gain. En présence du bruit de mesure, les erreurs de suivi en position  $|\bar{x}_1 - x_r|$  et en vitesse  $|\bar{x}_2 - \dot{x}_r|$  sont respectivement inférieures à  $0,2mm$  et  $4mm.s^{-1}$  pour l'observateur MVT (resp. inférieures à  $1mm$  et  $30mm.s^{-1}$  pour l'observateur à grand gain).

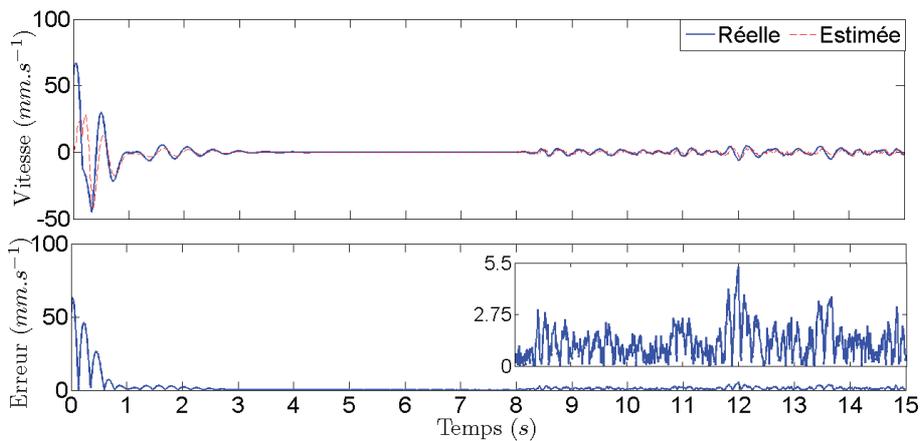
**5.3.2.1.2 Flux pulsatile tronqué à l'ordre  $n = 2$**  Cette simulation illustre les résultats obtenus par l'observateur MVT lorsque la vitesse du sang  $\xi_1$  est correctement modélisée par une série de Fourier tronquée à l'ordre  $n = n^* = 2$ . En revanche, on présente pas les résultats obtenus par l'observateur grand gain, parce que les états et la commande sont très affectés par le bruit de mesure à cause des gains élevés dans son terme de correction ( $l^7$ , car la dimension du système est passée de 5 à 7). Les conditions initiales  $\bar{x}_0, \hat{\bar{x}}_0$  ainsi que le gain  $K_o$  de l'observateur sont donnés dans le tableau 5.5.

$\bar{x}_0$	$(0 \ 0 \ 5,700 \ 15,704 \ 4,126 \ -17,766 \ 1,666) \times 10^{-2}$
$\hat{\bar{x}}_0$	$(0,1 \ 1 \ 0 \ 0,1 \ 0,1 \ 0,1 \ 1) \times 10^{-2}$
$K_o^T$	$(0,148 \ 4,268 \ 3,116 \ 19,138 \ 1,039 \ -5,816 \ 0,576) \times 10^{+2}$

TABLE 5.5 – Conditions initiales et gain de l'observateur MVT pour  $n = n^* = 2$



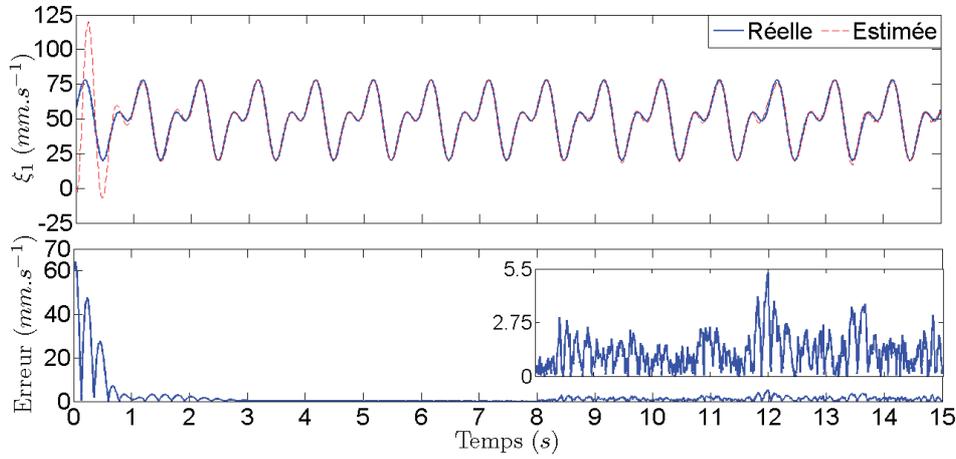
(a) Position du microrobot et son erreur d'observation



(b) Vitesse du microrobot et son erreur d'observation

FIGURE 5.8 – Position et vitesse du microrobot estimées par l'observateur MVT pour  $n = n^* = 2$

Les résultats obtenus sont représentés sur les figures 5.8 et 5.9. Dans ce cas, l'observateur converge moins rapidement que dans le cas  $n = 1$  : son temps de convergence est égal à 3 secondes, cela s'explique par le gain  $K_o$  (voir table 5.5) inférieur à celui obtenu dans le cas  $n = 1$  (voir table 5.3). Les états du microrobot (position et vitesse) estimés et réels ainsi que la vitesse du sang sont représentés sur les figures 5.8(a), 5.8(b) et 5.9(a) : on constate que les erreurs d'observation du microrobot en position, en vitesse et la vitesse du sang sont respectivement inférieures à  $300\mu m$ ,  $5,5mm.s^{-1}$  et  $5,5mm.s^{-1}$ . Les estimations données par l'observateur dans ce cas sont moins bonnes que celles pour  $n = 1$ , exceptée l'estimation de la position du microrobot. Comme le cas précédent ( $n = 1$ ), l'entrée de commande rentre en saturation en début de simulation, et est peu affectée par le bruit de mesure (Figure 5.9(b)). Les simulations pour  $n = 1$  et  $n = 2$  illustrent que le bouclage de sortie assure la stabilité asymptotique du système.



(a) Vitesse du sang et son erreur d'observation

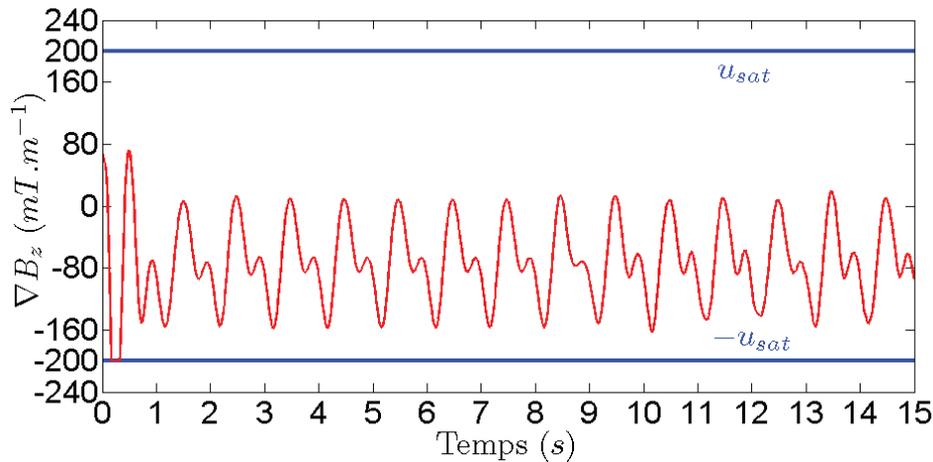
(b) Entrée de commande  $\nabla B$ 

FIGURE 5.9 – Vitesse du sang estimée et signal de commande obtenu par l'observateur MVT pour  $n = n^* = 2$

### 5.3.2.2 Robustesse aux incertitudes paramétriques (RIP)

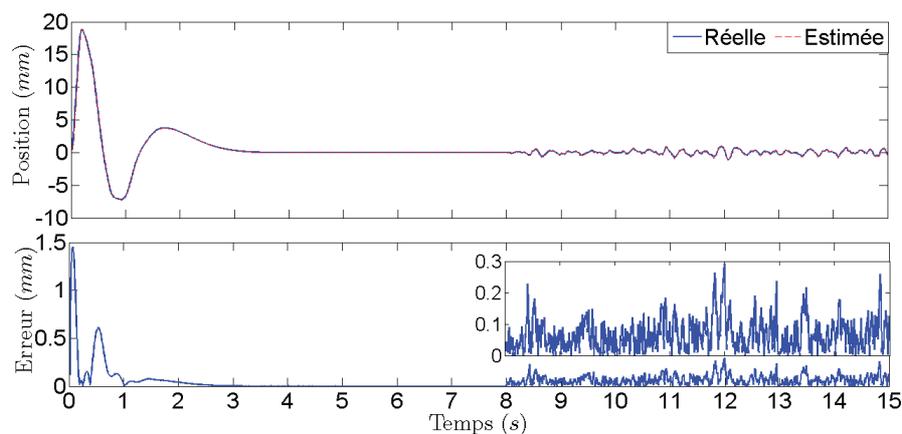
Nous gardons ici une vitesse du sang modélisée correctement par une série de Fourier tronquée à l'ordre 2 :  $n = n^* = 2$ . La simulation qui suit illustre la robustesse à une incertitude paramétrique  $\vartheta$ , qui représente le poids apparent normalisé (influence de  $\rho_f$  et  $\rho$ ). La loi de commande par retour de sortie  $u$  est donnée par la proposition 3.4.3 couplée avec un observateur MVT donné par la proposition 4.4.4. Les conditions initiales  $(\bar{x}_0, \vartheta(0))$ ,  $(\hat{x}_0, \hat{\vartheta}(0))$  du système  $(\mathcal{E}_{\omega, v_m}^{1, n})$  et de l'observateur  $(\hat{\mathcal{E}}_{\omega, v_m}^{1, n})$ , ainsi que le gain  $\bar{K}$  de l'observateur sont donnés dans le tableau 5.6.

$(x_0^T   \vartheta(0))$	$(0 \ 0 \ 5,700 \ 15,704 \ 4,126 \ -17,766   -807,69) \times 10^{-2}$
$(\hat{x}_0^T   \hat{\vartheta}(0))$	$(0,1 \ 1 \ 0 \ 0,1 \ 0,1 \ 0,1   -900) \times 10^{-2}$
$K_o^T$	$(0,209 \ 54,159 \ 4,551 \ 30,848 \ -2,364 \ -63,809) \times 10^{+2}$
$K_\vartheta$	$151,579 \times 10^{+2}$

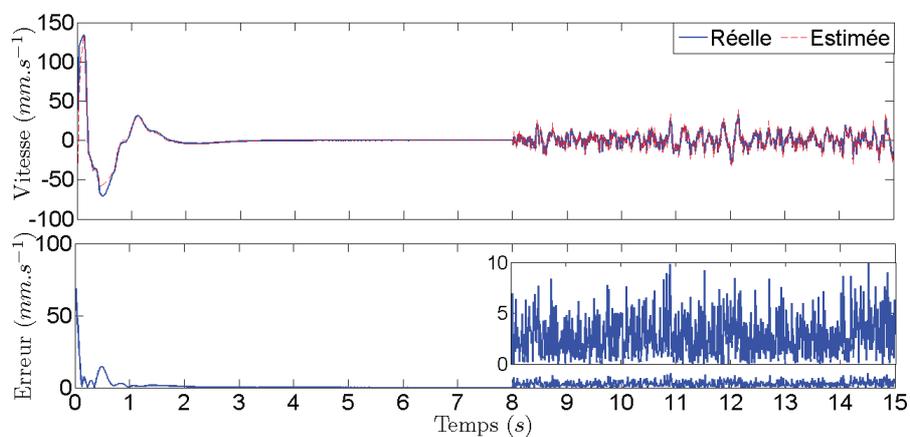
TABLE 5.6 – Conditions initiales et les gain d'innovation  $K_o$  et  $K_\vartheta$  de l'observateur MVT pour  $n = 2$

Les positions réelle et estimée (resp. les vitesses) et leurs erreurs d'observation sont représentées sur la figure 5.10(a) (resp. figure 5.10(b)). Après un transitoire d'environ 2 secondes correspondant au temps de convergence de l'observateur, on a convergence des erreurs d'observation à zéro. En présence du bruit de mesure, les erreurs d'observation en position et en vitesse du microrobot sont respectivement inférieures à  $300\mu m$  et  $10mm.s^{-1}$ . On constate aussi que les position et vitesse réelles du microrobot convergent vers zéro (point de référence) après 3 secondes, un long transitoire qui correspond au temps de convergence du paramètre  $\hat{\vartheta}$  vers  $\vartheta$  (voir figure 5.11). En début de simulation, le suivi en position et en vitesse est dégradé parce que la commande  $u$  atteint sa valeur de saturation (voir figure 5.12(b)).

La figure 5.12(a) illustre les vitesses estimée et réelle du sang et l'erreur d'observation associée. La vitesse du sang estimée par l'observateur converge vers sa valeur réelle en 1 seconde puis, en présence de bruit, son erreur d'observation est inférieure à  $5mm.s^{-1}$ . Dans ce cas l'entrée de commande  $u$  est très affectée par le bruit de mesure (voir figure 5.12(b)), cela est dû au paramètre estimé  $\hat{\vartheta}$  qui est très sensible au bruit de mesure à cause de son gain élevé dans son terme de correction ( $K_\vartheta = 1,51 \times 10^4$  voir table 5.6). La figure 5.11 illustre le paramètre réel  $\vartheta$  et estimé  $\hat{\vartheta}$  et son erreur d'observation  $\tilde{\vartheta}$ . En présence de bruit de mesure, cette erreur  $\tilde{\vartheta}$  est inférieure à  $0,15m.s^{-2}$ , ce qui est peu mais affecte suffisamment la commande  $u$ . Cette simulation illustre la robustesse aux bruits de mesures et aux incertitudes paramétriques et la stabilité asymptotique du système par un bouclage de sortie.

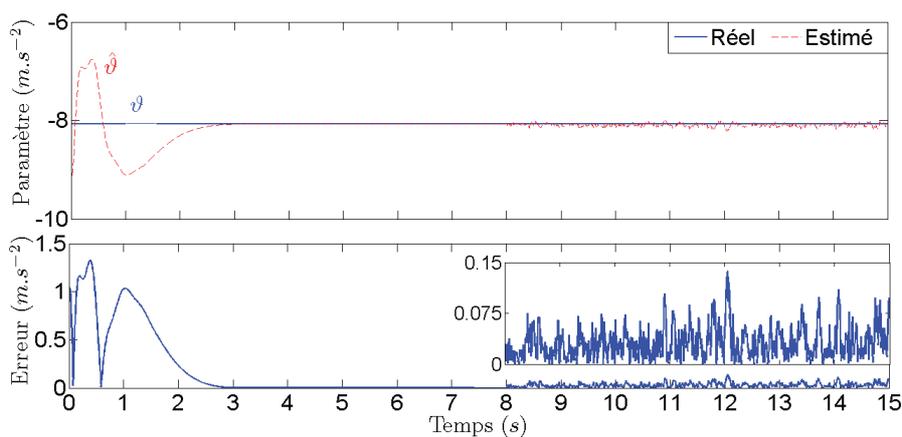


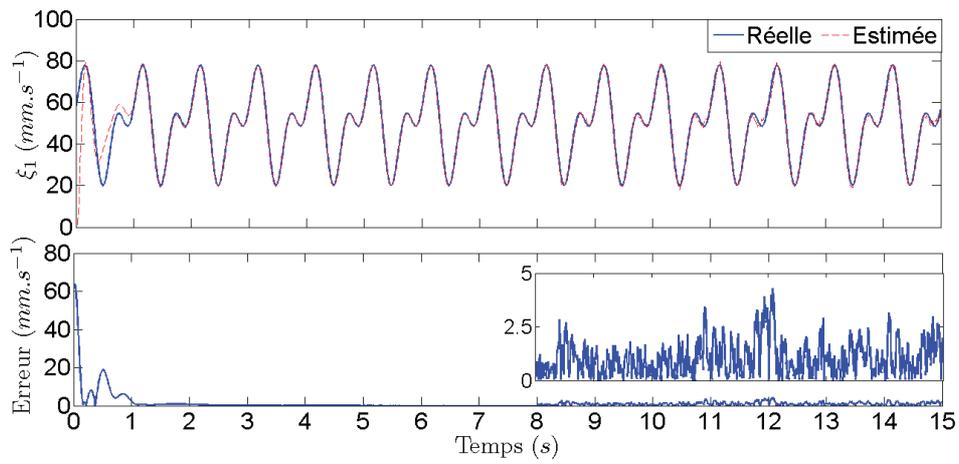
(a) Position du microrobot et son erreur d'observation



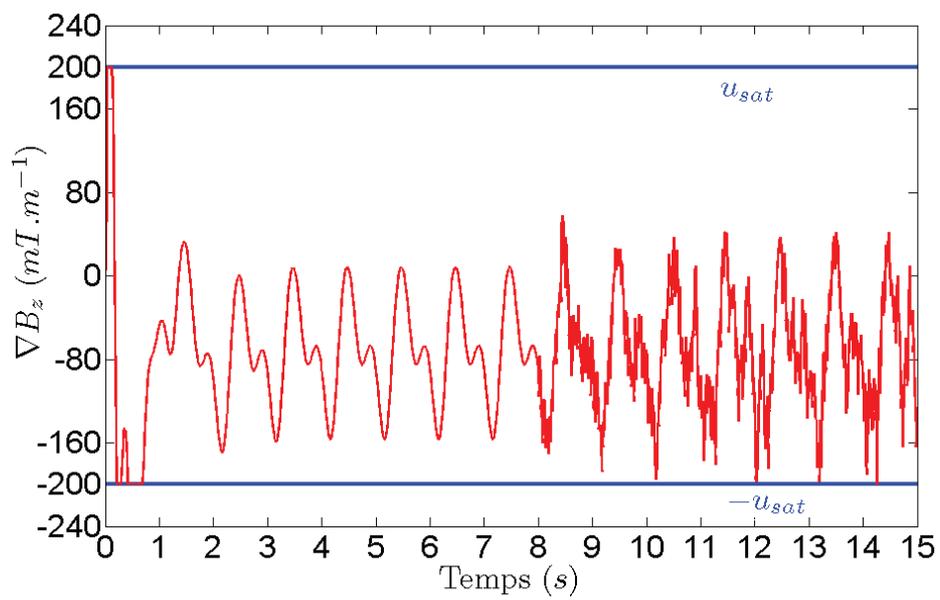
(b) Vitesse du microrobot et son erreur d'observation

FIGURE 5.10 – Position et vitesse du microrobot estimées par l'observateur MVT

FIGURE 5.11 – Paramètre estimé et erreur d'estimation  $\tilde{\vartheta}$



(a) Vitesse du sang et son erreur d'observation



(b) Entrée de commande  $\nabla B$

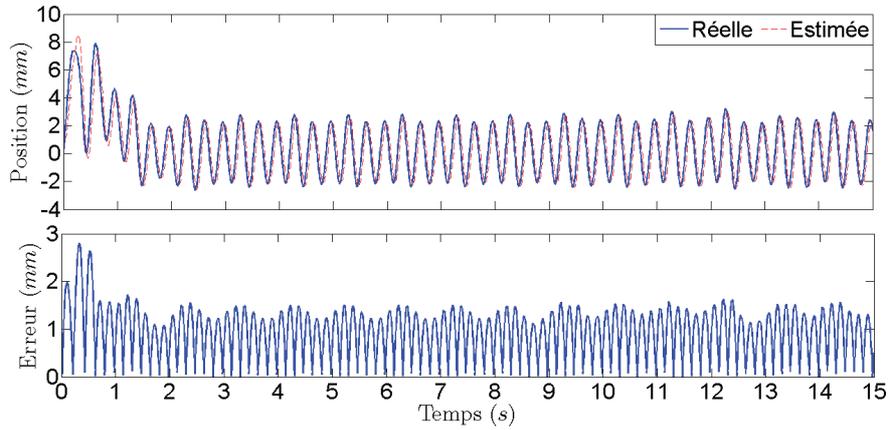
FIGURE 5.12 – Vitesse du sang estimée et le signal de commande obtenu par l'observateur MVT

### 5.3.2.3 Robustesse aux erreurs de modélisation $n = 2$ et $n^* = 4$

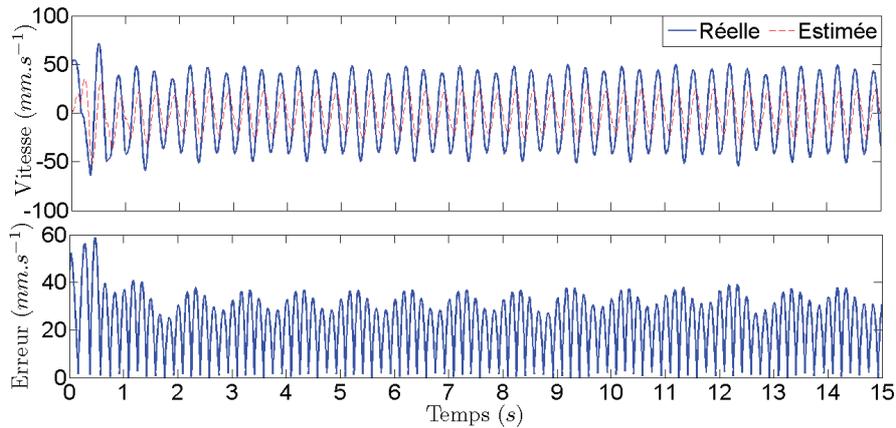
Nous supposons dans ce cas que la vitesse du sang utilisée dans le modèle de l'observateur ( $\hat{\mathcal{E}}_\omega^{1,n}$ ), est modélisée par une série de Fourier tronquée à l'ordre  $n = 2$ , en revanche la vitesse réelle du sang du système ( $\mathcal{E}_\omega^{1,n^*}$ ), est modélisée par une série de Fourier tronquée à l'ordre  $n^* = 4$ . Comme  $n < n^*$ , la vitesse du sang n'est pas correctement modélisée, on est alors en présence d'erreurs de modélisation. Cette simulation illustre la robustesse du bouclage de sortie par rapport aux erreurs de modélisation et aux bruits de mesure. Le gain d'innovation  $K_o$  et l'état initial  $\hat{x}_0$  de l'observateur sont donnés dans le tableau 5.5. L'état initial  $\bar{x}_0$  du système ( $\mathcal{E}_\omega^{1,n^*}$ ) est donné par :

$$\bar{x}_0^T = [0 \ 0 \ 4,902 \ -4,595 \ 6,993 \ 85,744 \ 0,0848 \ -142,030 \ 0,4423 \ 55,7714 \ 1] \times 10^{-2}$$

Les figures 5.13(a) et 5.13(b) illustrent respectivement les positions et les vitesses réelles et estimées et leur erreurs d'observation.



(a) Position du microrobot et son erreur d'observation

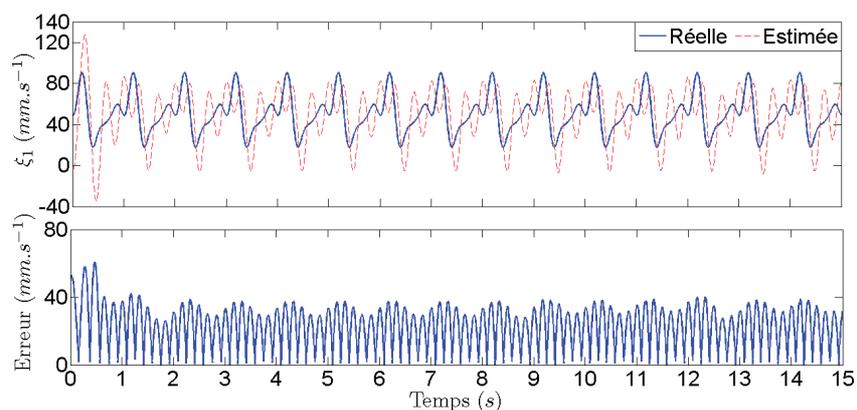


(b) Vitesse du microrobot et son erreur d'observation

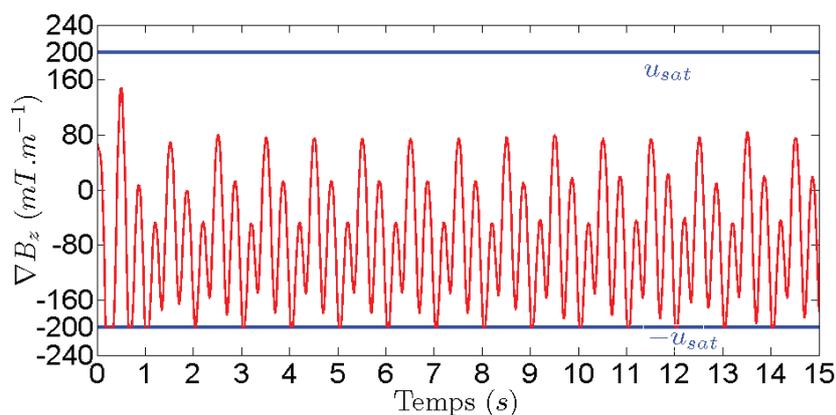
FIGURE 5.13 – Position et vitesse du microrobot estimées par l'observateur MVT pour  $n = 2$  et  $n^* = 4$

Conformément à la proposition 4.6.3 qui garantit la stabilité pratique, la loi de commande illustrée sur la figure 5.14(b) stabilise la position et la vitesse du microrobot dans une boule centrée à l'origine. Les erreurs d'observation en position et en vitesse sont les mêmes en absence et en présence du bruit de mesure *i.e* les erreurs de modélisation dominent les erreurs induites par le bruit de mesure ; ces erreurs sont respectivement inférieures à  $2mm$  et  $40mm.s^{-1}$ .

La vitesse du sang  $\hat{\xi}_1$  estimée par l'observateur est illustrée sur la figure 5.14(a), son erreur d'observation est inférieure à  $40mm.s^{-1}$ . La figure 5.14(b) illustre le signal de commande  $u$  : l'effet du bruit de mesure n'apparaît pas dans la commande, car là aussi, les erreurs de modélisation masquent cet effet. Cette simulation illustre la robustesse du système bouclé par retour de sortie aux erreurs de modélisation, qui assure la stabilité pratique de l'observateur et du suivi dans les boules  $B(0, R_d)$  et  $B((x_r, \dot{x}_r)^T, R_d)$  respectivement avec  $R_d$  donné par (4.161). Le rayon  $R_d$  peut être diminué, en augmentant les gains de commande  $k_1$  et  $k_2$ , mais le prix à payer est une sensibilité accrue au bruit de mesure. On a alors un compromis entre le rayon  $R_d$  et la sensibilité au bruit de mesure.



(a) Vitesse du sang et son erreur d'observation



(b) Entrée de commande  $\nabla B_z$

FIGURE 5.14 – Vitesse du sang estimée et le signal de commande obtenue par l'observateur MVT pour  $n = 2$  et  $n^* = 4$

### 5.3.3 Pulsation cardiaque inconnue

Dans les simulations présentées précédemment, nous avons supposé que la pulsation cardiaque  $\omega$  était connue. Toutefois, cette pulsation cardiaque est en général inconnue, et peut varier en fonction de l'état physiologique (repos, stress, etc). Nous supposons donc ici que la pulsation cardiaque est inconnue, la vitesse du sang  $\xi_1$  est alors modélisée par une série de Fourier tronquée à l'ordre  $n$ , ce modèle est donné par  $(\mathcal{F}^n)$ . Dans ce cas, nous allons estimer la pulsation cardiaque en utilisant un observateur par immersion, nous allons aussi illustrer la robustesse du bouclage de sortie par rapport au bruit de mesure. Les simulations illustrées par les figures 5.15, 5.16 et 5.17, sont obtenues en utilisant l'observateur  $(\mathcal{S}_{\hat{x}})$  par immersion donné par (4.117) avec un gain  $l = 1, 5$ . Le gain  $K$  est choisi de sorte à avoir les valeurs propres de  $(A - KC)$  en  $-1, -2, -3, -4, -5, -6$ . On utilise une commande par backstepping pour stabiliser la position et la vitesse du microrobot à l'origine. Les conditions initiales  $\bar{x}_0$  et  $\hat{\hat{x}}_0$  sont données dans le tableau 5.7.

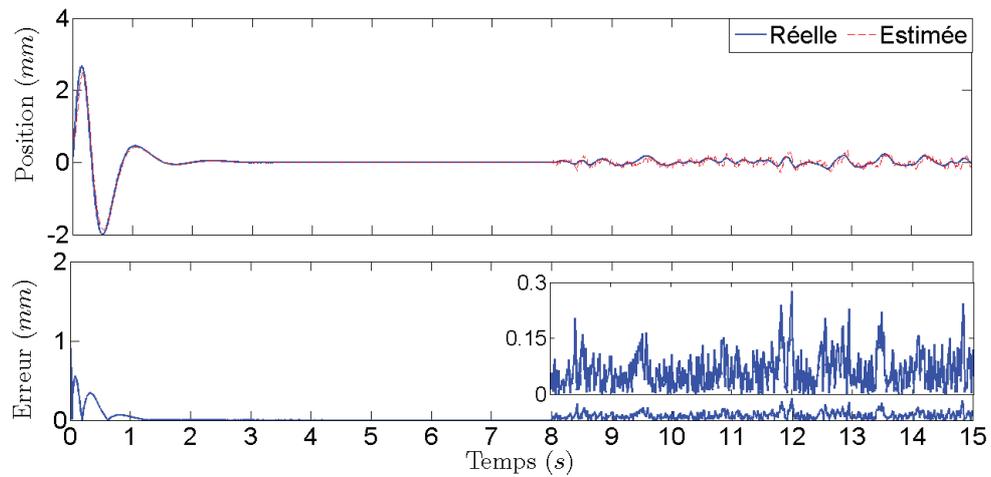
$\bar{x}_0$	$(0 \ 0 \ 1,784 \ 1,228 \ 400) \times 10^{-2}$
$\hat{\hat{x}}_0$	$(0,1 \ 1 \ 0 \ 0,1 \ 100 \ 0) \times 10^{-2}$

TABLE 5.7 – Conditions initiales pour les systèmes  $(\mathcal{E}_{s,v_m}^{1,1})$  et  $(\mathcal{S}_{\hat{x}})$

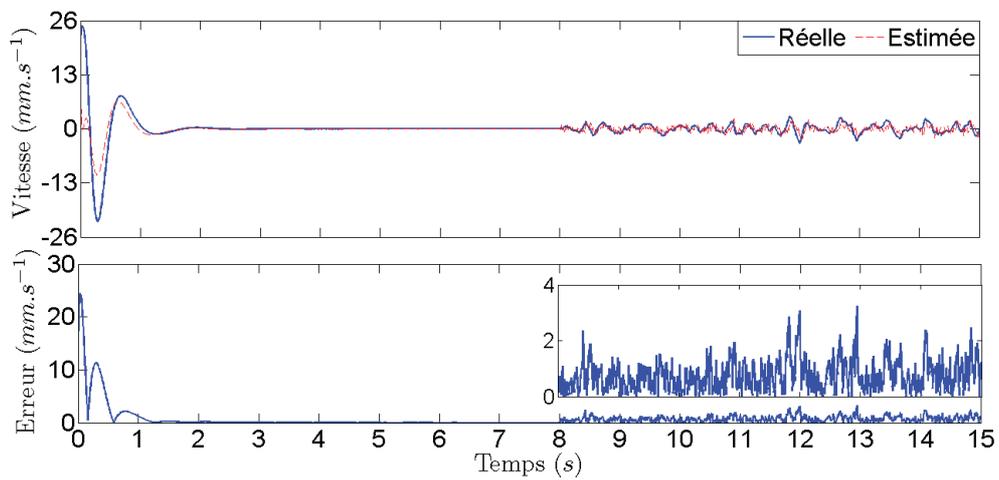
La figure 5.15(a) (resp. 5.15(b)) illustre les positions réelle et estimée du microrobot et l'erreur d'estimation associé (resp. la vitesse du microrobot). Les erreurs d'estimation en position et en vitesse convergent vers zéro après 1 seconde; en présence de bruit de mesure, ces erreurs sont respectivement inférieures à  $300\mu m$  et  $4mm.s^{-1}$  (voir Fig. 5.15(a) et 5.15(b)). Les vitesses réelle et estimée sont représentées sur la figure 5.16(a). On remarque que la vitesse du sang estimée par l'observateur par immersion converge vers la vitesse réelle rapidement et que, en présence de bruit, son erreur d'estimation est inférieure à  $4mm.s^{-1}$ .

La figure 5.16(b) illustre le carré de la pulsation cardiaque réelle et estimée par l'observateur grand gain. On constate qu'au départ l'observateur donne des estimations négatives. Le carré de la pulsation estimée converge vers sa valeur réelle après 2 secondes. L'erreur d'estimation de la pulsation cardiaque est très affectée par le bruit de mesure, cela est dû au grand gain  $l^6$  dans le terme d'innovation de l'observateur par immersion  $(\mathcal{S}_{\hat{x}})$ . Elle est inférieure à  $7rad^2.s^{-2}$  –ce qui est assez important– mais sans que cela affecte outre mesure la qualité du suivi. La commande, illustrée sur la figure 5.17, est peu sensible au bruit de mesure parce que les états estimés (position et vitesse du microrobot et vitesse du sang) par l'observateur par immersion ne sont pas trop affectés par ce bruit de mesure puisque le gain  $l$  est relativement faible.

Le temps de convergence de 1s est relativement élevé, ce qui dû au choix de la valeur relativement faible du gain  $l$ , cependant l'avantage d'un gain faible est que l'observateur est peu sensible au bruit de mesure, ce qui remarquable sur les figures 5.15(a), 5.15(b) et 5.16(a).



(a) Position réelle  $\bar{x}_1$  et estimée  $\hat{x}_1$  du microrobot



(b) Vitesse réelle  $\bar{x}_2$  et estimée  $\hat{x}_2$  du microrobot

FIGURE 5.15 – Position et vitesse du microrobot estimées par l'observateur grand gain

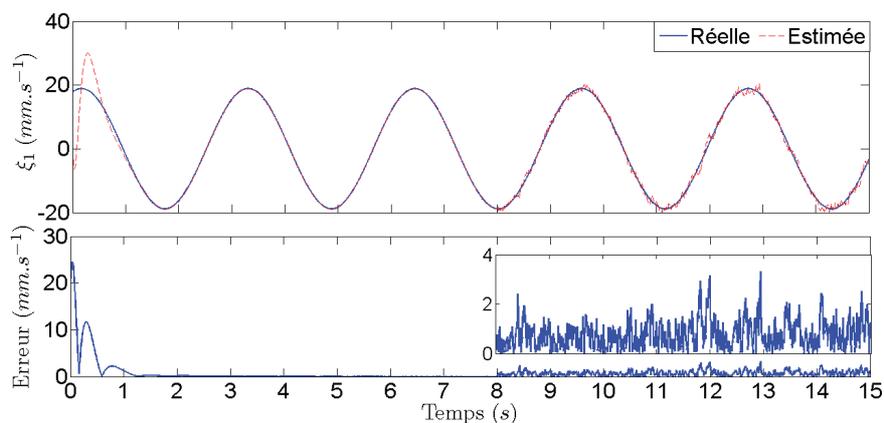
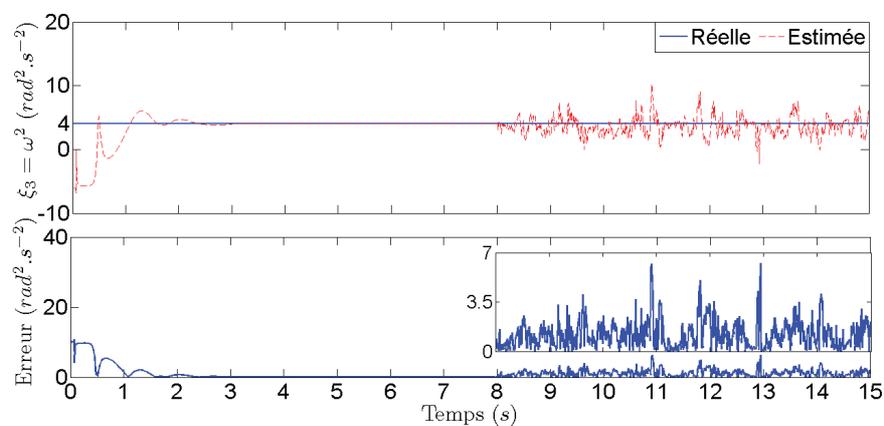
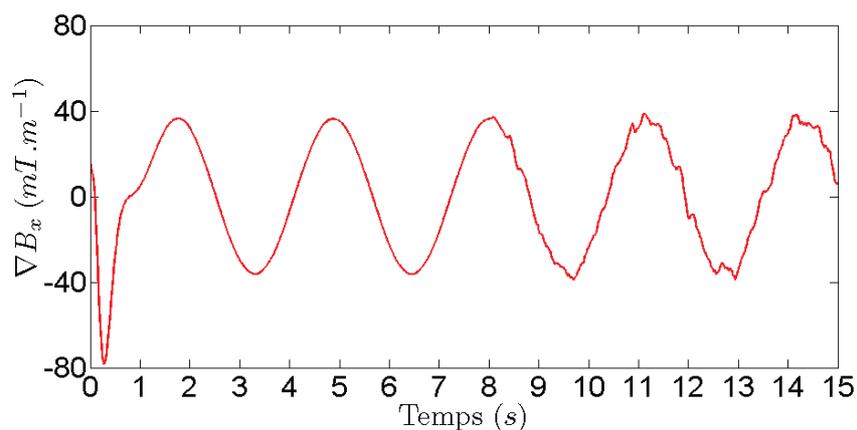
(a) Vitesse réelle  $\xi_1$  et estimée  $\hat{\xi}_1$  du sang(b) Carré de la pulsation cardiaque réelle  $\xi_3$  et estimée  $\hat{\xi}_3$ 

FIGURE 5.16 – Vitesse du sang et le carré de la pulsation cardiaque estimés par l'observateur grand gain

FIGURE 5.17 – Entrée de commande  $\nabla B_x$

## 5.4 Commande par retour de sortie d'un microrobot en 2D

Cette section est dédiée aux résultats de simulation pour un microrobot évoluant dans un espace  $2D$ , ce qui est plus réaliste et généralise les résultats obtenus en  $1D$ . L'estimation de la vitesse du sang est d'autant plus cruciale en  $2D$  qu'elle dépend à la fois de l'espace et du temps (voir figure 2.4 du chapitre 2). Nous illustrerons d'abord par des simulations la robustesse aux bruits de mesures, puis la robustesse aux incertitudes paramétriques, dans ce cas le paramètre incertain  $\vartheta$ , qui représente le poids apparent du microrobot, sera aussi estimé par l'observateur MVT, afin d'utiliser sa valeur estimée dans la commande par bouclage de sortie. Enfin, nous illustrerons la robustesse aux erreurs de modélisation en supposant que la vitesse du sang réelle est modélisée par le système  $(\mathcal{F}_\omega^{n^*})$  pour le système étendu  $(\mathcal{E}_\omega^{2,n^*})$ , et par  $(\mathcal{F}_\omega^n)$  pour le modèle de l'observateur MVT  $(\hat{\mathcal{E}}_\omega^{2,n})$ , avec  $n^* > n$ .

Pour chaque simulation en  $2D$ , une perturbation modélisée par l'ajout d'une accélération  $P_a = 7g$  le long de l'axe  $\vec{k}$  affecte le système pour  $t \in [7, 7, 001] s$ .

### 5.4.1 Robustesse aux bruits de mesure (RBM)

Nous supposons ici que la vitesse du sang  $\xi_1$  est correctement modélisée par une série de Fourier tronquée à l'ordre 2 :  $n = n^* = 2$ . Le système et l'observateur considérés ici sont représentés respectivement par  $(\mathcal{E}_\omega^{2,n})$  et  $(\hat{\mathcal{E}}_\omega^{2,n})$ . Cette première simulation illustre les résultats obtenus par l'observateur MVT en supposant que le paramètre  $\vartheta$  (poids apparent du microrobot) est connu.

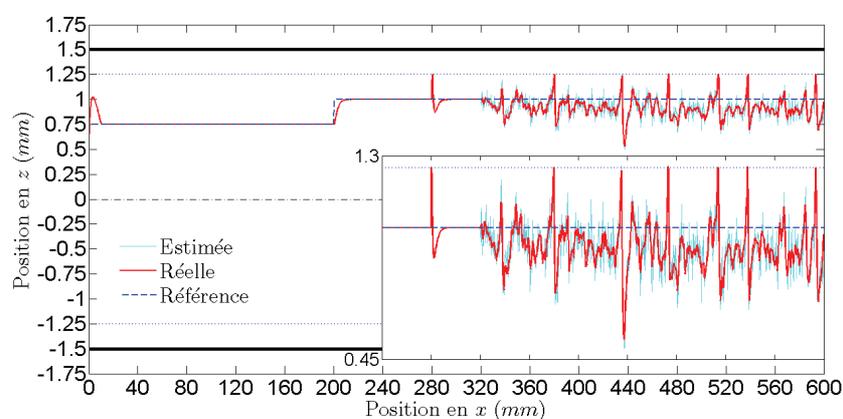
Les conditions initiales du système  $(\mathcal{E}_\omega^{2,n})$  et de l'observateur  $(\hat{\mathcal{E}}_\omega^{2,n})$  et le gain d'innovation  $K_o$  sont donnés dans le tableau 5.8.

$\bar{x}_0^T$	0	0,05	0	0	5,700	15,704	4,126	-17,766	1,666	$\times 10^{-2}$	
$\hat{x}_0^T$	0	0,01	0	0	0	0,1	0,1	0,1	1	$\times 10^{-2}$	
$K_o^T$	1,65	0	124,19	0	60,73	533,02	28,92	-233,43	15,76	$\times 10^{+2}$	
	0	3,82	0	520,73	0	0	0	0	0		

TABLE 5.8 – Conditions initiales et le gain d'innovation  $K_o$  en  $2D$  pour  $n = n^* = 2$

Les trajectoires réelle, estimée et de référence sont représentées sur la figure 5.18(a). Bien que la trajectoire de référence donnée par (5.1) ne soit pas continue, le système en boucle fermée est stable. Les trajectoires réelle et estimée convergent vers la trajectoire de référence en 2 secondes, ce qui correspond au temps de convergence de l'observateur. Malgré le bruit de mesure sur la mesure de position  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  et la perturbation  $P_a$ , les trajectoires réelle et estimée ne sont pas trop affectées et le suivi est bon. La perturbation  $P_a$  provoque la collision du microrobot avec la paroi supérieure du vaisseau sanguin à  $t = 7s$ , l'observateur estime correctement cette collision et la commande  $u_2$  atteint sa saturation (voir figure 5.18(b)), puis à l'arrêt de la perturbation, le

microrobot est propulsé vers le centre du vaisseau par la force de contact lors de la relaxation de la paroi puis revient sur la trajectoire de référence. Comme la trajectoire de référence est proche de la paroi afin de limiter les efforts de la commande  $\nabla B_z$  (voir figure 5.18(b)), la présence de bruit de mesure peut provoquer la collision du microrobot avec la paroi supérieure du vaisseau sanguin. Aux instants  $9,5s$ ,  $11,83s$ ,  $12,85s$  et  $13,45s$  le microrobot rentre en collision avec la paroi supérieure du vaisseau sanguin (collision réelle) ; l'observateur estime deux de ces collisions aux instants  $11,83s$  et  $12,85s$ , ainsi qu'une collision fictive à  $t = 10,88s$ . Dans le cas d'une collision, qu'elle soit fictive ou réelle, l'entrée de commande  $u_2$  atteint sa saturation  $\pm u_{sat}$  (voir figure 5.18(b)) et induit des pics dans les erreurs d'estimation et de suivi en position et en vitesse du microrobot le long de l'axe  $\vec{k}$  (voir figure 5.19), ce qui dégrade les performances mais montre aussi la robustesse de l'approche.



(a) Trajectoires

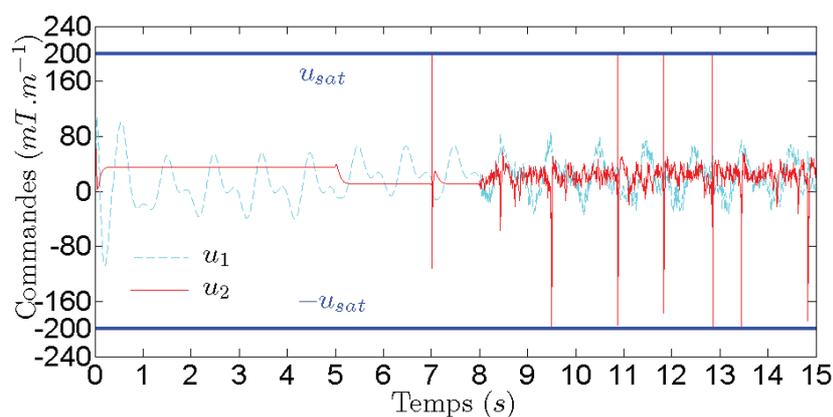
(b) Entrées de commande :  $\nabla B_x$  et  $\nabla B_z$ 

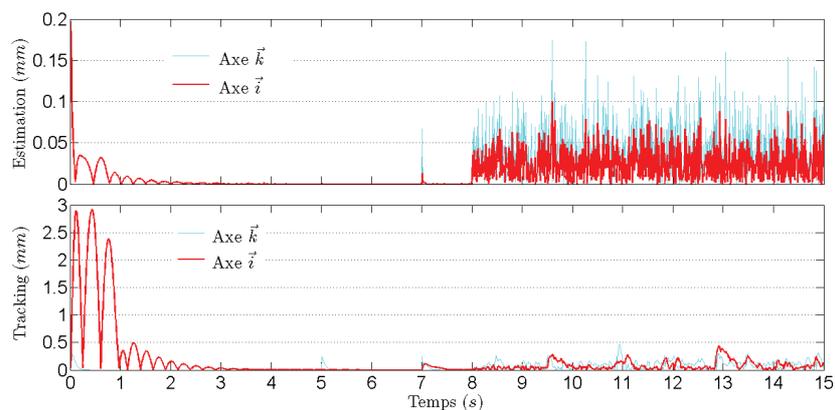
FIGURE 5.18 – Trajectoires et les entrées de commande  $u_1$  et  $u_2$ . Les parois du vaisseau sanguin sont représentées par des traits épais noirs, les limites au-delà desquelles le microrobot entre en collision avec les parois sont représentées par les traits bleus en pointillés. Les trajectoires réelle, estimée et de référence sont représentées par un trait continu rouge épais, un trait continu cyan mince, et un trait discontinu bleu épais, respectivement.

La figure 5.19(a) (resp. 5.19(b)) illustre les erreurs d'observation et de suivi en position du microrobot le long des axes  $\vec{i}$  et  $\vec{k}$  (resp. en vitesse du microrobot), qui convergent respectivement en 2s et 3s. En présence de bruit de mesure, les erreurs d'observation en position (resp. en vitesse) sont respectivement inférieures à  $100\mu m$  et  $175\mu m$  (resp.  $5mm.s^{-1}$  et  $20mm.s^{-1}$ ) le long des axes  $\vec{i}$  et  $\vec{k}$ ; leurs écarts types sont donnés dans le tableau 5.9. La vitesse du sang, réelle et estimée, et son erreur d'observation sont illustrées sur la figure 5.20. La vitesse du sang estimée  $\hat{x}_5 = \hat{\xi}_1$  par l'observateur MVT converge vers sa valeur réelle après 2s de transitoire. Lorsque le bruit est présent, l'erreur d'observation de la vitesse du sang est inférieure à  $4mm.s^{-1}$ , son écart type est donné dans le tableau 5.9 et son SNR<sup>1</sup> est environ 40. Les entrées de commande  $u_1$  et  $u_2$  sont représentées sur la figure 5.18(b). Pour  $t \geq 8$ , le bruit de mesure affecte les deux commandes mais surtout la commande  $u_2$  le long de l'axe  $\vec{k}$ . En effet, le long de l'axe  $\vec{k}$ , des petites déviations en position induites par le bruit causent d'importantes variations dans la (sur) estimation de la force électrostatique à laquelle le microrobot est particulièrement sensible, surtout à proximité de la paroi du vaisseau. La commande surcompense donc cette force, ce qui peut induire davantage d'entrées en saturation.

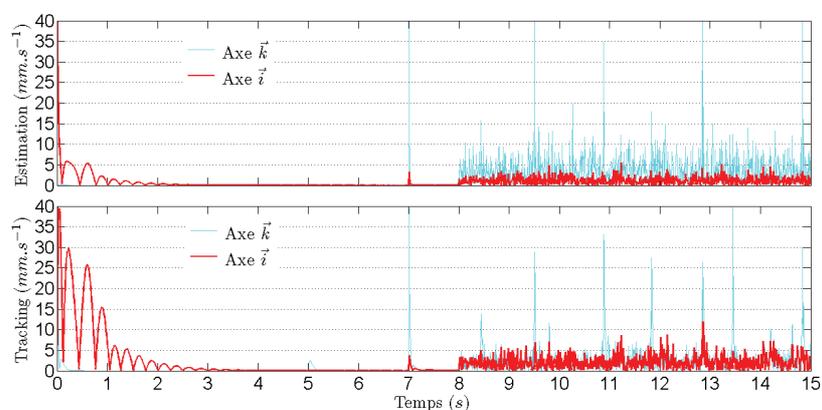
Simulations	RBM	RIP	REM
$\sigma$			
$y_1(\mu m)$	100	100	100
$y_2(\mu m)$	100	100	100
$\tilde{x}_1(\mu m)$	29,30	59,98	42,68
$\tilde{x}_2(\mu m)$	50,57	40,03	50,55
$\tilde{x}_3(mm.s^{-1})$	1,40	6,56	5,02
$\tilde{x}_4(mm.s^{-1})$	8,92	6,27	10,55
$\tilde{x}_5(mm.s^{-1})$	1,26	3,38	9,58
$\tilde{\vartheta}(m.s^{-2})$	-	0,11	-

TABLE 5.9 – Les écarts types des erreurs d'observation

1. Le SNR est l'inverse du coefficient de variation, *i.e*  $SNR = \frac{\mu}{\sigma}$  où  $\mu$  et  $\sigma$  sont respectivement la valeur moyenne et l'écart type du signal.



(a) Erreurs d'estimation et de suivi en position



(b) Erreurs d'estimation et de suivi en vitesse

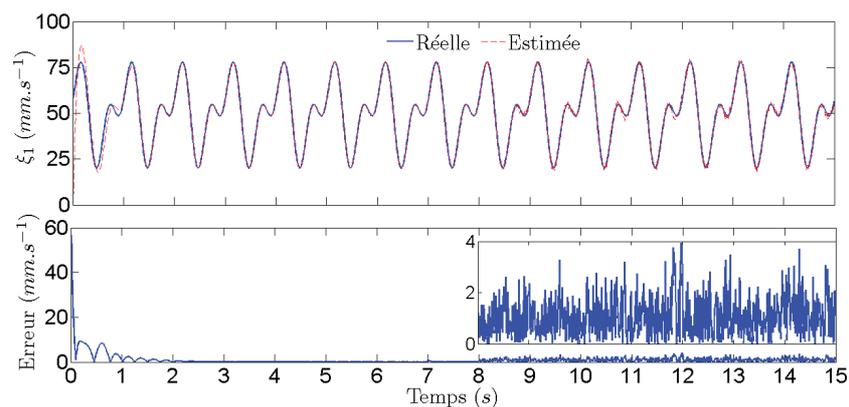
FIGURE 5.19 – Erreurs en position et en vitesse le long des axes  $\vec{i}$  et  $\vec{k}$ 

FIGURE 5.20 – Vitesse du sang, réelle et estimée, et son erreur d'estimation

### 5.4.2 Robustesse aux incertitudes paramétriques (RIP)

Nous gardons ici une vitesse du sang modélisée correctement par une série de Fourier tronquée à l'ordre 2 :  $n = n^* = 2$ . Cette simulation, illustrée par les figures 5.21(b), 5.22 et 5.23(b) , présente les résultats obtenus par l'observateur MVT dans le cas d'incertitudes paramétriques ( $\vartheta$ , le poids apparent normalisé, est supposé inconnu afin de modéliser les incertitudes sur  $\rho_f$  et  $\rho$ ). Les conditions initiales du système ( $\mathcal{E}_\omega^{2,n}$ ) et de l'observateur ( $\hat{\mathcal{E}}_\omega^{2,n}$ ) et les gains d'innovation  $K_o$  et  $K_\theta$  (voir proposition 4.4.6) sont donnés dans le tableau 5.10.

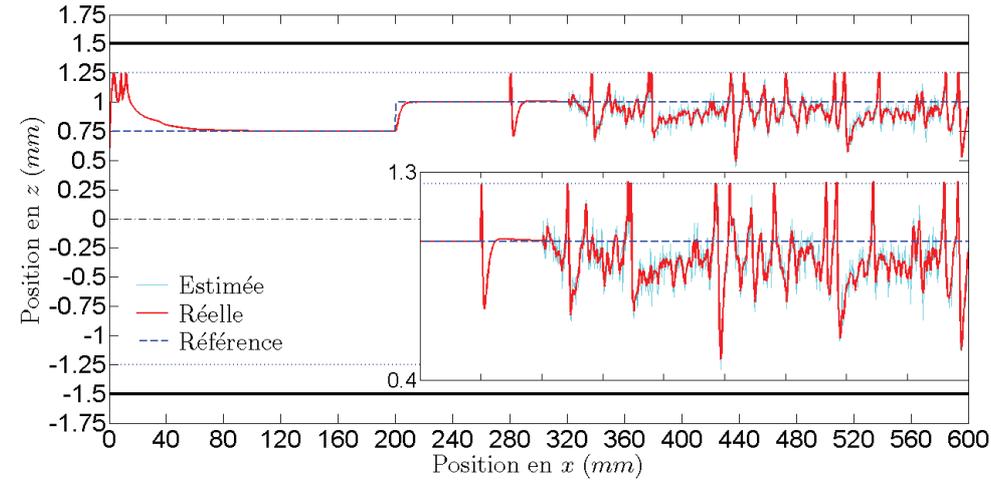
$\bar{x}_0^T, \vartheta_0$	0 0,05 0 0 5,700 15,704 4,126 -17,766 1,666	$\times 10^{-2}, -8,0769$
$\hat{x}_0^T, \hat{\theta}$	0 0,01 0 0 0 0,1 0,1 0,1 1	$\times 10^{-2}, -9$
$K_o^T$	5,971 0 862,11 0 371,69 3757,8 230,02 -1568,5 110,81 0 1,919 0 299,5 0 0 0 0 0	$\times 10^{+2}$
$K_\theta$	0 1,722	$\times 10^{+5}$

TABLE 5.10 – Conditions initiales et les gains d'innovation  $K_o$  et  $K_\theta$  en 2D pour  $n = n^* = 2$

La figure 5.21(a) illustre les trajectoires réelle, estimée et de référence du microrobot. On remarque que les trajectoires réelle et estimée convergent vers la trajectoire de référence après un transitoire de 3 secondes donc plus lentement que dans la simulation précédente. Cela est dû au temps de convergence du paramètre  $\hat{\theta}$  vers  $\vartheta$  (voir figure 5.23(a)). Le suivi est similaire à celui de la simulation précédente dans la section 5.4.1, mais le transitoire est moins bon. En effet la valeur de  $\hat{\theta}$  est inférieure à celle de  $\vartheta$  et la commande  $u_2$  essaye de compenser la valeur de  $\hat{\theta}$ , du coup le microrobot a tendance à se coller à la paroi. Pour  $t \in [7, 7,001]$ , la perturbation  $P_a$  pousse le microrobot vers la paroi mais il rentre pas en collision, par contre l'observateur estime que la collision a lieu (collision fictive), ce qui se traduit par la saturation de la commande  $u_2$  (voir figure 5.21(b)) et des pics sur les erreurs d'observation et de suivi le long de l'axe  $\vec{k}$  (voir figure 5.22). En présence de bruit sur la mesure, le microrobot entre plusieurs fois en collision avec la paroi supérieure du vaisseau sanguin, l'observateur estime alors plus de collisions réelles et fictives que dans la simulation de la section 5.4.1, ce qui est dû à la sensibilité du paramètre  $\hat{\theta}$  au bruit de mesure comme le montre la figure 5.23(a) .

Les erreurs d'observation et de suivi en position (resp. en vitesse) le long des axes  $\vec{i}$  et  $\vec{k}$  sont représentées sur la figure 5.22(a) (resp. figure 5.22(b)), leur temps de convergence est respectivement égal à 1s et 3s. Pour  $t \geq 8$ , les erreurs d'observation en position et en vitesse sont respectivement inférieures à  $200\mu m$ ,  $20mm.s^{-1}$  le long de l'axe  $\vec{i}$ , et  $150\mu m$ ,  $25mm.s^{-1}$  le long de l'axe  $\vec{k}$ ; leur écarts type sont donnés dans le tableau 5.9.

La figure 5.23(b) illustre la vitesse du sang réelle  $\bar{x}_5 = \xi_1$  et estimée  $\hat{x}_5 = \hat{\xi}_1$  et son erreur d'observation. On voit que la vitesse du sang estimée converge vers sa valeur réelle en 2s, puis



(a) Trajectoires

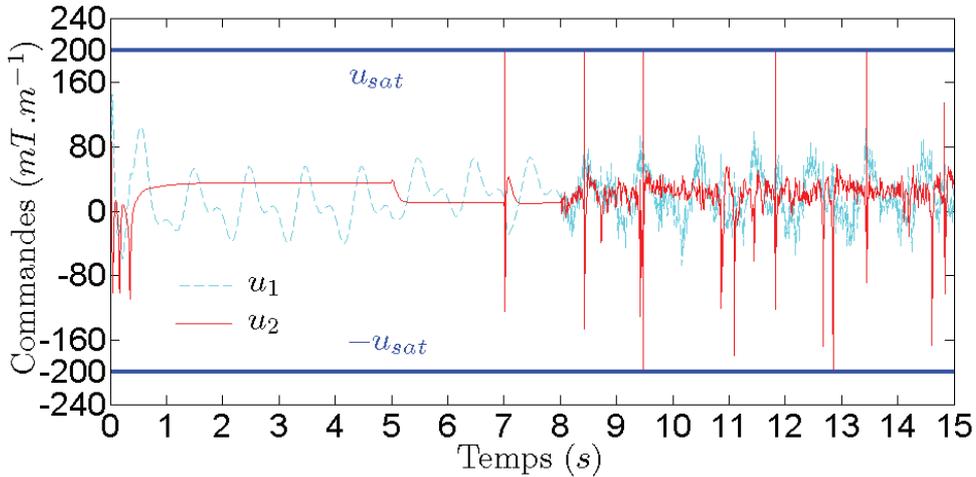
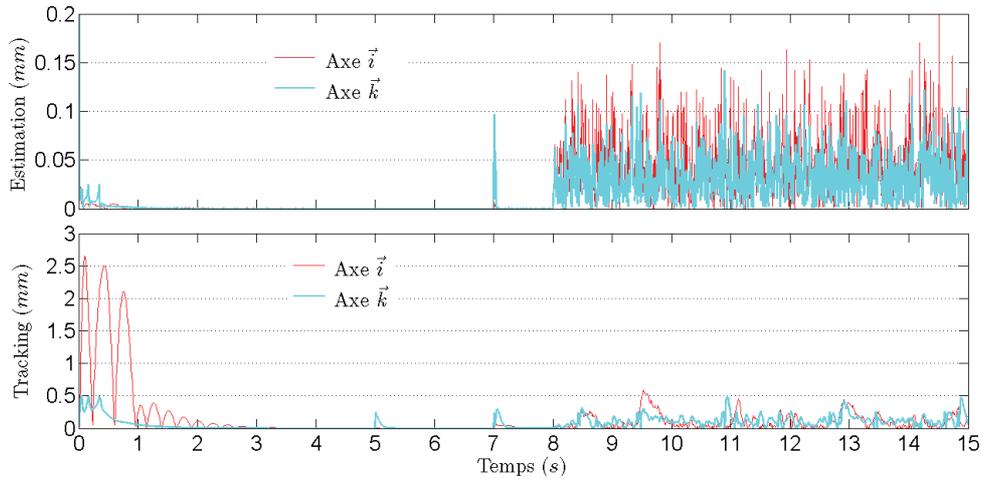
(b) Entrées de commande :  $\nabla B_x$  et  $\nabla B_z$ 

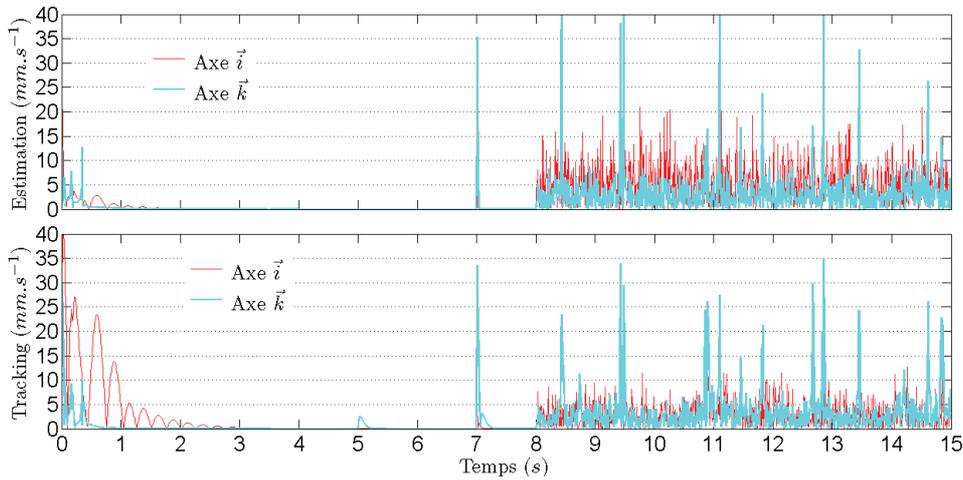
FIGURE 5.21 – Trajectoires et les entrées de commande  $u_1$  et  $u_2$ . Les parois du vaisseau sanguin sont représentées par des traits épais noirs, les limites au-delà desquelles le microrobot entre en collision avec les parois sont représentées par les traits bleus en pointillés. Les trajectoires réelle, estimée et de référence sont représentées par un trait continu rouge épais, un trait continu cyan mince, et un trait discontinu bleu épais, respectivement.

que son erreur d'observation est inférieure à  $12\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$  pour un SNR d'environ 15, donc dégradé par rapport à la simulation de la section 5.4.1, l'écart type de  $\tilde{x}_5$  est donné dans le tableau 5.9.

Le paramètre réel  $\vartheta$ , son estimé  $\hat{\theta}$  et l'erreur d'observation  $|\varepsilon_2| = |\vartheta - \hat{\theta}|$  sont représentés sur la figure 5.23(a). Le temps de convergence du paramètre  $\hat{\theta}$  vers  $\vartheta$  est de  $3\text{s}$ . L'erreur d'estimation du paramètre, inférieure à  $0,4\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ , est très affectée par le bruit de mesure à cause du gain important  $K_\theta(2)$  le long de l'axe  $\vec{k}$  (voir tableau 5.10). L'écart type correspondant est donné dans le tableau 5.9, et son SNR est égal à 71,7. La figure 5.21(b) illustre les entrées de commande  $u_1$



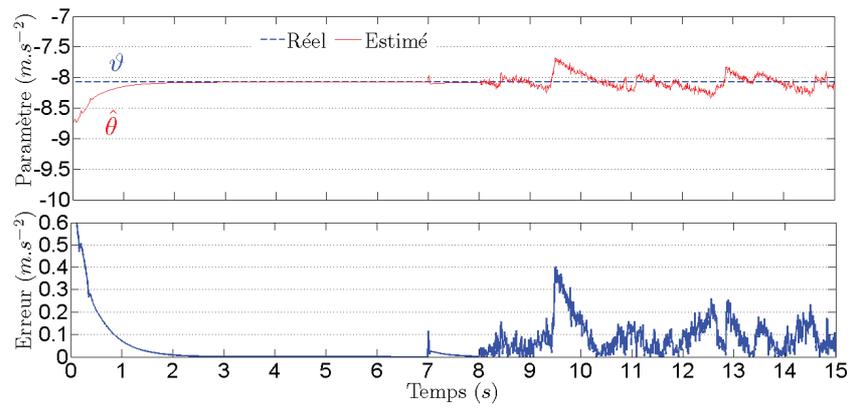
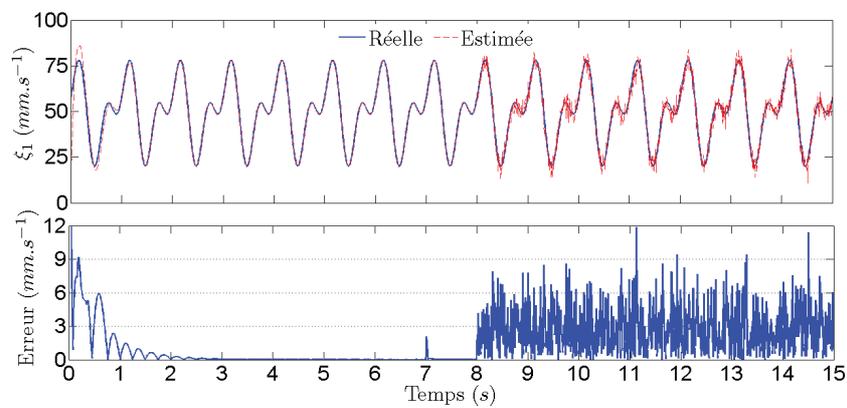
(a) Erreurs d'estimation et de suivi en position



(b) Erreurs d'estimation et de suivi en vitesse

 FIGURE 5.22 – Erreurs en position et en vitesse le long des axes  $\vec{i}$  et  $\vec{k}$ 

et  $u_2$ , toutes deux très affectées par le bruit de mesure par rapport à la simulation précédente. Pour  $u_1$ , la raison est que son gain relatif est plus grand que celui de la simulation précédente  $K_o(3, 1)$  (voir tableau 5.10) est supérieur à  $K_o(3, 1)$  (voir tableau 5.8). La raison de sensibilité de  $u_2$  au bruit est ici double : le paramètre estimé  $\hat{\theta}$  est très sensible au bruit de mesure le long de l'axe  $\vec{k}$ , de plus la trajectoire de référence étant très proche de la paroi pour  $t \geq 5$ , de faibles variations de l'erreur  $\tilde{x}_2$  induisent des sous-estimations de la force électrostatique, et par conséquent la commande  $u_2$  est sous-estimée, d'où l'attraction du microrobot par la paroi supérieure du vaisseau. Cette simulation montre que, en dépit du bruit de mesure et des incertitudes paramétriques, l'observateur MVT donne de bonnes estimations des états du système étendu ( $\mathcal{E}_\omega^{2,n}$ ) et le contrôleur assure la stabilité du système réduit ( $\mathcal{R}^2$ ) le long de la trajectoire de référence donnée par 5.1.

(a) Paramètre incertain  $\vartheta$  et son erreur d'estimation

(b) Vitesse du sang réelle et estimée et son erreur d'estimation

FIGURE 5.23 – Paramètre estimé  $\hat{\theta}$  et la vitesse du sang

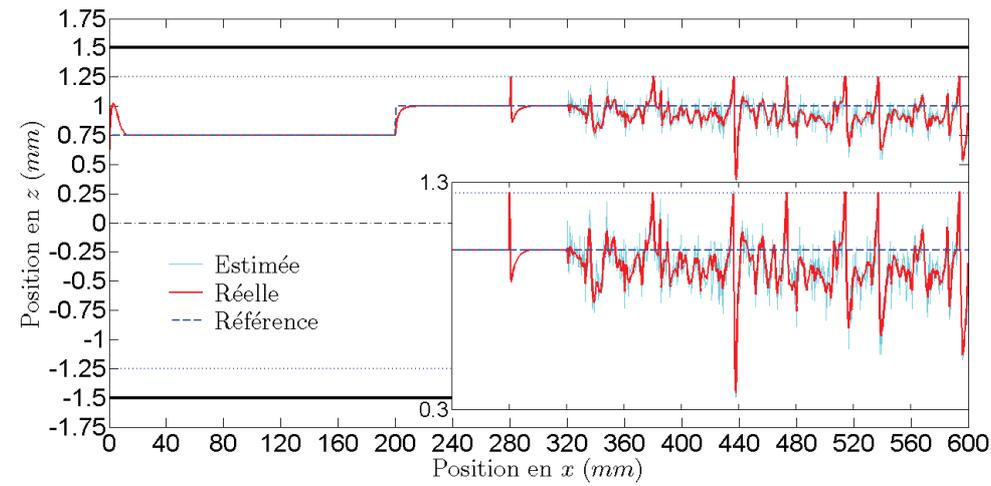
### 5.4.3 Robustesse aux erreurs de modélisation (REM)

Nous supposons que la vitesse du sang pour le système  $(\mathcal{E}_\omega^{2,n^*})$  est modélisée par le système  $(\mathcal{F}_\omega^{n^*})$  l'ordre  $n^*$ , en revanche la vitesse du sang utilisé dans le modèle de l'observateur  $(\hat{\mathcal{E}}_\omega^{2,n})$  est modélisée par le système  $(\mathcal{F}_\omega^n)$ , avec  $n^* > n$ . Dans ce cas, on prend  $n = 2$  et  $n^* = 4$ , le flux pulsatile est maintenant incorrectement modélisé car les deux plus grandes harmoniques du signal ne sont pas considérées dans le modèle  $(\mathcal{E}_\omega^{2,nn^*})$  donné par (4.160) :  $d_{24}(t) \neq 0$ . Les dimensions des états du système réel  $\bar{x}$  et du système utilisé pour la synthèse du bouclage de sortie  $\hat{x}$  sont respectivement égales à  $2n^* + 5 = 13$  et  $2n + 5 = 9$ . Cette simulation illustre la robustesse du bouclage de sortie vis-à-vis du bruit de mesure et d'erreurs de modélisation. La condition initiale  $\hat{x}_0$  et le gain d'innovation  $K_o$  de l'observateur sont donnés dans le tableau 5.8. L'état initial  $\bar{x}_0$  du système réel est donné par :

$$\bar{x}_0^T = [0 \ 0,05 \ 0 \ 0 \ 4,902 \ -4,595 \ 6,993 \ 85,744 \ 0,0848 \ -142,030 \ 0,4423 \ 55,7714 \ 1] \times 10^{-2}$$

Les trajectoires réelle et estimée convergent vers la trajectoire de référence en  $2s$  (voir figure 5.24(a)), on remarque que le suivi est assez similaire à celui de la simulation (RBM). Cependant ici, la position et la vitesse du microrobot le long de l'axe  $\vec{i}$  ne sont que pratiquement stabilisées (voir proposition 4.6.3) à cause des erreurs de modélisation (voir figure 5.25(a) et 5.25(b)). Les erreurs d'observation en position (resp. en vitesse) sont inférieures à  $100\mu m$  et  $150\mu m$  (resp.  $11.5mm.s^{-1}$  et  $15mm.s^{-1}$ ) le long des axes  $\vec{i}$  et  $\vec{k}$  respectivement. Les écarts types des erreurs d'observation en position et en vitesse du microrobot sont donnés dans le tableau 5.9. La vitesse du sang est illustrée sur la figure 5.26, son erreur d'observation converge en  $1s$  autour de l'origine, elle est inférieure à  $18mm.s^{-1}$  avec un écart type donné dans le tableau 5.9, et son SNR est d'environ 5.

La commande  $u_2$  est affectée par le bruit de mesure (voir figure 5.24(b)), en revanche la commande  $u_1$  est peu affectée car la position et la vitesse du microrobot le long de l'axe  $\vec{i}$  sont plus affectées par les erreurs de modélisation, qui interviennent sur la vitesse du sang donc sur cet axe, que par le bruit de mesure.



(a) Trajectoires

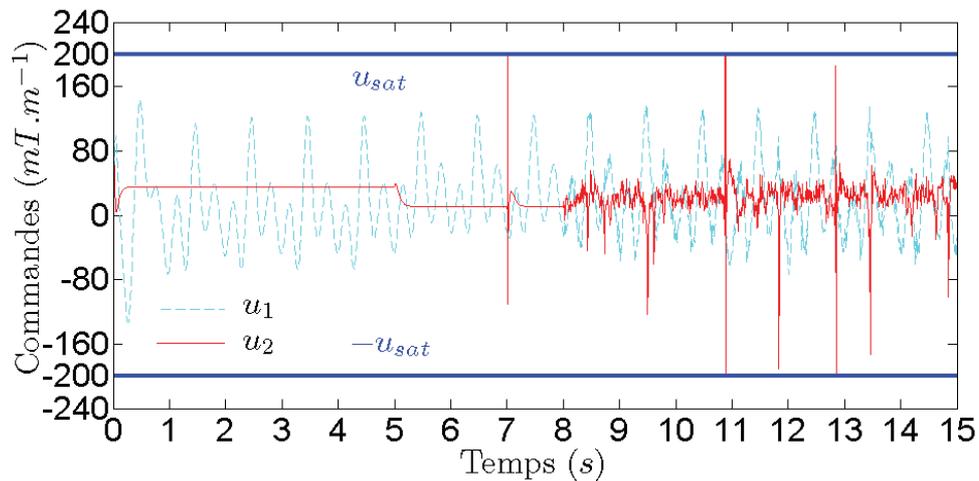
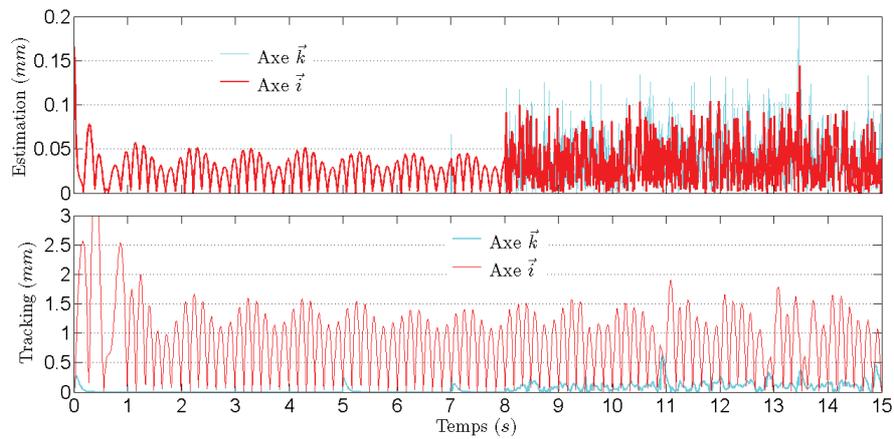
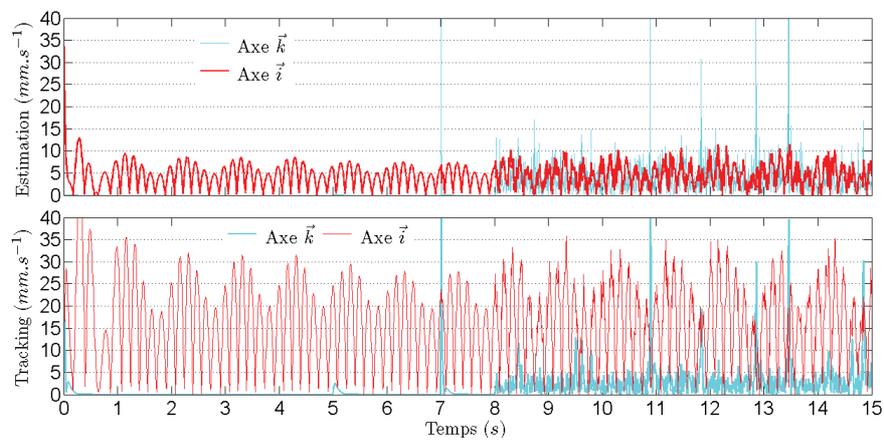
(b) Entrées de commande :  $\nabla B_x$  et  $\nabla B_z$ 

FIGURE 5.24 – Trajectoires et les entrées de commande  $u_1$  et  $u_2$ . Les parois du vaisseau sanguin sont représentées par des traits épais noirs, les limites au-delà desquelles le microrobot entre en collision avec les parois sont représentées par les traits bleus en pointillés. Les trajectoires réelle, estimée et de référence sont représentées par un trait continu rouge épais, un trait continu cyan mince, et un trait discontinu bleu épais, respectivement.



(a) Erreurs d'estimation et de suivi en position



(b) Erreurs d'estimation et de suivi en vitesse

FIGURE 5.25 – Erreurs en position et en vitesse le long des axes  $\vec{i}$  et  $\vec{k}$

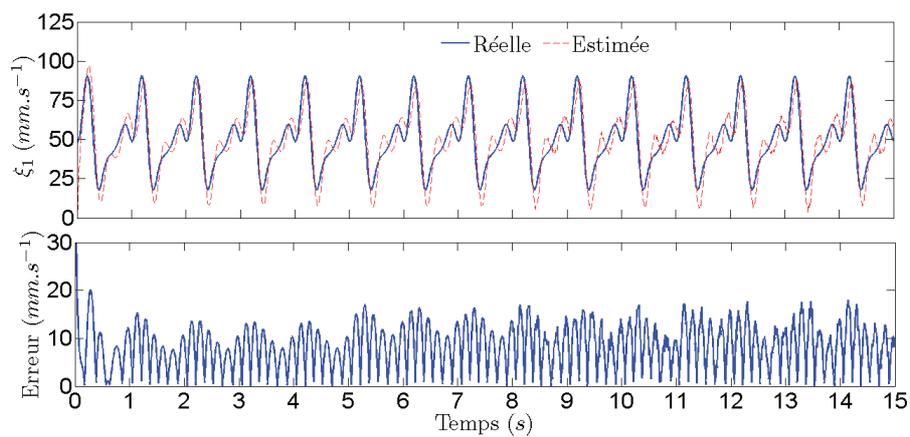


FIGURE 5.26 – Vitesse du sang réelle et estimée et son erreur d'estimation

## 5.5 Commande de deux microrobots

Cette section illustre le contrôle de deux microrobots avec l'utilisation d'une seule entrée de commande par dimension, via un bouclage d'état (donc en supposant que tout l'état est accessible). Ces travaux ne sont donc que préliminaires à une étude complète de ces systèmes. Nous traiterons d'abord le cas  $1D$  puis le cas  $2D$ , et ce pour deux trajectoires relatives des microrobots : dans le cas d'un écart fixe puis dans le cas d'un écart instationnaire. Le système linéarisé de deux microrobots possède des zéros instables, ce qui rend leur commande très délicate. Nous illustrons les résultats de la section 3.5, notamment la proposition 3.5.4 pour le cas  $1D$ , et la proposition 3.5.5 pour le cas  $2D$ .

	Paramètres				
	Simulations	$r_1, r_2(\mu m)$	$\rho_1, \rho_2(kg.m^{-3})$	$\tau_{m_1}, \tau_{m_2}$	$\beta_1, \beta_2$
$1D$	TF	360 405	5700 7320	0,7 0,97	0,5034 0,4528
	TVS	200 220	5880 5880	0,73 0,73	0,7252 0,6941
	TVG	200 405	5700 7320	0,7 0,97	0,5034 0,4528
$2D$	TF, TV	450 300	6300 6300	0,8 0,8	0,4072 0,5789

TABLE 5.11 – Les paramètres  $r_i, \tau_{m_i}, \beta_i$  et  $\rho_i$  pour  $i = 1, 2$

### 5.5.1 Modèle $1D$

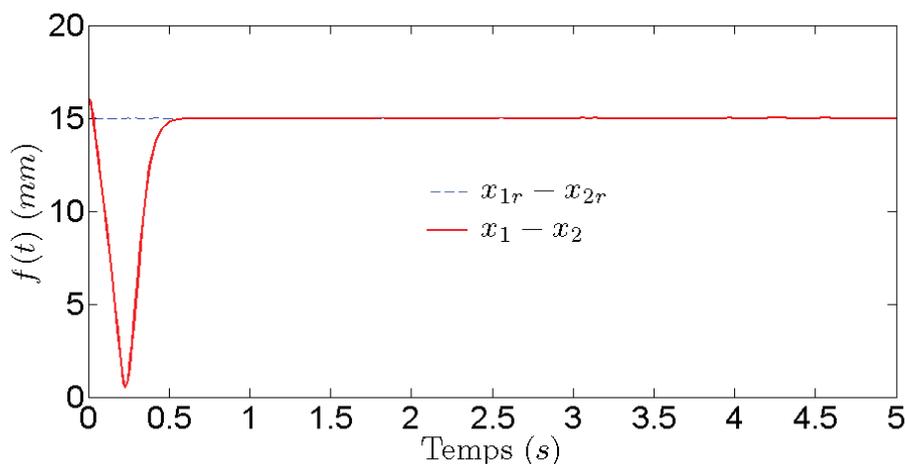
#### 5.5.1.1 Trajectoire fixe (TF)

On considère deux microrobots (1) et (2) en interaction et on suppose que la distance  $f$  entre ces deux microrobots est constante, leurs paramètres sont donnés dans le tableau 5.11. On peut vérifier facilement qu'aucune condition du lemme 3.5.1 n'est satisfaite, donc le système linéaire ( $\mathcal{R}_{L_x}^{1_2}$ ) est commandable le long de la trajectoire  $x_{ref}(t)$  vérifiant l'équation (3.83). La simulation illustrée sur les figures 5.27 et 5.28, montre les résultats obtenus par une commande par retour d'état lorsque la distance entre les positions de référence des deux microrobots est choisie constante ( $x_{1r} - x_{2r} = f$ ), d'après le tableau 5.11 on vérifie facilement que  $\chi_3 \neq 0$  et  $\chi_4 \neq 0$  donc la position de référence de chaque microrobot ( $i$ ) est donnée par l'équation (3.98). La commande est donnée par  $u = -K_x(x - x_r) + u_r$ , avec  $u_r$  donnée par (3.102) et le gain  $K_x$  calculé pour que les valeurs propres de  $(A_x - B_x K_x)$  soient placées en  $-20, -30, -40, -60$ , avec  $A_x$  et  $B_x$  données par (3.85). Dans ce cas aussi, la commande  $u$  est saturée à  $u_{sat} = 200mT.m^{-1}$ . Les conditions initiales  $x(0)$  et  $x_r(0)$  et la distance  $f$  sont données dans le tableau 5.12.

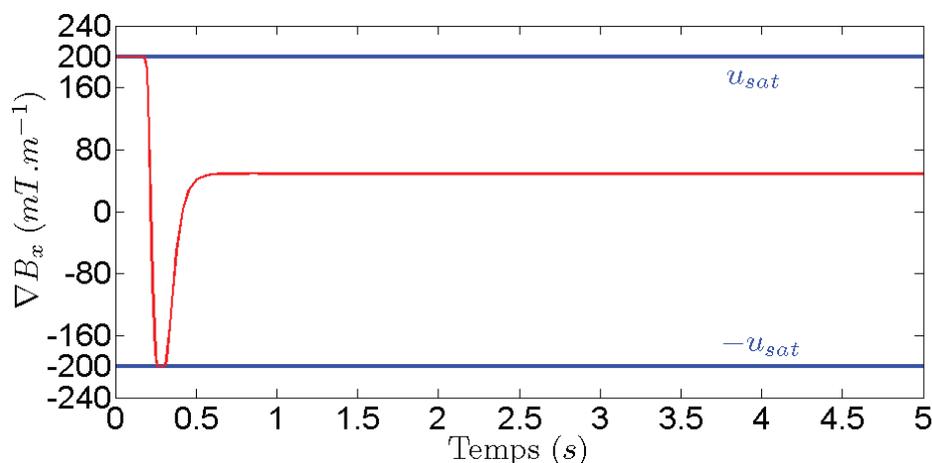
La distance de référence entre les microrobots  $f = x_{1r} - x_{2r}$  et la distance réelle  $x_1 - x_2$  sont illustrées sur la figure 5.27(a). La distance réelle s'éloigne de la référence avant de converger après 0,5 seconde. Ce comportement est similaire à celui des systèmes à non minimum de phase (*i.e* possédant des zéros instables) : la commande  $u$  entre en saturation puis sort de la zone de

$x^T(0)$	8	-8	10	0	$\times 10^{-3}$
$x_r^T(0)$	0	-15	0	0	$\times 10^{-3}$
$f(t)$	0,015				

TABLE 5.12 – Conditions initiales et distance  $f$  entre les deux microrobots



(a) Distance  $f(t)$  entre les deux microrobots



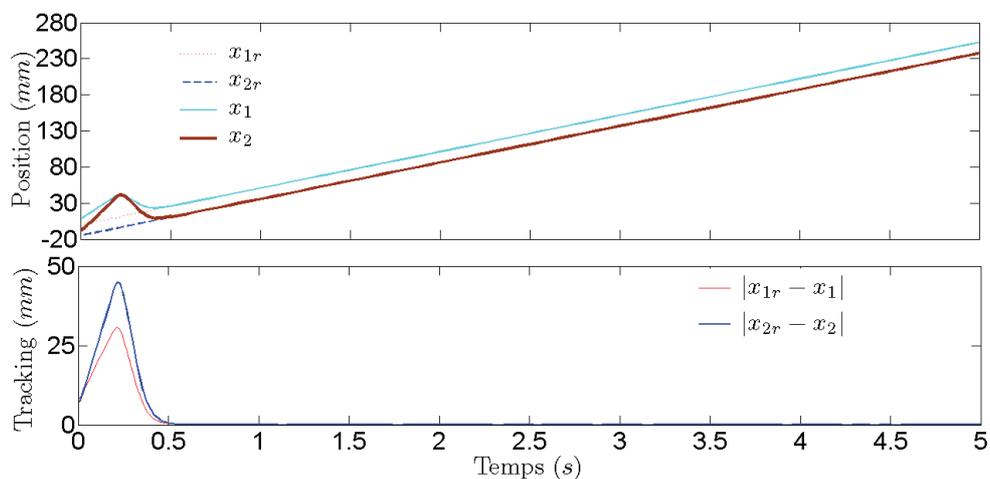
(b) Entrée de commande  $\nabla B_x$

FIGURE 5.27 – Distance entre les deux microrobots et l'entrée de commande

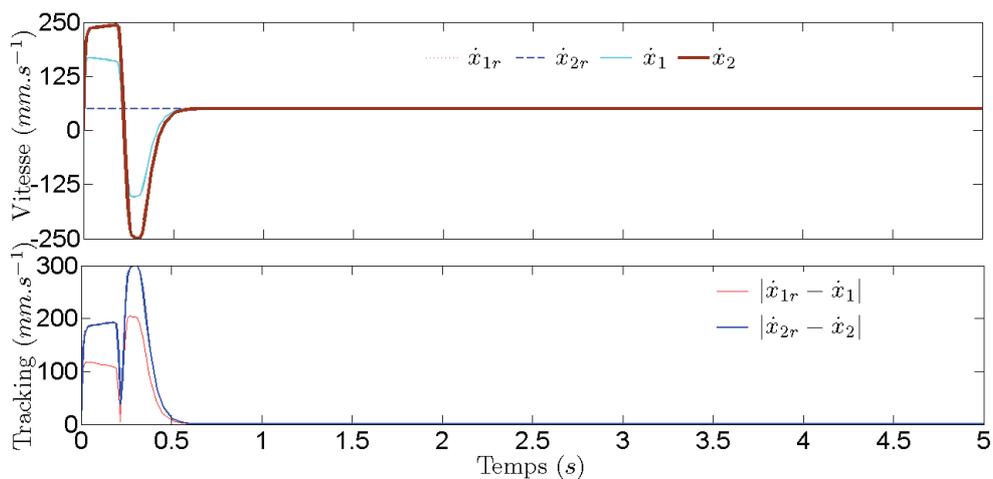
saturation (voir figure 5.27(b)) afin de stabiliser  $(\mathcal{R}_{L_x}^{12})$ .

Les positions réelles des deux microrobots  $x_1$  et  $x_2$  (resp. les vitesses  $\dot{x}_1$  et  $\dot{x}_2$ ) convergent après 0,5 vers leurs références  $x_{1r}$  et  $x_{2r}$  (resp. vers  $\dot{x}_{1r}$  et  $\dot{x}_{2r}$ ) (voir figure 5.28). En début de simulation, le suivi en position et en vitesse est dégradé pour deux raisons : le système étant à non minimum de phase, le contrôleur réagit inversement à la consigne, ceci induit alors une

entrée en saturation qui dégrade plus encore le suivi. La simulation montre que l'objectif de commande est atteint, même si l'on peut améliorer les résultats en prenant en compte les zéros instables du système.



(a) Positions et leurs erreurs de suivi



(b) Vitesses et leurs erreurs de suivi

FIGURE 5.28 – Positions et vitesses des deux microrobots

5.5.1.2 Trajectoire variable

Nous considérons deux microrobots (1) et (2) et nous illustrons les différents cas étudiés dans la section 3.5.1.2.2 donc avec des choix de microrobots différents (voir tableau 5.11). Dans chaque simulation, les trajectoires de référence des microrobots (1) et (2) sont données soit par (3.98), (3.99) ou (3.100) à partir d’une fonction donnée  $f(t)$  selon le choix des microrobots afin d’illustrer les différents choix de trajectoires admissibles. La loi de commande  $u(t) = \kappa(z(t), z_r(t))$  est donnée par la proposition 3.5.4, avec  $[k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4] = [15 \ 20 \ 25 \ 30]$ . Afin de respecter les limitations des actionneurs, l’entrée de commande est saturée à  $\pm 200mT.m^{-1}$ .

**5.5.1.2.1 Cas simple (TVS)** Pour cette simulation, nous choisissons  $\chi_3 = 0$ , *i.e* les deux microrobots ont la même sensibilité magnétique  $\alpha_1 = \alpha_2$ . La distance de référence  $f(t)$  entre les microrobots (1) et (2) est choisie comme suit :

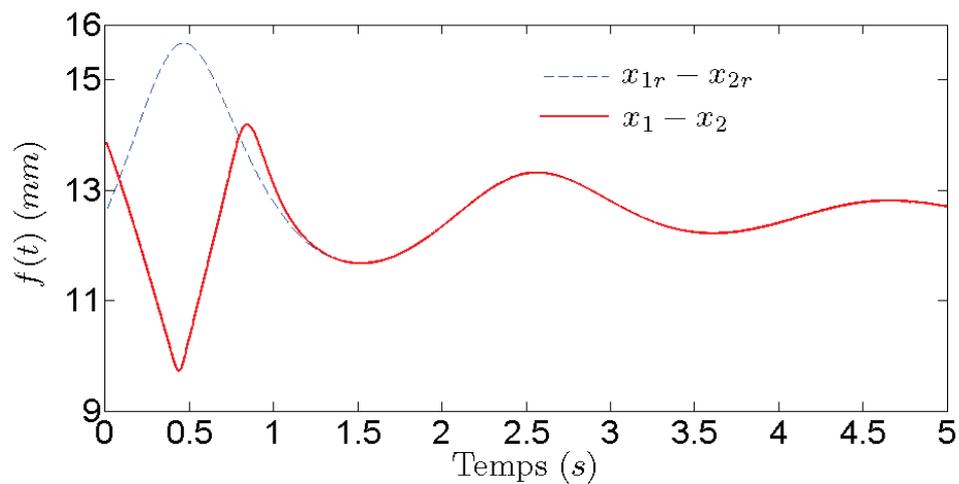
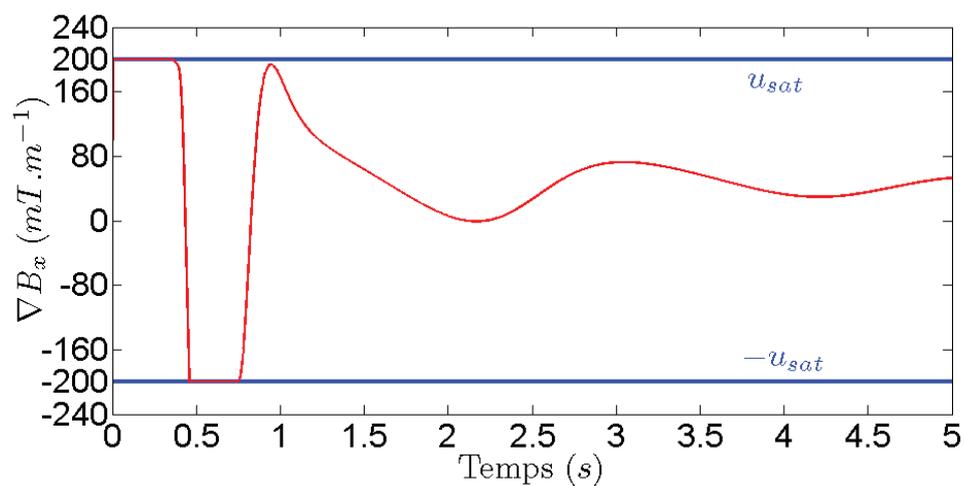
$$f(t) = \left( \frac{1}{a + b \sin(dt)e^{-ct}} \right)^{1/4}$$

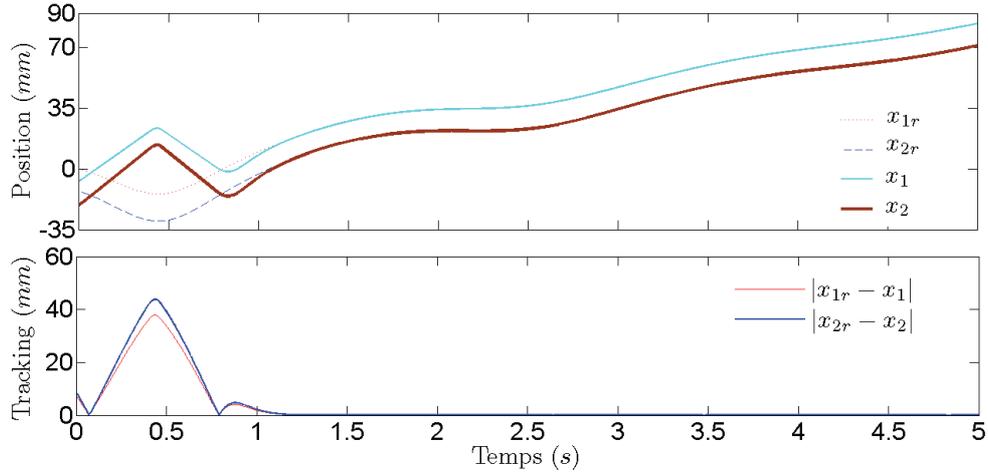
Les valeurs des paramètres  $a, b, c$  et  $d$  et les conditions initiales  $x(0)$  et  $x_r(0)$  sont données dans le tableau 5.13.

$x^T(0)$	$-7 \ 20,83 \ -17,10 \ -14,53$	$\times 10^{-3}$
$x_r^T(0)$	$0 \ -12,57 \ -27,10 \ -34,17$	$\times 10^{-3}$
$a, b, c, d$	$4 \times 10^7, -3 \times 10^7, 0, 5, 3$	

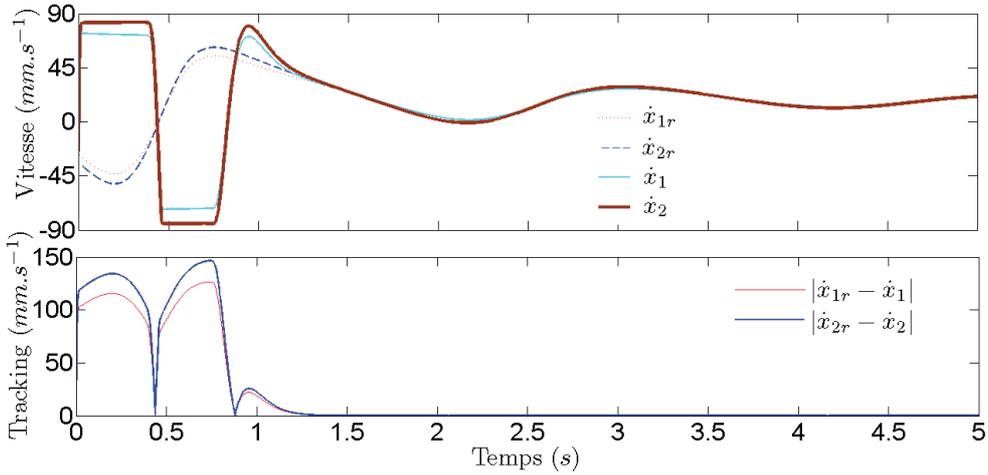
TABLE 5.13 – Conditions initiales et les paramètres de la fonction  $f(t)$

Les distances de référence et réelle entre les microrobots (1) et (2) sont illustrées sur la figure 5.29(a). On voit que la distance réelle converge vers sa valeur de référence  $f(t)$  en moins de 1,5 secondes, ce qui correspond au temps de convergence des positions des deux microrobots vers leurs positions de référence  $x_{ir}$  (voir figure 5.30(a)). La figure 5.30(a) (resp. 5.30(b)) illustre les positions réelles et de références de deux microrobots et leurs erreurs de suivi (resp. les vitesses). En début de simulation, le suivi en position et en vitesse est mauvais à cause des zéros instables et de la saturation de la commande  $u$  (voir figure 5.29(b)). Une fois la commande hors saturation, les erreurs de suivi convergent vers zéro dans un temps inférieur à 1,5 secondes. L’entrée de commande  $u = \nabla B_x$  est représentée sur la figure 5.29(b) et stabilise les deux microrobots (1) et (2) respectivement le long des trajectoires  $(x_{1r}, \dot{x}_{1r})$  et  $(x_{2r}, \dot{x}_{2r})$ .

(a) Distance  $f(t)$  entre les deux microrobots(b) Entrée de commande  $\nabla B_x$ FIGURE 5.29 – Distance entre les deux microrobots et l'entrée de commande  $u$



(a) Positions et leurs erreurs de suivi



(b) Vitesses et leurs erreurs de suivi

FIGURE 5.30 – Positions et vitesses des deux microrobots

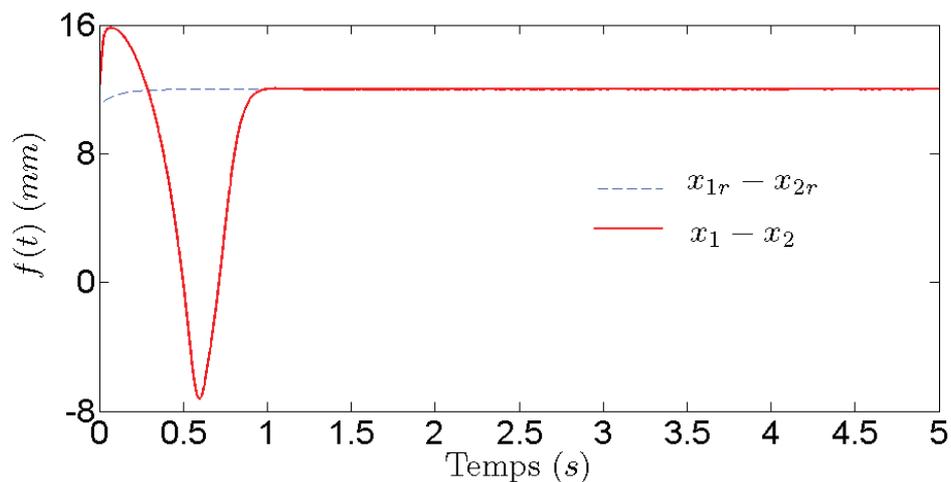
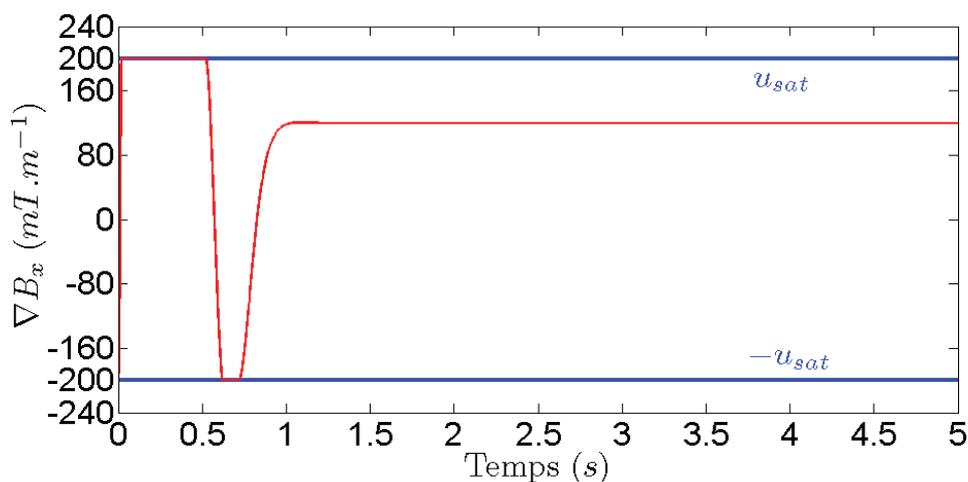
**5.5.1.2.2 Cas général (TVG)** La simulation représentée sur les figures 5.31 et 5.32 illustre le cas où  $\chi_3 \neq 0$ , nous choisissons la fonction  $f(t)$  comme suit :

$$f(t) = ae^{\frac{\delta \chi_4}{\chi_3} t} + b$$

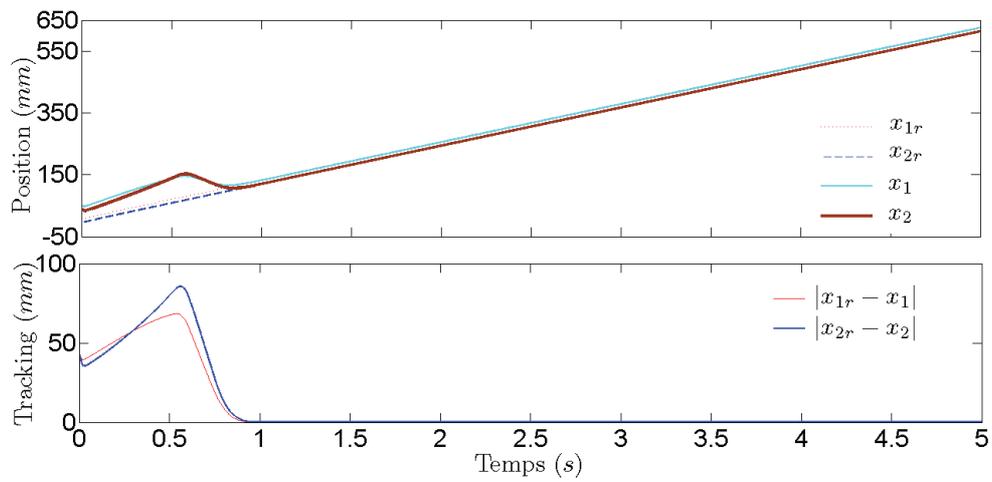
avec  $a, b \in \mathbb{R}^*$ , et  $\delta$  choisi pour que  $\frac{1}{\delta} \in \mathbb{N}^*$ . Les valeurs de  $a$ ,  $b$  et  $\delta$  et les conditions initiales  $x(0)$  et  $x_r(0)$  sont données dans le tableau 5.14. La position de référence  $x_{ir}$  de chaque microrobot est donnée par l'équation (A.9) dans l'annexe A.

La figure 5.31(a) illustre la distance de référence  $f(t) = x_{1r}(t) - x_{2r}(t)$  et la distance réelle  $x_1(t) - x_2(t)$  entre les microrobots (1) et (2). Comme dans le cas de la simulation précédente, la qualité de suivi en position et en vitesse est mauvaise en début de simulation (voir figure 5.32) et on a saturation de la commande  $u = \nabla B_x$  représentée sur la figure 5.31(b). La position  $x_i$  et

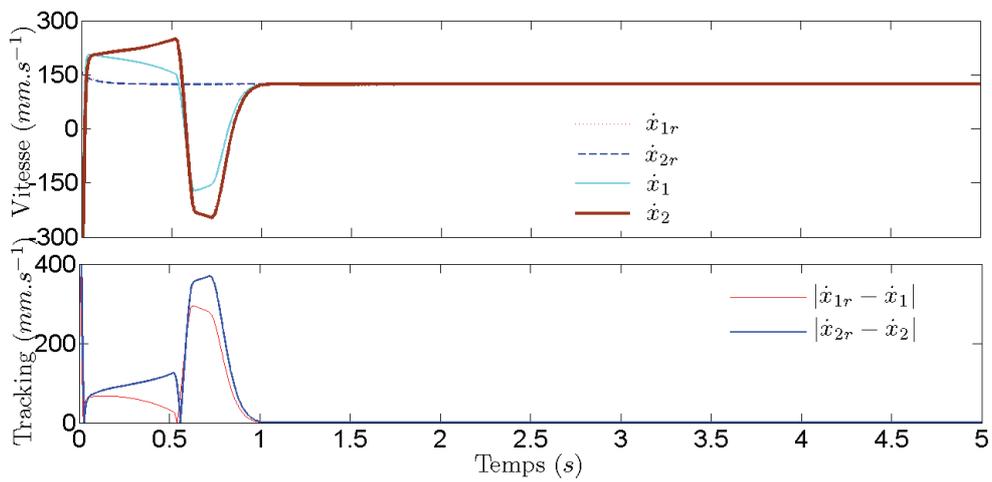
$x^T(0)$	50	37,9	-350	-359,67	$\times 10^{-3}$
$x_r^T(0)$	5,31	-5,68	-180,21	170,53	$\times 10^{-3}$
$a, b, \delta$	-0,001, 0,012, 0,01				

TABLE 5.14 – Conditions initiales et les paramètres de la fonction  $f(t)$ (a) Distance  $f(t)$  entre les deux microrobots(b) Entrée de commande  $\nabla B_x$ FIGURE 5.31 – Distance entre les deux microrobots et l'entrée de commande  $u$ 

la vitesse  $\dot{x}_i$  de chaque microrobot ( $i$ ) convergent respectivement vers leurs valeurs de référence  $x_{ir}$  et  $\dot{x}_{ir}$  après un transitoire de 1 seconde. Cette simulation montre que le signal de commande  $u = \nabla B_x$  stabilise les positions et les vitesses des deux microrobots (1) et (2) le long de leurs trajectoires de référence, l'objectif de commande est atteint même si le comportement initial est peu satisfaisant.



(a) Positions et leurs erreurs de suivi



(b) Vitesses et leurs erreurs de suivi

FIGURE 5.32 – Positions et vitesses des deux microrobots

### 5.5.2 Modèle 2D

Nous considérons deux microrobots (1) et (2) et illustrons maintenant le cas d'une navigation dans un environnement 2D afin de généraliser l'approche. Dans les deux simulations suivantes, on prend les mêmes paramètres pour les deux microrobots (voir tableau 5.11). Dans chaque simulation, les trajectoires de référence des microrobots (1) et (2) sont données soit par (3.134), (3.135) ou (3.136) pour des constantes données  $f_x$  et  $f_z$ , et soit par (3.138), (3.139) et (3.140) pour des fonctions données  $f_x(t)$  et  $f_z(t)$ .

#### 5.5.2.1 Trajectoire fixe (TF)

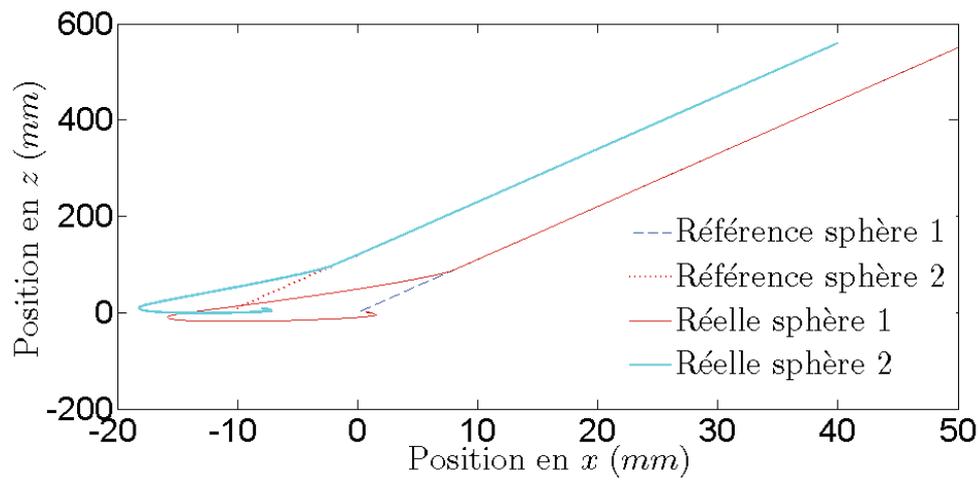
Dans ce cas on considère que la distance de référence entre les deux microrobots est constante. Les conditions initiales  $X(0)$  et  $X_r(0)$  et les constantes  $f_x$  et  $f_z$  sont données dans le tableau (5.15). La loi de commande est donnée par  $U = U_r - K(X - X_r)$  avec  $U_r$  donnée par (3.142) ( $j = 1, k = 2$ ) et le gain  $K$  calculé pour placer les valeurs propres de  $(A - BK)$  en  $-10, -16, -12, -18, -20, -32, -24, -36$ , et  $A$  et  $B$  données par (3.119).

$X^T(0)$	1 1 -8 8 -100 0 0 0	$\times 10^{-3}$
$X_r^T(0)$	0 0 -10 10 9,99 109,895 9,99 109,895	$\times 10^{-3}$
$f_x, f_z$	0,01, -0,01	

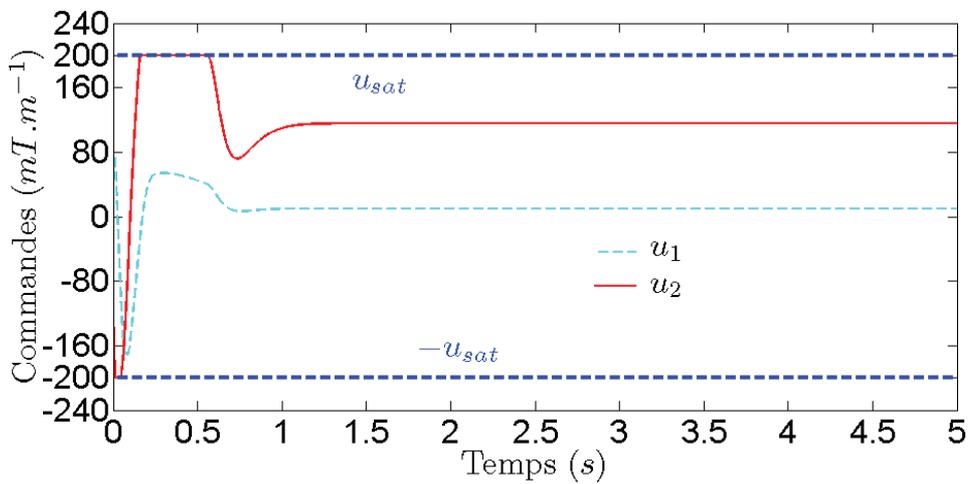
TABLE 5.15 – Conditions initiales et les distances  $f_x$  et  $f_z$  entre les deux microrobots

Les trajectoires de référence et réelles des deux microrobots et les commandes  $u_1$  et  $u_2$  sont respectivement représentées sur les figures 5.33(a) et 5.33(b). On remarque que les trajectoires réelles des deux microrobots s'éloignent de leurs trajectoires de référence (effet de la phase non minimale du système) puis convergent vers leurs références. Les commandes  $u_1$  et  $u_2$  entrent en saturation en début de simulation, avant d'assurer la convergence des trajectoires réelles des deux microrobots vers leurs références respectives.

Les distances de référence  $f_x = x_{1r} - x_{2r}$  et  $f_z = z_{1r} - z_{2r}$ , respectivement le long des axes  $\vec{i}$  et  $\vec{k}$ , ainsi que les distances réelles  $x_1 - x_2$  et  $z_1 - z_2$  sont représentées sur la figure 5.34(a). Les distances réelles convergent vers leurs références après 1 seconde, et l'on observe ici aussi l'effet de la phase non minimale. La figure 5.34(b) illustre les erreurs de suivi en position et en vitesse des deux microrobots, qui convergent vers zéro après 1 seconde. Le suivi en début de simulation est dégradé pour les deux raisons expliquées auparavant, la seconde étant corollaire de la première. Premièrement le système possède des zéros instables, et cela implique que le système s'éloigne d'abord de la référence avant d'y converger. Deuxièmement, le fait de s'éloigner initialement de la référence induit des retours d'état élevés, d'où un risque accru d'entrée en saturation comme l'illustre la figure 5.33(b).

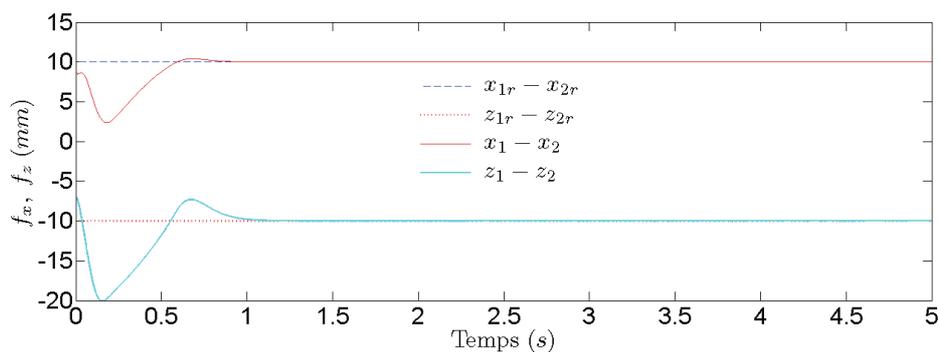
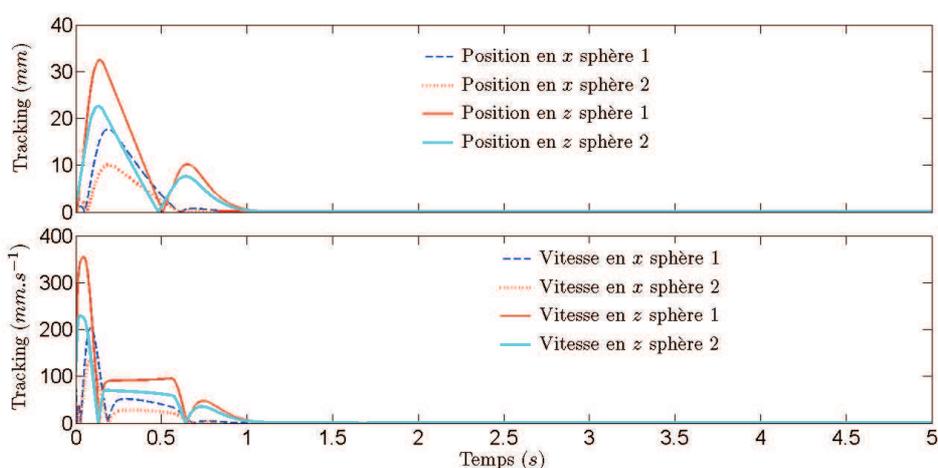


(a) Trajectoires des deux microrobots



(b) Entrées de commande  $u_1$  et  $u_2$

FIGURE 5.33 – Trajectoires de référence et réelles des deux microrobots et les entrées de commandes  $u_1$  et  $u_2$

(a) Distances  $f_x$  et  $f_z$  entre les deux microrobots

(b) Erreurs de suivi en position et en vitesse

FIGURE 5.34 – Distances entre les deux microrobots et leurs erreurs de suivi en position et en vitesse

### 5.5.2.2 Trajectoire variable (TV)

Les conditions initiales  $X(0)$  et  $X_r(0)$  et les paramètres des fonctions  $f_x(t)$  et  $f_z(t)$  sont données dans le tableau (5.16) avec le choix suivant :

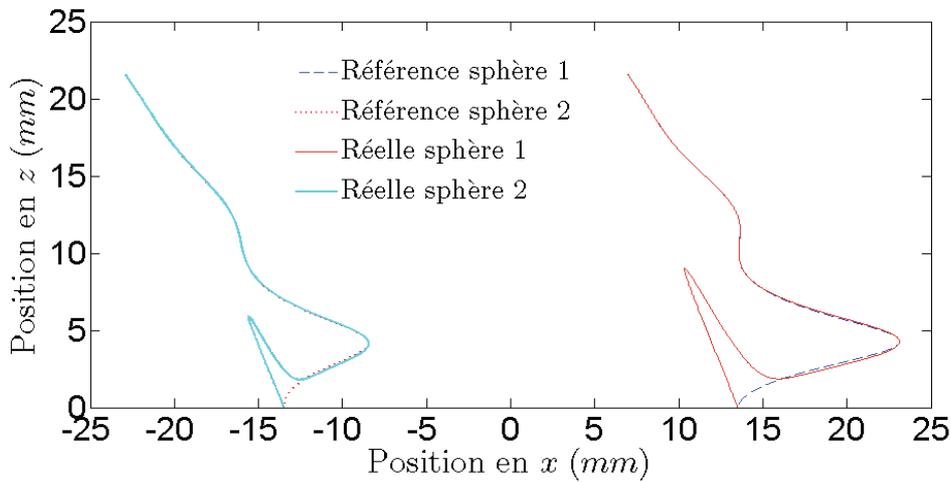
$$f_x(t) = \left( \frac{1}{2a + a \cos(bt)e^{-ct}} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad f_z(t) = 0$$

$X^T(0)$	13,48	0	-13,48	0	2,451	7,418	-0,471	7,418	$\times 10^{-3}$
$X_r^T(0)$	13,48	0	-13,48	0	1,451	6,418	-0,571	6,418	$\times 10^{-3}$
$a, b, c$	$10^{5,8}, 3, 0,9$								

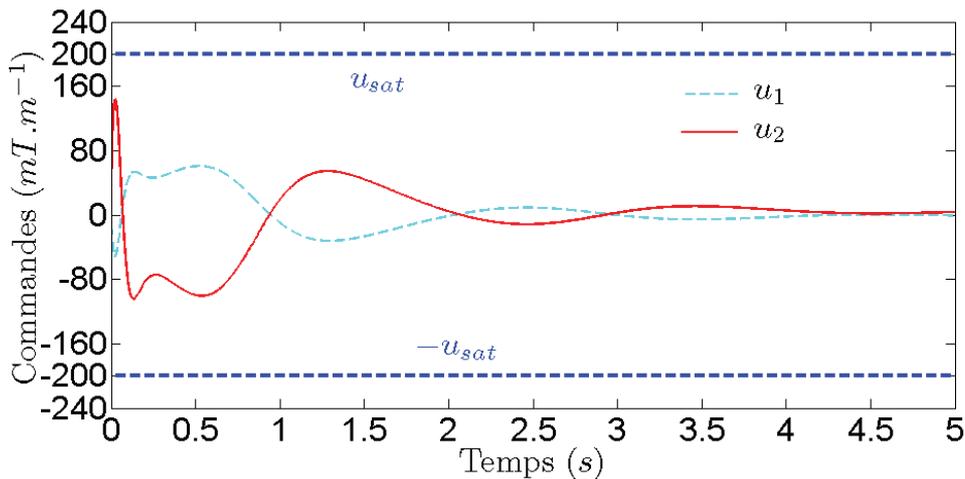
TABLE 5.16 – Conditions initiales et les paramètres  $a, b$  et  $c$  de  $f_x(t)$

Les trajectoires de référence des deux microrobots sont calculées avec l'expression (3.139). La loi de commande est donnée par  $U_\alpha = \bar{U}_\alpha + \alpha U_r$  où  $\bar{U}_\alpha$  et  $U_r$  sont respectivement données par (3.149) et (3.142), les gains de commandes sont  $K_1 = K_3 = 39I_2$ ,  $K_2 = K_4 = 30I_2$ .

La figure 5.35(a) (resp. 5.35(b)) illustre les trajectoires de référence et réelles des deux microrobots (resp. les commandes  $u_1$  et  $u_2$ ). Comme dans le cas d'une trajectoire fixe (voir section 5.5.2.1), on remarque que les trajectoires réelles des deux microrobots s'éloignent avant de converger vers leurs références. Ce phénomène est dû au fait que la dynamique des deux microrobots en interaction possède des zéros instables. Les commandes  $u_1$  et  $u_2$  n'entrent cependant pas en saturation et assurent la convergence de chaque trajectoire réelle  $X_i$  vers sa référence  $X_{ir}$  et ce pour chaque microrobot ( $i$ ).



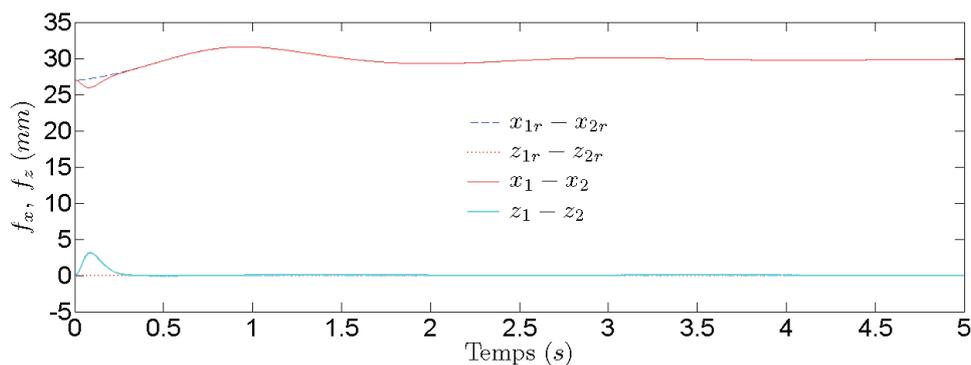
(a) Trajectoires des deux microrobots



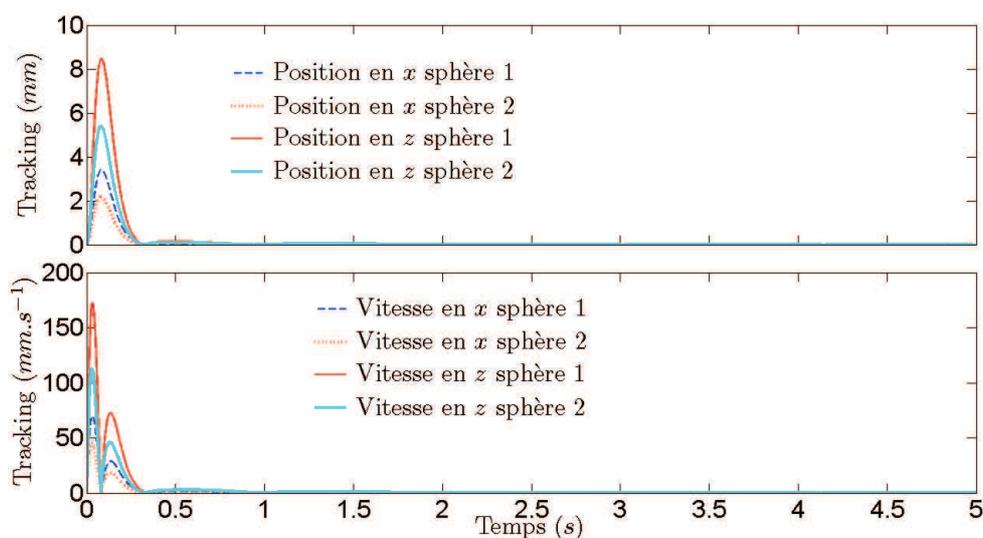
(b) Entrées de commande  $u_1$  et  $u_2$

FIGURE 5.35 – Trajectoires de référence et réelles des deux microrobots et les entrées de commandes  $u_1$  et  $u_2$

Les distances réelles  $x_1 - x_2$  et  $z_1 - z_2$  entre les deux microrobots respectivement le long des axes  $\vec{i}$  et  $\vec{k}$  convergent rapidement vers leurs distances de référence  $f_x(t) = x_{1r} - x_{2r}$  et  $f_z(t) = z_{1r} - z_{2r}$  (voir figure 5.36(a)). Les erreurs de suivi en position et en vitesse des deux microrobots sont illustrées sur la figure 5.36(b), et convergent vers zéro en 0,5 seconde. Au début de la simulation, les grands dépassements dans les erreurs de suivi sont dus au fait que le système possède des zéros instables (phase non minimale).



(a) Distances  $f_x$  et  $f_z$  entre les deux microrobots



(b) Erreurs de suivi en position et en vitesse

FIGURE 5.36 – Distances entre les deux microrobots et leurs erreurs de suivi en position et en vitesse

## 5.6 Synthèse des simulations

Le tableau 5.17 donne une synthèse sur les simulations présentées dans ce manuscrit.

TABLE 5.17 – Synthèse des simulations

Simulation	Retour de sortie	Traînée non linéaire	RIP	RBM	REM	$\omega$ inconnue
Backstepping adaptatif	× (Retour d'état)	✓	✓ (pas de convergence)	✓	×	×
Backstepping + MVT	✓	✓	✓	✓	✓	×
Backstepping + GG	✓	✓	× (mais possible)	✓	×	×
Observateur par immersion	✓	×	×	✓	×	✓
Commande de deux microrobots	× (Retour d'état)	×	×	×	×	×

## 5.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons validé par plusieurs simulations nos résultats développés dans les chapitres précédents. Nous avons illustré tout d'abord un suivi de trajectoire lorsque les paramètres du système sont incertains, et cela en utilisant une loi de commande par backstepping adaptatif pour le modèle  $1D$  du microrobot. Nous avons ensuite illustré la stabilité et la robustesse du bouclage de sortie au bruit de mesure, aux incertitudes paramétriques et aux erreurs de modélisation pour le modèle  $1D$  du microrobot. Lorsque la vitesse du sang est modélisée par un signal contenant une seule harmonique ( $n = n^* = 1$ ), nous avons comparé les résultats obtenus par notre approche (observateur MVT) avec ceux obtenus par un observateur grand gain. Nous avons aussi illustré les résultats obtenus par l'utilisation d'un observateur par immersion pour estimer la pulsation cardiaque. Puis nous avons présenté les résultats de simulation dans le cas  $2D$ , où la stabilité et la robustesse du bouclage de sortie au bruit de mesure, aux incertitudes paramétriques et aux erreurs de modélisation, ont également été validées par plusieurs simulations. Finalement, nous avons validé les lois de commande synthétisées pour la commande de deux microrobots dans le cas  $1D$  et  $2D$  par plusieurs simulations selon que le choix de la distance  $f(t)$  entre les deux microrobots est fixé au cas stationnaire ou au cas instationnaire. Dans le cas de la commande multirobots, le travail doit encore être approfondi car le comportement du système à non minimum de phase pose problème : comme les états s'écartent initialement de leurs références, le système linéaire à temps variant représente mal la réalité du système non linéaire. De plus, nous utilisons ici un retour d'état quand il est évident qu'il est nécessaire de synthétiser ici un retour de sortie puisque seule une image des positions est accessible à la mesure.

# Conclusions et perspectives

## Contributions

Cette thèse s'inscrit dans la thématique de la modélisation, la commande et l'observation de microrobots magnétiques autonomes naviguant dans les vaisseaux sanguins. Les objectifs de cette thèse étaient multiples : réaliser un état de l'art sur la modélisation des forces dans le système cardiovasculaire, synthétiser des lois de commande pour un ou plusieurs microrobots, synthétiser des observateurs d'état dans le cas où la pulsation cardiaque est connue ou non, et enfin démontrer la stabilité du retour de sortie.

Nous avons d'abord proposé un état de l'art sur la modélisation des forces qui s'exercent sur un ou plusieurs microrobots dans un vaisseau sanguin, mais aussi sur les différentes manières de modéliser le caractère périodique et pulsatile du flux sanguin. Nous avons exploité les forces (traînée, contact, poids apparent, magnétique, interactions magnétique et électrostatique...etc) qui s'exercent sur les microrobots, dans le but d'obtenir des représentations d'état exploitables pour la commande et l'observation. Nous avons alors classifié les systèmes selon que leur utilisation est à des fins de commande ou d'observation : le système réduit, qui caractérise la dynamique d'un ou plusieurs microrobots ; le système fluïdique, qui décrit le comportement pulsatile et périodique du flux sanguin ; et le système étendu, issu des sous-systèmes réduit et fluïdique. Le système réduit est utilisé pour la synthèse d'une loi de commande qui stabilise un ou plusieurs microrobots le long d'une trajectoire de référence. Le système étendu est exploité dans le but de synthétiser un observateur d'état afin de reconstruire les états non accessibles du système étendu.

Nous avons synthétisé une loi de commande par retour d'état par backstepping adaptatif pour les systèmes réduits d'un microrobot en  $1D$  et  $2D$ , car ces systèmes réduits contiennent des paramètres notamment biologiques qui sont généralement incertains –comme la viscosité dynamique et la masse volumique du sang, l'aimantation du microrobot– voire incertains et instationnaires –comme la vitesse du sang. Cette commande par backstepping adaptatif prend en compte les paramètres incertains présents dans le système et permet d'assurer la stabilité du

système en dépit des incertitudes.

Cependant de telles lois de commande supposent la connaissance de l'état complet du système réduit, et également de la vitesse du sang. Or les états du système réduit ne sont pas tous accessibles à la mesure, puisque seule la position du microrobot est donnée par l'imageur. Quant à la vitesse du sang, elle dépend de l'espace et du temps, n'est pas accessible à la mesure, et induit de fortes perturbations sur le système. Pour s'affranchir de ces problèmes, nous avons proposé un observateur basé sur le théorème de la valeur moyenne dans [Sadelli et al., 2014b] pour estimer les états non accessibles du microrobot en  $1D$  et la vitesse du sang et, aussi le cas échéant, les paramètres incertains du système [Sadelli et al., 2014a]. Dans ces deux cas, nous avons synthétisé un bouclage d'état par backstepping, et nous avons couplé l'observateur et la commande pour synthétiser un bouclage de sortie, dont nous avons démontré la stabilité. L'intérêt d'une telle démarche est de s'affranchir des capteurs physiques, coûteux ou peu adaptés à la mesure locale, pour proposer une méthode alternative de diagnostic de la vitesse du sang, par exemple.

Nous avons ensuite étendu cette approche en  $2D$  [Sadelli et al., 2016] où nous avons amélioré les résultats théoriques par rapport à ceux obtenus précédemment en  $1D$ . Nous avons notamment étudié la robustesse de la commande par retour de sortie par rapport au bruit de mesure, aux incertitudes paramétriques et aux erreurs de modélisation, et en avons aussi démontré la stabilité asymptotique, ou pratique en présence d'erreurs de modélisation. L'observateur synthétisé dans ce cas est moins sensible au bruit de mesure que l'observateur grand gain synthétisé par [Arcese et al., 2013, Fruchard et al., 2014] où, de plus, la stabilité du bouclage de sortie n'est pas étudiée.

Dans ces premiers travaux, nous avons supposé que la pulsation cardiaque est connue ; cependant, en réalité, sa valeur varie en fonction de l'état physiologique (repos, stress, etc). Dans un premier temps, nous avons proposé un observateur par immersion pour estimer la pulsation cardiaque [Sadelli et al., 2015] après immersion du système d'origine dans une dimension plus grande. Cette première approche sur un microrobot se déplaçant à bas Reynolds présentait des problèmes d'inversion lors du retour aux coordonnées naturelles. Nous avons alors amélioré cette approche pour éliminer les problèmes de singularité lors de l'inversion de la transformation qui lie les coordonnées immergées et les coordonnées naturelles, ce travail sera prochainement soumis en revue.

Le système réduit de deux microrobots est non linéaire affine en la commande, sous-actionné et à phase non minimale. Nous en avons étudié la commandabilité, ce qui n'a à notre connaissance pas d'équivalent dans la littérature, mais seulement partiellement puisque le long du linéarisé le long d'une trajectoire de référence. Nous en avons aussi explicité les trajectoires

et commandes de référence admissibles. Nous avons ensuite proposé une loi de commande par backstepping pour le modèle linéarisé à temps variant dans les cas  $1D$  et  $2D$  de deux microrobots en interaction, ces travaux seront prochainement soumis dans une revue.

Enfin, nous avons illustré les travaux proposés dans cette thèse par plusieurs simulations. Des simulations pour un seul microrobot évoluant en  $1D$  et  $2D$  illustrent la robustesse du retour de sortie en présence de bruits de mesure, d'incertitudes paramétriques et d'erreurs de modélisation. Dans le cas où la pulsation cardiaque est inconnue, nous avons illustré les résultats obtenus par l'observateur par immersion. La stabilité de la loi de commande proposée pour la commande deux microrobots a été illustrée par plusieurs simulations en  $1D$  et  $2D$  pour des choix de distances inter-robots fixées à des valeurs stationnaires ou non.

## Perspectives

D'un point de vue pratique, nous prévoyons de mener des validations expérimentales utilisant les approches proposées dans cette thèse. Nous pensons d'abord estimer les paramètres incertains comme la viscosité dynamique du fluide, l'aimantation du microrobot, etc. Ensuite, il est possible d'illustrer l'intérêt des observateurs de vitesse du sang, avec pulsation connue ou inconnue, en soumettant un microrobot à un flux périodique produit par une pompe pulsatile. Ceci permettrait aussi d'analyser l'impact et l'ordre de grandeur des harmoniques négligées dans le modèle dans le cadre d'une stabilisation pratique et d'en peser les avantages et inconvénients pratiques. Les expérimentations menées dans [Arcese et al., 2013] ont montré que la discrétisation à fréquence de  $25Hz$  ne portait pas préjudice à la stabilité des lois de commande par backstepping et de l'observateur grand gain, de plus le bruit de mesure est plus faible sur le banc d'essais que les valeurs choisies dans les travaux présentés ici.

D'un point de vue théorique, l'approche de commande de deux microrobots, proposée dans cette thèse, reste incomplète. Elle ne résout en effet que la commandabilité linéaire de deux microrobots en interaction. Nous proposons d'abord d'étendre l'approche proposée pour la commande de deux microrobots à  $m$  microrobots, et d'en étudier la commandabilité non linéaire. Le système est à non minimum de phase et nous nous en sommes aperçus tardivement, il convient donc de synthétiser la commande plus judicieusement mais la contrainte de sous-actionnement rend le problème complexe. Enfin, lorsque nous avons étudié la commandabilité de plusieurs microrobots, nous avons supposé que la vitesse de fluide était nulle. Nous proposons de synthétiser une loi de commande non linéaire pour commander plusieurs microrobots, en prenant en compte la dynamique du flux sanguin, et de synthétiser un observateur d'état pour le système global, afin d'utiliser une commande par retour de sortie.



## Annexe A

## A.1 Preuve de l'équation (2.20)

Dans le cas d'une navigation 1D, le champ magnétique appliqué  $\vec{B}$  est donné par  $\vec{B} = B_* \vec{j}$  avec  $(*, j)$  égal à  $(x, i)$  ou  $(z, k)$  respectivement dans le cas d'une navigation le long des axes  $\vec{i}$  ou  $\vec{k}$ . L'aimantation  $M$  est donnée par  $\vec{M} = M \vec{j}$  et  $\nabla = \frac{\partial}{\partial *}$ . D'après l'équation (1.66), on obtient :

$$\vec{F}_m = \tau_m V M \frac{\partial B_* \vec{j}}{\partial *} = m \frac{\tau_m M}{\rho} \frac{\partial B_* \vec{j}}{\partial *}$$

On pose  $\beta'_1 = \frac{\tau_m M}{\rho}$  et  $\vec{u} = \frac{\partial B_* \vec{j}}{\partial *}$ , on obtient alors l'équation (2.20).

## A.2 Preuve de l'équation (2.23)

D'après l'équation (1.20), on a  $\|\vec{v}_{r_\infty}\| = \frac{\|\vec{v}_r\|}{\beta}$ . On remplace  $\|\vec{v}_{r_\infty}\|$  dans l'équation (1.14) avec  $L = 2r$ , on obtient  $\text{Re} = \frac{2r\rho_f \|\vec{v}_r\|}{\beta\eta}$ . On remplace  $\text{Re}$  dans l'équation (1.19a), on obtient :

$$C_d = \frac{12\beta\eta}{r\rho_f \|\vec{v}_r\|} + \frac{6}{1 + \sqrt{\frac{2r\rho_f \|\vec{v}_r\|}{\beta\eta}}} + 0,4$$

On remplace  $C_d$  dans l'équation (1.22), on obtient

$$\begin{aligned} \vec{F}_d &= -\frac{\pi r^2 \rho_f}{2} \left( \frac{12\beta\eta}{r\rho_f \|\vec{v}_r\|} + \frac{6}{1 + \sqrt{\frac{2r\rho_f \|\vec{v}_r\|}{\beta\eta}}} + 0,4 \right) \left( \frac{\|\vec{v}_r\|}{\beta} \right)^2 \frac{\vec{v}_r}{\|\vec{v}_r\|} \\ &= -\frac{\pi r^2 \rho_f}{2\beta^2} \left( \frac{12\beta\eta \|\vec{v}_r\|}{r\rho_f} + \frac{6\|\vec{v}_r\|^2}{1 + \sqrt{\frac{2r\rho_f \|\vec{v}_r\|}{\beta\eta}}} + 0,4 \|\vec{v}_r\|^2 \right) \frac{\vec{v}_r}{\|\vec{v}_r\|} \end{aligned} \tag{A.1}$$

On a  $\vec{v}_r = \vec{v} - \vec{v}_f(x, t)$  avec  $\vec{v} = \dot{p}_z \vec{k}$  et  $\vec{v}_f(x, t) = \xi_1 \vec{k}$  dans le cas d'une navigation en 1D le long de l'axe  $\vec{k}$ . On obtient alors  $\vec{v}_r = \text{sign}(\dot{p}_z - \xi_1) |\dot{p}_z - \xi_1| \vec{k}$ . On remplace l'expression de  $\vec{v}_r$  dans l'équation (A.1), on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{F}_d &= -\frac{\pi r^2 \rho_f}{2\beta^2} \left( \frac{12\beta\eta |\dot{p}_z - \xi_1|}{r\rho_f} + \frac{6(\dot{p}_z - \xi_1)^2}{1 + \sqrt{\frac{2r\rho_f |\dot{p}_z - \xi_1|}{\beta\eta}}} + 0, 4(\dot{p}_z - \xi_1)^2 \right) \text{sign}(\dot{p}_z - \xi_1) \vec{k} \\ &= -m \left[ \frac{6\pi r \eta}{m\beta} |\dot{p}_z - \xi_1| + \frac{\frac{3\pi r^2 \rho_f}{m\beta^2}}{1 + \sqrt{\frac{2r\rho_f |\dot{p}_z - \xi_1|}{\beta\eta}}} (\dot{p}_z - \xi_1)^2 + \frac{0, 2\pi r^2 \rho_f}{m\beta^2} (\dot{p}_z - \xi_1)^2 \right] \text{sign}(\dot{p}_z - \xi_1) \vec{k} \end{aligned}$$

Sachant que  $m = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$ . On pose  $a = \frac{6\pi r \eta}{m\beta} = \frac{9\eta}{2\beta\rho r^2}$ ,  $b = \frac{0, 2\pi r^2 \rho_f}{m\beta^2} = \frac{3\rho_f}{20r\beta^2\rho}$ ,  $c = \frac{3\pi r^2 \rho_f}{m\beta^2} = \frac{9\rho_f}{4r\beta^2\rho}$  et  $d = \sqrt{\frac{2r\rho_f}{\beta\eta}}$ , on obtient alors l'expression (2.23).

### A.3 Preuve de l'équation (2.42)

On utilise les expressions de  $\vec{u}_i$  et  $\vec{u}_{kj}$  données par l'équation (2.41), on obtient alors :

$$\begin{aligned} \vec{u}_{kj} (\vec{u}_j \cdot \vec{u}_k) &= \frac{1}{r_{kj}} \left[ (p_{x_j} - p_{x_k}) \vec{i} + (p_{z_j} - p_{z_k}) \vec{k} \right] \\ \vec{u}_j (\vec{u}_{kj} \cdot \vec{u}_k) &= \frac{1}{r_{kj}} (p_{x_j} - p_{x_k}) \vec{i} \\ \vec{u}_k (\vec{u}_{kj} \cdot \vec{u}_j) &= \frac{1}{r_{kj}} (p_{x_j} - p_{x_k}) \vec{i} \\ \vec{u}_{kj} (\vec{u}_{kj} \cdot \vec{u}_j) (\vec{u}_{kj} \cdot \vec{u}_k) &= \frac{1}{r_{kj}^3} \left[ (p_{x_j} - p_{x_k})^3 \vec{i} + (p_{x_j} - p_{x_k})^2 (p_{z_j} - p_{z_k}) \vec{k} \right] \end{aligned}$$

On remplace les expressions données ci-dessus dans l'équation (1.51), on obtient l'expression (2.42).

### A.4 Preuve du système ( $\mathcal{F}_\omega^n$ )

**Démonstration:**

Soit  $\bar{A}_i(t) = A_i \cos(i\omega + \phi)$  et  $\xi_1$  est défini comme une série de Fourier d'ordre  $n$  :

$$\xi_1 = A_0 + \sum_{i=1}^n \bar{A}_i(t) \quad (\text{A.2})$$

Nous montrons que (A.2) est solution du système ( $\mathcal{F}_\omega^n$ ) donné par (2.52). Par récurrence on a la propriété suivante  $\forall k \in \{1, \dots, n\}$  :

$$(P_k) : \xi_{2k+1} = \frac{1}{k+1} \left[ A_0 + \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \sum_{i=k+1}^n \left( \prod_{j=1}^k (i^2 - j^2) \right) \bar{A}_i(t) \right] \quad (\text{A.3})$$

Montrons que pour  $k = 1$  alors ( $P_1$ ) est vérifiée. Dérivons  $\xi_1$  donné par (A.2) deux fois par rapport au temps :

$$\ddot{\xi}_1 = -\omega^2 \sum_{i=1}^n i^2 \bar{A}_i(t) = -\omega^2(\xi_1 - 2\xi_3) \quad (\text{A.4})$$

avec  $\xi_3$  donné par :

$$\xi_3 = \frac{1}{2} \left[ A_0 - \sum_{i=2}^n (i^2 - 1) \bar{A}_i(t) \right] \quad (\text{A.5})$$

Donc la propriété ( $P_k$ ) donnée par (A.3) est satisfaite pour  $k = 1$ .

Supposons maintenant que pour  $i = k$ , ( $P_i$ ) est satisfaite. Nous montrons alors que ( $P_{k+1}$ ) vérifie l'équation (A.3). Dérivons  $\xi_{2k+1}$  deux fois par rapport au temps :

$$\ddot{\xi}_{2k+1} = \frac{(-1)^{k+1}}{(k!)^2(k+1)} \omega^2 \sum_{i=k+1}^n \left( \prod_{j=1}^k (i^2 - j^2) \right) i^2 \bar{A}_i(t) \quad (\text{A.6})$$

D'après le système ( $\mathcal{F}_\omega^n$ ),  $\xi_{2k+3}$  est donné par :

$$\xi_{2k+3} = \frac{1}{(k+1)(k+2)} \left( \frac{\ddot{\xi}_{2k+1}}{\omega^2} + (k+1)^2 \xi_{2k+1} \right) \quad (\text{A.7})$$

En utilisant les équations (A.3) et (A.6) dans (A.7), on obtient :

$$\begin{aligned} \xi_{2k+3} &= \frac{1}{(k+1)(k+2)} \left[ \frac{(-1)^{k+1}}{(k!)^2(k+1)} \sum_{i=k+1}^n \left( \prod_{j=1}^k (i^2 - j^2) \right) i^2 \bar{A}_i(t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(k+1)^2 A_0}{k+1} + \frac{(-1)^k (k+1)^2}{(k!)^2(k+1)} \sum_{i=k+1}^n \left( \prod_{j=1}^k (i^2 - j^2) \right) \bar{A}_i(t) \right] \\ &= \frac{1}{k+2} \left[ A_0 + \frac{(-1)^{k+1}}{((k+1)!)^2} \sum_{i=k+1}^n \left( \prod_{j=1}^k (i^2 - j^2) \right) (i^2 - (k+1)^2) \bar{A}_i(t) \right] \\ &= \frac{1}{k+2} \left[ A_0 + \frac{(-1)^{k+1}}{((k+1)!)^2} \sum_{i=k+2}^n \left( \prod_{j=1}^{k+1} (i^2 - j^2) \right) \bar{A}_i(t) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Donc la propriété ( $P_i$ ) donnée par (A.3) est satisfaite pour  $i = k + 1$ . Pour  $k = n$  d'après l'équation (A.3), on obtient  $\xi_{2n+1} = \frac{A_0}{n+1}$ , i.e la valeur moyenne de la vitesse du sang divisée par  $n + 1$ . En utilisant le théorème de Cauchy-Lipschitz,  $\xi_1$  est la solution unique du système ( $\mathcal{F}_\omega^n$ ) pour des conditions initiales données.

□

### A.5 Solution de l'équation (3.98) pour un choix de $f(t)$

On prend  $f(t) = ae^{\delta ct} + b$  avec  $c = \frac{\chi_4}{\chi_3}$  et  $n-1 = \frac{1}{\delta} \in \mathbb{N}^*$ . On pose alors  $x_t = f(t)$ ,  $x_0 = f(0)$  on obtient :

$$\begin{aligned} dx_t &= f'(t)dt &\implies dt &= \frac{1}{\delta c(x_t - b)} dx_t \\ f'(t) &= \delta cae^{\delta ct} &\implies f'(t) &= \delta c(x_t - b) \\ f''(t) &= (\delta c)^2 ae^{\delta ct} &\implies f''(t) &= (\delta c)^2 (x_t - b) \\ e^{\delta ct} &= \frac{x_t - b}{a} &\implies e^{-ct} &= \left(\frac{a}{x_t - b}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

On pose  $c_{2i}(t) = -\frac{1}{\chi_4} \int_0^t g_i(\tau) d\tau$  et  $c_{1i}(t) = \frac{1}{\chi_4} \int_0^t \left( g_i(\tau) e^{-\frac{\chi_4}{\chi_3} \tau} \right) d\tau$ , on obtient alors :

$$\begin{aligned} c_{2i}(t) &= -\frac{1}{\chi_4} \int_{x_0}^{x_t} (\alpha_i \delta c + \alpha_i a_j) d\tau + \frac{4\chi_1}{\delta c \chi_4} \int_{x_0}^{x_t} \frac{d\tau}{\tau^4 (\tau - b)} \\ c_{1i}(t) &= \frac{a^{n-1} (\alpha_i \delta c + \alpha_i a_j)}{\chi_4} \int_{x_0}^{x_t} \frac{d\tau}{(\tau - b)^{n-1}} - \frac{4\chi_1 a^{n-1}}{\delta c \chi_4} \int_{x_0}^{x_t} \frac{d\tau}{\tau^4 (\tau - b)^n} \end{aligned}$$

Pour calculer les intégrales ci-dessus, on doit décomposer la fraction  $\frac{1}{x^4(x-b)^n}$  en éléments simples :

$$\frac{1}{x^4(x-b)^n} = \sum_{i=1}^4 \frac{\delta_{in}}{x^i} + \sum_{j=1}^n \frac{\delta_{jnb}}{(x-b)^j}$$

avec  $\delta_{in} = \frac{(-1)^n}{b^{n+4-i}} C_{n+3-i}^{4-i}$ ,  $\delta_{jnb} = \frac{(-1)^{n-j}}{b^{n+4-j}} C_{n+3-j}^{n-j}$  et  $C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$ . On peut calculer alors :

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_t} \frac{d\tau}{\tau^4 (\tau - b)^n} &= \delta_{1n} \ln \left( \frac{x_t}{x_0} \right) + \delta_{1nb} \ln \left( \frac{x_t - b}{x_0 - b} \right) - \sum_{i=2}^4 \frac{\delta_{in}}{i-1} \left( \frac{1}{x_t^{i-1}} - \frac{1}{x_0^{i-1}} \right) \\ &\quad - \sum_{j=2}^n \frac{\delta_{jnb}}{j-1} \left( \frac{1}{(x_t - b)^{j-1}} - \frac{1}{(x_0 - b)^{j-1}} \right) \end{aligned}$$

Les termes  $c_{2i}(t)$  et  $c_{1i}(t)$  sont données alors comme suit :

$$\begin{aligned} c_{2i}(t) &= -\frac{\alpha_i \delta c + \alpha_i a_j}{\chi_4} (x_t - x_0) + \frac{4\chi_1}{\delta c \chi_4} \left[ \delta_{11} \ln \left( \frac{x_t}{x_0} \right) + \delta_{11b} \ln \left( \frac{x_t - b}{x_0 - b} \right) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i=2}^4 \frac{\delta_{i1}}{i-1} \left( \frac{1}{x_t^{i-1}} - \frac{1}{x_0^{i-1}} \right) \right] \\ c_{1i}(t) &= -\frac{a^{n-1} (\alpha_i \delta c + \alpha_i a_j)}{(n-2)\chi_4} \left( \frac{1}{(x_t - b)^{n-2}} - \frac{1}{(x_0 - b)^{n-2}} \right) - \frac{4\chi_1 a^{n-1}}{\delta c \chi_4} \int_{x_0}^{x_t} \frac{d\tau}{\tau^4 (\tau - b)^n} \end{aligned}$$

On remplace les expressions de  $c_{1i}(t)$  et  $c_{2i}(t)$  dans  $x_{ir}(t)$  donné par (3.98), on obtient :

$$\begin{aligned}
 x_{ir}(t) &= \dot{x}_{0ir} \frac{\chi_3}{\chi_4} \left[ \left( \frac{x_t - b}{a} \right)^{n-1} - 1 \right] + x_{0ir} - \frac{(\alpha_i \delta c + \alpha_i a_j)}{(n-2)\chi_4} \left[ (x_t - b) - \frac{(x_t - b)^{n-1}}{(x_0 - b)^{n-2}} \right] \\
 &\quad - \frac{4\chi_1}{\delta c \chi_4} (x_t - b)^{n-1} \left[ \delta_{1n} \ln \left( \frac{x_t}{x_0} \right) + \delta_{1nb} \ln \left( \frac{x_t - b}{x_0 - b} \right) - \sum_{i=2}^4 \frac{\delta_{in}}{i-1} \left( \frac{1}{x_t^{i-1}} - \frac{1}{x_0^{i-1}} \right) \right] \\
 &\quad + \frac{4\chi_1}{\delta c \chi_4} \sum_{j=2}^n \left[ \frac{\delta_{jnb}}{j-1} \left( (x_t - b)^{n-j} - \frac{(x_t - b)^{n-1}}{(x_0 - b)^{j-1}} \right) \right] - \frac{\alpha_i \delta c + \alpha_i a_j}{\chi_4} (x_t - x_0) \\
 &\quad + \frac{4\chi_1}{\delta c \chi_4} \left[ \delta_{11} \ln \left( \frac{x_t}{x_0} \right) + \delta_{11b} \ln \left( \frac{x_t - b}{x_0 - b} \right) - \sum_{i=2}^4 \frac{\delta_{i1}}{i-1} \left( \frac{1}{x_t^{i-1}} - \frac{1}{x_0^{i-1}} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

## A.6 Preuve du lemme 4.4.5

P1) La matrice d'observabilité de la paire  $(\bar{A}(p), \bar{C})$  est donnée par :

$$\mathcal{O} = \left[ \begin{array}{c|c} I_4 & 0_{4 \times (2n+2)} \\ \hline * & \Theta \end{array} \right] \tag{A.10}$$

avec  $\Theta \in \mathcal{M}_{(4n+8) \times (2n+2)}$ , et \* désigne une matrice bornée. On a alors :

$$\text{Rang}(\mathcal{O}) = 4 + \text{Rang}(\Theta) \tag{A.11}$$

avec

$$\Theta = \begin{bmatrix} N_1 & 0_{42} & \dots & 0_{42} & M_1 \\ * & N_2 & \ddots & \vdots & M_* \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_{42} & \vdots \\ * & \dots & * & N_n & M_* \\ * & \dots & \dots & * & Q \\ * & \dots & \dots & \dots & * \end{bmatrix} \tag{A.12}$$

les sous-matrices sont données par :

$$N_{k+1} = \varepsilon_k \omega^{2k} \begin{bmatrix} p_4 + a & 0 \\ p_7 & 0 \\ * & p_4 + a \\ * & p_7 \end{bmatrix} \quad M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & * \\ 0 & * \end{bmatrix} \quad Q = \varepsilon_n \begin{bmatrix} (p_4 + a)\omega^{2n} & * \\ p_7\omega^{2n} & * \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix} \quad M_* = \begin{bmatrix} 0 & * \\ 0 & * \\ 0 & * \\ 0 & * \end{bmatrix} \tag{A.13}$$

avec  $\varepsilon_k = (k+1)k!^2$ . Soit  $D$  la matrice contenant les lignes  $L_1, L_2, L_3, \dots, L_{2k+1}, \dots, L_{4n+1}$  de la matrice  $\Theta$ . On obtient alors :

$$|D| = \left[ (p_4 + a)^{2n+1} \prod_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k^2 \omega^{4k} \right] \varepsilon_n \omega^{2n}. \quad (\text{A.14})$$

Il en résulte :

$$\omega(p_4 + a) \neq 0 \Rightarrow \text{Rang}(\Theta) = 2n + 2 \quad (\text{A.15})$$

On démontre par la suite que  $(p_4 + a) > 0$ , par conséquent la paire  $(\bar{A}(p), \bar{C})$  est observable pour tout  $p \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^7 \setminus \{p_4 + \bar{a} = 0\}$  avec  $\mathcal{P}$  un ensemble convexe borné.

P2) Dans un vaisseau sanguin cylindrique, l'angle  $\psi$  est donné par  $\psi = \arctan \left[ \frac{x_4}{x_3 - v_f} \right]$ , *i.e.*  $\cos(\psi) = \frac{x_3 - v_f}{v_r}$  et  $\sin(\psi) = \frac{x_4}{v_r}$ , avec  $v_r = \sqrt{[x_3 - v_f]^2 + x_4^2}$  est la norme de la vitesse relative  $\vec{v}_r$  du microrobot. Le profil de la vitesse du sang est parabolique le long d'une section du vaisseau sanguin de diamètre  $D$  :

$$v_s(x_2) = 1 - 4 \left( \frac{x_2}{D} \right)^2 \quad (\text{A.16})$$

On définit :

$$\begin{cases} F'_{d1} &= b v_r^2 + c \frac{v_r^2}{1 + d \sqrt{v_r}} \\ \frac{\partial F'_{d1}}{\partial v_r} &= 2b v_r + 2c \frac{v_r}{1 + d \sqrt{v_r}} - cd \frac{v_r^{3/2}}{2(1 + d \sqrt{v_r})^2} \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

On suppose que  $\forall t \in \mathbb{R}^+$ , l'ensemble borné  $\mathcal{K}_x$  est tel que  $x_2 \in [-\frac{D}{2} + \varpi, \frac{D}{2} - \varpi]$ , pour  $\varpi \in ]0, r[$ . On a alors  $(\delta_1, \delta_2) \in [\varpi - r, D - r - \varpi]^2$ , avec  $\delta_1 + \delta_2 = D - 2r$ . Pour simplifier les notations, on pose :

$$\begin{aligned} v_{tmax} &= \max_t (|v_t|) & v_{rmax} &= \max_t (v_r) & C_\psi &= \cos(\psi) \\ x_{2max} &= \max_t (|x_2|) & \delta_{imax} &= \max_t (|\delta_i|) & S_\psi &= \sin(\psi) \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

En utilisant (A.16)-(A.18) on obtient  $0 < v_s(x_{2max}) \leq v_s(x_2) \leq 1$ . Avec l'expression (2.61), on obtient les dérivées partielles notées  $\bar{g}_{i,j} = \frac{\partial \bar{g}_i}{\partial \bar{x}_j}(\bar{x})$  :

$$\begin{aligned} \bar{g}_{1,1} &= \bar{g}_{2,1} = 0 & \bar{g}_{1,2} &= -\frac{8x_2 v_t}{D^2} [a + T_1] \\ \bar{g}_{1,3} &= -T_1 & \bar{g}_{1,4} &= \bar{g}_{2,3} = -C_\psi S_\psi T_3 \\ \bar{g}_{1,5} &= v_s(x_2) [T_1 + a] - a & \bar{g}_{2,4} &= -T_2 \\ \bar{g}_{2,2} &= \frac{8x_2 v_t}{D^2} C_\psi S_\psi T_3 + T_4 & \bar{g}_{2,5} &= v_s(x_2) C_\psi S_\psi T_3 \\ \bar{g}_{1,2k+6} &= \bar{g}_{2,2k+6} = 0 & \bar{g}_{1,2k+7} &= \bar{g}_{2,2k+7} = 0, \quad \forall k \in \{0, \dots, n-1\} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Les paramètres  $T_i$  sont donnés par :

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{\partial F'_{d1}}{\partial v_r} C_\psi^2 + \frac{F'_{d1}}{v_r} S_\psi^2 \\
&= bv_r + c \frac{v_r}{1 + d\sqrt{v_r}} + C_\psi^2 \left[ bv_r + \frac{2cv_r + cdv_r^{1.5}}{2(1 + d\sqrt{v_r})^2} \right] \\
T_2 &= \frac{\partial F'_{d1}}{\partial v_r} S_\psi^2 + \frac{F'_{d1}}{v_r} C_\psi^2 \\
&= bv_r + c \frac{v_r}{1 + d\sqrt{v_r}} + S_\psi^2 \left[ bv_r + \frac{2cv_r + cdv_r^{1.5}}{2(1 + d\sqrt{v_r})^2} \right] \\
T_3 &= \frac{\partial F'_{d1}}{\partial v_r} - \frac{F'_{d1}}{v_r} = bv_r + \frac{2cv_r + cdv_r^{1.5}}{2(1 + d\sqrt{v_r})^2} \\
T_4 &= 2e \left[ \frac{H(\delta_1)}{(r + \delta_1)^3} - \frac{H(\delta_2)}{(r + \delta_2)^3} \right] - \frac{3}{2}f \left[ \sqrt{|\delta_2|}H(-\delta_2) + \sqrt{|\delta_1|}H(-\delta_1) \right]
\end{aligned} \tag{A.20}$$

On obtient les bornes inférieure et supérieure de  $T_i$  :

$$\begin{aligned}
T_1 &\in [0, T_1^+], & T_1^+ &\leq 2bv_{rmax} + 2cv_{rmax} + \frac{cd}{2}v_{rmax}^{1.5} \\
T_2 &\in [0, T_2^+], & T_2^+ &\leq 2bv_{rmax} + 2cv_{rmax} + \frac{cd}{2}v_{rmax}^{1.5} \\
T_3 &\in [0, T_3^+], & T_3^+ &\leq bv_{rmax} + 2cv_{rmax} + \frac{cd}{2}v_{rmax}^{1.5}
\end{aligned} \tag{A.21}$$

Pour borner  $T_4$ , on distingue trois cas :

- Si  $(\delta_1, \delta_2) \in [0; D - r - \varpi]^2$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
T_4 &= 2e \left[ \frac{1}{(r + \delta_1)^3} - \frac{1}{(r + \delta_2)^3} \right] \\
&\leq T_4^+ = 2e \left[ \frac{1}{r^3} - \frac{1}{(D - r)^3} \right]
\end{aligned} \tag{A.22}$$

- Si  $\delta_1 \in [\varpi - r; 0[$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
T_4 &= -2e \frac{1}{(r + \delta_2)^3} - \frac{3}{2}f\sqrt{-\delta_1} \\
&\geq T_{4,1}^- = -2e \frac{1}{(D - r - \delta_{1max})^3} - \frac{3}{2}f\sqrt{-\delta_{1max}}
\end{aligned} \tag{A.23}$$

- Si  $\delta_2 \in [\varpi - r; 0[$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
T_4 &= 2e \frac{1}{(r + \delta_1)^3} - \frac{3}{2}f\sqrt{-\delta_2} \\
&\geq T_{4,2}^- = 2e \frac{1}{(D - r - \delta_{2max})^3} - \frac{3}{2}f\sqrt{-\delta_{2max}}
\end{aligned} \tag{A.24}$$

En utilisant (A.22), (A.23) et (A.24), on obtient les bornes inférieure et supérieure de  $T_4$  :

$$T_4 \in [T_4^-; T_4^+], \quad \text{avec } T_4^- = \min(T_{4,1}^-, T_{4,2}^-) \tag{A.25}$$

Soit  $T_5^+ = (8x_{2max}v_{tmax})/D^2$ , en utilisant les expressions des dérivées partielles (A.19) et les bornes (A.21)-(A.25), on obtient les bornes  $a_{i,j}$  et  $b_{i,j}$  de la dérivé partielle  $\frac{\partial \bar{g}_i}{\partial \bar{x}_j}$ ,  $\forall k \in \{0, \dots, n-1\}$  :

$$\begin{aligned}
a_{1,1} &= a_{2,1} = 0 & b_{1,1} &= b_{2,1} = 0 \\
a_{1,2} &= -T_5^+ [a + T_1^+] & b_{1,2} &= T_5^+ [a + T_1^+] \\
a_{1,3} &= -T_1^+ & b_{1,3} &= 0 \\
a_{1,4} &= a_{23} = -T_3^+ & b_{14} &= b_{2,3} = T_3^+ \\
a_{1,5} &= a(v_s(x_{2max}) - 1) & b_{1,5} &= T_1^+ \\
a_{2,2} &= -|T_5^+ T_3^+ + T_4^-| & b_{2,2} &= T_5^+ T_3^+ + T_4^+ \\
a_{2,4} &= -T_2^+ & b_{2,4} &= 0 \\
a_{2,5} &= -v_s(x_{2max})T_3^+ & b_{2,5} &= T_3^+ \\
a_{1,2k+6} &= a_{2,2k+6} = 0 & b_{1,2k+6} &= b_{2,2k+6} = 0 \\
a_{1,2k+7} &= a_{2,2k+7} = 0 & b_{1,2k+7} &= b_{2,2k+7} = 0.
\end{aligned} \tag{A.26}$$

En outre, en utilisant la symétrie et les dérivées partielles nulles dans (A.19), c'est possible de réduire l'étude au vecteur de paramètres  $p \in \mathbb{R}^7$  définit comme suit :

$$p = [\bar{p}_{1,2}, \bar{p}_{1,3}, \bar{p}_{1,4}, \bar{p}_{1,5}, \bar{p}_{2,2}, \bar{p}_{2,4}, \bar{p}_{2,5}]^T \tag{A.27}$$

On a alors  $p_4 + a = a_{15} + a = av_s(x_{2max}) > 0$ .

# Bibliographie

- [A. Eqtami, 2014] A. Eqtami, O. Felfoul, P. E. D. (2014). Mri-powered closed-loop control for multiple magnetic capsules. *EEE/RSJ Int. Conf. Intelligent Robots and Systems.*, pages 3536–3542.
- [Abbott et al., 2009] Abbott, J. J., Peyer, K. E., Lagomarsino, M. C., Zhang, L., Dong, L., Kaliakatsos, I. K., and Nelson, B. J. (2009). How should microrobots swim ? *The International Journal of Robotics Research*, 28(11-12) :1434–1447.
- [Achenbach et al., 2006] Achenbach, S., Ropers, D., Kuettner, A., Flohr, T., Ohnesorge, B., Bruder, H., Theessen, H., Karakaya, M., Daniel, W. G., Bautz, W., Kalender, W. A., and Anders, K. (2006). Contrast-enhanced coronary artery visualization by dual-source computed tomography - initial experience. *European Journal of Radiology*, 57(3) :331–335.
- [Anderson and Moore, 1979] Anderson, B. D. and Moore, J. B. (1979). *Optimal Filtering (Prentice-Hall Information and System Sciences Series)*. Prentice Hall.
- [Andrä and Nowak, 2007] Andrä, W. and Nowak, H. (2007). *Introduction, in magnetism in medicine : a handbook (second edition)*. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, Germany.
- [Andrieu et al., 2014] Andrieu, V., Eytard, J. B., and Praly, L. (2014). Dynamic extension without inversion for observers. *53rd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 878–883.
- [Andrieu and Praly, 2004] Andrieu, V. and Praly, L. (2004). Remarks on the existence of a kazantzis-kravaris/luenberger observer. *Decision and Control, 2004. CDC. 43rd IEEE Conference on*, 4 :3874–3879 Vol.4.
- [Andrieu and Praly, 2006] Andrieu, V. and Praly, L. (2006). On the existence of a kazantzis-kravaris/luenberger observer. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 45(2) :432–456.
- [Andrieu et al., 2009] Andrieu, V., Praly, L., and Astolfi, A. (2009). High gain observers with updated gain and homogeneous correction terms. *Automatica*, 45(2) :422–428.
- [Arcak and Kokotović, 2001] Arcak, M. and Kokotović, P. (2001). Nonlinear observers : a circle criterion design and robustness analysis. *Automatica*, 37(12) :1923–1930.

- [Arcese, 2011] Arcese, L. (2011). *Modélisation et commande de microrobots magnétiquement guidés dans le système cardiovasculaire*. PhD thesis, Université d'Orléans.
- [Arcese et al., 2012] Arcese, L., Fruchard, M., and Ferreira, A. (2012). Endovascular magnetically-guided robots : navigation modeling and optimization. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 59(4) :977–987.
- [Arcese et al., 2013] Arcese, L., Fruchard, M., and Ferreira, A. (2013). Adaptive controller and observer for a magnetic microrobot. *IEEE Trans. Robot.*, 29(4) :1060–1067.
- [Back and Seo, 2006] Back, J. and Seo, J. H. (2006). An algorithm for system immersion into nonlinear observer form : {SISO} case. *Automatica*, 42(2) :321 – 328.
- [Barthel, 2013] Barthel, E. (2013). *Acoustic Scanning Probe Microscopy*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg.
- [Behkam and Sitti, 2006] Behkam, B. and Sitti, M. (2006). Design methodology for biomimetic propulsion of miniature swimming robots. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 128(1).
- [Behkam and Sitti, 2007] Behkam, B. and Sitti, M. (2007). Bacterial flagella-based propulsion and on/off motion control of microscale objects. *Appl. Phys. Lett.*, 90(2) :023902.
- [Belharet et al., 2011] Belharet, K., Folio, D., and Ferreira, A. (2011). Three-dimensional controlled motion of a microrobot using magnetic gradients. *Advanced Robotics*, 25(8) :1069–1083.
- [Bernard et al., 2015] Bernard, P., Andrieu, V., and Praly, L. (2015). Nonlinear observer in the original coordinates with diffeomorphism extension and jacobian completion. *SIAM Journal on Control and Optimization*. submitted to.
- [Besançon, 2007] Besançon, G. (2007). *Nonlinear observers and applications*. Springer Verlag.
- [Bestle and Zeitz, 1983] Bestle, D. and Zeitz, M. (1983). Canonical form observer design for non-linear time-variable systems. *International Journal of Control*, 38(2) :419–431.
- [Bhattacharjee and Elimelech, 1997] Bhattacharjee, S. and Elimelech, M. (1997). Surface element integration : A novel technique for evaluation of {DLVO} interaction between a particle and a flat plate. *Journal of Colloid and Interface Science*, 193(2) :273 – 285.
- [Bornard and Hammouri, 1991] Bornard, G. and Hammouri, H. (1991). A high gain observer for a class of uniformly observable systems. *Decision and Control, 1991., Proceedings of the 30th IEEE Conference on*, pages 1494–1496 vol.2.
- [Boutat et al., 2010] Boutat, D., Zheng, G., and Hammouri, H. (2010). A nonlinear canonical form for reduced order observer design. *IFAC Proceedings Volumes*, 43(14) :409–414.
- [Chakravarty and Sannigrahi, 1999] Chakravarty, S. and Sannigrahi, A. (1999). A nonlinear mathematical model of blood flow in a constricted artery experiencing body acceleration. *Mathematical and Computer Modelling*, 29(8) :9–25.

- [Chaplin et al., 1953] Chaplin, H., Mollison, P., and Vetter, H. (1953). The body/venous hematocrit ratio : Its constancy over a wide hematocrit range. *The Journal of Clinical Investigation*, 32(12) :1309–1316.
- [Chhabra, 1993] Chhabra, R. (1993). *Bubbles, Drops, and Particles in Non-Newtonian Fluids*. CRC Press.
- [Chhabra et al., 2003] Chhabra, R., Agarwal, S., and Chaudhary, K. (2003). A note on wall effect on the terminal falling velocity of a sphere in quiescent newtonian media in cylindrical tubes. *Powder Technology*, 129(1-3) :53–58.
- [Chhabra et al., 1996] Chhabra, R., Uhlherr, P., and Richardson, J. (1996). Some further observations on the hindered settling velocity of spheres in the inertial flow regime. *Chemical Engineering Science*, 51(19) :4531 – 4532.
- [Cho and Rajamani, 1997] Cho, Y. M. and Rajamani, R. (1997). A systematic approach to adaptive observer synthesis for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(4) :534–537.
- [Clift, 1978] Clift, R. (1978). *Bubbles, Drops, and Particles*. Academic Pr.
- [Dario et al., 1998] Dario, P., Carrozza, M. C., Stefanini, C., and d’Attanasio, S. (1998). A mobile microrobot actuated by a new electromagnetic wobble micromotor. *IEEE Transactions on Mechatronics*, 3(1) :9–16.
- [Darnton et al., 2004] Darnton, N., Turner, L., Breuer, K., and Berg, H. C. (2004). Moving fluid with bacterial carpets. *Biophysical Journal*, 86(3) :1863–1870.
- [Decuzzi et al., 2005] Decuzzi, P., Lee, S., Bhushan, B., and Ferrari, M. (2005). A theoretical model for the margination of particles within blood vessels. *Annals of Biomedical Engineering*, 33(2) :179–190.
- [Delvin, 2007] Delvin, P. M. (2007). *Brachytherapy : applications and techniques*. Lippincott Williams & Wilkins, Philadelphia.
- [Diller et al., 2012] Diller, E., Floyd, S., Pawashe, C., and Sitti, M. (2012). Control of multiple heterogeneous magnetic microrobots in two dimensions on nonspecialized surfaces. *Robotics, IEEE Transactions on*, 28(1) :172–182.
- [Diller and Sitti, 2013] Diller, E. and Sitti, M. (2013). Micro-scale mobile robotics. *Foundations and Trends® in Robotics*, 2(3) :143–259.
- [Donald et al., 2006] Donald, B. R., Levey, C. G., McGray, C. D., Paprotny, I., and Rus, D. (2006). An untethered, electrostatic, globally controllable mems micro-robot. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 15(1) :1–15.
- [Dreyfus et al., 2005] Dreyfus, R., Baudry, J., Roper, M. L., Fermigier, M., Stone, H. A., and Bibette, J. (2005). Microscopic artificial swimmers. *Nature*, 437(7060) :862–865.

- [Edd et al., 2003] Edd, J., Payen, S., Rubinsky, B., Stoller, M. L., and Sitti, M. (2003). Biometric propulsion for a swimming surgical micro-robot. *Intelligent Robots and Systems, 2003. (IROS 2003). Proceedings. 2003 IEEE/RSJ International Conference on*, 3 :2583–2588 vol.3.
- [Ergeneman et al., 2008] Ergeneman, O., Abbott, J. J., Dogangil, G., and Nelson, B. J. (2008). Functionalizing intraocular microrobots with surface coatings. *IEEE RAS/EMBS International Conference on Biomedical Robotics and Biomechatronics*, pages 232–237.
- [Evans and Lauga, 2010] Evans, A. A. and Lauga, E. (2010). Propulsion by passive filaments and active flagella near boundaries. *Physical Review E*, 82(4).
- [Felice, 1996] Felice, R. D. (1996). A relationship for the wall effect on the settling velocity of a sphere at any flow regime. *International Journal of Multiphase Flow*, 22(3) :527 – 533.
- [Felice et al., 1995] Felice, R. D., Gibilaro, L., and Foscolo, P. (1995). On the hindered settling velocity of spheres in the inertial flow regime. *Chemical Engineering Science*, 50(18) :3005 – 3006.
- [Feng et al., 2005] Feng, L., Dumoulin, C. L., Dashnaw, S., Darrow, R. D., Guhde, R., DeLaPaz, R. L., Bishop, P. L., and Pile-Spellman, J. (2005). Transfemoral catheterization of carotid arteries with real-time MR imaging guidance in pigs. *Radiology*, 234(2) :551–557.
- [Ferrara et al., 1996] Ferrara, K. W., Zagar, B. G., Sokil-Melgar, J. B., Silverman, R. H., and Aslanidis, I. M. (1996). Estimation of blood velocity with high frequency ultrasound. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, 43(1) :149–157.
- [Figuroa et al., 2006] Figuroa, C. A., Vignon-Clementel, I. E., Jansen, K. E., Hughes, T. J., and Taylor, C. A. (2006). A coupled momentum method for modeling blood flow in three-dimensional deformable arteries. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(41-43) :5685–5706.
- [Fliess, 1982] Fliess, M. (1982). A remark on nonlinear observability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 27(2) :489–490.
- [Fliess et al., 1997] Fliess, M., Lévine, J., Martin, P., Ollivier, F., and Rouchon, P. (1997). Controlling nonlinear systems by flatness. *Systems and Control in the Twenty-first Century*, pages 137–154.
- [Fliess et al., 1992] Fliess, M., Lévine, J., Martin, P., and Rouchon, P. (1992). Sur les systemes non linéaires différentiellement plats. *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique*, 315(5) :619–624.
- [Fliess et al., 1995] Fliess, M., Lévine, J., and Rouchon, P. (1995). Flatness and defect of nonlinear systems : Introductory theory and examples. *International Journal of Control*, 61 :1327–1361.
- [Floyd et al., 2011] Floyd, S., Diller, E., Pawashe, C., and Sitti, M. (2011). Control methodologies for a heterogeneous group of untethered magnetic micro-robots. *Int. J. Rob. Res.*, 30(13) :1553–1565.

- [Fruchard et al., 2014] Fruchard, M., Arcese, L., and Courtial, E. (2014). Estimation of the blood velocity for nanorobotics. *IEEE Transactions on Robotics*, 30(1) :93–102.
- [Gatehouse et al., 2005] Gatehouse, P. D., Keegan, J., Crowe, L. A., Masood, S., Mohiaddin, R. H., Kreitner, K.-F., and Firmin, D. N. (2005). Applications of phase-contrast flow and velocity imaging in cardiovascular mri. *European radiology*, 15(10) :2172–2184.
- [Gauthier et al., 1992] Gauthier, J., Hammouri, H., and Othman, S. (1992). A simple observer for nonlinear systems applications to bioreactors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(6) :875–880.
- [Gauthier and Kupka, 2011] Gauthier, J.-P. and Kupka, I. (2011). *Deterministic Observation Theory and Applications*. Cambridge University Press.
- [Gilardi and Sharf, 2002] Gilardi, G. and Sharf, I. (2002). Literature survey of contact dynamics modelling. *Mechanism and Machine Theory*, 37(10) :1213 – 1239.
- [Gillies et al., 1994] Gillies, G. T., Ritter, R. C., Broadus, W. C., Grady, M. S., Howard, M. A., and McNeil, R. G. (1994). Magnetic manipulation instrumentation for medical physics research. *Review of Scientific Instruments*, 65(3) :533.
- [Gimi et al., 2007] Gimi, B., Artemov, D., Leong, T., Gracias, D. H., and Bhujwala, Z. M. (2007). MRI of regular-shaped cell-encapsulating polyhedral microcontainers. *Magnetic Resonance in Medicine*, 58(6) :1283–1287.
- [Guay, 2002] Guay, M. (2002). Observer linearization by output-dependent time-scale transformations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(10) :1730–1735.
- [Guo et al., 2007] Guo, S., Pan, Q., and Khamesee, M. B. (2007). Development of a novel type of microrobot for biomedical application. *Microsystem Technologies*, 14(3) :307–314.
- [Haberman et al., 1958] Haberman, W., Sayre, R., and Laboratory, D. W. T. M. B. H. (1958). *Motion of rigid and fluid spheres in stationary and moving liquids inside cylindrical tubes*. Report. Department of the Navy, David Taylor Model Basin, Hydromechanics Laboratory.
- [Hammouri et al., 2010] Hammouri, H., Bornard, G., and Busawon, K. (2010). High gain observer for structured multi-output nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(4) :987–992.
- [Hammouri et al., 2002] Hammouri, H., Targui, B., and Armanet, F. (2002). High gain observer based on a triangular structure. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 12(6) :497–518.
- [Hays, 1991] Hays, D. (1991). *Role of Electrostatics in Adhesion, in Fundamentals of Adhesion*. Plenum Press.
- [Hermann and Krener, 1977] Hermann, R. and Krener, A. (1977). Nonlinear controllability and observability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22(5) :728–740.

- [Holloway and Watkins, 1977] Holloway, G. A. and Watkins, D. W. (1977). LASER DOPPLER MEASUREMENT OF CUTANEOUS BLOOD FLOW. *Journal of Investigative Dermatology*, 69(3) :306–309.
- [Honda et al., 1996] Honda, T., Arai, K. I., and Ishiyama, K. (1996). Micro swimming mechanisms propelled by external magnetic fields. *IEEE Transactions on Magnetics*, 32(5).
- [Hou, 2005] Hou, M. (2005). Amplitude and frequency estimation of a sinusoid. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(6) :855–858.
- [Hou and Pugh, 1999] Hou, M. and Pugh, A. (1999). Observer with linear error dynamics for nonlinear multi-output systems. *Systems & Control Letters*, 37(1) :1–9.
- [Imura et al., 2009] Imura, K., Watanabe, S., Suzuki, M., Hirota, M., and Higashitani, K. (2009). Simulation of entrainment of agglomerates from plate surfaces by shear flows. *Chemical Engineering Science*, 64(7) :1455 – 1461.
- [Isidori, 1995] Isidori, A. (1995). *Nonlinear Control Systems (Communications and Control Engineering)*. Springer.
- [Kalman, 1963] Kalman, R. E. (1963). Mathematical description of linear dynamical systems. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics Series A Control*, 1(2) :152–192.
- [Kalman and Bucy, 1961] Kalman, R. E. and Bucy, R. S. (1961). New results in linear filtering and prediction theory. *Journal of Basic Engineering*, 83(1) :95.
- [Kehlenbeck and Felice, 1999] Kehlenbeck, R. and Felice, R. D. (1999). Empirical relationships for the terminal settling velocity of spheres in cylindrical columns. *Chemical Engineering & Technology*, 22(4) :303–308.
- [Khalil, 2001] Khalil, H. K. (2001). *Nonlinear Systems (3rd Edition)*. Pearson.
- [Knudsen, 1934] Knudsen, M. (1934). *The Kinetic Theory of Gases - Some Modern Aspects*. Methuen, London.
- [Kokotovic, 1992] Kokotovic, P. (1992). The joy of feedback : nonlinear and adaptive. *IEEE Control Systems*, 12(3) :7–17.
- [Kokotović et al., 1997] Kokotović, P. V., Janković, M., and Sepulchre, R. (1997). *Constructive nonlinear control*. Communications and control engineering. Springer, London, New York.
- [Kosa et al., 2007] Kosa, G., Shoham, M., and Zaaroor, M. (2007). Propulsion method for swimming microrobots. *IEEE Transactions on Robotics*, 23(1) :137–150.
- [Kratochvil et al., 2010] Kratochvil, B. E., Kummer, M., Erni, S., Borer, R., Frutiger, D. R., Schuerle, S., and Nelson, B. J. (2010). Minimagn : A hemispherical electromagnetic system for 5-dof wireless micromanipulation. *Proceedings of the 12th International Symposium on Experimental Robotics*.
- [Krener and Isidori, 1983] Krener, A. J. and Isidori, A. (1983). Linearization by output injection and nonlinear observers. *Systems & Control Letters*, 3(1) :47–52.

- [Krener and Respondek, 1985] Krener, A. J. and Respondek, W. (1985). Nonlinear observers with linearizable error dynamics. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 23(2) :197–216.
- [Krstić et al., 1995] Krstić, M., Kanellakopoulos, I., and Kokotovic, P. V. (1995). *Nonlinear and adaptive control design*. Adaptive and learning systems for signal processing, communications, and control. Wiley, New York. A Wiley-Interscience publication.
- [Kummer et al., 2010] Kummer, M. P., Abbott, J. J., Kratochvil, B. E., Borer, R., Sengul, A., and Nelson, B. J. (2010). Octomag : An electromagnetic system for 5-dof wireless micromanipulation. *IEEE Transactions on Robotics*, 26(6) :1006–1017.
- [Lagomarsino et al., 2003] Lagomarsino, M., Capuani, F., and Lowe, C. (2003). A simulation study of the dynamics of a driven filament in an aristotelian fluid. *Journal of Theoretical Biology*, 224(2) :215–224.
- [Levine and Marino, 1986] Levine, J. and Marino, R. (1986). Nonlinear system immersion, observers and finite-dimensional filters. *Systems & Control Letters*, 7(2) :133 – 142.
- [Luenberger, 1967] Luenberger, D. (1967). Canonical forms for linear multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 12(3) :290–293.
- [Luenberger, 1971] Luenberger, D. (1971). An introduction to observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16(6) :596–602.
- [Mahoney et al., 2011] Mahoney, A. W., Sarrazin, J. C., Bamberg, E., and Abbott, J. J. (2011). Velocity control with gravity compensation for magnetic helical microswimmers. *Advanced Robotics*, 25(8) :1007–1028.
- [Marconi et al., 2007] Marconi, L., Praly, L., and Isidori, A. (2007). Output stabilization via nonlinear luenberger observers. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 45(6) :2277–2298.
- [Marino and Tomei, 2000] Marino, R. and Tomei, P. (2000). Global estimation of n unknown frequencies. *39th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 878–883.
- [Martel et al., 2007] Martel, S., Mathieu, J.-B., Felfoul, O., Chanu, A., Aboussouan, E., Tamaz, S., Pouponneau, P., Yahia, L., Beaudoin, G., Soulez, G., and Mankiewicz, M. (2007). Automatic navigation of an untethered device in the artery of a living animal using a conventional clinical magnetic resonance imaging system. *Appl. Phys. Lett.*, 90(11) :114105.
- [Martel et al., 2009] Martel, S., Mohammadi, M., Felfoul, O., Lu, Z., and Pouponneau, P. (2009). Flagellated magnetotactic bacteria as controlled mri-trackable propulsion and steering systems for medical nanorobots operating in the human microvasculature. *International Journal of Robotics Research*, 28 :571–582.
- [Martel et al., 2006] Martel, S., Tremblay, C. C., Ngakeng, S., and Langlois, G. (2006). Controlled manipulation and actuation of micro-objects with magnetotactic bacteria. *Appl. Phys. Lett.*, 89(23) :233904.
- [Mathieu et al., 2006] Mathieu, J.-B., Beaudoin, G., and Martel, S. (2006). Method of propulsion of a ferromagnetic core in the cardiovascular system through magnetic gradients generated by an MRI system. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 53(2) :292–299.

- [Mathieu and Martel, 2009] Mathieu, J.-B. and Martel, S. (2009). Aggregation of magnetic microparticles in the context of targeted therapies actuated by a magnetic resonance imaging system. *J. Appl. Phys.*, 106(4) :044904.
- [Matsuyama and Yamamoto, 1998] Matsuyama, T. and Yamamoto, H. (1998). The electrostatic force between a charged dielectric particle and a conducting plane [translated]†. *KONA Powder and Particle Journal*, 16(0) :223–228.
- [Mazenc et al., 1994] Mazenc, F., Praly, L., and Dayawansa, W. (1994). Global stabilization by output feedback : examples and counterexamples. *Systems & Control Letters*, 23(2) :119–125.
- [Mehrtash and Khamesee, 2011] Mehrtash, M. and Khamesee, M. B. (2011). Design and implementation of lqg/ltr controller for a magnetic telemanipulation system-performance evaluation and energy saving. *Microsystem Technologies*, 17(5) :1135–1143.
- [Nelson et al., 2010] Nelson, B. J., Kaliakatsos, I. K., and Abbott, J. J. (2010). Microrobots for minimally invasive medicine. *Annual Review of Biomedical Engineering*, 12 :55–85.
- [Nezafat et al., 2004] Nezafat, R., Kellman, P., Derbyshire, J. A., and McVeigh, E. R. (2004). Real time high spatial-temporal resolution flow imaging with spiral mri using auto-calibrated sense. *Engineering in Medicine and Biology Society, 2004. IEMBS'04. 26th Annual International Conference of the IEEE*, 1 :1914–1917.
- [Nguyen and Schulze, 2003] Nguyen, A. and Schulze, H. J. (2003). *Colloidal Science of Flotation (Surfactant Science)*. CRC Press.
- [Nijmeijer and van der Schaft, 1990] Nijmeijer, H. and van der Schaft, A. (1990). *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer Nature.
- [Obregón-Pulido et al., 2002] Obregón-Pulido, G., Castillo-Toledo, B., and Loukianov, A. (2002). Aglobally convergent estimator for n-frequencies. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(5) :857–863.
- [Olamaei et al., 2010] Olamaei, N., Cheriet, F., Beaudoin, G., and Martel, S. (2010). MRI visualization of a single 15 m navigable imaging agent and future microrobot. In *2010 Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology*. Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE).
- [Ou et al., 2012] Ou, Y., Kim, D. H., Kim, P., Kim, M. J., and Julius, A. A. (2012). Motion control of magnetized tetrahymena pyriformis cells by a magnetic field with model predictive control. *The International Journal of Robotics Research*, 32(1) :129–139.
- [Pagilla and Zhu, 2004] Pagilla, P. R. and Zhu, Y. (2004). Controller and observer design for lipschitz nonlinear systems. *American Control Conference, 2004. Proceedings of the 2004*, 3 :2379–2384 vol.3.
- [Peng, 2011] Peng, K. (2011). *Design and implementation of a fuzzy controller for steering microparticles inside blood vessels by using a MRI system*. PhD thesis, École Polytechnique de Montréal.

- [Plowman and Smith, 1997] Plowman, S. and Smith, D. (1997). *Exercise Physiology*. Needham Heights, MA Allyn and Bacon.
- [Ponzini et al., 2010] Ponzini, R., Vergara, C., Rizzo, G., Veneziani, A., Roghi, A., Vanzulli, A., Parodi, O., and Redaelli, A. (2010). Womersley number-based estimates of blood flow rate in doppler analysis : In vivo validation by means of phase-contrast mri. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 57(7) :1807–1815.
- [Pouponneau et al., 2011] Pouponneau, P., Leroux, J. C., Souez, G., Gaboury, L., and Martel, S. (2011). Co-encapsulation of magnetic nanoparticles and doxorubicin into biodegradable microcarriers for deep tissue targeting by vascular navigation. *Biomaterials*, 32 :3481–3486.
- [Praly and Jiang, 1993] Praly, L. and Jiang, Z.-P. (1993). Stabilization by output feedback for systems with ISS inverse dynamics. *Systems and Control Letters*, 21(1) :19–33.
- [Praly et al., 2006] Praly, L., Marconi, L., and Isidori, A. (2006). A new observer for an unknown harmonic oscillator. *17th Int. Symposium on Math. Theory of Networks and Systems*.
- [Prätzel-Wolters, 1983] Prätzel-Wolters, D. (1983). Canonical forms for linear systems. *Linear Algebra and its Applications*, 50 :437–473.
- [Pries et al., 1996] Pries, A. R., Secomb, T. W., and Gaehtgens, P. (1996). Biophysical aspects of blood flow in the microvasculature. *Cardiovascular Research*, 32(4) :654–667.
- [Purcell, 1977] Purcell, E. M. (1977). Life at low reynolds number. *American Journal of Physics*, 45(1) :3–11.
- [Quate et al., 1991] Quate, E., Wika, K., Lawson, M., Gillies, G., Ritter, R., Grady, M., and Howard, M. (1991). Goniometric motion controller for the superconducting coil in a magnetic stereotaxis system. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 38(9) :899–905.
- [Rajamani and Cho, 1998] Rajamani, R. and Cho, Y. M. (1998). Existence and design of observers for nonlinear systems : Relation to distance to unobservability. *International Journal of Control*, 69(5) :717–731.
- [Sadelli et al., 2014a] Sadelli, L., Fruchard, M., and Ferreira, A. (2014a). Adaptive control of microrobot in pulsatile flow. *2014 IEEE Conference on Control Applications (CCA)*.
- [Sadelli et al., 2014b] Sadelli, L., Fruchard, M., and Ferreira, A. (2014b). Observer-based controller for microrobot in pulsatile blood flow. *53rd IEEE Conference on Decision and Control*.
- [Sadelli et al., 2015] Sadelli, L., Fruchard, M., and Ferreira, A. (2015). Estimation de la pulsation cardiaque et la vitesse du sang. *in 6èmes Journées Doctorales / Journées Nationales MACS Bourges (France) 2015*.
- [Sadelli et al., 2016] Sadelli, L., Fruchard, M., and Ferreira, A. (2016). 2d observer-based control of a vascular microrobot. *IEEE Transactions on Automatic Control*, pages 1–1.
- [Schmidt-Nielsen, 1984] Schmidt-Nielsen, K. (1984). *Scaling : why is animal size so important ?* Cambridge University Press, Cambridge.

- [Schürle et al., 2013] Schürle, S., Kratochvil, B. E., Pané, S., Zeeshan, M. A., and Nelson, B. J. (2013). *Nanorobotics : Current Approaches and Techniques*. Springer New York, New York, NY.
- [Schuerle et al., 2013] Schuerle, S., Erni, S., Flink, M., Kratochvil, B. E., and Nelson, B. J. (2013). Three-dimensional magnetic manipulation of micro- and nanostructures for applications in life sciences. *IEEE Trans. Magn.*, 49(1) :321–330.
- [Seldinger, 1953] Seldinger, S. I. (1953). Catheter replacement of the needle in percutaneous arteriography : a new technique. *Acta radiologica*, 39(5) :368–376.
- [Shäfer et al., 1996] Schäfer, J., Dippel, S., and Wolf, D. E. (1996). Force schemes in simulations of granular materials. *J. Phys. I France*, 6(1) :5–20.
- [Shapiro et al., 2004] Shapiro, E., Skrtic, S., Sharer, K., Hill, J. M., Dunbar, C. E., and Koretsky, A. P. (2004). Mri detection of single particles for cellular imaging. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 101(30) :10 901 – 10 906.
- [Silverman and Meadows, 1967] Silverman, L. M. and Meadows, H. E. (1967). Controllability and observability in time-variable linear systems. *SIAM Journal on Control*, 5(1) :64–73.
- [Sitti, 2009] Sitti, M. (2009). Miniature devices : Voyage of the microrobots. *Nature*, 458 :1121–1122.
- [Sorenson and Stubberud, 1968] Sorenson, H. W. and Stubberud, A. R. (1968). Non-linear filtering by approximation of the a posteriori density†. *International Journal of Control*, 8(1) :33–51.
- [Steeden et al., 2010] Steeden, J. A., Atkinson, D., Taylor, A. M., and Muthurangu, V. (2010). Split-acquisition real-time CINE phase-contrast MR flow measurements. *Magnetic Resonance in Medicine*, 64(6) :1664–1670.
- [Stokes, 1851] Stokes, G. G. (1851). On the Effect of the Internal Friction of Fluids on the Motion of Pendulums. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 9 :8.
- [Sudo, 2006] Sudo, S. (2006). Magnetic swimming mechanism in a viscous liquid. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 17(8-9) :729–736.
- [Sul et al., 2006] Sul, O. J., Falvo, M. R., Taylor, R. M., Washburn, S., and Superfine, R. (2006). Thermally actuated untethered impact-driven locomotive microdevices. *Appl. Phys. Lett.*, 89(20) :203512.
- [Sussmann, 1987] Sussmann, H. J. (1987). A general theorem on local controllability. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 25(1) :158–194.
- [Tamaz et al., 2008] Tamaz, S., Gourdeau, R., Chanu, A., Mathieu, J.-B., and Martel, S. (2008). Real-time MRI-based control of a ferromagnetic core for endovascular navigation. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 55(7) :1854–1863.

- [Taylor, 1951] Taylor, G. (1951). Analysis of the swimming of microscopic organisms. *Proceedings of the Royal Society of London Series A Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 209 :447–461.
- [Teel and Praly, 1995] Teel, A. and Praly, L. (1995). Tools for semiglobal stabilization by partial state and output feedback. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 33(5) :1443–1488.
- [Thau, 1973] Thau, F. E. (1973). Observing the state of non-linear dynamic systems†. *International Journal of Control*, 17(3) :471–479.
- [Tijskens et al., 2003] Tijskens, E., Ramon, H., and Baerdemaeker, J. (2003). Discrete element modelling for process simulation in agriculture. *Journal of Sound and Vibration*, 266(3) :493 – 514. First International {ISMA} Workshop on Noise and Vibration in Agricultural and Biological Engineering.
- [Tsuji et al., 1992] Tsuji, Y., Tanaka, T., and Ishida, T. (1992). Lagrangian numerical simulation of plug flow of cohesionless particles in a horizontal pipe. *Powder Technology*, 71(3) :239 – 250.
- [Tzirtzilakis, 2005] Tzirtzilakis, E. (2005). A mathematical model for blood flow in magnetic field. *Physics of Fluids (1994-present)*, 17(7) :077103.
- [Uecker et al., 2010] Uecker, M., Zhang, S., Voit, D., Karaus, A., Merboldt, K. D., and Frahm, J. (2010). Real-time mri at resolution of 20 ms. *NMR in Biomedecine*, 23 :986–994.
- [Vartholomeos et al., 2012] Vartholomeos, P., Akhavan-Sharif, M., and Dupont, P. (2012). Motion planning for multiple millimeter-scale magnetic capsules in a fluid environment. *Robotics and Automation (ICRA), IEEE International Conference on*, pages 1927–1932.
- [Vartholomeos and Mavroidis, 2012] Vartholomeos, P. and Mavroidis, C. (2012). In silico studies of magnetic microparticle aggregations in fluid environments for MRI-guided drug delivery. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 59(11) :3028–3038.
- [Wham et al., 1996] Wham, R. M., Basaran, O. A., and Byers, C. H. (1996). Wall effects on flow past solid spheres at finite reynolds number †. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 35(3) :864–874.
- [Wiggins et al., 1998] Wiggins, C. H., Riveline, D., Ott, A., and Goldstein, R. E. (1998). Trapping and wiggling : Elastohydrodynamics of driven microfilaments. *Biophysical Journal*, 74(2) :1043–1060.
- [Willems, 1971] Willems, J. (1971). Least squares stationary optimal control and the algebraic riccati equation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16(6) :621–634.
- [Womersley, 1955] Womersley, J. R. (1955). Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known. *The Journal of physiology*, 127(3) :553–563.
- [Wortmann et al., 2010] Wortmann, T., Dahmen, C., and Fatikow, S. (2010). Study of mri susceptibility artifacts for nanomedical applications. *Journal of Nanotechnology in Engineering and Medicine*, 1 :041002.1–04002.5.

- [Xu et al., 2015] Xu, T., Hwang, G., Andreff, N., and Régnier, S. (2015). Planar path following of 3-d steering scaled-up helical microswimmers. *IEEE Transactions on Robotics*, 31(1) :117 – 127.
- [Yang et al., 2012] Yang, C., Zhang, Q., and Zhou, L. (2012). *Stability Analysis and Design for Nonlinear Singular Systems (Lecture Notes in Control and Information Sciences)*. Springer.
- [Yesin, 2006] Yesin, K. B. (2006). Modeling and control of untethered biomicrobots in a fluidic environment using electromagnetic fields. *The International Journal of Robotics Research*, 25(5-6) :527–536.
- [Yung et al., 1998] Yung, K. W., Landecker, P. B., and Villani, D. D. (1998). An analytic solution for the force between two magnetic dipoles. *Magnetic and Electrical Separation*, 9(1) :39–52.
- [Zeitz, 1987] Zeitz, M. (1987). The extended luenberger observer for nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, 9(2) :149–156.
- [Zemouche and Boutayeb, 2013] Zemouche, A. and Boutayeb, M. (2013). On lmi conditions to design observers for lipschitz nonlinear systems. *Automatica*, 49(2) :585 – 591.
- [Zhang et al., 2005] Zhang, H., Hutmacher, D. W., Chollet, F., Poo, A. N., and Burdet, E. (2005). Microrobotics and mems-based fabrication techniques for scaffold-based tissue engineering. *Macromolecular Bioscience*, 5(6) :477–489.
- [Zhang et al., 2009] Zhang, L., Abbott, J. J., Dong, L., Kratochvil, B. E., Bell, D., and Nelson, B. J. (2009). Artificial bacterial flagella : Fabrication and magnetic control. *Appl. Phys. Lett.*, 94(6) :064107.
- [Zhang et al., 2010a] Zhang, L., Peyer, K. E., and Nelson, B. J. (2010a). Artificial bacterial flagella for micromanipulation. *Lab on a Chip*, 10(17) :2203–2215.
- [Zhang et al., 2011] Zhang, S., Gersdorff, N., and Frahm, J. (2011). Real-time magnetic resonance imaging of temporomandibular joint dynamics. *The Open Medical Imaging Journal*, 5 :1–7.
- [Zhang et al., 2010b] Zhang, S., Uecker, M., Voit, D., Merboldt, K. D., and Frahm, J. (2010b). Real-time cardiovascular magnetic resonance at high temporal resolution : radial flash with nonlinear inverse reconstruction. *Journal of cardiovascular magnetic resonance*, 12(39) :1–7.
- [Zhao et al., 2012] Zhao, J., Nagao, S., and Zhang, Z. (2012). Loading and unloading of a spherical contact : From elastic to elastic–perfectly plastic materials. *International Journal of Mechanical Sciences*, 56(1) :70–76.
- [Zhou and Wen, 2010] Zhou, J. and Wen, C. (2010). *Adaptive Backstepping Control of Uncertain Systems : Nonsmooth Nonlinearities, Interactions or Time-Variations (Lecture Notes in Control and Information Sciences)*. Springer.



# Lounis SADELLI

## Modélisation, observation et commande de robots vasculaires magnétiques

### Résumé :

La chirurgie minimalement invasive est un domaine de recherche très actif puisqu'elle permet d'envisager des thérapies ciblées et des diagnostics *in situ* tout en minimisant traumatismes, effets secondaires et temps de convalescence. En particulier, l'utilisation de systèmes miniaturisés actionnés à distance ouvre la voie à une navigation dans le système cardiovasculaire, permettant ainsi le ciblage et l'intervention sur zones difficilement accessibles du corps humain. L'objectif de cette thèse est de proposer *i)* un état de l'art sur la modélisation des forces s'exerçant sur un ou plusieurs microrobots naviguant dans des vaisseaux sanguins, *ii)* des représentations d'état exploitables à des fins de commande et d'observation, *iii)* différentes synthèses de lois de commande pour stabiliser un ou plusieurs microrobots le long d'une trajectoire de référence, *iv)* des observateurs d'état pour reconstruire les états non mesurables du système. Un microrobot magnétique naviguant dans un vaisseau sanguin subit la force de traînée, les forces surfaciques, de contact, d'interaction magnétique, et son poids apparent. Son actionnement est assuré par l'application de champs ou de gradients de champ magnétiques, et sa localisation est assurée par un imageur médical. La dynamique du ou des microrobots (système réduit) est sous forme d'état non linéaire affine en la commande avec dérive, et dépend de plusieurs paramètres physiologiques incertains, en particulier de la vitesse du sang, qui est difficile à mesurer. La dynamique du flux sanguin (système fluïdique) est alors modélisée sous forme d'une représentation d'état autonome, combinée avec le système réduit pour aboutir au système étendu. L'objectif de commande est de stabiliser les états du système réduit le long d'une trajectoire de référence. Une commande stabilisante est synthétisée par backstepping, mais elle n'est pas utilisable en l'état. Des observateurs basés sur le théorème de la valeur moyenne et sur une immersion sont synthétisés respectivement dans le cas où la pulsation cardiaque est connue ou non. La stabilité du retour de sortie est alors démontrée. La stabilité et la robustesse aux bruits de mesure, aux incertitudes paramétriques, et aux erreurs de modélisation des approches proposées sont alors illustrées par des simulations.

**Mots clés :** Microrobot magnétique, backstepping adaptatif, observateur MVT et par immersion, retour de sortie, commande de multirobots

### Modeling, observation and control of a vascular magnetic robots

### Abstract :

Minimally invasive surgery is an active research area since such systems have the potential to perform complex surgical procedures such as targeted therapies or in situ diagnosis, while minimizing trauma, side effects and recovery time. Miniaturized systems magnetically propelled by remote actuation can achieve swimming through the blood vessels network in order to provide targeted therapy, even for hard-to-reach human organs. This PhD thesis aims at addressing *i)* a review on the modeling of microrobots immersed in blood vessels, *ii)* a classification of the state space forms of such systems, *iii)* the synthesis of state feedbacks ensuring the stabilization of the microrobots along a reference trajectory, *iv)* the synthesis of observers to rebuild the unmeasured state variables. Magnetic microrobots swimming in a blood vessel face the hydrodynamic drag, surfacic and contact forces, magnetic interactions, and their apparent weight. These untethered robots are actuated by magnetic fields or magnetic gradients generation, and their localization is ensured by a medical imager. The microrobots dynamics (the so-called reduced system) lead to a nonlinear affine control subsystem with drift, and exhibits many uncertain physiological parameters, such as the blood velocity which can hardly be measured. The blood flow dynamics (the so-called fluidic system) are then modeled as an autonomous subsystem. These two subsystems result in an extended system describing the whole (robot and fluid) dynamics. The control objective is to stabilize the state of the reduced system along a reference trajectory, which is performed by an adaptive backstepping synthesis. Yet the full state is not accessible. We then synthesize either MVT or immersion based observers for the extended system, when the blood pulsation is either known or not. The output feedback stability is then proved. The stability and robustness to output noise, parametric uncertainty, and modeling errors are then illustrated by simulations.

**Keywords :** Magnetic microrobot, adaptive backstepping, MVT observer, immersion based observer, output feedback, multirobots control