



**HAL**  
open science

# Éléments finis spéciaux pour l'analyse linéaire et non-linéaire géométrique des structures composites à renforts fibreux

Mohamed Amine Tiar

► **To cite this version:**

Mohamed Amine Tiar. Éléments finis spéciaux pour l'analyse linéaire et non-linéaire géométrique des structures composites à renforts fibreux. Mécanique [physics.med-ph]. Université de Technologie de Compiègne, 2017. Français. NNT : 2017COMP2345 . tel-01584164

**HAL Id: tel-01584164**

**<https://theses.hal.science/tel-01584164>**

Submitted on 8 Sep 2017

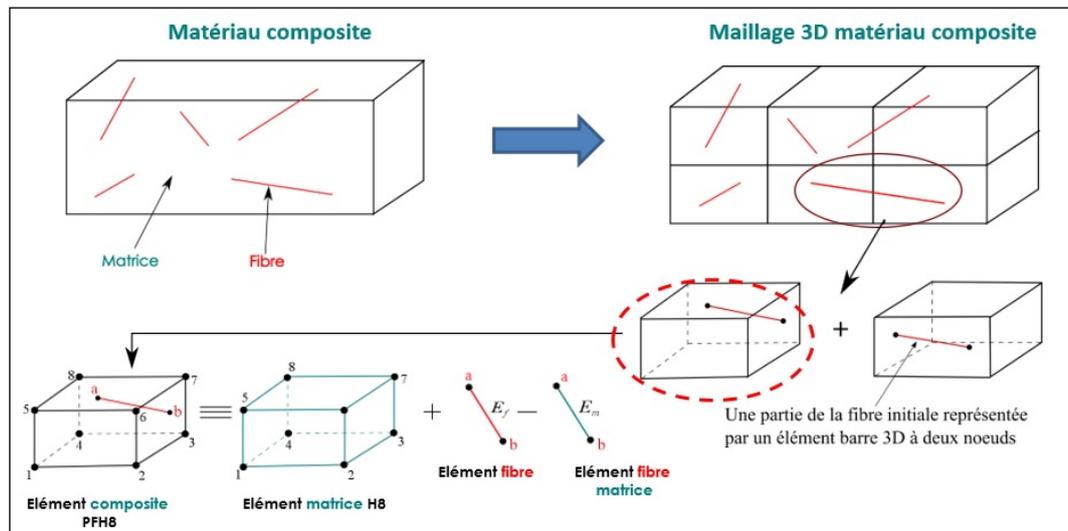
**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Par **Mohamed Amine TIAR**

*Éléments finis spéciaux pour l'analyse linéaire et non-linéaire géométrique des structures composites à renforts fibreux*

Thèse présentée  
 pour l'obtention du grade  
 de Docteur de l'UTC



Soutenue le 29 mars 2017

**Spécialité :** Mécanique Avancée : Unité de recherche en Mécanique - Laboratoire Roberval (UMR-7337)

D2345

# Éléments finis spéciaux pour l'analyse linéaire et non-linéaire géométrique des structures composites à renfort fibreux

## THÈSE

présentée le 29 Mars 2017

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Technologie de Compiègne

Spécialité : Mécanique Avancée

par

Mohamed Amine TIAR

### Composition du jury

|                       |                    |  |
|-----------------------|--------------------|--|
| <i>Rapporteurs :</i>  | Mohamed HABOUSSI   | Professeur, Université Paris 13                    |
|                       | Olivier POLIT      | Professeur, Université Paris 10                    |
| <i>Examineurs :</i>   | Emmanuel BELLENGER | Professeur, Université de Picardie Jules Verne     |
|                       | Zoheir ABOURA      | Professeur, Université de Technologie de Compiègne |
| <i>Directeurs :</i>   | Hocine KEBIR       | MCF-HDR, Université de Technologie de Compiègne    |
|                       | Rezak AYAD         | Professeur, Université de Reims Champagne-Ardenne  |
| <i>Co-encadrant :</i> | Wajdi ZOUARI       | MCF, Université de Reims Champagne-Ardenne         |

Mis en page avec la classe thloria.

# Remerciements

Ce travail de thèse a été effectué au sein du laboratoire Roberval, à l'Université de Technologie de Compiègne, sous la direction de Hocine Kebir, MCF-HDR à l'Université de Technologie de Compiègne, et Rezak Ayad, Professeur à l'Université de Reims Champagne-Ardenne, que je remercie pour leur patience et conseils durant ces années. Ces travaux ont également été co-encadrés par Wajdi Zouari, MCF à l'Université de Reims Champagne-Ardenne, que je remercie de sa disponibilité et ses nombreux conseils tout au long de cette période de thèse.

J'adresse mes remerciements à monsieur Emmanuel Bellenger, Professeur à l'université de Picardie Jules Verne, qui m'a fait l'honneur de présider ce jury de thèse.

Je souhaite également remercier messieurs Mohamed Haboussi, Professeur à l'université Paris 13 ; ainsi que monsieur Olivier Polit, Professeur à l'université Paris 10, qui m'ont fait l'honneur de rapporter ces travaux.

Je suis également très reconnaissant à monsieur Zoheir Aboura, Professeur à l'université de Technologie de Compiègne pour avoir examiné ces travaux.

Je n'oublie pas de remercier tous les thésards et les membres du département génie mécanique à l'Université de Technologie de Compiègne, qui ont croisé mon chemin et qui ont contribué à l'instauration d'une joyeuse atmosphère de recherche.

A tous mes amis qui m'ont offert leur soutien, je souhaite qu'ils trouvent ici la marque de ma grande reconnaissance.

Finalement je dédie cette thèse à ma famille, mon père, ma mère, mon frère, mes trois sœurs, ma femme Habiba et mes deux filles Myriam et Sarah, tout en les remerciant pour leur soutien inconditionnel qu'ils m'ont accordé durant ces longues années.



*Je dédie cette thèse  
ma famille,*



# Table des matières

## Introduction générale

## Chapitre 1

### État de l'art : Modélisation des matériaux composites à renfort fibreux

|       |   |    |
|-------|---|----|
| 1.1   | Généralités . . . . .   | 7  |
| 1.1.1 | Les matrices . . . . .  | 8  |
| 1.1.2 | Les renforts . . . . .  | 9  |
| 1.1.3 | Types de matériaux composites . . . . .                       | 10 |
| 1.2   | Modélisation des matériaux composites . . . . .               | 14 |
| 1.2.1 | Milieu homogène équivalent . . . . .                          | 15 |
| 1.2.2 | Méthodologie des modèles micromécaniques . . . . .            | 16 |
| 1.3   | Modèles micromécaniques . . . . .                             | 19 |
| 1.3.1 | Bornes de Voigt et de Reuss . . . . .                         | 19 |
| 1.3.2 | Modèle d'Halpin-Tsai . . . . .                                | 20 |
| 1.3.3 | Problème de l'inclusion d'Eshelby . . . . .                   | 21 |
| 1.3.4 | Schéma dilué d'Eshelby . . . . .                              | 22 |
| 1.3.5 | Schéma de Mori-Tanaka . . . . .                               | 22 |
| 1.3.6 | Schéma auto-cohérent . . . . .                                | 23 |
| 1.4   | Modèles numériques . . . . .                                  | 23 |
| 1.4.1 | Modèles numériques basés sur une approche directe . . . . .   | 24 |
| 1.4.2 | Modèles numériques basés sur une approche indirecte . . . . . | 27 |
| 1.5   | Conclusion . . . . .  | 30 |

## Chapitre 2

### Approche de la fibre projetée et son adaptation aux problèmes plans

|     |                        |    |
|-----|------------------------|----|
| 2.1 | Introduction . . . . . | 35 |
|-----|------------------------|----|

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 2.2   | Approche de la fibre projetée . . . . .  | 35 |
| 2.2.1 | Le domaine de la matrice . . . . .   | 36 |
| 2.2.2 | Le renfort . . . . .   | 36 |
| 2.2.3 | Prise en compte du renfort à l'intérieur de la matrice . . . . .   | 36 |
| 2.3   | Adaptation de l'approche de la fibre projetée aux problèmes plans . . . . .  | 38 |
| 2.3.1 | Formulation faible de l'équilibre mécanique . . . . .  | 38 |
| 2.3.2 | Approximation par éléments finis . . . . .   | 38 |
| 2.3.3 | Implémentation numérique des éléments PFT3 et PFQ4 . . . . .   | 44 |
| 2.4   | Cas tests de validation . . . . .  | 46 |
| 2.4.1 | Évaluation des propriétés mécaniques d'un matériau composite renforcé par des fibres courtes . . . . .                   | 46 |
| 2.4.2 | Étude d'une poutre composite renforcée par des fibres unidirectionnelles et soumise à une flexion transversale . . . . . | 52 |
| 2.4.3 | Estimation des propriétés effectives d'une plaque multicouche . . . . .  | 53 |
| 2.4.4 | Étude du comportement mécanique d'une plaque renforcée par une fibre centrale . . . . .                                  | 54 |
| 2.5   | Conclusion . . . . .   | 55 |

**Chapitre 3**

**Formulation non-linéaire géométrique de l'approche de la fibre projetée 2D**

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 3.1   | Introduction . . . . .   | 61 |
| 3.2   | Formulation Lagrangienne Totale . . . . .  | 61 |
| 3.3   | Formulation non-linéaire des éléments finis composites PFT3 et PFQ4 . . . . .  | 63 |
| 3.3.1 | Matrices de rigidité tangentes des éléments T3 et Q4 . . . . .   | 64 |
| 3.3.2 | Matrice de rigidité tangente de l'élément barre . . . . .  | 66 |
| 3.3.3 | Matrices de rigidité tangentes des éléments composites PFT3 et PFQ4 . . . . .  | 68 |
| 3.4   | Cas tests de validation . . . . .  | 68 |
| 3.4.1 | Poutre composite cantilever renforcée par des fibres courtes soumise à une charge de flexion . . . . .                           | 69 |
| 3.4.2 | Poutre composite cantilever renforcée par des fibres unidirectionnelles soumise à une charge de flexion . . . . .                | 70 |
| 3.4.3 | Influence de la longueur des fibres sur la réponse d'une poutre cantilever renforcée par des fibres unidirectionnelles . . . . . | 72 |
| 3.4.4 | Poutre annulaire en béton renforcée par des fibres en acier . . . . .  | 73 |

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 3.4.5 | Poutre composite cantilever soumise à une charge uniformément répartie . . . . . | 75 |
| 3.5   | Conclusion . . . . .   | 79 |

## Chapitre 4

### Formulation tridimensionnelle de l'approche de la fibre projetée

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| 4.1   | Introduction . . . . .  | 84  |
| 4.2   | Formulation linéaire de PFH8 . . . . .  | 84  |
| 4.2.1 | Formulation faible de l'équilibre mécanique . . . . .   | 84  |
| 4.2.2 | Matrice de rigidité de l'élément H8 . . . . .   | 86  |
| 4.2.3 | Matrice de rigidité de l'élément fibre 3D . . . . .   | 87  |
| 4.2.4 | Stratégie de couplage et matrice de rigidité de l'élément PFH8 . . . . .  | 88  |
| 4.3   | Formulation non-linéaire géométrique de PFH8 . . . . .  | 90  |
| 4.3.1 | Formulation faible de l'équilibre mécanique . . . . .   | 90  |
| 4.3.2 | Matrice tangente de l'élément H8 . . . . .  | 91  |
| 4.3.3 | Matrice tangente de l'élément fibre 3D . . . . .  | 93  |
| 4.3.4 | Matrice tangente de l'élément composite PFH8 . . . . .  | 94  |
| 4.4   | Cas tests de validation . . . . .   | 95  |
| 4.4.1 | Évaluation des propriétés mécaniques d'un matériau composite renforcé par des fibres courtes . . . . .              | 95  |
| 4.4.2 | Estimation des propriétés effectives d'une plaque composite sandwich cousue . . . . .                               | 101 |
| 4.4.3 | Estimation des propriétés effectives d'une plaque composite sandwich tissée . . . . .                               | 104 |
| 4.4.4 | Poutre composite cantilever 3D renforcée par des fibres courtes et soumise à une charge de flexion . . . . .        | 105 |
| 4.4.5 | Plaque composite en polypropylène renforcée par des fibres UD de verre soumise à un chargement de torsion . . . . . | 107 |
| 4.4.6 | Poutre circulaire 3D . . . . .  | 108 |
| 4.5   | Conclusion . . . . .  | 111 |

## Conclusion générale

## Annexes

**Bibliographie**

# Table des figures

|      |  |    |
|------|--|----|
| 1.1  | Utilisations de matériaux composites dans quelques secteurs : (a) en construction urbaine sous forme de béton renforcé par des fibres courtes, (b) en construction aéronautique, en l'occurrence l'Airbus A350 constitué d'environ 50% de matériaux composites et (c) en isolation thermique en exploitant leurs bonnes propriétés thermiques. . . . . | 7  |
| 1.2  | Schéma simplifié de la structure d'un matériau composite. . . . .  | 7  |
| 1.3  | Les deux grandes familles de matrices. . . . .   | 8  |
| 1.4  | Matériau composite renforcé par des fibres courtes aléatoires. . . . .   | 11 |
| 1.5  | Matériau composite à renfort fibreux unidirectionnel. . . . .  | 11 |
| 1.6  | Matériau composite stratifié constitué de couches parfaitement liées. . . . .  | 11 |
| 1.7  | Renfort tissé 2D de type taffetas. . . . .   | 12 |
| 1.8  | Renfort tissé 3D (en anglais, through-the-thickness angle-interlock fabric). . . . .   | 13 |
| 1.9  | Exemples de matériaux composites sandwichs. . . . .  | 13 |
| 1.10 | Matériau sandwich cousu. . . . .   | 14 |
| 1.11 | Matériau sandwich renforcé par des fibres transversales en forme de 8. . . . .   | 14 |
| 1.12 | Principe de l'homogénéisation : (a) matériau composite représenté par ses deux phases discontinues (fibres et matrice) et (b) milieu homogène équivalent au matériau composite représenté par une seule phase continue. . . . .  | 15 |
| 1.13 | Modélisation du comportement effectif d'un matériau composite à partir de la définition d'un Volume Élémentaire Représentatif (VER). . . . .   | 17 |
| 1.14 | Évolution du tenseur d'élasticité effectif du matériau composite estimée par les modèles de Voigt et de Reuss. . . . .   | 20 |
| 1.15 | Illustration du problème de l'inclusion homogène. . . . .  | 21 |
| 1.16 | Modélisation par éléments finis d'un VER basée sur une approche directe : (a) maillage libre utilisant des éléments tétraédriques et (b) maillage régulier utilisant des éléments hexaédriques (d'après [1]). . . . .  | 25 |

|      |   |    |
|------|---|----|
| 1.17 | Grossissement sur un maillage 3D libre non régulier mettant en évidence la jonction (coïncidence) entre les noeuds des maillages du renfort et de la matrice (d'après [1]). . . . .   | 25 |
| 1.18 | Les étapes de construction du maillage d'un VER 3D par la méthode de maillage libre d'après Kari et al. [2] : (a) maillage libre non régulier des fibres et (b) maillage libre non régulier des deux phases du VER. . . . . | 26 |
| 1.19 | Maillage régulier d'un VER : (a) discrétisation par élément et (b) discrétisation par point d'intégration (d'après [1]). . . . .  | 27 |
| 1.20 | Renforcements intégrés le long des lignes de coordonnées locales (d'après [3, 4]). . . . .  | 28 |
| 1.21 | L'approche de la force de fibre : la fibre est représentée par ses forces de réaction appliquées au maillage de la matrice (d'après [5]) . . . . .  | 29 |
| 1.22 | Fibres discrètes réparties dans un espace matrice maillé avec des éléments quadrilatéraux (d'après [5]). . . . .  | 30 |
| 1.23 | Modélisation d'un matériau composite renforcé par des fibres courtes orientées de façon aléatoire sans les discrétiser (d'après [6, 7]). . . . .  | 31 |
| 1.24 | Trois configurations différentes de fibres immergées dans un maillage de matrice : fibre inter-élémentaire, fibre entre deux éléments voisins et fibre à l'intérieur d'un seul élément (d'après [6]). . . . .               | 31 |
| 2.1  | Éléments finis représentant l'espace de la matrice, en modélisations plane et 3D. . . . .   | 36 |
| 2.2  | Différentes orientations des fibres dans une modélisation plane. . . . .  | 37 |
| 2.3  | L'approche de la fibre projetée et le traitement des intersections fibre-matrice. . . . .   | 37 |
| 2.4  | Solide composite 2D. . . . .  | 38 |
| 2.5  | Éléments finis composites de membrane basés sur l'approche de la fibre projetée : (a) PFT3 et (b) PFQ4. . . . .   | 39 |
| 2.6  | Élément barre à deux noeuds représentant une fibre traversant un élément matrice. . . . .   | 41 |
| 2.7  | Définition des surfaces $A_i$ ( $i = 1, n$ ) utilisées pour calculer les coordonnées paramétriques d'un noeud de l'élément barre. . . . .   | 43 |
| 2.8  | Implémentation numérique des éléments finis composites PFT3 et PFQ4. . . . .  | 45 |
| 2.9  | Introduction des propriétés géométriques et mécaniques de la matrice et du renfort dans la plateforme KSP . . . . .   | 46 |

---

|      |   |    |
|------|---|----|
| 2.10 | VER du composite magnésium/carbone soumis à trois chargements : (a) traction simple suivant $x$ , (b) traction simple suivant $y$ et (c) cisaillement dans le plan $xy$ . . . . .           | 47 |
| 2.11 | Évolution des propriétés effectives du composite magnésium/carbone en fonction de la fraction volumique des fibres : (a) Module d'Young et (b) Module de cisaillement. . . . .              | 48 |
| 2.12 | Évolution des propriétés effectives du composite magnésium/carbone en fonction du rapport d'aspect $L_f/D_f$ des fibres : (a) module d'Young et (b) coefficient de Poisson. . . . .         | 49 |
| 2.13 | Évolution des propriétés effectives du composite magnésium/carbone en fonction de la longueur de l'arête du VER supposé cubique : (a) Module d'Young et (b) coefficient de Poisson. . . . . | 50 |
| 2.14 | Évolution des propriétés effectives du composite magnésium/carbone en fonction de l'épaisseur du VER : (a) Module d'Young et (b) coefficient de Poisson. . . . .                            | 51 |
| 2.15 | Évolution des propriétés effectives du composite magnésium/carbone en fonction du maillage du VER : (a) Modules d'Young et (b) Coefficient de Poisson. . . . .                              | 51 |
| 2.16 | Poutre composite cantilever renforcée par des fibres unidirectionnelles et soumise à une force de flexion transversale. . . . .   | 52 |
| 2.17 | VER de la plaque multicouche de dimensions $10 \times 10 \times 4 \text{ mm}^3$ . . . . .   | 54 |
| 2.18 | Plaque carrée renforcée par une fibre centrale. . . . .   | 55 |
| 2.19 | Évolution de la force de réaction du côté encastré en fonction de la finesse du maillage. . . . .   | 56 |
| 2.20 | Influence de la longueur de la fibre centrale sur la rigidité de la plaque composite estimée par (a) PFT3 et (b) PFQ4. . . . .  | 56 |
| 2.21 | Influence de l'orientation de la fibre centrale sur la rigidité de la plaque composite estimée par (a) PFT3 et (b) PFQ4. . . . .  | 57 |
| 3.1  | Les différentes configurations d'un solide composite 2D. . . . .  | 61 |
| 3.2  | Les différentes configurations de l'élément barre. . . . .  | 67 |
| 3.3  | Poutre en alliage de magnésium renforcée par des fibres courtes de carbone aléatoirement réparties soumise à une force de flexion. . . . .  | 69 |
| 3.4  | Modélisation de la poutre en alliage de magnésium renforcée par des fibres courtes de carbone par : (a) 714 éléments triangulaires et (b) 625 éléments quadrilatères. . . . .               | 70 |

|      |  |    |
|------|--|----|
| 3.5  | Courbe force-flèche de la poutre cantilever renforcée par des fibres courtes de carbone obtenue par les éléments triangulaires. . . . .  | 70 |
| 3.6  | Courbe force-flèche de la poutre cantilever renforcée par des fibres courtes de carbone obtenue par les éléments quadrilatères. . . . .  | 71 |
| 3.7  | Poutre en alliage de magnésium renforcée par 20 fibres UD de carbone soumise à une force de flexion transversale. . . . .  | 71 |
| 3.8  | Courbe force-flèche de la poutre cantilever renforcée par 20 fibres UD de carbone obtenue par les éléments triangulaires. . . . .  | 72 |
| 3.9  | Courbe force-flèche de la poutre cantilever renforcée par 20 fibres UD de carbone obtenue par les éléments quadrilatères. . . . .  | 72 |
| 3.10 | Poutre composite cantilever renforcée par des fibres UD de carbone de longueur variable, soumise à une force de flexion transversale. . . . .  | 73 |
| 3.11 | Courbes force-flèche de la poutre cantilever renforcée par des fibres UD de carbone de longueur variable obtenues par l'élément PFQ4. . . . .  | 74 |
| 3.12 | Courbes force-flèche de la poutre cantilever renforcée par des fibres UD de carbone de longueur variable obtenues par l'élément PFT3. . . . .  | 74 |
| 3.13 | Demi poutre annulaire en béton renforcée par quatre fibres en acier . . . .  | 75 |
| 3.14 | Modélisation de la demi poutre annulaire : (a) Modèle 2D maillé par 2064 éléments quadrilatères et (b) Modèle 3D maillé par 24768 éléments C3D20.  | 76 |
| 3.15 | Courbes force-déplacement de la poutre annulaire obtenues par les éléments quadrilatères (SD : Segments de Droite, AFP : Approche de la Fibre Projetée et LDM : Loi des Mélanges). . . . . | 77 |
| 3.16 | Poutre composite cantilever renforcée par deux fibres longues et soumise à une charge uniformément répartie. . . . .   | 77 |
| 3.17 | Courbes charge-déplacement de la poutre cantilever renforcée par deux fibres longues et soumise à une charge uniformément répartie. . . . .  | 78 |
| 4.1  | Solide composite 3D. . . . .   | 84 |
| 4.2  | Maillage du solide composite 3D basé sur l'approche de la fibre projetée. . .  | 85 |
| 4.3  | Élément fini composite PFH8 basé sur l'approche de la fibre projetée. . . .  | 85 |
| 4.4  | Élément fini de barre à deux noeuds 3D représentant une fibre traversant un élément matrice H8. . . . .  | 87 |
| 4.5  | Définition des six faces et six volumes utilisés pour construire les fonctions de forme géométriques de l'élément H8. . . . .  | 89 |

---

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 4.6  | VER du matériau composite magnésium/carbone soumis à six charge-<br>ments : (a) traction simple suivant $x$ , (b) traction simple suivant $y$ , (c)<br>traction simple suivant $z$ , (d) cisaillement dans le plan $xy$ , (e) cisaillement<br>dans le plan $xz$ , (f) cisaillement dans le plan $yz$ . . . . .  | 96  |
| 4.7  | VER du matériau composite magnésium/carbone modélisé par $10 \times 10 \times 10$<br>éléments PFH8. . . . .   | 97  |
| 4.8  | Évolution des propriétés effectives du composite magnésium/carbone en<br>fonction de la fraction volumique des fibres : (a) Module d'Young et (b)<br>Module de cisaillement. . . . .  | 98  |
| 4.9  | Évolution des propriétés effectives du composite magnésium/carbone en<br>fonction du rapport de forme des fibres ( $L_f/D_f$ ) : (a) Module d'Young et<br>(b) Module de cisaillement. . . . .   | 99  |
| 4.10 | VER du matériau composite magnésium/carbone. . . . .  | 100 |
| 4.11 | Évolution des propriétés du composite magnésium/carbone en fonction des<br>dimensions du VER : (a) Module d'Young et (b) Module de cisaillement. . .  | 100 |
| 4.12 | Évolution des propriétés effectives du composite magnésium/carbone en<br>fonction de raffinement du maillage du VER : (a) Module d'Young et (b)<br>Module de cisaillement. . . . .  | 101 |
| 4.13 | Plaque sandwich cousue : (a) propriétés géométriques de la structure com-<br>posite, (b) forme des coutures à l'intérieur de la plaque sandwich, (c) condi-<br>tions aux limites pour le test de compression hors plan, (d) conditions aux<br>limites pour le test de cisaillement hors plan et (e) maillage de la plaque<br>sandwich par 4360 éléments PFH8. . . . . | 102 |
| 4.14 | Distribution de la réaction suivant $y$ sur la plaque sandwich cousue après<br>le test de compression. . . . .  | 104 |
| 4.15 | (a) Plaque composite sandwich à âme creuse renforcée par des fibres sous<br>forme de "8". (b) Vue sens chaîne. (c) Vue sens trame. . . . .  | 105 |
| 4.16 | Évolution du module de compression $E_z$ de la plaque sandwich tissée en<br>fonction de l'épaisseur de l'âme estimée par PFH8 et comparée aux résultats<br>expérimentaux de Sadighi et Hosseini [8]. . . . .  | 106 |
| 4.17 | Évolution des modules de cisaillement dans les directions chaîne et trame<br>de la plaque sandwich tissée en fonction de l'épaisseur de l'âme estimée par<br>PFH8 et comparée aux résultats expérimentaux de Sadighi et Hosseini [8].   | 106 |
| 4.18 | Poutre composite Mg/Cf cantilever 3D soumise à une force de flexion trans-<br>versale. . . . .  | 107 |

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 4.19 | Poutre composite Mg/Cf cantilever modélisée par $100 \times 10 \times 4$ éléments PFH8.<br>107  |     |
| 4.20 | Courbe force-flèche de la poutre composite Mg/Cf cantilever 3D. . . . .   | 108 |
| 4.21 | Plaque en polypropylène renforcée par des fibres UD de verre et soumise à<br>un chargement de torsion. . . . .  | 109 |
| 4.22 | Courbe force-déplacement de la plaque composite en polypropylène renfor-<br>cée par des fibres UD de verre et soumise à un chargement de torsion. . . | 110 |
| 4.23 | Poutre circulaire 3D en béton renforcé par quatre barres en acier. . . . .  | 110 |
| 4.24 | Courbe force-flèche de la poutre circulaire 3D en béton armé. . . . .   | 111 |

# Introduction générale

L'âge de l'acier représente une composante essentielle dans la révolution industrielle et celui des plastiques a été marqué par le développement de la pétrochimie. Actuellement, nous venons d'entrer dans une nouvelle tendance, marquée par la maîtrise et l'utilisation massive de nouveaux types de matériaux, combinant à la fois la rigidité des métaux et la légèreté des plastiques. Ces matériaux sont appelés *matériaux composites*.

Le domaine des matériaux composites est à la fois ancien et nouveau. Il est ancien car la plupart des objets naturels, y compris le corps humain, les plantes et les animaux, sont des composites. Il est nouveau car seulement au début des années 1960, les ingénieurs et les scientifiques ont commencé à exploiter sérieusement le vaste potentiel de ce type de matériaux. Grâce à leurs très bonnes propriétés mécaniques spécifiques (rigidité et résistance rapportées à la masse) et leur meilleure tenue aux conditions environnementales par rapport aux matériaux classiques métalliques, les matériaux composites sont aujourd'hui largement utilisés dans plusieurs secteurs industriels tels que l'aéronautique, l'automobile, le ferroviaire et la construction navale. Ces matériaux permettent aussi d'alléger le poids des structures qui se traduit par des gains significatifs de la consommation du carburant et des coûts de transport.

Les matériaux composites sont des matériaux hétérogènes composés généralement de deux phases. Une phase continue appelée *matrice* renforcée par une phase discontinue appelée *renfort*, beaucoup plus rigide que la première. La combinaison de ces deux phases apporte au matériau composite des propriétés mécaniques supérieures à celles des constituants pris séparément. Le renfort peut être de différentes natures et différentes échelles comme les additifs (poudres micro ou millimétriques), les charges ponctuelles (sable, gravier) et en particulier, les fibres (courtes, longues ou tissées). La matrice, qui a le rôle de protéger le renfort et lui transmettre les efforts mécaniques, peut être de type métallique, céramique, organique ou polymérique. Pour atteindre des propriétés mécaniques élevées, les renforts de type fibre sont très couramment utilisés. Dans ce cas, le matériau composite obtenu est dit à *renfort fibreux*. Les propriétés élastiques des matériaux composites à renfort fibreux peuvent être contrôlées par plusieurs paramètres comme le choix approprié

de l'orientation des fibres, de leur longueur et de leur fraction volumique.

D'autre part, il est connu que les matériaux composites, tels que les stratifiés et les sandwichs, présentent de très bonnes propriétés mécaniques dans le plan. Cependant, leurs propriétés effectives hors-plan (direction de l'épaisseur) sont relativement faibles, en plus des problèmes de délaminage souvent pointés dans le cas du comportement inter-laminaire et en cisaillement. Pour renforcer la rigidité de ces matériaux suivant l'épaisseur, l'une des stratégies proposées consiste à introduire un renforcement dans l'épaisseur à travers l'utilisation d'un système de couture et cette solution a montré son efficacité. Dans ce cas, nous parlons de matériaux ou structures composites *cousus*.

La détermination des propriétés mécaniques effectives des matériaux composites à renfort fibreux est réalisée généralement à travers des essais expérimentaux. Ces essais s'avèrent parfois coûteux et nécessitent généralement un temps de réalisation élevé. Il est alors nécessaire de disposer d'outils d'analyse qui permettent la prédiction des propriétés mécaniques de ces matériaux. A cet effet, plusieurs méthodes d'homogénéisation analytiques ont été proposées dans la littérature. Ces modèles permettent de fournir une prédiction raisonnable du comportement mécanique des matériaux composites pour des configurations simples de la matrice et du renfort fibreux (matrice isotrope et homogène et fibres de forme principalement linéique). Ces modèles visent à remplacer le matériau composite hétérogène par un matériau équivalent plutôt homogène. Ceci passe par la définition d'un Volume Élémentaire Représentatif (VER) formé à partir de l'ensemble des constituants du matériau composite. Les propriétés élastiques du VER peuvent être introduites par la suite dans des modèles numériques afin d'étudier le comportement mécanique des structures composites, en évitant ainsi de modéliser la micro-structure des matériaux utilisés. Cependant, ces modèles micro-mécaniques ne prennent pas généralement en compte la complexité des matériaux composites à renfort fibreux ainsi que leurs conditions de chargement réelles. A titre d'exemple, ces modèles ne peuvent pas tenir compte de la présence des coutures suivant l'épaisseur des matériaux composites cousus. C'est la raison pour laquelle d'autres méthodes numériques, basées en particulier sur la méthode des éléments finis, ont été également proposées.

Plusieurs modèles éléments finis ont été développés pour représenter, de façon directe ou discrète, le renfort fibreux au sein d'un domaine matrice. La méthode des éléments finis est particulièrement utile d'abord pour étudier des matériaux composites dont le renfort présente une architecture complexe, tels que les matériaux composites cousus, et ensuite, pour obtenir des informations sur la distribution des contraintes mécaniques au sein et autour de la fibre. En général, ces modèles éléments finis sont utilisés selon deux approches. La première repose sur la discrétisation directe de la matrice et des fibres en

---

respectant la coïncidence entre les noeuds des deux maillages. Cette première approche requiert des stratégies de maillage et de re-maillage bien élaborées qui engendrent des calculs très coûteux en capacité mémoire et en temps CPU. La deuxième approche permet de tenir compte discrètement de la présence du renfort au sein d'une matrice sans avoir besoin de le discrétiser explicitement. Ceci aide à éliminer les problèmes de coïncidence des maillages de la matrice et du renfort et évite en conséquence le raffinement du maillage de la matrice ce qui réduit considérablement les temps de calcul.

C'est dans le cadre de cette deuxième approche de modélisation que s'inscrit cette thèse. Elle vise à développer une approche numérique par éléments finis multi-échelle pour modéliser le comportement mécanique des matériaux et structures composites à renfort fibreux. Cette approche, baptisée *Approche de la Fibre Projetée* (AFP), permet de tenir compte de la présence des fibres, longues ou courtes et orientées de façon aléatoire ou paramétrée, dans un domaine matrice sans les mailler, ce qui réduit considérablement la taille du système d'équations à résoudre.

Le premier chapitre propose d'abord une présentation générale des matériaux composites et une synthèse des différents types de matrice et de renfort. Cette présentation est suivie d'une synthèse bibliographique sur les différentes méthodes de modélisation des matériaux composites à savoir les modèles d'homogénéisation micromécaniques analytiques et les modèles numériques.

Le second chapitre présente la nouvelle approche numérique multi-échelle AFP développée dans ce travail de thèse. Cette approche est basée sur la méthode des éléments finis et vise à modéliser le comportement des matériaux et structures composites à renfort fibreux. Ensuite, l'AFP est adaptée aux problèmes plans linéaires à travers le développement de deux éléments finis composites de membrane baptisés PFT3 (élément triangulaire à 3 noeuds) et PFQ4 (élément quadrilatéral à 4 noeuds). Enfin, quelques tests de validation linéaires sont présentés pour évaluer la précision de la nouvelle approche AFP dans l'étude de solides composites 2D.

Le troisième chapitre s'intéresse à l'extension des formulations des éléments composites de membrane PFT3 et PFQ4 afin de pouvoir analyser le comportement non linéaire géométrique des solides composites 2D soumis à de grands déplacements accompagnés de petites déformations. La formulation lagrangienne totale (FLT) est adoptée pour décrire leur mouvement. Des tests de validation non linéaires sont proposés à la fin de ce troisième chapitre.

Le dernier chapitre est consacré au développement d'un élément fini solide hexaédrique à 8 noeuds, baptisé PFH8, basé sur l'AFP afin d'étudier des matériaux et structures

composites tridimensionnels. Les formulations linéaire et non linéaire géométrique de cet élément sont présentées. Ce quatrième chapitre est clôturé par un ensemble de tests de validation linéaires et non linéaires pour montrer l'efficacité de cet élément solide.

# Chapitre 1

## État de l'art : Modélisation des matériaux composites à renfort fibreux

### Sommaire

---

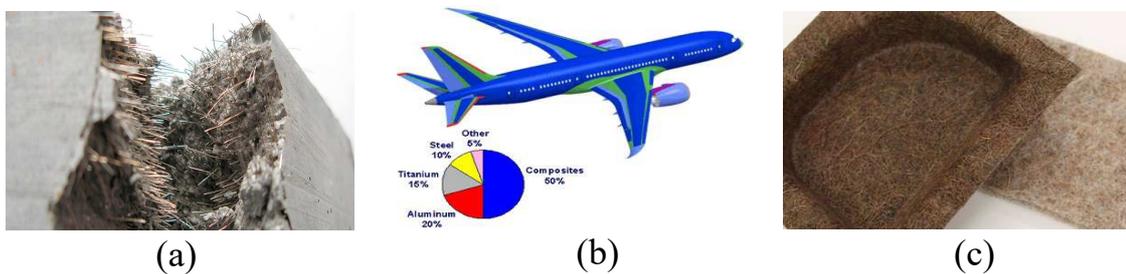
|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| <b>1.1</b> | <b>Généralités</b>                                  | <b>7</b>  |
| 1.1.1      | Les matrices  | 8         |
| 1.1.2      | Les renforts  | 9         |
| 1.1.3      | Types de matériaux composites                       | 10        |
| <b>1.2</b> | <b>Modélisation des matériaux composites</b>        | <b>14</b> |
| 1.2.1      | Milieu homogène équivalent                          | 15        |
| 1.2.2      | Méthodologie des modèles micromécaniques            | 16        |
| <b>1.3</b> | <b>Modèles micromécaniques</b>                      | <b>19</b> |
| 1.3.1      | Bornes de Voigt et de Reuss                         | 19        |
| 1.3.2      | Modèle d'Halpin-Tsai                                | 20        |
| 1.3.3      | Problème de l'inclusion d'Eshelby                   | 21        |
| 1.3.4      | Schéma dilué d'Eshelby                              | 22        |
| 1.3.5      | Schéma de Mori-Tanaka                               | 22        |
| 1.3.6      | Schéma auto-cohérent                                | 23        |
| <b>1.4</b> | <b>Modèles numériques</b>                           | <b>23</b> |
| 1.4.1      | Modèles numériques basés sur une approche directe   | 24        |
| 1.4.2      | Modèles numériques basés sur une approche indirecte | 27        |
| <b>1.5</b> | <b>Conclusion</b>                                   | <b>30</b> |

---

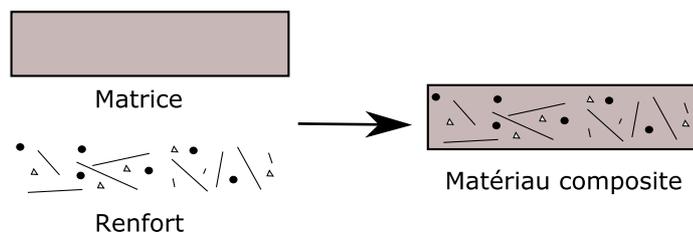


## 1.1 Généralités

Les matériaux composites suscitent un intérêt croissant dans de nombreux secteurs industriels tels que l'aéronautique, l'automobile, le bâtiment et le sport comme le montre la figure 1.1. Les matériaux composites possèdent une structure géométrique spécialement conçue qui d'abord, leur confère des propriétés élastiques que leurs constituants (renfort + matrice) ne possèdent pas individuellement et ensuite, leur permet de remplir de nombreuses fonctions techniques. Les principaux avantages des matériaux composites résident dans leurs caractéristiques mécaniques spécifiques, leur faible conductivité thermique et leur haute résistance à la corrosion et à l'usure.



**FIGURE 1.1 :** *Utilisations de matériaux composites dans quelques secteurs : (a) en construction urbaine sous forme de béton renforcé par des fibres courtes, (b) en construction aéronautique, en l'occurrence l'Airbus A350 constitué d'environ 50% de matériaux composites et (c) en isolation thermique en exploitant leurs bonnes propriétés thermiques.*



**FIGURE 1.2 :** *Schéma simplifié de la structure d'un matériau composite.*

D'une façon générale, un matériau composite est défini comme un mélange d'un ou plusieurs matériaux non miscibles (figure 1.2). La plupart des matériaux composites sont constitués d'une phase principale, appelée matrice, dans laquelle sont noyées des fibres dont la résistance mécanique est beaucoup plus importante que celle de la matrice. La matrice et le renfort peuvent être d'origine naturelle ou le plus souvent d'origine synthétique. La matrice assure la cohésion du matériau composite et la protection du renfort contre les conditions environnementales telles que la corrosion, l'humidité et la température. Elle permet également de transmettre au renfort les sollicitations mécaniques auxquelles sont

soumises les pièces composites.

Les propriétés physiques associées au matériau composite dépendent principalement des caractéristiques physiques de chacune de ses phases. Le paragraphe suivant présente les principaux types de matrices et de renforts et leurs propriétés.

### 1.1.1 Les matrices

La matrice représente le coeur du matériau composite dans lequel les fibres sont noyées et arrangées de façon ordonnée ou aléatoire. En particulier, les matrices utilisées dans les matériaux composites à renfort fibreux peuvent être décomposées en deux grandes familles : les matrices *organiques* et les matrices *minérales* (figure 1.3). Les matériaux composites à matrice polymère, appartenant à la famille des matrices organiques, sont les plus utilisées dans les applications actuelles grâce à leur rapport qualité/prix. Cependant, lorsqu'une forte tenue en température est exigée, les matrices de type minéral sont considérées.

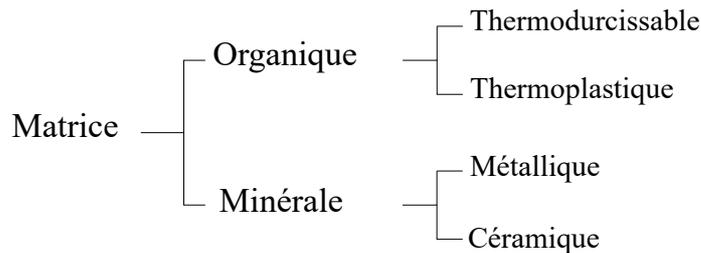


FIGURE 1.3 : Les deux grandes familles de matrices.

#### Les matrices thermodurcissables

Ces matrices ont la particularité de durcir par apport de chaleur selon une réaction chimique exothermique appelée polymérisation. Les matrices thermodurcissables ne se ramollissent pas sous l'effet de la chaleur et confèrent au matériau composite, après polymérisation, des propriétés physico-chimiques et mécaniques très intéressantes. Parmi les matrices thermodurcissables les plus utilisées, nous citons les polyesters, les époxydes et les polyimides.

#### Les matrices thermoplastiques

Les matrices polymères thermoplastiques ont une faible masse volumique et se ramollissent sous l'effet de la chaleur. Le processus de refroidissement leur permet de durcir, donnant ainsi au renfort la possibilité de conserver ses propriétés géométriques (position

et orientation). À la différence des matrices thermodurcissables, cette transformation est réversible et ne génère aucune chaleur intrinsèque. Le polypropylène (PP) est parmi les matrices thermoplastiques la plus utilisées aujourd'hui.

### Les matrices métalliques

Les matrices métalliques se présentent sous une forme monophasée (un métal pur ou une solution solide comme le magnésium et le titane) ou multiphasée (un alliage durci par précipitation comme l'aluminium et ses alliages). Comparativement aux matrices organiques, les matrices métalliques présentent une meilleure tenue en température, permettant ainsi de pousser les limites d'utilisation des matériaux composites aux environnements à fortes réactions exothermiques. Cependant, les métaux sont plus lourds et plus sensibles à la dégradation de l'interface fibre-matrice ainsi qu'à la corrosion que les matrices polymères.

### Les matrices céramiques

Une matrice en céramique peut être constituée d'une ou de plusieurs phases. L'utilisation des matrices céramiques à plusieurs phases a pour but d'améliorer les propriétés mécaniques du matériau composite. C'est en particulier le cas des matrices auto-cicatrisantes qui incluent des composés du bore. Le choix des matrices céramiques est justifié principalement par leur résistance à de fortes températures (supérieures à 2000°C), en plus de leurs propriétés mécaniques intéressantes et leur faible masse volumique. Cependant, le principal inconvénient des matrices céramiques est leur fragilité, ce qui les rend très sensibles aux défauts (fissures). Le carbone, le carbure de silicium et le nitrure de silicium sont trois exemples de matrices céramiques.

#### 1.1.2 Les renforts

Le renfort assure la résistance et les performances mécaniques du matériau composite et il est généralement beaucoup plus rigide et plus résistant que la matrice. Les renforts peuvent être classés en deux grandes familles : les renforts *organiques* et les renforts *inorganiques*.

En particulier, nous exposons dans les deux paragraphes suivants les propriétés de deux fibres usuelles largement utilisées dans les applications industrielles, en l'occurrence les fibres de verre et de carbone.

## Fibres de verre

Les fibres de verre présentent un excellent rapport performance/prix qui les place de loin au premier rang des renforts utilisés actuellement dans les applications utilisant les matériaux composites. Elles sont obtenues à partir de sable (silice) et d'additifs (alumine, carbonate de chaux, magnésie et oxyde de bore). Nous pouvons distinguer trois types de fibres de verre :

- *E* : pour les composites de grande diffusion et les applications courantes ;
- *R* : pour les composites à hautes performances ;
- *D* : pour la fabrication de circuits imprimés.

## Fibres de carbone

Les fibres de carbone présentent de très bonnes propriétés mécaniques et sont élaborées à partir d'un polymère de base, appelé précurseur. Actuellement, les fibres précurseurs utilisées sont des fibres acryliques élaborées à partir du Polyacrylonitrile. Parmi les fibres de carbone utilisées dans les applications industrielles, nous citons les fibres T300, T700, T800, MR40, TR50, IM6 et IM7.

### 1.1.3 Types de matériaux composites

#### Composites à fibres courtes

De nombreuses fibres, comme les fibres de verre et de carbone, peuvent être découpées en longueurs courtes et ensuite utilisées comme renfort pour fabriquer des pièces composites (figure 1.4). La longueur des fibres et leur orientation aléatoire dans la matrice rendent le comportement du matériau composite quasi-isotrope. En comparaison avec les composites à fibres longues et continues, les composites à fibres courtes présentent des propriétés mécaniques souvent faibles, ce qui limite leur utilisation dans des applications de structure.

#### Composites unidirectionnels

Le matériau composite unidirectionnel (UD) est la forme de base des composites à fibres continues (figure 1.5). La rigidité du matériau composite UD est plus importante suivant la direction des fibres comparée aux autres directions. Ainsi, les composites UD sont considérés comme des matériaux *isotropes transverses*, ce qui signifie qu'ils présentent une direction (la direction des fibres) ayant des propriétés mécaniques différentes des deux autres directions principales.

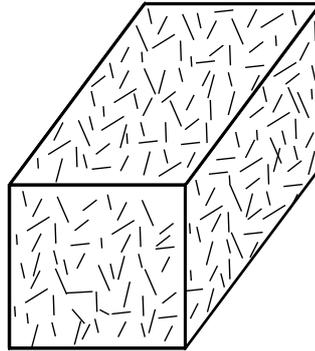


FIGURE 1.4 : *Matériau composite renforcé par des fibres courtes aléatoires.*

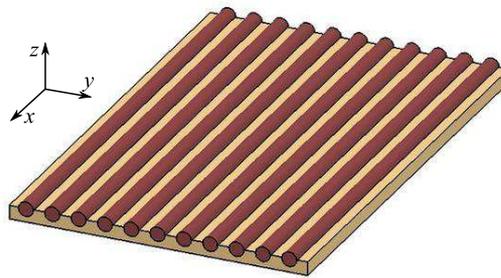


FIGURE 1.5 : *Matériau composite à renfort fibreux unidirectionnel.*

### Composites stratifiés

Les composites stratifiés sont constitués de couches (ou plis) UD empilées et renforcées par des fibres longues dont la direction principale diffère d'une couche à l'autre (figure 1.6). Cette architecture confie au matériau composite une rigidité renforcée suivant les différentes directions des couches. En particulier, les propriétés efficaces du stratifié varient en fonction de l'orientation et de l'épaisseur des couches individuelles. L'épaisseur de chaque pli est généralement très faible, de l'ordre de 0,125 mm pour un stratifié carbone/époxyde utilisé dans la construction aéronautique.

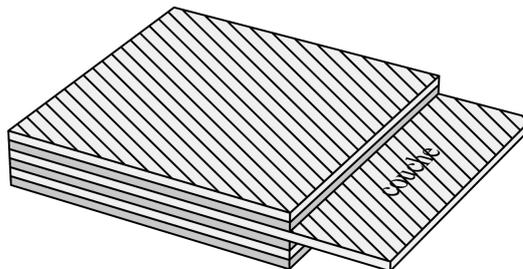


FIGURE 1.6 : *Matériau composite stratifié constitué de couches parfaitement liées.*

## Composites tissés

Les fibres souples, comme les fibres de verre et de carbone, peuvent être tissées et ensuite imprégnées d'une matrice. Ce type de matériaux composites regroupe les composites tissés de type 2D (renfort à deux directions) et 3D (renfort à trois directions).

**Composite tissé 2D** Un renfort tissé 2D est composé d'un entrelacement de fils de chaîne et de fils de trame positionnés perpendiculairement les uns par rapport aux autres (figure 1.7). L'agencement entre les mèches est souvent périodique selon une ou plusieurs directions. Cette périodicité se décrit d'une manière conventionnelle en terme de cellule de base qui permet de reproduire l'ensemble du tissé par simple translation suivant les directions chaîne et trame.

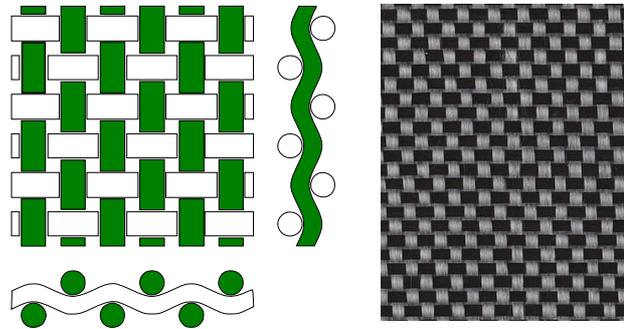
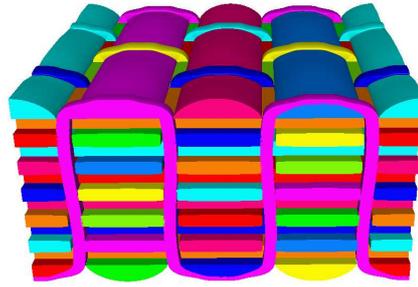


FIGURE 1.7 : Renfort tissé 2D de type taffetas.

**Composite tissé 3D** Le tissage angle interlock 3D est une extension de la technologie de tissage 2D. Il est tissé par trois directions de renforcement : le renfort dans la direction chaîne, le renfort dans la direction trame et le renfort dans la direction de l'épaisseur. Ce dernier ondule à travers toutes les couches d'empilement des mèches sens trame, comme illustré sur la figure 1.8. Ce type de tissage est connu sous le nom de *through-the-thickness angle-interlock*.

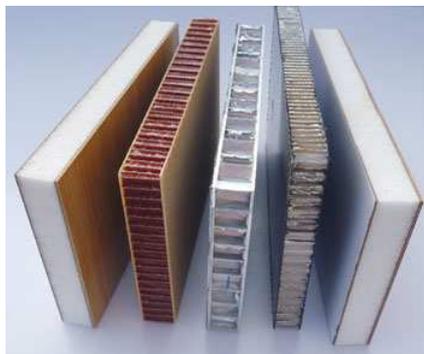
## Composites sandwichs

Un composite sandwich résulte généralement de l'assemblage de deux peaux minces et rigides collées à une âme épaisse et de faible masse volumique (figure 1.9). L'épaisseur de l'âme permet d'améliorer la rigidité de flexion du matériau sandwich tout en conservant un poids très faible. Les peaux, de faible épaisseur et constituées généralement de composites stratifiés, sont sollicitées principalement en traction-compression. L'âme travaille



**FIGURE 1.8 :** *Renfort tissé 3D (en anglais, through-the-thickness angle-interlock fabric).*

principalement en cisaillement et elle est généralement composée d'un matériau alvéolaire comme les mousses polymères.



**FIGURE 1.9 :** *Exemples de matériaux composites sandwichs.*

Par ailleurs, les matériaux sandwichs souffrent des contraintes inter-laminaires au niveau de l'interface âme/peau pouvant causer leur ruine. En outre, leurs propriétés mécaniques transverses sont faibles car elles sont contrôlées par le matériau constituant l'âme, choisi plutôt pour sa faible masse volumique que ses propriétés mécaniques. L'ajout de renforts transverses peut dans ce cas renforcer le matériau sandwich suivant l'épaisseur.

**Matériau sandwich cousu** L'idée de la couture mise en place sur un empilement monolithique est reprise dans le cas des composites sandwichs comme illustré sur la figure 1.10. Les coutures ainsi introduites participent à la cohésion entre les couches du sandwich et soulagent l'interface d'adhésion des efforts de cisaillement. De plus, la qualité de ces renforts permettent d'envisager des gains non négligeables des propriétés transverses .

**Matériau sandwich à renfort en forme de 8** Ces composites présentent une âme directement tissée avec les peaux par le biais de renforts verticaux sous forme de mèches

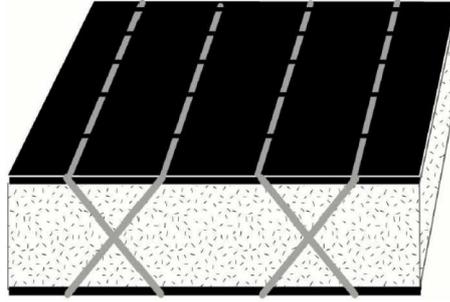


FIGURE 1.10 : Matériau sandwich cousu.

en créneaux. Seuls les renforts transversaux assurent l'écartement des peaux. Ces renforts qui doivent être théoriquement verticaux sont en réalité en forme de 8 (figure 1.11).

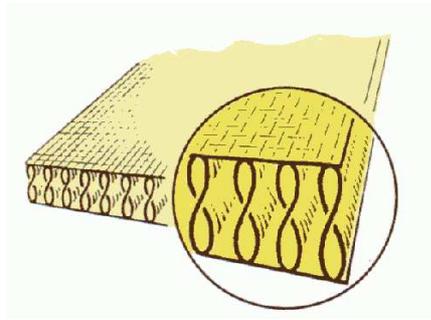


FIGURE 1.11 : Matériau sandwich renforcé par des fibres transversales en forme de 8.

## 1.2 Modélisation des matériaux composites

Traditionnellement, les essais expérimentaux sont les premiers à être considérés pour étudier et caractériser le comportement mécanique des matériaux composites. Cependant, ces essais sont souvent onéreux et nécessitent parfois un temps de réalisation très important, ce qui rend la modélisation des matériaux composites plus que primordiale dans de nombreuses situations.

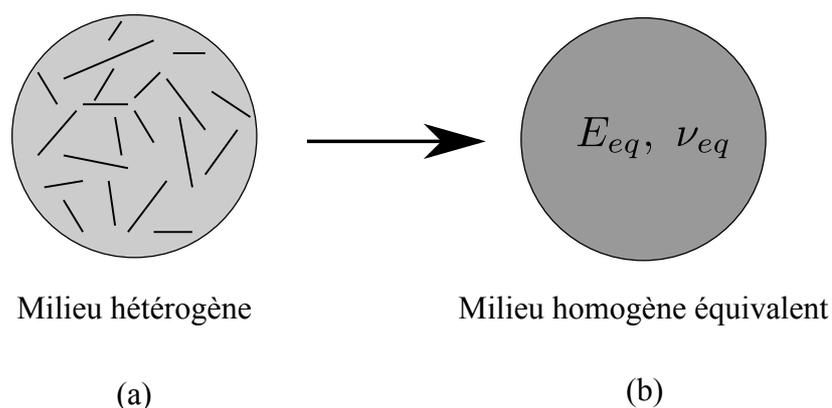
L'étude du comportement mécanique d'un matériau composite s'articule autour de trois échelles différentes : l'échelle microscopique, l'échelle mésoscopique et l'échelle macroscopique. Considérée comme l'échelle des constituants élémentaires du composite, l'échelle *microscopique* tient compte, en particulier, de la taille caractéristique de la fibre élémentaire ainsi que de son diamètre (dimensions de l'ordre du micro-mètre). L'échelle *mésoscopique* est à son tour l'échelle des constituants intermédiaires (par exemple, une couche dans un composite stratifié). A cette échelle, nous ne distinguons plus les fibres de la matrice et le matériau composite est alors modélisé par des milieux homogènes dont l'ordre

de grandeur est de quelques dixièmes de millimètres. Enfin, l'échelle *macroscopique* est une échelle correspondante à la taille de la structure composite. Pour cette échelle, la taille caractéristique est généralement de l'ordre du centimètre ou de dizaines de centimètres. L'échelle définissant le matériau composite apparaît donc comme un paramètre déterminant de sa modélisation.

La détermination, via le concept d'homogénéisation, des propriétés mécaniques effectives d'un matériau composite à partir des caractéristiques de la matrice et du renfort est historiquement la première voie retenue. Ce concept consiste à décrire le comportement mécanique complexe du matériau composite (milieu hétérogène) par un milieu homogène équivalent.

### 1.2.1 Milieu homogène équivalent

Le comportement mécanique effectif d'un matériau composite dépend naturellement de celui de ses constituants. Par conséquent, les propriétés élastiques et géométriques de chaque constituant accentue le degré d'hétérogénéité du matériau composite. Il convient donc de prendre en compte l'effet de chacune de ces hétérogénéités pour modéliser le comportement effectif du matériau composite. Cette démarche semble être compromise par les limites des outils de calcul actuels. La définition d'un milieu homogène équivalent au matériau composite permet de contourner ces difficultés. Le matériau composite est alors représenté par une seule phase homogène (figure 1.12). Dans ce cas, l'homogénéisation peut être interprétée comme une méthode de modélisation qui permet de réaliser la transition entre l'échelle microscopique et les échelles mésoscopique et macroscopique.



**FIGURE 1.12** : Principe de l'homogénéisation : (a) matériau composite représenté par ses deux phases discontinues (fibres et matrice) et (b) milieu homogène équivalent au matériau composite représenté par une seule phase continue.

De part son architecture, l'analyse microscopique du matériau composite met en évi-

dence la discontinuité de la matière dans son volume. Le milieu équivalent défini pour analyser le comportement du matériau composite est supposé continu. La méthode d'homogénéisation repose sur cette hypothèse de continuité de la matière qui lui donne la possibilité de s'affranchir des différents problèmes liés à l'hétérogénéité. Il est nécessaire de souligner que la technique d'homogénéisation ne peut représenter le comportement du matériau composite que dans le cadre des approximations utilisées lors de son implémentation. Il convient aussi de noter que cette méthode peut être basée sur des modèles analytiques, numériques ou bien une combinaison des deux.

### 1.2.2 Méthodologie des modèles micromécaniques

L'exploitation de l'homogénéisation par des modèles micromécaniques repose sur un certain nombre d'hypothèses comme la transition entre l'échelle microscopique des constituants et l'échelle macroscopique de la structure. Ces hypothèses conditionnent également le domaine de validité associé à la solution du problème. Cette méthodologie peut être résumée par les points suivants :

- Simplifier la représentation du milieu hétérogène représentatif du matériau composite ;
- Estimer ou quantifier le comportement mécanique effectif des matériaux hétérogènes à élaborer ;
- Améliorer le caractère prédictif des lois de comportement des structures composites.

Plusieurs modèles d'homogénéisation micromécaniques existent dans la littérature. Ils sont principalement formulés à partir des deux hypothèses suivantes :

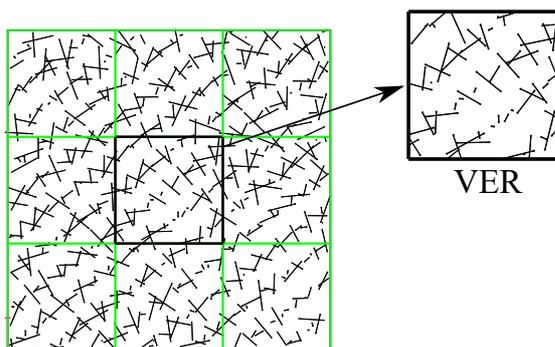
- Les fibres et la matrice présentent un comportement élastique linéaire isotrope ;
- L'interface fibre/matrice est supposée parfaite, ce qui exclut les problèmes de décohésion interfaciale.

Généralement, l'homogénéisation analytique se déroule suivant trois étapes principales : d'abord, la *représentation* du milieu hétérogène étudié, ensuite, la *localisation* qui permet d'établir les relations de passage de l'échelle macroscopique à l'échelle microscopique et enfin, l'homogénéisation qui reprend les résultats des analyses précédentes et détermine la réponse moyenne des grandeurs physiques. À partir de cette dernière étape, les relations de passage de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique sont établies en mettant en évidence les propriétés effectives du matériau composite.

## Étape de représentation

La détermination des propriétés effectives d'un matériau composite par la technique d'homogénéisation passe d'abord par la définition d'un Volume Élémentaire Représentatif (VER), formé à partir de l'ensemble des phases qui constituent le matériau composite (figure 1.13). Ce VER doit satisfaire deux conditions [9] :

- Être plus grand que la taille caractéristique des constituants afin que leur nombre total soit suffisant pour permettre une représentation statistique correcte du matériau étudié.
- Être plus petit que la taille caractéristique d'une structure mécanique pour pouvoir être remplacé par un matériau homogène équivalent lors d'un calcul de structure.



**FIGURE 1.13** : Modélisation du comportement effectif d'un matériau composite à partir de la définition d'un Volume Élémentaire Représentatif (VER).

La connaissance des caractéristiques des phases d'un matériau composite (tenseurs d'élasticité de la matrice et du renfort, répartition spatiale des fibres, fraction volumique des fibres, diamètre et longueur moyenne des fibres, etc.) est un point très important dans le processus d'homogénéisation. Chaque phase  $i$  est décrite par une loi de comportement locale :

$$\begin{aligned}\sigma^i &= \mathbf{C}^i : \varepsilon^i \\ \varepsilon^i &= \mathbf{S}^i : \sigma^i\end{aligned}\tag{1.1}$$

avec  $\sigma$  et  $\varepsilon$ , respectivement, les contraintes et les déformations locales de la phase  $i$  à l'échelle microscopique.  $\mathbf{C}^i$  et  $\mathbf{S}^i$  sont, respectivement, les tenseurs de rigidité et de souplesse de la phase  $i$ .

### Étape de localisation

Cette étape a pour but de lier les grandeurs définies à l'échelle microscopique ( $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ) aux quantités équivalentes définies à l'échelle macroscopique ( $\boldsymbol{\Sigma}$  et  $\boldsymbol{E}$ ) :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^i = \boldsymbol{A}^i : \boldsymbol{E}^i, \quad \boldsymbol{\sigma}^i = \boldsymbol{B}^i : \boldsymbol{\Sigma}^i \quad (1.2)$$

$\boldsymbol{A}$  et  $\boldsymbol{B}$  sont, respectivement, les tenseurs de localisation des déformations et des contraintes, contenant des informations sur la microstructure du matériau composite. Ces deux tenseurs de localisation sont caractéristiques de chaque modèle micromécanique et leurs expressions diffèrent d'un modèle à un autre.

### Étape d'homogénéisation

Cette étape vise à exprimer le comportement du milieu homogène équivalent en moyennant les solutions de l'étape de localisation comme suit :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle, \quad \boldsymbol{E} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \quad (1.3)$$

$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$  et  $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$  sont, respectivement, les tenseurs des contraintes et des déformations moyennes calculés sur le VER.

Ces deux formules peuvent s'écrire aussi en fonction de la fraction volumique  $f^i$  de chaque phase :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma} &= f^0 \boldsymbol{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \sum_{i=1}^n f^i \boldsymbol{C}^i : \boldsymbol{\varepsilon}^i \\ \boldsymbol{E} &= f^0 \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \sum_{i=1}^n f^i \boldsymbol{\varepsilon}^i \end{aligned} \quad (1.4)$$

La combinaison de ces deux dernières équations donne :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{C}^0 : \boldsymbol{E} + \sum_{i=1}^n f^i (\boldsymbol{C}^i - \boldsymbol{C}^0) : \boldsymbol{\varepsilon}^i \quad (1.5)$$

et

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{S}^0 : \boldsymbol{\Sigma} + \sum_{i=1}^n f^i (\boldsymbol{S}^i - \boldsymbol{S}^0) : \boldsymbol{\sigma}^i \quad (1.6)$$

où  $f^0$  est la fraction volumique de la matrice,  $\boldsymbol{C}^0$  et  $\boldsymbol{S}^0$  sont, respectivement, les tenseurs de rigidité et de souplesse de la matrice tandis que  $\boldsymbol{C}^i$  et  $\boldsymbol{S}^i$  sont, respectivement, les tenseurs de rigidité et de souplesse de la phase  $i$ .

En introduisant la relation (1.2) dans les équations (1.5) et (1.6), nous déduisons les ex-

pressions suivantes des tenseurs de rigidité et de souplesse effectifs du matériau homogène équivalent :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^c &= \mathbf{C}^0 + \sum_{i=1}^n f^i (\mathbf{C}^i - \mathbf{C}^0) : \mathbf{A}^i \\ \mathbf{S}^c &= \mathbf{S}^0 + \sum_{i=1}^n f^i (\mathbf{S}^i - \mathbf{S}^0) : \mathbf{B}^i \end{aligned} \quad (1.7)$$

Jusqu'à présent, la démarche présentée est commune à tous les modèles micromécaniques. L'accès aux tenseurs de rigidité et de souplesse effectifs du composite est conditionné par la définition des tenseurs de localisation  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$ . Nous rappelons que ces deux tenseurs diffèrent d'un modèle analytique à un autre.

## 1.3 Modèles micromécaniques

Les modèles micromécaniques sont principalement des formulations analytiques qui permettent d'estimer les propriétés élastiques effectives des matériaux composites à partir des propriétés physiques de leurs microstructures (propriétés élastiques des constituants, forme du renfort, position et orientation des fibres, etc.). Dans les paragraphes suivants, nous exposons quelques modèles analytiques de la littérature.

### 1.3.1 Bornes de Voigt et de Reuss

Les modèles de Voigt [10] et de Reuss [11] sont considérés comme les modèles analytiques les plus simples de la modélisation micromécanique. Ces modèles nécessitent peu d'informations sur la microstructure du matériau composite et sont donc utilisés lorsque ces données sont restreintes. Dans cette configuration, seule la connaissance des fractions volumiques des constituants et leurs propriétés élastiques est nécessaire. Les approximations de ces deux modèles simples définissent les bornes supérieure et inférieure des propriétés élastiques effectives du matériau composite comme illustré sur la figure 1.14. Étant donné que ces deux modèles ne prennent pas en compte la microstructure du matériau composite, le modèle de Voigt a tendance à surestimer ses propriétés effectives, tandis que le modèle de Reuss les sous-estime [12].

#### Borne de Voigt (modèle parallèle)

Dans le modèle de Voigt, dit aussi modèle parallèle [10], la déformation est supposée constante dans tout le VER et égale à la déformation macroscopique  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{E}$ . Cette

hypothèse donne lieu à l'approximation suivante du tenseur de rigidité effectif du VER :

$$\mathbf{C}^c = \mathbf{C}^0 + \sum_{i=1}^n f^i (\mathbf{C}^i - \mathbf{C}^0) = \sum_{i=0}^n f^i \mathbf{C}^i \quad (1.8)$$

### Borne de Reuss (modèle série)

Le modèle de Reuss, dit aussi modèle série [11], est le conjugué du modèle de Voigt. Dans ce modèle, c'est la contrainte qui est supposée constante plutôt que la déformation. Par conséquent, l'approximation du tenseur de souplesse effectif du VER est donnée par :

$$\mathbf{S}^c = \mathbf{S}^0 + \sum_{i=1}^n f^i (\mathbf{S}^i - \mathbf{S}^0) = \sum_{i=0}^n f^i \mathbf{S}^i \quad (1.9)$$

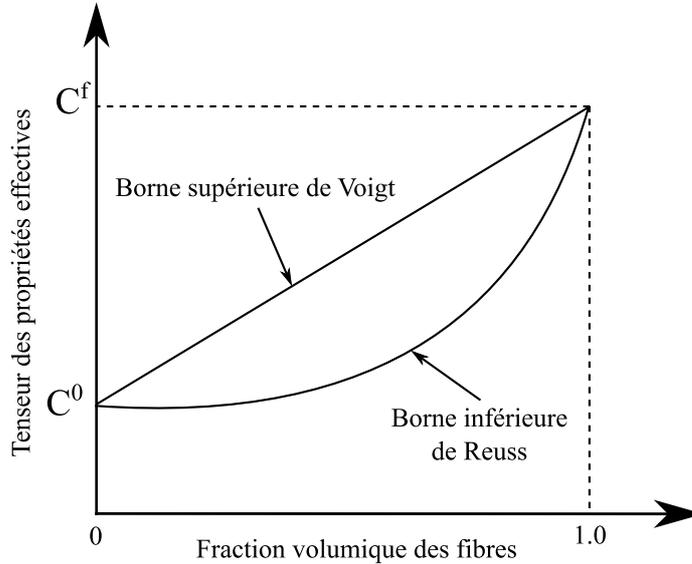


FIGURE 1.14 : Évolution du tenseur d'élasticité effectif du matériau composite estimée par les modèles de Voigt et de Reuss.

### 1.3.2 Modèle d'Halpin-Tsai

Contrairement aux modèles de Voigt et de Reuss, le modèle d'Halpin-Tsai [13, 14] considère un paramètre  $\zeta$  qui prend en compte le rapport de forme  $L_f/D_f$  du renfort ( $L_f$  et  $D_f$  sont, respectivement, la longueur moyenne des fibres et leur diamètre). Le modèle peut être exprimé sous la forme suivante :

$$P_c = P_m \left( \frac{1 + \zeta \eta f}{1 - \eta f} \right) \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{\frac{P_f}{P_m} - 1}{\frac{P_f}{P_m} + \zeta} \quad (1.10)$$

$f$  est la fraction volumique du renfort,  $P_c$  est la propriété élastique effective recherchée du matériau composite (comme son module d'Young) et  $P_f$  et  $P_m$  sont celles du renfort et de la matrice, respectivement.  $\zeta$  est un paramètre qui dépend de la géométrie, de la distribution et de la fraction volumique des fibres [13, 14].

### 1.3.3 Problème de l'inclusion d'Eshelby

Les travaux d'Eshelby [15] ont permis de résoudre le *problème de l'inclusion* qui vient perturber localement l'équilibre de la matrice. Selon la nature de l'inclusion, deux versions homogène et hétérogène de ce problème existent.

#### Problème de l'inclusion homogène

Dans cette première version, Eshelby [15] a étudié l'équilibre mécanique d'une inclusion de forme ellipsoïdale, plongée dans une milieu infini appelé matrice, et possédant les mêmes propriétés élastiques que la matrice (figure 1.15). En particulier, Eshelby a relié la déformation libre  $\varepsilon_I^L$  dans une inclusion isolée de son environnement à la déformation de l'inclusion  $\varepsilon_I$  au sein de la matrice par le biais d'un tenseur d'ordre 4, appelé tenseur d'Eshelby et noté  $S_E$  :

$$\varepsilon_I = S_E : \varepsilon_I^L \quad (1.11)$$

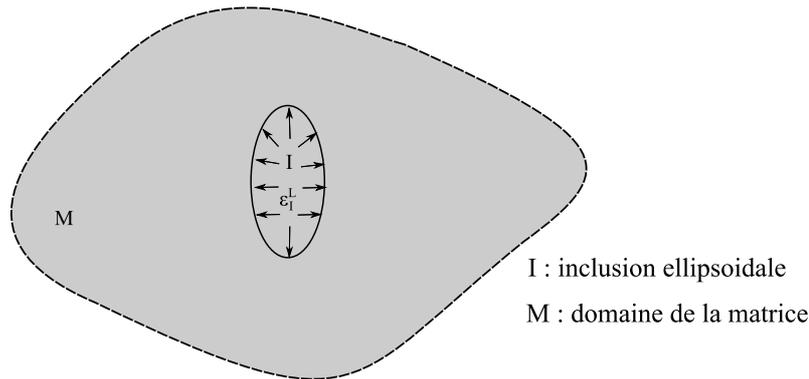


FIGURE 1.15 : Illustration du problème de l'inclusion homogène.

Il convient de noter que le tenseur d'Eshelby dépend de la forme de l'inclusion, de son orientation et du tenseur de rigidité de la matrice  $C_0$ .

### Problème d'Eshelby hétérogène

D'une façon générale, le problème d'Eshelby hétérogène étudie l'équilibre d'une inclusion ellipsoïdale  $I$  qui possède des caractéristiques mécaniques différentes de celles de la matrice. L'inclusion, de rigidité  $\mathbf{C}_I$ , est plongée dans une matrice infinie  $M$  de rigidité  $\mathbf{C}_0$ . L'ensemble est soumis à une déformation homogène à l'infini d'intensité  $\mathbf{E}_\infty$ . Eshelby [15] a montré que la déformation  $\varepsilon_I$  dans l'inclusion est homogène et dépend linéairement de la déformation imposée à l'infini :

$$\varepsilon_I = \underbrace{[\mathbf{I} + \mathbf{S}_E : \mathbf{S}_0 : (\mathbf{C}_I - \mathbf{C}_0)]^{-1}}_{\mathbf{A}_E} : \mathbf{E}_\infty \quad (1.12)$$

$\mathbf{I}$  est le tenseur identité d'ordre 4 et  $\mathbf{A}_E$  s'appelle le tenseur de localisation d'Eshelby. Il est intéressant de noter que le modèle d'Eshelby ne peut pas être représentatif d'un matériau composite dépassant une certaine concentration d'hétérogénéité. En effet, il ne considère que les perturbations locales des champs de contrainte et de déformation dans la matrice sans prendre en compte les interactions avec les autres phases. De plus, la fraction volumique du renfort doit être inférieure à 1% pour pouvoir utiliser ce modèle [16].

#### 1.3.4 Schéma dilué d'Eshelby

Ce modèle s'applique aux milieux hétérogènes constitués de  $n$  inclusions au sein d'une matrice. Chaque inclusion se comporte comme si elle était seule noyée dans la matrice. Il s'agit donc d'appliquer le résultat du problème d'Eshelby hétérogène (équation (1.12)) à chaque inclusion afin d'obtenir le tenseur d'élasticité effectif du composite :

$$\mathbf{C}_c = \mathbf{C}_0 + \sum_{i=1}^n f^i [\mathbf{S}_E : \mathbf{S}_0 + (\mathbf{C}_i - \mathbf{C}_0)^{-1}]^{-1} \quad (1.13)$$

Le schéma dilué ne tient pas compte des interactions entre les inclusions. Il est donc limité aux matériaux composites ayant une faible fraction volumique de renforts.

#### 1.3.5 Schéma de Mori-Tanaka

Contrairement au schéma dilué d'Eshelby, le schéma de Mori-Tanaka [17] tient compte de l'interaction entre les différentes inclusions au sein d'une matrice. Ce schéma est basé sur la solution du problème d'Eshelby. Les inclusions sont supposées réparties de manière isotrope et se comportent, en moyenne, comme des inclusions isolées dans une matrice infinie. Le tenseur de localisation de Mori-Tanaka de l'inclusion  $i$  ( $i = 1, n$ ), noté  $\mathbf{A}_{MT}$ ,

est donné par l'expression suivante [18, 17] :

$$\mathbf{A}_{MT}^i = \mathbf{A}_E^i : \left[ \sum_{j=1}^n f^j \mathbf{A}_E^j \right]^{-1} \quad (1.14)$$

Le tenseur d'élasticité effectif du composite selon le modèle de Mori-Tanaka s'écrit :

$$\mathbf{C}_c^{MT} = \mathbf{C}_0 + \sum_{i=1}^n f^i (\mathbf{C}_i - \mathbf{C}_0) : \mathbf{A}_{MT}^i \quad (1.15)$$

Dans le modèle de Mori-Tanaka, l'interaction entre les inclusions est prise en compte mais de manière simplifiée. Ainsi, ce modèle s'applique correctement lorsque la fraction volumique du renfort reste modérée, typiquement inférieure à 25% [1].

### 1.3.6 Schéma auto-cohérent

Dans le modèle auto-cohérent [19, 20], chaque phase du matériau composite est assimilée à une inclusion ellipsoïdale dans un milieu infini possédant les propriétés effectives  $\mathbf{C}_c$  recherchées. Le tenseur de localisation de la phase  $i$  s'écrit, d'après la relation (1.12) :

$$\mathbf{A}_E^i = [\mathbf{I} + \mathbf{S}_E^i : \mathbf{S}_0 : (\mathbf{C}_i - \mathbf{C}_0)]^{-1} \quad (1.16)$$

En utilisant l'équation (1.7), le tenseur de rigidité effectif du matériau composite est donné par :

$$\mathbf{C}_c = \mathbf{C}_0 + \sum_{i=1}^n f^i (\mathbf{C}_i - \mathbf{C}_0) : [\mathbf{I} + \mathbf{S}_E^i : \mathbf{S}_0 : (\mathbf{C}_i - \mathbf{C}_0)]^{-1} \quad (1.17)$$

Contrairement au modèle de Mori-Tanaka, le calcul du comportement effectif du matériau composite est implicite dans le cas du modèle auto-cohérent. En effet, le milieu de référence du modèle de Mori-Tanaka est connu (la matrice), mais il est à priori inconnu avec le modèle auto-cohérent (le milieu homogène effectif recherché). Généralement, il est difficile de résoudre le problème auto-cohérent directement à partir de l'équation (1.17). Il est donc résolu de manière numérique à l'aide d'une méthode itérative.

## 1.4 Modèles numériques

L'analyse du comportement mécanique des matériaux composites en utilisant les modèles micromécaniques peut s'avérer insuffisante, notamment avec le développement de nouveaux matériaux composites. Ces derniers se caractérisent par une architecture souvent

complexe du renfort (comme les composites cousus) introduite pour améliorer les performances des matériaux composites classiques. Les hypothèses adoptées dans les modèles analytiques classiques ne prennent pas en compte la complexité de ces nouveaux matériaux et structures. Avec le développement des outils de calcul, de nombreux modèles numériques ont été développés pour la prédiction des propriétés effectives des matériaux composites. En l'occurrence, la méthode des éléments finis est devenu un outil pratique pour l'étude de leur comportement. Les modèles éléments finis peuvent être classés en deux catégories : la première sera qualifiée d'approche *directe* et la deuxième d'approche *indirecte*. Il convient de noter que la qualification *directe* ou *indirecte* concerne la modélisation du renfort au sein de la matrice. En effet, le renfort est discrétisé comme la matrice dans une approche directe alors qu'il n'est pas explicitement modélisé dans une approche indirecte.

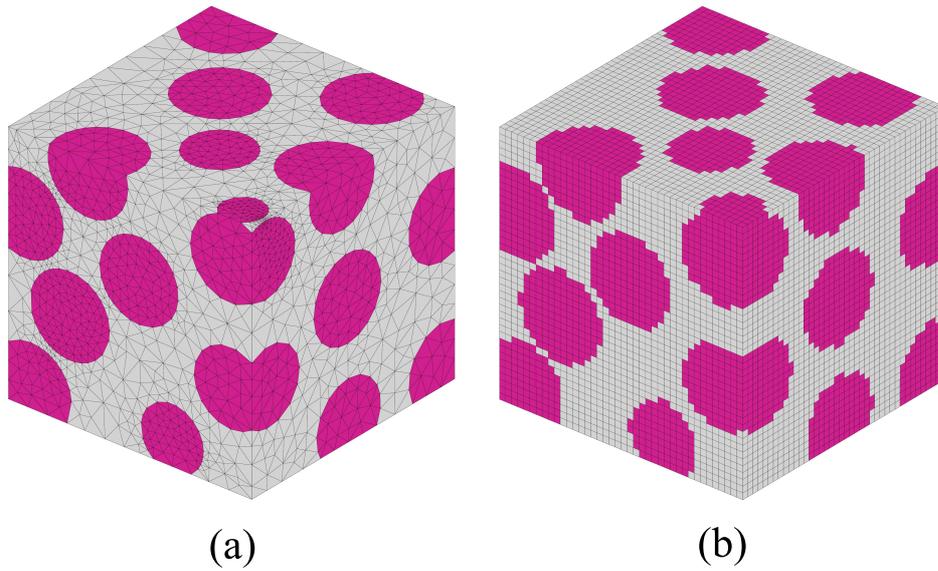
### 1.4.1 Modèles numériques basés sur une approche directe

Ce premier type de modèles numériques permet une représentation directe et explicite du renfort au sein de l'espace matrice quelles que soient la géométrie des fibres et leur orientation. Pour estimer les propriétés effectives d'un matériau composite, il convient de définir un VER qui le représente au mieux comme considéré avec les approches micro-mécaniques. La deuxième étape d'une modélisation numérique directe consiste à mailler les fibres et l'espace matrice du VER. En l'occurrence, deux méthodes de maillage ont été proposées dans la littérature pour discrétiser le VER : une première méthode dite de *maillage libre* et une deuxième dite de *maillage régulier*. Ces deux méthodes de maillage sont illustrées à la figure 1.16.

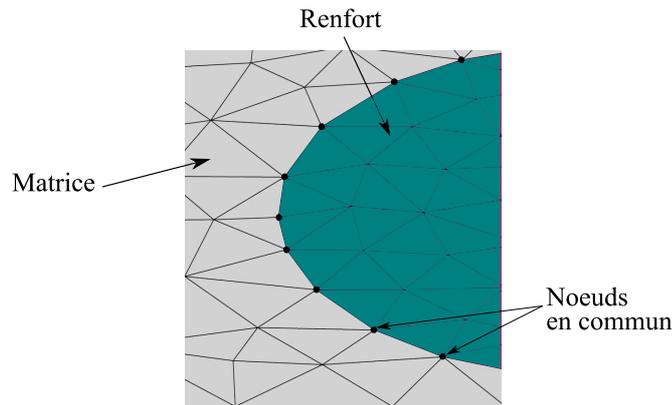
#### Méthode de maillage libre

Cette méthode consiste à mailler la matrice et le renfort du VER par le même type d'élément en respectant, en particulier, la coïncidence entre les noeuds des deux maillages (figure 1.17). La figure 1.18 montre les étapes suivies pour créer le maillage d'un VER 3D : d'abord, le renfort est maillé et ensuite, l'espace matrice est discrétisé en veillant à la coïncidence entre les noeuds des deux maillages. L'étape de maillage est suivie par l'application des conditions aux limites et de chargement sur le VER et ces dernières sont en général associées à une déformation ou une contrainte macroscopiques homogènes.

Kari et al. [2] ont considéré la méthode de maillage libre pour évaluer les propriétés effectives d'un matériau composite constitué d'une matrice en Aluminium renforcée par des fibres courtes de Carbure de Silicium (figure 1.18). Ces fibres sont unidirectionnelles et



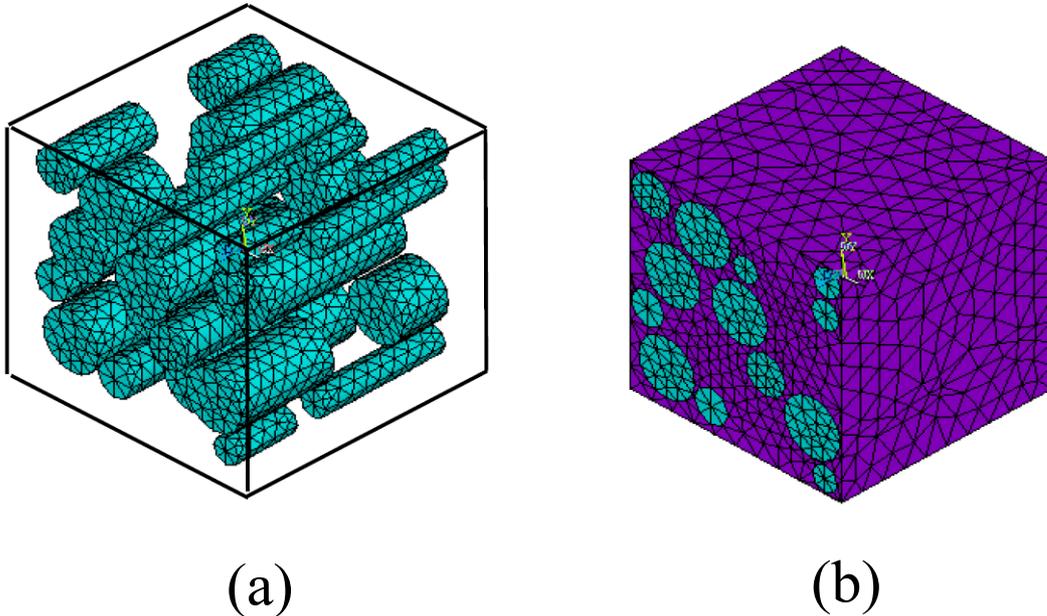
**FIGURE 1.16** : Modélisation par éléments finis d'un VER basée sur une approche directe : (a) maillage libre utilisant des éléments tétraédriques et (b) maillage régulier utilisant des éléments hexaédriques (d'après [1]).



**FIGURE 1.17** : Grossissement sur un maillage 3D libre non régulier mettant en évidence la jonction (coïncidence) entre les noeuds des maillages du renfort et de la matrice (d'après [1]).

de forme cylindrique et leur fraction volumique varie entre 10 et 40%. Le VER considéré a été généré à l'aide d'un algorithme d'adsorption séquentielle aléatoire [21], modifié pour avoir une distance minimale entre les fibres voisines et une orientation uniformément répartie des fibres dans le VER. Cet algorithme permet de placer les fibres de manière séquentielle, c'est à dire les unes après les autres, dans un volume fixe et ce jusqu'à l'obtention de la concentration de fibres souhaitée. Dans ce modèle, la matrice et les fibres courtes du VER ont été maillées par des éléments tétraédriques à 10 nœuds avec une intégration numérique complète. Kari et al. [2] ont étudié également l'effet du rapport

de forme des fibres courtes (allant de 1 à 15) et ont montré que ce paramètre influe peu sur le module d'Young effectif du matériau composite.



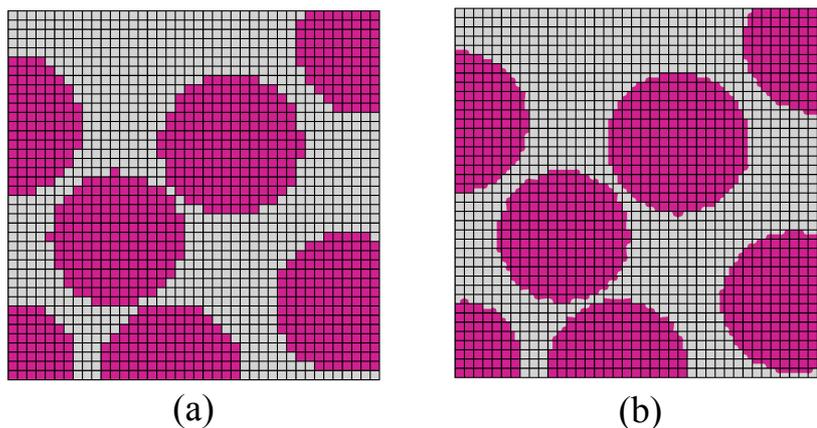
**FIGURE 1.18** : Les étapes de construction du maillage d'un VER 3D par la méthode de maillage libre d'après Kari et al. [2] : (a) maillage libre non régulier des fibres et (b) maillage libre non régulier des deux phases du VER.

D'autres travaux utilisant la méthode de maillage libre ont été réalisés par Gusev, Hine et Lusti [22, 23, 24] sur des composites verre/polypropylène [23, 24] et verre/époxyde [22]. Ces travaux ont utilisé la méthode de Monte Carlo pour générer les fibres à l'intérieur du VER. La méthode de Monte Carlo consiste à choisir un arrangement initial des fibres qui peut être ajusté en appliquant des perturbations statistiques afin de se rapprocher le mieux possible de la distribution souhaitée.

### Méthode de maillage régulier

Il s'agit d'établir un maillage régulier (un pavage) en fixant le nombre d'éléments selon une arête dans le volume du VER. Ce maillage attribue aux éléments finis les caractéristiques de la phase dans laquelle ils sont situés. Les constituants peuvent être discrétisés selon deux méthodes : par élément et par point d'intégration.

Dans le cas de la discrétisation par élément, à chaque élément du maillage sont affectées les propriétés de la phase dans laquelle se trouve son centre de gravité. Cette méthode est relativement simple à mettre en œuvre. Il convient de noter que chaque élément appartient à une seule phase, ce qui conduit à discrétiser l'interface particule-matrice en marches d'escalier comme le montre la figure 1.19a.



**FIGURE 1.19** : Maillage régulier d'un VER : (a) discrétisation par élément et (b) discrétisation par point d'intégration (d'après [1]).

Pour la discrétisation par point d'intégration, à chaque point d'intégration d'un élément du maillage sont affectées les propriétés de la phase dans laquelle il se situe (figure 1.19b). Ainsi, un élément fini peut appartenir à plusieurs phases. L'interface fibre-matrice est, quant à elle, décrite par un saut de propriétés dans l'élément fini. Cette technique de maillage est également appelée méthode des éléments *multiphasés* [25, 26].

### 1.4.2 Modèles numériques basés sur une approche indirecte

Comme nous l'avons évoqué précédemment, l'inconvénient majeur des modélisations basées sur une approche directe est la génération du maillage des fibres et la coïncidence des nœuds des éléments fibres avec ceux des éléments de l'espace matrice du VER. De plus, lorsque la fraction volumique des fibres est relativement élevée, la matrice présente des ligaments de faible épaisseur quand la distance entre les fibres devient faible. En conséquence, la taille des éléments finis doit être adaptée pour obtenir une précision acceptable pour les ligaments fins.

Ces limites peuvent être dépassées si nous nous affranchissons du maillage des fibres. En l'occurrence, un certain nombre de méthodes numériques, qualifiées d'indirectes dans ce travail, ont été développées afin de tenir compte discrètement (ou implicitement) de la présence du renfort au sein de la matrice. Ces méthodes ont l'avantage de réduire considérablement les problèmes de coïncidence des maillages de la matrice et du renfort et d'éviter ainsi le raffinement du maillage, ce qui réduit notablement les temps de calcul. Phillips et Zienkiewicz [4] et Elwi et Murray [3] ont développé de nouveaux éléments finis compatibles de membrane qui tiennent compte de la présence du renfort au sein de l'élément (figure 1.20). Ces éléments sont définis en ajoutant des couches de renforcement

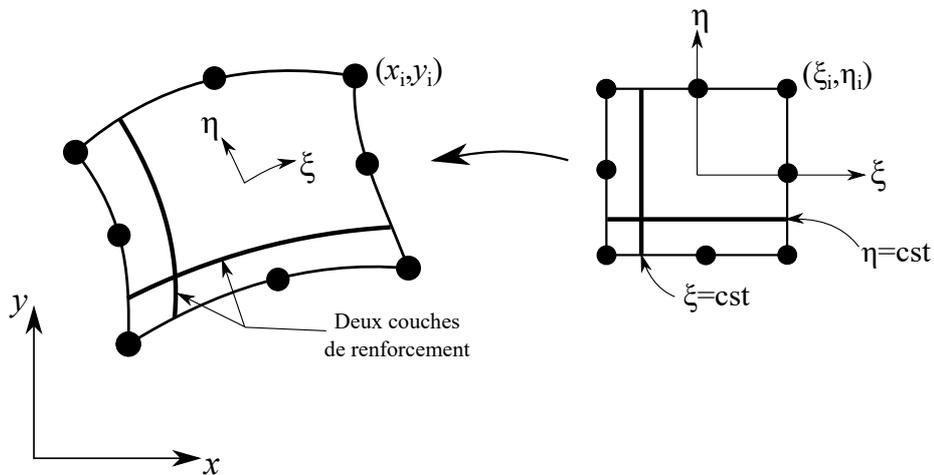
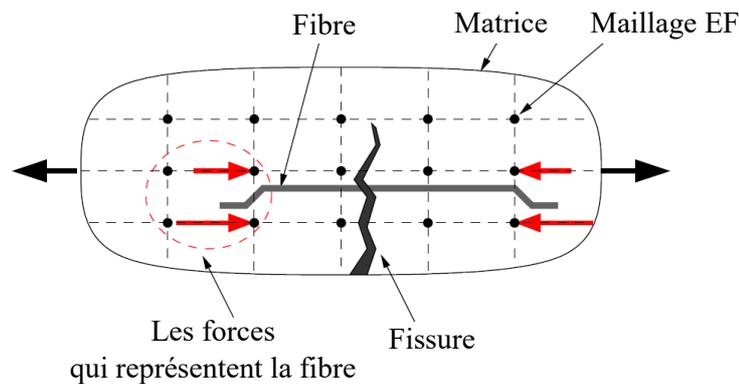


FIGURE 1.20 : Renforcements intégrés le long des lignes de coordonnées locales (d'après [3, 4]).

alignées avec l'une des coordonnées locales de l'élément isoparamétrique. Ces représentations sont limitées à des problèmes ayant des couches de renforcement à section droite et des maillages rectilignes. Cette formulation a été généralisée par la suite par Elwi et Hruday [27] pour des couches de renforcement de forme quelconque, noyées dans un élément de membrane d'ordre supérieur. La couche de renforcement est exprimée en coordonnées globales indépendamment du maillage de la matrice. Cette approche est plus avantageuse que celle proposée par Elwi et Murray [3] car la géométrie de la couche de renforcement n'a pratiquement aucun impact sur le choix du maillage de la matrice. Dans ce contexte, nous citons les travaux de Pinto [28] qui a présenté une formulation d'un élément de renforcement intégré (embedded element) encastré et orienté de façon quelconque. Cependant, la description de la couche de renforcement est supposée connue dans l'espace isoparamétrique local de l'élément, ce qui limite l'étendue de cette approche. En effet, si la couche de renforcement suit une limite de l'élément, sa position dans l'espace isoparamétrique local est connue. Par contre, si la couche de renforcement suit une courbe arbitraire à travers l'élément, il serait alors difficile de déterminer sa position dans le repère global de l'élément.

Une autre formulation connue sous l'approche de la force de fibre (fiber force approach) a été introduite par Radtke et al. [5]. Elle consiste à représenter les fibres par des forces de réaction autour de leurs extrémités comme montré dans la figure 1.21. Dans cette approche, les fibres sont simplement représentées par leurs réactions sur la matrice. Ces forces de réaction sont supposées égales aux forces mesurées lors d'un test d'arrachement sur les fibres et ce en fonction de la distance d'extraction. Si une fibre fait le pont d'une fissure, une distance de retrait est dérivée de l'ouverture de la fissure et les forces d'arrachement sont appliquées à la matrice (figure 1.21). Cette approche permet donc de ne

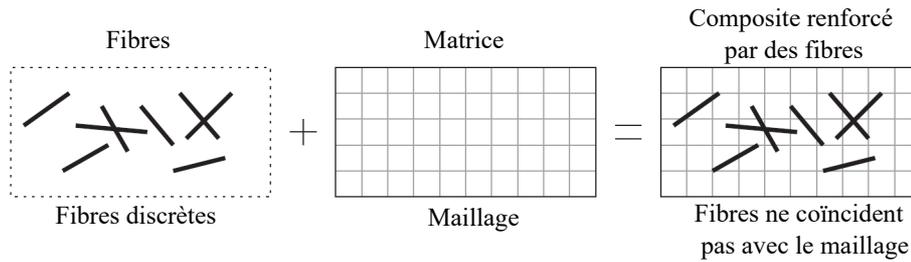
pas discrétiser le renfort, ce qui signifie que le nombre de degrés de liberté du système à résoudre n'augmente pas avec le nombre de fibres. Cependant, il est inhérent à cette méthode que ni la fibre ni l'interface fibre-matrice ne sont modélisées individuellement. En outre, il est difficile de connaître l'état de contrainte le long de la fibre et au niveau de l'interface fibre-matrice car ni la fibre ni l'interface ne sont modélisées réellement.



**FIGURE 1.21** : L'approche de la force de fibre : la fibre est représentée par ses forces de réaction appliquées au maillage de la matrice (d'après [5]) .

La méthode des éléments finis étendus (XFEM) a été également considérée pour modéliser les fibres dans un domaine matrice sans la nécessité de les discrétiser. L'idée principale de l'approche XFEM est d'enrichir les éléments finis standards qui modélisent l'espace de la matrice avec des fonctions nodales capables de représenter les hétérogénéités et les discontinuités dues à la présence du renfort sans le représenter explicitement [29, 30, 31]. La méthode XFEM est basée sur la méthode de partition de l'unité (PUM : Partition of Unity Method) proposée par Babuska et Melenk [32, 33]. La méthode PUM repose sur l'utilisation de fonctions d'enrichissement pour introduire des discontinuités (fibres) dans des éléments finis standards, représentant l'espace matrice, ainsi que des fonctions de niveau pour localiser ces discontinuités. En se basant sur la méthode PUM, Radtke et al. [34] ont proposé un modèle qui représente les fibres par des inclusions élastiques sans les discrétiser. Dans ce modèle, le champ de déplacement est amélioré par l'information au niveau de l'interface fibre-matrice, représentant le décollement de la fibre ou la propagation d'une fissure. L'utilisation d'une fonction d'enrichissement égale à 1 dans la fibre et 0 ailleurs conduit à une formulation qui permet d'inclure un nombre quelconque de fibres distribuées et orientées arbitrairement dans le maillage de la matrice (figure 1.22).

Les fibres peuvent également être modélisées par des éléments barres au sein des éléments standards, représentant l'espace de la matrice. Les degrés de liberté des éléments fibres sont ensuite exprimés en fonction de ceux des éléments qui représentent l'espace matrice. Dans ce cas, nous pouvons citer les travaux de Vanalli et al. [6, 7] qui ont développé

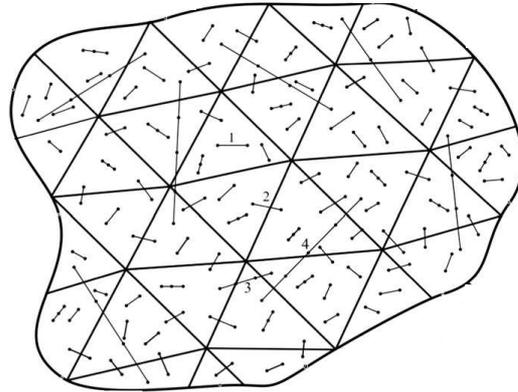


**FIGURE 1.22 :** *Fibres discrètes réparties dans un espace matrice maillé avec des éléments quadrilatéraux (d'après [5]).*

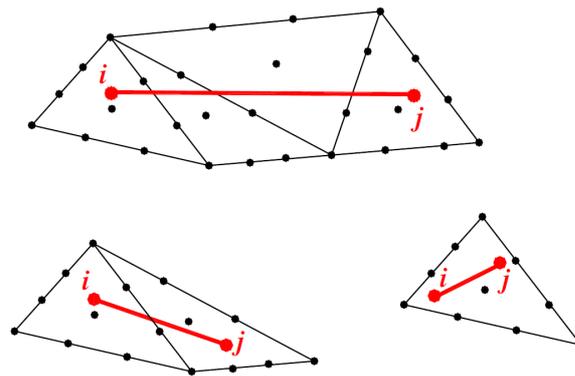
une formulation par éléments finis qui prend en compte la présence du renfort dans un domaine matrice plan sans augmenter le nombre total de degrés de liberté du modèle numérique de base (figure 1.23). L'approche proposée dans ces travaux est basée sur des considérations cinématiques qui décrivent le déplacement des noeuds des fibres en fonction de ceux des éléments matrices. Ainsi, chaque fibre ne contribue qu'à l'énergie de déformation stockée dans le composite, i.e. que l'énergie de déformation du composite sera la somme des déformations de la matrice et des fibres. Les fibres sont modélisées par des éléments barres classiques à deux noeuds tandis que l'espace matrice est discrétisé par des éléments triangulaires à dix noeuds. La figure 1.24 montre trois situations différentes de fibres immergées dans un espace matrice : une fibre longue avec des extrémités dans deux éléments matrices éloignés, une fibre de taille moyenne avec des extrémités dans deux éléments voisins et une fibre courte à l'intérieur d'un seul élément matrice. Vanalli et al. [6, 7] ont remarqué qu'une connexion non conforme se produit le long de l'interface fibre-matrice lorsqu'un élément de fibre de premier ordre est couplé à un élément matrice d'ordre supérieur. Récemment, Sampaio et al. [35] ont enrichi la formulation de Vanalli et al. [6, 7] pour permettre aux éléments fibres d'être couplés avec des éléments matrices de n'importe quel ordre, afin d'assurer une adhésion totale entre la fibre et la matrice. Cette approche a été étendue par la suite pour l'analyse des plaques et coques composites dans [36].

## 1.5 Conclusion

Dans ce premier chapitre, nous avons présenté une description succincte des matériaux composites à renfort fibreux et quelques méthodes analytiques et numériques utilisées pour prédire leur comportement. Bien que l'utilisation des matériaux composites dans diverses applications soit largement généralisée et diversifiée, les méthodes de calcul et de simulation jusque là développées présentent encore de nombreuses limites et exigent des



**FIGURE 1.23** : Modélisation d'un matériau composite renforcé par des fibres courtes orientées de façon aléatoire sans les discrétiser (d'après [6, 7]).



**FIGURE 1.24** : Trois configurations différentes de fibres immergées dans un maillage de matrice : fibre inter-élémentaire, fibre entre deux éléments voisins et fibre à l'intérieur d'un seul élément (d'après [6]).

développements supplémentaires.

Le cadre général de la présente étude est d'apporter des éléments de réponse à la modélisation numérique des matériaux et structures composites basée sur une approche indirecte. Ainsi, l'objectif principal de notre travail est le développement de nouveaux éléments finis spéciaux capables de prendre en compte la présence d'un renfort fibreux dans une matrice sans avoir besoin de le mailler.

Deux points nous ont plus particulièrement intéressés :

- Le développement de modèles éléments finis de membrane et 3D pour la modélisation des matériaux et structures composites renforcés par des fibres de différentes longueurs et orientations.

- L'utilisation d'une formulation éléments finis simple conduisant à des éléments facilement implémentables dans des codes de calcul industriels comme ABAQUS et exploitables dans le cadre d'un environnement et une finalité industriels.

Les chapitres suivants sont consacrés à la présentation des formulations linéaire et non-linéaire géométrique de nouveaux éléments finis spéciaux, basées sur une approche indirecte labellisée Approche de la Fibre Projectée (AFP). Cette approche AFP a été récemment proposée par Kebir et Ayad [37].

# Chapitre 2

## Approche de la fibre projetée et son adaptation aux problèmes plans

### Sommaire

---

|            |  |           |
|------------|--|-----------|
| <b>2.1</b> | <b>Introduction</b>  | <b>35</b> |
| <b>2.2</b> | <b>Approche de la fibre projetée</b>   | <b>35</b> |
| 2.2.1      | Le domaine de la matrice   | 36        |
| 2.2.2      | Le renfort   | 36        |
| 2.2.3      | Prise en compte du renfort à l'intérieur de la matrice   | 36        |
| <b>2.3</b> | <b>Adaptation de l'approche de la fibre projetée aux problèmes plans</b>                                       | <b>38</b> |
| 2.3.1      | Formulation faible de l'équilibre mécanique  | 38        |
| 2.3.2      | Approximation par éléments finis   | 38        |
| 2.3.3      | Implémentation numérique des éléments PFT3 et PFQ4   | 44        |
| <b>2.4</b> | <b>Cas tests de validation</b>   | <b>46</b> |
| 2.4.1      | Évaluation des propriétés mécaniques d'un matériau composite renforcé par des fibres courtes                   | 46        |
| 2.4.2      | Étude d'une poutre composite renforcée par des fibres unidirectionnelles et soumise à une flexion transversale | 52        |
| 2.4.3      | Estimation des propriétés effectives d'une plaque multicouche  | 53        |
| 2.4.4      | Étude du comportement mécanique d'une plaque renforcée par une fibre centrale                                  | 54        |
| <b>2.5</b> | <b>Conclusion</b>  | <b>55</b> |

---



## 2.1 Introduction

Ce chapitre a pour objet le développement d'une approche numérique multi-échelle simple en vue de modéliser les matériaux et structures composites, en tenant compte de la présence des fibres dans une matrice continue sans avoir besoin de les mailler. Cette approche est baptisée *Approche de la Fibre Projetée* (en anglais, Projected Fiber Approach). Dans ce chapitre, nous nous proposons d'introduire cette nouvelle approche en développant les aspects géométriques, cinématiques et mécaniques associés. Pour simplifier la mise en pratique de cette technique, nous l'adapterons en premier lieu aux problèmes plans, à travers le développement de deux éléments finis linéaires de membrane, baptisés PFT3 et PFQ4. Enfin, plusieurs cas tests de validation sont traités pour évaluer la précision de cette nouvelle approche dans l'étude des structures composites planes.

## 2.2 Approche de la fibre projetée

L'approche de la fibre projetée, proposée par Kebir et Ayad [37], est basée sur la méthode des éléments finis et représente une alternative numérique simple pour analyser les structures et matériaux composites. Dans cette approche, nous divisons le matériau composite en ses deux composantes principales : *la matrice* et *les fibres*. Le domaine de la matrice est maillé par des éléments de membrane ou tridimensionnels standards selon la modélisation considérée, tandis que les fibres sont représentées, dans cette première étude, par des éléments barres. Les fibres sont traitées comme des entités discrètes et sont introduites de façon aléatoire ou paramétrée selon leur distribution dans la structure composite modélisée.

L'approche de la fibre projetée est basée sur des considérations cinématiques qui permettent d'exprimer les variables des fibres en fonction de celles des éléments finis qui représentent le domaine de la matrice, sans rajouter de nouveaux degrés de liberté au problème. Cette approche a la particularité aussi de considérer la fibre comme une partie intégrée dans la matrice, où elle est fusionnée à l'intérieur de cet espace pour former le domaine élémentaire du composite. Elle permet d'étudier facilement les propriétés mécaniques et géométriques de la matrice et du renfort, et leur influence sur le comportement effectif du matériau composite. D'autre part, l'approche de la fibre projetée peut être facilement implémentée dans les codes de calcul par éléments finis existants tels que ABAQUS et ANSYS, à travers les routines utilisateurs comme la routine User ELeMent (UEL) d'ABAQUS.

### 2.2.1 Le domaine de la matrice

Suivant la modélisation 2D ou 3D adoptée, nous avons choisi de discrétiser le domaine de la matrice par des éléments triangulaires à trois noeuds (T3) ou quadrilatéraux à quatre noeuds (Q4) en modélisation plane, et hexaédriques à huit noeuds H8 pour les problèmes 3D (Figure 2.1).

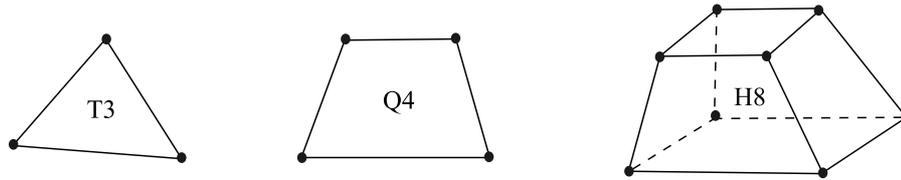


FIGURE 2.1 : Éléments finis représentant l'espace de la matrice, en modélisations plane et 3D.

### 2.2.2 Le renfort

Dans un matériau composite, les fibres sont introduites pour améliorer la rigidité et la ténacité de la matrice. L'approche de la fibre projetée proposée permet la prise en compte des fibres courtes ou longues, avec des distributions aléatoires ou paramétrées, à l'intérieur de la matrice. Dans une première approximation, nous proposons de modéliser ces fibres par des éléments barres à deux noeuds agissant en traction-compression. Les variables des éléments fibres sont exprimées en fonction de celles de l'élément matrice qui les contient, pour éviter d'ajouter des variables supplémentaires à celles du domaine de la matrice. Les fibres sont créées séparément de la matrice et elles peuvent avoir des configurations et des distributions différentes (voir figure 2.2 dans le cas d'une modélisation plane).

### 2.2.3 Prise en compte du renfort à l'intérieur de la matrice

Les fibres courtes ou longues sont introduites d'une manière discrète dans le domaine de la matrice et sont représentées par des segments de droite. L'idée de modéliser les fibres individuellement et séparément de la matrice permet de tenir compte des différents paramètres du renfort (longueur, orientation et distribution) dans la matrice, et leur influence sur le comportement mécanique de la structure composite. Pour un maillage donné de la matrice, une fibre peut appartenir à un ou plusieurs éléments modélisant l'espace matrice (comme montré sur la figure 2.3). Cela dépend du type de renfort dans le matériau composite et aussi du raffinement du maillage de la matrice. Les intersections des fibres avec le maillage de la matrice sont automatiquement effectuées à travers la plateforme KSP, développée par H. Kebir. Dans ce cas, toutes les fibres (ou parties des

fibres initiales) traversant un élément matrice sont représentées par des éléments barres à deux nœuds, et leurs degrés de liberté sont *projetés* sur ceux de leur élément matrice correspondant [37]. Ceci permet d'obtenir un système d'équations à résoudre équivalent à celui d'un milieu non renforcé.

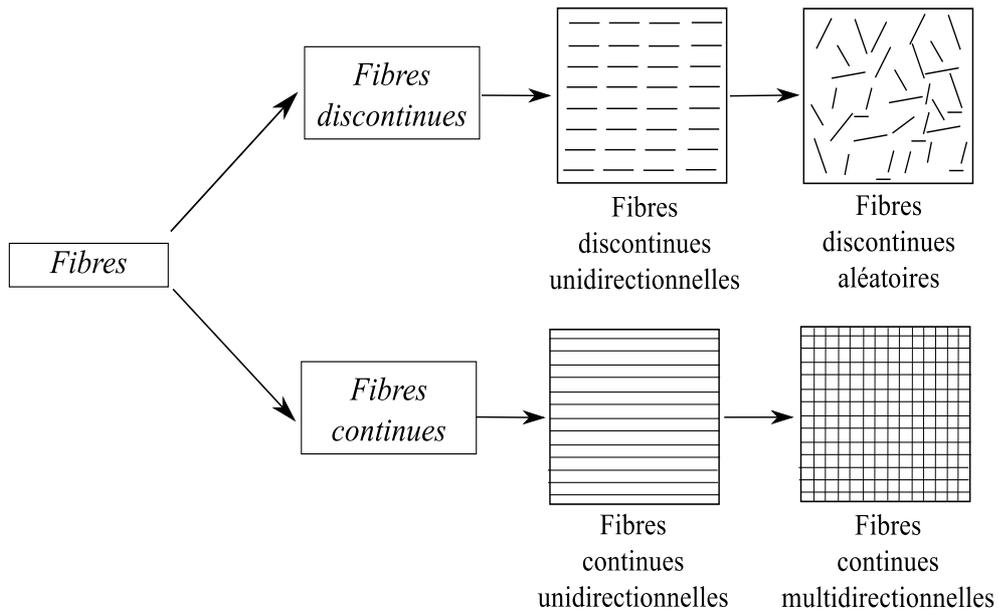


FIGURE 2.2 : Différentes orientations des fibres dans une modélisation plane.

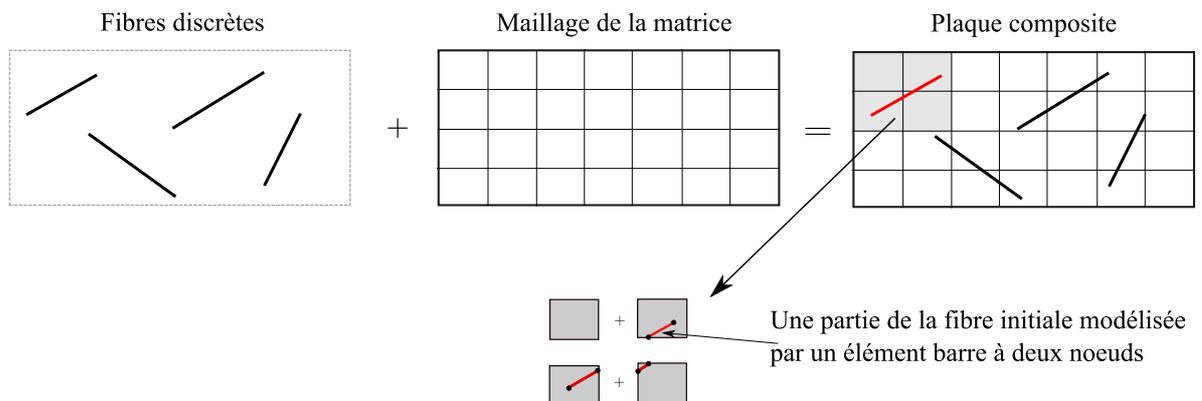


FIGURE 2.3 : L'approche de la fibre projetée et le traitement des intersections fibre-matrice.

## 2.3 Adaptation de l'approche de la fibre projetée aux problèmes plans

### 2.3.1 Formulation faible de l'équilibre mécanique

Afin de développer une modélisation simplifiée qui peut représenter les différents concepts décrits précédemment, une adaptation 2D de l'approche de la fibre projetée est considérée dans cette section. En l'occurrence, nous considérons un solide composite 2D déformable comme montré sur la figure 2.4. Pour simplifier la discussion, la matrice et le renfort sont supposés élastiques et isotropes.

Le principe des travaux virtuels (PTV) du composite s'écrit comme pour les solides élastiques déformables, en considérant un champ de déplacements virtuels  $\delta \underline{u}$  comme suit :

$$\delta w = \underbrace{\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV}_{\delta w_{int}} - \underbrace{\left( \int_{\partial V} T_i \delta u_i dS + \int_V f_i^v \delta u_i dV \right)}_{\delta w_{ext}} \quad (2.1)$$

avec  $\delta w_{int}$  le travail virtuel interne du solide composite et  $\delta w_{ext}$  le travail virtuel externe dû aux forces surfaciques  $\underline{T}$  et aux forces volumiques de densité  $\underline{f}^v$ .

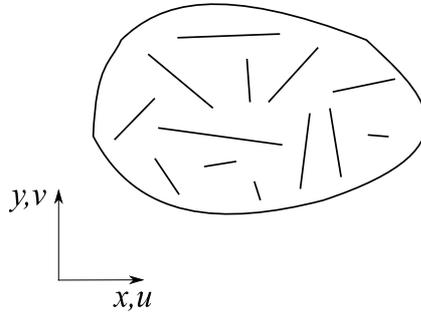


FIGURE 2.4 : Solide composite 2D.

### 2.3.2 Approximation par éléments finis

Dans ce qui suit, nous utiliserons les caractères  $m$  et  $f$  pour distinguer entre les variables de la matrice et du renfort, respectivement.

L'approximation par éléments finis de l'équation (2.1) est construite en divisant le solide composite 2D en plusieurs domaines élémentaires. En conséquence, nous présentons dans cette partie les formulations de deux éléments finis composites de membrane basés sur l'approche de la fibre projetée, baptisés PFT3 (Projected Fiber 3-node Triangle) et PFQ4 (Projected Fiber 4-node Quadrilateral). Ces deux éléments de membrane représentent

ainsi un élément du domaine de la matrice renforcé par des éléments fibres qui le traversent. Nous rappelons que les fibres qui traversent un élément matrice sont modélisées par des éléments barres à deux noeuds. Pour simplifier la présentation des formulations des éléments PFT3 et PFQ4, nous considérons un élément matrice traversé par une seule fibre comme illustré par la figure 2.5. Sur cette dernière figure, nous remarquons que les éléments composites PFT3 et PFQ4 résultent de la combinaison des éléments standards de membrane T3 (ou CST, Constant Strain Triangle) et Q4, respectivement, et l'élément barre à deux noeuds qui modélise la fibre traversant l'élément matrice.

Au niveau élémentaire, la forme faible de l'équilibre (2.1) devient :

$$\delta w = \delta w_{int}^m + \delta w_{int}^f - \delta w_{ext} \quad (2.2)$$

avec  $\delta w_{int}^m$  et  $\delta w_{int}^f$  sont les travaux virtuels internes des éléments matrice et fibre, respectivement.

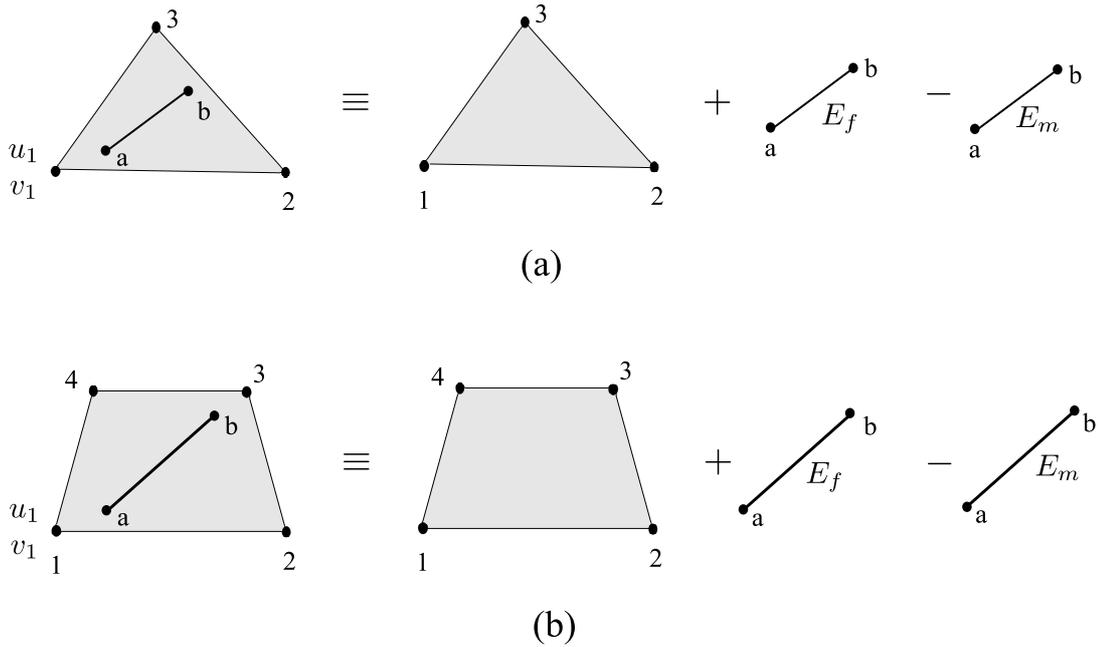


FIGURE 2.5 : Éléments finis composites de membrane basés sur l'approche de la fibre projetée : (a) PFT3 et (b) PFQ4.

### Matrices de rigidité des éléments T3 et Q4

Dans une modélisation plane, l'espace matrice est discrétisé par les éléments membranes standards T3 ou Q4. Dans cette partie, le nombre de noeuds est désigné par la lettre  $n$  ( $n = 3$  pour T3 et  $n = 4$  pour Q4).

Le travail virtuel interne d'un élément matrice est donné sous la forme suivante :

$$\delta w_{int}^m = \int_{V^m} \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV^m \quad (2.3)$$

$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \gamma_{xy}\}^T$  et  $\{\sigma\} = \{\sigma_{xx} \sigma_{yy} \sigma_{xy}\}^T$  sont les vecteurs des déformations et des contraintes planes de l'élément matrice ( $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$ ). Nous introduisons également la matrice d'élasticité plane  $[C^m]$  qui lie ces deux vecteurs :  $\{\sigma\} = [C^m]\{\varepsilon\}$ , ce qui permet de réécrire le travail virtuel interne  $\delta w_{int}^m$  en fonction des déformations :

$$\delta w_{int}^m = \int_{V^m} \{\delta\varepsilon\}^T [C^m] \{\varepsilon\} dV^m \quad (2.4)$$

Le champ de déplacements de l'élément matrice T3 ou Q4 est exprimé sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} u^m \\ v^m \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} u_i^m \\ v_i^m \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

$N_i(\xi, \eta)$  sont les fonctions d'interpolation des éléments T3 et Q4, données par les expressions suivantes :

$$\text{Pour T3 : } N_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta, \quad N_2(\xi, \eta) = \xi, \quad N_3(\xi, \eta) = \eta, \quad 0 \leq \xi, \eta \leq 1$$

$$\text{Pour Q4 : } N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta), \quad -1 \leq \xi, \eta \leq 1 \quad (2.6)$$

En utilisant les approximations (2.5), les déformations de membrane des éléments matrices sont données par :

$$\{\varepsilon\} = [B^m] \{u_n^m\} \quad ; \quad [B^m] = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & & \\ \dots & 0 & N_{i,y} & \dots \\ N_{i,y} & N_{i,x} & & \end{bmatrix} \quad i = 1, n \quad (2.7)$$

où  $\{u_n^m\} = \{\dots |u_i^m \ v_i^m| \dots i = 1, n\}$  est le vecteur des degrés de liberté des éléments matrices.

En utilisant la relation (2.7) liant le vecteur des déformations au vecteur des degrés de liberté,  $\delta w_{int}^m$  devient :

$$\delta w_{int}^m = \{\delta u_n^m\}^T \underbrace{\int_{V^m} [B^m]^T [C^m] [B^m] dV^m}_{[K^m]} \{u_n^m\} \quad (2.8)$$

$[K^m]$  est la matrice de rigidité des éléments T3 ou Q4, de dimensions  $6 \times 6$  pour T3 et  $8 \times 8$  pour Q4.

### Matrice de rigidité de l'élément fibre

Nous rappelons ici que la fibre traversant un élément matrice T3 ou Q4 est modélisée par un élément barre linéaire (figure 2.6). Le travail virtuel interne de l'élément fibre s'écrit donc :

$$\delta w_{\text{int}}^f = A \int_{-L/2}^{L/2} \delta \varepsilon^{fT} \underbrace{(E_f - E_m)}_{E_f^*} \varepsilon^f dx \quad (2.9)$$

$L$  et  $A$  sont, respectivement, la longueur initiale et la section (supposée constante le long de l'élément) de l'élément barre et  $\varepsilon^f$  est sa déformation axiale. Il est important de noter que, physiquement, un élément barre de matrice doit être retiré de l'élément matrice pour pouvoir ajouter l'élément fibre comme expliqué sur la figure 2.5. Dans ce cas, nous utilisons le module  $E_f^* = E_f - E_m$  dans l'équation (2.9).

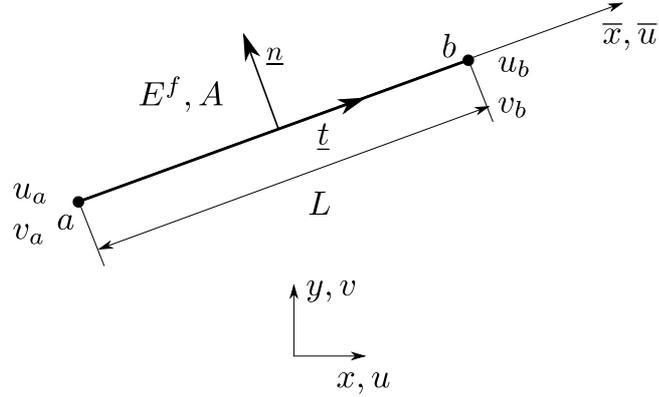


FIGURE 2.6 : Élément barre à deux noeuds représentant une fibre traversant un élément matrice.

Le champ de déplacement axial local de l'élément fibre  $\bar{u}^f$  est donné par :

$$\bar{u}^f(\bar{x}) = N_a^f(\bar{x})\bar{u}_a^f + N_b^f(\bar{x})\bar{u}_b^f = \{N^f\}^T \{\bar{u}_n^f\} \quad (2.10)$$

avec

$$N_a^f(\bar{x}) = \frac{1}{2} - \frac{\bar{x}}{L}, \quad N_b^f(\bar{x}) = \frac{1}{2} + \frac{\bar{x}}{L} \quad \text{et} \quad \{\bar{u}_n^f\} = \{\bar{u}_a^f \bar{u}_b^f\}^T \quad (2.11)$$

La déformation axiale  $\varepsilon^f$  de l'élément fibre s'écrit donc :

$$\varepsilon^f = \frac{d\bar{u}^f}{d\bar{x}} = \{B^f\} \{\bar{u}_n^f\} \quad ; \quad \{B^f\} = \left\{ -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right\} \quad (2.12)$$

En utilisant la relation (2.12), le travail virtuel interne de l'élément barre devient :

$$\delta w_{int}^f = \{\delta \bar{u}_n^f\}^T \underbrace{E_f^* A \int_{-L/2}^{L/2} \{B_f\} \{B_f\}^T dx}_{[K_{loc}^f]} \{\bar{u}_n^f\} \quad (2.13)$$

$[K_{loc}^f]$  est la matrice de rigidité de l'élément barre dans son repère local  $(\underline{t}, \underline{n})$  (figure 2.6).  $\delta w_{int}^f$  doit être ré-exprimé dans le repère global afin de faciliter la projection des variables de l'élément barre sur celles de l'élément matrice correspondant. Pour cela, nous introduisons une matrice de passage  $[T]$  qui lie les vecteurs degrés de liberté de l'élément barre dans les repères local et global :

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_a^f \\ \bar{u}_b^f \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} t_x & t_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_x & t_y \end{bmatrix}}_{[T]} \begin{Bmatrix} u_a^f \\ v_a^f \\ u_b^f \\ v_b^f \end{Bmatrix} = [T] \{u_n^f\} \quad (2.14)$$

$t_x$  et  $t_y$  sont les coordonnées du vecteur tangent  $\underline{t}$  de l'élément barre dans le repère global. En utilisant la relation (2.14), la matrice de rigidité de l'élément barre dans le repère global  $[K_{glob}^f]$  s'écrit :

$$\delta w_{int}^f = \{\delta u_n^f\}^T \underbrace{[T]^T (E_f^* A \int_{-L/2}^{L/2} \{B_f\} \{B_f\}^T dx)}_{[K_{glob}^f]} [T] \{u_n^f\} \quad (2.15)$$

ou plus explicitement

$$[K_{glob}^f] = \frac{E_f^* A}{L} \begin{bmatrix} [C] & -[C] \\ -[C] & [C] \end{bmatrix} ; \quad [C] = \begin{bmatrix} t_x^2 & t_x t_y \\ t_x t_y & t_y^2 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

### Stratégie de couplage et technique de projection

Les degrés de liberté de l'élément fibre sont directement projetés sur ceux de l'élément matrice T3 ou Q4 correspondant. Par conséquent, le système d'équations obtenu est équivalent à celui de la matrice sans renfort, ce qui permet de limiter le temps de calcul.

La fusion géométrique des nœuds  $a$  et  $b$  de l'élément fibre dans l'espace de la matrice est effectuée en exprimant leurs coordonnées paramétriques ( $\xi_a, \eta_a, \xi_b$  et  $\eta_b$ ) en fonction de celles de l'élément matrice ( $r_i, s_i, i = 1, n$ ) par utilisation des fonctions de forme géométriques comme reportée sur la figure 2.7. Le point  $P$  de cette dernière figure représente un

des deux nœuds de l'élément fibre et  $A_i$  ( $i = 1, n$ ) sont les surfaces des triangles construits par le point  $P$  et les côtés de l'élément matrice. Les coordonnées paramétriques  $\xi_P$  et  $\eta_P$  du point  $P$  sont exprimées en fonction des coordonnées naturelles de l'élément matrice en utilisant les approximations suivantes :

$$\xi_P = \sum_{i=1}^n \phi_i r_i \quad ; \quad \eta_P = \sum_{i=1}^n \phi_i s_i \quad (2.17)$$

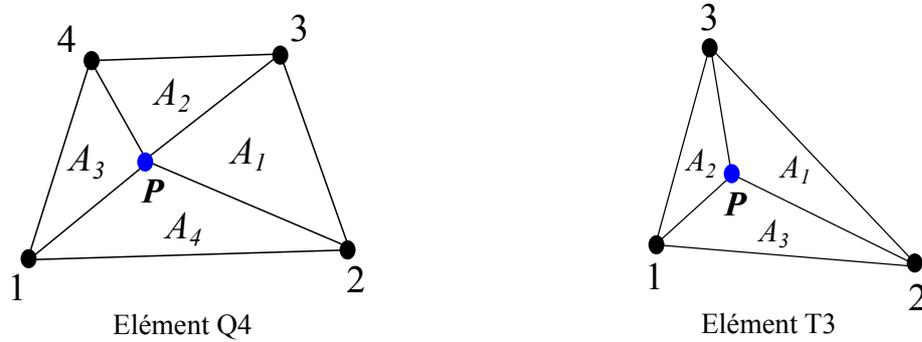


FIGURE 2.7 : Définition des surfaces  $A_i$  ( $i = 1, n$ ) utilisées pour calculer les coordonnées paramétriques d'un nœud de l'élément barre.

Les fonctions de forme  $\phi_i$  sont données par les expressions suivantes pour les éléments T3 et Q4 :

— Pour T3 :

$$\phi_1 = \frac{A_1}{A} \quad ; \quad \phi_2 = \frac{A_2}{A} \quad ; \quad \phi_3 = \frac{A_3}{A} \quad ; \quad A = A_1 + A_2 + A_3 \quad ; \quad \sum_{i=1}^3 \phi_i = 1 \quad (2.18)$$

— Pour Q4 :

$$\phi_1 = \frac{A_1 A_2}{A} \quad ; \quad \phi_2 = \frac{A_2 A_3}{A} \quad ; \quad \phi_3 = \frac{A_3 A_4}{A} \quad ; \quad \phi_4 = \frac{A_4 A_1}{A} \quad (2.19)$$

$$A = (A_1 + A_3)(A_2 + A_4) \quad ; \quad \sum_{i=1}^4 \phi_i = 1$$

En utilisant ces coordonnées paramétriques de l'élément barre, il est possible de trouver

une relation entre  $\{u_n^f\}$  et  $\{u_n^m\}$  à travers une matrice  $[P]$  de dimensions  $4 \times 2n$  :

$$\{u_n^f\} = [P]\{u_n^m\} \quad ; \quad [P] = \begin{bmatrix} N_i^a & 0 \\ \dots & 0 & N_i^a & \dots i = 1, n \\ N_i^b & 0 \\ 0 & N_i^b \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

où  $N_i^a = N_i(\xi_a, \eta_a)$  et  $N_i$  sont les fonctions de forme des éléments matrices définies par les relations (2.6).

En utilisant les équations (2.8), (2.15) et (2.20), le travail virtuel interne de l'élément composite PFT3 ou PFQ4 devient :

$$\delta w_{int}^c = \delta w_{int}^m + \delta w_{int}^f = \{\delta u_n^m\}^T \underbrace{\left[ [K^m] + [P]^T [K_{glob}^f] [P] \right]}_{[K^c]} \{u_n^m\} \quad (2.21)$$

$[K^c]$  est au final la matrice de rigidité de l'élément composite PFT3 ou PFQ4.

### 2.3.3 Implémentation numérique des éléments PFT3 et PFQ4

Les éléments finis composites de membrane PFT3 et PFQ4 ont été implémentés dans le code commercial ABAQUS via la routine utilisateur UEL (User Element) [38] comme montré sur la figure 2.8. Les fichiers de données (fichiers input) ont été créés par le module *Compo-Sim* de la plateforme *KSP* (Kernal of Simulation Platform), développée au sein du laboratoire Roberval de l'Université de Technologie de Compiègne par H. Kebir. Ce module permet de générer les fibres dans l'espace matrice et de gérer automatiquement leurs intersections avec le maillage de la matrice. L'implémentation des éléments finis PFT3 et PFQ4 dans le code ABAQUS est principalement motivé par l'absence d'un solveur non-linéaire dans la plateforme *KSP*, ce qui complique la résolution des problèmes non-linéaires géométriques des chapitres 3 et 4.

#### La plateforme KSP

*KSP* est une plateforme de calcul numérique qui regroupe plusieurs fonctionnalités sous forme de modules. Comme évoqué précédemment, le module *Compo-Sim* de *KSP* a été utilisé pour créer la géométrie de l'espace matrice dans un premier temps, puis l'introduction aléatoire ou paramétrée du renfort selon le type du matériau ou la structure composite étudiée. Les intersections sont gérées automatiquement grâce à un algorithme intégrée dans le module *Compo-Sim*.

Afin de faciliter la création des fichiers de données, nous avons paramétré l'introduction des différentes propriétés géométriques et mécaniques du composite sous forme d'un tableau comme montré sur la figure 2.9. Une fois que la structure composite est définie et maillée, *Compo-Sim* génère un fichier de données (\*.inp) qui sera utilisé par la suite par ABAQUS Standard pour effectuer le calcul. Un programme de post-traitement a été également développé pour lire les résultats d'ABAQUS et les afficher sur KSP.

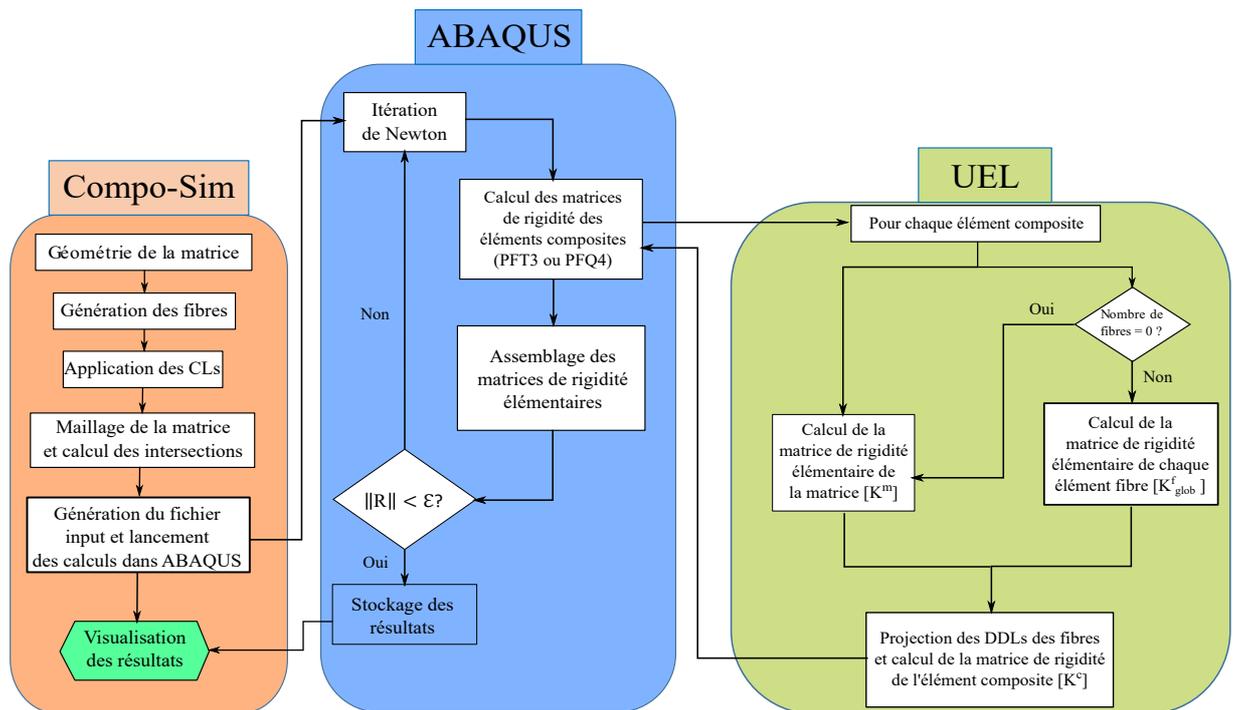


FIGURE 2.8 : Implémentation numérique des éléments finis composites PFT3 et PFQ4.

## Implémentation dans ABAQUS

Les éléments composites de membrane PFT3 et PFQ4 ont été implémentés dans ABAQUS en utilisant la routine UEL. Dans cette routine, la matrice de rigidité de chaque élément composite est calculée et stockée dans la matrice prédéfinie AMATRX d'ABAQUS. Une fois le calcul est terminé, les différentes variables du problème gérées par ABAQUS (déplacements nodaux, déformations et contraintes) sont stockées sous une forme vectorielle dans un fichier de résultats.

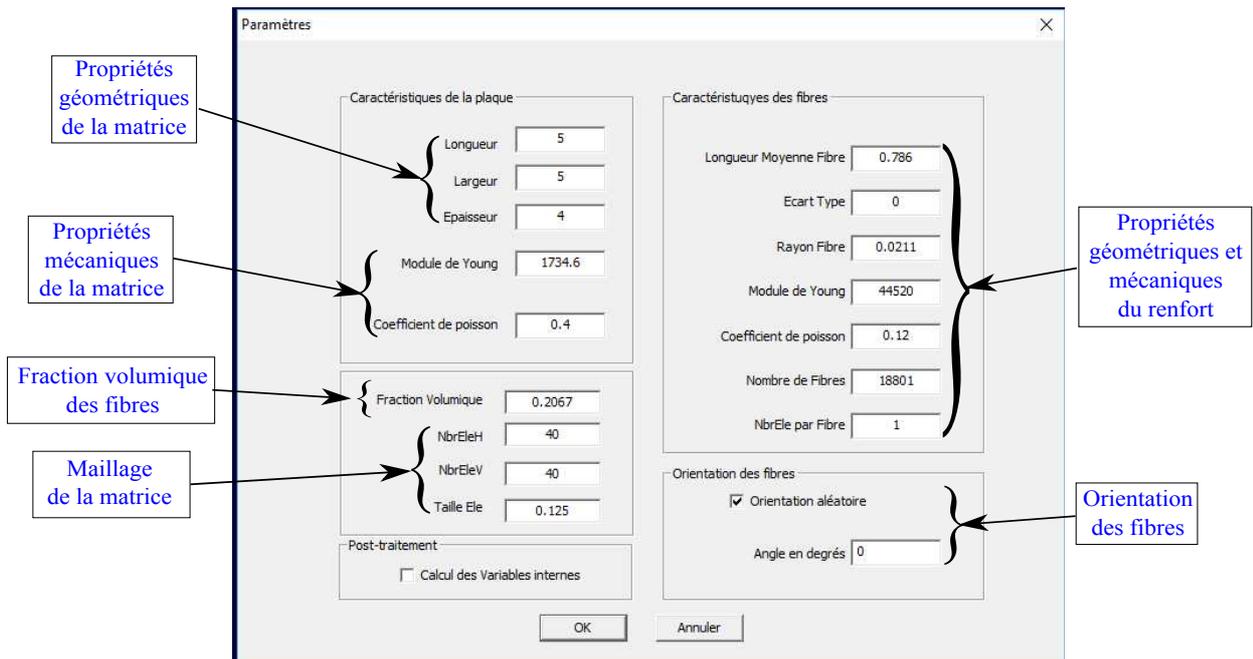


FIGURE 2.9 : Introduction des propriétés géométriques et mécaniques de la matrice et du renfort dans la plateforme KSP

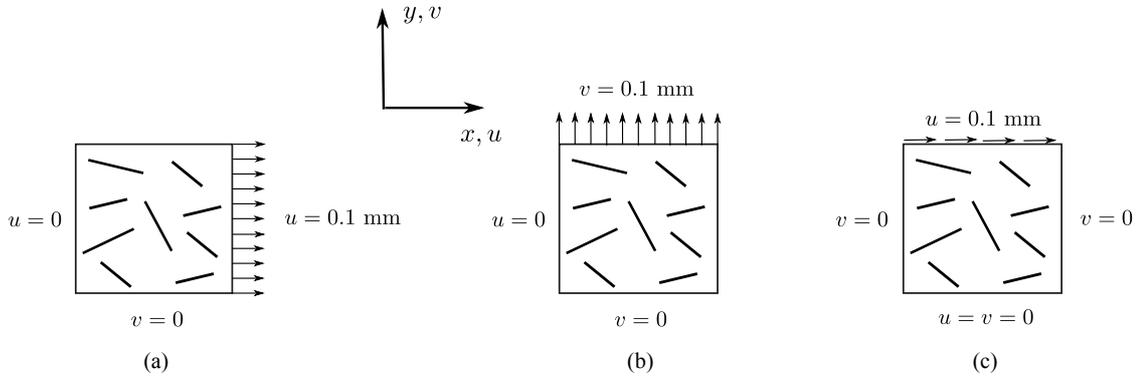
## 2.4 Cas tests de validation

Afin d'évaluer la capacité des éléments finis composites de membrane PFT3 et PFQ4 à estimer les propriétés élastiques effectives des matériaux composites et étudier des structures composites planes, plusieurs tests de validation linéaires sont considérés dans les sections suivantes.

### 2.4.1 Évaluation des propriétés mécaniques d'un matériau composite renforcé par des fibres courtes

Dans ce premier cas test de validation, nous étudions le comportement d'un matériau composite renforcé par des fibres aléatoires. Dans la première partie, nous estimons les propriétés élastiques effectives d'un matériau composite constitué d'une matrice en magnésium AZ91D ( $E_m = 45$  GPa et  $\nu_m = 0.35$ ) renforcée par 10% en volume de fibres courtes de carbone T300 ( $E_f = 230$  GPa et  $\nu_f = 0.25$ ) aléatoirement réparties. Les fibres courtes utilisées ont une forme cylindrique de longueur  $L_f = 0.15$  mm et de diamètre  $D_f = 10$   $\mu\text{m}$  ( $L_f/D_f = 15$ ). Afin d'estimer les propriétés élastiques de ce matériau composite, un volume élémentaire représentatif (VER) est considéré. Nous rappelons que le vrai problème est tridimensionnel et que les fibres courtes sont orientées d'une manière aléatoire le long des trois directions de l'espace. Dans cette étude, nous proposons une mo-

délisation plane du problème dans laquelle les extrémités de toutes les fibres courtes sont projetées sur le plan  $xy$ . Un VER de  $1 \times 1 \text{ mm}^2$  est considéré et modélisé par 625 ( $25 \times 25$ ) éléments PFQ4 et 944 éléments PFT3. Le VER est soumis à trois types de chargement : une traction longitudinale pour déterminer  $E_x$  et  $\nu_{xy}$ , une traction transversale pour déterminer  $E_y$  et  $\nu_{yx}$  et finalement un test de cisaillement dans le plan pour déterminer le module de cisaillement  $G_{xy}$ . La figure 2.10 montre le VER et les conditions aux limites utilisées pour déterminer ses propriétés effectives. Par exemple, pour la traction suivant  $x$  (figure 2.10a), nous appliquons un déplacement uniforme de 0.1 mm dans la direction  $x$  et nous déduisons ensuite la contrainte uniforme dans la direction  $x$ , pour estimer  $E_x$ , et le déplacement moyen suivant  $y$  pour estimer  $\nu_{xy}$ .



**FIGURE 2.10** : VER du composite magnésium/carbone soumis à trois chargements : (a) traction simple suivant  $x$ , (b) traction simple suivant  $y$  et (c) cisaillement dans le plan  $xy$ .

**TABLE 2.1** : Propriétés élastiques effectives du composite magnésium/carbone prédites par PFT3 et PFQ4 et comparées aux résultats expérimentaux de Tian et al. [39]

|                | Expérience<br>[39] | PFQ4   | Erreur (%) | PFT3   | Erreur (%) |
|----------------|--------------------|--------|------------|--------|------------|
| $E_x$ (GPa)    | 50.450             | 50.945 | 0.981      | 48.973 | -2.927     |
| $E_y$ (GPa)    |                    | 50.880 | 0.852      | 49.092 | -2.691     |
| $\nu_{xy}$     | 0.3425             | 0.348  | 0.869      | 0.343  | 0.145      |
| $\nu_{yx}$     |                    | 0.348  | 0.869      | 0.342  | -0.145     |
| $G_{xy}$ (GPa) | 19.020             | 18.910 | -0.578     | 18.310 | -3.732     |

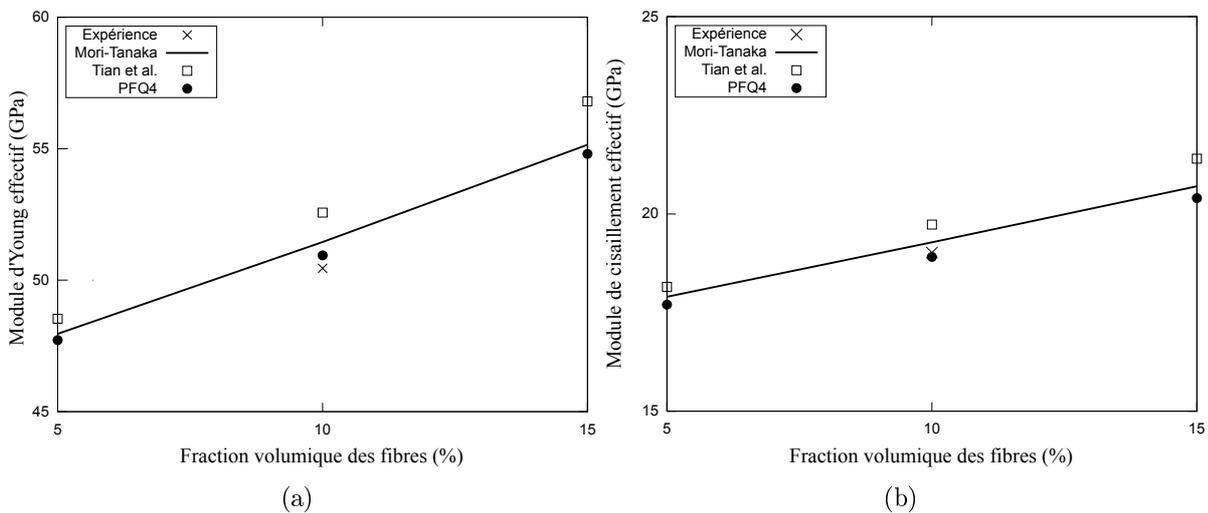
Nous résumons dans le tableau 2.1 les propriétés effectives prédites par les éléments composites de membrane PFT3 et PFQ4 et comparées aux valeurs expérimentales de Tian

et al. [39]. Nous remarquons que l'estimation des propriétés élastiques effectives par nos éléments PFT3 et PFQ4 est en parfait accord avec les résultats expérimentaux de Tian et al. [39]. L'élément quadrilatère PFQ4 semble être légèrement plus précis que PFT3. De plus, il est clair que le comportement du VER est quasi-isotrope en raison de la distribution aléatoire des fibres de carbone.

Dans la deuxième partie de ce premier cas test, nous analysons l'influence de certains paramètres microstructuraux, tels que la fraction volumique des fibres et leur rapport d'aspect, la taille du VER et le nombre d'éléments qui le modélisent, sur les propriétés effectives du composite magnésium/carbone. Dans cette étude paramétrique, nous utilisons l'élément quadrilatère PFQ4 pour simplifier la présentation des résultats.

### Influence de la fraction volumique des fibres

Pour commencer, nous proposons de prédire les propriétés élastiques effectives du composite magnésium/carbone pour différentes fractions volumiques des fibres (5%, 10% et 15%). Pour cela, nous utilisons l'élément PFQ4 avec le même maillage et les mêmes sollicitations que la première partie de ce cas test. Ensuite, nous faisons une comparaison avec le modèle analytique de Mori-Tanaka, présenté au chapitre 1, et les résultats numériques de Tian et al. [39]. L'évolution des modules d'Young et de cisaillement effectifs en fonction de la fraction volumique des fibres sont montrées sur les figures 2.11a et 2.11b, respectivement.



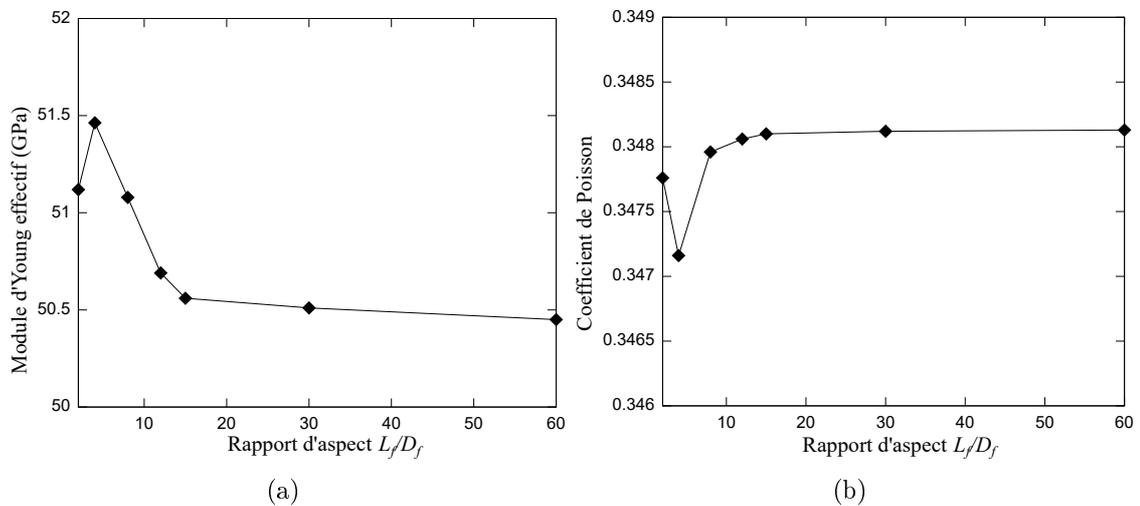
**FIGURE 2.11 :** Évolution des propriétés effectives du composite magnésium/carbone en fonction de la fraction volumique des fibres : (a) Module d'Young et (b) Module de cisaillement.

Nous remarquons que les résultats de l'élément PFQ4 sont en bon accord avec le modèle

de Mori-Tanaka. Le modèle éléments finis de Tian et al. [40] montre une surestimation des propriétés élastiques du composite magnésium/carbone (surtout pour la dernière fraction volumique de 15%) qui peut être liée à la fonction de distribution aléatoire des fibres courtes utilisée.

### Influence du rapport d'aspect des fibres

Nous étudions maintenant l'influence du rapport d'aspect des fibres de carbone sur le module d'Young et le coefficient de Poisson du composite. Selon Moussaddy et al. [41], il existe un rapport d'aspect à partir duquel son augmentation n'aurait aucun effet considérable sur les propriétés effectives des composites. Nous nous proposons donc de déterminer le rapport d'aspect seuil à partir duquel les propriétés effectives du composite restent inchangées. Pour cela, la fraction volumique des fibres est fixée à 10% et le rapport de forme ( $L_f/D_f$ ) varie de 2 à 60. L'évolution des propriétés effectives du composite en fonction du rapport de forme du renfort est montrée sur la figure 2.12. Nous remarquons que les propriétés effectives du matériau composite magnésium/carbone varient notablement pour des faibles valeurs du rapport d'aspect. Ensuite, une stabilisation est observée à partir d'un rapport d'aspect proche de 15, considéré comme le rapport d'aspect seuil.



**FIGURE 2.12 :** Évolution des propriétés effectives du composite magnésium/carbone en fonction du rapport d'aspect  $L_f/D_f$  des fibres : (a) module d'Young et (b) coefficient de Poisson.

### Influence des dimensions du VER

Dans la troisième partie de cette étude paramétrique, nous étudions l'influence des dimensions du VER sur les propriétés élastiques effectives du matériau composite magné-

sium/carbone. D'abord, pour une fraction volumique des fibres et un rapport d'aspect fixés, respectivement, à 10% et 15, nous considérons un VER cubique et nous faisons varier la longueur de son arête de  $a = 0.2$  mm à 1 mm. Ensuite, nous étudions l'influence de l'épaisseur du VER, considéré maintenant parallélépipédique, sur les propriétés effectives du composite. Pour cela, nous fixons la longueur et la largeur du VER à 1 mm et nous faisons varier son épaisseur de  $e = 0.2$  mm à 1 mm. Dans les deux cas, le VER est modélisé par des éléments PFQ4, avec le même maillage et les mêmes sollicitations utilisés précédemment dans ce cas test. L'évolution des propriétés effectives du composite magnésium/carbone en fonction des dimensions du VER est montrée sur les figures 2.13 et 2.14. La figure 2.13 montre que la variation des propriétés effectives du composite est notable lorsque la taille du VER cubique est proche de la longueur des fibres. Au-delà de cette limite, la variation des propriétés effectives se stabilise. Nous pouvons ainsi déduire une taille critique du VER qui sera proche de 0.4 mm. Cette valeur est en accord avec les résultats de Qi al. [42] qui ont constaté que la taille critique minimale du VER pour représenter correctement la micro-structure des matériaux composites renforcés par des fibres courtes aléatoirement orientées est de  $a_{VER} = 2,5 \times L_f$ .

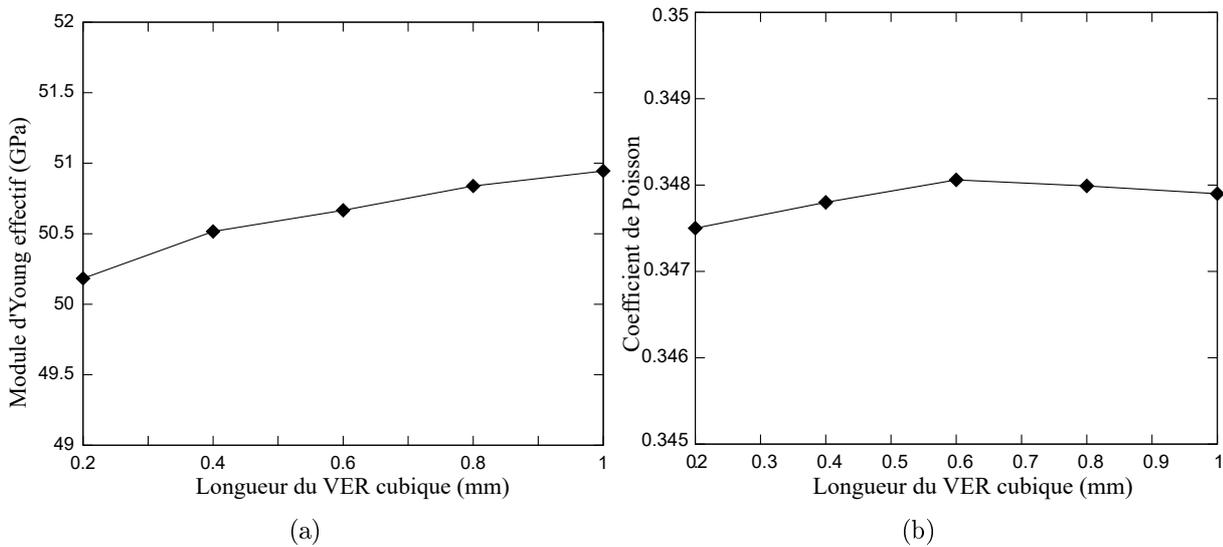
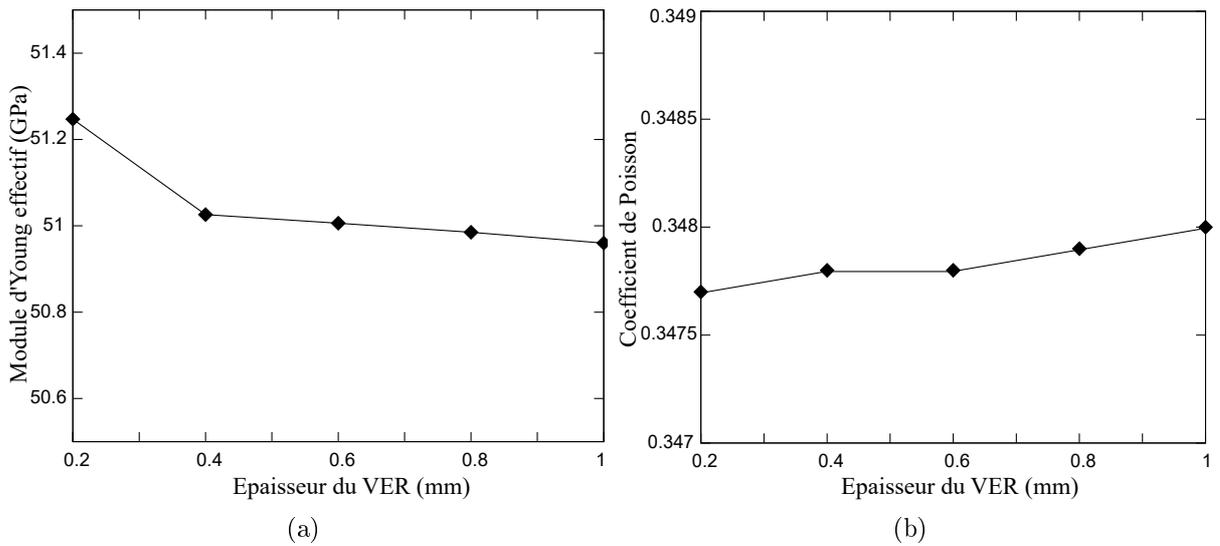


FIGURE 2.13 : Évolution des propriétés effectives du composite magnésium/carbone en fonction de la longueur de l'arête du VER supposé cubique : (a) Module d'Young et (b) coefficient de Poisson.

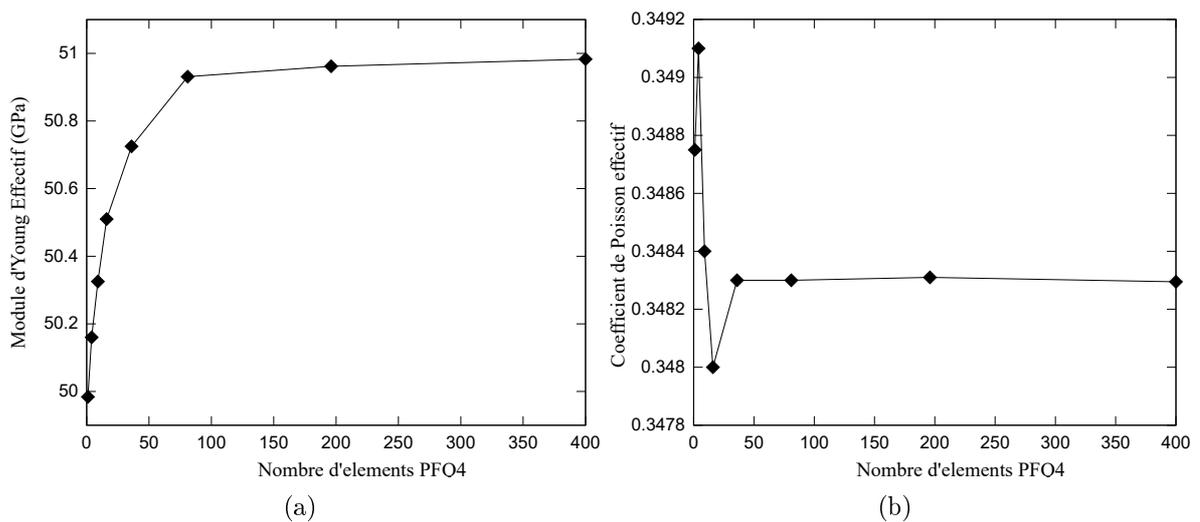
### Influence de la finesse du maillage du VER

Dans la dernière partie de cette étude paramétrique, nous étudions l'influence du raffinement du maillage sur les propriétés effectives du composite magnésium/carbone.



**FIGURE 2.14 :** *Évolution des propriétés effectives du composite magnésium/carbone en fonction de l'épaisseur du VER : (a) Module d'Young et (b) coefficient de Poisson.*

Pour cela, nous considérons un VER cubique d'arête 1 mm. La fraction volumique et le rapport de forme des fibres sont fixés à 10% et 15, respectivement. L'évolution des propriétés effectives du composite en fonction du maillage de PFQ4 est montrée sur la figure 2.15. En particulier, nous remarquons que le module d'Young et le coefficient de Poisson du composite se stabilisent à partir d'un maillage de 75 éléments PFQ4.



**FIGURE 2.15 :** *Évolution des propriétés effectives du composite magnésium/carbone en fonction du maillage du VER : (a) Modules d'Young et (b) Coefficient de Poisson.*

## 2.4.2 Étude d'une poutre composite renforcée par des fibres unidirectionnelles et soumise à une flexion transversale

Nous considérons dans ce deuxième test de validation une poutre composite cantilever, constituée d'une matrice en alliage de Magnésium AZ91D, renforcée par 20 fibres unidirectionnelles de carbone T300 également espacées et soumise à une force de flexion transversale  $F = 0.5$  kN comme montré sur la figure 2.16. Les fibres ont une forme cylindrique de diamètre  $d_f = 0.2$  mm et une longueur égale à celle de la poutre. Les propriétés élastiques de la matrice et du renfort sont celles de l'exemple 2.4.1 ( $E_m = 45$  GPa,  $\nu_m = 0.35$ ,  $E_f = 230$  GPa et  $\nu_f = 0.25$ ).

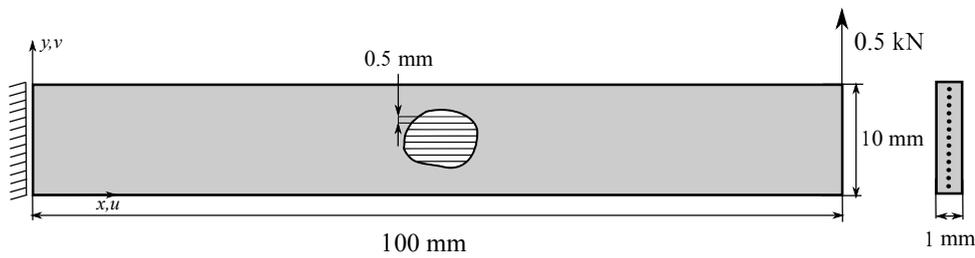


FIGURE 2.16 : Poutre composite cantilever renforcée par des fibres unidirectionnelles et soumise à une force de flexion transversale.

Dans un premier temps, nous estimons les propriétés élastiques effectives de cette poutre composite afin de comparer la flèche prédite par PFT3 et PFQ4 à celles des éléments CPS3 et CPS4 d'ABAQUS (CPS3 et CPS4 sont les éléments standards de membrane à trois nœuds et quatre nœuds d'ABAQUS, basés sur l'hypothèse des contraintes planes). Pour cela, nous considérons un VER de  $10 \times 10$  mm<sup>2</sup>, modélisé par 625 éléments PFQ4 et 944 éléments PFT3 comme dans l'exemple précédent. Ce VER est ensuite soumis aux trois chargements simples de la figure 2.10. Les propriétés élastiques prédites par PFT3 et PFQ4 sont résumées dans le tableau 2.2. Elles sont comparées aux résultats obtenus par la loi des mélanges. Nous remarquons un très bon accord entre les propriétés déterminées par nos éléments finis et celles estimées par la loi des mélanges (l'erreur relative ne dépasse pas 3%).

Dans un second temps, la poutre composite (figure 2.16) est modélisée par 1000 ( $100 \times 10$ ) éléments PFQ4 et 2210 éléments PFT3 pour calculer sa flèche. En guise de comparaison avec CPS3 et CPS4, les propriétés effectives estimées par la loi des mélanges sont utilisées. Le tableau 2.3 résume les flèches calculées par les quatre éléments finis (pour CPS3 et CPS4, nous avons utilisé les mêmes maillages que PFT3 et PFQ4, respectivement). Les résultats obtenus indiquent une fois de plus un accord parfait entre les solutions des éléments composites PFT3 et PFQ4 et celles des éléments d'ABAQUS CPS3 et CPS4.

**TABLE 2.2 :** Propriétés élastiques effectives de la poutre composite renforcée par des fibres unidirectionnelles de carbone prédites par PFT3 et PFQ4 et comparées aux résultats obtenus par la loi des mélanges.

|                | Loi des mélanges | PFQ4   | Erreur (%) | PFT3   | Erreur (%) |
|----------------|------------------|--------|------------|--------|------------|
| $E_x$ (GPa)    | 56.624           | 57.657 | 1.824      | 58.130 | 2.660      |
| $E_y$ (GPa)    | 47.395           | 47.162 | -0.491     | 47.290 | -0.222     |
| $\nu_{xy}$     | 0.344            | 0.349  | 1.453      | 0.346  | 0.581      |
| $\nu_{yx}$     | 0.288            | 0.286  | -0.694     | 0.280  | -2.778     |
| $G_{xy}$ (GPa) | 17.571           | 17.055 | -2.936     | 17.121 | -2.561     |

**TABLE 2.3 :** Flèche de la poutre composite cantilever renforcée par 20 fibres unidirectionnelles de carbone.

|               | CPS4   | PFQ4   | Erreur (%) | CPS3   | PFT3   | Erreur (%) |
|---------------|--------|--------|------------|--------|--------|------------|
| $\delta$ (mm) | 34.817 | 34.834 | 0.049      | 34.449 | 35.034 | 1.698      |

### 2.4.3 Estimation des propriétés effectives d'une plaque multicouche

Nous estimons dans ce troisième exemple les propriétés élastiques effectives d'une plaque composite stratifiée, constituée de quatre couches de magnésium AZ91D renforcées par des fibres unidirectionnelles de carbone (la séquence d'empilement est  $[90/0]_s$ ). La plaque composite a une épaisseur totale égale à 4 mm (1 mm/couche) et les fibres de carbone ont une forme cylindrique de diamètre  $d_f=0.2$  mm. La matrice et le renfort présentent les mêmes propriétés élastiques utilisées dans les deux exemples précédents. Pour estimer les propriétés effectives de la plaque multicouche, nous considérons un VER de dimensions  $10 \times 10 \times 4$  mm<sup>3</sup> comme montré sur la figure 2.17. Ce VER est modélisé par 625 éléments PFQ4 et 944 éléments PFT3 et est soumis à trois sollicitations simples (figure 2.10). Le tableau 2.4 résume les propriétés élastiques effectives obtenues par les éléments composites PFT3 et PFQ4, qui sont en très bon accord avec les résultats analytiques basés sur la théorie des stratifiés.

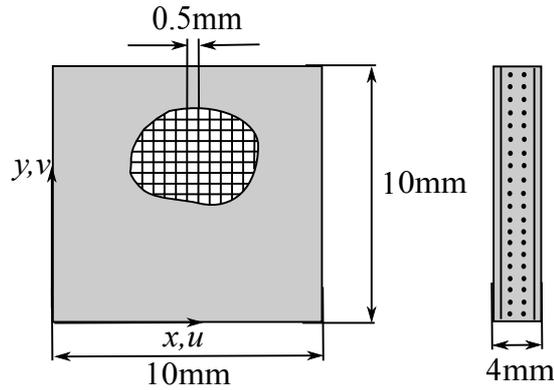


FIGURE 2.17 : VER de la plaque multicouche de dimensions  $10 \times 10 \times 4 \text{ mm}^3$ .

TABLE 2.4 : Propriétés élastiques effectives de la plaque stratifiée magnésium/carbone estimées par PFT3, PFQ4 et par la théorie des stratifiés

|                | Théorie des stratifiés | PFQ4   | Erreur (%) | PFT3   | Erreur (%) |
|----------------|------------------------|--------|------------|--------|------------|
| $E_x$ (GPa)    | 52.006                 | 53.522 | 2.915      | 51.445 | -1.079     |
| $E_y$ (GPa)    | 52.006                 | 53.522 | 2.915      | 51.445 | -1.079     |
| $\nu_{xy}$     | 0.316                  | 0.307  | -2.848     | 0.315  | -0.316     |
| $\nu_{yx}$     | 0.316                  | 0.307  | -2.848     | 0.315  | -0.316     |
| $G_{xy}$ (GPa) | 17.571                 | 16.857 | -4.064     | 16.668 | -5.139     |

#### 2.4.4 Étude du comportement mécanique d'une plaque renforcée par une fibre centrale

Nous étudions dans cet exemple le comportement d'une plaque carrée renforcée par une fibre centrale de longueur  $L_f$  comme reporté sur la figure 2.18. Inspiré des travaux de Radtke et al. [5], ce cas test est divisé en trois parties : après une étude de convergence des éléments PFT3 et PFQ4, nous étudions d'abord, l'influence de la longueur de la fibre centrale et ensuite, l'effet de son orientation par rapport à sa position initiale horizontale sur la rigidité de la plaque composite. Comme montré sur la figure 2.18, la plaque composite carrée de côté 5 mm est encastree à gauche et est soumise à un déplacement  $u = 0.5$  mm sur l'autre côté libre. La matrice a un module d'Young  $E_m = 1735$  MPa et un coefficient de Poisson  $\nu_m = 0.4$ . La fibre centrale possède une forme cylindrique de diamètre  $d_f = 0.9$  mm et de module d'Young  $E_f = 500$  GPa. Afin de vérifier la convergence des deux éléments PFT3 et PFQ4, nous faisons varier le nombre d'éléments du maillage de la plaque et calculons la somme des réactions horizontales sur le côté encastree. Nous mon-

trons sur la figure 2.19 l'évolution de la moyenne des réactions en fonction du maillage. Nous remarquons que les deux éléments convergent vers une solution proche de 1600 N.

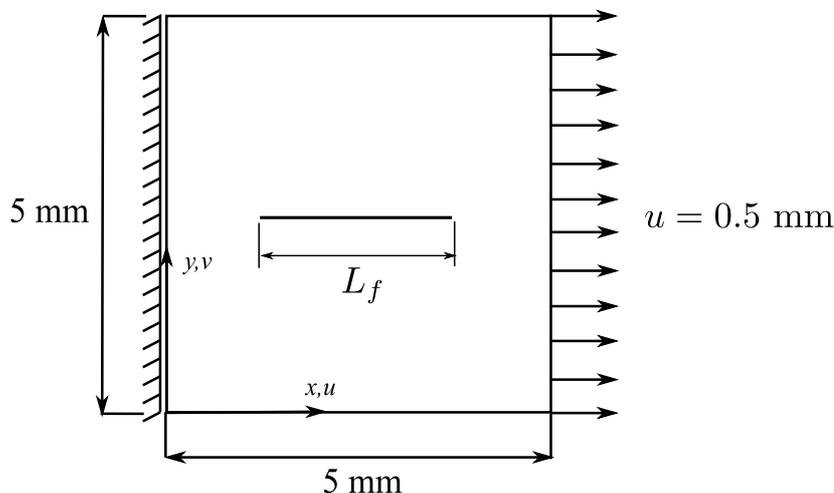


FIGURE 2.18 : Plaque carrée renforcée par une fibre centrale.

Pour évaluer l'influence de la longueur de la fibre centrale sur la rigidité de la plaque composite, nous considérons quatre longueurs différentes de la fibre : 1, 2, 3 et 4 mm. La plaque est modélisée par 225 éléments PFQ4 (maillage régulier de  $15 \times 15$  éléments) et 340 éléments PFT3. La figure 2.19 montre l'évolution de la réaction horizontale moyenne du côté encastré en fonction du déplacement imposé. Comme prévu, nous remarquons que la rigidité de la plaque composite augmente avec la longueur de la fibre centrale et ceci est bien décrit par les éléments PFT3 et PFQ4 qui présentent des réponses très proches. Pour évaluer l'influence de l'orientation de la fibre centrale sur la rigidité de la plaque composite, nous fixons sa longueur à 4 mm et nous faisons varier son orientation par rapport à  $x$  de  $0$  à  $90^\circ$ . La plaque est toujours modélisée par 225 éléments PFQ4 et 340 éléments PFT3. La figure 2.21 montre l'évolution de la réaction horizontale moyenne du côté encastré en fonction du déplacement imposé pour différentes orientations de la fibre ( $0$ ,  $15$ ,  $30$ ,  $45$  et  $90^\circ$ ). Nous remarquons que l'orientation de la fibre par rapport à sa position initiale horizontale entraîne une diminution de rigidité de la plaque composite et ceci est bien illustré par nos deux éléments de membrane.

## 2.5 Conclusion

Dans ce deuxième chapitre, nous avons présenté l'approche de la fibre projetée et son adaptation aux problèmes plans. Cette approche peut prendre en compte la présence des fibres continues et discontinues dans un domaine continu de matrice sans avoir besoin de

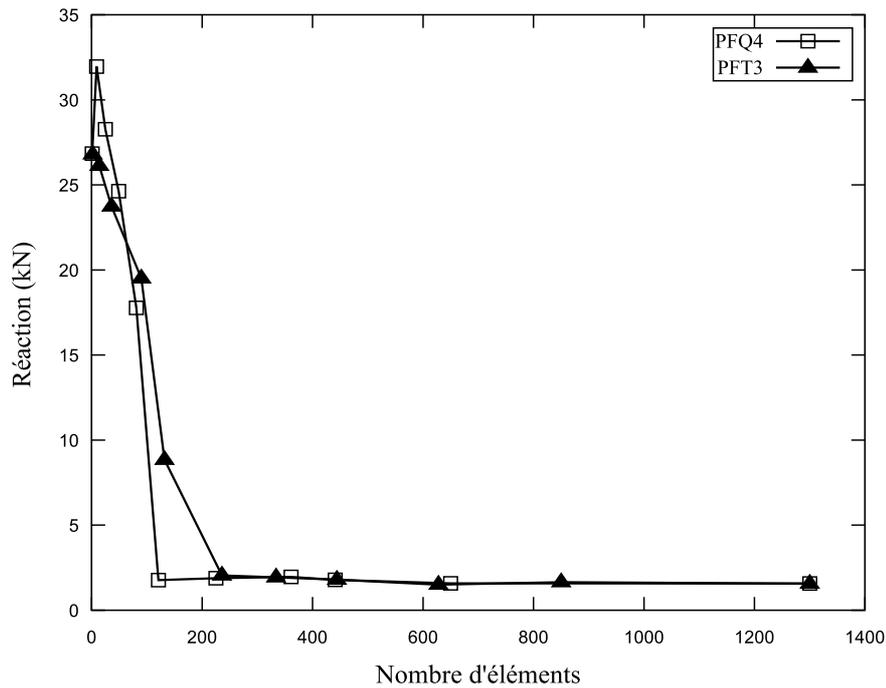


FIGURE 2.19 : Évolution de la force de réaction du côté encastré en fonction de la finesse du maillage.

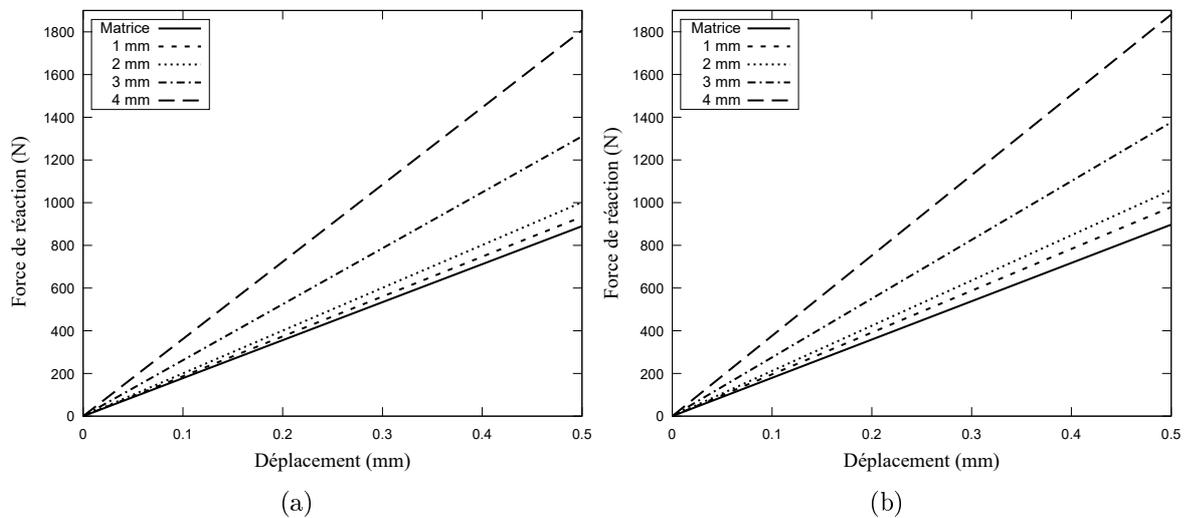
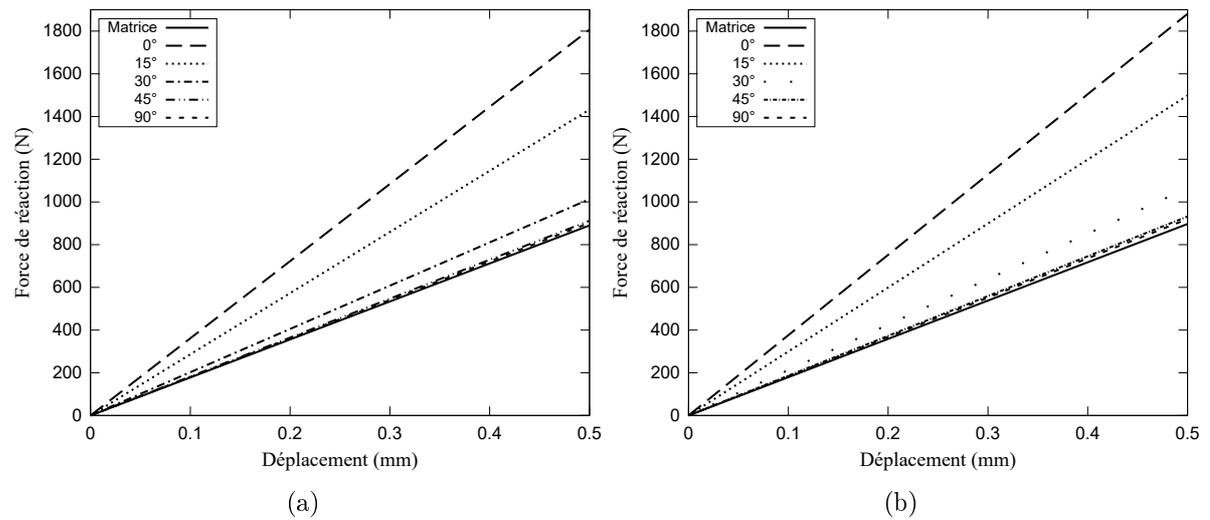


FIGURE 2.20 : Influence de la longueur de la fibre centrale sur la rigidité de la plaque composite estimée par (a) PFT3 et (b) PFQ4.

les mailler, ce qui limite considérablement la taille du système d'équations à résoudre. Nous avons développé deux éléments finis composites de membrane basés sur cette approche, baptisés PFT3 et PFQ4. Nous avons considéré les éléments finis de membrane standards T3 et Q4 pour modéliser l'espace de la matrice et les éléments barres à deux nœuds pour représenter les fibres. En considérant une technique de projection, proposée par [37],



**FIGURE 2.21** : Influence de l'orientation de la fibre centrale sur la rigidité de la plaque composite estimée par (a) PFT3 et (b) PFQ4.

les variables de chaque élément barre sont directement exprimés en fonction de ceux de son élément matrice correspondant. Par conséquent, le système d'équations obtenu est équivalent à celui d'un milieu non renforcé. L'implémentation de ces deux éléments dans le code ABAQUS via la routine UEL a été aussi présentée. Enfin, quelques cas tests de validation avec des distributions différentes des fibres ont été étudiés pour évaluer la précision des éléments proposés et les résultats obtenus sont proches des solutions de référence.



# Chapitre 3

## Formulation non-linéaire géométrique de l'approche de la fibre projetée 2D

### Sommaire

---

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| <b>3.1</b> | <b>Introduction</b>   | <b>61</b> |
| <b>3.2</b> | <b>Formulation Lagrangienne Totale</b>  | <b>61</b> |
| <b>3.3</b> | <b>Formulation non-linéaire des éléments finis composites PFT3<br/>et PFQ4</b>  | <b>63</b> |
| 3.3.1      | Matrices de rigidité tangentes des éléments T3 et Q4  | 64        |
| 3.3.2      | Matrice de rigidité tangente de l'élément barre   | 66        |
| 3.3.3      | Matrices de rigidité tangentes des éléments composites PFT3 et<br>PFQ4  | 68        |
| <b>3.4</b> | <b>Cas tests de validation</b>  | <b>68</b> |
| 3.4.1      | Poutre composite cantilever renforcée par des fibres courtes sou-<br>mise à une charge de flexion                         | 69        |
| 3.4.2      | Poutre composite cantilever renforcée par des fibres unidirection-<br>nelles soumise à une charge de flexion              | 70        |
| 3.4.3      | Influence de la longueur des fibres sur la réponse d'une poutre<br>cantilever renforcée par des fibres unidirectionnelles | 72        |
| 3.4.4      | Poutre annulaire en béton renforcée par des fibres en acier   | 73        |
| 3.4.5      | Poutre composite cantilever soumise à une charge uniformément<br>répartie   | 75        |
| <b>3.5</b> | <b>Conclusion</b>   | <b>79</b> |

---



### 3.1 Introduction

Dans ce troisième chapitre, nous proposons d'étendre l'approche de la fibre projetée 2D présentée dans le chapitre 2 pour analyser le comportement non-linéaire géométrique des solides composites 2D soumis à de grands déplacements accompagnés de petites déformations. Nous utiliserons la formulation lagrangienne totale pour décrire leur mouvement.

### 3.2 Formulation Lagrangienne Totale

Dans un problème non linéaire géométrique, la détermination directe de la configuration finale d'un solide composite 2D, noté  $B$ , soumis à de grands déplacements est une tâche relativement difficile (problème de convergence de la méthode de résolution), ce qui nécessite l'introduction de configurations intermédiaires. La détermination de la configuration finale  $C_f$  du solide composite  $B$  qui occupait initialement la configuration  $C_0$  passe par la supposition que la charge totale est appliquée en petits incréments, de sorte que le solide occupe plusieurs configurations intermédiaires avant d'atteindre la configuration finale  $C_f$  (Figure 3.1). Par conséquent, l'équilibre de  $B$  doit être résolu pour chaque incrément de chargement. Pour la formulation lagrangienne totale, toutes les variables sont mesurées par rapport à la configuration initiale  $C_0$  qui représente la configuration de référence.

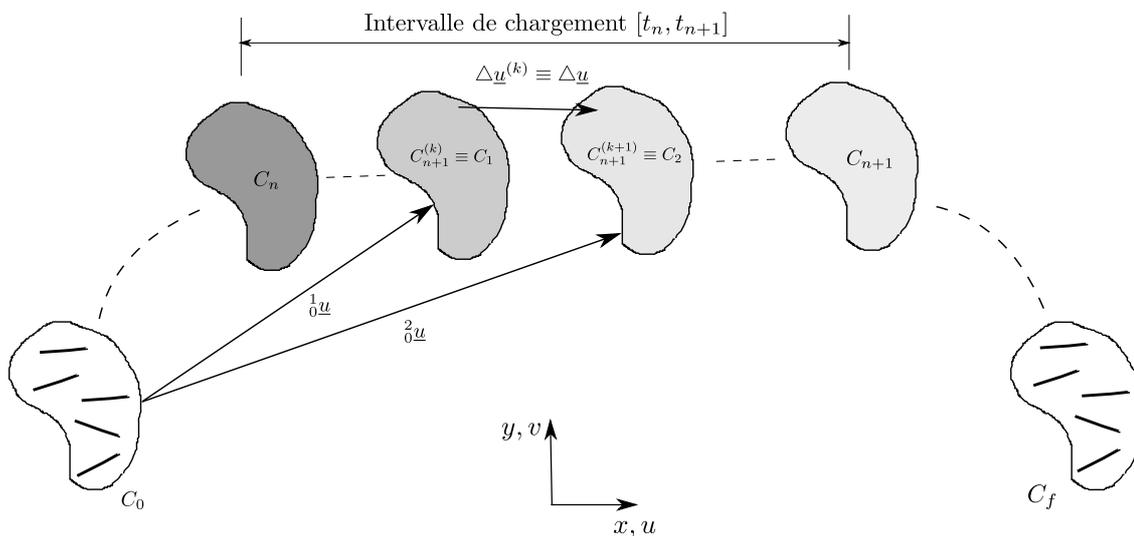


FIGURE 3.1 : Les différentes configurations d'un solide composite 2D.

Nous considérons l'intervalle de chargement  $[t_n, t_{n+1}]$  et nous notons par les indices  $n$  et  $n + 1$  toutes les quantités à l'instant  $t_n$  et  $t_{n+1}$ , respectivement. Nous supposons que le

solide  $B$  est en équilibre à  $t = t_n$  et sa configuration correspondante  $C_n$  est connue. Un incrément de chargement conduit à un incrément de déplacement entre les configurations  $C_n$  et  $C_{n+1}$  (Figure 3.1). Nous désignons par  $C_{n+1}^{(k)} \equiv C_1$  la dernière configuration connue entre  $C_n$  et  $C_{n+1}$  qui n'est pas en équilibre. Une correction du vecteur de déplacement doit être déterminée pour atteindre la configuration suivante  $C_{n+1}^{(k+1)} \equiv C_2$ . Pour cette dernière configuration inconnue  $C_2$ , l'équation de l'équilibre s'écrit [43] :

$$\delta W = \int_{0V} {}^{n+1}S_{ij}^{(k+1)} \delta({}^{n+1}E_{ij}^{(k+1)}) d^0V - \underbrace{\left[ \int_{0S} {}^{n+1}T_i \delta u_i d^0S + \int_{0V} {}^{n+1}f_i^v \delta u_i d^0V \right]}_{\delta({}^{n+1}W_{ext})} = 0 \quad (3.1)$$

avec  ${}^{n+1}S_{ij}^{(k+1)}$  et  ${}^{n+1}E_{ij}^{(k+1)}$  sont, respectivement, les composantes du second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff et du tenseur des déformations de Green-Lagrange par rapport à la configuration initiale  $C_0$ , et  ${}^{n+1}T_i$  et  ${}^{n+1}f_i^v$  sont, respectivement, les forces surfaciques et volumiques à  $t = t_{n+1}$ .

Pour simplifier, nous adoptons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} {}^0S_{ij}^{(k)} &= {}^0S_{ij} & ; & & {}^0E_{ij}^{(k)} &= {}^0E_{ij} & ; & & {}^0S_{ij}^{(k+1)} &= {}^2S_{ij} & ; & & {}^0E_{ij}^{(k+1)} &= {}^2E_{ij} \\ {}^0u_i^{(k)} &= {}^0u_i & ; & & {}^0u_i^{(k+1)} &= {}^2u_i & ; & & \Delta u_i^{(k)} &= \Delta u_i \end{aligned} \quad (3.2)$$

L'équation (3.1) peut donc être réécrite sous la forme suivante :

$$\delta W = \underbrace{\int_{0V} {}^2S_{ij} \delta({}^2E_{ij}) d^0V}_{\delta({}^2W_{int})} - \delta({}^{n+1}W_{ext}) = 0 \quad (3.3)$$

Le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff  ${}^2S_{ij}$ , le tenseur des déformations de Green-Lagrange  ${}^2E_{ij}$  et le vecteur déplacement  ${}^2u_i$  peuvent se décomposer comme suit :

$${}^2S_{ij} = {}^0S_{ij} + \Delta S_{ij} \quad ; \quad {}^2E_{ij} = {}^0E_{ij} + \Delta E_{ij} \quad ; \quad {}^2u_i = {}^0u_i + \Delta u_i \quad (3.4)$$

Par conséquent, nous obtenons l'expression suivante de la forme faible (3.1) :

$$\int_{0V} {}^0S_{ij} \delta(\Delta E_{ij}) d^0V + \int_{0V} \Delta S_{ij} \delta(\Delta E_{ij}) d^0V - \delta({}^{n+1}W_{ext}) = 0 \quad (3.5)$$

${}^0S_{ij}$  et  ${}^0E_{ij}$  sont donnés par les expressions suivantes :

$${}^0S_{ij} = C_{ijkl} {}^0E_{ij} \quad ; \quad {}^0E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial {}^0u_i}{\partial {}^0x_j} + \frac{\partial {}^0u_j}{\partial {}^0x_i} + \frac{\partial {}^0u_k}{\partial {}^0x_i} \cdot \frac{\partial {}^0u_k}{\partial {}^0x_j} \right) \quad (3.6)$$

avec  $C_{ijkl}$  sont les composantes du tenseur d'élasticité.

La variation de l'incrément du tenseur des déformations de Green-Lagrange  $\delta(\Delta E_{ij})$  est divisée en une première partie linéaire  $\delta(\Delta e_{ij})$  et une deuxième non linéaire  $\delta(\Delta \eta_{ij})$  en fonction des déplacements inconnus  $\Delta u_i$  [43] :

$$\delta(\Delta E_{ij}) = \delta(\Delta e_{ij}) + \delta(\Delta \eta_{ij}) \quad (3.7)$$

où

$$\delta(\Delta e_{ij}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta \Delta u_i}{\partial^0 x_j} + \frac{\partial \delta \Delta u_j}{\partial^0 x_i} + \frac{\partial^1_0 u_k}{\partial^0 x_i} \cdot \frac{\partial \delta \Delta u_k}{\partial^0 x_j} + \frac{\partial^1_0 u_k}{\partial^0 x_j} \cdot \frac{\partial \delta \Delta u_k}{\partial^0 x_i} \right) \quad (3.8)$$

$$\delta(\Delta \eta_{ij}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Delta u_k}{\partial^0 x_i} \cdot \frac{\partial \delta \Delta u_k}{\partial^0 x_j} + \frac{\partial \Delta u_k}{\partial^0 x_j} \cdot \frac{\partial \delta \Delta u_k}{\partial^0 x_i} \right) \quad (3.9)$$

D'autre part, il est supposé que l'incrément de déplacement  $\Delta \underline{u}$  reste suffisamment petit pour que nous puissions faire l'approximation suivante :

$$\Delta S_{ij} \delta(\Delta E_{ij}) \approx C_{ijkl} \Delta e_{kl} \delta(\Delta e_{ij}) \quad (3.10)$$

Après avoir substitué les équations (3.7) et (3.10) dans la relation (3.5), nous obtenons l'expression finale de la forme faible de l'équilibre pour développer l'approximation par éléments finis basée sur la formulation lagrangienne totale [43] :

$$\underbrace{\int_{0V} C_{ijkl} \Delta e_{kl} \delta(\Delta e_{ij}) d^0V + \int_{0V} {}^1_0 S_{ij} \delta(\Delta \eta_{ij}) d^0V + \int_{0V} {}^1_0 S_{ij} \delta(\Delta e_{ij}) d^0V}_{\delta({}_0^2 W_{int})} - \delta({}_0^{n+1} W_{ext}) = 0 \quad (3.11)$$

Afin de prédire le comportement non linéaire géométrique des solides composites 2D, nous présentons dans les sections suivantes les formulations non linéaires des éléments finis composites PFT3 et PFQ4 basés sur l'approche de la fibre projetée.

### 3.3 Formulation non-linéaire des éléments finis composites PFT3 et PFQ4

L'approximation par éléments finis de l'équation (3.11) est construite en divisant le solide composite 2D en des domaines élémentaires. Par conséquent, nous présentons dans cette section, l'extension des formulations des deux éléments finis composites de membrane PFT3 et PFQ4 pour traiter des problèmes non-linéaires géométriques. La formulation non-linéaire de ces deux éléments est basée sur les mêmes hypothèses que les modèles linéaires

présentés dans le chapitre 2 : le domaine de la matrice est discrétisé par des éléments triangulaires non-linéaires à trois noeuds (T3) ou des éléments quadrilatères non-linéaires à quatre noeuds (Q4), tandis que les fibres sont modélisées par des éléments barres à deux noeuds non-linéaires. L'approche de la fibre projetée est considérée pour exprimer les variables nodales des éléments barres, représentant le renfort, en fonction des positions des noeuds des éléments matrices correspondants.

Pour simplifier la discussion, nous supposons qu'une seule fibre traverse les éléments matrices T3 ou Q4.

### 3.3.1 Matrices de rigidité tangentes des éléments T3 et Q4

Au niveau élémentaire, la forme faible de l'équilibre (3.11) devient :

$$\delta W = \delta({}_0^2W_{int}^m) + \delta({}_0^2W_{int}^f) - \delta({}_0^{n+1}W_{ext}) \quad (3.12)$$

$\delta({}_0^2W_{int}^m)$  et  $\delta({}_0^2W_{int}^f)$  sont, respectivement, les travaux virtuels internes de l'élément matrice et de l'élément fibre à la configuration  $C_2$ . Le travail virtuel interne  $\delta({}_0^2W_{int}^m)$  de l'élément matrice est donné par :

$$\delta({}_0^2W_{int}^m) = \int_{0V^m} C_{ijkl}^m \Delta e_{kl}^m \delta(\Delta e_{ij}^m) d^0V^m + \int_{0V^m} {}_0^1S_{ij}^m \delta(\Delta \eta_{ij}^m) d^0V^m + \int_{0V^m} {}_0^1S_{ij}^m \delta(\Delta e_{ij}^m) d^0V^m \quad (3.13)$$

Le premier terme de l'équation (3.13) s'écrit sous la forme alternative suivante :

$$\int_{0V^m} C_{ijkl}^m \Delta e_{kl}^m \delta(\Delta e_{ij}^m) d^0V^m = \int_{0V^m} \{\delta \Delta e^m\}^T [C^m] \{\Delta e^m\} d^0V^m \quad (3.14)$$

$[C^m]$  est la matrice d'élasticité du domaine de la matrice. Le vecteur des déformations linéaires  $\{\Delta e^m\}$  est lié à l'incrément du vecteur des degrés de liberté de l'élément matrice T3 ou Q4  $\{\Delta u_n^m\} = \{\dots | \Delta u_i \Delta v_i | \dots i = 1, n\}^T$  ( $n = 3$  pour T3 et  $n = 4$  pour Q4) via une matrice  $[B_L]$  de dimensions  $3 \times 6$  pour T3 et  $3 \times 8$  pour Q4 :

$$\{\Delta e^m\} = \left\{ \begin{array}{c} \Delta e_{xx}^m \\ \Delta e_{yy}^m \\ 2\Delta e_{xy}^m \end{array} \right\} = [B_L] \{\Delta u_n^m\} \quad (3.15)$$

avec

$$[B_L] = [B_L^0] + [B_L^u] + [B_L^v] \quad (3.16)$$

Les matrices  $[B_L^0]$ ,  $[B_L^u]$  et  $[B_L^v]$  sont données par :

$$[B_L^0] = \begin{bmatrix} & N_{i,x} & 0 & & \\ \cdots & 0 & N_{i,y} & \cdots & \\ & N_{i,y} & N_{i,x} & & \end{bmatrix} \quad i = 1, n \quad (3.17)$$

$$[B_L^u] = \begin{bmatrix} & u_{,x}^m N_{i,x} & 0 & & \\ \cdots & u_{,y}^m N_{i,y} & 0 & \cdots & \\ & u_{,x}^m N_{i,y} + u_{,y}^m N_{i,x} & 0 & & \end{bmatrix} \quad i = 1, n \quad (3.18)$$

$$[B_L^v] = \begin{bmatrix} & 0 & v_{,x}^m N_{i,x} & & \\ \cdots & 0 & v_{,y}^m N_{i,y} & \cdots & \\ & 0 & v_{,x}^m N_{i,y} + v_{,y}^m N_{i,x} & & \end{bmatrix} \quad i = 1, n \quad (3.19)$$

où  $u^m = {}^1_0u_1^m$ ,  $v^m = {}^1_0u_2^m$ ,  $x = {}^0x_1$  et  $y = {}^0x_2$ .

En utilisant la relation (3.15), le premier terme de l'équation (3.13) devient :

$$\int_{{}^0V^m} \{\delta \Delta e^m\}^T [C^m] \{\Delta e^m\} d^0V^m = \{\delta \Delta u_n^m\}^T \underbrace{\int_{{}^0V^m} [B_L]^T [C^m] [B_L] d^0V^m}_{[K_L^m]} \{\Delta u_n^m\} \quad (3.20)$$

$[K_L^m]$  est la matrice de rigidité linéaire de l'élément matrice de dimensions  $6 \times 6$  pour T3 et  $8 \times 8$  pour Q4.

Le deuxième terme de l'équation (3.13) est réécrit comme suit :

$$\int_{{}^0V^m} {}^1_0S_{ij}^m \delta(\Delta \eta_{ij}^m) d^0V^m = \{\delta \Delta u_n^m\}^T \underbrace{\int_{{}^0V^m} [B_{NL}]^T [{}^1_0S] [B_{NL}] d^0V^m}_{[K_{NL}^m]} \{\Delta u_n^m\} \quad (3.21)$$

La matrice des déformations non-linéaires  $[B_{NL}]$  et la matrice des contraintes  $[_0^1S]$  sont données par les expressions suivantes :

$$[B_{NL}] = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & & \\ N_{i,y} & 0 & & \\ \cdots & & \cdots i = 1, n & \\ 0 & N_{i,x} & & \\ 0 & N_{i,y} & & \end{bmatrix} ; \quad [_0^1S] = \begin{bmatrix} {}_0^1S_{xx} & {}_0^1S_{xy} & 0 & 0 \\ {}_0^1S_{xy} & {}_0^1S_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}_0^1S_{xx} & {}_0^1S_{xy} \\ 0 & 0 & {}_0^1S_{xy} & {}_0^1S_{yy} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$[K_{NL}^m]$  est la matrice de rigidité non-linéaire de l'élément T3 ou Q4 ayant les mêmes dimensions que la matrice  $[K_L^m]$ .

Le troisième terme de l'équation (3.13) s'écrit en utilisant la relation (3.15) :

$$\int_{0V^m} {}_0^1S_{ij}^m \delta(\Delta e_{ij}^m) d^0V^m = \{\delta\Delta u_n^m\}^T \int_{0V^m} [B_L]^T \{{}_0^1S^m\} d^0V^m \quad (3.23)$$

$\{{}_0^1S^m\} = \{{}_0^1S_{xx}^m \ {}_0^1S_{yy}^m \ {}_0^1S_{xy}^m\}^T$  est le vecteur des contraintes de Piola-Kirchhoff de l'élément matrice.

En utilisant les relations (3.20), (3.21) et (3.23), le travail virtuel interne de l'élément matrice (3.13) devient :

$$\delta({}_0^2W_{int}^m) = \{\delta\Delta u_n^m\}^T \underbrace{([K_L^m] + [K_{NL}^m])}_{[K_T^m]} \{\Delta u_n^m\} + \{\delta\Delta u_n^m\}^T \int_{0V^m} [B_L]^T \{{}_0^1S^m\} d^0V^m \quad (3.24)$$

$[K_T^m]$  est la matrice de rigidité tangente de l'élément T3 ou Q4 de dimensions  $6 \times 6$  pour T3 et  $8 \times 8$  pour Q4.

### 3.3.2 Matrice de rigidité tangente de l'élément barre

Considérons un élément barre à deux noeuds représentant la partie de la fibre contenue dans l'élément matrice T3 ou Q4 (figure 3.2). Pour la dernière configuration inconnue  $C_2$ , le travail virtuel interne de l'élément barre  $\delta({}_0^2W_{int}^f)$  s'écrit :

$$\delta({}_0^2W_{int}^f) = \int_{0V^f} \delta({}_0^2E^f)_0^2S^f d^0V^f = A_0 \int_{-L_0/2}^{L_0/2} \delta({}_0^2E^f)_0^2S^f dx \quad (3.25)$$

$L_0$  et  $A_0$  sont, respectivement, la longueur et la section (supposée constante le long de l'élément) de l'élément barre à la configuration initiale  $C_0$ .  ${}_0^2E^f$  et  ${}_0^2S^f$  sont, respectivement,

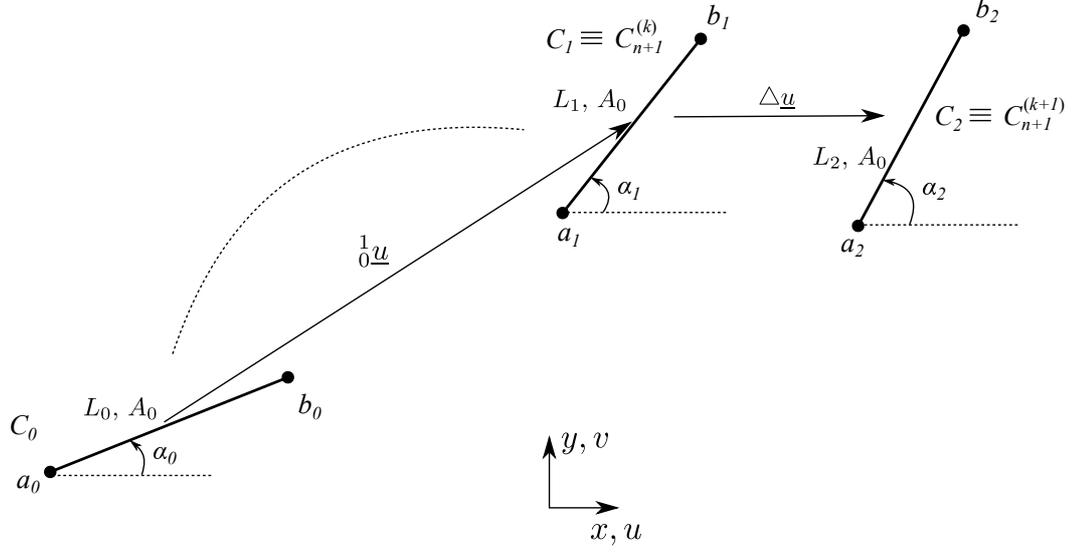


FIGURE 3.2 : Les différentes configurations de l'élément barre.

la déformation de Green-Lagrange axiale et sa contrainte conjuguée à la configuration  $C_2$ . Elles sont données par les expressions suivantes :

$${}^2_0E^f = \frac{L_2^2 - L_0^2}{2L_0^2} \quad ; \quad {}^2_0S^f = \underbrace{(E_f - E_m)}_{E_f^*} {}^2_0E^f \quad (3.26)$$

avec  $L_2$ ,  $E_f$  et  $E_m$  sont, respectivement, la longueur de l'élément barre à la configuration  $C_2$ , le module de Young de la fibre et le module de Young de la matrice.

L'approximation par éléments finis de  $\delta({}^2_0W_{int}^f)$  s'écrit en fonction de l'incrément du vecteur des degrés de liberté de l'élément barre  $\{\Delta u_n^f\} = \{\Delta u_a^f \ \Delta v_a^f \ \Delta u_b^f \ \Delta v_b^f\}^T$  sous la forme :

$$\delta({}^2_0W_{int}^f) = \{\delta \Delta u_n^f\}^T \left[ \underbrace{([K_L^f] + [K_{NL}^f])}_{[K_T^f]} \{\Delta u_n^f\} + \frac{A_0 E_f^* L_1}{L_0} {}^1_0E^f \{L_1\} \right] \quad (3.27)$$

${}^1_0E^f$  et  $L_1$  sont, respectivement, la déformation de Green-Lagrange axiale et la longueur de l'élément barre à la configuration  $C_1$  et  $\{L_1\}$  contient les cosinus directeurs de l'élément barre ( $\{L_1\} = \{-\cos(\alpha_1) \ -\sin(\alpha_1) \ \cos(\alpha_1) \ \sin(\alpha_1)\}^T$ ).  $[K_L^f]$  et  $[K_{NL}^f]$  sont, respectivement, les matrices de rigidité linéaire et non-linéaire de l'élément barre ayant les

expressions suivantes :

$$[K_L^f] = \frac{A_0 E_f^* L_1^2}{L_0^3} \{L_1\} \{L_1\}^T \quad ; \quad [K_{NL}^f] = \frac{A_0 E_f^*}{L_0} {}_0E^f \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

### 3.3.3 Matrices de rigidité tangentes des éléments composites PFT3 et PFQ4

Les degrés de liberté de l'élément barre sont projetés sur ceux de son élément matrice T3 ou Q4, de la même manière que dans le chapitre 2 en utilisant les fonctions de forme géométriques. Nous rappelons ici que ces dernières nous permettent de trouver la matrice de passage  $[P]$  qui lie les variables de l'élément barre au vecteur DDLs de l'élément matrice ( $\{\Delta u_n^f\} = [P] \{\Delta u_n^m\}$ ).

En utilisant les équations (3.24) et (3.27), le travail virtuel interne des éléments composites PFT3 et PFQ4 à la configuration  $C_2$  s'écrit :

$$\delta({}_0^2W_{int}) = \{\delta \Delta u_n^m\}^T \left[ \left( [K_T^m] + [P]^T [K_T^f] [P] \right) \{\Delta u_n^m\} + \int_{{}_0V^m} [B_L]^T \{ {}_0^1S^m \} d^0V^m + \frac{A_0 E_f^* L_1}{L_0} {}_0E^f [P]^T \{L_1\} \right] \quad (3.29)$$

En remplaçant la relation (3.29) dans l'équation (3.12), nous obtenons un système d'équations qui nous permet de déterminer la correction  $\{\Delta u_n^m\}$  :

$$\underbrace{\left( [K_T^m] + [P]^T [K_T^f] [P] \right)}_{[K_T^{eq}]} \{\Delta u_n^m\} = \underbrace{\{ {}_0^{n+1}F_{ext} \} - \int_{{}_0V^m} [B_L]^T \{ {}_0^1S^m \} d^0V^m - \frac{A_0 E_f^* L_1}{L_0} {}_0E^f [P]^T \{L_1\}}_{\{R^{eq}\}} \quad (3.30)$$

$\{ {}_0^{n+1}F_{ext} \}$  est le vecteur élémentaire des charges externes,  $[K_T^{eq}]$  est la matrice de rigidité tangente équivalente des éléments composites PFT3 et PFQ4 (de dimensions  $6 \times 6$  pour PFT3 et  $8 \times 8$  pour PFQ4), et  $\{R^{eq}\}$  est le vecteur résidu élémentaire.

## 3.4 Cas tests de validation

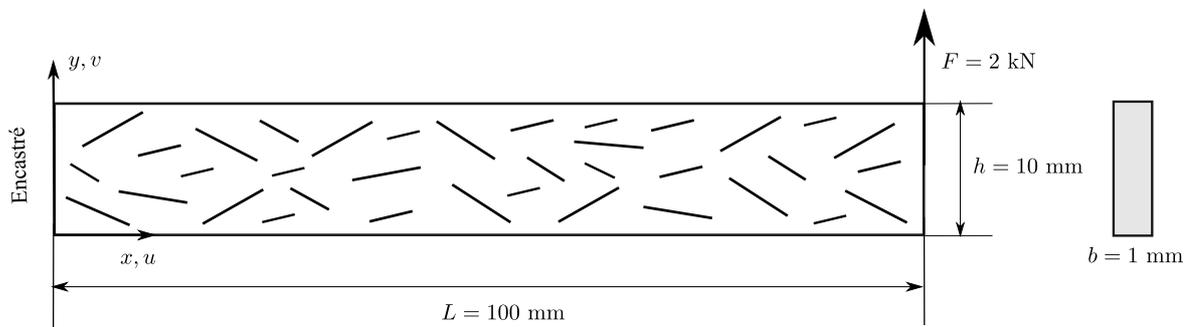
Les éléments composites PFT3 et PFQ4 non-linéaires ont été implémentés dans le code commercial ABAQUS via la routine utilisateur UEL. Pour développer les routines

UEL, la matrice tangente et le vecteur résidu de chaque élément composite doivent être stockés dans les variables prédéfinies AMATRIX et RHS, respectivement. Nous rappelons que les modèles numériques des cas tests de validation suivants (fichiers input adaptés au logiciel ABAQUS) ont été générés par la plateforme KSP.

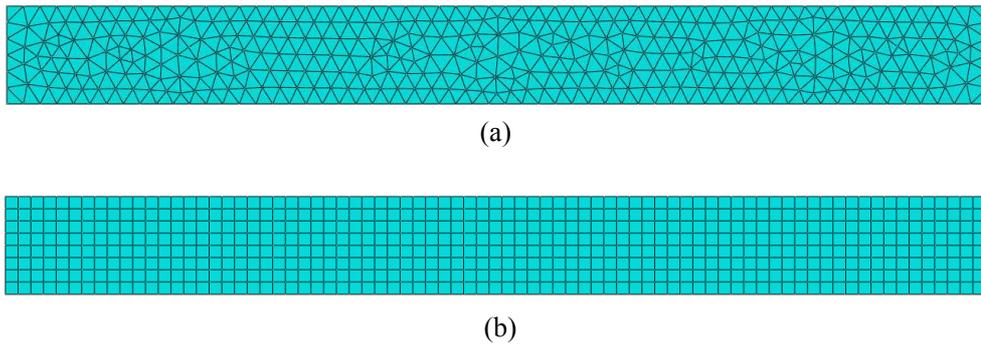
Pour évaluer la précision des éléments composites dans l'analyse des problèmes non-linéaires géométriques plans, cinq cas tests de validation sont considérés dans les sections suivantes. Il est important de noter qu'un schéma d'incrémentement automatique de la charge a été choisi dans ABAQUS, pour obtenir les résultats présentés.

### 3.4.1 Poutre composite cantilever renforcée par des fibres courtes soumise à une charge de flexion

Dans ce premier cas test, nous étudions le comportement non-linéaire géométrique d'une poutre composite constituée d'une matrice en alliage de magnésium AZ91D avec  $E_m = 45$  GPa et  $\nu_m = 0.35$ , renforcée par 10% en volume de fibres courtes de carbone T300 avec  $E_f = 230$  GPa et  $\nu_f = 0.25$ . Les fibres courtes ont une forme cylindrique avec une longueur  $L_f = 0.15$  mm et un diamètre  $d_f = 10$   $\mu\text{m}$  ( $L_f/d_f = 15$ ). La poutre est encastree d'un côté et soumise à une force de flexion ( $F = 2$  kN) sur l'autre extrémité libre (figure 3.3). Les propriétés effectives de cette poutre ont été déjà étudiées dans le chapitre 2 et une comparaison entre les résultats de nos éléments composites de membrane avec les résultats expérimentaux de Tian et al. [39] est donnée dans le tableau 2.1. Afin de comparer les courbes force-déplacement des éléments PFT3 et PFQ4 avec celles des éléments CPS3 et CPS4 d'ABAQUS, nous utilisons les propriétés mécaniques isotropes déterminées expérimentalement par Tian et al. [39]. La poutre composite est modélisée par 625 éléments quadrilatères et 714 éléments triangulaires comme montré sur la figure 3.4.

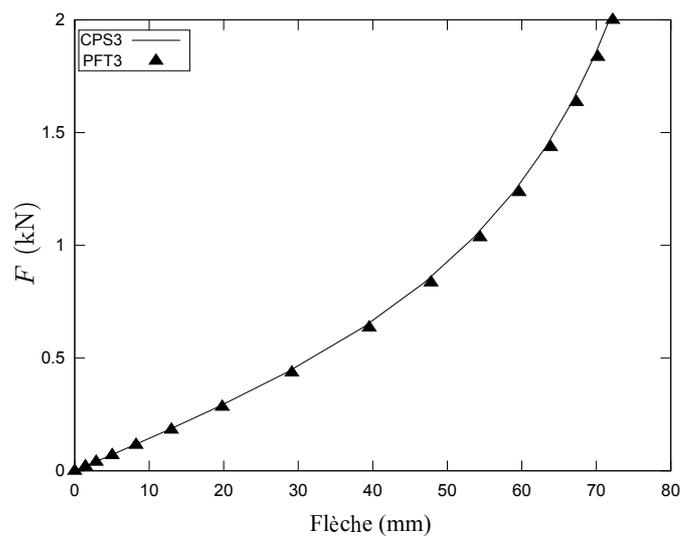


**FIGURE 3.3 :** Poutre en alliage de magnésium renforcée par des fibres courtes de carbone aléatoirement réparties soumise à une force de flexion.



**FIGURE 3.4 :** Modélisation de la poutre en alliage de magnésium renforcée par des fibres courtes de carbone par : (a) 714 éléments triangulaires et (b) 625 éléments quadrilatères.

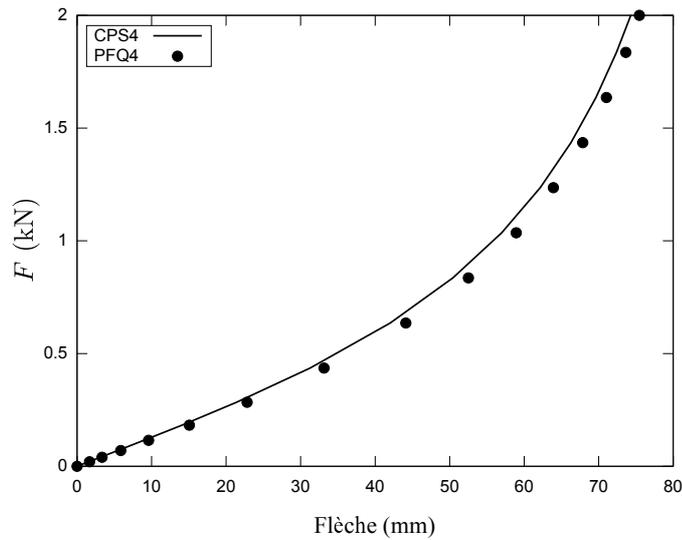
Les figures 3.5 et 3.6 montrent les courbes force-flèche des éléments triangulaires et quadrilatères. Les résultats obtenus indiquent un très bon accord entre les résultats de PFT3 et PFQ4 et ceux obtenus avec les éléments CPS3 et CPS4 d'ABAQUS en utilisant les propriétés homogénéisées.



**FIGURE 3.5 :** Courbe force-flèche de la poutre cantilever renforcée par des fibres courtes de carbone obtenue par les éléments triangulaires.

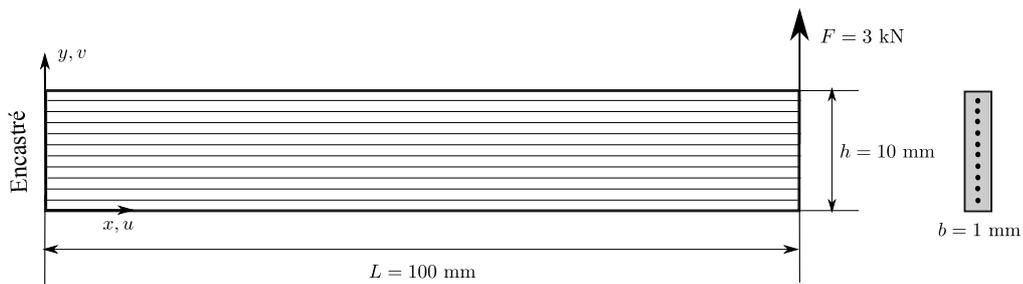
### 3.4.2 Poutre composite cantilever renforcée par des fibres unidirectionnelles soumise à une charge de flexion

Nous considérons dans ce deuxième cas test non-linéaire une poutre composite constituée de la même matrice en alliage de magnésium que l'exemple précédent et renforcée par 20 fibres unidirectionnelles (UD) en carbone T300 également espacées comme le montre



**FIGURE 3.6 :** Courbe force-flèche de la poutre cantilever renforcée par des fibres courtes de carbone obtenue par les éléments quadrilatères.

la figure 3.7. Les fibres de carbone possèdent une forme cylindrique de longueur  $L_f = 100$  mm et de diamètre  $d_f = 0.35$  mm. Cette poutre est encastree du côté gauche et soumise à une force de flexion  $F = 3$  kN sur son côté droit. La matrice et les fibres présentent les mêmes propriétés élastiques que l'exemple précédent. Pour comparer les courbes force-flèche de PFT3 et PFQ4 avec CPS3 et CPS4, nous avons considéré les propriétés élastiques déduites de la loi des mélanges et résumées dans le tableau 2.2. La poutre composite est modélisée par  $100 \times 10$  éléments quadrilatères ou 1400 éléments triangulaires.



**FIGURE 3.7 :** Poutre en alliage de magnésium renforcée par 20 fibres UD de carbone soumise à une force de flexion transversale.

Les figures 3.8 et 3.9 montrent les courbes force-flèche des éléments triangulaires et quadrilatères. Les résultats obtenus indiquent encore une fois un bon accord entre les résultats de PFT3 et PFQ4 et ceux obtenus avec les éléments CPS3 et CPS4 d'ABAQUS en utilisant les propriétés homogénéisées.

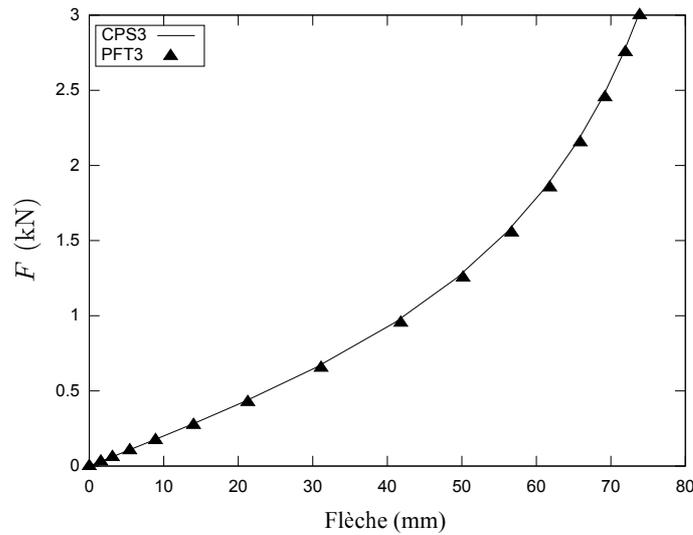


FIGURE 3.8 : Courbe force-flèche de la poutre cantilever renforcée par 20 fibres UD de carbone obtenue par les éléments triangulaires.

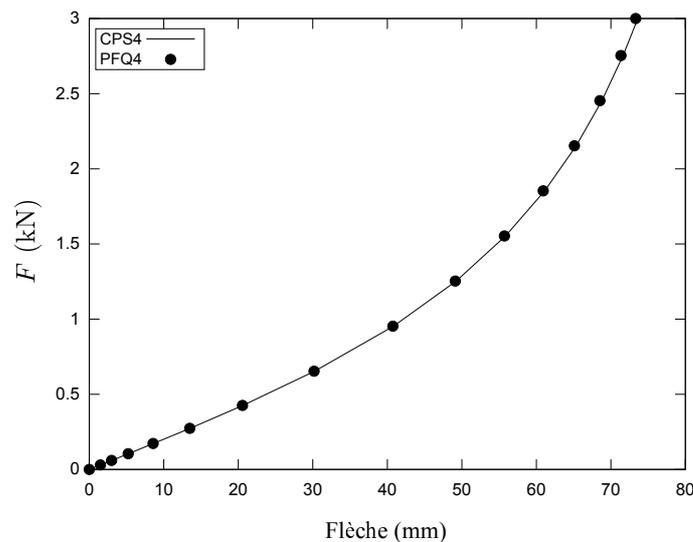


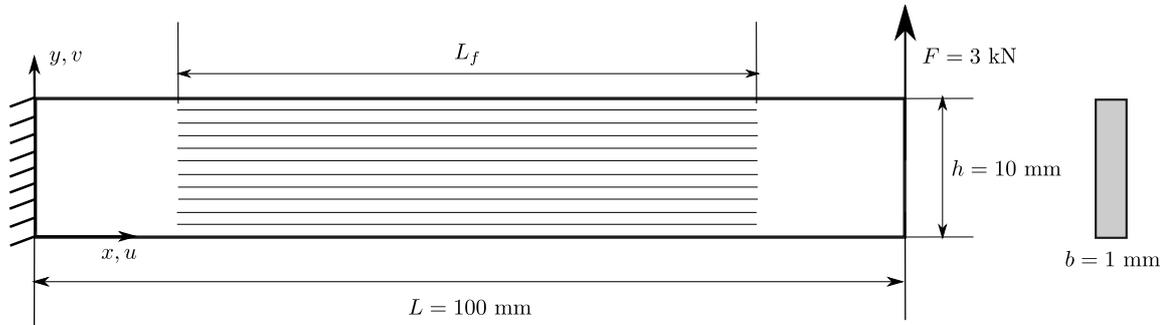
FIGURE 3.9 : Courbe force-flèche de la poutre cantilever renforcée par 20 fibres UD de carbone obtenue par les éléments quadrilatères.

### 3.4.3 Influence de la longueur des fibres sur la réponse d'une poutre cantilever renforcée par des fibres unidirectionnelles

Dans ce troisième cas test, nous étudions l'influence de la longueur des fibres unidirectionnelles sur la réponse de la poutre composite définie dans l'exemple précédent (figure 3.10). Cet exemple est inspiré du travail de Radtke et al. [5] où ils ont étudié la réponse d'un échantillon composite de dimensions  $4 \times 4 \text{ mm}^2$  renforcé par une seule fibre centrale de longueur variable. Les 20 fibres de carbone sont également espacées et elles ont toujours

une forme cylindrique de diamètre  $d_f = 0.35$  mm et de longueur variable  $L_f = 30, 50, 70$  et 100 mm. La poutre composite est maillée par 1000 éléments PFQ4 ou 1448 éléments PFT3 et elle est soumise à une force de flexion  $F = 3$  kN. En raison de la difficulté d'estimer analytiquement les propriétés élastiques effectives de la poutre composite avec des fibres de longueur variable (car la distribution des fibres dans la matrice n'est plus homogène quand leur longueur est diminuée), nous montrons sur les figures 3.11 et 3.12 uniquement les réponses de PFQ4 et de PFT3, respectivement.

Comme prévu, l'augmentation de la longueur des fibres conduit à une rigidification de la réponse de la poutre composite et ceci est bien décrit par les deux éléments composites PFQ4 et PFT3. D'autre part, cet exemple montre que nous pouvons, grâce à l'approche de la fibre projetée, étudier des structures composites dont le renfort n'est pas distribué d'une manière uniforme dans la matrice, ce qui est impossible par les modèles analytiques.



**FIGURE 3.10** : Poutre composite cantilever renforcée par des fibres UD de carbone de longueur variable, soumise à une force de flexion transversale.

### 3.4.4 Poutre annulaire en béton renforcée par des fibres en acier

Ce cas test est inspiré du travail de Battini [44]. Nous considérons une poutre annulaire mince en béton renforcée par quatre fibres circulaires en acier. Cette poutre mince est encastrée à ses deux extrémités et soumise à une charge concentrée  $2F$ . Grâce à la symétrie du problème, nous limitons l'étude à la moitié de la poutre (figure 3.13). Cet exemple comporte du flambement par point limite et la courbe charge-déplacement présente une rigidité négative sans instabilité de type snap-back. Pour pouvoir résoudre ce problème en statique, nous utilisons un pilotage en déplacement en imposant au point A un déplacement vertical maximum de -170 cm et nous déduisons par la suite la force de réaction  $F$ . Ce problème peut être aussi résolu en utilisant un algorithme à longueur d'arc (Riks) disponible dans ABAQUS et nous obtenons les mêmes résultats. Les fibres en acier ont une section circulaire de diamètre  $\phi_f = 0.5$  cm. Comme expliqué dans le chapitre 2,

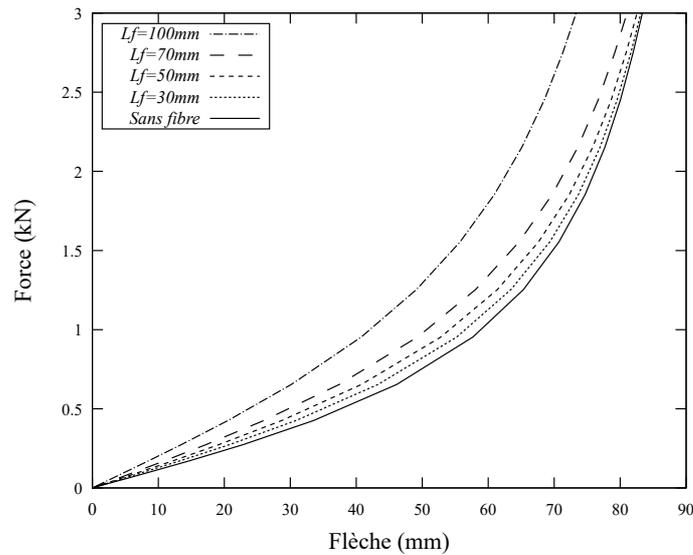


FIGURE 3.11 : Courbes force-flèche de la poutre cantilever renforcée par des fibres UD de carbone de longueur variable obtenues par l'élément PFQ4.

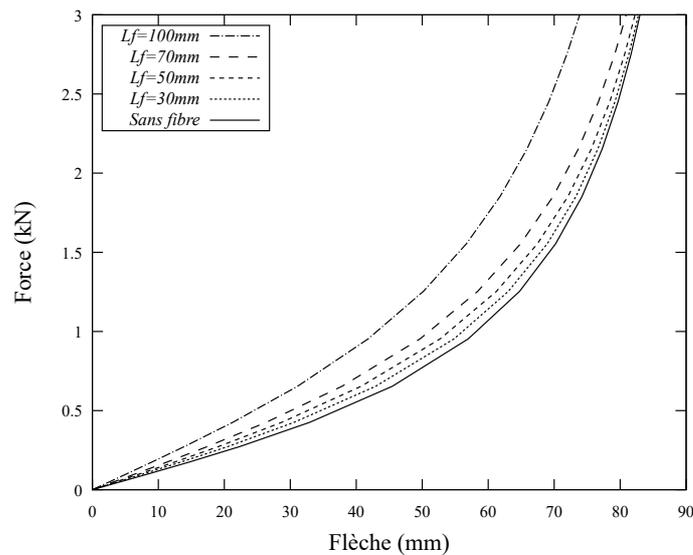


FIGURE 3.12 : Courbes force-flèche de la poutre cantilever renforcée par des fibres UD de carbone de longueur variable obtenues par l'élément PFT3.

les fibres sont représentées par des segments de droite avec la version actuelle de l'approche de la fibre projetée. Par conséquent, les fibres en acier sont modélisées par 10 et 100 segments de droite (figure 3.14a). En guise de comparaison, une courbe de référence a été obtenue en considérant un modèle 3D utilisant l'élément hexaédrique à 20 noeuds C3D20 d'ABAQUS comme décrit sur la figure 3.14b (24768 éléments C3D20 avec 360108 DDLs au total). Pour la modélisation 2D, le domaine de la matrice est discrétisé par 2064 éléments quadrilatères (6993 DDLs). Pour comparer la réponse de PFQ4 avec celle de

CPS4, les propriétés élastiques effectives de la poutre en béton armée ont été estimées d'abord par la loi des mélanges et ensuite par l'approche de la fibre projetée en utilisant l'élément PFQ4. Pour cette dernière estimation, un volume élémentaire représentatif de la poutre de dimensions  $5 \times 5 \text{ cm}^2$  a été maillé par 625 éléments PFQ4 et soumis à trois chargements séparément comme expliqué dans l'exemple 2.4.1. Les propriétés effectives de la poutre sont résumées dans le tableau 3.1. Dans ce cas, nous observons un écart relativement important entre les deux méthodes qui est lié à l'hétérogénéité de la poutre (faible nombre de fibres dans la section).

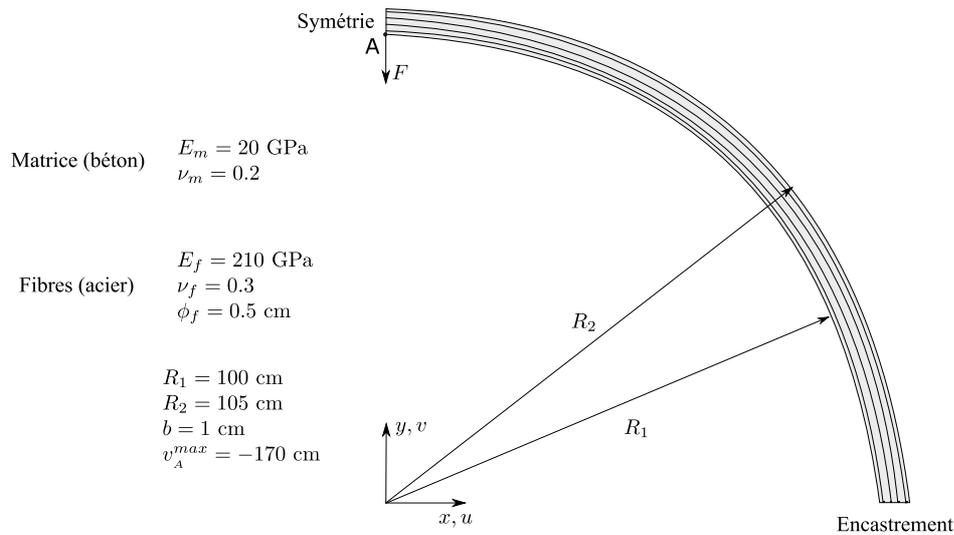


FIGURE 3.13 : Demi poutre annulaire en béton renforcée par quatre fibres en acier

La figure 3.15 montre les courbes charge-déplacement des éléments quadrilatères PFQ4 et CPS4 comparées à la courbe de référence obtenue par C3D20 (il convient de noter que l'élément PFT3 présente approximativement la même solution que l'élément PFQ4). Les résultats obtenus montrent que la réponse de PFQ4 est en très bon accord avec la réponse de référence de C3D20. Nous remarquons aussi que la représentation des fibres circulaires par 10 et 100 segments de droite donne des résultats équivalents. Contrairement à l'élément PFQ4, les résultats de CPS4 en utilisant les propriétés homogénéisées du tableau 3.1 sont imprécis et très loin de la courbe de référence. Ceci montre que l'homogénéisation n'est pas appropriée dans le cas d'un matériau composite à faible nombre de fibres.

### 3.4.5 Poutre composite cantilever soumise à une charge uniformément répartie

Dans ce cinquième exemple proposé par Sampaio et al. [35], nous étudions le comportement non-linéaire géométrique d'une poutre composite cantilever soumise à une charge

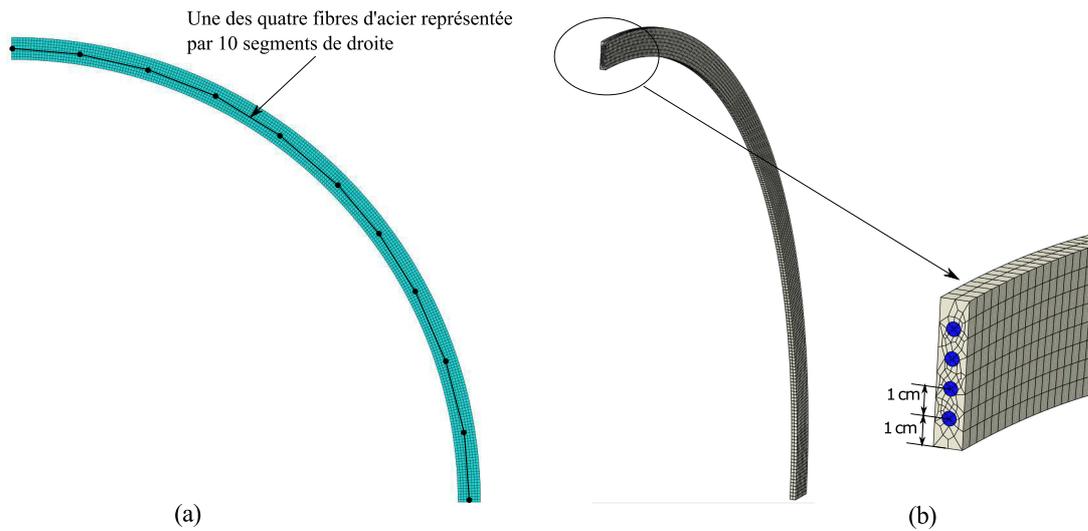


FIGURE 3.14 : Modélisation de la demi poutre annulaire : (a) Modèle 2D maillé par 2064 éléments quadrilatères et (b) Modèle 3D maillé par 24768 éléments C3D20.

TABLE 3.1 : Comparaison entre les propriétés effectives locales de la poutre en béton armé prédites par PFQ4 et la loi des mélanges (1 est la direction locale des fibres et 2 est la direction radiale).

|                | PFQ4   | Loi des mélanges | Erreur (%) |
|----------------|--------|------------------|------------|
| $E_1$ (GPa)    | 53.938 | 49.830           | 8.244      |
| $E_2$ (GPa)    | 21.519 | 23.311           | -7.687     |
| $\nu_{12}$     | 0.205  | 0.216            | -5.092     |
| $\nu_{21}$     | 0.085  | 0.101            | -15.841    |
| $G_{12}$ (GPa) | 8.670  | 9.699            | -10.609    |

uniformément répartie  $q = 50$  N/cm. Comme montré sur la figure 3.16, la poutre est renforcée par deux fibres longues ayant la même longueur que la poutre  $L_f = 300$  cm et une section transversale  $A_f = 0.1 \times 1$  cm<sup>2</sup>. La poutre composite est maillée par  $30 \times 1$ ,  $60 \times 2$ ,  $90 \times 3$  et  $150 \times 5$  éléments quadrilatères PFQ4. Le déplacement transversal maximum au point A appartenant à l'extrémité libre de la poutre, est comparé à la solution non-linéaire donnée par Sampaio et al. [35]. Ce dernier résultat a été obtenu en discrétisant le domaine de la matrice par 300 éléments triangulaires de membrane quadratiques (avec 1342 DDLs) et les fibres par 120 éléments barres linéaires. Le tableau 3.2 résume les flèches maximales obtenues au point A en utilisant les quatre maillages réguliers et comparées à la solution de référence. D'autre part, une modélisation 3D utilisant 6000 éléments C3D20 (132234 DDLs) a été aussi considérée pour obtenir une courbe non-linéaire force-déplacement de

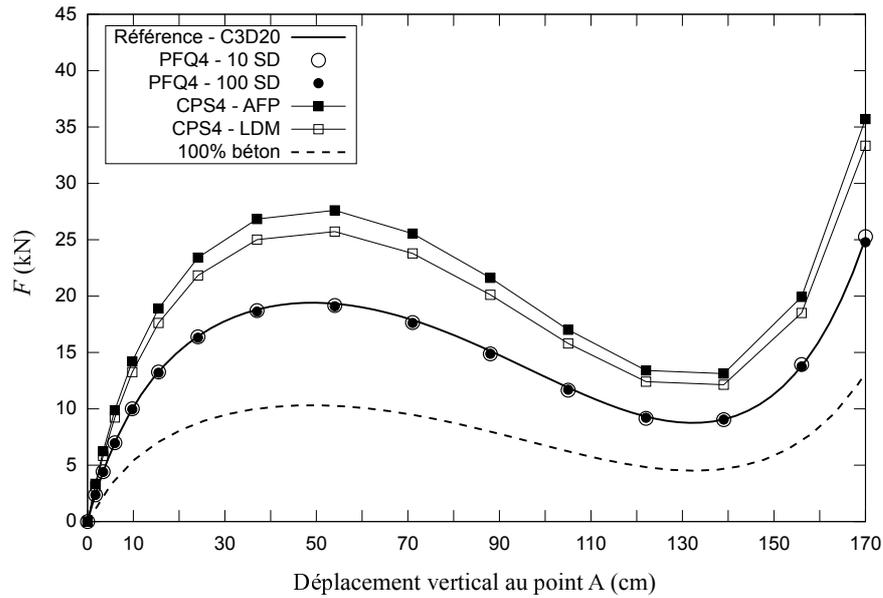


FIGURE 3.15 : Courbes force-déplacement de la poutre annulaire obtenues par les éléments quadrilatères (SD : Segments de Droite, AFP : Approche de la Fibre Projetée et LDM : Loi des Mélanges).

référence étant donné que Sampaio et al. [35] n'en ont pas présenté dans leur article. Nous montrons sur la figure 3.17 les courbes charge-déplacement de l'élément PFQ4 en utilisant les quatre maillages réguliers et comparées à la solution de référence 3D.

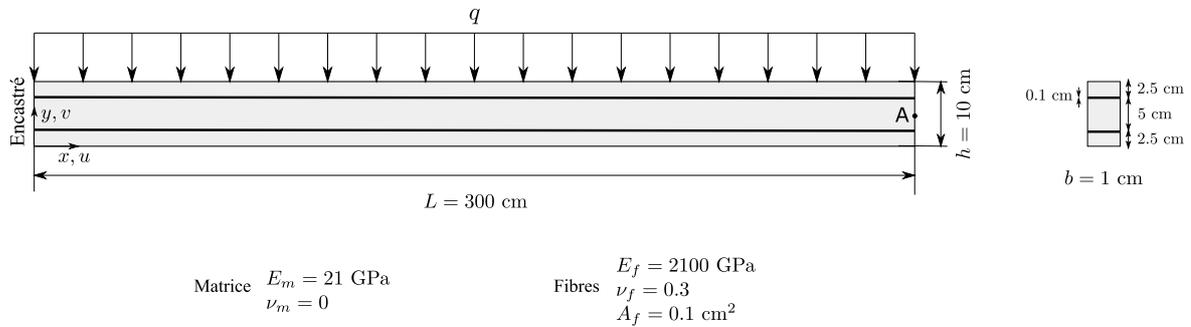


FIGURE 3.16 : Poutre composite cantilever renforcée par deux fibres longues et soumise à une charge uniformément répartie.

Le tableau 3.2 montre que l'élément composite quadrilatère PFQ4 converge correctement vers le déplacement de référence de Sampaio et al. [35] quand le maillage est affiné. De plus, les résultats de la figure 3.17 montrent que la solution non-linéaire de PFQ4 avec le maillage  $150 \times 5$  est en très bon accord avec la courbe de référence de C3D20.

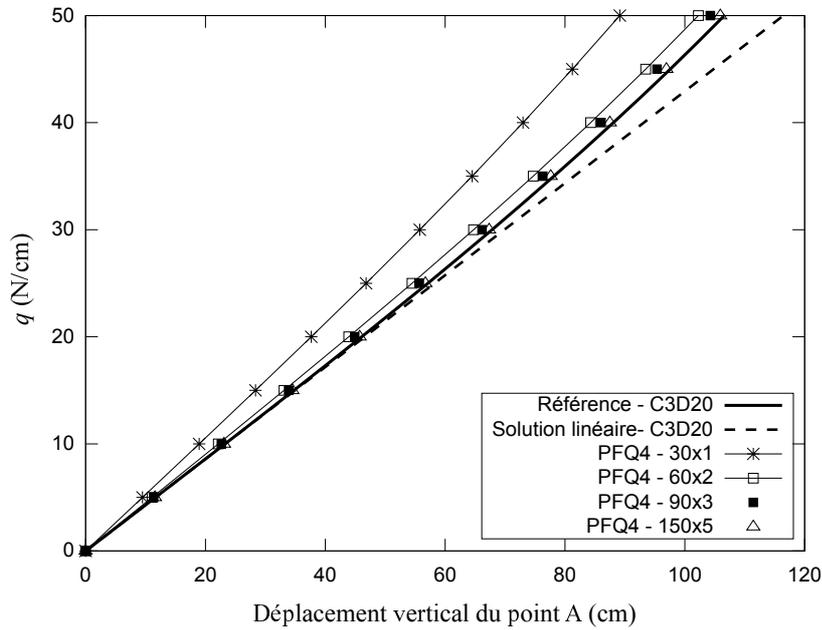


FIGURE 3.17 : Courbes charge-déplacement de la poutre cantilever renforcée par deux fibres longues et soumise à une charge uniformément répartie.

TABLE 3.2 : Déplacement transversal maximum au point A (en cm) (le chiffre entre les parenthèses indique le nombre total de DDLs dans le modèle)

| Maillage | Sampaio et al. (2013) | PFQ4              | Erreur (%) |
|----------|-----------------------|-------------------|------------|
| 30 × 1   | 106.278<br>(1342)     | 89.150<br>(124)   | -16.115    |
| 60 × 2   | 106.278               | 102.261<br>(366)  | -3.779     |
| 90 × 3   | 106.278               | 104.259<br>(728)  | -1.899     |
| 150 × 5  | 106.278               | 105.914<br>(1812) |            |

## 3.5 Conclusion

Dans ce troisième chapitre, nous avons étendu la formulation des éléments finis composites bidimensionnels PFT3 et PFQ4 afin d'analyser le comportement non-linéaire géométrique des solides composites plans. Nous avons adopté la formulation lagrangienne totale avec de grands déplacements et petites déformations pour décrire leur mouvement. Cinq cas tests de validation avec différentes distributions des fibres ont été étudiés pour évaluer la précision des éléments finis non-linéaires développés. Les résultats obtenus sont en bon accord avec les solutions de référence et montrent en particulier que l'approche de la fibre projetée permet d'étudier correctement le comportement non-linéaire géométrique des solides composites 2D à faible densité de fibres.

Dans le chapitre suivant, nous présentons une extension de l'approche de la fibre projetée afin de pouvoir étudier des structures composites tridimensionnelles.



# Chapitre 4

## Formulation tridimensionnelle de l'approche de la fibre projetée

### Sommaire

---

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| <b>4.1</b> | <b>Introduction</b>   | <b>84</b> |
| <b>4.2</b> | <b>Formulation linéaire de PFH8</b>   | <b>84</b> |
| 4.2.1      | Formulation faible de l'équilibre mécanique   | 84        |
| 4.2.2      | Matrice de rigidité de l'élément H8   | 86        |
| 4.2.3      | Matrice de rigidité de l'élément fibre 3D   | 87        |
| 4.2.4      | Stratégie de couplage et matrice de rigidité de l'élément PFH8  | 88        |
| <b>4.3</b> | <b>Formulation non-linéaire géométrique de PFH8</b>   | <b>90</b> |
| 4.3.1      | Formulation faible de l'équilibre mécanique   | 90        |
| 4.3.2      | Matrice tangente de l'élément H8  | 91        |
| 4.3.3      | Matrice tangente de l'élément fibre 3D  | 93        |
| 4.3.4      | Matrice tangente de l'élément composite PFH8  | 94        |
| <b>4.4</b> | <b>Cas tests de validation</b>  | <b>95</b> |
| 4.4.1      | Évaluation des propriétés mécaniques d'un matériau composite renforcé par des fibres courtes              | 95        |
| 4.4.2      | Estimation des propriétés effectives d'une plaque composite sandwich cousue                               | 101       |
| 4.4.3      | Estimation des propriétés effectives d'une plaque composite sandwich tissée                               | 104       |
| 4.4.4      | Poutre composite cantilever 3D renforcée par des fibres courtes et soumise à une charge de flexion        | 105       |
| 4.4.5      | Plaque composite en polypropylène renforcée par des fibres UD de verre soumise à un chargement de torsion | 107       |

|            |                                |            |
|------------|--------------------------------|------------|
| 4.4.6      | Poutre circulaire 3D . . . . . | 108        |
| <b>4.5</b> | <b>Conclusion . . . . .</b>    | <b>111</b> |

---

---

## 4.1 Introduction

Dans ce dernier chapitre, nous proposons une extension 3D de l'approche de la fibre projetée plane présentée dans les chapitres 2 et 3, afin de pouvoir étudier des structures composites de forme quelconque, et pour lesquelles il est difficile de faire des approximations planes. Nous présentons en particulier les formulations linéaire et non-linéaire géométrique d'un nouvel élément fini composite hexaédrique à huit nœuds, baptisé PFH8 (Projected Fiber 8-node Hexahedral element). Dans ce cas, la matrice est modélisée par des éléments hexaédriques standards à huit noeuds (H8) et le renfort est représenté par des éléments barres 3D à deux noeuds.

## 4.2 Formulation linéaire de PFH8

### 4.2.1 Formulation faible de l'équilibre mécanique

Considérons un solide composite 3D déformable comme le montre la figure 4.1. Le principe des travaux virtuels (PTV) correspondant s'écrit en considérant un champ de déplacements virtuels  $\delta \underline{u}$  :

$$\delta w = \underbrace{\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV}_{\delta w_{int}} - \underbrace{\left( \int_{\partial V} T_i \delta u_i dS + \int_V f_i^v \delta u_i dV \right)}_{\delta w_{ext}} \quad (4.1)$$

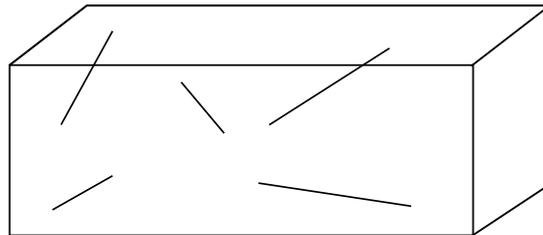


FIGURE 4.1 : Solide composite 3D.

L'approximation par éléments finis de l'équation (4.1) est construite en divisant le solide composite 3D en plusieurs domaines élémentaires comme illustré sur la figure 4.2. Nous nous basons sur l'approche de la fibre projetée, introduite au chapitre 2, pour modéliser le comportement de ce solide composite. En conséquence, nous développons un élément fini solide composite baptisé PFH8 qui représente une unité du domaine de la matrice et les fibres qui la traversent. Ces fibres (ou parties des fibres initiales) sont modélisées par des éléments barres 3D à deux noeuds. Afin de simplifier la présentation des formulations

linéaire et non-linéaire, nous considérons un élément matrice traversé par une seule fibre comme le montre la figure 4.3. Sur cette dernière figure, il apparaît que l'élément composite PFH8 résulte de la combinaison de l'élément standard H8 (hexaèdre à huit noeuds) et de l'élément barre 3D à deux noeuds qui modélise la fibre traversant l'élément matrice. Au niveau élémentaire, la forme faible de l'équilibre (4.1) devient :

$$\delta w = \delta w_{int}^m + \delta w_{int}^f - \delta w_{ext} \quad (4.2)$$

$\delta w_{int}^m$  et  $\delta w_{int}^f$  sont les travaux virtuels internes des éléments matrice et fibre 3D, respectivement.

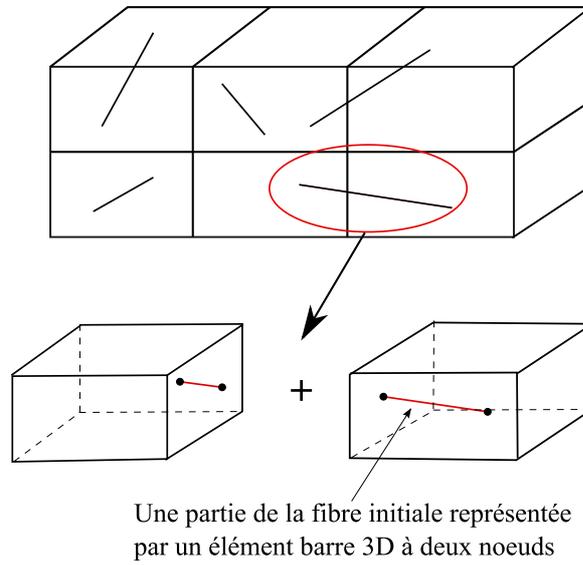


FIGURE 4.2 : Maillage du solide composite 3D basé sur l'approche de la fibre projetée.

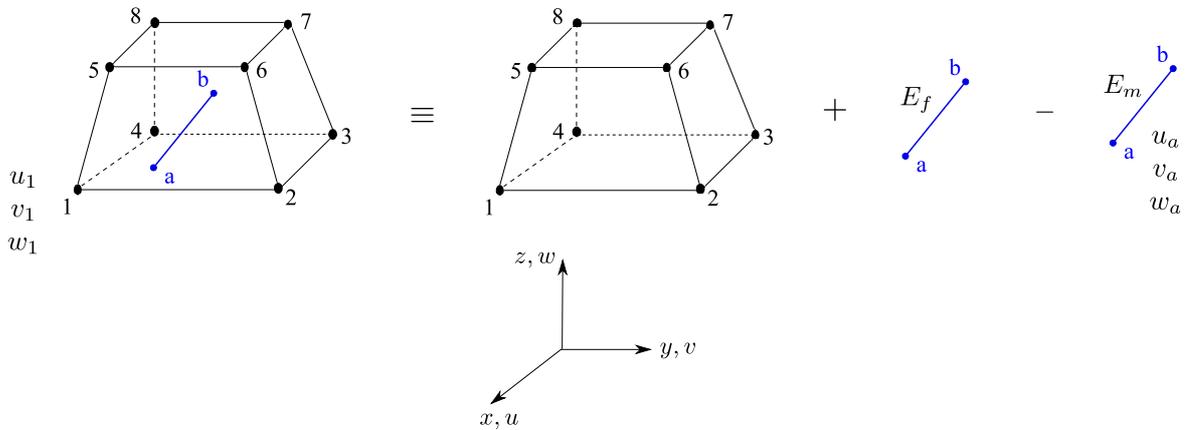


FIGURE 4.3 : Élément fini composite PFH8 basé sur l'approche de la fibre projetée.

## 4.2.2 Matrice de rigidité de l'élément H8

Le travail virtuel interne  $\delta w_{int}^m$  d'un élément matrice H8 est donné sous cette forme matricielle :

$$\delta w_{int}^m = \int_{V^m} \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV^m \quad (4.3)$$

avec  $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{xx} \varepsilon_{yy} \varepsilon_{zz} \gamma_{xy} \gamma_{xz} \gamma_{yz}\}^T$  et  $\{\sigma\} = \{\sigma_{xx} \sigma_{yy} \sigma_{zz} \sigma_{xy} \sigma_{xz} \sigma_{yz}\}^T$  sont les vecteurs des déformations et des contraintes de l'élément matrice.

Le champ de déplacements de l'élément matrice H8 est défini par l'approximation suivante :

$$\begin{Bmatrix} u^m \\ v^m \\ w^m \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i(r, s, t) \begin{Bmatrix} u_i^m \\ v_i^m \\ w_i^m \end{Bmatrix} ; \quad -1 \leq r, s, t \leq 1 \quad (4.4)$$

$N_i(r, s, t)$  sont les fonctions d'interpolation associées à l'élément H8. Elles sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1-t) & ; & \quad N_2 = \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1-t) \\ N_3 &= \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1-t) & ; & \quad N_4 = \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1-t) \\ N_5 &= \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1+t) & ; & \quad N_6 = \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1+t) \\ N_7 &= \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1+t) & ; & \quad N_8 = \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1+t) \end{aligned} \quad (4.5)$$

En utilisant les approximations (4.4), il est possible de trouver une matrice  $[B^m]$  de dimensions  $(6 \times 24)$  qui lie le vecteur des déformations  $\{\varepsilon\}$  au vecteur des degrés de liberté  $\{u_n^m\} = \{\dots | u_i^m, v_i^m, w_i^m | \dots i = 1, 8\}$  de l'élément matrice :

$$\{\varepsilon\} = [B^m] \{u_n^m\} ; \quad [B^m] = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,y} & 0 \\ \dots & 0 & 0 & N_{i,z} & \dots i = 1, 8 \\ N_{i,y} & N_{i,x} & 0 \\ N_{i,z} & 0 & N_{i,x} \\ 0 & N_{i,z} & N_{i,y} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

En utilisant la matrice d'élasticité 3D  $[C^m]$  qui lie le vecteur des contraintes au vecteur des déformations, le travail virtuel interne de l'élément matrice H8 est approché par :

$$\delta w_{int}^m = \{\delta u_n^m\}^T \underbrace{\int_{V^m} [B^m]^T [C^m] [B^m] dV}_{[K^m]} \{u_n^m\} \quad (4.7)$$

$[K^m]$  est la matrice de rigidité linéaire de l'élément H8 de dimensions  $(24 \times 24)$ .

### 4.2.3 Matrice de rigidité de l'élément fibre 3D

La fibre traversant l'élément matrice H8 est modélisée par un élément barre 3D à deux noeuds comme le montre la figure 4.4. Il convient de noter que l'expression de la matrice de rigidité d'un élément fibre 3D dans son repère local est la même que celle de l'élément fibre 2D donnée dans le chapitre 2 (voir équation (2.9)). Afin de faciliter la projection des variables de l'élément fibre sur celles de l'élément matrice correspondant,  $\delta w_{int}^f$  doit être réexprimé dans le repère global. Pour cela, nous introduisons une matrice de passage  $[T]$  de dimensions  $(2 \times 6)$  pour lier les vecteurs des degrés de liberté de l'élément barre dans les repères local et global ( $\{\bar{u}_n^f\}$  et  $\{u_n^f\}$ , respectivement) :

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \bar{u}_a^f \\ \bar{u}_b^f \end{Bmatrix}}_{\{\bar{u}_n^f\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} t_x & t_y & t_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_x & t_y & t_z \end{bmatrix}}_{[T]} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_a^f \\ v_a^f \\ w_a^f \\ u_b^f \\ v_b^f \\ w_b^f \end{Bmatrix}}_{\{u_n^f\}} = [T]\{u_n^f\} \quad (4.8)$$

$t_x$ ,  $t_y$  et  $t_z$  sont les coordonnées du vecteur tangent  $\underline{t}$  de l'élément barre dans le repère global et sont données par :

$$t_x = (x_b - x_a)/L \quad ; \quad t_y = (y_b - y_a)/L \quad ; \quad t_z = (z_b - z_a)/L \quad (4.9)$$

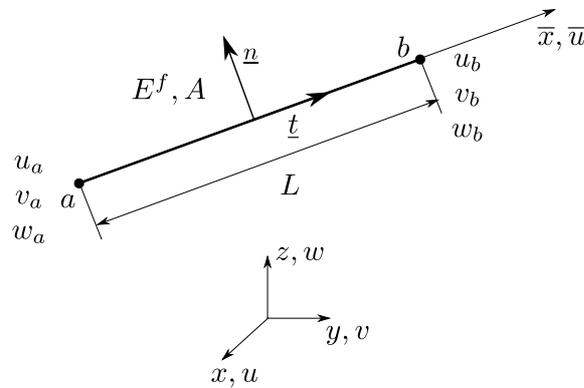


FIGURE 4.4 : Élément fini de barre à deux noeuds 3D représentant une fibre traversant un élément matrice H8.

En utilisant la relation (4.8), le travail virtuel interne de l'élément barre dans le repère global s'écrit :

$$\delta w_{int}^f = \{\delta u_n^f\}^T \underbrace{[T]^T [K_{loc}^f] [T]}_{[K_{glob}^f]} \{u_n^f\}, \quad [K_{loc}^f] = \frac{E_f^* A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

avec  $E_f^* = E_f - E_m$ .

#### 4.2.4 Stratégie de couplage et matrice de rigidité de l'élément PFH8

Les degrés de liberté de l'élément fibre 3D sont projetés directement sur ceux de l'élément matrice H8 qui les contient pour éviter d'augmenter le nombre de variables du problème. La fusion géométrique des noeuds  $a$  et  $b$  de l'élément fibre dans l'espace de l'élément matrice H8 passe par l'expression de leurs coordonnées isoparamétriques ( $\xi_a, \eta_a, \zeta_a, \xi_b, \eta_b$  et  $\zeta_b$ ) en fonction de celles de l'élément H8 ( $r_i, s_i, t_i, i = 1, 8$ ) en utilisant des fonctions de forme géométriques. Pour cela, nous utilisons la méthode des coordonnées volumiques [45], comme illustré sur la figure 4.5. Cette dernière figure montre les six faces de l'élément H8 utilisées pour construire les fonctions de forme géométriques et un point P qui représente un des deux noeuds de l'élément fibre 3D.  $V_1, V_2, \dots, V_6$  sont les volumes des six tétraèdres construits à partir du point P et les noeuds des six faces de l'élément H8. Ces volumes sont utilisés pour construire les fonctions de forme géométriques  $\phi_i$  de l'élément H8 comme suit :

$$\begin{aligned} \phi_1 &= (V_3 \times V_4 \times V_6) / V & ; & \quad \phi_2 = (V_2 \times V_3 \times V_6) / V \\ \phi_3 &= (V_1 \times V_2 \times V_3) / V & ; & \quad \phi_4 = (V_1 \times V_3 \times V_4) / V \\ \phi_5 &= (V_4 \times V_5 \times V_6) / V & ; & \quad \phi_6 = (V_2 \times V_5 \times V_6) / V \\ \phi_7 &= (V_1 \times V_2 \times V_5) / V & ; & \quad \phi_8 = (V_1 \times V_4 \times V_5) / V \end{aligned} \quad (4.11)$$

avec

$$V = (V_2 + V_4)(V_3 + V_5)(V_1 + V_6) \quad (4.12)$$

Les coordonnées isoparamétriques du point  $P$  ( $\xi_P, \eta_P, \zeta_P$ ) sont exprimées en fonction des coordonnées naturelles de l'élément H8 en utilisant l'approximation suivante :

$$\xi_P = \sum_{i=1}^8 \phi_i r_i, \quad \eta_P = \sum_{i=1}^8 \phi_i s_i, \quad \zeta_P = \sum_{i=1}^8 \phi_i t_i \quad (4.13)$$

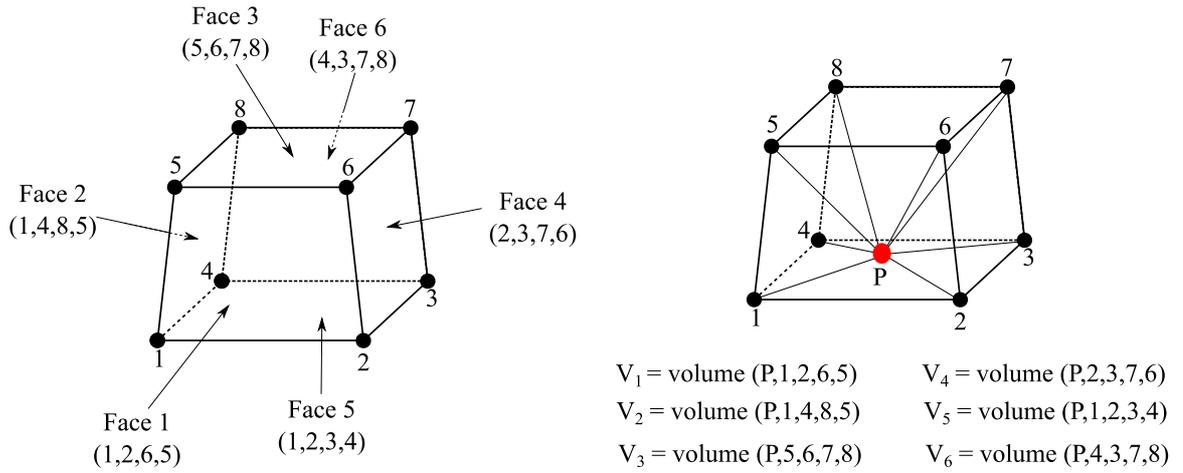


FIGURE 4.5 : Définition des six faces et six volumes utilisés pour construire les fonctions de forme géométriques de l'élément H8.

En utilisant les coordonnées isoparamétriques de l'élément barre, il est possible de trouver une relation entre  $\{u_n^f\}$  et  $\{u_n^m\}$  à travers une matrice  $[P]$  de dimensions  $(6 \times 24)$  :

$$\{u_n^f\} = [P]\{u_n^m\}, \quad [P] = \begin{bmatrix} N_i^a & 0 & 0 & & \\ 0 & N_i^a & 0 & & \\ \dots & 0 & 0 & N_i^a & \dots \quad i = 1, 8 \\ N_i^b & 0 & 0 & & \\ 0 & N_i^b & 0 & & \\ 0 & 0 & N_i^b & & \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

avec

$$N_i^a = N_i(\xi_a, \eta_a, \zeta_a) \quad \text{et} \quad N_i^b = N_i(\xi_b, \eta_b, \zeta_b) \quad (4.15)$$

$N_i$  sont les fonctions de forme de l'élément matrice H8 définies par les relations (4.5).

En utilisant les équations (4.7), (4.10) et (4.14), le travail virtuel interne de l'élément composite PFH8 devient :

$$\delta w_{int}^c = \delta w_{int}^m + \delta w_{int}^f = \{\delta u_n^m\}^T \underbrace{\left[ [K^m] + [P]^T [K_{glob}^f] [P] \right]}_{[K^c]} \{u_n^m\} \quad (4.16)$$

$[K^c]$  est la matrice de rigidité linéaire de l'élément composite PFH8.

## 4.3 Formulation non-linéaire géométrique de PFH8

Dans cette section, nous proposons une extension tridimensionnelle de la formulation non-linéaire géométrique de l'élément PFQ4, présentée dans le chapitre 3. Par conséquent, nous suivrons la même démarche adoptée dans le chapitre 3 basée sur un formalisme Lagrangien total. Nous rappelons que le domaine de la matrice est modélisé par des éléments H8 non-linéaires, tandis que les fibres traversant ces éléments matrices sont modélisées par des éléments barres 3D non-linéaires.

### 4.3.1 Formulation faible de l'équilibre mécanique

Considérons un solide composite 3D, noté  $B$ , soumis à des grands déplacements et des petites déformations. Nous rappelons que la détermination de la configuration finale  $C_f$  de ce solide composite, qui occupait initialement la configuration  $C_0$ , passe par la supposition que la charge totale est appliquée en petits incréments (figure 3.1). Nous adoptons une formulation Lagrangienne totale pour décrire le mouvement de ce solide composite, ce qui implique que toutes les variables du problème sont mesurées par rapport à la configuration initiale  $C_0$ . Nous considérons un intervalle de chargement  $[t_n, t_{n+1}]$  et nous supposons que le solide  $B$  est en équilibre à  $t = t_n$ . Pour la dernière configuration inconnue  $C_2$  entre  $C_n$  et  $C_{n+1}$ , la forme faible de l'équilibre de  $B$  s'écrit (voir le chapitre 3 pour plus de détails) :

$$\underbrace{\int_{0V} {}_0^1 S_{ij} \delta(\Delta E_{ij}) d^0V + \int_{0V} \Delta S_{ij} \delta(\Delta E_{ij}) d^0V}_{\delta({}_0^2 W_{int})} - \delta({}_0^{n+1} W_{ext}) = 0 \quad (4.17)$$

Il convient de noter que  $\delta(\Delta E_{ij})$  est divisé en deux parties  $\delta(\Delta e_{ij})$  et  $\delta(\Delta \eta_{ij})$ , linéaire et non-linéaire en fonction des déplacements inconnus  $\Delta u_i$ , respectivement. Nous obtenons par la suite l'expression finale de la forme faible de l'équilibre de  $B$  utilisée pour développer l'approximation par éléments finis :

$$\underbrace{\int_{0V} C_{ijkl} \Delta e_{kl} \delta(\Delta e_{ij}) d^0V + \int_{0V} {}_0^1 S_{ij} \delta(\Delta \eta_{ij}) d^0V + \int_{0V} {}_0^1 S_{ij} \delta(\Delta e_{ij}) d^0V}_{\delta({}_0^2 W_{int})} - \delta({}_0^{n+1} W_{ext}) = 0 \quad (4.18)$$

L'approximation par éléments finis de l'équation (4.18) est construite en divisant le solide composite 3D en des domaines élémentaires (figure 4.2). Par conséquent, nous présentons dans ce qui suit la formulation non-linéaire géométrique de l'élément PFH8.



$$[B_L^w] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & w_{,x}^m N_{i,x} & & \\ 0 & 0 & w_{,y}^m N_{i,y} & & \\ \cdots & 0 & 0 & w_{,z}^m N_{i,z} & \cdots & i = 1, 8 \\ 0 & 0 & w_{,x}^m N_{i,y} + w_{,y}^m N_{i,x} & & \\ 0 & 0 & w_{,x}^m N_{i,z} + w_{,z}^m N_{i,x} & & \\ 0 & 0 & w_{,y}^m N_{i,z} + w_{,z}^m N_{i,y} & & \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

En utilisant la relation (4.22), l'équation (4.21) devient :

$$\int_{0V^m} \{\delta \Delta e^m\}^T [C^m] \{\Delta e^m\} d^0V^m = \underbrace{\{\delta \Delta u_n^m\}^T \int_{0V^m} [B_L]^T [C^m] [B_L] d^0V^m}_{[K_L^m]} \{\Delta u_n^m\} \quad (4.26)$$

$[K_L^m]$  est la matrice de rigidité linéaire de l'élément matrice H8 de dimensions  $(24 \times 24)$ .

Le deuxième terme de l'équation (4.20) est réécrit comme suit :

$$\int_{0V^m} {}_0^1 S_{ij}^m \delta(\Delta \eta_{ij}^m) d^0V^m = \underbrace{\{\delta \Delta u_n^m\}^T \int_{0V^m} [B_{NL}]^T [{}_0^1 S] [B_{NL}] d^0V^m}_{[K_{NL}^m]} \{\Delta u_n^m\} \quad (4.27)$$

$[B_{NL}]$  et  $[{}_0^1 S]$  sont données par les expressions suivantes :

$$[B_{NL}] = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 & & \\ N_{i,y} & 0 & 0 & & \\ N_{i,z} & 0 & 0 & & \\ 0 & N_{i,x} & 0 & & \\ \cdots & 0 & N_{i,y} & 0 & \cdots & i = 1, 8 \\ 0 & N_{i,z} & 0 & & \\ 0 & 0 & N_{i,x} & & \\ 0 & 0 & N_{i,y} & & \\ 0 & 0 & N_{i,z} & & \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

et

$$[{}_0^1 S] = \begin{bmatrix} [S] & [0] & [0] \\ [0] & [S] & [0] \\ [0] & [0] & [S] \end{bmatrix} ; [S] = \begin{bmatrix} {}_0^1 S_{xx} & {}_0^1 S_{xy} & {}_0^1 S_{xz} \\ {}_0^1 S_{xy} & {}_0^1 S_{yy} & {}_0^1 S_{yz} \\ {}_0^1 S_{xz} & {}_0^1 S_{yz} & {}_0^1 S_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

$[K_{NL}^m]$  est la matrice de rigidité non linéaire de l'élément matrice H8 ayant les mêmes dimensions que la matrice  $[K_L^m]$ .

Le troisième terme de l'équation (4.20) s'écrit en utilisant la relation (4.22) :

$$\int_{0V^m} {}_0^1S_{ij}^m \delta(\Delta e_{ij}^m) d^0V^m = \{\delta\Delta u_n^m\}^T \int_{0V^m} [B_L]^T \{{}_0^1S^m\} d^0V^m \quad (4.30)$$

$\{{}_0^1S^m\}$  est le vecteur des contraintes de Piola-Kirchhoff de l'élément H8 donné par :

$$\{{}_0^1S^m\} = \left\{ {}_0^1S_{xx}^m \quad {}_0^1S_{yy}^m \quad {}_0^1S_{zz}^m \quad {}_0^1S_{xy}^m \quad {}_0^1S_{xz}^m \quad {}_0^1S_{yz}^m \right\}^T \quad (4.31)$$

En utilisant les relations (4.26), (4.27) et (4.30), le travail virtuel interne de l'élément H8 devient :

$$\delta({}_0^2W_{int}^m) = \{\delta\Delta u_n^m\}^T \underbrace{([K_L^m] + [K_{NL}^m])}_{[K_T^m]} \{\Delta u_n^m\} + \{\delta\Delta u_n^m\}^T \int_{0V^m} [B_L]^T \{{}_0^1S^m\} d^0V^m \quad (4.32)$$

$[K_T^m]$  est la matrice tangente de l'élément H8 de dimensions  $(24 \times 24)$ .

### 4.3.3 Matrice tangente de l'élément fibre 3D

La formulation non-linéaire d'un élément barre 3D, représentant une fibre traversant l'élément matrice H8, est une extension tridimensionnelle de la formulation de l'élément barre 2D présentée dans le chapitre 3. Le travail virtuel interne d'un élément barre 3D à la configuration  $C_2$  reste le même que celui de l'élément barre plan :

$$\delta({}_0^2W_{int}^f) = \int_{0V^f} \delta({}_0^2E^f)_0^2S^f d^0V^f = A_0 \int_{-L_0/2}^{L_0/2} \delta({}_0^2E^f)_0^2S^f dx \quad (4.33)$$

où  $L_0$  et  $A_0$  sont, respectivement, la longueur et la section (supposée constante le long de l'élément) de l'élément barre à la configuration initiale  $C_0$ .  ${}_0^2E^f$  et  ${}_0^2S^f$  sont, respectivement, la déformation axiale de Green-Lagrange et sa contrainte conjuguée à la configuration inconnue  $C_2$ . Elles sont données par les expressions suivantes :

$${}_0^2E^f = \frac{L_2^2 - L_0^2}{2L_0^2} \quad ; \quad {}_0^2S^f = \underbrace{(E_f - E_m)}_{E_f^*} {}_0^2E^f \quad (4.34)$$

avec  $L_2$  est la longueur de l'élément barre à la configuration  $C_2$ .

Comme montré dans le chapitre 3, l'approximation de  $\delta({}_0^2W_{int}^f)$  s'écrit en fonction de l'incrément du vecteur des degrés de liberté de l'élément fibre 3D dans le repère global

comme suit :

$$\delta({}_0^2W_{int}^f) = \{\delta\Delta u_n^f\}^T \left[ \underbrace{\left( [K_L^f] + [K_{NL}^f] \right)}_{[K_T^f]} \{\Delta u_n^f\} + \frac{A_0 E_f^* L_1}{L_0} {}_0E^f \{L_1\} \right] \quad (4.35)$$

${}_0E^f$  et  $L_1$  sont, respectivement, la déformation axiale de Green-Lagrange et la longueur de l'élément barre 3D à la configuration  $C_1$ , tandis que le vecteur  $\{L_1\}$  contient les cosinus directeurs du vecteur tangent de l'élément barre à la configuration  $C_1$ .  $[K_T^f]$  est la matrice tangente de l'élément barre 3D définie à partir des matrices  $[K_L^f]$  et  $[K_{NL}^f]$ , les matrices de rigidité linéaire et non-linéaire de l'élément barre 3D, respectivement. Ces deux matrices, de dimensions  $(6 \times 6)$ , sont définies par :

$$[K_L^f] = \frac{A_0 E_f^* L_1^2}{L_0^3} \{L_1\} \{L_1\}^T, \quad [K_{NL}^f] = \frac{A_0 E_f^*}{L_0} {}_0E^f \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

#### 4.3.4 Matrice tangente de l'élément composite PFH8

La projection des variables de l'élément barre 3D non linéaire sur celles de l'élément H8 se fait exactement de la même manière que dans la formulation linéaire en utilisant les fonctions de forme géométriques définies par les relations (4.11). Nous rappelons que ces fonctions de forme nous permettent d'abord de trouver les coordonnées isoparamétriques des noeuds de l'élément barre 3D et ensuite de définir une matrice de passage  $[P]$  qui lie  $\{\Delta u_n^f\}$  à  $\{\Delta u_n^m\}$  (voir la relation (4.14)).

En utilisant les équations (4.32) et (4.35), le travail virtuel interne de l'élément composite PFH8 à la configuration  $C_2$  s'écrit :

$$\delta({}_0^2W_{int}) = \{\delta\Delta u_n^m\}^T \left[ \left( [K_T^m] + [P]^T [K_T^f] [P] \right) \{\Delta u_n^m\} + \int_{0V^m} [B_L]^T \{ {}_0^1S^m \} d^0V^m + \frac{A_0 E_f^* L_1}{L_0} {}_0E^f [P]^T \{L_1\} \right] \quad (4.37)$$

En remplaçant la relation (4.37) dans l'équation (4.19), nous obtenons le système d'équations suivant qui nous permet de déterminer le vecteur inconnu  $\{\Delta u_n^m\}$  :

$$\underbrace{\left( [K_T^m] + [P]^T [K_T^f] [P] \right)}_{[K_T^{eq}]} \{\Delta u_n^m\} = \underbrace{\{ {}_0^{n+1} F_{ext} \} - \int_{0V^m} [B_L]^T \{ {}_0^1 S^m \} d^0V^m - \frac{A_0 E_f^* L_1}{L_0} {}_0^1 E^f [P]^T \{ L_1 \}}_{\{ R^{eq} \}} \quad (4.38)$$

$[K_T^{eq}]$  est la matrice de rigidité tangente équivalente de l'élément composite PFH8 et  $\{ R^{eq} \}$  est son vecteur résidu.

## 4.4 Cas tests de validation

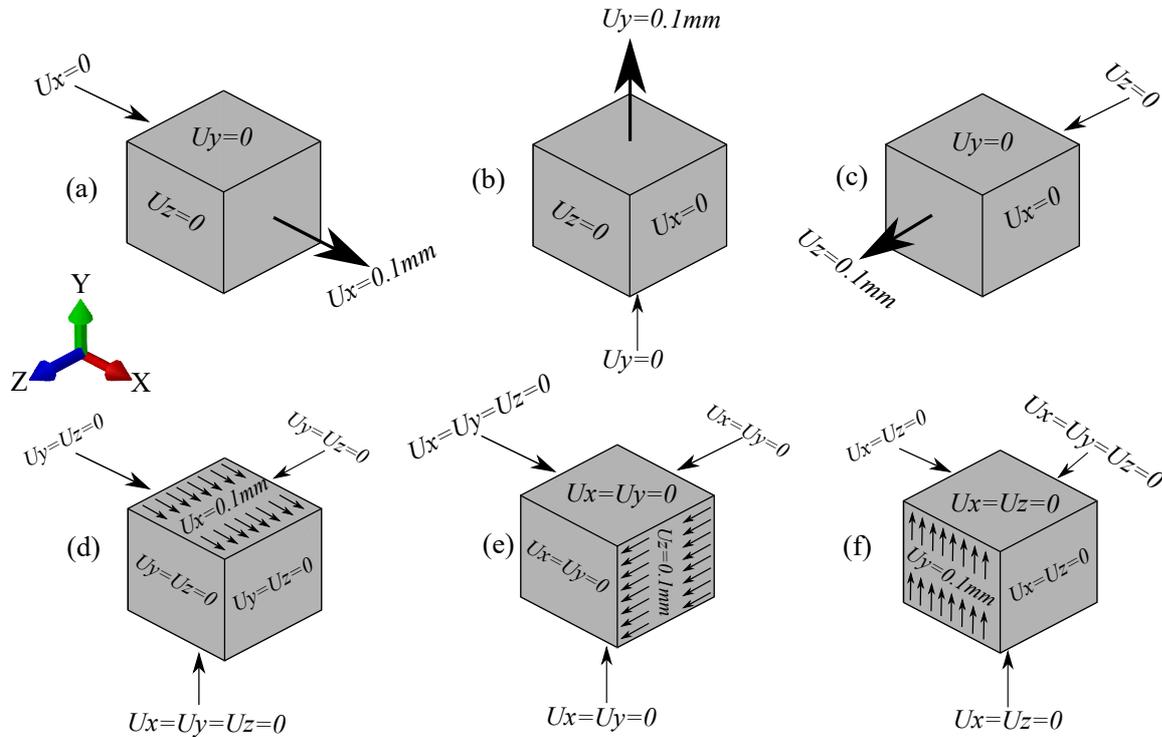
Les versions linéaire et non-linéaire géométrique de l'élément solide composite PFH8 ont été implémentées dans le code commercial ABAQUS via la routine utilisateur UEL. Il convient de rappeler que la matrice tangente et le vecteur résidu de PFH8 sont stockés dans les variables prédéfinies AMATRX et RHS d'ABAQUS, respectivement. Nous rappelons aussi que les modèles numériques des cas tests de validation considérés dans cette section, afin d'évaluer la précision de l'élément composite PFH8, ont été générés par la plateforme KSP à l'aide d'un algorithme développé par H. Kebir. Ce dernier algorithme calcule les intersections entre les fibres discrètes initiales et le maillage de l'espace matrice, comme montré sur la figure 4.2, et génère ensuite le fichier de données. Il convient de noter aussi que nous avons utilisé le logiciel de conception CATIA pour générer la forme complexe des renforts des exemples 4.4.2 et 4.4.3.

### 4.4.1 Évaluation des propriétés mécaniques d'un matériau composite renforcé par des fibres courtes

Ce premier cas test d'évaluation est une généralisation tridimensionnelle de l'exemple 2.4.1 (voir chapitre 2) et divisé en deux grandes parties. D'abord, nous estimons le comportement effectif d'un matériau composite constitué d'une matrice en magnésium AZ91D ( $E_m = 45$  GPa et  $\nu_m = 0.35$ ) renforcée par 10% en volume de fibres courtes de carbone T300 ( $E_f = 230$  GPa et  $\nu_f = 0.25$ ) aléatoirement réparties. Ensuite, nous effectuons une étude paramétrique pour analyser l'influence de quelques paramètres micro-structuraux sur le comportement de ce composite.

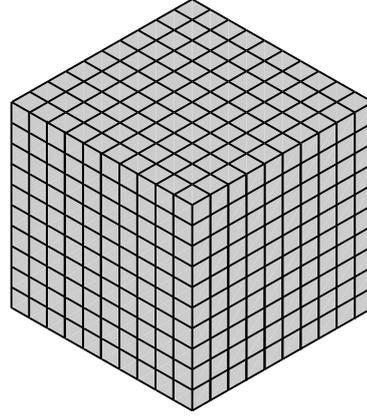
Les fibres courtes utilisées ont une forme cylindrique et un rapport de forme fixe  $L_f/D_f = 15$ . Afin d'estimer les propriétés élastiques effectives de ce matériau, un volume élémen-

taire représentatif (VER) est considéré. Celui-ci, de forme cubique de dimensions  $1 \times 1 \times 1$  mm<sup>3</sup>, est soumis à six types de chargement : trois tests de traction uni-axiale dans les trois directions de l'espace  $x$ ,  $y$  et  $z$ , pour déterminer les modules d'Young effectifs  $E_x$ ,  $E_y$  et  $E_z$  et les coefficients de Poisson  $\nu_{xy}$ ,  $\nu_{xz}$  et  $\nu_{yz}$ , et trois tests de cisaillement pour déterminer les modules de cisaillement  $G_{xy}$ ,  $G_{xz}$  et  $G_{yz}$ . La figure 4.6 montre le VER et les conditions aux limites utilisées pour déterminer ses propriétés élastiques effectives. Par exemple, pour la traction suivant  $x$ , nous appliquons un déplacement uniforme de 0.1 mm dans la direction  $x$  (figure 4.6a) et nous déduisons ensuite la contrainte uniforme dans cette direction, pour estimer le module d'Young effectif  $E_x$ , et les déplacements moyens suivant  $y$  et  $z$ , respectivement, pour estimer les coefficients de Poisson  $\nu_{xy}$  et  $\nu_{xz}$ . Le VER est modélisé par un maillage régulier de  $10 \times 10 \times 10$  éléments PFH8 comme montré sur la figure 4.7.



**FIGURE 4.6 :** VER du matériau composite magnésium/carbone soumis à six chargements : (a) traction simple suivant  $x$ , (b) traction simple suivant  $y$ , (c) traction simple suivant  $z$ , (d) cisaillement dans le plan  $xy$ , (e) cisaillement dans le plan  $xz$ , (f) cisaillement dans le plan  $yz$ .

Nous résumons dans le tableau 4.1 les propriétés effectives prédites par l'élément composite 3D PFH8 et comparées aux valeurs expérimentales de Tian et al. [39] et aux valeurs de l'élément membrane PFQ4. Nous remarquons que les propriétés effectives estimées par PFH8 sont en parfait accord avec les résultats expérimentaux de Tian et al. [39] et que



**FIGURE 4.7 :** *VER du matériau composite magnésium/carbone modélisé par  $10 \times 10 \times 10$  éléments PFH8.*

le comportement du VER est quasi- isotrope en raison de la distribution aléatoire des fibres courtes. De plus, l'élément PFH8 semble être légèrement plus précis que l'élément quadrilatère PFQ4.

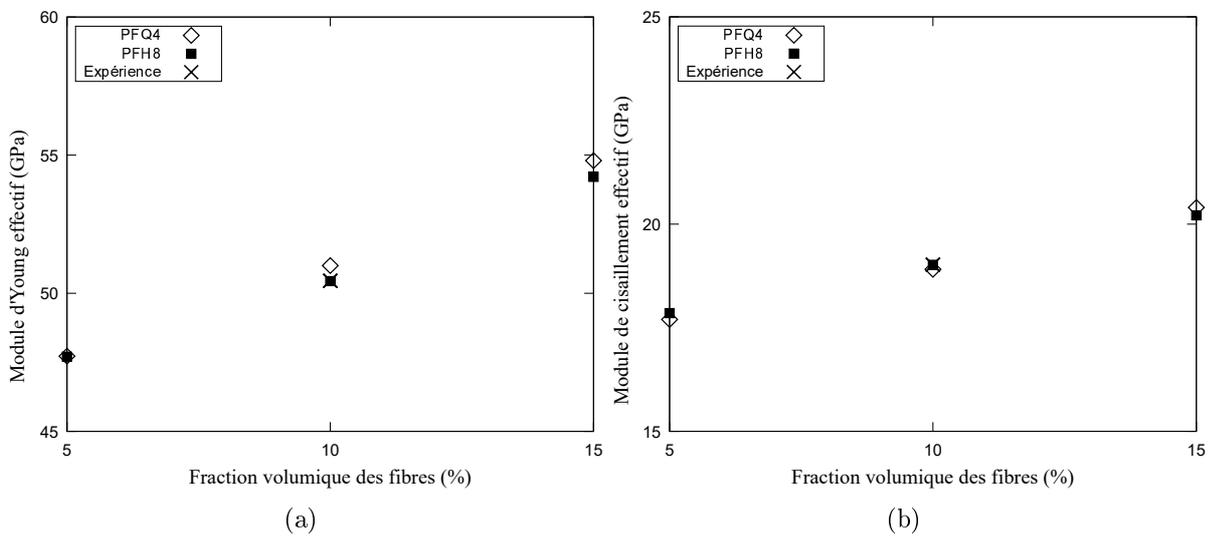
**TABLE 4.1 :** *Propriétés élastiques effectives de la poutre en alliage de magnésium renforcée par des fibres courtes de carbone prédites par PFH8 et comparées aux résultats expérimentaux de Tian et al. [39].*

|                | Expérience [39] | PFH8   | Erreur (%) | PFQ4   | Erreur (%) |
|----------------|-----------------|--------|------------|--------|------------|
| $E_x$ (GPa)    | 50.450          | 50.421 | -0.057     | 50.945 | 0.981      |
| $E_y$ (GPa)    |                 | 50.468 | 0.036      | 50.880 | 0.852      |
| $E_z$ (GPa)    |                 | 50.428 | -0.044     |        |            |
| $\nu_{xy}$     | 0.343           | 0.343  | 0.000      | 0.348  | 0.869      |
| $\nu_{xz}$     |                 | 0.344  | 0.292      |        |            |
| $\nu_{yz}$     |                 | 0.344  | 0.292      |        |            |
| $G_{xy}$ (GPa) | 19.020          | 19.027 | 0.037      | 18.910 | -0.578     |
| $G_{xz}$ (GPa) |                 | 18.991 | -0.152     |        |            |
| $G_{yz}$ (GPa) |                 | 19.032 | 0.066      |        |            |

Dans la deuxième partie de ce cas test de validation, nous proposons une extension 3D de l'étude paramétrique effectuée dans l'exemple 2.4.1 en vue d'analyser l'influence de certains paramètres micro-structuraux, tels que la fraction volumique des fibres, le rapport de forme de la fibre et la taille et le maillage du VER, sur les propriétés effectives du matériau composite.

### Influence de la fraction volumique des fibres

Nous proposons d'étudier l'influence de la fraction volumique des fibres courtes de carbone sur les propriétés élastiques du matériau composite magnésium/carbone. Pour cela, nous avons choisi les fractions volumiques suivantes : 5%, 10% et 15%. Un VER de dimensions  $1 \times 1 \times 1 \text{ mm}^3$  est modélisé par un maillage régulier de  $10 \times 10 \times 10$  éléments PFH8 (figure 4.7). Les résultats de PFH8 sont ensuite comparés aux résultats obtenus par l'élément PFQ4 (présentés dans le deuxième chapitre) et les résultats expérimentaux de Tian et al. [39]. L'évolution des modules d'Young et de cisaillement du composite en fonction de la fraction volumique des fibres est montrée sur les figures 4.6a et 4.6b, respectivement.



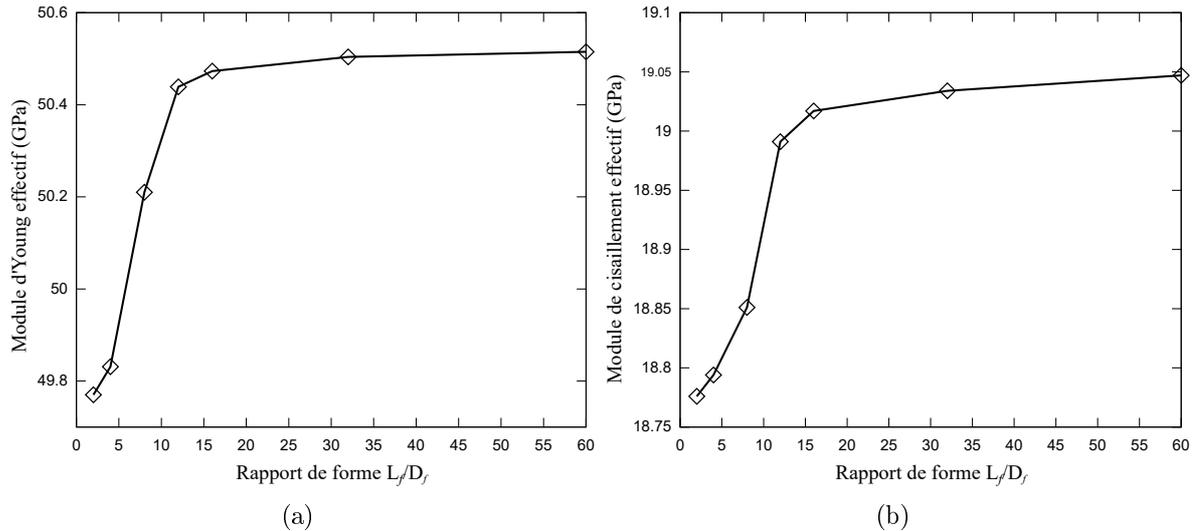
**FIGURE 4.8 :** Évolution des propriétés effectives du composite magnésium/carbone en fonction de la fraction volumique des fibres : (a) Module d'Young et (b) Module de cisaillement.

Comme prévu, les propriétés élastiques du composite augmente avec la fraction volumique des fibres. Les résultats de l'élément PFH8 sont très proches de ceux de l'élément composite 2D PFQ4 et sont en bon accord avec ceux de Tian et al. [39].

### Influence du rapport d'aspect des fibres

Nous étudions maintenant l'influence du rapport d'aspect des fibres de carbone sur les modules d'Young et de cisaillement du composite. Pour cela, la fraction volumique des fibres est fixée à 10% et leur rapport de forme ( $L_f/D_f$ ) varie de 2 à 60. Un VER de dimensions  $1 \times 1 \times 1 \text{ mm}^3$  est considéré et modélisé par un maillage régulier de  $10 \times 10 \times 10$  éléments PFH8. L'évolution des modules d'Young et de cisaillement du composite en fonc-

tion du rapport de forme des fibres est montrée sur les figures 4.9a et 4.9b, respectivement. Nous remarquons que les propriétés effectives du matériau composite magnésium/carbone varient notablement pour des faibles valeurs du rapport d'aspect des fibres. Ensuite, une stabilisation est observée à partir d'un rapport de forme proche de 15, considéré comme le rapport d'aspect seuil. Cette valeur limite est en accord avec le seuil trouvé dans le chapitre 2 avec l'élément de membrane PFQ4 (voir exemple 2.4.1).



**FIGURE 4.9 :** *Évolution des propriétés effectives du composite magnésium/carbone en fonction du rapport de forme des fibres ( $L_f/D_f$ ) : (a) Module d'Young et (b) Module de cisaillement.*

### Influence des dimensions du VER

La taille du VER est un facteur très important dans la détermination des propriétés effectives d'un matériau composite. Cependant, il convient de déterminer avec précision sa taille minimale pour estimer correctement le comportement du composite. Dans cette partie, nous étudions l'influence de la taille du VER sur les propriétés effectives du matériau composite magnésium/carbone. Pour cela, nous fixons la fraction volumique et le rapport de forme des fibres à 10% et 15, respectivement, et nous considérons un VER cubique d'arête  $a$  qui varie de 0.2 à 1 mm (figure 4.10). Le VER est modélisé par  $10 \times 10 \times 10$  éléments PFH8 (figure 4.7). L'évolution des modules d'Young et de cisaillement du matériau composite en fonction de la taille du VER est montrée sur les figure 4.11a et 4.11b, respectivement.

Nous remarquons que les modules d'Young et de cisaillement du composite se stabilisent à partir d'une arête du VER égale à 0.4 mm. Ce résultat est en adéquation avec ceux de PFQ4 et Qi et al. [42].

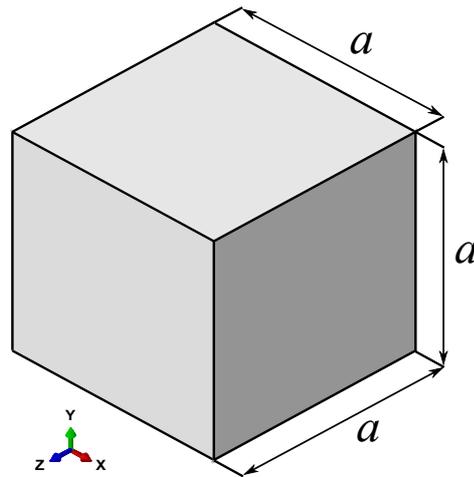


FIGURE 4.10 : VER du matériau composite magnésium/carbone.

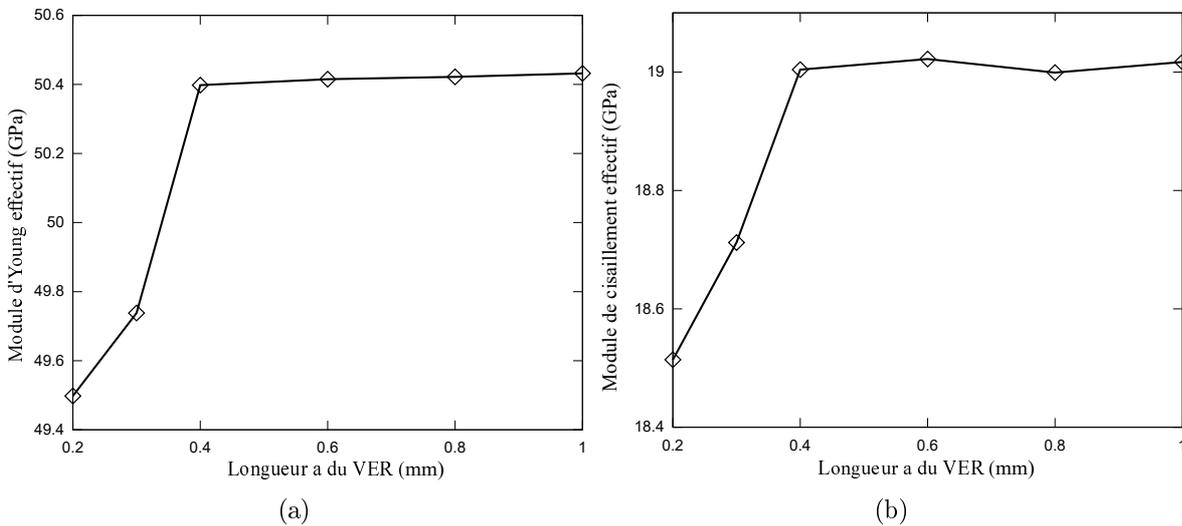


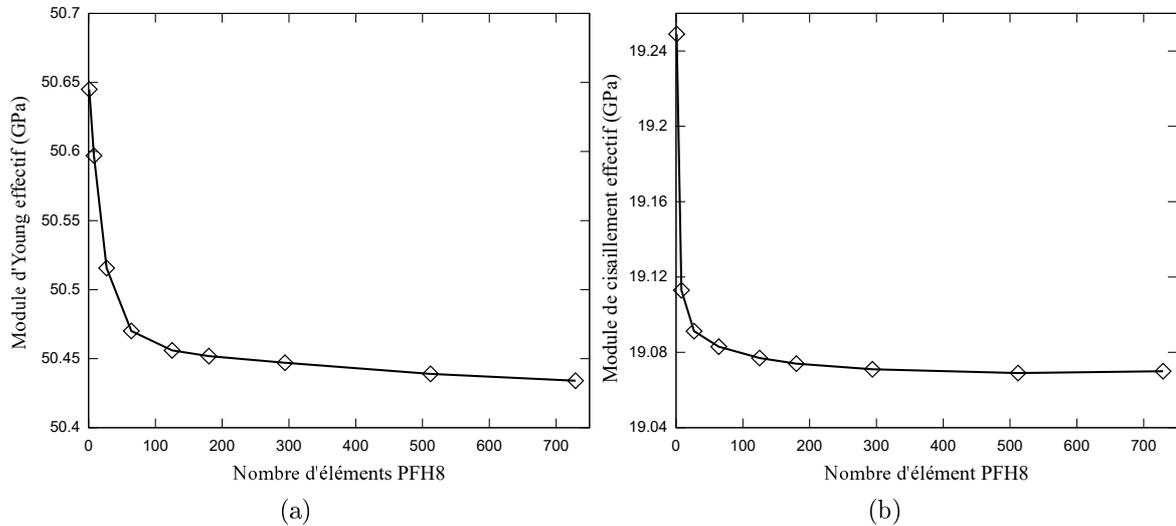
FIGURE 4.11 : Évolution des propriétés du composite magnésium/carbone en fonction des dimensions du VER : (a) Module d'Young et (b) Module de cisaillement.

### Influence de la finesse du maillage du VER

Un autre paramètre qui peut jouer un rôle important dans la détermination des propriétés effectives d'un matériau composite est le maillage du VER. Ainsi, nous étudions l'évolution des propriétés effectives du composite magnésium/carbone en fonction de la finesse du maillage du VER. Pour cela, nous considérons un VER cubique d'arête  $a = 1$  mm. La fraction volumique et le rapport de forme des fibres sont fixés à 10% et 15, respectivement. L'évolution des modules d'Young et de cisaillement en fonction du maillage du VER est montrée sur les figures 4.12a et 4.12b, respectivement.

Nous remarquons que le maillage du VER a une influence sur la prédiction de ses proprié-

tés effectives. Une stabilisation est obtenue à partir d'un maillage utilisant 64 éléments PFH8.

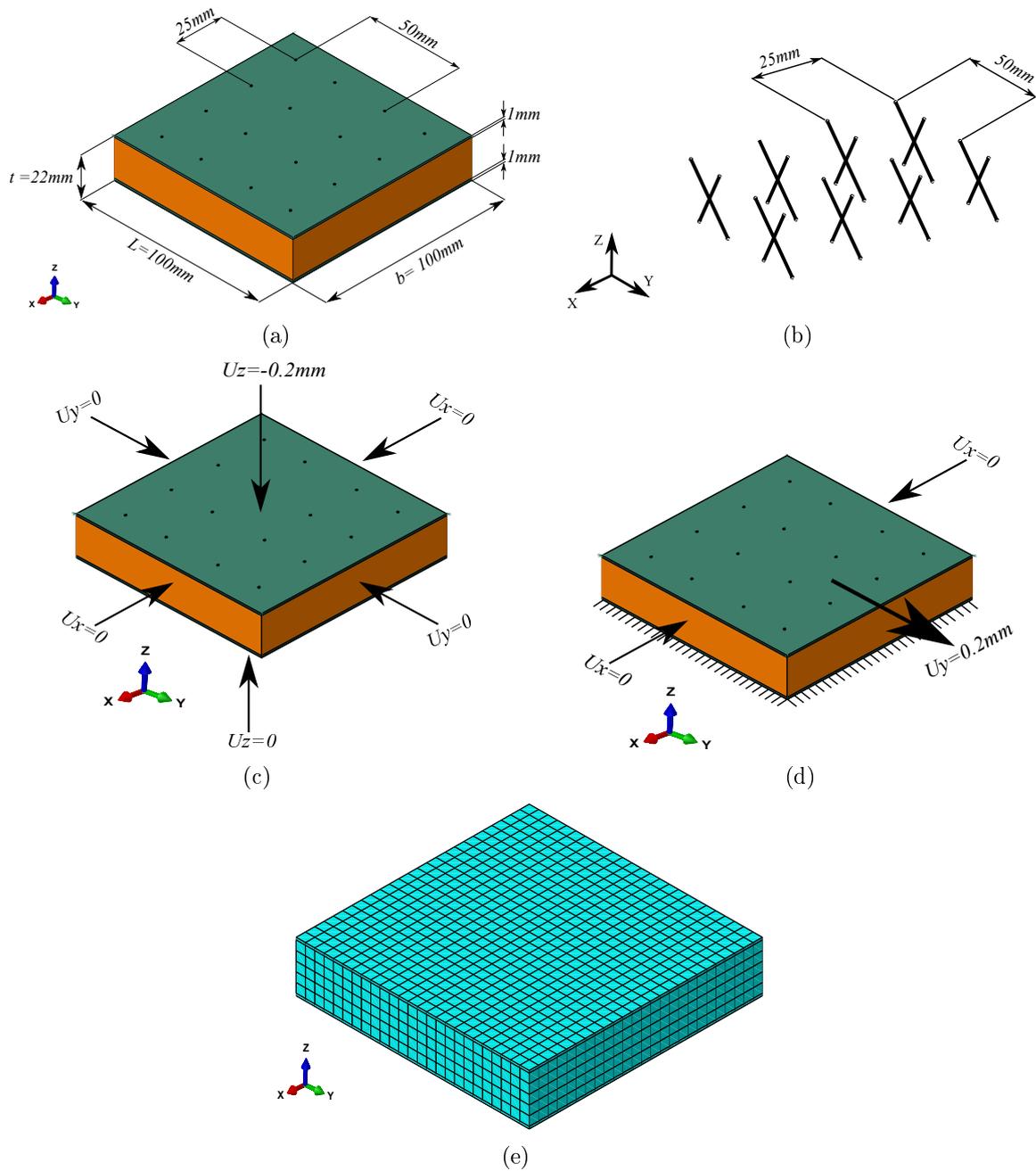


**FIGURE 4.12 :** *Évolution des propriétés effectives du composite magnésium/carbone en fonction de raffinement du maillage du VER : (a) Module d'Young et (b) Module de cisaillement.*

#### 4.4.2 Estimation des propriétés effectives d'une plaque composite sandwich cousue

L'ajout de coutures à travers l'épaisseur dans une structure composite sandwich permet d'abord de résoudre les problèmes de délaminage entre son âme et ses peaux, et ensuite d'augmenter les propriétés en compression de l'âme car elle présente généralement des propriétés mécaniques relativement faibles par rapport à celles des peaux. Pour quantifier cette augmentation des propriétés élastiques, deux types de sollicitations sont considérés : un test de compression et un test de cisaillement hors plan. La structure sandwich étudiée dans ce test est montrée sur la figure 4.13. Elle est constituée d'une âme en mousse de polyuréthane, collée à deux peaux en verre/époxy. Cette plaque sandwich est renforcée par des coutures en fibre de verre de forme cylindrique ayant un diamètre  $D_f = 2.7$  mm, comme décrit sur la figure 4.13. Pour simplifier, nous supposons que les deux peaux sont parfaitement collées à l'âme. Les propriétés élastiques des composants de la structure sandwich sont résumées dans le tableau 4.2. La structure sandwich composite est modélisée par un maillage régulier de 4360 éléments PFH8 comme montré sur la figure 4.13e.

Des essais expérimentaux de compression et de cisaillement ont été réalisés sur cette plaque sandwich par Lascoup [47] dans le cadre de son étude doctorale à l'UTC. Pour



**FIGURE 4.13 :** *Plaque sandwich cousue : (a) propriétés géométriques de la structure composite, (b) forme des coutures à l'intérieur de la plaque sandwich, (c) conditions aux limites pour le test de compression hors plan, (d) conditions aux limites pour le test de cisaillement hors plan et (e) maillage de la plaque sandwich par 4360 éléments PFH8.*

le test de compression, la plaque sandwich se trouvait entre deux plans rigides et subissait une compression plane. Pour le test de cisaillement hors plan, la plaque se trouvait également entre deux plaques rigides aussi ; le plan inférieur étant encastré et la plaque

**TABLE 4.2 :** *Propriétés élastiques de l'âme et des peaux de la structure sandwich cousue reportées par Lascoup et al. [46]*

|                | Peaux | Âme | Coutures |
|----------------|-------|-----|----------|
| $E_x$ (MPa)    | 8000  | 15  | 16200    |
| $E_y$ (MPa)    | 8000  | -   | -        |
| $E_z$ (MPa)    | 6000  | -   | -        |
| $\nu_{xy}$     | 0.2   | 0.4 | 0.28     |
| $\nu_{xz}$     | 0.35  | -   | -        |
| $\nu_{yz}$     | 0.35  | -   | -        |
| $G_{xy}$ (MPa) | 2100  | -   | -        |
| $G_{xz}$ (MPa) | 2500  | -   | -        |
| $G_{yz}$ (MPa) | 2500  | -   | -        |

supérieure se déplaçait dans le plan de la plaque sandwich pour la tester en cisaillement. Une modélisation de ces conditions aux limites est présentée sur les figures 4.13c et 4.13d. Pour simplifier, des conditions aux limites en déplacement sont utilisées pour les deux tests. A la fin de chaque essai, nous récupérons la somme des réactions  $P$  sur la peau inférieure pour estimer les modules de compression  $E_z$  et de cisaillement  $G_{yz}$  de la plaque sandwich. Les deux modules sont déterminés en utilisant les relations suivantes [47] :

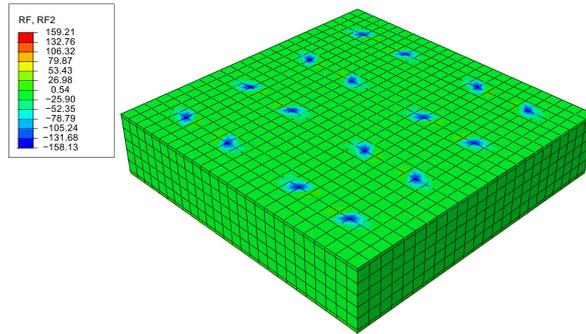
$$E_z = \frac{P}{b \times L \times u_i} \quad ; \quad G_{xz} = \frac{P \times h}{b \times L \times \delta} \quad (4.39)$$

$u_i$  et  $\delta$  sont, respectivement, les déformations issues du rapport déplacement relatif sur l'épaisseur initiale.

Nous résumons dans le tableau 4.4.2 les valeurs des modules  $E_z$  et  $G_{yz}$  de la plaque sandwich estimées par PFH8 en utilisant le maillage de la figure 4.13e et comparées aux valeurs expérimentales de Lascoup et al. [46]. Nous remarquons que les prédictions de PFH8 sont en très bon accord avec les résultats expérimentaux de Lascoup et al. [46] (à peu près 4% d'erreur). Il convient de noter aussi l'amélioration sensible des propriétés de la plaque sandwich par rapport à la plaque non cousue (augmentation de 286% de  $E_z$  et 413% de  $G_{yz}$ ) grâce à l'introduction des coutures suivant l'épaisseur. La figure 4.14 montre la distribution de la réaction suivant  $y$  sur la plaque sandwich cousue après le test de compression. Il apparaît clairement que les coutures ajoutées subissent la plus grande partie de la sollicitation.

**TABLE 4.3 :** Modules  $E_z$  et  $G_{yz}$  de la structure composite cousue estimés par PFH8 et comparés aux valeurs expérimentales de Lascoup et al. [46].

|                | Non Cousue | Expérience [46] | PFH8  | Erreur (%) |
|----------------|------------|-----------------|-------|------------|
| $E_z$ (MPa)    | 15         | $57.9 \pm 4.8$  | 56.04 | -3.21      |
| $G_{yz}$ (MPa) | 3.1        | $15.9 \pm 0.7$  | 16.50 | 3.77       |

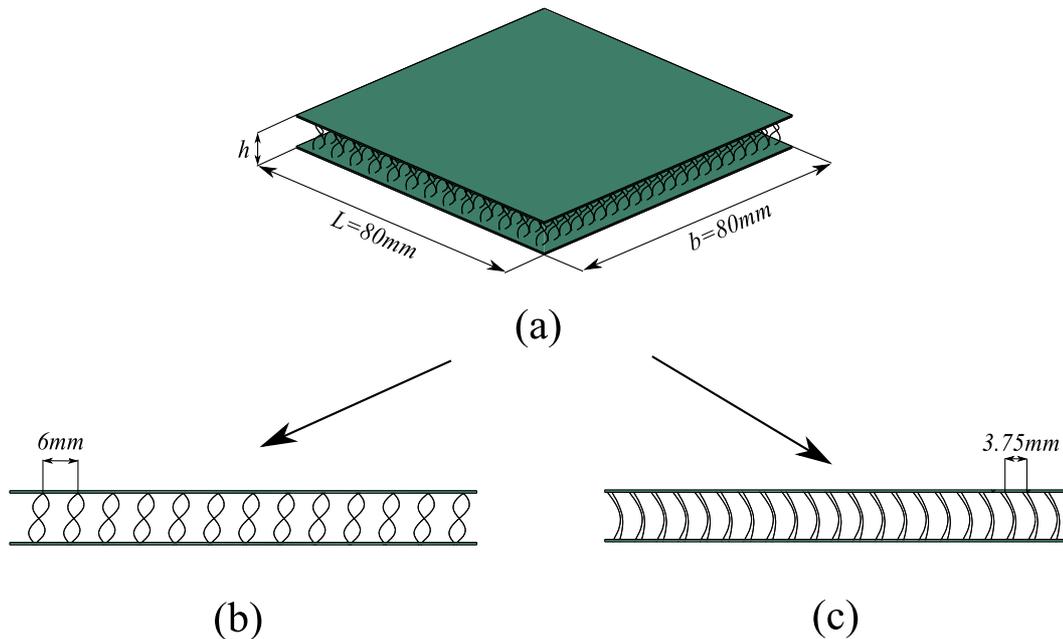


**FIGURE 4.14 :** Distribution de la réaction suivant  $y$  sur la plaque sandwich cousue après le test de compression.

#### 4.4.3 Estimation des propriétés effectives d'une plaque composite sandwich tissée

Nous modélisons dans cet exemple le comportement de la plaque composite sandwich tissée de la figure 4.15. Les peaux de cette plaque sandwich sont en résine époxy ( $E_m = 3.3$  GPa et  $\nu_m = 0.35$ ) et ont une épaisseur égale à 0.6 mm. Son âme est creuse et est constituée de fils de verre verticaux 3D sous forme de "8" directement tissés aux peaux pour former la structure sandwich intégrale. Ces fils possèdent une forme cylindrique de diamètre  $D_f = 0.7$  mm et un module d'Young  $E_f = 72$  GPa. Sur ce type de structures composites, deux directions principales sont identifiées : la direction chaîne et la direction trame comme illustré sur les figures 4.15b et 4.15c. La structure sandwich tissée est soumise à deux types de sollicitation : un test de compression perpendiculairement aux peaux et ensuite, un test de cisaillement suivant les directions chaîne et trame. Les conditions aux limites utilisées pour étudier le comportement de cette plaque sandwich sous ces deux sollicitations sont les mêmes que l'exemple 4.4.2 et sont montrées sur la figure 4.13. Les fonctions de forme utilisées pour modéliser le renfort 3D de la plaque sont données par Vuure et al. [48]. Les deux peaux sont modélisées par  $100 \times 100 \times 1$  éléments PFH8. Pour pouvoir modéliser l'âme creuse qui se trouve entre les deux peaux, nous rajoutons une matrice avec des

propriétés mécaniques négligeables (un module d'Young de  $10^{-8}$  GPa et un coefficient de Poisson nul ont été utilisés), celle-ci est maillée par  $100 \times 100 \times 12$  éléments PFH8. Les figures 4.16 et 4.17 montrent, respectivement, l'évolution des modules de compression  $E_z$  et de cisaillement dans les directions chaîne et trame en fonction de l'épaisseur de la plaque sandwich (trois épaisseurs sont considérées : 8, 10 et 12 mm). Les résultats de PFH8 sont comparées aux résultats expérimentaux de Sadighi et Hosseini [8]. Nous remarquons que les résultats de PFH8 sont en bon accord avec les valeurs expérimentales de Sadighi et Hosseini [8].



**FIGURE 4.15 :** (a) Plaque composite sandwich à âme creuse renforcée par des fibres sous forme de "8". (b) Vue sens chaîne. (c) Vue sens trame.

#### 4.4.4 Poutre composite cantilever 3D renforcée par des fibres courtes et soumise à une charge de flexion

Dans ce deuxième exemple, nous étudions le comportement non-linéaire d'une poutre composite 3D cantilever soumise à une force de flexion transversale  $F = 12$  kN, comme montré sur la figure 4.18. La poutre composite est constituée d'une matrice en alliage de magnésium AZ91D ( $E_m = 45$  GPa et  $\nu_m = 0.35$ ) renforcée par 10% en volume de fibres courtes de carbone ( $E_f = 230$  GPa et  $\nu_f = 0.25$ ). Les fibres courtes de carbone sont introduites dans le domaine de la matrice de façon aléatoire et possèdent un rapport de forme  $L_f/D_f=15$ . Afin de comparer la courbe force-flèche de l'élément PFH8 avec celle de l'élément C3D8 d'ABAQUS (C3D8 est l'élément hexaédrique à huit noeuds d'ABAQUS

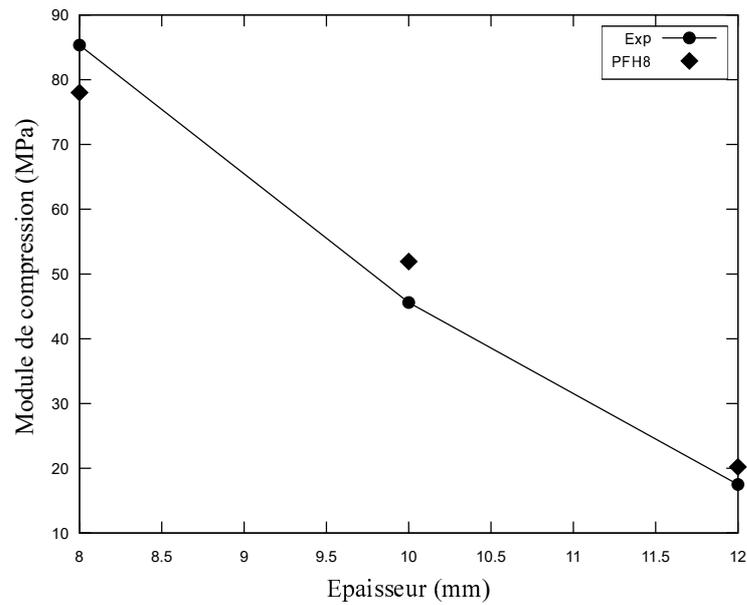


FIGURE 4.16 : Évolution du module de compression  $E_z$  de la plaque sandwich tissée en fonction de l'épaisseur de l'âme estimée par PFH8 et comparée aux résultats expérimentaux de Sadighi et Hosseini [8].

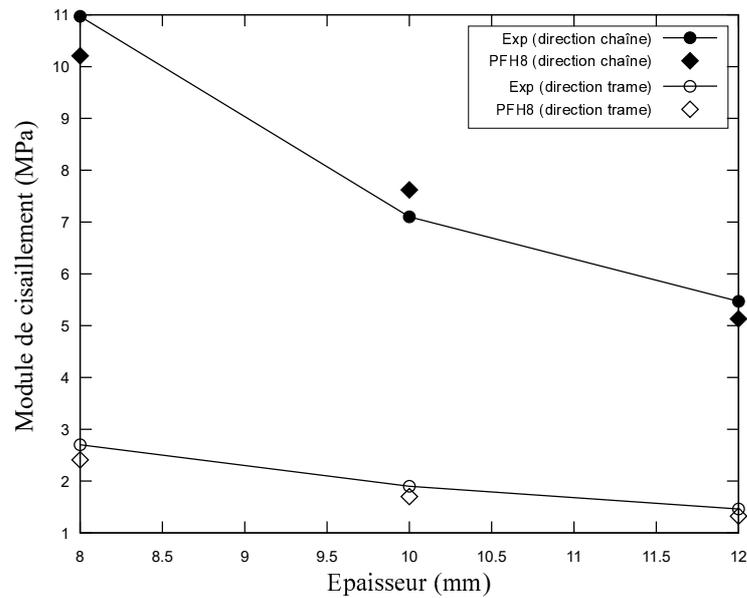


FIGURE 4.17 : Évolution des modules de cisaillement dans les directions chaîne et trame de la plaque sandwich tissée en fonction de l'épaisseur de l'âme estimée par PFH8 et comparée aux résultats expérimentaux de Sadighi et Hosseini [8].

utilisant une intégration complète de la matrice de rigidité), les propriétés effectives du matériau composite homogénéisé (tableau 4.1) sont utilisées. La poutre composite 3D est modélisée par un maillage régulier de  $100 \times 10 \times 4$  éléments PFH8 (figure 4.19). La figure 4.20 compare les courbes force-flèche obtenues par PFH8, PFQ4 et C3D8. Les résultats

indiquent un bon accord entre la réponse de PFH8 et celle de C3D8 en utilisant des propriétés homogénéisées de la poutre. De plus, le résultat de PFH8 est légèrement plus précis que celui de l'élément membrane PFQ4.

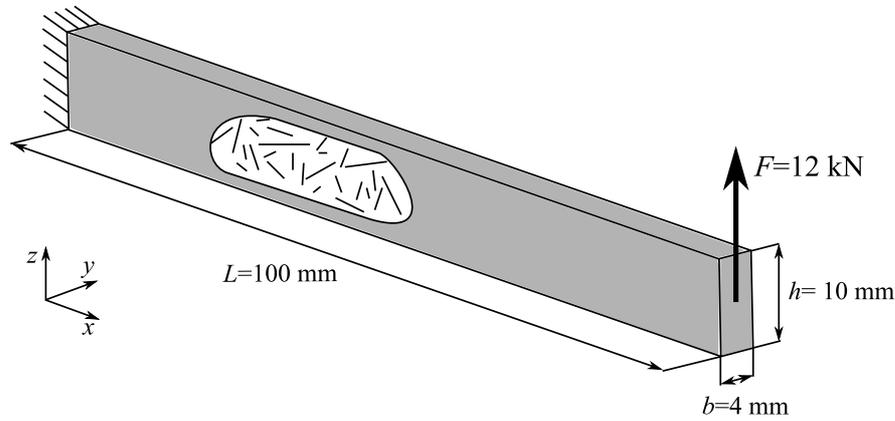


FIGURE 4.18 : Poutre composite Mg/Cf cantilever 3D soumise à une force de flexion transversale.

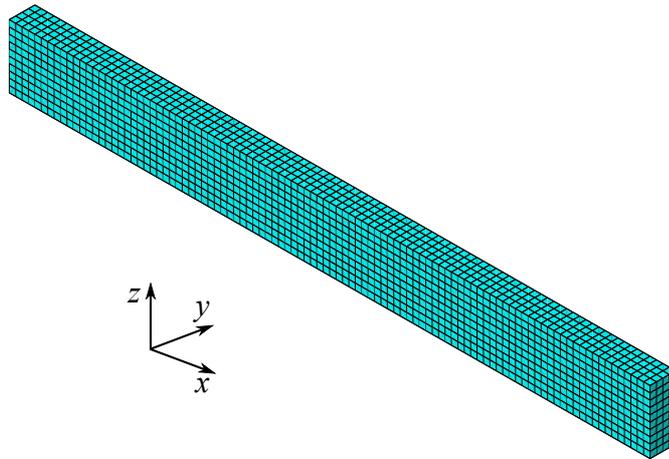


FIGURE 4.19 : Poutre composite Mg/Cf cantilever modélisée par  $100 \times 10 \times 4$  éléments PFH8.

#### 4.4.5 Plaque composite en polypropylène renforcée par des fibres UD de verre soumise à un chargement de torsion

Nous considérons dans ce troisième exemple une plaque composite constituée d'une matrice en polypropylène (PP), avec  $E_m = 1735$  MPa et  $\nu_m = 0.4$ , renforcée par 20 fibres UD de verre. Ces fibres longues de verre présentent une forme cylindrique de diamètre  $D_f = 0.4$  mm et possèdent les propriétés élastiques suivantes :  $E_f = 70$  GPa et  $\nu_f = 0.3$ .

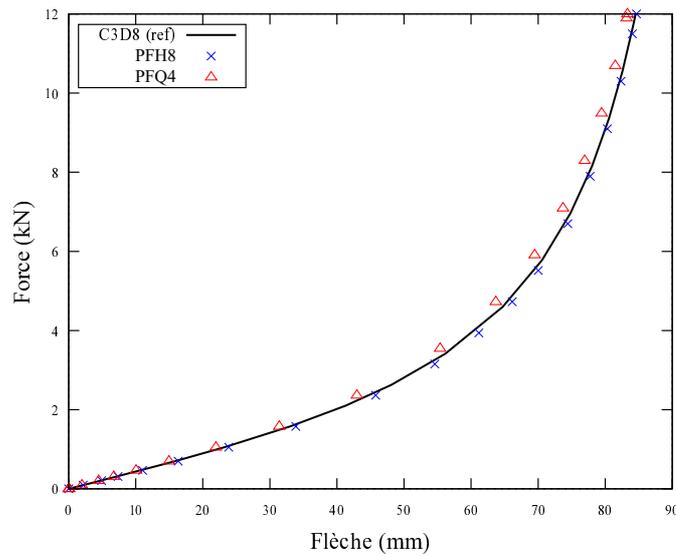


FIGURE 4.20 : Courbe force-flèche de la poutre composite Mg/Cf cantilever 3D.

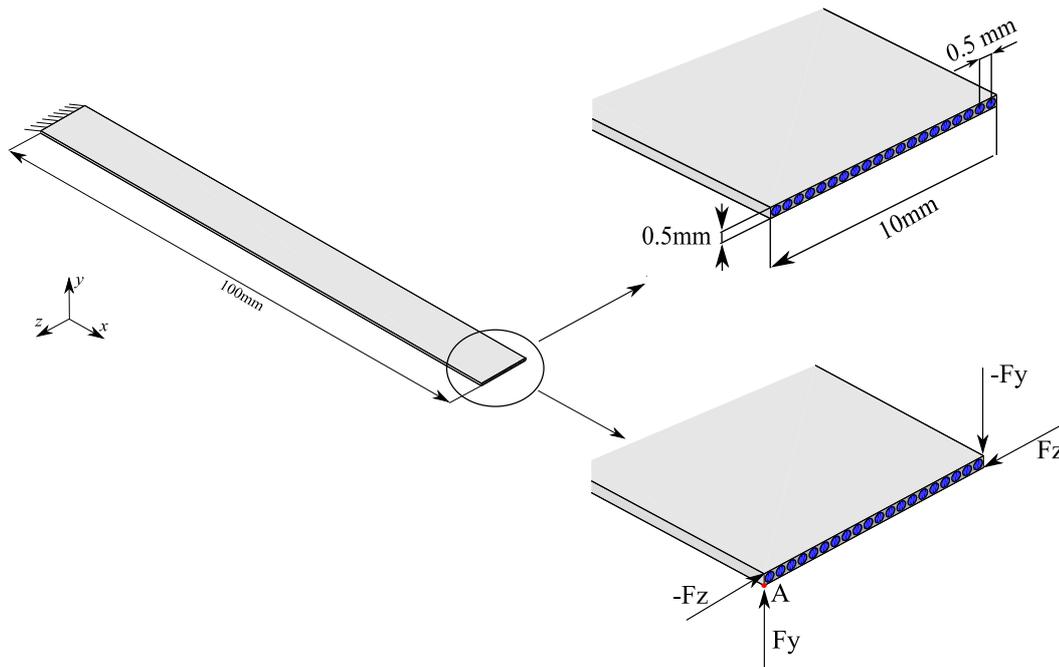
Comme décrit sur la figure 4.21, la plaque est encastrée d'un côté et soumise à un couple de forces ( $F_y = F_z = 1$  N) sur son extrémité libre permettant d'avoir un couple de torsion par rapport à la direction  $x$ . Par analogie avec l'exemple précédent, nous nous proposons de comparer la courbe force-déplacement de PFH8 avec celle de C3D8. Nous déterminons d'abord les propriétés effectives du matériau composite PP/verre avec l'élément PFH8. Pour cela, nous considérons un VER de  $0.5 \times 0.5 \times 0.5$  mm<sup>3</sup> renforcé par une fibre centrale de rayon  $R_f = 0.2$  mm. Le VER, maillé par  $10 \times 10 \times 10$  éléments PFH8, est soumis aux mêmes types de chargement que l'exemple 4.4.1 pour déterminer ses propriétés effectives. Le tableau 4.4 résume les propriétés effectives obtenues par l'élément PFH8 et la loi des mélanges,  $\nu_{yz}$  et  $G_{yx}$  étant déterminés à partir des relations analytiques de Jones [49]. La comparaison montre un bon accord entre l'estimation de PFH8 et les résultats analytiques. La plaque composite est maintenant modélisée par  $100 \times 10 \times 1$  éléments PFH8 et soumise au chargement de torsion. La figure 4.22 montre l'évolution du déplacement transversal du point A appartenant à l'extrémité libre de la plaque en fonction du chargement. Encore une fois, la courbe de PFH8 est en bon accord avec celle de C3D8.

#### 4.4.6 Poutre circulaire 3D

Nous considérons dans ce cas test une généralisation tridimensionnelle de l'exemple 3.4.4 (voir chapitre 3) concernant une poutre circulaire en béton renforcée par quatre barres d'acier et soumise à un chargement de flexion (figure 4.23). Les barres en acier ont une section circulaire de diamètre  $D_f = 0.5$  cm et sont représentées par 10 segments de

**TABLE 4.4 :** Propriétés élastiques effectives de la plaque en polypropylène renforcée par des fibres unidirectionnelles de verre prédites par l'élément PFH8 et comparées aux résultats analytiques.

|                | Loi des mélanges | PFH8   | Erreur (%) |
|----------------|------------------|--------|------------|
| $E_x$ (GPa)    | 36.0487          | 36.920 | 2.417      |
| $E_y$ (GPa)    | 3.403            | 3.510  | 3.143      |
| $E_z$ (GPa)    | 3.403            | 3.511  | 3.166      |
| $\nu_{xy}$     | 0.350            | 0.375  | 7.1428     |
| $\nu_{xz}$     | 0.350            | 0.374  | 6.857      |
| $\nu_{yz}$     | 0.341            | 0.365  | 7.353      |
| $G_{xy}$ (GPa) | 1.218            | 1.239  | 1.795      |
| $G_{xz}$ (GPa) | 1.218            | 1.240  | 1.865      |
| $G_{yz}$ (GPa) | 1.270            | 1.301  | 2.479      |



**FIGURE 4.21 :** Plaque en polypropylène renforcée par des fibres UD de verre et soumise à un chargement de torsion.

droite comme expliqué dans le chapitre 3. Grâce à la symétrie de ce problème, la moitié de la poutre circulaire est modélisée par 27387 éléments PFH8 (116214 degrés de liberté au total). La courbe force-flèche de PFH8 est comparée à celle de C3D20 en considérant un maillage de la matrice et des fibres de 24768 éléments C3D20 et 360108 degrés de liberté, soit le triple des variables utilisées avec l'élément composite PFH8. Lors de la flexion de

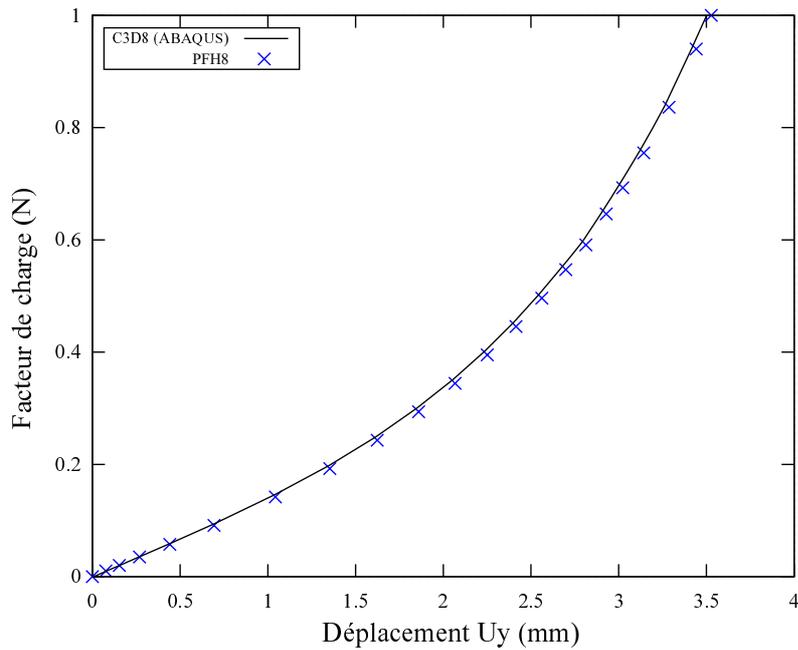


FIGURE 4.22 : Courbe force-déplacement de la plaque composite en polypropylène renforcée par des fibres UD de verre et soumise à un chargement de torsion.

la poutre, nous avons remarqué un voilement de la structure composite dans le plan  $xy$  et pour cette raison, le déplacement latéral suivant  $z$  a été annulé sur une face de la poutre pour éviter ce problème. La figure 4.24 montre les courbes charge-déplacement obtenues au point A de la poutre en utilisant PFH8, PFQ4 (modélisation plane avec l'hypothèse des contraintes planes) et l'élément C3D20 d'ABAQUS. Un très bon accord entre les trois solutions est trouvé encore une fois dans ce test de validation.

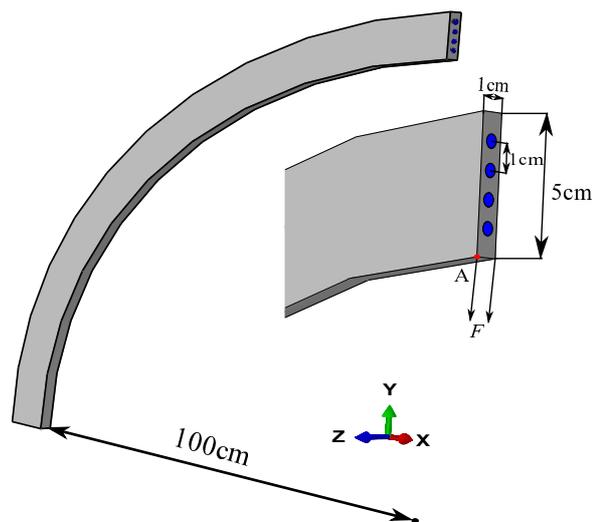


FIGURE 4.23 : Poutre circulaire 3D en béton renforcé par quatre barres en acier.

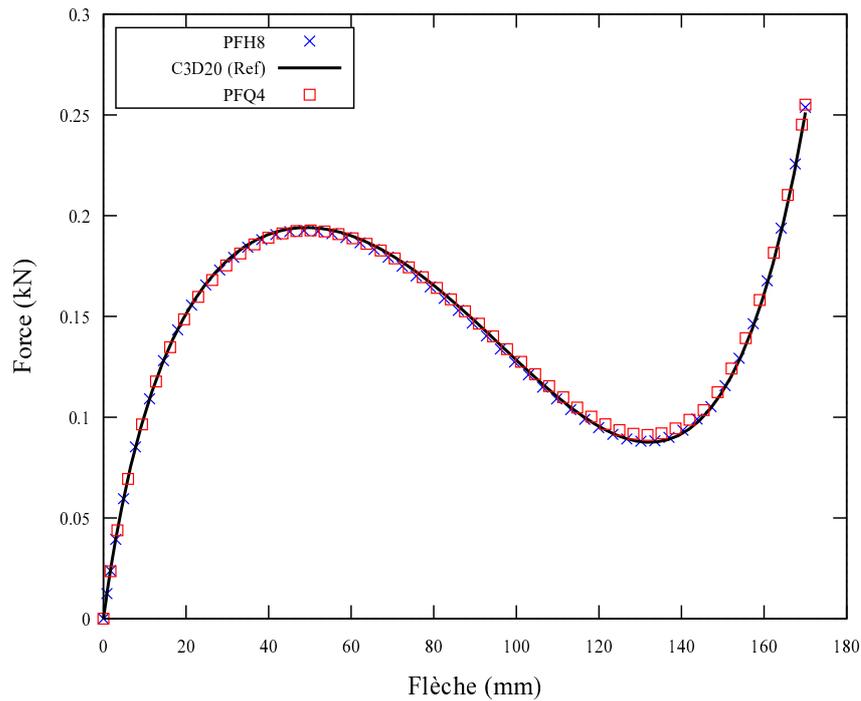


FIGURE 4.24 : Courbe force-flèche de la poutre circulaire 3D en béton armé.

## 4.5 Conclusion

Dans ce dernier chapitre, nous avons présenté les formulations linéaire et non-linéaire géométrique de l'élément fini composite hexaédrique PFH8 basé sur l'approche de la fibre projetée. Cet élément fini solide résulte de la combinaison entre l'élément hexaédrique standard à huit noeuds représentant une unité de l'espace matrice et les éléments barres 3D à deux noeuds qui modélisent les fibres qui la traversent. Il a été montré que l'élément composite PFH8 est capable de reproduire efficacement le comportement des matériaux et structures composites 3D pour différentes distributions et orientations des fibres.



# Conclusion générale

Ce travail de thèse s'inscrit dans une démarche de développement d'outils numériques de dimensionnement des matériaux et structures composites à renfort fibreux. Ces éléments finis spéciaux sont basés sur une approche de modélisation *indirecte* récemment introduite par Kebir et Ayad [37], labellisée Approche de la Fibre Projetée (AFP). La qualification *indirecte* signifie que le renfort fibreux n'est pas explicitement modélisé (discrétisé), ce qui permet de réduire considérablement le temps de simulation. Ces développements ont été motivés par la complexité accrue des nouveaux matériaux composites, tels que les composites cousus, et la difficulté d'étudier leur comportement par les techniques analytiques et numériques classiques.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté l'adaptation de l'AFP aux problèmes plans linéaires à travers le développement de deux éléments finis composites de membrane, baptisés PFT3 et PFQ4. Il s'agit de deux éléments composites triangulaire à trois nœuds (PFT3) et quadrilatère à quatre nœuds (PFQ4). Ces éléments sont définis suite au maillage de la matrice par des éléments finis classiques T3 ou Q4 avec la présence des fibres dans la matrice. Les fibres sont considérées comme des entités discrètes dans le volume de la matrice et sont modélisées par des éléments finis barres à deux nœuds. Les éventuelles intersections entre les fibres et les éléments classiques T3 ou Q4 définissent les nouveaux éléments finis composites PFT3 et PFQ4. Les considérations cinématiques utilisées dans les hypothèses de l'AFP évitent le rajout de nouveaux degrés de liberté au système d'équations, et ce en exprimant les variables des fibres en fonction de celles des éléments finis, T3 ou Q4, représentatifs du domaine de la matrice. Cela signifie que le nouveau système d'équations obtenu est équivalent à celui d'un milieu non renforcé (matrice). Ces deux éléments ont été implémentés dans le code ABAQUS via la routine UEL. Une partie importante de ce premier chapitre a été consacrée à l'évaluation et la validation de l'AFP à travers la modélisation de trois types de solides composites 2D : un composite renforcé par des fibres courtes aléatoires, un composite à renfort unidirectionnel et un composite multicouche  $[90/0]_s$ . En particulier, l'étude du composite à fibres courtes orientées aléatoirement nous a permis de tester la sensibilité des éléments PFT3 et

PFQ4 à plusieurs paramètres tels que : la taille du VER, le nombre d'éléments, le rapport d'aspect des fibres, leur fraction volumique ainsi que leur orientation. Nous avons montré que ces paramètres ont une influence directe sur la prédiction des propriétés effectives du matériau étudié. Globalement, les résultats obtenus dans le premier chapitre ont été en bonne concordance avec les résultats de référence, ce qui montre l'efficacité des éléments composites de membrane proposés.

Le chapitre 2 a été consacré à l'extension des formulations des éléments PFT3 et PFQ4 afin d'étudier des solides composites 2D qui présentent de grands déplacements accompagnés de petites déformations. L'objectif principal de cette étude est de tester la faisabilité d'étendre l'AFP aux problèmes non-linéaires (géométriques dans ce cas). Une description Lagrangienne totale (FLT) a été adoptée pour décrire le mouvement des solides composites 2D. Plusieurs cas tests de validation ont été présentés et les résultats obtenus ont été en bon accord avec les solutions de référence, ce qui montre que l'AFP est valable aussi pour étudier des problèmes non-linéaires géométriques.

Le dernier chapitre a été consacré au développement d'un élément composite hexaédrique à huit noeuds basé sur l'AFP, baptisé PFH8, pour l'analyse linéaire et non-linéaire géométrique des solides composites 3D. Cet élément constitue une extension 3D de l'élément PFQ4 et résulte ainsi d'une combinaison entre l'élément standard H8, qui modélise une unité de l'espace matrice, et l'élément barre 3D à deux noeuds qui représente une fibre qui traverse l'élément H8. Quelques cas tests de validation linéaires et non-linéaires ont été considérés pour tester l'efficacité de PFH8. En particulier, nous avons mis en exergue l'intérêt de l'AFP pour étudier des structures composites complexes à renfort 3D tels que les coutures (plaque sandwich cousue) et les renforts en forme de "8" (plaque sandwich à âme creuse renforcée par des fibres en forme de "8"). Les résultats obtenus ont été en bon accord avec les solutions de référence.

Ce travail de modélisation présente plusieurs perspectives et nous en citons en particulier trois qui nous paraissent réalisables à court et moyen termes. D'abord, la modélisation des fibres par des éléments poutres permettra de tenir compte de leur rigidité de flexion. Cette étape est d'une importance capitale pour mieux étudier le comportement des structures composites soumises à des sollicitations de flexion. Ensuite, la modélisation de l'interface fibre-matrice apportera une compréhension supplémentaire des modes de dé-cohésion fibre-matrice et du déchaussement des fibres. Enfin, la modélisation de l'endommagement de la matrice et des fibres permettra de mieux se rapprocher du comportement réel et complexe des structures composites.

# Bibliographie

- [1] M. F. Di Paola : *Modélisation multi-échelles du comportement thermo-élastique de composites à particules sphériques*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Paris, 2010.
- [2] S. Kari, H. Berger et U. Gabbert : Numerical evaluation of effective material properties of randomly distributed short cylindrical fibre composites. *Computational Materials Science*, 39:198–204, 2007.
- [3] A. E. Elwi et D. W. Murray : Nonlinear analysis of axisymmetric reinforced concrete structures. Rapport technique, University of Alberta, 1980.
- [4] D. V. Phillips et O. C. Zienkiewicz : Finite Element Non-Linear Analysis of Concrete Structures. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Part 2*, 61:59–88, 1976.
- [5] F. K. F. Radtke, A. Simone et L. J. Sluys : A partition of unity finite element method for obtaining elastic properties of continua with embedded thin fibres. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 84:708–732, 2010.
- [6] L. Vanalli, R. R. Paccola et H. B. Coda : A simple way to introduce fibers into FEM models. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 24:585–603, 2008.
- [7] L. Vanalli, R. R. Paccola, M. R. Scoaris et H. B. Coda : A simple method for non-linear analysis of steel fiber reinforced concrete. *Acta Scientiarum - Technology*, 32:367–374, 2010.
- [8] M. Sadighi et S. A. Hosseini : Finite element simulation and experimental study on mechanical behavior of 3D woven glass fiber composite sandwich panels. *Composites Part B : Engineering*, 55:158–166, 2013.
- [9] M. Bornert, T. Bretheau et P. Gilormini : *Homogénéisation en mécanique des matériaux, Tome 1 : Matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques*. Hermes science, 2001.
- [10] W. Voigt : Ueber die Beziehung zwischen den beiden Elastizitätskonstanten isotroper Körper. *Annalen der Physik*, 38:573–587, 1889.

- [11] A. Reuss : Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle. *ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 9:49–58, 1929.
- [12] W. Tian, L. Qi, J. Liang, X. Chao et J. Zhou : Evaluation for elastic properties of metal matrix composites with randomly distributed fibers : Two-step mean-field homogenization procedure versus FE homogenization method. *Journal of Alloys and Compounds*, 658:241–247, 2016.
- [13] J. C. Halpin : Stiffness and Expansion Estimates for Oriented Short Fiber Composites. *Journal of Composite Materials*, 3:732–734, 1969.
- [14] J. C. Halpin et J. L. Kardos : The Halpin-Tsai equations : A review. *Polymer Engineering and Science*, 16:344–352, 1976.
- [15] J. D. Eshelby : The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 241:376–396, 1957.
- [16] C. L. Tucker et E. Liang : Stiffness predictions for unidirectional short fibre composites : Review and evaluation. *Composites Science and Technology*, 59:655–671, 1999.
- [17] T. Mori et K. Tanaka : Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica*, 21(5):571 – 574, 1973.
- [18] Y. Benveniste : A new approach to the application of Mori-Tanaka’s theory in composite materials. *Mechanics of Materials*, 6(2):147–157, 1987.
- [19] E. Kroner et H. Koch : *Effective properties of disordered materials*. Solid Mechanics Archives, 1976.
- [20] E. Kroner : Self-consistent scheme and graded disorder in polycrystal elasticity. *Journal of Physics F : Metal Physics*, 8(11):2261, 1978.
- [21] J. S. Wang : Random Sequential Adsorption , Series Expansion and Monte Carlo Simulation Series Expansion and Monte Carlo Simulation. *Physica A : Statistical Mechanics and Its Applications*, 254:179–184, 1997.
- [22] A. A. Gusev, P. J. Hine et I. M. Ward : Fiber packing and elastic properties of a transversely random unidirectional glass/epoxy composite. *Composites Science and Technology*, 60:535–541, 2000.
- [23] L. R. Hans, P. J. Hine et A. A. Gusev : Direct numerical predictions for the elastic and thermoelastic properties of short fibre composites. *Composites Science and Technology*, 62:1927–1934, 2002.

- 
- [24] P. J. Hine, R. L. Hans et A. A. Gusev : Numerical simulation of the effects of volume fraction, aspect ratio and fibre length distribution on the elastic and thermoelastic properties of short fibre composites. *Composites Science and Technology*, 62(10-11):1445–1453, 2002.
- [25] N. Lippmann, Th. Steinkopff, S. Schmauder et P. Gumbsch : 3D-finite-element-modelling of microstructures with the method of multiphase elements. *Computational Materials Science*, 9:28–35, 1997.
- [26] Th. Steinkopff et M. Sautter : Simulating the elasto-plastic behavior of multiphase materials by advanced finite element techniques Part I : a rezoning technique and the multiphase element method. *Computational Materials Science*, 4:10–14, 1995.
- [27] A. E. Elwi et T. M. Hrudey : Finite Element Model for Curved Embedded Reinforcement. *Journal of Engineering Mechanics*, 115:740–754, 1989.
- [28] S. D. S. Pinto : *Adaptacao ao programa no sap de um elemento de armadura para analise de estruturas de concreto armado (en portugais)*. Thèse de doctorat, Pontificia Universidade Catolica de Rio de Janeiro, Brazil, 1982.
- [29] T. Belytschko et T. Black : Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45:601–620, 1999.
- [30] C. A. Duarte, I. Babuška et J. T. Oden : Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems. *Computers and Structures*, 77:215–232, 2000.
- [31] N. Moës, J. Dolbow et T. Belytschko : A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46:131–150, 1999.
- [32] I. Babuška et J. M. Melenk : The partition of unity method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40:727–758, 1997.
- [33] J. M. Melenk et I. Babuška : The partition of unity finite element method : Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1-4):289–314, 1996.
- [34] F. K. F. Radtke, A. Simone et L. J. Sluys : A partition of unity finite element method for simulating non-linear debonding and matrix failure in thin fibre composites. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 86:453–476, 2011.
- [35] M. S. M. Sampaio, R. R. Paccola et H. B. Coda : Fully adherent fiber-matrix FEM formulation for geometrically nonlinear 2D solid analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, 66:12 – 25, 2013.

- [36] M. S. M. Sampaio, R. R. Paccola et H. B. Coda : A geometrically nonlinear FEM formulation for the analysis of fiber reinforced laminated plates and shells. *Composite Structures*, 119:799 – 814, 2015.
- [37] H. Kebir et R. Ayad : A specific finite element procedure for the analysis of elastic behaviour of short fibre reinforced composites. The projected fibre approach. *Composite Structures*, 118:580 – 588, 2014.
- [38] ABAQUS : *Analysis User's Manual*. V. 6.14, 2015.
- [39] W. Tian, L. Qi, C. Su, J. Liang et J. Zhou : Numerical evaluation on mechanical properties of short-fiber-reinforced metal matrix composites : Two-step mean-field homogenization procedure. *Composite Structures*, 139:96 – 103, 2016.
- [40] W. Tian, L. Qi, J. Zhou, J. Liang et Y. Ma : Representative volume element for composites reinforced by spatially randomly distributed discontinuous fibers and its applications. *Composite Structures*, 131:366–373, 2015.
- [41] H. Moussaddy, L. Martin et D. Therriault : Evaluation des performances des modèles d'homogénéisation pour des fibres aléatoirement dispersées ayant des rapports de forme élevés. *Comptes Rendus des JNC 17 - Poitiers*, 2011.
- [42] L. Qi, W. Tian et J. Zhou : Numerical evaluation of effective elastic properties of composites reinforced by spatially randomly distributed short fibers with certain aspect ratio. *Composite Structures*, 131:843–851, 2015.
- [43] J. N. Reddy : *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*. OUP Oxford, 2004.
- [44] J. M. Battini : A non-linear corotational 4-node plane element. *Mechanics Research Communications*, 35:408–413, 2008.
- [45] Q. Li, G. Liao, X. Chen, J. Zheng, Y. Road et H. District : Approach on Area Coordinate, Volume Coordinate and Their Usage in True 3Dgis. *International Conference on Geo-spatial Solutions for Emergency Management and the 50th Anniversary of the Chinese Academy of Surveying and Mapping*, C:158–164, 2009.
- [46] B. Lascoup, Z. Aboura, K. Khellil et M. Benzeggagh : On the mechanical effect of stitch addition in sandwich panel. *Composites Science and Technology*, 66:1385–1398, 2006.
- [47] B. Lascoup : *Analayse et modélisation du comportement mécanique de structures composites sandwichs*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 2005.

- 
- [48] A. W. van Vuure, J. A. Ivens et I. Verpoest : Mechanical properties of composite panels based on woven sandwich-fabric preforms. *Composites Part A*, 31:671–680, 2000.
- [49] R. M. Jones : *Mechanics of Composite Materials*. Taylor & Francis, 2015.



## Résumé

La modélisation numérique des matériaux et structures composites à renfort fibreux de géométrie complexe, comme les composites cousus, constitue un axe de recherche majeur afin de prédire correctement leur comportement mécanique. Dans ce contexte, l'étude menée dans ce travail de thèse porte sur le développement de nouveaux éléments finis spéciaux linéaires et non-linéaires basés sur une approche numérique par éléments finis multi-échelle, baptisée Approche de la Fibre Projetée (AFP). Cette approche numérique a l'avantage de tenir compte de la présence des fibres, longues ou courtes et orientées de façon aléatoire ou paramétrée, au sein d'un espace matrice sans les discrétiser, ce qui limite considérablement la taille du système d'équations à résoudre. Pour analyser les comportements linéaire et non-linéaire géométrique des structures composites, deux éléments finis de membrane, baptisés PFT3 et PFQ4, et un élément fini solide 3D, baptisé PFH8, ont été développés et implémentés dans le code ABAQUS via la routine utilisateur UEL. Plusieurs cas tests de validation linéaires et non-linéaires sont considérés pour tester la précision et l'efficacité des éléments finis proposés et les résultats obtenus sont globalement en bon accord avec les solutions de référence. De plus, l'intérêt de la nouvelle approche AFP est particulièrement mis en exergue en étudiant des structures composites complexes à renfort 3D : une plaque sandwich cousue et une plaque sandwich à âme creuse renforcée par des fibres en forme de "8".

**Mots-clés:** Matériaux et structures composites à renfort fibreux, Approche de la Fibre Projetée, méthode des éléments finis, non-linéarité géométrique.

# Abstract

Numerical modeling of composite materials and structures with complex geometry of fiber reinforcement, such as stitched composites, constitutes a major research axis in order to correctly predict their mechanical behavior. Within this context, this study focuses on the development of new linear and nonlinear specific finite elements based on a multiscale numerical approach, called the Projected Fiber Approach (PFA). This numerical approach has the advantage of taking into account the presence of fibers, long or short and distributed randomly or specifically, within a matrix space without discretizing them. Consequently, the obtained system of equations size is equivalent to that without reinforcement (matrix), which considerably reduces the computational cost. To analyze the linear and geometrically nonlinear behaviors of composite structures, two membrane finite elements, named PFT3 and PFQ4, and a 3D solid finite element, named PFH8, were developed and implemented into the commercial finite element code ABAQUS via the user element subroutine (UEL). Several numerical linear and nonlinear tests are considered to assess the accuracy and efficiency of the proposed composite finite elements, and the obtained results are globally in good agreement with the reference solutions. Moreover, the major interest of the PFA approach is particularly emphasized by studying two 3D complex reinforced composite structures : a stitched sandwich plate and a hollow core sandwich plate reinforced by "8" shape fibers.

**Keywords:** Fiber-reinforced composite materials and structures, Projected Fiber Approach, finite element method, geometric nonlinearity