



**HAL**  
open science

# Modélisation et Analyse des Instabilités d'Écoulements Diphasiques dans les Conduites Pétrolières du Type Pipeline-Riser

Erich Zacharian

► **To cite this version:**

Erich Zacharian. Modélisation et Analyse des Instabilités d'Écoulements Diphasiques dans les Conduites Pétrolières du Type Pipeline-Riser. Systèmes dynamiques [math.DS]. Université Paris 13, 2000. Français. NNT: . tel-01583930

**HAL Id: tel-01583930**

**<https://theses.hal.science/tel-01583930>**

Submitted on 8 Sep 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ PARIS 13  
Institut Galilée

**T H È S E**

pour obtenir le grade de  
**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 13**

**Discipline : Mathématiques**

présentée et soutenue publiquement

par

**Erich ZAKARIAN**

le 10 mars 2000

**Titre :**

**Modélisation et Analyse des Instabilités d'Écoulements  
Diphasiques dans les Conduites Pétrolières du Type  
Pipeline-riser**

**JURY**

Laurence Halpern	Président	Université Paris 13
Pascal Chossat	Directeur de thèse	CNRS
Mhamed Souli	Rapporteur	Université d'Artois
Pierre Rouchon	Rapporteur	ENSMP
Patrice Le Calvez	Examineur	Université Paris 13
Quang Huy Tran	Examineur	IFP



# Remerciements

Cette thèse conclut trois années de recherches personnelles dans les domaines de la modélisation et de l'analyse des écoulements diphasiques. Je remercie vivement l'Institut Français du Pétrole d'avoir financé l'ensemble de mes travaux en m'offrant un encadrement et des moyens irréprochables au sein de ses divisions Mécanique Appliquée et Informatique Scientifique - Mathématiques Appliquées. Cette expérience m'a donné le goût de la Recherche. Elle m'a aussi donné l'occasion de vivre une expérience inoubliable en effectuant mon Service National en tant que CSN-Chercheur dans le Département de Mathématiques de l'Université de Santa Cruz en Californie.

Professeur Pascal Chossat était mon directeur de thèse. Ses connaissances et son expérience ont très souvent répondu à mes interrogations de jeune chercheur. Je souhaite lui exprimer ici toute ma reconnaissance pour l'incalculable confiance qu'il a témoigné en mes travaux. J'espère aussi que notre prochaine coopération sur le développement des résultats exposés dans cette thèse sera aussi fructueuse que l'ont été ces trois dernières années de Recherche.

Messieurs Alain Bamberger et Christian Pauchon m'ont offert l'opportunité de réaliser une thèse passionnante au sein de leurs divisions. Ils n'ont jamais cessé d'exprimer leur confiance en mon travail. Qu'ils reçoivent ici toutes mon estime et mon admiration.

Professeurs Mhamed Souli et Pierre Rouchon ont accepté d'être les rapporteurs de ma thèse. Ce fut pour moi un honneur de leur présenter mes travaux. J'ai pour eux beaucoup d'estime et je souhaite que cette thèse soit le début d'une longue coopération scientifique.

Je remercie également Professeur Patrice Le Calvez d'avoir accepté d'être mon responsable de thèse pour l'Université Paris 13 et d'être membre de mon jury. Je tiens aussi à exprimer toute ma gratitude au Professeur Laurence Halpern dont les recommandations et les conseils m'ont toujours orienté dans le bon sens au cours de mes études supérieures. J'ai pour elle la plus grande estime.

Quang Huy Tran était mon responsable de thèse à l'IFP. Il a suivi mes travaux avec intérêt et n'a jamais hésité à m'assister dans la résolution de problèmes délicats d'analyse numérique ou de modélisation. Je tiens à souligner que c'est à lui que je dois la *méthode de troncature* exposée dans cette thèse ainsi qu'une ébauche de *loi régulière de glissement* dont je me suis fortement inspiré dans mes travaux.

Je tiens aussi à remercier Françoise Willien, Isabelle Faille et Henri Viviani pour la disponibilité et l'enthousiasme qu'ils ont témoigné au cours de mes réunions d'avancement de thèse. Leurs suggestions ont toujours aiguillé mes travaux dans la bonne direction. C'est en particulier à Henri Viviani que je dois la première modélisation simplifiée présentée dans cette thèse sur les écoulements diphasiques dans un système pipe-riser.

Eric Heintzé, Alain Stoessel et Roland Masson étaient mes responsables de projet au sein de l'IFP. Eux aussi n'ont jamais cessé d'exprimer un vif intérêt pour mes travaux et je les en

remercie.

Un grand merci à Sandrine Décarre, Véronique Henriot, Emmanuel Duret et tous les autres membres de l'équipe du logiciel TACITE. Ce fut pour moi un grand plaisir de travailler avec eux.

Je remercie également Claude Putot, mon très sympathique compagnon de bureau, Jacques Schmitt, à qui je dois un grand nombre des références bibliographiques citées dans cette thèse, Stéphanie, Emmanuel, Jean-Marie, Antoine et Damien, mes sympathiques compagnons de thèse à l'IFP, Jean Brac, mon super responsable informatique, Eric Flauraud et Xavier Bec, mes collègues de formation (et de travail), Florence Mège, ma formidable responsable de Coopération et tous mes autres collègues de l'Institut Français du Pétrole.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>ix</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xi</b>
<b>Nomenclature</b>	<b>xiii</b>
Lettres romanes . . . . .	xiii
Lettres grecques . . . . .	xiv
Indices inférieurs . . . . .	xiv
Indices supérieurs . . . . .	xv
<b>Introduction</b>	<b>xvii</b>
<b>1 Problème physique et modélisation</b>	<b>1</b>
1.1 Le problème physique . . . . .	1
1.2 Modélisation du severe slugging . . . . .	5
1.2.1 Approximation mono-dimensionnelle . . . . .	5
1.2.2 Modèles diphasiques transitoires . . . . .	5
1.2.3 Choix du modèle . . . . .	6
1.3 Le problème mathématique . . . . .	7
1.4 Classification des écoulements diphasiques gaz-liquide . . . . .	9
1.4.1 Écoulements dans un pipe horizontal . . . . .	9
1.4.2 Écoulements dans un pipe vertical . . . . .	10
1.4.3 Écoulements dans un pipe incliné . . . . .	12
1.5 Lois de glissement . . . . .	12
1.5.1 Écoulement intermittent . . . . .	12
1.5.2 Écoulement dispersé . . . . .	15
1.5.3 Écoulement stratifié . . . . .	16
1.5.4 Écoulement annulaire . . . . .	19
1.6 Frottements pariétaux . . . . .	21
1.6.1 Écoulement stratifié . . . . .	21
1.6.2 Écoulement annulaire . . . . .	22
1.6.3 Écoulement dispersé . . . . .	22
1.6.4 Écoulement intermittent . . . . .	22
1.7 Transitions des écoulements diphasiques . . . . .	22
1.7.1 Pipes horizontaux et légèrement inclinés . . . . .	23
1.7.2 Écoulements ascendants, verticaux et fortement inclinés . . . . .	25
1.7.3 Écoulements descendants, verticaux et fortement inclinés . . . . .	26

1.7.4	Écoulements à faibles débits . . . . .	27
<b>2</b>	<b>Modèle algébro-différentiel</b>	<b>29</b>
2.1	Introduction . . . . .	29
2.2	Variables fondamentales du modèle . . . . .	30
2.3	Relations de saut . . . . .	30
2.4	Notations . . . . .	31
2.5	Un modèle pipe-riser . . . . .	32
2.6	Un modèle multi-pipes . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Lois synthétiques de glissement et de frottement</b>	<b>43</b>
3.1	Pourquoi une loi synthétique de glissement ? . . . . .	43
3.2	Présentation de la loi synthétique de glissement . . . . .	44
3.3	Analyse mathématique des écoulements et des transitions . . . . .	44
3.3.1	Au voisinage de $R_G = 0$ . . . . .	44
3.3.2	Au voisinage de $R_G = 1$ . . . . .	45
3.3.3	En dehors des voisinages de $R_G = 0$ et $R_G = 1$ . . . . .	55
3.4	Construction de la loi synthétique de glissement . . . . .	63
3.5	Pourquoi une loi synthétique de frottement ? . . . . .	69
3.6	Présentation de la loi synthétique de frottement . . . . .	71
3.7	Analyse mathématique du frottement pariétal . . . . .	72
3.7.1	Au voisinage de $R_G = 0$ . . . . .	72
3.7.2	Au voisinage de $R_G = 1$ . . . . .	73
3.7.3	En dehors des voisinages de $R_G = 0$ et $R_G = 1$ . . . . .	76
3.8	Construction de la loi synthétique de frottement . . . . .	76
3.9	Validation des lois sur les données de Boussens . . . . .	79
3.9.1	Validation de la loi de glissement . . . . .	79
3.9.2	Validation de la loi de frottement . . . . .	88
<b>4</b>	<b>Résolution numérique et validation du modèle</b>	<b>95</b>
4.1	Méthodes numériques . . . . .	95
4.1.1	Méthodes de Runge-Kutta . . . . .	95
4.1.2	Méthode de troncature . . . . .	105
4.1.3	Contrôles du pas de temps et de l'ordre de précision . . . . .	107
4.2	Comparaisons avec les expériences de L'IFP . . . . .	107
4.2.1	Dispositif et données expérimentales . . . . .	107
4.2.2	Modélisation de l'écoulement intermittent . . . . .	108
4.2.3	Procédure de calcul . . . . .	110
4.2.4	Comparaisons des résultats . . . . .	111
4.2.5	Comportement dynamique du modèle . . . . .	112
4.2.6	Écoulements quasi-stationnaires . . . . .	113
4.2.7	Premières conclusions . . . . .	113
4.3	Comparaisons avec les expériences de Fabre . . . . .	131
4.3.1	Dispositif expérimental . . . . .	131
4.3.2	Modifications du modèle . . . . .	131
4.3.3	Modélisation de l'écoulement intermittent . . . . .	132
4.3.4	Résultats numériques . . . . .	132
4.3.5	Analyse des résultats . . . . .	134

<b>5</b>	<b>Analyse mathématique</b>	<b>139</b>
5.1	Introduction . . . . .	139
5.2	Modèle simplifié pour une analyse locale . . . . .	140
5.2.1	Modélisation de l'écoulement stratifié dans le pipe . . . . .	141
5.2.2	Calcul du taux de vide dans le pipe . . . . .	143
5.2.3	Modélisation de l'écoulement dans le riser . . . . .	146
5.2.4	Les équations du modèle . . . . .	147
5.2.5	Écoulement stationnaire . . . . .	148
5.2.6	Boucle expérimentale de Taitel . . . . .	150
5.2.7	Modèle à débits massiques constants . . . . .	150
5.2.8	Écriture condensée des équations . . . . .	151
5.2.9	Réduction de l'index du système . . . . .	153
5.3	Analyse locale . . . . .	155
5.3.1	Analyse linéaire . . . . .	156
5.3.2	Validation expérimentale de la frontière de stabilité . . . . .	160
5.3.3	Analyse non linéaire . . . . .	166
5.3.4	Validation numérique des calculs analytiques de bifurcation . . . . .	179
	<b>Conclusion</b>	<b>189</b>
<b>A</b>	<b>Théorie des systèmes algébro-différentiels</b>	<b>191</b>
A.1	Index d'un système algébro-différentiel . . . . .	191
A.2	Réduction de l'index . . . . .	192
A.3	Stabilité d'un point d'équilibre régulier . . . . .	193
A.4	Singularité et Stabilité . . . . .	195
A.5	Bifurcation induite par singularité . . . . .	195
<b>B</b>	<b>Publication</b>	<b>197</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>207</b>





# Liste des figures

1.1	<i>Écoulement stationnaire avec pénétration continue du gaz</i> . . . . .	2
1.2	<i>Formation du bouchon de liquide.</i> . . . . .	3
1.3	<i>Production du bouchon de liquide.</i> . . . . .	3
1.4	<i>Pénétration de la poche de gaz.</i> . . . . .	3
1.5	<i>Chute du liquide.</i> . . . . .	4
1.6	<i>Cycle du severe slugging</i> . . . . .	4
1.7	<i>Système pipe-riser.</i> . . . . .	9
1.8	<i>Écoulements gaz-liquide dans un pipe horizontal</i> . . . . .	11
1.9	<i>Écoulements gaz-liquide dans un pipe vertical</i> . . . . .	12
1.10	<i>Angle mouillé d'un écoulement stratifié.</i> . . . . .	16
1.11	<i>Écoulement stratifié à l'état d'équilibre.</i> . . . . .	19
1.12	<i>Écoulement annulaire.</i> . . . . .	21
1.13	<i>Une maille intermittente.</i> . . . . .	23
2.1	<i>Système pipe-riser</i> . . . . .	33
2.2	<i>Écoulement d'un bouchon de liquide dans le séparateur.</i> . . . . .	33
2.3	<i>Écoulement stationnaire avec pénétration continue du gaz</i> . . . . .	37
2.4	<i>Système multi-pipes.</i> . . . . .	38
2.5	<i>Pipe <math>i</math> : variables.</i> . . . . .	38
2.6	<i>Riser : variables.</i> . . . . .	39
3.1	<i>Courbe <math>R_G \mapsto U_G^{strat}(R_G, P, U_S)</math> ; <math>Re_{mG} \simeq 2651</math>, <math>\theta = 0^\circ</math>.</i> . . . . .	51
3.2	<i>Courbe <math>R_G \mapsto U_G^{strat}(R_G, P, U_S)</math> ; <math>Re_{mG} \simeq 8839</math>, <math>\theta = -5^\circ</math>.</i> . . . . .	51
3.3	<i>Courbe <math>R_G \mapsto U_G^{strat}(R_G, P, U_S)</math> ; <math>Re_{mG} \simeq 17679</math>, <math>\theta = 5^\circ</math>.</i> . . . . .	51
3.4	<i>Courbe <math>R_G \mapsto  E_R^{strat}(R_G, P, U_S) </math> ; <math>\theta = 0^\circ</math>.</i> . . . . .	52
3.5	<i>Courbe <math>R_G \mapsto  E_R^{strat}(R_G, P, U_S) </math> ; <math>\theta = 5^\circ</math>.</i> . . . . .	52
3.6	<i>Courbe <math>R_G \mapsto  E_R^{strat}(R_G, P, U_S) </math> ; <math>\theta = -5^\circ</math>.</i> . . . . .	52
3.7	<i>Courbe <math>R_G \mapsto U_G^{ann}(R_G, P, U_S)</math> ; <math>Re_{mG} \simeq 2209</math>, <math>\theta = 90^\circ</math>.</i> . . . . .	56
3.8	<i>Courbe <math>R_G \mapsto U_G^{ann}(R_G, P, U_S)</math> ; <math>Re_{mG} \simeq 8839</math>, <math>\theta = -90^\circ</math>.</i> . . . . .	56
3.9	<i>Courbe <math>R_G \mapsto U_G^{ann}(R_G, P, U_S)</math> ; <math>Re_{mG} \simeq 17679</math>, <math>\theta = 0^\circ</math>.</i> . . . . .	56
3.10	<i>Courbe <math>R_G \mapsto  E_R^{ann}(R_G, P, U_S) </math> ; <math>\theta = 90^\circ</math>.</i> . . . . .	57
3.11	<i>Courbe <math>R_G \mapsto  E_R^{ann}(R_G, P, U_S) </math> ; <math>\theta = -90^\circ</math>.</i> . . . . .	57
3.12	<i>Courbe <math>R_G \mapsto  E_R^{ann}(R_G, P, U_S) </math> ; <math>\theta = 0^\circ</math>.</i> . . . . .	57
3.13	<i>Vitesses superficielles du gaz : premier exemple</i> . . . . .	61
3.14	<i>Vitesses superficielles du gaz : deuxième exemple</i> . . . . .	62
3.15	<i>Vitesses superficielles du gaz : troisième exemple</i> . . . . .	62
3.16	<i>Loi synthétique de glissement : premier cas</i> . . . . .	70
3.17	<i>Loi synthétique de glissement : deuxième cas</i> . . . . .	70
3.18	<i>Loi synthétique de glissement : troisième cas</i> . . . . .	70

3.19	<i>Loi synthétique de frottement : premier exemple . . . . .</i>	77
3.20	<i>Loi synthétique de frottement : deuxième exemple . . . . .</i>	78
3.21	<i>Loi synthétique de frottement : troisième exemple . . . . .</i>	78
3.22	<i>Boussens : <math>P = 5</math> bars, <math>D = 6''</math>, <math>\theta = -3^\circ</math>, mélange gazole-gaz naturel. . . . .</i>	80
3.23	<i>Boussens : <math>P = 7</math> bars, <math>D = 6''</math>, <math>\theta = 0^\circ</math>, mélange gazole-gaz naturel. . . . .</i>	80
3.24	<i>Boussens : <math>P = 7</math> bars, <math>D = 6''</math>, <math>\theta = 1^\circ</math>, mélange gazole-gaz naturel. . . . .</i>	81
3.25	<i>Boussens : <math>P = 10</math> bars, <math>D = 3''</math>, <math>\theta = 15^\circ</math>, mélange gazole-gaz naturel. . . . .</i>	81
3.26	<i>Boussens : <math>P = 10</math> bars, <math>D = 3''</math>, <math>\theta = 45^\circ</math>, mélange gazole-gaz naturel. . . . .</i>	82
3.27	<i>Boussens : <math>P = 10</math> bars, <math>D = 3''</math>, <math>\theta = 75^\circ</math>, mélange gazole-gaz naturel. . . . .</i>	82
3.28	<i>Boussens : <math>P = 10</math> bars, <math>D = 3''</math>, <math>\theta = 90^\circ</math>, mélange gazole-gaz naturel. . . . .</i>	83
3.29	<i>Boussens : <math>P = 7</math> bars, <math>D = 6''</math>, <math>\theta = -0.57^\circ</math>, mélange condensat-gaz naturel. . . . .</i>	83
3.30	<i>Boussens : <math>P = 7</math> bars, <math>D = 6''</math>, <math>\theta = 0^\circ</math>, mélange condensat-gaz naturel. . . . .</i>	84
3.31	<i>Boussens : <math>P = 7</math> bars, <math>D = 6''</math>, <math>\theta = 1^\circ</math>, mélange condensat-gaz naturel. . . . .</i>	84
3.32	<i>Boussens : <math>P = 7</math> bars, <math>D = 6''</math>, <math>\theta = 4^\circ</math>, mélange condensat-gaz naturel. . . . .</i>	85
3.33	<i>Boussens : <math>P = 10</math> bars, <math>D = 3''</math>, <math>\theta = 15^\circ</math>, mélange condensat-gaz naturel. . . . .</i>	85
3.34	<i>Boussens : <math>P = 10</math> bars, <math>D = 3''</math>, <math>\theta = 45^\circ</math>, mélange condensat-gaz naturel. . . . .</i>	86
3.35	<i>Boussens : <math>P = 10</math> bars, <math>D = 3''</math>, <math>\theta = 75^\circ</math>, mélange condensat-gaz naturel. . . . .</i>	86
3.36	<i>Boussens : <math>P = 10</math> bars, <math>D = 3''</math>, <math>\theta = 90^\circ</math>, mélange condensat-gaz naturel. . . . .</i>	87
3.37	<i>Boussens : <math>P = 10</math> bars, <math>D = 6''</math>, <math>\theta = 90^\circ</math>, mélange condensat-gaz naturel. . . . .</i>	87
3.38	<i>Boussens : <math>P = 10</math> bars, <math>D = 3''</math>, <math>\theta = 90^\circ</math>, mélange eau-gaz naturel. . . . .</i>	88
3.39	<i>Boussens : <math>P = 10</math> bars, <math>D = 6''</math>, <math>\theta = 90^\circ</math>, mélange eau-gaz naturel. . . . .</i>	89
3.40	<i>Boussens : <math>P = 5</math> bars, <math>D = 6''</math>, <math>\theta = -3^\circ</math>, mélange gazole-gaz naturel. . . . .</i>	90
3.41	<i>Boussens : <math>P = 7</math> bars, <math>D = 6''</math>, <math>\theta = 0^\circ</math>, mélange gazole-gaz naturel. . . . .</i>	90
3.42	<i>Boussens : <math>P = 5</math> bars, <math>D = 6''</math>, <math>\theta = 0.57^\circ</math>, mélange gazole-gaz naturel. . . . .</i>	91
3.43	<i>Boussens : <math>P = 7</math> bars, <math>D = 6''</math>, <math>\theta = 1^\circ</math>, mélange gazole-gaz naturel. . . . .</i>	91
3.44	<i>Boussens : <math>P = 7</math> bars, <math>D = 6''</math>, <math>\theta = 0^\circ</math>, mélange condensat-gaz naturel. . . . .</i>	92
3.45	<i>Boussens : <math>P = 7</math> bars, <math>D = 6''</math>, <math>\theta = 1^\circ</math>, mélange condensat-gaz naturel. . . . .</i>	92
3.46	<i>Boussens : <math>P = 7</math> bars, <math>D = 6''</math>, <math>\theta = 4^\circ</math>, mélange condensat-gaz naturel. . . . .</i>	93
3.47	<i>Boussens : <math>P = 10</math> bars, <math>D = 3''</math>, <math>\theta = 15^\circ</math>, mélange condensat-gaz naturel. . . . .</i>	93
4.1	<i>Fonction <math>\Lambda_{liq}</math> . . . . .</i>	105
4.2	<i>Pipeline en forme de U. . . . .</i>	108
4.3	<i>Perte de charge moyenne dans le down-comer . . . . .</i>	115
4.4	<i>Perte de charge moyenne dans la flow-line . . . . .</i>	116
4.5	<i>Perte de charge moyenne dans le riser . . . . .</i>	117
4.6	<i>Vitesse superficielle moyenne du gaz dans la flow-line . . . . .</i>	118
4.7	<i>Vitesse superficielle moyenne du liquide dans la flow-line . . . . .</i>	119
4.8	<i>Pression moyenne dans la flow-line . . . . .</i>	120
4.9	<i>Période des oscillations . . . . .</i>	121
4.10	<i>Calcul transitoire : essai 17. . . . .</i>	122
4.11	<i>Calcul transitoire : essai 18. . . . .</i>	123
4.12	<i>Calcul transitoire : essai 19. . . . .</i>	124
4.13	<i>Calcul transitoire : essai 23. . . . .</i>	125
4.14	<i>Calcul transitoire : essai 24. . . . .</i>	126
4.15	<i>Calcul transitoire : essai 28. . . . .</i>	127
4.16	<i>Calcul transitoire : essai 29. . . . .</i>	128
4.17	<i>Calcul transitoire : essai 33. . . . .</i>	129
4.18	<i>Calcul transitoire : essai 34. . . . .</i>	130

4.19	<i>Système pipe-riser de Fabre J.</i> . . . . .	131
4.20	<i>Expérience de Fabre : <math>U_L^0 = 0.127m.s^{-1}</math>, <math>U_G^0 = 2.24m.s^{-1}</math>, <math>\theta = -0.57294^\circ</math>.</i> . . . . .	136
4.21	<i>Expérience de Fabre : <math>U_L^0 = 0.127m.s^{-1}</math>, <math>U_G^0 = 0.45m.s^{-1}</math>, <math>\theta = -0.57294^\circ</math>.</i> . . . . .	137
5.1	<i>Écoulement stationnaire</i> . . . . .	140
5.2	<i>Système pipe-riser de Taitel.</i> . . . . .	151
5.3	<i>Critère de stabilité de Taitel.</i> . . . . .	160
5.4	<i>Essais de Taitel : carte N°1</i> . . . . .	163
5.5	<i>Essais de Taitel : carte N°2</i> . . . . .	164
5.6	<i>Essais de Taitel : carte N°3</i> . . . . .	165
5.7	<i>Essais de Fabre</i> . . . . .	167
5.8	<i>Essais de Schmidt</i> . . . . .	168
5.9	<i>Dynamique au voisinage d'un point d'équilibre hyperbolique.</i> . . . . .	173
5.10	<i><math>U_G^0 = 0.829 m.s^{-1}</math> : cycle limite et solutions transitoires.</i> . . . . .	182
5.11	<i><math>U_G^0 = 0.820 m.s^{-1}</math> : cycle limite et solutions transitoires.</i> . . . . .	183
5.12	<i><math>U_G^0 = 0.820 m.s^{-1}</math> : <math>m_G</math> en fonction de <math>H_{liq}</math>.</i> . . . . .	183
5.13	<i><math>U_G^0 = 0.820 m.s^{-1}</math> : <math>m_L</math> en fonction de <math>H_{liq}</math>.</i> . . . . .	184
5.14	<i><math>U_G^0 = 0.829 m.s^{-1}</math> : vitesse <math>U_S</math> en sortie du riser et vitesse critique.</i> . . . . .	185
5.15	<i><math>U_G^0 = 0.820 m.s^{-1}</math> : vitesse <math>U_S</math> en sortie du riser et vitesse critique.</i> . . . . .	185
5.16	<i><math>U_G^0 = 1.678 m.s^{-1}</math> : cycle limite et solutions transitoires.</i> . . . . .	187



# Liste des tableaux

- 3.1 Loi synthétique de glissement : premier cas . . . . . 65
- 3.2 Loi synthétique de glissement : deuxième cas . . . . . 65
- 3.3 Loi synthétique de glissement : troisième cas . . . . . 66
- 3.4 Loi synthétique de glissement : quatrième cas . . . . . 66
- 3.5 Loi synthétique de frottement . . . . . 77
  
- 4.1 Données expérimentales . . . . . 109
- 4.2 Expériences de Fabre ( $\theta = 1\%$ ) : pressions moyennes en sortie du pipe . . . . . 133



# Nomenclature

## Lettres romanes

$A$	aire d'une section droite du pipe [ $m^2$ ]
$A_k$	aire occupée par la phase $k$ dans une section droite du pipe [ $m^2$ ]
$C$	paramètre de distribution des écoulements <i>intermittent</i> et <i>dispersé</i>
$C_k$	coefficient de la phase $k$ dans l'équation de Blasius (3.12)
$D$	diamètre du pipe [ $m$ ]
$D_k$	diamètre hydraulique de la phase $k$ [ $m$ ]
$e$	rugosité pariétale [ $m$ ]
$E_R$	erreur relative
$f$	coefficient de frottement
$F_p$	frottement pariétal [ $kg.m^{-2}.s^{-2}$ ]
$F_r$	nombre de Froude
$\mathcal{F}$	frottement pariétal synthétique [ $kg.m^{-2}.s^{-2}$ ]
$g$	accélération gravitationnelle [ $m.s^{-2}$ ]
$H$	hauteur du riser [ $m$ ]
$\mathcal{H}$	fonction de Heaviside
$h_L$	hauteur liquide [ $m$ ]
$K$	compressibilité du liquide [ $kg^{-1}.m.s^2$ ]
$L$	longueur du pipe [ $m$ ]
$l_p$	longueur de pipe additionnelle [ $m$ ]
$m$	densité intégrée [ $kg.m^{-2}$ ] ou nombre de variables algébriques
$n$	nombre de pipes (riser inclus) ou nombre de variables différentielles
$p$	nombre de paramètres
$P$	pression [ $Pa$ ]
$\mathcal{P}$	espace des paramètres
$q$	débit massique [ $kg.m^{-2}.s^{-1}$ ]
$Q$	débit massique intégré [ $kg.m^{-1}.s^{-1}$ ]
$\mathcal{R}$	constante des gaz parfaits [ $m^2.s^{-2}.K^{-1}$ ]
$Re$	nombre de Reynolds
$R_k$	fraction surfacique de la phase $k$ dans une section droite du pipe, $R_k = A_k/A$
$S$	périmètre d'une section droite du pipe [ $m$ ]



$S_i$	longueur de l'interface gaz-liquide d'un écoulement séparé [ $m$ ]
$S_k$	périmètre mouillé par la phase $k$ dans une section droite du pipe [ $m$ ]
$t$	temps [ $s$ ]
$T$	température du mélange diphasique [ $K$ ]
$u$	vitesse [ $m.s^{-1}$ ]
$U$	vitesse superficielle ou flux volumétrique [ $m.s^{-1}$ ]
$V$	vitesse [ $m.s^{-1}$ ]
$x$	coordonnée axiale d'un pipe [ $m$ ]
$z$	coordonnée axiale du riser [ $m$ ]

## Lettres grecques

$\alpha_k$	exposant de la phase $k$ dans l'équation de Blasius (3.12)
$\delta$	épaisseur du film liquide d'un écoulement <i>annulaire</i> [ $m$ ]
$\Lambda$	vitesse du niveau liquide dans le riser [ $m.s^{-1}$ ]
$\mu$	viscosité dynamique [ $kg.m^{-1}.s^{-1}$ ]
$\Omega$	angle mouillé d'un écoulement séparé
$\Phi_\alpha$	fonction (3.19)
$\psi$	vitesse $U_G$ synthétique [ $m.s^{-1}$ ]
$\Psi$	loi synthétique de glissement [ $m.s^{-1}$ ]
$\rho$	densité [ $kg.m^{-3}$ ]
$\sigma$	tension superficielle entre le gaz et le liquide [ $N.m^{-1}$ ]
$\theta$	angle d'inclinaison du pipe par rapport à l'horizontale

## Indices inférieurs

<i>ann</i>	<i>annulaire</i>
<i>C</i>	noyau ( <i>core</i> en anglais)
<i>d</i>	dérive
<i>disp</i>	<i>dispersé</i>
<i>G</i>	gaz
<i>G0</i>	gaz à la pression atmosphérique
<i>i</i>	interface gaz-liquide ou numéro d'un pipe
<i>k</i>	phase liquide ( $k = L$ ) ou gazeuse ( $k = G$ )
<i>int</i>	<i>intermittent</i>
<i>L</i>	liquide
<i>lam</i>	laminaire
<i>LG</i>	liquide et gaz
<i>liq</i>	niveau liquide dans le riser
<i>m</i>	mélange ou nombre de variables algébriques
<i>mG</i>	mélange avec viscosité $\mu_G$

$mL$	mélange avec viscosité $\mu_L$
$n$	nombre de pipes (riser inclus) ou nombre de variables différentielles
$p$	pipe ou pariétal
$r$	riser
$S$	mélange gaz-liquide ou séparateur
<i>strat</i>	<i>stratifié</i>
$T$	translationnelle
<i>turb</i>	turbulent
0	entrée du pipe d'un système pipe-riser
1	sortie du pipe d'un système pipe-riser
2	entrée du riser d'un système pipe-riser
3	niveau liquide dans le riser d'un système pipe-riser
4	surface libre du niveau liquide dans le riser d'un système pipe-riser
12	connection pipe-riser d'un système pipe-riser
34	discontinuité du niveau liquide dans le riser d'un système pipe-riser

## Indices supérieurs

<i>ann</i>	<i>annulaire</i>
<i>crit</i>	critique
<i>disp</i>	<i>dispersé</i>
<i>int</i>	<i>intermittent</i>
$m$	nombre de variables algébriques
$n$	nombre de pipes (riser inclus) ou nombre de variables différentielles
$p$	nombre de paramètres
<i>strat</i>	<i>stratifié</i>
0	entrée du pipe d'un système pipe-riser
1	sortie du pipe d'un système pipe-riser
2	entrée du riser d'un système pipe-riser
3	niveau liquide dans le riser d'un système pipe-riser
4	surface libre du niveau liquide dans le riser d'un système pipe-riser



# Introduction

On estime depuis quelques années que plus de la moitié des réserves sous-marines (ou offshore) en hydrocarbures est située en eaux profondes ou dans des champs marginaux [70]. Pour que de tels gisements soient suffisamment rentables, les compagnies pétrolières ont dû développer de nouvelles méthodes d'exploitation. Malheureusement, ces innovations ont engendré de nouveaux problèmes dont la solution dépend en grande partie d'une meilleure compréhension du comportement des écoulements polyphasiques.

De manière traditionnelle, le mélange d'huile, d'eau et de gaz extrait des réservoirs offshore est transporté jusqu'à la surface de la mer vers une plate-forme de production où le processus de séparation est effectué. Les coûts d'opération et de maintenance de ces plate-formes sont hélas très importants, voire exorbitants pour des réserves situées en eaux profondes où le coût d'une plate-forme fixe est grossièrement proportionnel au carré de la profondeur de l'eau [70]. À cela s'ajoutent les dépenses dues à l'installation de deux pipelines monophasiques pour transporter séparément l'huile et le gaz jusqu'à terre.

Une approche plus économique consiste à transporter directement le mélange diphasique dans un seul et même pipeline vers une plate-forme de traitement construite en eaux peu profondes ou vers une installation terrestre. L'huile et le gaz sont ainsi séparés à moindre coût. Malheureusement, la présence de gaz et de liquide s'écoulant simultanément dans une même conduite peut, dans certaines conditions, engendrer des écoulements fortement instables et entraîner de graves problèmes d'exploitation.

Ainsi, lorsque les débits de gaz et de liquide à l'entrée de la conduite sont faibles, la phase liquide s'accumule dans les points-bas du pipeline et bloque le passage du gaz. La pression en amont augmente et finit par expulser le bouchon de liquide vers un autre point-bas ou dans le séparateur de phase [135] installé en sortie du pipeline.

Ces phénomènes sont évidemment très néfastes car ils produisent de longs bouchons de liquide qui peuvent, dans certains cas, remplir le séparateur gaz-liquide de façon imprévue : le liquide déborde et s'écoule dans les conduites prévues à l'origine pour ne recevoir que du gaz [144]. Dans d'autres cas, les fluctuations de pression peuvent entraîner une diminution de productivité des puits [173].

Pour supprimer de telles nuisances, les ingénieurs ont conçu des procédures opérationnelles qui ont l'inconvénient de réduire la production de façon drastique [144]. Dans le même temps, des dispositifs de capture des bouchons de liquide (*slug catchers* en anglais) doivent compléter les installations de séparation [121]. Des solutions ont été proposées pour éliminer le phénomène de *slugging* (*bouchonnage* en français) comme par exemple l'installation d'une valve près de la sortie du pipeline [90, 96, 142] ou encore l'injection de gaz à forts débits au dernier point-bas de la conduite avant la séparation des phases [85, 84, 127, 142]. Ces procédures sont néanmoins très contraignantes dans la pratique et surtout très coûteuses.

Il est donc primordial de bien comprendre le phénomène de *slugging* si on veut prévoir l'émergence des bouchons de liquide, contrôler leur longueur et concevoir les installations de séparation de façon optimale.

Le *terrain slugging* et le *severe slugging* sont les termes communément employés pour désigner ces phénomènes instables dont l'étude a mobilisé de nombreux chercheurs durant les deux dernières décennies. Quelques travaux sont uniquement expérimentaux [43, 44, 45, 85, 96, 108, 121, 142]. D'autres sont à la fois théoriques et pratiques : certains auteurs ont construit des modèles simplifiés spécialement adaptés à l'étude de ces phénomènes [19, 61, 115, 140, 143, 144, 160, 162, 163, 173, 182]. D'autres ont préféré étudier le phénomène de *slugging* à l'aide de modèles diphasiques beaucoup plus généraux et par la même occasion valider leurs codes de calcul [18, 50, 51, 118, 153].

Les possibilités de simulation de ces derniers dépassent largement le cadre de l'étude très particulière des écoulements du type *terrain* ou *severe slugging*. Leurs modèles, construits à partir d'équations aux dérivées partielles, tiennent compte de la plupart des phénomènes physiques liés au transport des hydrocarbures dans les pipelines : transitions des écoulements, lois de glissement, frottements pariétaux, compressibilité des phases, transferts de masse, transferts thermiques, etc. Les formulations peuvent être par contre différentes, à savoir bi-fluides [18, 50] ou à *flux de dérive* [58].

Néanmoins, la complexité de ces modèles limite le nombre d'études car la simulation du *slugging* exige en principe beaucoup de temps de calcul : le *terrain slugging* et le *severe slugging* sont des phénomènes violents où les variations peuvent être soudaines et importantes (chute de pression, explosion de poches de gaz, etc). La simulation exige donc de très petits pas de temps afin de fournir une bonne approximation des solutions réelles. Une étude de stabilité du *severe slugging* ou du *terrain slugging* en fonction des paramètres physiques du problème est donc extrêmement difficile à réaliser pour un modèle complet.

Les autres résultats numériques disponibles dans la littérature sont fournis en majorité par des modèles simplifiés construits spécialement pour l'étude du phénomène de *slugging* [61, 66, 110, 140, 143, 144, 163, 162, 173, 182]. Leurs équations résultent en général de l'intégration en espace des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, voire de l'énergie lorsque l'écoulement n'est pas supposé isotherme. Elles sont donc différentielles ou algébriques. Les variables physiques (pression, densité, vitesse, etc.) sont calculées aux extrémités de chaque tronçon du pipeline ou sont représentées par leur valeur moyenne en espace dans un tronçon, un bouchon de liquide, une poche de gaz, etc. Les comparaisons faites entre la simulation et l'expérience sont plus ou moins satisfaisantes, la qualité des résultats dépendant des simplifications adoptées pour chaque type de modélisation.

La simplicité de tels modèles a incité certains auteurs à étudier la stabilité du phénomène de *slugging* de façon théorique [24, 63, 69, 154]. Ils en ont déduit des critères qui permettent, en fonction de certains paramètres, de calculer la région où des instabilités sont susceptibles de se produire. D'autres chercheurs ont aussi étudié l'influence des paramètres tels que l'inclinaison ou la longueur de la conduite [61, 127, 163, 173], la pression dans le séparateur [96, 163, 173] ou encore la viscosité du liquide [127]. Cependant, aucune étude systématique de stabilité du phénomène de *slugging* en fonction des paramètres physiques du problème n'a jamais été entreprise.

Cette thèse propose une nouvelle modélisation des écoulements transitoires dans les systèmes pipeline-riser. Les équations présentées sont algébriques et différentielles. Leur régularité dépend des lois de glissement et de frottement de l'écoulement. Une forme régulière de

celles-ci est établie pour première fois dans cette thèse. Ainsi l'analyse mathématique du modèle s'intègre dans un cadre classique : une analyse linéaire débouche sur l'expression analytique de la frontière séparant les écoulements stables (ou permanents) des écoulements instables (*quasi-stationnaires*, transition vers le *severe slugging*, *severe slugging*) dans l'espace des paramètres du problème. Une analyse non linéaire fournit pour la première fois les courbes de bifurcation des écoulements gaz-liquide dans les systèmes pipe-riser, au voisinage de leur frontière de leur stabilité.



# Chapitre 1

## Problème physique et modélisation

Ce chapitre est consacré dans un premier temps à la description et la modélisation du phénomène de *slugging* (*bouchonnage* en français) dans les systèmes pipe-riser. Il présente ensuite les différents types d'écoulements gaz-liquide que l'on peut observer dans une conduite pétrolière en précisant leur classification, leurs lois constitutives et leurs transitions.

### 1.1 Le problème physique

Dans certaines configurations géométriques, il est parfois impossible d'observer un écoulement diphasique stationnaire dans un pipeline, à savoir un flot où les débits massiques de gaz et de liquide sont constants le long de la ligne de transport [154] (*cf.* figure 1.1). Un premier exemple est celui d'un pipeline dont l'extrémité finale est une conduite descendante reliée à un pipe vertical (riser). Un second exemple est celui d'un pipeline posé sur un terrain dont la géométrie est très accidentée (fond marin, région montagneuse, etc).

Dans les deux cas, un écoulement stationnaire est impossible à obtenir lorsque les débits liquide et gazeux sont faibles comme par exemple au cours d'une procédure de dépressurisation d'un pipeline [118] ou encore lorsque le rapport du débit massique du liquide sur celui du gaz est faible. On pense en particulier à des écoulements de gaz naturel avec condensation [115, 121].

Le liquide s'accumule dans les points bas de la conduite et tend à bloquer le passage du gaz. Celui-ci est comprimé jusqu'au moment où la pression en amont dépasse la pression due au poids du liquide accumulé en aval. Un long bouchon de liquide est alors poussé par le gaz en expansion. Sous de telles conditions, on observe un phénomène alternatif où le liquide bloque la phase gazeuse, puis s'évacue sous la pression du gaz et finalement s'accumule pour bloquer à nouveau le gaz.

Dans le premier exemple cité plus haut, on désigne ce phénomène dans sa forme la plus sévère, comme du *severe slugging* tandis que dans le second cas, on emploie plutôt l'expression *terrain slugging*. Ces deux types d'écoulement sont très instables dans le sens où ils sont généralement associés à de fortes variations de pression et des débits.

Entre un écoulement stationnaire et du *severe slugging*, on parle parfois d'écoulement *quasi-stationnaire* et de *transition vers le severe slugging* [127, 143, 144, 163]. Ce sont des flots instables dans le sens où les débits de gaz et de liquide oscillent au cours du temps. Cependant, leurs fluctuations sont beaucoup moins accentuées que celles d'un écoulement du type *severe slugging*.



Le *severe slugging* peut être observé de façon très simple en introduisant un mélange diphasique gaz-liquide à faible débit dans un pipe descendant d'inclinaison constante dont l'extrémité inférieure débouche sur un riser. Le processus périodique qui le caractérise est généralement décrit en quatre étapes [154] :

- La première est celle de la formation du bouchon de liquide dans le riser. Le liquide introduit à l'entrée du pipe s'accumule au pied du riser et bloque le passage du gaz. Celui-ci est comprimé à l'intérieur du pipe descendant (*cf.* figure 1.2).
- Lorsque le niveau supérieur du bouchon de liquide atteint le sommet du riser, la deuxième étape du *severe slugging* commence : la phase liquide se déverse dans le séparateur (*cf.* figure 1.3).
- Vient ensuite la troisième étape où la poche de gaz atteint le pied du riser et pénètre à l'intérieur de la colonne liquide (*cf.* figure 1.4). Le bouchon continue de se déverser dans le séparateur mais avec une vitesse beaucoup plus importante que dans la deuxième étape. Cette étape est très courte par rapport aux autres comme on peut le visualiser sur la figure 1.6. C'est pourquoi on désigne parfois cette étape comme l'explosion de la poche de gaz dans le riser.
- Lorsque le gaz atteint finalement le sommet du riser, la pression au pied de la colonne est minimale. Le liquide n'est plus soulevé par le gaz et s'écoule le long de la paroi du riser. Il vient s'accumuler à son pied pour générer un nouveau bouchon. On est donc revenu à la première étape (*cf.* figure 1.5).

La longueur des bouchons de liquide dans un écoulement du type *severe slugging* est donc supérieure ou égale à la hauteur du riser. Lorsque l'écoulement est *quasi-stationnaire* ou représente une *transition vers le severe slugging*, cette longueur est inférieure à la hauteur du riser mais reste supérieure à celle des bouchons d'un écoulement *intermittent* normal (voir section 1.4). Le sommet du riser est périodiquement asséché par le passage des bulles. Ce qui entraîne des fluctuations de pression au pied de la conduite et l'apparition d'un niveau liquide. Ce dernier oscille avec une amplitude d'autant plus grande que l'instabilité est importante.

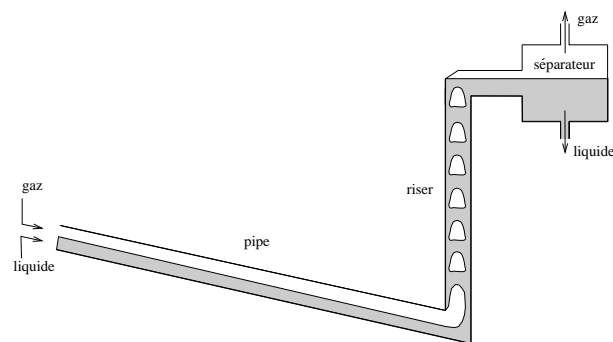


Figure 1.1 : Écoulement stationnaire avec pénétration continue du gaz [154].

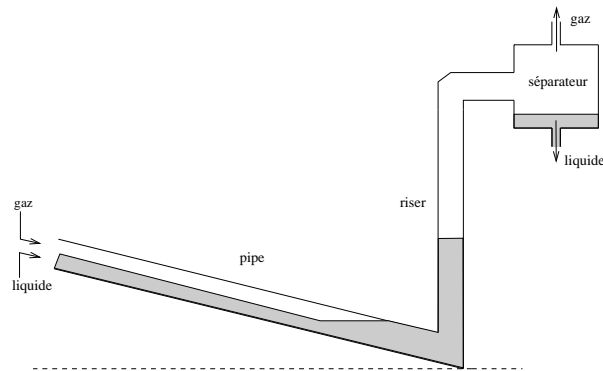


Figure 1.2 : *Formation du bouchon de liquide.*

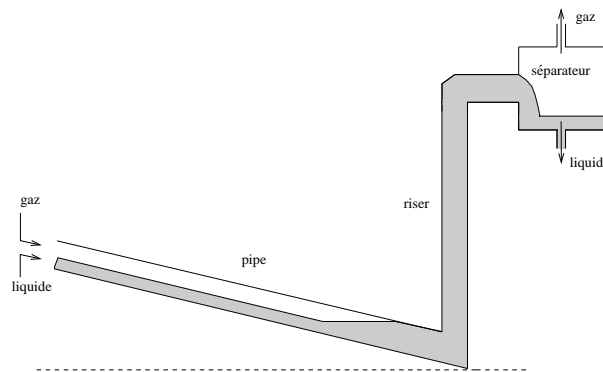


Figure 1.3 : *Production du bouchon de liquide.*

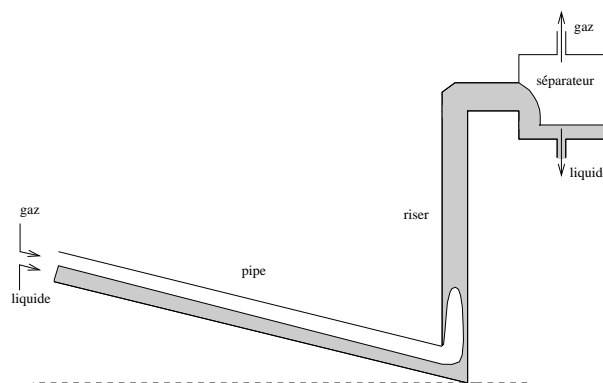
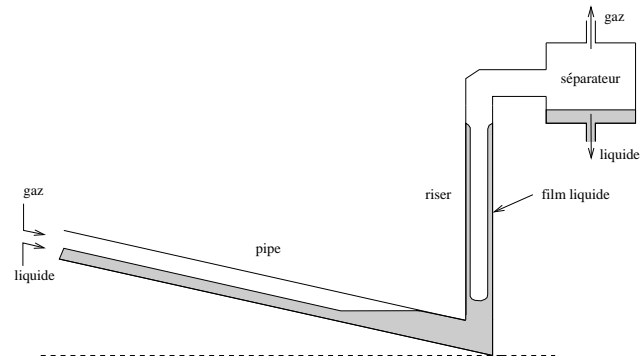
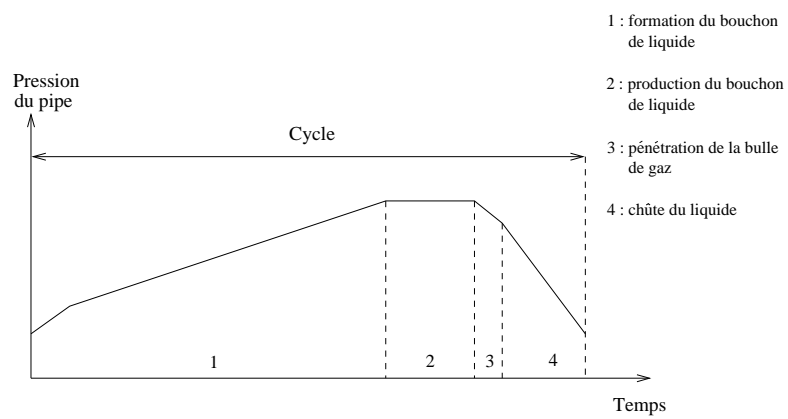


Figure 1.4 : *Pénétration de la poche de gaz.*

Figure 1.5 : *Chute du liquide.*Figure 1.6 : *Cycle du severe slugging [61].*

## 1.2 Modélisation du severe slugging

Cette section décrit tout d'abord les conditions nécessaires pour qu'une approximation mono-dimensionnelle d'un écoulement diphasique dans un pipe ait un sens. Il résume ensuite les différents types de modèles diphasiques transitoires disponibles dans la littérature.

### 1.2.1 Approximation mono-dimensionnelle

Les équations de mouvement d'un fluide newtonien visqueux sont données par les équations de Navier-Stokes. De façon générale, ces équations dépendent des trois dimensions de l'espace et du temps. Pour simplifier leur intégration, des méthodes de moyennisation peuvent être dans certains cas employées pour diminuer la dimension du problème [55].

Lorsque le fluide s'écoule dans un pipeline, le problème est généralement formulé en une seule dimension, suivant l'axe de la conduite [23]. Elle sera symbolisée par la coordonnée  $x$ . Les variables caractéristiques de l'écoulement telles que sa densité, sa vitesse, son enthalpie ou sa température sont moyennées sur une section transversale (droite) du pipe. Nous supposons que celle-ci est circulaire. L'intersection d'une section droite avec l'intérieur du pipe est donc un disque dont l'aire dépend de  $x$ . Nous la noterons  $A(x)$ .

L'approximation mono-dimensionnelle a un sens si  $A(x)$  varie lentement avec  $x$  et si ses dimensions sont faibles vis-à-vis du rayon de courbure de la conduite [148]. La première condition est évidemment vérifiée lorsque le diamètre du pipe est constant. La seconde est satisfaite de façon triviale si le pipe est droit.

Dans le cas d'un écoulement diphasique, l'approximation mono-dimensionnelle est valide sous ces mêmes conditions.

### 1.2.2 Modèles diphasiques transitoires

Les écoulements diphasiques transitoires sont en général modélisés suivant deux formulations dites *de mélange* ou *bi-fluide*.

#### 1.2.2.1 Modèles de mélange

Le plus simple est le modèle *homogène* [178] qui traite le mélange diphasique comme un pseudo-fluide ayant des propriétés déterminées par la quantité relative de chaque phase. Il est construit à l'aide des équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie (si le flot n'est pas supposé isotherme) du mélange. Une équation supplémentaire, donnée en principe par l'équation de conservation de la masse du gaz ou du liquide, complète le système.

La formulation *homogène* est uniquement valide dans les cas où les phases, liquide et gazeuse, ont la même vitesse et la même température. Cette hypothèse est raisonnable si l'écoulement est par exemple très dispersé, i.e. lorsque le gaz (respectivement le liquide) se déplace sous la forme de petites bulles (resp. gouttelettes) dans la phase liquide (resp. gazeuse). Ce type de modèle n'est donc pas adapté à notre problème où la vitesse de glissement entre les deux phases est parfois très importante.

Pour tenir compte de la vitesse relative du gaz par rapport au liquide, il est nécessaire de construire un modèle où les vitesses des deux phases sont distinctes. L'approche la plus simple est donnée par le modèle à *flux de dérive* [94, 178]. Il est construit à l'aide des mêmes équations de conservation que la formulation *homogène* mais l'équation de fermeture est fournie cette fois - ci par une loi de glissement entre les deux phases.

Une autre forme de ce type de modèle traite séparément les équations de conservation de la masse de chaque phase mais conserve l'équation de conservation de la quantité de mouvement du mélange. L'équation de fermeture diffère suivant les auteurs : elle peut être une corrélation de la fraction liquide [150], une relation empirique sur la vitesse du gaz [32] ou encore une loi de glissement entre les deux phases [58]. Ces relations de fermeture sont construites dans tous les cas sous l'hypothèse (approximative) que l'écoulement est stationnaire.

Notons qu'un des avantages majeurs des modèles à *flux de dérive* est d'éviter la modélisation des phénomènes d'interaction à l'interface entre les deux phases tels que le transfert de quantité de mouvement ou encore les effets dus aux forces de pression agissant sur l'interface [49].

### 1.2.2.2 Modèles bi-fluides

Une approche plus rigoureuse est donnée par les modèles *bi-fluides* où les vitesses et les pressions de chaque phase sont distinctes. Ils sont construits à l'aide des équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie (si le flot n'est pas supposé isotherme) de chaque phase. De nombreuses formulations de ce type de modèle sont disponibles dans la littérature mais la fermeture du système par des équations constitutives s'avère très complexe [18, 49, 50, 60, 95]. La principale difficulté réside dans la modélisation des phénomènes d'interaction à l'interface, en particulier dans les cas où le flot est *intermittent* ou *annulaire* (voir l'explication de ces termes dans la section 1.4).

### 1.2.3 Choix du modèle

Comme dans la plupart des modèles simplifiés dédiés à l'étude du *severe slugging* [61, 140, 163], nous choisissons une formulation du type *flux de dérive* plutôt qu'une modélisation *bi-fluide* : les équations de conservation des quantités de mouvement du liquide et du gaz sont additionnées en une seule et unique équation dite *équation de conservation de la quantité de mouvement du mélange*. Notre relation de fermeture sera donnée sous la forme d'une loi de glissement entre les deux phases.

Ces choix sont évidemment arbitraires mais ils constituent selon nous, le meilleur compromis entre la simplicité d'un modèle *homogène* et la complexité d'une formulation *bi-fluide*.

Les hypothèses suivantes sont communément admises pour l'élaboration de modèles simplifiés d'écoulements diphasiques dans les pipelines :

- diamètre interne du pipeline constant,
- écoulement isotherme,
- aucun transfert de masse entre les deux phases.

Nous supposerons aussi que les deux phases se comportent comme des fluides newtoniens [71].

*Taitel et al.* [159, 161] ont proposé un modèle simplifié pour l'étude plus générale des écoulements diphasiques dans les conduites pétrolières. Selon eux, les phénomènes transitoires

de ces écoulements sont suffisamment lents pour que l'on puisse admettre un équilibre local des forces. Les termes d'inertie de l'équation de conservation de la quantité de mouvement peuvent donc être négligés. D'autres auteurs ont aussi admis cette même hypothèse pour la construction de leur modèle simplifié de *severe slugging* [61, 140, 143]. Néanmoins, leur approximation n'est accompagnée d'aucune justification théorique.

Plus rigoureusement, lorsque le nombre de Mach du mélange diphasique est petit, les termes d'inertie de l'équation de conservation de la quantité de mouvement peuvent être négligés [175, 176]. Cette hypothèse simplifie énormément le modèle (voir section 2.3). Une justification théorique est détaillée dans [175]. Elle s'inspire des études aérodynamiques où l'air est souvent considéré comme incompressible lorsque le nombre de Mach est faible. En conséquence, les ondes de pression se propagent avec une vitesse infinie au lieu d'une vitesse proche de la vitesse du son dans le mélange. Les phénomènes à hautes fréquences sont supprimés mais les ondes de taux de vide [113] continuent de se propager avec une vitesse proche de celle du mélange.

Dans le cas d'un écoulement du type *severe slugging*, les termes d'accélération ne sont pas forcément négligeables [140]. Nous pensons notamment à la troisième étape (*cf.* figure 1.4) où des pics de production liquide peuvent être parfois soixante-dix fois supérieurs à la production liquide moyenne [127]. Lorsque l'écoulement est instable mais moins sévère (*quasi-stationnaire, transition vers le severe slugging*), les accélérations sont beaucoup moins importantes. De plus, les vitesses du liquide et du gaz sont toujours très faibles, de l'ordre du mètre par seconde [18, 61, 163, 173].

Par conséquent, lorsque l'écoulement est légèrement instable, les termes d'inertie de l'équation de conservation de la quantité de mouvement peuvent être négligés. Le modèle présenté dans la section suivante est construit sous cette hypothèse. Il s'inspire de travaux récemment menés à l'Institut Français du Pétrole [21, 124, 165].

### 1.3 Le problème mathématique

Dans le cas d'une formulation du type *flux de dérive*, les équations de mouvement d'un écoulement diphasique isotherme sont données par les lois de conservation de la masse de chaque phase et par la loi de conservation de la quantité de mouvement du mélange; les termes d'accélération sont négligés dans cette dernière équation (voir section 1.2.3).

Localement dans chaque tronçon d'un pipeline (i.e. dans chaque pipe d'inclinaison constante), l'approximation mono-dimensionnelle de ces équations est valide. Nous en déduisons le système d'équations suivant où les variables physiques sont des valeurs instantanées, moyennées en espace sur la section droite du pipe [22] :

$$\forall(x, t) \in ]0, L[ \times ]0, T[,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho_L R_L] + \frac{\partial}{\partial x} [\rho_L R_L V_L] = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho_G R_G] + \frac{\partial}{\partial x} [\rho_G R_G V_G] = 0, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -F_p - (\rho_L R_L + \rho_G R_G) g \sin \theta. \quad (1.3)$$

$\rho_L$ ,  $\rho_G$ ,  $R_L$ ,  $R_G$ ,  $V_L$ ,  $V_G$  désignent respectivement les densités, les fractions surfaciques et les vitesses de phase du liquide et du gaz.  $P$  est la pression moyenne du mélange (contrairement à une formulation bi-fluide, on ne distingue pas les pressions du gaz et du liquide [50]).

Toutes ces quantités dépendent de la variable spatiale  $x$  et du temps  $t$ ; nous avons omis ces dépendances pour alléger les notations.  $x$  varie de 0 à  $L$  où  $L$  représente la longueur du pipe.  $g$  désigne l'accélération gravitationnelle tandis que  $\theta$  symbolise l'inclinaison de la conduite par rapport à l'horizontale (*cf.* figure 1.7).

*Remarque* : l'aire  $A(x)$  du pipe n'intervient pas explicitement dans les équations car nous avons supposé que son diamètre est constant.  $A(x)$  est donc une constante que l'on supprime aisément des équations en les multipliant par  $A^{-1}(x)$ .

Les effets de viscosités sont représentés par le frottement  $F_p$  du flot contre la paroi du pipe; nous parlerons dans la suite de *frottement pariétal*. Ce terme dépend des variables  $P$ ,  $R_G$ ,  $V_L$ ,  $V_G$  mais aussi du diamètre du pipe, de sa rugosité pariétale et des viscosités du liquide et du gaz. Ces quatre dernières quantités seront aussi supposées constantes [58, 155] :

$$F_p = F_p(R_G, P, V_G, V_L). \quad (1.4)$$

Les études expérimentales sur le *severe slugging* sont toujours pratiquées à température ambiante et à une pression de l'ordre de quelques bars [18, 43, 44, 45, 61, 140, 143, 144, 163, 173]. Dans de telles conditions, le coefficient de compressibilité du gaz est très proche de un [174]. Nous pouvons donc admettre qu'il se comporte comme un gaz idéal dont la loi est donnée par [71, 100] :

$$P = \rho \mathcal{R} T \quad (1.5)$$

$\mathcal{R}$  est la constante des gaz parfaits et  $T$  la température absolue du mélange diphasique.

Puisque le flot est supposé isotherme,  $T$  est une constante. Nous en déduisons l'équation d'état du gaz :

$$\rho_G(P) = \frac{P}{\mathcal{R} T}. \quad (1.6)$$

En ce qui concerne le liquide, nous le supposons légèrement compressible. Plus précisément puisque sa température est constante, la variation de sa densité peut s'exprimer en fonction d'une compressibilité [71, 81] :

$$K = \frac{1}{\rho_L} \left( \frac{\partial \rho_L}{\partial P} \right)_T = \frac{1}{\rho_L} \frac{d\rho_L}{dP}. \quad (1.7)$$

En admettant que  $K$  soit constante autour d'une pression de référence  $P_0$ , l'intégration de (1.7) nous donne :

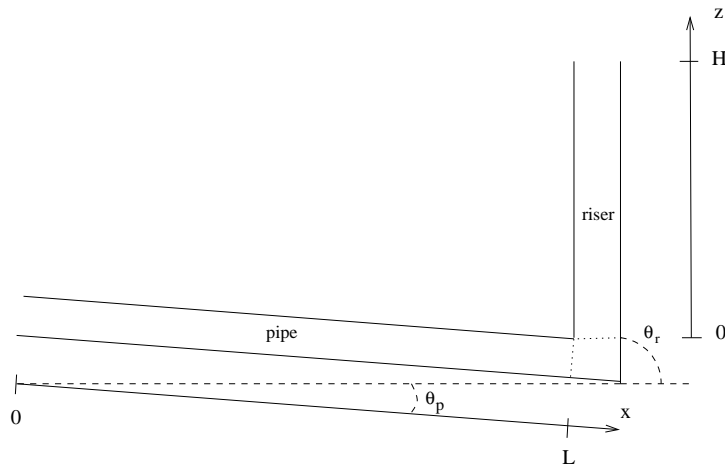
$$\rho_L(P) = \rho_L^0 \exp[K(P - P_0)] \quad (1.8)$$

où  $\rho_L^0$  est la densité du liquide à la pression  $P_0$ .

*Remarque* : puisque les pressions relevées au cours des études expérimentales du *severe slugging* sont de l'ordre du bar, nous imposerons  $P_0 = 1$  bar. Le coefficient de compressibilité  $K$  est quant à lui évalué de façon empirique pour une pression proche de  $P_0$ . On consultera les tables physiques de la littérature [34, 71].

Étant donné (1.4), (1.6) et (1.8), les variables  $P$ ,  $R_G$ ,  $V_G$  et  $V_L$  sont les seules inconnues du problème. Pour compléter le système d'équations (1.1) - (1.3), nous ajoutons une loi de glissement écrite sous la forme d'une relation entre ces variables. Cette loi dépend du type d'écoulement que nous déterminons en fonction de critères de transition :

$$\Psi(R_G, P, V_G, V_L) = 0. \quad (1.9)$$

Figure 1.7 : *Système pipe-riser.*

Dans la suite, nous décrirons les différents types d'écoulement diphasique gaz-liquide que l'on peut observer dans un pipeline et nous exprimerons leurs lois de glissement. Nous donnerons ensuite l'expression du frottement pariétal et nous décrirons finalement les critères de transition entre ces écoulements.

## 1.4 Classification des écoulements diphasiques gaz-liquide

En général, les écoulements diphasiques dans les pipelines sont classés suivant quatre principaux types de configurations dont la forme et parfois l'existence dépend de l'inclinaison de la conduite : à bulles, à bouchons ou à poches, stratifié et annulaire. Tout d'abord, nous décrirons les cas où le pipe est horizontal ou vertical. Nous verrons ensuite qu'il existe peu de situations où les écoulements sont très différents de ces deux cas extrêmes [10, 15].

### 1.4.1 Écoulements dans un pipe horizontal

*Écoulement stratifié.* Les deux phases sont séparées par une interface dont la forme moyenne est plus ou moins incurvée (concavité vers le gaz) dans une section droite du pipe. Le frottement du gaz sur le liquide provoque la formation de vagues lorsque la différence des vitesses des deux phases est grande. On parle dans ce cas d'écoulement *stratifié à vagues*. Dans le cas contraire où l'interface gaz-liquide est régulière, on parle plutôt d'écoulement *stratifié régulier*.

*Écoulement annulaire.* Cette configuration peut être considérée comme un cas particulier de la précédente où l'interface moyenne a une forme cylindrique, sans contact avec la paroi du pipe. Le gaz se déplace au centre de la conduite, entouré par la phase liquide qui s'écoule sur la paroi du pipe sous la forme d'un film. Celui-ci peut dans certains cas contenir des bulles de gaz. Inversement, la phase gazeuse peut aussi transporter des gouttelettes, voire des amas liquides beaucoup plus gros. Certains chercheurs font la distinction entre l'écoulement *annulaire* où la phase gazeuse ne contient pas de liquide et l'écoulement *annulaire à gouttelettes* dans le cas contraire.



*Écoulement dispersé à bulles.* Le gaz est dispersé dans la phase liquide, dite continue, sous la forme de bulles. La plupart d'entre elles s'accumule dans la partie supérieure du pipe. Néanmoins, elles se répartissent de façon plus uniforme dans toute la section droite du pipe lorsque le débit du liquide augmente.

*Écoulement intermittent.* On observe des poches de gaz séparées par des bouchons de liquide. Dans certains cas, ces derniers contiennent des bulles qui se concentrent à l'arrière des poches et dans la partie supérieure du pipe. On parle alors d'écoulement à bouchons. Parfois, le terme *plug* (*bouchon* en français) est employé pour désigner la configuration intermédiaire entre l'écoulement *dispersé* et l'écoulement à *bouchons*. L'écoulement à *longues poches* ou à *bulles allongées* est désigné comme le cas limite de l'écoulement à *bouchons* lorsque ceux-ci ne contiennent pas de bulles et que les poches de gaz sont grandes.

### 1.4.2 Écoulements dans un pipe vertical

*Écoulement à bulles.* La phase gazeuse se présente sous la forme de petites bulles, distribuées de façon presque uniforme dans la phase continue (liquide). L'écoulement est dit à *bulles* lorsque le débit liquide est faible. Si au contraire celui-ci est grand, on parle plutôt de *dispersé à bulles*. On observe dans ce cas un ensemble de bulles plus fines et aucune grosse bulle. Notons aussi que l'écoulement *dispersé à bulles* est observable quelle que soit l'inclinaison du pipe tandis que l'écoulement à bulles existe uniquement pour des flots verticaux (ou presque) dans des conduites de large diamètre [11].

*Écoulement intermittent.* Un tel flot se produit à partir d'un écoulement à *bulles*. Lorsque le débit de gaz augmente, les bulles se regroupent et entrent en coalescence. De grandes bulles, dont la forme ressemble à celle d'un obus, apparaissent. Ce sont des bulles de Taylor dont le diamètre est proche de celui du pipe [41]. Elles sont séparées par des bouchons de liquide qui en général contiennent de petites bulles de gaz. On parle alors d'écoulement à *bouchons*. Lorsque le flot est relativement lent, présente des interfaces gaz-liquide bien définies et que les bouchons de liquide ne contiennent pas de bulles, on emploie plutôt le terme *plug*.

*Écoulement bouillonnant.* Lorsque le débit de gaz est plus grand que celui observé dans le cas d'écoulements à *bouchons*, le flot devient plus chaotique, agité et désordonné. Ce type d'écoulement est souvent appelé *churn* ou *froth* (*bouillonnant* ou *mousseux* en français) et représente la transition entre les configurations à *bouchons* et *annulaires*.

*Écoulement annulaire.* Il est caractérisé par une phase gazeuse continue répartie le long du pipe, autour de son axe de révolution. La phase liquide se déplace en partie sous la forme d'un film irrégulier le long de la paroi de la conduite et pour le reste sous la forme de gouttelettes, entraînées par le noyau de gaz. L'écoulement est dit *annulaire à brins* (*wispy* en anglais) lorsque la phase liquide est entraînée sous la forme de brins.

*Remarque :* par simplicité, nous ne ferons pas la distinction entre l'écoulement à *poches* et les configurations *plug* ou à *longues poches* dans le cas horizontal. Lorsque la conduite est verticale, nous ne distinguerons pas les écoulements *plug* et *mixte* des écoulements à *bouchons*. Idem entre les flots à *bulles* et *dispersés à bulles* ou entre les configurations *annulaires* et *annulaires à brins*. En d'autres termes, nous ne modéliserons que quatre principaux types d'écoulements : *dispersé*, *intermittent*, *stratifié* et *annulaire*.

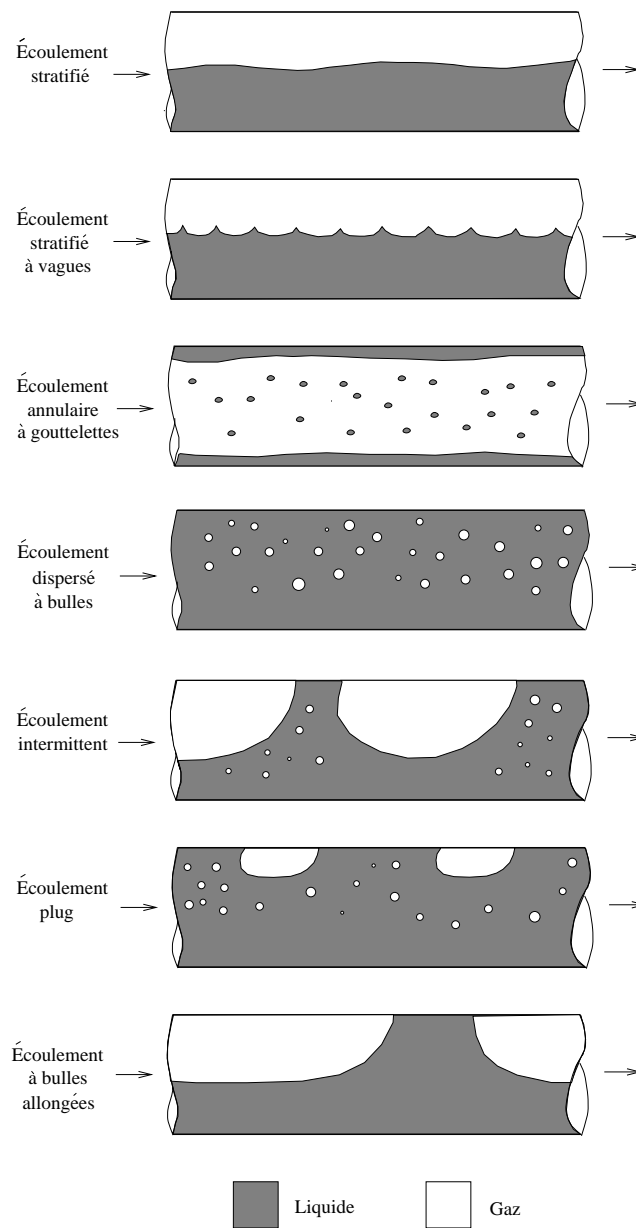


Figure 1.8 : Écoulements gaz-liquide dans un pipe horizontal (e.g. [15, 29, 83]).

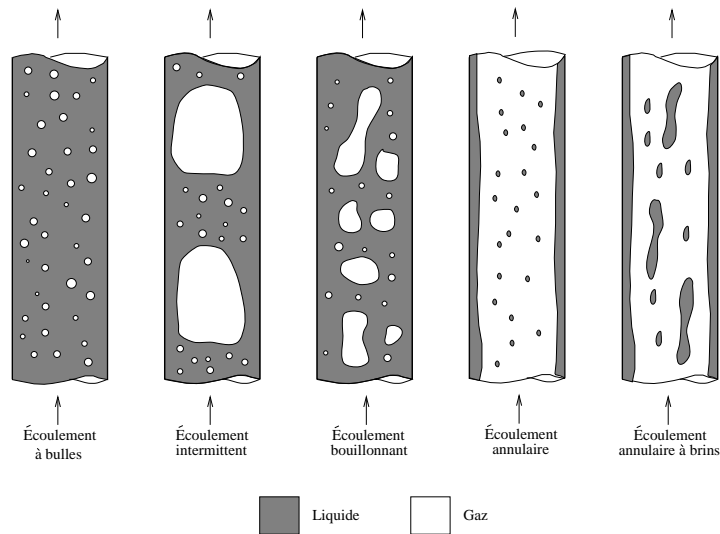


Figure 1.9 : Écoulements gaz-liquide dans un pipe vertical (e.g. [15, 29, 83]).

### 1.4.3 Écoulements dans un pipe incliné

Si l'inclinaison du pipe par rapport à l'horizontale est petite (de l'ordre de quelques degrés), les écoulements sont similaires à ceux décrits dans le cas horizontal. Pour des pipes proches de la verticale ou fortement inclinés, les configurations sont aussi similaires au cas vertical. Néanmoins, le *stratifié* n'existe pas pour des flots ascendants fortement inclinés. Il est par contre observable pour des flots descendants très inclinés, voire presque verticaux [11].

## 1.5 Lois de glissement

Nous décrivons dans cette section les lois de glissement des quatre principaux types d'écoulements précédemment décrits. Ces lois dépendent entre autres de la pente de la conduite, de son diamètre, de sa rugosité et de quelques coefficients que l'on calcule à l'aide de corrélations empiriques.

### 1.5.1 Écoulement intermittent

De nombreuses lois ont été proposées dans la littérature pour modéliser ce type de flot [5, 20, 50, 117, 116, 183]. Nicklin D. J. *et al.* ont établi en 1962 une corrélation très simple, devenue depuis un grand classique de la littérature diphasique, qui donne la vitesse de translation  $V_T$  des poches de gaz dans un écoulement à bouchons :

$$\begin{cases} V_T &= C_{int}U_S + u_d^{int}, \\ U_S &= U_G + U_L = R_G V_G + R_L V_L. \end{cases} \quad (1.10)$$

$U_G = R_G V_G$  et  $U_L = R_L V_L$  sont les vitesses superficielles du gaz et du liquide.  $U_S$  est la vitesse instantanée superficielle du mélange [22].  $C_{int}$  est un paramètre de distribution et  $u_d^{int}$  la vitesse de dérive des bulles de Taylor.

*Remarque* :  $U_G$  et  $U_L$  sont aussi appelés *flux volumétriques* du gaz et du liquide tandis que  $U_S$  est parfois désigné par le *flux volumétrique moyen* [178].

Dans la suite, nous supposerons que la vitesse du gaz  $V_G$  est donnée par la vitesse  $V_T$  [61, 140]. C'est exact pour un écoulement à longues poches ou plus généralement pour les poches de gaz d'un écoulement *intermittent*. C'est par contre approximatif pour des bulles éventuellement présentes dans les bouchons de liquide. Pour simplifier le problème, nous supposerons que l'erreur commise en remplaçant  $V_T$  par  $V_G$  n'aura pas une influence trop importante sur nos résultats. Nous aurons donc :

$$\begin{cases} V_G &= C_{int}U_S + u_d^{int}, \\ U_S &= R_L V_L + R_G V_G. \end{cases} \quad (1.11)$$

$u_d^{int}$  représente la vitesse locale relative d'une particule de gaz par rapport à la vitesse superficielle locale du mélange. Par définition, elle vaut [178, 183] :

$$u_d^{int} = V_G - U_S. \quad (1.12)$$

Pour des écoulements verticaux, une bonne approximation de  $u_d^{int}$  est donnée par la vitesse ascensionnelle à *l'infini* d'une bulle dans un milieu liquide stagnant. Ainsi pour de grosses bulles,  $u_d^{int}$  est donnée par [183] :

$$u_d^{int}(P) = 0.35 \sqrt{\frac{gD [\rho_L(P) - \rho_G(P)]}{\rho_L(P)}} \quad (1.13)$$

où  $D$  est le diamètre de la conduite.

Dans le cas horizontal, la vitesse de dérive d'une bulle allongée n'est pas forcément nulle [7, 17, 20, 27, 117, 179, 184]. Elle est induite par la différence de pression hydrostatique entre le haut et le bas de la section du pipe. Son expression est la suivante [20, 179] :

$$u_d^{int}(P) = 0.54 \sqrt{\frac{gD [\rho_L(P) - \rho_G(P)]}{\rho_L(P)}}. \quad (1.14)$$

Notons que si la vitesse du liquide est grande, la vitesse de dérive d'une bulle allongée est approximativement égale à zéro dans une conduite horizontale. Plus précisément, selon Bendiksen K. *et al.* [20],  $u_d^{int}$  est nulle si le nombre de Froude :

$$F_r = V_L \left[ \frac{gD [\rho_L(P) - \rho_G(P)]}{\rho_L(P)} \right]^{-1/2} \quad (1.15)$$

est approximativement supérieur à 3.5. Ce n'est pas le cas en général lorsque l'écoulement est du type *severe slugging*. Aussi nous admettrons dans la suite que (1.14) reste toujours vraie.

On procède ensuite par interpolation, à l'aide de fonctions trigonométriques, pour en déduire le cas général où la conduite est inclinée avec un angle positif  $\theta$  compris entre 0 (pipe horizontal) et  $\pi/2$  (pipe vertical) [17, 125] :

$$u_d^{int}(P, \theta) = (0.35 \sin \theta + 0.54 \cos \theta) \sqrt{\frac{gD [\rho_L(P) - \rho_G(P)]}{\rho_L(P)}}. \quad (1.16)$$

Lorsque le pipe a une pente négative, Bendiksen K. a démontré que la vitesse de dérive d'une bulle allongée vaut approximativement  $-|u_d^{int}(P, -\theta)|$  si  $-30^\circ \leq \theta < 0$  et si la vitesse

du liquide n'est pas trop grande. La pointe de la bulle est alors orientée dans le sens contraire du courant [18]. Si on augmente progressivement la vitesse du liquide, la bulle se désagrège en petites bulles au passage d'une valeur critique puis retrouve sa forme allongée avec cette fois-ci une pointe orientée dans le sens du courant (phénomène du *bubble turning* en anglais). Dans le même temps,  $u_d^{int}$  devient positive pour finalement tendre vers zéro lorsque  $V_L$  devient très grand.

Nous supposons que ces résultats restent vrais si  $\theta$  est compris entre  $-30^\circ$  et  $-90^\circ$ . En particulier dans le cas du *severe slugging*, la vitesse liquide est suffisamment petite pour qu'on puisse admettre :

$$u_d^{int}(P, \theta) = -| -0.35 \sin \theta + 0.54 \cos \theta | \sqrt{\frac{gD [\rho_L(P) - \rho_G(P)]}{\rho_L(P)}} \quad (1.17)$$

lorsque  $\theta$  est négatif.

En ce qui concerne la valeur du paramètre de distribution  $C_{int}$  qui apparaît dans (1.11), la valeur 1.2 est parfois choisie au lieu de 1.0 (en contradiction avec (1.12)) car les bulles se déplaceraient dans les régions où la vitesse du liquide est la plus grande et seraient donc transportées plus vite que la vitesse moyenne du mélange (symbolisée par  $U_S$  dans (1.11)) [116, 183].

En réalité, comme le soulignent Schmidt Z. *et al.* dans un de leurs articles sur le *severe slugging* [144],  $C_{int}$  peut varier entre 0.95 et 2. Plus précisément,  $C_{int}$  est proche de 1.2 pour des écoulements turbulents, tend vers deux dans le cas laminaire et est inférieur à un pour des écoulements descendants *intermittents* [20].

De nombreuses corrélations empiriques ont été proposées dans la littérature pour évaluer ce paramètre [18, 50, 58, 71, 125]. Celles-ci dépendent d'un nombre de Froude ou de Reynolds (au choix!) mais aussi de la tension superficielle et de l'inclinaison de la conduite. À titre d'exemple, Petalas N. & Khalid A. recommandent la corrélation suivante [125] :

$$C_{int}(P, U_S, \theta) = (1.64 + 0.12 \sin \theta) Re_{mL}^{-0.031}(P, U_S) \quad (1.18)$$

où  $Re_{mL}$  est un nombre de Reynolds du mélange donné par :

$$Re_{mL}(P, U_S) = \frac{\rho_L(P) |U_S| D}{\mu_L}. \quad (1.19)$$

Lorsqu'un écoulement est du type *severe slugging*, le nombre de Froude (1.15) est en général inférieur à 3.5. Dans ce cas, une bonne corrélation est donnée par [20] :

$$C_{int}(\theta) = 1.05 + 0.15 (\sin \theta)^2 \quad (1.20)$$

lorsque l'angle d'inclinaison  $\theta$  est positif ou nul.

On en déduit la loi de glissement (1.9) lorsque  $\theta \geq 0$  :

$$\begin{aligned} 0 = \Psi_{int}(R_G, P, V_G, V_L) &= V_G - \left[ 1.05 + 0.15 (\sin \theta)^2 \right] [(1 - R_G)V_L + R_G V_G] \\ &- (0.35 \sin \theta + 0.54 \cos \theta) \sqrt{\frac{gD [\rho_L(P) - \rho_G(P)]}{\rho_L(P)}}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Lorsque  $\theta$  est négatif,  $C_{int}$  est inférieur à un si la vitesse liquide est située en dessous d'une valeur critique correspondant au changement d'orientation de la bulle. Si on augmente progressivement

la vitesse liquide au delà de cette valeur, le paramètre de distribution devient supérieur à un pour finalement tendre vers 1.2.

Peu d'articles évoquent ce problème de la modélisation de l'écoulement *intermittent* dans une conduite descendante. Peut-être parce que l'écoulement *stratifié* est celui le plus souvent observé dans ce genre de situation. Notons tout de même que Bendiksen K. a proposé un critère de prédiction du *bubble turning*. Il l'a ensuite validé par des expériences où l'angle  $\theta$  pouvait varier entre 0 et  $-30^\circ$ . Malheureusement, sa formule dépend d'une variable que nous avons évité de modéliser par simplicité dans notre loi de glissement (1.11), à savoir l'épaisseur du film liquide s'écoulant sous les poches de gaz.

On pourrait éluder ce problème en supposant simplement que dans le cas du *severe slugging*, l'écoulement doit être *stratifié* si  $-90^\circ < \theta < 0$  et *annulaire* si  $\theta = -90^\circ$  puisque les débits liquides sont en principe assez petits (voir section 1.7.4). Ce qui nous éviterait de modéliser le cas *intermittent* dans une conduite descendante. Néanmoins, nous verrons au cours de nos comparaisons avec l'expérience, l'importance de cette modélisation que nous détaillerons dans le chapitre 4.

### 1.5.2 Écoulement dispersé

Une loi identique à celle des écoulements *intermittents* est choisie pour modéliser les écoulements *dispersés* [178, 183] :

$$\begin{cases} V_G &= C_{disp} U_S + u_d^{disp}, \\ U_S &= U_G + U_L = R_G V_G + R_L V_L. \end{cases} \quad (1.22)$$

Comme dans le cas précédent, une bonne approximation de  $u_d^{disp}$  est donnée dans le cas vertical par la vitesse ascensionnelle à l'infini d'une bulle dans un milieu liquide stagnant [80] :

$$u_d^{disp}(P) = 1.53 \left[ \frac{g [\rho_L(P) - \rho_G(P)] \sigma}{\rho_L^2(P)} \right]^{1/4}. \quad (1.23)$$

$\sigma$  est la tension superficielle du gaz dans le liquide.

Pour des écoulements horizontaux, la vitesse de dérive d'une petite bulle est nulle. D'où la corrélation donnant  $u_d^{disp}$  en fonction de l'angle d'inclinaison de la conduite :

$$u_d^{disp}(P, \theta) = 1.53 \left[ \frac{g [\rho_L(P) - \rho_G(P)] \sigma}{\rho_L^2(P)} \right]^{1/4} \sin \theta. \quad (1.24)$$

En ce qui concerne le paramètre de distribution, la valeur

$$C_{disp} = 1 \quad (1.25)$$

est souvent employée [158, 161] car mis à part les effets de flottabilités représentés par la vitesse de dérive  $u_d^{disp}$ , les bulles d'un écoulement *dispersé* se déplacent avec la vitesse moyenne du mélange diphasique :  $U_S = R_L V_L + R_G V_G$ . Cette valeur de  $C_{disp}$  sera supposée la même, quel que soit l'inclinaison de la conduite.

Nous en déduisons la loi de glissement (1.9), valide pour tout  $\theta$  :

$$\begin{aligned} 0 &= \Psi_{disp}(R_G, P, V_G, V_L) \\ &= V_G - [(1 - R_G) V_L + R_G V_G] - 1.53 \left[ \frac{g [\rho_L(P) - \rho_G(P)] \sigma}{\rho_L^2(P)} \right]^{1/4} \sin \theta. \end{aligned} \quad (1.26)$$

### 1.5.3 Écoulement stratifié

Pour ce type d'écoulement, les lois de glissement et de frottement dépendent tout naturellement de l'angle mouillé  $\Omega$  (cf. figure 1.10) dont la valeur est calculée en fonction du taux de vide  $R_G$  grâce à une relation géométrique [71] :

$$\Omega - \sin(\Omega) - 2\pi(1 - R_G) = 0. \quad (1.27)$$

$2\pi(1 - R_G)$  est le périmètre mouillé.

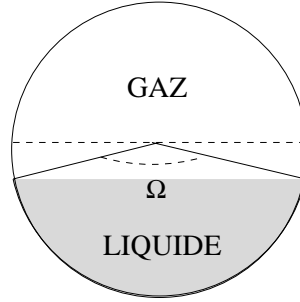


Figure 1.10 : Angle mouillé d'un écoulement stratifié.

La loi de glissement (1.9) est construite d'après les hypothèses suivantes [122] :

- écoulement isotherme à l'état d'équilibre (stationnaire),
- aucun transfert de masse entre les deux phases,
- termes d'accélération négligeables,
- gradient du niveau liquide (1.39) constant,
- gradient de pression identique dans les deux phases,
- propriétés physiques constantes.

Notons que la plupart de ces hypothèses ont déjà été admises (voir sections 1.2 et 1.3).

Nous en déduisons la loi de glissement suivante, donnée par la différence des équations de conservation des quantités de mouvement du liquide et du gaz [155] :

$$\begin{aligned} 0 = \Psi_{strat}(R_G, P, V_G, V_L) &= \tau_G(R_G, P, V_G) \frac{S_G(R_G)}{A_G(R_G)} - \tau_L(R_G, P, V_L) \frac{S_L(R_G)}{A_L(R_G)} \\ &+ \tau_i(R_G, P, V_G, V_L, V_i) S_i(R_G) \left[ \frac{1}{A_L(R_G)} + \frac{1}{A_G(R_G)} \right] \\ &- [\rho_L(P) - \rho_G(P)] g \sin \theta. \end{aligned} \quad (1.28)$$

$\tau_G$  et  $\tau_L$  sont les tenseurs de frottement pariétal du gaz et du liquide. Leurs expressions sont données par les formules suivantes :

$$\tau_G(R_G, P, V_G) = f_G(R_G, P, V_G) \rho_G(P) \frac{V_G |V_G|}{2}, \quad (1.29)$$

$$\tau_L(R_G, P, V_L) = f_L(R_G, P, V_L)\rho_L(P)\frac{V_L|V_L|}{2}. \quad (1.30)$$

$f_L$  et  $f_G$  sont les coefficients de frottement du liquide et du gaz.  $A_L$  et  $A_G$  désignent les surfaces occupées par le liquide et le gaz dans une section transversale du pipe.  $S_L, S_G, S_i$  sont les périmètres où agissent les frottements liquide, gazeux et interfacial (*cf.* figure 1.11).

Les coefficients  $f_L$  et  $f_G$  sont évalués pour un écoulement laminaire ou turbulent. Entre ces deux cas extrêmes, nous raccordons les expressions de façon continue en fonction du nombre de Reynolds pour en déduire leurs formules dans le cas transitoire. Par exemple [50, 71] :

$$f_k(R_G, P, V_k) = \begin{cases} \frac{16}{Re_k(R_G, P, V_k)} & \text{si } Re_k \leq 2000, \\ a_k(R_G) + b_k(R_G) [Re_k(R_G, P, V_k)]^{-c_k(R_G)} & \text{si } Re_k \geq 3000, \\ \left(3 - \frac{6000}{Re_k(R_G, P, V_k)}\right) (f_{turb} - f_{lam}) + f_{lam} & \text{si } 2000 < Re_k < 3000. \end{cases} \quad (1.31)$$

$k = L$  ou  $G$ .  $Re_k$  est le nombre de Reynolds de la phase  $k$  donné en fonction du diamètre hydraulique  $D_k$  (i.e. le diamètre équivalent occupé par la phase  $k$  [2, 71]) par la relation [155] :

$$Re_k(R_G, P, V_k) = \frac{\rho_k(P)D_k(R_G)|V_k|}{\mu_k}. \quad (1.32)$$

avec

$$D_L(R_G) = \frac{4A_L(R_G)}{S_L(R_G)}, \quad (1.33)$$

$$D_G(R_G) = \frac{4A_G(R_G)}{S_G(R_G) + S_i(R_G)}. \quad (1.34)$$

$\mu_k$  est la viscosité dynamique de la phase  $k$ .  $f_{lam}$  vaut  $f_k$  lorsque le nombre de Reynolds  $Re_k = 2000$  et  $f_{turb}$  est donné par  $f_k$  lorsque  $Re_k = 3000$ .

Les coefficients  $a_k(R_G)$ ,  $b_k(R_G)$  et  $c_k(R_G)$  sont donnés par les formules suivantes [71] :

$$\begin{aligned} a_k(R_G) &= 0.026 \left(\frac{e}{D_k(R_G)}\right)^{0.225} + 0.133 \left(\frac{e}{D_k(R_G)}\right), \\ b_k(R_G) &= 22 \left(\frac{e}{D_k(R_G)}\right)^{0.44}, \\ c_k(R_G) &= 1.62 \left(\frac{e}{D_k(R_G)}\right)^{0.134}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

où  $e$  désigne la rugosité pariétale du pipe.

*Remarque* : les formules (1.33), (1.34) sont construites suivant l'hypothèse que l'interface agit comme une surface libre par rapport à la phase liquide et comme une surface stationnaire, ou frontière solide, par rapport au gaz [2].  $D_L$  et  $D_G$  ont la forme d'un diamètre puisque qu'ils représentent un rapport entre une aire et un périmètre (rappelons qu'un disque d'aire  $A$  et de périmètre  $S$  a un diamètre de longueur  $4A/S$ ). Néanmoins  $D_L$  et  $D_G$  ne sont pas exactement les diamètres géométriques des disques dont l'aire vaut exactement  $A_L$  ou  $A_G$ . C'est pourquoi on parle plutôt de diamètres hydrauliques.

$\tau_i$  désigne le tenseur de frottement interfacial. Son expression diffère suivant les auteurs et peut aussi bien dépendre de  $V_G$  ou de  $V_L$  que de la vitesse de l'interface gaz-liquide que nous



avons noté  $V_i$ . En admettant que la phase liquide agit comme une surface solide par rapport au gaz, la formule suivante semble être la plus réaliste [156] :

$$\tau_i(R_G, P, V_G, V_L, V_i) = f_i(R_G, P, V_G)\rho_G(P)\frac{V_G - V_L|V_G - V_L|}{2} \quad (1.36)$$

$f_i$  est un coefficient de frottement dont la formule est donnée de façon empirique. De nombreuses corrélations ont été proposées dans la littérature pour le calculer. De récentes études comparatives [122, 123] recommandent plusieurs d'entre elles dont celle de Andristos & Hanratty [6] :

$$f_i(R_G, P, V_G) = \begin{cases} f_G(R_G, P, V_G) & \text{si } R_G V_G < U_{G0}, \\ f_G(R_G, P, V_G) \left[ 1 + 15 \sqrt{\frac{h_L(R_G)}{D}} \left( \frac{R_G V_G}{U_{G0}} - 1 \right) \right] & \text{si } R_G V_G \geq U_{G0} \end{cases} \quad (1.37)$$

qui ont choisi d'exprimer  $\tau_i$  sous la forme suivante :

$$\tau_i(R_G, P, V_G, V_L, V_i) = f_i(R_G, P, V_G)\rho_G(P)\frac{V_G|V_G|}{2}. \quad (1.38)$$

Dans (1.37),  $U_{G0}$  est une vitesse de transition égale à  $5\sqrt{\rho_{G0}/\rho_G} m.s^{-1}$  où  $\rho_{G0}$  désigne la masse volumique du gaz à la pression atmosphérique.  $h_L$  est la hauteur (ou niveau) liquide (*cf.* figure 1.11) dans une section droite du pipe [71] :

$$h_L(R_G) = \frac{D}{2} \left[ 1 - \cos\left(\frac{\Omega(R_G)}{2}\right) \right]. \quad (1.39)$$

Cette seconde expression (1.38) du tenseur de frottement interfacial est tirée des travaux de Taitel Y. & Dukler A. E. sur l'écoulement *stratifié* [155, 156]. Elle provient de la formule (1.36) où  $V_L$  est remplacé par la vitesse de l'interface gaz-liquide  $V_i$ . Elle suppose ensuite que cette vitesse est négligeable devant la vitesse du gaz. Ces approximations sont discutables, surtout lorsque les deux phases se déplacent à la même vitesse.

Néanmoins, l'expression (1.38) a un sens si  $R_G$  tend vers un car dans ce cas, la vitesse du liquide tend vers zéro et (1.38) est une bonne approximation de (1.36). Nous en déduisons que  $\tau_i \simeq \tau_g$  lorsque  $R_G$  est proche de un et  $f_i \simeq f_g$ . Nous verrons dans le chapitre 3 l'intérêt de ces dernières approximations.

Pour finir nous avons les formules suivantes [71] :

$$A_G(R_G) = R_G \pi (D/2)^2, \quad (1.40)$$

$$A_L(R_G) = (1 - R_G) \pi (D/2)^2, \quad (1.41)$$

$$S_G(R_G) = \frac{D}{2} [2\pi - \Omega(R_G)], \quad (1.42)$$

$$S_L(R_G) = \frac{D}{2} \Omega(R_G), \quad (1.43)$$

$$S_i(R_G) = D \sin\left(\frac{\Omega(R_G)}{2}\right). \quad (1.44)$$

Les diamètres hydrauliques seront donc formulés de la façon suivante :

$$D_L = \frac{2R_L \pi D}{\Omega}, \quad D_G = \frac{2R_G \pi D}{2\pi - \Omega + 2 \sin(\Omega/2)}. \quad (1.45)$$

Comme nous le soulignons précédemment, les diamètres géométriques  $D_L^*$  et  $D_G^*$  des disques dont l'aire vaut exactement  $A_L$  ou  $A_G$  sont différents des diamètres hydrauliques puisque :

$$D_L^* = 2\sqrt{A_L/\pi} = \sqrt{R_L}D, \quad D_G^* = 2\sqrt{A_G/\pi} = \sqrt{R_G}D. \quad (1.46)$$

*Remarque* : d'une façon générale, l'égalité (1.44) n'est pas vraie dans le cas où l'écoulement *stratifié* n'est pas à l'état d'équilibre car l'interface gaz-liquide n'est plus forcément rectiligne (dans une section droite du pipe). Il en est de même pour (1.27) qui devient une relation approchée. Pour finir, des termes d'accélération (ou d'inertie) et un terme dépendant du gradient du niveau liquide devraient compléter (1.28) [15].

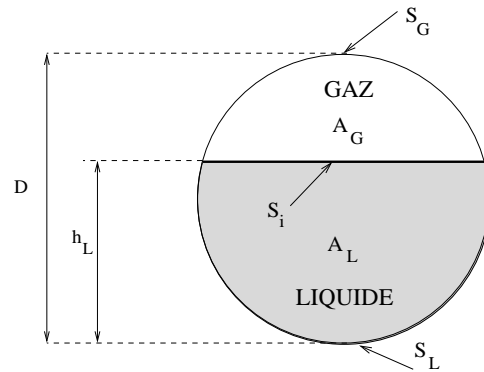


Figure 1.11 : Écoulement stratifié à l'état d'équilibre.

#### 1.5.4 Écoulement annulaire

La loi de glissement est construite d'après les hypothèses suivantes [122] :

- écoulement isotherme à l'état d'équilibre (stationnaire),
- aucun transfert de masse entre les deux phases,
- termes d'accélération négligeables,
- gradient de pression identique dans les deux phases,
- film liquide d'épaisseur constante (*cf.* figure 1.12),
- glissement nul entre les gouttelettes et la phase gazeuse dans le noyau,
- propriétés physiques constantes.

Notons que la plupart de ces hypothèses ont déjà été admises (voir sections 1.2 et 1.3).

Nous en déduisons la loi de glissement suivante, donnée par la différence des équations de conservation des quantités de mouvement du liquide et du gaz :

$$\begin{aligned} 0 = \Psi_{ann}(R_G, P, V_G, V_L) &= -\tau_L(R_G, P, V_L) \frac{S_L(R_G)}{A_L(R_G)} \\ &+ \tau_i(R_G, P, V_G, V_L, V_i) S_i(R_G) \left[ \frac{1}{A_L(R_G)} + \frac{1}{A_G(R_G)} \right] \\ &- [\rho_L(P) - \rho_G(P)] g \sin \theta. \end{aligned} \quad (1.47)$$

où  $\rho_C$  représente la densité moyenne du noyau (*core* en anglais) gaz-gouttelettes. Par simplicité, nous admettrons l'égalité suivante :

$$\rho_C(P) = \rho_G(P). \quad (1.48)$$

Elle est exacte lorsque le noyau de gaz ne transporte pas de gouttelette.

Les hypothèses précédentes impliquent :

$$S_L = \pi D \quad (1.49)$$

et  $S_i(R_G) = \pi D_C(R_G)$  où  $D_C(R_G)$  est le diamètre du noyau de gaz. Puisque  $A_G(R_G) = R_G \pi (D/2)^2 = \pi (D_C(R_G)/2)^2$ , on a  $D_C(R_G) = D\sqrt{R_G}$  et

$$S_i(R_G) = \pi D\sqrt{R_G}. \quad (1.50)$$

Les diamètres hydrauliques sont finalement donnés par :

$$D_G(R_G) = D_C(R_G) = D\sqrt{R_G}, \quad (1.51)$$

$$D_L(R_G) = 4A_L(R_G)/S_L(R_G) = R_L D. \quad (1.52)$$

*Remarque* : dans le cas *annulaire*, le diamètre hydraulique du gaz  $D_G$  vaut exactement le diamètre géométrique  $D_G^*$  (voir (1.46)).

En ce qui concerne le coefficient de frottement liquide  $f_L$ , (1.31) reste valide. Il est cependant recommandé pour la calcul de la rugosité pariétale relative  $e/D_L$  de prendre le diamètre du pipe  $D$  au lieu de  $D_L$ . Nous évitons ainsi des résultats irréalistes dans le cas limite de films liquides très fins [119]. L'expression de  $\tau_L$  est donnée par (1.30).

De nombreuses corrélations ont été proposées pour déterminer le coefficient de frottement interfacial  $f_i$  [122]. La formule suivante est particulièrement recommandée [82] :

$$f_i(R_G, P, V_G, V_L) = f_C(R_G, P, V_G) \left[ 1 + 24 \left( \frac{\rho_L(P)}{\rho_G(P)} \right)^{1/3} \frac{\delta(R_G)}{D} \right] \quad (1.53)$$

lorsque  $\tau_i$  est formulé de la façon suivante [82] :

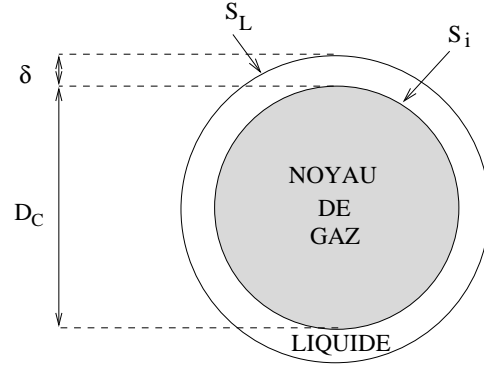
$$\tau_i(R_G, P, V_G, V_L, V_i) = f_i(R_G, P, V_G) \rho_G(P) \frac{V_G |V_G|}{2}. \quad (1.54)$$

$f_C(R_G, P, V_G)$  est un coefficient de frottement. Il joue le même rôle que  $f_G$  dans (1.37). Nous le calculons à l'aide de la formule (1.31) où  $Re_k$  est remplacé par

$$Re_C(R_G, P, V_G) = \frac{\rho_G(P) D_C(R_G) |V_G|}{\mu_G}. \quad (1.55)$$

$\delta$  est l'épaisseur du film liquide (*cf.* figure 1.12) que nous calculons grâce à la relation :

$$\delta(R_G) = \frac{D - D_C(R_G)}{2} = \frac{D(1 - \sqrt{R_G})}{2}. \quad (1.56)$$

Figure 1.12 : *Écoulement annulaire.*

## 1.6 Frottements pariétaux

Nous décrivons maintenant les expressions du frottement pariétal (1.4) en fonction du type d'écoulement. Ces formules dépendent de coefficients qui sont calculés grâce à des corrélations empiriques.

### 1.6.1 Écoulement stratifié

D'après les hypothèses formulées pour l'élaboration de la loi de glissement (1.28), les équations de conservation des quantités de mouvement des deux phases sont [155] :

$$0 = -A_L(R_G) \frac{dP}{dx} - \tau_L(R_G, P, V_L) S_L(R_G) + \tau_i(R_G, P, V_G, V_L, V_i) S_i(R_G) - \rho_L(P) A_L(R_G) g \sin \theta, \quad (1.57)$$

$$0 = -A_G(R_G) \frac{dP}{dx} - \tau_G(R_G, P, V_G) S_G(R_G) - \tau_i(R_G, P, V_G, V_L, V_i) S_i(R_G) - \rho_G(P) A_G(R_G) g \sin \theta. \quad (1.58)$$

$\tau_G$ ,  $\tau_L$  et  $\tau_i$  sont donnés par les formules (1.29), (1.30) et (1.36).  $A_G$ ,  $A_L$ ,  $S_G$  et  $S_L$  sont définis par (1.40)-(1.43).

La somme de ces équations entraîne :

$$\frac{dP}{dx} = -\tau_L(R_G, P, V_L) \frac{S_L(R_G)}{A} - \tau_G(R_G, P, V_G) \frac{S_G(R_G)}{A} - [\rho_L(P) R_L + \rho_G(P) R_G] g \sin \theta. \quad (1.59)$$

où  $A = A_L(R_G) + A_G(R_G) = (1 - R_G)A + R_G A$ ;  $A = \pi(D/2)^2$ .

En identifiant (1.59) avec (1.3) (les termes d'accélération sont négligés, voir page 16), nous en déduisons l'expression du frottement pariétal *stratifié* :

$$F_p^{strat}(R_G, P, V_G, V_L) = f_L(R_G, P, V_L) \frac{S_L(R_G)}{A} \rho_L(P) \frac{V_L |V_L|}{2} + f_G(R_G, P, V_G) \frac{S_G(R_G)}{A} \rho_G(P) \frac{V_G |V_G|}{2} \quad (1.60)$$

où nous avons remplacé  $\tau_G$  et  $\tau_L$  par leurs expressions respectives (1.29) et (1.30) .

### 1.6.2 Écoulement annulaire

Nous procédons de la même façon que dans le cas *stratifié* : en tenant compte des hypothèses admises pour l'élaboration de la loi de glissement (1.47), les équations de conservation des quantités de mouvement des deux phases sont données par (1.57) et (1.58) où  $S_G$  est pris égal à zéro et  $\rho_G(P)$  remplacé par  $\rho_C(P)$  (voir (1.47)).

Nous en déduisons le frottement pariétal *annulaire* :

$$F_p^{ann}(R_G, P, V_G, V_L) = f_L(R_G, P, V_L) \frac{S_L(R_G)}{A} \rho_L(P) \frac{V_L |V_L|}{2} \quad (1.61)$$

où  $S_L$  est donné par (1.49).

### 1.6.3 Écoulement dispersé

Dans le cas *dispersé*, le frottement pariétal est donné en fonction de la vitesse superficielle du mélange  $U_S(R_G, V_G, V_L) = R_G V_G + (1 - R_G) V_L$  [71] :

$$F_p^{disp}(R_G, P, V_G, V_L) = 2 \frac{f_m(R_G, P, V_G, V_L)}{D} \rho(R_G, P) U_S(R_G, V_G, V_L) |U_S(R_G, V_G, V_L)| \quad (1.62)$$

où  $\rho(R_G, P) = \rho_L(P)(1 - R_G) + \rho_G(P)R_G$  représente la densité moyenne du mélange.  $f_m$  est un coefficient de frottement du mélange donné par (1.31) où  $D_k = D$  et  $Re_k = Re_{mL}$  (voir (1.19)). Ce dernier ne dépend que de la viscosité de la phase continue car c'est le liquide qui est en contact avec la paroi du pipe.

### 1.6.4 Écoulement intermittent

Lorsque le flot est *intermittent*, des bouchons de liquide contenant des bulles dispersées, alternent avec des poches de gaz où le flot est essentiellement *stratifié*. Pour déterminer le frottement pariétal, il est donc nécessaire de résoudre un problème à deux domaines où le premier est occupé par un bouchon de liquide et le second par une poche de gaz [58].

L'écoulement est principalement *dispersé* dans le premier et *stratifié* dans le second : on peut introduire par exemple, un paramètre  $\beta$  qui représente la fraction de poche de gaz à l'intérieur d'une maille intermittente (*cf.* figure 1.13). On calcule  $\beta$  grâce aux relations de saut des équations de conservation de la masse que l'on évalue sur le front des bouchons de liquide. La vitesse de cette interface séparant les bulles des poches de gaz est donnée par (1.10).

Le frottement pariétal d'un écoulement *intermittent* est donc calculé grâce à la formule suivante [58] :

$$F_p^{int}(R_G, P, V_G, V_L) = \beta F_p^{strat}(R_G, P, V_G, V_L) + (1 - \beta) F_p^{disp}(R_G, P, V_G, V_L). \quad (1.63)$$

## 1.7 Transitions des écoulements diphasiques

Les critères de transition que nous avons choisis sont décrits dans [10, 15, 101, 125]. Ils dépendent par exemple, du critère de Kelvin-Helmholtz [155], du niveau liquide (1.39) ou encore d'une vitesse critique du liquide ou du gaz. Dans l'exposé qui suit, nous classons l'ensemble de ces critères en fonction de l'inclinaison du pipe.

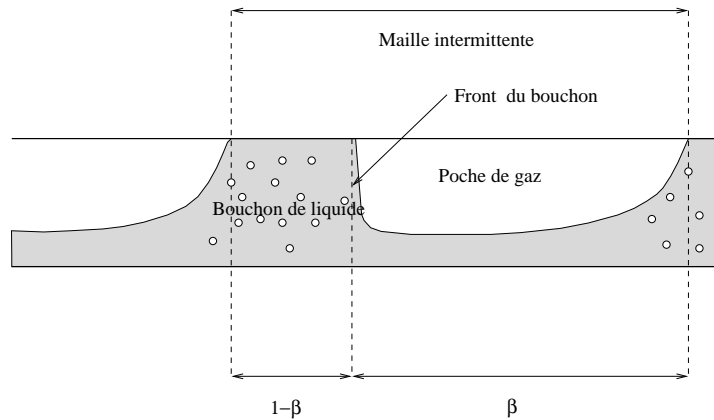


Figure 1.13 : Une maille intermittente.

### 1.7.1 Pipes horizontaux et légèrement inclinés

Les transitions possibles sont les suivantes [11] :

$$\begin{aligned}
 \textit{stratifié} &\longleftrightarrow \textit{annulaire}, \\
 \textit{stratifié} &\longleftrightarrow \textit{intermittent}, \\
 \textit{intermittent} &\longleftrightarrow \textit{dispersé}, \\
 \textit{annulaire} &\longleftrightarrow \textit{intermittent}.
 \end{aligned}$$

Lorsque les débits de gaz ou de liquide augmentent, on observe une transition de l'écoulement stratifié vers un autre type de flot. Cette transition est donnée par le critère suivant [155] :

$$V_G > \left(1 - \frac{h_L}{D}\right) \left[ \frac{(\rho_L - \rho_G)g \cos \theta R_G}{\rho_G \frac{dR_L}{dh_L}} \right]^{1/2} \quad (1.64)$$

où

$$\frac{dR_L}{dh_L} = \frac{1 - \cos \Omega}{\pi D \left[ \frac{h_L}{D} \left(1 - \frac{h_L}{D}\right) \right]^{1/2}}. \quad (1.65)$$

(1.65) se déduit à partir de (1.27) et (1.39).

Lorsque (1.64) est satisfaite, on observe une transition du stratifié vers l'intermittent si  $h_L > 0.35D$  ou un changement vers l'annulaire si  $h_L < 0.35D$ .

Une alternative est donnée par un critère fondé sur le concept du glissement minimal [18, 58]. On calcule la vitesse de glissement  $|V_G - V_L|$  dans les cas stratifié, annulaire et intermittent. La plus petite vitesse de glissement détermine alors le type de l'écoulement.

Notons aussi que (1.64) est une corrélation correcte lorsque les phases liquide et gazeuse sont respectivement de l'eau et de l'air. Autrement des modifications sont nécessaires [107, 138]. En ce qui nous concerne, le critère (1.64) est suffisant car les résultats expérimentaux à notre disposition ne font intervenir que des mélanges eau-air [43, 44, 45].

*Remarque* : le critère (1.64) est aussi employé pour une transition de l'intermittent vers le stratifié. Mais comme le remarque si justement De Henau V. dans sa thèse [49], le niveau liquide

$h_L$  n'a plus de sens physique si l'écoulement est intermittent [49]. Pour éluder ce problème, on peut supposer que le stratifié est l'écoulement de base et vérifier ensuite si l'inégalité est satisfaite (1.64). On peut aussi construire des conditions nécessaires d'existence de bouchons stables [139].

Comme nous l'avons remarqué précédemment, le type stratifié peut être divisé en deux sous-catégories qui sont les écoulements stratifiés régulier et ceux à vagues (ou irréguliers). Des vagues peuvent en effet apparaître lorsque la vitesse de gaz augmente sans pour autant provoquer la croissance rapide de celles-ci et mener à une transition du stratifié vers l'intermittent ou l'annulaire. Cette transition du stratifié régulier vers le stratifié à vagues est donnée par le critère suivant :

$$V_G > \left[ \frac{4\mu_L(\rho_L - \rho_G)g \cos \theta}{s\rho_L\rho_G V_L} \right]^{1/2} \quad (1.66)$$

où  $s$  est un coefficient égal à 0.01 [15].

Cependant, une condition remplace (1.66) pour des flots descendants où des vagues peuvent se développer si la vitesse liquide augmente. Ce critère peut s'exprimer en fonction d'un nombre critique de Froude [125] :

$$Fr = \frac{V_L}{\sqrt{gh_L}} > 1.4. \quad (1.67)$$

*Remarque* : le stratifié est rarement observé pour des flots ascendants légèrement inclinés et n'existe pas pour des flots ascendants fortement inclinés [11, 12, 14]. Ainsi certains modèles industriels limitent le stratifié à des écoulements horizontaux et descendants (e.g. [125]). Néanmoins, nous ne ferons pas cette hypothèse dans notre exposé.

La transition de l'intermittent vers le dispersé à bulles se produit pour de très grands débits liquides, lorsque les forces turbulentes dispersent la phase gazeuse en de petites bulles tandis que les forces de flottabilités attirent le gaz vers la partie supérieure du pipe et que les forces de tension superficielle tendent à maintenir les bulles dans leur taille maximale.

Le diamètre maximal de stabilité d'une bulle est donné par [87] :

$$d_{max} = k_{max} \left( \frac{\sigma}{\rho_L} \right)^{3/5} \left( 2 \frac{f_m}{D} |U_S|^3 \right)^{-2/5} \quad (1.68)$$

où  $f_m$  est un coefficient de frottement du mélange (voir (1.62)).

En ce qui concerne le coefficient  $k_{max}$ , il existe une corrélation simple [10] :

$$k_{max} = 0.725 + 4.15 \sqrt{\frac{R_G V_G}{U_S}}. \quad (1.69)$$

Cependant, la valeur  $k_{max} = 1.14$  est une bonne approximation si la densité de la phase dispersée est très petite par rapport à celle de la phase continue [145, 157]. Ce qui est vrai dans notre cas puisque le gaz est la phase dispersée et le liquide est la phase continue. Nous imposerons donc :  $k_{max} = 1.14$ .

Ainsi lorsque le diamètre de la bulle est inférieur au diamètre maximal de stabilité  $d_{max}$ , l'écoulement reste dispersé. Dans le cas contraire, celui-ci devient intermittent.

Il nous faut maintenant évaluer le diamètre d'une bulle. Pour cela, nous utilisons deux critères. Premièrement, si la bulle produite par le fractionnement turbulent est suffisamment

grande pour être très déformable, de grandes bulles de Taylor se formeront à nouveau par coalescence. En d'autres termes, le processus de fractionnement de la phase gazeuse par les forces turbulentes peut empêcher la coalescence seulement lorsque la taille des bulles produites est assez petite pour que celles-ci restent sphériques. La taille critique au dessus de laquelle la bulle est déformable est donnée par [26] :

$$d_{CD} = \left[ \frac{0.4\sigma}{(\rho_L - \rho_G)g} \right]^{1/2}. \quad (1.70)$$

Deuxièmement, la taille de bulle critique en dessous de laquelle la migration des bulles vers la partie supérieure du pipe est improbable peut s'estimer en écrivant une équation d'équilibre entre les forces de flottabilité et les forces turbulentes [10] :

$$d_{CB} = \frac{3}{8} \left[ \frac{\rho_L}{\rho_L - \rho_G} \right] \frac{f_m U_S^2}{g \cos \beta}. \quad (1.71)$$

Ainsi lorsque le diamètre de la bulle sur la frontière de transition, disons  $d_C$ , est pris comme la valeur minimale entre  $d_{CD}$  et  $d_{CB}$ , la transition de l'écoulement intermittent vers le dispersé à bulles a lieu lorsque :

$$d_C = \text{Min}(d_{CB}, d_{CD}) < d_{max}. \quad (1.72)$$

Notons que ce critère est vrai seulement si la densité volumétrique maximale d'empilement des bulles dispersées (ou empilement compact [62]) n'est pas atteinte (i.e.  $Rg < 0.52$  [11]).

Nous pouvons aussi écrire (1.72) de façon plus simple :

$$U_S > \text{Max}(U_S^{CB}, U_S^{CD}) \quad (1.73)$$

où

$$U_S^{CB} = 5.824 [g \cos \beta (\rho_L - \rho_G)]^{0.342} \sigma^{0.206} D^{0.232} \rho_L^{-0.452} \mu_L^{-0.095} \quad (1.74)$$

et

$$U_S^{CD} = 3.967 D^{0.428} [g(\rho_L - \rho_G)]^{0.446} \sigma^{0.089} \rho_L^{-0.464} \mu_L^{-0.071} \quad (1.75)$$

en supposant que  $f_m$  est donné, dans le cas turbulent, par la formule de Blasius [15, 157] :

$$f_m = 0.046 (Re_{mL})^{-0.2}. \quad (1.76)$$

$Re_{mL}$  est un nombre de Reynolds du mélange (voir (1.19)).

Pour finir, la transition de l'écoulement annulaire vers l'intermittent se produit lorsque la quantité de liquide contenue dans le film liquide est suffisante pour bloquer le passage du noyau de gaz en formant un "pont" liquide dans le pipe. Plus précisément, la transition se produit lorsque  $R_L > 0.24$  [10]. Néanmoins, pour des pipes horizontaux et légèrement inclinés, l'écoulement annulaire a lieu pour de très forts débits de gaz [12, 14]. Nous supposons donc que la transition de l'intermittent vers l'annulaire ne se produit que lorsque le critère (1.64) est vérifié, à condition que  $R_L < 0.24$ .

### 1.7.2 Écoulements ascendants, verticaux et fortement inclinés

Les transitions possibles sont les suivantes [11] :

$$\begin{aligned} \textit{intermittent} &\longleftrightarrow \textit{dispersé}, \\ \textit{annulaire} &\longleftrightarrow \textit{intermittent}. \end{aligned}$$



À faibles débits liquides, l'écoulement à bulles peut exister sous deux conditions [11]. La première est liée au diamètre du pipe. Celui-ci doit être assez large pour que la vitesse de dérive d'une bulle de Taylor soit plus grande que celle d'une petite bulle (sphérique) :

$$D > (4.36)^2 \left[ \frac{(\rho_L - \rho_G)\sigma}{\rho_L^2 g} \right]. \quad (1.77)$$

Deuxièmement, l'inclinaison du pipe par rapport à l'horizontale doit être assez grande pour empêcher la migration des bulles vers la partie supérieure du pipe. L'angle critique est généralement évalué entre  $55^\circ$  et  $70^\circ$ . Nous supposons dans la suite que cette condition est toujours vérifiée.

Ainsi lorsque (1.77) est satisfaite, la transition de l'intermittent vers l'écoulement à bulles a lieu si [11] :

$$U_L > 3U_G - 1.15 \left[ \frac{g(\rho_L - \rho_G)\sigma}{\rho_L^2} \right]^{1/4} \sin \theta \quad (1.78)$$

où  $U_L = R_L V_L$  et  $U_G = R_G V_G$  sont les vitesses instantanées superficielles du liquide et du gaz [22].

(1.78) suppose que le taux de vide sur la frontière de transition est égale à la valeur critique  $R_G^{crit} = 0.25$  car au dessus de cette valeur, la coalescence entre les bulles a toujours lieu à faibles débits liquides.

Lorsque les débits liquides sont grands, l'écoulement dispersé à bulles existe même lorsque  $R_G > 0.25$  car le processus de fractionnement de la phase gazeuse par les forces turbulentes empêchent la coalescence des bulles. La transition de l'intermittent vers le dispersé à bulles est donné par (1.73) qui est aussi valide pour des flots ascendants très inclinés.

L'écoulement annulaire peut exister sous deux conditions. Premièrement, la vitesse du noyau de gaz doit être suffisamment grande pour entraîner les gouttelettes de liquide. Dans le cas contraire, celles-ci retombent, s'accumulent, forment un bouchon et donnent naissance à un écoulement intermittent. Deuxièmement, la fraction liquide doit être petite. Autrement, un bouchon peut apparaître si la quantité de liquide dans le film est assez grande pour maintenir un pont liquide dans une section du pipe.

Plus précisément, la fraction liquide  $R_L$  doit être inférieure à 0.24. Cette valeur suppose que la fraction liquide minimale à l'intérieur d'un pont liquide est égale approximativement à 0.48 et vaut deux fois celle de l'écoulement annulaire [13]. La valeur 0.48 est liée à la densité volumétrique maximale d'empilement des bulles dispersées, à savoir 0.52.

Finalement, la transition de l'écoulement intermittent vers l'annulaire se produit si  $R_L < 0.24$  et si la vitesse du gaz dépasse la vitesse critique [15] :

$$V_G = 3.1 \left[ \frac{g(\rho_L - \rho_G)\sigma \sin \theta}{\rho_G^2} \right]^{1/4}. \quad (1.79)$$

### 1.7.3 Écoulements descendants, verticaux et fortement inclinés

Les transitions possibles sont les suivantes [11] :

$$\begin{aligned} \textit{annulaire} &\longleftrightarrow \textit{intermittent}, \\ \textit{intermittent} &\longleftrightarrow \textit{dispersé}, \\ \textit{stratifié} &\longleftrightarrow \textit{annulaire}. \end{aligned}$$

De façon similaire, la transition de l'annulaire vers l'intermittent exige que la fraction liquide  $R_L$  soit plus grande que 0.24. La transition de l'intermittent vers le dispersé à bulles est donnée par (1.73), valable aussi pour de fortes inclinaisons descendantes.

Pour finir, si l'écoulement stratifié n'existe pas pour des flots verticaux, il peut néanmoins apparaître pour de fortes inclinaisons descendantes. La transition vers l'écoulement annulaire exige que le niveau liquide  $h_L$  soit petit et que la vitesse liquide soit grande. Dans ce cas, des gouttelettes se détachent de l'interface pour venir sur la paroi supérieure du pipe et créer un film annulaire. La condition pour que cette transition vers l'annulaire se produise est donnée par [11] :

$$V_L > \left[ \frac{gD(1 - h_L/D) \cos \theta}{f_L} \right]^{1/2}. \quad (1.80)$$

#### 1.7.4 Écoulements à faibles débits

Nous rappelons que le *severe slugging* apparaît lorsque les débits de gaz et de liquide sont faibles. Dans une telle situation et en accord avec tous les critères de transition que nous venons d'énoncer, nous prévoyons les configurations suivantes lorsque :

- Écoulement descendant vertical ou très incliné : *annulaire*,
- Écoulement horizontal ou descendant légèrement incliné : *stratifié* ou *intermittent*,
- Écoulement ascendant légèrement incliné : *intermittent*,
- Écoulement ascendant vertical ou très incliné : *à bulles* ou *intermittent*.



## Chapitre 2

# Modèle algébro-différentiel

Ce chapitre est consacré à la modélisation simplifiée des écoulements gaz-liquide dans les conduites pétrolières du type pipeline-riser. Le modèle est présenté sous la forme d'un système d'équations algébriques et différentielles.

### 2.1 Introduction

Le *severe slugging* est un phénomène où alternent au cours du temps, la production de longs bouchons de liquide et l'explosion de poches de gaz. On trouve dans la littérature de nombreuses études expérimentales de cet écoulement diphasique très particulier [43, 44, 45, 61, 85, 96, 142, 163, 173]. Les courbes relevées (pressions, débits, vitesses, etc) indiquent clairement que le *severe slugging* est un phénomène périodique. Or la littérature mathématique est remplie d'exemples où la théorie des systèmes dynamiques s'est appliquée avec succès à l'analyse de phénomènes oscillatoires périodiques, quasi-périodiques ou encore chaotiques (e.g. [35, 72, 73, 77, 88]). C'est ce que nous allons tenter de prouver à nouveau dans le cas du *severe slugging*.

Les modèles diphasiques disponibles dans la littérature sont en général écrits sous la forme d'équations aux dérivées partielles [71, 125, 152, 178]. Plusieurs codes numériques industriels sont construits à partir de ces modèles [18, 58]. Comme nous l'avons souligné précédemment (voir chapitre *Introduction*, p. xviii), le *severe slugging* est un phénomène difficile à simuler. C'est pourquoi d'autres modèles ont été récemment proposés pour simplifier la prédiction et l'analyse du phénomène [61, 140, 144, 163, 162, 173]. Certains auteurs en ont alors déduit quelques résultats d'analyse de stabilité et des critères de prédiction [24, 127, 154].

Cependant, aucune étude systématique du phénomène en fonction des paramètres physiques du problème n'est disponible dans la littérature. Plusieurs points restent encore à éclaircir :

- Étude locale des bifurcations d'un écoulement gaz-liquide dans un système pipeline-riser.
- Nature mathématique de l'instabilité du type *severe slugging*.
- Contrôle optimal de l'écoulement d'un système pipe-riser en fonction des paramètres opérationnels du système.

Pour résoudre tous ces problèmes, il est beaucoup plus simple d'étudier un système d'équations différentielles plutôt qu'un ensemble d'équations aux dérivées partielles. En ce qui concerne le *severe slugging*, des modèles différentiels ont déjà été présentés dans la littérature [61, 140, 144, 163]. L'une des approches souvent proposées consiste à intégrer en espace les équations de conservation de l'écoulement dans chaque tronçon du pipeline.

Dans le cas d'un système à deux tronçons du type pipe-riser (*cf.* figure 1.7), l'intégration dans le pipe se fait naturellement entre ses deux extrémités, en l'occurrence entre 0 et  $L$  pour le système (1.1) - (1.3). Dans le riser, il est par contre plus judicieux d'intégrer les équations entre son pied et le niveau liquide (*cf.* figure 1.2) [61, 140]. L'explication est simple : lorsque le niveau liquide est situé en dessous du sommet du riser (étapes 1 et 4 du *severe slugging*, section 1.1), la pression au dessus de la surface libre est approximativement celle du séparateur et le taux de vide est environ égal à 1. Il est donc inutile de modéliser le flot au dessus du niveau liquide car cela n'apporte rien à l'analyse du problème. Remarquons aussi que la hauteur liquide est une discontinuité mobile à travers laquelle le taux de vide change de valeur de manière discontinue.

Avant d'intégrer les équations, nous rappelons que notre but est de construire un modèle différentiel simple à analyser. Il est donc primordial de chercher si il existe un ensemble de variables à partir desquelles on puisse calculer de manière simple, l'ensemble des quantités caractéristiques d'un écoulement diphasique : pression, vitesse, taux de vide, débits, densités, etc.

## 2.2 Variables fondamentales du modèle

Lorsque  $R_G$ ,  $P$  et  $U_S$  sont connus,  $V_G$  est évaluée directement à partir de (1.11) si l'écoulement est *intermittent* et grâce à (1.22) dans le cas *dispersé*.  $V_L$  est ensuite calculée grâce aux relations  $U_S = R_L V_L + R_G V_G$  et  $R_L + R_G = 1$ . Quant aux densités  $\rho_L$  et  $\rho_G$ , elles sont déterminées grâce aux équations (1.6) - (1.8).

Lorsque le flot est *stratifié*, nous remplaçons  $V_G$  par  $(U_S - R_L V_L)/R_G$  dans (1.28) pour obtenir une équation implicite par rapport à la variable  $V_L$ . Nous la résolvons à l'aide d'une méthode itérative et nous en déduisons  $V_G$  grâce à la relation  $V_G = (U_S - R_L V_L)/R_G$ . Pour l'écoulement annulaire, nous procédons de la même façon avec (1.47).

En conclusion, si les variables  $R_G$ ,  $P$  et  $U_S$  sont connues, il est possible de calculer les vitesses, les densités volumétriques et les débits massiques de chaque phase pour tous les types d'écoulements que nous avons décrits dans la section 1.5. Nous les choisirons comme variables fondamentales de notre modèle :

$$V_G = V_G(R_G, P, U_S), \quad V_L = V_L(R_G, P, U_S), \quad (2.1)$$

$$\rho_G = \rho_G(P), \quad \rho_L = \rho_L(P), \quad (2.2)$$

$$q_L = q_L(R_G, P, U_S) \stackrel{\text{déf}}{=} \rho_L(P)(1 - R_G)V_L(R_G, P, U_S), \quad (2.3)$$

$$q_G = q_G(R_G, P, U_S) \stackrel{\text{déf}}{=} \rho_G(P)R_G V_G(R_G, P, U_S). \quad (2.4)$$

## 2.3 Relations de saut

Nos variables étant définies, voyons maintenant si elles sont continues à travers des discontinuités. Nous pensons évidemment à la discontinuité du niveau liquide dans le riser ou encore à celle située au point de raccordement entre le pipe et le riser car le changement de pente induit probablement une variation brutale des vitesses de phase.

Tout d'abord, nous remarquons que la pression est continue à travers toute discontinuité, statique ou mobile. Cette propriété résulte de la relation de saut associée à l'équation de conservation de la quantité de mouvement du mélange [57] :

$$[[P]] = 0. \quad (2.5)$$

La notation  $\llbracket P \rrbracket$  représente le saut des valeurs de  $P$  au point de discontinuité [57].

Puisque le flot est supposé barotropique (*cf.* (2.2)), nous avons :

$$\llbracket \rho_L \rrbracket = 0 \text{ and } \llbracket \rho_G \rrbracket = 0. \quad (2.6)$$

Si on note  $\sigma$  la vitesse d'une discontinuité, les relations de saut des équations de conservation des masses liquide et gazeuse donnent les relations de Rankine-Hugoniot (e.g. [68]) suivantes :

$$\llbracket \rho_L U_L \rrbracket = \sigma \llbracket \rho_L R_L \rrbracket \text{ et } \llbracket \rho_G U_G \rrbracket = \sigma \llbracket \rho_G R_G \rrbracket \quad (2.7)$$

où  $U_L = R_L V_L$  et  $U_G = R_G V_G$  sont les vitesses superficielles du liquide et du gaz. Nous déduisons de (2.6) que :

$$\llbracket U_L \rrbracket = \sigma \llbracket R_L \rrbracket \text{ et } \llbracket U_G \rrbracket = \sigma \llbracket R_G \rrbracket \quad (2.8)$$

ou encore

$$\llbracket (1 - R_G) V_L \rrbracket = \sigma \llbracket 1 - R_G \rrbracket \text{ et } \llbracket R_G V_G \rrbracket = \sigma \llbracket R_G \rrbracket. \quad (2.9)$$

Finalement, si nous additionnons ces relations de saut, nous trouvons :

$$\llbracket U_L + U_G \rrbracket = \llbracket U_S \rrbracket = 0 \quad (2.10)$$

car  $R_G + R_L = 1$ .

En conclusion, les variables  $P$  et  $U_S$  sont continues en tout point de la conduite, notamment aux points de discontinuité géométriques. Par contre, la variable  $R_G$  n'est pas forcément continue en tout point car elle doit vérifier les relations de saut (2.9).

*Remarque* : toutes ces relations sont fausses si des termes d'accélération sont ajoutés à l'équation simplifiée (1.3) de la conservation de la quantité de mouvement du mélange :

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho_L R_L V_L + \rho_G R_G V_G] + \frac{\partial}{\partial x} [\rho_L R_L V_L^2 + \rho_G R_G V_G^2 + P] = -F_p - (\rho_L R_L + \rho_G R_G) g \sin \theta. \quad (2.11)$$

Dans ce cas, la relation de saut (2.5) devient :

$$\llbracket \rho_L R_L V_L (V_L - \sigma) + \rho_G R_G V_G (V_G - \sigma) + P \rrbracket = 0. \quad (2.12)$$

(2.12) est évidemment beaucoup plus complexe. Nous comprenons mieux maintenant l'intérêt de la simplification de l'équation de conservation de la quantité de mouvement du mélange que nous avons évoquée dans la section 1.2.3.

## 2.4 Notations

Les indices 0, 1, 2, 3, 4 désigneront respectivement l'entrée du pipe, sa sortie, l'entrée du riser, son niveau liquide et sa surface libre (*cf.* figure 2.1). Ces notations sont similaires à celles employées par Fabre, J. *et al.* dans [61]. Ainsi  $H_3$  désignera la hauteur liquide dans le riser.

Puisque la pression  $P$  et la vitesse superficielle du mélange  $U_S$  sont des variables continues (voir (2.5) et (2.10)), nous avons au point de connection pipe-riser 1-2,

$$P_1 = P_2 \stackrel{\text{déf}}{=} P_{12}, \quad (2.13)$$

$$U_S^1 = U_S^2 \stackrel{\text{déf}}{=} U_S^{12}. \quad (2.14)$$

Au point de discontinuité niveau liquide-surface libre 3-4, ces relations deviennent :

$$P_3 = P_4 \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} P_{34} \quad (2.15)$$

$$U_S^3 = U_S^4 \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} U_S^{34}. \quad (2.16)$$

La connection pipe-riser est une discontinuit\u00e9 statique, de nature g\u00e9om\u00e9trique :  $\sigma = 0$ . Les relations (2.8) impliquent donc :

$$U_G^1 = U_G^2 \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} U_G^{12} \text{ et } U_L^1 = U_L^2 \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} U_L^{12}. \quad (2.17)$$

Les conditions aux limites \u00e0 l'entr\u00e9e du pipe sont donn\u00e9es par les d\u00e9bits massiques du liquide et du gaz :

$$q_L^0 = \rho_L(P_0)(1 - R_G^0)V_L(R_G^0, P_0, U_S^0), \quad (2.18)$$

$$q_G^0 = \rho_G(P_0)R_G^0V_G(R_G^0, P_0, U_S^0). \quad (2.19)$$

Une seule condition est impos\u00e9e en sortie, \u00e0 savoir la pression  $P_S$  dans le s\u00e9parateur. Lorsque le niveau liquide  $H_3$  est inf\u00e9rieur \u00e0 la hauteur du riser  $H$ , la relation suivante est toujours vraie (*cf.* figure 2.1) :

$$P_{34} = P_S. \quad (2.20)$$

(2.20) devient approximative lorsque le liquide se d\u00e9verse dans le s\u00e9parateur (\u00e9tapes 2 et 3 du *severe slugging*, section 1.1) car le niveau liquide est par d\u00e9finition situ\u00e9 au sommet du riser ( $H_3 = H$ ) alors que la surface libre, symbolis\u00e9e par le point 4, se trouve \u00e0 l'int\u00e9rieur du s\u00e9parateur, loin du point 3 (*cf.* figure 2.2).

N\u00e9anmoins, si le riser d\u00e9bouche sur un s\u00e9parateur horizontal, les pertes de charge sont tr\u00e8s faibles et la pression dans le s\u00e9parateur vaut approximativement celle mesur\u00e9e au sommet du riser [163]. Si le riser \u00e9vacue le m\u00e9lange diphasique dans un s\u00e9parateur vertical, il suffit de relier les deux par un pipe de diam\u00e8tre beaucoup plus important (disons deux fois plus grand) pour que (2.20) soit toujours vraie (voir section 4.2.1) [43].

En ce qui concerne la relation (2.16), elle n'a pas trop de sens au cours des \u00e9tapes 2 et 3 du *severe slugging* car la vitesse  $U_S$  au sommet du riser, i.e.  $U_S^3$ , n'est pas forc\u00e9ment \u00e9gale \u00e0 la vitesse  $U_S^4$  de la surface libre du m\u00e9lange dans le s\u00e9parateur. Aussi nous oublierons la relation (2.16) ; nous ne parlerons que de la vitesse  $U_S^3$  du niveau liquide dans le riser.

## 2.5 Un mod\u00e8le pipe-riser

Suite \u00e0 notre discussion de la section 2.1, nous int\u00e9grons s\u00e9par\u00e9ment le syst\u00e8me (1.1) - (1.3) dans le pipe et le riser. La variable  $x$  varie entre 0 et  $L$  pour le premier tron\u00e7on et entre 0 et  $H_3$  pour le second. Pour \u00e9viter toute confusion, nous la noterons  $z$  dans le riser (*cf.* figure 2.1).

Nous introduisons les notations suivantes :

$$m_L^{01} = \int_0^L \rho_L R_L dx ; m_G^{01} = \int_0^L \rho_G R_G dx. \quad (2.21)$$

$$m_L^{23} = \int_0^{H_3(t)} \rho_L R_L dz ; m_G^{23} = \int_0^{H_3(t)} \rho_G R_G dz, \quad (2.22)$$

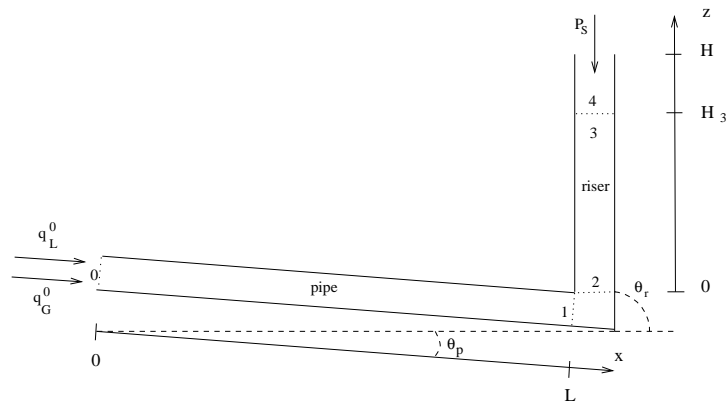


Figure 2.1 : *Système pipe-riser* ( $\theta_p < 0$ ,  $\theta_r = \pi/2$ ).

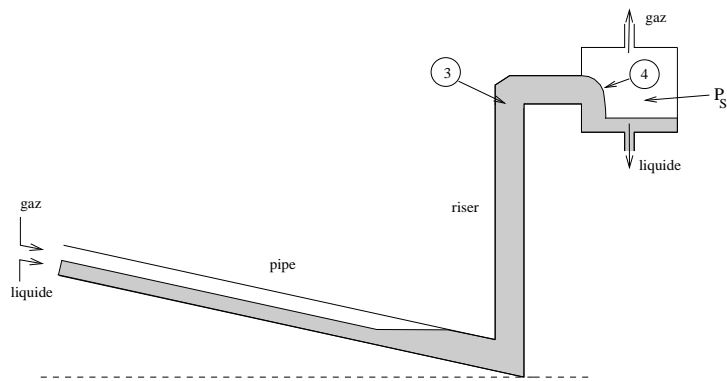


Figure 2.2 : *Écoulement d'un bouchon de liquide dans le séparateur.*



L'équation de conservation de la masse liquide dans le pipe intégrée entre 0 et  $L$  donne l'équation suivante :

$$\frac{dm_L^{01}}{dt} = \rho_L(P_0)(1 - R_G^0)V_L(R_G^0, P_0, U_S^0) - \rho_L(P_{12})(1 - R_G^1)V_L(R_G^1, P_{12}, U_S^{12}). \quad (2.23)$$

De l'équation de conservation de la masse gazeuse, nous déduisons :

$$\frac{dm_G^{01}}{dt} = \rho_G(P_0)R_G^0V_G(R_G^0, P_0, U_S^0) - \rho_G(P_{12})R_G^1V_G(R_G^1, P_{12}, U_S^{12}). \quad (2.24)$$

L'intégration entre 0 et  $H_3$  des équations de conservation de la masse dans le riser nous donne :

$$\begin{aligned} \frac{dm_L^{23}}{dt} &= \rho_L(P_{12})(1 - R_G^2)V_L(R_G^2, P_{12}, U_S^{12}) \\ &\quad + \rho_L(P_S)(1 - R_G^3) \left[ \Lambda_3(H_3, V_L(R_G^3, P_S, U_S^3)) - V_L(R_G^3, P_S, U_S^3) \right] \end{aligned} \quad (2.25)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{dm_G^{23}}{dt} &= \rho_G(P_{12})R_G^2V_G(R_G^2, P_{12}, U_S^{12}) \\ &\quad + \rho_G(P_S)R_G^3 \left[ \Lambda_3(H_3, V_L(R_G^3, P_S, U_S^3)) - V_G(R_G^3, P_S, U_S^3) \right]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Puisque le niveau liquide  $H_3$  dépend du temps (c'est une discontinuité mobile), un terme additionnel, noté  $\Lambda_3$ , apparaît dans les deux dernières équations différentielles (2.25) et (2.26). C'est la dérivée par rapport au temps de  $H_3$  [61, 140, 144] :

$$\begin{aligned} \frac{dH_3}{dt} &= \Lambda_3(H_3, V_L(R_G^3, P_S, U_S^3)) \\ &= \begin{cases} V_L(R_G^3, P_S, U_S^3) & \text{si } (H_3 < H) \text{ ou } (H_3 = H \text{ et } V_L(R_G^3, P_S, U_S^3) < 0), \\ 0 & \text{si } H_3 = H \text{ et } V_L(R_G^3, P_S, U_S^3) \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.27)$$

L'expression de  $\Lambda_3$  est donné par la relation de saut de l'équation de conservation de la masse liquide dans le riser à travers une discontinuité où  $R_L$  est strictement positif d'un côté et vaut zéro de l'autre [57]. Dans (2.27), nous avons admis par simplicité que le niveau liquide  $H_3$  ne descend jamais jusqu'au pied du riser. En d'autres termes, nous admettrons que l'hypothèse suivante est toujours vérifiée :

$$H_3(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}^+. \quad (2.28)$$

Il nous reste à intégrer les équations de conservation de la quantité de mouvement du mélange dans le pipe et le riser. L'intégration le long du pipe nous donne :

$$0 = P_{12} - P_0 + \int_0^L F_p(x)dx + g \sin(\theta_p)(m_L^{01} + m_G^{01}) \quad (2.29)$$

et dans le riser :

$$0 = P_S - P_{12} + \int_0^{H_3(t)} F_p(z)dz + g \sin(\theta_r)(m_L^{23} + m_G^{23}) \quad (2.30)$$

où  $F_p$  est donné en fonction du type d'écoulement par (1.60) - (1.63).

Dans la pratique, l'influence du frottement sur la perte de charge dans le riser dépend de l'amplitude des oscillations de l'écoulement. Elle est importante si le *severe slugging* est

très prononcé car, au cours de la troisième étape (*cf.* figure 1.4), l'écoulement dans le riser est *annulaire* sous le bouchon de liquide. Elle est par contre très faible si l'écoulement est *dispersé* ou *intermittent* car les forces de gravité dépassent largement les forces de frottement. En particulier, lorsque le pipe est horizontal, la phase gazeuse n'est jamais entièrement bloquée au pied du riser et l'écoulement dans celui-ci est proche d'un écoulement *intermittent* [61]. C'est aussi vrai lorsque le *severe slugging* n'est pas trop violent : écoulements *quasi-stationnaires* (voir section 4.2.6), transition vers le *severe slugging*.

Tout comme les termes d'accélération (voir section 1.2.3), nous négligerons les termes de frottement dans le riser. Ce qui sous-entend que notre modèle n'est conçu que pour décrire des écoulements légèrement instables et surtout pas du *severe slugging* tel que nous l'avons défini dans la section 1.1. Nous verrons plus loin que ces approximations suffiront pour atteindre les objectifs fixés dans la section 2.1.

En ce qui concerne le frottement pariétal dans le pipe, nous approchons son intégrale par une interpolation linéaire (formule des trapèzes [28]) car les seules informations que nous avons sur le flot dans le pipe sont des valeurs à ses extrémités :

$$\int_0^L F_p(x) dx \simeq \frac{1}{2} L [F_p^0 + F_p^1], \quad (2.31)$$

$F_p^0$  et  $F_p^1$  désignent respectivement les valeurs de  $F_p$  à l'entrée et la sortie du pipe.

Si les variables  $R_G$ ,  $P$  et  $U_S$  sont connues, nous avons vu qu'il est possible de déterminer l'ensemble des variables caractéristiques d'un écoulement grâce aux relations (2.1) -(2.4). Il en est de même pour le frottement pariétal  $F_p$  grâce aux relations (1.60) - (1.63) :

$$F_p = F_p(R_G, P, V_G(R_G, P, U_S), V_L(R_G, P, U_S)).$$

Rappelons que le choix d'un régime d'écoulement dépend des critères de transition que nous avons décrits dans la section 1.7.

Pour alléger les notations, nous modifions l'expression des dépendances de  $F_p$  et définissons dorénavant ce dernier comme une fonction des trois variables  $R_G$ ,  $P$ ,  $U_S$  :

$$F_p = F_p(R_G, P, U_S). \quad (2.32)$$

Aussi, nous définirons :

$$\begin{aligned} F_p^0 &= F_p(R_G^0, P_0, U_S^0), \\ F_p^1 &= F_p(R_G^1, P_{12}, U_S^{12}). \end{aligned}$$

Finalement, après toutes ces intégrations, notre modèle algèbro-différentiel contient au moins quatorze inconnues :

$$m_L^{01}, m_G^{01}, m_L^{23}, m_G^{23}, H_3, R_G^0, P_0, U_S^0, R_G^1, P_{12}, U_S^{12}, R_G^2, R_G^3, U_S^3.$$

Pour avoir autant d'équations que d'inconnues, nous avons encore besoin d'au moins sept relations, nécessairement algébriques puisque les équations de conservation sont déjà intégrées.

Les conditions aux limites à l'entrée du pipe (2.18) et (2.19) fournissent deux équations :

$$0 = \rho_L(P_0)(1 - R_G^0)V_L(R_G^0, P_0, U_S^0) - q_L^0, \quad (2.33)$$

$$0 = \rho_G(P_0)R_G^0V_G(R_G^0, P_0, U_S^0) - q_G^0. \quad (2.34)$$

Notons que nous avons déjà abondamment utilisé la condition (2.20) dans les équations précédentes. Nous avons ainsi évité l'emploi d'une variable supplémentaire, i.e.  $P_{34}$ . Néanmoins, il nous reste les relations de continuité (2.17) des vitesses superficielles. La première nous donne l'équation :

$$0 = R_G^1 V_G(R_G^1, P_{12}, U_S^{12}) - R_G^2 V_G(R_G^2, P_{12}, U_S^{12}). \quad (2.35)$$

La seconde,  $U_L^1 - U_L^2 = 0$ , est malheureusement redondante car (2.14) entraîne :

$$U_S^1 = U_S^2 \implies U_L^1 + U_G^1 = U_L^2 + U_G^2 \implies U_L^1 - U_L^2 = -(U_G^1 - U_G^2).$$

Nous ne l'emploierons pas dans notre modèle.

Il manque encore quatre équations pour compléter le modèle. Nous proposons d'approcher les intégrales (2.21) et (2.22) par la formule des trapèzes (voir (2.31)). D'où les équations algébriques suivantes :

$$0 = m_L^{01} - \frac{1}{2}L \left[ \rho_L(P_0)(1 - R_G^0) + \rho_L(P_{12})(1 - R_G^1) \right], \quad (2.36)$$

$$0 = m_G^{01} - \frac{1}{2}L \left[ \rho_G(P_0)R_G^0 + \rho_G(P_{12})R_G^1 \right], \quad (2.37)$$

$$0 = m_L^{23} - \frac{1}{2}H_3 \left[ \rho_L(P_{12})(1 - R_G^2) + \rho_L(P_S)(1 - R_G^3) \right], \quad (2.38)$$

$$0 = m_G^{23} - \frac{1}{2}H_3 \left[ \rho_G(P_{12})R_G^2 + \rho_G(P_S)R_G^3 \right]. \quad (2.39)$$

Nous en déduisons finalement le système d'équations :

$$\frac{dm_L^{01}}{dt} = \rho_L(P_0)(1 - R_G^0)V_L(R_G^0, P_0, U_S^0) - \rho_L(P_{12})(1 - R_G^1)V_L(R_G^1, P_{12}, U_S^{12}), \quad (2.40)$$

$$\frac{dm_G^{01}}{dt} = \rho_G(P_0)R_G^0 V_G(R_G^0, P_0, U_S^0) - \rho_G(P_{12})R_G^1 V_G(R_G^1, P_{12}, U_S^{12}), \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \frac{dm_L^{23}}{dt} &= \rho_L(P_{12})(1 - R_G^2)V_L(R_G^2, P_{12}, U_S^{12}) \\ &+ \rho_L(P_S)(1 - R_G^3) \left[ \Lambda_3(H_3, V_L(R_G^3, P_S, U_S^3)) - V_L(R_G^3, P_S, U_S^3) \right], \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \frac{dm_G^{23}}{dt} &= \rho_G(P_{12})R_G^2 V_G(R_G^2, P_{12}, U_S^{12}) \\ &+ \rho_G(P_S)R_G^3 \left[ \Lambda_3(H_3, V_L(R_G^3, P_S, U_S^3)) - V_G(R_G^3, P_S, U_S^3) \right], \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\frac{dH_3}{dt} = \Lambda_3(H_3, V_L(R_G^3, P_S, U_S^3)), \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} 0 &= P_{12} - P_0 + \frac{1}{2}L \left[ F_p(R_G^0, P_0, U_S^0) + F_p(R_G^1, P_{12}, U_S^{12}) \right] \\ &+ g \sin(\theta_p)(m_L^{01} + m_G^{01}), \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$0 = P_S - P_{12} + g \sin(\theta_r)(m_L^{23} + m_G^{23}), \quad (2.46)$$

$$0 = m_L^{01} - \frac{1}{2}L \left[ \rho_L(P_0)(1 - R_G^0) + \rho_L(P_{12})(1 - R_G^1) \right], \quad (2.47)$$

$$0 = m_G^{01} - \frac{1}{2}L \left[ \rho_G(P_0)R_G^0 + \rho_G(P_{12})R_G^1 \right], \quad (2.48)$$

$$0 = m_L^{23} - \frac{1}{2}H_3 \left[ \rho_L(P_{12})(1 - R_G^2) + \rho_L(P_S)(1 - R_G^3) \right], \quad (2.49)$$

$$0 = m_G^{23} - \frac{1}{2}H_3 \left[ \rho_G(P_{12})R_G^2 + \rho_G(P_S)R_G^3 \right], \quad (2.50)$$

$$0 = R_G^1 V_G(R_G^1, P_{12}, U_S^{12}) - R_G^2 V_G(R_G^2, P_{12}, U_S^{12}), \quad (2.51)$$

$$0 = \rho_L(P_0)(1 - R_G^0) V_L(R_G^0, P_0, U_S^0) - q_L^0, \quad (2.52)$$

$$0 = \rho_G(P_0) R_G^0 V_G(R_G^0, P_0, U_S^0) - q_G^0. \quad (2.53)$$

En résumé, le calcul numérique de l'écoulement nécessite la résolution du système algèbro-différentiel (2.40)-(2.53) dont les 14 inconnues sont :

$$m_L^{01}, m_G^{01}, m_L^{23}, m_G^{23}, R_G^0, P_0, U_S^0, R_G^1, P_{12}, U_S^{12}, R_G^2, R_G^3, U_S^3, H_3. \quad (2.54)$$

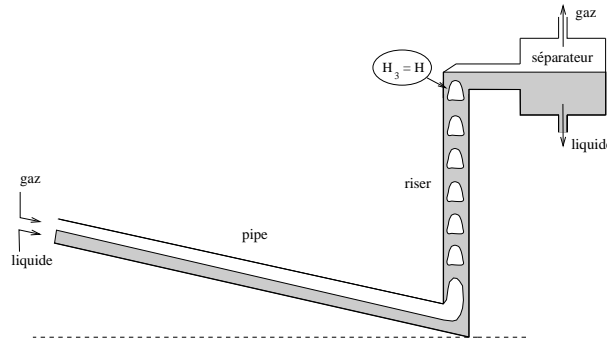


Figure 2.3 : Écoulement stationnaire avec pénétration continue du gaz [154].

## 2.6 Un modèle multi-pipes

Dans cette section, nous proposons d'étendre notre modèle au cas d'un pipeline comprenant un nombre supérieur de tronçons. Bien entendu, la ligne d'écoulement débouche toujours sur un riser. Remarquons qu'une telle configuration géométrique est beaucoup plus proche de la réalité. En contrepartie, les phénomènes peuvent aussi devenir très compliqués, combinant à la fois du *terrain slugging* et du *severe slugging* (voir section 1.1). L'instabilité qui en résulte n'est plus forcément un écoulement périodique car chaque tronçon du pipeline génère un certain type d'écoulement qui interagit avec les autres. À la manière de plusieurs systèmes dynamiques couplés entre eux, le comportement peut être beaucoup plus compliqué. On pense plus particulièrement à un écoulement où les oscillations seraient aperiodiques, voire chaotiques, au lieu d'être périodiques.

Nous conservons les mêmes conditions aux limites qui sont les débits massiques liquide et gazeux à l'entrée de la conduite, à savoir  $q_L^0$ ,  $q_G^0$ , et la pression dans le séparateur, notée  $P_S$  (cf. figure 2.4).

Comme nous l'avons vu précédemment (sections 2.2 et 2.5), l'écoulement dans un tronçon de pipe peut être caractérisé par les valeurs de  $R_G$ ,  $P$ ,  $U_S$  à son entrée et sa sortie. Si on définit  $i$  comme l'indice du  $i^{\text{ième}}$  tronçon (de pente constante) du pipeline, on doit donc calculer les quantités

$$R_G^{2i}, P_{2i}, U_S^{2i}, R_G^{2i+1}, P_{2i+1}, U_S^{2i+1}$$

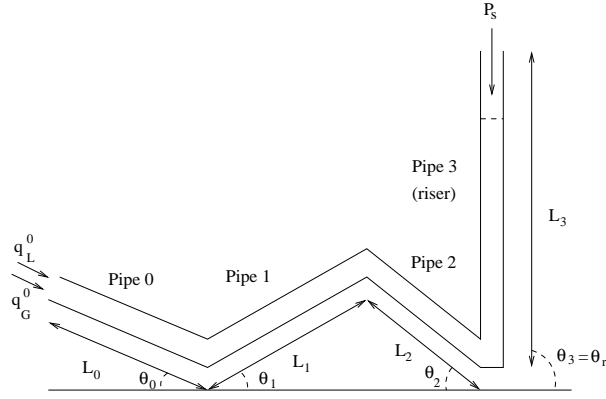


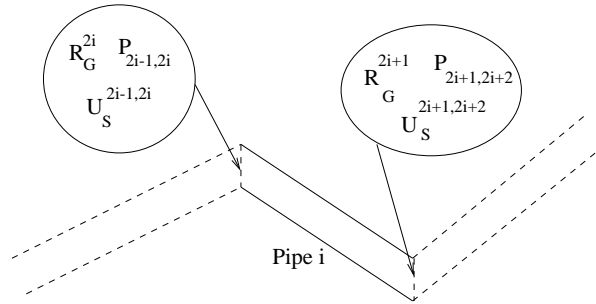
Figure 2.4 : Système multi-pipes.

représentées schématiquement sur la figure 2.5. Nous rappelons que  $P$  et  $U_S$  sont continues aux connexions entre les tronçons du pipeline. D'où les notations :

$$P_{2i-1} = P_{2i} \stackrel{\text{déf}}{=} P_{2i-1,2i}, P_{2i+1} = P_{2i+2} \stackrel{\text{déf}}{=} P_{2i+1,2i+2},$$

$$U_S^{2i-1} = U_S^{2i} \stackrel{\text{déf}}{=} U_S^{2i-1,2i}, U_S^{2i+1} = U_S^{2i+2} \stackrel{\text{déf}}{=} U_S^{2i+1,2i+2}.$$

En ce qui concerne le riser, nous calculons  $R_G$ ,  $P$  et  $U_S$  à son entrée, la hauteur liquide  $H_{liq}$  ainsi que la vitesse superficielle totale  $U_S$  et le taux de vide  $R_G$  au niveau liquide (cf. figure 2.6).

Figure 2.5 : Pipe  $i$  : variables.

La vitesse du niveau liquide  $H_{liq}$  sera notée  $\Lambda_{liq}$  :

$$\begin{aligned} \frac{dH_{liq}}{dt} &= \Lambda_{liq}(H_{liq}, V_L^{2n-1}) \\ &= \begin{cases} V_L^{2n-1} & \text{si } (H_{liq} < H) \text{ ou } (H_{liq} = H \text{ et } V_L^{2n-1} < 0), \\ 0 & \text{si } H_{liq} = H \text{ et } V_L^{2n-1} \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.55)$$

où  $V_L^{2n-1} = V_L(R_G^{2n-1}, P_S, U_S^{2n-1})$ .

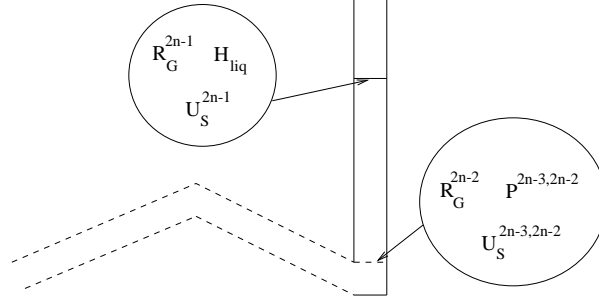


Figure 2.6 : Riser : variables.

Nous admettrons que l'hypothèse (2.28) reste valide :

$$H_{liq}(t) > 0 \forall t \in \mathbb{R}^+. \quad (2.56)$$

Soit  $n$ , le nombre de tronçons du pipeline, riser inclus ;  $i$  varie entre 0 et  $n - 1$ . En accord avec les notations de la section 2.4, ces variables sont  $2n + 1$  variables différentielles :

$$H_{liq}, (m_L^{2i,2i+1}, m_G^{2i,2i+1}, i = 0, n - 1) \quad (2.57)$$

et  $4n + 1$  variables algébriques :

$$P_0, U_S^0, (R_G^{2i}, R_G^{2i+1}, i = 0, n - 1), (P_{2i+1,2i+2}, U_S^{2i+1,2i+2}, i = 0, n - 2), U_S^{2n-1}. \quad (2.58)$$

$m_L^{2i,2i+1}$  et  $m_G^{2i,2i+1}$  sont les “densités intégrées”, liquide et gazeuse, dans le  $i^{ième}$  tronçon du pipeline, i.e. les quantités  $\rho_L R_L$  et  $\rho_G R_G$  intégrées de 0 à  $L_i$  pour  $i$  variant de 0 à  $n - 2$  et de 0 à  $H_{liq}$  dans le riser.  $L_i$  désigne la longueur du  $i^{ième}$  tronçon (cf. figure 2.4).

Notre système est donc composé de  $6n + 2$  équations. Il résulte d'une démarche identique à celle décrite dans la section (voir section 2.5) : nous intégrons les équations de conservation de la masse et des quantités de mouvement dans chaque tronçon  $i$  de la conduite dont l'inclinaison est notée  $\theta_i$ ,  $i = 0, n - 1$ . En accord avec ces nouvelles notations, nous avons  $\theta_r = \theta_{n-1}$  and  $H = L_{n-1}$  (cf. figure 1.7).

### Équations différentielles

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m_L^{01} &= \rho_L(P_0)(1 - R_G^0)V_L(R_G^0, P_0, U_S^0) \\ &\quad - \rho_L(P_{12})(1 - R_G^1)V_L(R_G^1, P_{12}, U_S^{12}), \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\frac{d}{dt} m_G^{01} = \rho_G(P_0)R_G^0 V_G(R_G^0, P_0, U_S^0) - \rho_G(P_{12})R_G^1 V_G(R_G^1, P_{12}, U_S^{12}), \quad (2.60)$$

...

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m_L^{2i,2i+1} &= \rho_L(P_{2i-1,2i})(1 - R_G^{2i})V_L(R_G^{2i}, P_{2i-1,2i}, U_S^{2i-1,2i}) \\ &\quad - \rho_L(P_{2i+1,2i+2})(1 - R_G^{2i+1})V_L(R_G^{2i+1}, P_{2i+1,2i+2}, U_S^{2i+1,2i+2}), \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m_G^{2i,2i+1} &= \rho_G(P_{2i-1,2i})R_G^{2i} V_G(R_G^{2i}, P_{2i-1,2i}, U_S^{2i-1,2i}) \\ &\quad - \rho_G(P_{2i+1,2i+2})R_G^{2i+1} V_G(R_G^{2i+1}, P_{2i+1,2i+2}, U_S^{2i+1,2i+2}), \end{aligned} \quad (2.62)$$

$i = 1, n - 2$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}m_L^{2n-2,2n-1} &= \rho_L(P_{2n-3,2n-2})(1 - R_G^{2n-2})V_L(R_G^{2n-2}, P_{2n-3,2n-2}, U_S^{2n-3,2n-2}) \\
&+ \rho_L(P_S)(1 - R_G^{2n-1}) \\
&\quad \left[ \Lambda_{liq}(H_{liq}, V_L(R_G^{2n-1}, P_S, U_S^{2n-1})) - V_L(R_G^{2n-1}, P_S, U_S^{2n-1}) \right], \quad (2.63)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}m_G^{2n-2,2n-1} &= \rho_G(P_{2n-3,2n-2})R_G^{2n-2}V_G(R_G^{2n-2}, P_{2n-3,2n-2}, U_S^{2n-3,2n-2}) \\
&+ \rho_G(P_S)R_G^{2n-1} \\
&\quad \left[ \Lambda_{liq}(H_{liq}, V_L(R_G^{2n-1}, P_S, U_S^{2n-1})) - V_G(R_G^{2n-1}, P_S, U_S^{2n-1}) \right], \quad (2.64)
\end{aligned}$$

$$\frac{dH_{liq}}{dt} = \Lambda_{liq}(H_{liq}, V_L(R_G^{2n-1}, P_S, U_S^{2n-1})). \quad (2.65)$$

### Équations algébriques

$$\begin{aligned}
0 &= P_{12} - P_0 + g \sin(\theta_0)(m_L^{01} + m_G^{01}) \\
&+ \frac{1}{2}L_0 \left[ F_p(R_G^0, P_0, U_S^0) + F_p(R_G^1, P_{12}, U_S^{12}) \right], \quad (2.66)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= P_{2i+1,2i+2} - P_{2i-1,2i} + g \sin(\theta_i)(m_L^{2i,2i+1} + m_G^{2i,2i+1}) \\
&+ \frac{1}{2}L_i \left[ F_p(R_G^{2i}, P_{2i-1,2i}, U_S^{2i-1,2i}) + F_p(R_G^{2i+1}, P_{2i+1,2i+2}, U_S^{2i+1,2i+2}) \right], \quad (2.67) \\
&i = 1, n - 2
\end{aligned}$$

$$0 = P_S - P_{2n-3,2n-2} + g \sin(\theta_{n-1})(m_L^{2n-2,2n-1} + m_G^{2n-2,2n-1}), \quad (2.68)$$

$$0 = m_L^{01} - \frac{1}{2}L_0 \left[ \rho_L(P_0)(1 - R_G^0) + \rho_L(P_{12})(1 - R_G^1) \right], \quad (2.69)$$

$$0 = m_G^{01} - \frac{1}{2}L_0 \left[ \rho_G(P_0)R_G^0 + \rho_G(P_{12})R_G^1 \right], \quad (2.70)$$

$$0 = m_L^{2i,2i+1} - \frac{1}{2}L_i \left[ \rho_L(P_{2i-1,2i})(1 - R_G^{2i}) + \rho_L(P_{2i,2i+1})(1 - R_G^{2i+1}) \right], \quad (2.71)$$

$$\begin{aligned}
0 &= m_G^{2i,2i+1} - \frac{1}{2}L_i \left[ \rho_G(P_{2i-1,2i})R_G^{2i} + \rho_G(P_{2i,2i+1})R_G^{2i+1} \right], \quad (2.72) \\
&i = 1, n - 2
\end{aligned}$$

$$0 = m_L^{2n-2,2n-1} - \frac{1}{2}H_{liq} \left[ \rho_L(P_{2n-3,2n-2})(1 - R_G^{2n-2}) + \rho_L(P_S)(1 - R_G^{2n-1}) \right], \quad (2.73)$$

$$0 = m_G^{2n-2,2n-1} - \frac{1}{2}H_{liq} \left[ \rho_G(P_{2n-3,2n-2})R_G^{2n-2} + \rho_G(P_S)R_G^{2n-1} \right], \quad (2.74)$$

$$0 = R_G^1 V_G(R_G^1, P_{12}, U_S^{12}) - R_G^2 V_G(R_G^2, P_{12}, U_S^{12}), \quad (2.75)$$

$$\begin{aligned}
0 &= R_G^{2i+1} V_G(R_G^{2i+1}, P_{2i+1,2i+2}, U_S^{2i+1,2i+2}) \\
&- R_G^{2i+2} V_G(R_G^{2i+2}, P_{2i+1,2i+2}, U_S^{2i+1,2i+2}), \quad (2.76) \\
&i = 1, n - 3
\end{aligned}$$

$$0 = R_G^{2n-3} V_G(R_G^{2n-3}, P_{2n-3,2n-2}, U_S^{2n-3,2n-2})$$

$$- R_G^{2n-2} V_G(R_G^{2n-2}, P_{2n-3, 2n-2}, U_S^{2n-3, 2n-2}), \quad (2.77)$$

$$0 = \rho_L(P_0)(1 - R_G^0) V_L(R_G^0, P_0, U_S^0) - q_L^0, \quad (2.78)$$

$$0 = \rho_G(P_0) R_G^0 V_G(R_G^0, P_0, U_S^0) - q_G^0. \quad (2.79)$$





## Chapitre 3

# Lois synthétiques de glissement et de frottement

Ce chapitre présente la construction de lois globales de glissement et de frottement. Elles sont définies sous la forme de fonctions régulières afin que l'étude de stabilité de notre modèle simplifié soit mathématiquement bien posé.

### 3.1 Pourquoi une loi synthétique de glissement ?

Les critères de transition présentés dans la section 1.7 sont simples mais induisent de nombreuses discontinuités. Un exemple est donné par la transition entre les écoulements dispersés et intermittents dans le cas d'un flot ascendant vertical (i.e.  $\theta = \pi/2$ ). En effet, supposons que (1.78) soit vérifiée avec  $R_G = R_G^{crit} = 0.25$ . La vitesse des bulles au voisinage de  $R_G^{crit}$  est donnée par (voir section 1.5) :

$$V_G(R_G, P, U_S) = \begin{cases} V_G^{int}(R_G, P, U_S) & \text{si } R_G > R_G^{crit}, \\ V_G^{disp}(R_G, P, U_S) & \text{si } R_G < R_G^{crit}. \end{cases} \quad (3.1)$$

où

$$\begin{aligned} V_G^{int}(R_G, P, U_S) &= 1.2U_S + 0.35\sqrt{\frac{gD[\rho_L(P) - \rho_G(P)]}{\rho_L(P)}}, \\ V_G^{disp}(R_G, P, U_S) &= U_S + 1.53\left[\frac{g[\rho_L(P) - \rho_G(P)]\sigma}{\rho_L^2(P)}\right]^{1/4}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Nous constatons que  $V_G$  n'est pas continue au point de transition  $R_G = R_G^{crit}$  puisque :

$$V_G^{int}(R_G^{crit}, P, U_S) \neq V_G^{disp}(R_G^{crit}, P, U_S).$$

Le remplacement d'une loi de glissement par une autre entraîne donc des discontinuités le long des courbes de transition entre les écoulements. Il est donc nécessaire de concevoir différemment les lois de glissement si nous voulons que le problème soit mathématiquement mieux posé.

*Remarque* : dans la réalité, les transitions entre les écoulements ont lieu de manière continue. Les lois de glissement proposées dans la littérature sont des représentations grossières de l'état moyen d'un écoulement et n'ont pas la prétention de les modéliser sous toutes leurs formes [22].

Il faut aussi noter qu'au départ, notre souhait était de construire un modèle simplifié pour lequel l'analyse de stabilité soit la plus simple possible tout en restant proche de la réalité. Or, l'ajout des critères de transition et des lois de glissement rend le modèle extrêmement complexe et surtout ne garantit pas que les résultats classiques de la théorie des bifurcations puissent être appliqués.

Nous allons donc construire une loi de glissement sous la forme d'une fonction régulière des variables  $R_G$ ,  $P$  et  $U_S$ . Cette loi représentera la synthèse des différents types d'écoulement décrits dans la section 1.5.

## 3.2 Présentation de la loi synthétique de glissement

Notre loi de glissement synthétique sera donnée sous la forme d'une fonction régulière  $\psi$  qui à tout point  $(R_G, P, U_S)$  associe la valeur de la vitesse superficielle du gaz  $U_G = R_G V_G$  :

$$U_G = \psi(R_G, P, U_S). \quad (3.3)$$

De façon générale, les transitions entre les écoulements se produisent lorsque  $R_G$  franchit une valeur critique (voir section 1.7). En conséquence, la fonction  $\psi$  sera construite sous la forme d'un polynôme en  $R_G$  dont les coefficients ne dépendront que de  $P$  et  $U_S$ .

(3.3) sera définie pour tout  $R_G$  variant de zéro à un et pour tout couple  $(P, U_S)$  variant dans un domaine où les lois de glissement exprimées dans la section 1.5 ont un sens. Il sera sous-entendu que les relations formulées dans les sections suivantes sont vraies quelque soient  $P$  et  $U_S$  variant dans ce domaine. Nous éviterons de le rappeler à chaque fois.

*Remarque* : en accord avec la relation de fermeture (1.9), (3.3) s'écrit aussi :

$$0 = \Psi(R_G, P, V_G, V_L) = R_G V_G - \psi(R_G, P, R_G V_G + (1 - R_G) V_L). \quad (3.4)$$

Notons que  $\psi$  doit vérifier les conditions (évidentes) de compatibilités lorsque les écoulements sont monophasiques, liquides ou gazeux :

$$\psi(0^+, P, U_S) = \lim_{R_G \rightarrow 0^+} \psi(R_G, P, U_S) = 0, \quad (3.5)$$

$$\psi(1^-, P, U_S) = \lim_{R_G \rightarrow 1^-} \psi(R_G, P, U_S) = U_S, \quad (3.6)$$

sachant que  $U_S = U_G + U_L = R_G V_G + (1 - R_G) V_L$ .

## 3.3 Analyse mathématique des écoulements et des transitions

Afin de construire  $\psi$  sous la forme d'une fonction régulière de  $R_G \in [0, 1]$  à  $P$  et  $U_S$  fixés dans leur domaine de validité, nous allons estimer sa valeur ainsi que celle de ses dérivées partielles par rapport à  $R_G$  en certains points caractéristiques où le type de l'écoulement sera à priori connu. Nous nous appuyerons sur les résultats des sections 1.5, 1.6 et 1.7.

### 3.3.1 Au voisinage de $R_G = 0$

Lorsque le taux de vide est proche de zéro, l'écoulement est principalement dispersé. Il peut être aussi stratifié si la vitesse du gaz est suffisamment petite pour que le critère (1.64) ne soit pas satisfait. Or un simple calcul à l'aide de développements limités montre que le second

membre de l'inégalité (1.64) tend vers zéro si  $R_G$  tend aussi vers zéro. Le dispersé est donc l'écoulement le plus probable.

Aussi nous admettrons que la loi de glissement est donnée par la formule (1.26) lorsque le taux de vide est proche de zéro;  $U_G^{disp}$  désignera la vitesse superficielle  $U_G = R_G V_G$  dans le cas dispersé. Ainsi pour tout  $R_G$  voisin de 0 :

$$U_G^{disp}(R_G, P, U_S) = R_G [C_{disp} U_S + u_d^{disp}(P, \theta)] \quad (3.7)$$

où  $u_d^{disp}(P, \theta)$  et  $C_{disp}$  sont donnés respectivement par (1.24) et (1.25).

En particulier,

$$U_G^{disp}(0^+, P, U_S) = \lim_{R_G \rightarrow 0^+} U_G^{disp}(R_G, P, U_S) = 0, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial U_G^{disp}}{\partial R_G}(0^+, P, U_S) = \lim_{R_G \rightarrow 0^+} \frac{\partial U_G^{disp}}{\partial R_G}(R_G, P, U_S) = C_{disp} U_S + u_d^{disp}(P, \theta), \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial^2 U_G^{disp}}{\partial R_G^2}(0^+, P, U_S) = \lim_{R_G \rightarrow 0^+} \frac{\partial^2 U_G^{disp}}{\partial R_G^2}(R_G, P, U_S) = 0. \quad (3.10)$$

### 3.3.2 Au voisinage de $R_G = 1$

Lorsque  $R_G$  tend vers 1, l'écoulement peut être stratifié ou annulaire. Dans ce cas, la loi de glissement est donnée respectivement par (1.28) ou (1.47). Nous allons exprimer ces deux lois sous la forme (3.3) pour  $R_G$  proche de un.

#### 3.3.2.1 Le cas stratifié

La loi de glissement de l'écoulement stratifié s'exprime sous la forme suivante (voir section 1.5.3) :

$$\begin{aligned} 0 &= f_G(R_G, P, V_G) \rho_G(P) \frac{V_G |V_G|}{2} \frac{S_G(R_G)}{A_G(R_G)} - f_L(R_G, P, V_L) \rho_L(P) \frac{V_L |V_L|}{2} \frac{S_L(R_G)}{A_L(R_G)} \\ &+ f_i(R_G, P, V_G) \rho_G(P) \frac{V_G |V_G|}{2} S_i(R_G) \left[ \frac{1}{A_L(R_G)} + \frac{1}{A_G(R_G)} \right] \\ &- [\rho_L(P) - \rho_G(P)] g \sin(\theta) \end{aligned} \quad (3.11)$$

en adoptant l'expression (1.38) pour le tenseur  $\tau_i$  car  $R_G$  est proche de un (voir discussion page 18).

Les coefficients  $f_G$  et  $f_L$  employés dans les formules (1.29), (1.30) et (1.37) peuvent être exprimés à l'aide de la formule (1.31) ou plus simplement sous la forme d'une équation de Blasius [15, 71] :

$$f_k(R_G, P, V_k) = C_k [Re_k(R_G, P, V_k)]^{-\alpha_k} \quad (3.12)$$

où  $Re_k$  est donné par (1.32).

*Remarque* : (3.12) ne dépend pas de la rugosité pariétale du pipe. Elle demeure néanmoins une bonne corrélation dans la pratique [71].

$C_k$  et  $\alpha_k$  sont des coefficients qui dépendent de  $Re_k$ . Lorsque l'écoulement de la phase  $k$  est laminaire (i.e. si  $Re_k \leq 2000$ ),  $C_k = 16$  et  $\alpha_k = 1$ . Dans le cas turbulent (i.e. lorsque

$Re_k \geq 3000$ ),  $C_k = 0.046$  et  $\alpha_k = 0.2$ . Entre ces deux cas extrêmes, on raccorde les expressions de  $C_k$  et  $\alpha_k$  de façon régulière en fonction du nombre de Reynolds pour en déduire leur expression dans le cas transitoire :

$$C_k(R_G, P, V_k) = \begin{cases} 16 & \text{si } Re_k \leq 2000, \\ 0.046 & \text{si } Re_k \geq 3000, \\ 16P_1 \left( \frac{Re_k - 2000}{1000} \right) + 0.046P_2 \left( \frac{Re_k - 2000}{1000} \right) & \text{si } 2000 < Re_k < 3000 \end{cases} \quad (3.13)$$

où  $P_1$  et  $P_2$  sont des fonctions monotones entre zéro et un, régulières, par exemple de classe  $\mathcal{C}^q$ ,  $q \geq 2$ , telles que :

$$P_1(0) = 1, \frac{d^n P_1}{dx^n}(0) = 0, \forall 1 \leq n \leq q, \frac{d^n P_1}{dx^n}(1) = 0, \forall 0 \leq n \leq q. \quad (3.14)$$

$$P_2(1) = 1, \frac{d^n P_2}{dx^n}(0) = 0, \forall 0 \leq n \leq q, \frac{d^n P_2}{dx^n}(1) = 0, \forall 1 \leq n \leq q. \quad (3.15)$$

Nous interpolons  $\alpha$  de la même façon :

$$\alpha_k(R_G, P, V_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } Re_k \leq 2000, \\ 0.2 & \text{si } Re_k \geq 3000, \\ P_1 \left( \frac{Re_k - 2000}{1000} \right) + 0.2P_2 \left( \frac{Re_k - 2000}{1000} \right) & \text{si } 2000 < Re_k < 3000. \end{cases} \quad (3.16)$$

*Remarque :* Nous éviterons parfois de rappeler les dépendances de  $C_k$  et  $\alpha_k$  par rapport aux variables  $R_G$ ,  $P$ ,  $V_k$  afin d'alléger les formules.

Avant de remplacer  $f_G$ ,  $f_L$  et  $f_i$  par leurs expressions respectives dans (3.11), notons que  $f_i$  peut être remplacé par  $f_G$  lorsque  $R_G$  est proche de un car la hauteur liquide  $h_L$  est proche de zéro et (1.37) se réduit à  $f_i \simeq f_G$ . En conséquence, nous admettrons l'hypothèse suivante :

$$f_i \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} f_G. \quad (3.17)$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} 0 & \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} C_G \left( \frac{\rho_G(P)|V_G|D_G}{\mu_G} \right)^{-\alpha_G} \rho_G(P) \Phi_0(V_G) \frac{S_G(R_G)}{A_G(R_G)} \\ & - C_L \left( \frac{\rho_L(P)|V_L|D_L}{\mu_L} \right)^{-\alpha_L} \rho_L(P) \Phi_0(V_L) \frac{S_L(R_G)}{A_L(R_G)} \\ & + C_G \left( \frac{\rho_G(P)|V_G|D_G}{\mu_G} \right)^{-\alpha_G} \rho_G(P) \Phi_0(V_G) S_i(R_G) \left[ \frac{1}{A_L(R_G)} + \frac{1}{A_G(R_G)} \right] \\ & - [\rho_L(P) - \rho_G(P)] g \sin(\theta) \end{aligned} \quad (3.18)$$

où  $\Phi_0 = \Phi_{\alpha|_{\alpha=0}}$ ,  $\Phi_\alpha$  étant l'application suivante :

$$\Phi_\alpha(x) = \frac{1}{2} x |x|^{1-\alpha}. \quad (3.19)$$

En remplaçant  $D_G$ ,  $D_L$ ,  $S_G$ ,  $S_L$ ,  $S_i$ ,  $A_G$  et  $A_L$  par leurs expressions respectives (voir section 1.5.3), nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned} 0 & \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} [\beta_G(R_G, P, V_G) + \beta_i(R_G, P, V_G)] \Phi_{\alpha_G}(U_G) \\ & + \beta_L(R_G, P, V_L) \Phi_{\alpha_L}(U_G - U_S) - \Sigma(R_G, P) \end{aligned} \quad (3.20)$$

où

$$\beta_G(R_G, P, V_G) = \frac{C_G}{D^{\alpha_G}} \mu_G^{\alpha_G} [\rho_G(P)]^{1-\alpha_G} \left[ \frac{2\pi - \Omega(R_G) + 2 \sin[\Omega(R_G)/2]}{2\pi} \right]^{\alpha_G} \frac{2\pi - \Omega(R_G)}{\pi} (1 - R_G)^3, \quad (3.21)$$

$$\beta_L(R_G, P, V_L) = \frac{C_L}{D^{\alpha_L}} \mu_L^{\alpha_L} [\rho_L(P)]^{1-\alpha_L} \left[ \frac{\Omega(R_G)}{2\pi} \right]^{\alpha_L} \frac{\Omega(R_G)}{\pi} R_G^3, \quad (3.22)$$

$$\beta_i(R_G, P, V_G) = \frac{C_G}{D^{\alpha_G}} \mu_G^{\alpha_G} [\rho_G(P)]^{1-\alpha_G} \left[ \frac{2\pi - \Omega(R_G) + 2 \sin[\Omega(R_G)/2]}{2\pi} \right]^{\alpha_G} \frac{2}{\pi} \sin[\Omega(R_G)/2] (1 - R_G)^2, \quad (3.23)$$

$$\Sigma(R_G, P) = \frac{D}{2} [\rho_L(P) - \rho_G(P)] g \sin(\theta) (1 - R_G)^3 R_G^3. \quad (3.24)$$

(3.20) tient compte aussi des relations suivantes :

$$R_G^{2-\alpha_G} \Phi_{\alpha_G}(V_G) = \Phi_{\alpha_G}(U_G), \quad (3.25)$$

$$(1 - R_G)^{2-\alpha_L} \Phi_{\alpha_L}(V_L) = R_L^{2-\alpha_L} \Phi_{\alpha_L}(V_L) = \Phi_{\alpha_L}(U_L) = -\Phi_{\alpha_L}(U_G - U_S), \quad (3.26)$$

puisque que  $U_G = R_G V_G$  et  $U_L = U_S - U_G$ .

Remarquons que  $\beta_G$  et  $\beta_i$  dépendent de  $V_G$  par l'intermédiaire de  $\alpha_G$  et  $C_G$ . De même pour  $\beta_L$  qui dépend aussi de  $V_L$ .

Puisque  $R_G$  est voisin de un,  $\Omega(R_G)$  est proche de zéro. Un développement limité à l'ordre trois de  $\sin(\Omega)$  dans (1.27) nous donne l'approximation suivante :

$$\Omega(R_G) \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} (12\pi)^{1/3} (1 - R_G)^{1/3}. \quad (3.27)$$

Nous déduisons de (1.45) que :

$$D_G \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} R_G D, \quad (3.28)$$

$$D_L \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} \frac{2\pi D}{(12\pi)^{1/3}} (1 - R_G)^{2/3}. \quad (3.29)$$

Ce qui implique :

$$Re_G(R_G, P, V_G) \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} \frac{\rho_G(P) R_G D |V_G|}{\mu_G}, \quad (3.30)$$

$$Re_L(R_G, P, V_L) \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} \frac{2\pi D}{(12\pi)^{1/3}} \frac{\rho_L(P) (1 - R_G)^{2/3} D |V_L|}{\mu_L}. \quad (3.31)$$

Puisque  $U_S = R_G V_G + (1 - R_G) V_L \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} V_G$ , (3.30) devient :

$$Re_G(R_G, P, V_G) \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} Re_{mG} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\rho_G(P) D |U_S|}{\mu_G}. \quad (3.32)$$

Nous en déduisons :

$$\alpha_G(R_G, P, V_G) \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} \alpha_{mG}(P, U_S) \quad (3.33)$$

où  $\alpha_{mG}$  étant donné par (3.16) où  $Re_k$  est remplacé par  $Re_{mG}$ .

De même pour le coefficient  $C_G$  pour lequel nous avons :

$$C_G(R_G, P, V_G) \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} C_{mG}(P, U_S), \quad (3.34)$$

$C_{mG}$  étant donné par (3.13) où  $Re_k$  est aussi remplacé par  $Re_{mG}$ .

En ce qui concerne  $Re_L$ , nous voyons d'après (3.31) qu'il est toujours possible de trouver un taux de vide suffisamment proche de un pour que :

$$\frac{2\pi D}{(12\pi)^{1/3}} \frac{\rho_L(P)(1-R_G)^{2/3} D |V_L|}{\mu_L} \leq 2000.$$

Nous admettrons donc que l'écoulement de la phase liquide est laminaire lorsque  $R_G$  est proche de un. D'où les approximations suivantes, d'après les formules (3.13) et (3.16) :

$$\alpha_L(R_G, P, V_G) \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} 1, \quad C_L(R_G, P, V_G) \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} 16. \quad (3.35)$$

En tenant compte de toutes ces relations et de l'approximation (3.27) de  $\Omega$ , (3.20) devient :

$$\begin{aligned} 0 & \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} [\beta_{mG}(R_G, P, U_S) + \beta_{mi}(R_G, P, U_S)] \Phi_{\alpha_G}(U_G) \\ & + \beta_{mL}(R_G) \frac{U_G - U_S}{2} - \Sigma(R_G, P) \end{aligned} \quad (3.36)$$

où  $\beta_{mG}$ ,  $\beta_{mL}$  et  $\beta_{mi}$  sont respectivement des approximations de  $\beta_G$ ,  $\beta_L$  et  $\beta_i$  pour  $R_G$  proche de un :

$$\beta_{mG}(R_G, P, U_S) = 2 \frac{C_{mG}}{D^{\alpha_{mG}}} \mu_G^{\alpha_{mG}} [\rho_G(P)]^{1-\alpha_{mG}} (1-R_G)^3, \quad (3.37)$$

$$\beta_{mL}(R_G) = \frac{8}{D} \frac{\mu_L}{\pi^2} (12\pi)^{2/3} (1-R_G)^{2/3}, \quad (3.38)$$

$$\beta_{mi}(R_G, P, U_S) = \frac{C_{mG}}{D^{\alpha_{mG}}} \mu_G^{\alpha_{mG}} [\rho_G(P)]^{1-\alpha_{mG}} \frac{(12\pi)^{1/3}}{\pi} (1-R_G)^{7/3}, \quad (3.39)$$

Notons que  $\beta_{mG}$  et  $\beta_{mi}$  dépendent de  $U_S$  par l'intermédiaire de  $\alpha_{mG}$  et  $C_{mG}$ .

Étant données les valeurs des trois variables  $R_G$ ,  $P$ ,  $U_S$ , on vérifie facilement que l'équation (3.36) admet une seule et unique solution en  $U_G$ . Nous la noterons  $U_G^{strat}(R_G, P, U_S)$ . Celle-ci peut être déterminée de façon explicite lorsque l'écoulement du gaz est laminaire, i.e.  $Re_{mG} \leq 2000$ . Ainsi  $\alpha_{mG} = 1$ ,  $C_{mG} = 16$  et (3.36) entraînent :

$$\left[ \beta_{mG}^{lam}(R_G) + \beta_{mi}^{lam}(R_G) \right] \frac{U_G}{2} + \beta_{mL}(R_G) \frac{U_G - U_S}{2} \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} \Sigma(R_G, P) \quad (3.40)$$

où :

$$\beta_{mG}^{lam}(R_G) = \beta_{mG}(R_G, P, U_S)_{|Re_{mG} \leq 2000} = \frac{32}{D} \mu_G (1-R_G)^3, \quad (3.41)$$

$$\beta_{mi}^{lam}(R_G) = \beta_{mi}(R_G, P, U_S)_{|Re_{mG} \leq 2000} = \frac{16}{D} \mu_G \frac{(12\pi)^{1/3}}{\pi} (1-R_G)^{7/3}. \quad (3.42)$$

Ce qui implique :

$$U_G^{strat}(R_G, P, U_S)_{|Re_{mG} \leq 2000} \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} \frac{2\Sigma(R_G, P) + \beta_{mL}(R_G)U_S}{\beta_{mG}^{lam}(R_G) + \beta_{mL}(R_G) + \beta_{mi}^{lam}(R_G)} \quad (3.43)$$

que nous décomposons sous la forme :

$$U_G^{strat}(R_G, P, U_S)|_{Re_{mG} \leq 2000} \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} \psi_0^{strat}(R_G, P) + \psi_1^{strat}(R_G)U_S. \quad (3.44)$$

où

$$\psi_0^{strat}(R_G, P) = \frac{2\Sigma(R_G, P)}{\beta_{mG}^{lam}(R_G) + \beta_{mL}(R_G) + \beta_{mi}^{lam}(R_G)}, \quad (3.45)$$

$$\psi_1^{strat}(R_G) = \frac{\beta_{mL}(R_G)}{\beta_{mG}^{lam}(R_G) + \beta_{mL}(R_G) + \beta_{mi}^{lam}(R_G)}. \quad (3.46)$$

Nous avons l'inégalité suivante :

$$\beta_{mG}^{lam}(R_G) + \beta_{mL}(R_G) + \beta_{mi}^{lam}(R_G) > 0$$

si  $R_G < 1$ . La formule (3.43) a donc un sens tant que  $R_G < 1$ . Nous allons voir qu'elle reste encore valide lorsque  $R_G$  vaut exactement un.

Grâce aux relations (3.24), (3.38), (3.41) et (3.42), nous en déduisons :

$$\psi_0^{strat}(R_G, P) \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} \frac{\pi^2 D^2 [\rho_L(P) - \rho_G(P)] g \sin(\theta)}{8\mu_L(12\pi)^{2/3}} (1 - R_G)^{7/3}, \quad (3.47)$$

$$\psi_1^{strat}(R_G) \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} 1. \quad (3.48)$$

en tenant compte de la relation suivante :

$$\beta_{mG}^{lam}(R_G) + \beta_{mL}(R_G) + \beta_{mi}^{lam}(R_G) \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} \beta_{mL}(R_G) \quad (3.49)$$

Finalement, (3.44) se simplifie sous la forme :

$$U_G^{strat}(R_G, P, U_S)|_{Re_{mG} \leq 2000} \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} \mathcal{C}(P)(1 - R_G)^{7/3} + U_S \quad (3.50)$$

où

$$\mathcal{C}(P) = \frac{\pi^2 D^2 [\rho_L(P) - \rho_G(P)] g \sin(\theta)}{8\mu_L(12\pi)^{2/3}}. \quad (3.51)$$

En dérivant (3.45) et (3.46) par rapport à  $R_G$ , nous obtenons les relations :

$$\frac{\partial \psi_0^{strat}}{\partial R_G}(R_G, P) \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} -\frac{7}{3} \mathcal{C}(P)(1 - R_G)^{4/3}, \quad (3.52)$$

$$\frac{d\psi_1^{strat}}{dR_G}(R_G) \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} \mathcal{D}(1 - R_G)^{2/3} \quad (3.53)$$

où

$$\mathcal{D} = \frac{10}{3} \frac{\pi D^2}{(12\pi)^{1/3}} \frac{\mu_G}{\mu_L}. \quad (3.54)$$

En d'autres termes :

$$\frac{\partial U_G^{strat}}{\partial R_G}(R_G, P, U_S)|_{Re_{mG} \leq 2000} \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} -\frac{7}{3} \mathcal{C}(P)(1 - R_G)^{4/3} + \mathcal{D}(1 - R_G)^{2/3} U_S. \quad (3.55)$$



Nous en concluons les relations suivantes lorsque  $R_G$  tend vers un :

$$U_G^{strat}(1^-, P, U_S)_{|Re_{mG} \leq 2000} = \lim_{R_G \rightarrow 1^-} \left[ U_G^{strat}(R_G, P, U_S)_{|Re_{mG} \leq 2000} \right] = U_S, \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial U_G^{strat}}{\partial R_G}(1^-, P, U_S)_{|Re_{mG} \leq 2000} = \lim_{R_G \rightarrow 1^-} \left[ \frac{\partial U_G^{strat}}{\partial R_G}(R_G, P, U_S)_{|Re_{mG} \leq 2000} \right] = 0, \quad (3.57)$$

Notons que la dérivée seconde  $\partial^2 U_G^{strat} / \partial R_G^2$  n'est pas toujours définie au point  $(1^-, P, U_S)$  car :

$$\frac{d^2 \psi_1^{strat}}{dR_G^2}(R_G) \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} -\frac{2}{3} \mathcal{D}(1 - R_G)^{-1/3} \quad (3.58)$$

tend vers moins l'infini lorsque  $R_G$  tend vers un.

Lorsque l'écoulement du gaz n'est pas laminaire, i.e.  $Re_{mG} > 2000$ , une résolution explicite de (3.36) est impossible, excepté dans le cas particulier où  $\Sigma$  et  $U_S$  sont nuls et dont l'unique solution est  $U_G^{strat} = 0$ . Dans le cas général, la solution  $U_G^{strat}$  doit être calculée numériquement à l'aide d'une méthode itérative : on peut alors vérifier graphiquement que les relations (3.56) et (3.57) restent vraies lorsque  $Re_{mG} > 2000$ . Nous en donnons quelques exemples sur les figures 3.1, 3.2 et 3.3.

En conséquence, nous admettrons que les relations (3.56) et (3.57) sont aussi de bonnes approximations lorsque l'écoulement n'est pas laminaire :

$$U_G^{strat}(1^-, P, U_S) = \lim_{R_G \rightarrow 1^-} U_G^{strat}(R_G, P, U_S) = U_S, \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial U_G^{strat}}{\partial R_G}(1^-, P, U_S) = \lim_{R_G \rightarrow 1^-} \frac{\partial U_G^{strat}}{\partial R_G}(R_G, P, U_S) = 0. \quad (3.60)$$

Plus rigoureusement, on peut calculer l'erreur relative commise en prenant la formule (3.43) pour calculer  $U_G^{strat}$  lorsque  $Re_{mG} > 2000$ . Pour cela, on évalue le quotient :

$$E_R^{strat}(R_G, P, U_S) = \frac{U_G^{strat}(R_G, P, U_S) - (U_G^{strat})_{lam}(R_G, P, U_S)}{(U_G^{strat})_{lam}(R_G, P, U_S)} \quad (3.61)$$

où  $(U_G^{strat})_{lam}$  est donné par la formule (3.43) tandis que  $U_G^{strat}$  est calculé de manière implicite à partir de (3.36).

Nous avons tracé la courbe  $R_G \mapsto |E_R^{strat}(R_G, P, U_S)|$  pour  $R_G$  proche de un et  $P, U_S$  fixés. L'erreur relative  $E_R^{strat}$  est évidemment nulle lorsque  $Re_{mG} \leq 2000$ . Elle est non nulle si  $Re_{mG}$  est supérieur à 2000 mais reste proche de zéro si  $R_G$  est voisin de un. Elle augmente aussi avec  $Re_{mG}$  mais tend vers zéro lorsque  $R_G$  tend vers un. Nous en donnons quelques exemples sur les figures 3.4, 3.5 et 3.6 où est tracé  $|E_R^{strat}|$  en fonction de  $R_G$  pour différentes valeurs de  $Re_{mG}$  et de  $\theta$ .

Aussi, nous admettrons que la relation (3.50) continue d'être une bonne approximation lorsque l'écoulement du gaz n'est pas laminaire :

$$U_G^{strat}(R_G, P, U_S) \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} \mathcal{C}(P)(1 - R_G)^{7/3} + U_S. \quad (3.62)$$

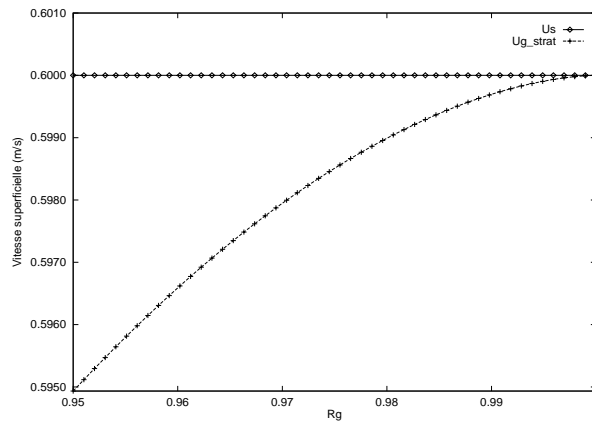


Figure 3.1 : Courbe  $R_G \mapsto U_G^{strat}(R_G, P, U_S)$  ;  $Re_{mG} \simeq 2651$ ,  $\theta = 0^\circ$ .

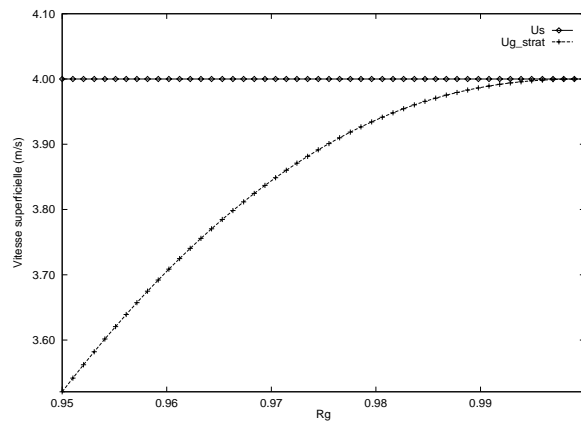


Figure 3.2 : Courbe  $R_G \mapsto U_G^{strat}(R_G, P, U_S)$  ;  $Re_{mG} \simeq 8839$ ,  $\theta = -5^\circ$ .

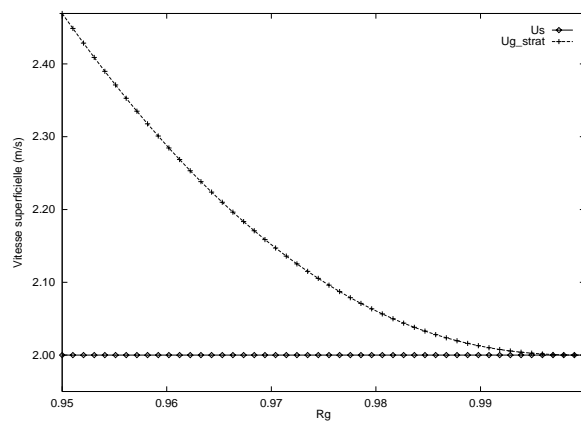


Figure 3.3 : Courbe  $R_G \mapsto U_G^{strat}(R_G, P, U_S)$  ;  $Re_{mG} \simeq 17679$ ,  $\theta = 5^\circ$ .

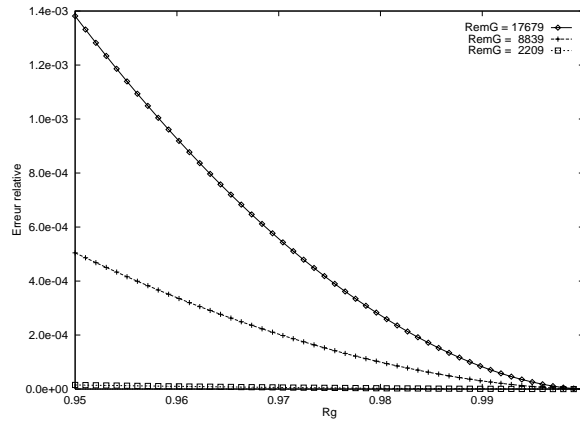


Figure 3.4 : Courbe  $R_G \mapsto |E_R^{strat}(R_G, P, U_S)|$ ;  $\theta = 0^\circ$ .

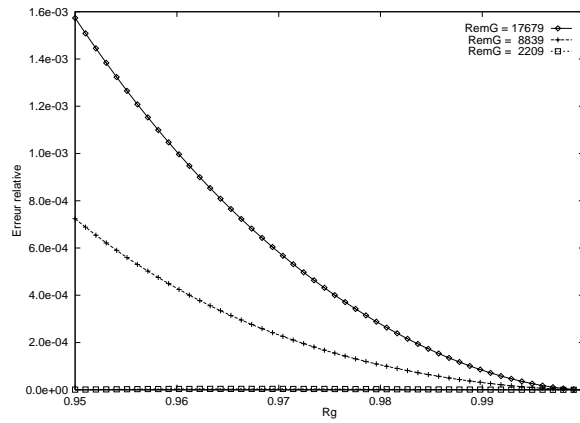


Figure 3.5 : Courbe  $R_G \mapsto |E_R^{strat}(R_G, P, U_S)|$ ;  $\theta = 5^\circ$ .

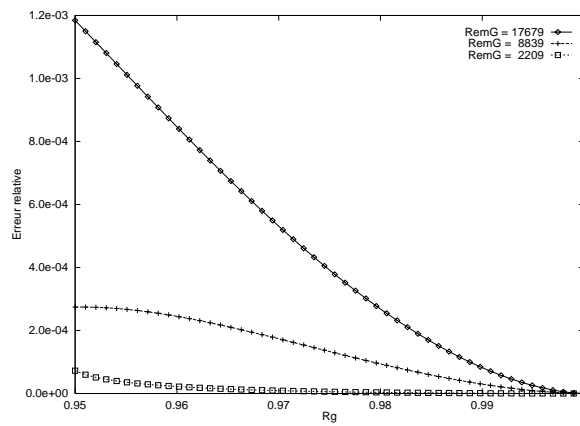


Figure 3.6 : Courbe  $R_G \mapsto |E_R^{strat}(R_G, P, U_S)|$ ;  $\theta = -5^\circ$ .

### 3.3.2.2 Cas annulaire

La loi de glissement de l'écoulement annulaire s'exprime sous la forme suivante (voir section 1.5.4) :

$$\begin{aligned}
 0 &= -f_L(R_G, P, V_L)\rho_L(P)\frac{V_L|V_L|}{2}\frac{S_L(R_G)}{A_L(R_G)} \\
 &+ f_i(R_G, P, V_G)\rho_G(P)\frac{V_G|V_G|}{2}S_i(R_G)\left[\frac{1}{A_L(R_G)} + \frac{1}{A_G(R_G)}\right] \\
 &- [\rho_L(P) - \rho_G(P)]g \sin(\theta).
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

Le coefficient  $f_L$  est calculé à partir de (3.12). Le coefficient  $f_C$ , qui intervient dans la définition (1.53) de  $f_i$ , est aussi exprimé grâce à (3.12) mais avec  $Re_k$  donné par (1.55).

$$\begin{aligned}
 0 &= -C_L\left(\frac{\rho_L(P)|V_L|D_L}{\mu_L}\right)^{-\alpha_L}\rho_L(P)\Phi_0(V_L)\frac{S_L(R_G)}{A_L(R_G)} \\
 &+ C_G\left(\frac{\rho_G(P)|V_G|D_C}{\mu_G}\right)^{-\alpha_G}\left[1 + 12\left(\frac{\rho_L(P)}{\rho_G(P)}\right)^{1/3}(1 - \sqrt{R_G})\right] \\
 &\quad \rho_G(P)\Phi_0(V_G)S_i(R_G)\left[\frac{1}{A_L(R_G)} + \frac{1}{A_G(R_G)}\right] \\
 &- [\rho_L(P) - \rho_G(P)]g \sin(\theta)
 \end{aligned} \tag{3.64}$$

En remplaçant  $D_C$ ,  $D_L$ ,  $S_L$ ,  $S_i$ ,  $A_G$  et  $A_L$  par leurs expressions respectives (voir section 1.5.4), nous obtenons finalement :

$$\beta_i(R_G, P, V_G)\Phi_\alpha(U_G) + \beta_L(R_G, P, V_L)\Phi_\alpha(U_G - U_S) = \Sigma(R_G, P) \tag{3.65}$$

où

$$\begin{aligned}
 \beta_i(R_G, P, V_G) &= \frac{C_G}{D^{\alpha_G}}\mu_G^{\alpha_G}[\rho_G(P)]^{1-\alpha_G}\left[1 + 12\left(\frac{\rho_L(P)}{\rho_G(P)}\right)^{1/3}(1 - R_G^{1/2})\right] \\
 &\quad R_G^{(1+\alpha_G)/2}(1 - R_G)^2,
 \end{aligned} \tag{3.66}$$

$$\beta_L(R_G, P, V_L) = \frac{C_L}{D^{\alpha_L}}\mu_L^{\alpha_L}[\rho_L(P)]^{1-\alpha_L}R_G^3, \tag{3.67}$$

$$\Sigma(R_G, P) = \frac{D}{4}[\rho_L(P) - \rho_G(P)]g \sin(\theta)(1 - R_G)^3R_G^3. \tag{3.68}$$

La démarche suivante est identique au cas stratifié. Notons simplement que :

$$D_G \stackrel{(1.51)}{=} D\sqrt{R_G} \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} D \implies Re_C \stackrel{(1.55)}{=} \frac{\rho_G(P)D\sqrt{R_G}|V_G|}{\mu_G} \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} Re_{mG}, \tag{3.69}$$

$$D_L \stackrel{(1.52)}{=} D(1 - R_G) \implies Re_L \stackrel{(1.32)}{=} \frac{\rho_L(P)D(1 - R_G)|V_L|}{\mu_L} \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\leq} 2000. \tag{3.70}$$

Lorsque  $R_G$  est proche de un, nous avons donc :

$$0 \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} \beta_{mi}(R_G, P, U_S)\Phi_{\alpha_{mG}}(U_G) + \beta_{mL}(R_G)\frac{U_G - U_S}{2} - \Sigma(R_G, P) \tag{3.71}$$

où  $\beta_{mi}$  et  $\beta_{mL}$  sont respectivement des approximations de  $\beta_i$  et  $\beta_L$  pour  $R_G$  proche de un :

$$\beta_{mi}(R_G, P, U_S) = \frac{C_{mG}}{D^{\alpha_{mG}}} \mu_G^{\alpha_{mG}} [\rho_G(P)]^{1-\alpha_{mG}} (1 - R_G)^2, \quad (3.72)$$

$$\beta_{mL}(R_G) = \frac{16}{D} \mu_L R_G^3. \quad (3.73)$$

Lorsque l'écoulement du gaz est laminaire,  $\alpha_{mG} = 1$ ,  $C_{mG} = 16$  et (3.71) entraîne :

$$\beta_{mi}^{lam}(R_G) \frac{U_G}{2} + \beta_{mL}(R_G) \frac{U_G - U_S}{2} \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} \Sigma(R_G, P) \quad (3.74)$$

où

$$\beta_{mi}^{lam}(R_G) = \frac{16}{D} \mu_G (1 - R_G)^2. \quad (3.75)$$

Nous en déduisons :

$$U_G^{ann}(R_G, P, U_S)_{|Re_{mG} \leq 2000} \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} \psi_0^{ann}(R_G, P) + \psi_1^{ann}(R_G) U_S \quad (3.76)$$

où

$$\psi_0^{ann}(R_G, P) = \frac{2\Sigma(R_G, P)}{\beta_{mi}^{lam}(R_G) + \beta_{mL}(R_G)}, \quad (3.77)$$

$$\psi_1^{ann}(R_G) = \frac{\beta_{mL}(R_G)}{\beta_{mi}^{lam}(R_G) + \beta_{mL}(R_G)}. \quad (3.78)$$

Finalement, grâce aux relations (3.68), (3.73) et (3.75) :

$$U_G^{ann}(R_G, P, U_S)_{|Re_{mG} \leq 2000} \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} \mathcal{K}(P)(1 - R_G)^3 + U_S \quad (3.79)$$

où

$$\mathcal{K}(P) = \frac{D^2}{32\mu_L} [\rho_L(P) - \rho_G(P)] g \sin(\theta) \quad (3.80)$$

en tenant compte de la relation suivante :

$$\beta_{mi}^{lam}(R_G) + \beta_{mL}(R_G) \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} \beta_{mL}(R_G) \quad (3.81)$$

En dérivant (3.77) et (3.78) par rapport à  $R_G$ , nous obtenons les relations :

$$\frac{\partial \psi_0^{ann}}{\partial R_G}(R_G, P) \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} -3\mathcal{K}(P)(1 - R_G)^2, \quad (3.82)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_0^{ann}}{\partial R_G^2}(R_G, P) \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} 6\mathcal{K}(P)(1 - R_G), \quad (3.83)$$

$$\frac{d\psi_1^{ann}}{dR_G}(R_G) \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} 2\frac{\mu_G}{\mu_L}(1 - R_G), \quad (3.84)$$

$$\frac{d^2 \psi_1^{ann}}{dR_G^2}(R_G) \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} -2\frac{\mu_G}{\mu_L}. \quad (3.85)$$

En d'autres termes :

$$\frac{\partial U_G^{ann}}{\partial R_G}(R_G, P, U_S)_{|Re_{mG} \leq 2000} \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} -3\mathcal{K}(P)(1 - R_G)^2 + 2\frac{\mu_G}{\mu_L}(1 - R_G)U_S, \quad (3.86)$$

$$\frac{\partial^2 U_G^{ann}}{\partial R_G^2}(R_G, P, U_S)_{|Re_{mG} \leq 2000} \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} -2\frac{\mu_G}{\mu_L}U_S. \quad (3.87)$$

Nous en concluons les relations suivantes lorsque  $R_G$  tend vers un :

$$U_G^{ann}(1^-, P, U_S)|_{Re_{mG} \leq 2000} = U_S, \quad (3.88)$$

$$\frac{\partial U_G^{ann}}{\partial R_G}(1^-, P, U_S)|_{Re_{mG} \leq 2000} = 0, \quad (3.89)$$

$$\frac{\partial^2 U_G^{ann}}{\partial R_G^2}(1^-, P, U_S)|_{Re_{mG} \leq 2000} = -2 \frac{\mu_G}{\mu_L} U_S. \quad (3.90)$$

*Remarque* : contrairement au cas stratifié, la dérivée seconde  $\partial^2(U_G^{ann})/\partial R_G^2|_{Re_{mG} \leq 2000}$  est bien définie au point  $(1^-, P, U_S)$ .

Lorsque l'écoulement du gaz n'est pas laminaire, i.e.  $Re_{mG} \geq 2000$ , une résolution explicite de (3.71) est impossible. Notons que  $\Sigma$  et  $U_S$  ne peuvent être simultanément nuls dans le cas annulaire. Dans le cas général, la solution  $U_G^{ann}$  doit être calculée numériquement à l'aide d'une méthode itérative : on peut vérifier graphiquement que les relations (3.88) et (3.89) restent vraies lorsque  $Re_{mG} > 2000$ . Nous en donnons quelques exemples sur les figures 3.7, 3.8 et 3.9.

En conséquence, nous admettrons que les relations (3.88) et (3.89) sont aussi de bonnes approximations lorsque l'écoulement n'est pas laminaire :

$$U_G^{ann}(1^-, P, U_S) = U_S, \quad (3.91)$$

$$\frac{\partial U_G^{ann}}{\partial R_G}(1^-, P, U_S) = 0. \quad (3.92)$$

Plus rigoureusement, on peut calculer l'erreur relative commise en prenant la formule (3.76) pour calculer  $U_G^{ann}$  lorsque  $Re_{mG} > 2000$ . Pour cela, on évalue le quotient :

$$E_R^{ann}(R_G, P, U_S) = \frac{U_G^{ann}(R_G, P, U_S) - (U_G^{ann})_{lam}(R_G, P, U_S)}{(U_G^{ann})_{lam}(R_G, P, U_S)} \quad (3.93)$$

où  $(U_G^{ann})_{lam}$  est donné par la formule (3.76) tandis que  $U_G^{ann}$  est calculé de manière implicite à partir de (3.71).

Nous avons tracé la courbe  $R_G \mapsto |E_R^{ann}(R_G, P, U_S)|$  pour  $R_G$  proche de un et  $P, U_S$  fixés. Nous en donnons quelques exemples sur les figures 3.10, 3.11 et 3.12 où est tracé  $|E_R^{ann}|$  en fonction de  $R_G$  pour différentes valeurs de  $Re_{mG}$  et de  $\theta$ . Nous constatons qu'elle reste proche de zéro si  $R_G$  est voisin de un.

Aussi, nous admettrons que la relation (3.79) continue d'être une bonne approximation lorsque l'écoulement du gaz n'est pas laminaire :

$$U_G^{ann}(R_G, P, U_S) \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} \mathcal{K}(P)(1 - R_G)^3 + U_S, \quad (3.94)$$

### 3.3.3 En dehors des voisinages de $R_G = 0$ et $R_G = 1$

Lorsque le taux de vide n'est pas proche de zéro ou un, tous les types d'écoulement sont possibles, à savoir dispersé, intermittent, stratifié ou annulaire. Néanmoins, d'après les critères de transition décrits dans la section 1.7, l'écoulement dispersé n'existe pas si  $R_G > 0.52$  et l'annulaire est impossible lorsque  $R_L > 0.24$ , i.e.  $R_G < 0.76$ .

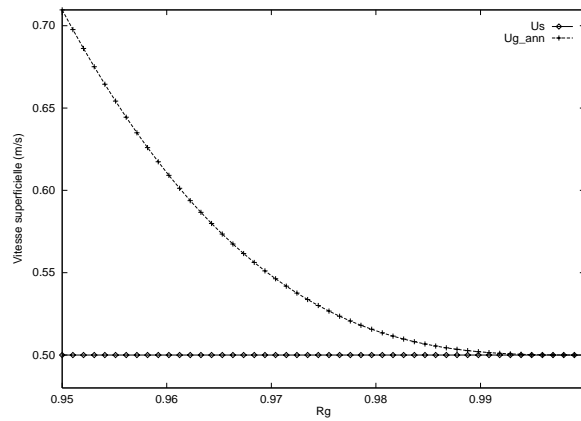


Figure 3.7 : Courbe  $R_G \mapsto U_G^{ann}(R_G, P, U_S)$  ;  $Re_{mG} \simeq 2209$ ,  $\theta = 90^\circ$ .

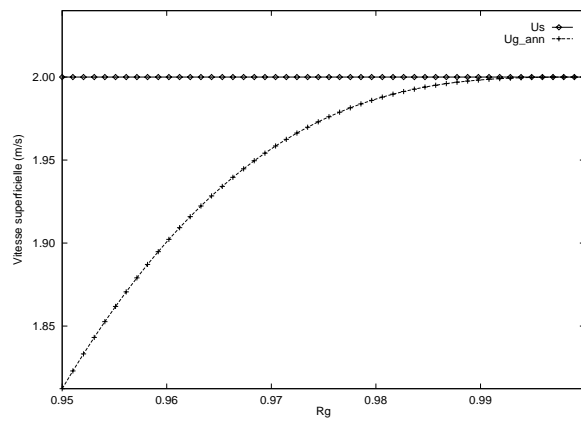


Figure 3.8 : Courbe  $R_G \mapsto U_G^{ann}(R_G, P, U_S)$  ;  $Re_{mG} \simeq 8839$ ,  $\theta = -90^\circ$ .

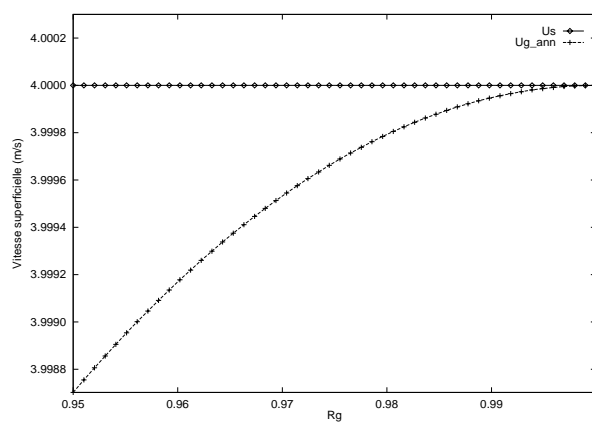
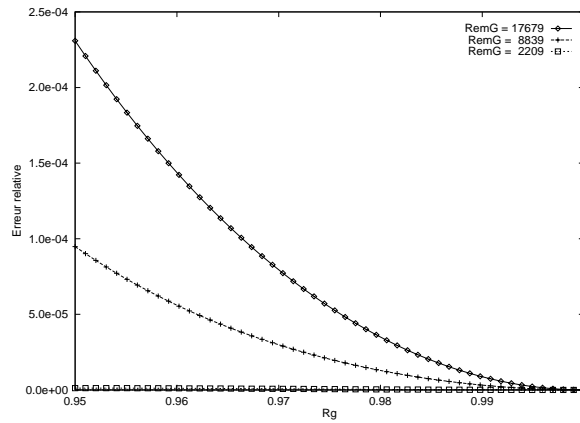
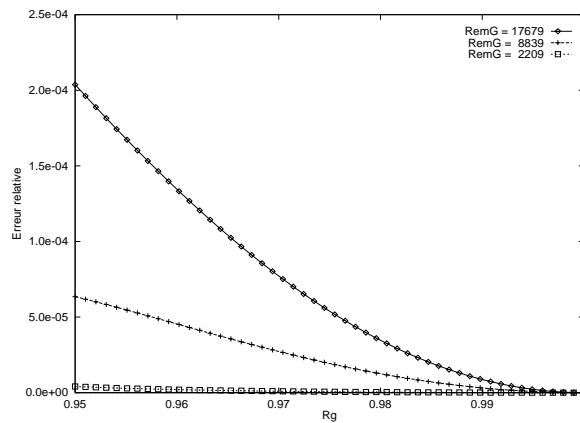
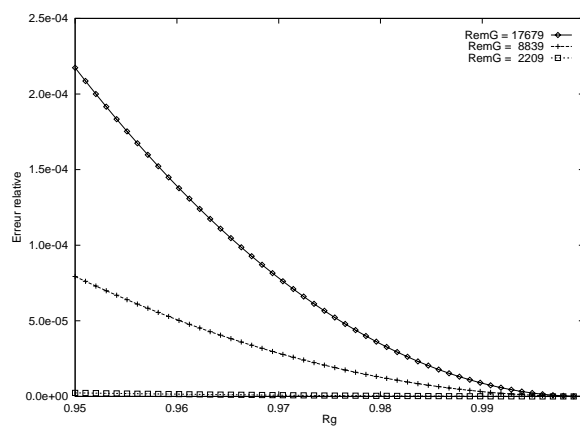


Figure 3.9 : Courbe  $R_G \mapsto U_G^{ann}(R_G, P, U_S)$  ;  $Re_{mG} \simeq 17679$ ,  $\theta = 0^\circ$ .

Figure 3.10 : Courbe  $R_G \mapsto |E_R^{ann}(R_G, P, U_S)|$ ;  $\theta = 90^\circ$ .Figure 3.11 : Courbe  $R_G \mapsto |E_R^{ann}(R_G, P, U_S)|$ ;  $\theta = -90^\circ$ .Figure 3.12 : Courbe  $R_G \mapsto |E_R^{ann}(R_G, P, U_S)|$ ;  $\theta = 0^\circ$ .



Si le taux de vide est compris entre 0.52 et 0.76, l'écoulement est donc intermittent ou stratifié. Néanmoins lorsque la conduite est verticale, le stratifié n'existe pas, que le flot soit ascendant ou descendant. C'est aussi vrai si l'écoulement est fortement incliné et ascendant mais faux dans le cas descendant (voir section 1.7). Pour simplifier le problème, nous supposons que les tronçons du pipeline peuvent être uniquement verticaux, horizontaux ou légèrement inclinés (de quelques degrés) par rapport à l'horizontale.

En d'autres termes, lorsque le pipe est vertical (i.e.  $\theta = \pm\pi/2$ ) et  $0.52 < R_G < 0.76$ , l'écoulement est intermittent et la loi de glissement est donnée par (1.21) :

$$0 = \Psi_{int}(R_G, P, V_G, V_L) = V_G - C_{int}(\theta) [(1 - R_G)V_L + R_G V_G] - u_d^{int}(P, \theta) \quad (3.95)$$

où  $u_d^{int}(P, \theta)$  est donnée (1.16) et  $C_{int}(\theta)$  est une valeur constante fournie, par exemple, par (1.20) lorsque  $\theta = \pi/2$  et comprise entre 0.95 et 1.2 lorsque  $\theta = -\pi/2$ .

En notant  $U_G^{int}$  pour désigner  $U_G = R_G V_G$  dans le cas intermittent, (3.95) s'écrit aussi sous la forme :

$$U_G^{int}(R_G, P, U_S) = R_G [C_{int}(\theta)U_S + u_d^{int}(P, \theta)]. \quad (3.96)$$

En particulier :

$$\frac{\partial U_G^{int}}{\partial R_G}(R_G, P, U_S) = C_{int}(\theta)U_S + u_d^{int}(P, \theta), \quad (3.97)$$

$$\frac{\partial^2 U_G^{int}}{\partial R_G^2}(R_G, P, U_S) = 0. \quad (3.98)$$

Lorsque la conduite est horizontale ou légèrement inclinée et  $0.52 < R_G < 0.76$ , le critère (1.64) permet de prédire la transition de l'écoulement stratifié vers le non stratifié, en l'occurrence l'intermittent. Malheureusement, ce critère dépend de la vitesse du gaz  $V_G$ . La valeur du taux de vide où se produit la transition est donc loin d'être triviale.

Dans le cas intermittent,  $U_G$  est donnée par (3.96), valable aussi pour un écoulement horizontal ou légèrement incliné. Dans le cas stratifié,  $U_G$  est calculée de façon implicite à partir d'une relation similaire à (3.11) :

$$\begin{aligned} 0 = & f_G(R_G, P, V_G)\rho_G(P)\frac{V_G|V_G|}{2}\frac{S_G(R_G)}{A_G(R_G)} - f_L(R_G, P, V_L)\rho_L(P)\frac{V_L|V_L|}{2}\frac{S_L(R_G)}{A_L(R_G)} \\ & + f_i(R_G, P, V_G)\rho_G(P)\frac{V_G - V_L|V_G - V_L|}{2}S_i(R_G)\left[\frac{1}{A_L(R_G)} + \frac{1}{A_G(R_G)}\right] \\ & - [\rho_L(P) - \rho_G(P)]g\sin(\theta) \end{aligned} \quad (3.99)$$

où le tenseur  $\tau_i$  est donné cette fois - ci par (1.36) (voir discussion page 18).

L'hypothèse (3.17) n'est plus forcément vraie pour un taux de vide compris entre 0.52 et 0.76. On peut choisir d'exprimer  $f_i$  à l'aide de la corrélation (1.37) :

$$f_i(R_G, P, V_G) = f_G(R_G, P, V_G) \left[ 1 + 15\sqrt{\frac{h_L(R_G)}{D}} \left( \frac{R_G V_G}{U_{G0}} - 1 \right) \mathcal{H}(R_G V_G - U_{G0}) \right] \quad (3.100)$$

où  $\mathcal{H}$  est la fonction de Heaviside :

$$\mathcal{H}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad (3.101)$$

$U_{G0} = 5\sqrt{\rho_{G0}/\rho_G} m.s^{-1}$ ;  $\rho_{G0}$  est la masse volumique du gaz à la pression atmosphérique.  $h_L$  est la hauteur liquide donnée par la formule (1.39). Cette formule de  $f_i$  a malheureusement l'inconvénient d'être discontinue lorsque  $R_G V_G = U_{G0}$ .

Une corrélation très simple est parfois employée pour exprimer le coefficient  $f_i$  [42, 151, 161] :

$$f_i = 0.0142. \quad (3.102)$$

Ouyang L. a plus précisément démontré que (3.102) est une bonne approximation de (3.100) si le rapport  $h_L/D$  n'est pas proche de zéro [122]. Nous verrons plus loin que ce rapport est compris entre 1/4 et 1/2 lorsque  $R_G$  varie de 0.52 à 0.76. Nous imposerons donc la corrélation (3.102) pour déterminer le coefficient de frottement interfacial.

En appliquant la formule (3.12) pour calculer les coefficients  $f_L$  et  $f_G$ , la loi de glissement (3.99) s'écrit :

$$\begin{aligned} & \beta_G(R_G, P, V_G)\Phi_{\alpha_G}(U_G) + \beta_L(R_G, P, V_L)\Phi_{\alpha_L}(U_G - U_S) \\ & + \beta_i^{new}(R_G, P)\Phi_0(U_G - R_G U_S) = \Sigma(R_G, P) \end{aligned} \quad (3.103)$$

en tenant compte de la relation :

$$(1 - R_G)^2 R_G^2 \Phi_0(V_G - V_L) = \Phi_0[R_L R_G(V_G - V_L)] = \Phi_0(U_G - R_G U_S). \quad (3.104)$$

$\beta_G$ ,  $\beta_L$  et  $\Sigma$  sont donnés respectivement par (3.21), (3.22) et (3.24) tandis que  $\beta_i^{new}$  est fourni par la formule suivante :

$$\beta_i^{new}(R_G, P) = f_i \rho_G(P) \frac{2}{\pi} \sin[\Omega(R_G)/2] \quad (3.105)$$

où  $f_i$  est donné par (3.102).

Le calcul implicite de  $U_G$  est ensuite effectué après avoir transformé l'équation (3.103) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & \tilde{\beta}_G(R_G, P, U_G)\Phi_{\alpha_G}(U_G) + \tilde{\beta}_L(R_G, P, U_S, U_G)\Phi_{\alpha_L}(U_G - U_S) \\ & + \beta_i^{new}(R_G, P)\Phi_0(U_G - R_G U_S) = \Sigma(R_G, P) \end{aligned} \quad (3.106)$$

où

$$\tilde{\beta}_G(R_G, P, U_G) \stackrel{(3.21)}{=} \beta_G(R_G, P, U_G/R_G), \quad (3.107)$$

$$\tilde{\beta}_L(R_G, P, U_S, U_G) \stackrel{(3.22)}{=} \beta_L(R_G, P, (U_S - U_G)/(1 - R_G)). \quad (3.108)$$

Afin de déterminer le taux de vide critique où se produit la transition stratifié-intermittent, nous définissons la vitesse superficielle critique du gaz associée au critère de transition (1.64); cette vitesse dépend de  $R_G$  et  $P$  mais pas de  $U_S$  :

$$U_G^{crit}(R_G, P) = R_G \left(1 - \frac{h_L(R_G)}{D}\right) \left[ \frac{[\rho_L(P) - \rho_G(P)] g \cos \theta R_G}{\rho_G(P) \frac{dR_L}{dh_L}(R_G)} \right]^{1/2} \quad (3.109)$$

D'après la relation (1.65),  $U_G^{crit}$  s'écrit aussi sous la forme :

$$U_G^{crit}(R_G, P) = C_G^{crit}(P) (1 - \cos[\Omega(R_G)])^{-1/2} R_G^{3/2} \left(\frac{h_L(R_G)}{D}\right)^{1/4} \left(1 - \frac{h_L(R_G)}{D}\right)^{5/4} \quad (3.110)$$

où

$$C_G^{crit}(P) = \left[ \frac{\pi D [\rho_L(P) - \rho_G(P)] g \cos \theta}{\rho_G(P)} \right]^{1/2}. \quad (3.111)$$

Notons que  $|\theta|$  est strictement inférieur à  $\pi/2$  puisque le pipe est horizontal ou légèrement incliné.  $C_G^{crit}(P)$  est donc bien défini et est strictement positif.

Nous déterminons ensuite le taux de vide critique  $R_G^{crit}$  pour lequel la vitesse  $U_G^{strat}$  est égale à  $U_G^{crit}$ . Nous résolvons donc l'équation (3.106) par rapport à  $R_G$ , les variables  $P$ ,  $U_S$  étant fixées et  $U_G$  remplacé par  $U_G^{crit}$  :

$$\begin{aligned} & \beta_G^{crit}(R_G, P) \Phi_{\alpha_G}(U_G^{crit}(R_G, P)) + \beta_L^{crit}(R_G, P, U_S) \Phi_{\alpha_L}(U_G^{crit}(R_G, P) - U_S) \\ + & \beta_i^{new}(R_G, P) \Phi_0(U_G^{crit}(R_G, P) - R_G U_S) = \Sigma(R_G, P) \end{aligned} \quad (3.112)$$

où

$$\beta_G^{crit}(R_G, P) = \tilde{\beta}_G(R_G, P, U_G^{crit}(R_G, P)), \quad (3.113)$$

$$\beta_L^{crit}(R_G, P, U_S) = \tilde{\beta}_L(R_G, P, U_S, U_G^{crit}(R_G, P)). \quad (3.114)$$

Avant de poursuivre notre discussion sur les éventuelles solutions de (3.112), il est nécessaire d'étudier les propriétés des fonctions  $U_G^{strat}$  et  $U_G^{crit}$ .

Tout d'abord, nous remarquons que lorsque  $\Omega$  varie entre 0 et  $\pi$ , la courbe  $\Omega \mapsto \Omega - \sin(\Omega)$  peut être approchée par la parabole  $\Omega \mapsto \Omega^2/\pi$ . De (1.27), nous déduisons l'approximation suivante, valable lorsque  $\Omega$  varie entre 0 et  $\pi$  ou encore pour  $1 - R_G$  compris entre 0 et  $1/2$  :

$$\Omega = \pi \sqrt{2(1 - R_G)}. \quad (3.115)$$

Ainsi lorsque  $R_G$  varie de 0.52 à 0.76,  $\Omega(R_G)$  est strictement compris entre  $2\pi/3$  et  $\pi$ . Le rapport :

$$\frac{h_L(R_G)}{D} \stackrel{(1.39)}{=} \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \left( \frac{\Omega(R_G)}{2} \right) \right] \quad (3.116)$$

varie donc entre  $1/4$  et  $1/2$ .

En différenciant (1.27), nous trouvons :

$$\frac{d\Omega}{dR_G} = \frac{2\pi}{\cos(\Omega) - 1}. \quad (3.117)$$

Nous en déduisons la dérivée de la hauteur liquide par rapport à  $R_G$  :

$$\frac{d[h_L(R_G)/D]}{dR_G} = \frac{\pi \sin[\Omega(R_G)/2]}{2 \cos[\Omega(R_G)] - 1}. \quad (3.118)$$

Elle est négative lorsque  $R_G$  est compris entre 0.52 et 0.76.

Finalement, la dérivée partielle de  $U_G^{crit}$  par rapport à  $R_G$  vaut :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U_G^{crit}}{\partial R_G}(R_G, P) \\ = & C_G^{crit}(P) (1 - \cos[\Omega(R_G)])^{-1/2} \frac{R_G^{1/2}}{2} \left( \frac{h_L(R_G)}{D} \right)^{1/4} \left( 1 - \frac{h_L(R_G)}{D} \right)^{1/4} \\ & \left\{ 3 \left( 1 - \frac{h_L(R_G)}{D} \right) + \frac{1}{2} R_G \left[ \left( \frac{h_L(R_G)}{D} \right)^{-1} \left( 1 - \frac{h_L(R_G)}{D} \right) - 5 \right] \frac{d[h_L(R_G)/D]}{dR_G} \right\} \\ + & C_G^{crit}(P) \frac{\pi \sin[\Omega(R_G)]}{(1 - \cos[\Omega(R_G)])^{5/2}} R_G^{3/2} \left( \frac{h_L(R_G)}{D} \right)^{1/4} \left( 1 - \frac{h_L(R_G)}{D} \right)^{5/4}. \end{aligned} \quad (3.119)$$

On vérifie très facilement qu'elle est strictement positive lorsque  $R_G$  varie de 0.52 à 0.76 et donc que  $U_G^{crit}$  est strictement croissante entre ces deux valeurs, à  $P$  fixé.

La courbe

$$\begin{aligned} U_G^{crit}(\cdot, P) : ]0.52, 0.76[ &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ R_G &\longmapsto U_G^{crit}(R_G, P) \end{aligned} \quad (3.120)$$

est donc continue (voir (3.110)) et strictement croissante.

Des calculs numériques montrent que la courbe :

$$\begin{aligned} U_G^{strat}(\cdot, P, U_S) : ]0.52, 0.76[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ R_G &\longmapsto U_G^{strat}(R_G, P, U_S) \end{aligned} \quad (3.121)$$

n'est pas toujours monotone, à  $P, U_S$  fixés.

Néanmoins, les courbes (3.120) et (3.121) s'intersectent au plus, une fois lorsque  $R_G$  varie de 0.52 à 0.76. Ce constat est purement numérique. Il a été vérifié pour des pressions  $P$  et des vitesses superficielles  $U_S$  variant sur des échelles suffisamment grandes pour que nous puissions l'admettre dans le reste de notre exposé. Plus précisément, nous avons fait varier  $P$  entre 0.1 et 100 bar tandis  $U_S$  était compris entre 0.01 m/s et 20 m/s. Nous en donnons quelques exemples sur les figures 3.13, 3.14 et 3.15.

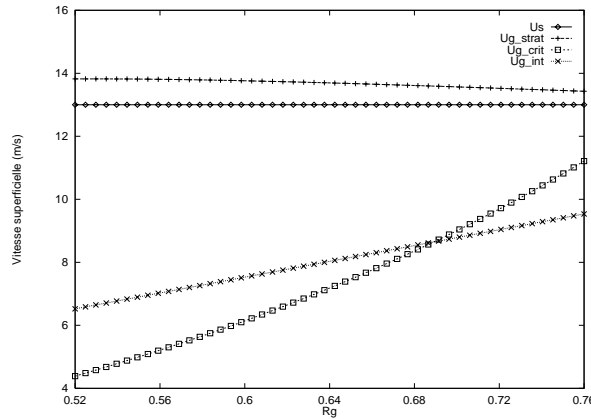


Figure 3.13 : Vitesses superficielles du gaz : critique, stratifiée et intermittente;  $P = 1 \text{ bar}$ ,  $U_S = 13 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $\theta = 5^\circ$ .

Nous ferons donc l'hypothèse que (3.112) admet au plus une solution entre 0.52 et 0.76. En d'autres termes, il ne peut exister qu'une seule transition entre le stratifié et l'intermittent lorsque  $R_G$  varie de 0.52 à 0.76,  $P$  et  $U_S$  étant fixés. Il serait intéressant de démontrer un tel résultat, aussi bien de façon théorique que de manière expérimentale...

Sachant que les fonctions  $U_G^{strat}$  et  $U_G^{crit}$  sont continues par rapport à  $R_G$  sur l'intervalle  $]0.52, 0.76[$ , deux cas sont possibles :

- L'équation (3.112) n'admet aucune solution dans  $]0.52, 0.76[$  : il reste à déterminer la position de la courbe  $R_G \mapsto U_G^{strat}(R_G, P, U_S)$  par rapport à  $R_G \mapsto U_G^{crit}(R_G, P)$

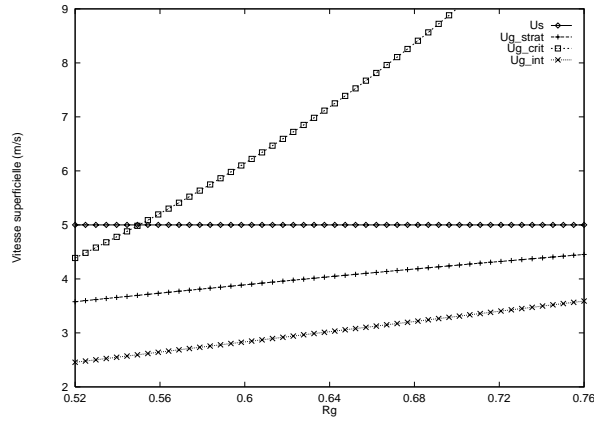


Figure 3.14 : Vitesses superficielles du gaz : critique, stratifiée et intermittente ;  $P = 1 \text{ bar}$ ,  $U_S = 5 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $\theta = -5^\circ$ .

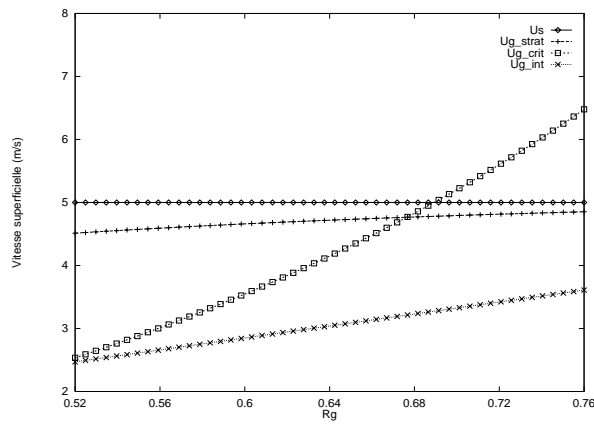


Figure 3.15 : Vitesses superficielles du gaz : critique, stratifiée et intermittente ;  $P = 3 \text{ bar}$ ,  $U_S = 5 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $\theta = 0^\circ$ .

en comparant leur valeur pour un taux de vide  $R_G^c$  compris entre 0.52 et 0.76. Si  $U_G^{strat}(R_G^c, P, U_S)$  est inférieur (respectivement supérieur) à  $U_G^{crit}(R_G^c, P)$ , l'écoulement est stratifié (resp. intermittent) pour tout  $R_G \in ]0.52, 0.76[$ .

- L'équation (3.112) admet une solution  $R_G^{crit}$  dans  $]0.52, 0.76[$  : si le signe de la dérivée  $\partial U_G^{strat} / \partial R_G$  au point  $(R_G^{crit}, P, U_S)$  est positif (respectivement négatif), l'écoulement est stratifié (resp. intermittent) pour tout  $0.52 < R_G < R_G^{crit}$  et intermittent (resp. stratifié) pour  $R_G^{crit} < R_G < 0.76$ .

Dans ce dernier cas, nous constatons à nouveau que les critères de transition, en l'occurrence le critère (1.64), induisent des discontinuités car nous n'avons pas forcément égalité entre  $U_G^{strat}(R_G^{crit}, P, U_S)$  et  $U_G^{int}(R_G^{crit}, P, U_S)$ . Cependant, nous allons voir qu'il est possible de contourner cette difficulté en construisant une loi synthétique qui ne requiert pas le calcul explicite de la valeur de  $R_G^{crit}$ .

### 3.4 Construction de la loi synthétique de glissement

Résumons maintenant tous ces résultats. Lorsque  $R_G$  est proche de zéro, l'écoulement est dispersé. La vitesse  $U_G$ , que nous avons notée  $U_G^{disp}$ , vérifie les relations (3.8), (3.9) et (3.10). Nous en déduisons les conditions qui doivent être imposées sur la fonction  $\psi$ , définie par (3.3), au point limite  $(0^+, P, U_S)$  :

$$\psi(0^+, P, U_S) = 0, \quad (3.122)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial R_G}(0^+, P, U_S) = C_{disp} U_S + u_d^{disp}(P, \theta), \quad (3.123)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial R_G^2}(0^+, P, U_S) = 0. \quad (3.124)$$

Lorsque  $R_G$  est proche de un, l'écoulement est stratifié ou annulaire. Dans les deux cas, (3.6) est satisfaite; les limites  $U_G^{strat}(1^-, P, U_S)$  et  $U_G^{ann}(1^-, P, U_S)$  valent exactement  $U_S$  :

$$\psi(1^-, P, U_S) = U_S. \quad (3.125)$$

Les relations (3.60) et (3.92) entraînent aussi :

$$\frac{\partial \psi}{\partial R_G}(-1, P, U_S) = 0. \quad (3.126)$$

Par contre,  $\partial^2 U_G / \partial R_G^2$  n'est pas forcément définie au point limite  $(1^-, P, U_S)$  si le flot est stratifié (voir (3.58)). Aussi, nous n'imposerons aucune condition sur  $\partial^2 \psi / \partial R_G^2(1^-, P, U_S)$ .

Lorsque  $R_G$  est compris entre 0.52 et 0.76, l'écoulement peut être stratifié ou intermittent. Si la conduite est verticale (i.e.  $\theta = \pm\pi/2$ ), le flot est nécessairement intermittent (voir section 3.3.3).  $\psi$  satisfait alors les relations (3.96), (3.97) et (3.98), quelque soit  $R_G \in ]0.52, 0.76[$  :

$$\psi(R_G, P, U_S) = R_G \left[ C_{int}(\theta) U_S + u_d^{int}(P, \theta) \right], \quad (3.127)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial R_G}(R_G, P, U_S) = C_{int}(\theta) U_S + u_d^{int}(P, \theta), \quad (3.128)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial R_G^2}(R_G, P, U_S) = 0. \quad (3.129)$$

Lorsque la conduite est horizontale ou légèrement inclinée, des calculs sont nécessaires pour déterminer si le flot stratifié ou intermittent. De façon pratique, nous calculons les valeurs de  $U_G^{strat}$  et  $U_G^{crit}$  aux points  $(R_G^a, P, U_S)$  et  $(R_G^b, P, U_S)$  grâce aux relations (3.106) et (3.110);  $R_G^a$  et  $R_G^b$  sont des taux de vide choisis dans l'intervalle  $]0.52, 0.76[$ , respectivement proches de 0.52 et 0.76.

Nous définissons ensuite les différences :

$$\Delta_a(P, U_S) = U_G^{strat}(R_G^a, P, U_S) - U_G^{crit}(R_G^a, P), \quad (3.130)$$

$$\Delta_b(P, U_S) = U_G^{strat}(R_G^b, P, U_S) - U_G^{crit}(R_G^b, P). \quad (3.131)$$

Sachant que les courbes (3.120) et (3.121) s'intersectent au plus une fois lorsque  $R_G$  varie de 0.52 à 0.76 (voir page 61), quatre cas sont possibles en fonction des signes de  $\Delta_a(P, U_S)$  et  $\Delta_b(P, U_S)$  :

- (1)  $\Delta_a(P, U_S) > 0$  et  $\Delta_b(P, U_S) > 0$  : l'écoulement est intermittent quelque soit  $R_G \in [R_G^a, R_G^b]$  (voir figure 3.13).
- (2)  $\Delta_a(P, U_S) \leq 0$  et  $\Delta_b(P, U_S) \leq 0$  : l'écoulement est stratifié quelque soit  $R_G \in [R_G^a, R_G^b]$  (voir figure 3.14).
- (3)  $\Delta_a(P, U_S) > 0$  et  $\Delta_b(P, U_S) \leq 0$  : l'équation (3.112) admet une solution  $R_G^{crit}$  dans l'intervalle  $]R_G^a, R_G^b[$ . L'écoulement est intermittent si  $R_G^a \leq R_G < R_G^{crit}$  et stratifié si  $R_G^{crit} \leq R_G \leq R_G^b$  (voir figure 3.15).
- (4)  $\Delta_a(P, U_S) \leq 0$  et  $\Delta_b(P, U_S) > 0$  : (3.112) admet une solution  $R_G^{crit}$  dans  $[R_G^a, R_G^b[$ . L'écoulement est stratifié si  $R_G^a \leq R_G \leq R_G^{crit}$  et intermittent si  $R_G^{crit} < R_G \leq R_G^b$ .

Dans le premier cas, l'écoulement est intermittent :  $\psi$  satisfait les relations (3.127), (3.128), (3.129), quelque soit  $R_G \in [R_G^a, R_G^b]$ .

Dans le second cas, le flot est stratifié.  $\psi$  est donnée par  $U_G^{strat}$  que nous calculons de façon implicite à partir de (3.106). Les dérivées partielles de  $\psi$  par rapport à  $R_G$  sont calculées par différences finies en définissant  $\Delta R_G$  comme une constante proche de zéro, indépendante de  $R_G$ . Nous avons donc les relations suivantes, vraies quelque soit  $R_G \in [R_G^a, R_G^b]$  :

$$\psi(R_G, P, U_S) = U_G^{strat}(R_G, P, U_S), \quad (3.132)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial R_G}(R_G, P, U_S) = \frac{U_G^{strat}(R_G + \Delta R_G, P, U_S) - U_G^{strat}(R_G - \Delta R_G, P, U_S)}{2 \Delta R_G}, \quad (3.133)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial R_G^2}(R_G, P, U_S) = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial R_G}(R_G + \Delta R_G, P, U_S) - \frac{\partial \psi}{\partial R_G}(R_G - \Delta R_G, P, U_S)}{2 \Delta R_G}. \quad (3.134)$$

Dans les deux premiers cas, on peut donc choisir un taux de vide  $R_G^*$  de façon arbitraire dans l'intervalle  $[R_G^a, R_G^b]$  où seront imposées la valeur de  $\psi$  et celles de ses dérivées par rapport à  $R_G$ , jusqu'à l'ordre deux.

Dans les deux derniers cas, une transition entre le stratifié et l'intermittent a lieu en  $(R_G^{crit}, P, U_S)$ . Plutôt que de résoudre (3.112) pour déterminer la valeur de  $R_G^{crit}$ , nous imposerons simplement la valeur de  $\psi$  et celles de ses dérivées aux points  $(R_G^a, P, U_S)$  et  $(R_G^b, P, U_S)$ . Par exemple, si le flot est intermittent en  $R_G^a$ ,  $\psi$  vérifiera les relations (3.127), (3.128) et (3.129) au point  $(R_G^a, P, U_S)$ . De la même façon, si l'écoulement est stratifié en  $R_G^b$ ,  $\psi$  satisfera les conditions (3.132), (3.133) et (3.134) au point  $(R_G^b, P, U_S)$ . Nous éludons

Tableau 3.1 :  $(\Delta_a(P, U_S) > 0$  et  $\Delta_b(P, U_S) > 0)$  ou  $\theta = \pm\pi/2$ .

$(R_G, P, U_S)$	$(0^+, P, U_S)$	$(R_G^*, P, U_S)$	$(1^-, P, U_S)$
$\psi$	0	$(3.127) _{R_G=R_G^*}$	$U_S$
$\partial\psi/\partial R_G$	(3.123)	$(3.128) _{R_G=R_G^*}$	0
$\partial^2\psi/\partial R_G^2$	0	0	–

 Tableau 3.2 :  $\Delta_a(P, U_S) \leq 0$  et  $\Delta_b(P, U_S) \leq 0$  et  $|\theta| \neq \pi/2$ .

$(R_G, P, U_S)$	$(0^+, P, U_S)$	$(R_G^*, P, U_S)$	$(1^-, P, U_S)$
$\psi$	0	$(3.132) _{R_G=R_G^*}$	$U_S$
$\partial\psi/\partial R_G$	(3.123)	$(3.133) _{R_G=R_G^*}$	0
$\partial^2\psi/\partial R_G^2$	0	$(3.134) _{R_G=R_G^*}$	–

ainsi les problèmes de discontinuités évoqués plus haut (voir page 63), au point de transition  $(R_G^{crit}, P, U_S)$ .

En résumé, la fonction  $\psi$  doit vérifier huit relations dans les deux premiers cas : trois en  $R_G = 0$ , trois en  $R_G^*$  et deux en  $R_G = 1$ . Dans les deux derniers cas,  $\psi$  doit satisfaire onze conditions : trois en  $R_G = 0$ , trois en  $R_G^a$ , trois en  $R_G^b$  et deux en  $R_G = 1$ . Ces différentes situations sont résumées dans les tableaux 3.1, 3.2, 3.3 et 3.4.

Nous construisons ensuite la fonction  $\psi$  par interpolation polynômiale en tenant compte des conditions imposées sur ses valeurs et celles de ses dérivées aux points  $(0^+, P, U_S)$ ,  $(R_G^*, P, U_S)$ ,  $(1^-, P, U_S)$  ou  $(0^+, P, U_S)$ ,  $(R_G^a, P, U_S)$ ,  $(R_G^b, P, U_S)$ ,  $(1^-, P, U_S)$  suivant les cas.

Afin d'alléger les formules, nous poserons les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
 D\psi_0 &= \frac{\partial\psi}{\partial R_G}(0^+, P, U_S), \\
 \psi_* &= \psi(R_G^*, P, U_S), D\psi_* = \frac{\partial\psi}{\partial R_G}(R_G^*, P, U_S), D^2\psi_* = \frac{\partial^2\psi}{\partial R_G^2}(R_G^*, P, U_S), \\
 \psi_a &= \psi(R_G^a, P, U_S), D\psi_a = \frac{\partial\psi}{\partial R_G}(R_G^a, P, U_S), D^2\psi_a = \frac{\partial^2\psi}{\partial R_G^2}(R_G^a, P, U_S), \\
 \psi_b &= \psi(R_G^b, P, U_S), D\psi_b = \frac{\partial\psi}{\partial R_G}(R_G^b, P, U_S), D^2\psi_b = \frac{\partial^2\psi}{\partial R_G^2}(R_G^b, P, U_S).
 \end{aligned}$$

**Premier cas :**

$$U_G \stackrel{(3.3)}{=} \psi(R_G, P, U_S) = \psi_{11}(R_G, P, U_S)\mathbb{1}_{[0, R_G^*]}(R_G) + \psi_{12}(R_G, P, U_S)\mathbb{1}_{]R_G^*, 1]}(R_G) \quad (3.135)$$



Tableau 3.3 :  $\Delta_a(P, U_S) > 0$  et  $\Delta_b(P, U_S) \leq 0$  et  $|\theta| \neq \pi/2$ .

$(R_G, P, U_S)$	$(0^+, P, U_S)$	$(R_G^a, P, U_S)$	$(R_G^b, P, U_S)$	$(1^-, P, U_S)$
$\psi$	0	$(3.127) _{R_G=R_G^a}$	$(3.132) _{R_G=R_G^b}$	$U_S$
$\partial\psi/\partial R_G$	(3.123)	$(3.128) _{R_G=R_G^a}$	$(3.133) _{R_G=R_G^b}$	0
$\partial^2\psi/\partial R_G^2$	0	0	$(3.134) _{R_G=R_G^b}$	–

Tableau 3.4 :  $\Delta_a(P, U_S) \leq 0$  et  $\Delta_b(P, U_S) > 0$  et  $|\theta| \neq \pi/2$ .

$(R_G, P, U_S)$	$(0^+, P, U_S)$	$(R_G^a, P, U_S)$	$(R_G^b, P, U_S)$	$(1^-, P, U_S)$
$\psi$	0	$(3.132) _{R_G=R_G^a}$	$(3.127) _{R_G=R_G^b}$	$U_S$
$\partial\psi/\partial R_G$	(3.123)	$(3.133) _{R_G=R_G^a}$	$(3.128) _{R_G=R_G^b}$	0
$\partial^2\psi/\partial R_G^2$	0	$(3.134) _{R_G=R_G^a}$	0	–

avec

$$\begin{aligned}
\psi_{11}(R_G, P, U_S) &= D\psi_0 R_G + \left[ \frac{10\psi_*}{(R_G^*)^3} - \frac{6D\psi_0 + 4D\psi_*}{(R_G^*)^2} \right] R_G^3 \\
&+ \left[ -\frac{15\psi_*}{(R_G^*)^4} + \frac{8D\psi_0 + 7D\psi_*}{(R_G^*)^3} \right] R_G^4 + \left[ \frac{6\psi_*}{(R_G^*)^5} - 3\frac{D\psi_0 + D\psi_*}{(R_G^*)^4} \right] R_G^5, \\
\psi_{12}(R_G, P, U_S) &= \frac{\psi_*(R_G - 1)^2 [1 + 2R_G + 3R_G^2 - 4(1 + 2R_G)R_G^* + 6(R_G^*)^2]}{(R_G^* - 1)^4} \\
&- \frac{D\psi_*(R_G - 1)^2(1 + 2R_G - 3R_G^*)(R_G - R_G^*)(R_G^* - 1)}{(R_G^* - 1)^4} \\
&- \frac{U_S(R_G - R_G^*)^3(-4 + 3R_G + R_G^*)}{(R_G^* - 1)^4}.
\end{aligned}$$

La fonction indicatrice  $\mathbb{1}$  est définie sur  $\mathbb{R}$  de la façon suivante :

$$\mathbb{1}_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a, b], \\ 0 & \text{si } x \notin [a, b]. \end{cases} \quad (3.136)$$

**Deuxième cas :**

$$U_G \stackrel{(3.3)}{=} \psi(R_G, P, U_S) = \psi_{21}(R_G, P, U_S)\mathbb{1}_{[0, R_G^*]}(R_G) + \psi_{22}(R_G, P, U_S)\mathbb{1}_{]R_G^*, 1]}(R_G) \quad (3.137)$$

avec

$$\psi_{21}(R_G, P, U_S) = D\psi_0 R_G + \left[ \frac{10\psi_*}{(R_G^*)^3} - \frac{6D\psi_0 + 4D\psi_*}{(R_G^*)^2} + \frac{D^2\psi_*}{2R_G^*} \right] R_G^3$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ -\frac{15\psi_*}{(R_G^*)^4} + \frac{8D\psi_0 + 7D\psi_*}{(R_G^*)^3} - \frac{D^2\psi_*}{(R_G^*)^2} \right] R_G^4 \\
& + \left[ \frac{6\psi_*}{(R_G^*)^5} - 3\frac{D\psi_0 + D\psi_*}{(R_G^*)^4} + \frac{D^2\psi_*}{2(R_G^*)^3} \right] R_G^5, \\
\psi_{22}(R_G, P, U_S) & = \frac{\psi_*(R_G - 1)^2 [1 + 2R_G + 3R_G^2 - 4(1 + 2R_G)R_G^* + 6(R_G^*)^2]}{(R_G^* - 1)^4} \\
& - \frac{D\psi_*(R_G - 1)^2(1 + 2R_G - 3R_G^*)(R_G - R_G^*)(R_G^* - 1)}{(R_G^* - 1)^4} \\
& + \frac{D^2\psi_*(R_G - 1)^2(R_G - R_G^*)^2(R_G^* - 1)^2}{2(R_G^* - 1)^4} \\
& + \frac{U_S(R_G - R_G^*)^3(4 - 3R_G - R_G^*)}{(R_G^* - 1)^4}.
\end{aligned}$$

Troisième cas :

$$\begin{aligned}
U_G \stackrel{(3.3)}{=} \psi(R_G, P, U_S) & = \psi_{31}(R_G, P, U_S) \mathbb{1}_{[0, R_G^a]}(R_G) + \psi_{32}(R_G, P, U_S) \mathbb{1}_{]R_G^a, R_G^b]}(R_G) \\
& + \psi_{33}(R_G, P, U_S) \mathbb{1}_{]R_G^b, 1]}(R_G) \tag{3.138}
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\psi_{31}(R_G, P, U_S) & = D\psi_0 R_G + \left[ \frac{10\psi_a}{(R_G^a)^3} - \frac{6D\psi_0 + 4D\psi_a}{(R_G^a)^2} \right] R_G^3 \\
& + \left[ -\frac{15\psi_a}{(R_G^a)^4} + \frac{8D\psi_0 + 7D\psi_a}{(R_G^a)^3} \right] R_G^4 + \left[ \frac{6\psi_a}{(R_G^a)^5} - 3\frac{D\psi_0 + D\psi_a}{(R_G^a)^4} \right] R_G^5, \\
\psi_{32}(R_G, P, U_S) & = \frac{(R_G - R_G^a)^3 (R_G - R_G^b)^2 D^2\psi_b}{2(R_G^a - R_G^b)^3} - \frac{(R_G - R_G^a)(R_G - R_G^b)^3 (3R_G - 4R_G^a + R_G^b) D\psi_a}{(R_G^a - R_G^b)^4} \\
& - \frac{(R_G - R_G^a)^3 (R_G - R_G^b) (3R_G + R_G^a - 4R_G^b) D\psi_b}{(R_G^a - R_G^b)^4} \\
& + \frac{(R_G - R_G^b)^3 \left[ 6R_G^2 + 10(R_G^a)^2 - 5R_G^a R_G^b + (R_G^b)^2 + 3R_G (-5R_G^a + R_G^b) \right] \psi_a}{(R_G^a - R_G^b)^5} \\
& - \frac{(R_G - R_G^a)^3 \left[ 6R_G^2 + 3R_G R_G^a + (R_G^a)^2 - 5R_G^b (3R_G + R_G^a) + 10(R_G^b)^2 \right] \psi_b}{(R_G^a - R_G^b)^5}, \\
\psi_{33}(R_G, P, U_S) & = \frac{\psi_b (R_G - 1)^2 [1 + 2R_G + 3R_G^2 - 4(1 + 2R_G)R_G^b + 6(R_G^b)^2]}{(R_G^b - 1)^4} \\
& - \frac{D\psi_b (R_G - 1)^2 (1 + 2R_G - 3R_G^b) (R_G - R_G^b) (R_G^b - 1)}{(R_G^b - 1)^4} \\
& + \frac{D^2\psi_b (R_G - 1)^2 (R_G - R_G^b)^2 (R_G^b - 1)^2}{2(R_G^b - 1)^4} \\
& + \frac{U_S (R_G - R_G^b)^3 (4 - 3R_G - R_G^b)}{(R_G^b - 1)^4}.
\end{aligned}$$

Quatrième cas :

$$\begin{aligned} U_G \stackrel{(3.3)}{=} \psi(R_G, P, U_S) &= \psi_{41}(R_G, P, U_S) \mathbb{1}_{[0, R_G^a]}(R_G) + \psi_{42}(R_G, P, U_S) \mathbb{1}_{]R_G^a, R_G^b]}(R_G) \\ &+ \psi_{43}(R_G, P, U_S) \mathbb{1}_{]R_G^b, 1]}(R_G) \end{aligned} \quad (3.139)$$

avec

$$\begin{aligned} \psi_{41}(R_G, P, U_S) &= D\psi_0 R_G + \left[ \frac{10\psi_a}{(R_G^a)^3} - \frac{6D\psi_0 + 4D\psi_a}{(R_G^a)^2} + \frac{D^2\psi_a}{2R_G^a} \right] R_G^3 \\ &+ \left[ -\frac{15\psi_a}{(R_G^a)^4} + \frac{8D\psi_0 + 7D\psi_a}{(R_G^a)^3} - \frac{D^2\psi_a}{(R_G^a)^2} \right] R_G^4 \\ &+ \left[ \frac{6\psi_a}{(R_G^a)^5} - 3\frac{D\psi_0 + D\psi_a}{(R_G^a)^4} + \frac{D^2\psi_a}{2(R_G^a)^3} \right] R_G^5, \\ \psi_{42}(R_G, P, U_S) &= -\frac{(R_G - R_G^a)^2 (R_G - R_G^b)^3 D^2\psi_a}{2(R_G^a - R_G^b)^3} - \frac{(R_G - R_G^a)(R_G - R_G^b)^3 (3R_G - 4R_G^a + R_G^b) D\psi_a}{(R_G^a - R_G^b)^4} \\ &- \frac{(R_G - R_G^a)^3 (R_G - R_G^b) (3R_G + R_G^a - 4R_G^b) D\psi_b}{(R_G^a - R_G^b)^4} \\ &+ \frac{(R_G - R_G^b)^3 \left[ 6R_G^2 + 10(R_G^a)^2 - 5R_G^a R_G^b + (R_G^b)^2 + 3R_G (-5R_G^a + R_G^b) \right] \psi_a}{(R_G^a - R_G^b)^5} \\ &- \frac{(R_G - R_G^a)^3 \left[ 6R_G^2 + 3R_G R_G^a + (R_G^a)^2 - 5R_G^b (3R_G + R_G^a) + 10(R_G^b)^2 \right] \psi_b}{(R_G^a - R_G^b)^5}, \\ \psi_{43}(R_G, P, U_S) &= \frac{\psi_b (R_G - 1)^2 \left[ 1 + 2R_G + 3R_G^2 - 4(1 + 2R_G)R_G^b + 6(R_G^b)^2 \right]}{(R_G^b - 1)^4} \\ &- \frac{D\psi_b (R_G - 1)^2 (1 + 2R_G - 3R_G^b)(R_G - R_G^b)(R_G^b - 1)}{(R_G^b - 1)^4} \\ &- \frac{U_S (R_G - R_G^b)^3 (-4 + 3R_G + R_G^b)}{(R_G^b - 1)^4}. \end{aligned}$$

Lorsque la conduite est verticale (i.e.  $\theta = \pm\pi/2$ ), la loi de glissement (3.3) est donc décrite par l'équation (3.135). Si la conduite est horizontale ou légèrement inclinée, la loi de glissement (3.3) est décrite par l'une des formules (3.135), (3.137), (3.138) ou (3.139), le choix dépendant des signes de  $\Delta_a(P, U_S)$  et  $\Delta_b(P, U_S)$ .

Nous constatons que dans tous les cas,  $\psi$  est un polynôme d'ordre cinq en  $R_G$  dont les coefficients ne dépendent que de  $P$  et  $U_S$ . Afin de simplifier les formules, nous avons choisi de construire la fonction  $\psi$  par morceaux au lieu de la déterminer sous la forme d'un unique polynôme d'interpolation défini pour tout  $R_G \in [0, 1]$ . Ainsi dans le premier exemple,  $\psi$  est une fonction composée de deux polynômes en  $R_G$ , construits respectivement dans les intervalles  $[0, R_G^*]$  et  $[R_G^*, 1]$ . Leurs dérivées coïncident en  $(R_G^*, P, U_S)$  jusqu'à l'ordre deux.

La loi de glissement (3.3) est donc de classe  $\mathcal{C}^2$  par rapport à  $R_G$  sur l'intervalle  $]0, 1[$ . En ce qui concerne sa régularité par rapport aux deux autres variables  $P$  et  $U_S$ , rappelons que

celles-ci varient dans un domaine où les lois de glissement exprimées dans la section 1.5 ont un sens. En particulier, si nous nous restreignons à l'un des quatre cas décrits plus haut,  $P$  et  $U_S$  varient dans un domaine plus petit où les signes de  $\Delta_a(P, U_S)$  et  $\Delta_b(P, U_S)$  sont préservés.

Lorsque l'écoulement est vertical, on vérifie facilement que (3.3) est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  par rapport aux variables  $P$  et  $U_S$ . Elle est au moins de classe  $\mathcal{C}^q$  dans les autres cas,  $q$  étant la régularité des coefficients  $C_G$ ,  $C_L$ ,  $\alpha_G$  et  $\alpha_L$  (formules (3.13) et (3.16)) intervenant dans l'équation (3.106) pour le calcul de  $U_G^{strat}$ .

Si la conduite n'est pas verticale et que l'une des différences (3.130) ou (3.131) change de signe au cours d'une simulation, la loi de glissement (3.3) est remplacée par une autre formule parmi (3.135), (3.137), (3.138) ou (3.139). Ce changement induit probablement des singularités car  $\psi$ ,  $\partial\psi/R_G$  et  $\partial^2\psi/R_G^2$  ne coïncident pas forcément dans les cas intermittent et stratifié au point  $(R_G^a, P, U_S)$  (respectivement  $(R_G^b, P, U_S)$ ) lorsque  $\Delta_a(P, U_S)$  (resp.  $\Delta_b(P, U_S)$ ) s'annule.

Néanmoins, de façon générique, les variables  $P$  et  $U_S$  d'un écoulement stationnaire ne satisfont pas les égalités  $\Delta_a(P, U_S) = 0$  ou  $\Delta_b(P, U_S) = 0$  en tout point d'un pipe droit. Nous pouvons donc admettre qu'un point d'équilibre (ou écoulement stationnaire) possède toujours un voisinage dans l'espace des variables (2.57)-(2.58) où  $\Delta_a(P, U_S)$  et  $\Delta_b(P, U_S)$  ne changent pas de signe.

Autrement dit, dans le cadre d'une étude locale de stabilité d'un écoulement stationnaire d'un système pipeline-riser, nous admettons que les variables  $P$  et  $U_S$  peuvent être perturbées sans que la loi de glissement (3.3) doive être remplacée au cours d'une simulation.

En ce qui concerne la simulation numérique, la plupart des auteurs de modèles simplifiés sur le *severe slugging* admettent une hypothèse similaire. Plus précisément, dans le cas d'un système à deux tronçons du type pipe-riser, il est admis que l'écoulement dans le pipe doit être stratifié pour que les oscillations du *severe slugging* apparaissent [61, 140, 143, 144, 163] (Ce n'est pas toujours vrai si le pipeline admet plus de tronçons [108]).

Cette hypothèse est évidemment restrictive car elle est imposée partout dans le pipe, quelque soit la valeur du taux de vide et quelque soit l'amplitude des oscillations du *severe slugging*. Notre loi synthétique de glissement est donc beaucoup plus satisfaisante d'un point de vue théorique et surtout reste valide quelque soit  $R_G$  compris entre zéro et un.

Nous donnons quelques exemples de lois synthétiques de glissement sur les figures 3.16, 3.17 et 3.18 qui correspondent respectivement aux trois cas présentés sur les figures 3.13, 3.14 et 3.15. Ces trois exemples correspondent aussi aux trois premières constructions décrites plus haut et résumées dans les tableaux 3.1, 3.2 et 3.3.

Nous ne présentons pas d'exemple lié à la quatrième construction résumée dans le tableau 3.4. Il semble en effet que la dérivée  $\partial U_G^{crit}/\partial R_G$  donnée par (3.119) soit toujours supérieure à  $\partial U_G^{strat}/\partial R_G$ , quelque soit  $R_G$  compris entre 0.52 et 0.76. Ce qui rend le quatrième cas impossible. Nous ne démontrerons pas un tel résultat de façon théorique bien qu'il ait un intérêt pratique intéressant.

### 3.5 Pourquoi une loi synthétique de frottement ?

En ce qui concerne le frottement pariétal (2.32), les transitions entre les écoulements induisent aussi des singularités. À titre d'exemple, lorsque les flots sont verticaux ascendants, le frottement (1.63) doit être remplacé par l'expression (1.62) dès que le critère (1.78) est vérifié. La transition n'est continue que si la fraction de poche  $\beta$  (voir section 1.6.4) est nulle au moment

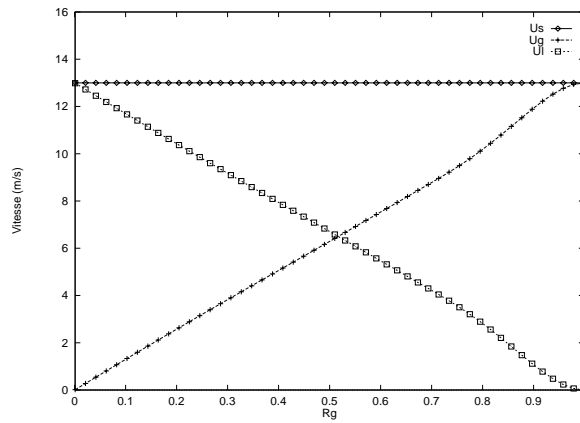


Figure 3.16 : Vitesses superficielles du gaz et du liquide ;  $P = 1 \text{ bar}$ ,  $U_S = 13 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $\theta = 5^\circ$ .

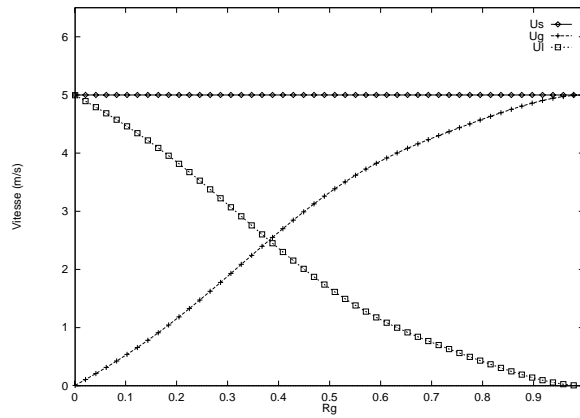


Figure 3.17 : Vitesses superficielles du gaz et du liquide ;  $P = 1 \text{ bar}$ ,  $U_S = 5 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $\theta = -5^\circ$ .

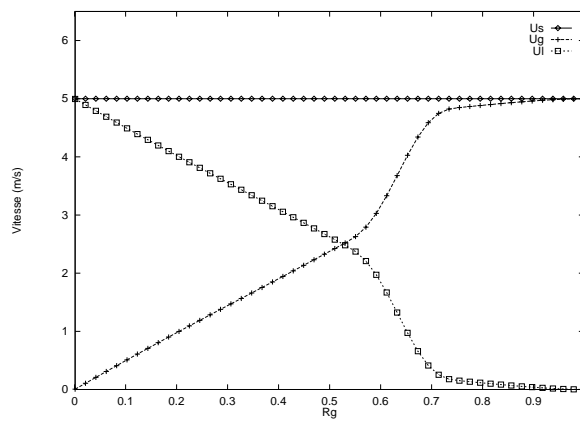


Figure 3.18 : Vitesses superficielles du gaz et du liquide ;  $P = 3 \text{ bar}$ ,  $U_S = 5 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $\theta = 0^\circ$ .

où (1.78) est satisfait. Ce qui n'est pas garanti puisque le calcul de  $\beta$  ne dépend pas du critère de (1.78). Il est donc nécessaire de construire une loi de frottement plus régulière afin que le problème mathématique résultant de l'étude de notre modèle soit mieux posé.

### 3.6 Présentation de la loi synthétique de frottement

Notre approche est identique à celle proposée pour la construction de la loi synthétique de glissement. Elle consiste à construire une loi de frottement sous la forme d'une fonction régulière de  $R_G$ ,  $P$ ,  $U_S$  qui représente la synthèse des différents types de frottements décrits dans la section 1.6. Elle sera donnée sous la forme d'une fonction  $\mathcal{F}$  qui à tout point  $(R_G, P, U_S)$  associe la valeur du frottement pariétal (2.32) :

$$F_p = \mathcal{F}(R_G, P, U_S). \quad (3.140)$$

De façon générale, les transitions entre les écoulements se produisent lorsque  $R_G$  franchit une valeur critique (voir section 1.7). En conséquence,  $\mathcal{F}$  sera construite sous la forme d'un polynôme en  $R_G$  dont les coefficients ne dépendront que de  $P$  et  $U_S$ . Elle sera définie pour un taux de vide variant de zéro à un et pour tout couple  $(P, U_S)$  variant dans un domaine où les lois de glissement exprimées dans la section 1.5 ont un sens. Il sera sous-entendu que les relations formulées dans les sections suivantes sont vraies quelque soient  $P$  et  $U_S$  variant dans ce domaine. Nous éviterons de le rappeler à chaque fois.

$F_p$  doit aussi vérifier des relations de compatibilités. Lorsque  $R_G$  est nul, l'écoulement est monophasique liquide. Le frottement associé est donné par la formule suivante [71] :

$$f_L(R_G, P, V_L)|_{R_G=0} \frac{S}{A} \rho_L(P) \frac{V_L |V_L|}{2} = \frac{4}{D} f_L(0, P, V_L) \rho_L(P) \frac{V_L |V_L|}{2}$$

où  $S$  et  $A$  désignent respectivement le périmètre et l'aire d'une section droite du pipe :

$$S = \pi D, \quad (3.141)$$

$$A = \pi(D/2)^2. \quad (3.142)$$

$f_L(0, P, V_L)$  est calculé grâce à la formule de Blasius (3.12).

Puisque  $V_L = U_L|_{R_G=0} = U_S|_{R_G=0}$ , les coefficients  $C_L$  et  $\alpha_L$  sont donnés respectivement par (3.13) et (3.16) où  $Re_L$  est remplacé par le nombre de Reynolds  $Re_{mL}$  :

$$Re_{mL}(P, U_S) = \frac{\rho_L(P) |U_S| D}{\mu_L} = Re_L(R_G, P, V_L)|_{R_G=0}. \quad (3.143)$$

Les coefficients  $C_L|_{R_G=0}$  et  $\alpha_L|_{R_G=0}$  dépendent donc uniquement des variables  $P$  et  $U_S$ . Nous noterons :

$$C_L|_{R_G=0} = C_{mL}(P, U_S), \quad (3.144)$$

$$\alpha_L|_{R_G=0} = \alpha_{mL}(P, U_S). \quad (3.145)$$

Après simplification, nous en déduisons la relation de compatibilité que  $\mathcal{F}$  doit satisfaire lorsque  $R_G$  vaut exactement zéro :

$$\mathcal{F}(0^+, P, U_S) = \lim_{R_G \rightarrow 0^+} \mathcal{F}(R_G, P, U_S) = 4 \frac{C_{mL}}{D^{1+\alpha_{mL}}} \mu_L^{\alpha_{mL}} [\rho_L(P)]^{1-\alpha_{mL}} \Phi_{\alpha_{mL}}(U_S). \quad (3.146)$$

Lorsque  $R_G$  vaut un, l'écoulement est monophasique gazeux. Le frottement associé est donné par [71] :

$$f_G(R_G, P, V_G)|_{R_G=1} \frac{S}{A} \rho_G(P) \frac{V_G |V_G|}{2} = \frac{4}{D} f_G(1, P, V_G) \rho_G(P) \frac{V_G |V_G|}{2}.$$

$f_G(1, P, V_L)$  est aussi calculé grâce à (3.12).

Puisque  $V_G = U_G|_{R_G=1} = U_S|_{R_G=1}$ , les coefficients  $C_G$  et  $\alpha_G$  sont donnés respectivement par (3.13) et (3.16) où  $Re_G$  est remplacé par le nombre de Reynolds  $Re_{mG}$  :

$$Re_{mG}(P, U_S) = \frac{\rho_G(P) |U_S| D}{\mu_G} = Re_G(R_G, P, V_G)|_{R_G=1}. \quad (3.147)$$

Les coefficients  $C_G|_{R_G=1}$  et  $\alpha_G|_{R_G=1}$  dépendent donc uniquement des variables  $P$  et  $U_S$ . Nous noterons :

$$C_G|_{R_G=1} = C_{mG}(P, U_S), \quad (3.148)$$

$$\alpha_G|_{R_G=1} = \alpha_{mG}(P, U_S). \quad (3.149)$$

D'où la seconde relation de compatibilité que  $\mathcal{F}$  doit satisfaire lorsque  $R_G$  vaut exactement un :

$$\mathcal{F}(1^-, P, U_S) = \lim_{R_G \rightarrow 1^-} \mathcal{F}(R_G, P, U_S) = 4 \frac{C_{mG}}{D^{1+\alpha_{mG}}} \mu_G^{\alpha_{mG}} [\rho_G(P)]^{1-\alpha_{mG}} \Phi_{\alpha_{mG}}(U_S). \quad (3.150)$$

*Remarque* : bien que le frottement  $F_p$  dépende de façon générale des quatre variables  $R_G$ ,  $P$ ,  $V_G$ ,  $V_L$  (voir section 1.6), la connaissance des trois variables  $R_G$ ,  $P$ ,  $U_S$  suffit à le calculer car :

$$V_G = V_G(R_G, P, U_S) = \frac{\psi(R_G, P, U_S)}{R_G}, \quad (3.151)$$

$$V_L = V_L(R_G, P, U_S) = \frac{U_S - \psi(R_G, P, U_S)}{1 - R_G} \quad (3.152)$$

où  $\psi(R_G, P, U_S)$  est donné par la loi synthétique de glissement (3.3).

### 3.7 Analyse mathématique du frottement pariétal

Afin de construire  $\mathcal{F}$  sous la forme d'une fonction régulière de  $R_G$ ,  $P$ ,  $U_S$ , nous allons estimer sa valeur, ainsi que celle de ses dérivées partielles par rapport à  $R_G$ , en certains points caractéristiques où le type de l'écoulement sera a priori connu.

#### 3.7.1 Au voisinage de $R_G = 0$

Lorsque le taux de vide est proche de zéro, l'écoulement est principalement dispersé (voir section 3.3.1). Le frottement pariétal est fourni par (1.62) :

$$F_p^{disp}(R_G, P, U_S) = 2 \frac{f_m(P, U_S)}{D} [\rho_L(P)(1 - R_G) + \rho_G(P)R_G] U_S |U_S|. \quad (3.153)$$

Le coefficient de frottement  $f_m$  est calculé à l'aide de l'équation de Blasius (3.12) :

$$f_m = C_{mL} (Re_{mL})^{-\alpha_{mL}}. \quad (3.154)$$

$Re_{mL}$ ,  $C_{mL}$  et  $\alpha_{mL}$  sont respectivement donnés par (3.143), (3.144) et (3.145).

Nous en déduisons l'expression simplifiée de (3.153) :

$$F_p^{disp}(R_G, P, U_S) = 4 \frac{C_{mL}}{D^{1+\alpha_{mL}}} \mu_L^{\alpha_{mL}} \rho_L^{-\alpha_{mL}}(P) [\rho_L(P)(1 - R_G) + \rho_G(P)R_G] \Phi_{\alpha_{mL}}(U_S) \quad (3.155)$$

où  $\Phi_{\alpha_{mL}}$  est donnée par (3.19).

Nous avons aussi :

$$\frac{\partial F_p^{disp}}{\partial R_G}(R_G, P, U_S) = 4 \frac{C_{mL}}{D^{1+\alpha_{mL}}} \mu_L^{\alpha_{mL}} \rho_L^{-\alpha_{mL}}(P) [\rho_G(P) - \rho_L(P)] \Phi_{\alpha_{mL}}(U_S), \quad (3.156)$$

$$\frac{\partial^2 F_p^{disp}}{\partial R_G^2}(R_G, P, U_S) = 0, \quad (3.157)$$

sachant que  $\alpha_{mL}$  et  $C_{mL}$  ne dépendent pas de  $R_G$ .

Nous en déduisons le frottement limite lorsque  $R_G$  tend vers zéro :

$$\begin{aligned} F_p^{disp}(0^+, P, U_S) &= \lim_{R_G \rightarrow 0^+} F_p^{disp}(R_G, P, U_S) \\ &= 4 \frac{C_{mL}}{D^{1+\alpha_{mL}}} \mu_L^{\alpha_{mL}} [\rho_L(P)]^{1-\alpha_{mL}} \Phi_{\alpha_{mL}}(U_S). \end{aligned} \quad (3.158)$$

Quant aux dérivées partielles de  $F_p^{disp}$  par rapport à  $R_G$ , leurs limites satisfont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_p^{disp}}{\partial R_G}(0^+, P, U_S) &= \lim_{R_G \rightarrow 0^+} \frac{\partial F_p^{disp}}{\partial R_G}(R_G, P, U_S) \\ &= 4 \frac{C_{mL}}{D^{1+\alpha_{mL}}} \mu_L^{\alpha_{mL}} \rho_L^{-\alpha_{mL}}(P) [\rho_G(P) - \rho_L(P)] \Phi_{\alpha_{mL}}(U_S), \end{aligned} \quad (3.159)$$

$$\frac{\partial^2 F_p^{disp}}{\partial R_G^2}(0^+, P, U_S) = \lim_{R_G \rightarrow 0^+} \frac{\partial^2 F_p^{disp}}{\partial R_G^2}(R_G, P, U_S) = 0. \quad (3.160)$$

### 3.7.2 Au voisinage de $R_G = 1$

Lorsque  $R_G$  tend vers 1, l'écoulement peut être stratifié ou annulaire (voir section 3.3.2). L'expression du frottement est dans ce cas donnée par (1.60) ou (1.61). Nous allons tout d'abord traiter le cas stratifié.

#### 3.7.2.1 Le cas stratifié

La loi de frottement de l'écoulement stratifié s'exprime sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} &F_p^{strat}(R_G, P, U_S) \\ &= f_L(R_G, P, V_L(R_G, P, U_S)) \frac{S_L(R_G)}{A} \rho_L(P) \frac{V_L(R_G, P, U_S) |V_L(R_G, P, U_S)|}{2} \\ &+ f_G(R_G, P, V_G(R_G, P, U_S)) \frac{S_G(R_G)}{A} \rho_G(P) \frac{V_G(R_G, P, U_S) |V_G(R_G, P, U_S)|}{2} \\ &= C_L(Re_L)^{-\alpha_L} \frac{S_L(R_G)}{A} \rho_L(P) \frac{V_L(R_G, P, U_S) |V_L(R_G, P, U_S)|}{2} \\ &+ C_G(Re_G)^{-\alpha_G} \frac{S_G(R_G)}{A} \rho_G(P) \frac{V_G(R_G, P, U_S) |V_G(R_G, P, U_S)|}{2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= C_L \left( \frac{\rho_L(P) |V_L(R_G, P, U_S)| D_L}{\mu_L} \right)^{-\alpha_L} \frac{S_L(R_G)}{A} \rho_L(P) \Phi_0(V_L(R_G, P, U_S)) \\
 &+ C_G \left( \frac{\rho_G(P) |V_G(R_G, P, U_S)| D_G}{\mu_G} \right)^{-\alpha_G} \frac{S_G(R_G)}{A} \rho_G(P) \Phi_0(V_G(R_G, P, U_S)). \quad (3.161)
 \end{aligned}$$

En remplaçant  $S_G$ ,  $S_L$ ,  $D_G$  et  $D_L$  par leurs expressions respectives (1.42), (1.43) et (1.45), nous en déduisons l'expression développée de  $F_p^{strat}$  :

$$\begin{aligned}
 F_p^{strat}(R_G, P, U_S) &= \frac{2C_L}{(2\pi)^{\alpha_L} \pi D^{1+\alpha_L}} \mu_L^{\alpha_L} [\rho_L(P)]^{1-\alpha_L} [\Omega(R_G)]^{1+\alpha_L} R_L^{-\alpha_L} \Phi_{\alpha_L} [V_L(R_G, P, U_S)] \\
 &+ \frac{2C_G}{(2\pi)^{\alpha_G} \pi D^{1+\alpha_G}} \mu_G^{\alpha_G} [\rho_G(P)]^{1-\alpha_G} [2\pi - \Omega(R_G) + 2 \sin [\Omega(R_G)/2]]^{\alpha_G} \\
 &\quad [2\pi - \Omega(R_G)] R_G^{-\alpha_G} \Phi_{\alpha_G} [V_G(R_G, P, U_S)]. \quad (3.162)
 \end{aligned}$$

D'après les relations (3.3), (3.25) et (3.26), l'égalité (3.162) s'écrit aussi :

$$\begin{aligned}
 F_p^{strat}(R_G, P, U_S) &= \frac{2C_L}{(2\pi)^{\alpha_L} \pi D^{1+\alpha_L}} \mu_L^{\alpha_L} [\rho_L(P)]^{1-\alpha_L} [\Omega(R_G)]^{1+\alpha_L} (1 - R_G)^{-2} \\
 &\quad \Phi_{\alpha_L} [U_S - \psi(R_G, P, U_S)] \\
 &+ \frac{2C_G}{(2\pi)^{\alpha_G} \pi D^{1+\alpha_G}} \mu_G^{\alpha_G} [\rho_G(P)]^{1-\alpha_G} [2\pi - \Omega(R_G) + 2 \sin [\Omega(R_G)/2]]^{\alpha_G} \\
 &\quad [2\pi - \Omega(R_G)] R_G^{-2} \Phi_{\alpha_G} [\psi(R_G, P, U_S)]. \quad (3.163)
 \end{aligned}$$

Plaçons - nous maintenant au voisinage de  $R_G = 1$ . De (3.27), nous déduisons les relations :

$$[\Omega(R_G)]^{1+\alpha_L} (1 - R_G)^{-2} R_G^{-1-} \simeq (12\pi)^{(1+\alpha_L)/3} (1 - R_G)^{(-5+\alpha_L)/3}, \quad (3.164)$$

$$[2\pi - \Omega(R_G) + 2 \sin [\Omega(R_G)/2]]^{\alpha_G} [2\pi - \Omega(R_G)] R_G^{-1-} \simeq (2\pi)^{1+\alpha_G}. \quad (3.165)$$

Ces approximations, associées aux relations (3.33), (3.34) et (3.35), entraînent :

$$\begin{aligned}
 F_p^{strat}(R_G, P, U_S) &\stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} 16 \frac{\mu_L}{\pi^2 D^2} (12\pi)^{2/3} (1 - R_G)^{-4/3} \frac{U_S - \psi(R_G, P, U_S)}{2} \\
 &+ 4 \frac{C_{mG}}{D^{1+\alpha_{mG}}} \mu_G^{\alpha_{mG}} [\rho_G(P)]^{1-\alpha_{mG}} \Phi_{\alpha_{mG}} [\psi(R_G, P, U_S)]. \quad (3.166)
 \end{aligned}$$

D'après (3.62), nous avons :

$$U_G^{strat}(R_G, P, U_S) \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} \mathcal{C}(P)(1 - R_G)^{7/3} + U_S.$$

Puisque l'écoulement est stratifié, nous remplaçons la vitesse superficielle  $U_G = \psi(R_G, P, U_S)$  par  $U_G^{strat}(R_G, P, U_S)$  pour en déduire :

$$\begin{aligned}
 F_p^{strat}(R_G, P, U_S) &\stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} -16 \frac{\mu_L}{\pi^2 D^2} (12\pi)^{2/3} \frac{\mathcal{C}(P)}{2} (1 - R_G) \\
 &+ 4 \frac{C_{mG}}{D^{1+\alpha_{mG}}} \mu_G^{\alpha_{mG}} [\rho_G(P)]^{1-\alpha_{mG}} \Phi_{\alpha_{mG}} \left[ \mathcal{C}(P)(1 - R_G)^{7/3} + U_S \right].
 \end{aligned}$$

En faisant tendre  $R_G$  vers un, nous obtenons finalement :

$$F_p^{strat}(1^-, P, U_S) = 4 \frac{C_{mG}}{D^{1+\alpha_{mG}}} \mu_G^{\alpha_{mG}} [\rho_G(P)]^{1-\alpha_{mG}} \Phi_{\alpha_{mG}}(U_S). \quad (3.167)$$

Notons que la dérivée partielle de  $F_p^{strat}$  par rapport à  $R_G$  n'est pas forcément définie en  $R_G = 1$  : en dérivant (3.166) par rapport à  $R_G$ , puis en remplaçant  $\partial\psi/\partial R_G$  par l'expression approchée (3.55) de  $\partial U_G^{strat}/\partial R_G$  au voisinage de  $R_G = 1$  dans le cas laminaire, nous en déduisons :

$$\frac{\partial F_p^{strat}}{\partial R_G}(R_G, P, U_S)|_{Re_{mG} \leq 2000} \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} -8 \frac{\mu_L}{\pi^2 D^2} (12\pi)^{2/3} \mathcal{D} (1 - R_G)^{-2/3} U_S. \quad (3.168)$$

### 3.7.2.2 Le cas annulaire

La loi de frottement de l'écoulement annulaire s'exprime sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & F_p^{ann}(R_G, P, U_S) \\ &= f_L(R_G, P, V_L(R_G, P, U_S)) \frac{S_L(R_G)}{A} \rho_L(P) \frac{V_L(R_G, P, U_S) |V_L(R_G, P, U_S)|}{2} \\ &= C_L (Re_L)^{-\alpha_L} \frac{S_L(R_G)}{A} \rho_L(P) \frac{V_L(R_G, P, U_S) |V_L(R_G, P, U_S)|}{2} \\ &= C_L \left( \frac{\rho_L(P) |V_L(R_G, P, U_S)| D_L}{\mu_L} \right)^{-\alpha_L} \frac{S_L(R_G)}{A} \rho_L(P) \Phi_0(V_L(R_G, P, U_S)). \end{aligned} \quad (3.169)$$

En remplaçant  $S_L$  et  $D_L$  par leurs expressions respectives (1.49) et (1.52), nous en déduisons l'expression développée de  $F_p^{ann}$  :

$$\begin{aligned} F_p^{ann}(R_G, P, U_S) &= 4 \frac{C_L}{D^{1+\alpha_L}} \mu_L^{\alpha_L} [\rho_L(P)]^{1-\alpha_L} R_L^{-\alpha_L} \Phi_{\alpha_L} [V_L(R_G, P, U_S)] \\ &= 4 \frac{C_L}{D^{1+\alpha_L}} \mu_L^{\alpha_L} [\rho_L(P)]^{1-\alpha_L} (1 - R_G)^{-2} \Phi_{\alpha_L} [U_S - \psi(R_G, P, U_S)]. \end{aligned}$$

Plaçons - nous maintenant au voisinage de  $R_G = 1$ .  $C_L$  et  $\alpha_L$  sont approchés par les formules (3.35) :

$$F_p^{ann}(R_G, P, U_S) \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} \frac{32}{D^2} \mu_L (1 - R_G)^{-2} [U_S - \psi(R_G, P, U_S)]. \quad (3.170)$$

D'après (3.94), nous avons :

$$U_G^{ann}(R_G, P, U_S) \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} \mathcal{K}(P) (1 - R_G)^3 + U_S.$$

Puisque l'écoulement est annulaire, nous remplaçons la vitesse superficielle  $U_G = \psi(R_G, P, U_S)$  par  $U_G^{ann}(R_G, P, U_S)$  pour en déduire :

$$F_p^{ann}(R_G, P, U_S) \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} -\frac{32}{D^2} \mu_L \mathcal{K}(P) (1 - R_G). \quad (3.171)$$

En faisant tendre  $R_G$  vers un, nous obtenons finalement :

$$F_p^{ann}(1^-, P, U_S) = 0. \quad (3.172)$$

Comme dans le cas stratifié, nous remarquons que la dérivée partielle de  $F_p^{ann}$  par rapport à  $R_G$  n'est pas forcément définie en  $R_G = 1$  : en dérivant (3.170) par rapport à  $R_G$ , puis en remplaçant  $\partial\psi/\partial R_G$  par l'expression approchée (3.86) de  $\partial U_G^{ann}/\partial R_G$  au voisinage de  $R_G = 1$ , nous en déduisons :

$$\frac{\partial F_p^{ann}}{\partial R_G}(R_G, P, U_S)|_{Re_{mG} \leq 2000} \stackrel{R_G \rightarrow 1^-}{\simeq} -\frac{64}{D^2} \mu_G (1 - R_G)^{-1} U_S. \quad (3.173)$$

### 3.7.3 En dehors des voisinages de $R_G = 0$ et $R_G = 1$

Bien que tous les types d'écoulement soient possibles lorsque  $R_G$  est compris entre zéro et un, nous avons vu dans la section 3.3.3 que l'écoulement est forcément intermittent ou stratifié si le taux de vide est compris entre 0.52 et 0.76.

Lorsque le flot est intermittent, le frottement pariétal est donné par (1.63) :

$$F_p^{int}(R_G, P, U_S) = \beta F_p^{strat}(R_G, P, U_S) + (1 - \beta) F_p^{disp}(R_G, P, U_S) \quad (3.174)$$

où  $F_p^{disp}$  et  $F_p^{strat}$  sont respectivement calculés à partir de (3.155) et (3.163). Le calcul de la fraction de poche  $\beta$  est loin d'être trivial (voir section 1.6.4). Nous avons jusque ici évité de la calculer en admettant notamment que la vitesse du gaz est donnée par la vitesse de translation des poches  $V_T$  dans le cas intermittent (voir section 1.5.1).

Afin de rester cohérent, nous continuerons d'ignorer le calcul de  $\beta$  et par conséquent nous n'imposerons aucune condition sur le frottement pariétal lorsque  $R_G$  est compris entre zéro et un.

## 3.8 Construction de la loi synthétique de frottement

Résumons maintenant tous ces résultats : au voisinage de  $R_G = 0$ , l'écoulement est dispersé. Le frottement  $F_p$ , que nous avons noté  $F_p^{disp}$ , vérifie les relations (3.158), (3.159) et (3.160). Nous en déduisons les conditions qui doivent être imposées sur la fonction  $\mathcal{F}$ , définie par (3.140), en  $R_G = 0$  :

$$\mathcal{F}(0^+, P, U_S) = 4 \frac{C_{mL}}{D^{1+\alpha_{mL}}} \mu_L^{\alpha_{mL}} [\rho_L(P)]^{1-\alpha_{mL}} \Phi_{\alpha_{mL}}(U_S), \quad (3.175)$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial R_G}(0^+, P, U_S) = 4 \frac{C_{mL}}{D^{1+\alpha_{mL}}} \mu_L^{\alpha_{mL}} \rho_L^{-\alpha_{mL}}(P) [\rho_G(P) - \rho_L(P)] \Phi_{\alpha_{mL}}(U_S), \quad (3.176)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial R_G^2}(0^+, P, U_S) = 0. \quad (3.177)$$

Rappelons que les coefficients  $C_{mL}$  et  $\alpha_{mL}$  dépendent des variables  $P$  et  $U_S$ .

Lorsque  $R_G$  tend vers un, la relation de compatibilité (3.150) est satisfaite par (3.167) dans le cas stratifié mais contredite par (3.172) dans le cas annulaire. L'explication est la suivante : le frottement annulaire ne dépend pas du tenseur de frottement du gaz (1.29). En conséquence,  $F_p^{ann}$  tend vers zéro quand la fraction liquide  $R_L = 1 - R_G$  approche zéro. Étant donnée la définition (1.61), le frottement pariétal d'un écoulement annulaire est donc discontinu lorsque celui-ci devient monophasique gazeux.

En réalité, l'expression (1.61) est approximative lorsque  $R_G$  est très proche de un car le film liquide se désagrège et n'a plus une forme aussi parfaite que celle représentée sur la figure 1.12. Aussi nous imposerons que la relation de compatibilité (3.150) soit bien satisfaite :

$$\mathcal{F}(1^-, P, U_S) = 4 \frac{C_{mG}}{D^{1+\alpha_{mG}}} \mu_G^{\alpha_{mG}} [\rho_G(P)]^{1-\alpha_{mG}} \Phi_{\alpha_{mG}}(U_S) \quad (3.178)$$

Notons que les coefficients  $C_{mG}$  et  $\alpha_{mG}$  dépendent des variables  $P$  et  $U_S$ .

La fonction  $\mathcal{F}$  doit donc satisfaire quatre relations : trois en  $R_G = 0$  et une en  $R_G = 1$ . Nous les avons résumées dans le tableau 3.5. Nous n'imposons aucune condition sur les dérivées

Tableau 3.5 : Loi synthétique de frottement : conditions aux limites.

$(R_G, P, U_S)$	$(0^+, P, U_S)$	$(1^-, P, U_S)$
$\mathcal{F}$	(3.175)	(3.178)
$\partial\mathcal{F}/\partial R_G$	(3.176)	–
$\partial^2\mathcal{F}/\partial R_G^2$	0	–

partielles de  $\mathcal{F}$  par rapport à  $R_G$  au point limite  $(1^-, P, U_S)$  car elles ne sont pas forcément définies, aussi bien dans le cas stratifié que dans le cas annulaire (voir (3.168) et (3.173)).

Nous construisons ensuite la fonction  $\mathcal{F}$  par interpolation polynômiale en tenant compte des conditions imposées sur ses valeurs et celles de ses dérivées aux points  $(0^+, P, U_S)$  et  $(1^-, P, U_S)$ . Nous en déduisons l'expression explicite la loi synthétique du frottement (3.140) :

$$F_p = \mathcal{F}(R_G, P, U_S) = \mathcal{F}_0 + D\mathcal{F}_0 R_G + [\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_0 - D\mathcal{F}_0] R_G^3 \quad (3.179)$$

où nous avons posé :

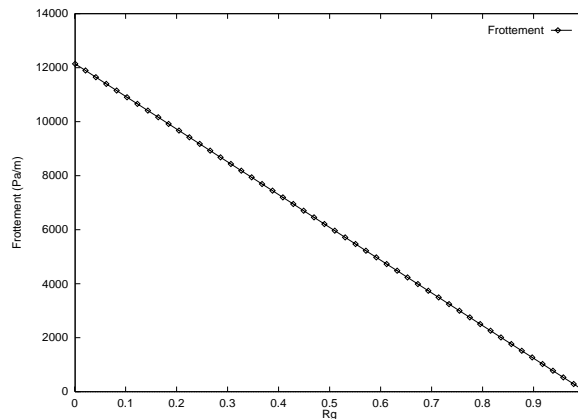
$$\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}(0^+, P, U_S), \quad (3.180)$$

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}(1^-, P, U_S), \quad (3.181)$$

$$D\mathcal{F}_0 = \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial R_G}(0^+, P, U_S). \quad (3.182)$$

$\mathcal{F}$  est donc un polynôme d'ordre trois en  $R_G$  dont les coefficients ne dépendent que de  $P$  et  $U_S$ . La loi de frottement (3.179) est par conséquent de classe  $\mathcal{C}^\infty$  par rapport à la variable  $R_G$  sur l'intervalle  $]0, 1[$ . On vérifie facilement qu'elle est au moins de classe  $\mathcal{C}^q$  par rapport aux variables  $P$  et  $U_S$ ,  $q$  étant la régularité des coefficients  $C_{mG}$ ,  $C_{mL}$ ,  $\alpha_{mG}$  et  $\alpha_{mL}$  (formules (3.13) et (3.16)) intervenant dans les relations (3.175), (3.176) et (3.178).

Nous donnons quelques exemples de lois sur les figures 3.19, 3.20 et 3.21.

Figure 3.19 : Loi synthétique de frottement ;  $P = 1 \text{ bar}$ ,  $U_S = 13 \text{ m.s}^{-1}$ .

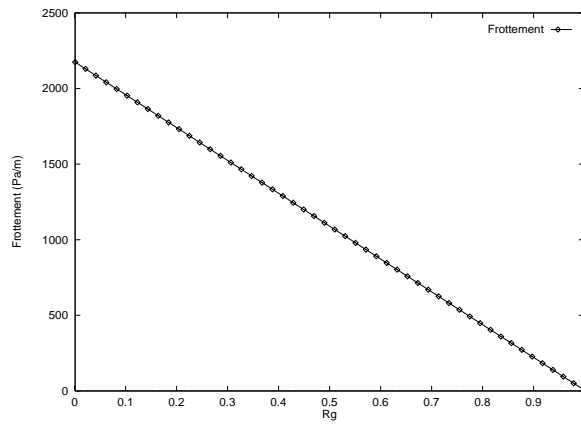


Figure 3.20 : Loi synthétique de frottement ;  $P = 1 \text{ bar}$ ,  $U_S = 5 \text{ m.s}^{-1}$ .

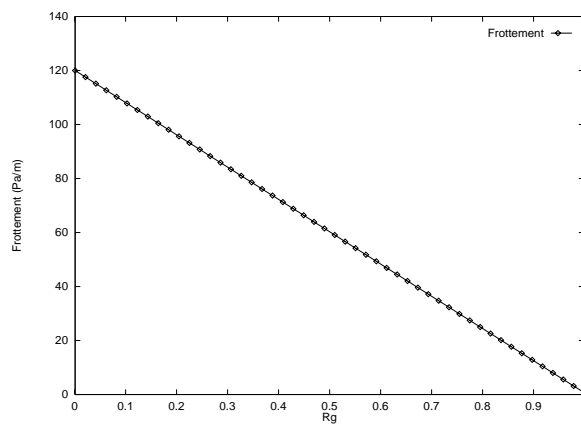


Figure 3.21 : Loi synthétique de frottement ;  $P = 3 \text{ bars}$ ,  $U_S = 1 \text{ m.s}^{-1}$ .

### 3.9 Validation des lois sur les données de Bousens

Afin de valider expérimentalement les loi régulières de glissement (3.3) et de frottement (3.140), nous comparons leurs résultats avec les mesures expérimentales effectuées sur le site ELF de Bousens.

Les données de Bousens furent relevées sur une conduite dont l'inclinaison pouvait varier entre  $-3^\circ$  et  $90^\circ$ . Les écoulements étudiés étaient stationnaires et diphasiques. La phase gazeuse était du gaz naturel tandis que la phase liquide pouvait être de l'eau, du gazole ou encore un condensat (huile légère provenant de la condensation d'un gaz hydrocarboné).

Deux conduites de diamètres 0.0762 m (3 pouces) et 0.1524 m (6 pouces) furent testées tandis que la pression interne pouvait varier entre 5 bars ( $5 \cdot 10^5$  Pa) et 40 bars ( $4 \cdot 10^6$  Pa). Beaucoup de quantités étaient mesurées : taux de vide, pertes de charge, densités, vitesses, viscosités, tensions superficielles, etc. En ce qui nous concerne, nous comparerons notre loi de glissement aux données expérimentales en traçant la vitesse superficielle du gaz en fonction du taux de vide. Chaque graphique correspondra à un seul diamètre, une seule inclinaison et des constituants identiques pour toutes les valeurs de  $R_G$ .

En ce qui concerne notre loi de frottement, nous comparerons les pertes de charge expérimentales à celle prédites par notre modèle. D'après l'équation (1.3), la perte de charge est égale à :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -F_p - (\rho_L R_L + \rho_G R_G) g \sin \theta.$$

Le terme de gravité étant beaucoup plus grand que le frottement pariétal lorsque la conduite est fortement inclinée, nous nous limiterons à des conduites proches de l'horizontale afin de valider nos calculs du frottement.

#### 3.9.1 Validation de la loi de glissement

Dans cette section, nous comparons les vitesses superficielles du gaz  $U_G$  fournies par la loi de glissement (3.3) et l'expérience. La pression dans la conduite est égale 5, 7 ou 10 bars, en accord avec les domaines de validité des lois thermodynamiques (1.6) et (1.8) que nous avons choisies pour calculer la densité des deux phases en fonction de la pression.

##### 3.9.1.1 Mélanges de gazole et de gaz naturel

Dans cette section, nous effectuons des comparaisons où la phase liquide est du gazole tandis que la phase gazeuse est du gaz naturel. Elles sont représentées sur les figures 3.22 - 3.28.

##### 3.9.1.2 Mélanges de condensat et de gaz naturel

Nous effectuons le même type de comparaisons mais avec cette fois - ci du condensat comme phase liquide. Les courbes expérimentales et numériques sont représentées sur les figures 3.29 - 3.37.

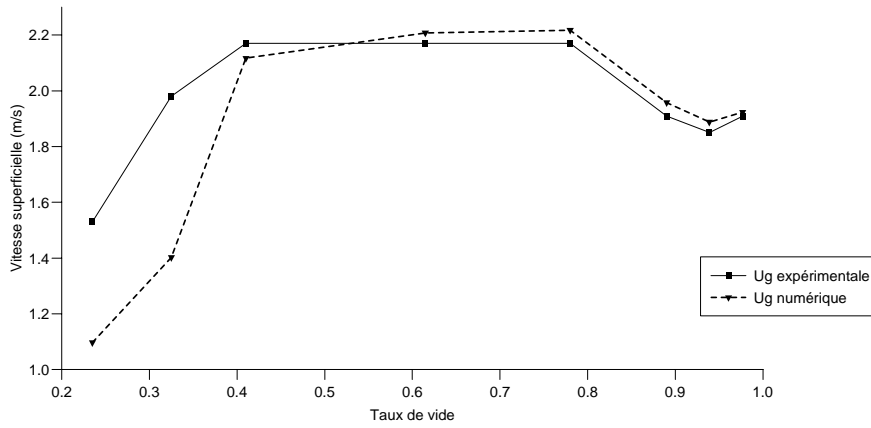


Figure 3.22 : *Boussens* :  $P = 5 \text{ bars}$ ,  $D = 6''$ ,  $\theta = -3^\circ$ , mélange gazole-gaz naturel.

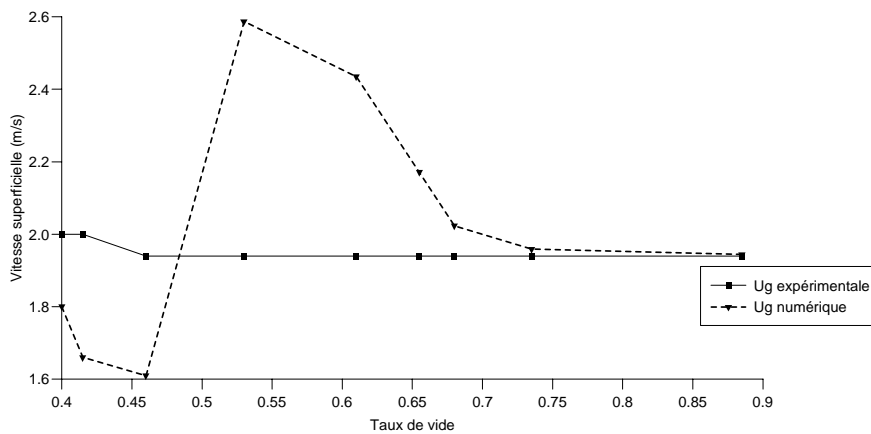


Figure 3.23 : *Boussens* :  $P = 7 \text{ bars}$ ,  $D = 6''$ ,  $\theta = 0^\circ$ , mélange gazole-gaz naturel.

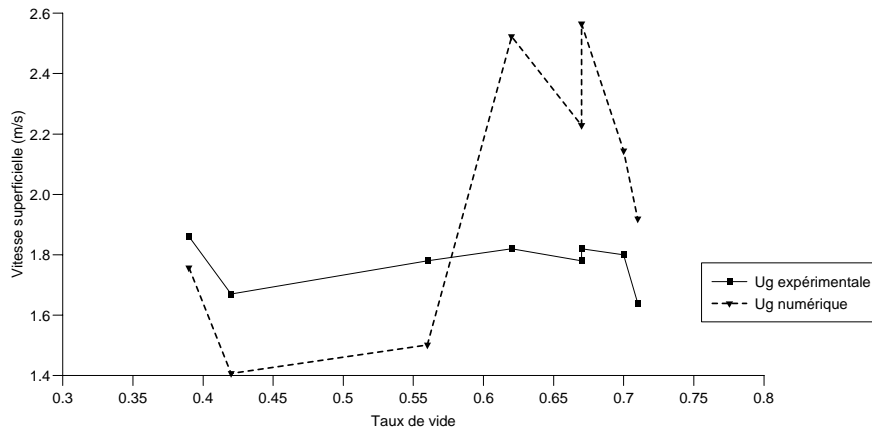


Figure 3.24 : *Boussens* :  $P = 7 \text{ bars}$ ,  $D = 6''$ ,  $\theta = 1^\circ$ , mélange gazole-gaz naturel.

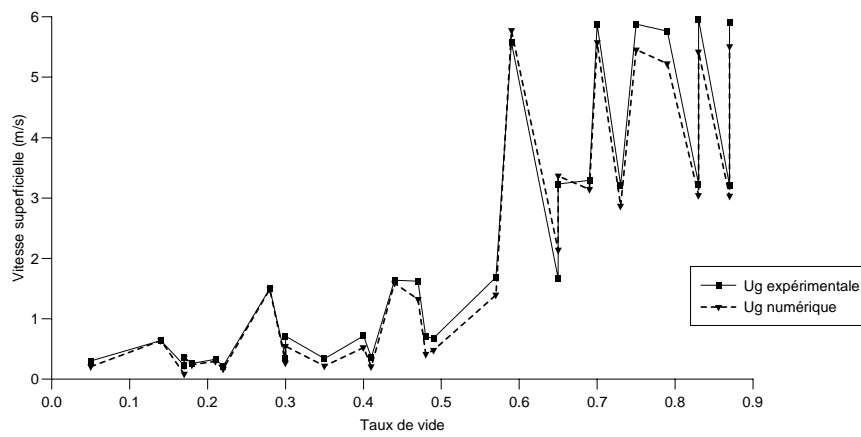


Figure 3.25 : *Boussens* :  $P = 10 \text{ bars}$ ,  $D = 3''$ ,  $\theta = 15^\circ$ , mélange gazole-gaz naturel.



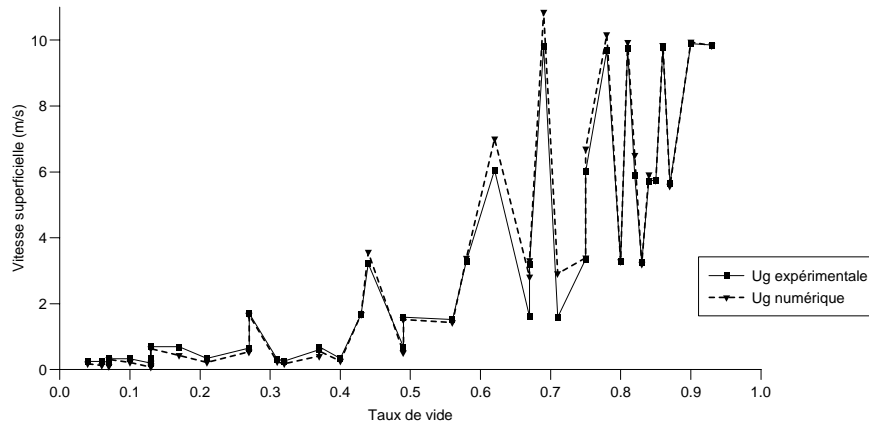


Figure 3.26 : *Boussens* :  $P = 10 \text{ bars}$ ,  $D = 3''$ ,  $\theta = 45^\circ$ , mélange gazole-gaz naturel.

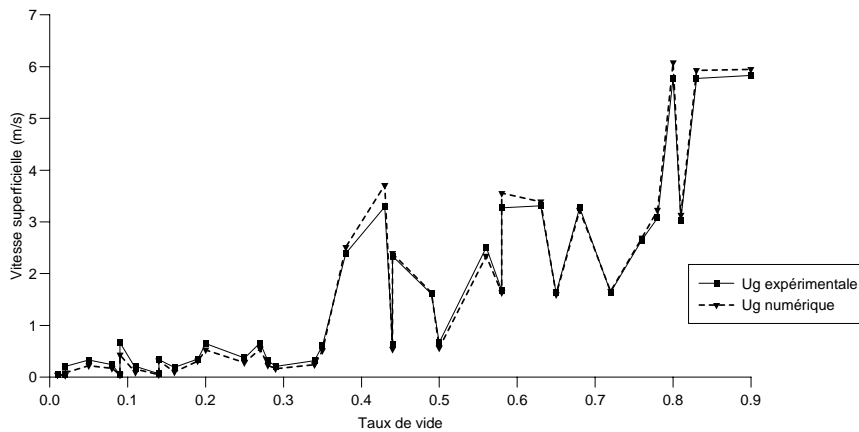


Figure 3.27 : *Boussens* :  $P = 10 \text{ bars}$ ,  $D = 3''$ ,  $\theta = 75^\circ$ , mélange gazole-gaz naturel.

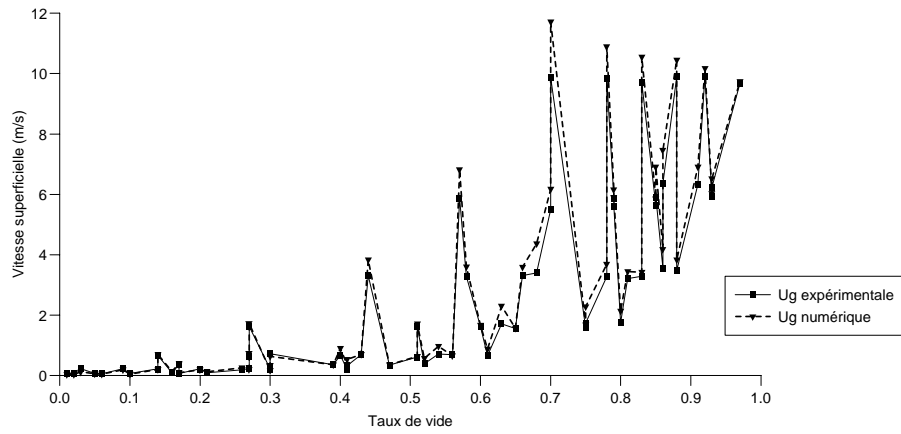


Figure 3.28 : *Boussens* :  $P = 10 \text{ bars}$ ,  $D = 3''$ ,  $\theta = 90^\circ$ , mélange gazole-gaz naturel.

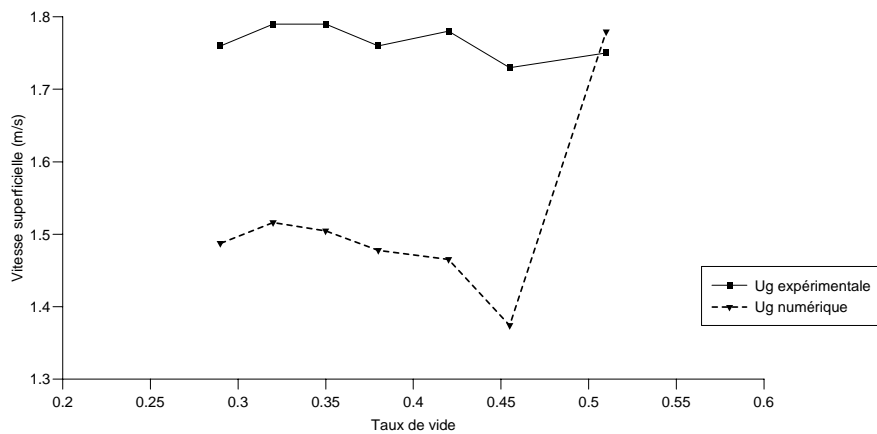


Figure 3.29 : *Boussens* :  $P = 7 \text{ bars}$ ,  $D = 6''$ ,  $\theta = -0.57^\circ$ , mélange condensat-gaz naturel.

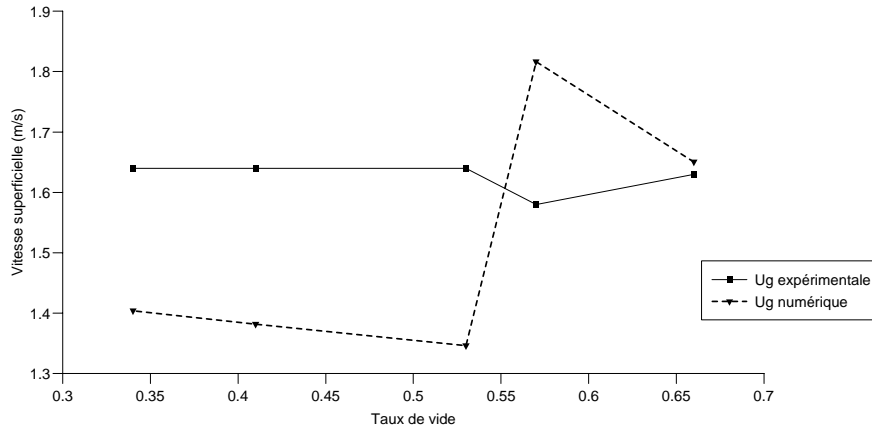


Figure 3.30 : *Boussens* :  $P = 7 \text{ bars}$ ,  $D = 6''$ ,  $\theta = 0^\circ$ , mélange condensat-gaz naturel.

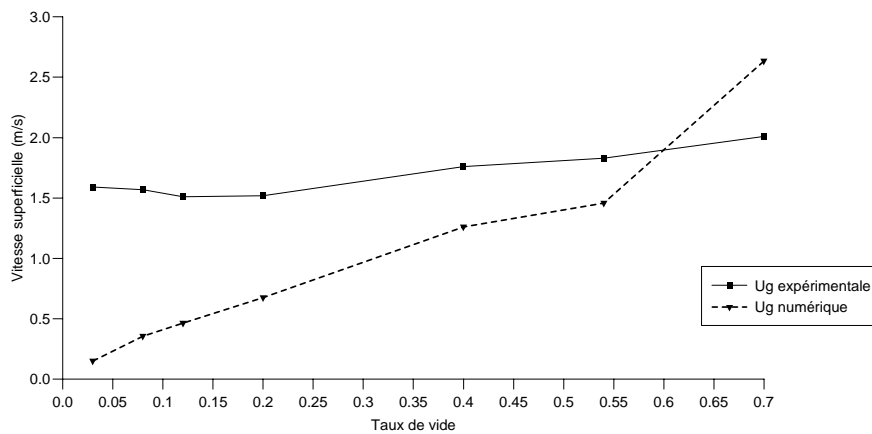


Figure 3.31 : *Boussens* :  $P = 7 \text{ bars}$ ,  $D = 6''$ ,  $\theta = 1^\circ$ , mélange condensat-gaz naturel.

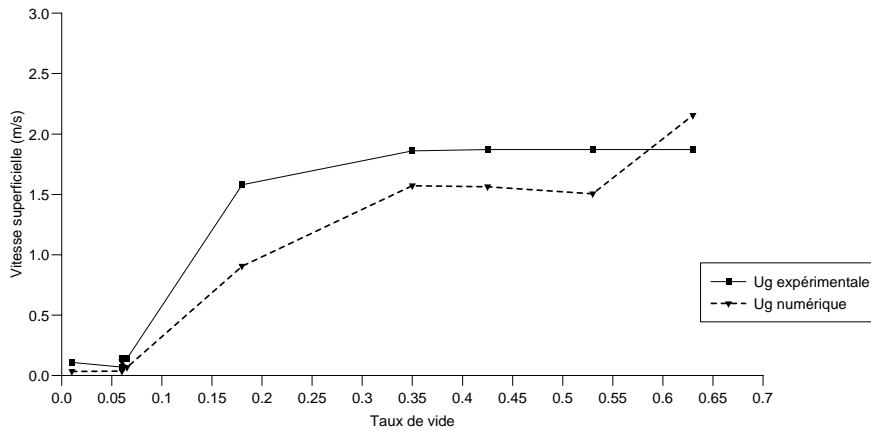


Figure 3.32 : *Boussens* :  $P = 7 \text{ bars}$ ,  $D = 6''$ ,  $\theta = 4^\circ$ , mélange condensat-gaz naturel.

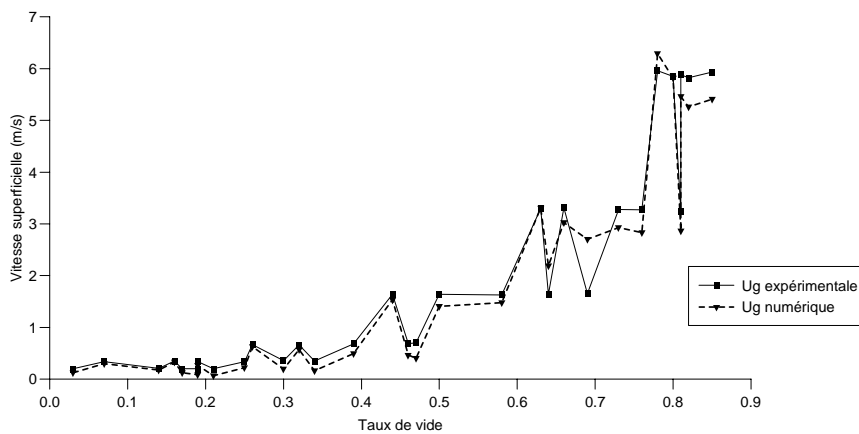


Figure 3.33 : *Boussens* :  $P = 10 \text{ bars}$ ,  $D = 3''$ ,  $\theta = 15^\circ$ , mélange condensat-gaz naturel.

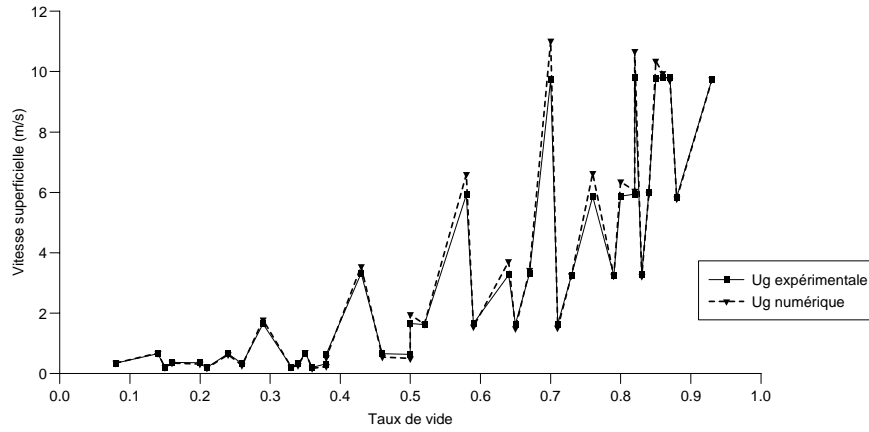


Figure 3.34 : *Boussens* :  $P = 10 \text{ bars}$ ,  $D = 3''$ ,  $\theta = 45^\circ$ , mélange condensat-gaz naturel.

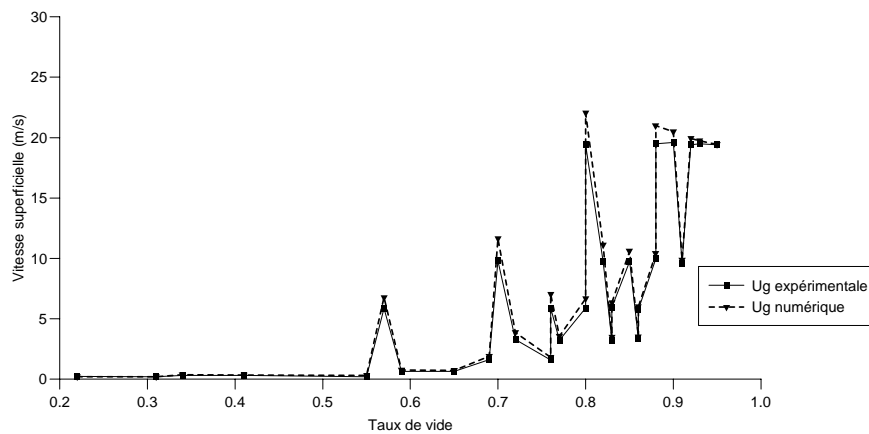


Figure 3.35 : *Boussens* :  $P = 10 \text{ bars}$ ,  $D = 3''$ ,  $\theta = 75^\circ$ , mélange condensat-gaz naturel.

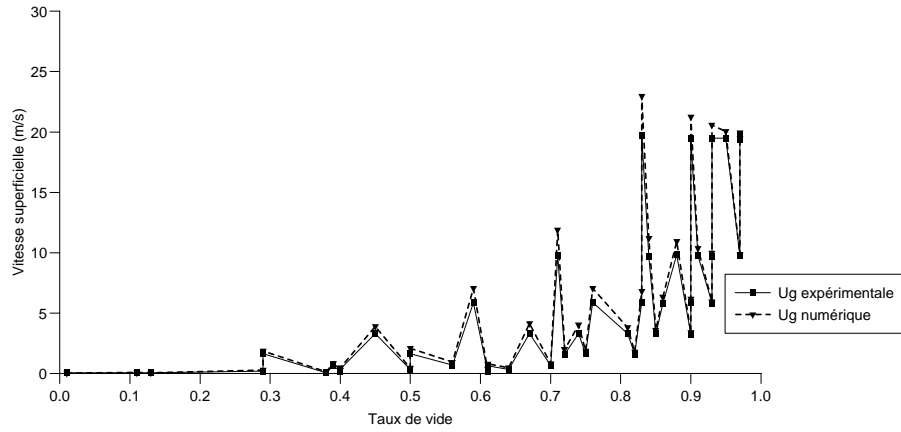


Figure 3.36 : *Boussens* :  $P = 10 \text{ bars}$ ,  $D = 3''$ ,  $\theta = 90^\circ$ , mélange condensat-gaz naturel.

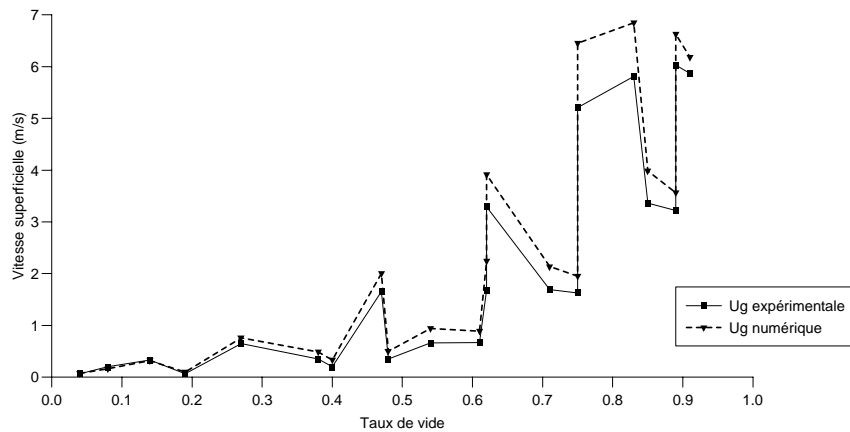


Figure 3.37 : *Boussens* :  $P = 10 \text{ bars}$ ,  $D = 6''$ ,  $\theta = 90^\circ$ , mélange condensat-gaz naturel.

### 3.9.1.3 Mélanges d'eau et de gaz naturel

Dans cette section, nous effectuons de nouvelles comparaisons mais avec cette fois - ci de l'eau comme phase liquide. Les courbes expérimentales et numériques sont représentées sur les figures 3.38 - 3.39.

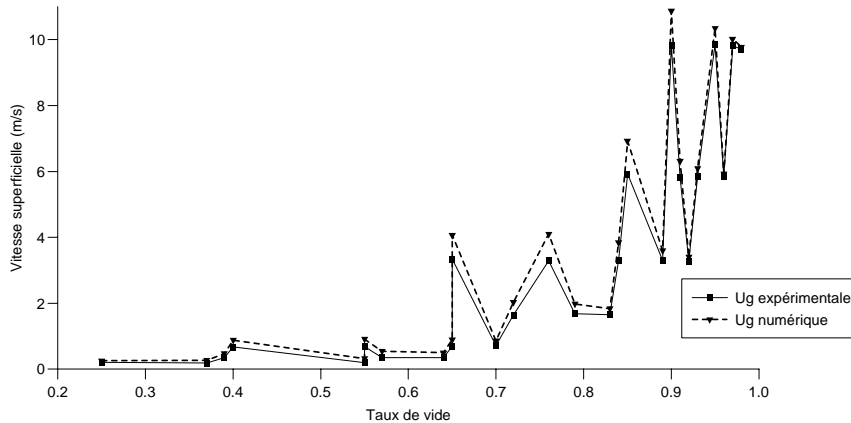


Figure 3.38 : *Boussens* :  $P = 10 \text{ bars}$ ,  $D = 3''$ ,  $\theta = 90^\circ$ , mélange eau-gaz naturel.

### 3.9.1.4 Conclusion

En comparant les erreurs relatives de chacune des courbes numériques par rapport aux résultats expérimentaux, nous constatons qu'elles sont globalement invariantes pour tous les tests : la loi de glissement (3.3) donne de très bons résultats, aussi bien pour des conduites légèrement inclinées que verticales. Lorsque le pipe est fortement incliné, les résultats sont aussi satisfaisants bien que pour simplifier la construction de la loi, nous avons fait l'hypothèse que les conduites devaient être horizontales, verticales ou légèrement inclinées (voir section 3.3.3).

En ce qui concerne le domaine de validité de la loi (3.3) par rapport à la pression interne du pipe, nous ne notons aucune différence notable entre les essais à 5, 7 ou 10 bars. Il en est de même pour le diamètre ou la phase liquide bien que les lois et les critères exposés dans les sections 1.5 - 1.7 proviennent majoritairement d'expériences où le mélange diphasique était constitué d'eau et d'air.

## 3.9.2 Validation de la loi de frottement

Dans cette section, nous comparons les pertes de charge fournies par la loi de frottement (3.140) et l'expérience. La pression dans la conduite est toujours comprise entre 5 et 10 bars. Comme nous l'expliquions dans la section 3.9, nous nous limiterons à des conduites horizontales ou légèrement inclinées. Il est en effet inutile de calculer le frottement pariétal dans des conduites très inclinées car dans ce cas, les pertes de charges sont dues essentiellement aux forces de

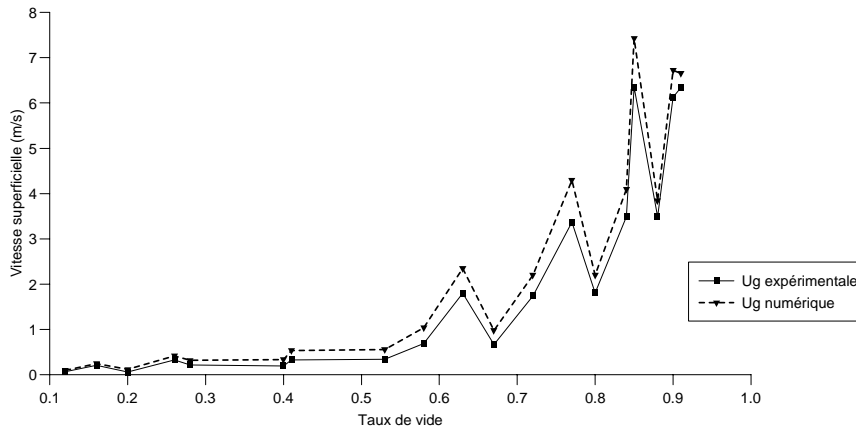


Figure 3.39 : *Boussens* :  $P = 10 \text{ bars}$ ,  $D = 6''$ ,  $\theta = 90^\circ$ , mélange eau-gaz naturel.

gravité. En particulier, nous ne présenterons pas d'essais avec des mélanges eau-gaz naturel car à Boussens, ceux-ci n'ont été testés que sur des conduites verticales.

### 3.9.2.1 Mélanges de gazole et de gaz naturel

Dans cette section, nous effectuons des comparaisons où la phase liquide est du gazole tandis que la phase gazeuse est du gaz naturel. Elles sont représentées sur les figures 3.40 - 3.43.

### 3.9.2.2 Mélanges de condensat et de gaz naturel

Nous effectuons le même type de comparaisons mais avec cette fois - ci du condensat comme phase liquide. Les courbes expérimentales et numériques sont représentées sur les figures 3.44 - 3.47.

### 3.9.2.3 Conclusion

Malgré les approximations adoptées pour sa construction, la loi de frottement (3.140) donne de très bons résultats. Notons cependant que les pertes de charges sont en général sous-estimées lorsque le taux de vide est compris entre les deux valeurs 0.52 et 0.76 qui interviennent dans la construction des lois régulières (voir chapitre 3). Une solution à ce problème pourrait consister à améliorer la modélisation de l'écoulement *intermittent* (voir section 3.7.3). Mais la loi (3.140) a l'avantage d'être simple et explicite par rapport à l'ensemble des variables  $R_G$ ,  $P$ ,  $U_S$ ; une modélisation plus rigoureuse de l'écoulement *intermittent* nous obligerait à calculer certains coefficients de la loi de frottement de manière implicite comme nous l'avons fait pour la loi de glissement (voir section 3.3.3).



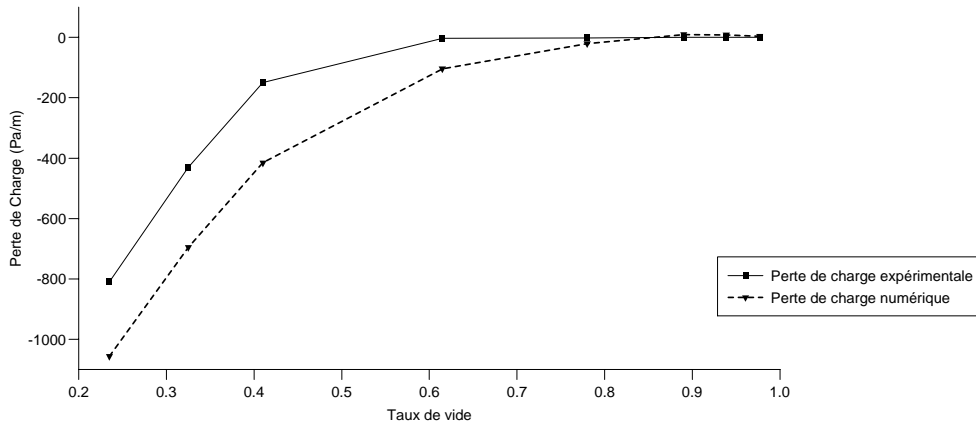


Figure 3.40 : *Boussens* :  $P = 5 \text{ bars}$ ,  $D = 6''$ ,  $\theta = -3^\circ$ , mélange gazole-gaz naturel.

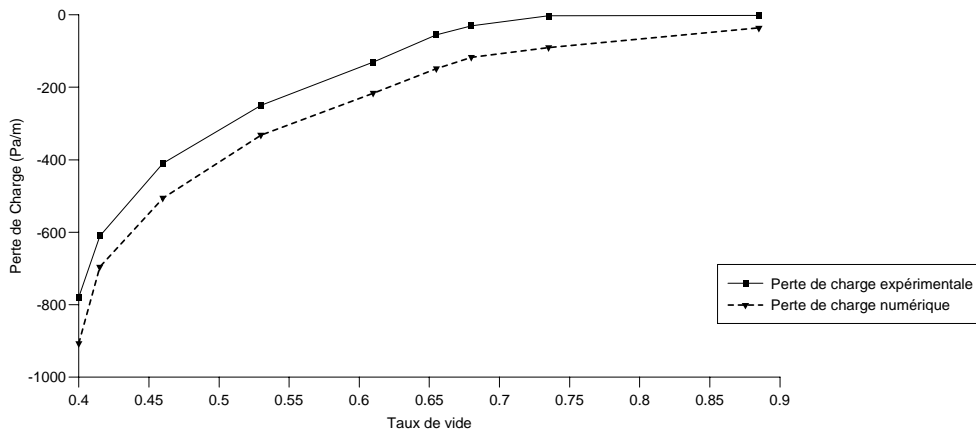


Figure 3.41 : *Boussens* :  $P = 7 \text{ bars}$ ,  $D = 6''$ ,  $\theta = 0^\circ$ , mélange gazole-gaz naturel.

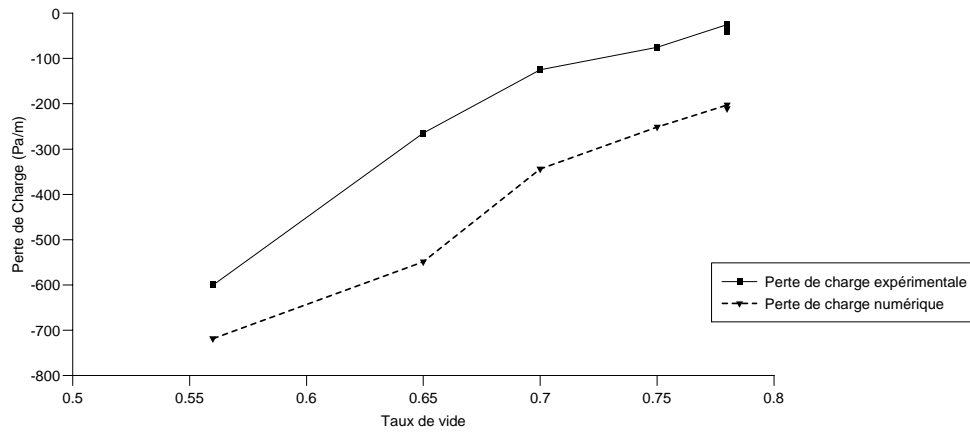


Figure 3.42 : *Boussens* :  $P = 5 \text{ bars}$ ,  $D = 6''$ ,  $\theta = 0.57^\circ$ , mélange gazole-gaz naturel.

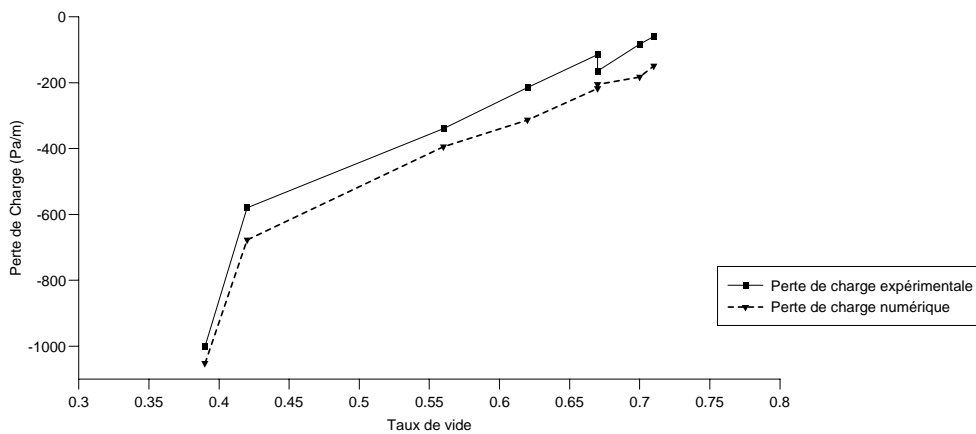


Figure 3.43 : *Boussens* :  $P = 7 \text{ bars}$ ,  $D = 6''$ ,  $\theta = 1^\circ$ , mélange gazole-gaz naturel.

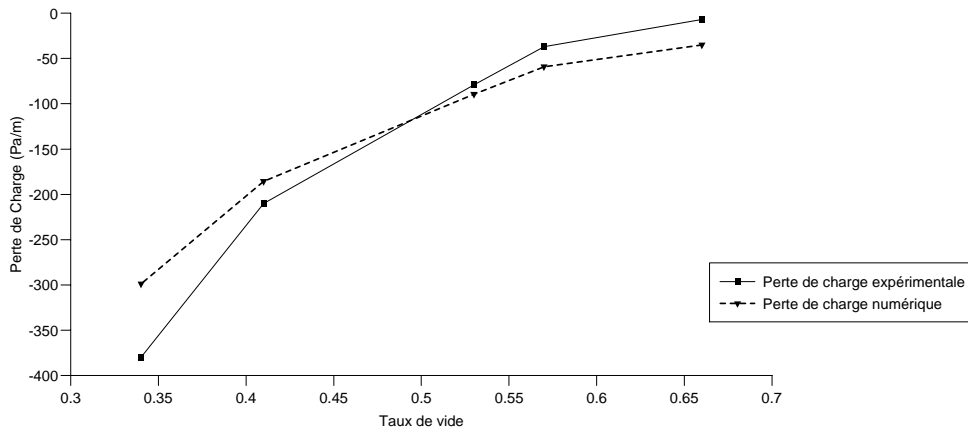


Figure 3.44 : *Boussens* :  $P = 7 \text{ bars}$ ,  $D = 6''$ ,  $\theta = 0^\circ$ , mélange condensat-gaz naturel.

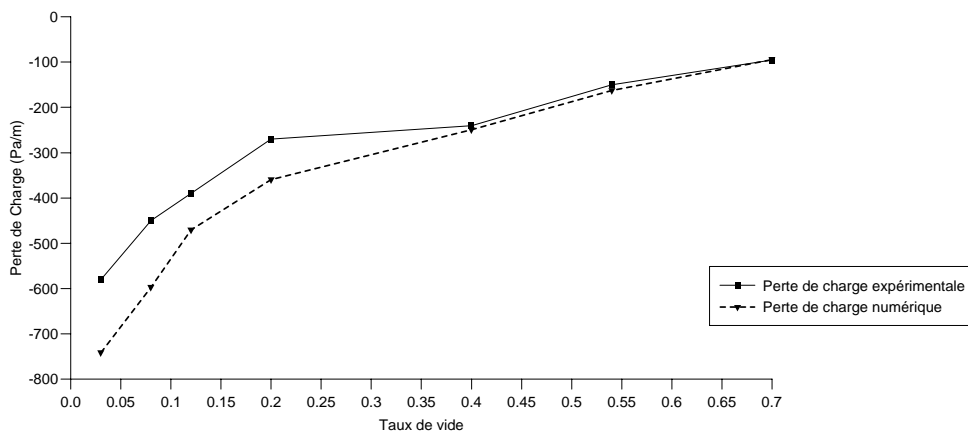


Figure 3.45 : *Boussens* :  $P = 7 \text{ bars}$ ,  $D = 6''$ ,  $\theta = 1^\circ$ , mélange condensat-gaz naturel.

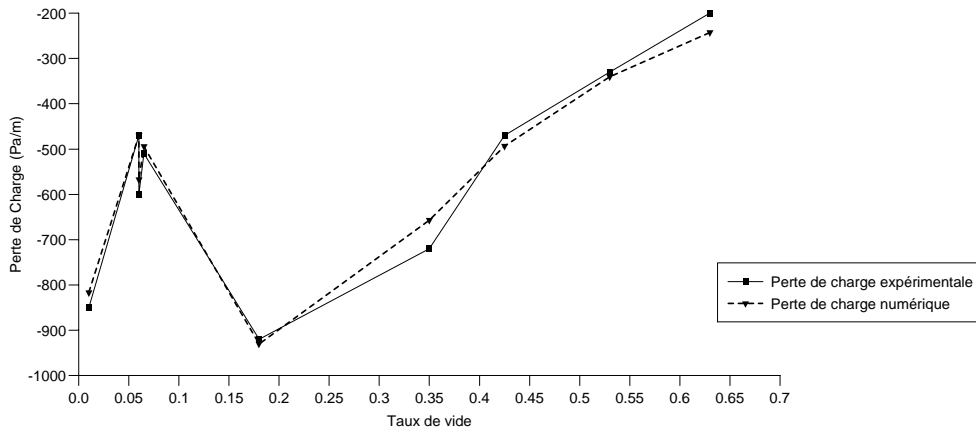


Figure 3.46 : *Boussens* :  $P = 7 \text{ bars}$ ,  $D = 6''$ ,  $\theta = 4^\circ$ , mélange condensat-gaz naturel.

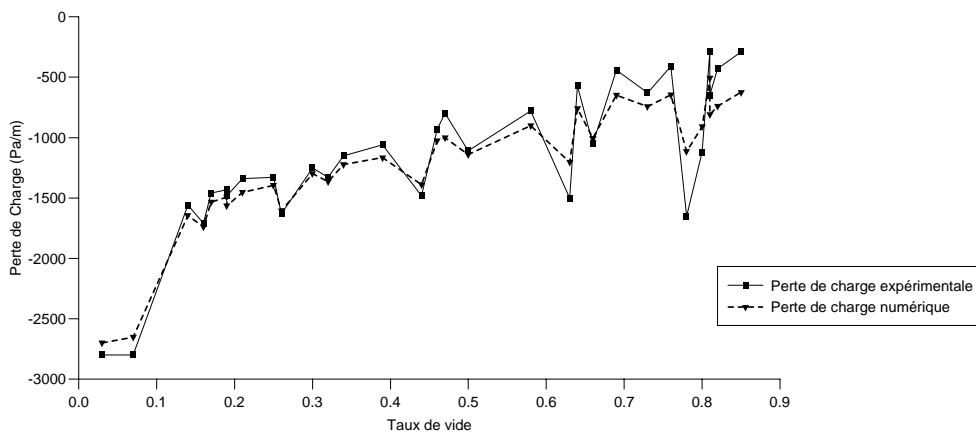


Figure 3.47 : *Boussens* :  $P = 10 \text{ bars}$ ,  $D = 3''$ ,  $\theta = 15^\circ$ , mélange condensat-gaz naturel.



## Chapitre 4

# Résolution numérique et validation du modèle

Ce chapitre présente les choix et les méthodes adoptés pour la résolution numérique de notre modèle diphasique. Des comparaisons entre calculs et expériences sont ensuite décrites afin d'évaluer son domaine de validité.

### 4.1 Méthodes numériques

Les courbes expérimentales d'un écoulement du type *severe slugging* présentent de nombreuses discontinuités dues à la nature très agitée du phénomène [18, 43, 44, 45, 61, 96, 115, 121, 140, 143, 144, 163]. Sa simulation pose de nombreux soucis numériques dont notamment de graves problèmes de convergence dus aux changements brusques de la valeur de certaines variables telles que les taux de vide dans le riser. Nous pouvons citer en exemple Taitel *et al.* qui constatent que la résolution numérique de leur modèle ne converge pas dans certains cas : “le débit de gaz augmente indéfiniment lorsque la discrétisation (du riser) est raffinée ” [163].

Nos équations sont donc à priori raides [3, 52, 79, 114]. Plus généralement, les systèmes algèbro-différentiels sont de très bons candidats pour générer des problèmes raides. De nombreuses méthodes ont été proposées dans la littérature pour résoudre ces derniers de façon numérique. Les méthodes *implicites* à un pas de *Runge-Kutta* en font partie et sont parmi les plus recommandées [25, 28, 52, 46, 79].

#### 4.1.1 Méthodes de Runge-Kutta

D'après Brenan, K.E. *et al.* [25], les méthodes de *Runge-Kutta implicites* (RKI en abrégé) sont potentiellement plus efficaces que les méthodes multi-pas pour la résolution des systèmes algèbro-différentiels exhibant de fréquentes discontinuités. Les méthodes multi-pas telles que les *formules rétrogrades* (*backward differentiation formulas* en anglais) doivent être redémarrées après chaque rencontre d'une discontinuité, en général à des ordres de précision petits. Les méthodes RKI ont l'avantage de reprendre les calculs à des ordres plus élevés. Nous rappelons brièvement leur principe dans les sections suivantes.

##### 4.1.1.1 Équations différentielles ordinaires

Commençons par le cas où le problème est un système d'équations différentielles ordinaires. Soient  $I_0$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  de la forme  $[t_0, t_0 + T]$ ,  $[t_0, t_0 + T[$  ou  $[t_0, +\infty[$ , une fonction  $h$

définie sur  $I_0 \times \mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  et finalement un élément  $Z_0$  de  $\mathbb{R}^n$ . Nous cherchons une fonction  $Z$ , continue et dérivable sur l'intervalle  $I_0$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , solution du problème de Cauchy :

$$\forall t \in I_0, \frac{dZ}{dt} = h(t, Z(t)), \quad (4.1)$$

$$Z(t_0) = Z_0. \quad (4.2)$$

L'existence et l'unicité d'une solution globale sont données par le théorème classique de *Cauchy-Lipschitz* [46] :

**Théorème 4.1 (Cauchy-Lipschitz)** *Supposons que la fonction  $h$  soit continue sur  $I_0 \times \mathbb{R}^n$  et qu'il existe un réel  $L$  tel que :*

$$\forall (t, Z_1) \text{ et } (t, Z_2) \in I_0 \times \mathbb{R}^n, |h(t, Z_1) - h(t, Z_2)| \leq L|Z_1 - Z_2|;$$

alors le problème (4.1) - (4.2) admet une solution et une seule dans  $I_0 \times \mathbb{R}^n$ .

Dans le reste de cette section, nous supposerons que  $h$  vérifie les hypothèses de ce théorème. Décrivons maintenant la résolution numérique du problème (4.1) - (4.2) par la méthode de *Runge-Kutta*. Supposons que nous connaissions la valeur de la solution exacte du système (4.1) - (4.2) lorsque  $t = t_n$ . Considérons ensuite les  $s$  points intermédiaires  $t_{ni} = t_n + c_i \Delta t_n$  ( $i = 1, \dots, s$ ), entre les instants  $t = t_n$  et  $t = t_{n+1} = t_n + \Delta t_n$ ; les coefficients  $c_i$  sont des réels, distincts ou non, et  $\Delta t_n$  est un pas de temps. Les valeurs de  $Z$  aux instants  $t_{ni}$  sont calculées en intégrant (4.1) entre les instants  $t_n$  et  $t_{ni}$  :

$$Z(t_{ni}) = Z(t_n) + \int_{t_n}^{t_{ni}} h(t, Z(t)) dt, \quad i = 1, \dots, s.$$

De la même façon, à l'instant  $t_{n+1}$  :

$$Z(t_{n+1}) = Z(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} h(t, Z(t)) dt.$$

Approchons maintenant ces intégrales par des relations de quadrature en se donnant  $s^2$  réels  $(a_{ij})_{i,j=1,s}$  et  $s$  coefficients  $b_1, \dots, b_s$  :

$$Z(t_{ni}) \simeq Z(t_n) + \Delta t_n \sum_{j=1}^s a_{ij} h(t_{nj}, Z(t_{nj})),$$

$$Z(t_{n+1}) \simeq Z(t_n) + \Delta t_n \sum_{j=1}^s b_j h(t_{nj}, Z(t_{nj})).$$

La méthode de *Runge-Kutta* consiste à remplacer ces égalités approchées par des égalités. Nous en déduisons le schéma numérique d'intégration du système (4.1) - (4.2) entre les instants  $t_n$  et  $t_{n+1}$ :

$$Z_{ni} = Z_n + \Delta t_n \sum_{j=1}^s a_{ij} h(t_n + c_j \Delta t_n, Z_{nj}), \quad i = 1, \dots, s, \quad (4.3)$$

$$Z_{n+1} = Z_n + \Delta t_n \sum_{j=1}^s b_j h(t_n + c_j \Delta t_n, Z_{nj}), \quad (4.4)$$

où  $Z_n$  et  $Z_{ni}$  sont respectivement des approximations de la solution exacte  $Z(t)$  aux instants  $t_n$  et  $t_{ni} = t_n + c_i \Delta t_n$ . En supposant que  $Z_n$  ainsi que les coefficients  $(a_{ij})_{i,j=1,s}$ ,  $(b_i)_{i=1,s}$  et  $(c_i)_{i=1,s}$  soient connus, les équations (4.3) forment un système de  $s$  équations à  $s$  inconnues :  $Z_{ni}$ ,  $i = 1, \dots, s$ . Après résolution, les valeurs de  $Z_{n+1}$  sont calculées grâce aux relations (4.4).

Un schéma numérique équivalent consiste à poser :

$$Z'_{ni} = h(t_n + c_i \Delta t_n, Z_{ni}), \quad i = 1, \dots, s, \quad (4.5)$$

$Z'_{ni}$  représentant une approximation de la dérivée  $dZ/dt$  à l'instant intermédiaire  $t_{ni}$ . En tenant compte de (4.3), nous résolvons alors le système suivant :

$$Z'_{ni} = h(t_n + c_j \Delta t_n, Z_n + \Delta t_n \sum_{j=1}^s a_{ij} Z'_{nj}), \quad j = 1, \dots, s, \quad (4.6)$$

par rapport aux  $s$  inconnues  $Z'_{ni}$ ,  $i = 1, \dots, s$ . Nous en déduisons la nouvelle approximation de  $Z$ , à l'instant  $t_{n+1}$  :

$$Z_{n+1} = Z_n + \Delta t_n \sum_{j=1}^s b_j Z'_{nj}. \quad (4.7)$$

Ce deuxième schéma est celui employé dans la pratique car le calcul de la solution finale  $Z_{n+1}$  est direct dès que l'on connaît les valeurs de  $Z'_{ni}$ ,  $i = 1, \dots, s$ . Dans le schéma précédent, il faut à nouveau évaluer la fonction  $h$  aux points  $(t_n + c_j \Delta t_n, Z_{nj})$ ,  $j = 1, \dots, s$ , pour déterminer  $Z_{n+1}$ . Ce qui augmente les temps de calcul et amplifie les erreurs d'approximation, parfois de façon désastreuse lorsque la *constante de Lipschitz* de  $h$  est grande (i.e. lorsque le problème est raide) [146]. On peut néanmoins contourner ce problème en employant des méthodes de *Runge-Kutta raide*ment précises. Nous décrirons ces méthodes en détail un peu plus tard.

On présente en général les méthodes de Runge-Kutta sous une forme condensée, d'après les notations de Butcher [28] :

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{11} & \dots & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & \dots & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_i & a_{i1} & \dots & a_{is} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_s & a_{s1} & \dots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & \dots & b_s \end{array} \quad (4.8)$$

que l'on peut aussi écrire sous la forme suivante :

$$\frac{c}{b} \left| \begin{array}{c} A \\ b \end{array} \right. \quad (4.9)$$

où :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & \dots & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & \dots & a_{ss} \end{pmatrix}, \quad b = (b_1, \dots, b_s), \quad c = (c_1, \dots, c_s)^T. \quad (4.10)$$

De façon générale, plusieurs types de méthodes de *Runge-Kutta* sont envisageables, à savoir explicite, semi-implicite ou implicite sachant que la matrice  $A$  est respectivement strictement triangulaire inférieure ( $i \leq j \Rightarrow a_{ij} = 0$ ), triangulaire inférieure ( $i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$ ), ou non triangulaire inférieure ( $\exists j > i$  tel que  $a_{ij} \neq 0$ ) [46].



#### 4.1.1.2 Systèmes algébro-différentiels

Le problème de Cauchy d'un système algébro-différentiel peut s'écrire sous la forme générale :

$$F(t, Z(t), dZ/dt(t)) = 0, \quad (4.11)$$

$$Z(t_0) = Z_0. \quad (4.12)$$

Griepentrog E. & März L. ont proposé des conditions suffisantes d'existence et d'unicité d'une solution globale du système (4.11) - (4.12) [75]. Nous allons exprimer ces conditions dans le cas particulier où l'équation (4.11) est exprimée sous une forme dite *semi-explicite* [25].

Soit  $I_0$ , un intervalle de  $\mathbb{R}$  de la forme  $[t_0, t_0 + T]$ . Soient  $f$  et  $g$ , des fonctions définies sur  $I_0 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ , respectivement à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^m$ . Soient  $X_0$  et  $Y_0$ , des éléments de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^m$ . Nous cherchons deux fonctions  $X, Y$ , continues et dérivables sur l'intervalle  $I_0$ , respectivement à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^m$ , solutions du problème de Cauchy :

$$\forall t \in I_0, \frac{dX}{dt}(t) = f(t, X(t), Y(t)), \quad (4.13)$$

$$\forall t \in I_0, 0 = g(t, X(t), Y(t)), \quad (4.14)$$

$$X(t_0) = X_0, \quad (4.15)$$

$$Y(t_0) = Y_0. \quad (4.16)$$

L'existence et l'unicité d'une solution globale sont données par le théorème suivant [75] :

**Théorème 4.2** Notons  $\mathcal{R} = I_0 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  et supposons que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

- les fonctions  $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  et uniformément Lipschitz dans  $\mathcal{R}$ .
- $(D_y g)^{-1}$  existe dans  $\mathcal{R}$ .

Alors le problème (4.13) - (4.16) admet une solution et une seule dans  $\mathcal{R}$ .

Dans le reste de cette section, nous supposons que  $f$  et  $g$  vérifient les hypothèses de ce théorème. Nous supposons aussi que les conditions initiales sont consistantes [79] :  $g(X_0, Y_0) = 0$ .

*Remarque* : la seconde condition du théorème 4.2, dite de *partitionnabilité*, est un cas particulier de la notion plus générale de *transférabilité* d'un système algébro-différentiel. On dit aussi que le problème est d'index un lorsqu'il est *transférable* [75] (voir annexe A).

Pour appliquer la méthode de *Runge-Kutta* à un système algébro-différentiel du type (4.13) - (4.14), l'approche la plus naturelle consiste à partir du problème aux *perturbations singulières* suivant :

$$\frac{dX}{dt}(t) = f(t, X(t), Y(t)), \quad (4.17)$$

$$\epsilon \frac{dY}{dt}(t) = g(t, X(t), Y(t)), \quad (4.18)$$

puis de se placer dans le cas limite où  $\epsilon = 0$  [25].

En remplaçant  $Z$  par  $(X^T, \epsilon Y^T)^T$  et  $h$  par  $(f^T, g^T)^T$  dans (4.6), nous en déduisons :

$$X'_{ni} = f \left( t_n + c_i \Delta t_n, X_n + \Delta t_n \sum_{j=1}^s a_{ij} X'_{nj}, Y_n + \Delta t_n \sum_{j=1}^s a_{ij} Y'_{nj} \right), \quad (4.19)$$

$$\epsilon Y'_{ni} = g \left( t_n + c_i \Delta t_n, X_n + \Delta t_n \sum_{j=1}^s a_{ij} X'_{nj}, Y_n + \Delta t_n \sum_{j=1}^s a_{ij} Y'_{nj} \right), \quad (4.20)$$

$$i = 1, \dots, s,$$

sachant que :

$$X_{ni} = X_n + \Delta t_n \sum_{j=1}^s a_{ij} f(t_n + c_j \Delta t_n, X_{nj}, Y_{nj}), \quad (4.21)$$

$$\epsilon Y_{ni} = \epsilon Y_n + \Delta t_n \sum_{j=1}^s a_{ij} g(t_n + c_j \Delta t_n, X_{nj}, Y_{nj}), \quad (4.22)$$

$$i = 1, \dots, s.$$

Notons que :

$$\begin{aligned} Y_{ni} &= Y_n + \frac{\Delta t_n}{\epsilon} \sum_{j=1}^s a_{ij} g(t_n + c_j \Delta t_n, X_{nj}, Y_{nj}) \\ &= Y_n + \frac{\Delta t_n}{\epsilon} \sum_{j=1}^s a_{ij} \epsilon Y'_{nj} \\ &= Y_n + \Delta t_n \sum_{j=1}^s a_{ij} Y'_{nj}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Nous imposons ensuite  $\epsilon = 0$  dans les équations (4.19) et (4.20) :

$$X'_{ni} = f \left( t_n + c_i \Delta t_n, X_n + \Delta t_n \sum_{j=1}^s a_{ij} X'_{nj}, Y_n + \Delta t_n \sum_{j=1}^s a_{ij} Y'_{nj} \right), \quad (4.24)$$

$$0 = g \left( t_n + c_i \Delta t_n, X_n + \Delta t_n \sum_{j=1}^s a_{ij} X'_{nj}, Y_n + \Delta t_n \sum_{j=1}^s a_{ij} Y'_{nj} \right), \quad (4.25)$$

$$i = 1, \dots, s.$$

De la même façon, en remplaçant  $Z$  par  $(X^T, \epsilon Y^T)^T$  dans (4.7), nous en déduisons finalement :

$$X_{n+1} = X_n + \Delta t_n \sum_{j=1}^s b_j X'_{nj}, \quad (4.26)$$

$$Y_{n+1} = Y_n + \Delta t_n \sum_{j=1}^s b_j Y'_{nj}. \quad (4.27)$$

Le schéma numérique de *Runge-Kutta* appliqué au système (4.13) - (4.14) consiste donc à résoudre les équations (4.24) et (4.25) par rapport aux  $2s$  inconnues  $X'_{ni}, Y'_{ni}, i = 1, \dots, s$ . Les valeurs approchées de la solution exacte à  $t = t_{n+1}$  sont ensuite déterminées grâce aux relations (4.26) et (4.27).

Notons que seules des méthodes *semi-implicites* ou *implicites* sont envisageables dans ce cas car les équations algébriques (4.25) ne contiennent pas explicitement de dérivées  $X'_{ni}$  ou  $Y'_{ni}$ . Plus précisément, si la méthode était explicite, la première ligne de la matrice  $A$  ne contiendrait que des zéros (voir (4.10)). En faisant  $i = 0$  dans l'équation (4.25), nous voyons que celle-ci ne dépend plus de  $X'_{nj}$  et  $Y'_{nj}$ ,  $j = 1, \dots, s$ . La résolution du système (4.24) - (4.25) par rapport aux  $2s$  inconnues  $X'_{ni}$ ,  $Y'_{ni}$ ,  $i = 1, \dots, s$ , est donc un problème mal posé puisqu'il admet une infinité de solutions.

Remarquons aussi que la solution numérique  $(X_{n+1}, Y_{n+1})$  ne satisfait pas forcément les contraintes imposées par (4.14) :

$$0 = g(t_{n+1}, X_{n+1}, Y_{n+1}). \quad (4.28)$$

Cependant, les méthodes *raidement précises* (*stiffly accurate* en anglais) satisfont (4.28). Elles vérifient les relations suivantes :

$$a_{sj} = b_j, \forall j = 1, \dots, s, \quad (4.29)$$

$$c_s = 1. \quad (4.30)$$

Ainsi, lorsque (4.29) et (4.30) sont satisfaites, on vérifie sans difficulté que la solution  $(X_{n+1}, Y_{n+1})$  est identique à la solution  $(X_{ns}, Y_{ns})$  du  $s$ -ième pas de temps intermédiaires  $t_{ns}$  :

$$X_{n+1} \stackrel{(4.26)}{=} X_n + \Delta t_n \sum_{j=1}^s b_j X'_{nj} \stackrel{(4.29)}{=} X_n + \Delta t_n \sum_{j=1}^s a_{sj} X'_{nj} \stackrel{(4.21)}{=} X_{ns}, \quad (4.31)$$

$$Y_{n+1} \stackrel{(4.27)}{=} Y_n + \Delta t_n \sum_{j=1}^s b_j Y'_{nj} \stackrel{(4.29)}{=} Y_n + \Delta t_n \sum_{j=1}^s a_{sj} Y'_{nj} \stackrel{(4.23)}{=} Y_{ns}. \quad (4.32)$$

Nous obtenons alors :

$$g(t_{n+1}, X_{n+1}, Y_{n+1}) = g(t_{n+1}, X_{ns}, Y_{ns}) \stackrel{(4.30)}{=} g(t_{ns}, X_{ns}, Y_{ns}) \stackrel{(4.25)}{=} 0. \quad (4.33)$$

En résumé, le schéma numérique de *Runge-Kutta* appliqué au système (4.13) - (4.14) se réduit à la résolution des équations (4.24) et (4.25) par rapport aux  $2s$  inconnues  $X'_{ni}$ ,  $Y'_{ni}$ ,  $i = 1, \dots, s$ . L'état final  $(X_{n+1}, Y_{n+1})$  se déduit ensuite des relations suivantes :

$$X_{n+1} = X_n + \Delta t_n \sum_{j=1}^s a_{sj} X'_{nj}, \quad (4.34)$$

$$Y_{n+1} = Y_n + \Delta t_n \sum_{j=1}^s a_{sj} Y'_{nj}. \quad (4.35)$$

Un schéma équivalent consiste à écrire la méthode de *Runge-Kutta* (4.3) - (4.4) pour le système (4.17) - (4.18) :

$$X_{ni} = X_n + \Delta t_n \sum_{j=1}^s a_{ij} f(t_n + c_j \Delta t_n, X_{nj}, Y_{nj}), \quad (4.36)$$

$$\epsilon Y_{ni} = \epsilon Y_n + \Delta t_n \sum_{j=1}^s a_{ij} g(t_n + c_j \Delta t_n, X_{nj}, Y_{nj}), \quad (4.37)$$

$$i = 1, \dots, s,$$

$$X_{n+1} = X_n + \Delta t_n \sum_{j=1}^s b_j f(t_n + c_j \Delta t_n, X_{nj}, Y_{nj}), \quad (4.38)$$

$$\epsilon Y_{n+1} = \epsilon Y_n + \Delta t_n \sum_{j=1}^s b_j g(t_n + c_j \Delta t_n, X_{nj}, Y_{nj}). \quad (4.39)$$

En supposant que la matrice  $A$  soit inversible (ce qui sous-entend que la méthode de *Runge-Kutta* soit *semi-implicite* ou *implicite*), nous notons  $\omega_{ij}$  les coefficients de  $A^{-1}$ . (4.37) implique alors les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta t_n g(t_n + c_i \Delta t_n, X_{ni}, Y_{ni}) &= \epsilon \sum_{j=1}^s \omega_{ij} (Y_{nj} - Y_n), \\ i &= 1, \dots, s. \end{aligned} \quad (4.40)$$

En insérant (4.40) dans (4.39), la définition de  $Y_{n+1}$  devient indépendante de  $\epsilon$ . En imposant  $\epsilon = 0$  dans le reste des équations (i.e. (4.36), (4.38) et (4.40)), nous obtenons le système :

$$X_{ni} = X_n + \Delta t_n \sum_{j=1}^s a_{ij} f(t_n + c_i \Delta t_n, X_{nj}, Y_{nj}), \quad (4.41)$$

$$0 = g(t_n + c_i \Delta t_n, X_{ni}, Y_{ni}), \quad (4.42)$$

$$i = 1, \dots, s,$$

$$X_{n+1} = X_n + \Delta t_n \sum_{j=1}^s b_j f(t_n + c_j \Delta t_n, X_{nj}, Y_{nj}), \quad (4.43)$$

$$Y_{n+1} = \left( 1 - \sum_{i,j=1}^s b_j \omega_{ij} \right) Y_n + \sum_{i,j=1}^s b_j \omega_{ij} Y_{nj}. \quad (4.44)$$

À nouveau, la solution numérique  $(X_{n+1}, Y_{n+1})$  ne satisfait pas forcément les contraintes imposées par (4.14) :

$$0 = g(t_{n+1}, X_{n+1}, Y_{n+1}).$$

Néanmoins, si la méthode est *raidement précise*, nous avons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &\stackrel{(4.43)}{=} X_n + \Delta t_n \sum_{j=1}^s b_j f(t_n + c_j \Delta t_n, X_{nj}, Y_{nj}) \\ &\stackrel{(4.29)}{=} X_n + \Delta t_n \sum_{j=1}^s a_{sj} f(t_n + c_j \Delta t_n, X_{nj}, Y_{nj}) \\ &\stackrel{(4.41)}{=} X_{ns}, \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} \epsilon Y_{n+1} &\stackrel{(4.39)}{=} \epsilon Y_n + \Delta t_n \sum_{j=1}^s b_j g(t_n + c_j \Delta t_n, X_{nj}, Y_{nj}) \\ &\stackrel{(4.29)}{=} \epsilon Y_n + \Delta t_n \sum_{j=1}^s a_{sj} g(t_n + c_j \Delta t_n, X_{nj}, Y_{nj}) \\ &\stackrel{(4.37)}{=} \epsilon Y_{ns}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

La solution  $(X_{n+1}, Y_{n+1})$  est donc identique à la solution  $(X_{ns}, Y_{ns})$  du  $s$ -ième pas de temps intermédiaires  $t_{ns}$ . Nous en concluons, grâce à (4.42), que  $X_{n+1}$  et  $Y_{n+1}$  satisfont les contraintes (4.28) lorsque le méthode de *Runge-Kutta* est *raidement précise*.

En résumé, ce deuxième schéma numérique consiste à résoudre les équations (4.41) et (4.42) par rapport aux  $2s$  inconnues  $X_{ni}, Y_{ni}, i = 1, \dots, s$ . L'état final  $(X_{n+1}, Y_{n+1})$  est ensuite déduit des égalités suivantes :

$$X_{n+1} = X_{ns}, \quad (4.47)$$

$$Y_{n+1} = Y_{ns}. \quad (4.48)$$

*Remarque :* Dans ce deuxième schéma, le calcul de  $X_{n+1}$  et  $Y_{n+1}$  ne dépend pas de  $Y_n$ . Néanmoins, la connaissance de ce dernier est utile pour déterminer un point de départ de l'algorithme itératif de résolution du système (4.41) - (4.42).

Nous donnons ci-dessous quelques exemples de méthodes de *Runge-Kutta implicites et raïdement précises*, pour des ordres de précision variant, dans l'ordre, de un à cinq. Toutes ont d'excellentes propriétés de stabilité (plus précisément, elles sont toutes *A-stable* [79]) :

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array} \quad (4.49)$$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array} \quad (4.50)$$

$$\begin{array}{c|cc} 1/3 & 5/12 & -1/12 \\ 1 & 3/4 & 1/4 \\ \hline & 3/4 & 1/4 \end{array} \quad (4.51)$$

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 1/6 & -1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 1/6 & 5/12 & -1/12 \\ 1 & 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ \hline & 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{array} \quad (4.52)$$

$$\begin{array}{c|ccc} \frac{4 - \sqrt{6}}{10} & \frac{88 - 7\sqrt{6}}{360} & \frac{296 - 169\sqrt{6}}{1800} & \frac{-2 + 3\sqrt{6}}{225} \\ \frac{4 + \sqrt{6}}{10} & \frac{296 + 169\sqrt{6}}{1800} & \frac{88 + 7\sqrt{6}}{360} & \frac{-2 - 3\sqrt{6}}{225} \\ 1 & \frac{16 - \sqrt{6}}{36} & \frac{16 + \sqrt{6}}{36} & \frac{1}{9} \\ \hline & \frac{16 - \sqrt{6}}{36} & \frac{16 + \sqrt{6}}{36} & \frac{1}{9} \end{array} \quad (4.53)$$

#### 4.1.1.3 Modèle algébro-différentiel du severe slugging

Le système (2.59) - (2.79) est composé d'équations autonomes que nous écrivons sous une forme condensée :

$$\frac{dX}{dt}(t) = f(X(t), Y(t)), \quad (4.54)$$

$$0 = g(X(t), Y(t)). \quad (4.55)$$

Les vecteurs  $X$  et  $Y$  désignent respectivement les variables différentielles et algébriques du modèle (voir section 2.6) :

$$X = \left[ m_L^{01}, m_G^{01}, \dots, m_L^{2i,2i+1}, m_G^{2i,2i+1}, \dots, m_L^{2n-2,2n-1}, m_G^{2n-2,2n-1}, H_{liq} \right]^T, \quad (4.56)$$

$$Y = \left[ P_0, U_S^0, R_G^0, R_G^1, P_{12}, U_S^{12}, \dots, R_G^{2i}, R_G^{2i+1}, P_{2i+1,2i+2}, U_S^{2i+1,2i+2}, \dots, R_G^{2n-4}, R_G^{2n-3}, P_{2n-3,2n-2}, U_S^{2n-3,2n-2}, R_G^{2n-2}, R_G^{2n-1}, U_S^{2n-1} \right]^T \quad (4.57)$$

où  $n$  symbolise le nombre de pipes, riser inclus, de la ligne d'écoulement.

Il est sous-entendu que  $f$  et  $g$  dépendent des paramètres physiques du problème. Ces derniers peuvent être classés de la façon suivante (on rappelle leur signification dans la nomenclature, page xiii) :

- géométriques :  $L, H, D, \theta_p, \theta_r,$
- thermodynamiques :  $\rho_L^0$  (voir (1.8)),  $K, \mathcal{R}, T, \mu_L, \mu_G, \sigma,$
- expérimentaux :  $q_L^0, q_G^0, P_S.$

À paramètres fixés, les points d'équilibre du système (4.54) - (4.55) sont donnés par les solutions  $(X, Y) \in \mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R}^{4n+1}$  du système stationnaire :

$$0 = f(X, Y), \quad (4.58)$$

$$0 = g(X, Y). \quad (4.59)$$

Dans la pratique, le système (4.58) - (4.59) admet au moins une solution. Celle-ci est calculée grâce à un algorithme itératif de *Newton*. Le point initial est une approximation grossière de l'écoulement stationnaire dont les conditions aux limites sont  $q_L^0, q_G^0$  et  $P_S$  (voir section 2.4). Les taux de vide sont choisis en fonction des régimes d'écoulement que l'on prédit dans chaque tronçon du pipeline et la hauteur liquide  $H_{liq}$  est égale à la hauteur  $H$  du riser (*cf.* figure 2.3).

Cette solution, que nous noterons  $(X_0, Y_0)$ , représente à priori le point d'équilibre *physique* du système (4.54) - (4.55), i.e. l'écoulement stationnaire du système pipe-riser que nous avons représenté sur la figure 2.3. Pour en étudier la stabilité, les conditions initiales (4.15) - (4.16) sont calculées en appliquant, par exemple, une perturbation sur les variables différentielles  $m_L$  et  $m_G$  du vecteur  $X_0$ , i.e.  $X_0^i, i = 1, \dots, 2n$ . Afin que les conditions initiales soient *consistantes* [79], les variables algébriques doivent être perturbées par l'intermédiaire des équations algébriques. Le point résultant de cette perturbation sera noté  $(X_\epsilon, Y_\epsilon)$  :

$$X_\epsilon^i = (1 + \epsilon)X_0^i, \quad 0 < \epsilon \ll 1, \quad i = 1, \dots, 2n, \quad (4.60)$$

$$(H_{liq})_\epsilon = (H_{liq})_0 = H, \quad (4.61)$$

$$0 = g(X_\epsilon, Y_\epsilon). \quad (4.62)$$

*Remarque* : il est inutile de résoudre les équations (4.62) par rapport à  $Y_\epsilon$  car le schéma numérique (4.68) - (4.71) ne dépend pas de  $Y_0$  (i.e.  $Y_n$  lorsque  $n = 0$ ). On déterminera plutôt un  $Y_0$  *perturbé* de manière simple, en remplaçant l'équation implicite (4.62) par la relation directe suivante :

$$Y_\epsilon = (1 + \epsilon)Y_0, \quad 0 < \epsilon \ll 1. \quad (4.63)$$

La connaissance de  $Y_\epsilon$  sera en effet utile pour déterminer un *bon* point de départ de l'algorithme itératif de résolution du système.

Nous en déduisons les conditions initiales (4.15) - (4.16) :

$$X(t_0) = X_\epsilon, \quad (4.64)$$

$$Y(t_0) = Y_\epsilon. \quad (4.65)$$

Supposons à présent que les équations (4.54) - (4.55) associées aux conditions initiales (4.64) - (4.65), possèdent une unique solution. Si  $(X_0, Y_0)$  est localement stable (au sens de *Lyapunov* [136]), il existe un  $\epsilon_0 > 0$  tel que quelque soit  $\epsilon$  compris entre 0 et  $\epsilon_0$ , la trajectoire :

$$\mathcal{T}_\epsilon = \left\{ (X(t), Y(t)) \in \mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R}^{4n+1}; t \geq t_0, X(t_0) = X_\epsilon, Y(t_0) = Y_\epsilon \right\}. \quad (4.66)$$

est contenue dans un voisinage borné de  $(X_0, Y_0)$ .

Si  $(X_0, Y_0)$  est instable, la solution  $(X(t), Y(t))$  s'éloigne du point d'équilibre lorsque  $t$  augmente. En toute généralité, elle peut diverger à l'infini ou tendre vers un attracteur contenu dans un voisinage borné de  $(X_0, Y_0)$ . Sachant que les valeurs initiales  $(X(t_0), Y(t_0))$  représentent une petite perturbation d'un écoulement diphasique stationnaire dans un système pipe-riser, nous admettons a priori que la solution est un écoulement du type *severe slugging*. Dans ce cas, la trajectoire est contenue dans un voisinage borné de  $(X_0, Y_0)$  car le *severe slugging* est un écoulement dont les variables physiques oscillent suivant un cycle périodique.

Étant donné les paramètres physiques  $p$ , il existe donc un réel positif  $\epsilon_0(p)$  et deux ouverts bornés  $\mathcal{O}_X(p) \subset \mathbb{R}^{2n+1}$  et  $\mathcal{O}_Y(p) \subset \mathbb{R}^{4n+1}$  tels que :

$$\mathcal{V}(p) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{O}_X(p) \times \mathcal{O}_Y(p) \quad (4.67)$$

soit un voisinage ouvert et borné de  $(X_0, Y_0)$  dans  $\mathbb{R}^{2n+1} \times \mathbb{R}^{4n+1}$  et contenant entièrement la trajectoire (4.66), quelque soit  $\epsilon$  compris entre 0 et  $\epsilon_0(p)$ .

D'après le théorème 4.2, les équations (4.54) - (4.55) associées aux conditions initiales (4.64) - (4.65), admettent une unique solution dans  $\mathcal{V}(p)$  si les conditions suivantes sont satisfaites :

- $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  et uniformément *Lipschitz* dans  $\mathcal{V}(p)$ ,
- $(D_y g)^{-1}$  existe dans  $\mathcal{V}(p)$ .

Pour que la première condition soit vérifiée, il est nécessaire que la dérivée de la hauteur liquide soit nulle dans  $\mathcal{V}(p)$  car cette dernière est une fonction discontinue (voir section 4.1.2). C'est vrai quand le point d'équilibre  $(X_0, Y_0)$  est stable ou *quasi-stationnaire* (voir section 4.2.6). Dans ce cas, la première condition est satisfaite de façon triviale grâce à la régularité des lois synthétiques de glissement et de frottement que nous avons présentées dans le chapitre 3 (rappelons qu'une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  est localement *Lipschitz*).

En ce qui concerne la seconde condition, le système (2.59) - (2.79) ne la satisfait pas car aucune des équations algébriques ne dépend de la variable  $U_S^{2n-1}$ . Autrement dit, la matrice jacobienne  $D_y g(X, Y)$  est singulière quelque soient les valeurs de  $X$  et  $Y$  car sa dernière colonne ne contient que des termes nuls. Ce qui ne veut pas dire qu'il n'y a pas existence et unicité de solution car les deux conditions du théorème 4.2 sont suffisantes mais pas forcément nécessaires.

D'un point de vue numérique, il est toujours possible de résoudre le système (4.54) - (4.55) associé aux conditions initiales (4.64) - (4.65) car les équations différentielles (2.59)

- (2.65) dépendent de  $U_S^{2n-1}$  [47]. Afin de comprendre pourquoi, appliquons le schéma [(4.41), (4.42), (4.47), (4.48)] aux équations (4.54) - (4.55) :

$$X_{ni} = X_n + \Delta t_n \sum_{j=1}^s a_{ij} f(X_{nj}, Y_{nj}), \quad (4.68)$$

$$0 = g(X_{ni}, Y_{ni}), \quad (4.69)$$

$$i = 1, \dots, s,$$

$$X_{n+1} = X_{ns}, \quad (4.70)$$

$$Y_{n+1} = Y_{ns}. \quad (4.71)$$

Pour calculer une solution des équations (4.68) - (4.69), il n'est plus nécessaire que  $D_y g(X, Y)$  soit inversible car nous résolvons les équations algébriques et différentielles en même temps. Pour que cette résolution soit possible, il suffit simplement que la jacobienne des équations (4.68) - (4.69) par rapport aux  $2s$  inconnues  $X_{ni}, Y_{ni}, i = 1, \dots, s$  soit inversible.

Lorsque  $n = 2$  (système pipe-riser), nous verrons dans le chapitre 5 qu'il est possible de régulariser le système (4.54) - (4.55). Nous montrerons alors que le cycle limite des solutions instables du système régularisé (ce cycle sera déterminé analytiquement) est presque identique à celui des solutions numériques du système (4.54) - (4.55) dont les conditions initiales sont (4.64) et (4.65).

Lorsque la hauteur liquide  $H_{liq}$  oscille dans  $\mathcal{V}(p)$ , la première condition du théorème 4.2 n'est plus satisfaite. On peut cependant calculer une solution numérique en combinant le schéma (4.68) - (4.71) à une autre méthode que nous présentons dans la section 4.1.2.

Notons pour finir que le schéma (4.68) - (4.71) ne dépend plus des coefficients  $c_i$  puisque les équations (4.54) - (4.55) sont autonomes. En particulier, la condition (4.30) n'est plus nécessaire.

#### 4.1.2 Méthode de troncature

La dérivée par rapport au temps  $\Lambda_{liq}$  de la hauteur liquide dans le riser (voir (2.55)) est discontinue lorsque  $H_{liq}$  atteint le sommet du riser et que la vitesse liquide est strictement positive (*cf.* figure 4.1).

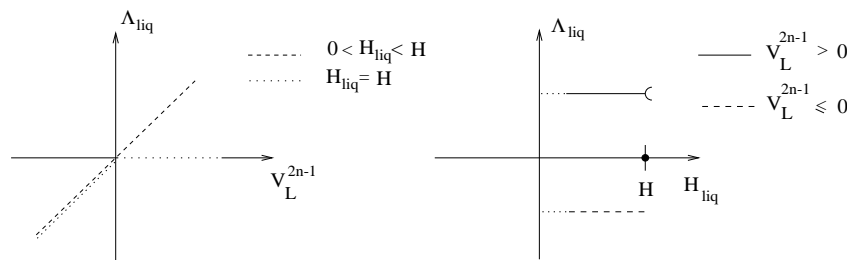


Figure 4.1 : Fonction  $\Lambda_{liq}$  ;  $V_L^{2n-1} \stackrel{\text{déf}}{=} V_L \left( R_G^{2n-1}, P_S, U_S^{2n-1} \right)$ .

Aussi le calcul de la variable  $H_{liq}$  exige un traitement spécial. Rappelons l'équation différentielle de la hauteur liquide (2.65) :

$$\frac{dH_{liq}}{dt} = \Lambda_{liq} \left[ H_{liq}, V_L \left( R_G^{2n-1}, P_S, U_S^{2n-1} \right) \right]. \quad (4.72)$$



La discrétisation de cette équation par la méthode de *Runge-Kutta* s'écrit (voir (4.68)) :

$$\begin{aligned} H_{liq}^{ni} &= H_{liq}^n + \Delta t_n \sum_{j=1}^s a_{ij} \Lambda_{liq} \left[ H_{liq}^{nj}, V_L \left( (R_G^{2n-1})_{nj}, P_S, (U_S^{2n-1})_{nj} \right) \right], \\ i &= 1, \dots, s. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Écrivons (4.73) sous une forme plus condensée :

$$\text{Vect}(H_{liq}^{ni}) = H_{liq}^n e + \Delta t_n A \text{Vect}(\Lambda_{liq}^{nj}) \quad (4.74)$$

où

$$\begin{aligned} \text{Vect}(H_{liq}^{ni}) &= \left( H_{liq}^{n1}, \dots, H_{liq}^{ns} \right)^T, \\ \text{Vect}(\Lambda_{liq}^{nj}) &= \left( \Lambda_{liq}^{n1}, \dots, \Lambda_{liq}^{ns} \right)^T, \\ \Lambda_{liq}^{nj} &= \Lambda_{liq} \left[ H_{liq}^{nj}, V_L \left( (R_G^{2n-1})_{nj}, P_S, (U_S^{2n-1})_{nj} \right) \right], \\ e &= (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^s. \end{aligned}$$

$\Lambda_{liq}$  est une fonction discontinue de  $H_{liq}$  et  $V_L \left( R_G^{2n-1}, P_S, U_S^{2n-1} \right)$ . Il est donc impossible de résoudre directement (4.68) - (4.69) par une méthode itérative du type *Newton* puisque les équations (4.68) ne sont pas toujours dérivables par rapport aux variables  $H_{liq}$ ,  $R_G^{2n-1}$  et  $U_S^{2n-1}$ .

Une méthode efficace pour résoudre ce problème consiste à remplacer dans un premier temps, les dérivées  $\Lambda_{liq}^{nj}$  par  $V_L \left( (R_G^{2n-1})_{nj}, P_S, (U_S^{2n-1})_{nj} \right)$ . C'est vrai en particulier si, pour tout  $i$ ,  $H_{liq}^{ni}$  est inférieur à  $H$  ou si  $H_{liq}^{ni} = H$  et  $V_L \left( (R_G^{2n-1})_{ni}, P_S, (U_S^{2n-1})_{ni} \right) < 0$  (voir la définition (2.55) de  $\Lambda_{liq}$ ) :

$$\text{Vect}(H_{liq}^{ni}) = H_{liq}^n e + \Delta t_n A \text{Vect}(V_{liq}^{nj}) \quad (4.75)$$

où

$$\text{Vect}(V_{liq}^{nj}) = \left[ V_L \left( (R_G^{2n-1})_{n1}, P_S, (U_S^{2n-1})_{n1} \right), \dots, V_L \left( (R_G^{2n-1})_{ns}, P_S, (U_S^{2n-1})_{ns} \right) \right]^T. \quad (4.76)$$

On résout le système (4.68) - (4.69) avec (4.74) remplacée par (4.75). Si toutes les hauteurs liquides intermédiaires  $H_{liq}^{ni}$  sont inférieures à la hauteur du riser, la résolution de (4.68) - (4.69) est terminée; on en déduit  $X_{n+1}$  et  $Y_{n+1}$  à partir des relations (4.70) et (4.71).

Autrement, les hauteurs  $H_{liq}^{ni}$  sont tronquées :

$$\begin{aligned} \left( H_{liq}^{ni} \right)_{new} &= \text{Min}(H_{liq}^{ni}, H), \\ i &= 1, \dots, s. \end{aligned} \quad (4.77)$$

On recommence les calculs avec  $H_{liq}^{ni}$  remplacé par  $\left( H_{liq}^{ni} \right)_{new}$ ,  $i = 1, \dots, s$ . Les hauteurs liquides intermédiaires sont désormais imposées : on ne résout plus les équations (4.73) jusqu'au pas de temps suivant. Puisque  $\Lambda_{liq}$  dépend de  $H_{liq}$  (rappelons que  $\Lambda_{liq}$  intervient aussi dans les équations (2.63) et (2.64)), on détermine les nouvelles valeurs de  $\text{Vect}(\Lambda_{liq}^{nj})$  en inversant la relation (4.74) :

$$\text{Vect}(\Lambda_{liq}^{ni}) = \frac{1}{\Delta t_n} A^{-1} \left\{ \text{Vect} \left[ \left( H_{liq}^{nj} \right)_{new} \right] - H_{liq}^n e \right\} \quad (4.78)$$

où :

$$\text{Vect} \left[ \left( H_{liq}^{nj} \right)_{new} \right] = \left[ \left( H_{liq}^{n1} \right)_{new}, \dots, \left( H_{liq}^{ns} \right)_{new} \right]^T. \quad (4.79)$$

Notons que cette dernière relation suppose que  $A$  est une matrice inversible : il est donc nécessaire que la méthode de Runge-Kutta soit *semi-implicite* ou *implicite* (voir (4.10)).

On résout à nouveau (4.68) - (4.69), sans l'équation (4.74), mais avec  $H_{liq}^{ni}$  et  $\Lambda_{liq}^{ni}$  imposés respectivement par (4.77) et (4.78). D'où les nouvelles valeurs de  $X_{n+1}$  et  $Y_{n+1}$  grâce à (4.70) et (4.71). La nouvelle hauteur liquide  $H_{liq}^{n+1}$  est quant à elle bien inférieure à  $H$  :

$$H_{liq}^{n+1} \stackrel{(4.70)}{=} \left( H_{liq}^{ns} \right)_{new} \stackrel{(4.77)}{\leq} H. \quad (4.80)$$

*Remarque* : en ce qui concerne le problème d'existence et d'unicité d'une solution des équations (4.54) - (4.55), nous rappelons que la discontinuité de la fonction  $\Lambda_{liq}$  ne permet pas d'appliquer des résultats classiques tels que le théorème 4.2 (voir section 4.1.1.2). Néanmoins, nous verrons plus tard qu'au voisinage des points de bifurcation de notre modèle (i.e. où l'instabilité de l'équilibre  $(X_0, Y_0)$  apparaît lorsqu'on fait varier un paramètre physique, voir section 4.1.1.3), nous pourrions supposer sans trop d'approximation que la fonction  $\Lambda_{liq}$  est nulle : le riser reste saturé (i.e.  $H_{liq} = H$ ) tandis que des variables telles que les pressions ou les taux de vide dans le riser oscillent indéfiniment, suivant un cycle limite proche de l'état stationnaire. On parle dans ce cas d'écoulement *quasi-stationnaire* (voir section 4.2.6).

### 4.1.3 Contrôles du pas de temps et de l'ordre de précision

Le pas de temps  $\Delta t$  est systématiquement réduit lorsque le schéma numérique rencontre des problèmes de convergence. Dans le cas contraire, il est augmenté sans dépasser sa valeur initiale, afin de diminuer les temps de calcul. L'ordre de précision de la méthode de *Runge-Kutta* est aussi réduit lorsque la résolution numérique rencontre des difficultés de convergence. Les résultats numériques présentés dans les sections suivantes ont été réalisés avec les méthodes (4.49) - (4.53) présentées dans la section 4.1.1.2 et un pas de temps initial variant entre  $10^{-1}$  s et 1 s.

## 4.2 Comparaisons avec les expériences de L'IFP

Cette section présente des comparaisons entre des calculs numériques et des tests expérimentaux réalisés sur une boucle d'essais construite à Rueil-Malmaison (en région parisienne) dans les laboratoires de l'Institut Français du Pétrole. Une description complète du dispositif et des résultats sont disponibles dans deux rapports de Corteville J. *et al.* [43, 44].

### 4.2.1 Dispositif et données expérimentales

Un dispositif expérimental fut élaboré à l'Institut Français du Pétrole afin d'étudier le comportement des écoulements diphasiques dans les pipelines en forme de U (*cf.* figure 4.2). Cette configuration reproduit grossièrement le cas réel d'une conduite pétrolière offshore reliant une plate-forme de production à une plate-forme de traitement.

La boucle expérimentale est construite à l'aide de pipes circulaires en plexiglas d'un diamètre interne constant de 80 mm. Un mélange eau-air est injecté dans la conduite verticale descendante (*down-comer* en anglais), s'écoule dans la conduite horizontale (*flow-line* en anglais) et finalement remonte dans le riser. Le down-comer et le riser mesurent exactement 15 mètres. La longueur de la flow-line peut varier entre 105 et 150 mètres environ.

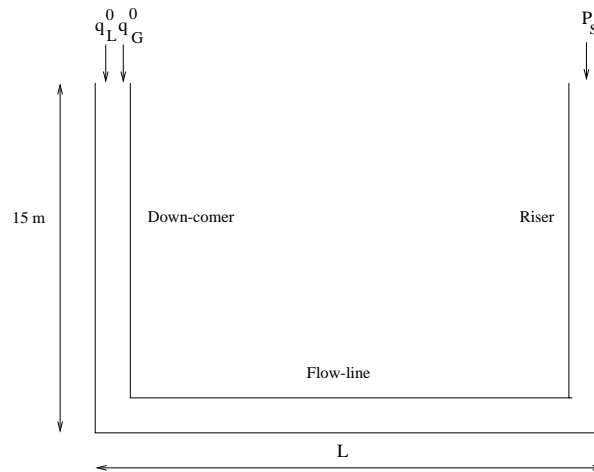


Figure 4.2 : Pipeline en forme de U.

À l'entrée du down-comer, les débits massiques de liquide et de gaz sont maintenus constants. En sortie du riser, le mélange diphasique est évacué vers un séparateur vertical le long d'un pipe vertical descendant de gros diamètre (diamètre interne 150 mm). Ce dernier ne provoque pas de perte de charge significative et n'induit pas de perturbations de pression en amont. La pression dans le séparateur est donc approximativement celle mesurée au sommet du riser. Nous avons vu l'intérêt théorique d'un tel dispositif dans la section 2.4.

La pression dans le séparateur est maintenue constante au cours de chaque essai. Elle est dans tous les cas proche de deux bars. La température est aussi approximativement constante tout au long de chaque expérience et voisine de vingt degrés Celsius.

Le tableau 4.1 décrit l'ensemble des essais présentés dans le rapport de la deuxième campagne d'essais de 1995/1996 [44]. La colonne *Période* désigne la période des oscillations de l'écoulement. Un trait signifie simplement l'absence de fluctuation. Notons aussi que les débits massiques  $q_G^0$  et  $q_L^0$  sont multipliés par l'aire de la section droite de la conduite :

$$A = \pi(D/2)^2; D = 0.08 \text{ m.}$$

*Remarque* : par abus de langage, Corteville J. *et al.* désignent les écoulements instables (i.e. de période non nulle) de leur système comme du *severe slugging*. En réalité, les écoulements observés sont des *transitions vers du severe slugging* car la flow-line est horizontale : il est impossible d'observer des bouchons de liquide dont la longueur est supérieure à la hauteur du riser (voir section 1.1).

#### 4.2.2 Modélisation de l'écoulement intermittent

Nous avons vu que le dispositif expérimental contient une conduite verticale descendante. Or, dans la section 1.5.1, nous avons laissé en suspens la modélisation de la loi de glissement de l'écoulement intermittent dans les conduites descendantes. Rappelons que le paramètre de distribution  $C_{int}$  de la loi (1.11) est inférieur à un pour des écoulements descendants [20].

Au cours de leurs expériences, Corteville, J. *et al.* ont calculé systématiquement la vitesse des poches de gaz dans le riser [43, 44]. Ils en ont déduit la corrélation suivante, à mettre en

Tableau 4.1 : Données expérimentales

Essai	$L$ (m)	$q_G^0 \times A \times 10^3$ (kg/s)	$q_L^0 \times A$ (kg/s)	$P_S \times 10^{-5}$ (Pa)	Période (s)
1	104.8	1.657	1.216	1.7731	37.3
2	128.8	2.013	1.687	2.4000	108.
3	149.0	1.621	1.466	2.5215	69.
4	149.0	2.017	4.777	2.4831	-
5	149.0	2.023	7.591	2.4320	-
6	104.8	3.209	1.356	1.9502	34.
7	128.8	3.835	1.687	2.4000	92.
8	149.0	3.173	1.577	2.4551	36.
9	128.8	3.205	4.697	2.4483	-
10	128.8	3.792	7.682	1.8525	-
11	104.8	4.046	1.233	1.9452	-
12	128.8	3.990	1.643	2.1915	34.
13	149.0	4.108	1.278	2.1000	49.
14	149.0	4.352	1.765	1.8474	81.
15	128.8	4.093	4.481	1.8459	-
16	128.8	4.063	4.706	2.2126	-
17	128.8	8.122	1.242	1.7657	26.
18	128.8	7.953	0.889	2.0066	29.
19	104.8	8.357	1.620	2.4600	45.
20	149.0	8.117	1.765	1.8474	99.
21	128.8	8.140	4.409	1.9222	-
22	128.8	8.137	5.944	1.9526	-
23	104.8	7.739	0.739	2.0312	35.
24	128.8	7.949	0.547	1.9199	35.
25	149.0	8.594	1.722	2.2700	65.
26	128.8	7.874	2.744	1.9348	-
27	128.8	8.046	5.450	1.9924	-
28	104.8	15.207	0.941	2.1658	26.
29	128.8	15.761	1.055	1.9582	21.
30	149.0	15.913	1.778	2.4000	39.
31	128.8	15.410	3.914	2.0027	-
32	128.8	15.371	7.594	1.9975	-
33	104.8	14.181	0.468	2.0240	28.
34	128.8	14.109	1.026	1.9971	24.
35	128.8	14.159	3.089	1.9742	-
36	128.8	14.099	5.072	2.0042	-
37	128.8	27.314	0.694	2.0005	35.
38	104.8	26.493	0.878	1.8883	18.
39	128.8	27.060	3.075	2.0360	-
40	128.8	27.354	5.081	2.0614	-

rapport avec la relation plus générale (1.10) :

$$V_T = 1.1 U_S + 0.35 \sqrt{gD}.$$

Le paramètre  $C_{int}$  est donc égal à 1.1 dans le riser.

En nous inspirant de ce résultat, nous avons choisi d'exprimer  $C_{int}$  en fonction de l'angle d'inclinaison  $\theta$  de la conduite, de la façon suivante :

$$C_{int}(\theta) = 1.0 + 0.1 \sin \theta. \quad (4.81)$$

Cette formule concorde avec les mesures expérimentales effectuées dans le riser. Plus généralement, elle impose que  $C_{int}$  soit inférieur à un dans les conduites descendantes : ce qui est cohérent avec la réalité si la vitesse du liquide n'est pas trop grande [17]. Lorsque la conduite est horizontale,  $C_{int}$  vaut exactement un. Ce qui sous-entend que les poches de gaz se déplacent avec la même vitesse que celle du mélange :  $U_S$ .

En ce qui concerne la vitesse de dérive  $u_d^{int}$ , nous avons choisi par simplicité la corrélation suivante :

$$u_d^{int}(P, \theta) = 0.35 \sin \theta \sqrt{\frac{gD [\rho_L(P) - \rho_G(P)]}{\rho_L(P)}} \quad (4.82)$$

qui néglige les effets de pression hydrostatique entre le haut et le bas de la section du pipe. Contrairement aux expressions (1.16) et (1.17), cette formule a l'avantage d'être valide pour tout  $\theta$  compris entre  $-90^\circ$  et  $90^\circ$ .

Ces choix sont évidemment arbitraires, notamment en ce qui concerne  $C_{int}$  qui dépend en toute généralité d'un nombre de Reynolds ou de Froude [20, 115, 125]. Néanmoins, nous allons voir que pour un bon nombre d'expériences, le modèle fournit une prédiction satisfaisante et surtout un comportement dynamique très proche de la réalité.

Pour finir, nous avons imposé que la loi synthétique de glissement soit donnée par le premier cas parmi les quatre lois décrites dans les tableaux 3.1, 3.2, 3.3 et 3.4. C'est vrai dans le down-comer et le riser pour lesquels  $|\theta| = \pi/2$ . C'est par contre discutable dans la flow-line où le flot peut aussi bien être intermittent que stratifié lorsque le taux de vide  $R_G$  varie entre 0.52 et 0.76.

Bien que le régime stratifié soit prédit par le modèle à l'entrée et la sortie de la flow-line dans l'ensemble de nos calculs, ce choix arbitraire donne de meilleurs résultats. Corteville J. *et al.* signalent d'ailleurs dans leur rapport [44] que l'écoulement dans la conduite horizontale est *stratifié non établi* dans les cas instables. On peut aussi bien imaginer que l'écoulement est *intermittent à longues poches*. Ce qui justifierait le choix d'une loi synthétique de glissement du type *intermittent* (voir tableau 3.1).

### 4.2.3 Procédure de calcul

Pour chaque essai, un écoulement stationnaire du système (2.59) - (2.79) ( $n = 3$ ) est calculé en fonction des paramètres du problème dont les valeurs sont résumées dans le tableau 4.1. Nous perturbons ensuite cet écoulement, en suivant la démarche décrite dans la section 4.1.1.3 afin de calculer les conditions initiales (4.64) - (4.65).

Si l'écoulement stationnaire est instable, la perturbation de  $X_0$  et  $Y_0$  est suffisante pour générer des fluctuations périodiques : les pressions, les taux de vide et les débits s'amplifient au cours du temps pour finalement osciller suivant un cycle limite : voir figure 4.10. Autrement, l'écoulement stationnaire est stable : la perturbation se dissipe au cours du temps et l'écoulement retourne à son état initial : voir figure 4.12.

#### 4.2.4 Comparaisons des résultats

Sur les figures 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7 et 4.8 sont représentées différentes variables, mesurées expérimentalement et calculées numériquement pour chaque essai. Ce sont les vitesses superficielles et la pression dans la flow-line ou encore les pertes de charge dans chaque tronçon du pipeline. Les valeurs reproduites sont des moyennes, dans le sens où elles représentent la mesure (ou le calcul) moyen effectué au cours d'une expérience dont la durée peut atteindre plusieurs minutes.

En ce qui concerne la vitesse superficielle du liquide dans la flow-line, les calculs numériques fournissent des résultats très proches de la réalité, avec une précision de l'ordre de  $10^{-3}$  mètre par seconde (*cf.* figure 4.7). L'explication est simple : le débit liquide en entrée du down-comer est imposé constant tout au long du calcul transitoire. Or la phase liquide est très peu compressible. La vitesse superficielle du liquide en entrée du down-comer est donc approximativement constante au cours de chaque expérience. C'est aussi vrai dans la flow-line dont l'horizontalité empêche la quantité  $m_L$  (voir section 2.5) de varier beaucoup au cours du temps : contrairement au cas d'une conduite légèrement descendante dans un système pipe-riser, la flow-line n'a pas de point-bas où le liquide puisse s'accumuler. C'est pourquoi la vitesse superficielle du liquide varie peu et reste proche de celle imposée en entrée du pipeline.

La vitesse superficielle du gaz et la pression dans la flow-line sont généralement bien prédites (voir figures 4.6 et 4.8). Les résultats sont moins satisfaisants en ce qui concerne les pertes de charge. Tout d'abord dans le down-comer, nous remarquons que les essais où les pertes de charge expérimentales sont faibles correspondent à des écoulements instables (comparez les figures 4.3 et 4.9). Bien que la conduite ait une pente négative, les pertes de charge peuvent parfois être négatives car l'écoulement dans le down-comer est annulaire lorsqu'il y a instabilité [44] : la fraction liquide est petite; d'où une pression hydrostatique très faible au pied de la conduite et donc des pertes de charge négatives lorsque les forces de frottement dépassent les forces de gravité.

Le modèle surestime les pertes de charge dans le down-comer quand il y a instabilité et les sous-estime dans les autres cas. En d'autres termes, la fraction liquide est sur ou sous-évaluée suivant la stabilité du flot. Ce mauvais résultat est dû certainement à une mauvaise modélisation de l'écoulement intermittent dans les conduites verticales descendantes. Il est malheureusement difficile de trouver un bon compromis entre la simplicité d'une loi de glissement du type (1.11) et la complexité d'un modèle plus élaboré (voir sections 1.5.1 et 4.2.2).

En ce qui concerne les essais 3, 4 et 5, aucune mesure expérimentale de la perte de charge dans le down-comer et la flow-line n'est disponible dans le rapport [44]. Nous avons comblé ce vide avec nos valeurs numériques.

Dans la flow-line, seules les forces de frottement provoquent une perte de charge car les forces de gravité sont nulles (rappelons que la flow-line est un pipe horizontal). La comparaison entre les courbes de pertes de charge expérimentale et numérique est donc un excellent moyen de valider notre loi synthétique de frottement lorsque  $\theta = 0$  (*cf.* figure 4.4) : nous remarquons que les valeurs numériques sont très proches de la réalité lorsque les pertes de charge sont faibles. Celles-ci correspondent à des écoulements instables (comparez les figures 4.4 et 4.9) pour lesquels la hauteur liquide  $h_L$  dans la flow-line est a priori petite. Dans les autres cas, le frottement est sous-estimé. Ce mauvais résultat est dû probablement au caractère simplifié de notre loi synthétique de frottement lorsque  $R_G$  n'est pas proche de zéro ou un (voir section 3.7.3).

La période des oscillations de chaque écoulement est représentée sur la figure 4.9. Rappelons que lorsque le flot est instable, ses variables oscillent suivant une certaine période. Celle-ci est nulle si l'écoulement est stable. Certaines périodes numériques sont très proches de la réalité. D'autres sont par contre plus approximatives ou même fausses lorsque le modèle prédit un écoulement stable alors que l'expérience exhibe une instabilité. En comparant attentivement les deux courbes, on se rend compte que les mauvaises prédictions concernent principalement les écoulements de grande période. Or, ceux-ci correspondent à des phénomènes de grandes amplitudes [44]. Nos résultats sont donc cohérents avec ce que nous avons prédits car toutes les approximations que nous avons admises pour construire notre modèle simplifié ne sont valides que si l'écoulement est légèrement instable (voir section 2.5). En d'autres termes, dès que la longueur des bouchons de liquide devient importante, les fluctuations et les périodes sont importantes et le modèle perd tout son sens.

Il est pour l'instant difficile de déterminer à priori le domaine de validité du modèle dans l'espace des paramètres  $q_G^0$ ,  $q_L^0$  et  $L$  (la température est approximativement la même dans toutes les expériences; les autres paramètres tels que la hauteur du riser, le diamètre du pipeline ou encore les propriétés physiques des deux phases sont constants dans tous nos calculs). En ce qui concerne le comportement dynamique du modèle, nous allons voir qu'il est très proche de la réalité.

#### 4.2.5 Comportement dynamique du modèle

Les figures 4.10 à 4.18 illustrent quelques calculs transitoires pour lesquels nous avons systématiquement tracé la hauteur liquide dans le riser, la pression et le taux de vide en sortie de la flow-line et  $R_G$  au pied du riser. On constate que dans la plupart des cas, la pression oscille suivant des cycles triangulaires de relaxation. Ces derniers sont caractéristiques du *severe slugging* [18, 43, 44, 45, 61, 96, 115, 121, 140, 143, 144, 163].

Sur la figure 4.13, nous avons tracé le cycle périodique observé au cours de la simulation de l'essai 23. À  $t \simeq 831$  s commence la première étape du cycle (*cf.* figure 1.2) : la pression augmente et le gaz s'accumule dans la flow-line. Un bouchon de liquide grossit au pied du riser, formé d'un côté par le liquide provenant du pipe et de l'autre par le film liquide (résultant de la dernière étape du cycle précédent) qui s'écoule le long des parois du riser. Le niveau liquide  $H_{liq}$  descend tandis que le gaz pénètre dans le riser à faible débit : le bouchon liquide contient du gaz ( $R_G \simeq 0.41$ ).

À  $t \simeq 841$  s, la hauteur liquide entame son ascension. La pression continue d'augmenter alors que les taux de vide en sortie de la flow-line et en entrée du riser varient très peu. La seconde étape de *production du bouchon de liquide* (*cf.* figure 1.3) n'existe pas car la flow-line est horizontale : l'aération du riser commence à l'instant même où  $H_{liq}$  atteint le sommet du riser. La valeur maximale de la pression au pied du riser (environ 2.86 bar) est inférieure à la pression maximale résultant d'un riser entièrement rempli de liquide :

$$P_{max} \simeq \rho_L^s g H + P_S \simeq 3.5 \text{ bar.}$$

$\rho_L^s$  est la densité du liquide à la pression  $P_S$ .

La troisième étape commence à  $t \simeq 859$  s : une grosse bulle pénètre dans le riser au moment où la hauteur liquide atteint le sommet du riser. La pression en sortie de la flow-line diminue très rapidement car elle dépend principalement de la pression hydrostatique du riser. Le liquide est évacué violemment dans le séparateur.

La quatrième étape commence lorsque la bulle atteint le sommet du riser. La pression devient minimale à  $t \simeq 868$  s et le liquide qui n'a pas été entraîné dans le séparateur par la bulle de gaz, retombe le long des parois du riser pour former à nouveau un bouchon de liquide. On est donc revenu à la première étape du cycle périodique.

#### 4.2.6 Écoulements quasi-stationnaires

Considérons maintenant d'autres simulations. Dans certains essais, la pression oscille parfois de façon plus régulière, grossièrement de façon sinusoïdale (cf. figure 4.16). En particulier dans l'essai 28 (cf. figure 4.15), le riser reste saturé ( $H_{liq} = H$ ) tandis que les autres variables oscillent indéfiniment. Ce phénomène a aussi été observé par Taitel, Y. *et al.* [163] :

*“Il a été montré dans le passé que la colonne liquide dans le riser doit être instable pour que le severe slugging apparaisse. Ainsi, lorsque le gaz commence à pénétrer dans le riser, un processus d'explosion des poches de gaz se développe rapidement. Autrement, lorsque le riser est stable, un état stationnaire s'installe.*

*En nous appuyant sur de nouveaux résultats expérimentaux, nous avons vu que ce n'est pas forcément le cas. En fait, lorsque le système est stable et que le gaz pénètre dans le riser rempli de liquide, le taux de vide dans le riser a parfois tendance à osciller. Ce processus oscillatoire peut s'atténuer et résulter en un écoulement diphasique stationnaire (comme il était supposé précédemment); mais il peut aussi continuer indéfiniment sous la forme d'un processus cyclique quasi-stationnaire. Celui-ci ressemble au severe slugging mais sans la vigueur spontanée des explosions (de poches de gaz) qui le caractérisent.”*

Dans la réalité, il est parfois difficile de distinguer ce type d'écoulement *quasi-stationnaire* d'un écoulement intermittent classique pour lequel le taux de vide dans le riser varie aussi en fonction du temps, suivant une période donnée par la fréquence des bouchons de liquide (ou des poches de gaz) qui défilent en un point fixe de la conduite [61]. Avec notre modèle, il est beaucoup plus facile de distinguer ces deux flots puisque la solution stationnaire dans le riser est d'ores et déjà un écoulement intermittent (cf. figure 2.3). La loi de glissement (1.11) ne dépend pas de la fréquence d'apparition des bouchons de liquide : le taux de vide calculé dans le riser est une approximation moyenne du taux de vide réel.

#### 4.2.7 Premières conclusions

On en déduit que le modèle est capable de reproduire de nombreux aspects du phénomène de *slugging* et ce de manière très simple puisque la plupart de nos équations et de nos lois sont des modèles simplifiés ou synthétiques. Plus précisément, nos résultats numériques semblent indiquer que l'instabilité apparaît sous la forme de petites oscillations régulières au voisinage des points de bifurcation. Autrement, ces dernières s'amplifient très rapidement pour atteindre des cycles limites de relaxation beaucoup moins réguliers.

Les périodes prédites sont très proches de la réalité lorsque l'écoulement réel oscille avec une faible amplitude. Ce qui est cohérent avec les approximations adoptées pour construire notre modèle simplifié car celles-ci ne sont valides que si l'écoulement est légèrement instable (voir section 2.5).

La longueur de la flow-line et le débit liquide imposé en entrée du pipeline semblent être des paramètres de bifurcations du phénomène (comparez les figures 4.13 et 4.14 ou 4.15 et 4.16).



Nous verrons au cours de nos comparaisons avec les essais de Fabre, J. *et al.* (voir section 4.3) que le débit de gaz est aussi un paramètre important du phénomène de *slugging*.

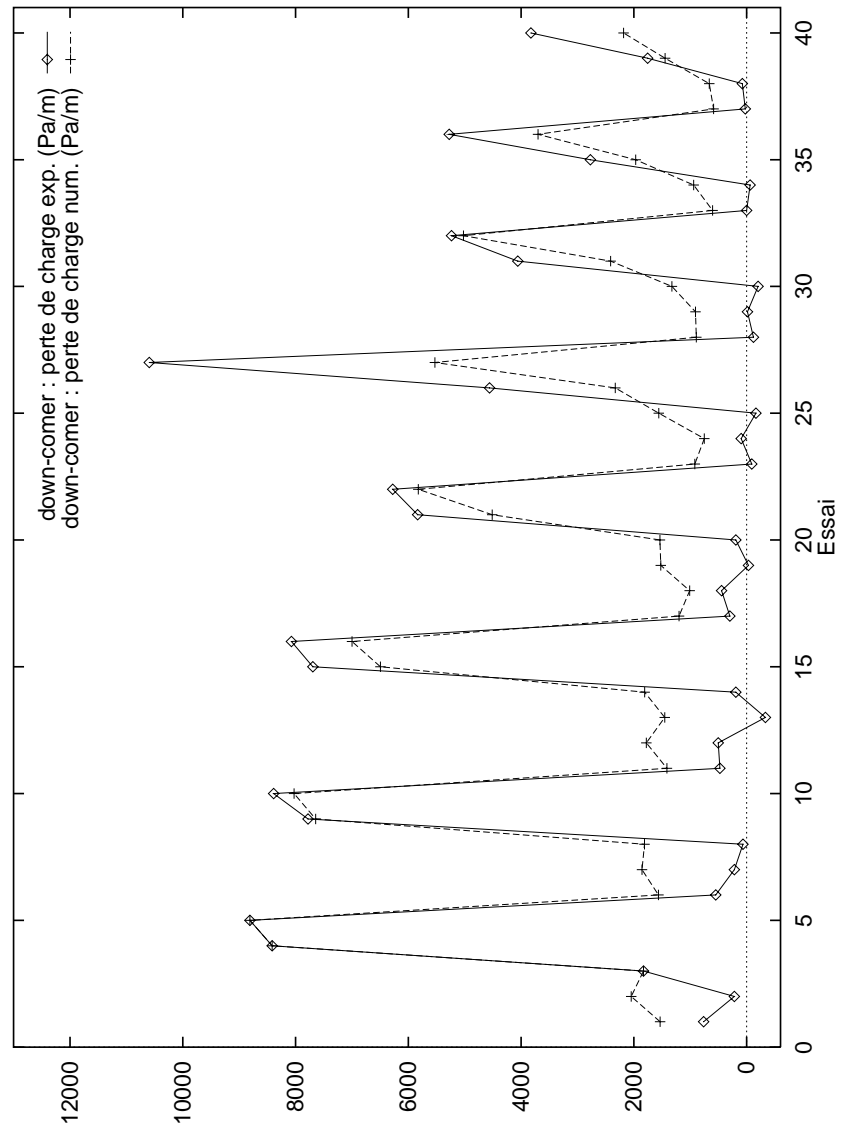


Figure 4.3 : Perte de charge moyenne dans le down-comer

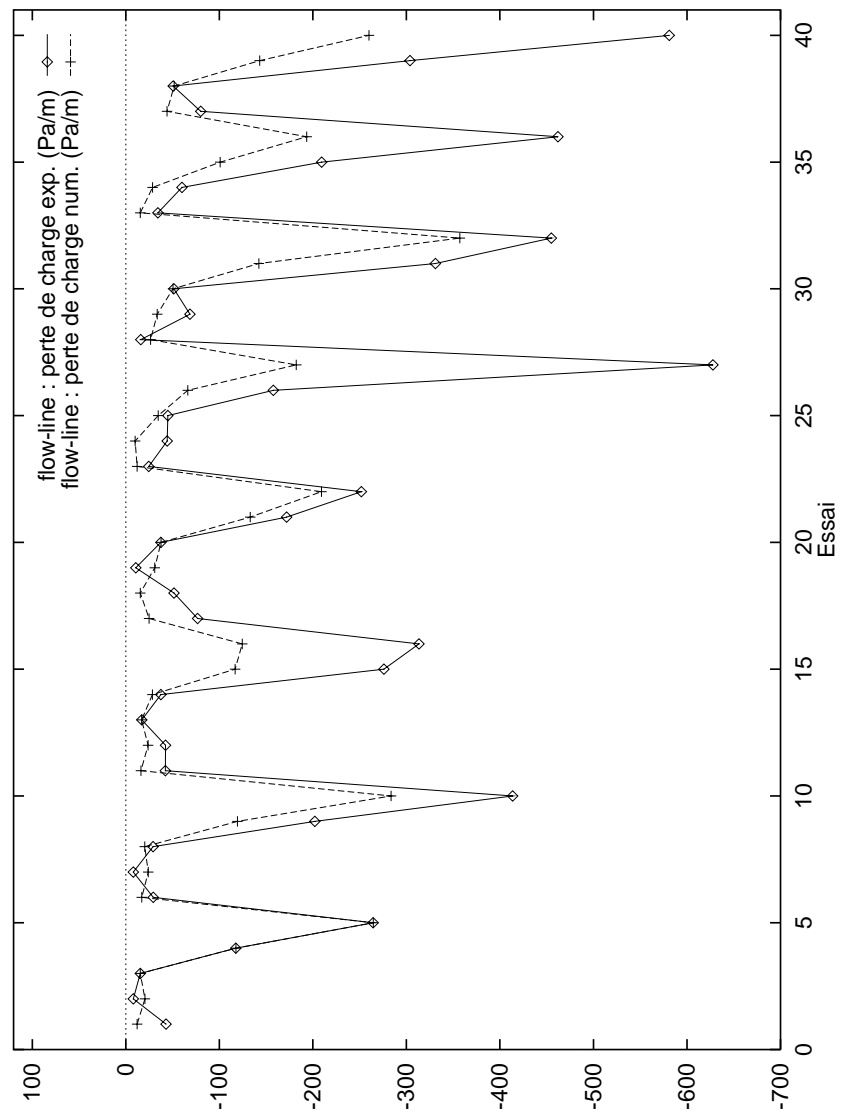


Figure 4.4 : Perte de charge moyenne dans la flow-line

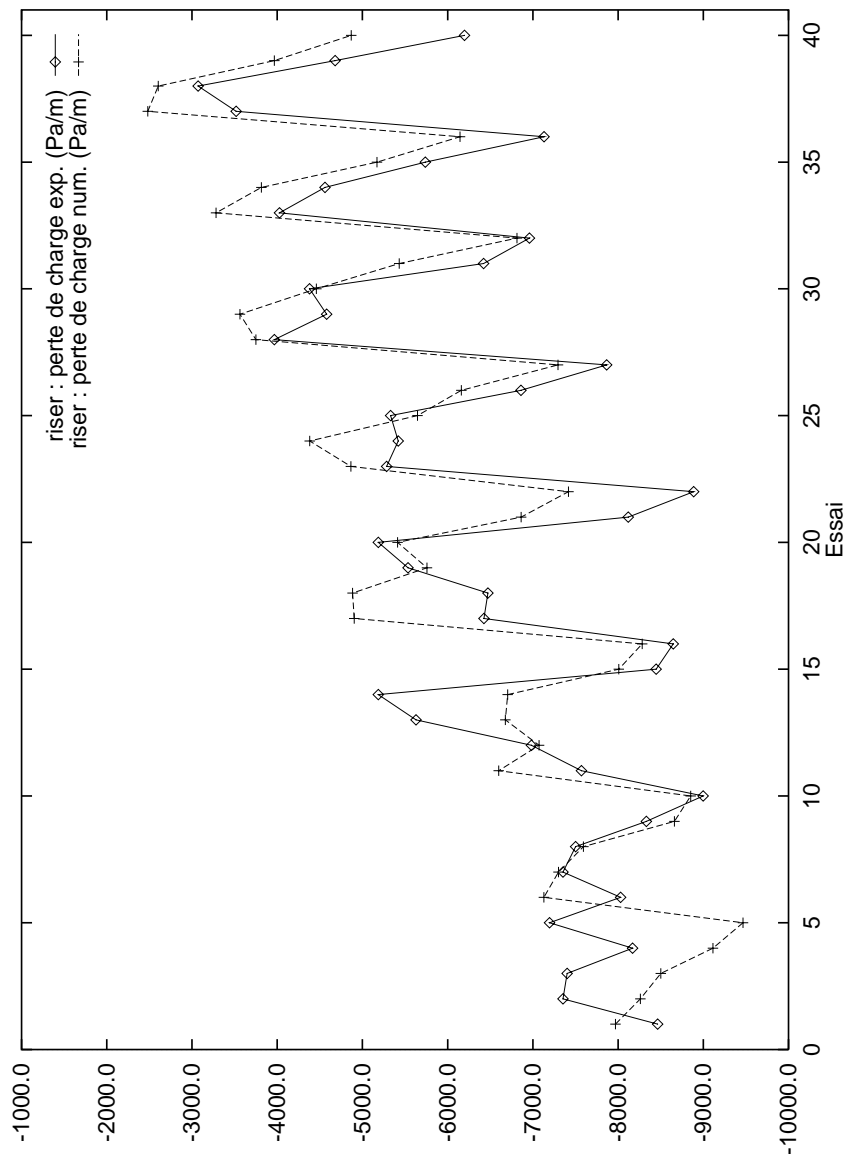


Figure 4.5 : Perte de charge moyenne dans le riser

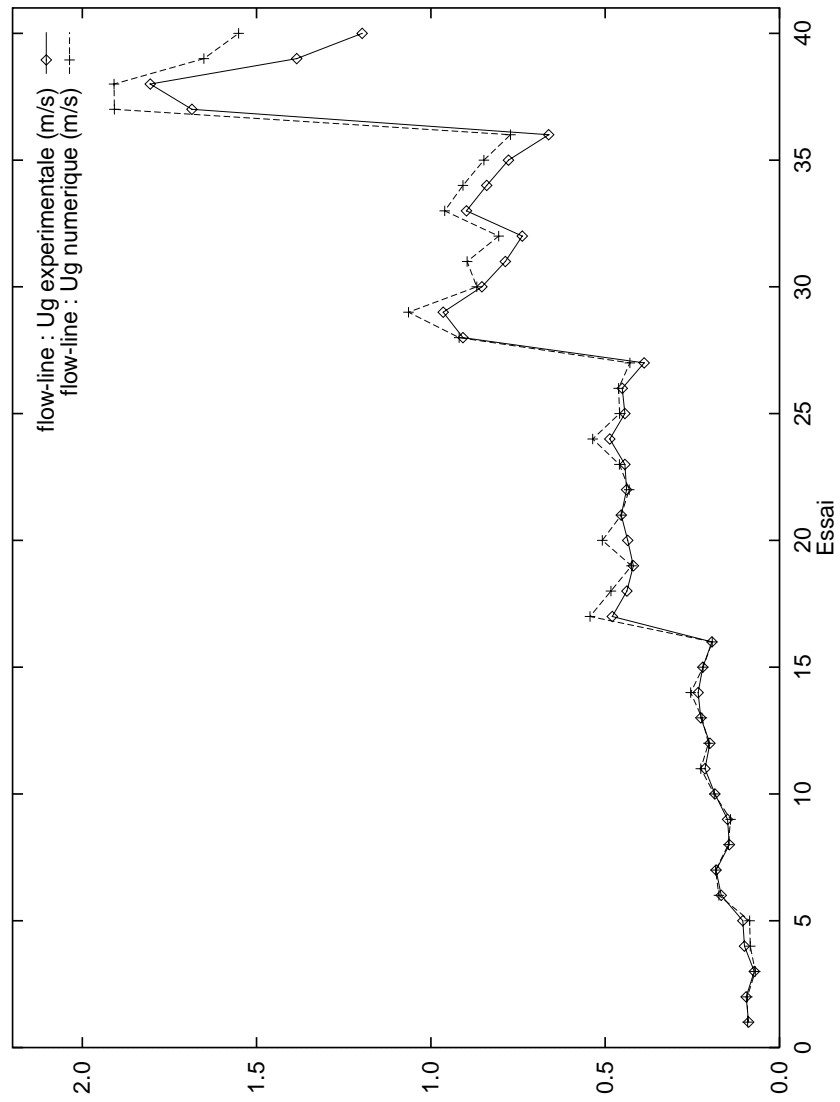


Figure 4.6 : Vitesse superficielle moyenne du gaz dans la flow-line

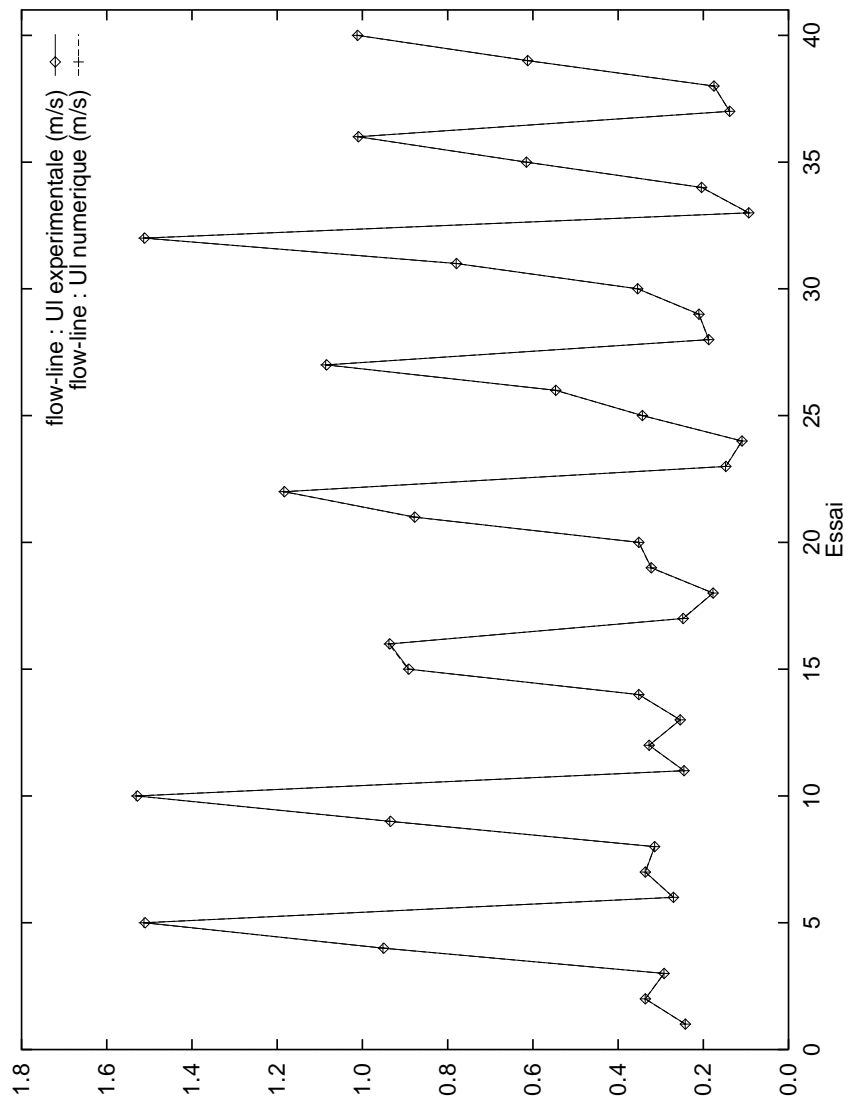


Figure 4.7 : Vitesse superficielle moyenne du liquide dans la flow-line

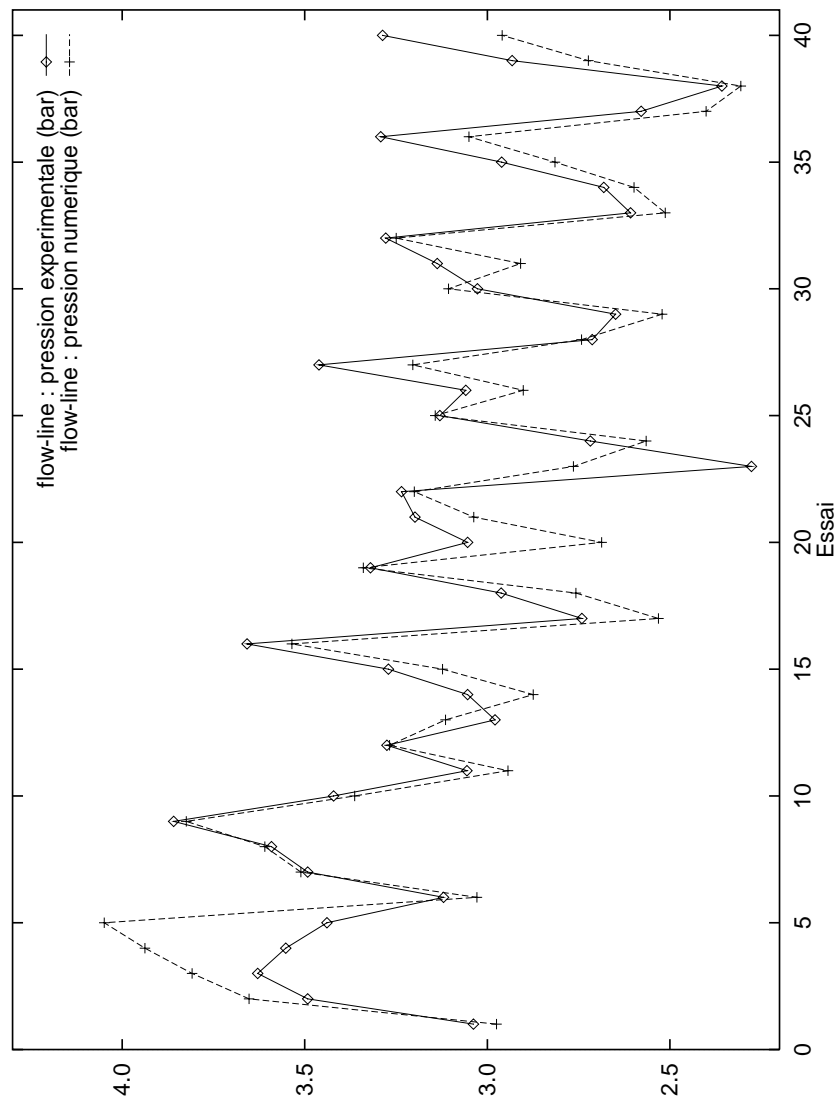


Figure 4.8 : Pression moyenne dans la flow-line

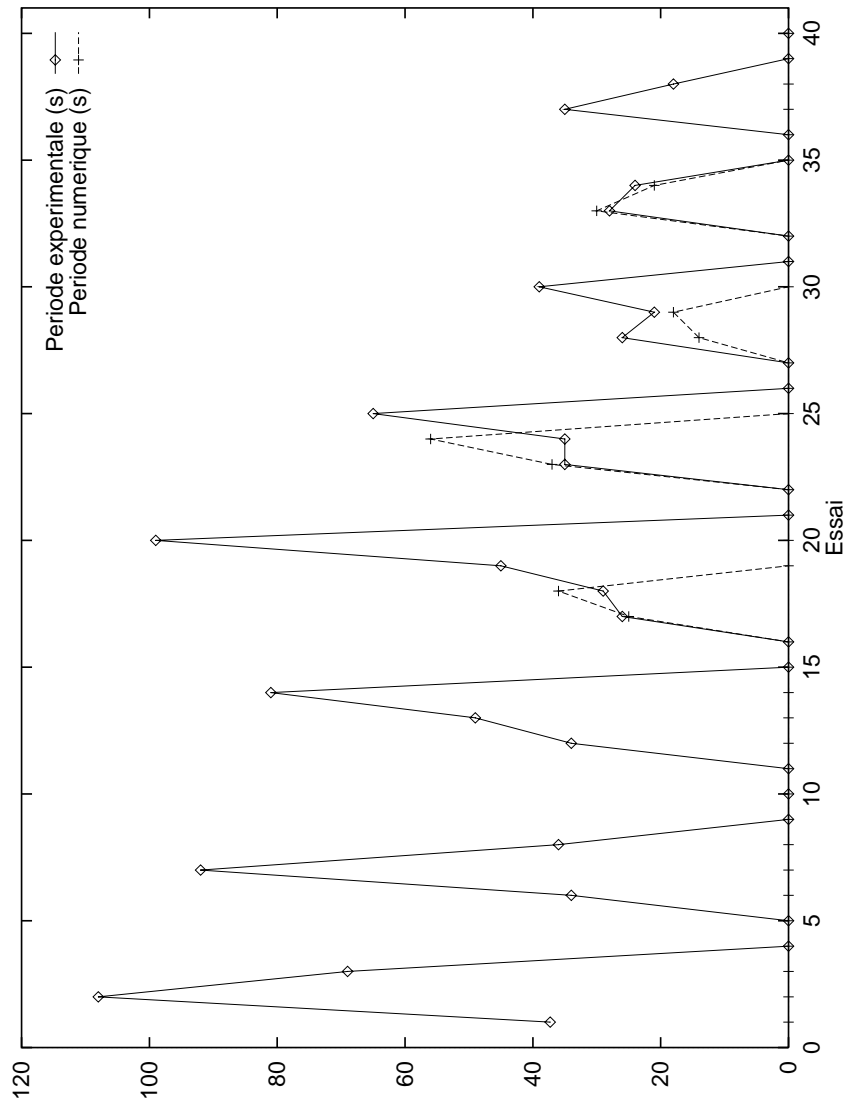


Figure 4.9 : Période des oscillations



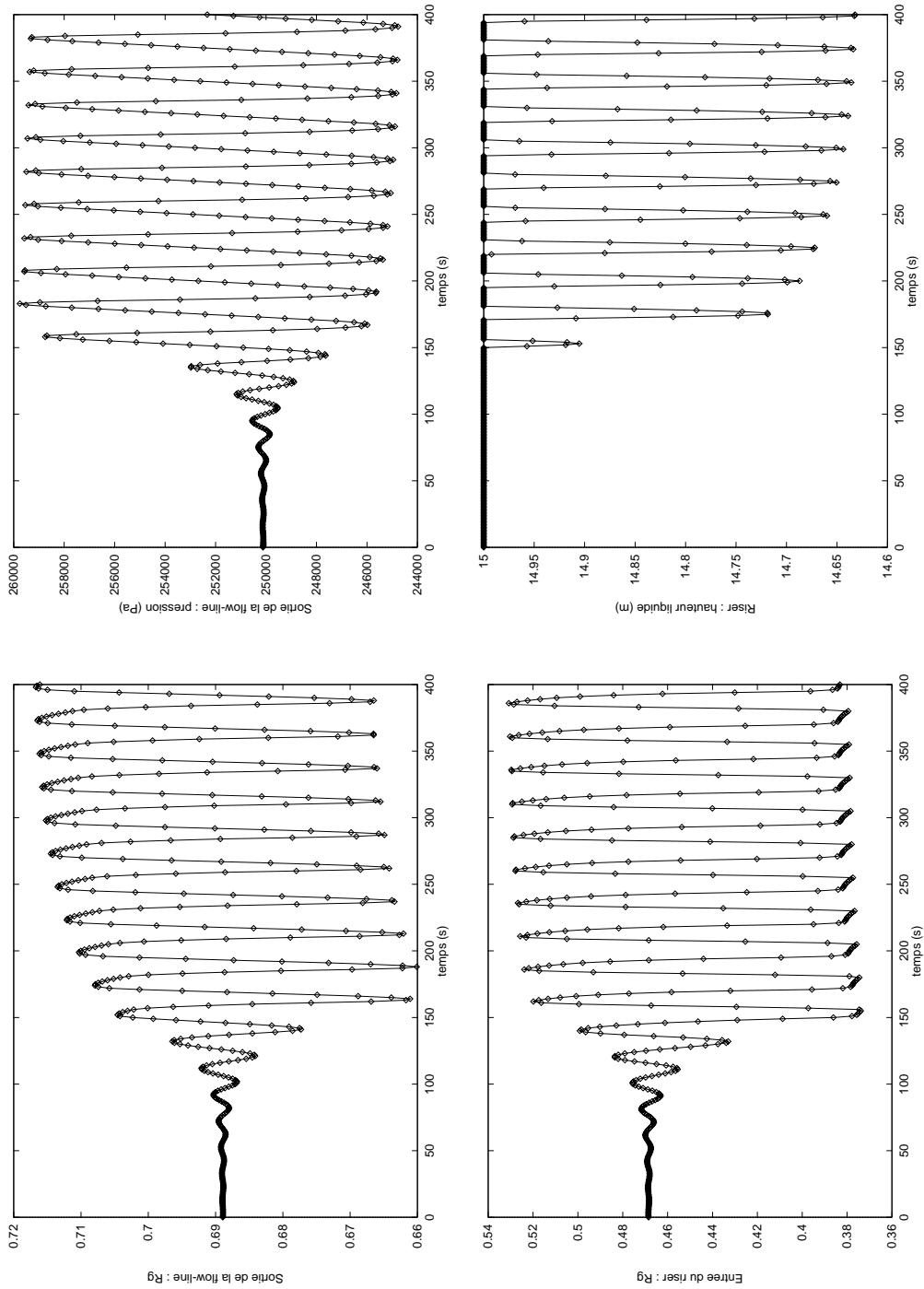


Figure 4.10 : Calcul transitoire : essai 17.

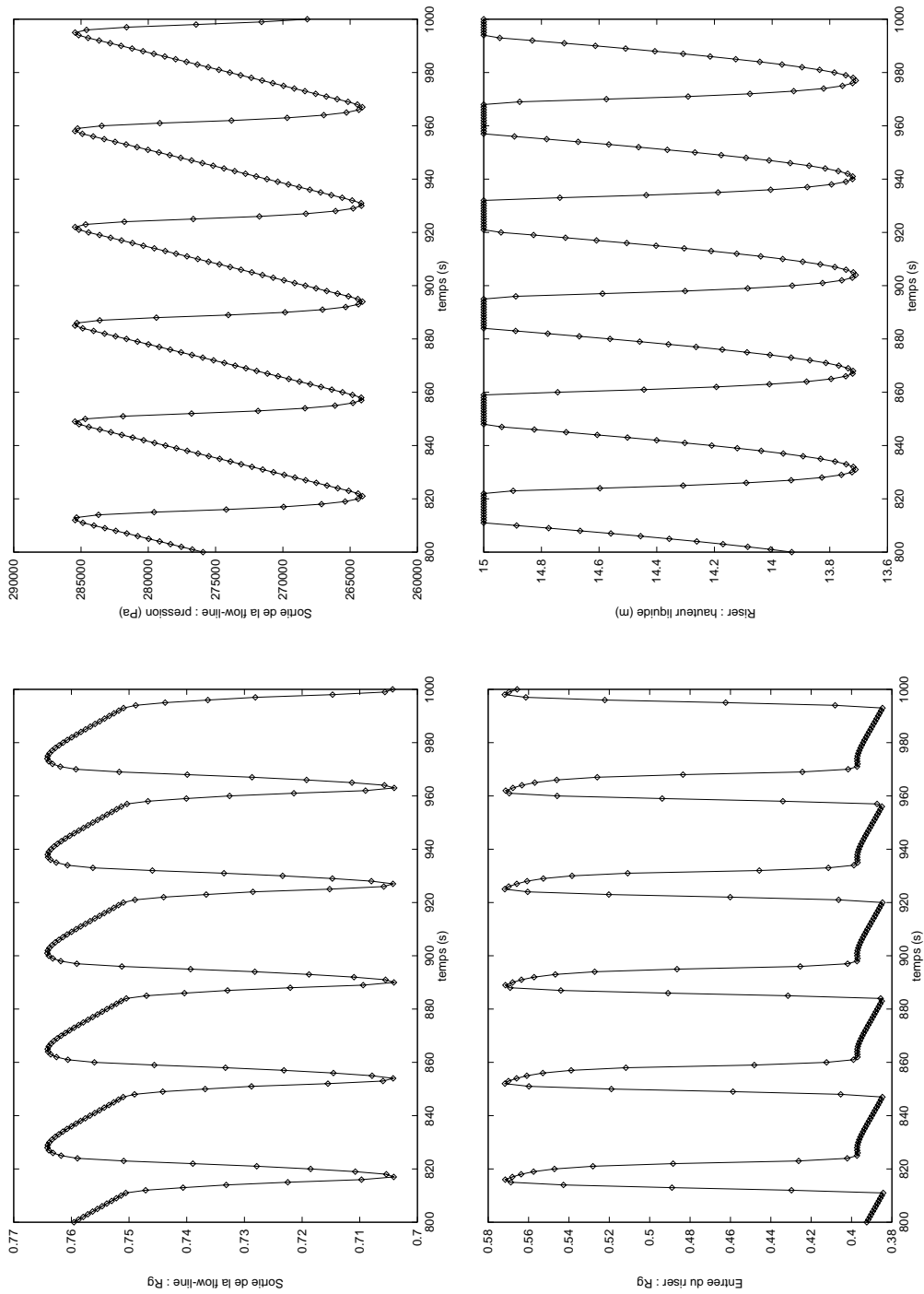


Figure 4.11 : Calcul transitoire : essai 18.

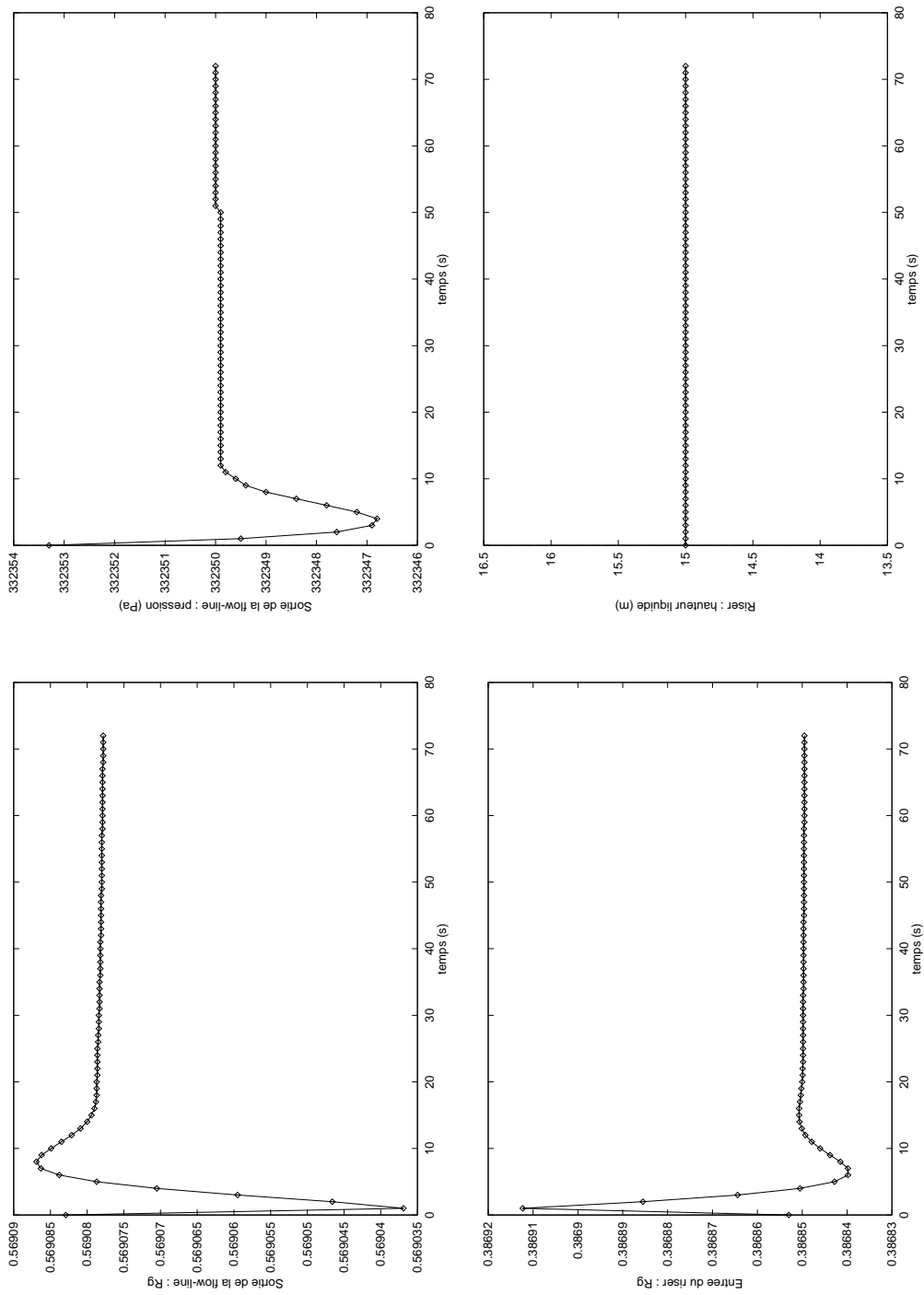


Figure 4.12 : Calcul transitoire : essai 19.

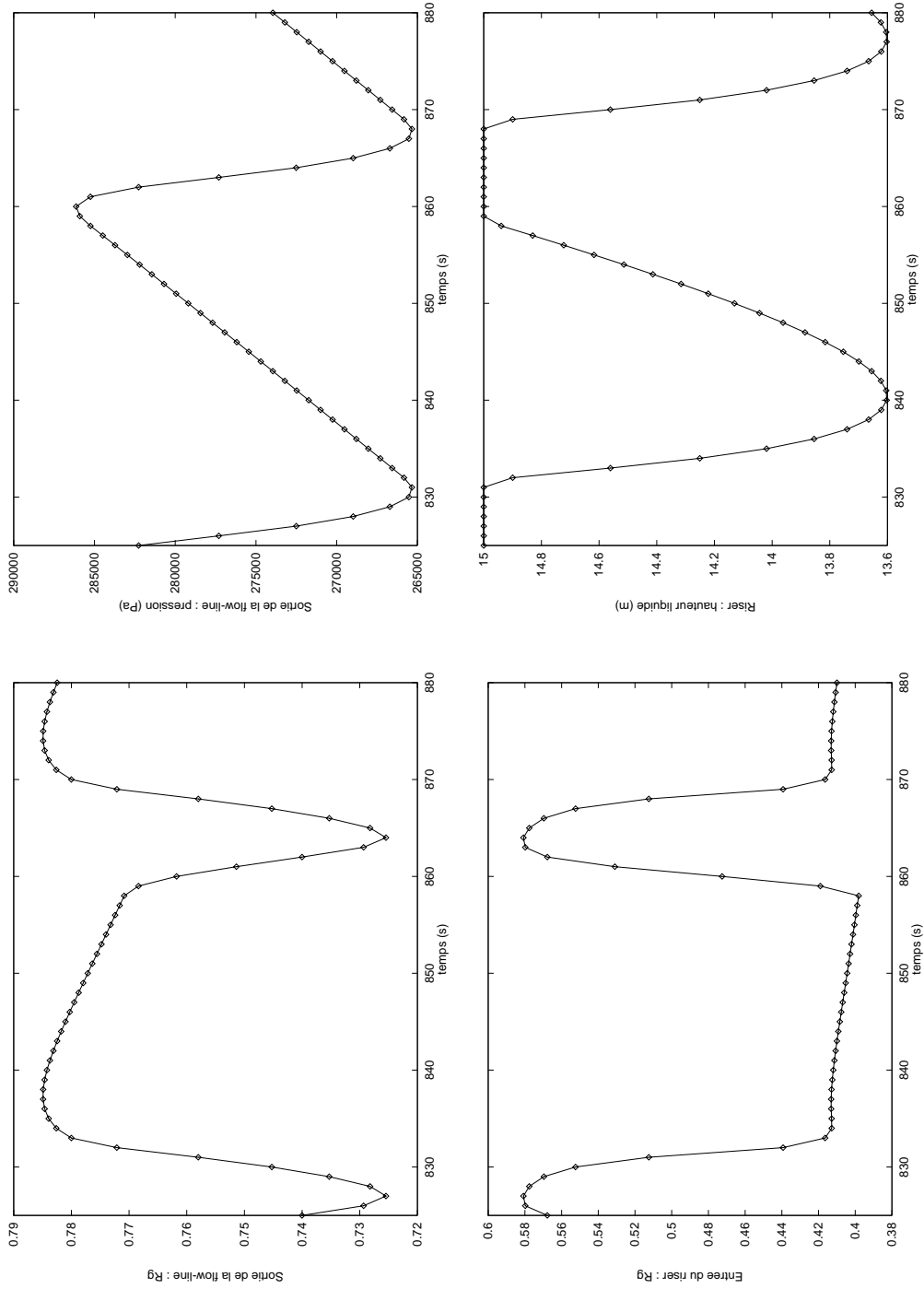


Figure 4.13 : Calcul transitoire : essai 23.

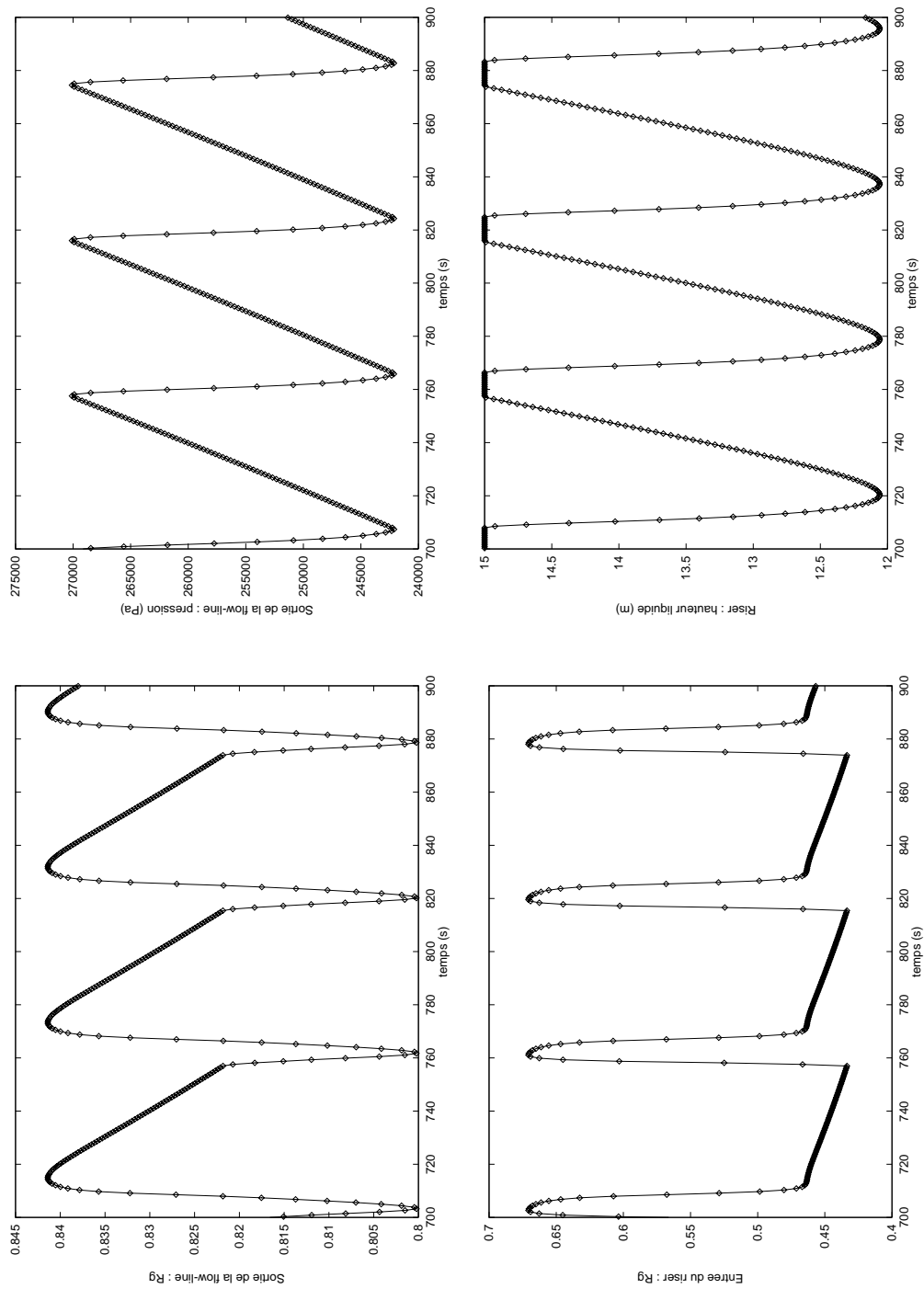


Figure 4.14 : Calcul transitoire : essai 24.

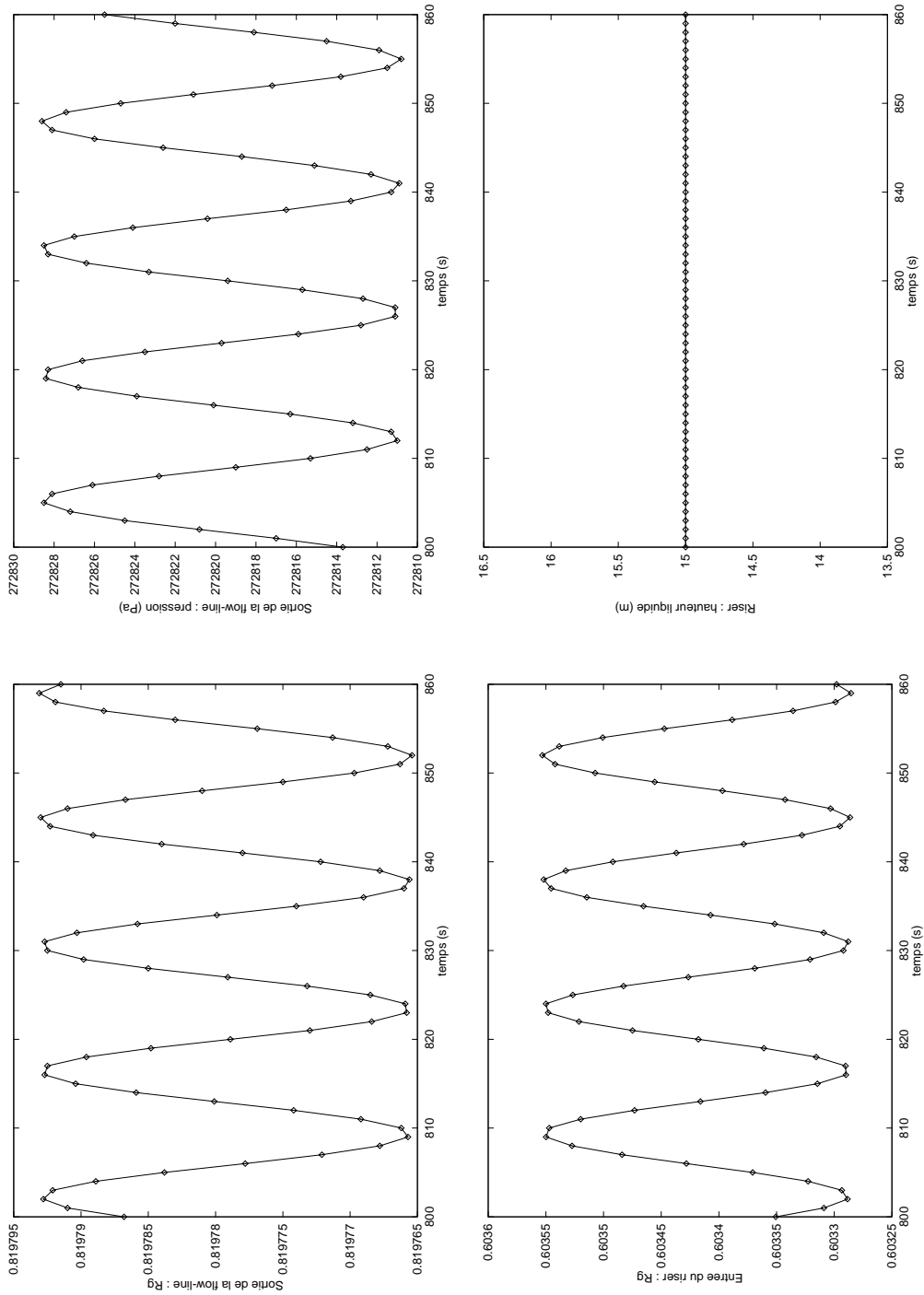


Figure 4.15 : Calcul transitoire : essai 28.

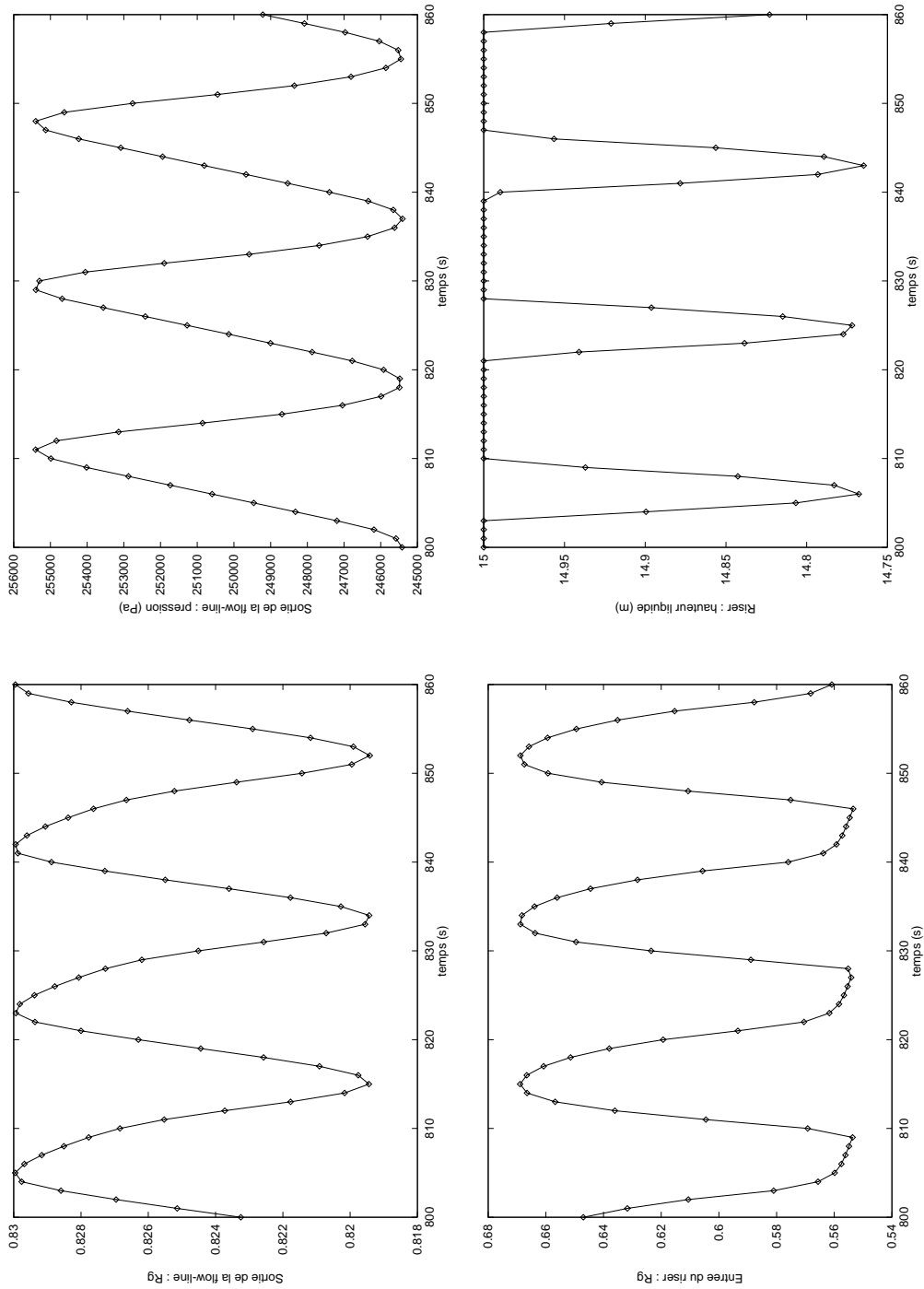


Figure 4.16 : Calcul transitoire : essai 29.

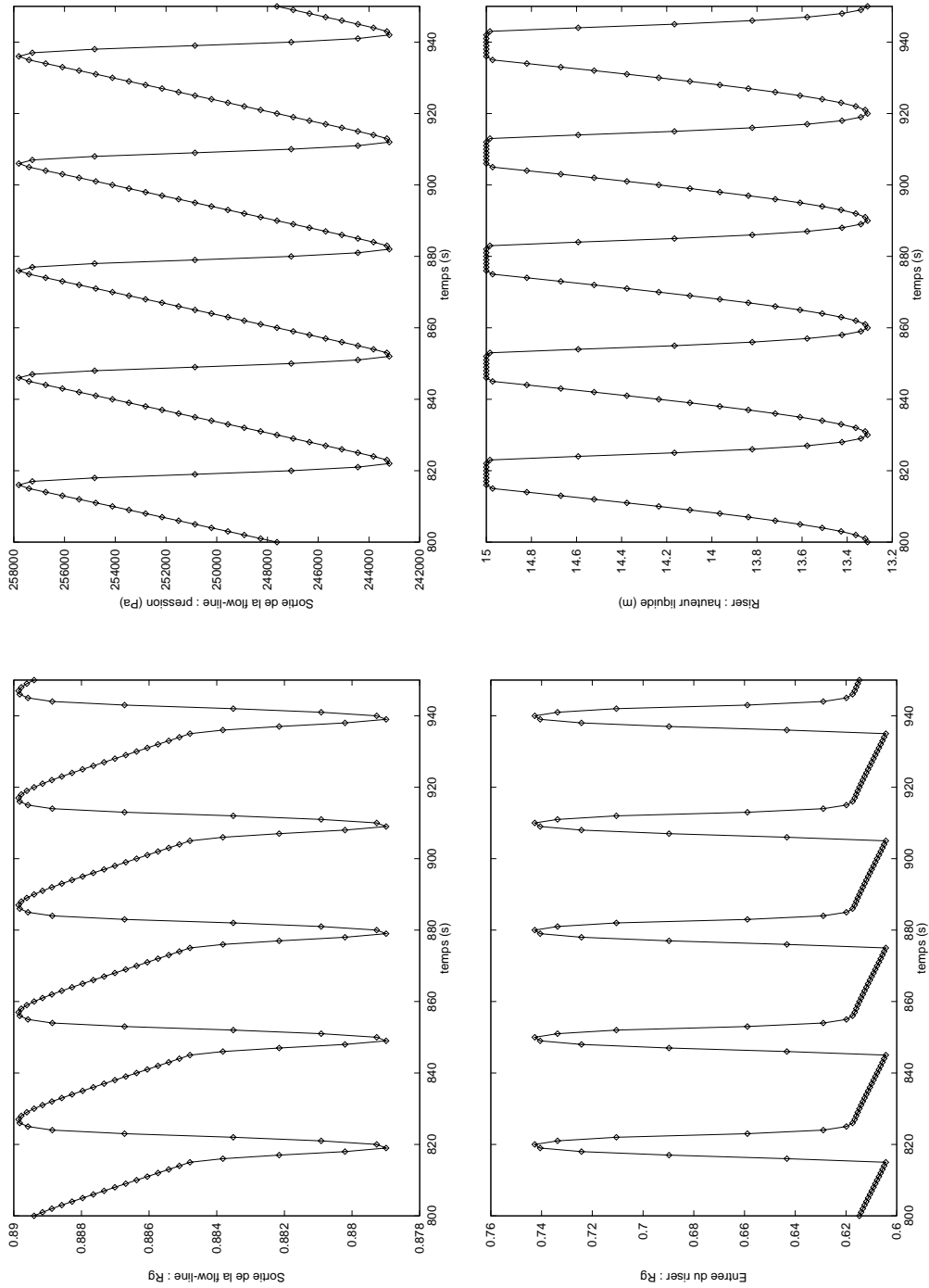


Figure 4.17 : Calcul transitoire : essai 33.



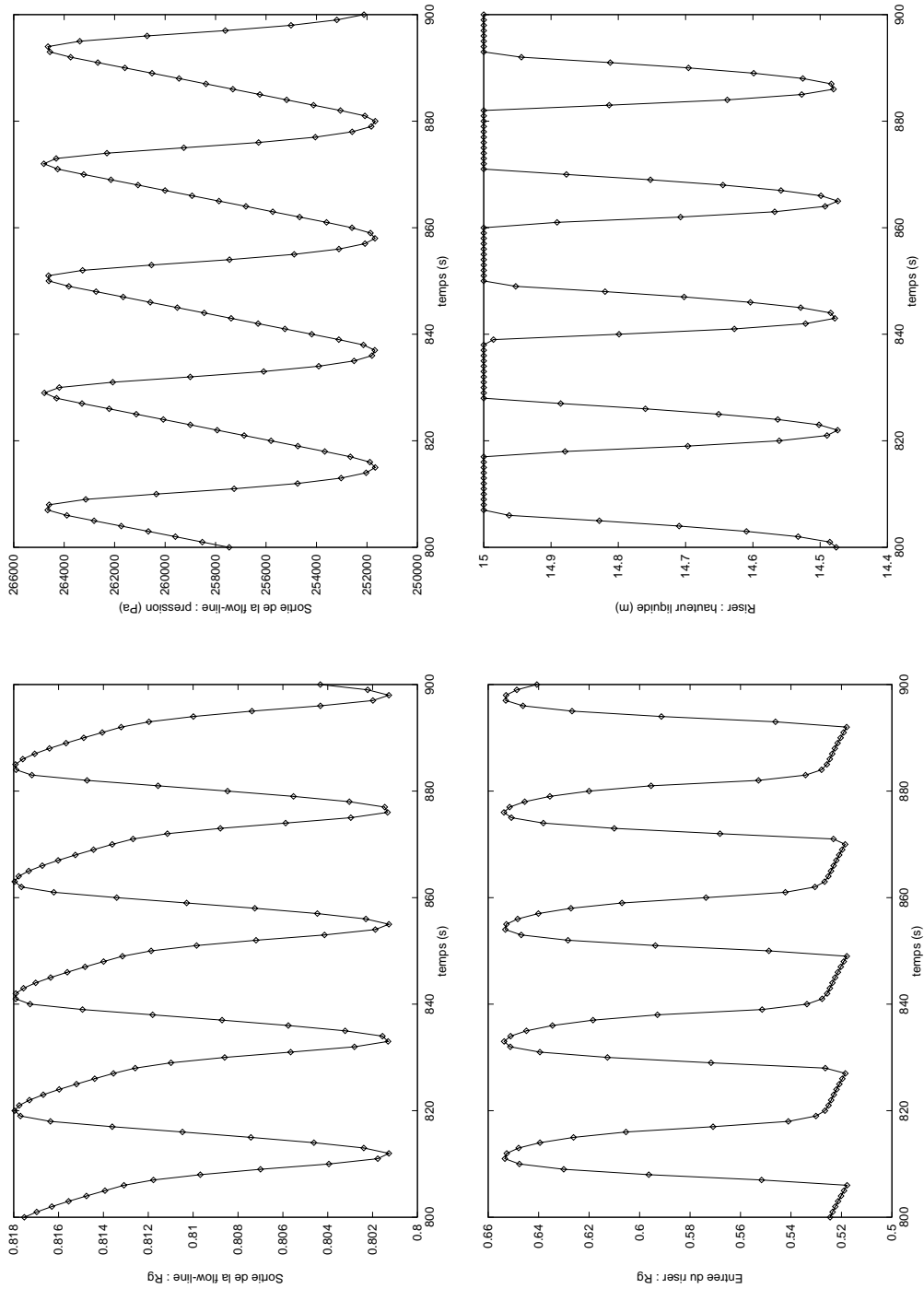


Figure 4.18 : Calcul transitoire : essai 34.

### 4.3 Comparaisons avec les expériences de Fabre

Cette section présente de nouvelles comparaisons entre notre modèle et des tests expérimentaux réalisés par Fabre, J. *et al.* sur une boucle d'essais en forme de L [59, 61].

#### 4.3.1 Dispositif expérimental

La boucle expérimentale de Fabre, J. *et al.* est construite à l'aide de pipes circulaires en polyvinyl transparent d'un diamètre constant de 0.053 m. Le mélange eau-air s'écoule le long d'un pipe horizontal ou légèrement incliné et remonte ensuite dans un riser vertical. Le pipe et le riser mesurent respectivement 25 m et 13.5 m (*cf.* figure 4.19).

À l'entrée du pipeline, les vitesses superficielles du liquide et du gaz sont maintenues constantes. En sortie du riser, le mélange diphasique est évacué dans un séparateur horizontal. Celui-ci fonctionne sous des conditions atmosphériques : sa pression interne vaut approximativement un bar. Les expériences ont lieu à température ambiante. Elle sera supposée constante ou plus précisément égale à 20° Celsius dans tous nos calculs.

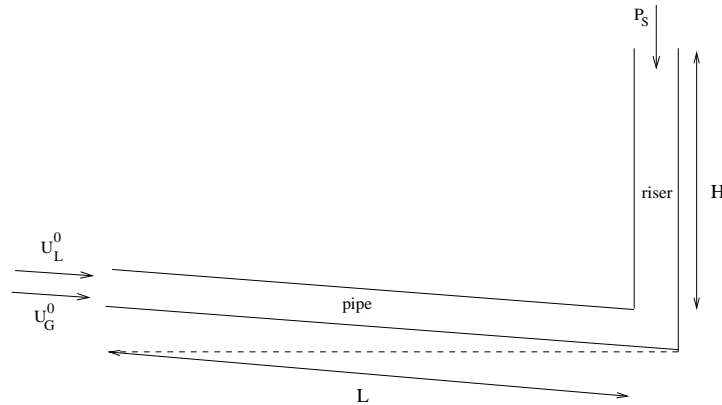


Figure 4.19 : *Système pipe-riser de Fabre J.*

#### 4.3.2 Modifications du modèle

Dans les expériences de Fabre, J. *et al.*, les conditions en entrée du pipe sont données par des vitesses superficielles constantes  $U_L^0$ ,  $U_G^0$  du liquide et du gaz :

$$(1 - R_G^0)V_L(R_G^0, P_0, U_S^0) \stackrel{\text{déf}}{=} U_L^0, \quad (4.83)$$

$$R_G^0 V_G(R_G^0, P_0, U_S^0) \stackrel{\text{déf}}{=} U_G^0. \quad (4.84)$$

Il est donc nécessaire de modifier les équations de notre modèle car les vitesses superficielles en entrée du pipe peuvent varier en fonction du temps puisque ce sont les débits massiques (et non volumiques) qui étaient imposés constants.

Tout d'abord, nous notons que la quantité  $U_S^0$  qui intervient dans les équations (2.40), (2.41), (2.45), (2.52) et (2.53) n'est plus une inconnue du modèle puisque :

$$U_S^0 = U_L^0 + U_G^0.$$

En remplaçant les deux relations (2.52) et (2.53) par une des deux équations (4.83) ou (4.84), nous avons bien autant d'équations que d'inconnues.

Si nous choisissons (4.84), notre problème consiste donc à résoudre l'ensemble des équations (2.40) - (2.51) et (4.84) par rapport aux 13 inconnues :

$$m_L^{01}, m_G^{01}, m_L^{23}, m_G^{23}, R_G^0, P_0, R_G^1, P_{12}, U_S^{12}, R_G^2, R_G^3, U_S^3, H_3. \quad (4.85)$$

### 4.3.3 Modélisation de l'écoulement intermittent

Nous conservons la corrélation (4.82) de la vitesse de dérive de l'écoulement intermittent. Nous imposerons par contre la valeur suivante du paramètre de distribution :

$$C_{int}(\theta) = 1.0 + 0.2 \sin \theta \quad (4.86)$$

qui coïncide avec les mesures de Nicklin D. *et al.* lorsque  $\theta = \pi/2$  (i.e. dans le riser) [116]. Nous verrons que cette corrélation donne de meilleurs résultats que celle formulée dans (4.81). Notons que  $C_{int}(\theta)$  est bien inférieur à un lorsque que le pipe est légèrement descendant. Plus précisément, l'angle  $\theta$  varie entre  $-0.57^\circ$  et  $0.57^\circ$  dans les expériences présentées par Fabre, J. *et al.* [61].

Contrairement aux calculs précédents de la section 4.2, nous n'imposerons pas une des lois synthétiques de glissement décrites dans la section 3.4. Dans tous les calculs qui vont suivre, le modèle prévoit un écoulement stratifié dans le pipe lorsque  $R_G$  est compris entre 0.52 et 0.76 (voir tableau 3.2). Ce qui est cohérent avec l'hypothèse couramment admise que l'écoulement dans le pipe doit être stratifié pour que du *severe slugging* apparaisse [61, 144, 154].

Pots, B. *et al.* ont cependant remarqué que des instabilités peuvent apparaître si le flot est intermittent dans le pipe [127] : des bouchons de liquide sont générés dans le riser avec une longueur inférieure à celle du riser mais supérieure à celle des bouchons d'un flot *intermittent*. Rappelons que cette longueur doit être égale ou supérieure à la hauteur du riser pour que l'on puisse parler *severe slugging* (voir section 1.1).

Dans le cas d'un système en forme de U (*cf.* figure 4.2), nous avons vu qu'il est aussi possible d'obtenir des écoulements instables en imposant un régime *intermittent* dans la flow-line (voir sections 4.2.2 et 4.2.4). Ce qui contredit l'hypothèse communément admise que les débits de gaz et de liquide doivent être faibles (lorsque le pipe d'un système pipe-riser est horizontal [127]) pour que des instabilités apparaissent car l'écoulement *intermittent* se produit uniquement pour des débits liquides élevés [12]. Nous en déduisons que le down-comer joue un rôle important dans le phénomène. Corteville, J. *et al.* remarquent justement dans leur rapport [44] :

“ *Le down-comer interviendrait (...) comme une prolongation particulière de la flow-line, ajoutant une réserve de gaz qui stocke l'énergie motrice de pression et permet donc d'amplifier la vitesse des bouchons de liquide au déclenchement de l'instabilité, sans augmenter sensiblement leur taille.* ”

### 4.3.4 Résultats numériques

Fabre, J. *et al.* présentent quelques résultats expérimentaux où la pente du pipe varie entre  $-1\%$  et  $1\%$ . Ils fournissent quelques comparaisons entre leur modèle et l'expérience lorsque le pipe est horizontal et que l'écoulement est instable. Dans deux cas parmi les trois présentés dans leur article, les calculs numériques sont très proches des mesures expérimentales.

Tableau 4.2 : Pressions moyennes en sortie du pipe :  $\theta = 1\%$ ,  $U_L^0 = 0.127$  m/s

$U_G^0$ (m/s)	$P_{exp}$ (bar)	$P_{num}$ (bar)
2.24	1.43	1.384
1.00	1.48	1.473
0.45	1.70	1.628
0.20	2.00	1.818

Sarica, C. *et al.* ont comparé leur modèle (différentiel dans le pipe et aux dérivées partielles dans le riser) par rapport aux résultats de Fabre [140]. Ils soulignent que le *severe slugging* est fortement dépendant de l'inclinaison du pipe : “ *une petite déviation par rapport à l'horizontale peut causer des changements substantiels dans les résultats* ”. Selon eux, Fabre, J. *et al.* n'auraient pas dû observer d'instabilité si le pipe avait été rigoureusement horizontal car leur modèle n'en fournit pas lorsque  $\theta$  vaut exactement zéro ; nous l'avons aussi constaté avec notre modèle. Ils observent par contre des oscillations dès que l'angle d'inclinaison du pipe devient très légèrement négatif. Il est donc étonnant que Fabre, J. *et al.* trouvent numériquement des instabilités périodiques car le modèle de Sarica n'est qu'une version améliorée du modèle de Fabre.

Pots, B. *et al.* ont une opinion similaire à celle de Sarica, C. *et al.* en ce qui concerne la dépendance du *severe slugging* par rapport à l'inclinaison du pipe [127]. Selon eux, le phénomène doit disparaître si le pipe est rigoureusement horizontal. Dans le cas contraire où la conduite n'est pas parfaitement horizontale, des instabilités peuvent se produire mais à des débits trop faibles pour avoir un intérêt pratique. Les expériences de Fabre, J. *et al.* sont justement réalisées à très faibles débits.

Pour finir, Schmidt, Z. *et al.* soulignent dans un de leurs article qu'il est impossible d'observer la production de longs bouchons de liquide (i.e. dont la longueur est supérieure à la hauteur du riser) lorsque le pipe est horizontal. Autrement dit, le *severe slugging* n'existe pas si  $\theta_p = 0$  [144]. Cependant, Fabre, J. *et al.* ont observé expérimentalement des instabilités lorsque leur pipe était horizontal. Ils soulignent que les bouchons de liquide générés par les écoulements ont une longueur inférieure à celle du riser (la poche de gaz n'est jamais entièrement bloquée par l'accumulation de liquide au pied du riser) mais supérieure à un ceux d'un flot *intermittent*. Fabre, J. *et al.* ont donc observé des transitions entre les écoulements *stables* et le *severe slugging*.

Les autres expériences concernent des pipes d'inclinaison  $1\%$  et  $-1\%$ . Dans le premier cas, tous les écoulements présentés sont stables. Notre modèle confirme ce résultat. Fabre, J. *et al.* fournissent les courbes de pression en sortie du pipe pour chaque essai. Ces dernières ne sont pas très lisses car le taux de vide oscille légèrement dans le riser, en fonction de la fréquence des bulles de gaz qui pénètrent dans la conduite. Nous présentons les valeurs mesurées  $P_{exp}$  et numériques  $P_{num}$  dans le tableau 4.2 (les pressions expérimentales sont des moyennes approximatives). On vérifie immédiatement que les pressions numériques sont proches de la réalité.

Lorsque  $\theta = -1\%$ , les auteurs constatent que les écoulements sont beaucoup plus instables que dans le cas où le pipe était (approximativement ?) horizontal. Dans chacune des expériences présentées, la vitesse liquide  $U_L^0$  est fixée à 0.127 m/s tandis que la vitesse du gaz  $U_G^0$  est progressivement diminuée. Elle vaut tout d'abord 2.24 m/s, puis 0.45 m/s et finalement 0.2

m/s. Dans le premier cas, l'écoulement est stable. Il devient instable pour les deux essais suivants avec une période expérimentale valant respectivement 65 s. et 125 s..

Notre modèle fournit effectivement un écoulement stable lorsque  $U_G^0 = 2.24$  m/s (cf. figure 4.20). La pression prédite au pied du riser (environ 1.38 bar), est très proche de la valeur expérimentale qui oscille légèrement entre 1.35 et 1.45 bar. Notons que ce résultat dépend beaucoup du paramètre de distribution  $C_{int}$  de la loi de glissement (1.11). Ainsi lorsqu'on remplace la corrélation (4.86) par (4.81), la pression prédite vaut environ 1.27 bar, ce qui est bien moins satisfaisant.

Le cas  $U_G^0 = 0.45$  m/s est instable. Il est aussi très raide car le schéma numérique diverge avant que les variables n'atteignent leur cycle limite. Ce qui est normal car notre modèle n'est pas adapté pour simuler de telles expériences : rappelons que les hypothèses admises pour sa construction supposent que les écoulements sont légèrement instables (voir section 2.5). Il est donc impossible de calculer la période de l'écoulement. Le modèle prédit néanmoins des oscillations de grandes amplitudes. Ce qui est conforme à la réalité. Notons aussi que dans cet exemple, le modèle de Sarica, C. *et al.* prédit que le liquide pénètre dans le pipe au cours de la deuxième étape du cycle de *severe slugging* (cf. figure 1.3). Leurs calculs fournissent une longueur maximale du *bouchon de liquide dans le pipe* égale à 1.093m. Ce qui confirme la raideur de cette expérience.

Le dernier essai où  $U_G^0 = 0.2$  m/s est quant à lui beaucoup trop raide pour que nous puissions le simuler : la courbe expérimentale de pression fournie par Fabre, J. *et al.* indique clairement que la seconde étape de *production du bouchon de liquide* existe (cf. figure 1.3) car la pression maximale résultant d'un riser entièrement rempli de liquide est atteinte durant plusieurs secondes.

#### 4.3.5 Analyse des résultats

Bien que notre schéma numérique soit incapable de simuler le dernier essai de Fabre, nos calculs indiquent clairement que l'écoulement devient beaucoup plus instable lorsque  $U_G^0$  décroît. Il semble donc qu'il existe une valeur critique  $(U_G^0)_{crit}$  pour laquelle l'écoulement est stable lorsque  $U_G^0 > (U_G^0)_{crit}$  et instable si  $U_G^0 < (U_G^0)_{crit}$ . Les essais de Fabre, J. *et al.* ne fournissent malheureusement pas d'exemple où  $U_G^0$  est proche de  $(U_G^0)_{crit}$ .

Lorsque le *severe slugging* est très prononcé, nous venons de voir que le calcul complet de la solution transitoire (i.e. du point de départ jusqu'au cycle limite de relaxation) est parfois impossible car le schéma numérique ne converge pas. Nous aurions pu éventuellement résoudre ce problème en remplaçant la méthode de Newton par une résolution plus sophistiquée; nous pensons en particulier aux méthodes du type *line searches* [54]. Mais il faut garder à l'esprit que notre modèle s'appuie sur des simplifications qui n'ont de sens que lorsque les phénomènes transitoires sont suffisamment lents (voir section 1.2.3).

Dans le même sens, Sarica, C. et Shoham, O. soulignent dans leur article que les termes de gravité dans l'équation de conservation (1.3) ne sont plus forcément dominants lorsque le *severe slugging* est très prononcé car les forces dynamiques telle que l'accélération peuvent être importantes [140]. Ce qui pourrait expliquer nos problèmes de résolution numérique ainsi que ceux rencontrés par Taitel, Y. *et al.* avec leur modèle : "*le débit de gaz augmente indéfiniment (dans le cas d'un severe slugging important) lorsque la discrétisation spatiale du riser est raffinée*" [163].

Taitel, Y. *et al.* ont publié de nombreuses cartes où sont reportés des écoulements légèrement instables (voir section 4.2.6) dans l'espace des paramètres  $(U_G^0, U_L^0)$  [96, 163, 173]. Puisque

ces flots représentent une transition entre des écoulements stables et instables du type *severe slugging*, il est donc probable que  $U_G^0$  et  $U_L^0$  soient proches de leurs valeurs critiques pour certaines des expériences décrites.

Le dispositif expérimental de Taitel, Y. *et al.* est un peu différent de celui de Fabre, J. *et al.* car un pipe supplémentaire (simulé par réservoir) est placé en amont du système pipe-riser afin d'augmenter le volume de gaz contenu dans le pipe. Il est donc nécessaire de modifier nos équations pour en tenir compte. C'est ce que nous ferons dans le chapitre suivant (voir section 5.2.6) où nous présentons un modèle simplifié pour lequel il est facile d'intégrer cette particularité de la boucle de Taitel.

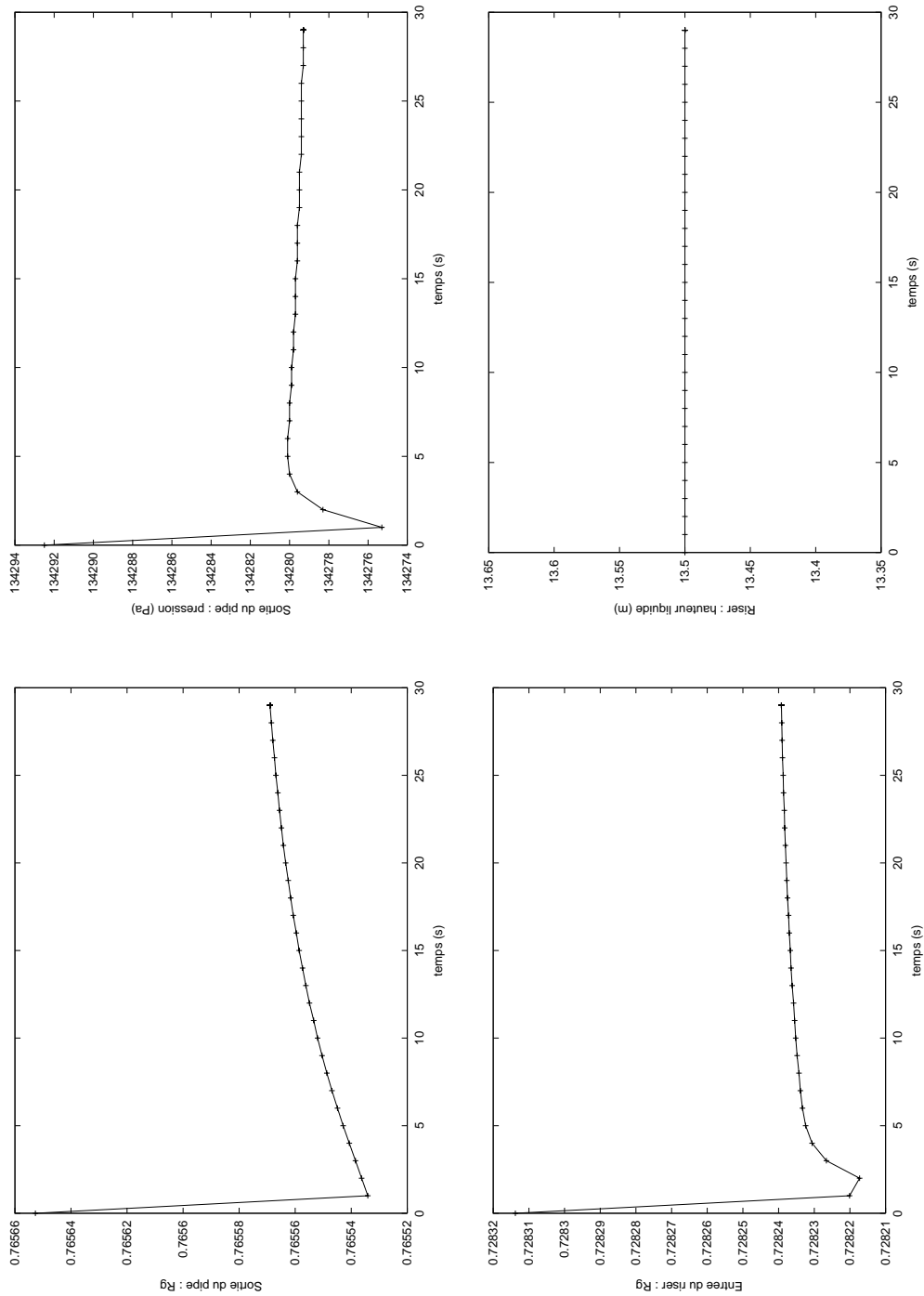


Figure 4.20 : *Expérience de Fabre* :  $U_L^0 = 0.127 m.s^{-1}$ ,  $U_G^0 = 2.24 m.s^{-1}$ ,  $\theta = -0.57294^\circ$ .

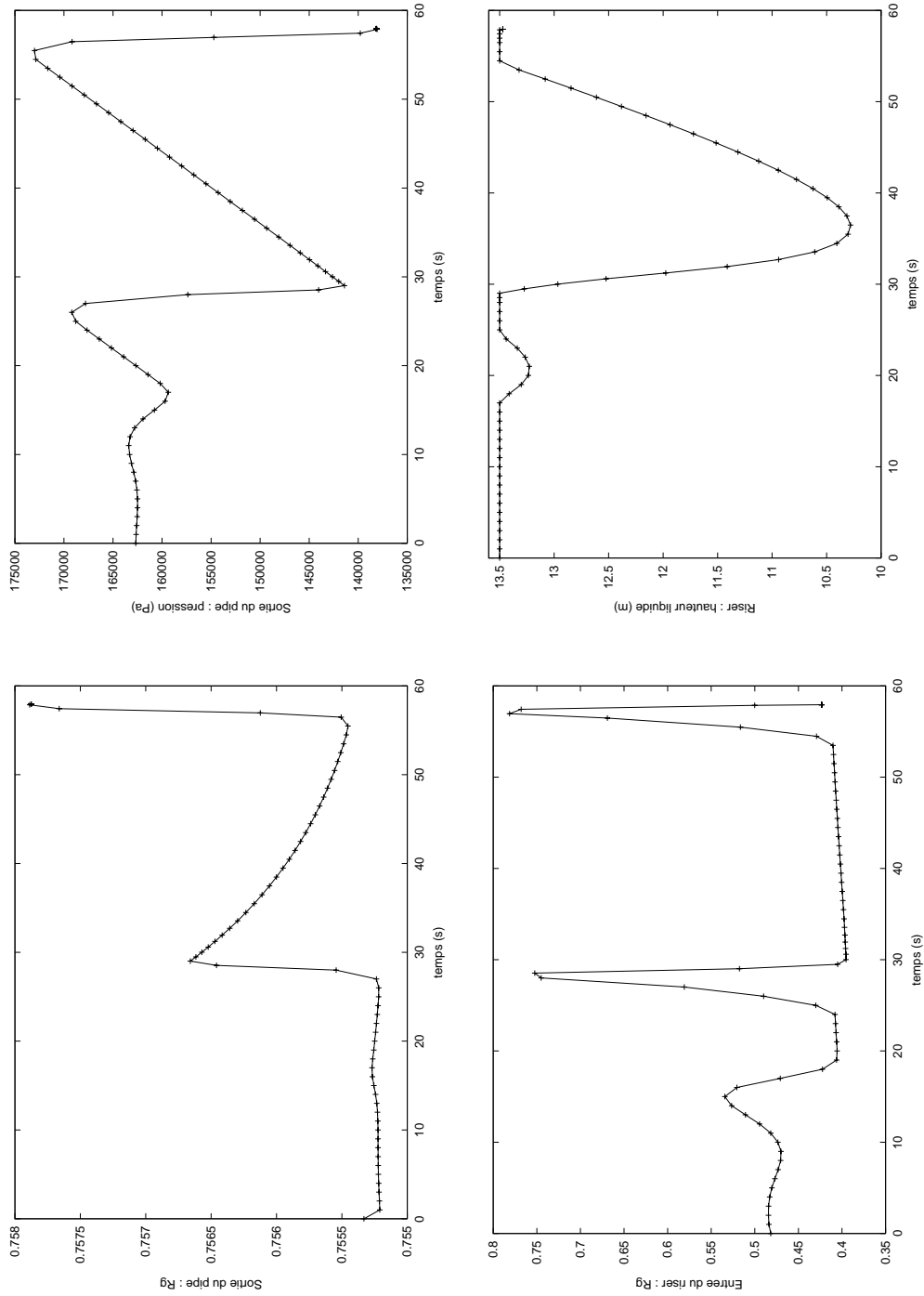


Figure 4.21 : *Expérience de Fabre* :  $U_L^0 = 0.127m.s^{-1}$ ,  $U_G^0 = 0.45m.s^{-1}$ ,  $\theta = -0.57294^\circ$ .





## Chapitre 5

# Analyse mathématique

Ce chapitre présente une analyse mathématique d'un modèle simplifié des écoulements gaz-liquide transitoires dans les conduites pétrolières du type pipeline-riser. Ce dernier s'inspire des équations décrites dans les chapitres 2 et 3.

Une analyse linéaire de ce modèle fournit l'expression analytique de la frontière séparant les écoulements stables (ou permanents) des écoulements instables (*severe slugging*, *quasi-stationnaires*, etc.) dans l'espace des paramètres physiques. La formule algébrique de cette frontière constitue un nouveau critère de prédiction des instabilités des écoulements diphasiques dans les systèmes pipeline-riser. Nous le comparerons avec ceux de la littérature, sur des cartes d'écoulements expérimentales.

Un calcul de bifurcation est ensuite présenté. Il débouche sur l'expression analytique des courbes de bifurcation du modèle, au voisinage des valeurs critiques des paramètres. Ces courbes représentent l'amplitude maximale des oscillations de chaque variable d'un écoulement instable en fonction d'un paramètre du problème. Elles sont calculées de manière symbolique, grâce au logiciel *Maple*; nous démontrerons sur quelques exemples que la bifurcation à l'origine du *severe slugging* est du type *Hopf*.

### 5.1 Introduction

Les critères de prédiction du *severe slugging* disponibles dans la littérature suggèrent l'existence de valeurs critiques des paramètres : lorsque l'un d'eux est inférieur (respectivement supérieur) à une certaine valeur critique, les autres paramètres étant fixés, l'écoulement est stable (resp. instable) ou vice - versa. Ce sont les points de bifurcation du problème [77, 103].

Au voisinage de ces points, la forme de l'écoulement est voisine de celle d'un écoulement stationnaire comme celui représenté sur la figure 5.1 [163]. La colonne liquide dans le riser est stable mais des quantités telles que la pression ou le taux de vide au pied du riser ont tendance à osciller de manière significative. Ces oscillations peuvent s'atténuer avec le temps et résulter en un écoulement stationnaire où les débits massiques de gaz et de liquide sont constants le long de la conduite. Dans le cas contraire, ces fluctuations peuvent se propager indéfiniment sous la forme d'un processus cyclique *quasi-stationnaire* dont l'amplitude est nettement supérieure à celle d'un flot *intermittent* normal (voir section 4.2.6).

Pour que du *severe slugging* se produise, il est nécessaire que les débits liquides et gazeux en entrée de la conduite soient faibles [163]. Ce qui correspond à un écoulement *stratifié* dans le pipe [12]. Plusieurs auteurs ont admis cette hypothèse [61, 144, 154]. En particulier, Schmidt, Z.

*et al.* soulignent que si l'écoulement est *intermittent*, les bouchons de liquide générés dans le pipe sont presque identiques lorsqu'ils traversent le riser. Il en résulte un écoulement stationnaire.

Pots, B. *et al.* ont cependant remarqué que des instabilités peuvent se produire lorsque le flot est *intermittent* dans le pipe [127] : des bouchons de liquide sont générés dans le riser avec une longueur inférieure à celle du riser mais supérieure à celle des bouchons d'un flot *intermittent* normal. Le débat reste ouvert. Nous admettrons en ce qui nous concerne, que le flot dans le pipe doit être *stratifié* au voisinage des points de bifurcation. Nous verrons plus loin que ce choix donne de très bons résultats.

À faibles débits liquides et gazeux, le flot dans le riser est nécessairement *intermittent* ou *dispersé* (voir sections 1.7.2). Rappelons que l'*annulaire* ne se produit que pour des débits de gaz très élevés. Nous imposerons donc une loi de glissement du type *intermittent* ou *dispersé* dans notre modèle de riser.

Moyennant ces hypothèses, nous allons dans un premier temps, construire un modèle simplifié où les vitesses superficielles (ou débits volumiques) du gaz et du liquide sont imposées en entrée du pipe. Nous verrons ensuite le cas où les débits massiques du gaz et du liquide sont fixés en entrée du pipe.

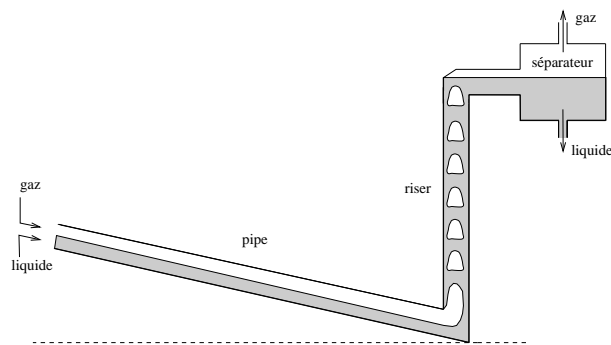


Figure 5.1 : Écoulement stationnaire avec intermittence dans le riser.

## 5.2 Modèle simplifié pour une analyse locale

Fabre, J. *et al.* ont proposé une modélisation extrêmement simple de l'écoulement *stratifié* dans un pipe [61]. C'est elle que Sarica, C. & Shoham, O. ont choisie pour simuler le *severe slugging* lorsque celui-ci n'est pas trop prononcé (i.e. lorsque la poche de gaz n'est jamais complètement bloquée par un bouchon de liquide au pied du riser) [140]. C'est aussi cette approche simplifiée que nous adopterons.

*Remarque* : cette modélisation de Fabre, J. *et al.* est fautive si l'écoulement n'est pas *stratifié* mais elle a l'avantage d'être bien plus simple que celle que nous avons présentée dans la section 2.5. Nous verrons plus loin qu'elle simplifie énormément l'analyse mathématique de notre modèle.

En ce qui concerne le riser, la validité des équations décrites dans la section 2.5 est discutable lorsque le *severe slugging* est très accentué car l'approximation des variables  $m_L$  et  $m_G$  dans les

formules (2.38) - (2.39) n'a pas beaucoup de sens au cours de la troisième étape du *severe slugging* (cf. figure 1.4). Nous pourrions résoudre ce problème en considérant un système algébro-différentiel spécifique à chaque étape du *severe slugging* [143, 144]. Ou bien, considérer un ensemble d'équations (de conservation) aux dérivées partielles [61, 140]. Dans les deux cas, une analyse de stabilité des écoulements stationnaires du problème est extrêmement difficile à réaliser.

Cependant, nous avons vu dans les sections 4.2 et 4.3 que les équations décrites dans la section 2.5 conviennent parfaitement pour simuler des écoulements instables de faible amplitude dont, en particulier, les écoulements *quasi-stationnaires*. Ceux-ci représentent une transition entre les écoulements stationnaires (voir figure 5.1) et ceux du type *severe slugging* (voir section 1.1). Nous les observons lorsque les paramètres physiques sont proches de leurs valeurs critiques. Leur configuration est proche de celle d'un flot stationnaire mais leurs oscillations ont des amplitudes beaucoup plus importantes : dans la pratique, les variables d'un écoulement stationnaire oscillent de manière aléatoire autour d'une valeur constante, suivant un *bruit* qui dépend de la variation du taux de vide (ou du passage des bulles) dans la conduite. Dans le cas *quasi-stationnaire*, ces oscillations sont réellement périodiques.

L'instabilité à l'origine du *severe slugging* est donc hydrodynamique. Son apparition est difficile à détecter dans la réalité car les configurations des flots stationnaires et *quasi-stationnaires* se ressemblent. Par contre, en ce qui concerne les modèles décrits dans la section 2.5 ou dans ce chapitre, cette détection est immédiate car les variables d'un écoulement stationnaire sont constantes tandis que celles d'un flot *quasi-stationnaire* oscillent de manière périodique : le bruit mesuré expérimentalement est éliminé par les simplifications de notre modélisation.

En adoptant par simplicité, les équations décrites dans la section 2.5, nous admettons que notre modèle ne sera valide qu'au voisinage des points de bifurcation du problème où l'écoulement est *stratifié* dans le pipe et *intermittent* ou *dispersé* dans le riser. Ce qui suffira pour effectuer une analyse de stabilité des écoulements stationnaires et en déduire l'expression analytique de la frontière du *severe slugging* ou encore l'amplitude maximale des oscillations en fonction des paramètres physiques du problème, localement autour des points de bifurcation. Nous remplirons ainsi les deux premiers objectifs énoncés dans la section 2.1.

### 5.2.1 Modélisation de l'écoulement stratifié dans le pipe

Rappelons les équations de notre modèle de pipe (voir section 2.5) lorsque les vitesses superficielles du gaz et du liquide sont imposées constantes en entrée de la conduite (voir section 4.3.2) :

$$\frac{dm_L^{01}}{dt} = \rho_L(P_0)(1 - R_G^0)V_L(R_G^0, P_0, U_S^0) - \rho_L(P_{12})(1 - R_G^1)V_L(R_G^1, P_{12}, U_S^{12}), \quad (5.1)$$

$$\frac{dm_G^{01}}{dt} = \rho_G(P_0)R_G^0V_G(R_G^0, P_0, U_S^0) - \rho_G(P_{12})R_G^1V_G(R_G^1, P_{12}, U_S^{12}), \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} 0 &= P_{12} - P_0 + \frac{1}{2}L \left[ F_p(R_G^0, P_0, U_S^0) + F_p(R_G^1, P_{12}, U_S^{12}) \right] \\ &+ g \sin(\theta_p)(m_L^{01} + m_G^{01}), \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$0 = m_L^{01} - \frac{1}{2}L \left[ \rho_L(P_0)(1 - R_G^0) + \rho_L(P_{12})(1 - R_G^1) \right], \quad (5.4)$$

$$0 = m_G^{01} - \frac{1}{2}L \left[ \rho_G(P_0)R_G^0 + \rho_G(P_{12})R_G^1 \right], \quad (5.5)$$

$$0 = (1 - R_G^0)V_L(R_G^0, P_0, U_S^0) - U_L^0. \quad (5.6)$$

Sans être trop approximatif, nous supposons dans toute la suite que la phase liquide est incompressible :

$$\rho_L(P) = \rho_L^0. \quad (5.7)$$

En tenant compte de (5.6), l'équation différentielle (5.1) s'écrit :

$$\frac{dm_L^{01}}{dt} = \rho_L^0(U_L^0 - U_L^1) \quad (5.8)$$

où nous avons posé :

$$U_L^1 = (1 - R_G^1)V_L(R_G^1, P_{12}, U_S^{12}).$$

L'écoulement étant *stratifié* dans le pipe, nous pouvons supposer sans trop exagérer que le taux de vide ne varie pas le long du pipe. Cette approximation a un sens tant que le bouchon de liquide au pied du riser ne remonte pas dans le pipe (*cf.* figure 1.3). C'est vrai en particulier si l'écoulement est stationnaire ou *quasi-stationnaire* (*cf.* figure 5.1). De la même manière que Fabre, J. *et al.* [61], Sarica, C. & Shoham, O. [140], Schmidt, Z. *et al.* [143] ou encore Taitel, Y. *et al.* [154, 163], nous admettons que le taux de vide dans le pipe est constant et ne dépend que des paramètres du problème tels que les débits imposés en entrée du pipe, l'inclinaison  $\theta_p$  et le diamètre interne  $D$  de la conduite :

$$R_G^{pipe} = \mathcal{F}(U_L^0, U_G^0, \theta_p, D). \quad (5.9)$$

Nous verrons dans la section 5.2.2 comment déterminer la fonction  $\mathcal{F}$ .

Nous en déduisons que  $m_L^{01}$  ne varie pas au cours du temps. Ce qui entraîne :

$$U_L^1(t) = U_L^0, \forall t. \quad (5.10)$$

Considérons maintenant la première équation algébrique (5.3). Puisque le pipe est horizontal ou légèrement incliné, les pertes de charge sont essentiellement dues aux termes de frottement. L'erreur commise en négligeant ces derniers n'est pas significative car la pression dans le pipe est due principalement au poids de la colonne liquide dans le riser et la pression du séparateur qui est généralement proche de celle de l'atmosphère. Aussi, nous calculerons la densité du gaz à l'entrée et la sortie du pipe en fonction d'une pression moyenne [61, 143, 154, 163] :

$$P_{pipe}(t) = P_S + g \left[ m_L^{23}(t) + m_G^{23}(t) \right] \quad (5.11)$$

où  $m_L^{23}$  et  $m_G^{23}$  sont les quantités définies par (2.22).

Étant donné (4.84), la seconde équation différentielle (5.2) se réduit à :

$$\frac{dm_G^{01}}{dt}(t) = \rho_G(P_{pipe}(t)) \left[ U_G^0 - U_G^1(t) \right]$$

où nous avons posé :

$$U_G^1 = R_G^1 V_G(R_G^1, P_{12}, U_S^{12}).$$

Puisque

$$m_G^{01} = \int_0^L \rho_G(P) R_G dx = L \rho_G(P_{pipe}) R_G^{pipe}, \quad (5.12)$$

nous en déduisons :

$$LR_G^{pipe} \frac{d}{dt} [\rho_G(P_{pipe}(t))] = \rho_G(P_{pipe}(t)) [U_G^0 - U_G^1(t)]. \quad (5.13)$$

Finalement, grâce à l'équation d'état du gaz (1.6), l'équation différentielle de la pression dans le pipe est la suivante :

$$\frac{dP_{pipe}}{dt}(t) = \frac{U_G^0 - U_G^1(t)}{LR_G^{pipe}} P_{pipe}(t). \quad (5.14)$$

### 5.2.2 Calcul du taux de vide dans le pipe

Plusieurs méthodes existent pour déterminer le taux de vide d'un écoulement *stratifié*. Celui-ci étant peu observé lorsque la conduite est ascendante et que les débits sont faibles [14], les corrélations disponibles dans la littérature sont exclusivement dédiées aux cas où le pipe est horizontal ou légèrement descendant. Ce qui n'est pas pénalisant car il est nécessaire que  $\theta_p \leq 0$  pour que des instabilités apparaissent [61].

Traisons tout d'abord le cas horizontal. Lockhart, R. W. & Martinelli, R. C. ont été parmi les premiers à s'intéresser à l'écoulement *stratifié* dans un pipe horizontal et en ont déduit une corrélation empirique entre le taux de vide et un paramètre, donné par la formule (5.16), dit de *Lockhart-Martinelli*. Ce dernier dépend principalement de la pression dans le pipe et des vitesses superficielles des deux phases.

Taitel, Y. & Dukler, A. E. ont justifié les travaux de Lockhart & Martinelli de manière théorique [156]. L'un de leurs résultats est une relation algébrique ne dépendant que de la hauteur liquide  $h_L$  du flot (voir section 1.5.3) et du paramètre de *Lockhart-Martinelli*. Connaissant la valeur de ce dernier, il est donc facile de calculer la valeur du taux de vide en fonction de  $h_L$ , grâce à l'égalité (5.19). Après comparaisons avec des mesures expérimentales, les résultats de Taitel & Dukler s'avèrent être bien plus satisfaisants que ceux de Lockhart & Martinelli.

Quelques temps après, Aggour, M. A. & Sims, G. E. ont proposé une corrélation plus simple et aussi efficace que celle Taitel & Dukler [1] :

$$X^2 = 1.189 \frac{(1 - R_G)^2 (1 - 2R_G)}{R_G^3} \quad (5.15)$$

où

$$X = \left[ \frac{\frac{2C_L}{D} \left( \frac{\rho_L^0 U_L^0 D}{\mu_L} \right)^{-\alpha_L} \rho_L [U_L^0]^2}{\frac{2C_G}{D} \left( \frac{\rho_G(P) U_G^0 D}{\mu_G} \right)^{-\alpha_G} \rho_G [U_G^0]^2} \right]^{1/2}. \quad (5.16)$$

$C_L$ ,  $C_G$ ,  $\alpha_L$  et  $\alpha_G$  sont les coefficients de l'équation de Blasius (3.12).

Plusieurs corrélations sont donc envisageables pour déterminer le taux de vide dans l'écoulement *stratifié* horizontal. Malheureusement, ces lois dépendent de la pression, par l'intermédiaire du paramètre de *Lockhart-Martinelli*. Il est donc impossible de déterminer le taux de vide exclusivement à partir des paramètres. Pour contourner ce problème, nous supposons que le pipe est descendant. Cette hypothèse ne limite pas trop notre champ d'application car un pipe n'est jamais parfaitement horizontal dans la réalité.

Notons aussi que le *severe slugging* n'existe pas si  $\theta_p = 0$  [127]; des instabilités peuvent apparaître mais à des débits trop faibles pour avoir un intérêt pratique : les bouchons de liquide générés par les écoulements ont une longueur inférieure à celle du riser (la poche de gaz n'est jamais entièrement bloquée par l'accumulation de liquide au pied du riser) mais supérieure à la taille des bouchons d'un flot *intermittent* usuel (voir section 4.3.4). C'est pourquoi la majorité des cartes d'écoulement disponibles dans la littérature sur le *severe slugging* résultent d'expériences où  $\theta_p$  est strictement négatif [127, 144, 163, 173].

Dans le cas d'un système en forme de U où la flow-line est horizontale (*cf.* figure 4.2), nous avons vu qu'il était tout de même possible d'obtenir des écoulements instables pour une large gamme de débits (voir section 4.2). Par conséquent, le down-comer joue un rôle important dans le phénomène. Corteville J. *et al.* remarquent justement dans leur rapport [44] :

*“ Le down-comer interviendrait (...) comme une prolongation particulière de la flow-line, ajoutant une réserve de gaz qui stocke l'énergie motrice de pression et permet donc d'amplifier la vitesse des bouchons de liquide au déclenchement de l'instabilité, sans augmenter sensiblement leur taille.”*

Lorsque le pipe est légèrement incliné, plusieurs corrélations sont envisageables. La première est celle proposée par Taitel, Y. dans son étude de stabilité du *severe slugging* [154]. Elle consiste à résoudre l'équation de conservation de la quantité de mouvement du liquide par rapport à la hauteur liquide  $h_L$ ; Taitel, Y. néglige le frottement interfacial et les pertes de charge :

$$f_L [A_L(h_L), S_L(h_L), U_L^0] \frac{A^2}{[A_L(h_L)]^2} \frac{\rho_L (U_L^0)^2}{2} = -\rho_L g A_L \sin \theta_p \quad (5.17)$$

où

$$\begin{aligned} A_L(h_L) &= \frac{D^2}{4} \left[ \pi - \cos^{-1} \left( \frac{2h_L}{D} - 1 \right) + \left( \frac{2h_L}{D} - 1 \right) \sqrt{1 - \left( \frac{2h_L}{D} - 1 \right)^2} \right], \\ S_L(h_L) &= D \left[ \pi - \cos^{-1} \left( \frac{2h_L}{D} - 1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.18)$$

$h_L$  étant connu, nous en déduisons le taux de vide dans le pipe grâce à la relation :

$$R_G = 1 - \frac{A_L(h_L)}{A}. \quad (5.19)$$

La résolution de (5.17) par rapport à  $h_L$  est faite de manière itérative. L'algorithme converge tant que le débit  $U_L^0$  n'est pas trop grand. Lorsque celui-ci augmente,  $R_G$  diminue et (5.17) n'admet plus de solution. Dans la pratique, cela se produit lorsque  $R_G$  devient approximativement inférieur à 0.2. Ce problème est dû aux simplifications (notamment la suppression du frottement interfacial) de l'équation de conservation de la quantité de mouvement du liquide. Pour le résoudre, nous présentons ci-dessous une seconde équation dont la solution existe, même pour des taux de vide très petits. Elle donne des résultats très similaires à ceux de Taitel, Y. lorsque (5.17) admet une solution.

Dans un de leurs articles sur le *severe slugging* [143], Schmidt, Z. *et al.* proposent une méthode simple de calcul de la fraction liquide. Ils remarquent que l'écoulement *stratifié* dans un pipe est similaire au flot d'un liquide dans un canal ouvert. Manning a étudié ce problème et a proposé une expression simple de la vitesse moyenne du liquide [4] :

$$V_L = \frac{1.49}{n} \left[ \frac{A_L}{S_L} \right]^{2/3} |\sin \theta_p|^{1/2}. \quad (5.20)$$

Le coefficient  $n$  est une mesure de la rugosité du canal. La surface interne d'un pipe expérimental étant généralement très lisse, nous imposerons la valeur  $n = 0.01$  car celle-ci est la plus petite quantité suggérée par Manning.

En tenant compte des relations (1.27) et (1.41), l'aire occupée par la phase liquide dans une section droite du pipe est donnée par la formule :

$$A_L = \frac{D^2}{8}(\Omega - \sin \Omega). \quad (5.21)$$

Le périmètre mouillé est quant à lui formulé par la relation (1.43):

$$S_L = \frac{D}{2}\Omega. \quad (5.22)$$

En tenant compte de la relation triviale :

$$\frac{A_L}{A} = \frac{U_L^0}{V_L} \quad (5.23)$$

et en remplaçant  $A_L$  et  $S_L$  par leurs expressions respectives dans (5.20), nous en déduisons finalement :

$$U_L^0 - \frac{149}{2\pi} \left[ \frac{D}{4} \right]^{2/3} |\sin \theta_p|^{1/2} (\Omega - \sin \Omega) \left[ \frac{\Omega - \sin \Omega}{\Omega} \right]^{2/3} = 0. \quad (5.24)$$

Après résolution de (5.24) par rapport l'angle mouillé  $\Omega$ , le taux de vide dans le pipe est calculé à partir de la relation :

$$R_G = 1 - \frac{A_L}{A} = 1 - \frac{1}{2\pi}(\Omega - \sin \Omega). \quad (5.25)$$

Étudions maintenant la forme de l'équation (5.24) lorsque le taux de vide tend vers zéro. L'angle mouillé  $\Omega$  tend alors vers  $2\pi$ . Nous en déduisons que  $U_L^0$  converge vers une valeur critique :

$$(U_L^0)_{crit} = 149 \left[ \frac{D}{4} \right]^{2/3} |\sin \theta_p|^{1/2}. \quad (5.26)$$

Au dessus de cette valeur, l'écoulement est *dispersé* ou presque monophasique liquide. Par conséquent, le *severe slugging* n'existe plus lorsque  $U_L^0 > (U_L^0)_{crit}$  (voir section (5.1)).

Sans l'énoncer explicitement, les auteurs d'études sur le *severe slugging* admettent un résultat similaire lorsqu'ils tracent le critère de Bøe pour définir une frontière de la région où se produit le *severe slugging* dans l'espace des paramètres  $(U_L^0, U_G^0)$  [96, 140, 144, 163, 173]. La différence est que jusqu'à présent, seule l'équation (5.17) était choisie pour déterminer le taux de vide dans le pipe. Dans ce cas,  $(U_L^0)_{crit}$  est donnée par la valeur minimale de  $U_L^0$  pour laquelle (5.17) n'admet pas de solution. Ce qui n'est pas très rigoureux car l'équation (5.17) n'admet pas de solution pour des taux de vide inférieurs approximativement à 0.2. Rappelons que l'écoulement *stratifié* peut exister si  $R_G < 0.2$ ; il suffit pour cela que la vitesse du gaz ne soit pas trop grande (voir section 1.7.1).



### 5.2.3 Modélisation de l'écoulement dans le riser

Rappelons les équations de notre modèle de riser (voir section 2.5) :

$$\begin{aligned} \frac{dm_L^{23}}{dt} &= \rho_L(P_{12})(1 - R_G^2)V_L(R_G^2, P_{12}, U_S^{12}) \\ &+ \rho_L(P_S)(1 - R_G^3) \left[ \Lambda_3(H_3, V_L(R_G^3, P_S, U_S^3)) - V_L(R_G^3, P_S, U_S^3) \right], \end{aligned} \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{dm_G^{23}}{dt} &= \rho_G(P_{12})R_G^2V_G(R_G^2, P_{12}, U_S^{12}) \\ &+ \rho_G(P_S)R_G^3 \left[ \Lambda_3(H_3, V_L(R_G^3, P_S, U_S^3)) - V_G(R_G^3, P_S, U_S^3) \right], \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\frac{dH_3}{dt} = \Lambda_3(H_3, V_L(R_G^3, P_S, U_S^3)), \quad (5.29)$$

$$0 = P_S - P_{12} + g \sin(\theta_r)(m_L^{23} + m_G^{23}), \quad (5.30)$$

$$0 = m_L^{23} - \frac{1}{2}H_3 \left[ \rho_L(P_{12})(1 - R_G^2) + \rho_L(P_S)(1 - R_G^3) \right], \quad (5.31)$$

$$0 = m_G^{23} - \frac{1}{2}H_3 \left[ \rho_G(P_{12})R_G^2 + \rho_G(P_S)R_G^3 \right], \quad (5.32)$$

$$0 = R_G^1V_G(R_G^1, P_{12}, U_S^{12}) - R_G^2V_G(R_G^2, P_{12}, U_S^{12}). \quad (5.33)$$

Selon Taitel, Y. *et al.*, un écoulement gaz-liquide dans un système pipe-riser est *quasi-stationnaire* lorsque la colonne liquide est stable alors que le taux de vide, la pression et les débits oscillent très légèrement [163]. Schmidt, Z. *et al.* et Pots, B. *et al.* désignent ce type d'écoulement comme une *transition vers le severe slugging* [127, 143]. Les bouchons de liquide générés par ce flot ont une longueur supérieure à celle des bouchons d'un écoulement *intermittent* et inférieure à la hauteur du riser. Dans le cas du *severe slugging*, nous savons que la longueur des bouchons doit dépasser celle du riser.

En étudiant les cartes d'écoulement de la littérature [96, 127, 140, 144, 163, 173], nous constatons effectivement que les écoulements *quasi-stationnaires* sont situés entre les écoulements *stable* ou *stationnaires* et ceux du type *severe slugging*. Ainsi, lorsque les débits volumiques du liquide et du gaz sont grands, le flot est *stationnaire*. Il devient *quasi-stationnaire* si les débits sont progressivement diminués. Puis, le *severe slugging* apparaît lorsque les débits sont très faibles.

Les écoulements situés au voisinage des valeurs critiques des paramètres sont donc a priori *quasi-stationnaires*. Plusieurs hypothèses simplificatrices sont alors envisageables pour modéliser les écoulements lorsque l'un des paramètres est proche de sa valeur critique. Tout d'abord, nous supposons que la hauteur liquide  $H_{liq}$  dans le riser reste égale à la hauteur  $H$  du riser. Ce qui suppose que  $H_{liq}$  n'oscille pas dans la partie supérieure du riser dont le sommet est régulièrement asséché par le passage de bulles de gaz. Nous verrons plus loin que les cycles limites calculés de manière analytique à partir de ce nouveau modèle simplifié sont très proches de ceux calculés de manière numérique à partir de notre ancien modèle exposé dans le chapitre 2. Rappelons que pour celui-ci, le phénomène de relaxation n'était pas négligé car la hauteur liquide  $H_{liq}$  pouvait varier.

Nous ferons aussi l'hypothèse que l'écoulement dans le riser est *intermittent* ou *dispersé* (voir section 5.1). La vitesse du gaz sera donc formulée de la façon suivante (voir sections 1.5.1 et 1.5.2) [163] :

$$V_G = C_0U_S + u_d. \quad (5.34)$$

Nous rappelons que  $C_0$  est un paramètre de distribution et que  $u_d$  symbolise la vitesse de dérive des bulles. Leurs expressions sont données respectivement par les formules (1.16) et (1.20) dans le cas *intermittent* et par (1.24) et (1.25) dans le cas *dispersé* [163]. Sachant que  $\rho_G \ll \rho_L$  et  $\theta_r = 90^\circ$  dans la pratique, nous imposerons :

$$C_0 = \begin{cases} 1.2 & (\textit{intermittent}), \\ 1.0 & (\textit{dispersé}). \end{cases} \quad (5.35)$$

$$u_d = \begin{cases} 0.35\sqrt{gD} & (\textit{intermittent}), \\ 1.53 \left[ \frac{g\sigma}{\rho_L^0} \right]^{1/4} & (\textit{dispersé}). \end{cases} \quad (5.36)$$

Finalement, en tenant compte de ces deux hypothèses ( $H_{liq} = H$  et écoulement *dispersé* ou *intermittent* dans le riser), ainsi que des équations (1.6), (5.7), (5.10) et (5.11), le système (5.27) - (5.33) s'écrit sous la forme :

$$\frac{dm_L^{23}}{dt} = \rho_L^0 \left\{ U_L^0 - \left[ U_S^3 - R_G^3 (C_0 U_S^3 + u_d) \right] \right\} \quad (5.37)$$

$$\frac{dm_G^{23}}{dt} = \frac{1}{\mathcal{R}T} \left\{ P_{pipe} R_G^2 \left[ C_0 (U_L^0 + U_G^1) + u_d \right] - P_S R_G^3 \left[ C_0 U_S^3 + u_d \right] \right\} \quad (5.38)$$

$$0 = P_S - P_{pipe} + g(m_L^{23} + m_G^{23}), \quad (5.39)$$

$$0 = m_L^{23} - \frac{1}{2} H \rho_L^0 \left[ (1 - R_G^2) + (1 - R_G^3) \right], \quad (5.40)$$

$$0 = m_G^{23} - \frac{1}{2} \frac{H}{\mathcal{R}T} \left[ P_{pipe} R_G^2 + P_S R_G^3 \right], \quad (5.41)$$

$$0 = U_G^1 - R_G^2 \left[ C_0 (U_L^0 + U_G^1) + u_d \right]. \quad (5.42)$$

#### 5.2.4 Les équations du modèle

En regroupant l'ensemble des équations formulées dans les sections 5.2.1 et 5.2.3, nous en déduisons un système *algébro-différentiel* de sept équations :

$$\frac{dm_L}{dt} = \rho_L^0 \left\{ U_L^0 - \left[ U_S^{out} - R_G^{out} (C_0 U_S^{out} + u_d) \right] \right\}, \quad (5.43)$$

$$\frac{dm_G}{dt} = \frac{1}{\mathcal{R}T} \left\{ P_{pipe} R_G^{in} \left[ C_0 (U_L^0 + U_G^{in}) + u_d \right] - P_S R_G^{out} (C_0 U_S^{out} + u_d) \right\}, \quad (5.44)$$

$$\frac{dP_{pipe}}{dt} = \frac{U_G^0 - U_G^{in}}{L R_G^{pipe}} P_{pipe}, \quad (5.45)$$

$$0 = P_S - P_{pipe} + g[m_L + m_G], \quad (5.46)$$

$$0 = m_L - \frac{1}{2} H \rho_L^0 \left[ 1 - R_G^{in} + 1 - R_G^{out} \right], \quad (5.47)$$

$$0 = m_G - \frac{1}{2} \frac{H}{\mathcal{R}T} \left[ P_{pipe} R_G^{in} + P_S R_G^{out} \right], \quad (5.48)$$

$$0 = U_G^{in} - R_G^{in} \left[ C_0 (U_L^0 + U_G^{in}) + u_d \right], \quad (5.49)$$

à sept variables qui ne dépendent que du temps :

$$m_L, m_G, P_{pipe}, U_G^{in}, R_G^{in}, R_G^{out}, U_S^{out}.$$

$m_L$  et  $m_G$  désignent respectivement les intégrales de  $\rho_L R_L$  et  $\rho_G R_G$  entre les deux extrémités du riser (voir (2.22)).  $U_G^{in}$  est la vitesse superficielle du gaz au pied du riser. C'est

aussi la vitesse  $U_G^1$  grâce à la relation de continuité (2.35).  $R_G^{in}$  et  $R_G^{out}$  sont les taux de vide en entrée et sortie du riser.  $U_S^{out}$  désigne la vitesse superficielle du mélange au sommet du riser et vaut exactement la vitesse  $U_S$  du niveau liquide, i.e.  $U_S^3$ , car  $H_{liq}$  est égal à  $H$  par hypothèse.

### 5.2.5 Écoulement stationnaire

Le système (5.43) - (5.49) admet trois points d'équilibre. Le premier n'a aucune signification physique; ses variables ont les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} m_L &= -\frac{P_S}{g}, \\ m_G &= 0, \\ P_{pipe} &= 0, \\ U_G^{in} &= -2 \frac{P_S u_d + C_0 U_L^0 P_S + C_0 U_L^0 g H \rho_L^0 + u_d g H \rho_L^0}{-g H \rho_L^0 + 2 C_0 P_S + 2 C_0 g H \rho_L^0}, \\ R_G^{in} &= 2 \frac{P_S + g H \rho_L^0}{g H \rho_L^0}, \\ R_G^{out} &= 0, \\ U_S^{out} &= U_L^0. \end{aligned}$$

L'expression des variables  $U_G^{in}$  et  $R_G^{in}$  des deux autres points d'équilibre est simple :

$$U_G^{in} = U_G^0, \quad (5.50)$$

$$R_G^{in} = \frac{U_G^0}{C_0(U_L^0 + U_G^0) + u_d}. \quad (5.51)$$

L'écriture des autres variables est beaucoup plus complexe. Pour simplifier les formules, nous les exprimons en fonction de la pression du pipe  $P_{pipe}$  :

$$m_L(P_{pipe}) = \frac{H \rho_L}{2} \left[ 2 - \frac{U_G^0}{C_0(U_L^0 + U_G^0) + u_d} - \frac{U_G^0 P_{pipe}}{C_0(P_S U_L^0 + P_{pipe} U_G^0) + P_S u_d} \right], \quad (5.52)$$

$$m_G(P_{pipe}) = \frac{H}{2RT} \left[ \frac{U_G^0 P_{pipe}}{C_0(U_L^0 + U_G^0) + u_d} + \frac{U_G^0 P_S P_{pipe}}{C_0(P_S U_L^0 + P_{pipe} U_G^0) + P_S u_d} \right], \quad (5.53)$$

$$R_G^{out}(P_{pipe}) = \frac{U_G^0 P_{pipe}}{C_0(P_S U_L^0 + P_{pipe} U_G^0) + P_S u_d}, \quad (5.54)$$

$$U_S^{out}(P_{pipe}) = U_L^0 + \frac{P_{pipe} U_G^0}{P_S}. \quad (5.55)$$

Pour déterminer  $P_{pipe}$  en fonction des paramètres du modèle, il suffit de résoudre l'équation algébrique en pression :

$$0 = P_S - P_{pipe} + g [m_L(P_{pipe}) + m_G(P_{pipe})]. \quad (5.56)$$

Après quelques manipulations algébriques, (5.56) est écrite sous la forme d'un polynôme d'ordre deux par rapport à  $P_{pipe}$  et dont les coefficients dépendent uniquement des paramètres :

$$0 = a P_{pipe}^2 + b P_{pipe} + c \quad (5.57)$$

où :

$$\begin{aligned}
a &= \left[ -\mathcal{R}TC_0^2 + \frac{1}{2}gHC_0 \right] \left( U_G^0 \right)^2 - \mathcal{R}T u_d C_0 U_G^0 - \mathcal{R}TC_0^2 U_L^0 U_G^0, \\
b &= -\mathcal{R}TC_0^2 \left( U_L^0 \right)^2 P_S \\
&+ \left[ P_S \mathcal{R}TC_0^2 - gH\rho_L^0 \mathcal{R}TC_0 + \frac{1}{2}gHP_S C_0 + gH\rho_L^0 \mathcal{R}TC_0^2 \right] \left( U_G^0 \right)^2 \\
&+ \left[ gHP_S u_d - \frac{1}{2}gH\rho_L^0 \mathcal{R}T u_d + gH\rho_L^0 \mathcal{R}T u_d C_0 \right] U_G^0 - 2\mathcal{R}TC_0 U_L^0 P_S u_d \\
&+ \left[ gH\rho_L^0 \mathcal{R}TC_0^2 + gHP_S C_0 - \frac{1}{2}gH\rho_L^0 \mathcal{R}TC_0 \right] U_L^0 U_G^0 - \mathcal{R}TP_S u_d^2, \\
c &= \left[ gH\rho_L^0 \mathcal{R}TC_0^2 P_S + P_S^2 \mathcal{R}TC_0^2 \right] \left( U_L^0 \right)^2 \\
&+ \left[ gH\rho_L^0 \mathcal{R}TC_0 P_S u_d + P_S^2 \mathcal{R}TC_0 u_d - \frac{1}{2}gH\rho_L^0 \mathcal{R}TP_S u_d \right] U_G^0 \\
&+ \left[ 2P_S^2 \mathcal{R}TC_0 u_d + 2gH\rho_L^0 \mathcal{R}TC_0 P_S u_d \right] U_L^0 \\
&+ \left[ P_S^2 \mathcal{R}TC_0^2 - \frac{1}{2}gH\rho_L^0 \mathcal{R}TC_0 P_S + gH\rho_L^0 \mathcal{R}TC_0^2 P_S \right] U_L^0 U_G^0 \\
&+ P_S^2 \mathcal{R}T u_d^2 + gH\rho_L^0 \mathcal{R}TP_S u_d^2.
\end{aligned} \tag{5.58}$$

Nous constatons que quelque soient les valeurs expérimentales des paramètres que nous considérerons plus loin, (5.57) admet toujours deux solutions réelles, l'une positive et l'autre négative. La pression  $P_{pipe}$  est évidemment celle qui est positive. Elle est donnée par :

$$P_{pipe} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{5.59}$$

On vérifie aisément que  $a$  est toujours négatif car tous les paramètres sont positifs. Notons que le coefficient de  $(U_G^0)^2$  dans l'expression de  $a$  devient positif lorsque  $H$  est supérieur à environ 15000 m car  $\mathcal{R} \simeq 287m^2.s^{-2}.K^{-1}$ ,  $T > 273.15K$ ,  $C_0 \geq 1$  et  $g \simeq 10$ . Puisque  $H$  ne dépasse jamais quelques dizaines de mètres dans la pratique,  $a$  est donc toujours négatif.

Le point d'équilibre donné par les relations (5.50) - (5.55) et (5.59) est un écoulement diphasique stationnaire, i.e. un flot où les débits massiques de gaz et de liquide sont constants le long de la ligne de transport [154] (*cf.* figure 1.1). Pour le vérifier, calculons les vitesses superficielles du gaz et du liquide en chaque extrémité de la conduite. En prenant comme indice 0, 1, 2, 3 pour désigner respectivement l'entrée du pipe, sa sortie, le pied du riser et son sommet, nous avons :

$$\begin{aligned}
U_G^0 &\stackrel{(5.50)}{=} U_G^{in} \stackrel{\text{déf}}{=} U_G^2 \stackrel{(2.35)}{=} U_G^1, \\
U_G^3 &= R_G^3 V_G^3 \stackrel{\text{déf}}{=} R_G^{out} V_G^3 \stackrel{(5.34)}{=} R_G^{out} \left[ C_0 U_S^{out} + u_d \right] \\
&\stackrel{(5.54),(5.55)}{=} \frac{U_G^0 P_{pipe}}{C_0(P_S U_L^0 + P_{pipe} U_G^0) + P_S u_d} \left[ C_0 \left( U_L^0 + \frac{P_{pipe}}{P_S} U_G^0 \right) + u_d \right] \\
&= \frac{U_G^0 P_{pipe}}{P_S}.
\end{aligned} \tag{5.60}$$

Le débit massique du gaz, i.e. le débit  $A\rho_G U_G$ , est donc constant le long de la conduite car l'aire  $A$  de la section droite du pipeline est constante en espace et la pression vaut exactement

$P_{pipe}$  aux points 0, 1, 2 et  $P_S$  au point 3. En ce qui concerne le débit massique du liquide, il ne varie pas le long de la conduite. Pour le démontrer, il suffit de prouver que la vitesse  $U_L$  est constante en espace car la masse volumique du liquide est supposée constante. Nous avons effectivement :

$$U_L^0 \stackrel{(5.10)}{=} U_L^1 \stackrel{(2.17)}{=} U_L^2,$$

$$U_L^3 \stackrel{\text{déf}}{=} U_S^{out} - U_G^{out} \stackrel{(5.55)}{=} U_L^0 + \frac{P_{pipe}}{P_S} U_G^0 - U_G^{out} \stackrel{(5.60)}{=} U_L^0.$$

### 5.2.6 Boucle expérimentale de Taitel

Lorsque nous comparerons nos résultats avec l'expérience, nous évoquerons souvent les travaux de Taitel, Y. *et al.* [96, 163, 173]. Leur dispositif expérimental est un peu différent du système pipe-riser que nous avons considéré jusque ici : un pipe supplémentaire (simulé par réservoir) de longueur  $l_p$  est placé en amont du dispositif afin d'augmenter le volume de gaz contenu dans le pipe (*cf.* figure 5.2). Il est donc nécessaire de modifier notre modèle pour en tenir compte.

Pour cela, reprenons les calculs de la section 5.2.1. L'écoulement étant monophasique gazeux entre 0 et  $l_p$ , l'équation (5.8) est inchangée. Seule la définition de la variable  $m_L^{01}$  change. Elle désigne maintenant l'intégrale de  $\rho_L R_L$  entre  $l_p$  et  $l_p + L$ . Nous en déduisons l'équation (5.10), toujours en supposant que  $R_G^{pipe}$  est constant entre  $l_p$  et  $l_p + L$  et ne dépend que de  $U_L^0$  et  $U_G^0$  (voir (5.9));  $R_G$  vaut exactement un entre 0 et  $l_p$ .

La seule modification importante concerne la quantité  $m_G^{01}$  dont la définition initiale (5.12) devient :

$$m_G^{01} = \int_0^{l_p} \rho_G(P) dx + \int_{l_p}^{l_p+L} \rho_G(P) R_G dx = l_p \rho_G(P_{pipe}) + L \rho_G(P_{pipe}) R_G^{pipe}. \quad (5.61)$$

L'équation différentielle (5.13) s'écrit alors :

$$\left( l_p + L R_G^{pipe} \right) \frac{d}{dt} [\rho_G(P_{pipe}(t))] = \rho_G(P_{pipe}(t)) [U_G^0 - U_G^1(t)]. \quad (5.62)$$

Nous en déduisons la nouvelle équation différentielle de la pression dans le pipe [163] :

$$\frac{dP_{pipe}}{dt}(t) = \frac{U_G^0 - U_G^1(t)}{l_p + L R_G^{pipe}} P_{pipe}(t). \quad (5.63)$$

Il suffit donc de remplacer l'équation (5.45) par (5.63) pour en déduire un modèle simplifié des écoulements gaz-liquide dans la boucle de Taitel. Son écoulement stationnaire est identique à celui défini dans la section 5.2.5 car quelque soit la valeur de  $l_p$ , l'annulation du second membre de (5.63) entraîne toujours (5.50).

### 5.2.7 Modèle à débits massiques constants

Certaines expériences imposent parfois des débits massiques au lieu de débits volumiques en entrée du pipe. Autrement dit, les conditions (4.83)-(4.84) sont remplacées par les relations (2.33) - (2.34) :

$$0 = \rho_L(P_0)(1 - R_G^0) V_L(R_G^0, P_0, U_S^0) - q_L^0, \quad (5.64)$$

$$0 = \rho_G(P_0) R_G^0 V_G(R_G^0, P_0, U_S^0) - q_G^0. \quad (5.65)$$

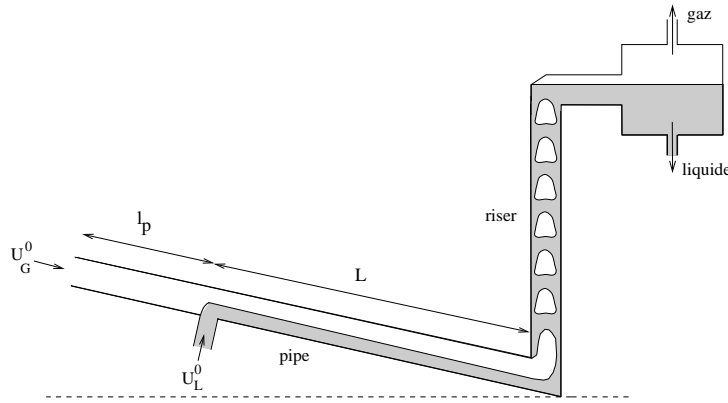


Figure 5.2 : Système pipe-riser de Taitel.

En adaptant les précédents calculs à ces nouvelles conditions aux limites, nous en déduisons le nouveau système d'équations :

$$\frac{dm_L}{dt} = q_L^0 - \rho_L^0 \left[ U_S^{out} - R_G^{out} (C_0 U_S^{out} + u_d) \right], \quad (5.66)$$

$$\frac{dm_G}{dt} = \frac{1}{\mathcal{R}T} \left\{ P_{pipe} R_G^{in} \left[ C_0 \left( \frac{q_L^0}{\rho_L^0} + U_G^{in} \right) + u_d \right] - P_S R_G^{out} (C_0 U_S^{out} + u_d) \right\}, \quad (5.67)$$

$$\frac{dP_{pipe}}{dt} = \frac{1}{LR_G^{pipe}} \left[ \mathcal{R}T q_G^0 - P_{pipe} U_G^{in} \right], \quad (5.68)$$

$$0 = P_S - P_{pipe} + g [m_L + m_G], \quad (5.69)$$

$$0 = m_L - \frac{1}{2} H \rho_L^0 \left[ 1 - R_G^{in} + 1 - R_G^{out} \right], \quad (5.70)$$

$$0 = m_G - \frac{1}{2} \frac{H}{\mathcal{R}T} \left[ P_{pipe} R_G^{in} + P_S R_G^{out} \right], \quad (5.71)$$

$$0 = U_G^{in} - R_G^{in} \left[ C_0 \left( \frac{q_L^0}{\rho_L^0} + U_G^{in} \right) + u_d \right] \quad (5.72)$$

où les inconnues sont identiques au modèle précédent :

$$m_L, m_G, P_{pipe}, U_G^{in}, R_G^{in}, R_G^{out}, U_S^{out}.$$

Pour déterminer un écoulement stationnaire, il suffit de reprendre les équations (5.50) - (5.55) et (5.59) en remplaçant  $U_G^0$  par  $(\mathcal{R}T q_G^0)/P_{pipe}$  et  $U_L^0$  par  $q_L^0/\rho_L^0$ .

### 5.2.8 Écriture condensée des équations

Notre modèle simplifié est composé des équations (5.43) - (5.49). Pour tenir compte de la particularité du dispositif expérimental de Taitel, Y. *et al.* (voir section 5.2.6), nous remplacerons l'équation différentielle en pression (5.45) par (5.63).  $l_p$  sera donc un paramètre supplémentaire. Il suffira d'imposer  $l_p = 0$  dans le cas système pipe-riser classique (*cf.* figure 4.19).

Pour simplifier l'analyse des équations, nous les écrivons de manière condensée :

$$\frac{dX}{dt}(t) = F(X(t), Y(t), p), \quad (5.73)$$

$$0 = G(X(t), Y(t), p) \quad (5.74)$$

où les coordonnées des seconds membres  $F$  et  $G$  sont les suivantes :

$$\begin{aligned} F_1(X, Y, p) &= \rho_L^0 \left\{ U_L^0 - [Y_4 - Y_3(C_0 Y_4 + u_d)] \right\}, \\ F_2(X, Y, p) &= \frac{1}{\mathcal{RT}} \left\{ X_3 Y_2 [C_0(U_L^0 + Y_1) + u_d] - P_S Y_3(C_0 Y_4 + u_d) \right\}, \\ F_3(X, Y, p) &= \frac{U_G^0 - Y_1}{l_p + LR_G^{pipe}} X_3, \\ G_1(X, Y, p) &= P_S - X_3 + g(X_1 + X_2), \\ G_2(X, Y, p) &= X_1 - \frac{1}{2} H \rho_L^0 [(1 - Y_2) + (1 - Y_3)], \\ G_3(X, Y, p) &= X_2 - \frac{1}{2} \frac{H}{\mathcal{RT}} [X_3 Y_2 + P_S Y_3], \\ G_4(X, Y, p) &= Y_1 - Y_2 [C_0(U_L^0 + Y_1) + u_d]. \end{aligned}$$

Les vecteurs  $X$  et  $Y$  désignent respectivement les variables différentielles et algébriques du modèle :

$$X = [m_L, m_G, P_{pipe}]^T, \quad (5.75)$$

$$Y = [U_G^{in}, R_G^{in}, R_G^{out}, U_S^{out}]^T. \quad (5.76)$$

Le vecteur  $p$  symbolise les paramètres physiques :

$$p = (U_L^0, U_G^0, P_S, L, l_p, H, D, \rho_L^0, T, \sigma, \theta_p). \quad (5.77)$$

Ces derniers peuvent être classés de la façon suivante (on rappelle leur signification dans la nomenclature, page xiii) :

- Expérimentaux :  $U_L^0, U_G^0, P_S$ .
- Géométriques :  $L, l_p, H, D, \theta_p$ .
- Thermodynamiques :  $\rho_L^0, \sigma, T$ .

Bien qu'ils n'apparaissent pas explicitement dans les équations, le diamètre  $D$  et l'angle d'inclinaison  $\theta_p$  de la conduite interviennent lorsque nous calculons la valeur du taux de vide dans le pipe (voir section 5.2.2).  $D$  est aussi utilisé pour calculer la vitesse de dérive  $u_d$  dans le riser si le flot est supposé *intermittent* (voir (5.36)). La tension superficielle  $\sigma$  intervient dans les équations par l'intermédiaire de  $u_d$  lorsque l'écoulement est *dispersé* dans le riser.

*Remarque* : le modèle est indépendant des viscosités du liquide et du gaz. Ces quantités ont une grande importance dans la modélisation du frottement pariétal mais notre modèle néglige ce dernier. Les viscosités affectent également les vitesses de glissement. Cette influence est prise en compte de manière implicite par les lois (5.24) et (5.34) qui donnent des résultats très satisfaisants lorsque le mélange diphasique est constitué d'eau et d'air [116, 143, 183]. Nous verrons au cours de la validation expérimentale de nos résultats que ces lois donnent aussi de très bons résultats lorsque la phase liquide est du kérosène. Pots, B. *et al.* ont d'ailleurs constaté que l'influence de la viscosité du liquide sur l'apparition du *severe slugging* est négligeable [127]; rappelons que la viscosité du kérosène est presque deux fois supérieure à celle de l'eau [33].

### 5.2.9 Réduction de l'index du système

Tout comme notre modèle initial (voir section 2.5), les équations algébriques (5.74) ne dépendent pas de la dernière variable algébrique, i.e.  $Y_4$  ou  $U_S^{out}$ . Le système algébro-différentiel (5.73) - (5.74) est donc singulier (plus précisément d'index supérieur ou égal à deux, voir annexe A) car il est impossible de déterminer l'ensemble des variables algébriques en fonction des variables différentielles, de façon unique à partir des équations algébriques. Autrement dit, la singularité de la jacobienne  $D_Y G(X, Y)$  empêche l'application du *théorème des fonctions implicites* pour en déduire  $Y$  en fonction de  $X$ , localement et de façon unique.

Cette singularité a un inconvénient majeur : la plupart des résultats théoriques sur les bifurcations ou la stabilité des systèmes algébro-différentiels ne concernent que des systèmes régulier (ou d'index un). Lorsque l'index est supérieur ou égal à deux, des conditions de régularité sont nécessaires [16, 134]. Elles excluent malheureusement les systèmes *semi-explicites* de la forme (5.73) - (5.74) si la jacobienne  $D_Y G(X, Y)$  est singulière (voir annexe A).

Une solution possible à ce problème consiste à réduire l'index du système en dérivant certaines équations par rapport au temps [25]. Dans notre cas, il suffit de dériver la première équation algébrique :

$$\begin{aligned} X_3 = P_S + g(X_1 + X_2) &\implies \frac{dX_3}{dt} = g \left[ \frac{dX_1}{dt} + \frac{dX_2}{dt} \right] \\ &\iff F_3(X, Y, p) = g [F_1(X, Y, p) + F_2(X, Y, p)]. \end{aligned}$$

En tenant compte des expressions de  $F_1$ ,  $F_2$  et  $F_3$ , nous en déduisons l'équation algébrique suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{g l_p + LR_G^{pipe}} X_3 &= \rho_L^0 \left\{ U_L^0 - [Y_4 - Y_3(C_0 Y_4 + u_d)] \right\} \\ &+ \frac{1}{RT} \left\{ X_3 Y_2 [C_0(U_L^0 + Y_1) + u_d] - P_S Y_3(C_0 Y_4 + u_d) \right\} \end{aligned}$$

d'où nous tirons l'expression de  $Y_4$  en fonction des variables  $X_3$ ,  $Y_1$ ,  $Y_2$  et  $Y_3$  :

$$\begin{aligned} Y_4 &= \frac{1}{\rho_L^0(-1 + Y_3 C_0) - \frac{P_S}{RT} Y_3 C_0} \\ &\times \left[ \frac{1}{g l_p + LR_G^{pipe}} X_3 - \rho_L^0(U_L^0 + Y_3 u_d) - \frac{1}{RT} \left\{ X_3 Y_2 [C_0(U_L^0 + Y_1) + u_d] - P_S Y_3 u_d \right\} \right]. \end{aligned} \quad (5.78)$$

Il suffit donc de connaître  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $Y_1$ ,  $Y_2$  et  $Y_3$  pour en déduire  $X_3$  :

$$X_3 \stackrel{(5.46)}{=} P_S + g(X_1 + X_2) \quad (5.79)$$

et  $Y_4$  grâce à (5.78). Nous pouvons par conséquent supprimer les équations relatives aux seconds membres  $F_3$  et  $G_1$  du système (5.73) - (5.74) et résoudre un nouveau problème où les inconnues sont  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $Y_1$ ,  $Y_2$  et  $Y_3$ .

Le nouveau système à résoudre est le suivant :

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t), y(t), p), \quad (5.80)$$

$$0 = g(x(t), y(t), p) \quad (5.81)$$



où les coordonnées des seconds membres  $f$  et  $g$  sont :

$$f_1(x, y, p) = \rho_L^0 \left\{ U_L^0 - [Y_4(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) - y_3(C_0 Y_4(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) + u_d)] \right\}, \quad (5.82)$$

$$\begin{aligned} f_2(x, y, p) &= \frac{1}{\mathcal{RT}} X_3(x_1, x_2) y_2 [C_0(U_L^0 + y_1) + u_d] \\ &\quad - \frac{1}{\mathcal{RT}} P_S y_3 [C_0 Y_4(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) + u_d], \end{aligned} \quad (5.83)$$

$$g_1(x, y, p) = x_1 - \frac{1}{2} H \rho_L^0 [(1 - y_2) + (1 - y_3)], \quad (5.84)$$

$$g_2(x, y, p) = x_2 - \frac{1}{2} \frac{H}{\mathcal{RT}} [X_3(x_1, x_2) y_2 + P_S y_3], \quad (5.85)$$

$$g_3(x, y, p) = y_1 - y_2 [C_0(U_L^0 + y_1) + u_d]. \quad (5.86)$$

Les nouvelles variables différentielles et algébriques sont symbolisées par les vecteurs :

$$x = [m_L, m_G]^T, \quad (5.87)$$

$$y = [U_G^{in}, R_G^{in}, R_G^{out}]^T. \quad (5.88)$$

Les fonctions  $Y_4$  et  $X_3$  sont définies respectivement par les formules (5.78) et (5.79) où il faut remplacer  $X_i$  par  $x_i$ ,  $\forall i = 1, 2$  et  $Y_j$  par  $y_j$ ,  $\forall j = 1, 3$ .

Ce système réduit n'est plus singulier en tout point car la jacobienne des équations algébriques par rapport aux variables algébriques est :

$$D_y g(x, y, p) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} H \rho_L^0 & \frac{1}{2} H \rho_L^0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \frac{H X_3(x_1, x_2)}{\mathcal{RT}} & -\frac{1}{2} \frac{H P_S}{\mathcal{RT}} \\ 1 - y_2 C_0 & -C_0 (U_L^0 + y_1) - u_d & 0 \end{bmatrix}$$

dont le déterminant vaut exactement :

$$\text{Det} [D_y g(x, y, p)] = -\frac{1}{4} \frac{(1 - y_2 C_0) H^2 \rho_L^0 [P_S - X_3(x_1, x_2)]}{\mathcal{RT}}.$$

Celui-ci est nul si  $P_S = X_3(x_1, x_2)$ , c'est à dire lorsque  $x_1 = x_2 = 0$  ou  $R_G = R_L = 0$ . Ce qui est impossible car  $R_G + R_L = 1$ .  $\text{Det} [D_y g(x, y, p)]$  s'annule aussi quand  $y_2 = 1/C_0$ . Or, la valeur stationnaire de  $y_2$  vaut exactement (voir section 5.2.5) :

$$y_2^{statio} \stackrel{(5.51)}{=} \frac{U_G^0}{C_0(U_L^0 + U_G^0) + u_d}. \quad (5.89)$$

$D_y g(x, y, p)$  n'est donc jamais singulière lorsque  $x$  et  $y$  définissent un écoulement stationnaire car il faudrait que  $C_0 U_L^0 + u_d$  soit nul, ce qui est impossible puisque les paramètres  $C_0$ ,  $U_L^0$  et  $u_d$  sont strictement positifs par définition. En se restreignant à des écoulements légèrement instables, il est donc possible de trouver un voisinage de la frontière de stabilité dans l'espace des paramètres où le taux de vide en entrée du riser oscille légèrement autour de sa valeur stationnaire et reste inférieur à la valeur critique  $1/C_0$ . Rappelons que l'amplitude des oscillations d'un écoulement instable dans un système pipe-riser est d'autant plus faible que les paramètres sont proches de leurs valeurs critiques (voir section 5.1).

Ce résultat met bien en valeur les limites de notre modèle car un taux de vide de 0.833 ( $= 1/C_0$  lorsque un écoulement *intermittent* est imposé dans le riser, voir (5.35)), est plutôt celui d'un flot *annulaire* que d'un écoulement *intermittent* (voir section 1.5). Le système devient donc singulier lorsque une grosse poche de gaz pénètre dans le riser, autrement dit quand le flot est fortement instable : nous sommes proches du *severe slugging* où l'écoulement est *annulaire* au pied du riser pendant la troisième étape d'un cycle (*cf.* figure 1.4). Notons aussi qu'il est absurde que le taux de vide au pied du riser atteigne la valeur critique  $1/C_0 = 1$  lorsque l'écoulement *dispersé* est imposé dans le riser car celui-ci n'existe pas si  $R_G$  est supérieur à 0.52 (voir section 1.7).

Les points dont la variable  $y_2$  est égale à  $1/C_0$  sont des *points d'impasse*. Cette terminologie est souvent employée dans la théorie des systèmes électriques de puissance où les phénomènes de saut et de chute de tension sont modélisés par des systèmes algébro-différentiels dont les solutions atteignent des points d'impasse [36, 39, 40, 86, 89, 104, 131, 164, 169] ; i.e. des points au delà desquels les solutions ne sont plus prolongeables en temps. De plus, dans le cas particulier où une courbe de points d'équilibre traverse une surface de *points d'impasse*, une bifurcation générique dite *bifurcation induite par singularité* se produit (voir annexe A).

*Remarque* : Cette singularité en  $1/C_0$  confirme l'explication que nous avons donnée pour analyser les problèmes de convergence rencontrés aux cours de nos comparaisons avec les expériences de Fabre, J. *et al.* (voir section 4.3). En effet, bien que la loi de glissement dans le riser fût légèrement différente de (5.34) (voir tableau 3.1), les calculs divergeaient approximativement lorsque les taux de vide en sortie du pipe ou au pied du riser approchaient la valeur critique 0.833 (*cf.* figure 4.21).

### 5.3 Analyse locale

Dans la section 5.2, nous avons présenté, un modèle simplifié d'écoulements gaz-liquide isothermes pour des systèmes pipe-riser. Les équations ont un sens lorsque les écoulements sont stables ou légèrement instables. Autrement dit, localement autour des points de bifurcation (voir section 5.1), une analyse mathématique des équations est valide. Deux objectifs importants sont alors envisageables :

- Trouver, dans l'espace des paramètres, la frontière de la région où se produisent les instabilités dont le *severe slugging*.
- Prédire, en fonction des paramètres physiques, la période et l'amplitude maximale des oscillations d'un écoulement instable, localement autour des points de bifurcation.

D'une manière générale, ces objectifs sont extrêmement coûteux en temps de calcul car ils exigent un nombre important de simulations. Ces dernières doivent être exécutées une à une en faisant varier un paramètre à la fois. Elles doivent être ensuite analysées pour déterminer la stabilité de l'écoulement ou pour calculer l'amplitude maximale des oscillations.

Le premier objectif peut être atteint de manière plus ou moins grossière, la qualité du résultat dépendant du nombre de simulations effectuées. Le second objectif est très difficile à réaliser car au voisinage des points de bifurcation, l'amplitude des oscillations d'un écoulement instable augmente très lentement. Nous verrons plus loin que le temps nécessaire pour atteindre un cycle limite est d'autant plus grand que l'on est proche du point de bifurcation.

C'est pourquoi l'association d'une analyse mathématique et d'un calcul symbolique sur un modèle simple sont nécessaires pour atteindre les objectifs énoncés plus haut.

### 5.3.1 Analyse linéaire

D'après des observations expérimentales, Taitel, Y. *et al.* ont décrit le comportement des écoulements gaz-liquide dans les systèmes pipe-riser lorsque ceux-ci sont légèrement instables [163] :

*“La colonne liquide dans le riser est stable mais des quantités telles que la pression ou le taux de vide au pied du riser ont tendance à osciller de manière significative. Ces oscillations peuvent s'atténuer avec le temps et résulter en un écoulement stationnaire où les débits massiques de gaz et de liquide sont constants le long de la conduite. Ou bien, ces fluctuations peuvent se propager indéfiniment sous la forme d'un processus cyclique quasi-stationnaire dont l'amplitude est nettement supérieure à celle d'un flot intermittent normal.”*

L'analogie avec la dynamique de notre modèle est simple : considérons l'écoulement diphasique stationnaire qui est point d'équilibre du système (5.73) - (5.74). Ses variables  $X$  et  $Y$  sont données par les relations (5.50) - (5.55) et (5.59). Nous appliquons ensuite une perturbation à ce point en suivant la démarche décrite dans la section 4.1.1.3 pour en déduire des conditions initiales. L'écoulement est stable si la perturbation se dissipe dans le temps. Dans le cas contraire, il est considéré comme instable.

Traduisons ce raisonnement en langage mathématique : l'écoulement stationnaire donné par (5.50) - (5.55) et (5.59) est une solution  $(X, Y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^4$  du système (voir (5.73) - (5.74)) :

$$F(X, Y, p) = 0, \quad (5.90)$$

$$G(X, Y, p) = 0. \quad (5.91)$$

Il est aussi solution du système *réduit* (voir (5.80) - (5.81)) :

$$f(x, y, p) = 0, \quad (5.92)$$

$$g(x, y, p) = 0. \quad (5.93)$$

Pour le vérifier, nous remarquons tout d'abord que les équations algébriques (5.93) sont satisfaites car elles sont équivalentes au système d'équations (5.91) par l'intermédiaire de la relation (5.79). Les équations (5.90) sont aussi vérifiées. Pour s'en convaincre, il suffit de démontrer que la fonction  $Y_4$ , définie par :

$$Y_4(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{\rho_L^0(-1 + y_3 C_0) - \frac{P_S}{\mathcal{R}T} y_3 C_0} \quad (5.94)$$

$$\times \left[ \frac{1}{g l_p + L R_G^{pipe}} \frac{U_G^0 - y_1}{[P_S + g(x_1 + x_2)] - \rho_L^0(U_L^0 + y_3 u_d)} \right. \\ \left. - \frac{1}{\mathcal{R}T} \left\{ [P_S + g(x_1 + x_2)] y_2 [C_0(U_L^0 + y_1) + u_d] - P_S y_3 u_d \right\} \right]$$

est égale à la valeur stationnaire (5.55) de  $U_S^{out}$  lorsque  $x_1, x_2, y_1, y_2, y_3$  sont respectivement donnés par les formules (5.52), (5.53), (5.50), (5.51), et (5.54). Pour simplifier les calculs, il est avantageux d'exprimer l'ensemble des variables en fonction de  $P_{pipe}$  (voir section 5.2.5) et de remplacer  $[P_S + g(x_1 + x_2)]$  par  $P_{pipe}$ . Nous en déduisons finalement :

$$Y_4(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = U_L^0 + \frac{P_{pipe}(x_1, x_2)}{P_S} U_G^0 \stackrel{(5.55)}{=} U_S^{out} [P_{pipe}(x_1, x_2)].$$

L'écoulement stationnaire du système *réduit* (5.80) - (5.81) sera donc défini par les équations (5.50) - (5.54). Nous le noterons  $(x_0(p), y_0(p), p)$  :

$$f(x_0(p), y_0(p), p) = 0, \quad (5.95)$$

$$g(x_0(p), y_0(p), p) = 0. \quad (5.96)$$

Ses propriétés de stabilité (au sens de *Lyapunov* [77, 136]) résulte du théorème suivant (voir annexe A) [75] :

**Théorème 5.1** *Soit  $(X_0, Y_0)$ , un point d'équilibre du système algébro-différentiel :*

$$\frac{dX}{dt}(t) = f(X(t), Y(t)), \quad (5.97)$$

$$0 = g(X(t), Y(t)) \quad (5.98)$$

où  $X$  et  $Y$  sont respectivement des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^m$ . Soit  $\mathcal{U}$  un voisinage de  $(X_0, Y_0)$  dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ . Supposons que le système (5.97) - (5.98) satisfasse les deux conditions :

(C1) les fonctions  $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  et uniformément Lipschitz dans  $\mathcal{U}$ .

(C2)  $(D_Y g)^{-1}$  existe dans  $\mathcal{U}$ .

Alors  $(X_0, Y_0)$  est asymptotiquement stable si toutes les racines du polynôme :

$$P(\lambda) = \text{Det} \begin{pmatrix} D_X f(X_0, Y_0) - \lambda I_n & D_Y f(X_0, Y_0) \\ D_X g(X_0, Y_0) & D_Y g(X_0, Y_0) \end{pmatrix} \quad (5.99)$$

sont contenues dans le demi-plan négatif  $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) < 0\}$ ;  $I_n$  désigne la matrice identité de  $\mathbb{R}^n$ .

Pour que le théorème 5.1 puisse être appliqué au système (5.80) - (5.81) lorsque les paramètres sont fixés, il est nécessaire que les fonctions  $f$  et  $g$  définies par les formules (5.82) - (5.86), vérifient les deux conditions (C1) et (C2) par rapport aux variables  $x$  et  $y$ , dans un ensemble de la forme  $\mathcal{V}(p) \times \{p\} \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{11}$  où  $\mathcal{V}(p)$  est voisinage de  $(x_0(p), y_0(p))$  dans  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ .

La première condition est satisfaite de façon triviale par la fonction  $g$ , à  $p$  fixé et dans tout voisinage borné de  $(x_0(p), y_0(p))$ , car les coordonnées  $g_i(x, y, p)$  sont des polynômes en  $x$  et  $y$ , quelque soit  $i$  variant de 1 à 3; rappelons qu'une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  est *localement Lipschitz* grâce aux *théorème des accroissements finis*.

En ce qui concerne la fonction  $f$ , il suffit que le dénominateur de  $Y_4(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3)$  (voir (5.94)) ne s'annule pas, à  $p$  fixé, dans un voisinage de  $(x_0(p), y_0(p))$  pour que la condition (C1) soit satisfaite :

$$\begin{aligned} \rho_L^0(-1 + y_3 C_0) - \frac{P_S}{\mathcal{RT}} y_3 C_0 &\neq 0. \\ \iff \rho_L^0 [1 - (1 - \eta) y_3 C_0] &\neq 0 \end{aligned} \quad (5.100)$$

où  $\eta \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{\rho_L^0} \frac{P_S}{\mathcal{RT}} \ll 1$ .

Vérifions tout d'abord que l'inégalité (5.100) est satisfaite en  $(x_0(p), y_0(p), p)$ . Nous avons par la formule (5.54) :

$$y_3^{\text{statio}} = \frac{U_G^0 P_{\text{pipe}}}{C_0(P_S U_L^0 + P_{\text{pipe}} U_G^0) + P_S u_d}. \quad (5.101)$$

$1 - (1 - \eta) y_3^{stat} C_0$  est nul si et seulement si :

$$\begin{aligned} \frac{(1 - \eta) U_G^0 P_{pipe} C_0}{C_0 (P_S U_L^0 + P_{pipe} U_G^0) + P_S u_d} &= 1 \\ \iff -\frac{C_0 \eta U_G^0 P_{pipe}}{P_S} &= C_0 U_L^0 + u_d \end{aligned} \quad (5.102)$$

Ce qui est impossible puisque  $C_0$ ,  $\eta$ ,  $U_G^0$ ,  $P_{pipe}$ ,  $P_S$ ,  $U_L^0$  et  $u_d$  sont strictement positifs par définition. L'inégalité (5.100) est donc satisfaite en  $(x_0(p), y_0(p), p)$ .

Pour définir un ensemble  $\mathcal{V}_1(p) \times \{p\}$  où (5.100) reste valide ( $\mathcal{V}_1(p)$  est un voisinage de  $(x_0(p), y_0(p))$  dans  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ ), nous remarquons que l'amplitude des variables par rapport à leur valeur stationnaire décroît au cours du temps lorsque l'écoulement est asymptotiquement stable. Il existe donc un  $\epsilon_1(p) > 0$  tel que  $\forall \epsilon < \epsilon_1(p)$  et des vecteurs  $x_\epsilon$ ,  $y_\epsilon$  donnés par :

$$\begin{aligned} x_\epsilon &= (1 + \epsilon) x_0(p), \\ 0 &= g(x_\epsilon, y_\epsilon), \end{aligned}$$

la trajectoire :

$$\mathcal{T}_\epsilon = \left\{ (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3; t \geq t_0, x(t_0) = x_\epsilon, y(t_0) = y_\epsilon \right\} \quad (5.103)$$

soit contenue dans un voisinage borné  $\mathcal{V}_1(p) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$  de  $(x_0(p), y_0(p))$  où la condition (5.100) est satisfaite, quelque soit  $p \in \mathcal{P}$ ;  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{11}$  désigne l'ensemble des valeurs réelles des paramètres. En particulier,  $\mathcal{P} \subset (\mathbb{R}_+^*)^{11}$ .

En ce qui concerne la seconde condition (C2), nous avons vu dans la section 5.2.9 que  $D_y g(x_0(p), y_0(p), p)$  est singulière si et seulement si  $y_2 = 1/C_0$ . Ce qui signifie  $C_0 U_L^0 + u_d = 0$  lorsque  $y_2$  est égal à sa valeur stationnaire (5.89). C'est évidemment impossible car les paramètres  $C_0$ ,  $U_L^0$  et  $u_d$  sont strictement positifs par définition.

Lorsque l'écoulement est asymptotiquement stable, il existe par conséquent un  $\epsilon_2(p) > 0$  tel que  $\forall \epsilon < \epsilon_2(p)$ , la trajectoire  $\mathcal{T}_\epsilon$  soit contenue dans un voisinage borné  $\mathcal{V}_2(p) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$  de  $(x_0(p), y_0(p))$  où  $D_y g$  satisfait la condition (C2), quelque soit  $p \in \mathcal{P}$ . En choisissant  $\mathcal{V}(p)$  comme le plus petit voisinage (au sens de la mesure de *Lebesgue*) parmi  $\mathcal{V}_1(p)$  et  $\mathcal{V}_2(p)$ , nous en déduisons un voisinage  $\mathcal{V}(p)$  de  $(x_0(p), y_0(p))$  où le théorème 5.1 s'applique, à paramètres fixés.

D'après le théorème 5.1, il suffit donc que les racines du polynôme :

$$Pol(\nu, p) = Det \begin{pmatrix} D_x f(x_0(p), y_0(p), p) - \nu I_2 & D_y f(x_0(p), y_0(p), p) \\ D_x g(x_0(p), y_0(p), p) & D_y g(x_0(p), y_0(p), p) \end{pmatrix} \quad (5.104)$$

aient une partie réelle strictement négative pour que l'écoulement stationnaire du système (5.80) - (5.81) soit asymptotiquement stable. Il devient instable dès que l'une des parties réelles des racines de  $Pol(\nu, p)$  devient positive (voir annexe A).

La frontière de stabilité qui sépare les écoulements stationnaires stables et les flots permanents instables est donc définie par l'ensemble des paramètres  $p$  pour lesquels au moins l'une des racines de  $Pol(\nu, p)$  admet une partie réelle nulle. Traduisons ce résultat en langage mathématique. Soit  $\sigma(p)$ , l'ensemble des racines de  $Pol(\nu, p)$  :

$$\sigma(p) = \{ \lambda(p) \in \mathbb{C} / Pol(\lambda, p) = 0 \}.$$

Ce sont aussi les valeurs propres du système algébro-différentiel (5.80) - (5.81) (voir annexe A).

$D_y g(x_0(p), y_0(p), p)$  étant inversible (voir section 5.2.9), nous avons d'après la *formule de Schur* [64] :

$$Pol(\nu, p) = \text{Det} \left[ P(p) - \nu I_2 - Q(p)[S(p)]^{-1}R(p) \right] \text{Det} [S(p)]$$

où :

$$\begin{aligned} P(p) &= D_x f(x_0(p), y_0(p), p), \\ Q(p) &= D_y f(x_0(p), y_0(p), p), \\ R(p) &= D_x g(x_0(p), y_0(p), p), \\ S(p) &= D_y g(x_0(p), y_0(p), p). \end{aligned}$$

Ainsi, les racines de  $Pol(\nu, p)$  sont aussi celles du polynôme :

$$T(\nu, p) = \text{Det} \left[ P(p) - \nu I_2 - Q(p)[S(p)]^{-1}R(p) \right]. \quad (5.105)$$

$T(\nu, p)$  est le polynôme caractéristique de la matrice (2,2) :  $P(p) - Q(p)[S(p)]^{-1}R(p)$ . Il est donc égal à [74] :

$$T(\nu, p) = \nu^2 - \text{Tr} \left[ P(p) - Q(p)[S(p)]^{-1}R(p) \right] \nu + \text{Det} \left[ P(p) - Q(p)[S(p)]^{-1}R(p) \right]$$

dont le discriminant vaut :

$$\Delta(p) = \left\{ \text{Tr} \left[ P(p) - Q(p)[S(p)]^{-1}R(p) \right] \right\}^2 - 4 \text{Det} \left[ P(p) - Q(p)[S(p)]^{-1}R(p) \right].$$

Étant donné la complexité des expressions des coordonnées de  $(x_0(p), y_0(p), p)$  (voir (5.50) - (5.54)), il est insensé de vouloir calculer à la main les formules des racines de  $T(\nu, p)$  en fonction des paramètres  $p$ . Seul un calcul symbolique à l'aide d'un logiciel tel que *Maple* ou *Mathematica* peut fournir un résultat rapide et juste. C'est ce que nous avons fait en programmant l'analyse du système (5.43) - (5.49) dans *Maple*. Ce dernier fournit l'expression analytique des racines de  $T(\nu, p)$  en fonctions des paramètres.

Au voisinage des points de bifurcation (i.e. où la partie réelle d'une ou plusieurs valeurs propres s'annule [77]), les racines, notées  $\lambda_+(p)$  et  $\lambda_-(p)$  sont complexes :

$$\lambda_+(p) = \frac{1}{2} \left\{ \text{Tr} \left[ P(p) - Q(p)[S(p)]^{-1}R(p) \right] + i\sqrt{\Delta(p)} \right\}, \quad (5.106)$$

$$\lambda_-(p) = \frac{1}{2} \left\{ \text{Tr} \left[ P(p) - Q(p)[S(p)]^{-1}R(p) \right] - i\sqrt{\Delta(p)} \right\}. \quad (5.107)$$

Leur partie réelle s'annule lorsque :

$$\text{Tr} \left[ P(p) - Q(p)[S(p)]^{-1}R(p) \right] = 0.$$

La frontière de stabilité qui sépare les écoulements stationnaires stables et les flots permanents instables est donc fournie par la relation algébrique :

$$\mathcal{R}(U_L^0, U_G^0, P_S, L, H, D, \rho_L^0, T, \sigma) = 0 \quad (5.108)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(p) &= \text{Tr} [D_x f(x_0(p), y_0(p), p)] \\ &- \text{Tr} \left[ D_y f(x_0(p), y_0(p), p) [D_y g(x_0(p), y_0(p), p)]^{-1} D_x g(x_0(p), y_0(p), p) \right]. \end{aligned} \quad (5.109)$$

### 5.3.2 Validation expérimentale de la frontière de stabilité

Bien qu'elle soit trop longue pour être écrite dans cette thèse, l'expression (5.108) de la frontière de stabilité est explicite par rapport à l'ensemble des paramètres physiques de notre modèle. Il est donc facile d'effectuer des calculs symboliques pour en déterminer les propriétés. Il est aussi très facile de la tracer : le logiciel *Maple* génère sans difficulté une fonction en langage C ou Fortran pour calculer la valeur de la fonction  $\mathcal{R}$  en tout point de l'espace des paramètres.

Taitel, Y. a proposé un critère de stabilité des écoulements diphasiques dans les systèmes pipe-riser [154]. Comme nous, il suppose que l'écoulement est *stratifié* dans le pipe. Il admet aussi que le flot est *intermittent* dans le riser. L'expression de sa frontière de stabilité n'est malheureusement pas explicite car il faut résoudre des équations non linéaires de manière itérative pour déterminer la fraction liquide  $R_L^{riser}$  dans le riser ainsi que les taux de vide dans le pipe et dans le chapeau des bulles pénétrant dans le riser :  $R_G^{pipe}$  et  $R_G^{cap}$  (cf. figure 5.3). Dès que ces valeurs sont connues, le critère de stabilité est exprimé de manière très simple :

$$P_S > R_L^{riser} \left[ \frac{R_G^{pipe}}{R_G^{cap}} L - H \right] \rho_L g \implies \text{écoulement stable.} \quad (5.110)$$

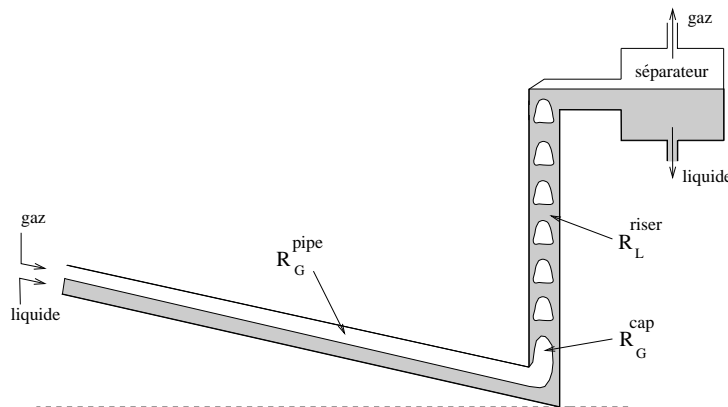


Figure 5.3 : Critère de stabilité de Taitel.

Taitel, Y. *et al.* ont validé ce résultat sur différents essais où le pipe avait une longueur additionnelle  $l_p$  ne contenant que du gaz (voir section 5.2.6) [163, 173]. Le critère est satisfaisant lorsque  $l_p$  est supérieur ou égal à la longueur  $L$  du pipe *diphasique* (cf. figure 5.2). Autrement, la prédiction des instabilités est d'autant plus mauvaise que  $l_p$  est petit, voire inexistante lorsque  $l_p/L < 0.18$ . L'intérêt pratique du critère de Taitel, Y. est donc très limité.

En ce qui concerne la prédiction du *severe slugging*, Bøe, A. a proposé un critère extrêmement simple qui fournit la valeur du débit liquide au dessus de laquelle le phénomène se produit [24, 96, 173] :

$$U_L^0 \geq \frac{P_{atm}}{\rho_L^0 g L R_G^{pipe}} U_G^0 \implies \text{severe slugging.} \quad (5.111)$$

Ses calculs s'appuient sur une équation de bilan des forces agissant sur le bouchon de liquide contenu dans le riser au cours de la seconde étape d'un cycle du *severe slugging* (cf. figure

1.3). Ces forces sont la pression dans le pipe et le poids de la colonne liquide contenue dans le riser. Bøe, A. en déduit l'inégalité (5.111) en supposant que le niveau liquide dans le riser doit atteindre le sommet du riser avant que le gaz ne pénètre au pied de la colonne pour que le *severe slugging* persiste (*cf.* figures 1.2 et 1.4).

Dans le cas du système expérimental de Taitel, Y. (*cf.* figure 5.2), le critère de Bøe est très similaire :

$$U_L^0 \geq \frac{P_{atm}}{\rho_L^0 g (LR_G^{pipe} + l_p)} U_G^0 \implies \textit{severe slugging}. \quad (5.112)$$

Lorsque des débits massiques sont imposés en entrée du pipe au lieu de débits volumiques, le critère de Bøe s'écrit aussi [127] :

$$q_L^0 \geq \frac{\mathcal{R}T}{gLR_G^{pipe}} q_G^0 \implies \textit{severe slugging}. \quad (5.113)$$

Des cartes d'écoulements expérimentales dédiées à l'étude du *severe slugging* sont disponibles dans la littérature. Nous les emploierons pour valider l'expression de notre frontière de stabilité (5.108). Nous comparerons aussi nos résultats par rapport au critère de Bøe qui sert généralement de référence pour toutes les études expérimentales sur le *severe slugging*.

### 5.3.2.1 Essais de Taitel

L'ensemble des essais de Taitel, Y. *et al.* est présenté dans un rapport de l'Université de Tulsa [173]. Quelques essais sont aussi reportés dans un article [163]. Dans cette section, trois cartes d'écoulements exprimées en fonction des paramètres  $U_L^0$  et  $U_G^0$  seront reproduites. Tous les autres paramètres sont fixés, excepté l'angle d'inclinaison du pipe par rapport à l'horizontale qui vaut  $-1^\circ$  pour la première carte,  $-2^\circ$  pour la seconde et  $-5^\circ$  pour la troisième. Les valeurs des autres paramètres sont :

$$\begin{aligned} P_S &= 10^5 \text{ Pa}, L = 9.1 \text{ m}, l_p = 1.69 \text{ m}, H = 3 \text{ m}, D = 0.0254 \text{ m}, \theta_r = 90^\circ, \\ \rho_L^0 &= 998.2071 \text{ kg.m}^{-3}, T = 293.15 \text{ K}, \sigma = 72.75 \cdot 10^{-3} \text{ N.m}^{-1}. \end{aligned}$$

Le critère de Bøe fournit le débit liquide au dessus duquel le *severe slugging* se produit mais il ne prédit pas de valeur critique au delà de laquelle le phénomène disparaît (rappelons que le *severe slugging* n'a lieu qu'à faibles débits, liquide et gazeux). Or, nous avons vu dans la section 5.2.2 que le taux de vide tend vers zéro lorsque le débit liquide approche la valeur critique (5.26) :

$$(U_L^0)_{crit} = 149 \left[ \frac{D}{4} \right]^{2/3} |\sin \theta|^{1/2}. \quad (5.114)$$

Au voisinage de cette valeur, l'écoulement est *dispersé* ou presque monophasique liquide. Nous en déduisons le critère supplémentaire :

$$U_L^0 > 149 \left[ \frac{D}{4} \right]^{2/3} |\sin \theta|^{1/2} \implies \text{pas de } \textit{severe slugging}. \quad (5.115)$$

Une combinaison des critères (5.111) et (5.115) définira par conséquent la région de l'espace des paramètres où le *severe slugging* est susceptible de se produire. La frontière de ce domaine a été systématiquement tracée sur les trois figures 5.4, 5.5 et 5.6. Une première observation de ces trois cartes confirme la justesse du critère de Bøe : celui-ci est efficace pour définir un débit liquide au dessus duquel le *severe slugging* apparaît. Néanmoins, le débit critique (5.114) (voir par exemple la droite  $U_L^0 \simeq 0.674 \text{ m.s}^{-1}$  sur la figure (5.4)) surestime largement le phénomène.



En ce qui concerne notre critère (5.108), deux versions sont proposées pour étudier l'influence de la loi de glissement qui est imposée dans le riser ; rappelons qu'au voisinage des points de bifurcation, l'écoulement peut être *intermittent* ou *dispersé* dans la conduite verticale (voir section 5.2.3). Dans les deux cas, nous obtenons une meilleure prédiction de la transition entre les écoulements stables et instables lorsque les débits liquides sont inférieurs à  $(U_L^0)_{crit}$ .

Les régions définies par ces deux versions contiennent cependant des écoulements stables. Ce sont en particulier les flots dont les débits sont situés en dessous de la région définie par le critère de Bøe. Des calculs plus approfondis montrent que cette surestimation des instabilités est d'autant plus grande que la paramètre  $C_0$  est proche de un. C'est pourquoi le cas *dispersé* donne de moins bons résultats (voir par exemple les débits  $U_G$  situés autour de  $0.2 \text{ m.s}^{-1}$  sur la figure 5.6).

Pour obtenir une bonne approximation de la région où les instabilités apparaissent, nous constatons qu'il suffit de prendre l'intersection entre la région définie par le critère de Bøe et celle limitée par la frontière (5.108) (avec un écoulement *intermittent* dans le riser). Ce constat est particulier aux essais de Taitel, Y, *et al.* car nous verrons dans les sections 5.3.2.2 et 5.3.2.3 que des instabilités peuvent exister lorsque :

$$U_L^0 < (U_L^0)_{B\o e}$$

où  $(U_L^0)_{B\o e}$  désigne le débit critique du critère Bøe (5.111) :

$$(U_L^0)_{B\o e} = \frac{P_{atm}}{\rho_L^0 g (LR_G^{pipe} + l_p)} U_G^0. \quad (5.116)$$

Rappelons que le *severe slugging* est caractérisé par des bouchons d'une longueur supérieure ou égale à la hauteur du riser. Les instabilités que nous évoquons ici sont des écoulements où la longueur des bouchons est inférieure à la hauteur du riser mais supérieure à celle d'un écoulement *intermittent* normal.

### 5.3.2.2 Essais de Fabre

Les essais de Fabre, J. *et al.* sont détaillés dans deux articles [59, 61]. Une seule carte d'écoulement est présentée où l'angle d'inclinaison du pipe est négatif :  $\theta_p = -1\% \simeq 0.57^\circ$ . Les paramètres étudiés sont les débits imposés en entrée de la conduite :  $U_L^0$  et  $U_G^0$ . Les autres paramètres sont fixés :

$$\begin{aligned} P_S &= 10^5 \text{ Pa}, L = 25 \text{ m}, l_p = 0 \text{ m}, H = 13.5 \text{ m}, D = 0.053 \text{ m}, \theta_r = 90^\circ, \\ \rho_L^0 &= 998.2071 \text{ kg.m}^{-3}, T = 293.15 \text{ K}, \sigma = 72.75 \cdot 10^{-3} \text{ N.m}^{-1}. \end{aligned}$$

La carte de Fabre, J. *et al.* est reproduite sur la figure 5.7. Nous constatons que certains des écoulements instables sont situés en dessous de la région définie par le critère de Bøe. Ces flots ne sont pas du *severe slugging*. Ce sont des écoulements instables dont la longueur des bouchons est inférieure à celle du riser mais supérieur aux dimensions usuelles des bouchons d'un écoulement *intermittent*. Ils sont donc contenus dans la zone de *transition* séparant les flots stables et ceux du type *severe slugging*.

Notre critère (5.108) donne une bonne prédiction des instabilités lorsqu'un écoulement *dispersé* est imposé dans le riser. Dans le cas *intermittent*, il ne prévoit pas que certains écoulements soient instables alors que Fabre, J. *et al.* l'affirment. Ce sont les deux flots où  $U_G^0$  est égal  $1 \text{ m.s}^{-1}$  et où  $U_L^0$  vaut respectivement  $0.064$  et  $0.127 \text{ m.s}^{-1}$ . Les auteurs remarquent

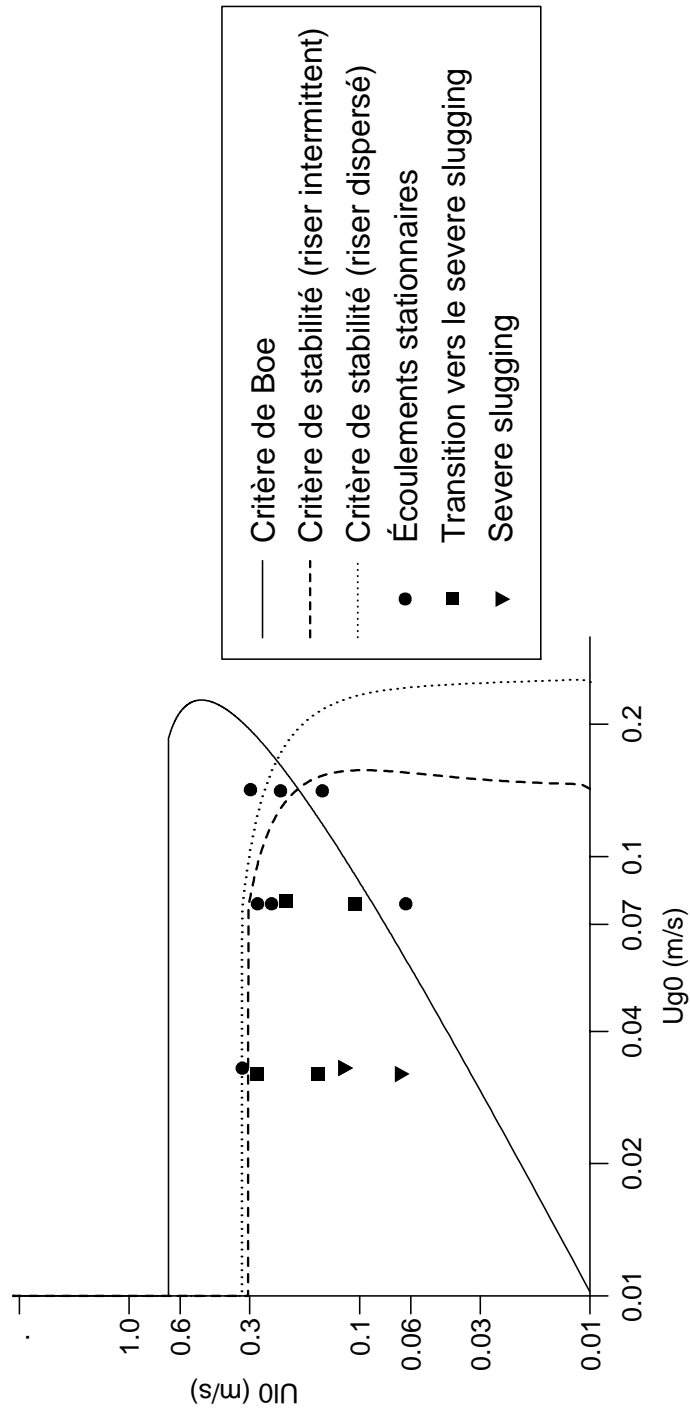


Figure 5.4 : Essais de Taitel : carte N°1

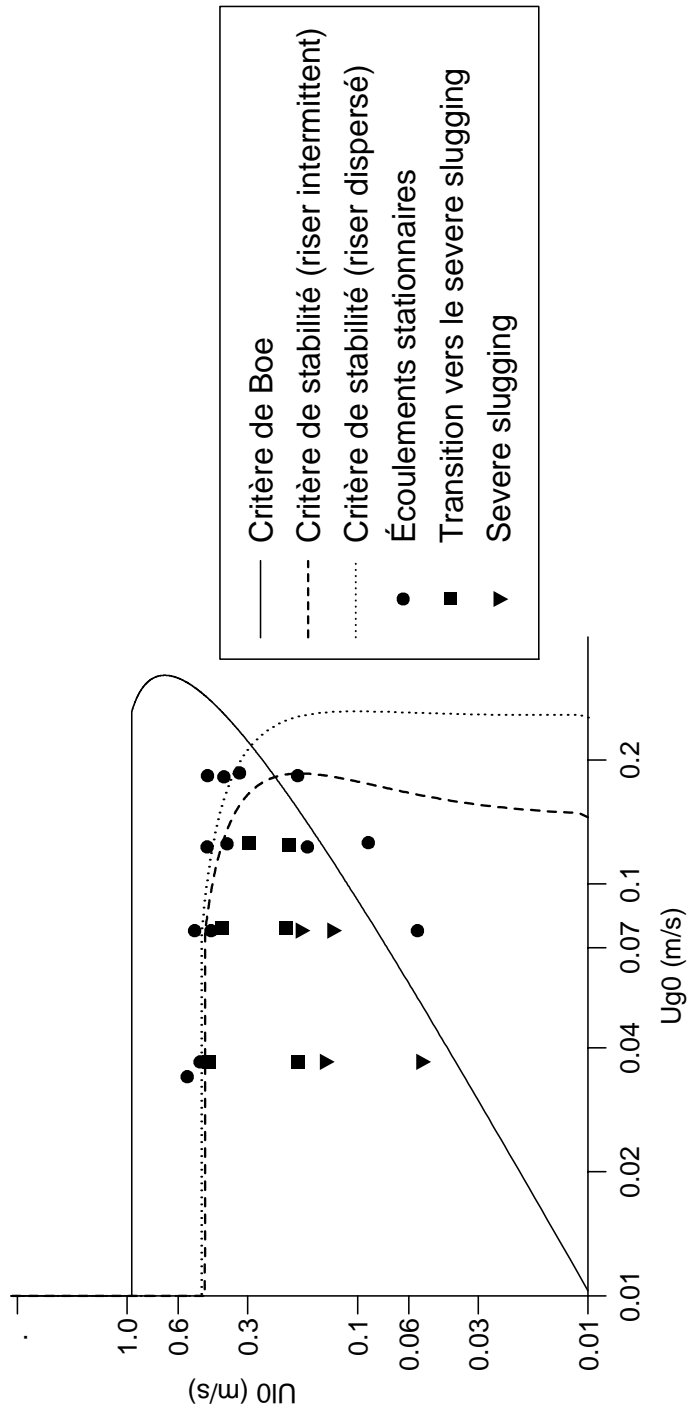


Figure 5.5 : Essais de Taitel : carte N°2

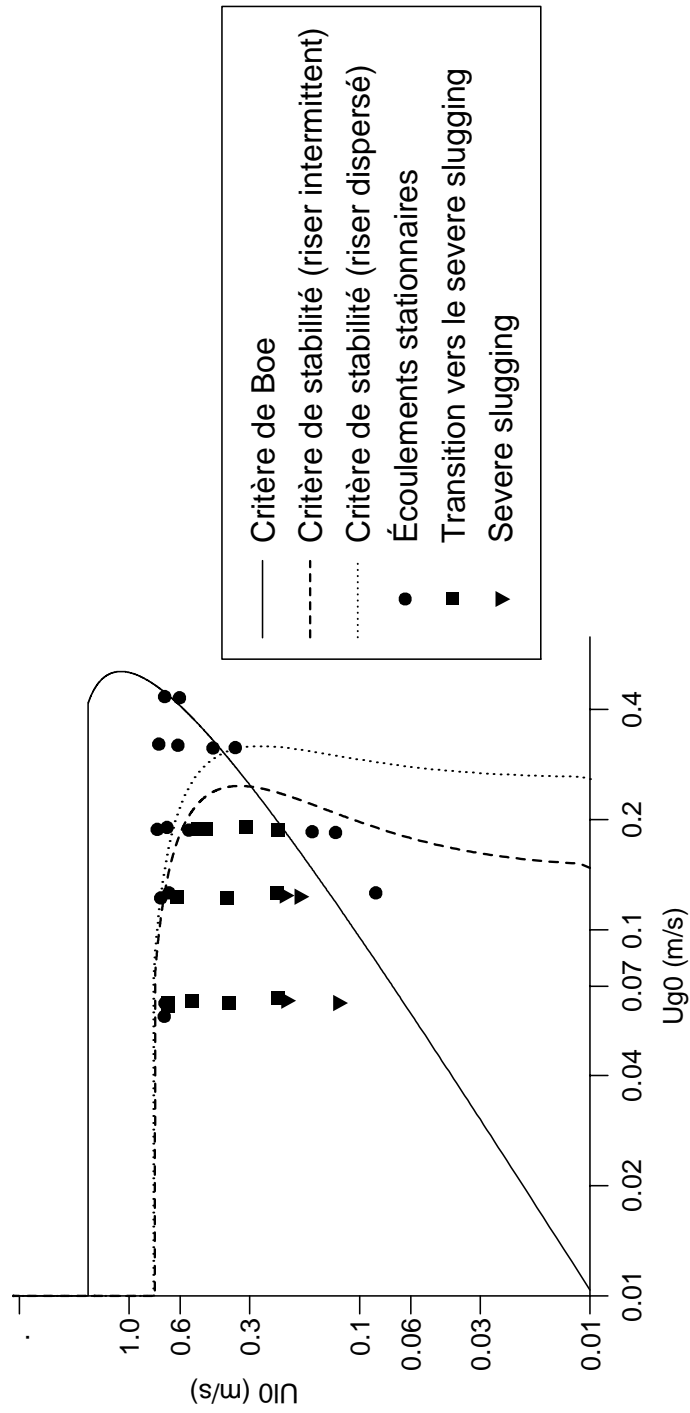


Figure 5.6 : Essais de Taitel : carte N°3

cependant qu'il est parfois difficile de distinguer expérimentalement un écoulement instable d'un écoulement *intermittent* lorsque les bouchons de liquide n'ont pas une taille très significative. Ces deux exemples doivent être proches de cette situation.

### 5.3.2.3 Essais de Schmidt

Contrairement aux sections précédentes où la phase liquide était de l'eau, Schmidt, Z. utilisa du kérosène dans ses essais. La carte présentée dans cette section est disponible dans plusieurs références [141, 143, 154]. Les paramètres variables sont les débits imposés en entrée de la conduite :  $U_L^0$  et  $U_G^0$ . Les autres paramètres sont fixés :

$$\begin{aligned} P_S &= 10^5 \text{ Pa}, L = 30.48 \text{ m}, l_p = 0 \text{ m}, H = 15.24 \text{ m}, D = 0.0508 \text{ m}, \theta_p = -5^\circ, \theta_r = 90^\circ, \\ \rho_L^0 &= 824.9527 \text{ kg.m}^{-3}, T = 293.15 \text{ K}, \sigma = 28 \cdot 10^{-3} \text{ N.m}^{-1}. \end{aligned}$$

*Remarque* : la tension superficielle du kérosène peut varier entre 23 et 32  $\text{kg.s}^{-2}$  à 20° C [92]. Nous avons arbitrairement choisi une valeur intermédiaire car Schmidt, Z. ne donne aucun renseignement à ce sujet. Notons aussi que l'auteur ne donne aucune indication sur la valeur de la pression dans le séparateur. Nous avons imposé  $P_S = 1$  bar.

La carte de Schmidt, Z. est reproduite sur la figure 5.8. Celle-ci est de loin la plus détaillée parmi toutes les cartes que nous avons présentées jusque ici. Le critère de Bøe fournit toujours une bonne prédiction du débit liquide au delà duquel le *severe slugging* apparaît.

Deux versions du critère (5.108) sont proposées en fonction de l'écoulement qui est imposé dans le riser. Dans les deux cas, nous obtenons une bonne approximation de la frontière de la zone de transition entre le *severe slugging* et les écoulements stables. Contrairement au cas *intermittent*, la région définie par (5.108) dans le cas *dispersé* contient l'ensemble des écoulements instables mesurés par Schmidt, Z. Cependant, elle surestime l'instabilité des écoulements dont le débit  $U_L^0$  est inférieur approximativement à 0.06  $\text{m.s}^{-1}$ .

### 5.3.2.4 Conclusion

Sur l'ensemble des essais expérimentaux que nous avons présentés, la frontière de stabilité (5.108) fournit une bonne approximation de la frontière réelle de stabilité des écoulements. La région qu'elle définit surestime parfois la zone d'instabilité quand les débits liquides sont inférieurs à  $(U_L^0)_{B\o e}$  (voir (5.116)).

Une solution peut consister à prendre l'intersection entre les régions définies par le critère de Bøe et notre frontière (5.108). Elle donne de bons résultats si la zone de transition entre le *severe slugging* et les flots stables est contenue dans la région définie par le critère de Bøe (voir section 5.3.2.1).

Néanmoins, des instabilités sont possibles lorsque  $U_L^0 < (U_L^0)_{B\o e}$  (voir sections 5.3.2.2 et 5.3.2.3). La frontière de stabilité (5.108) fournit dans ce cas une très bonne approximation de la région où les écoulements sont instables.

### 5.3.3 Analyse non linéaire

Afin de prédire la période et l'amplitude maximale des oscillations d'un écoulement instable en fonction des paramètres physiques du problème, nous effectuons une analyse non linéaire de nos équations. Cette approche est évidemment beaucoup plus complexe que la linéarisation exposée dans la section 5.3.1. Elle nécessite en outre la réduction du modèle en un système composé

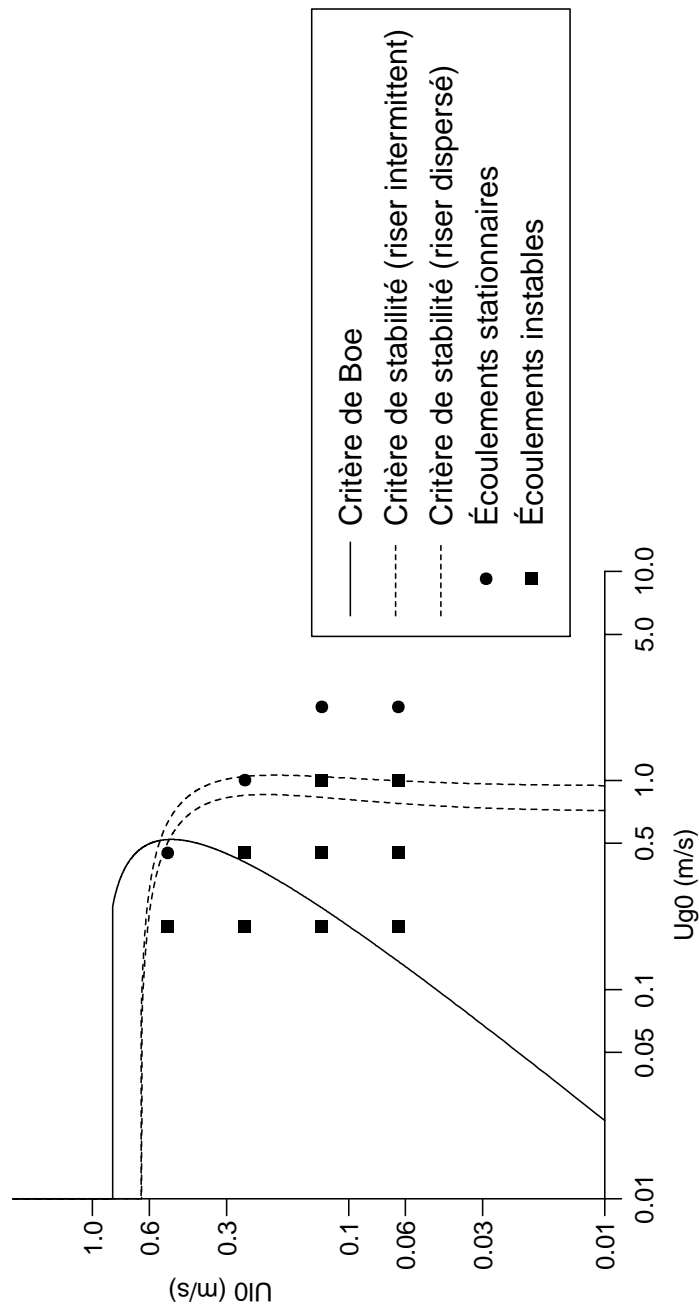


Figure 5.7 : *Essais de Fabre*

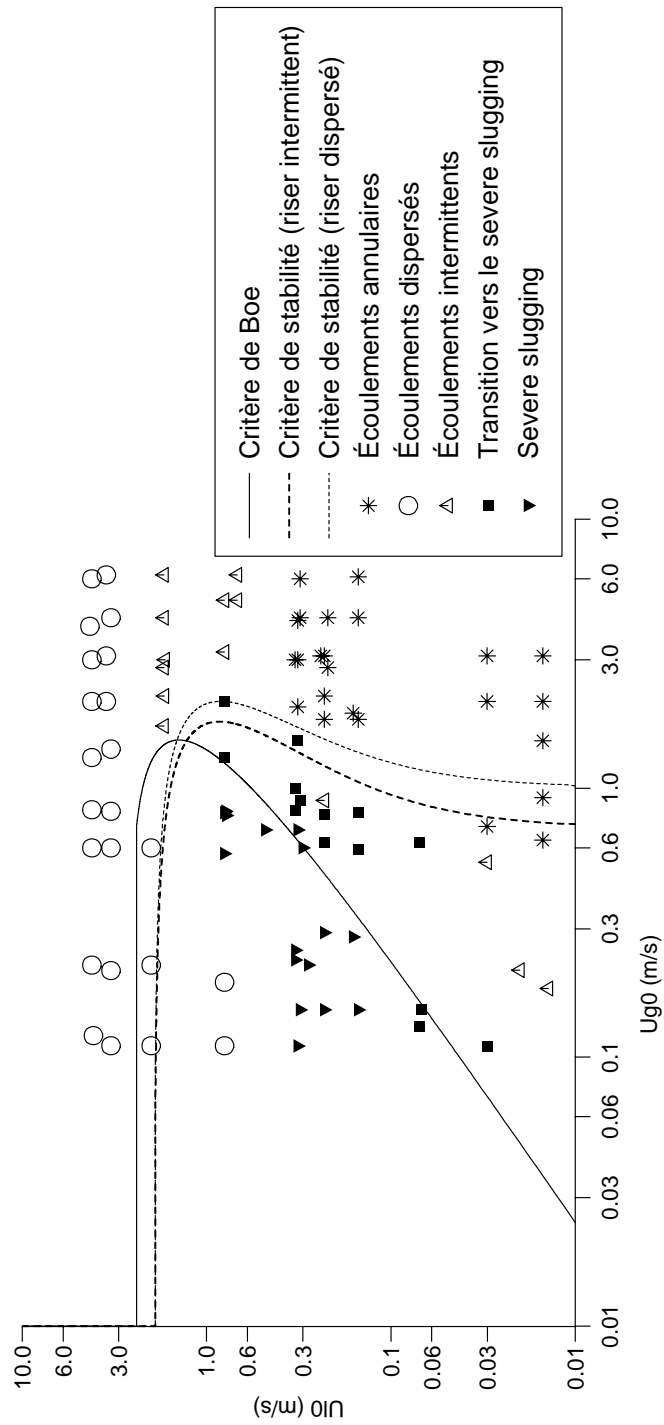


Figure 5.8 : Essais de Schmidt

exclusivement d'équations différentielles. Les calculs seront réalisés de manière symbolique grâce au logiciel *Maple*. Nous démontrerons alors sur des exemples que la bifurcation à l'origine des instabilités observées pour les écoulements diphasiques dans les systèmes pipe-riser est du type *Hopf* [77, 103].

### 5.3.3.1 Réduction du système

Afin d'appliquer les méthodes classiques de la théorie des bifurcations à notre problème, il est nécessaire de réduire le système (5.80) - (5.81) en un système d'équations différentielles. Cette réduction consiste à résoudre les équations algébriques (5.81) :

$$\begin{aligned} g_1(x, y, p) &= x_1 - \frac{1}{2} H \rho_L^0 [(1 - y_2) + (1 - y_3)], \\ g_2(x, y, p) &= x_2 - \frac{1}{2} \frac{H}{\mathcal{RT}} [X_3(x_1, x_2) y_2 + P_S y_3], \\ g_3(x, y, p) &= y_1 - y_2 [C_0 (U_L^0 + y_1) + u_d], \end{aligned}$$

par rapport aux variables  $x_1$ ,  $x_2$  et la fonction  $X_3$ . Nous en déduisons les expressions des variables algébriques en fonction de  $x_1$  et  $x_2$  :

$$y_1(x_1, x_2) = 2 \frac{C_0 U_L^0 [x_2 \mathcal{RT} \rho_L^0 + P_S (x_1 - H \rho_L^0)] + u_d [x_2 \mathcal{RT} \rho_L^0 + P_S (x_1 - H \rho_L^0)]}{H \rho_L^0 [X_3(x_1, x_2) - P_S] - 2C_0 [x_2 \mathcal{RT} \rho_L^0 + P_S (x_1 - H \rho_L^0)]}, \quad (5.117)$$

$$y_2(x_1, x_2) = 2 \frac{P_S (x_1 - H \rho_L^0) + x_2 \mathcal{RT} \rho_L^0}{H \rho_L^0 [X_3(x_1, x_2) - P_S]}, \quad (5.118)$$

$$y_3(x_1, x_2) = -2 \frac{X_3(x_1, x_2) (x_1 - H \rho_L^0) + x_2 \mathcal{RT} \rho_L^0}{H \rho_L^0 [X_3(x_1, x_2) - P_S]}. \quad (5.119)$$

En remplaçant  $y_1$ ,  $y_2$  et  $y_3$  par ces formules dans l'équation (5.80), nous obtenons un système différentiel de la forme :

$$\frac{dx}{dt}(t) = h(x(t), p) \quad (5.120)$$

où nous avons posé :

$$h(x, p) = f(x_1, x_2, y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2), y_3(x_1, x_2), p).$$

Le point  $(x_0(p), p)$  (voir section 5.3.1) définit donc l'écoulement stationnaire du nouveau système (5.120). Les bifurcations de notre problème seront données par les amplitudes maximales des solutions instables de (5.120) et dont l'état initial est proche du point d'équilibre  $(x_0(p), p)$ .

### 5.3.3.2 Changement de variables

Pour simplifier l'analyse, on effectue généralement un changement de variables. Celui-ci consiste à remplacer l'analyse autour du point d'équilibre  $(x_0(p), p)$  par une étude locale autour du point  $(0, p)$ . Il suffit pour cela de reprendre les équations initiales (5.73) - (5.74) et de remplacer  $X(t)$  par  $X(t) + X_0(p)$  et  $Y(t)$  par  $Y(t) + Y_0(p)$ ;  $(X_0(p), Y_0(p), p)$  désigne l'écoulement stationnaire du système (5.90) - (5.91) et est donné par les formules par (5.50) - (5.55) et (5.59) :

$$\frac{dX}{dt}(t) = F(X(t) + X_0(p), Y(t) + Y_0(p), p), \quad (5.121)$$

$$0 = G(X(t) + X_0(p), Y(t) + Y_0(p), p). \quad (5.122)$$



En réduisant l'index du système de la même manière que celle décrite dans la section 5.2.9, nous obtenons le système :

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t) + x_0(p), y(t) + y_0(p), p), \quad (5.123)$$

$$0 = g(x(t) + x_0(p), y(t) + y_0(p), p), \quad (5.124)$$

où  $f$  et  $g$  sont données par les formules (5.82) - (5.86). Rappelons que  $(x_0(p), y_0(p), p)$  désigne l'écoulement stationnaire du système *réduit* (5.80) - (5.81) et est défini par les équations (5.50) - (5.54).

En remplaçant les coordonnées  $x_i$  par  $x_i + x_i^0(p)$ ,  $i = 1, 2$  et  $y_j$  par  $y_j + y_j^0(p)$ ,  $j = 1, 3$ , dans les relations (5.117) - (5.119), nous en déduisons l'expression des variables algébriques en fonction des variables différentielles :

$$y + y_0(p) = \phi(x + x_0(p))$$

où la fonction  $\phi$  :

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2) &\longmapsto (\phi_1(x_1, x_2), \phi_2(x_1, x_2), \phi_3(x_1, x_2)) \end{aligned}$$

est définie par :

$$\begin{aligned} \phi_1(x_1, x_2) &\stackrel{(5.117)}{=} y_1(x_1, x_2), \\ \phi_2(x_1, x_2) &\stackrel{(5.118)}{=} y_2(x_1, x_2), \\ \phi_3(x_1, x_2) &\stackrel{(5.119)}{=} y_3(x_1, x_2). \end{aligned}$$

En insérant ce résultat dans (5.123), nous obtenons le système différentiel :

$$\frac{dx}{dt}(t) = k(x(t), p) \stackrel{\text{déf}}{=} f(x(t) + x_0(p), \phi(x(t) + x_0(p)), p). \quad (5.125)$$

que nous pouvons écrire aussi sous la forme :

$$\frac{dx_1}{dt}(t) = k_1(x_1(t), x_2(t), p), \quad (5.126)$$

$$\frac{dx_2}{dt}(t) = k_2(x_1(t), x_2(t), p). \quad (5.127)$$

Désormais, le second membre du système différentiel admet  $(0, p)$  comme point d'équilibre, quelque soit  $p \in \mathcal{P}$  car :

$$k(0, p) \stackrel{(5.125)}{=} f(x_0(p), \phi(x_0(p)), p) \stackrel{(5.96)}{=} f(x_0(p), y_0(p), p) \stackrel{(5.95)}{=} 0. \quad (5.128)$$

Rappelons que  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{11}$  désigne l'ensemble des valeurs réelles des paramètres (voir section 5.3.1).

### 5.3.3.3 Mise sous formes normales

La période et l'amplitude maximale des oscillations des solutions instables au voisinage de la frontière de stabilité sont données par un calcul de bifurcation. Plusieurs approches sont possibles : méthode de Lyapunov-Schmidt [72], méthode de Lindstedt-Poincaré [67], méthode de réduction sur variétés centrales et mise sous formes normales [77, 93], etc. Dans notre cas, nous allons voir que cette dernière méthode est extrêmement simple à appliquer.

Tout d'abord, nous devons déterminer les valeurs propres de la matrice jacobienne  $\mathcal{J}(p)$  du système (5.125) au point d'équilibre  $(0, p)$ . Cette matrice est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(p) = D_x k(0, p) &= D_x f(x_0(p), \phi(x_0(p)), p) + D_y f(x_0(p), \phi(x_0(p)), p) \cdot D_x \phi(x_0(p)) \\ &= D_x f(x_0(p), y_0(p), p) + D_y f(x_0(p), y_0(p), p) \cdot D_x \phi(x_0(p)). \end{aligned} \quad (5.129)$$

Par définition de  $\phi$ , nous avons :

$$0 \stackrel{(5.124)}{=} g(x + x_0(p), y + y_0(p), p) = g(x + x_0(p), \phi(x + x_0(p)), p) \quad (5.130)$$

pour tout  $x$  contenu dans le domaine de définition de  $\phi$ . D'après la section 5.2.9, il existe toujours un voisinage  $\mathcal{U}(p)$  de  $(0, 0)$  lorsque  $p$  est proche de sa valeur critique (i.e. au voisinage de la frontière de stabilité des écoulements) tel que (5.130) soit vraie pour tout  $(x, y)$  dans  $\mathcal{U}(p)$  et tel que  $D_y g$  soit inversible dans  $\mathcal{U}(p) \times p$ .

En dérivant (5.130) par rapport à  $x$ , nous en déduisons que  $\forall x/(x, y) \in \mathcal{U}(p)$  :

$$\begin{aligned} 0 &= D_x g(x + x_0(p), \phi(x + x_0(p)), p) + D_y g(x + x_0(p), \phi(x + x_0(p)), p) \cdot D_x \phi(x + x_0(p)) \\ \implies D_x \phi(x + x_0(p)) &= - [D_y g(x + x_0(p), \phi(x + x_0(p)), p)]^{-1} \cdot D_x g(x + x_0(p), \phi(x + x_0(p)), p). \end{aligned}$$

En particulier, quand  $x = 0$  :

$$\begin{aligned} D_x \phi(x_0(p)) &= - [D_y g(x_0(p), \phi(x_0(p)), p)]^{-1} \cdot D_x g(x_0(p), \phi(x_0(p)), p) \\ &= - [D_y g(x_0(p), y_0(p), p)]^{-1} \cdot D_x g(x_0(p), y_0(p), p). \end{aligned}$$

En insérant ce résultat dans (5.129), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(p) &= D_x f(x_0(p), y_0(p), p) \\ &\quad - [D_y f(x_0(p), y_0(p), p)]^{-1} \cdot D_y g(x_0(p), y_0(p), p) \cdot D_x g(x_0(p), y_0(p), p). \end{aligned} \quad (5.131)$$

Les valeurs propres de  $\mathcal{J}(p)$  sont donc les racines du polynôme  $T(\mu, p)$  que nous avons défini dans la section 5.3.1 :

$$T(\mu, p) \stackrel{(5.105)}{=} \text{Det} \left[ P(p) - \mu I_2 - Q(p)[S(p)]^{-1}R(p) \right] \quad (5.132)$$

et où nous avons posé :

$$\begin{aligned} P(p) &= D_x f(x_0(p), y_0(p), p), \\ Q(p) &= D_y f(x_0(p), y_0(p), p), \\ R(p) &= D_x g(x_0(p), y_0(p), p), \\ S(p) &= D_y g(x_0(p), y_0(p), p). \end{aligned}$$

Les expressions des valeurs propres de  $\mathcal{J}(p)$  sont donc fournies par les formules (5.106) et (5.107) au voisinage des points de bifurcation.

D'après la théorie des équations différentielles ordinaires, la stabilité de l'écoulement stationnaire  $(x_0(p), y_0(p), p)$  change de statut dès que la partie réelle de ces valeurs propres change de signe [77]. Lorsque les paramètres satisfont la relation (5.108), i.e.  $p = p_c$ , les valeurs de  $\mathcal{J}(p_c)$  sont imaginaires pures et conjuguées :

$$\lambda_+(p_c) = i\omega, \lambda_-(p_c) = -i\omega, \quad (5.133)$$

$$\omega = \frac{1}{2} \left[ \left\{ \text{Tr} \left[ P(p_c) - Q(p_c)[S(p_c)]^{-1}R(p_c) \right] \right\}^2 - 4 \text{Det} \left[ P(p_c) - Q(p_c)[S(p_c)]^{-1}R(p_c) \right] \right]^{1/2}.$$

D'une manière générale, lorsque la matrice jacobienne d'un système différentiel non linéaire

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (5.134)$$

n'admet pas de valeurs propres à partie réelle nulle en un point d'équilibre  $x_0$  (on dit que  $x_0$  *hyperbolique*), la dynamique dans un voisinage  $\mathcal{U}$  de ce point est sans ambiguïté car elle est paramétrée par les variétés locales, stable et instable, de  $x_0$  (voir figure 5.9) [77] :

$$\begin{aligned} W_{loc}^s(x_0) &= \{x \in \mathcal{U} / \phi_t(x) \rightarrow x_0 \text{ lorsque } t \rightarrow \infty \text{ et } \phi_t(x) \in \mathcal{U}, \forall t \geq 0\}, \\ W_{loc}^u(x_0) &= \{x \in \mathcal{U} / \phi_t(x) \rightarrow x_0 \text{ lorsque } t \rightarrow -\infty \text{ et } \phi_t(x) \in \mathcal{U}, \forall t \leq 0\}. \end{aligned}$$

$\phi_t$  est une fonction de  $\mathcal{U}$  dans  $\mathcal{U}$  qui symbolise le flot local du système différentiel. Elle est définie par :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\phi_t(x)]|_{t=\tau} &= f[\phi_\tau(x)], \\ \phi_0(x) &= x, \end{aligned} \quad (5.135)$$

pour  $x \in \mathcal{U}$  et  $\tau$  compris entre 0 et  $t$ .  $W_{loc}^s(x_0)$  et  $W_{loc}^u(x_0)$  sont respectivement tangentes aux sous-espaces propres  $E^s(x_0)$  et  $E^u(x_0)$  associés aux valeurs propres (de la jacobienne du système linéarisé autour de  $x_0$ ) dont les parties réelles sont strictement négatives et positives, respectivement. Il suffit donc de connaître les valeurs propres du linéarisé d'un système autour d'un point d'équilibre *hyperbolique* pour déterminer la stabilité de celui-ci [77].

Au voisinage d'un point de bifurcation, la partie réelle d'une (au moins) valeur propre change de signe et vaut exactement zéro au point de bifurcation  $p = p_c$ . Il est dans ce cas impossible de déterminer la stabilité du point d'équilibre  $x_0(p_c)$  à partir de la seule connaissance des valeurs propres de la matrice jacobienne. Pour résoudre ce problème, une approche possible consiste à isoler la partie *non hyperbolique* du système par un changement de variables :

$$\frac{dx_1}{dt} = \mathcal{J}_C x_1 + q_C(x_1, x_2), \quad (5.136)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \mathcal{J}_S x_2 + q_S(x_1, x_2) \quad (5.137)$$

où  $q_C(x_1, x_2)$  et  $q_S(x_1, x_2)$  satisfont :

$$q_C(0, 0) = 0, q_S(0, 0) = 0,$$

$$D_{x_1} q_C(0, 0) = 0, D_{x_2} q_C(0, 0) = 0, \quad (5.138)$$

$$D_{x_1} q_S(0, 0) = 0, D_{x_2} q_S(0, 0) = 0. \quad (5.139)$$

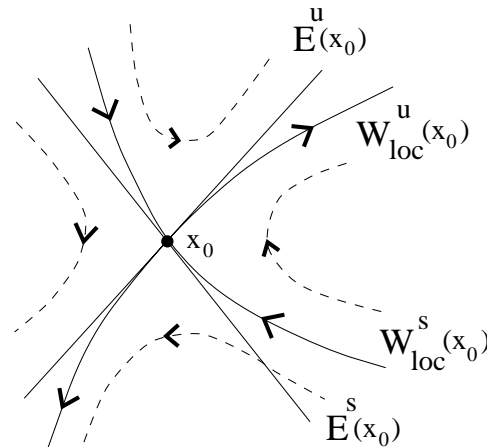


Figure 5.9 : Dynamique au voisinage d'un point d'équilibre hyperbolique.

*Remarque* : quitte à effectuer un changement de variable supplémentaire, nous avons supposé, pour simplifier les notations, que le point d'équilibre  $x_0(p_c)$  est  $(0, 0)$ .

Les valeurs propres de la matrice  $\mathcal{J}_C$  ont une partie réelle nulle tandis que celles de  $\mathcal{J}_S$  sont toutes à parties réelles strictement négatives. On en déduit ensuite, grâce au *théorème des variétés centrales* [77, 99], qu'il existe une fonction  $\Psi$ , de régularité  $\mathcal{C}^k$  si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $k < \infty$ , telle que  $x_2(t) = \Psi(x_1(t))$  et telle que (5.137) soit satisfaite.  $\Psi$  passe par le point d'équilibre  $(0, 0)$  et est tangente au sous-espace propre  $E^C(0, 0)$  engendré par les valeurs propres de  $J_C$  :

$$\begin{aligned}\Psi(0) &= 0, \\ D\Psi(0) &= 0.\end{aligned}$$

En remplaçant  $x_2$  par  $\Psi(x_1)$  dans (5.136), on en déduit une équation qui ne dépend que de la variable  $x_1$  et dont les valeurs propres de sa jacobienne ont une partie réelle nulle.

Dans notre cas, toutes les valeurs propres (5.133) de notre système ont une partie réelle nulle en  $p = p_c$ . Autrement dit,  $\mathcal{J}(p_c) = \mathcal{J}_C$  et (5.137) n'existe pas. Il suffit donc d'effectuer un *développement de Taylor* du second membre de (5.125) par rapport à  $x$  et autour du point d'équilibre  $(0, p_c)$ , pour en déduire un second membre qui satisfasse les conditions (5.138).

L'étape suivante vers le calcul des bifurcations consiste à écrire le système sous une forme simplifiée à l'aide d'une série de changements de variables. L'intérêt de cette nouvelle écriture (ou *forme normale* [77]) est d'éliminer, jusqu'à un ordre fixé par avance, le maximum de termes non linéaires afin d'extraire la véritable dynamique du système.

Lorsque les valeurs propres du linéarisé d'un système tel que (5.126) - (5.127) sont de la forme (5.133), on démontre que la *forme normale* est donnée, à l'ordre 3, par [77] :

$$\frac{du}{dt}(t) = -\omega u + (au - bv)(u^2 + v^2), \quad (5.140)$$

$$\frac{dv}{dt}(t) = \omega u + (av + bu)(u^2 + v^2). \quad (5.141)$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes qui dépendent des dérivées successives de  $k_1$  et  $k_2$  au point  $(0, 0, p_c)$ . Pour déterminer leurs valeurs et en déduire la dynamique du système (5.126) - (5.127) au point

de bifurcation  $p = p_c$ , il suffit de réécrire celui-ci sous une forme appropriée afin d'appliquer directement des formules classiques. Pour cela, la jacobienne de notre système doit être égale à :

$$\mathcal{J}_C = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \quad (5.142)$$

au point de bifurcation  $p = p_c$ . Cette transformation sera faite en deux temps. Tout d'abord, nous effectuons un changement de variables et une transformation linéaire des équations pour en déduire un nouveau système dont la jacobienne est diagonale en  $p = p_c$ , avec pour valeurs propres  $i\omega$  et  $-i\omega$ .

Soit  $V_+$ , un vecteur propre de  $\mathcal{J}(p_c)$  associé à la valeur propre  $i\omega$ .  $\mathcal{J}(p_c)$  étant une matrice réelle ( $f$  et  $g$  sont des fonctions à valeurs réelles), nous avons :

$$\mathcal{J}(p_c)\overline{V_+} = \overline{\mathcal{J}(p_c)V_+} = \overline{i\omega V_+} = -i\omega\overline{V_+}.$$

Par conséquent,  $\overline{V_+}$  est un vecteur propre de  $\mathcal{J}(p_c)$ , associé à la valeur propre  $-i\omega$ . Nous poserons :  $V_- = \overline{V_+}$ . Nous en déduisons la matrice de passage  $\mathcal{Q} = (V_+, V_-)$  et nous effectuons le changement de variables :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathcal{Q} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} \quad (5.143)$$

Nous multiplions le système (5.126) - (5.127) par  $\mathcal{Q}^{-1}$  et nous obtenons le nouveau système :

$$\frac{d\tilde{x}_1}{dt}(t) = \tilde{k}_1(\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), p), \quad (5.144)$$

$$\frac{d\tilde{x}_2}{dt}(t) = \tilde{k}_2(\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), p) \quad (5.145)$$

dont la matrice jacobienne vaut en  $p = p_c$  :

$$\tilde{\mathcal{J}}_C(p_c) = \begin{pmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{pmatrix}.$$

Nous appliquons maintenant un nouveau changement de variables et une transformation linéaire pour en déduire un système dont la jacobienne est donnée par (5.142) en  $p = p_c$ . Nous posons tout d'abord :

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = \mathcal{H} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} \quad (5.146)$$

où

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} -i/2 & 1/2 \\ i/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Nous multiplions ensuite le système (5.144) - (5.145) par  $\mathcal{H}^{-1}$  pour en déduire finalement le système :

$$\frac{d\hat{x}_1}{dt}(t) = \hat{k}_1(\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t), p), \quad (5.147)$$

$$\frac{d\hat{x}_2}{dt}(t) = \hat{k}_2(\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t), p). \quad (5.148)$$

Pour relier ce nouveau système à celui défini initialement avant cette section (i.e. (5.126) - (5.127)), nous rappelons que  $x_1$  et  $x_2$  désignent les amplitudes des coordonnées  $m_L$  et  $m_G$  de la solution du système réduit (5.80) - (5.81) par rapport à l'écoulement stationnaire

$(x_0(p), y_0(p), p)$  (voir section 5.3.3.2). En tenant compte de (5.143) et (5.146), nous vérifions que les vecteurs  $x = (x_1, x_2)^T$  et  $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)^T$  se déduisent l'un de l'autre par une relation linéaire :

$$x = \mathcal{Q}\mathcal{H}\hat{x}. \quad (5.149)$$

Bien que la matrice  $\mathcal{H}$  soit complexe, ce changement de variable est réel. En effet, si nous posons  $V_+ = (\alpha_1 + i\beta_1, \alpha_2 + i\beta_2)$ ,  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ , nous obtenons après un simple calcul linéaire que :

$$\mathcal{Q}\mathcal{H} \stackrel{\text{déf}}{=} (V_+, \overline{V_+}) \begin{pmatrix} -i/2 & 1/2 \\ i/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \alpha_1 \\ \beta_2 & \alpha_2 \end{pmatrix}. \quad (5.150)$$

$\mathcal{Q}\mathcal{H}$  est donc une matrice à coefficients réels. Son inverse aussi.  $\hat{x}$  est un vecteur à coefficients réels et  $\hat{k}_1, \hat{k}_2$  sont des fonctions à valeurs réelles.

Le changement de variable (5.149) étant linéaire, nous avons grâce à (5.128) :

$$\hat{k}_1(0, 0, p) = 0, \hat{k}_2(0, 0, p) = 0. \quad (5.151)$$

Si nous effectuons un *développement de Taylor* à un ordre  $q \geq 2$  des seconds membres de (5.147) et (5.148) autour du point d'équilibre  $(0, 0, p_c)$ , nous en déduisons finalement un système de la forme :

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \mathcal{L}_0\hat{x} + \mathcal{L}_1(\hat{x}, p - p_c) + \mathcal{N}(\hat{x}, p) \quad (5.152)$$

où

$$\mathcal{L}_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{L}_1 = \begin{pmatrix} D_{\hat{x}p}\hat{k}_1(0, 0, p_c) \\ D_{\hat{x}p}\hat{k}_2(0, 0, p_c) \end{pmatrix}.$$

Le vecteur  $\mathcal{N}(\hat{x}, p)$  symbolise les termes non linéaires, par rapport à  $x$ , du développement. En particulier, nous avons :

$$\mathcal{N}(0, p_c) = 0, D_{\hat{x}}\mathcal{N}(0, p_c) = 0.$$

Notons que quelque soit leur ordre, les dérivées de  $\hat{k}_1$  et  $\hat{k}_2$  par rapport à  $p$  sont nulles en  $(0, 0, p_c)$  car il existe un voisinage de  $p_c$  dans l'espace des paramètres tel que les relations (5.151) soient vérifiées pour tout  $p$  dans ce voisinage.

### 5.3.3.4 Bifurcation de Hopf

Lorsqu'on étudie la stabilité d'un système différentiel par rapport à un seul paramètre, deux types de bifurcations locales et génériques sont envisageables : la bifurcation *noeud-col* et la bifurcation de *Hopf* [77]. Dans le premier cas, la bifurcation se produit quand une des valeurs propres de la matrice jacobienne s'annule en un point d'équilibre, pour une certaine valeur critique du paramètre. Dans le second cas, la partie réelle de deux valeurs propres complexes conjuguées s'annule. Cette situation est précisément celle où nous nous trouvons.

D'autres types de bifurcations peuvent apparaître dans un problème à un seul paramètre variable mais elles ne sont pas génériques (bifurcations *transcritiques*, *fourches*, etc). C'est par exemple le cas pour des équations qui doivent satisfaire certaines contraintes comme des conditions de symétries.

Nos équations s'inscrivant a priori dans un cadre générique, il est donc fort probable que les bifurcations locales de notre système soient du type *Hopf*. C'est ce que nous allons démontrer dans cette section mais avant tout, énonçons le théorème de *Hopf* [77] :

**Théorème 5.2** *Supposons que le système  $dx/dt = f(x, \mu)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  admette un point d'équilibre  $(x_0^c, \mu_c)$  pour lequel les propriétés suivantes sont satisfaites :*

(H1)  $D_x f(x_0^c, \mu_c)$  admet deux valeurs propres simples conjuguées et imaginaires pures et aucune autre valeur propre avec une partie réelle nulle.

Alors (H1) implique l'existence d'une courbe régulière d'équilibre  $(x_0(\mu), \mu)$  avec  $x_0(\mu_c) = x_0^c$ . Les valeurs propres  $\lambda_+(\mu)$ ,  $\lambda_-(\mu)$  de  $D_x f(x_0(\mu), \mu)$  sont imaginaires pures quand  $\mu = \mu_c$  et varient de façon régulière par rapport à  $\mu$ . Si de plus,

$$(H2) \quad \frac{d}{dp} [\operatorname{Re} \lambda_+(\mu)]_{|\mu=\mu_c} \stackrel{\text{d'éf}}{=} d \neq 0,$$

alors il existe une variété centrale unique de dimension trois, passant par  $(x_0^c, \mu_c)$  dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  et un système régulier de coordonnées (préservant le plan  $p = \text{const.}$ ) pour lequel le développement de Taylor à l'ordre 3 sur la variété centrale est donné par :

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= [d\mu + a(u^2 + v^2)]u - [\omega + c\mu + b(u^2 + v^2)]v, \\ \frac{dv}{dt} &= [\omega + c\mu + b(u^2 + v^2)]u + [d\mu + a(u^2 + v^2)]v, \end{aligned}$$

ou en coordonnées polaires  $u = r \cos \theta$ ,  $v = r \sin \theta$  :

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= (d\mu + ar^2)r, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega + c\mu + br^2, \end{aligned}$$

où  $\omega = |\lambda_+(\mu_c)| = |\lambda_-(\mu_c)|$  et  $a, b, c, d$  sont des constantes qui dépendent des dérivées successives de  $\mathcal{N}$  au point  $(0, p_c)$ ;  $\mathcal{N}$  est obtenue après transformation du système  $dx/dt = f(x, \mu)$  sous la forme (5.152).

Si  $a \neq 0$ , il existe une surface de solutions périodiques dans la variété centrale qui est tangente (de manière quadratique) avec le sous-espace propre de  $\lambda_+(\mu_c)$ ,  $\lambda_-(\mu_c)$  et dont l'équation est (à une translation près) celle du paraboloidé  $\mu = -(a/d)(u^2 + v^2)$ . Si  $a < 0$  (resp.  $a > 0$ ), ces solutions périodiques sont des cycles limites stables (resp. instables).

*Remarque :* une variété centrale  $W^c$  est une variété invariante, i.e.

$$\forall x \in W^c, \phi_t(x) \in W^c \forall t > 0,$$

tangente à l'espace propre de  $\lambda_+(\mu_c)$  et  $\lambda_-(\mu_c)$ ; rappelons que  $\phi_t$  symbolise le flot (5.135) du système différentiel.

Le théorème de Hopf est défini pour un paramètre réel alors que  $p$  est multi-dimensionnel. Pour l'appliquer, il est donc nécessaire de choisir un chemin dans l'espace des paramètres qui traverse la surface critique (5.109) :  $\mathcal{R}(p) = 0$ . Pour simplifier ce choix, nous imposerons l'une des coordonnées du vecteur  $p$  comme paramètre variable  $\mu$ . Quitte à réordonner les composantes de  $p$ , nous noterons  $p = (\tilde{p}, \mu)$  où  $\tilde{p}$  symbolise les autres paramètres. Ils seront fixés une fois pour toutes afin que l'équation  $\mathcal{R}(\tilde{p}, \mu) = 0$  admette une solution par rapport à  $\mu$ . Nous la noterons  $\mu_c$ . Autrement dit, lorsque  $\mu = \mu_c$ , le point  $p$  est situé sur la surface critique (5.109). Pour clarifier l'exposé, nous remplacerons dorénavant le multi-paramètre  $p$  par  $\mu$ .

*Remarque :* lorsqu'on étudie les bifurcations d'un système dans un espace de paramètres plus grand (i.e. avec au moins deux paramètres variables), plusieurs types de bifurcations sont

parfois observables de part et d'autres de *frontières de bifurcation*. Des bifurcations beaucoup plus sophistiquées peuvent apparaître aux points d'intersection de ces frontières [77, 170]. Elles sont généralement classées en fonction de leur *codimension*, i.e. la différence entre la dimension de l'espace des paramètres et celle de la frontière de la bifurcation [103]. Celle de *Hopf* est de *codimension* un. Il serait intéressant d'étudier à l'avenir si des bifurcations de *codimension* supérieure peuvent se produire dans un système pipe-riser. Nous pensons en particulier aux phénomène d'*hystérésis* [103].

Le système (5.147) - (5.148) satisfait la première hypothèse du théorème 5.2 au point d'équilibre  $(0, 0, \mu_c)$ . Rappelons que les valeurs propres (du linéarisé de ce système autour de  $(0, 0, \mu_c)$ ) sont les racines du polynôme (5.132) :

$$\lambda_+(\mu) = \frac{1}{2} \left\{ \text{Tr} \left[ P(\mu) - Q(\mu)[S(\mu)]^{-1}R(\mu) \right] + i\sqrt{\Delta(\mu)} \right\}, \quad (5.153)$$

$$\lambda_-(\mu) = \frac{1}{2} \left\{ \text{Tr} \left[ P(\mu) - Q(\mu)[S(\mu)]^{-1}R(\mu) \right] - i\sqrt{\Delta(\mu)} \right\}, \quad (5.154)$$

$$\Delta(\mu) = \left\{ \text{Tr} \left[ P(\mu) - Q(\mu)[S(\mu)]^{-1}R(\mu) \right] \right\}^2 - 4 \text{Det} \left[ P(\mu) - Q(\mu)[S(\mu)]^{-1}R(\mu) \right].$$

Dans ce cas, le coefficient  $d$  est égal à :

$$d = \frac{1}{2} \left[ \frac{d}{d\mu} \text{Tr} \left[ P(\mu) - Q(\mu)[S(\mu)]^{-1}R(\mu) \right] \right]_{|\mu=\mu_c} \stackrel{(5.109)}{=} \frac{1}{2} \left[ \frac{d\mathcal{R}}{d\mu}(\mu) \right]_{|\mu=\mu_c}. \quad (5.155)$$

La formule analytique de  $d$  est évidemment beaucoup trop longue pour être écrite dans cette thèse (rappelons que les matrices  $P(\mu)$ ,  $Q(\mu)$ ,  $R(\mu)$  et  $S(\mu)$  dépendent des coordonnées du point d'équilibre  $(x_0(\mu), y_0(\mu), \mu)$  dont les expressions sont loin d'être concises; voir section 5.2.5).

Dans les sections suivantes, nous allons présenter quelques calculs numériques où les valeurs des paramètres sont choisies en fonction des exemples présentés de la section 5.3.2. Dans chacun de ces calculs, le coefficient  $d$  est différent de zéro. Autrement dit, les valeurs propres  $\lambda_+(\mu)$  et  $\lambda_-(\mu)$  traversent l'axe imaginaire transversalement lorsque  $\mu$  atteint sa valeur critique  $\mu_c$ . La bifurcation est donc du type *Hopf* : pour chaque valeur du paramètre  $\mu$  proche de  $\mu_c$  pour lequel l'écoulement stationnaire  $(x_0(\mu), y_0(\mu), \mu)$  est instable, il existe un cycle limite stable vers lequel les solutions transitoires du système (5.147) - (5.148) convergent si le coefficient  $a$  est strictement négatif. L'équation de ce cycle est :

$$\frac{d}{a}(\mu_c - \mu) = \hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2. \quad (5.156)$$

En notant  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$ , les coefficients de la matrice :

$$\mathcal{H}^{-1}\mathcal{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \zeta_1 & \zeta_2 \end{pmatrix},$$

nous déduisons de (5.149) :

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2, \\ \hat{x}_2 &= \zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2. \end{aligned}$$

En insérant ces expressions dans (5.156), nous obtenons l'expression du cycle limite des solutions instables du système (5.126) - (5.127) :

$$\frac{d}{a}(\mu_c - \mu) = (\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2)^2 + (\zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2)^2.$$



Puisque  $x_1$  et  $x_2$  représentent les amplitudes des variables  $m_L$  et  $m_G$  par rapport à leurs valeurs stationnaires  $m_L^{statio}$  et  $m_G^{statio}$ , nous en déduisons :

$$\begin{aligned} \frac{d}{a}(\mu_c - \mu) &= \left[ \gamma_1 (m_L - m_L^{statio}) + \gamma_2 (m_G - m_G^{statio}) \right]^2 \\ &+ \left[ \zeta_1 (m_L - m_L^{statio}) + \zeta_2 (m_G - m_G^{statio}) \right]^2 \end{aligned} \quad (5.157)$$

sachant que les coefficients  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$  ne dépendent que des valeurs critiques des paramètres par l'intermédiaire des vecteurs propres de la jacobienne  $\mathcal{J}(p_c)$  (voir section (5.3.3.3)).

En conclusion, lorsqu'un écoulement est instable, les quantités  $m_L$  et  $m_G$  du système (5.80) - (5.81) ou encore celles du système initial (5.73) - (5.74) oscillent autour de leurs valeurs stationnaires en tendant vers un cycle limite elliptique. Celui-ci est une déformation translatée du cycle limite des variables  $\hat{x}_1$ ,  $\hat{x}_2$ , à savoir la transformation du cercle de rayon  $[(d/a)(\mu_c - \mu)]^{1/2}$  et de centre  $(0, 0)$  en une ellipse centrée en  $(m_L^{statio}, m_G^{statio})$ , par l'application linéaire (5.149).

Pour tracer cette ellipse, nous posons :

$$R = \sqrt{\frac{d}{a}(\mu_c - \mu)}.$$

Le cycle limite (5.156) est donné par l'ensemble des points :

$$\hat{\mathcal{C}}_{ycle} = \left\{ (\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in \mathbb{R}^2 / \hat{x}_1 = R \cos \theta, \hat{x}_2 = R \sin \theta; \theta \in [0, 2\pi[ \right\}.$$

En tenant compte de (5.149) - (5.150), nous en déduisons le cycle limite elliptique des variables  $m_L$  et  $m_G$  :

$$\mathcal{C}_{ycle} = \left\{ (m_L, m_G) \in \mathbb{R}^2 / m_L = \mathcal{M}_L(\theta), m_G = \mathcal{M}_G(\theta); \theta \in [0, 2\pi[ \right\} \quad (5.158)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_L(\theta) &= m_L^{statio} + R [\beta_1 \cos \theta + \alpha_1 \sin \theta], \\ \mathcal{M}_G(\theta) &= m_G^{statio} + R [\beta_2 \cos \theta + \alpha_2 \sin \theta]. \end{aligned}$$

De l'ensemble des valeurs  $(m_L, m_G) \in \mathcal{C}_{ycle}$ , il est possible de déduire les valeurs maximales atteintes par les autres variables  $U_G^{in}$ ,  $R_G^{in}$  et  $R_G^{out}$  en tenant compte des relations (5.117) - (5.119). Nous en déduisons aussi l'ensemble des valeurs admises par  $U_S^{out}$  grâce à la relation (5.94) et celles de la pression dans le pipe par l'équation :

$$P_{pipe} \stackrel{(5.46)}{=} P_S + g(m_L + m_G).$$

Pour déterminer tous ces valeurs, il est nécessaire de calculer le coefficient  $a$ . Celui-ci dépend en toute généralité des coefficients du *développement de Taylor* (jusqu'à l'ordre 4) des seconds membres du système (5.147) - (5.148) par rapport à  $\hat{x}_1$  et  $\hat{x}_2$  et autour du point d'équilibre  $(0, 0, p_c)$ . Lorsque le système est écrit sous la forme (5.152), une formule simple du coefficient  $a$  existe [77] :

$$a = \frac{1}{16} [D_{\hat{x}_1 \hat{x}_1 \hat{x}_1} \mathcal{N}_1(0, 0, p_c) + D_{\hat{x}_1 \hat{x}_2 \hat{x}_2} \mathcal{N}_1(0, 0, p_c)]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{16} [D_{\hat{x}_1 \hat{x}_1 \hat{x}_2} \mathcal{N}_2(0, 0, p_c) + D_{\hat{x}_2 \hat{x}_2 \hat{x}_2} \mathcal{N}_2(0, 0, p_c)] \\
& + \frac{1}{16\omega} D_{\hat{x}_1 \hat{x}_2} \mathcal{N}_1(0, 0, p_c) [D_{\hat{x}_1 \hat{x}_1} \mathcal{N}_1(0, 0, p_c) + D_{\hat{x}_2 \hat{x}_2} \mathcal{N}_1(0, 0, p_c)] \\
& - \frac{1}{16\omega} D_{\hat{x}_1 \hat{x}_2} \mathcal{N}_2(0, 0, p_c) [D_{\hat{x}_1 \hat{x}_1} \mathcal{N}_2(0, 0, p_c) + D_{\hat{x}_2 \hat{x}_2} \mathcal{N}_2(0, 0, p_c)] \\
& - \frac{1}{16\omega} [D_{\hat{x}_1 \hat{x}_1} \mathcal{N}_1(0, 0, p_c) D_{\hat{x}_1 \hat{x}_1} \mathcal{N}_2(0, 0, p_c)] \\
& + \frac{1}{16\omega} [D_{\hat{x}_2 \hat{x}_2} \mathcal{N}_1(0, 0, p_c) D_{\hat{x}_2 \hat{x}_2} \mathcal{N}_2(0, 0, p_c)]
\end{aligned} \tag{5.159}$$

où nous avons posé :

$$\mathcal{N}(\hat{x}, p) = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2, p) \\ \mathcal{N}_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2, p) \end{pmatrix}.$$

$\omega$  est défini par (5.133).

### 5.3.4 Validation numérique des calculs analytiques de bifurcation

Afin de valider l'expression analytique des bifurcations locales (i.e. au voisinage des points de bifurcation) de notre modèle, nous présentons dans cette section quelques calculs numériques d'écoulements où les valeurs des paramètres sont choisies en fonction des exemples présentés dans la section 5.3.2.

Le modèle simplifié que nous avons construit dans la section 5.2 suppose que la hauteur liquide reste stable (i.e. constamment égale à la hauteur du riser). Cette approximation est fautive lorsque les écoulements sont fortement instables mais elle est proche de la réalité lorsque les écoulements sont légèrement instables. Elle est aussi exacte si le flot stationnaire est stable.

Cette hypothèse de stabilité rend possible le calcul analytique des cycles limites d'écoulements instables au voisinage des points de bifurcation. Nous venons de voir que la projection de ces cycles sur l'espace des phases ( $m_L, m_G$ ) est une ellipse. Dans le cas d'un modèle où l'oscillation de la hauteur liquide dans le riser n'est pas négligée, nous verrons que ce cycle (calculé numériquement) est légèrement déformé. Néanmoins, il est d'autant plus proche du cycle calculé analytiquement que les paramètres sont proches de leurs valeurs critiques. Les calculs qui vont suivre prouvent donc que la bifurcation à l'origine des instabilités des écoulements diphasiques dans les systèmes pipe-riser est généralement du type *Hopf*.

#### 5.3.4.1 Essais de Fabre

Reprenons les expériences de Fabre, J. *et al.* de la section 5.3.2.2. D'après la figure 5.7, nous constatons que l'écoulement devient instable lorsque la vitesse superficielle  $U_G^0$  diminue alors que les autres paramètres du problème sont fixés. Nous choisirons donc  $U_G^0$  comme paramètre de bifurcation.

Pour démontrer que les bifurcations de notre modèle au voisinage des valeurs critiques de  $U_G^0$  sont du type *Hopf*, nous devons vérifier que les hypothèses du théorème 5.2 sont satisfaites. Nous comparerons ensuite les cycles limites analytiques prédits par le théorème de *Hopf* avec ceux fournis par les solutions numériques du système (5.73) - (5.74).

Dans le modèle que nous avons exposé dans la section 2.5, le flot dans le pipe n'était pas imposé (voir section 4.3.3) et les forces de frottement n'étaient pas négligées. Ce qui

modifie légèrement l'emplacement des points d'équilibre et les valeurs des paramètres critiques prédits par le système (5.73) - (5.74). C'est pourquoi nous ne comparerons pas les cycles limites analytiques (5.158) à ceux fournis numériquement par les solutions de (2.40) - (2.53) car nos calculs de bifurcation sont locaux et donc très sensibles à la déviation des paramètres par rapport à leur valeur critique.

Pour étudier l'influence du phénomène de *relaxation* (due à l'oscillation de la hauteur liquide dans le riser, voir section 4.2.5), nous ajouterons l'équation différentielle (4.72) au système (5.73) - (5.74). Le calcul numérique des écoulements est effectué à l'aide de la méthode de *troncature* exposée dans la section 4.1.2. Le modèle obtenu est proche de celui que nous avons exposé dans la section 2.5 et fournit une dynamique identique : écoulements stationnaires, *quasi-stationnaires* et *transition vers le severe slugging*. Il souffre aussi de problèmes de convergence due aux simplifications de notre modélisation lorsque les instabilités sont très prononcées : le système devient singulier dès que le taux de vide au pied du riser dépasse le seuil critique  $1/C_0$  (voir section 4.3.4).

*Remarque* : nous verrons dans l'annexe A que la singularité d'un système algébro-différentiel entraîne de nombreux problèmes, aussi bien théoriques que numériques. À titre d'exemple, quelques travaux ont démontré qu'elle est à l'origine de phénomènes physiques très importants tels que la *relaxation* ou les chutes de tension dans les systèmes électriques [120, 168, 169]. Il serait intéressant de développer à l'avenir, une étude similaire de notre modèle afin d'expliquer de manière simple le phénomène de *relaxation* du *severe slugging*.

Le débit volumique  $U_G^0$  est donc le paramètre de bifurcation. Les autres paramètres sont fixés :

$$\begin{aligned} U_L^0 &= 0.127 \text{ m.s}^{-1}, P_S = 10^5 \text{ Pa}, L = 25 \text{ m}, l_p = 0 \text{ m}, H = 13.5 \text{ m}, D = 0.053 \text{ m}, \\ \theta_p &= -0.57^\circ, \theta_r = 90^\circ, \rho_L^0 = 998.2071 \text{ kg.m}^{-3}, T = 293.15 \text{ K}, \sigma = 72.75 \cdot 10^{-3} \text{ kg.s}^{-2}. \end{aligned}$$

La valeur de  $U_L^0$  étant l'une de celles choisies par Fabre, J. *et al.*, nous voyons sur la figure 5.7 que la valeur critique de  $U_G^0$  prédite par notre critère de stabilité est proche de  $1 \text{ m.s}^{-1}$  (respectivement  $0.8 \text{ m.s}^{-1}$ ) si nous imposons un écoulement *dispersé* (resp. *intermittent*) dans le riser. Rappelons que le calcul du taux de vide  $R_G^{pipe}$  ne dépend pas de la valeur de  $U_G^0$  (voir section 5.2.2). Ainsi  $R_G^{pipe}$  vaut approximativement 0.789248277 lorsque les valeurs des autres paramètres sont celles imposées ci-dessus.

Un calcul symbolique à l'aide du logiciel *Maple* nous fournit la valeur critique de  $U_G^0$  (dans le cas *intermittent*), l'amplitude  $\omega$  des parties imaginaires des valeurs propres critiques (voir (5.133)) et les valeurs des coefficients  $a$  et  $d$  du théorème 5.2 :

$$\begin{aligned} (U_G^0)_{crit} &= 0.8293123557 \text{ m.s}^{-1}, \\ \omega &= 1.245578683, \\ a &= -0.1355165705, \\ d &= -1.615566000. \end{aligned}$$

*Remarque* : La valeur de  $(U_G^0)_{crit}$  vaut  $1.042259700 \text{ m.s}^{-1}$  dans le cas *dispersé*. Or les valeurs stationnaires des taux de vide en entrée et sortie du riser sont dans ce cas supérieur à 0.7 (ou plus exactement  $(R_G^{in})^{statio} = 0.73427269$  et  $(R_G^{out})^{statio} = 0.78474163$ ). Ce qui est absurde car la configuration *dispersée* n'existe pas pour des taux de vide supérieur à 0.52 (voir section 1.7). Autrement dit, le flot est nécessairement *intermittent* dans le riser.

Puisque  $a$  et  $d$  sont différents de zéro, l'instabilité des écoulements au voisinage de  $(U_G^0)_{crit}$  est due à une bifurcation de *Hopf*. Celle-ci est *supercritique* car  $a$  est négatif [103] : il existe un  $\epsilon > 0$  tel que quelque soit  $U_G^0 \in ](U_G^0)_{crit} - \epsilon, (U_G^0)_{crit}[$ , le système (5.73) - (5.74) admet un cycle limite stable tandis que l'écoulement stationnaire situé au centre du cycle est instable. La projection de ce cycle sur l'espace des phases  $(m_L, m_G)$  est une ellipse dont l'équation est donnée par (5.157). Notons que le coefficient  $(d/a) [(U_G^0)_{crit} - U_G^0]$  est bien positif si nous choisissons  $U_G^0 < (U_G^0)_{crit}$ .

La matrice  $\mathcal{QH}$  du changement de variables (5.149) ne dépend que des valeurs critiques des paramètres et a pour valeur :

$$\mathcal{QH} \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} \beta_1 & \alpha_1 \\ \beta_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -316.9034046 & -579.4222414 \\ 1.0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lorsque  $U_G^0 = 0.829 \text{ m.s}^{-1}$ , les valeurs stationnaires des variables du système sont les suivantes :

$$\begin{aligned} m_L^{statio} &= 5068.918402 \text{ kg.m}^{-2}, \\ m_G^{statio} &= 12.37902485 \text{ kg.m}^{-2}, \\ P_{pipe}^{statio} &= 149847.5279 \text{ Pa}, \\ (U_G^{in})^{statio} &= 0.829 \text{ m.s}^{-1}, \\ (R_G^{in})^{statio} &= 0.5923241079, \\ (R_G^{out})^{statio} &= 0.6553762195, \\ (U_S^{out})^{statio} &= 1.369236007 \text{ m.s}^{-1}. \end{aligned}$$

Sur la figure 5.10, nous avons tracé le cycle limite (5.158) ainsi que les projections des solutions numériques du système (4.54) - (4.55) sur le plan  $(m_L, m_G)$ , pour deux conditions initiales différentes (4.64) - (4.65) : la première impose un point  $(m_L, m_G)$  situé en dehors du cycle limite et la seconde à l'intérieur. Nous vérifions que le cycle limite est stable. Dans les deux cas, la hauteur liquide n'oscille pas. C'est pourquoi le cycle prédit de manière analytique est une bonne approximation du résultat numérique.

Notons que les solutions transitoires convergent très lentement vers leur cycle limite (cette convergence est d'autant plus lente que le paramètre est proche de sa valeur critique). Pour améliorer la lisibilité des résultats, nous avons donc enregistré la valeur de la solution numérique toutes les dix secondes alors que le pas de temps d'intégration  $\Delta t$  valait 0.01 s.

*Remarque* : ce choix d'une impression de la solution toutes les dix secondes n'est pas innocent. Il correspond à environ deux fois la période  $T$  du cycle limite car  $T \simeq 2\pi/\omega \simeq 5.044709200$  [67].

Imposons maintenant un paramètre un peu plus petit :  $U_G^0 = 0.820 \text{ m.s}^{-1}$ . Les valeurs stationnaires des variables du système sont les suivantes :

$$\begin{aligned} m_L^{statio} &= 5090.532895 \text{ kg.m}^{-2}, \\ m_G^{statio} &= 12.35582637 \text{ kg.m}^{-2}, \\ P_{pipe}^{statio} &= 150059.3384 \text{ Pa}, \\ (U_G^{in})^{statio} &= 0.82 \text{ m.s}^{-1}, \\ (R_G^{in})^{statio} &= 0.5904498619, \\ (R_G^{out})^{statio} &= 0.6540425670, \\ (U_S^{out})^{statio} &= 1.357486575 \text{ m.s}^{-1}. \end{aligned}$$

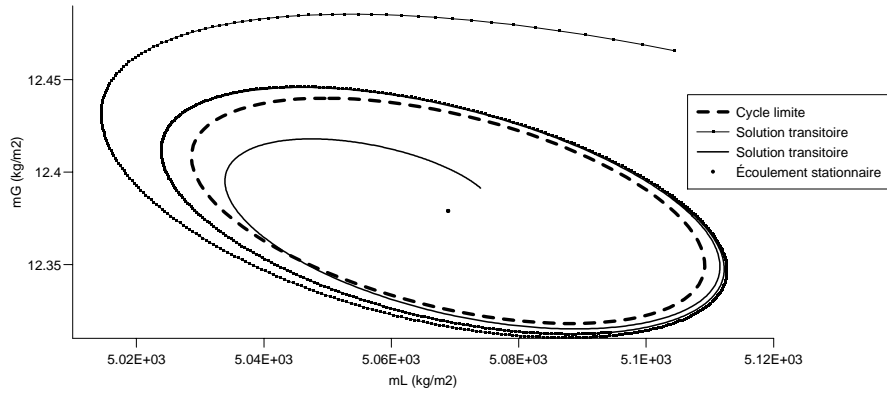


Figure 5.10 :  $U_G^0 = 0.829 \text{ m.s}^{-1}$  : cycle limite et solutions transitoires.

Sur la figure 5.11, nous constatons que le cycle limite prédit numériquement est une ellipse *tronquée*. Cette déformation est due à l'oscillation de la hauteur liquide dans le riser : lorsque celle-ci atteint le sommet du riser, elle reste égale à  $H$  pendant un certain temps et diminue à nouveau lorsque la vitesse du liquide au sommet du riser devient négative (voir figures 5.12 et 5.13).

Ce test traduit bien les limites de notre analyse locale. Celle-ci n'est valide que si la hauteur liquide n'oscille pas dans le riser. Autrement dit, les cycles limites périodiques prédits par le théorème de *Hopf* sont de grossières approximations des cycles réels si la hauteur liquide oscille. Traduisons cette remarque en termes de condition sur nos variables ; le débit volumique du liquide au sommet du riser est donnée par :

$$U_L^{out} = U_S^{out} - U_G^{out} \stackrel{(5.34)}{=} U_S^{out} - R_G^{out} (C_0 U_S^{out} + u_d) = (1 - R_G^{out} C_0) U_S^{out} - R_G^{out} u_d.$$

Il est donc négatif lorsque :

$$\frac{(1 - R_G^{out} C_0) U_S^{out}}{R_G^{out}} < u_d.$$

Or,  $1 - R_G^{out} C_0 \leq 0 \iff 1/C_0 \leq R_G^{out}$ . Dans notre cas,  $1/C_0 > R_G^{out}$  (voir section 5.2.9). Nous en déduisons que si l'écoulement est *intermittent* dans le riser,  $U_L^{out}$  est négatif lorsque :

$$U_S^{out} < \frac{0.35\sqrt{gD}R_G^{out}}{1 - 1.2R_G^{out}}. \quad (5.160)$$

En d'autres termes, la hauteur liquide commence à osciller dans le riser dès que la vitesse superficielle du mélange en sortie du riser est inférieure à la vitesse critique :

$$(U_S^{out})_{crit} = \frac{0.35\sqrt{gD}R_G^{out}}{1 - 1.2R_G^{out}}$$

qui oscille au cours du temps en fonction de  $R_G^{out}$ . Nous avons tracé  $U_S^{out}$  et  $(U_S^{out})_{crit}$  en fonction du temps sur les figures 5.14 et 5.15. Ces deux graphiques correspondent respectivement au deux

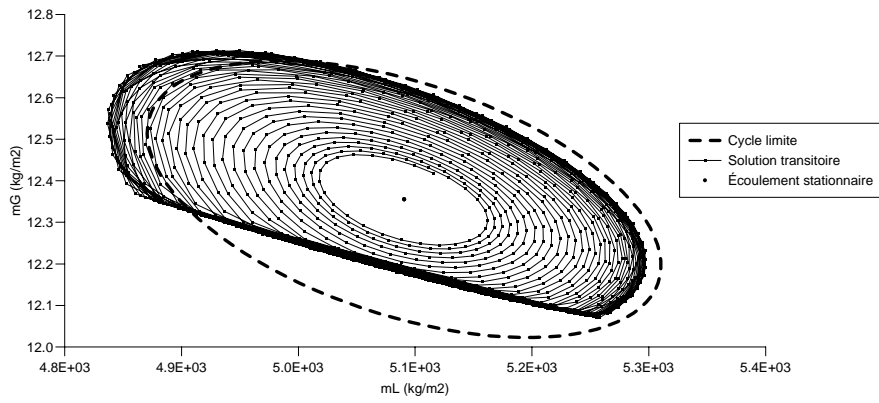


Figure 5.11 :  $U_G^0 = 0.820 \text{ m.s}^{-1}$  : cycle limite et solutions transitoires.

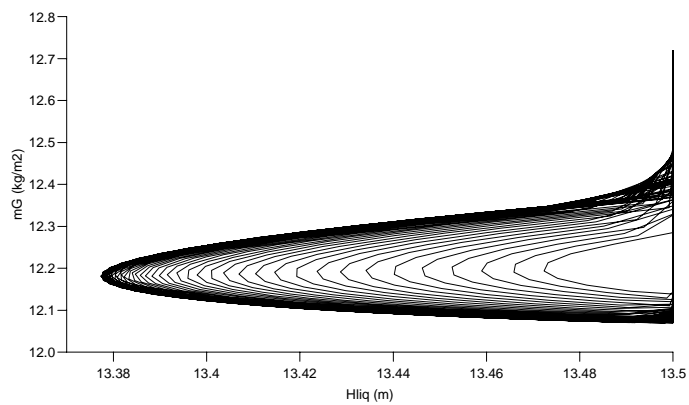


Figure 5.12 :  $U_G^0 = 0.820 \text{ m.s}^{-1}$  :  $m_G$  en fonction de  $H_{liq}$ .

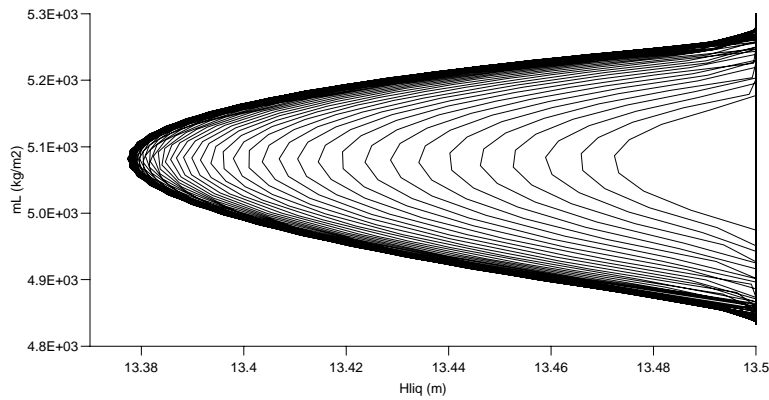


Figure 5.13 :  $U_G^0 = 0.820 \text{ m.s}^{-1}$  :  $m_L$  en fonction de  $H_{liq}$ .

exemples précédents où  $U_G^0$  valait  $0.829 \text{ m.s}^{-1}$  et  $0.820 \text{ m.s}^{-1}$ . Nous vérifions bien que dans le premier cas,  $U_S^{out}$  est toujours supérieure à  $(U_S^{out})_{crit}$  alors que dans le second test, la vitesse  $U_S^{out}$  est parfois inférieure à  $(U_S^{out})_{crit}$ , d'où les oscillations de la hauteur liquide. L'inégalité (5.160) représente donc un critère de transition entre les écoulements *quasi-stationnaires* (voir section 4.2.6) et les écoulements instables (*transition vers le severe slugging, severe slugging*) pour lesquels la hauteur liquide oscille dans le riser.

*Remarque* : la contrainte imposée sur la hauteur liquide (celle-ci ne peut pas dépasser la hauteur du riser) entraîne la troncature des orbites (voir figures 5.11 - 5.13). Ce phénomène est couramment observé dans la théorie des systèmes électriques de puissance où des limiteurs régulent la tension en la contraignant à ne pas dépasser des seuils [48]. Les modèles de ces systèmes de puissance (en général des systèmes algèbro-différentiels) fournissent des solutions dont les courbes sont très similaires à celles que nous avons présentées jusque ici [48, 97, 98].

### 5.3.4.2 Essais de Schmidt

Considérons maintenant les expériences de Schmidt, Z. *et al.* de la section 5.3.2.3.  $U_G^0$  sera choisi comme paramètre de bifurcation et les autres paramètres seront fixés :

$$\begin{aligned} U_L^0 &= 0.6 \text{ m.s}^{-1}, P_S = 10^5 \text{ Pa}, L = 30.48 \text{ m}, l_p = 0 \text{ m}, H = 15.24 \text{ m}, D = 0.0508 \text{ m}, \\ \theta_p &= -5^\circ, \theta_r = 90^\circ, \rho_L^0 = 824.95275 \text{ kg.m}^{-3}, T = 293.15 \text{ K}, \sigma = 28 \cdot 10^{-3} \text{ kg.s}^{-2}. \end{aligned}$$

Nous voyons sur la figure 5.8 que la valeur critique de  $U_G^0$  prédite par notre critère de stabilité est comprise entre  $1 \text{ m.s}^{-1}$  et  $2 \text{ m.s}^{-1}$  si  $U_L^0 = 0.6 \text{ m.s}^{-1}$ . Le taux de vide  $R_G^{pipe}$  vaut quant à lui approximativement 0.698742694. Un calcul symbolique à l'aide du logiciel *Maple* nous fournit la valeur critique de  $U_G^0$  (dans le cas *intermittent*), l'amplitude  $\omega$  des parties imaginaires des valeurs propres critiques (voir (5.133)) et les valeurs des coefficients  $a$  et  $d$  du théorème 5.2 :

$$(U_G^0)_{crit} = 1.678582036 \text{ m.s}^{-1},$$

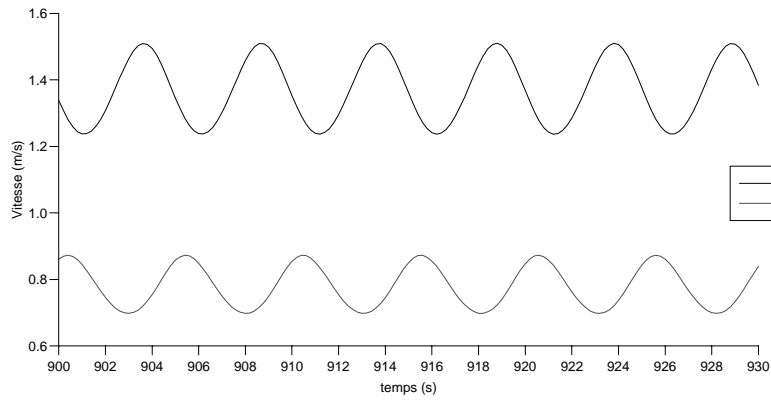


Figure 5.14 :  $U_G^0 = 0.829 \text{ m.s}^{-1}$  : vitesse  $U_S$  en sortie du riser et vitesse critique.

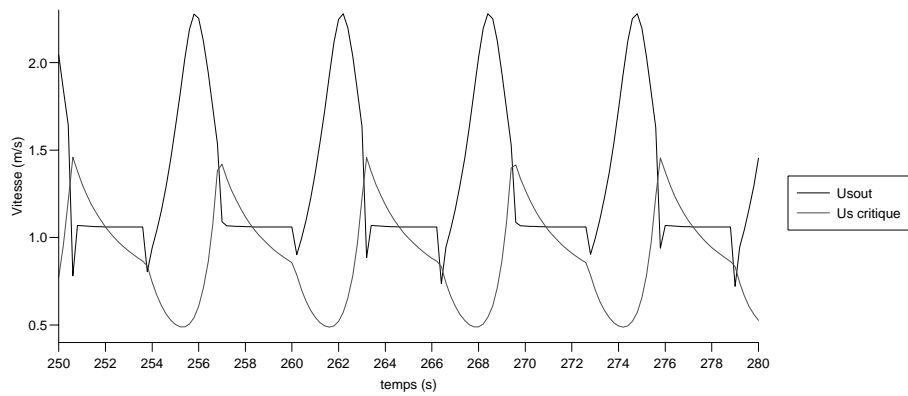


Figure 5.15 :  $U_G^0 = 0.820 \text{ m.s}^{-1}$  : vitesse  $U_S$  en sortie du riser et vitesse critique.



$$\begin{aligned}\omega &= 2.190078258, \\ a &= -0.1224829257, \\ d &= -2.521810000.\end{aligned}$$

Puisque  $a$  est strictement négatif et que  $d$  est différent de zéro, l'instabilité des écoulements au voisinage de  $(U_G^0)_{crit}$  est due à une bifurcation de *Hopf supercritique*.

La matrice  $\mathcal{QH}$  du changement de variables (5.149) a pour valeurs :

$$\mathcal{QH} \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} \beta_1 & \alpha_1 \\ \beta_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -300.7615194 & -477.9058672 \\ 1.0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lorsque  $U_G^0 = 1.678 \text{ m.s}^{-1}$ , les valeurs stationnaires des variables du système sont les suivantes:

$$\begin{aligned}m_L^{statio} &= 5066.532726 \text{ kg.m}^{-2}, \\ m_G^{statio} &= 13.35504098 \text{ kg.m}^{-2}, \\ P_{pipe}^{statio} &= 149833.6990 \text{ Pa}, \\ (U_G^{in})^{statio} &= 1.678 \text{ m.s}^{-1}, \\ (R_G^{in})^{statio} &= 0.5629591305, \\ (R_G^{out})^{statio} &= 0.6310561535, \\ (U_S^{out})^{statio} &= 3.114209469 \text{ m.s}^{-1}.\end{aligned}$$

Sur la figure 5.16, nous avons tracé le cycle limite (5.158) ainsi que les projections des solutions numériques du système (4.54) - (4.55) sur le plan  $(m_L, m_G)$ , pour deux conditions initiales différentes (4.64) - (4.65) : la première impose un point  $(m_L, m_G)$  situé en dehors du cycle limite et la seconde à l'intérieur. Nous vérifions que le cycle limite est stable et elliptique car la hauteur liquide n'oscille pas : les écoulements sont *quasi-stationnaires*.

Lorsqu'on diminue la valeur du paramètre  $U_G^0$ , le cycle se déforme comme décrit précédemment. La hauteur liquide oscille et les solutions tendent vers une ellipse *tronquée* dans le plan des variables  $m_L$  et  $m_G$ .

### 5.3.4.3 Analyse des résultats

Ces calculs de bifurcation démontrent sur quelques exemples que la bifurcation à l'origine des instabilités des écoulements diphasiques dans les systèmes pipe-riser est du type *Hopf* : quand un paramètre franchit sa valeur critique, une instabilité hydrodynamique se développe sous la forme d'un écoulement *quasi-stationnaire*. Puis, par transitions successives, un phénomène de *relaxation* apparaît pour finalement aboutir au *severe slugging* lorsque des bouchons de liquide remplissent entièrement le riser. En conclusion, le *severe slugging* n'est pas dû à l'amplification du bruit d'un flot stationnaire mais provient d'une réelle instabilité hydrodynamique.

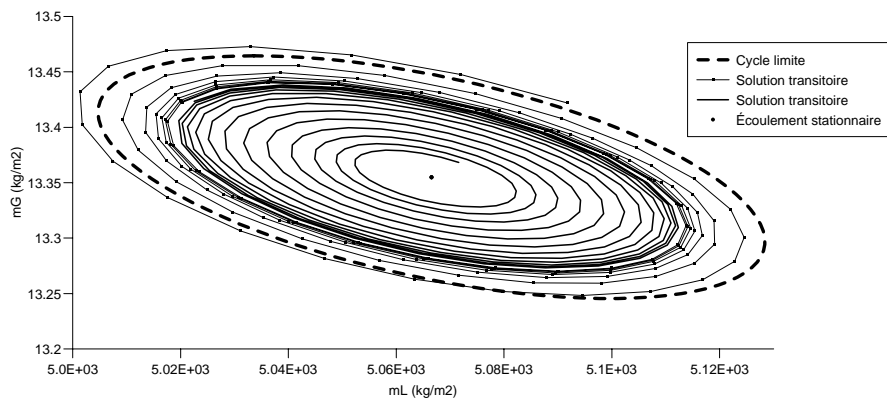


Figure 5.16 :  $U_G^0 = 1.678 \text{ m.s}^{-1}$  : cycle limite et solutions transitoires.



# Conclusion

Le modèle présenté dans cette thèse est consacré à l'étude des instabilités d'écoulements gaz-liquide isothermes dans les conduites pétrolières du type pipeline-riser. Ses équations sont algébriques et différentielles. Elles proviennent de l'intégration en espace des équations de conservation d'un modèle de mélange du type *flux de dérive*. Ses variables sont le taux de vide, la pression et la vitesse superficielle du mélange aux extrémités de chaque tronçon du pipeline. Le niveau liquide dans le riser est aussi introduit explicitement comme une variable dans les équations.

Afin de construire un modèle régulier (au sens mathématique du terme) qui ne dépende plus des critères de transition entre les phases liquide et gazeuse, la loi de glissement et le frottement pariétal sont exprimés d'une manière synthétique, sous la forme de fonctions régulières. Cette nouvelle approche s'appuie sur une étude rigoureuse des différentes configurations développées par les écoulements diphasiques. Des comparaisons avec des données expérimentales attribuent un large domaine de validité à ces lois. Ce qui leur assure un avenir prometteur car leur application dépasse largement le cadre restreint des écoulements transitoires dans les systèmes pipeline-riser. De plus, leur simplicité et leur régularité comporte de nombreux avantages : facilité d'implémentation, rapidité des calculs, robustesse, simplification de l'analyse des schémas numériques, etc.

En ce qui concerne la résolution numérique des équations, nous remarquons que l'équation différentielle de la hauteur liquide dans le riser est discontinue. Cette contrainte physique (*le niveau liquide ne peut dépasser la hauteur du riser*) remet en cause l'existence théorique d'une solution du modèle et pose de nombreuses difficultés pour la résolution numérique du système algèbro-différentiel. Une méthode de *troncature* (de la hauteur liquide) a été spécialement conçue pour tenir compte de cette singularité. Des méthodes *implicites de Runge-Kutta* sont employées pour résoudre la raideur des équations.

Des comparaisons entre calculs et expériences sont ensuite présentées afin d'identifier le domaine de validité du modèle : celui-ci s'avère être un outil rapide et efficace pour simuler des écoulements légèrement instables. Ce résultat suffit pour justifier l'analyse locale de nos équations : une analyse linéaire fournit l'expression analytique de la frontière séparant les écoulements stables (ou permanents) des écoulements instables (*severe slugging, quasi-stationnaires*, etc.) dans l'espace des paramètres physiques. La formule algébrique de cette frontière constitue un nouveau critère de prédiction des instabilités des écoulements diphasiques dans les systèmes pipeline-riser. Des comparaisons avec des cartes d'écoulements expérimentales confirment la justesse de nos résultats.

Un calcul de bifurcation est ensuite présenté. Il débouche sur l'expression analytique des courbes de bifurcation de notre modèle, au voisinage des valeurs critiques des paramètres. Ces courbes représentent l'amplitude maximale des oscillations de chaque variable d'un écoulement instable en fonction d'un paramètre du problème. Nous démontrons, grâce à un calcul

symbolique, que la bifurcation à l'origine du *severe slugging* est du type *Hopf* : lorsque l'un des paramètres du problème dépasse un seuil critique, les écoulements deviennent instables sous la forme d'oscillations périodiques sinusoïdales. De plus, dans un petit voisinage du paramètre critique, l'amplitude maximale de ces fluctuations est proportionnelle à la racine carrée de la différence entre le paramètre et sa valeur critique.

Le *severe slugging* provient donc d'une réelle instabilité hydrodynamique dont les oscillations sinusoïdales se distinguent sans ambiguïté du bruit que l'on mesure expérimentalement dans un écoulement stationnaire. Lorsqu'on s'éloigne du paramètre critique, ces oscillations se déforment par transitions successives et laissent place à des cycles périodiques de *relaxation*.

Il reste maintenant à expliquer la nature mathématique du phénomène de *relaxation* qui caractérise les flots transitoires dans les systèmes pipe-riser. Quelques éléments de réponse sont déjà apportés dans cette thèse. Ils suggèrent que les cycles de *relaxation* sont dus à la présence d'une surface singulière dans les équations de notre modèle algébro-différentiel. À l'avenir, des travaux orientés dans ce sens pourront s'appuyer sur de récents travaux qui ont démontrés que les phénomènes de *relaxation* ou de chute de tension dans les systèmes électriques sont dus effectivement à la présence d'une singularité dans des modèles algébro-différentiels.

Tous ces résultats sont inédits et représentent un intérêt pour l'industrie pétrolière car ils concluent une étape essentielle vers le contrôle en temps réel des écoulements polyphasiques dans les installations de production.

## Annexe A

# Théorie des systèmes algébro-différentiels

La théorie des systèmes algébro-différentiels est un vaste sujet où beaucoup de problèmes restent encore ouverts. Dans cette annexe, nous limiterons notre étude à des problèmes de stabilité et de bifurcation. Une introduction à ce sujet est donnée par l'excellent article de Beardmore, R. E. et Song, Y. H. [16].

On classe généralement les systèmes algébro-différentiels en fonction de leur index (voir section A.1). En général, la résolution d'un système est d'autant plus difficile que son index est élevé [25, 79]. C'est pourquoi la majeure partie des résultats de stabilité et de bifurcation pour des systèmes algébro-différentiels ne concernent que des problèmes d'index inférieur ou égal à un.

### A.1 Index d'un système algébro-différentiel

Un système algébro-différentiel est une équation de la forme :

$$h \left[ t, y(t), \frac{dy}{dt}(t) \right] = 0 \quad (\text{A.1})$$

où  $h$  est une fonction de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$ ,  $n \leq m$ . Son index est égal au nombre de fois qu'il faut le différencier par rapport à  $t$  pour déterminer  $dy/dt$  comme fonction continue de  $y$  et  $t$  [25]. L'index est donc un nombre entier.

Les équations différentielles ordinaires sont une forme particulière des systèmes algébro-différentiels. Elles ont un index nul :

$$\frac{dy}{dt}(t) = f(t, y(t)). \quad (\text{A.2})$$

Lorsque  $dy/dt$  peut être exprimé de manière explicite en fonction de  $y$  et  $t$ , à partir de (A.1) (par exemple, en appliquant le *théorème des fonctions implicites*), le système est dit d'index un. Dans le cas contraire, son index est strictement supérieur à un.

Dans un système algébro-différentiel d'index supérieur ou égal à un, il existe des contraintes sur les variables. Celles-ci peuvent parfois apparaître de manière explicite :

$$F \left[ t, x(t), y(t), \frac{dx}{dt}(t) \right] = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$G(t, x(t), y(t)) = 0. \quad (\text{A.4})$$

Les équations (A.4) sont souvent algébriques. C'est pourquoi on désigne généralement les systèmes (A.1) comme algébro-différentiels car la forme particulière (A.3) - (A.4) est celle qui a été la plus abondamment étudiée.

La forme la plus simple des systèmes algébro-différentiels est celle dite *autonome semi-explicite* [131] :

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t), y(t)), \quad (\text{A.5})$$

$$0 = g(x(t), y(t)) \quad (\text{A.6})$$

où  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  et  $f, g$  sont des fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^m$ , respectivement.

Lorsqu'un système est de la forme (A.5) - (A.6), on lui associe généralement les deux ensembles [166, 171] :

$$\mathcal{L} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m / g(x, y) = 0\}, \quad (\text{A.7})$$

$$\mathcal{M} = \{(x, y) \in \mathcal{L} / \text{rang}(D_x g(x, y), D_y g(x, y)) = m\}. \quad (\text{A.8})$$

L'ensemble des contraintes  $\mathcal{L}$  contient les solutions du système (A.5) - (A.6) tandis que  $\mathcal{M}$  est une variété régulière de dimension  $n$  d'après le *théorème des fonctions implicites*. De manière générale, l'adhérence de  $\mathcal{M}$  est égale à  $\mathcal{L}$  [167]. C'est pourquoi certains auteurs assimilent les systèmes algébro-différentiels à des équations différentielles sur des variétés [137]. D'autres emploient aussi des définitions plus géométriques de l'index [76, 106].

## A.2 Réduction de l'index

L'index est un concept utile quand on cherche à résoudre numériquement un système algébro-différentiel car [25] :

**Théorème A.1** *Le conditionnement de la matrice des itérations de Newton pour un système d'index  $\nu$  est en  $O(h^{-\nu})$  où  $h$  est le pas de temps numérique.*

Rappelons que la méthode de Newton est couramment employée pour résoudre des équations non linéaires résultant de l'intégration d'un système par un schéma numérique. Elle nécessite la résolution itérative de systèmes linéaires pour lesquels on peut définir un *nombre de conditionnement* [105]. Ces systèmes sont d'autant plus difficiles à résoudre que leur *conditionnement* est grand. Par conséquent, le calcul numérique des solutions d'un système algébro-différentiel est d'autant plus ardu que son index  $\nu$  est grand.

Il est donc conseillé de réduire au maximum l'index d'un système pour simplifier sa résolution [112]. Prenons l'exemple du système *semi-explicite* (A.5) - (A.6) et dérivons les équations algébriques (A.6) par rapport à  $t$ , le long de la trajectoire définie par la solution du problème :

$$0 = D_x g(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt}(t) + D_y g(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt}(t).$$

Si  $D_y g(x(t), y(t))$  est inversible, nous en déduisons le système différentiel :

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t), y(t)), \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{dy}{dt}(t) = -[D_y g(x(t), y(t))]^{-1} D_x g(x(t), y(t)) f(x(t), y(t)). \quad (\text{A.10})$$

Inversement,  $g(x(t), y(t)) = 0$  si (A.9) - (A.10) sont satisfaites et si  $g(x(t_0), y(t_0)) = 0$  car :

$$g(x(t), y(t)) = g(x(t_0), y(t_0)) + \int_{t_0}^t \frac{d}{ds} g(x(s), y(s)) ds$$

où  $t_0$  désigne l'instant initial du problème. Autrement dit, les contraintes (A.6) sont satisfaites par les solutions du système (A.9) - (A.10) si les conditions initiales  $x(t_0)$  et  $y(t_0)$  sont consistantes [79]. Dans ce cas, les systèmes (A.5) - (A.6) et (A.9) - (A.10) sont équivalents.

D'après sa définition, l'index du système (A.5) - (A.6) est donc égal à un si  $D_y g(x, y)$  est inversible quelque soient  $x$  et  $y$ . On dit alors que le problème est *transférable* (en un système d'équations différentielles ordinaires) [75]. Dans le cas contraire, l'index du système est supérieur ou égal à deux.

### A.3 Stabilité d'un point d'équilibre régulier

Un point d'équilibre  $y_0$  du système algébro-différentiel autonome :

$$h\left(y(t), \frac{dy}{dt}(t)\right) = 0 \quad (\text{A.11})$$

est une solution de l'équation :

$$h(y, 0) = 0.$$

Il existe des théorèmes de stabilité (au sens de *Lyapunov* [77, 136]) pour des systèmes de la forme générale (A.11) [75]. Dans le cas d'un système *semi-explicite* (A.5) - (A.6), les propriétés de stabilité d'un point d'équilibre résulte du théorème suivant :

**Théorème A.2** *Soit  $(x_0, y_0)$ , un point d'équilibre du système algébro-différentiel :*

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t), y(t)), \quad (\text{A.12})$$

$$0 = g(x(t), y(t)) \quad (\text{A.13})$$

où  $x$  et  $y$  sont respectivement des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^m$ . Soit  $\mathcal{U}$  un voisinage de  $(x_0, y_0)$  dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ . Supposons que le système (A.12) - (A.13) satisfasse les deux conditions :

(C1) les fonctions  $f$  et  $g$  sont de classe  $C^1$  et uniformément Lipschitz dans  $\mathcal{U}$ .

(C2)  $(D_y g)^{-1}$  existe dans  $\mathcal{U}$ .

Alors  $(x_0, y_0)$  est asymptotiquement stable si toutes les racines du polynôme :

$$Pol(\lambda) = Det \begin{pmatrix} D_x f(x_0, y_0) - \lambda I_n & D_y f(x_0, y_0) \\ D_x g(x_0, y_0) & D_y g(x_0, y_0) \end{pmatrix} \quad (\text{A.14})$$

sont contenues dans le demi-plan négatif  $\{z \in \mathbb{C} : Re(z) < 0\}$  ;  $I_n$  désigne la matrice identité de  $\mathbb{R}^n$ .

Nous ne démontrerons pas ce théorème. Cependant, une approche classique du problème (au sens de la *théorie des équations différentielles ordinaires*) peut faciliter sa compréhension.



En effet, admettons que les conditions (C1), (C2) soient satisfaites et écrivons le *développement de Taylor* à l'ordre un, des seconds membres de (A.12) - (A.13) au voisinage de  $(x_0, y_0)$  :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x_0, y_0) + D_x f(x_0, y_0)(x - x_0) + D_y f(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &+ o(|x - x_0|_n, |y - y_0|_m), \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{aligned} 0 &= g(x_0, y_0) + D_x g(x_0, y_0)(x - x_0) + D_y g(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &+ o(|x - x_0|_n, |y - y_0|_m). \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

$|\cdot|_n$  et  $|\cdot|_m$  désignent respectivement des normes de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^m$ .

La linéarisation du système (A.12) - (A.13) autour de la position d'équilibre  $(x_0, y_0)$  fournit donc le nouveau système :

$$\frac{dx}{dt} = P(x - x_0) + Q(y - y_0), \quad (\text{A.17})$$

$$0 = R(x - x_0) + S(y - y_0) \quad (\text{A.18})$$

où nous avons posé :

$$P = D_x f(x_0, y_0), Q = D_y f(x_0, y_0), \quad (\text{A.19})$$

$$R = D_x g(x_0, y_0), S = D_y g(x_0, y_0). \quad (\text{A.20})$$

$S$  est inversible grâce à la condition (C2). Nous en déduisons  $y - y_0$  en fonction de  $x - x_0$  à partir de l'équation (A.18) :

$$y - y_0 = -S^{-1}R(x - x_0).$$

En insérant ce résultat dans l'équation (A.17), le système algèbre-différentiel (A.17) - (A.18) est équivalent à une équation différentielle ordinaire :

$$\frac{dx}{dt} = (P - QS^{-1}R)(x - x_0). \quad (\text{A.21})$$

La point  $x_0$  est encore un équilibre du problème. Il est globalement asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice :

$$J \stackrel{\text{déf}}{=} P - QS^{-1}R$$

sont contenues dans le demi-plan négatif  $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) < 0\}$  [88]. Or  $Pol(\lambda)$  s'écrit aussi sous la forme condensée :

$$Pol(\lambda) \stackrel{(5.99)}{=} Det \begin{pmatrix} P - \lambda I_n & Q \\ R & S \end{pmatrix}.$$

Puisque  $\lambda I_n - P$  et  $S$  sont des matrices carrées, la *formule de Schur* (e.g. [64]) entraîne que  $Pol(\lambda)$  est aussi égal à :

$$Pol(\lambda) = Det(P - \lambda I_n - QS^{-1}R) Det(S)$$

dont les racines sont aussi celles du polynôme :

$$T(\lambda) = Det(P - \lambda I_n - QS^{-1}R) = Det(J - \lambda I_n).$$

Le point  $(x_0, y_0)$  est donc globalement asymptotiquement stable pour le système (A.17) - (A.18) si et seulement si les racines du polynôme (A.14) sont contenues dans le demi-plan négatif  $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) < 0\}$ . C'est pourquoi on désigne aussi les racines de  $Pol(\lambda)$  comme les valeurs propres du système linéarisé de (A.12) - (A.13) autour de son point d'équilibre  $(x_0, y_0)$ .

La stabilité locale de  $(x_0, y_0)$  pour le système complet (A.12) - (A.13) se déduit du théorème 5.1. Ce dernier généralise un résultat classique de stabilité des équilibres d'une équation différentielle ordinaire (e.g. [77]) pour les systèmes algèbre-différentiels *semi-explicites*.

## A.4 Singularité et Stabilité

Lorsque la seconde condition du théorème A.2 n'est pas satisfaite, les choses se compliquent énormément et en particulier quand le point d'équilibre  $(x_0, y_0)$  est contenu dans la singularité du système :

$$\mathcal{S} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m / \Delta(x, y) \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Det} D_y g(x, y) = 0 \right\}.$$

La présence d'une singularité dans la théorie des systèmes algébro-différentiels est sans aucun doute à l'origine de la plupart des problèmes auxquels sont confrontés les mathématiciens car elle les empêche d'appliquer les résultats classiques de la théorie des systèmes dynamiques.

Dans le cas général des systèmes de la forme (A.1), peu de résultats existent [30, 130, 133, 134]. La situation est plus satisfaisante en ce qui concerne les systèmes *semi-explicites* où quelques auteurs se sont inspirés de la théorie des *perturbations singulières* pour en tirer des résultats similaires aux théorèmes classiques de la théorie des équations différentielles ordinaires [37, 38].

Mais surtout, depuis quelques années, certains chercheurs ont développé une théorie (une *taxonomie* selon les propres termes de quelques uns) sur les problèmes de stabilité et de bifurcation lié à l'existence d'une singularité dans les systèmes *semi-explicites* [91, 128, 167, 171, 177]. L'origine de leurs travaux concernait l'étude des chutes de tension dans les systèmes électriques de puissance. Ils en ont finalement déduit de nombreux résultats comme par exemple la détermination de la région d'attraction d'un point d'équilibre, le comportement des solutions au voisinage de la singularité  $\mathcal{S}$ , les bifurcations génériques d'un problème à un seul paramètre, etc. Le résultat majeur de ces récents travaux est certainement la découverte d'une nouvelle bifurcation générique à un paramètre : la bifurcation *induite par singularité* [172].

## A.5 Bifurcation induite par singularité

Lorsqu'un système différentiel admet une courbe de points d'équilibre définie en fonction d'un paramètre, une bifurcation se produit si l'une des valeurs propres du linéarisé de ce système (autour de ces points d'équilibre) traverse l'axe imaginaire [77]. Pour les systèmes différentiels, deux types de bifurcations locales et génériques à un paramètre sont envisageables : la bifurcation *noeud-col* et la bifurcation de *Hopf*. Dans le premier cas, la bifurcation se produit quand une des valeurs propres de la matrice jacobienne du système linéarisé s'annule en un point d'équilibre, pour une certaine valeur critique du paramètre. Dans le second cas, la partie réelle de deux valeurs propres complexes conjuguées s'annule.

Ces deux bifurcations sont aussi génériques pour les systèmes algébro-différentiels. Mais ceux-ci ont la particularité de présenter une troisième bifurcation générique due à la présence de la singularité  $\mathcal{S}$ . Il est en effet possible qu'une valeur propre du linéarisé d'un système algébro-différentiel autour d'une courbe de points d'équilibre, se déplace du demi-plan  $\mathbb{C}^-$  vers le demi-plan  $\mathbb{C}^+$  en *divergeant à l'infini* lorsqu'un paramètre varie. Cette bifurcation se produit lorsqu'une suite de points d'équilibre traverse la singularité. Plus précisément, sous certaines conditions de généricité (ou non dégénérescence), il existe un résultat important [16, 167, 168, 172] :

**Théorème A.3** *Soit le système algébro-différentiel :*

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(x(t), y(t), p), \quad (\text{A.22})$$

$$0 = g(x(t), y(t), p) \quad (\text{A.23})$$

où  $x$  et  $y$  sont respectivement des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^m$  et  $p$  est un paramètre réel. Supposons que le système (A.22) - (A.23) satisfasse les conditions suivantes, au point  $(0, 0, p_0)$  :

(C1)  $f(0, 0, p_0) = 0$ ,  $g(0, 0, p_0) = 0$ ,  $D_y g$  a une valeur propre simple nulle.

(C2)  $\text{Tr} [D_y f \cdot \text{Co}(D_y g) \cdot D_x g] \neq 0$ ;  $\text{Co}(D_y g)$  désigne la matrice des cofacteurs de  $D_y g$  [8].

(C3) La matrice :

$$\begin{pmatrix} D_x f & D_y f \\ D_x g & D_y g \end{pmatrix}$$

n'est pas singulière.

(C4) La matrice :

$$\begin{pmatrix} D_x f & D_y f & D_p f \\ D_x g & D_y g & D_p g \\ D_x \Delta & D_y \Delta & D_p \Delta \end{pmatrix}$$

n'est pas singulière;  $\Delta \stackrel{\text{déf}}{=} \text{Det}(D_y g)$ .

Alors il existe une courbe régulière de points d'équilibre dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$  qui passe à travers  $(0, 0, p_0)$  et qui est transversale à la surface singulière  $\mathcal{S}$  en  $(0, 0, p_0)$ . Lorsque  $p$  varie en franchissant la valeur  $p_0$ , une valeur propre  $\lambda(p)$  du système (i.e. une valeur propre de

$$J \stackrel{\text{déf}}{=} D_x f - D_y f \cdot (D_y g)^{-1} \cdot D_x g$$

évaluée le long de la courbe des points d'équilibre), se déplace de  $\mathbb{C}^-$  vers  $\mathbb{C}^+$  si  $b/c > 0$  (respectivement, de  $\mathbb{C}^+$  vers  $\mathbb{C}^-$  si  $b/c < 0$ ), le long de l'axe réel, en divergeant à l'infini :

$$\lambda(p) = \frac{b}{c(p - p_0)} + \mathcal{O}(|p - p_0|).$$

Les autres  $n - 1$  valeurs propres restent bornées et distinctes de l'origine. Les constantes  $b$  et  $c$  sont données par les formules :

$$\begin{aligned} b &= -\text{Tr} [D_y f \cdot \text{Co}(D_y g) \cdot D_x g], \\ c &= D_p \Delta - (D_x \Delta, D_y \Delta) \begin{pmatrix} D_x f & D_y f \\ D_x g & D_y g \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} D_p f \\ D_p g \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

évaluées en  $(0, 0, p_0)$ .

*Remarque* : en appliquant ce théorème à leurs modèles de systèmes électriques de puissance, les auteurs de ce résultat ont en particulier expliqué les chutes de tension que les ingénieurs cherchent à éviter dans les réseaux électriques. Nous sommes persuadés que ce théorème pourra expliquer bien d'autres phénomènes observés à ce jour. Il ne lui reste qu'à se répandre abondamment dans la communauté scientifique.

En ce qui concerne le système réduit (5.80) - (5.81), une bifurcation *induite par singularité* est impossible car  $D_y g(x, y, p)$  n'est jamais singulière lorsque  $x$  et  $y$  définissent un écoulement stationnaire (voir section 5.2.9).

## Annexe B

# Publication

L'article imprimé dans cette annexe a été présenté le mardi 2 août 1999, à Boston, Massachusetts, USA, dans le cadre de la conférence annuelle *Pressure Vessels and Piping* de l'American Society of Mechanical Engineers. Il résume les premiers chapitres de cette thèse où nous avons décrit une modélisation simplifiée des écoulements diphasiques transitoires dans les systèmes pipeline-riser. La référence exacte de la publication est la suivante :

E. Zakarian & Q. H. Tran. *A Differential-Algebraic Model for Two-Phase Flow Instabilities in Pipeline-Riser Systems*, the American Society of Mechanical Engineers, *1999 Pressure Vessels and Piping conference*, Boston, Massachusetts, august 1-5 1999, PVP-Vol. 396, edited by W. L. Cheng.

Proceedings of PVP'99  
1999 ASME Pressure Vessels and Piping Conference  
August 1-5, 1999, Boston, Massachusetts, USA

## A DIFFERENTIAL-ALGEBRAIC MODEL FOR TWO-PHASE FLOW INSTABILITIES IN PIPELINE-RISER SYSTEMS

**Erich ZAKARIAN**

Institut Français du Pétrole  
Mécanique Appliquée  
1 et 4, avenue de Bois-Préau  
92852 Rueil-Malmaison Cedex  
France  
Email: Erich.ZAKARIAN@ifp.fr

**Quang Huy TRAN**

Institut Français du Pétrole  
Informatique Scientifique et Mathématiques Appliquées  
1 et 4, avenue de Bois-Préau  
92852 Rueil-Malmaison Cedex  
France  
Email: q-huy.tran@ifp.fr

### ABSTRACT

A differential-algebraic system is presented to model severe slug flows in pipeline-riser systems. Equations derive from the space integration of an isothermal drift-flux model whose inertia terms are neglected. The slip and wall friction laws are expressed as smooth functions of the void fraction, pressure and superficial mixture velocity of the flow. The numerical solution is computed with stiffly accurate implicit Runge-Kutta methods. Then, comparisons between laboratory experiments and numerical computations are performed.

**Keywords.** *Two-phase flow, severe slugging, stiffness, implicit Runge-Kutta methods, differential-algebraic equations.*

### NOMENCLATURE

$A$	pipe cross-section area [ $m^2$ ]
$A_k$	cross-sectional area occupied by phase $k$ [ $m^2$ ]
$D$	pipe diameter [ $m$ ]
$G$	gas phase
$H$	riser height [ $m$ ]
$L$	pipe length [ $m$ ] or liquid phase
$P$	pressure [ $kg.m^{-1}.s^{-2}$ ]
$R_k$	area fraction occupied by phase $k$ , $R_k = A_k/A$
$S$	mixture
$U$	superficial velocity [ $m.s^{-1}$ ]
$V$	velocity [ $m.s^{-1}$ ]
<i>disp</i>	dispersed flow
$g$	gravitational acceleration [ $m.s^{-2}$ ]
<i>int</i>	intermittent flow

$k$	liquid ( $k = L$ ) or gas ( $k = G$ ) phase
<i>liq</i>	liquid level in the riser
$m$	mixture
$p$	pipe
$r$	riser
$t$	time [ $s$ ]
$x$	axial coordinate of the pipe [ $m$ ]
$z$	axial coordinate of the riser [ $m$ ]
$\rho$	density [ $kg.m^{-3}$ ]
$\theta$	pipe inclination with respect to horizontal

### INTRODUCTION

In petroleum industry, hydrocarbon transport and separation may seriously perturb the production because in some exploitation conditions, flows (mainly two-phase flows) may be strongly unstable. These instabilities have been intensively studied for years and more particularly the *severe slugging* phenomenon (e.g. (Fabre et al., 1990), (Jansen, 1996), (Sarica and Shoham, 1991), (Schmidt et al., 1985), (Taitel et al., 1990)). Nevertheless, their physical comprehension is not complete and requires more investigations.

This work presents a simplified model formulated as a smooth dynamical system. It reproduces the aforementioned instabilities and makes their mathematical analysis with bifurcation theory, easier to predict period and amplitude of *severe slugging* oscillations with respect to the physical parameters of the problem.

## THE PHYSICAL PROBLEM

Under special situations, a steady gas-liquid flow in pipes (i.e. a two-phase flow with nearly constant gas and liquid flow rates) does not exist (Taitel, 1986). For instance, when a sub-sea line ends at a vertical pipe (i.e. a riser) connected to a platform separator, the base of the riser may accumulate some liquid and stop the gas motion. The upstream gas is compressed until its pressure is large enough to push the liquid slug, downstream into the separator.

Under such conditions, a cyclic process appears which is called *severe slugging*. The latter is an unstable flow regime where large and fast fluctuations of pressure and flow rate may exist. Basically, a *severe slug* flow occurs in a pipeline-riser system whenever the liquid and gas flow rates in the flow-line are low. The process of its formation may be described as a four-step cycle (Schmidt et al., 1985):

1. The first step is the *liquid slug formation* in the riser: the liquid coming from the pipeline accumulates at the riser base, stopping the gas motion and forcing the gas to be compressed (*cf.* Fig. 1, page 6).
2. When the liquid slug reaches the top of the riser, the second step of *slug movement into the separator* starts (*cf.* Fig. 2, page 6).
3. The third step begins when the gas starts to penetrate into the liquid column in the riser. The liquid slug keeps flowing into the separator but with a faster velocity (*cf.* Fig. 3, page 6).
4. When the gas bubble reaches the top of the riser, the pipe pressure is minimal and the liquid is no longer lifted by the gas. The remaining liquid in the riser falls back and the process of slug formation starts again (*cf.* Fig. 4, page 6).

## SEVERE SLUGGING MODELING

Flows in pipes are usually modeled via a one-dimensional approximation of the *Navier-Stokes* equations (Birkhoff, 1964). This approach is particularly true in a straight pipe with a constant diameter (Shapiro, 1953). Like most of the *severe slugging* models (e.g. (Fabre et al., 1990), (Sarica and Shoham, 1991), (Taitel et al., 1990)), we derive our equations from a *drift-flux* formulation: assuming a uniform pressure in any pipe cross-section, the *drift-flux* model solves separate mass conservation equations for each phase and a mixture momentum equation.

The flow is assumed isothermal with no mass transfer between the two phases. The pipe diameter is chosen constant along the flow-line. Moreover, assuming the transient response is usually relatively slow, inertia terms in the mixture momentum equation are neglected (Taitel and Barnea, 1997). Therefore, in each straight pipe section of the flow-

line, governing equations are given as:

$$\forall(x, t) \in ]0, L[ \times ]0, T[,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho_L R_L] + \frac{\partial}{\partial x} [\rho_L R_L V_L] = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho_G R_G] + \frac{\partial}{\partial x} [\rho_G R_G V_G] = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + F_w + (\rho_L R_L + \rho_G R_G) g \sin \theta = 0. \quad (3)$$

For more readability, we did not mention the dependences of the quantities  $\rho_L$ ,  $\rho_G$ ,  $R_L$ ,  $R_G$ ,  $V_L$ ,  $V_G$  on  $x$  and  $t$ . Viscosity effects are represented by the wall friction term  $F_w$ . It depends on  $P$ ,  $R_G$ ,  $V_L$ ,  $V_G$  and some physical constants (such as the pipe diameter and its wall roughness, liquid and gas viscosities, etc.) we will not mention explicitly:

$$F_w = F_w(R_G, P, V_G, V_L). \quad (4)$$

Since in laboratory experiments, the flow temperature is approximately equal to 20° Celsius and  $P$  is around the atmospheric pressure, the gas may be assumed perfect (Viswanath and Su, 1965). Therefore its density is given as:

$$\rho_G(P) = \frac{P}{\mathcal{R}\bar{T}} \quad (5)$$

where  $\mathcal{R}$  is the ideal gas constant and  $\bar{T}$  is the constant flow temperature. The liquid phase may be slightly compressible:

$$\rho_L(P) = \rho_L^0 \exp[K(P - P_0)] \quad (6)$$

where  $\rho_L^0$  is the liquid density at the atmospheric pressure  $P_0$ .  $K$  is a compressibility (Govier and Aziz, 1972).

Since  $R_G + R_L = 1$ , the following relation closes the system Eq. (1) - Eq. (3) with respect to the four unknowns  $P$ ,  $R_G$ ,  $V_G$  and  $V_L$ :

$$\Psi(R_G, P, V_G, V_L) = 0. \quad (7)$$

Equation (7) is usually given as a *slip law* which depends on a flow pattern.

Flow patterns are classified with respect to the pipe inclination (e.g. (Barnea, 1986), (Barnea and Taitel, 1986)). In horizontal pipes, the flow may be *stratified* (*smooth* or

wavy), annular (wavy, mist or not), dispersed bubble or intermittent (elongated bubble, plug or slug) (cf. Fig. 6, page 7). In vertical pipes, the flow may be bubble, dispersed bubble, slug, churn or annular (wispy or not) (cf. Fig. 7, page 7).

At small inclinations with respect to horizontal or vertical, flow patterns are roughly the same. However, if the stratified flow does not occur at steep upward inclinations, it may occur at steep downward inclinations and even for almost vertical downward pipes.

Practically, a flow pattern is chosen versus transition criteria which depend on empirical correlations and for instance, on the pipe diameter, the interface surface tension, the liquid level in a stratified flow or a critical phase velocity (e.g. (Barnea, 1986), (Barnea and Taitel, 1986)).

In bubble or intermittent flows, the slip law Eq. (7) may be written in the simplest case as (Bendiksen et al., 1996), (Zuber and Findlay, 1965):

$$\Psi_{int}(R_G, P, V_G, V_L) = V_G - C_{int}(\theta) [(1 - R_G)V_L + R_G V_G] - u_d^{int}(P, \theta) \quad (8)$$

where  $C_{int}$  is a flow distribution parameter and  $u_d^{int}$  is a drift velocity.

In a separated flow (stratified or annular), Eq. (7) may be more complicated, depending nonlinearly on  $V_G$  and  $V_L$  (Barnea and Taitel, 1986).

As far as Eq. (4) is concerned, the simplest expression is given by the dispersed flow pattern for which  $F_w$  is usually written as (Govier and Aziz, 1972):

$$F_w^{disp} = 2 \frac{f_m}{D} \rho U_S |U_S|. \quad (9)$$

$\rho = \rho_L(P)R_L + \rho_G(P)R_G$  is the mixture density and  $U_S = R_L V_L + R_G V_G$  is the mixture velocity.  $f_m$  is a friction factor depending on  $P$  and  $U_S$  and computed, for instance, from the Blasius equation (Govier and Aziz, 1972).

In a separated flow,  $F_w$  has a similar expression whereas the intermittent wall friction is a linear combination of the stratified and dispersed wall frictions.

## A DIFFERENTIAL-ALGEBRAIC MODEL

We derive a differential-algebraic model via space integration of the system Eq. (1) - Eq. (3), first from 0 to  $L$  in the pipe and then, from 0 to  $H_{liq}$  in the riser.  $H_{liq}$  is the liquid level appearing in the riser during the first two steps of a severe slugging cycle (Fig. 1 and 2, page 6). During the two last steps,  $H_{liq}$  is equal to the riser height  $H$  (Fig.

3 and 4, page 6). Its time-derivative is discontinuous and given as (Fabre et al., 1990), (Sarica and Shoham, 1991):

$$\frac{dH_{liq}}{dt} = \begin{cases} V_{liq} & \text{if } H_{liq} < H \text{ or } (H_{liq} = H, V_{liq} < 0), \\ 0 & \text{if } H_{liq} = H \text{ and } V_{liq} \geq 0 \end{cases} \quad (10)$$

where  $V_{liq}$  is the liquid level velocity.

From the closure law Eq. (7), we extract the velocity  $V_G$  as a function of  $R_G$ ,  $P$  and  $V_L$ . Therefore, we may choose this three variables as the main physical variables of the flow. We prefer to use the more convenient set  $R_G$ ,  $P$ ,  $U_S$  from which we compute the superficial velocity  $U_G = R_G V_G$ , using the transformed slip law:

$$U_G = \psi(R_G, P, U_S). \quad (11)$$

Then, given  $R_G$ ,  $P$ ,  $U_S$ , we deduce  $V_G = U_G/R_G$  and  $V_L = (U_S - U_G)/(1 - R_G)$  whenever  $R_G$  or  $R_L = 1 - R_G$  are not equal to zero.

Given boundary conditions as constant liquid and gas mass flow rates at the pipe entry and a constant separator pressure  $P_S$ , our system is defined as a set of fourteen differential or algebraic equations formulated in a semi-explicit form (Brenan et al., 1996):

$$\frac{dX}{dt}(t) = f(X(t), Y(t)), \quad (12)$$

$$0 = g(X(t), Y(t)). \quad (13)$$

The differential variables  $X$  are the liquid level  $H_{liq}$  and the integrated densities  $m_L$ ,  $m_G$  in the pipe and the riser :

$$m_L = \int_0^S \rho_L R_L dx ; m_G = \int_0^S \rho_G R_G dx ; \quad (14)$$

$S = L$  in the pipe and  $S = H_{liq}$  in the riser.

The algebraic variables  $Y$  are the void fraction  $R_G$ , the pressure  $P$  and the mixture velocity  $U_S$  computed at each extremity of the pipe and at the riser base. At the liquid level  $H_{liq}$ ,  $U_S$  is also an algebraic variable whereas the pressure is constant and equal to  $P_S$  (as a consequence of the jump relation of Eq. (3)). Notice that  $P$  and  $U_S$  are continuous through the pipe-riser connection (as a consequence of the jump relations of Eq. (1), Eq. (2) and Eq. (3)). Therefore, we use the same variables  $P$ ,  $U_S$  at the pipe outlet and the riser base.

## SMOOTH LAWS

As we mentioned before, the slip law Eq. (11) and the wall friction law Eq. (4) depend on a flow pattern. The

latter is chosen with respect to several transition criteria. When a flow regime switches to a new one, Eq. (4) and Eq. (11) are defined by a new expression. Unfortunately, discontinuities may result from this action since each law is a sketch model of a real flow and does not represent every possible sub-pattern of a flow regime (Bergles et al., 1981).

Consequently, we need to build unified laws as smooth functions of the three main variables  $R_G$ ,  $P$ ,  $U_S$ . Since most of the transitions occur for a critical void fraction, we may assume these laws and their derivatives with respect to  $R_G$ , should satisfy some relations at specific values of the void fraction such as zero and one where the two-phase flow becomes a one-phase flow. Other particular values are for instance 0.52 over which no *dispersed-bubble* flow does exist (Barnea, 1987) or the value 0.76 below which the *annular* flow is usually impossible (Barnea, 1986).

Given  $P$ ,  $U_S$  and using a *Hermite* interpolation between these special values of  $R_G$ , the slip law and the wall friction law are defined as smooth maps, at least twice differentiable, for all  $R_G \in (0, 1)$ . Moreover, these functions are infinitely differentiable with respect to  $P$  and  $U_S$ .

## NUMERICAL SOLUTION

Given initial conditions, the system Eq. (12) - Eq. (13) has a unique solution for all time whenever the time-derivative Eq. (10) is always zero. This is true whether the initial condition is a small perturbation of a stable or *quasi-steady* flow (Taitel et al., 1990).

In our model, a *steady* flow is an equilibrium point of the system Eq. (12) - Eq. (13) for which  $dH_{liq}/dt$  is equal to zero since the velocity  $V_{liq}$  is positive and  $H_{liq} = H$  (cf. Fig. 5, page 6). Taking a perturbation  $(X_0, Y_0)$  of this point as initial condition, we compute a numerical approximation of the solution  $(X(t), Y(t))$ , using *stiffly accurate implicit Runge-Kutta* methods. These methods are particularly efficient whenever a system is stiff, such as a *severe slugging* model (Hairer and Wanner, 1991).

Given the numerical solution  $(X_n, Y_n)$  at the time  $t_n$ ,  $n \geq 0$ , the next step solution is computed through the following scheme:

Solve Eq. (15) - Eq. (16) with respect to  $X_{ni}$ ,  $i = 1, \dots, s$ :

$$X_{ni} = X_n + \Delta t_n \sum_{j=1}^s a_{ij} f(X_{nj}, Y_{nj}), \quad (15)$$

$$0 = g(X_{ni}, Y_{ni}). \quad (16)$$

Deduce  $(X_{n+1}, Y_{n+1})$  from:

$$X_{n+1} = X_{ns}, \quad (17)$$

$$Y_{n+1} = Y_{ns}. \quad (18)$$

$\Delta t_n$  is a time step,  $s$  is a number of stages and  $a_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, s$  are the coefficients of the *Runge-Kutta* matrix. Notice Eq. (15) and Eq. (16) do not depend on  $Y_n$ . However, the latter gives an efficient starting point for the iterative computation of the next step solution.

Since the time-derivative Eq. (10) is discontinuous with respect to  $H_{liq}$  and  $V_{liq}$ , a special method we called *truncation method* had to be implemented in order to solve the system Eq. (15) - Eq. (16) adequately. We remark this discontinuity may induce numerical problems such as divergence or stiffness since a analytical solution of Eq. (12) - Eq. (13) may not even exist whenever  $dH_{liq}/dt$  is nonzero.

## RESULTS

An experimental set up was designed at the *Institut Français du Pétrole* to study two-phase flows in U-shaped flow-lines (cf. Fig. 8, page 7). This configuration approximately represents the real case of an offshore pipeline connecting a production platform to a treatment platform.

The laboratory-scaled two-phase loop was made of 0.080-m-ID transparent polyvinyl pipes. A mixture of air and water flowed through a vertical down-comer, then in a horizontal flow-line and finally in a riser. The down-comer and the riser lengths were 15 meters. The flow-line length could range from 105 to 150 meters.

At the top of the down-comer, liquid and gas were injected at constant mass flow rates. At the top of the riser, the air/water mixture was dropped into a vertical separator where the pressure was controlled to be constant. The flow temperature was also approximately constant and close to 20° Celsius in all experiments.

Though the experimental loop is slightly different from the pipe-riser system we considered before, the derivation of a differential-algebraic model is similar since we just need to integrate the system Eq. (1) - Eq. (3), one more time along the down-comer. We only notice that  $P$  and  $U_S$  are continuous through the connection between the down-comer and the flow-line. Therefore, we use the same variables  $P$ ,  $U_S$  at the base of the down-comer and the flow-line entry.

We compared our model to several experiments reported from the last campaign performed in 1996 (Corteville and Reyt, 1997). Our numerical procedure was the following: given experimental boundary conditions, we deduce initial conditions as a perturbation of the steady flow of Eq. (12) - Eq. (13). Then a numerical transient solution of Eq. (12) - Eq. (13) is computed, using the numerical scheme Eq. (15) - Eq. (18).

If the steady flow is unstable, the perturbation is sufficient to generate a severe slug flow : pressures, void frac-



tions, velocities, etc. start to oscillate and finally reach a limit cycle in a finite time (*cf.* Fig. 9, page 7). If these oscillations are sufficiently large, the riser ends to be aerated by a large bubble and a liquid level lower than the riser height appears. The latter oscillates and finally reaches a limit cycle (*cf.* Fig. 10, page 7).

When the flow is strongly unstable, the flow-line pressure oscillates with relaxation (*cf.* Fig. 11, page 8), which is characteristic of the *severe slugging* phenomenon: the pressure increases slowly during the first step of the liquid *slug formation* in the riser (notice the second step does not exist since the flow-line is horizontal (Fabre et al., 1990)). Then, the gas penetrates in the riser and the flow-line pressure decreases rapidly during the two last steps of the *severe slugging* cycle. The void fraction curves in the flow-line and the riser help to understand this relaxation phenomenon (*cf.* figures 12 and 13, page 8). As far as the liquid level in the riser is concerned, the fast response occurs when the liquid falls back, after the *bubble penetration* step (*cf.* Fig. 14, page 8).

When the flow is slightly unstable, the pressure and the void fraction in the riser may oscillate in a smooth manner (roughly as sinus functions) while the liquid column remains stable (*cf.* figures 15 and 16, page 8). This special aspect of two-phase flows in pipe-riser systems was recently reported by Taitel Y. *et al* in (Taitel et al., 1990) and designated as a *quasi-steady* flow.

Otherwise, the steady flow is stable : the perturbation is dissipated and the flow returns to its steady state.

A good agreement between numerical computations and experiments was found as far as pressures, superficial velocities or pressure drops were concerned. The prediction of *severe slugging* periods was not so good whenever the experimental period was large since in this case, the model predicted no instability. Nevertheless, whenever the flow was truly predicted unstable, the numerical period was very close to the experimental measure.

## CONCLUSION

The model presented in this paper is dedicated to the computation of isothermal *severe slug* flows. In each pipe-section of a pipe-riser system, equations are derived from the space integration of an isothermal *drift-flux* model where inertia terms are neglected.

This approach results in a set of differential and algebraic equations. The differential variables are the liquid level in the riser and the densities integrated along the pipe and the liquid slug in the riser. Defining the void fraction, the pressure and the mixture velocity of the flow as the main variables of the model, the algebraic variables are the mixture velocity at the liquid level and the main variables

computed at each extremity of the pipe and at the base of the riser.

The slip law and the wall friction law are expressed as smooth functions of the main variables. Then, whenever the liquid column in the riser remains stable (specially whenever the flow is stable or slightly unstable), our equations are smooth enough to apply the classical results of the bifurcation theory.

Comparisons between experiments and numerical computations showed that a our differential-algebraic formulation could provide a fast and reliable *severe slugging* model whenever the flow oscillates with a small period. Moreover, many aspects of the two-phase flows in pipe-riser systems were accurately reproduced such as *relaxation* phenomena or *quasi-steady* oscillations.

Presently, our purpose is to find how the period and the amplitude of a *severe slug* flow depend on the physical parameters of the problem.

## ACKNOWLEDGMENT

The authors acknowledge the *Institut Français du Pétrole* for its financial support and the University of California at Santa Cruz where a part of this work was carried out. They also wish to express their appreciation to Henri Viviani for his invaluable advices and Professor Pascal Chossat (*Institut Non Linéaire de Nice, Sophia-Antipolis, France*) for his guidance and assistance.

## REFERENCES

- Barnea, D., 1986, *Transition From Annular and From Dispersed Bubble Flow - Unified Models for the Whole Range of Pipe Inclinations*, Int. J. Multiphase Flow, vol. 12, No. 5, pp. 733-744.
- Barnea, D., 1987, *A Unified Model for Predicting Flow-Pattern Transitions*, Int. J. on Multiphase Flow, vol. 13, No. 1, pp. 1-12.
- Barnea, D. and Taitel, Y., 1986, *Encyclopedia of Fluid Mechanics*, N. P. Cheremisinoff, Editor, vol. 3, Gas-Liquid Flows, pp. 403-474.
- Bendiksen, K., Malnes, D. and Nydal, O., 1996, *On the Modelling of Slug Flow*, Chem. Eng. Comm., vol. 141-142, pp. 71-102.
- Bergles, A. E., Collier, J. G., Delhay, J. M., Hewitt, G. F. and Mayinger, F., 1981, *Two-Phase Flow and Heat Transfer in the Power and Process Industries*, Washington, Hemisphere Publishing Corporation.
- Birkhoff, G., 1964, *Averaged Conservation Laws in Pipes*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 8, pp. 66-77.
- Brenan, K. E., Campbell, S. L. and Petzold, L. R., 1996, *Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations*, SIAM, Classics In Applied Mathematics 14).

Corteville, J. and Reyt, J. P., 1997, *Étude des Écoulements Diphasiques en Couplage Pipeline/Riser. Rapport de la campagne d'essais n°2*, Institut Français du Pétrole, Report 44097.

Fabre, J., Péresson, L., Corteville, J., Bernicot, M. and Ozon, P., 1990, *Severe Slugging in Pipeline/Riser Systems*, SPE Prod. Eng., August 1990, pp. 299-305.

Govier, G. W. and Aziz, K., 1972, *The Flow of Complex Mixtures in Pipes*, Van Nostrand Reinhold Company.

Hairer, E. and Wanner, G., 1991, *Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems*, Springer Series in Computational Mathematics, vol. 14, Springer-Verlag.

Jansen, F. E., 1996, *The Elimination of Severe Slugging – Experiments and Modeling*, Int. J. on Multiphase Flow, vol. 22, No. 6, pp. 1055-1072.

Sarica, C. and Shoham, O., 1991, *A Simplified Transient Model for Pipeline-Riser Systems*, Chem. Engng. Sci., vol. 46, No. 9, pp. 2167-2179.

Schmidt, Z., Doty, D. R. and Dutta-Roy, K., 1985, *Severe Slugging in Offshore Pipeline Riser-Pipe Systems*, SPE J., Feb. 1985, pp. 27-38.

Shapiro, A. H., 1953, *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*, New York : Ronald Press, vol. 1.

Taitel, Y., 1986, *Stability of Severe Slugging*, Int. J. Multiphase Flow, vol. 12, No. 2, pp. 203-217.

Taitel, Y., Vierkandt, S., Shoham, O. and Brill, J. P., 1990, *Severe Slugging in a Riser System : Experiments and Modeling*, Int. J. Multiphase Flow, vol. 16, No. 1, pp. 57-68.

Taitel, Y. and Barnea D., 1997, *Simplified Transient Simulation of Two-Phase Flow Using Quasi-Equilibrium Momentum Balances*, Int. J. Multiphase Flow, vol. 23, No. 3, pp. 493-501.

Viswanath, D. S. and Su, G. -J., 1965, *Generalized Thermodynamic Properties of Real Gases: Part I. Generalized PVT Behavior of Real Gases*, AIChE Journal, vol. 11, No. 2, pp. 202-204.

Zuber, N. and Findlay, J. A., 1965, *Average Volumetric Concentration in Two-Phase Flow Systems*, J. Heat Transfer, Ser. C, vol. 87, pp. 453-468.

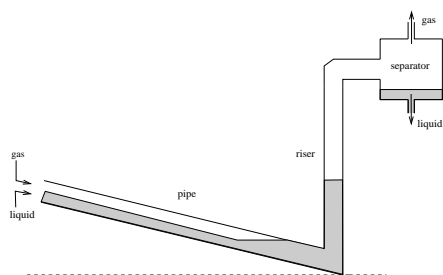


Figure 1. *Liquid slug formation.*

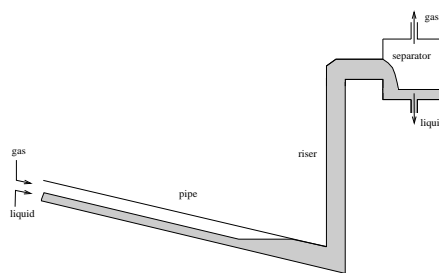


Figure 2. *Liquid slug production.*

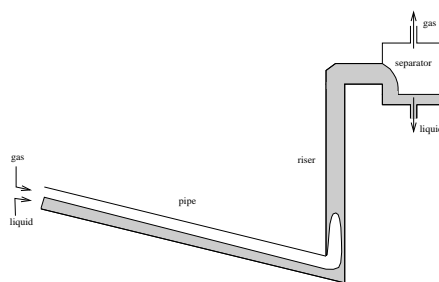


Figure 3. *Blow out or bubble penetration.*

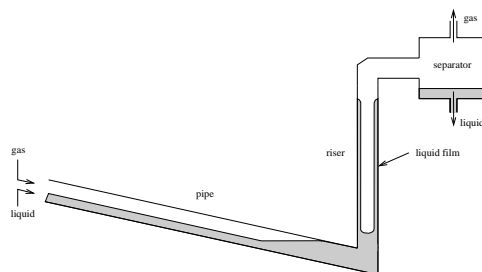


Figure 4. *Liquid fall-back or gas blow-down.*

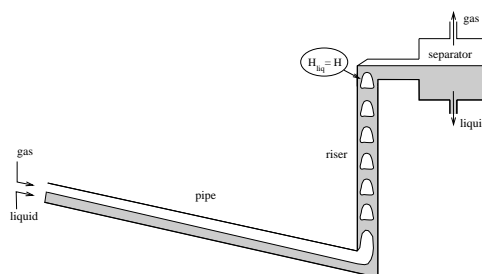


Figure 5. *Steady flow with continuous gas penetration.*

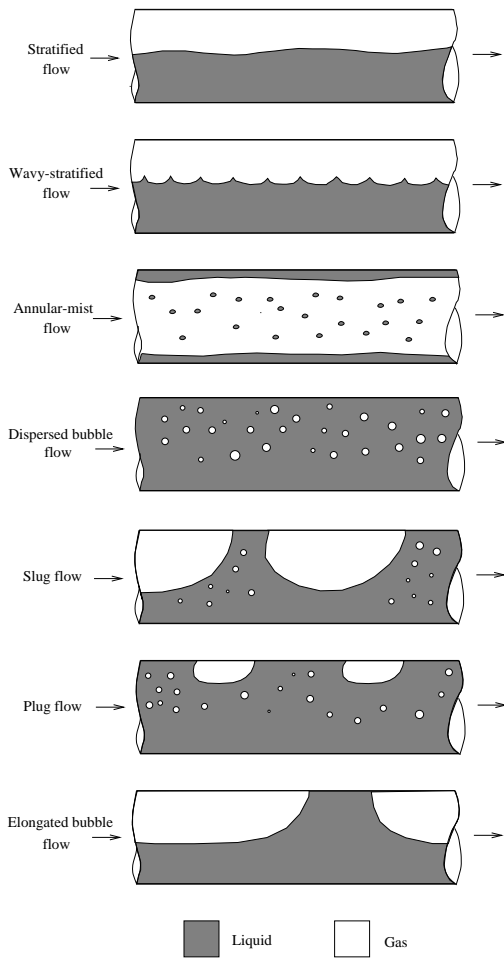


Figure 6. Flow patterns in horizontal pipes.

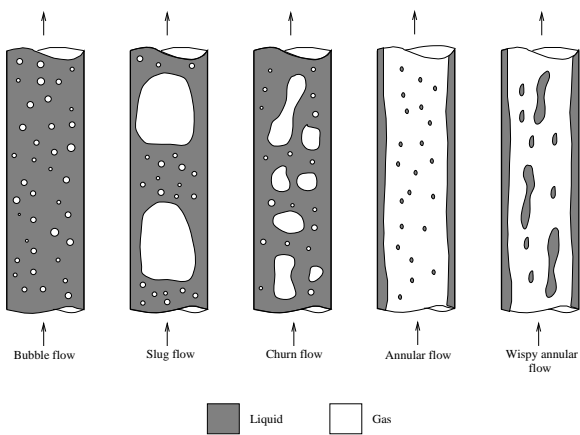


Figure 7. Flow patterns in vertical pipes.

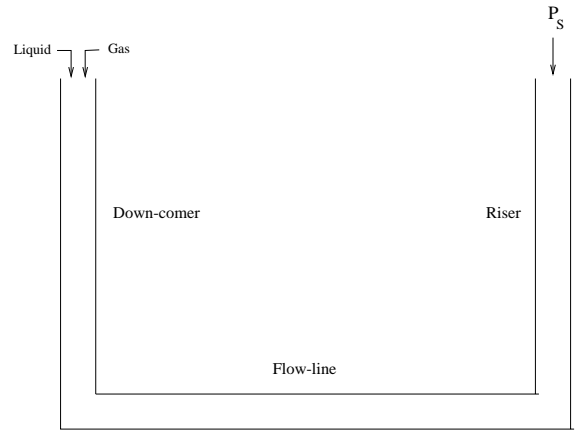


Figure 8. A U-shaped flow-line.

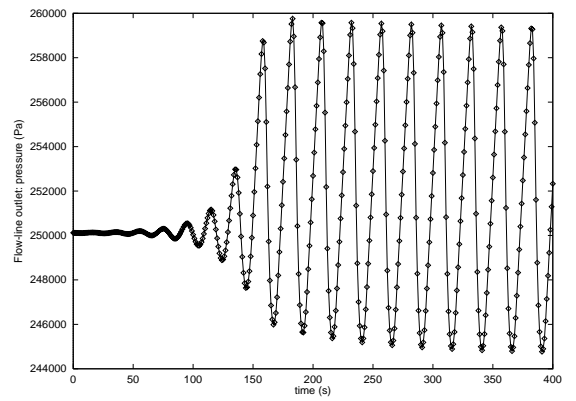


Figure 9. Flow-line pressure (run 17).

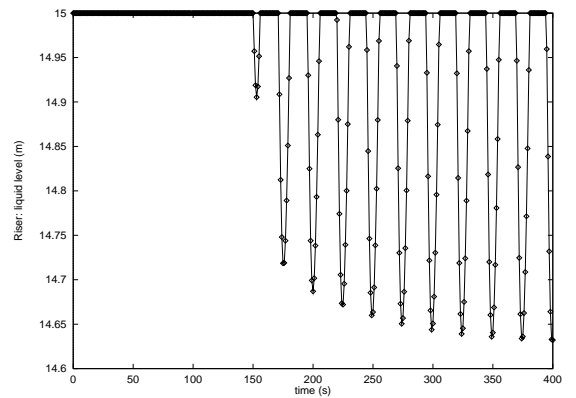


Figure 10. Liquid level in the riser (run 17).

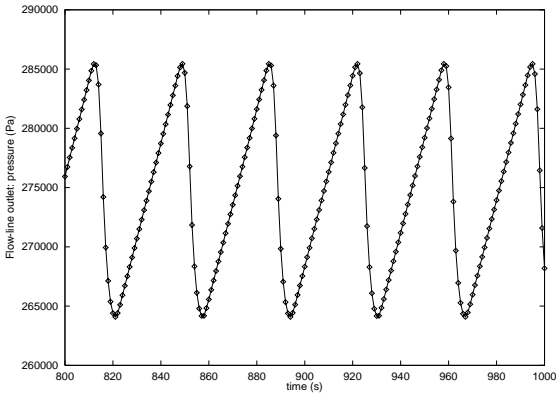


Figure 11. Flow-line pressure (run 18).

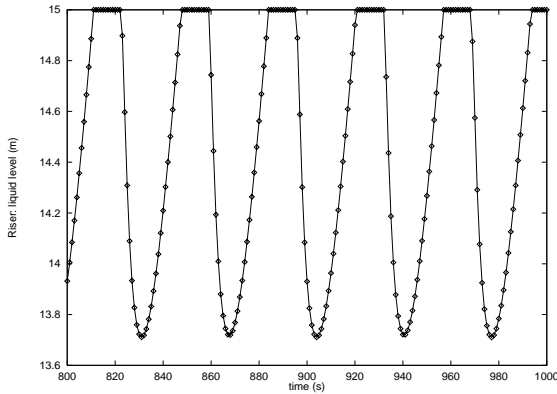


Figure 14. Liquid level in the riser (run 18).

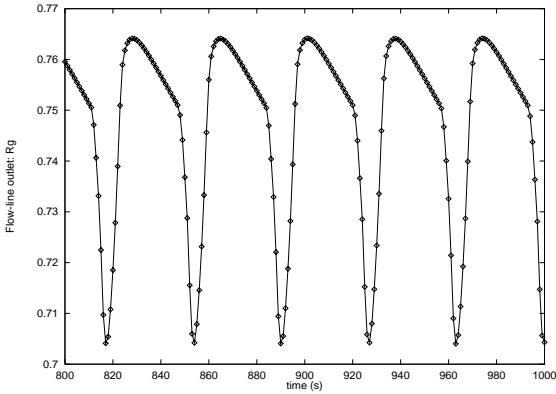


Figure 12.  $R_G$  at the flow-line outlet (run 18).

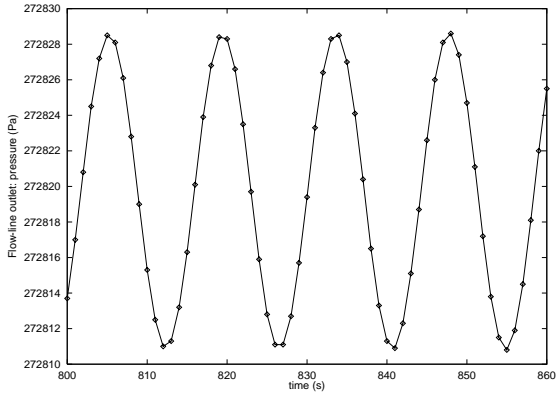


Figure 15. Flow-line pressure (run 28).

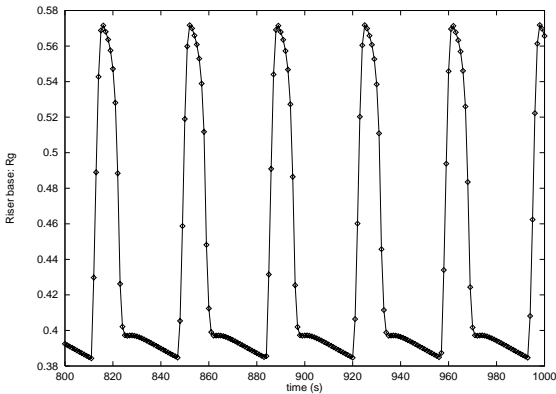


Figure 13.  $R_G$  at the riser base (run 18).

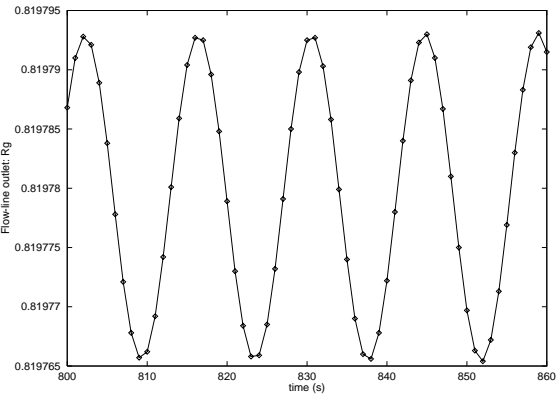


Figure 16.  $R_G$  at the flow-line outlet (run 28).



# Bibliographie

- [1] AGGOUR, M. A. and SIMS, G. E. (1978), *A theoretical solution of pressure drop and holdup in two-phase stratified flow*, Proc. Heat Transfer Fluid Mech. Inst. , pp. 205-217.
- [2] AGRAWAL, S. S., GREGORY, G. A. and GOVIER, G. W. (1973), *An Analysis of Horizontal Stratified Two Phase Flow in Pipes*, Canadian. J. Chem. Engng. , vol. **51**, pp. 280-286.
- [3] *Stiff computation* (1985), Edited by AIKEN, R. C., Oxford University Press.
- [4] ALLEN, T., JR. and DISTWORTH, R. L. (1972), *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill Book Co., New York City.
- [5] ANDREUSSI, P. and BENDIKSEN, K. (1989), *An Investigation of Void Fraction in Liquid Slugs for Horizontal and Inclined Gas-Liquid Pipe Flow*, Int. J. Multiphase Flow, vol. **15**, No. 6, pp. 937-946.
- [6] ANDRISTOS, N. and HANRATTY, T. J. (1987), *Influence of Interfacial Waves in Stratified Gas-Liquid Flows*, AIChE Journal, vol. **33**, No. 3, pp. 444-454.
- [7] AZIZ, K., NICHOLSON, M. and GREGORY, G. A. (1974), *Some Observations on the Motion of Elongated Bubbles in Horizontal Pipes*, Canadian. J. Chem. Engng., vol. **52**, pp. 695-702.
- [8] BALL, R. W. and BEAUMONT, R. A. (1956), *Introduction to Modern Algebra and Matrix Theory*, Rinehart & Co., Inc., New York.
- [9] BANERJEE, S. (1986), *Multifield Methods for Nuclear Thermalhydraulics Problems*, proceedings of the Second International Conference on Simulation Methods in Nuclear Engineering, 14-16 October 1986, Le Grand Hotel, Montreal, Canada, vol. **2**, editor A. Brais.
- [10] BARNEA, D. (1986), *Transition From Annular and From Dispersed Bubble Flow - Unified Models for the Whole Range of Pipe Inclinations*, Int. J. Multiphase Flow, vol. **12**, No. 5, pp. 733-744.
- [11] BARNEA, D. (1987), *A Unified Model for Predicting Flow-Pattern Transitions*, Int. J. on Multiphase Flow, vol. **13**, No. 1, pp. 1-12.
- [12] BARNEA, D., SHOHAM, O. and TAITEL, Y. (1982), *Flow Pattern Transition for Downward Inclined Two-Phase flow; Horizontal to Vertical*, Chem. Engng. Sci., vol. **37**, pp. 735-740.

- [13] BARNEA, D. and BRAUNER, N. (1985), *Holdup of the Liquid Slug in Two-Phase Intermittent Flow*, Int. J. Multiphase Flow, vol. **11**, No. 1, pp. 43-49.
- [14] BARNEA, D., SHOHAM, O. and TAITEL, Y. (1985), *Gas-Liquid Flow in Inclined Tubes: Flow Pattern Transitions for Upward Flow*, Chem. Engng. Sci., vol. **40**, pp. 131-136.
- [15] BARNEA, D. and TAITEL, Y. (1986), *Encyclopedia of Fluid Mechanics*, N. P. Cheremisinoff, Editor, vol. **3**, Gas-Liquid Flows, pp. 403-474.
- [16] BEARDMORE, R. E. and SONG, Y. H. (1998), *Differential-algebraic equations: a Tutorial Review*, International Journal of Bifurcation and Chaos, vol. **8**, No. 7, pp. 1399-1411.
- [17] BENDIKSEN, K. (1984), *An Experimental Investigation of the Motion of Long Bubbles in Inclined Tubes*, Int. J. Multiphase Flow, vol. **10**, No. 4, pp. 467-483.
- [18] BENDIKSEN, K., MALNES, D., MOE, R. and NULAND, S. (1991), *The Dynamic Two Fluid Model OLGA: Theory and Application*, SPE Prod. Eng., pp. 171-180.
- [19] BENDIKSEN, K., MALNES, D., and NULAND, S. (1982), *Severe Slugging in Two-Phase flow Systems*, STATOIL report, IFE/KR/E-6.
- [20] BENDIKSEN, K., MALNES, D. and NYDAL, O. (1996), *On the Modelling of Slug Flow*, Chem. Eng. Comm., vol. **141-142**, pp. 71-102.
- [21] BERGER, C. et QUINCY, J.B. (1995), *Simulation des Écoulements Diphasiques Gaz-Liquide dans les Conduites Pétrolières*, Institut Français du Pétrole, Rapport 42231.
- [22] BERGLES, A. E., COLLIER, J. G., DELHAYE, J. M., HEWITT, G. F. and MAYINGER, F., (1981), *Two-Phase Flow and Heat Transfer in the Power and Process Industries*, Washington, Hemisphere Publishing Corporation.
- [23] BIRKHOFF, G. (1964), *Averaged Conservation Laws in Pipes*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. **8**, pp. 66-77.
- [24] BØE, A. (1981), *Severe Slugging characteristics; Part I: Flow Regime for Severe Slugging; Part II: Point Model Simulation Study*, Presented at Selected Topics in Two-Phase Flow, NTH, Trondheim, Norway, March 1981.
- [25] BRENNAN, K. E., CAMPBELL, S. L. and PETZOLD, L. R. (1996), *Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations*, SIAM, Classics In Applied Mathematics (14).
- [26] BRODKEY, R. S. (1967), *The Phenomena of Fluid Motions*, Addison-Wesley Press.
- [27] BROOKE BENJAMIN, T. (1968), *Gravity Currents and Related Phenomena*, J. Fluid Mech., vol. **31**, part 2, pp. 209-248.
- [28] BUTCHER, J. C. (1987), *The numerical analysis of ordinary differential equations. Runge-Kutta and general linear methods*, John Wiley & sons.
- [29] BUTTERWORTH, D. and HEWITT, G. F. (1977), *Two-Phase Flow and Heat Transfer*, Harwell Series, Oxford University Press.
- [30] CAMPBELL, S. L. and GRIEPENTROG, E. (1995), *Solvability of General Differential Algebraic Equations*, SIAM Journal of Scientific Computation, vol. **16**, No. 2, pp. 257-270.

- [31] CARVER, M. B., JUDD, R. A., KITELEY, J. C., and TAHIR, A. (1986), *The Drift Flux Model in the Asserit Subchannel Code*, proceedings of the Second International Conference on Simulation Methods in Nuclear Engineering, 14-16 October 1986, Le Grand Hotel, Montreal, Canada, vol. **1**, editor A. Brais.
- [32] CAUSSADE, B., FABRE, J., JEAN, C., OZON, P. and THÉRON, B. (1989), *Unsteady Phenomena in Horizontal Gas-liquid Slug Flow*, Multi-phase Flow – Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Conference, pp. 469-484.
- [33] *CRC Handbook of tables for Applied Engineering Science*, Eds. BOLZ, R. E. and TUVE, G. L. The Chemical Rubber Co., 1970.
- [34] *CRC Handbook of Chemistry and Physics*, 60<sup>th</sup> edition, CRC PRESS, inc., 1980.
- [35] CHOSSAT, P. and IOOSS, G. (1994), *The Couette-Taylor Problem*, Applied Mathematical Sciences, vol. **102**, New York, Springer-Verlag.
- [36] CHOW, J. H. and GEBRESELASSIE, A. (1990), *Dynamic Voltage Stability Analysis of a Single Machine Constant Power Load System*, Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control, Honolulu, Hawaii, December 1990, pp. 3057-3062.
- [37] CHUA, L. O. and OKA, H. (1988), *Normal Forms for Constrained Nonlinear Differential Equations - Part I: Theory*, IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. **35**, No. 7, pp. 881-901.
- [38] CHUA, L. O. and OKA, H. (1989), *Normal Forms for Constrained Nonlinear Differential Equations - Part I: Bifurcation*, IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. **36**, No. 1, pp. 71-88.
- [39] CHUA, L. O. and DENG, A. (1989), *Impasse Points. Part I: Numerical Aspects*, International Journal of Circuit Theory and Applications, vol. **17**, pp. 213-235.
- [40] CHUA, L. O. and DENG, A. (1989), *Impasse Points. Part II: Analytical Aspects*, International Journal of Circuit Theory and Applications, vol. **17**, pp. 271-282.
- [41] CLIFT, R., GRACE, J. R. and WEBER, M. E. (1978), *Bubbles, Drops, and Particles*, Academic Press.
- [42] COHEN, S. L. and HANRATTY, T. J. (1968), *Effects of Waves at a Gas-Liquid Interface on a Turbulent Air Flow*, J. Fluid Mechanics, vol. **31**, pp. 467-476.
- [43] CORTEVILLE, J., CHATELU, R. et ALLIOT, J. M. (1995), *Étude des Écoulements Diphasiques en Couplage Pipeline/Riser. Rapport de la campagne d'essais n°1*, Institut Français du Pétrole, Rapport 42027.
- [44] CORTEVILLE, J. et REYT, J. P. (1997), *Étude des Écoulements Diphasiques en Couplage Pipeline/Riser. Rapport de la campagne d'essais n°2*, Institut Français du Pétrole, Rapport 44097.
- [45] CORTEVILLE, J., STEHLÉ, R., FERRÉ, D. and PAUCHON, C. (1995), *An Experimental Study of Severe Slugging in Multiphase Production Lines*, 7<sup>th</sup> International Conference, Multiphase 95, Cannes, France : 7-9 June 1995, BHR Group Conference Series, Publication No. 14.



- [46] CROUZEIX, M. et MIGNOT, A. L. (1992), *Analyse Numérique des Équations Différentielles*, Masson, Paris.
- [47] CROW, M. L. (1992), *The Interaction of System, Index and Numerical Stability in Classes of Differential/algebraic Systems*, IEEE proceedings, pp. 2840-2843.
- [48] DEHKORDI, N. H. (1994), *Analysis of Hopf Bifurcations and Voltage Oscillations in Power System Models*, Master thesis, School of Electrical Engineering and Computer Science, Washington State University, Pullman.
- [49] DE HENAU, V. (1992), *A Study of Terrain-Induced Slugging in Two-Phase Flow Pipelines*, Ph.D. thesis, University of Waterloo, Ontario, Canada.
- [50] DE HENAU, V. and RAITHBY, G. D. (1995), *A Transient Two-Fluid Model for the Simulation of Slug Flow in Pipelines-I. Theory*, Int. J. Multiphase Flow, vol. **21**, No. 3, pp. 335-349.
- [51] DE HENAU, V. and RAITHBY, G. D. (1995), *A Study of Terrain-Induced Slugging in Two-Phase Flow Pipelines*, Int. J. Multiphase Flow, vol. **21**, No. 3, pp. 365-379.
- [52] DEKKER, K. and VERWER, J. G. (1984), *Stability of Runge-Kutta methods for stiff nonlinear differential equations*, CWI Monograph, No. 2, North-Holland.
- [53] DELHAYE, J. M., GIOT, M. and RIETHMULLER, M. L. (1981), *Thermohydraulics of Two-Phase Systems for Industrial Design and Nuclear Engineering*, New York, McGraw-Hill.
- [54] DENNIS, J. E. and SCHNABEL, R. (1983), *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*, Prentice Hall Series in Computational Mathematics, 1983.
- [55] DREW, D. A. (1983), *Mathematical Modeling of Two-Phase Flow*, Ann. Rev. Fluid Mech., vol. **15**, pp. 261-291.
- [56] DUKLER, A. and HUBBARD, M. (1975), *A Model for Gas-Liquid Slug Flow in Horizontal and Near Horizontal Pipes*, Ind. Eng. Chem., Fundam., vol. **14**, No. 4, pp. 337-347.
- [57] DUVAUT, G. (1990), *Mécanique des milieux continus*, Masson, Paris.
- [58] FERRÉ, D., BOUVIER, V. and PAUCHON C. (1995), *TACITE PHYSICAL MODEL, Description Manual*, Institut Français du Pétrole, Rapport 42385.
- [59] FABRE, J., PÉRESON, L., CORTEVILLE, J., BERNICOT, M. and OZON, P. (1988), *Écoulements Diphasiques Instables dans les Systèmes Pipeline/Riser*, Revue de l'Institut Français du Pétrole, vol. **43**, No. 6, pp. 815-825.
- [60] FABRE, J., LINE, A. and PÉRESON, L. (1989), *Two-Fluid Two-Flow-Pattern Model for Transient Gas-Liquid Flow in Pipes*, Multi-phase Flow – Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Conference, pp. 269-284.
- [61] FABRE, J., PÉRESON, L., CORTEVILLE, J., BERNICOT, M. et OZON, P. (1990), *Severe Slugging in Pipeline/Riser Systems*, SPE Prod. Eng., August 1990, pp. 299-305.
- [62] FITREMAN, J. (1983), *Écoulements diphasiques gaz-liquide*, Mécanique des fluides, Annexe 722, pp. 1-25.

- [63] FUCHS, P. (1987), *The Pressure Limit for Terrain Slugging*, Proceedings of the 3rd International Conference on Multi-Phase Flow, The Hague, Netherlands, 18-20 May 1987.
- [64] GANTMACHER, F. R. (1959), *The Theory of Matrices*, vol. **1**, Chelsea Publishing Company, New York.
- [65] GANTMACHER, F. R. (1959), *Applications of The Theory of Matrices*, Interscience Publishers, New York.
- [66] GILCHRIST, A., WONG, T. N., GRANT, C. D., SIMPSON, H. C. and BAXTER, T. (1989), *A Dynamic Model for Slug Flow in a Pipeline-Riser System*, Multi-phase Flow – Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Conference, pp. 285-300.
- [67] GIRARDOT, D. (1997), *Stabilité et Bifurcations Dynamiques des Systèmes Discrets Autonomes Réguliers et avec Chocs*, Thèse de doctorat, École Polytechnique, France.
- [68] GODLEWSKI, E. and RAVIART, P. -A. (1996), *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Springer.
- [69] GOLDZBERG, V. and MCKEE, F. (1985), *Model predicts liquid accumulation, severe terrain-induced slugging for two-phase lines*, Oil & Gas J., vol. **83**, Aug 19, pp. 105-109.
- [70] GORDON, I. C. (1987), *Multi-Phase Pipeline and Equipment Design for Marginal and Deep Field Development*, Proceedings of the 3rd International Conference on Multi-Phase Flow, The Hague, Netherlands, 18-20 May 1987.
- [71] GOVIER, G. W. and AZIZ, K. (1972), *The Flow of Complex Mixtures in Pipes*, Van Nostrand Reinhold Company.
- [72] GOLUBITSKY, M. and SCHAEFFER, D. G. (1985), *Singularities and Groups in Bifurcation Theory, Volume 1*, Applied Mathematical Sciences, vol. **51**, New York, Springer-Verlag.
- [73] GOLUBITSKY, M., STEWART, J. and SCHAEFFER, D. G. (1988), *Singularities and Groups in Bifurcation Theory, Volume 2*, Applied Mathematical Sciences, vol. **69**, New York, Springer-Verlag.
- [74] GREUB, W. H. (1967), *Linear Algebra*, third edition, New York, Springer-Verlag.
- [75] GRIEPENTROG, E. and MÄRZ, L. (1986), *Differential-algebraic equations and their numerical treatment*, Series title: Teubner-Texte zur Mathematik Bd., vol. **88**, Teubner.
- [76] GRIEPENTROG, E. (1990), *The Index of Differential-Algebraic Equations and its Significance for the Circuit Simulation*, International Series of Numerical Mathematics, vol. **93**, pp. 11-25.
- [77] GUCKENHEIMER, J. and HOLMES, P. (1983), *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Applied Mathematical Sciences, vol. **42**, New York, Springer-Verlag.
- [78] HAIRER, E., LUBICH, C. and ROCHE, M. (1989), *The Numerical Solution of Differential-Algebraic Systems by Runge-Kutta Methods*, Lecture notes in mathematics, 1409.
- [79] HAIRER, E. and WANNER, G. (1991), *Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems*, Springer Series in Computational Mathematics, vol. **14**, Springer-Verlag.

- [80] HARMATHY, T. Z. (1960), *Velocity of Large Drops and Bubbles in Media of Infinite or Restricted Extent*, *AIChE Journal* , vol. **6**, No. 2, pp. 281-288.
- [81] HAYWARD, A. T. (1967), *Compressibility equations for liquids: a comparative study*, *Brit. J. Appl. Phys.* , vol. **18**, pp. 965-977.
- [82] HETSRONI, G. (1982), *Handbook of Multiphase Systems*, New York, McGraw-Hill.
- [83] HEWITT, G. F. (1978), *Measurement of Two-Phase Flow Parameters*, Academic Press.
- [84] HILL, T. J. (1989), *Riser-Base Gas Injection into the SE Forties Line*, *Multi-phase Flow – Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Conference*, pp. 133-148.
- [85] HILL, T. J. (1990), *Gas injection at riser solves slugging flow problems*, *Oil & Gas J.*, vol. **88**, feb 26, pp. 88-92.
- [86] HILL, D. J. (1990), *Stability Theory for Differential/Algebraic Systems with Applications to Power Systems*, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. **37**, No. 11, pp. 1416-1423.
- [87] HINZE, J. O. (1955), *Fundamentals of the Hydrodynamic Mechanism of Splitting in Dispersion Processes*, *AIChE Journal* , vol. **1**, No. 3, pp. 289-295.
- [88] HIRSCH, M. W. and SMALE, S. (1974), *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, *Pure and Applied Mathematics*, New York, Academic Press.
- [89] HISKENS, I. A. and HILL, D. J. (1989), *Energy Functions, Transient Stability and Voltage Behavior in Power Systems with Nonlinear Loads*, *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. **4**, No. 4, pp. 1525-1533.
- [90] HOLLENBERG, J. F., DE WOLF, S. and MEIRING, W. J. (1995), *A method to suppress Severe Slugging in flow line riser systems*, *7<sup>th</sup> International Conference, Multiphase 95, Cannes, France : 7-9 June 1995, BHR Group Conference Series, Publication No. 14*, pp. 89-103.
- [91] HOWELL, F. J. (1995), *Nonlinear Analysis of Power System Oscillations*, Master thesis, School of Electrical Engineering and Computer Science, Washington State University, Pullman.
- [92] *International Critical Tables of Numerical Data, Physics, Chemistry and Technology*, Ed. WASHBURN, E. W., National Research Council, McGraw Hill Book Co., New York, 1927.
- [93] IOOSS, G. and ADELMEYER, M. (1992), *Topics in Bifurcation Theory and Applications*, *Advanced Series in Nonlinear Dynamics*, vol. **3**, World Scientific Publishing Co.
- [94] ISHII, M. (1975), *Thermo-fluid dynamic theory of two-phase flow*, Paris, Eyrolles.
- [95] ISHII, M. and MISHIMA, K. (1984), *Two-Fluid Model and Hydrodynamic Constitutive Relations*, *Nuclear Engineering and Design*, North-Holland, Amsterdam, vol. **82**, pp. 107-126.
- [96] JANSEN, F. E. (1996), *The Elimination of Severe Slugging – Experiments and Modeling*, *Int. J. on Multiphase Flow*, vol. **22**, No. 6, pp. 1055-1072.

- [97] JI, W. (1997), *Analysis of Complicated Oscillatory Instability Phenomena in General Power System Models*, Ph.D. thesis, School of Electrical Engineering and Computer Science, Washington State University, Pullman.
- [98] JI, W. and VENKATASUBRAMANIAN, V. (1995), *Hard limit induced chaos in a single-machine-infinite-bus power system*, Proceedings of the 34th Conference on Decision & Control, New Orleans, LA - December 1995, pp. 3465-3470.
- [99] JI, W. and VENKATASUBRAMANIAN, V. (1995), *Center Manifold Computations in Bifurcation Analysis of Large Systems such as the Power System*, Proceedings of the American Control, Seattle, Washington, June 1995, pp. 1573-1579.
- [100] KLING, R. (1980), *Thermodynamique générale et applications*, publications de l'Institut Français du Pétrole, Paris, Éditions Technip.
- [101] KOKAL, S. L. and STANISLAV, J. F. (1989), *An Experimental Study of Two-Phase Flow in Slightly Inclined Pipes-I. Flow Patterns*, Chem. Engng. Sci., vol. **44**, No. 3, pp. 665-679.
- [102] KOKAL, S. L. and STANISLAV, J. F. (1989), *An Experimental Study of Two-Phase Flow in Slightly Inclined Pipes-II. Liquid Holdup and Pressure Drop*, Chem. Engng. Sci., vol. **44**, No. 3, pp. 681-693.
- [103] KUZNETSOV, Y. A. (1995), *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Applied Mathematical Sciences, vol. **112**, New York, Springer-Verlag.
- [104] KWATNY, H. G. and PASRIJA, A. K. (1986), *Static Bifurcations in Electric Power Networks: Loss of Steady-State Stability and Voltage Collapse*, IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. **33**, No. 10, pp. 981-991.
- [105] LASCAUX, P. et THÉODOR, R. (1993), *Analyse Numérique Matricielle Appliquée à l'Art de l'Ingénieur*, Tome 1, 2ème édition, Masson, Paris.
- [106] LE VEY, G. (1994), *Differential Algebraic Equations. A new look at the index*, rapport de recherche n° 2239, INRIA Rennes, 20 pages.
- [107] LIN, P. Y. and HANRATTY, T. J. (1986), *Prediction of the Initiation of Slugs with Linear Stability Theory*, Int. J. Multiphase Flow, vol. **12**, No. 1, pp. 79-98.
- [108] LINGA, H. (1987), *Terrain Slugging Phenomena. Some experimental results obtained at the SINTEF Two-Phase Flow Laboratory*, Proceedings of the 3rd International Conference on Multi-Phase Flow, The Hague, Netherlands, 18-20 May 1987, pp. 37-53.
- [109] LOCKHART, R. W. and MARTINELLI, R. C. (1949), *Proposed correlation of data for isothermal two-phase, two-component flow in pipes*, Chem. Eng. Progress, vol. **45**, pp. 39-48.
- [110] MACKAY, D. C. (1987), *Dynamic model predicts slugging flow effect in offshore production facility*, Oil & Gas J., Sept. 14, pp. 67-72.
- à la
- [111] MATTAR, J. A. and GREGORY, G. A. (1974), *Air-Oil Flow in an Upward-Inclined Pipe – I: Slug Velocity, Holdup and Pressure Gradient*, Journal Can. Petr. Tech. , vol. **13**, pp. 69-76.

- [112] MATTSON, S. E. and SÖDERLIND, G. (1993), *Index Reduction in Differential-Algebraic Equations Using Dummy Derivatives*, SIAM Journal of Scientific Computation , vol. **14**, No. 3, pp. 677-692.
- [113] MATUSZKIEWICZ, A., FLAMAND, J. C. and BOURÉ J. A. (1987), *The Bubble-Slug Flow Pattern Transition and Instabilities of Void Fraction Waves*, Int. J. Multiphase Flow, vol. **13**, No. 2, pp. 199-217.
- [114] MIRANKER, W. L. (1981), *Numerical methods for stiff equations and singular perturbation problems*, Mathematics and its applications, vol. **5**, D. Reidel Publishing Company.
- [115] MOE, J., LINGELEM, M. N., HOLM, H. and OLDERVIK, O. (1989), *Severe Slugging in Offshore Gas-Condensate Flowline-Riser Systems*, Multi-phase Flow – Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Conference, pp. 269-284.
- [116] NICKLIN, D. J., WILKES, J. O. and DAVIDSON, J. F. (1962), *Two-Phase Flow in Vertical Tubes*, Trans. Inst. Chem. Engrs. , vol. **40**, pp. 61-68.
- [117] NICHOLSON, M. K., AZIZ, K. and GREGORY, G. A. (1978), *Intermittent Two-Phase Flow in Horizontal Pipes: Predictive Models*, Canadian. J. Chem. Engng. , vol. **56**, pp. 653-663.
- [118] NORDSVEEN, M. and HAERDIG, A. (1997), *Simulations of Severe Slugging During Depressurization of an Oil/Gas Pipeline*, Modeling, Identification and Control, vol. **18**, No. 1, pp. 61-73.
- [119] OLIEMANS, R. V., POTS, B. F. M. and TROMPÉ, N. (1986), *Modelling of Annular Dispersed Two-Phase Flow in Vertical Pipes*, Int. J. Multiphase Flow, vol. **12**, No. 5, pp. 711-732.
- [120] O'MALLEY, R. E., JR. (1991), *Singular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, New York.
- [121] ORANJE, L. (1983), *Handling two-phase gas-condensate flow in offshore pipeline systems*, Oil & Gas J., vol. **81**, Apr 18, pp. 128-138.
- [122] OUYANG, L. (1995), *Stratified Flow Model and Interfacial Friction Factor Correlations*, report submitted to the Department of Petroleum Engineering of Stanford University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science.
- [123] OUYANG, L. and AZIZ, K. (1996), *Development of New Wall Friction Factor and Interfacial Friction Factor Correlations for Gas-Liquid Stratified Flow in Wells and Pipelines*, submitted for publication to SPE Production Engineering.
- [124] PATAULT, S. et TRAN, Q. H. (1996), *Modèle et Schéma Numérique du Code Tacite-NPW*, Institut Français du Pétrole, Rapport 42415.
- [125] PETALAS, N. and AZIZ, K. (1987), *A Mechanistic Model for Stabilized Multiphase Flow in Pipes*, report for the members of Stanford Reservoir Simulation Industrial Affiliates and Stanford Project on the Productivity and Injectivity of Horizontal Wells, Department of Petroleum Engineering School of Earth Sciences, Stanford University.

- [126] PETZOLD, L. R. (1982), *ODE Methods for the Solution of Differential/Algebraic Systems*, Urbana, Ill.: Department of Computer Science, University of Illinois at Urbana-Champaign.
- [127] POTS, B., BROMILOW, I. and KRONIJN, M. (1987), *Severe Slug Flow in Offshore Flowline/Riser Systems*, SPE Production Engineering, Nov. 1987, pp. 319-324.
- [128] PRAPOST, K. L. and LOPARO K. A. (1996), *A Stability Theory for Constrained Dynamics Systems with Applications to Electric Power Systems*, IEEE Transactions on Automatic and Control, vol. **41**, No. 11, pp. 1605-1617.
- [129] PRESS, W., FLANNERY, B., TEUKOLSKY, S. and VETTERLING, W. (1989), *Numerical Recipes*, Cambridge University Press.
- [130] RABIER, P. J. and RHEINBOLDT, W. C. (1991), *A General Existence and Uniqueness Theory for Implicit Differential-Algebraic Equations*, Differential and Integral Equations, vol. **4**, No. 3, pp. 563-582.
- [131] RABIER, P. J. and RHEINBOLDT, W. C. (1994), *On Impasse Points of Quasilinear Differential-Algebraic Equations*, Journal of Mathematical Analysis & Applications, vol. **181**, pp. 429-454.
- [132] RALSTON, A. and RABINOWITZ, P. (1978), *A first Course in Numerical Analysis*, second edition, McGraw-Hill.
- [133] REICH, S. (1991), *On an Existence and Uniqueness Theory for Nonlinear Differential-Algebraic Equations*, Circuits Systems Signal Process, vol. **10**, No. 3, pp. 343-359.
- [134] REICH, S. (1995), *On the Local Qualitative Behavior of Differential-Algebraic Equations*, Circuits Systems Signal Process, vol. **14**, No. 4, pp. 427-443.
- [135] REIMANN, J. (1987), *A New Gas Separator for Stratified and Slug Flow*, Proceedings of the 3rd International Conference on Multi-Phase Flow, The Hague, Netherlands, 18-20 May 1987.
- [136] REINHARD, H. (1982), *Équations Différentielles*, Paris, Gauthier-Villars.
- [137] RHEINBOLDT, W. C. (1984), *Differential-Algebraic Systems as Differential Equations on Manifolds*, Mathematics of Computation, vol. **43**, No. 168, pp. 473-482.
- [138] RIVERO, M., LAYA, A. and OCANDO, D. (1995), *Experimental Study on the Stratified-Slug Transition for Gas-Liquid Flow in Horizontal Pipelines*, 7<sup>th</sup> International Conference, Multiphase 95, Cannes, France : 7-9 June 1995, BHR Group Conference Series, Publication No. 14, pp. 293-304.
- [139] RUDER, Z., HANRATTY, P. J. and HANRATTY, T. J. (1989), *Necessary Conditions for the Existence of Stable Slugs*, Int. J. Multiphase Flow, vol. **15**, No. 2, pp. 209-226.
- [140] SARICA, C. and SHOHAM, O. (1991), *A Simplified Transient Model for Pipeline-Riser Systems*, Chem. Engng. Sci., vol. **46**, No. 9, pp. 2167-2179.
- [141] SCHMIDT, Z. (1977), *Experimental Study of Two-Phase Slug Flow in a Pipeline-Riser Pipe System*, Ph.D. dissertation, The University of Tulsa.

- [142] SCHMIDT, Z., BRILL, J. P. and BEGGS H. D. (1979), *Choking can eliminate severe pipeline slugging*, Oil & Gas J., Nov. 12. 1979, pp. 230-238.
- [143] SCHMIDT, Z., BRILL, J. P. and BEGGS, H. D. (1980), *Experimental Study of Severe Slugging in a Two-Phase-Flow Pipeline-Riser Pipe System*, SPE J., Oct. 1980, pp. 407-414.
- [144] SCHMIDT, Z., DOTY, D. R. and DUTTA-ROY, K. (1985), *Severe Slugging in Offshore Pipeline Riser-Pipe Systems*, SPE J., Feb. 1985, pp. 27-38.
- [145] SEVIK, M. and PARK, S. H. (1973), *The splitting of Drops and Bubbles by Turbulent Fluid Flow*, Trans. ASME, J. Fluid Engr , vol. **95**, pp. 53-60.
- [146] SHAMPINE, L. F. (1980), *Implementation of Implicit Formulas for the Solution of ODEs*, SIAM J. Sci. Stat. Comput., vol. **1**, No. 1, pp. 103-118.
- [147] SHANKAR SASTRY, S. and DESOER C. A. (1981), *Jump Behavior of Circuits and Systems*, IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. **28**, No. 12, pp. 1109-1124.
- [148] SHAPIRO, A. H. (1953), *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*, New York: Ronald Press, vol. **1**.
- [149] SHAPIRO, A. H. (1954), *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*, New York: Ronald Press, vol. **2**.
- [150] SHARMA, Y., SCOGGINS, JR. M. W., SHOHAM, O. and BRILL, J. P. (1986), *Simulation of Transient Two-Phase Flow in Pipelines*, Trans. ASME, J. Ener. Res Tech., vol. **108**, pp. 202-206.
- [151] SHOHAM, O. and TAITEL, Y. (1984), *Stratified Turbulent-Turbulent Gas-Liquid Flow in Horizontal and Inclined Pipes*, AIChE Journal , vol. **30**, No. 3, pp. 377-385.
- [152] STEWART, H. B. and WENDROFF, B. (1984), *Two-Phase Flow: Models and Methods*, Journal of Computational Physics vol. **56**, pp. 363-409.
- [153] STRAUME, T., NORDSVEEN, M. and BENDIKSEN, K. (1992), *Numerical Simulation of Slugging in Pipelines*, Multiphase Flow in Wells and Pipelines, Winter Annual Meeting of the American Society of Mechanical Engineers, Anaheim, California, November 8-13, 1992, FED-vol. **144**, pp. 103-112.
- [154] TAITEL, Y. (1986), *Stability of Severe Slugging*, Int. J. Multiphase Flow, vol. **12**, No. 2, pp. 203-217.
- [155] TAITEL, Y. and DUKLER, A. E. (1976), *A Model for Predicting Flow Regime Transitions in Horizontal and Near Horizontal Gas-Liquid Flow*, AIChE Journal, vol. **22**, No. 1, pp. 47-55.
- [156] TAITEL, Y. and DUKLER, A. E. (1976), *A Theoretical Approach to the Lockhart-Martinelli Correlation for Stratified Flow*, Int. J. Multiphase Flow, vol. **2**, pp. 591-595.
- [157] TAITEL, Y., BARNEA, D. and DUKLER, A. E. (1980), *Modelling Flow pattern Transitions for Steady Upward Gas-Liquid Flow in Vertical Tubes*, AIChE Journal, vol. **26**, No. 3, pp. 345-354.

- [158] TAITEL, Y. and BARNEA, D. (1990), *A Consistent Approach for Calculating Pressure Drop in Inclined Slug Flow*, Chem. Engng. Sci., vol. **45**, No. 5, pp. 1199-1206.
- [159] TAITEL, Y. and BARNEA, D. (1997), *Simplified Transient Simulation of Two-Phase Flow Using Quasi-Equilibrium Momentum Balances*, Int. J. Multiphase Flow, vol. **23**, No. 3, pp. 493-501.
- [160] TAITEL, Y. and BARNEA, D. (1999), *Slug Tracking in Hilly Terrain Pipelines*, SPE 56521, paper presented at the 1999 SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Houston, Texas, 3-6 october 1999.
- [161] TAITEL, Y., SHOHAM, O. and BRILL, J. P. (1989), *Simplified Transient Solution and Simulation of Two-Phase Flow in Pipelines*, Chem. Engng. Sci., vol. **44**, No. 6, pp. 1353-1359.
- [162] TAITEL, Y., SHOHAM, O. and BRILL, J. P. (1990), *Transient Two-Phase Flow in Low Velocity Hilly Terrain Pipelines*, Int. J. Multiphase Flow, vol. **16**, No. 1, pp. 69-77.
- [163] TAITEL, Y., VIERKANDT, S., SHOHAM, O. and BRILL, J. P. (1990), *Severe Slugging in a Riser System: Experiments and Modeling*, Int. J. Multiphase Flow, vol. **16**, No. 1, pp. 57-68.
- [164] TAN, C., VARGHESE, M., VARAIYA, P. and WU, F. (1993), *Bifurcation and Chaos in Power Systems*, Sādhanā, vol. **18**, Part 5, pp. 761-786.
- [165] TRAN, Q. H. (1995), *Simulation des Instabilités Hydrodynamiques dans les Systèmes de Pipeline-Riser par Couplage de Deux Modèles Diphasiques*, Institut Français du Pétrole, Rapport 42412.
- [166] VENKATASUBRAMANIAN, V. (1992), *On a Singular Transformation for Analysing the Local Dynamics of a Class of Singular DAE's*, Proc. Symposium on Implicit and Nonlinear Systems, pp. 364-371.
- [167] VENKATASUBRAMANIAN, V. (1992), *A Taxonomy of the Dynamics of Large Differential-Algebraic Systems such as the Power System*, Ph.D. dissertation, Washington University, St. Louis, MO, August 1992.
- [168] VENKATASUBRAMANIAN, V. (1994), *Singularity Induced Bifurcation and the Van Der Pol Oscillator*, IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. **41**, No. 11, pp. 765-769.
- [169] VENKATASUBRAMANIAN, V., SCHÄTTLER, H and ZABORSZKY, J. (1992), *Analysis of Local Bifurcation Mechanisms in Large Differential-Algebraic Systems such as the Power System*, Proceedings of the 32nd Conference on Decision and Control, San Antonio, Texas, December 1993, pp. 3727-3733.
- [170] VENKATASUBRAMANIAN, V., SCHÄTTLER, H and ZABORSZKY, J. (1993), *Homoclinic Orbits and the Persistence of the Saddle Connection Bifurcation in the Large Power System*, IEEE Proceedings, pp. 2648-2651.
- [171] VENKATASUBRAMANIAN, V., SCHÄTTLER, H and ZABORSZKY, J. (1995), *Dynamics of Large Constrained Nonlinear Systems - A taxonomy Theory*, Proc. IEEE, vol. **83**, No. 11, pp. 1530-1561.



- [172] VENKATASUBRAMANIAN, V., SCHÄTTLER, H and ZABORSZKY, J. (1995), *Local Bifurcations and Feasibility Regions in Differential-Algebraic Equations*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. **40**, No. 12, pp. 1992-2013.
- [173] VIERKANDT, S. (1988), *Severe Slugging in Pipeline-Riser Systems, Experiments and Modelling*, M.S. Thesis, The University of Tulsa, Tulsa.
- [174] VISWANATH, D. S. and SU, G. -J. (1965), *Generalized Thermodynamic Properties of Real Gases: Part I. Generalized PVT Behavior of Real Gases*, AIChE Journal, vol. **11**, No. 2, pp. 202-204.
- [175] VIVIAND, H. (1994), *Analyse de Modèles Simplifiés d'Écoulement Diphasiques Transitoires*, Rapport d'étude PRINCIPIA IFP.RET.43.004.01., Principia Recherche Développement S.A., La Seyne-Sur-Mer, France.
- [176] VIVIAND, H. (1996), *Modèles Simplifiés d'Écoulement dans les Conduites Pétrolières*, Rapport d'étude PRINCIPIA IFP.RET.43.069.02., Principia Recherche Développement S.A., La Seyne-Sur-Mer, France.
- [177] VON SOSEN, H. (1994), *Part I: Folds and Bifurcations in the Solutions of Semi-explicit Differential-Algebraic Equations; Part II: The Recursive Projection Method Applied to Differential-Algebraic Equations and Incompressible Fluid Dynamics*, Ph.D. thesis, California Institute of Technology, Pasadena, California.
- [178] WALLIS, G. B. (1969), *One-Dimensional Two-Phase Flow*, McGraw-Hill, New York, 1969.
- [179] WEBER, M. E. (1981), *Drift in Intermittent Two-Phase Flow in Horizontal Pipes*, Canadian. J. Chem. Engng. , vol. **59**, pp. 389-399.
- [180] ZAKARIAN, E. (1999), *Modélisation des Instabilités d'Écoulements Diphasiques Gaz-liquide du Type Severe Slugging*, rapport 45531, Institut Français du Pétrole.
- [181] ZAKARIAN, E. and TRAN, Q. H. (1999), *A Differential-Algebraic Model for Two-Phase Flow Instabilities in Pipeline-Riser Systems*, the American Society of Mechanical Engineers, *1999 Pressure Vessels and Piping conference*, Boston, Massachusetts, august 1-5 1999, PVP-Vol. 396, edited by W. L. Cheng.
- [182] ZHENG, G., BRILL, J. P. and TAITEL, Y. (1994), *Slug Flow Behavior in a Hilly Terrain Pipeline*, Int. J. Multiphase Flow, vol. **20**, No. 1, pp. 63-79.
- [183] ZUBER, N. and FINDLAY, J. A. (1965), *Average Volumetric Concentration in Two-Phase Flow Systems*, J. Heat Transfer, Ser. C, vol. **87**, pp. 453-468.
- [184] ZUKOSKI, E. E. (1966), *Influence of Viscosity, Surface Tension, and Inclination Angle on Motion of Long Bubbles in Closed Tubes*, J. Fluid Mech., vol. **25**, part 4, pp. 821-837.