



**HAL**  
open science

# Méthodes de relaxation pour la simulation des écoulements polyphasiques dans les conduites pétrolières

Michaël Baudin

► **To cite this version:**

Michaël Baudin. Méthodes de relaxation pour la simulation des écoulements polyphasiques dans les conduites pétrolières. Analyse numérique [math.NA]. Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), 2003. Français. NNT: . tel-01583001

**HAL Id: tel-01583001**

**<https://theses.hal.science/tel-01583001>**

Submitted on 6 Sep 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée à

**L'UNIVERSITÉ PARIS VI**

**ÉCOLE DOCTORALE DE SCIENCES MATHÉMATIQUES DE PARIS CENTRE**

par **Michaël Baudin**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

**DOCTEUR**

AVEC LA COLLABORATION DE

**L'INSTITUT FRANÇAIS DU PÉTROLE**

*Spécialité* : **MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES**

**MÉTHODES DE RELAXATION POUR LA SIMULATION  
DES ÉCOULEMENTS POLYPHASIQUES DANS LES  
CONDUITES PETROLIÈRES**

Soutenue le : 27 Novembre 2003

devant le jury composé de :

<b>M. Bruno Després,</b>	Président du jury,
<b>M. Benoît Perthame,</b>	Directeur de thèse,
<b>M. Rémi Abgrall,</b>	Rapporteur,
<b>M. Thierry Gallouët,</b>	Rapporteur,
<b>M. Frédéric Coquel,</b>	Examineur,
<b>M. Quang Huy Tran,</b>	Examineur,
<b>M. Christophe Berthon,</b>	Membre invité.



# Table des matières

<b>Table des figures</b>	<b>11</b>
<b>Nomenclature</b>	<b>25</b>
<b>Introduction</b>	<b>27</b>
Enjeu industriel, technique et scientifique . . . . .	27
A la recherche d'un schéma idéal . . . . .	28
Revue de divers travaux connexes . . . . .	28
Méthodologie adoptée . . . . .	33
Méthode proposée . . . . .	33
Apport et originalité de la thèse . . . . .	35
Éléments du projet . . . . .	35
Contenu de ce document . . . . .	36
<b>I Modèle diphasique isotherme non compositionnel</b>	<b>39</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>41</b>
<b>2 Modèle continu</b>	<b>43</b>
2.1 Géométrie . . . . .	43
2.2 Variables . . . . .	43
2.3 Thermodynamique . . . . .	44
2.4 Hydrodynamique . . . . .	44
2.4.1 Écoulements co-vitesse . . . . .	45
2.4.2 Écoulements dispersés . . . . .	45
2.4.3 Écoulements intermittents . . . . .	45
2.4.3.0.1 Zuber-Findlay . . . . .	46
2.4.3.0.2 Zuber-Findlay-IFP . . . . .	46
2.5 Lois de conservation . . . . .	47
2.5.1 Variables naturelles . . . . .	47
2.5.2 Variables conservatives . . . . .	47
2.6 Cadre mathématique . . . . .	48
2.7 Conditions aux limites et donnée initiale . . . . .	48
2.8 Discrétisation . . . . .	49
2.9 Outils numériques de base . . . . .	49
2.9.1 Intégration des termes sources . . . . .	49
2.9.2 Montée en ordre du schéma . . . . .	49

<b>3</b>	<b>A relaxation method for two-phase flow models with hydrodynamic closure law</b>	<b>51</b>
3.1	A relaxation model . . . . .	53
3.1.1	Design of the relaxation system . . . . .	54
3.1.2	Chapman-Enskog expansion . . . . .	56
3.2	An approximate Riemann solver . . . . .	60
3.2.1	Relaxation scheme . . . . .	60
3.2.2	Relaxation coefficients . . . . .	65
3.2.3	A maximum principle on mass fractions . . . . .	65
3.2.4	On the optimal choice of the pair $(a, b)$ . . . . .	68
3.3	Numerical results . . . . .	68
3.3.1	No-slip law . . . . .	68
3.3.1.1	Experiment 1 . . . . .	69
3.3.1.2	Experiment 2 . . . . .	70
3.3.2	Zuber-Findlay law . . . . .	70
3.3.3	Dispersed law . . . . .	71
3.3.4	Synthetic law . . . . .	71
<b>4</b>	<b>Compléments pour le schéma explicite</b>	<b>75</b>
4.1	Un autre calcul des coefficients de relaxation . . . . .	75
4.1.1	Système relaxé en coordonnées Lagrangiennes . . . . .	75
4.1.2	Calcul des coefficients de relaxation . . . . .	76
4.1.2.1	Ancienne technique de calcul des coefficients de relaxation . . . . .	77
4.1.2.2	Nouvelle technique de calcul des coefficients de relaxation . . . . .	78
4.1.2.2.1	Sous-système relaxé 1 en Lagrangien . . . . .	78
4.1.2.2.2	Sous-système relaxé 2 en Lagrangien . . . . .	78
4.1.3	Nouveau calcul pratique des coefficients de relaxation . . . . .	79
4.1.4	Expérience numérique . . . . .	79
4.2	Traitement aux limites . . . . .	80
4.2.1	Amont . . . . .	81
4.2.2	Aval . . . . .	82
<b>5</b>	<b>A semi-implicit relaxation scheme for modeling two-phase flow in a pipeline</b>	<b>85</b>
5.1	Two-phase flow model . . . . .	86
5.1.1	Equations . . . . .	86
5.1.2	Boundary and initial conditions . . . . .	87
5.1.3	Characteristics of the model . . . . .	87
5.2	Explicit relaxation scheme . . . . .	87
5.2.1	The relaxation model . . . . .	87
5.2.2	First order explicit scheme . . . . .	89
5.2.3	Relaxation coefficients . . . . .	90
5.2.3.1	Two stability theorems . . . . .	90
5.2.3.2	Practical computation of the relaxation coefficients . . . . .	92
5.2.4	Second order in space . . . . .	92
5.2.5	Second order in time . . . . .	92
5.2.6	Time step . . . . .	93
5.2.7	Treatment of boundary conditions . . . . .	93
5.2.7.1	Inlet ( $x = 0$ ) . . . . .	93
5.2.7.2	Outlet ( $x = L$ ) . . . . .	93
5.3	Semi-implicit relaxation scheme . . . . .	94

5.3.1	First order linearly implicit scheme . . . . .	94
5.3.1.1	The linear system . . . . .	94
5.3.1.2	Roe's form of the explicit relaxation scheme . . . . .	95
5.3.1.3	The first-order linearly implicit relaxation scheme . . . . .	99
5.3.2	First order semi-implicit relaxation scheme . . . . .	99
5.3.2.1	Time step of the semi-implicit relaxation scheme . . . . .	99
5.3.2.2	Implicit projection . . . . .	100
5.3.3	Second order semi-implicit scheme . . . . .	100
5.4	Numerical results . . . . .	100
5.4.1	Experiment 1 : no-slip law . . . . .	101
5.4.2	Experiment 2 : Zuber-Findlay law . . . . .	101
5.4.3	Experiment 3 : no-slip law . . . . .	103
5.4.4	Experiment 4 : Zuber-Findlay-like law . . . . .	103
<b>6</b>	<b>Analyse des temps CPU</b>	<b>107</b>
6.1	Introduction . . . . .	107
6.1.1	Contexte . . . . .	107
6.1.2	D'autres tentatives . . . . .	107
6.1.3	Méthode proposée . . . . .	107
6.2	Éléments de base . . . . .	109
6.3	Analyse algorithmique des schémas explicites . . . . .	109
6.3.1	Analyse du schéma de relaxation . . . . .	110
6.3.2	Analyse du schéma Tacite . . . . .	110
6.3.3	Analyse comparée . . . . .	110
6.3.4	Variante couplée des coefficients de relaxation . . . . .	111
6.4	Analyse algorithmique des schémas semi-implicite linéaires . . . . .	112
6.4.1	Analyse comparée . . . . .	113
6.5	Temps CPU des tubes à choc . . . . .	114
6.5.1	Temps CPU . . . . .	114
6.5.2	Décomposition du temps calcul . . . . .	115
6.5.3	Gain en temps CPU . . . . .	116
6.6	Temps CPU des Problèmes avec conditions limites . . . . .	116
6.6.1	Temps CPU . . . . .	116
6.6.2	Décomposition du temps calcul . . . . .	116
6.7	Conclusions . . . . .	117
<b>7</b>	<b>Conclusion de la première partie</b>	<b>119</b>
<b>II</b>	<b>Modèle diphasique isotherme compositionnel</b>	<b>121</b>
<b>8</b>	<b>Introduction</b>	<b>123</b>
<b>9</b>	<b>Modèle continu</b>	<b>125</b>
9.1	Modèle et notations . . . . .	125
9.1.1	Système de variables . . . . .	125
9.1.2	Équations de conservation . . . . .	126
9.1.3	Hydrodynamique . . . . .	126
9.1.4	Thermodynamique . . . . .	127

9.2	Une thermodynamique à deux constituants par phase . . . . .	127
9.2.1	Pression dans le cas général . . . . .	128
9.2.2	Pression liquide, gaz . . . . .	128
9.2.3	Pression de bulle, de rosée . . . . .	129
9.2.4	Pression dans le domaine diphasique . . . . .	129
9.2.5	Courbes isobares . . . . .	131
9.2.6	Une propriété remarquable . . . . .	132
9.2.7	Exemples de mélanges compositionnels . . . . .	133
9.2.8	Continuité de la pression . . . . .	133
<b>10</b>	<b>Méthodes de relaxation</b>	<b>139</b>
10.1	Relaxation avec découplage . . . . .	139
10.1.1	Une extension de la méthode de Larrouturou . . . . .	141
10.1.1.1	Construction . . . . .	141
10.1.1.2	Positivité des fractions massiques des constituants . . . . .	143
10.1.1.3	Conclusion . . . . .	145
10.1.2	Relaxation découplée par Born-Infeld . . . . .	145
10.1.2.1	Conclusion . . . . .	147
10.1.3	Conclusions . . . . .	147
10.2	Méthode préservant la positivité . . . . .	147
10.2.1	Relaxation du système . . . . .	148
10.2.2	Coefficients de relaxation . . . . .	150
10.2.3	Solution du problème de Riemann . . . . .	150
10.2.4	Positivité de la densité, des fractions massiques . . . . .	151
10.2.5	Implication de la méthode de relaxation . . . . .	155
10.3	Conclusions . . . . .	157
<b>11</b>	<b>Complexité des algorithmes</b>	<b>161</b>
11.1	Algorithmes explicites . . . . .	161
11.2	Algorithmes semi-implicite linéaires . . . . .	162
11.3	Conclusion . . . . .	164
<b>12</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>167</b>
12.1	Introduction . . . . .	167
12.2	Expérience 1 . . . . .	174
12.3	Expérience 2 . . . . .	174
12.4	Expérience 3 . . . . .	176
12.5	Expérience 4 . . . . .	176
12.6	Expérience 5 . . . . .	177
12.7	Conclusion . . . . .	177
<b>13</b>	<b>Conclusion de la seconde partie</b>	<b>181</b>
	<b>Bilan</b>	<b>183</b>
<b>A</b>	<b>Compléments à l'analyse du temps CPU pour le système gaz-liquide</b>	<b>185</b>

<b>Annexes</b>	<b>185</b>
<b>B Thermodynamique des fluides polyphasiques</b>	<b>197</b>
B.1 Caractéristiques thermodynamiques des fluides compressibles . . . . .	197
B.2 Calcul de la pression . . . . .	198
B.2.1 Modèle gaz-liquide . . . . .	199
B.2.1.1 Cas du liquide incompressible . . . . .	199
B.2.1.2 Cas du liquide compressible . . . . .	200
B.2.2 Mélange à 2 constituants . . . . .	200
B.2.2.1 Cas du liquide incompressible . . . . .	201
B.2.2.2 Cas du liquide compressible . . . . .	202
<b>C Relaxation par Born-Infeld</b>	<b>203</b>
<b>D Relaxation of two-phase flows via the Born-Infeld system</b>	<b>205</b>
D.1 Introduction . . . . .	205
D.2 Relaxation scheme for the scalar conservation law . . . . .	207
D.2.1 Basic ideas . . . . .	207
D.2.1.1 Non-conservative form . . . . .	207
D.2.1.2 Range of variables . . . . .	208
D.2.1.3 Riemann problem . . . . .	209
D.2.1.4 Numerical flux . . . . .	211
D.2.2 Further properties . . . . .	213
D.2.2.1 Various forms with RHS . . . . .	213
D.2.2.2 Chapman-Enskog analysis . . . . .	214
D.2.2.3 Eligible flux functions . . . . .	216
D.2.2.4 Flux monotonicity . . . . .	217
D.3 Numerical results . . . . .	218
D.3.1 Constant $g$ . . . . .	218
D.3.2 Partial Whitham . . . . .	218
D.4 Relaxation scheme for the drift-flux model . . . . .	218
D.4.1 The drift-flux model . . . . .	221
D.4.2 Basic ideas . . . . .	224
D.4.3 Whitham condition . . . . .	225
D.4.4 Relaxation scheme . . . . .	227
D.4.5 Relaxation coefficient . . . . .	229
D.5 More numerical results . . . . .	229
D.5.1 Experiment 1 . . . . .	229
D.5.2 Experiment 2 . . . . .	231
D.5.3 Experiment 3 . . . . .	231
D.6 Conclusion . . . . .	232
<b>E Compléments à l'article</b>	<b>233</b>
E.1 Introduction . . . . .	233
E.2 Généralisation des résultats théoriques . . . . .	233
E.2.1 Généralisation de la condition de Whitham . . . . .	233
E.2.2 Généralisation de l'équivalence Whitham-monotonie . . . . .	237
E.3 Application aux écoulements diphasiques . . . . .	238
E.3.1 Autre forme de la condition de Whitham . . . . .	238



E.3.2	Condition de Whitham . . . . .	238
E.4	Conclusion . . . . .	241
<b>F</b>	<b>Modèle triphasique isotherme non compositionnel</b>	<b>243</b>
F.1	Introduction . . . . .	243
F.2	Lois de conservation . . . . .	244
F.3	relaxation du système . . . . .	246
F.4	Analyse du système . . . . .	246
F.5	Solution du problème de Riemann . . . . .	247
F.6	Coefficients de relaxation de base . . . . .	248
F.7	Principe du maximum . . . . .	248
F.8	Interprétation du schéma comme une méthode de Roe . . . . .	252
F.9	Conclusion . . . . .	253
F.10	Perspectives . . . . .	253
<b>G</b>	<b>Modèle diphasique non isotherme non compositionnel</b>	<b>255</b>
G.1	Introduction . . . . .	255
G.1.1	D'autres tentatives . . . . .	255
G.1.2	Méthode proposée . . . . .	256
G.2	Modèle continu . . . . .	256
G.2.1	Variables . . . . .	256
G.2.2	Thermodynamique . . . . .	256
G.2.3	Hydrodynamique . . . . .	257
G.2.4	Écriture d'une équation d'énergie exacte . . . . .	257
G.2.5	Cadre mathématique . . . . .	257
G.3	Méthode de relaxation . . . . .	258
G.3.1	Relaxation . . . . .	258
G.3.2	Développement de Chapman-Enskog . . . . .	259
G.3.2.1	Le développement . . . . .	259
G.3.2.2	Un polynôme "simple" . . . . .	260
G.3.2.3	Le polynôme en question . . . . .	262
G.3.2.4	Calcul pratique des coefficients de relaxation . . . . .	264
G.3.3	Éléments propres . . . . .	265
G.3.4	Calcul des invariants forts . . . . .	269
G.3.5	Solution du problème de Riemann . . . . .	269
G.3.5.0.1	Détail des calculs . . . . .	270
G.3.6	Interprétation du schéma comme une méthode de Roe . . . . .	271
G.4	Conclusion . . . . .	274
	<b>Bibliographie</b>	<b>275</b>
	<b>Index</b>	<b>279</b>

# Table des figures

1	Le projet Tacite . . . . .	29
2.1	Conduite élémentaire . . . . .	43
2.2	écoulements verticaux . . . . .	46
2.3	écoulements horizontaux . . . . .	46
2.4	Discrétisation du domaine intérieur . . . . .	49
2.5	Reconstruction linéaire . . . . .	50
3.1	Domains $\omega_+(\mathbf{u})$ and $\omega_-(\mathbf{u})$ . . . . .	59
3.2	Experiment 1—A $\lambda^-$ -rarefaction for the no-slip closure law. . . . .	69
3.3	Experiment 2—A 3-wave Riemann problem for the no-slip closure law. . . . .	70
3.4	Experiment 3—A 3-wave Riemann problem for the Zuber-Findlay law. . . . .	71
3.5	Experiment 4—Contact Discontinuity for the dispersed law. . . . .	72
3.6	Experiment 5—3-shock for the synthetic law. . . . .	73
4.1	Discontinuité de contact pour le modèle de Zuber-Findlay. . . . .	80
4.2	Riser se déversant dans un séparateur . . . . .	83
5.1	Detail of experiment 1, no-slip law . . . . .	101
5.2	Numerical results of experiment 1, no-slip law. . . . .	101
5.3	Detail of experiment 2, Zuber-Findlay law . . . . .	102
5.4	Numerical results of experiment 2, Zuber-Findlay law. . . . .	102
5.5	Detail of experiment 3, no-slip law with boundary conditions . . . . .	102
5.6	Experiment 3, TACITE results . . . . .	103
5.7	Experiment 3, relaxation results . . . . .	103
5.8	Detail of experiment 4, Zuber-Findlay-like law with boundary conditions . . . . .	104
5.9	Experiment 4, gas surface fraction. Left : TACITE results, Right : relaxation. . . . .	104
6.1	Complexité des opérations de base . . . . .	109
6.2	Complexité des opérations d’algèbre linéaire . . . . .	109
6.3	Nombre d’opérations du schéma de relaxation explicite . . . . .	110
6.4	Nombre d’opérations du schéma Tacite explicite . . . . .	111
6.5	Deux variantes pour les coefficients de relaxation . . . . .	112
6.6	Nombre d’opérations des schémas semi-implicite linéaires . . . . .	113
6.7	Part asymptotique de chaque étape dans le total . . . . .	113
6.8	Temps CPU des 2 cas de tube à choc . . . . .	114
6.9	Part de chaque étape dans le cas 1 . . . . .	115
6.10	Part de chaque étape dans le cas 2 . . . . .	115
6.11	Rapport des temps CPU . . . . .	115
6.12	Temps CPU des 2 expériences avec Conditions Limites . . . . .	116

6.13	Part de chaque étape dans l'expérience 1 . . . . .	117
6.14	Part de chaque étape dans l'expérience 2 . . . . .	117
9.1	Bilan équations-inconnues . . . . .	126
9.2	Carte des phases en fonction de $(\rho, c_1)$ à la température $T = T^0$ . . . . .	129
9.3	Loi de Henry pour $X_1(p)$ et $Y_1(p)$ pour la température $T = T^0$ . . . . .	130
9.4	Courbes isobares dans le plan $(\rho, \rho Y)$ . . . . .	131
9.5	Une courbe isobare dans le plan $(\rho, \rho c_1)$ . . . . .	132
9.6	Densité avec 2 constituants . . . . .	134
9.7	Fraction massique du premier constituant avec 2 constituants . . . . .	134
9.8	Caractéristiques thermodynamiques de quelques fluides . . . . .	135
9.9	Pression à $(c_1, T^0)$ fixés . . . . .	135
10.1	Détail de la matrice Jacobienne de $\mathcal{F}$ . . . . .	148
10.2	Détail de la matrice Jacobienne de $\mathcal{G}$ . . . . .	149
10.3	Solution du problème de Riemann pour le système relaxé . . . . .	151
10.4	Détail de la matrice Jacobienne modifiée . . . . .	158
10.5	Détail de la matrice $ \tilde{A}^{Roe} $ . . . . .	159
10.6	Détail de la réduction du système linéaire . . . . .	160
11.1	Nombre d'opérations du schéma de relaxation explicite . . . . .	161
11.2	Nombre d'opérations du schéma Tacite explicite . . . . .	162
11.3	Étude du rapport (nombre d'opérations Tacite/ relaxation) pour le schéma explicite . . . . .	162
11.4	Nombre d'opérations du schéma de relaxation semi-implicite linéaire . . . . .	163
11.5	Nombre d'opérations du schéma Tacite semi-implicite linéaire . . . . .	163
11.6	Étude du rapport (nombre d'opérations Tacite/ relaxation) pour le schéma semi-implicite linéaire . . . . .	164
11.7	Détail du calcul des dérivées partielles - 1/2 . . . . .	165
11.8	Détail du calcul des dérivées partielles - 2/2 . . . . .	166
12.1	Paramètres des schémas numériques . . . . .	168
12.2	Position des expériences par rapport aux transitions de phases . . . . .	168
12.3	Détail de l'expérience 1 . . . . .	169
12.4	Détail de l'expérience 2 . . . . .	170
12.5	Détail de l'expérience 3 . . . . .	171
12.6	Détail de l'expérience 4 . . . . .	172
12.7	Détail de l'expérience 5 . . . . .	173
12.8	Expérience 1 – Résultat des schémas explicites (à gauche) et semi-implicite linéaire (à droite) . . . . .	174
12.9	Expérience 1 – Temps d'exécution . . . . .	174
12.10	Expérience 2 – Résultat des schémas explicites (à gauche) et semi-implicite linéaire (à droite) . . . . .	175
12.11	Expérience 2 – Résultat des schémas explicites . . . . .	175
12.12	Expérience 2 – Temps d'exécution du schéma de relaxation semi-implicite linéaire (à gauche) et du schéma . . . . .	175
12.13	Expérience 3 – Résultat du schéma de relaxation explicite . . . . .	176
12.14	Expérience 4 – Résultat des schémas explicites . . . . .	177
12.15	Explication des résultats de l'expérience 4 . . . . .	178
12.16	Position de l'expérience 4 dans le plan $(\rho, \rho c_1)$ . . . . .	179
12.17	Expérience 5 – Résultat des schémas explicites . . . . .	179
12.18	Expérience 5 – Résultat des schémas semi-implicite linéaires . . . . .	179
13.1	Objectifs de la thèse en termes de lois de conservation . . . . .	184

A.1	Détail du calcul des coefficients de relaxation . . . . .	185
A.2	Détail du calcul du flux du schéma de relaxation . . . . .	186
A.3	Détail du calcul du flux du schéma Tacite . . . . .	187
A.4	Détail du schéma de relaxation semi-implicite linéaire (blocs de taille 5, demi-largeur de bande 9)	188
A.5	Détail de la matrice $\tilde{A}(\mathbf{v})$ . . . . .	189
A.6	Détail de la matrice $ \tilde{A}^{Roe} $ . . . . .	190
A.7	Détail du schéma de relaxation semi-implicite linéaire réduit (blocs de taille 4, demi-largeur de bande 7)	191
A.8	Détail du schéma Tacite semi-implicite linéaire (blocs de taille 3, demi-largeur de bande 5)	192
A.9	Détail du cas 1, glissement nul . . . . .	193
A.10	Détail du cas 2, Zuber-Findlay . . . . .	193
A.11	Détail de l'expérience 1 avec Conditions Limites . . . . .	194
A.12	Détail de l'expérience 2 avec Conditions Limites . . . . .	194
A.13	Détail des coûts des évaluations de base dans le cas de la loi de glissement Zuber-Findlay	195
B.1	Densité avec un liquide incompressible . . . . .	198
B.2	Densité avec un liquide compressible . . . . .	198
D.1	Isolines of $u$ and $F$ . . . . .	210
D.2	Solution to inner Riemann problem (D.20) in Case 1. . . . .	211
D.3	Solution to inner Riemann problem (D.20) in Case 2. . . . .	211
D.4	Geometrical interpretation of the Whitham conditions. . . . .	216
D.5	Constant $g$ . . . . .	219
D.6	Constant $g$ , $u_L = 0.25$ , $u_R = 0.5$ . . . . .	220
D.7	Constant $g$ , $u_L = 0.25$ , $u_R = 0.5$ . . . . .	220
D.8	Constant $g$ , $u_L = 0.5$ , $u_R = 0.25$ . . . . .	221
D.9	Partial Whitham . . . . .	222
D.10	Partial Whitham. $u_L = 1$ , $u_R = 0$ . . . . .	223
D.11	Partial Whitham. $u_L = 0.99$ , $u_R = 0.01$ . . . . .	223
D.12	Partial Whitham. $u_L = 0.99$ , $u_R = 0.01$ . . . . .	224
D.13	Experiment 1 . . . . .	230
D.14	Experiment 2 . . . . .	231
D.15	Experiment 3 . . . . .	232
E.1	Condition de Whitham . . . . .	239
F.1	Méthodes de récupération de l'effluent . . . . .	244
F.2	Solution du problème de Riemann pour le système relaxé . . . . .	248
F.3	Etude de la fonction $\frac{x}{x+Y_R}$ . . . . .	251
G.1	Solutions du système d'inégalités . . . . .	262
G.2	Solutions de (G.55) . . . . .	264
G.3	Nombre de solutions de (G.55) . . . . .	264
G.4	Éléments caractéristiques de la méthode "IIV" diphasique en coordonnées Lagrangiennes	266
G.5	Éléments caractéristiques de la méthode "IIV" diphasique en coordonnées Eulériennes	267
G.6	Détail de la matrice Jacobienne modifiée . . . . .	268
G.7	Détail de la matrice $ \tilde{A}^{Roe} $ . . . . .	273



# Résumé

Nous proposons des schémas numériques de relaxation pour la simulation des équations polyphasiques dans les conduites pétrolières. Nous considérons plusieurs systèmes de lois de conservation : modèles diphasique et triphasiques, isotherme ou non, compositionnels ou non. Ces systèmes sont complétés par deux types de lois de fermetures très non linéaires : les lois thermodynamiques et hydrodynamiques.

Le travail porte sur le développement de schémas explicites et semi-implicite linéaires. Ces schémas sont conçus pour être plus robustes et plus rapides que le schéma de type VFRoe actuellement utilisé.

Nous pouvons, grâce à l'ajustement de deux coefficients, imposer que le schéma de relaxation explicite respecte la positivité des fractions massiques partielles. L'évaluation du flux numérique, fondé sur une méthode de Godunov, est peu coûteuse. Les valeurs propres du système de relaxation sont nécessairement réelles. La construction du schéma semi-implicite linéaire est quand à elle possible grâce à la dégénérescence linéaire des champs caractéristiques du système de relaxation et permet une interprétation de la méthode de relaxation comme une méthode de Roe.

**Mots-clés :** Systèmes hyperboliques, Volumes Finis, relaxation, écoulements polyphasiques, TACITE.



# Relaxation methods for the simulation of multiphase flows in pipelines

## Abstract

We present several relaxation numerical schemes for the simulation of the multiphase flows in pipelines. We consider several systems of conservation laws : two-phase and three-phase models, constant temperature or not, multi-component or not. Those systems are completed by two types of closure laws highly non linear : thermodynamic and hydrodynamic.

The work is devoted to the developpement of explicit and semi-implicit linear numerical schemes. These schemes are designed in order to be more rough and faster than the VFRoe-like scheme actually used.

Thanks to the tuning of two coefficients, we can enforce that the explicit numerical scheme keeps positive the partial mass fractions. The computation of the numerical flux, based on a Godunov method, is of low cost. The eigenvalues of the relaxation system are necessarilly real. The design of the semi-implicit numerical scheme is possible since the characteristic fields of the relaxation system are linearly degenerated and give rise to an interpretation of the relaxation method as a Roe method.

**Keywords** : Hyperbolic systems , Finite Volumes, relaxation, multiphase flows, TACITE





# Remerciements

Je remercie Benoît Perthame, professeur à l'Université Paris VI et à l'École Normale Supérieure, qui fut mon directeur de thèse.

Frédéric Coquel, chargé de recherche au CNRS, qui a co-dirigé cette thèse, a beaucoup contribué à ce travail et je tiens à le remercier.

Je suis honoré que Rémi Abgrall, professeur à l'Université Bordeaux I et Thierry Gallouët, directeur du Laboratoire Analyse, Topologie et Probabilités de l'Université Aix-Marseille, aient accepté d'être rapporteurs de cette thèse.

Christophe Berthon, maître de conférence à l'Université Bordeaux I, participa à la genèse du sujet et m'a fait part de ses commentaires et de son soutien.

Je tiens à remercier Quang-Huy Tran, docteur et ingénieur de recherche dans la division Technologie, Informatique et Mathématiques Appliquées de l'Institut Français du Pétrole, qui fut mon responsable pendant ces trois années. Il m'a constamment soutenu tant au niveau scientifique qu'au niveau humain et ses idées ont beaucoup contribué au résultat final.

Je dois remercier Roland Masson, docteur et chef du département Mathématiques Appliquées dans la division, Technologie, Informatique et Mathématiques Appliquées de l'Institut Français du Pétrole.

Je tiens à remercier Véronique Henriot, ingénieur de recherche dans la division Mécanique Appliquée de l'Institut Français du Pétrole, chef du projet Tacite. Je remercie également l'équipe Tacite, et en particulier Emmanuel Duret et Martin Gainville.

Isabelle Faille, docteur et ingénieur de recherche dans la division Technologie, Informatique et Mathématiques Appliquées de l'Institut Français du Pétrole, m'a beaucoup aidé dans la réalisation de ce travail. Les nombreuses discussions que nous avons eu m'ont souvent éclairé.

Je remercie également Françoise Willien, ingénieur de recherche dans la division Technologie, Informatique et Mathématiques Appliquées de l'Institut Français du Pétrole.

Je remercie Ashwin Chinnayya et Nicolas Seguin, anciens camarades du DEA de Bordeaux et de l'école Matmeca pour les discussions que nous avons eu sur l'hyperbolique.

J'adresse des remerciements particuliers à Frédéric Daude et Alexandre Fornel, anciens élèves de l'École Matmeca, qui, en tant que stagiaires, m'ont aidé pendant cette thèse.

Enfin, je tiens à remercier Pierre Fabrie, professeur à l'Université Bordeaux I, sans qui je n'aurais pas fait cette thèse.



*À Vi-An.*



*La source la plus intense de satisfaction est la créativité. Aucun préjugé n'est aussi néfaste et vaniteux que celui qui accorde la prévalence à la création dans le domaine des talents spécialisés, au lieu de la chercher originellement dans l'épanouissement de la personnalité, dans l'art de vivre. Le chef-d'oeuvre de la vie est l'être humain sainement constitué en chair et en âme. Cette créativité s'étend de la naissance à la mort.*

*Paul Diel*



# Nomenclature

## Indices de phase

L : Liquide  
G : Gaz  
W : Eau

## Variables liées à la discrétisation

$i$  : Indice de maille  
 $I$  : Nombre de mailles  
 $i + 1/2$  : Indice de l'arête entre les mailles  $i$  et  $i + 1$   
**L** : Gauche (problème de Riemann)  
**R** : Droit (problème de Riemann)  
 $n$  : Indice d'itération en temps  
 $\Delta t^n$  : Pas de temps de l'itération  $n$  (s)  
 $\Delta x$  : Pas d'espace (m)

## Variables physiques

$t$  : Temps (s)  
 $\rho$  : Masse volumique du mélange (kg/m<sup>3</sup>)  
 $\tau$  : Co-volume =  $1/\rho$  (m<sup>3</sup>/kg)  
 $X$  : Fraction massique de liquide  
 $Y$  : Fraction massique de gaz  
 $Z$  : Fraction massique d'eau  
 $v$  : Vitesse massique du mélange (m/s)  
 $u_s$  : Vitesse surfacique du mélange (m/s)  
 $\varphi$  : Glissement entre les phases (m/s)  
 $C_f$  : Coefficient de frottement  
 $g$  : Accélération de la pesanteur (9.81 m/s<sup>2</sup>)



---

### Caractéristiques de la conduite

---

$x$  : Abcisse le long de la conduite (m)  
 $L$  : Longueur (m)  
 $D$  : Diamètre (m)  
 $\theta$  : Angle d'inclinaison (rad)

### Variables liées à la relaxation

---

$P$  : Pression apparente  
 $\sigma$  : Impulsion apparente  
 $\Pi$  : Pression apparente relaxée  
 $\Sigma$  : Impulsion apparente relaxée  
 $(a, b)_{i+1/2}$  : Coefficients de relaxation

### Variables vectorielles Eulériennes

---

$\mathbf{u}$  : Var. conservative du système d'équilibre  
 $\mathbf{v}$  : Var. conservative du système de relaxation  
 $\mathcal{F}$  : Flux physique du système d'équilibre  
 $\mathcal{G}$  : Flux physique du système de relaxation  
 $\mathbf{H}$  : Flux numérique

### Variables matricielles

---

$\nabla \mathcal{F}$  : Matrice Jacobienne du flux du système de relaxation  
 $\mathbb{I}$  : Matrice identité  
 $\mathbb{A}$  : Matrice du système linéaire impliquée dans la méthode implicite linéaire

### Variables thermodynamiques

---

$p$  : Pression (Pa)  
 $T$  : Température (°C)  
 $\rho_G$  : Masse volumique du gaz  
 $\rho_L$  : Masse volumique du liquide  
 $a_G$  : Vitesse du son dans le gaz  
 $p^0$  : Pression atmosphérique ie  $10^5$  (Pa)  
 $\rho_L^0$  : Masse volumique du liquide pour  $p = p^0$   
 $a_L$  : Vitesse du son dans le liquide  
 $p_k^0$  : Pression de saturation du constituant  $k$   
 $p_{bu}$  : Pression de bulle  
 $p_{ro}$  : Pression de rosée

# Introduction

## Enjeu industriel, technique et scientifique

De grandes quantités d'hydrocarbures sont présentes dans des champs offshore [70] pour lesquels la méthode de production classique consiste à traiter le mélange triphasique d'eau, d'huile et de gaz sur la plate-forme. Cette opération consiste à séparer les hydrocarbures puis à transporter pétrole et gaz dans deux conduites distinctes jusqu'à terre. Outre le coût d'installation de ces conduites, le coût de maintenance des appareillages sur la plate-forme est élevé. Le transport polyphasique, dans lequel le mélange circule dans une seule conduite pétrolière, permet de réduire ces coûts en reportant le traitement sur des plates-formes situées soit en eaux peu profondes, soit à terre.

Pour simuler ces écoulements polyphasiques compositionnels, l'Institut Français du Pétrole (IFP) développe depuis plusieurs années le code TACITE<sup>1</sup> (voir figure 1). Il s'appuie sur une méthode numérique performante qui a été largement éprouvée sur de nombreux cas-tests industriels, dont certains cas très "raides".

Dans ce secteur très pointu, le principal concurrent de Tacite est OLGA, un code norvégien, fondé sur un modèle mathématique différent de celui de Tacite. Les dernières difficultés majeures de la méthode Tacite étant sa relative lenteur et ses problèmes de robustesse, la mise au point de méthodes numériques plus performantes pourrait donner un avantage concurrentiel important au code de l'IFP.

Les conduites pétrolières, généralement immergées, guident sur des grandes distances un mélange composé de gaz, d'eau et de pétrole, depuis la plate-forme d'extraction jusqu'à un site de stockage, tous deux situés en surface. Elles reposent sur le fond marin et épousent donc les variations de topographie de celui-ci. Les changements d'inclinaison font que, à l'intérieur d'une même conduite, l'écoulement peut prendre des allures très différentes : annulaire, stratifié, dispersé, etc. À chaque régime correspond ainsi un modèle mathématique particulier.

Il est important de pouvoir prédire ce qui se passe le long des conduites, afin

- d'aider les opérateurs à mieux piloter le transport du mélange : en jouant sur les paramètres judicieux, on peut éviter des phénomènes indésirables comme le *slugging* (création de bouchons) ;
- de permettre aux constructeurs de mieux dimensionner les équipements : on peut ainsi réaliser des économies substantielles.

Le modèle développé dans Tacite est connu sous le nom de "Drift-Flux Model" (DFM). Dans le cas des écoulements diphasiques isothermes, il est fondé sur trois équations aux dérivées partielles. Les deux premières sont les équations de conservation de la masse de gaz et de liquide. La dernière est l'équation de conservation de la quantité de mouvement du mélange. Ces lois de conservation

---

<sup>1</sup>Transient Analysis Code IFP Total Elf

sont complétées par des lois de fermetures thermodynamiques (pression) et hydrodynamique (écart de vitesse entre les phases ou encore *glissement*). Nous appelons ce système *gaz-liquide*.

Les lois physiques utilisées dans Tacite sont fort complexes. C’est le prix à payer pour garantir une bonne cohérence avec la réalité. De même, le schéma numérique de Tacite consomme beaucoup de temps calcul. C’est le prix à payer pour traiter avec rigueur toutes les difficultés inhérentes au problème.

## A la recherche d’un schéma idéal

Le schéma numérique implémenté dans Tacite était jusqu’en 1994 celui de Lerat explicite [44]. Ce schéma, d’ordre 2 en espace et en temps présente le défaut d’engendrer des oscillations aux voisinages des discontinuités (caractère dispersif). Notons que, malgré ces défauts majeurs, ce schéma est encore utilisé dans [34].

Pour le stabiliser, un schéma hybride avait été proposé : le principe est de combiner le schéma de Lerat avec un schéma d’ordre 1 très diffusif, celui de Lax-Friedrichs. Malgré une très nette amélioration des solutions calculées par le schéma hybride, des oscillations de faible amplitude persistaient, dont une conséquence était de donner des masses négatives dans le cas d’écoulements monophasiques.

L’équipe Tacite a donc été amenée à développer le schéma VFRoe : ce schéma numérique ne nécessite, de la part du système de lois de conservation, que son flux et sa Jacobienne. Ce schéma décentré d’ordre 1 est classiquement monté à l’ordre 2 en espace par une technique de limitation de pente et à l’ordre 2 en temps par une méthode de Runge-Kutta. Mais ce schéma ne permet pas de simuler les cas les plus durs (conduite verticale). En effet, il est écrit dans Masella, Faille & Gallouët [49] : “*The VFRoe flux is therefore not a continuous function with respect to its arguments near states where an eigenvalue can have a change of its sign.*”. Une variante de ce schéma a alors été utilisée : en introduisant une diffusion numérique supplémentaire, les cas les plus raides sont traités par le schéma de Faille & Heintzé [26]. Nous appelons ce schéma VFRoe–Tacite.

Mais ce schéma possède deux inconvénients en ce qui concerne :

- la rapidité : le schéma Tacite est gourmand en temps calcul. Cela reste vrai malgré une implémentation partielle du schéma qui permet d’obtenir des pas de temps plus grands : explicite pour les ondes lentes, linéairement implicite pour les ondes rapides. C’est en particulier le calcul numérique des valeurs propres et des vecteurs propres du système qui consomme une grande partie du temps liée au schéma.
- la robustesse : le calcul des valeurs propres du système conduit parfois, dans les cas très difficiles, à des valeurs propres complexes. Dans ce dernier cas, la simulation s’arrête car le système n’est plus hyperbolique et la théorie de ce domaine ne permet plus de rien garantir... D’autre part, la positivité de la fraction massique de chaque constituant n’est pas garantie par le schéma actuel. Certes, le schéma Tacite est, de ce point de vue, plus robuste que le schéma de Lerat. Pourtant, dans le schéma Tacite, l’ajout de diffusion numérique pour stabiliser la méthode ne permet pas d’avoir d’argument théorique permettant d’assurer cette propriété.

La question scientifique qui se trouve à la base de ce travail est donc de trouver une méthode à la fois plus rapide et plus robuste.

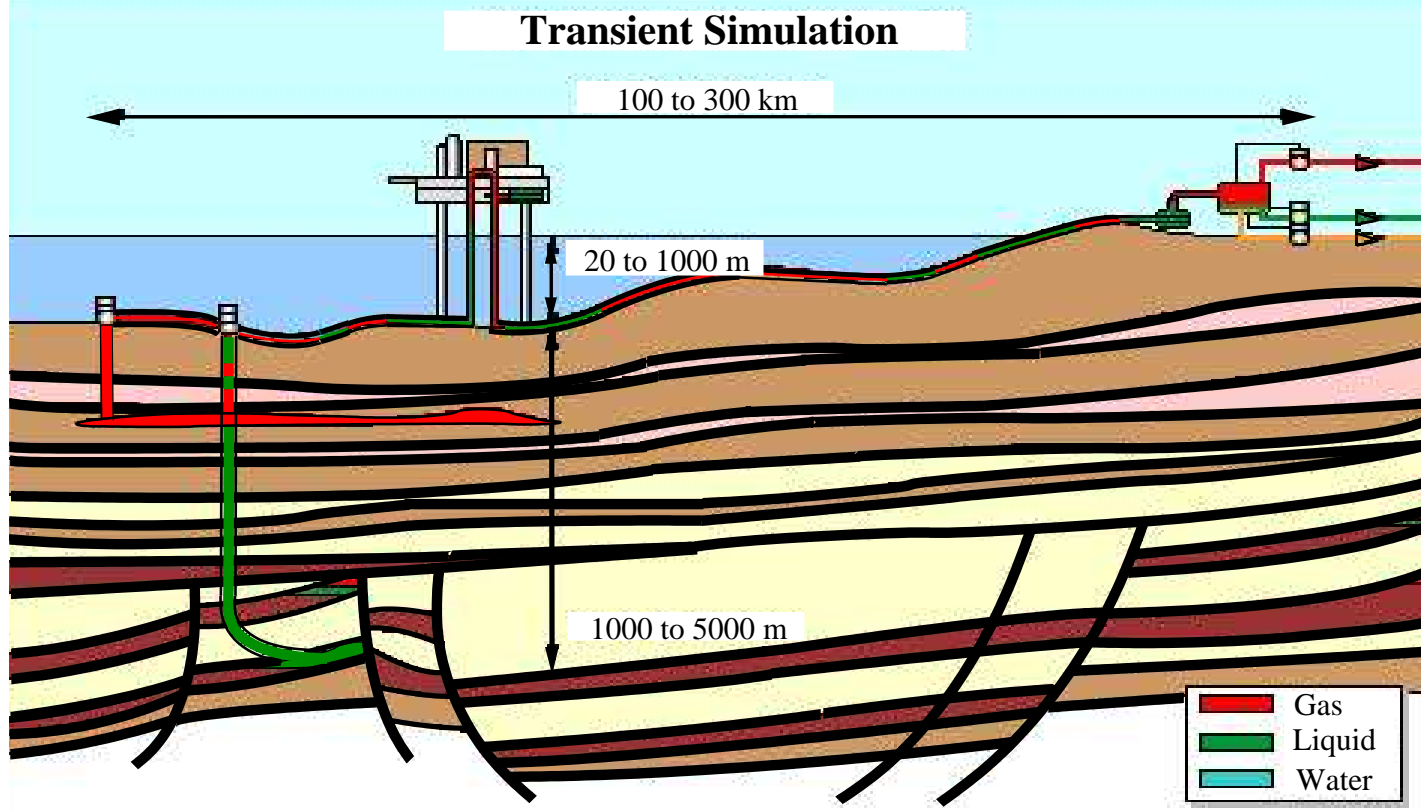


FIG. 1 – Le projet Tacite

## Revue de divers travaux connexes

Notons que l'étude de Fjelde & Karlsen [27] contient une étude comparative de schéma numériques pour la simulation des écoulements diphasiques en conduite avec le modèle DFM.

### Un schéma de Roe “entièrement numérique”

Ce schéma, proposé par Romate en 1998 dans [57] est fondé sur une méthode de Roe. Considérant qu'il n'est pas possible, avec le modèle DFM fondé sur une loi hydrodynamique complexe, de calculer analytiquement une matrice de Roe, l'auteur propose de la calculer numériquement. La matrice Jacobienne du système est calculée sur un état moyen (par exemple la moyenne des états gauche et droit) et décomposée en valeurs propres, vecteurs propres par des techniques numériques classiques. Puis, afin de satisfaire aux conditions de Roe, la matrice des valeurs propres est modifiée, ce qui mène à la résolution d'un système linéaire.

L'avantage de cette stratégie est qu'elle est entièrement numérique. L'inconvénient est qu'elle est relativement proche de la méthode VFRoe-Tacite et que donc elle pose les mêmes problèmes de coût (décomposition en éléments propres) et de robustesse. Ce dernier problème est en particulier souligné dans [27]. Dans cet article, les problèmes de positivité des fractions massiques sont traités d'une manière non-conservative (par troncature), ce qui n'est pas satisfaisant. D'autres remèdes ont été suggérés (voir [27]), mais il n'apparaît pas que cette stratégie, bien qu'elle donne des résultats satisfaisants dans un certain nombre de cas, puisse mener à un schéma peu coûteux et très robuste.

### Un schéma hybride

Certains auteurs [28] tentent de diminuer le coût du schéma numérique. Ils disposent pour cela de deux schémas :

1. un schéma de Roe fondé sur les variables conservatives mais coûteux,
2. un schéma de Roe fondé sur les variables primitives (non-conservatives) peu coûteux mais incapable de détecter correctement les discontinuités.

Le schéma de base est le schéma fondé sur les variables primitives sauf pour les cellules pour lesquelles un critère portant sur la différence de pression est vérifié : pour ces cellules, c'est le schéma de Roe fondé sur les variables conservatives qui est utilisé. Ce schéma est appelé “primitif/conservatif”.

Cette idée a été testée avec succès sur une conduite horizontale avec une loi de glissement nul.

L'idée, malgré son bon fondement théorique dans les cas les plus simples, paraît limitée dans son utilisation pour deux raisons. Tout d'abord, il est difficile de concevoir un critère adéquat pour les cas plus difficiles. Comme tout schéma hybride “X/Y” (et comme celui de Lerat/Lax-Friedrichs), ce schéma porte en lui le problème du choix ; ni le schéma “X” ni le schéma “Y” ne sont parfaitement adaptés au problème. D'autre part, l'expérience de Tacite prouve l'instabilité du schéma de Roe conservatif dans le cas-test de la conduite verticale : le problème de robustesse n'est pas résolu.

### Un principe du maximum sur les fractions massiques

Dans [41], B. Larrouturou s'intéresse à la simulation numérique des écoulements de mélanges de gaz réactifs. Il concentre ici son attention sur les équations d'Euler diphasique. Il s'agit du système de la dynamique des gaz couplé à une équation de transport sur la fraction massique de gaz  $Y$  (cette équation s'identifie avec l'équation d'évolution de  $Y$  du système Tacite lorsque le glissement entre

les phases est nul). Comprendre à fond les conclusions de cette étude est fondamental pour nous, car c'est la plus sérieuse étude sur la positivité d'un système diphasique.

Du point de vue du traitement de l'équation de transport sur  $Y$ , l'auteur distingue deux approches :

- (A) : **découplée** Elle consiste à traiter séparément les équations d'Euler et l'équation de transport sur  $Y$ . Pour les équations d'Euler, on utilise un des nombreux schémas (monophasiques) classiques. Pour l'équation de transport, on utilise un schéma amont de type "donor-cell".
- (B) : **couplée** Elle consiste à traiter le système comme un tout et à étendre à ce système plus grand les schémas amont qui ont été développés pour le cas monophasique. L'auteur présente les extensions diphasiques des schémas de Van Leer, Roe et Osher. Le schéma VFRoe–Tacite est à mettre dans cette classe de schémas.

L'approche (A) a l'avantage d'être simple et de respecter *la positivité de  $Y$*  (mais pas  $Y \leq 1$ ). Les schémas de type (B) sont plus cher du point de vue du temps de calcul mais sont beaucoup plus précis. Toutefois, les schémas de Roe et d'Osher, ne satisfont pas le principe du maximum, sans toutefois s'en éloigner beaucoup (à  $10^{-1}$  près). Le schéma de Van-Leer vérifie, lui, le principe du maximum.

Dans le but d'améliorer la version (B) des schémas d'Osher et de Roe, l'auteur propose alors une approche (C). Elle est fondée sur une analyse de la solution exacte du problème de Riemann, qui, dans ce cas, est connue. La solution consiste alors à utiliser un schéma de Godunov en modifiant la composante du flux selon  $Y$  de façon astucieuse.

Expliquons alors pourquoi nous ne pouvons pas utiliser directement les résultats de cette étude. D'abord, il n'est pas possible pour nous d'utiliser le schéma de Van Leer, car nous n'avons pas d'expression algébrique du flux physique à cause de nos lois de fermetures très complexes. En particulier, la loi de glissement est, dans notre système, non nulle alors que le système de Larroutou ne s'identifie à notre système que lorsque le glissement est nul. Cela est dû au fait que le modèle traité par Larroutou concerne des mélanges de gaz alors que nous traitons un mélange gaz-liquide.

Ensuite, il n'est pas possible d'utiliser l'approche (C) pour les schémas de Roe et d'Osher car nous n'avons pas la solution analytique du problème de Riemann du système gaz-liquide dans le cas général. Pourtant, nous verrons dans la suite pourquoi l'analyse de Larroutou est féconde dans le cas du système relaxé, dans lequel la solution du problème de Riemann est facilement déterminée.

## Modèles alternatifs

D'autres auteurs ont préféré fabriquer des schémas numériques pour des modèles physiques différents. Une étude comparative des résultats numériques obtenus avec ces modèles est exposée dans [50].

## Two-Fluid Model

Ce modèle (noté TFM), utilisé dans le code OLGA, est gouverné par un ensemble de quatre équations aux dérivées partielles, les deux premières expriment la conservation de la masse de chaque phase et les deux dernières représentent la conservation de quantité de mouvement de chaque phase. Dans certains cas particuliers, on peut démontrer que le système possède quatre valeurs propres réelles, c'est à dire que c'est un système hyperbolique.

La thèse de J.-M. Masella [48] est consacrée à la construction de schémas numériques pour ce système. Une analyse du comportement de ce schéma est présentée dans [49] (voir aussi [30]). Le schéma est basé sur une méthode de volumes finis pour laquelle la discrétisation en temps est explicite par rapport aux petites valeurs propres et linéairement implicite par rapport aux valeurs propres extrêmes.

Ce modèle possède deux inconvénients. Le premier est dû à la forme non-conservative des équations mise en jeu. Cela implique d'utiliser des schémas numériques spécifiques, utilisant des chemins de régularisation délicat à déterminer. D'autre part, l'ajout d'une équation impose d'ajouter également une condition limite supplémentaire.

## No Pressure Wave

Faisons la généalogie de ce schéma numérique, qui est l'alternative la plus développée du système DFM. Elle est importante car nous pourrions mesurer ce qu'il est possible d'accomplir avec un système différent de DFM.

- [53], **1996** Le premier schéma numérique pour le modèle NPW, développé à l'IFP, est développé. Ce modèle prend pour point de départ le modèle DFM.

L'expérience des simulations numériques a montré que, dans la plupart des études, les ondes de pression n'ont pas d'effet majeur sur la genèse et le transport des ondes de taux de vide (ondes lentes). Par conséquent, dans une démarche de simplification, les auteurs de ce schéma désirent éliminer l'existence des ondes acoustiques dans le modèle.

Une étude préliminaire des ordres de grandeurs des termes de l'équation de conservation de la quantité de mouvement suggère que, dans les écoulements transitoires lents, il est légitime de négliger les termes d'inertie. On peut démontrer que le modèle qui en découle est, dans bien des cas, une bonne approximation de DFM. Il est de type mixte hyperbolique/ parabolique et possède une seule valeur propre finie.

S. Patault et Q.-H. Tran ont proposé dans [53] un schéma numérique appelé Tacite-NPW, fondé sur l'étude théorique de H. Viviani [61]. Le modèle discret consiste en un schéma numérique implicite qui se décompose en trois étapes : étiquetage des mailles, assemblage des équations, résolution du système non-linéaire par une méthode de Newton.

Les auteurs du rapport présentent les résultats numériques de ce schéma et obtiennent des temps CPU qui, par rapport au schéma VFRoe-Tacite, sont souvent inférieurs. Dans certains cas, le gain en temps CPU du schéma NPW peut aller jusqu'à 140! ([53], p.53) Toutefois, les auteurs soulignent que *“les comparaisons avec le code Tacite-DFM (VFRoe-Tacite) laissent apparaître, à maillage égal, une précision moins bonne du code Tacite-NPW, mais en revanche il semble que la raideur des front soient bien conservée, comme en témoignent les expériences sur le riser vertical. [...] Ces constatations nous semblent très positives et permettent d'envisager de nombreuses perspectives pour l'avenir de ce modèle au sein de la structure Tacite.”* Cependant, le schéma proposé a été spécifiquement construit pour le système diphasique isotherme et non compositionnel.

- [25], **1998**. Dans ce document, I. Faille s'intéresse au système diphasique isotherme compositionnel. Elle constate que le schéma numérique proposé précédemment est *“basé sur un traitement particulier de l'onde de taux de vide et ne semble pas facilement généralisable à plusieurs ondes.”* Elle propose alors un schéma centré implicite pour les termes qui confèrent aux équations leur type parabolique et un schéma décentré explicite pour les termes qui confèrent aux équations leur type hyperbolique. Ce schéma se rapproche de ceux utilisés dans les codes diphasiques bi-fluides tels que Olga ou Cathare. Les conclusions de cette étude sont positives à plus d'un titre. Les temps calculs restent très inférieurs à ceux du schéma VFRoe-TACITE. La prise en compte des conditions aux limites demeure aisée. Au titre des inconvénients du schéma, l'inversion du système linéaire par la méthode de Newton pose parfois des problèmes de convergence.

Dans [65] (**1999**) F. Willien tente de résoudre ces problèmes en modifiant la loi de fermeture

hydrodynamique et dans [66] (**2000**) elle intègre au schéma la modélisation d'équipements pétroliers. Dans [51] (**2002**), les auteurs améliorent la formulation du schéma (appel à la loi thermodynamique aux bords de maille) pour résoudre certains problèmes de robustesse.

- [67], **2000**. Dans ce document, F. Willien étend la méthode aux écoulements non isothermes par la prise en compte d'une équation d'énergie.
- [68], **2003**. Dans ce document, F. Willien étend le modèle aux écoulements triphasiques.

Nous constatons que l'écoulement le plus complexe c'est à dire à la fois triphasique, non isotherme et compositionnel est pris en compte par ce schéma. Nous voyons également les performances en temps calcul qui sont très avantageuses. Ces performances sont le fruit du schéma implicite qui a comme contrepartie de créer des problèmes de robustesse, dues à la convergence conditionnelle de la méthode de Newton.

## Méthodologie adoptée

Dans l'idéal, nous devons écrire un schéma numérique capable de traiter un écoulement triphasique, non isotherme et compositionnel. Cela implique un grand nombre de difficultés tant au niveau numérique qu'au niveau de l'implémentation informatique. Au pire, nous devons écrire un schéma numérique capable de traiter un écoulement diphasique isotherme non compositionnel. Entre ces deux modèles extrêmes, il existe toute une famille de modèles qui intègrent partiellement les difficultés.

Nous avons choisi de traiter aussi profondément que possible le modèle le plus simple (diphasique isotherme non compositionnel). Puis, nous avons intégré à ce modèle chaque difficulté élémentaire pour évaluer notre méthode. Nous n'avons jamais cumulé deux difficultés de telle sorte que l'analyse s'en trouve simplifiée. Par ailleurs, le schéma numérique doit posséder à chaque étape les mêmes caractéristiques de base de telle sorte que l'assemblage final soit possible et facile.

## Méthode proposée

Les schémas de type relaxation, qui ont fait leur preuve sur de nombreux systèmes d'équations provenant de la physique [18] et qui ont été introduites par Jin et Xin en 1995 [69], apparaissent comme un sérieux espoir d'atteindre les objectifs cités plus haut, à savoir la rapidité et la robustesse. Ainsi le but de cette thèse est-il d'explorer les stratégies de relaxation adaptées au problème diphasique de Tacite. Plus concrètement, nous allons proposer une méthode permettant d'améliorer :

- la rapidité. Au lieu de calculer valeurs et vecteurs propres, nous ne calculons que 2 coefficients scalaires.
- la robustesse. Ces coefficients de relaxation sont choisis de telle sorte que le système soit hyperbolique. Le problème des valeurs propres imaginaires est donc éliminé à sa base. Par ailleurs, nous garantissons, pour le schéma numérique explicite, la positivité des fractions massiques partielles. Ceci est possible grâce à l'ajustement des coefficients de relaxation.

## Schéma de relaxation explicite

Ce travail est motivé par les sévères non-linéarités induites par les relations de fermeture algébriques réalistes, relatives aux lois thermodynamiques et hydrodynamiques. D'une part, ces non-linéarités



rendent le système étudié conditionnellement hyperbolique et interdisent en règle générale l'existence d'un couple d'entropie de Lax. D'autre part, ces mêmes non-linéarités font que l'extension des méthodes d'approximation classiques, basées sur les propriétés de la matrice Jacobienne de la fonction flux, présentent une complexité d'évaluation algébrique pénalisante dans les applications poursuivies.

Nous proposons une classe de modèles de relaxation pour le système étudié, permettant la définition de méthodes numériques robustes ne faisant intervenir les relations algébriques incriminées qu'une fois par cellule et par pas de temps. Ces modèles de relaxation sont qualifiés en exigeant que les systèmes proche équilibre, obtenus par un développement de Chapman-Enskog au premier ordre, constituent une régularisation visqueuse du système initial (*i.e.* à l'équilibre).

Par construction, le système du premier ordre extrait associé à chacun de ces modèles, est inconditionnellement hyperbolique et tous ses champs sont linéairement dégénérés. Cette dernière propriété rend triviale la résolution du problème de Riemann associé et conduit à définir une méthode d'approximation particulièrement peu coûteuse. Enfin, certains de ces modèles (explicitement connus) permettent d'assurer la validité d'un principe du maximum pour la fraction massique des constituants du mélange diphasique.

Dans ce travail, nous portons également un soin particulier à l'extension de ces méthodes au second ordre d'approximation ainsi qu'à la définition de conditions aux limites appropriées à l'étude de plusieurs problèmes d'intérêt. Enfin, le traitement des termes sources (gravitation, frottement ....) a fait l'objet d'une étude approfondie.

## Schéma de relaxation semi-implicite linéaire

Dans le contexte des écoulements en conduites pétrolières, la description précise des phénomènes de transport de constituant est déterminante. Il est connu qu'un phénomène de vitesse de propagation donné est d'autant mieux décrit par un schéma d'intégration en temps que la condition CFL basée sur la vitesse considérée est proche de 1. Or les phénomènes de transport possèdent des vitesses caractéristiques de plusieurs ordres de grandeur inférieurs aux vitesses liées aux phénomènes acoustiques. En conséquence, un schéma d'intégration en temps explicite s'avère être inadapté à notre exigence de précision puisque la restriction CFL, indispensable à la stabilité de la méthode, est imposée par les vitesses les plus grandes.

Il est donc nécessaire d'adopter une stratégie d'intégration en temps implicite par rapport aux ondes rapides (acoustiques) et explicite par rapport aux ondes lentes (ondes de taux de vide) sous une condition CFL basée sur les vitesses lentes.

Une telle stratégie est possible et naturelle dès que la fonction flux numérique utilisée repose sur une linéarisée de Roe (ou de type VFRoe). Elle a été en particulier développée dans le code Tacite. Nous appellerons dans la suite cette stratégie : méthode semi-implicite linéarisée. Nous exposerons brièvement le principe sur l'exemple de la méthode VFRoe : indiquons simplement qu'elle nécessite l'inversion d'un système linéaire construit sur la linéarisée de Roe.

Nous montrons que la technique de relaxation explicite, peut être réinterprétée comme une méthode de Roe (pour le système de relaxation et non pas pour le système à l'équilibre). Une telle ré-interprétation est rendue possible par la propriété de dégénérescence linéaire de tous les champs associés au système de relaxation.

Il est dès lors possible d'envisager une méthode d'intégration temporelle semi-implicite linéarisée. Nous montrons qu'il est nécessaire d'utiliser des paramètres de relaxation  $a$  et  $b$  uniformes en espace. Puisque l'interprétation en terme de méthode de Roe porte sur le système de relaxation ( $5 \times 5$ ) et non sur le système à l'équilibre ( $3 \times 3$ ) une application directe de la technique d'implication partielle conduirait à un problème matriciel de plus grande taille que celui reposant sur la méthode Tacite pour le système d'équilibre. Nous montrons ici comment réduire la taille du problème matriciel en

adoptant une technique d'implicitation linéarisée des termes sources de relaxation. Cette technique a été très récemment développée par Chalons-Coquel en 2002 [15] pour d'autres raisons liées à l'obtention d'une solution stationnaire indépendante du pas de temps. Nous montrons qu'outre le bénéfice d'un problème matriciel réduit, cette technique améliore considérablement non seulement la solution stationnaire mais également la solution transitoire.

## Apport et originalité de la thèse

L'étude de la bibliographie consacrée à ce domaine montre que le problème traité est d'une grande difficulté. Les très fortes non-linéarités du modèle, les problèmes de stabilité de tous les schémas numériques ainsi que le manque de connaissances théoriques sur le système nous suggèrent d'utiliser de nouvelles méthodes de résolution.

La méthode de relaxation proposée dans cette thèse est différente de celles qui ont vu le jour jusqu'à présent. Les méthodes de relaxation proposées jusque là reposaient sur l'existence de conditions sous-caractéristiques qui assurent à la méthode sa stabilité. Elle est ici assurée par une heuristique imposant que la matrice issue du calcul des équations équivalentes par le développement de Chapman-Enskog possède des valeurs propres positives.

D'autre part, les méthodes classiques utilisent les propriétés de l'entropie du système : ici, aucune entropie n'est connue. Enfin, la méthode présentée dans [69] relaxe toutes les non-linéarités du système : ici, seules les non-linéarités majeures sont relaxées.

## Éléments du projet

### Encadrement - collaborations

Ce travail de doctorat est réalisé sous la direction de Benoît Perthame, professeur à l'Université Paris VI et à l'École Normale Supérieure, en tant que directeur de thèse, de Frédéric Coquel, chargé de recherche au CNRS en tant que co-directeur de thèse, et de Quang Huy Tran, ingénieur de recherche à l'Institut Français du Pétrole, en tant que responsable IFP. Il a bénéficié de l'apport de Frédéric Daude [8] et Alexandre Fornel [9] en tant que stagiaires de fin d'étude de l'école Matmecca.

### Financement

La thèse présentée ici a été effectuée dans sa totalité à l'Institut Français du Pétrole. Elle a été financée par une bourse CIFRE, système de bourses géré par l'ANRT (Association nationale de la recherche technique). *“L'entreprise [...] verse à son ”jeune Cifre” un salaire supérieur ou égal à 20 214 euros (salaire annuel, brut, hors charges patronales). Pendant les trois ans que dure la Convention, l'entreprise se voit attribuer une subvention forfaitaire annuelle de 14 635 euros, que lui verse l'Association nationale de la recherche technique (ANRT), responsable de la gestion et de l'animation des conventions Cifre, pour le compte du ministère chargé de la Recherche.”*

### Outils

Cette recherche a donné lieu à l'implémentation d'un programme prototype en Fortran 90 d'environ 30 000 lignes de code. Ce code est auto-documenté grâce à l'outil de documentation automatique Robodoc. Une interface graphique en Tcl/Tk a été développée. L'ensemble du projet informatique, géré sous CVS, est l'objet d'un guide développeur/utilisateur.

## Valorisation des résultats

Outre les présentations internes à l'IFP, deux présentations externes ont été faites :

- “*Méthode de relaxation pour la simulation des écoulements diphasiques dans les conduites pétrolières*”, SMAI 2001, Pompadour, France,
- “*A time semi-implicit relaxation scheme for two-phase flows in pipelines*”, ENUMATH 2003, Prague, République Tchèque.

Ces travaux font par ailleurs l'objet de trois articles :

- “*A relaxation method for two-phase flow models*”, M. BAUDIN, C. BERTHON, F. COQUEL, R. MASSON ET Q.-H. TRAN soumis à *Numerische Mathematik*,
- “*A semi-implicit relaxation scheme for modeling two-phase flow in a pipeline*”, M. BAUDIN, F. COQUEL ET Q.-H. TRAN en préparation,
- “*Relaxation methods via the Born-Infeld system*”, M. BAUDIN, F. COQUEL ET Q.-H. TRAN en préparation.

Les résultats partiels de cette étude sont par ailleurs exposés dans les rapports IFP [10] (2001), [4] (2002), [8] (2002) et [9] (2003).

## Contenu de ce document

Le plan de ce document est le suivant.

Dans la première partie, nous considérons un modèle diphasique isotherme non compositionnel. Pour ce système de lois de conservation, nous proposons un schéma numérique explicite fondé sur une méthode de Godunov pour un système de relaxation bien choisi. Puis, après une interprétation de la méthode comme une méthode de Roe, rendue possible par dégénérescence linéaire des champs caractéristiques du système de relaxation, nous présentons le schéma de relaxation semi-implicite linéaire. Nous montrons des résultats numériques qui consistent en des tubes à choc ainsi que des cas (réalistes) impliquant des conditions aux limites. Enfin, nous exposons le calcul de la complexité des algorithmes ainsi qu'une analyse de la décomposition du temps d'exécution des expériences numériques.

Dans la seconde partie, nous présentons un schéma de relaxation pour les écoulements diphasiques *compositionnels*. Nous décrivons dans le détail la thermodynamique à 2 constituants que nous avons utilisé (bien que notre étude soit valable pour un nombre quelconque de constituants). Nous montrons que, dans ce cas particulier, la pression est une fonction non régulière de la variable conservative. Nous proposons un schéma de relaxation fondé sur un solveur de Godunov puis nous interprétons la méthode comme une méthode de Roe. Cette technique est utilisée dans la construction d'un schéma semi-implicite linéaire. Nos résultats numériques consistent en des tubes à chocs.

Dans l'annexe A, nous décrivons une méthode de relaxation fondée sur le système de Born-Infeld. La méthode s'appuie sur la dégénérescence linéaire des champs de ce système non linéaire. Nous appliquons notre technique à une équation scalaire (issu de la simplification du modèle diphasique) ainsi qu'au système diphasique lui-même. Nous mettons en évidence, dans ces deux cas, la condition de stabilité de Whitham. Nous présentons enfin des résultats numériques obtenus sur des problèmes de Riemann.

Dans l'annexe B, nous décrivons un schéma numérique de relaxation pour la simulation des écoulements triphasiques isotherme non compositionnels. Nous proposons un schéma de relaxation explicite fondé sur un solveur de Godunov. Dans le but de montrer que l'implicitation du schéma est possible, nous présentons l'interprétation de la méthode explicite comme une méthode de Roe. Cette étude ne contient pas de résultats numériques.

Dans l'annexe C, nous décrivons un schéma numérique de relaxation pour la simulation des

écoulements diphasiques non isothermes, non compositionnels. Nous proposons un schéma de relaxation explicite fondé sur un solveur de Godunov. Nous détaillons le calcul des coefficients de relaxation, qui est plus complexe qu'auparavant. Nous présentons également le calcul des invariants forts du système de relaxation, qui s'avère également plus délicat. Dans le but de montrer que l'implicitation du schéma est possible, nous présentons l'interprétation de la méthode explicite comme une méthode de Roe. Cette étude ne contient pas de résultats numériques.



Première partie

**Modèle diphasique isotherme non  
compositionnel**



# Chapitre 1

## Introduction

Cette partie est consacré au système de lois de conservation qui a été l’objet des deux premières années de thèse. Son étendue s’explique par le fait qu’il était indispensable de s’assurer des qualités du schéma de relaxation sur le modèle polyphasique le plus “simple” possible, tout en contenant le coeur des non-linéarités du problème.

Nous considérons les hypothèses suivantes.

1. La température est constante.
2. Le mélange est composé de deux constituants.
3. Le constituant lourd est à l’état liquide, le constituant léger est à l’état de gaz.
4. Il n’y pas d’échanges de masse entre les phases.

Un tel modèle est souvent appelé “gaz-liquide isotherme”. Il est constitué de lois de conservation complétés par des lois de fermetures thermodynamiques et hydrodynamiques hautement non linéaires.

Le plan de cette partie est le suivant. Nous commençons par présenter le modèle continu c’est à dire essentiellement les lois de fermetures ainsi que les lois de conservation utilisées. Puis nous présentons le schéma de relaxation explicite puis des compléments concernant les coefficients de relaxation et le traitement aux limites. Nous présentons ensuite le schéma de relaxation semi-implicite linéaire. Nous validons ces schémas par des expériences numériques fondées sur des tubes à chocs et des variations de conditions aux limites. Enfin, nous analysons le temps d’exécution du schéma et calculons sa complexité algorithmique.





# Chapitre 2

## Modèle continu

### 2.1 Géométrie

La géométrie d'une conduite est caractérisée par la donnée de :

- sa longueur  $L$ ,
- son diamètre  $D$ ,
- son inclinaison  $\theta$ .

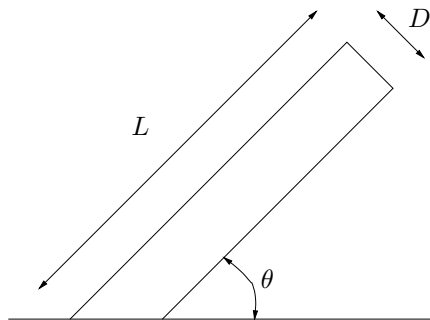


FIG. 2.1 – Conduite élémentaire

Sur chaque tronçon rectiligne, ces quantités sont uniformes vis-à-vis de la variable d'espace  $x$ . Une conduite est, par définition, la succession de plusieurs tronçons. A l'échelle d'une conduite, les grandeurs  $L$ ,  $D$  et  $\theta$  sont donc constantes par morceaux vis-à-vis de la variable  $x$ , qui représente maintenant l'abscisse curviligne le long de la conduite.

Dans toute la suite de ce document, on travaille avec *un seul tronçon*.

### 2.2 Variables

Les équations sont classiquement écrites dans les variables suivantes (on indicera respectivement par  $L$  et  $G$  les variables relatives au liquide et au gaz) :

- les masses volumiques  $\rho_L, \rho_G,$
- les fractions surfaciques<sup>1</sup>  $R_L, R_G,$
- les vitesses réelles  $v_L, v_G,$
- la pression  $p.$

Ces variables dépendent de l'abscisse  $x$  le long de la conduite et du temps  $t$ . Il est par ailleurs commode d'introduire les grandeurs suivantes :

- la masse volumique totale  $\rho = \rho_L R_L + \rho_G R_G ;$
- la fraction massique du liquide  $X = \rho_L R_L / \rho ;$
- la fraction massique du gaz  $Y = \rho_G R_G / \rho ;$
- la vitesse superficielle  $u_s = R_L v_L + R_G v_G ;$
- la vitesse massique du mélange  $v = X v_L + Y v_G ;$
- le débit de liquide  $q_L = \rho_L R_L v_L ;$
- le débit de gaz  $q_G = \rho_G R_G v_G .$

Les égalités suivantes sont vérifiées

$$X + Y = 1, \quad R_L + R_G = 1, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{X}{\rho_L} + \frac{Y}{\rho_G}, \quad (2.1)$$

ainsi que les inégalités

$$0 \leq X \leq 1, \quad 0 \leq Y \leq 1, \quad 0 \leq R_L \leq 1, \quad 0 \leq R_G \leq 1. \quad (2.2)$$

## 2.3 Thermodynamique

Nous supposons que la température est constante ( $T = T^0$ ). Le mélange est composé d'un gaz parfait et d'un liquide compressible modélisé dans ce cas par les équations d'état

$$\rho_G(p) = \frac{p}{a_G^2}, \quad \rho_L(p) = \rho_L^0 + \frac{p - p^0}{a_L^2}, \quad (2.3)$$

où  $\rho_G$  est la masse volumique du gaz,  $a_G$  la vitesse du son dans le gaz,  $\rho_L$  est la masse volumique du liquide,  $p^0$  la pression atmosphérique,  $\rho_L^0$  est la masse volumique du liquide pour  $p = p^0$  et  $a_L$  la vitesse du son dans le liquide.

Dans la pratique, on cherche  $p$  en fonction de  $\rho$  et  $Y$ . La pression est alors donnée par l'inversion de l'égalité  $\frac{1}{\rho} = \frac{X}{\rho_L} + \frac{Y}{\rho_G}$  où  $\rho_L$  et  $\rho_G$  sont des fonctions de  $p$ .

Si  $a_L \rightarrow \infty$ , on se trouve alors dans le cas d'un liquide incompressible c'est à dire tel que  $\rho_L(p) = \rho_L^0$ . La pression s'exprime alors simplement par

$$p(\rho, Y) = a_G^2 \frac{\rho Y}{1 - (1 - Y) \frac{\rho}{\rho_L^0}}. \quad (2.4)$$

Une analyse plus profonde de cette thermodynamique est détaillée dans le paragraphe 9.1.4.

## 2.4 Hydrodynamique

La loi hydrodynamique est censée exprimer une propriété caractéristique, mais souvent empirique, de l'écoulement considéré. La grande variété des régimes d'écoulement est illustrée sur les figures (2.2) et (2.3).

---

<sup>1</sup>Sur une section de tuyau, ces fractions représentent la proportion surfacique de chaque phase par rapport à la surface totale. Ainsi, on a  $R_L + R_G = 1$ .

Définissons le glissement par

$$\varphi = v_L - v_G. \quad (2.5)$$

Notons que cette définition est de *signe contraire* à la convention habituelle  $\varphi = v_G - v_L$ , mais cela ne change pas fondamentalement les idées. Dans le code Tacite, la fonction  $\varphi$  est d'une grande complexité. Elle n'a pas d'expression algébrique simple et peut même être discontinue. Dans ce document, nous ne considérons que des lois de glissement continues.

**Remarque 2.4.1** *Pourtant, le modèle hydrodynamique dit “complet”, utilisé dans le code Tacite, est discontinu. La construction de schémas numériques pour les systèmes diphasiques doit prendre en compte cette contrainte et la méthode de relaxation pourrait permettre de traiter cette difficulté. Dans le cadre du stage d’Alexandre Fornel [9], cette loi discontinue a été testée avec la méthode de relaxation. Notons que certains auteurs Norvégiens tels Evje, Fjelde, Karlsen, Klingenberg & Risebro, qui s’intéressent par ailleurs aux écoulements en conduites [24, 27], tentent d’évaluer la méthode de relaxation pour un flux discontinu dans [39].*

La complexité de la loi hydrodynamique implique qu’il est impossible d’avoir une expression analytique du flux numérique du système de lois de conservation. C’est un obstacle mathématique majeur, en particulier du point de vue du schéma numérique. C’est l’une des difficultés de la modélisation que les physiciens de Tacite cherchent à lever. D’une façon générale, quelle que soit la loi utilisée, on peut aisément établir que

$$v_L = v + Y\varphi, \quad v_G = v - X\varphi, \quad (2.6)$$

$$u_s = v + (YR_L - XR_G)\varphi, \quad (2.7)$$

sous la convention (2.5) pour le glissement. Ces relations sont très utiles tant sur le plan théorique que pour l’implémentation pratique.

Examinons quelques cas bien référencés.

### 2.4.1 Écoulements co-vitesse

Le glissement est nul, autrement dit

$$\varphi = 0. \quad (2.8)$$

Les deux phases se déplacent à la même vitesse. Ceci peut sembler physiquement peu intéressant. Toutefois, il peut être utile dans un cadre de validations d’étudier ce cas puisqu’alors on peut calculer analytiquement la solution du problème de Riemann (voir en annexe).

### 2.4.2 Écoulements dispersés

Ces écoulements sont caractérisés par la présence de phases sous forme d’émulsions. Typiquement dans ce cas on observe des petits bulles de gaz dans le liquide.

$$\varphi = -\frac{\delta}{R_L} \quad (2.9)$$

où  $\delta = 1.53\sqrt{g\sigma/\rho_L}\sin\theta$  est la vitesse de dérive et  $\sigma$  la tension superficielle. Dans ce cas, il est également possible de calculer les éléments propres de la jacobienne, mais la solution du problème de Riemann est relativement ardue. Cette loi n’est valable que pour  $R_L$  proche de 1.

### 2.4.3 Écoulements intermittents

Ils sont modélisés par la loi de Zuber-Findlay [71].

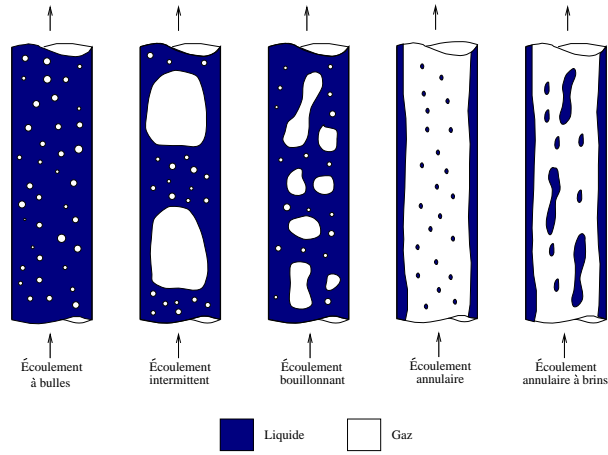


FIG. 2.2 – écoulements verticaux

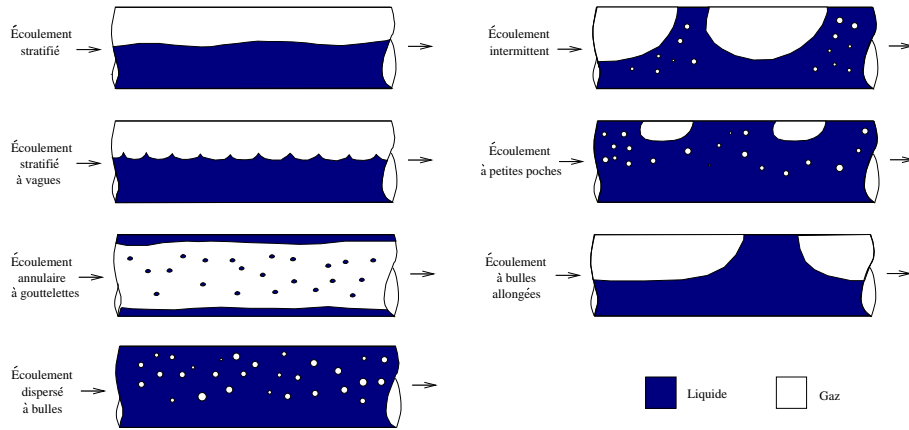


FIG. 2.3 – écoulements horizontaux

#### 2.4.3.0.1 Zuber-Findlay C'est le modèle :

$$v_G = c_0 u_s + c_1, \quad (2.10)$$

valide pour  $c_0 > 1$  et  $R_G < 1/c_0$ . Cette loi est utilisée dans [11] où la solution du problème de Riemann est déterminée analytiquement (voir en annexe). Elle présente pourtant l'inconvénient de ne pas pouvoir s'appliquer dans les écoulements monophasiques gaz : dans ce cas,  $v_G = u_s$  donc  $v_G = \frac{c_1}{1-c_0}$  ! C'est pour cela qu'on utilise dans ces cas là le modèle qu'on appellera ici Zuber-Findlay-IFP.

#### 2.4.3.0.2 Zuber-Findlay-IFP C'est le modèle :

$$v_G = (1 + \mu R_L) u_s + \nu R_L, \quad (2.11)$$

avec  $\mu = 0.2 \sin^2 \theta$  et  $\nu = 0.35 \sqrt{gD} \sin \theta$ . Dans ce modèle, si la conduite n'est pas inclinée,  $\theta = 0$  implique  $v_G = u_s = v_L$  et le glissement est nul.

## 2.5 Lois de conservation

Les équations aux dérivées partielles de base de Tacite sont obtenues en moyennant les lois de conservation classiques sur une section de la conduite.

La particularité de Tacite réside dans le fait qu'il n'y a qu'une seule équation de quantité de mouvement au lieu de deux (une pour chaque phase). Cette simplification nécessite l'introduction d'une relation supplémentaire, dite loi de fermeture, qui dépend de la configuration d'écoulement étudiée.

### 2.5.1 Variables naturelles

Les équations de conservation mises en œuvre dans Tacite sont les suivantes :

- la masse du liquide

$$\partial_t(\rho_L R_L) + \partial_x(\rho_L R_L v_L) = 0, \quad (2.12)$$

- la masse du gaz

$$\partial_t(\rho_G R_G) + \partial_x(\rho_G R_G v_G) = 0, \quad (2.13)$$

- la quantité de mouvement totale

$$\partial_t(\rho_L R_L v_L + \rho_G R_G v_G) + \partial_x(\rho_L R_L v_L^2 + \rho_G R_G v_G^2 + p) = S. \quad (2.14)$$

La source  $S$  prend en compte les forces de pesanteur et les forces de frottements. Souvent, on l'exprime comme

$$S = -\rho g \sin \theta - \frac{2C_f}{D} \rho v |v|, \quad (2.15)$$

où  $C_f$  représente un coefficient de frottement tandis que  $\rho$  et  $v$  ont été définis précédemment. D'après (2.15), la source  $S$  ne dépend que de  $\rho$  et  $v$ .

### 2.5.2 Variables conservatives

Il est traditionnel de simplifier le système d'équations précédent en introduisant la variable conservative  $\mathbf{u} = (\rho, \rho v, \rho Y)^T$ . Le triplet  $(\rho, \rho v, \rho Y)$  constitue les variables de base en fonction desquelles on exprime toutes les autres grandeurs, et ce via les relations thermodynamiques. Par exemple, il vient que  $R_L = \frac{\rho - \rho Y}{\rho_L}$ , à partir de quoi l'on peut obtenir toutes les autres grandeurs par l'intermédiaire de (2.6–2.7).

Bien entendu, le glissement  $\varphi$  doit être considéré aussi comme une fonction de  $(\rho, \rho v, \rho Y)$ . Le système (2.12), (2.13) et (2.14) se réécrit alors sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + P(\mathbf{u})) = S(\mathbf{u}), \\ \partial_t(\rho Y) + \partial_x(\rho Y v - \sigma(\mathbf{u})) = 0, \end{cases} \quad (2.16)$$

$$(2.17)$$

où

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{u}) &= \rho Y(1 - Y) \varphi(\mathbf{u}) && \text{est l'impulsion apparente;} \\ P(\mathbf{u}) &= p(\mathbf{u}) + \rho Y(1 - Y) \varphi(\mathbf{u})^2 && \text{est la pression apparente.} \end{aligned}$$

Le système précédent s'écrit sous la forme abstraite

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathcal{F}(\mathbf{u}) = \mathcal{S}(\mathbf{u}) \quad (2.18)$$

où les définitions sont évidentes.

La première équation de (2.16), résultant de la somme de (2.12) et (2.13), représente la conservation de la masse totale. La deuxième équation de (2.16) n'est autre que le bilan de quantité de mouvement totale (2.14). La troisième équation de (2.16) est la réécriture de l'équation de conservation de la masse de gaz (2.13).

## 2.6 Cadre mathématique

L'espace des états associé est

$$\Omega = \{ \mathbf{u} = (\rho, \rho v, \rho Y)^T \in \mathbb{R}^3; \rho > 0, v \in \mathbb{R}, Y \in [0, 1] \}.$$

On dit que le système (2.18) est **hyperbolique** si, pour tout  $\mathbf{u}$  admissible, la matrice jacobienne  $\nabla \mathcal{F}$  admet des valeurs propres réelles et possède une base de vecteurs propres.

Dans le cas d'écoulements diphasiques régis par (2.16), on peut démontrer que l'hyperbolicité a lieu pour le glissement nul, le glissement dispersé et le glissement intermittent (Zuber-Findlay). Dans les autres cas, on ne sait rien dire. La complexité de la loi de glissement  $\varphi$  dans Tacite n'arrange pas la situation. Cependant, on observe numériquement qu'il y a hyperbolicité dans la plupart des écoulements, et que de plus, les valeurs propres sont de la forme :

$$\lambda^- = v - c^- < 0, \quad \lambda^0 = v + c^0, \quad \lambda^+ = v + c^+ > 0 \quad (2.19)$$

où  $c^-$ ,  $c^0$  et  $c^+$  dépendent, certes, de l'expression précise de la loi de fermeture, mais que

$$\begin{aligned} c^- \text{ et } c^+ & \text{ sont positifs, de valeurs absolues très grandes devant } |v|; \\ c^0 & \text{ est de signe variable, de valeur absolue de l'ordre de } |v|. \end{aligned}$$

Les deux valeurs propres extrêmes,  $\lambda^-$  et  $\lambda^+$ , sont relatives aux **ondes de pression** et se propagent grâce à la compressibilité du fluide, à des vitesses rapides. Quant à  $\lambda^0$  dont le signe est variable, elle se rapporte aux ondes dites **cinématiques** ou de **taux de vide**, et se propagent avec la matière à des vitesses plus lentes.

## 2.7 Conditions aux limites et donnée initiale

Nous traiterons dans un premier temps des problèmes de Riemann pour lesquels la donnée initiale est, pour une conduite de longueur 100 mètres,

$$\mathbf{u}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{u}^L, & \text{si } 0 < x < 50, \\ \mathbf{u}^R, & \text{si } 50 < x < 100. \end{cases} \quad (2.20)$$

Pour ces cas, il n'y a pas de conditions aux limites.

Nous traiterons également des cas pour lesquels l'écoulement est induit par des variations de conditions aux limites. A l'entrée de la conduite ( $x = 0$ ), les débits massiques sont donnés en fonction du temps, i.e.

$$(\rho_\alpha R_\alpha v_\alpha)(0, t) = q_\alpha^0(t), \quad t \geq 0, \quad \alpha = L, G,$$

et à la sortie de la conduite ( $x = L$ ), la pression est donnée en fonction du temps, i.e.

$$p(L, t) = p^L(t), \quad t \geq 0.$$

Dans ces expériences, la donnée initiale est l'état stationnaire, calculé à partir de la valeur des conditions aux limites à la date  $t = 0$ .

## 2.8 Discrétisation

La conduite est décomposé en  $I$  mailles, notées  $M_i$  pour  $i \in \{1, \dots, I\}$ . Soit  $x_i$  le centre de la maille  $M_i$ ,  $\Delta x$  sa longueur et  $x_{i+1/2}$  l'interface séparant  $M_i$  et  $M_{i+1}$ , comme le montre la figure (2.4). On a donc  $M_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$  ainsi que les relations évidentes suivantes :

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= 0 && \text{bord gauche;} \\ x_{I+1/2} &= L && \text{bord droite;} \\ x_i &= \frac{1}{2}(x_{i+1/2} + x_{i-1/2}) && \text{centre de } M_i; \\ \Delta x_i &= x_{i+1/2} - x_{i-1/2} && \text{longueur de } M_i. \end{aligned}$$

Nous avons considéré des maillages pour lesquels le pas d'espace est constant : nous le noterons donc par la suite  $\Delta x$ .

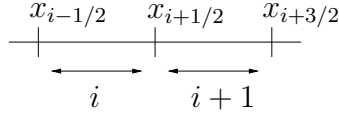


FIG. 2.4 – Discrétisation du domaine intérieur

Notons  $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$  le pas de temps.

## 2.9 Outils numériques de base

L'objet de ce paragraphe est de décrire certains outils numériques afin d'alléger la description du schéma numérique de relaxation explicite. Ces techniques ont été choisies car elles sont validées depuis plusieurs années dans le cadre du projet TACITE de l'IFP et sont celles utilisées dans [26] (et présentées d'un point de vue plus théorique dans [32, 45]). Supposons que nous savons construire un schéma volume finis du type

$$\frac{\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n}{\Delta t^n} + \frac{\mathcal{F}_{i+1/2}^{n+1/2}(\mathbf{u}^n) - \mathcal{F}_{i-1/2}^{n+1/2}(\mathbf{u}^n)}{\Delta x} = 0. \quad (2.21)$$

### 2.9.1 Intégration des termes sources

Il est classique d'utiliser une technique de splitting qui conduit à l'écriture du schéma numérique explicite

$$\frac{\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n}{\Delta t^n} + \frac{\mathcal{F}_{i+1/2}^{n+1/2}(\mathbf{u}^n) - \mathcal{F}_{i-1/2}^{n+1/2}(\mathbf{u}^n)}{\Delta x} = \mathcal{S}(\mathbf{u}^n). \quad (2.22)$$

### 2.9.2 Montée en ordre du schéma

En espace, la montée en ordre du schéma consiste en une reconstruction linéaire de type MUSCL. Elle conduit à considérer que la solution n'est plus constante par maille mais linéaire par morceau, comme le montre la figure (2.5). La limitation des pentes n'est pas effectuée sur la variable conservative  $\mathbf{u}$  mais sur la variable physique  $(p, v, Y)$ .

En temps, la montée en ordre du schéma se fait grâce à la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2. Notons  $\mathbb{L}$  l'opérateur d'évolution du premier ordre en temps défini par le schéma explicite. L'algorithme suit alors les étapes suivantes.



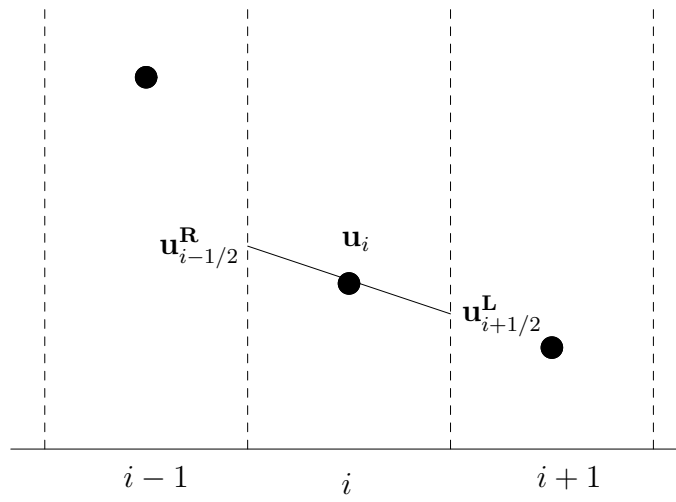


FIG. 2.5 – Reconstruction linéaire

- Premier demi-pas de temps :  $\mathbf{u}^* = \mathbb{L}(\mathbf{u}^n)$ .
- Deuxième demi-pas de temps :  $\mathbf{u}^{**} = \mathbb{L}(\mathbf{u}^*)$ .
- Mise à jour définitive :  $\mathbf{u}^{n+1} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{**})$ .

## Chapitre 3

# A relaxation method for two-phase flow models with hydrodynamic closure law

Michaël BAUDIN<sup>1</sup>, Christophe BERTHON<sup>2</sup>, Frédéric COQUEL<sup>3</sup>, Roland MASSON<sup>1</sup>  
and Quang Huy TRAN<sup>1</sup>

<sup>1</sup> IFP, 1 et 4 avenue de Bois-Préau, 92852 Rueil-Malmaison Cedex, France

<sup>2</sup> MAB, Université de Bordeaux I, 351 cours de la Libération, 33405 Talence Cedex, France

<sup>3</sup> Lab. J.-L. Lions, Université Pierre et Marie Curie, Boîte courrier 187, 75252 Paris Cedex 5

**Abstract** The present paper is devoted to the numerical approximation of the solutions of a system of conservation laws arising in the modeling of two-phase flows in oil and gas pipeline. The PDEs are closed by two (generally speaking) highly nonlinear algebraic relations : namely a pressure law and a hydrodynamic one. The severe nonlinearities they encode make the classical approximate Riemann solvers to be virtually intractable at a reasonable cost of evaluation. We propose an original strategy for relaxing solely these two nonlinearities : the relaxation system we introduce is nonlinear and is analyzed on the ground of a Chapman-Enskog like expansion. Our model is of course hyperbolic but all the associated fields are linearly degenerate. Such a property not only makes trivial the resolution of the Riemann problem but also enables us to enforce for validity several stability requirements. The new method turns out to be fairly simple and robust while achieving desirable positivity properties on the density and mass fractions. Numerical evidences are proposed.

**Key words** Two-phase flows, finite volume schemes, relaxation

## Introduction

The petroleum pipelines drive a mixing, made up essentially of oil, gas and water, over a long distance. Locally, variations in the topography strongly influence the nature of the mixing : stratified, emulsion, slug for instance (see [26], [50] and the references therein). Several models must be then considered, each of them corresponding to a specific flow regime. All of the models we shall be considering are characterized by the choice of two algebraic closures : the first one defines the pressure of a mixing gas-liquid as a function of its composition ; the second one prescribes the hydrodynamic law, e.g., the velocity difference between the two phases of the flow as a function of the unknowns, such a function being defined according to the local incline of the pipeline.

The model considered in this paper describes a two-phase flow inside a pipeline with a uniform section but for general pressure and hydrodynamic laws. The main interest of dealing with such a model is to focus attention on the difficulties associated with the hydrodynamic law, which besides the pressure law, gives rise to the main nonlinearities in the model.

In the flow, the gas (resp. liquid) is characterized by its density  $\rho_G$  (resp.  $\rho_L$ ), its velocity  $v_G$  (resp.  $v_L$ ) and its surface fraction  $R_G \in [0, 1]$  (resp.  $R_L \in [0, 1]$ ) with the property  $R_L + R_G = 1$ . The model is governed by the following system of conservation laws :

$$\begin{cases} \partial_t (\rho_L R_L) & + \partial_x (\rho_L R_L v_L) & = 0, \\ \partial_t (\rho_G R_G) & + \partial_x (\rho_G R_G v_G) & = 0, \\ \partial_t (\rho_L R_L v_L + \rho_G R_G v_G) & + \partial_x (\rho_L R_G v_L^2 + \rho_G R_G v_G^2 + p) & = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

for all  $x \in \mathbb{R}$  and  $t > 0$  where the unknown is  $\mathbf{w} := (\rho_L R_L, \rho_G R_G, \rho_L R_L v_L + \rho_G R_G v_G)$ . In addition to the pressure law  $p = p(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ , assumed to be a given smooth function, we consider a general algebraic hydrodynamic law [54] of the type

$$v_L - v_G = \Phi(\mathbf{w}), \quad \text{for all } \mathbf{w}_1 \geq 0, \mathbf{w}_2 \geq 0, \mathbf{w}_3 \in \mathbb{R}, \quad (3.2)$$

in order to close (3.1). In (3.2), the mapping  $\Phi$  is assumed to be smooth enough and in practical situations, turns out to be nonlinear in the unknown  $\mathbf{w}$  (see [11], [54], [71] for instance). Consequently, when working with (3.1)–(3.2), the velocities  $v_L$  and  $v_G$  of the two phases must be understood as nonlinear functions of the conservative unknown  $\mathbf{w}$  :

$$\begin{aligned} v_L(\mathbf{w}) &:= \frac{\mathbf{w}_3}{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2} + \frac{\mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2} \Phi(\mathbf{w}), \\ v_G(\mathbf{w}) &:= \frac{\mathbf{w}_3}{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2} - \frac{\mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2} \Phi(\mathbf{w}). \end{aligned} \quad (3.3)$$

These formulae clearly highlight that the flux function is in full generality highly nonlinear !

Besides this observation, such nonlinearities are obviously responsible for the basic mathematical properties of the model. For instance, considering the simplest framework : namely a pressure law satisfying the assumption  $\mathbf{w}_1 \frac{\partial p}{\partial \mathbf{w}_1} + \mathbf{w}_2 \frac{\partial p}{\partial \mathbf{w}_2} > 0$  together with a no-slip hydrodynamic law, i.e.,  $\Phi \equiv 0$ , then the system (3.1) can be shown to be hyperbolic (see for instance Benzoni-Gavage [11]). However, as soon as  $\Phi \not\equiv 0$ , the system (3.1) is generally only conditionally hyperbolic : indeed for  $|v_L - v_G| = |\Phi|$  large enough the hyperbolicity property is lost. To cap it all, arbitrary hydrodynamic closure (3.2) precludes the existence of additional non trivial conservation law for smooth solution of (3.1)–(3.2). In other words and without restrictive physical assumptions (like  $\Phi = 0$ ), the system under consideration cannot be endowed with an entropy pair.

Turning considering the issue of approximating the solutions of (3.1)–(3.2), let us stress out that the algebraic complexity due to the above mentioned nonlinearities prevents us from using classical approximate Riemann solvers, whenever a low cost of computational effort is a critical issue. Let us simply recall that the latters strongly make use of the eigen-structure of the exact Jacobian matrix (see [30], [33], [35], [56] . . .). Notice that even for simpler methods, like the well-known Lax-Friedrichs scheme (see Godlewski-Raviart [33]), one needs an estimate of the largest eigenvalue of the Jacobian matrix. In the present work, we propose a strategy of relaxation of the two main nonlinearities involved in (3.1)–(3.2). Since no entropy pair is known for the system under consideration, our approach cannot enter the general relaxation theory developped by Liu [47], Chen et al. [16]. We are thus led to adopt the framework proposed by Whitham [64] which relies on suitable Chapman-Enskog expansions. As expected, such expansions will provide us with some *sub-characteristic like conditions* expressing that some diffusion matrix must stay non-negative (see also [16] and [47] ).

The scheme we propose below differs from the classical relaxation scheme developed by Jin and Xin [69] (recently studied by Natalini [52], Aregba and Natalini [3] in the scalar cases) since not all

the nonlinearities are relaxed. This partial relaxation procedure is more physically relevant and have been already proposed by various authors, in particular Jin & Slemrod [37, 38], Coquel & Perthame [20] and Coquel et al. [19]. In the present work, only the pressure law and the hydrodynamic one are subject to a relaxation procedure. Relaxing solely these quantities will considerably facilitate the Chapmann-Enskog like analysis. It will in particular enable us to exhibit precise and simple stability conditions for our relaxation model. Another feature of the scheme we propose is that positiveness for the partial densities is ensured. This is achieved by extending Larrouturou's ideas [40].

The present paper is organized as follow. In the next section, the relaxation model is proposed and its main properties are analyzed. This relaxation model involves two constant speeds of propagation (understood as free parameters in our procedure) which precise definition will be carried out on the ground of several stability requirements. In the second section, a fairly simple approximate Riemann solver is derived within the frame of relaxation methods. A special attention is paid on preserving the positiveness of the densities. With this respect, a suitable and simple definition of the two constant speeds of propagation of the model is shown to exist. Finally in the last section, some numerical results are discussed.

### 3.1 A relaxation model

In order to conveniently relax the main nonlinearities involved in the system under consideration, namely both the pressure law and the hydrodynamic one; we first perform a conservative change of variables which thus preserves the weak solutions of (3.1)–(3.2). In that aim, let us consider the total density of the mixing  $\rho = \rho_L R_L + \rho_G R_G$ , the total momentum  $\rho v = \rho_L R_L v_L + \rho_G R_G v_G$  and  $\rho Y$  where  $Y$  denotes the mass fraction of one of the two phases. To fix ideas and without restriction, we choose  $Y = \frac{\rho_G R_G}{\rho}$  (so that  $1 - Y = \frac{\rho_L R_L}{\rho}$ ). The natural phase space associated with such variables then reads :

$$\Omega = \{ \mathbf{u} = (\rho, \rho v, \rho Y) \in \mathbb{R}^3; \rho > 0, v \in \mathbb{R}, Y \in [0, 1] \}.$$

With some little abuse, both the pressure law  $p$  and the hydrodynamic closure  $\Phi$  will keep their previous notations when expressed in terms of the new variable  $\mathbf{u}$ . In order to simplify the notations, let us introduce the following two functions of the unknown  $\mathbf{u}$  :

$$\sigma(\mathbf{u}) = \rho Y(1 - Y)\Phi(\mathbf{u}), \quad P(\mathbf{u}) = p(\mathbf{u}) + \rho Y(1 - Y)\Phi(\mathbf{u})^2. \quad (3.4)$$

Equipped with this admissible change of variables, we state the following easy result :

**Lemma 3.1.1** *Weak solutions of the system (3.1)–(3.2) equivalently obey the following system in conservation form :*

$$\begin{cases} \partial_t(\rho) + \partial_x(\rho v) &= 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + P(\mathbf{u})) &= 0, \\ \partial_t(\rho Y) + \partial_x(\rho Y v - \sigma(\mathbf{u})) &= 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

To shorten the forthcoming notations, the system (3.5) will be given the condensed form :

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathcal{F}(\mathbf{u}) = 0, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}; \quad (3.6)$$

where the flux function  $\mathcal{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  finds a clear definition. The system (3.6) will be referred as the *equilibrium* system in Eulerian coordinates.

**PROOF** The two functions  $\sigma$  and  $P$  clearly encode the most severe nonlinearities in the system (3.5). The first equation in (3.5) readily follows when adding the two mass conservation laws in (3.1). Straightforward calculations yield the following two identities  $v_L = v + Y\Phi(\mathbf{u})$  and  $v_G =$

$v - (1 - Y)\Phi(\mathbf{u})$ . The last equation in (3.5) henceforth follows. We conclude the equivalence statement arguing again from the above two identities to get :

$$\begin{aligned} \rho_L R_L v_L^2 + \rho_G R_G v_G^2 &= \rho(1 - Y)(v + Y\Phi(\mathbf{u}))^2 + \rho Y(v - (1 - Y)\Phi(\mathbf{u}))^2 \\ &= \rho v^2 + \rho Y(1 - Y)\Phi(\mathbf{u})^2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

which is the desired result.  $\square$

### 3.1.1 Design of the relaxation system

We propose to rewrite the system (3.5) in terms of the Lagrangian coordinates based on the density  $\rho$  and the velocity  $v$ . Let us set  $\tau = 1/\rho$ , and define the Lagrangian mass coordinate  $y$  setting  $dy = \rho dx - \rho v dt$ . Then the equilibrium system in Lagrangian coordinates (see for instance Serre [59] or Godlewski and Raviart [33]) writes

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_y v &= 0, \\ \partial_t v + \partial_y P(\mathbf{u}) &= 0, \\ \partial_t Y - \partial_y \sigma(\mathbf{u}) &= 0, \end{cases} \quad (3.8)$$

We propose to approximate the solutions of (3.5) by those of a relaxation system, obtained by solely relaxing the nonlinearities in  $\sigma(\mathbf{u})$  and  $P(\mathbf{u})$ . The very motivation stems for the derivation of easily tractable sub-characteristic conditions as put forward below. We thus introduce two new state variables  $\Sigma$  and  $\Pi$  which are intended to coincide respectively with  $\sigma(\mathbf{u})$  and  $P(\mathbf{u})$  in the limit of some relaxation parameter, say  $\lambda$ . We propose as a relaxation model the following *nonlinear* first order system with singular perturbations :

$$\begin{cases} \partial_t \tau^\lambda - \partial_y v^\lambda &= 0, \\ \partial_t v^\lambda + \partial_y \Pi^\lambda &= 0, \\ \partial_t \Pi^\lambda + a^2 \partial_y v^\lambda &= \lambda(P(\mathbf{u}) - \Pi^\lambda), \\ \partial_t Y^\lambda - \partial_y \Sigma^\lambda &= 0, \\ \partial_t \Sigma^\lambda - b^2 \partial_y Y^\lambda &= \lambda(\sigma(\mathbf{u}) - \Sigma^\lambda). \end{cases} \quad (3.9)$$

Then we return in the original frame and consider the relaxation system in Eulerian coordinates

$$\begin{cases} \partial_t (\rho)^\lambda + \partial_x (\rho v)^\lambda &= 0, \\ \partial_t (\rho v)^\lambda + \partial_x (\rho v^2 + \Pi)^\lambda &= 0, \\ \partial_t (\rho \Pi)^\lambda + \partial_x (\rho \Pi v + a^2 v)^\lambda &= \lambda \rho^\lambda (P(\mathbf{u}^\lambda) - \Pi^\lambda), \\ \partial_t (\rho Y)^\lambda + \partial_x (\rho Y v - \Sigma)^\lambda &= 0, \\ \partial_t (\rho \Sigma)^\lambda + \partial_x (\rho \Sigma v - b^2 Y)^\lambda &= \lambda \rho^\lambda (\sigma(\mathbf{u}^\lambda) - \Sigma^\lambda). \end{cases} \quad (3.10)$$

For simplicity in the notations, the superscript  $\lambda$  will be omitted most of the time. The next statement will be useful in the forthcoming developments :

**Lemma 3.1.2** *Smooth solutions of (3.10) satisfy the following system in non conservation form :*

$$\begin{cases} \partial_t \tau + v \partial_x \tau - \tau \partial_x v &= 0, \\ \partial_t v + v \partial_x v + \tau \partial_x \Pi &= 0, \\ \partial_t \Pi + v \partial_x \Pi + a^2 \tau \partial_x v &= \lambda (P(\mathbf{u}) - \Pi), \\ \partial_t Y + v \partial_x Y - \tau \partial_x \Sigma &= 0, \\ \partial_t \Sigma + v \partial_x \Sigma - b^2 \tau \partial_x Y &= \lambda (\sigma(\mathbf{u}) - \Sigma). \end{cases} \quad (3.11)$$

The relaxation system (3.10) will be given hereafter the convenient abstract form :

$$\partial_t \mathbf{v} + \partial_x \mathcal{G}(\mathbf{v}) = \lambda \mathcal{R}(\mathbf{v}), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}; \quad (3.12)$$

where both the flux function  $\mathcal{G}$  and the relaxation terms  $\mathcal{R}$  receive clear definitions. The associated admissible state space  $\mathcal{V}$  reads

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = \{ \mathbf{v} = {}^t(\rho, \rho v, \rho \Pi, \rho Y, \rho \Sigma) \in \mathbb{R}^5; \\ \rho > 0, \quad v \in \mathbb{R}, \quad \Pi \in \mathbb{R}, \quad Y \in [0, 1], \quad \Sigma \in \mathbb{R} \}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

In (3.10),  $a$  and  $b$  denote two real free parameters in the relaxation procedure we propose. All along the present work, we shall pay a central attention to the specification of these two constants, on the ground of several stability requirements. With this respect, successive and sharper definitions for such a pair will be given in the forthcoming sections. The final definition of  $(a, b)$  is postponed to Section 3.2.4. It is however useful to shed some light, from now on, on the significance of the pair  $(a, b)$ .

The proof of this easy result is left to the reader. Let us observe that the Lagrangian form (3.9) of our relaxation model is nothing else a first order *quasi-linear* system with singular perturbations. With this respect, the relaxation procedure we propose now finds clear relationships with the Xin and Jin approach [69] but at the expense of a Lagrangian transformation. To go further, let us set the relaxation parameter  $\lambda$  to zero. Then, the system (3.9) splits itself into two independent linear hyperbolic systems, one in the unknowns  $(\tau, v, \Pi)$ , the other in  $(Y, \Sigma)$ . The first group of unknowns can be associated respectively with the specific volume, the velocity and the pressure of an hypothetic gas where the parameter  $a$  would play the role of a (constant) Lagrangian sound speed. Likewise, the second pair would characterize the specific volume  $Y$  and the velocity  $\Sigma$  of a hypothetic isentropic gas with the parameter  $b$  as sound speed. These two (linear) hypothetic gas dynamics systems have connections with the recent works by Bouchut [13], Després [22] and Suliciu [60]; all these works being primarily devoted to the Lagrangian setting. Our approach, already introduced in other contexts (see [20] and [19]), could be thus understood as an extension to the Eulerian framework.

Let us now state the basic properties of the Eulerian form (3.10).

**Lemma 3.1.3** *Let  $(a, b)$  be a pair of strictly positive real numbers. For any  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ , the first order system extracted from (3.10) admits five real eigenvalues  $(\tau = 1/\rho) v$ ,  $v \pm a\tau$ ,  $v \pm b\tau$ , and five linearly independent corresponding eigenvectors. Consequently, the first order extracted system from (3.10) is hyperbolic on  $\mathcal{V}$ . Moreover, each eigenvalue is associated with a linearly degenerate field.*

Linear degeneracy of each of the fields is a by-product of the derivation principle of the nonlinear relaxation model (3.10). Such a property is expected from the Lagrangian form (3.9) (see indeed Wagner [63]). It is actually desired since it makes straightforwardly solvable the Riemann problem associated with (3.10) when  $\lambda = 0$  (see indeed Proposition 3.2.2, Section 3.2.1).

**PROOF** The hyperbolicity properties of a first order nonlinear system are known to be independent from a given change of variables (see Godlewski and Raviart [33] for instance). It is then convenient to use the non conservation form (3.11) to immediately derive the required eigenvalues. Easy calculations show that the following vectors  $r_i(\mathbf{v})$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , given by :

$$(1, 0, 0, 0, 0), \quad (\rho, \pm a\tau, a^2\tau, 0, 0) \quad \text{and} \quad (0, 0, 0, 1, \mp b), \quad (3.14)$$

are respectively right eigenvectors for the eigenvalues  $\lambda_i(\mathbf{v}) : v$ ,  $v \pm a\tau$ , and  $v \pm b\tau$ . These vectors are clearly independent provided that the parameters  $a$  and  $b$  are not zero. It is easily seen that  $\nabla \lambda_i(\mathbf{v}) \cdot r_i(\mathbf{v}) = 0$  for  $i = 1, \dots, 5$  for all  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ . Such a property expresses, after Lax [43], the linear degeneracy of all the fields under consideration.  $\square$

### 3.1.2 Chapman-Enskog expansion

The properties stated in Lemma 3.1.3 holds true regardless of the choice of a non zero pair  $(a, b)$  (say strictly positive for definiteness). However, it is known after the works by Liu [47], Chen, Levermore and Liu [16] that some compatibility conditions must be satisfied by the original system (3.1) (we shall refer as to the equilibrium system in the sequel) and its relaxation approximation (3.10). These conditions are actually needed to prevent the relaxation approximation procedure from instabilities as  $\lambda$  goes to infinity. They are usually referred as to sub-characteristic like conditions after Whitham [64]. It is therefore expected that the parameters  $a$  and  $b$  must be fixed in order to fulfill such stability requirements. There exists a variety of ways to exhibit the needed conditions. A powerful one requires the existence of compatible Lax entropy pairs for both the equilibrium system and its relaxation approximation (see Chen, Levermore and Liu [16] for the details). However and as already claimed, the equilibrium system under consideration (3.1) fails to admit additional non trivial conservation laws for general hydrodynamic closure (3.2). This lack for equilibrium entropy pair thus forbids us to enter the general framework proposed in [16].

These authors have proposed (see also Whitham [64]) a weaker approach based on the derivation of the first order asymptotic equilibrium system. In our relaxation framework, its derivation is based on a Chapman-Enskog expansion of small departures  $\mathbf{v}^\lambda$  from the local equilibrium  $\mathbf{u}$  :

$$\Pi^\lambda = P(\mathbf{u}^\lambda) + \lambda^{-1}\Pi_1^\lambda + \mathcal{O}(\lambda^{-2}), \quad (3.15a)$$

$$\Sigma^\lambda = \sigma(\mathbf{u}^\lambda) + \lambda^{-1}\Sigma_1^\lambda + \mathcal{O}(\lambda^{-2}). \quad (3.15b)$$

In (3.15), the dependency of the first order correctors  $\Pi_1^\lambda$  and  $\Sigma_1^\lambda$  in  $\lambda$  comes from the fact that they actually depend on both the equilibrium unknown  $\mathbf{u}^\lambda$  and its space derivative. After substituting (3.15) into (3.10) and neglecting higher order terms, we classically end up with the first order asymptotic equilibrium system with the following generic form (see Proposition 3.1.5 for a brief derivation) :

$$\partial_t \mathbf{u}^\lambda + \partial_x \mathcal{F}(\mathbf{u}^\lambda) = \lambda^{-1} \partial_x (\mathcal{D}_{(a,b)}(\mathbf{u}^\lambda) \partial_x \mathbf{u}^\lambda), \quad (3.16)$$

where the flux function  $\mathcal{F}$  coincides with the one in (3.6) and where the tensor  $\mathcal{D}_{(a,b)}$  will be given an explicit form hereafter. According to the notations, this tensor does actually depend on the free parameters  $a$  and  $b$ .

Now, the stability conditions to be put on the pairs  $(a, b)$  clearly come from the requirement that the first-order correction operator in (3.16) must be dissipative relatively to the zero-order approximation (3.6). Such conditions may be obtained by establishing the  $L^2$ -stability of the constant coefficient problem obtained by linearizing (3.16) in the neighborhood of any equilibrium state  $\mathbf{u}$ . In other words, for all admissible states  $\mathbf{u}$ , all eigenvalues of the matrix  $+i\xi \nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{F}(\mathbf{u}) - \lambda^{-1} \xi^2 \mathcal{D}_{(a,b)}(\mathbf{u})$  for all  $\xi \in \mathbb{R}$ , should have negative real parts (see Serre [59] for instance). The algebraic complexity of the Jacobian matrix  $\nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{F}$  (for general hydrodynamic closures (3.2)) virtually makes intractable such a criterion for our numerical purposes. As a consequence, we adopt the weaker condition on  $(a, b)$  according to which the eigenvalues of the dissipative tensor  $\mathcal{D}_{(a,b)}(\mathbf{u})$  must be non-negative real numbers for all the states  $\mathbf{u}$  under consideration. The main result of this section actually shows that it is always possible to fulfill this stability requirement.

**Proposition 3.1.4** *There exist four smooth mappings  $A, B, C, D : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  (explicitly known and detailed below) such that for any given  $\mathbf{u} \in \Omega$ , the tensor  $\mathcal{D}_{(a,b)}$  meets the form :*

$$\mathcal{D}_{(a,b)}(\mathbf{u}) = \frac{1}{\rho^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \times & a^2 - A(\mathbf{u}) & C(\mathbf{u}) \\ \times & D(\mathbf{u}) & b^2 - B(\mathbf{u}) \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

This tensor therefore always admits one zero eigenvalue. For any given  $\mathbf{u} \in \Omega$ , the two other non trivial eigenvalues of  $\mathcal{D}_{(a,b)}(\mathbf{u})$  are positive iff the following set of inequalities is satisfied by the pair  $(a, b)$  :

$$\begin{aligned} [(a^2 - A(\mathbf{u})) - (b^2 - B(\mathbf{u}))]^2 &\geq -4C(\mathbf{u})D(\mathbf{u}), \\ (a^2 - A(\mathbf{u})) (b^2 - B(\mathbf{u})) &\geq C(\mathbf{u})D(\mathbf{u}), \\ (a^2 - A(\mathbf{u})) + (b^2 - B(\mathbf{u})) &\geq 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Let us observe that whatever the signs of the bounded real numbers  $A(\mathbf{u})$ ,  $B(\mathbf{u})$ ,  $C(\mathbf{u})$  and  $D(\mathbf{u})$  may be for a given  $\mathbf{u} \in \Omega$ , the parameters  $a$  and  $b$  can be always chosen large enough so that (3.18) is valid. We shall give below a sharper and more convenient characterization of admissible pairs  $(a, b)$ .

Assuming first that the tensor  $\mathcal{D}_{(a,b)}$  meets the above mentioned form, the set of inequalities (3.18) obviously comes from the fact that the two non trivial eigenvalues of  $\mathcal{D}_{(a,b)}(\mathbf{u})$  are roots of the quadratic equation

$$\begin{aligned} \lambda^2 - [a^2 - A(\mathbf{u}) + b^2 - B(\mathbf{u})] \lambda \\ + [a^2 - A(\mathbf{u})] [b^2 - B(\mathbf{u})] - C(\mathbf{u})D(\mathbf{u}) = 0. \end{aligned}$$

Requiring these roots to be positive real numbers is equivalent first to enforce the discriminant of this equation to remain non negative (hence the first inequality in (3.18)) and in addition to enforce both the sum and the product of the roots to be non negative (hence respectively the two last inequalities).

The derivation of the precise shape of  $\mathcal{D}_{(a,b)}(\mathbf{u})$  relies on easy but cumbersome algebraic calculations. It turns out that expressing the main nonlinearities of the problem in terms of the variables  $(\tau, v, Y)$  instead of the conservative one leads to simpler calculations. For the sake of simplicity and with some abuse in the notations, nonlinear functions (like the pressure or the hydrodynamic law) will be given the same notation when expressed in both types of variables. The final results of the calculations are gathered in the following proposition :

**Proposition 3.1.5** *The first order asymptotic equilibrium system (3.16) reads*

$$\begin{cases} \partial_t (\rho)^\lambda + \partial_x (\rho v)^\lambda = 0, \\ \partial_t (\rho v)^\lambda + \partial_x (\rho v^2 + P(\mathbf{u}))^\lambda = \lambda^{-1} \partial_x (\mathbf{D}^1(\mathbf{u}^\lambda) \cdot \partial_x \mathbf{u}^\lambda), \\ \partial_t (\rho Y)^\lambda + \partial_x (\rho Y v - \sigma(\mathbf{u}))^\lambda = \lambda^{-1} \partial_x (\mathbf{D}^2(\mathbf{u}^\lambda) \cdot \partial_x \mathbf{u}^\lambda). \end{cases} \quad (3.19)$$

To define the smooth mappings  $\mathbf{D}^1, \mathbf{D}^2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , let us set

$$C(\mathbf{u}) = -P_v(\mathbf{u}) P_Y(\mathbf{u}) + P_Y(\mathbf{u}) \sigma_Y(\mathbf{u}), \quad (3.20)$$

$$D(\mathbf{u}) = -\sigma_\tau(\mathbf{u}) + \sigma_v(\mathbf{u}) P_v(\mathbf{u}) - \sigma_Y(\mathbf{u}) \sigma_v(\mathbf{u}), \quad (3.21)$$

$$A(\mathbf{u}) = -P_\tau(\mathbf{u}) + P_v^2(\mathbf{u}) - P_Y(\mathbf{u}) \sigma_v(\mathbf{u}), \quad (3.22)$$

$$B(\mathbf{u}) = \sigma_Y^2(\mathbf{u}) - \sigma_v(\mathbf{u}) P_Y(\mathbf{u}) \quad (3.23)$$

where we have noted the partial derivatives with subscripts (for example  $P_\tau(\mathbf{u}) = \frac{\partial P}{\partial \tau}(\mathbf{u})$ ). Then,

$$\mathbf{D}^1(\mathbf{u}) = \frac{1}{\rho^2} \begin{pmatrix} \times \\ a^2 - A(\mathbf{u}) \\ C(\mathbf{u}) \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{D}^2(\mathbf{u}) = \frac{1}{\rho^2} \begin{pmatrix} \times \\ D(\mathbf{u}) \\ b^2 - B(\mathbf{u}) \end{pmatrix}.$$

**Remark 3.1.6** *The  $\sigma_Y^2$  term in  $B$  is the one which appears in the relaxation of the scalar equation  $\partial_t Y - \partial_y \bar{\sigma}(Y) = 0$ . The  $P_\tau$  term in  $A$  is the one which appears in the relaxation of the Isothermal Euler system. This is natural since the Lagrangian structure of the system (3.5) is (3.8) which is close to this two models. The others terms which appear in (3.20–3.23) come therefore from the coupling between the equations.*



PROOF Considering smooth solutions of the relaxation system (3.10), the relaxed pressure  $\Pi$  and the velocity  $\Sigma$  are easily seen to satisfy

$$\begin{aligned}\partial_t \Pi + v \partial_x \Pi + a^2 \tau \partial_x v &= \lambda(P(\mathbf{u}) - \Pi), \\ \partial_t \Sigma + v \partial_x \Sigma - b^2 \tau \partial_x Y &= \lambda(\sigma(\mathbf{u}) - \Sigma).\end{aligned}$$

Plugging the expansions (3.15) into the two above equations and dropping the higher order terms, we end up with

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{u}} P(\mathbf{u}) \partial_t \mathbf{u} + v \partial_x P(\mathbf{u}) + a^2 \tau \partial_x v &= -\Pi_1 + \mathcal{O}(\lambda^{-1}), \\ \nabla_{\mathbf{u}} \sigma(\mathbf{u}) \partial_t \mathbf{u} + v \partial_x \sigma(\mathbf{u}) - b^2 \tau \partial_x Y &= -\Sigma_1 + \mathcal{O}(\lambda^{-1}).\end{aligned}\tag{3.24}$$

In the above equations, we wish to turn time derivatives into space derivatives. In that aim, it suffices to express  $\partial_t \mathbf{u}$  in terms of the time derivatives of  $\rho$ ,  $v$  and  $Y$  and then to use the following identities :

$$\begin{cases} \partial_t \rho = -v \partial_x \rho - \rho \partial_x v, \\ \partial_t v = -v \partial_x v - \tau \partial_x P(\mathbf{u}), \\ \partial_t Y = -v \partial_x Y + \tau \partial_x \sigma(\mathbf{u}), \end{cases}\tag{3.25}$$

which are similar to those stated in Lemma 3.1.2. Using these equalities in (3.24) yields after lengthy calculations (which we shall not report here)

$$\Pi_1 = -\mathbf{D}^1(\mathbf{u}) \cdot \partial_x \mathbf{u}, \quad \Sigma_1 = +\mathbf{D}^2(\mathbf{u}) \cdot \partial_x \mathbf{u}.\tag{3.26}$$

To achieve the proof, let us consider the following set of PDE's extracted from the relaxation model (3.10) :

$$\begin{cases} \partial_t (\rho)^\lambda + \partial_x (\rho v)^\lambda &= 0, \\ \partial_t (\rho v)^\lambda + \partial_x (\rho v^2 + \Pi)^\lambda &= 0, \\ \partial_t (\rho Y)^\lambda + \partial_x (\rho Y v - \Sigma)^\lambda &= 0. \end{cases}\tag{3.27}$$

It is then sufficient to plug the expansions (3.15) into these equations to obtain

$$\begin{cases} \partial_t (\rho)^\lambda + \partial_x (\rho v)^\lambda &= 0, \\ \partial_t (\rho v)^\lambda + \partial_x (\rho v^2 + P(\mathbf{u}))^\lambda &= -\lambda^{-1} \partial_x \Pi_1 + \mathcal{O}(\lambda^{-2}), \\ \partial_t (\rho Y)^\lambda + \partial_x (\rho Y v - \sigma(\mathbf{u}))^\lambda &= \lambda^{-1} \partial_x \Sigma_1 + \mathcal{O}(\lambda^{-2}), \end{cases}\tag{3.28}$$

which is nothing but the expected system (3.19), thanks to (3.26).  $\square$

To conclude this section, let us notice that a sharp characterization for a given  $\mathbf{u} \in \Omega$  of all the pairs  $(a, b)$  satisfying the stability condition (3.18) obviously depends on the sign of  $A(\mathbf{u})$ ,  $B(\mathbf{u})$ ,  $C(\mathbf{u})$  and  $D(\mathbf{u})$ . For numerical purposes, it seems convenient to propose a characterization of admissible pairs which stays free from signs consideration. In that aim, let us prove the following lemma.

**Lemma 3.1.7** *Let us define  $\gamma(\mathbf{u}) = |C(\mathbf{u})D(\mathbf{u})|$ . Let us define the couple  $(\widehat{a}_-, \widehat{b}_-)$  by*

$$\widehat{a}_-(\mathbf{u}) = (\sqrt{2} + 1)\sqrt{\gamma(\mathbf{u})}, \quad \widehat{b}_-(\mathbf{u}) = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{\gamma(\mathbf{u})},\tag{3.29}$$

and the couple  $(a_-, b_-)$  by

$$a_-(\mathbf{u}) = \sqrt{\widehat{a}_-(\mathbf{u}) + A(\mathbf{u})}, \quad b_- = \sqrt{\widehat{b}_-(\mathbf{u}) + B(\mathbf{u})}.\tag{3.30}$$

Then the conditions (3.18) are satisfied.

PREUVE The idea consists in considering the change of variables :

$$\widehat{a} = a^2 - A, \quad \widehat{b} = b^2 - B, \quad (3.31)$$

where, now, the unknowns are  $\widehat{a}, \widehat{b}$  and not  $a, b$  anymore. The conditions (3.18) now become :

$$(\widehat{a} - \widehat{b})^2 + 4CD \geq 0, \quad (3.32)$$

$$\widehat{a}\widehat{b} - CD \geq 0, \quad (3.33)$$

$$\widehat{a} + \widehat{b} \geq 0. \quad (3.34)$$

It is easy to see that a sufficient condition for (3.32–3.34) is :

$$(\widehat{a} - \widehat{b})^2 - 4\gamma \geq 0, \quad (3.35)$$

$$\widehat{a}\widehat{b} - \gamma \geq 0, \quad (3.36)$$

$$\widehat{a} + \widehat{b} \geq 0, \quad (3.37)$$

with  $\gamma = |CD|$ . On the figure (3.1), we can see the solutions of this system of inequalities in the plan  $(\widehat{a}, \widehat{b})$ .

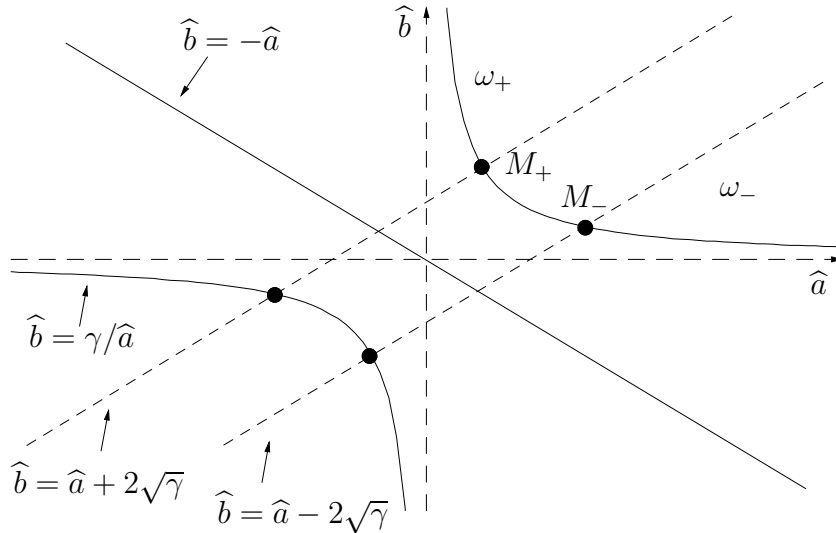


FIG. 3.1 – Domains  $\omega_+(\mathbf{u})$  and  $\omega_-(\mathbf{u})$

We see that the equalities associated with the inequalities (3.35) and (3.36) have always 4 intersections but the inequality (3.37) pick up only two points among them : we noted them  $M_+$  and  $M_-$ . We define by  $\omega_+$  (resp.  $\omega_-$ ) the domain associated with  $M_+$  (resp.  $M_-$ ). In these two domains, which are defining all the solutions of the system (3.35–3.37), we choose the couples  $(\widehat{a}, \widehat{b})$  so that they are as small as possible in order to minimize the numerical dissipation. These points are precisely the points  $M_+$  and  $M_-$ .

It is simple to compute the coordinates of the point  $M_-$  because it is so that  $\widehat{a}$  is the positive solution of the equation  $\frac{\gamma}{\widehat{a}} = \widehat{a} - 2\sqrt{\gamma}$  which can be written  $\widehat{a}^2 - 2\sqrt{\gamma}\widehat{a} - \gamma = 0$ . Therefore, the coordinates of  $M_-$  are :

$$\widehat{a}_- = (\sqrt{2} + 1)\sqrt{\gamma}, \quad \widehat{b}_- = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{\gamma}. \quad (3.38)$$

In the same way, the coordinates of  $M_+$  are :

$$\widehat{a}_+ = (\sqrt{2} - 1) \sqrt{\gamma}, \quad \widehat{b}_+ = (\sqrt{2} + 1) \sqrt{\gamma}. \quad (3.39)$$

We clearly see that  $\widehat{a}_- > \widehat{b}_-$  whereas  $\widehat{a}_+ < \widehat{b}_+$ . But we are primarily interested by the slow waves that is why we prefer to minimize  $\widehat{b}$  : our choice is the couple  $(\widehat{a}_-, \widehat{b}_-)$ .  $\square$

In the next section devoted to the numerical approximation of the solutions of the equilibrium system (3.5), the above sets  $\omega_+(\mathbf{u})$  and  $\omega_-(\mathbf{u})$  will play an important role.

## 3.2 An approximate Riemann solver

In this section we propose an approximate Riemann solver for the equilibrium system (3.1). As already pointed out, the companion relaxation system (3.10) only admits linearly degenerate fields. As we shall see, the Riemann problem associated with this system can be trivially solved. With such a benefit, we propose below a relaxation scheme based on the Godunov method for (3.10), when considering parameters  $a$  and  $b$  satisfying the stability conditions we have put forward in Lemma 3.1.7. In addition to simplicity, using the exact Riemann solver but for (3.10) will allow us to easily enforce both the positivity of the density in addition to a maximum principle on the mass fractions ( $Y \in [0, 1]$ ) for a suitable choice of the free parameters  $a$  and  $b$ .

The numerical procedure we use, is standard within the frame of relaxation methods (see for instance Xin and Jin [69] ..) but we briefly recall it for the sake of completeness. We begin this section with a rough description of the numerical procedure we develop below for approximating the weak solutions of (3.10) within the frame of the hydrodynamic relaxation theory. Given some approximation of the equilibrium solution at the time  $t^n$ , say  $\mathbf{u}^n(x) = {}^t(\rho^n, (\rho v)^n, (\rho Y)^n)(x)$ , this approximation is evolved at the next time level  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$  into two steps.

### 1. Relaxation

At time  $t = t^n$ , we solve the ODE system  $d_t \mathbf{u} = \lambda \mathcal{R}(\mathbf{u})$  with  $\lambda \rightarrow \infty$  and set  $\Pi^n(x) = P(\mathbf{u}^n(x))$ ,  $\Sigma^n(x) = \sigma(\mathbf{u}^n(x))$ .

### 2. Evolution in time

We take  $\lambda = 0$  and solve the system of partial differential equations  $\partial_t \mathbf{v} + \partial_x \mathcal{G}(\mathbf{v}) = 0$  in order to go to time  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ .

**Remark 3.2.1** In [69], Jin & Xin make a distinction between the “relaxing scheme” in which one uses a small fixed value of  $\varepsilon = \frac{1}{\lambda}$  (for example  $\varepsilon = 10^{-8}$ ) and the relaxed scheme which is the  $\varepsilon = 0$  limit of the relaxing schemes. Our scheme is of the second class.

### 3.2.1 Relaxation scheme

We now give a complete description of the numerical method we propose. Let  $\Delta t$  and  $\Delta x$  be respectively the time and space steps, chosen to be uniform for simplicity. Let us define the time levels  $t^n = n\Delta t$  for  $n \in \mathbb{N}$  and the cell interface location  $x_{i+1/2} = (i + 1/2)\Delta x$  with  $i \in \mathbb{Z}$ . We consider piecewise constant approximate equilibrium solutions  $\mathbf{u}^h(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \mapsto \Omega$  under the classical form :

$$\mathbf{u}^h(x, t) = \mathbf{u}_i^n = T(\rho_i^n, (\rho v)_i^n, (\rho Y)_i^n), \quad (x, t) \in ]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[ \times [t^n, t^{n+1}[. \quad (3.40)$$

At  $t = 0$ , we set

$$\mathbf{u}_i^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} T(\rho^0(x), (\rho v)^0(x), (\rho Y)^0(x)) dx.$$

In order to advance the approximate equilibrium solution in time, we define another function  $\mathbf{v}^h(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathcal{V}$  which is also piecewise constant at each time level  $t^n$ . In each slab  $\mathbb{R} \times [t^n, t^{n+1}[$ , the function  $\mathbf{v}^h(x, t^n + t)$ , with  $0 < t < \Delta t$ , is the weak solution of the Cauchy problem for (3.10) obtained with  $\lambda = 0$  while prescribing the following initial data given for  $x \in ]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$  :

$$\mathbf{v}^h(x, t^n) = \mathbf{v}_i^n = {}^t((\rho)_i^n, (\rho v)_i^n, (\rho \Pi)_i^n, (\rho Y)_i^n, (\rho \Sigma)_i^n) \quad (3.41)$$

with  $(\rho \Pi)_i^n := \rho_i^n P(\mathbf{u}_i^n)$  and  $(\rho \Sigma)_i^n := \rho_i^n \sigma(\mathbf{u}_i^n)$ . When  $\Delta t$  is small enough, e.g. under the CFL condition

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max |\mu_i(\mathbf{v}^h)| \leq \frac{1}{2}, \quad (3.42)$$

where  $(\mu_i)_{1 \leq i \leq 5}$  denotes the eigenvalues defined in Lemma 3.1.3, the function  $\mathbf{v}^h$  is classically obtained by solving a sequence of local Riemann problems without interaction, located at each cell interface  $x_{i+1/2}$ .

The convenient CFL restriction (3.42) will allow us to use the celebrated Harten, Lax and Van Leer [35] formalism which will turn out to be particularly well-suited to our forthcoming purpose : namely a local definition of the pair  $(a, b)$  at each cell interface  $x_{i+1/2}$  (see below and Coquel and Perthame [20]). Following these authors, let be given two equilibrium states  $\mathbf{u}_L$  and  $\mathbf{u}_R$  in  $\Omega$  and define  $\mathbf{v}_L = \mathbf{v}(\mathbf{u}_L)$  and  $\mathbf{v}_R = \mathbf{v}(\mathbf{u}_R)$  according to (3.41). We may think of choosing  $\mathbf{v}_L = \mathbf{v}_i^n$  and  $\mathbf{v}_R = \mathbf{v}_{i+1}^n$  when considering the interface  $x_{i+1/2}$ . Let us choose a pair of parameters  $(a, b)$  for completing the definition of the relaxation system (3.10). Precise conditions on these parameters will be introduced later on. Let us keep in mind that the pair under consideration is to be labeled with reference to the given interface  $x_{i+1/2}$ .

Now, equipped with such a pair, let  $w_{a,b}(\cdot, \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$  denote the solution of the Riemann problem for (3.10) $_{a,b}$  with initial data  $\mathbf{v}_0(x) = \mathbf{v}_L$  if  $x < 0$  and  $\mathbf{v}_R$  otherwise. We easily get after Harten, Lax and Van Leer [35] :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}_L(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) &:= \frac{2\Delta t}{\Delta x} \int_{-\frac{\Delta x}{2\Delta t}}^0 w_{a,b}(\xi, \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) d\xi \\ &= \mathbf{v}_L - \frac{2\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{G}_{a,b}(w_{a,b}(0^+; \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)) - \mathcal{G}_{a,b}(\mathbf{v}_L)), \end{aligned} \quad (3.43)$$

and

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}_R(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) &:= \frac{2\Delta t}{\Delta x} \int_0^{\frac{\Delta x}{2\Delta t}} w_{a,b}(\xi, \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) d\xi \\ &= \mathbf{v}_R - \frac{2\Delta t}{\Delta x} (\mathcal{G}_{a,b}(\mathbf{v}_R) - \mathcal{G}_{a,b}(w_{a,b}(0^+; \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R))). \end{aligned} \quad (3.44)$$

In (3.43) and (3.44), the notation  $\mathcal{G}_{a,b}$  obviously refers to exact flux function of the relaxation system (3.12) when labeled by the pair  $(a, b)$ . Using clear notations, it is crucial to notice at this stage the following identities :

$$\mathcal{G}_{a,b}^\rho(\mathbf{v}_L) = (\rho v)_L, \quad \mathcal{G}_{a,b}^{\rho v}(\mathbf{v}_L) = (\rho v^2)_L + P(\mathbf{u}_L), \quad (3.45a)$$

$$\mathcal{G}_{a,b}^{\rho Y}(\mathbf{v}_L) = (\rho Y)_L - \sigma(\mathbf{u}_L), \quad (3.45b)$$

while symmetrically

$$\mathcal{G}_{a,b}^\rho(\mathbf{v}_R) = (\rho v)_R, \quad \mathcal{G}_{a,b}^{\rho v}(\mathbf{v}_R) = (\rho v^2)_R + P(\mathbf{u}_R), \quad (3.46a)$$

$$\mathcal{G}_{a,b}^{\rho Y}(\mathbf{v}_R) = (\rho Y)_R - \sigma(\mathbf{u}_R). \quad (3.46b)$$

The validity of (3.45)–(3.46) is directly inherited from the fact that  $\mathbf{v}_L$  and  $\mathbf{v}_R$  are respectively defined from the equilibrium states  $\mathbf{u}_L$  and  $\mathbf{u}_R$  (indeed see (3.41)). Put in other words, the identities (3.45)–(3.46) stay **completely free** from a particular choice of the pair  $(a, b)$ !

Equipped with these formulas, we define under the CFL condition (3.42)

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i^{n+1,-} &= \frac{1}{2} \left( \bar{\mathbf{v}}_R(\mathbf{v}_{i-1}^n, \mathbf{v}_i^n) + \bar{\mathbf{v}}_L(\mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n) \right), \\ &= \left( \rho_i^{n+1,-}, (\rho v)_i^{n+1,-}, (\rho \Pi)_i^{n+1,-}, (\rho Y)_i^{n+1,-}, (\rho \Sigma)_i^{n+1,-} \right). \end{aligned} \quad (3.47)$$

The approximate equilibrium solution  $\mathbf{u}^h(x, t^n)$  can be now advanced at the time level  $t^{n+1}$ , setting in each cell  $]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$ :

$$\mathbf{u}^h(x, t^{n+1}) = \mathbf{u}_i^{n+1} = \begin{cases} \rho_i^{n+1} = \rho_i^{n+1,-} \\ (\rho v)_i^{n+1} = (\rho v)_i^{n+1,-} \\ (\rho Y)_i^{n+1} = (\rho Y)_i^{n+1,-} \end{cases} \quad (3.48)$$

To summarize, as a consequence of the identities (3.45)–(3.46) and the formula definition (3.47), the updating formula for the equilibrium approximated solution reads :

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \mathcal{F}_{i+1/2}^n - \mathcal{F}_{i-1/2}^n \right),$$

where the numerical flux  $\mathcal{F}_{i+1/2}^n$  is defined as

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{i+1/2}^n &= \mathcal{F}(\mathbf{u}_i^n, \mathbf{u}_{i+1}^n) \\ &:= \begin{pmatrix} \mathcal{G}_{a,b}^\rho \left( w_{a_{i+1/2}, b_{i+1/2}}(0^+; \mathbf{v}(\mathbf{u}_i^n), \mathbf{v}(\mathbf{u}_{i+1}^n)) \right) \\ \mathcal{G}_{a,b}^{\rho v} \left( w_{a_{i+1/2}, b_{i+1/2}}(0^+; \mathbf{v}(\mathbf{u}_i^n), \mathbf{v}(\mathbf{u}_{i+1}^n)) \right) \\ \mathcal{G}_{a,b}^{\rho Y} \left( w_{a_{i+1/2}, b_{i+1/2}}(0^+; \mathbf{v}(\mathbf{u}_i^n), \mathbf{v}(\mathbf{u}_{i+1}^n)) \right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

The numerical approximation procedure we have just detailed, therefore recasts under the usual form of a finite volume method. Let us again underline that the definition of the pair  $(a_{i+1/2}, b_{i+1/2})$  entering the numerical flux function (3.49) may vary from one interface to another. This again simply comes from the CFL condition (3.42).

To conclude the presentation of the relaxation method, we now have to exhibit the exact solution of the Riemann problem for the relaxation system (3.10) with  $\lambda = 0$ . Since all the fields of the system under consideration are linearly degenerate, the Riemann solution is systematically made of six constant states separated by five contact discontinuities. These states will be denoted in the sequel  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_j, j = 1, \dots, 4, \mathbf{v}_5 = \mathbf{v}_R$ , where  $(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$  denotes the pair of constant states in  $\mathcal{V}$  defining the initial data

$$\mathbf{v}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{v}_L & \text{if } x < 0, \\ \mathbf{v}_R & \text{if } x > 0. \end{cases} \quad (3.49)$$

The speed at which propagates the  $j$ -th contact discontinuity is thus given by  $\mu_j(\mathbf{v}_j)$  for  $j = 0, \dots, 4$  where the eigenvalues defined in Lemma 3.1.3 are tacitly assumed to be increasingly ordered. Again by the linear degeneracy of the fields, let us stress out that no entropy condition is needed to select the relevant Riemann solution (see for instance Godlewski and Raviart [33]). The Riemann solution thus always reads :

$$\mathbf{v}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{v}_L & \text{if } \frac{x}{t} < \mu_1, \\ \mathbf{v}_j & \text{if } \mu_j < \frac{x}{t} < \mu_{j+1}, \quad 1 \leq j \leq 4 \\ \mathbf{v}_R & \text{if } \frac{x}{t} > \mu_5, \end{cases}$$

The following statement gives the intermediate states  $\mathbf{v}_j$  for  $j = 1, \dots, 4$ . For simplicity, we shall only address the generic case  $a \neq b$ . In the following proposition, we note  $\bar{\varphi} = (\varphi_{\mathbf{L}} + \varphi_{\mathbf{R}})/2$  the average and  $\langle \varphi \rangle = (\varphi_{\mathbf{L}} - \varphi_{\mathbf{R}})/2$  the mid-jump of the the two states  $\mathbf{v}_{\mathbf{L}}$  and  $\mathbf{v}_{\mathbf{R}}$  whatever the quantity  $\varphi$ .

**Proposition 3.2.2** *Let us set*

$$\begin{aligned} \tau_{\mathbf{L}}^* &= \tau_{\mathbf{L}} - \frac{\langle v \rangle}{a} + \frac{\langle \Pi \rangle}{a^2}, & \tau_{\mathbf{R}}^* &= \tau_{\mathbf{R}} - \frac{\langle v \rangle}{a} - \frac{\langle \Pi \rangle}{a^2}, \\ v^* &= \bar{v} + \frac{\langle \Pi \rangle}{a}, & \Pi^* &= \bar{\Pi} + a \langle v \rangle, \\ Y^* &= \bar{Y} - \frac{\langle \Sigma \rangle}{b}, & \Sigma^* &= \bar{\Sigma} - b \langle Y \rangle. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Assume that the parameter  $a$  is chosen large enough so that both  $\tau_{\mathbf{L}}^*$  and  $\tau_{\mathbf{R}}^*$  in (3.50) are positive (see for instance condition (3.51) below).

If  $a > b$  then the eigenvalues are increasingly ordered as follows

$$\mu_1(\mathbf{v}_{\mathbf{L}}) = (v - a\tau)_{\mathbf{L}} \leq (v - b\tau)(\mathbf{v}_1) \leq v(\mathbf{v}_2) \leq (v + b\tau)(\mathbf{v}_3) \leq (v + a\tau)(\mathbf{v}_4)$$

where the intermediate states are given by :

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \rho_{\mathbf{L}}^* \\ \rho_{\mathbf{L}}^* v^* \\ \rho_{\mathbf{L}}^* \Pi^* \\ \rho_{\mathbf{L}}^* Y_{\mathbf{L}} \\ \rho_{\mathbf{L}}^* \Sigma_{\mathbf{L}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \rho_{\mathbf{L}}^* \\ \rho_{\mathbf{L}}^* v^* \\ \rho_{\mathbf{L}}^* \Pi^* \\ \rho_{\mathbf{L}}^* Y^* \\ \rho_{\mathbf{L}}^* \Sigma^* \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} \rho_{\mathbf{R}}^* \\ \rho_{\mathbf{R}}^* v^* \\ \rho_{\mathbf{R}}^* \Pi^* \\ \rho_{\mathbf{R}}^* Y^* \\ \rho_{\mathbf{R}}^* \Sigma^* \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} \rho_{\mathbf{R}}^* \\ \rho_{\mathbf{R}}^* v^* \\ \rho_{\mathbf{R}}^* \Pi^* \\ \rho_{\mathbf{R}}^* Y_{\mathbf{R}} \\ \rho_{\mathbf{R}}^* \Sigma_{\mathbf{R}} \end{pmatrix}.$$

If  $a < b$  then the eigenvalues are now increasingly ordered as follows

$$\mu_1(\mathbf{v}_{\mathbf{L}}) = (v - b\tau)_{\mathbf{L}} \leq (v - a\tau)(\mathbf{v}_1) \leq v(\mathbf{v}_2) \leq (v + a\tau)(\mathbf{v}_3) \leq (v + b\tau)(\mathbf{v}_4)$$

where the intermediate states are given by :

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \rho_{\mathbf{L}} \\ \rho_{\mathbf{L}} v_{\mathbf{L}} \\ \rho_{\mathbf{L}} \Pi_{\mathbf{L}} \\ \rho_{\mathbf{L}} Y^* \\ \rho_{\mathbf{L}} \Sigma^* \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \rho_{\mathbf{L}}^* \\ \rho_{\mathbf{L}}^* v^* \\ \rho_{\mathbf{L}}^* \Pi^* \\ \rho_{\mathbf{L}}^* Y^* \\ \rho_{\mathbf{L}}^* \Sigma^* \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} \rho_{\mathbf{R}}^* \\ \rho_{\mathbf{R}}^* v^* \\ \rho_{\mathbf{R}}^* \Pi^* \\ \rho_{\mathbf{R}}^* Y^* \\ \rho_{\mathbf{R}}^* \Sigma^* \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} \rho_{\mathbf{R}} \\ \rho_{\mathbf{R}} v_{\mathbf{R}} \\ \rho_{\mathbf{R}} \Pi_{\mathbf{R}} \\ \rho_{\mathbf{R}} Y^* \\ \rho_{\mathbf{R}} \Sigma^* \end{pmatrix}.$$

Let us emphasize that the expressions stated in (3.50) are well defined as soon as the parameters  $a$  and  $b$  are strictly positive. Notice that by construction, the identities  $\Pi_{L,R} = P(\mathbf{u}_{L,R})$  and  $\Sigma_{L,R} = \sigma(\mathbf{u}_{L,R})$  hold true in (3.50). Furthermore, we point out that the requirement for positivity concerning the intermediate specific volumes  $\tau_{\mathbf{L}}^*$  and  $\tau_{\mathbf{R}}^*$  (e.g.  $a$  large enough) has nothing to do with the stability requirement (3.1.4) but just enforce for validity the proposed ordering of the eigenvalues (see the proof of Proposition 3.2.2). As a consequence, additional restrictions on the parameters  $a$  and  $b$  will have to be put : namely the satisfaction of the stability condition (3.1.4). This will be the matter of the next section. The reader will easily check that if  $a$  is chosen larger than  $a_p(\mathbf{u}_{\mathbf{L}}, \mathbf{u}_{\mathbf{R}})$  where

$$a_p(\mathbf{u}_{\mathbf{L}}, \mathbf{u}_{\mathbf{R}}) := \frac{\langle v \rangle + \sqrt{\langle v \rangle^2 + 4 \max(\tau_{\mathbf{L}}, \tau_{\mathbf{R}}) |\langle \Pi \rangle|}}{2 \min(\tau_{\mathbf{L}}, \tau_{\mathbf{R}})}, \quad (3.51)$$

then the intermediate state densities are positive.

PROOF As already underlined, the Riemann solution is uniquely made of contact discontinuities. The  $j$ -th one separates the states  $\mathbf{v}_j$  and  $\mathbf{v}_{j+1}$  and propagates with speed  $\mu_j(\mathbf{v}_j) = \mu_j(\mathbf{v}_{j+1})$ . At it

is well-known, the two states  $\mathbf{v}_j$  and  $\mathbf{v}_{j+1}$  are not arbitrary but must solve the following Rankine-Hugoniot conditions :

$$-\mu_j(\mathbf{v}_j)(\mathbf{v}_{j+1} - \mathbf{v}_j) + (\mathbf{g}(\mathbf{v}_{j+1}) - \mathbf{g}(\mathbf{v}_j)) = 0, \quad j = 0, \dots, 4. \quad (3.52)$$

Specializing this jump condition in the case of the density variable, we have  $-\mu_j(\mathbf{v}_j)(\rho_{j+1} - \rho_j) + ((\rho v)_{j+1} - (\rho v)_j) = 0$ , for each  $j = 0, \dots, 4$  so that there exists a constant  $\mathcal{M}_j$  satisfying

$$\mathcal{M}_j = (\mu_j(\mathbf{v}_j) - v_{j+1})\rho_{j+1} = (\mu_j(\mathbf{v}_j) - v_j)\rho_j. \quad (3.53)$$

Such a constant simply expresses the conservation of the mass flux across the  $j$ -th wave. But  $\mu_j(\mathbf{v}_j) = v_j + c_j \tau_j$  with  $c_j$  equals either to  $\pm a$ ,  $\pm b$  or zero depending on the wave under consideration. A direct consequence of (3.53) is that  $\mathcal{M}_j^2$  is equal either to  $a^2$ ,  $b^2$  or zero.

Next, consider the remaining jump conditions. These are easily seen to simplify thanks to (3.53) and we have

$$\begin{cases} -\mathcal{M}_j(v_{j+1} - v_j) + (\Pi_{j+1} - \Pi_j) = 0, \\ -\mathcal{M}_j(\Pi_{j+1} - \Pi_j) + a^2(v_{j+1} - v_j) = 0, \\ -\mathcal{M}_j(Y_{j+1} - Y_j) - (\Sigma_{j+1} - \Sigma_j) = 0, \\ -\mathcal{M}_j(\Sigma_{j+1} - \Sigma_j) - b^2(Y_{j+1} - Y_j) = 0. \end{cases} \quad (3.54)$$

Indeed, notice for instance that the associated jump condition in  $(\rho, v)$  rewrites  $(\rho(v - \mu_j))_{j+1} v_{j+1} - (\rho(v - \mu_j))_j v_j + \Pi_{j+1} - \Pi_j = 0$ , which is nothing but the first identity in (3.54).

Next, let us observe that the first two relations in (3.54) give  $(\mathcal{M}_j^2 - a^2)(v_{j+1} - v_j) = 0$ , while the last two ones in (3.54) symmetrically yield  $(\mathcal{M}_j^2 - b^2)(Y_{j+1} - Y_j) = 0$ . We have therefore proved that across a discontinuity associated with the eigenvalue  $v$ , namely  $\mathcal{M}_j^2 = 0$ , necessarily all the variables stay constant except the density  $\rho$  which can achieve an arbitrary jump. Next, considering the discontinuity associated with the eigenvalues  $v \pm a\tau$ , e.g.  $\mathcal{M}_j^2 = a^2$ , necessarily  $Y$  and  $\Sigma$  are continuous. Symmetrically,  $v$  and  $\Pi$  stay continuous across discontinuities associated with the eigenvalues  $v \pm b\tau$ .

To summarize, the intermediate states  $\mathbf{v}_1$  to  $\mathbf{v}_4$  can be made of at most one pair  $(Y^*, \Sigma^*)$  distinct from  $(Y_{\mathbf{L}}, \Sigma_{\mathbf{L}})$  and  $(Y_{\mathbf{R}}, \Sigma_{\mathbf{R}})$ . The pair  $(Y^*, \Sigma^*)$  is solution (see indeed (3.52)) of  $b(Y^* - Y_{\mathbf{L}}) - (\Sigma^* - \Sigma_{\mathbf{L}}) = 0$  and  $-b(Y_{\mathbf{R}} - Y^*) - (\Sigma_{\mathbf{R}} - \Sigma^*) = 0$ , which is exactly the definition of the required states in (3.50). For symmetric reasons, the intermediate states  $\mathbf{v}_j$  can be made of at most a new velocity  $v^*$ , a new pressure  $\Pi^*$  and two new densities distinct from  $(\rho_{\mathbf{L}}, v_{\mathbf{L}}, \Pi_{\mathbf{L}})$  and  $(\rho_{\mathbf{R}}, v_{\mathbf{R}}, \Pi_{\mathbf{R}})$ . Such new states are defined when solving

$$a(v^* - v_{\mathbf{L}}) + (\Pi^* - \Pi_{\mathbf{L}}) = 0, \quad (3.55)$$

$$-a(v_{\mathbf{R}} - v^*) + (\Pi_{\mathbf{R}} - \Pi^*) = 0. \quad (3.56)$$

These two relations are easily seen to yield  $v^*$  and  $\Pi^*$  in (3.50). Concerning the densities, it suffices to use the continuity of  $\mathcal{M}_j$  across the associated wave to conclude. For instance, concerning the field associated with  $v - a\tau$ , we have  $\rho_{\mathbf{L}}^*(v^* - (v_{\mathbf{L}} - a\tau_{\mathbf{L}})) = a$  so that  $\tau_{\mathbf{L}}^* = \tau_{\mathbf{L}} + \frac{v^* - v_{\mathbf{L}}}{a}$ . To conclude, let us establish the proposed ordering of the eigenvalues. Assume for instance that  $a > b$  then the positivity of both  $\tau_{\mathbf{L}}^*$  and  $\tau_{\mathbf{R}}^*$  easily implies that

$$v_{\mathbf{L}} - a\tau_{\mathbf{L}} = v^* - a\tau_{\mathbf{L}}^* < v^* - b\tau_{\mathbf{L}}^* < v^* < v^* + b\tau_{\mathbf{R}}^* < v^* + a\tau_{\mathbf{R}}^* = v_{\mathbf{R}} + a\tau_{\mathbf{R}}.$$

which completes the proof.  $\square$

### 3.2.2 Relaxation coefficients

In this section, we focus our attention on enforcing the stability requirements we have put forward in (3.18). As already stated, these stability conditions are fulfilled as soon as the pair  $(a, b)$  is chosen large enough but dealing with too large values of these parameters comes at the expense of a too large numerical dissipation. Indeed, the eigenvalues of the dissipative tensor  $\mathcal{D}_{(a,b)}(\mathbf{u})$  introduced in Proposition 3.1.4 are seen to increase with  $a$  and  $b$ . Our motivation is therefore to lower the numerical dissipation when choosing optimal values of the pair  $(a, b)$ . Such values will be chosen locally, namely for each Riemann problem at each cell interface  $x_{i+1/2}$ . Let us recall that this makes sense since the CFL condition (3.42) precludes interactions between two neighboring Riemann solutions (see (3.45)-(3.46) and (3.49)). Such a strategy will obviously allow us to locally adjust the numerical dissipation in an optimal way : this requirement is important because both the pressure law and the hydrodynamic one exhibit strongly varying derivatives. These directly affect the choice of  $a$  and  $b$  via the definition of  $\mathcal{D}_{(a,b)}$ .

Let two equilibrium states  $\mathbf{u}_L$  and  $\mathbf{u}_R$  be given defining the initial data  $(\mathbf{v}(\mathbf{u}_L), \mathbf{v}(\mathbf{u}_R))$  for a Riemann problem. We propose to select  $a(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$  and  $b(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$  on the ground of Lemma 3.1.7 :

$$\gamma(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) = \max(\gamma(\mathbf{u}_L), \gamma(\mathbf{u}_R)), \quad (3.57)$$

$$\hat{a}_-(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) = (\sqrt{2} + 1) \sqrt{\gamma(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)}, \quad (3.58)$$

$$\hat{b}_-(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) = (\sqrt{2} - 1) \sqrt{\gamma(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)}, \quad (3.59)$$

$$a_-(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) = \sqrt{\hat{a}_-(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) + \max(A(\mathbf{u}_L), A(\mathbf{u}_R))}, \quad (3.60)$$

$$b_-(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) = \sqrt{\hat{b}_-(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) + \max(B(\mathbf{u}_L), B(\mathbf{u}_R))}. \quad (3.61)$$

### 3.2.3 A maximum principle on mass fractions

The definition of the phase space  $\Omega$  requires the mass fraction  $Y$  to stay within the invariant region  $0 \leq Y \leq 1$ . Such a property may nevertheless fail to be satisfied at the discrete level (see Larrouturou [40] in a distinct setting). Our motivation in this section is to enforce the validity of this maximum principle when seeking for appropriate pairs  $(a, b)$ . More specifically, we exhibit a precise lower bound to be put locally (e.g. at each interface) on the parameter  $b$ . This additional desirable constraint will give a final definition for the optimal pair of parameters  $(a^*, b^*)$ . The first result of this section is as follows :

**Theorem 3.2.3** *Let two equilibrium states  $\mathbf{u}_L$  and  $\mathbf{u}_R$  be given in  $\Omega$  and define  $\mathbf{v}_L = \mathbf{v}(\mathbf{u}_L)$  and  $\mathbf{v}_R = \mathbf{v}(\mathbf{u}_R)$  according to (3.41). Assume that  $a(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) > a_p(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$  (see (3.51)) and that  $b(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$  satisfies*

$$b(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) \geq b_p(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) := \frac{|\rho_L \Phi(\mathbf{u}_L) + \rho_R \Phi(\mathbf{u}_R)|}{2} + \frac{|\rho_L \Phi(\mathbf{u}_L) - \rho_R \Phi(\mathbf{u}_R)|}{2}. \quad (3.62)$$

Then and with the definitions of the updated values (3.43)-(3.44),

$$\bar{Y}_L(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) := \frac{\rho \bar{Y}_L(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)}{\bar{\rho}_L(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)} \quad \text{and} \quad \bar{Y}_R(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) := \frac{\rho \bar{Y}_R(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)}{\bar{\rho}_R(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)}$$

belongs to  $[0, 1]$ .

As an immediate consequence of Theorem 3.2.3, we have a



**Corollary 3.2.4** *Assume that the parameters  $a_{i+1/2}$  and  $b_{i+1/2}$  are chosen respectively larger than  $a_p(\mathbf{u}_i^n, \mathbf{u}_{i+1}^n)$  and  $b_p(\mathbf{u}_i^n, \mathbf{u}_{i+1}^n)$  for all  $i \in \mathbb{Z}$ . Assume that at time level  $t^n$ ,  $Y_i^n \in [0, 1]$  for all  $i \in \mathbb{Z}$ , then under the CFL condition (3.42),  $Y_i^{n+1} \in [0, 1]$  for all  $i \in \mathbb{Z}$ .*

PROOF OF THEOREM 3.2.3 Arguing about the structure of the Riemann solution, given in Proposition 3.2.2,  $Y(w(\xi, \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R))$  may take at most three distinct values, namely :

$$Y_L, \quad Y^* = \frac{Y_L + Y_R}{2} + \frac{\Sigma_R - \Sigma_L}{2b}, \quad Y_R, \quad (3.63)$$

where by construction,  $\Sigma_{L,R} = \sigma(\mathbf{u}_{L,R})$  and by assumption, both  $Y_L$  and  $Y_R$  belong to  $[0, 1]$ . We only have to prove that  $Y^*$  also remains in this range as soon as  $b(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) \geq b_p$ . Indeed, assuming such a property, we have by definition concerning the left averaged value :

$$\bar{Y}_L(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) = \frac{2\Delta t}{\Delta x} \int_{-\frac{\Delta x}{2\Delta t}}^0 Y(w(\xi, \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)) dm, \quad (3.64)$$

where the measure  $dm$  meets the definition

$$dm = \frac{\rho(w(\xi, \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)) d\xi}{\frac{2\Delta t}{\Delta x} \int_{-\frac{\Delta x}{2\Delta t}}^0 \rho(w(\xi, \mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)) d\xi}. \quad (3.65)$$

But since the parameter  $a$  is chosen larger than  $a_p(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$ , then Proposition 3.2.2 asserts the positivity of all the intermediate densities. As a consequence, the above measure  $dm$  is nothing but a probability measure, i.e., non negative with unit total mass on  $[-\frac{\Delta x}{2\Delta t}, 0]$ . Therefore, if  $Y^*$  belongs to  $[0, 1]$ , then necessarily  $\bar{Y}_L(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$  shares the same property. Exactly the same steps apply to  $\bar{Y}_R(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$ . So to carry out the proof, it is enough to show that the bound (3.62) implies the required property on  $Y^*$ . From its formula definition given in (3.63), let us notice that such a property holds true as soon as the parameter  $b(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$  obeys :

$$b \geq \max \left( -\frac{\sigma(\mathbf{u}_L) - \sigma(\mathbf{u}_R)}{X_L + X_R}, \frac{\sigma(\mathbf{u}_L) - \sigma(\mathbf{u}_R)}{Y_L + Y_R} \right), \quad (3.66)$$

with  $X = 1 - Y$  the liquid mass fraction. Let us now prove that (3.66) can be upper-bounded by  $b_p(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$  defined in (3.62).

We will use the following lemma

**Lemma 3.2.5** *Assume that  $(r_\alpha, s_\alpha, t_\alpha) \in \mathbb{R}^3$  where  $\alpha = R, L$  and satisfy :*

$$r_\alpha \in [0, 1], \quad s_\alpha \in [0, 1], \quad \bar{r}\bar{s} \in [0, 1/2] \quad (3.67)$$

where we note  $\bar{r} = (r_L + r_R)/2$ ,  $\Delta r = r_L - r_R$ . Then,

$$|\Delta(rst)| \leq |\bar{t}| + |\Delta t|/2. \quad (3.68)$$

PROOF OF LEMMA 3.2.5 The reader can easily check that :

$$\Delta(rst) = \Delta(rs) \bar{t} + \bar{r}\bar{s} \Delta t. \quad (3.69)$$

But two the first hypotheses of (3.67) show that  $(rs)_\alpha \in [0, 1]$  and therefore  $\Delta(rs) \in [0, 1]$ . The last hypothesis of (3.67) completes the proof.  $\square$

In a first step, according to  $\sigma = \rho XY\Phi$  with  $X = 1 - Y$ , we have :

$$\frac{\sigma(\mathbf{u}_L) - \sigma(\mathbf{u}_R)}{Y_L + Y_R} = \frac{Y_L}{Y_L + Y_R} X_L \rho_L \Phi(\mathbf{u}_L) - \frac{Y_R}{Y_L + Y_R} X_R \rho_R \Phi(\mathbf{u}_R)$$

Let us apply Lemma 3.2.5 with :

$$r_\alpha = Y_\alpha / (Y_L + Y_R) \quad s_\alpha = X_\alpha, \quad t_\alpha = \rho_\alpha \Phi(\mathbf{u}_\alpha), \quad \alpha = L, R. \quad (3.70)$$

It is clear that, whatever  $Y_{L,R} \in [0, 1]$ , we have  $\frac{Y_\alpha}{Y_L + Y_R} \in [0, 1]$ , with  $\alpha = L, R$ . Since it is obvious that  $s_\alpha = X_\alpha \in [0, 1]$ , the two first hypotheses of the Lemma are true. In order to show the last one, let us note that :  $Y_L X_L + Y_R X_R - (Y_L + Y_R) = -Y_L^2 - Y_R^2 \leq 0$  and therefore  $0 \leq \frac{Y_L X_L}{Y_L + Y_R} + \frac{Y_R X_R}{Y_L + Y_R} \leq 1$  whatever  $Y_{L,R} \in [0, 1]$ . The Lemma 3.2.5 implies therefore :

$$\left| \frac{\sigma(\mathbf{u}_L) - \sigma(\mathbf{u}_R)}{Y_L + Y_R} \right| \leq b_p(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R). \quad (3.71)$$

In a second step, we use the same arguments in order to bound :

$$\frac{\sigma(\mathbf{u}_L) - \sigma(\mathbf{u}_R)}{X_L + X_R} = \frac{X_L}{X_L + X_R} Y_L \rho_L \Phi(\mathbf{u}_L) - \frac{X_R}{X_L + X_R} Y_R \rho_R \Phi(\mathbf{u}_R).$$

Indeed, we now use Lemma 3.2.5 with :

$$r_\alpha = X_\alpha / (X_L + X_R), \quad s_\alpha = Y_\alpha, \quad t_\alpha = \rho_\alpha \Phi(\mathbf{u}_\alpha), \quad \alpha = L, R. \quad (3.72)$$

It is clear that, whatever  $X_{L,R} \in [0, 1]$ , we have  $\frac{X_\alpha}{X_L + X_R} \in [0, 1]$ , with  $\alpha = L, R$ . In order to check the last hypothesis of the Lemma, let us note that  $X_L Y_L + X_R Y_R - (X_L + X_R) = -X_L^2 - X_R^2 \leq 0$  and therefore  $\frac{X_L Y_L}{X_L + X_R} + \frac{X_R Y_R}{X_L + X_R} \in [0, 1]$  whatever  $Y_{L,R} \in [0, 1]$ . The Lemma 3.2.5 finally implies :

$$\left| \frac{\sigma(\mathbf{u}_L) - \sigma(\mathbf{u}_R)}{X_L + X_R} \right| \leq b_p(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R), \quad (3.73)$$

which concludes the proof  $\square$ .

We conclude the present section by establishing Corollary 3.2.4.

PROOF Considering the updating formula (3.47)–(3.48), we clearly have

$$Y_i^{n+1} := \frac{(\rho Y)_i^{n+1}}{\rho_i^{n+1}} = \frac{\overline{(\rho Y)}_{\mathbf{R}}(\mathbf{v}_{i-1}^n, \mathbf{v}_i^n) + \overline{(\rho Y)}_{\mathbf{L}}(\mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n)}{\overline{\rho}_{\mathbf{R}}(\mathbf{v}_{i-1}^n, \mathbf{v}_i^n) + \overline{\rho}_{\mathbf{L}}(\mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n)}, \quad (3.74)$$

where for instance and obviously  $\overline{(\rho Y)}_{\mathbf{L}}(\mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n) = \overline{\rho}_{\mathbf{L}}(\mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n) \times \overline{Y}_{\mathbf{L}}(\mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n)$ . Since the parameter  $a_{i+1/2}$  is larger than  $a_p(\mathbf{u}_i^n, \mathbf{u}_{i+1}^n)$  at each interface  $x_{i+1/2}$ , we necessarily have

$$\overline{\rho}_{\mathbf{R}}(\mathbf{v}_{i-1}^n, \mathbf{v}_i^n) > 0 \quad \text{and} \quad \overline{\rho}_{\mathbf{L}}(\mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n) > 0.$$

(see indeed the formula (3.43) and (3.44) when arguing about the positivity of the intermediate densities.) As a direct consequence, formula (3.74) is nothing but a convex combination of  $\overline{Y}_{\mathbf{L}}$  and  $\overline{Y}_{\mathbf{R}}$  which we know to belong to  $[0, 1]$  in view of Theorem 3.2.3 since the  $b_{i+1/2}$  are chosen larger than  $b_p(\mathbf{u}_i^n, \mathbf{u}_{i+1}^n)$  for all  $i \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

### 3.2.4 On the optimal choice of the pair $(a, b)$

In this section, we propose a definitive version of the optimal pair  $(a^*, b^*)$  to be associated with a given local Riemann problem. These relaxation coefficients are defined by

$$a^*(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) = \max[a_-(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R), a_p(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)], \quad (3.75)$$

$$b^*(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) = \max[b_-(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R), b_p(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)]. \quad (3.76)$$

This choice guarantees that the stability requirement (3.18), the positivity of the intermediate densities and the maximum principle for the mass fraction  $Y^*$  in (3.50) are valid.

**Remark 3.2.6** *The relaxation coefficients are designed in order to ensure :*

1. *the stability of the first order asymptotic equilibrium system (3.16) thanks to the Chapman-Enskog expansion,*
2. *physical properties of the approximate solution (positivity of the density and positivity of the mass fractions).*

*From a theoretical point of view, the weakness of the first point (i.e. the Chapman-Enskog analysis) is that it is just formal and heuristical and does not always give the right condition. However, the second point (the physical properties satisfied by the approximate solution) ensures that the relaxation scheme is robust. Moreover, from a practical point of view, the scheme is stable enough to handle difficult cases, which we are going to verify.*

## 3.3 Numerical results

The relaxation scheme is now applied to a few Riemann problems over a domain of 100 m, the discontinuity between the two initial constant states being located at  $x = 50$ . In the benchmarks presented, we use a uniform mesh with  $\Delta x = 0.5$  m and a CFL ratio equal to 0.5.

The liquid phase is assumed to be incompressible and we take  $\rho_L = 1000$  kg/m<sup>3</sup> with a constant sound speed  $a_G$  in the gas phase. Such considerations lead to the pressure law

$$p(\rho, Y) = a_G^2 \frac{\rho Y}{R_G(\mathbf{u})}, \quad (3.77)$$

where  $R_G(\mathbf{u}) = 1 - R_L(\mathbf{u})$  with  $R_L(\mathbf{u}) = \rho(1 - Y)/\rho_L$ . In Experiments 1–2, we work with a no-slip closure law, in Experiment 3, the hydrodynamic law is that of Zuber-Findlay, in Experiment 4, we use a dispersed slip law and in Experiment 5, we use a synthetic slip law.

### 3.3.1 No-slip law

By “no-slip law”, we mean that  $\Phi \equiv 0$ . The conjunction of the pressure law (3.77) and the no-slip law gives rise to the hyperbolicity of the original system (3.5), which now reads

$$\begin{cases} \partial_t(\rho) + \partial_x(\rho v) & = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + p) & = s, \\ \partial_t(\rho Y) + \partial_x(\rho Y v) & = 0. \end{cases} \quad (3.78)$$

As before, we assume  $s \equiv 0$ . The eigenvalues and the Riemann invariants of (3.78) are summarized in the following Table.

Field	Eigenvalue	Weak invariant	Strong invariant
$\lambda^-$	$v - c$	$Y, \phi^-$	
$\lambda^0$	$v$	$p, v$	$Y$
$\lambda^+$	$v + c$	$Y, \phi^+$	

Here, we note

$$c = \frac{a_G \sqrt{Y}}{1 - \frac{\rho(1-Y)}{\rho_L}}, \quad \phi^\pm = \left[ \frac{1}{\rho} - \frac{1-Y}{\rho_L} \right] \exp\left(\frac{\pm v}{a_G \sqrt{Y}}\right).$$

The gas mass fraction  $Y$ , being a strong invariant for  $\lambda_0$ , is therefore a weak invariant for  $\lambda^+$  and  $\lambda^-$ . Thus,  $Y$  is constant across a rarefaction wave associated to  $\lambda^\pm$ . It is also easy to show that  $Y$  is constant across a  $\lambda^\pm$ -shock, the Hugoniot locus of which is given by  $[Y] = 0$  and  $[v]^2 + [p][\tau] = 0$ .

Entropic conditions are also easy to take into account, and will not be detailed here. The main idea of this part is to show that, in the no-slip configuration, it is possible to compute the solution to the Riemann problem analytically. This allows us to design the following simple test cases.

### 3.3.1.1 Experiment 1

Consider the left ( $L$ ) and right ( $R$ ) states

$$\begin{pmatrix} \rho \\ Y \\ v \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} 500 \\ 0.2 \\ 34.4233 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} \rho \\ Y \\ v \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} 400 \\ 0.2 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

These have been tailored so that the solution to the Riemann problem is a pure  $\lambda^-$ -rarefaction. With  $a_G = 100$  m/s, the speeds of propagation of the fronts are  $\lambda_{\mathbf{L}}^- = -40.12$  m/s and  $\lambda_{\mathbf{R}}^- = -15.77$  m/s. Snapshots in Fig. 3.2 correspond to time  $T = 0.8$  s.

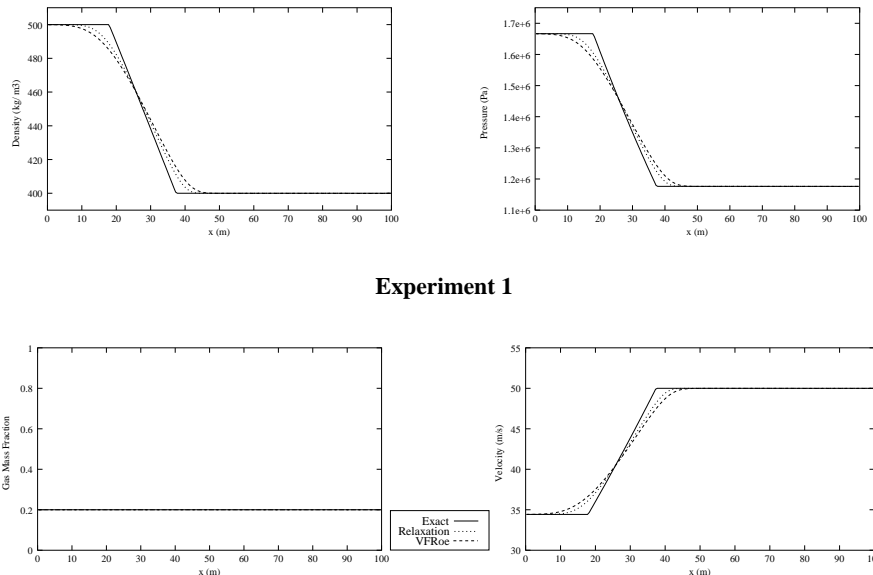


FIG. 3.2 – Experiment 1—A  $\lambda^-$ -rarefaction for the no-slip closure law.

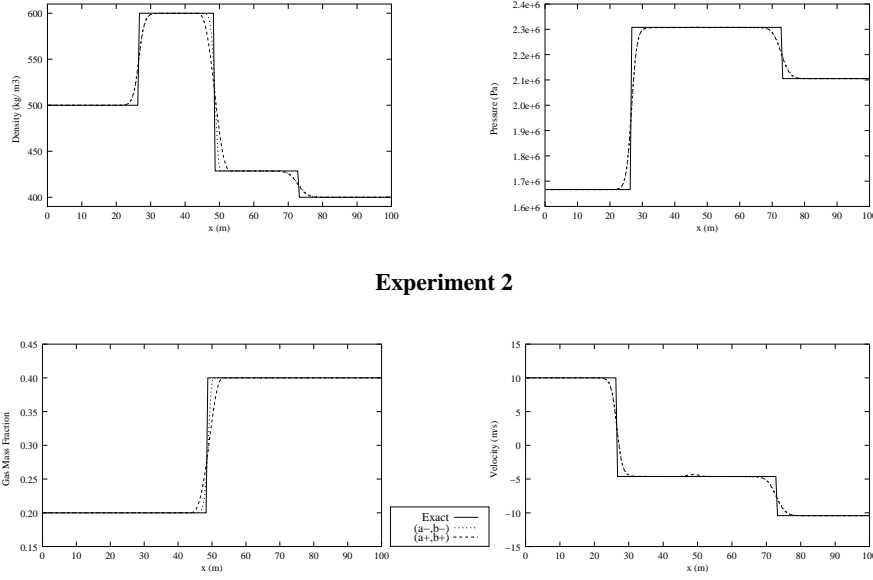


FIG. 3.3 – Experiment 2—A 3-wave Riemann problem for the no-slip closure law.

### 3.3.1.2 Experiment 2

Consider the two states

$$\begin{pmatrix} \rho \\ Y \\ v \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} 500 \\ 0.2 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} \rho \\ Y \\ v \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} 400 \\ 0.4 \\ -10.4261 \end{pmatrix}.$$

The theoretical solution to the Riemann problem is now a Shock–Contact Discontinuity–Shock pattern propagating at speeds  $\sigma^- = -77.7$  m/s,  $\sigma^0 = -4.62$  m/s and  $\sigma^+ = 76.7$  m/s. Snapshots in Fig. 3.3 correspond to time  $T = 0.3$  s.

For this run, there is a comparison between the two possible choices for the relaxation coefficients :  $(a^+, b^+)$  and  $(a^-, b^-)$ . It is clearly seen that the former pair leads to a less accurate contact discontinuity.

### 3.3.2 Zuber-Findlay law

Originally, the Zuber-Findlay hydrodynamic law [71] is an experimental observation that holds for intermittent flows, stating that<sup>1</sup>  $v_G = c_0(R_G v_G + R_L v_L) + c_1$ , valid for  $c_0 > 1$  and  $R_G < 1/c_0$ . This equation can be expressed in terms of velocity slip by

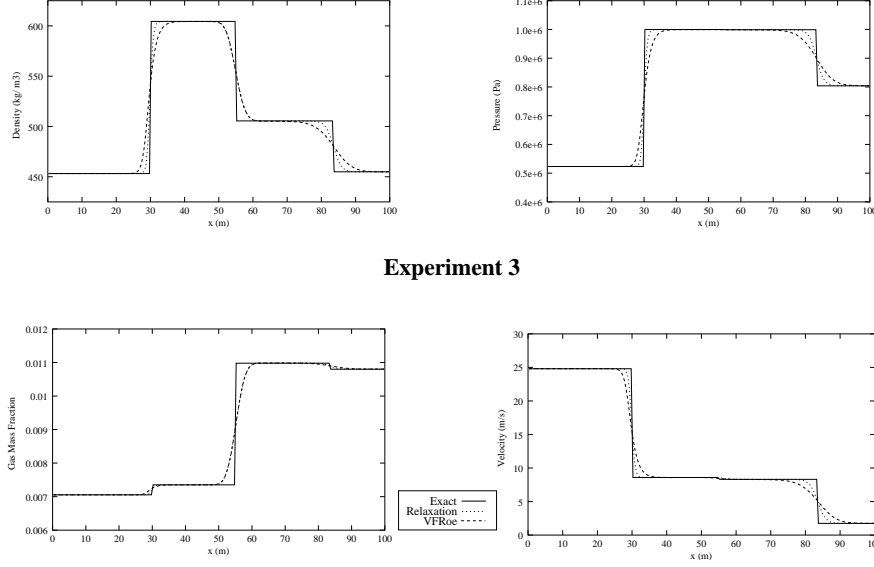
$$\Phi(\mathbf{u}) = \frac{(c_0 - 1)v + c_1}{c_0[(1 - Y)R_G(\mathbf{u}) - Y R_L(\mathbf{u})] - (1 - Y)}.$$

The Zuber-Findlay law has been extensively studied by Benzoni-Gavage [11] in her thesis. Benzoni succeeded in constructing solutions to some Riemann problems involving this law. Inspired from this work, we consider

$$\begin{pmatrix} \rho \\ Y \\ v \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} 453.197 \\ 0.00705 \\ 24.8074 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} \rho \\ Y \\ v \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} 454.915 \\ 0.0108 \\ 1.7461 \end{pmatrix}.$$

<sup>1</sup>We recall that  $R_L$  is the area liquid fraction and  $R_G = 1 - R_L$ . Whenever the liquid is incompressible, we have  $R_L = \rho(1 - Y)/\rho_L$ .

The other parameters are :  $a_G = 300$  m/s,  $c_0 = 1.07$ ,  $c_1 = 0.2162$  m/s. The solution has the pattern Shock–Contact Discontinuity–Shock propagating at speeds  $\sigma^- = -40.03$  m/s,  $\sigma^0 = 10$  m/s and  $\sigma^+ = 67.24$  m/s. Snapshots in Fig. 3.4 correspond to time  $T = 0.5$  s.



Experiment 3

FIG. 3.4 – Experiment 3—A 3-wave Riemann problem for the Zuber-Findlay law.

### 3.3.3 Dispersed law

We now use an hydrodynamic law that holds for two-phase flows with little bubbles of gas :

$$\Phi(\mathbf{u}) = -\delta/R_L(\mathbf{u})$$

where  $\delta = 1.53\sqrt{g\sigma/\rho_L}\sin\theta$  and  $\sigma = 7.5 \cdot 10^{-5}$  is the superficial stress. Inspired from the work of Benzoni-Gavage [11], we consider

$$\begin{pmatrix} \rho \\ Y \\ v \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} 901.11 \\ 1.2330 \cdot 10^{-3} \\ 0.95027 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} \rho \\ Y \\ v \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} 208.88 \\ 4.2552 \cdot 10^{-2} \\ 0.78548 \end{pmatrix}.$$

The other parameters are :  $a_G = 300$  m/s,  $\theta = \frac{\pi}{2}$  and  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>. The solution is a Contact Discontinuity propagating at speed  $\sigma = 1$  m/s. Snapshots in Fig. 3.5 correspond to time  $T = 20$  s.

### 3.3.4 Synthetic law

When dealing with industrial cases, we must use a hydrodynamic law which can handle all types of flows : stratified, intermittent (the Zuber-Findlay law), dispersed, etc... However, each slip-law  $\Phi(\mathbf{u})$  is only valid for certain values of  $\mathbf{u}$ . In practice, physicists draw maps which describes the subsets of the admissible space in which a determined slip-law is valid. It happens that from one subset to another subset, the slip-law is non-continuous! An attempt has been made to design a continuous slip-law  $\Phi(\mathbf{u})$  that is able to represent various flow regimes. We call it the “synthetic law”. Here, we will use the variable  $\mathbf{w} = \mathcal{L}(\mathbf{u}) = (R_G, p, u_s)$  where  $u_s = R_L v_L + R_G v_G$  is the superficial velocity. The function  $\mathcal{L}$  is a non-linear operator which will not be detailed here. We will describe in the next paragraph how we design the function  $\Psi(\mathbf{w})$ , from which we can recover the slip function

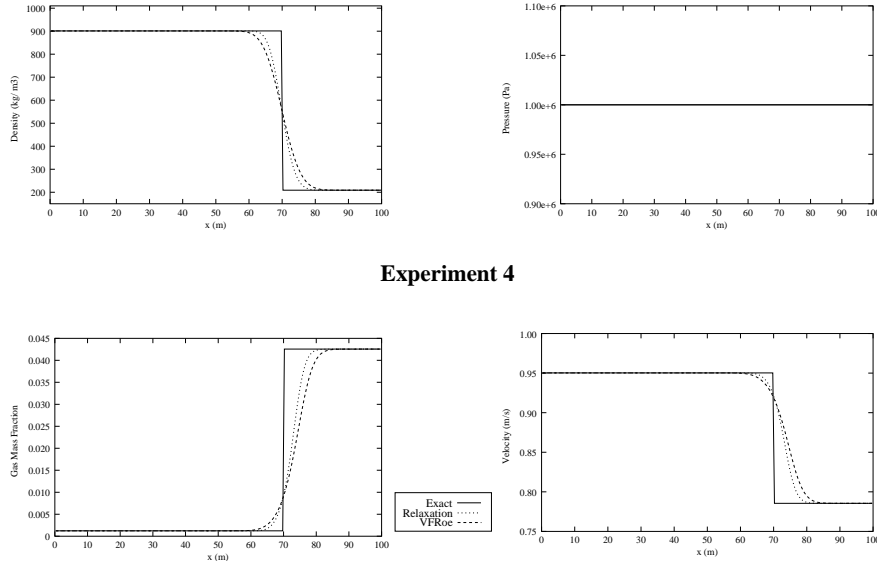


FIG. 3.5 – Experiment 4—Contact Discontinuity for the dispersed law.

$\Psi(\mathbf{u})$  by the change of variable  $\Phi(\mathbf{u}) = \mathcal{M}(\Psi(\mathbf{w}), \mathbf{w})$  with  $\mathbf{w} = \mathcal{L}(\mathbf{u})$ . Again, the non-linear operator  $\mathcal{M}$  will not be detailed here. We assume that there are just 3 types of flows : the dispersed flow with  $0 \leq R_G < 1/3$ , the Zuber-Findlay flow with  $1/3 \leq R_G < 2/3$  and the stratified flow with  $2/3 \leq R_G \leq 1$ . We then write the slip law under the form :

$$U_G = \Psi(\mathbf{w}) = u_s \Psi_0(R_G, p) + \Psi_1(R_G, p) \quad (3.79)$$

where  $U_G = R_G v_G$ . The function  $\Psi_0$  and  $\Psi_1$  are then computed by polynomial interpolation in order to ensure the continuity of  $\Psi$ , the validity of the law on the different ranges and compatibility conditions.

The previous lines show that **the function  $\Phi(\mathbf{u})$  is highly non-linear**. In this case, the solution of the Riemann problem is only composed of shocks since all the fields are really non-linear. No analytical solution is known at this date for this slip-law. However, we can compute states which are connected by the two Rankine-Hugoniot conditions  $[v]^2 + [P][\tau] = 0$  and  $[v][Y] - [\sigma][\tau] = 0$ , which are solved by a non-linear solver. The two states

$$\begin{pmatrix} \rho \\ Y \\ v \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} 492.7 \\ 0.20763 \\ -50.331 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} \rho \\ Y \\ v \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} 400. \\ 0.2 \\ -65.65 \end{pmatrix}$$

satisfy these conditions. The eigenvalues of the Jacobian matrices are  $\lambda_{\mathbf{L}} = (-124.9, -55.0, 26.0)$  and  $\lambda_{\mathbf{R}} = (-132.0, -73.6, 2.4)$ . The speed of the discontinuity is  $s = 15.766$  (m/s). Therefore, the Lax entropy condition shows that the exact solution is a 3-shock since  $\lambda_{\mathbf{L}}^3 = 26.0 > s > \lambda_{\mathbf{R}}^3 = 2.4$ . The other parameters are :  $a_G = 100$  m/s and  $\theta = 0$ . Snapshots in Fig. 3.6 correspond to time  $T = 2$  s.

## Conclusion

In view of the numerical results, this first attempt to solve a simplified two-phase flow system by a relaxation method can be considered as successful. This is all the more astonishing that, at first

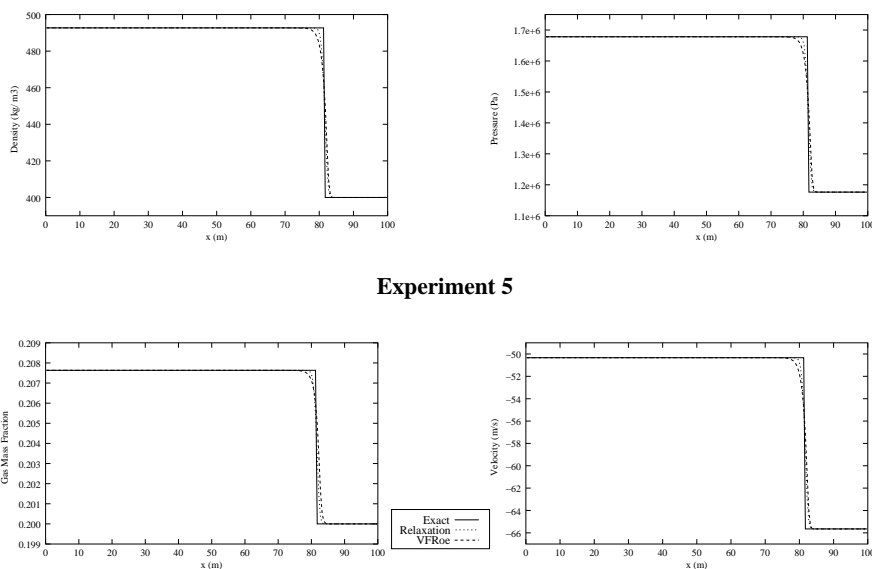


FIG. 3.6 – Experiment 5—3-shock for the synthetic law.

sight, the relaxation procedure may seem “brute”, in comparison with the usual relaxation strategies for other problems [18].

The next steps are : incorporation of source terms, second-order schemes and boundary conditions. One important step will be the extension of this explicit scheme to an linearly implicit scheme, in order to get rid of the CFL time step limitation. Variable sections and multicomponent flows can also be envisaged.

### Acknowledgments

The authors wish to thank C. Chalons, E. Duret, P. Hoche and V. Martin for their help in the preparation in the present work and the *Institut Français du Pétrole* for its partial financial support. We also wish to thank I. Faille and F. Willien for the numerous helpful discussions we had. Thanks are also addressed to the CEMRACS’99 to have initiated this research project (see [18] for a report).





# Chapitre 4

## Compléments pour le schéma explicite

Dans ce chapitre, nous présentons un calcul des coefficients de relaxation qui présente deux avantages sur celle présentée précédemment. Le premier est qu'il permet de minimiser la diffusion numérique et le second est qu'il est plus simple et donc qu'il s'étend facilement aux systèmes compositionnels et triphasiques. Par ailleurs, nous détaillons la prise en compte des conditions aux limites.

### 4.1 Un autre calcul des coefficients de relaxation

Dans ce paragraphe, nous présentons une variante du calcul des coefficients de relaxation. Il doit être noté que, en effet, le développement de Chapman-Enskog ne donne qu'une indication sur la stabilité de la méthode : elle n'assure que la stabilité du problème quasi-linéaire associé. Nous allons vérifier qu'une approche différente permet de diminuer la diffusion numérique.

Par ailleurs, il doit être souligné que l'approche présentée dans l'article précédent est relativement complexe. En effet, si il est difficile d'assurer la positivité des valeurs propres d'une matrice d'ordre 3, il sera humainement impossible d'assurer la même condition pour une matrice d'ordre plus élevé. Or, comme nous allons le vérifier dans la deuxième partie de cette thèse, nous avons pour objectif final de traiter des systèmes d'équations aux dérivées partielles de plus grande taille (par exemple le système à  $K$  constituants ou bien le système triphasique). Dans ce cadre, la méthode actuelle n'est plus envisageable et une alternative doit être trouvée.

Le plan de ce paragraphe est le suivant. Nous commençons par analyser la structure du système de relaxation en coordonnées Lagrangiennes. Puis nous faisons des liens entre le calcul des coefficients de relaxation actuels et des systèmes de lois de conservations plus simples (le  $p$ -système et une équation de conservation scalaire). Nous présentons alors la nouvelle manière de calculer les coefficients de relaxation. Cette nouvelle stratégie est soutenue par une expérience numérique spécialement choisie.

Reprenons le système d'équilibre gaz-liquide en coordonnées Eulériennes (2.16) avec  $S = 0$  :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + P(\mathbf{u})) = 0, \\ \partial_t(\rho Y) + \partial_x(\rho Y v - \sigma(\mathbf{u})) = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

#### 4.1.1 Système relaxé en coordonnées Lagrangiennes

Afin de bien mettre en évidence les véritables non-linéarités du système, plaçons-nous en coordonnées Lagrangiennes. En introduisant le co-volume  $\tau = \frac{1}{\rho}$  et la variable Lagrangienne  $y$  définie par

$$dx = v dt + \tau dy, \quad (4.2)$$

on aboutit à

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_y v = 0, \\ \partial_t v + \partial_y P = 0, \\ \partial_t Y - \partial_y \sigma = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Par abus de notation,  $P$  et  $\sigma$  doivent être maintenant considérés comme des fonctions de  $(\tau, v, Y)$ .

On voit tout de suite que les difficultés théoriques sont concentrées dans  $P$  et  $\sigma$ , pression et impulsion apparentes. Ce sont par conséquent ces termes-là qu'il faut relaxer.

**Remarque 4.1.1** *On considère ici le système (4.3). Introduisons une variable supplémentaire  $\Pi$  censée être égale à  $P$  et considérons le système  $4 \times 4$  suivant :*

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_y v = 0, \\ \partial_t v + \partial_y \Pi = 0, \\ \partial_t \Pi + a^2 \partial_y v = \lambda(P - \Pi), \\ \partial_t Y - \partial_y \sigma = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

La Jacobienne de ce système est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 \\ -\sigma_\tau & -\sigma_v & 0 & -\sigma_Y \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Le système est hyperbolique et ses valeurs propres sont  $(0, \pm a, -\sigma_Y)$ . La relaxation de l'équation de quantité de mouvement introduisant le coefficient  $a$  peut donc être vue comme un moyen de forcer l'hyperbolicité du système et d'assurer la positivité de la densité, comme nous allons le voir par la suite.

Il apparaît par ailleurs que la dernière équation de (4.4) est non-linéaire. La relaxation de cette équation peut donc être vue comme un moyen de forcer la propriété physique  $Y \in [0, 1]$  grâce au coefficient  $b$ , comme nous allons le voir par la suite.

Introduisons une variable supplémentaire  $\Sigma$ , censée être égale à  $\sigma$ , et considérons le système  $5 \times 5$  suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_y v = 0, \\ \partial_t v + \partial_y \Pi = 0, \\ \partial_t \Pi + a^2 \partial_y v = \lambda(P - \Pi), \\ \partial_t Y - \partial_y \Sigma = 0, \\ \partial_t \Sigma - b^2 \partial_y Y = \lambda(\sigma - \Sigma). \end{cases} \quad (4.6)$$

#### 4.1.2 Calcul des coefficients de relaxation

Revenons en coordonnées eulériennes ; le système relaxé devient :

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ \rho \Pi \\ \rho Y \\ \rho \Sigma \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + \Pi \\ \rho \Pi v + a^2 v \\ \rho Y v - \Sigma \\ \rho \Sigma v - b^2 Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \rho (P - \Pi) \\ 0 \\ \lambda \rho (\sigma - \Sigma) \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Le système précédent s'écrit sous la forme abstraite

$$\partial_t \mathbf{v} + \partial_x \mathcal{G}(\mathbf{v}) = \lambda \mathcal{R}(\mathbf{v}) \quad (4.8)$$

où les définitions sont évidentes.

On cherche à s'assurer de la stabilité du problème relaxé et du caractère stable de la méthode. Plus concrètement, on souhaite pouvoir énoncer des conditions suffisantes pour que le système soit dissipatif. Comme le problème de Tacite ne possède pas de propriété d'entropie qu'on peut habituellement désirer dans le contexte hyperbolique, on va se contenter de traiter la question de façon locale, par développement asymptotique vis-à-vis de  $\lambda$ .

#### 4.1.2.1 Ancienne technique de calcul des coefficients de relaxation

Dans ce paragraphe, nous présentons la technique initialement envisagée pour le calcul des coefficients de relaxation ainsi que les raisons qui nous ont fait abandonner cette technique. Dans cette technique, le système de relaxation était réduit par le développement de Chapman-Enskog à la forme quasi-linéaire :

$$\partial_t \mathbf{w} + \Gamma(\mathbf{w}) \partial_y \mathbf{w} = \lambda^{-1} \partial_y [\Delta(\mathbf{w}) \partial_y \mathbf{w}], \quad (4.9)$$

avec  $\mathbf{w} = (\tau, v, \Pi, Y, \Sigma)^T$  et  $\Gamma$  la Jacobienne du système d'équilibre en coordonnées Lagrangiennes. Nous assurons la positivité des valeurs propres de la matrice de diffusion  $\Delta_{a,b}(\mathbf{w})$

$$\Delta_{a,b}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ E & a^2 - A & C \\ F & D & b^2 - B \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

avec comme coefficients

$$\begin{aligned} E &= -P_v P_\tau + P_Y \sigma_\tau, & F &= \sigma_v P_\tau - \sigma_Y \sigma_\tau, \\ A &= -P_\tau + P_v^2 - P_Y \sigma_v, & D &= -\sigma_\tau + \sigma_v P_v - \sigma_Y \sigma_v, \\ C &= -P_v P_Y + P_Y \sigma_Y, & B &= \underline{\sigma_Y^2} - \sigma_v P_Y. \end{aligned}$$

Nous voudrions ici mettre en lumière la structure très singulière de ces coefficients.

Le coefficient  $-P_\tau + P_v^2$  dans  $A$  est un terme intrinsèquement lié au sous-système (A) : il contient les dérivées de  $P$  par rapport aux variables d'équilibre régies par les équations d'évolution de ce sous-système, c'est-à-dire  $\tau$  et  $v$ .

Le coefficient  $\underline{\sigma_Y^2}$  dans  $B$  est un terme intrinsèquement lié au sous-système (B) : il contient la dérivée de  $\sigma$  par rapport à la seule variable d'équilibre régie par une équation d'évolution dans ce sous-système, c'est-à-dire  $Y$ .

Tous les autres termes sont en fait des termes de couplages entre sous-systèmes. Notons par ailleurs que l'étude (en annexe) du système de relaxation avec glissement nul produit un coefficient  $A = -p_\tau$ . D'autre part, si l'équation d'évolution en  $Y$  était une simple équation scalaire, découplée des autres variables, le coefficient sortant du calcul serait  $B = \sigma_Y^2$ .

D'un tout autre point de vue, certains cas-tests exhibent des coefficients  $a$  et  $b$  tout à fait sur-estimés, lorsqu'on considère l'approche du rapport antérieur. Cela se traduit par une diffusion trop importante. Un cas-test de ce type est présenté à la fin de ce chapitre.

C'est cet ensemble de remarques qui nous a conduit à formuler le développement de Chapman-Enskog suivant.

### 4.1.2.2 Nouvelle technique de calcul des coefficients de relaxation

Nous allons considérer le développement de Chapman-Enskog de chaque sous-système en supposant qu'ils sont découplés. Soulignons que cette stratégie est une heuristique et que le développement de Chapman-Enskog est un calcul qui n'assure la stabilité du système de relaxation que de manière formelle. Ces justifications seront reprises dans l'article du chapitre suivant [7].

**4.1.2.2.1 Sous-système relaxé 1 en Lagrangien** Considérons le premier sous-système :

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_y v = 0, \\ \partial_t v + \partial_y \Pi = 0, \\ \partial_t \Pi + a^2 \partial_y v = \lambda(P - \Pi). \end{cases} \quad (4.11)$$

Le développement de Chapman-Enskog pour ce sous-système est par définition :

$$\Pi = P + \lambda^{-1} \Pi_1 + \mathcal{O}(\lambda^{-2}). \quad (4.12)$$

Nous faisons alors l'hypothèse suivante. *La fonction  $P$  dépend uniquement de  $\tau$  et  $v$  de telle sorte que :*

$$P = P(\tau, v). \quad (4.13)$$

On peut alors mettre le sous-système sous la forme *quasi-linéaire* avec  $\mathbf{w}^1 = (\tau, v)^T$  :

$$\partial_t \mathbf{w}^1 + \Gamma^1(\mathbf{w}^1) \partial_y \mathbf{w}^1 = \lambda^{-1} \partial_y [\Delta_a(\mathbf{w}^1) \partial_y \mathbf{w}^1], \quad (4.14)$$

$$\Delta_a(\mathbf{w}^1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E & a^2 - A \end{pmatrix}, \quad E = -P_v P_\tau, \quad A = -P_\tau + P_v^2. \quad (4.15)$$

La matrice  $\Delta_a(\mathbf{w}^1)$  a des valeurs propres positives si et seulement si

$$a^2 - A \geq 0, \quad (4.16)$$

condition qui assure la stabilité du premier sous-système.

**4.1.2.2.2 Sous-système relaxé 2 en Lagrangien** Considérons le second sous-système :

$$\begin{cases} \partial_t Y - \partial_y \Sigma = 0, \\ \partial_t \Sigma - b^2 \partial_y Y = \lambda(\sigma - \Sigma). \end{cases} \quad (4.17)$$

Le développement de Chapman-Enskog pour ce sous-système est par définition :

$$\Sigma = \sigma + \lambda^{-1} \Sigma_1 + \mathcal{O}(\lambda^{-2}). \quad (4.18)$$

Nous faisons alors l'hypothèse suivante. *La fonction  $\sigma$  dépend uniquement de  $Y$  de telle sorte que :*

$$\sigma = \sigma(Y). \quad (4.19)$$

On peut alors mettre le sous-système sous la forme *quasi-linéaire* :

$$\partial_t Y - \partial_y \sigma = \lambda^{-1} \partial_y [\Delta_b(Y) \partial_y Y], \quad (4.20)$$

$$\Delta_b(Y) = b^2 - B, \quad B = \sigma_Y^2. \quad (4.21)$$

Le coefficient  $\Delta_b(Y)$  est positif si et seulement si

$$b^2 - B \geq 0, \quad (4.22)$$

condition qui assure la stabilité du second sous-système.

Lorsque  $\varphi = 0$ ,  $B = 0$  donc  $b = 0$ . Comme c'est incompatible avec la méthode (solveur de Riemann, Matrice de Roe, ...), on prend :

$$b^2 = \max(B, 1). \quad (4.23)$$

Le coefficient 1 de l'équation précédente a été choisit car, dans le cas d'un glissement non nul, le coefficient  $b$  prend généralement des valeurs entre quelques centaines et plusieurs milliers. Nous avons donc considéré que 1 était petit devant ces nombres et qu'il n'augmentait pas la diffusion numérique de façon significative.

**Remarque 4.1.2** *Compte tenu des valeurs des dérivées respectives de  $P$  et  $\sigma$ , on a toujours :*

$$a > b. \quad (4.24)$$

*C'est bien cohérent avec le fait que  $a$  relaxe des ondes de pression et  $b$  des ondes de transport de masse.*

### 4.1.3 Nouveau calcul pratique des coefficients de relaxation

Nous considérons un couple de coefficient  $(a, b)$  par arête et les développements précédents justifient que l'on prenne :

$$a_{i+1/2} = \sqrt{\max(A(\mathbf{u}_L), A(\mathbf{u}_R))}, \quad b_{i+1/2} = \sqrt{\max(B(\mathbf{u}_L), B(\mathbf{u}_R))}, \quad (4.25)$$

$$A(\mathbf{u}) = -P_\tau(\mathbf{u}) + P_v^2(\mathbf{u}), \quad B(\mathbf{u}) = \sigma_Y^2(\mathbf{u}). \quad (4.26)$$

Cette stratégie de coefficients de relaxation locaux (par arête) permet d'obtenir la diffusion minimale.

### 4.1.4 Expérience numérique

Dans ce paragraphe, nous présentons une expérience numérique qui montre l'intérêt de l'approche découplée dans le développement de Chapman-Enskog, approche qui mène à un nouveau calcul des coefficients de relaxation. Nous allons vérifier que cette approche permet de diminuer de façon importante la diffusion numérique.

Considérons les deux états

$$\begin{pmatrix} \rho \\ Y \\ v \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} 901.111 \\ 1.2330 \cdot 10^{-3} \\ 0.70316 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \rho \\ Y \\ v \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} 208.886 \\ 4.2541 \cdot 10^{-2} \\ -0.28052 \end{pmatrix}$$

Les autres paramètres sont :  $a_G = 300$  m/s,  $c_0 = 1.07$ ,  $c_1 = 0.2162$  m/s. On utilise dans ce cas 50 mailles, comme dans les cas réels. La solution est une Discontinuité de Contact qui se propage à la vitesse  $v_G = 1$  m/s. Les instantanés de la figure (4.1) correspondent au temps  $T = 20$ . s avec un schéma d'ordre 1 en espace et en temps.

Cette expérience permet de tester le schéma avec un grand nombre d'itérations car la discontinuité de contact se propage à une vitesse lente. C'est donc une expérience relativement proche des cas réels, dans lesquels les ondes se déplacent à des vitesses lentes. C'est également une expérience qui met les schémas à l'épreuve car la diffusion, à cause du grand nombre d'itérations, est importante.

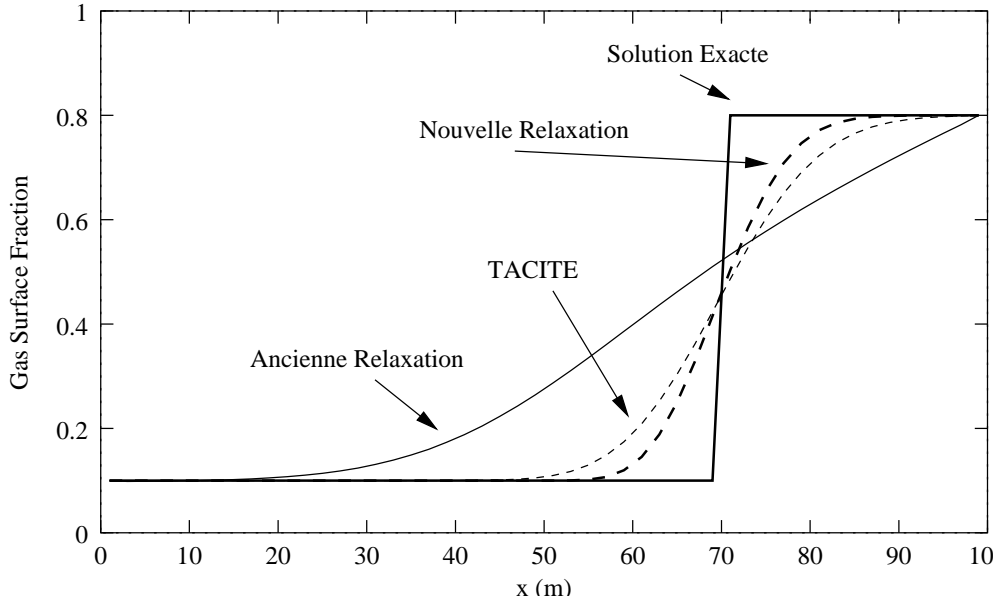


FIG. 4.1 – Discontinuité de contact pour le modèle de Zuber-Findlay.

On compare dans cette expérience le schéma de Relaxation avec les coefficients de Relaxation calculés par la méthode présentée dans le précédent rapport (“Ancienne Relaxation”) avec la méthode (dite “Nouvelle Relaxation”) présentée dans ce rapport. On constate que la nouvelle est bien meilleure, grâce à une diffusion bien plus faible. On obtient des résultats comparables au schéma TACITE, même un peu meilleurs.

Dans le but de comprendre une différence de comportement aussi importante, examinons les coefficients de Relaxation dans les deux cas. A la première itération en temps, les coefficients de Relaxation avec la technique initiale sont :

$$(a, b)_{\mathbf{L}}^1 = (95408., 8578.), \quad (a, b)_{\mathbf{R}}^1 = (18887., 9721.) \quad (4.27)$$

et avec la nouvelle :

$$(a, b)_{\mathbf{L}}^2 = (94926., 267.), \quad (a, b)_{\mathbf{R}}^2 = (16156., 279.) \quad (4.28)$$

On comprend bien alors comment cette large sur-estimation du coefficient  $b$  conduit à une diffusion très importante sur cette discontinuité de contact. Les effets de cette sur-estimation ne se font sentir que dans le cas de la conduite verticale, présenté plus loin, avec le schéma semi-implicite linéaire.

## 4.2 Traitement aux limites

Nous présentons ici la technique utilisée pour calculer les points fictifs amont et aval.

Le traitement des conditions aux limites est à la fois essentiel et extrêmement délicat. C’est un problème peu connu d’un point de vue théorique (pour les systèmes d’équations aux dérivées partielles) et difficile d’un point de vue numérique dans le cadre des écoulements en conduite. Plus spécifiquement, comme toutes les informations qui entrent dans la conduite pétrolière entrent par l’amont, le traitement de la condition limite amont est très important. Autrement dit, il est inutile de construire un schéma numérique intérieur précis si la condition à la limite amont n’est pas traitée de façon adéquate.

Or, il y a une difficulté à prendre en compte les conditions aux limites lorsqu'on considère un schéma semi-implicite. En effet, lorsqu'on considère un schéma explicite, une stratégie qui consiste à contrôler la solution du problème de Riemann sur l'arête limite est suffisante (c'était notre premier choix, voir [10]). En fait, si on utilise un schéma explicite, une méthode qui se contente de fournir le flux numérique sur l'arête limite (comme dans [27]) fonctionne bien.

Mais dans le cadre d'un schéma semi-implicite, dans la phase mathématique du schéma, les états fictifs  $\mathbf{u}_0 = (\rho_0, \rho_0 Y_0, \rho_0 v_0)$  et  $\mathbf{u}_{I+1} = (\rho_{I+1}, \rho_{I+1} Y_{I+1}, \rho_{I+1} v_{I+1})$  sont utilisés dans le calcul des matrices de diffusion  $A^{Roe}(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1)$  et  $A^{Roe}(\mathbf{u}_I, \mathbf{u}_{I+1})$ . Ainsi, notre schéma semi-implicite nous oblige à connaître explicitement les états fictifs, ce qui n'est pas sans poser de problèmes.

Nous décidons de nous inspirer, pour la prise en compte des conditions aux limites, de la stratégie qui a fonctionné pour le schéma Tacite. Cette stratégie est globalement fondée sur le signe des valeurs propres. De plus, nous imposons que les variables de relaxation correspondant aux états fictifs doivent être à l'équilibre.

Nous allons voir que, concernant la prise en compte de la condition limite amont, la méthode implique que l'état fictif amont est solution d'un problème non-linéaire, ce qui oblige à utiliser une méthode de résolution approchée (par exemple une méthode de Newton). A l'heure actuelle, il n'existe pas de théorème d'existence de l'état fictif amont dans le cadre des écoulements diphasiques et la méthode de Newton n'est pas garantie de converger.

En ce qui concerne la condition limite aval, nous imposons une condition dite de "non-retour de liquide" qui n'est pas usuelle. Cette condition, difficile à prendre en compte numériquement, est le sujet de résultats théoriques présentés par Gallouët dans [29] et qui sont l'application de résultats dus à Vovelle [62]. Ils montrent en particulier que la stratégie utilisée ici fonctionne correctement, en particulier parce que la fonction flux numérique reste continue en fonction de l'état fictif.

### 4.2.1 Amont

À l'entrée de la conduite, les conditions aux limites physique sont le débit de liquide  $q_L$  et le débit de gaz  $q_G$ . En pratique, les débits  $q_L$  et  $q_G$  sont donnés en fonction du temps  $t$ .

On connaît l'état sur la première maille  $\mathbf{v}_1^n$  et on cherche l'état gauche fictif  $\mathbf{v}_0^n$  de la façon suivante.

Rappelons que  $\mathbf{v}_0^n$  possède 5 composantes :

$$\mathbf{v}_0^n = (\rho_0^n, q_0^n, \chi_0^n, I_0^n, J_0^n)$$

où l'on note  $q_0^n = (\rho v)_0^n$ ,  $\chi_0^n = (\rho Y)_0^n$ ,  $I_0^n = (\rho \Pi)_0^n$ ,  $J_0^n = (\rho \Sigma)_0^n$ . Le flux numérique sur la première arête est une fonction des deux états  $\mathbf{v}_0^n$  et  $\mathbf{v}_1^n$  :

$$\mathbf{H}_{1/2} = \mathbf{H}(\mathbf{v}_0^n, \mathbf{v}_1^n) \quad (4.29)$$

Notons  $\{h_i\}_{i=1,5}$ , les cinq composantes du flux  $\mathbf{H}_{1/2}$ . La première composante  $h_1$  est le débit total, somme du débit de gaz et du débit de liquide à  $t^n$ . La quatrième composante  $h_4$  est le débit de gaz à  $t = t^{n+1/2}$ . On impose le débit total, le débit de gaz ainsi que l'équilibre des variables de relaxation :

$$h_1(\mathbf{v}_0^n, \mathbf{v}_1^n) = q_L + q_G, \quad h_4(\mathbf{v}_0^n, \mathbf{v}_1^n) = q_G, \quad (4.30)$$

$$I_0^n = \rho_0^n P(\rho_0^n, q_0^n, \chi_0^n), \quad J_0^n = \rho_0^n \sigma(\rho_0^n, q_0^n, \chi_0^n). \quad (4.31)$$

Cependant, cela ne fait que 4 équations, alors qu'il y a 5 composantes inconnues pour  $\mathbf{v}_0^n$ . Pour déterminer complètement  $\mathbf{v}_0^n$ , on traduit la propagation de droite à gauche correspondant à l'onde sortante  $\lambda_1$  en utilisant la projection caractéristique :

$$(\ell | \mathbf{v}_0^n) = (\ell | \mathbf{v}_1^n), \quad (4.32)$$



où  $\ell = \ell(\mathbf{v}_0^n, \mathbf{v}_1^n)$  est le vecteur propre à gauche associé à la première valeur propre  $\lambda_1$  de la matrice Jacobienne du système de relaxation sur la première maille  $\nabla\mathcal{G}(\mathbf{v}_1^n)$ .

Notons  $\alpha$  la fonction :

$$\alpha(\mathbf{v}_0^n, \mathbf{v}_1^n) = (\ell|\mathbf{v}_0^n) - (\ell|\mathbf{v}_1^n)$$

L'état fictif amont  $\mathbf{v}_0^n$  est solution du système non linéaire :

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}_0^n) = \begin{pmatrix} h_1(\mathbf{v}_0^n, \mathbf{v}_1^n) - (q_L + q_G) \\ h_3(\mathbf{v}_0^n, \mathbf{v}_1^n) - q_G \\ \alpha(\mathbf{v}_0^n, \mathbf{v}_1^n) \\ I_0^n - \rho_0^n P(\rho_0^n, \chi_0^n, q_0^n) \\ J_0^n - \rho_0^n \sigma(\rho_0^n, \chi_0^n, q_0^n) \end{pmatrix} = 0 \quad (4.33)$$

Notons désormais  $\mathbf{x} = \mathbf{v}_0^n$  la solution de ce système. La résolution est fondée sur une méthode de Newton : on initialise  $\mathbf{x}^0$  de façon adaptée puis on calcule  $\Delta\mathbf{x}^k$  et  $\mathbf{x}^{k+1}$  tels que :

$$\nabla\mathbf{F}(\mathbf{x}^k)\Delta\mathbf{x}^k = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^k), \quad \mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta\mathbf{x}^k.$$

**Remarque 4.2.1** *La stratégie consistant à utiliser une projection caractéristique est fondée sur le signe des valeurs propres du système d'équilibre. En effet, la première valeur propre  $\lambda_1$ , associée aux ondes acoustiques, est toujours négative. C'est par conséquent la projection caractéristique sur le premier champ qui contient l'information sortant du domaine.*

*Rappelons que cette projection est issue du fait suivant. Soit le système d'EDP linéaire :*

$$\partial_t \mathbf{u} + \nabla\mathcal{F} \partial_x \mathbf{u} = 0, \quad (4.34)$$

avec  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$  et  $\nabla\mathcal{F}$  une matrice d'ordre  $N$  à coefficients constants. Supposons que  $\ell$  est un vecteur vecteur propre à gauche de  $\nabla\mathcal{F}$  tel que :  $\ell\mathcal{F} = \lambda_1\ell$ . Comme le système est à coefficients constants, nous avons  $\partial_t\ell = 0$  et  $\partial_x\ell = 0$ . Par conséquent, en faisant le produit scalaire de (4.34) par  $\ell$ , on obtient :

$$\partial_t(\ell|\mathbf{u}) + \lambda_1 \partial_x(\ell|\mathbf{u}) = 0$$

c'est à dire que  $(\ell|\mathbf{u})$  est un invariant de Riemann fort pour la valeur propre  $\lambda_1$ .

*Cette propriété n'est, pour un système non-linéaire comme le nôtre, qu'une approximation, puisque nous n'avons pas  $\partial_t\ell = 0$ ,  $\partial_x\ell = 0$ . Pourtant, il s'avère qu'en pratique cette technique fonctionne de façon satisfaisante. En particulier, c'est la stratégie adoptée dans le code Tacite.*

## 4.2.2 Aval

À l'aval, on impose la pression  $p_{I+1}$  comme condition physique sur la maille fictive  $I+1$ .

Cela ne fait qu'une condition scalaire pour les 5 inconnues de la variable de relaxation  $\mathbf{v}_{I+1}^n$ . De même qu'à l'amont, nous imposons l'équilibre des variables de relaxation ce qui fait 2 équations. Enfin, nous aurions pu considérer 2 projections caractéristiques menant à la résolution d'un système non-linéaire. L'expérience pourtant montre qu'il suffit d'imposer

$$Y_{I+1}^n = Y_I^n, \quad v_{I+1}^n = v_I^n. \quad (4.35)$$

En pratique, connaissant la pression, on peut, grâce aux lois thermodynamiques calculer  $\rho_L = \rho_L(p_{I+1})$  et  $\rho_G = \rho_G(p_{I+1})$  puis la masse volumique sur la dernière maille par

$$\rho_{I+1}^n = \frac{1}{\frac{1-Y_I}{\rho_L} + \frac{Y_I}{\rho_G}}. \quad (4.36)$$

Ceci nous permet alors de définir entièrement l'état fictif aval et donc de calculer le flux numérique sur la dernière arête  $\tilde{\mathbf{H}}_{I+1/2}$ , dont on allons voir que, pour obtenir le flux définitif, nous modifions certaines composantes.

En effet, sur le terrain, un système appelé *séparateur* (voir figure 4.2) a pour but d'empêcher le retour du liquide dans la conduite. En termes mathématiques, cela revient à exiger que le débit de liquide  $q_L$  reste positif à l'aval. C'est pourquoi, après avoir calculé le flux aval  $\tilde{\mathbf{H}}_{I+1/2}$ , on considère  $q_L = \tilde{h}_1 - \tilde{h}_3$  et  $q_G = \tilde{h}_3$ . Si  $q_L < 0$ , on impose  $q_L = 0$  et on recalcule  $h_1 = q_G$ . Ainsi le flux numérique définitif est  $\mathbf{H}_{I+1/2} = (h_1, \tilde{h}_2, \tilde{h}_3, \tilde{h}_4, \tilde{h}_5)^T$  avec

$$h_1 = \begin{cases} \tilde{h}_3, & \text{si } \tilde{h}_1 - \tilde{h}_3 < 0, \\ \tilde{h}_1, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.37)$$

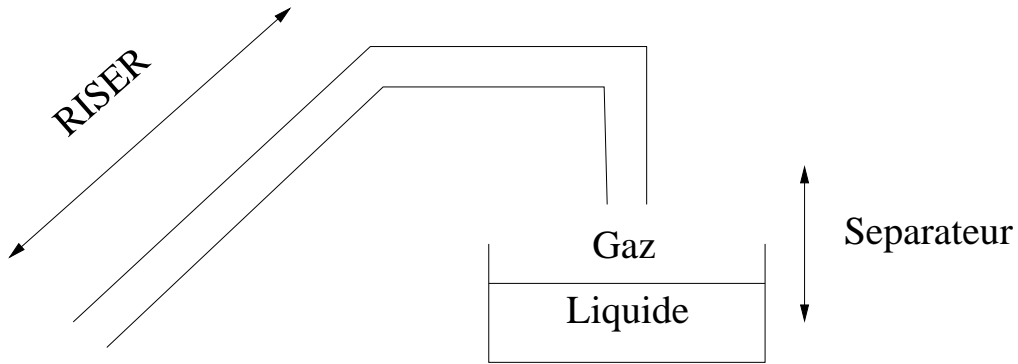


FIG. 4.2 – Riser se déversant dans un séparateur



## Chapitre 5

# A semi-implicit relaxation scheme for modeling two-phase flow in a pipeline

Michaël BAUDIN<sup>1</sup>, Frédéric COQUEL<sup>2</sup> and Quang Huy TRAN<sup>1</sup>

<sup>1</sup> IFP, 1 et 4 avenue de Bois-Préau, 92852 Rueil-Malmaison Cedex, France

<sup>2</sup> Lab. J.-L. Lions, Université Pierre et Marie Curie, Boîte courrier 187, 75252 Paris Cedex 5

**Abstract** This work is devoted to the numerical approximation of the solutions of the system of conservation laws which arises in the modeling of two-phase flows in oil and gas pipeline. The PDEs are closed by two highly nonlinear algebraic relations, namely : a pressure law and a hydrodynamic law. We have previously developed an explicit relaxation scheme which allows to cope with these nonlinearities. But the system considered has eigenvalues which are of very different orders of magnitude, which prevents the explicit scheme from being effective, since the time-step has to be very small. In order to solve this effectiveness problem, we now proceed to construct a scheme which is explicit with respect to the small eigenvalues and linearly implicit with respect to the large eigenvalues. Numerical evidences are proposed.

**Key words** two-phase flows, relaxation scheme, semi-implicit, Riemann solvers

**AMS subject classification** 76T10, 76N15, 35L65, 65M06

## Introduction

We are interested in the simulation of two-phase flows in petroleum pipelines[54]. The system, made up of three conservation laws, is a drift-flux type model and is closed by two thermodynamic and hydrodynamic models. The complexity of these models makes classical numerical schemes such as Godunov or Roe schemes very difficult to use. Our feeling is that only a “rough” scheme would be able to successfully meet the challenge of nonlinearities.

An essential property of our system is that it possesses fast characteristic speeds (acoustic waves) and slow ones (corresponding to the mass transport phenomenon). From the engineer’s standpoint, the crucial aspect is the petroleum transport and not the acoustic. That is why he will never use an explicit scheme, the time step of which is limited by the CFL stability condition : the time required for the simulation would be prohibitive due to the large characteristic speeds.

Inspired by [30], I. Faille and E. Heintze have proposed in [26] a VFRoe-type scheme which is sufficiently rough (diffusive) to handle very stiff industrial cases. The scheme shown in [26] is linearly implicit with respect to the large eigenvalues and explicit with respect to the small eigenvalues. Then

this semi-implicit scheme will combine accuracy on the waves propagating at the small velocities and reduced CPU-time insofar the CFL time step limitation only applies to small eigenvalues.

But this scheme also suffers from a few backdraws. The first one is that the scheme is still CPU-time consuming because it needs to compute numerically the eigenvalues of the Jacobian matrix of the system. The second one is that these eigenvalues are not necessarily real, that is, the system is not always hyperbolic. It is observed in [11] that the system is hyperbolic only if the slip between the phases is not too large.

In [6], the authors have constructed an explicit relaxation scheme by extending Xin and Jin's [69]. The goal was to relax the hydrodynamic and thermodynamic nonlinearities of the system. The genuine nonlinearities are first shown by means of a Lagrangian change of coordinates. Then, these are relaxed. Finally, the equations are brought back to the Eulerian frame. The resulting relaxation system is automatically hyperbolic and has all its fields linearly degenerated. This scheme is less CPU-time consuming than the VFRoe-type one because the most complex (algorithmically speaking) step is the computation of only two relaxation coefficients. Moreover, it has been shown in [6] that one can increase the relaxation coefficients (and therefore the numerical diffusion) in order to satisfy physical properties such as the positivity of the density and, most of all, the maximum principle on the gas mass fraction. As a first attempt to design a fast and rough numerical scheme for two-phase flows, these results were encouraging.

The goal of this paper is to work out a semi-implicit version of the explicit scheme [6] via some mathematically sound extension procedures. In essence, the extension is possible and sound because of the linear degeneracy property of the relaxation system.

The paper is organized as follows. In section 5.1, we introduce the two-phase flow model together with the boundary conditions and the characteristics of this model. In section 5.2, we develop the second order explicit relaxation scheme with the computation of new relaxation coefficients and boundary conditions. In section 5.3, we present the semi-implicit scheme and section 5.4 is devoted to the numerical results.

## 5.1 Two-phase flow model

### 5.1.1 Equations

In the flow, the gas (resp. liquid) is characterized by its density  $\rho_G$  (resp.  $\rho_L$ ), its velocity  $v_G$  (resp.  $v_L$ ) and its surface fraction  $R_G \in [0, 1]$  (resp.  $R_L \in [0, 1]$ ) with the property  $R_L + R_G = 1$ . The model is governed by the following system of conservation laws :

$$\begin{cases} \partial_t (\rho_L R_L) & + \partial_x (\rho_L R_L v_L) & = 0, \\ \partial_t (\rho_G R_G) & + \partial_x (\rho_G R_G v_G) & = 0, \\ \partial_t (\rho_L R_L v_L + \rho_G R_G v_G) & + \partial_x (\rho_L R_G v_L^2 + \rho_G R_G v_G^2 + p) & = S(\mathbf{w}), \end{cases} \quad (5.1)$$

for all  $x \in \mathbb{R}$  and  $t \geq 0$  where the unknown is  $\mathbf{w} := (\rho_L R_L, \rho_G R_G, \rho_L R_L v_L + \rho_G R_G v_G)$ . Here the source term  $S$  includes gravity and wall friction terms which are given functions of the unknown. We will consider a perfect gas and a compressible liquid with the state equations

$$\rho_G = p/a_G^2, \quad \rho_L = \rho_L^0 + (p - p^0)/a_L^2, \quad (5.2)$$

where  $p^0$  is the atmospheric pressure,  $\rho_L^0$  is the liquid density for  $p = p^0$  and  $a_G$  (resp.  $a_L$ ) is the sound speed in the gas (resp. the liquid). Sometimes, we will use the non-compressible liquid state equation  $\rho_L = \rho_L^0$ . The pressure law can be put in the general form  $p = p(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$  and is smooth function. We consider a general algebraic hydrodynamic law of the type

$$v_L - v_G = \Phi(\mathbf{w}), \quad \forall \mathbf{w} \in (\mathbb{R}^+)^2 \times \mathbb{R}, \quad (5.3)$$

in order to close (5.1). In (5.3), the mapping  $\Phi$  is assumed to be smooth enough. In practical situations,  $\Phi$  turns out to be nonlinear in the unknown  $\mathbf{w}$  (see [11], [71] for instance).

### 5.1.2 Boundary and initial conditions

At the inlet of the pipe ( $x = 0$ ), the mass flowrates are given as functions of time, i.e.

$$(\rho_\alpha R_\alpha v_\alpha)(0, t) = q_\alpha^0(t), \quad t \geq 0, \quad \alpha = L, G,$$

and at the outlet of the pipe ( $x = L$ ), the pressure is a given function of time, i.e.

$$p(L, t) = p^L(t), \quad t \geq 0.$$

We will treat cases in which the flow is induced only by variations of the boundary conditions : in such experiments, the initial condition is the steady state, computed by the values of the boundary conditions at time  $t = 0$ .

### 5.1.3 Characteristics of the model

There is no analytical expression for the physical flux of the considered system, except for very simple hydrodynamic laws. Therefore the eigenvalues of the system (5.1) are not known in full generality. However, in most common situations, i.e., for usual values of  $\mathbf{w}$ , the system is hyperbolic and has three real eigenvalues  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$  with  $\lambda_1 < 0$  and  $\lambda_3 > 0$ .

The interesting property of the system is that the eigenvalues  $\lambda_{1,3}$  correspond to the acoustic waves (or “pressure waves”) and propagate at fast speeds thanks to the compressibility of the fluid. The eigenvalue  $\lambda_2$ , which has a variable sign, corresponds to the kinematic waves and propagates at slow speeds with the fluid. These properties imply that the large eigenvalues are 10-100 times bigger than the small eigenvalue, i.e.  $|\lambda_{1,3}| \gg |\lambda_2|$ .

## 5.2 Explicit relaxation scheme

Most computational details of this section are given in [6] and only the main results will be reported here.

### 5.2.1 The relaxation model

Let us consider the total density of the mixing  $\rho = \rho_L R_L + \rho_G R_G$ , the total momentum  $\rho v = \rho_L R_L v_L + \rho_G R_G v_G$  and  $\rho Y$  where  $Y$  denotes the gas mass fraction  $Y = \frac{\rho_G R_G}{\rho}$  (so that  $1 - Y = \frac{\rho_L R_L}{\rho}$ ). The natural phase space associated with such variables then reads :

$$\Omega = \{ \mathbf{u} = (\rho, \rho v, \rho Y) \in \mathbb{R}^3; \rho > 0, v \in \mathbb{R}, Y \in [0, 1] \}.$$

With some little abuse, both the pressure law  $p$  and the hydrodynamic closure  $\Phi$  will keep their previous notations when expressed in terms of the new variable  $\mathbf{u}$ . In order to simplify the notations, let us introduce the two following functions of the unknown  $\mathbf{u}$  :

$$\sigma(\mathbf{u}) = \rho Y (1 - Y) \Phi(\mathbf{u}), \quad P(\mathbf{u}) = p(\mathbf{u}) + \rho Y (1 - Y) \Phi(\mathbf{u})^2. \quad (5.4)$$

Weak solutions of the system (5.1)–(5.3) equivalently obey the following system in conservation form :

$$\begin{cases} \partial_t(\rho) + \partial_x(\rho v) & = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + P(\mathbf{u})) & = S(\mathbf{u}), \\ \partial_t(\rho Y) + \partial_x(\rho Y v - \sigma(\mathbf{u})) & = 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

We want to relax all the *genuine* non-linearities of the equilibrium system (5.5) which will appear by means of a Lagrangian change of coordinates. Let us set  $\tau = 1/\rho$ , and define the Lagrangian mass coordinate  $y$  by  $dy = \rho dx - \rho v dt$ . It turns out that expressing the main nonlinearities of the problem in terms of the variables  $(\tau, v, Y)$  instead of the conservative one leads to simpler calculations. For the sake of simplicity and with some abuse in the notations, nonlinear functions (like the pressure or the hydrodynamic law) will be given the same notation when expressed in both types of variables. The system (5.5) then rewrites :

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_y v &= 0, \\ \partial_t v + \partial_y P(\mathbf{u}) &= S(\mathbf{u}), \\ \partial_t Y - \partial_y \sigma(\mathbf{u}) &= 0. \end{cases} \quad (5.6)$$

**Remark 5.2.1** *Let us introduce a new state variable  $\Pi$  which is intended to coincide with  $P$  and let us consider the following  $4 \times 4$  system :*

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_y v &= 0, \\ \partial_t v + \partial_y \Pi &= S(\mathbf{u}), \\ \partial_t \Pi + a^2 \partial_y v &= \lambda(P(\mathbf{u}) - \Pi), \\ \partial_t Y - \partial_y \sigma(\mathbf{u}) &= 0. \end{cases} \quad (5.7)$$

*This system is hyperbolic and its eigenvalues are  $(0, \pm a, -\sigma_Y)$ . Therefore, on the one hand, the relaxation of the equation  $\partial_t v + \partial_y P(\mathbf{u}) = 0$  can be seen as a way to enforce the hyperbolicity of the system and to ensure the positivity of the density, as we will see later. On the other hand, it appears that the equation  $\partial_t Y - \partial_y \sigma(\mathbf{u}) = 0$  is non-linear. The relaxation of this equation can therefore be seen as a way in order to enforce the physical property  $Y \in [0, 1]$ , as we will see later.*

We introduce two new state variables  $\Sigma$  and  $\Pi$  which are intended to coincide respectively with  $\sigma(\mathbf{u})$  and  $P(\mathbf{u})$  in the limit of the relaxation parameter  $\lambda$ . We propose as a relaxation model the following system :

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_y v &= 0, \\ \partial_t v + \partial_y \Pi &= S(\mathbf{u}), \\ \partial_t \Pi + a^2 \partial_y v &= \lambda(P(\mathbf{u}) - \Pi), \\ \partial_t Y - \partial_y \Sigma &= 0, \\ \partial_t \Sigma - b^2 \partial_y Y &= \lambda(\sigma(\mathbf{u}) - \Sigma). \end{cases} \quad (5.8)$$

where  $a$  and  $b$  are two real positive parameters that we call “relaxation coefficients”. We then return back in Eulerian coordinates, where the relaxation system takes the form :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) &= 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + \Pi) &= S(\mathbf{u}), \\ \partial_t(\rho \Pi) + \partial_x(\rho \Pi v + a^2 v) &= \lambda \rho(P(\mathbf{u}) - \Pi), \\ \partial_t(\rho Y) + \partial_x(\rho Y v - \Sigma) &= 0, \\ \partial_t(\rho \Sigma) + \partial_x(\rho \Sigma v - b^2 Y) &= \lambda \rho(\sigma(\mathbf{u}) - \Sigma). \end{cases} \quad (5.9)$$

The above relaxation system will be given hereafter the convenient abstract form :

$$\partial_t \mathbf{v} + \partial_x \mathcal{G}(\mathbf{v}) = \lambda \mathcal{R}(\mathbf{v}) + \mathcal{S}(\mathbf{v}), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}; \quad (5.10)$$

where the flux function  $\mathcal{G}$  receive clear definition and

$$\mathcal{R}(\mathbf{v}) = (0, 0, \lambda \rho(P(\mathbf{u}) - \Pi), 0, \lambda \rho(\sigma(\mathbf{u}) - \Sigma))^T, \quad (5.11)$$

$$\mathcal{S}(\mathbf{v}) = (0, S(\mathbf{u}), 0, 0, 0)^T \quad (5.12)$$

The associated admissible state space  $\mathcal{V}$  reads

$$\mathcal{V} = \left\{ \mathbf{v} = (\rho, \rho v, \rho \Pi, \rho Y, \rho \Sigma)^T \in \mathbb{R}^5; \right. \\ \left. \rho > 0, v \in \mathbb{R}, \Pi \in \mathbb{R}, Y \in [0, 1], \Sigma \in \mathbb{R} \right\}. \quad (5.13)$$

The following Lemma has been proven in [6].

**Lemma 5.2.2** *Let  $(a, b)$  be a pair of strictly positive real numbers For any  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ , the first order system with no source term extracted from (5.9) admits five real eigenvalues :*

$$v, v \pm a\tau, v \pm b\tau,$$

( $\tau = 1/\rho$ ) and five linearly independent corresponding eigenvectors. Consequently, the first order system with no source term extracted from (5.9) is hyperbolic on  $\mathcal{V}$ . Moreover, each eigenvalue is associated with a linearly degenerate field.

### 5.2.2 First order explicit scheme

The pipeline is made of  $I$  cells, denoted  $(M_i)_{i=1,I}$ . Let  $x_i$  be the center of the cell and  $\Delta x$  its length. We also denote  $x_{i+1/2} = (x_i + x_{i+1})/2$  the interface between two cells,  $x_{1/2} = 0$  inlet boundary interface and  $x_{I+1/2} = L$  the outlet boundary interface. Let  $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$  be the time step. Let  $\mathbf{u}_i^n \approx \mathbf{u}(x_i, t^n)$  be the discrete unknown. The numerical scheme is based on the following splitting method.

1. **Relaxation.** We take  $\lambda = \infty$  and solve the ODE system  $\partial_t \mathbf{v} = \lambda \mathcal{R}(\mathbf{v})$  by projecting the variables on the equilibrium variety. At the beginning of the time step, we compute  $\mathbf{v}_i^n \approx \mathbf{v}(x_i, t^n)$  at equilibrium, i.e.

$$\Pi_i^n := P(\mathbf{u}_i^n), \quad \Sigma_i^n := \sigma(\mathbf{u}_i^n). \quad (5.14)$$

2. **Evolution.** We take  $\lambda = 0$  and solve the system  $\partial_t \mathbf{v} + \partial_x \mathcal{G}(\mathbf{v}) = \mathcal{S}(\mathbf{v})$  on one iteration in order to go to the time  $t = t^{n+1}$ .

In the ‘‘Evolution’’ step, we consider the system  $\partial_t \mathbf{v} + \partial_x \mathcal{G}(\mathbf{v}) = \mathcal{S}(\mathbf{v})$  that we approximate by the following finite volume scheme :

$$\frac{\mathbf{v}_i^{n+1} - \mathbf{v}_i^n}{\Delta t^n} + \frac{\mathbf{H}_{i+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{H}_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} = \mathcal{S}(\mathbf{v}_i^n) \quad (5.15)$$

with  $\mathbf{H}_{i+1/2}^{n+1/2}$  the numerical flux based on a Godunov scheme. We denote  $\mathbf{v}_L = \mathbf{v}_i^n$  and  $\mathbf{v}_R = \mathbf{v}_{i+1}^n$  the left and right states of the Riemann Problem and  $\mathbf{v}^*(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$  the value of the solution of this R.P. at  $x = x_{i+1/2}$ . The Godunov numerical flux is

$$\mathbf{H}_{i+1/2}^{n+1/2} = \mathbf{H}^{Godunov}(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) = \mathcal{G}(\mathbf{v}^*(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)). \quad (5.16)$$

The explicit computations for  $\mathbf{v}^*$  are given in proposition (5.2.3) at the end of this section. The proposition will not be proven here, since it is done in [6] but is just shown for consistency.

In the following proposition, we denote  $\bar{\varphi} = (\varphi_L + \varphi_R)/2$  the average and  $\langle \varphi \rangle = (\varphi_L - \varphi_R)/2$  the mid-jump of the the two states  $\mathbf{v}_L$  and  $\mathbf{v}_R$  whatever the quantity  $\varphi$ .

**Proposition 5.2.3** *We consider the Riemann problem for the relaxation system (5.9) with  $\lambda = 0$  and no source terms and the initial data*

$$\mathbf{v}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{v}_L & \text{if } x < 0, \\ \mathbf{v}_R & \text{if } x > 0. \end{cases} \quad (5.17)$$



The Riemann solution is made of six constant states separated by five contact discontinuities

$$\mathbf{v}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{v}_L = \mathbf{v}_0 & \text{if } \frac{x}{t} < \mu_1, \\ \mathbf{v}_j & \text{if } \mu_j < \frac{x}{t} < \mu_{j+1}, \quad 1 \leq j \leq 4 \\ \mathbf{v}_R = \mathbf{v}_5 & \text{if } \frac{x}{t} > \mu_5, \end{cases} \quad (5.18)$$

Let us set

$$\begin{aligned} \tau_L^* &= \tau_L - \frac{\langle v \rangle}{a} + \frac{\langle \Pi \rangle}{a^2}, & \tau_R^* &= \tau_R - \frac{\langle v \rangle}{a} - \frac{\langle \Pi \rangle}{a^2}, \\ v^* &= \bar{v} + \frac{\langle \Pi \rangle}{a}, & \Pi^* &= \bar{\Pi} + a \langle v \rangle, \\ Y^* &= \bar{Y} - \frac{\langle \Sigma \rangle}{b}, & \Sigma^* &= \bar{\Sigma} - b \langle Y \rangle. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Assume that the parameter  $a$  is chosen large enough so that both  $\tau_L^*$  and  $\tau_R^*$  in (5.19) are positive.

If  $a > b$  (see remark (5.2.7)), the eigenvalues are increasingly ordered as follows

$$\underbrace{v_L - a\tau_L}_{\mu_1(\mathbf{v}_L)} \leq v^* - b\tau_L^* \leq v^* \leq v^* + b\tau_R^* \leq \underbrace{v_R + a\tau_R}_{\mu_5(\mathbf{v}_R)} \quad (5.20)$$

where the intermediate states are given by :

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \rho_L^* \\ \rho_L^* v^* \\ \rho_L^* \Pi^* \\ \rho_L^* Y_L \\ \rho_L^* \Sigma_L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \rho_L^* \\ \rho_L^* v^* \\ \rho_L^* \Pi^* \\ \rho_L^* Y^* \\ \rho_L^* \Sigma^* \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} \rho_R^* \\ \rho_R^* v^* \\ \rho_R^* \Pi^* \\ \rho_R^* Y^* \\ \rho_R^* \Sigma^* \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} \rho_R^* \\ \rho_R^* v^* \\ \rho_R^* \Pi^* \\ \rho_R^* Y_R \\ \rho_R^* \Sigma_R \end{pmatrix}.$$

### 5.2.3 Relaxation coefficients

We present in this section the computation of the relaxation coefficients  $a$  and  $b$ . Our approach is based on the Chapman-Enskog expansions

$$\Pi = P + \lambda^{-1} \Pi_1 + \mathcal{O}(\lambda^{-2}), \quad (5.21)$$

$$\Sigma = \sigma + \lambda^{-1} \Sigma_1 + \mathcal{O}(\lambda^{-2}). \quad (5.22)$$

The point that is different from [6] in the use of these expansions is the following. We will consider the Lagrangian relaxation system (5.8) as the superposition of two decoupled subsystems : the first in  $(\tau, v, \Pi)$  and the second in  $(Y, \Sigma)$ . Furthermore, in order to really decouple these sub-systems, we will make the hypotheses that the non-linear functions  $P$  and  $\sigma$  only depends on the equilibrium variables which appear in their respective sub-systems, i.e.  $(\tau, v)$  for  $P$  and  $Y$  for  $\sigma$ .

#### 5.2.3.1 Two stability theorems

Let us consider the first sub-system

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_y v = 0, \\ \partial_t v + \partial_y \Pi = 0, \\ \partial_t \Pi + a^2 \partial_y v = \lambda(P - \Pi). \end{cases} \quad (5.23)$$

**Theorem 5.2.4** *Under the hypothesis  $P = P(\tau, v)$ , the first order asymptotic equilibrium system of (5.23) is*

$$\partial_t \mathbf{w}^1 + \Gamma^1(\mathbf{w}^1) \partial_y \mathbf{w}^1 = \lambda^{-1} \partial_y [\Delta_a(\mathbf{w}^1) \partial_y \mathbf{w}^1], \quad (5.24)$$

with  $\mathbf{w}^1 = (\tau, v)^T$  and

$$\Delta_a(\mathbf{w}^1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E & a^2 - A \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} E &= -P_v P_\tau, \\ A &= -P_\tau + P_v^2. \end{aligned} \quad (5.25)$$

PROOF OF THEOREM 5.2.4 Substituting (5.21) in (5.23) and neglecting in the third equation of (5.23) the order one terms gives

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_y v = 0, \\ \partial_t v + \partial_y P = -\lambda^{-1} \partial_y \Pi_1, \\ \partial_t P + a^2 \partial_y v = -\Pi_1. \end{cases} \quad (5.26)$$

In the previous system, the two first equations are going to give us the left-hand side of the quasi-linear form (5.24) and the third equation is going to give us the right hand side. But we must change the time derivative of  $P$  in space derivatives. To do this, we begin to use the hypothesis  $P = P(\tau, v)$  in order to have the identity  $\partial_t P = (P_\tau \ P_v) \partial_t \mathbf{w}^1$ . Second, the equilibrium system (5.6) gives  $\partial_t \mathbf{w}^1 = \partial_y (v \ -P)^T$ . Third, one can derivate  $P$ , using the hypothesis for the second time, which gives

$$\partial_y (v \ -P)^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -P_\tau & -P_v \end{pmatrix} \partial_y \mathbf{w}^1. \quad (5.27)$$

Finally, the composition of the last three identities gives  $-\Pi_1 = \partial_t P + a^2 \partial_y \mathbf{w}^1 = (E \ a^2 - A) \partial_y \mathbf{w}^1$  which conclude the proof.  $\square$

Let us consider the second sub-system

$$\begin{cases} \partial_t Y - \partial_y \Sigma = 0, \\ \partial_t \Sigma - b^2 \partial_y Y = \lambda(\sigma - \Sigma). \end{cases} \quad (5.28)$$

**Theorem 5.2.5** *Under the hypothesis  $\sigma = \sigma(Y)$ , the first order asymptotic equilibrium system of (5.28) is*

$$\partial_t Y - \partial_y \sigma = \lambda^{-1} \partial_y [\Delta_b(Y) \partial_y Y] \quad (5.29)$$

with

$$\Delta_b(Y) = b^2 - B, \quad B = \sigma_Y^2. \quad (5.30)$$

PROOF OF THEOREM 5.2.5 Similarly, substituting (5.22) in (5.28) and neglecting in the third equation of (5.28) the order one terms gives

$$\begin{cases} \partial_t Y - \partial_y \sigma = \lambda^{-1} \partial_y \Sigma_1, \\ \partial_t \sigma - b^2 \partial_y Y = -\Sigma_1. \end{cases} \quad (5.31)$$

The hypothesis and the equilibrium system (5.6) gives easily  $\partial_t \sigma = B \partial_y Y$ . This implies directly  $-\Sigma_1 = (B - b^2) \partial_y Y$  which conclude the proof.  $\square$

**Corollary 5.2.6** *The matrix  $\Delta_a(w)$  has its eigenvalues positive and the coefficient  $\Delta_b(Y)$  is positive if and only if  $a^2 - A \geq 0$  and  $b^2 - B \geq 0$ .*

**Remark 5.2.7** *Because of the specific values of the functions  $P$  and  $\sigma$ , we always have  $a > b$ . This is in harmony with the fact that  $a$  is relaxing pressure waves and  $b$  kinematic waves.*

### 5.2.3.2 Practical computation of the relaxation coefficients

We present in this section the computation of the relaxation coefficients  $a$  and  $b$ . We consider one local couple  $(a_{i+1/2}, b_{i+1/2})$  on each interface  $x_{i+1/2}$  in order to minimize the numerical dissipation. The relaxation coefficients are designed in order to ensure :

1. the stability of the first order asymptotic equilibrium system thanks to the Chapman-Enskog expansion. The previous analysis justifies the following choice :

$$\begin{aligned} a_{i+1/2}^1 &= \sqrt{\max(A(\mathbf{u}_L), A(\mathbf{u}_R))}, & A(\mathbf{u}) &= -P_\tau(\mathbf{u}) + P_v^2(\mathbf{u}), \\ b_{i+1/2}^1 &= \sqrt{\max(B(\mathbf{u}_L), B(\mathbf{u}_R))}, & B(\mathbf{u}) &= \sigma_Y^2(\mathbf{u}). \end{aligned} \quad (5.32)$$

When  $\Phi = 0$ , we notice that  $B(\mathbf{u}) = 0$  and therefore  $b_{i+1/2}^1 = 0$ . This is not compatible with the relaxation method, that is why we modify the relaxation coefficient  $b$  in order to have  $b_{i+1/2}^1 > 0$ .

2. physical properties of the approximate solution (positivity of the density and positivity of the mass fractions). As previously exposed in [6], it is possible to compute the relaxation coefficients  $a$  and  $b$  in order to satisfy the following two basic physical properties : the positivity of the density and, above all, the maximum principle on the gas mass fraction, i.e.,  $Y_i^n \in [0, 1]$ . This is done by computing  $a_{i+1/2}^2$  and  $b_{i+1/2}^2$  large enough, which results in a increased, but well-adjusted, amount of numerical dissipation.

Finally, on one interface  $x_{i+1/2}$ , the relaxation coefficient  $a_{i+1/2}$  (resp.  $b_{i+1/2}$ ) is computed from the maximum of  $a_{i+1/2}^1$  and  $a_{i+1/2}^2$  (resp.  $b_{i+1/2}^1$  and  $b_{i+1/2}^2$ ).

**Remark 5.2.8** *The previous computations are simpler than those in [6]. The fact is that these computations have been discovered in a pragmatic way, considering a numerical experience (a contact discontinuity) in which the old manner led to over-estimated coefficients  $b_{i+1/2}$ . The resulting numerical solution were very dissipated and therefore unacceptable. We then compared the relaxation coefficients we had for this system and the relaxation coefficients of a scalar equation and of the  $p$ -system and finally made the link with the relaxation coefficient exhibited in this paper.*

### 5.2.4 Second order in space

The scheme is extended to second-order accuracy in space by using the classical MUSCL (Monotonic Upstream Scheme for Conservation Laws) technique ([32], [45]). Instead of taking a constant approximate solution on each cell, we construct a linear approximation. The limited slopes are those of the “physical variable”  $(p, Y, v)$  rather than those of the conservative variable  $\mathbf{u}$  [26, 27].

### 5.2.5 Second order in time

We use the following Runge-Kutta second-order procedure. Let us suppose that we denote  $\mathbb{L}$  the explicit operator, which is 2nd-order in space, 1st-order in time so that  $\mathbf{u}^{n+1} = \mathbb{L}(\mathbf{u}^n)$ . Then the explicit second-order both in space and time is :

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbb{L}(\mathbf{u}^n), \quad \mathbf{u}^{(2)} = \mathbb{L}(\mathbf{u}^{(1)}), \quad \mathbf{u}^{n+1} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{(2)} \right). \quad (5.33)$$

### 5.2.6 Time step

The time step of the relaxation explicit scheme is limited by the CFL condition

$$\frac{\Delta t^n}{\Delta x} \max_{i=1,I} |V_i^n| \leq \mu \quad (5.34)$$

where  $\mu = 0.5$  is the CFL and  $V_i^n$  is a characteristic speed given by

$$V_i^n = \max \left( \left| v_{i-1/2}^{\mathbf{R}} + a_{i-1/2} T_{i-1/2}^{\mathbf{R}} \right|, \left| v_{i+1/2}^{\mathbf{L}} - a_{i+1/2} T_{i+1/2}^{\mathbf{L}} \right| \right). \quad (5.35)$$

This condition enables us to obtain a sequence of Riemann problems located at each cell interface  $x_{i+1/2}$  without interactions.

### 5.2.7 Treatment of boundary conditions

In order to take the boundary conditions into account, we introduce two ghost cells :  $\mathbf{u}_0^n$  at the inlet of the pipe and  $\mathbf{u}_{I+1}^n$  at the outlet. The computation of these two states must be explicit, due to the specific implementation of the linearly implicit scheme.

It is well known that the number of scalar physical conditions to specify on the boundaries is equal to the number of entering characteristics (see for instance Benzoni-Gavage in [11]). We have already notice that our system is hyperbolic and has three real eigenvalues  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$  with  $\lambda_1 < 0$  and  $\lambda_3 > 0$ . Moreover, *in all situations*, at the inlet,  $\lambda_2 \geq 0$ . Since our system is of dimension 3, this justifies the two physical conditions ( $q_L$  and  $q_G$ ) at the inlet and just one physical condition (the pressure) at the outlet.

#### 5.2.7.1 Inlet ( $x = 0$ )

We compute the state  $\mathbf{v}_0^n$  in order to satisfy the five following conditions. First, the relaxation state  $\mathbf{v}_0^n$  is at equilibrium which leads to the two identities (5.14). Second, we specify the total mass flowrate (which corresponds to the first component  $\rho v$ ) and the gas mass flowrate (which corresponds to the fourth component  $\rho Y v - \Sigma$ ) which leads to the two identities

$$\mathbf{H}^1(\mathbf{v}_0^n, \mathbf{v}_1^n) = q_L^0(t^n) + q_G(t^n), \quad \mathbf{H}^4(\mathbf{v}_0^n, \mathbf{v}_1^n) = q_G^0(t^n). \quad (5.36)$$

Third, let us introduce  $\ell_1$  the left eigenvector corresponding to the first eigenvalue of  $\nabla \mathcal{G}(\mathbf{u}_1^n)$ . We then specify the characteristic projection

$$\ell_1 \cdot \mathbf{v}_0^n = \ell_1 \cdot \mathbf{v}_1^n. \quad (5.37)$$

The nonlinear system made up of the 5 equations (5.14), (5.36) and (5.37) is solved by a classical nonlinear solver (for instance Newton's method).

#### 5.2.7.2 Outlet ( $x = L$ )

We compute the state  $\mathbf{v}_{I+1}^n$  in order to satisfy the five following conditions. First, the relaxation state  $\mathbf{v}_{I+1}^n$  is at equilibrium which leads to the two identities (5.14). Second, we specify the pressure which leads to the identity

$$p(\mathbf{u}_{I+1}^n) = p^L(t^n). \quad (5.38)$$

Third, we could have chosen, as at the inlet, two characteristic projections based on the left eigenvectors corresponding to the fourth and fifth eigenvalues of  $\nabla\mathcal{G}(\mathbf{u}_I^n)$ . But the experience (based on numerous numerical experiments) shows that it suffices to write the identities

$$Y_{I+1}^n = Y_I^n, \quad v_{I+1}^n = v_I^n. \quad (5.39)$$

The nonlinear system made up of the 5 equations (5.14), (5.38) and (5.39) is solved exactly, with some easy algebraic computations involving the thermodynamic closure laws.

### The no-return condition

On offshore petroleum installations, the mixture in vertical pipes (“risers”) is falling in a separator which goal is to separate the liquid and gas phases. That is why we would like to enforce the additional condition : the liquid flowrate on the outlet must remain positive. Note that this condition is independent from the change of sign of whatever eigenvalue. The numerical treatment that we have chosen is therefore the following. After having computed the ghost state  $\mathbf{v}_{I+1}^n$  satisfying the previous conditions, we compute the numerical flux on the last interface  $\mathbf{H}_{I+1/2} = \mathbf{H}(\mathbf{v}_{I+1}^n, \mathbf{v}_{I+1}^n)$ . We then modify the first component of the flux by

$$\bar{\mathbf{H}}_{I+1/2}^1 = \begin{cases} \mathbf{H}_{I+1/2}^3 & \text{if } \mathbf{H}_{I+1/2}^1 - \mathbf{H}_{I+1/2}^3 \leq 0, \\ \mathbf{H}_{I+1/2}^1 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (5.40)$$

This type of boundary condition is analyzed in the paper of Gallouët [29] which is based on the one of Vovelle [62].

## 5.3 Semi-implicit relaxation scheme

### 5.3.1 First order linearly implicit scheme

#### 5.3.1.1 The linear system

Let us consider the relaxation hyperbolic system made up of 5 conservation laws

$$\partial_t \mathbf{v} + \partial_x \mathcal{G}(\mathbf{v}) = \mathcal{S}(\mathbf{v}). \quad (5.41)$$

In the previous Section, we have constructed an explicit scheme which involved the following update of the approximate solution at time  $t^{n+1}$  :

$$\mathbf{v}_i^{n+1} = \mathbf{v}_i^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x} (\mathbf{H}(\mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n) - \mathbf{H}(\mathbf{v}_{i-1}^n, \mathbf{v}_i^n)) + \Delta t^n \mathcal{S}(\mathbf{v}_i^n), \quad (5.42)$$

where the right hand side only contains the approximate solution at time  $t^n$ . Such a time discretization implies that the time step is sufficiently small (CFL condition) in order for the scheme to be stable. A classical technique to get rid of this limitation is to use the implicit time discretization

$$\mathbf{v}_i^{n+1} = \mathbf{v}_i^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x} (\mathbf{H}(\mathbf{v}_i^{n+1}, \mathbf{v}_{i+1}^{n+1}) - \mathbf{H}(\mathbf{v}_{i-1}^{n+1}, \mathbf{v}_i^{n+1})) + \Delta t^n \mathcal{S}(\mathbf{v}_i^{n+1}), \quad (5.43)$$

where the computation of the approximate solution at time  $t^{n+1}$  is based on the inversion of a nonlinear problem. This inversion is expensive in terms of CPU time. On the other hand, numerical experiments show that the scheme is stable with just one Newton iteration with a far less restrictive

CFL condition. Therefore, we choose this strategy which gives a *linearly implicit* scheme for which the flux  $\mathbf{H}$  and the source term  $\mathcal{S}$  are approximated by the first-order Taylor expansions

$$\mathbf{H}(\mathbf{v}_i^{n+1}, \mathbf{v}_{i+1}^{n+1}) \approx \mathbf{H}(\mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n) + \partial_1 \mathbf{H} \delta \mathbf{v}_i + \partial_2 \mathbf{H} \delta \mathbf{v}_{i+1}, \quad (5.44)$$

$$\mathcal{S}(\mathbf{v}_i^{n+1}) \approx \mathcal{S}(\mathbf{v}_i^n) + \nabla \mathcal{S}_i \delta \mathbf{v}_i, \quad (5.45)$$

where  $\delta \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^{n+1} - \mathbf{v}_i^n$  and where the partial derivatives of  $\mathbf{H}$ , which are designated by  $\partial_1 \mathbf{H}$  and  $\partial_2 \mathbf{H}$ , are evaluated at  $(\mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n)$  and the Jacobian matrix  $\mathcal{S}$  is evaluated at  $\mathbf{v}_i^n$ . Let us denote

$$\alpha_i = \frac{\Delta t^n}{\Delta x} \partial_1 \mathbf{H}(\mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n) \quad \text{and} \quad \gamma_{i+1} = \frac{\Delta t^n}{\Delta x} \partial_2 \mathbf{H}(\mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n) \quad (5.46)$$

the partial derivatives of  $\mathbf{H}$ . Plugging (5.44) and (5.45) in (5.43), one obtains the numerical scheme

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i^{n+1} = \mathbf{v}_i^n & - \frac{\Delta t^n}{\Delta x} (\mathbf{H}(\mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n) - \mathbf{H}(\mathbf{v}_{i-1}^n, \mathbf{v}_i^n)) + \Delta t^n \mathcal{S}(\mathbf{v}_i^n) \\ & - (\alpha_i \delta \mathbf{v}_i + \gamma_{i+1} \delta \mathbf{v}_{i+1}) + (\alpha_{i-1} \delta \mathbf{v}_{i-1} + \gamma_i \delta \mathbf{v}_i) + \Delta t^n \nabla \mathcal{S}_i \delta \mathbf{v}_i. \end{aligned} \quad (5.47)$$

The first three terms of the right hand side of (5.47) corresponds to the explicit scheme. This is why the linearly implicit scheme is classically splitted into three steps.

1. In the physical step, one computes a “predictor” using the explicit scheme

$$\mathbf{v}_i^\sharp = \mathbf{v}_i^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x} (\mathbf{H}(\mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n) - \mathbf{H}(\mathbf{v}_{i-1}^n, \mathbf{v}_i^n)) + \Delta t^n \mathcal{S}(\mathbf{v}_i^n). \quad (5.48)$$

2. In the mathematical step, one solves the linear equation in  $\delta \mathbf{v}$

$$- \alpha_{i-1} \delta \mathbf{v}_{i-1} + \beta_i \delta \mathbf{v}_i + \gamma_{i+1} \delta \mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i^\sharp - \mathbf{v}_i^n \quad (5.49)$$

where  $\beta_i$  is the matrix  $\beta_i = \mathbb{I} + \alpha_i - \gamma_i - \Delta t^n \nabla \mathcal{S}_i$  with  $\mathbb{I}$  the  $5 \times 5$  identity matrix. The mathematical step involves a non-symmetric tridiagonal by bloc matrix which is solved by a classical linear solver.

3. Now we can update the conservative variable of the cell  $i$  by

$$\mathbf{v}_i^{n+1} = \mathbf{v}_i^n + \delta \mathbf{v}_i. \quad (5.50)$$

Now, the remaining question is : how to construct the matrices  $\alpha$  and  $\gamma$ ? It is easy (see [26]) to compute these matrices from the definition (5.46) when the explicit scheme is a Roe-type scheme. The main objective of the next section is therefore to put the relaxation explicit scheme under Roe’s form. After that, we will give the explicit computations of the matrices  $\alpha$  and  $\gamma$  for the linearly implicit relaxation scheme.

### 5.3.1.2 Roe’s form of the explicit relaxation scheme

We consider the Riemann problem for the relaxation system (5.9) with  $\lambda = 0$ , no source terms and the left and right states  $\mathbf{v}^L = \mathbf{v}_0$  and  $\mathbf{v}^R = \mathbf{v}_5$ . We denote  $(\mathbf{v}_j)_{j=1,4}$  the intermediate states and  $(\mu_j)_{j=1,5}$  the eigenvalues defined in proposition (5.2.3). It is interesting to compare the following results with the one obtained by Godlewski and Raviart in [31] (chap.III, Section 3.4) while considering the gas dynamic system and rewriting Godunov’s method in terms of a Roe-type linearization. Such a rewriting is based on a shock curve decomposition and is possible when the solution of the Riemann problem is made of shocks and contact discontinuities (which is the case of the relaxation system). Let us notice that the following computations are close in spirit from those that appear in the writing of Roe’s method (see for instance [31], chap.III, Section 3.1).

**Lemma 5.3.1** *With the previous notations, the difference between two consecutive intermediate states of the Riemann problem can be written as*

$$\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_{j-1} = \delta_j r_j, \quad j = 1, 5, \quad (5.51)$$

with  $\delta_j$  the normalization factors

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \rho_{\mathbf{L}}^* - \rho_{\mathbf{L}}, & \delta_2 &= \rho_{\mathbf{L}}^*(Y^* - Y_{\mathbf{L}}), & \delta_3 &= \rho_{\mathbf{R}}^* - \rho_{\mathbf{L}}^*, \\ \delta_4 &= \rho_{\mathbf{R}}^*(Y_{\mathbf{R}} - Y^*), & \delta_5 &= \rho_{\mathbf{R}} - \rho_{\mathbf{R}}^*, \end{aligned}$$

and  $R = (r_j)_{j=1,5}$  the matrix

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ v_{\mathbf{L}} - a\tau_{\mathbf{L}} & 0 & v^* & 0 & v_{\mathbf{R}} + a\tau_{\mathbf{R}} \\ \Pi_{\mathbf{L}} + a^2\tau_{\mathbf{L}} & 0 & \Pi^* & 0 & \Pi_{\mathbf{R}} + a^2\tau_{\mathbf{R}} \\ Y_{\mathbf{L}} & 1 & Y^* & 1 & Y_{\mathbf{R}} \\ \Sigma_{\mathbf{L}} & b & \Sigma^* & -b & \Sigma_{\mathbf{R}} \end{pmatrix}. \quad (5.52)$$

With the previous lemma, it is easy to construct Roe's matrix thanks to the forthcoming proposition.

**Proposition 5.3.2** *Let  $A^{Roe}$  be the matrix defined by  $A^{Roe}(\mathbf{v}^{\mathbf{L}}, \mathbf{v}^{\mathbf{R}}) = R\Lambda L$  with  $\Lambda = \text{Diag}(\mu_j)_{j=1,5}$  made of the eigenvalues (5.20),  $R$  defined by (5.52) and  $L = R^{-1}$ . Then  $A^{Roe}$  is a Roe's matrix.*

The right eigenvectors of  $A^{Roe}$  are obviously the vectors  $(r_j)_{j=1,5}$  :

$$A^{Roe} r_j = \mu_j r_j, \quad j = 1, 5. \quad (5.53)$$

Let us notice that for  $\mathbf{v}^{\mathbf{L}} \neq \mathbf{v}^{\mathbf{R}}$ , the Roe's matrix  $A^{Roe}(\mathbf{v}^{\mathbf{L}}, \mathbf{v}^{\mathbf{R}})$  is not the value of the Jacobian of the relaxed flux  $\mathcal{G}$  at an "average" state.

We define the absolute value of the Roe's matrix by  $|A^{Roe}(\mathbf{v}^{\mathbf{L}}, \mathbf{v}^{\mathbf{R}})| = R|\Lambda|L$ . The Roe's matrix allows us to construct the Roe's numerical scheme and to conclude, thanks to the forthcoming theorem.

**Theorem 5.3.3** *The numerical flux defined by*

$$\mathbf{H}^{Roe}(\mathbf{v}^{\mathbf{L}}, \mathbf{v}^{\mathbf{R}}) = \frac{1}{2} (\mathcal{G}(\mathbf{v}^{\mathbf{L}}) + \mathcal{G}(\mathbf{v}^{\mathbf{R}})) - \frac{1}{2} |A^{Roe}(\mathbf{v}^{\mathbf{L}}, \mathbf{v}^{\mathbf{R}})| (\mathbf{v}^{\mathbf{R}} - \mathbf{v}^{\mathbf{L}}) \quad (5.54)$$

satisfies the equality

$$\mathbf{H}^{Roe}(\mathbf{v}^{\mathbf{L}}, \mathbf{v}^{\mathbf{R}}) = \mathbf{H}^{Godunov}(\mathbf{v}^{\mathbf{L}}, \mathbf{v}^{\mathbf{R}}) \quad (5.55)$$

where  $\mathbf{H}^{Godunov}$  is defined by (5.16).

Such a scheme can be constructed when all the fields of the relaxation system are linearly degenerated, which is our case, or when the solution of the Riemann problem is only made up of shocks.

**PROOF OF LEMMA 5.3.1** The main ideas involved in the following computations are the use of the Rankine-Hugoniot condition and the conservation of a well chosen Riemann invariant. The proof of the lemma is composed of the proof of the 5 equalities (5.51), as each equality requests a specific treatment.

In a first step, we show that  $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0 = \delta_1 r_1$ . By definition,

$$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0 = (\rho_{\mathbf{L}}^* - \rho_{\mathbf{L}}, \rho_{\mathbf{L}}^* v^* - \rho_{\mathbf{L}} v_{\mathbf{L}}, \rho_{\mathbf{L}}^* \Pi^* - \rho_{\mathbf{L}} \Pi_{\mathbf{L}}, (\rho_{\mathbf{L}}^* - \rho_{\mathbf{L}}) Y_{\mathbf{L}}, (\rho_{\mathbf{L}}^* - \rho_{\mathbf{L}}) \Sigma_{\mathbf{L}})^T. \quad (5.56)$$

First, the Rankine-Hugoniot condition applied on the Eulerian equation  $\partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0$  with the 1st discontinuity gives

$$\rho_{\mathbf{L}}^* v^* - \rho_{\mathbf{L}} v_{\mathbf{L}} = (v_{\mathbf{L}} - a \tau_{\mathbf{L}})(\rho_{\mathbf{L}}^* - \rho_{\mathbf{L}}). \quad (5.57)$$

Second, in Lagrangian coordinates,  $\mathcal{I} = \Pi + a^2 \tau$  is a Riemann invariant for the characteristic speed 0, i.e.  $\partial_t \mathcal{I} = 0$ . This is a straightforward consequence of the two Lagrangian conservation laws  $\partial_t \tau - \partial_y v = 0$  and  $\partial_t \Pi + a^2 \partial_y v = 0$ . Back in Eulerian coordinates,  $\mathcal{I}$  is a Riemann invariant for the characteristic speed  $v$ . A direct application is  $\Pi^* + a^2 \tau_{\mathbf{L}}^* = \Pi_{\mathbf{L}} + a^2 \tau_{\mathbf{L}}$  which implies  $\rho_{\mathbf{L}}^* (\Pi^* + a^2 \tau_{\mathbf{L}}^*) - \rho_{\mathbf{L}} (\Pi_{\mathbf{L}} + a^2 \tau_{\mathbf{L}}) = (\rho_{\mathbf{L}}^* - \rho_{\mathbf{L}}) (\Pi_{\mathbf{L}} + a^2 \tau_{\mathbf{L}})$ . The expansion of the left hand side of the last equality gives

$$\rho_{\mathbf{L}}^* \Pi^* - \rho_{\mathbf{L}} \Pi_{\mathbf{L}} = (\rho_{\mathbf{L}}^* - \rho_{\mathbf{L}}) (\Pi_{\mathbf{L}} + a^2 \tau_{\mathbf{L}}) \quad (5.58)$$

because  $\rho_{\mathbf{L}}^* \times (a^2 \tau_{\mathbf{L}}^*) - \rho_{\mathbf{L}} \times (a^2 \tau_{\mathbf{L}}) = 0$ . Substituting equalities (5.57) and (5.58) in the jump (5.56) and using the definitions of  $\delta_1$  and  $r_1$  gives  $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0 = \delta_1 r_1$ .

In a second step, the definition of the intermediate states gives

$$\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = [0, 0, 0, \rho_{\mathbf{L}}^* (Y^* - Y_{\mathbf{L}}), \rho_{\mathbf{L}}^* (\Sigma^* - \Sigma_{\mathbf{L}})]^T. \quad (5.59)$$

Here, we use the Lagrangian equation  $\partial_t Y - \partial_y \Sigma = 0$ . We then apply the Rankine-Hugoniot condition with the 2nd discontinuity, which gives  $-(\Sigma^* - \Sigma_{\mathbf{L}}) = -b(Y^* - Y_{\mathbf{L}})$ . Multiplying each side by  $\rho_{\mathbf{L}}^*$ , one obtains easily

$$\rho_{\mathbf{L}}^* (\Sigma^* - \Sigma_{\mathbf{L}}) = b \rho_{\mathbf{L}}^* (Y^* - Y_{\mathbf{L}}) \quad (5.60)$$

Substituting the equality (5.60) in the jump (5.59) and using the definitions of  $\delta_2$  and  $r_2$  gives  $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \delta_2 r_2$ .

In a third step, the definitions of  $\delta_3$  and  $r_3$  gives directly  $\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2 = \delta_3 r_3$ . Similarly, one can prove that  $\mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_3 = \delta_4 r_4$  and  $\mathbf{v}_5 - \mathbf{v}_4 = \delta_5 r_5$  which completes the proof.  $\square$

**PROOF OF THE PROPOSITION 5.3.2** We must show that the matrix  $A^{Roe}$  satisfy the three Roe's conditions. This will be done by using the definition of this matrix and some easy computations, as we are going to see.

1. By definition, the matrix  $A^{Roe}(\mathbf{v}^{\mathbf{L}}, \mathbf{v}^{\mathbf{R}})$  is diagonalizable with real eigenvalues  $(\mu_j)_{j=1,5}$ . Its right (resp. left) eigenvectors are  $(r_j)_{j=1,5}$ , the columns of  $R$  (resp.  $(l_j)_{j=1,5}$ , the lines of  $L$ ). The five right eigenvectors form a basis of  $\mathbb{R}^5$ .
2. An easy but tedious calculation enables us to check that  $A^{Roe}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \nabla \mathcal{G}(\mathbf{v})$ .
3. Let us now prove that  $A^{Roe}(\mathbf{v}^{\mathbf{L}}, \mathbf{v}^{\mathbf{R}})(\mathbf{v}^{\mathbf{R}} - \mathbf{v}^{\mathbf{L}}) = \mathcal{G}(\mathbf{v}^{\mathbf{R}}) - \mathcal{G}(\mathbf{v}^{\mathbf{L}})$ . First, one can notice that, by definition (5.51),  $\mathbf{v}^{\mathbf{L}} - \mathbf{v}^{\mathbf{R}} = \sum_{j=1,5} (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_{j-1}) = \sum_{j=1,5} \delta_j r_j$ . It is therefore easy to see that, thanks to (5.53) and (5.51),

$$A^{Roe}(\mathbf{v}^{\mathbf{L}}, \mathbf{v}^{\mathbf{R}})(\mathbf{v}^{\mathbf{L}} - \mathbf{v}^{\mathbf{R}}) = \sum_{j=1,5} \delta_j \mu_j r_j = \sum_{j=1,5} \mu_j (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_{j-1}).$$



On the other hand, the Rankine-Hugoniot condition gives the jump through the  $j$ th discontinuity :

$$\mathcal{G}(\mathbf{v}_j) - \mathcal{G}(\mathbf{v}_{j-1}) = \mu_j(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_{j-1}), \quad j = 1, \dots, 5. \quad (5.61)$$

It follows that :

$$A^{Roe}(\mathbf{v}^L, \mathbf{v}^R)(\mathbf{v}^L - \mathbf{v}^R) = \sum_{j=1,5} \mathcal{G}(\mathbf{v}_j) - \mathcal{G}(\mathbf{v}_{j-1}) = \mathcal{G}(\mathbf{v}^L) - \mathcal{G}(\mathbf{v}^R),$$

which is the desired result.  $\square$

PROOF OF THE THEOREM 5.3.3 We use the two equalities ([32], chap 3, lemma 4.3)

$$\frac{2}{\Delta x} \int_0^{\Delta x/2} \mathbf{v}(x/\Delta t^n) dx = \mathbf{v}_5 - 2 \frac{\Delta t^n}{\Delta x} (\mathcal{G}(\mathbf{v}_5) - \mathbf{H}(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_5)), \quad (5.62)$$

$$\frac{2}{\Delta x} \int_{-\Delta x/2}^0 \mathbf{v}(x/\Delta t^n) dx = \mathbf{v}_0 - 2 \frac{\Delta t^n}{\Delta x} (\mathbf{H}(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_5) - \mathcal{G}(\mathbf{v}_0)), \quad (5.63)$$

with  $\Delta t^n$  satisfying the CFL condition (5.34). One denotes  $\mu_j^+ = \max(\mu_j, 0)$  and  $\mu_j^- = \min(\mu_j, 0)$  for  $j = 1, 5$ . The main idea of the proof is to compute explicitly the left hand sides of (5.62–5.63) and to obtain two distinct expressions for the Godunov numerical flux. As the CFL condition is satisfied, we are sure that  $\mu_5^+ \Delta t \leq \frac{\Delta x}{2}$  and  $\mu_1^- \Delta t \geq -\frac{\Delta x}{2}$  which justify such computations.

The half-sum of these equalities will give a flux involving the eigenvalues and eigenvectors of the Roe's matrix and that will easily be transform into the Roe's numerical flux (5.54).

We want to compute the left hand side of (5.62) by integrating the solution of the Riemann problem on the first domain  $(0, \Delta x/2) \times (0, \Delta t^n)$  :

$$\begin{aligned} \int_0^{\Delta x/2} \mathbf{v}(x/\Delta t^n) dx &= \mathbf{v}_0 \mu_1^+ \Delta t^n + \mathbf{v}_1 (\mu_2^+ - \mu_1^+) \Delta t^n + \dots \\ &\quad + \mathbf{v}_4 (\mu_5^+ - \mu_4^+) \Delta t^n + \mathbf{v}_5 \left( \frac{\Delta x}{2} - \mu_5^+ \Delta t^n \right) \end{aligned} \quad (5.64)$$

This gives the following identity :

$$\frac{2}{\Delta x} \int_0^{\Delta x/2} \mathbf{v}(x/\Delta t^n) dx = 2 \frac{\Delta t^n}{\Delta x} \sum_{j=1,5} (\mathbf{v}_{j-1} - \mathbf{v}_j) \mu_j^+ + \mathbf{v}_5.$$

By comparison with (5.62), one finds :

$$\mathbf{H}(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_5) = \mathcal{G}(\mathbf{v}_5) - \sum_{j=1,5} (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_{j-1}) \mu_j^+. \quad (5.65)$$

Similarly, the computation of the left hand side of (5.63) by integrating the solution of the Riemann problem on the second domain  $(-\Delta x/2, 0) \times (0, \Delta t^n)$  gives :

$$\mathbf{H}(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_5) = \mathcal{G}(\mathbf{v}_0) + \sum_{j=1,5} (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_{j-1}) \mu_j^-. \quad (5.66)$$

The equality  $|\mu| = \mu^+ - \mu^-$  combined with the half-sum of (5.65) and (5.66) gives :

$$\mathbf{H}(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_5) = \frac{1}{2} (\mathcal{G}(\mathbf{v}_0) + \mathcal{G}(\mathbf{v}_5)) - \frac{1}{2} \sum_{j=1,5} |\mu_j| (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_{j-1}). \quad (5.67)$$

But we have already noticed that  $\mathbf{v}_5 - \mathbf{v}_0 = \sum_{j=1,5} \delta_j r_j$  and therefore :

$$\begin{aligned} |A^{Roe}(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_5)|(\mathbf{v}_5 - \mathbf{v}_0) &= \sum_{j=1,5} \delta_j R |\Lambda| L r_j = \sum_{j=1,5} \delta_j |\mu_j| r_j \\ &= \sum_{j=1,5} |\mu_j| (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_{j-1}). \end{aligned}$$

which yields the equality (5.55).  $\square$

### 5.3.1.3 The first-order linearly implicit relaxation scheme

We can now compute the partial derivatives of the Roe's numerical flux  $\mathbf{H}(\mathbf{v}^{\mathbf{L}}, \mathbf{v}^{\mathbf{R}})$  defined by (5.54). They are obtained by making the hypothesis that Roe's matrix is constant. We directly obtain the approximated matrices  $\alpha$  and  $\gamma$

$$\alpha_i \approx \frac{\Delta t^n}{2\Delta x} [\nabla \mathcal{G}(\mathbf{v}^{\mathbf{L}}) + |A^{Roe}(\mathbf{v}^{\mathbf{L}}, \mathbf{v}^{\mathbf{R}})|], \quad \gamma_{i+1} \approx \frac{\Delta t^n}{2\Delta x} [\nabla \mathcal{G}(\mathbf{v}^{\mathbf{R}}) - |A^{Roe}(\mathbf{v}^{\mathbf{L}}, \mathbf{v}^{\mathbf{R}})|]. \quad (5.68)$$

The first-order linearly implicit relaxation scheme consists, at each time step, in solving the linear system  $\mathbb{A} \delta \mathbf{v} = b$ . The matrix  $\mathbb{A}$  is a tridiagonal by block matrix with each block of size  $5 \times 5$  : the resulting matrix is a band matrix with 9 extra-diagonal terms.

We have already shown the interior lines (5.48–5.49) but we have not described the first and the last lines, which are related to the boundary conditions. For the states  $\mathbf{v}_0$  et  $\mathbf{v}_{I+1}$ , we specify  $\delta \mathbf{v}_0 = 0$  and  $\delta \mathbf{v}_{I+1} = 0$ .

## 5.3.2 First order semi-implicit relaxation scheme

The relaxation scheme is constructed as to be :

- linearly implicit on the fast waves of speed  $v \pm a\tau$  (“pressure waves”),
- explicit on the slow waves of speed  $v$  (“kinematic waves”) and the associated relaxation waves of speed  $v \pm b\tau$ .

Accordingly, when one computes the partial derivatives of the numerical flux, only the terms associated with the largest eigenvalues are kept. We take the diagonal matrix  $\tilde{\Lambda} = \text{diag}(v_{\mathbf{L}} - a\tau_{\mathbf{L}}, 0, 0, 0, v_{\mathbf{R}} + a\tau_{\mathbf{R}})$  which modifies Roe's matrix by  $\tilde{A}^{Roe} = R\tilde{\Lambda}L$  with the same matrices  $R$  and  $L$  as previously. Like Roe's matrix, the eigenvalues of the Jacobian matrices are modified in the same way by  $\tilde{A}^{\mathbf{L},\mathbf{R}} = R^{\mathbf{L},\mathbf{R}}\tilde{\Lambda}^{\mathbf{L},\mathbf{R}}L^{\mathbf{L},\mathbf{R}}$ . The matrices  $\alpha$  and  $\beta$  are then computed with (5.68) and the previous modified matrices.

### 5.3.2.1 Time step of the semi-implicit relaxation scheme

At each time step, one computes two auxiliary time steps.

1. The explicit time step is :

$$\Delta t^{Void} = \mu^{Void} \frac{\Delta x}{\max_{i=1,I} |V_i^{Void}|}$$

with  $\mu^{Void} = 0.5$  and  $|V_i^{Void}| = \max(|v^*|, |v^* - b\tau_{\mathbf{L}}^*|, |v^* + b\tau_{\mathbf{R}}^*|)$ .

2. The linearly implicit time step is

$$\Delta t^{Press} = \mu^{Press} \frac{\Delta x_i}{\max_{i=1,I} |V_i^{Press}|}$$

with  $\mu^{Press} = 20$  and  $|V_i^{Press}| = \max(|v_{\mathbf{L}} - a\tau_{\mathbf{L}}|, |v_{\mathbf{L}} + a\tau_{\mathbf{R}}|)$ .

The final time step is  $\Delta t^n = \min(\Delta t^{Void}, \Delta t^{Press})$ . The CFL number  $\mu^{Press} = 20$ , experimentally determined, turns out to be a good compromise between a small CPU-time and an acceptable amount of smearing out for the numerical solution.

### 5.3.2.2 Implicit projection

We follow the ideas of Chalons [15]. The use of a linearly implicit scheme implies that the projection step is giving steady states that are not accurate. The solution is to link the evolutions of the relaxed variables associated with an implicit field to the evolutions of the equilibrium variables. In our case, the only relaxed variable associated with an implicit field is  $\rho\Pi$  : the relaxation variable  $\rho\Sigma$  is associated with the eigenvalues  $v \pm b\tau$  which are explicit. We therefore write the implicit projection equation :

$$\delta(\rho\Pi)_i = \left(\frac{\partial\mathcal{I}}{\partial\rho}\right)_i^n \delta\rho_i + \left(\frac{\partial\mathcal{I}}{\partial(\rho Y)}\right)_i^n \delta(\rho Y)_i + \left(\frac{\partial\mathcal{I}}{\partial(\rho v)}\right)_i^n \delta(\rho v)_i,$$

with  $\mathcal{I}(\mathbf{u}) = \rho P(\mathbf{u})$ . The partial derivatives of  $\mathcal{I}$  are computed on  $\mathbf{u}_i^n$ . The previous identity gives an equation that replaces the 5th line of (5.49), i.e., modifies the linear system to be solved in the mathematical step. It enables us to reduce the size of each block from  $5 \times 5$  to  $4 \times 4$  and therefore reduce the size of the global linear system.

Numerical experiments shows that not only the steady solutions are more accurate (as already shown in [15]), but even transient solutions are more accurate.

**Remark 5.3.4** *The semi-implicit scheme with the implicit projection enables us to use non-constant relaxation coefficients  $(a_{i+1/2}, b_{i+1/2})$ , as in the explicit scheme. We would like to mention the following link between the implicit projection and the relaxation coefficients.*

1. *The relaxation coefficients associated with linearly implicit fields without the implicit projection must be taken constants (and equal to the maximum over the interfaces).*
2. *The relaxation coefficients associated with linearly implicit fields with an implicit projection can be taken non-constants.*
3. *The relaxation coefficients associated with explicit fields can be taken non-constant.*

*These facts are based on numerical experiments : there is no theoretical argument yet to support these facts.*

### 5.3.3 Second order semi-implicit scheme

The slope limiters used to build the second order explicit scheme leads to a non differentiable expression. That is why we choose a simplified version in which we do not differentiate the nonlinear operator involved in the second order correction. In the physical step, we first compute the second order correction of the states  $\mathbf{u}_{L,R}$  and evaluate the numerical flux. In the mathematical step, we solve the first order linear system but the derivatives are computed with the corrected states  $\mathbf{u}_{L,R}$ .

In order to have a second order in time scheme, we use again the Runge-Kutta 2 procedure. Since the scheme is only semi-implicit, the order 2 in time is only achieved on the explicit waves and the linearly implicit waves are solved with order 1 in time.

## 5.4 Numerical results

In this Section, we show the numerical results of the semi-implicit relaxation scheme : shock tube test (without Boundary Conditions) and real-life cases (with B.C.). The first two test-cases are

Riemann problems. The length of the domain is 100 meters and the discontinuity between the two initial constant states is located at  $x = 50$  m. The last two test-cases are real-life problems in which the solution is driven by the changes of the boundary conditions.

### 5.4.1 Experiment 1 : no-slip law

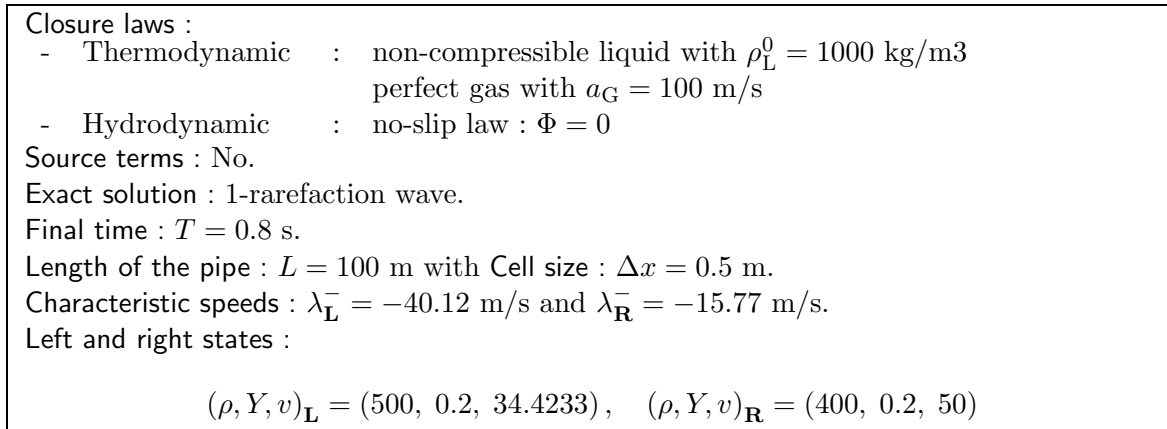


FIG. 5.1 – Detail of experiment 1, no-slip law

The details of this test-case are shown in figure (5.1) and the results are displayed in figure (5.2). We see that the second-order correction leads to a more accurate scheme.

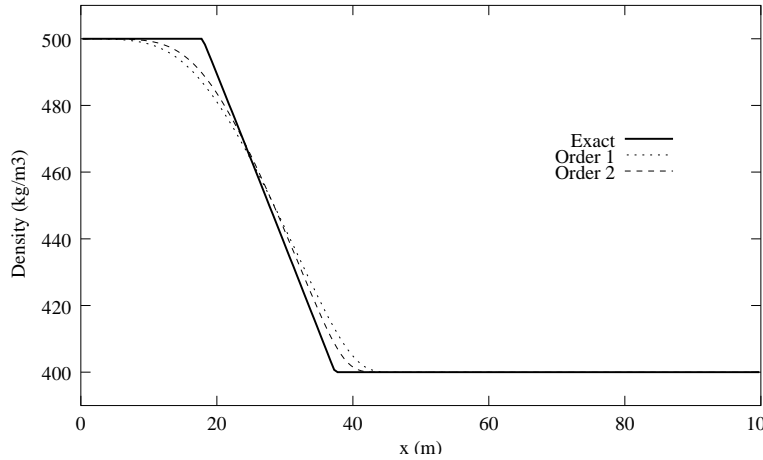


FIG. 5.2 – Numerical results of experiment 1, no-slip law.

### 5.4.2 Experiment 2 : Zuber-Findlay law

The details of this test-case are shown in figure (5.3) and the results are displayed in figure (5.4). We used the VFRoe-TACITE scheme described in [26] with the same CFL numbers. The two schemes are semi-implicit second-order schemes. The numerical results exhibit a good agreement between the two schemes.

Extracted from : [26]

Closure laws :

- Thermodynamic : non-compressible liquid with  $\rho_L^0 = 1000 \text{ kg/m}^3$   
perfect gas with  $a_G = 300 \text{ m/s}$
- Hydrodynamic : Zuber-Findlay law[71] :  $\Phi = \frac{(c_0-1)v+c_1}{c_0[XR_G-YR_L]-X}$   
 $c_0 = 1.07, c_1 = 0.2162 \text{ m/s}$ .

Source terms : No.

Exact solution : . 1-Shock, 2 Contact discontinuity, 3-Shock

Final time :  $T = 0.5 \text{ s}$ .

Length of the pipe :  $L = 100 \text{ m}$  with Cell size :  $\Delta x = 0.5 \text{ m}$ .

Characteristic speeds :  $\sigma^- = -40.03 \text{ m/s}$ ,  $\sigma^0 = 10 \text{ m/s}$  and  $\sigma^+ = 67.24 \text{ m/s}$ .

Left and right states :

$$(\rho, Y, v)_{\mathbf{L}} = (453.19, 0.00705, 24.80), \quad (\rho, Y, v)_{\mathbf{R}} = (454.19, 0.0108, 1.746)$$

FIG. 5.3 – Detail of experiment 2, Zuber-Findlay law

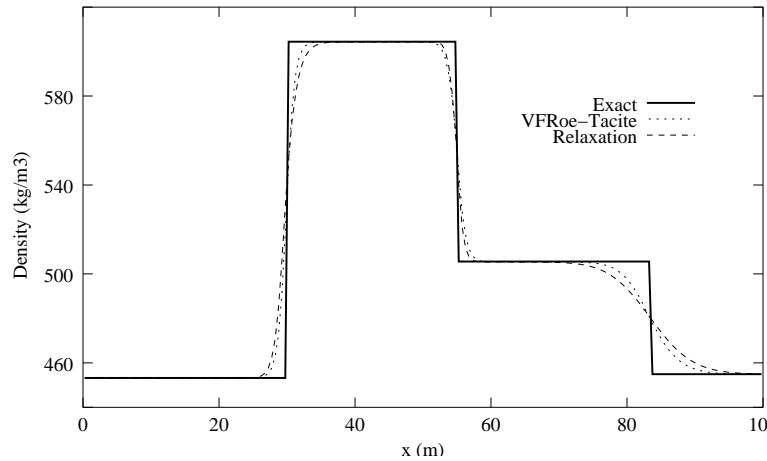


FIG. 5.4 – Numerical results of experiment 2, Zuber-Findlay law.

Extracted from : [53], [26]

Geometry of the pipe and discretization :

- Length : 10000 m, horizontal
- Diameter : 0.146 m
- Cell size : 200 m

Closure laws :

- Thermodynamic : compressible liquid, perfect gas
- Hydrodynamic : no-slip law

Source terms : Friction.

Boundary and initial conditions :

- Stabilization period : 3000 s
- Transient period : 1 s
- Inlet condition on gas flowrate : 0.2 to 0.4 kg/s
- Inlet condition on liquid flowrate : 20 kg/s
- Outlet condition on pressure :  $10^6 \text{ Pa}$

FIG. 5.5 – Detail of experiment 3, no-slip law with boundary conditions

### 5.4.3 Experiment 3 : no-slip law

The details of this test-case are shown in figure (5.5) and the results are given in figures (5.6–5.7). This is the simplest real-life problem we can imagine : we just double the inlet gas flowrate. There is no one-phase states. The numerical results show a good agreement between the two schemes.

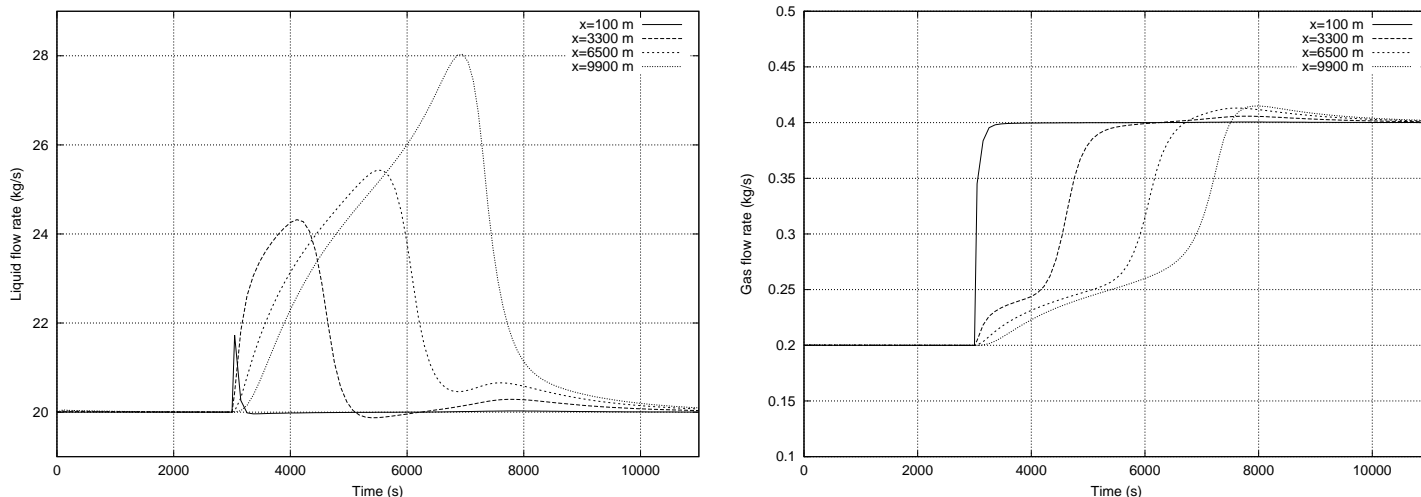


FIG. 5.6 – Experiment 3, TACITE results

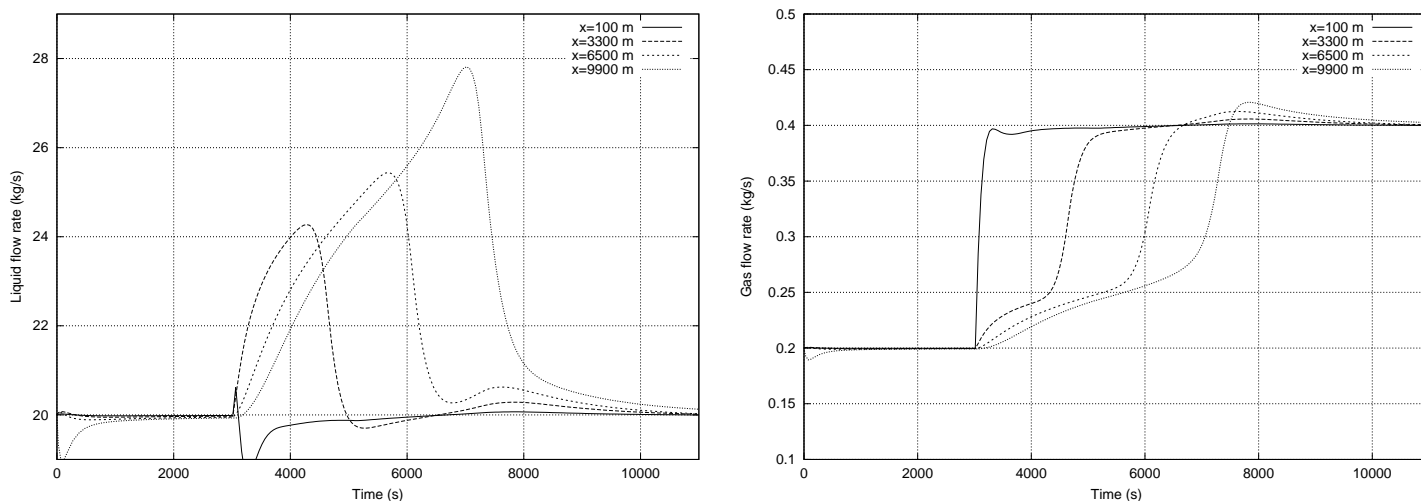


FIG. 5.7 – Experiment 3, relaxation results

### 5.4.4 Experiment 4 : Zuber-Findlay-like law

The details of this test-case are shown in figure (5.8) and the results are given in figures (5.9).

In this test-case[26], the inlet gas flow rate is decreased from 0.114 to 0 kg/s. As the mass flowrates are small, the decrease in the inlet gas mass flow rate gives rise to negative oil velocities in the upper part of the pipeline. Therefore, a void fraction between a “single-phase gas” state and a “two-phase” state propagates from the outlet down the pipe. Simultaneously, the change in the inlet gas mass flowrates induces another void fraction front which propagates from the inlet up the pipe. These two fronts meet around  $x = 47$  m at time  $t = 260$  s to form a unique discontinuity wave

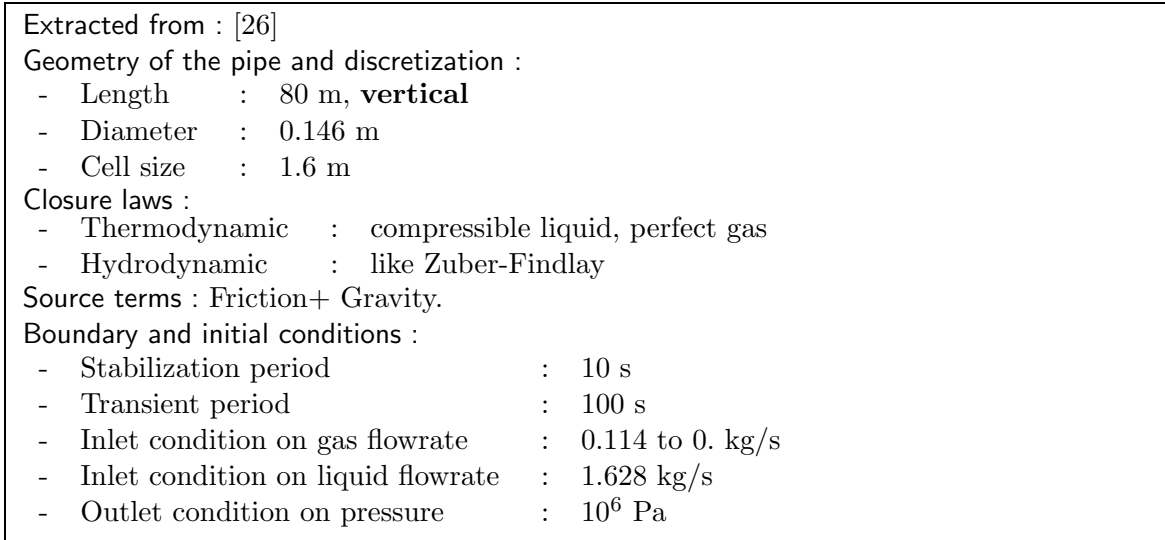


FIG. 5.8 – Detail of experiment 4, Zuber-Findlay-like law with boundary conditions

which propagates towards the outlet. At time  $t = 200$  s, this discontinuity wave reaches the outlet and the pipe turns to a single-phase liquid steady state.

This test-case is quite stiff. During the simulation, the scheme must handle two-phase states, liquid state and gas state. Moreover, the discontinuity propagating at the end on the simulation is between two one-phase states. The classical VFRoe scheme is not enough rough in order to handle this case and that is why the authors of [26] introduced more numerical diffusion in their VFRoe-TACITE scheme. The numerical results show a good agreement between the two schemes.

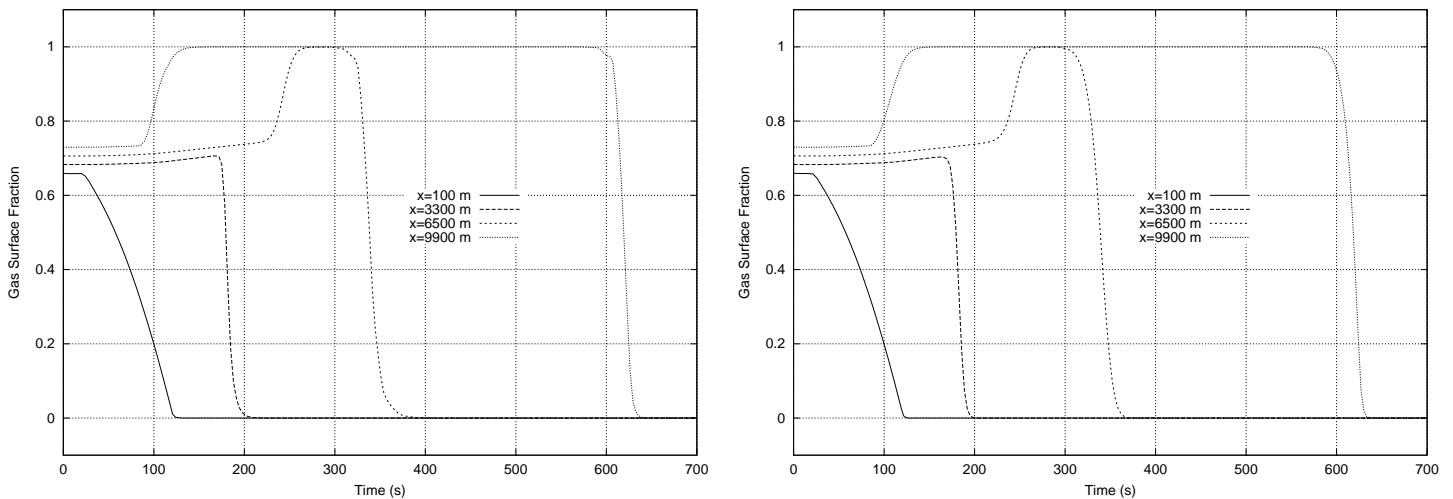


FIG. 5.9 – Experiment 4, gas surface fraction. Left : TACITE results, Right : relaxation.

## Conclusion

We have presented a second order semi-implicit relaxation scheme. The main difficulty was to express the relaxation Godunov scheme in Roe's form, that is to say, to compute Roe's matrix. The semi-implicit relaxation scheme is then explicit for the slow waves and linearly implicit for the

fast waves and enable us to reduce the CPU time as well as to be more accurate on slow waves. Numerical experiments show a good agreement with the exact solution on shock tube tests and with a VFRoe-type scheme on more realistic problems.

The main open issue is the extension of this scheme to the compositional flows which have a very important role in petroleum industry. The energy equation should also be investigated in order to take care of thermal effects. A theoretical effort could be made in order to explore the link between the relaxation coefficients and the implicit projection. Another effort could be made in developing rough boundary conditions : the explicit relaxation only ensures the physical properties inside the domain and not at the boundaries.

## Acknowledgments

The authors wish to thank I. Faille and F. Willien for the numerous helpful discussions we had.





## Chapitre 6

# Analyse des temps CPU

Nous nous intéressons au système gaz–liquide DFM (trois équations). Du point de vue industriel, les méthodes numériques employées sont généralement comparées selon leur précision, leur robustesse et leur rapidité d’exécution. Dans ce chapitre, nous montrons que le schéma de relaxation est plus rapide que le schéma VFRoe–Tacite et nous tentons d’évaluer ce gain par deux moyens : l’analyse de complexité qui détaille le nombre d’opérations à effectuer et l’analyse du temps CPU et sa décomposition.

### 6.1 Introduction

#### 6.1.1 Contexte

Pour résoudre le système diphasique Tacite gaz-liquide, le schéma numérique de type VFRoe a été implémenté [26] et permet de palier aux désavantages des schémas numériques antérieurs. Pourtant, certains inconvénients subsistent, notamment une robustesse parfois limitée et un temps calcul important.

#### 6.1.2 D’autres tentatives

Du point de vue de la rapidité, une autre stratégie, à la fois au niveau du modèle et au niveau numérique, a montré son efficacité. Il s’agit du modèle NPW associé à un schéma centré implicite pour les termes qui confèrent aux équations leur type parabolique et un schéma décentré explicite pour les termes qui confèrent aux équations leur type hyperbolique[25]. Du fait du caractère partiellement implicite du schéma, les gains en temps calcul sont particulièrement intéressants (jusqu’à 40). Il n’est pas possible de comparer cette approche avec la notre puisque le système d’équations aux dérivées partielles n’est pas le même. Pourtant, nous devons pondérer nos gains par les gains obtenus par d’autres approches.

#### 6.1.3 Méthode proposée

Pour trouver une solution à la double problématique de la robustesse et du temps CPU, nous menons des recherches sur une méthode de relaxation qui pourrait permettre d’y remédier. Le but de ce chapitre est de montrer combien la méthode de relaxation est plus rapide que la méthode VFRoe–Tacite.

Faire l’analyse du temps CPU d’un code scientifique n’est pas simple car le temps CPU d’un programme dépend beaucoup de paramètres très variables :

1. la puissance de la machine utilisée,

2. la finesse du compilateur (ici fortran 90) et son utilisation (avec des options de compilation telle  $-O2$  ou d'autres),
3. l'ingéniosité du programmeur qui, à une date donnée, produit un code plus ou moins optimisé,
4. la charge de la machine à l'instant considéré,
5. la complexité des calculs mis en œuvre.

Le point qui nous intéresse ici est surtout le dernier, mais les 3 premiers sont très importants dans le temps CPU final.

Par ailleurs, insistons sur le fait que le but de cette thèse n'était pas d'optimiser le programme informatique, devenu assez complexe (environ 20 000 lignes de code). Par conséquent, les mesures de temps CPU affichées ici sont à prendre avec pondération.

Notons qu'il est parfois difficile de mesurer le temps CPU d'un programme, car de nombreux utilisateurs travaillent sur une même machine. C'est en partie pour cette raison que nous avons orienté notre travail vers des études de complexité, indépendantes de ce problème.

La complexité des calculs dépend de :

1. la taille du système à traiter. Nous étudierons ici le système diphasique DFM à  $N = 3$  équations.
2. le nombre de mailles  $I$  utilisées pour discrétiser la conduite. Il est bien connu que le temps CPU final est une fonction quadratique du nombre de maille.
3. les lois de fermetures. L'évaluation des lois thermodynamiques et hydrodynamiques est très coûteuse en temps calcul.
4. le schéma numérique.

Les schémas numériques que nous utilisons sont de deux types :

1. **Schéma Explicite.** Il est fondé sur le calcul d'un flux numérique sur chaque arête.
2. **Schéma Semi-Implicite linéaire.** Il est fondé sur l'inversion d'un système linéaire constitué de blocs dont la taille est  $N = 3$  pour le schéma Tacite et  $N = 5$  ou  $N = 4$  pour le schéma de relaxation, selon l'implémentation (nous y reviendrons). Le schéma semi-implicite linéaire est construit en deux étapes :
  - (a) construction du système linéaire (cette étape utilise les procédures apparues dans le schéma explicite),
  - (b) inversion du système linéaire par une méthode de Gauss par bande.

Ainsi, pour juger de la complexité d'un schéma explicite, il suffit d'analyser la complexité du calcul d'un seul flux numérique. Par contre, pour juger de la complexité d'un schéma semi-implicite linéarisé, il faut tenir compte du fait que la résolution du système linéaire est importante. L'analyse doit donc en particulier porter sur la taille de cette matrice.

Dans les deux cas, l'attention doit également porter sur le **pas de temps** et l'avantage sera au schéma ayant le plus grand pas de temps.

Mais l'analyse de la complexité ne suffit pas car tous les calculs ne prennent pas le même temps ; ainsi, par exemple, l'évaluation de la pression est, pour la machine, très complexe : en fonction des cas, la pression est soit tabulée, soit issue d'une méthode non-linéaire (Newton par exemple) ou au mieux analytique (dans des cas simplistes). Il est donc nécessaire, dans la pratique, d'évaluer précisément dans la simulation quel temps prend chaque calcul.

Cette étude nous intéresse premièrement pour analyser les résultats de la méthode de relaxation. Notons toutefois qu'un aspect original de ce document est qu'il permet également d'étudier la

complexité du schéma VFRoe–Tacite, étude dont nous ne trouvons pas de trace antérieure dans la bibliographie IFP.

Dans la première partie, nous faisons une analyse algorithmique des deux schémas explicites et dans la seconde des deux schémas semi-implicites linéaires. Dans la troisième partie, nous présentons les temps CPU obtenus dans les problèmes sans et avec conditions limites.

**Note au lecteur**

*De nombreux et parfois fastidieux calculs sont nécessaires pour parvenir aux dénombrements souhaités ici. Pour faciliter la lecture de ce document, nous avons placé en annexe A, dans des figures séparées, les détails des calculs que nous évoquons dans le texte. Une première lecture peut se faire aisément en “sautant” ces détails.*

**6.2 Éléments de base**

La figure 6.2 présente le détail des algorithmes de base utilisés dans notre méthode. Les matrices pleines considérées ici sont les matrices Jacobiennes et les matrices de diffusion de taille entre 3 et 5. Les matrices bande considérée ici sont les matrices liées aux systèmes linéaires impliquées dans les méthodes semi-implicites.

Opérateur	Opérations
$+, -, *, /, \sqrt{\phantom{x}}, \max(\phantom{x}), \min(\phantom{x})$	1
$\varphi = \frac{\varphi_L + \varphi_R}{2}, \langle \varphi \rangle = \frac{\varphi_L - \varphi_R}{2}$	2

FIG. 6.1 – Complexité des opérations de base

Opérateur		Opérations
$A.x$	$A$ mat. pleine $N \times N$	$2 N^2$
$A + B$	$A, B$ mat. pleines $N \times N$	$N^2$
$A.B$	$A, B$ mat. pleines $N \times N$	$2 N^3$
$A.D$	$A$ mat. pleine $N \times N, D$ mat. diag $N$	$N^2$
$x$ tq $A.x = b$	$A$ mat. pleine $N \times N$	$0.67 N^3$ (voir [2])
$x$ tq $A.x = b$	$A$ mat. bande $N \times N$ , demi-larg. $\ell$	$(4\ell^2 + 6\ell + 6)N$
$\Lambda, R$	$A.R = \Lambda R$ avec $A$ mat. $N \times N$	$26.33 N^3$ (voir [2])
$L$	$L.R = \mathbb{I}, R$ mat. pleine $N \times N$	$N^3$

FIG. 6.2 – Complexité des opérations d’algèbre linéaire

**Remarque 6.2.1** *En ce qui concerne la matrice bande, on considère ici que le nombre maximal d’éléments non nuls sur une ligne de la matrice (largeur de bande) est  $L = 2\ell + 1$ . L’algorithme en question est celui du pivot de Gauss pour une matrice bande implémenté dans le code Tacite.*

**6.3 Analyse algorithmique des schémas explicites**

On propose dans ce paragraphe de calculer la complexité des algorithmes mis en œuvre dans les schémas Tacite et relaxation en dénombrant les opérations nécessaires pour calculer le flux sur une arête pour les deux schémas numériques.

Un schéma explicite d'ordre 1 en espace et en temps, sans termes sources et sans conditions limites est construit sur la mise à jour suivante :

$$\frac{\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n}{\Delta t^n} + \frac{\mathbf{H}_{i+1/2}^{n+1/2}(\mathbf{u}^n) - \mathbf{H}_{i-1/2}^{n+1/2}(\mathbf{u}^n)}{\Delta x_i} = 0 \quad (6.1)$$

Cette mise à jour étant, pour un schéma explicite, la même pour les deux schéma, il suffit de s'intéresser au calcul du flux numérique sur une seule arête :

$$\mathbf{H}_{i+1/2}^{n+1/2}(\mathbf{u}^n) = \mathbf{H}(\mathbf{u}_i^n, \mathbf{u}_{i+1}^n) \quad (6.2)$$

### 6.3.1 Analyse du schéma de relaxation

Nous nous plaçons sur une arête  $i + 1/2$  ayant pour états gauche et droit les états des mailles  $i$  et  $i + 1$ . Au début du pas de temps, nous connaissons  $\rho, \chi, q$  à gauche et à droite. On calcule alors  $P, P_\tau, P_v, \sigma, \sigma_\chi$ , à gauche et à droite. Cela représente **10 évaluations** des fonctions de base.

Le détail de l'algorithme du schéma de relaxation explicite est donné dans les figures (A.1) et (A.2). Le décompte total est effectué dans la figure (6.3).

Évaluations de base	10	
Étape	Opérations	Part/ Total
Calcul de $(a, b)$	46	40 %
Calcul intermédiaires	6	5 %
Calcul des états intermédiaires	32	28 %
Calcul des valeurs propres	8	7 %
Solution du problème de Riemann	5	4 %
Evaluation du flux	17	16 %
<b>Total</b>	<b>114</b>	<b>100 %</b>

FIG. 6.3 – Nombre d'opérations du schéma de relaxation explicite

### 6.3.2 Analyse du schéma Tacite

Au début du pas de temps, nous connaissons  $\rho, \chi, q$  à gauche et à droite. On calcule alors  $P, P_\rho, P_\chi, P_q, \sigma, \sigma_\rho, \sigma_\chi, \sigma_q$ , à gauche et à droite. Cela représente **16 évaluations** des fonctions de base.

Le détail de l'algorithme du schéma Tacite explicite est donné dans la figure (A.3). Le décompte total est effectué dans la figure (6.4).

### 6.3.3 Analyse comparée

Les tableaux précédents permettent de comprendre clairement les avantages de la méthode de relaxation en terme de vitesse d'exécution.

La méthode de relaxation ne fait que 10 évaluations des fonction de base alors que la méthode Tacite nécessite 16 évaluations, ce qui fait un rapport de  $16/10 \approx 1.6$ . La raison mathématique est que pour calculer la matrice Jacobienne, la méthode Tacite a besoin de toutes les dérivées de  $P$  et  $\sigma$  alors que la méthode de relaxation n'a besoin que de certaines dérivées. D'un autre point de vue, les évaluations en question font appel aux modules thermodynamique et hydrodynamique du code, modules qui sont très consommateurs de temps.

Évaluations de base	16	
Étape	Opérations	Part/ Total
Calculs intermédiaires	4	0 %
Calcul des Jacobiennes	20	1 %
Calcul des éléments propres	1476	82 %
Calcul des flux physiques	12	1 %
Calcul de la matrice de diffusion	246	14 %
Evaluation du flux	18	2 %
<b>Total</b>	<b>1791</b>	<b>100 %</b>

FIG. 6.4 – Nombre d’opérations du schéma Tacite explicite

La méthode de relaxation ne fait que 114 calcul élémentaires alors que la méthode Tacite en fait 16 fois plus. La raison est que la méthode Tacite utilise des algorithmes de calcul des éléments propres dont la complexité (en  $O(N^3)$ ) est très grande tandis que la méthode de relaxation utilise des calculs peu complexes (en  $O(N)$ ). Notons que pour la méthode Tacite, 84 % des opérations consistent en le calcul des éléments propres.

Le facteur global entre la méthode de relaxation et la méthode Tacite est alors la combinaison entre le coût de l’évaluation des fonctions de base et le nombre d’opérations :

$$Gain = 1.6 \theta + 16 (1 - \theta), \quad \theta \in [0, 1] \quad (6.3)$$

Il est possible de diminuer le coût de calcul des coefficients de relaxation : il suffit pour cela d’enlever la modification de  $(a, b)$  permettant d’assurer  $\rho > 0$  et  $Y \in [0, 1]$  (un grand nombre de cas fonctionneraient sans ces modifications). Le rapport de coût entre le schéma de relaxation et le schéma Tacite est alors  $1791/80 \approx 22$ . Cette donnée est tout à fait en accord avec les premiers résultats obtenus en 2000-2001 : en effet, ils concernaient des tests avec une loi de glissement nulle et une thermodynamique simpliste (liquide incompressible) pour laquelle les évaluations de base étaient une part très réduite du temps calcul total. C’était une situation très favorable à la méthode de relaxation.

La méthode de relaxation a **un pas de temps  $\Delta t$  deux fois plus grand** que la méthode Tacite. En effet, le schéma Tacite est paramétré par le coefficient de diffusion  $k = 2$  qui intervient dans le calcul des valeurs propres, donc du pas de temps.

### 6.3.4 Variante couplée des coefficients de relaxation

On étudie dans ce paragraphe la variante couplée du calcul de  $(a, b)$  sur l’arête  $i + 1/2$ .

On calcule  $P, P_\tau, P_Y, P_v, \sigma, \sigma_\tau, \sigma_Y, \sigma_v$  à gauche et à droite. Cela représente **16 évaluations** des fonctions de base. Puis les calculs :

$$\begin{aligned} A &= -P_\tau + P_v^2 - P_Y \sigma_v, & D &= -\sigma_\tau + \sigma_v P_v - \sigma_Y \sigma_v, \\ C &= -P_v P_Y + P_Y \sigma_Y, & B &= \sigma_Y^2 - \sigma_v P_Y, \end{aligned} \quad (6.4)$$

et  $\gamma = CD$ , à droite et à gauche nécessitent **36 opérations**. Les calculs  $\gamma = \sqrt{\max(|\gamma_L|, |\gamma_R|)}$  et,

$$\bar{A} = (\sqrt{2} + 1) \gamma, \quad \bar{B} = (\sqrt{2} - 1) \gamma \quad (6.5)$$

$$\underline{A} = \max(|A_L|, |A_R|), \quad \underline{B} = \max(|B_L|, |B_R|), \quad (6.6)$$

$$a = \sqrt{\bar{A} + \underline{A}}, \quad b = \sqrt{\bar{B} + \underline{B}} \quad (6.7)$$

nécessitent de plus **20 opérations**. Si nous ajoutons les modifications permettant d’assurer la positivité de la densité ainsi que le principe du maximum sur  $Y$ , cela fait **90 opérations** au total.

La comparaison avec la méthode découplée est faite dans la figure (6.5).

	Découplée	Couplée
<b>Évaluations de base</b>	<b>10</b>	<b>16</b>
Calcul de $(a, b)$	46	90
Calcul intermédiaires	6	6
Calcul des états intermédiaires	32	32
Calcul des valeurs propres	8	8
Calcul de la solution du problème de Riemann	5	5
Evaluation du flux	17	17
<b>Total</b>	<b>114</b>	<b>158</b>

FIG. 6.5 – Deux variantes pour les coefficients de relaxation

On constate que la variante découplée du calcul est très économique à deux points de vue : d’abord on évalue moins les fonctions de base, ensuite on effectue moins de calcul pour obtenir les coefficients de relaxation, ce qui a une influence importante sur le nombre total d’opérations nécessaires pour évaluer le flux numérique.

## 6.4 Analyse algorithmique des schémas semi-implicite linéaires

Nous nous intéresserons à l’analyse algorithmique d’un schéma semi-implicite linéarisé d’ordre 1 en espace et en temps, sans termes sources ni conditions limites. Rappelons que nous notons  $I$  les nombres de mailles.

Un schéma implicite linéaire peut être vu en trois temps.

1. Étape physique :

$$\mathbf{u}_i^* = \mathbf{u}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{H}(\mathbf{u}_i^n, \mathbf{u}_{i+1}^n) - \mathbf{H}(\mathbf{u}_{i-1}^n, \mathbf{u}_i^n)). \quad (6.8)$$

L’état intermédiaire  $u_i^*$  apparaît comme un “prédicteur” calculé de façon totalement explicite.

2. Étape mathématique :

$$-\alpha_{i-1}\delta u_{i-1} + \beta_i\delta \mathbf{u}_i + \gamma_{i+1}\delta \mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i^* - \mathbf{u}_i^n. \quad (6.9)$$

Il s’agit ici de la construction du système linéaire.

3. Résolution du système linéaire  $A\delta \mathbf{u} = b$ .

Il faut noter que le schéma de relaxation semi-implicite linéaire utilise un flux numérique à 5 composantes. La variante “réduite” de la méthode de relaxation semi-implicite linéaire permet de réduire la taille des blocs de 5 à 4, ce qui diminue la largeur de bande du système linéaire complet. Elle a été définie dans l’article précédent [7] et elle est fondée sur l’implication de la projection de la variable relaxée  $\Pi$ . Le détail de l’algorithme de la variante non réduite est présentée dans la figure (A.4) et la variante réduite dans la figure (A.7).

**Remarque 6.4.1** *Le nombre d’opérations de la variante réduite est incompressible car il est dû à la largeur de bande du système linéaire qui est une conséquence du fait que nous considérons un schéma :*

1. explicite sur les ondes de vitesse  $v$  et  $v \pm b\tau$ ,
2. implicite linéaire sur les ondes de vitesse  $v \pm a\tau$ .

Cela implique que nous pouvons implicitiser la projection de la variable relaxée  $\Pi$  et non celle de la variable relaxée  $\Sigma$ . Cela nous permet tout de même de réduire la taille des blocs du système linéaire de 5 à 4.

Pour dépasser cette limitation, nous serions tenté de choisir un schéma :

1. explicite sur les ondes de vitesse  $v$ ,
2. implicite linéaire sur les ondes de vitesse  $v \pm b\tau$  et  $v \pm a\tau$ .

Cela implique que nous pourrions implicitiser la projection des variables relaxées  $\Pi$  et  $\Sigma$  et réduire la taille des blocs de 5 à 3. Mais la conséquence néfaste d'implicitiser les ondes de vitesse  $v \pm b\tau$  est une diffusion numérique plus importante, ce qui n'est pas acceptable. Cela explique pourquoi nous n'utilisons pas une telle technique.

Le détail de l'algorithme du schéma Tacite semi-implicite linéaire sont donnés dans la figure (A.8).

### 6.4.1 Analyse comparée

Le décompte total est effectué dans la figure (6.6) et la figure (6.7) montre la part de chaque opération dans le total.

	Relaxation	Relaxation réduite	Tacite
<b>Évaluations de base</b>	<b>13 <math>I</math></b>	<b>13 <math>I</math></b>	<b>16 <math>I</math></b>
<b>Étape</b>			
Étape physique	129 $I$	129 $I$	1800 $I$
Étape mathématique	328 $I$	400 $I$	558 $I$
Système linéaire	384 $I$	244 $I$	136 $I$
<b>Total</b>	<b>841 <math>I</math></b>	<b>773 <math>I</math></b>	<b>2494 <math>I</math></b>

FIG. 6.6 – Nombre d'opérations des schémas semi-implicite linéaires

Étape	Relaxation	Relaxation réduite	Tacite
Étape physique	15 %	17 %	75 %
Étape mathématique	39 %	52 %	20 %
Système linéaire	46 %	32 %	5 %
<b>Total</b>	<b>100 %</b>	<b>100 %</b>	<b>100 %</b>

FIG. 6.7 – Part asymptotique de chaque étape dans le total

Nos remarques sont les suivantes.

1. Évaluations. La méthode de relaxation ne fait que 13 évaluations alors que la méthode Tacite nécessite 16 évaluations, ce qui fait un rapport de  $16/13 \approx 1.2$ .
2. Opérations. Le rapport asymptotique du nombre d'opérations entre la méthode Tacite et la méthode de relaxation réduite est :  $2494/773 \approx 3.22$ . On constate une diminution importante de ce facteur par rapport au facteur du schéma explicite. La cause est clairement la construction



et la résolution du système linéaire qui interviennent de façon importante dans le décompte total.

La méthode de relaxation réduite (blocs de taille 4) nécessite fois plus de calculs que la méthode Tacite (blocs de taille 3) pour inverser le système linéaire. Pour le schéma Tacite la majeure partie des opérations est effectuée dans l'étape physique alors que pour le schéma de relaxation c'est au contraire l'étape mathématique ainsi que la résolution du système linéaire qui sont coûteuses. Le facteur asymptotique du nombre d'opérations passe à  $2494/841 \approx 2.96$  pour la méthode de relaxation non réduite, ce qui est un peu moins favorable que la relaxation réduite.

Le facteur global entre la méthode de relaxation et la méthode Tacite est alors la combinaison entre le coût de l'évaluation des fonctions de base et le nombre d'opérations (RR= relaxation réduite, RNR= relaxation non réduite) :

$$Facteur^{RR} = 1.2 \theta + 3.22 (1 - \theta), \tag{6.10}$$

$$Facteur^{RNR} = 1.2 \theta + 2.96 (1 - \theta), \quad \theta \in [0, 1]. \tag{6.11}$$

Ce facteur est à multiplier par 2 pour tenir compte de l'influence du pas de temps.

## 6.5 Temps CPU des tubes à choc

Dans ce paragraphe, nous faisons une analyse du temps CPU consommés pendant des expériences portant sur des tubes à choc. Le détail de ces expériences est reporté en annexe A car il n'a pas d'intérêt essentiel dans l'analyse. Nous proposons de comparer les temps obtenus par les différents schémas numériques ainsi que d'analyser la décomposition de ces temps.

Nous considérons des schémas d'ordre 2 en espace et en temps. La méthode de relaxation est ici celle qui utilise un calcul découplé des coefficients de Chapman-Enskog et permettant d'assurer la positivité de la densité ainsi que le principe du maximum sur  $Y$ . La méthode de relaxation Semi-Implicite linéaire est la variante réduite.

Dans les deux cas suivants, nous utilisons un liquide incompressible et un gaz compressible, c'est à dire la plus simple des lois thermodynamiques. Nous testons en particulier la sensibilité des algorithmes à la loi hydrodynamique : glissement nul dans le cas 1 ou glissement Zuber-Findlay dans le cas 2. Le détail du cas 1 est donné dans la figure (A.9) et on utilise 200 mailles. Le détail du cas 2 est donné dans la figure (A.10) et on utilise 100 mailles.

### 6.5.1 Temps CPU

Les temps calcul (en secondes) sont représentés (SIL= Semi-Implicite linéaire) dans la figure (6.8).

	Explicite		SIL	
	Relax.	Tacite	Relax. réduite	Tacite
CAS 1	9.56	93.70	7.27	55.41
CAS 2	21.47	167.66	1.09	4.78

FIG. 6.8 – Temps CPU des 2 cas de tube à choc

On constate des facteurs variant de 8 à 10 pour le schéma explicite et de 4 à 8 pour le schéma Semi-Implicite linéaire.

### 6.5.2 Décomposition du temps calcul

Les différentes décompositions du temps calcul des schémas semi-implicite linéaires sont donnés dans les figures (6.9–6.10).

	Explicite		SIL	
	Relax.	Tacite	Relax. réduite	Tacite
Evaluations	54 %	12 %	38 %	10 %
Schéma	46 %	82 %	62 %	90 %
Total	100 %	100 %	100 %	100 %

FIG. 6.9 – Part de chaque étape dans le cas 1

	Explicite		SIL	
	Relax.	Tacite	Relax. réduite	Tacite
Evaluations	75 %	24 %	58 %	21 %
Schéma	25 %	76 %	42 %	79 %
Total	100 %	100 %	100 %	100 %

FIG. 6.10 – Part de chaque étape dans le cas 2

Nous constatons que la part relative de l’hydrodynamique et de la thermodynamique est plus importante dans le cas Zuber-Findlay que dans le cas Glissement Nul, ce qui est bien normal. Ainsi, pour le schéma de relaxation explicite cette part passe de 37 % à 58 %. Pour le schéma Tacite Semi-Implicite Linéaire, cette part passe de 10 % à 20 %.

D’autre part, pour le schéma de relaxation, dans le cas Zuber-Findlay, le coût des évaluations est plus important que le coût du schéma. Pour Tacite, c’est le contraire.

Enfin, notons que dans le cas 2, pour le schéma Tacite, 65 % du coût du schéma est imputable au calcul des valeurs propres.

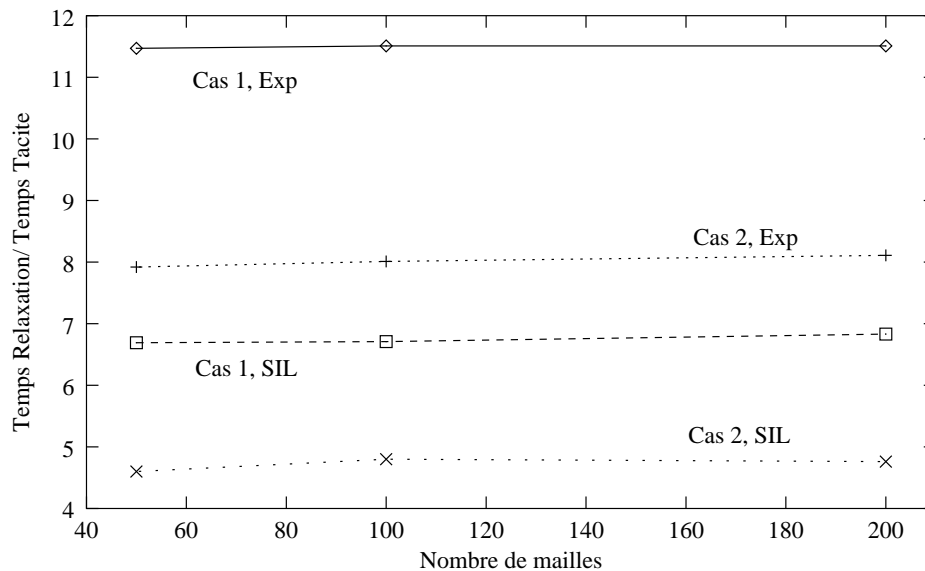


FIG. 6.11 – Rapport des temps CPU

### 6.5.3 Gain en temps CPU

Nous cherchons maintenant à analyser le rapport des temps CPU de la méthode de relaxation et celui de la méthode Tacite. Nous reportons dans la figure (6.11) ces temps en fonction du nombre de mailles. On constate que, comme l'analyse de complexité le laissait prévoir :

1. le gain du schéma de relaxation Semi-Implicite Linéaire est plus faible que celui du schéma explicite,
2. le gain du schéma de relaxation est d'autant plus faible que l'hydrodynamique est complexe.

## 6.6 Temps CPU des Problèmes avec conditions limites

Dans ce paragraphe, nous faisons une analyse du temps CPU consommés pendant des expériences portant sur variations des conditions aux limites. Le détail de ces expériences est reporté en annexe A car il n'a pas d'intérêt essentiel dans l'analyse.

### 6.6.1 Temps CPU

Nous utilisons **50 mailles**, un schéma explicite d'ordre 2 en espace et en temps et une CFL de 0.5 sur les ondes lentes et de 20 sur les ondes rapides. Le code Tacite que nous utilisons ici est le code commercial. On considère les deux expériences dont les détails sont donnés dans les figures (A.11) et (A.12).

	Relaxation	Relax. réduite	Tacite	Tacite /Relax. Réduite
EXP. 1				
<b>Explicite</b>	80.6 s	-	11 min 10 s	8.3
<b>SIL</b>	3.61 s	4.43 s	48 s	10.8
EXP. 2				
<b>SIL</b>	3 min 35 s	3 min 44 s	22 min 9 s	5.9

FIG. 6.12 – Temps CPU des 2 expériences avec Conditions Limites

Nous analysons ici les résultats présentés dans la figure (6.12). On constate, avec étonnement, que la variante réduite est plus lente que la variante non-réduite, point sur lequel nous reviendrons par la suite. Nous observons par ailleurs, pour le schéma Semi-Implicite linéaire, des facteurs variant entre 5 et 11.

### 6.6.2 Décomposition du temps calcul

Le schéma Tacite décomposé ici est celui développé par l'auteur de ce rapport. Les différentes décompositions du temps calcul des schémas semi-implicite linéaires sont donnés dans les figures (6.13) et (6.14).

On constate que ces résultats numériques ne concordent pas exactement avec les résultats théoriques donnés précédemment. Une raison possible est que l'étape physique comporte en pratique le calcul des *points fictifs*, dont nous n'avons pas tenu compte dans l'étude théorique. Le même problème se pose avec les termes sources qui comptent dans l'étape physique comme dans l'étape mathématique.

Notons que dans le schéma Tacite, l'inversion du système linéaire ne compte quasiment pas.

Étape	Relax	Relax. réduite	Tacite
Évaluations	32 %	36 %	4 %
Étape physique	25 %	25 %	73 %
Étape mathématique	23 %	23 %	22 %
Système linéaire	20 %	16 %	1 %
<b>Total</b>	100 %	100 %	100 %

FIG. 6.13 – Part de chaque étape dans l'expérience 1

Étape	Relax	Relax. réduite	Tacite
Évaluations	42 %	43 %	11 %
Étape physique	36 %	39 %	66 %
Étape mathématique	12 %	12 %	22 %
Système linéaire	10 %	6 %	1 %
<b>Total</b>	100 %	100 %	100 %

FIG. 6.14 – Part de chaque étape dans l'expérience 2

L'expérience 1 utilise un glissement nul et l'expérience 2 un glissement de type Zuber-Findlay, ce que l'on vérifie lors de la décomposition : plus de temps est consommé en évaluations.

On vérifie bien que la relaxation réduite passe un peu moins de temps dans la résolution du système linéaire. On constate par ailleurs qu'elle prend un peu plus de temps en évaluations. Cela peu s'expliquer par les points fictifs qui nécessitent des évaluations supplémentaires, dont nous n'avons pas tenu compte dans les calculs de complexité. Cela explique également les temps CPU défavorables pour la variante réduite de la figure (6.12) car nous n'utilisons que 50 mailles intérieures pour 2 mailles fictives : autrement dit 4 % des mailles sont des mailles de bord !

## 6.7 Conclusions

Nous avons étudié le schéma numérique VFRoe–Tacite ainsi que le schéma de relaxation du point de vue de la complexité algorithmique et du temps CPU sur des cas tests avec et sans conditions limites. Nous avons trouvé que les facteurs influençant la complexité des schémas explicites sont :

1. les évaluations thermodynamiques et hydrodynamiques. Pour l'évaluation d'un flux sur une arête, le schéma Tacite nécessite 16 évaluations alors que seulement 10 (schéma explicite) ou 13 (schéma semi-implicite linéaire) sont nécessaires au schéma de relaxation.
2. la complexité de mise en œuvre du schéma numérique. Dans le schéma de relaxation explicite, la partie la plus importante (du point de vue du nombre d'opérations) est le calcul des coefficients de relaxation (40 %) et dans le schéma Tacite, la partie la plus importante est le calcul des éléments propres (85 %). Pour l'évaluation d'un flux sur une arête, le schéma Tacite nécessite 16 fois plus d'opérations élémentaires que le schéma de relaxation.
3. le pas de temps. Le schéma Tacite utilise un coefficient de diffusion numérique qui implique que son pas de temps est 2 fois plus petit que celui du schéma de relaxation.

Pour un schéma explicite, le gain théorique varie entre 3 et 30 et le gain pratique entre 7 et 12, selon les lois de fermetures : plus les lois sont complexes, plus le facteur est petit.

En plus des facteurs influençant le schéma explicite, nous avons trouvé que le facteur principal influençant la complexité des schémas semi-implicites linéaires est le coût de construction et d'inversion du système linéaire. Le schéma de relaxation, à cause de la taille des blocs mis en œuvre, nécessite 1.8 fois plus d'opérations pour résoudre le système.

Nous avons optimisé la méthode de relaxation grâce à une technique d'implicitation de la projection qui permet de réduire la taille du système. Les calculs théoriques permettent de constater la supériorité de la variante réduite sur la variante non-réduite. Malheureusement, les tests pratiques ne confirment pas ces calculs à cause du nombre trop faible de mailles utilisées. Nous pensons toutefois que la variante réduite prouvera son utilité lorsqu'on utilisera un nombre de maille plus important.

Pour un schéma semi-implicite linéaire, le gain théorique varie entre 2 et 6 et le gain pratique entre 2 et 10, selon les lois de fermetures.

## Chapitre 7

# Conclusion de la première partie

Nous avons développé un schéma numérique de relaxation pour la simulation des écoulements diphasiques, isothermes et non compositionnels dans les conduites pétrolières. Ces systèmes sont caractérisés par de très fortes non-linéarités induites par les relations de fermeture sur la pression et la loi de glissement entre les phases. Ces non linéarités rendent très coûteuses les techniques d'approximation usuelles, basées sur la recherche des éléments propres de la matrice Jacobienne des flux.

Nous avons introduit une méthode de relaxation explicite, proposant contrairement aux approches classiques, de ne relaxer que les non linéarités les plus sévères, c'est-à-dire la loi de pression ainsi que la loi de glissement. Cette stratégie permet d'énoncer des critères simples de stabilité de la procédure de relaxation tout en autorisant une évaluation peu coûteuse de la fonction flux numérique. Nous avons porté une grande attention à l'ajustement des coefficients de relaxation, permettant de garantir la stabilité de la méthode ainsi que la positivité des fractions massiques de la solution approchée. Nous avons proposé une extension de cette technique d'approximation au second ordre en temps et en espace. L'intérêt de l'approche a été illustré dans un premier temps en comparant les solutions discrètes aux solutions exactes de problèmes de Riemann. De manière à envisager le cas d'écoulements pétroliers, nous avons étudié un large ensemble de conditions aux limites dans le contexte de la méthode de relaxation. Le traitement proposé a été validé dans le cadre de problèmes réels en comparant nos résultats aux résultats obtenus par Tacite. Un excellent accord a été observé.

Les travaux commencés en mars 2001 ont concerné le développement d'une technique d'implicitation de la méthode de relaxation. La stratégie d'implicitation préconisée a pour but de décrire avec précision les phénomènes de transport de constituants : elle repose sur une méthode d'implicitation sélective des ondes composant le modèle de relaxation. Les ondes rapides (acoustiques) sont implicitées alors que les ondes lentes (ondes de matières) sont explicitées. Nous avons développé une stratégie d'implicitation des termes source de relaxation permettant de réduire la taille du problème matriciel à résoudre tout en permettant une bien meilleure approximation des états transitoires et stationnaires. Le traitement des conditions aux limites a également fait l'objet de travaux. La technique d'intégration temporelle semi-implicite linéarisée a été validée sur les problèmes réels (i.e. en présence de conditions limites) et les résultats obtenus ont été comparé aux résultats du code Tacite avec un excellent accord.

Une étude détaillée de la complexité des algorithmes a montré que celle-ci dépend essentiellement de la complexité

1. des évaluations thermodynamiques et hydrodynamiques,

## 2. du schéma numérique.

Nous avons montré que le schéma de relaxation explicite est 16 fois moins coûteux que le schéma VFRoe–Tacite et que le schéma de relaxation semi-implicite linéaire est 3 fois moins coûteux. De plus, il doit être noté que le pas de temps du schéma de relaxation est souvent 2 fois plus grand que celui du schéma VFRoe–Tacite. Pourtant, il s’avère que, dans les applications réelles, ce sont les lois de fermeture qui consomment la majeure partie du temps calcul. En pratique, le bilan s’avère positif et le schéma de relaxation est toujours plus rapide que le schéma VFRoe–Tacite avec un gain entre 2 et 20 selon les cas.

Les sujets ouverts concernant ce modèle gaz-liquide concernent la robustesse des conditions aux limites ainsi que les gains en temps calcul.

Nous avons en effet rencontré des obstacles difficiles pour prendre en compte les conditions aux limites. Certes, les travaux de Julien Vovelle [62] et Thierry Gallouët [29] permettent d’avoir des éléments concernant la convergence des schémas numériques dans le cas d’une équation scalaire. Pourtant, dans le cas d’un système d’équations aux dérivées partielles, peu de choses sont connues. En particulier, l’existence du point fictif vérifiant les conditions aux limites n’a pas été démontrée et, en pratique, la convergence de la méthode Newton pose souvent des problèmes de robustesse.

Par ailleurs, nous constatons que les gains en temps calcul sont limités. Or il est possible, en considérant le système d’équations aux dérivées partielles NPW, d’obtenir des gains plus avantageux. Il est pourtant difficile de comparer les temps CPU obtenus par deux modèles différents.

Dans l’état actuel, nous constatons que, dans les simulations de cas réels, le temps CPU est majoritairement consommé par les lois de fermetures. Ainsi, il est certain qu’un travail qui permettrait de diminuer cette part contribuerait beaucoup à diminuer le temps des simulations.

Deuxième partie

**Modèle diphasique isotherme  
compositionnel**





# Chapitre 8

## Introduction

L'approche gaz-liquide est limitée. En effet, selon les physiciens de l'IFP [14], *“aucune méthode fiable et robuste n'ayant été proposée pour prendre correctement en compte le terme de déséquilibre entre les phases, l'approche gaz-liquide n'est pas viable pour traiter les cas présentant d'importants transferts entre phases.”* C'est pourquoi les modèles compositionnels sont généralement utilisés dans le cadre des écoulements dans les conduites pétrolières. Ici, chaque constituant est associé à une loi de conservation et peut se trouver en phase liquide ou gaz. Notre travail consiste alors à construire un schéma numérique capable de traiter un nombre quelconque de constituants et valider notre étude dans le cas particulier du modèle à 2 constituants proposé dans [14].

Plus concrètement, nous devons trouver des remèdes aux problèmes posés par le schéma numérique de type VFRoe existant en particulier vis à vis de 2 points centraux : le coût du schéma numérique et la positivité des fractions massiques des constituants.

Premièrement, nous devons réduire le temps d'exécution de l'algorithme existant. Rappelons qu'il nécessite le calcul des valeurs propres (et vecteurs propres associés) de la matrice Jacobienne du système de lois de conservation, pour chaque maille et pour chaque pas de temps. Or les algorithmes les plus performants sont d'une complexité qui varie comme le cube de la taille du système, ce qui est très contraignant dans les cas pratiques pour lesquels entre 2 et 8 constituants sont modélisés (il s'agit donc d'un système de grande taille). Par ailleurs, il n'est pas possible de démontrer que ces valeurs propres sont réelles, condition pourtant nécessaire à tout schéma numérique traitant les systèmes de lois de conservation hyperboliques.

Deuxièmement, le schéma de type VFRoe ne permet pas d'assurer que les fractions massiques de chaque constituant sont positives. Or il est évident que si ce n'est pas le cas, la thermodynamique ne permet plus d'évaluer la pression car on sort du domaine de définition des lois d'état. Ce problème est résolu pour un fluide à une vitesse grâce aux travaux de Larroutou [41] mais il n'est pas résolu pour un fluide à 2 vitesses.

Nous évaluons deux classes de méthodes. La première est fondée sur un découplage entre le système gaz-liquide et des lois d'évolution sur les fractions massiques des constituants. La seconde utilise un système couplé (donc de plus grande taille).

Le plan de cette partie est le suivant. Dans la première partie, nous présentons le modèle continu c'est-à-dire le système de lois de conservation ainsi que les lois de fermeture associées. Nous présentons dans cette partie les caractéristiques du modèle thermodynamique à deux constituants utilisé dans cette étude. Dans la seconde partie, nous présentons l'étude des méthodes de relaxation découplées et couplées et nous implicherons cette dernière variante. Puis, nous analyserons la complexité algo-

rithmique de la méthode préservant la positivité ainsi que des résultats numériques obtenus à partir de ce schéma.

# Chapitre 9

## Modèle continu

Dans ce chapitre, nous décrivons le modèle diphasique isotherme compositionnel que nous étudions. Dans une première partie, nous présentons le système de lois de conservation et ses lois de fermetures et dans une seconde partie nous décrivons le modèle thermodynamique à 2 constituants que nous avons utilisé.

### 9.1 Modèle et notations

#### 9.1.1 Système de variables

On considère un mélange de  $K$  constituants pouvant se présenter en phase liquide et en phase gazeuse, en écoulement monodimensionnel dans une conduite. On indice par  $k$  les constituants. On indice respectivement par L et G les variables relatives au liquide et au gaz. Définissons les  $11 + 5K$  inconnues par

- $\rho_L^k R_L^k$  (resp.  $\rho_G^k R_G^k$ ), la masse volumique du constituant  $k$  sous phase liquide (resp. gaz),
- $X_k$  (resp.  $Y_k$ ), la fraction massique du constituant  $k$  dans la phase liquide (resp. gazeuse)
- $c_k$ , la fraction massique du constituant  $k$ ,
- $R_L$  (resp.  $R_G$ ), la fraction surfacique occupée par la phase liquide (resp. gazeuse),
- $\rho_L$  (resp.  $\rho_G$ ), la masse volumique de la phase liquide (resp. gazeuse),
- $X$  (resp.  $Y$ ), la fraction massique de liquide (resp. gaz),
- $v_L$  (resp.  $v_G$ ), la vitesse de la phase liquide (resp. gaz),
- $\rho$ , la masse volumique du mélange,
- $v$ , la vitesse du mélange,
- $p$ , la pression du mélange.

Introduisons les  $7 + 2K$  égalités

$$R_L + R_G = 1, \quad \rho_L R_L = \sum_{k=1,K} \rho_L^k R_L^k, \quad \rho_G R_G = \sum_{k=1,K} \rho_G^k R_G^k, \quad (9.1)$$

$$\rho = \rho_L R_L + \rho_G R_G, \quad \rho X = \rho_L R_L, \quad \rho Y = \rho_G R_G, \quad v = X v_L + Y v_G, \quad (9.2)$$

$$X_k = \frac{\rho_L^k R_L^k}{\rho_L R_L}, \quad Y_k = \frac{\rho_G^k R_G^k}{\rho_G R_G}. \quad (9.3)$$

Les égalités (9.1–9.3) permettent de démontrer

$$\sum_{k=1,K} X_k = 1, \quad \sum_{k=1,K} Y_k = 1, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{X}{\rho_L} + \frac{Y}{\rho_G}, \quad X + Y = 1. \quad (9.4)$$

Nous devons de plus respecter les inégalités

$$0 \leq X_k \leq 1, \quad 0 \leq Y_k \leq 1, \quad k = 1, K, \quad (9.5)$$

$$0 \leq X \leq 1, \quad 0 \leq Y \leq 1. \quad (9.6)$$

**Remarque 9.1.1** *Le lecteur trouvera de l'intérêt à consulter [61], chapitre 5, qui traite du modèle compositionnel dans l'approximation NPW.*

### 9.1.2 Équations de conservation

Les équations sont constituées par les  $K$  équations de conservation de la masse de chaque constituant plus l'équation de conservation de la quantité de mouvement globale :

$$\begin{cases} \partial_t(\rho c_k) + \partial_x(\rho_L^k R_L^k v_L + \rho_G^k R_G^k v_G) = 0, & k = 1, K, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho_L R_L v_L^2 + \rho_G R_G v_G^2 + p) = 0. \end{cases} \quad (9.7)$$

On vérifie dans la figure (9.1) que le nombre d'équations est bien égal au nombre d'inconnues grâce aux relations de fermetures hydrodynamique et thermodynamiques.

Équations	Nombre
Égalités (9.1–9.3)	$7 + 2K$ équations
Lois de conservation	$1 + K$ équations
Hydrodynamique	1 équation
Thermodynamique	$2 + 2K$ équations
<b>Total</b>	$11 + 5K$ équations

Inconnues	Nombre
$\{\rho_L^k R_L^k, \rho_G^k R_G^k, X_k, Y_k, c_k\}_{k=1,K}$	$5K$ inconnues
$R_L, R_G, \rho_L, \rho_G, X, Y, v_L, v_G$	8 inconnues
$\rho, v, p$	3 inconnues
<b>Total</b>	$11 + 5K$ inconnues

FIG. 9.1 – Bilan équations–inconnues

### 9.1.3 Hydrodynamique

Rappelons que le glissement est la loi qui régit la différence de vitesse entre les phases  $\varphi = v_L - v_G$ . Nous écrivons le glissement comme une fonction des variables conservatives

$$\varphi = \varphi(\{\rho c_k\}_{k=1,K}, \rho v). \quad (9.8)$$

Il est alors possible de démontrer les égalités :

$$v_L = v + Y\varphi, \quad v_G = v - X\varphi.$$

### 9.1.4 Thermodynamique

On considère un mélange de  $K$  constituants pouvant se présenter en phase liquide et en phase gazeuse. Pendant un certain temps, dit “temps de relaxation”, un phénomène instationnaire a lieu : pour chaque constituant, il y a des échanges de masse entre les phases liquide et gazeuse. Au terme de ce temps de relaxation, l’état stationnaire, ou encore “équilibre thermo-chimique”, est atteint. On peut le modéliser par des relations d’égalité des potentiels chimiques pour chaque constituant en phase liquide et en phase gazeuse.

Les lois de fermeture thermodynamiques calculent les propriétés physiques des fluides, à partir de la pression, la température et de la fraction massique des composants. En ce qui nous concerne, nous considérons que la température est constante  $T = T^0$ . Les  $2 + 2K$  équations thermodynamiques sont

$$\rho_L = \rho_L(p), \quad \rho_G = \rho_G(p), \quad (9.9)$$

$$c_k = X X_k + Y Y_k, \quad \mu_k(p, c_1, \dots, c_K) = \mu(p, c_1, \dots, c_K), \quad k = 1, K, \quad (9.10)$$

où  $\mu$  et  $\{\mu_k\}_{k=1,K}$  sont des potentiels chimiques, que nous ne détaillerons pas ici. Les fractions massiques des constituants vérifient l’égalité

$$\sum_{k=1,K} c_k = 1, \quad (9.11)$$

ainsi que les inégalités

$$0 \leq c_k \leq 1, \quad k = 1, K. \quad (9.12)$$

## 9.2 Une thermodynamique à deux constituants par phase

Nous donnons dans ce paragraphe un exemple de loi de fermeture thermodynamique adaptée à la résolution du système d’équations aux dérivées partielles et à 2 constituants. Nous fondons notre étude sur [14]. Dans ce cas, le système de lois de conservation se réduit à

$$\begin{cases} \partial_t(\rho c_1) + \partial_x(\rho_L^1 R_L^1 v_L + \rho_G^1 R_G^1 v_G) & = 0, \\ \partial_t(\rho c_2) + \partial_x(\rho_L^2 R_L^2 v_L + \rho_G^2 R_G^2 v_G) & = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho_L R_L v_L^2 + \rho_G R_G v_G^2 + p) & = 0. \end{cases} \quad (9.13)$$

Connaissant la variable conservative  $\mathbf{u} = (\rho c_1, \rho c_2, \rho v)^T$ , le but est de calculer la pression  $p = p(\mathbf{u})$ . Notons qu’il est toujours possible de calculer  $\rho$  grâce à l’égalité  $\rho = \rho c_1 + \rho c_2$ . Dans ce modèle, le constituant 1 est le constituant *léger* et le constituant 2 est *lourd*. La pression trouve 3 définitions :

- une définition dans le domaine diphasique,
- une définition dans le domaine monophasique liquide,
- une définition dans le domaine monophasique gaz.

Il s’agit donc d’un modèle hétérogène. Le modèle proposée possède la caractéristique suivante : dans le plan  $(\rho, \rho c_1)$ , les courbes isobares sont des droites. Comme les pentes des droites dans les domaines monophasiques sont différentes de celles dans le domaine diphasique, cela engendrera, comme nous allons le voir par la suite, des difficultés lors de la résolution de problèmes de Riemann impliquant des discontinuités de contact (voir le chapitre consacré aux résultats numériques). Nous constaterons que l’on peut borner les quantités  $X_k - Y_k$  pour chaque constituant  $k$ , ce qui nous permettra de minimiser les coefficients de relaxation, comme nous le verrons dans le prochain chapitre. Nous

vérifierons que la pression est une fonction continue de  $\mathbf{u}$ , mais que la dérivée de la pression n'est pas continue.

Nous considérons un modèle isotherme c'est à dire que la température est fixée  $T = T^0 = 293$  K.

Comme nous l'avons vu lors du dénombrement des équations, le modèle thermodynamique doit nous fournir, pour 2 constituants, 6 équations. Ici, le modèle remplace la définition de potentiels chimiques par la définition des pressions de bulle et de rosée.

### 9.2.1 Pression dans le cas général

Considérons notre modèle compressible à 2 constituants. Supposons que  $\mathbf{u}$  est connu. Définissons l'ensemble des états admissibles par

$$\Omega = \{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } \rho > 0, c_1 \in [0, 1] \}. \quad (9.14)$$

Caractérisons les zones monophasiques et diphasiques c'est à dire définissons les ensembles (voir figure 9.2)

$$\Omega^L = \{ \mathbf{u} \in \Omega \text{ tq } p_L(\rho) \geq p_{bu}(c_1) \} \text{ (état monophasique liquide),} \quad (9.15)$$

$$\Omega^G = \{ \mathbf{u} \in \Omega \text{ tq } p_G(\rho) \leq p_{ro}(c_1) \} \text{ (état monophasique gaz),} \quad (9.16)$$

$$\Omega^D = \Omega \setminus \{ \Omega^L \cup \Omega^G \} \text{ (état diphasique),} \quad (9.17)$$

où  $p_L$  (resp.  $p_G$ ) est la pression dans un liquide (resp. gaz),  $p_{bu}$  (resp.  $p_{ro}$ ) est la pression de bulle (resp. de rosée), que nous détaillerons par la suite.

Alors, la pression est

$$p = \begin{cases} p_L(\rho) & \text{si } \mathbf{u} \in \Omega^L \text{ (état monophasique liquide),} \\ p_G(\rho) & \text{si } \mathbf{u} \in \Omega^G \text{ (état monophasique gaz),} \\ \text{solution de l'équation non linéaire (9.27)} & \text{si } \mathbf{u} \in \Omega^D. \end{cases} \quad (9.18)$$

L'équation non linéaire dont la pression est solution dans le domaine diphasique sera détaillée plus loin. Pour l'instant, il suffit de savoir que, dans le domaine diphasique, la pression est solution d'un polynôme de degré 3.

La définition ainsi formulée montre que le modèle est *hétérogène* c'est à dire constitué de l'assemblage de trois modèles différents. La question est alors de savoir de quelle façon ces modèles sont cohérents entre eux, ce qui est le sujet de l'étude qui suit.

### 9.2.2 Pression liquide, gaz

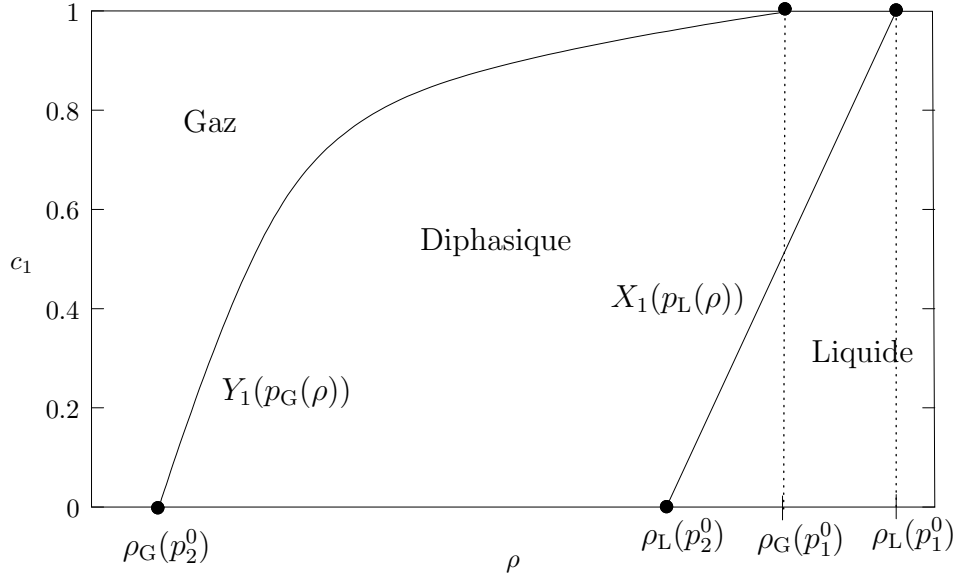
Nous supposons que le liquide (faiblement compressible) et le gaz (parfait) sont soumis aux lois

$$\rho_L(p) = \rho_L^0 + \frac{p - p^0}{a_L^2}, \quad \rho_G(p) = \frac{p}{a_G^2} \quad (9.19)$$

où  $\rho_L^0, p^0, a_L$  et  $a_G$  sont des constantes données. Nous supposons que  $a_G < a_L$ . Par ailleurs, nous appellerons liquide incompressible le liquide qui suit la loi  $\rho_L(p) = \rho_L^0$ .

Notons  $p_L(\rho)$  (resp.  $p_G(\rho)$ ) la fonction réciproque de  $\rho_L(p)$  (resp.  $\rho_G(p)$ ) c'est à dire

$$p_L(\rho) = p^0 + a_L^2 (\rho - \rho_L^0), \quad p_G(\rho) = a_G^2 \rho. \quad (9.20)$$


 FIG. 9.2 – Carte des phases en fonction de  $(\rho, c_1)$  à la température  $T = T^0$ 

### 9.2.3 Pression de bulle, de rosée

Nous définissons  $p_1^0$  et  $p_2^0$  comme les *pressions de saturation* de chaque constituant  $k$  qui suivent la *loi d'Antoine*

$$p_k^0(T) = 10^{\left(A_k - \frac{B_k}{C_k + T - 273.15}\right)}. \quad (9.21)$$

Nous définissons la *pression de rosée*, qui correspond à l'apparition de la première goutte de liquide alors que le mélange était monophasique gaz, par

$$p_{ros}(c_1) = \frac{1}{\frac{c_1}{p_1^0(T^0)} + \frac{1-c_1}{p_2^0(T^0)}}, \quad c_1 \in [0, 1]. \quad (9.22)$$

La température  $T^0$  est fixée à 293 degrés Kelvin c'est à dire 20 degrés Celsius. Nous définissons la *pression de bulle*, qui correspond à l'apparition de la première bulle de gaz alors que le mélange était monophasique liquide, par

$$p_{bul}(c_1) = c_1 p_1^0(T^0) + (1 - c_1) p_2^0(T^0), \quad c_1 \in [0, 1]. \quad (9.23)$$

Nous définissons (voir figure 9.3)  $X_1$  et  $Y_1$  par

$$X_1(p) = \frac{\frac{p}{p_1^0} - \frac{p_2^0}{p_1^0}}{1 - \frac{p_2^0}{p_1^0}}, \quad Y_1(p) = \frac{1 - \frac{p_2^0}{p}}{1 - \frac{p_2^0}{p_1^0}}, \quad (9.24)$$

où nous avons omis dans le membre de droite la dépendance vis à vis de la température afin d'alléger l'écriture.

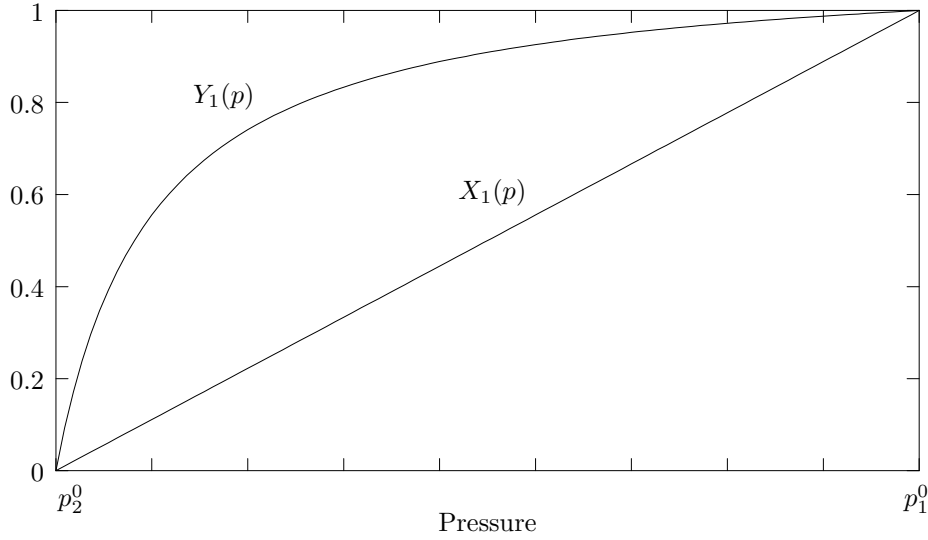
Notons que la pression de rosée (resp. de bulle) est la fonction réciproque de  $Y_1(p)$  (resp.  $X_1(p)$ ).

### 9.2.4 Pression dans le domaine diphasique

Nous définissons par  $\mathcal{C}$  la fraction massique du premier constituant par

$$\mathcal{C}(\rho, p) = X_1(p) \mathcal{X}(\rho, p) + Y_1(p) \mathcal{Y}(\rho, p), \quad (9.25)$$




 FIG. 9.3 – Loi de Henry pour  $X_1(p)$  et  $Y_1(p)$  pour la température  $T = T^0$ 

avec  $\mathcal{Y}(\rho, p)$  la fraction massique de gaz et  $\mathcal{X}(\rho, p)$  la fraction massique de liquide, définies par

$$\mathcal{Y}(\rho, p) = \frac{\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_L(p)}}{\frac{1}{\rho_G(p)} - \frac{1}{\rho_L(p)}}, \quad \mathcal{X}(\rho, p) = 1 - \mathcal{Y}(\rho, p). \quad (9.26)$$

Pour  $(\rho, c_1)$  donné, la pression est la solution de l'équation non linéaire

$$\mathcal{C}(\rho, p) - c_1 = 0. \quad (9.27)$$

Une formulation plus précise de cette équation est donnée en annexe B. L'idée principale est que la pression est solution d'un polynôme de degré 3.

**Remarque 9.2.1** *On suppose que la pression vérifie les inégalités*

$$p_2^0(T^0) \leq p \leq p_1^0(T^0), \quad (9.28)$$

de telle sorte que  $X_1(p) \in [0, 1]$  et  $Y_1(p) \in [0, 1]$ .

Dans le domaine diphasique, on a

$$p \in [p_{ros}(c_1), p_{bul}(c_1)], \quad \rho \in [\rho_G(p), \rho_L(p)] \text{ et } c_1 \in [X_1(p), Y_1(p)]. \quad (9.29)$$

**Remarque 9.2.2** *Le lecteur aura peut-être, dans une première lecture, envie de simplifier les égalités (9.24) car elles ont l'inconvénient de paraître complexes. Il faut toutefois noter qu'elles ont l'avantage de se simplifier dans un cas fort intéressant : le cas où  $p_1^0 = \infty$  et  $p_2^0 = 0$ . Dans cette hypothèse, on peut vérifier qu'on obtient  $X_1 = 0$  et  $Y_1 = 1$  d'où il suit que  $c_1 = Y$  et  $c_2 = X$ . C'est le cas particulier d'un mélange gaz-liquide dans lequel "le composant 1 se trouve uniquement sous forme vapeur et le composant 2 uniquement sous forme liquide" [14]. Il est rassurant de constater que le système de lois de conservation (9.7) se simplifie également en le système de lois de conservation diphasique.*

**Remarque 9.2.3** *Du point de vue de la rigueur mathématique, la définition implicite de la pression dans le domaine diphasique est faible car elle serait à compléter de 2 théorèmes : un théorème d'existence de la solution et un théorème d'unicité. Faute de conditions sur  $(\rho, \rho c_1)$  permettant d'assurer l'existence et l'unicité de la pression, la méthode de Newton permettant de trouver la solution de ce problème non linéaire n'est pas garantie de converger vers une solution physiquement acceptable. Pourtant, en pratique, la méthode de résolution fonctionne correctement.*

### 9.2.5 Courbes isobares

**Théorème 9.2.4** *A température constante  $T = T^0$ , dans le plan  $(\rho, \rho Y)$ , les courbes isobares sont des droites.*

PREUVE Considérons la courbe isobare associée à la pression  $p = \tilde{p}$ .

Dans le domaine diphasique, montrons que, dans le plan  $\mathbf{z} = (\rho, \rho Y)^T$  les courbes isobares sont des droites. En effet, considérons deux points de l'isobare notés  $\mathbf{z}_{\mathbf{L},\mathbf{R}}$ . Ils vérifient tous les deux l'égalité (obtenue par réécriture de (9.26)) :

$$\frac{\rho Y}{\rho_{\mathbf{G}}(\tilde{p})} + \frac{\rho - \rho Y}{\rho_{\mathbf{L}}(\tilde{p})} = 1. \quad (9.30)$$

Soit  $\mathbf{z}$  un point de la droite  $(\mathbf{z}_{\mathbf{L}}, \mathbf{z}_{\mathbf{R}})$  défini par  $\mathbf{z} = (\rho, \rho Y)^T = \mathbf{z}_{\mathbf{R}} + \lambda(\mathbf{z}_{\mathbf{L}} - \mathbf{z}_{\mathbf{R}})$  avec  $\lambda \in [0, 1]$ . Cela implique que  $\rho = \rho_{\mathbf{R}} + \lambda(\rho_{\mathbf{L}} - \rho_{\mathbf{R}})$  et  $(\rho Y) = (\rho Y)_{\mathbf{R}} + \lambda[(\rho Y)_{\mathbf{L}} - (\rho Y)_{\mathbf{R}}]$ . On vérifie alors aisément que  $\mathbf{z} = (\rho, \rho Y)^T$  vérifie également l'égalité (9.30) car cette dernière relation est *linéaire* par rapport à  $\rho$  et  $\rho Y$ .  $\square$

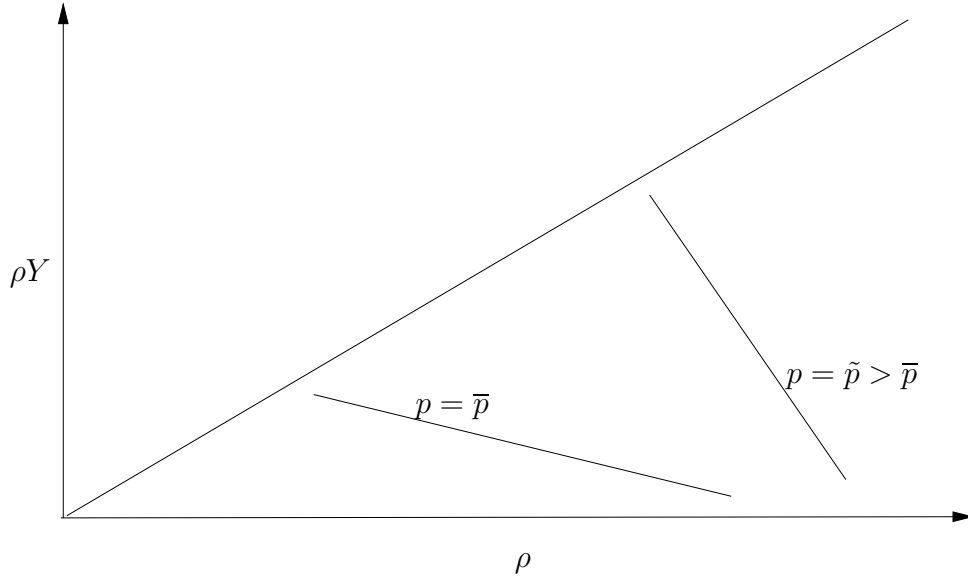


FIG. 9.4 – Courbes isobares dans le plan  $(\rho, \rho Y)$

**Théorème 9.2.5** *A température constante  $T = T^0$ , dans chaque domaine  $\Omega^{\mathbf{L},\mathbf{G},\mathbf{D}}$  du plan  $(\rho, \rho c_1)$ , les courbes isobares sont des droites.*

PREUVE Supposons que nous considérons courbe isobare associée à la pression  $p = \tilde{p}$ .

1. Dans le domaine monophasique liquide, la fraction massique du premier constituant est  $c_1 = X_1(\tilde{p})$  de telle sorte que  $\rho c_1$  est égal à la constante  $\rho c_1 = X_1(\tilde{p})\rho_{\mathbf{L}}(\tilde{p})$ .
2. Dans le domaine monophasique gaz, la fraction massique du premier constituant est  $c_1 = Y_1(\tilde{p})$  de telle sorte que  $\rho c_1$  est égal à la constante  $\rho c_1 = Y_1(\tilde{p})\rho_{\mathbf{G}}(\tilde{p})$ .
3. Dans le domaine diphasique, nous nous inspirons de la démonstration du théorème 9.2.4. L'isobare associée à la pression  $\tilde{p}$  est caractérisée par l'égalité

$$X_1(\tilde{p}) (\rho - \rho Y(\rho, \tilde{p})) + Y_1(\tilde{p})\rho Y(\rho, \tilde{p}) - \rho c_1 = 0 \quad (9.31)$$

avec  $\rho Y(\rho, \tilde{p}) = \frac{1 - \frac{\rho}{\rho_L(\tilde{p})}}{\frac{1}{\rho_G(\tilde{p})} - \frac{1}{\rho_L(\tilde{p})}}$ . Là encore, toutes les relations étant linéaires en  $\rho$  et  $(\rho c_1)$ , on vérifie facilement que toute combinaison linéaire de deux points de l'isobare appartient à l'isobare.  $\square$

**Remarque 9.2.6** La figure 9.5 permet de visualiser une courbe isobare  $p = \tilde{p}$  dans le plan  $(\rho, \rho c_1)$ . On vérifie que les droites ont des pentes différentes selon le domaine. La conséquence de ce fait est que si on place deux points de l'isobare de part et d'autre d'une zone de transition, la ligne droite joignant les deux points n'est plus sur l'isobare. Cette remarque permettra de comprendre en détail les difficultés générées par le modèle thermodynamique lorsqu'on simule une discontinuité de contact.

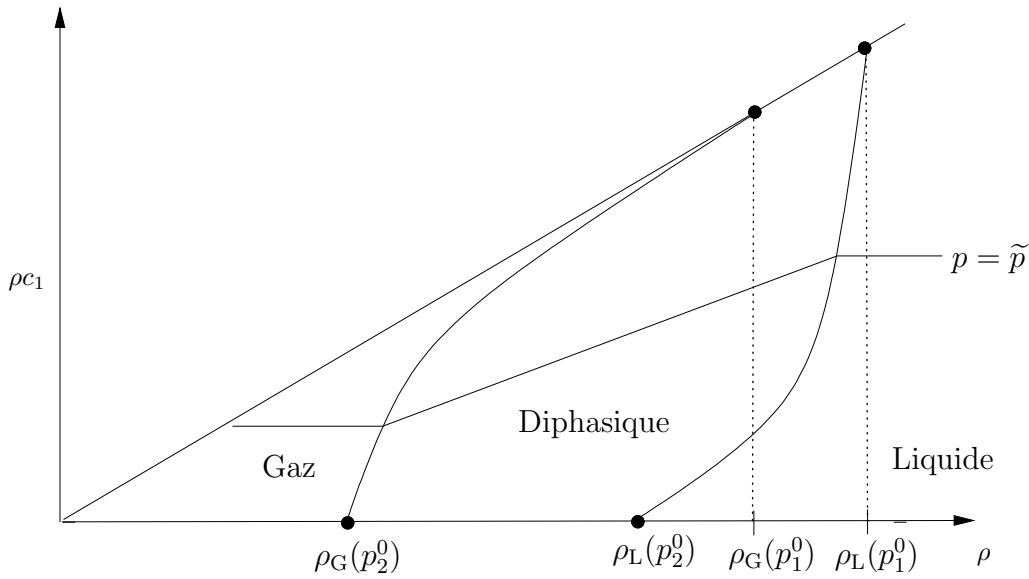


FIG. 9.5 – Une courbe isobare dans le plan  $(\rho, \rho c_1)$

### 9.2.6 Une propriété remarquable

Dans ce paragraphe, nous démontrons une propriété qui nous sera utile dans le cadre du développement de la méthode de relaxation couplée. Cette propriété nous permettra de minimiser les coefficients de relaxation et donc de minimiser la diffusion numérique du schéma. Ce théorème permet de borner, pour chaque constituant  $k$ , la quantité  $Y_k - X_k$  et il est fondé sur une propriété du modèle thermodynamique à 2 constituants.

**Théorème 9.2.7** *Soit*

$$\xi_k = Y_k - X_k, \quad k = 1, K. \quad (9.32)$$

*Supposons que*

$$0 \leq p_2^0(T^0) \leq p \leq p_1^0(T^0) \quad (9.33)$$

*Alors  $\xi_1(p) \in [0, 1]$  et  $\xi_2(p) \in [-1, 0]$ .*

Notons tout d'abord que

$$\sum_{k=1,K} \xi_k = \sum_{k=1,K} Y_k - \sum_{k=1,K} X_k = 1 - 1 = 0. \quad (9.34)$$

Par ailleurs, les hypothèses  $X_k \in [0, 1]$  et  $Y_k \in [0, 1]$  impliquent que  $\xi_k \in [-1, 1]$ . L'objet du théorème précédent est d'affirmer que, dans ce cas particulier, on peut encore restreindre l'encadrement de  $\xi_k$ .

PREUVE Il est facile, par définition de  $X_1(p)$  et  $Y_1(p)$  (voir 9.24), de réécrire  $\xi_1$  sous la forme

$$\xi_1(p) = \frac{\left(1 - \frac{p}{p_1^0}\right) (p - p_2^0)}{p \left(1 - \frac{p_2^0}{p_1^0}\right)}. \quad (9.35)$$

Il est facile de voir que, pour  $p \in [p_2^0, p_1^0]$ , on a  $\xi_1 \geq 0$ . Comme, sous cette hypothèse, on a également  $X_1$  et  $Y_1$  dans  $[0, 1]$ , on peut conclure que  $\xi_1 \in [0, 1]$ . Par opposition, on a  $\xi_2 \in [-1, 0]$ .  $\square$

Ces cas particuliers sont l'expression d'un phénomène plus général. En effet, si  $k$  est un constituant léger, on aura, *la plupart du temps*,  $\xi_k \in [0, 1]$ . Par opposition, si  $k$  est un constituant lourd, on aura, *la plupart du temps*,  $\xi_k \in [-1, 0]$ . Nous utiliserons par la suite ces hypothèses pour minimiser les coefficients de relaxation (voir paragraphe 10.2.4).

### 9.2.7 Exemples de mélanges compositionnels

Les caractéristiques physiques de ce modèle peuvent être trouvés dans des tables [55], [46]. Nous en donnons quelques exemples dans la figure 9.8. Dans ce tableau, l'état (liquide ou gaz), la masse volumique  $\rho$  et la vitesse du son  $c$  sont données à  $T^0 = 20^\circ\text{C}$ ,  $p^0 = 10^5$  (Pa). Les coefficients  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont ceux intervenant dans la loi d'Antoine (9.21). Il ne nous a pas été possible de nous les procurer pour l'air qui est un mélange de gaz (il est raisonnable de considérer que ceux de l'oxygène en sont proches). La pression de saturation  $p_{sat}$  est celle calculée par la loi de Antoine.

La figure 9.7 donne une illustration de la fonction  $\mathcal{C}$  avec comme paramètres ceux d'un mélange d'eau et d'oxygène, c'est à dire  $\rho_L^0 = 997.10$  (kg/m<sup>3</sup>),  $a_L = 1482$ . (m/s),  $a_G = 330$ . (m/s),  $p^0 = 10^5$  (Pa),  $p_1^0 = 505.39780 \cdot 10^5$  (Pa),  $p_2^0 = 2349$  (Pa).

La figure 9.6 illustre la fonction masse volumique pour différentes valeurs de  $c_1$ . Les paramètres sont ceux d'un mélange d'eau et d'oxygène, comme précédemment. Elle est une illustration de l'inégalité  $\rho_G(p) \leq \rho \leq \rho_L(p)$ .

### 9.2.8 Continuité de la pression

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la continuité de la pression et ses dérivées. Comme nous allons le vérifier, la pression est, malgré sa formulation hétérogène, une fonction continue de la variable conservative  $\mathbf{u} = (\rho, \rho c_1, \rho v)$ . Par contre, nous vérifierons que la dérivée de la pression n'est pas continue à la traversée des zone de transition monophasique–diphase.

**Théorème 9.2.8** *La pression est une fonction continue de  $(\rho, \rho c_1)$  sur le domaine  $\Omega$ .*

PREUVE Il est bien évident que la fonction pression est continue sur chaque domaine : la seule difficulté réside dans les transitions de phase. Démontrons par exemple la continuité de la pression à la transition diphase – monophasique liquide.

Commençons par remarquer que la zone de transition est caractérisée par l'égalité  $p = p_{bu}(c_1)$ .

Premièrement, considérons un état monophasique liquide :  $\mathbf{u} \in \Omega^L$ . Alors la pression est  $p(\rho, c_1) = p_L(\rho)$ .

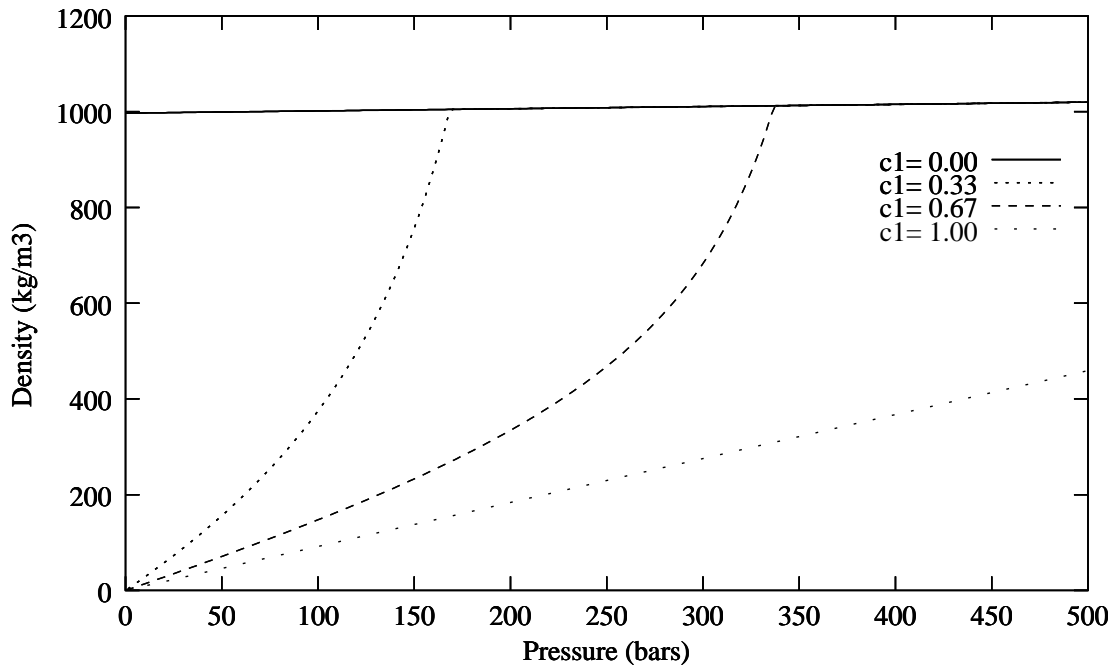


FIG. 9.6 – Densité avec 2 constituants

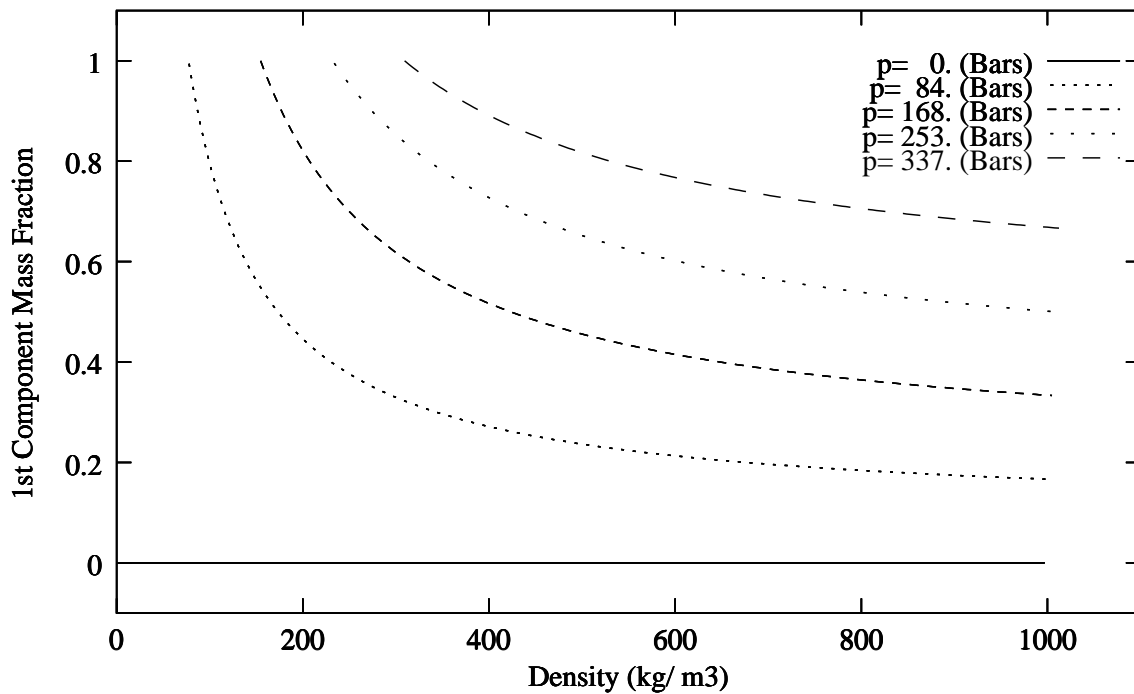


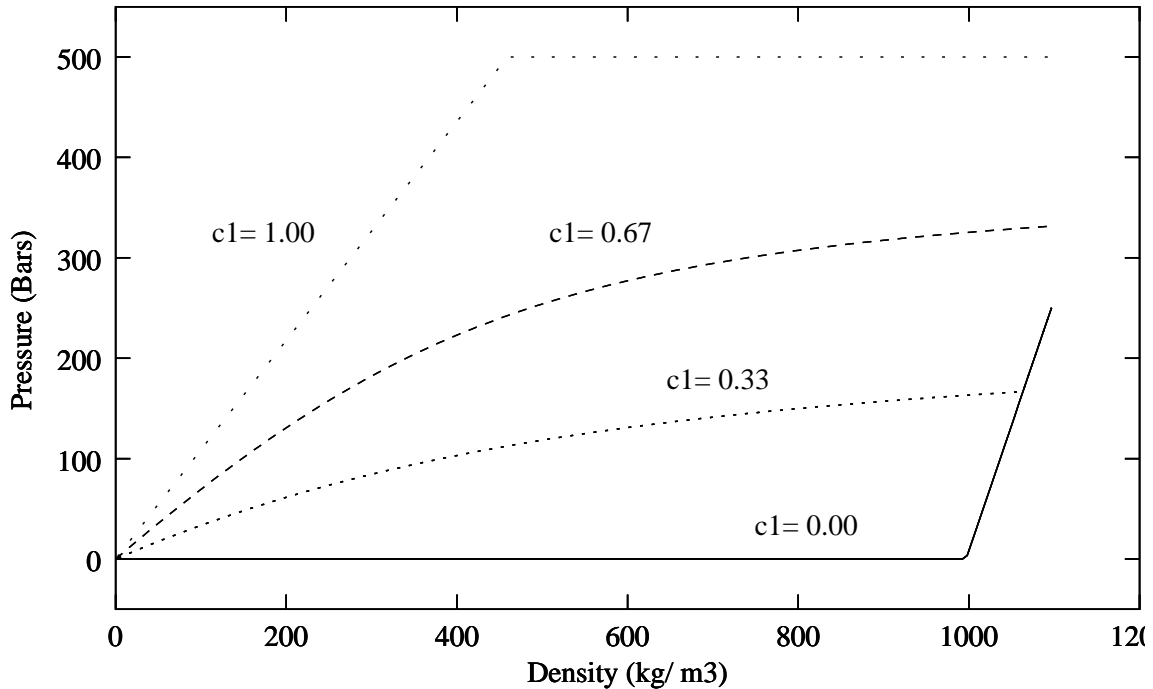
FIG. 9.7 – Fraction massique du premier constituant avec 2 constituants

Nom	Formule	État	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$c$ (m/s)	$A$	$B$	$C$	$p_{sat}$ (Pa)
Oxygène	O <sub>2</sub>	Gaz	1.4	330.	3.8163	319.013	266.7	50 539 780.
Air	O <sub>2</sub> +N	Gaz	1.2	343.	—	—	—	—
Méthane	CH <sub>4</sub>	Gaz	0.68	297.	3.7687	395.7	266.7	24 449 310.
Eau	H <sub>2</sub> O	Liquide	997.1	1 482.	5.1156	1687.5	230.2	2 349.
Décane	C <sub>10</sub> H <sub>22</sub>	Liquide	730.	1 225.	4.0685	1 495.2	193.9	119.
Tétradécane	C <sub>14</sub> H <sub>30</sub>	Liquide	762.8	1 200.	4.1379	1 740.9	167.7	1.

FIG. 9.8 – Caractéristiques thermodynamiques de quelques fluides

Deuxièmement, considérons un état diphasique :  $\mathbf{u} \in \Omega^D$ . Supposons de plus que cet état se trouve dans la zone de transition. Or l'égalité  $p = p_{bu}(c_1)$  est équivalente à  $c_1 = X_1(p)$ . On remarque enfin que la pression  $p = p_L(\rho)$  est solution de l'équation (9.27), qui dans le cas où  $Y = 0$ , se simplifie en  $\mathcal{C}(\rho, p) - c_1 = X_1(p) - c_1 = 0$ .  $\square$

Pour illustrer la continuité de la fonction pression, traçons son évolution en fonction de la densité à  $c_1$  fixé (voir figure 9.9). Elle est régie, dans la zone monophasique liquide, par la loi linéaire  $p_L(\rho) = p^0 + a_L^2(\rho - \rho_L^0)$  et, dans la zone diphasique, elle est la racine positive du polynôme de degré trois (B.26). La figure 9.9 montre qu'il est manifeste sur que la dérivée de la pression n'est pas continue à la transition diphasique / monophasique liquide (sur la ligne  $\Omega^L \cap \Omega^D$ ) et c'est ce que nous allons démontrer dans la suite.


 FIG. 9.9 – Pression à  $(c_1, T^0)$  fixés

Dans le théorème qui suit nous considérons la variable  $\mathbf{v} = (\tau, c_1, v)$  avec  $\tau = 1/\rho$ . Par abus de notation, nous considérons désormais la pression comme une fonction de  $\mathbf{v}$ .

**Théorème 9.2.9** *Considérons la variable  $\mathbf{v} = (\tau, c_1, v)$  avec  $\tau = 1/\rho$ . La dérivée partielle de la*

pression par rapport au covolume  $\tau$  n'est pas continue à la traversée de la transition diphasique – monophasique liquide.

PREUVE Notons  $\mathcal{T} = \Omega^L \cap \Omega^D$  la ligne de transition monophasique liquide / diphasique. Nous allons comparer les valeurs de la dérivée partielle de la pression évaluées de part et d'autre de  $\mathcal{T}$ .

Dans la zone monophasique liquide, la pression est  $p = p_L(\tau)$ . Sur la ligne de transition, du côté monophasique liquide, la dérivée partielle de la pression par rapport à  $\tau = 1/\rho$  est donc

$$\frac{\partial p}{\partial \tau}(\mathbf{v}) = -\rho^2 a_L^2, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{T} \cap \Omega^L. \quad (9.36)$$

Soit maintenant  $\mathbf{v} \in \Omega^D$  : la pression est solution de l'équation non linéaire :  $c_1 [p(p, \tau), \tau] - c_1 = 0$ . Par dérivation par rapport à  $\tau$ , nous trouvons  $\frac{\partial c_1}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{\partial c_1}{\partial \tau} = 0$  qui se réécrit encore

$$\frac{\partial p}{\partial \tau}(\mathbf{v}) = -\frac{\frac{\partial c_1}{\partial \tau}(\mathbf{v})}{\frac{\partial c_1}{\partial p}(\mathbf{v})}, \quad \forall \mathbf{v} \in \Omega^D. \quad (9.37)$$

Par définition, la fraction massique du premier constituant est  $c_1 = X_1(p) X(\tau, p) + Y_1(p) Y(\tau, p)$ . Les dérivées partielles valent par conséquent

$$\frac{\partial c_1}{\partial \tau} = X_1(p) \frac{\partial X}{\partial \tau}(\mathbf{v}) + Y_1(p) \frac{\partial Y}{\partial \tau}(\mathbf{v}), \quad (9.38)$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial p} = X_1'(p) X(\mathbf{v}) + X_1(p) \frac{\partial X}{\partial p}(\mathbf{v}) + Y_1'(p) Y(\mathbf{v}) + Y_1(p) \frac{\partial Y}{\partial p}(\mathbf{v}). \quad (9.39)$$

Par définition, la fraction massique de gaz vaut

$$Y(\mathbf{v}) = \frac{\tau - \frac{1}{\rho_L(p)}}{\frac{1}{\rho_G(p)} - \frac{1}{\rho_L(p)}}, \quad \forall \mathbf{v} \in \Omega^D. \quad (9.40)$$

Les dérivées partielles valent par conséquent

$$\frac{\partial Y}{\partial \tau}(\mathbf{v}) = \frac{\rho_L \rho_G}{\rho_L - \rho_G}, \quad \frac{\partial Y}{\partial p}(\mathbf{v}) = \frac{\rho'_G \rho_L (\rho_L / \rho - 1) + \rho'_L \rho_G (1 - \rho_G / \rho)}{(\rho_L - \rho_G)^2}, \quad (9.41)$$

avec  $\rho'_G = 1/a_G^2$  et  $\rho'_L = 1/a_L^2$ .

Considérons, afin de simplifier le résultat, le cas particulier d'un état sur la ligne de transition c'est à dire supposons que  $\mathbf{v} \in \Omega^L \cap \Omega^D$ . On a alors  $Y = 0$  et  $\rho = \rho_L(p)$ . Les dérivées partielles précédentes se simplifient alors en

$$\frac{\partial Y}{\partial \tau}(\mathbf{v}) = \frac{\rho \rho_G}{\rho - \rho_G}, \quad \frac{\partial Y}{\partial p}(\mathbf{v}) = \frac{\rho'_L \rho_G}{\rho} \frac{\rho - \rho_G}{(\rho - \rho_G)^2}, \quad \forall \mathbf{v} \in \Omega^L \cap \Omega^D. \quad (9.42)$$

Par ailleurs  $\frac{\partial Y}{\partial \tau} = -\frac{\partial X}{\partial \tau}$  et  $\frac{\partial Y}{\partial p} = -\frac{\partial X}{\partial p}$ . Il vient alors

$$\frac{\partial c_1}{\partial \tau} = (Y_1 - X_1) \frac{\rho \rho_G}{\rho - \rho_G}, \quad \frac{\partial c_1}{\partial p} = X_1'(p) + (Y_1 - X_1) \frac{\rho'_L \rho_G}{\rho} \frac{\rho - \rho_G}{(\rho - \rho_G)^2}, \quad \forall \mathbf{v} \in \Omega^L \cap \Omega^D. \quad (9.43)$$

Par conséquent, la dérivée partielle de la pression par rapport à  $\tau$  sur l'interface est

$$\frac{\partial p}{\partial \tau}(\mathbf{v}) = -\frac{(Y_1 - X_1) \frac{\rho \rho_G}{\rho - \rho_G}}{X_1'(p) + (Y_1 - X_1) \frac{\rho'_L \rho_G}{\rho} \frac{\rho - \rho_G}{(\rho - \rho_G)^2}}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{T} \cap \Omega^D. \quad (9.44)$$

*La comparaison des égalités (9.36) et (9.44) permet de conclure que la dérivée partielle de la pression par rapport à  $\tau$  n'est pas continue à la traversée de la zone de transition monophasique liquide / diphasique.*  $\square$

Il est clair qu'il en est de même à la traversée de la zone de transition monophasique gaz / diphasique.





# Chapitre 10

## Méthodes de relaxation

Dans ce chapitre, nous présentons des méthodes numériques dont le but est d’approcher les solutions du système d’équations diphasiques isotherme compositionnel

$$\begin{cases} \partial_t(\rho c_k) + \partial_x(\rho_L^k R_L^k v_L + \rho_G^k R_G^k v_G) & = 0, \quad k = 1, K, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho_L R_L v_L^2 + \rho_G R_G v_G^2 + p) & = 0. \end{cases} \quad (10.1)$$

Nous présenterons deux stratégies de résolution : une méthode avec découplage et une méthode couplée. Nous analyserons ces méthodes du point de vue du respect de la positivité des fractions massiques des constituant ainsi que de leur coût.

Nous proposerons deux variantes pour la méthode avec découplage. Nous constaterons que la première (fondée sur une extension naturelle de la méthode de Larrouturou) ne permet pas d’assurer le principe du maximum dans le cadre d’un modèle à 2 vitesse. Nous constaterons également que la seconde (fondée sur le système de Born-Infeld) ne permet pas de vérifier le principe du maximum pour toutes les lois de glissement, mais seulement pour certaines d’entre elles.

Nous considérerons alors un schéma de relaxation fondé sur le modèle couplé et qui a l’avantage de garantir la positivité des fractions massiques quelque soit la loi de glissement. L’idée clé est de construire un système de relaxation sur la base de l’étude du système d’équilibre en coordonnées Lagrangiennes. Nous proposons de relaxer la pression ainsi que les fonctions non linéaires associées au transport de chaque constituant. L’étude de cette méthode de relaxation est facilitée par l’introduction de seulement deux coefficients de relaxation (indépendamment du nombre de constituants). Cette méthode de relaxation permet de diminuer le coût d’évaluation du flux numérique. En effet, il n’est désormais plus nécessaire de calculer numériquement les valeurs propres de la matrice Jacobienne, comme c’était le cas dans la méthode VFRoe–Tacite.

### 10.1 Relaxation avec découplage

Le système compositionnel étant de grande taille, on cherche à construire un système de petite taille par découplage. Dans ce but, on approche le système compositionnel par les solutions du système gaz-liquide complété par des équations de transport sur les fractions massiques des constituants. Rappelons en effet que

$$\rho c_k = \rho_L^k R_L^k + \rho_G^k R_G^k \quad \text{et} \quad \rho v = \rho_L^k R_L^k v_L + \rho_G^k R_G^k v_G. \quad (10.2)$$

L’hypothèse d’équilibre (égalité des potentiels chimiques) permet de calculer  $\rho_L^k R_L^k$  et  $\rho_G^k R_G^k$  en fonction de  $\rho c_k$ . Nous proposons d’abandonner cette hypothèse et de considérer des lois d’évolution

sur  $\rho_L^k R_L^k$  et  $\rho_G^k R_G^k$ . On procède à une “relaxation chimique” en découplant chaque équation de conservation en deux et on considère le système

$$\begin{cases} \partial_t (\rho_L^k R_L^k) + \partial_x (\rho_L^k R_L^k v_L) & = \lambda Q_k, & k = 1, K, \\ \partial_t (\rho_G^k R_G^k) + \partial_x (\rho_G^k R_G^k v_G) & = -\lambda Q_k, & k = 1, K, \\ \partial_t (\rho v) + \partial_x (\rho_L R_L v_L^2 + \rho_G R_G v_G^2 + p) & = 0, \end{cases} \quad (10.3)$$

avec  $Q_k$  des termes de relaxation chimiques et  $\lambda$  un paramètre de relaxation. Nous allons approcher les solutions du système à l'équilibre (10.1) par les solutions du système étendu (10.3). Notons  $\mathbf{u} = (\rho c_1, \dots, \rho c_K, \rho v)^T$  et supposons connue à l'instant  $t^n$  une solution  $\mathbf{u}(x, t^n)$ . On se propose de réactualiser cette solution en 2 pas de temps dictés par une décomposition en opérateurs.

**1er pas** On considère la donnée initiale  $\mathbf{v}(x, t^n) = \left( \{\rho_L^k R_L^k\}_{k=1, K}, \{\rho_G^k R_G^k\}_{k=1, K}, \rho v \right)^T$  construit à partir de  $\mathbf{u}(x, t^n)$  sous l'hypothèse d'équilibre chimique. On résout le système homogène

$$\begin{cases} \partial_t (\rho_L^k R_L^k) + \partial_x (\rho_L^k R_L^k v_L) & = 0, & k = 1, K, \\ \partial_t (\rho_G^k R_G^k) + \partial_x (\rho_G^k R_G^k v_G) & = 0, & k = 1, K, \\ \partial_t (\rho v) + \partial_x (\rho_L R_L v_L^2 + \rho_G R_G v_G^2 + p) & = 0. \end{cases} \quad (10.4)$$

**2è pas** On résout

$$\begin{cases} \partial_t (\rho_L^k R_L^k) = \lambda Q_k, & k = 1, K, \\ \partial_t (\rho_G^k R_G^k) = -\lambda Q_k, & k = 1, K, \\ \partial_t (\rho v) = 0, \end{cases} \quad (10.5)$$

dans la limite d'un paramètre de relaxation  $\lambda$  infini avec pour donnée initiale  $\mathbf{v}(x, t^n + \Delta t)$  du problème précédent. Ceci revient à construire  $\rho c_k$  par  $\rho c_k = \rho_L^k R_L^k + \rho_G^k R_G^k$ .

Il est attendu que la procédure d'approximation proposée soit stable dès que la condition de Whitham, imposant que la vitesse du son du système en déséquilibre est plus grande que la vitesse du son du système à l'équilibre, est respectée.

On se concentre désormais sur le premier pas, c'est à dire sur la résolution du système (10.4). Nous allons voir pourquoi le premier pas peut être compris comme la résolution de

$$\begin{cases} \partial_t (\rho_L R_L) + \partial_x (\rho_L R_L v_L) & = 0, \\ \partial_t (\rho_G R_G) + \partial_x (\rho_G R_G v_G) & = 0, \\ \partial_t (\rho v) + \partial_x (\rho_L R_L v_L^2 + \rho_G R_G v_G^2 + p) & = 0, \end{cases} \quad (10.6)$$

complété de la résolution de

$$\begin{cases} \partial_t (\rho X X_k) + \partial_x (\rho X X_k v + X_k \sigma) = 0, & k = 1, K - 1, \\ \partial_t (\rho Y Y_k) + \partial_x (\rho Y Y_k v - Y_k \sigma) = 0, & k = 1, K - 1. \end{cases} \quad (10.7)$$

Soulignons que le découplage est intéressant car le système (10.6) est le système gaz-liquide tel qu'il a été étudié dans la première partie. Pour éclairer cette approche, considérons plus précisément le système (10.4).

- Si on somme les  $K$  premières équations de (10.4) entre elles d'une part, et les  $K$  dernières équations de (10.4) entre elles d'autre part, on obtient les équations de conservation de la masse de liquide et de la masse de gaz :

$$\begin{cases} \partial_t (\rho_L R_L) + \partial_x (\rho_L R_L v_L) = 0, \\ \partial_t (\rho_G R_G) + \partial_x (\rho_G R_G v_G) = 0, \end{cases} \quad (10.8)$$

par définition de  $\rho_L R_L$  et  $\rho_G R_G$ .

- Par ailleurs, en utilisant les égalités  $\rho_L^k R_L^k = \rho_L R_L X_k$  et  $\rho_G^k R_G^k = \rho_G R_G Y_k$ , il est facile de mettre (10.4) sous la forme :

$$\begin{cases} \partial_t(\rho_L R_L X_k) + \partial_x(\rho_L R_L X_k v_L) = 0, & k = 1, K, \\ \partial_t(\rho_G R_G Y_k) + \partial_x(\rho_G R_G Y_k v_G) = 0, & k = 1, K. \end{cases} \quad (10.9)$$

- En reportant les définitions  $\rho X = \rho_L R_L$  et  $\rho Y = \rho_G R_G$  dans (10.9), on obtient

$$\begin{cases} \partial_t(\rho X X_k) + \partial_x(\rho X X_k v_L) = 0, & k = 1, K, \\ \partial_t(\rho Y Y_k) + \partial_x(\rho Y Y_k v_G) = 0, & k = 1, K. \end{cases} \quad (10.10)$$

Or les flux peuvent se réécrire

$$\rho X X_k v_L = \rho X X_k v + X_k \sigma, \quad \rho Y Y_k v_G = \rho Y Y_k v - Y_k \sigma, \quad (10.11)$$

par application des égalités (9.4) et avec la définition  $\sigma = \rho X Y \varphi$ . Nous obtenons alors

$$\begin{cases} \partial_t(\rho X X_k) + \partial_x(\rho X X_k v + X_k \sigma) = 0, & k = 1, K, \\ \partial_t(\rho Y Y_k) + \partial_x(\rho Y Y_k v - Y_k \sigma) = 0, & k = 1, K. \end{cases} \quad (10.12)$$

**Remarque 10.1.1** *En introduisant, dans les équations de conservation (10.9), les équations de conservation de chaque phase (10.8), on obtient des équations de transport :*

$$\begin{cases} \partial_t X_k + v_L \partial_x X_k = 0, & k = 1, K \\ \partial_t Y_k + v_G \partial_x Y_k = 0, & k = 1, K, \end{cases} \quad (10.13)$$

qui mettent en évidence 2i invariants de Riemann forts en coordonnées Eulériennes.

L'algorithme proposé devra respecter la positivité des fractions massiques sous une condition CFL. La principale difficulté vient du fait que le transport s'effectue aux vitesses  $v_L$  et  $v_G$  et non à la vitesse  $v$  moyenne.

Nous allons présenter maintenant deux méthodes numériques fondées sur le système découplé. Nous verrons qu'une extension de la méthode de Larrouturou ne fonctionne pas. Nous proposerons alors une méthode numérique fondée sur le système de Born-Infeld. Mais il s'avère que cette méthode est limitée par une condition de Whitham qui n'est pas vérifiée par toutes les lois de glissement.

### 10.1.1 Une extension de la méthode de Larrouturou

On s'intéresse ici au système

$$\begin{cases} \partial_t(\rho_L R_L) + \partial_x(\rho_L R_L v_L) = 0, \\ \partial_t(\rho_G R_G) + \partial_x(\rho_G R_G v_G) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho_L R_L v_L^2 + \rho_G R_G v_G^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\rho_L R_L X_k) + \partial_x(\rho_L R_L v_L X_k) = 0, & k = 1, K - 1, \\ \partial_t(\rho_G R_G Y_k) + \partial_x(\rho_G R_G v_G Y_k) = 0, & k = 1, K - 1. \end{cases} \quad (10.14)$$

#### 10.1.1.1 Construction

On procède à une méthode inspirée des travaux de B. Larrouturou [42]. Nous traitons séparément les 3 premières équations des suivantes. Nous supposons qu'à l'instant  $n$ , toutes les quantités conservatives sont connues sur chaque maille :

$$(\rho c_1, \dots, \rho c_K, \rho v)_i^n. \quad (10.15)$$

L'algorithme se compose alors des étapes suivantes.

1. **Décomposition des variables** Nous appelons le modèle thermodynamique de telle sorte que l'on peut calculer les composantes “diphasiques”

$$(\rho_L R_L, \rho_G R_G, \rho v)_i^n \quad (10.16)$$

ainsi que les composantes “compositionnelles”

$$\left( (\rho_L R_L X_k)_{k=1,K}, (\rho_G R_G Y_k)_{k=1,K} \right)_i^n, \quad (10.17)$$

pour toutes les mailles  $i$ .

2. **Équations diphasiques.** Nous connaissons un schéma explicite capable de procéder à la mise à jour des trois premières composantes de telle sorte que l'on peut calculer les composantes “diphasiques”

$$(\rho_L R_L, \rho_G R_G, \rho v)_i^{n+1} \quad (10.18)$$

ainsi que les flux numériques “diphasiques”

$$\mathbf{H}_{i+1/2}^1 = (\rho_L R_L v_L)_{i+1/2}^n, \quad \mathbf{H}_{i+1/2}^2 = (\rho_G R_G v_G)_{i+1/2}^n, \quad (10.19)$$

pour toutes les arêtes  $i + 1/2$ .

3. **Transport des constituants.** On définit les flux numériques

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{i+1/2}^4 &= \mathbf{H}_{i+1/2}^1 \times \begin{cases} (X_k)_i^n, & \text{si } \mathbf{H}_{i+1/2}^1 \geq 0, \\ (X_k)_{i+1}^n, & \text{si } \mathbf{H}_{i+1/2}^1 \leq 0, \end{cases} \\ \mathbf{H}_{i+1/2}^5 &= \mathbf{H}_{i+1/2}^2 \times \begin{cases} (Y_k)_i^n, & \text{si } \mathbf{H}_{i+1/2}^2 \geq 0, \\ (Y_k)_{i+1}^n, & \text{si } \mathbf{H}_{i+1/2}^2 \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

La mise à jour des fractions massiques des constituants dans chaque phase se fait alors grâce au schéma d'évolution

$$(\rho_L R_L X_k)_i^{n+1} = (\rho_L R_L X_k)_i^n - \lambda \left( \mathbf{H}_{i+1/2}^4 - \mathbf{H}_{i-1/2}^4 \right), \quad (10.20)$$

$$(\rho_G R_G Y_k)_i^{n+1} = (\rho_G R_G Y_k)_i^n - \lambda \left( \mathbf{H}_{i+1/2}^5 - \mathbf{H}_{i-1/2}^5 \right), \quad (10.21)$$

pour les constituant  $k = 1, K - 1$  et pour chaque maille  $i$ , avec  $\lambda = \frac{\Delta t^n}{\Delta x}$ .

4. **Recomposition des variables** La réactualisation des fractions massiques des constituants se fait par

$$(\rho c_k)_i^{n+1} = (\rho_L R_L X_k)_i^{n+1} + (\rho_G R_G Y_k)_i^{n+1}, \quad (10.22)$$

pour les constituants  $k = 1, K - 1$  et pour toutes les mailles  $i$ . Le dernier constituant est évalué par

$$\rho_i^{n+1} = (\rho_L R_L)_i^{n+1} + (\rho_G R_G)_i^{n+1}, \quad (10.23)$$

$$(\rho c_K)_i^{n+1} = \rho_i^{n+1} - \sum_{k=1}^{K-1} (\rho c_k)_i^{n+1}. \quad (10.24)$$

Ainsi présenté, le schéma est explicite, c'est à dire précis, vis-à-vis du transport des constituants.

Nous constatons alors un avantage très important de cette technique : le gain en temps calcul. En effet, la taille du système pour lequel il est nécessaire de calculer des flux numériques est réduite : quelque soit le nombre de constituants, nous ne calculons des flux numériques que pour le système gaz-liquide de taille 3.

A ce stade, il reste à démontrer que l'étape 4. de mise à jour des fractions massiques des constituants préserve leur positivité. C'est ce point, essentiel, que nous allons développer par la suite. Nous allons constater qu'il n'est pas possible d'assurer cette contrainte, qui est pour nous minimale, dans le cadre d'un modèle à deux vitesses.

### 10.1.1.2 Positivité des fractions massiques des constituants

Le schéma de B. Larroutou est construit dans le but de préserver la positivité des fractions massiques dans le cadre d'un système diphasique à une vitesse. Il est important de noter que le système traité par B. Larroutou est le même que notre système gaz-liquide, si l'on considère le cas particulier du glissement nul, c'est à dire lorsqu'on considère une seule vitesse  $v = v_L = v_G$ . Dans son article [42], il fait la démonstration du fait que les mises à jours successives de la fraction massique de gaz respectent le principe du maximum de telle sorte que, pour toute maille  $i$  et pour tout pas de temps  $n \geq 0$ , on a l'égalité

$$\min_j Y_j^0 \leq Y_i^n \leq \max_j Y_j^0$$

sous réserve que le pas de temps vérifie une condition de type CFL. Si on veut comprendre l'application que l'on en fait ici, il est indispensable d'analyser dans le détail la démonstration qu'il propose. Elle est fondée sur la structure de la mise à jour de la densité et de la fraction massique de gaz. On suppose que le schéma numérique est tel que  $\rho_i^{n+1} > 0$ . Il est alors possible de démontrer que la fraction massique à l'itéré  $n + 1$  est une combinaison linéaire positive des fractions massiques à l'itéré  $n$ , sous la condition CFL. Donc, si les fractions massiques sont positives à l'itéré  $n$ , elles le sont également à l'itéré  $n + 1$ .

Pour nous, supposons qu'à l'itéré  $n$ , nous avons :

$$\rho_i^n \geq 0, \quad Y_i^n \geq 0, \quad X_i^n \geq 0, \quad (Y_k)_i^n \geq 0, \quad (X_k)_i^n \geq 0, \quad (c_k)_i^n \geq 0, \quad (10.25)$$

pour toutes les mailles  $i$  et tous les constituants  $k = 1, K$ . On suppose que le schéma numérique "diphasique" est tel que

$$\rho_i^{n+1} \geq 0, \quad Y_i^{n+1} \geq 0, \quad X_i^{n+1} \geq 0. \quad (10.26)$$

Pour nous, il y a deux possibilités pour démontrer que

$$c_i^{n+1} = (X X_k)_i^{n+1} + (Y Y_k)_i^{n+1} \geq 0. \quad (10.27)$$

Soit on démontre que chaque membre est positif, d'où il suit que la somme est également positive, soit on démontre directement cette inégalité.

– Empruntons la première voie et tentons de démontrer que  $(X_k)_i^{n+1} \geq 0$  et  $(Y_k)_i^{n+1} \geq 0$ . Par introduction de la définition  $\rho X X_k = \rho_L R_L X_k$  dans (10.20), il vient

$$(\rho X X_k)_i^{n+1} = (\rho X X_k)_i^n - \lambda \left( \mathbf{H}_{i+1/2}^4 - \mathbf{H}_{i-1/2}^4 \right), \quad (10.28)$$

et de même pour les fractions massiques de gaz. Supposons maintenant que  $\mathbf{H}_{i\pm 1/2}^1 \geq 0$ . Alors, on a

$$(XX_k)_i^{n+1} = \frac{\left[ (\rho X)_i^n - \lambda \mathbf{H}_{i+1/2}^1 \right] (X_k)_i^n + \lambda \mathbf{H}_{i-1/2}^1 (X_k)_{i-1}^n}{\rho_i^{n+1}} \quad (10.29)$$

et de même pour  $(YY_k)_i^{n+1}$ . Nous sommes donc amenés à imposer  $(\rho X)_i^n - \lambda \mathbf{H}_{i+1/2}^1 \geq 0$  c'est à dire

$$\lambda \frac{\mathbf{H}_{i+1/2}^1}{\rho_i^n} \leq X_i^n, \quad (10.30)$$

de telle sorte que  $(XX_k)_i^{n+1} \geq 0$ . Il faut maintenant détailler le flux numérique sous la forme  $\mathbf{H}_{i+1/2}^1 = (\rho X v + \sigma)_{i+1/2}$  où  $\sigma = \rho X Y \varphi$  avec  $\varphi = v_L - v_G$  est le glissement.

Nous utilisons le schéma de relaxation défini dans la première partie de cette thèse pour le système gaz-liquide, pour lequel nous avons démontré qu'il préserve la positivité des fractions massiques de liquide et de gaz :  $Y_i^{n+1} \geq 0$  et  $X_i^{n+1} \geq 0$ . Alors le flux numérique est celui d'un schéma de Godunov

$$\mathbf{H}_{i+1/2}^1 = \rho^* X^* v^* + \Sigma^*, \quad (10.31)$$

avec  $\rho^* \geq 0$  et  $X^* \geq 0$ .

Supposons dans un premier temps que le glissement est nul. Nous allons vérifier que, dans le cas particulier  $\varphi = 0$  (qui est celui de B. Larrouturou), la condition de positivité (10.30) est

$$\lambda \frac{\rho^* v^*}{\rho_i^n} \leq 1, \quad (10.32)$$

avec  $\rho^*$  et  $v^*$  les états intermédiaires définis par (3.50). Comme le glissement est nul,  $\sigma = 0$  donc, par définition,  $\Sigma^* = 0$ . Par ailleurs, par hypothèse,  $\mathbf{H}_{i+1/2}^1 \geq 0$  donc  $v^* \geq 0$ . Par conséquent, la fraction massique de liquide  $X^*$  est "décentrée amont" :  $X^* = X_i^n$ . Ainsi, le flux numérique se simplifie en  $\mathbf{H}_{i+1/2}^1 = \rho^* X_i^n v^*$ . Il est alors évident que si  $X_i^n = 0$ , alors la condition (10.30) est trivialement vérifiée, puisque le flux  $\mathbf{H}_{i+1/2}^1$  est nul. Par opposition, si  $X_i^n \neq 0$ , alors on peut simplifier (10.30) pour trouver la condition (10.32). Notons que, sur le plan de la stricte logique, il serait désormais nécessaire de compléter cette démonstration dans le cas où les flux  $\mathbf{H}_{i\pm 1/2}^1$  ne sont pas tous positifs. Mais notre but n'est pas de faire cette démonstration, mais bien de trouver un contre-exemple dans le cas où le glissement est non nul : c'est ce que nous allons faire.

Supposons maintenant que le glissement est non nul : désormais,  $\Sigma^* \neq 0$ . Nous allons montrer que la condition (10.30) ne peut être vérifiée si  $X_i^n = 0$  et  $X_{i+1}^n \neq 0$ . En effet, il n'est plus possible de démontrer que le flux numérique est nul. En particulier, si  $v^* - b\tau_{\mathbf{L}}^* < 0$  et  $v^* > 0$  (avec  $\tau$  le co-volume défini par  $\tau = 1/\rho$ ), la solution du problème de Riemann est  $X^* = \frac{X_i^n + X_{i+1}^n}{2} + \frac{X_i^n - X_{i+1}^n}{2b} \neq 0$ .

– Empruntons la seconde voie. Supposons maintenant que  $\mathbf{H}_{i\pm 1/2}^{1,2}$  sont positifs ou nuls. Il vient

$$(c_k)_i^{n+1} = \frac{\left[ (\rho X)_i^n - \lambda \mathbf{H}_{i+1/2}^1 \right] (X_k)_i^n + \left[ (\rho Y)_i^n - \lambda \mathbf{H}_{i+1/2}^2 \right] (Y_k)_i^n + \lambda \mathbf{H}_{i-1/2}^1 (X_k)_{i-1}^n + \lambda \mathbf{H}_{i-1/2}^2 (Y_k)_{i-1}^n}{\rho_i^{n+1}}, \quad (10.33)$$

$$\begin{aligned}
 & (\rho X X_k)_i^n + (\rho Y X_k)_i^n - \lambda \left[ \mathbf{H}_{i+1/2}^1 (X_k)_i^n + \mathbf{H}_{i+1/2}^2 (Y_k)_i^n \right] + \\
 & \quad + \lambda \left[ \mathbf{H}_{i-1/2}^1 (X_k)_{i-1}^n + \mathbf{H}_{i-1/2}^2 (Y_k)_{i-1}^n \right] \\
 = & \frac{\quad}{\rho_i^{n+1}}, \quad (10.34)
 \end{aligned}$$

En introduisant la notation  $(\rho c_k)_i^n = (\rho X X_k)_i^n + (\rho Y X_k)_i^n$ , nous sommes donc amenés à imposer  $(\rho c_k)_i^n - \lambda \left[ \mathbf{H}_{i+1/2}^1 (X_k)_i^n + \mathbf{H}_{i+1/2}^2 (Y_k)_i^n \right] \geq 0$  c'est à dire

$$\lambda \frac{\mathbf{H}_{i+1/2}^1 (X_k)_i^n + \mathbf{H}_{i+1/2}^2 (Y_k)_i^n}{\rho_i^n} \leq (c_k)_i^n. \quad (10.35)$$

Sous cette condition, on est assuré que  $(c_k)_i^{n+1} \geq 0$ . De même que tout à l'heure, si le glissement est nul, la démonstration est possible et si le glissement est non nul, elle ne l'est pas.

### 10.1.1.3 Conclusion

Nous avons montré qu'une extension naturelle du schéma de B. Larroutou est possible mais conduit à un schéma qui ne préserve pas la positivité des fractions massiques des constituants. La raison principale est que le système traité par B. Larroutou concerne un mélange de différents gaz (de telle sorte que  $\varphi = v_L - v_G = 0$ ) et non un mélange gaz-liquide (pour lequel  $\varphi = v_L - v_G \neq 0$ ).

Comme la positivité est pour nous une contrainte centrale, nous abandonnons cette stratégie et nous en proposons une autre qui, comme nous allons le voir, a elle aussi ses limites.

## 10.1.2 Relaxation découplée par Born-Infeld

On considère le système

$$\begin{cases}
 \partial_t(\rho_L R_L) + \partial_x(\rho_L R_L v_L) & = 0, \\
 \partial_t(\rho_G R_G) + \partial_x(\rho_G R_G v_G) & = 0, \\
 \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho_L R_L v_L^2 + \rho_G R_G v_G^2 + p) & = 0, \\
 \partial_t(\rho X X_k) + \partial_x(\rho X X_k v + X_k \sigma) & = 0, \quad k = 1, K-1, \\
 \partial_t(\rho Y Y_k) + \partial_x(\rho Y Y_k v - Y_k \sigma) & = 0, \quad k = 1, K-1.
 \end{cases} \quad (10.36)$$

Il a déjà été vu que le système précédent peut se mettre sous la forme

$$\begin{cases}
 \partial_t(\rho) + \partial_x(\rho v) & = 0, \\
 \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + P) & = 0, \\
 \partial_t(\rho Y) + \partial_x(\rho Y v - \sigma) & = 0, \\
 \partial_t(\rho X X_k) + \partial_x(\rho X X_k v + X_k \sigma) & = 0, \quad k = 1, K-1, \\
 \partial_t(\rho Y Y_k) + \partial_x(\rho Y Y_k v - Y_k \sigma) & = 0, \quad k = 1, K-1,
 \end{cases} \quad (10.37)$$

avec  $\sigma = \rho X Y \varphi$  et  $P = p + \rho X Y \varphi^2$ . En coordonnées Lagrangiennes, définies par le changement de variables,  $dy = \rho dx - \rho v dt$ , le système devient

$$\begin{cases}
 \partial_t \tau - \partial_y v & = 0, \\
 \partial_t Y - \partial_y \sigma & = 0, \\
 \partial_t v + \partial_y P & = 0, \\
 \partial_t (X X_k) + \partial_y (X_k \sigma) & = 0, \quad k = 1, K-1, \\
 \partial_t (Y Y_k) + \partial_y (-Y_k \sigma) & = 0, \quad k = 1, K-1.
 \end{cases} \quad (10.38)$$



Il est facile de démontrer que :

$$\begin{aligned} X \partial_t X_k + \sigma \partial_y X_k &= 0, & k = 1, K, \\ Y \partial_t Y_k - \sigma \partial_y Y_k &= 0, & k = 1, K. \end{aligned} \quad (10.39)$$

Ces deux dernières équations permettent d'exhiber les invariants forts du précédent système, ainsi que les valeurs propres associées.

Nous pouvons faire une analogie entre les systèmes (10.13) et (10.39). Elle montrent que les vitesses de transport des fractions massiques  $X_k$  et  $Y_k$  sont  $v_L$  et  $v_G$  en coordonnées Eulériennes et sont  $\frac{\sigma}{X}$  et  $-\frac{\sigma}{Y}$  en coordonnées Lagrangiennes.

On constate que les vitesses caractéristiques  $-\frac{\sigma}{Y}$  et  $\frac{\sigma}{X}$  peuvent donner lieu à des valeurs propres indéterminées lors de l'évaluation de la solution du problème de Riemann. En effet, si nous relaxons le système de la manière de la première partie de cette thèse, il vient que la solution du problème de Riemann fait apparaître les états intermédiaires  $-\frac{\Sigma^*}{Y^*}$  et  $\frac{\Sigma^*}{X^*}$ . Ainsi, si  $Y^* = 0$  ou  $X^* = 0$ , il devient impossible de définir ces fractions. C'est pourquoi nous proposons d'utiliser, pour relaxer l'équation de conservation de la fraction massique de gaz, d'utiliser la variante de Born-Infeld. Cette proposition se fonde sur l'article en annexe C qui définit le schéma dans le cas d'une équation de conservation scalaire ainsi que dans le cas du système gaz-liquide.

Nous introduisons les variables supplémentaires  $w$  et  $z$  qui représentent  $-\frac{\sigma}{Y}$  et  $\frac{\sigma}{X}$ , c'est à dire les vitesses des phases liquide et gaz en coordonnées Lagrangiennes. Définissons donc

$$w = -\rho(1 - Y)\varphi(\mathbf{u}), \quad z = \rho Y\varphi(\mathbf{u}). \quad (10.40)$$

On décide alors de considérer plutôt le système de relaxation suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_y v = 0 \\ \partial_t v + \partial_y \Pi = 0 \\ \partial_t \Pi + a^2 \partial_y v = \lambda(P - \Pi) \\ \partial_t w + z \partial_y w = \lambda(1 - Y)(\varphi - \Phi) \\ \partial_t z + w \partial_y z = -\lambda Y(\varphi - \Phi) \\ \partial_t X_k + z \partial_y X_k = 0, & k = 1, K - 1 \\ \partial_t Y_k + w \partial_y Y_k = 0, & k = 1, K - 1. \end{cases} \quad (10.41)$$

En coordonnées Eulériennes, le système devient :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0 \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + \Pi) = 0 \\ \partial_t(\rho \Pi) + \partial_x(\rho \Pi v + a^2 v) = \lambda \rho(P - \Pi) \\ \partial_t w + (v + z\tau) \partial_x w = \lambda \rho(1 - Y)(\varphi - \Phi) \\ \partial_t z + (v + w\tau) \partial_x z = -\lambda \rho Y(\varphi - \Phi) \\ \partial_t X_k + (v + z\tau) \partial_x X_k = 0, & k = 1, K - 1 \\ \partial_t Y_k + (v + w\tau) \partial_x Y_k = 0, & k = 1, K - 1. \end{cases} \quad (10.42)$$

Tous les champs de ce système sont linéairement dégénérés. On peut envisager d'appliquer un solveur de Godunov.

### 10.1.2.1 Conclusion

Il a été démontré (voir l'annexe C) que cette stratégie nous contraint à vérifier que la loi de glissement vérifie une condition de Whitham. Or, nous cherchons une méthode numérique qui permette d'assurer la robustesse du schéma quelque soit la loi de glissement. C'est pourquoi cette stratégie a été abandonnée.

### 10.1.3 Conclusions

Nous n'avons pas développé plus avant les deux propositions précédentes.

La première technique, fondé sur une extension de la méthode de Larroutou, n'est pas envisageable dans le cadre d'écoulements diphasiques. En effet, nous avons montré que la positivité des fractions massiques n'est pas assurée à cause de la loi de glissement.

La seconde technique, fondée sur le système de Born-Infeld, est soumise à une condition de Whitham qui est satisfaite pour certaines lois de glissement, mais pas pour toutes.

Nous cherchons alors une technique qui permette de résoudre la contradiction d'avoir un schéma qui préserve la positivité des fractions massiques des constituants pour tout loi de glissement. Nous allons voir que cette méthode existe. Elle est fondée sur une extension de la technique présentée dans la première partie. Il est ici important de noter que le calcul des coefficients de relaxation est rendu possible par le fait qu'on considère, lors du développement de Chapman-Enskog, que le p-système (les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement) et les équations d'évolution des fractions massiques sont découplées. Nous reviendrons sur cette idée par la suite.

## 10.2 Méthode préservant la positivité

Dans cette méthode, on se propose d'exploiter la structure des équations d'évolution des fractions massiques des constituants. La méthode est une extension de celle proposée dans le chapitre 3. Nous proposons d'approcher les solutions du système initiales par celles d'un système de relaxation dont tous les champs sont linéairement dégénérés. Cette méthode de relaxation est fondée sur une méthode de Godunov pour laquelle la résolution du problème de Riemann est triviale, donc peu coûteuse. Nous verrons qu'il est possible d'assurer la positivité de la densité et des fractions massiques des constituants, à condition d'augmenter des coefficients de relaxation. Rappelons que cela revient à introduire une diffusion numérique supplémentaire : la méthode de relaxation peut être vue comme une méthode introduisant de façon automatique la diffusion numérique nécessaire.

Nous verrons qu'il est possible, sur la base du schéma de relaxation explicite, de construire un schéma numérique semi-implicite linéaire permettant d'avoir un schéma à la fois peu coûteux et précis sur les ondes de transport de masse.

Nous proposons de considérer directement le système diphasique compositionnel isotherme sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + P) = 0, \\ \partial_t(\rho c_k) + \partial_x(\rho c_k v + \sigma_k) = 0, \quad k = 1, K - 1, \end{cases} \quad (10.43)$$

avec les notations

$$\begin{aligned} \sigma &= \rho XY \varphi, & P &= p + \sigma \varphi, \\ \sigma_k &= -\xi_k \sigma, & \xi_k &= Y_k - X_k, \quad k = 1, K - 1. \end{aligned} \quad (10.44)$$

Dans la suite, nous noterons le précédent système

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathcal{F}(\mathbf{u}) = 0 \quad (10.45)$$

où les définitions de  $\mathbf{u}$  et  $\mathcal{F}$  sont claires.

Nous notons  $\mathbb{I}_{K-1}$  la matrice identité d'ordre  $K-1$ . La matrice Jacobienne de  $\mathcal{F}$  est

$$\nabla \mathcal{F}(\mathbf{u}) = \left( \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -v^2 & 2v & 0 \\ \hline -c_1 v & c_1 & \\ \vdots & \vdots & \\ -c_{K-1} v & c_{K-1} & \end{array} \right) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ P_\rho & P_q & P_{\rho_1} & \dots & P_{\rho_{K-1}} \\ (\sigma_1)_\rho & (\sigma_1)_q & (\sigma_1)_{\rho_1} & \dots & (\sigma_1)_{\rho_{K-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\sigma_{K-1})_\rho & (\sigma_{K-1})_q & (\sigma_{K-1})_{\rho_1} & \dots & (\sigma_{K-1})_{\rho_{K-1}} \end{pmatrix}.$$

Le calcul de cette matrice requiert  $3K$  opérations.

FIG. 10.1 – Détail de la matrice Jacobienne de  $\mathcal{F}$

### 10.2.1 Relaxation du système

Si l'on écrit le système en coordonnées Lagrangiennes, il vient

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_y v = 0, \\ \partial_t v + \partial_y P = 0, \\ \partial_t c_k + \partial_y \sigma_k = 0, \quad k = 1, K-1. \end{cases} \quad (10.46)$$

Nous proposons de relaxer les termes non linéaires qui apparaissent dans la formulation Lagrangienne du système. Nous introduisons alors la variable supplémentaire  $\Pi$  qui relaxe la pseudo-pression  $P$  ainsi qu'une variable supplémentaire  $\Sigma_k$  qui relaxe la fonction  $\sigma_k$  pour chaque constituant  $k$ . Nous proposons alors d'étudier plutôt le système de relaxation

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_y v = 0, \\ \partial_t v + \partial_y \Pi = 0, \\ \partial_t \Pi + a^2 \partial_y v = \lambda(P - \Pi), \\ \partial_t c_k + \partial_y \Sigma_k = 0, \quad k = 1, K-1, \\ \partial_t \Sigma_k + b^2 \partial_y c_k = \lambda(\sigma_k - \Sigma_k), \quad k = 1, K-1. \end{cases} \quad (10.47)$$

Il doit être noté que l'on a choisi de n'introduire qu'un seul coefficient de relaxation  $b$  pour toutes les équations relaxées. Nous aurions pu choisir autant de coefficients  $b_k$  que de constituants. Si l'on opte pour cette stratégie,

1. il est plus délicat d'imposer le principe du maximum pour les constituants (voir la suite de l'étude),
2. la résolution du problème de Riemann est nettement plus complexe, à cause du grand nombre de valeurs propres,
3. il est probable que la diffusion numérique ne soit pas réduite de façon significative, à cause d'un dimensionnement très proche des fonctions  $\sigma_k$  et leurs dérivées.

Nous persistons donc dans notre choix d'un  $b$  unique.

Le système en coordonnées Eulériennes est alors

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + \Pi) = 0, \\ \partial_t(\rho \Pi) + \partial_x(\rho \Pi v + a^2 v) = \lambda \rho(P - \Pi), \\ \partial_t(\rho c_k) + \partial_x(\rho c_k v + \Sigma_k) = 0, \quad k = 1, K-1, \\ \partial_t(\rho \Sigma_k) + \partial_x(\rho \Sigma_k v + b^2 c_k) = \lambda \rho(\sigma_k - \Sigma_k), \quad k = 1, K-1. \end{cases} \quad (10.48)$$

Par la suite, nous noterons le précédent système

$$\partial_t \mathbf{v} + \partial_x \mathcal{G}(\mathbf{v}) = \lambda \mathcal{R}(\mathbf{v}), \quad (10.49)$$

où les définitions de  $\mathbf{v}$ ,  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{R}$  sont claires.

La matrice Jacobienne de  $\mathcal{G}$  est

$$\nabla \mathcal{G}(\mathbf{v}) = \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -v^2 & 2v & 0 & \\ -\Pi v & \Pi & v & \\ \hline -c_1 v & c_1 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ -c_{K-1} v & c_{K-1} & 0 & \\ -\Sigma_1 v & \Sigma_1 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ -\Sigma_{K-1} v & \Sigma_{K-1} & 0 & \end{array} \right) v \mathbb{I}_{2(K-1)} + \left( \begin{array}{ccc|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\Pi \tau & 0 & \tau & & \\ -a^2 v \tau & a^2 \tau & 0 & & \\ \hline -\Sigma_1 \tau & 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ -\Sigma_{K-1} \tau & 0 & 0 & & \\ \hline -b^2 c_1 \tau & 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & b^2 \tau \mathbb{I}_{K-1} & \\ -b^2 c_{K-1} \tau & 0 & 0 & & \end{array} \right) \tau \mathbb{I}_{K-1}.$$

Le calcul de la matrice  $\nabla \mathcal{G}$  requiert  $11K + 6$  opérations. La matrice des vecteurs propres à droite de  $\mathcal{G}$  est

$$R(\mathbf{v}) = \left( \begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & & 1 & & 1 \\ v - a\tau & 0 & v & 0 & v + a\tau \\ \Pi + a^2\tau & & \Pi & & \Pi + a^2\tau \\ \hline c_1 & & c_1 & & c_1 \\ \vdots & \mathbb{I}_{K-1} & \vdots & \mathbb{I}_{K-1} & \vdots \\ c_{K-1} & & c_{K-1} & & c_{K-1} \\ \hline \Sigma_1 & & \Sigma_1 & & \Sigma_1 \\ \vdots & -b \mathbb{I}_{K-1} & \vdots & b \mathbb{I}_{K-1} & \vdots \\ \Sigma_{K-1} & & \Sigma_{K-1} & & \Sigma_{K-1} \end{array} \right).$$

FIG. 10.2 – Détail de la matrice Jacobienne de  $\mathcal{G}$

En coordonnées Lagrangiennes, le système de relaxation homogène trouve la formulation non conservative

$$\begin{cases} \partial_t(\Pi + a^2\tau) = 0, \\ \partial_t(\Pi + av) + a \partial_y(\Pi + av) = 0, \\ \partial_t(\Pi - av) - a \partial_y(\Pi - av) = 0, \\ \partial_t(\Sigma_k + b c_k) + b \partial_y(\Sigma_k + b c_k) = 0, \quad k = 1, K-1, \\ \partial_t(\Sigma_k - b c_k) - b \partial_y(\Sigma_k - b c_k) = 0, \quad k = 1, K-1. \end{cases} \quad (10.50)$$

**Lemme 10.2.1** *Les valeurs propres du système (10.48) sont  $v \pm a\tau$ ,  $v \pm b\tau$  et  $v$  et sont associées à des champs linéairement dégénérés.*

**PREUVE** L'analyse du système (10.50) montre que les valeurs propres du système en coordonnées Lagrangiennes sont constantes et valent  $\pm a$ ,  $\pm b$ , 0. Par conséquent, en coordonnées Eulériennes, les valeurs propres du système sont  $v \pm a\tau$ ,  $v \pm b\tau$  et  $v$  et tous les champs sont linéairement dégénérés. Les valeurs propres  $v \pm b\tau$  sont de multiplicité  $K - 1$ .  $\square$

### 10.2.2 Coefficients de relaxation

Nous proposons les coefficients de relaxation

$$a^2 = -P_\tau + P_v^2, \quad b = \max_{k=1, K-1} |(\sigma_k)_{c_k}|. \quad (10.51)$$

Ces coefficients sont issus du développement de Chapman-Enskog, que nous ne reportons pas ici. Il se déduit immédiatement des développements écrits dans l'article du chapitre 5.

Le détail du calcul des dérivées partielles est donné dans les figures 11.7–11.8.

Notons ici la simplicité de la technique de calcul des coefficients de relaxation. Par opposition, les calculs issus d'un développement de Chapman-Enskog couplé (c'est à dire en tenant compte du système complet) auraient été d'une complexité beaucoup plus grande, rendant la technique impossible : assurer la positivité des valeurs propres d'une matrice de taille  $1 + 2K$  paraît très difficile. Cette technique est donc un point central de cette étude.

Cette simplicité est rendue possible par le fait que l'on découple, lors du développement de Chapman-Enskog, le sous-système lié à la conservation de la masse et de la quantité de mouvement, du sous-système lié à l'évolution des fractions massiques.

Il faut par ailleurs noter que le développement de Chapman-Enskog ne mène à la stabilité que de façon formelle. Il s'agit d'une heuristique fondée sur le bon comportement des solutions approchées obtenues par ce schéma.

### 10.2.3 Solution du problème de Riemann

Considérons l'état initial

$$\mathbf{v}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{v}_L & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{v}_R & \text{si } x > 0, \end{cases} \quad (10.52)$$

$\mathbf{v}_L$  et  $\mathbf{v}_R$  étant des états constants. Notons que  $\mathbf{v}_L$  et  $\mathbf{v}_R$  sont à l'équilibre :  $\Pi_\alpha = P(\mathbf{u}_\alpha)$  et  $(\Sigma_k)_\alpha = \sigma_k(\mathbf{u}_\alpha)$  pour  $\alpha = \mathbf{L}, \mathbf{R}$ .

En vertu du lemme (10.2.1), les champs sont linéairement dégénérés et la solution est donc uniquement constituée de discontinuités de contact séparant au plus 6 états constants. La technique de résolution est identique à celle du chapitre (3) et nous ne la reproduisons pas ici.

Nous adoptons les notations

$$\forall \phi \in \mathbb{R}, \quad \bar{\phi} := \frac{\phi_L + \phi_R}{2}, \quad \Delta\phi := \phi_L - \phi_R, \quad \langle \phi \rangle := \frac{\Delta\phi}{2}. \quad (10.53)$$

Posons maintenant

$$\begin{aligned} \tau_L^* &= \tau_L + \frac{\Pi_L - \Pi^*}{a^2}, & \tau_R^* &= \tau_R + \frac{\Pi_R - \Pi^*}{a^2}, \\ v^* &= \bar{v} + \frac{1}{a} \langle \Pi \rangle, & \Pi^* &= \bar{\Pi} + a \langle v \rangle, \\ c_k^* &= \bar{c}_k + \frac{1}{b} \langle \Sigma_k \rangle, & \Sigma_k^* &= \bar{\Sigma}_k + b \langle c_k \rangle, \quad k = 1, K-1. \end{aligned} \quad (10.54)$$

La solution du problème de Riemann est constituée de 6 états constants, à savoir

$$\mathbf{v}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{v}_L & \text{si } x < \mu_1 t, \\ \mathbf{v}_j & \text{si } \mu_j t < x < \mu_{j+1} t, \quad j = 1, 4, \\ \mathbf{v}_R & \text{si } \mu_5 t < x. \end{cases} \quad (10.55)$$

Nous supposons que  $a > b$  car le transport des constituants est associé à une vitesse lente du système hyperbolique.

Remarquons qu'il suffit d'augmenter suffisamment  $a$  de telle sorte que  $\tau_{\mathbf{L}}^* > 0$  et  $\tau_{\mathbf{R}}^* > 0$ . Sous ces hypothèses, les valeurs propres sont

$$\underbrace{v_{\mathbf{L}} - a\tau_{\mathbf{L}}}_{\mu_1} < \underbrace{v^* - b\tau_{\mathbf{L}}^*}_{\mu_2} < \underbrace{v^*}_{\mu_3} < \underbrace{v^* + b\tau_{\mathbf{R}}^*}_{\mu_4} < \underbrace{v_{\mathbf{R}} + a\tau_{\mathbf{R}}}_{\mu_5}$$

et les états intermédiaires sont

$$\left( \begin{array}{c} \rho_{\mathbf{L}}^* \\ \rho_{\mathbf{L}}^* v^* \\ \rho_{\mathbf{L}}^* \Pi^* \\ \rho_{\mathbf{L}}^* \{c_{k,\mathbf{L}}\}_{k=1,K-1} \\ \rho_{\mathbf{L}}^* \{\Sigma_{k,\mathbf{L}}\}_{k=1,K-1} \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{c} \rho_{\mathbf{L}}^* \\ \rho_{\mathbf{L}}^* v^* \\ \rho_{\mathbf{L}}^* \Pi^* \\ \rho_{\mathbf{L}}^* \{c_k^*\}_{k=1,K-1} \\ \rho_{\mathbf{L}}^* \{\Sigma_k^*\}_{k=1,K-1} \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{c} \rho_{\mathbf{R}}^* \\ \rho_{\mathbf{R}}^* v^* \\ \rho_{\mathbf{R}}^* \Pi^* \\ \rho_{\mathbf{R}}^* \{c_k^*\}_{k=1,K-1} \\ \rho_{\mathbf{R}}^* \{\Sigma_k^*\}_{k=1,K-1} \end{array} \right), \quad \left( \begin{array}{c} \rho_{\mathbf{R}}^* \\ \rho_{\mathbf{R}}^* v^* \\ \rho_{\mathbf{R}}^* \Pi^* \\ \rho_{\mathbf{R}}^* \{c_{k,\mathbf{R}}\}_{k=1,K-1} \\ \rho_{\mathbf{R}}^* \{\Sigma_{k,\mathbf{R}}\}_{k=1,K-1} \end{array} \right).$$

$\mathbf{v}_1 \qquad \mathbf{v}_2 \qquad \mathbf{v}_3 \qquad \mathbf{v}_4$

Les précédents vecteurs sont de taille  $2K + 1$ . La structure de la solution est schématisée à la figure (10.3).

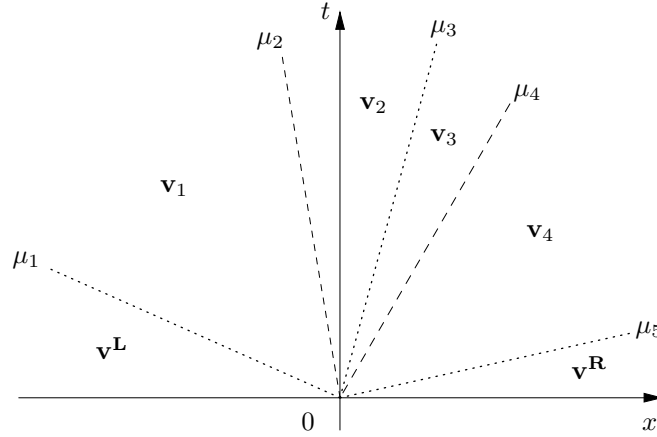


FIG. 10.3 – Solution du problème de Riemann pour le système relaxé

#### 10.2.4 Positivité de la densité, des fractions massiques

Il est possible d'augmenter suffisamment  $a$  pour avoir  $\tau_{\mathbf{L}}^*$  et  $\tau_{\mathbf{R}}^*$  positifs de telle sorte que la densité  $\rho_i^{n+1}$  reste positive, comme nous l'avons déjà vu dans le chapitre 3. En effet, si  $a$  vérifie l'inégalité

$$a(\mathbf{u}_{\mathbf{L}}, \mathbf{u}_{\mathbf{R}}) \geq a_p(\mathbf{u}_{\mathbf{L}}, \mathbf{u}_{\mathbf{R}}) := \frac{\langle v \rangle + \sqrt{\langle v \rangle^2 + 4 \max(\tau_{\mathbf{L}}, \tau_{\mathbf{R}}) |\langle \Pi \rangle|}}{2 \min(\tau_{\mathbf{L}}, \tau_{\mathbf{R}})}, \quad (10.56)$$

alors  $\tau_{\mathbf{L}}^*$  et  $\tau_{\mathbf{R}}^*$  sont strictement positifs. Le but de ce paragraphe est de montrer qu'il est possible d'assurer un principe du maximum sur les fractions massiques des constituants, quitte à augmenter suffisamment le coefficient de relaxation  $b$ .

Notons que (10.54) définit  $c_k^*$  pour  $k = 1, K - 1$  et ne définit pas  $c_K^*$ . Nous allons voir qu'en fait l'expression de ce dernier est identique aux autres.

**Lemme 10.2.2** *Définissons la fraction massique intermédiaire du dernier constituant par*

$$c_K^* = 1 - \sum_{k=1}^{K-1} c_k^*. \quad (10.57)$$

Alors, on a

$$c_K^* = \overline{c_K} + \frac{1}{b} \langle \Sigma_K \rangle. \quad (10.58)$$

PREUVE

Si on insère la définition des fractions massiques des constituants (10.54) dans (10.57), il vient

$$c_K^* = 1 - \sum_{k=1}^{K-1} \overline{c_k} - \frac{1}{b} \sum_{k=1}^{K-1} \langle \Sigma_k \rangle = \overline{c_K} - \frac{1}{b} \sum_{k=1}^{K-1} \langle \Sigma_k \rangle. \quad (10.59)$$

Or il est facile de vérifier que les fonctions non-linéaires  $\sigma_k$  possèdent la propriété d'avoir une somme nulle

$$\sum_{k=1, K} \sigma_k(\mathbf{u}) = \left[ \sum_{k=1, K} \xi_k(\mathbf{u}) \right] \sigma(\mathbf{u}) = 0. \quad (10.60)$$

Or les états gauche et droit du problème de Riemann sont à l'équilibre de telle sorte que  $(\Sigma_K)_{\mathbf{L}} = \sigma_K(\mathbf{u}_{\mathbf{L}})$  et  $(\Sigma_K)_{\mathbf{R}} = \sigma_K(\mathbf{u}_{\mathbf{R}})$ . On voit alors que  $\langle \Sigma_K \rangle = -\sum_{k=1}^{K-1} \langle \Sigma_k \rangle$ . On conclut alors que  $c_K^*$  trouve l'expression (10.58).  $\square$

Montrons maintenant qu'il est possible d'augmenter suffisamment  $b$  pour avoir  $c_k^* \geq 0$  pour  $k = 1, K$ . En effet, nous avons vu dans le premier article de la partie 1 que cela permettait de démontrer que  $(c_k)_i^{n+1} \geq 0$ .

Nous allons démontrer deux théorèmes. Le premier donne, sans aucune hypothèse sur les propriétés thermodynamiques du mélange, le coefficient de relaxation  $b$  minimal permettant d'avoir des fractions massiques des constituants positifs. Dans le second, nous restreindrons notre étude aux fluides possédant une propriété thermodynamique nous permettant de diminuer le coefficient de relaxation, et donc la diffusion numérique.

Rappelons tout d'abord ce résultat.

**Lemme 10.2.3** *Supposons que  $(r_\alpha, s_\alpha, t_\alpha) \in \mathbb{R}^3$  avec  $\alpha = \mathbf{L}, \mathbf{R}$  vérifiant les trois conditions*

$$r_\alpha \in [0, 1], \quad s_\alpha \in [0, 1], \quad \overline{r s} \in [0, \frac{1}{2}]. \quad (10.61)$$

Alors, on a l'inégalité

$$|\Delta(rst)| \leq |\bar{t}| + \frac{|\Delta t|}{2}. \quad (10.62)$$

**Théorème 10.2.4** *Soit  $\mathbf{u}_{\mathbf{L}}, \mathbf{u}_{\mathbf{R}}$  deux états de  $\Omega$ . Supposons que  $a(\mathbf{u}_{\mathbf{L}}, \mathbf{u}_{\mathbf{R}}) \geq a_p(\mathbf{u}_{\mathbf{L}}, \mathbf{u}_{\mathbf{R}})$ . Si*

$$b(\mathbf{u}_{\mathbf{L}}, \mathbf{u}_{\mathbf{R}}) \geq b_p(\mathbf{u}_{\mathbf{L}}, \mathbf{u}_{\mathbf{R}}) := |(\rho\varphi)_{\mathbf{L}} + (\rho\varphi)_{\mathbf{R}}| + |(\rho\varphi)_{\mathbf{L}} - (\rho\varphi)_{\mathbf{R}}| \quad (10.63)$$

alors  $c_k^* \geq 0$  pour  $k = 1, K$ .

PREUVE D'après la définition, imposer  $c_k^* \geq 0$  revient à trouver  $b$  tel que

$$b \geq -\frac{\langle \Sigma_k \rangle}{\overline{c_k}}. \quad (10.64)$$

L'idée principale de la preuve est de trouver une expression convenable du membre de droite, de telle sorte qu'on puisse directement appliquer le lemme (10.2.3) nous permettant d'avoir une fine estimation du majorant. On utilise la définition  $\sigma_k = XY(X_k - Y_k)\rho\varphi$  et il vient :

$$\frac{\langle \Sigma_k \rangle}{\bar{c}_k} = \frac{X_{\mathbf{L}}Y_{\mathbf{L}}(X_k - Y_k)_{\mathbf{L}}(\rho\varphi)_{\mathbf{L}} - X_{\mathbf{R}}Y_{\mathbf{R}}(X_k - Y_k)_{\mathbf{R}}(\rho\varphi)_{\mathbf{R}}}{2\bar{c}_k} \quad (10.65)$$

$$= Y_{\mathbf{L}}\frac{(XX_k)_{\mathbf{L}}}{2\bar{c}_k}(\rho\varphi)_{\mathbf{L}} - Y_{\mathbf{R}}\frac{(XX_k)_{\mathbf{R}}}{2\bar{c}_k}(\rho\varphi)_{\mathbf{R}} \quad (10.66)$$

$$- X_{\mathbf{L}}\frac{(YY_k)_{\mathbf{L}}}{2\bar{c}_k}(\rho\varphi)_{\mathbf{L}} + X_{\mathbf{R}}\frac{(YY_k)_{\mathbf{R}}}{2\bar{c}_k}(\rho\varphi)_{\mathbf{R}} \quad (10.67)$$

On adopte alors les notations

$$p_\alpha = \frac{(XX_k)_\alpha}{2\bar{c}_k}, \quad q_\alpha = \frac{(YY_k)_\alpha}{2\bar{c}_k}, \quad t_\alpha = (\rho\varphi)_\alpha, \quad \alpha = \mathbf{L}, \mathbf{R} \quad (10.68)$$

et il vient

$$\frac{\langle \Sigma_k \rangle}{\bar{c}_k} = \Delta(Ypt) - \Delta(Xqt). \quad (10.69)$$

On peut alors voir que l'on peut appliquer le lemme deux fois successivement, après avoir vérifié les trois hypothèses. Ces trois vérifications sont fondées sur l'hypothèse naturelle que toutes les fractions massiques des états gauche et droit sont positives à l'itération  $n$  :

$$X_\alpha \geq 0, \quad Y_\alpha \geq 0, \quad (X_k)_\alpha \geq 0, \quad (Y_k)_\alpha \geq 0, \quad \alpha = \mathbf{L}, \mathbf{R}, \quad k = 1, K. \quad (10.70)$$

1. Par hypothèse, on a  $Y_\alpha \in [0, 1]$  et  $X_\alpha \in [0, 1]$  ce qui implique que la première hypothèse du lemme est vrai, d'abord avec  $r_\alpha = Y_\alpha$ , ensuite avec  $r_\alpha = X_\alpha$ .
2. Par hypothèse, on a  $(c_k)_\alpha \geq 0$  et  $(XX_k)_\alpha \geq 0$ . Il est alors clair que

$$0 \leq \frac{(XX_k)_\alpha}{\underbrace{(XX_k)_{\mathbf{L}} + (YY_k)_{\mathbf{L}} + (XX_k)_{\mathbf{R}} + (YY_k)_{\mathbf{R}}}_{2\bar{c}_k}} \leq 1, \quad (10.71)$$

pour  $\alpha = \mathbf{L}, \mathbf{R}$ . Donc  $p_\alpha \in [0, 1]$ . De même,  $q_\alpha \in [0, 1]$ .

3. Nous allons finalement montrer que  $\overline{Yp} \in [0, \frac{1}{2}]$ . Notons que

$$\begin{aligned} & Y_{\mathbf{L}}(XX_k)_{\mathbf{L}} + Y_{\mathbf{R}}(XX_k)_{\mathbf{R}} - (XX_k)_{\mathbf{L}} - (YY_k)_{\mathbf{L}} - (XX_k)_{\mathbf{R}} - (YY_k)_{\mathbf{R}} \\ &= (Y_{\mathbf{L}} - 1)(XX_k)_{\mathbf{L}} + (Y_{\mathbf{R}} - 1)(XX_k)_{\mathbf{R}} - (YY_k)_{\mathbf{L}} - (YY_k)_{\mathbf{R}} \\ &= -X_{\mathbf{L}}^2(X_k)_{\mathbf{L}} - X_{\mathbf{R}}^2(X_k)_{\mathbf{R}} - (YY_k)_{\mathbf{L}} - (YY_k)_{\mathbf{R}} \leq 0 \end{aligned}$$

car  $Y_\alpha - 1 = -X_\alpha$ . Par conséquent,

$$0 \leq Y_{\mathbf{L}}p_{\mathbf{L}} + Y_{\mathbf{R}}p_{\mathbf{R}} \leq 1. \quad (10.72)$$

Nous montrerions de même que  $\overline{Xq} \in [0, \frac{1}{2}]$ .

Nous appliquons donc le lemme et il vient

$$\left| \frac{\langle \Sigma_k \rangle}{\bar{c}_k} \right| \leq |\Delta(Ypt)| + |\Delta(Xqt)| \leq 2|\bar{t}| + |\Delta t| \quad (10.73)$$

ce qui conclut le théorème.  $\square$



**Remarque 10.2.5** *On notera que le précédent théorème est quelque peu décevant. On constate en effet que le coefficient de relaxation est le double de celui du cas diphasique. En particulier, nous devrions retrouver le même dans le cas à 2 constituants avec  $p_2^0 = 0$  et  $p_1^0 \rightarrow \infty$ . Le théorème suivant, qui exploite certaines propriétés thermodynamiques, permet de remédier à cette difficulté.*

**Théorème 10.2.6** *Supposons que pour tout constituant  $k$ , pour tout couple  $(p, T)$ , on a soit  $\xi_k(p, T) \in [0, 1]$  (constituant léger) ou bien  $\xi_k(p, T) \in [-1, 0]$  (constituant lourd). Soit  $\mathbf{u}_{\mathbf{L}, \mathbf{R}}$  deux états de  $\Omega$ . Supposons que  $a(\mathbf{u}_{\mathbf{L}}, \mathbf{u}_{\mathbf{R}}) \geq a_p(\mathbf{u}_{\mathbf{L}}, \mathbf{u}_{\mathbf{R}})$ . Si*

$$b(\mathbf{u}_{\mathbf{L}}, \mathbf{u}_{\mathbf{R}}) \geq b_p(\mathbf{u}_{\mathbf{L}}, \mathbf{u}_{\mathbf{R}}) := \frac{|(\rho\varphi)_{\mathbf{L}} + (\rho\varphi)_{\mathbf{R}}|}{2} + \frac{|(\rho\varphi)_{\mathbf{L}} - (\rho\varphi)_{\mathbf{R}}|}{2} \quad (10.74)$$

alors  $c_k^* \geq 0$  pour  $k = 1, K$ .

PREUVE Supposons dans un premier temps que  $\xi_k \in [0, 1]$ . On utilise la définition  $\sigma_k = XY\xi_k\rho\varphi$  et il vient :

$$\frac{\langle \Sigma_k \rangle}{c_k} = \frac{(Y\xi_k)_{\mathbf{L}}}{2\bar{c}_k} X_{\mathbf{L}}(\rho\varphi)_{\mathbf{L}} - \frac{(Y\xi_k)_{\mathbf{R}}}{2\bar{c}_k} X_{\mathbf{R}}(\rho\varphi)_{\mathbf{R}} \quad (10.75)$$

On adopte alors les notations

$$r_\alpha = \frac{(Y\xi_k)_\alpha}{2\bar{c}_k}, \quad s_\alpha = X_\alpha, \quad t_\alpha = (\rho\varphi)_\alpha, \quad \alpha = \mathbf{L}, \mathbf{R} \quad (10.76)$$

et il vient

$$\frac{\langle \Sigma_k \rangle}{c_k} = \Delta(rst). \quad (10.77)$$

On peut alors voir que l'on peut appliquer le lemme, après avoir vérifié les trois hypothèses. Ces trois vérifications sont fondées sur l'hypothèse que toutes les fractions massiques des états gauche et droit sont positives :

$$X_\alpha \geq 0, \quad Y_\alpha \geq 0, \quad (X_k)_\alpha \geq 0, \quad (Y_k)_\alpha \geq 0. \quad (10.78)$$

1. Nous réécrivons la fraction massique du constituant  $k$  sous la forme  $c_k = X_k + \xi_k Y$ , c'est à dire une somme de deux nombres positifs. Par hypothèse, on a  $(c_k)_\alpha \geq 0$  et  $(Y\xi_k)_\alpha \geq 0$  car  $\xi_k \geq 0$ . Il est alors clair que

$$0 \leq \frac{(Y\xi_k)_\alpha}{\underbrace{X_{k\mathbf{L}} + (\xi_k Y)_{\mathbf{L}} + X_{k\mathbf{R}} + (\xi_k Y)_{\mathbf{R}}}_{2\bar{c}_k}} \leq 1. \quad (10.79)$$

pour  $\alpha = \mathbf{L}, \mathbf{R}$ . Donc  $r_\alpha \in [0, 1]$ .

2. Par hypothèse, on a  $X_\alpha \in [0, 1]$  ce qui implique que la seconde hypothèse du lemme est vrai avec  $s_\alpha = X_\alpha$ .
3. Nous allons finalement montrer que  $\bar{r}\bar{s} \in [0, \frac{1}{2}]$ . Notons que

$$\begin{aligned} & (\xi_k Y)_{\mathbf{L}} X_{\mathbf{L}} + (\xi_k Y)_{\mathbf{R}} X_{\mathbf{R}} - X_{k\mathbf{L}} - (\xi_k Y)_{\mathbf{L}} - X_{k\mathbf{R}} - (\xi_k Y)_{\mathbf{R}}, \\ & = -X_{k\mathbf{L}} - X_{k\mathbf{R}} + (\xi_k Y)_{\mathbf{L}} (X_{\mathbf{L}} - 1) + (\xi_k Y)_{\mathbf{R}} (X_{\mathbf{R}} - 1), \\ & = -X_{k\mathbf{L}} - X_{k\mathbf{R}} - (\xi_k Y^2)_{\mathbf{L}} - (\xi_k Y^2)_{\mathbf{R}} \leq 0 \end{aligned}$$

car  $X_\alpha - 1 = -Y_\alpha$ . Par conséquent,

$$0 \leq r_{\mathbf{L}} X_{\mathbf{L}} + r_{\mathbf{R}} X_{\mathbf{R}} \leq 1. \quad (10.80)$$

Nous appliquons donc le lemme et il vient

$$\left| \frac{\langle \Sigma_k \rangle}{c_k} \right| \leq |\Delta(rst)| \leq |\bar{t}| + \frac{|\Delta t|}{2} \quad (10.81)$$

ce qui conclut le théorème.

Dans un deuxième temps, supposons que  $\xi_k \in [-1, 0]$ . On adopte alors les notations

$$r_\alpha = \frac{(-X\xi_k)_\alpha}{2c_k}, \quad s_\alpha = Y_\alpha, \quad t_\alpha = (\rho\varphi)_\alpha, \quad \alpha = \mathbf{L}, \mathbf{R} \quad (10.82)$$

et il vient

$$-\frac{\langle \Sigma_k \rangle}{c_k} = \Delta(rst). \quad (10.83)$$

Nous réécrivons la fraction massique du constituant  $k$  sous la forme  $c_k = -X\xi_k + Y_k$ , c'est à dire une somme de deux nombres positifs. Les mêmes arguments permettent de conclure.  $\square$

**Remarque 10.2.7** *Il faut bien noter que, sans aucune hypothèse, on a toujours  $\xi \in [-1, 1]$  (voir théorème 9.2.7) : l'hypothèse du théorème précédent porte sur le signe de  $\xi_k$ .*

*Il ne semble pas facile de généraliser la démonstration précédente. En particulier, il paraît difficile d'arriver au même résultat si, par exemple, on a  $\xi_{k\mathbf{L}} \in [-1, 0]$  et  $\xi_{k\mathbf{R}} \in [0, 1]$ . Toutefois, l'hypothèse que nous proposons (la constance du signe, pour un constituant donné) est physiquement fondée puisque le modèle à 2 constituants présenté précédemment dans le chapitre 9 possède cette propriété.*

## 10.2.5 Implication de la méthode de relaxation

La stratégie que nous proposons ici est l'extension de celle proposée dans le chapitre 5. Rappelons simplement que le schéma explicite doit respecter une condition CFL qui est contrainte par les ondes rapides, ce qui conduit en pratique à des simulations trop lentes et peu précises sur les ondes lentes. Nous cherchons alors à construire un schéma explicite sur les ondes lentes et implicite linéaire sur les ondes rapides, comme dans les travaux de Faille & Heintzé [26]. Cela est rendu possible par le fait que le système de relaxation possède des champs linéairement dégénérés : ainsi il est possible d'interpréter la méthode de Godunov comme une méthode de Roe. Dans la suite, nous nous limitons à la construction de la matrice de Roe, ce qui mène à un schéma implicite linéaire. Nous présentons dans des encadrés les informations nécessaires à la construction du schéma semi-implicite linéaire. Par ailleurs, un encadré présente les informations relatives à l'implication de l'étape de projection, qui permet de réduire la taille du système linéaire à inverser.

On considère le problème de Riemann du système de relaxation homogène ayant comme états gauche et droit  $\mathbf{v}_{\mathbf{L}} = \mathbf{v}_0$  et  $\mathbf{v}_{\mathbf{R}} = \mathbf{v}_5$  et comme valeurs propres  $\{\mu_j\}_{j=1,5}$ . L'interprétation du schéma comme une méthode de Roe est fondée sur une décomposition en éléments caractéristiques. Comme il y a 5 valeurs propres, nous allons définir 5 groupes de facteurs de normalisation et vecteurs propres. Comme les vecteurs propres sont de taille  $2K + 1$ , le lecteur ne sera pas surpris de voir que le lemme suivant est assez long, car il est nécessaire de détailler leurs composantes.

**Lemme 10.2.8** *Soit les facteurs de normalisation*

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \rho_{\mathbf{L}}^* - \rho_{\mathbf{L}}, \\ \delta_{k+1} &= \rho_{\mathbf{L}}^*(c_k^* - c_{k,\mathbf{L}}), \quad k = 1, K-1 \\ \delta_{K+1} &= \rho_{\mathbf{R}}^* - \rho_{\mathbf{L}}^*, \\ \delta_{k+K+1} &= \rho_{\mathbf{R}}^*(c_{k,\mathbf{R}} - c_k^*), \quad k = 1, K-1, \\ \delta_{2K+1} &= \rho_{\mathbf{R}} - \rho_{\mathbf{L}}^*. \end{aligned} \quad (10.84)$$

Nous notons  $\mathcal{I} = \Pi + a^2 \tau$ . Soit la matrice des vecteurs propres à droite  $R(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) = \{r_j\}_{j=1,2K+1}$  définie par

$$R(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) = \begin{pmatrix} 1 & & 1 & & 1 \\ v_L - a\tau_L & 0 & v^* & 0 & v_R + a\tau_R \\ \mathcal{I}_L & & \Pi^* & & \mathcal{I}_R \\ \hline c_{1,L} & & c_1^* & & c_{1,R} \\ \vdots & \mathbb{I}_{K-1} & \vdots & \mathbb{I}_{K-1} & \vdots \\ c_{K-1,L} & & c_{K-1}^* & & c_{K-1,R} \\ \hline \Sigma_{1,L} & & \Sigma_1^* & & \Sigma_{1,R} \\ \vdots & -b \mathbb{I}_{K-1} & \vdots & b \mathbb{I}_{K-1} & \vdots \\ \Sigma_{K-1,L} & & \Sigma_{K-1}^* & & \Sigma_{K-1,R} \end{pmatrix}.$$

Alors, les différences entre deux états consécutifs de la solution du problème de Riemann peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0 &= \delta_1 r_1, & \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 &= \sum_{j=2}^K \delta_j r_j, \\ \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2 &= \delta_{K+1} r_{K+1}, & \mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_3 &= \sum_{j=K+2}^{2K} \delta_j r_j, \\ \mathbf{v}_5 - \mathbf{v}_4 &= \delta_{2K+1} r_{2K+1}. \end{aligned} \tag{10.85}$$

PREUVE L'idée principale de la preuve est d'utiliser la formule de Rankine-Hugoniot ainsi que la conservation d'invariants de Riemann bien choisis. La démonstration découle très naturellement des calculs déjà introduits dans le cas non-compositionnel. Elle est donc laissée au lecteur.  $\square$

**Proposition 10.2.9** Soit  $R(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$  la matrice inversible définie précédemment. Soit  $L(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) = R^{-1}(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$ . Soit la matrice diagonale

$$\Lambda(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) = \text{Diag} \{ \nu_j \}_{j=1,1+2K} = \text{Diag} \left( \mu_1, \underbrace{\mu_2, \dots, \mu_2}_{K-1}, \mu_3, \underbrace{\mu_4, \dots, \mu_4}_{K-1}, \mu_5 \right). \tag{10.86}$$

Alors la matrice  $A^{\text{Roe}}(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) = (R \Lambda L)(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$  est une matrice de Roe.

Les vecteurs propres à droite de  $A^{\text{Roe}}$  sont les vecteurs  $\{r_j\}_{j=1,2K+1}$

$$A^{\text{Roe}} r_j = \nu_j r_j, \quad j = 1, 2K + 1. \tag{10.87}$$

Nous définissons la valeur absolue de la matrice de Roe par  $|A^{\text{Roe}}(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)| = R|\Lambda|L$ .

**Théorème 10.2.10** Le flux numérique définit par

$$\mathbf{H}^{\text{Roe}}(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) = \frac{1}{2} (\mathcal{G}(\mathbf{v}_L) + \mathcal{G}(\mathbf{v}_R)) - \frac{1}{2} |A^{\text{Roe}}(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)| (\mathbf{v}_R - \mathbf{v}_L)$$

satisfait l'égalité

$$\mathbf{H}^{\text{Roe}}(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) = \mathbf{H}^{\text{Godunov}}(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R). \tag{10.88}$$

PREUVE de la proposition 10.2.9. Nous devons montrer que la matrice  $A^{Roe}$  satisfait les trois conditions de Roe. Cela va être accompli en utilisant la définition de la matrice ainsi que de simples calculs algébriques, comme nous allons le voir.

1. Par définition, la matrice  $A^{Roe}(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$  est diagonalisable et a comme valeurs propres  $(\nu_j)_{j=1,5}$ . Ses vecteurs propres à droite (resp. gauche) sont  $(r_j)_{j=1,2K+1}$ , les colonnes de  $R$  (resp.  $(l_j)_{j=1,2K+1}$ , les lignes de  $L$ ). Les  $2K + 1$  vecteurs propres à droite constituent une base de  $\mathbb{R}^{2K+1}$ .
2. Un calcul facile mais fastidieux permet de vérifier que  $A^{Roe}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \nabla \mathcal{G}(\mathbf{v})$ .
3. Montrons maintenant que  $A^{Roe}(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)(\mathbf{v}_R - \mathbf{v}_L) = \mathcal{G}(\mathbf{v}_R) - \mathcal{G}(\mathbf{v}_L)$ . Premièrement, on peut noter que, par définition (10.85),  $\mathbf{v}_L - \mathbf{v}_R = \sum_{j=1,5} (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_{j-1}) = \sum_{j=1,2K+1} \delta_j r_j$ . Il est alors facile de voir que, grâce aux égalités (10.87) et (10.85), on a

$$A^{Roe}(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)(\mathbf{v}_L - \mathbf{v}_R) = \sum_{j=1,2K+1} \delta_j \nu_j r_j = \sum_{j=1,5} \mu_j (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_{j-1}).$$

D'autre part, la relation de Rankine-Hugoniot donne le saut du flux relaxé sur la  $j$ -ième discontinuité

$$\mathcal{G}(\mathbf{v}_j) - \mathcal{G}(\mathbf{v}_{j-1}) = \mu_j (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_{j-1}), \quad j = 1, \dots, 5. \quad (10.89)$$

Il s'ensuit que

$$A^{Roe}(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)(\mathbf{v}_L - \mathbf{v}_R) = \sum_{j=1,5} \mathcal{G}(\mathbf{v}_j) - \mathcal{G}(\mathbf{v}_{j-1}) = \mathcal{G}(\mathbf{v}_L) - \mathcal{G}(\mathbf{v}_R),$$

qui est le résultat voulu.  $\square$

Nous venons de construire la base d'un schéma semi-implicite linéaire pour le système compositionnel. Les figures (10.2.5–10.2.5–10.2.5) permettent de compléter le portrait que nous avons brossé ici pour obtenir le schéma semi-implicite linéaire complet.

## 10.3 Conclusions

Nous avons proposé un schéma de relaxation préservant la positivité des fractions massiques des constituants. Ce schéma est fondé sur la relaxation des termes non-linéaires apparaissant dans le système compositionnel en coordonnées Lagrangiennes. Nous introduisons seulement 2 coefficients de relaxation, dont le calcul est simple. La méthode explicite a été étendue par le développement d'un schéma numérique semi-implicite linéaire explicite pour les ondes lentes et implicite linéaire pour les ondes rapides.

Il reste à analyser le coût de la méthode de relaxation préservant la positivité.

Nous montrons dans ce paragraphe comment calculer la matrice  $\tilde{A}(\mathbf{v})$  définie de la façon suivante. Notons  $A(\mathbf{v}) = \nabla \mathcal{G}(\mathbf{v})$  la Jacobienne du système de relaxation. Ses valeurs propres sont

$$\Lambda(\mathbf{v}) = \text{Diag} \left( v - a\tau, \underbrace{v - b\tau, \dots, v - b\tau}_{K-1}, v, \underbrace{v + b\tau, \dots, v + b\tau}_{K-1}, v + a\tau \right)$$

et vérifient  $A(\mathbf{v}) = R(\mathbf{v})\Lambda(\mathbf{v})L(\mathbf{v})$  avec  $R(\mathbf{v})$  la matrice des vecteurs propres et  $L(\mathbf{v}) = R^{-1}(\mathbf{v})$ . On note

$$\tilde{\Lambda}(\mathbf{v}) = \text{Diag} \left( v - a\tau, \underbrace{0, \dots, 0}_{2K-1}, v + a\tau \right)$$

et  $\tilde{A}(\mathbf{v}) = R(\mathbf{v})\tilde{\Lambda}(\mathbf{v})L(\mathbf{v})$ . Notons

$$\mathcal{I} = \Pi + a^2 \tau, \quad d = \frac{1}{a^2 \tau} \quad (10.90)$$

Les colonnes de la matrice  $\tilde{A}(\mathbf{v}) = R\tilde{\Lambda}L = \{\tilde{A}_j\}_{j=1,2K+1}$  sont les suivantes. Les colonnes 4 à  $2K+1$  sont nulles, i.e.,  $\tilde{A}_j = 0$  pour  $j = 4, 2K+1$ . Les 3 premières colonnes valent respectivement

$$\tilde{A}_1(\mathbf{v}) = d \begin{pmatrix} -\mathcal{I}v \\ -2v^2a^2\tau - \Pi(v^2 + a^2\tau^2) \\ -\mathcal{I}^2v \\ \hline -c_1\mathcal{I}v \\ \vdots \\ -c_{K-1}\mathcal{I}v \\ \hline -\Sigma_1\mathcal{I}v \\ \vdots \\ -\Sigma_{K-1}\mathcal{I}v \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_2(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2v \\ \mathcal{I} \\ \hline c_1 \\ \vdots \\ c_{K-1} \\ \hline \Sigma_1 \\ \vdots \\ \Sigma_{K-1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_3(\mathbf{v}) = d \begin{pmatrix} v \\ v^2 + a^2\tau^2 \\ \mathcal{I}v \\ \hline c_1v \\ \vdots \\ c_{K-1}v \\ \hline \Sigma_1v \\ \vdots \\ \Sigma_{K-1}v \end{pmatrix}.$$

Le calcul de la matrice  $\tilde{A}(\mathbf{v})$  requiert  $8K + 27$  opérations.

FIG. 10.4 – Détail de la matrice Jacobienne modifiée

Nous montrons dans ce paragraphe comment calculer la matrice définie par  $|\tilde{A}^{Roe}|(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) = (R|\tilde{\Lambda}|L)(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$  avec  $|\tilde{\Lambda}| = \text{Diag}(|v_L - a\tau_L|, 0, \dots, 0, |v_R + a\tau_R|)$  et  $L = R^{-1}$ . La matrice  $R(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$  est définie comme précédemment. Nous notons

$$\begin{aligned} \tilde{v}_L &= v_L - a\tau_L, & \tilde{v}_R &= v_R + a\tau_R, \\ \mathcal{I}_L &= \Pi_L + a^2\tau_L, & \mathcal{I}_R &= \Pi_R + a^2\tau_R, \end{aligned} \quad (10.91)$$

ainsi que

$$d = 1/[-v^*(\mathcal{I}_R - \mathcal{I}_L) - \tilde{v}_L(\Pi^* - \mathcal{I}_R) - \tilde{v}_R(\mathcal{I}_L - \Pi^*)]. \quad (10.92)$$

Soient

$$\mathbf{p}_L = d|\tilde{v}_L| \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{v}_L \\ \mathcal{I}_L \\ \hline c_{1,L} \\ \vdots \\ \hline c_{K-1,L} \\ \Sigma_{1,L} \\ \vdots \\ \Sigma_{K-1,L} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_R = d|\tilde{v}_R| \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{v}_R \\ \mathcal{I}_R \\ \hline c_{1,R} \\ \vdots \\ \hline c_{K-1,R} \\ \Sigma_{1,R} \\ \vdots \\ \Sigma_{K-1,R} \end{pmatrix}. \quad (10.93)$$

Les colonnes de la matrice  $|\tilde{A}^{Roe}| = \{|\tilde{A}_j^{Roe}|\}_{j=1,5}$  sont les suivantes.

1. La colonne 1 est donnée par  $|\tilde{A}_1^{Roe}| = \alpha \mathbf{p}_L + \beta \mathbf{p}_R$  avec  $\alpha = \Pi^* \tilde{v}_R - v^* \mathcal{I}_R$  et  $\beta = v^* \mathcal{I}_L - \Pi^* \tilde{v}_L$ .
2. La colonne 2 est donnée par  $|\tilde{A}_3^{Roe}| = \alpha \mathbf{p}_L + \beta \mathbf{p}_R$  avec  $\alpha = \mathcal{I}_R - \Pi^*$  et  $\beta = \Pi^* - \mathcal{I}_L$ .
3. La colonne 3 est donnée par  $|\tilde{A}_4^{Roe}| = \alpha \mathbf{p}_L + \beta \mathbf{p}_R$  avec  $\alpha = v^* - \tilde{v}_R$  et  $\beta = \tilde{v}_L - v^*$ .
4. Les colonnes suivantes sont nulles, i.e.,  $|\tilde{A}_j^{Roe}| = 0$  pour  $j = 4, 2K + 1$ .

Le calcul de la matrice  $|\tilde{A}^{Roe}|$  requiert  $22K + 45$  opérations.

FIG. 10.5 – Détail de la matrice  $|\tilde{A}^{Roe}|$ .

Nous expliquons dans ce paragraphe comment, dans le cadre d'un schéma numérique semi-implicite, la technique d'implicitation de la projection permet de réduire la taille de chaque bloc du système linéaire de 1.

La technique d'implicitation de la projection consiste à lier l'incrément de la variable de relaxation  $\rho\Pi$  aux incréments des variables d'équilibre de telle sorte que la méthode de relaxation conduise, avec une donnée initiale stationnaire, à un état stationnaire. Notons  $\mathcal{P}(\mathbf{u}) = \rho P(\mathbf{u})$  et notons  $\mathcal{P}_X(\mathbf{u})$  la dérivée partielle de cette fonction par rapport à  $X$ . Pour une maille  $i = 1, I$  et un pas de temps  $n$  donnés, nous imposons

$$\begin{aligned} \delta(\rho\Pi)_i &= (\rho\Pi)_i^{n+1} - (\rho\Pi)_i^n \\ &= \mathcal{P}_\rho(\mathbf{u}_i^n) \delta\rho_i + \mathcal{P}_{(\rho v)}(\mathbf{u}_i^n) \delta(\rho v)_i \\ &\quad + \mathcal{P}_{(\rho c_1)}(\mathbf{u}_i^n) \delta(\rho c_1)_i + \dots + \mathcal{P}_{(\rho c_{K-1})}(\mathbf{u}_i^n) \delta(\rho c_{K-1})_i. \end{aligned} \quad (10.94)$$

Notons  $\tilde{\mathbf{v}}$  le vecteur de taille  $2K$  construit en supprimant la troisième composante du vecteur  $\mathbf{v}$

$$\tilde{\mathbf{v}} = (\rho, \rho v, \rho c_1, \dots, \rho c_{K-1}, \rho \Sigma_1, \dots, \rho \Sigma_{K-1})^T. \quad (10.95)$$

Notons  $\mathcal{R}_e$  l'opérateur de réduction qui transforme tout vecteur ligne  $\mathbf{z}$  de taille  $2K + 1$

$$\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{2K+1}) \quad (10.96)$$

en le vecteur de taille  $2K$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_e(\mathbf{z}) &= (\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_3 \mathcal{P}_\rho(\mathbf{u}_i^n), \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_3 \mathcal{P}_{(\rho v)}(\mathbf{u}_i^n), \\ &\quad \mathbf{z}_4 + \mathbf{z}_3 \mathcal{P}_{(\rho c_1)}(\mathbf{u}_i^n), \dots, \mathbf{z}_{K+2} + \mathbf{z}_3 \mathcal{P}_{(\rho c_{K-1})}(\mathbf{u}_i^n), \\ &\quad \mathbf{z}_{2K+1}, \dots, \mathbf{z}_{2K+1}). \end{aligned} \quad (10.97)$$

Par abus de notation, notons également  $\mathcal{R}_e$  l'opérateur qui transforme toute matrice  $A$  de taille  $(2K + 1) \times (2K + 1)$  composée des lignes  $\{A_i\}_{i=1,2K+1}$  en la matrice de taille  $(2K) \times (2K)$  définie par

$$\mathcal{R}_e(A) = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_e(A_1) \\ \mathcal{R}_e(A_2) \\ \mathcal{R}_e(A_4) \\ \vdots \\ \mathcal{R}_e(A_{2K+1}) \end{pmatrix}. \quad (10.98)$$

La réduction d'une telle matrice nécessite  $8K^2$  opérations et  $K + 1$  évaluations. Les matrices permettant de construire le système linéaire sont alors définies par

$$\tilde{\alpha}_i = \mathcal{R}_e(\alpha_i), \quad \tilde{\beta}_i = \mathcal{R}_e(\beta_i), \quad \tilde{\gamma}_i = \mathcal{R}_e(\gamma_i). \quad (10.99)$$

On note enfin par  $\tilde{\mathbf{b}}$  le second membre, vecteur de taille  $2K$  construit en supprimant la troisième composante du vecteur  $\mathbf{b}$ . Nous devons alors résoudre le système linéaire

$$\tilde{\mathbb{A}} \delta\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{b}} \quad (10.100)$$

où la matrice  $\tilde{\mathbb{A}}$  est construite à partir des matrices  $\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i, \tilde{\gamma}_i$  comme expliqué précédemment.

FIG. 10.6 – Détail de la réduction du système linéaire

# Chapitre 11

## Complexité des algorithmes

Dans ce chapitre, nous comparons le coût de la méthode de relaxation lorsqu'on considère le système diphasique isotherme compositionnel. Il s'agit ici de la méthode de relaxation préservant la positivité des fractions massiques. Nous comparons cette méthode au schéma Tacite, qui est de type VFRoe et nécessite par conséquent la décomposition en éléments propres de la matrice Jacobienne du système. Dans notre analyse, nous distinguons les évaluations des lois de fermeture et le nombre d'opérations du schéma.

Le plan de ce chapitre est le suivant. Dans la première partie, nous analysons la complexité des schémas explicites. Dans la seconde, nous analysons les schémas semi-implicite linéaires. Enfin, nous concluons.

### 11.1 Algorithmes explicites

Dans ce document nous ne rappelons pas la construction du schéma Tacite, qui est présenté dans [26] et que nous avons utilisé tout au long de ce travail (voir [10, 8, 9, 4]). Nous nous contentons de reporter ici les résultats de l'analyse des schémas, qui sont présentés dans les figures 11.1 et 11.2 dans lesquelles  $K$  représente le nombre de constituants.

<b>Évaluations des lois de fermeture</b>	<b>3 K+1</b>
<b>Étape</b>	<b>Opérations</b>
Calcul de $(a, b)$	$K + 41$
Calcul auxiliaires	$2 K + 2$
Calcul des états intermédiaires	$12 K + 8$
Calcul des valeurs propres	8
Solution du problème de Riemann	$2 K + 1$
Évaluation du flux	$10 K + 2$
<b>Total</b>	<b><math>27 K + 62</math></b>

FIG. 11.1 – Nombre d'opérations du schéma de relaxation explicite

Par le terme “évaluations des lois de fermetures”, nous entendons tous les calcul des fonctions pression et glissement ainsi que leur dérivées. Comme nous ne connaissons pas la complexité de ces opérations (qui impliquent généralement des méthodes de Newton), nous ne pouvons rentrer dans le détail de ces calculs et nous nous contentons de comparer le nombre d'appels à ces lois.



Évaluations des lois de fermeture	$4K+2$
Étape	Opérations
Calculs auxiliaires	4
Calcul des Jacobiennes	$6K$
Calcul des éléments propres	$56(K+1)^3$
Calcul des flux physiques	$3K$
Calcul de la matrice de diffusion	$8K^3 + 26K^2 + 32K + 14$
Évaluation du flux	$2K^2 + 9K + 2$
<b>Total</b>	$64K^3 + 196K^2 + 218K + 76$

FIG. 11.2 – Nombre d’opérations du schéma Tacite explicite

On constate que le nombre d’évaluations des lois de fermeture est sensiblement le même, bien que l’avantage revienne tout de même à la méthode de relaxation. C’est bien naturel car la méthode de relaxation ne nécessite de calcul de dérivée que pour le calcul des coefficients de relaxation  $a$  et  $b$  alors que la méthode Tacite nécessite de calculer la Jacobienne complète du système.

La différence fondamentale entre les deux schémas est le nombre d’opérations qui évolue comme  $K^3$  dans le schéma Tacite et comme  $K$  dans le schéma de relaxation. Le gain en nombre d’opération évolue alors comme  $K^2$ , ce qui est considérable (voir figure 11.3). La raison de cette différence est bien évidemment dans le fait que la méthode Tacite nécessite une décomposition en éléments propres, dont la complexité varie selon le cube du nombre de constituants.

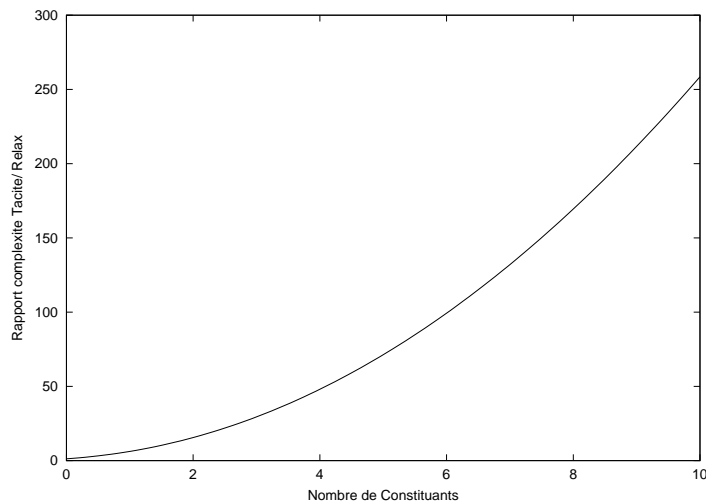


FIG. 11.3 – Étude du rapport (nombre d’opérations Tacite/ relaxation) pour le schéma explicite

## 11.2 Algorithmes semi-implicite linéaires

Nous comparons dans les figures 11.4 et 11.5 la complexité des schémas semi-implicite linéaires relaxation et Tacite.

Rappelons que la complexité de ces schémas implicites dépend du nombre de mailles noté  $I$ .

<b>Évaluations des lois de fermetures</b>	$(4K + 3)I$
<b>Étape</b>	<b>Opérations</b>
<b>Étape physique</b>	$(33K + 65)I$
- Flux numériques	$(27K + 62)I$
- Mise à jour	$(6K + 3)I$
<b>Étape mathématique</b>	
- Matrice de diffusion	$(22K + 45)I$
- Jacobiennes modifiées	$(16K + 54)I$
- Matrices $\alpha, \beta, \gamma$	$(20K^2 + 22K + 6)I$
- Second membre	$(2K + 1)I$
- Réduction	$24K^2 I$
<b>Système linéaire</b>	$(64K^2 - 8K + 4) I$
<b>Total</b>	$(108K^2 + 120K + 240) I$

FIG. 11.4 – Nombre d'opérations du schéma de relaxation semi-implicite linéaire

<b>Évaluations des lois de fermetures</b>	$(4K + 2)I$
<b>Étape</b>	<b>Opérations</b>
<b>Étape physique</b>	$(64K^3 + 196K^2 + 218K + 80)I$
- Flux numériques	$(64K^3 + 196K^2 + 215K + 77)I$
- Mise à jour	$(3K + 3)I$
<b>Étape mathématique</b>	
- Matrice de diffusion	$(8K^3 + 35K^2 + 50K + 23)I$
- Jacobiennes modifiées	$(4K^3 + 16K^2 + 22K + 10)I$
- Matrices $\alpha, \beta, \gamma$	$(4K^3 + 14K^2 + 16K + 6)I$
- Second membre	$(5K^2 + 11K + 6)I$
- Second membre	$(K + 1)I$
<b>Système linéaire</b>	$(16K^2 + 28K + 16)I$
<b>Total</b>	$(72K^3 + 247K^2 + 296K + 119)I$

FIG. 11.5 – Nombre d'opérations du schéma Tacite semi-implicite linéaire

On constate que le nombre d'évaluations des lois de fermeture est sensiblement le même.

La différence fondamentale est le nombre d'opérations qui évolue comme  $K^3$  dans le schéma Tacite et comme  $K^2$  dans le schéma de relaxation. On constate que la complexité du schéma de relaxation a augmenté (dans le schéma explicite, elle évoluait comme  $K$ ). En réalité, c'est bien naturel puisqu'on doit construire le système linéaire à inverser et donc calculer de l'ordre de  $K^2$  termes.

Le gain en nombre d'opération par rapport au schéma Tacite évolue alors comme  $K$ , ce qui est très intéressant (voir figure 11.6). Notons que nous présentons par la suite les résultats du schéma pour seulement 2 constituants, ce qui ne permet pas de constater des gains très intéressants. Ce ne sera pas le cas dans la pratique, auquel cas on utilise entre 5 et 10 constituants. Les gains seront alors plus attractifs pour la méthode de relaxation.

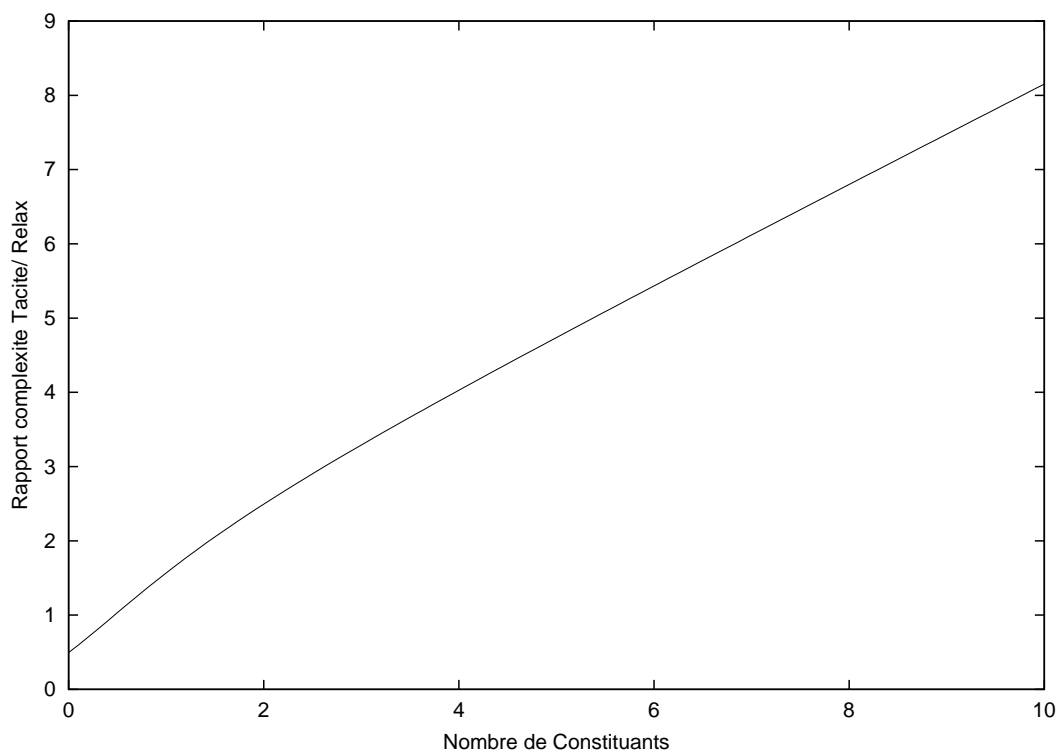


FIG. 11.6 – Étude du rapport (nombre d'opérations Tacite/ relaxation) pour le schéma semi-implicite linéaire

### 11.3 Conclusion

Nous avons analysé la complexité des schémas de relaxation explicite et semi-implicite linéaire. Comparée à celle du schéma Tacite, le schéma de relaxation s'avère peu coûteux et le gain varie comme  $K^2$  pour le schéma explicite et comme  $K$  pour le schéma semi-implicite linéaire, avec  $K$  le nombre de constituants. Dans la pratique, cet avantage pourrait être très intéressant. Rappelons enfin que la méthode de relaxation présente souvent des pas de temps deux fois plus grands que la méthode Tacite (liée à une diffusion numérique importante dans le schéma Tacite) et que cela réduit encore le temps de simulation.

Nous donnons dans ce paragraphe le calcul des dérivées partielles nécessaires au schéma de relaxation ainsi qu'au schéma TACITE. Les dérivées partielles sont dans un premier temps calculées par rapport à  $\mathbf{u} = (\rho, \rho v, \rho c_1)^T$  puis par rapport à  $\mathbf{w} = (\tau, v, c_1)^T$ . Lors de l'implémentation, la cohérence entre ces formules sera validée à la fois par des dérivées numériques et par des formules de changement de variables, données à la fin de ce paragraphe.

On suppose que toutes les dérivées partielles de la pression  $p$  et du glissement  $\varphi$  sont disponibles. En pratique, étant donnée leur complexité, ces dérivées sont des dérivées *numériques*. Elles sont validées par cohérence entre elles grâce à des formules de changement de variables. Plus précisément, pour le glissement (et de même pour la pression), il est vérifié que :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho^2} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + (\rho v) \frac{\partial \varphi}{\partial v} + (\rho c_1) \frac{\partial \varphi}{\partial c_1} \right], \\ \frac{\partial \varphi}{\partial(\rho v)} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial(\rho c_1)} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial c_1}. \end{cases} \quad (11.1)$$

Les dérivées des fonctions  $\sigma$ ,  $\sigma_1$  et  $P$  sont données par les égalités qui suivent.

- Fraction massique de gaz définie par  $Y(\mathbf{u}) = \frac{\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_L}}{\frac{1}{\rho_G} - \frac{1}{\rho_L}}$  avec  $\rho_{L,G} = \rho_{L,G}(p(\mathbf{u}))$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial \rho} = \frac{\rho'_L \rho_G (\rho - \rho_G) + \rho'_G \rho_L (\rho_L - \rho)}{\rho (\rho_L - \rho_G)^2} \frac{\partial p}{\partial \rho} - \frac{\rho_L \rho_G}{\rho^2 (\rho_L - \rho_G)}, \\ \frac{\partial Y}{\partial(\rho v)} = 0, \\ \frac{\partial Y}{\partial(\rho c_1)} = \frac{\rho'_L \rho_G (\rho - \rho_G) + \rho'_G \rho_L (\rho_L - \rho)}{\rho (\rho_L - \rho_G)^2} \frac{\partial p}{\partial(\rho c_1)}, \end{cases} \quad (11.2)$$

avec  $\rho'_{L,G} = \frac{d\rho_{L,G}}{dp}$  (on considère que, la température étant fixée à  $T = T^0$ , les densités  $\rho_{L,G}$  ne dépendent que de la pression).

- Fonction définie par  $\sigma(\mathbf{u}) = \rho X(\mathbf{u}) Y(\mathbf{u}) \varphi(\mathbf{u})$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial \rho} = X Y \varphi + \rho X Y \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \rho \varphi (1 - 2Y) \frac{\partial Y}{\partial \rho}, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial(\rho v)} = \rho X Y \frac{\partial \varphi}{\partial(\rho v)} + \rho \varphi (1 - 2Y) \frac{\partial Y}{\partial(\rho v)}, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial(\rho c_1)} = \rho X Y \frac{\partial \varphi}{\partial(\rho c_1)} + \rho \varphi (1 - 2Y) \frac{\partial Y}{\partial(\rho c_1)}. \end{cases} \quad (11.3)$$

- Fonction définie par  $\sigma_1(\mathbf{u}) = \sigma(\mathbf{u}) [X_1(p(\mathbf{u})) - Y_1(p(\mathbf{u}))]$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \rho} = (X_1 - Y_1) \frac{\partial \sigma}{\partial \rho} + \sigma (X'_1 - Y'_1) \frac{\partial p}{\partial \rho}, \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial(\rho v)} = (X_1 - Y_1) \frac{\partial \sigma}{\partial(\rho v)} + \sigma (X'_1 - Y'_1) \frac{\partial p}{\partial(\rho v)}, \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial(\rho c_1)} = (X_1 - Y_1) \frac{\partial \sigma}{\partial(\rho c_1)} + \sigma (X'_1 - Y'_1) \frac{\partial p}{\partial(\rho c_1)}, \end{cases} \quad (11.4)$$

avec  $X'_1 = \frac{dX_1}{dp}$  et  $Y'_1 = \frac{dY_1}{dp}$ .

- Pseudo-pression définie par  $P(\mathbf{u}) = p(\mathbf{u}) + \sigma(\mathbf{u}) \varphi(\mathbf{u})$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{\partial p}{\partial \rho} + \varphi \frac{\partial \sigma}{\partial \rho} + \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}, \\ \frac{\partial P}{\partial(\rho v)} = \frac{\partial p}{\partial(\rho v)} + \varphi \frac{\partial \sigma}{\partial(\rho v)} + \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial(\rho v)}, \\ \frac{\partial P}{\partial(\rho c_1)} = \frac{\partial p}{\partial(\rho c_1)} + \varphi \frac{\partial \sigma}{\partial(\rho c_1)} + \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial(\rho c_1)}. \end{cases} \quad (11.5)$$

FIG. 11.7 – Détail du calcul des dérivées partielles - 1/2

– Fraction massique de gaz définie par  $Y(\mathbf{u}) = \frac{\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_L}}{\frac{1}{\rho_G} - \frac{1}{\rho_L}}$  avec  $\rho_{L,G} = \rho_{L,G}(p(\mathbf{u}))$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial \tau} = \frac{\rho'_L \rho_G (\rho - \rho_G) + \rho'_G \rho_L (\rho_L - \rho)}{\rho (\rho_L - \rho_G)^2} \frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{\rho_L \rho_G}{\rho_L - \rho_G}, \\ \frac{\partial Y}{\partial v} = 0, \\ \frac{\partial Y}{\partial c_1} = \frac{\rho'_L \rho_G (\rho - \rho_G) + \rho'_G \rho_L (\rho_L - \rho)}{\rho (\rho_L - \rho_G)^2} \frac{\partial p}{\partial c_1}, \end{cases} \quad (11.6)$$

avec  $\rho'_{L,G} = \frac{d\rho_{L,G}}{dp}$ .

– Fonction définie par  $\sigma(\mathbf{w}) = \frac{1}{\tau} X(\mathbf{w}) Y(\mathbf{w}) \varphi(\mathbf{w})$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} = -\rho^2 XY \varphi + \rho XY \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \rho \varphi (1 - 2Y) \frac{\partial Y}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial v} = \rho XY \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \rho \varphi (1 - 2Y) \frac{\partial Y}{\partial v}, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial c_1} = \rho XY \frac{\partial \varphi}{\partial c_1} + \rho \varphi (1 - 2Y) \frac{\partial Y}{\partial c_1}. \end{cases} \quad (11.7)$$

– Fonction définie par  $\sigma_1(\mathbf{w}) = \sigma(\mathbf{w}) [X_1(p(\mathbf{w})) - Y_1(p(\mathbf{w}))]$ .

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial c_1} = (X_1 - Y_1) \frac{\partial \sigma}{\partial c_1} + \sigma (X'_1 - Y'_1) \frac{\partial p}{\partial c_1}, \quad (11.8)$$

avec  $X'_1 = \frac{dX}{dp}$  et  $Y'_1 = \frac{dY}{dp}$ .

– Pseudo-pression définie par  $P(\mathbf{w}) = p(\mathbf{w}) + \sigma(\mathbf{w}) \varphi(\mathbf{w})$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial \tau} = \frac{\partial p}{\partial \tau} + \varphi \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} + \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial p}{\partial v} + \varphi \frac{\partial \sigma}{\partial v} + \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial v}. \end{cases} \quad (11.9)$$

FIG. 11.8 – Détail du calcul des dérivées partielles - 2/2

## Chapitre 12

# Résultats numériques

Nous présentons dans ce chapitre les résultats des schémas de relaxation explicite et semi-implicite sur le modèle diphasique isotherme à 2 constituants. Nous comparons nos simulations avec celles obtenues avec le schéma Tacite. Nous présentons exclusivement des résultats de tube à choc, c'est à dire des problèmes de Riemann dont nous précisons pour chaque expérience les états gauches et droits.

Nous analyserons la qualité des résultats par comparaison avec une solution de référence et nous présenterons les temps de simulations pour chaque schéma ainsi qu'une décomposition du temps calcul. Nous verrons que la spécificité des isobares du modèle à 2 constituants pose des problèmes lors de la résolution des discontinuités de contact.

Le plan de ce chapitre est le suivant. Nous commençons par une introduction dans laquelle nous précisons certaines données relatives aux expériences numériques. Puis nous détaillons les résultats des 5 expériences numériques avant de conclure.

### 12.1 Introduction

Nous précisons dans chaque cas une solution de référence. Dans le cas du glissement nul et si on a une loi de pression régulière, la solution de référence est la solution exacte du problème de Riemann. En effet, dans ce cas, le système hyperbolique a la même structure que le système diphasique isotherme non compositionnel. Rappelons que dans ce cas, le système possède trois valeurs propres, l'onde lente étant associée à un champ linéairement dégénéré et les deux ondes rapides étant associés à des champs vraiment non linéaires. Pour l'onde lente, l'invariant fort est  $c_1$ , les invariants faibles sont  $v$  et  $p$ . Pour plus de détails, consulter [4].

La situation serait simple si la loi de pression était régulière sur tout le domaine. Mais nous avons montré qu'elle est régulière dans les domaines diphasiques et monophasiques, mais pas à la transition de phase. Ainsi, si les états gauche et droit sont dans le même domaine, la solution exacte est bien celle définie dans le paragraphe précédent. Par contre, si les états gauche et droit sont dans des domaines différents, la solution exacte est inconnue.

Pour les expériences dont les résultats sont présentés dans les paragraphes qui suivent, les paramètres numériques sont donnés dans la figure (12.1).

La figure (12.2) présente l'intérêt de chaque expérience par rapport aux phases présentes dans l'écoulement, dont on constatera qu'elles ont une grande influence sur les résultats.

Nous présentons dans ce paragraphe les caractéristiques numériques des schémas dont les résultats sont présentés ici.

Les schémas explicites sont d'ordre 2 en espace et en temps. Les schémas semi-implicites linéaires sont d'ordre 2 en espace et d'ordre 2 en temps pour les ondes lentes. L'ordre 2 en espace est atteint par une technique de limitation de pente (MUSCL). Le limiteur choisi est minmod. Les variables limitées lors de la montée en ordre de précision en espace du schéma numérique sont les variables dites "physiques". Ici, il s'agit des fractions massiques des constituants  $\{c_k\}_{k=1,K}$ , de la vitesse du mélange  $v$  ainsi que de la pression  $p$ . L'ordre 2 en temps est atteint par un schéma Runge-Kutta d'ordre 2.

Pour les schémas explicites, la CFL est 0.5. Elle limite le pas de temps qui est contraint par les ondes rapides du système. Pour les schémas semi-implicite linéaires, on calcule deux pas de temps avec une CFL de 0.5 pour les ondes lentes et 20 pour les ondes rapides : le pas de temps final est le plus petit des deux pas de temps.

FIG. 12.1 – Paramètres des schémas numériques

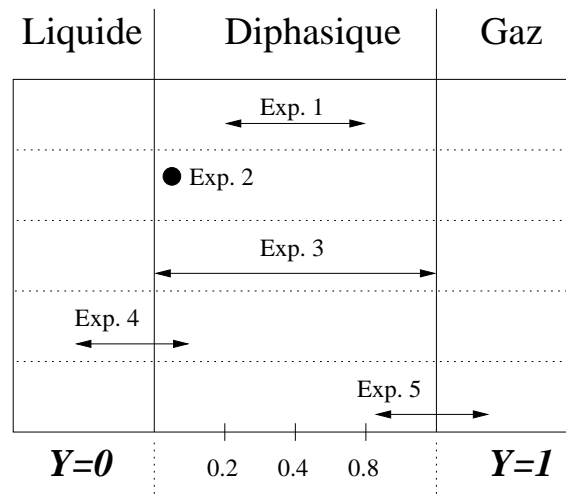


FIG. 12.2 – Position des expériences par rapport aux transitions de phases

Date finale : 20 (s)

Géométrie de la conduite et discrétisation :

- Longueur : 100 m, **horizontal**
- Diamètre : 0.144 m
- Pas d'espace : 1. m (100 mailles)

Modèles thermodynamiques et hydrodynamique :

- Thermodynamique : 2 constituants, liquide incompressible, gaz parfait
- Hydrodynamique : glissement nul

Caractéristiques du modèle thermodynamique :

$$\begin{array}{l|l} p_1^0 = 505.39 \cdot 10^5 \text{ (Pa)} & p_2^0 = 0.02349 \cdot 10^5 \text{ (Pa)} \\ p^0 = 1. \cdot 10^5 \text{ (Pa)} & \rho_L^0 = 997.10 \text{ (kg/m}^3\text{)} \\ a_L = \infty & a_G = 330. \text{ (m/s)} \end{array}$$

Etats gauche (**L**) et droit (**R**) :

$$\begin{pmatrix} p \\ c_1 \\ v \\ Y \\ \rho \end{pmatrix}_{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} 1.10^5 \\ 0.2 \\ 1. \\ 0.20322 \\ 4.5022 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} p \\ c_1 \\ v \\ Y \\ \rho \end{pmatrix}_{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} 1.10^5 \\ 0.8 \\ 1. \\ 0.81884 \\ 1.1211 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{\mathbf{L}} = (-145.9, 1., 147.9)^T \quad \lambda_{\mathbf{R}} = (-294.0, 1., 296.0)^T$$

Solution exacte : discontinuité de contact de vitesse 1 (m/s).

Intérêt : nous restons dans la zone diphasique et testons une discontinuité de vitesse lente, ce qui conduit à un grand nombre d'itérations.

FIG. 12.3 – Détail de l'expérience 1



Date finale : 1 (s)

Géométrie de la conduite et discrétisation :

- Longueur : 100 m, **horizontal**
- Diamètre : 0.144 m
- Pas d'espace : 0.5 m (200 mailles)

Modèles thermodynamiques et hydrodynamique :

- Thermodynamique : 2 constituants, liquide incompressible, gaz parfait
- Hydrodynamique : glissement nul

Caractéristiques du modèle thermodynamique :

$$\begin{array}{l} p_1^0 = 505.39 \cdot 10^5 \text{ (Pa)} \\ p^0 = 1. \cdot 10^5 \text{ (Pa)} \\ a_L = \infty \end{array} \left| \begin{array}{l} p_2^0 = 0.02349 \cdot 10^5 \text{ (Pa)} \\ \rho_L^0 = 997.10 \text{ (kg/m}^3\text{)} \\ a_G = 330. \text{ (m/s)} \end{array} \right.$$

Etats gauche (**L**) et droit (**R**) :

$$\begin{pmatrix} p \\ c_1 \\ v \\ Y \\ \rho \end{pmatrix}_{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} 34.996 \cdot 10^5 \\ 0.1 \\ -41.616 \\ 3.3109 \cdot 10^{-2} \\ 500. \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} p \\ c_1 \\ v \\ Y \\ \rho \end{pmatrix}_{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} 30.250 \cdot 10^5 \\ 0.1 \\ -57.021 \\ 4.2778 \cdot 10^{-2} \\ 400. \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{\mathbf{L}} = (-107.7, -41.6, 24.5)^T \quad \lambda_{\mathbf{R}} = (-128.7, -57.0, 14.6)^T$$

Solution exacte : choc de vitesse 20 (m/s).

Intérêt : nous restons dans la zone diphasique et testons un choc.

FIG. 12.4 – Détail de l'expérience 2

Date finale : 5 (s)

Géométrie de la conduite et discrétisation :

- Longueur : 100 m, **horizontal**
- Diamètre : 0.144 m
- Pas d'espace : 0.5 m (200 mailles)

Modèles thermodynamiques et hydrodynamique :

- Thermodynamique : 2 constituants, liquide compressible, gaz parfait
- Hydrodynamique : glissement nul

Caractéristiques du modèle thermodynamique :

$$\begin{array}{l|l} p_1^0 = 10.10^5 \text{ (Pa)} & p_2^0 = 0.210^5 \text{ (Pa)} \\ p^0 = 1.10^5 \text{ (Pa)} & \rho_L^0 = 997.10 \text{ (kg/m}^3\text{)} \\ a_L = 500. \text{ (m/s)} & a_G = 330. \text{ (m/s)} \end{array}$$

Etats gauche (**L**) et droit (**R**) :

$$\begin{pmatrix} p \\ c_1 \\ v \\ Y \\ \rho \end{pmatrix}_{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} 1.10^5 \\ 0.8163265 \\ 4. \\ 0. \\ 0.91827 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} p \\ c_1 \\ v \\ Y \\ \rho \end{pmatrix}_{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} 1.10^5 \\ 0.0816327 \\ 4. \\ 1. \\ 997.10 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{\mathbf{L}} = (-323.013, 4., 331.013)^T \quad \lambda_{\mathbf{R}} = (-349.586, 4., 357.586)^T$$

Solution exacte : discontinuité de contact de vitesse 4 (m/s).

Intérêt : nous parcourons entièrement la zone diphasique sans franchir les zones de transition.

FIG. 12.5 – Détail de l'expérience 3

Date finale : 5 (s)

Géométrie de la conduite et discrétisation :

- Longueur : 100 m, **horizontal**
- Diamètre : 0.144 m
- Pas d'espace : 0.5 m (200 mailles)

Modèles thermodynamiques et hydrodynamique :

- Thermodynamique : 2 constituants, liquide compressible, gaz parfait
- Hydrodynamique : glissement nul

Caractéristiques du modèle thermodynamique :

$$\begin{array}{l|l} p_1^0 = 500.10^5 \text{ (Pa)} & p_2^0 = 0.02 \cdot 10^5 \text{ (Pa)} \\ p^0 = 1.10^5 \text{ (Pa)} & \rho_L^0 = 997.10 \text{ (kg/m}^3\text{)} \\ a_L = 500. \text{ (m/s)} & a_G = 330. \text{ (m/s)} \end{array}$$

Etats gauche (**L**) et droit (**R**) :

$$\begin{pmatrix} p \\ c_1 \\ v \\ Y \\ \rho \end{pmatrix}_{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} 1.10^5 \\ 0.01 \\ 4. \\ 8.2197 \cdot 10^{-3} \\ 100.53 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} p \\ c_1 \\ v \\ Y \\ \rho \end{pmatrix}_{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} 1.10^5 \\ 0. \\ 4. \\ 0. \\ 997.10 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{\mathbf{L}} = (-25.5, 4., 33.5)^T \quad \lambda_{\mathbf{R}} = (-496.0, 4., 504.0)^T$$

Solution exacte : discontinuité de contact de vitesse 4 (m/s).

Intérêt : nous franchissons la zone de transition diphasique – monophasique liquide.

FIG. 12.6 – Détail de l'expérience 4

Date finale :  $5 \cdot 10^{-2}$  (s)

Géométrie de la conduite et discrétisation :

- Longueur : 100 m, **horizontal**
- Diamètre : 0.144 m
- Pas d'espace : 0.5 m (200 mailles)

Modèles thermodynamiques et hydrodynamique :

- Thermodynamique : 2 constituants, liquide compressible, gaz parfait
- Hydrodynamique : glissement nul

Caractéristiques du modèle thermodynamique :

$$\begin{array}{l|l} p_1^0 = 500 \cdot 10^5 \text{ (Pa)} & p_2^0 = 0.02 \cdot 10^5 \text{ (Pa)} \\ p^0 = 1 \cdot 10^5 \text{ (Pa)} & \rho_L^0 = 997.10 \text{ (kg/m}^3\text{)} \\ a_L = 500 \text{ (m/s)} & a_G = 330 \text{ (m/s)} \end{array}$$

Etats gauche (**L**) et droit (**R**) :

$$\begin{pmatrix} p \\ c_1 \\ v \\ Y \\ \rho \end{pmatrix}_{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} 1.0871 \cdot 10^5 \\ 0.98 \\ 89.569 \\ 0.99832 \\ 0.999 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} p \\ c_1 \\ v \\ Y \\ \rho \end{pmatrix}_{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} 0.98010 \cdot 10^5 \\ 0.98 \\ 55.076 \\ 1. \\ 0.9000 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{\mathbf{L}} = (-237.1, 89.5, 416.2)^T \quad \lambda_{\mathbf{R}} = (-274.9, 55.0, 385.0)^T$$

Solution exacte : choc de vitesse 400 (m/s).

Intérêt : nous franchissons la zone de transition diphasique – monophasique gaz.

FIG. 12.7 – Détail de l'expérience 5

## 12.2 Expérience 1

Les détails de cette expérience sont donnés dans la figure (12.3). C'est une expérience facile car nous restons strictement à l'intérieur du domaine diphasique, dans lequel la pression est régulière.

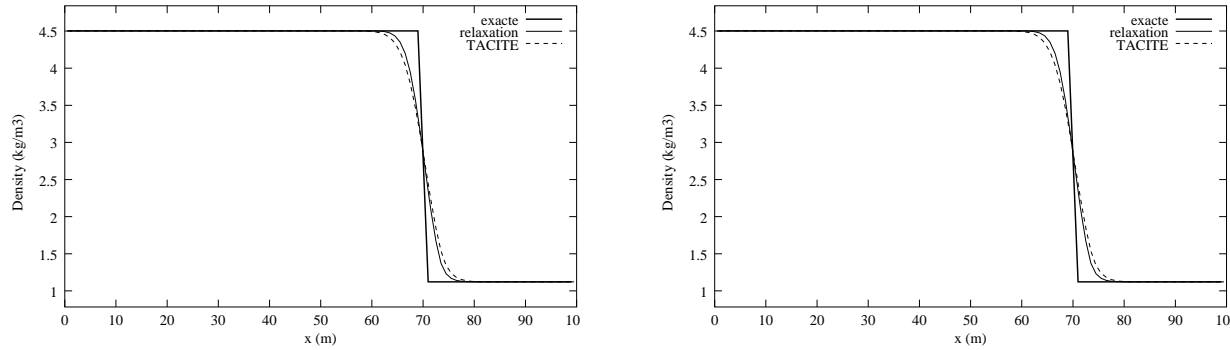


FIG. 12.8 – Expérience 1 – Résultat des schémas explicites (à gauche) et semi-implicite linéaire (à droite)

On constate sur les figures (12.8) que les schémas numériques explicites et semi-implicite linéaires s'accordent bien avec la solution exacte. La méthode de relaxation diffuse moins que le schéma Tacite, se qui est en accord avec tous les résultats obtenus jusque là : la diffusion numérique est plus importante avec Tacite, à cause des coefficients de diffusion qui sont fixés à  $k = 2$  (voir [4]).

Schéma	Temps
Relaxation explicite	20 min 2 sec
Relaxation implicite	1 min, 10 sec
Tacite explicite	1 heu, 22 min, 59 sec
Tacite implicite	2 min, 13 sec

FIG. 12.9 – Expérience 1 – Temps d'exécution

On notera dans le tableau (12.9) l'importance des temps CPU qui deviennent, avec une thermodynamique compositionnelle, importants. On constate le gain très important des schémas implicites sur les schémas explicite avec, on l'a constaté sur les figures (12.8), une qualité identique. On constate pour les 4 schémas numérique que le simulateur passe entre 50 et 80 % du temps dans les procédures d'évaluation des lois de fermeture thermodynamiques et hydrodynamiques.

## 12.3 Expérience 2

Les détails de cette expérience sont donnés dans la figure (12.4). C'est une expérience facile car nous restons strictement à l'intérieur du domaine diphasique, dans lequel la pression est régulière.

On constate sur les figures (12.11) que les schémas numériques explicites et semi-implicite linéaires s'accordent bien avec la solution exacte.

Les figures (12.12) montrent la décomposition du temps d'exécution des schémas semi-implicites. On constate que l'inversion du système linéaire par la méthode de Gauss consomme une part sensible du schéma numérique mais peu importante vis à vis du temps total. Concernant le schéma Tacite, on constate que le calcul des valeurs propres et des vecteurs propres représente environ 40 % du schéma numérique.

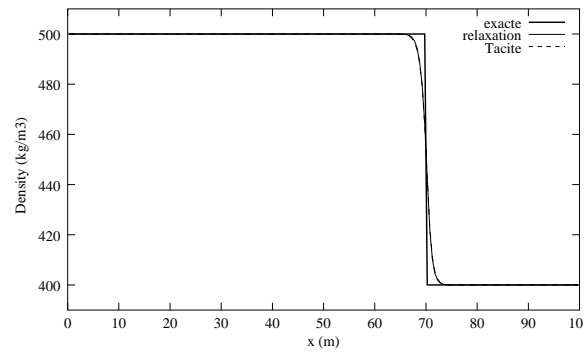
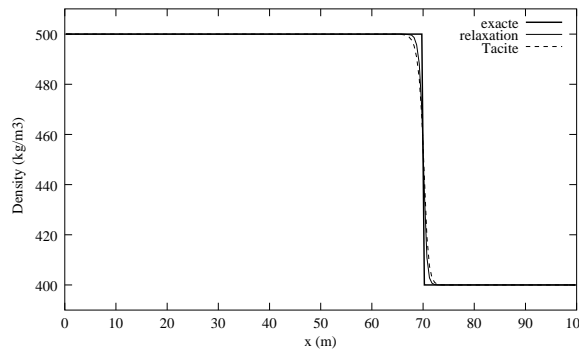


FIG. 12.10 – Expérience 2 – Résultat des schémas explicites (à gauche) et semi-implicite linéaire (à droite)

FIG. 12.11 – Expérience 2 – Résultat des schémas explicites

Total	Proportion	Total	Proportion
Thermo+Hydro	58.2 %	Thermo+Hydro	44.4 %
Schéma	41.8 %	Schéma	55.6 %
Dans Schéma	Proportion	Dans Schéma	Proportion
Gauss	21.2 %	Valeurs propres	41.0 %
Autre	78.8 %	Gauss	8.1 %
		Autre	50.9 %

FIG. 12.12 – Expérience 2 – Temps d’exécution du schéma de relaxation semi-implicite linéaire (à gauche) et du schéma Tacite semi-implicite linéaire (à droite)

## 12.4 Expérience 3

Les détails de cette expérience sont donnés dans la figure (12.5). C'est une expérience difficile car nous allons d'un bord à l'autre du domaine diphasique. La pression est donc régulière mais la variation de densité est grande et le schéma numérique doit préserver la positivité de la fraction massique de gaz.

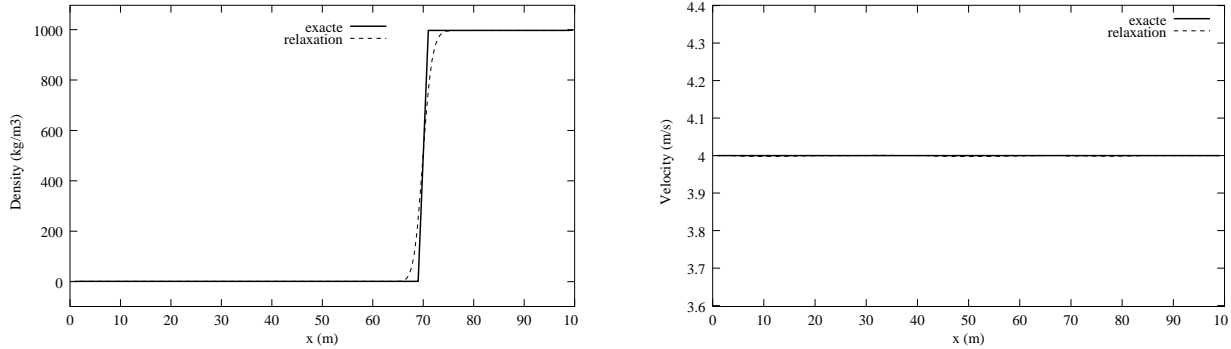


FIG. 12.13 – Expérience 3 – Résultat du schéma de relaxation explicite

Pour cette expérience, le schéma explicite Tacite a manqué de robustesse puisque la simulation s'arrête au bout de quelques itérations lors de la remise à jour des variables conservatives car il détecte une fraction massique du premier constituant négative ( $c_1 = -2.9641 \cdot 10^{-2}$ ). Le schéma semi-implicite Tacite se comporte de la même manière.

Le schéma de relaxation explicite permet sur ce calcul d'obtenir le résultat présenté dans la figure (12.13). On constate que ce résultat est satisfaisant puisque la densité se propage à une vitesse convenable et que la vitesse (invariant faible) est bien constante.

Le schéma de relaxation semi-implicite linéaire manque de robustesse puisqu'il s'arrête à  $t = 0.35$  (s) au terme de la 120<sup>e</sup> itération car il détecte, lors de la remise à jour de la fraction massique du premier constituant, une valeur dépassant 1 ( $c_1 = 1.00232$ ). Ce résultat n'est pas surprenant car l'ajustement des coefficients de relaxation garantit la robustesse du schéma explicite seulement : la robustesse du schéma semi-implicite linéaire reste soumise au comportement favorable (dans la plupart des cas) ou défavorable (par exemple ici) de la méthode implicite linéaire.

Compte tenu du fait que le schéma explicite a fonctionné, nous suspectons qu'un pas de temps plus petit aurait pu faire fonctionner ce cas. On constate que, lorsqu'on choisit une CFL sur les ondes rapides égale à 10, le cas-test passe. Avec cette CFL, les résultats de schéma de relaxation semi-implicite linéaire se superposent (visuellement) à ceux obtenus avec le schéma explicite.

## 12.5 Expérience 4

Les détails de cette expérience sont donnés dans la figure (12.6). C'est une expérience difficile car nous allons de part et d'autre de la zone de transition monophasique liquide / diphasique. La pression est donc non régulière mais la variation de densité est faible.

On constate sur les figures (12.14) que les schémas numériques explicites sont bien conservatifs mais que la vitesse et la pression sont éloignées de la solution exacte. L'explication de ces résultats, liés aux propriétés du modèle thermodynamique, se trouve dans la figure (12.15).

Pour cette expérience, les schémas semi-implicite Tacite et relaxation sont mis en échec. Ils produisent tous deux une fraction massique du premier constituant négative dès les premières itérations. Pour le schéma Tacite, aucune CFL rapide n'a été trouvée pour permettre de faire cette expérience.

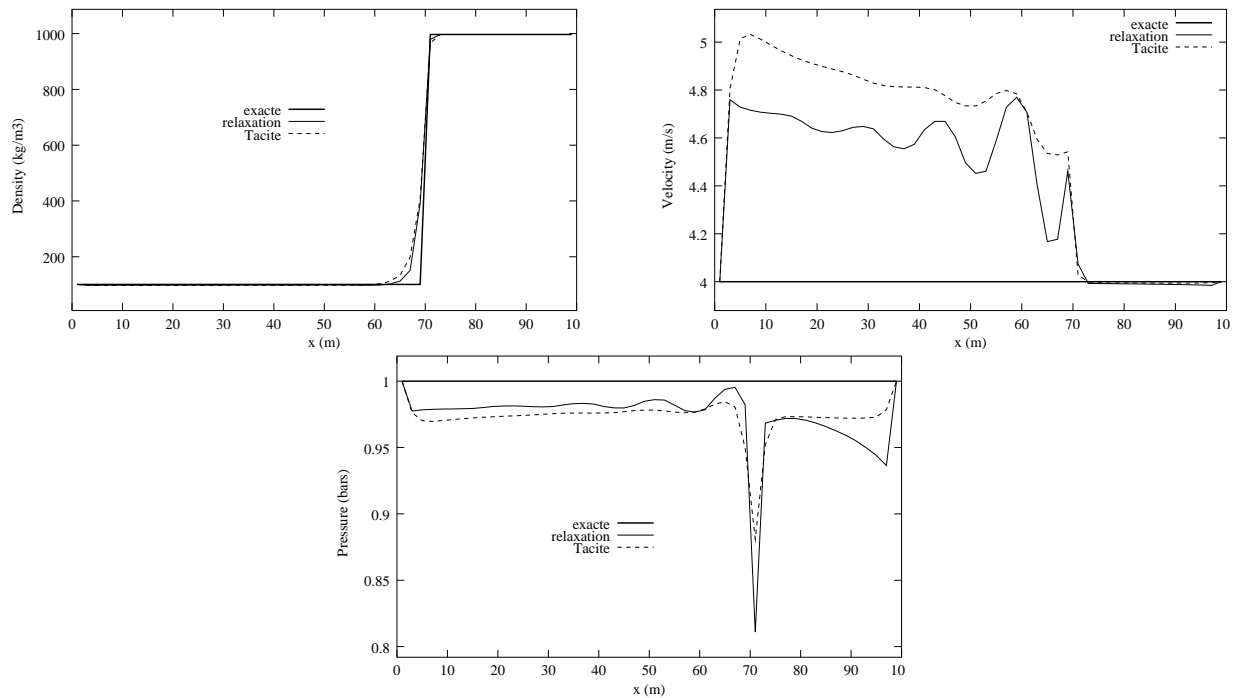


FIG. 12.14 – Expérience 4 – Résultat des schémas explicites

Pour le schéma de relaxation, une CFL rapide égale à 5 (au lieu de 20) permet d’obtenir des résultats comparables à ceux obtenus avec le schéma de relaxation explicite.

## 12.6 Expérience 5

Les détails de cette expérience sont donnés dans la figure (12.7). C’est une expérience difficile car nous allons de part et d’autre de la zone de transition monophasique gaz / diphasique. La pression est donc non régulière mais la variation de densité est faible.

On constate sur les figures (12.17–12.18) que les schémas se comportent favorablement. En ce qui concerne les schémas explicites, c’est le schéma de relaxation qui diffuse le moins. En ce qui concerne les schéma semi-implicites linéaires, c’est le schéma Tacite qui diffuse le moins.

## 12.7 Conclusion

Nous avons constaté que, dans tous des cas, le schéma de relaxation produit une solution numérique proche de celle du schéma Tacite. Dans la plupart des cas, cette solution est correcte, excepté lors de discontinuité de contact pour des problèmes de Riemann pour lesquels les états gauche et droits sont de part et d’autre de la zone de transition monophasique–diphasique. Nous avons expliqué cette erreur grâce à la caractérisation des courbes isobares du modèle à 2 constituants. Il s’agit d’un problème important car, dans ce cas, la simulation produit de grandes oscillations dans la pression alors que celle-ci devrait rester constante.

Lorsqu’on considère des chocs ou des détente, la méthode de relaxation produit des solution numériques satisfaisantes, y compris à la traversée des zones de transition, malgré la non-régularité de la dérivée de la pression.



Dans ce paragraphe, nous expliquons les mauvais résultats de l'expérience 4, pour lesquels on constate que la pression exacte est mal approchée par le schéma. L'idée consiste à faire "à la main" la première itération du schéma numérique de Godunov. Nous vérifierons que la pression calculée au terme de la première itération est inexacte.

Soient  $\mathbf{u}_{\mathbf{L},\mathbf{R}} = (\rho, \rho v, \rho c_1)$  les états gauche et droit du problème de Riemann. Ils sont tels que  $v_{\mathbf{L}} = v_{\mathbf{R}} = \tilde{v} = 4$  (m/s) et  $p_{\mathbf{L}} = p_{\mathbf{R}} = \tilde{p} = 1$  (bar). Supposons que à  $t = 0$ , l'état initial est :

$$\mathbf{u}_i^0 = \begin{cases} \mathbf{u}_{\mathbf{L}}, & \text{si } i \leq 0, \\ \mathbf{u}_{\mathbf{R}}, & \text{si } 1 \leq i. \end{cases} \quad (12.1)$$

Considérons maintenant un schéma de Godunov pour lequel la formule de remise à jour est

$$\mathbf{u}_i^1 = \mathbf{u}_i^0 - \lambda \left[ \mathcal{F}(\mathbf{u}_{i+1/2}^*) - \mathcal{F}(\mathbf{u}_{i-1/2}^*) \right], \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad (12.2)$$

avec  $\mathcal{F} = (\rho v, \rho v^2 + p, \rho c_1 v)^T$  et  $\lambda = \Delta t / \Delta x$ . Puisque la solution exacte est une discontinuité de contact de vitesse positive, la solution du problème de Riemann sur les arêtes est

$$\mathbf{u}_{i+1/2}^* = \begin{cases} \mathbf{u}_{\mathbf{L}}, & \text{si } i \leq 0, \\ \mathbf{u}_{\mathbf{R}}, & \text{si } 1 \leq i. \end{cases} \quad (12.3)$$

Ainsi, après mise à jour, la solution approchée à la première itération est

$$\mathbf{u}_i^1 = \begin{cases} \mathbf{u}_{\mathbf{L}}, & \text{si } i \leq 0, \\ \mathbf{u}_{\mathbf{R}}, & \text{si } 2 \leq i. \end{cases} \quad (12.4)$$

En ce qui concerne la maille numéro 1, il vient

$$\rho_1^1 = \rho_1^0 - \lambda \left[ (\rho v)_{1+1/2}^* - (\rho v)_{1-1/2}^* \right], \quad (12.5)$$

$$(\rho c_1)_1^1 = \rho_1^0 - \lambda \left[ (\rho c_1 v)_{1+1/2}^* - (\rho c_1 v)_{1-1/2}^* \right], \quad (12.6)$$

et par conséquent

$$\rho_1^1 = \lambda v \rho_{\mathbf{L}} + (1 - \lambda v) \rho_{\mathbf{R}}, \quad (12.7)$$

$$(\rho c_1)_1^1 = \lambda v (\rho c_1)_{\mathbf{L}} + (1 - \lambda v) (\rho c_1)_{\mathbf{R}}. \quad (12.8)$$

Comme la vitesse est positive et que le pas de temps est limité par la condition CFL  $1 - \lambda v \geq 0$ , il s'avère que la maille numéro 1 est une combinaison linéaire positive des états gauche et droit. Or les états gauche et droit se trouvent sur l'isobare associée à  $\tilde{p}$ . Mais, à cause du franchissement de la zone de transition de phase, les isobares sont des droites de pente différentes (c'est le théorème (9.2.5)). Par conséquent, l'état  $\mathbf{u}_1^1$  ne se trouve pas sur l'isobare associée à  $\tilde{p}$ , comme l'illustre la figure (12.16). Cela explique pourquoi, à la première itération, la pression sur la maille numéro 1 n'est pas la pression  $\tilde{p}$ . Cette erreur se propage ensuite de proche en proche à l'ensemble du maillage.

D'un autre point de vue, cette explication permet de comprendre pourquoi les expériences faites avec le système diphasique non compositionnel fonctionnaient correctement. En effet, le théorème (9.2.4) permet de voir que le problème qui apparaît dans le modèle compositionnel n'existe pas dans le modèle non compositionnel : en effet, il n'y a dans le modèle non compositionnel aucune courbe de transition de phase. Ainsi, toute combinaison linéaire des états gauche et droit se trouve encore sur l'isobare.

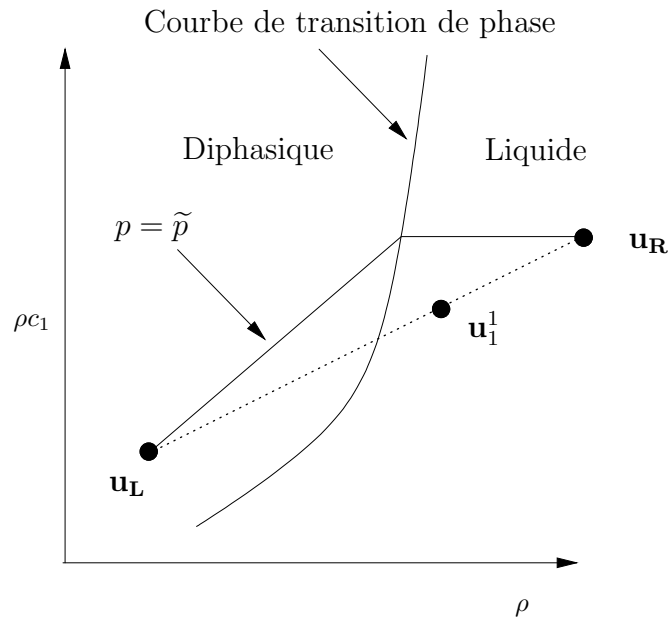


FIG. 12.16 – Position de l'expérience 4 dans le plan  $(\rho, \rho c_1)$

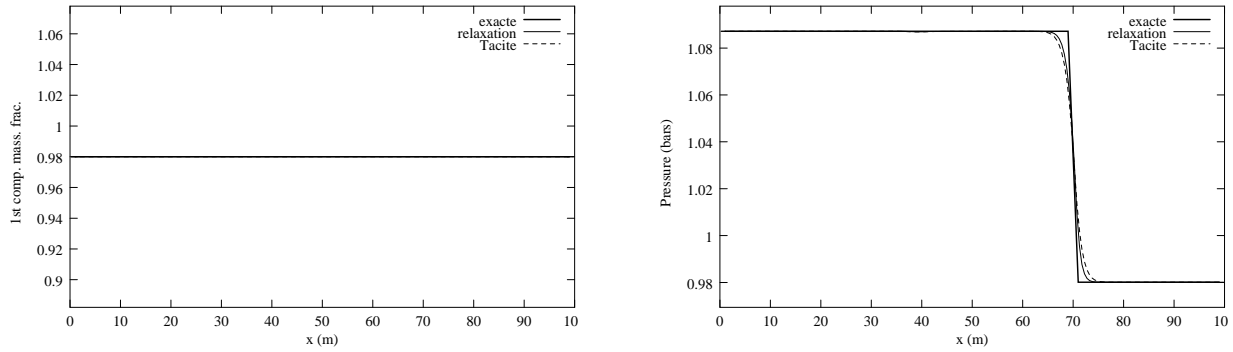


FIG. 12.17 – Expérience 5 – Résultat des schémas explicites

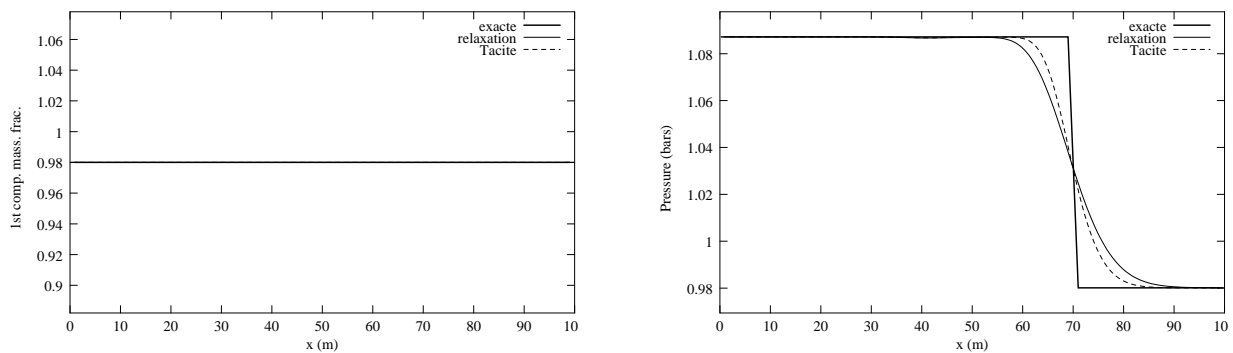


FIG. 12.18 – Expérience 5 – Résultat des schémas semi-implicite linéaires

Du point de vue du temps calcul, la méthode de relaxation s'avère moins coûteuse que la méthode Tacite, ce qui est conforme à l'analyse théorique de complexité du chapitre précédent.

# Chapitre 13

## Conclusion de la seconde partie

Nous avons présenté une méthode de relaxation pour l'approximation des solutions d'un système diphasique isotherme compositionnel. Nous avons constaté qu'une extension naturelle de la méthode de Larroutou ne permet pas de préserver la positivité des fractions massiques des constituants. Nous avons également vu qu'une méthode fondée sur le système de Born-Infeld ne permet pas d'assurer la robustesse de la méthode pour toute loi de glissement. Nous avons alors proposé une extension de la méthode introduite dans la première partie de cette thèse. Nous considérons la résolution d'un système de relaxation dont les champs sont linéairement dégénérés. Le schéma numérique est une méthode de Godunov pour laquelle la résolution du problème de Riemann est peu coûteuse. Le calcul des coefficients de relaxation est rendu possible par un découplage, lors du développement de Chapman-Enskog, du sous-système lié à la conservation de la masse et de la quantité de mouvement, du sous-système lié à l'évolution des fractions massiques. Mais surtout, il est possible d'augmenter un coefficient de relaxation de telle sorte que la positivité des fractions massiques des constituants soit assurée. La méthode peut s'étendre à un schéma semi-implicite linéaire car il est possible d'interpréter la méthode de Godunov comme une méthode de Roe.

Le schéma ainsi construit est moins coûteux que le schéma Tacite pour 2 raisons. La première tient au fait que le pas de temps du schéma de relaxation est souvent 2 fois plus grand que celui du schéma Tacite. La seconde est liée au fait que la méthode Tacite nécessite la décomposition en éléments propres de la matrice Jacobienne, ce qui, dans le cas du système compositionnel, est très coûteux. De ce point de vue, pour le schéma semi-implicite linéaire, le gain est de l'ordre du nombre de constituants.

Les résultats numériques ont été présentés dans le cadre de problèmes de Riemann (sans conditions aux limites). Le schéma de relaxation se comporte d'une manière analogue au schéma Tacite pour un coût moindre. Il a été constaté que, lorsqu'on considère une discontinuité de contact, les 2 schémas produisent des solutions non satisfaisantes à la traversée des zones de transition de phases. Cela a été expliqué grâce à la structure particulière des isobares du modèle à 2 constituants.

Concernant le modèle compositionnel, les perspectives concernent les problèmes de Riemann de type discontinuités de contact, les problèmes avec conditions aux limites ainsi que les problèmes mettant en jeu un grand nombre de constituants.

Nous avons constaté les difficultés numériques liées à la constance de la pression à travers les discontinuités de contact. Or la littérature sur le sujet est vaste. Pour exemple, nous pouvons citer les travaux de Abgrall dans [1] ou bien encore, concernant les propriétés du schéma VFRoe, la thèse de Seguin [58]. Dans le cadre de cette thèse, nous n'avons pas eu assez de temps pour approfondir suffisamment le sujet. Rappelons toutefois que le modèle thermodynamique à 2 constituants utilisé

ici est spécifique à la problématique pétrolière. Mais il ne semble pas qu'aucun remède ne puisse être trouvé pour ce problème.

Il reste par ailleurs à valider le schéma de relaxation avec des problèmes impliquant des variations des conditions aux limites. Bien que ce type de tests soit délicat, il ne semble pas que le modèle compositionnel pose des problèmes spécifiques.

Enfin, nous avons validé le schéma de relaxation uniquement sur un modèle à 2 constituants. Or nous avons démontré que le gain en temps calcul de la méthode de relaxation par rapport au schéma VFRoe–Tacite était proportionnel au nombre de constituants. Ceci laisse espérer des gains importants dans les applications pratiques, dans lesquelles on utilise couramment 7 ou 8 constituants. Lors de développements ultérieurs, il serait intéressant de constater ce gain, compte tenu du fait que les lois de fermetures deviennent, elles aussi de plus en plus complexes.

# Bilan

## Résultats obtenus

La présente recherche est consacrée à l'approximation numérique des solutions de systèmes d'EDP non linéaires répondant à des modèles d'écoulements en conduites pétrolières. Ces modèles sont complétés par des lois de fermeture (pression et la loi de glissement entre les phases) très non-linéaires. Ces non-linéarités rendent très coûteuses les techniques d'approximation usuelles, basées sur la recherche des éléments propres de la matrice Jacobienne des flux, telles la méthode de type VFRoe utilisée dans le code Tacite.

Nous avons introduit une méthode de relaxation originale, proposant contrairement aux approches classiques, de ne relaxer que les non-linéarités les plus sévères, c'est à dire la loi de pression ainsi que la loi de glissement. Nos premiers travaux ont concerné le système diphasique isotherme non-compositionnel, aussi appelé système gaz-liquide.

Nous pouvons alors énoncer des critères de stabilité (fondés sur le développement de Chapman-Enskog) de la procédure de relaxation tout en autorisant une évaluation peu coûteuse de la fonction flux numérique. Nous avons proposé une extension de cette technique d'approximation au second ordre en temps et en espace. L'intérêt de l'approche a été illustré dans un premier temps en comparant les solutions discrètes aux solutions exactes de problèmes de Riemann. De manière à envisager le cas d'écoulements pétroliers, nous avons étudié un large ensemble de conditions aux limites dans le contexte de la méthode de relaxation. Le traitement proposé a été validé dans le cadre de problèmes transitoires réels (i.e. impliquant des variations des conditions aux limites) en comparant nos résultats aux résultats obtenus par Tacite. Un excellent accord a été observé.

Or les schémas numériques explicites sont, dans les écoulements en conduites pétrolières, limités par leur manque de précision vis à vis du transport des constituants et prohibitifs du point de vue du temps calcul. Nous avons par conséquent développé une technique d'implicitation de la méthode de relaxation. Elle repose sur une méthode d'implicitation sélective des ondes composant le modèle de relaxation. Les ondes rapides (acoustiques) sont implicitées alors que les ondes lentes (ondes de matières) sont explicitées. Nous avons développé une stratégie d'implicitation des termes source de relaxation permettant de réduire la taille du problème matriciel à résoudre tout en permettant une bien meilleure approximation des états transitoires et stationnaires. La technique d'intégration temporelle semi-implicite linéarisée a été validée sur les problèmes réels (i.e. en présence de conditions limites) et les résultats obtenus ont été comparé aux résultats du code Tacite avec un excellent accord.

Nous avons également proposé une méthode de relaxation pour la simulation des écoulements diphasiques isotherme compositionnels. Notre méthode garantit la positivité des fractions massiques des constituants pour le schéma explicite. Sur cette base, nous construisons schéma numérique semi-implicite linéaire. Nous avons considéré des simulations numériques sur un modèle à 2 constituants

et sur la base de problèmes de Riemann. Ces simulations montrent un comportement comparable en qualité à celui du schéma Tacite, pour un coût moindre. Nous avons expliqué les difficultés qui apparaissent lorsque l'on considère un problème de Riemann mettant en jeu des états gauche et droit de part et d'autre de la zone de transition de phase.

## Perspectives

Système d'EDP	Proposition de schéma	Expériences numériques
Diphasique, isotherme, non compositionnel	✓	✓
Diphasique, non isotherme, non compositionnel	✓	?
Triphasique, isotherme, non compositionnel	✓	?
Diphasique, isotherme, compositionnel	✓	-
⋮	⋮	
Triphasique, non isotherme, compositionnel	?	?

FIG. 13.1 – Objectifs de la thèse en termes de lois de conservation

Deux études auxiliaires, présentées en annexe, ont été menées en parallèle. Elle concernent, pour l'une, le système gaz-liquide avec équation d'énergie (système diphasique non isotherme, non compositionnel) et, pour l'autre, le système gaz-eau-huile (système triphasique, isotherme, non compositionnel). Ces études montrent que la technique proposée dans cette thèse s'étend à ces deux systèmes de lois de conservation. La positivité des fractions massique peut toujours être assurée pour le schéma numérique explicite et un schéma semi-implicite linéaire peut toujours être construit. Or l'objectif ultime de cette étude est de trouver un schéma permettant de traiter un système triphasique compositionnel avec équation d'énergie. Cette thèse propose les éléments de base qui permettent de construire un schéma numérique permettant d'assurer la positivité des fractions massiques et à un coût moindre.

## Annexe A

# Compléments à l'analyse du temps CPU pour le système gaz-liquide

Ce chapitre est un complément au chapitre 6 qui concerne l'analyse de la complexité de la méthode de relaxation pour le système diphasique isotherme non compositionnel (système gaz-liquide).

Nous présentons une série d'encadrés qui détaillent le coût des opérations de base du schéma. Nous donnons également le détail des expériences qui ont servi à décomposer le temps CPU des schémas numériques.

1. Calcul de  $(a, b)$  de base : **12 opérations**

$$A_\alpha = -(P_\tau)_\alpha + (P_v)_\alpha^2, \quad B_\alpha = (\sigma_Y)_\alpha^2, \quad \alpha = \mathbf{L}, \mathbf{R} \quad (\text{A.1})$$

$$\tilde{a} = \sqrt{\max(A_{\mathbf{L}}, A_{\mathbf{R}})}, \quad \tilde{b} = \sqrt{\max(B_{\mathbf{L}}, B_{\mathbf{R}})} \quad (\text{A.2})$$

2. Calcul du  $a$  assurant  $\tau_{\mathbf{L}}^* > 0, \tau_{\mathbf{R}}^* > 0$  : **22 opérations**

$$\tau_\alpha = 1/\rho_\alpha, \quad v_\alpha = q_\alpha/\rho_\alpha, \quad \alpha = \mathbf{L}, \mathbf{R} \quad (\text{A.3})$$

$$\alpha = \min(\tau_{\mathbf{L}}, \tau_{\mathbf{R}}), \quad \beta = -\frac{v_{\mathbf{L}} - v_{\mathbf{R}}}{2}, \quad \gamma = -\left| \frac{P_{\mathbf{L}} - P_{\mathbf{R}}}{2} \right| \quad (\text{A.4})$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma, \quad \bar{a} = \max\left(\frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}, 1.\right) \quad (\text{A.5})$$

3. Calcul du  $b$  assurant  $Y^* \in [0, 1]$  : **10 opérations**

$$(\rho\Phi)_\alpha = \rho_\alpha\Phi_\alpha, \quad \alpha = \mathbf{L}, \mathbf{R} \quad (\text{A.6})$$

$$\bar{b} = \max(|(\rho\Phi)_{\mathbf{L}} + (\rho\Phi)_{\mathbf{R}}|/2 + |(\rho\Phi)_{\mathbf{L}} - (\rho\Phi)_{\mathbf{R}}|/2, 1) \quad (\text{A.7})$$

4. Calcul de  $(a, b)$  final : **2 opérations**

$$a = \max(\tilde{a}, \bar{a}), \quad b = \max(\tilde{b}, \bar{b}) \quad (\text{A.8})$$

FIG. A.1 – Détail du calcul des coefficients de relaxation



1. Calcul de  $(a, b)$  : **46 opérations**, voir figure (A.1).

2. Calculs intermédiaires : **6 opérations**

$$\tau_\alpha = 1/\rho_\alpha, \quad Y_\alpha = \chi_\alpha/\rho_\alpha, \quad v_\alpha = q_\alpha/\rho_\alpha, \quad \alpha = \mathbf{L}, \mathbf{R} \quad (\text{A.9})$$

3. Calcul des états intermédiaires dans le problème de Riemann : **32 opérations**

$$\begin{aligned} \tau_{\mathbf{L}}^* &= \tau_{\mathbf{L}} + (\Pi_{\mathbf{L}} - \Pi^*)/a^2, & \tau_{\mathbf{R}}^* &= \tau_{\mathbf{R}} + (\Pi_{\mathbf{R}} - \Pi^*)/a^2 \\ \Pi^* &= \bar{\Pi} + a \langle v \rangle, & v^* &= \tilde{v} + \langle \Pi \rangle / a \\ Y^* &= \bar{Y} - \langle \Sigma \rangle / b, & \Sigma^* &= \bar{\Sigma} - b \langle Y \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

4. Calcul des valeurs propres : **8 opérations**

$$\lambda = (v_{\mathbf{L}} - a\tau_{\mathbf{L}}, v^* - b\tau_{\mathbf{L}}^*, v^*, v^* + b\tau_{\mathbf{R}}^*, v_{\mathbf{R}} + a\tau_{\mathbf{R}}) \quad (\text{A.11})$$

5. Solution du problème de Riemann : **5 opérations**

$$\rho = 1/\tau_s, \quad \chi = \rho Y_s, \quad q = \rho v_s, \quad (\rho\Pi) = \rho\Pi_s, \quad (\rho\Sigma) = \rho\Sigma_s \quad (\text{A.12})$$

avec  $(\tau, Y, v, \Pi, \Sigma)_s$  la solution du problème de Riemann.

6. Évaluation du flux numérique : **17 opérations**

(a) Calculs intermédiaires : **3 opérations**

$$v = q/\rho, \quad \Pi = (\rho\Pi)/\rho, \quad \Sigma = (\rho\Sigma)/\rho \quad (\text{A.13})$$

(b) évaluation finale : **14 opérations**

$$\mathbf{H}^{relaxation} = f(u) \quad (\text{A.14})$$

$$\text{avec } f = (q, \chi v - \Sigma, \rho v^2 + \Pi, q\Pi + a^2 v, q\Sigma - b^2 \chi/\rho)^T \quad (\text{A.15})$$

FIG. A.2 – Détail du calcul du flux du schéma de relaxation

1. Calculs intermédiaires : **4 opérations**

$$Y_\alpha = \chi/\rho_\alpha, \quad v_\alpha = q_\alpha/\rho_\alpha, \quad \alpha = \mathbf{L}, \mathbf{R} \quad (\text{A.16})$$

2. Calcul des Jacobiennes à gauche et à droite : **20 opérations**

$$A_\alpha = A(u_\alpha), \quad \alpha = \mathbf{L}, \mathbf{R} \quad (\text{A.17})$$

$$\text{avec } A(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -v^2 + P_\rho & 2v + P_q & P_\chi \\ -Yv - \sigma_\rho & Y - \sigma_q & v - \sigma_\chi \end{pmatrix} \quad (\text{A.18})$$

3. Calcul des éléments propres : **1476 opérations**

(a) Calcul des valeurs propres, des vecteurs propres à droite, à gauche et à droite : **1422 opérations**

$$A_\alpha \Rightarrow \Lambda_\alpha, R_\alpha, \quad \alpha = \mathbf{L}, \mathbf{R} \quad (\text{A.19})$$

(b) Calcul des vecteurs propres à gauche, à gauche et à droite : **54 opérations**

$$L_\alpha = R_\alpha^{-1}, \quad \alpha = \mathbf{L}, \mathbf{R} \quad (\text{A.20})$$

4. Calcul des flux physiques à gauche et à droite : **12 opérations**

$$f_\alpha = f(u_\alpha), \quad \alpha = \mathbf{L}, \mathbf{R} \quad (\text{A.21})$$

$$\text{avec } f(u) = (q, \chi q/\rho - \sigma, q^2/\rho + P)^T \quad (\text{A.22})$$

5. Calcul de la matrice de diffusion : **246 opérations**

$$|A_{\mathbf{L}}| = R_{\mathbf{L}} K |\Lambda_{\mathbf{L}}| L_{\mathbf{L}}, \quad |A_{\mathbf{R}}| = R_{\mathbf{R}} K |\Lambda_{\mathbf{R}}| L_{\mathbf{R}} \quad (\text{A.23})$$

$$D = \frac{1}{2} (|A_{\mathbf{L}}| + |A_{\mathbf{R}}|), \quad K = (k_1, k_2, k_3)^T \quad (\text{A.24})$$

6. Évaluation du flux numérique : **33 opérations**

$$\mathbf{H}^{Tacite} = \frac{1}{2} (f_{\mathbf{L}} + f_{\mathbf{R}}) + \frac{1}{2} D (u_{\mathbf{L}} - u_{\mathbf{R}}) \quad (\text{A.25})$$

FIG. A.3 – Détail du calcul du flux du schéma Tacite

**Étape physique : 129  $I$  opérations et 10  $I$  évaluations**

1. Calcul des flux numériques : 114
- $I$
- opérations

$$\mathbf{H}_{i+1/2} = \mathbf{H}(u_i^n, u_{i+1}^n), \quad i = 0, I \quad (\text{A.26})$$

2. Mise à jour de
- $u_i^*$
- : 15
- $I$
- opérations

$$\theta = \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad u_i^* = u_i^n - \theta (\mathbf{H}_{i+1/2} - \mathbf{H}_{i-1/2}), \quad i = 1, I \quad (\text{A.27})$$

**Étape mathématique : 404  $I$  opérations et 3  $I$  évaluations**

1. Calculs préliminaires : 2 opérations

$$\theta = \Delta t / (2\Delta x), \quad (\mathbb{I})_{ij} = \delta_{ij} \quad (\text{A.28})$$

où  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$  et  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ .

2. Construction du premier membre : 399
- $I$
- opérations et 3
- $I$
- évaluations

- (a) Calcul des matrices Jacobiennes modifiées : 106
- $I$
- opérations

$$\tilde{A}^\alpha = \tilde{A}^\alpha(u_\alpha), \quad \alpha = \mathbf{L}, \mathbf{R} \quad (\text{A.29})$$

- (b) Calcul de la matrice de diffusion : 143
- $I$
- opérations

$$|\tilde{A}^{Roe}| = |\tilde{A}^{Roe}|(u_{\mathbf{L}}, u_{\mathbf{R}}) \quad (\text{A.30})$$

- (c) Calcul des dérivées de la fonction
- $I = (\rho P)(u)$
- : 3
- $I$
- évaluations

$$(\partial I / \partial \rho)_i, \quad (\partial I / \partial \chi)_i, \quad (\partial I / \partial q)_i \quad (\text{A.31})$$

- (d) Calcul des matrices
- $\alpha_i, \beta_i, \gamma_{i+1}$
- : 150
- $I$
- opérations

$$\alpha_i = \theta \left( \tilde{A}^{\mathbf{L}} + |\tilde{A}^{Roe}| \right), \quad \gamma_{i+1} = \theta \left( \tilde{A}^{\mathbf{R}} - |\tilde{A}^{Roe}| \right), \quad \beta_i = \mathbb{I} + \alpha_i - \gamma_i$$

3. Construction du second membre : 5
- $I$
- opérations

$$b_i = u_i^* - u_i^n \quad (\text{A.32})$$

**Résolution du système linéaire : 384  $I$  opérations**

FIG. A.4 – Détail du schéma de relaxation semi-implicite linéaire (blocs de taille 5, demi-largeur de bande 9)

Nous montrons dans ce paragraphe comment calculer la matrice Jacobienne du système de relaxation modifiée par annulation des valeurs propres associées aux ondes lentes. Il s'agit de la matrice  $\tilde{A}(\mathbf{v})$  définie de la façon suivante. Notons  $\mathbf{v} = (\rho, \rho Y, \rho v, \rho \Pi, \rho \Sigma)^T$  l'inconnue du système de relaxation et  $\mathcal{G}(\mathbf{v}) = (\rho v, \rho Y v - \Sigma, \rho v^2 + \Pi, \rho v \Pi + a^2 v, \rho v \Sigma - b^2 Y)^T$  le flux numérique. Notons  $A(\mathbf{v}) = \nabla \mathcal{G}(\mathbf{v})$  la Jacobienne du flux physique. Ses valeurs propres sont  $\Lambda(\mathbf{v}) = \text{Diag}(v - a\tau, v - b\tau, v, v + b\tau, v + a\tau)$  et vérifient  $A(\mathbf{v}) = R(\mathbf{v})\Lambda(\mathbf{v})L(\mathbf{v})$  avec  $R(\mathbf{v})$  la matrice des vecteurs propres et  $L(\mathbf{v}) = R^{-1}(\mathbf{v})$ . On note  $\tilde{\Lambda}(\mathbf{v}) = \text{Diag}(v - a\tau, 0, 0, 0, v + a\tau)$  et  $\tilde{A}(\mathbf{v}) = R(\mathbf{v})\tilde{\Lambda}(\mathbf{v})L(\mathbf{v})$ . Notons

$$\mathcal{I} = \Pi + a^2 \tau, \quad d = \frac{1}{a^2 \tau} \quad (\text{A.33})$$

Les colonnes de la matrice  $\tilde{A}(\mathbf{v}) = R\tilde{\Lambda}L = \{\tilde{A}_j\}_{j=1,5}$  sont les suivantes. La deuxième et la cinquième colonne sont nulles  $\tilde{A}_2 = \tilde{A}_5 = 0$  tandis que les autres valent

$$\tilde{A}_1 = d \begin{pmatrix} -\mathcal{I}v \\ -Y\mathcal{I}v \\ -2v^2a^2\tau - \Pi(v^2 + a^2\tau^2) \\ -\mathcal{I}^2v \\ -\Sigma\mathcal{I}v \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ Y \\ 2v \\ \mathcal{I} \\ \Sigma \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_4 = d \begin{pmatrix} v \\ Yv \\ v^2 + a^2\tau^2 \\ \mathcal{I}v \\ \Sigma v \end{pmatrix}.$$

Le calcul de la matrice  $\tilde{A}(\mathbf{v})$  requiert 53 opérations.

FIG. A.5 – Détail de la matrice  $\tilde{A}(\mathbf{v})$

Nous montrons dans ce paragraphe comment calculer la matrice de Roe de la méthode de relaxation modifiée par annulation des valeurs propres associées aux ondes lentes. Il s'agit de la matrice  $|\tilde{A}^{Roe}|(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$  définie par  $|\tilde{A}^{Roe}| = \left( R|\tilde{\Lambda}|L \right)(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$  avec  $|\tilde{\Lambda}| = \text{Diag}(|v_L - a\tau_L|, 0, 0, 0, |v_R + a\tau_R|)$  et  $L = R^{-1}$ . La matrice  $R(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$  est définie dans le rapport et nous ne rappellerons pas sa définition ici. Nous notons

$$\begin{aligned} \bar{v}_L &= v_L - a\tau_L, & \bar{v}_R &= v_R + a\tau_R, \\ \mathcal{I}_L &= \Pi_L + a^2\tau_L, & \mathcal{I}_R &= \Pi_R + a^2\tau_R, \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

ainsi que

$$d = 1/[-v^*(\mathcal{I}_R - \mathcal{I}_L) - \bar{v}_L(\Pi^* - \mathcal{I}_R) - \bar{v}_R(\mathcal{I}_L - \Pi^*)]. \quad (\text{A.35})$$

Soient

$$\mathbf{p}_L = d|\bar{v}_L| \begin{pmatrix} 1 \\ Y_L \\ \bar{v}_L \\ \mathcal{I}_L \\ \Sigma_L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_R = d|\bar{v}_R| \begin{pmatrix} 1 \\ Y_R \\ \bar{v}_R \\ \mathcal{I}_R \\ \Sigma_R \end{pmatrix}. \quad (\text{A.36})$$

Les colonnes de la matrice  $|\tilde{A}^{Roe}| = \left\{ |\tilde{A}_j^{Roe}| \right\}_{j=1,5}$  sont les suivantes.

1. La colonne 1 est donnée par  $|\tilde{A}_1^{Roe}| = \alpha \mathbf{p}_L + \beta \mathbf{p}_R$  avec  $\alpha = \Pi^* \bar{v}_R - v^* \mathcal{I}_R$  et  $\beta = v^* \mathcal{I}_L - \Pi^* \bar{v}_L$ .
2. La colonne 2 est nulle, i.e.,  $|\tilde{A}_2^{Roe}| = 0$ .
3. La colonne 3 est donnée par  $|\tilde{A}_3^{Roe}| = \alpha \mathbf{p}_L + \beta \mathbf{p}_R$  avec  $\alpha = \mathcal{I}_R - \Pi^*$  et  $\beta = \Pi^* - \mathcal{I}_L$ .
4. La colonne 4 est donnée par  $|\tilde{A}_4^{Roe}| = \alpha \mathbf{p}_L + \beta \mathbf{p}_R$  avec  $\alpha = v^* - \bar{v}_R$  et  $\beta = \bar{v}_L - v^*$ .
5. La colonne 5 est nulle, i.e.,  $|\tilde{A}_5^{Roe}| = 0$ .

Le calcul de la matrice  $|\tilde{A}^{Roe}|$  requiert 89 opérations.

FIG. A.6 – Détail de la matrice  $|\tilde{A}^{Roe}|$

**Étape physique** : 129  $I$  opérations et 10  $I$  évaluations

**Étape mathématique** : 458  $I$  opérations et 3  $I$  évaluations

1. étape mathématique 1 : 404  $I$  opérations et 3  $I$  évaluations

2. étape mathématique 2 : 54  $I$  opérations

(a) Réduction du premier membre : 54  $I$  opérations

$$\tilde{\alpha}_i = \mathcal{R}(\alpha_i), \quad \tilde{\beta}_i = \mathcal{R}(\beta_i), \quad \tilde{\gamma}_i = \mathcal{R}(\gamma_i) \quad (\text{A.37})$$

$$\mathcal{R}(A) = \begin{pmatrix} A_{11} + A_{14} \frac{\partial I}{\partial \rho} & A_{12} + A_{14} \frac{\partial I}{\partial \chi} & A_{13} + A_{14} \frac{\partial I}{\partial q} & A_{15} \\ A_{21} + A_{24} \frac{\partial I}{\partial \rho} & A_{22} + A_{24} \frac{\partial I}{\partial \chi} & A_{23} + A_{24} \frac{\partial I}{\partial q} & A_{25} \\ A_{31} + A_{34} \frac{\partial I}{\partial \rho} & A_{32} + A_{34} \frac{\partial I}{\partial \chi} & A_{33} + A_{34} \frac{\partial I}{\partial q} & A_{35} \\ A_{51} + A_{54} \frac{\partial I}{\partial \rho} & A_{52} + A_{54} \frac{\partial I}{\partial \chi} & A_{53} + A_{54} \frac{\partial I}{\partial q} & A_{55} \end{pmatrix} \quad (\text{A.38})$$

(b) Réduction du second membre : **0** opérations

$$\tilde{b}_i = (b_i^1, b_i^2, b_i^3, b_i^5) \quad (\text{A.39})$$

**Résolution du système linéaire** : 244  $I$  opérations

FIG. A.7 – Détail du schéma de relaxation semi-implicite linéaire réduit (blocs de taille 4, demi-largeur de bande 7)

**Étape physique : 1800  $I$  opérations et 16  $I$  évaluations**

1. Calcul des flux numériques : 1791
- $I$
- opérations

$$\mathbf{H}_{i+1/2} = \mathbf{H}(u_i^n, u_{i+1}^n), \quad i = 0, I \quad (\text{A.40})$$

2. Mise à jour de
- $u_i^*$
- : 9
- $I$
- opérations

$$\theta = \Delta t / \Delta x, \quad u_i^* = u_i^n - \theta (\mathbf{H}_{i+1/2} - \mathbf{H}_{i-1/2}), \quad i = 1, I \quad (\text{A.41})$$

Il faut noter que le schéma de relaxation utilise un flux numérique à 3 composantes.

**Étape mathématique : 513  $I$  opérations**

1. Calculs préliminaires : 2 opérations

$$\theta = \Delta t / (2\Delta x), \quad (\mathbb{I})_{ij} = \delta_{ij} \quad (\text{A.42})$$

où  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$  et  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ .

2. Construction du premier membre : 510
- $I$
- opérations

- (a) Calcul de la matrice de diffusion : 240
- $I$
- opérations

$$\tilde{\Lambda} = \text{diag}(\lambda^1, 0, \lambda^3) \quad (\text{A.43})$$

$$|\tilde{A}^\alpha| = R^\alpha K |\tilde{\Lambda}^\alpha| L^\alpha, \quad \alpha = \mathbf{L}, \mathbf{R} \quad (\text{A.44})$$

$$\tilde{D} = \frac{1}{2} (|\tilde{A}^{\mathbf{L}}| + |\tilde{A}^{\mathbf{R}}|) \quad (\text{A.45})$$

- (b) Calcul des matrices Jacobiennes : 216
- $I$
- opérations

$$\tilde{A}^\alpha = R^\alpha \tilde{\Lambda}^\alpha L^\alpha, \quad \alpha = \mathbf{L}, \mathbf{R} \quad (\text{A.46})$$

- (c) Calcul des matrices
- $\alpha_i$
- ,
- $\beta_i$
- et
- $\gamma_{i+1}$
- : 54
- $I$
- opérations

$$\tilde{\alpha}_i = \theta (\tilde{A}^{\mathbf{L}} + \tilde{D}), \quad \tilde{\gamma}_{i+1} = \theta (\tilde{A}^{\mathbf{R}} - \tilde{D}), \quad \beta_i = \mathbb{I} + \alpha_i - \gamma_i \quad (\text{A.47})$$

3. Construction du second membre : 3
- $I$
- opérations

$$b_i = u_i^* - u_i^n \quad (\text{A.48})$$

**Résolution du système linéaire : 136  $I$  opérations**

FIG. A.8 – Détail du schéma Tacite semi-implicite linéaire (blocs de taille 3, demi-largeur de bande 5)

Publié dans : [10], [4]

Fermetures :

- Thermodynamique : liquide incompressible, gaz parfait,  $a_G = 100$  m/s
- Hydrodynamique : glissement nul

Solution : Détente en  $\lambda^-$ . Date finale :  $T = 0.8$  s.

Vitesses de propagation :  $\lambda_{\mathbf{L}}^- = -40.12$  m/s et  $\lambda_{\mathbf{R}}^- = -15.77$  m/s.

États gauche et droit :

$$\begin{pmatrix} \rho \\ Y \\ v \end{pmatrix}_{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} 500 \\ 0.2 \\ 34.4233 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \rho \\ Y \\ v \end{pmatrix}_{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} 400 \\ 0.2 \\ 50 \end{pmatrix}$$

FIG. A.9 – Détail du cas 1, glissement nul

Publié dans : [26], [10], [4]

Fermetures :

- Thermodynamique : liquide incompressible, gaz parfait,  $a_G = 300$  m/s
- Hydrodynamique : Zuber-Findlay,  $c_0 = 1.07$ ,  $c_1 = 0.2162$  m/s.

Solution : . Choc-Discontinuité de Contact-Choc Date finale :  $T = 0.5$  s.

Vitesses de propagation :  $\sigma^- = -40.03$  m/s,  $\sigma^0 = 10$  m/s et  $\sigma^+ = 67.24$  m/s.

États gauche et droit :

$$\begin{pmatrix} \rho \\ Y \\ v \end{pmatrix}_{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} 453.197 \\ 0.00705 \\ 24.8074 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \rho \\ Y \\ v \end{pmatrix}_{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} 454.915 \\ 0.0108 \\ 1.7461 \end{pmatrix}$$

FIG. A.10 – Détail du cas 2, Zuber-Findlay



Publié dans : [53], [26]

Géométrie de la conduite et discrétisation :

- Longueur : 10000 m, horizontal
- Diamètre : 0.146 m
- Pas d'espace : 200 m

Modèles thermodynamiques et hydrodynamique :

- Modèle thermodynamique : liquide compressible, gaz parfait
- Modèle hydrodynamique : glissement nul

Conditions opératoires :

- Durée de stabilisation : 3000 s
- Durée de la rampe : 10 s
- Condition limite amont sur le débit de gaz : 0.2 à 0.4 kg/s
- Condition limite amont sur le débit de liquide : 20 kg/s
- Condition limite aval sur la pression : 10 bars

FIG. A.11 – Détail de l'expérience 1 avec Conditions Limites

Publié dans : [26]

Géométrie de la conduite et discrétisation :

- Longueur : 80 m, **vertical**
- Diamètre : 0.146 m
- Pas d'espace : 1.6 m

Modèles thermodynamiques et hydrodynamique :

- Modèle thermodynamique : liquide compressible, gaz parfait
- Modèle hydrodynamique : glissement Zuber-Findlay IFP

Conditions opératoires :

- Durée de stabilisation : 10 s
- Durée de la rampe : 100 s
- Condition limite amont sur le débit de gaz : 0.114 à 0. kg/s
- Condition limite amont sur le débit de liquide : 1.628 kg/s
- Condition limite aval sur la pression : 10 bars

FIG. A.12 – Détail de l'expérience 2 avec Conditions Limites

Nous montrons dans ce paragraphe le coût des évaluations des lois de fermeture.

Le calcul le plus élémentaire est celui de la pression : dans le tableau suivant, on indique le coût d'évaluation de la fonction  $\varphi$  en supposant que l'on connaît déjà la pression  $p$ . La même remarque vaut pour les dérivées partielles  $p_X$  et  $\varphi_X$  ( $X = \tau, v, Y, \rho, \chi$  ou  $q$ ). Notons que le calcul du glissement est plus ou moins complexe selon le type de loi : nous considérons ici le glissement de Zuber-Findlay (historique).

	Incompressible	Compressible
$p$	7	21
$p_X$	12	29
$\varphi$	16	20
$\varphi_X$	35	62

Une fois calculée  $p$  et  $\varphi$ , on calcule les fonctions  $P$  et  $\sigma$  et leurs dérivées. Le coût dépend alors des dérivées que l'on souhaite obtenir, puisque de nombreuses opérations sont éliminées si on calcule les dérivées de façon groupée.

Dans le cas du schéma de relaxation explicite, on a besoin de  $P, \sigma, P_{\tau,v}$  et  $\sigma_Y$ . Le bilan total est donné ci-après.

	Incompressible	Compressible
$p$	7	21
$p_\tau$	12	29
$\varphi$	16	20
$\varphi_{\tau,v,Y}$	$3 \times 35$	$3 \times 62$
$\sigma$	4	5
$\sigma_{\tau,v,Y}$	24	24
$P$	2	2
$P_{\tau,v}$	7	7
<b>Total</b>	177	294

Dans le cas du schéma tacite explicite, on a besoin de  $P, \sigma, P_{\rho,q,\chi}$  et  $\sigma_{\rho,q,\chi}$ . Le bilan total est donné ci-après.

	Incompressible	Compressible
$p$	7	21
$p_{\rho,q,\chi}$	$3 \times 12$	$3 \times 29$
$\varphi$	16	20
$\varphi_{\rho,q,\chi}$	$3 \times 35$	$3 \times 62$
$\sigma$	4	5
$\sigma_{\rho,q,\chi}$	24	24
$P$	2	2
$P_{\rho,q,\chi}$	$3 \times 7$	$3 \times 7$
<b>Total</b>	215	366

FIG. A.13 – Détail des coûts des évaluations de base dans le cas de la loi de glissement Zuber-Findlay



## Annexe B

# Thermodynamique des fluides polyphasiques

Dans ce chapitre, nous présentons quelques résultats relatifs aux caractéristiques thermodynamiques des fluides polyphasiques. En particulier, nous calculons les densités et pressions maximales pour ces fluides. Puis, nous montrons de quelles équations la pression est solution dans le cas d'un mélange gaz-liquide et dans le cas d'un mélange compositionnel à 2 constituants. Dans tous les cas, nous supposons que le gaz est parfait et nous distinguons le cas du liquide compressible de celui du liquide incompressible.

### B.1 Caractéristiques thermodynamiques des fluides compressibles

Nous évaluons dans ce paragraphe la pression maximale d'un fluide diphasique compressible.

Nous supposons que le liquide faiblement compressible et le gaz (parfait) sont soumis aux lois

$$\rho_L(p) = \rho_L^0 + \frac{p - p^0}{a_L^2}, \quad \rho_G(p) = \frac{p}{a_G^2} \quad (\text{B.1})$$

où  $\rho_L^0, p^0, a_L$  et  $a_G$  sont des constantes données. Nous supposons que  $a_G < a_L$ . Par ailleurs, nous appellerons liquide incompressible le liquide qui suit la loi  $\rho_L(p) = \rho_L^0$ .

Considérons les paramètres  $\rho_L^0 = 1000$ . (kg/m<sup>3</sup>),  $a_L = 500$ . (m/s),  $a_G = 300$ . (m/s),  $p^0 = 10^5$  (Pa) et une température fixée à  $T = 20$  (°C). Les figures (B.1–B.2) donnent une illustration de la fonction densité définie par  $\rho(p, Y) = \frac{1}{\frac{Y}{\rho_G(p)} + \frac{1-Y}{\rho_L(p)}}$  pour  $Y = 0.1$  et  $Y = 0.5$  dans le cas d'un liquide incompressible, puis dans le cas d'un liquide compressible.

On constate que, pour des pressions faibles, on a bien  $\rho_G(p) \leq \rho \leq \rho_L(p)$ . Puis les courbes se croisent et même s'inversent au delà d'une pression limite. On peut considérer que cette pression limite est maximale car il est bien évident que nos modèles sont faux au-delà : il est bien connu qu'il faut alors utiliser des modèles plus fins, type Van Der Waals, car les interactions entre molécules sont plus grandes. On vérifie également qu'un fluide compressible permet d'atteindre des densités maximales d'autant plus importantes que le liquide est compressible, c'est à dire d'autant plus que  $a_L$  est petit.

– Dans le cas d'un liquide incompressible, la pression et la densité maximale sont

$$\bar{p} = a_G^2 \rho_L^0, \quad \bar{\rho} = \rho_L^0. \quad (\text{B.2})$$

– Dans le cas d'un liquide compressible, on introduit

$$q = 1 - \frac{a_G^2}{a_L^2} \quad (\text{B.3})$$

et la pression et la densité maximale sont

$$\bar{p} = \frac{a_G^2 \left( \rho_L^0 - \frac{p^0}{a_L^2} \right)}{q}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho_L^0 - \frac{p^0}{a_L^2}}{q}. \quad (\text{B.4})$$

On vérifie facilement que  $q > 0$  puisque par hypothèse  $0 < a_G < a_L$ .

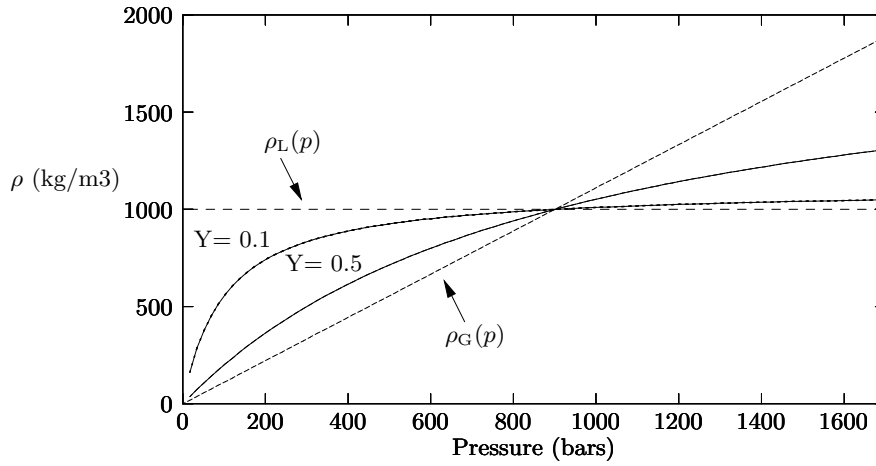


FIG. B.1 – Densité avec un liquide incompressible

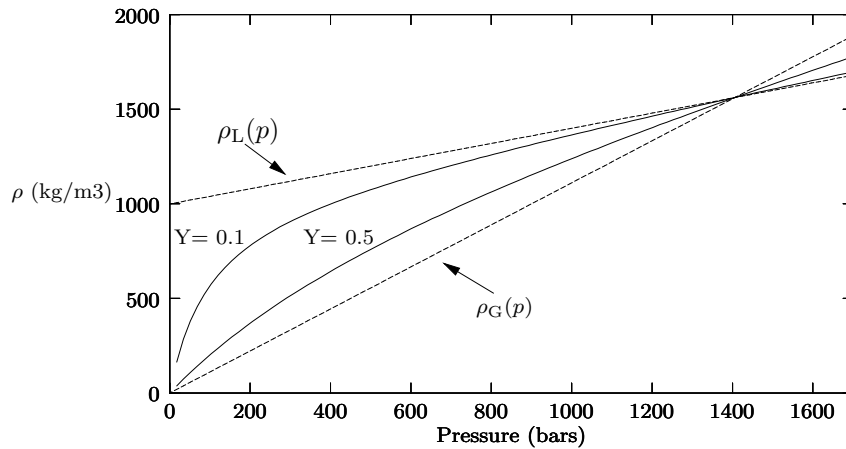


FIG. B.2 – Densité avec un liquide compressible

## B.2 Calcul de la pression

Nous détaillons ici le calcul de la pression dans le cas d'un mélange gaz-liquide et dans le cas d'un mélange compositionnel à 2 constituants. Dans tous les cas, la pression est solution d'un polynôme dont le degré varie avec la complexité du modèle : le polynôme est de degré 1 dans le cas simple

du liquide incompressible dans un mélange gaz-liquide et il est de degré 3 dans le cas du liquide compressible d'un mélange de 2 constituants.

Nous constaterons que, dans le cas du modèle gaz-liquide, il est possible de démontrer l'existence de la pression. Par contre, dans le cas du modèle à 2 constituants, nous ne pourrions conclure.

### B.2.1 Modèle gaz-liquide

Dans ce paragraphe, nous considérons un mélange diphasique isotherme non compositionnel pour lequel la fraction massique de gaz est calculée en fonction de la pression est la densité par

$$Y(\rho, p) = \frac{\rho_G(p)}{\rho} \frac{\rho_L(p) - \rho}{\rho_L(p) - \rho_G(p)}. \quad (\text{B.5})$$

Nous allons vérifier que dans le cas d'un liquide incompressible, la pression est solution d'un polynôme de degré 1 tandis que dans le cas d'un liquide compressible, la pression est solution d'un polynôme de degré 2. Dans les deux cas, nous saurons démontrer l'existence de la pression.

#### B.2.1.1 Cas du liquide incompressible

Ici, nous calculons la pression dans le cas particulier où  $\rho_L(p) = \rho_L^0$ . Rappelons que les égalités (B.2) définissent les pression et densités maximales  $\bar{p}$  et  $\bar{\rho}$ . On introduit la notation

$$\theta(\rho) = \frac{\rho_L^0}{\rho} - 1, \quad \rho \in ]0, \bar{\rho}]. \quad (\text{B.6})$$

La quantité  $\theta$  est sans dimension. Il est facile de vérifier que  $\theta(\rho) \geq 0$  pour  $\rho \in ]0, \bar{\rho}]$ . On écrit alors la fraction massique de gaz sous la forme

$$Y = \frac{\theta(\rho)p}{\bar{p} - p}. \quad (\text{B.7})$$

On voit alors facilement que la pression est solution de l'équation linéaire

$$\alpha_1 p + \alpha_0 = 0 \quad (\text{B.8})$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\theta(\rho) - Y, \\ \alpha_0 &= Y\bar{p}, \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

dont la solution est

$$p(\rho, Y) = \frac{Y}{\theta(\rho) + Y} \bar{p}, \quad \rho \in ]0, \bar{\rho}], Y \in ]0, 1]. \quad (\text{B.10})$$

On vérifie facilement que la pression est physiquement admissible c'est à dire à la fois positive et bien définie (dénominateur non nul) si  $\rho \in ]0, \bar{\rho}]$  et  $Y \in ]0, 1]$ . Notons que le nombre  $\frac{Y}{\theta(\rho) + Y}$  est sans dimension. Pour  $Y = 0$  (monophasique liquide), la pression est indéterminée et il est nécessaire d'utiliser un modèle de liquide compressible.

### B.2.1.2 Cas du liquide compressible

Dans ce paragraphe, nous considérons un mélange diphasique isotherme non-compositionnel et nous calculons la pression dans le cas général où  $\rho_L(p) = \rho_L^0 + \frac{p-p^0}{a_L^2}$ . Rappelons que les égalités (B.4) définissent les pression et densités maximales  $\bar{p}$  et  $\bar{\rho}$  à l'aide du nombre sans dimension  $q$  défini par (B.3). On note désormais

$$\theta(\rho) = \frac{\rho_L^0 - \frac{p^0}{a_L^2}}{\rho} - 1, \quad \rho \in ]0, \bar{\rho}]. \quad (\text{B.11})$$

Il est facile de vérifier que  $\theta(\rho) \geq q - 1$  pour  $\rho \in ]0, \bar{\rho}].$  On écrit alors la fraction massique de gaz sous la forme

$$Y = \frac{\theta(\rho)p + \frac{p^2}{\rho a_L^2}}{q(\bar{p} - p)}. \quad (\text{B.12})$$

Quelques manipulations algébriques permettent de constater que la pression est solution d'un polynôme de degré 2. Plus précisément,  $p$  est solution de

$$\alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0 = 0 \quad (\text{B.13})$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= -\frac{1}{\rho a_L^2}, \\ \alpha_1 &= -\theta(\rho) - qY, \\ \alpha_0 &= qY\bar{p}. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Il est facile de constater que, comme il a déjà été vu dans [4], le discriminant  $\Delta(\rho, Y) = (\theta(\rho) + qY)^2 + 4\frac{\bar{p}}{\rho a_L^2}qY$  est positif. Le polynôme possède donc 2 racines réelles. Comme par ailleurs le produit des racines, qui vaut  $-\frac{\bar{p}}{\rho a_L^2}qY$  est négatif, il y a une racine négative et une positive : c'est la dernière qui nous intéresse. La pression vaut

$$p(\rho, Y) = \frac{\rho a_L^2}{2} \left[ \theta(\rho) + qY + \sqrt{\Delta} \right] \quad \rho \in ]0, \bar{\rho}], \quad \text{si } Y \in [0, 1]. \quad (\text{B.15})$$

### B.2.2 Mélange à 2 constituants

Ce paragraphe est un complément du chapitre 9 qui traite du modèle diphasique isotherme à 2 constituants. Dans ce modèle, la fraction massique du premier constituant de gaz est calculée en fonction de la pression et la densité par

$$c_1(\rho, p) = Y(\rho, p)Y_1(p) + X(\rho, p)X_1(p), \quad (\text{B.16})$$

avec  $Y_1$  et  $X_1$  des fonctions données de la pression et  $X$  et  $Y$  les fractions massiques de chaque phase définies par

$$Y(\rho, p) = \frac{\rho_G(p)}{\rho} \frac{\rho_L(p) - \rho}{\rho_L(p) - \rho_G(p)}, \quad X(\rho, p) = 1 - Y(\rho, p). \quad (\text{B.17})$$

Nous notons

$$\omega = 1 - \frac{p_2^0}{p_1^0}, \quad (\text{B.18})$$

avec  $p_1^0$  et  $p_2^0$  des pressions constantes. Sous l'hypothèse  $p_2^0 < p_1^0$ , on constate que pour toute température positive, on a  $\omega \in ]0, 1[$ . Il est alors facile d'écrire les fractions massiques du premier constituant sous la forme

$$X_1(p, T) = \frac{p - p_2^0}{\omega p_1^0}, \quad Y_1(p, T) = \frac{p - p_2^0}{\omega p}. \quad (\text{B.19})$$

Nous allons voir que, dans le cas d'un liquide incompressible, la pression est solution d'un polynôme de degré 2 et que dans le cas d'un liquide compressible, la pression est solution d'un polynôme de degré 3. Dans les deux cas, nous ne saurons conclure à l'existence de la pression.

### B.2.2.1 Cas du liquide incompressible

Dans ce paragraphe, nous calculons la pression dans le cas particulier où  $\rho_L(p) = \rho_L^0$ . On considère ici la définition de  $\theta(\rho)$  (B.6) et on écrit la fraction massique de gaz sous la forme (B.7). Il vient alors aisément, par la définition de la fraction massique du premier constituant (9.25), que

$$c_1 = \frac{p - p_2^0}{\omega p_1^0} \frac{\bar{p} - (\theta(\rho) + 1)p}{\bar{p} - p} + \frac{p - p_2^0}{\omega} \frac{\theta(\rho)}{\bar{p} - p}. \quad (\text{B.20})$$

Quelques simples manipulations algébriques sur l'égalité précédentes permettent de voir que la pression est racine d'un polynôme de degré 2. Plus précisément,  $p$  est solution de

$$\alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0 = 0 \quad (\text{B.21})$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{\theta(\rho) + 1}{p_1^0}, \\ \alpha_1 &= -\theta(\rho) - \frac{\bar{p}}{p_1^0} - \omega c_1 - (\theta(\rho) + 1)(1 - \omega), \\ \alpha_0 &= \omega c_1 \bar{p} + \theta(\rho) p_2^0 + (1 - \omega) \bar{p}. \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

**Remarque B.2.1** Cette définition de la pression est satisfaisante car elle dégénère bien vers le cas où  $p_1^0 \rightarrow \infty$  et  $p_2^0 = 0$ , qui correspond au modèle gaz-liquide (non compositionnel). Dans ce cas, il est facile de voir que  $\omega = 1$  et  $c_1 = Y$ . Par ailleurs, le polynôme de degré 2 se simplifie en polynôme de degré 1 ( $\alpha_2 = 0$ ) avec  $\alpha_1 = -(\theta(\rho) + Y)$  et  $\alpha_0 = Y \bar{p}$ . On vérifie donc bien que  $p = \frac{Y}{\theta(\rho) + Y} \bar{p}$ .

Le discriminant est  $\Delta(\rho, c_1) = \alpha_1^2 - 4\alpha_2\alpha_0$  c'est à dire trouve l'expression

$$\begin{aligned} \Delta(\rho, c_1) &= \left[ \theta(\rho) + \frac{\bar{p}}{p_1^0} + \omega c_1 + (\theta(\rho) + 1)(1 - \omega) \right]^2 \\ &\quad - 4(\theta(\rho) + 1) \left[ \omega c_1 \frac{\bar{p}}{p_1^0} + \left( \theta(\rho) + \frac{\bar{p}}{p_1^0} \right) (1 - \omega) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$\Delta(\rho, c_1) = \left[ \theta(\rho) + \frac{\bar{p}}{p_1^0} - \omega c_1 - (\theta(\rho) + 1)(1 - \omega) \right]^2 + 4\omega c_1 \theta(\rho) \left( 1 - \frac{\bar{p}}{p_1^0} \right). \quad (\text{B.24})$$

Il est clair que pour  $c_1 = 0$ , ce discriminant est positif. Dans les autres cas, on ne peut pas conclure car, dans la pratique,  $\left( 1 - \frac{\bar{p}}{p_1^0} \right) < 0$ .



### B.2.2.2 Cas du liquide compressible

Dans ce paragraphe, nous tentons de trouver de quelle équation la fonction pression est solution dans le cas général où  $\rho_L(p) = \rho_L^0 + \frac{p-p^0}{a_L^2}$ . Nous allons voir qu'à  $(\rho, \rho c_1)$  fixé, la pression est solution d'un polynôme de degré 3. Nous conservons la même notation pour  $\omega$ . On considère les notations (B.11) et (B.3). On écrit alors les fractions massiques de gaz sous la forme (B.12). Il vient alors, par la définition de la fraction massique du premier constituant (9.25), que

$$c_1 = \frac{p - p_2^0}{\omega p_1^0} \frac{q\bar{p} - (\theta(\rho) + q)p - \frac{p^2}{\rho a_L^2}}{q(\bar{p} - p)} + \frac{p - p_2^0}{\omega} \frac{\theta(\rho) + \frac{p}{\rho a_L^2}}{q(\bar{p} - p)}. \quad (\text{B.25})$$

Quelques simples manipulations algébriques sur l'égalité précédentes permettent de voir que la pression est racine d'un polynôme de degré 3. Plus précisément,  $p$  est solution de

$$\alpha_3 p^3 + \alpha_2 p^2 + \alpha_1 p + \alpha_0 = 0 \quad (\text{B.26})$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= \frac{1}{p_1^0 \rho a_L^2}, \\ \alpha_2 &= \frac{\theta(\rho) + q}{p_1^0} - \frac{\omega}{\rho a_L^2}, \\ \alpha_1 &= -\theta(\rho) - q \frac{\bar{p}}{p_1^0} - \omega q c_1 - (\theta(\rho) + q)(1 - \omega) + \frac{p_2^0}{\rho a_L^2}, \\ \alpha_0 &= \omega c_1 q \bar{p} + \theta(\rho) p_2^0 + (1 - \omega) q \bar{p}. \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

**Remarque B.2.2** Cette définition de la pression est satisfaisante car elle dégénère bien vers le cas précédent si  $a_L \rightarrow \infty$ , c'est à dire si on tend vers un liquide incompressible.

## Annexe C

# Relaxation par Born-Infeld

Les deux chapitres qui suivent sont consacrés à la méthode de relaxation par le système de Born-Infeld. L'idée de base est de considérer des lois d'évolution sur des paramètres représentant les expressions que prennent, en coordonnées Lagrangiennes, les vitesses du liquide et du gaz (notées ici  $W$  et  $Z$ ).

Ces travaux sont nés de l'impossibilité de traiter le système compositionnel par une méthode de splitting chimique. Pour ce système, il apparaît que les enthalpies spécifiques de chaque phase se transportent, en coordonnées Lagrangiennes, aux vitesses  $W = -\frac{\Sigma}{Y}$  et  $Z = \frac{\Sigma}{1-Y}$  avec  $Y$  la fraction massique de gaz et  $\Sigma$  la variable relaxant la fonction non-linéaire  $\sigma$ . Or la solution d'un problème de Riemann dont les états gauches et droits sont donnés peut ne pas permettre de calculer ces grandeurs (si  $Y^* = 0$  ou  $Y^* = 1$ ).

L'idée est alors d'introduire des équations d'évolution supplémentaires sur  $W$  et  $Z$  de telle sorte qu'ils soient désormais déterminés. Les lois d'évolution ainsi construites font apparaître un système de deux équations aux dérivées partielles, issues des travaux de deux physiciens, M. Born et L. Infeld, parus en 1934 dans [12]. Ce système de lois de conservation est

$$\begin{cases} W_t + ZW_x = 0, \\ Z_t + WZ_x = 0. \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

Il a été étudié dans [59], pp. 109–113 et dans [64], pp. 617–620. A notre connaissance, c'est la première fois qu'il sert à mettre en évidence une méthode de relaxation. La propriété fondamentale de ce système est qu'il possède des champs linéairement dégénérés. Du point de vue du schéma de relaxation, cette propriété est centrale car elle conduit à un solveur de Godunov de coût réduit. Le système de Born-Infeld est, du point de vue de la relaxation, un système important car il est dit dans [59] que tout système  $2 \times 2$  dont les champs sont linéairement dégénérés et dont les vitesses de propagation sont sans points critiques peut s'écrire, à un changement de variable près, sous la forme du système de Born-Infeld.

Le plan de l'exposé est le suivant. L'annexe (D) est un article soumis à *Numerische Mathematik* et traite de la méthode dans le cas d'une équation scalaire. Nous verrons dans l'annexe (E) des compléments généralisant des théorèmes de stabilité présentés dans l'article ainsi que des résultats relatifs au système gaz-liquide.



## Annexe D

# Relaxation of two-phase flows via the Born-Infeld system

Michaël BAUDIN<sup>1</sup>, Frédéric COQUEL<sup>2</sup> and Quang Huy TRAN<sup>1</sup>

<sup>1</sup> IFP, 1 et 4 avenue de Bois-Préau, 92852 Reuil-Malmaison Cedex, France

<sup>2</sup> Lab. J.-L. Lions, Université Pierre et Marie Curie, Boîte courrier 187, 75252 Paris Cedex 5

**Abstract** The aim of this paper is to call the reader’s attention to an original scheme for solving special scalar conservation laws and drift-flux two-phase flow models. The scalar conservation law is  $u_t + f(u)_x = 0$  in which  $f(u) = u(1 - u)g(u)$ . The new scheme is based on a relaxation strategy, but unlike Xin and Jin’s approach [69], it is more “natural” insofar as there is no free parameter involved. Instead, it makes use of the  $2 \times 2$  Born-Infeld system [12, 59] and enables one to achieve a better control of the velocity variables  $w = (1 - u)g$  and  $z = -ug$ . For the scalar conservation law, stability and monotonicity are established under appropriate conditions on  $g$ . Several numerical experiments are shown.

### D.1 Introduction

Initially, we were interested in relaxation methods for solving a two-phase flow model. We devised an explicit scheme [6] and its semi-implicit version [7]. When we tried to extend these schemes to the multi-component case, a major difficulty arised, the essence of which boils down to the following prototype.

Let us consider the scalar conservation law

$$u_t + \{u(1 - u)g(u)\}_x = 0, \tag{D.1}$$

where  $u \in [0, 1]$  represents a phase fraction and  $g$  is a  $C^1$  function of  $u$ , bounded at  $u = 0$  and  $u = 1$ . Subscripts  $t$  and  $x$  denote partial derivatives with respect to time and space. For convenience, introduce the flux

$$f = u(1 - u)g \tag{D.2}$$

as well as the phase velocities

$$w = (1 - u)g = \frac{f}{u} \quad \text{and} \quad z = -ug = -\frac{f}{1 - u}. \tag{D.3}$$

Equation (D.1) can be thought of as

$$u_t + \{uw\}_x = 0, \tag{D.4}$$

which highlights  $w$  as the convecting speed for the phase  $u$ . Likewise, multiplying (D.1) by  $-1$ , we obtain

$$(1 - u)_t + \{(1 - u)z\}_x = 0, \quad (\text{D.5})$$

which evidences  $z$  as the convecting speed for the other phase  $1 - u$ . Understandably,  $g = w - z$  is called slip velocity between the two phases.

Xin and Jin's [69] relaxation system for (D.1), namely

$$\begin{cases} u_t + F_x = 0 \\ F_t + a^2 u_x = \lambda[f(u) - F], \end{cases} \quad (\text{D.6})$$

involves two free parameters  $a$  and  $\lambda$ . It is classically solved, at each iteration, by setting  $\lambda = 0$  first and by projecting afterward, i.e.,  $F \equiv f(u)$  (in [69], this scheme is called the "relaxed scheme"). The technical requirement to ensure stability and monotonicity is the Whitham condition

$$a > \max_{u \in [u_L, u_R]} |f'(u)|, \quad (\text{D.7})$$

where  $f'$  is the derivative of  $f$  with respect to  $u$ . In practice, the right-hand side of (D.7) is not always available. Therefore, one has to content oneself with the weak condition

$$a > \max_{u \in \{u_L, u_R\}} |f'(u)|, \quad (\text{D.8})$$

where  $u_L$  and  $u_R$  are the left and right state of a local Riemann problem.

Xin and Jin's method is what we refer to as the "traditional" or "brute-force" relaxation strategy. Unfortunately, when extended to our initial multi-component system, the traditional relaxation is spurred with a division-by-zero problem for the computation of the variables  $W^*$  and  $Z^*$  defined by

$$W^* = \frac{F^*}{u^*} \quad \text{and} \quad Z^* = -\frac{F^*}{1 - u^*}. \quad (\text{D.9})$$

Another relaxation strategy for (D.1) must be worked out, which avoids the disadvantage of dividing by  $u^*$  or  $1 - u^*$ .

In this paper, we would like to put forward a new relaxation approach to (D.1), which makes explicit use of the velocity variables  $w$  et  $z$ . The outline is as follows. First, we explain how —to the astonishment of ourselves— the quasi-linear Born-Infeld equations

$$\begin{cases} w_t + zw_x = 0 \\ z_t + wz_x = 0 \end{cases} \quad (\text{D.10})$$

can be interpreted as a relaxation system for (D.1). Then, we elaborate on various properties of this unexpected and non-standard system. In particular, the Riemann problem associated with it is readily solved, which provides us with bounded values for  $w^*$  and  $z^*$ . This feature is a tremendous advantage of (D.10) over (D.6). It is important to notice that the characteristic fields of the system D.10 are linearly degenerate, which is a central property, shared with (D.6). This advantage is one of a series of other enjoyable properties that will be reviewed afterward.

This strategy has been applied on the drift-flux model which is a conservative two-phase flow model. We will verify that the classical Zuber-Findlay slip law obeys to a Whitham-like stability condition. In practice, the relaxation scheme behave well on Riemann problems for several slip laws that have a physical meaning which will be highlighted by the numerical experiments.

This paper is organized as follows. Sections 2 and 3 are devoted to the scalar conservation laws while sections 4 and 5 are devoted to the drift-flux model. In section 2, we present the properties of the numerical scheme for the scalar conservation law, including the solution of the Riemann problem associated and the stability properties. Section 3 is devoted to the numerical results for the scalar conservation law. In section 4, we show how to construct a relaxation method on the drift-flux model and the numerical experiments for this model are shown in section 5. Section 6 concludes.

## D.2 Relaxation scheme for the scalar conservation law

### D.2.1 Basic ideas

A most natural way to ensure finite values for  $W^*$  and  $Z^*$  is to consider a system in which the primitive variables are the phase velocities  $(w, z)$ . In what follows, we describe the road toward such a system.

First, note that by inverting (D.3), we have

$$u = \frac{z}{z-w} \quad \text{and} \quad f = \frac{wz}{z-w}, \quad (\text{D.11})$$

provided that  $w \neq z$ . Here,  $f$  is a function of  $u$ , so that  $(u, f)$  are not independent variables. Likewise, since  $(w, z)$  are both functions of  $u$ , they are not independent from each other.

In order to avoid ambiguity between dependent variables and independent variables, we switch to the notation  $(u, F)$  and call the components of this pair **relaxed phase variables**. Note that, although  $F$  embodies the relaxed value of the flux  $f$ , it should not be confused with its Xin-Jin counterpart in (D.6). We also consider the pair  $(W, Z)$ , whose components are named **relaxed velocity variables**. The transformation  $(u, F) \mapsto (W, Z)$  is given by

$$W(u, F) = \frac{F}{u} \quad \text{and} \quad Z(u, F) = -\frac{F}{1-u}, \quad (\text{D.12})$$

while the inverse transformation  $(W, Z) \mapsto (u, F)$  is given by

$$u(W, Z) = \frac{Z}{Z-W} \quad \text{and} \quad F(W, Z) \equiv \frac{WZ}{Z-W}. \quad (\text{D.13})$$

We insist on the fact that now  $(u, F)$  are independent variables, as well as  $(W, Z)$ . The only states for which  $F = f(u)$ ,  $W = w(u)$  and  $Z = z(u)$  are **equilibrium states**.

#### D.2.1.1 Non-conservative form

We look for a quasi-linear system under its most general form

$$\begin{pmatrix} W \\ Z \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W \\ Z \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}, \quad (\text{D.14})$$

where  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  and  $(r, s)$  are functions of  $(W, Z)$  such that, by a suitable combination of equations in (D.14), we are in a position to obtain

$$u_t + F_x = 0. \quad (\text{D.15})$$

If successful, we will say that (D.14) is a **relaxation system** for (D.15).

**Lemma D.2.1** *(D.14) is a relaxation system for (D.15) if and only if*

$$Z\alpha - W\gamma = Z^2, \quad Z\beta - W\delta = -W^2 \quad \text{and} \quad Zr - Ws = 0. \quad (\text{D.16})$$

PROOF- Let us multiply both sides of (D.14) by  $(u_W, u_Z)$ . This leads us to

$$u_t + (u_W\alpha + u_Z\gamma)W_x + (u_W\beta + u_Z\delta)Z_x = u_W r + u_Z s. \quad (\text{D.17})$$

The left-hand side is equal to  $u_t + F_x$  if and only if  $F_W = u_W\alpha + u_Z\gamma$  and  $F_Z = u_W\beta + u_Z\delta$ , whereas the right-hand side vanishes if and only if  $u_W r + u_Z s = 0$ . Using the Jacobian matrix

$$\begin{pmatrix} u_W & u_Z \\ F_W & F_Z \end{pmatrix} = \frac{1}{(Z - W)^2} \begin{pmatrix} Z & -W \\ Z^2 & -W^2 \end{pmatrix} \quad (\text{D.18})$$

and simplifying by  $(W - Z)^{-2}$ , we obtain the desired result.  $\square$

There are infinitely many solutions to (D.16). The most obvious one, though, corresponds to

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & W \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} W \\ Z \end{pmatrix} \quad (\text{D.19})$$

where  $\mu$  is any function of  $(W, Z)$ . The exact value for  $\mu$  will be supplied later on. For the time being, let us work with  $\mu = 0$ , so that the resulting relaxation system reads

$$\begin{cases} W_t + ZW_x = 0 \\ Z_t + WZ_x = 0. \end{cases} \quad (\text{D.20})$$

We propose to call (D.20) the **Born-Infeld inner relaxation** associated with equation (D.15).

Serre [59] mentioned several properties of (D.20). Historically, the Born-Infeld equations [12, 64] stem from quantum mechanics and are written in a slightly more sophisticated form. To our knowledge, this is the first time that :

- the Born-Infeld system, at least under Serre's form, appears in the design of relaxation schemes, a context totally unrelated to field theory ;
- a non-linear combination of the relaxation equations (D.20) must be used in order to recover the original equation (D.15).

**Proposition 1** *The eigenvalues  $(Z, W)$  of (D.20), both linearly degenerate, are respectively associated with the strong Riemann invariants  $W$  and  $Z$ .*

PROOF- The eigenfield  $Z$  is associated with the eigenvector  $(1, 0)^T$ . This vector is orthogonal to  $\nabla Z = (0, 1)$ , hence  $Z$  is linearly degenerate. Same argument for  $W$ . As for the strong Riemann invariants, these can be seen directly from the equations.  $\square$

As was already the case for other relaxation schemes [15, 17, 20, 36], linear degeneracy of the eigenfields is a crucial property. Among other nice features, it makes Riemann problems easy to solve and guarantees equivalence between weak solutions to various conservative and non-conservative forms of the system.

### D.2.1.2 Range of variables

Before tackling with Riemann problems, let us clarify the range of the variables involved.

**Proposition 2**  *$u \in [0, 1]$  if and only if  $WZ \leq 0$ . In other words, the relaxed velocity variables  $W$  and  $Z$  must be of opposite signs.*

PROOF- According to (D.12), we have

$$WZ \times u(1 - u) = -F^2 \leq 0. \quad (\text{D.21})$$

Hence,  $u \in [0, 1]$  if and only if  $WZ \leq 0$ .  $\square$

In the  $(W, Z)$ -plane, we consider the second and fourth quadrants

$$\Omega_2 = \{W \leq 0, Z \geq 0\} \quad \text{and} \quad \Omega_4 = \{W \geq 0, Z \leq 0\}. \quad (\text{D.22})$$

The set of admissible states is then  $\Omega = \Omega_2 \cup \Omega_4$ . Over  $\Omega$ , the equality  $W = Z$  occurs at  $(W, Z) = (0, 0)$  alone. As a consequence, formulas (D.13) are well-defined over  $\Omega \setminus (0, 0)$ .

**Lemma D.2.2** *In the  $(W, Z)$ -plane,*

- *the isoline of  $u \in [0, 1]$  is the straightline  $\mathcal{L}_u$  passing through the origin  $(0, 0)$  and directed by the vector  $(1 - u, -u)$ ;*
- *the isoline of  $F \in \mathbb{R}$  is the hyperbola  $\mathcal{H}_F$  passing through the origin  $(0, 0)$  and having for asymptotes the lines  $W = F, Z = -F$ . The hyperbola degenerates into the two axes  $W = 0$  and  $Z = 0$  if and only if  $F = 0$ .*

PROOF- Left to the reader (see figure D.2.1.2).  $\square$

Since  $\mathcal{L}_u$  contain  $(0, 0)$  for any  $(u, F) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$ , the state  $u$ , computed from (D.13), cannot be given a sense at the origin by a kind of continuity argument. On the contrary, the analysis of the hyperbola  $\mathcal{H}_F$  shows that  $F$  can be defined on  $(0, 0)$  because the relaxed variable  $(W, Z)$  lie in the subdomain  $\Omega$  :

$$\lim_{(W, Z) \in \Omega \rightarrow 0} F(W, Z) = 0. \quad (\text{D.23})$$

Therefore, we will set  $F(0, 0) = 0$ .

### D.2.1.3 Riemann problem

A generic point in  $\Omega$  is designated by  $\mathbf{v} \equiv (W, Z)$ . Let  $\mathbf{v}_L \equiv (W_L, Z_L)$  and  $\mathbf{v}_R \equiv (W_R, Z_R)$  be two given states, referred to as *Left* and *Right*. We wish to express the solution of the Riemann problem associated with these states. More specifically, we seek the solution over  $x \in \mathbb{R}$ , at  $t > 0$ , of (D.20) when

$$\mathbf{v}(t = 0; x) = \begin{cases} \mathbf{v}_L & \text{if } x < 0 \\ \mathbf{v}_R & \text{if } x > 0 \end{cases} \quad (\text{D.24})$$

**Theorem 1** *Let  $\mathbf{v}_L = (W_L, Z_L) \in \Omega$  and  $\mathbf{v}_R = (W_R, Z_R) \in \Omega$ . Consider the two velocities*

$$\sigma_L = \min(W_L, Z_L) \quad \text{and} \quad \sigma_R = \max(W_R, Z_R). \quad (\text{D.25})$$

*Then,*

1. Case 1 *if  $W_L W_R \geq 0$  and  $Z_L Z_R \geq 0$ , the Riemann solution to (D.20) consists of the 3 states*

$$\mathbf{v}(t, x) = \begin{cases} \mathbf{v}_L & \text{if } x/t < \sigma_L \\ \tilde{\mathbf{v}} & \text{if } x/t \in ]\sigma_L, \sigma_R[ \\ \mathbf{v}_R & \text{if } x/t > \sigma_R \end{cases} \quad (\text{D.26})$$

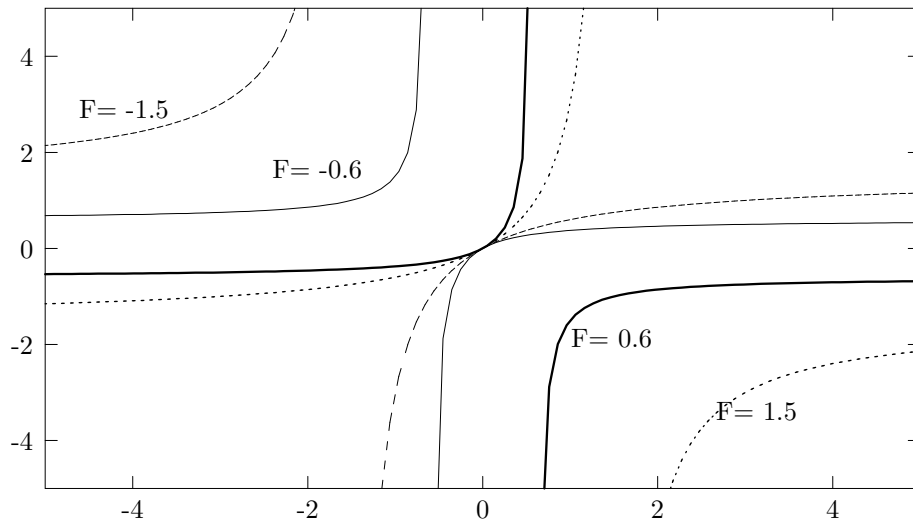
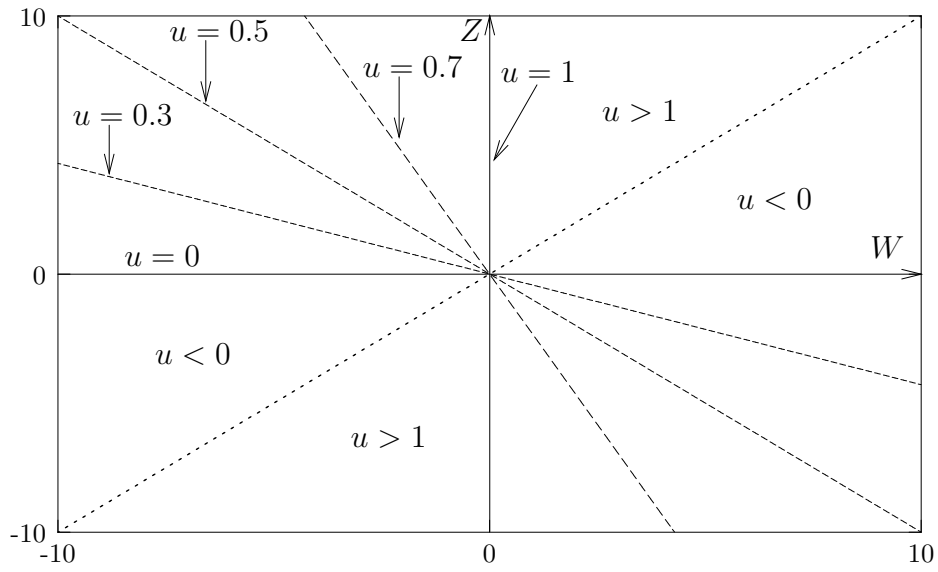
*with  $\tilde{\mathbf{v}} \equiv (\tilde{W}, \tilde{Z}) = (W_L^- + W_R^+, Z_L^- + Z_R^+)$ ;*

2. Case 2 *if  $W_L W_R < 0$  or  $Z_L Z_R < 0$ , the Riemann solution to (D.20) consists of the 4 states*

$$\mathbf{v}(t, x) = \begin{cases} \mathbf{v}_L & \text{if } x/t < \sigma_L \\ \tilde{\mathbf{v}}_L & \text{if } x/t \in ]\sigma_L, 0[ \\ \tilde{\mathbf{v}}_R & \text{if } x/t \in ]0, \sigma_R[ \\ \mathbf{v}_R & \text{if } x/t > \sigma_R \end{cases} \quad (\text{D.27})$$

*with  $\tilde{\mathbf{v}}_L \equiv (\tilde{W}_L, \tilde{Z}_L) = (W_L^-, Z_L^-)$  and  $\tilde{\mathbf{v}}_R \equiv (\tilde{W}_R, \tilde{Z}_R) = (W_R^+, Z_R^+)$ .*



FIG. D.1 – Isolines of  $u$  and  $F$

The notations  $v^- = \min(v, 0)$  and  $v^+ = \max(v, 0)$  stand for the negative and positive parts of any real number  $v \in \mathbb{R}$ .

PROOF- By virtue of linear degeneracy, shock curves coincide with rarefaction curves. In the  $(W, Z)$ -plane,  $W$ -curves are vertical lines, while  $Z$ -curves are horizontal lines. Riemann problems can thus be solved “by hand,” depending on the positions of the two initial states, as depicted in Fig. D.2 and D.3. There are 4 different cases, which can be divided into 2 major cases (1-2), each having 2 subcases (a-b). For each major case, a synthetic formula can be found to encapsulate the 2 subcases.  $\square$

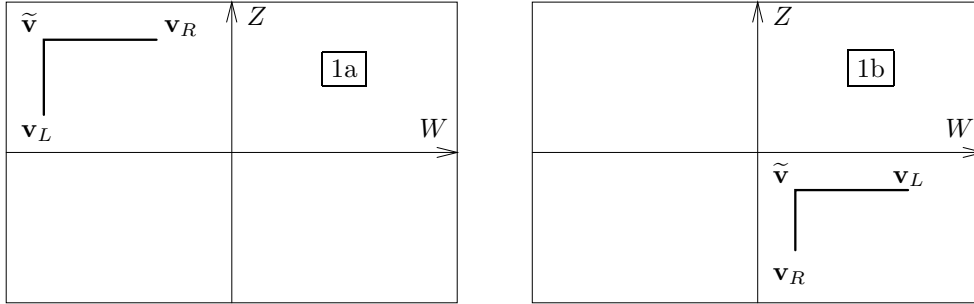


FIG. D.2 – Solution to inner Riemann problem (D.20) in Case 1.

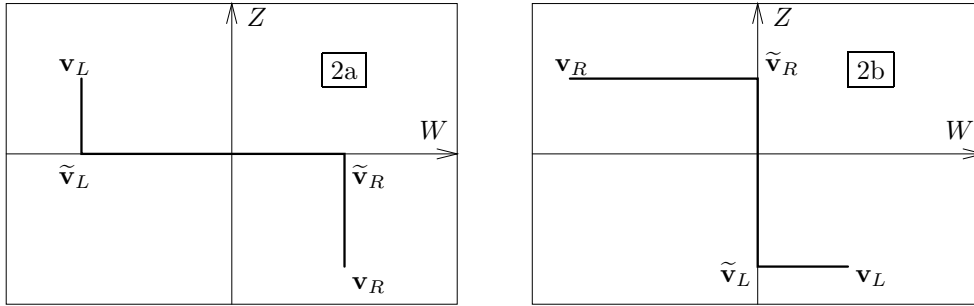


FIG. D.3 – Solution to inner Riemann problem (D.20) in Case 2.

#### D.2.1.4 Numerical flux

We now concentrate on the flux that is to be plugged in the numerical scheme. In this respect, it is well known [32] that only the constant values

$$\begin{cases} W^* = W(t > 0, x = 0) \\ Z^* = Z(t > 0, x = 0) \end{cases} \quad (\text{D.28})$$

need to be extracted from the full Riemann solution.

Let us assume that  $\mathbf{v}^* \equiv (W^*, Z^*)$  has been found by means of some procedure and that  $\mathbf{v}^* \in \Omega \setminus (0, 0)$ . To emphasize the dependency of these variables on the initial data, we compel ourselves to write

$$W^* = W^*(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) \quad \text{and} \quad Z^* = Z^*(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R). \quad (\text{D.29})$$

Then, the numerical flux for the Born-Infeld relaxation scheme is defined as

$$F^* \equiv F(W^*, Z^*) = \frac{W^* Z^*}{Z^* - W^*}, \quad (\text{D.30})$$

a formula which makes sense because  $\mathbf{v}^* \in \Omega \setminus (0, 0)$ . Again, to emphasis the dependency of the flux on the initial data, we will occasionally resort to the notation

$$F^* \equiv \mathcal{F}(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) = F(W^*(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R), Z^*(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)). \quad (\text{D.31})$$

Using this notation, the first-order explicit scheme to update  $u$  in (D.1) over a regular grid with a space meshing equal to  $\Delta x$  reads

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathcal{F}(\mathbf{v}_i^n, \mathbf{v}_{i+1}^n) - \mathcal{F}(\mathbf{v}_{i-1}^n, \mathbf{v}_i^n)], \quad (\text{D.32})$$

the  $\mathbf{v}$ 's being evaluated in each cell at the equilibrium state, e.g.,

$$\mathbf{v}_i^n \equiv (w(u_i^n), z(u_i^n)) = ((1 - u_i^n)g(u_i^n), -u_i^n g(u_i^n)). \quad (\text{D.33})$$

The question to be addressed is whether or not the variables enumerated in (D.28) can be always defined in an unambiguous way?

**Proposition 3** *Let  $\mathbf{v}_L \neq \mathbf{v}_R \in \Omega$ . Then,*

1. *in Case 1,*

<i>if</i>	$\widetilde{W}^*$	$\widetilde{Z}^*$
$\widetilde{W} \neq 0 \ \& \ \widetilde{Z} \neq 0$	$\widetilde{W}$	$\widetilde{Z}$
$\widetilde{W} = 0 \ \& \ \widetilde{Z} \neq 0$	0	$\cancel{\#}$
$\widetilde{W} \neq 0 \ \& \ \widetilde{Z} = 0$	$\cancel{\#}$	0
$\widetilde{W} = 0 \ \& \ \widetilde{Z} = 0$	$\cancel{\#}$	$\cancel{\#}$

(D.34)

2. *in Case 2,*

<i>if</i>	$\widetilde{W}^*$	$\widetilde{Z}^*$
$\widetilde{W}_L \widetilde{W}_R \neq 0 \ \& \ \widetilde{Z}_L = \widetilde{Z}_R = 0$	$\cancel{\#}$	0
$\widetilde{Z}_L \widetilde{Z}_R \neq 0 \ \& \ \widetilde{W}_L = \widetilde{W}_R = 0$	0	$\cancel{\#}$
<i>otherwise</i>	$\cancel{\#}$	$\cancel{\#}$

(D.35)

PROOF- The proof relies upon thorough examination of Fig. D.2, as well as the vanishing cases of one or more speeds.  $\square$

Even when  $\mathbf{v}^*$  is not well-defined, it is always possible to attribute a value to  $F^*$ . After all, this is what we are most concerned about, from the standpoint of (D.32).

**Theorem 2** *Let  $(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) \in \Omega^2$ , the two components of each pair being not necessarily distinct. Then,*

1. *in Case 1,*

<i>if</i>	$F^*$
$\widetilde{W} \neq 0 \ \& \ \widetilde{Z} \neq 0$	$F(\widetilde{W}, \widetilde{Z})$
$\widetilde{W} = 0 \ \& \ \widetilde{Z} \neq 0$	0
$\widetilde{W} \neq 0 \ \& \ \widetilde{Z} = 0$	0
$\widetilde{W} = 0 \ \& \ \widetilde{Z} = 0$	0

(D.36)

2. *in Case 2,*

<i>if</i>	$F^*$
$\widetilde{W}_L \widetilde{W}_R \neq 0 \ \& \ \widetilde{Z}_L = \widetilde{Z}_R = 0$	0
$\widetilde{Z}_L \widetilde{Z}_R \neq 0 \ \& \ \widetilde{W}_L = \widetilde{W}_R = 0$	0
<i>otherwise</i>	0

(D.37)

PROOF- If  $(W^*, Z^*) = (0, \bar{z})$  or  $(\bar{z}, 0)$ , the unknown  $\bar{z}$  component has to be considered as arbitrary : there is no reason for it to coincide with 0. This means that, in the  $(W, Z)$ -plane,  $\mathbf{v}^*$  belongs to one of the coordinate axes, excluding the origin. According to Lemma D.2.2, this is the locus of  $F = 0$ . Therefore,  $F^* = 0$ .  $\square$

## D.2.2 Further properties

From (D.3), we already said that  $g = w - z$  acts as a velocity slip. This suggests to introduce  $G \equiv W - Z$  for the relaxed version of  $g$ . From now on, we choose  $(u, G)$  as independent variables, in substitution for  $(u, F)$ . The mapping  $(u, G) \mapsto (W, Z)$  is given by

$$W(u, G) = (1 - u)G \quad \text{and} \quad Z(u, G) = -uG, \quad (\text{D.38})$$

while the inverse transformation is

$$u(W, Z) = \frac{Z}{Z - W} \quad \text{and} \quad G(W, Z) = W - Z. \quad (\text{D.39})$$

### D.2.2.1 Various forms with RHS

Let us look back at equation (D.19). So far, we have worked with  $\mu = 0$ . It is now time to indicate the appropriate right-hand side (RHS) of the Born-Infeld inner relaxation system. The easiest way to lay ideas out is to disclose the final result right away.

Consider (D.19) with

$$\mu = \frac{\lambda}{W - Z} [g(u) - G], \quad (\text{D.40})$$

where  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ . Then, the corresponding Born-Infeld inner system with RHS is<sup>1</sup>

$$\begin{cases} W_t + ZW_x = \lambda(1 - u)[g(u) - G] \\ Z_t + WZ_x = \lambda(-u)[g(u) - G]. \end{cases} \quad (\text{D.41})$$

Of course,  $u$  and  $G$  are defined by (D.39) for  $(W, Z) \in \Omega \setminus (0, 0)$ . When  $\lambda = 0$ , we obtain the former system (D.20). When  $\lambda = \infty$ , both equations of (D.41) degenerate to  $G = g(u)$ , which is quite annoying because we do not see how (D.41) is a relaxation system to (D.1). However, matters can be made clear by the following result.

**Theorem 3** *System (D.41) is equivalent to the conservative form*

$$\begin{cases} u_t + \{u(1 - u)G\}_x = 0 \\ \{(1 - 2u)G\}_t - \{u(1 - u)G^2\}_x = \lambda(1 - 2u)[g(u) - G]. \end{cases} \quad (\text{D.42})$$

PROOF- First, we assume that all solutions are smooth. Taking the dot product of the left-hand side of (D.41) with  $(u_W, u_Z)$ , we end up with the first equation of (D.42), as was seen in the Section 1, because  $F = u(1 - u)G$ .

Let  $I \equiv (1 - 2u)G$  and  $J \equiv -u(1 - u)G^2$ . In terms of  $(W, Z)$ , we have  $I = W + Z$  and  $J = WZ$ . Adding the two equations of (D.41) together, we obtain

$$I_t + ZW_x + WZ_x = \lambda\{(1 - u) - u\}[g(u) - G]. \quad (\text{D.43})$$

<sup>1</sup>If we want to be very rigorous, we should be writing  $(W^\lambda, Z^\lambda)$  to remind ourselves that the solution does depend on  $\lambda$ .

Since  $ZW_x + WZ_x = \{WZ\}_x$ , the above equation reduces to

$$I_t + J_x = \lambda(1 - 2u)[g(u) - G]. \quad (\text{D.44})$$

To prove that (D.42) implies (D.41), we proceed in a similar way. Now, if we have only weak solutions, equivalence between (D.42) and (D.41) is still valid because of the linear degeneracy of the eigenfields.  $\square$

The conservative form (D.42) is definitely the system actually solved by the scheme (D.32), equipped with the flux (D.30). The relaxed slip variable  $G$  comes in handier than the flux  $F$ . Had we kept working with  $F$  instead of  $G$ , the writing of the system would have been more cumbersome.

**Corollary 1**  $G$  is governed by the unambiguous equation

$$G_t + G^2 u_x = \lambda[g(u) - G]. \quad (\text{D.45})$$

PROOF- Expanding the second equation of (D.42), we have

$$-2u_t G + (1 - 2u)G_t - (1 - 2u)G^2 u_x - u(1 - u)2GG_x = \lambda(1 - 2u)[g(u) - G] \quad (\text{D.46})$$

The left-hand side of (D.46) can be cast into

$$-2G[u_t + (1 - 2u)Gu_x + u(1 - u)G_x] + (1 - 2u)[G_t + G^2 u_x]. \quad (\text{D.47})$$

The first bracket is none other than  $u_t + \{u(1 - u)G\}_x$ , which cancels out by virtue of the first equation of (D.42). The remaining terms in (D.46) are all multiple of  $1 - 2u$ , so that after simplification by  $1 - 2u$ , we arrive at (D.45).  $\square$

**Proposition 4**  $G$  is not an entropy for (D.41), i.e., there is no combination of equations in (D.41) which gives rise to a conservation law of the form  $G_t + K_x = \dots$

PROOF- It is known [59] that any entropy  $\phi(W, Z)$  of the Born-Infeld system must satisfy the Goursat equation

$$\phi_W - \phi_Z + (Z - W)\phi_{WZ} = 0. \quad (\text{D.48})$$

As far as  $G$  is concerned, we have  $G_W = 1$ ,  $G_Z = -1$  and  $G_{WZ} = 0$ , and the Goursat condition is plainly violated.  $\square$

Using (D.48), we can show that  $F$  is not an entropy for (D.41) either. But  $G^{-1}$ , defined for  $(W, Z) \in \Omega \setminus (0, 0)$ , is an entropy. Indeed, it can be inferred from (D.45) that

$$\{G^{-1}\}_t - u_x = -\lambda G^{-2}[g(u) - G]. \quad (\text{D.49})$$

### D.2.2.2 Chapman-Enskog analysis

We now proceed to carry out asymptotic expansion of various variables with respect to  $\lambda \rightarrow \infty$ . As is the case for all relaxation methods, our purpose is to obtain an equivalent equation for  $u$  and to see under which conditions the relaxation system (D.42) is a good approximation to the original equation (D.1).

**Theorem 4** At the first order approximation in  $\lambda$ , the solution  $u$  to relaxation system (D.42) satisfies the equivalent equation

$$u_t + f(u)_x = \lambda^{-1}\{-[f'(u) - w][f'(u) - z]u_x\}_x \quad (\text{D.50})$$

in which  $w = (1 - u)g(u)$  and  $z = -ug(u)$ .

PROOF- Inserting the standard Chapman-Enskog form

$$G = g(u) + \lambda^{-1}g_1 + O(\lambda^{-2}) \quad (\text{D.51})$$

into (D.45) and keeping leading terms only, we obtain

$$-g_1 = g(u)_t + g^2(u)u_x. \quad (\text{D.52})$$

The right-hand side can be transformed into

$$-g_1 = g'(u)u_t + g^2(u)u_x = -g'(u)f(u)_x + g^2(u)u_x \quad (\text{D.53})$$

$$= [g^2(u) - g'(u)f'(u)]u_x, \quad (\text{D.54})$$

where  $u_t = -f(u)_x$  is valid at the zeroth-order. Now, plugging (D.51) into the first equation of (D.42), moving first-order terms to the right-hand side and using (D.53), we end up with

$$u_t + f(u)_x = \lambda^{-1}\{-u(1-u)g_1\}_x \quad (\text{D.55})$$

$$= \lambda^{-1}\{u(1-u)[g^2(u) - g'(u)f'(u)]u_x\}_x. \quad (\text{D.56})$$

Let us rearrange the kernel

$$\mathcal{D}(u) = u(1-u)[g^2(u) - g'(u)f'(u)]. \quad (\text{D.57})$$

On one hand,

$$u(1-u)g^2(u) = -wz. \quad (\text{D.58})$$

On the other hand, multiplying the equality  $f' = (1-2u)g + u(1-u)g'$  by  $f'$  and isolating the product  $g'f'$ , we have

$$u(1-u)g'(u)f'(u) = [f'(u)]^2 - (1-2u)g(u)f(u) \quad (\text{D.59})$$

$$= [f'(u)]^2 - (w+z)f(u) \quad (\text{D.60})$$

Reporting (D.58) and (D.59) into (D.57) yields

$$\mathcal{D}(u) = -wz + (w+z)f(u) - [f'(u)]^2 = -[f'(u) - w][f'(u) - z], \quad (\text{D.61})$$

which completes the proof.  $\square$

**Corollary 2** *A sufficient condition for the relaxation system (D.42) to be stable is that the Whitham inequalities*

$$\min(w, z) < f'(u) < \max(w, z) \quad (\text{D.62})$$

*hold over some appropriate range of  $u$ , which depends on the problem at hand.*

PROOF- At the continuous level, a sufficient stability condition requires that the kernel  $\mathcal{D}(u)$  in the equivalent equation (D.50) be a strictly diffusive kernel, i.e.,  $\mathcal{D}(u) > 0$ . This amounts to demanding

$$[f'(u) - w][f'(u) - z] < 0, \quad (\text{D.63})$$

hence (D.62).  $\square$

Unsurprisingly, the Whitham conditions demand that the eigenvalue of the original equation be enclosed by the two eigenvalues of the relaxation system. The novel feature is that, in the present method, conditions (D.62) turn out to be quite severe : only a small class of flux functions  $f$  are eligible for the Born-Infeld relaxation.

### D.2.2.3 Eligible flux functions

Let us investigate further into the class of flux functions that meet the Whitham conditions (D.62). First, we observe that strict inequalities cannot occur at monophasic states  $u \in \{0, 1\}$ , because  $f'(0) = w(0) = g(0)$  and  $f'(1) = z(1) = -g(1)$ . This is why, unless otherwise indicated, we take it for granted that  $u \notin \{0, 1\}$ .

Second, since  $f(0) = f(1) = 0$ , we can write

$$w = \frac{f(u) - f(0)}{u - 0} \quad \text{and} \quad z = \frac{f(1) - f(u)}{1 - u}, \quad (\text{D.64})$$

which leads to an immediate geometrical interpretation, depicted in Fig. D.4. On the curve  $\mathcal{C}$  given by the Cartesian equation  $f = f(u)$ , let  $M = (u, f)$  be a running point,  $A = (0, 0)$  and  $B = (1, 0)$ . Then,  $w$  is the slope of  $AM$ , while  $z$  is that of  $BM$ . Conditions (D.62) amount to saying that the tangent to  $\mathcal{C}$  at  $M$  lies outside the angular sector  $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ .

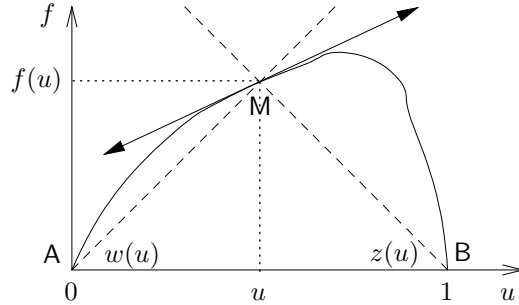


FIG. D.4 – Geometrical interpretation of the Whitham conditions.

We now express (D.62) in terms of  $w$  and  $z$  alone, viewed as functions of  $u$ . This step allows us to connect eligible functions with convexe and concave functions.

**Theorem 5** *Conditions (D.62) are satisfied if and only if  $w$  and  $z$  are strictly decreasing at  $u$  if  $f(u) > 0$ , strictly increasing at  $u$  if  $f(u) < 0$ , critical at  $u$  if  $f(u) = 0$ .*

PROOF- A straightforward computation shows that

$$w' = \frac{uf' - f}{u^2} \quad \text{and} \quad z' = -\frac{(1-u)f' + f}{(1-u)^2}. \quad (\text{D.65})$$

Suppose  $f > 0$ . After (D.3), we have  $z < 0 < w$ , because  $u \in ]0, 1[$ . Thus, conditions (D.62) reduce to

$$z = -\frac{f}{1-u} < f' < \frac{f}{u} = w. \quad (\text{D.66})$$

It becomes clear that

$$-[(1-u)f' + f] < 0 \quad \text{and} \quad uf' - f < 0, \quad (\text{D.67})$$

whence  $z' < 0$  and  $w' < 0$ . We proceed similarly in the case  $f < 0$  for which  $w < 0 < z$ . If  $f = 0$ , necessarily  $w = z = 0$  because  $u \notin \{0, 1\}$ . By (D.62), we have  $f' = 0$ , from which we deduce that  $w' = z' = 0$  via (D.65). To establish the converse, we follow the same steps in reverse order.  $\square$

### D.2.2.4 Flux monotonicity

The Whitham conditions were earlier derived at the continuous level from the Chapman-Enskog analysis. We are going to show how these are also linked to the monotonicity of the numerical flux at the discrete level.

Consider the first-order explicit scheme

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [H(u_i^n, u_{i+1}^n) - H(u_{i-1}^n, u_i^n)]. \quad (\text{D.68})$$

We recall [32] that the numerical flux  $H$  is said to be **monotonous** if it is increasing with respect to its first argument and decreasing with respect to its second argument. In terms of derivatives, if we specify  $H(u_L, u_R)$  for the arguments, monotonicity amounts to

$$H_{u_L} \geq 0 \quad \text{and} \quad H_{u_R} \leq 0. \quad (\text{D.69})$$

We wish to know about the monotonicity of the Born-Infeld numerical flux, namely,  $H^{\text{BI}}(u_L, u_R) = F^*$ , where  $F^*$  was defined in section D.2.1.4.

**Theorem 6** *The Born-Infeld numerical flux is monotonous if and only if the Whitham conditions (D.62) are satisfied.*

PROOF- It is easy to see that the only case to deal with is the Case 1 of Theorem 1 with  $\widetilde{W} \neq 0$  and  $\widetilde{Z} \neq 0$  because, for all other cases, the numerical flux is 0.

Since  $\widetilde{W} \neq 0$  and  $\widetilde{Z} \neq 0$ , none of the  $L$  and  $R$  states, represented by  $(W_L, Z_L) = (w(u_L), z(u_L))$  and  $(W_R, Z_R) = (w(u_R), z(u_R))$ , can have a nil component. In [1a],  $W_{L,R} < 0 < Z_{L,R}$  and  $F_{L,R} < 0$ , which yields  $\mathbf{v}^* = (W_L, Z_R)$ . It follows that

$$H^{\text{BI}}(u_L, u_R) = \frac{w(u_L)z(u_R)}{z(u_R) - w(u_L)}, \quad (\text{D.70})$$

and consequently

$$H_{u_L}^{\text{BI}} = w'(u_L) \left[ \frac{z(u_R)}{z(u_R) - w(u_L)} \right]^2 \quad (\text{D.71})$$

$$H_{u_R}^{\text{BI}} = -z'(u_R) \left[ \frac{w(u_L)}{z(u_R) - w(u_L)} \right]^2. \quad (\text{D.72})$$

The monotonicity conditions (D.69) take place if and only if  $w' > 0$  and  $z' > 0$ . Moreover, since  $F < 0$ , Theorem 5 leads to the conclusion that the Whitham conditions (D.62) hold. In [1b], we have  $F_{L,R} > 0$  and

$$H^{\text{BI}}(u_L, u_R) = \frac{w(u_R)z(u_L)}{z(u_L) - w(u_R)}. \quad (\text{D.73})$$

The rest of the discussion works alike.  $\square$

**Remark 1** *As a matter of fact, it is fair to mention that the equivalence between monotonicity of the numerical flux and the Whitham conditions is also valid for the Xin-Jin relaxation scheme (D.6), the flux of which is*

$$H^{\text{XJ}}(u_L, u_R) = \frac{1}{2}[f(u_L) + f(u_R)] + \frac{a}{2}[u_L - u_R]. \quad (\text{D.74})$$

We must add that, for a matter of simplicity, we have written here simplified results : more general theorems are given in [5]. Indeed, it can be shown that the Whitham condition appears not only for the particular case  $f(u) = u(1-u)g(u)$ . Similarly, the equivalence between the Whitham condition and the monotonicity of the scheme can be generalised. However, the results shown here are sufficient to understand the case of the two-phase flow model, which we are going to detail.



## D.3 Numerical results

Computer simulations are performed in order to compare Born-Infeld to Xin-Jin. The runs are dedicated to Riemann problems, for which analytical solutions can be found. The simulations are carried out for 4 types of *positive* flux functions, the characteristics of which are summarized in Table D.3. The **Yes** entry in the last two columns means that the property at issue is satisfied over the interval  $]0, 1[$ .

Name	Slip velocity $g$	$w, z$ decreasing	$f$ concave
Constant $g$	4	<b>Yes</b>	<b>Yes</b>
Partial Whitham	$4u[1-u]$	No	No

TAB. D.1 – Flux functions for numerical tests

In the Xin-Jin scheme, the parameter  $a$  is computed, at each edge, by

$$a(u_L, u_R) = \max(|f'(u_L)|, |f'(u_R)|). \quad (\text{D.75})$$

In this case, it is known that the Xin-Jin scheme is the Local-Lax-Friedrichs scheme. The numerical simulations are performed with 200 cells.

### D.3.1 Constant $g$

Since  $f = 4u(1-u)$  is positive and concave, the Whitham conditions are met (see figures D.5).

Figure D.6 displays the profile of the solution  $u$  at  $t = 1$ , for the initial data  $u_L = 0.25$ ,  $u_R = 0.5$ . The sharpness of the shock for Born-Infeld is comparable to that of Xin-Jin. In the figure D.7, we analyze the convergence of the scheme toward the exact solution when the number of cells is increased. In this case, we see that the numerical dissipation of the Born-Infeld scheme is between those of the Lax-Friedrichs and Xin-Jin. We have seen this result for all the physical flux  $f(u)$  that we have experienced, but we haven't been able to prove it.

If we swap the  $L$  and  $R$  states, i.e., if now  $u_L = 0.5$ ,  $u_R = 0.25$ , the solution is a rarefaction, as shown in Fig. D.8. The two schemes have about the same quality.

### D.3.2 Partial Whitham

The trouble with the function  $f(u) = u^2(1-u)^2$  is that the Whitham condition is not satisfied over the whole interval  $[0, 1]$ .

If the data are pushed toward monophasic states, e.g., if  $u_L = 1.$ ,  $u_R = 0.$ , we observe a bad result (Fig. D.10). The result is explained by the fact that the left and right states lie in the region where the Whitham condition is not satisfied. Furthermore, the numerical flux is  $H = 0$  for the Born-Infeld scheme. The case  $u_L = 0.99$ ,  $u_R = 0.01$  seems to be much better (D.11). In fact, it is not : the numerical solution does not converge toward the exact one, as the number of cells increases.

In the figure D.12, we see that in this case, the Born-Infeld scheme is worse than Lax-Friedrichs' scheme!

## D.4 Relaxation scheme for the drift-flux model

In this section, we show how to construct an explicit relaxation scheme based on the Born-Infeld system for a two-phase flow model. We start by presenting the drift-flux model which is closed by a

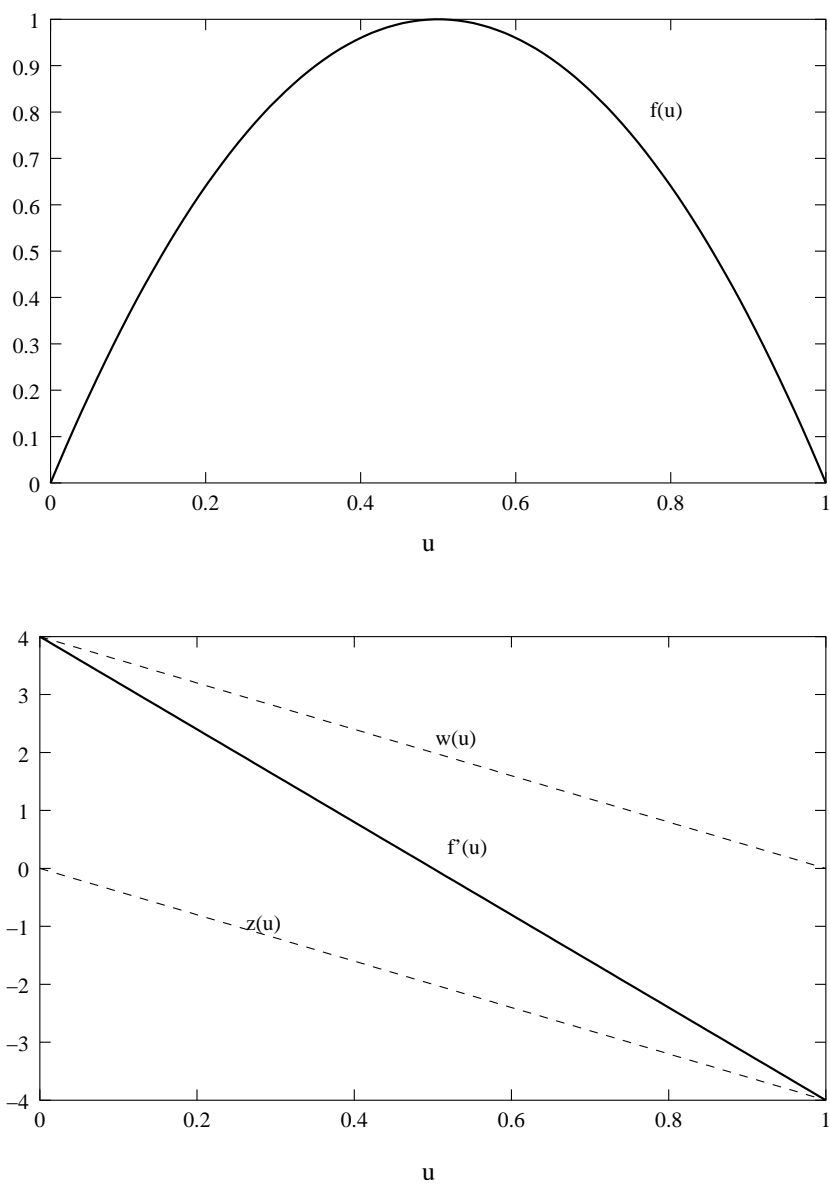
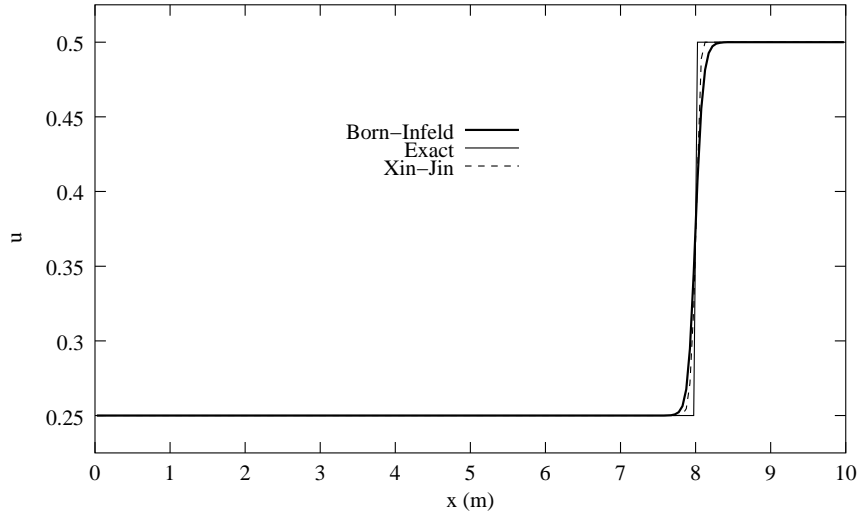
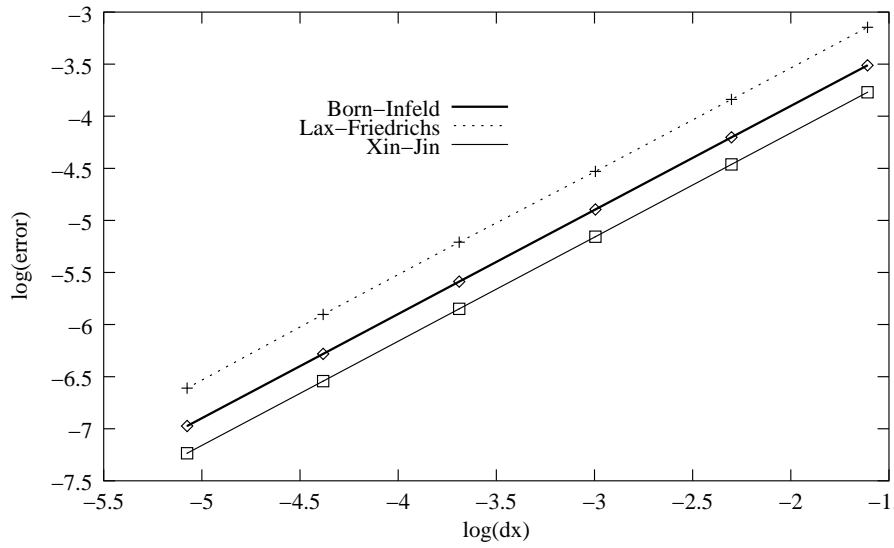
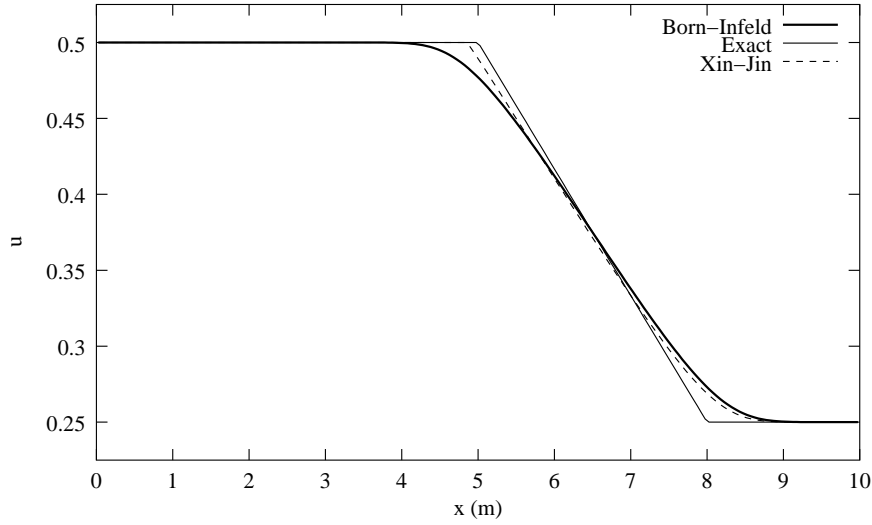


FIG. D.5 – Constant  $g$

FIG. D.6 – Constant  $g$ ,  $u_L = 0.25$ ,  $u_R = 0.5$ FIG. D.7 – Constant  $g$ ,  $u_L = 0.25$ ,  $u_R = 0.5$

FIG. D.8 – Constant  $g$ .  $u_L = 0.5$ ,  $u_R = 0.25$ 

thermodynamic and a hydrodynamic law. Then we design a relaxation scheme in which the 2 first equations are relaxed by introducing a new relaxation variable and the last equation (the gas mass transport) is relaxed thanks to the Born-Infeld system. We will see that classical hydrodynamic laws are satisfying a Whitham condition. This scheme will be presented in his order 1 in space and time version for a matter of simplicity.

#### D.4.1 The drift-flux model

Let us consider phase space :

$$\Omega = \{ \mathbf{u} = (\rho, \rho v, \rho Y) \in \mathbb{R}^3; \rho > 0, v \in \mathbb{R}, Y \in [0, 1] \},$$

where  $\rho$  is the density of the mixture,  $v$  is the velocity of the mixture and  $Y$  is the gas mass fraction. We are interested in the simulation of two-phase flows in petroleum pipelines[54]. The system, made up of three conservation laws, is a drift-flux type model and is closed by two thermodynamic and hydrodynamic models. We will consider a perfect gas and a uncompressible liquid with the state equations

$$\rho_G = p/a_G^2, \quad \rho_L = \rho_L^0, \quad (\text{D.76})$$

where  $\rho_L^0$  is the liquid density and  $a_G$  is the sound speed in the gas. Then the pressure law is

$$p(\rho, \rho Y) = a_G^2 \frac{\rho Y}{1 - \frac{\rho}{\rho_L^0} \left(1 - \frac{\rho Y}{\rho}\right)}. \quad (\text{D.77})$$

We consider a general algebraic hydrodynamic law of the type

$$\varphi(\mathbf{u}) = v_L - v_G, \quad \forall \mathbf{w} \in (\mathbb{R}^+)^2 \times \mathbb{R}, \quad (\text{D.78})$$

where  $v_G$  (resp.  $v_L$ ) is the gas velocity (resp. the liquid velocity). We consider the following two-phase system in conservation form :

$$\begin{cases} \partial_t(\rho) + \partial_x(\rho v) & = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + P(\mathbf{u})) & = S(\mathbf{u}), \\ \partial_t(\rho Y) + \partial_x(\rho Y v - \sigma(\mathbf{u})) & = 0. \end{cases} \quad (\text{D.79})$$

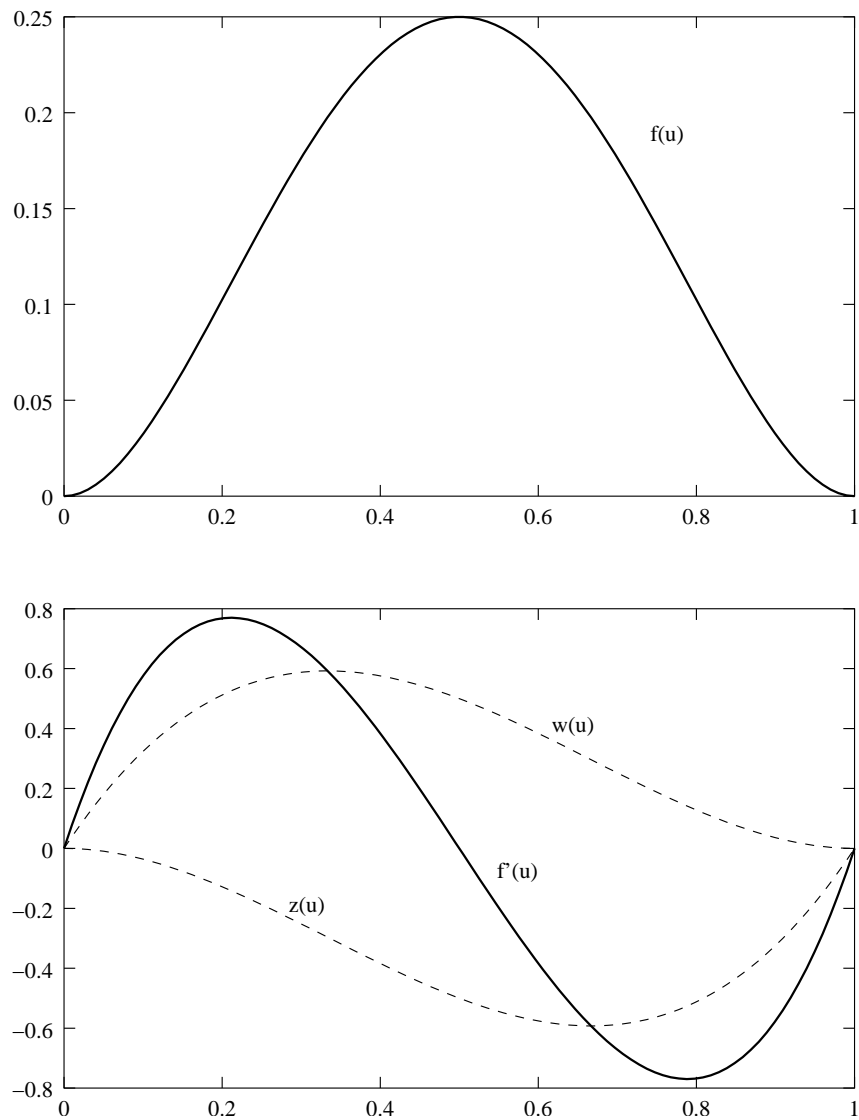
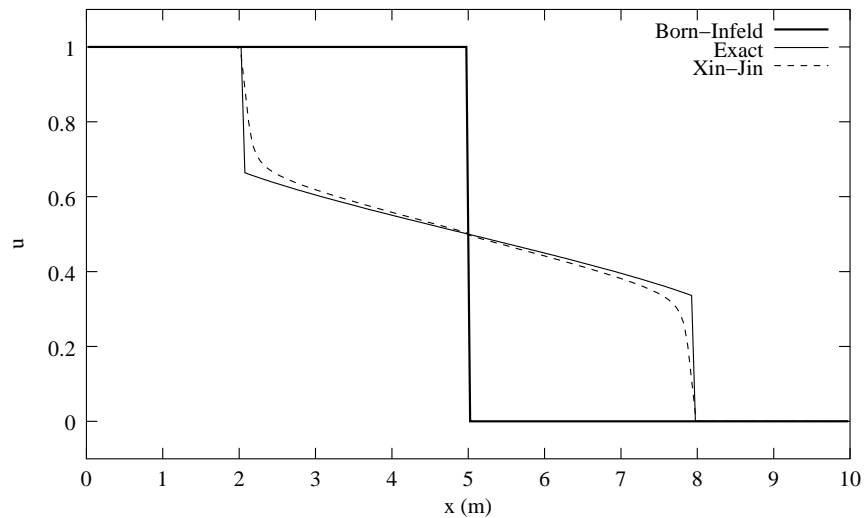
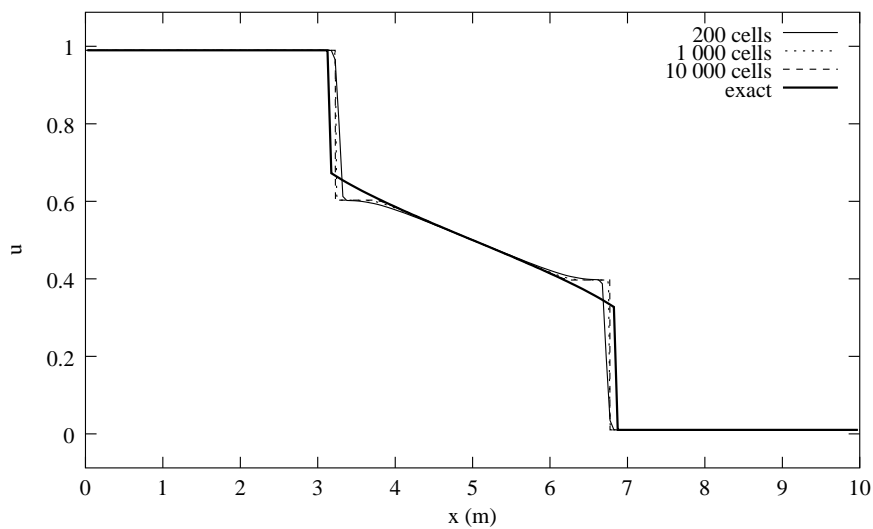
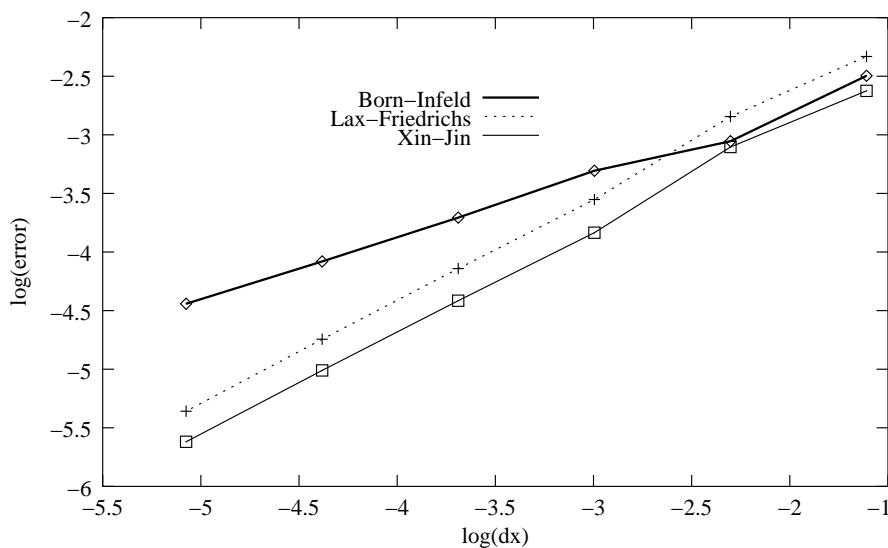


FIG. D.9 – Partial Whitham

FIG. D.10 – Partial Whitham.  $u_L = 1$ ,  $u_R = 0$ FIG. D.11 – Partial Whitham.  $u_L = 0.99$ ,  $u_R = 0.01$

FIG. D.12 – Partial Whitham.  $u_L = 0.99$ ,  $u_R = 0.01$ 

The nonlinear function  $\sigma$  and  $P$  are defined by

$$\sigma(\mathbf{u}) = \rho Y(1 - Y)\varphi(\mathbf{u}) \quad \text{and} \quad P(\mathbf{u}) = p(\mathbf{u}) + \rho Y(1 - Y)\varphi(\mathbf{u})^2.$$

We see that the previous function  $g(u)$  is now replaced by the slip law  $\varphi(\mathbf{u})$ .

There is no analytical expression for the physical flux of the considered system, except for very simple hydrodynamic laws. Therefore the eigenvalues of the system (D.79) are not known in full generality. However, in most common situations, i.e., for usual values of  $\mathbf{u}$ , the system is hyperbolic and has three real eigenvalues  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$  with  $\lambda_1 < 0$  and  $\lambda_3 > 0$ .

#### D.4.2 Basic ideas

We want to relax all the *genuine* non-linearities of the equilibrium system (D.79) which will appear by means of a Lagrangian change of coordinates. Let us set  $\tau = 1/\rho$ , and define the Lagrangian mass coordinate  $y$  by  $dy = \rho dx - \rho v dt$ . It turns out that expressing the main nonlinearities of the problem in terms of the variables  $(\tau, v, Y)$  instead of the conservative one leads to simpler calculations. For the sake of simplicity and with some abuse in the notations, nonlinear functions (like the pressure or the hydrodynamic law) will be given the same notation when expressed in both types of variables. The system (D.79) then rewrites :

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_y v &= 0, \\ \partial_t v + \partial_y P(\mathbf{u}) &= S(\mathbf{u}), \\ \partial_t Y - \partial_y \sigma(\mathbf{u}) &= 0. \end{cases} \quad (\text{D.80})$$

Let us introduce the variables

$$W = -\rho(1 - Y)\varphi(\mathbf{u}), \quad Z = \rho Y\varphi(\mathbf{u}). \quad (\text{D.81})$$

We introduce one new state variable  $\Pi$  which is intended to coincide with  $P(\mathbf{u})$  in the limit of the relaxation parameter  $\lambda$ . We decide to consider the relaxation system

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_y v = 0, \\ \partial_t v + \partial_y \Pi = 0, \\ \partial_t \Pi + a^2 \partial_y v = \lambda(P - \Pi), \\ \partial_t W + Z \partial_y W = \lambda(1 - Y)(\varphi - \Phi), \\ \partial_t Z + W \partial_y Z = -\lambda Y(\varphi - \Phi). \end{cases} \quad (\text{D.82})$$

In the Eulerian frame, the relaxation system is

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + \Pi) = 0, \\ \partial_t(\rho \Pi) + \partial_x(\rho \Pi v + a^2 v) = \lambda \rho(P - \Pi), \\ \partial_t W + (v + Z\tau) \partial_x W = \lambda \rho(1 - Y)(\varphi - \Phi), \\ \partial_t Z + (v + W\tau) \partial_x Z = -\lambda \rho Y(\varphi - \Phi). \end{cases} \quad (\text{D.83})$$

This system can equivalently be written in the form

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + \Pi) = 0, \\ \partial_t(\rho \Pi) + \partial_x(\rho \Pi v + a^2 v) = \lambda \rho(P - \Pi), \\ \partial_t Y + \partial_x\{Y(1 - Y)\Phi\} = 0, \\ \partial_t\{(1 - 2Y)\Phi\} - \partial_x\{Y(1 - Y)\Phi^2\} = \lambda(1 - 2Y)[\varphi(\mathbf{u}) - \Phi], \end{cases} \quad (\text{D.84})$$

where  $\Phi$  is the relaxation variable associated to the function  $\varphi(\mathbf{u})$ . The above relaxation system will be given hereafter the convenient abstract form :

$$\partial_t \mathbf{v} + \partial_x \mathcal{G}(\mathbf{v}) = \lambda \mathcal{R}(\mathbf{v}) + \mathcal{S}(\mathbf{v}), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}; \quad (\text{D.85})$$

where the variable  $\mathbf{v}$  and the flux function  $\mathcal{G}$  receive clear definitions. Here, the relaxation variable associated with the function  $\sigma(\mathbf{u})$  is  $\Sigma = Y(1 - Y)\Phi$ .

The important point in this relaxation strategy is that the Born-Infeld system is introduced only for the evolution equation of the gas mass fraction. For the evolution equations on the density  $\rho$  and the total momentum  $\rho v$ , the technique consists in relaxing the nonlinear function  $P(\mathbf{u})$ , which is the strategy that we used in [6, 7].

In the following, we suppose that

$$a > \max(|W|, |Z|).$$

### D.4.3 Whitham condition

We have already noticed (in [7]) that, on one side, the evolution equations on the density  $\rho$  and the total momentum  $\rho v$  (which form a system close to the  $p$ -system) and, on the other side, the evolution equation on the gas mass fraction  $Y$ , are not totally coupled. In particular, we have highlighted that the stability conditions resulting from the Chapman-Enskog analysis could be obtained while considering only the partial derivatives of  $P$  with respect to  $\tau$  and  $v$  and the partial derivatives of  $\sigma$  with respect to  $Y$ . If the system was really coupled, we should have consider the partial derivatives with respect to  $\mathbf{u}$  but numerical experiments show that the numerical scheme is rough enough with this uncoupled approach. These remarks suggest to consider the Whitham-like condition

$$\min(W, Z) \leq -\sigma_Y(\mathbf{u}) \leq \max(W, Z), \quad (\text{D.86})$$



associated with the relaxation coefficient

$$a = -P_\tau + P_v^2. \quad (\text{D.87})$$

Obviously, for the no-slip law  $\varphi(\mathbf{u}) = 0$ , the condition (D.86) is satisfied. Therefore, we consider the equivalent condition

$$-\frac{1}{Y} \leq \frac{\varphi_Y(\mathbf{u})}{\varphi(\mathbf{u})} \leq \frac{1}{1-Y}, \quad \varphi \neq 0. \quad (\text{D.88})$$

It is now necessary to verify that the condition (D.88) is satisfied by the classical slip laws. The answer is that there are several classical slip laws (like Zuber-Findlay) which, under classical restriction, are satisfying this condition. Moreover, all the interval  $[-\frac{1}{Y}, \frac{1}{1-Y}]$  is used! This is very surprising because the Whitham condition has not been designed in this goal ... From another point of view, the slip laws have not been designed in order to satisfy this condition.

Let us now detail the results. We suppose that the liquid phase is incompressible and the gas is perfect. Let us notice that  $\rho > 0$  because the void never appears in petroleum pipelines. From another point of view, we restrict ourselves to  $\rho < \rho_L^0$  because the liquid is not compressible (if  $\rho = \rho_L^0$ , the speed of sound is infinite and the system is not hyperbolic anymore). That is why, in the following, the density lie in the interval  $]0, \rho_L^0[$ .

Let us define the auxiliary function  $\kappa$  by

$$\kappa(\rho, Y) = (1 - Y) \left( \frac{\rho}{\rho_L^0} - 1 \right) \quad (\text{D.89})$$

The partial derivative of  $\kappa$  with respect to  $Y$  is

$$\kappa_Y(\rho, Y) = - \left( \frac{\rho}{\rho_L^0} - 1 \right), \quad \forall \rho \in ]0, \rho_L^0[, Y \in ]0, 1[, \quad (\text{D.90})$$

and the function  $\kappa$  satisfies the properties

$$\kappa = -(1 - Y)\kappa_Y, \quad -1 < \kappa < 0, \quad \forall \rho \in ]0, \rho_L^0[, Y \in ]0, 1[. \quad (\text{D.91})$$

**Theorem 7** *Let us suppose that the slip law is Zuber-Findlay's law*

$$\varphi(\mathbf{u}) = - \frac{v(1 - C_0) - C_1}{C_0 \kappa(\rho, Y) + (1 - Y)}, \quad \forall \rho \in ]0, \rho_L^0[, Y \in ]0, 1[, \quad (\text{D.92})$$

with  $C_0 > 1$  and  $C_1 \in \mathbb{R}$  two constants. Then, the slip law  $\varphi(\mathbf{u})$  satisfies the Whitham condition (D.88).

**Remark 2** *The Zuber-Findlay law is tradionnaly written in the form  $v_G = C_0(R_G v_G + R_L v_L) + C_1$  with  $R_G$  (resp.  $R_L$ ) the surface gas fraction of the gas (resp. the liquid). The closure laws  $R_G + R_L = 1$  and  $\rho Y = \rho_G(p)$  lead to the equality (D.92).*

PREUVE of the theorem(7). One easily see that the partial derivative of  $\varphi$  with respect to  $Y$  satisfies

$$\varphi_Y = - \frac{C_0 \kappa_Y - 1}{C_0 \kappa + (1 - Y)} \varphi, \quad (\text{D.93})$$

which leads, after injection of (D.91), to the equality

$$\frac{\varphi_Y}{\varphi} = \frac{1}{1 - Y}. \quad (\text{D.94})$$

This is the maximum authorized by the inequalities (D.88) and concludes the proof.  $\square$

Similar results can be obtained for other slip laws.

- The law

$$\varphi(\mathbf{u}) = -\frac{\mu v + \nu}{1 + \mu \kappa(\rho, Y)}, \quad \forall \rho \in ]0, \rho_L^0[, Y \in ]0, 1[, \quad (\text{D.95})$$

with  $0 < \mu < 1$  and  $\nu \in \mathbb{R}$  is an extension of the Zuber-Findlay law. It can be shown that

$$-\frac{1}{Y} \leq \frac{\varphi_Y}{\varphi} \leq 0. \quad (\text{D.96})$$

The inequalities (D.88) are then satisfied.

- If the flow is emulsion (that is to say that there is small bubbles of gas in the liquid), the law is

$$\varphi(\mathbf{u}) = -\frac{\delta \rho_L^0}{\rho(1 - Y)}, \quad \forall \rho \in ]0, \rho_L^0[, Y \in ]0, 1[, \quad (\text{D.97})$$

with  $\delta \in \mathbb{R}$ . One can show that

$$\frac{\varphi_Y}{\varphi} = \frac{1}{1 - Y}, \quad (\text{D.98})$$

and, again, the inequalities (D.88) are then satisfied.

More details on these computations can be found in [5].

Now that we have verified that the slip laws are satisfying the Whitham condition, we can design the relaxation scheme.

#### D.4.4 Relaxation scheme

The pipeline is made of  $I$  cells, denoted  $(M_i)_{i=1, I}$ . Let  $x_i$  be the center of the cell and  $\Delta x$  its length. We also denote  $x_{i+1/2} = (x_i + x_{i+1})/2$  the interface between two cells,  $M_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ ,  $x_{1/2} = 0$  inlet boundary interface and  $x_{I+1/2} = L$  the outlet boundary interface. Let  $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$  be the time step. Let  $\mathbf{u}_i^n \approx \mathbf{u}(x_i, t^n)$  be the discrete unknown. The numerical scheme is based on the following splitting method.

1. **Relaxation.** We take  $\lambda = \infty$  and solve the ODE system  $\partial_t \mathbf{v} = \lambda \mathcal{R}(\mathbf{v})$  by projecting the variables on the equilibrium variety.
2. **Evolution.** We take  $\lambda = 0$  and solve the system  $\partial_t \mathbf{v} + \partial_x \mathcal{G}(\mathbf{v}) = \mathcal{S}(\mathbf{v})$  on one iteration in order to go to the time  $t = t^{n+1}$ .

At the beginning of the time step, we compute  $\mathbf{v}_i^n \approx \mathbf{v}(x_i, t^n)$  at equilibrium, i.e.

$$\begin{aligned} \Pi_i^n &:= P(\mathbf{u}_i^n), \quad \Sigma_i^n := \sigma(\mathbf{u}_i^n), \\ W_i^n &= -\rho_i^n(1 - Y_i^n)\varphi(\mathbf{u}_i^n), \quad Z_i^n = \rho_i^n Y_i^n \varphi(\mathbf{u}_i^n). \end{aligned} \quad (\text{D.99})$$

We then consider the system  $\partial_t \mathbf{v} + \partial_x \mathcal{G}(\mathbf{v}) = \mathcal{S}(\mathbf{v})$  that we approximate by the following finite volume scheme :

$$\frac{\mathbf{v}_i^{n+1} - \mathbf{v}_i^n}{\Delta t^n} + \frac{\mathbf{H}_{i+1/2}^{n+1/2} - \mathbf{H}_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} = \mathcal{S}(\mathbf{v}_i^n) \quad (\text{D.100})$$

with  $\mathbf{H}_{i+1/2}^{n+1/2}$  the numerical flux based on a Godunov scheme. We denote  $\mathbf{v}_L = \mathbf{v}_i^n$  and  $\mathbf{v}_R = \mathbf{v}_{i+1}^n$  the left and right states of the Riemann Problem and  $\mathbf{v}^*(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$  the value of the solution of this R.P. at  $x = x_{i+1/2}$ . The Godunov numerical flux is

$$\mathbf{H}_{i+1/2}^{n+1/2} = \mathbf{H}^{Godunov}(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) = \mathcal{G}(\mathbf{v}^*(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)). \quad (\text{D.101})$$

The explicit computations for  $\mathbf{v}^*$  are given in proposition (D.4.1) at the end of this section. The proposition will not be proven here, since it is done in [6] but is just shown for consistency.

In the following proposition, we denote  $\bar{\varphi} = (\varphi_{\mathbf{L}} + \varphi_{\mathbf{R}})/2$  the average and  $\langle \varphi \rangle = (\varphi_{\mathbf{L}} - \varphi_{\mathbf{R}})/2$  the mid-jump of the the two states  $\mathbf{v}_{\mathbf{L}}$  and  $\mathbf{v}_{\mathbf{R}}$  whatever the quantity  $\varphi$ . For all  $v \in \mathbb{R}$ , one notes  $v^+ = \max(v, 0)$  and  $v^- = \min(v, 0)$ .

**Proposition D.4.1** *We consider the Riemann problem for the relaxation system (D.84) with  $\lambda = 0$  and no source terms and the initial data*

$$\mathbf{v}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{v}_{\mathbf{L}} & \text{if } x < 0, \\ \mathbf{v}_{\mathbf{R}} & \text{if } x > 0. \end{cases} \quad (\text{D.102})$$

The Riemann solution is made of six constant states separated by five contact discontinuities

$$\mathbf{v}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{v}_{\mathbf{L}} = \mathbf{v}_0 & \text{if } \frac{x}{t} < \mu_1, \\ \mathbf{v}_j & \text{if } \mu_j < \frac{x}{t} < \mu_{j+1}, \quad 1 \leq j \leq 4 \\ \mathbf{v}_{\mathbf{R}} = \mathbf{v}_5 & \text{if } \frac{x}{t} > \mu_5, \end{cases} \quad (\text{D.103})$$

Let us set

$$\begin{aligned} \tau_{\mathbf{L}}^* &= \tau_{\mathbf{L}} - \frac{\langle v \rangle}{a} + \frac{\langle \Pi \rangle}{a^2}, & \tau_{\mathbf{R}}^* &= \tau_{\mathbf{R}} - \frac{\langle v \rangle}{a} - \frac{\langle \Pi \rangle}{a^2}, \\ v^* &= \bar{v} + \frac{\langle \Pi \rangle}{a}, & \Pi^* &= \bar{\Pi} + a \langle v \rangle. \end{aligned} \quad (\text{D.104})$$

Assume that the parameter  $a$  is chosen large enough so that both  $\tau_{\mathbf{L}}^*$  and  $\tau_{\mathbf{R}}^*$  in (D.104) are positive.

Let us set  $s_{\mathbf{L}} = \min(W_{\mathbf{L}}, Z_{\mathbf{L}})$  and  $s_{\mathbf{R}} = \min(W_{\mathbf{R}}, Z_{\mathbf{R}})$ . If  $a > \max(|W|, |Z|)$ , the eigenvalues are increasingly ordered as follows

$$\underbrace{v_{\mathbf{L}} - a\tau_{\mathbf{L}}}_{\mu_1(\mathbf{v}_{\mathbf{L}})} \leq v^* + s_{\mathbf{L}}\tau_{\mathbf{L}}^* \leq v^* \leq v^* + s_{\mathbf{R}}\tau_{\mathbf{R}}^* \leq \underbrace{v_{\mathbf{R}} + a\tau_{\mathbf{R}}}_{\mu_5(\mathbf{v}_{\mathbf{R}})}. \quad (\text{D.105})$$

1. Case 1 If  $\varphi_{\mathbf{L}}\varphi_{\mathbf{R}} \geq 0$ , the intermediary states are

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \rho_{\mathbf{L}}^* \\ \rho_{\mathbf{L}}^* v^* \\ \rho_{\mathbf{L}}^* \Pi^* \\ \widetilde{W}_{\mathbf{L}} \\ Z_{\mathbf{L}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \rho_{\mathbf{L}}^* \\ \rho_{\mathbf{L}}^* v^* \\ \rho_{\mathbf{L}}^* \Pi^* \\ \widetilde{W} \\ \widetilde{Z} \end{pmatrix}, \quad (\text{D.106})$$

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} \rho_{\mathbf{R}}^* \\ \rho_{\mathbf{R}}^* v^* \\ \rho_{\mathbf{R}}^* \Pi^* \\ \widetilde{W} \\ \widetilde{Z} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} \rho_{\mathbf{R}}^* \\ \rho_{\mathbf{R}}^* v^* \\ \rho_{\mathbf{R}}^* \Pi^* \\ W_{\mathbf{R}} \\ Z_{\mathbf{R}} \end{pmatrix}, \quad (\text{D.107})$$

with  $(\widetilde{W}, \widetilde{Z}) = (W_{\mathbf{L}}^- + W_{\mathbf{R}}^+, Z_{\mathbf{L}}^- + Z_{\mathbf{R}}^+)$ .

2. Case 2 If  $\varphi_{\mathbf{L}}\varphi_{\mathbf{R}} \leq 0$ , the intermediary states are

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \rho_{\mathbf{L}}^* \\ \rho_{\mathbf{L}}^* v^* \\ \rho_{\mathbf{L}}^* \Pi^* \\ W_{\mathbf{L}} \\ Z_{\mathbf{L}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \rho_{\mathbf{L}}^* \\ \rho_{\mathbf{L}}^* v^* \\ \rho_{\mathbf{L}}^* \Pi^* \\ W_{\mathbf{L}}^- \\ Z_{\mathbf{L}}^- \end{pmatrix}, \quad (\text{D.108})$$

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} \rho_{\mathbf{R}}^* \\ \rho_{\mathbf{R}}^* v^* \\ \rho_{\mathbf{R}}^* \Pi^* \\ W_{\mathbf{R}}^+ \\ Z_{\mathbf{R}}^+ \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} \rho_{\mathbf{R}}^* \\ \rho_{\mathbf{R}}^* v^* \\ \rho_{\mathbf{R}}^* \Pi^* \\ W_{\mathbf{R}} \\ Z_{\mathbf{R}} \end{pmatrix}. \quad (\text{D.109})$$

#### D.4.5 Relaxation coefficient

In the numerical scheme, in order to reduce the numerical dissipation, we consider one local relaxation coefficient on each interface

$$a_{i+1/2} = \sqrt{\max(A(\mathbf{u}_i^n), A(\mathbf{u}_{i+1}^n))} \quad (\text{D.110})$$

where the function  $A$  is defined by  $A(\mathbf{u}) = -P_\tau(\mathbf{u}) + P_v(\mathbf{u})^2$ .

### D.5 More numerical results

In this section, we compare the approximate solutions computed with the Born-Infeld relaxation scheme with the relaxation scheme introduced in [6]. The experiments only involve Riemann problems for different types of slip law. These experiments are summarized in Table D.2.

Number	Slip law $\varphi$	Exact solution
1	$\varphi = 0$	1-rarefaction
2	Zuber-Findlay	1-shock, 2-contact discontinuity, 3-shock
3	Emulsion	2-contact discontinuity

TAB. D.2 – Flux functions for numerical tests

All the experiments are done by considering a pipe's length of 100 meters and a cell size of 0.5 (m).

#### D.5.1 Experiment 1

Consider the left ( $L$ ) and right ( $R$ ) states

$$\begin{pmatrix} \rho \\ Y \\ v \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} 500 \\ 0.2 \\ 34.423 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} \rho \\ Y \\ v \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} 400 \\ 0.2 \\ 50 \end{pmatrix},$$

with the slip law  $\varphi = 0$ . These have been tailored so that the solution to the Riemann problem is a pure 1-rarefaction. With  $a_G = 100$  m/s, the speeds of propagation of the fronts are  $(\lambda_1)_{\mathbf{L}} = -40.12$  m/s and  $(\lambda_1)_{\mathbf{R}} = -15.77$  m/s. Snapshots in Fig. D.13 correspond to time  $T = 0.8$  s.

We see that the two schemes exhibit approximate solutions which, first, are correct ones, and, second, are roughly identical. This behavior suggest that the numerical dissipation introduced by the two schemes is the same. This is natural, since for  $\varphi = 0$ , the two schemes are based on similar relaxation system. This conclusion is confirmed by the two next experiments.

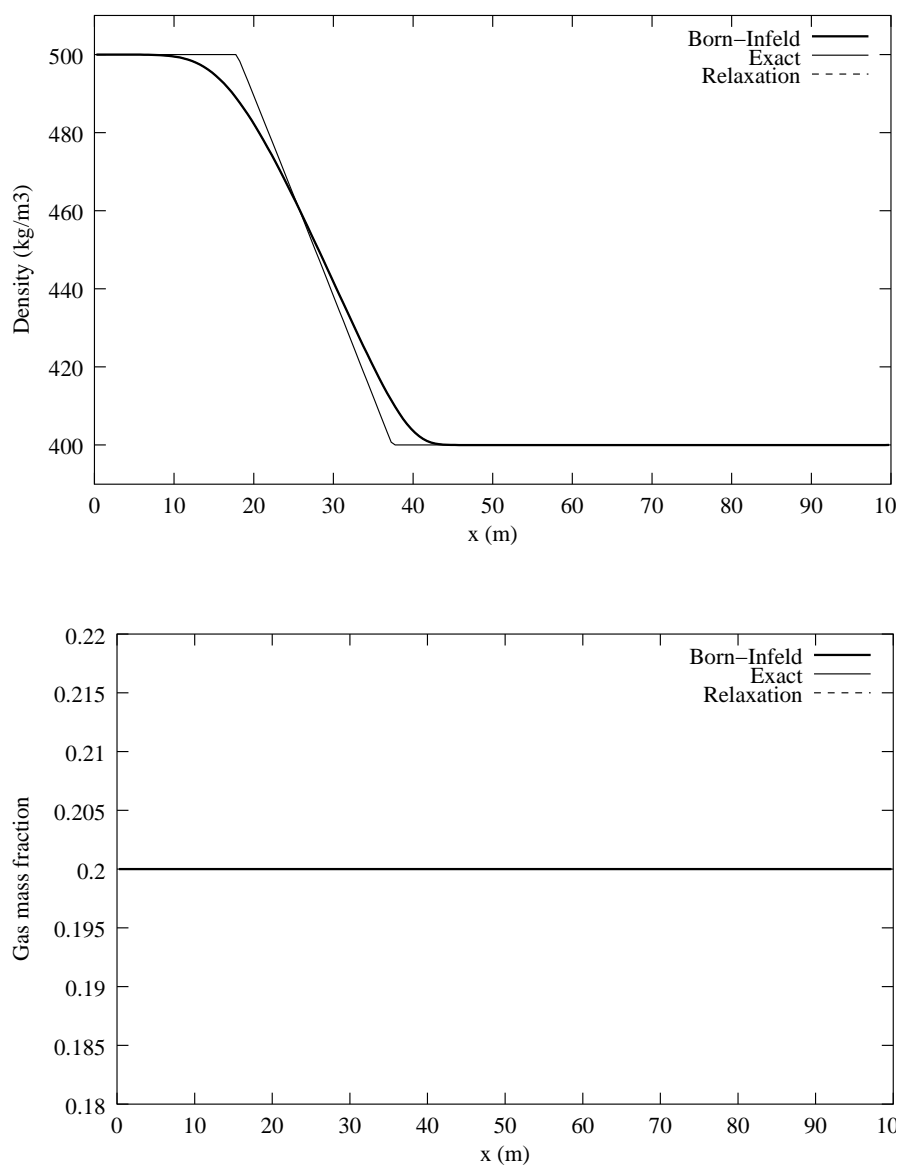


FIG. D.13 – Experiment 1

### D.5.2 Experiment 2

Consider the left ( $L$ ) and right ( $R$ ) states

$$\begin{pmatrix} \rho \\ Y \\ v \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} 453.19 \\ 0.70543 \cdot 10^{-2} \\ 24.807 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} \rho \\ Y \\ v \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} 454.91 \\ 0.10804 \cdot 10^{-1} \\ 1.7460 \end{pmatrix}.$$

with the classical Zuber-Findlay slip law  $\varphi = -\frac{v(1-C_0)-C_1}{C_0 \kappa(\rho, Y) + (1-Y)}$ , where  $C_0 = 1.07$  and  $C_1 = 0.21620$ . These have been tailored so that the solution to the Riemann problem is composed of a 1-shock, a 2-contact discontinuity and a 3-shock. Here, we consider  $a_G = 300$  m/s. The result is showed in figure D.14, which corresponds to time  $T = 0.5$  s.

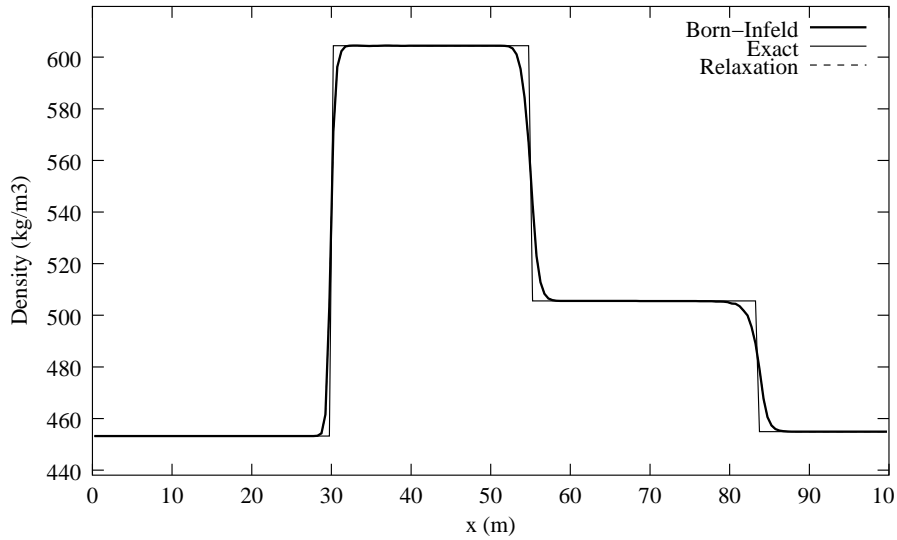


FIG. D.14 – Experiment 2

Again, the two schemes behave the same way.

In order to really distinguish the two schemes, we test our scheme with a slip law different from 0 and we consider the emulsion slip law.

### D.5.3 Experiment 3

Consider the left ( $L$ ) and right ( $R$ ) states

$$\begin{pmatrix} \rho \\ Y \\ v \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} 901.11 \\ 1.2330 \cdot 10^{-3} \\ 0.95027 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} \rho \\ Y \\ v \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} 208.88 \\ 4.2552 \cdot 10^{-2} \\ 0.78548 \end{pmatrix}.$$

with the emulsion slip law  $\varphi = -\frac{\delta \rho_L^0}{\rho(1-Y)}$ , where  $\delta = 4.4809$ . These have been tailored so that the solution to the Riemann problem is composed of a 2-contact discontinuity. With  $a_G = 300$  m/s, this discontinuity propagates with speed 1. (m/s). The result is showed in figure D.14, which corresponds to time  $T = 20$ . s.

This experience, whith both a non-zero slip law and a contact discontinuity with small propagating speed, allow, in general, to distinguish the schemes : the numerical dissipation plays an important role. Here, again, the two relaxation schemes behave very similarly.

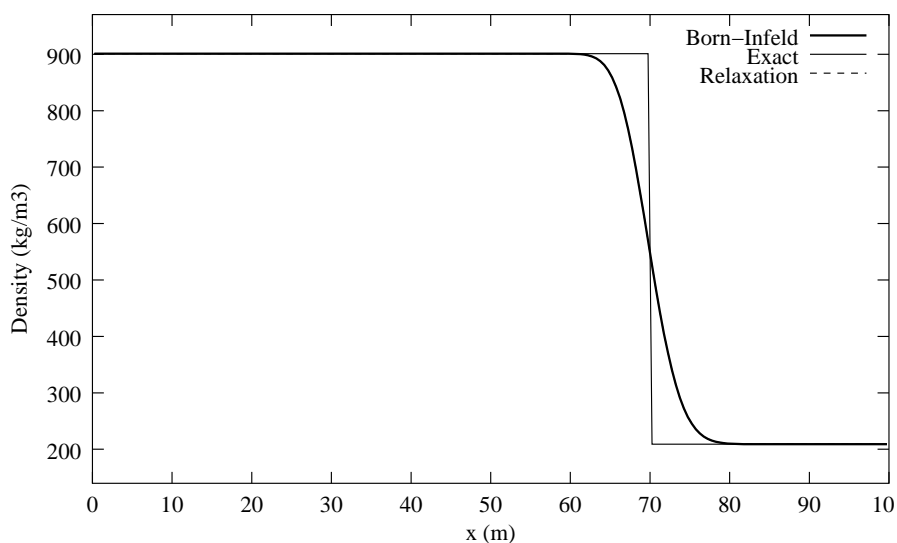


FIG. D.15 – Experiment 3

## D.6 Conclusion

There seems to be a very close connection between scalar conservation laws of the two-phase type (D.1) and the Born-Infeld equations (D.20). The newly proposed relaxation method, which takes advantage of this connection, is much more “natural” than the standard Xin-Jin method, to the extent that :

- there is no need for an extra parameter  $a$  to be artificially tuned in order for stability and monotonicity to be ensured ;
- the eigenvalues of the relaxation system coincide with the physical phase velocities defined in the original equation.

The Born-Infeld relaxation method is all the more attractive that, in terms of quality, it does compete well with the Xin-Jin method in which the least diffusion amount is set.

Unfortunately, the very fact that no free parameter is involved may sometimes turn out to be a drawback. When the flux does not belong to a narrow class of eligible functions which automatically fulfill the Whitham conditions, there is no “screwdriver” at our disposal to force diffusion, and thereby to ensure stability and monotonicity.

This property has been highlighted with numerical experiments involving Riemann problems which show that

- if the Whitham condition is satisfied for all the states between  $u_L$  and  $u_R$ , the numerical scheme behave well,
- otherwise, the resulting numerical solution does not satisfy any basic properties : maximum principle, entropy condition, etc ...

Finally, the numerical experiments show that, when the Whitham condition is satisfied, the numerical dissipation is bounded from above and below by those of Lax-Friedrichs and Xin-Jin schemes.

This numerical scheme can be applied to two-phase flows in pipelines by considering the drift-flux model. It is surprising to see that the classical slip laws are verifying a Whitham condition. Numerical experiments show that this relaxation scheme is behaving well, compared to other relaxation schemes.

# Annexe E

## Compléments à l'article

### E.1 Introduction

Dans cette annexe, nous décrivons certains compléments à l'analyse présentée dans l'article.

Dans une première partie, nous fondons notre réflexion sur le fait que, dans l'article, nous avons présenté le schéma de relaxation dans le cas particulier d'une fonction flux  $f(u) = u(1-u)g(u)$  telle que le changement de variable est  $w = (1-u)g(u)$ ,  $z = -ug(u)$ . Il ne nous a pas été possible de trouver une autre fonction non linéaire  $f$  qui permette de construire un changement de variable cohérent. Pourtant, comme nous allons le voir, il est possible de généraliser le théorème mettant en évidence la condition de Whitham, c'est à dire qu'il n'est pas nécessaire de tenir compte de la forme particulière de  $f$ . De même, il est possible de montrer, dans le cas général, l'équivalence entre la condition de Whitham et la monotonie du schéma numérique de relaxation.

Dans une deuxième partie, nous présentons l'analyse du système gaz-liquide dans le cadre du schéma de relaxation par le système de Born-Infeld. Cette analyse se fonde sur le constat que les lois de glissement usuelles vérifient (à notre étonnement) la condition de Whitham.

### E.2 Généralisation des résultats théoriques

#### E.2.1 Généralisation de la condition de Whitham

Nous généralisons le théorème (4) de l'article.

**Théorème E.2.1** *Supposons que  $\mathbf{u} = (u, F)^T$  soit solution du système de relaxation*

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x F = 0, \\ \partial_t I + \partial_y J = \lambda \alpha(\mathbf{u})(f(u) - F), \end{cases} \quad (\text{E.1})$$

où  $\mathbf{v} = (W, Z)^T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  une fonction régulière et inversible de  $\mathbf{u}$ , le couple  $(I, J)(\mathbf{u})$  est un couple entropie-flux pour le système de Born-Infeld et  $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction régulière

$$\alpha(\mathbf{u}) = \frac{\partial I}{\partial W} \frac{\partial W}{\partial F} + \frac{\partial I}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial F}. \quad (\text{E.2})$$

Introduisons le développement de Chapman-Enskog

$$F = f + \lambda^{-1} F_1 + \mathcal{O}(\lambda^{-2}). \quad (\text{E.3})$$

Au premier ordre d'approximation, le système d'équilibre est

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = \lambda^{-1} \partial_x (\mathcal{D}(u) \partial_x u) \quad (\text{E.4})$$



avec

$$\mathcal{D}(u) = -(f'(u) - w)(f'(u) - z). \quad (\text{E.5})$$

Le système d'équilibre est stable si et seulement si la condition de Whitham

$$\min(w, z) \leq f'(u) \leq \max(w, z) \quad (\text{E.6})$$

est satisfaite.

Dans le cas particulier de l'article, nous avons  $I = W + Z$  et  $J = WZ$ . Afin de démontrer le théorème (E.2.1), nous devons démontrer deux résultats intermédiaires. Commençons par rappeler la démonstration de ce résultat qui apparaît dans [59].

**Proposition E.2.2** *Soit  $\mathbf{v} = (W, Z)$  une solution régulière du système de Born-Infeld*

$$\begin{cases} \partial_t W + Z \partial_x W = 0, \\ \partial_t Z + W \partial_x Z = 0. \end{cases} \quad (\text{E.7})$$

Alors, le couple entropie-flux  $(I, J)$  satisfait la formulation conservative

$$\partial_t I + \partial_x J = 0 \quad (\text{E.8})$$

si et seulement si le couple  $(I, J)$  vérifie

$$J_W = Z I_W, \quad J_Z = W I_Z, \quad (\text{E.9})$$

c'est à dire si et seulement si le couple  $(I, J)$  est de la forme

$$I = \frac{\mathcal{A}(W) + \mathcal{B}(Z)}{Z - W}, \quad J = \frac{Z \mathcal{A}(W) + W \mathcal{B}(Z)}{Z - W}, \quad (\text{E.10})$$

où  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont des fonctions régulières.

PREUVE de la proposition (E.2.2). Multiplions la première équation du système de Born-Infeld (E.7) par  $I_W$  et la seconde par  $I_Z$  et sommons le résultat ; nous trouvons

$$\partial_t I + (Z I_W) \partial_x W + (W I_Z) \partial_x Z = 0. \quad (\text{E.11})$$

Le couple  $(I, J)$  satisfait la formulation conservative (E.8) si et seulement si  $(Z I_W) \partial_x W + (W I_Z) \partial_x Z = \partial_x J$  c'est à dire si la condition (E.9) est vérifiée. L'égalité de Schwartz décrivant l'égalité des dérivées partielles croisées  $J_{W,Z} = J_{Z,W}$  est alors satisfaite si et seulement si  $(Z I_W)_Z = (W I_Z)_W$ , i.e.,

$$I_W - I_Z + (Z - W) I_{W,Z} = 0. \quad (\text{E.12})$$

Posons  $h = (Z - W)I$  ; alors le problème de Goursat précédent revient à trouver  $h$  vérifiant

$$h_{W,Z} = 0. \quad (\text{E.13})$$

La solution de cette équation aux dérivées partielles est  $h = \mathcal{A}(W) + \mathcal{B}(Z)$  où  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont des fonctions régulières. Réciproquement, il suffit de démontrer que  $(I, J)$  vérifie les égalités (E.9). Or, on peut vérifier que

$$\begin{aligned} I_W &= \frac{\mathcal{A}'(Z-W) + \mathcal{A} + \mathcal{B}}{(Z-W)^2}, & I_Z &= \frac{\mathcal{B}'(Z-W) - (\mathcal{A} + \mathcal{B})}{(Z-W)^2}, \\ J_W &= \frac{(Z\mathcal{A}' + \mathcal{B})(Z-W) + (Z\mathcal{A} + W\mathcal{B})}{(Z-W)^2}, & J_Z &= \frac{(\mathcal{A} + W\mathcal{B}')(Z-W) - (Z\mathcal{A} + W\mathcal{B})}{(Z-W)^2}. \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

Le développement du numérateur de  $J_W$  et  $J_Z$  permet d'obtenir le résultat voulu.  $\square$

Dans le cas particulier de l'article, nous avons un premier couple  $(I, J) = (u, F)$  et un second couple  $(I, J) = (W + Z, WZ)$ . De la démonstration du théorème (E.2.2), nous ne gardons que la condition (E.9). Le lemme suivant permet d'en voir les conséquences.

**Lemme E.2.3** *Notons  $\theta$  le changement de variable défini par*

$$\theta(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \quad (\text{E.15})$$

avec  $\mathbf{u} = (u, F)^T$  et  $\mathbf{v} = (W, Z)^T$ . Supposons que

$$\frac{\partial F}{\partial W} = Z \frac{\partial u}{\partial W}, \quad \frac{\partial F}{\partial Z} = W \frac{\partial u}{\partial Z}. \quad (\text{E.16})$$

Alors

$$\frac{\partial W}{\partial u} = -W \frac{\partial W}{\partial F}, \quad \frac{\partial Z}{\partial u} = -Z \frac{\partial Z}{\partial F}. \quad (\text{E.17})$$

PREUVE du lemme (E.2.3). Il est classique d'écrire  $\nabla(\theta^{-1}).\nabla\theta = \mathbf{Id}$  ou encore

$$\frac{\partial u}{\partial W} \frac{\partial W}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial W} \frac{\partial W}{\partial F} + \frac{\partial u}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial F} = 0, \quad (\text{E.18})$$

$$\frac{\partial F}{\partial W} \frac{\partial W}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial W} \frac{\partial W}{\partial F} + \frac{\partial F}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial F} = 1. \quad (\text{E.19})$$

Les hypothèses permettent alors d'affirmer que (E.19) peut s'écrire

$$Z \frac{\partial u}{\partial W} \frac{\partial W}{\partial u} + W \frac{\partial u}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial u} = 0, \quad Z \frac{\partial u}{\partial W} \frac{\partial W}{\partial F} + W \frac{\partial u}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial F} = 1. \quad (\text{E.20})$$

Nous allons procéder en deux étapes pour évaluer certains des produits qui apparaissent ici. Dans un premier temps, notons  $\mathcal{X} = \frac{\partial u}{\partial W} \frac{\partial W}{\partial u}$  et  $\mathcal{Y} = \frac{\partial u}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial u}$ . Les premières identités de (E.18) et de (E.20) permettent d'affirmer que  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  est solution du système linéaire

$$\begin{cases} \mathcal{X} + \mathcal{Y} = 1, \\ Z\mathcal{X} + W\mathcal{Y} = 0, \end{cases} \quad (\text{E.21})$$

dont la solution est

$$\frac{\partial u}{\partial W} \frac{\partial W}{\partial u} = -\frac{W}{Z - W}, \quad \frac{\partial u}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial u} = \frac{Z}{Z - W}. \quad (\text{E.22})$$

Dans un deuxième temps, notons  $\mathcal{X} = \frac{\partial u}{\partial W} \frac{\partial W}{\partial F}$  et  $\mathcal{Y} = \frac{\partial u}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial F}$ . Les deuxièmes identités de (E.18) et de (E.20) permettent d'affirmer que  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  est solution du système linéaire

$$\begin{cases} \mathcal{X} + \mathcal{Y} = 0, \\ Z\mathcal{X} + W\mathcal{Y} = 1, \end{cases} \quad (\text{E.23})$$

dont la solution est

$$\frac{\partial u}{\partial W} \frac{\partial W}{\partial F} = \frac{1}{Z - W}, \quad \frac{\partial u}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial F} = -\frac{1}{Z - W}. \quad (\text{E.24})$$

Par identification de (E.22) et de (E.24), nous trouvons

$$\frac{\partial u}{\partial W} \frac{\partial W}{\partial u} = -W \frac{\partial u}{\partial W} \frac{\partial W}{\partial F}, \quad \frac{\partial u}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial u} = -Z \frac{\partial u}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial F}. \quad (\text{E.25})$$

Après simplification, nous obtenons le résultat voulu.  $\square$

Il est alors possible de démontrer le théorème (E.2.1).

PREUVE du théorème (E.2.1). On substitue le développement (E.3) dans le système de relaxation (E.1) et on obtient

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f = -\lambda^{-1} \partial_x F_1, \\ \partial_t I + \partial_x J = -\alpha F_1. \end{cases} \quad (\text{E.26})$$

Dans la précédente écriture, par suite du développement de Chapman-Enskog, il faut comprendre  $I$ ,  $J$  et  $\alpha$  comme des fonctions de  $(u, f(u))$ , c'est à dire de  $u$  uniquement. Cela aura une grande importance dans la suite du calcul, en particulier du point de vue des calculs de dérivées partielles.

On peut réécrire la seconde équation du système précédent sous la forme

$$-\alpha F_1 = \partial_t I + \partial_x J. \quad (\text{E.27})$$

Nous notons  $\mathbf{a}(u) = f'(u)$ . Par conséquent, la loi de conservation  $\partial_t u + \mathbf{a}(u) \partial_x u = 0$  entraîne

$$\begin{aligned} -\alpha F_1 &= I' \partial_t u + J' \partial_x u \\ &= (J' - \mathbf{a} I') \partial_x u. \end{aligned} \quad (\text{E.28})$$

avec la notation  $(\cdot)' = \frac{d(\cdot)}{du}$ . Il s'ensuit que

$$\alpha \mathcal{D}(u) = J' - \mathbf{a} I'. \quad (\text{E.29})$$

Dans le but d'expliciter le second membre, nous calculons les dérivées totales de  $I$  et  $J$ . Il vient

$$I' = \frac{\partial I}{\partial W} W' + \frac{\partial I}{\partial Z} Z', \quad J' = \frac{\partial J}{\partial W} W' + \frac{\partial J}{\partial Z} Z'. \quad (\text{E.30})$$

Or, par construction (voir démonstration de la proposition E.2.2), le couple  $(I, J)$  vérifie

$$\frac{\partial J}{\partial W} = Z \frac{\partial I}{\partial W}, \quad \frac{\partial J}{\partial Z} = W \frac{\partial I}{\partial W}. \quad (\text{E.31})$$

Par conséquent,

$$\alpha \mathcal{D}(u) = (Z - \mathbf{a}) \frac{\partial I}{\partial W} W' + (W - \mathbf{a}) \frac{\partial I}{\partial Z} Z'. \quad (\text{E.32})$$

Par ailleurs, nous pouvons calculer les dérivées totales de  $W$  et  $Z$ . En effet,

$$W' = \frac{\partial W}{\partial u} + \mathbf{a} \frac{\partial W}{\partial F}, \quad Z' = \frac{\partial Z}{\partial u} + \mathbf{a} \frac{\partial Z}{\partial F}. \quad (\text{E.33})$$

Mais la proposition E.2.3 implique que

$$W' = (\mathbf{a} - W) \frac{\partial W}{\partial F}, \quad Z' = (\mathbf{a} - Z) \frac{\partial Z}{\partial F}. \quad (\text{E.34})$$

On substitue l'expression précédente dans le coefficient de diffusion (E.32) et on obtient

$$\alpha \mathcal{D}(u) = -(\mathbf{a} - W)(\mathbf{a} - Z) \left( \frac{\partial I}{\partial W} \frac{\partial W}{\partial F} + \frac{\partial I}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial F} \right), \quad (\text{E.35})$$

ce qui conclut la preuve.  $\square$

## E.2.2 Généralisation de l'équivalence Whitham-monotonie

Dans le cas particulier  $f(u) = u(1-u)g(u)$ , le théorème (6) de l'article donne une équivalence entre la condition de Whitham et la monotonie du schéma. Le théorème suivant démontre que cette équivalence est vraie dans le cas général.

**Théorème E.2.4** *Supposons que  $f(u)$  est telle que le changement de variable  $\theta$  avec  $\theta(\mathbf{v}) = \mathbf{u}$  avec  $\mathbf{u} = (u, F)^T$  et  $\mathbf{v} = (W, Z)^T$  est bien défini pour tout  $u \in [0, 1]$ . Supposons que pour tout  $u \in [0, 1]$ , on a  $w(u)z(u) \leq 0$ . Soit  $u_{\mathbf{L}, \mathbf{R}} \in [0, 1]$  les états gauche et droit d'un problème de Riemann. On considère le schéma volume fini de type Godunov fondé sur le système de Born-Infeld.*

*Alors, la fonction  $f$  vérifie la condition de Whitham si et seulement si le flux numérique vérifie*

$$\partial_1 H^{BI} \geq 0, \quad \partial_2 H^{BI} \leq 0. \quad (\text{E.36})$$

PREUVE Rappelons que le changement de variable inverse est de la forme  $W = W(u, F)$  et  $Z = Z(u, F)$  et que le changement de variable direct est  $u = u(W, Z)$  et  $F = F(W, Z)$ .

Supposons maintenant que nous sommes à l'équilibre, c'est à dire,  $F = f(u)$ . Portons notre attention sur les égalités  $u = u(w(u), z(u))$  et  $f(u) = F(w(u), z(u))$ . Par dérivation, nous obtenons

$$1 = u_W w' + u_Z z', \quad f'(u) = F_W w' + F_Z z'. \quad (\text{E.37})$$

Or nous avons déjà montré que le changement de variable est possible si et seulement si la fonction  $f$  satisfait  $F_W = Z u_W$  et  $F_Z = W u_Z$ . Par conséquent, si nous notons  $\mathcal{X} = u_Z z'$  et  $\mathcal{Y} = u_W w'$ , nous avons  $\mathcal{X} + \mathcal{Y} = 1$  et

$$f'(u) = \mathcal{X} w + \mathcal{Y} z. \quad (\text{E.38})$$

On voit alors que  $f'(u)$  est une combinaison linéaire de  $w$  et  $z$  avec comme coefficients  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$ .

Par ailleurs, le flux numérique est celui du schéma de Godunov

$$H^{BI}(u_{\mathbf{L}}, u_{\mathbf{R}}) = F(\mathbf{v}^*) \quad (\text{E.39})$$

où  $\mathbf{v}^* = (W^*, Z^*)$  est la valeur de la solution du problème de Riemann en  $x = 0$ .

Nous distinguons maintenant deux cas selon que  $w \geq 0$  et  $z \leq 0$  ou bien que  $w \leq 0$  et  $z \geq 0$ .

– Supposons maintenant que  $w \leq 0$  et  $z \geq 0$  pour tout  $u \in [0, 1]$ . Dans ce cas,  $\mathbf{v}^* = (W_{\mathbf{L}}, Z_{\mathbf{R}})^T = (w(u_{\mathbf{L}}), z(u_{\mathbf{R}}))^T$ . Par conséquent,

$$\partial_1 H^{BI}(u_{\mathbf{L}}, u_{\mathbf{R}}) = (F_W)_{\mathbf{L}} w'(u_{\mathbf{L}}), \quad \partial_2 H^{BI}(u_{\mathbf{L}}, u_{\mathbf{R}}) = (F_Z)_{\mathbf{R}} z'(u_{\mathbf{R}}), \quad (\text{E.40})$$

ce qui implique

$$\partial_1 H^{BI}(u_{\mathbf{L}}, u_{\mathbf{R}}) = \mathcal{X}_{\mathbf{L}} Z_{\mathbf{L}}, \quad \partial_2 H^{BI}(u_{\mathbf{L}}, u_{\mathbf{R}}) = \mathcal{Y}_{\mathbf{R}} W_{\mathbf{R}}. \quad (\text{E.41})$$

Il est important de voir que la condition de Whitham impose que  $f'(u)$  reste compris entre  $w$  et  $z$ , ce qui est vrai si et seulement si la combinaison linéaire (E.38) est convexe. Or la condition de convexité  $\mathcal{X} \geq 0$  et  $\mathcal{Y} \geq 0$  est équivalente à la condition (E.36), étant donné la forme particulière des dérivées partielles du flux numérique dans la dernière égalité.

– Supposons maintenant que  $w \geq 0$  et  $z \leq 0$  pour tout  $u \in [0, 1]$ . Dans ce cas,  $\mathbf{v}^* = (W_{\mathbf{R}}, Z_{\mathbf{L}})^T = (w(u_{\mathbf{R}}), z(u_{\mathbf{L}}))^T$ . Les dérivées partielles du flux numériques sont alors

$$\partial_1 H^{BI}(u_{\mathbf{L}}, u_{\mathbf{R}}) = \mathcal{Y}_{\mathbf{L}} W_{\mathbf{L}}, \quad \partial_2 H^{BI}(u_{\mathbf{L}}, u_{\mathbf{R}}) = \mathcal{X}_{\mathbf{R}} Z_{\mathbf{R}}. \quad (\text{E.42})$$

On conclut alors de même.  $\square$

### E.3 Application aux écoulements diphasiques

Dans cette section, nous montrons que la condition de Whitham peut prendre, dans le cas d'une équation scalaire, une forme qui va rendre plus facile l'analyse dans le cas du système gaz-liquide. Par ailleurs, nous démontrons que les lois de glissement Zuber-Findlay IFP et émulsion vérifient une condition de Whitham.

#### E.3.1 Autre forme de la condition de Whitham

Nous revenons maintenant au cas particulier  $f(u) = u(1-u)g(u)$ .

**Corollaire E.3.1** *Supposons que  $f(u) = u(1-u)g(u)$  pour tout  $u \in [0, 1]$ .*

– *Si  $g(u) \geq 0$  alors la condition de Whitham est équivalente à*

$$g(u) \geq \max((1-u)g'(u), -ug'(u)), \quad \forall u \in [0, 1]. \quad (\text{E.43})$$

– *Si  $g(u) \leq 0$  alors la condition de Whitham est équivalente à*

$$g(u) \leq \min((1-u)g'(u), -ug'(u)), \quad \forall u \in [0, 1]. \quad (\text{E.44})$$

*Pour tout  $u \in ]0, 1[$  tel que  $\frac{g'(u)}{g(u)}$  est bien défini, la condition de Whitham est équivalente à*

$$-\frac{1}{u} \leq \frac{g'(u)}{g(u)} \leq \frac{1}{1-u}. \quad (\text{E.45})$$

PREUVE Par dérivation des définitions  $W = (1-u)g(u)$  et  $Z = -ug(u)$ , nous trouvons

$$W' = -g + (1-u)g'(u), \quad Z' = -g - ug'(u). \quad (\text{E.46})$$

Si  $g(u) \geq 0$  la condition de Whitham est équivalente à

$$g(u) \geq (1-u)g'(u), \quad g(u) \geq -ug'(u), \quad (\text{E.47})$$

avec des inégalité inversées si  $g(u) \leq 0$ . Cela conclut la démonstration.  $\square$

#### E.3.2 Condition de Whitham

Nous avons déjà noté le découplage du système diphasique en un système proche du p-système et une équation d'évolution sur  $\rho Y$ . En particulier, nous avons noté que les conditions de stabilité issues du développement de Chapman-Enskog pouvaient s'obtenir en ne dérivant les fonctions que par rapport aux variables de leur propre sous-système, et non pas par rapport à  $\mathbf{u}$ . Ces remarques fondent le développement de Chapman-Enskog menant à la condition de Whitham

$$\min(W, Z) \leq -\sigma_Y \leq \max(W, Z). \quad (\text{E.48})$$

Pour  $\varphi(\mathbf{u}) = 0$ , c'est à dire pour le glissement nul, cette condition est respectée. Nous traitons donc désormais le cas  $\varphi(\mathbf{u}) \neq 0$ . Grâce au corollaire (E.3.1), il est facile de voir que cette dernière condition se simplifie en

$$-\frac{1}{Y} \leq \frac{\varphi_Y}{\varphi} \leq \frac{1}{1-Y}. \quad (\text{E.49})$$

Le but des lignes suivantes est de vérifier que la condition de Whitham est vérifiée pour des lois de glissement classiques. Comme nous allons le voir, dans le cas d'un liquide incompressible,

non seulement la condition est respectée, mais encore elle parcourt tout l'intervalle  $[-\frac{1}{Y}, \frac{1}{1-Y}]$  ! Ce résultat est très étonnant car la méthode de relaxation par le système de Born-Infeld apparaît comme si les lois de glissement étaient faites pour vérifier exactement la condition de Whitham, alors que ce n'est pas le cas.

**Remarque E.3.2** Ici, la fonction  $g(u)$  de l'article est remplacée par la fonction glissement  $-\varphi(\mathbf{u})$ .

Nous nous plaçons dans le cas d'un liquide incompressible et nous définissons la fonction  $\kappa = Y R_L - (1 - Y) R_G$  par

$$\kappa(\rho, Y) = (1 - Y) \left( \frac{\rho}{\rho_L^0} - 1 \right) \quad (\text{E.50})$$

La dérivé partielle de  $\kappa$  par rapport à  $Y$  vaut

$$\kappa_Y(\rho, Y) = - \left( \frac{\rho}{\rho_L^0} - 1 \right), \quad \forall \rho \in ]0, \rho_L^0[, Y \in ]0, 1[, \quad (\text{E.51})$$

et la fonction  $\kappa$  vérifie les propriétés

$$\kappa = -(1 - Y)\kappa_Y, \quad -1 < \kappa < 0, \quad \forall \rho \in ]0, \rho_L^0[, Y \in ]0, 1[. \quad (\text{E.52})$$

Notons que  $\rho > 0$  car le vide n'apparaît pas dans les conduites pétrolières. D'autre part, on respecte  $\rho < \rho_L^0$  car, comme le liquide est incompressible, si on avait  $\rho$  égal à  $\rho_L^0$ , nous aurions une vitesse du son infinie, donc un modèle non hyperbolique.

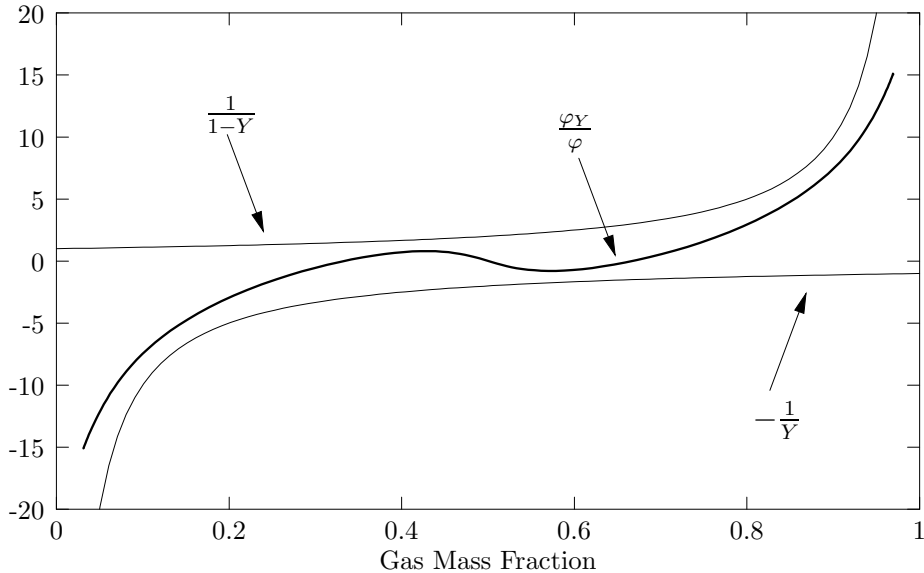


FIG. E.1 – Condition de Whitham

**Théorème E.3.3** Supposons que le liquide est incompressible et que le glissement est de la forme Zuber-Findlay-IFP

$$\varphi(\mathbf{u}) = - \frac{\mu v + \nu}{1 + \mu \kappa(\rho, Y)}, \quad \forall \rho \in ]0, \rho_L^0[, Y \in ]0, 1[, \quad (\text{E.53})$$

avec  $0 < \mu < 1$  et  $\nu \in \mathbb{R}$ . Alors le glissement  $\varphi$  vérifie la condition de Whitham (E.49).

**Théorème E.3.4** *Supposons que le liquide est incompressible et que le glissement est de la forme dispersé*

$$\varphi(\mathbf{u}) = -\frac{\delta \rho_L^0}{\rho(1-Y)}, \quad \forall \rho \in ]0, \rho_L^0[, Y \in ]0, 1[, \quad (\text{E.54})$$

avec  $\delta \in \mathbb{R}$ . Alors le glissement  $\varphi$  vérifie la condition de Whitham (E.49).

PREUVE du théorème (E.3.3). On voit facilement que

$$\varphi_Y = -\frac{\mu \kappa_Y}{1 + \mu \kappa} \varphi \quad (\text{E.55})$$

d'où on tire, après injection de (E.52), que

$$\frac{\varphi_Y}{\varphi} = -\frac{\mu \kappa_Y}{1 + \mu \kappa} = \frac{1}{1-Y} \frac{\mu \kappa}{1 + \mu \kappa}. \quad (\text{E.56})$$

avec l'aide de la propriété  $\kappa = -(1-Y)\kappa_Y$ . Il est clair que  $\frac{\varphi_Y}{\varphi} \leq 0$  car  $\kappa \in ]-1, 0[$  et  $\mu \in ]0, 1[$ , de telle sorte que  $\mu \kappa < 0$  et  $1 + \mu \kappa > 0$ . Dans le but de minorer  $\frac{\varphi_Y}{\varphi}$ , nous calculons

$$\frac{\varphi_Y}{\varphi} + \frac{1}{Y} = \frac{1}{1-Y} \frac{1 + \mu \kappa - Y}{1 + \mu \kappa}. \quad (\text{E.57})$$

Comme  $Y \in ]0, 1[$ , la condition de Whitham (E.49) est alors assurée si  $1 + \mu \kappa - Y \geq 0$ . Si on injecte la définition de  $\kappa$  (E.50), il vient

$$1 + \mu \kappa - Y = (1-Y) \left[ 1 + \mu \left( \frac{\rho_L^0}{\rho} - 1 \right) \right] \geq 0, \quad (\text{E.58})$$

ce qui conclut la démonstration.  $\square$

**Remarque E.3.5** *Dans le cas du glissement de Zuber-Findlay IFP, nous venons de montrer que*

$$-\frac{1}{Y} \leq \frac{\varphi_Y}{\varphi} \leq 0. \quad (\text{E.59})$$

PREUVE du théorème (E.3.4). On voit facilement que

$$\varphi_Y = -\frac{\delta \rho_L^0}{\rho(1-Y)^2}, \quad (\text{E.60})$$

d'où on tire, après injection de (E.52), que

$$\frac{\varphi_Y}{\varphi} = \frac{1}{1-Y}, \quad (\text{E.61})$$

ce qui prouve que la borne supérieure de la condition de Whitham est atteinte mais pas dépassée et conclut la démonstration.  $\square$

**Remarque E.3.6** *Il resterait à étudier le glissement stratifié : compte tenu de la complexité des formules impliquées, nous repoussons ce travail à plus tard.*

## E.4 Conclusion

Nous avons présenté une méthode de relaxation fondée sur le système de Born-Infeld. La propriété fondamentale de ce système est qu'il possède des champs caractéristiques linéairement dégénérés de telle sorte que le schéma numérique puisse être fondé sur un solveur de Godunov de coût réduit (pour lequel la solution du problème de Riemann est facile).

La stabilité du schéma numérique est soumise au fait que le flux vérifie la condition de Whitham, dont nous avons montré qu'elle est équivalente à la monotonie du schéma numérique. Les résultats numériques sur l'équation scalaire montrent que le schéma se comporte favorablement, pourvu que la condition de Whitham soit respectée.

La même stratégie a été appliquée au cas du système gaz-liquide. A notre étonnement, si l'on considère une thermodynamique simple (liquide incompressible et gaz parfait), les lois de glissement classiques (intermittent et dispersée) vérifie une condition de Whitham. Par ailleurs, les expériences numériques sur des problèmes de Riemann montrent un comportement équivalent à notre précédente méthode de relaxation (qui utilise les coefficients de régularisation  $(a, b)$ ).

Malgré ces résultats positifs, nous devons souligner les inconvénients liés à cette méthode de relaxation.

La technique de relaxation par Born-Infeld dépend considérablement du nombre d'équations du système considéré : dans le cas du système gaz-liquide, l'équation de transport du gaz donne lieu au système relaxé de Born-Infeld (2 équations). L'extension de cette technique à un système triphasique est plus délicate, car elle implique de considérer un système de 3 équations de conservation dont les champs seraient linéairement dégénérés : lequel ?

Par ailleurs, et surtout, la condition de Whitham est un inconvénient lorsqu'on désire avoir un coefficient de régularisation tel que le coefficient de relaxation  $a$  de la méthode de Xin&Jin. En particulier, nous cherchons une méthode stable lorsque la loi de glissement ne vérifie aucune propriété, y compris la condition de Whitham. Cette exigence, qui est centrale dans notre "cahier des charges", élimine cette méthode de notre champs d'investigation. Pourtant, il demeure que la condition de Whitham apparaît comme étant un indicateur permettant de discriminer les lois de glissement "faciles" de celles qui le sont moins. Ce critère est un complément à l'autre critère de base : l'hyperbolicité.





## Annexe F

# Modèle triphasique isotherme non compositionnel

### Résumé

Dans ce chapitre, nous décrivons un schéma numérique de relaxation pour la simulation des écoulements triphasiques isotherme non compositionnels. Nous proposons un schéma de relaxation explicite fondé sur un solveur de Godunov. Dans le but de montrer que l'implicitation du schéma est possible, nous présentons l'interprétation de la méthode explicite comme une méthode de Roe. Cette étude ne contient pas de résultats numériques.

### F.1 Introduction

Lors de l'exploitation (voir figure (F.1)) d'un gisement, on met en œuvre principalement deux techniques de récupération :

- **primaire** : la pression de fond pousse l'effluent (le mélange triphasique liquide-gaz-eau) vers la surface (où la pression est plus faible) et le puit est dit "éruptif",
- **secondaire** : on injecte de l'eau ou du gaz pour maintenir la pression de fond.

La présence naturelle d'eau dans le gisement ainsi que la technique de récupération secondaire font que de l'eau (indésirable) est produite. Quand le champ est mature (au bout de plusieurs années d'exploitation), la quantité d'eau produite devient de plus en plus importante : *pour un baril de pétrole, il y a entre un et dix barils d'eau.*

Si l'on maîtrise la simulation des écoulements diphasiques (liquide-gaz), il y a, à priori, deux difficultés à franchir avant de pouvoir simuler des écoulements triphasiques :

1. la modélisation mécanique des écoulements triphasiques génère encore de nombreuses recherches,
2. la robustesse des schémas numériques est mise à rude épreuve.

Le premier obstacle est fondamental et difficile à franchir (voir [21]), mais n'est pas de notre domaine de compétence. Par contre, nous proposons une solution pour la seconde difficulté.

Le plan de l'exposé est le suivant. Dans une première partie, nous exposons les lois de conservation mises en jeu. Puis nous proposons une Relaxation du système, ainsi que son analyse. Nous présentons ensuite le calcul des coefficients de relaxation permettant d'assurer la stabilité de la méthode ainsi que le principe du maximum sur les fractions massiques. Enfin, nous donnons les éléments qui permettent d'étendre la méthode à un schéma semi-implicite linéaire.

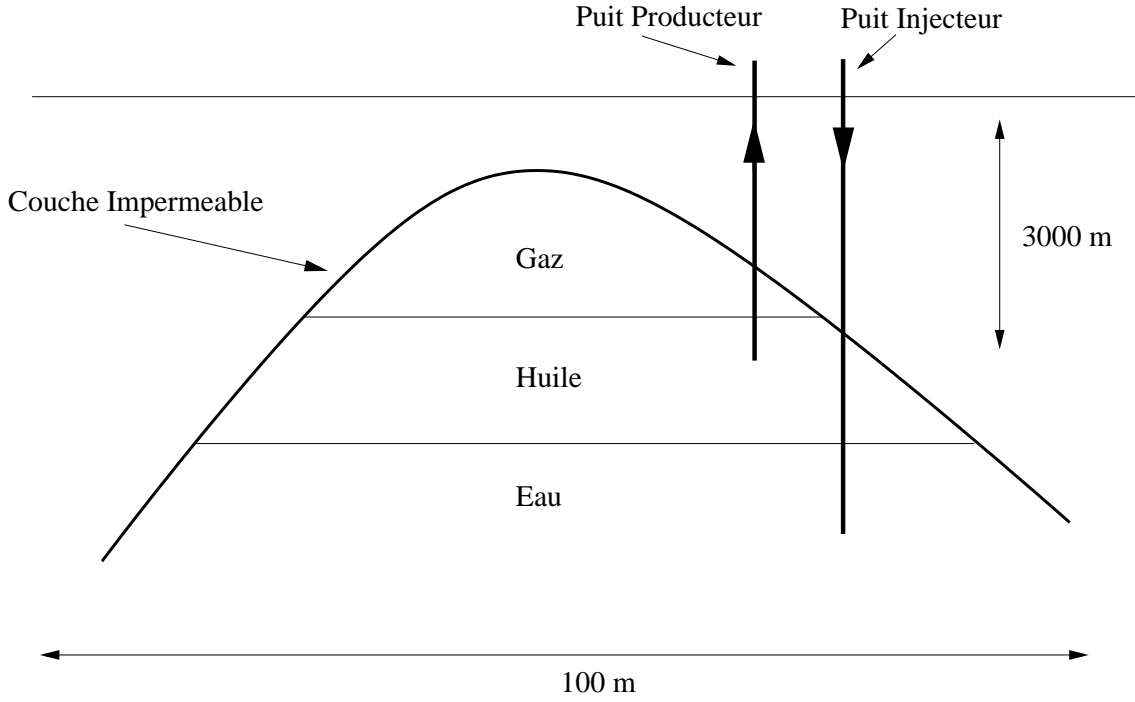


FIG. F.1 – Méthodes de récupération de l'effluent

## F.2 Lois de conservation

On note  $\rho$  la masse volumique du mélange :

$$\rho = \rho_L R_L + \rho_G R_G + \rho_W R_W \quad (\text{F.1})$$

et  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  les fractions massiques de liquide, de gaz et d'eau définies par

$$X = \frac{\rho_L R_L}{\rho}, \quad Y = \frac{\rho_G R_G}{\rho}, \quad Z = \frac{\rho_W R_W}{\rho}, \quad X + Y + Z = 1. \quad (\text{F.2})$$

Les fractions massiques des phases sont positives, i.e.,  $X \geq 0$ ,  $Y \geq 0$  et  $Z \geq 0$ . La quantité de mouvement totale est

$$\rho v = \rho_L R_L v_L + \rho_G R_G v_G + \rho_W R_W v_W. \quad (\text{F.3})$$

Nous supposons que les lois de conservations portent sur la masse de liquide, de gaz et d'eau et sur la quantité de mouvement totale, i.e., nous considérons le système de lois de conservation

$$\begin{cases} \partial_t(\rho_L R_L) + \partial_x(\rho_L R_L v_L) & = 0 \\ \partial_t(\rho_G R_G) + \partial_x(\rho_G R_G v_G) & = 0 \\ \partial_t(\rho_W R_W) + \partial_x(\rho_W R_W v_W) & = 0 \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho_L R_L v_L^2 + \rho_G R_G v_G^2 + \rho_W R_W v_W^2 + p) & = S \end{cases}. \quad (\text{F.4})$$

Nous notons

$$\varphi^{\alpha\beta} = v_\alpha - v_\beta, \quad \alpha, \beta = L, G, W \quad (\text{F.5})$$

les glissements entre les différentes phases.

**Remarque F.2.1** En diphasique, nous n'avons besoin que d'une seule loi de fermeture  $\varphi^{\text{LG}} = v_{\text{L}} - v_{\text{G}}$ . Nous notons par ailleurs  $X = 1 - Y$  et  $Z = 0$ .

En triphasique, il est nécessaire d'introduire deux lois de glissement, par exemple  $\varphi^{\text{LG}}$  et  $\varphi^{\text{LW}}$ . La suite de la présentation est indépendante de ce choix.

Nous utilisons la définition de la vitesse

$$v = Xv_{\text{L}} + Yv_{\text{G}} + Zv_{\text{W}} \quad (\text{F.6})$$

pour obtenir les relations

$$v_{\text{L}} = v - Y\varphi^{\text{GL}} - Z\varphi^{\text{WL}}, \quad (\text{F.7})$$

$$v_{\text{G}} = v - X\varphi^{\text{LG}} - Z\varphi^{\text{WG}}, \quad (\text{F.8})$$

$$v_{\text{W}} = v - X\varphi^{\text{LW}} - Y\varphi^{\text{GW}}. \quad (\text{F.9})$$

Notons alors

$$\sigma^X = \rho XY\varphi^{\text{GL}} + \rho XZ\varphi^{\text{WL}}, \quad (\text{F.10})$$

$$\sigma^Y = \rho XY\varphi^{\text{LG}} + \rho YZ\varphi^{\text{WG}}, \quad (\text{F.11})$$

$$\sigma^Z = \rho XZ\varphi^{\text{LW}} + \rho YZ\varphi^{\text{GW}}. \quad (\text{F.12})$$

Il est alors possible, après de fastidieux calculs, d'obtenir l'égalité

$$\begin{aligned} Xv_{\text{L}}^2 + Yv_{\text{G}}^2 + Zv_{\text{W}}^2 = \\ v^2 + XY(X+Y)(\varphi^{\text{LG}})^2 + XZ(X+Z)(\varphi^{\text{LW}})^2 + YZ(YZ)(\varphi^{\text{GW}})^2 \\ + 2XYZ(\varphi^{\text{LG}}\varphi^{\text{LW}} + \varphi^{\text{GL}}\varphi^{\text{GW}} + \varphi^{\text{WL}}\varphi^{\text{WG}}) \end{aligned} \quad (\text{F.13})$$

qui permet de faciliter la réécriture du flux de l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Les équations de conservation s'écrivent alors

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ \rho Y \\ \rho Z \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + P \\ \rho Yv - \sigma^Y \\ \rho Zv - \sigma^Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{F.14})$$

où la *pseudo-pressure* vaut

$$\begin{aligned} P = & p + \rho XY(X+Y)(\varphi^{\text{LG}})^2 \\ & + \rho XZ(X+Z)(\varphi^{\text{LW}})^2 + \rho YZ(YZ)(\varphi^{\text{GW}})^2 \\ & + 2XYZ(\varphi^{\text{LG}}\varphi^{\text{LW}} + \varphi^{\text{GL}}\varphi^{\text{GW}} + \varphi^{\text{WL}}\varphi^{\text{WG}}). \end{aligned} \quad (\text{F.15})$$

Dans la suite, nous noterons le précédent système

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathcal{F}(\mathbf{u}) = 0 \quad (\text{F.16})$$

où les définitions de  $\mathbf{u}$  et  $\mathcal{F}$  sont claires.

**Remarque F.2.2** En diphasique, nous avons

$$v_{\text{L}} = v - Y\varphi^{\text{GL}}, \quad v_{\text{G}} = v - X\varphi^{\text{LG}}, \quad (\text{F.17})$$

$$\sigma^X = \rho XY\varphi^{\text{GL}}, \quad \sigma^Y = \rho XY\varphi^{\text{LG}}, \quad (\text{F.18})$$

$$P = p + \rho v^2 + \rho XY(\varphi^{\text{LG}})^2. \quad (\text{F.19})$$

### F.3 relaxation du système

Le système de lois de sans terme source en coordonnées Lagrangiennes s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_y v = 0 \\ \partial_t v + \partial_y P = 0 \\ \partial_t Y - \partial_y \sigma^Y = 0 \\ \partial_t Z - \partial_y \sigma^Z = 0 \end{cases} . \quad (\text{F.20})$$

Introduisons deux variables supplémentaires  $\Sigma^Y$  et  $\Sigma^Z$ , censées être égales à  $\sigma^Y$  et  $\sigma^Z$ , et considérons le système  $5 \times 5$  suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_y v = 0 \\ \partial_t v + \partial_y \Pi = 0 \\ \partial_t \Pi + a^2 \partial_y v = \lambda (P - \Pi) \\ \partial_t Y - \partial_y \Sigma^Y = 0 \\ \partial_t \Sigma^Y - b^2 \partial_y Y = \lambda (\sigma^Y - \Sigma^Y) \\ \partial_t Z - \partial_y \Sigma^Z = 0 \\ \partial_t \Sigma^Z - b^2 \partial_y Z = \lambda (\sigma^Z - \Sigma^Z) \end{cases} . \quad (\text{F.21})$$

En coordonnées Eulériennes, le système de relaxation trouve la formulation conservative

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ \rho \Pi \\ \rho Y \\ \rho \Sigma^Y \\ \rho Z \\ \rho \Sigma^Z \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + \Pi \\ \rho \Pi v + a^2 v \\ \rho Y v - \Sigma^Y \\ \rho \Sigma^Y - b^2 Y \\ \rho Z v - \Sigma^Z \\ \rho \Sigma^Z - b^2 Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \rho (P - \Pi) \\ 0 \\ \lambda \rho (\sigma^Y - \Sigma^Y) \\ 0 \\ \lambda \rho (\sigma^Z - \Sigma^Z) \end{pmatrix} . \quad (\text{F.22})$$

Par la suite, nous noterons le précédent système

$$\partial_t \mathbf{v} + \partial_x \mathcal{G}(\mathbf{v}) = \lambda \mathcal{R}(\mathbf{v}), \quad (\text{F.23})$$

où les définitions de  $\mathbf{v}$ ,  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{R}$  sont claires.

**Remarque F.3.1** *Il aurait été possible d'introduire un coefficient de relaxation supplémentaire (noté  $c$ ) qui serait apparu dans l'équation sur  $(\Sigma^Z)$ . L'étude présentée ici montre que ce n'est pas nécessaire. L'approche  $(a, b)$  a l'avantage de rendre aisé le contrôle de la positivité de la fraction massique d'huile. Par contre, l'approche  $(a, b)$  a l'inconvénient de diffuser autant sur  $(\Sigma^Z)$  que sur  $(\Sigma^Y)$  ce qui n'aurait pas été le cas avec un triplet  $(a, b, c)$ .*

### F.4 Analyse du système

Les invariants de Riemann fort vérifient les équations de transport Lagrangiennes

$$\begin{aligned} \partial_t (\Pi + a^2 \tau) &= 0, \\ \partial_t (\Pi + av) + a \partial_y (\Pi + av) &= 0, \\ \partial_t (\Pi - av) - a \partial_y (\Pi - av) &= 0, \\ \partial_t (\Sigma^Y + bY) - b \partial_y (\Sigma^Y + bY) &= 0, \\ \partial_t (\Sigma^Y - bY) + b \partial_y (\Sigma^Y - bY) &= 0, \\ \partial_t (\Sigma^Z + bZ) - b \partial_y (\Sigma^Z + bZ) &= 0, \\ \partial_t (\Sigma^Z - bZ) + b \partial_y (\Sigma^Z - bZ) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{F.24})$$

**Lemme F.4.1** *Les valeurs propres du système de relaxation en coordonnées Eulériennes sont*

$$v, \quad v \pm a\tau, \quad v \pm b\tau. \quad (\text{F.25})$$

*La valeur propre  $v \pm b\tau$  est de multiplicité 2. En coordonnées Eulériennes, tous les champs du système de relaxation sont linéairement dégénérés.*

## F.5 Solution du problème de Riemann

Considérons l'état initial

$$\mathbf{v}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{v}_L & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{v}_R & \text{si } x > 0, \end{cases} \quad (\text{F.26})$$

$\mathbf{v}_L$  et  $\mathbf{v}_R$  étant des états constants. Notons que  $\mathbf{v}_L$  et  $\mathbf{v}_R$  sont à l'équilibre :  $\Pi_\alpha = P(\mathbf{u}_\alpha)$  et  $\Sigma_\alpha^{Y,Z} = \sigma^{Y,Z}(\mathbf{u}_\alpha)$  pour  $\alpha = L, R$ .

Posons maintenant

$$\begin{aligned} \tau_L^* &= \tau_L + \frac{\Pi_L - \Pi^*}{a^2}, & \tau_R^* &= \tau_R + \frac{\Pi_R - \Pi^*}{a^2}, \\ v^* &= \bar{v} + \frac{1}{a} \langle \Pi \rangle, & \Pi^* &= \bar{\Pi} + a \langle v \rangle, \\ Y^* &= \bar{Y} - \frac{1}{b} \langle \Sigma^Y \rangle, & \Sigma^{Y,*} &= \bar{\Sigma}^Y - b \langle Y \rangle, \\ Z^* &= \bar{Z} - \frac{1}{b} \langle \Sigma^Z \rangle, & \Sigma^{Z,*} &= \bar{\Sigma}^Z - b \langle Z \rangle. \end{aligned} \quad (\text{F.27})$$

La solution du problème de Riemann est constituée de 6 états constants, à savoir

$$\mathbf{v}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{v}_L & \text{si } x < \mu_1 t, \\ \mathbf{v}_j & \text{si } \mu_j t < x < \mu_{j+1} t, \quad j = 1, 4, \\ \mathbf{v}_R & \text{si } \mu_5 t < x. \end{cases} \quad (\text{F.28})$$

Nous supposons que  $a > b$  car le transport des constituants est associé à une vitesse lente du système hyperbolique.

Les valeurs propres sont

$$\underbrace{v_L - a\tau_L}_{\mu_1} < \underbrace{v^* - b\tau_L^*}_{\mu_2} < \underbrace{v^*}_{\mu_3} < \underbrace{v^* + b\tau_R^*}_{\mu_4} < \underbrace{v_R + a\tau_R}_{\mu_5}$$

et les états intermédiaires sont

$$\begin{pmatrix} \rho_L^* \\ \rho_L^* v^* \\ \rho_L^* \Pi^* \\ \rho_L^* Y_L \\ \rho_L^* \Sigma_L^Y \\ \rho_L^* Z_L \\ \rho_L^* \Sigma_L^Z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho_L^* \\ \rho_L^* v^* \\ \rho_L^* \Pi^* \\ \rho_L^* Y^* \\ \rho_L^* \Sigma^{Y,*} \\ \rho_L^* Z^* \\ \rho_L^* \Sigma^{Z,*} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho_R^* \\ \rho_R^* v^* \\ \rho_R^* \Pi^* \\ \rho_R^* Y^* \\ \rho_R^* \Sigma^{Y,*} \\ \rho_R^* Z^* \\ \rho_R^* \Sigma^{Z,*} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho_R^* \\ \rho_R^* v^* \\ \rho_R^* \Pi^* \\ \rho_R^* Y_R \\ \rho_R^* \Sigma_R^Y \\ \rho_R^* Z_R \\ \rho_R^* \Sigma_R^Z \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{v}_1 \qquad \mathbf{v}_2 \qquad \mathbf{v}_3 \qquad \mathbf{v}_4$

La structure de la solution est schématisée à la figure (F.2).

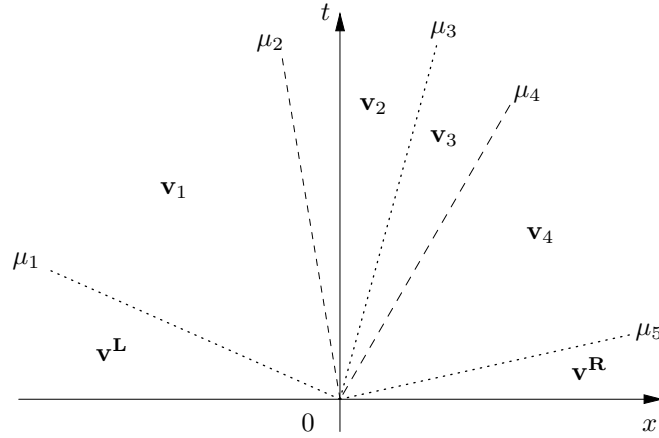


FIG. F.2 – Solution du problème de Riemann pour le système relaxé

## F.6 Coefficients de relaxation de base

Nous considérons un couple de coefficients  $(a, b)$  par arête et les développements de Chapman-Enskog justifient que l'on prenne :

$$a_{i+1/2} = \sqrt{\max(A_{\mathbf{L}}, A_{\mathbf{R}})}, \quad b_{i+1/2} = \sqrt{\max(B_{\mathbf{L}}, B_{\mathbf{R}})}, \quad (\text{F.29})$$

$$A_{\mathbf{L}, \mathbf{R}} = A(\mathbf{u}_{\mathbf{L}, \mathbf{R}}), \quad A(\mathbf{u}) = -P_\tau + P_v^2 \quad (\text{F.30})$$

$$B_{\mathbf{L}, \mathbf{R}} = B(\mathbf{u}_{\mathbf{L}, \mathbf{R}}), \quad B(\mathbf{u}) = \max\left((\sigma_Y^Z)^2, (\sigma_Z^Z)^2\right). \quad (\text{F.31})$$

## F.7 Principe du maximum

Il est possible d'augmenter suffisamment  $a$  pour avoir  $\tau_{\mathbf{L}}^*$  et  $\tau_{\mathbf{R}}^*$  positifs, comme nous l'avons déjà vu. En effet, si  $a$  vérifie l'inégalité

$$a(\mathbf{u}_{\mathbf{L}}, \mathbf{u}_{\mathbf{R}}) \geq a_p(\mathbf{u}_{\mathbf{L}}, \mathbf{u}_{\mathbf{R}}) := \frac{\langle v \rangle + \sqrt{\langle v \rangle^2 + 4 \max(\tau_{\mathbf{L}}, \tau_{\mathbf{R}}) |\langle \Pi \rangle|}}{2 \min(\tau_{\mathbf{L}}, \tau_{\mathbf{R}})}, \quad (\text{F.32})$$

alors  $\tau_{\mathbf{L}}^*$  et  $\tau_{\mathbf{R}}^*$  sont strictement positifs. Le but de ce paragraphe est de montrer qu'il est possible d'assurer un principe du maximum sur les fractions massiques des phases.

Dans cette partie, nous développons la technique permettant de calculer un coefficient  $\bar{b}_{i+1/2}$  et ainsi modifier le coefficient de relaxation  $b$  :

$$\tilde{b}_{i+1/2} = \max(b_{i+1/2}, \bar{b}_{i+1/2}) \quad (\text{F.33})$$

pour pouvoir assurer le principe du maximum sur les fractions massiques de tous les constituants.

Définissons  $X^* = 1 - Y^* - Z^*$ . Or nous avons :

$$X^* = \bar{X} + \frac{1}{b} (\langle \Sigma^Y \rangle + \langle \Sigma^Z \rangle) \quad (\text{F.34})$$

car  $\bar{X} = 1 - \bar{Y} - \bar{Z}$ . Or, il est facile de vérifier que :

$$\sigma^X + \sigma^Y + \sigma^Z = 0 \quad (\text{F.35})$$

et il s'ensuit que :

$$X^* = \bar{X} - \frac{1}{b} \langle \Sigma^X \rangle. \quad (\text{F.36})$$

**Remarque F.7.1** Si nous avons choisi l'approche  $(b, c)$ , l'expression obtenue aurait été :

$$X^* = \bar{X} + \frac{1}{b} \langle \Sigma^Y \rangle + \frac{1}{c} \langle \Sigma^Z \rangle. \quad (\text{F.37})$$

Dans ce cas, nous ne pouvons plus factoriser et faire apparaître  $\Sigma^X$ . Le principe du maximum sur  $X$  est alors plus délicat à imposer.

On utilise principalement le lemme suivant.

**Lemme F.7.2** Soit deux triplets  $(r_\alpha, s_\alpha, t_\alpha) \in \mathbb{R}^3$  avec  $\alpha = \mathbf{L}, \mathbf{R}$  vérifiant les trois conditions

$$r_\alpha \in [0, 1], \quad s_\alpha \in [0, 1], \quad \bar{r}s \in [0, \frac{1}{2}]. \quad (\text{F.38})$$

Alors, on a l'inégalité

$$|\Delta(rst)| \leq |\bar{t}| + |t|. \quad (\text{F.39})$$

**Théorème F.7.3** Soit  $\mathbf{u}_{\mathbf{L}, \mathbf{R}}$  deux états de  $\Omega$ . Supposons que  $a(\mathbf{u}_{\mathbf{L}}, \mathbf{u}_{\mathbf{R}}) \geq a_p(\mathbf{u}_{\mathbf{L}}, \mathbf{u}_{\mathbf{R}})$ . Soit  $b_X, b_Y$  et  $b_Z$  définis par la formulation générale

$$b_\star(\mathbf{u}_{\mathbf{L}}, \mathbf{u}_{\mathbf{R}}) : = |\bar{p}| + |p| + |\bar{q}| + |q|, \quad \star = X, Y, Z \quad (\text{F.40})$$

et en particulier

– si  $\star = X$ , alors  $p$  et  $q$  sont définis par

$$p_\alpha = \rho_\alpha \varphi_\alpha^{\text{GL}}, \quad q_\alpha = \rho_\alpha \varphi_\alpha^{\text{WL}}, \quad \alpha = \mathbf{L}, \mathbf{R}, \quad (\text{F.41})$$

– si  $\star = Y$ , alors  $p$  et  $q$  sont définis par

$$p_\alpha = \rho_\alpha \varphi_\alpha^{\text{LG}}, \quad q_\alpha = \rho_\alpha \varphi_\alpha^{\text{WG}}, \quad \alpha = \mathbf{L}, \mathbf{R}, \quad (\text{F.42})$$

– si  $\star = Z$ , alors  $p$  et  $q$  sont définis par

$$p_\alpha = \rho_\alpha \varphi_\alpha^{\text{LW}}, \quad q_\alpha = \rho_\alpha \varphi_\alpha^{\text{GW}}, \quad \alpha = \mathbf{L}, \mathbf{R}. \quad (\text{F.43})$$

Soit  $b_p(\mathbf{u}_{\mathbf{L}}, \mathbf{u}_{\mathbf{R}})$  définit par

$$b_p(\mathbf{u}_{\mathbf{L}}, \mathbf{u}_{\mathbf{R}}) := \max \left( b_X(\mathbf{u}_{\mathbf{L}}, \mathbf{u}_{\mathbf{R}}), b_Y(\mathbf{u}_{\mathbf{L}}, \mathbf{u}_{\mathbf{R}}), b_Z(\mathbf{u}_{\mathbf{L}}, \mathbf{u}_{\mathbf{R}}) \right) \quad (\text{F.44})$$

Alors, si  $b(\mathbf{u}_{\mathbf{L}}, \mathbf{u}_{\mathbf{R}}) \geq b_p(\mathbf{u}_{\mathbf{L}}, \mathbf{u}_{\mathbf{R}})$ , on a l'inégalité

$$X^* \geq 0, \quad Y^* \geq 0, \quad Z^* \geq 0. \quad (\text{F.45})$$



PREUVE Par définition, les conditions (F.45) sont vérifiées si et seulement si :

$$b \geq \max \left( \frac{\langle \Sigma^X \rangle}{\bar{X}}, \frac{\langle \Sigma^Y \rangle}{\bar{Y}}, \frac{\langle \Sigma^Z \rangle}{\bar{Z}} \right) \quad (\text{F.46})$$

Par la suite, nous calculons les coefficients  $b_X$ ,  $b_Y$  et  $b_Z$  tels que :

$$b_X \geq \left| \frac{\langle \Sigma^X \rangle}{\bar{X}} \right|, \quad b_Y \geq \left| \frac{\langle \Sigma^Y \rangle}{\bar{Y}} \right|, \quad b_Z \geq \left| \frac{\langle \Sigma^Z \rangle}{\bar{Z}} \right|. \quad (\text{F.47})$$

L'idée principale de la preuve est de trouver une expression convenable du membre droit, de telle sorte qu'on puisse directement appliquer le lemme (F.7.2) nous permettant d'avoir une fine estimation du majorant. Nous allons faire un calcul détaillé pour  $Y$ , en n'indiquant pour  $X$  et  $Z$  que le début de la preuve, les arguments étant les mêmes.

• Pour satisfaire la deuxième condition de (F.46), c'est à dire pour calculer  $b_Y$ , il suffit de voir que

$$b_Y \geq \left| \frac{\langle \Sigma^Y \rangle}{\bar{Y}} \right| \geq \frac{\langle \Sigma^Y \rangle}{\bar{Y}} = \frac{\Sigma_{\mathbf{L}}^Y - \Sigma_{\mathbf{R}}^Y}{Y_{\mathbf{L}} + Y_{\mathbf{R}}} = \Delta(Xsp) + \Delta(Zsq) \quad (\text{F.48})$$

où on note  $\Delta p = p_{\mathbf{L}} - p_{\mathbf{R}}$  et

$$p_\alpha = \rho_\alpha \varphi_\alpha^{\text{LG}}, \quad q_\alpha = \rho_\alpha \varphi_\alpha^{\text{WG}}, \quad s_\alpha = \frac{Y_\alpha}{Y_{\mathbf{L}} + Y_{\mathbf{R}}}, \quad \alpha = \mathbf{L}, \mathbf{R}. \quad (\text{F.49})$$

Nous allons appliquer le lemme deux fois successivement. Nous commençons par vérifier les trois hypothèses sur le triplet  $(X, s, p)$ .

1. Il est clair que, par hypothèse,  $X_\alpha \in [0, 1]$  pour  $\alpha = \mathbf{L}, \mathbf{R}$ , la première hypothèse du lemme est vérifiée pour  $X$ .
2. Par ailleurs, (voir l'illustration figure (F.3)) on a

$$0 \leq \frac{Y_\alpha}{Y_{\mathbf{L}} + Y_{\mathbf{R}}} \leq 1, \quad \alpha = \mathbf{L}, \mathbf{R} \quad (\text{F.50})$$

pour tout  $Y_\alpha \in [0, 1]$ . Donc  $s_\alpha \in [0, 1]$ .

3. Il reste à montrer que  $\bar{X}s \in [0, \frac{1}{2}]$ . Il est clair que  $\bar{X}s \geq 0$ . D'autre part, il est facile de voir que

$$X_{\mathbf{L}}Y_{\mathbf{L}} + X_{\mathbf{R}}Y_{\mathbf{R}} - (Y_{\mathbf{L}} + Y_{\mathbf{R}}) \quad (\text{F.51})$$

$$= (1 - Y_{\mathbf{L}} - Z_{\mathbf{L}})Y_{\mathbf{L}} + (1 - Y_{\mathbf{R}} - Z_{\mathbf{R}})Y_{\mathbf{R}} - (Y_{\mathbf{L}} + Y_{\mathbf{R}}) \quad (\text{F.52})$$

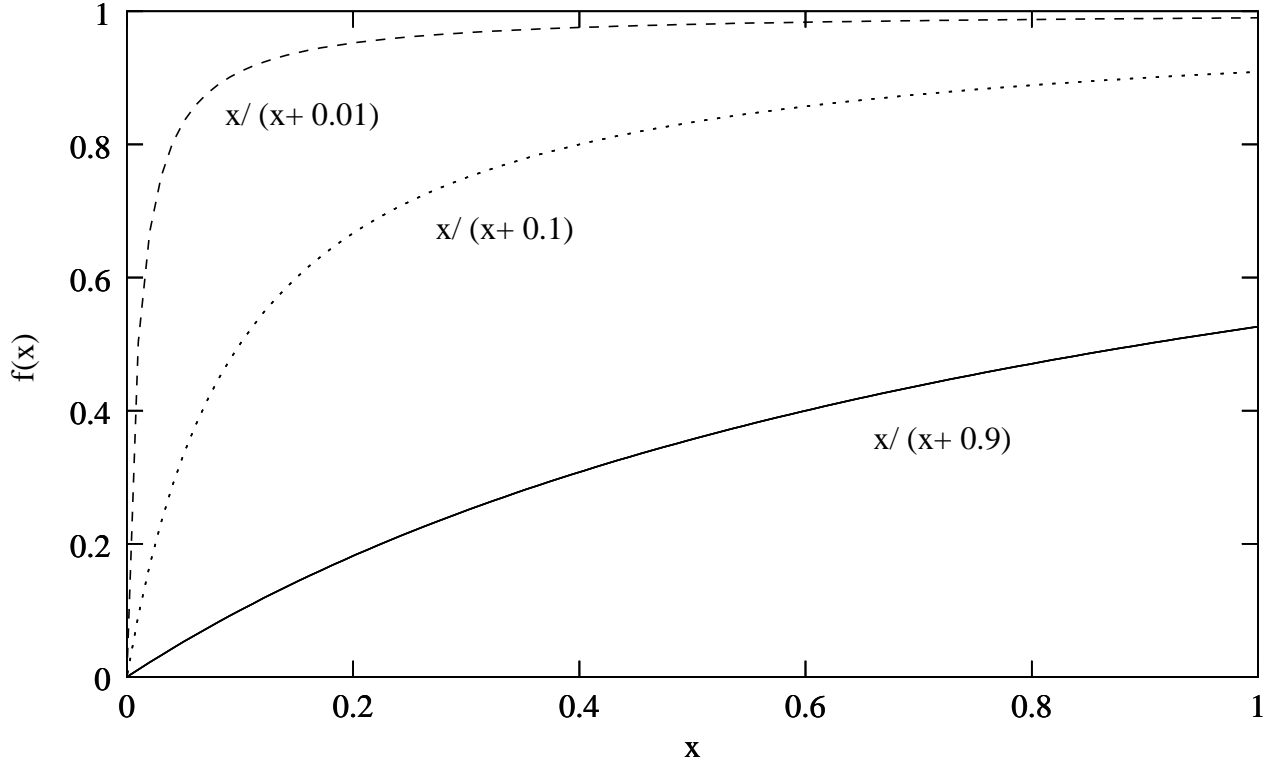
$$= -(Y_{\mathbf{L}} + Z_{\mathbf{L}})Y_{\mathbf{L}} - (Y_{\mathbf{R}}Z_{\mathbf{R}})Y_{\mathbf{R}} \leq 0 \quad (\text{F.53})$$

$$\text{Donc, } \bar{X}s = \frac{1}{2}X_{\mathbf{L}}\frac{Y_{\mathbf{L}}}{Y_{\mathbf{L}}+Y_{\mathbf{R}}} + \frac{1}{2}X_{\mathbf{R}}\frac{Y_{\mathbf{R}}}{Y_{\mathbf{L}}+Y_{\mathbf{R}}} \leq \frac{1}{2}.$$

De même, on peut facilement vérifier que les trois hypothèses sont vérifiées pour le triplet  $(Z, s, q)$ . Il vient alors, d'après le lemme,

$$\left| \frac{\langle \Sigma^Y \rangle}{\bar{Y}} \right| \leq |\Delta(Xsp)| + |\Delta(Zsq)| \leq |\bar{p}| + |\langle p \rangle| + |\bar{q}| + |\langle q \rangle| \quad (\text{F.54})$$

Il vient alors que  $b_Y$  défini dans le théorème vérifie l'inégalité requise.

FIG. F.3 – Etude de la fonction  $\frac{x}{x+Y_{\mathbf{R}}}$ 

• Pour satisfaire la troisième condition de (F.46), c'est à dire pour calculer  $b_Z$ , il suffit de voir que

$$b_Z \geq \left| \frac{\langle \Sigma^Z \rangle}{Z} \right| \geq \frac{\langle \Sigma^Z \rangle}{Z} = \frac{\Sigma_{\mathbf{L}}^Z - \Sigma_{\mathbf{R}}^Z}{Z_{\mathbf{L}} + Z_{\mathbf{R}}} = \Delta(Xsp) + \Delta(Ysq) \quad (\text{F.55})$$

où

$$p_\alpha = \rho_\alpha \varphi_\alpha^{\text{LW}}, \quad q_\alpha = \rho_\alpha \varphi_\alpha^{\text{GW}}, \quad s_\alpha = \frac{Z_\alpha}{Z_{\mathbf{L}} + Z_{\mathbf{R}}}, \quad \alpha = \mathbf{L}, \mathbf{R}. \quad (\text{F.56})$$

Les mêmes arguments que précédemment permettent de conclure.

• Enfin, pour satisfaire la première condition de (F.46), c'est à dire pour calculer  $b_X$ , il suffit de voir que

$$b_X \geq \left| \frac{\langle \Sigma^X \rangle}{X} \right| \geq \frac{\langle \Sigma^X \rangle}{X} = \frac{\Sigma_{\mathbf{L}}^X - \Sigma_{\mathbf{R}}^X}{X_{\mathbf{L}} + X_{\mathbf{R}}} = \Delta(Ysp) + \Delta(Zsq) \quad (\text{F.57})$$

où

$$p_\alpha = \rho_\alpha \varphi_\alpha^{\text{GL}}, \quad q_\alpha = \rho_\alpha \varphi_\alpha^{\text{WL}}, \quad s_\alpha = \frac{X_\alpha}{X_{\mathbf{L}} + X_{\mathbf{R}}}, \quad \alpha = \mathbf{L}, \mathbf{R} \quad (\text{F.58})$$

Les mêmes arguments que précédemment permettent de conclure.  $\square$

**Remarque F.7.4** Cette expression peut paraître compliquée mais elle n'est que la généralisation du cas diphasique, où nous avons

$$b_p := \frac{|(\rho\varphi^{\text{LG}})_{\mathbf{L}} + (\rho\varphi^{\text{LG}})_{\mathbf{R}}|}{2} + \frac{|(\rho\varphi^{\text{LG}})_{\mathbf{L}} - (\rho\varphi^{\text{LG}})_{\mathbf{R}}|}{2}.$$

## F.8 Interprétation du schéma comme une méthode de Roe

On considère le problème de Riemann du système de relaxation homogène ayant comme états gauche et droit  $\mathbf{v}_L = \mathbf{v}_0$  et  $\mathbf{v}_R = \mathbf{v}_5$  et comme valeurs propres  $\{\mu_j\}_{j=1,5}$ . L'interprétation du schéma comme une méthode de Roe est fondée sur une décomposition en éléments caractéristiques.

**Lemme F.8.1** *Soit les facteurs de normalisation*

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \rho_L^* - \rho_L, & \delta_2 &= \rho_L^*(Y^* - Y_L), & \delta_3 &= \rho_L^*(Z^* - Z_L), \\ \delta_4 &= \rho_R^* - \rho_L^*, & \delta_5 &= \rho_R^*(Y_R - Y^*), \\ \delta_6 &= \rho_R^*(Z_R - Z^*), & \delta_7 &= \rho_R - \rho_L^*. \end{aligned} \quad (\text{F.59})$$

Soit  $R = (r_j)_{j=1,7}$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ v_L - a\tau_L & 0 & 0 & v^* & 0 & 0 & v_R + a\tau_R \\ \Pi_L + a^2\tau_L & 0 & 0 & \Pi^* & 0 & 0 & \Pi_R + a^2\tau_R \\ Y_L & 1 & 0 & Y^* & 1 & 0 & Y_R \\ \Sigma_L^Y & b & 0 & \Sigma^{Y,*} & -b & 0 & \Sigma_R^Y \\ Z_L & 0 & 1 & Z^* & 0 & 1 & Z_R \\ \Sigma_L^Z & 0 & b & \Sigma^{Z,*} & 0 & -b & \Sigma_R^Z \end{pmatrix}. \quad (\text{F.60})$$

Alors, les différences entre deux états consécutifs de la solution du problème de Riemann peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0 &= \delta_1 r_1, & \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 &= \sum_{j=2,3} \delta_j r_j, \\ \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2 &= \delta_4 r_4, & \mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_3 &= \sum_{j=5,6} \delta_j r_j, \\ \mathbf{v}_5 - \mathbf{v}_4 &= \delta_7 r_7. \end{aligned} \quad (\text{F.61})$$

**PREUVE** L'idée principale de la preuve est d'utiliser la formule de Rankine-Hugoniot ainsi que la conservation d'invariants de Riemann bien choisis. La démonstration découle très naturellement des calculs déjà introduits dans le cas non-compositionnel. Elle est donc laissée au lecteur à titre d'exercice calculatoire.  $\square$

**Proposition F.8.2** *Soit  $R$  la matrice inversible définie par  $R = (r_j)_{j=1,7}$ . Soit  $L = R^{-1}$ . Soit  $\Lambda = \text{Diag}(\nu_j)_{j=1,7}$  avec*

$$(\nu_j)_{j=1,7} = (\mu_1, \mu_2, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_4, \mu_5). \quad (\text{F.62})$$

Alors la matrice  $A^{\text{Roe}}(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$  définie par  $A^{\text{Roe}} = R\Lambda L$  est une matrice de Roe.

Les vecteurs propres à droite de  $A^{\text{Roe}}$  sont les vecteurs  $(r_j)_{j=1,7}$

$$A^{\text{Roe}} r_j = \nu_j r_j, \quad j = 1, 7. \quad (\text{F.63})$$

Nous définissons la valeur absolue de la matrice de Roe par  $|A^{\text{Roe}}(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)| = R|\Lambda|L$ .

**Théorème F.8.3** *Le flux numérique définit par*

$$\mathbf{H}^{\text{Roe}}(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) = \frac{1}{2}(\mathcal{G}(\mathbf{v}_L) + \mathcal{G}(\mathbf{v}_R)) - \frac{1}{2}|A^{\text{Roe}}(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)|(\mathbf{v}_R - \mathbf{v}_L)$$

satisfait l'égalité

$$\mathbf{H}^{\text{Roe}}(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) = \mathbf{H}^{\text{Godunov}}(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R). \quad (\text{F.64})$$

## F.9 Conclusion

Nous proposons une technique de relaxation des équations triphasiques de Tacite. Cette technique peut être vue comme l’extension naturelle de l’étude déjà menée pour le système diphasique.

La méthode proposée introduit deux coefficients de relaxation :  $a$  relaxe les ondes rapides (acoustiques),  $b$  relaxe les ondes lentes (transport de masse). Nous avons mis en évidence comment le développement de Chapman-Enskog découplé permet de calculer simplement ces coefficients.

L’argument majeur de ce schéma est de permettre d’assurer le principe du maximum sur toutes les fractions massiques : il suffit pour cela d’introduire une diffusion numérique supplémentaire, en ajustant adroitement le coefficient  $b$ .

Nous avons également vu comment ce schéma est capable de s’exprimer comme une méthode de Roe. La construction d’un schéma semi-implicite linéaire est alors directe.

Pourtant, le développement de lois de fermetures hydrodynamiques permettant de simuler les écoulements triphasiques est une difficulté importante. Néanmoins, nous avons montré des éléments qui indiquent qu’il est possible de mettre en œuvre un schéma numérique permettant d’assurer une propriété physique intéressante.

## F.10 Perspectives

La technique devrait être testée par comparaison avec le schéma Tacite déjà développé précédemment. L’attention devra porter sur la diffusion numérique du schéma de relaxation, dont il a été vu qu’elle pourrait s’avérer trop importante : seul l’expérience confirmera ou infirmera cette hypothèse.

Dans ce cas, nous pourrions envisager de relaxer plus finement le système, en tentant de développer la variante  $(a, b, c)$  (qui oblige à introduire deux coefficients  $b$  et  $c$ , tous les deux associés à des ondes lentes du système). Il est attendu que la positivité de la fraction massique de liquide  $X$  sera imposée plus difficilement. Par contre, l’avantage consistera en une diffusion numérique minimale.



## Annexe G

# Modèle diphasique non isotherme non compositionnel

### Résumé

Dans ce chapitre, nous décrivons un schéma numérique de relaxation pour la simulation des écoulements diphasiques non isothermes, non compositionnels (appelé encore système gaz–liquide non isotherme). Nous proposons un schéma de relaxation explicite fondé sur un solveur de Godunov. Nous détaillons le calcul des coefficients de relaxation, qui est plus complexe qu’auparavant. Pour faire ce calcul, nous proposons un calcul des coefficients de relaxation pour le système gaz–liquide isotherme différent de ceux vus jusqu’ici. Nous présentons également le calcul des invariants forts du système de relaxation, qui s’avère également plus délicat. Dans le but de montrer que l’implicitation du schéma est possible, nous présentons l’interprétation de la méthode explicite comme une méthode de Roe. Cette étude ne contient pas de résultats numériques.

## G.1 Introduction

Il est noté dans [67] que *“les phénomènes thermiques sont importants pour des applications réelles (mer profonde) qui nécessitent une bonne connaissance des profils de température du fluide afin de pouvoir prédire ou non l’apparition d’hydrates. Les calculs thermiques en transitoires permettent d’estimer les épaisseurs d’isolant nécessaires pour isoler la conduite.”*

Le but de ce document est par conséquent d’étendre notre stratégie de relaxation au système avec équation d’énergie.

### G.1.1 D’autres tentatives

Une stratégie de relaxation concernant le système de la dynamique des gaz (comportant une équation de conservation de l’énergie totale) est présentée [20]. Ce système est complété par une loi de fermeture liant l’énergie à la température par une relation non-linéaire. L’idée principale est de décomposer l’énergie en la somme de deux énergies, la première dite de translation et la seconde dite interne. Les auteurs introduisent alors une variable supplémentaire dite “relaxée”, censée être égale à l’énergie interne, ainsi qu’une équation de transport de la variable relaxée.

Cette stratégie de relaxation est féconde dans de nombreux domaines (voir [18]) mais ne peut s’appliquer dans notre cas. La difficulté principale est que le type de relations de fermeture présentes dans le système Tacite est plus complexe que celui de [20] : notre système ne possède pas d’écriture algébrique aussi “simple” et donc empêche une relaxation du même type.

### G.1.2 Méthode proposée

L'idée principale de la méthode de relaxation que nous proposons ici est d'étudier les non-linéarités du système en coordonnées Lagrangiennes. Nous remplaçons alors les fonctions non-linéaires qui apparaissent par des variables "relaxées", nouvelles inconnues censées être égales aux fonctions non-linéaires.

Ce chapitre est une correction et un complément du rapport [8], qui contenait une approximation non nécessaire concernant l'équation d'énergie, une erreur concernant la solution du problème de Riemann. Le but de ce document est de rectifier l'erreur ainsi que d'étendre, comme dans [15], la méthode pour proposer un schéma semi-implicite linéaire.

Il est ici important de citer le travail [23], dans lequel le système diphasique qui est le centre de notre étude est présenté, sous une forme légèrement différente. Nous nous en inspirons pour relaxer une équation d'énergie exacte, contrairement à notre précédente étude [8].

Le plan de ce document est le suivant. Dans une première partie, nous présentons le modèle. Puis, nous présentons la méthode de relaxation et ses résultats numériques. En tentant d'analyser plus profondément un résultat numérique insatisfaisant, nous faisons quelques développements théoriques sur le cas du monophasique gaz et proposons une méthode de relaxation alternative.

## G.2 Modèle continu

### G.2.1 Variables

Outre les variables déjà décrites auparavant, les équations sont classiquement écrites dans les variables suivantes (on indicera respectivement par L et G les variables relatives au liquide et au gaz) :

- les enthalpies internes spécifiques  $h_L, h_G$  ;
- les énergies totales spécifiques  $e_L, e_G$  ;
- la pression  $p$  ;
- la température  $T$ .

Ces variables dépendent de l'abscisse  $x$  le long de la conduite et du temps  $t$ . Il est par ailleurs commode d'introduire les grandeurs suivantes :

- l'énergie totale spécifique du mélange  $e = e_L X + e_G Y$  ;
- l'enthalpie interne spécifique du mélange  $h = h_L X + h_G Y$ .

### G.2.2 Thermodynamique

Les équations d'état pour les gaz parfaits et les liquides compressibles sont :

$$\rho_G = \rho_G^0 \frac{pT^0}{p^0 T}, \quad \rho_L = \rho_L^0 + \frac{p - p^0}{a_L^2} \quad (\text{G.1})$$

où  $\rho_G$  est la masse volumique du gaz,  $p^0$  et  $T^0$  sont des pressions et des températures de référence et où  $\rho_L$  est la masse volumique du liquide,  $\rho_L^0$  la masse volumique du liquide pour  $p = p^0$  et  $a_L$  la

---

<sup>0</sup>Sur une section de conduite, ces fractions représentent la proportion surfacique de chaque phase par rapport à la surface totale. Ainsi, on a  $R_L + R_G = 1$ .

vitesse du son dans le liquide. Le modèle pour l'enthalpie interne spécifique est :

$$h_L = C_L^p T, \quad h_G = C_G^p T \quad (\text{G.2})$$

où  $C_L^p$  (resp  $C_G^p$ ) est la chaleur spécifique du liquide (resp du gaz) à pression constante.

### G.2.3 Hydrodynamique

Pour cela, on introduit une loi qui relie les vitesses des deux phases. L'expression de cette loi est censée exprimer une propriété caractéristique, mais souvent empirique, de l'écoulement considéré.

Définissons le glissement par

$$\varphi = v_L - v_G. \quad (\text{G.3})$$

### G.2.4 Écriture d'une équation d'énergie exacte

Dans le cas d'un écoulement diphasique, le modèle le plus complet est celui de [61]. Cette équation est l'équation de conservation de l'énergie *totale* :

$$\partial_t(\rho e) + \partial_x \left[ \rho \left( h + \frac{1}{2} v^2 \right) v + \sigma \mathcal{H} \right] = 0, \quad (\text{G.4})$$

avec

$$e = \varepsilon + \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} XY \varphi^2, \quad \mathcal{H} = \Delta h + \frac{3}{2} v \varphi - \frac{1}{2} (X - Y) \varphi^2, \quad (\text{G.5})$$

$$\Delta h = h_L - h_G, \quad \sigma = \rho XY \varphi, \quad (\text{G.6})$$

où  $e$  est l'énergie totale spécifique du mélange et  $\varepsilon$  est l'énergie interne spécifique du mélange. On utilise alors la définition  $\rho h = p + \rho \varepsilon$  ainsi que  $P = p + \sigma \varphi$  et on constate l'égalité

$$\rho \left( h + \frac{1}{2} v^2 \right) v + \sigma \mathcal{H} = \rho e v + P v + \sigma \left[ \Delta h - \frac{1}{2} (X - Y) \varphi^2 \right]. \quad (\text{G.7})$$

Nous notons désormais

$$\overline{G} = \sigma \left[ \Delta h - \frac{1}{2} (X - Y) \varphi^2 \right]. \quad (\text{G.8})$$

**Remarque G.2.1** Dans (G.7), la pseudo-pression  $P$  apparaît "naturellement" est n'est pas le fruit d'un artifice de calcul, contrairement à ce que nous avons présenté dans [8].

**Remarque G.2.2** En monophasique gaz ( $Y = 1$ ), il est facile de voir que  $\overline{G} = 0$  car  $\sigma = \rho Y (1 - Y) \varphi = 0$ . On vérifie donc que, en monophasique gaz, le flux de l'équation de conservation de  $e$  est bien  $p v$ , comme il a déjà été vu.

### G.2.5 Cadre mathématique

Nous devons considérer le système gaz-liquide non isotherme suivant

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho \\ \rho Y \\ \rho v \\ \rho e \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho Y v - \sigma \\ \rho v^2 + P \\ \rho e v + P v + \overline{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ S^{Q_{mvt}} \\ S^{Ener} \end{pmatrix}. \quad (\text{G.9})$$

où



$$\begin{aligned}
\sigma &= \rho XY \varphi && \text{joue le rôle d'une impulsion apparente;} \\
P &= p + \rho XY \varphi^2 && \text{joue le rôle d'une pression apparente;} \\
\overline{G} &= \sigma \left[ \Delta h - \frac{1}{2}(X - Y)\varphi^2 \right].
\end{aligned}$$

Dans la suite, nous noterons le précédent système

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathcal{F}(\mathbf{u}) = \mathcal{S}(\mathbf{u}) \quad (\text{G.10})$$

où les définitions de  $\mathbf{u}$  et  $\mathcal{F}$  sont claires.

## G.3 Méthode de relaxation

### G.3.1 Relaxation

En introduisant le co-volume  $\tau = \frac{1}{\rho}$  et la variable Lagrangienne  $y$  définie par  $dx = vdt + \tau dy$ , on aboutit à

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_y v &= 0, \\ \partial_t v + \partial_y P &= 0, \\ \partial_t e + \partial_y (Pv + \overline{G}) &= 0, \\ \partial_t Y - \partial_y \sigma &= 0. \end{cases} \quad (\text{G.11})$$

Nous proposons alors le système relaxé composé des deux sous-systèmes suivants :

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_y v &= 0, \\ \partial_t v + \partial_y \Pi &= 0, \\ \partial_t \Pi + a^2 \partial_y v &= \lambda (P - \Pi), \\ \partial_t e + \partial_y (\Pi v + \overline{G}) &= 0, \\ \partial_t \overline{G} + c^2 \partial_y e &= \lambda (\overline{G} - \overline{\mathbb{G}}), \end{cases} \quad (\text{G.12})$$

$$\begin{cases} \partial_t Y - \partial_y \Sigma &= 0, \\ \partial_t \Sigma - b^2 \partial_y Y &= \lambda (\sigma - \Sigma). \end{cases} \quad (\text{G.13})$$

Dans cette variante, le sous-système en  $(Y, \Sigma)$  est relaxé de la même façon qu'avant. Par contre, le sous-système en  $(e, \overline{G})$  est désormais couplé au sous-système en  $(\tau, v, \Pi)$  par l'intermédiaire du terme  $\Pi v$ .

Revenons en coordonnées Eulériennes ; le système relaxé devient :

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ \rho \Pi \\ \rho e \\ \rho \overline{G} \\ \rho Y \\ \rho \Sigma \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + \Pi \\ \rho \Pi v + a^2 v \\ \rho e v + \Pi v + \overline{G} \\ \rho \overline{G} v + c^2 e \\ \rho Y v - \Sigma \\ \rho \Sigma v - b^2 Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \rho (P(\mathbf{u}) - \Pi) \\ 0 \\ \lambda \rho (\sigma(\mathbf{u}) - \Sigma) \\ 0 \\ \lambda \rho (G(\mathbf{u}) - \overline{G}) \end{pmatrix}. \quad (\text{G.14})$$

Par la suite, nous noterons le précédent système

$$\partial_t \mathbf{v} + \partial_x \mathcal{G}(\mathbf{v}) = \lambda \mathcal{R}(\mathbf{v}), \quad (\text{G.15})$$

où les définitions de  $\mathbf{v}$ ,  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{R}$  sont claires.

### G.3.2 Développement de Chapman-Enskog

Dans cette partie nous exposons les calculs nécessaires pour l'évaluation des coefficients de relaxation  $(a, b, c)$ .

Dans une première étape, nous mettons à jour les développements de Chapman-Enskog. Nous verrons que, considérant la technique de découplage des sous-systèmes, il est facile de calculer le coefficient  $b$ . En ce qui concerne les coefficients  $a$  et  $c$ , nous verrons que leur calcul est plus complexe. Pour ce faire, nous faisons un retour en arrière et reconsidérons le système gaz-liquide isotherme. Pour ce système, nous trouvons une autre expression des coefficients de relaxation grâce à une analyse plus fine du polynôme caractéristique associé au développement de Chapman-Enskog. Rappelons que la positivité des racines de ce polynôme nous assure la stabilité de la méthode. Nous revenons alors au système gaz-liquide non-isotherme pour lequel le polynôme caractéristique associé au développement de Chapman-Enskog présente une structure similaire, quoique plus complexe. Enfin, nous exposons le calcul pratique des coefficients de relaxation.

#### G.3.2.1 Le développement

Nous devons effectuer le développement de Chapman-Enskog du système :

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_y v & = 0 \\ \partial_t v + \partial_y \Pi & = 0 \\ \partial_t \Pi + a^2 \partial_y v & = \lambda (P - \Pi) \\ \partial_t e + \partial_y (\Pi v + \overline{\mathbb{G}}) & = 0 \\ \partial_t \overline{\mathbb{G}} + c^2 \partial_y e & = \lambda (\overline{G} - \overline{\mathbb{G}}) \\ \partial_t Y - \partial_y \Sigma & = 0 \\ \partial_t \Sigma - b^2 \partial_y Y & = \lambda (\sigma - \Sigma) \end{cases}. \quad (\text{G.16})$$

Nous allons traiter séparément les sous-systèmes en  $(\tau, v, \Pi, e, \overline{\mathbb{G}})$  et en  $(Y, \Sigma)$ .

Pour le sous-système

$$\begin{cases} \partial_t Y - \partial_y \Sigma & = 0, \\ \partial_t \Sigma - b^2 \partial_y Y & = \lambda (\sigma - \Sigma), \end{cases} \quad (\text{G.17})$$

nous considérons que la technique classique, utilisée tout au long de ce rapport, est adaptée. Il s'ensuit que la condition sur le coefficient de relaxation  $b$  est :

$$b^2 - B \geq 0, \quad B = \sigma_Y^2. \quad (\text{G.18})$$

Traitons alors le sous-système :

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_y v & = 0, \\ \partial_t v + \partial_y \Pi & = 0, \\ \partial_t \Pi + a^2 \partial_y v & = \lambda (P - \Pi), \\ \partial_t e + \partial_y (\Pi v + \overline{\mathbb{G}}) & = 0, \\ \partial_t \overline{\mathbb{G}} + c^2 \partial_y e & = \lambda (\overline{G} - \overline{\mathbb{G}}). \end{cases} \quad (\text{G.19})$$

Comme l'équation de conservation de  $e$  fait intervenir le terme  $\Pi v + \overline{\mathbb{G}}$ , nous ne pouvons pas découpler les sous-systèmes en  $(\tau, v, \Pi)$  et en  $(e, \overline{\mathbb{G}})$ .

Nous faisons l'hypothèse que les fonctions  $P$  et  $\overline{G}$  ne dépendent que de la variable d'équilibre  $\mathbf{w} = (\tau, v, e)^T$  :

$$P = P(\tau, v, e), \quad \overline{G} = \overline{G}(\tau, v, e). \quad (\text{G.20})$$

Le développement de Chapman-Enskog est par définition :

$$\Pi = P + \lambda^{-1}\Pi_1 + \mathcal{O}(\lambda^{-2}), \quad (\text{G.21})$$

$$\overline{\mathbb{G}} = \overline{G} + \lambda^{-1}\overline{\mathbb{G}}_1 + \mathcal{O}(\lambda^{-2}). \quad (\text{G.22})$$

En introduisant ces développements dans le système relaxé considéré, on obtient le système quasi-linéaire :

$$\partial_t \mathbf{w} + \Gamma(\mathbf{w})\partial_y \mathbf{w} = \lambda^{-1}\partial_y [\Delta_{a,c}(\mathbf{w})\partial_y \mathbf{w}], \quad (\text{G.23})$$

la matrice  $\Delta_{a,c}$  étant

$$\Delta_{a,c}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \times & a^2 - A & J \\ \times & (a^2 - A)v + L & Jv + (c^2 - C) \end{pmatrix}, \quad (\text{G.24})$$

$$\begin{aligned} A &= -P_\tau + P_v^2 + P_e G_v, & J &= -P_e(P_v + G_e), \\ C &= P_e \overline{G}_v + G_e \overline{G}_e, & L &= \overline{G}_\tau - P_v \overline{G}_v - G_v \overline{G}_e, \end{aligned} \quad (\text{G.25})$$

Le polynôme caractéristique de la matrice  $\Delta_{a,c}(\mathbf{w})$  est :

$$\mathcal{P}(\mu) = \mu \mathcal{Q}(\mu), \quad \mathcal{Q}(\mu) = \mu^2 - \alpha \mu + \beta \quad (\text{G.26})$$

$$\alpha = (a^2 - A + Jv) + (c^2 - C), \quad \beta = (a^2 - A)(c^2 - C) - JL \quad (\text{G.27})$$

Les racines de  $\mathcal{Q}$  sont réelles et positives si et seulement si

- le discriminant de  $\mathcal{Q}$  est positif;
- le produit des racines est positif;
- la somme des racines est positive.

Il est difficile d'expliciter directement ces conditions. Il est alors intéressant de commencer par traiter un polynôme plus simple, pour ensuite revenir au polynôme qui nous occupe.

### G.3.2.2 Un polynôme “simple”

Ce polynôme est exactement celui qui apparaissent lors du calcul des coefficients de relaxation présenté dans [10], dans lequel nous considérons le système gaz-liquide isotherme. Nous avons dans un premier temps développé des calculs assez compliqués (non présents dans le rapport) : nous présentons ici des calculs beaucoup plus simples. Rappelons que, finalement, nous avons considéré un calcul des coefficients  $a$  et  $b$  découplé, calcul qui nous permet de minimiser la diffusion numérique. Le lemme présenté ici est donc uniquement dans le but de faciliter les démonstrations à venir.

**Lemme G.3.1** *Soient  $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ . Soit le polynôme*

$$\mathcal{Q}^{a,b}(\mu) = \mu^2 - \alpha^{a,b}\mu + \beta^{a,b}, \quad (\text{G.28})$$

avec

$$\alpha^{a,b} = (a^2 - A) + (b^2 - B), \quad \beta^{a,b} = (a^2 - A)(b^2 - B) - CD. \quad (\text{G.29})$$

On note  $\gamma = |CD|$ . Soient le couple  $(\hat{a}^-, \hat{b}^-)$  défini par

$$\hat{a}^- = (\sqrt{2} + 1)\sqrt{\gamma}, \quad \hat{b}^- = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{\gamma}, \quad (\text{G.30})$$

et le couple  $(a^-, b^-)$  défini par

$$a^- = \sqrt{\widehat{a}^- + A}, \quad b^- = \sqrt{\widehat{b}^- + B}. \quad (\text{G.31})$$

Alors les racines du polynôme  $\mathcal{Q}^{a^-, b^-}$  sont réelles et positives.

PREUVE L'astuce principale consiste à faire le changement de variable :

$$\widehat{a} = a^2 - A, \quad \widehat{b} = b^2 - B, \quad (\text{G.32})$$

où, désormais, les inconnues ne sont plus  $a, b$  mais  $\widehat{a}, \widehat{b}$ . Les coefficients du polynôme s'écrivent alors :

$$\alpha^{a,b} = \widehat{a} + \widehat{b}, \quad \beta^{a,b} = \widehat{a}\widehat{b} - CD, \quad (\text{G.33})$$

et les conditions à imposer sont :

$$(\widehat{a} - \widehat{b})^2 + 4CD \geq 0, \quad (\text{G.34})$$

$$\widehat{a}\widehat{b} - CD \geq 0, \quad (\text{G.35})$$

$$\widehat{a} + \widehat{b} \geq 0. \quad (\text{G.36})$$

Il est facile de voir qu'une condition suffisante pour imposer (G.34–G.36) est :

$$(\widehat{a} - \widehat{b})^2 - 4\gamma \geq 0, \quad (\text{G.37})$$

$$\widehat{a}\widehat{b} - \gamma \geq 0, \quad (\text{G.38})$$

$$\widehat{a} + \widehat{b} \geq 0, \quad (\text{G.39})$$

avec  $\gamma = |CD|$ . La figure (G.1) permet de visualiser les solutions de ce système d'inégalités dans le plan  $(\widehat{a}, \widehat{b})$ .

On voit bien que les courbes définies par les égalités (G.37) et (G.38) ont toujours 4 intersections mais l'inégalité (G.39) en sélectionne seulement 2 parmi celles-ci : on les a notés  $M^+$  et  $M^-$ . On définit par  $\omega^+$  (resp.  $\omega^-$ ) le domaine (hachuré dans la figure) correspondant à  $M^+$  (resp.  $M^-$ ). Dans ces deux domaines, définissant l'ensemble des solutions admissibles, nous choisissons les couples  $(\widehat{a}, \widehat{b})$  les plus petit possibles pour minimiser la diffusion du schéma numérique. Ces optimums sont précisément les points  $M^+$  et  $M^-$ .

Calculer les coordonnées du point  $M^-$  est simple car ce point est tel que  $\widehat{a}$  soit la solution positive de l'équation  $\frac{\gamma}{\widehat{a}} = \widehat{a} - 2\sqrt{\gamma}$  ou encore  $\widehat{a}^2 - 2\sqrt{\gamma}\widehat{a} - \gamma = 0$ . Les coordonnées de  $M^-$  sont donc :

$$\widehat{a}^- = (\sqrt{2} + 1)\sqrt{\gamma}, \quad \widehat{b}^- = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{\gamma}. \quad (\text{G.40})$$

De même, les coordonnées de  $M^+$  sont :

$$\widehat{a}^+ = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{\gamma}, \quad \widehat{b}^+ = (\sqrt{2} + 1)\sqrt{\gamma}. \quad (\text{G.41})$$

On constate clairement que  $\widehat{a}^- > \widehat{b}^-$  tandis que  $\widehat{a}^+ < \widehat{b}^+$ . Or nous sommes prioritairement intéressés par les ondes lentes du système de telle sorte que nous voulons plutôt minimiser  $\widehat{b}$  : notre choix sera alors le couple  $(\widehat{a}^-, \widehat{b}^-)$ . □

Ainsi, en considérant le schéma discret, nous pouvons présenter une formulation simplifiée du calcul des coefficients de relaxation sur une arête  $i + 1/2$ . Dans les écritures qui suivent, pour toute fonction  $\varphi(\mathbf{u})$ , nous notons  $\varphi_{\mathbf{L}} = \varphi(\mathbf{u}_{\mathbf{L}})$  et  $\varphi_{\mathbf{R}} = \varphi(\mathbf{u}_{\mathbf{R}})$ . Nous calculons un couple de coefficients de relaxation par arête et les développements précédents justifient que l'on prenne :

$$\gamma_{i+1/2} = \max(\gamma_{\mathbf{L}}, \gamma_{\mathbf{R}}), \quad \gamma(\mathbf{u}) = |C(\mathbf{u}) D(\mathbf{u})|, \quad (\text{G.42})$$

$$\widehat{a}_{i+1/2} = (\sqrt{2} + 1)\sqrt{\gamma_{i+1/2}}, \quad \widehat{b}_{i+1/2} = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{\gamma_{i+1/2}}, \quad (\text{G.43})$$

$$a_{i+1/2} = \sqrt{\widehat{a}_{i+1/2} + \max(A_{\mathbf{L}}, A_{\mathbf{R}})}, \quad b_{i+1/2} = \sqrt{\widehat{b}_{i+1/2} + \max(B_{\mathbf{L}}, B_{\mathbf{R}})}. \quad (\text{G.44})$$

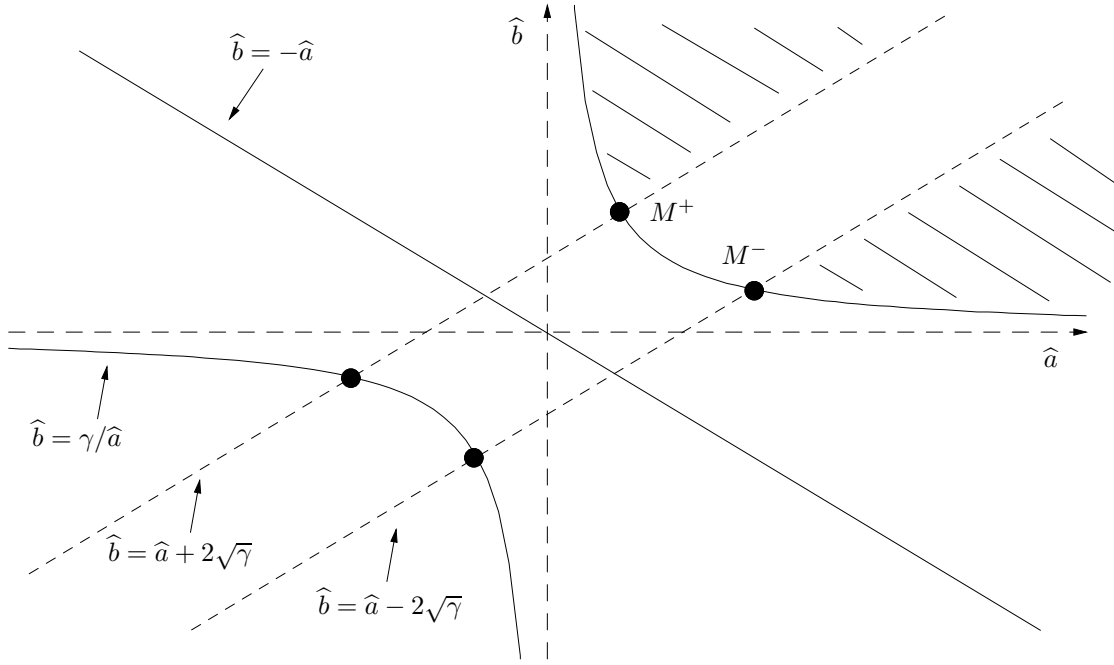


FIG. G.1 – Solutions du système d'inégalités

### G.3.2.3 Le polynôme en question

Revenons alors au système gaz–liquide non isotherme et étudions le polynôme dont il est question ici. Le lemme suivant, qui tire parti du lemme (G.3.1) permet de calculer explicitement le coefficient de relaxation  $a$ .

**Lemme G.3.2** Soient  $A, C, J, L, v \in \mathbb{R}$ . Soit le polynôme

$$\mathcal{Q}^{a,c}(\mu) = \mu^2 - \alpha^{a,c}\mu + \beta^{a,c}, \quad (\text{G.45})$$

avec

$$\alpha^{a,c} = (a^2 - A + Jv) + (c^2 - C), \quad \beta^{a,c} = (a^2 - A)(c^2 - C) - JL. \quad (\text{G.46})$$

On note  $\delta = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{|J|}$ . Soit  $\hat{c}^-$  la plus petite solution positive de

$$x^2 - \delta^2 |vx + L| = 0, \quad (\text{G.47})$$

et  $\hat{a}^-$  défini par

$$\hat{a}^- = (\sqrt{2} + 1)\sqrt{\gamma(\hat{c}^-)}, \quad (\text{G.48})$$

avec  $\gamma(\hat{c}) = |J(v\hat{c} + L)|$ . Enfin, soit le couple  $(a^-, c^-)$  défini par

$$a^- = \sqrt{\hat{a}^- + A - Jv}, \quad c^- = \sqrt{\hat{c}^- + C}. \quad (\text{G.49})$$

Alors les racines du polynôme  $\mathcal{Q}^{a^-, c^-}$  sont réelles et positives.

PREUVE L'astuce principale consiste à faire le changement de variable :

$$\hat{a} = a^2 - A + Jv, \quad \hat{c} = c^2 - C, \quad (\text{G.50})$$

où, désormais, les inconnues ne sont plus  $a, c$  mais  $\hat{a}, \hat{c}$ . Notons que le changement de variable pour  $a$  se fait par analogie avec le coefficient de relaxation de la méthode de relaxation pour les équations de la dynamique des gaz, dans laquelle le coefficient  $Jv$  est déjà présent. Les coefficients du polynôme s'écrivent alors :

$$\alpha^{a,c} = \hat{a} + \hat{c}, \quad \beta^{a,c} = \hat{a}\hat{c} - J(v\hat{c} + L). \quad (\text{G.51})$$

Ici, le produit  $J(v\hat{c} + L)$  dépend de l'inconnue  $\hat{c}$ . Nous allons donc procéder en 2 temps. D'abord, nous appliquons le lemme précédent nous permettant de calculer le couple  $(\hat{a}, \hat{c})$  en fonction du produit  $J(v\hat{c} + L)$  : ici,  $\hat{c}$  sera défini de façon implicite. Dans un deuxième temps, grâce à un troisième lemme, nous détaillerons comment calculer explicitement  $\hat{c}$ .

Les coordonnées du couple  $M^-$  sont :

$$\hat{a}^- = (\sqrt{2} + 1) \sqrt{\gamma(\hat{c}^-)}, \quad \hat{c}^- = (\sqrt{2} - 1) \sqrt{\gamma(\hat{c}^-)}. \quad (\text{G.52})$$

Les coordonnées de  $M^+$  sont :

$$\hat{a}^+ = (\sqrt{2} - 1) \sqrt{\gamma(\hat{c}^+)}, \quad \hat{c}^+ = (\sqrt{2} + 1) \sqrt{\gamma(\hat{c}^+)}. \quad (\text{G.53})$$

avec  $\gamma(\hat{c}) = |J(v\hat{c} + L)|$ .

Ici encore, nous choisissons le point  $M^-$  car nous sommes intéressés prioritairement par les ondes lentes et nous voulons donc minimiser  $\hat{c}$ . Si nous définissons la constante  $\delta = (\sqrt{2} - 1) \sqrt{|J|}$ , on voit que  $\hat{c}$  doit alors être solution de :

$$\hat{c} - \delta \sqrt{|v\hat{c} + L|} = 0, \quad (\text{G.54})$$

qui peut se réécrire

$$\hat{c}^2 - \delta^2 |v\hat{c} + L| = 0, \quad \hat{c} \geq 0, \quad (\text{G.55})$$

ce qui conclut la démonstration.  $\square$

Il reste maintenant à calculer explicitement  $\hat{c}$ . Nous allons constater que c'est assez simple, grâce au lemme suivant. Puis, nous montrerons le calcul explicite des coefficients de relaxation pour une arête  $i + 1/2$ .

**Lemme G.3.3** *Soient  $\delta, L, v \in \mathbb{R}$ . Le système d'inconnue  $x$  suivant*

$$\begin{cases} x^2 - \delta^2 |vx + L| = 0, \\ x \geq 0, \end{cases} \quad (\text{G.56})$$

*possède entre 1 et 3 solutions selon le signe de  $L$  et  $v$ . Ces solutions sont les suivantes.*

- Si  $\Delta_1 = \delta^2 (\delta^2 + 4L) \geq 0$ , alors, parmi les 3, il y en a au plus deux qui s'écrivent  $x^{1,2} = \frac{1}{2} (\delta^2 v \pm \sqrt{\Delta_1})$  et doivent vérifier  $vx^{1,2} + L \geq 0$ .
- Si  $\Delta_2 = \delta^2 (\delta^2 - 4L) \geq 0$ , alors, parmi les 3, il y en a au plus deux qui s'écrivent  $x^{3,4} = \frac{1}{2} (-\delta^2 v \pm \sqrt{\Delta_2})$  et doivent vérifier  $vx^{3,4} + L \leq 0$ .

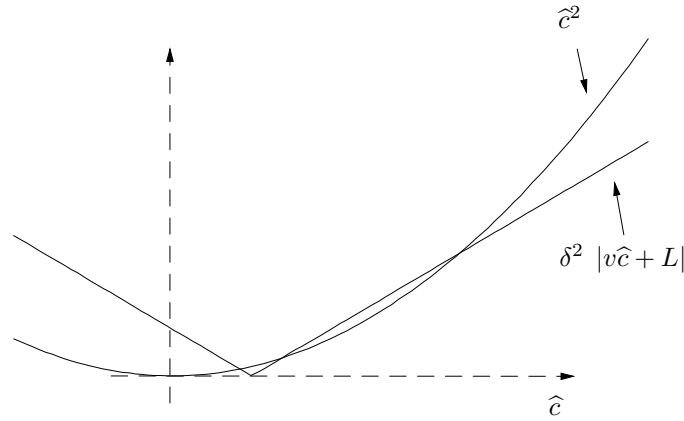


FIG. G.2 – Solutions de (G.55)

Racines	$L > 0$	$L < 0$	$L = 0$
$v > 0$	1 $\oplus$	3 $\oplus$	1 N, 1 $\oplus$
$v < 0$	3 $\oplus$	1 $\oplus$	1 N, 1 $\oplus$
$v = 0$	1 $\oplus$	1 $\oplus$	1 N

FIG. G.3 – Nombre de solutions de (G.55)

PREUVE La figure (G.2) permet de visualiser les solutions de cette équation. Selon le signe de  $vx + L$ , l'équation  $x^2 - \delta^2 |vx + L| = 0$  peut posséder de 1 à 4 solutions. Ces solutions sont trivialement calculées comme exposé dans le lemme. La contrainte supplémentaire  $x \geq 0$  limite le nombre de solutions à 3 au maximum. Cela est établi par l'analyse, dans chaque cas, du produit et de la somme des racines, qui donne lieu au tableau de la figure (G.3) et qui montre le nombre de solutions de (G.55) en fonction des signes de  $L$  et  $v$  (N pour Nulle,  $\oplus$  pour positive).  $\square$

En pratique, pour déterminer les solutions du système (G.56), il suffit de calculer les solutions les unes après les autres, en éliminant celles qui ne vérifient pas les critères requis. Nous notons désormais  $\hat{c}$  la plus petite des solutions de (G.56)

$$\hat{c} = \min(\hat{c}^1, \hat{c}^2, \hat{c}^3) \quad (\text{G.57})$$

où  $\hat{c}^1, \hat{c}^2, \hat{c}^3$  sont les éventuelles solutions de (G.56).

#### G.3.2.4 Calcul pratique des coefficients de relaxation

Nous calculons un triplet  $(a, b, c)_{i+1/2}$  de coefficients de relaxation par arête. Nous indiquons par **L** et **R** les états gauche et droit. Rappelons que, ici, le coefficient de relaxation  $b$  n'a rien à voir avec celui que nous avons calculé dans le premier Lemme (G.3.1) et qui concernait le système gaz-liquide isotherme. Nous considérons ici à nouveau le système gaz-liquide non isotherme. On commence par calculer les paramètres  $B$  à gauche et à droite en utilisant la définition

$$B(\mathbf{u}) = \sigma_Y^2(\mathbf{u}). \quad (\text{G.58})$$

On en déduit  $b_{i+1/2}$  par

$$b_{i+1/2} = \sqrt{\max(B_{\mathbf{L}}, B_{\mathbf{R}})}. \quad (\text{G.59})$$

Puis on calcule les paramètres  $A, C, J, L$  et  $\delta, \gamma$  à gauche et à droite en utilisant les définitions

$$A(\mathbf{u}) = -P_\tau + P_v^2 + P_e G_v, \quad J(\mathbf{u}) = -P_e(P_v + G_e), \quad (\text{G.60})$$

$$C(\mathbf{u}) = P_e \overline{G}_v + G_e \overline{G}_e, \quad L(\mathbf{u}) = \overline{G}_\tau - P_v \overline{G}_v - G_v \overline{G}_e, \quad (\text{G.61})$$

$$\delta(\mathbf{u}) = \left( \sqrt{2} - 1 \right) \sqrt{|J(\mathbf{u})|}. \quad (\text{G.62})$$

Nous pouvons alors calculer les solutions  $\widehat{c}_{\mathbf{L}}$  et  $\widehat{c}_{\mathbf{R}}$  des systèmes (G.56) définis à gauche et à droite. Puis, nous calculons  $\widehat{c}_{i+1/2}$  et  $\widehat{a}_{i+1/2}$  :

$$\widehat{c}_{i+1/2} = \max(\widehat{c}_{\mathbf{L}}, \widehat{c}_{\mathbf{R}}), \quad (\text{G.63})$$

$$\gamma_{i+1/2} = \max(|J(v \widehat{c}_{\mathbf{L}} + L)|, |J(v \widehat{c}_{\mathbf{R}} + L)|), \quad (\text{G.64})$$

$$\widehat{a}_{i+1/2} = \left( \sqrt{2} + 1 \right) \sqrt{\gamma_{i+1/2}}. \quad (\text{G.65})$$

Enfin, nous en déduisons  $a_{i+1/2}$  et  $c_{i+1/2}$  par :

$$a_{i+1/2} = \sqrt{\widehat{a}_{i+1/2} + \max(A_{\mathbf{L}} - J_{\mathbf{L}} v_{\mathbf{L}}, A_{\mathbf{R}} - J_{\mathbf{R}} v_{\mathbf{R}})} \quad (\text{G.66})$$

$$c_{i+1/2} = \sqrt{\widehat{c}_{i+1/2} + \max(C_{\mathbf{L}}, C_{\mathbf{R}})}. \quad (\text{G.67})$$

**Remarque G.3.4** *Nous allons voir par la suite que les valeurs propres du système sont  $v \pm ar$  (ondes acoustiques, rapides) et  $v, v \pm b\tau, v \pm c\tau$  (ondes de transport de masse, lentes), c'est à dire 7 ondes au total.*

*Nous aurions pu faire le choix de prendre un coefficient de relaxation  $\tilde{b}$  modifié et égal au maximum de  $b$  et  $c$ . L'avantage aurait été une simplification du calcul de la solution du problème de Riemann (il n'y aurait plus eu que 5 ondes). La conséquence aurait été de ne pas distinguer les cas  $b > c$  et  $c > b$ , générant ainsi deux fois moins de lignes de codes lors de l'implémentation (et donc deux fois moins de bugs ...). L'inconvénient aurait consisté en une diffusion numérique plus importante. Au vu des égalités (G.58–G.67), il n'y a pas de raison pour que  $b$  et  $c$  aient des valeurs proches : tout dépend de fonctions non-linéaires complexes et délicates à estimer a priori. C'est l'expérience numérique qui tranchera et permettra éventuellement d'appliquer cette simplification sans augmenter trop la diffusion numérique.*

*En attendant ces tests, nous conservons la version la moins diffusive.*

### G.3.3 Éléments propres

Considérons le système relaxé en coordonnées Lagrangiennes :

$$\begin{cases} \partial_t \tau - \partial_y v & = 0, \\ \partial_t v + \partial_y \Pi & = 0, \\ \partial_t \Pi + a^2 \partial_y v & = \lambda (P - \Pi), \\ \partial_t e + \partial_y (\Pi v + \overline{\mathbb{G}}) & = 0, \\ \partial_t \overline{\mathbb{G}} + c^2 \partial_y e & = \lambda (\overline{G} - \overline{\mathbb{G}}), \\ \partial_t Y - \partial_y \Sigma & = 0, \\ \partial_t \Sigma - b^2 \partial_y Y & = \lambda (\sigma - \Sigma). \end{cases} \quad (\text{G.68})$$

Les éléments caractéristiques du système sont données dans les figures (G.4) et (G.5). Les valeurs propres du système en coordonnées Lagrangiennes étant constantes, **tous les champs du système relaxé en coordonnées Eulériennes sont linéairement dégénérés.**



Matrice Jacobienne :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Pi & 0 & v & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Valeurs Propres :

$$-a, -b, -c, 0, c, b, a$$

Vecteurs propres à droite :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a \\ -\frac{a^2}{a^2-c^2}(\Pi - va) & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{a^2}{a^2-c^2}(\Pi + va) \\ -a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a^2 \\ c^2 \frac{a^2}{a^2-c^2}(\Pi - va) & 0 & -c & 0 & c & 0 & c^2 \frac{a^2}{a^2-c^2}(\Pi + va) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & -b & 0 \end{pmatrix}$$

Vecteurs propres à gauche :

$$L = 1/2 \begin{pmatrix} 0 & a^{-1} & 0 & a^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b^{-1} \\ 0 & -\frac{\Pi c - va^2}{c^2 - a^2} & 1 & \frac{\pi - vc}{c^2 - a^2} & -c^{-1} & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2a^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Pi c + va^2}{c^2 - a^2} & 1 & \frac{\pi + vc}{c^2 - a^2} & c^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -b^{-1} \\ 0 & -a^{-1} & 0 & -a^{-2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

FIG. G.4 – Éléments caractéristiques de la méthode “ $\Pi v$ ” diphasique en coordonnées Lagrangiennes

Matrice Jacobienne :

$$\nabla \mathcal{G}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -v^2 - \Pi\tau & 2v & \tau & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(\Pi + a^2\tau)v & \Pi + a^2\tau & v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -ev - 2v\Pi\tau - \bar{\mathbb{G}}\tau & e + \Pi\tau & v\tau & v & \tau & 0 & 0 \\ \bar{\mathbb{G}}v - c^2e\tau & \bar{\mathbb{G}} & 0 & c^2\tau & v & 0 & 0 \\ -Yv + \Sigma\tau & Y & 0 & 0 & 0 & v & -\tau \\ -\Sigma v + b^2Y\tau & \Sigma & 0 & 0 & 0 & -b^2\tau & v \end{pmatrix}$$

Valeurs Propres :

$$v - a\tau, v - b\tau, v - c\tau, v, v + c\tau, v + b\tau, v + a\tau$$

Vecteurs propres à droite :

$$R(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ v - a\tau & 0 & 0 & v & 0 & 0 & v + a\tau \\ \Pi + a^2\tau & 0 & 0 & \Pi & 0 & 0 & \Pi + a^2\tau \\ e + \frac{a^2\tau}{a^2 - c^2} (\Pi - av) & 0 & 1 & e & 1 & 0 & e + \frac{a^2\tau}{a^2 - c^2} (\Pi + av) \\ \bar{\mathbb{G}} - \frac{ac^2\tau}{a^2 - c^2} (\Pi - av) & 0 & -c & \bar{\mathbb{G}} & c & 0 & \bar{\mathbb{G}} + \frac{ac^2\tau}{a^2 - c^2} (\Pi + av) \\ Y & 1 & 0 & Y & 0 & 1 & Y \\ \Sigma & b & 0 & \Sigma & 0 & -b & \Sigma \end{pmatrix}$$

FIG. G.5 – Éléments caractéristiques de la méthode “ $\Pi v$ ” diphasique en coordonnées Eulériennes

Nous montrons dans ce paragraphe comment calculer la matrice  $\tilde{A}(\mathbf{v})$  définie de la façon suivante. Notons  $A(\mathbf{v}) = \nabla \mathcal{G}(\mathbf{v})$  la Jacobienne du système de relaxation. Ses valeurs propres sont

$$\Lambda(\mathbf{v}) = \text{Diag}(v - a\tau, v - b\tau, v - c\tau, v, v + c\tau, v + b\tau, v + a\tau)$$

et vérifient  $A(\mathbf{v}) = R(\mathbf{v})\Lambda(\mathbf{v})L(\mathbf{v})$  avec  $R(\mathbf{v})$  la matrice des vecteurs propres et  $L(\mathbf{v}) = R^{-1}(\mathbf{v})$ . On note

$$\tilde{\Lambda}(\mathbf{v}) = \text{Diag}\left(v - a\tau, \underbrace{0, \dots, 0}_5, v + a\tau\right)$$

et  $\tilde{A}(\mathbf{v}) = R(\mathbf{v})\tilde{\Lambda}(\mathbf{v})L(\mathbf{v})$ . Notons

$$\mathcal{I} = \Pi + a^2 \tau, \quad d = \frac{1}{a^2 \tau} \quad (\text{G.69})$$

Les colonnes de la matrice  $\tilde{A}(\mathbf{v}) = R\tilde{\Lambda}L = \{\tilde{A}_j\}_{j=1,7}$  sont les suivantes. Les colonnes 4 à 7 sont nulles, i.e.,  $\tilde{A}_j = 0$  pour  $j = 4, 7$ . Les 3 premières colonnes valent respectivement

$$\tilde{A}_1(\mathbf{v}) = d \begin{pmatrix} -\mathcal{I}v \\ -2v^2 a^2 \tau - \Pi(v^2 + a^2 \tau^2) \\ -\mathcal{I}^2 v \\ -\left[e\mathcal{I} + \frac{a^2 \tau}{a^2 - c^2} (\Pi^2 + a^2 v^2 + 2a^2 \tau \Pi)\right] v \\ -\overline{\mathbb{G}}\mathcal{I}v - \frac{a^2 c^2 \tau}{a^2 - c^2} (\tau \Pi^2 + \tau a^2 v^2 + 2v^2 \Pi) \\ -Y\mathcal{I}v \\ -\Sigma\mathcal{I}v \end{pmatrix}, \quad (\text{G.70})$$

$$\tilde{A}_2(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2v \\ \mathcal{I} \\ e + \frac{a^2}{a^2 - c^2} (\Pi\tau + v^2) \\ \overline{\mathbb{G}} + \frac{c^2 v}{a^2 - c^2} \mathcal{I} \\ Y \\ \Sigma \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_3(\mathbf{v}) = d \begin{pmatrix} v \\ v^2 + a^2 \tau^2 \\ \mathcal{I}v \\ (e + a^2 \tau \mathcal{I})v \\ \overline{\mathbb{G}}v + \frac{a^2 c^2 \tau}{a^2 - c^2} (\Pi\tau + v^2) \\ Yv \\ \Sigma v \end{pmatrix}.$$

FIG. G.6 – Détail de la matrice Jacobienne modifiée

### G.3.4 Calcul des invariants forts

Il est tout d'abord nécessaire de calculer les invariants forts du système en coordonnées Lagrangiennes. On vérifie facilement que :

$$\partial_t (\Pi + a^2 \tau) = 0, \quad (\text{G.71})$$

$$\partial_t (\Pi + av) + a \partial_y (\Pi + av) = 0, \quad \partial_t (\Pi - av) - a \partial_y (\Pi - av) = 0, \quad (\text{G.72})$$

$$\partial_t (\Sigma + bY) - b \partial_y (\Sigma + bY) = 0, \quad \partial_t (\Sigma - bY) + b \partial_y (\Sigma - bY) = 0. \quad (\text{G.73})$$

Pour trouver les deux invariants forts manquants, c'est à dire ceux se propageant aux vitesses  $\pm c$ , il est nécessaire d'utiliser une technique plus "canonique" car, comme on va le voir, ces invariants sont d'expression plus complexe. On considère le système en coordonnées Lagrangiennes  $\partial_t \mathbf{z} + A(\mathbf{z}) \partial_y \mathbf{z} = 0$ . Soit donc  $\ell(\mathbf{z})$  un vecteur propre à gauche de la matrice jacobienne  $A(\mathbf{z})$  pour la valeur propre  $\lambda(\mathbf{z})$ . En multipliant le système de lois de conservation précédent par  $\ell$  à gauche, on trouve :

$$\ell \partial_t \mathbf{z} + \lambda \ell \partial_y \mathbf{z} = 0. \quad (\text{G.74})$$

Il est alors facile de vérifier que  $\Psi$  est un invariant fort pour  $\lambda$ , c'est à dire satisfait l'égalité  $\partial_t \Psi + \lambda \partial_y \Psi = 0$ , si et seulement si :

$$d\Psi = \ell_1 d\mathbf{z}_1 + \dots + \ell_N d\mathbf{z}_N \quad (\text{G.75})$$

où  $N$  est le nombre d'équations de conservation. En d'autre termes,  $\Psi$  est une forme intégrale.

Pour  $\lambda = c$ , en multipliant le vecteur propre associé par  $2c(c^2 - a^2)$ , nous trouvons :

$$d\Psi^{+c} = c(\Pi c + va^2) dv + c(\Pi + vc) d\Pi + (c^2 - a^2)(d\overline{\mathbb{G}} + c de) \quad (\text{G.76})$$

Il est alors facile de vérifier que :

$$\Psi^{+c} = c\mathbf{Q} + c^2 \Pi v + (c^2 - a^2)(\overline{\mathbb{G}} + ce), \quad (\text{G.77})$$

$$\mathbf{Q} = a^2 \frac{v^2}{2} + \frac{\Pi^2}{2}. \quad (\text{G.78})$$

On vérifie de la même façon que :

$$\Psi^{-c} = c\mathbf{Q} - c^2 \Pi v + (a^2 - c^2)(\overline{\mathbb{G}} - ce). \quad (\text{G.79})$$

Ces deux invariants satisfont alors les deux équations de transport :

$$\partial_t \Psi^{+c} + c \partial_y \Psi^{+c} = 0, \quad \partial_t \Psi^{-c} - c \partial_y \Psi^{-c} = 0. \quad (\text{G.80})$$

**Remarque G.3.5** *Le terme  $\mathbf{Q}$  apparaissait déjà dans la méthode de relaxation "Pv" pour la dynamique des gaz.*

*Le terme  $(\overline{\mathbb{G}} \pm ce)$  est, lui, tout à fait caractéristique du sous-système en  $(e, \overline{\mathbb{G}})$ .*

### G.3.5 Solution du problème de Riemann

Considérons l'état initial

$$\mathbf{v}_0(x) = \begin{cases} \mathbf{v}_L & \text{si } x < 0, \\ \mathbf{v}_R & \text{si } x > 0, \end{cases} \quad (\text{G.81})$$

$\mathbf{v}_L$  et  $\mathbf{v}_R$  étant des états constants. Notons que  $\mathbf{v}_L$  et  $\mathbf{v}_R$  sont à l'équilibre :  $\Pi_\alpha = P(\mathbf{u}_\alpha)$ ,  $\Sigma_\alpha = \sigma(\mathbf{u}_\alpha)$  et  $\overline{\mathbb{G}}_\alpha = \overline{\mathbb{G}}(\mathbf{u}_\alpha)$  pour  $\alpha = L, R$ .

La solution du problème de Riemann sans terme source est constitué a priori de 8 états constants, à savoir

$$\mathbf{v}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{v}_L & \text{si } x < \mu_1 t, \\ \mathbf{v}_i & \text{si } \mu_i t < x < \mu_{i+1} t, \quad i = 1, 6, \\ \mathbf{v}_R & \text{si } \mu_7 t < x, \end{cases} \quad (\text{G.82})$$

où  $\{\mu_i\}_{i=1,7}$  seront précisés plus tard. On suppose dans la suite que  $a \gg b, c$ . Posons

$$\begin{aligned} \tau_L^* &= \tau_L + \frac{\Pi_L - \Pi^*}{a^2}, & \tau_R^* &= \tau_R + \frac{\Pi_R - \Pi^*}{a^2}, \\ v^* &= \bar{v} + \frac{1}{a} \langle \Pi \rangle, & \Pi^* &= \bar{\Pi} + a \langle v \rangle, \\ Y^* &= \bar{Y} + \frac{1}{b} \langle \Sigma \rangle, & \Sigma^* &= \bar{\Sigma} - b \langle Y \rangle, \\ e^* &= \bar{e} + \frac{1}{c} \langle \overline{\mathbb{G}} \rangle + \frac{\langle \mathbf{Q} \rangle}{c^2 - a^2} + \frac{c}{c^2 - a^2} (\bar{\Pi} v - \Pi^* v^*), & \overline{\mathbb{G}}^* &= \overline{\mathbb{G}}_L^* - c(e^* - e_L^*), \\ e_L^* &= e_L + \frac{a}{a^2 - c^2} (\Pi_L v_L - \Pi^* v^*), & \overline{\mathbb{G}}_L^* &= \overline{\mathbb{G}}_L - \frac{c^2}{a^2 - c^2} (\Pi_L v_L - \Pi^* v^*), \\ e_R^* &= e_R + \frac{a}{a^2 - c^2} (\Pi^* v^* - \Pi_R v_R), & \overline{\mathbb{G}}_R^* &= \overline{\mathbb{G}}_R - \frac{c^2}{a^2 - c^2} (\Pi^* v^* - \Pi_R v_R). \end{aligned} \quad (\text{G.83})$$

Si  $b > c$ , les valeurs propres  $\{\mu_i\}_{i=1,7}$  sont :

$$v_L - a\tau_L < v^* - b\tau_L^* < v^* - c\tau_L^* < v^* < v^* + c\tau_R^* < v^* + b\tau_R^* < v_R + a\tau_R^* \quad (\text{G.84})$$

et les états intermédiaires  $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1,6}$  sont :

$$\begin{pmatrix} \rho_L^* \\ \rho_L^* v^* \\ \rho_L^* \Pi^* \\ \rho_L^* e_L^* \\ \rho_L^* \overline{\mathbb{G}}_L^* \\ \rho_L^* Y_L \\ \rho_L^* \Sigma_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho_L^* \\ \rho_L^* v^* \\ \rho_L^* \Pi^* \\ \rho_L^* e_L^* \\ \rho_L^* \overline{\mathbb{G}}_L^* \\ \rho_L^* Y^* \\ \rho_L^* \Sigma^* \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho_L^* \\ \rho_L^* v^* \\ \rho_L^* \Pi^* \\ \rho_L^* e^* \\ \rho_L^* \overline{\mathbb{G}}^* \\ \rho_L^* Y^* \\ \rho_L^* \Sigma^* \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho_R^* \\ \rho_R^* v^* \\ \rho_R^* \Pi^* \\ \rho_R^* e^* \\ \rho_R^* \overline{\mathbb{G}}^* \\ \rho_R^* Y^* \\ \rho_R^* \Sigma^* \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho_R^* \\ \rho_R^* v^* \\ \rho_R^* \Pi^* \\ \rho_R^* e_R^* \\ \rho_R^* \overline{\mathbb{G}}_R^* \\ \rho_R^* Y^* \\ \rho_R^* \Sigma^* \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho_R^* \\ \rho_R^* v^* \\ \rho_R^* \Pi^* \\ \rho_R^* e_R^* \\ \rho_R^* \overline{\mathbb{G}}_R^* \\ \rho_R^* Y_R \\ \rho_R^* \Sigma_R \end{pmatrix}. \quad (\text{G.85})$$

Si  $c > b$ , les valeurs propres  $\{\mu_i\}_{i=1,7}$  sont :

$$v_L - a\tau_L < v^* - c\tau_L^* < v^* - b\tau_L^* < v^* < v^* + b\tau_R^* < v^* + c\tau_R^* < v_R + a\tau_R^* \quad (\text{G.86})$$

et les états intermédiaires  $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1,6}$  sont :

$$\begin{pmatrix} \rho_L^* \\ \rho_L^* v^* \\ \rho_L^* \Pi^* \\ \rho_L^* e_L^* \\ \rho_L^* \overline{\mathbb{G}}_L^* \\ \rho_L^* Y_L \\ \rho_L^* \Sigma_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho_L^* \\ \rho_L^* v^* \\ \rho_L^* \Pi^* \\ \rho_L^* e^* \\ \rho_L^* \overline{\mathbb{G}}^* \\ \rho_L^* Y^* \\ \rho_L^* \Sigma^* \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho_L^* \\ \rho_L^* v^* \\ \rho_L^* \Pi^* \\ \rho_L^* e^* \\ \rho_L^* \overline{\mathbb{G}}^* \\ \rho_L^* Y^* \\ \rho_L^* \Sigma^* \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho_R^* \\ \rho_R^* v^* \\ \rho_R^* \Pi^* \\ \rho_R^* e^* \\ \rho_R^* \overline{\mathbb{G}}^* \\ \rho_R^* Y^* \\ \rho_R^* \Sigma^* \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho_R^* \\ \rho_R^* v^* \\ \rho_R^* \Pi^* \\ \rho_R^* e^* \\ \rho_R^* \overline{\mathbb{G}}^* \\ \rho_R^* Y^* \\ \rho_R^* \Sigma^* \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \rho_R^* \\ \rho_R^* v^* \\ \rho_R^* \Pi^* \\ \rho_R^* e_R^* \\ \rho_R^* \overline{\mathbb{G}}_R^* \\ \rho_R^* Y_R \\ \rho_R^* \Sigma_R \end{pmatrix}. \quad (\text{G.87})$$

**G.3.5.0.1 Détail des calculs** Nous donnons dans ce paragraphe les détails de calcul concernant les états intermédiaires donnés dans (G.83). Le lecteur peut constater que ces formules sont particulières et obligent à introduire des calculs plus complexes qu'auparavant.

Il est clair que ces états intermédiaires doivent se simplifier en monophasique gaz pour retrouver les états intervenant dans la méthode de relaxation de la dynamique des gaz. Dans ce dernier cas, la solution du problème de Riemann fait apparaître les grandeurs  $e_L^*$  et  $e_R^*$ .

Dans notre cas, les états intermédiaires s'obtiennent grâce aux développements suivants. En coordonnées Lagrangiennes, à travers n'importe quelle onde de vitesse  $s$ , la formule de Rankine-Hugoniot donne les égalités

$$\Delta(c^2 e) = s \Delta \overline{\mathbb{G}}, \quad \Delta(\Pi v + \overline{\mathbb{G}}) = s \Delta e, \quad (\text{G.88})$$

où, pour toute grandeur  $\varphi$ , on note  $\Delta\varphi = \varphi_{\mathbf{L}} - \varphi_{\mathbf{R}}$ . Il vient alors

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta e = 0, \quad \Delta \overline{\mathbb{G}} = 0, & \text{si } s = 0 \text{ ou } s = \pm b, \\ \Delta \overline{\mathbb{G}} = s \Delta e, & \text{si } s = \pm c, \\ \Delta e = \frac{s}{s^2 - c^2} \Delta(\Pi v), \quad \Delta \overline{\mathbb{G}} = \frac{c^2}{s^2 - c^2} \Delta(\Pi v), & \text{si } s = \pm a. \end{array} \right. \quad (\text{G.89})$$

En appliquant ces égalités pour calculer les sauts à travers les ondes de vitesse  $s = \pm a$ , nous pouvons calculer  $(e_{\mathbf{L}}^*, \overline{\mathbb{G}}_{\mathbf{L}}^*)$  et  $(e_{\mathbf{R}}^*, \overline{\mathbb{G}}_{\mathbf{R}}^*)$ .

Par ailleurs, les équations de transport des invariants forts (G.80) donnent les égalités

$$c \mathbf{Q}^* + c^2 \Pi^* v^* + (c^2 - a^2) (\overline{\mathbb{G}}^* + c e^*) = c \mathbf{Q}_{\mathbf{L}} + c^2 \Pi_{\mathbf{L}} v_{\mathbf{L}} + (c^2 - a^2) (\overline{\mathbb{G}}_{\mathbf{L}} + c e_{\mathbf{L}}), \quad (\text{G.90})$$

$$c \mathbf{Q}^* - c^2 \Pi^* v^* + (c^2 - a^2) (\overline{\mathbb{G}}^* - c e^*) = c \mathbf{Q}_{\mathbf{R}} - c^2 \Pi_{\mathbf{R}} v_{\mathbf{R}} + (c^2 - a^2) (\overline{\mathbb{G}}_{\mathbf{R}} - c e_{\mathbf{R}}). \quad (\text{G.91})$$

La demi-différence de ces deux égalités permet de calculer  $e^*$  comme indiqué dans (G.83). La deuxième égalité de (G.89) permet alors d'en déduire  $\overline{\mathbb{G}}^*$ .

### G.3.6 Interprétation du schéma comme une méthode de Roe

On considère le problème de Riemann du système de relaxation homogène ayant comme états gauche et droit  $\mathbf{v}_{\mathbf{L}} = \mathbf{v}_0$  et  $\mathbf{v}_{\mathbf{R}} = \mathbf{v}_7$  et comme valeurs propres  $\{\mu_j\}_{j=1,7}$ . L'interprétation du schéma comme une méthode de Roe est fondée sur une décomposition en éléments caractéristiques.

**Lemme G.3.6** *Si  $b > c$ , soit les facteurs de normalisation*

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \rho_{\mathbf{L}}^* - \rho_{\mathbf{L}}, & \delta_2 &= \rho_{\mathbf{L}}^*(Y^* - Y_{\mathbf{L}}), & \delta_3 &= \rho_{\mathbf{L}}^*(e^* - e_{\mathbf{L}}^*), \\ \delta_4 &= \rho_{\mathbf{R}}^* - \rho_{\mathbf{L}}^*, & \delta_5 &= \rho_{\mathbf{R}}^*(e_{\mathbf{R}}^* - e^*), & \delta_6 &= \rho_{\mathbf{R}}^*(Y_{\mathbf{R}} - Y^*), \\ \delta_7 &= \rho_{\mathbf{R}} - \rho_{\mathbf{R}}^*, \end{aligned} \quad (\text{G.92})$$

et soit la matrice des vecteurs propres à droite  $R(\mathbf{v}_{\mathbf{L}}, \mathbf{v}_{\mathbf{R}}) = \{r_j\}_{j=1,7}$  définie par

$$R(\mathbf{v}_{\mathbf{L}}, \mathbf{v}_{\mathbf{R}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ v_{\mathbf{L}} - a\tau_{\mathbf{L}} & 0 & 0 & v^* & 0 & 0 & v_{\mathbf{R}} + a\tau_{\mathbf{R}} \\ \Pi_{\mathbf{L}} + a^2\tau_{\mathbf{L}} & 0 & 0 & \Pi^* & 0 & 0 & \Pi_{\mathbf{R}} + a^2\tau_{\mathbf{R}} \\ e_{\mathbf{L}} + \frac{a^2\tau_{\mathbf{L}}}{a^2 - c^2} (\Pi_{\mathbf{L}} - a v^*) & 0 & 1 & e^* & 1 & 0 & e_{\mathbf{R}} + \frac{a^2\tau_{\mathbf{R}}}{a^2 - c^2} (\Pi_{\mathbf{R}} + a v^*) \\ \overline{\mathbb{G}}_{\mathbf{L}} - \frac{ac^2\tau_{\mathbf{L}}}{a^2 - c^2} (\Pi_{\mathbf{L}} - a v^*) & 0 & -c & \overline{\mathbb{G}}^* & c & 0 & \overline{\mathbb{G}}_{\mathbf{R}} + \frac{ac^2\tau_{\mathbf{R}}}{a^2 - c^2} (\Pi_{\mathbf{R}} + a v^*) \\ Y_{\mathbf{L}} & 1 & 0 & Y^* & 0 & 1 & Y_{\mathbf{R}} \\ \Sigma_{\mathbf{L}} & b & 0 & \Sigma^* & 0 & -b & \Sigma_{\mathbf{R}} \end{pmatrix}. \quad (\text{G.93})$$

Si  $c > b$ , soit les facteurs de normalisation

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \rho_{\mathbf{L}}^* - \rho_{\mathbf{L}}, & \delta_2 &= \rho_{\mathbf{L}}^*(e^* - e_{\mathbf{L}}^*), & \delta_3 &= \rho_{\mathbf{L}}^*(Y^* - Y_{\mathbf{L}}), \\ \delta_4 &= \rho_{\mathbf{R}}^* - \rho_{\mathbf{L}}^*, & \delta_5 &= \rho_{\mathbf{R}}^*(Y_{\mathbf{R}} - Y^*), & \delta_6 &= \rho_{\mathbf{R}}^*(e_{\mathbf{R}}^* - e^*), \\ \delta_7 &= \rho_{\mathbf{R}} - \rho_{\mathbf{R}}^*, \end{aligned} \quad (\text{G.94})$$

et soit la matrice des vecteurs propres à droite  $R(\mathbf{v}_{\mathbf{L}}, \mathbf{v}_{\mathbf{R}}) = \{r_j\}_{j=1,7}$  définie par

$$R(\mathbf{v}_{\mathbf{L}}, \mathbf{v}_{\mathbf{R}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ v_{\mathbf{L}} - a\tau_{\mathbf{L}} & 0 & 0 & v^* & 0 & 0 & v_{\mathbf{R}} + a\tau_{\mathbf{R}} \\ \Pi_{\mathbf{L}} + a^2\tau_{\mathbf{L}} & 0 & 0 & \Pi^* & 0 & 0 & \Pi_{\mathbf{R}} + a^2\tau_{\mathbf{R}} \\ e_{\mathbf{L}} + \frac{a^2\tau_{\mathbf{L}}}{a^2-c^2}(\Pi_{\mathbf{L}} - av^*) & 1 & 0 & e^* & 0 & 1 & e_{\mathbf{R}} + \frac{a^2\tau_{\mathbf{R}}}{a^2-c^2}(\Pi_{\mathbf{R}} + av^*) \\ \overline{\mathbb{G}}_{\mathbf{L}} - \frac{ac^2\tau_{\mathbf{L}}}{a^2-c^2}(\Pi_{\mathbf{L}} - av^*) & -c & 0 & \overline{\mathbb{G}}^* & 0 & c & \overline{\mathbb{G}}_{\mathbf{R}} + \frac{ac^2\tau_{\mathbf{R}}}{a^2-c^2}(\Pi_{\mathbf{R}} + av^*) \\ Y_{\mathbf{L}} & 0 & 1 & Y^* & 1 & 0 & Y_{\mathbf{R}} \\ \Sigma_{\mathbf{L}} & 0 & b & \Sigma^* & -b & 0 & \Sigma_{\mathbf{R}} \end{pmatrix}. \quad (\text{G.95})$$

Alors, les différences entre deux états consécutifs de la solution du problème de Riemann peuvent s'écrire

$$\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_{j-1} = \delta_j r_j, \quad j = 1, 7. \quad (\text{G.96})$$

PREUVE L'idée principale de la preuve est d'utiliser la formule de Rankine-Hugoniot ainsi que la conservation d'invariants de Riemann bien choisis. Une partie de la démonstration découle très naturellement des calculs déjà introduits dans le cas non-compositionnel. Nous détaillons ici certains calculs relatifs à l'équation d'énergie. Les propriétés du sous-système en  $(\rho, \rho v, \rho \Pi)^T$  permettent de démontrer que

$$\Pi_{\mathbf{L}} v_{\mathbf{L}} - \Pi^* v^* = (\Pi_{\mathbf{L}} - av^*)(\tau_{\mathbf{L}} - \tau_{\mathbf{L}}^*) a, \quad (\text{G.97})$$

$$\Pi^* v^* - \Pi_{\mathbf{R}} v_{\mathbf{R}} = (\Pi_{\mathbf{R}} + av^*)(\tau_{\mathbf{R}} - \tau_{\mathbf{R}}^*) a. \quad (\text{G.98})$$

Les deux dernières égalités ont déjà été démontrées dans le cas du système de la dynamique des gaz relaxé et ne seront pas re-démontrées ici. Elles permettent, d'après (G.83) d'écrire les états intermédiaires sous la forme

$$\begin{aligned} e_{\mathbf{L}}^* &= e_{\mathbf{L}} + \frac{a^2}{a^2-c^2}(\Pi_{\mathbf{L}} - av^*)(\tau_{\mathbf{L}} - \tau_{\mathbf{L}}^*), & \overline{\mathbb{G}}_{\mathbf{L}}^* &= \overline{\mathbb{G}}_{\mathbf{L}} - \frac{ac^2}{a^2-c^2}(\Pi_{\mathbf{L}} - av^*)(\tau_{\mathbf{L}} - \tau_{\mathbf{L}}^*), \\ e_{\mathbf{R}}^* &= e_{\mathbf{R}} + \frac{a^2}{a^2-c^2}(\Pi_{\mathbf{R}} + av^*)(\tau_{\mathbf{R}} - \tau_{\mathbf{R}}^*), & \overline{\mathbb{G}}_{\mathbf{R}}^* &= \overline{\mathbb{G}}_{\mathbf{R}} - \frac{ac^2}{a^2-c^2}(\Pi_{\mathbf{R}} + av^*)(\tau_{\mathbf{R}} - \tau_{\mathbf{R}}^*). \end{aligned} \quad (\text{G.99})$$

Grâce à ces égalités, il est facile de calculer les 4-ième et 5-ième composantes des vecteurs  $r_1$  et  $r_7$ . Enfin, l'égalité  $\overline{\mathbb{G}}^* = \overline{\mathbb{G}}_{\mathbf{L}}^* - c(e^* - e_{\mathbf{L}}^*)$ , obtenue par application de la relation de Rankine-Hugoniot à travers l'onde de vitesse  $-c$ , permet de déterminer les 4-ième et 5-ième composantes des vecteurs  $r_3$  si  $b > c$  et  $r_2$  si  $c > b$ . De même, l'égalité  $\overline{\mathbb{G}}^* = \overline{\mathbb{G}}_{\mathbf{R}}^* + c(e^* - e_{\mathbf{R}}^*)$  permet de déterminer les 4-ième et 5-ième composantes des vecteurs  $r_5$  si  $b > c$  et  $r_6$  si  $c > b$ .  $\square$

Nous montrons dans ce paragraphe comment calculer la matrice définie par  $|\tilde{A}^{Roe}|(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R) = (R|\tilde{\Lambda}|L)(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$  avec  $|\tilde{\Lambda}| = \text{Diag}(|v_L - a\tau_L|, 0, \dots, 0, |v_R + a\tau_R|)$  et  $L = R^{-1}$ . La matrice  $R(\mathbf{v}_L, \mathbf{v}_R)$  est définie comme précédemment. Nous notons

$$\begin{aligned} \tilde{v}_L &= v_L - a\tau_L, & \tilde{v}_R &= v_R + a\tau_R, \\ \mathcal{I}_L &= \Pi_L + a^2\tau_L, & \mathcal{I}_R &= \Pi_R + a^2\tau_R, \\ \tilde{e}_L &= e_L + \frac{a^2\tau_L}{a^2-c^2}(\Pi_L - av^*), & \tilde{e}_R &= e_R + \frac{a^2\tau_R}{a^2-c^2}(\Pi_R + av^*), \\ \tilde{\mathbb{G}}_L &= \overline{\mathbb{G}}_L - \frac{ac^2\tau_L}{a^2-c^2}(\Pi_L - av^*), & \tilde{\mathbb{G}}_R &= \overline{\mathbb{G}}_R + \frac{ac^2\tau_R}{a^2-c^2}(\Pi_R + av^*), \end{aligned} \quad (\text{G.100})$$

ainsi que

$$d = 1/[-v^*(\mathcal{I}_R - \mathcal{I}_L) - \tilde{v}_L(\Pi^* - \mathcal{I}_R) - \tilde{v}_R(\mathcal{I}_L - \Pi^*)]. \quad (\text{G.101})$$

Soient

$$\mathbf{p}_L = d|\tilde{v}_L| \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{v}_L \\ \mathcal{I}_L \\ \tilde{e}_L \\ \tilde{\mathbb{G}}_L \\ Y_L \\ \Sigma_L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_R = d|\tilde{v}_R| \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{v}_R \\ \mathcal{I}_R \\ \tilde{e}_R \\ \tilde{\mathbb{G}}_R \\ Y_R \\ \Sigma_R \end{pmatrix}. \quad (\text{G.102})$$

Les colonnes de la matrice  $|\tilde{A}^{Roe}| = \left\{ |\tilde{A}_j^{Roe}| \right\}_{j=1,7}$  sont les suivantes.

1. La colonne 1 est donnée par  $|\tilde{A}_1^{Roe}| = \alpha \mathbf{p}_L + \beta \mathbf{p}_R$  avec  $\alpha = \Pi^* \tilde{v}_R - v^* \mathcal{I}_R$  et  $\beta = v^* \mathcal{I}_L - \Pi^* \tilde{v}_L$ .
2. La colonne 2 est donnée par  $|\tilde{A}_3^{Roe}| = \alpha \mathbf{p}_L + \beta \mathbf{p}_R$  avec  $\alpha = \mathcal{I}_R - \Pi^*$  et  $\beta = \Pi^* - \mathcal{I}_L$ .
3. La colonne 3 est donnée par  $|\tilde{A}_4^{Roe}| = \alpha \mathbf{p}_L + \beta \mathbf{p}_R$  avec  $\alpha = v^* - \tilde{v}_R$  et  $\beta = \tilde{v}_L - v^*$ .
4. Les colonnes suivantes sont nulles, i.e.,  $|\tilde{A}_j^{Roe}| = 0$  pour  $j = 4, 7$ .

FIG. G.7 – Détail de la matrice  $|\tilde{A}^{Roe}|$ .



## G.4 Conclusion

Nous avons présenté une méthode de relaxation pour le système diphasique avec équation d'énergie. Nous procédons par extension de la méthode qui s'est avérée efficace dans le cas monophasique.

L'analyse permet de constater que le système possède la bonne propriété (essentielle) de dégénérescence linéaire des champs caractéristiques. Nous avons présenté les calculs nécessaires à la mise en œuvre d'une méthode semi-implicite linéaire.

Par contre, on constate que les calculs deviennent, dans l'ensemble, plus complexes :

1. le calcul des invariants forts est plus compliqué et produit une solution du problème de Riemann plus complexe également,
2. le développement de Chapman-Enskog, permettant de calculer les coefficients de relaxation, est plus complexe que ceux vus auparavant. Nous disposons pourtant d'une méthode permettant d'obtenir ces coefficients.

Néanmoins, nous pensons que ce ne sont pas des obstacles à l'implémentation de la méthode. La validation de ces éléments théoriques par des résultats numériques n'a pas pu, faute de temps, être effectuée, pour l'instant.

# Bibliographie

- [1] R. ABGRALL, *How to prevent pressure oscillations in multicomponent flow calculations : a quasi conservative approach*, Journal of Computational Physics, (1996), pp. 150–160.
- [2] ANDERSON, BAI, BISCHOF, DEMMEL, DONGARRA, D. CROZ, GREENBAUM, HAMMARLING, MCKENNEY, OSTROUCHOV, ET SORENSSEN, *LAPACK User's Guide*, SIAM, 1995.
- [3] D. AREGBA-DRIOLLET ET R. NATALINI, *Convergence of relaxation schemes for conservation laws*, Appl. Anal., (1996), pp. 163–190.
- [4] M. BAUDIN, *Schémas de relaxation explicites et semi-implicites pour la simulation des écoulements diphasiques dans TACITE*, rapport IFP 56762, Institut Français du Pétrole, mai 2002.
- [5] M. BAUDIN, *Méthodes de relaxation pour la simulation des écoulements diphasiques dans les conduites pétrolières*, thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2003.
- [6] M. BAUDIN, C. BERTHON, F. COQUEL, R. MASSON, ET Q.-H. TRAN, *A relaxation method for two-phase flow models with hydrodynamic closure law*, en soumission, (2002).
- [7] M. BAUDIN, F. COQUEL, ET Q.-H. TRAN, *A semi-implicit relaxation scheme for modeling two-phase flow in a pipeline*, en préparation, (2002).
- [8] M. BAUDIN, F. DAUDE, ET Q.-H. TRAN, *Schémas de relaxation explicite pour l'équation d'énergie dans TACITE*, rapport IFP 56989, Institut Français du Pétrole, juin 2002.
- [9] M. BAUDIN, A. FORNEL, ET Q.-H. TRAN, *Quelques résultats avec la méthode de relaxation pour les écoulements diphasiques dans les conduites.*, rapport IFP xxxxx, Institut Français du Pétrole, juin 2003.
- [10] M. BAUDIN, Q.-H. TRAN, ET V. MARTIN, *Méthode de relaxation pour la simulation des écoulements diphasiques dans TACITE*, rapport IFP 56023, Institut Français du Pétrole, mai 2001.
- [11] S. BENZONI-GAVAGE, *Analyse Numérique des Modèles Hydrodynamiques d'Écoulements Diphasiques Instationnaires dans les Réseaux de Production Pétrolière*, thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 1991.
- [12] M. BORN ET L. INFELD, *Foundations of a new field theory*, Proc. Roy. Soc., (1934), pp. 425–451.
- [13] F. BOUCHUT, *Entropy satisfying flux vector splittings and kinetic bgk models*. Preprint, 2000.
- [14] V. BOUVIER, *Algorithmes de résolution compositionnelle dans TACITE*, rapport IFP 42485, Institut Français du Pétrole, novembre 1995.
- [15] C. CHALONS, *Bilans d'entropie discrets dans l'approximation numérique des chocs non classiques. Application aux équations de Navier-Stokes multi-pression 2D et à quelques systèmes visco-capillaires*, thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, novembre 2002.
- [16] G. CHEN, C. LEVERMORE, ET T. LIU, *Hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms and entropy*, Comm. Pure Appl. Math., (1995), pp. 787–830.

- 
- [17] I. CHOQUET ET F. COQUEL, *A relaxation principle for strong impact ionization in semiconductors*. Preprint.
- [18] F. COQUEL ET S. CORDIER, *Le centre d'été de mathématiques et de recherches avancées en calcul scientifique 1999*, Matapli, 62 (2000).
- [19] F. COQUEL, E. GODLEWSKI, A. IN, B. PERTHAME, ET P. RASCLE, *Some new godunov and relaxation methods for two-phase flows*, in Proceedings of and International conference on Godunov methods : Theory and Applications, E. Toro, ed., Kluwer Academic/Plenum Publishers, december 2001.
- [20] F. COQUEL ET B. PERTHAME, *Relaxation of energy and approximate riemann solvers for general pressures laws in fluid dynamics*, SIAM J. Numer. Math., 35 (1998), pp. 2223–2249.
- [21] S. DECARRE, *Ecoulements triphasiques liquide-liquide-gaz en conduite, modélisation des configurations gaz-liquide stratifié*, rapport IFP 54407, Institut Français du Pétrole, octobre 2000.
- [22] B. DESPRÉS, *Invariance properties of lagrangian systems of conservation laws, approximate riemann solvers and the entropy condition*. to appear in *Num. Math.*, 2002.
- [23] B. DESPRÉS, F. LAGOUTIÈRE, ET D. RAMOS, *Stability of a thermodynamically coherent multi-phase model*. Preprint, octobre 2002.
- [24] S. EVJE ET K. K. FJELDE, *Hybrid flux-splitting schemes for a two-phase flow model*, Journal of Computational Physics, 176 (2002), pp. 674–701.
- [25] I. FAILLE, *Schéma numérique pour le modèle NPW compositionnel*, rapport IFP 44753, Institut Français du Pétrole, juillet 1998.
- [26] I. FAILLE ET E. HEINTZÉ, *A rough finite volume scheme for modeling two phase flow in a pipeline*, Computers and Fluids, 28 (1999), pp. 213–241.
- [27] K.-K. FJELDE ET K.-H. KARLSEN, *A comparative study of some fully numerical shock-capturing schemes for simulating two-phase flow*. preprint.
- [28] —, *High-resolution hybrid primitive-conservative upwind schemes for the drift flux model*. preprint.
- [29] T. GALLOUËT, *Equations satisfaites par des limites de solution approchées*, in Congrès National d'Analyse Numérique, Biarritz, mai 2002.
- [30] T. GALLOUËT ET J.-M. MASELLA, *A rough godunov scheme*, in Compte Rendus à l'Académie des Sciences, Paris, 1996, p. 77.
- [31] E. GODLEWSKI ET P. RAVIART, *Numerical Approximation of Hyperbolic System of Conservation Laws*, vol. 118 of Applied Mathematical Sciences, Springer, New-York, 1996.
- [32] E. GODLEWSKI ET P.-A. RAVIART, *Hyperbolic systems of conservation laws*, Mathématiques et Applications, SMAI, Ellipses, 1991.
- [33] —, *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, Applied Mathematical Sciences, Springer, 1995.
- [34] E. HADJ-TAIEB ET T. LILI, *The numerical solution of the transient two-phase flow in rigid pipelines*, International Journal for Numerical methods in fluids, 29 (1999), pp. 501–514.
- [35] A. HARTEN, P. LAX, ET B. VAN LEER, *On upstream differencing and godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws*, SIAM Review, (1983), pp. 35–61.
- [36] A. IN, *Méthodes numériques pour les équations de la dynamique des gaz complexes et écoulements diphasiques*, thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 200x.
- [37] S. JIN ET M. SLEMROD, *Regularization of the Burnett equations for rapid granular flows via relaxation.*, Physica D, 150 (2001), pp. 207–218.

- [38] ———, *Regularization of the Burnett equations via relaxation.*, J. Stat. Phys., 103 (2001), pp. 1009–1033.
- [39] K.-H. KARLSEN, C. KLINGENBERG, ET N. H. RISEBRO, *Relaxation schemes for conservation laws with discontinuous coefficients.* preprint.
- [40] B. LARROUTUROU, *How to preserve the mass fractions positivity when computing compressible multi-components flows*, tech. report, INRIA, 1989.
- [41] B. LARROUTUROU, *How to preserve the mass fractions positivity when computing compressible multi-component flows*, J. Comp. Phys., 95 (1991), pp. 59–84.
- [42] B. LARROUTUROU, *Modélisation mathématique et numérique pour les sciences de l'ingénieur*, tech. report, Ecole polytechnique, 1994.
- [43] P. LAX, *Shock waves and entropy*, in Contributions to nonlinear functional analysis, Academic Press, New-York, 1971, pp. 603–634.
- [44] A. LERAT, *Difference method for hyperbolic problems with emphasis on space-centered approximations*, Lecture Series 1990-03, Computational Fluid Dynamics, (1990).
- [45] R. J. LEVEQUE, *Numerical methods for conservation laws*, Lectures in Mathematics, ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Berlin, (1992).
- [46] D. R. LIDE, *CRC Handbook of Chemistry and Physics*, vol. 81st Edition, CRC Press, 2000.
- [47] T. LIU, *Hyperbolic conservation laws with relaxation*, Comm. Math. Phys., (1987), pp. 153–175.
- [48] J.-M. MASELLA, *Quelques méthodes numériques pour les écoulements diphasiques bi-fluide en conduites pétrolières*, thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, mai 1997.
- [49] J.-M. MASELLA, I. FAILLE, ET T. GALLOUËT, *On an rough godunov scheme*, Int. J. Computational Fluid Dynamics, 12 (1999), pp. 133–149.
- [50] J.-M. MASELLA, Q.-H. TRAN, D. FERRE, ET C. PAUCHON, *Transient simulation of two phase flows in pipes*, International Journal of Multiphase Flow, 24 (1998), pp. 739–755.
- [51] R. M'BARKI, F. WILLIEN, ET M. GAINVILLE, *Modèle TACITE-NPW compositionnel*, rapport IFP 56598, Institut Français du Pétrole, février 2002.
- [52] R. NATALINI, *Convergence to equilibrium for the relaxation approximation of conservation laws*, Comm. Pure Appl. Math., (1996), pp. 1–30.
- [53] S. PATAULT ET Q.-H. TRAN, *Modèle et schéma numérique du code TACITE-NPW*, rapport IFP 42415, Institut Français du Pétrole, 1996.
- [54] C. PAUCHON, H. DHULÉSIA, G. BINH-CIRLOT, ET J. FABRE, *TACITE : a transient tool for multiphase pipeline and well simulation*, in SPE annual Technical Conference, New Orleans, 1994.
- [55] B. E. POLIN, J. M. PRAUSNITZ, ET J. P. O'CONNELL, *The properties of gases and liquids*, Mc Graw-Hill, 2001.
- [56] P. ROE, *Approximate riemann solver, parameter vectors and difference schemes*, J. Comp. Phys., (1981), pp. 357–372.
- [57] J. ROMATE, *An approximate riemann solver for a two-phase flow model with numerically given slip relation*, Comput. & Fluids, 18 (1998), pp. 455–477.
- [58] N. SEGUIN, *Modélisation et simulation numérique des écoulements diphasiques*, thèse de doctorat, Université de Provence, 2002.
- [59] D. SERRE, *Systèmes de lois de conservation I & II*, Diderot éditeur, 1996.

- 
- [60] I. SULICIU, *Energy estimates in rate-type thermo-viscoplasticity*, Int. J. Plast., (1998), pp. 227–244.
- [61] H. VIVIAND, *Etude de modèles d'écoulements diphasiques en approximation monodimensionnelle*, tech. report, Principia Recherche Développement S.A., mars 1997.
- [62] J. VOVELLE, *Convergence of finite volume scheme for conservation law on bounded domain*, Numerische Mathematik, 90 (2002), pp. 563–596.
- [63] D. H. WAGNER, *Equivalence of the euler and lagrangian equations of gas dynamics for weak solutions*, J. Diff. Equations, 68 (1987), pp. 118–136.
- [64] J. WHITHAM, *Linear and Nonlinear Waves*, New-York, 1974.
- [65] F. WILLIEN, *TACITE-NPW compositionnel et la loi de fermeture hydrodynamique zuber-findlay*, rapport IFP 45572, Institut Français du Pétrole, juin 1999.
- [66] ———, *Les modules d'équipements dans TACITE-NPW compositionnel*, rapport IFP 55669, Institut Français du Pétrole, décembre 2000.
- [67] ———, *Prise en compte de l'équation de l'énergie dans TACITE-NPW compositionnel*, rapport IFP 54050, Institut Français du Pétrole, mai 2000.
- [68] ———, *Extension du modèle TACITE-NPW compositionnel aux écoulement triphasiques*, rapport IFP 57420, Institut Français du Pétrole, mai 2003.
- [69] Z. XIN ET S. JIN, *The relaxation schemes for systems of conservation laws in arbitrary space dimensions*, Comm. Pure Appl. Math., 48 (1995), pp. 235–276.
- [70] E. ZAKARIAN, *Modélisation et analyse des instabilités d'écoulements diphasiques dans les conduites pétrolières du type pipeline-riser*, thèse de doctorat, Université Paris 13, mars 2000.
- [71] N. ZUBER ET J. FINDLAY, *Average volumetric concentration in two-phase flow systems*, J. Heat Transfer, C87 (1965), pp. 453–458.

# Index

- énergie, 236
- Abgrall
  - Rémi, 17
- ANRT, 33
- Berthon
  - Christophe, 17
- Born-Infeld, 33, 133, 189
- Chapman-Enskog, 31, 137, 164
- Chinnayya
  - Ashwin, 17
- CIFRE, 33
- compositionnel, 111
- compressible, 40, 118, 183
- conditions aux limites, 44
- conduite, 37, 39
- constituant, 111
- coordonnées
  - Lagrangiennes, 69
- Coquel, 32
  - Frédéric, 17
- découplage, 127
- Daude, 32
  - Frédéric, 17
- DFM, 25
  - Drift Flux Model, 25
- diamètre, 37
- diphasique, 37
- dispersé, 223
- eau, 225
- enthalpie, 236
- Euler, 28
- Evje, 40
- Fabrie
  - Pierre, 17
- Faille, 29
  - Isabelle, 17
- Fjelde, 40
- Fornel, 32
  - Alexandre, 17
- Fortran 90, 33
- Gallouët, 85, 107
  - Thierry, 17
- gaz
  - parfait, 40
- gaz-liquide, 37
  - système, 25
- glissement, 25, 40
  - co-vitesse (nul), 41
  - dispersé, 41, 223
  - intermittent, 41
  - Zuber-Findlay, 41, 209
  - Zuber-Findlay-IFP, 41, 223
- Godunov, 34, 164
- hydrodynamique, 25, 40
- hyperbolique, 44
- IFP
  - Institut Français du Pétrole, 25
- implicite linéaire
  - compositionnel, 142
- incompressible, 40, 118, 183
- isobare, 120, 165
- isotherme, 37
- Jin, 31
- Karlsen, 40
- Klingenberg, 40
- Larrouturou, 28, 129
- Lax-Friedrichs, 26
- Lerat, 26
- linéairement implicite, 26
- liquide

- 
- compressible, 40
  - incompressible, 40
  - loi
    - d'Antoine, 118
  - Masella, 29
  - Masson
    - Roland, 17
  - Matmeca, 32
  - monotone, 220
  - Newton, 29
  - NPW
    - No Pressure Wave, 29
  - OLGA, 29
  - Olga, 25
  - Osher, 28
  - Patault, 29
  - Perthame
    - Benoît, 17
  - polyphasique, 25
  - positivité, 138
    - des fractions massiques, 26
  - pression, 40
    - de bulle, 118
    - de rosée, 118
    - de saturation, 118
  - Riemann, 44, 107, 155, 164
  - Risebro, 40
  - Robodoc, 33
  - Roe, 28, 164
    - matrice, 142
  - Romate, 26
  - schéma
    - explicite, 47, 67
    - semi-implicite linéaire, 77
  - Seguin
    - Nicolas, 17
  - source, 43
  - Tacite, 25, 107, 164
    - Transient Analysis Code IFP Total Elf, 25
  - Tcl/Tk, 33
  - température, 236
  - TFM
    - Two-Fluid Model, 29
  - thermodynamique, 25, 40
    - compositionnel, 116
  - Tran, 29
    - Quang-Huy, 17
  - transition de phase, 125
  - triphase, 225
  - tronçon, 37, 39
  - valeurs propres, 26, 44
  - Van-Leer, 28
  - VFRoe, 26
  - VFRoe-Tacite, 26
  - vitesse
    - du son, 40
  - Vovelle, 85, 107
  - Whitham, 217
    - monotone, 220
  - Willien, 29
    - Françoise, 17
  - Xin, 31
  - Zuber-Findlay, 41, 209
  - Zuber-Findlay-IFP, 41, 223