



# Duo d'artefacts numérique et matériel pour l'apprentissage de la géométrie au cycle 3

Anne Voltolini

## ► To cite this version:

Anne Voltolini. Duo d'artefacts numérique et matériel pour l'apprentissage de la géométrie au cycle 3. Education. Université de Lyon, 2017. Français. NNT : 2017LYSEN023 . tel-01585845

**HAL Id: tel-01585845**

**<https://theses.hal.science/tel-01585845>**

Submitted on 12 Sep 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Numéro National de Thèse : 2017LYSEN023

## **THÈSE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON**

opérée par  
**l'École Normale Supérieure de Lyon**

École Doctorale N° 485  
Sciences de l'Éducation, Information et Communication, Psychologie

**Discipline : Didactiques des disciplines scientifiques et techniques**

**Spécialité : Didactique des Mathématiques**

Soutenue publiquement le 30/08/2017, par :

**Anne VOLTOLINI**

---

# **Duo d'artefacts numérique et matériel pour l'apprentissage de la géométrie au cycle 3**

---

Devant le jury composé de :

Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN Professeure émérite Université d'Artois	Rapporteuse
Paul DRIJVERS Professeur Université d'Utrecht Pays Bas	Rapporteur
Catherine HOUEMENT Professeure des Universités Université de Rouen	Examinatrice
Luc TROUCHE Professeur des Universités Ens de Lyon Institut Français de l'Éducation	Examineur
Michela MASCHIETTO Professeure associée Université de Modène Italie	Examinatrice
Sophie SOURY-LAVERGNE Maître de conférence HDR Ens de Lyon Institut Français de l'Éducation	Directrice de thèse



## Remerciements

L'accomplissement d'un travail de thèse demande certes du temps, mais aussi des interactions sociales. Cette recherche sur plusieurs années et sa réussite sont dues au soutien de nombreuses personnes, dont la bienveillance et l'intérêt manifestés à l'égard de mon travail m'ont permis de cheminer avec plaisir dans cette étude.

Je suis très reconnaissante envers ma directrice de thèse, Sophie Soury-Lavergne, qui m'a ouvert les portes de la didactique. Elle m'a aidée à me poser les bonnes questions, à clarifier mes idées ainsi qu'à ouvrir les pistes de travail les plus pertinentes. Elle m'a aussi encouragée à participer à des colloques, notamment ICME-13, et à écrire des articles afin de faire connaître mon travail. Qu'elle trouve ici l'expression de mes remerciements.

Je remercie Marie-Jeanne Perrin-Glorian et Paul Drijvers, qui m'ont fait l'honneur d'être rapporteurs de ma thèse, pour l'intérêt qu'ils ont témoigné à mon travail, et pour leurs remarques instructives qui m'ont permis de faire évoluer ma réflexion.

Je remercie Catherine Houdement, Michela Maschietto et Luc Trouche, qui ont accepté de participer à mon jury de thèse, pour leur lecture attentive, critique et bienveillante de ce manuscrit.

Notre ingénierie, dans son élaboration et pour sa part expérimentale, doit beaucoup à l'accueil de Géraldine Mastrot et Julie Siaud dans leurs classes, trois années consécutives. Qu'elles soient remerciées pour leurs remarques constructives lors des réunions du groupe MaDyp et lors des expérimentations. Ma gratitude va aussi à leurs élèves, qui, avec intérêt et enthousiasme, ont accepté ma présence et la situation que je leur proposais.

Je tiens également à remercier la société Cabrilog, qui m'a permis de disposer du logiciel Cabri Elem pour la conception des cahiers informatisés et qui a mis à disposition les licences pour leur utilisation en classe lors des expérimentations.

La réalisation d'un projet de thèse repose aussi sur des échanges avec d'autres chercheurs. Merci aux membres de l'équipe EducTice de l'Institut Français de l'Éducation, avec qui j'ai eu plaisir à discuter autour d'un café ou d'un repas et aussi dans des réunions de travail, aux chercheurs de l'ARDM et aux membres du groupe des Jeunes Chercheurs pour leur contribution à ma formation à la recherche en didactique des mathématiques.

Mes remerciements vont aussi à la Rectrice de l'Académie de Grenoble, qui m'a accordé un congé formation pour la finalisation de cette thèse.



Je suis tout particulièrement reconnaissante aux relecteurs et relectrices de ce travail : mes parents, pour leur lecture attentive et éclairée, et leurs suggestions toujours avisées ; Françoise, Anne et Anne Lise, relectrices de mes articles, en français et en anglais, pour leur lecture minutieuse ; Anne-Laure, pour son aide à la mise en page et son ultime relecture de ce manuscrit. Je leur adresse mes remerciements affectueux.

Enfin ma gratitude va à ma famille et mes amis qui, avec cette question récurrente « quand est-ce que tu la soutiens ta thèse ? » bien qu'un peu agaçante en période de tâtonnement, m'ont soutenue et encouragée et m'ont permis de ne jamais dévier de mon objectif final.

Pour clore ce préambule, je voudrais témoigner de l'apport de la didactique et de cette recherche dans mon enseignement, apport qui va m'aider à faire mienne la phrase de Montaigne : « L'élève n'est pas qu'un vase qu'on remplit mais un feu qu'on allume. »

Cette thèse a été préparée au sein du laboratoire S2HEP (Sciences, Société, Historicité, Éducation et Pratiques) et de l'Équipe EducTice de l'Institut Français de l'Éducation intégré à l'École Normale Supérieure de Lyon 19 Allée de Fontenay, 69007 Lyon.

## **Résumé**

L'objet de notre recherche en didactique des mathématiques est d'étudier l'introduction des technologies numériques comme environnement complémentaire à des manipulations concrètes. Nous définissons les duos d'artefacts comme l'articulation fructueuse entre un artefact numérique et un artefact matériel qui soit une plus-value pour les apprentissages. L'approche instrumentale de Rabardel nous permet d'établir les critères de cette articulation ; chaque artefact du duo enrichit l'autre à travers les instruments construits. Un duo d'artefacts provoque des genèses instrumentales associées. Afin de fonder les conditions d'un apprentissage au sens de Brousseau, un duo n'existe que lorsqu'il est mobilisé dans une situation didactique. Notre enjeu est alors d'élaborer un duo d'artefacts incluant le compas matériel en vue de la conceptualisation du triangle à partir de sa construction à la règle et au compas. La composition du duo et son orchestration dans une situation ont pour intention de faire émerger une nouvelle genèse instrumentale du compas et, selon les travaux de Duval, une déconstruction dimensionnelle 1D du triangle. Des expérimentations en classe nous ont permis de valider l'hypothèse selon laquelle la situation et le duo provoquent l'élaboration d'un nouvel instrument compas pour faire pivoter un segment. Le modèle de conceptions de Balacheff nous a aussi permis d'identifier l'évolution des conceptions des élèves sur le triangle et le cercle au fil de la situation, en particulier l'apparition d'une vision 1D du triangle comme une ligne brisée fermée et d'une caractérisation du cercle comme la trajectoire d'une extrémité d'un segment pivoté.

**Mots-clefs** : situation didactique, duo d'artefacts, genèses instrumentales, conceptions, géométrie, triangle, déconstruction dimensionnelle, école primaire, manipulations, EIAH

## **[Duo of digital and material artefacts dedicated to the learning of geometry at primary school]**

### **Abstract**

Our research project in didactics of mathematics is to study the use of digital technologies as a complementary environment to concrete manipulations. We define a duo of artefacts as the fruitful link between a digital artefact and a material one in such a way that this linking is an added value for the learning process. The instrumental approach of Rabardel allows us to establish the requirements for this link, each artefact enriching the other through the constructed instruments. A duo of artefacts sets off associated instrumental geneses. In order to base the conditions of the learning process, in the sense of Brousseau, a duo exists only when it is mobilized in a didactic situation. Our issue is to develop a duo of artifacts including the pair of compasses for the conceptualization of the triangle in the teaching of its geometric construction. The composition of the duo and its orchestration in a didactic situation are intended to bring out a new instrumental genesis of the compasses and, according to Duval's work, a 1D dimensional deconstruction of the triangle. Experiments in classes have enabled us to validate the hypothesis that the situation and the duo cause the development of a new pair of compasses instrument to rotate a segment. Balacheff's model of conceptions also allowed us to identify the evolution of pupils' conceptions of the triangle and the circle as the situation progressed, specifically the improvement of a 1D vision of the triangle as a closed broken line and a characterization of the circle as the trajectory of one end of a pivoted segment.

**Keywords:** didactic situation, duo of artefacts, instrumental genesis, conceptions, geometry, triangle, dimensional deconstruction, primary school, manipulatives, TEL.

# TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION .....	15
L'origine de la thèse : témoignage d'une expérience d'enseignante .....	17
Le problème étudié et les objectifs de notre travail .....	19
Organisation générale de la thèse.....	20
PARTIE I ENVIRONNEMENT NUMÉRIQUE, ENVIRONNEMENT MATÉRIEL : QUELLE COMPLÉMENTARITÉ ?	
Chapitre 1. Usage des technologies numériques pour apprendre les mathématiques .	25
1.1. Numérique et matériel, des environnements complémentaires.....	26
1.2. Effet de l'usage des technologies numériques sur l'apprentissage des mathématiques.....	27
1.2.1. Pourquoi et comment les technologies numériques peuvent-elles avoir un effet positif sur les apprentissages.....	28
1.2.2. Importance de l'outil et des tâches qui le mobilisent.....	30
1.2.3. Rôle de l'enseignant .....	31
1.2.4. Interactions et rétroactions .....	32
1.3. La géométrie dynamique .....	33
1.3.1. De nouveaux défis pour l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie.....	33
1.3.2. Le déplacement en géométrie dynamique.....	34
1.3.3. Manipulations directes de représentations dynamiques d'objets mathématiques .....	35
1.4. Les technologies numériques à l'école primaire.....	37
1.4.1. L'impact des manipulations .....	37
1.4.2. Les technologies tactiles .....	37
1.5. Manipulations d'objets matériels et manipulations d'objets numériques .....	38
1.5.1. Efficacité des manipulations pour apprendre les mathématiques .....	38
1.5.2. Plus-value des manipulations d'objets numériques .....	38
Chapitre 2. Articuler numérique et matériel pour apprendre les mathématiques .....	43

2.1. Idée initiale : introduire le numérique comme environnement conjugué à l'environnement matériel dans des situations didactiques .....	44
2.2. Une situation didactique pour faire exister le duo .....	45
2.2.1. Une situation didactique pour fonder les conditions d'un apprentissage	45
2.2.2. Caractérisation d'un milieu .....	46
2.2.3. Une situation qui problématise le recours aux artefacts numérique et matériel .....	47
2.3. Caractérisation d'un duo d'artefacts numérique et matériel .....	47
2.3.1. Des manipulations dans les deux environnements, numérique et matériel .....	48
2.3.2. Des genèses instrumentales qui s'entremêlent .....	49
2.3.3. Orchestration des artefacts dans la situation .....	53
2.3.4. Valeur ajoutée d'un duo d'artefacts .....	54
2.4. Hypothèses de recherche .....	54
2.4.1. Provoquer des genèses instrumentales associées .....	54
2.4.2. Favoriser l'acquisition de connaissances mathématiques .....	55
2.5. Un duo particulier .....	56
<b>PARTIE II UN DUO D'ARTEFACTS POUR LA CONCEPTUALISATION DU TRIANGLE</b>	
Chapitre 3. Analyses préalables des artefacts et concepts en jeu dans la construction du triangle à la règle et au compas .....	
3.1. La construction du triangle à la règle et au compas .....	59
3.2. Qu'est-ce que faire de la géométrie ? .....	61
3.2.1. La visualisation iconique et la visualisation non iconique .....	61
3.2.2. Trois niveaux d'appréhension d'une figure .....	62
3.3. La géométrie instrumentée .....	63
3.3.1. Construction de figures .....	63
3.3.2. Tracés auxiliaires .....	64
3.3.3. Utilisation des instruments au cours de la scolarité .....	66
3.4. La règle et le compas .....	67
3.4.1. Quelques repères historiques .....	67

3.4.2.	Constructions géométriques à la règle et au compas.....	69
3.4.3.	Le compas au cours de la scolarité .....	70
3.4.4.	La règle graduée, un obstacle à franchir.....	70
3.5.	Les concepts de triangle et de cercle .....	71
3.5.1.	Le triangle .....	72
3.5.2.	Le cercle .....	73
3.6.	Nos idées directrices pour la composition du duo.....	76
Chapitre 4. Hypothèses de recherche relatives à la composition d'un duo pour la conceptualisation du triangle .....		79
4.1.	Retour sur notre problématique.....	79
4.2.	Hypothèses de recherche relatives à la composition d'un duo incluant le compas pour la conceptualisation du triangle.....	80
4.2.1.	Un nouvel instrument compas.....	80
4.2.2.	Une déconstruction 1D du triangle.....	80
4.2.3.	Une nouvelle caractérisation du cercle .....	81
Chapitre 5. Composition d'un duo.....		83
5.1.	Méthodologie de composition du duo.....	83
5.1.1.	À propos de composition .....	83
5.1.2.	Une ingénierie didactique collaborative.....	84
5.2.	La situation « Triangle et compas » .....	85
5.2.1.	Connaissances en jeu .....	85
5.2.2.	Variables didactiques.....	90
5.3.	Composition d'un duo d'artefacts numérique et matériel .....	91
5.3.1.	Manipulations et pratique expérimentale en géométrie .....	92
5.3.2.	Création d'un environnement informatisé .....	93
5.3.3.	Un duo qui articule compas matériel et cahiers informatisés .....	95
5.4.	Un duo conçu et utilisé par des enseignants .....	112
5.4.1.	Une technologie numérique adaptée à une entrée progressive dans la géométrie dynamique à l'école primaire .....	112

5.4.2.	Évolution du duo et de la situation sur trois ans .....	115
5.4.3.	Une entrée progressive dans la géométrie dynamique.....	121
PARTIE III EXPÉRIMENTATIONS DU DUO D'ARTEFACTS DANS DES CLASSES		
Chapitre 6.	Méthodologie d'analyse .....	125
6.1.	Le modèle cK $\zeta$ : caractériser les connaissances à partir d'observables .....	125
6.1.1.	Caractérisation d'une conception dans le modèle cK $\zeta$ .....	126
6.1.2.	Conception, connaissance, concept.....	127
6.1.3.	Des conséquences pour notre étude.....	128
6.2.	(P ; L ; R ; $\Sigma$ ) dans notre étude .....	128
6.2.1.	Problèmes et systèmes de représentation .....	128
6.2.2.	Opérateurs et contrôles.....	130
6.3.	Opérateurs et contrôles en jeu dans la situation « Triangle et compas ».....	131
6.3.1.	Opérateurs en jeu dans chaque environnement .....	131
6.3.2.	Contrôles sur l'emploi des opérateurs.....	134
6.4.	Liens entre le modèle cK $\zeta$ et l'approche instrumentale.....	135
6.4.1.	Instruments et conceptions .....	135
6.4.2.	Des schèmes d'utilisation identifiés par des compositions d'opérateurs et de contrôles.....	136
6.5.	Traitement des données .....	137
6.5.1.	Méthodologie d'analyse a priori.....	137
6.5.2.	Méthodologie d'analyse a posteriori.....	139
Chapitre 7.	Analyse a priori de la situation « Triangle et compas » .....	141
7.1.	Conceptions en jeu dans la situation « Triangle et compas » .....	141
7.1.1.	Quatre conceptions du triangle .....	142
7.1.2.	Trois conceptions du cercle .....	146
7.2.	Déplacement par rotation et conceptions « Triangle 1D » .....	149
7.2.1.	Enjeu du premier cahier informatisé .....	149
7.2.2.	Stratégies, opérateurs et contrôles en jeu .....	150

7.2.3. Caractérisation des nouveaux équilibres du système [sujet-milieu], conceptions et instruments.....	155
7.3. Un nouvel instrument compas pour pivoter un segment.....	156
7.3.1. Enjeu de la première activité papier-crayon.....	156
7.3.2. Stratégies, opérateurs et contrôles en jeu .....	157
7.3.3. Caractérisation des nouveaux équilibres du système [sujet-milieu], conceptions et instruments.....	160
7.4. Outil cercle et conception « Triangle 0D » .....	161
7.4.1. Enjeu du second cahier informatisé .....	161
7.4.2. Stratégies, opérateurs et contrôles en jeu .....	164
7.4.3. Caractérisation des nouveaux équilibres du système [sujet-milieu], conceptions et instruments.....	168
7.5. Diagnostic des instruments et des conceptions disponibles.....	169
7.5.1. Enjeu de la deuxième activité papier-crayon.....	169
7.5.2. Stratégies, opérateurs et contrôles en jeu .....	170
7.6. Incidence du duo et de la situation sur des parcours de conceptions et de genèses instrumentales .....	170
7.6.1. Un premier duo : le compas matériel et le déplacement par rotation de segments numériques .....	170
7.6.2. Une extension, le cercle de la géométrie dynamique.....	171
Chapitre 8. Analyse a posteriori et résultats .....	173
8.1. Protocole d'observation.....	173
8.1.1. Recueil des données .....	173
8.1.2. Organisation du recueil des données .....	174
8.1.3. Déroulement des expérimentations.....	175
8.2. Une analyse de 34 productions.....	177
8.2.1. Les instruments compas déjà élaborés.....	177
8.2.2. Le premier cahier informatisé : « A la découverte des triangles » .....	178
8.2.3. Première activité papier-crayon : une nouvelle fonction du compas et deux nouvelles conceptions du triangle et du cercle .....	188



8.2.4. Effets du duo d'artefacts, déplacement par rotation et compas, sur les apprentissages .....	195
8.2.5. Le second cahier informatisé : l'outil cercle difficile à utiliser .....	197
8.2.6. Deuxième activité papier-crayon : la ligne brisée, un opérateur pour utiliser le compas dans la construction du triangle .....	203
8.3. Bilan des apprentissages à la fin de la situation « Triangle et compas » .....	205
8.3.1. Deux nouvelles conceptions du triangle et du cercle .....	205
8.3.2. Un nouvel instrument compas pour pivoter un segment.....	207
8.3.3. Du compas matériel au cercle comme outil, un saut de connaissances.	209
8.4. Déroulement de la situation « Triangle et compas » dans des situations de classe ordinaire .....	210
CONCLUSION .....	213
Notre recherche et nos résultats .....	215
Motivation de la recherche .....	215
Définition d'un duo d'artefacts .....	215
Dualité instrument conception .....	216
Un duo d'artefacts particulier pour la conceptualisation du triangle .....	217
Perspectives .....	221
Des manipulations matérielles articulées aux manipulations des segments numériques .....	221
Un travail sur les longueurs sans recours à la mesure .....	222
Une progression sur le cycle 3 pour la conceptualisation du triangle et du cercle	223
Bibliographie.....	225
ANNEXES	
Annexe 1. Description des différentes pages des cahiers informatisés .....	235
Description des différentes pages du cahier « A la découverte des triangles » ....	235
Description des différentes pages du cahier « Construire des triangles » .....	238
Annexe 2. Opérateurs et contrôles de chaque environnement .....	241
Environnement numérique .....	241

Manipulation de représentations dynamiques d'objets mathématiques.....	241
Opérateurs .....	241
Contrôles .....	243
Mobilisation des outils de géométrie dynamique.....	244
Opérateurs .....	244
Contrôles .....	251
Environnement papier-crayon .....	252
Opérateurs .....	252
Contrôles .....	257
Annexe 3. Questionnaire donné aux élèves avant de traiter la situation.....	259
Expliquer à quelqu'un qui n'a jamais vu un compas ce que c'est .....	259
Annexe 4. Trois segments peuvent-ils toujours être les trois côtés d'un triangle ? .....	277
Annexe 5. Observations de 34 productions.....	283
Annexe 6. Questionnaire donné aux élèves à la fin de la situation .....	319
Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle ? .....	319
Annexe 7. Bilan des deux activités papier-crayon sur trois années consécutives .....	337



## INTRODUCTION



## L'origine de la thèse : témoignage d'une expérience d'enseignante

Depuis plusieurs années l'usage des technologies numériques est préconisé dans les programmes de l'enseignement des mathématiques. Les logiciels de géométrie dynamique proposent un environnement nouveau, supplémentaire à l'espace ordinaire (cour de récréation par exemple) et à l'espace de la feuille de papier uni ou quadrillé pour la conduite des travaux géométriques à l'école et au collège (MEN, 2004). Au-delà de la géométrie, l'utilisation d'outils logiciels est recommandée chaque fois qu'elle est favorable au développement de l'imagination, à la formulation de conjectures ou au calcul (MEN, 2008a) (MEN, 2008b). La stratégie pour faire entrer l'École dans l'ère du numérique constitue un des éléments majeurs de la loi de refondation de l'école de la République du 8 juillet 2013 (<http://www.education.gouv.fr/pid29462/la-refondation-de-l-ecole-de-la-republique.html>). Pour le ministère de l'Éducation Nationale français, le numérique doit être un levier de la refondation de l'École de la République. L'objectif est de favoriser le développement de l'utilisation des nouvelles technologies de manière à inscrire le numérique au cœur des enseignements. Ainsi, les nouveaux programmes en vigueur à la rentrée de septembre 2016 envisagent-ils le numérique comme une composante de la pédagogie au quotidien. Dans les programmes de mathématiques on peut lire : « En complément de l'usage du papier, du crayon et de la manipulation d'objets concrets, les outils numériques sont progressivement introduits (MEN, 2015 p. 198) ».

Enseignante de mathématiques en collège depuis une vingtaine d'années, j'ai introduit l'usage d'outils numériques (calculatrice, tableur ou logiciel de géométrie dynamique) dans mes cours depuis plus de dix ans. J'ai commencé par sélectionner des activités dans les manuels scolaires ou sur des sites de partage pour enseignants. J'ai alors constaté que la plupart des activités trouvées dans les manuels ou sur Internet sont des activités que je qualifie de « presse bouton ». De telles activités décrivent pas à pas les actions qui sont à réaliser avec l'outil numérique puis se contentent de poser une question du type « Qu'observes-tu ? » Étant peu convaincue des effets de telles activités sur les apprentissages, je me suis alors interrogée sur les bénéfices que pouvaient apporter les technologies numériques pour apprendre les mathématiques. Comment utiliser ces technologies en s'assurant de la qualité de l'apprentissage ? Comment tirer profit d'un environnement numérique pour élaborer des activités favorisant l'acquisition de connaissances ? Il me semblait que la technologie numérique pouvait apporter interactivité et évaluation, qu'elle offrait autonomie et possibilité de recommencer. J'étais persuadée qu'un environnement numérique pouvait permettre de visualiser des propriétés mathématiques et de renforcer la compréhension des notions sous-jacentes. L'utilisation d'un environnement numérique peut aussi permettre d'engendrer des interactions dynamiques avec des représentations d'objets mathématiques, contrairement à l'environnement papier-crayon dans lequel les objets ne sont que statiques. Enfin, un environnement numérique permet la visualisation des erreurs, grâce aux rétroactions qu'il renvoie, ce qui conduit à la recherche de nouvelles stratégies et

finalement à l'acquisition de nouvelles connaissances. Ainsi j'étais convaincue qu'en interagissant avec un environnement numérique, l'élève est plus actif puisqu'un tel environnement lui offre plus d'engagement dans ses apprentissages.

J'ai alors décidé de me lancer dans la conception d'activités spécifiquement dédiées à l'exploitation des potentialités de tels environnements pour engager l'élève dans une réflexion mathématique. Au cours de ce travail de réflexion, alimenté par les critiques et la participation de quelques collègues j'ai pu faire les constats suivants : il n'est pas simple d'élaborer une activité mobilisant à bon escient un environnement numérique qui apporte une plus-value significative par rapport à une activité semblable sans l'usage d'un outil numérique ; l'utilisation du déplacement dans un logiciel de géométrie dynamique n'est pas aisée à maîtriser par les élèves ; la réalisation d'une même construction géométrique dans l'environnement papier-crayon ou dans un environnement de géométrie dynamique ne relève pas des mêmes connaissances et peut être plus complexe en géométrie dynamique que dans l'environnement papier-crayon. Pourtant le défi de l'intégration des technologies numériques dans l'enseignement des mathématiques afin de développer des pratiques pédagogiques efficaces et de renforcer le plaisir d'apprendre présentait un grand intérêt pour moi et me semblait prometteur.

J'ai donc poursuivi ce travail en me joignant en 2011 au projet MaDyP (Mathématiques Dynamiques à l'école Primaire) piloté par des chercheurs de l'Institut Français de l'Éducation à l'ENS de Lyon dans le cadre d'un LéA (Lieu d'Éducation Associé). Dans un LéA, les recherches sont fondées sur l'action conjointe entre chercheurs et acteurs du terrain. L'idée de ce projet, qui concernait l'introduction des TICE à l'école primaire, était de partir d'activités que les enseignants du LéA utilisaient dans leur classe et d'étudier quel pourrait être l'apport du numérique à ces activités. Il s'agissait d'explorer ces situations d'apprentissages et d'étudier comment l'utilisation d'un environnement numérique pouvait être une plus-value à la situation initiale. L'objectif pratique de ce projet, était de concevoir des cahiers d'activité informatisés en lien avec des manipulations concrètes et des activités papier-crayon, que les enseignants avaient l'habitude de pratiquer dans leurs classes, en admettant l'hypothèse que la continuité entre les activités, dans des environnements différents, est favorable à l'apprentissage. Afin d'impliquer les élèves dans de réelles activités mathématiques à partir de sa dimension expérimentale, ce projet s'appuyait sur les environnements de mathématiques dynamiques qui permettent aux élèves de manipuler directement les représentations d'objets mathématiques, en cohérence avec le savoir mathématique.

Ma participation à ce projet, en temps qu'enseignante, m'a fait découvrir la didactique des mathématiques. Cela m'a conduit à concevoir et expérimenter dans des classes un scénario utilisant un environnement de mathématiques dynamiques pour amener l'usage du compas dans la construction géométrique d'un triangle de longueurs des côtés données (Voltolini, 2013). Dans ce scénario, l'usage d'un environnement numérique ne se

substitue pas à l'usage du compas matériel ; il crée au contraire une complémentarité entre les deux environnements grâce à l'articulation entre les artefacts numériques et le compas matériel, qui se révèle enrichissante pour les apprentissages.

## Le problème étudié et les objectifs de notre travail

Il ne s'agit pas de savoir s'il faut utiliser les technologies numériques pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, mais de savoir quelles solutions technologiques peuvent soutenir l'apprentissage. Réfléchir à l'introduction du numérique comme environnement complémentaire à des manipulations concrètes dans l'environnement sensible ou à des activités papier-crayon est à l'origine de notre travail. Maschietto et Soury-Lavergne (2013) ont étudié l'utilisation conjointe d'un artefact matériel et d'un artefact numérique à propos de « la Pascaline » dans l'apprentissage de la numération décimale à l'école élémentaire. Elles ont repris ce concept dans le domaine des connaissances spatiales et géométriques (Soury-Lavergne & Maschietto, 2015). Ces travaux se font dans la perspective d'une articulation, avec une recherche de continuités et de ruptures, entre les deux artefacts, matériel et numérique, et non dans le but de substituer l'environnement informatique à l'outil tangible dans les usages avec les élèves. De manière analogue, notre idée principale n'est pas de substituer un environnement numérique à l'utilisation d'un outil matériel ; c'est dans la perspective d'une articulation artefact matériel – artefact numérique, que nous appelons duo d'artefacts, que nous allons travailler dans le but de dégager l'apport d'un tel duo sur les apprentissages.

D'emblée, quelques questions auxquelles il faudra répondre viennent à l'esprit : Quel pourrait être l'intérêt d'un tel duo d'artefacts, numérique et matériel, pour l'apprentissage ? Qu'est-ce qu'un tel duo pourrait modifier en termes d'acquisition de connaissances relativement à la mobilisation de l'artefact matériel pour réaliser une tâche ? Un duo d'artefacts peut-il faciliter l'apprentissage et la conceptualisation ? C'est en tentant de répondre à ces questions que notre projet de recherche s'est construit.

**Nous faisons l'hypothèse que la diversité des supports et la mobilisation conjointe d'un artefact numérique et d'un artefact matériel, dans une situation didactique, peuvent être favorables à l'apprentissage.**

Étant donné une situation didactique (Brousseau, 1998) mobilisant conjointement un artefact numérique et un artefact matériel, notre travail vise d'une part à analyser et approfondir les contraintes, les nécessités, les opportunités favorables aux apprentissages : nous nous interrogeons sur l'apport des technologies numériques utilisées conjointement à un artefact matériel pour les apprentissages ; l'environnement numérique peut-il constituer un gain didactique, une valeur ajoutée à l'outil matériel, qui aide à franchir les difficultés ou obstacles rencontrés par les élèves ? D'autre part, l'objectif de notre travail est de caractériser ce qui fait duo : à quelles conditions la mobilisation conjointe de deux artefacts dans une situation peut-elle être qualifiée de



duo d'artefacts ? Nous allons examiner les conditions de la complémentarité entre les environnements matériel et numérique. La technologie peut-elle inclure des fonctionnalités qui renvoient à l'outil matériel et réciproquement l'outil matériel peut-il enrichir l'outil numérique ? L'artefact numérique peut-il provoquer des processus de genèses instrumentales de l'artefact matériel (Rabardel, 1995) ?

L'élaboration d'une situation didactique pour un apprentissage donné faisant intervenir un duo d'artefacts et l'orchestration (Trouche, 2005) du recours aux artefacts numérique et matériel qui permet d'organiser leur choix, leur place, leur mode d'exploitation et leur articulation dans la situation, représentent l'enjeu didactique de ce travail.

## Organisation générale de la thèse

Ce manuscrit comprend trois parties qui présentent le cheminement de notre travail.

### Première partie : Environnement numérique, environnement matériel : quelle complémentarité ?

La première partie constituée de deux chapitres est consacrée à la présentation de nos ancrages didactiques théoriques et à l'exposé de notre problématique.

Le premier chapitre est consacré à faire un état de l'art sur l'usage des technologies numériques pour enseigner et apprendre les mathématiques, réalisé dans l'optique de notre perspective d'utilisation conjointe d'un environnement numérique et matériel. Nous présentons, dans un premier temps les résultats pertinents de la recherche en didactique concernant les facteurs déterminants pour la mise en œuvre d'une situation didactique mobilisant les technologies numériques. Nous montrons en particulier l'importance du choix des tâches proposées pour que l'effet de l'usage de ces technologies sur l'apprentissage soit positif. Dans un deuxième temps, nous étudions plus spécialement l'apport des logiciels de géométrie dynamique à l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Nous montrons comment la géométrie dynamique transforme la façon habituelle, dans l'environnement papier-crayon, d'agir sur les objets mathématiques. Enfin, la complémentarité des environnements, numérique et matériel, étant au cœur de notre travail, nous terminons ce premier chapitre par une analyse comparative des manipulations d'objets matériel par rapport à des manipulations d'objets numériques.

Le deuxième chapitre expose notre problématique et nos premières hypothèses de recherche. Notre intention est de définir les caractéristiques générales permettant de conceptualiser un duo d'artefacts numérique et matériel. Il s'agit donc de penser la complémentarité et l'articulation entre un artefact numérique et un artefact matériel dans un duo, afin qu'elles soient favorables aux apprentissages. Notre idée est double : d'une part, tirer profit des potentialités de chaque artefact tout en intégrant les contraintes de chacun ; d'autre part, problématiser le duo dans une situation didactique.

En nous appuyant sur les résultats présentés dans le premier chapitre sur les potentialités des technologies pour apprendre les mathématiques et, en nous inscrivant dans les cadres spécifiques de la didactique que sont la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), l'approche instrumentale (Rabardel, 1995) et la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1990), nous établissons les principales caractéristiques d'un duo d'artefacts, numérique et matériel, qui peuvent contribuer à l'élaboration d'une situation didactique mobilisant le duo.

### **Deuxième partie : Un duo d'artefacts pour la conceptualisation du triangle**

Notre projet consiste à élaborer une ingénierie didactique, mobilisant un duo d'artefacts, numérique et matériel, et à l'expérimenter dans des classes afin d'évaluer les effets du duo sur les apprentissages.

Cette deuxième partie est constituée de trois chapitres consacrés à la composition d'un duo d'artefacts pour la conceptualisation du triangle à partir de sa construction à la règle et au compas.

Le troisième chapitre expose une analyse préalable des artefacts et des concepts en jeu dans la construction du triangle à la règle et au compas. Cela permet d'identifier les difficultés et les obstacles à franchir quant à l'usage du compas dans cette construction et de formuler nos idées directrices pour la composition du duo.

Le quatrième chapitre est un retour sur notre problématique par un exposé de nos hypothèses de recherche relatives à la composition d'un duo incluant le compas pour la conceptualisation du triangle.

Le cinquième chapitre présente, d'une part la méthodologie d'ingénierie collaborative de composition du duo et, d'autre part les éléments clés de la situation didactique ainsi que l'élaboration de l'artefact numérique nécessaire à l'implémentation de cette situation. Il nous permet d'exposer l'articulation des artefacts du duo ainsi que la description de la situation finale et l'orchestration des artefacts numérique et matériel en son sein.

### **Troisième partie : Expérimentations du duo d'artefacts dans des classes**

Cette troisième partie présente la mise à l'épreuve de nos hypothèses de recherche lors d'expérimentations dans des classes. Nous avons choisi de faire nos expérimentations trois années consécutives dans la même école dans des classes de CM2 dans lesquelles l'apprentissage de la construction du triangle à la règle et au compas est enseigné pour la première fois.

Le sixième chapitre propose un exposé du modèle utilisé pour étudier la conceptualisation en termes de genèses de conceptions et de parcours de conceptions (Balacheff, 2013), et des méthodologies d'analyse a priori et a posteriori, qui nous permettront de réaliser une évaluation de notre situation et du duo. Il s'agit de définir des observables qui nous permettent de traduire didactiquement nos observations et de

proposer des interprétations des actions du sujet en termes d'instrumentation et de conceptualisation.

Le septième chapitre décrit l'analyse a priori de la situation et du duo. Cette analyse a priori nous permet de montrer en quoi les choix faits dans la composition du duo et son articulation dans la situation, permettent de contrôler les comportements des élèves et en quoi l'acquisition de connaissances sur le triangle et le cercle est favorisée.

Dans le huitième chapitre nous décrivons le protocole d'observation mis en œuvre et nous dégageons les résultats qui nous permettent d'identifier les conceptions sur le triangle et le cercle révélées par le duo dans la situation.

Encouragée par les résultats positifs décrits au huitième chapitre nous achevons ce travail en proposant une discussion sur l'utilisation possible d'autres artefacts matériels articulés avec l'environnement numérique des cahiers informatisés et le compas matériel en vue de proposer d'autres perspectives d'apprentissages à partir de la construction du triangle à la règle et au compas.

PARTIE I  
ENVIRONNEMENT NUMÉRIQUE, ENVIRONNEMENT  
MATÉRIEL : QUELLE COMPLÉMENTARITÉ ?



## Chapitre 1. Usage des technologies numériques pour apprendre les mathématiques

Les programmes de l'enseignement scolaire en France et dans de nombreux pays étrangers préconisent l'utilisation des technologies numériques pour apprendre les mathématiques. Dans les classes, plusieurs de ces technologies numériques, les calculatrices, les tableurs grapheurs, les systèmes de calcul formel, les logiciels de géométrie dynamique, ou les applications sont effectivement utilisées en cours de mathématiques. Ces technologies numériques offrent de nouvelles opportunités pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. D'une part, elles permettent la résolution de certains problèmes qui ne seraient pas résolubles pour des élèves sans l'usage de ces technologies numériques. D'autre part, elles permettent aux enseignants et aux élèves d'étudier les objets mathématiques à partir de différentes représentations mathématiques de ces objets. Exploiter ces opportunités demande de repenser les méthodes et stratégies d'enseignement (Drijvers *et al.*, 2016). En effet, la simple présence de la technologie ne garantit pas l'amélioration de l'enseignement ou de l'apprentissage. Par conséquent, le défi est de réfléchir à l'usage des technologies numériques pour améliorer les résultats d'apprentissage en mathématiques.

L'intégration des technologies numériques en cours de mathématiques confronte encore les enseignants et les chercheurs en didactique à de nombreuses questions dont : les technologies numériques sont-elles réellement efficaces pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ? (ibid).

Dans ce chapitre, nous proposons de donner quelques éléments de réponse à ces questions à partir des résultats de la recherche. Ces éléments de réponses sont corrélés à notre perspective d'utilisation conjointe d'un environnement numérique et d'un environnement matériel dans une même situation didactique (Brousseau, 1998). Nous étudions dans un premier temps l'effet de l'usage des technologies numériques sur l'apprentissage ; les inclure dans les tâches proposées aux élèves peut-il améliorer l'apprentissage ? Nous montrons l'importance du choix des tâches proposées pour que l'effet de l'usage de ces technologies sur l'apprentissage soit positif. Nous montrons aussi que cet usage change l'organisation de la classe : les rôles du professeur et de l'élève sont différents. Le professeur n'est plus celui qui dispense le savoir et l'élève celui qui écoute. Les technologies numériques rendent l'élève plus acteur de son apprentissage, même si le rôle du professeur reste essentiel. Dans un deuxième temps, nous étudions plus spécialement l'apport des logiciels de géométrie dynamique à l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Enfin nous nous intéressons à l'usage des technologies numériques à l'école primaire. En particulier, nous analysons le potentiel de manipulations de représentations dynamiques d'objets mathématiques par rapport à des manipulations d'objets matériels.

## 1.1. Numérique et matériel, des environnements complémentaires

De nombreuses études issues de la recherche en didactique reflètent un optimisme pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques avec les technologies numériques (Hoyles & Lagrange, 2010), (Drijvers *et al.*, 2016), (Moyer-Packenham, 2016). Les environnements, sensible et papier-crayon, ne sont pas pour autant négligés mais il apparaît que majoritairement, les technologies numériques sont utilisées pour remplacer une activité de manipulations d'objets matériels ou une activité papier-crayon. Si les deux environnements, numérique et matériel, sont mobilisés, les tâches proposées dans les différents environnements, sensible, papier-crayon, numérique, sont la plupart du temps disjointes. Des études comme par exemple celle de Gueudet, Bueno-Ravel et Poisard (2014) relatent une utilisation simultanée d'un outil matériel et d'un outil numérique. Dans ce cas l'outil numérique est une simulation d'un outil matériel existant. Il est souvent mobilisé *rétro projeté* pour faciliter des mises en commun, pour démarrer ou faire la synthèse d'une activité avec l'outil matériel. Dans ces études, ni la cohérence entre l'utilisation de chaque outil, numérique et matériel, ni l'élaboration de l'artefact numérique étant donné l'artefact matériel ne sont interrogées. De plus à notre connaissance, aucune étude n'a été réalisée sur la façon dont les élèves adaptent leurs connaissances de l'environnement papier-crayon à un environnement numérique ou réciproquement.

Notre expérience d'enseignante nous montre qu'effectivement dans les classes la réalisation d'une même tâche dans l'environnement papier-crayon et dans un environnement numérique n'est pas nécessairement réussie dans les deux environnements. Par exemple le tracé d'un parallélogramme à partir de la longueur de ses diagonales, est mieux réussi dans l'environnement papier-crayon que dans un environnement de géométrie dynamique. Les connaissances requises pour réaliser le parallélogramme sont que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. L'utilisation de la règle graduée comme instrument de mesure et d'alignement permet de réaliser, relativement facilement, le tracé dans l'environnement papier-crayon. Dans l'environnement de géométrie dynamique le tracé des deux segments de même milieu nécessite la mobilisation de la primitive de symétrie centrale. Ceci peut rendre la tâche plus difficile pour certains élèves car elle fait appel à une autre caractérisation du parallélogramme comme quadrilatère ayant un centre de symétrie. Dans ce cas, la réalisation conjointe du tracé dans les deux environnements, papier-crayon et numérique, peut être intéressante et favorable à la conceptualisation du parallélogramme. D'autres exemples du même type pourraient être donnés dans d'autres domaines mathématiques que la géométrie.

La différence de résolution d'une même tâche dans les deux environnements, numérique et matériel, nous semble être une potentialité à exploiter pour concevoir des situations

didactiques (Brousseau, 1998) favorables à la conceptualisation. **C'est dans la perspective d'une articulation environnement numérique et matériel ou papier-crayon que nous allons travailler.** La complémentarité des environnements, numérique et matériel ou papier-crayon, est au cœur de notre réflexion et nous conduit à formuler la question initiale suivante.

*L'utilisation conjointe d'un environnement numérique et d'un environnement matériel ou papier-crayon dans une même situation didactique peut-elle être une plus-value pour les apprentissages ?*

Avant d'étudier la valeur ajoutée d'une utilisation conjointe des environnements numérique et matériel il nous semble important de préciser quel peut être le potentiel et la plus-value des technologies numériques pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Dans les paragraphes suivants, nous montrerons que lorsque les outils numériques et les tâches mobilisant ces outils sont conçus en prenant en compte, la relation entre l'utilisation de la technologie, l'activité de l'élève, les concepts mathématiques en jeu, les environnements numériques peuvent être bénéfiques à l'apprentissage des mathématiques.

## **1.2.Effet de l'usage des technologies numériques sur l'apprentissage des mathématiques**

Dans les dix dernières années, de nombreuses recherches en didactique ont été réalisées sur l'impact des technologies numériques pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques (Drijvers *et al.*, 2016). Drijvers et ses collègues constatent que différentes études quantitatives montrent que l'utilisation de la technologie numérique dans l'enseignement des mathématiques peut avoir un effet positif, mais que cet effet est relativement mineur. Étant donné que toute action éducative novatrice a généralement un effet positif, ces études ne fournissent pas de preuves formelles de l'efficacité de l'utilisation des outils numériques dans l'enseignement des mathématiques. Une étude de l'OCDE (OECD, 2015) conclut qu'il existe peu de preuves de l'effet positif de l'usage des technologies numériques sur la réussite des élèves : « *Il y a peu de preuves solides qu'une plus grande utilisation de l'ordinateur par les élèves conduit à de meilleurs résultats en mathématiques*<sup>1</sup> » (Ibid p. 145).

Drijvers et ses collègues constatent que les études quantifiées par la statistique ne font pas la différence entre le niveau de scolarité, le type de technologie numérique utilisée, la façon dont la technologie numérique est intégrée à l'enseignement ou d'autres facteurs qui peuvent avoir de l'influence. Par conséquent, ces études, certes intéressantes, ne fournissent qu'un aperçu général, mais ne donnent pas de comptes rendus détaillés d'études précises qui puissent signaler des cas où la technologie a eu un grand impact sur l'apprentissage. Ils citent par exemple la conclusion plus optimiste exprimée par Ronau et

---

<sup>1</sup> Traduction de l'auteur.



ses collègues : « *Au cours des quatre dernières décennies, la recherche a montré que les technologies numériques telles que les calculatrices et les logiciels permettent d'améliorer la compréhension des élèves* » (Ronau et al., 2014 p.974). Les études quantitatives n'identifient pas les raisons pour lesquelles les technologies numériques peuvent avoir un effet positif sur l'apprentissage ou non. Ces études ne sont donc pas suffisantes pour analyser et expliciter les justifications et les conditions de l'enseignement des mathématiques avec les technologies numériques. Des études qualitatives s'avèrent plus appropriées pour analyser leur effet sur l'apprentissage des mathématiques.

### 1.2.1. Pourquoi et comment les technologies numériques peuvent-elles avoir un effet positif sur les apprentissages

En se concentrant sur ce que font les élèves lorsqu'ils pratiquent les mathématiques avec des outils numériques, des études qualitatives offrent d'autres possibilités aux chercheurs pour comprendre la nature des effets de ces outils sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Drijvers et ses collègues (2016), signalent plusieurs études qualitatives mettant en lumière la subtilité de l'aide que peut fournir la technologie numérique dans l'enseignement des mathématiques. Plusieurs avantages à leur utilisation sont identifiés.

#### Des pratiques pédagogiques qui favorisent l'expérimentation

L'important développement et l'utilisation des technologies numériques induisent pour les élèves de nouvelles façons d'apprendre et de comprendre les concepts mathématiques. Les mathématiques à l'interface d'un ordinateur peuvent être facilement manipulées. Ainsi les technologies numériques rendent l'expérimentation plus facile et donc favorisent l'exploration de concepts mathématiques. Les résultats de Olive et ses collègues (2010) suggèrent que le lien entre les pratiques mathématiques et la connaissance mathématique est renforcé au cours de situations qui impliquent l'utilisation efficace de technologies numériques. En autorisant l'expérimentation, elles peuvent en effet, être une aide pour acquérir des concepts mathématiques abstraits.

Sacristan et ses collègues (2009), considèrent que les outils numériques ont un rôle de médiation dans l'apprentissage des mathématiques. Ce sont les connaissances existantes du sujet qui guident la manière dont ils sont utilisés, tout en influençant l'engagement du sujet. Ainsi, des trajectoires d'apprentissage différentes peuvent être engendrées en fonction de l'expérience des élèves, des connaissances mathématiques et des outils utilisés. Un environnement numérique fournit les outils pour lier exploration et formalisation. Construire des ponts entre l'activité mathématique des élèves et la formalisation de la pensée mathématique est possible dans un environnement numérique.

## Des pratiques pédagogiques qui favorisent l'étude des objets mathématiques

Souvent, les élèves se contentent d'appliquer des techniques pour résoudre un problème, sans donner de sens à ces techniques. La technologie numérique, lorsqu'appliquée avec pertinence, peut engendrer des pratiques pédagogiques qui favorisent l'étude des objets mathématiques et pas uniquement l'apprentissage de procédures de résolution. En particulier, elle permet de créer des représentations dynamiques d'objets mathématiques favorables à la conceptualisation. Sacristan *et al.* (2009) signalent plusieurs études ayant établi que l'utilisation d'outils numériques peut être favorable à la conceptualisation de problèmes ou d'objets mathématiques. Ces études font ressortir que l'élaboration d'environnements numériques dans lesquels les élèves peuvent exprimer et développer des idées mathématiques, permet de dépasser la technique et d'amener la formalisation. De tels environnements amènent les élèves à percevoir des abstractions situées. Ils rendent les concepts mathématiques abstraits visibles par les élèves à travers des représentations choisies dans ce but. Les environnements numériques sont des outils de visualisation, de réification, et de manipulation directe de représentations d'objets mathématiques et de certaines de leurs propriétés (Artigue, 2008). Par exemple les logiciels de géométrie dynamique, basés sur la manipulation directe, changent l'enseignement de la géométrie dans la mesure où ils favorisent la transition d'une appréhension perceptive des figures vers une appréhension géométrique.

## Des facteurs importants à prendre en compte

Plusieurs études mettent en évidence les facteurs qui favorisent ou entravent l'intégration réussie des technologies numériques dans l'enseignement des mathématiques. Sacristan et ses collègues (2009) relèvent que le choix des outils technologiques, les potentialités de ces outils, leur ordonnancement dans une situation sont différents facteurs à prendre en compte afin de favoriser certaines trajectoires d'apprentissage. L'utilisation des outils numériques pour favoriser la perception de concepts mathématiques et engager des approches de résolution des problèmes, nécessite de repenser les façons de sélectionner, de concevoir et d'utiliser les tâches. Il s'agit d'avoir une influence sur les conditions de l'apprentissage, et de prendre en compte à la fois le rôle de l'enseignant et les interactions des élèves avec l'environnement numérique. Pour Drijvers (2015), les facteurs essentiels pour le succès de l'intégration des technologies numériques dans l'enseignement des mathématiques sont : l'élaboration de l'outil numérique et des tâches correspondantes exploitant le potentiel didactique de l'outil numérique, le rôle de l'enseignant et le contexte éducatif. En ce qui concerne le contexte éducatif nous notons qu'il est effectivement important que l'utilisation des technologies numériques soit intégrée de façon naturelle dans un cadre éducatif cohérent.

Nous allons préciser l'importance des tâches et le rôle des enseignants dans la mobilisation des technologies numériques, au cours des paragraphes suivants.

### 1.2.2. Importance de l'outil et des tâches qui le mobilisent

Les lignes directrices d'élaboration de tâches mobilisant les technologies numériques doivent provenir de considérations didactiques et pédagogiques et non être induites par la technologie. Pour Drijvers (ibid) il s'agit d'élaborer à la fois l'outil numérique et les tâches qui le mobilisent, ainsi que le cours au sein duquel la situation va être mise en œuvre. Une élaboration appropriée, de l'outil numérique et des tâches, d'une part renforce la maîtrise d'utilisation de l'outil numérique pour résoudre des tâches mathématiques et, d'autre part, favorise la conceptualisation des objets mathématiques en jeu (Laborde, 2001). Dans leur étude, Olive et ses collègues (2010) mettent l'accent sur l'importance de la nature des tâches proposées dans les environnements numériques. Ils précisent qu'il est nécessaire d'accorder une attention particulière à l'élaboration des tâches afin d'éviter aux élèves de percevoir la technologie numérique comme un « maître » plutôt que comme un « partenaire ». Ces auteurs plaident pour l'élaboration de tâches inédites, menant à des pratiques nouvelles, plutôt que des tâches qui pourraient tout aussi facilement être réalisées sans l'outil informatique. Pour eux, la connaissance mathématique et les pratiques sont construites comme un produit de l'interaction entre l'élève, l'enseignant, la tâche et la technologie. Ce nouveau modèle montre comment les interactions entre l'élève, l'enseignant, la tâche et la technologie créent un espace dans lequel les nouvelles connaissances mathématiques et pratiques peuvent apparaître. Olive et ses collègues transforment le triangle didactique en un tétraèdre didactique qui inclut la technologie (Figure 1.1). L'élève, au sommet du tétraèdre, est celui qui doit acquérir les nouvelles connaissances et développer les nouvelles pratiques, soutenu par l'enseignant, la tâche et la technologie.

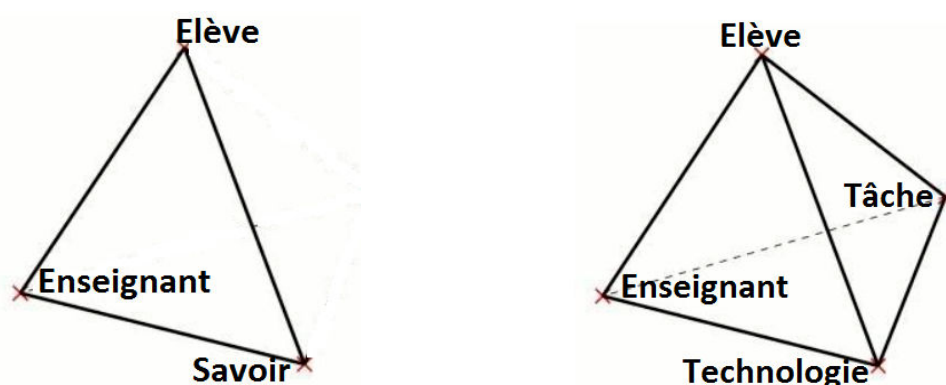


Figure 1.1 : Transformation du triangle didactique en tétraèdre didactique (Olive *et al.*, 2010)

Sacristan *et al.* (2009) considèrent que lors de l'élaboration d'une tâche, l'accent doit être mis sur la promotion d'activités dans lesquelles les élèves ont l'occasion d'exprimer, de présenter, d'améliorer et de réviser ou d'ajuster leurs propres façons de penser. Pour ces auteurs, il est crucial que les chercheurs et les enseignants soient attentifs aux nouvelles façons de penser que les élèves découvrent et mettent au point avec les technologies numériques, afin de sélectionner dans l'élaboration des tâches, ce qui favorise la pensée mathématique des élèves. Certaines activités qui peuvent paraître insignifiantes dans

l'environnement papier-crayon, peuvent avoir des valeurs mathématiques dans un environnement numérique. Par exemple, la construction de figures dans un environnement de géométrie dynamique exige l'identification des propriétés mathématiques conduisant à la solution du problème. Ce n'est pas nécessairement le cas lors du traitement du même problème dans l'environnement papier-crayon. Dans cet environnement il est possible de valider des gestes et des stratégies purement graphiques.

### 1.2.3. Rôle de l'enseignant

L'utilisation d'outils numériques exige une approche différente de l'enseignement, donc du rôle de l'enseignant. L'intégration des technologies numériques dans l'enseignement des mathématiques ne réduit surtout pas l'importance de l'enseignant. Dans leur étude, Drijvers et ses collègues (2016) montrent que des connaissances et compétences particulières des enseignants sont nécessaires pour bien intégrer les ressources numériques dans leur enseignement. Des recherches en didactique des mathématiques ont abouti à l'élaboration de cadres, et de modèles, pour décrire les stratégies d'enseignement et le développement professionnel des enseignants dans l'utilisation de technologies numériques. Par exemple, le modèle d'orchestration instrumentale (Trouche, 2004) met en lumière l'importance de ce qu'on appelle une configuration didactique pour un enseignement efficace avec une technologie numérique et ses modes d'exploitation. La capacité des enseignants à intégrer les outils numériques dans l'enseignement des mathématiques est en effet un facteur important pour que cette intégration produise des effets sur l'apprentissage des élèves.

Dans l'élaboration d'un enseignement efficace qui tire profit de l'emploi des technologies numériques, l'implication de l'enseignant est déterminante à deux niveaux : d'une part, comme nous l'avons montré dans le paragraphe précédent, dans l'élaboration des tâches mobilisant l'outil numérique ; d'autre part, dans la planification de son cours en classe.

L'organisation de la classe est aussi importante pour que les technologies numériques puissent avoir un effet positif sur les apprentissages. L'enseignant doit orchestrer l'apprentissage, par exemple en faisant la synthèse des résultats obtenus grâce à ces technologies, en mettant en lumière les acquis qui en découlent directement et en reliant ces résultats à des résultats issus d'autres activités mathématiques (Drijvers, 2015). De nombreuses recherches (Sacristán *et al.*, 2009) ont constaté que les connaissances mathématiques construites dans un environnement numérique peuvent rester « cachées » si les enseignants ne les rendent pas explicites ; l'intervention appropriée de l'enseignant, permet aux élèves de valider en résultats mathématiques des relations qui se dégagent de l'exploration d'un problème. En outre, les attributs des technologies numériques, alliés à des interventions de l'enseignant, peuvent permettre à l'apprenant non seulement d'explorer les problèmes mais aussi d'établir des liens entre différents

contenus mathématiques qui pourraient, sans ces interventions, se développer séparément.

La littérature (Olive *et al.*, 2010) indique que les interactions entre les élèves, les enseignants, les tâches et les technologies, provoquent une évolution du rôle de l'enseignant face aux élèves dans une situation didactique mobilisant les technologies numériques. En effet, les rétroactions fournies par l'environnement numérique viennent en supplément de celles de l'enseignant pour contribuer à l'apprentissage.

#### 1.2.4. Interactions et rétroactions

##### Différentes interactions

La technologie numérique permet d'interagir avec des représentations visuelles d'objets mathématiques grâce à des outils, et de recevoir des réactions de celle-ci. Sedig et Sumner (2006) distinguent trois types d'interactions : la conversation, la manipulation et la navigation. Ces trois interactions sont basées sur trois métaphores, dérivées de la façon dont les humains utilisent leur corps pour interagir avec le monde extérieur. L'interaction conversationnelle se fonde sur l'utilisation de la bouche et de la parole ; l'interaction manipulative se fonde, elle, sur l'utilisation des mains et la manipulation ; enfin l'interaction de navigation se fonde sur l'utilisation des pieds et la marche.

Lors du face-à-face avec l'interface numérique, les interactions conversationnelles consistent à « parler » à une représentation en utilisant des expressions symboliques ou lexicales ou des commandes. Il y a alors distinction entre l'action du sujet et la réaction de l'ordinateur. Les interactions par manipulation consistent à manipuler directement une représentation à l'aide d'un curseur de pointage qui permet d'attraper et de déplacer la représentation. De telles interactions sont plus tangibles que les interactions conversationnelles. Enfin les interactions de type navigation correspondent à un déplacement dans l'espace des représentations et explorent la troisième dimension ; elles interviennent donc essentiellement dans les environnements 3D. Même si les interactions conversationnelles peuvent être adaptées pour certains apprentissages, les interactions de type manipulation sont plus favorables à la conceptualisation. Nous reviendrons plus précisément sur l'effet des manipulations pour l'apprentissage dans le paragraphe 1.3.

##### Effet des rétroactions

L'un des points forts des technologies numériques est leur capacité à fournir des réponses personnalisées, instantanées, à l'activité du sujet, ce que ne peut pas faire un enseignant. Il existe une grande variété de formes de rétroactions, chacune fonctionnant potentiellement très différemment sur le plan cognitif et affectif des enfants (Sinclair & Baccaglini-Franck, 2015).

Un environnement numérique intègre le savoir et des rétroactions qui ont un impact sur l'apprentissage au cours du processus de résolution des problèmes posés. Laborde *et al.*

(2006) indiquent que la rétroaction fournie par la technologie numérique offre une grande opportunité pour de nouvelles façons de comprendre les mathématiques. Par exemple, dans un logiciel de géométrie dynamique, les rétroactions sont produites à la suite de la manipulation de représentations dynamiques d'objets mathématiques. De telles rétroactions, lorsqu'elles indiquent qu'une solution est insuffisante créent un besoin de recherche d'une autre solution. Ces rétroactions peuvent aussi aider les élèves à affiner leur pensée de façon itérative. En effet l'accent est mis ici sur l'endroit où se trouve le contrôle dans la résolution d'une tâche mathématique. Le contrôle est donc déplacé du niveau du professeur vers celui des élèves, et ainsi, leur permet de prendre un peu la responsabilité de leur propre apprentissage. Laborde et Laborde (2011) repris par Mackrell et ses collègues (2013) distinguent trois types de rétroactions : les rétroactions de manipulations directes, liées à la situation, qui incarnent les mathématiques ; les rétroactions de stratégie, qui montrent à l'utilisateur l'effet de sa réponse et qui peuvent avoir de l'influence sur les stratégies mises en œuvre ; enfin les rétroactions de validation en termes de réponse correcte ou incorrecte. Les deux premiers types de rétroactions, de manipulation directe et de stratégie, sont celles qui ont le plus d'effet sur les apprentissages. En effet des recherches montrent l'effet négatif des rétroactions « oui/non » de l'enseignant (English & Kirshner, 2015).

Les recherches présentées par (Olive *et al.*, 2010) sur le rôle de la rétroaction fournie par les outils numériques suggèrent que l'apprentissage est plus susceptible de se produire lorsque la rétroaction est inattendue. Sacristan *et al.* (2009) affirment que la rétroaction instantanée d'un environnement numérique peut être considérée comme un facteur important pour améliorer l'apprentissage des élèves. La facilité du support numérique pour tester immédiatement et réfléchir sur les connaissances existantes, a une influence sur le processus d'apprentissage. De même, la différence entre une rétroaction de l'environnement et l'attendu de l'élève par rapport à sa production, participe aussi à l'apprentissage. Pour les auteurs précédents, la réaction presque instantanée de l'environnement numérique a le potentiel de transformer la pensée intuitive en une réflexion analytique et en apprentissage.

## **1.3. La géométrie dynamique**

### **1.3.1. De nouveaux défis pour l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie**

Le rapport de Sinclair *et al.* (2016) sur l'enseignement de la géométrie relève que le développement des logiciels de géométrie dynamique conduit à de nouveaux défis pour l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie. Comme le signalent (Olive *et al.*, 2010) ou (Laborde *et al.*, 2006), ces environnements peuvent (et doivent) complètement transformer l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie. Un logiciel de géométrie dynamique est un véritable laboratoire qui permet d'expérimenter les mathématiques. Pratiquer les mathématiques dans un logiciel de géométrie dynamique revient d'abord à

identifier des phénomènes remarquables ; le rôle de l'élève s'apparente à celui d'un chercheur : observations, manipulations, conjectures, essais, et élaboration de raisonnements pour expliquer les phénomènes peuvent être mis en œuvre. De nombreuses études (ibid) ont établi que ce type de logiciel aide les élèves à identifier et explorer les propriétés et les relations géométriques entre les formes. Les manipulations dynamiques de formes géométriques aident l'enfant à appréhender l'essence mathématique d'une forme.

### 1.3.2. Le déplacement en géométrie dynamique

Les représentations dynamiques d'objets mathématiques permettent à l'élève de visualiser des problèmes ou des processus mathématiques qui n'étaient pas observables sans cet environnement. En effet, il permet aux élèves de pratiquer des activités exploratoires qui résultent du déplacement d'objets à l'écran. Le mouvement contrôlé de certains des éléments d'une configuration géométrique peut conduire l'élève, à détecter et étudier les invariants ou les relations mathématiques d'une figure géométrique, tout comme à examiner l'étendue de la validité de son résultat. Le déplacement d'un objet dans un logiciel de géométrie dynamique permet de distinguer les propriétés géométriques de la figure de celles d'un dessin particulier. Les premières sont conservées au cours du déplacement et pas les secondes. Une figure dans un logiciel de géométrie dynamique n'est plus un dessin statique qui représente une instance d'un objet géométrique, mais une classe de dessins respectant des relations invariantes entre les éléments de la figure. La distinction entre dessin et figure (Laborde & Capponi, 1994) est clairement mise en évidence en géométrie dynamique. Pour Soury-Lavergne (2006, p. 3) *« le déplacement permet d'une part l'exploration des figures et d'autre part l'obtention de rétroactions, deux fonctions qui font des environnements de géométrie dynamique des espaces d'expérimentation mathématique »*. Le déplacement est une caractéristique essentielle de ces logiciels. Pour exploiter leurs potentialités, il faut bouger, déplacer les figures. Soury-Lavergne (ibid) souligne que la consigne « bouger la figure », renvoie à un ensemble important d'actions et de décisions possibles pour l'élève.

#### Le déplacement, résultat d'un apprentissage

Pour Soury-Lavergne (ibid) et pour Laborde et Laborde (2014) une utilisation mathématique du déplacement n'est pas spontanée pour les élèves. Des expérimentations dans des classes ont montré que le déplacement d'un élément (points essentiellement) d'une figure n'est pas d'emblée mobilisé par les élèves. Une introduction et une analyse explicite de son utilisation doivent être organisées par l'enseignant. C'est pourquoi, les auteurs précédents affirment, que le déplacement, ni simple ni automatique, résulte d'un apprentissage. En outre, lorsque le déplacement est mobilisé, ses effets ne sont pas nécessairement interprétés en termes géométriques par les élèves. Soury-Lavergne (ibid) montre que les élèves peuvent rester à de simples constatations spatio-graphiques : ça monte, ça s'agrandit... Ces observations conduisent à

considérer le déplacement non simplement comme une fonctionnalité d'un logiciel de géométrie dynamique mais comme un instrument (Rabardel, 1995) pour faire des mathématiques. Cet instrument résulte d'une élaboration par le sujet au cours de ses interactions avec le logiciel.

### **Différents instruments déplacement à construire**

En géométrie dynamique, l'interaction entre l'élève et les figures géométriques, considérées comme un ensemble de relations entre différents éléments caractéristiques, n'est pas aisée. Les élèves ne reconnaissent pas nécessairement les mathématiques qu'ils ont apprises dans l'environnement papier-crayon. Le mode déplacement leur impose de concentrer leur attention sur les relations entre les éléments caractéristiques de la figure. Ainsi pour Laborde et Laborde (2014), un environnement de géométrie dynamique offre aux élèves une autre fenêtre sur les mathématiques ; les mathématiques elles-même sont modifiées à leurs yeux.

Dans sa thèse (Restrepo, 2008) étudie les genèses instrumentales (Rabardel, 1995) du déplacement et leur rôle dans l'apprentissage de la géométrie. Un déplacement peut être libre ou contraint. Il peut être mobilisé avec une finalité mathématique ou non. Du côté de sa finalité mathématique, Restrepo identifie plusieurs fonctions au déplacement. Il peut être exploratoire, à savoir, servir à identifier des invariants d'une figure et constater des propriétés, servir à constater des variations au cours du mouvement, servir à visualiser la trajectoire d'un point, ou encore servir à élaborer des conjectures. Il permet évidemment de réaliser une construction. Enfin il peut aussi avoir une fonction de validation pour valider ou invalider une construction ou pour valider une conjecture. Ainsi différents instruments déplacements sont construits par les élèves.

### **1.3.3. Manipulations directes de représentations dynamiques d'objets mathématiques**

#### **Rôle des représentations**

Pour Laborde et Laborde (2014), le rôle des représentations en géométrie dynamique est essentiel. Ils distinguent interactivité et manipulation directe. Lorsque l'utilisateur « demande » au logiciel d'exécuter quelque chose, et après la réaction de l'ordinateur, lui demande autre chose, il y a interactivité. En comparaison, la manipulation directe ne consiste pas à appuyer sur des boutons, ou à remplir des boîtes de dialogue mais consiste en une interaction directe avec les objets. Cette différence entre interactivité et manipulation directe est à rapprocher de celle établie entre interactions conversationnelles et interactions manipulatoires par Sedig et Sumner (2006) dont nous avons parlé au paragraphe 1.2.4. Les logiciels de géométrie dynamique qui permettent la manipulation directe proposent à l'utilisateur d'agir directement sur les objets mathématiques. L'interaction avec des objets dynamiques transforme la façon habituelle (dans l'environnement papier-crayon) d'agir sur les objets mathématiques. En effet, avant



d'entreprendre une action, les élèves ont à prendre des décisions qui sont influencées par leurs connaissances sur les objets mathématiques. Les représentations dynamiques d'objets mathématiques offrent donc aux élèves une nouvelle fenêtre pour la conceptualisation. En outre, les objets manipulés obéissent aux contraintes théoriques de la géométrie. Par exemple dans un logiciel de géométrie dynamique une construction uniquement perceptive ne résiste pas au déplacement : lorsqu'on déplace une telle figure, elle se déforme, elle perd donc ses propriétés caractéristiques. Le déplacement invalide les constructions perceptives et fournit aux élèves des informations sur le comportement géométrique des objets.

### **Transformer les tâches proposées aux élèves**

Comme dans tout environnement numérique, en géométrie dynamique aussi la nature de la tâche proposée est cruciale pour engager l'élève dans des activités d'exploration fructueuses et de raisonnement géométrique. Laborde (2001) distingue quatre types de tâches utilisées par les enseignants en géométrie dynamique : des tâches pour lesquelles la technologie numérique facilite mais ne change pas la tâche ; des tâches pour lesquelles la technologie facilite l'exploration et l'analyse (par exemple l'identification de relations grâce au déplacement) ; des tâches que l'on peut faire dans l'environnement papier-crayon, mais pour lesquelles de nouvelles approches peuvent être envisagées à l'aide de la technologie numérique (par exemple les constructions de figures mobilisant les propriétés géométriques des figures) ; et des tâches qui ne peuvent pas être entreprises sans l'aide de la technologie (par exemple les boîtes noires). Pour les deux premiers types, la tâche est facilitée par la technologie ; pour les deux autres, la tâche est modifiée par la technologie.

De nombreux exemples dans la littérature montrent comment la première stratégie de résolution de problèmes est visuelle et évolue vers plus de constructions géométriques grâce au déplacement (Laborde & Laborde, 2014). Ainsi la conception de tâches, dans un environnement de géométrie dynamique, doit se fonder sur l'idée de tirer parti de la modification de nature des figures et des propriétés du déplacement. Les tâches doivent conduire l'élève à interagir avec l'environnement ; les rétroactions et les outils disponibles doivent permettre l'élaboration de stratégies impliquant des connaissances géométriques nouvelles. Le fait que ce soit l'environnement qui réagit, indépendamment de l'enseignant, contribue à une meilleure appropriation du problème par les élèves.

Pour Laborde et Laborde (ibid), une transformation d'un nouveau genre a lieu. Elle ne réside pas seulement de la création d'artefacts embarquant une connaissance mathématique mais aussi de la création d'artefacts offrant un modèle dynamique d'objets théoriques. L'enseignement des mathématiques peut tirer parti des possibilités offertes par ces représentations dynamiques des objets mathématiques en modifiant la nature des tâches données aux élèves et ainsi favoriser l'apprentissage.

## **1.4. Les technologies numériques à l'école primaire**

Le contexte dans lequel nous menons notre recherche est le cycle 3 de la scolarité obligatoire en France. Ce cycle de consolidation est à la liaison entre l'école primaire et le collège. C'est pourquoi nous nous intéressons dans ce paragraphe à l'usage des technologies pour apprendre les mathématiques dès le début de la scolarité.

### **1.4.1. L'impact des manipulations**

Le bénéfice de manipulations d'objets matériels pour l'apprentissage des mathématiques à l'école élémentaire est largement reconnu par les enseignants et les travaux de recherche (Laborde & Marchetteau, 2009). Les manipulations sont particulièrement importantes pour l'apprentissage de la géométrie. Ces manipulations d'objets matériels renvoient des informations sensorielles et kinesthésiques qui peuvent participer positivement à l'apprentissage. De plus ces manipulations offrent la possibilité d'avoir différents points de vue sur un même objet ce qui est aussi favorable à l'apprentissage de la géométrie. Des manipulations d'objets matériels, comme par exemple le matériel de numération « bâchettes », sont aussi utilisées et ont fait leurs preuves pour l'apprentissage du sens des nombres (Tempier, 2015).

L'utilisation des technologies numériques à l'école primaire est souvent opposée au fait que les enfants de cet âge ont besoin de manipulations tactiles, d'expériences concrètes (Sinclair & Baccaglini-Franck, 2015). Il ressort de la revue de littérature des auteurs précédents que de nombreuses applications, utilisables sur ordinateur ou sur tablette tactile, on fait l'objet de recherches pour comprendre la façon dont l'utilisation de telles technologies numériques avec de jeunes enfants affecte l'apprentissage et l'enseignement. Au cours de la dernière décennie, plusieurs recherches ont fait valoir la pertinence et l'avantage des manipulations d'objets numériques dans les premières années de la scolarité. Ces manipulations d'objets numériques s'appuient sur la familiarité avec les manipulations d'objets matériels, mais peuvent apporter des potentialités supplémentaires. Sarama et Clements (2009) ont mis en doute l'hypothèse que les outils matériels sont plus appropriés pour les jeunes enfants et ont fait valoir que les manipulations d'objets matériels sont limitées dans leur capacité à promouvoir les actions mathématiques et la réflexion sur ces actions. Sarama et Clements soulignent le potentiel de la technologie numérique, pour soutenir le développement de connaissances, qui connectent des objets concrets, des actions sur ces objets et des représentations symboliques de ces objets. Nous reviendrons plus spécifiquement sur les apports des manipulations d'objets numériques dans le paragraphe 1.5.

### **1.4.2. Les technologies tactiles**

La revue de littérature de Sinclair et Baccaglini-Franck (2015) met en avant l'apport des technologies tactiles pour l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. Bien

que les recherches sur l'usage des technologies tactiles ne soient pas encore très nombreuses, il semble que ces dernières puissent ouvrir de nouvelles perspectives pour l'apprentissage des mathématiques. Avec les technologies tactiles, l'interaction est plus immédiate dans la mesure où les doigts sont directement en contact avec l'écran ; les enfants interagissent non seulement par le biais de moyens alphanumériques mais aussi par le toucher, le son et l'image. De plus ces technologies tactiles conviennent de nouveaux gestes et invitent à de nouveaux types d'activités qui ne peuvent pas être proposées sur un ordinateur classique. Par exemple une tablette tactile permet à plusieurs enfants de toucher l'écran en même temps, et donc favorise le travail collaboratif entre les enfants, ce qui n'est pas possible sur l'écran d'un ordinateur. Nous n'en dirons pas davantage sur les technologies tactiles car dans notre travail nous nous cantonnerons aux interfaces numériques traditionnelles.

## **1.5. Manipulations d'objets matériels et manipulations d'objets numériques**

### **1.5.1. Efficacité des manipulations pour apprendre les mathématiques**

« Les enfants ont besoin d'apprendre concrètement ». « Des manipulations d'objets concrets doivent être utilisées pour apprendre les mathématiques à l'école primaire ». « L'enseignement et l'apprentissage doivent se développer du concret vers l'abstrait ». Ces trois affirmations sont communément acceptées dans la littérature sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Bien que ces recommandations soient sages pour Sarama et Clements (2016) elles peuvent aussi conduire à un enseignement et un apprentissage inefficace. En effet, de nombreuses recherches indiquent que le recours à des manipulations d'objets matériels pour enseigner les mathématiques est plus efficace qu'un enseignement sans manipulation ; mais des recherches ont aussi montré que les manipulations d'objets matériels n'étaient pas toujours plus efficaces que l'usage du papier-crayon et des représentations symboliques. Sarama et Clements expliquent cela par une connexion lacunaire entre les connaissances concrètes qui ressortent des manipulations et les représentations symboliques. En effet, les manipulations peuvent contribuer à l'apprentissage mais ne transmettent pas seules des idées mathématiques. « *Bien que l'expérience kinesthésique puisse améliorer la perception et la pensée, la compréhension ne voyage pas par le bout des doigts et les bras*<sup>2</sup> » (Sarama & Clements, 2016 p. 73).

### **1.5.2. Plus-value des manipulations d'objets numériques**

Plusieurs études (Sinclair & Baccaglini-Franck, 2015) font ressortir les avantages des manipulations d'objets numériques par rapport aux manipulations d'objets matériels. En

---

<sup>2</sup> Traduction de l'auteur.

particulier des études sur le micromonde de la géométrie dynamique mettent en évidence la facilité avec laquelle les jeunes enfants peuvent voir et explorer une grande variété de formes, et ainsi découvrir des relations entre les formes. Les environnements de géométrie dynamique s'avèrent efficaces pour l'apprentissage de la géométrie dès l'école primaire. Sinclair et Baccaglini-Franck signalent aussi plusieurs recherches qui comparent la réalisation de pavages géométriques dans l'espace sensible avec des formes matérielles et dans un environnement numérique. Ces études montrent que les motifs des pavages réalisés sont plus créatifs et complexes lorsque les enfants manipulent des formes numériques en comparaison avec la manipulation de formes matérielles. La technologie numérique offre plus de précision et plus de rétroactions mathématiquement pertinentes. Elle permet de créer des rétroactions qui aident les enfants à réfléchir sur les aspects mathématiques de leur action.

De même, l'étude de Sarama et Clements (2016) montre que la technologie numérique peut fournir des indications qui sont tout aussi fructueuses pour les élèves que des manipulations d'objets matériels. Ils indiquent que les représentations numériques d'objets mathématiques peuvent même être plus faciles à gérer, que leurs homologues matériels. Les manipulations d'objets numériques permettent un meilleur contrôle de l'action de l'élève que les manipulations d'objets matériels ; elles aident l'élève parce qu'elles sont plus faciles et rapides, et fournissent une rétroaction précise et immédiate.

### **Plusieurs représentations d'un même objet mathématique**

Plusieurs recherches relèvent l'importance pour l'apprentissage de relier différents types de représentations d'un même objet mathématique. L'étude de Moyer et ses collègues (2005) montre que les manipulations d'objets dans un environnement numérique permettent de faire d'importantes connexions entre, les manipulations d'objets matériels, les images visuelles de ces objets, les idées mathématiques abstraites et symboliques, et les processus qui sous-tendent les concepts mathématiques en jeu. Les manipulations d'objets numériques fournissent aux enfants des représentations flexibles qui leur permettent d'explorer et de tester leurs idées mathématiques en pleine genèse. De plus, un environnement numérique offre la possibilité de relier les objets et les manipulations sur ces objets avec les symboles abstraits qui les représentent, ces différentes représentations pouvant être affichées à l'écran simultanément. Pour Moyer et ses collègues, l'utilisation de manipulations d'objets numériques fournit un pont aux enfants entre les objets matériels, les objets figuratifs et les notations symboliques pour représenter des idées mathématiques abstraites. Faire ce lien doit être une nécessité absolue lorsqu'on propose des manipulations aux enfants.

Dans une étude plus récente (Moyer-Packenham & Bolyard, 2016) précisent que le potentiel des manipulations d'objets numériques pour aider au développement d'idées mathématiques chez les élèves, repose sur une utilisation judicieuse, appropriée et efficace de ces manipulations. Les technologies numériques, comme toute technologie,

ne permettent pas à elles seules de favoriser l'apprentissage. La sélection des manipulations d'objets numériques proposée a pour but de présenter des opportunités contribuant à l'apprentissage des mathématiques ; pour cela il faut que les interactions de l'élève avec l'environnement numérique lui permettent de se représenter les mathématiques en jeu.

### Du concret à l'abstraction

Pour comprendre le rôle des manipulations d'objets matériels ou numériques, ainsi que la nécessité d'une démarche d'enseignement allant du concret vers l'abstrait, Sarama et Clements (2016) proposent une étude de ce que peut signifier « concret ». La plupart du temps les manipulations concrètes font référence à des objets matériels que les élèves manipulent, tiennent dans leurs mains. Cet aspect sensoriel conduirait logiquement à faire des manipulations concrètes dans le monde sensible, la base de l'apprentissage. Les auteurs précédents relèvent deux problèmes relatifs à cette hypothèse. Un premier problème est de prétendre que les concepts mathématiques puissent être lus dans des manipulations. Or la matérialité des objets n'a pas le sens de l'idée mathématique. Un autre problème avec cette approche est que, même si les enfants commencent à faire un lien entre manipulation et idées mathématiques, les actions sur les objets manipulés peuvent suggérer des actions mentales différentes que celles que les élèves ont à apprendre. Pour Sarama et Clements, les manipulations d'objets matériels ou numériques, peuvent être bénéfiques pour construire initialement du sens. Cependant un retour réflexif du sujet sur ses actions est nécessaire pour que l'apprentissage soit robuste.

Les auteurs précédents considèrent deux types de connaissances concrètes : les connaissances « concrètes sensorielles » (*sensory-concrete knowledge*) et les connaissances « concrètes intégrées » (*integrated-concrete knowledge*). Les élèves ayant des connaissances « concrètes sensorielles » ont besoin de matériel sensoriel pour donner du sens à un concept ou une procédure. Manipuler des objets, matériels ou numériques, était leur pensée. Les connaissances « concrètes intégrées » sont des connaissances connectées mentalement. Pour les élèves ayant ce type de connaissances, la connaissance sur des objets matériels, les actions effectuées sur eux, et les représentations symboliques sont reliés dans une forte structure mentale. Ces connaissances « concrètes intégrées » font référence à des connaissances qui sont déjà concrétisées à un niveau plus élevé. Elles sont connectées à d'autres connaissances acquises et s'éloignent donc des objets sensoriels. Le développement de trajectoires d'apprentissage consiste à passer de connaissances « concrètes sensorielles » à des niveaux de connaissances « concrètes intégrées ».

Sarama et Clements (ibid) affirment que les manipulations d'objets numériques peuvent fournir des potentialités uniques pour le développement de connaissances « concrètes intégrées » à condition que les activités demandées aux élèves les guident pour établir

des liens entre les représentations figuratives et symboliques. Les objets et les actions disponibles pour l'élève doivent lui permettre de faire le parallèle entre les objets manipulés et les objets mathématiques en jeu. Cela confirme une nouvelle fois que de simples manipulations, d'objets matériels ou numériques, n'assurent pas un apprentissage. **Ce qui est important c'est la façon dont ces objets numériques et matériels, sont conçus et utilisés. Il est en effet nécessaire de problématiser les manipulations par des questionnements et de les inclure dans un contexte plus général qui donne du sens aux objets à manipuler.**



## **Chapitre 2. Articuler numérique et matériel pour apprendre les mathématiques**

Les travaux de Maschietto et Soury-Lavergne, (Maschietto & Soury-Lavergne, 2013) (Soury-Lavergne & Maschietto, 2015), illustrent que, pour l'apprentissage des mathématiques, l'environnement numérique ne remplace pas toujours les autres espaces, sensible et papier-crayon, mais peut être complémentaire de ces derniers. Cela nous amène à nous interroger sur les conditions dans lesquelles une utilisation conjointe, d'un environnement numérique et matériel, peut être favorable aux apprentissages. L'objectif de ce chapitre est d'établir ces conditions. Soutenue par la caractérisation de l'apprentissage par adaptation à un milieu, donnée par Brousseau dans le cadre de la théorie des situations didactiques qu'il a développée (Brousseau, 1998), nous considérons que la mobilisation conjointe d'un environnement numérique et d'un environnement matériel pour un apprentissage donné ne peut être fructueuse qu'au sein d'une situation didactique organisée autour d'un milieu représentant les savoirs à acquérir. En nous appuyant sur les résultats présentés dans le premier chapitre quant à l'usage des technologies pour apprendre les mathématiques et sur les cadres spécifiques de la didactique que sont l'approche instrumentale (Rabardel, 1995a) et la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1990), nous établirons les premières caractéristiques de ce que nous appelons un duo d'artefacts, numérique et matériel, qui peuvent contribuer à l'élaboration d'une situation didactique mobilisant conjointement les deux environnements numérique et matériel. Ces caractéristiques nous permettront de formuler deux hypothèses de recherches à propos de l'incidence d'un tel duo d'artefacts sur l'activité du sujet et sa conceptualisation. D'une part, notre première hypothèse est que le duo provoque des genèses instrumentales associées qui permettent, en particulier, une genèse instrumentale relative à l'artefact matériel. D'autre part, notre seconde hypothèse est que le duo favorise l'acquisition et l'évolution des connaissances au fil de la situation et de l'alternance des actions instrumentées avec les instruments numériques et matériels.

Avant de débiter ce chapitre, il nous a semblé nécessaire de justifier nos choix de vocabulaire, matériel et numérique.

- Nous préférons l'adjectif matériel à l'adjectif tangible, au sens où dans l'environnement matériel, les objets et/ou les outils considérés sont réels, faits de matière par opposition à spirituel. Ces objets, outils matériels, peuvent être manipulés, touchés, ils sont donc aussi tangibles. Mais nous considérons que des objets numériques peuvent aussi être tangibles. En effet comme nous l'avons dit au paragraphe 1.3.2 lors de l'usage de technologies tactiles, les doigts sont directement en contact avec l'écran, les interactions se font par le toucher. De



même Laborde et Laborde (2014) parlent de représentations dynamiques et tangibles à l'interface d'un logiciel de géométrie dynamique.

- Même si en mathématique le terme numérique se rapporte aussi aux nombres et peut donc, dans certaines situations, prêter à confusion nous avons choisi de parler d'environnement et d'outils numériques. Nous avons rejeté le mot virtuel qui se rapporte à ce qui n'est qu'en puissance, qu'en état de simple possibilité par opposition à ce qui est en acte. Or justement nous pensons que les environnements numériques permettent de re-matérialiser les objets mathématiques abstraits, qui sont invisibles et virtuels. Nous avons écarté le terme digital au profit de son synonyme numérique pour éviter d'utiliser un anglicisme.

## **2.1. Idée initiale : introduire le numérique comme environnement conjugué à l'environnement matériel dans des situations didactiques**

L'état de l'art sur l'usage des technologies numériques pour enseigner les mathématiques, présenté dans le Chapitre 1, montre que la plupart du temps, en cours de mathématiques, ces technologies sont utilisées pour remplacer une activité papier-crayon ou des manipulations d'objets matériels. L'analyse d'une utilisation conjointe de manipulations d'objets matériels et numériques n'est pas souvent étudiée dans la littérature. Maschietto et Soury-Lavergne ont créé deux situations mobilisant de façon coordonnée un artefact numérique et un artefact matériel, l'une pour apprendre la numération (2013) et l'autre en géométrie (2015). Leurs situations consistent à associer un artefact matériel donné et un environnement numérique constitué d'un cahier informatisé qui reprend l'outil matériel. L'environnement numérique permet d'étendre à un nouvel artefact certains aspects de l'outil matériel et d'en contraindre d'autres. Ces auteures mettent en évidence que ce qui se passe en termes d'apprentissage lors de l'utilisation de l'outil matériel est différent de ce qui se passe lors des manipulations dans l'environnement numérique. Elles montrent que c'est la complémentarité des environnements et des artefacts qui est favorable à la conceptualisation.

Nous reprenons la même idée de base : coordonner un environnement numérique à un outil matériel donné. Explorer et analyser l'introduction du numérique comme environnement conjugué à l'environnement sensible ou à l'environnement papier-crayon est la réflexion d'origine de ce travail de thèse. C'est dans la perspective d'une articulation artefact matériel, artefact numérique au sein d'une même situation didactique (Brousseau, 1998) que nous allons travailler.

**Nous faisons l'hypothèse que la diversité des supports et la mobilisation conjointe d'un artefact numérique et d'un artefact matériel, dans une situation didactique, peuvent être favorables à l'apprentissage.**

La clé d'une utilisation enrichissante des potentialités d'une technologie numérique consiste à y créer un artefact articulé à un artefact matériel, de manière à ce que cette articulation induise une valeur ajoutée pour la conceptualisation. Cette articulation, pour être un réel gain didactique, doit répondre à des critères que nous allons préciser.

Pour caractériser l'articulation des artefacts, et donc préciser ce que nous appellerons un duo d'artefacts numérique et matériel, d'une part nous nous appuyons sur l'état de l'art relatif à l'usage des technologies numériques pour apprendre les mathématiques établi au Chapitre 1. D'autre part, notre caractérisation est soutenue par les cadres théoriques suivants : la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), l'approche instrumentale (Rabardel, 1995a) et l'orchestration instrumentale (Trouche, 2003), ainsi que la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1990). Dans les paragraphes suivants nous montrons comment ces cadres théoriques nous permettent d'établir des conditions minimales à l'élaboration d'un duo d'artefacts et comment le duo ainsi élaboré est susceptible d'influencer la conceptualisation.

Dans notre travail de réflexion sur les caractéristiques de l'articulation entre les deux artefacts nous auront en particulier à tenir compte des questions suivantes. La mobilisation conjointe d'un artefact numérique et d'un artefact matériel dans une situation didactique peut-elle favoriser l'activité mathématique ? En particulier l'artefact numérique peut-il solliciter de nouvelles stratégies porteuses d'apprentissage ? La technologie peut-elle être une valeur ajoutée à l'outil matériel, qui aide à franchir certaines difficultés ou certains obstacles ?

## 2.2. Une situation didactique pour faire exister le duo

*« Les outils n'ayant de sens que par rapport aux situations dans lesquelles ils sont mis en œuvre »* (Bruillard & Vivet, 1994) l'utilisation d'outils, numériques et matériels, ne permet l'apprentissage que lorsqu'ils sont mobilisés dans une situation didactique (Brousseau, 1998).

### 2.2.1. Une situation didactique pour fonder les conditions d'un apprentissage

Enseigner ne relève pas d'une démarche uniquement inductive, dans laquelle tout ce qui est à voir serait désigné par l'enseignant. *« C'est à travers des problèmes à résoudre qu'un concept acquière du sens pour l'enfant »* (Vergnaud, 1990 p. 135). Enseigner c'est chercher et élaborer des tâches appropriées qui permettent de faire fonctionner une connaissance chez l'élève. *« Le maître doit effectuer non la communication d'une connaissance mais la dévolution du bon problème. Si cette dévolution s'opère, l'élève entre dans le jeu et s'il finit par gagner, l'apprentissage s'opère »* (Brousseau, 1986 p. 52). Pour Brousseau ce sont les conditions de l'apprentissage qui sont essentielles dans l'acquisition d'une connaissance. Mettre en œuvre une situation d'apprentissage c'est étudier ce qu'il faut faire faire à l'élève pour qu'il pense l'objet mathématique. Une

situation didactique est envisagée « *comme l’environnement de l’élève englobant tout ce qui concourt à la composante mathématique de sa formation* » (Brousseau, 1997 p. 20). L’environnement didactique ne doit pas être réduit à l’action du professeur mais doit prendre en compte les rapports du sujet avec tout milieu a-didactique. Dans notre étude, les deux artefacts numérique et matériel font partie de l’environnement de l’élève. Pour que l’apprentissage s’opère, les deux artefacts doivent être des éléments du milieu.

### 2.2.2. Caractérisation d’un milieu

Pour Brousseau la communication didactique a pour objet de donner à son destinataire un moyen de contrôle ou de régulation sur un milieu. Brousseau (2003 p. 3) définit le milieu comme « *le système antagoniste de l’actant. C’est tout ce qui agit sur l’élève et/ou ce sur quoi l’élève agit* ». Brousseau précise que la conscience qu’un sujet peut avoir de sa capacité de contrôle sur une situation ou un milieu est repérée comme sa connaissance. « *L’élève apprend en s’adaptant à un milieu qui est facteur de contradictions, de difficultés, de déséquilibres* » (Brousseau, 1998 p. 59). Ainsi, l’élève apprend par des régulations de ses rapports avec son milieu, en corrigeant ses actions et en anticipant leurs effets. Les connaissances du sujet s’élaborent via ses interactions avec le milieu et les rétroactions qu’il renvoie. Une perturbation est identifiée par le sujet comme un décalage entre le résultat attendu suite à une action et la rétroaction du milieu. Cela implique d’une part, que le sujet soit capable de reconnaître cette différence non conforme à son intention, et que d’autre part, le milieu soit capable d’une rétroaction discernable.

Les interactions d’un utilisateur avec un environnement numérique sont à relier avec la notion de milieu (Laborde & Laborde, 2014). En effet, un environnement numérique permet à l’utilisateur d’invalider les stratégies erronées et d’être soutenu dans la recherche d’une stratégie. L’environnement numérique permet d’une part, d’effectuer des opérations sur des représentations d’objets mathématiques et d’autre part, les rétroactions liées au déplacement des objets permettent d’établir des relations entre les éléments caractéristiques des objets mathématiques en jeu. Pour Laborde et Laborde (ibid) les environnements numériques sont donc favorables à la création de milieux a-didactiques et conduisent à l’élaboration de nouveaux types de tâches qui ne peuvent exister dans l’environnement papier-crayon.

Ainsi l’articulation des artefacts numérique et matériel dans une situation didactique repose sur les deux hypothèses de travail suivantes.

#### *Hypothèses de travail*

- *Les connaissances du sujet s’élaborent via ses interactions avec le milieu et les rétroactions qu’il renvoie.*
- *Les deux artefacts, numérique et matériel, sont des éléments essentiels du milieu.*

### 2.2.3. Une situation qui problématise le recours aux artefacts numérique et matériel

Il s'agit d'une part de tirer profit des potentialités de chaque artefact tout en intégrant les contraintes de chacun pour élaborer un milieu riche en rétroactions lié à un apprentissage. D'autre part, il s'agit de créer une situation didactique mobilisant conjointement les deux artefacts, qui permette la dévolution au sujet à la fois du milieu et des actions/rétroactions judicieuses avec ce milieu, soit précisément avec chaque artefact. La situation est conçue pour favoriser la mise en œuvre de stratégies de résolution en lien avec la connaissance visée. **La situation didactique problématise le recours aux artefacts numérique et matériel ; elle combine les environnements, numérique et matériel ou papier-crayon, et met en œuvre l'articulation entre les manipulations de chaque artefact.**

Pour Vergnaud, « *Ce sont les situations qui donnent du sens au concept mais le sens n'est pas dans les situations. Le sens est une relation du sujet aux situations et aux signifiants. Ce sont les schèmes évoqués chez le sujet par une situation ou un signifiant qui constituent le sens* » (Vergnaud, 1990 p. 158). La situation créée a pour objectif de faire surgir les connaissances sur lesquelles s'appuyer pour construire des techniques d'utilisation des outils numériques et matériels pour effectuer une tâche. Cela implique, dans l'élaboration de la situation d'être vigilant à ce que chaque artefact enrichisse l'autre, en particulier à ce que l'artefact numérique sollicite de nouvelles stratégies de résolution en lien avec les apprentissages visés. Il est primordial que les stratégies suscitées par un artefact complètent celles suscitées par l'autre. « *Le fonctionnement cognitif d'un sujet en situation repose sur le répertoire des schèmes disponibles, antérieurement formés (...) Les enfants découvrent de nouveaux aspects et éventuellement de nouveaux schèmes en situation* » (Vergnaud, 1990 p. 140). **Il est donc nécessaire d'être attentif aux possibilités de réinvestissement et d'adaptation, des artefacts numérique et matériel au fil de la situation, afin que leur mobilisation soit favorable à l'évolution des schèmes mis en œuvre et donc finalement à la conceptualisation.**

Ceci nous amène à formuler une question de recherche.

***Question de recherche : Sous quelles conditions l'articulation entre un artefact numérique et un artefact matériel est-elle une plus-value pour les apprentissages et comment cette articulation influence-t-elle la conceptualisation ?***

### 2.3. Caractérisation d'un duo d'artefacts numérique et matériel

Nous présentons dans ce paragraphe certains éléments qui permettent une première caractérisation de ce que nous appelons un duo d'artefacts numérique et matériel. Un tel duo se compose d'un artefact numérique articulé à un artefact matériel ; c'est l'articulation entre les deux artefacts que nous allons décrire.

La fidélité rigoureuse des caractéristiques, techniques ou d'apparence, de l'artefact numérique par rapport à celles de l'artefact matériel ne fondent pas le duo. Comme l'affirment Maschietto et Soury-Lavergne (2013) le cœur d'un duo repose sur la plus-value que peut apporter l'artefact numérique pour l'apprentissage. Ainsi, dans l'élaboration d'un duo d'artefacts nous cherchons, comme ces auteures, à ce que l'artefact numérique soit une simulation qui offre une gamme de stratégies et d'interactions contrôlées par l'utilisateur qui enrichisse celle de l'artefact matériel. De plus, afin que l'utilisateur se concentre sur les caractéristiques pertinentes de l'artefact numérique qui vont l'amener vers l'apprentissage souhaité, nous avons vu qu'il est primordial que ce dernier, comme le duo, soit implémenté dans une situation didactique.

### 2.3.1. Des manipulations dans les deux environnements, numérique et matériel

L'état de l'art présenté dans le Chapitre 1 nous a montré la pertinence et l'avantage des manipulations d'objets numériques pour soutenir le développement des connaissances. En effet, un environnement numérique permet de créer des représentations dynamiques d'objets mathématiques, éléments du milieu, avec lesquelles l'utilisateur pourra interagir et ainsi acquérir des connaissances en contexte. Un duo d'artefacts doit donc inciter à des manipulations dans l'environnement matériel et dans l'environnement numérique.

Il ressort aussi de cette revue de littérature, que le développement de connaissances repose sur une utilisation appropriée et efficace des manipulations d'objets numériques et dépend donc des activités proposées aux élèves. Les manipulations doivent être problématisées, incluses dans un contexte significatif pour les objets à manipuler. Pour être judicieuses, les tâches proposées doivent permettre à l'apprenant d'établir des liens entre les représentations figuratives et symboliques des objets mathématiques en jeu.

Par conséquent, la façon dont l'outil numérique est conçu et exploité conjointement à un outil matériel est primordiale. L'élaboration de l'outil numérique et des tâches qui le mobilisent doit permettre de tirer profit du potentiel didactique d'un environnement numérique, comme par exemple la possibilité d'engager l'élève dans des activités d'exploration. La mobilisation d'un environnement numérique doit fournir les outils assurant le lien entre exploration et formalisation, en relation avec l'usage de l'outil matériel.

Ainsi les principes d'un duo d'artefacts numérique et matériel reposent sur les hypothèses de travail suivantes.

#### *Hypothèses de travail*

- *Les manipulations d'objets numériques et matériels sont pertinentes pour soutenir l'apprentissage.*
- *Pour être efficaces, les manipulations doivent être problématisées.*

### 2.3.2. Des genèses instrumentales qui s'entremêlent

Le cadre théorique de l'approche instrumentale (Rabardel, 1995a) ainsi que l'utilisation usuelle de l'artefact matériel dans l'enseignement, guident l'élaboration de l'artefact numérique. Une analyse des genèses instrumentales et des schèmes d'utilisation (ibid) de l'artefact matériel participe également à l'élaboration d'un artefact numérique en termes de continuité et discontinuité entre les deux artefacts. Ainsi l'approche instrumentale fournit le cadre théorique pour élaborer l'artefact numérique et l'articulation entre les deux artefacts numérique et matériel.

#### Des artefacts aux instruments un processus de genèse instrumentale

Rabardel (ibid), introduit la notion d'instrument, pour le différencier d'un artefact ou d'un outil et pour souligner l'importance de la relation existant entre le sujet et l'artefact. Pour Rabardel, l'instrument n'existe pas en lui-même. Un artefact devient un instrument pour un sujet lorsque ce dernier se l'est approprié et l'a intégré dans son activité. Un instrument est une entité mixte, constituée d'une composante matérielle, l'artefact ou une partie de l'artefact, et d'une composante psychologique qui est constituée des schèmes d'utilisation que le sujet va développer pour résoudre une tâche.

« Un instrument est formé de deux composantes :

- d'une part, un artefact, matériel ou symbolique, produit par le sujet ou par d'autres ;
- d'autre part, un ou des schèmes d'utilisation associés, résultant d'une construction propre du sujet, autonome ou d'une appropriation de ShSU (Schème Sociaux d'Utilisation) déjà formés extérieurement à lui » (Rabardel, 1995a).

Un instrument dépend du sujet qui le construit et de la tâche qu'il cherche à exécuter. La construction d'un instrument est le fruit de l'activité du sujet, au cours d'un processus appelé la genèse instrumentale. La genèse instrumentale, est liée à la fois aux caractéristiques de l'artefact, ses potentialités et ses contraintes, et à la personnalité du sujet, ses connaissances et ses habitudes de travail dans le contexte de la tâche à réaliser.

Une genèse instrumentale s'interprète par un double processus comme illustré par la Figure 2.1 : l'instrumentalisation, dirigée vers l'artefact ; l'instrumentation dirigée vers le sujet.

- L'instrumentalisation est une personnalisation de l'artefact ; les différentes potentialités, caractéristiques intrinsèques de l'artefact sont progressivement découvertes par le sujet qui adapte l'artefact à ses habitudes et à la situation.
- L'instrumentation induit la construction de schèmes d'utilisation par le sujet. Les potentialités et les contraintes de l'artefact influencent et conditionnent les actions et les stratégies de réalisation de la tâche demandée.

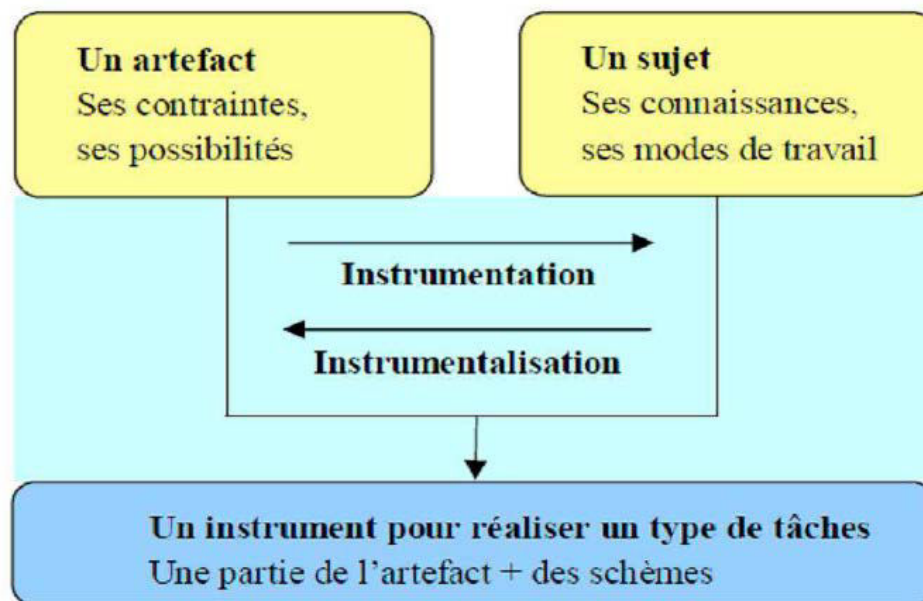


Figure 2.1 : Le processus de genèse instrumentale schématisé par (Trouche, 2004a)

Dans notre étude nous utilisons aussi le mot outil. Nous reprenons les distinctions de Trouche (2005 p. 93). « *Le mot artefact désigne un objet technique nu ; (...) le mot outil désigne un objet technique intégré ou susceptible d'être intégré par un usager dans ses gestes scolaires, professionnels ou quotidiens ; le mot instrument désigne une entité mixte composée de l'objet technique et des modes d'utilisation construits par l'usager* ».

L'approche instrumentale est très utilisée pour étudier l'utilisation des outils informatiques dans des situations d'apprentissage. Nous allons l'exploiter, d'une part dans l'élaboration de l'artefact numérique, pour analyser les genèses instrumentales de l'artefact matériel et élaborer un artefact numérique dont les genèses instrumentales renforcent celles de l'artefact matériel. D'autre part, l'approche instrumentale va nous permettre d'étudier les genèses instrumentales de chaque artefact, numérique et matériel et d'analyser le bénéfice de chacune en termes d'apprentissage.

### Les schèmes d'utilisation sources et critères de conceptualisation

La genèse instrumentale est caractérisée par le développement de schèmes d'utilisation. Rabardel (1995a) s'intéresse aux fonctions des schèmes et établit trois fonctions principales d'un schème :

- une fonction pragmatique relative à l'action qui contribue à la réalisation d'une tâche ;
- une fonction heuristique relative au contrôle et à l'organisation des actions qui permet au sujet d'anticiper et de planifier son activité ;
- une fonction épistémique relative à la prise d'information et à la compréhension des objets en jeu qui permet au sujet de comprendre ce qu'il fait.

Vergnaud (1990 p. 136) définit un schème comme « *l'organisation invariante de la conduite [d'une personne] pour une classe de situations données* ». Pour Vergnaud (ibid), un schème est composé de quatre éléments :

- le but qui se décline en sous buts et en anticipations ;
- les règles d'action, de prise d'information et de contrôle du type *si...alors...* qui s'avèrent décisives pour sélectionner l'information pertinente et engager la suite des actions du sujet au fur et à mesure du traitement d'une tâche ;
- les invariants opératoires qui sont des connaissances implicites et qui contiennent les théorèmes en acte, les concepts en acte qui pilotent la reconnaissance par le sujet des éléments pertinents de la situation et la prise d'informations sur la situation à traiter ;
- des inférences qui sont les clés des adaptations en situation ; elles permettent au sujet d'ajuster le schème aux caractéristiques spécifiques de la situation, de « calculer » les règles d'action et d'élaborer les anticipations à partir des informations et du système d'invariants opératoires dont il dispose.

Un schème repose sur une conceptualisation implicite. « *C'est dans les schèmes qu'il faut rechercher les connaissances-en-acte du sujet, c'est-à-dire les éléments cognitifs qui permettent à l'action du sujet d'être opératoire* » (Vergnaud, 1990 p. 136). Ainsi les schèmes d'utilisation développés durant l'activité avec un artefact induisent la constitution de connaissances pour le sujet. L'approche instrumentale et l'analyse des genèses instrumentales relatives à un artefact permettent donc d'anticiper les possibilités d'apprentissage d'un artefact.

Dans le cas d'un duo, les deux artefacts vont entraîner le développement de schèmes d'utilisation et donc l'acquisition de connaissances. La mobilisation du duo d'artefacts par un sujet doit permettre d'accroître le potentiel d'apprentissage de chaque artefact.

L'approche instrumentale nous conduit à formuler deux nouvelles hypothèses de travail sur lesquelles va reposer l'élaboration d'un duo.

#### *Hypothèses de travail*

- *Les potentialités et contraintes de chaque artefact influencent l'action et les stratégies de résolution du sujet.*
- *Les schèmes d'utilisation développés dans les deux processus de genèse instrumentale induisent le développement de connaissances complémentaires.*

#### Continuité et discontinuité entre les artefacts du duo porteuses de savoir

Dans un duo d'artefacts, chaque artefact doit enrichir l'autre afin que les instruments construits en bénéficient. Ainsi l'élaboration d'un artefact numérique ne consiste pas seulement à créer une imitation de l'artefact matériel. Des similarités et des différences sont nécessaires afin que les artefacts soient complémentaires et que le duo augmente le



potentiel d'apprentissage de chaque artefact. L'articulation entre les deux artefacts repose donc sur des liens exhibant des éléments de continuité en termes d'apprentissage. Pourtant une certaine discontinuité reste indispensable à l'apport d'une plus-value pour la conceptualisation. **Articuler les artefacts c'est les mettre en relation, tant en continuité qu'avec certaines discontinuités judicieusement choisies.**

#### *Les schèmes d'utilisation porteurs de continuité et discontinuité*

Dans une situation mobilisant un duo d'artefacts matériel et numérique, les deux artefacts interagissent dans leur utilisation et par conséquent les deux genèses instrumentales s'entremêlent. Pour Rabardel (1995) les schèmes d'utilisation sont liés aux artefacts et aussi aux objets sur lesquels les artefacts agissent. « *Les schèmes d'utilisation ne s'appliquent pas directement, ils doivent être instanciés en fonction du contexte spécifique de chaque situation. Ils s'actualisent alors sous forme de procédures adéquates aux singularités de la situation* » (ibid p. 94). Dans des situations nouvelles, le schème peut être assimilateur et s'appliquer par analogie. L'assimilation correspond à l'incorporation d'un objet ou d'une situation à la structure d'accueil du sujet (structure d'assimilation) sans modifier cette structure mais avec transformation progressive de l'objet ou de la situation à assimiler. Lorsque l'assimilation de la situation au schème ne permet pas de réussir, le schème est progressivement accommodé jusqu'à aboutir à un nouveau schème. « *La mise en œuvre des schèmes d'utilisation dans des situations nouvelles mais proches (processus d'assimilation) conduit à la généralisation des schèmes par extension des classes de situations, des artefacts et des objets pour lesquels ils sont pertinents. Elle conduit également à leur différenciation puisqu'ils doivent le plus souvent s'accommoder aux aspects spécifiques différents et nouveaux des situations* » (ibid p. 94). Lorsque l'objet ou la situation résistent, le mécanisme d'accommodation intervient. L'accommodation est le mécanisme par lequel les schèmes sont modifiés pour les ajuster aux données nouvelles.

Dans un duo, l'artefact numérique élaboré doit autoriser des transferts de schèmes d'utilisation d'un artefact vers l'autre. Mais l'artefact numérique doit aussi favoriser la construction de nouveaux schèmes ; **des processus d'assimilation et d'accommodation des schèmes d'utilisation doivent être engendrés par le duo** (Figure 2.2). L'articulation des artefacts doit autoriser, dans un premier temps, des tentatives d'assimilation de manière à ce que les éléments qui font l'objet de l'apprentissage soient reliés à ce que le sujet connaît déjà. Dans un second temps, il faut qu'un déséquilibre apparaisse afin que des processus d'accommodation des schèmes soient mis en œuvre pour retrouver un nouvel équilibre et induire un apprentissage. De tels déséquilibres sont provoqués par une discontinuité entre les deux artefacts ; l'artefact numérique doit inclure des éléments supplémentaires relativement à l'artefact matériel. La continuité entre les deux artefacts participera quant à elle à ce que les schèmes d'utilisation construits soient plus puissants, plus polyvalents ; ils pourront ainsi être mobilisés dans un plus grand nombre de tâches.

Un duo n'est pas qu'une juxtaposition de l'instrument 2 à l'instrument 1, l'instrument 2 incorpore l'instrument 1.

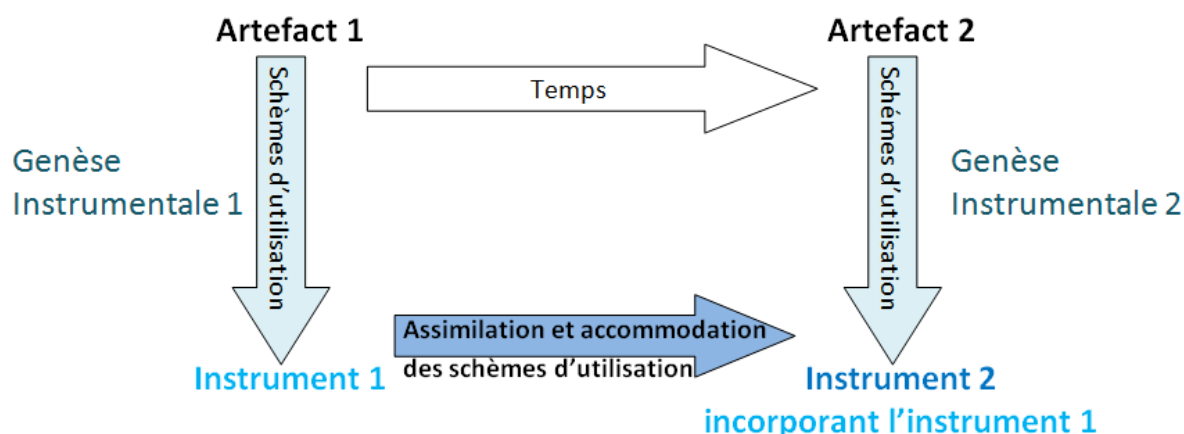


Figure 2.2 : Le duo engendre des processus d'assimilation et d'accommodation des schèmes d'utilisation d'un instrument à l'autre

### Les tâches support de continuité et de discontinuité

Dans la création d'un duo d'artefacts, le lien entre l'artefact numérique et l'artefact matériel est élaboré, par le concepteur du duo, grâce aux différentes tâches proposées aux élèves avec chaque artefact dans chaque environnement. En effet, un même artefact, associé à différents schèmes d'utilisation, peut donner lieu à une multiplicité d'instruments. Un instrument dépend du sujet qui le construit et de la tâche qu'il cherche à accomplir. Les tâches proposées jouent donc un rôle dans le déroulement de certaines genèses instrumentales et dans l'élaboration de certains instruments. **Trouver des modes d'exploitation du duo dans différentes tâches, qui valorisent le va et vient entre chaque artefact numérique et matériel, participe au potentiel didactique du duo.**

### 2.3.3. Orchestration des artefacts dans la situation

Afin de guider la constitution des instruments des élèves et faciliter leur contrôle, une orchestration instrumentale (Trouche, 2004a) des deux artefacts du duo doit être envisagée. Il s'agit de définir l'organisation systématique du jeu de succession des artefacts dans chaque environnement, pour la mise en œuvre des différentes activités mathématiques de la situation. « *Il s'agit d'accompagner et de provoquer non de superviser, la prise de conscience et l'autocontrôle de ses actions par l'apprenant* » (Linard 2001 cité par Trouche, 2005 p. 123). Une orchestration instrumentale prend en compte les modes de gestion des artefacts ; elle permet de provoquer et accompagner les genèses instrumentales (Trouche, 2004b).

Une orchestration instrumentale pour le traitement d'une situation donnée est définie par :

- « *des configurations didactiques c'est-à-dire des agencements des artefacts correspondant à chaque phase d'une situation ;*
- *leurs modes d'exploitation et leur articulation* » (Trouche, 2005 p. 126).

L'élaboration d'une situation et l'orchestration du recours aux artefacts est un enjeu didactique de l'élaboration d'un duo. Il s'agit de trouver des modes d'exploitation qui optimisent le duo par un choix raisonné du recours à l'un puis l'autre artefact. **Envisager l'orchestration des artefacts du duo oblige à analyser la contribution de chacun dans la situation d'apprentissage.**

### 2.3.4. Valeur ajoutée d'un duo d'artefacts

La valeur ajoutée d'un duo d'artefacts, numérique et matériel, articulés dans une situation didactique réside dans :

- l'artefact numérique nanti de ses potentialités et contraintes, créé en harmonie avec la situation envisagée, plus spécifiquement produisant des rétroactions adaptées à cette situation ;
- l'articulation des artefacts et en particulier les processus d'assimilation et d'accommodation des schèmes d'utilisation qui peuvent être provoqués ;
- la situation qui problématise et orchestre le duo pour favoriser la mise en œuvre de stratégies pertinentes pour l'apprentissage dans chaque environnement.

## 2.4. Hypothèses de recherche

Après avoir caractérisé ce que nous appelons un duo d'artefacts, et établi sa valeur ajoutée par rapport à l'artefact matériel, nous souhaitons étudier l'incidence d'un tel duo sur l'activité du sujet et sa conceptualisation : en quoi et comment les instruments construits et utilisés affectent-ils l'activité du sujet et ses apprentissages ?

### 2.4.1. Provoquer des genèses instrumentales associées

Dans un duo, l'artefact numérique est élaboré en vue d'accompagner les genèses instrumentales relatives à l'artefact matériel et ainsi améliorer l'apprentissage et donner du sens à l'utilisation de l'artefact matériel pour exécuter une tâche ; « *le sens renvoie à un sous ensemble de schèmes* » (Vergnaud, 1990 p. 158). Pour provoquer des genèses instrumentales relatives à cet artefact il faut mettre en relation les trois composantes suivantes : l'artefact, les schèmes d'utilisation et les concepts en jeu dans la réalisation de la tâche. Ainsi les choix faits dans la création de l'artefact numérique d'un duo sont ceux qui favorisent le développement des schèmes d'utilisation relatifs à chaque artefact. Le duo est élaboré pour provoquer des processus d'assimilation et d'accommodation des schèmes d'utilisation d'un instrument à l'autre et ainsi inciter les genèses instrumentales de l'artefact matériel. Cela nous conduit à formuler notre première hypothèse de recherche.

*Hypothèse de recherche 1 : Un duo d'artefacts, numérique et matériel, provoque des genèses instrumentales associées qui conduisent, en particulier, à une genèse instrumentale relative à l'artefact matériel.*

## 2.4.2. Favoriser l'acquisition de connaissances mathématiques

### Effet des instruments sur la conceptualisation

Pour Rabardel (1995b p. 62), « les facteurs à la source de l'influence des instruments sur l'activité cognitive et la conceptualisation correspondent, d'une part, aux contraintes propres aux instruments, d'autre part, aux ressources qu'ils offrent pour l'action ». La pensée du sujet est influencée par l'usage de l'artefact. Ainsi le processus de genèse instrumentale et l'instrument construit participent à la conceptualisation. L'approche instrumentale nous permet donc d'étudier les processus d'apprentissage engagés dans la mobilisation du duo.

### Le système [sujet-milieu] enrichi

Les ressorts de la conceptualisation apparaissent comme l'interaction du sujet avec le milieu. Le processus d'apprentissage consiste à agir sur un milieu donné ; les rétroactions du milieu permettent de construire des connaissances nouvelles (Brousseau, 1998). D'autre part, la réorganisation permanente des connaissances au fur et à mesure de l'intégration de nouvelles connaissances participe aussi à la conceptualisation. L'apprentissage, dans les termes de Balacheff, « est un processus de reconstruction d'un équilibre du système [sujet-milieu] qui aurait été rompu par une perturbation soit du milieu, soit des contraintes, voire du sujet lui-même » (Balacheff, 1995b p. 220).

La mobilisation d'un duo d'artefacts dans une situation, à travers l'articulation des artefacts, augmente les occasions de rencontre sujet-milieu, puisque différents milieux se confrontent. Le duo rend possible la réitération d'expériences en faisant varier les contraintes au cours de l'alternance entre actions instrumentées numériques et actions à l'aide des instruments matériels, et ainsi favorise l'émergence et la transformation de conceptions (Balacheff, 1995a). « Une conception est une instanciation de la connaissance d'un sujet par une situation (elle caractérise le couple sujet-milieu en situation) » (ibid p. 15). Grâce au duo, le système [sujet-milieu] est enrichi et multiplie les occasions d'émergence et de transformation des conceptions au cours de la situation. Cela nous amène à formuler notre seconde hypothèse de recherche.

*Hypothèse de recherche 2 : Un duo d'artefacts numérique et matériel, mobilisé dans une situation, favorise l'acquisition de connaissances au cours de la situation ; il est favorable à la mise en œuvre d'un parcours de conceptions d'un état initial supposé à un état final attendu du système [sujet-milieu] au cours de l'alternance entre les actions instrumentées avec les instruments numériques et celles utilisant les instruments matériels.*

## **2.5. Un duo particulier**

L'enjeu pour nous est donc de composer un duo pour un apprentissage choisi et d'analyser à la fois le processus de composition du duo et la situation qui le mobilise, ainsi que les effets du duo sur l'apprentissage et la conceptualisation.

Nous avons choisi de composer un duo d'artefacts dédié à la conceptualisation du triangle dans la tâche de construction d'un triangle de longueurs des côtés données. L'artefact matériel du duo est donc le compas. Il s'agit alors de développer conjointement un artefact numérique articulé au compas matériel et une situation qui mette en œuvre le duo. Notre objectif est de donner du sens à l'usage du compas dans cette tâche de construction et simultanément de favoriser la conceptualisation du triangle.

La partie 2 de ce manuscrit présentera les processus de composition du duo et de la situation et la partie 3 exposera à travers les analyses a priori et a posteriori de la situation les effets du duo sur les apprentissages.

PARTIE II  
UN DUO D'ARTEFACTS POUR  
LA CONCEPTUALISATION DU TRIANGLE



## Chapitre 3. Analyses préalables des artefacts et concepts en jeu dans la construction du triangle à la règle et au compas

Avant de composer un duo d'artefacts, numérique et matériel, pour apprendre la construction du triangle à la règle et au compas nous proposons une analyse épistémologique et cognitive du compas. Dans ce chapitre nous commençons par décrire la tâche de construction d'un triangle à la règle et au compas et nous précisons en quoi cette construction nous paraît emblématique de l'enseignement de la géométrie. Nous exposons ensuite ce qu'est l'apprentissage de la géométrie et le rôle déterminant attribué aux instruments dans cet apprentissage. Puis notre analyse se concentre plus spécifiquement sur la règle et le compas utilisés dans l'environnement papier-crayon. Nous poursuivons par l'étude des concepts de triangle et de cercle en jeu dans cette construction. Enfin nous présentons les idées directrices sur lesquelles va s'appuyer la composition du duo.

### 3.1. La construction du triangle à la règle et au compas

La construction du triangle à la règle et au compas connaissant les longueurs des trois côtés est une construction classique de l'enseignement de la géométrie<sup>3</sup>. Construire un triangle à partir de trois longueurs fixées, c'est montrer que le triangle existe théoriquement et produire un tracé de ce triangle, ou montrer que le triangle n'existe pas théoriquement, c'est-à-dire que les trois longueurs données ne vérifient pas l'inégalité triangulaire. La construction attendue (Figure 3.1) consiste à tracer à la règle un segment d'une des trois longueurs souhaitées, puis à tracer avec le compas deux cercles (arcs de cercle) centrés sur les extrémités de ce segment avec pour rayon chacune des deux autres longueurs. Le compas en produisant un cercle, produit tous les points qui sont à distance fixe de son centre. Les intersections des deux cercles permettent de trouver deux points situés à des distances données de chaque extrémité du premier segment tracé. Ces deux points, s'ils existent, sont les sommets de deux triangles symétriques construits de part et d'autre du segment initial.

Construire un triangle nécessite donc de décomposer le triangle en tracés constructibles à l'aide d'un instrument. En particulier il s'agit de construire le 3<sup>ème</sup> sommet du triangle comme intersection de deux cercles (arcs de cercle) à tracer. Par rapport aux tracés de figures géométriques la construction du triangle à la règle et au compas présente deux difficultés. D'une part, cette construction repose sur une déconstruction du triangle 2D en un triangle déterminé par un côté, objet géométrique 1D, et le troisième sommet, objet géométrique 0D, difficilement appréhendé par les élèves. D'autre part le compas ne

---

<sup>3</sup> Dans notre travail le mot géométrie fait référence à la géométrie euclidienne.



produit pas le contour du triangle mais produit des tracés auxiliaires, des cercles (arcs de cercles) n'appartenant pas au triangle. C'est pourquoi cette construction du triangle à la règle et au compas nous paraît emblématique de l'enseignement de la géométrie et c'est pour cela que nous l'avons choisie pour l'élaboration d'un duo d'artefacts numérique et matériel.

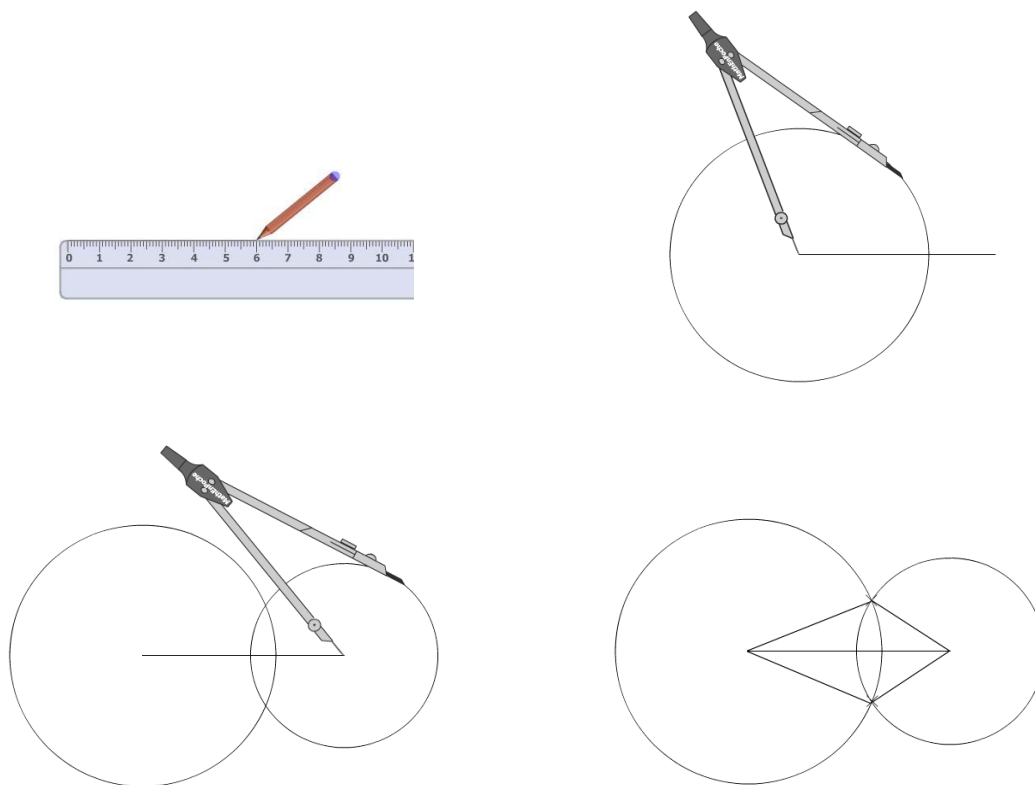


Figure 3.1 : Illustration de la construction du triangle à la règle et au compas

La construction géométrique d'un triangle à la règle et au compas, connaissant les longueurs de ses côtés, engage le concept de triangle ainsi que celui de cercle et convoque la compréhension de l'adéquation de l'usage du compas dans cette construction. S'agissant d'un apprentissage géométrique, nous allons dans un premier temps préciser ce qu'est l'apprentissage de la géométrie et quelles sont les situations qui caractérisent un raisonnement géométrique. Nous allons utiliser les travaux de Duval, Godin, Perrin-Glorian pour clarifier ce qu'est la géométrie à l'école primaire et au collège. Le rôle déterminant attribué à l'utilisation des instruments est inhérent à notre travail ainsi qu'aux auteurs précédents. Ainsi notre analyse va dans un deuxième temps porter sur les outils mobilisés dans la situation de construction d'un triangle : le compas et la règle dans l'environnement papier-crayon. Les objets géométriques théoriques considérés dans notre étude sont le triangle, le cercle, le segment et le point. Nous allons donc étudier ensuite les connaissances initiales supposées des élèves sur le triangle et le cercle puis envisager leur évolution au cours de l'apprentissage.

## 3.2. Qu'est-ce que faire de la géométrie ?

L'espace sensible dans lequel vit l'enfant constitue son premier champ d'expériences géométriques. La géométrie devient au cours de son apprentissage, un modèle de cet espace physique (Laborde, 1990). « *Nous dirions aujourd'hui que la géométrie part du monde sensible pour le constituer en monde géométrique, celui des points, des droites, des cercles (...)* » (Chevallard, 1991 p. 52).

### 3.2.1. La visualisation iconique et la visualisation non iconique

Duval (2005) décrit la visualisation iconique des formes comme un fonctionnement cognitif reposant sur « *une ressemblance entre la forme reconnue dans un tracé et la forme caractéristique de l'objet à identifier. (...) La reconnaissance est centrée sur le contour d'une zone ou d'une surface, une forme c'est d'abord un profil. (...) Il y a une résistance à sortir du contour fermé de la figure* » (ibid p. 15). Une visualisation iconique d'un triangle l'identifie à une forme type : une surface dont la frontière est formée de trois traits droits bien distincts que nous appelons côtés. On voit d'abord un triangle avant de voir ses trois côtés. Les trois côtés restent les bords inséparables de la surface qu'ils délimitent. C'est ce que Duval qualifie de « *priorité immédiate et stable des unités figurales 2D sur les unités figurales 1D* » (ibid p. 23). Cette visualisation iconique des formes ne permet pas de faire de la géométrie. Une autre manière de voir les figures est indispensable pour accéder au travail géométrique sur les figures.

Duval précise que faire de la géométrie nécessite de décomposer toute forme en une configuration d'autres unités figurales du même nombre de dimensions ou d'un nombre inférieur de dimensions. Cette déconstruction de forme est appelée la visualisation non iconique. Dans une visualisation non iconique, « *la figure est une configuration contextuellement détachée d'un réseau ou d'une organisation plus complexe* » (ibid p. 26). Une visualisation non iconique du triangle permet d'identifier les droites portées par les côtés et leurs intersections qui déterminent les trois sommets. Duval souligne que la visualisation non iconique « *n'est en rien subordonnée à une connaissance des propriétés géométriques* » (ibid p. 18). En particulier dans les activités de construction de figure « *ce sont les instruments utilisés qui commandent, dirigent ou contrôlent la décomposition visuelle des formes* » (ibid p. 18). Dépasser la visualisation iconique du triangle et mettre en œuvre la déconstruction dimensionnelle du triangle est un processus indispensable pour permettre un travail géométrique sur le triangle.

Dans la construction géométrique du triangle à la règle et au compas, l'utilisation du compas qui produit des cercles (arcs de cercle) 1D dont l'intersection définit le troisième sommet OD nécessite de passer d'une visualisation iconique du triangle comme surface 2D délimitée par ses trois côtés à une visualisation non iconique permettant d'identifier les trois sommets OD. Pour concevoir cette construction et la réaliser, il est essentiel de

sortir du contour fermé de la figure et de décomposer le triangle en unités figurales 1D et 0D.

### 3.2.2. Trois niveaux d'appréhension d'une figure

Perrin-Glorian et Godin (2014) dans le prolongement des travaux de Duval distinguent trois niveaux de vision, trois modes d'appréhension des figures suivant le regard qu'on y porte.

- Une vision « surfaces » : Une figure est considérée comme une surface. Les lignes et les points sont vus comme le bord et les sommets de la surface.
- Une vision « lignes » : Une figure est composée de lignes pouvant être tracées avec des instruments. Par exemple, la règle non graduée pour les droites, les demi-droites et les segments ; le compas pour les cercles ou les arcs de cercles. Les points sont alors des extrémités de lignes ou des intersections de lignes déjà tracées. On peut tracer des segments (des demi-droites ou des droites) qui relient des points déjà présents.
- Une vision « points » : les points sont obtenus par des intersections de lignes tracées spécifiquement et les points peuvent à leur tour définir des lignes : deux points déterminent une droite, une demi-droite, un segment ; un cercle est déterminé soit par deux points (le centre et un point du cercle) soit par un point et une longueur.

La vision « surfaces » est la vision première des figures chez les enfants. Dans les premières années de la scolarité, la figure est la trace d'un objet matériel, une surface avec un bord. L'apprentissage de la géométrie aura pour objectif d'ajouter à cette vision initiale une vision « lignes » et une vision « points ». Successivement au cours de la scolarité un triangle est : une forme de bois ou plastique que l'on peut déplacer et manipuler (Cycle 1, école maternelle) ; un contour fermé, une surface que l'on peut tracer sur papier avec un gabarit ou un pochoir (Cycle 2) ; une figure à trois côtés que l'on construit aux instruments (Cycle 3) ; enfin un réseau de trois droites, un ensemble de trois points, des relations entre segments droites et points, des propriétés caractéristiques. Pour Duval et Godin (2005) « le rapport des élèves aux figures est l'un des points clé de leur entrée dans la géométrie » (ibid p. 7). Pour ces auteurs, il s'agit d'amener les élèves à changer de regard sur la figure et de les accompagner à passer d'un regard centré sur les surfaces et leurs contours à un regard qui fait apparaître les unités figurales 1D et 0D.

La déconstruction dimensionnelle du triangle doit être prise en charge par les situations d'apprentissage proposées aux élèves. Par conséquent l'élaboration d'un duo d'artefacts numérique et matériel doit permettre de provoquer la déconstruction dimensionnelle du triangle. Il s'agit dans la conception du duo d'élaborer des tâches qui amènent les élèves à détacher les côtés du triangle de la surface qu'ils délimitent. **Permettre, dans un premier temps, la mise en œuvre d'une déconstruction 1D du triangle, d'une vision ligne du**

**triangle, est une de nos intentions dans la composition de notre duo dédié à l'apprentissage de la construction du triangle à la règle et au compas.**

### **3.3. La géométrie instrumentée**

L'utilisation des outils usuels de géométrie, la règle graduée, le compas, l'équerre pour tracer des figures et vérifier leurs propriétés est ce que nous appelons la géométrie instrumentée. Une construction, dans un logiciel de géométrie dynamique, est également considérée comme de la géométrie instrumentée. L'apprentissage de l'usage des outils de géométrie est souvent considéré comme l'acquisition d'une technique de manipulation (Perrin-Glorian & Godin, 2014). Saisir la procédure de tracé d'un triangle à la règle et au compas est une chose, mais comprendre pourquoi le compas est adéquat pour réaliser cette construction en est une autre. Comme Artigue et Robinet (1982) nous pensons que suivant la tâche proposée, les conceptions et les concepts mis en œuvres dans l'utilisation du compas sont différents. De plus ce n'est pas parce que les élèves ont la capacité d'utiliser l'outil compas pour tracer un cercle ou pour construire un triangle qu'ils savent expliquer pourquoi cet outil est approprié pour cette tâche. L'usage des outils ne va pas de soi, il doit être élaboré à partir des caractéristiques de l'outil (Perrin-Glorian, Mathe, & Leclercq, 2013). Pour ces auteurs le point central de cette démarche est le regard porté sur les figures et les instruments. Il est donc essentiel de le faire travailler aux élèves. Le lien entre l'outil mis en œuvre pour l'action, le mode d'appréhension de la figure (surfaces, lignes, points), et les propriétés géométriques implicites mises en œuvre dans la résolution d'une tâche est à élaborer tout au long de la scolarité.

**Dépasser la méthode technique d'utilisation du compas dans la construction du triangle et induire la pertinence géométrique de l'utilisation du compas dans cette construction est un des enjeux de la composition de notre duo d'artefacts numérique et matériel.**

#### **3.3.1. Construction de figures**

Duval (2005) estime que la construction de figures est l'entrée nécessaire dans la géométrie. En effet les figures géométriques euclidiennes ont la particularité d'être constructibles à l'aide d'instruments. Parmi les instruments permettant des tracés graphiques certains produisent des formes 2D, par exemple les gabarits ou les pochoirs. D'autres produisent des formes 1D par exemple la règle, le compas, les gabarits. Les outils usuels de géométries, incluant les logiciels de géométrie dynamique, sont essentiellement producteurs de tracés 1D. Ainsi la construction d'une figure s'appuie sur sa déconstruction en tracés 1D et 0D constructibles à l'aide d'un instrument.

Les constructions aux instruments basées sur l'analyse des propriétés géométriques des objets et des propriétés géométriques relatives aux instruments est une étape dans le passage du dessin à la figure. Les prémisses de la dialectique dessin figure (Laborde & Capponi, 1994) commencent à apparaître. Un dessin est une trace laissée par un outil

dans un espace graphique (feuille de papier, écran d'ordinateur, sable...). La figure est une construction de l'esprit qui lie le référent théorique et tous les dessins possibles. Pour Laborde et Capponi, le dessin est considéré comme un signifiant d'un référent théorique (l'objet géométrique). La figure géométrique est définie comme l'ensemble des couples formés de deux termes, le premier étant le référent, le second étant un des dessins qui le représente pris dans l'univers de tous les dessins possibles du référent. Par exemple dans le cas du triangle, le référent est le triangle théorique de la géométrie euclidienne ; le signifiant peut être n'importe quel dessin dans tous les espaces graphiques possibles : dessin à main levée, dessin aux instruments dans un environnement papier-crayon ou dessin réalisé avec un logiciel de géométrie dynamique. Le signifié, que le sujet se construit au cours de son apprentissage, est le lien entre le référent triangle théorique de la géométrie euclidienne et tous les dessins possibles. Ceci fait apparaître que la figure géométrique est une construction intellectuelle du sujet qui est progressive tout au long de son apprentissage.

Perrin-Glorian *et al.* (2013) considèrent l'usage des instruments comme pouvant être un intermédiaire entre la perception directe et l'appui sur des propriétés géométriques. L'utilisation d'un instrument plutôt qu'un autre pour produire une figure peut induire un regard différent sur la figure. L'objectif est donc de proposer des problèmes permettant d'intégrer des regards géométriques différents sur la figure.

Cet objectif est aussi le nôtre dans la composition de notre duo. Les tâches proposées aux élèves avec les différents artefacts numériques et matériels doivent conduire à de nouveaux regards géométriques sur le triangle. Ainsi les tâches proposées dans l'environnement numérique et dans l'environnement papier-crayon doivent permettre d'expérimenter de nouvelles relations entre les trois côtés du triangle, comme par exemple qu'avec trois longueurs on ne peut pas toujours obtenir un triangle. L'inégalité triangulaire apparaît dans la situation comme une contrainte à la construction du triangle à la règle et au compas.

### 3.3.2. Tracés auxiliaires

#### La déconstruction instrumentale

Dans les problèmes de construction, l'enjeu est le processus de construction qui permet le tracé d'un dessin, d'un représentant de la figure. L'activité de construction consiste à effectuer des tracés associés à la mobilisation de propriétés géométriques pertinentes. Dans la construction géométrique d'un triangle dont on connaît les longueurs des trois côtés, l'enjeu est de produire un dessin respectant les contraintes sur les longueurs des côtés. Ce sont ces contraintes qui prescrivent l'utilisation du compas dans cette construction. Sans contrainte sur les longueurs des côtés du triangle la règle suffit pour tracer un triangle. Duval (2005 p. 11) explique que « *c'est à travers l'utilisation d'un instrument que les élèves peuvent vraiment prendre conscience que les propriétés géométriques ne sont pas seulement des caractéristiques perceptives. En effet, l'utilisation*

*d'un instrument donne la possibilité d'expérimenter, en quelque sorte, les propriétés géométriques comme des contraintes de construction : quand une forme visuelle n'est pas directement produite par un instrument, plusieurs opérations de traçage sont alors nécessaires pour l'obtenir et il y a un ordre pour ces opérations. Ne pas en tenir compte rend la construction impossible. »*

Dans le prolongement de ces travaux, Mithalal (2010) introduit la déconstruction instrumentale pour répondre à la question suivante. « *Comment (re)construire le dessin avec un ensemble donné d'instruments ?* » (ibid p. 17) Il définit la déconstruction instrumentale d'un objet comme « *l'identification d'un ensemble d'unités figurales indépendantes, les primitives, et d'une succession d'actions effectuées grâce à l'usage d'instruments, permettant de reconstruire soit l'objet lui-même, soit une représentation graphique de cet objet.* » (ibid p. 18) L'auteur distingue deux cas de déconstructions instrumentales : la déconstruction instrumentale à visée iconique et la déconstruction instrumentale à visée non iconique. Lorsque la production de la forme est le seul critère de validité de la construction nous sommes dans un cas de déconstruction instrumentale à visée iconique. C'est ce qui se passe lorsque le tracé du triangle de longueurs des côtés données est réalisé à la règle graduée uniquement. Par contre lorsque la construction résulte de l'accomplissement d'opérations sur la figure et a pour but de produire un représentant respectant des propriétés géométriques, la déconstruction instrumentale est à visée non iconique. Une telle déconstruction du triangle s'appuie sur une décomposition du triangle. Le triangle est alors considéré comme un assemblage d'unités figurales et non uniquement comme une forme. Pour construire un triangle à la règle et au compas une déconstruction instrumentale à visée non iconique du triangle est nécessaire. Le triangle est étudié comme le résultat d'un processus de construction à l'aide d'outils spécifiques, la règle et le compas qui produisent des *tracés auxiliaires* (Duval, 2005 p. 17) qui n'appartiennent pas tous à la figure finale. Ces outils assurent une régularité au tracé et conditionnent sa production. Plusieurs tracés sont nécessaires pour obtenir le triangle et un ordre dans l'enchaînement des tracés est nécessaire.

### **De la règle graduée qui produit le segment côté au compas qui produit des tracés auxiliaires**

Nous discernons deux catégories d'instruments : ceux qui produisent l'objet souhaité et ceux qui produisent un objet auxiliaire n'appartenant pas à la figure visée. La règle pour tracer un segment produit le segment, le compas pour tracer un cercle produit le cercle. Dans la construction du triangle, le compas n'est pas l'instrument qui permet de tracer la forme, le contour du triangle. Il ne produit pas le segment, côté du triangle. L'écartement du compas ne rend même pas visible ce segment. Le compas produit des cercles (arcs de cercle), tracés auxiliaires, dont l'intersection va définir le troisième sommet. L'utilisation du compas dans la construction du triangle engendre des actions et de nouveaux schèmes qui n'appartiennent pas aux schèmes déjà constitués d'utilisation du compas. Les genèses instrumentales du compas pour tracer un cercle ou reporter une longueur ne permettent

pas aux élèves de l'utiliser pour construire le triangle. L'élaboration d'un nouvel instrument compas est nécessaire dans la tâche de construction du triangle.

Passer de l'instrument « compas pour tracer un cercle » qui produit le cercle à l'instrument « compas pour déterminer le troisième sommet du triangle » qui produit des cercles (arcs de cercle), objets auxiliaires, est un des objectifs de la conception de notre duo d'artefacts et de notre situation.

### 3.3.3. Utilisation des instruments au cours de la scolarité

L'intitulé géométrie dans les programmes (MEN, 2015), renvoie à deux champs de connaissances : les connaissances spatiales comme l'orientation et le repérage dans l'espace et les connaissances géométriques. Ces deux champs de connaissances renvoient aux travaux de Berthelot et Salin sur l'enseignement de la géométrie à l'école primaire (Berthelot & Salin, 1993). Les connaissances spatiales sont les connaissances qui permettent de contrôler perceptivement son rapport à l'espace. Il s'agit de se repérer et de se diriger dans l'espace. Les connaissances géométriques se réfèrent à un savoir mathématique, relatif à des concepts théoriques, organisés autour de définitions et théorèmes. Ces connaissances géométriques permettent de résoudre des problèmes spatiaux par l'intermédiaire d'une modélisation et des problèmes théoriques en s'appuyant sur des représentations. L'enfant dispose de connaissances spatiales avant son entrée à l'école, alors que les connaissances géométriques doivent être enseignées pour exister.

L'utilisation des outils de géométrie se fait graduellement tout au long de la scolarité à l'école élémentaire et au collège. « *La reproduction de figures diverses, simples et composées est une source importante de problèmes de géométrie dont on peut faire varier la difficulté en fonction des figures à reproduire et des instruments disponibles* » (MEN, 2015). À l'école élémentaire et au début du collège, les outils de tracés à utiliser sont aussi bien les outils usuels de géométrie, la règle, l'équerre, le compas (le rapporteur n'apparaît qu'au début du collège) que des gabarits ou des pochoirs. Dès le cycle 2 (trois premières années de l'école élémentaire), des formes reconnues à partir d'objets réels doivent être reproduites. Les outils ont ici une fonction de tracé, de reproduction de figure et une fonction de contrôle pour vérifier la nature de figures planes. Les programmes du cycle 2 mentionnent des finalités de l'utilisation de ces outils. « *Les problèmes de reproduction de figures (éventuellement à partir d'éléments déjà fournis de la figure à reproduire qu'il s'agit alors de compléter) donnent l'occasion de dégager et travailler les propriétés et relations géométriques du programme. Le choix d'un support uni, quadrillé ou pointé et des instruments disponibles se fait suivant les objectifs* » (MEN, 2015 p. 85). Le vocabulaire approprié est aussi introduit au cours de manipulations et de situations où il prend sens pour les élèves.

Les activités du cycle 3 (deux dernières années de l'école élémentaire et première année du collège) s'inscrivent dans la continuité de celles pratiquées au cycle 2. Elles introduisent une part plus grande de raisonnement et d'argumentation qui complète la perception et l'usage des instruments. « *L'étude des figures géométriques du plan et de l'espace à partir d'objets réels apprend à exercer un contrôle des caractéristiques d'une figure pour en établir la nature grâce aux outils de géométrie et non plus simplement par la reconnaissance de forme* » (MEN, 2015 p. 96). À l'articulation de l'école primaire et du collège, le cycle 3 constitue une étape importante dans l'approche des concepts géométriques. « *Les activités permettent aux élèves de passer progressivement d'une géométrie où les objets (le carré, la droite, le triangle, etc.) et leurs propriétés sont contrôlés par la perception à une géométrie où ils le sont par le recours à des instruments, par l'explicitation de propriétés* » (MEN, 2015 p. 210). Au cycle 3 ce ne sont pas seulement les tâches qui évoluent d'un niveau à l'autre mais les procédures pour réaliser ces tâches. Le but est alors de développer la connaissance des figures planes, les relations entre les objets et les propriétés des objets géométriques.

Le cycle 3 constitue une charnière dans l'enseignement de la géométrie où se côtoient connaissances spatiales et connaissances géométriques (Berthelot & Salin, 1993). **Les procédures instrumentées sont à l'articulation de l'espace sensible et de l'espace géométrique. Elles opèrent sur des objets de l'espace sensible mais avec un contrôle et l'usage de connaissances qui relèvent de l'espace géométrique. Les activités proposées doivent permettre un changement de regard sur les figures afin de passer du regard ordinaire porté sur un dessin au regard géométrique porté sur une figure.** « *On amène les élèves à dépasser la dimension perceptive et instrumentée pour raisonner uniquement sur les propriétés et les relations. Par exemple, l'usage de la règle et du compas pour tracer un triangle, connaissant la longueur de ses côtés, mobilise la connaissance des propriétés du triangle et de la définition du cercle* » (MEN, 2015 p. 213).

## 3.4. La règle et le compas

### 3.4.1. Quelques repères historiques

#### La règle

Le petit Robert définit la règle comme « *Planchette allongée ou tige à arrêtes rectilignes qui sert à guider le crayon, la plume, quand on trace un trait, à mesurer une longueur* » (Robert, 2010). La règle permet donc de tracer des droites, des segments ou des surfaces planes dont les côtés sont rectilignes. Si cette règle est graduée, elle a aussi une fonction de mesure. Elle permet de mesurer la longueur d'un segment de manière plus ou moins précise dépendant de l'unité de graduation. L'artefact règle graduée peut conduire à l'élaboration de deux instruments, un instrument relatif à l'alignement et un instrument relatif à la mesure. La mobilisation simultanée des deux instruments, alignement et mesure, permet donc aussi de tracer un segment de longueur donnée.



## Le compas

### Compas droits



**Compas à pointe sèche**

Compas métalliques gaulois « à pas variables » retrouvé sur le site de l'Oppidum de Bibracte.

La ville de Bibracte était la capitale des Éduens, peuple celte (gaulois) qui a connu son apogée au 1<sup>er</sup> siècle avant Jésus-Christ. Centre névralgique du pouvoir de l'aristocratie éduenne, Bibracte fut aussi un lieu d'artisanat et de commerce où se côtoyaient mineurs, forgerons, frappeurs de monnaie. (Marçay, 2014)

**Compas avec une pointe et une mine**



<https://fr.wikipedia.org/wiki/Compas>



<https://fr.wikipedia.org/wiki/Compas>

**Compas d'épaisseur**



Le compas d'épaisseur est un outil de traçage qui permet de relever une cote, pour transférer des mesures ou contrôler des épaisseurs.

<https://fr.wikipedia.org/wiki/Compas>

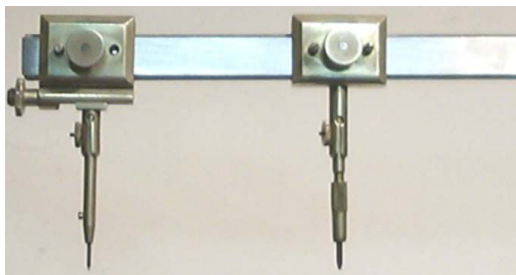
**Compas d'intérieur**



Le compas d'intérieur a un usage similaire au compas d'épaisseur. Il permet de mesurer ou de reporter une dimension intérieure entre deux parois.

<https://fr.wikipedia.org/wiki/Compas>

### Compas à verge



Le compas à verge ou compas trusquin est une sorte de compas composé de deux coulisseaux positionnables sur une bande (verge). Son usage est identique à celui d'un compas droit, mais adapté aux grandes dimensions : il est en fait limité par la longueur de la verge.

<https://fr.wikipedia.org/wiki/Compas>

Figure 3.2 : Illustrations de différents types de compas

Les recherches en archéologie montrent qu'à partir du V<sup>ème</sup> siècle avant Jésus-Christ, l'art celtique a élaboré des instruments de précision pour dessiner des décors géométriques, architecturaux et artistiques. Branches mobiles, écartement variable : le principe est le même depuis plus de deux mille cinq cent ans (Marçay, 2014). Le compas est constitué de deux branches jointes par une articulation (Figure 3.2). Une branche est systématiquement une pointe. L'autre branche comporte soit une pointe soit une mine de crayon. Un compas ayant deux pointes est dit compas à pointes sèches. Ces compas à pointes sèches sont utilisés par les marins, les usineurs, les charpentiers, les ébénistes ou les tailleurs de pierre pour marquer par une légère rayure une dimension. Les compas utilisés en géométrie et, en particulier, ceux utilisés à l'école sont des compas droits qui comportent une pointe et une mine de crayon.

Le compas est un outil de construction géométrique destiné à tracer des cercles ou des arcs de cercle et à comparer et reporter des longueurs (Bouvier, George, & LeLionnais, 1996). Le terme compas est formé à partir du radical du verbe « compasser » lui-même issu du bas latin « compassare » signifiant « mesurer avec le pas » (Marçay, 2014). Le compas sert donc initialement à reporter des longueurs dans n'importe quelle direction et donc à tracer des cercles.

### 3.4.2. Constructions géométriques à la règle et au compas

Le compas est un instrument mythique de l'architecture grecque. Son utilisation jointe à la règle non graduée défie pendant longtemps les mathématiciens. « *Les mathématiciens grecs, pour des raisons esthétiques, vont se poser un certain nombre de questions de géométrie en s'imposant de ne les résoudre qu'avec l'aide de la règle et du compas, c'est-à-dire en ne prenant en compte que deux figures géométriques considérées comme fondamentales ou parfaites, la droite et le cercle* » (Baudet, 2003). Au III<sup>ème</sup> siècle avant Jésus-Christ, Euclide fonde sa géométrie sur un système d'axiomes qui assure en particulier qu'il est toujours possible de tracer une droite passant par deux points donnés et qu'il est toujours possible de tracer un cercle de centre donné et passant par un point donné. La géométrie euclidienne est donc la géométrie des droites et des cercles, donc de la règle et du compas (Carrega, 1989).

Carrega (ibid) propose plusieurs raisons qui ont conduit les mathématiciens grecs à privilégier la règle et le compas dans leurs recherches. La première raison est que la droite et le cercle sont les deux courbes les plus simples qui interviennent en géométrie. La règle et le compas sont quant à eux les outils élémentaires qui permettent de les tracer. L'influence de Platon qui fut très importante est la seconde raison. Platon considère que les figures ne sont qu'un pâle reflet de la réalité théorique des objets mathématiques qui appartiennent au monde des idées. Ainsi, les instruments de construction n'ont aucune estime pour Platon, à part la règle et le compas, qui pour lui sont les seuls à respecter la symétrie des configurations. Selon Platon, les vraies constructions se font à la règle et au compas. La dernière raison évoquée par Carrega est

que « les constructions à la règle et au compas ont été mises en avant pour servir de caution géométrique aux nouveaux nombres mis en évidence par le théorème de Pythagore » (ibid p. 6). Pour Théon de Smyrne seuls la règle et le compas sont capables de produire un mouvement vrai et élémentaire (Commission Nationale Inter-IREM Histoire et Epistémologie des Mathématiques, 1997). Ainsi depuis l'Antiquité grecque jusqu'au XVIII<sup>ème</sup> siècle, on ne considère comme construction géométriques que les constructions à la règle et au compas. Dès lors qu'un énoncé demande de « construire », il sous-entend automatiquement « à la règle et au compas » (Carrega, 1989). Même si certains problèmes comme la quadrature du cercle, la duplication du cube ou la trisection de l'angle se sont révélés impossible à la règle et au compas, la plupart des problèmes de géométrie peuvent être résolus à la règle et au compas.

### 3.4.3. Le compas au cours de la scolarité

Le compas est utilisé pour la première fois au cycle 2. C'est d'abord l'outil qui permet de tracer la ligne cercle. Cette première utilisation du compas renvoie à une compétence technique (piquer avec la pointe, tourner, conserver l'écartement) pour tracer l'objet spatial cercle, le rond. Mais, comme l'affirment Artigue et Robinet (1982 p. 63), « *une utilisation correcte du compas ne repose pas nécessairement sur une conception du cercle exprimable en termes de distance au centre. Elle peut traduire simplement la reconnaissance dans l'écartement des branches du compas de l'invariant rayon, ce dernier représentant la moitié de la taille globale du cercle* ». Il s'agit de savoir construire un cercle connaissant son centre et un point ou son centre et son rayon dit le programme. Le concept de cercle s'enrichit donc des notions de centre et de rayon, sans qu'il y ait nécessairement de propriété d'équidistance. Le centre est alors vu comme un point particulier du cercle et le rayon comme la taille du cercle. Au cycle 3 le compas est à associer à des problèmes de distance. C'est dans ce cadre que la propriété d'équidistance devient fondamentale et que le cercle devient un ensemble de points. En particulier il est utilisé pour reporter des longueurs et pour construire des figures à la règle et au compas (construction du triangle, de la médiatrice, de la bissectrice). **Se crée alors un jeu sur les fonctions du compas et l'évolution conjointe de la conceptualisation. Le compas est un outil qui produit un cercle qui lui-même est un outil dans ces constructions. Ces constructions font évoluer le rôle du compas qui devient un outil qui transporte une longueur.**

### 3.4.4. La règle graduée, un obstacle à franchir

Brousseau (1998) explique que l'élaboration de connaissances s'opère dans une confrontation à des connaissances initiales. Les connaissances initiales sont aussi bien des appuis que des obstacles à surmonter. Pour Brousseau un obstacle est différent d'une difficulté du fait qu'il est une connaissance. En effet un obstacle est le résultat d'un apprentissage antérieur qui induit l'élève en erreur et entrave un apprentissage nouveau. Cette connaissance obstacle produit des réponses adaptées dans son contexte

d'application et elle engendre des réponses erronées en dehors de ce contexte. De plus cette connaissance résiste aux contradictions auxquelles elle est confrontée et à l'établissement d'une nouvelle connaissance. *« L'obstacle est constitué comme une connaissance, avec des objets, des relations, des méthodes d'appréhension, des prévisions, avec des évidences, des conséquences oubliées, des ramifications imprévues... Il va résister au rejet, il tentera comme il se doit, de s'adapter localement, de se modifier aux moindres frais, de s'optimiser sur un champ réduit, suivant un processus d'accommodation bien connu »* (Brousseau, 1998 p. 122). Un obstacle résiste et reparait. Il se manifeste par des erreurs récurrentes.

La construction du triangle à la règle et au compas est un apprentissage qui résiste au sens où les élèves tracent le triangle à la règle graduée uniquement. La règle graduée est un artefact à partir duquel sont élaborés deux instruments. Un instrument pour l'alignement qui permet de tracer des droites, des segments et un instrument de mesure de longueurs. La règle graduée permet donc aussi en mobilisant simultanément les deux instruments de tracer des segments de longueurs données. Tant que, dans leur scolarité les élèves n'ont mobilisé que la règle graduée pour tracer des segments de longueurs données et donc pour tracer les côtés d'un polygone, nous nous interrogeons sur l'éventualité que l'utilisation de la règle graduée pour construire un triangle de longueurs des côtés données soit potentiellement un obstacle. Comme nous l'avons dit précédemment, construire un triangle nécessite de décomposer le triangle en tracés constructibles à l'aide d'un instrument. Or plusieurs décompositions du triangle sont possibles en fonction de la manière de voir un triangle. Si un triangle est vu comme une figure à trois côtés, la règle est l'instrument naturellement associé au tracé du triangle. La règle permet de tracer les trois segments côtés du triangle. La résistance de cet obstacle tient à une vision du triangle comme « une surface délimitée par trois cotés ». Brousseau explique que le franchissement d'un obstacle représente un palier dans le développement cognitif du sujet. Le franchissement d'un obstacle requiert un travail de même nature que la mise en place d'une connaissance. L'obstacle est franchi si la situation et les outils disponibles suscitent l'opération mentale requise. Introduire le compas dans la construction du triangle nécessite une autre déconstruction du triangle, une autre vision du triangle.

### **3.5. Les concepts de triangle et de cercle**

L'apprentissage de la géométrie a pour objectif de passer progressivement d'une approche perceptive des objets à une approche théorique. La difficulté relevée par l'équipe de didactique des mathématiques ERMEL (2006) est que le travail en géométrie s'appuie sur des dessins qui doivent être interprétés différemment et faire l'objet de traitements eux aussi différents. Un dessin peut être une représentation d'un objet de l'espace sensible aussi bien qu'une représentation d'un objet théorique. Le dessin obtenu

lors de la construction du triangle à la règle et au compas est la représentation de l'objet théorique triangle.

Prendre en compte les connaissances initiales des élèves sur le triangle et le cercle et envisager leur évolution est l'idée directrice de notre réflexion pour l'élaboration d'un duo pour la conceptualisation du triangle.

### 3.5.1. Le triangle

Triangle vient du latin « tri » qui signifie trois et « angulus » qui signifie angle (Baruk, 1995). En géométrie euclidienne un triangle est une figure plane formée par trois points appelés sommets. Un triangle est complètement déterminé par la donnée de ses trois sommets. Les trois segments qui relient les sommets sont appelés côtés. Ainsi un triangle est une figure à trois côtés délimitant un domaine du plan. Un triangle est l'enveloppe convexe de ses trois sommets. Lorsque les sommets sont distincts deux à deux, en chaque sommet les côtés délimitent un angle intérieur, d'où vient la dénomination de triangle. Le triangle est le polygone le plus simple qui délimite une portion du plan et sert ainsi d'élément fondamental pour le découpage et l'approximation de surfaces (<https://fr.wikipedia.org/wiki/Triangle>).

#### Une vision 2D du triangle

Au début de leur scolarité, les élèves apprennent à reconnaître la forme triangle parmi d'autres formes. Il s'agit de reconnaître la forme triangle et de la distinguer d'autres formes. Cet apprentissage se fait par la manipulation des formes. À la reconnaissance perceptive s'ajoute ensuite la description du triangle. Puis des instruments sont utilisés pour tracer des triangles. Ces instruments sont la règle, graduée ou non, ainsi que des gabarits, des pochoirs, du papier calque. Une première vision du triangle est alors élaborée par les élèves.

#### *Un triangle est une surface délimitée par trois côtés<sup>4</sup>*

Cette vision est une appréhension 2D du triangle. Ce dernier est vu comme la surface enfermée entre ses trois côtés. La reconnaissance du triangle est centrée sur le contour d'une zone, d'une surface. C'est une visualisation iconique du triangle.

#### Une vision du triangle qui fait apparaître le point OD

Il s'agit ensuite de construire des savoirs géométriques. Construire du savoir géométrique demande de structurer les connaissances sur les formes. L'apprentissage de la construction du triangle à la règle et au compas participe de l'apprentissage de savoirs géométriques sur le triangle. Il s'agit de faire appréhender l'objet géométrique triangle, objet composé, défini par des sous objets simples (segments, points) reliés par des relations caractéristiques. La construction du triangle à la règle et au compas nécessite une vision plus élaborée du triangle.

---

<sup>4</sup> Dans notre travail le mot côté renvoie toujours à un côté rectiligne.

### *Un triangle est déterminé par un côté et un sommet*

Cette vision est une appréhension du triangle qui fait apparaître un côté 1D et le troisième sommet 0D. L'identification du troisième sommet détermine le triangle.

La construction du triangle à la règle et au compas demande une descente dans les dimensions du 2D au 0D. L'enjeu dans la conception d'un duo d'artefacts pour apprendre cette construction est de permettre l'élaboration d'une vision 1D du triangle.

### Une propriété du triangle

La construction du triangle à la règle et au compas est l'occasion d'aborder une des propriétés du triangle, l'inégalité triangulaire. C'est la propriété du triangle qui intervient dans la construction d'un triangle de longueurs des côtés données. L'inégalité triangulaire résulte du postulat euclidien selon lequel « *la ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre* ». Ainsi dans un triangle, la longueur de chaque côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés. Dans un triangle ABC, on a :

$$BC \leq BA + AC \quad AB \leq AC + CB \quad \text{et} \quad AC \leq AB + BC.$$

Le cas d'égalité caractérise les triangles plats, dans lequel l'un des sommets appartient au segment qui relie les deux autres. Réciproquement, étant données trois longueurs, si aucune n'est supérieure à la somme des deux autres, il est possible de construire un triangle ayant ces longueurs pour côté. Il est utile de remarquer que la vérification de ces inégalités peut être faite uniquement en comparant la plus grande des trois longueurs avec la somme des deux autres. Les deux autres inégalités sont alors nécessairement vraies. En effet si  $0 < a < b < c$  sont trois longueurs alors les inégalités  $a < b + c$  et  $b < c + a$  sont vraies, ainsi la seule inégalité à vérifier est  $c < a + b$ .

### 3.5.2. Le cercle

Le concept mathématique de cercle peut être caractérisé de différentes façons. Par exemple pour Euclide « *Le cercle est la figure plane comprise sous une seule ligne, telle que toutes les lignes droites tombant sur cette ligne d'un des points placés à l'intérieur de la figure sont égales entre elles. Ce point est appelé le centre du cercle.* » (Baruk, 1995 p. 194) On trouve aussi les définitions suivantes. « *Un cercle est une ligne plane et fermée dont tous les points sont à égale distance d'un même point appelé centre.* » (Ibid, p. 188) et « *Un cercle est l'ensemble des points du plan équidistants d'un point fixé de ce plan : ce point est le centre du cercle, et cette distance son rayon.* » (Ibid, p. 189) Certaines définitions ne font référence ni au centre ni au rayon du cercle. « *Un cercle est une courbe plane fermée de classe  $C^2$  de courbure algébrique constante.* » ou « *Un cercle est une courbe fermée admettant une infinité d'axes de symétrie* » (Artigue & Robinet, 1982 p. 15). Artigue et Robinet (ibid) étudient onze définitions de l'objet mathématique cercle. Leur étude permet de distinguer plusieurs éléments qui entrent en jeu dans ces définitions. La référence au centre ou non dans la définition est une des caractéristiques

qu'elles ont analysées. Il n'apparaît que dans trois définitions sur les onze étudiées. Elles distinguent ensuite les définitions dans lesquelles le cercle est présenté comme un ensemble de points, des définitions dans lesquelles le cercle est une courbe. Dans le premier cas les définitions relèvent d'une caractérisation ponctuelle du cercle, dans le second cas d'une caractérisation globale du cercle. Leur étude épistémologique montre que les définitions anciennes, même lorsqu'elles se basent sur l'invariance de la distance au centre, sont formulées soit de façon globale soit de façon mixte. Enfin elles relèvent le côté statique ou dynamique de la définition. La définition précédente est statique. Leibnitz donne une définition dynamique du cercle en passant par l'espace : « Une ligne en mouvement étant placée de telle sorte que deux de ses points A et B restent immobiles, un autre point quelconque C de cette ligne décrit une circonférence. » (Fourrey, 1907 p. 46) (Figure 3.3)

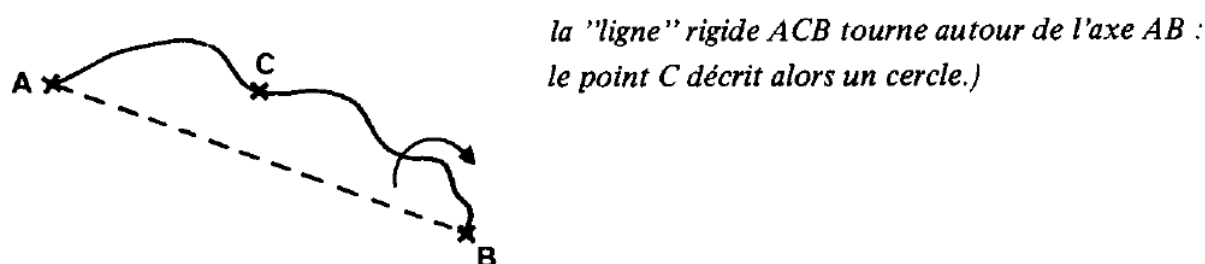


Figure 3.3 : Illustration de la définition du cercle donnée par Leibnitz

En langage courant le mot « cercle » est employé autant pour nommer la courbe, la circonférence que la surface qu'elle délimite. En mathématiques, le cercle désigne exclusivement la ligne courbe. La surface intérieure plane est appelée disque.

### Une vision globale du cercle

Le cercle est dans un premier temps un objet spatial rond (ERMEL, 2006). Il est ensuite vu comme une ligne fermée produite par le compas. Au début de l'école primaire, les attendus sur le cercle concernent uniquement son dessin. On attend que l'élève sache dessiner « un rond ». Puis le tracé du cercle au compas est abordé. Il s'agit d'abord de tracer un cercle sans contrainte, puis de tracer un cercle à partir du centre et d'un point ainsi qu'à partir de son rayon et son centre. Cette caractérisation du cercle produit par le compas relève d'une vision globale du cercle.

#### *Un cercle est une ligne fermée*

Cette caractérisation du cercle est directement associée à l'instrument compas qui produit le cercle. Le cercle est la trace de la mine du compas.

### Une vision ponctuelle du cercle

Il s'agit ensuite de faire évoluer la notion de cercle de la figure tracée avec un compas à une définition géométrique. Artigue et Robinet (1982) font remarquer que les manuels de mathématiques de l'école ou du collège donnent des définitions ayant un aspect

uniquement ponctuel. C'est toujours ce type de définition que l'on trouve dans les manuels actuels. Par exemple dans le manuel « Au rythme des maths CM2 cycle 3 », Bordas édition 2016 on trouve la définition suivante : « *Un cercle est l'ensemble des points situés à égale distance d'un point appelé centre* ». Dans le manuel Transmath 6<sup>ème</sup>, Nathan édition 2016 on peut lire « *Un cercle de centre O est formé de tous les points à une même distance du point O.* » Ces définitions renvoient à une caractérisation ponctuelle du cercle.

*Un cercle est l'ensemble des points équidistants d'un centre*

Cette caractérisation ponctuelle est difficile à appréhender. En effet une infinité de points (0D) est une ligne (1D). De plus, cette caractérisation du cercle n'est plus reliée à l'outil compas. Elle attribue au cercle son rôle d'outil dans des problèmes de distance. En géométrie cohabitent deux types d'artefacts : les outils de géométrie tangibles (la règle, le compas, les gabarits... et les outils de géométrie dynamique), et des artefacts théoriques qui régissent le fonctionnement du système hypothético-déductif (Houdement, 2007).

C'est cette caractérisation du cercle qui est engagée dans la construction du triangle à la règle et au compas. Comme l'ont noté Artigue et Robinet (ibid), dans la construction du triangle à la règle et au compas les cercles interviennent comme outils. Cette intervention suppose la reconnaissance du cercle comme ensemble de points équidistants d'un centre. Il y a deux difficultés dans cette phrase : la caractérisation ponctuelle du cercle et l'équidistance c'est-à-dire la caractérisation du cercle comme une distance constante à un point fixe. En outre, cette caractérisation du cercle se heurte à deux obstacles : la difficulté à voir un ensemble de points derrière un trait d'une part, et d'autre part, la non matérialisation du rayon par le compas. Ce n'est pas parce qu'un enfant visualise différents rayons du cercle et qu'il constate que ces rayons possèdent tous la même longueur qu'il associe le concept de distance constante au cercle. En outre ce n'est pas parce que l'élève sait qu'il faut utiliser le compas pour tracer un cercle qu'il met en relation l'instrument compas avec le concept de distance associé au cercle. Ainsi les concepts de distance constante associée au cercle et de longueur transportée entre les branches du compas ne sont pas familiers pour les élèves. Perrin-Glorian et Godin (2014) affirment dans leurs travaux qu'en fin d'école primaire, *les élèves ne réalisent pas nécessairement encore que cet écartement correspond à une longueur non matérialisée, la distance entre la mine et la pointe. Associer l'écartement des branches du compas à une distance entre deux points nécessite d'avoir une vision points*. Ils précisent que l'explicitation du lien entre cercle et distance est nécessaire pour que le compas puisse être vu comme un instrument de report de longueur. Ainsi pour eux, le compas comme instrument de report de longueur ne vient qu'avec la *vision points*.

Nous pensons que la construction du triangle à la règle et au compas est un support permettant d'approfondir le concept de distance associé au cercle.



### 3.6. Nos idées directrices pour la composition du duo

À la lumière des outils théoriques exposés précédemment nous pouvons définir les enjeux de notre étude.

Une déconstruction dimensionnelle du triangle sans aller jusqu'au point.

Comme nous l'avons montré la construction du triangle à la règle et au compas demande une déconstruction dimensionnelle du triangle 2D au triangle déterminé par ses sommets OD. Dans la conception d'un duo nous cherchons à adopter une démarche qui tienne compte du développement cognitif des élèves. Mettre un accent particulier sur la déconstruction dimensionnelle du triangle sans aller jusqu'au point difficilement appréhendable par les élèves est au cœur de notre travail. Nous cherchons à élaborer un duo d'artefacts favorisant l'émergence d'une déconstruction dimensionnelle 1D du triangle. Notre intention est de provoquer le détachement des côtés de la surface qu'ils délimitent, de sortir du contour fermé de la figure triangle.

À la recherche d'une vision 1D du triangle

Notre intention est de faire évoluer les connaissances des élèves sur le triangle à travers l'apprentissage de cette construction du triangle. Il nous paraît essentiel de réorganiser la perception du triangle à travers la perception d'unités visuelles 1D dans un premier temps. Notre duo doit permettre à partir de l'appréhension globale du triangle de mettre en œuvre une démarche analytique faisant apparaître des relations entre les côtés du triangle. Il s'agit de proposer des tâches qui détachent les côtés du triangle de la surface qu'ils délimitent et qui permettent d'identifier des relations entre ces côtés. Nous souhaitons amener une vision du triangle comme une ligne brisée fermée et engendrer la propriété de l'inégalité triangulaire en la faisant apparaître comme nécessaire à la construction d'un triangle.

Un nouvel instrument compas dans la construction du triangle

L'élaboration d'un artefact numérique qui permet de travailler hors de l'environnement papier-crayon et donc hors de l'utilisation des outils usuels de géométrie est un moyen de proposer une phase de rupture face à l'obstacle de la règle graduée. Les tâches proposées dans l'environnement numérique doivent faire prendre conscience à l'élève de la nécessité de l'usage d'un nouvel instrument compas dans la construction du triangle. Il s'agit dans la mobilisation du duo de favoriser le processus de genèse instrumentale du compas dans cette tâche et de favoriser l'opérationnalité des schèmes d'utilisation du compas dans cette construction. Notre deuxième idée directrice dans la composition de notre duo est d'amener le compas dans la construction du triangle en favorisant le lien entre l'artefact compas, les schèmes d'utilisation et les concepts mathématiques sous-jacents. Il s'agit pour nous de renforcer l'identification de la présence d'une longueur donnée entre les branches du compas et de déclencher l'élaboration d'un instrument compas pour transporter une longueur.

### Une nouvelle caractérisation du cercle

Nous souhaitons aussi profiter de l'apprentissage de la construction du triangle à la règle et au compas pour faire évoluer les connaissances sur le cercle. Notre intention est donc aussi que notre situation mobilisant un duo d'artefacts numérique et matériel renforce le concept de distance constante associé au cercle. Notre projet est d'engendrer une vision du cercle comme la trajectoire de l'extrémité d'un segment qui pivote.

### Utiliser les potentialités d'un environnement numérique

La déconstruction du triangle 2D en éléments 1D ne peut être obtenue par la seule utilisation de la règle et du compas. Cette décomposition 1D du triangle nécessite l'utilisation d'instruments différents. C'est pourquoi il nous semble intéressant d'utiliser les potentialités d'un environnement numérique pour élaborer un artefact qui permette d'explorer le triangle au travers d'une analyse visuelle différente de celle induite par l'usage de la règle et du compas. Un tel artefact numérique devrait permettre de mettre en œuvre cette déconstruction 1D du triangle.



## Chapitre 4. Hypothèses de recherche relatives à la composition d'un duo pour la conceptualisation du triangle

### 4.1. Retour sur notre problématique

L'objectif de notre recherche est de montrer que l'utilisation conjointe d'un artefact numérique articulé à un artefact matériel dans une situation didactique peut être une plus-value pour les apprentissages. Cet objectif induit la question de recherche suivante.

*Question de recherche : Sous quelles conditions l'articulation entre un artefact numérique et un artefact matériel est-elle une plus-value pour les apprentissages et comment cette articulation influence-t-elle la conceptualisation ?*

En s'appuyant sur les cadres théoriques de l'approche instrumentale (Rabardel, 1995), de la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1990) et de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), nous avons établi des caractéristiques nous permettant de définir un duo d'artefacts numérique et matériel (Chapitre 2). Un duo est constitué d'un artefact numérique et d'un artefact matériel articulés dans une même situation didactique. Un duo inclut des manipulations d'objets numériques et provoque des processus d'assimilation et d'accommodation des schèmes d'utilisation d'un instrument à l'autre. L'articulation entre les artefacts est élaborée de manière à ce que les genèses instrumentales des instruments numérique et matériel s'entremêlent. Ceci nous a conduit à formuler une première hypothèse de recherche.

*Hypothèse de recherche 1 : Un duo d'artefacts, numérique et matériel, provoque des genèses instrumentales associées qui conduisent, en particulier, à une genèse instrumentale relative à l'artefact matériel.*

De plus l'élaboration d'un duo d'artefacts, numérique et matériel, permet de tirer profit de chaque artefact pour élaborer un milieu riche en rétroactions. La problématisation et l'orchestration d'un duo d'artefacts dans une situation, à travers l'articulation des artefacts, augmentent les rencontres sujet-milieu. Différents milieux se confrontent. Le duo provoque la mise en relation de situations, il rend possible la réitération d'expériences en faisant varier les contraintes au cours de l'alternance des actions instrumentées avec les instruments numériques et les instruments matériels et ainsi favorise la conceptualisation. Grâce au duo, le système [sujet-milieu] est enrichi et provoque l'émergence et la transformation des conceptions au cours de la situation. Cela nous a amené à formuler notre seconde hypothèse de recherche.

*Hypothèse de recherche 2 : Un duo d'artefacts numérique et matériel, mobilisé dans une situation, favorise l'acquisition de connaissances au cours de la situation ; il est favorable à la mise en œuvre d'un parcours de conceptions d'un état initial supposé à un état final attendu du système [sujet/milieu] au cours de l'alternance entre les actions instrumentées avec les instruments numériques et celles utilisant les instruments matériels.*

Dans le paragraphe ci-dessous, nous allons décliner ces deux hypothèses de recherche dans le cas du duo autour du compas pour la conceptualisation du triangle dans la tâche de construction d'un triangle de longueurs des côtés données.

## **4.2. Hypothèses de recherche relatives à la composition d'un duo incluant le compas pour la conceptualisation du triangle**

Notre objectif est d'élaborer un artefact numérique et une situation didactique de manière à constituer un duo incluant le compas pour la conceptualisation du triangle dans l'apprentissage de la construction du triangle à la règle et au compas. Dans le paragraphe 3.6 nous avons établi des idées directrices pour la composition de ce duo.

- L'élaboration d'un nouvel instrument compas.
- La mise en œuvre de la déconstruction dimensionnelle du triangle sans aller jusqu'au point et la recherche d'une vision 1D du triangle.

Nos hypothèses de recherche sont formulées en rapport avec ces objectifs.

### **4.2.1. Un nouvel instrument compas**

Amener le compas dans la construction du triangle consiste à faire prendre conscience à l'élève de la nécessité d'un nouvel instrument, autre que la règle graduée, pour réaliser cette construction. Un environnement numérique peut faciliter le processus de genèse instrumentale du compas dans la tâche de construction du triangle. En effet, un environnement numérique permet des manipulations de représentations de segments numériques. Ces manipulations peuvent induire l'élaboration d'un instrument déplacement par rotation pour pivoter un segment dont les schèmes d'utilisation peuvent être adaptés à des schèmes d'utilisation du compas matériel au cours des différentes tâches proposées au fil de la situation dans l'alternance des environnements numérique et matériel. Ainsi nous formulons une première hypothèse de recherche.

***Hypothèse de recherche 1.1 : Le duo fait émerger un nouvel instrument compas pour pivoter un segment dans la tâche de construction d'un triangle.***

### **4.2.2. Une déconstruction 1D du triangle**

Nous nous interrogeons sur la possibilité de créer des tâches permettant la mise en œuvre d'une déconstruction 1D du triangle. Un environnement numérique nous paraît être un environnement qui fournit les conditions de la mise en œuvre d'une

déconstruction 1D du triangle. En effet un environnement numérique permet d'explorer le triangle à partir de ses côtés 1D. Un environnement numérique peut permettre de passer d'un regard centré sur le contour fermé d'un triangle à un regard sur le contour ouvert. L'environnement numérique permet d'analyser le triangle pour y voir une ligne brisée. Ainsi nous formulons deux autres hypothèses de recherche.

***Hypothèse de recherche 2.1 : Le duo permet l'émergence d'une vision 1D du triangle : un triangle est une ligne brisée fermée.***

***Hypothèse de recherche 2.2 : Le duo induit, au fil de la situation et des activités instrumentées, un parcours, du triangle 2D au triangle 1D jusqu'au triangle 0D.***

#### 4.2.3. Une nouvelle caractérisation du cercle

L'élaboration d'un duo pour apprendre la construction du triangle à la règle et au compas a pour but de relier l'artefact compas, les schèmes d'utilisation du compas et les concepts sous-jacents. Élaborer ce lien entre ces trois composantes, artefact schèmes d'utilisation et concepts, permet de comprendre que le compas est l'outil approprié pour cette tâche et permet de faire évoluer les connaissances sur le cercle. L'émergence d'un nouvel instrument compas pour pivoter un segment grâce au duo engendre une nouvelle caractérisation du cercle qui est notre troisième hypothèse de recherche.

***Hypothèse de recherche 2.3 : Le duo fait émerger une nouvelle caractérisation du cercle comme la trajectoire de l'extrémité d'un segment qui pivote.***



## Chapitre 5. Composition d'un duo

L'étude faite dans le Chapitre 3 nous a permis de caractériser les concepts en jeu, triangle et cercle, et l'obstacle de la règle graduée à franchir dans l'apprentissage de la construction du triangle à la règle et au compas. Notre objectif est d'élaborer une situation didactique engageant l'utilisation d'un duo d'artefacts, l'artefact matériel compas et un artefact numérique associé, permettant l'évolution des connaissances relatives au triangle et au cercle. Dans ce travail nous avons aussi deux autres visées. D'une part nous souhaitons que notre situation mobilisant un duo d'artefacts puisse être intégrée dans de réelles pratiques de classe. D'autre part, nous souhaitons aussi amener la géométrie dynamique à l'école primaire. Ces deux dernières visées interviennent néanmoins dans nos choix et dans l'élaboration de la situation et dans la composition du duo.

Nous présentons dans ce chapitre la démarche suivie pour la composition du duo d'artefacts et de la situation qui le mobilise. Après avoir présenté la méthodologie d'ingénierie didactique collaborative que nous avons retenue pour la composition du duo, nous exposons plus particulièrement les éléments clés de la situation didactique, puis l'élaboration de l'artefact numérique nécessaire à l'implémentation de cette situation. L'élaboration de la situation et de l'artefact numérique est un processus itératif qui complique l'exposé séparé et successif de la situation didactique puis de l'artefact numérique ; néanmoins c'est ainsi qu'il nous semble plus clair de les présenter. Ce chapitre se poursuit par la description de la situation finale et de l'articulation du duo pour permettre la conceptualisation du triangle et du cercle au cours de l'apprentissage de la construction du triangle à la règle et au compas. La dernière partie de ce chapitre reprend les choix de composition qui sont la conséquence des deux objectifs d'élaboration collaborative et d'intégration dans des classes ainsi que l'usage de la géométrie dynamique à l'école primaire, notamment la technologie Cabri Elem retenue.

### 5.1. Méthodologie de composition du duo

#### 5.1.1. À propos de composition

Dans ce chapitre nous parlons de composer un duo ou de composition d'un duo. Nous utilisons le vocabulaire « composer » ou « composition » pour plusieurs raisons. D'une part nous souhaitons utiliser un mot ne prêtant pas à confusion. Nous ne souhaitons pas utiliser le terme conception pour l'élaboration du duo car nous tenons, dans notre étude, à ce que le terme conception face référence aux conceptions d'un élève au sens d'une instanciation de sa connaissance. Le fait que notre situation porte sur la construction du triangle à la règle et au compas nous a aussi fait éliminer le terme « construction » pour le duo. D'autre part les mots « composition » ou « composer » nous semblent bien appropriés à ce que nous cherchons à faire dans l'élaboration d'un duo. En effet composer c'est « *former, réaliser en combinant, en assemblant divers éléments pour*



*constituer un tout* » et c'est aussi « *créer une œuvre en choisissant et en arrangeant les différents éléments constitutifs* » (Larousse, 2004). Nous allons présenter dans la suite de ce chapitre la façon dont nous composons le duo c'est-à-dire comment nous assemblons, nous articulons, nous arrangeons les deux artefacts numérique et matériel dans une situation pour constituer un tout.

### 5.1.2. Une ingénierie didactique collaborative

Notre méthodologie pour la composition d'un duo d'artefacts numérique et matériel articulés dans une situation s'appuie sur les deux méthodologies de recherche en didactiques suivantes : l'Ingénierie Didactique (Artigue, 1988) et le « Design Based Research » (Sanchez & Monod-Ansaldi, 2015).

Pour la composition du duo d'artefacts numérique et matériel et d'une situation qui les articule, nous reprenons les quatre phases du processus d'ingénierie didactique : la phase 1 des analyses préalables, la phase 2 de l'élaboration et de l'analyse a priori de la situation didactique, la phase 3 de l'expérimentation et la phase 4 de l'analyse a posteriori et de l'évaluation. La phase 1 des analyses préalables a été faite dans le Chapitre 3. Nous présentons dans la suite de ce chapitre la phase de composition du duo dans une situation. L'analyse a priori de la situation est détaillée dans le Chapitre 7. Les expérimentations de la situation ainsi que l'analyse a posteriori sont présentées dans le Chapitre 8.

Nous intégrons à la méthodologie de l'ingénierie didactique des éléments du « Design Based Research ». Nous souhaitons en effet, que le duo puisse être utilisé dans des classes. L'association d'enseignants à la composition du duo est donc importante pour nous. Le duo est élaboré au cours d'un travail collaboratif entre chercheurs et enseignants dans un LéA, Lieu d'Education Associé<sup>5</sup>. Trois enseignantes professeures des écoles et deux chercheurs de l'Institut Français de l'Education étaient membres de ce LéA. Les phases 2 et 3 de l'ingénierie didactique, c'est-à-dire la composition du duo, son analyse a priori et les expérimentations, ont été réalisées au sein du LéA au cours d'un processus itératif qui articule des phases de d'élaboration, de composition du duo et des phases d'expérimentation en classe. Ces expérimentations conduites en conditions réelles de classe visent à mettre à l'épreuve de l'expérimentation le duo d'artefacts et la situation et ainsi à faire évoluer le duo au fil du temps. Comme l'expliquent Sanchez et Monod Ansaldi (ibid) le processus itératif permet d'avancer dans le raffinement de la situation. La prise en compte des observations et résultats des expérimentations alimente, par rétroaction, le processus de composition du duo et conduit à modifier la situation. Les choix de composition du duo sont constamment révisés en se basant sur

---

<sup>5</sup> Les LéA sont définis dans le programme scientifique de l'IFÉ (Institut Français de l'Education) comme des lieux à enjeux d'éducation rassemblant un questionnement des acteurs. L'équipe de recherche d'un LéA construit avec tous les acteurs un projet dans la durée. Il s'agit de considérer l'éducation comme un fait social total et de fonder des recherches en éducation sur l'action conjointe entre chercheurs et acteurs du terrain.

l'expérience et l'analyse des données recueillies, jusqu'à l'obtention d'une version considérée comme optimale (Collins, Joseph, & Bielaczyc, 2004). Dans ce cadre du « Design Based Research », recherche et composition sont articulées. Le processus de composition du duo est analysé. Les hypothèses de recherche sont identifiées et affinées au fil du processus itératif de création. Associer des enseignants à la composition du duo est bénéfique dans la mesure où nos hypothèses de recherche concernent l'effet du duo sur les apprentissages des élèves. Tester ces hypothèses dans de réelles conditions de classe est donc primordial. En outre, la composition du duo concerne la fonction pragmatique des instruments. Cette fonction est visible pour les enseignants qui peuvent intervenir dans l'élaboration des artefacts et de leur articulation dans une situation. En effet, dans leur classe les enseignants observent les actions des élèves, leurs productions à l'aide des différents instruments. La fonction épistémique des instruments, le développement de schèmes et donc de connaissances est moins évidente pour les enseignants. C'est pourquoi dans le cadre de notre travail, les enseignants ne sont plus associés à la phase 4 d'évaluation de l'ingénierie didactique. L'évaluation de la confrontation analyse a priori, analyse a posteriori est faite uniquement par les chercheurs.

## **5.2. La situation « Triangle et compas »**

Dans la Théorie des Situations Didactiques de Brousseau (ibid) une situation est définie par : le problème et la règle du jeu ; le milieu et les variables didactiques ; les connaissances en jeu. Un duo d'artefacts, numérique et matériel, étant mobilisé dans une situation, nous reprenons ces considérations pour la situation « Triangle et compas ».

Les problèmes associés à cette situation sont de former, de tracer, de construire des triangles à partir de trois longueurs fixes données. Nous présentons dans les paragraphes suivants les connaissances en jeu dans la situation puis nos choix de variables didactiques.

### **5.2.1. Connaissances en jeu**

Dans le Chapitre 3 nous avons mis en évidence deux visions du triangle. Une vision 2D, qui caractérise un triangle comme une surface délimitée par trois côtés, et une vision 0D, qui caractérise le triangle par l'identification de ses sommets. Le duo est composé pour constituer une situation didactique pour d'une part faire émerger une vision 1D du triangle et d'autre part faire prendre conscience qu'avec trois longueurs on ne peut pas toujours obtenir un triangle. Ainsi en lien avec le duo nous avons établi quatre appréhensions différentes du triangle. Le Chapitre 3 nous a aussi permis de mettre en évidence deux caractérisations du cercle. Une caractérisation globale, comme une ligne fermée, et une caractérisation ponctuelle qui inclut aussi le concept de distance constante associé au cercle : un cercle est l'ensemble des points équidistants d'un centre. Le duo est aussi composé pour amener une nouvelle caractérisation du cercle qui

renforce le concept de distance associé au cercle. Ainsi dans le duo nous identifions trois caractérisations différentes du cercle.

### Une discussion à propos de la notion de segment selon l'environnement

Notre intension, dans l'élaboration d'une situation, est d'explorer le triangle à partir de ses trois côtés de longueurs fixes données. L'utilisation conjointe d'un environnement numérique de géométrie dynamique et de l'environnement papier-crayon nous amène à discuter la notion de segment selon l'environnement.

En géométrie euclidienne, un segment est une portion de droite délimitée par deux points. Le segment  $[AB]$  est défini comme l'ensemble des points  $M$  de l'espace euclidien tels que  $AM + MB = AB$ , c'est-à-dire l'ensemble des points pour lesquels l'inégalité triangulaire devient une égalité. Cet objet géométrique segment est appréhendé par des représentations. Nous distinguons deux objets géométriques segments différents selon qu'on les approche par leurs représentations dans l'environnement numérique ou papier-crayon.

Un environnement de géométrie dynamique permet de créer des représentations dynamiques d'objets mathématiques que l'on peut déplacer. Dans un tel environnement, le segment dynamique  $[AB]$  est la classe des dessins qui s'obtiennent par déplacement des points  $A$  ou  $B$  ou par déplacement du segment entier. Le segment dynamique  $[AB]$  peut donc avoir des positions et des longueurs variables. On peut considérer le cas particulier d'un segment dynamique  $[AB]$  de longueur fixe donnée. Dans ce cas, seules les positions du segment dans le plan peuvent être variables, la longueur étant conservée au cours du déplacement. Dans l'environnement papier-crayon, une représentation du segment  $[AB]$  est unique du point de vu de sa position et de sa longueur. En papier-crayon la représentation d'un segment fixe une position et une longueur alors qu'en géométrie dynamique un segment est défini indépendamment des sa position et de sa longueur.

Deux segments de même longueur, en géométrie euclidienne, sont deux représentants de la classe d'équivalence que forme l'ensemble des segments isométriques. Si pour résoudre un problème dans l'environnement papier-crayon il est nécessaire de disposer d'un segment ailleurs ou de disposer d'un segment de même longueur que le premier, il faut, dans les deux cas, construire un autre segment. La conservation de la longueur est une relation entre les deux segments et entre les deux représentations. En géométrie dynamique, on distingue soit les deux positions de la représentation d'un seul segment, soit deux segments et leurs deux représentations ; on parle alors de même longueur soit pour un segment dont la longueur se conserve au cours du déplacement, soit pour deux segments différents construits de telle manière que leurs longueurs restent égales sans nécessairement que cette longueur soit conservée au cours du déplacement de l'une ou l'autre des extrémités des segments.

Dans l'élaboration de la situation « Triangle et compas », nous cherchons à coordonner des manipulations de segments dynamiques de longueurs fixes données à des activités à partir de segments tracés dans l'environnement papier-crayon. Ainsi dans un premier temps, nous ne problématisons pas la distinction entre segment et longueur pour les élèves. Notre enjeu est de les distinguer de la mesure. Dans un second temps, la distinction entre segment et longueur devra être faite mais pas nécessairement dans la situation travaillée.

## Le triangle

L'objet mathématique triangle est unique mais son appréhension par un sujet peut être variée. Le concept de triangle peut renvoyer à différents objets : l'objet matériel triangle, l'objet matériel dessiné dans le champ graphique du papier crayon, l'objet géométrique représenté dans le champ graphique du papier crayon ou à l'interface d'un logiciel de géométrie dynamique, l'objet géométrique référent. Ces différents « objet triangle » renvoient chacun à des visions différentes du triangle.

### ❖ Un triangle est une surface délimitée par trois côtés : Vision Triangle 2D

Cette vision du triangle est la vision initiale supposée dans notre étude. Cette vision fait référence à une appréhension 2D du triangle : ce dernier est vu comme une surface contenue entre ses trois côtés. La reconnaissance du triangle est centrée sur une zone, une surface. C'est une visualisation iconique du triangle. Cette vision permet de former un triangle dans l'environnement matériel ou de tracer un triangle (sans contrainte de longueur des côtés) dans l'environnement papier-crayon. Une figure à trois cotés est visible alors un triangle est reconnu.

### ❖ Un triangle est une ligne brisée fermée de trois segments : Vision Triangle 1D

Cette vision permet une appréhension 1D du triangle : le triangle est vu comme une ligne brisée fermée, c'est-à-dire comme un polygone à trois côtés. La reconnaissance du triangle est centrée sur la ligne qui constitue le contour. Cette vision du triangle permet de rendre visible que dans certains cas il n'est pas possible de fermer la ligne brisée pour y enfermer un triangle.

### ❖ Un triangle est déterminé par un côté et un sommet : Vision Triangle 0D

Cette vision est la connaissance cible de notre duo. Dans cette vision, il s'agit d'une appréhension du triangle qui fait apparaître le point OD : le troisième sommet est identifié et détermine le triangle. Le cercle est mis en œuvre comme outil dans la construction du triangle.

S'intéresser à la construction d'un triangle de longueurs des côtés données amène à se poser la question de l'existence ou non de ce triangle. Dans la composition de notre duo nous voulons prendre en compte cette question. Il n'est pas question pour nous de formaliser l'inégalité triangulaire mais simplement de faire prendre conscience aux élèves qu'avec trois longueurs on ne peut pas toujours former un triangle. En complément des

différentes visions du triangle nous souhaitons que notre duo permette de caractériser l'existence ou non du triangle.

❖ **Caractérisation de l'existence ou non du triangle**

Si la somme des deux petites longueurs est supérieure à la plus grande longueur alors le triangle existe. Si la somme des deux petites longueurs est inférieure à la plus grande longueur alors le triangle n'existe pas.

Il est important de noter que l'évolution des différentes visions du triangle de la vision Triangle 2D à la vision Triangle 0D met en œuvre la déconstruction dimensionnelle du triangle. Il y a transformation progressive du triangle surface délimitée par trois côtés de dimension 2 au triangle déterminé par un côté et le troisième sommet de dimension 0 avec une étape intermédiaire. La ligne brisée de la vision Triangle 1D est une déconstruction dimensionnelle du triangle 1D ; elle représente le contour ouvert obtenu à partir de segments 1D.

## Le cercle

Nous envisageons que la construction du triangle à la règle et au compas participe à l'évolution des connaissances du triangle et aussi à l'évolution des connaissances du cercle. Les caractérisations du cercle elles aussi sont diverses. Le cercle est dans un premier temps un objet spatial rond. Il est ensuite vu comme une ligne fermée. Ces deux caractérisations sont des visions globales du cercle. Artigue et Robinet (1982) ont montré que son aspect ponctuel n'est pas naturel pour les élèves. En effet il leur est difficile de voir un ensemble de points derrière une ligne. Or comme l'ont noté Artigue et Robinet (ibid), dans la construction du triangle à la règle et au compas les cercles interviennent comme outils. Cette intervention suppose la reconnaissance du cercle comme ensemble de points équidistants d'un autre. Il y a deux difficultés dans cette phrase, la caractérisation ponctuelle du cercle et l'équidistance c'est-à-dire la caractérisation du cercle comme une distance constante et un point fixe. C'est pourquoi nous identifions trois caractérisations du cercle que nous souhaitons prendre en compte dans notre étude.

❖ **Un cercle est une ligne fermée : Caractérisation Cercle 1**

Cette caractérisation du cercle est associée aux tracés de cercles au compas. Elle est directement associée à l'instrument compas qui produit la ligne cercle. Le cercle est la trace de la mine du compas.

❖ **Un cercle est la trajectoire de l'extrémité d'un segment qui pivote : Caractérisation Cercle 2**

Dans cette caractérisation du cercle, le compas n'est plus seulement l'instrument qui produit le cercle. Le compas est un instrument pour pivoter un segment. Le cercle est obtenu en faisant pivoter un segment autour d'une extrémité qui reste fixe. Le cercle est la trace de la trajectoire d'un point, l'extrémité du segment.

Cette nouvelle vision du cercle comprend la caractérisation du cercle comme une distance constante et un point fixe.

❖ **Un cercle est l'ensemble des points équidistants de son centre : Caractérisation Cercle 3**

Cette caractérisation du cercle attribue au cercle son rôle d'outil dans des problèmes de distance. Cette caractérisation du cercle est celle qui intervient dans la construction du triangle à la règle et au compas. En effet dans cette construction le cercle est un outil permettant de révéler une distance. De plus pour identifier l'intersection des cercles (arcs de cercle) au troisième sommet du triangle il faut voir le cercle comme un ensemble de points. Dans cette conception le compas n'apparaît plus. Le cercle lui-même devient un outil.

Comme dans le cas du triangle l'évolution des connaissances du cercle à travers ces trois caractérisations met en œuvre la déconstruction dimensionnelle du cercle. Ces trois visions du cercle constituent une progression de la forme de dimension 2 par la ligne de dimension 1 et jusqu'à un ensemble de points de dimension 0. La caractérisation Cercle 2 est une transition entre la ligne et l'ensemble de points. En effet la mine du compas produit la trace de l'extrémité d'un segment qui pivote. Cette extrémité du segment est un point. D'autres segments de même longueur que le segment initial peuvent être tracés en joignant l'extrémité qui reste fixe au cercle (arc de cercle). Ainsi la trace du compas est une succession d'extrémités de segments résultats du pivotement (Figure 5.1).

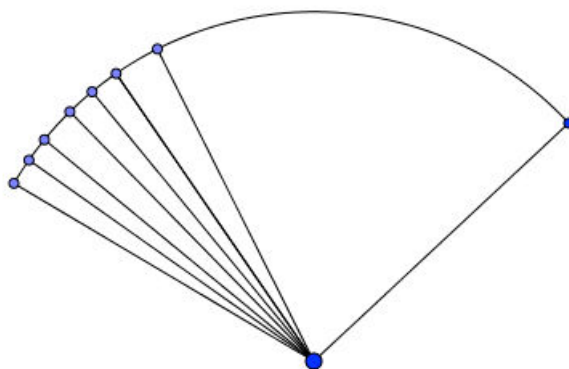


Figure 5.1 : La trace de l'extrémité d'un segment qui pivote est une infinité de points

Il nous paraît intéressant de remarquer enfin que la dernière caractérisation du cercle n'est plus liée au compas. Le cercle dans cette caractérisation n'est plus attaché à un outil matériel. En plus de son aspect ponctuel cet objet cercle devient lui-même outil « non matériel ».

La caractérisation des connaissances du triangle et du cercle décrite ci-dessus nous permet de mettre en évidence la transformation progressive qui a lieu d'une vision à une autre du triangle et d'une caractérisation à une autre du cercle. **Notre objectif dans la composition d'un duo est de permettre la mise œuvre de cette évolution à travers**

**l'articulation des activités instrumentées orchestrées dans la situation. Cela nous permet de caractériser l'apprentissage provoqué par le duo.**

### 5.2.2. Variables didactiques

Les variables didactiques jouent un rôle important dans la conception des tâches. Certaines variables didactiques ont été identifiées a priori en lien avec l'apprentissage souhaité. D'autres ont émergé au cours de l'élaboration de l'artefact numérique dans le cahier informatisé et de l'étude de l'articulation des deux artefacts numériques et matériel dans la situation. La sélection des valeurs des variables didactiques pour la situation est une étape de la composition du duo. En effet, la modification des valeurs d'une variable didactique au cours de la situation modifie le milieu et donc modifie le coût d'une stratégie ou la possibilité de la mettre en œuvre (Brousseau, 1998). Les différentes valeurs de variables didactiques en jeu dans les différentes phases de la situation permettent l'évolution des stratégies et des apprentissages au fil de la situation.

Ce sont les choix de variables didactiques qui permettent de contrôler l'évolution des connaissances sur le triangle et le cercle et de lancer la genèse instrumentale du nouvel instrument compas. Ainsi nous considérons trois variables didactiques potentielles dont l'analyse a priori, Chapitre 7, et l'analyse a posteriori, Chapitre 8, montrent qu'il s'agit de variables didactiques du duo et décrivent l'effet de ces variables didactiques sur les stratégies.

#### Les longueurs des segments

a, b et c désignant trois longueurs, trois valeurs sont associés à cette variable :

- (a,b,a+b) : le triangle est plat
- (a,b,c) avec  $c < a + b$  ;  $b < a + c$  et  $a < b + c$  : les longueurs vérifient l'inégalité triangulaire, le triangle existe
- (a,b,c) avec  $c > a + b$  : le triangle n'existe pas

Au fil de la situation les longueurs des segments proposées permettent de rencontrer des triplets de longueurs qui vérifient l'inégalité triangulaire et des triplets de longueurs qui ne la vérifient pas. Ainsi dans certains cas le triangle existe, et dans d'autres cas le triangle n'existe pas. Le triangle plat peut aussi être rencontré.

#### Les déplacements possibles des segments

Suivant l'environnement matériel, numérique ou papier-crayon dans lequel les segments sont susceptibles d'être les côtés d'un triangle, ils peuvent être déplacés ou non. Les contraintes de déplacement de l'environnement Cabri Elem, environnement numérique utilisé dans notre travail et dont nous reparlerons ultérieurement, nous contraignent à distinguer deux déplacements différents. Un déplacement par translation qui déplace le segment sans changer sa direction. Le deuxième déplacement consiste à déplacer le segment par rotation autour d'une de ses extrémités qui reste fixe. À partir de ces deux

déplacements, par translation et par rotation autour d'une extrémité qui reste fixe nous définissons des valeurs attachées à cette variable.

Cinq valeurs sont associées à cette variable didactique.

- Translation et rotation autour d'une extrémité simultanée
- Translation et rotation autour d'une extrémité dissociée
- Translation uniquement
- Rotation autour d'une extrémité uniquement
- Aucun déplacement

### Les outils disponibles

Dans des tâches de formation, de tracés, de constructions de triangles des outils vont être utilisés pour réaliser ces tâches. Suivant l'environnement numérique ou papier-crayon dans lequel on travaille les outils utilisés sont différents. Nous avons fait le choix de toujours mettre à disposition des élèves une boîte à outils disponible dans chaque environnement, numérique et papier-crayon. Afin de différencier la règle graduée et le compas matériels, de leurs homologues de géométrie dynamique nous accolons « -gd » au compas et à la règle graduée de l'environnement numérique.

Cinq valeurs sont associées à cette variable didactique.

- Tous les outils matériels du papier-crayon (le crayon, la règle graduée, l'équerre et le compas matériel) ;
- Tous les outils de géométrie dynamique (segment, cercle, triangle, mesure, compas-gd, règle graduée-gd, calculatrice) ;
- Tous les outils de géométrie dynamique privés du cercle ;
- Tous les outils de géométrie dynamique privés du compas-gd ;
- Tous les outils de géométrie dynamique privés du compas-gd, de la règle graduée-gd et de l'outil mesure.

Comme nous l'avons précisé en introduction, la situation et l'artefact numérique sont développés conjointement. Ainsi les différentes phases de la situation sont présentées dans le paragraphe suivant qui décrit l'élaboration de l'artefact numérique et la composition du duo.

## 5.3.Composition d'un duo d'artefacts numérique et matériel

La composition du duo d'artefacts s'appuie sur trois idées directrices mises en évidence dans le Chapitre 3. Notre première intention est de mettre en œuvre une déconstruction dimensionnelle du triangle du 2D au 1D qui n'oblige pas à aller jusqu'au point OD. D'autre part notre projet est de sortir de la technique, de la procédure de tracé et de donner du sens à l'utilisation du compas dans cette construction. Enfin notre troisième idée est de



faire évoluer les connaissances des élèves sur le triangle et le cercle. Pour mettre en œuvre ces idées nous faisons appel à la géométrie dynamique. Il s'agit d'élaborer une suite de tâches qui amènent l'élève à concevoir le triangle à partir de ses côtés.

### 5.3.1. Manipulations et pratique expérimentale en géométrie

Duval et Godin (2005) précisent que le passage des instruments permettant des manipulations d'objets matériels aux instruments de traçage constitue un saut cognitif très important. « *En effet on passe d'un monde où l'espace s'organise en fonction des gestes du corps et de son orientation, à un monde où l'espace est déterminé en fonction de gestes uniquement techniques, c'est-à-dire déterminé par les possibilités productives d'un instrument* » (ibid p.12). L'introduction des technologies numériques dans l'enseignement des mathématiques, permet l'élaboration de tâches qui peuvent être résolues grâce à des manipulations de représentations d'objets mathématiques. Comme nous l'avons montré dans le Chapitre 1, dans un logiciel de géométrie dynamique, il est possible d'une part, de réaliser des constructions à l'aide d'outils et de primitives de géométrie et d'autre part, il est possible de manipuler des représentations d'objets géométriques tels que des cercles, des segments, des droites. L'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique donne la possibilité d'agir et d'explorer à partir de manipulations directes de représentations d'objets mathématiques. « *La technologie numérique permet la manipulation directe et l'interaction avec des représentations de formes géométriques* » (Hoyles & Noss, 2003 p. 326). Les manipulations d'objets numériques sont des manipulations de représentations d'objets géométriques. Pour Laborde et Laborde (2014) ces manipulations invitent l'utilisateur à agir directement sur des représentations dynamiques d'objets mathématiques. Les environnements numériques qui permettent de telles interactions, avec des représentations dynamiques d'objets mathématiques, sont de nouvelles fenêtres sur les mathématiques. Pour Laborde et Laborde (ibid) la possibilité de créer des milieux a-didactiques conduit à la conception de nouveaux types de tâches qui ne peuvent exister dans l'environnement papier-crayon. La nature de l'activité de l'élève change, elle devient plus expérimentale. Des hypothèses sont émises et vérifiées par expérimentation. **Les manipulations de représentations d'objets mathématiques à l'interface de l'ordinateur peuvent être une aide, un intermédiaire au saut cognitif que constitue le passage entre des manipulations d'objets matériels et des tracés géométriques aux instruments.** C'est pourquoi notre objectif est de développer des environnements informatiques qui incluent une approche expérimentale sur la base de manipulations directes de représentant d'objets mathématiques à l'interface de l'ordinateur. **En conséquence, la composition d'un duo réside en l'élaboration de l'artefact numérique ainsi que des tâches qui permettent de le mobiliser de manière à ce que ces tâches invitent l'élève à des manipulations de représentations dynamiques d'objets mathématiques.**

### 5.3.2. Création d'un environnement informatisé

Un environnement numérique permet d'envisager d'autres scénarios didactiques que ceux possibles dans l'environnement papier-crayon. L'usage des technologies numériques peut nous permettre de créer des outils et des tâches (Mackrell, Maschietto, & Soury-Lavergne, 2013) dans l'environnement numérique en articulation avec l'utilisation d'un outil matériel en particulier le compas matériel. L'artefact numérique est élaboré en réfléchissant à ce qu'il va apporter à l'artefact matériel compas. Cela implique d'identifier les contraintes, les nécessités, les opportunités de l'environnement numérique pour accompagner la conceptualisation des objets mathématiques en lien avec l'artefact matériel et la situation.

#### Élaboration d'un milieu

Les interactions d'un utilisateur avec un environnement numérique sont à relier avec la notion de milieu (Brousseau, 1998). L'apprentissage dépend des actions du sujet sur un milieu et des rétroactions que ce dernier renvoie au sujet. Élaborer un environnement numérique relativement à un apprentissage, c'est élaborer un milieu riche en rétroactions. La manipulation d'objets numériques *« peut nous permettre d'obtenir des rétroactions du milieu et de construire des situations dans lesquelles les connaissances mathématiques des élèves pourront évoluer grâce à ces rétroactions »* (Restrepo, 2008 p. 13). Le recours au déplacement des objets à l'interface de l'ordinateur et les rétroactions de manipulations directes permettent le développement et l'évolution des stratégies au cours de la situation. Les choix des objets à manipuler, des actions possibles sur ces objets et des rétroactions de l'environnement sont des éléments essentiels du milieu qui induisent le développement de stratégies contribuant à l'évolution des connaissances géométriques du triangle.

#### Un environnement numérique qui implémente une partie de la situation

L'artefact matériel compas n'est pas didactique en lui-même alors que l'artefact numérique inclus dans un environnement informatisé l'est au sens qu'il peut embarquer une partie de la situation. Les technologies numériques permettent d'élaborer des environnements qui contiennent des représentations dynamiques d'objets mathématiques accompagnées d'informations textuelles. L'environnement numérique peut donc embarquer des questions, des problèmes. En tant que concepteur nous utilisons les potentialités de l'environnement numérique pour prescrire des tâches aux élèves.

Notre but est de développer un environnement numérique qui inclut une approche expérimentale basé sur des manipulations directes de représentations dynamiques de segments. Nous avons choisi d'utiliser l'environnement numérique pour faire apparaître les segments côtés du triangle, puisque nous souhaitons déconstruire le triangle en ses trois côtés. Le triangle doit alors être formé en manipulant les segments côtés, unités

visuelles 1D, déjà présents à l'écran mais pas positionnés pour former un triangle. Notre démarche est de proposer des tâches qui invitent l'utilisateur à des manipulations de représentations dynamiques des segments. Ces tâches doivent permettre une exploration du triangle favorisant la mise en œuvre de sa déconstruction 1D. L'élaboration d'un environnement informatisé consiste à créer un espace d'expérimentation (Mackrell *et al.*, 2013). Le sujet peut choisir les actions à réaliser afin de mettre en place des stratégies pour résoudre les problèmes auxquels il est confronté. Il doit prendre des décisions relativement à ses actions. En géométrie dynamique, ses décisions sont influencées par ses connaissances des objets mathématiques en jeu. Ainsi la géométrie dynamique agit comme un révélateur des connaissances des élèves et permet de les enrichir. Les stratégies qui peuvent être mises en œuvre doivent entraîner une exploration du triangle avec un regard géométrique nouveau, une vision 1D du triangle.

### Un artefact numérique qui enrichit l'artefact matériel

L'artefact numérique est élaboré à partir de l'artefact matériel compas dans le but d'apporter une plus-value sur le plan conceptuel. Les analyses épistémologiques et cognitives de l'artefact matériel compas (Chapitre 3) conditionnent les choix faits dans la mutation de l'outil matériel vers l'outil numérique. Les analyses préalables réalisées dans le Chapitre 3 ont fait apparaître qu'historiquement le compas sert à reporter des longueurs. Dans l'enseignement par contre, c'est d'abord l'outil qui permet de tracer le cercle. Ainsi en fin d'école primaire le compas est associé au concept de cercle et non au concept de distance. La distance entre la mine et la pointe du compas n'est pas associée à une longueur (Perrin-Glorian & Godin, 2014). Le cercle quant à lui est d'abord un objet spatial rond qui s'enrichit du concept de centre et de rayon avec l'usage du compas mais sans nécessairement de propriété d'équidistance. Or la construction du triangle à la règle et au compas appelle le compas comme outil de transport de longueurs et attribue le concept de distance au cercle. Perrin-Glorian et Godin proposent plusieurs moyens de relier cercle et distance. Un de ces moyens consiste à faire tourner un réglet autour d'un point origine. « *On obtient alors un instrument qui permet de trouver des points du plan qui sont à une distance fixée d'un point donné, et, ce faisant, de tracer un cercle avec l'extrémité libre du réglet, qui devient ainsi compas* » (ibid p. 33). Nous reprenons cette idée dans un environnement numérique. Un environnement de géométrie dynamique permet en effet de créer des segments qui peuvent pivoter autour d'une extrémité qui reste fixe. De plus l'affichage de la trace de l'extrémité qui tourne permet la visualisation du cercle (Figure 5.2). Le cercle est alors vu comme la trace de l'extrémité d'un segment qui pivote.

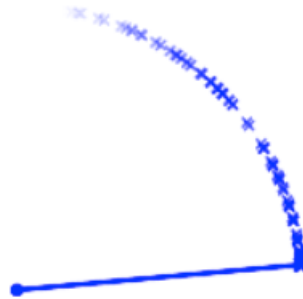
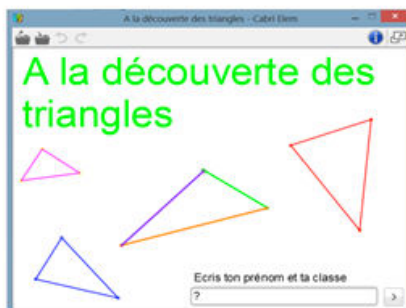


Figure 5.2 : Illustration d'un segment numérique qui pivote autour d'une de ses extrémités ; la trace de l'extrémité qui pivote est visible

### 5.3.3. Un duo qui articule compas matériel et cahiers informatisés

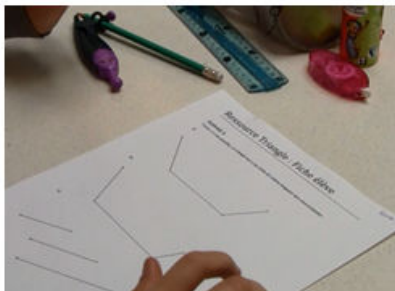


#### PREMIER CAHIER INFORMATISE

Artefact :

##### Déplacement

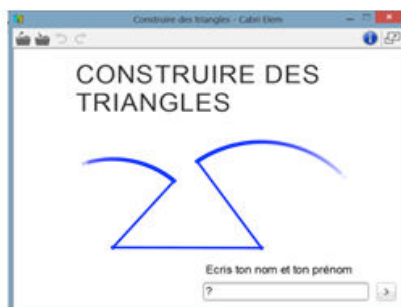
- Par translation
- Par rotation



#### PREMIERE ACTIVITE PAPIER CRAYON

Artefact :

##### Compas matériel



#### DEUXIEME CAHIER INFORMATISE

Artefacts :

##### Compas de la géométrie dynamique



##### Cercle de la géométrie dynamique



#### DEUXIEME ACTIVITE PAPIER CRAYON

Artefact

##### Compas matériel

Figure 5.3 : Le duo « Triangle et compas » dans une situation didactique

Comme nous l'avons déjà dit, la composition d'un duo consiste à développer conjointement un artefact numérique articulé à l'artefact matériel et la situation qui met en œuvre le duo. Il s'agit de proposer des tâches avec chaque artefact numérique et matériel et de présenter une orchestration (Trouche, 2005) des artefacts afin qu'ils contribuent de façon complémentaire au processus de conceptualisation. Dans ce paragraphe nous présentons une description détaillée des différentes phases de la situation et nos choix d'orchestration des différents artefacts dans la situation.

La situation est constituée de deux cahiers informatisés et de deux activités papier-crayon. L'orchestration (Trouche, 2005) des artefacts, numérique et matériel, du duo a été pensée de manière à alterner les activités dans l'environnement numérique et dans l'environnement papier-crayon. Quatre phases successives sont à traiter : un cahier informatisé et une activité papier-crayon puis un deuxième cahier informatisé et une deuxième activité papier-crayon (Figure 5.3).

Les paragraphes ci-dessous donnent pour chaque cahier informatisé et pour chaque activité papier-crayon une description des tâches proposées et justifient l'orchestration des artefacts numérique et matériel dans le duo.

### **Un duo d'artefacts : déplacement par rotation et compas matériel**

Le premier duo d'artefacts mobilisé dans la situation est composé du compas matériel et d'un artefact numérique implémenté dans un premier cahier informatisé. Le compas de géométrie dynamique est proposé par l'environnement numérique. Cependant l'artefact numérique instrumenté dans ce duo va être le déplacement d'un point par rotation (Restrepo, 2008). En effet l'environnement numérique permet de contraindre deux déplacements différents des segments : par translation ou par rotation autour d'une extrémité qui reste fixe. C'est le fait que les deux extrémités des segments numériques ne pivotent pas qui oblige la dissociation des deux déplacements. Ainsi l'environnement numérique permet de mettre en évidence la rotation indispensable pour former un triangle à partir des segments numériques. Ceci n'est pas le cas avec des manipulations d'objets matériels comme des baguettes ou des pailles. Lors de manipulations d'objets matériels les deux déplacements sont réalisés conjointement.

### **Un premier cahier informatisé « A la découverte des triangles »**

Le premier cahier d'activités informatisé nommé « A la découverte des triangles » comprend cinq pages d'activités numérotées de 1 à 5 (Figure 5.4). À ces pages d'activités sont ajoutées une page d'accueil ainsi qu'une page d'aide au déplacement des segments. Une description précise de chaque page de ce cahier informatisé est donnée dans l'Annexe 1.

Les cinq pages d'activités de ce cahier informatisé, amènent à traiter deux tâches : former des triangles par manipulations directes de segments de longueurs fixes donnés (page 1), et déterminer si trois segments donnés peuvent être les trois côtés d'un triangle (page 2,

3, 4 et 5). La deuxième tâche à propos de l'existence ou non d'un triangle est une question mathématique qui problématise la recherche et la formation d'un triangle et donc le recours aux déplacements des segments.

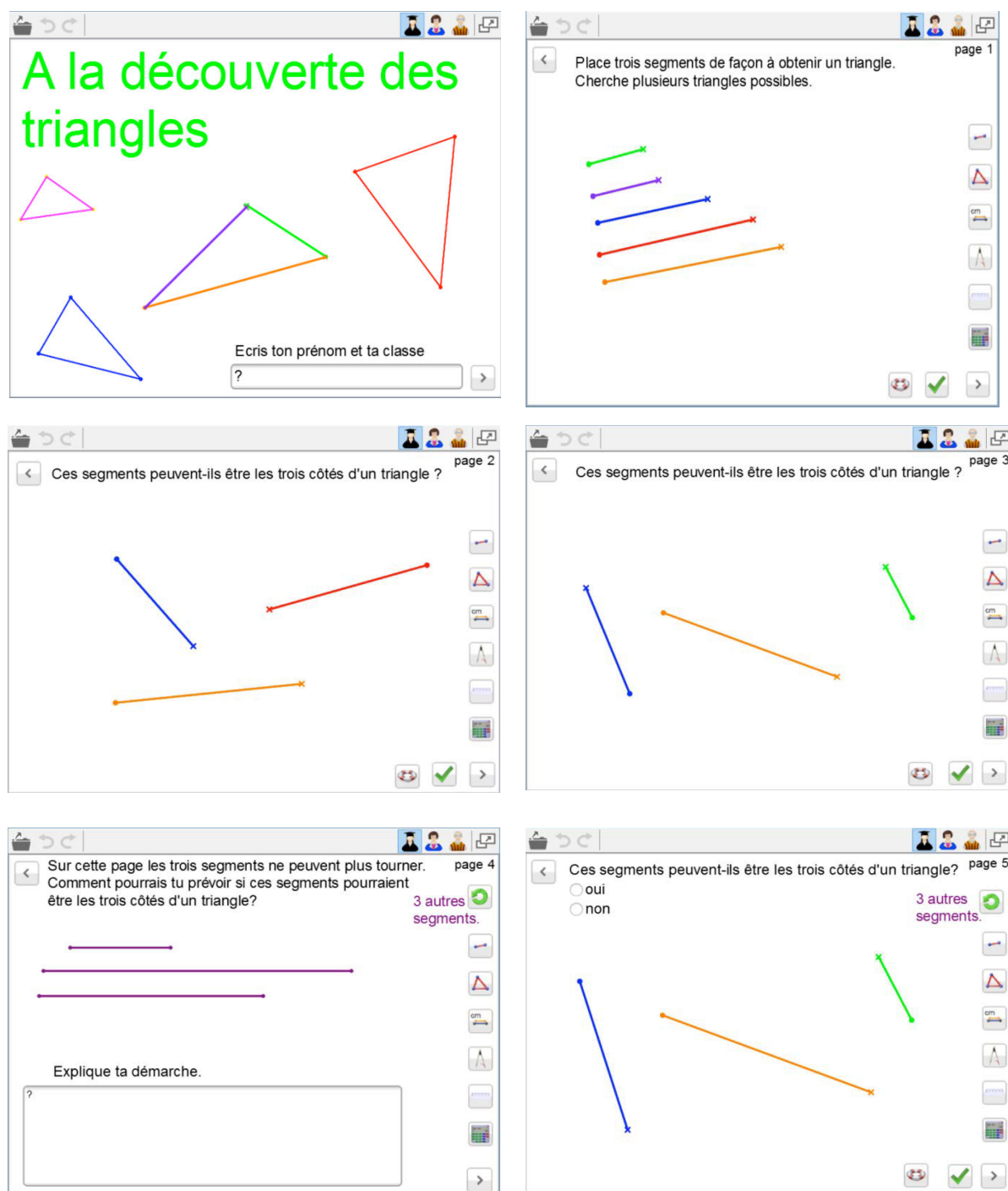


Figure 5.4 : Illustration des différentes pages du premier cahier informatisé à la découverte des triangles

### Les longueurs des segments présents sur chaque page

Un de nos objectifs est de faire prendre conscience qu'avec trois longueurs on ne peut pas toujours obtenir un triangle. Ainsi, dans ce premier cahier informatisé nous choisissons de proposer des triplets de longueurs qui vérifient l'inégalité triangulaire et

d'autres qui ne la vérifient pas. Page 1 un triplet de longueurs permet d'aboutir à un triangle plat. En revanche les longueurs sont choisies de manière à ce que tous les triangles perceptibles à l'écran de l'ordinateur soient théoriquement constructibles. En effet, les cas limites dans lesquels il serait possible de former perceptivement un triangle à l'écran alors que les longueurs ne vérifient pas l'inégalité triangulaire sont exclus.

### *Déplacement des segments présents sur chaque page*

Les segments proposés sur les pages 1, 2, 3 et 5 sont asymétriques à l'écran dans leur représentation et au cours de leur mouvement. Deux types de déplacements sont possibles pour un segment : déplacer le segment entier par translation en attrapant le segment ou son extrémité ronde ; faire pivoter le segment autour de l'extrémité ronde qui reste fixe en attrapant le segment par son extrémité cruciforme (Figure 5.5). La distinction graphique des extrémités, ronde ou cruciforme, permet à l'utilisateur d'anticiper le mouvement avant de bouger le segment.

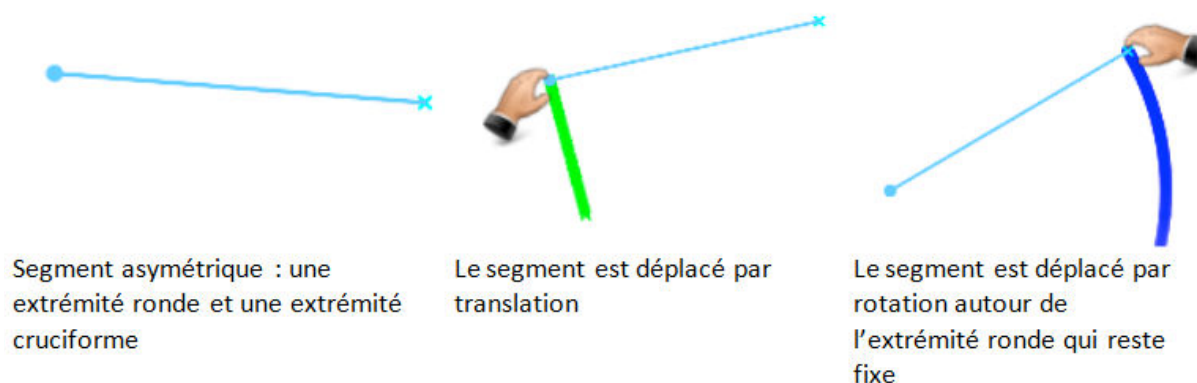


Figure 5.5 : Les deux déplacements possibles des segments

Un segment en mathématique est une partie de droite connexe et limitée par deux points appelés extrémités. Les extrémités d'un segment ne sont théoriquement pas asymétriques. Dans ce cahier, l'asymétrie de déplacement des segments provient d'une contrainte du logiciel Cabri Elem<sup>6</sup> utilisé dans le cadre de ce travail. En effet dans le logiciel Cabri Elem, pour créer un segment de longueur fixe celui-ci doit être le rayon d'un cercle. Ainsi l'extrémité correspondant au centre du cercle peut être déplacée librement ce qui translate le segment, et l'autre extrémité ne peut être déplacée que par rotation sur le cercle. Cette asymétrie de déplacement des segments participe à la dynamique de la situation et à la mise en place de stratégies porteuses de savoirs et de sens comme nous le verrons dans l'analyse a priori de la situation Chapitre 7. Afin que le sujet puisse anticiper le déplacement souhaité du segment nous avons différencié graphiquement les deux extrémités. L'extrémité ronde du segment permet de le déplacer par translation

<sup>6</sup> Le logiciel Cabri Elem est développé par la société Cabrilog et utilisé dans notre travail dans le cadre d'une collaboration scientifique entre l'entreprise Cabrilog et l'Institut Français de l'Éducation. Nous décrivons les avantages de cette technologie dans le paragraphe 5.4.

alors que l'extrémité cruciforme permet de le déplacer par rotation autour de l'extrémité ronde qui reste fixe.

Page 4 du cahier nous faisons un autre choix de valeur de la variable didactique déplacement ; seul le déplacement des segments par translation est possible. Il n'est plus possible de faire pivoter les segments, il n'est donc plus possible de former le triangle à partir des segments proposés. D'autres stratégies sont à mettre en œuvre comme nous le montrerons dans l'analyse a priori au Chapitre 7.

#### *Des outils de géométrie dynamiques présents sur chaque page*

Sur toutes les pages d'activités de ce cahier des outils de géométrie dynamique sont disponibles. Dans ce cahier sont présents les outils segment, triangle, mesure, compas-gd, règle graduée-gd et calculatrice. Dans la conception des cahiers informatisés nous avons fait le choix de proposer sur chaque page une boîte à outils de géométrie dynamique disponible. Ils sont présents sur chaque page du cahier comme les outils matériels, le crayon, la règle, l'équerre et le compas sont disponibles dans les activités de géométrie en papier-crayon. L'usage de certains outils de géométrie dynamique sera nécessaire à la résolution des problèmes proposés dans le second cahier que nous présentons plus loin.

#### *Les différentes rétroactions*

Mackrell et ses collègues (2013) différencient trois types de rétroactions : les rétroactions de manipulation directe, les rétroactions d'évaluation et les rétroactions liées à la stratégie. Le cahier informatisé « A la découverte des triangles » comprend des rétroactions de manipulation directe et des rétroactions d'évaluation.

#### *Les rétroactions de manipulation directe des objets à l'écran*

Dans ce premier cahier informatisé les objets à manipuler sont des segments numériques. Les rétroactions liées à la manipulation directe des segments sont l'affichage continu du segment dans les positions successives du segment au cours du déplacement, la trajectoire de l'extrémité du segment dans le déplacement par rotation de celui-ci autour d'une extrémité qui reste fixe. Ces rétroactions permettent à l'utilisateur d'avoir un contrôle sur le segment côté du triangle déjà présent sur la page mais pas dans la bonne position.

#### *Les rétroactions d'évaluation*

Sur les pages 1, 2, 3 et 5 un bouton permet de demander l'évaluation de la solution par le système. En effet nous avons fait le choix que les évaluations par le système soient demandées par l'utilisateur en activant le bouton d'évaluation. Aucune évaluation n'est générée automatiquement suite à une action ou une production. Le système ne prend en compte que les productions obtenues avec les segments existants sur la page. Le système ne prend pas en compte les productions réalisées en utilisant les outils de géométrie dynamique à disposition. Plusieurs modalités d'évaluation par le système existent dans ce premier cahier informatisé.



❖ Affichage d'images

Page 1, le système valide chaque triangle formé par l'affichage d'une image du triangle dans une taille réduite proportionnellement (Figure 5.6). Un triangle est considéré comme formé si les longueurs des côtés vérifient l'inégalité triangulaire, et s'il est formé à l'écran avec les extrémités des segments comme sommets. Les extrémités des segments forment un sommet au sens du système si leur distance est inférieure à un millimètre. Page 5, des images de smileys s'affichent à chaque bonne réponse jusqu'à quatre smileys (Figure 5.7).

❖ Affichage de questions oui/non.

Page 2 et 3, l'activation du bouton évaluation affiche une question « As-tu obtenu un triangle avec ces 3 segments ? » appelant une réponse en oui/non (Figure 5.8). L'utilisateur peut alors cocher la réponse correspondante à sa production. Oui, s'il a réussi à former un triangle avec les segments (le cas page 2) et non, lorsqu'il n'a pas réussi à former un triangle avec les segments proposés (le cas page 3). Le système analyse si la réponse et la production sont cohérentes et affiche une rétroaction texte.

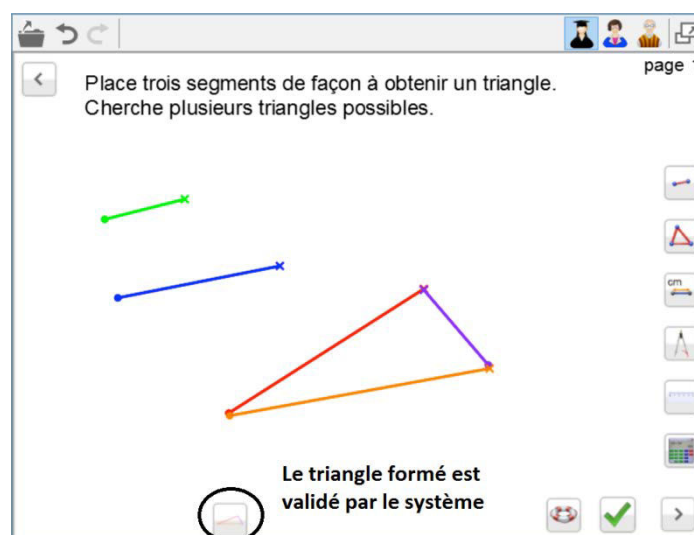


Figure 5.6 : Le triangle formé est validé par le système

❖ Affichage de textes

Par exemple page 5 (Figure 5.7), en plus du smiley le système affiche « Bonne réponse ». Sur les pages 2 et 3 une réponse au questionnaire oui/non cohérente à la production est aussi remarquée par « Bonne réponse ». Des phrases apparaissent aussi pour indiquer que la production, la réponse n'est pas correcte. Par exemple « Poursuis ta recherche pour obtenir un triangle dont les sommets sont les extrémités des segments. » ou « Tu ne peux pas fabriquer de triangle dont les sommets sont les extrémités des segments » (Figure 5.8).

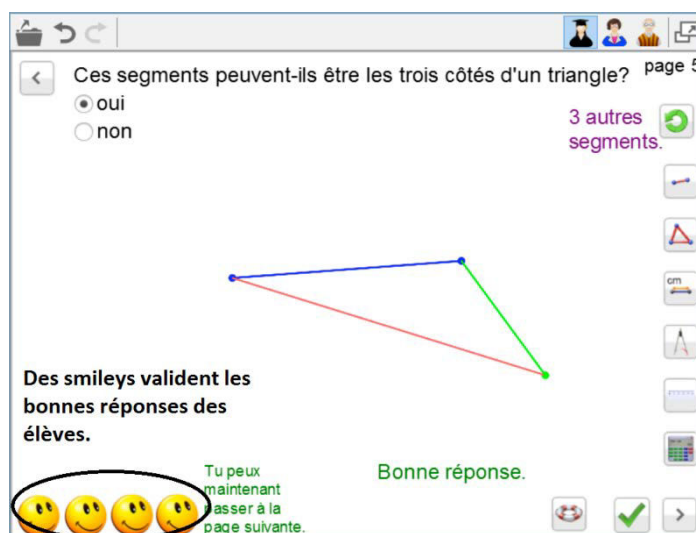


Figure 5.7 : L'affichage de smileys valide les bonnes réponses successives des élèves

#### ❖ Lancement d'animations

Page 3, les longueurs des segments proposés ne vérifient pas l'inégalité triangulaire. Il n'est donc pas possible de former un triangle. L'activation du bouton évaluation lance et affiche une animation. Les deux plus petits segments tournent autour des extrémités du plus grand. Les extrémités libres qui tournent laissent apparaître une trace pour visualiser qu'on ne peut pas former le troisième sommet du triangle (Figure 5.8).

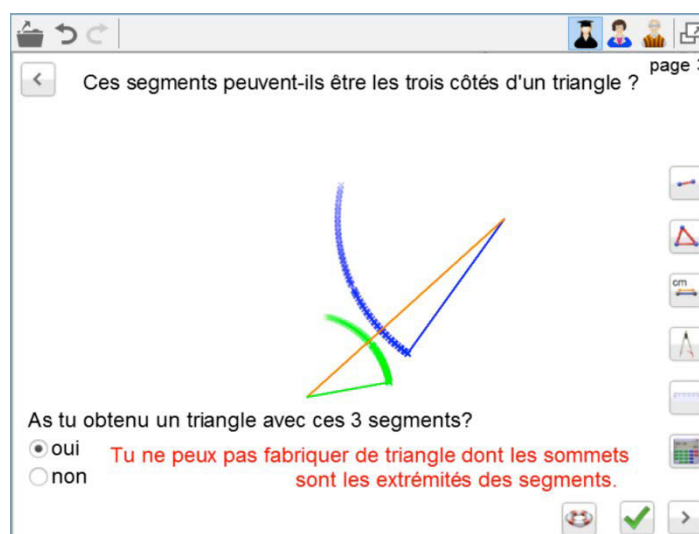


Figure 5.8 : Illustration des rétroactions de validation. Un questionnaire oui/non. Une phrase. Une animation

#### *Apport de ce premier cahier informatisé « A la découverte des triangles »*

Ce cahier est élaboré pour provoquer la genèse instrumentale d'un instrument déplacement par rotation pour pivoter un segment autour d'une de ses extrémités qui reste fixe. En effet les différentes tâches proposées dans ce cahier informatisé permettent la distinction du double déplacement, par translation ou par rotation, des segments et la mise en valeur du déplacement par rotation indispensable pour former un

triangle dans l'environnement numérique. Ce déplacement par rotation permet aussi de voir que trois segments ne permettent pas d'obtenir un triangle.

## Une première activité papier-crayon, un premier duo

### *Description de la première activité papier-crayon*

Le premier cahier informatisé « A la découverte des triangles » a été conçu pour amener une vision 1D du triangle et pour amener le compas dans la construction du triangle. Il s'agit maintenant de poursuivre le travail dans l'environnement papier-crayon. La première activité papier-crayon consiste à tracer des triangles dont les côtés sont donnés sous forme de segments tracés sur la feuille. Les segments proposés sont soit disposés en ligne brisée soit ils sont parallèles les uns aux autres. Plusieurs configurations de trois segments sont proposées (Figure 5.9). Dans un souci de continuité avec le premier cahier informatisé, nous choisissons de formuler la consigne en termes de segments. Dans chaque cas, il est demandé : *Peut-on obtenir un triangle avec les segments proposés ? Si oui, le tracer.*

Dans le prolongement du premier cahier informatisé, dans cette première activité papier-crayon nous choisissons de proposer des triplets de longueurs qui vérifient l'inégalité triangulaire et d'autres qui ne la vérifient pas.

Pour réaliser ces tâches, une boîte à outils de géométrie contenant, le crayon, la règle graduée, l'équerre et le compas, est disponible.

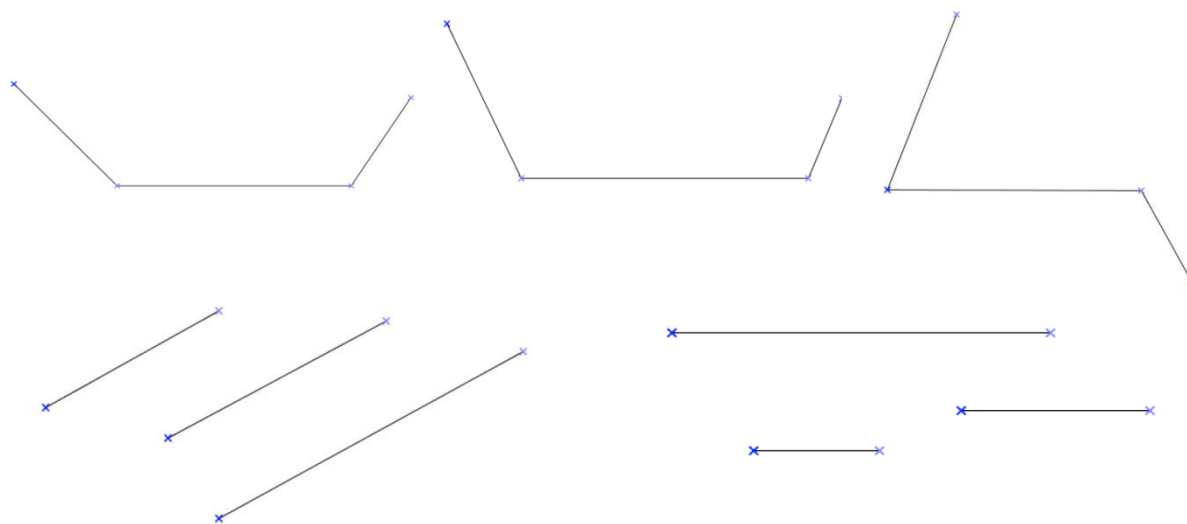


Figure 5.9 : Les cinq configurations de la première activité papier-crayon

### *La mobilisation du compas matériel coordonnée au déplacement par rotation*

La première activité papier-crayon est prévue de manière à faire mobiliser le compas matériel. **La mobilisation du compas matériel est coordonnée au déplacement par rotation autour d'une extrémité d'un segment numérique dans le premier cahier informatisé.** D'une part, le segment numérique asymétrique dans sa représentation à l'écran et dans ses déplacements rappelle le compas matériel : une pointe qui reste fixe

et une mine qui tourne. D'autre part l'instrumentation du déplacement par rotation pour pivoter un segment numérique produit des schèmes d'utilisation qui peuvent s'étendre par assimilation et accommodation à des schèmes d'utilisation du compas matériel. On peut décrire un schème d'utilisation pour pivoter un segment numérique : distinguer les deux extrémités du segment puis attraper l'extrémité cruciforme et déplacer par rotation le point extrémité. On peut décrire un schème d'utilisation pour pivoter un segment à l'aide du compas matériel : distinguer les deux branches du compas puis piquer la pointe sur l'extrémité du segment qui reste fixe, écarter les branches et poser la mine sur l'extrémité à pivoter, enfin pivoter le compas en maintenant l'écartement fixe et produire une trace visible. On identifie des assimilations et des accommodations entre les schèmes d'utilisation d'un instrument à l'autre. Dans chaque schème d'utilisation pour pivoter un segment, dans l'environnement numérique ou dans l'environnement papier-crayon, il faut distinguer : les extrémités du segment ; les branches du compas. Dans chaque schème il faut pivoter : le segment ; le compas. Lors de l'utilisation du compas matériel des accommodations sont nécessaires : il est essentiel de maintenir l'écartement du compas matériel fixe ; le compas produit une trace visible, trace de l'extrémité du segment qui pivote ; le segment initial ne pivotant pas il faut tracer le segment résultat du pivotement de même longueur que le segment initial.

#### *Continuités et discontinuité dans l'articulation des deux artefacts du duo*

Une des caractéristiques d'un duo, mobilisé dans une situation, est que l'articulation des artefacts se fasse dans une certaine continuité. C'est pour cette raison que nous choisissons, dans cette première activité papier-crayon, de proposer des segments tracés et non des longueurs données sous forme de nombres. Cette articulation, pour que l'apprentissage ait lieu, doit aussi présenter des discontinuités. L'activité papier-crayon est proposée après le cahier informatisé car elle est plus contrainte. Dans l'environnement papier-crayon les manipulations directes et continues des segments ne sont plus possibles. Ainsi ce sont les outils matériels de géométrie qui permettent de déplacer les segments pour obtenir un triangle. Dans l'environnement numérique c'est le même segment qui se déplace mais dans l'environnement papier-crayon les outils de géométrie permettent de tracer les segments résultats du pivotement de même longueur que les segments initiaux. La règle graduée permet de déplacer un segment par translation uniquement ou par translation et rotation simultanées. Le compas permet de déplacer un segment par rotation uniquement ou par translation et rotation simultanées ou par translation et rotation dissociées. De plus le compas produit une trace visible : un cercle ou un arc de cercle.

#### **Un second cahier informatisé « Construire des triangles »**

Le second cahier informatisé « Construire des triangles » est constitué de six pages d'activités numérotées de 1 à 6 (Figure 5.10) ainsi que d'une page d'accueil et d'une page d'aide à l'utilisation de l'outil cercle de la géométrie dynamique. La description détaillée des différentes pages du cahier est visible dans l'Annexe 1. Dans les six pages d'activités

de ce cahier informatisé, l'élève est amené à traiter deux tâches. Sur les quatre premières pages il s'agit de savoir si trois segments disposés en ligne brisée pourraient être les trois côtés d'un triangle. Les deux dernières pages du cahier proposent une nouvelle tâche. Il s'agit de construire le troisième sommet d'un triangle.

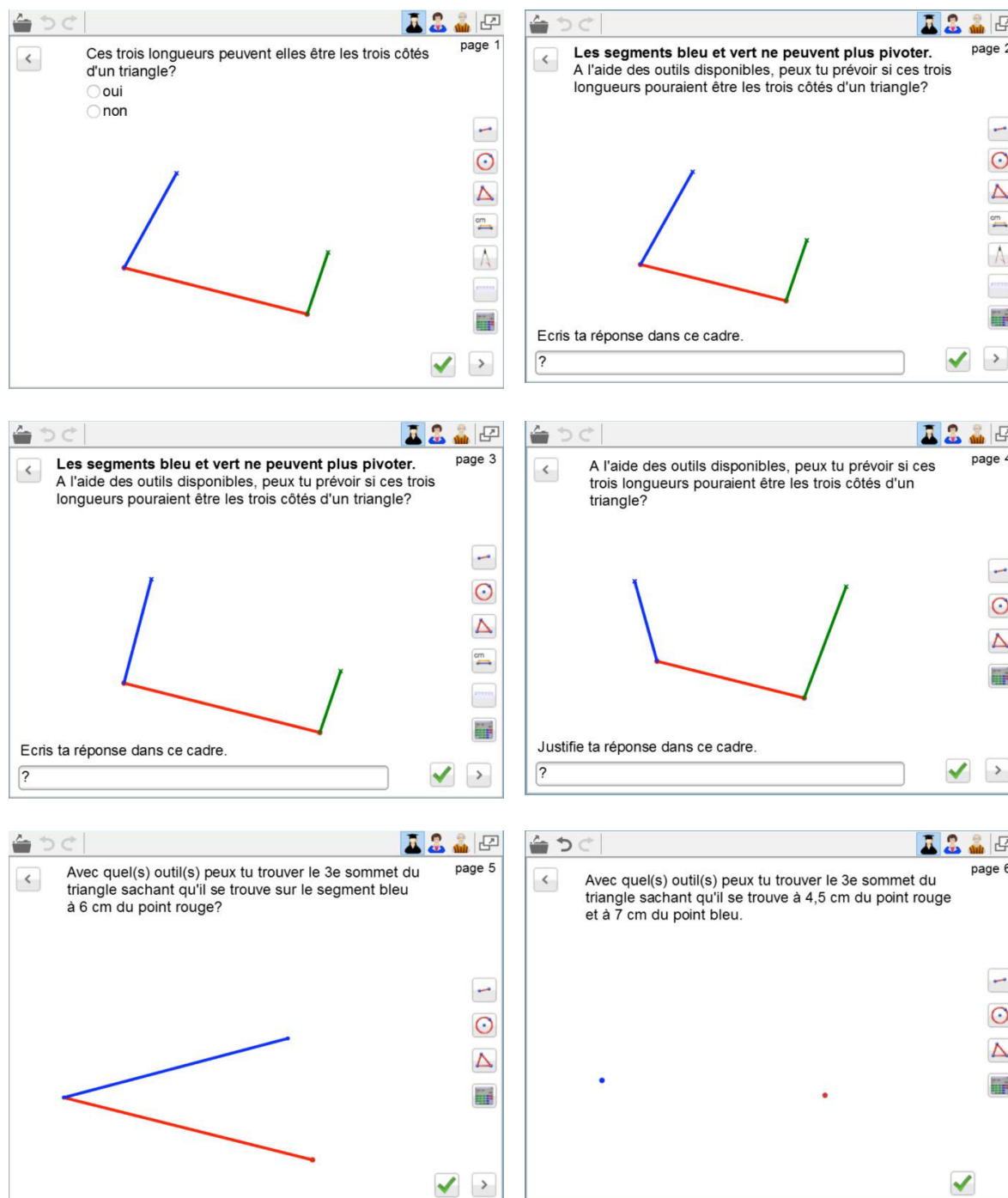


Figure 5.10 : Illustration des six pages d'activités du second cahier informatisé « Construire des triangles »

### Les longueurs des segments présents sur chaque page

Sur les quatre premières pages de ce second cahier informatisé, les triplets de longueurs des segments proposés vérifient ou non l'inégalité triangulaire. Pages 2 et 4 le triangle existe et page 1 et 3 les trois longueurs proposées ne peuvent pas être les trois longueurs

des côtés d'un triangle. Comme dans le premier cahier, les longueurs sont choisies de manière à ce que tous les triangles perceptibles à l'écran de l'ordinateur soient théoriquement constructibles.

#### *Déplacement des segments présents sur chaque page*

Dans ce second cahier informatisé les segments peuvent être déplacés par rotation autour d'une extrémité ou ils ne peuvent pas être déplacés. Les segments extrêmes de la ligne brisée peuvent être déplacés par rotation autour d'une extrémité sur la page 1 du cahier. Des manipulations directes des segments extrêmes de la ligne brisée sont possibles sur les pages 2 à 4 lorsqu'une évaluation de la solution est demandée en activant le bouton évaluation. En effet l'activation du bouton évaluation déverrouille le déplacement des segments extrêmes de la ligne brisée.

#### *Les outils de géométrie dynamique disponibles sur chaque page*

Comme dans le premier cahier informatisé une boîte à outils est disponible sur chaque page. Dans ce second cahier informatisé, la boîte à outils disponibles est modifiée au fur et à mesure des pages. Sur les deux premières pages d'activité les outils à disposition sont tous les outils disponibles sur chaque page du premier cahier informatisé auxquels nous avons rajouté l'outil cercle. Ainsi page 1 et 2, la boîte à outils comprend les outils segment, cercle, triangle, mesure, compas-gd, règle gradué-gd et calculatrice. Au fur et à mesure de l'avancement dans le cahier des outils sont supprimés. Page 3, l'outil compas-gd est supprimé et page 4 les outils mesure et règle graduée-gd sont supprimés aussi. Ainsi à partir de la page 4, les outils à disposition sur chaque page sont les outils segment, cercle, triangle, et calculatrice. La boîte à outils disponible sur chaque page contient toujours des outils nécessaires à la résolution de la tâche et des outils inutiles. C'est à l'utilisateur de déterminer les outils qui permettent de résoudre la tâche.

#### *Les différentes rétroactions*

##### *Les rétroactions de manipulation directe*

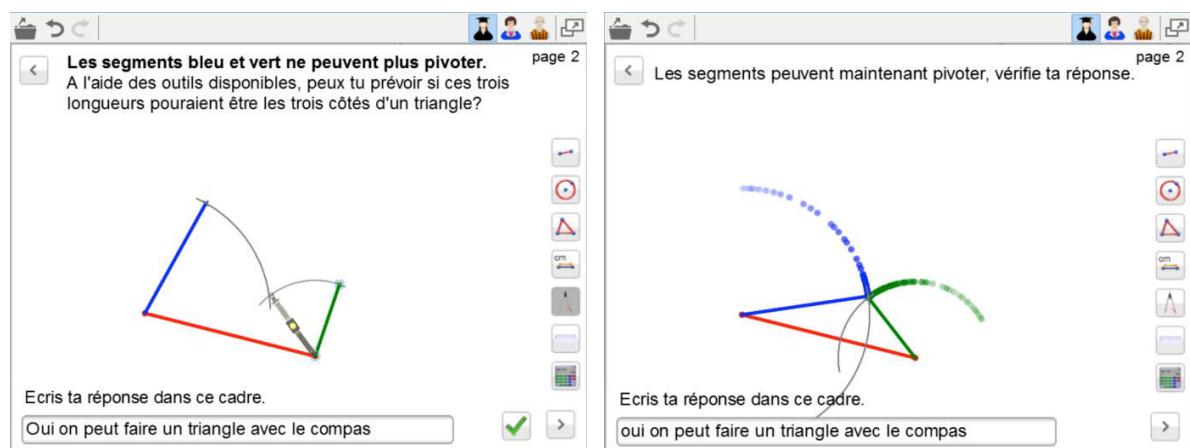
Dans ce second cahier deux types d'objets différents sont manipulés. Les segments proposés sur les pages 1 à 4 et les outils de géométrie dynamique.

##### *La manipulation directe des segments*

Les rétroactions liées à la manipulation directe des segments sont d'une part l'affichage continu du segment dans ses positions successives au cours du déplacement. D'autre part, dans ce second cahier informatisé, la trace de l'extrémité de la ligne brisée qui pivote s'affiche lors du déplacement par rotation autour d'une extrémité (Figure 5.11). Ces rétroactions permettent à l'utilisateur d'avoir un contrôle sur les segments de la ligne brisée qui peut ou ne peut pas être fermée pour former un triangle.

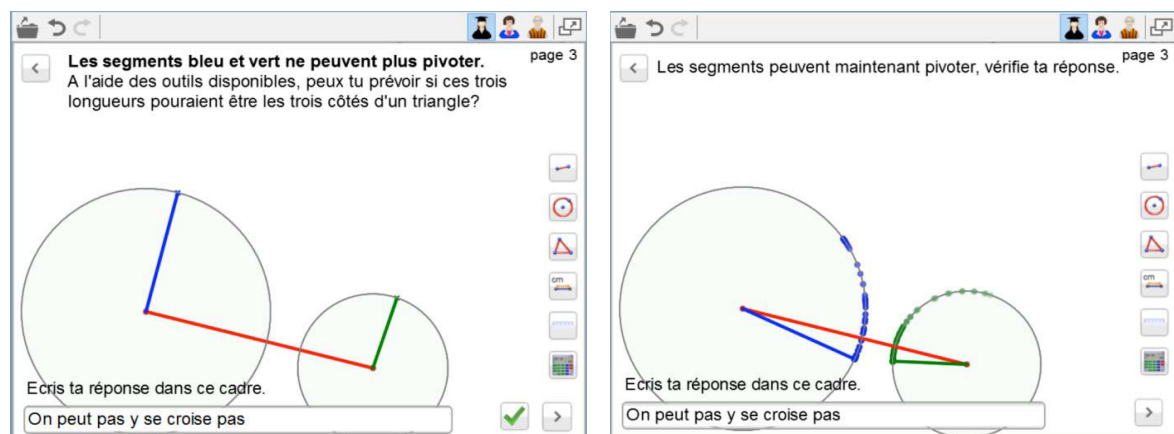
### La manipulation directe des outils de géométrie dynamique

L'utilisation d'un outil de géométrie dynamique renvoie aussi des rétroactions de manipulation directe qui permettent de contrôler la procédure de tracé. L'utilisation des différents outils est à découvrir par l'utilisateur. Pour utiliser un outil, il faut cliquer sur le bouton correspondant à l'outil puis cliquer sur la page pour démarrer le tracé et enfin cliquer pour finaliser le tracé et fixer son image à l'écran. L'activation de l'outil cercle affiche un bouton aide avec une icône de bouée qui permet de se rendre sur une page sur laquelle des vidéos explicatives peuvent être visionnées. Ces vidéos illustrent en particulier l'utilisation de l'outil pour tracer un cercle de rayon donné.



Le compas pour résoudre le problème

Vérification de la solution en pivotant les segments



L'outil cercle pour résoudre le problème

Vérification de sa solution en pivotant les segments

Figure 5.11 : Illustration de l'affichage de la trace de l'extrémité d'un segment lorsqu'il est pivoté

### L'outil segment

L'outil segment permet de tracer un segment. Pour tracer un segment il faut cliquer sur le bouton segment alors un point clignote au-dessous du pointeur et « segment par un nouveau point » est affiché. Un clic marque la première extrémité du segment alors est affiché « et un nouveau point ». Le segment peut être écarté à la taille souhaitée, un

dernier clic détermine la deuxième extrémité et fixe l'image du segment à l'écran. La longueur de ce segment peut être modifiée en attrapant une de ses extrémités. Ce segment peut être déplacé sur la page : si on le déplace en cliquant sur le segment il conserve sa longueur, si on déplace une de ses extrémités la longueur du segment est modifiée.

#### L'outil cercle

L'outil cercle permet de tracer des cercles. Il est possible de tracer un cercle de centre et de rayon quelconque sur la page. Il est aussi possible de tracer un cercle de centre donné et passant par un point. Pour cela il faut cliquer sur le bouton cercle alors un point clignote sous le pointeur et « cercle centré en un nouveau point est affiché ». Un clic permet de déterminer le centre. Le déplacement du pointeur affiche un cercle et un point sur celui-ci. « et passant par un nouveau point » est aussi affiché à l'écran. Un dernier clic permet de fixer l'image du cercle à l'écran. Pour tracer un cercle de rayon donné, par un segment ou un nombre, il faut cliquer sur bouton cercle puis approcher le pointeur du segment ou du nombre. Les phrases « cercle de rayon la longueur de ce segment » ou « cercle de rayon cette valeur » sont affichées à l'écran. Un clic permet d'afficher le cercle de rayon souhaité. Le centre du cercle est aussi affiché. Il est alors possible de déplacer le cercle pour poser son centre à l'endroit souhaité. La phrase « centré en un nouveau point » s'affiche dès que le cercle est déplacé. Un clic permet de fixer le centre.

#### L'outil triangle

L'outil triangle permet de tracer un triangle. Pour cela il faut cliquer sur le bouton triangle alors sous le pointeur un point clignote et « triangle passant par un nouveau point » est affiché à l'écran. Un clic détermine le premier sommet. Le déplacement du pointeur affiche un segment côté et « un nouveau point ». Un clic fixe la longueur du premier côté. Le déplacement du pointeur affiche l'image du triangle et « et un nouveau point ». Un dernier clic fixe l'image du triangle à l'écran. La longueur d'un côté peut être modifiée en attrapant un des sommets. Ce triangle résiste au déplacement et reste identique si on le déplace en cliquant à l'intérieur du triangle ou sur un de ses côtés.

#### L'outil mesure

L'outil mesure permet de déterminer la longueur d'un segment ou le périmètre d'une figure. Il suffit de cliquer sur le bouton mesure puis d'approcher le pointeur du segment à mesurer. Lorsque ce segment est en surbrillance, que la phrase « longueur de ce segment » et la valeur numérique de la longueur sont affichées à l'écran, un clic permet de fixer à l'écran la valeur numérique correspondante à la longueur. Les longueurs sont données en centimètres.

#### L'outil compas-gd

L'outil compas-gd permet de tracer des cercles ou des arcs de cercle. Pour cela, cliquer sur le bouton compas alors l'image du compas vue du dessus est affichée ainsi que la phrase « centré ici ». Un clic fixe la pointe du compas-gd. Le déplacement du pointeur



écarte les branches. La phrase « avec cette taille » est affichée à l'écran. Cliquer pour fixer la mine puis pivoter l'extrémité mine du compas-gd pour produire une trace visible et enfin cliquer pour supprimer l'image du compas à l'écran. Il est aussi possible de tracer des cercles ou des arcs de cercle de rayon donné. Dans ce cas, après avoir cliqué sur le bouton compas-gd, approcher le compas-gd du segment représentant le rayon ou sur un nombre représentant la longueur du rayon. « Avec cette taille » est affiché à l'écran. Un clic ouvre le compas-gd au bon écartement. Le compas-gd peut alors être déplacé. La phrase « centré ici » est affichée. Il reste plus qu'à cliquer pour poser la pointe puis cliquer pour poser la mine et faire pivoter l'extrémité mine du compas-gd pour produire une trace visible. Enfin un clic permet de supprimer l'image du compas-gd de l'écran. Les cercles tracés au compas-gd résistent au déplacement.

L'outil règle graduée-gd

L'outil règle graduée-gd permet de tracer un segment de longueur donnée. Il suffit de cliquer sur le bouton règle pour afficher l'image de la règle graduée-gd à l'écran et la phrase « segment par un nouveau point ». Un premier clic fixe la règle graduée-gd et la première extrémité du segment à tracer. La phrase « et un nouveau point » est affichée. Le pointeur peut alors être déplacé le long de la règle graduée-gd jusqu'à la graduation souhaitée. Un dernier clic définit la seconde extrémité du segment et efface l'image de la règle graduée-gd à l'écran. Comme le segment tracé avec l'outil segment, sa longueur peut être modifiée en attrapant une des extrémités et ce segment peut être déplacé en conservant sa longueur si on attrape le segment.

L'outil calculatrice

Activer le bouton « calculatrice » permet d'afficher une calculatrice à l'écran. Cette calculatrice peut être utilisée pour effectuer des calculs. Pour fermer la calculatrice il suffit de cliquer sur la croix en haut à droite de la calculatrice.

Effacer un tracé

Toute construction réalisée avec les outils de géométrie dynamique peut être effacée en cliquant sur chaque objet de la construction et sur le bouton « supprimer » du clavier ou en sélectionnant toute la construction et en cliquant sur le bouton « supprimer » du clavier.

*Les rétroactions d'évaluation*

Sur toutes les pages de ce second cahier informatisé un bouton permet de demander l'évaluation de la solution par le système. Comme dans le premier cahier informatisé, l'évaluation doit être demandée par l'utilisateur en activant le bouton d'évaluation. Aucune évaluation n'est générée automatiquement suite à une action ou une production. Dans ce cahier l'activation du bouton évaluation permet de vérifier si la solution proposée est correcte.

❖ Affichage de textes

Page 1, les phrases « Bonne réponse » ou « On ne peut pas former un triangle avec ces trois longueurs » s'affiche en fonction de la réponse à la question appelant une réponse oui/non (Figure 5.12).

❖ Déverrouillage du déplacement

Pages 2, 3, 4, l'activation du bouton évaluation déverrouille le déplacement des extrémités de la ligne brisée et affiche la phrase suivante : « les segments peuvent maintenant pivoter, vérifie ta réponse ». Il est alors possible de pivoter les segments extrêmes de la ligne brisée pour vérifier s'il est possible de former le triangle ou si les trois segments ne permettent pas de former un triangle. La trace de l'extrémité du segment qui pivote est active et s'affiche à l'écran lors du déplacement des segments (Figure 5.11).

❖ Lancement d'animations

Page 1, l'activation du bouton évaluation déclenche et affiche une animation. Les deux plus petits segments tournent autour des extrémités du plus grand. Les extrémités libres qui tournent laissent apparaître une trace pour visualiser qu'on ne peut pas former le troisième sommet du triangle (Figure 5.12).

❖ Affichage de la solution

Pages 5 et 6 l'activation du bouton évaluation affiche le point troisième sommet du triangle. Ce point clignote.

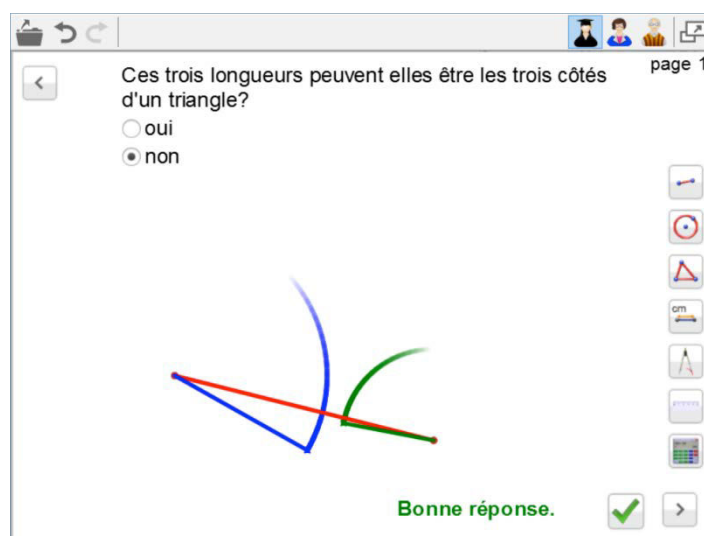


Figure 5.12 : Illustration des rétroactions d'évaluation : une phrase et une animation

*Le cercle comme outil dans la construction du triangle*

Le second cahier informatisé, a pour objectif d'amener les cercles sous-jacents à la construction du triangle. La construction de cercle doit être la stratégie gagnante efficace pour résoudre le problème. Il s'agit au fil des pages de contraindre l'utilisation de l'outil cercle (Figure 5.13). La technologie Cabri Elem nous permet de mettre à la disposition de l'utilisateur certains outils de géométrie dynamique bien choisis. Nous utilisons cette

opportunité pour contraindre l'utilisation de l'outil cercle dans les stratégies. En effet, c'est par un jeu sur les outils disponibles que le cercle devient l'outil de la situation. Dans un premier temps, l'outil cercle est utilisé pour vérifier si une ligne brisée peut-être le contour d'un triangle ou non. Le cercle affiché est alors l'image de la trajectoire de l'extrémité d'un segment qui pivote autour d'une de ses extrémités qui reste fixe. D'outil pour vérifier, il devient ensuite outil pour produire. Dans un second temps, il s'agit d'utiliser l'outil cercle pour déterminer le troisième sommet du triangle (pages 5 et 6). Le nouvel instrument qui est construit ici est l'instrument cercle pour déterminer une distance. Un cercle de rayon donné caractérise une distance entre son centre et tout point du cercle.

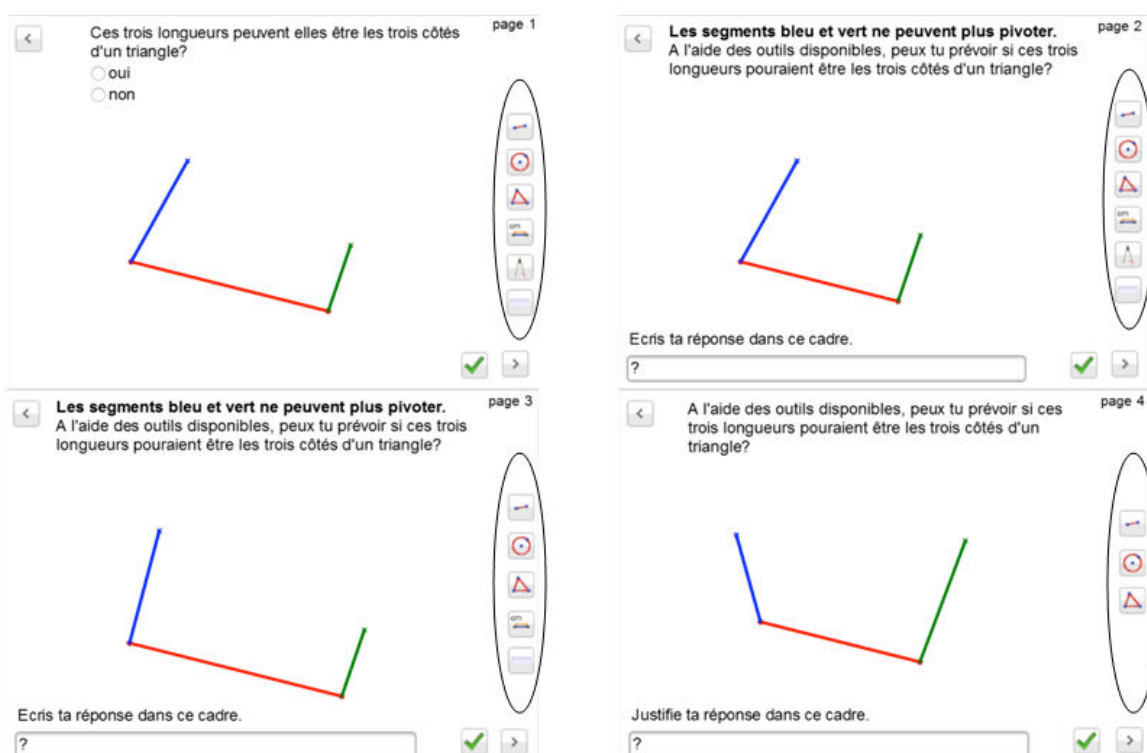


Figure 5.13 : Un jeu sur les outils disponibles pour amener l'outil cercle

Le retour dans l'environnement numérique constitué par le second cahier informatisé permet le passage du compas matériel au compas de la géométrie dynamique et au cercle de la géométrie dynamique. Nous nous interrogeons sur l'existence d'un second duo d'artefacts entre le compas matériel et le cercle de la géométrie dynamique. Est-il possible d'identifier des processus d'assimilation et d'accommodation des schèmes d'utilisation d'un instrument à l'autre ? Le Tableau 5.1 des schèmes d'utilisation de chaque instrument pour pivoter un segment montre des similitudes, à première vue, qui permettent d'anticiper une continuité.

### Une seconde activité papier-crayon

La situation se termine par une deuxième activité papier-crayon mobilisant le compas matériel dans la construction de triangles. Cette deuxième activité papier-crayon consiste

à tracer si cela est possible, des triangles dont les longueurs des côtés sont données sous forme de nombres (Figure 5.14).

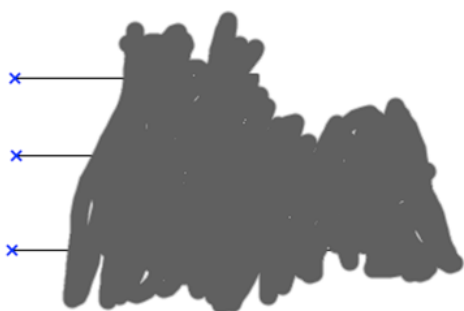
Schème d'utilisation de l'instrument compas matériel pour pivoter un segment	Schème d'utilisation de l'instrument compas de géométrie dynamique pour pivoter un segment	Schème d'utilisation de l'instrument cercle de géométrie dynamique pour pivoter un segment
<p>Distinguer les deux branches du compas : la pointe, la mine</p> <p>Piquer la pointe sur l'extrémité qui reste fixe</p> <p>Ecarter les branches du compas</p> <p>Poser la mine sur l'extrémité à pivoter</p> <p>Pivoter le compas en maintenant l'écartement fixe et produire une trace visible</p> <p>Tracer un nouveau représentant du segment initial</p>	<p>Activer l'outil compas</p> <p>Cliquer pour piquer la pointe sur l'extrémité qui reste fixe</p> <p>Ecarter les branches du compas</p> <p>Cliquer pour poser la mine sur l'extrémité à pivoter</p> <p>Déplacer la mine pour pivoter le compas et produire une trace visible</p> <p>Tracer un nouveau représentant du segment initial</p>	<p>Activer l'outil cercle</p> <p>Cliquer pour définir le centre du cercle</p> <p>Ecarter le cercle</p> <p>Cliquer pour définir la taille du cercle et fixer son image à l'écran</p> <p>Tracer un nouveau représentant du segment initial</p>

Tableau 5.1 : Comparaison des schèmes d'utilisation pour pivoter un segment avec le compas matériel, le compas de géométrie dynamique ou l'outil cercle

## Activité 2

a) Malheureusement la fiche d'énoncé sur laquelle étaient tracés 3 segments a été tachée.

Les longueurs des segments étaient 3cm, 5cm et 6cm. Peux tu tracer un triangle qui a ces longueurs pour côté ?



b) Trace si c'est possible,

- un triangle dont les côtés mesurent 6cm, 7cm et 8cm ;
- un triangle dont les côtés mesurent 3cm, 4cm et 8cm.

Figure 5.14 : Énoncés de la seconde activité papier-crayon

Cette activité marque la fin de la situation et permet de faire un bilan des apprentissages menés à bien grâce à la mobilisation des artefacts numériques articulés au compas matériel.

## **5.4. Un duo conçu et utilisé par des enseignants**

### **5.4.1. Une technologie numérique adaptée à une entrée progressive dans la géométrie dynamique à l'école primaire**

Le logiciel Cabri Elem utilisé est développé par la société Cabrilog ; son utilisation pour ce travail se fait dans le cadre d'une collaboration scientifique entre l'entreprise Cabrilog et l'Institut Français de l'Education.

Le logiciel Cabri Elem est un environnement de géométrie dynamique qui peut être utilisé pour élaborer des micromondes (Bruillard, 1997) pour l'école primaire. Ce logiciel permet de créer aussi bien des environnements de manipulations d'objets numériques déjà présents à l'écran que des environnements permettant à l'utilisateur d'effectuer des constructions en utilisant des outils de géométrie dynamique.

#### **La technologie Cabri Elem**

Un environnement informatisé créé avec le logiciel Cabri Elem est organisé sous forme d'un cahier de plusieurs pages. Chaque cahier peut être conçu comme un environnement informatisé relatif à un apprentissage donné. Pour l'apprentissage d'une notion une collection de cahiers peut être nécessaire.

La technologie Cabri Elem est un environnement informatisé qui comprend un mode auteur, un mode professeur et un mode élève. Cette technologie nous permet, après avoir pensé l'articulation, usage d'un environnement numérique et usage de l'outil matériel compas, de la réaliser.

#### ***Des objets à manipuler***

Le mode auteur (Figure 5.15) nous permet de créer tous les éléments avec lesquels l'élève va interagir : les objets à manipuler, ainsi que les possibilités d'actions avec ces objets, et les rétroactions de l'environnement. Une barre d'outils met à disposition d'un auteur un grand nombre d'éléments communs des logiciels de géométrie dynamique. Elle comprend les objets géométriques usuels. Cette barre d'outils comprend aussi une règle, une équerre, un compas et un rapporteur ainsi qu'une calculatrice. Ces outils sont alors utilisables à partir de leur image qui s'affiche à l'écran. Il est aussi possible de créer du texte, des zones de réponses ou des QCM. Des images peuvent aussi être insérées. Tout élément créé peut être affiché à l'écran ou caché. Il est donc possible de masquer une partie des éléments d'une construction de manière permanente ou seulement dans un premier temps pour être montrée suite à une action par exemple. De plus tout élément créé peut être libre en déplacement ou verrouillé en déplacement. Ainsi cet

environnement nous permet de créer des segments numériques pouvant être déplacés ou non et des tâches autour de la formation de triangles à partir des trois longueurs des cotés déjà présents à l'écran.

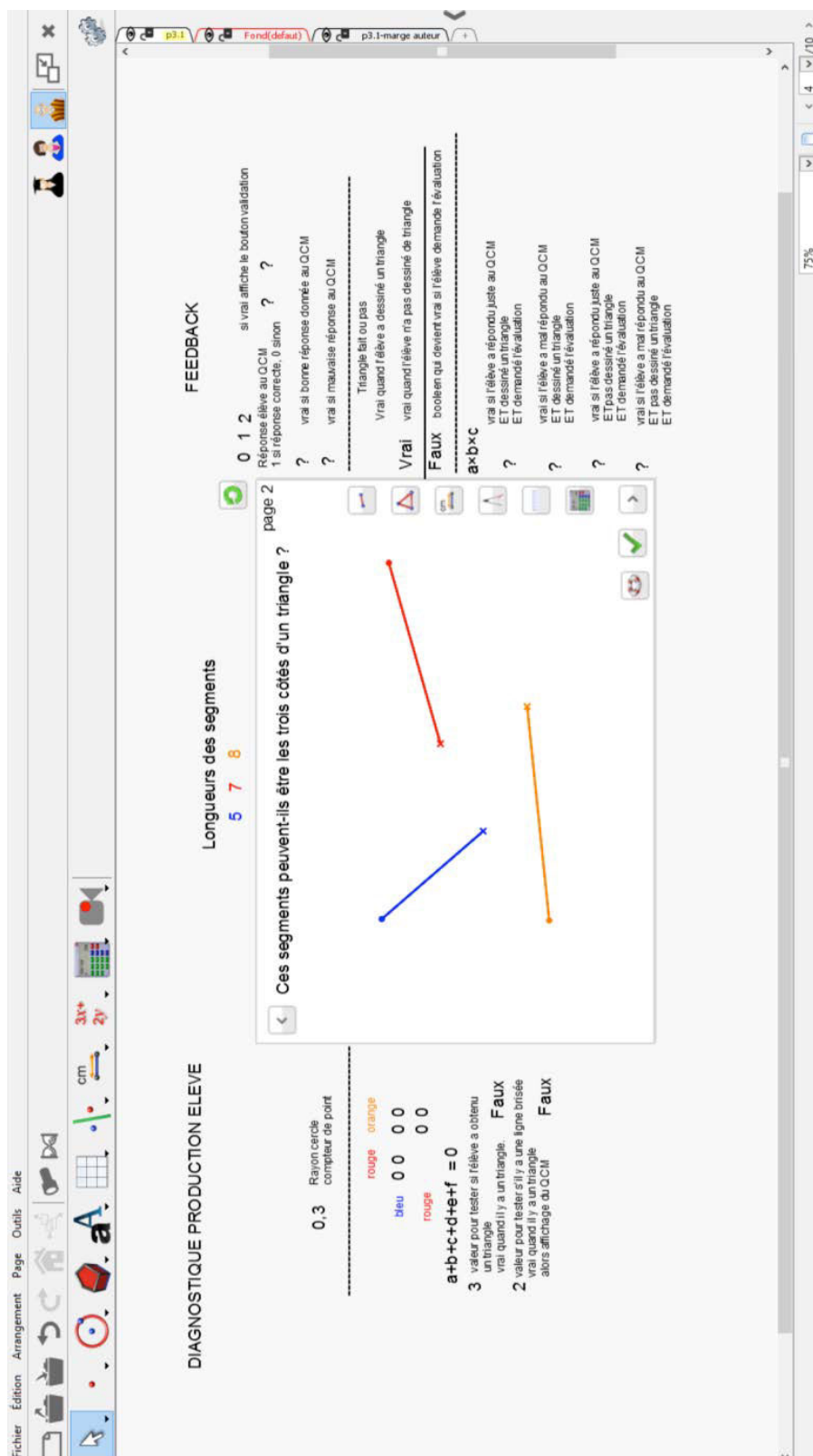


Figure 5.15 : Illustration d'une page d'un cahier Cabri Elem en mode auteur

Le logiciel Cabri Elem permet aussi de créer des rétroactions additionnelles à celles fournies par le déplacement d'une figure. Il est possible d'éditer des expressions et d'évaluer ces expressions. Des variables booléennes peuvent aussi être générées : vrai et faux ainsi qu'égal, différent, inférieur, et, ou, non logique. Des actions peuvent être affectées à ces variables booléennes. En voici quelques exemples : Masquer ou montrer des objets ; Faire pulser des objets ; Démarrer ou stopper des animations ; Incrémenter ou décrémenter des valeurs. Ainsi le logiciel Cabri Elem en mode auteur permet de programmer les actions possibles et les rétroactions des objets à l'écran.

### *Des boutons à activer*

Comme précisé en introduction le logiciel Cabri Elem permet de créer des environnements qui permettent à l'utilisateur de réaliser des constructions. Il est donc possible de rendre certains outils disponibles à l'utilisateur. Un outil est disponible par l'activation d'un bouton qui lui est associé. Cela permet de créer une boîte à outils toujours disponible à l'utilisateur, ou au contraire de limiter les outils disponibles.

Il est aussi possible de créer des boutons auxquels des actions sont attachées. Par exemple, l'action sur un bouton peut déclencher la visualisation d'une vidéo. Une vidéo d'aide à l'utilisation d'un outil ou à la manipulation d'un objet peut être utile à certains utilisateurs. Par exemple montrer l'utilisation de l'outil cercle, pour tracer un cercle de rayon donné, peut aider l'utilisateur dans la mobilisation de cet outil pour résoudre une tâche.

Des boutons peuvent être créés afin de permettre l'évaluation d'une solution. Ces validations ne peuvent porter que sur les éléments créés par l'auteur et présents sur la page à l'ouverture et non sur les éléments générés par l'utilisateur. Il ne s'agit pas uniquement de validations vrai-faux. Il est possible de créer des rétroactions d'évaluation pouvant influencer sur la stratégie de l'utilisateur. Par exemple il est possible de faire afficher des messages incitant l'utilisateur à poursuivre sa recherche. Il est aussi possible que l'action sur un bouton déclenche une animation pour valider ou invalider une solution.

### *Des marges et des calques*

En mode auteur, une page est découpée en deux zones : la zone centrale blanche, qui sera la seule visible par l'élève en mode élève, et des marges (Figure 5.15). À l'aide de calques, il est possible de différencier les marges. Ainsi il est possible de laisser des marges visibles en mode professeur de manière à ce que la situation puisse être adaptée et modifiée par un enseignant.

### **Des adaptations possibles pour l'enseignant**

Un cahier peut être utilisé tel quel par un enseignant ou adapté par lui aux besoins spécifiques des élèves. En mode professeur un enseignant peut s'approprier le cahier en modifiant certains paramètres, comme la valeur de variables didactiques. Il peut aussi supprimer des pages pour ne faire traiter que certaines tâches aux élèves. Les paramètres

et les variables didactiques qui peuvent être modifiés par les enseignants sont choisis par les concepteurs d'un cahier de manière à ce que ces adaptations ne modifient pas complètement la situation.

### Un parcours libre pour l'élève

Chaque cahier informatisé est utilisable par un sujet en mode élève. Dans le cadre de notre travail et de l'élaboration d'une ingénierie didactique collaborative avec des enseignants nous avons fait certains choix. L'entrée dans un cahier, se fait par une page d'accueil qui précise le titre du cahier et qui demande à l'élève d'inscrire son nom sur cette première page. En effet, lors de l'utilisation d'un cahier en classe, cela permet au professeur de revenir sur le travail de ses élèves. Les tâches à réaliser sont présentées dans les pages suivantes numérotées. L'utilisateur navigue dans le cahier et traite les différentes tâches proposées. Le parcours des différentes pages de chaque cahier se réalise en utilisant les flèches de navigation. Dans l'élaboration des cahiers informatisés nous avons fait le choix de ne pas contraindre l'avancement du cahier. Le sujet avance à son rythme, il peut revenir en arrière, recommencer une tâche. Les traces de son travail sont maintenues sur la page même après un changement de page. L'autonomie de l'élève dans l'utilisation des cahiers est favorisée par différents moyens. D'une part il y a progressivité dans les cahiers, la première page d'activité permet de découvrir l'environnement de travail et d'entrer dans la situation. D'autre part la présence de rétroactions au fur et à mesure du déroulement de l'activité soutien l'engagement et la recherche de l'élève. Des évaluations permettent de valider la démarche d'un élève. Certaines fois il est possible de corriger sa réponse et de redemander l'évaluation par le système. Dans d'autres cas la validation fixe l'état de résolution et aucune modification n'est possible. L'évaluation d'une solution doit être demandée par l'élève. Aucune validation n'est engendrée automatiquement suite à une action, une production. En effet il nous semble important que l'élève garde la maîtrise de son travail et décide de demander son évaluation quand celui-ci est terminé. Lorsque l'élève a fini de traiter le cahier il est possible de faire une sauvegarde du travail réalisé en enregistrant le cahier au nom de l'élève.

#### 5.4.2. Évolution du duo et de la situation sur trois ans

Nous avons commencé notre étude en 2012 au sein du projet MaDyP<sup>7</sup> (Mathématiques Dynamiques à l'école Primaire). Dans le collectif d'enseignants et de chercheurs de ce projet, l'objectif initial était de concevoir un environnement numérique qui permette d'introduire et de donner du sens à l'utilisation du compas pour la construction du triangle dont les longueurs des côtés sont connues. Nous nous sommes dès le début interrogé sur la possibilité de tirer profit de manipulations de segments à l'interface de

---

<sup>7</sup> Le projet MaDyp : Mathématiques Dynamiques à l'école Primaire, est une action de l'équipe de recherche EducTice de l'IFE, dont l'objectif est de développer des activités utilisant les TICE qui incluent une approche expérimentale sur la base de manipulations directes de représentations d'objets mathématiques à l'interface de l'ordinateur pour l'enseignement des mathématiques à l'école maternelle et primaire.



l'ordinateur pour passer les obstacles d'apprentissage liés à l'utilisation du compas dans cette construction. Un premier cahier informatisé « A la découverte des triangles » a été élaboré et expérimenté dans deux classes (Voltolini, 2013). Dans ce cahier il s'agissait déjà de former des triangles par manipulation de segments numériques pouvant être déplacés par translation ou par rotation. Cette première étude, nous a permis d'identifier des bénéfices de l'environnement informatique dans la création d'un milieu favorisant les apprentissages. En effet nous avons pu mettre en évidence de façon expérimentale, d'une part que l'environnement numérique oblige à dissocier le déplacement par translation et par rotation, et met en valeur le déplacement du segment par rotation autour d'une extrémité qui reste fixe. D'autre part, le passage par la ligne brisée pour former un triangle dans l'environnement numérique apparaît comme la stratégie gagnante efficace. Ces résultats nous ont conduits à composer un duo incluant le compas matériel pour la conceptualisation du triangle à partir de la tâche de construction d'un triangle de longueurs des côtés données.

La composition du duo s'est déroulée au cours d'un processus itératif sur trois ans. Des expérimentations ont été réalisées trois années consécutives : en janvier 2014, en mars 2015 et en mars 2016. Chaque expérimentation nous a amené à faire des modifications de la situation suite aux réactions des élèves et de leurs enseignantes. Nous décrivons dans les paragraphes ci-dessous les évolutions des différentes phases de la situation sur les trois années jusqu'à arriver à la situation « Triangle et compas » que nous avons exposé précédemment.

### Des objectifs et une articulation qui sont restés inchangés

Dès le départ notre objectif est double. Il s'agit d'une part, d'amener le compas dans la construction du triangle et d'autre part, de faire évoluer les connaissances des élèves sur le triangle et le cercle. La situation a toujours comporté quatre phases, deux cahiers informatisés et deux activités papier-crayon, se succédant de la même façon.

- ❖ Un premier cahier informatisé dont l'idée de départ est d'utiliser un environnement numérique pour proposer des manipulations à l'interface de l'ordinateur. L'objectif géométrique est la mise en œuvre d'une déconstruction dimensionnelle 1D du triangle.
- ❖ Une première activité papier-crayon qui a pour but de faire mobiliser le compas matériel dans la tâche de construction d'un triangle de longueurs des côtés données. L'idée de cette activité est d'adapter, à l'environnement papier-crayon, la stratégie gagnante mise en œuvre dans l'environnement numérique. Il s'agit dans l'environnement papier-crayon de poursuivre la mise en œuvre d'une déconstruction dimensionnelle 1D du triangle et d'amener une vision 1D du triangle.
- ❖ Un second cahier informatisé qui a pour objectif d'amener le cercle comme outil dans la construction du triangle.
- ❖ Une seconde activité papier-crayon qui a pour but de formaliser l'adéquation du compas dans la tâche de construction du triangle.

## Des activités papier-crayon robustes

Les activités papier-crayon sont restées quasi inchangées sur les trois années. La première activité papier-crayon a toujours consisté à proposer les trois longueurs des côtés sous forme de segments tracés afin de rappeler les segments numériques manipulés dans l'environnement numérique. Cette activité a toujours intégré des configurations « ligne brisée » et des configurations dans lesquelles les trois segments sont parallèles entre eux. La dernière année une troisième configuration ligne brisée a été rajoutée (Figure 5.9). Cette ligne brisée dispose les segments extrêmes de la ligne brisée chacun dans un demi plan différent, ces demi plans étant définis par le segment central. Dans les autres lignes brisées les deux segments extrêmes sont situés dans le même demi plan. La configuration spatiale de cette ligne brisée amène une complexité au sens qu'il est plus difficile d'anticiper où va se situer le troisième sommet du triangle. Cette ligne brisée incite à tracer de plus grands arcs de cercle ou les cercles complets ce qui rend possible l'identification des deux lieux corrects du troisième sommet du triangle. La seconde activité papier-crayon quant à elle est restée inchangée sur les trois années.

## Évolution du premier cahier informatisé « A la découverte des triangles »

Le premier cahier informatisé « A la découverte des triangles » a été modifié une fois entre 2014 et 2015. Les modifications concernent la formulation des consignes et les rétroactions de l'environnement numérique. Les tâches proposées aux élèves, elles, restent inchangées sur les trois années.

### Des modifications des consignes

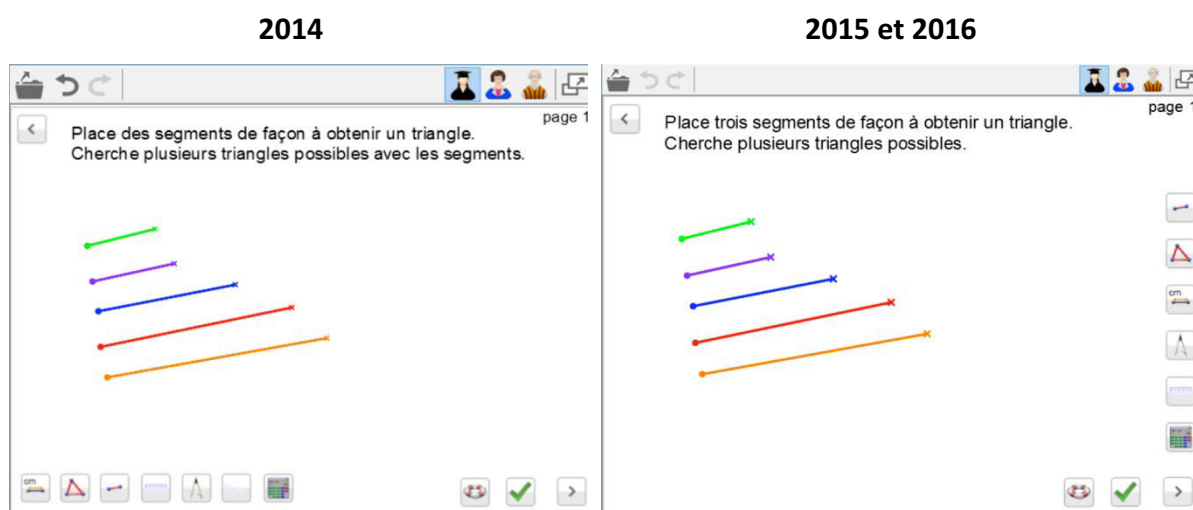


Figure 5.16 : Une consigne modifiée entre 2014 et 2014

La consigne de la page 1 a été modifiée de « Place **des** segments » à « Place **trois** segments » (Figure 5.16). Les expérimentations en janvier 2014 nous permettent d'observer que beaucoup d'élèves interprètent mal le problème. Ils forment un triangle en utilisant les cinq segments proposés sur la page (Figure 5.17).

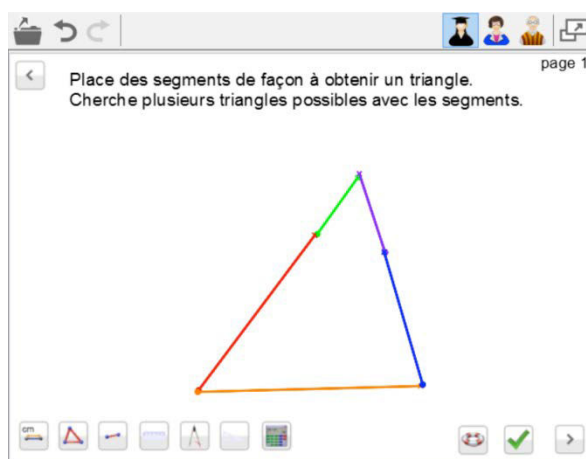
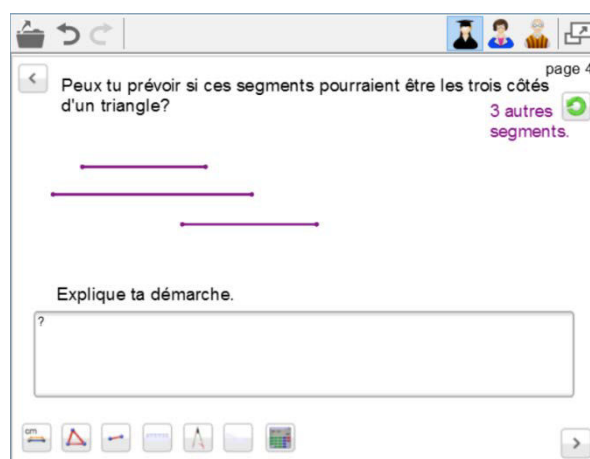


Figure 5.17 : Un triangle est formé en utilisant tous les segments proposés

Page 4 de ce premier cahier informatisé, la consigne a besoin d'être précisée. De « **Peux-tu prévoir** » à « **Comment** pourrais-tu prévoir » (Figure 5.18). De plus nous rajoutons expressément que les segments ne peuvent plus tourner. Les expérimentations en 2014 nous permettent d'observer que le sens du mot prévoir n'est pas compris. Beaucoup d'élèves essaient de pivoter les segments et comme ceux-ci ne pivotent pas ils écrivent qu'il n'est pas possible de former un triangle puisque qu'on ne peut plus déplacer les segments. Rajouter « Comment » dans la question a pour but d'inciter la mise en œuvre de stratégies différentes pour répondre.

## 2014



## 2015 et 2016

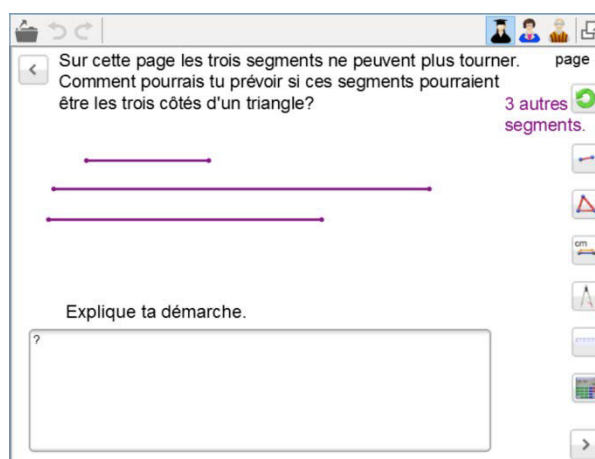


Figure 5.18 : Précision de la consigne pour inciter des stratégies d'anticipation

On pourra aussi noter que la position des outils sur la page a été déplacée entre 2014 et 2015. Ceci dans le but d'harmoniser la place des outils dans les deux cahiers informatisés et d'améliorer l'utilisation et l'intégration des cahiers informatisés dans des situations réelles de classe.

### Des modifications de rétroactions

En 2014, la page d'accueil du cahier propose une animation des segments. Les deux déplacements possibles, par translation ou par rotation, sont montrés à l'écran sur cette page (Figure 5.19). Or nous souhaitons que le double déplacement des segments soit découvert par les élèves et non montré dès la page d'accueil. Ainsi avons-nous modifié cette page en proposant des triangles fixes à l'écran.

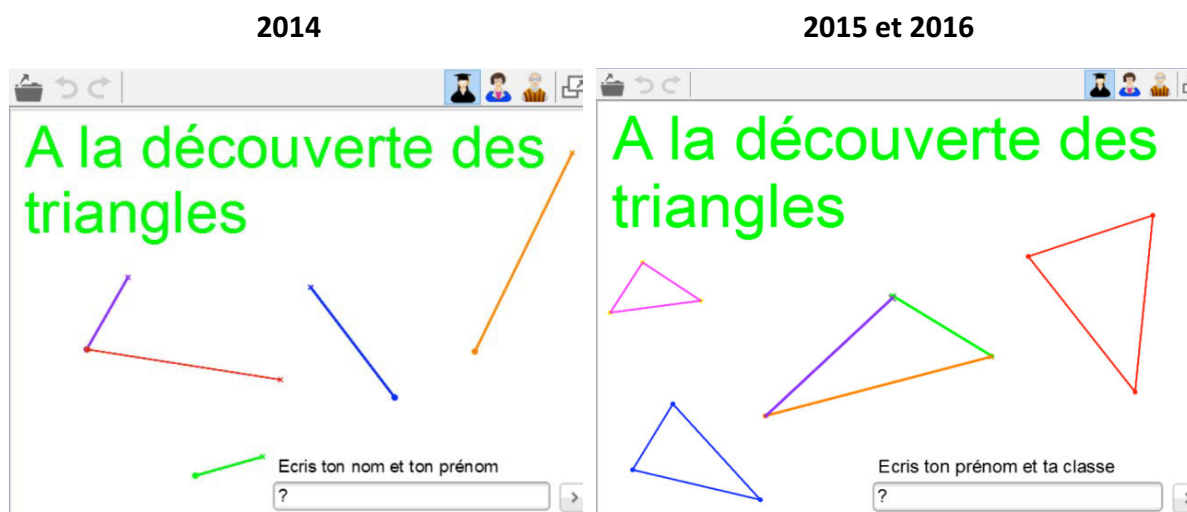


Figure 5.19 : Une page d'accueil sans animation

En 2014, sur les pages 2 et 3 du premier cahier informatisé, la question impliquant une réponse oui/non s'affichait automatiquement dès que les trois segments formaient une ligne brisée (Figure 5.20). Les expérimentations nous ont montré que cela conduit certains élèves à répondre oui ou non dès que la question s'affiche, sans terminer de former le triangle. Nous supprimons donc cet affichage automatique. Dans la nouvelle version la question s'affiche lorsque l'évaluation est demandée par l'élève en activant le bouton « coche verte ».

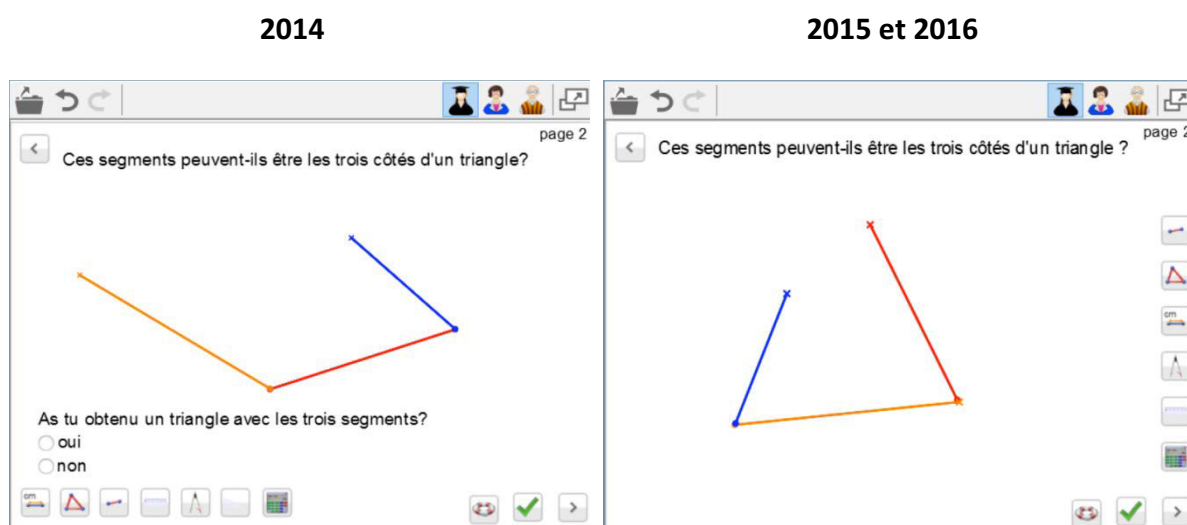


Figure 5.20 : Suppression de l'affichage automatique de la question impliquant une réponse oui/non

## Évolution du second cahier informatisé « Construire des triangles »

### *Affichage de la trace de la trajectoire d'un point lors de son déplacement*

#### *Une fonctionnalité pertinente en tant qu'auteur*

L'idée générale de ce cahier est d'amener le cercle comme outil dans la construction du triangle. Notre intention, est à nouveau, d'utiliser les potentialités d'un environnement numérique, afin de favoriser l'identification de la trajectoire de l'extrémité d'un segment qui pivote à un objet mathématique : le cercle. Le logiciel Cabri Elem permet en effet l'affichage de la trace d'un point au cours de son déplacement. En tant qu'auteur, nous utilisons cet outil trace pour faire afficher la trace de l'extrémité d'un segment pivoté. Dans ce cahier dès qu'un segment est déplacé par rotation autour d'une extrémité qui reste fixe la trace de l'extrémité pivotée est affichée (Figure 5.2).

#### *Un outil perturbateur pour les utilisateurs*

En 2014 et en 2015 l'outil trace fait aussi partie de la boîte à outils disponible pour l'utilisateur. Les expérimentations réalisées ces deux années, nous ont permis d'observer que cet outil trace est plus perturbateur que bénéfique. En effet un grand nombre d'élèves ne comprennent pas à quoi il peut servir. De plus une fois l'explication fournie beaucoup d'élèves l'activent afin de faire de jolis dessins sur la page ou pour s'amuser. Aucune utilisation à des fins mathématiques n'a pu être identifiée dans les observations. C'est pourquoi nous avons décidé de l'enlever de la boîte à outils disponible. Il ne fait donc plus partie des outils utilisables par les élèves dans la dernière version de ce cahier informatisé.

### *Le cercle, un outil pour vérifier, qui peut devenir un outil pour construire*

Dans les quatre premières pages du second cahier informatisé, les outils sont utilisés pour vérifier si une ligne brisée présente à l'écran peut « enfermer » un triangle. Par un jeu sur les outils disponibles l'outil cercle apparaît comme outil pertinent pour cela (Figure 5.13). Les expérimentations réalisées en 2015, nous permettent d'observer que la formulation de la consigne est importante pour préciser aux élèves le problème posé. Lors des expérimentations en 2015, les élèves répondent sans mobiliser aucun outil. Nous décidons donc d'inscrire dans la consigne « A l'aide des outils disponibles » (Figure 5.21) pour inciter les élèves à mobiliser un outil avant de proposer une réponse dans le cadre.

Après avoir amené le cercle pour vérifier qu'une ligne brisée peut, ou ne peut pas, former un triangle, nous souhaitons amener le cercle pour construire le triangle ou plus exactement pour déterminer le troisième sommet du triangle (Figure 5.10). Dans un premier temps sur ces pages 5 et 6, l'outil point est disponible dans la boîte à outil. Les expérimentations réalisées en 2015 ont montré que la plupart des élèves mobilisent cet outil pour placer le troisième sommet un peu au hasard. Ainsi cet outil point est supprimé de la dernière version de ce cahier. Le seul outil, parmi ceux disponibles, qui permet de réaliser la tâche est l'outil cercle.

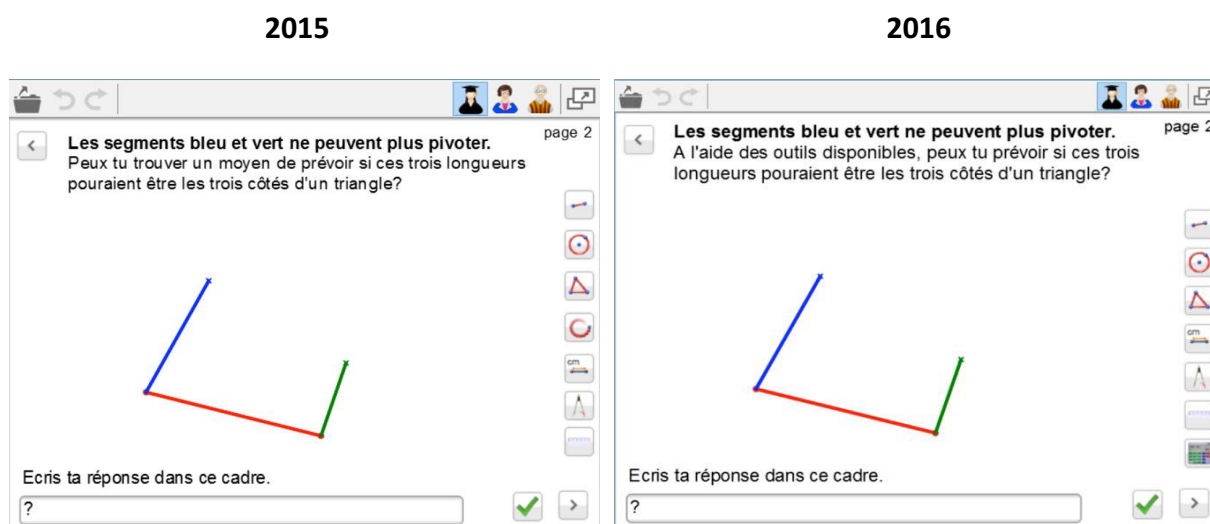


Figure 5.21 : L'incitation à utiliser les outils est écrite dans la consigne

### 5.4.3. Une entrée progressive dans la géométrie dynamique

L'élaboration du premier cahier informatisé permet la réalisation d'activités exploratoires qui résultent du déplacement des objets à l'écran. Il permet des expérimentations à partir d'observations, de manipulations en agissant directement sur les segments côtés du triangle.

#### La construction de figures robustes relève d'un apprentissage

Notre intention, dans l'élaboration d'un second cahier informatisé, est d'adjoindre à la manipulation de représentations dynamiques d'objets mathématiques présents à l'interface de l'ordinateur, la mobilisation d'outils de géométrie dynamique pour résoudre les problèmes posés. Construire dans un environnement de géométrie dynamique signifie utiliser les outils pour réaliser des figures robustes qui résistent au déplacement. Ainsi dans les premières versions de notre second cahier informatisé, nous cherchions d'une part, à amener la différence entre figure molle et figure robuste (Soury-Lavergne, 2011) et d'autre part, à faire prendre conscience du rôle du déplacement pour valider une construction. Les premières expérimentations en 2014 de ce second cahier informatisé n'ont pas été concluantes. Aucune construction robuste n'a été réalisée par les élèves. Les outils de géométrie dynamique étaient mobilisés pour produire des dessins semblables aux figures demandées. Comme nous l'avons signalé dans le Chapitre 1, les notions de géométrie dynamique que sont la distinction entre les figures molles et les figures robustes ainsi que le rôle du déplacement pour valider une construction nécessite un apprentissage. Cet apprentissage relève de connaissances géométriques sur les figures que les élèves de l'école primaire n'ont pas encore acquises.

#### Des outils pour anticiper aux outils pour construire

Ces premières expérimentations nous ont conduit à repenser ce second cahier. Notre intention est de proposer une entrée progressive dans la géométrie dynamique. Dans un premier temps, pages 2 à 4 du second cahier, (Figure 5.10), il s'agit d'utiliser les outils de

géométrie dynamique pour prévoir si la ligne brisée, présente à l'écran et verrouillée en déplacement, peut ou ne peut pas permettre de former un triangle. Les outils sont mobilisés pour prévoir par anticipation le résultat de manipulations. L'environnement numérique permet ensuite de déverrouiller le déplacement des segments. Les segments peuvent alors être déplacés par rotation, sur la construction précédemment effectuée au compas-gd ou à l'aide de l'outil cercle. La manipulation directe des segments permet de contrôler la construction et le bon usage des outils. Dans un second temps, page 5 et 6 du cahier, il s'agit de construire le troisième sommet à l'aide de l'outil cercle de la géométrie dynamique.

L'environnement de géométrie dynamique permet d'introduire un palier dans la mobilisation des outils, en passant des outils pour anticiper le résultat d'une manipulation aux outils pour construire.

**PARTIE III**  
**EXPÉRIMENTATIONS**  
**DU DUO D'ARTEFACTS DANS DES CLASSES**





## Chapitre 6. Méthodologie d'analyse

L'objectif de ce chapitre est de présenter la méthode d'analyse de l'effet du duo sur la conceptualisation. Plus précisément nous souhaitons suivre et évaluer les apprentissages des élèves au cours de la mobilisation du duo d'artefacts dans la situation. Nous souhaitons observer d'une part, les effets du duo sur les genèses instrumentales du compas dans la tâche de construction d'un triangle et d'autre part, les effets du duo sur la conceptualisation du triangle et du cercle (Voltolini, 2015). Il s'agit donc pour nous, de pouvoir caractériser a priori l'évolution des connaissances au cours de la situation ; connaissances relatives aux instruments compas élaborés et connaissances du triangle et du cercle. De plus nous souhaitons pouvoir attester de l'acquisition des connaissances dans les expérimentations. Or l'acquisition de connaissances au cours d'une activité ne présente pas d'observables systématiques. Il est possible de détecter certains indices qui peuvent suggérer une acquisition de connaissances mais ils ne sont pas assez explicites pour constituer une méthode d'analyse. Nous avons besoin d'indicateurs jouant le rôle d'observables interprétables en termes de connaissances.

Le modèle cK $\zeta$  (Balacheff, 2013) est un outil méthodologique qui permet de caractériser les connaissances à partir d'observables. Il permet d'explicitier des indicateurs pour identifier les conceptions des élèves en situation. Ainsi nous allons utiliser ce modèle pour expliciter les différentes conceptions qui peuvent être engagées dans la mise en œuvre du duo et de la situation « Triangle et compas ». Ceci nous permettra de caractériser l'apprentissage comme un parcours d'une conception à une autre.

Dans ce chapitre nous allons présenter le modèle cK $\zeta$  et la façon dont nous l'utilisons pour caractériser des conceptions et leur évolution dans notre étude. Nous exposerons aussi le lien que nous établissons entre le modèle cK $\zeta$  et l'approche instrumentale, plus précisément comment nous utilisons le modèle cK $\zeta$  pour identifier les instruments constitués. Enfin nous préciserons comment nous utilisons ce modèle pour élaborer l'analyse a priori de la situation « Triangle et compas » et comment ce modèle nous permet de produire l'analyse a posteriori.

### 6.1. Le modèle cK $\zeta$ : caractériser les connaissances à partir d'observables

Balacheff recherche une modélisation fonctionnelle des connaissances qui les caractérise à partir d'observables. « *Les observables, c'est-à-dire les comportements et leurs résultats, sont premiers dans notre rapport à la fois théorique et pragmatique à notre objet de recherche parce qu'ils sont les indices de la correspondance ou de l'écart entre l'enjeu de l'apprentissage pour l'agent apprenant et pour l'agent didactique.* » (Balacheff & Margolinas, 2005 p. 2). Pour eux il s'agit donc de caractériser méthodiquement l'ambition de l'agent didactique comparé à l'impact sur l'agent apprenant.

Balacheff construit le modèle de connaissance  $ck\zeta$  à la fois à partir de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) et à partir de la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1990). La théorie des situations didactiques, repère la connaissance d'un sujet comme la conscience de sa capacité de contrôle sur une situation ou plus exactement sur un milieu. Une situation met en œuvre le jeu des actions du sujet sur un milieu et des rétroactions de ce dernier. « *Le milieu est le système antagoniste du système enseigné, ou plutôt précédemment enseigné* » (Brousseau 1998 p.93). La théorie des champs conceptuels, est une théorie psychologique du concept qui définit un cadre aux recherches sur les activités cognitives complexes. Vergnaud (ibid p.145) définit un concept par le triplet suivant :

- $S$  : l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept (la référence),
- $I$  : l'ensemble des invariants sur lesquels reposent l'opérationnalité des schèmes (le signifié),
- $\mathcal{S}$  : l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement (le signifiant).

Le fonctionnement cognitif d'un sujet en situation repose sur le répertoire des schèmes disponibles et sur ses connaissances implicites incluses dans les invariants opératoires.

### 6.1.1. Caractérisation d'une conception dans le modèle $ck\zeta$

Pour Balacheff il ne s'agit pas de savoir « *comment le sujet pense* » (Balacheff & Margolinas, 2005 p. 6) mais de regarder le système [sujet-milieu] comme un tout qu'il considère comme le système cognitif. « *La conception est l'état d'équilibre d'un système, et plus précisément l'état d'équilibre d'une boucle action-rétroaction du système [sujet-milieu] sous des contraintes proscriptives de viabilité* » (ibid p. 6). Une conception a une portée locale et est attestée sur un domaine de validité et d'efficacité particulier.

La caractérisation d'une conception dans le modèle  $ck\zeta$  reprend la définition d'un concept faite par Vergnaud à laquelle le modèle  $ck\zeta$  ajoute une structure de contrôle. Ces contrôles sont implicites dans la formalisation de Vergnaud. Ils sont présents de fait dans les invariants sur lesquels reposent l'opérationnalité des schèmes et en particulier dans les invariants opératoires et les inférences des différents schèmes. De plus, le modèle  $ck\zeta$  fait des choix différents de vocabulaire de façon à éviter la confusion et l'usage approximatif de celui de la psychologie cognitive.

« Une conception  $C$  est définie par un quadruplet  $(P, R, L, \Sigma)$  dans lequel :

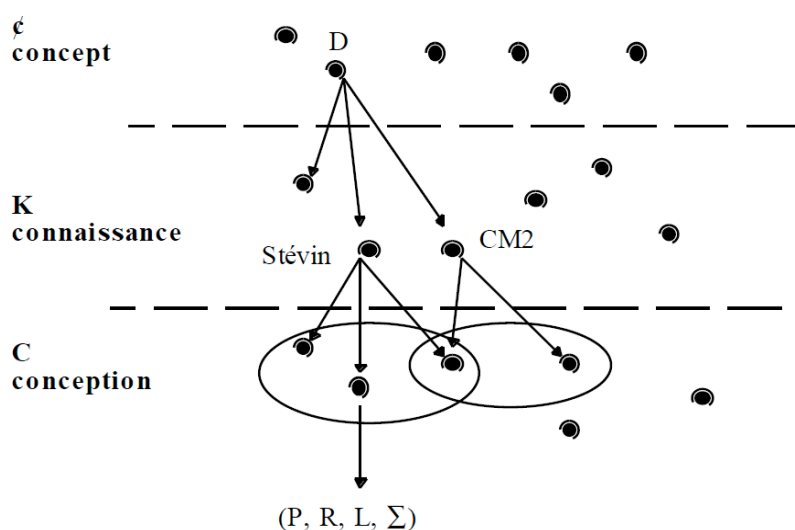
- $P$  est un ensemble de problèmes sur lequel  $C$  est opératoire ;
- $R$  est un ensemble d'opérateurs [qui permettent la transformation des problèmes] ;
- $L$  est un système de représentation, il permet d'exprimer les éléments de  $P$  et de  $R$  ;
- $\Sigma$  est une structure de contrôle, elle assure la non contradiction de  $C$ .

En particulier, un problème  $p$  de  $P$  est résolu si il existe  $r$  de  $R$  et  $s$  de  $\Sigma$  tel que  $s(r(p))=\text{vrai}$  » (Balacheff, 1995a p. 225).

Cette caractérisation par un quadruplet  $(P, R, L, \Sigma)$  d'une conception est autant corrélée au sujet qu'au milieu, avec lequel il interagit. Elle donne le moyen de caractériser un état du système [sujet-milieu].

### 6.1.2. Conception, connaissance, concept

Le modèle  $ck\zeta$  donne une clarification des rapports entre concept, connaissance et conception (Figure 6.1).



Ce schéma résume la structure que nous proposons. Le concept de "nombre décimal" (D) est déterminé par son extension, les connaissances D-selon-Stévin, D-en-CM2. Chaque connaissance est déterminée par un ensemble de conceptions qui sont chacune caractérisées par un quadruplet  $(P, R, L, \Sigma)$ .

Figure 6.1 :  $ck\zeta$  : conception connaissance et concept

« Une conception est caractérisée par un ensemble définitoire de problèmes pour lesquels elle apporte des outils de résolution » (Balacheff & Margolinas, 2005 p. 24). Une conception est un élément positionné au niveau opératoire de résolution d'un problème. Dans la situation, elle permet au sujet de dégager les outils nécessaires. « Une conception est une instanciation de la connaissance d'un sujet par une situation » (Balacheff, 1995a p. 15). Une connaissance est un ensemble de conceptions ; cet ensemble pouvant être celui d'un élève de CM2, d'une classe de l'école primaire ou d'une époque de l'histoire. « La connaissance est l'instance d'un concept au niveau d'un sujet connaissant singulier ou pluriel » (ibid p. 25). Un concept est un ensemble de connaissances ; c'est donc aussi un ensemble de conceptions.

### 6.1.3. Des conséquences pour notre étude

« L'apprentissage est un processus permettant le passage d'une conception à une autre. Une caractéristique du système didactique est qu'il explicite a priori la conception cible » (Balacheff, 1995b p. 243). Ainsi modéliser l'apprentissage nécessite d'organiser l'ensemble des conceptions relatives à une connaissance de référence et de définir une problématique d'évolution.

Le modèle cK $\zeta$  va nous permettre

- d'expliciter les différentes conceptions en lien avec les objets d'apprentissage triangle et cercle auquel le duo d'artefacts numérique et matériel contribue ;
- de caractériser les différentes conceptions dans les environnements numérique et matériel et de préciser les singularités de leur évolution ;
- de caractériser, par un enchaînement d'opérateurs et de contrôles, les stratégies de résolution des différentes tâches proposées par la situation et le duo.

## 6.2. (P ; L ; R ; $\Sigma$ ) dans notre étude

Le modèle cK $\zeta$  nous permet d'une part d'expliciter en un quadruplet (P ; L ; R ;  $\Sigma$ ) les différentes conceptions, sur le triangle et le cercle, qui peuvent apparaître dans la situation « Triangle et compas » et d'autre part de caractériser la résolution des différentes tâches proposées par le duo par un enchaînement d'opérateurs et de contrôles. Avant de donner des précisions sur ce que nous qualifierons d'opérateur et de contrôle dans notre étude, nous allons préciser une fois pour toutes la question des problèmes et des systèmes de représentation en jeu dans le duo.

### 6.2.1. Problèmes et systèmes de représentation

#### Problèmes

« Les problèmes sont le résultat d'une perturbation du système [sujet-milieu]. Ils n'ont pas une existence en eux même, mais relativement à la capacité du sujet de les percevoir et du milieu d'en rendre compte. Les problèmes sont par ailleurs le fondement des conceptions, (...) et ont par rapport à elles une valeur définitoire » (Balacheff & Margolinas, 2005 p. 21).

Nous donnons ici les principaux problèmes que nous avons identifiés dans la situation « Triangle et compas ». Ces problèmes sont directement issus des tâches demandées aux élèves dans les deux environnements, numérique et papier-crayon, au cours des différentes phases de la situation. Nous distinguons quatre types de problèmes :

- ❖ Les problèmes de formation de triangles qui consistent à assembler des segments numériques pour obtenir un triangle à l'interface de l'ordinateur.

- ❖ Les problèmes de tracé de triangles qui consistent à produire une représentation graphique à l'aide d'un outil adapté. Le problème réside dans le tracé et le soin de ce tracé.
- ❖ Les problèmes de construction de triangle qui font référence à une construction géométrique et comprennent la prise en compte des propriétés géométriques de la figure. Une construction est soutenue par un raisonnement validant la démarche.
- ❖ Les problèmes d'existence ou non du triangle qui consistent à savoir identifier si trois segments donnés peuvent être les trois côtés d'un triangle.

Ces problèmes, de formation, tracé et construction de triangle, ainsi que les problèmes d'existence du triangle, vont, au fur et à mesure de la situation et des déséquilibres et équilibres du système [sujet-milieu], permettre l'évolution des conceptions du triangle.

### Systèmes de représentation

Un système de représentation (langagier ou non) permet l'expression des problèmes, des opérateurs et des contrôles en jeu pour résoudre les problèmes (Balacheff & Margolinas, 2005). Dans notre situation, le seul système de représentation que nous considérons est le système graphique du dessin géométrique. Ce système de représentation intervient aussi bien dans l'environnement numérique Cabri Elem que dans l'environnement papier-crayon. Nous rapprochons ce système graphique du dessin géométrique de l'espace graphique caractérisé par Perrin-Glorian, Mathe, et Leclercq (2013). Les auteurs précédents distinguent trois espaces. L'espace sensible dans lequel les problèmes sont résolus pratiquement à partir d'objets matériels. L'espace géométrique dans lequel les problèmes sont résolus théoriquement, par un discours, une validation théorique. L'espace graphique des tracés dans lequel on peut produire des dessins, des figures, pouvant représenter à la fois un objet physique ou un objet géométrique. « *L'espace graphique est un lieu d'expérimentation aussi bien pour un problème qui se pose dans le monde physique (il peut alors servir d'interface entre l'espace sensible et l'espace géométrique) que pour un problème théorique* » (ibid p. 19). Ainsi dans notre étude, même les manipulations de segments numériques dans le premier cahier informatisé relèvent du système de représentation graphique.

Ces manipulations de segments numériques pourraient aussi être comparées à des manipulations d'objets matériels dans l'espace sensible et appeler un autre système de représentation par exemple caractérisé par les gestes. L'analyse approfondie des gestes lors de manipulations n'est pas l'objet de notre étude ; ainsi nous ne considérons pas les gestes comme un système de représentation. Étudier le ou les systèmes de représentations qui peuvent être associés à ces manipulations d'objets numériques mériterait une étude approfondie que nous ne faisons pas ici. De plus, les productions écrites et les échanges oraux entre élèves, lors des expérimentations en classe, nous permettent d'identifier certains observables mais ils ne sont pas non plus considérés comme des systèmes de représentation dans la situation.

### 6.2.2. Opérateurs et contrôles

Ce sont principalement les opérateurs et les contrôles qui vont nous permettre de modéliser et d'interpréter les conceptions du sujet. C'est pourquoi il nous faut les caractériser plus précisément. Le modèle cK $\zeta$  distingue les opérateurs qui sont des moyens d'action et les contrôles qui évaluent la pertinence et la validité de l'action.

Un opérateur permet l'action, il transforme un problème en un nouveau problème. « *Les opérateurs sont attestés par des productions et des comportements* » (Balacheff & Margolinas, 2005 p. 6). Les opérateurs sont identifiés par des actions observables du sujet sur le milieu.

*« Une structure de contrôle assure la non contradiction de la conception et contient au moins sous la forme d'oracles les outils de décision sur la légitimité de l'emploi d'un opérateur ou sur l'état (résolu ou non) d'un problème »* (ibid p. 6). « *Les contrôles sont le plus souvent implicites ; et la distinction entre contrôles et opérateurs n'est pas absolue mais relative à une conception.* » (ibid p. 10). Le fait que les contrôles soient implicites peut poser des problèmes d'observables. Balacheff<sup>8</sup> éclaire la distinction entre opérateur et contrôle de la manière suivante : « *Si  $\pi$ ,  $\pi_1$  et  $\pi_2$  sont des prédicats et A est une action alors un opérateur sera de la forme  $[\pi \Rightarrow A]$  et un contrôle sera de la forme  $[\pi_1 \Rightarrow \pi_2]$ .* »

Malgré cette distinction l'identification des opérateurs et des contrôles en jeu dans la résolution d'un problème dépend de la position de l'observateur. Illustrons cela par un exemple. Considérons dans l'environnement papier-crayon le tracé d'un segment joignant deux points. Du point de vue de sa réalisation, il s'agit donc de poser la règle le long des deux points et de déplacer le crayon le long de la règle (opérateur) en partant d'un des points jusqu'à l'autre (contrôle). Le contrôle permet de juger du tracé du segment attendu. Du point de vue de la justification du tracé un élève peut décrire le tracé en disant que le trait relie les deux points (opérateur) et apporter un argument émanant de ses connaissances comme par exemple qu'un segment est limité et qu'il a deux extrémités (contrôles). S'il est question d'observer la maîtrise de l'utilisation de la règle dans cette tâche, il s'agit de maintenir la règle fixe durant le tracé (opérateur) et de vérifier si les deux points sont reliés par un trait droit (contrôle). Cet exemple illustre deux choses. D'une part qu'un opérateur traduit une action et un contrôle en référence à cette action est une action sur l'action. D'autre part qu'il est important qu'un observateur ait une idée claire de ce qu'il veut observer et de ce qu'il va qualifier d'action.

#### Un opérateur induit une action

Les opérateurs permettent au sujet de réaliser des actions. Mithalal (2010) attire l'attention sur le lien qui existe entre opérateur et action. Un opérateur n'est pas simplement la transposition d'une proposition en action mais il caractérise l'action

---

<sup>8</sup> Communication personnelle.

comme la conséquence d'une proposition. Ainsi « *un opérateur est défini par les deux caractéristiques suivantes* :

- Une finalité : à quoi sert l'opérateur ? (le prédicat  $\pi$ )
- Une modalité d'action : en quoi consiste l'opérateur ? (l'action A) » (ibid p. 117)

Par exemple, pour tracer un segment, il faut faire une action qui conduit à ce tracé. La finalité est donc « tracer un segment » et les modalités d'actions peuvent être « Poser la règle sur la feuille à l'endroit où tracer le segment ; Poser le crayon sur la feuille le long de la règle ; Déplacer le crayon le long de la règle ; Produire une trace visible ».

### Un contrôle évalue la pertinence et la validité de l'action

« *Les contrôles rassemblent : des jugements, des décisions et plus généralement les moyens du choix ; des méthodes, structures et organisations des opérateurs* » (Balacheff & Margolinas, 2005 p. 10). Un contrôle consiste à associer deux prédicats  $\pi_1$  et  $\pi_2$ ,  $\pi_1$  étant un constat et  $\pi_2$  étant la conséquence de  $\pi_1$ . Par exemple, dans la construction d'un triangle à la règle et au compas, si les cercles (arcs de cercle) se croisent ( $\pi_1$ ) alors le triangle existe ( $\pi_2$ ) est un contrôle théorique sur l'existence d'un triangle. Les contrôles permettent aussi des anticipations. Par exemple l'argument, une figure a trois côtés ( $\pi_1$ ) est un triangle ( $\pi_2$ ), permet aussi bien la validation a posteriori du tracé d'un triangle que l'engagement dans la résolution du problème.

## 6.3. Opérateurs et contrôles en jeu dans la situation « Triangle et compas »

Dans les paragraphes suivants, nous allons décrire les opérateurs et contrôles qui peuvent être engagés dans le cadre du duo. L'Annexe 2 donne le détail des descriptions en termes de finalité et de modalités d'action pour chaque opérateur et en termes de constat et conséquence pour chaque contrôle.

### 6.3.1. Opérateurs en jeu dans chaque environnement

Les opérateurs sont déterminés par rapports aux actions possibles dans chaque environnement relativement aux problèmes en jeu dans la situation. Les actions envisagées dans l'environnement numérique résultent des possibilités offertes par le logiciel Cabri Elem : des manipulations de représentations d'objets mathématiques à l'interface de l'ordinateur ou des tracés à l'aide des outils de géométrie dynamique disponibles. Dans l'environnement papier-crayon, les actions engagées résultent de la mobilisation des outils usuels de géométrie (le crayon, la règle graduée et le compas). La classification des opérateurs par environnement (Annexe 2) conduit à mettre en évidence des similitudes entre certains opérateurs engagés dans l'un ou l'autre des environnements. Des opérateurs mobilisant un outil, de géométrie dynamique ou de l'environnement papier-crayon peuvent avoir la même finalité. Ce qui les différencie ce



sont les modalités d'actions qui sont dépendantes de l'outil utilisé. Ainsi plutôt qu'une distinction par environnement, numérique ou papier-crayon, nous présentons ici les opérateurs en jeu par une classification selon les quatre critères suivants :

- ❖ Des opérateurs relatifs aux actions de déplacement, de manipulation de représentations d'objets mathématiques à l'interface de l'ordinateur. Ces opérateurs sont engagés dans la résolution des problèmes de formation de triangle et dans les problèmes d'existence ou non du triangle.
- ❖ Des opérateurs relatifs aux actions de tracé. Ces opérateurs sont mobilisés aussi bien dans l'environnement papier-crayon que dans l'environnement numérique de géométrie dynamique. Ils peuvent être engagés dans des problèmes de tracé, de construction et d'existence ou non d'un triangle.
- ❖ Des opérateurs relatifs aux actions de mesure. Ils sont aussi mobilisés dans les deux environnements du papier-crayon et de géométrie dynamique. Ils permettent la résolution de problèmes d'existence ou non du triangle mais ils peuvent aussi être engagés dans les problèmes de tracé.
- ❖ Des opérateurs « singuliers » à la situation qui sont la composition d'opérateurs et de contrôles, qui eux aussi sont mis en œuvre dans les deux environnements, numériques et papier-crayon. Ils peuvent être engagés dans les quatre types de problèmes formation, tracé, construction et existence ou non d'un triangle.

#### *Opérateurs relatifs aux actions de déplacement et de manipulation à l'interface de l'ordinateur*

Nous considérons dans un premier temps des opérateurs pouvant être engagés pour manipuler des objets numériques à l'interface de l'ordinateur. L'artefact mobilisé dans ces opérateurs est le pointeur de l'environnement Cabri Elem. Nous considérons trois opérateurs :

- attraper un objet ;
- déplacer un objet ;
- superposer deux objets.

Pour notre étude nous distinguons plusieurs déplacements et ainsi nous sommes amenés à caractériser plusieurs opérateurs pour déplacer un objet. Nous envisageons trois opérateurs liés au déplacement.

- « Déplacer librement » : cet opérateur a pour finalité de déplacer un objet librement à l'interface de l'ordinateur dans le but de le mettre dans une nouvelle position.
- « Déplacer par translation » : cet opérateur a pour finalité de translater l'objet dans le but de le mettre dans une nouvelle position avec conservation de l'orientation.
- « Déplacer par rotation » : cet opérateur a pour finalité de déplacer un objet selon un mouvement circulaire autour d'un centre dans le but de mettre l'objet dans

une nouvelle position ayant un point commun avec la position initiale et une orientation modifiée.

### *Opérateurs relatifs aux actions de tracé*

Dans l'environnement de géométrie dynamique proposé par Cabri Elem ainsi que dans l'environnement papier-crayon, des opérateurs sont engagés pour produire des tracés géométriques. Ces opérateurs mobilisent un ou plusieurs outils. Nous remarquons que certains opérateurs ont la même finalité et qu'ils se différencient par leurs modalités d'action. Ces modalités d'action dépendent de l'environnement, numérique ou papier-crayon, dans lequel l'opérateur est exprimé. Les modalités d'action, dans un même environnement, peuvent aussi se différencier par l'outil mobilisé. L'Annexe 2 donne le détail des descriptions des différentes modalités d'action et des outils mobilisés dans chaque environnement. Nous allons décrire ici les opérateurs à partir de leurs finalités.

Dans la situation « Triangle et compas » nous considérons les opérateurs de tracé suivants :

– Des opérateurs dont la finalité est le tracé d'un segment.

- « Tracer un segment ».
- « Tracer un segment de longueur donnée ».
- « Tracer un segment reliant deux points ».

Ces opérateurs mobilisent les outils segments et/ou règle graduées-gd dans l'environnement de géométrie dynamique et mobilisent la règle graduée dans l'environnement papier-crayon.

– Des opérateurs dont la finalité est le tracé d'un cercle.

- « Tracer un cercle ».
- « Tracer un cercle de centre donné et passant par un point ».
- « Tracer un cercle de rayon donné ».

Ces opérateurs mobilisent l'outil compas-gd ou l'outil cercle dans l'environnement de géométrie dynamique ; ils mobilisent le compas et la règle graduée pour le dernier cas dans l'environnement papier-crayon.

– Des opérateurs dont la finalité est le tracé d'un triangle qui mobilisent l'outil triangle ou l'outil segment de la géométrie dynamique ou la règle graduée dans l'environnement papier-crayon. Ces opérateurs permettent de tracer un triangle quelconque sans contrainte sur les longueurs des côtés.

### *Opérateurs relatifs aux actions de mesure*

Nous avons dit plus haut que dans la situation « Triangle et compas », un des problèmes consiste à déterminer l'existence ou non d'un triangle connaissant les longueurs des segments côtés. La résolution d'un tel problème peut demander de connaître les mesures des trois longueurs. Ainsi nous envisageons des opérateurs dont la finalité est de :

- « Mesurer une longueur ».

Ces opérateurs mobilisent soit l'outil mesure soit la règle graduée-gd dans l'environnement de géométrie dynamique et l'outil règle graduée dans l'environnement papier-crayon.

#### *Opérateurs « singuliers » à la situation*

Ces opérateurs sont « singuliers » dans la mesure où ils sont créés par la situation et le duo.

#### *Opérateurs « Ligne brisée »*

Former une ligne brisée peut constituer une étape pour obtenir un triangle avec les segments numériques. De même dans l'environnement papier-crayon la ligne brisée peut être une étape dans la construction du triangle. Elle participe à la conception 1D du triangle, comme nous le montrons plus loin.

#### *Opérateurs « Pivoter un segment autour d'une de ses extrémités »*

Dans le duo, le premier cahier informatisé propose de manipuler des segments numériques asymétriques dans leurs représentations à l'écran et dans leurs déplacements. Plus précisément, il est possible de pivoter un segment numérique autour de l'extrémité ronde qui reste fixe. Nous définissons donc des opérateurs pour « pivoter un segment autour d'une de ses extrémités ». Dans l'environnement numérique, cet opérateur « pivoter un segment » est la combinaison de l'opérateur « déplacer par rotation » et d'un contrôle permettant de distinguer les extrémités ronde et cruciforme pour attraper l'extrémité cruciforme.

De plus nous considérons qu'il est aussi possible de faire pivoter un segment autour d'une de ses extrémités en mobilisant le compas ou le compas-gd. Le compas (compas-gd) produit la trajectoire de l'extrémité pivotée ce qui permet ensuite de tracer un autre représentant du segment pivoté à la règle graduée ou à la règle graduée-gd. Nous définissons donc deux autres opérateurs dont la finalité est de pivoter un segment.

### 6.3.2. Contrôles sur l'emploi des opérateurs

Par rapport à l'emploi d'un opérateur nous considérons différents types de contrôles décrits en détail dans l'Annexe 2. Nous classons ces contrôles en deux catégories : les contrôles visuels et les contrôles sur la procédure d'utilisation d'un outil de géométrie dynamique ou de l'environnement papier-crayon.

Les contrôles visuels peuvent porter sur le déplacement et la position des objets numériques. Par exemple pour pivoter un segment autour de l'extrémité ronde qui reste fixe il faut d'abord distinguer les extrémités pour sélectionner l'extrémité cruciforme ; un contrôle visuel permet de différencier les extrémités. Ensuite, il faut contrôler que le segment se déplace avec le pointeur et que ce déplacement est une rotation. Des contrôles visuels s'exercent aussi sur les traces produites par un outil de géométrie

dynamique ou de l'environnement papier-crayon. Il s'agit ici de contrôler la correspondance de la trace avec l'objet mathématique à tracer. Dans l'environnement numérique il faut vérifier que l'outil sélectionné produit bien la trace attendue. Par exemple si un sujet mobilise le cercle de la géométrie dynamique, il doit vérifier qu'un cercle reste affiché à l'écran. Dans l'environnement papier-crayon il faut vérifier que le crayon ou la mine du compas produit bien une trace, celle qui est attendue.

Relativement à notre duo et à la tâche de construction d'un triangle à la règle et au compas, des contrôles s'exercent sur la procédure d'utilisation du compas, du compas-gd et de l'outil cercle. Par exemple, lors de la mobilisation du compas ou du compas-gd il est nécessaire d'identifier où piquer la pointe et où poser la mine pour obtenir le tracé souhaité. De même l'utilisation de l'outil cercle nécessite un contrôle sur la position du centre et un autre sur le rayon du cercle. Nous nous intéressons aux contrôles sur la procédure d'utilisation pour ces trois outils uniquement car ce sont les trois outils emblématiques de notre situation. Leur mobilisation dans les différentes phases de la situation est porteuse d'apprentissage comme nous le montrerons dans l'analyse a priori.

## **6.4. Liens entre le modèle cK $\epsilon$ et l'approche instrumentale**

### **6.4.1. Instruments et conceptions**

Balacheff ancre le modèle cK $\epsilon$  dans l'approche instrumentale. « *Milieu et instrument ne se distinguent que peu en dehors des problématiques qui les façonnent (respectivement, didactique et ergonomie cognitive ; plus intéressant encore : ces deux thématisations du système [sujet-milieu] occupent des places symétriques relativement à l'interaction. Les concepts de conception et instrument occuperaient alors des places duales au sein de la modélisation de ce système.* » (Balacheff & Margolinas, 2005 p. 21). C'est pourquoi nous allons décrire le lien que nous établissons entre instrument et conception. Dans notre étude, le modèle cK $\epsilon$  est un outil d'analyse systématique qui nous permet d'articuler instrumentation et conceptualisation.

Rabardel (1995) explique que pour un type donné de tâches, réalisées à l'aide d'un artefact, l'utilisateur développe des structures cognitives lors de l'usage de cet artefact. Ces structures cognitives sont les schèmes d'utilisation. Il définit donc un instrument comme une entité mixte, constituée de l'artefact ou d'une partie de l'artefact et des schèmes personnels d'utilisation, pour un type donné de tâches. Ainsi un instrument constitué par un sujet est une connaissance du sujet. La mobilisation de cet instrument dans une tâche est donc une instanciation de cette connaissance-instrument en situation. Un instrument comme une conception est une caractéristique du système [sujet-milieu]. Il nous semble donc pertinent de rapprocher instrument pour réaliser une tâche et conception.

Le modèle cK $\epsilon$  nous permet d'une part d'identifier les connaissances construites liées à l'émergence d'un instrument. D'autre part, ce modèle nous permet d'identifier à l'aide de

parcours de conceptions la façon dont l'apprentissage s'élabore et se transmet d'un instrument à l'autre, aussi bien pour des instruments émanant du même artefact que pour des instruments émanant des artefacts du duo.

#### 6.4.2. Des schèmes d'utilisation identifiés par des compositions d'opérateurs et de contrôles

Les schèmes d'utilisation développés par le sujet en activité ont une fonction épistémique qui traduit la conceptualisation (Rabardel, 1995). Vergnaud (1990) précise lui aussi que c'est dans les schèmes qu'il faut rechercher les connaissances en acte du sujet, c'est-à-dire les éléments cognitifs qui permettent à l'action du sujet d'être opératoire. « *Les schèmes reposent toujours sur une conceptualisation implicite* » (ibid p. 139). Agir suppose conceptualiser et réciproquement. La conceptualisation guide l'action et en même temps l'action permet la conceptualisation (Vergnaud, 1996).

Dans le modèle  $ck\varnothing$ , une conception est définie par un quadruplet  $(P, R, L, \Sigma)$  et les éléments cognitifs qui permettent à l'action du sujet d'être opératoire sont situés dans les opérateurs et les contrôles. En effet, un opérateur permet l'action, caractérisée comme la conséquence d'un prédicat. Un contrôle, contient les éléments de décision sur le bien-fondé de l'emploi d'un opérateur ou sur l'état de résolution d'un problème. C'est pourquoi dans notre étude nous allons identifier les schèmes d'utilisation à partir d'opérateurs et de contrôles, ce qui nous permettra de caractériser les connaissances liées à l'émergence d'un instrument.

Dans notre étude un opérateur est défini par une finalité et une modalité d'action. Ainsi nous semble-t-il possible de rapprocher les règles d'actions d'un schème d'utilisation relatif à un artefact et les modalités d'action d'un opérateur qui engage cet artefact. Par exemple, relativement à l'instrument compas et au schème d'utilisation du compas pour tracer un cercle, on peut décrire la règle d'action comme suit : écarter les branches ; distinguer chaque branche : la pointe, la mine ; piquer la pointe et poser la mine ; pivoter le compas en maintenant l'écartement fixe jusqu'à ce que la mine repasse sur le trait initial ; produire une trace visible. Cette description est celle que nous avons proposée comme modalité d'action de l'opérateur rC1 : tracer un cercle (Annexe 2). Le schème d'utilisation du compas pour tracer un cercle est donc identifié par l'opérateur rC1 : tracer un cercle, dont les modalités d'actions sont décrites ci-dessus, auquel est adjoint un contrôle  $\Sigma C$  validant qu'un cercle est tracé. Ce contrôle relève, au moins sous forme d'oracle, d'un apprentissage antérieur et des connaissances du sujet sur l'objet mathématique cercle.

Un instrument, dans sa partie schèmes d'utilisation, intègre donc des opérateurs qui mobilisent l'artefact et des contrôles : d'une part des contrôles permettant de juger de la validité et des modalités de son utilisation et d'autre part, des contrôles relatifs aux

représentations des concepts en jeu. Les genèses instrumentales résultent donc de combinaisons d'opérateurs et de contrôles.

## 6.5. Traitement des données

Nous souhaitons effectuer une évaluation de la situation et du duo fondée sur la confrontation entre analyse a priori et analyse a posteriori. Le modèle  $ck\pi$  nous permet de déterminer des observables, décrits à l'aide d'opérateurs et de contrôles, pour d'une part, construire l'analyse a priori et d'autre part, interpréter nos observations et proposer une explication des actions du sujet en termes d'instrumentation et de conceptualisation.

### 6.5.1. Méthodologie d'analyse a priori

#### Une analyse en termes d'opérateurs et de contrôles

Le duo a pour objectif de favoriser la conceptualisation du triangle et du cercle. Plus exactement nous souhaitons étudier l'évolution des connaissances sur le triangle et sur le cercle au cours de la situation à travers l'alternance des activités instrumentées dans les environnements numériques et papier-crayon. De plus nous souhaitons aussi que le duo permette de donner du sens au compas dans la tâche de construction d'un triangle de longueurs des côtés données. Cela signifie que le lien entre l'outil compas, les schèmes d'utilisation et les concepts en jeu dans cette tâche puisse être fait.

Les analyses préalables effectuées dans le Chapitre 3 nous permettent de considérer que la conception initiale d'un sujet sur le triangle et le cercle est une vision iconique de chaque objet. Le triangle est une surface délimitée par trois côtés et le cercle est un objet rond, une ligne produite par le compas. La conception cible attendue dans la tâche de construction d'un triangle, suppose une visualisation non iconique du triangle faisant apparaître le point troisième sommet du triangle. Une déconstruction dimensionnelle du triangle 2D à la détermination du troisième sommet OD est nécessaire. En ce qui concerne le cercle, une caractérisation ponctuelle (encore une fois OD) est nécessaire pour que le cercle joue le rôle d'outil dans cette tâche. Ces états, initial et cible, sont les extrémités du champ des observables et un élève peut ne jamais être dans aucun de ces états. Entre ces deux extrêmes il est possible d'envisager d'autres visions du triangle et du cercle. La composition de notre duo a été faite dans le but d'amener, dans un premier temps, une vision 1D du triangle et une caractérisation du cercle comme la trace de l'extrémité d'un segment qui pivote.

Le modèle  $ck\pi$  nous permet de décrire par des quadruplets  $(P, L, R, \Sigma)$  différentes conceptions du triangle et du cercle. Il nous est alors possible de caractériser l'évolution d'une conception à une autre en termes d'opérateurs et/ou de contrôles. Nous avons ainsi le moyen d'établir des parcours de conceptions, relatives au triangle et au cercle. Ces parcours se construisent grâce à l'évolution des opérateurs et contrôles au cours de la situation et au cours de l'alternance des actions instrumentées avec les instruments

numériques et le compas matériel. Rendre compte d'un parcours nécessite une caractérisation de l'activité de l'élève et de ses transformations à travers l'émergence de nouveaux opérateurs et contrôles.

### Une analyse a priori basée sur des stratégies

Le modèle CKZ nous permet d'établir une liste d'opérateurs et de contrôles pertinents dans chaque environnement, numérique et papier-crayon, en ce qui concerne les conceptions liées au triangle et au cercle. Ces opérateurs et contrôles, peuvent alors être utilisés pour décrire, a priori, des stratégies de résolution des différentes tâches proposées dans chaque environnement. Il s'agit d'identifier les différentes possibilités pour résoudre le problème compte tenu du contexte mathématique et instrumental qui s'offre au sujet. Plusieurs configurations d'enchaînement d'opérateurs et de contrôles, permettent de transformer un problème initial en problème résolu. Ces différents enchaînements d'opérateurs et de contrôles constituent différentes stratégies de résolution.

Dans notre étude nous définissons une stratégie comme suit : une stratégie est une méthode de résolution effective d'un problème. Une stratégie coordonne des actions pour atteindre un objectif. Les différentes stratégies seront détaillées en trois composantes :

- une ou des structures de contrôle antérieures à l'action, qui permettent d'engager un processus de résolution ;
- un enchaînement organisé d'opérateurs et de contrôles permettant la résolution du problème ;
- un ou des contrôles postérieurs à l'action, permettant des jugements sur l'état de résolution du problème.

Les stratégies ainsi décrites en opérateurs et contrôles peuvent être confrontées à des observations. L'analyse a posteriori pourra alors être explicite et robuste. L'observation permettra l'identification d'opérateurs et de contrôles mobilisés au niveau des stratégies ; ces opérateurs et contrôles seront rattachés à une conception. Cela nous permettra l'identification et l'évolution des conceptions.

### Les différentes étapes de l'analyse a priori

Nous commençons par donner une description détaillée des conceptions du triangle et du cercle pouvant être mobilisées avec le duo. Pour chaque conception nous détaillons dans chaque environnement, numérique et papier-crayon, les opérateurs et les contrôles qui la définissent. Nous mentionnons ensuite un parcours de conceptions relatif au triangle et un parcours de conceptions relatif au cercle.

Puis, pour chaque phase de la situation, le premier cahier informatisé, la première activité papier-crayon, le second cahier informatisé et la seconde activité papier-crayon nous décrivons :

- Sa fonction et son enjeu en termes d'instrumentation et de conceptualisation. Nous montrons l'incidence des choix de valeurs de variables didactiques sur la mise en œuvre des opérateurs et des contrôles et donc sur les conceptions mobilisées.
- Les stratégies possibles. Les choix de valeurs de variables didactiques influencent la mise en œuvre de certaines stratégies qui sont décrites a priori sous la forme d'un enchaînement d'opérateurs et de contrôles.
- Les états successifs du système [sujet-milieu]. L'articulation des artefacts numériques et matériels au fil de la situation crée successivement, des déséquilibres, des équilibres, du système [sujet-milieu]. Pour chaque phase nous caractérisons les nouveaux équilibres du système [sujet-milieu] en termes de conceptions.
- Les instruments élaborés. Des instruments émergent des artefacts aux différents niveaux de la situation. Ces instruments participent à l'évolution des conceptions du triangle et du cercle.

### 6.5.2. Méthodologie d'analyse a posteriori

L'analyse a posteriori de nos observations nous permet de mettre à l'épreuve nos hypothèses de recherches. Nous supposons que la composition du duo et la méthodologie d'analyse a priori nous permettent de dégager l'effet de notre duo sur les stratégies mises en œuvre et donc sur les apprentissages, à savoir :

- l'émergence d'une vision 1D du triangle comme une ligne brisée fermée ;
- l'émergence d'un nouvel instrument compas pour pivoter un segment ;
- l'émergence d'une nouvelle caractérisation du cercle comme la trajectoire de l'extrémité d'un segment qui pivote.

Le modèle cK $\emptyset$  nous permet d'identifier les opérateurs et les contrôles, effectivement mobilisés par les élèves, pour caractériser l'évolution des conceptions du triangle et du cercle ainsi que l'évolution des genèses instrumentales du compas.

#### Des observables

Pour notre analyse a posteriori nous considérons deux types d'observables :

- D'une part l'activité de l'élève dans chaque environnement. Cela concerne les actions effectivement réalisées et donc les opérateurs engagés dans la résolution d'un problème.
- D'autre part, nous prendrons aussi en compte l'activité discursive des élèves. Les marques de cette activité discursive sont des écrits dans l'environnement numérique comme dans l'environnement papier-crayon. Enfin, il s'agit aussi



d'échanges oraux éventuels ou de commentaires oraux spontanés formulés par certains élèves.

Il s'agit pour nous de pouvoir identifier, dans les observations, la présence d'opérateurs et de contrôles caractérisés a priori. Pour pouvoir être observés nos opérateurs sont formulés avec leurs modalités d'actions. Les actions du sujet étant facilement identifiables, l'identification des opérateurs est donc relativement aisée.

L'identification des contrôles est plus subtile car les contrôles ne produisent pas d'observables directs. Les contrôles sont le plus souvent identifiés par inférence. Ils sont déduits de l'engagement d'une action ou de son résultat ; ce sont des actions sur l'action. Les contrôles peuvent être antérieurs à l'action ; ils donnent alors le moyen d'anticiper la procédure de résolution d'un problème ou l'emploi d'un opérateur. Ils peuvent aussi être postérieurs à l'action pour juger de l'état de résolution du problème. Par exemple dans la construction du triangle à la règle et au compas le contrôle « si les deux cercles se croisent alors le triangle existe » est un contrôle antérieur à l'action qui provoque l'emploi du compas pour tracer les cercles. C'est aussi ce contrôle qui valide l'état de résolution du problème. Les productions géométriques ou discursives nous permettent d'arguer de la présence ou non d'un tel contrôle.

### Analyse a posteriori

Notre analyse consiste à étudier les opérateurs et les contrôles mobilisés pour caractériser :

- des stratégies de résolutions effectivement mises en œuvre ;
- les différents instruments élaborés dans le duo ;
- des conceptions révélées du triangle et du cercle ;
- des parcours de conceptions identifiés.

## **Chapitre 7. Analyse a priori de la situation « Triangle et compas »**

Dans ce chapitre nous montrons en quoi les choix faits dans la composition du duo d'artefacts et de la situation permettent de contrôler les conceptions du triangle et du cercle mises en œuvre aux différents niveaux de la situation. Nous commençons par décrire les conceptions, du triangle et du cercle, qui peuvent être engagées dans l'utilisation du duo. Puis pour chaque phase de la situation, (premier cahier informatisé, première activité papier crayon, second cahier informatisé, deuxième activité papier crayon), nous décrivons sa fonction dans la situation et nous montrons l'incidence des choix de valeurs de variables didactiques sur les stratégies et en particulier sur les opérateurs et contrôles qui sont engagés. Nous caractérisons à chaque phase de la situation l'état d'équilibre du système [sujet-milieu] en termes de nouvelles conceptions et de nouveaux instruments. Nous finissons par montrer l'apport du duo et de la situation sur la mise en œuvre de parcours de conceptions du triangle et du cercle et sur l'évolution des instruments émergeant du duo d'artefacts.

### **7.1. Conceptions en jeu dans la situation « Triangle et compas »**

Notre intention dans l'élaboration d'une situation mobilisant un duo d'artefacts numérique et matériel autour de l'apprentissage de la construction du triangle à la règle et au compas est de provoquer des genèses instrumentales du compas et l'évolution des conceptions du triangle et du cercle au cours de la situation.

Nous rappelons qu'il y a apprentissage lorsqu'il y a évolution des conceptions. Nous allons dans ce paragraphe présenter les parcours de conceptions du triangle et du cercle que nous considérons puis nous donnons une description détaillée de chaque conception ; nous détaillons dans chaque environnement, le quadruplet  $(P, L, R, \Sigma)$  formé des problèmes, du système de représentation, des opérateurs et des contrôles qui la caractérise. Nous caractérisons quatre conceptions du triangle et trois conceptions du cercle en nous appuyant sur les analyses préalables des concepts en jeu dans la construction du triangle (Chapitre 3) et sur les problèmes produits par la composition du duo et de la situation (Chapitre 5).

## 7.1.1. Quatre conceptions du triangle

### Un parcours de conceptions

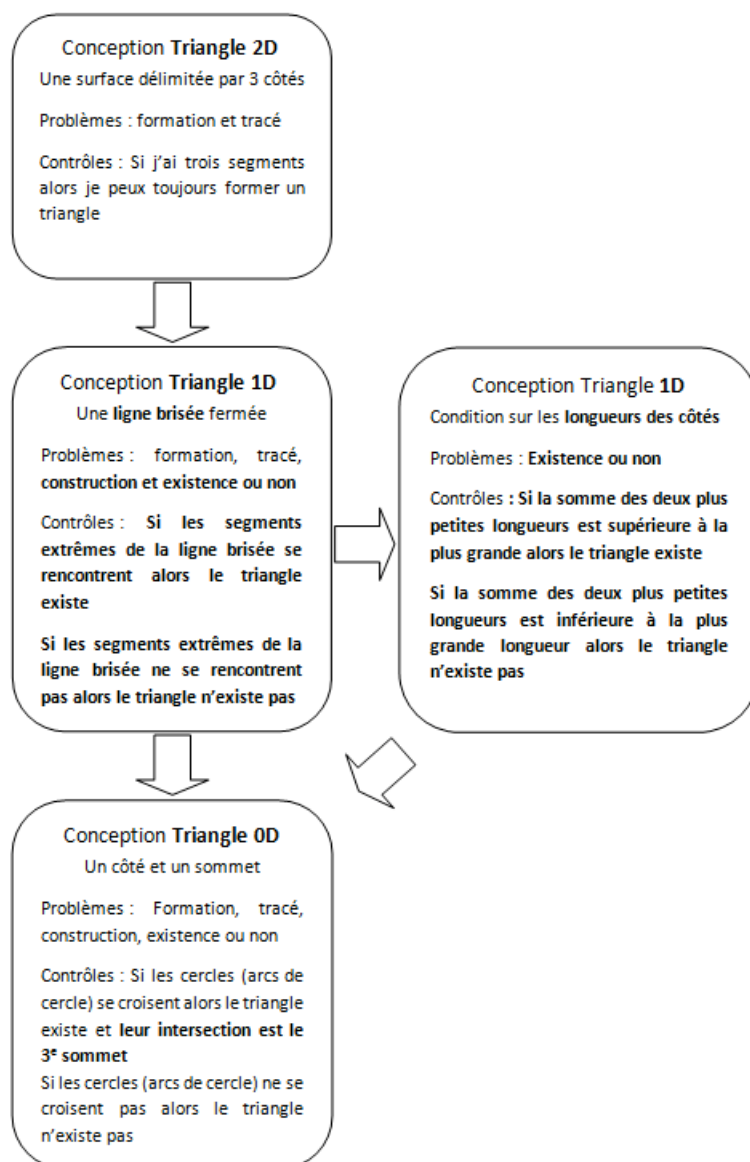


Figure 7.1 : Parcours de conceptions du triangle

Nous discernons quatre conceptions du triangle (Figure 7.1). Leur description repose sur une déconstruction dimensionnelle du triangle 2D au triangle identifié par un côté et un sommet 0D extérieur au segment. Nous considérons une conception « Triangle 2D » qui permet de résoudre des problèmes de formation ou de tracé de triangles mais qui ne permet ni de construire un triangle à la règle et au compas ni de caractériser l'existence ou non du triangle. Nous définissons deux conceptions engageant des objets 1D. La conception « Triangle 1D ligne brisée » permet de résoudre des problèmes de formation, de tracé et de construction de triangles. Elle permet aussi de résoudre les problèmes d'existence ou non du triangle. La conception « Triangle 1D longueur des côtés » permet de résoudre uniquement des problèmes d'existence ou non du triangle. Enfin nous

considérons une conception « Triangle 0D » qui permet de résoudre les quatre problèmes considérés dans notre situation : former, tracer, construire, déterminer l'existence ou non d'un triangle.

### Ce qui change d'une conception à une autre

Le passage de la conception « Triangle 2D » à la conception « Triangle 1D ligne brisée » constitue un apprentissage. En effet le passage par la ligne brisée introduit des nouveaux contrôles sur « l'enfermement » du triangle dans la ligne brisée ou non. Si les segments extrêmes de la ligne brisée se rencontrent alors le triangle existe ; si les segments extrêmes de la ligne brisée ne se rencontrent pas alors le triangle n'existe pas. Ces contrôles, d'existence ou non du triangle, contredisent le contrôle de la conception « Triangle 2D » : si j'ai trois longueurs alors je peux toujours former un triangle. De plus cette conception « Triangle 1D ligne brisée » permet aussi de construire à la règle et au compas un triangle de longueurs des côtés données en passant par le tracé d'une ligne brisée et en mobilisant le compas pour faire pivoter les segments extrêmes de la ligne brisée.

Le passage de la conception « Triangle 2D » à la conception « Triangle 1D longueurs des côtés » constitue aussi un apprentissage. Des conditions sur les longueurs données permettent de déterminer l'existence ou non du triangle. Comme précédemment cela contredit aussi la conception « Triangle 2D ».

Les contrôles d'existence ou non du triangle sont encore présents dans la conception triangle 0D. Ils sont reformulés en introduisant les cercles (arcs de cercle). Si les cercles (arcs de cercle) se croisent alors le triangle existe ; si les cercles (arcs de cercle) ne se croisent pas alors le triangle n'existe pas. De plus l'apprentissage constitué par le passage de la conception « Triangle 1D ligne brisée » à la conception « Triangle 0D » repose aussi sur un nouveau contrôle : si les cercles (arcs de cercle) se croisent alors leur intersection est le troisième sommet du triangle.

### Développement des différentes conceptions du triangle

Dans les descriptions des différentes conceptions, des différences apparaissent d'un environnement à l'autre du côté des opérateurs. En effet les opérateurs dépendent des artefacts en jeu. La description des opérateurs et des contrôles relatifs à chaque environnement sont visibles dans l'Annexe 2.

De plus on note que la conception triangle 0D ne peut être engagée dans l'environnement numérique de manipulation.

*Conception triangle 2D : Un triangle est une surface délimitée par trois côtés rectilignes*

<b>Problèmes</b>	Former, tracer des triangles		
<b>Systèmes de représentations</b>	Système graphique du dessin géométrique		
<b>Opérateurs</b>	<b>Numérique : manipulation</b>	<b>Papier-crayon</b>	<b>Outils de géométrie dynamique</b>
	Déplacer les segments côtés Par translation rTran ou rTrans Par rotation rPiv Superposer les extrémités rSu	Tracer les segments côtés successivement $rS1 + rS1E + rS3$	Tracer un triangle rT-gdT Ou Tracer les segments côtés successivement $rS1-gd + rS1E-gd + rS3-gd$
<b>Contrôles</b>	$\Sigma T1$ : Si une figure a trois côtés rectilignes alors la figure est un triangle $\Sigma T2$ : Si j'ai trois longueurs alors je peux toujours former un triangle		

*Conception triangle 1D ligne brisée : Un triangle est une ligne brisée de trois segments, fermée*

<b>Problèmes</b>	Former, tracer, construire des triangles Vérifier l'existence ou non d'un triangle		
<b>Systèmes de représentations</b>	Système graphique du dessin géométrique		
<b>Opérateurs</b>	<b>Numérique : manipulation</b>	<b>Papier-crayon</b>	<b>Outils de géométrie dynamique</b>
	Former une ligne brisée dont les extrémités peuvent pivoter rLiB Pivoter les segments extrêmes de la ligne brisée rPiv	Tracer une ligne brisée rLB Pivoter au compas les segments extrêmes $rPi = rPi1 + rPi2$	Tracer une ligne brisée rLB-gd Pivoter au compas-gd les segments extrêmes $rPi-gd = rPi1 - gd + rPi2-gd$
<b>Contrôles</b>	$\Sigma T1$ : Si une figure a trois côtés rectilignes alors la figure est un triangle $\Sigma T3$ : Si les segments extrêmes de la ligne brisée se rencontrent alors le triangle existe $\Sigma T4$ : Si les segments extrêmes de la ligne brisée ne se rencontrent pas alors le triangle n'existe pas		

*Conception Triangle 1D longueurs des côtés*

<b>Problèmes</b>	Vérifier l'existence ou non d'un triangle à partir de trois longueurs fixes données		
<b>Systèmes de représentations</b>	Système graphique du dessin géométrique		
<b>Opérateurs</b>	<b>Numérique : manipulation</b>	<b>Papier-crayon</b>	<b>Outils de géométrie dynamique</b>
	<p>Comparer la somme des longueurs des deux petits segments au plus grand en juxtaposant les deux petits au-dessus du grand</p> <p>rTran ou rTrans</p>	<p>Comparer la somme des longueurs des deux petits segments au plus grand en :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Traçant les deux petits segments au-dessus du grand rS2 + rS2E</li> <li>– Mesurant et calculant rM</li> </ul>	<p>Comparer la somme des longueurs des deux petits segments au plus grand en :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Traçant les deux petits segments au-dessus du grand rS2-gd + rS2E-gd</li> <li>– Mesurant et calculant rM-gd</li> </ul>
<b>Contrôles</b>	<p><math>\Sigma T8</math> : Si la somme des deux petites longueurs est supérieure à la plus grande alors le triangle existe</p> <p><math>\Sigma T9</math> : Si la somme des deux petites longueurs est inférieure à la plus grande alors le triangle n'existe pas</p>		

*Conception triangle 0D : Un triangle est déterminé par un côté et un sommet*

<b>Problèmes</b>	<p>Dessiner, tracer, construire des triangles</p> <p>Vérifier l'existence ou non d'un triangle à partir de trois longueurs fixes données</p>
<b>Systèmes de représentations</b>	Système graphique du dessin géométrique

Conception triangle OD : Un triangle est déterminé par un côté et un sommet

Opérateurs	Numérique : manipulation	Papier-crayon	Outils de géométrie dynamique
		<p>Tracer un segment de longueur donnée rS2</p> <p>Tracer un cercle (arc de cercle) de centre une extrémité du segment et de rayon égal au 2<sup>ème</sup> côté du triangle rC3 ou rAC3</p> <p>Tracer un cercle (arc de cercle) de centre l'autre extrémité du segment et de rayon égal au 3<sup>ème</sup> côté du triangle rC3 ou rAC3</p> <p>Tracer le triangle rS3</p>	<p>Tracer un segment de longueur donnée rS2-gd</p> <p>Tracer un cercle (arc de cercle) de centre une extrémité du segment et de rayon égal au 2<sup>ème</sup> côté du triangle rC3-gd ou rAC3-gd</p> <p>Tracer un cercle (arc de cercle) de centre l'autre extrémité du segment et de rayon égal au 3<sup>ème</sup> côté du triangle rC3-gd ou rAC3-gd</p> <p>Tracer le triangle rS3-gd</p>
Contrôles		<p><math>\Sigma T1</math> : Si une figure a trois côtés rectilignes alors la figure est un triangle</p> <p><math>\Sigma T5</math> : Si les cercles (arcs de cercle) se croisent alors le triangle existe</p> <p><math>\Sigma T6</math> : Si les cercles (arcs de cercle) ne se croisent pas alors le triangle n'existe pas</p> <p><math>\Sigma T7</math> : Si les cercles (arcs de cercle) se croisent alors l'intersection est le 3<sup>ème</sup> sommet du triangle</p>	

### 7.1.2. Trois conceptions du cercle

#### Un parcours de conceptions

Nous discernons trois conceptions du cercle (Figure 7.2).

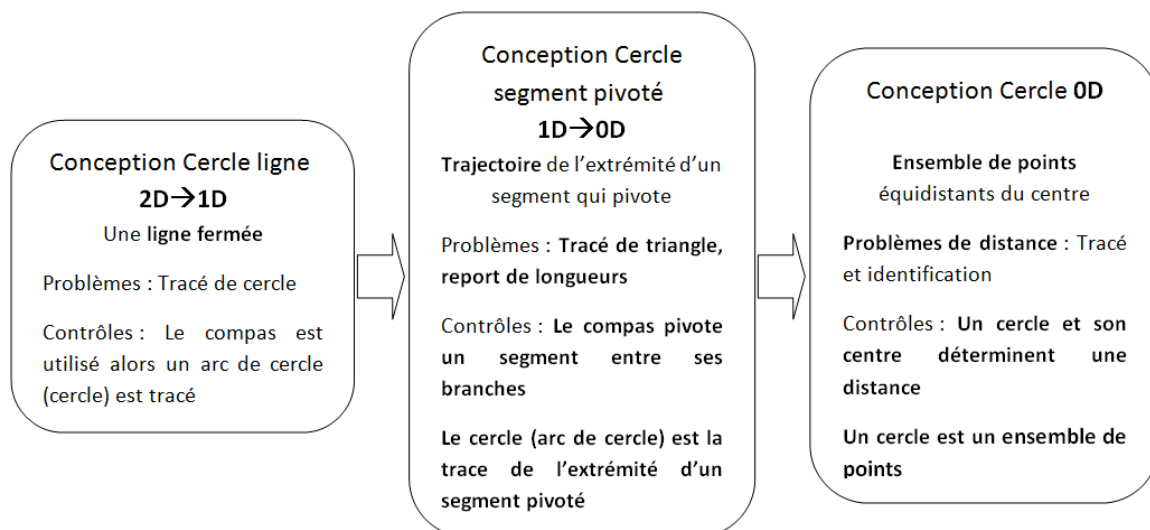


Figure 7.2 : Parcours de conceptions du cercle

Leur description repose aussi sur une déconstruction dimensionnelle du rond 2D par la ligne 1D jusqu'à l'ensemble de points 0D.

La conception « Cercle ligne » est engagée dans les problèmes de tracé de cercles. Elle ne permet pas de résoudre des problèmes de reports de longueurs ni de constructions de triangles. C'est la conception « Cercle segment pivoté » qui permet la résolution de tels problèmes. Cette conception est toujours attachée au compas ; ses branches étant maintenant les extrémités d'un segment. Cette conception fait apparaître le concept de distance associé au cercle. Enfin la conception « Cercle 0D » permet de résoudre des problèmes de distance. Le cercle est lui-même outil dans cette conception qui n'a plus aucune référence au compas.

### Ce qui change d'une conception à une autre

Comme dans le cas des conceptions du triangle nous identifions que ce qui varie d'une conception à une autre ce sont les problèmes et les contrôles. On repère à nouveau la progression des apprentissages dans les contrôles engagés. La conception « Cercle segment pivoté » apporte la notion de distance associée au cercle grâce au compas qui est un instrument pour pivoter un segment. La conception « Cercle 0D » libère le cercle du compas ; elle maintient le concept de distance associé au cercle et apporte l'aspect ponctuel.

### Développement des différentes conceptions du cercle

*Conception cercle ligne : un cercle est une ligne fermée*

<b>Problèmes</b>	Tracés de cercles, de centre donné et passant par un point, de centre et de rayon donné
<b>Système de représentation</b>	Système graphique du dessin géométrique



*Conception cercle ligne : un cercle est une ligne fermée*

Opérateurs	Papier-crayon	Outils de géométrie dynamique
	Mobiliser le compas	Mobiliser le compas-gd Mobiliser l'outil cercle
Contrôles	$\Sigma C1$ : Le compas est utilisé alors un arc de cercle est produit $\Sigma C1'$ : La ligne est fermée alors l'arc de cercle est un cercle	

*Conception cercle segment pivoté : un cercle est la trajectoire de l'extrémité d'un segment qui pivote autour d'une extrémité qui reste fixe*

Problèmes	Tracés de triangles, report de longueurs	
Système de représentation	Système graphique du dessin géométrique	
Opérateurs	Papier-crayon	Outils de géométrie dynamique
	Produire, à l'aide du compas, la trace de l'extrémité qui pivote rPi1	Produire, à l'aide du compas-gd ou de l'outil cercle, la trace de l'extrémité qui pivote rPi1-gd
Contrôles	$\Sigma C2$ : Le compas pivote alors un segment pivote entre ses branches $\Sigma C3$ : Un cercle (arc de cercle) est visible alors la trajectoire de l'extrémité pivoté est visible	

*Conception cercle OD : un cercle est l'ensemble des points équidistants de son centre*

Problèmes	Problèmes de distance	
Système de représentation	Système graphique du dessin géométrique	
Opérateurs	Papier-crayon	Outils de géométrie dynamique
	Tracer un cercle (arc de cercle) de centre et de rayon donné rC3 ou rAC3	Tracer un cercle (arc de cercle) de centre et de rayon donné rC3-gd ou rAC3-gd
Contrôles	$\Sigma C4$ : Un cercle et son centre sont visibles alors une distance est identifiée $\Sigma C5$ : Un cercle (arc de cercle) est visible alors un ensemble de points a été tracé	

## 7.2. Déplacement par rotation et conceptions « Triangle 1D »

### 7.2.1. Enjeu du premier cahier informatisé

Les problèmes de ce premier cahier informatisé « A la découverte des triangles » (Figure 7.3) sont de former des triangles à partir de leurs trois côtés donnés et de déterminer si les triangles existent ou pas suivant les côtés disponibles.

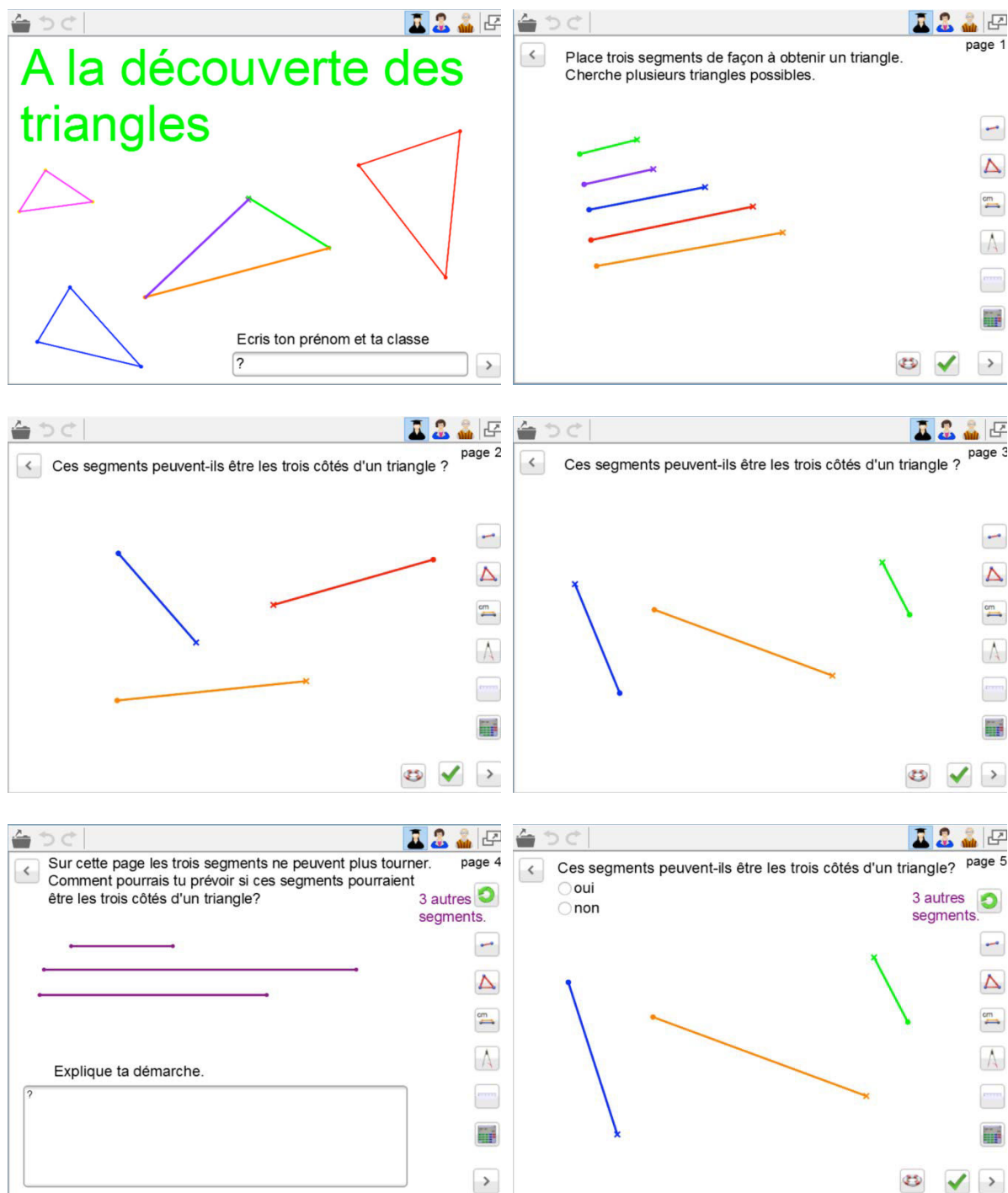


Figure 7.3 : Premier cahier informatisé « A la découverte des triangles »

La conception « Triangle 2D » est applicable. Le triangle surface 2D est obtenu grâce à la manipulation des segments côtés 1D. La manipulation des segments côtés a pour but de mettre en évidence le déplacement par rotation des segments indispensable pour former un triangle dans l'environnement numérique. En outre l'objectif de ce cahier est de faire apparaître la conception « Triangle 1D ligne brisée » contour ouvert du triangle et la conception « Triangle 1D longueur des côtés ».

### Choix de valeurs des variables didactiques

#### *Les longueurs des segments présents sur les pages*

Dans les différentes pages du cahier informatisé « A la découverte des triangles », les longueurs des segments proposés, permettent à l'élève de rencontrer des triplets de longueurs qui vérifient l'inégalité triangulaire, et d'autres qui ne la vérifient pas. Ainsi dans certains cas le triangle existe dans d'autres il n'existe pas. Le triangle plat peut aussi être rencontré sur la première page. Ces valeurs de variables didactiques révèlent le problème d'existence ou non du triangle qui ne peut être résolu avec la conception « Triangle 2D ». La mise en œuvre de contrôles sur les longueurs des segments s'impose donc, ce qui nécessite la mobilisation d'une nouvelle conception « Triangle 1D ».

#### *Les déplacements des segments*

Dans ce premier cahier informatisé seules deux valeurs de cette variable sont attribuées aux segments : le double déplacement par translation et par rotation dissociées, ainsi que le déplacement par translation uniquement. La distinction graphique des extrémités, ronde ou cruciforme, permet à l'utilisateur d'anticiper le mouvement avant de bouger le segment. Lorsque les segments proposés apparaissent asymétriques dans leur représentation à l'écran, leur déplacement est double : l'extrémité ronde ainsi que tout point du segment autorise un déplacement par translation et l'extrémité cruciforme autorise le déplacement par rotation autour de l'extrémité ronde qui reste fixe. Lorsque les segments ont deux extrémités rondes le seul déplacement autorisé est celui par translation uniquement.

Ces deux valeurs de la variable didactique déplacement engendrent les opérateurs de déplacement des segments numériques par translation et par rotation autour de l'extrémité ronde qui reste fixe ; ce dernier opérateur provoque l'élaboration d'un instrument déplacement par rotation pour faire pivoter un segment.

### 7.2.2. Stratégies, opérateurs et contrôles en jeu

*Cahier 1 : Problème 1 : Former un triangle avec 3 segments de longueurs fixes données et pouvant être déplacés par translation et rotation dissociées*

#### *Stratégie ajustement*

Cette stratégie consiste à positionner successivement trois segments de manière à faire superposer leurs extrémités pour former un triangle. Un premier segment est placé puis

un deuxième en anticipant la place nécessaire pour le troisième, enfin le troisième segment est positionné dans l'espace prévu pour lui. Les extrémités des segments sont déplacées et ajustées jusqu'à être superposées (Figure 7.4).

La mise en œuvre de cette stratégie engage la conception initiale supposée sur le triangle, la conception « Triangle 2D » : Un triangle est une surface délimitée par trois côtés rectilignes. Le processus de résolution est engagé sur la base d'un contrôle qui soutient qu'avec trois segments on peut toujours obtenir un triangle ( $\Sigma T2$ ). Les segments côtés du triangle étant présents sur la page, il suffit de les mettre dans la bonne position. La bonne position est la position triangle qui sera reconnue comme une figure à trois côtés ( $\Sigma T1$ ). La résolution du problème sera alors réalisée grâce à un enchaînement organisé d'opérateurs et de contrôles : déplacer les segments côtés par translation ( $\Sigma Tran$ ) et par rotation autour de l'extrémité ronde qui reste fixe ( $rRot + \Sigma Rot$ ) ; superposer les extrémités ( $rSu + \Sigma Su$ ). Enfin le problème est considéré comme résolu grâce à un contrôle visuel qui reconnaît une figure à trois côtés comme un triangle ( $\Sigma T1$ ).

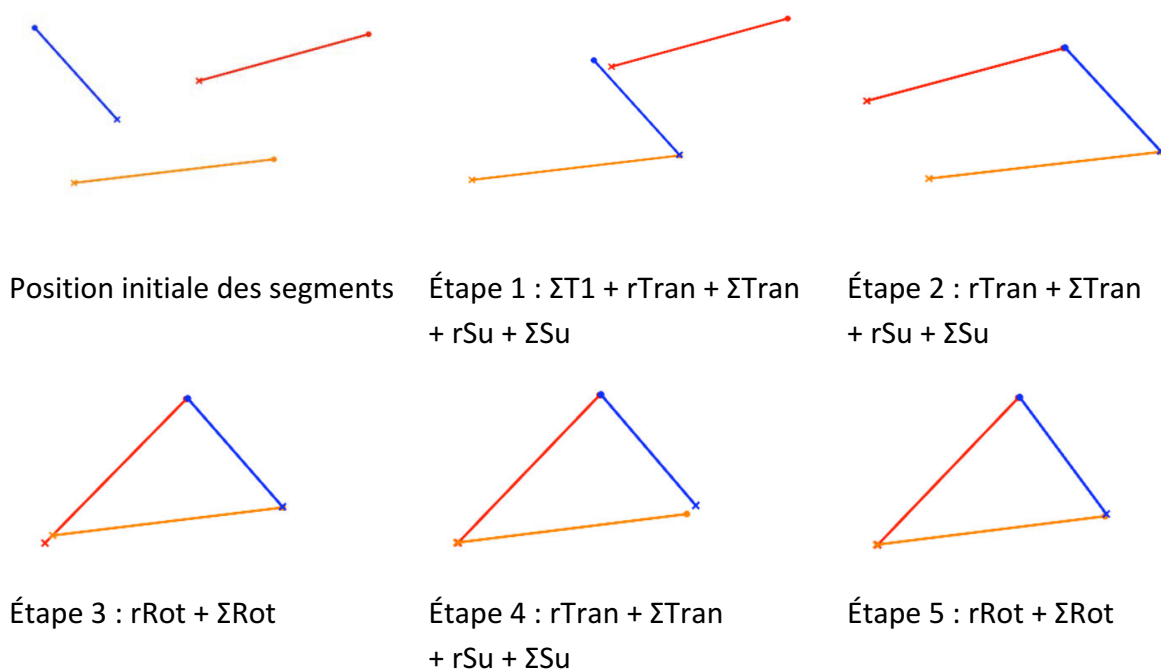


Figure 7.4 : Illustration d'une « stratégie ajustement » pour former un triangle par un enchaînement d'opérateurs et de contrôles

### Stratégie ligne brisée

Cette stratégie consiste dans un premier temps à former une ligne brisée de trois segments. Il s'agit ensuite de faire pivoter les segments extrêmes de la ligne brisée afin de former un triangle ou d'établir l'inexistence d'un triangle ayant ces trois segments pour côtés (Figure 7.5).

La mise en œuvre de cette stratégie engage la conception « Triangle 1D ligne brisée » : un triangle est une ligne brisée de trois segments fermés. Comme dans la stratégie précédente, les segments côtés du triangle étant présents sur la page, il suffit de les mettre dans la bonne position. La bonne position est la position triangle qui sera

reconnue comme une ligne brisée de trois segments, fermée. Ainsi cette stratégie se fonde sur deux nouveaux opérateurs : former une ligne brisée dont les extrémités peuvent pivoter ( $\Sigma\text{Extr} + r\text{LiB} + \Sigma\text{LB}$ ) et pivoter les segments extrêmes de la ligne brisée ( $r\text{Piv} + \Sigma\text{Rot}$ ) jusqu'à superposer leurs extrémités ( $r\text{Su} + \Sigma\text{Su}$ ). La formation d'une ligne brisée dont les extrémités peuvent pivoter, c'est-à-dire dont les extrémités sont cruciformes, engage un contrôle préalable qui consiste à distinguer les extrémités ( $\Sigma\text{Extr}$ ). De plus, deux nouveaux contrôles postérieurs à l'action apparaissent ici. Si les segments extrêmes de la ligne brisée se rencontrent alors le triangle existe ( $\Sigma\text{T3}$ ). Si les segments extrêmes de la ligne brisée ne se rencontrent pas alors le triangle n'existe pas ( $\Sigma\text{T4}$ ). Ce dernier contrôle contredit la structure de contrôle de la conception « Triangle 2D » qui prétend qu'avec trois segments on peut toujours former un triangle.

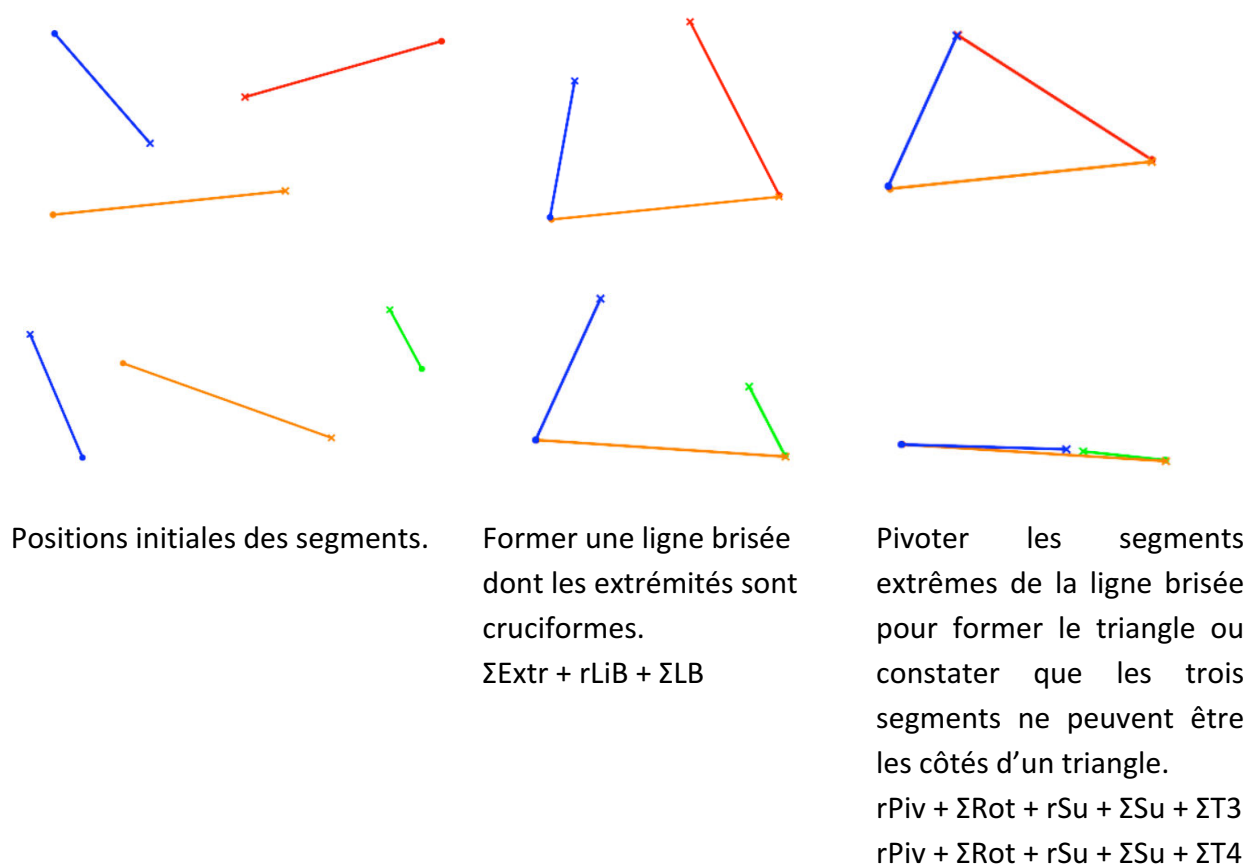


Figure 7.5 : Illustration de la « stratégie ligne brisée » par un enchaînement d'opérateurs et de contrôles

**Cahier 1 : problème 2 : Trois segments donnés, ne pouvant être déplacés que par translation, peuvent-ils être les trois côtés d'un triangle ?**

Afin de permettre la mise en place de stratégies d'anticipation, page 4 du cahier, seul le déplacement des segments par translation est possible. Il n'est plus possible de faire pivoter les segments, il n'est donc plus possible de former le triangle à partir des segments proposés.

*Stratégie juxtaposer comme une ligne brisée*

Cette stratégie consiste à juxtaposer les deux petits segments au-dessus du plus grand à la manière d'une ligne brisée : une extrémité de chaque petit segment coïncide avec chaque extrémité du grand segment (Figure 7.6)



Les petits segments se superposent alors  
le triangle existe.

$rTran$  ou  $rTrans + \Sigma Tran + \Sigma LB + \Sigma T3$

Les petits segments ne se superposent pas  
alors le triangle n'existe pas.

$rTran$  ou  $rTrans + \Sigma Tran + \Sigma LB + \Sigma T4$

Figure 7.6 : Illustration de la « stratégie juxtaposer comme une ligne brisée » par un enchaînement d'opérateurs et de contrôles

Cette stratégie engage à nouveau la conception « Triangle 1D ligne brisée » : un triangle est une ligne brisée fermée. La résolution du problème consiste à déplacer les segments par translation ( $rTran$  ou  $rTrans + \Sigma Tran$ ) pour venir les disposer comme une ligne brisée ( $\Sigma LB$ ) ; sans toutefois que les trois segments soient superposés. Les deux contrôles : si les segments extrêmes de la ligne brisée se rencontrent alors le triangle existe ( $\Sigma T3$ ) et si les segments extrêmes de la ligne brisée ne se rencontrent pas alors le triangle n'existe pas ( $\Sigma T4$ ), permettent de répondre positivement ou négativement à l'existence d'un triangle ayant ces segments pour côtés.

*Stratégie juxtaposer comme l'inégalité triangulaire*

Cette stratégie consiste à juxtaposer les deux petits segments au-dessus du plus grand comme l'inégalité triangulaire ; sans toutefois que les trois segments soient superposés. Les deux petits segments sont déplacés par translations ( $rTran$  ou  $rTrans + \Sigma Tran$ ) pour être joints par une extrémité ( $rSu + \Sigma Su$ ) et juxtaposés au-dessus du grand segment ; une extrémité des deux segments joints est juxtaposée à une extrémité du grand segment (Figure 7.7).



La somme des longueurs des petits  
segments est supérieure au grand  
segment alors le triangle existe.

$rTran$  ou  $rTrans + \Sigma Tran + rSu + \Sigma Su + \Sigma T8$

La somme des longueurs des petits segments  
est inférieure au grand segment alors le  
triangle n'existe pas.

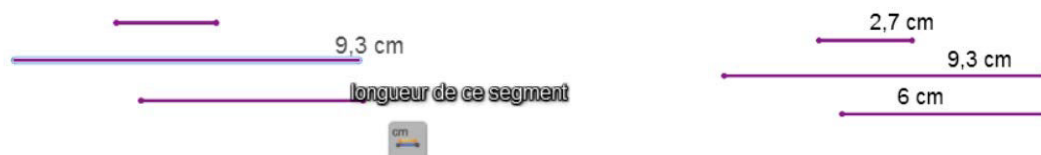
$rTran$  ou  $rTrans + \Sigma Tran + rSu + \Sigma Su + \Sigma T9$

Figure 7.7 : Illustration de la « stratégie juxtaposer comme l'inégalité triangulaire » par un enchaînement d'opérateurs et de contrôles

Cette stratégie mobilise la conception « Triangle 1D longueurs des côtés ». Deux contrôles sont en jeu dans cette conception. Si la somme des deux petites longueurs est supérieure à la grande longueur alors le triangle existe ( $\Sigma T8$ ). Si la somme des deux petites longueurs est inférieure à la grande longueur alors le triangle n'existe pas ( $\Sigma T9$ ). Ils permettent à la fois d'engager l'action et aussi de juger de l'état de résolution du problème d'existence ou non du triangle.

### Stratégie inégalité triangulaire

Cette stratégie conduit à utiliser l'outil mesure et à appliquer l'inégalité triangulaire (Figure 7.8). Comme la stratégie précédente cette stratégie mobilise la conception « Triangle 1D longueurs des côtés ». Les contrôles en jeu ici sont donc identiques à ceux de la stratégie précédente. Si la somme des deux petites longueurs est supérieure à la grande longueur alors le triangle existe ( $\Sigma T8$ ). Si la somme des deux petites longueurs est inférieure à la grande longueur alors le triangle n'existe pas ( $\Sigma T9$ ). L'utilisation de l'outil mesure engendre un nouvel opérateur (rM-gdM) permettant de connaître la longueur de chaque segment. Ces longueurs connues, l'inégalité triangulaire peut être testée.



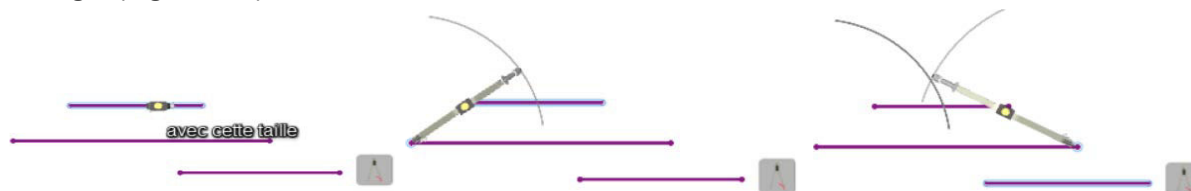
Mesurer la longueur de chaque segment avec l'outil mesure.

$8,7 < 9,3$ . Ces trois segments ne peuvent pas être les trois côtés d'un triangle.  
rM-gdM +  $\Sigma T8$  ou  $\Sigma T9$

Figure 7.8 : Illustration de la « stratégie inégalité triangulaire » par un enchaînement d'opérateurs et contrôles

### Stratégie construction au compas

Cette stratégie consiste à utiliser l'outil compas pour construire le 3<sup>ème</sup> sommet du triangle (Figure 7.9).



Écarter le compas-gd à la longueur d'un segment.

Tracer un cercle (arc de cercle).  
rC3-gdCo ou rAC3-gd  
+  $\Sigma$ PointeC +  $\Sigma$ MineC +  $\Sigma$ AC  
ou  $\Sigma$ C

Répéter la procédure avec le troisième segment. Les cercle (arcs de cercle se croisent, alors ces trois segments peuvent être les trois côtés d'un triangle.  
 $\Sigma T5$  +  $\Sigma T7$  ou  $\Sigma T6$

Figure 7.9 : Illustration de la « stratégie construction au compas » par un enchaînement d'opérateurs et de contrôles

Cette stratégie engage la conception cible du triangle, la conception « Triangle 0D » : un triangle est déterminé par un côté et un sommet. L'action repose sur la détermination du 3<sup>ème</sup> sommet du triangle ( $\Sigma T7$ ). Les opérateurs permettant la résolution du problème sont des tracés de cercles (arcs de cercle) de rayons donnés au compas-gd (rC3-gdCo ou rAC3-gd +  $\Sigma$ PointeC +  $\Sigma$ MineC +  $\Sigma$ AC ou  $\Sigma$ C). La résolution du problème, d'existence ou non du triangle, s'appuie sur les contrôles suivants. Si les cercles (arcs de cercle) se croisent alors

le triangle existe ( $\Sigma T5$ ). Si les cercles (arcs de cercle) ne se croisent pas alors le triangle n'existe pas ( $\Sigma T6$ ).

Cette stratégie mobilise aussi la conception cible du cercle, la conception « Cercle 0D » : un cercle est l'ensemble des points équidistants de son centre. Cette conception repose sur deux nouveaux contrôles. Un cercle (arc de cercle) et son centre sont visibles alors une distance est identifiée ( $\Sigma C4$ ). Un cercle (arc de cercle) est visible alors un ensemble de points a été tracé ( $\Sigma C5$ ).

### 7.2.3. Caractérisation des nouveaux équilibres du système [sujet-milieu], conceptions et instruments

Ce premier cahier informatisé a été conçu pour amener l'usage du compas dans la construction géométrique d'un triangle dont les longueurs des trois côtés sont données. Nous allons dans ce paragraphe caractériser les éléments du milieu qui favorisent les ruptures d'équilibre du système [sujet-milieu] et ainsi favorisent l'évolution des conceptions et donc l'apprentissage.

Les segments numériques asymétriques dans leurs déplacements sont les éléments centraux du milieu constitué par ce cahier informatisé. En effet, l'environnement informatique oblige à dissocier les deux déplacements, par translation et par rotation autour d'une extrémité, contrairement aux manipulations d'objets matériels lors desquelles les déplacements sont réalisés conjointement. Ainsi l'environnement informatique met en évidence la rotation indispensable pour former un triangle à partir des segments numériques. De plus, cette asymétrie de mouvement des segments induit une stratégie gagnante efficace pour former un triangle. Le fait que les deux extrémités d'un segment ne pivotent pas rend fastidieuse la « stratégie par ajustement ». Les ajustements faciles à réaliser sont les ajustements par rotation et c'est ainsi que la « stratégie ligne brisée » prend forme. Une stratégie gagnante efficace pour former un triangle à partir des segments proposés dans l'environnement informatique, consiste à former, avec trois segments, une ligne brisée dont les extrémités sont cruciformes. Le triangle sera ensuite obtenu en faisant pivoter les deux segments extrêmes de la ligne brisée. Ainsi l'environnement informatique crée un milieu qui met en évidence la rotation, indispensable pour former un triangle à partir des segments numériques et conduit à la mise en œuvre d'une « stratégie ligne brisée », stratégie gagnante porteuse d'apprentissage (Voltolini, 2014).

#### L'apprentissage inclus dans la stratégie gagnante

L'apprentissage est inclus dans cette « stratégie ligne brisée ». En effet cette stratégie est associée à la conception « Triangle 1D ligne brisée » : un triangle est une ligne brisée fermée. Cette nouvelle conception contient une structure de contrôle nouvelle par rapport à la conception initiale, la conception « Triangle 2D ». Si les segments extrêmes de la ligne brisée ne se rencontrent pas alors le triangle n'existe pas. Ce contrôle apparaît



à la page trois du cahier. Les longueurs des segments proposés sur cette page ne vérifiant pas l'inégalité triangulaire, le triangle n'existe pas. La « stratégie ligne brisée » met en évidence que dans ce cas on ne peut pas fermer la ligne brisée pour obtenir un triangle.

De plus cette « stratégie ligne brisée » est une première étape dans la déconstruction dimensionnelle du triangle. L'activité de formation du triangle dans l'environnement informatique à partir de trois segments en passant par la ligne brisée repose sur une reconstruction du triangle 2D à partir de la ligne brisée 1D. Cette montée dans les dimensions permet le passage d'une ligne à une surface et constitue une étape dans la construction géométrique du triangle à la règle et au compas qui, elle, repose sur une reconstruction du triangle 2D à partir du point d'intersection 0D des deux arcs de cercle, représentant le troisième sommet du triangle.

### Un nouvel instrument élaboré : le déplacement par rotation

Dans ce premier cahier informatisé émergent deux instruments déplacements : un déplacement par translation et un déplacement par rotation. Le déplacement par rotation est construit pour faire pivoter les segments, en particulier les segments extrêmes d'une ligne brisée. Le déplacement par rotation est indispensable pour former un triangle dans l'environnement numérique. Un schème d'utilisation du déplacement par rotation pour pivoter un segment est décrit à l'aide de l'enchaînement d'opérateurs et de contrôles :  $[(\Sigma \text{Ext} + r\text{Rot} = r\text{Piv}) + \Sigma \text{Rot}]$ . C'est cet instrument « déplacement par rotation pour pivoter un segment numérique » qui va induire l'usage du compas matériel pour construire un triangle dans l'environnement papier-crayon.

## 7.3. Un nouvel instrument compas pour pivoter un segment

### 7.3.1. Enjeu de la première activité papier-crayon

Le premier cahier informatisé « A la découverte des triangles » est articulé à l'utilisation du compas matériel dans l'environnement papier-crayon.

Il s'agit dans cette activité papier-crayon de poursuivre l'exploration du triangle en ses trois côtés et mettre en place la ligne brisée comme étape dans la construction du triangle. Les problèmes de cette première activité papier-crayon (Figure 7.10) sont d'une part de construire des triangles à partir de leurs trois côtés donnés sous forme de segments tracés et d'autre part, de déterminer l'existence ou non de chaque triangle. La conception « Triangle 1D ligne brisée » est applicable. Le triangle est obtenu grâce à la mobilisation du compas matériel pour remplacer le déplacement par rotation du cahier informatisé ; le compas est utilisé pour pivoter les segments extrêmes d'une ligne brisée. L'objectif de cette première activité est de provoquer l'élaboration d'un instrument compas pour pivoter un segment et d'amener la conception « Cercle segment pivoté ».

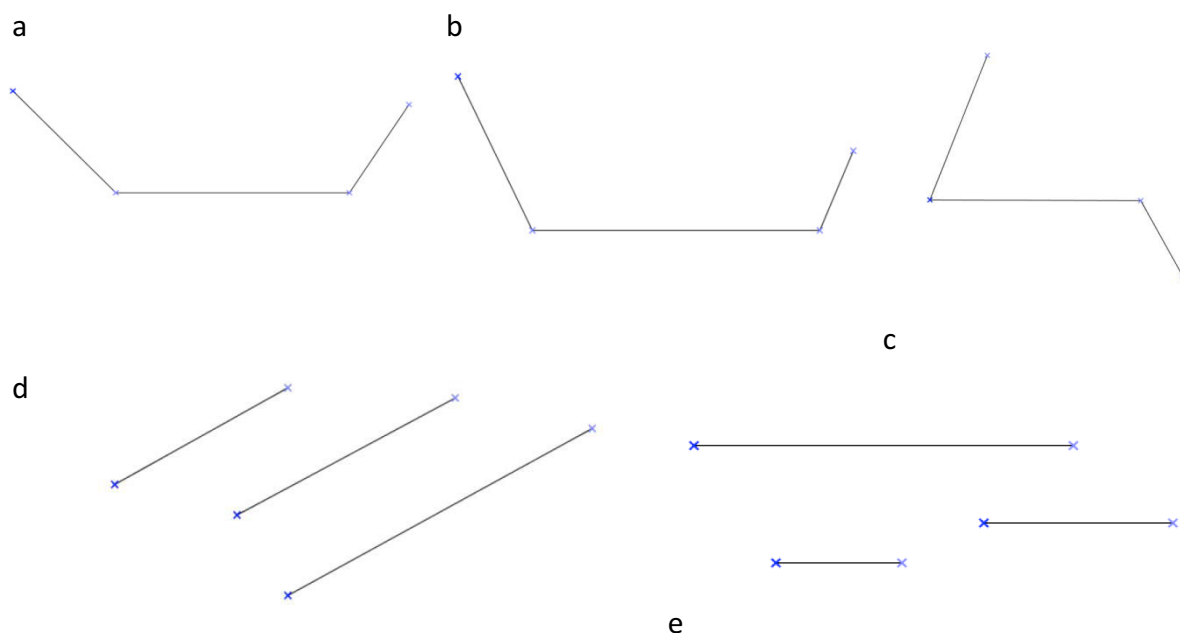


Figure 7.10 : Première activité papier-crayon

## Choix de valeurs de variables didactiques

### *Les longueurs des segments proposés*

Dans cette activité l'élève rencontre, comme dans le premier cahier informatisé, des cas de figures où le triangle existe et d'autres cas où les longueurs des segments ne vérifient pas l'inégalité triangulaire, le triangle ne peut donc pas être tracé. Ces choix de valeurs de variables didactiques sont faits de façon à continuer à induire des problèmes d'existence ou non du triangle et entraîner la mobilisation de conceptions « Triangle 1D ».

### *La configuration des segments proposés*

Dans la construction du triangle à la règle et au compas, le compas ne rend pas visibles les segments côtés du triangle. La technologie numérique nous a permis de les rendre visibles dans le premier cahier informatisé. Ainsi dans la première activité papier-crayon, le choix de proposer des segments tracés et non des longueurs données sous forme de nombres, est fait dans le but de poursuivre l'exploration du triangle à partir de ses côtés comme dans le cahier informatisé. Les configurations ligne brisée engendrent la mise en œuvre d'opérateurs et de contrôles pour pivoter les segments extrêmes qui provoquent l'élaboration d'un instrument compas pour pivoter un segment et engendre la conception « Cercle segment pivoté ».

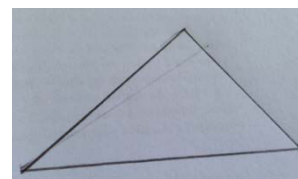
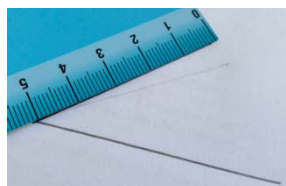
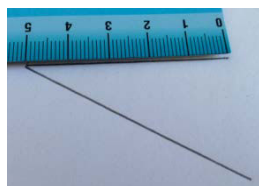
## 7.3.2. Stratégies, opérateurs et contrôles en jeu

*Papier crayon 1 : problème 3 : Peut-on obtenir un triangle avec les trois segments tracés sur la feuille ? Si oui le tracer.*

*Stratégie à la règle graduée uniquement*

Cette stratégie consiste à tracer le triangle uniquement à la règle graduée. Les segments initiaux sont mesurés (rM). Puis les côtés successifs du triangle sont tracés : un premier

segment, puis un deuxième en anticipant la place nécessaire pour le troisième, et enfin le troisième segment est tracé ( $rS2 + rS2E + rS2E$ ). Les segments côtés du triangle sont ensuite ajustés pour obtenir le triangle (Figure 7.11).



Tracer à la règle les deux premiers côtés.  $\Sigma T1 + rS2 + rS2E + \Sigma S$

La place laissée libre pour le troisième côté n'est pas suffisante.

Gommer le deuxième côté et tracer un autre représentant du côté.

Le triangle est obtenu.  $\Sigma T1 + \Sigma Tri$

Figure 7.11 : Illustration de la « stratégie à la règle uniquement » par un enchaînement d'opérateurs et de contrôles

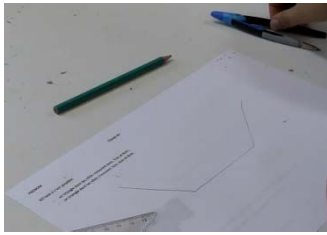
Cette stratégie engage la conception « Triangle 2D » : un triangle est une surface délimitée par trois côtés rectilignes. Les opérateurs permettant la résolution du problème sont des opérateurs de mesure de longueurs ( $rM$ ) et de tracés de segments de longueurs données ( $rS2$  ou  $rS2E$ ). Les segments côtés étant donnés, en considérant qu'avec trois segments il est toujours possible d'obtenir un triangle ( $\Sigma T2$ ), il suffit de les mesurer et de les tracer de manière à former une figure à trois côtés ( $\Sigma T1$ ).

#### Stratégie ligne brisée

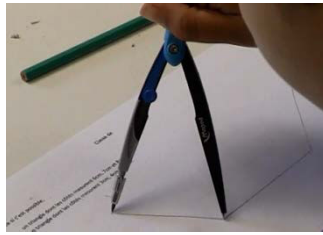
Cette stratégie consiste dans un premier temps à tracer une ligne brisée constituée des trois segments proposés ( $rLB + \Sigma LB$ ). Il s'agit ensuite de faire pivoter les segments extrêmes de la ligne brisée à l'aide du compas ( $rPi1 + \Sigma AC$ ) et d'établir l'existence ou non du triangle ( $\Sigma T3$  ou  $\Sigma T4$ ). Si le triangle existe, il faut tracer le segment résultat du pivotement qui a la même longueur que le segment initial ( $rPi2 + \Sigma Pi$ ) afin d'obtenir un triangle (Figure 7.12).

Cette stratégie engage la conception « Triangle 1D ligne brisée » : un triangle est une ligne brisée de trois segments, fermée. La résolution du problème est obtenue à l'aide de deux nouveaux opérateurs n'appartenant pas à la conception initiale « Triangle 2D ». Il s'agit de tracer une ligne brisée ( $rLB$ ) puis de pivoter à l'aide du compas les segments extrêmes ( $rPi = rPi1 + rPi2$ ). Pivoter un segment dans l'environnement papier-crayon consiste à mobiliser le compas pour produire la trace de l'extrémité du segment qui pivote ( $rPi1$ ) puis à tracer le segment résultat du pivotement de même longueur que le segment initial ( $rPi2$ ) à l'aide de la règle. Mobiliser le compas pour produire la trace de l'extrémité du segment qui pivote engage deux contrôles sur l'utilisation du compas. La pointe doit être piquée sur l'extrémité du segment qui reste fixe ( $\Sigma Pointe$ ) et la mine doit être posée sur l'extrémité du segment à pivoter ( $\Sigma Mine$ ). Des contrôles permettent des jugements sur l'état de résolution du problème. Si les segments extrêmes de la ligne brisée se

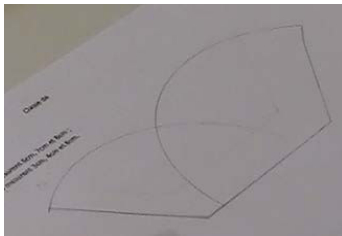
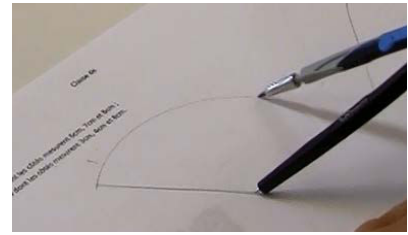
rencontrent alors le triangle existe ( $\Sigma T3$ ). Si les segments extrêmes de la ligne brisée ne se rencontrent pas alors le triangle n'existe pas ( $\Sigma T4$ ). L'intersection des cercles (arcs de cercle) est identifiée au point de rencontre des segments pivotés de la ligne brisée.



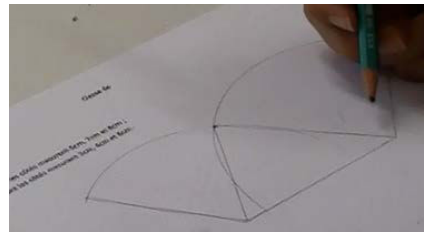
Tracer une ligne brisée.  
 $rLB + \Sigma LB$



Pivoter un premier segment. Le compas produit la trace de l'extrémité du segment qui pivote.  $\Sigma Pointe + \Sigma Mine + rPi1 + \Sigma AC$

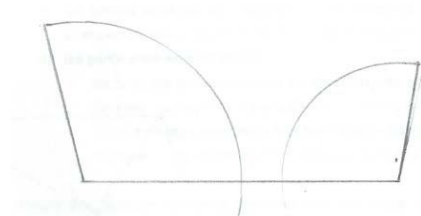


Pivoter le deuxième segment.  $\Sigma Pointe + \Sigma Mine + rPi1 + \Sigma AC$



Tracer les segments résultats du pivotement pour obtenir le triangle.  $\Sigma Pi + rPi2 + \Sigma Tri$

Les segments extrêmes de la ligne brisée se rencontrent, le triangle existe.  $\Sigma T3$



Les segments extrêmes de la ligne brisée ne se rencontrent pas, il n'est pas possible de construire un triangle avec ces trois segments pour côtés.  $\Sigma T4$

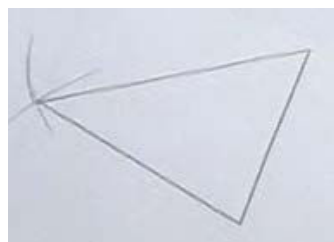
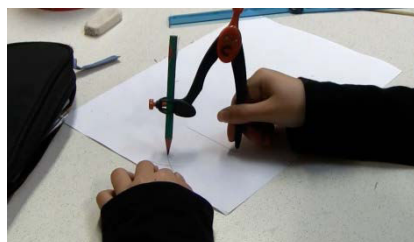
Figure 7.12 : Illustration de la « stratégie ligne brisée » par un enchaînement d'opérateurs et de contrôles

Cette stratégie engage aussi une conception du cercle, la conception « Cercle segment pivoté » : un cercle est la trajectoire de l'extrémité d'un segment qui pivote autour d'une extrémité qui reste fixe. Dans cette stratégie le compas est placé sur un segment déjà tracé ; mobilisé pour pivoter ce segment ( $rPi1$ ) entre ses branches ( $\Sigma C2$ ) il produit un cercle (arc de cercle) qui est la trace de l'extrémité du segment pivoté ( $\Sigma C3$ ).

#### Stratégie construction à la règle et au compas

Cette stratégie est la procédure d'apprentissage visée. Elle consiste à tracer un premier segment de longueur donnée ( $rS2 + \Sigma S$ ) puis à tracer deux cercles (arcs de cercle) de centre chaque extrémité du segment et de rayons respectifs les autres côtés du triangle

( $\Sigma\text{PointC} + \Sigma\text{MineC} + rC3$  ou  $rAC3 + \Sigma C$  ou  $\Sigma AC$ ). Enfin on trace le ou les triangles solutions ( $rS3 + \Sigma S + \Sigma\text{Tri}$ ) (Figure 7.13).



Tracer un premier côté du triangle.  $rS2 + \Sigma S$

Au compas tracer deux cercles (arcs de cercle) de rayon les deux autres côtés du triangle et centrés sur chaque extrémité du segment tracé.  $\Sigma T7 + \Sigma\text{PointC} + \Sigma\text{MineC} + rC3$  ou  $rAC3 + \Sigma C$  ou  $\Sigma AC$

Tracer les deux derniers côtés du triangle.  $rS3 + \Sigma S$

L'intersection des arcs de cercle détermine le 3<sup>ème</sup> sommet du triangle.  $\Sigma T5 + \Sigma T7 + \Sigma\text{Tri}$

Figure 7.13 : Illustration de la « stratégie construction à la règle et au compas » par un enchaînement d'opérateurs et de contrôles

Cette stratégie est semblable à la stratégie « construction au compas » décrite dans le premier cahier informatisé. Elle engage la conception cible « Triangle OD » : un triangle est déterminé par un côté et un sommet. L'action repose sur la détermination du 3<sup>ème</sup> sommet du triangle ( $\Sigma T7$ ). Les opérateurs permettant la résolution du problème sont des tracés de cercles (arc de cercle) de rayons donnés au compas ( $rC3$  ou  $rAC3$ ). Les contrôles en jeu sont d'une part des contrôles relatifs au triangle et d'autre part des contrôles relatifs au cercle. Si les cercles (arcs de cercle) se croisent alors le triangle existe ( $\Sigma T5$ ) et si les cercles (arcs de cercle) ne se croisent pas alors le triangle n'existe pas ( $\Sigma T6$ ). De plus si les cercles se croisent alors leur intersection est le troisième sommet du triangle ( $\Sigma T7$ ).

La conception « Cercle OD » : un cercle est l'ensemble des points équidistants de son centre est engagée dans cette stratégie. Cette conception repose sur deux nouveaux contrôles. Un cercle (arc de cercle) et son centre sont visibles alors une distance est identifiée ( $\Sigma C4$ ). Un cercle (arc de cercle) est visible alors un ensemble de points a été tracé ( $\Sigma C5$ ).

### 7.3.3. Caractérisation des nouveaux équilibres du système [sujet-milieu], conceptions et instruments

Cette activité papier-crayon est articulée au cahier informatisé « A la découverte des triangles ». Certains éléments du milieu générés par le cahier informatisé sont repris dans l'environnement papier-crayon. Les segments côtés du triangle sont déjà présents sur la feuille comme ils étaient présents dans l'environnement informatisé. De surcroît, la ligne

brisée a complètement été intégrée au milieu. En effet c'est par des actions sur cette ligne brisée que les problèmes posés vont être résolus et que l'évolution des conceptions et des instruments va s'opérer. La ligne brisée est un élément de continuité du duo d'artefacts numérique et matériel. C'est elle qui permet de passer du déplacement par rotation dans l'environnement informatisé au compas matériel pour pivoter un segment.

#### *Un nouvel instrument élaboré : le compas pour pivoter un segment*

Un nouvel instrument compas est élaboré : le compas pour pivoter un segment. Pivoter le compas revient à pivoter un segment entre ses branches. Dans l'environnement papier-crayon le segment initial ne pivote pas, le compas produit un cercle (arc de cercle) qui est la trace de l'extrémité du segment pivoté. Le segment résultat du pivotement doit donc être tracé de même longueur que le segment initial. Un schème d'utilisation du compas pour pivoter un segment est décrit à l'aide d'un enchaînement d'opérateurs et de contrôles :  $[(rPi1 = \Sigma Pointe + \Sigma Mine + rAC2 + \Sigma AC) + (rPi2 = \Sigma Pi + rS3 + \Sigma S)]$ . L'opérateur  $rPi1 = \Sigma Pointe + \Sigma Mine + rAC2 + \Sigma AC$  se constitue à partir de l'opérateur  $rPiv = \Sigma Ext + rRot + \Sigma Rot$  par assimilation  $(\Sigma Pointe + \Sigma Mine / \Sigma Ext)$  et par accommodation  $(rAC2 + \Sigma AC / rRot)$  et  $(\Sigma Rot / \Sigma Pi + rS3 + \Sigma S)$ .

#### *L'apprentissage inclus dans la stratégie gagnante*

La « stratégie ligne brisée », stratégie gagnante de l'environnement numérique, est encore une stratégie efficace pour construire un triangle dans l'environnement papier-crayon. Tracer une ligne brisée constituée des trois segments puis pivoter les segments extrêmes de la ligne brisée à l'aide du compas (Figure 7.12) est une stratégie qui, d'une part provoque une nouvelle genèse instrumentale du compas et, d'autre part induit des conceptions nouvelles du triangle et du cercle. En effet cette stratégie renforce la conception « Triangle 1D » : un triangle est une ligne brisée de trois segments, fermée. En outre, le passage par la ligne brisée et l'utilisation du compas pour pivoter ses segments extrêmes engagent aussi la conception « Cercle segment pivoté » : un cercle est la trajectoire de l'extrémité d'un segment qui pivote autour d'une extrémité qui reste fixe. Le compas qui pivote un segment déjà tracé consolide la représentation de distance constante associée au cercle.

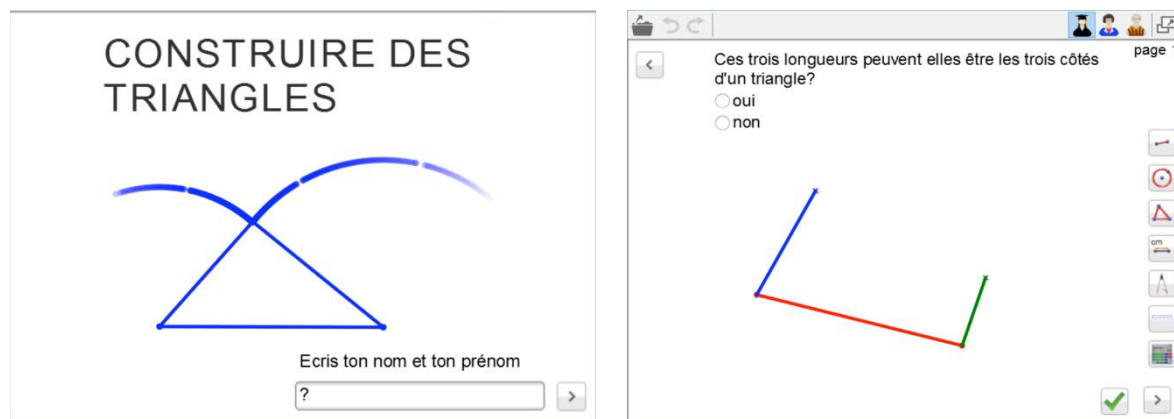
Enfin la ligne brisée et la stratégie associée constitue une étape de dimension 1 dans la déconstruction dimensionnelle du triangle qui n'oblige pas dans un premier temps à aller jusqu'au point de dimension 0 pour construire le triangle à la règle et au compas.

## **7.4. Outil cercle et conception « Triangle 0D »**

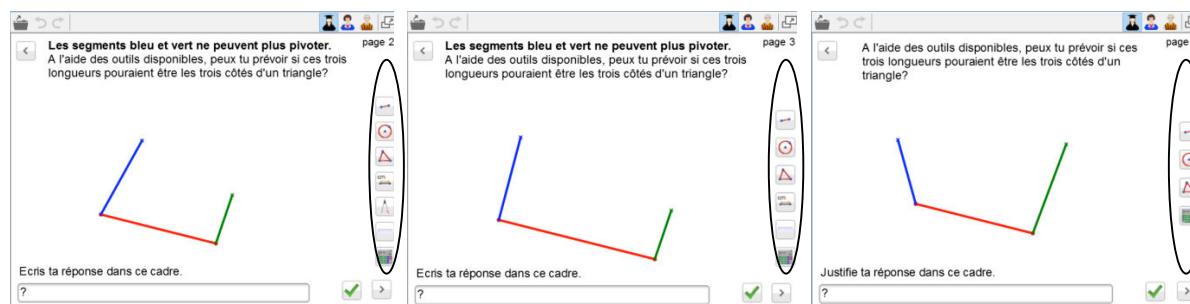
### **7.4.1. Enjeu du second cahier informatisé**

L'enjeu de ce second cahier est d'amener le cercle comme outil dans la construction du triangle. Les problèmes à résoudre dans ce second cahier informatisé « Construire des triangles » (Figure 7.14) sont d'une part, de justifier si une ligne brisée peut être le

contour d'un triangle ou non et d'autre part, de déterminer le troisième sommet d'un triangle en connaissant les longueurs des côtés.

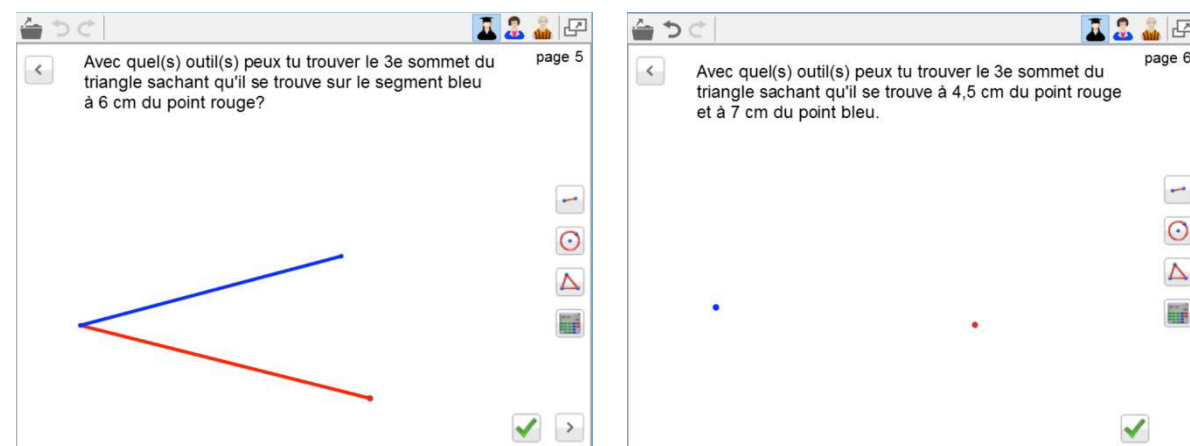


Les segments extrêmes de la ligne brisée peuvent pivoter. La trace de l'extrémité qui pivote s'affiche.



Les segments extrêmes de la ligne brisée ne peuvent plus être pivoté.

Le problème doit être résolu à l'aide des outils disponibles.



L'outil cercle seul outil disponible permettant de déterminer le 3<sup>ème</sup> sommet du triangle.

Figure 7.14 : Second cahier informatisé « Construire des triangles »

Pour résoudre le premier type de problème, les conceptions « Triangle 1D ligne brisée » et « Triangle 1D longueurs des côtés » sont applicables. L'existence ou non du triangle est justifiée en utilisant les outils à disposition sur chaque page ; par un jeu sur les outils

disponibles l'utilisation de l'outil cercle sera contrainte. Le second type de problèmes engage la conception « Triangle OD » et mobilise le cercle comme outil dans la construction du triangle.

## Choix de valeurs des variables didactiques

### *Les longueurs des segments proposés*

Dans ce second cahier informatisé, comme dans le premier cahier et dans l'activité papier-crayon, les longueurs des segments proposés conduisent à des problèmes d'existence ou non du triangle qui nécessitent la mobilisation de contrôles relatifs aux conceptions « Triangle 1D ligne brisée » ou « Triangle 1D longueurs des côtés ».

### *La configuration des segments proposés*

Sur les quatre premières pages d'activités du cahier nous choisissons de proposer des lignes brisées de trois segments. Ce choix a été fait dans la perspective de rendre applicable la conception « Triangle 1D ligne brisée » et la conception « Cercle segment pivoté » et de provoquer la mobilisation du compas-gd ou de l'outil cercle comme instruments pour pivoter un segment autour d'une extrémité.

### *Les déplacements des segments*

Les valeurs de la variable didactique déplacement impliquées dans ce cahier sont la rotation autour d'une extrémité uniquement et aucun déplacement. Le verrouillage en déplacement des segments provoque la mise en œuvre d'opérateurs utilisant les outils de géométrie dynamiques disponibles sur chaque page.

Dans ce cahier nous avons choisi de faire afficher la trace de la trajectoire de l'extrémité du segment qui pivote. Cette trace rappelle la production du compas mobilisé pour pivoter un segment dans l'environnement papier-crayon. De plus cette trace est la trace de la trajectoire d'un point et son affichage dans l'environnement numérique apparaît comme une succession de points (Figure 7.15) qui contribue à l'émergence de la conception « Cercle OD ».

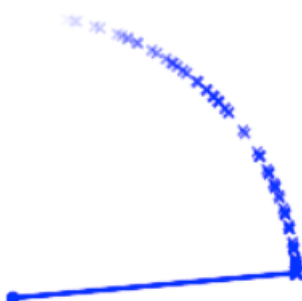


Figure 7.15 : La trace de l'extrémité qui pivote est une succession de points



### Les outils de géométrie dynamique

Une boîte à outils est disponible sur chaque page. Elle contient aussi bien des outils utiles pour résoudre la tâche que des outils inutiles. C'est à l'élève de déterminer les outils qui permettent de résoudre la tâche. Dans ce second cahier informatisé nous avons choisi de modifier à chaque page la composition de la boîte à outils en supprimant au fur et à mesure un outil. Ce jeu sur les outils disponibles permet la mobilisation d'opérateurs de tracé utilisant dans un premier temps le compas-gd puis dans un second temps l'outil cercle, seul outil parmi ceux disponibles permettant la résolution des problèmes.

## 7.4.2. Stratégies, opérateurs et contrôles en jeu

### Cahier 2 : problème 4 : Une ligne brisée de trois segments peut-elle engendrer un triangle

#### Stratégie pivoter avec le déplacement par rotation

Cette stratégie consiste à faire pivoter les segments extrêmes de la ligne brisée pour former un triangle ou constater que les longueurs proposées ne permettent pas d'obtenir un triangle (Figure 7.16). Cette stratégie ne peut être mise en œuvre que sur la première page du cahier.

Cette stratégie engage la conception « Triangle 1D ligne brisée » : un triangle est une ligne brisée fermée. La résolution du problème est obtenue en pivotant les segments extrêmes de la ligne brisée ( $rPiv + \Sigma Rot$ ) avec pour intention de superposer les deux extrémités ( $rSu + \Sigma Su$ ) pour former le 3<sup>ème</sup> sommet du triangle. Deux contrôles permettent de juger de l'état de résolution du problème. Si les segments extrêmes de la ligne brisée se rencontrent alors le triangle existe ( $\Sigma T3$ ) et si les segments extrêmes de la ligne brisée ne se rencontrent pas alors le triangle n'existe pas ( $\Sigma T4$ ).

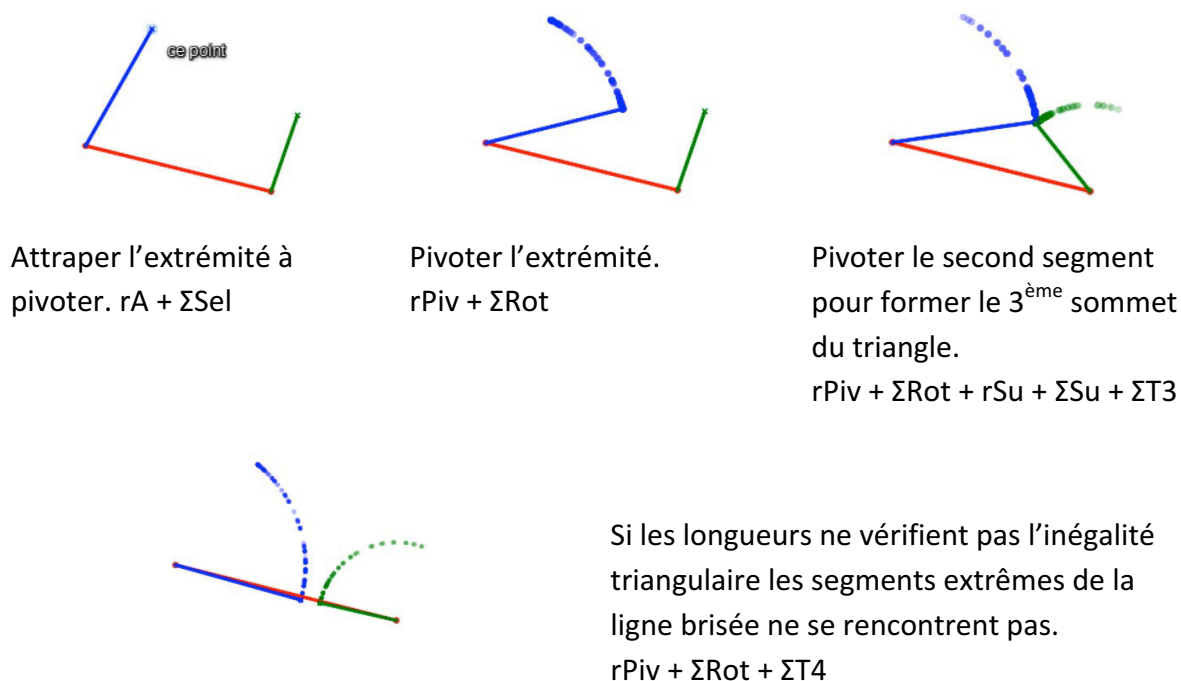
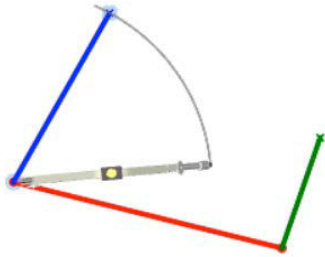


Figure 7.16 : Illustration de la « stratégie pivoter avec le déplacement par rotation » par un enchaînement d'opérateurs et de contrôles

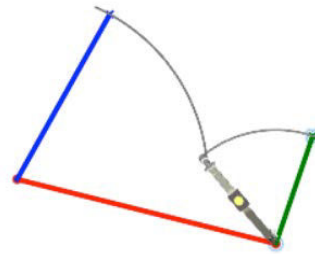
Stratégie pivoter avec le compas-gd

Cette stratégie mobilise l'outil compas-gd pour pivoter un segment (Figure 7.17). Cette stratégie peut être mise en œuvre sur les pages 1 et 2 du cahier, seules pages sur lesquelles le compas-gd est disponible.



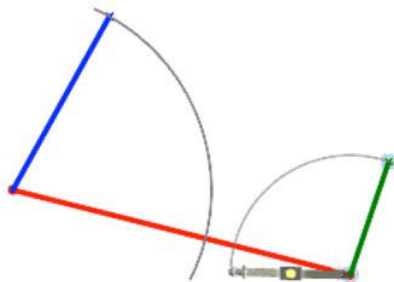
Pivoter un premier segment. Le compas-gd produit la trace de l'extrémité qui pivote.

$\Sigma\text{Pointe} + \Sigma\text{Mine} + r\text{AC2-gd} + \Sigma\text{AC}$



Pivoter le deuxième segment. Les deux segments se rencontrent et déterminent le 3<sup>ème</sup> sommet.

$\Sigma\text{Pointe} + \Sigma\text{Mine} + r\text{AC2-gd} + \Sigma\text{AC} + \Sigma\text{T3}$



Les deux segments ne se rencontrent pas, les segments ne peuvent pas être les côtés d'un triangle.  $\Sigma\text{Pointe} + \Sigma\text{Mine} + r\text{AC2-gd} + \Sigma\text{AC} + \Sigma\text{T4}$

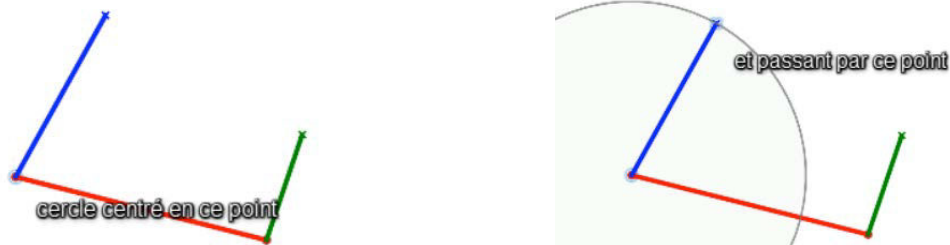
Figure 7.17 : Illustration de la « stratégie pivoter avec le compas-gd » par un enchaînement d'opérateurs et de contrôles

Cette stratégie engage la conception « Triangle 1D ligne brisée » : un triangle est une ligne brisée de trois segments, fermée. La résolution du problème est obtenue grâce au compas-gd qui produit la trace de l'extrémité du segment pivoté ( $r\text{Pi1-gdCo} = \Sigma\text{Pointe} + \Sigma\text{Mine} + r\text{AC2-gd} + \Sigma\text{AC}$ ). Mobiliser le compas-gd pour produire la trace de l'extrémité du segment qui pivote engage deux contrôles sur l'utilisation du compas. La pointe doit être piquée sur l'extrémité du segment qui reste fixe ( $\Sigma\text{Pointe}$ ) et la mine doit être posée sur l'extrémité du segment à pivoter ( $\Sigma\text{Mine}$ ). Des contrôles permettent des jugements sur l'état de résolution du problème. Si les segments extrêmes de la ligne brisée se rencontrent alors le triangle existe ( $\Sigma\text{T3}$ ). Si les segments extrêmes de la ligne brisée ne se rencontrent pas alors le triangle n'existe pas ( $\Sigma\text{T4}$ ). L'intersection des cercles (arcs de cercle) est identifiée au point de rencontre des segments pivotés de la ligne brisée.

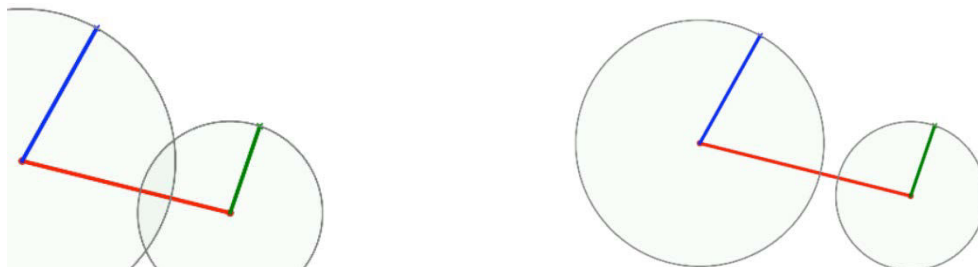
Cette stratégie engage aussi la conception « Cercle segment pivoté » : un cercle est la trajectoire de l'extrémité d'un segment qui pivote autour d'une extrémité qui reste fixe. L'image du compas-gd à l'écran est semblable à un segment. Ainsi l'environnement numérique permet au travers de l'affichage du compas de conserver l'image du segment qui pivote entre ses branches ( $\Sigma\text{C2}$ ).

*Stratégie pivoter avec l'outil cercle*

Cette stratégie mobilise l'outil cercle (Figure 7.18). Les segments sur la page étant dans une configuration « ligne brisée », cette stratégie engage toujours la conception « Triangle 1D ligne brisée » : un triangle est une ligne brisée de trois segments fermés. Mettre en œuvre cette stratégie consiste à mobiliser l'opérateur produire la trace de l'extrémité qui pivote en utilisant l'outil cercle ( $rPi1-gdCe = \Sigma Cen + \Sigma Ray + rC2-gdCe + \Sigma C$ ). Des contrôles relatifs à l'identification du centre du cercle ( $\Sigma Cen$ ) et à l'identification du rayon du cercle ( $\Sigma Ray$ ) sont mis en œuvre. L'outil cercle remplace l'outil compas-gd. La résolution du problème est toujours statuée par les deux mêmes contrôles. Si les segments extrêmes de la ligne brisée se rencontrent alors le triangle existe ( $\Sigma T3$ ) et si les segments extrêmes de la ligne brisée ne se rencontrent pas alors le triangle n'existe pas ( $\Sigma T4$ ).



Pivoter à l'aide de l'outil cercle un segment extrême de la ligne brisée.  $rPi1-gdCe = \Sigma Cen + \Sigma Ray + rC2-gdCe + \Sigma C$ . L'outil cercle produit la trace de l'extrémité du segment qui pivote.  $\Sigma C3$



Pivoter l'autre segment extrême de la ligne brisée.  $rPi1-gdCe = \Sigma Cen + \Sigma Ray + rC2-gdCe + \Sigma C$

Les segments se rencontrent donc le triangle existe.  $\Sigma T3$

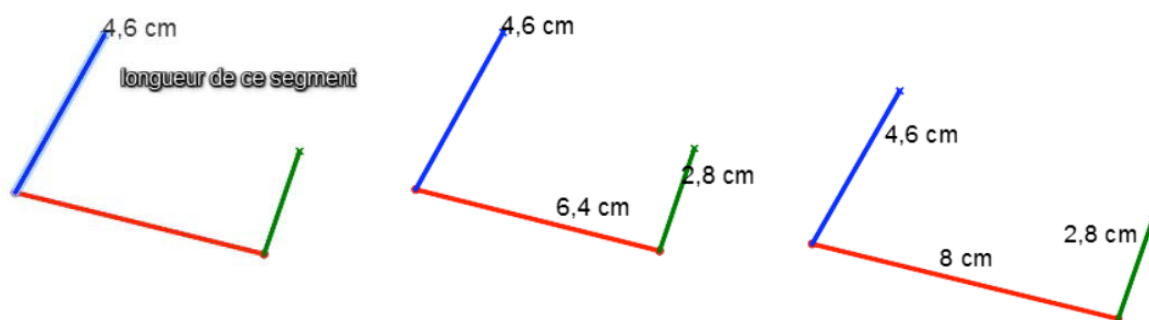
Les segments ne se rencontrent pas donc le triangle n'existe pas.  $\Sigma T4$

Figure 7.18 : Illustration de la « stratégie pivoter avec l'outil cercle » par un enchaînement d'opérateurs et de contrôles

Cette stratégie engage aussi la conception « Cercle segment pivoté » : un cercle est la trajectoire de l'extrémité d'un segment qui pivote autour d'une extrémité qui reste fixe. Le cercle affiché à l'écran est la trace de l'extrémité du segment pivoté ( $\Sigma C3$ ).

### Stratégie inégalité triangulaire

Cette stratégie mobilise l'opérateur mesurer une longueur utilisant l'outil mesure ou la règle graduée-gd. Une fois les longueurs connues il faut examiner si elles vérifient l'inégalité triangulaire (Figure 7.19). Cette stratégie ne peut être utilisée que sur les trois premières pages du cahier sur lesquelles l'outil mesure est disponible.



Mesurer la longueur de chaque segment de la ligne brisée à l'aide de l'outil mesure. rM-gdM ou rM-gdR  
La somme des deux petites longueurs est supérieure à la plus grande donc le triangle existe.  $\Sigma T8$

rM-gdM ou rM-gdR

$8 > 4,6 + 2,8$

La somme des deux petites longueurs est inférieure à la plus grande donc le triangle n'existe pas.  $\Sigma T9$

Figure 7.19 : Illustration de la « stratégie inégalité triangulaire » par un enchaînement d'opérateurs et de contrôles

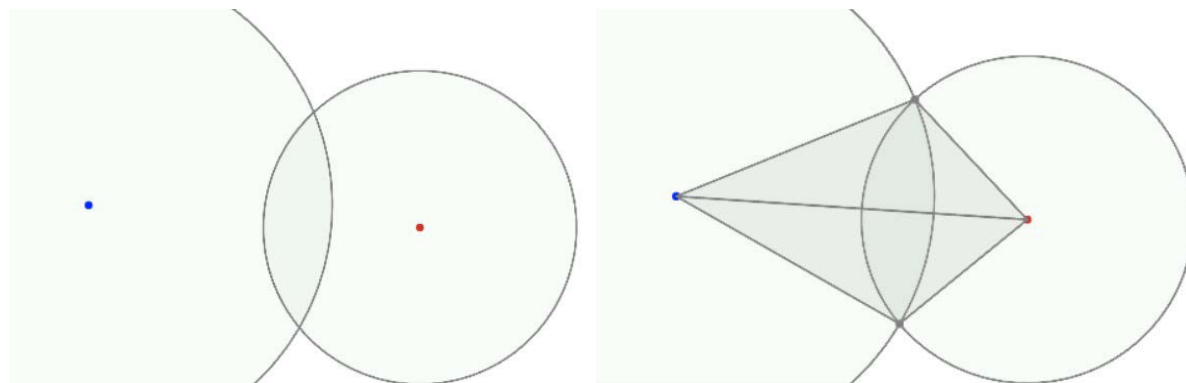
Cette stratégie engage la conception « Triangle 1D longueurs des côtés ». L'opérateur engagé pour résoudre le problème est la mesure des longueurs des segments obtenue avec l'outil mesure (rM-gdM). Les contrôles permettant d'évaluer la solution du problème sont les suivants. Si la somme des deux plus petites longueurs est supérieure à la plus grande alors le triangle existe ( $\Sigma T8$ ) et si la somme des deux plus petites longueurs est inférieure à la plus grande alors le triangle n'existe pas ( $\Sigma T9$ ).

### Cahier 2 : problème 5 : Déterminer le 3<sup>ème</sup> sommet d'un triangle

#### Stratégie cercle

Cette stratégie consiste à tracer des cercles de centres chacun des deux sommets déjà présents à l'écran et de rayons donnés par les mesures des distances du troisième sommet à chacun des deux autres sommets. Leurs intersections déterminent les deux solutions possibles pour le 3<sup>ème</sup> sommet du triangle (Figure 7.20). Cette stratégie est la seule qui peut être mise en place dans les pages 5 et 6 du cahier au vu des outils de géométrie dynamique disponibles sur ces pages. Cette stratégie engage la conception cible du triangle, la conception « Triangle OD » : un triangle est déterminé par un côté et un sommet. Elle engage aussi la conception « Cercle OD » : un cercle est l'ensemble des points équidistants de son centre. Les opérateurs qui permettent la résolution du problème sont des tracés de cercles de centre et de rayon donné (rC3-gdCe). Un contrôle antérieur à l'action entraîne la mobilisation de cet opérateur : un cercle et son centre

permettent d'identifier une distance ( $\Sigma C4$ ). Des contrôles relatifs à l'identification du centre du cercle ( $\Sigma Cen$ ) et à l'identification du rayon du cercle ( $\Sigma Ray$ ) sont aussi engagés. Enfin le 3<sup>ème</sup> sommet est identifié à l'intersection des deux cercles ( $\Sigma T7$ ). Deux solutions sont possibles pour ce troisième sommet.



Tracer deux cercles de rayons Les cercles définissent deux solutions pour le correspondant aux côtés du triangle et troisième sommet du triangle.  $\Sigma T7$  centré sur les sommets déjà présents.  
 $\Sigma Cen + \Sigma Ray + rC3-gdCe + \Sigma C$

Figure 7.20 : Illustration de la « stratégie cercle » par un enchaînement d'opérateurs et de contrôles

### 7.4.3. Caractérisation des nouveaux équilibres du système [sujet-milieu], conceptions et instruments

Dans ce second cahier informatisé il s'agit au fil des pages de contraindre l'utilisation de l'outil cercle. Pour cela nous avons fait le choix de supprimer progressivement les outils (compas-gd et mesure) qui permettent de mettre en œuvre d'autres stratégies que le tracé de cercle pour résoudre les problèmes.

Ce second cahier informatisé est articulé à l'usage du compas matériel dans la première activité papier-crayon. Certains éléments du milieu créé dans l'environnement papier-crayon sont conservés dans ce second cahier informatisé afin de maintenir une continuité dans l'articulation des artefacts compas matériel et outil cercle numérique. La ligne brisée est toujours un élément clé du milieu. Elle est l'élément de continuité de la situation. C'est elle qui soutient les nouvelles conceptions du triangle, un triangle est une ligne brisée fermée, et du cercle, un cercle est la trajectoire de l'extrémité d'un segment qui pivote. Le milieu est enrichi dans ce cahier informatisé par les outils de géométrie dynamique disponibles ou plus exactement non disponibles. En effet c'est par un jeu sur les outils disponibles que le cercle devient l'outil de la situation.

#### *Un nouvel instrument élaboré : le cercle pour identifier une distance*

Le nouvel instrument qui est à élaborer dans ce cahier est l'instrument cercle pour identifier une distance. Un schème d'utilisation de l'outil cercle pour identifier une

distance est décrit par l'enchaînement d'opérateurs et de contrôles suivants :  $\Sigma\text{Cen} + \Sigma\text{Ray} + r\text{C3-gdCe} + \Sigma\text{C}$ .

La description des schèmes d'utilisation d'un artefact par un enchaînement d'opérateurs et de contrôles, nous permet de caractériser l'évolution dans la constitution des différents instruments : de compas matériel pour pivoter un segment ( $\Sigma\text{Pointe} + \Sigma\text{Mine} + r\text{AC2} + \Sigma\text{AC}$ ) par compas-gd pour pivoter un segment ( $\Sigma\text{Pointe} + \Sigma\text{Mine} + r\text{AC2-gd} + \Sigma\text{AC}$ ) à cercle pour pivoter un segment ( $\Sigma\text{Cen} + \Sigma\text{Ray} + r\text{C2-gdCe} + \Sigma\text{C}$ ) jusqu'à cercle pour identifier une distance ( $\Sigma\text{Cen} + \Sigma\text{Ray} + r\text{C3-gdCe} + \Sigma\text{C}$ ).

#### *L'apprentissage inclus dans la stratégie gagnante*

La stratégie gagnante dans ce cahier est la « stratégie cercle » pour déterminer le 3<sup>ème</sup> sommet du triangle. D'une part, cette « stratégie cercle » mobilise la conception « Cercle 0D » : un cercle est l'ensemble des points équidistants de son centre. D'autre part, elle engage la conception « Triangle 0D » : un triangle est déterminé par un côté et un sommet. Le 3<sup>ème</sup> sommet du triangle étant l'un des points d'intersection des deux cercles. L'outil cercle produit les cercles complets contrairement au compas qui peut ne produire que des arcs de cercle. Ces cercles font apparaître les deux positions possibles pour le 3<sup>ème</sup> sommet du triangle.

## **7.5. Diagnostic des instruments et des conceptions disponibles**

### **7.5.1. Enjeu de la deuxième activité papier-crayon**

Cette seconde activité papier-crayon (Figure 7.21) marque la fin de la situation. Le rôle de cette activité est double : d'une part aboutir à une situation de classe plus classique pour le déroulement du travail avec les enseignantes et d'autre part, pour notre étude, permettre le diagnostic des instruments compas et des conceptions triangle et cercle disponibles chez les élèves.

#### **Choix de valeurs des variables didactiques**

##### *Les longueurs des segments proposés*

Dans cette activité, comme dans la première activité papier-crayon, l'élève rencontre des problèmes de construction et d'existence ou non du triangle ; les triplets de longueurs proposées vérifient ou non l'inégalité triangulaire.

## Activité 2

a) Malheureusement la fiche d'énoncé sur laquelle étaient tracés 3 segments a été tachée.

Les longueurs des segments étaient 3cm, 5cm et 6cm. Peux-tu tracer un triangle qui a ces longueurs pour côtés ?



b) Trace si c'est possible,

- un triangle dont les côtés mesurent 6cm, 7cm et 8cm ;
- un triangle dont les côtés mesurent 3cm, 4cm et 8cm.

Figure 7.21 : Deuxième activité papier crayon

### 7.5.2. Stratégies, opérateurs et contrôles en jeu

Les stratégies pouvant être mises en œuvre ici sont les mêmes que celles décrites dans le paragraphe 7.3.2 concernant la première activité papier-crayon : stratégie à la règle graduée uniquement, « stratégie ligne brisée », et stratégie construction à la règle et au compas.

## 7.6. Incidence du duo et de la situation sur des parcours de conceptions et de genèses instrumentales

La Figure 7.22 illustre les parcours de conceptions du cercle et du triangle, ainsi que les parcours de genèses instrumentales possibles lors de la mise en œuvre de la situation « Triangle et compas » par un sujet.

### 7.6.1. Un premier duo : le compas matériel et le déplacement par rotation de segments numériques

#### Deux déplacements disjoints

La manipulation directe de segments de longueurs données, dans le premier cahier informatisé, permet un contrôle sur le segment coté du triangle déjà là, mais pas dans la bonne position. L'asymétrie des segments dans leurs déplacements impose la dissociation des deux mouvements par translation et par rotation. Les deux déplacements sont toujours disjoints dans l'environnement numérique proposé par le cahier. Ces manipulations de segments asymétriques dans leurs déplacements permettent la mise en

valeur de la rotation indispensable pour former un triangle dans l'environnement informatique et commandent la mise en œuvre de la « stratégie ligne brisée » pour former un triangle dans l'environnement numérique.

### Une stratégie ligne brisée

La ligne brisée est un élément central de la situation. Elle apparaît comme élément sous-jacent de la résolution des problèmes posés et ainsi, assure la cohérence entre les différentes phases. Elle est d'abord une stratégie gagnante pour former un triangle dans l'environnement numérique constitué par le premier cahier informatisé ; elle provoque la mobilisation d'une nouvelle conception « Triangle 1D ligne brisée » : un triangle est une ligne brisée de trois segments, fermée. Cette conception est d'une part une vision 1D du triangle et d'autre part elle inclut une structure de contrôle sur l'existence ou non du triangle. Transportée dans l'environnement papier-crayon, cette ligne brisée coordonnée au déplacement par rotation, amène le compas matériel pour faire pivoter des segments.

### Un instrument compas pour pivoter un segment

Au cours des manipulations des segments numériques dans le premier cahier informatisé, le sujet construit des schèmes relatifs au déplacement par rotation du segment numérique. Ces schèmes peuvent être associés à des schèmes d'utilisation du compas matériel. Dans l'environnement papier-crayon le compas matériel est l'artefact qui va remplacer le déplacement par rotation de l'environnement numérique. Le compas permettra de faire pivoter un segment, le segment étant coincé entre les deux branches du compas. Ce nouvel instrument compas pour pivoter un segment convie une nouvelle conception « Cercle segment pivoté » : un cercle est la trajectoire de l'extrémité d'un segment qui pivote autour d'une extrémité qui reste fixe.

## 7.6.2. Une extension, le cercle de la géométrie dynamique

Le second cahier informatisé permet un développement de la situation en introduisant l'outil cercle de la géométrie dynamique. Le retour dans l'environnement numérique permet le passage du compas matériel au compas de la géométrie dynamique et au cercle de la géométrie dynamique. D'abord l'outil cercle est mobilisé pour pivoter les segments extrêmes d'une ligne brisée et vérifier l'existence ou non du triangle. D'outil pour vérifier, il devient ensuite outil pour produire. Il s'agit en effet de produire un cercle pour identifier une distance et déterminer le troisième sommet du triangle. La mobilisation de cet outil cercle repose sur une nouvelle conception « Cercle OD » : un cercle est l'ensemble des points équidistants de son centre.

Notons que le cercle fait apparaître les deux lieux possibles pour le troisième sommet du triangle ce qui n'émerge pas nécessairement de la « stratégie ligne brisée ».



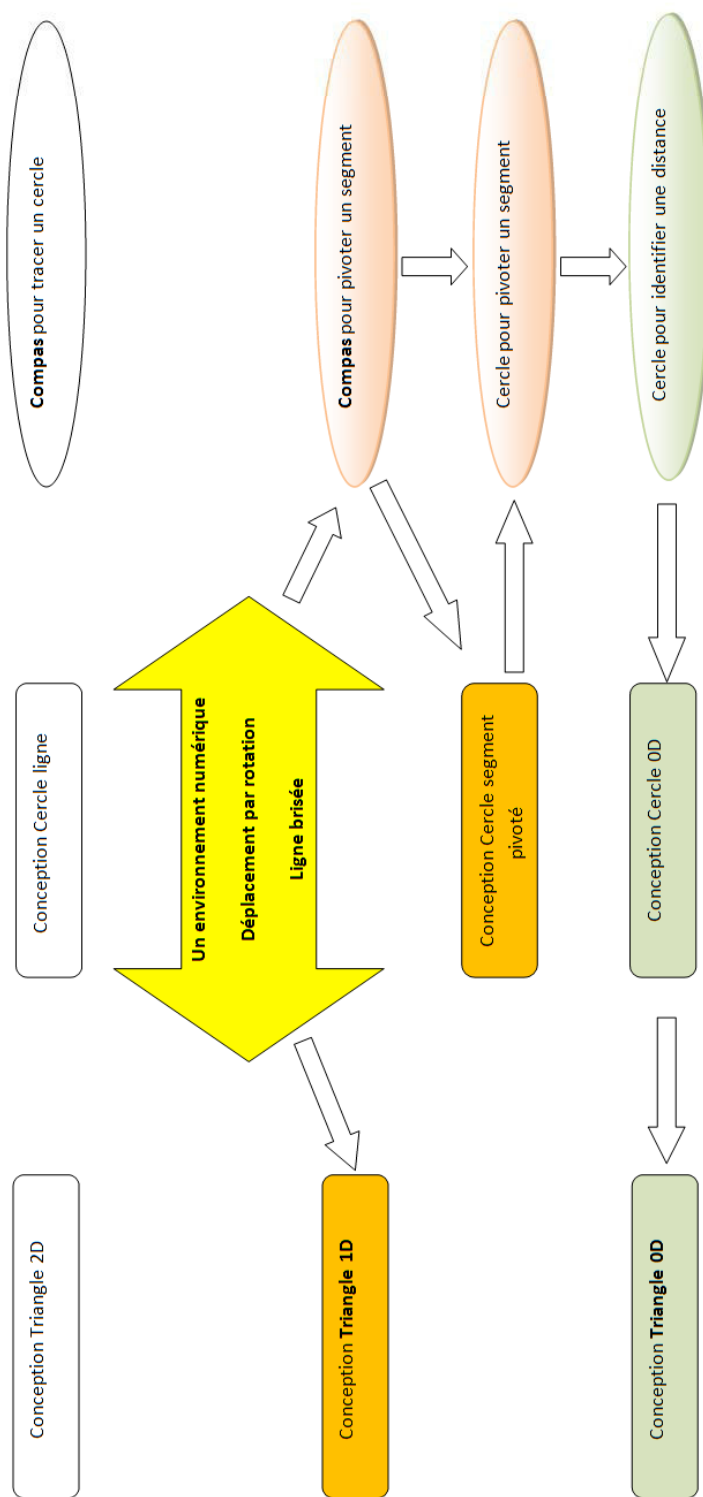


Figure 7.22 : Incidence du duo et de la situation sur des parcours de conceptions et de genèses instrumentales

## Chapitre 8. Analyse a posteriori et résultats

Dans ce chapitre nous présentons l'analyse a posteriori de la situation « Triangle et compas » à la suite des expérimentations réalisées dans des classes. Nous commençons par décrire le protocole d'observation que nous avons mis en œuvre pour ces expérimentations. Puis nous donnons le détail des observations des productions de 34 élèves. Pour chaque phase de la situation nous décrivons les stratégies effectivement mises en œuvre par les élèves desquelles nous déduisons les conceptions du triangle et du cercle mobilisées par ces derniers. Nous concluons par les résultats de ces expérimentations concernant les effets du duo et de la situation sur les apprentissages et en particulier sur les instruments constitués et les parcours de conceptions du triangle et du cercle mis en œuvre.

Ces expérimentations confirment nos hypothèses de recherches. Pour 26 élèves sur 34 :

- Le duo fait émerger un nouvel instrument compas pour pivoter un segment dans la tâche de construction d'un triangle.
- Le duo permet l'émergence d'une conception 1D du triangle : un triangle est une ligne brisée fermée.
- Le duo fait émerger une nouvelle conception du cercle comme la trajectoire de l'extrémité d'un segment qui pivote.

Ainsi le duo et son orchestration dans la situation conduit ces 26 élèves à mettre en œuvre une déconstruction dimensionnelle 1D du triangle sans aller jusqu'au point 0D dans la construction du triangle à la règle et au compas.

De plus, pour 5 élèves, le duo induit, au fil de la situation et des activités instrumentées, un parcours, du triangle 2D au triangle 1D jusqu'au triangle 0D.

### 8.1. Protocole d'observation

#### 8.1.1. Recueil des données

Les expérimentations de la situation « Triangle et compas » ont toutes été réalisées dans la même école élémentaire. Il s'agit d'une école en éducation prioritaire REP+. Cette école a été choisie car elle fait partie d'un LéA<sup>9</sup> (Lieu d'Éducation Associé). Deux enseignantes de CM2 et une enseignante de CM1 sont acteurs du LéA.

Les expérimentations se sont déroulées trois années consécutives dans deux classes de CM2 chaque année. Plus de 130 élèves ont donc expérimenté cette situation (38 en 2014 ; 50 en 2015 et 44 en 2016) sur les trois ans. D'une part, ces tests successifs dans de

---

<sup>9</sup> Les LéA ont été définis dans le programme scientifique de l'IFÉ (Institut Français de l'Éducation) comme des lieux à enjeux d'éducation, rassemblant un questionnement des acteurs, l'implication d'une équipe de recherche, le soutien du pilotage de l'établissement, et la construction conjointe d'un projet dans la durée.

réelles conditions de classe ont participé à l'élaboration et à l'évolution du duo et de la situation comme expliqué au Chapitre 5. Les réactions des élèves comme les remarques des enseignantes ont permis de faire évoluer la situation chaque année. D'autre part, ces trois années d'expérimentations ont permis de mettre à l'épreuve nos hypothèses de recherche. L'Annexe 7 présente un bilan des deux activités papier-crayon sur les trois années.

### 8.1.2. Organisation du recueil des données

	Modalités de travail	Recueil des données
<b>Questionnaire à propos du compas</b>	Travail individuel Classe entière	Questionnaire de chaque élève ramassé
<b>Phase 1 :</b>  <b>Question diagnostique sur l'existence ou non d'un triangle</b>  <b>Premier cahier informatisé</b>	Travail individuel  Par groupe de 7	Capture vidéo et enregistrement du cahier de chaque élève
<b>Phase 2 :</b>  <b>Première activité papier crayon</b>	Travail individuel  Par groupe de 4	Vidéo du travail de 3 élèves sur 4  Photocopie des productions individuelles
<b>Phase 3 :</b>  <b>Second cahier informatisé</b>	Travail individuel  Par groupe de 7	Capture vidéo et enregistrement du cahier de chaque élève
<b>Phase 4 :</b>  <b>Deuxième activité papier-crayon</b>  <b>Questionnaire sur le rôle du compas dans la construction du triangle</b>	Travail individuel  Par groupe de 4	Vidéo du travail de 3 élèves sur 4  Photocopie des productions individuelles  Questionnaire de chaque élève ramassé

Tableau 8.1 : Organisation du recueil des données lors de la mise en œuvre de la situation « Triangle et compas » la 3<sup>ème</sup> année d'expérimentation

### 8.1.3. Déroulement des expérimentations

La situation « Triangle et compas » comprend quatre phases : le premier cahier informatisé, la première activité papier-crayon, le deuxième cahier informatisé et enfin la deuxième activité papier-crayon. Nous souhaitons que cette situation soit expérimentée en conditions réelles dans des classes et ainsi nous permette de recueillir des données pour réaliser une analyse a posteriori. Les expérimentations se sont déroulées sur quatre jours différents correspondant à chaque phase. Ces quatre jours n'ont pas été consécutifs mais répartis sur trois ou quatre semaines pour que la situation soit intégrée à la progression d'enseignement des mathématiques des enseignantes.

#### Des questions diagnostiques

Afin d'établir un diagnostic des conceptions du triangle et des instruments compas déjà élaborés par les élèves, deux questionnaires leur ont été donnés à compléter.

##### *Un questionnaire à propos de l'outil compas*

Avant que les élèves ne traitent la situation ils ont répondu à un questionnaire : « Expliquer à quelqu'un qui n'a jamais vu un compas, ce que c'est, à quoi cela ressemble et à quoi ça sert ». Le questionnaire a été donné aux enseignantes qui l'ont fait remplir aux élèves la veille du jour où les élèves ont traité le premier cahier informatisé. Elles ont ramassé les questionnaires de chaque élève et les ont transmis au chercheur.

##### *Un questionnaire à propos de l'existence ou non d'un triangle*

Dans le cadre de ce travail, deux pages ont été rajoutées au premier cahier informatisé « A la découverte des triangles », une au début et une à la fin. Ces deux pages posent la question de la possibilité ou non d'obtenir un triangle avec trois segments de longueurs données (Figure 8.1).

Figure 8.1 displays two screenshots of a digital questionnaire interface. The left screenshot shows the initial question: "Avec trois segments on peut obtenir un triangle. Qu'en penses tu ?" (With three segments, one can obtain a triangle. What do you think?). Below the question is a large text input area and a smaller input field for the student's name and class. The right screenshot shows the follow-up question: "Maintenant que tu as traité ce cahier, penses tu qu'avec trois segments on peut toujours obtenir un triangle ?" (Now that you have treated this notebook, do you think with three segments one can still obtain a triangle?). This interface also features a large text input area and a name/class input field. Both screenshots include navigation icons at the top.

Questionnement avant de traiter le cahier.

Questionnement après avoir traité le cahier.

Figure 8.1 : Questionnement proposé aux élèves avant et après avoir traité le cahier

### Les cahiers informatisés

L'école élémentaire qui nous a accueillie dispose d'une classe mobile de sept ordinateurs. Ces ordinateurs ont été installés dans une salle indépendante des salles de classe. En quelque sorte, une salle informatique a été créée pour les expérimentations. Dans cette salle, proche des deux salles de classe ordinaires, les élèves étaient encadrés par un chercheur et des professeurs stagiaires. Chaque élève était seul devant un ordinateur et traitait le cahier en autonomie à son rythme. Lorsqu'il avait terminé il retournait dans sa classe et un autre élève prenait sa place devant l'ordinateur. Une capture vidéo du travail de chaque élève a été faite à l'aide du logiciel Camstudio 2.7. Le cahier informatisé de chaque élève a lui aussi été enregistré, permettant un visionnage ultérieur de l'état final de chaque page.

Dans le fonctionnement de classe ordinaire, les élèves des deux classes de CM2 qui ont participé à ces expérimentations sont habitués à travailler en ateliers. La classe est alors répartie en plusieurs groupes faisant chacun une activité différente. Régulièrement un groupe travaille sur ordinateur.

### Les activités papier-crayon

Les activités papier-crayon se sont déroulées en classe entière les deux premières années. Les élèves étaient encadrés par leur enseignante qui menait la classe et le travail. Un chercheur était présent dans la classe. Durant les deux séances en papier-crayon, le travail de trois élèves était filmé par une caméra vidéo. Des photocopies des productions de tous les élèves étaient faites à la fin de chaque séance. Constatant qu'il était difficile d'extraire des informations pertinentes relativement à nos hypothèses de recherche uniquement sur les productions finales, nous avons décidé pour la troisième année de filmer plus d'élèves par classe durant les activités papier-crayon. Ainsi pour cette troisième année, les élèves ont réalisé les activités papier-crayon dans une salle indépendante quatre par quatre encadrés par un chercheur. Dans chaque groupe de quatre élèves trois étaient filmés chacun par une caméra vidéo. Des photocopies du travail de chaque élève ont aussi été faites.

Cette dernière année d'expérimentation nous a permis de recueillir des vidéos des activités papier-crayon pour trente-quatre élèves. C'est à partir du travail de ces trente-quatre élèves dont nous avons des captures vidéo des deux cahiers informatisés et des deux activités papier-crayon que nous menons notre analyse a posteriori. Le détail des observations élève par élève est donné dans l'Annexe 5.

### Questionnaire sur le rôle du compas dans la construction du triangle

À la suite de la deuxième activité papier-crayon les élèves ont répondu à un nouveau questionnaire. La question est la suivante : pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle ? Les questionnaires sont ramassés avec les productions des élèves.

## Des synthèses en classe entière

Des synthèses et des bilans de ce qui a été vu et appris ont été faits après chaque phase de la situation. Ces synthèses ont été réalisées en classe entière. Durant chaque synthèse les élèves ont proposé leurs solutions à chaque problème. Dans le cas des cahiers informatisés, des élèves se sont succédés sur l'ordinateur du professeur, connecté à un vidéoprojecteur, pour montrer leur solution à toute la classe. Dans le cas des activités papier-crayon des élèves sont passés au tableau pour présenter leurs constructions. Des discussions se sont engagées sur la pertinence ou l'efficacité d'une solution. À la fin un bilan de ce qui a été appris est fait.

Ces synthèses participent à la mise en œuvre de la situation dans de réelles conditions de classe. Dans le fonctionnement ordinaire de la classe une synthèse en classe entière est réalisée après chaque travail individuel. Ainsi même si ces bilans ont aussi été filmés par une caméra vidéo nous n'utilisons pas ces vidéos pour relever des stratégies ou le discours des élèves. Seules les stratégies observées lorsque les élèves travaillent individuellement sont prises en comptes. De même les seules activités discursives analysées sont les traces écrites ou les commentaires et échanges oraux spontanés durant les différentes activités individuelles.

## 8.2. Une analyse de 34 productions

Notre analyse a posteriori porte sur les productions de 34 élèves de la dernière année d'expérimentation. Il s'agit des 34 élèves pour lesquels nous avons les captures vidéo des deux cahiers informatisés, des vidéos des deux activités papier-crayon et les réponses aux deux questionnaires.

### 8.2.1. Les instruments compas déjà élaborés

Les réponses au premier questionnaire : « Expliquer à quelqu'un qui n'a jamais vu un compas, ce que c'est, à quoi cela ressemble et à quoi ça sert. » nous permettent d'établir un diagnostic sur les instruments compas déjà élaborés par les élèves. Le Tableau 8.2 ci-dessous présente un résumé de leurs réponses. Les réponses détaillées de chaque élève sont visibles dans l'Annexe 3. Nous notons que tous les élèves ont écrit qu'un compas permet de tracer un cercle (un rond pour certains) ainsi tous ces élèves peuvent engager la première conception du cercle, la conception « Cercle ligne ». Aucun n'a dit que le compas pouvait être un outil pour construire un triangle.

À quoi sert un compas	Nombres d'élèves
Faire des ronds, tracer des cercles	34
Reporter une longueur	0
Tracer des figures géométriques	10
Faire des fleurs, des rosaces, des mandalas	10
Tracer des triangles	0

Tableau 8.2. : Bilan des 34 réponses au premier questionnaire « À quoi sert un compas ? »

### 8.2.2. Le premier cahier informatisé : « A la découverte des triangles »

Dans ce premier cahier informatisé deux problèmes sont à résoudre : d'une part la formation d'un triangle à partir de trois segments de longueurs fixes données, et d'autre part déterminer l'existence ou non du triangle. Le problème de formation du triangle a bien été interprété par tous les élèves. Aucun élève n'a formé d'autres figures que des triangles. L'objet triangle fait donc partie des connaissances de tous les élèves et la conception « Triangle 2D » a pu s'appliquer. Le problème d'existence ou non du triangle sera l'objet du déséquilibre des conceptions initiales comme nous le montrerons ultérieurement.

#### Mise en évidence du déplacement par rotation pour pivoter un segment autour d'une extrémité qui reste fixe

Les captures vidéo nous permettent d'observer que dès la première page du cahier la majorité des élèves s'est lancée dans la manipulation des segments. Des opérateurs<sup>10</sup> de déplacement des segments présents à l'écran ont été mis en œuvre par 29 élèves. Les 5 autres élèves ont commencé par mobiliser des opérateurs de tracé à l'aide des outils de géométrie dynamique présents sur la page. En particulier l'outil triangle a été mobilisé pour tracer un triangle par 4 élèves (rT-gdT).

Les deux opérateurs de déplacement d'un segment, par translation (rTran) et par rotation (rRot), sont rapidement apparus nécessaires. Huit élèves ont posé la question : « *Comment on les tourne ?* ». On observe que dans un premier temps, le déplacement par translation a été réalisé en attrapant le segment entier (rTran +  $\Sigma$ Tran). Les élèves voulaient pouvoir pivoter le segment en attrapant l'une ou l'autre des deux extrémités ; l'extrémité ronde est attrapée (rA) et le pointeur est déplacé dans un mouvement circulaire (rRot). Le segment n'étant pas pivoté contrairement à l'attente de l'élève, le

<sup>10</sup> Nous rappelons la nomenclature pour noter les opérateurs et les contrôles : r pour les opérateurs et  $\Sigma$  pour les contrôles. La description de chaque opérateur et de chaque contrôle est visible dans l'Annexe 2.

contrôle sur la rotation du segment ( $\Sigma\text{Rot}$ ) est contredit. Cette déstabilisation a entraîné la poursuite de l'exploration conduisant à la découverte du double déplacement des segments numériques.

Finalement, les opérateurs de déplacement pour translater un segment, en attrapant le segment entier ou en attrapant l'extrémité ronde (rTran ou rTrans) et pour pivoter un segment autour de l'extrémité ronde qui reste fixe (rPiv) ont été mis en œuvre par 32 élèves sur 34 à la fin du cahier (Tableau 8.3). La mise en œuvre de ces opérateurs repose sur un contrôle permettant de distinguer les deux extrémités ronde ou cruciforme ( $\Sigma\text{Extr}$ ) et d'anticiper le déplacement. Ainsi le double déplacement des segments numériques, par translation et par rotation, a été maîtrisé par 32 élèves sur 34 à la fin du cahier. Nous entendons par « maîtrisé », le fait que l'élève est capable d'anticiper le déplacement souhaité ; si le segment est attrapé par un point du segment (rTran) ou par l'extrémité ronde ( $\Sigma\text{Extr} + \text{rTran} = \text{rTrans}$ ) alors celui-ci est translaté ( $\Sigma\text{Tran}$ ) ; si le segment est attrapé par l'extrémité cruciforme ( $\Sigma\text{Ext} + \text{rRot} = \text{rPiv}$ ) alors le segment pivote autour de l'autre extrémité qui reste fixe ( $\Sigma\text{Rot}$ ).

Maîtrise du double déplacement des segments numériques		
Page de maîtrise du double déplacement	Nombre d'élèves	Nombre total d'élèves
Page 1	<b>19</b>	19
Page 2	<b>10</b>	19 + 10 = <b>29</b>
Page 3	<b>2</b>	29 + 2 = <b>31</b>
Page 5	<b>1</b>	31 + 1 = <b>32</b>
Jamais	2	

Tableau 8.3 : Nombre d'élèves maîtrisant le double déplacement des segments à partir de chaque page

## Stratégies identifiées

La formation d'un triangle à partir de segments donnés, tout comme la vérification de l'existence ou non du triangle, peuvent être menées à bien en utilisant diverses stratégies. Nous allons maintenant présenter un bilan des stratégies utilisées par les élèves, étant entendu que certains élèves en mettent plusieurs en œuvre au cours de leur travail sur les pages successives du cahier.

### Stratégie ajustement

La première stratégie qui a été mise en œuvre par les élèves (les 32 qui ont fini par maîtriser le double déplacement) est la « stratégie ajustement » (Figure 8.2). Un premier segment est choisi comme côté, puis un deuxième segment est déplacé de manière à ce qu'une de ses extrémités se superpose sur une des extrémités du premier segment ; le second segment est orienté grâce à une anticipation de la place nécessaire pour le



troisième côté. Enfin le troisième segment est positionné dans l'espace laissé libre pour lui. Finalement par ajustements successifs les segments sont réorientés et disposés de manière à faire superposer leurs extrémités pour former un triangle. La mise en œuvre de cette stratégie mobilise l'enchaînement des opérateurs et contrôles suivants : ( $\Sigma T2 + \Sigma T1 + rTran$  ou  $rTrans + \Sigma Tran + rRot + \Sigma Rot + rSu + \Sigma Su + \Sigma T1$ ). Ces opérateurs et contrôles sont caractéristiques de la conception « Triangle 2D ». Nous en déduisons que la conception « Triangle 2D » a été mobilisée par les 32 élèves appliquant cette stratégie.

Les ajustements sont nécessaires lorsque la longueur du troisième segment n'est pas égale à la place libre anticipée ou lorsque l'orientation du troisième segment n'est pas celle qui convient. Le déplacement le plus efficace pour effectuer des ajustements est la rotation du segment autour d'une extrémité qui reste fixe.

L'asymétrie des segments dans leur déplacement est une contrainte qui rend cette stratégie laborieuse. Pour n'avoir que des ajustements par rotation, il faut anticiper que les extrémités libres du deuxième et du troisième segment soient cruciformes. Surmonter cette contrainte de déplacement des segments conduit à la mise en œuvre de la « stratégie ligne brisée ».

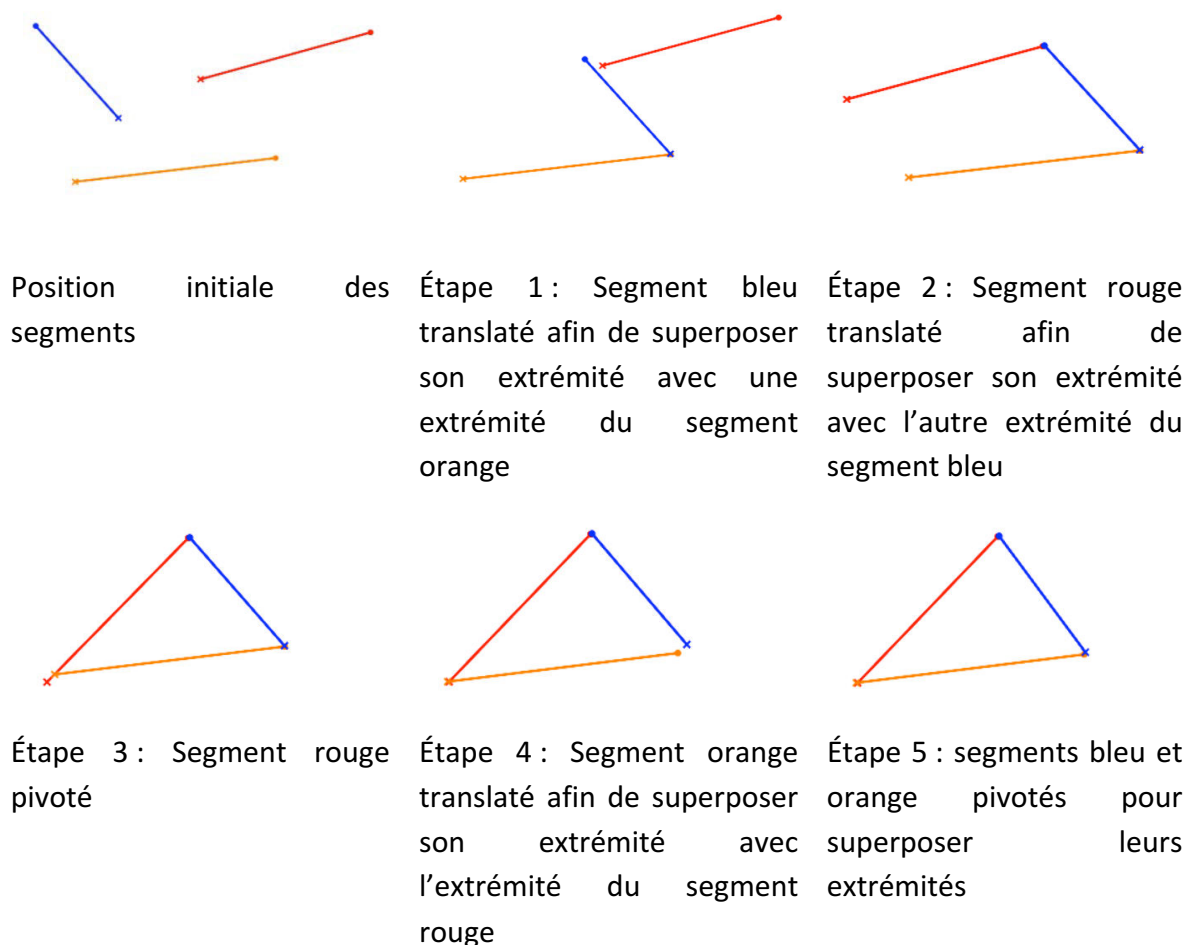


Figure 8.2 : Illustration d'une « stratégie ajustement » pour former un triangle

### Stratégie ligne brisée

La « stratégie ligne brisée » (Figure 8.3) a été mise en œuvre par 14 élèves. Cette stratégie consiste à former une ligne brisée dont les extrémités sont cruciformes et à pivoter les segments extrêmes de la ligne brisée pour former le triangle ou constater qu'il n'est pas possible de former un triangle avec ces segments. Dix élèves ont mis en place cette stratégie dès les pages 1 et 2. Pour les quatre autres, ce sont les nouvelles contraintes de la page 3 qui ont favorisé la mise en œuvre de cette stratégie. En effet page 3 les longueurs des segments proposés ne vérifient pas l'inégalité triangulaire. Ainsi il n'est pas possible de former un triangle avec les segments de cette page. Former une ligne brisée dont les extrémités sont cruciformes avec le plus grand segment au centre de la ligne brisée permet aux élèves de visualiser que les segments de la ligne brisée ne peuvent jamais se rencontrer.

Cette stratégie repose sur la mise en œuvre de l'enchaînement des opérateurs et contrôles suivants :  $(rLiB = (rTran \text{ ou } rTrans + \Sigma Tran + rSu + \Sigma Su) + (rPiv + \Sigma Rot) + \Sigma LB + \Sigma T3 \text{ ou } \Sigma T4)$ . Les opérateurs  $rLiB$  et  $rPiv$  ainsi que les contrôles  $\Sigma T3$  ou  $\Sigma T4$  sont caractéristiques de la conception « Triangle 1D ligne brisée ». Nous en déduisons que la conception « Triangle 1D ligne brisée » a été mobilisée par les 14 élèves appliquant cette stratégie.

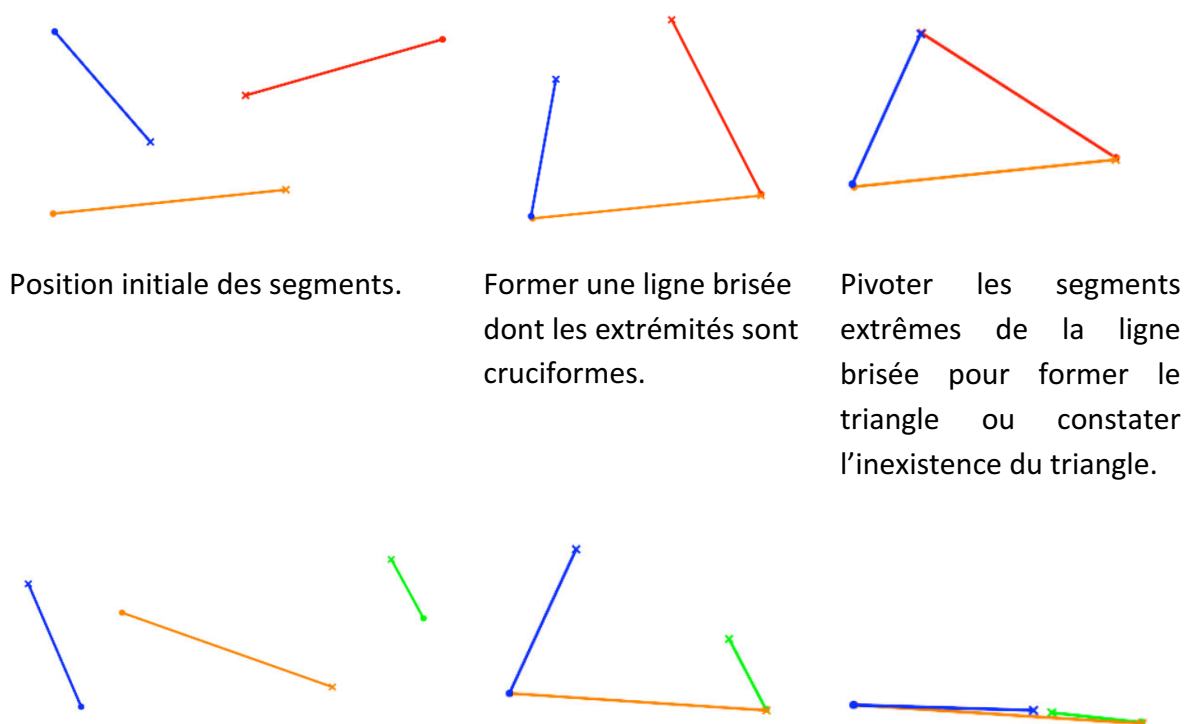


Figure 8.3 : Illustration d'une « stratégie ligne brisée » pour former un triangle ou constater que les trois segments ne peuvent pas être les trois côtés d'un triangle

### Stratégies juxtaposer comme une ligne brisée ou comme l'inégalité triangulaire

Page 4 du cahier les segments proposés sur la page ne peuvent plus pivoter. Un nouveau problème est posé aux élèves ; prévoir si les segments pourraient être les trois côtés d'un

triangle. Le seul déplacement possible pour ces segments est le déplacement par translation.

Un élève, Zéphir<sup>11</sup>, a juxtaposé les segments comme une ligne brisée (rTran +  $\Sigma$ Tran) (Figure 8.4). Il a écrit sa démarche : « *si on arriverai pas à prévoir un triangle les deux petit segment seraient plus petit que le plus grand lorsqu'on les attache* ». <sup>12</sup> Cette explication fait référence à une ligne brisée dont les segments extrêmes ne se rencontrent pas. Dans ce cas le triangle n'existe pas ( $\Sigma$ T4). Ce contrôle étant spécifique de la conception « Triangle 1D ligne brisée », nous en déduisons que Zéphir a mobilisé la conception « Triangle 1D ligne brisée » pour résoudre le problème d'existence ou non du triangle.

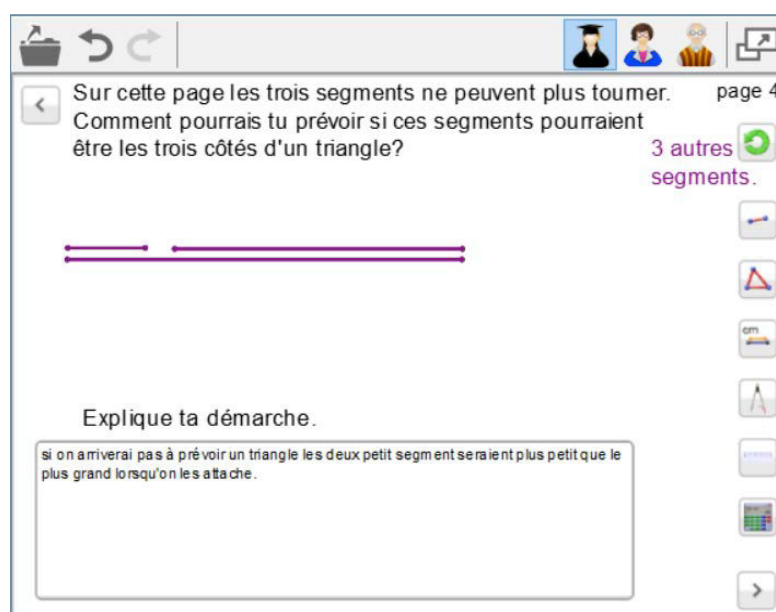


Figure 8.4 : La stratégie de Zéphir : « juxtaposer comme une ligne brisée »

Deux élèves (Imène et Nawel) ont mis en œuvre une stratégie proche de la précédente. Ils ont aussi juxtaposé les deux petits segments au-dessus du plus grand pour comparer les longueurs (Figure 8.5). Ils ont expliqué leurs démarches comme suit.

- Imène : « *non se n'ai pas possible quart il ne s'on pas de la mème longueur sa seure paussible si sa seuré de la meme longueur* ».
- Nawel : « *non il peuvent pas parce que je les ai mis l'un sur l'autre* ».

Ces explications nous permettent d'inférer le contrôle suivant : si la somme des petites longueurs est inférieure à la plus grande alors le triangle n'existe pas ( $\Sigma$ T9). Ce contrôle étant caractéristique de la conception « Triangle 1D longueurs des côtés », nous en déduisons que ces deux élèves ont mobilisé cette conception pour résoudre le problème d'existence ou non du triangle.

<sup>11</sup> Tous les élèves participant à l'expérimentation ont été renommés de façon à anonymiser leur travail.

<sup>12</sup> Texte original de l'élève. L'orthographe n'a pas été corrigée, comme pour tous les autres écrits d'élèves.

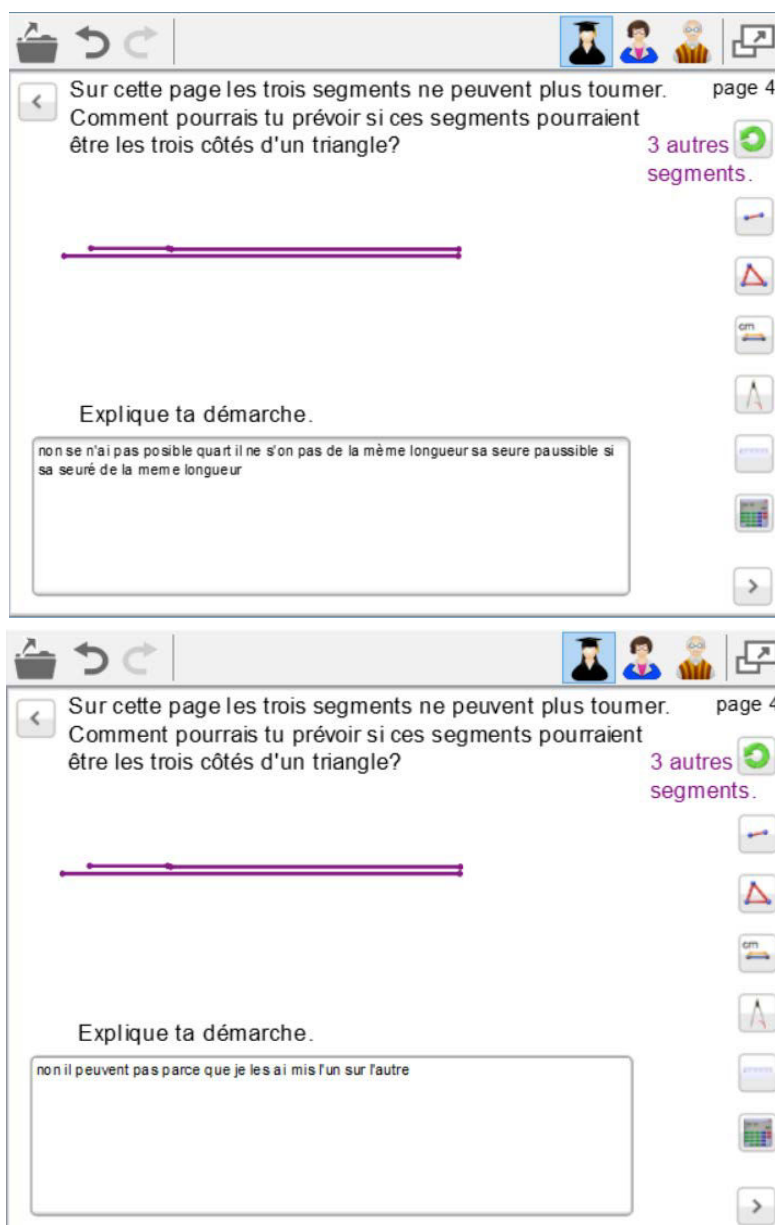


Figure 8.5 : Imène et Nawel mette en œuvre la « stratégie juxtaposer comme l'inégalité triangulaire »

Trois autres élèves (Camille, Gonzague et Séraphin), sans juxtaposer les petits segments au-dessus du plus grand, ont fait référence à la longueur de ceux-ci pour justifier que les trois segments proposés ne peuvent pas être les trois côtés d'un triangle.

- Camille : « *on ne peut pas faire un triangle car il y a des bou qui sont trop grand ou trop petit* »
- Gonzague : « *non parce-que ils ont tous des tailles carrement différentes* »
- Séraphin : « *on peut pas car il a un segment trop petit* ».

Pour ces trois élèves, si un segment est trop petit (ou trop grand) alors le triangle n'existe pas.

Sur cette page, la plupart des élèves (13 sur 34) ont fait référence au fait que l'on ne peut plus pivoter les segments. Par exemple :

- Aline : « *je vois pas comment faire triangle sans les faire tourner* »
- Hadeline : « *non car il ne peut pas tourner* »
- Hanais : « *non ça ne tourne pas* »
- Karim : « *non quart il peut pas tourné les segments* »
- Mohan : « *les point ne peuvent pas tourner* »

Pour ces 13 élèves, le déplacement par rotation des segments autour d'une extrémité qui reste fixe est indispensable pour former un triangle dans le cahier informatisé. C'est la formation du triangle qui le fait exister.

### *Le recours aux outils de géométrie dynamique*

Dans ce premier cahier informatisé, des outils de géométrie dynamique sont à disposition. Les mêmes outils sont proposés sur chaque page. Ces outils ne sont pas nécessaires pour résoudre les problèmes rencontrés mais certains peuvent intervenir dans la mobilisation d'opérateurs de tracés et dans la mise en œuvre de stratégies. Beaucoup d'élèves ont testé les outils pour découvrir ce qu'ils permettaient de faire. Nous ne présentons ici que leurs mobilisations ayant une finalité pour le problème à résoudre.

Nous observons dans les vidéos que certains élèves ont mobilisé un outil pour mettre en œuvre l'opérateur pivoter un segment en attrapant l'extrémité ronde. L'outil n'est pas mobilisé pour produire un tracé mais comme un bouton qui permettrait de libérer le déplacement par rotation. Par exemple page 4 trois élèves (Alycia, Marilyne et Marie) ont essayé de pivoter les segments à l'aide du compas-gd (Figure 8.6). Le compas-gd ne permettant pas de faire effectivement pivoter le segment présent sur la page, cet outil a été abandonné par ces trois élèves.

### *Mobilisation d'un outil pour pivoter un segment*

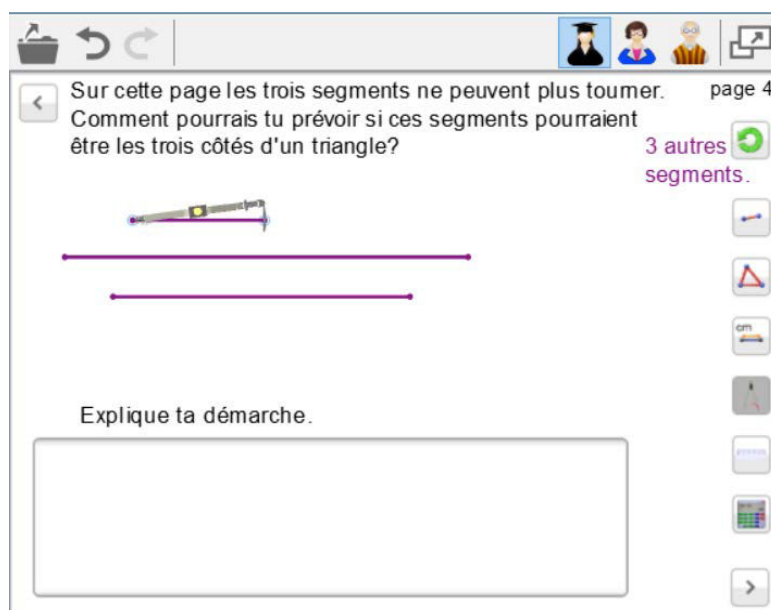


Figure 8.6 : Mobilisation du compas-gd pour tenter de pivoter le segment présent sur la page

*Mobilisation de l'outil mesure ou règle pour connaître la longueur d'un segment*

Cinq élèves (Alycia, Ivanoé, Séraphin, Sidonie et Yasmina) ont mobilisé l'opérateur mesurer une longueur en utilisant l'outil mesure (rM-gdM) ou règle graduée-gd (rM-gdR) pour connaître la mesure des segments proposés sur la page. Mais pour aucun d'eux, cet opérateur mesurer une longueur n'est intervenu dans leurs stratégies.

*Mobilisation de l'outil segment pour prolonger les segments donnés*

Deux élèves (Dimitri et Roseline) ont mobilisé l'opérateur pour tracer un segment entre deux points en utilisant l'outil segment (rS3-gdS) afin de prolonger les segments proposés et de compléter les triangles (Figure 8.7).

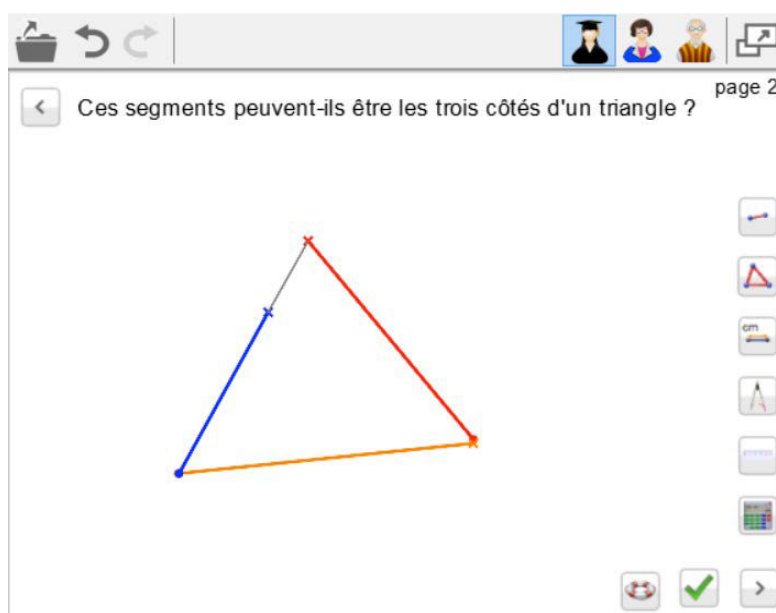


Figure 8.7 : Mobilisation de l'outil segment pour compléter le triangle

*Mobilisation de l'outil triangle comme support*

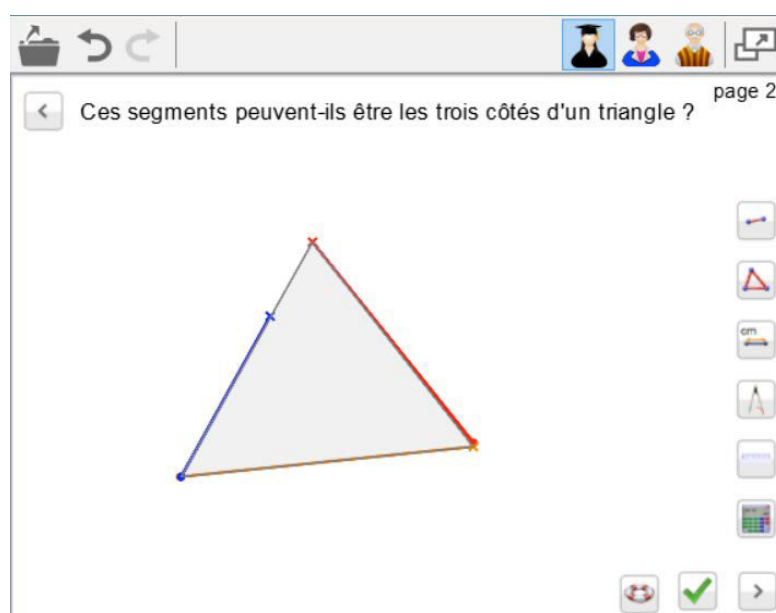


Figure 8.8 : Mobilisation de l'outil triangle comme support du triangle à former

Deux élèves (Alycia et Hadeline) ont mobilisé l'opérateur pour tracer un triangle en utilisant l'outil triangle (rT-gdT). Les segments proposés à l'écran ont été positionné sur le contour du triangle tracé (Figure 8.8). Ces deux élèves ont ensuite cherché à allonger le segment bleu.

### Un problème non dévolu

Sur cette page 4, seuls trois élèves (Zéphir, Imène et Nawel) ont mis en place une des « stratégie juxtaposer ». Trois autres élèves (Alycia, Marie et Marilyne) ont essayé de pivoter les segments avec l'outil compas mais la construction du triangle au compas n'a pas été mise en œuvre. Cette dernière stratégie est l'apprentissage visé par la situation après les deux cahiers informatisés et les deux activités papier-crayon. Si elle se mettait en place dès le premier cahier informatisé, le duo n'aurait pas lieu d'être. Comme sur les pages précédentes les élèves voudraient former le triangle. Le problème théorique d'existence ou non du triangle n'est pas dévolu ; pour ces élèves un triangle existe s'il est visible. Notre interprétation est que « prévoir » nécessite de mettre en place un raisonnement ce qui est difficile pour un élève de l'école élémentaire qui n'a fait que de la géométrie d'observation.

### Trois segments ne permettent pas toujours d'obtenir un triangle

Avant de traiter le cahier, 32 élèves sur 34 ont répondu positivement à la question : « Avec trois segments on peut obtenir un triangle. Qu'en penses-tu ? ». À la fin du cahier 26 élèves ont répondu qu'avec trois segments il n'est pas toujours possible d'obtenir un triangle (Annexe 4).

Page 3 les longueurs des segments proposés ne vérifient pas l'inégalité triangulaire. Ce choix de valeur de la variable didactique longueur des segments déstabilise l'équilibre du système [sujet-milieu]. Les élèves ont essayé de former un triangle ; chaque segment prend la place de base du triangle à tour de rôle.

Ce problème d'existence ou non du triangle avec les segments proposés a été résolu par 19 élèves qui ont mobilisé une « stratégie ligne brisée ». Pour les autres élèves ce problème a résisté ; la réponse cochée est « oui » alors qu'aucun triangle n'est formé. La rétroaction de validation proposée sur cette page, une phrase et une animation (Figure 8.9), conforte ceux qui ont répondu « non » dans leur proposition et permet à ceux qui ont répondu « oui » de changer de point de vue.

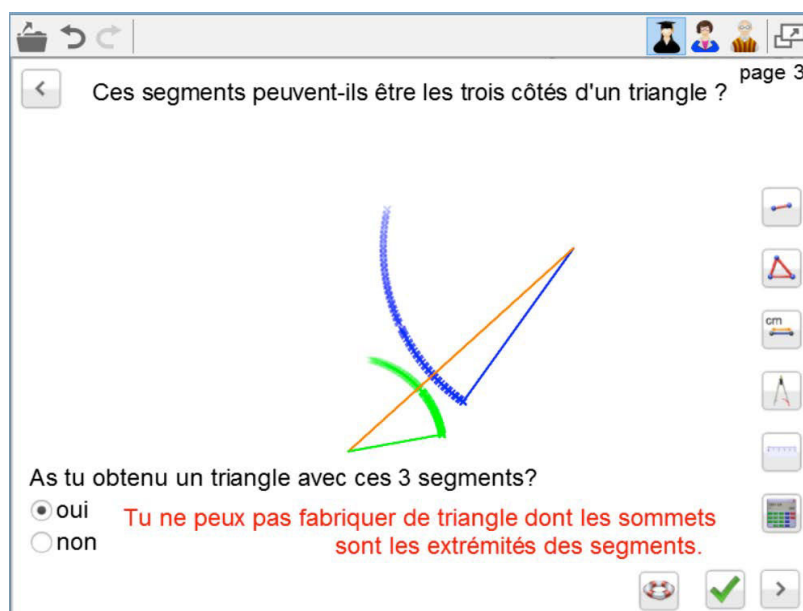


Figure 8.9 : Une animation permet de visualiser que les trois longueurs proposées ne peuvent être les trois côtés d'un triangle

### Gain didactique du premier cahier informatisé.

Dans notre travail nous cherchons à mettre en évidence le potentiel didactique de chaque artefact ainsi que celui du duo. Nous appelons gain didactique l'évaluation de ce potentiel.

#### *Un instrument déplacement par rotation pour 32 élèves sur 34*

Les expérimentations nous ont permis d'observer que le premier cahier informatisé permet à 32 élèves sur 34 de maîtriser le double déplacement des segments, par translation ou par rotation autour d'une extrémité qui reste fixe. Ces 32 élèves ont donc élaboré deux instruments déplacements :

- Un instrument déplacement par translation ; on peut décrire deux schèmes d'utilisation relatifs à cet instrument :
  - traduire en attrapant un point quelconque du segment sauf l'extrémité cruciforme [ $rTran + \Sigma Tran$ ] ;
  - traduire en attrapant l'extrémité ronde [ $(\Sigma Extr + rTran = rTrans) + \Sigma Tran$ ].
- Un instrument déplacement par rotation ; on décrit un schème d'utilisation : pivoter en attrapant l'extrémité cruciforme [ $(\Sigma Ext + rRot = rPiv) + \Sigma Rot$ ].

L'opérateur ( $rPiv$ ) sera transporté dans l'environnement papier-crayon. L'outil qui permet de le réaliser est le compas matériel comme nous le verrons dans le paragraphe 8.2.3 décrivant la première activité papier-crayon.

#### *Un triangle est une ligne brisée fermée pour 14 élèves sur 34*

Nous avons observé, dans les 34 productions analysées, que 14 élèves ont fait évoluer leurs stratégies au fil des pages du cahier passant de la « stratégie par ajustement » à la « stratégie ligne brisée ». Former une ligne brisée ( $rLiB$ ) dont les extrémités sont



cruciformes et pivoter les segments extrêmes de la ligne brisée (rPiv) permet à ces élèves d'obtenir le triangle si les segments extrêmes se rencontrent ( $\Sigma T3$ ). Lorsque les segments extrêmes ne se rencontrent pas il est possible de conclure à l'inexistence du triangle ( $\Sigma T4$ ). Ces deux opérateurs et ces deux contrôles sont spécifiques de la conception « Triangle 1D ligne brisée », mobilisée par cette stratégie. Nous en concluons qu'à la fin du premier cahier informatisé 14 élèves sur 34 sont passés de la conception « Triangle 2D » à la conception « Triangle 1D ligne brisée ».

#### *Avec trois segments on ne peut pas toujours former un triangle*

Après avoir traité ce cahier 26 élèves sur 34 ont fait l'expérience qu'avec trois segments on ne peut pas toujours former un triangle. Quatorze d'entre eux ont engagé la conception « Triangle 1D ligne brisée » qui contient un contrôle d'existence ou non du triangle ( $\Sigma T3$ -  $\Sigma T4$ ). Pour les 12 autres, ils ont à ce niveau de la situation fait évoluer la conception initiale « Triangle 2D » en l'enrichissant d'une nouvelle structure de contrôle : avec trois segments on ne peut pas toujours former un triangle. Cette conception « Triangle 2D » enrichie ne contient pas l'opérateur pour former une ligne brisée (rLiB) ce qui la différencie de la conception « Triangle 1D ligne brisée ».

### 8.2.3. Première activité papier-crayon : une nouvelle fonction du compas et deux nouvelles conceptions du triangle et du cercle

Dans cette première activité papier-crayon deux problèmes sont à résoudre : déterminer si trois segments tracés pourraient être les trois côtés d'un triangle et lorsque cela est possible tracer le triangle ayant les segments pour côtés. Cinq trios de segments sont proposés. Les élèves ont chacun à leur disposition un crayon, une gomme, ainsi qu'une règle graduée, une équerre et un compas.

#### Le compas pour pivoter un segment

Lorsque les segments proposés sont disposés en ligne brisée on observe que 4 élèves (Dimitri, Loris, Toni et Yann) ont mobilisé uniquement la règle graduée et que les 30 autres élèves ont mobilisé le compas. Parmi les élèves qui ont mobilisé le compas, 25 l'utilisent afin de mettre en œuvre l'opérateur pour pivoter un segment autour d'une de ses extrémités (rPi) renvoyant à l'opérateur pour pivoter un segment numérique (rPiv) (Figure 8.10). Les vidéos nous permettent d'entendre Djemil expliquer sa construction à son voisin.

- « *Tu poses ici la pointe* » (il pose la pointe du compas sur l'extrémité fixe)
- « *Après tu poses le crayon sur la croix* »
- « *Et tu fais comme ça* » (il pivote le compas) « *un arc de cercle* »
- « *Après pareil de l'autre côté* »

Le compas a été mobilisé ici afin de remplacer l'opérateur pour pivoter un segment autour de l'extrémité ronde du premier cahier informatisé (rPiv). Les modalités

d'action de l'opérateur ( $rPiv$ ) pour pivoter un segment numérique : distinguer les extrémités ( $\Sigma Ext$ ), ronde et cruciformes du segment numérique, puis attraper l'extrémité cruciforme et déplacer le point ( $rRot + \Sigma Rot$ ), sont adaptées dans l'environnement papier-crayon à la mise en œuvre de l'opérateur ( $rPi1$ ) pour pivoter un segment à l'aide du compas : distinguer chaque branche du compas, puis piquer la pointe sur l'extrémité du segment qui reste fixe ( $\Sigma Pointe$ ), poser la mine ( $\Sigma Mine$ ) sur l'extrémité à pivoter, enfin pivoter le compas en maintenant l'écartement fixe et produire une trace visible ( $rAC2 + \Sigma AC$ ). Un second opérateur est mobilisé afin de tracer le segment résultat du pivotement de même longueur que le segment initial ( $rPi2$ ). Sur les 25 élèves qui ont mobilisé le compas pour produire la trace de l'extrémité du segment qui pivote ( $rPi1$ ), 23 ont tracé les segments résultats du pivotement ( $rPi2$ ). Ces 23 élèves ont donc mobilisé l'opérateur ( $rPi = rPi1 + rPi2$ ) pour résoudre le problème de tracé du triangle en fermant la ligne brisée (Figure 8.10).

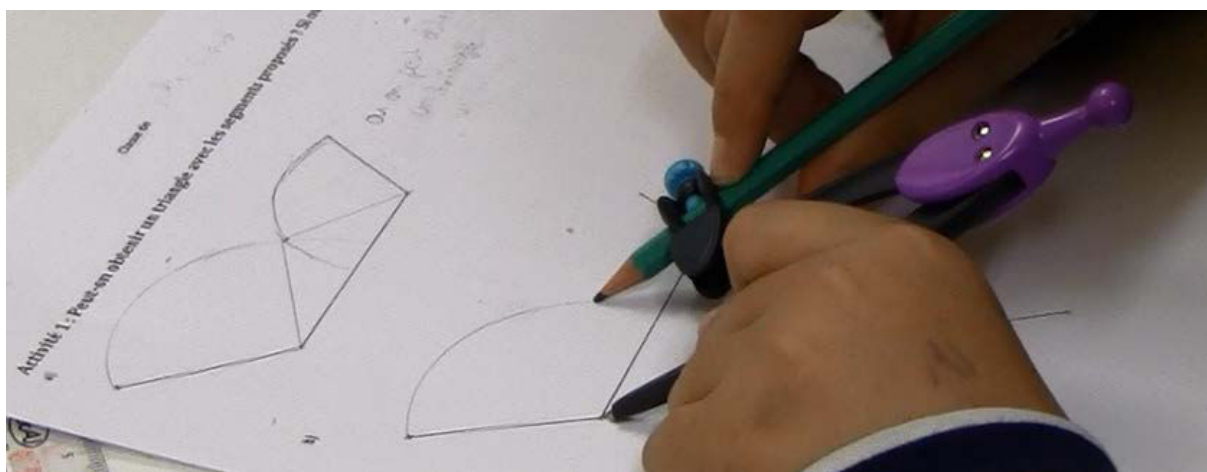


Figure 8.10 : Djemil mobilise le compas pour pivoter un segment

L'utilisation du compas pour produire la trace de l'extrémité du segment qui pivote ( $rPi1$ ) a permis aux 25 élèves de résoudre le problème d'existence ou non du triangle, en particulier de reconnaître la ligne brisée qui ne permet pas d'obtenir un triangle. Par exemple :

- Aline « *On ne peut pas faire un triangle avec ses segments car les 2 segments que j'ai plissé ne se croisent pas* » (Figure 8.11).

À côté d'une figure similaire on peut lire aussi :

- Hadeline : « *Non il vont jamais se rencontré* »

Lors de la mobilisation de l'opérateur pour produire la trace de l'extrémité du segment qui pivote ( $rPi1$ ), le compas est positionné sur un segment déjà tracé, la pointe sur l'extrémité fixe et la mine sur l'extrémité à pivoter ainsi le segment est visible entre les branches du compas et lorsque ce dernier pivote un segment pivote entre ses branches ( $\Sigma C2$ ). Le compas produit la trace de la trajectoire de l'extrémité du segment pivotée ( $\Sigma C3$ ) (Figure 8.10). L'opérateur ( $rPi1$ ) et les deux contrôles  $\Sigma C2$  et  $\Sigma C3$  sont caractéristiques de

la conception « Cercle segment pivoté ». Nous en déduisons que la conception « Cercle segment pivoté » a été mobilisée par les 25 élèves qui ont pivoté les segments au compas.

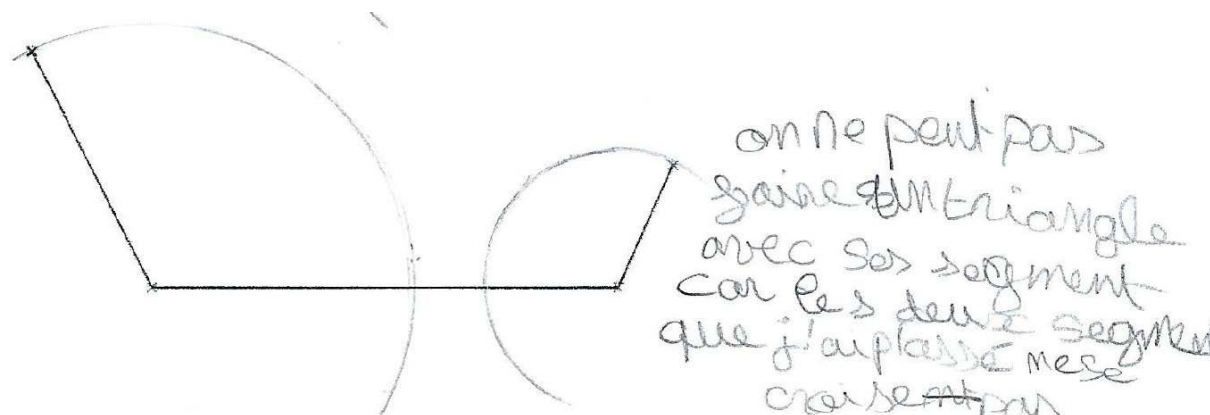
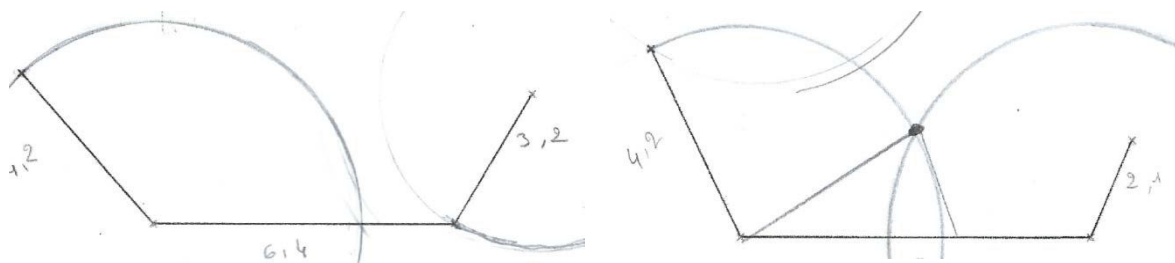


Figure 8.11 : Aline justifie qu'il n'est pas possible d'obtenir un triangle avec les segments proposés

Cinq autres élèves (Arsène, Camille, Ivanoé, Luna et Mohan) ont mobilisé le compas et produit des cercles ou des arcs de cercle mais le compas n'a pas été mobilisé correctement dans la mise en œuvre de l'opérateur pour produire la trace de l'extrémité du segment qui pivote ( $r_{Pi1}$ ). Les structures de contrôles ( $\Sigma_{Pointe}$  et  $\Sigma_{Mine}$ ) qui contrôlent que la pointe du compas est piquée sur l'extrémité fixe du segment et que la mine du compas est posée sur l'extrémité à pivoter n'ont pas été engagées par ces élèves (Figure 8.12).



La pointe et la mine du compas ne sont pas piquées et posées au bon endroit pour le cercle de droite

Les deux cercles ont le même rayon.

Le triangle tracé n'a pas les segments de la ligne brisée pour côtés

Figure 8.12 : Illustrations de mobilisations erronées du compas

## Stratégies identifiées

Nous analysons dans ce paragraphe les stratégies identifiées dans la seconde partie de l'activité dans laquelle les segments ne sont plus disposés en ligne brisée mais sont parallèles entre eux (Figure 8.13). Les problèmes à résoudre sont toujours des problèmes de construction de triangle et des problèmes d'existence ou non du triangle.

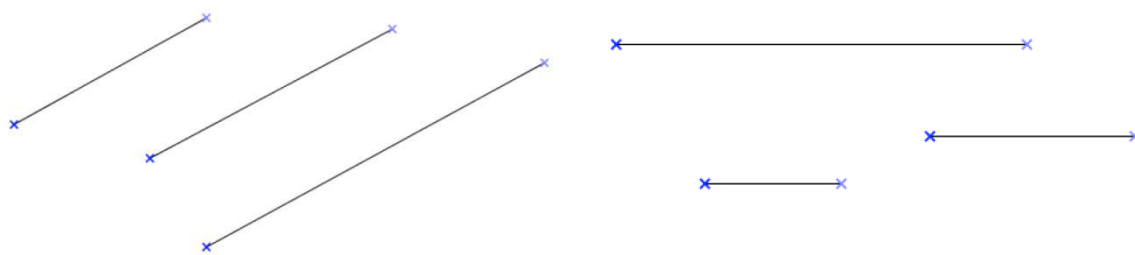
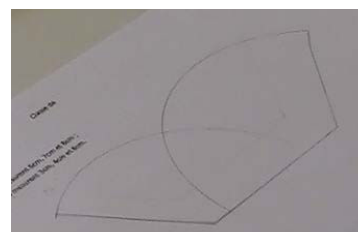
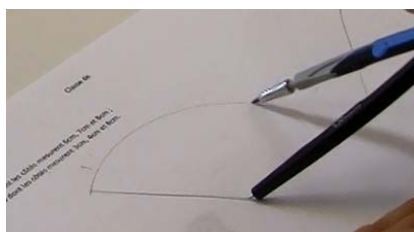
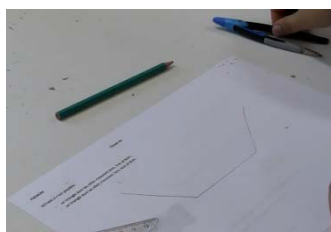


Figure 8.13 : Première activité papier-crayon : deux dernières configurations des segments

### Stratégie ligne brisée

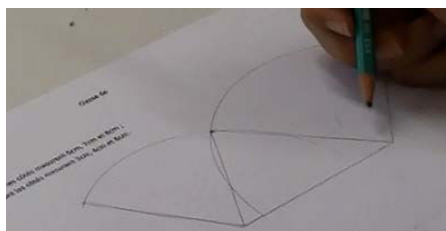
La ligne brisée comme étape pour obtenir un triangle est apparue dans le premier cahier informatisé pour 14 élèves. Elle a été intégrée au milieu dans la première partie de l'activité papier-crayon (Figure 8.10).

Dans cette seconde partie, les vidéos nous ont permis d'observer la mise en œuvre de la « stratégie ligne brisée » par 16 élèves (Figure 8.14).

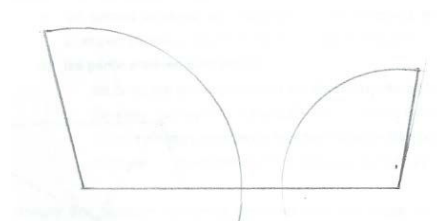


Tracer une ligne brisée.

Pivoter les segments extrêmes de la ligne brisée



Les segments extrêmes de la ligne brisée se rencontrent, le triangle existe.



Les segments extrêmes de la ligne brisée ne se rencontrent pas, il n'est pas possible de construire un triangle avec ces trois segments pour côtés.

Figure 8.14 : Illustration de la « stratégie ligne brisée »

Cette stratégie consiste à tracer une ligne brisée avec les trois segments proposés, puis à pivoter les segments extrêmes à l'aide du compas pour obtenir le triangle ou constater que les trois segments ne peuvent être les trois côtés d'un triangle. La résolution du problème est validée par les deux contrôles suivants : si les segments extrêmes de la ligne brisée se rencontrent alors le triangle existe ( $\Sigma T3$ ) et si les segments extrêmes de la ligne

brisée ne se rencontrent pas alors le triangle n'existe pas ( $\Sigma T4$ ). Cette stratégie repose donc sur la mise en œuvre de l'enchaînement d'opérateurs et de contrôles suivant  $((rLB = rS2 + rS2E + \Sigma S) + \Sigma LB + (rPi1 = \Sigma Pointe + \Sigma Mine + rAC2 + \Sigma AC) + \Sigma C2 + \Sigma C3 + \Sigma T3 + (rPi2 = \Sigma Pi + rS3 + \Sigma S)$  ou  $\Sigma T4$ ). Ces opérateurs et contrôles sont des opérateurs spécifiques des conceptions « Triangle 1D ligne brisée » et « cercle segment pivoté » ce qui nous permet de conclure que les conceptions « Triangle 1D ligne brisée » et « Cercle segment pivoté » ont été mobilisées par ces 16 élèves.

On observe que 14 élèves sur les 16 qui ont mis en œuvre cette stratégie ont tracé les segments résultats du pivotement ( $rPi2$ ) et donc ont tracé le triangle demandé. Les deux autres élèves se sont arrêtés aux tracés des arcs de cercle et à la conclusion sur l'existence ou non du triangle sans le tracer.

### *Stratégie à la règle et au compas*

Trois élèves ont mis en œuvre cette stratégie dès la première activité papier-crayon. Les captures vidéo ont permis de constater que pour deux de ces élèves (Hanais et Imène) la ligne brisée à fermer est toujours sous-jacente. En effet ces deux élèves ont tracé à la règle le plus grand segment puis ont mis leurs mains sur les extrémités du segment tracé et ont fait pivoter leurs mains (Figure 8.15).



Figure 8.15 : Imène montre avec ses mains les segments côtés du triangle qui pivotent : la ligne brisée est sous-jacente

Le compas a été ensuite ouvert sur un des autres segments proposés. Il a été alors piqué sur une extrémité du segment puis pivoté en maintenant l'écartement fixe pour produire une trace visible. Ces actions avec le compas sont les modalités d'action de l'opérateur pour pivoter un segment au compas ( $rPi1$ ). Les deux côtés du triangle ont ensuite été tracés ( $rPi2$ ) (Figure 8.16). Ainsi nous établissons que ces deux élèves ont mobilisé la conception « Triangle 1D ligne brisée ».

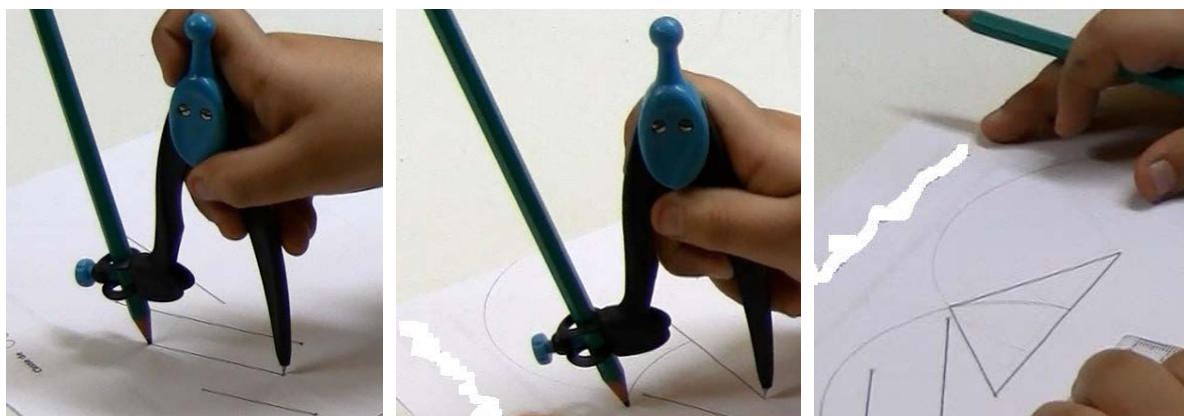


Figure 8.16 : Mise en œuvre de la « stratégie à la règle et au compas » par Imène : la ligne brisée est sous-jacente

Le troisième élève (Isidore) a utilisé comme base du triangle un des segments proposés. Puis il a ouvert le compas sur un des autres segments tracés et il a produit un cercle centré sur une extrémité du segment de base. Il a fait la même chose pour le dernier segment (Figure 8.17). Lorsque le triangle existe, cet élève n'a pas tracé le triangle mais a marqué par des points les deux positions possibles pour le 3<sup>ème</sup> sommet. Seuls des opérateurs de tracés de cercles ont été mis en œuvre (rC3) par cet élève. Un contrôle pour piquer la pointe du compas sur le centre du cercle ( $\Sigma$ PointeC) a aussi été engagé. De plus l'existence ou non du triangle a été validée par les contrôles suivants : si les cercles (arcs de cercle) se croisent alors le triangle existe ( $\Sigma$ T5), si les cercles (arcs de cercle) ne se croisent pas alors le triangle n'existe pas ( $\Sigma$ T6) et si les cercles se croisent alors l'intersection est le 3<sup>ème</sup> sommet du triangle ( $\Sigma$ T7). Ces opérateurs et contrôles sont spécifiques de la conception « Triangle OD » et de la conception « Cercle OD ». Nous en déduisons que cet élève a mobilisé la conception « Triangle OD » et la conception « Cercle OD ».

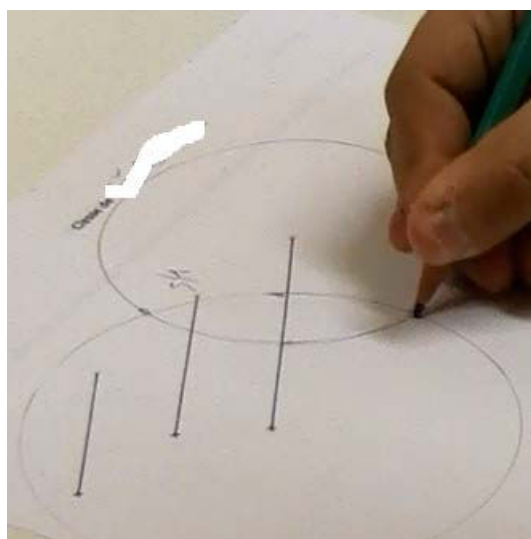


Figure 8.17 : Isidore identifie les deux lieux possibles pour le troisième sommet du triangle

Enfin trois élèves (Arsène, Luna et Séraphin) ont mobilisé le compas pour tracer des cercles mais leurs productions sont incohérentes et ne permettent pas l'identification d'opérateurs et de contrôles et donc des conceptions mobilisées.

### *Stratégie à la règle graduée uniquement*

Dans cette activité papier-crayon, 10 élèves ont tracé les triangles à la règle graduée uniquement. Cette stratégie consiste à tracer les deux premiers segments en anticipant la place nécessaire pour le troisième puis à faire des ajustements successifs pour obtenir le triangle. Les 4 élèves qui avaient tracé les triangles à la règle graduée uniquement dans la première partie de l'activité, lorsque des lignes brisées étaient proposées, ont continué ici à n'utiliser que la règle graduée. Parmi les cinq élèves qui avaient mobilisé le compas de manière erronée, 3 (Ivanoé, Camille et Mohan) n'ont utilisé ici que la règle graduée. Enfin 4 autres élèves (Karim, Marie, Nawel et Yacinthe) qui avaient utilisé le compas pour pivoter les segments des lignes brisées ont tracé les triangles à la règle graduée uniquement. Commencer par former une ligne brisée avec les segments c'est-à-dire se ramener à ce qui a été fait précédemment n'est pas mis en place par ces cinq élèves.

Cette stratégie « à la règle graduée uniquement » repose sur la mise en œuvre d'opérateurs de tracés de segments ( $rS2 + rS2E$ ) et le problème est jugé résolu lorsqu'une figure à trois côtés rectilignes est tracé ( $\Sigma T1$ ). Ces opérateurs et contrôles étant caractéristiques de la conception « Triangle 2D », nous concluons que ces 12 élèves ont mobilisé la conception « Triangle 2D ».

Enfin Dimitri et Sidonie ont tracé des triangles à la règle graduée uniquement mais il ne s'agit pas des triangles demandés.

### *Stratégie inégalité triangulaire*

Nawel a mobilisé la conception « Triangle 1D longueurs des côtés ». En effet, les opérateurs et contrôles mobilisés sont caractéristiques de cette conception. Nawel a mesuré la longueur de chaque segment ( $rM$ ) et si la somme des deux petites longueurs est supérieure à la plus grande, elle a conclu que le triangle existe ( $\Sigma T8$ ). Une fois l'existence du triangle validée, le triangle a été tracé à la règle graduée uniquement (Figure 8.18). Lorsque la somme des deux petites longueurs est inférieure à la plus grande, elle a conclu que le triangle n'existait pas ( $\Sigma T9$ ).



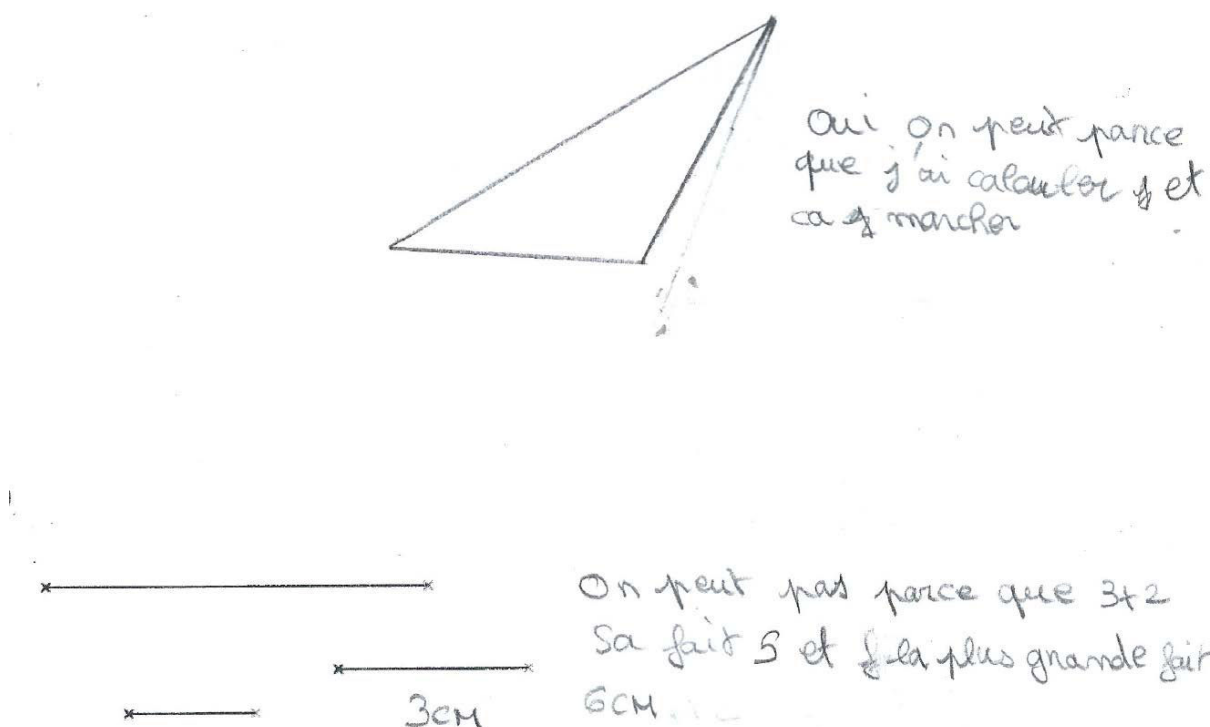


Figure 8.18 : Nawel compare la plus grande longueur à la somme des deux petites pour justifier l'existence ou non du triangle

#### 8.2.4. Effets du duo d'artefacts, déplacement par rotation et compas, sur les apprentissages

*Une nouvelle fonction du compas : pivoter un segment pour 25 élèves sur 34*

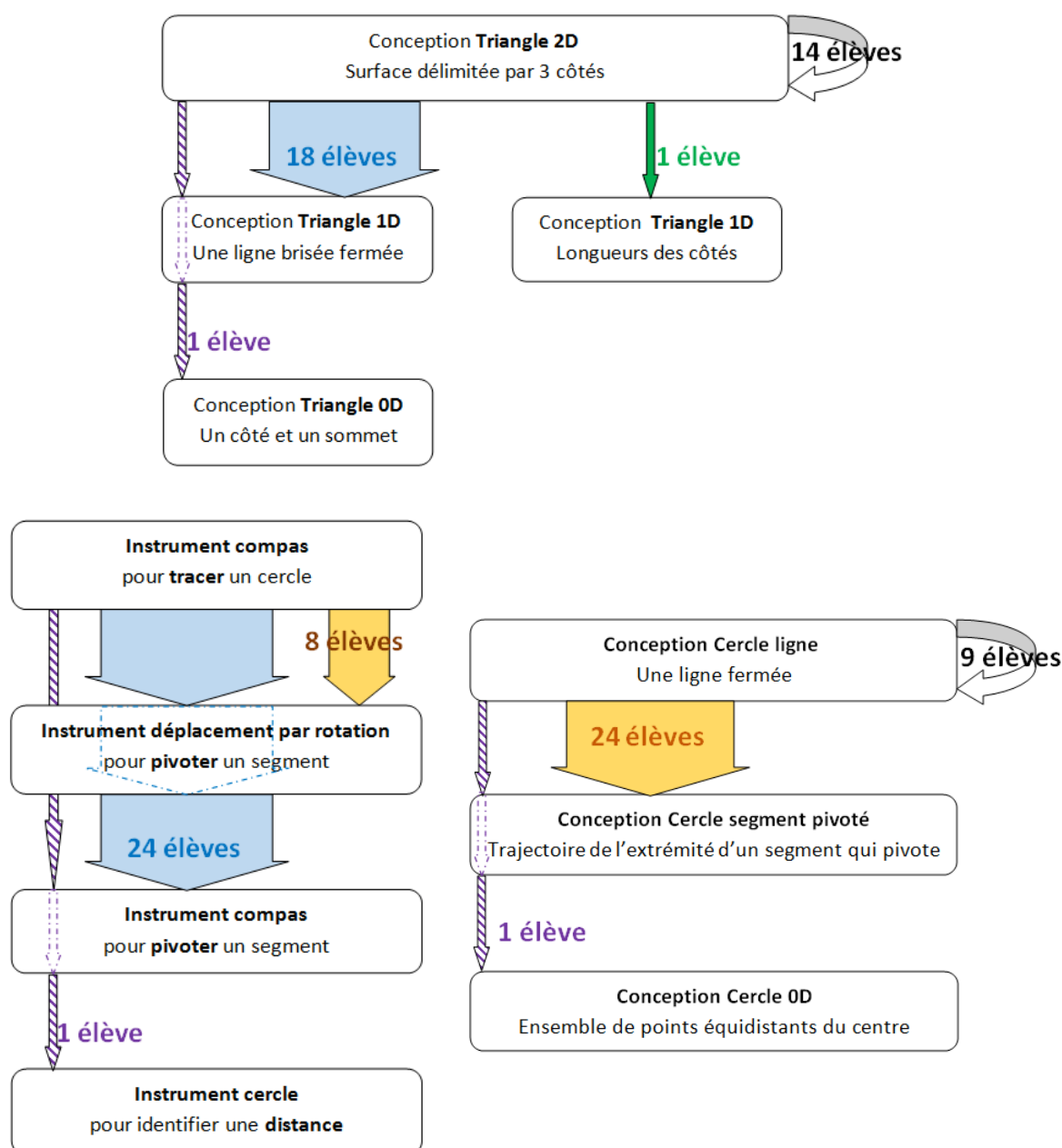
Ces expérimentations nous permettent de confirmer que l'articulation entre les manipulations dans un environnement numérique et l'utilisation du compas matériel dans l'environnement papier-crayon, provoque l'élaboration d'un nouvel instrument compas pour pivoter un segment dont le schème d'utilisation est décrit par l'enchaînement d'opérateurs et de contrôles suivant :  $[(rPi1 = \Sigma Pointe + \Sigma Mine + rAC2 + \Sigma AC) + (rPi2 = \Sigma Pi + rS3 + \Sigma S)]$ .

Ainsi la situation et le duo participent à la genèse instrumentale du compas dans la tâche de construction d'un triangle. Les processus d'assimilation et d'accommodation entre le schème d'utilisation du déplacement par rotation pour pivoter un segment numérique  $[(rPiv = \Sigma Ext + rRot) + \Sigma Rot]$  et le schème d'utilisation du compas pour pivoter un segment  $[(rPi1 = \Sigma Pointe + \Sigma Mine + rAC2 + \Sigma AC) + (rPi2 = \Sigma Pi + rS3 + \Sigma S)]$  donne du sens au compas utilisé pour pivoter les segments extrêmes d'une ligne brisée et résoudre le problème d'existence ou non du triangle ayant les trois segments pour côtés.

##### *Évolution des conceptions du triangle et du cercle*

Les problèmes rencontrés au fil du premier cahier informatisé et de la première activité papier-crayon, dans l'alternance des environnements numérique et papier-crayon, interrogent aussi des opérateurs et des contrôles relatifs aux conceptions du triangle et du cercle.





À noter dans le parcours d'instruments : Seuls 32 élèves ont mobilisé le déplacement par rotation dans le premier cahier informatisé. De plus, un élève Dimitri n'a mobilisé ni le déplacement par rotation dans le cahier informatisé, ni le compas matériel dans l'environnement papier-crayon.

Figure 8.19 : Des parcours d'instruments et de conceptions, indiquant le nombre d'élèves par parcours après les deux premières phases de la situation

Les expérimentations nous permettent d'établir que tous les élèves ont des connaissances sur le triangle et le cercle qui leur permettent de mobiliser au moins une des conceptions établies dans l'analyse a priori. En effet dans le cahier informatisé et dans l'activité papier-crayon aucun élève n'a tracé autre chose qu'un triangle. De plus les réponses au questionnaire 1 (Tableau 8.1) montrent que tous les élèves associent le compas au cercle. La Figure 8.19 illustre les parcours de conceptions du triangle et du

cercle que nous reconnaissons à cette étape de la situation et le nombre d'élèves par parcours. Les parcours individuels de chacun des 34 élèves sont visibles dans l'Annexe 5.

### 8.2.5. Le second cahier informatisé : l'outil cercle difficile à utiliser

L'objectif de ce cahier informatisé est d'amener le cercle comme outil dans la construction du triangle. Le cercle, objet mathématique, appartient à la stratégie gagnante de construction du triangle. Il est introduit explicitement dans ce cahier informatisé grâce à l'outil cercle de la géométrie dynamique. Un jeu sur les outils disponibles sur chaque page contraint à son utilisation. Dans un premier temps l'outil cercle doit être mobilisé pour remplacer le compas-gd pour pivoter un segment. Dans un second temps l'outil cercle doit être mobilisé pour identifier une distance.

#### Stratégies identifiées

Le premier problème rencontré est un problème d'existence ou non du triangle ; une ligne brisée de trois segments peut-elle être le contour d'un triangle ou non ? Ce problème émane d'une même tâche proposée sur quatre pages différentes, avec des contraintes de plus en plus restrictives sur les outils disponibles, ne laissant finalement possible que la stratégie utilisant le cercle comme stratégie gagnante (Figure 8.20).

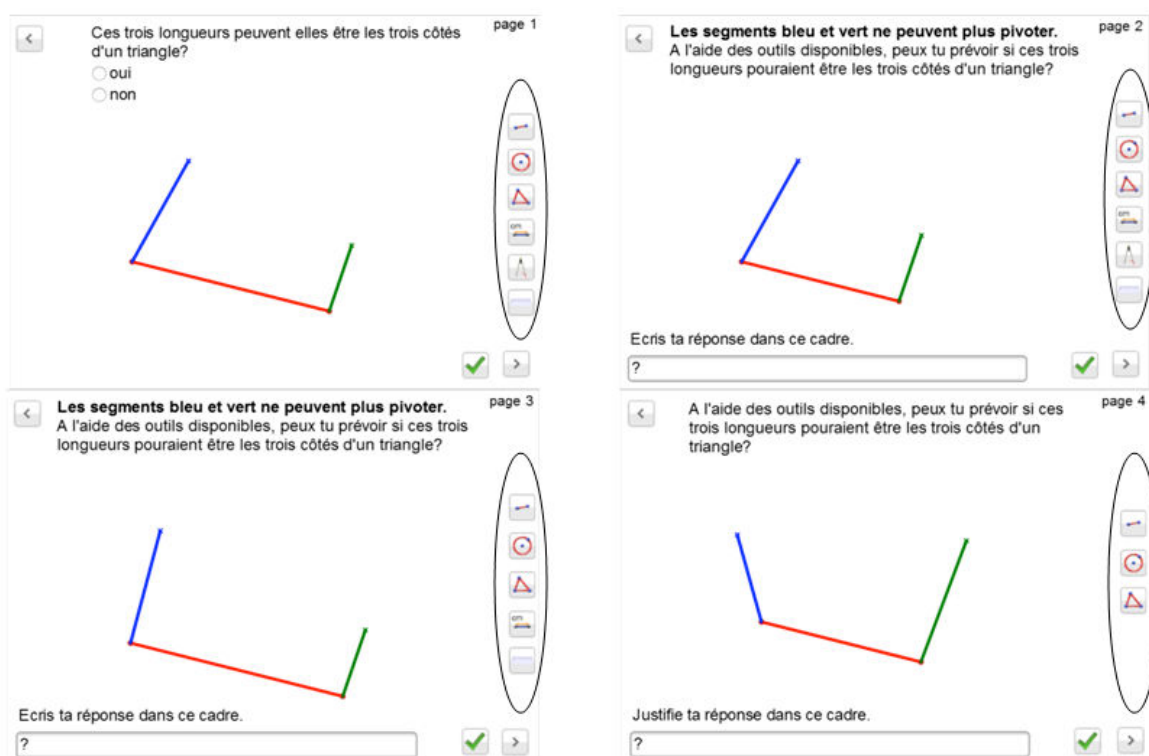


Figure 8.20 : Page 1 à page 4, la même tâche avec des segments de longueurs différentes, mobiles en page 1 puis fixes à partir de la page 2, et un choix d'outils de plus en plus restreint ne laissant possible que la stratégie utilisant le cercle comme stratégie gagnante.

Page 1, les segments extrêmes de la ligne brisée peuvent pivoter. Les outils segment, cercle, triangle, mesure, compas-gd, et règle graduée-gd sont aussi présents sur la page. À partir de la page 2 les segments sont verrouillés en déplacement. L'utilisation d'un outil

est nécessaire pour résoudre la tâche. Page 3 les segments sont toujours verrouillés en déplacement et l'outil compas-gd n'est plus disponible. Enfin page 4, les segments sont encore verrouillés en déplacement et le seul outil disponible qui permet la résolution du problème est l'outil cercle.

### *Stratégie pivoter avec le déplacement par rotation*

Sur la première page du cahier, lorsque les segments extrêmes de la ligne brisée peuvent pivoter, 30 élèves sur 34 ont mis en œuvre cette stratégie. D'une part l'opérateur pour pivoter un segment autour de l'extrémité ronde qui reste fixe (rPiv) a été mobilisé et d'autre part, la réponse « non » au questionnaire signifie que ces 30 élèves ont engagé le contrôle suivant : si les segments extrêmes de la ligne brisée ne se rencontrent pas alors le triangle n'existe pas ( $\Sigma T4$ ) (Figure 8.21).

On observe que la présence d'une ligne brisée à l'écran a conduit les élèves à vouloir mobiliser l'opérateur (rPiv) pour pivoter les segments autour de l'extrémité ronde qui reste fixe. Même lorsqu'il est précisé que les segments de la ligne brisée ne peuvent plus pivoter (pages 2, 3 et 4), les élèves ont essayé d'attraper l'une des extrémités de la ligne brisée (rA) et ont déplacé le pointeur par rotation (rRot). De plus, sur les pages 2,3 et 4 il est possible de vérifier sa réponse en activant la touche validation qui déverrouille le déplacement des segments. On observe que 22 élèves ont activé la touche validation et ont vérifié leurs réponses en pivotant les segments autour de l'extrémité ronde qui reste fixe (rPiv). Le triangle a été formé dans les cas où le triangle existe. Les segments ont été pivotés de part et d'autre du segment central lorsque le triangle n'existe pas.

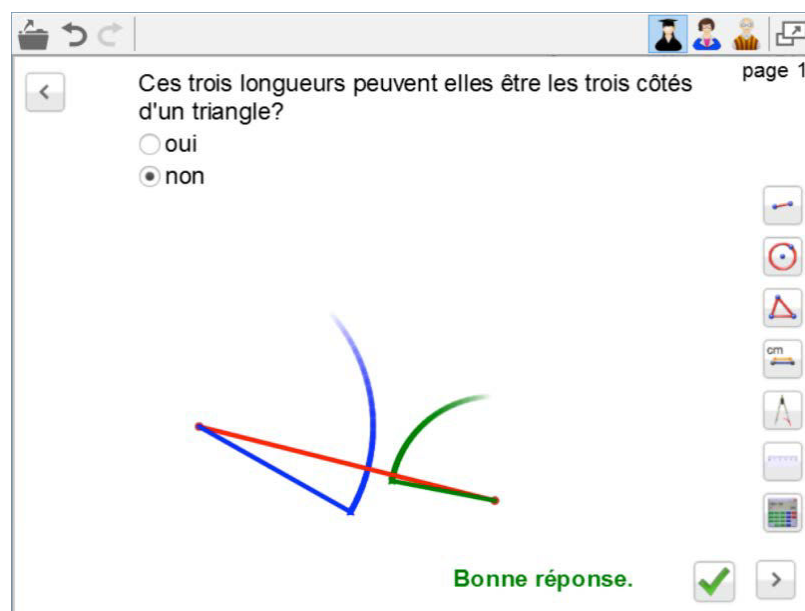


Figure 8.21 : Pivoter les segments extrêmes de la ligne brisée permet d'identifier l'inexistence du triangle

La mise en œuvre de cette « stratégie pivoter les segments avec le déplacement par rotation » repose sur l'enchaînement d'opérateurs et de contrôles suivant : (rPiv +  $\Sigma Rot$  +  $\Sigma T3$  ou  $\Sigma T4$ ). Ces opérateurs et contrôles sont caractéristiques de la

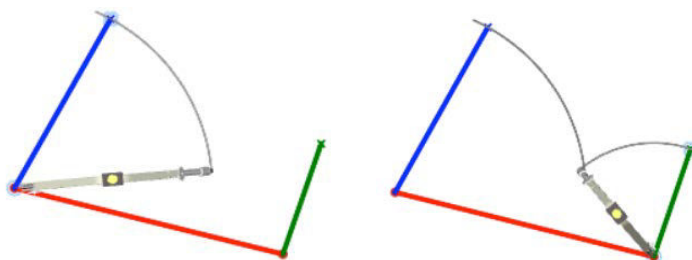
conception « Triangle 1D ligne brisée ». Nous pouvons donc en déduire que la conception « Triangle 1D ligne brisée » a été mobilisée par ces 30 élèves. Cela confirme l'existence de cette conception à l'issue des deux premières phases de la situation.

### Stratégie pivoter avec le compas-gd

Lorsque l'outil compas-gd est disponible, 18 élèves l'ont utilisé pour produire la trace de l'extrémité du segment qui pivote ( $rPi1-gdCo = \Sigma Pointe + \Sigma Mine + rAC2-gd + \Sigma AC$ ) (Figure 8.22). Le compas-gd a été utilisé comme le compas matériel dans la première activité papier-crayon ; il est placé sur le segment existant, la pointe sur l'extrémité fixe et la mine sur l'extrémité à pivoter ainsi lorsqu'il pivote un segment pivote entre ses branches ( $\Sigma C2$ ). L'existence ou non du triangle est par exemple justifiée comme suit.

- Hadeline : « les cercle se touche donc oui il peut etre trois cotes d un triangle »
- Luna : « oui si ils pouver bouger ils pourer fair un triangle »
- Mylène : « Oui quart les segment ce croise. »

Les autres élèves qui ont mobilisé le compas-gd se sont contentés de répondre par « oui » ou « oui on peut ». Dans tous les cas, pour les 18 élèves, la réponse est cohérente avec les tracés ; l'arc de cercle visible est la trace de l'extrémité du segment pivoté ( $\Sigma C3$ ) et donc si les arcs de cercle se croisent c'est-à-dire si les segments extrêmes de la ligne brisée se rencontrent alors le triangle existe ( $\Sigma T3$ ) et si les segments extrêmes de la ligne brisée ne se rencontrent pas alors le triangle n'existe pas ( $\Sigma T4$ ).



Pivoter un premier segment. Le compas-gd produit la trace de l'extrémité qui pivote.

Pivoter le deuxième segment. Les deux segments se rencontrent et déterminent le 3<sup>ème</sup> sommet.

Figure 8.22 : Le compas-gd est utilisé pour pivoter un segment

Cette stratégie repose sur l'enchaînement d'opérateurs et de contrôles suivant : ( $rPi1-gdCo + \Sigma C2 + \Sigma C3 + \Sigma T3$  ou  $\Sigma T4$ ), caractéristiques des conceptions « Triangle 1D ligne brisée » et « Cercle segment pivoté ». Cela nous permet donc d'établir que ces 18 élèves ont mobilisé les conceptions « Triangle 1D ligne brisée » et « Cercle segment pivoté ».

### Stratégie pivoter avec l'outil cercle

L'outil cercle a été mobilisé de manière appropriée par 13 élèves sur 34 pour déterminer si les trois segments de la ligne brisée peuvent être les trois côtés d'un triangle (Figure 8.23).

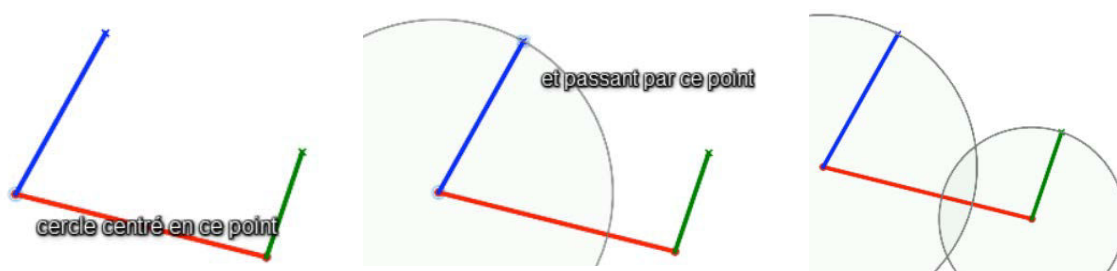


Figure 8.23 : L'outil cercle est utilisé pour justifier l'existence ou non du triangle

Parmi ces 13 élèves, 9 ont mobilisé l'outil cercle lorsque l'outil compas n'était plus disponible. Les 4 autres n'ont mobilisé que l'outil cercle même lorsque l'outil compas-gd était présent.

L'existence du triangle est justifiée par une seule élève :

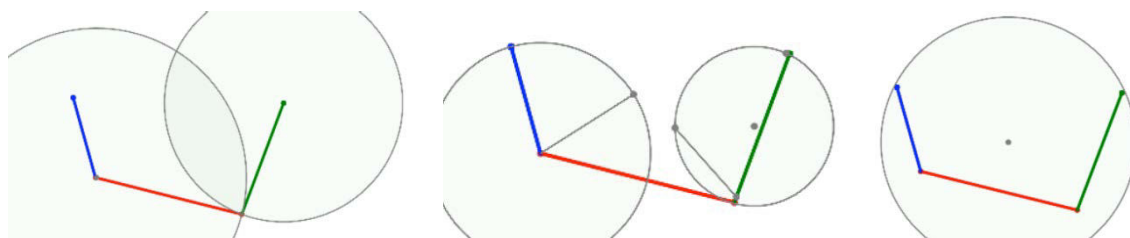
– Luna : « *oui car les cercle se croise* ».

Cette justification nous permet de dire que Luna a engagé les contrôles suivants : si les cercles se croisent alors le triangle existe ( $\Sigma T5$ ) ; si les cercles ne se croisent pas alors le triangle n'existe pas ( $\Sigma T6$ ). Bien que ces deux contrôles ( $\Sigma T5$  et  $\Sigma T6$ ) soient spécifiques de la conception « Triangle OD » nous ne pouvons pas affirmer que Luna mobilise cette conception « Triangle OD ». En effet cette conception contient aussi un contrôle sur l'identification du 3<sup>ème</sup> sommet ( $\Sigma T7$ ). Or rien à l'écran ne nous permet d'affirmer que Luna a identifié ce 3<sup>ème</sup> sommet. Luna peut ne mobiliser que la conception « Triangle 1D ligne brisée ». Sa justification « *les cercles se croisent* » peut n'être qu'une reformulation du fait que les segments extrêmes de la ligne brisée se rencontrent. De même concernant les conceptions du cercle nous ne sommes pas en mesure de distinguer si la conception cercle mobilisée est la conception « Cercle segment pivoté » ou la conception « Cercle OD ».

Les 12 autres élèves ont proposé une réponse cohérente avec leurs productions mais ils n'ont répondu que par « *oui* » ou « *non* » sans justifier l'utilisation de l'outil cercle. Pour ces 12 élèves il est difficile d'identifier précisément les contrôles en jeu. Rien ne permet de distinguer s'il s'agit de contrôles à propos de la rencontre ou non des segments ( $\Sigma T3$ ,  $\Sigma T4$ ) spécifiques de la conception « Triangle 1D ligne brisée » ou s'il s'agit de contrôles sur l'intersection ou non des cercles ( $\Sigma T5$ ,  $\Sigma T6$ ) caractéristiques de la conception « Triangle OD ». Ainsi nous ne sommes pas en mesure de distinguer les conceptions du triangle que ces élèves ont mobilisées. Il peut s'agir de la conception « Triangle 1D ligne brisée » ou de la conception « Triangle OD ». De même nous ne pouvons distinguer ici quelle conception du cercle « Cercle segment pivoté » ou « Cercle OD » a été mobilisée.

Les vidéos nous permettent aussi d'observer que 11 autres élèves ont activé l'outil cercle mais ne sont pas arrivés à l'utiliser pour résoudre le problème. La principale difficulté pour ces élèves est de savoir où « poser » le centre du cercle (Figure 8.24) ; dans le logiciel Cabri Elem, dès que l'outil cercle est sélectionné un point apparaît au bout de la

souris (rétroaction de manipulation directe) que l'élève doit faire coïncider avec un point existant ou « poser » dans le plan. Les contrôles relatifs à la position du centre du cercle ( $\Sigma\text{Cen}$ ) et au rayon du cercle ( $\Sigma\text{Ray}$ ) ne sont pas mis en œuvre par ces élèves.



Hanais fait une erreur de rayon du cercle de gauche et une erreur de centre du cercle de droite

Mylène a tracé le « bon » cercle pour pivoter le segment bleu mais elle fait une erreur sur le cercle de droite

Roseline ne sait pas où centrer son cercle. Elle décide de le « poser » de façon à ce que les extrémités libres de la ligne brisée soient sur le cercle

Figure 8.24 : Illustrations de trois utilisations de l'outil cercle non pertinentes pour justifier de l'existence ou non du triangle

### Stratégie inégalité triangulaire

Les observations ne nous permettent pas d'identifier l'utilisation de l'inégalité triangulaire pour conclure sur l'existence ou non du triangle. Quatre élèves (Dimitri, Gonzague, Imène et Solal) ont mesuré les longueurs des trois segments à l'aide des outils mesure (rM-gdM) ou règle graduée-gd (rM-gdR). Par contre rien dans leurs réponses ne permet de dire qu'ils ont utilisé l'inégalité triangulaire pour conclure « oui » il est possible d'obtenir un triangle ou « non » il n'est pas possible d'obtenir un triangle avec ces segments.

Une élève (Mylène) a mobilisé l'opérateur pour mesurer une longueur avec la règle graduée-gd (rM-gdR). Puis, elle a mobilisé l'opérateur pour tracer un segment de longueur donnée avec la règle graduée-gd (rS2E-gdR) afin de tracer plusieurs segments résultats successifs du pivotement du segment initial (Figure 8.25).

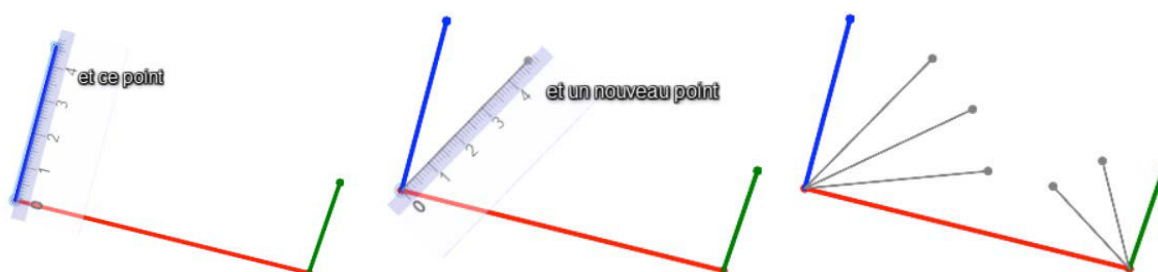


Figure 8.25 : La règle graduée-gd est mobilisée pour pivoter les segments extrêmes de la ligne brisée

### Le compas-gd ou l'outil cercle pour pivoter un segment

Finalement dans ce second cahier informatisé, 22 élèves sur 34 ont mobilisé le compas-gd et/ou l'outil cercle pour déterminer si les lignes brisées proposées peuvent ou non former un triangle. Nous observons que parmi ces 22 élèves, 9 n'ont mobilisé que le compas-gd mais n'ont pas mobilisé l'outil cercle lorsque le compas-gd n'était plus présent ; 9 autres ont mobilisé le compas-gd et l'outil cercle lorsque ce dernier n'était plus présent ; 4 autres n'ont mobilisé que l'outil cercle même lorsque le compas-gd était présent.

Parmi ces 22 élèves, 18 avaient mobilisé le compas matériel pour pivoter un segment dans la première activité papier-crayon. Les 4 autres (Camille, Ivanoé, Luna et Mohan) avaient mobilisé le compas de manière non appropriée dans la première activité papier-crayon. Cependant, 7 élèves (Aline, Carole, Isidore, Marie, Mérine, Séraphin et Solal) qui avaient mobilisé le compas matériel pour pivoter un segment dans la première activité papier-crayon n'ont mobilisé ni le compas-gd, ni l'outil cercle dans le second cahier informatisé.

### Le cercle pour identifier une distance

Sur les deux dernières pages du cahier l'outil cercle doit être mobilisé pour identifier une distance et déterminer le troisième sommet du triangle. C'est le seul des outils disponibles qui permet de résoudre le problème. Seuls 6 élèves (Aline, Hanais, Imène, Kalinka, Karim, et Mohan) ont réussi à utiliser le cercle à bon escient pour résoudre le problème. Ils ont mobilisé l'opérateur pour tracer un cercle de rayon donné ( $rC3-gdC$ ) et engagé les contrôles pour identifier la position du centre du cercle ( $\Sigma CenC$ ) et le rayon ( $\Sigma RayC$ ). Le 3<sup>ème</sup> sommet a été identifié à l'une des intersections des cercles ce qui nous permet d'établir que le contrôle suivant a été engagé : si les cercles (arcs de cercles) se croisent alors l'intersection est le 3<sup>ème</sup> sommet du triangle ( $\Sigma T7$ ). Ces opérateurs et contrôles étant spécifiques de la conception « Triangle OD », nous concluons que ces 6 élèves ont mobilisé la conception « Triangle OD ». Concernant les conceptions du cercle, les opérateurs mobilisés par ces 6 élèves sont des opérateurs caractéristiques de la conception « cercle OD », par contre nous ne sommes pas en mesure d'identifier précisément les contrôles engagés. Il se peut que ces élèves aient mobilisé la conception « cercle OD » mais nous ne sommes pas en mesure de l'affirmer.

On observe que 10 autres élèves ont aussi mobilisé l'outil cercle mais n'ont pas réussi à l'utiliser pour résoudre le problème. Nous examinons deux de leurs difficultés. Soit un cercle de rayon correct a été affiché mais l'élève n'a pas su où « poser » le centre. Soit le centre du cercle a été correctement identifié mais le rayon n'a pas été pris en compte. La forme cercle est donc identifiée et mobilisée par ces élèves mais la déconstruction dimensionnelle du cercle distinguant le rayon 1D et le centre OD ainsi que leur relation n'est pas opératoire pour eux. Nous concluons donc que ces élèves n'ont mobilisé que la conception « Cercle ligne ».

Il nous semble important d'ajouter une remarque quant à l'utilisation de l'outil cercle. Dans ce second cahier informatisé l'activation de cet outil affiche un bouton permettant d'aller voir une vidéo d'aide à l'utilisation de l'outil cercle. Les captures vidéo du travail des élèves, nous permettent d'observer que ceux qui ont mobilisé l'outil cercle de façon appropriée pour déterminer le troisième sommet du triangle ont tous regardé la vidéo d'aide. Ainsi ces élèves peuvent avoir simplement adapté la procédure montrée dans la vidéo pour résoudre le problème, sans avoir compris le rôle du cercle pour déterminer le troisième sommet du triangle.

Enfin les 18 autres élèves ne mobilisent pas l'outil cercle. Ils tracent le triangle au hasard ou activent la touche validation pour voir la solution.

### 8.2.6. Deuxième activité papier-crayon : la ligne brisée, un opérateur pour utiliser le compas dans la construction du triangle

Comme nous l'avons dit dans l'analyse a priori, la deuxième activité papier-crayon doit permettre de faire un bilan des apprentissages en termes d'instruments et de conceptions disponibles. Les problèmes à résoudre dans cette activité sont des problèmes de construction et d'existence ou non du triangle. Comme dans la première activité papier-crayon, les élèves ont à leur disposition un crayon, une gomme ainsi qu'une règle graduée, une équerre et un compas.

#### Stratégies identifiées

##### *Stratégie ligne brisée mise en œuvre par 26 élèves*

Cette « stratégie ligne brisée » (Figure 8.14), qui consiste à tracer une ligne brisée de trois segments (rLB) puis à utiliser le compas pour pivoter chaque segment extrême de la ligne brisée (rPi1) et enfin à tracer le segment résultat du pivotement de même longueur que le segment initial (rPi2) lorsque le triangle existe, est la stratégie la plus utilisée dans cette seconde activité papier-crayon. (26 élèves sur 34). Si les segments extrêmes de la ligne brisée se rencontrent ( $\Sigma C2 + \Sigma C3 + \Sigma T3$ ) alors le triangle est tracé (rPi2) par ces 26 élèves. Dans le cas où les segments extrêmes de la ligne brisée ne se croisent pas ( $\Sigma C2 + \Sigma C3 + \Sigma T4$ ), les élèves écrivent à côté de leur figure qu'il n'est pas possible d'obtenir un triangle ( $\Sigma T4$ ). L'enregistrement vidéo nous permet de saisir une remarque de Luna : « La ligne brisée ça nous aide parce qu'avant on ne savait pas qu'il fallait utiliser le compas pour tracer un triangle ».

La mise en œuvre de cette stratégie repose sur des opérateurs et des contrôles relatifs aux conceptions « Triangle 1D ligne brisée » et « Cercle segment pivoté » ainsi nous pouvons affirmer que 26 élèves sur 34 ont mobilisé ces deux nouvelles conceptions du triangle et du cercle.



### *Stratégie à la règle et au compas mise en œuvre par 5 élèves*

Cette stratégie qui consiste à tracer à la règle graduée un premier segment côté ( $rS2$ ) puis à mobiliser le compas ( $\Sigma$ PointeC +  $\Sigma$ MineC) pour tracer des cercles (arcs de cercle) de rayon les deux autres longueurs ( $rC3$ ) a été mise en œuvre par 5 élèves (Alycia, Isidore, Nawel, Sidonie et Yasmina). Lorsque les deux cercles (arcs de cercle) se croisent le triangle est tracé ( $\Sigma T5 + \Sigma T7$ ). Trois de ces élèves (Alycia, Isidore, et Nawel) ont même indiqué les deux triangles solutions. Lorsque les deux cercles ne se croisent pas les élèves ont écrit à côté de leur figure qu'il n'est pas possible d'obtenir un triangle avec ces longueurs ( $\Sigma T6$ ).

La mise en œuvre de cette stratégie repose sur des opérateurs et des contrôles relatifs à la conception « Triangle OD » ainsi nous pouvons affirmer que 5 élèves sur 34 ont mobilisé cette nouvelle conception du triangle. Par contre il ne nous est pas possible d'identifier précisément quelle conception du cercle est mise en œuvre par ces élèves. Il peut s'agir de la conception « Cercle OD » ou de la conception « Cercle segment pivoté ». En effet même si la ligne brisée n'est pas tracée, elle peut être sous-jacente. Dans ce cas le compas est mobilisé pour pivoter un segment et la conception cercle engagée est alors la conception « Cercle segment pivoté ».

Nous notons qu'aucun de ces 5 élèves n'avaient mobilisé l'outil cercle dans le second cahier informatisé. De plus parmi les 6 élèves qui eux avaient mobilisé l'outil cercle pour déterminer le 3<sup>ème</sup> sommet du triangle dans le second cahier, 5 ont mis en œuvre une « stratégie ligne brisée » dans cette activité papier-crayon et le dernier a mis en œuvre une stratégie à la règle graduée uniquement.

### *Stratégie à la règle graduée mise en œuvre par 3 élèves*

Dans cette seconde activité papier-crayon 3 élèves (Dimitri, Karim, et Yann) continuent de tracer les triangles à la règle graduée uniquement. Ils tracent successivement et en tâtonnant les segments côtés du triangle ( $rS3$  et  $rS3E$ ). Cette stratégie leur permet d'avoir le tracé du triangle mais de manière plus coûteuse.

Deux élèves (Carole et Loris) ont commencé à tracer les triangles à la règle uniquement. Puis ils ont mobilisé la « stratégie ligne brisée » dans un second temps. Ces deux élèves sont donc comptabilisés dans les 26 élèves mobilisant la « stratégie ligne brisée ».

### **Le compas dans la construction du triangle**

À la suite de cette seconde activité papier-crayon, les élèves répondent à un nouveau questionnaire. La question est la suivante : Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle ? (Annexe 6). Le Tableau 8.4 ci-dessous donne des éléments extraits des réponses des 34 élèves. Ces réponses sont des éléments complémentaires dont nous tenons compte pour établir les parcours de conceptions relatifs au triangle et au cercle ainsi que les instruments élaborés au fil de la situation, présentés dans le paragraphe suivant.

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle ?	Nombre d'élèves
Pour déterminer l'existence ou non du triangle	13
Pour tracer des cercles, des arcs de cercle	11
Pour pivoter, tourner les segments. Remplacer la rotation	17
Pour trouver la pointe du triangle, le 3 <sup>ème</sup> point, le 3 <sup>ème</sup> sommet	6

Tableau 8.4 : Répartition des réponses des 34 élèves à la question « Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle ? »

### 8.3. Bilan des apprentissages à la fin de la situation « Triangle et compas »

Les expérimentations et leurs analyses décrites précédemment nous permettent d'affirmer que les choix fait dans la composition du duo et dans l'élaboration d'une situation didactique en termes d'artefacts en jeu et de variables didactiques, sont favorables à la conceptualisation du triangle et du cercle c'est-à-dire que les conceptions initiales identifiées ont évolué vers les conceptions visées (Figure 8.26 et Figure 8.27). Le duo, par l'alternance des activités instrumentées dans les environnements numérique et papier-crayon, permet à 31 élèves sur 34 de mettre en œuvre la construction d'un triangle de longueurs des côtés données à la règle et au compas.

#### 8.3.1. Deux nouvelles conceptions du triangle et du cercle

Des parcours de conceptions relatives au triangle

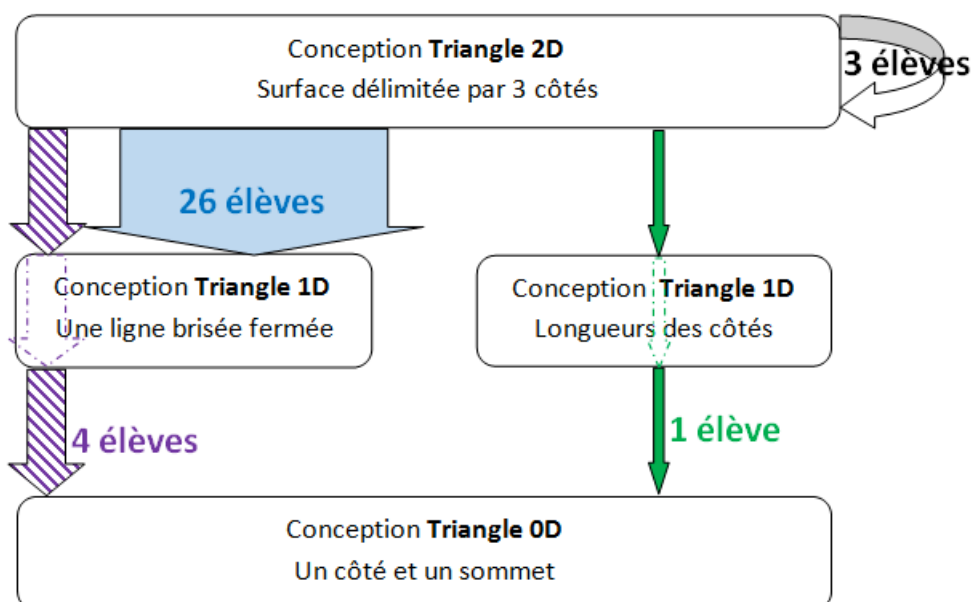


Figure 8.26 : Bilan des parcours de conceptions du triangle identifiant le nombre d'élèves par parcours dans la situation « Triangle et compas »

*Une conception « Triangle 1D ligne brisée » pour 26 élèves sur 34*

Les 26 élèves qui ont mis en œuvre la « stratégie ligne brisée » dans la seconde activité papier-crayon ont engagé la conception « Triangle 1D ligne brisée ». Ces élèves ont donc une vision 1D du triangle. Ils ont mis en œuvre une déconstruction dimensionnelle du triangle 2D à son contour 1D. Cette stratégie permet une construction du triangle à la règle et au compas sans nécessairement aller jusqu'à une déconstruction dimensionnelle complète, au point 0D.

*Une conception « Triangle 1D longueurs des côtés » pour 1 élève sur 34*

Une élève (Nawel) a mis en œuvre cette conception dans la première activité papier-crayon. Dans la seconde activité papier crayon elle a mis en œuvre la « stratégie à la règle et au compas ». Nous mentionnons tout de même dans le bilan final la mobilisation de cette conception par Nawel.

*Une conception « Triangle 0D » pour 5 élèves sur 34*

Les 5 élèves qui ont mis en œuvre la « stratégie à la règle et au compas » ont engagé la conception « Triangle 0D ». Cette stratégie met en œuvre la déconstruction dimensionnelle du triangle 2D jusqu'à l'identification du 3<sup>ème</sup> sommet 0D comme intersection des deux cercles en passant par une conception « Triangle 1D » au cours de l'activité papier-crayon précédente.

*Un triangle est une surface délimitée par trois côtés pour 3 élèves sur 34*

Concernant les trois élèves qui continuent dans cette seconde activité papier-crayon à tracer le triangle à la règle uniquement nous pouvons dire qu'ils mobilisent au moins la conception « Triangle 2D ». Deux de ces élèves (Karim et Yann) ont mobilisé le déplacement par rotation pour pivoter les segments extrêmes de la ligne brisée lorsque ce déplacement était possible dans le second cahier informatisé. Par contre ces élèves n'adaptent pas ce qui est fait dans l'environnement numérique à l'environnement papier-crayon. La ligne brisée n'apparaît pas comme une étape dans la construction d'un triangle à la règle et au compas. L'élaboration d'un instrument rotation pour pivoter un segment dans l'environnement numérique ne leur permet pas d'élaborer un instrument compas pour pivoter un segment dans l'environnement papier-crayon.

## Des parcours de conceptions relatives au cercle

Interpréter les conceptions du cercle engagées par les élèves au cours des activités instrumentées proposées par le duo et la situation est plus délicat que pour les conceptions du triangle. En effet, il est difficile d'identifier les contrôles relatifs aux conceptions du cercle réellement engagés. Cela est certainement dû au fait que nous n'avons pas fait un travail aussi fin sur les conceptions du cercle que sur les conceptions du triangle, notre objectif principal étant la conceptualisation du triangle. Nous accédons aux conceptions du cercle à partir des instruments compas mobilisés. Ainsi les 26 élèves qui ont mis en œuvre la « stratégie ligne brisée » dans la seconde activité papier-crayon

engagent la conception « Cercle segment pivoté ». En effet, la mise en œuvre de cette stratégie implique la mobilisation du compas pour pivoter un segment et donc la mobilisation de cette nouvelle conception du cercle. Par contre nous ne pouvons pas identifier quel instrument compas est mobilisé par les 5 élèves qui mettent en œuvre la « stratégie à la règle et au compas ». Il peut s'agir d'un instrument compas pour tracer un cercle ou d'un instrument compas pour pivoter un segment ; la ligne brisée peut être sous-jacente à la mobilisation du compas même si elle n'est pas tracée comme étape de construction. Nous ne pouvons donc pas distinguer si ces élèves mobilisent la conception « Cercle segment pivoté » ou « Cercle 0D ».

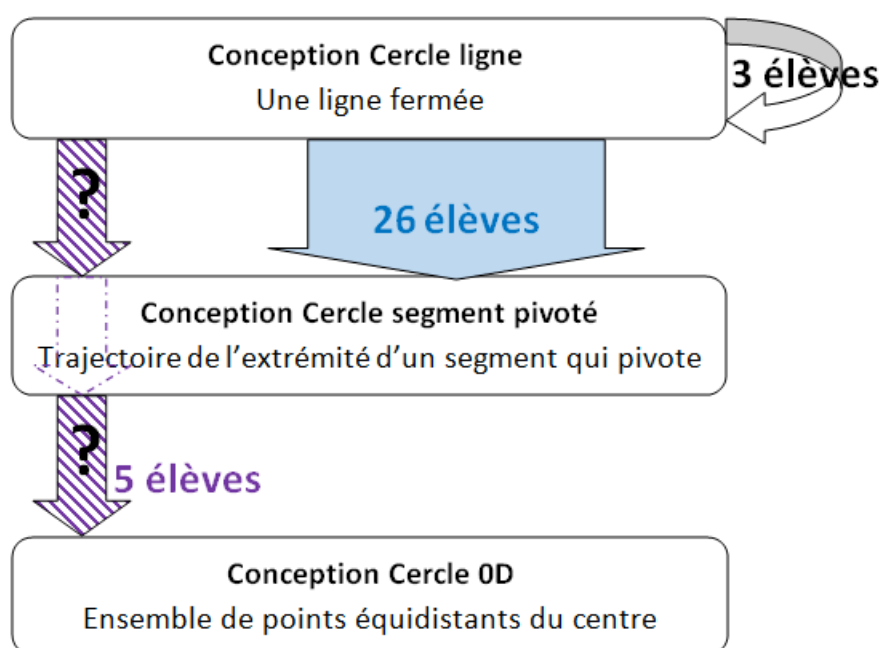


Figure 8.27 : Bilan des parcours de conceptions du cercle identifiant le nombre d'élèves par parcours dans la situation « Triangle et compas »

### 8.3.2. Un nouvel instrument compas pour pivoter un segment

Les expérimentations nous permettent d'observer différents parcours d'instruments constitués (Figure 8.28) par 33 élèves sur 34. Un élève, Dimitri, n'a jamais mobilisé le déplacement par rotation dans les cahiers informatisés ni utilisé le compas dans l'environnement papier-crayon.

Ces expérimentations confirment donc que des processus d'assimilation et d'accommodation du schème d'utilisation du déplacement par rotation pour pivoter un segment numérique aboutissent à un schème d'utilisation du compas matériel pour pivoter un segment (Voltolini, accepté). Les modalités d'action de l'opérateur (rPiv) pour pivoter un segment numérique : distinguer les extrémités ( $\Sigma\text{Ext}$ ), ronde et cruciforme du segment numérique, puis attraper l'extrémité cruciforme et déplacer le point (rRot +  $\Sigma\text{Rot}$ ), sont assimilées, dans l'environnement papier-crayon en la mise en œuvre de l'opérateur (rPi1) pour pivoter un segment à l'aide du compas : distinguer chaque

branche du compas puis piquer la pointe sur l'extrémité du segment qui reste fixe ( $\Sigma$ Pointe) et poser la mine ( $\Sigma$ Mine) sur l'extrémité à pivoter, enfin pivoter le compas en maintenant l'écartement fixe et produire une trace visible ( $rAC2 + \Sigma AC$ ). Dans l'environnement papier-crayon, le segment initial ne pivotant pas des accommodations sont nécessaires : un second opérateur est mobilisé afin de tracer le segment résultat du pivotement de même longueur que le segment initial ( $rPi2$ ).

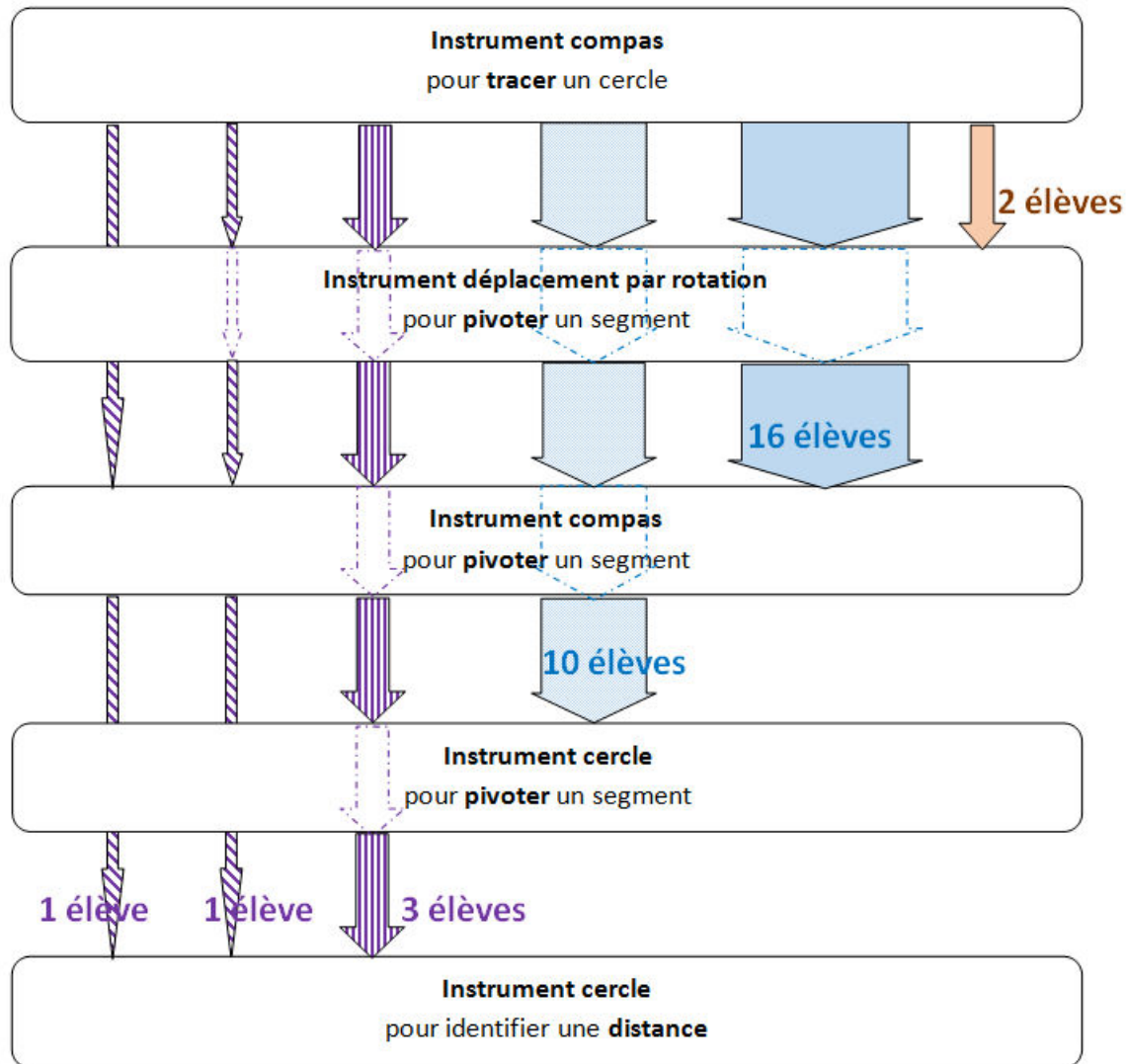


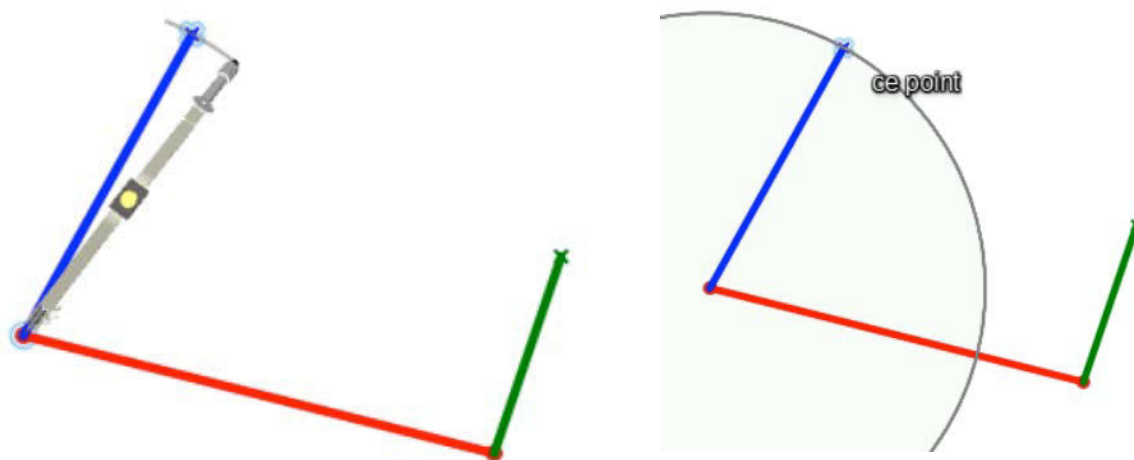
Figure 8.28 : Bilan des parcours d'instruments du compas matériel pour tracer un cercle au cercle théorique pour identifier une distance en passant par le déplacement par rotation pour pivoter un segment numérique et le compas matériel pour pivoter un segment identifiant le nombre d'élèves par parcours

Par contre les adaptations du schème d'utilisation du compas pour pivoter un segment au schème d'utilisation de l'outil cercle pour pivoter un segment et au schème d'utilisation de l'outil cercle pour identifier une distance semblent plus difficiles. La situation « Triangle et compas » ne permet pas de telles adaptations, elle est insuffisante pour un travail pertinent sur le cercle.

### 8.3.3. Du compas matériel au cercle comme outil, un saut de connaissances

Lors de la composition du duo nous avons établi des comparaisons entre les schèmes d'utilisation du compas pour pivoter un segment, les schèmes d'utilisation du compas-gd pour pivoter un segment et les schèmes d'utilisation de l'outil cercle pour pivoter un segment (Tableau 5.1). Ce tableau montre des similitudes entre les différents schèmes et nous pensions que des processus d'assimilation et d'accommodation pourraient aussi être engagés entre les schèmes d'utilisation du compas-gd et les schèmes d'utilisation de l'outil cercle. Or les expérimentations font ressortir que la mobilisation de l'outil cercle dans le second cahier informatisé n'est pas aisée. Seuls 13 élèves sur 34 l'ont mobilisé de façon appropriée pour remplacer le compas-gd pour pivoter les segments extrêmes d'une ligne brisée et justifier l'existence ou non du triangle. De plus seuls 6 élèves l'ont mobilisé de façon pertinente pour déterminer le troisième sommet du triangle (Figure 8.28). Nous avons observé que 11 autres élèves activent l'outil cercle pour remplacer le compas-gd lorsque celui-ci n'est plus présent, mais n'arrivent pas à l'utiliser pour résoudre le problème qui leur est posé.

Les expérimentations nous ont révélé une différence notable, dans l'environnement numérique, entre le compas-gd et l'outil cercle. Le compas-gd permet un contrôle visuel qui rappelle le segment numérique du premier cahier (Figure 8.29). L'image du compas à l'écran est semblable au segment qui pivote. La mobilisation de l'outil cercle ne permet plus aucun contrôle visuel ; elle relève de contrôles théoriques sur l'objet mathématique cercle. Les vidéos nous permettent d'identifier les difficultés rencontrées par les élèves dans l'utilisation de l'outil cercle ; la première est de savoir où « poser » le centre du cercle et la seconde est d'identifier le rayon du cercle. La mobilisation pertinente de l'outil cercle nécessite une déconstruction dimensionnelle du cercle distinguant le rayon 1D et le centre 0D ainsi que leur relation.



Le compas-gd pour pivoter un segment

L'outil cercle pour pivoter un segment

Figure 8.29 : Le compas-gd pour pivoter un segment permet un contrôle visuel que ne permet pas l'outil cercle

Dans la composition du duo et de la situation « Triangle et compas » nous nous sommes beaucoup focalisé sur le triangle et la mise en œuvre d'une déconstruction dimensionnelle 1D du triangle. Nous n'avons pas suffisamment pris en compte le cercle. Pour que le cercle devienne un outil dans la construction du triangle à la règle et au compas et dans d'autres problèmes de distances un autre travail à propos du cercle s'avère nécessaire. D'autres constructions à la règle et au compas peuvent être le support d'un tel travail (Houdement, 2007) qui doit permettre le passage entre l'utilisation des artefacts tangibles (compas matériel ou compas-gd) et l'utilisation de l'artefact théorique objet mathématique cercle.

#### **8.4. Déroulement de la situation « Triangle et compas » dans des situations de classe ordinaire**

Le duo et la situation « Triangle et compas » ont été élaborés dans un processus de « Design Based Research » lors d'un travail collaboratif avec des enseignants. Notre but était que cette situation puisse être mise en œuvre dans de réelles situations de classe pour l'enseignement de la construction du triangle à la règle et au compas. Les expérimentations réalisées dans des conditions de classes ordinaires, chaque année, nous ont confirmé que cette situation était effectivement faisable et judicieuse dans ce but.

En termes d'organisation, les deux activités papier-crayon sont réalisables en classe entière. C'était le cas pour nous les deux premières années d'expérimentation et cela a très bien fonctionné. Les élèves travaillent individuellement et des synthèses sont faites à la fin et éventuellement en cours de travail en fonction de la classe et des habitudes de l'enseignante. En ce qui concerne les deux cahiers informatisés, si l'établissement dispose d'une salle informatique avec autant d'ordinateurs que d'élève, ces deux cahiers sont eux aussi faisables en classe entière. Étant moi-même enseignante en collège et utilisant la situation « Triangle et compas » avec mes classes de 6<sup>ème</sup>, les cahiers ont toujours été traités en salle informatique, avec un ordinateur par élève. Si l'école ne dispose que de quelques ordinateurs, comme dans l'école où nous avons fait nos expérimentations, les cahiers sont traités lors de travaux en ateliers. La classe est alors répartie en plusieurs groupes faisant chacun une activité différente. Un seul groupe travaille alors sur ordinateur pour traiter un cahier informatisé. C'est ce qui a été fait chaque année dans les classes qui ont participé à nos expérimentations.

De plus, le temps passé pour traiter chaque phase de la situation est raisonnable et compatible avec une organisation de classe, même en collège. En effet durant ces trois années d'expérimentation nous avons pu observer que les élèves passent entre 20 et 25 minutes sur le premier cahier informatisé, entre 15 et 20 minutes sur la première activité papier-crayon, entre 15 et 20 minutes sur le second cahier informatisé et entre 10 et 15 minutes pour la deuxième activité papier-crayon. Ainsi en comptant le temps nécessaire à la lecture des consignes, en classe entière, avant chaque phase pour

s'assurer que les élèves ont compris le travail à faire et, le temps dédié aux synthèses en classe entière après chaque phase, pour faire un bilan des apprentissages, la situation « Triangle et compas » prend entre 2h et 2,5h pour être mise en œuvre intégralement. Cette durée est raisonnable pour l'apprentissage de la construction du triangle à la règle et au compas dans une progression de mathématique de cours moyen ou de 6<sup>ème</sup>.

Enfin en tant qu'enseignante, il me paraît important de noter que les élèves ont été enthousiastes pour travailler sur ordinateur. Ils se sont mis rapidement au travail et sont entrés facilement dans les problèmes rencontrés. Les élèves des classes de CM2 participant aux expérimentations et ceux de mes classes de 6<sup>ème</sup> ont apprécié ce travail alternant les environnements numérique et papier-crayon. Pour ma part, j'ai pu apprécier l'efficacité de la ligne brisée pour donner du sens au compas dans la construction du triangle et en termes d'apprentissage et de déconstruction dimensionnelle 1D du triangle. Le bénéfice de la ligne brisée dans cette construction m'a été confirmé par le commentaire spontané de l'AVS (Auxiliaire de Vie Scolaire) d'un de mes élèves : « *Oh, c'est super ça ! Tu as vu Simon, c'est ça un triangle, une ligne brisée fermée et c'est pour cela que tu utilises un compas.* »





## CONCLUSION



Nous allons à présent revenir sur notre travail et présenter les résultats obtenus. Nous élargirons ensuite notre réflexion en développant les nouvelles questions que nous inspirent ces résultats.

## **Notre recherche et nos résultats**

### **Motivation de la recherche**

L'objet de notre recherche était d'étudier l'introduction des technologies numériques comme environnement complémentaire à des manipulations matérielles dans l'apprentissage des mathématiques. Assurée du potentiel des technologies numériques par les résultats de la recherche en didactique et, tout aussi persuadée par la nécessité de ne pas simplement substituer les environnements numériques à des manipulations dans l'espace sensible ainsi qu'aux activités papier-crayon, nous avons souhaité analyser les conditions d'une mobilisation conjointe des deux environnements, numérique et matériel, dans une même situation didactique pour soutenir l'apprentissage. Notre hypothèse de départ était que la variété des supports et la mobilisation conjointe d'un artefact numérique et d'un artefact matériel dans une situation didactique, pouvaient être favorables aux apprentissages.

### **Définition d'un duo d'artefacts**

C'est dans la perspective d'une articulation entre un artefact numérique et un artefact matériel que nous avons travaillé. Après avoir défini un duo d'artefacts comme l'articulation fructueuse d'un artefact numérique et d'un artefact matériel au sein d'une situation didactique, nous avons établi un système minimal de critères caractérisant cette articulation afin qu'elle induise un réel gain didactique pour la conceptualisation.

- ❖ Une situation didactique (Brousseau, 1998) problématise le recours aux artefacts numérique et matériel et ainsi fonde les conditions de l'émergence et de l'évolution des conceptions (Balacheff, 1995a).
- ❖ Des processus d'assimilation et d'accommodation des schèmes d'utilisation de chaque artefact sont engendrés par le duo afin de provoquer des genèses instrumentales associées (Rabardel, 1995).
- ❖ Une orchestration (Trouche, 2003) pertinente des artefacts numériques et matériels dans la situation optimise le duo par le choix raisonné du recours à l'un puis à l'autre artefact.

Cette caractérisation nous a conduit à formuler deux hypothèses de recherche sur l'incidence d'un duo d'artefacts numérique et matériel sur la conceptualisation :

- Hypothèse de recherche 1 : Un duo d'artefacts, numérique et matériel, provoque des genèses instrumentales associées qui conduisent, en particulier, à une genèse instrumentale relative à l'artefact matériel.

- Hypothèse de recherche 2 : Un duo d'artefacts numérique et matériel, mobilisé dans une situation, favorise l'acquisition de connaissances au cours de la situation ; il est favorable à la mise en œuvre d'un parcours de conceptions d'un état initial supposé à un état final attendu du système [sujet-milieu] au cours de l'alternance entre les actions instrumentées avec les instruments numériques et celles utilisant les instruments matériels.

Notre démarche de création d'un duo a été initiée par le choix d'un artefact matériel à partir duquel nous avons développé conjointement l'artefact numérique articulé à cet artefact matériel, ainsi que la situation qui problématise le duo. L'élaboration d'un artefact numérique et des tâches qui le mobilisent doit, d'une part s'appuyer sur les spécificités de l'artefact matériel utilisé pour un apprentissage donné et, d'autre part permettre de tirer profit du potentiel didactique de l'environnement numérique ; en particulier ce dernier doit être conçu puis utilisé en vue de favoriser l'expérimentation et la manipulation de représentations d'objets mathématiques favorables à la conceptualisation (Hoyles & Lagrange, 2010).

Notre enjeu était donc d'élaborer un duo d'artefacts et une situation pertinents pour un apprentissage choisi, puis d'étudier leurs effets pour cet apprentissage.

### Dualité instrument conception

Notre objectif était de composer un duo d'artefacts pour la conceptualisation du triangle à partir de sa construction à la règle et au compas et d'explicitier l'apprentissage provoqué par le duo. Pour étudier la conceptualisation en termes de genèses de conceptions et de parcours de conceptions nous avons utilisé le modèle cK $\epsilon$  de Balacheff (Balacheff, 1995a) et (Balacheff & Margolinas, 2005). Dans notre étude, ce modèle nous permet d'associer instrumentation et conceptualisation et de caractériser la dualité entre instrument et conception.

Pour Balacheff, une conception est une instanciation de la connaissance d'un sujet par une situation, elle est caractérisée par un état d'équilibre du système [sujet-milieu]. Pour Rabardel (1995) un instrument, dans sa partie schèmes d'utilisation, est une connaissance du sujet en situation. Ainsi, un instrument, comme une conception, est une caractéristique du système [sujet-milieu] ; il peut être vu comme un état d'équilibre du système [sujet-artefact] pour résoudre une tâche. Dans un duo d'artefacts, l'alternance des environnements provoque des déséquilibres du système [sujet-artefact] pour réaliser des tâches avec chaque artefact. L'enchaînement des déséquilibres et des retours aux états d'équilibre successifs du système [sujet-artefacts] engendre le développement d'instruments successifs enrichis par le fait qu'ils intègrent des schèmes d'utilisation en commun (Figure 1). Le duo accroît donc le potentiel d'apprentissage lié à l'usage de chaque artefact. Des processus d'assimilation et d'accommodation des schèmes d'utilisation d'un instrument à l'autre sont engendrés et entraînent des genèses

instrumentales associées. Ces processus, ces genèses sont des évolutions qui peuvent être décrites par des parcours d'instruments constitués.

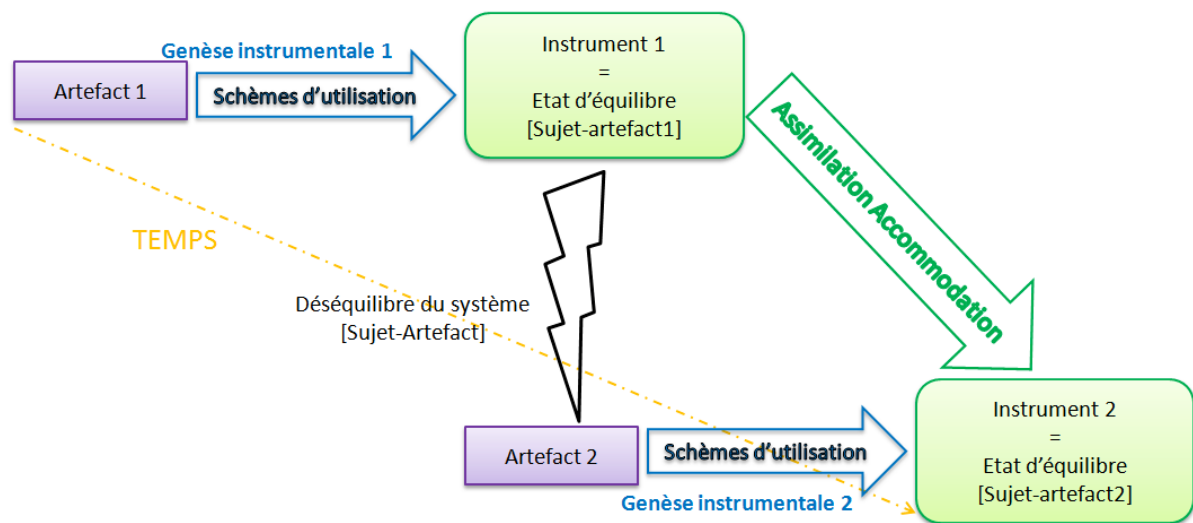


Figure 1 : Le duo permet de faire émerger un parcours d'instruments suite à l'enchaînement des déséquilibres et équilibres du système [sujet-artefact]

Le modèle des conceptions de Balacheff nous a permis d'identifier, à partir d'observables, l'évolution des conceptions et des instruments au fil de la situation. Dans la caractérisation d'une conception par Balacheff, les éléments cognitifs qui permettent à l'action du sujet d'être opératoire sont situés dans les opérateurs et les contrôles. Dans notre étude, nous avons donc proposé d'identifier les schémas d'utilisation à partir d'opérateurs et de contrôles, afin de pouvoir caractériser les connaissances liées à l'émergence d'un instrument. Ce modèle permet d'exprimer les schémas d'utilisation par un enchaînement d'opérateurs et de contrôles qui peuvent être reconnus en observant les actions du sujet engageant un artefact pour réaliser une tâche. Les genèses instrumentales successives sont donc constituées de combinaison d'opérateurs et de contrôles. Les cheminements d'opérateurs et de contrôles nous permettent donc de tracer des parcours de conceptions et d'instruments constitués.

## Un duo d'artefacts particulier pour la conceptualisation du triangle

### Provoquer une nouvelle genèse instrumentale du compas et induire une conceptualisation 1D du triangle

Nous avons choisi de composer un duo d'artefacts dédié à la conceptualisation du triangle dans la tâche de construction d'un triangle à la règle et au compas, connaissant les longueurs des côtés. L'artefact matériel du duo étant le compas, il s'agissait alors de développer conjointement un artefact numérique en duo avec le compas matériel et une situation qui mobilise alternativement les deux artefacts.

Nos premiers objectifs lors de l'élaboration de ce duo étaient d'utiliser les potentialités d'un environnement numérique pour introduire le compas dans la construction du

triangle et, simultanément, de favoriser la conceptualisation du triangle. Le choix de cet apprentissage, la construction du triangle à la règle et au compas, résulte d'une demande du terrain, celle des enseignants participant au projet MaDyp dans le cadre d'un LéA, croisée à une analyse théorique du triangle reposant sur sa déconstruction dimensionnelle (Duval, 2005). D'une part la construction du triangle à la règle et au compas est emblématique de l'enseignement de la géométrie et selon les enseignants, elle n'est souvent associée qu'à une procédure, une technique et non à la conceptualisation du triangle ; d'autre part cette construction repose sur une déconstruction dimensionnelle du triangle 2D en un triangle déterminé par un côté, objet géométrique 1D, et le troisième sommet, objet géométrique 0D, difficilement appréhendé par les élèves.

Les travaux de Duval, de Perrin-Glorian et de Godin sur l'enseignement de la géométrie (Duval & Godin, 2005) (Perrin-Glorian, Mathe, & Leclercq, 2013) (Perrin-Glorian & Godin, 2014), nous ont permis de fonder la composition du duo sur les idées directrices suivantes : le duo devait provoquer des genèses instrumentales associées entre les artefacts numérique et matériel, et conduire à une nouvelle genèse instrumentale du compas pour pivoter un segment dans la tâche de construction d'un triangle, qui n'est ni celle d'un instrument compas pour construire des cercles, ni celle d'un instrument compas pour reporter des longueurs ; le duo et la situation devaient permettre la mise en œuvre d'un parcours de conceptions du triangle d'un état initial supposé (Triangle 2D) à un état final attendu (Triangle 0D) du système [sujet-milieu] au cours de l'alternance entre les actions instrumentées avec les instruments numériques et celles utilisant le compas matériel. Notre intention principale était de mettre l'accent sur la possibilité de faire exister une déconstruction dimensionnelle du triangle 2D au triangle 1D, sans aller jusqu'au point 0D comme intersection de deux cercles 1D. Nous cherchions donc à élaborer un duo et une situation qui favorise l'émergence d'une déconstruction dimensionnelle 1D du triangle. Enfin nous souhaitions profiter de cet apprentissage pour renforcer le concept de distance associé au cercle.

### Un duo, une situation, des résultats

Dans l'élaboration du duo et de la situation « Triangle et compas » nous avons développé un environnement numérique à partir de l'artefact matériel compas à utiliser dans la tâche de construction d'un triangle de longueurs des côtés données. Ainsi, l'environnement numérique et spécifiquement l'artefact numérique devait être au service de l'artefact matériel compas.

Nous avons créé un duo qui articule compas matériel et environnement numérique utilisant les fonctionnalités de la géométrie dynamique. L'élaboration de l'environnement numérique a consisté à envisager d'autres scénarios didactiques que ceux possibles dans l'environnement papier-crayon. Il s'agissait d'utiliser les potentialités du numérique pour élaborer un milieu riche en rétroactions qui permette la mise en œuvre de stratégies, leur

évolution et donc l'enrichissement des connaissances géométriques du triangle. Notre intention dans l'élaboration de cet environnement était d'inviter le sujet à des manipulations de segments numériques ; ces manipulations jouant le rôle d'une aide, d'un intermédiaire au saut cognitif que constitue le passage entre des manipulations d'objets matériels et des tracés géométriques aux instruments (Duval, 2005).

La création du duo et d'une situation en quatre phases (un premier cahier informatisé, une première activité papier-crayon, un second cahier informatisé et une deuxième activité papier-crayon) qui sollicite le duo avait pour but de provoquer la conceptualisation 1D du triangle ainsi que la genèse instrumentale du compas grâce à des actions sur les segments côtés, unités visuelle 1D, et sur une ligne brisée constituée de trois segments. Cette ligne brisée, lorsqu'elle est refermée, est une déconstruction dimensionnelle 1D du triangle. La ligne brisée, qui permet la conceptualisation 1D du triangle, est un élément de continuité entre les deux artefacts du duo car elle est formée de façon privilégiée dans l'environnement numérique et dans l'environnement papier-crayon.

### *Une nouvelle genèse instrumentale du compas*

L'environnement de géométrie dynamique Cabri Elem utilisé, nous a permis de créer des segments asymétriques dans leur apparence à l'écran et dans leur comportement dynamique ; ces segments pouvant être déplacés selon deux mouvements différents : par translation ou par rotation autour d'une extrémité qui reste fixe. Cette contrainte de double déplacement d'un segment numérique a été adoptée pour provoquer la genèse instrumentale d'un instrument déplacement par rotation pour pivoter un segment autour d'une extrémité qui reste fixe. Cette possibilité de contrainte est propre à l'environnement numérique. Dans l'environnement papier-crayon la manipulation directe et continue des segments étant impossible, les outils de géométrie et spécifiquement les constructions au compas devaient venir suppléer les déplacements des segments ; en particulier, le compas allait permettre de faire pivoter un segment autour d'une extrémité qui reste fixe. Le duo déplacement par rotation et compas matériel, a ainsi été créé et sollicité au sein d'une situation dans des problèmes de construction et des problèmes d'existence ou non du triangle.

Des expérimentations dans des classes nous ont permis de faire ressortir les résultats suivants : la situation et le duo provoquent l'élaboration d'un instrument déplacement par rotation pour pivoter un segment numérique autour d'une extrémité qui reste fixe pour 32 élèves sur 34. Dans l'environnement papier-crayon, une nouvelle genèse instrumentale du compas pour pivoter un segment est engendrée pour au moins 26 élèves sur 34 ; cette dernière s'appuie sur la genèse instrumentale du déplacement par rotation pour pivoter un segment autour d'une extrémité dans l'environnement numérique.



### *Une déconstruction dimensionnelle 1D du triangle*

L'environnement numérique choisi favorise une exploration du triangle à partir de ses trois côtés. Les tâches, former un triangle à l'aide des segments donnés ou déterminer l'existence ou non d'un triangle ayant ces segments comme côtés, ont été proposées dans le but d'arriver à une déconstruction dimensionnelle 1D du triangle. Les segments numériques d'apparence et de comportement asymétriques constituent les éléments clés du milieu organisé par le premier cahier informatisé. Ils provoquent la mise en œuvre d'une « stratégie ligne brisée » pour former un triangle car elle apparaît comme la plus efficace. Afin de permettre la poursuite de l'exploration du triangle en ses trois côtés et plus spécifiquement en une ligne brisée fermée, nous avons intégré dans le milieu constitué par la première activité papier-crayon, seconde phase de la situation, les objets sur lesquels la « stratégie ligne brisée » fonctionne dans la première phase de la situation : la ligne brisée et les segments côtés tracés.

Les expérimentations nous ont permis d'attester que la situation et le duo ont été favorables à 31 élèves sur 34 pour apprendre à construire un triangle à la règle et au compas. Plus spécifiquement, le duo sollicité dans la situation incite à la mise en œuvre d'une « stratégie ligne brisée » pour construire un triangle dans l'environnement papier-crayon pour au moins 26 élèves sur 34. D'une part cette stratégie permet de construire un triangle sans nécessairement mettre en œuvre une déconstruction dimensionnelle du triangle jusqu'au point OD. D'autre part cette stratégie fait émerger une nouvelle conception du triangle, la conception « Triangle 1D ligne brisée : un triangle est une ligne brisée fermée de trois segments ».

La « stratégie ligne brisée » ainsi que le nouvel instrument compas pour pivoter un segment conduisent à une nouvelle conception du cercle, la conception « Cercle pivoter un segment : un cercle est la trajectoire de l'extrémité d'un segment pivoté ».

### *Le cercle dans la construction du triangle*

Le second cahier informatisé, troisième phase de la situation devait permettre l'introduction du cercle comme outil dans la construction du triangle. Notre intention était d'utiliser à nouveau les potentialités d'un environnement numérique pour introduire le cercle en tant qu'objet mathématique, comme artefact théorique, à l'aide de l'outil cercle de la géométrie dynamique. L'environnement de géométrie dynamique allait permettre, par un jeu sur les outils disponibles, de contraindre l'utilisation de l'outil cercle, ce dernier étant le seul permettant la mise en œuvre d'une stratégie gagnante, permettant de déterminer le troisième sommet du triangle.

Les expérimentations nous ont permis de mettre en évidence que dans la situation proposée, l'outil cercle de la géométrie dynamique n'est pas mobilisé de manière appropriée par les élèves. Cela révèle les limites de notre situation. Nous formulons trois hypothèses pour expliquer les difficultés relatives à la mobilisation de l'outil cercle : notre

situation n'est peut-être pas la bonne pour engager le cercle comme outil dans la construction du triangle ; utiliser l'outil cercle de la géométrie dynamique, nécessite une identification du centre et du rayon du cercle, cela implique donc une déconstruction dimensionnelle du cercle en son centre 0D et son rayon 1D difficile à mettre en œuvre par des élèves de l'école primaire ; utiliser l'outil cercle relève d'un nouveau point de vue sur le cercle, le cercle doit être appréhendé en tant qu'objet mathématique et non en tant que figure produite par le compas.

## Perspectives

### Des manipulations matérielles articulées aux manipulations des segments numériques

Dans notre travail, nous nous sommes focalisée sur le développement d'un environnement numérique qui incite à des manipulations pour enrichir le compas matériel. Le duo d'artefacts que nous avons créé met en relation le déplacement par rotation pour pivoter un segment numérique et le compas matériel. Ce travail pourrait être prolongé par l'étude de manipulations d'objets matériels. Pourrait-on développer un artefact matériel qui puisse constituer un duo avec le premier cahier informatisé et précisément la manipulation de segments numériques ? Nous nous interrogeons donc sur la possibilité de créer des manipulations d'objets matériels dans l'espace sensible qui seraient associées aux manipulations de segments numériques dans le cahier informatisé.

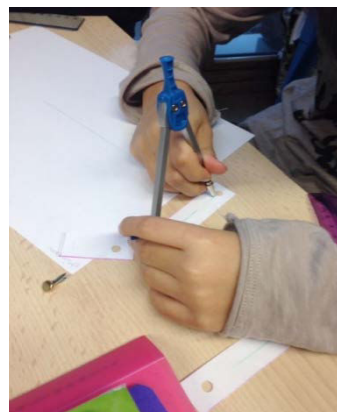
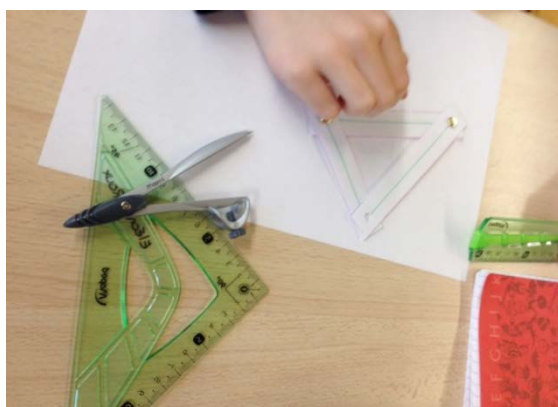
Nous avons engagé un travail dans ce sens en développant une situation basée sur la manipulation de bandelettes plastifiées, liées par des attaches parisiennes permettant la rotation, en duo à l'utilisation du compas matériel dans l'environnement papier-crayon (Figure 2).

Nous avons réalisé des pré-tests dans une classe de CM1. Ces premières expérimentations en conditions réelles de classe nous ont permis de dégager les hypothèses suivantes : la manipulation des bandelettes est plus efficace que la manipulation de segments numériques pour la vision 1D du triangle comme une ligne brisée fermée ; la manipulation des segments numériques d'apparence et de comportement asymétriques est plus efficace pour la mise en valeur de la rotation et conduire à l'utilisation du compas.

Ainsi composer un duo bandelettes matérielles et segments numériques, nous paraît très prometteur à la fois pour la conceptualisation du triangle, spécifiquement pour sa déconstruction dimensionnelle 1D en une ligne brisée fermée, et pour amener le compas dans sa construction géométrique.



Trois bandelettes et deux attaches parisiennes engendrent la formation d'une ligne brisée. La manipulation de la ligne brisée permet de vérifier l'existence ou non du triangle.



La reproduction du « triangle bandelettes » à l'aide de la règle et du compas.

Figure 2 : Une nouvelle situation : de la manipulation de bandelettes à la formation d'une ligne brisée jusqu'à l'utilisation du compas dans la construction du triangle

## Un travail sur les longueurs sans recours à la mesure

Dans la situation « Triangle et compas », un travail sur les longueurs qui ne nécessite pas le passage à la mesure est déjà engagé ; les longueurs des côtés du triangle sont données par des segments et non par leur mesure dans les trois premières phases de la situation. En revanche, la disponibilité de la règle graduée dans l'environnement papier-crayon, de la règle de géométrie dynamique et de l'outil mesure dans l'environnement numérique offrent la possibilité aux élèves d'utiliser les mesures. Au cours des expérimentations, les élèves y ont eu recours bien que cela n'ait pas conduit à des stratégies plus efficaces que celle de la ligne brisée qui ne passe pas par la mesure. Une situation contraignant un travail exclusivement sur les longueurs sans référence à leur mesure pourrait être élaborée à partir des deux artefacts du duo.

L'élaboration d'un duo bandelettes matérielles et segments numériques, coordonné à l'utilisation du compas pourrait être l'occasion d'un travail sur les longueurs uniquement sans passer par la mesure. La reproduction du « triangle bandelettes » sur papier peut être réalisée sans instrument de mesure, au compas et à la règle non graduée uniquement. Un tel travail uniquement sur les grandeurs pourrait être propice à une meilleure appréhension des objets mathématiques en jeu, spécialement de la ligne brisée et du triangle qu'elle engendre ou non.

## Une progression sur le cycle 3 pour la conceptualisation du triangle et du cercle

Notre étude nous a montré que des manipulations dans un environnement numérique pouvaient être une aide pour franchir le saut cognitif entre les manipulations d'objets matériels dans l'espace sensible et le tracé de figures géométriques à l'aide des outils usuels de géométrie dans l'environnement papier-crayon. De plus cette étude nous a aussi révélé les difficultés des élèves à mobiliser l'outil cercle de la géométrie dynamique pour déterminer le troisième sommet du triangle. Le cercle dans la construction du triangle doit être appréhendé comme objet théorique. Un autre saut cognitif doit être dépassé entre l'utilisation des artefacts tangibles (matériels ou de géométrie dynamique) et la mobilisation d'artefacts théoriques comme l'objet mathématique cercle pour réaliser une construction géométrique.

Notre recherche donne les bases pour l'élaboration d'une situation mobilisant un autre duo composé d'artefacts bandelettes matérielles et segments numériques, coordonné à l'usage d'outils de report de grandeurs (règle non graduée, compas, gabarits, ...) ouvrant vers une réflexion sur le passage de la géométrie instrumentée à la géométrie théorique. Nous nous interrogeons plus précisément sur la possibilité d'élaborer une progression pour le cycle 3, sur la conceptualisation du triangle et du cercle à partir de la construction géométrique du triangle à la règle et au compas ; on amorcerait ainsi le passage de la géométrie instrumentée à la géométrie théorique.



## Bibliographie

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherche en didactique des Mathématiques*, 9(3), 281–308.

Artigue, M. (2008). L'influence des logiciels sur l'enseignement des mathématiques, contenus et pratiques. In *Actes du séminaire DGESCO de février 2007*.

Artigue, M., & Robinet, J. (1982). Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire. *Recherche en didactique des Mathématiques*, 3(1).

Balacheff, N. (1995a). Conception, connaissance et concept. In Denise Grenier (Ed.) (pp. 219–244). Presented at the Séminaire de Didactique et Technologies cognitives en mathématiques, Grenoble France.

Balacheff, N. (1995b). Conception, propriété du système sujet/milieu. (pp. 215-229). Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Ferrand. In *Actes de la VII<sup>e</sup> Ecole d'été de didactique des mathématiques* (pp. 215–229). Clermont-Ferrand : Noirfalise R., Perrin-Glorian M.-J. (eds.).

Balacheff, N. (2013). cKc, a model to reason on learners' conceptions. In M. V. Martinez & A. Castro Superfine (Eds.) (pp. 2–15). Chicago IL, USA. Retrieved from <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00853856>

Balacheff, N., & Margolinas, C. (2005). cKc : modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In *Actes de la XIII<sup>ème</sup> école d'été de didactique des mathématiques*. La pensée Sauvage Grenoble, France.

Baudet, J. (2003). *Nouvel abrégé d'histoire des mathématiques*. Paris : Vuibert.

Berthelot, R., & Salin, M.-H. (1993). L'enseignement de la géométrie à l'école primaire. *Grand N*, 53, 39–56.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 7(2).

Brousseau, G. (1997). *La théorie des situations didactiques*. Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal, Montréal. Retrieved from <http://www.cfem.asso.fr/actualites/Brousseau.pdf>

Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. La pensée Sauvage Grenoble, France.

Brousseau, G. (2003). Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques. Retrieved from [http://perso.orange.fr/daest/guy-brousseau/textes/Glossaire\\_Brousseau.pdf](http://perso.orange.fr/daest/guy-brousseau/textes/Glossaire_Brousseau.pdf)

Bruillard, E. (1997). *Les machines à enseigner* (Éditions Hermès). Paris, France.

Bruillard, E., & Vivet, M. (1994). Concevoir des EIAO pour des situations scolaires. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 14(1.2), 275–304.

Carrega, J.-C. (1989). *Théorie des corps : la règle et le compas*. Paris : Hermann.

- Chevallard, Y. (1991). Autour de l'enseignement de la géométrie au collège. *Petit X*, (27).
- Collins, A., Joseph, D., & Bielaczyc, K. (2004). Design Research: Theoretical and Methodological Issues. *Journal of the Learning Sciences*, 13(1), 15–42. [https://doi.org/10.1207/s15327809jls1301\\_2](https://doi.org/10.1207/s15327809jls1301_2)
- Commission Nationale Inter-IREM Histoire et Épistémologie des Mathématiques (Ed.). (1997). *Histoires de problèmes, histoire des mathématiques*. Paris : Éd. Marketing.
- Drijvers, P. (2015). Digital Technology in Mathematics Education: Why It Works (Or Doesn't). In S. J. Cho (Ed.), *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 135–151). Cham: Springer International Publishing. Retrieved from [http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-17187-6\\_8](http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-17187-6_8)
- Drijvers, P., Ball, L., Barzel, B., Heid, M. K., Cao, Y., & Maschietto, M. (2016). *Uses of Technology in Lower Secondary Mathematics Education*. Cham: Springer International Publishing. Retrieved from <http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-33666-4>
- Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 10, 5–53.
- Duval, R., & Godin, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N*, 76, 7–27.
- English, L. D., & Kirshner, D. (Eds.). (2015). *Handbook of international research in mathematics education* (3rd edition). New York: Routledge.
- ERMEL. (2006). *Apprentissages géométriques et résolution de problèmes*. (Hatier, Vol. Cycle 3). Hatier.
- Fourrey, E. (1907). *Curiosités géométriques*. Paris, France : Vuibert et Nony.
- Gueudet, G., Bueno-Ravel, L., & Poisard, C. (2014). Teaching Mathematics with Technologies at Kindergarten: Resources and Orchestrations. In A. Clark-Wilson, O. Robutti, & N. Sinclair (Eds.), *The Mathematics Teacher in the Digital Era* (Vol. 2, pp. 213–240). Springer.
- Houdement, C. (2007). À la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège. *Repères IREM*, 67, 69–84.
- Hoyles, C., & Lagrange, J.-B. (Eds.). (2010). *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain* (Vol. 13). Boston, MA: Springer US. Retrieved from <http://link.springer.com/10.1007/978-1-4419-0146-0>
- Hoyles, C., & Noss, R. (2003). What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education? In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 323–349). Dordrecht: Springer Netherlands. Retrieved from [http://link.springer.com/10.1007/978-94-010-0273-8\\_11](http://link.springer.com/10.1007/978-94-010-0273-8_11)
- Laborde, C. (1990). L'enseignement de la géométrie. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 9(3).

Laborde, C. (2001). Integration of Technology in the Design of Geometry Tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6(3), 283–317.

Laborde, C., & Capponi, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherche en didactique des Mathématiques*, 14(1.2), 165–210.

Laborde, C., & Laborde, J.-M. (2011). Interactivity in dynamic mathematics environments: what does that mean? Presented at the Sixteenth Asian Technology Conference in Mathematics 2011. Retrieved from [http://atcm.mathandtech.org/EP2011/invited\\_papers/3272011\\_19113.pdf](http://atcm.mathandtech.org/EP2011/invited_papers/3272011_19113.pdf)

Laborde, C., & Laborde, J.-M. (2014). Dynamic and Tangible Representations in Mathematics Education. In S. Rezat, M. Hattermann, & A. Peter-Koop (Eds.), *Transformation - A Fundamental Idea of Mathematics Education* (pp. 187–202). New York, NY: Springer New York. Retrieved from [http://link.springer.com/10.1007/978-1-4614-3489-4\\_10](http://link.springer.com/10.1007/978-1-4614-3489-4_10)

Laborde, C., & Marchetteau, A. (2009). L'incontro tra reale e virtuale in Cabri Elem per attività matematiche nella scuola primaria. *La Matematica E La Sua Didattica*, 23(1), 19–34.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., Sträßer, R., Gutierrez, A., & Boero, P. (2006). Teaching and learning geometry with technology. In *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, Present and Future* (pp. 275–304). Rotterdam: Sense Publishers.

Mackrell, K., Maschietto, M., & Soury-Lavergne, S. (2013). The interaction between task design and technology design in creating tasks with Cabri Elem. In C. Margolinas (Ed.) (pp. 81–90). Presented at the ICMI Study 22, Oxford, Royaume-Uni.

Marçay, F. (2014). *Constructions à la règle et au compas*. Orsay: Département de mathématiques.

Maschietto, M., & Soury-Lavergne, S. (2013). Designing a duo of material and digital artifacts: the pascaline and Cabri Elem e-books in primary school mathematics. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 45(7), 959–971. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0533-3>

Mithalal, J. (2010). *Déconstruction instrumentale et déconstruction dimensionnelle dans le contexte de la géométrie dynamique tridimensionnelle* (Thèse de doctorat). Joseph Fourier, Grenoble, France. Retrieved from [tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/59/09/41/PDF/these\\_mithalal.pdf](http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/59/09/41/PDF/these_mithalal.pdf)

Moyer-Packenham, P. S. (Ed.). (2016). *International Perspectives on Teaching and Learning Mathematics with Virtual Manipulatives* (Vol. 7). Cham: Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-32718-1>

Moyer-Packenham, P. S., & Bolyard, J. J. (2016). Revisiting the Definition of a Virtual Manipulative. In P. S. Moyer-Packenham (Ed.), *International Perspectives on Teaching and Learning Mathematics with Virtual Manipulatives* (Vol. 7, pp. 3–23). Cham: Springer International Publishing. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-32718-1\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-319-32718-1_1)



Moyer-Packenham, P. S., Niezgoda, D., & Stanley, J. (2005). Young children's use of virtual manipulatives and other forms of mathematical representations. In *Technology-supported mathematics learning environments* (pp. 17–34). W. Masalski & P. C. Elliott.

OECD. (2015). *Students, Computers and Learning*. OECD Publishing. Retrieved from [http://www.oecd-ilibrary.org/education/students-computers-and-learning\\_9789264239555-en](http://www.oecd-ilibrary.org/education/students-computers-and-learning_9789264239555-en)

Olive, J., Makar, K., Hoyos, V., Kor, L. K., Kosheleva, O., & Sträßer, R. (2010). Mathematical Knowledge and Practices Resulting from Access to Digital Technologies. In C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain* (Vol. 13, pp. 133–177). Boston, MA: Springer US. Retrieved from [http://link.springer.com/10.1007/978-1-4419-0146-0\\_8](http://link.springer.com/10.1007/978-1-4419-0146-0_8)

Perrin-Glorian, M.-J., & Godin, M. (2014). De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math-Ecole*, (222), 28–38.

Perrin-Glorian, M.-J., Mathe, A.-C., & Leclercq, R. (2013). Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? *Repères-IREM*, 90, 5–41.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes & les technologies : approche cognitive des instruments contemporains*. Paris France : Armand Colin.

Rabardel, P. (1995a). *Les hommes & les technologies : approche cognitive des instruments contemporains*. Paris France : Armand Colin.

Rabardel, P. (1995b). Qu'est-ce qu'un instrument ? Appropriation, conceptualisation, mises en situation. Outils pour le calcul et le traçage de courbes. *Le Mathématicien, Le Physicien et Le Psychologue*, 61–65.

Restrepo, A. M. (2008). *Génèse instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élèves de 6e*. Joseph Fourier. Retrieved from <http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/33/42/53/PDF/These-Restrepo.pdf>

Ronau, R. N., Rakes, C. R., Bush, S. B., Driskell, S. O., Niess, M. L., & Pugalee, D. K. (2014). A Survey of Mathematics Education Technology Dissertation Scope and Quality: 1968-2009. *American Educational Research Journal*, 51(5), 974–1006. <https://doi.org/10.3102/0002831214531813>

Sacristán, A. I., Calder, N., Rojano, T., Santos-Trigo, M., Friedlander, A., Meissner, H., ... Perrusquía, E. (2009). The Influence and Shaping of Digital Technologies on the Learning – and Learning Trajectories – of Mathematical Concepts. In C. Hoyles & J.-B. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain* (Vol. 13, pp. 179–226). Boston, MA: Springer US. Retrieved from [http://link.springer.com/10.1007/978-1-4419-0146-0\\_9](http://link.springer.com/10.1007/978-1-4419-0146-0_9)

Sanchez, E., & Monod-Ansaldi, R. (2015). Recherche collaborative orientée par la conception. *Éducation et Didactique*, 9(2).

Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). "Concrete" Computer Manipulatives in Mathematics Education. *Child Development Perspectives*, 3(3), 145–150. <https://doi.org/10.1111/j.1750-8606.2009.00095.x>

- Sarama, J., & Clements, D. H. (2016). Physical and Virtual Manipulatives: What Is “Concrete”? In P. S. Moyer-Packenham (Ed.), *International Perspectives on Teaching and Learning Mathematics with Virtual Manipulatives* (Vol. 7, pp. 71–93). Cham: Springer International Publishing. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-32718-1\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-319-32718-1_4)
- Sedig, K., & Sumner, M. (2006). Characterizing Interaction with Visual Mathematical Representations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 11(1), 1–55. <https://doi.org/10.1007/s10758-006-0001-z>
- Sinclair, N., & Baccaglini-Franck, A. (2015). Digital technologies in the early primary school classroom. In *Handbook of International Research in Mathematics Education: Third Edition* (pp. 662–686). Lyn D. English; David Kirshner.
- Sinclair, N., Bartolini Bussi, M. G., de Villiers, M., Jones, K., Kortenkamp, U., Leung, A., & Owens, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM*, 48(5), 691–719. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0796-6>
- Soury-Lavergne, S. (2006). Instrumentation du déplacement dans l’initiation au raisonnement déductif avec Cabri-géomètre. In N. Bednarz (Ed.). Sherbrooke (Quebec) : Université de Sherbrooke.
- Soury-Lavergne, S. (2011). De l’intérêt des constructions molles en géométrie dynamique. *MathemaTICE*, (27). Retrieved from <http://revue.sesamath.net/spip.php?article364>
- Soury-Lavergne, S., & Maschietto, M. (2015). Articulation of spatial and geometrical knowledge in problem solving with technology at primary school. *ZDM*, 47(3), 435–449. <https://doi.org/10.1007/s11858-015-0694-3>
- Tempier, F. (2015). La numération décimale de position à l’école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d’une ressource. In *Actes du séminaire national de l’ARDM* (pp. 99–117).
- Trouche, L. (2003). *Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations* (HDR). Montpellier.
- Trouche, L. (2004). Managing complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding student’s command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(3), 281–307.
- Trouche, L. (2004a). Environnements informatisés et mathématiques : quels usages pour quels apprentissages ? *Educational Studies in Mathematics*, pp. 181–197.
- Trouche, L. (2004b). Managing complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding student’s command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(3), 281–307.
- Trouche, L. (2005). Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations. *Recherche en didactique des Mathématiques*, 25, 91–138.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 10(2.3), 133–170.

Vergnaud, G. (1996). Au fond de l'action, la conceptualisation. In *Savoirs théoriques et savoirs d'action*. (J-M, Barbier). Paris : Presses Universitaire de France.

Voltolini, A. (2013). *A la découverte des triangles : de la manipulation de segments dans un logiciel de géométrie dynamique à la construction à la règle et au compas*. Mémoire master 2, Grenoble, France.

Voltolini, A. (2014). Un duo d'artefacts virtuel et matériel pour apprendre à construire un triangle à la règle et au compas. *Grand N*, 94, 25–46.

Voltolini, A. (2015). Duos d'artefacts virtuel et matériel pour l'apprentissage des mathématiques à l'école et au collège. In *Actes de la XVIII<sup>e</sup> Ecole d'été de didactique des mathématiques*. Brest France.

Voltolini, A. (Accepté). Duo of digital and material artefacts dedicated to the learning of geometry at primary school (ICME 13 Monograph). Springer International Publishing.

## Dictionnaires

Baruk, S. (1995). *Dictionnaire de mathématiques élémentaires : pédagogie, langue, méthode, exemples, étymologie, histoire, curiosités* (Nouv. éd. enrichie de 3 index). Paris : Ed. du Seuil.

Bouvier, A., George, M., & LeLionnais, F. (1996). *Dictionnaire des mathématiques* (5. éd., mise à jour et augm). Paris : Presses Univ. de France.

Larousse. (2004). *Le petit Larousse illustré : en couleurs : 87000 articles, 5000 illustrations, 321 cartes, cahiers thématiques, chronologie universelle*. Paris : Le Grand livre du mois.

Robert, P. (2010). *Le nouveau Petit Robert : 2010*. Le Robert.

## Textes des programmes

MEN. (2004). *Programmes des collèges, mathématiques, classe de sixième* (No. BO n°5).

MEN. (2008a). *Horaires et programmes de l'enseignement de l'école primaire* (Bulletin Officiel du Ministère de l'Éducation Nationale et du Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche No. BO n°3).

MEN. (2008b). *Programmes du collège* (No. BO n°6).

MEN. (2015). *Programmes d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), du cycle de consolidation (cycle 3) et du cycle des approfondissements (cycle 4)* (Bulletin Officiel du Ministère de l'Éducation Nationale et du Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche No. BO n°11).

## Sitographie

<http://www.education.gouv.fr/pid29462/la-refondation-de-l-ecole-de-la-republique.html>  
(janvier 2017)

<https://fr.wikipedia.org/wiki/Compas> (janvier 2017)

<https://fr.wikipedia.org/wiki/Triangle> (janvier 2017)



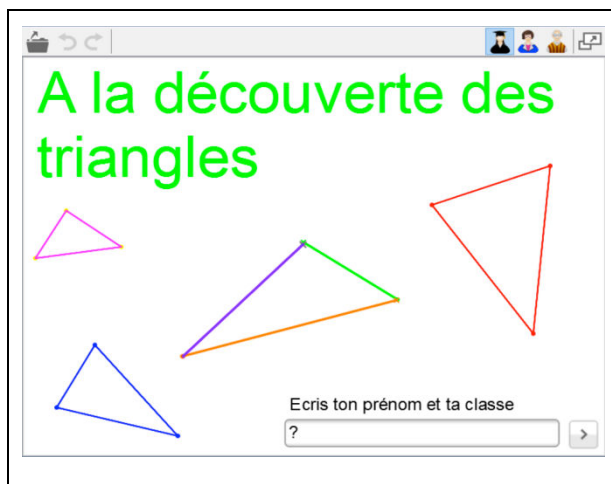
## ANNEXES



## Annexe 1. Description des différentes pages des cahiers informatisés

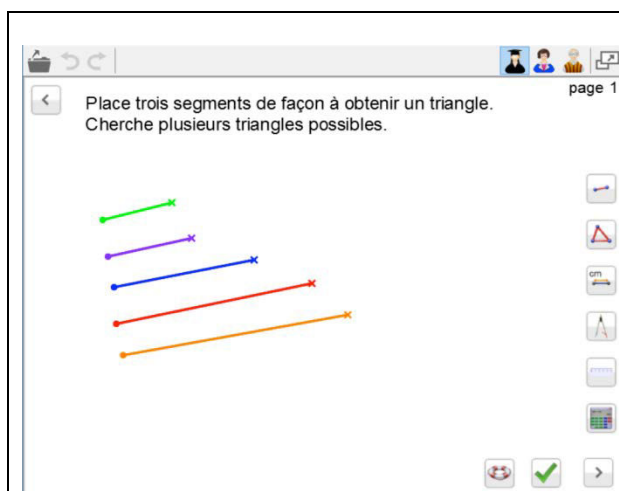
### Description des différentes pages du cahier « A la découverte des triangles »

#### Page d'accueil



La page d'accueil est la page d'entrée dans le cahier. Elle permet de donner le titre de l'activité. L'utilisateur sait sur quoi vont porter les tâches proposées dans ce cahier informatisé. Cette page permet aussi à l'élève d'inscrire son prénom et sa classe.

#### Page 1

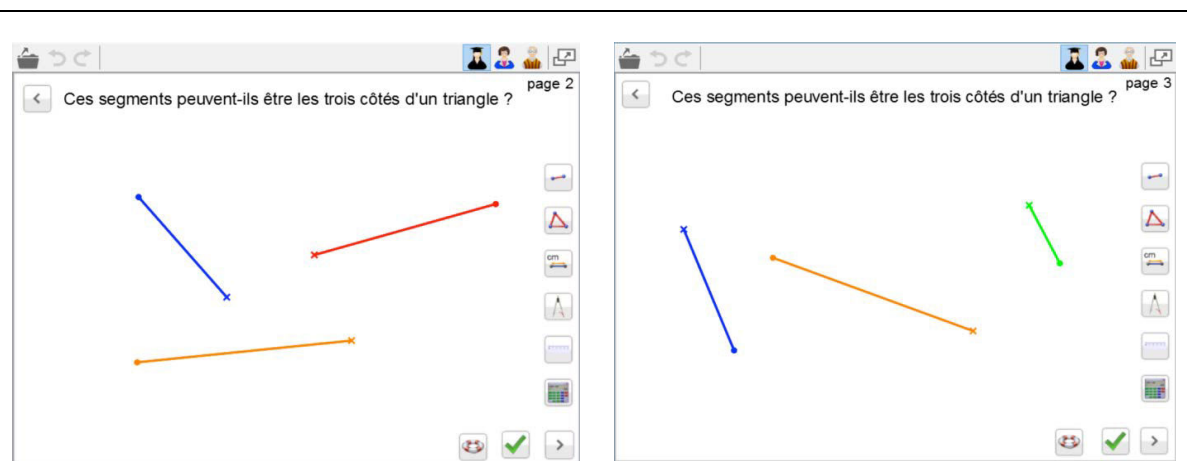


Page 1, cinq segments de longueurs et de couleurs différentes sont présents. Il est demandé de placer trois de ces segments pour former un triangle. Plusieurs triangles doivent être trouvés. L'évaluation d'une production est demandée à l'aide du bouton « coche verte » en bas à droite de la page. Un bouton avec une icône de bouée renvoie à une page d'aide au déplacement des segments.

Des outils sont aussi à la disposition de l'utilisateur. Il s'agit des outils segment, triangle, mesure, compas-gd, règle graduée-gd et calculatrice.

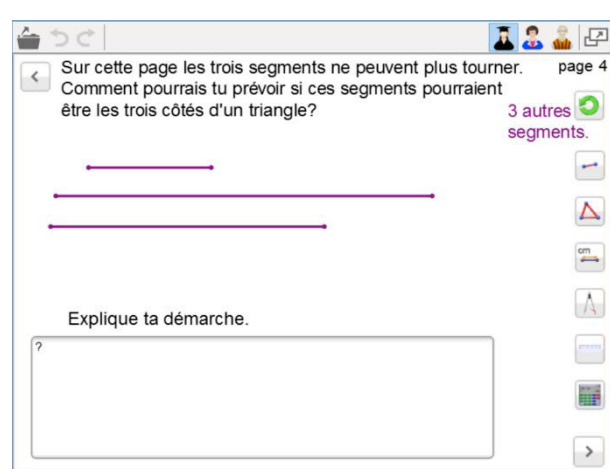


## Pages 2 et 3



Page 2 et 3, trois segments de longueurs et de couleurs différentes sont présents sur la page. Il est demandé si ces trois segments peuvent être les trois côtés d'un triangle. Comme à la page précédente, l'évaluation du travail réalisé est demandée à l'aide du bouton « coche verte » en bas à droite de la page. Le bouton renvoyant à la page d'aide au déplacement des segments et les outils sont toujours disponibles sur ces deux pages.

## Page 4

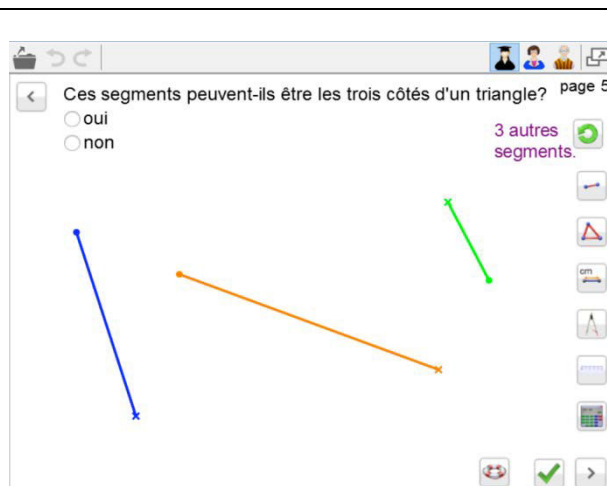


Sur cette 4<sup>ème</sup> page trois segments de longueurs différentes et parallèles entre eux sont présents sur la page. Il est demandé comme page 2 et 3 si ces segments pourraient être les trois côtés d'un triangle. Il est aussi précisé dans la consigne que les segments ne peuvent plus être pivotés. Un cadre réponse est présent en bas de la page afin que l'élève explique sa démarche de réponse.

Les mêmes outils que sur les pages précédentes sont toujours à disposition.

En haut à droite de la page un bouton permet de proposer automatiquement trois nouveaux segments de longueurs différentes. Ainsi il est possible de tester une démarche sur plusieurs triplets de segments.

## Page 5



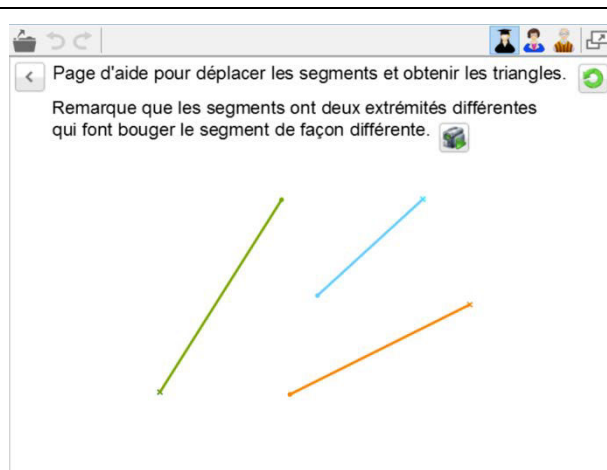
Sur cette page 5, dernière page du cahier, trois segments de longueurs et de couleurs différents sont présents sur la page. Il est toujours demandé si ces segments peuvent être les trois côtés d'un triangle. Un QCM permet à l'utilisateur d'entrer sa réponse une fois le problème résolu.

L'évaluation de la production et de la réponse au QCM peut être réalisée à l'aide du bouton « coche verte » en bas à droite de la page.

Le bouton renvoyant à la page d'aide au déplacement des segments est à nouveau présent.

Comme sur la page précédente, à l'aide du bouton en haut à droite, trois autres segments de longueurs différentes sont proposés.

## Page d'aide au déplacement des segments

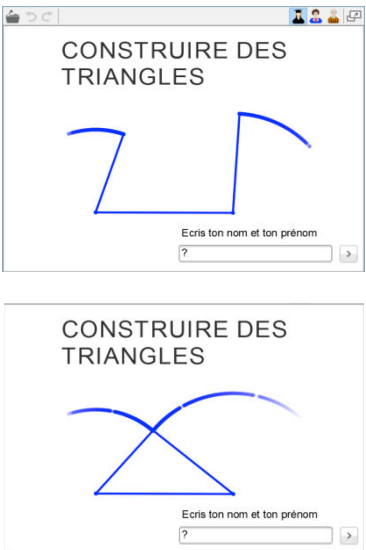


Sur les pages 1, 2, 3 et 5 du cahier informatisé, un bouton aide avec une icône de bouée est présent en bas à droite de la page. L'activation de ce bouton renvoie l'utilisateur sur une page d'aide à la manipulation des segments. Sur cette page il est indiqué que les segments ont deux extrémités différentes qui permettent deux déplacements différents. L'utilisateur peut attraper chaque extrémité d'un des segments présents sur la page et tester les déplacements.

Il est aussi possible de visionner une vidéo illustrant les deux déplacements possibles des segments. La flèche en haut à gauche de la page permet de revenir sur la page active du cahier.

## Description des différentes pages du cahier « Construire des triangles »

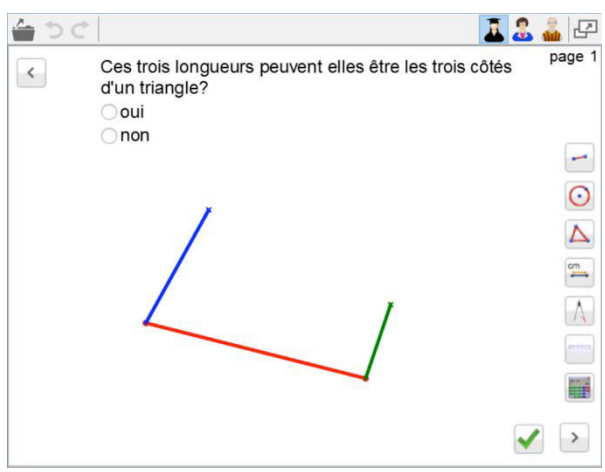
### Page d'accueil



La page d'accueil est la page d'entrée dans le cahier. Elle permet de donner le titre de l'activité. L'utilisateur sait sur quoi vont porter les tâches proposées dans ce cahier informatisé. Cette page permet aussi à l'élève d'inscrire son nom et son prénom.

À l'ouverture du cahier une animation démarre. Les segments extrêmes de la ligne brisée se referment pour former le triangle. La trace des extrémités des segments qui pivotent est affichée.

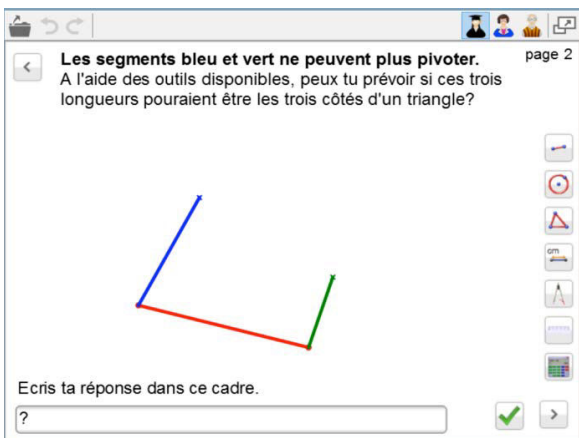
### Page 1



Page 1, une ligne brisée de trois segments de longueur et de couleurs différentes est proposée. Il est demandé si ces trois segments peuvent être les trois côtés d'un triangle. Sur cette page, les extrémités de la ligne brisée peuvent être pivotées. Il est donc possible d'essayer de former le triangle ou de constater son inexistence. La trace des extrémités de la ligne brisée s'affiche lors de leur déplacement.

La ligne brisée proposée sur cette page ne permet pas de former un triangle. Un questionnaire oui/non permet à l'utilisateur de donner sa réponse.

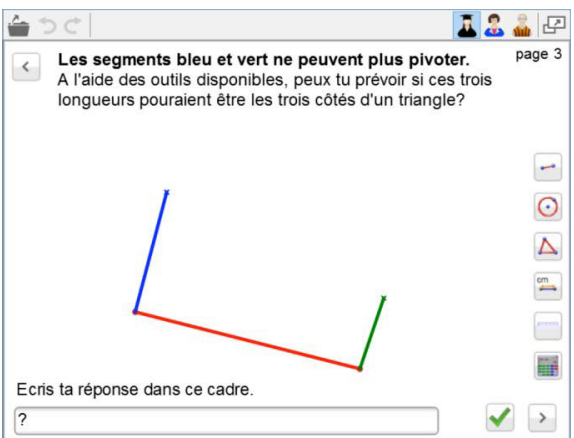
## Pages 2, 3 et 4



page 2

Les segments bleu et vert ne peuvent plus pivoter.  
A l'aide des outils disponibles, peux tu prévoir si ces trois longueurs pourraient être les trois côtés d'un triangle?

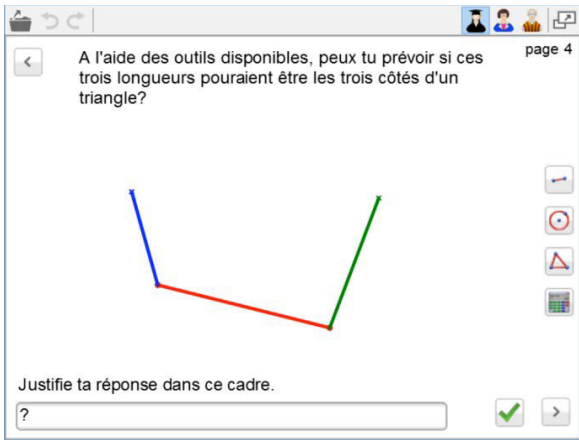
Ecris ta réponse dans ce cadre.



page 3

Les segments bleu et vert ne peuvent plus pivoter.  
A l'aide des outils disponibles, peux tu prévoir si ces trois longueurs pourraient être les trois côtés d'un triangle?

Ecris ta réponse dans ce cadre.



page 4

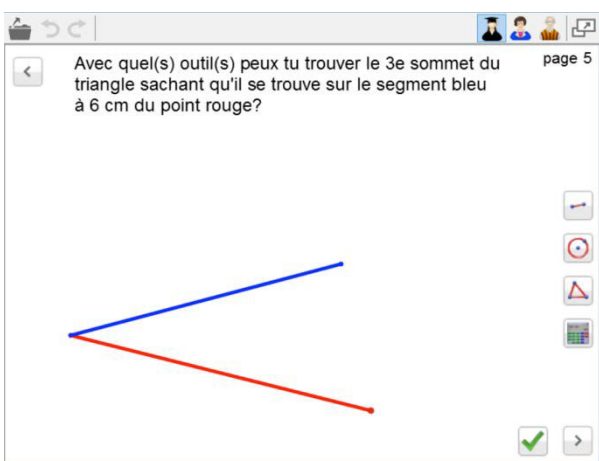
A l'aide des outils disponibles, peux tu prévoir si ces trois longueurs pourraient être les trois côtés d'un triangle?

Justifie ta réponse dans ce cadre.

Page 2, 3, 4 une ligne brisée de trois segments de longueurs et de couleurs différentes est proposée. Il est demandé si ces trois segments peuvent être les trois côtés d'un triangle. Sur ces trois pages les extrémités de la ligne brisée sont verrouillées en déplacement. C'est en utilisant les outils à disposition sur chaque page qu'il est possible de résoudre le problème.

Sur ces trois pages, un cadre réponse permet à l'utilisateur d'écrire sa démarche. Page 2 et 4 les trois longueurs proposées vérifient l'inégalité triangulaire donc les trois segments peuvent être les trois côtés d'un triangle. Page 3 les trois longueurs ne vérifient pas l'inégalité triangulaire et la ligne brisée ne permet pas de former un triangle.

## Page 5

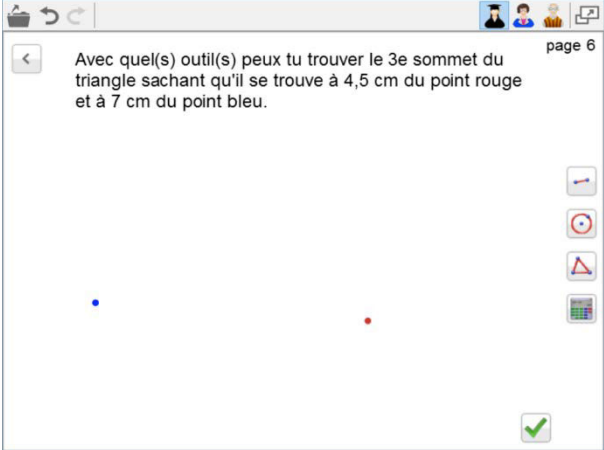


page 5

Avec quel(s) outil(s) peux tu trouver le 3e sommet du triangle sachant qu'il se trouve sur le segment bleu à 6 cm du point rouge?

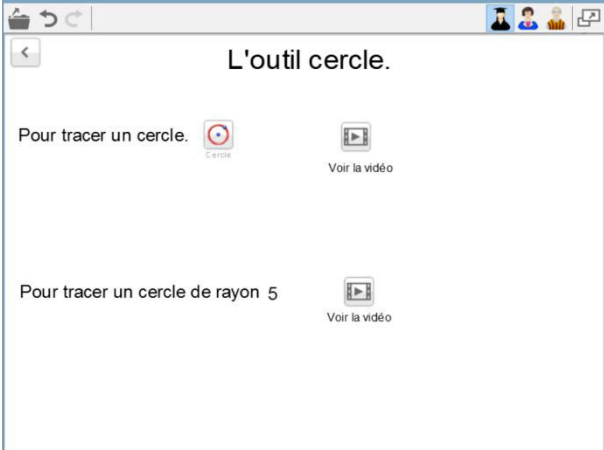
Page 5 il est demandé d'utiliser les outils disponibles sur la page pour trouver le troisième sommet du triangle. Ce troisième sommet doit être sur le segment bleu à 6cm du point rouge. Seul l'utilisation de l'outil cercle permet de résoudre le problème.

## Page 6



Page 6, la question est la même. Il s'agit de déterminer le troisième sommet du triangle à 4,5cm du point rouge et à 7cm du point bleu. À nouveau seul l'outil cercle permet de déterminer le troisième sommet du triangle. Ici deux solutions, les deux points d'intersection des deux cercles, sont possibles pour le troisième sommet du triangle.

## Page d'aide à l'utilisation de l'outil cercle



Sur les pages 5 et 6, l'activation de l'outil cercle affiche un bouton d'aide avec une icône de bouée. L'activation de ce bouton d'aide amène l'utilisateur sur une nouvelle page. Sur cette page il est possible de visionner deux vidéos.

La première vidéo montre comment tracer un cercle de rayon quelconque : cliquer sur l'outil cercle, cliquer pour afficher le centre, écartier le cercle et cliquer pour déterminer sa taille et fixer son image à l'écran.

La seconde vidéo illustre le tracé d'un cercle de rayon donné par un nombre : cliquer sur l'outil cercle, cliquer sur le nombre correspondant au rayon du cercle et cliquer pour poser le centre du cercle et fixer son image à l'écran.

## Annexe 2. Opérateurs et contrôles de chaque environnement

### Environnement numérique

Manipulation de représentations dynamiques d'objets mathématiques

#### Opérateurs

Attraper un objet			
Opérateur	Finalité	Artefact	Modalités d'action
rA	Attraper un objet	Pointeur	Amener le pointeur sur l'objet afin de le sélectionner Cliquez sur la souris

Déplacer un objet			
Opérateur	Finalité	Artefact	Modalité d'action
rD	Déplacer un objet librement	Pointeur	Attraper l'objet Tirer pour déplacer
rTran	Translater un objet	Pointeur	Attraper l'objet Tirer selon un mouvement linéaire
rRot	Déplacer un objet par rotation	Pointeur	Attraper l'objet Tirer selon un mouvement circulaire
rTrans	Translater un segment à partir de son extrémité ronde	Pointeur	Translater l'extrémité ronde $\Sigma \text{Extr} + \text{rTran}$
rPiv	Pivoter un segment autour de l'extrémité ronde qui reste fixe	Pointeur	Déplacer l'extrémité cruciforme par rotation $\Sigma \text{Extr} + \text{rRot}$

Superposer deux objets			
Opérateur	Finalité	Artefact	Modalités d'action
rSu	Superposer une extrémité d'un segment sur une extrémité d'un autre segment	Pointeur	Déplacer le segment Arrêter le déplacement lorsqu'une extrémité est superposée à une extrémité de l'autre segment

Ligne brisée			
Opérateur	Finalité	Artefact	Modalités d'action
rLiB	Former une ligne brisée de trois segments de longueurs données	Pointeur	Déplacer par translation un 1 <sup>er</sup> segment Superposer une de ses extrémités avec une des extrémités d'un 2 <sup>ème</sup> segment Déplacer par translation un 3 <sup>ème</sup> segment Superposer une de ses extrémités avec l'autre extrémité du 2 <sup>ème</sup> segment (rTran ou rTrans + rSu + $\Sigma$ Su)x2

## Contrôles

Contrôles visuels relatifs à la manipulation d'objets numériques			
Contrôle		Constat	Conséquence
$\Sigma Sel$	Sélection d'un objet	L'objet est en surbrillance	L'objet est sélectionné
$\Sigma Extr$	Distinguer les extrémités	Les extrémités ont des représentations différentes : ronde, cruciforme	Le déplacement de chacune est différent : l'extrémité ronde autorise la translation, l'extrémité cruciforme autorise la rotation
$\Sigma Su$	Etre superposé	Les extrémités sont l'une sur l'autre	Les extrémités sont superposées
$\Sigma D$	Déplacement	L'objet bouge avec le pointeur	L'objet est déplacé
$\Sigma Tran$	Translation	L'objet bouge avec le pointeur selon un mouvement linéaire	L'objet est déplacé par translation
$\Sigma Rot$	Rotation	L'objet bouge selon un mouvement circulaire	L'objet est déplacé par rotation
$\Sigma LB$	Ligne brisée	La ligne brisée est visible	La ligne brisée a été formée



## Mobilisation des outils de géométrie dynamique

### Outils de géométrie dynamique pouvant être utilisés

Segment ; cercle ; triangle ; mesure ; compas-gd ; règle graduée-gd

### Opérateurs

Tracer un segment			
Opérateur	Finalité	Artefact	Modalité d'action
rS1-gdS	Tracer un segment	Outil segment	Activer l'outil segment Déplacer le pointeur à l'endroit correspondant à la 1 <sup>ère</sup> extrémité du segment et cliquer Déplacer le pointeur à l'endroit correspondant à la 2 <sup>ème</sup> extrémité et cliquer
rS1-gdR		Règle graduée-gd	Activer l'outil règle graduée-gd Déplacer la règle à l'endroit souhaité et cliquer pour fixer la règle Déplacer le pointeur le long de la règle et cliquer pour afficher le segment et supprimer l'image de la règle à l'écran
rS1E-gdS	Tracer un segment à partir d'une extrémité donnée	Outil segment	Activer l'outil segment Déplacer le pointeur sur l'extrémité donnée et cliquer Déplacer le pointeur à l'endroit correspondant à la 2 <sup>ème</sup> extrémité et cliquer
rS1E-gdR		Règle graduée-gd	Activer l'outil règle graduée-gd Déplacer la règle sur l'extrémité donnée et cliquer pour fixer la règle Déplacer le pointeur le long de la règle et cliquer pour afficher le segment et supprimer l'image de la règle à l'écran
rS2-gd	Tracer un segment de longueur donnée	Règle graduée-gd	Activer l'outil règle graduée-gd Déplacer la règle à l'endroit souhaité et cliquer pour fixer la règle Déplacer le pointeur à partir de la graduation 0 jusqu'à la graduation correspondante à la 2 <sup>ème</sup> extrémité du segment et cliquer pour afficher le segment et supprimer l'image de la règle.

Tracer un segment			
rS2E-gd	Tracer un segment de longueur donnée à partir d'une extrémité donnée	Règle graduée-gd	<p>Activer l'outil règle graduée-gd</p> <p>Déplacer la règle et placer le 0 de graduation sur l'extrémité donnée et cliquer pour fixer la règle</p> <p>Déplacer le pointeur à partir de la graduation 0 jusqu'à la graduation correspondante à la 2<sup>ème</sup> extrémité du segment et cliquer pour afficher le segment et supprimer l'image de la règle à l'écran</p>
rS3-gdR	Tracer un segment entre deux points donnés	Règle graduée-gd	<p>Activer l'outil règle graduée-gd</p> <p>Placer la règle sur le 1<sup>er</sup> point et cliquer pour fixer la règle</p> <p>Placer la règle sur le 2<sup>ème</sup> point et cliquer pour fixer la règle</p> <p>Déplacer le pointeur le long de la règle entre les deux points et cliquer pour afficher le segment et supprimer l'image de la règle à l'écran</p>
rS3-gdS		Outil segment	<p>Activer l'outil segment</p> <p>Placer le pointeur sur le point correspondant à la 1<sup>ère</sup> extrémité du segment et cliquer</p> <p>Déplacer le pointeur sur le point correspondant à la 2<sup>ème</sup> extrémité et cliquer</p>

Tracer un triangle			
Opérateur	Finalité	Artefact	Modalité d'action
rT-gdT	Tracer un triangle	Outil triangle	<p>Activer l'outil triangle</p> <p>Placer le pointeur à l'endroit souhaité pour le premier sommet et cliquer</p> <p>Déplacer le pointeur pour tracer le 1<sup>er</sup> côté du triangle et cliquer</p> <p>Déplacer le pointeur pour tracer le 2<sup>ème</sup> côté du triangle et cliquer</p> <p>Déplacer le pointeur sur le 1<sup>er</sup> sommet pour tracer le 3<sup>ème</sup> côté du triangle et cliquer</p>

Tracer un triangle			
rT-gdS		<p>Outil segment</p> <p>Ou règle graduée-gd</p>	<p>Activer l'outil segment ou l'outil règle graduée-gd</p> <p>Tracer un premier segment</p> <p>Tracer un deuxième segment ayant une extrémité commune avec le premier segment</p> <p>Tracer le segment joignant les extrémités libres de chaque segment</p>

Tracer un cercle			
Opérateur	Finalité	Artefact	Modalité d'action
rC1-gdCo	Tracer un cercle	Compas-gd	<p>Activer l'outil compas-gd</p> <p>Piquer la pointe</p> <p>Ecarter les branches</p> <p>Poser la mine</p> <p>Pivoter la mine jusqu'à repasser sur le trait initial et cliquer pour effacer le compas-gd de l'écran</p>
rC1-gdCe		Outil cercle	<p>Activer l'outil cercle</p> <p>Placer le pointeur sur le centre et cliquer</p> <p>Écarter le cercle et cliquer pour arrêter la taille du cercle et fixer son image à l'écran</p>
rC2-gdCo	Tracer un cercle de centre donné et passant par un point	Compas-gd	<p>Activer l'outil compas-gd</p> <p>Piquer la pointe sur le centre</p> <p>Écarter les branches jusqu'au point</p> <p>Poser la mine sur le point</p> <p>Pivoter la mine jusqu'à repasser sur le trait initial et cliquer pour effacer le compas-gd de l'écran</p>

Tracer un cercle			
rC2-gdCe		Outil cercle	<p>Activer l'outil cercle</p> <p>Poser le pointeur sur le centre et cliquer</p> <p>Écarter le cercle jusqu'au point et cliquer pour arrêter la taille du cercle et fixer son image à l'écran</p>
rC3-gdCo	Tracer un cercle de rayon donné	Compas-gd	<p>Activer l'outil compas-gd</p> <p>Fixer l'écartement des branches en cliquant sur un segment rayon ou sur le nombre correspondant au rayon</p> <p>Piquer la pointe</p> <p>Poser la mine</p> <p>Pivoter la mine jusqu'à repasser sur le trait initial et cliquer pour effacer le compas-gd de l'écran</p>
rC3-gdCe		Outil cercle	<p>Activer l'outil cercle</p> <p>Fixer la taille du cercle en cliquant sur un segment rayon ou sur le nombre correspondant au rayon</p> <p>Placer le centre du cercle et cliquer pour fixer son image à l'écran</p>

Tracer un arc de cercle			
Opérateur	Finalité	Artefact	Modalité d'action
rAC1-gd	Tracer un arc de cercle	Compas-gd	<p>Activer l'outil compas-gd</p> <p>Piquer la pointe</p> <p>Écarter les branches</p> <p>Poser la mine</p> <p>Pivoter la mine et cliquer pour effacer le compas-gd de l'écran</p>

Tracer un arc de cercle			
rAC2-gd	Tracer un arc cercle de centre donné et passant par un point	Compas-gd	<p>Activer l'outil compas-gd</p> <p>Piquer la pointe sur le centre</p> <p>Écarter les branches jusqu'au point</p> <p>Poser la mine sur le point</p> <p>Pivoter la mine et cliquer pour effacer le compas-gd de l'écran</p>
rAC3-gd	Tracer un arc de cercle de rayon donné	Compas-gd	<p>Activer l'outil compas-gd</p> <p>Fixer l'écartement des branches en cliquant sur un segment rayon ou sur le nombre correspondant au rayon</p> <p>Piquer la pointe</p> <p>Poser la mine</p> <p>Pivoter la mine et cliquer pour effacer le compas-gd de l'écran</p>

Mesurer une longueur			
Opérateur	Finalité	Artefact	Modalité d'action
rM-gdM	Mesurer une longueur	Outil mesure	<p>Activer l'outil mesure</p> <p>Déplacer le pointeur sur le segment à mesurer et cliquer pour faire afficher la longueur en centimètres</p>
rM-gdR		Règle graduée-gd	<p>Activer l'outil règle graduée-gd</p> <p>Placer la règle avec le 0 de graduation sur une extrémité du segment et cliquer pour fixer la règle</p> <p>Placer la règle sur la 2<sup>ème</sup> extrémité et cliquer pour fixer la règle</p> <p>Lire la graduation en face de la deuxième extrémité et cliquer pour afficher le segment et supprimer l'image de la règle à l'écran</p>

Ligne brisée			
Opérateur	Finalité	Artefact	Modalité d'action
rLB-gd	Tracer une ligne brisée de trois segments de longueurs données	Règle graduée-gd	<p>Tracer un premier segment de longueur donnée</p> <p>À partir d'une extrémité du premier segment tracer un 2<sup>ème</sup> segment de longueur donnée</p> <p>À partir de l'autre extrémité du premier segment tracer le 3<sup>ème</sup> segment de longueur donnée</p> <p><math>rS2-gd + \Sigma S + (rS2E-gd + \Sigma S) \times 2</math></p>

Pivoter un segment autour d'une de ses extrémités			
Opérateur	Finalité	Artefact	Modalité d'action
rPi-gd			
rPi1-gdCo	Produire la trace de l'extrémité qui pivote	Compas-gd	<p>Activer l'outil compas-gd</p> <p>Piquer la pointe sur l'extrémité du segment qui reste fixe</p> <p>Poser la mine sur l'extrémité à pivoter</p> <p>Pivoter la mine et produire une trace visible et cliquer pour effacer le compas-gd de l'écran</p> <p><math>\Sigma \text{Pointe} + \Sigma \text{Mine} + rAC2-gd + \Sigma AC</math></p>
rPi1-gdCe		Outil cercle	<p>Activer l'outil cercle</p> <p>Poser le pointeur sur l'extrémité du segment qui reste fixe et cliquer</p> <p>Écarter le cercle jusqu'à l'extrémité à pivoter et cliquer pour arrêter la taille du cercle et fixer son image à l'écran</p> <p><math>\Sigma \text{Cen} + \Sigma \text{Ray} + rC2-gdCe + \Sigma C</math></p>

Pivoter un segment autour d'une de ses extrémités			
rPi2-gdR	Tracer le segment résultat du pivotement de même longueur que le segment initial	Règle graduée-gd	<p>Activer l'outil règle</p> <p>Placer la règle sur l'extrémité fixe et cliquer pour fixer la règle</p> <p>Placer la règle sur la 2<sup>ème</sup> extrémité et cliquer pour fixer la règle</p> <p>Déplacer le pointeur le long de la règle entre les deux points et cliquer pour afficher le segment et supprimer l'image de la règle à l'écran</p> <p><math>\Sigma Pi + rS3-gdR + \Sigma S</math></p>
rPi2-gdS		Outil segment	<p>Activer l'outil segment</p> <p>Placer le pointeur sur l'extrémité fixe du segment et cliquer</p> <p>Déplacer le pointeur sur la 2<sup>ème</sup> extrémité et cliquer</p> <p><math>\Sigma Pi + rS3-gdS + \Sigma S</math></p>

## Contrôles

Contrôles visuels			
Contrôle		Constat	Conséquence
$\Sigma S$	Segment	Le segment est affiché	Le segment a été tracé
$\Sigma Tri$	Triangle	Le triangle est affiché	Le triangle a été tracé
$\Sigma C$	Cercle	Le cercle est affiché	Le cercle a été tracé
$\Sigma AC$	Arc de cercle	L'arc de cercle est affiché	L'arc de cercle a été tracé
$\Sigma M$	Mesure	Le nombre est affiché	La longueur a été mesurée
$\Sigma Règle$	Règle graduée-gd	La règle graduée est affichée	La règle graduée peut être utilisée
$\Sigma Compas$	Compas-gd	Le compas est affiché	Le compas peut être utilisé
Contrôles sur la procédure d'utilisation du compas-gd ou de l'outil cercle pour pivoter un segment			
$\Sigma Pointe$	Pointe sur extrémité fixe	La pointe est piquée sur l'extrémité fixe	L'extrémité fixe du segment est identifiée
$\Sigma Mine$	Mine sur extrémité à pivoter	La mine est posée sur l'extrémité à pivoter	L'extrémité à pivoter est identifiée
$\Sigma Cen$	Identification du centre	Le centre est placé sur l'extrémité fixe	L'extrémité fixe du segment est identifiée
$\Sigma Ray$	Identification du rayon	Le cercle a le rayon attendu	L'extrémité à pivoter est identifiée
$\Sigma Pi$	Segment pivoté	Le segment initial et le segment pivoté sont deux rayons du cercle (arc de cercle)	Un nouveau représentant du segment pivoté est tracé
Contrôles sur la procédure d'utilisation du compas-gd ou de l'outil cercle pour tracer un cercle			
$\Sigma PointeC$	Pointe sur le centre	La pointe est piquée sur le centre	Le centre du cercle est identifié
$\Sigma MineC$	Mine associée au rayon	L'écartement des branches correspond au rayon	Le rayon du cercle est identifié
$\Sigma CenC$	Identification du centre	Le centre est placé au bon endroit	Le centre du cercle est identifié
$\Sigma RayC$	Identification du rayon	Le cercle a le rayon attendu	Le rayon du cercle est identifié



## Environnement papier-crayon

Outils matériels pouvant être utilisés

Crayon ; Règle (graduée ou non) ; Compas

### Opérateurs

Tracer un segment			
Opérateur	Finalité	Artefact	Modalité d'action
rS1	Tracer un segment	Règle Crayon	Poser la règle sur la feuille à l'endroit où tracer le segment  Poser le crayon sur la feuille le long de la règle  Déplacer le crayon le long de la règle  Produire une trace visible
rS1E	Tracer un segment à partir d'une extrémité donnée	Règle Crayon	Poser la règle sur la feuille sur l'extrémité donnée  Poser le crayon sur la feuille le long de la règle  Déplacer le crayon le long de la règle  Produire une trace visible
rS2	Tracer un segment de longueur donnée	Règle graduée Crayon	Poser la règle sur la feuille  Poser le crayon sur la feuille au niveau du 0 de la graduation le long de la règle  Déplacer le crayon le long de la règle jusqu'à la graduation correspondant à la longueur  Produire une trace visible
rS2E	Tracer un segment de longueur donnée à partir d'une extrémité donnée	Règle graduée Crayon	Poser la règle sur la feuille, le zéro de graduation sur l'extrémité donnée  Poser le crayon sur la feuille au niveau du 0 de la graduation le long de la règle  Déplacer le crayon le long de la règle jusqu'à la graduation correspondant à la longueur  Produire une trace visible

Tracer un segment			
rS3	Tracer un segment entre deux points	Règle Crayon	Poser la règle sur la feuille le long des deux points  Poser le crayon sur l'un des points  Déplacer le crayon le long de la règle jusqu'au 2 <sup>ème</sup> point  Produire une trace visible

Tracer un triangle			
Opérateur	Finalité	Artefact	Modalité d'action
rT	Tracer un triangle	Règle Crayon	Tracer un premier segment  Tracer un deuxième segment ayant une extrémité commune avec le premier segment  Tracer le segment joignant les extrémités libres de chaque segment

Tracer un cercle			
Opérateur	Finalité	Artefact	Modalité d'action
rC1	Tracer un cercle	Compas	Écarter les branches  Distinguer chaque branche : la pointe, la mine  Piquer la pointe et poser la mine  Pivoter le compas en maintenant l'écartement fixe : déplacer la mine jusqu'à repasser sur le trait initial  Produire une trace visible
rC2	Tracer un cercle de centre donné et passant par un point donné	Compas	Distinguer chaque branche : la pointe, la mine  Piquer la pointe sur le centre et poser la mine sur le point  Pivoter le compas en maintenant l'écartement fixe : déplacer la mine jusqu'à repasser sur le trait initial  Produire une trace visible

Tracer un cercle			
rC3	Tracer un cercle de centre et de rayon donné	Compas	<p>Écarter les branches de la taille, du rayon du cercle</p> <p>Distinguer chaque branche : la pointe, la mine</p> <p>Piquer la pointe sur le centre et poser la mine</p> <p>Pivoter le compas en maintenant l'écartement fixe : déplacer la mine jusqu'à repasser sur le trait initial</p> <p>Produire une trace visible</p>

Tracer un arc de cercle			
Opérateur	Finalité	Artefact	Modalité d'action
rAC1	Tracer un arc cercle	Compas	<p>Écarter les branches</p> <p>Distinguer chaque branche : la pointe, la mine</p> <p>Piquer la pointe et poser la mine</p> <p>Pivoter le compas en maintenant l'écartement fixe</p> <p>Produire une trace visible</p>
rAC2	Tracer un arc de cercle de centre donné et passant par un point donné	Compas	<p>Distinguer chaque branche : la pointe, la mine</p> <p>Piquer la pointe sur le centre et poser la mine sur le point</p> <p>Pivoter le compas en maintenant l'écartement fixe</p> <p>Produire une trace visible</p>
rAC3	Tracer un cercle de centre et de rayon donné	Compas	<p>Écarter les branches de la taille du rayon du cercle</p> <p>Distinguer chaque branche : la pointe, la mine</p> <p>Piquer la pointe sur le centre et poser la mine</p> <p>Pivoter le compas en maintenant l'écartement fixe</p> <p>Produire une trace visible</p>

Mesurer une longueur			
Opérateur	Finalité	Artefact	Modalité d'action
rM	Mesurer la longueur d'un segment	Règle graduée	Poser la règle le long du segment, le 0 de la graduation sur une extrémité  Lire la graduation au niveau de la 2 <sup>ème</sup> extrémité

Ligne brisée			
Opérateur	Finalité	Artefact	Modalité d'action
rLB	Tracer une ligne brisée de trois segments de longueurs données	Règle graduée  Crayon	Tracer un premier segment de longueur donnée  À partir d'une extrémité du premier segment tracer un 2 <sup>ème</sup> segment de longueur donnée  À partir de l'autre extrémité du premier segment tracer le 3 <sup>ème</sup> segment de longueur donnée  $rS2 + \Sigma S + (rS2E + \Sigma S) \times 2$

Pivoter un segment autour d'une de ses extrémités				
Opérateur		Finalité	Artefact	Modalité d'action
rPi	rPi1	Produire la trace de l'extrémité qui pivote	Compas	Distinguer chaque branche : la pointe, la mine  Piquer la pointe sur l'extrémité du segment qui reste fixe et poser la mine sur l'extrémité à pivoter  Pivoter le compas en maintenant l'écartement fixe  Produire une trace visible  $\Sigma \text{Pointe} + \Sigma \text{Mine} + rAC2 + \Sigma AC$

Pivoter un segment autour d'une de ses extrémités				
	rPi2	Tracer le segment résultat du pivotement de même longueur que le segment initial	Règle  Crayon	Poser la règle sur la feuille le long de l'extrémité fixe et de l'extrémité pivotée  Poser le crayon sur l'un des points  Déplacer le crayon le long de la règle jusqu'au 2 <sup>ème</sup> point  Produire une trace visible  $\Sigma Pi + rS3 + \Sigma S$

## Contrôles

Contrôles visuels			
Contrôle		Constat	Conséquence
$\Sigma S$	Segment	Le segment est visible	Le segment a été tracé
$\Sigma Tri$	Triangle	Le triangle est visible	Le triangle a été tracé
$\Sigma C$	Cercle	Le cercle est visible	Le cercle a été tracé
$\Sigma AC$	Arc de cercle	L'arc de cercle est visible	L'arc de cercle a été tracé
$\Sigma LB$	Ligne brisée	La ligne brisée est visible	La ligne brisée a été tracée
Contrôles sur la procédure d'utilisation du compas pour pivoter un segment			
$\Sigma Pointe$	Pointe sur extrémité fixe	La pointe est piquée sur l'extrémité fixe	L'extrémité fixe du segment est identifiée
$\Sigma Mine$	Mine sur extrémité à pivoter	La mine est posée sur l'extrémité à pivoter	L'extrémité à pivoter est identifiée
$\Sigma Pi$	Segment pivoté	Le segment initial et le segment pivoté sont deux rayons du cercle (arc de cercle)	Un nouveau représentant du segment pivoté est tracé
Contrôles sur la procédure d'utilisation du compas pour tracer un cercle			
$\Sigma PointeC$	Pointe sur le centre	La pointe est piquée sur le centre	Le centre du cercle est identifié
$\Sigma MineC$	Mine associée au rayon	L'écartement des branches correspond au rayon	Le rayon du cercle est identifié

Remarque : Les contrôles engagés dans l'environnement papier-crayon sont tous des contrôles qui sont aussi mobilisés dans l'environnement numérique.



### **Annexe 3. Questionnaire donné aux élèves avant de traiter la situation**


Expliquer à quelqu'un qui n'a jamais vu un compas ce que c'est

Ce que c'est, à quoi cela ressemble	À quoi ça sert ?



Aline

Expliquer à quelqu'un qui n'a jamais vu un compas

Le que c'est, à quoi ça ressemble	A quoi ça sert
<p>un compas c'est un instrument géométrique. Un compas ressemble à ça :</p> 	<p>un compas sert à tracer des cercles. un compas sert à faire plein de chose.</p>

Alycia

Expliquer à quelqu'un qui n'a jamais vu un compas

Le que c'est, à quoi ça ressemble	A quoi ça sert
<p>C'est un objet qui a la forme des aiguille d'une montre.</p>	<p>ça sert à tracer un cercle et à prendre la règle de prendre par exemple 1 cm et de le reproduire sur une feuille blanche.</p>

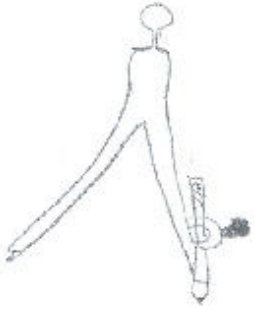
Argène

Expliquer à quelqu'un qui n'a jamais vu un compas

Ce que c'est, à quoi ça ressemble	À quoi ça sert
<p>Au sommet il y a petite boule qui sert à tourner. Sous la petite boule il y a 2 parties: une où il y a une pique qui a marqué le point du centre du cercle. Sur l'autre partie il y a un crayon ou un papier qui sert à tracer le cercle.</p>	<p>Le compas sert à tracer des cercles, ou à tracer une droite.</p>

Camille

Expliquer à quelqu'un qui n'a jamais vu un compas

Ce que c'est, à quoi ça ressemble	À quoi ça sert
<p>un compas ça ressemble à ça : ↓</p> 	<p>un compas ça sert à tracer un cercle bien rond et la taille que l'on veut.</p>


**Carole**

Expliquer à quelqu'un qui n'a jamais vu un compas

Ce que c'est, à quoi ça ressemble	À quoi ça sert
<del>Ça ressemble à</del> C'est un instrument Géométrique	Ça sert à faire des cercles bien. On peut aussi faire des hexagones correctement. <del>Si on a pas de compas</del> et si <del>qu'on</del> qu'on veut faire un cercle et tu n'as pas de compas sa veut dire que tu le fais à main levée.

**Clia**

Expliquer à quelqu'un qui n'a jamais vu un compas

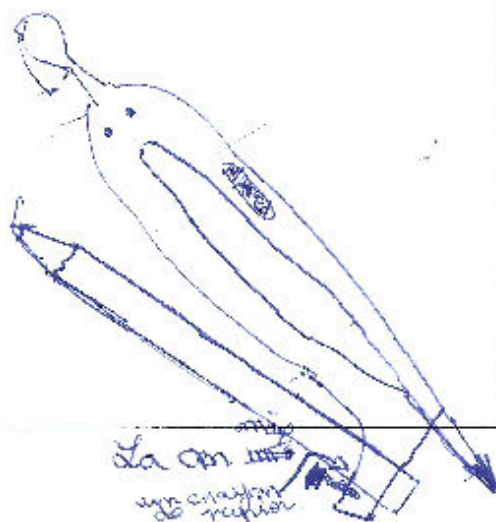
Ce que c'est, à quoi ça ressemble	À quoi ça sert
<del>un compas</del> Sert à tracer un rond comme il faut	Ça sert à tracer un rond bien comme il faut
	

**Dimitri**

Expliquer à quelqu'un qui n'a jamais vu un compas

Ce que c'est, à quoi ça ressemble

À quoi ça sert



ça a l'air des beaux rond  
des rosace des forme  
géométrique.

**Dj'emil**

Expliquer à quelqu'un qui n'a jamais vu un compas

Ce que c'est, à quoi ça ressemble

À quoi ça sert

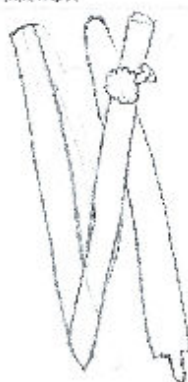
Le compas est un objet  
pour tracer

Le compas sert à tracer  
des cercle.

**gonzague**

Expliquer à quelqu'un qui n'a jamais vu un compas

Ce que c'est, à quoi ça ressemble



À quoi ça sert

Ça sert à faire des ronds et  
d'autres choses

**HadeLine**

Expliquer à quelqu'un qui n'a jamais vu un compas

Ce que c'est, à quoi ça ressemble

Ça ressemble à deux barre en  
ferre, une avec une sorte de petit  
pique et l'autre avec un crayon.

À quoi ça sert

Ça sert à tracer un arc.



Hawaï's

Expliquer à quelqu'un qui n'a jamais vu un compas

Ce que c'est, à quoi ça ressemble	À quoi ça sert
C'est un outils	Ça sert à <del>x</del> faire
géométrique.	DES cercle.

Imene

Expliquer à quelqu'un qui n'a jamais vu un compas

Ce que c'est, à quoi ça ressemble	À quoi ça sert
Un compas c'est un instrument géométrique avec une pointe en fer et il y a une petite partie où tu peut insérer tout crayon à papier. Il y a un petit extenseur pour tenir le compas pour tracer	Un compas sert à tracer des forme géométrique ronde ou arrondie.

**Isidore**

Expliquer à quelqu'un qui n'a jamais vu un compas

Ce que c'est, à quoi ça ressemble	À quoi ça sert
<p>un instrument de géométrie            ça a une pointe de métal très fine            avec un rond pour mettre            un crayon.</p>	<p>à tracer un cercle <sup>idé</sup></p>

**Ivanoe**

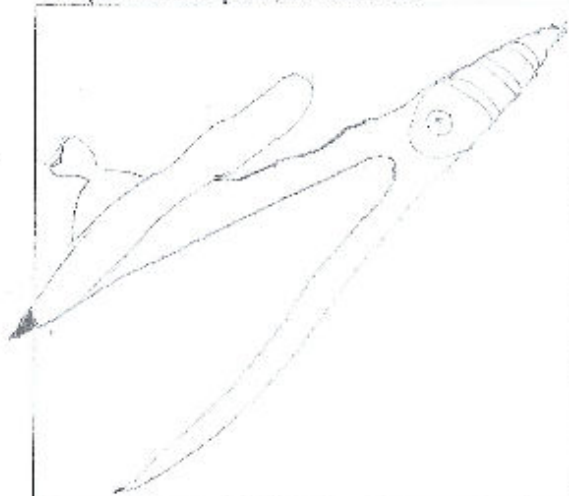
Expliquer à quelqu'un qui n'a jamais vu un compas

Ce que c'est, à quoi ça ressemble	À quoi ça sert
<p><del>ça sert à tracer un cercle</del>            un compas c'est un outil            pour faire de la géométrie.            ça ressemble à deux doigts            écartés l'un de l'autre ou il y a une            pointe et l'autre ou il y a            la mine du crayon pour tracer.</p>	<p>un compas ça sert à tracer un  <del>cercle</del> cercle correctement quand            tu traces avec les mains            le rond mais ça applique            mais quand tu traces avec            un compas il y a plus            de risque de rater le rond.</p>

Kalinka

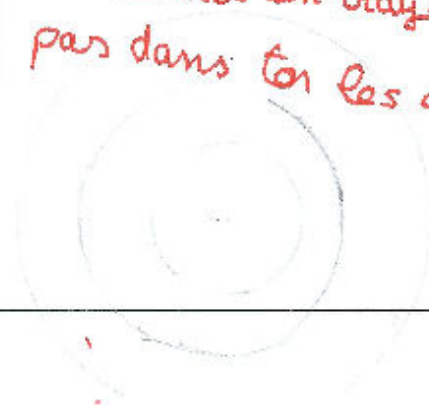
Expliquer à quelqu'un qui n'a jamais vu un compas

Ce que c'est, à quoi ça ressemble



À quoi ça sert

ça sert à faire des ronds, cercles de plusieurs tailles, où on met un crayon mais pas dans ton les compas.



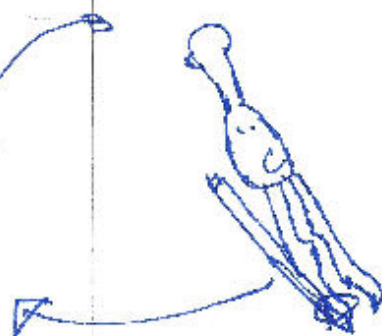
Kariu

Expliquer à quelqu'un qui n'a jamais vu un compas

Ce que c'est, à quoi ça ressemble

un compas c'est  
ça sert à faire des  
ronds ou faire des arcs.

À quoi ça sert





Loris

Expliquer à quelqu'un qui n'a jamais vu un compas

Ce que c'est, à quoi ça ressemble

Un compas sert à faire des cercles parfaits. Il a une partie pointue et une partie avec un doigt. On doit tracer un cercle de rayon. Ça ressemble à ça :



À quoi ça sert

Un rectangle sert à faire des cercles parfaits. Il a une partie pointue et une partie avec un doigt. On doit tracer un cercle de rayon. Ça ressemble à ça :

Luna

Expliquer à quelqu'un qui n'a jamais vu un compas

Ce que c'est, à quoi ça ressemble

un compas ça ressemble à un dessin qu'on fait au traitant fait. c'est un compas c'est qu'il fait




À quoi ça sert

ça sert à tracer des cercles


Marie

Expliquer à quelqu'un qui n'a jamais vu un compas

Ce que c'est, à quoi ça ressemble	À quoi ça sert
	<p>Le compas sert à tracer des cercles, des rosaces.</p>


Marilyne

Expliquer à quelqu'un qui n'a jamais vu un compas

Ce que c'est, à quoi ça ressemble	À quoi ça sert
	<p>Ça sert à tracer des cercles et à faire une fleur qui s'appelle la rosace.</p>


Merime

Expliquer à quelqu'un qui n'a jamais vu un compas

Ce que c'est, à quoi ça ressemble	À quoi ça sert
 <p>= un compas</p>	<p>ça sert à faire des cercles</p>

Kylène

Expliquer à quelqu'un qui n'a jamais vu un compas

Ce que c'est, à quoi ça ressemble	À quoi ça sert
	<p>un compas sert à faire des cercles</p>

Mohan

Expliquer à quelqu'un qui n'a jamais vu un compas

Ce que c'est, à quoi ça ressemble	À quoi ça sert
un compas ressemble de grand crayon collé un partie avec une une partie avec une mène de fer et une partie au en bois le crayon et on sert le crayon avec un vis en plastique	un compas c'est à tracer un cercle une figure ronde

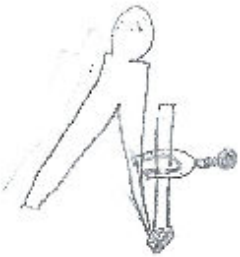
Nawel

Expliquer à quelqu'un qui n'a jamais vu un compas

Ce que c'est, à quoi ça ressemble	À quoi ça sert
eh bah un compas c'est c'est du matériel de géométrie qui a une partie qui est très dangereuse et il est obligé de tout servir avec un crayon à papier, et la se tient avec 2 doigts et c'est pas très grand.	ça sert pour faire de la géométrie et se sert pour un cercle et c'est du matériel de géométrie qui sert à faire un cercle

**Roseline**

Expliquer à quelqu'un qui n'a jamais vu un compas

Ce que c'est, à quoi ça ressemble	À quoi ça sert
<p>Ça ressemble à ça</p> 	<p>Ça sert à faire qu'elle que chose sorte comme un cercle ou une tête ronde.</p>

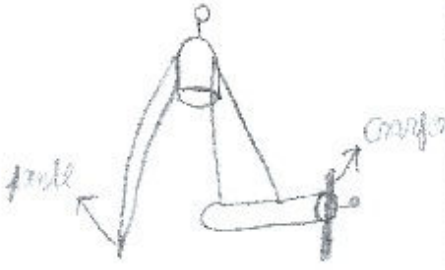
**Seraphin**

Expliquer à quelqu'un qui n'a jamais vu un compas

Ce que c'est, à quoi ça ressemble	À quoi ça sert
<p>ça ressemble à une pince</p> <p>ça sert à faire des ronds bien droit</p>	<p>ça sert à faire des ronds bien droit</p>





<p><b>Toni</b> Expliquer à quelqu'un qui n'a jamais vu un compas</p>	
<p>Ce que c'est, à quoi ça ressemble</p>	<p>À quoi ça sert</p>
	<p>Ça sert à tracer des arcs parfaitement ronds</p>

<p><b>Ursule</b> Expliquer à quelqu'un qui n'a jamais vu un compas</p>	
<p>Ce que c'est, à quoi ça ressemble</p>	<p>À quoi ça sert</p>
<p>C'est des outils de géométrie. Ça ressemble à une équerre.</p>	<p>Ça sert à faire des arcs et on peut mesurer avec la règle pour pas que c'est pas trop grand et pas petit et on peut se servir comme on veut par exemple.</p>

Yannick

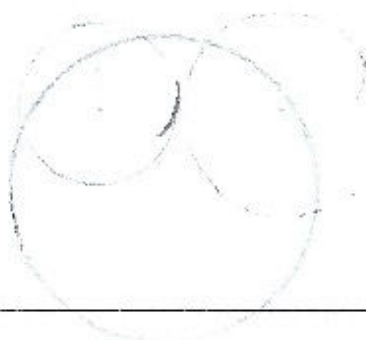
Expliquer à quelqu'un qui n'a jamais vu un compas

Ce que c'est, à quoi ça ressemble	À quoi ça sert
Ça ressemble à 2 baguettes. Une baguette à qui a une épine en fer et l'autre à une épine en crayon.	Ça sert à faire des cercles, des rosaces.

Yann

Expliquer à quelqu'un qui n'a jamais vu un compas

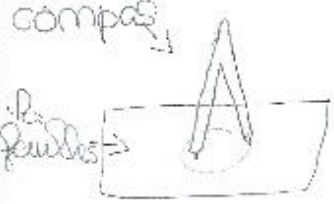
Ce que c'est, à quoi ça ressemble	À quoi ça sert
Ça ressemble à de sorte de double croix avec une pointe de l'autre pour faire un croc avec un croc de papier à l'intérieur.	Ça sert à faire des cercles, des rosaces.







**Yasmina**

Expliquer à quelqu'un qui n'a jamais vu un compas

Ce que c'est, à quoi ça ressemble	À quoi ça sert
Un compas se sert à faire un cercle exactement comme on le souhaite.	<p>Ça ressemble à 2 branches une avec un crayon de papier dessus une autre avec une épingle pour planter dans le cahier</p> <p>le compas</p> <p>les feuilles</p> 

**Zéphir**

Expliquer à quelqu'un qui n'a jamais vu un compas

Ce que c'est, à quoi ça ressemble	À quoi ça sert
<p>Un compas ressemble à <del>un crayon</del> un crayon et un bâton (c'est-à-dire le bâton a une pique au bout).</p> 	<p>un compas est un matériel géométrique qui sert à faire des cercles</p> <p>ex.</p> 

## Annexe 4. Trois segments peuvent-ils toujours être les trois côtés d'un triangle ?

Cette annexe recense les réponses des élèves à cette question avant et après avoir traité le premier cahier informatisé « A la découverte des triangles ». L'orthographe des élèves n'a pas été corrigée.

The figure displays two side-by-side screenshots of a digital questionnaire interface. Both screens feature a top navigation bar with icons for back, forward, and user profiles. The left screen contains the question: "Avec trois segments on peut obtenir un triangle." followed by "Qu'en penses tu ?". Below this, there is a large text input field with a question mark icon and a smaller input field for the student's name and class. The right screen contains the question: "Maintenant que tu as traité ce cahier, penses tu qu'avec trois segments on peut toujours obtenir un triangle ?". It also features a large text input field with a question mark icon and a smaller input field for the student's name and class. Both screens have a right arrow button at the bottom right.

Figure 1 : Illustration des deux pages qui interrogent les élèves avant et après avoir traité le cahier

Annexe 4. Trois segments peuvent-ils toujours être les trois côtés d'un triangle ?

Prénom	Réponse avant de traiter le cahier	Réponse après avoir traité le cahier
Aline	je pense que ses vrai mais si on fait a la main nue sa fait un triangle pas droit .	avec trois segment on peut faire triangle
Alycia	Oui	des fois oui et des foit non.
Arsène	Nous faire un triangle avec trois segments mais les segments peuvent etre different en fonction de la famille du triangle.	Nous pouvons mais pas avec tout les segments qui nous sont donné.
Camille	oui je pense qu avec trois segments on peut obtenir un triangle si on les place bien	maintenant que j'ai traiter ce cahier ,je pense qu'avec trois segment on ne peut pas toujours faire un triangle
Carole	oui on peut obtenir un triangle avec trois segment	oui mais sa marche pas avec tousse parce que il y en a qu'il ne vont pas enssemble
Cléa	je pense que oui l'on peut obtenir un rectangle avec 3 segments	non on ne peut pas si il y à un segment qui fais 3 cm un autre qui fais 10cm puis un autre qui fais 1cm on ne peut pas
Dimitri	oui il y a 3 cotes et 3 sommet	Oui
Djemil	oui on peut obtenir un triangle	Non c'est pas toujours possible d'avoir un triangle
Gonzague	oui c'est juste	non pas toujours mais
Hadeline	oui car c'est trois traie	non on a vu que il peuve pas

Annexe 4. Trois segments peuvent-ils toujours être les trois côtés d'un triangle ?

Prénom	Réponse avant de traiter le cahier	Réponse après avoir traité le cahier
Hanais	Oui on peut	Non car si les segments ne tourne pas on ne peut pas avoir un triangle
Imène	oui parce que un triangle a 4 coté mes pas d' angle droit	non on ne peut pas toujours obtenir un triangle si il ne son pas de même longueur
Isidore	Que c'est juste	oui car juste 3 segments Forme un triangle
Ivanoé	c'est faux	oui on peut obtenir un triangle 3 segments
Kalinka	oui avec trois segments on peux obtenir un triangle.	Non sa ne marche pas tout le temps sa depant de chaque segment et de leurs longueurs.
Karim	oui parce – que trois segement peut obtenir un triangle	oui quart trois segments peuve tourné
Loris	Avec trois segment on peut avoir un triangle	Non on peu pas toujours avoir un triangle.
Luna	oui mais si on peux pas les tournée non donc en gros sa depand	non car il n'eu suffie pas de tracer des seguement a droite a gauche pour fair un triangle ses impossible
Marie	oui il faut trois segments mais il faut que les segments soit de la meme longueurs mais pas pour tout les triangles	non sa ne marche pas tout le temps sa depant de chaques segments et de leurs longueurs
Marilyne	oui je pense que sa doit normalement donner un triangle	non pas toujours possible défois c'est impossible defois c'est possible ont ne peut pas toujours obtenir un triangle

Annexe 4. Trois segments peuvent-ils toujours être les trois côtés d'un triangle ?

Prénom	Réponse avant de traiter le cahier	Réponse après avoir traité le cahier
Mérine	vrais mais je ne sais pas comment expliquer	dans le cahier trois segments on peut obtenir des triangles et parfois on ne peut pas obtenir des triangles
Mylène	vraiment quand si on les met côte à côte ça fait un triangle.	non quand ce n'est pas toujours égal.
Mohan	oui on peut obtenir un triangle	oui avec trois segments on peut obtenir un triangle
Nawel	oui même si ils ne sont pas égaux	non sauf si ils sont pareils
Roseline	oui ça dépend du triangle	non ça dépend du triangle
Séraphin	avec trois segments on peut obtenir un triangle	on ne peut pas faire un triangle tous les fois avec trois segments
Sidonie	Non car il faut les relier correctement et faire des angles	Oui on peut faire un triangle avec trois segments sauf si on ne peut pas les bouger si on ne peut pas les bouger c'est impossible de faire un triangle
Solal	Oui	Non pas forcément si tu as trois segments qui sont tous horizontaux tu ne peux pas faire un triangle et aussi ça dépend de la taille.
Toni	oui on peut car un triangle a trois côtés	pas toujours
Ursule	oui on peut	oui on peut obtenir un triangle
Yacinthe	oui on peut faire un triangle	non c'est pas toujours possible d'avoir un triangle

*Annexe 4. Trois segments peuvent-ils toujours être les trois côtés d'un triangle ?*

---

Yann	oui je pense qu'on peut obtenir un triangle	non on ne peut pas toujours obtenir un triangle
Yasmina	Oui avec trois segments on peut obtenir un triangle mais équilatéral.	Oui avec trois segments on peut bien sûr construire un triangle. Mais ça dépend de quel triangle on parle. Si on parle du triangle équilatéral il faut que les segments soient égaux. Le triangle isocèle il faudra qu'il y ait 2 segments qui soient égaux.
Zéphir	Oui	oui



## **Annexe 5. Observations de 34 productions**



1. Aline

Cahier informatisé « A la découverte des triangles »						
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception	
Page 1	rTran ou rTrans rRot rPiv rSu	ΣTran ΣExtr et ΣRot ΣSu	Ajustement	Itrans IPiv	CT2D	
Page 2	Idem	Idem	Idem	Idem	CT2D	
Page 3	Idem	Idem	Idem	Idem	CT2D	
Page 4	Aucun déplacement Aucun outil mobilisé « je vois pas comment faire triangle sans les faire tourner »					
Page 5	rTran ou rTrans rPiv rSu	ΣTran ΣExtr et ΣRot ΣSu	Ajustement	Itrans IPiv	CT2D	

Première activité papier-crayon

d e t e						
R	Instrument	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
rS2 rPi1 + rPi2	Compas pour pivoter	rLB rPi1 + rPi2	ΣT3 + ΣT4	Ligne brisée	Compas pour pivoter	CT1D-LB

Cahier informatisé « Construire des triangles »

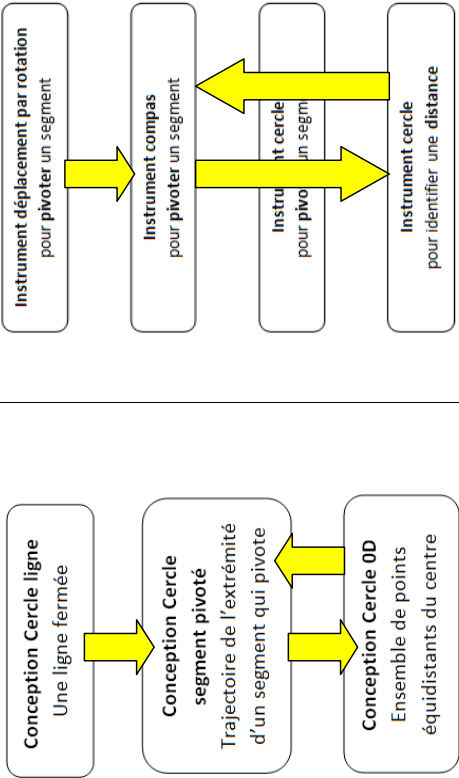
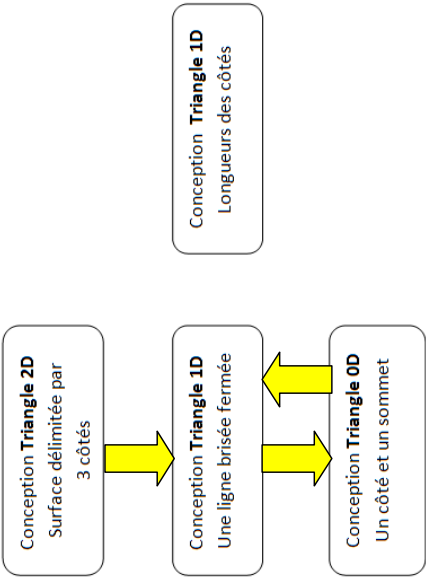
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rPiv	ΣExtr + ΣRot	Pivoter-rotation	IPiv	CT1D-LB
Page 2	rRot rPiv	ΣExtr + ΣRot		Aucun outil	
Page 3	Idem			Idem	
Page 4	Idem			Idem	
Page 5	rS3-gdS rC3-gdCe	ΣS ΣCenC + ΣRayC	Cercle	Cercle pour identifier une distance	CT0D CC0D
Page 6	rC3-gdCe	ΣCenC + ΣRayC	Cercle	Cercle pour identifier une distance	CT0D CC0D
Aide outil cercle : oui cercle de rayon donné					

Deuxième activité papier-crayon

R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
rLB rPi1 + rPi2	ΣT3 ou ΣT4	Ligne brisée	Compas pour pivoter	CT1D-LB CC-SP

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle

Pour tracer des cercles



## 2. Alycia

Cahier informatisé « A la découverte des triangles »					
	R	$\Sigma$	Stratégie	Instrument	Conception
<b>Page 1</b>	rT-gdT-support rTran ou rTrans rRot rSu	$\Sigma$ Tran $\Sigma$ Rot $\Sigma$ Su	Abandon	lTrans	CT2D
<b>Page 2</b>	Idem		Ajustement		CT2D
<b>Page 3</b>	rTran ou rTrans rPiv rSu	$\Sigma$ Tran $\Sigma$ Extr et $\Sigma$ Rot $\Sigma$ Su	Ajustement	lTrans IPiv	CT2D
<b>Page 4</b>	rPi1-gdCo rM-gdM		Abandon		
<b>Page 5</b>	rTran ou rTrans rPiv rSu rT-gdT-contour	$\Sigma$ Tran $\Sigma$ Extr et $\Sigma$ Rot $\Sigma$ Su	Ajustement	lTrans IPiv	CT2D

Première activité papier-crayon					
a,b,c					
R	Instrument	R	$\Sigma$	Stratégie	Conception
rPi1 + rPi2	Compas pour pivoter	rLB rPi1 + rPi2	$\Sigma$ T3 + $\Sigma$ T4	Ligne brisée	CT1D-LB

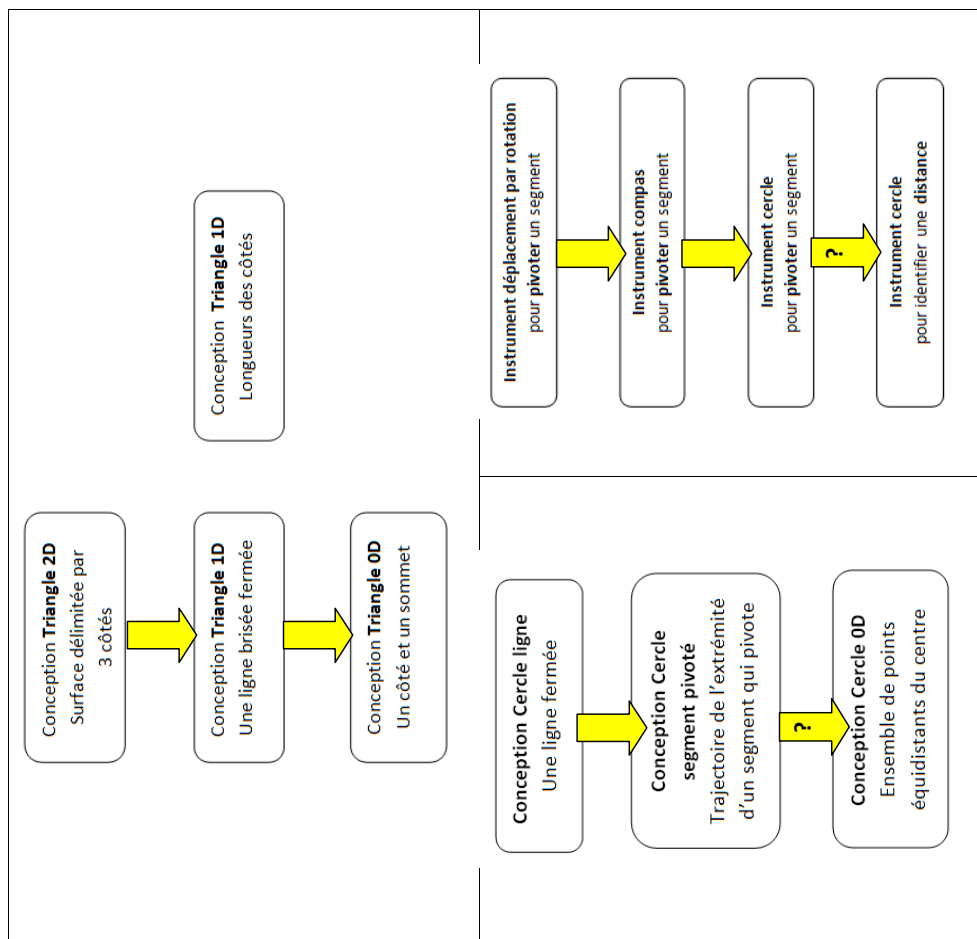
Cahier informatisé « Construire des triangles »					
	R	$\Sigma$	Stratégie	Instrument	Conception
<b>Page 1</b>	rPiv	$\Sigma$ Extr et $\Sigma$ Rot	Pivoter-rotation	IPiv	CT1D-LB
<b>Page 2</b>	rPi1-gdCe rPiv	$\Sigma$ Cen + $\Sigma$ Ray $\Sigma$ Extr + $\Sigma$ Rot	Pivoter-cercle	Cercle pour pivoter	CT1D-LB CC-SP
<b>Page 3</b>	Idem	Idem	Idem	Idem	
<b>Page 4</b>	Idem	Idem	Idem	Idem	
<b>Page 5</b>	rS3-gdS	$\Sigma$ S			
<b>Page 6</b>					
Aide outil cercle :					

## Deuxième activité papier-crayon

R	$\Sigma$	Stratégie	Instrument	Conception
rC3	$\Sigma$ T5 + $\Sigma$ T7 ou $\Sigma$ T6	A la règle et au compas	Compas pour pivoter ou tracer des cercles	CT0D CC-SP ou CC0D

## Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle ?

Pour pivoter, tourner les segments. Pour le troisième sommet.



3. Arsène

Cahier informatisé « A la découverte des triangles »						
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception	
Page 1	rTran ou rTrans rRot rPiv rSu	ΣTran ΣExtr et ΣRot ΣSu	Ajustement	ltrans IPiv	CT2D	
Page 2	rLib rPiv	ΣExtr et ΣRot Idem	Ligne brisée	ltrans IPiv	CT1D-LB	
Page 3	Idem	Idem	Idem	Idem	CT1D-LB	
Page 4	Aucun déplacement Aucun outil					
Page 5	rLib rPiv	ΣExtr et ΣRot	Ligne brisée	ltrans IPiv	CT1D-LB	

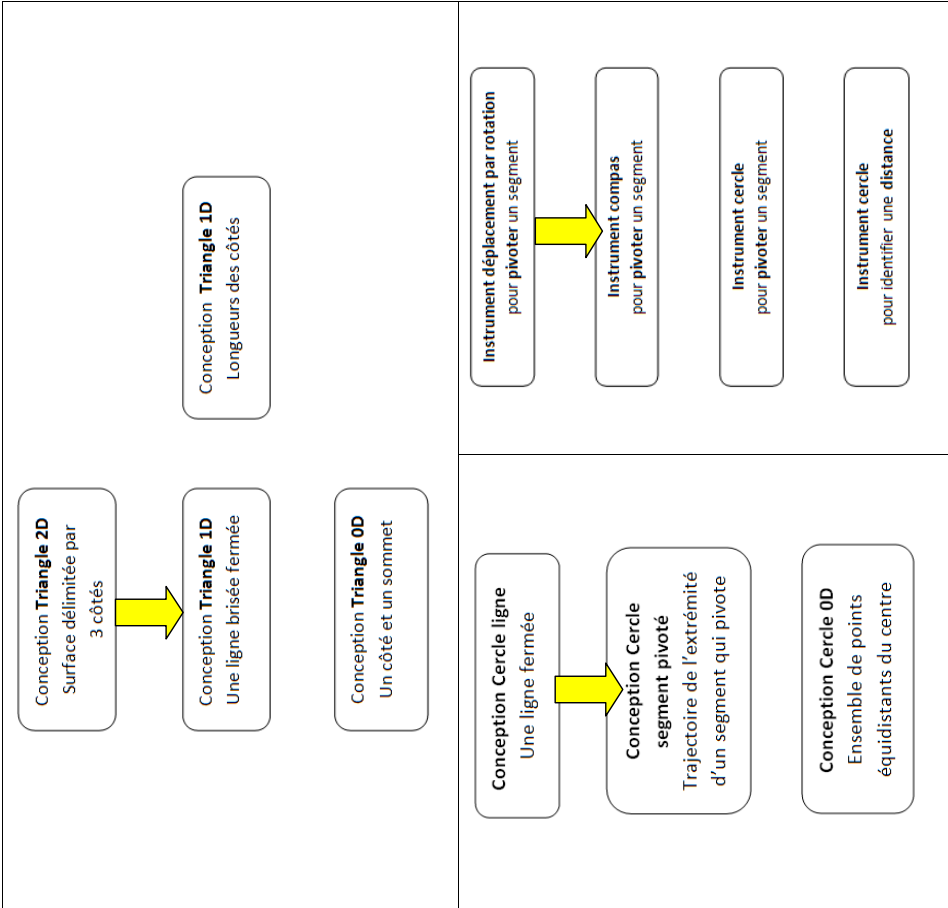
Première activité papier-crayon						
a,b,c	d et e					
R	Instrument	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
rAC2 ou rC2	Compas					

Cahier informatisé « Construire des triangles »						
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception	
Page 1	rPiv	ΣExtr et ΣRot	Pivoter-rotation	IPiv	CT1D-LB	
Page 2	rRot rC3-Ce					
Page 3	rC3-Ce	Idem				
Page 4	rRot					
Page 5	rS3-gdS					
Page 6	rS3-gdS rT-gcT rC3-gdCe					
Aide outil cercle	: oui cercle de rayon donné					

Deuxième activité papier-crayon					
R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception	
rLB	ΣT3 ou ΣT4	Ligne brisée	Compas pivoter	CT1D-LB	
rP11 + rP12				CC-SP	

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle

Pour pivoter, tourner les segments. Pour déterminer l'existence ou non du triangle.



4. Camille

Cahier informatisé « A la découverte des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rTran ou rTrans rRot rM-gdM rPiv rSu	ΣTran	Ajustement	lTrans lPiv	CT2D
Page 2	rLib	Idem	Idem	lTrans	
Page 3	Idem			Idem	
Page 4	rTran ou rTrans : « on ne peut pas faire un triangle car il y a des bou qui sont trop grand ou trop petit »				
Page 5	rLib			lTrans	

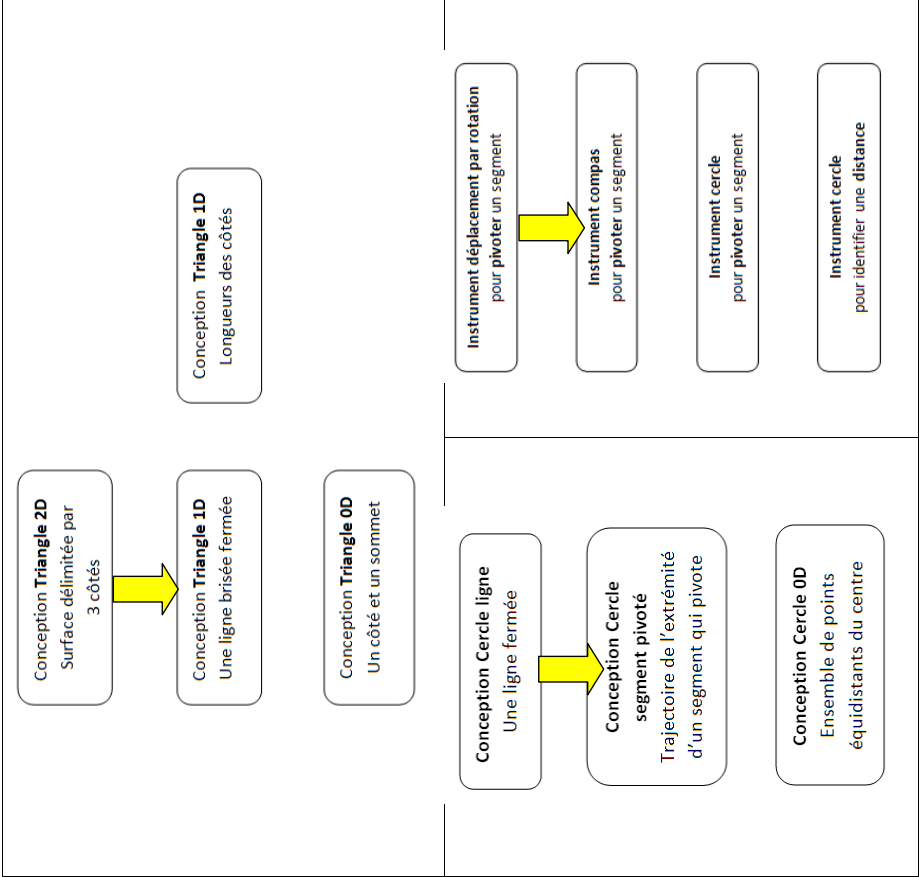
Première activité papier-crayon						
a,b,c		d et e				
R	Instrument	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
« Un triangle doit avoir tous les côtés égaux »		rS2 + rS2E +rS2E	ΣT1	A la règle graduée	Règle graduée	CT2D

Cahier informatisé « Construire des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rP1-Co	ΣPointe + ΣMine	Pivoter-compass-gd	Compas pour pivoter	CT1D-LB CC-SP
Page 2	Idem	Idem	Idem	Idem	
Page 3	rRot rC3-gdCe				
Page 4	rRot				
Page 5	rS3-gdS	ΣS			
Page 6	rT-gdT				
Aide outil cercle :					

Deuxième activité papier-crayon				
R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
rLB	ΣT3 ou ΣT4	Ligne brisée	Compas pour pivoter	CT1D-LB
rP11 + rP12				CC-SP

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle

Pour pivoter les segments. Pour déterminer l'existence ou non du triangle.



5. Carole

Cahier informatisé « A la découverte des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rTran ou rTrans rRot rPiv rSu	ΣTran ΣExtr et ΣRot ΣSu	Ajustement	ITrans IPiv	CT2D
Page 2	Idem		Ajustement		CT2D
Page 3	rLib rPiv	ΣTran ΣExtr et ΣRot	Ligne brisée	ITrans IPiv	CT1D-LB
Page 4	Aucun déplacement Aucun outil « non sa ne marche pas car ces segment ne vont pas ensemble »				
Page 5	rLib rPiv	ΣTran ΣExtr et ΣRot	Ligne brisée	ITrans IPiv	CT1D-LB

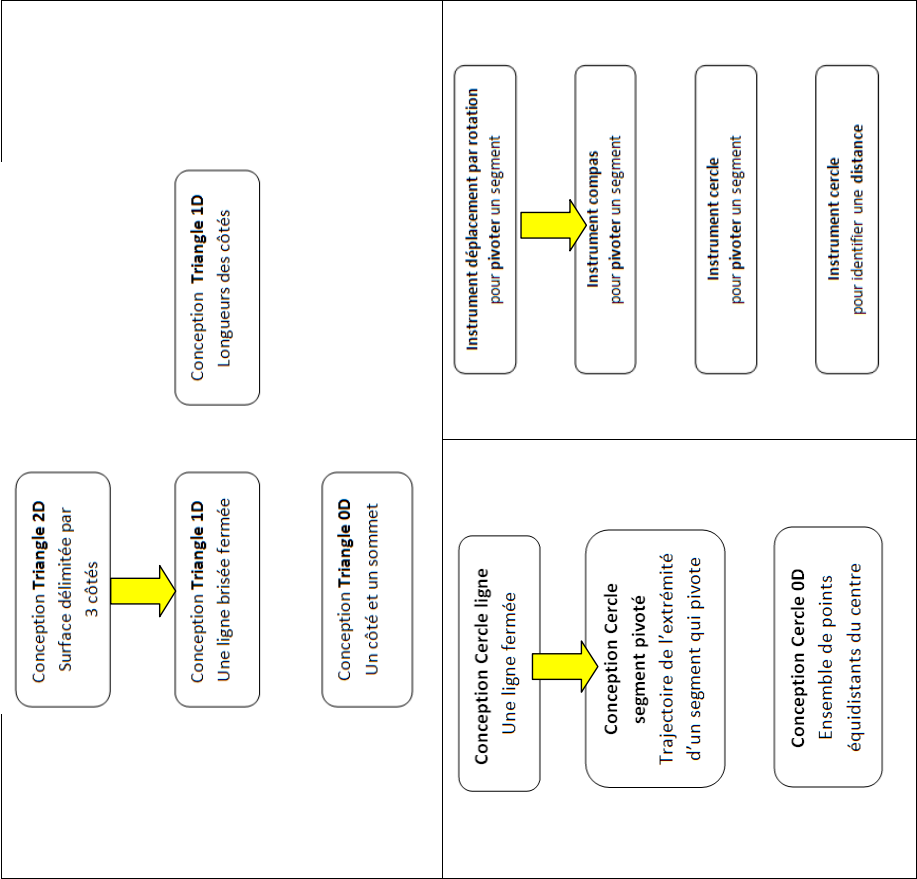
Première activité papier-crayon					
d et e					
R	Instrument	R	Σ	Stratégie	Conception
rPi1	Compas pour pivoter	rLB rPi1	ΣT3 + ΣT4	Ligne brisée	CT1D-LB

Cahier informatisé « Construire des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rPiv	ΣExt + ΣRot	Pivoter-rotation	IPiv	CT1D-LB
Page 2	rRot rAC2-gd rPiv	ΣExtr + ΣRot			CT1D-LB
Page 3	Idem				CT1D-LB
Page 4	rC2-gdCe rPiv	ΣExtr + ΣRot			CT1D-LB
Page 5	rS3-gdS	ΣS			
Page 6	rS3-gdS	ΣS			
Aide outil cercle :					

Deuxième activité papier-crayon				
R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
rS2+rS2E+rS2E rLB + rPi1 + rPi2	ΣT1 ΣT3 ou ΣT4	Règle graduée Ligne brisée	Compas pour pivoter	CT1D-LB CC-SP

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle

Pour pivoter les segments. Pour déterminer l'existence ou non du triangle



6. Cléa

Cahier informatisé « A la découverte des triangles »						
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception	
Page 1	rTran ou rTran rRot	ΣTran ΣRot	Abandon	ITrans		
Page 2						
Page 3	rTran ou rTran rPiv rSu	ΣTran ΣExtr et ΣRot ΣSu	Ajustement	ITrans IPiv		CT2D
Page 4	Met les segments bout à bout « ma démarche est que c'est un triangle ouvert »					
Page 5	rLib	ΣTran		ITrans		

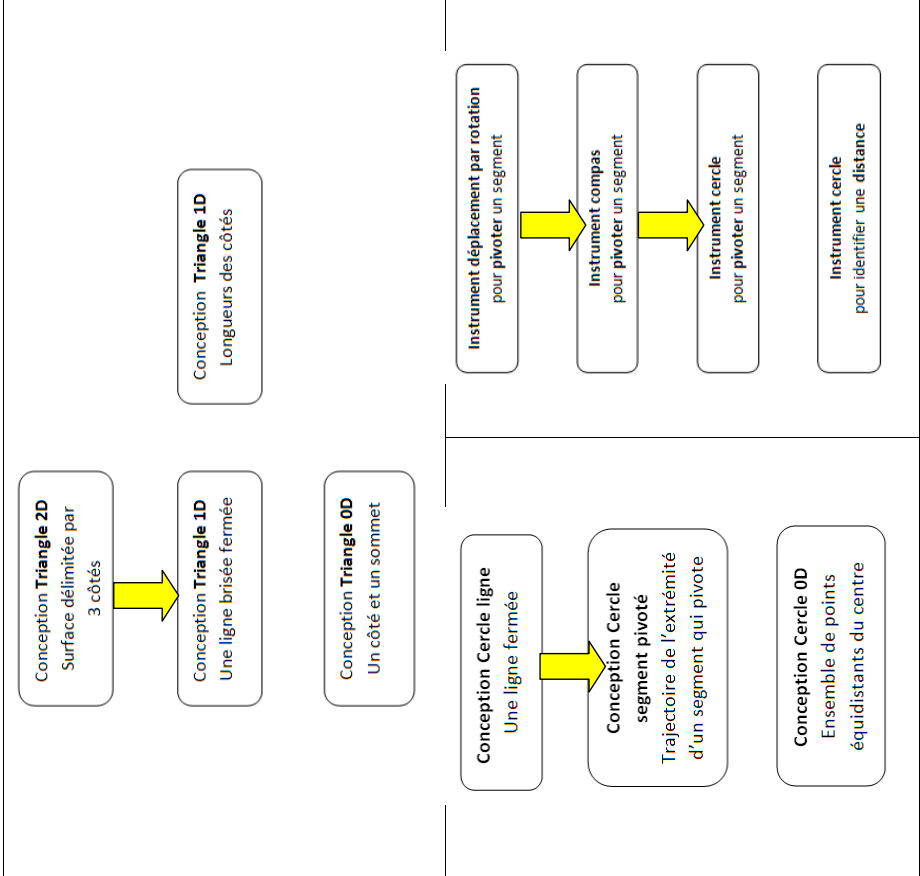
Première activité papier-crayon						
a,b,c						
d et e						
R	Instrument	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
rS2+rS2E +rS2E rPi1 + rPi2	Compas pour pivoter	rLB rPi1 + rPi2	ΣT3 + ΣT4	Ligne brisée	Compas pour pivoter	CT1D-LB

Cahier informatisé « Construire des triangles »						
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception	
Page 1	rPiv	ΣExt + ΣRot	Pivoter-rotation	Ipiv		CT1D-LB
Page 2	rPi1-gdCo	ΣPointe ΣMine	+ Pivoter- compas	Compas pour pivoter	CT1D-LB CC-SP	
Page 3	rPi1-gdCe	ΣCen + ΣRay	Pivoter-cercle	Cercle pour pivoter	CT1D-LB CC-SP	
Page 4	Idem	Idem	Idem	Idem	idem	
Page 5	rS3-gdS 3x	ΣS				
Page 6	rC3-gdCe					
Aide outil cercle : oul cercle de rayon donné						

Deuxième activité papier-crayon					
R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception	
rLB rPi1 + rPi2	ΣT3 ou ΣT4	Ligne brisée	Compas pour pivoter	CT1D-LB CC-SP	

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle

Pour pivoter les segments.



7. Dimitri

Cahier informatisé « A la découverte des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rS-gdS ; rS-gdR ; rT-gdT ; rC-gdCo		Abandon		
Page 2	rTran rS-gdS	ΣTran	Complète le triangle avec outil segment	ITrans	CT2D
Page 3	Idem		Idem		CT2D
Page 4	rTran rS-gdR	ΣTran	« les n ont pas la meme taille en appuyant sur la regle on peut avoir la meme taille »		
Page 5	rTran rS-gdS	ΣTran	Complète le triangle avec outil segment	ITrans	CT2D

Première activité papier-crayon					
d et e					
R	Instrument	R	Σ	Stratégie	Instrument Conception
rS2+rS2E +rS2E	Règle graduée	idem	ΣT1	A la règle graduée	Règle graduée CT2D

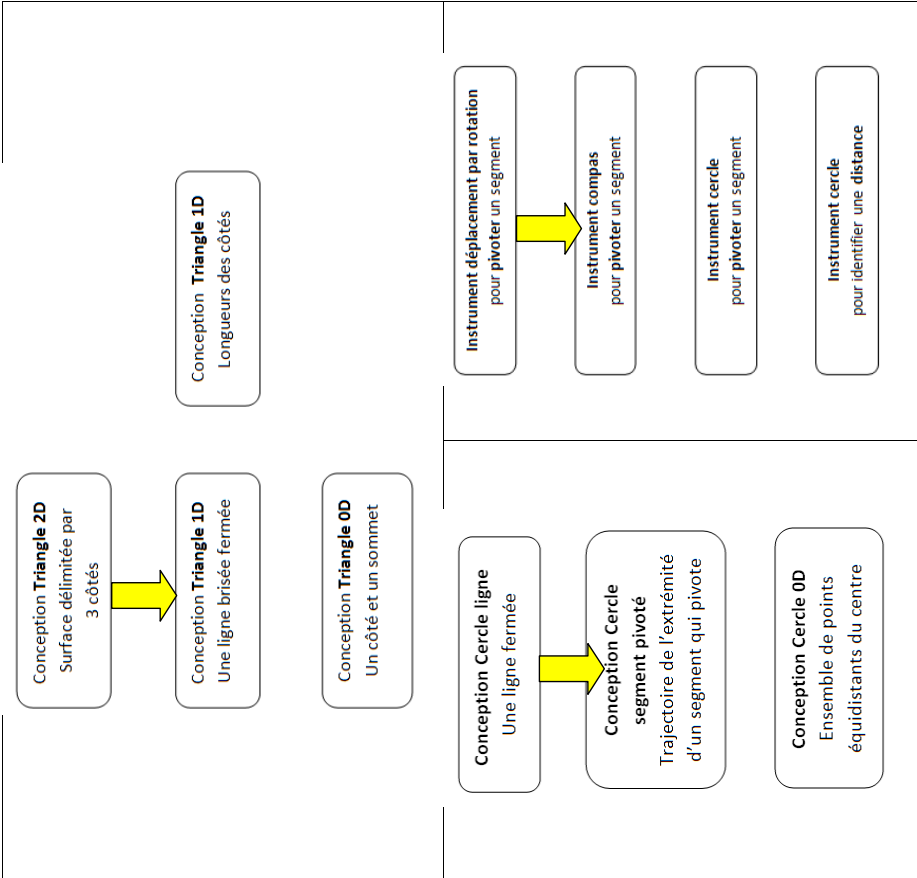
Cahier informatisé « Construire des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rPiv	ΣExt + ΣRot	Pivoter-rotation	Ipiv	CT1D-LB
Page 2	rRot rAC2-gd rS-gdS				
Page 3	rM-gdM				
Page 4	rC2-gdCe				
Page 5	rS3-gdS				
Page 6	rT-gdT				
Aide outil cercle :					

Deuxième activité papier-crayon				
R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
rS2 + rS2E + rS2E	ΣT1	Règle graduée		CT2D
<div>Conception Triangle 2D Surface délimitée par 3 côtés</div> <div>Conception Triangle 1D Une ligne brisée fermée</div> <div>Conception Triangle 1D Longueurs des côtés</div> <div>Conception Triangle 0D Un côté et un sommet</div> <div>Conception Cercle ligne Une ligne fermée</div> <div>Conception Cercle segment pivoté Trajectoire de l'extrémité d'un segment qui pivote</div> <div>Conception Cercle 0D Ensemble de points équidistants du centre</div> <div>Instrument déplacement par rotation pour pivoter un segment</div> <div>Instrument compas pour pivoter un segment</div> <div>Instrument cercle pour pivoter un segment</div> <div>Instrument cercle pour identifier une distance</div>				

Deuxième activité papier-crayon				
R	$\Sigma$	Stratégie	Instrument	Conception
rLB	$\Sigma T3$ ou $\Sigma T4$	Ligne brisée	Compas pour pivoter	CT1D-LB
rPi1 + rPi2				CC-SP

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle

Pour tracer des cercles, pour voir où les côtés se touchent. Pour déterminer l'existence ou non du triangle.



8. Djemil

Cahier informatisé « A la découverte des triangles »					
	R	$\Sigma$	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rTran ou rTras rRot rPiv rSu	$\Sigma$ Tran $\Sigma$ Extr et $\Sigma$ Rot $\Sigma$ Su	Ajustement	ITrans IPiv	CT2D
Page 2	rLib rPiv	$\Sigma$ Tran $\Sigma$ Extr et $\Sigma$ Rot	Ligne brisée	ITrans IPiv	CT1D-LB
Page 3	Idem	Idem	Idem	Idem	CT1D-LB
Page 4	rTran ou rTras rT-gdT				
Page 5	rLib rPiv	$\Sigma$ Tran $\Sigma$ Extr et $\Sigma$ Rot	Ligne brisée	ITrans IPiv	CT1D-LB

Première activité papier-crayon					
d et e					
R	Instrument	R	$\Sigma$	Stratégie	Conception
rPi1 + rPi2	Compas pour pivoter	rLB	$\Sigma T3 + \Sigma T4$ rPi1 + rPi2	Ligne brisée	CT1D-LB

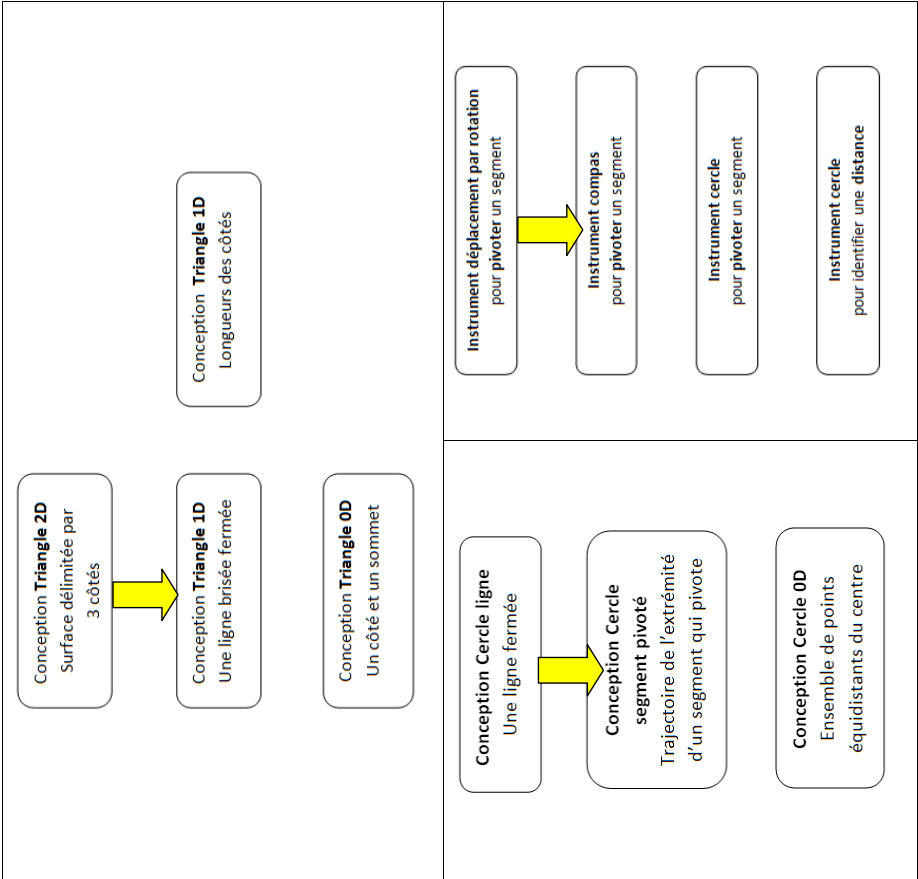
Cahier informatisé « Construire des triangles »					
	R	$\Sigma$	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rPiv	$\Sigma$ Ext + $\Sigma$ Rot	Pivoter-rotation	Ipiv	CT1D-LB
Page 2	rRot rAC2-gd				CT1D-LB
Page 3	rRot RC1-gdCe				CT1D-LB
Page 4	rPi1-gdCe	$\Sigma$ Cen + $\Sigma$ Ray	Pivoter-cercle	Cercle pour pivoter	CT1D-LB CC-SP
Page 5	rS3-gdS	$\Sigma$ S			
Page 6	rC3-gdCe rT-gdT				
Aide outil cercle : oui cercle					



Deuxième activité papier-crayon				
R	$\Sigma$	Stratégie	Instrument	Conception
rLB	$\Sigma T3$ ou $\Sigma T4$	Ligne brisée	Compas pour pivoter	CT1D-LB
rPi1 + rPi2				CC-SP

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle

Pour tracer des arcs de cercle. Pour savoir où on doit faire le triangle.



9. Gonzague

Cahier informatisé « A la découverte des triangles »					
	R	$\Sigma$	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rTran ou rTrans rRot rSu	$\Sigma$ Tran $\Sigma$ Rot $\Sigma$ Su	Ajustement		CT2D
Page 2	Idem	Idem	Idem	Idem	CT2D
Page 3					
Page 4	rTran ou rTrans : « non parce-que ils ont tous des tailles carrement différentes »				
Page 5	rTran ou rTrans rPiv rSu	$\Sigma$ Tran $\Sigma$ Extr et $\Sigma$ Rot $\Sigma$ Su	Ajustement	ITrans IPiv	CT2D

Première activité papier-crayon

d et e					
R	Instrument	R	$\Sigma$	Stratégie	Conception
rS2+rSZE +rSZE	Compas pour pivoter	rLB	$\Sigma T3 + \Sigma T4$	Ligne brisée	CT1D-LB
rPi1 + rPi2		rPi1 + rPi2			

Cahier informatisé « Construire des triangles »

	R	$\Sigma$	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rPiv	$\Sigma$ Ext + $\Sigma$ Rot	Pivoter-rotation	Ipiv	CT1D-LB
Page 2	rRot rC3-gdCe rPi1-gdCo rPiv	$\Sigma$ Mine+ $\Sigma$ Pointe $\Sigma$ Ext + $\Sigma$ Rot	Pivoter-compas	Compas pour pivoter	CT1D-LB CC-SP
Page 3	rM-gdM rC1-gdCe rPiv	$\Sigma$ Ext + $\Sigma$ Rot			CT1D-LB
Page 4	rRot RC1-gdCe rPiv	$\Sigma$ Ext + $\Sigma$ Rot			CT1D-LB
Page 5	rS3-gdS	$\Sigma$ S			
Page 6	rS3-gdS				
Aide outil cercle :					

## 10. Hadeline

Cahier informatisé « A la découverte des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
<b>Page 1</b>	rTran ou rTrans rRot rPiv rSu	ΣTran ΣExt et ΣRot	Ajustement	ITrans IPiv	CT2D
<b>Page 2</b>	rLib rPiv	ΣTran ΣExt et ΣRot	Ligne brisée	ITrans IPiv	CT1D-LB
<b>Page 3</b>	rLib	ΣTran		ITrans	
<b>Page 4</b>	rTran ou rTrans : « non car il ne peut pas tourner »				
<b>Page 5</b>	rLib	ΣTran		ITrans	

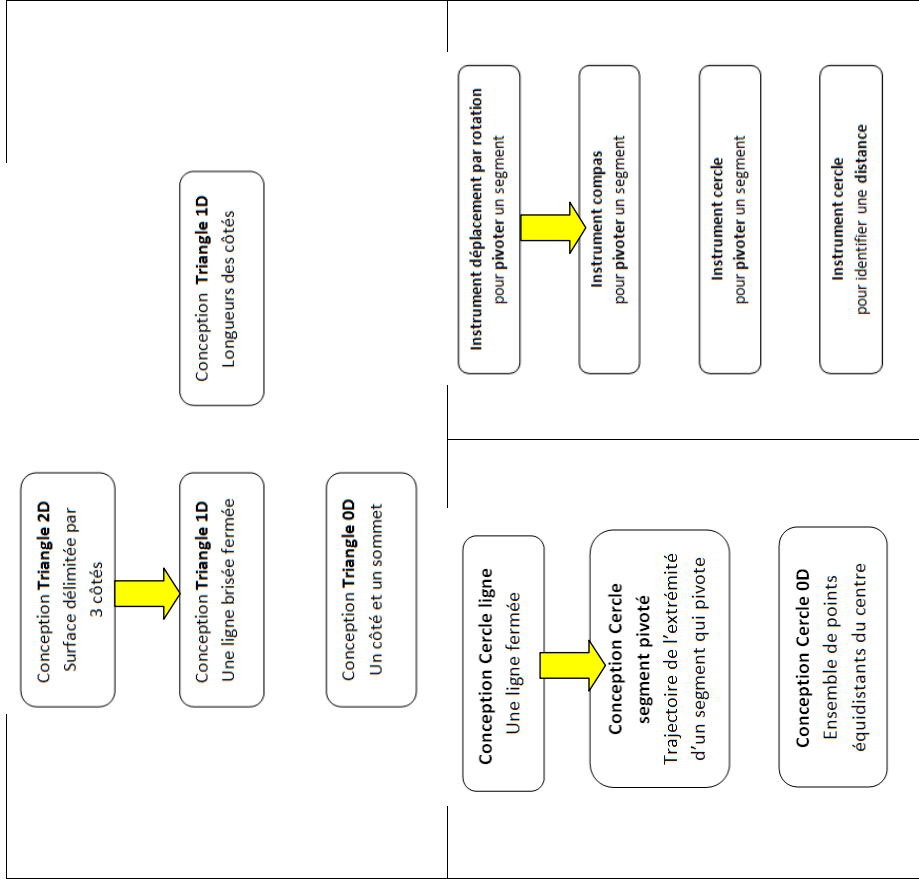
Première activité papier-crayon						
a,b,c		d et e				
R	Instrument	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
rPi1 + rPi2	Compas pour pivoter	rLB rPi1 + rPi2	ΣT3 + ΣT4	Ligne brisée	Compas pour pivoter	CT1D-LB

Cahier informatisé « Construire des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
<b>Page 1</b>	rPiv	ΣExt + ΣRot	Pivoter-rotation	Ipiv	CT1D-LB
<b>Page 2</b>	rRot rPi1-gdCo rPiv	ΣMine+ΣPointe ΣExt + ΣRot	Pivoter-compas	Compas pour pivoter	CT1D-LB CC-SP
<b>Page 3</b>	rM-gdM RC1-gdCe rPiv	ΣExt + ΣRot			CT1D-LB
<b>Page 4</b>	rRot rT-gdT rPiv	ΣExt + ΣRot			CT1D-LB
<b>Page 5</b>	rT-gdT				
<b>Page 6</b>	RC1-gdCe				
Aide outil cerle :					

Deuxième activité papier-crayon				
R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
rLB	ΣT3 ou ΣT4	Ligne brisée	Compas pour pivoter	CT1D-LB
rPi1 + rPi2				CC-SP

### Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle

Pour tracer des cercles et voir s'ils se touchent. Pour déterminer l'existence ou non du triangle.



11. Hanaïs

Cahier informatisé « A la découverte des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rTran ou rTrans rRot	ΣTran ΣRot	Ajustement	ITrans	CT2D
Page 2	rTran ou rTrans rPiv	ΣTran ΣExtr et ΣRot	Ajustement	ITrans IPiv	CT2D
Page 3	rLib rPiv	ΣTran ΣExtr et ΣRot	Ligne brisée	ITrans IPiv	CT1D-LB
Page 4	rTran ou rTrans : « Non car sa ne tourne pas »				
Page 5	rTran ou rTrans rPiv rSu	ΣTran ΣExtr et ΣRot ΣSu	Ajustement	ITrans IPiv	CT2D

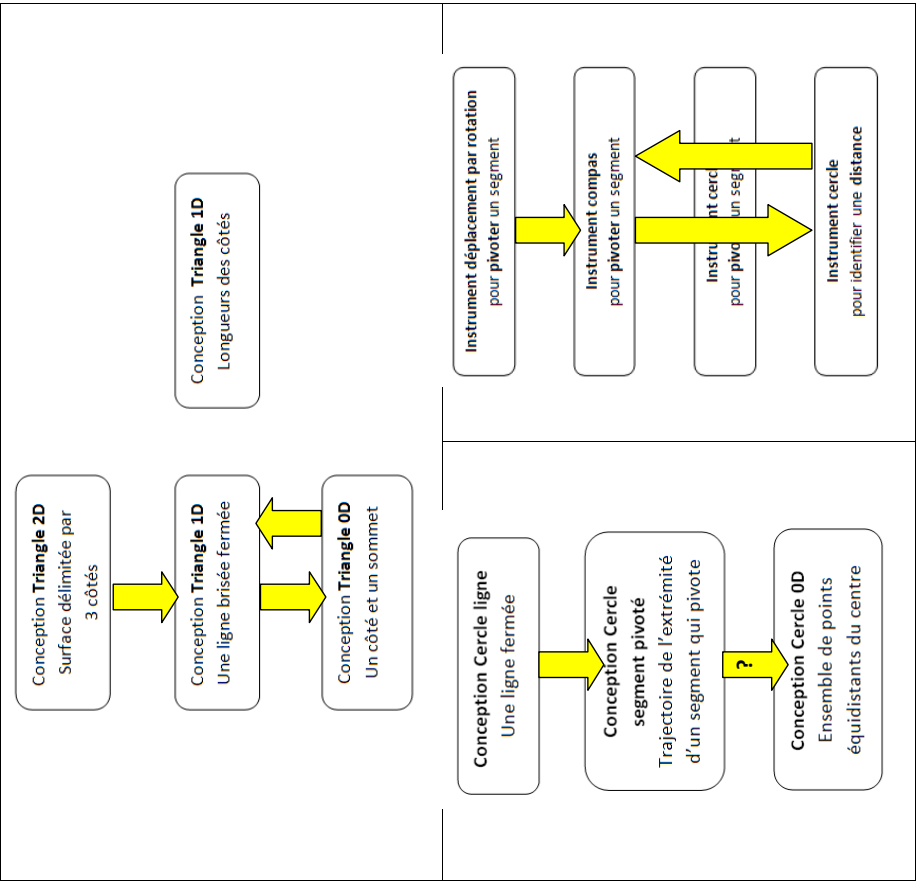
Première activité papier-crayon					
d et e					
R	Instrument	R	Σ	Stratégie	Conception
rPi1 + rPi2	Compas pour pivoter	rLB	ΣT3 + ΣT4 rPi1 + rPi2	Ligne brisée	CT1D-LB

Cahier informatisé « Construire des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rPiv	ΣExt + ΣRot	Pivoter-rotation	IPiv	CT1D-LB
Page 2	rRot rPi1-gdCo	ΣMine+ΣPointe	Pivoter-rotation compas	Compas pour pivoter	CT1D-LB CC-SP
Page 3	rRot				
Page 4	rC1-gdCe				
Page 5	rC3-gdCe				
Page 6	rC3-gdCe	ΣCenC+ΣRayC	Cercle	Cercle pour distance	CT0D CC0D
Aide outil cercle : oui cercle de rayon donné					

Deuxième activité papier-crayon				
R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
rLB rPi1 + rPi2	ΣT3 ou ΣT4	Ligne brisée	Compas pour pivoter	CT1D-LB CC-SP

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle

Pour pivoter les segments.



12. Imène

Cahier informatisé « A la découverte des triangles »						
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception	
Page 1	rTran ou rTrans rRot rPiv rSu	ΣTran ΣExtr et ΣRot ΣSu	Ajustement	ITrans IPiv	CT2D	
Page 2	Idem	Idem	Idem	Idem	CT2D	
Page 3	rLiB	ΣTran		ITrans		
Page 4	rTran ou rTrans rSu	ΣTran ΣSu	Juxtaposer IT	ITrans	CT1D-LC	
Page 5	rLiB	ΣTran		ITrans	CT2D	

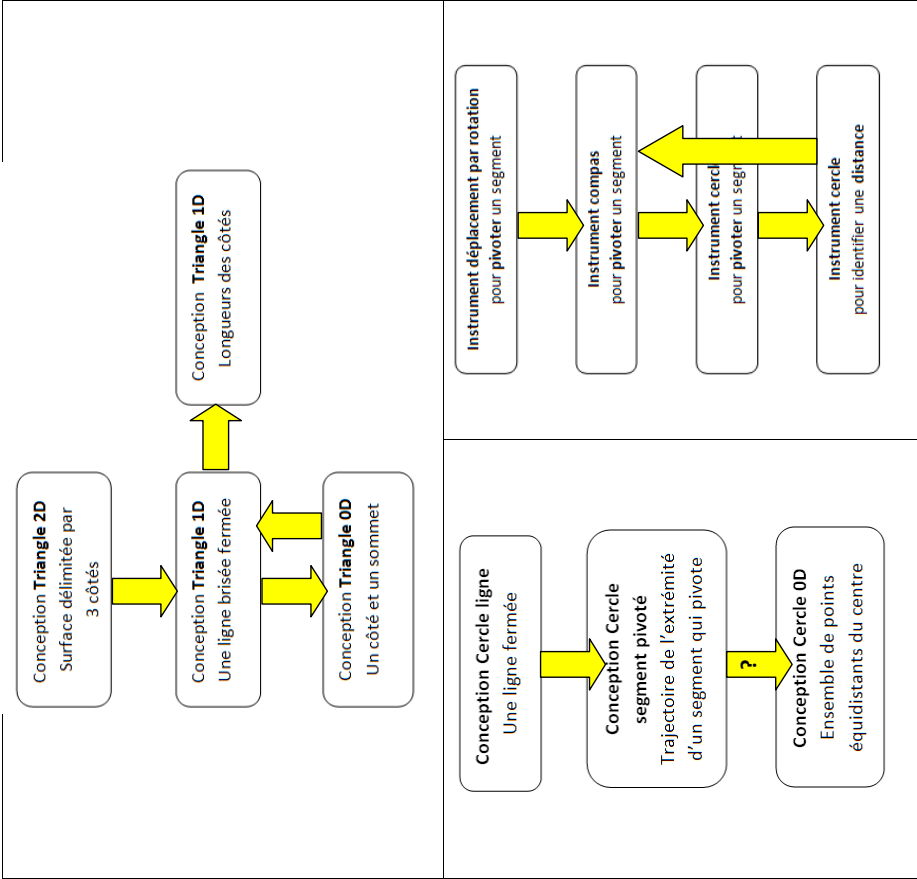
Première activité papier-crayon						
d e t e						
R	Instrument	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
rPi1 + rPi2	Compas pour pivoter	rLB rPi1 + rPi2	ΣT3 + ΣT4	Ligne brisée	Compas pour pivoter	CT1D-LB

Cahier informatisé « Construire des triangles »						
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception	
Page 1	rPiv	ΣExt + ΣRot	Pivoter-rotation	IPiv	CT1D-LB	
Page 2	rRot rPi1-gdCo rPiv	ΣMine+ΣPointe ΣExt + ΣRot	Pivoter-compas	Compas pour pivoter	CT1D-LB CC-SP	
Page 3	rRot rM-gdR rPiv	ΣExt + ΣRot			CT1D-LB	
Page 4	rRot rPi1-gdCe rPiv	ΣCent+ΣRay ΣExt + ΣRot	Pivoter-cercle	Cercle pour pivoter	CT1D-LB CC-SP	
Page 5	rS-gdS					
Page 6	rC3-gdCe	ΣCenC+ΣRayC	Cercle	Cercle pour distance	CT0D CC0D	
Aide outil cercle : oui cercle de rayon donné						

Deuxième activité papier-crayon					
R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception	
rLB rPi1 + rPi2	ΣT3 ou ΣT4	Ligne brisée	Compas pour pivoter	CT1D-LB CC-SP	

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle

Pour pivoter les segments et déterminer le troisième sommet.



13. Isidore

Cahier informatisé « A la découverte des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rT-gdT et rT-gdS		Abandon		CT2D
Page 2	rTran ou rTrans	ΣTran	Abandon		
Page 3	rT-gdT		Abandon		
Page 4					
Page 5	rS-gdS				

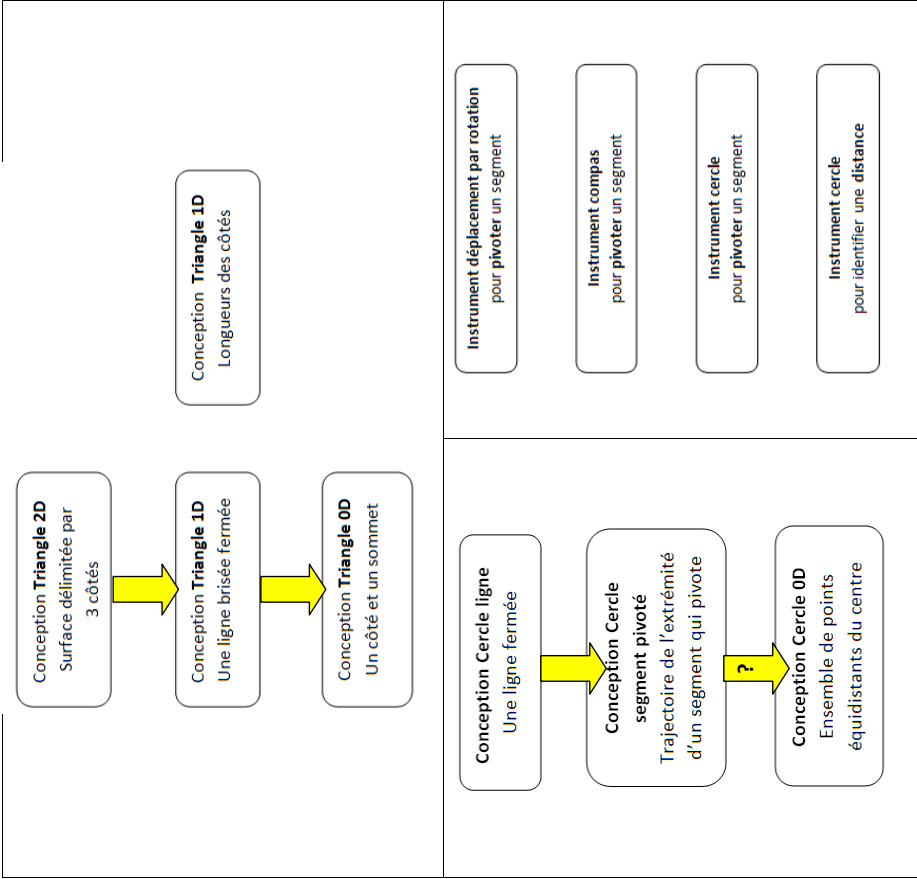
Première activité papier-crayon						
a,b,c		d et e				
R	Instrument	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
rS2+rS2E +rS2E rPi1	Compas pour pivoter	rCC3	ΣT5 + ΣT6 + ΣT7	A la règle et au compas	Compas pour tracer un cercle	CT0D

Cahier informatisé « Construire des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1					
Page 2	rRot rPiv	ΣExt+ΣRot			CT1D-LB
Page 3	Idem	Idem			CT1D-LB
Page 4	Idem	Idem			CT1D-LB
Page 5	rS-gdS	ΣS			
Page 6	rS-gdS	ΣS			
Aide outil cercle :					

Deuxième activité papier-crayon				
R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
rC3	$\Sigma T5 + \Sigma T7$ ou $\Sigma T6$	A la règle et au compas	Compas pour tracer des cercles ou pivoter un segment	CT0D CC-SP ou CC0D

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle

Pour déterminer le troisième sommet.



## 14. Ivanoë

Cahier informatisé « A la découverte des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
<b>Page 1</b>	rTran ou rTrans rRot rPiv rSu	ΣTran ΣExtr et ΣRot ΣSu	Ajustement	ITrans IPiv	CT2D
<b>Page 2</b>	Idem	Idem	Idem	Idem	CT2D
<b>Page 3</b>	Idem	Idem	Idem	Idem	CT2D
<b>Page 4</b>	rM-gdM	on pourrait prendre les mesures des segments			
<b>Page 5</b>					

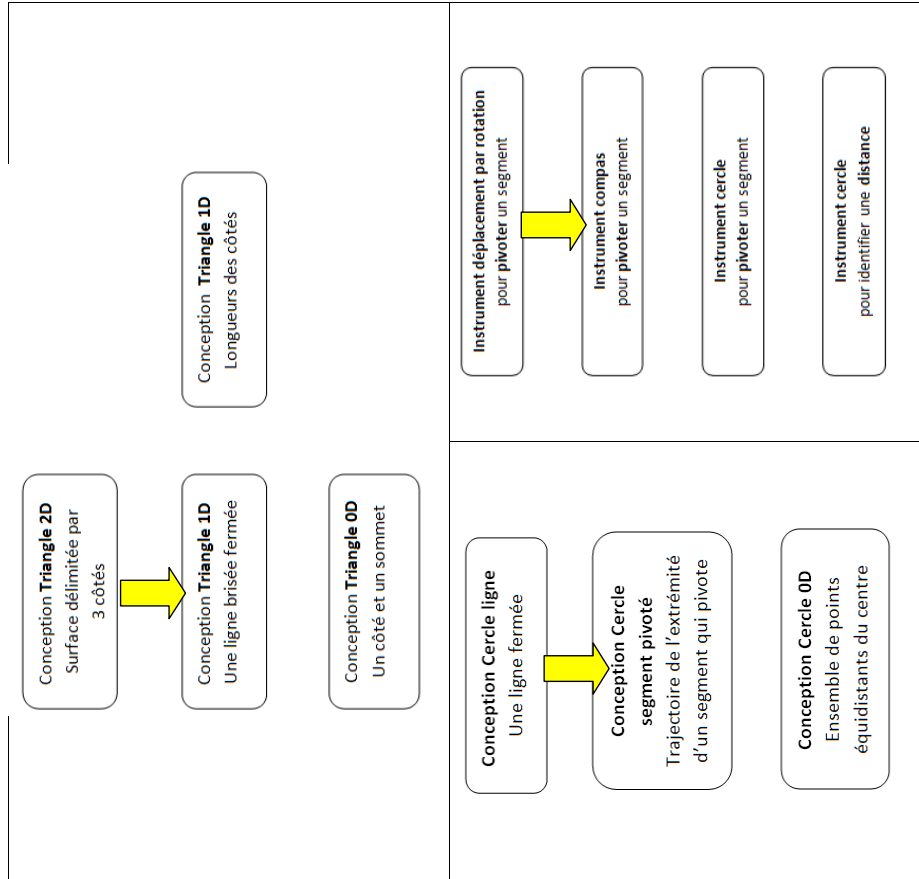
Première activité papier-crayon						
a,b,c		d et e				
R	Instrument	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
rS2+rS2E +rS2E	Règle graduée	rS2+rS2E+rS2E	ΣT1	A la règle graduée	Règle graduée	CT2D

Cahier informatisé « Construire des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
<b>Page 1</b>	rPiv	ΣExt + ΣRot	Pivoter-rotation	Ipiv	CT1D-LB
<b>Page 2</b>	rRot rP11-gdCo rPiv	ΣMine+ΣPointe ΣExt + ΣRot	Pivoter-compas	Compas pour pivoter	CT1D-LB CC-SP
<b>Page 3</b>	rRot rPiv	ΣExt + ΣRot			CT1D-LB
<b>Page 4</b>	rRot rP11-gdCe rPiv	ΣCen+ΣRay ΣExt + ΣRot	Pivoter-cercle	Cercle pour pivoter	CT1D-LB CC-SP
<b>Page 5</b>	rS-gdS				
<b>Page 6</b>	rC3-gdCe				
Aide outil cercle : oui cercle de rayon donné					

Deuxième activité papier-crayon				
R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
rLB rP11 + rP12	ΣT3 ou ΣT4	Ligne brisée	Compas pour pivoter	CT1D-LB CC-SP

### Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle

Pour indiquer le troisième angle.



15. Kalinka

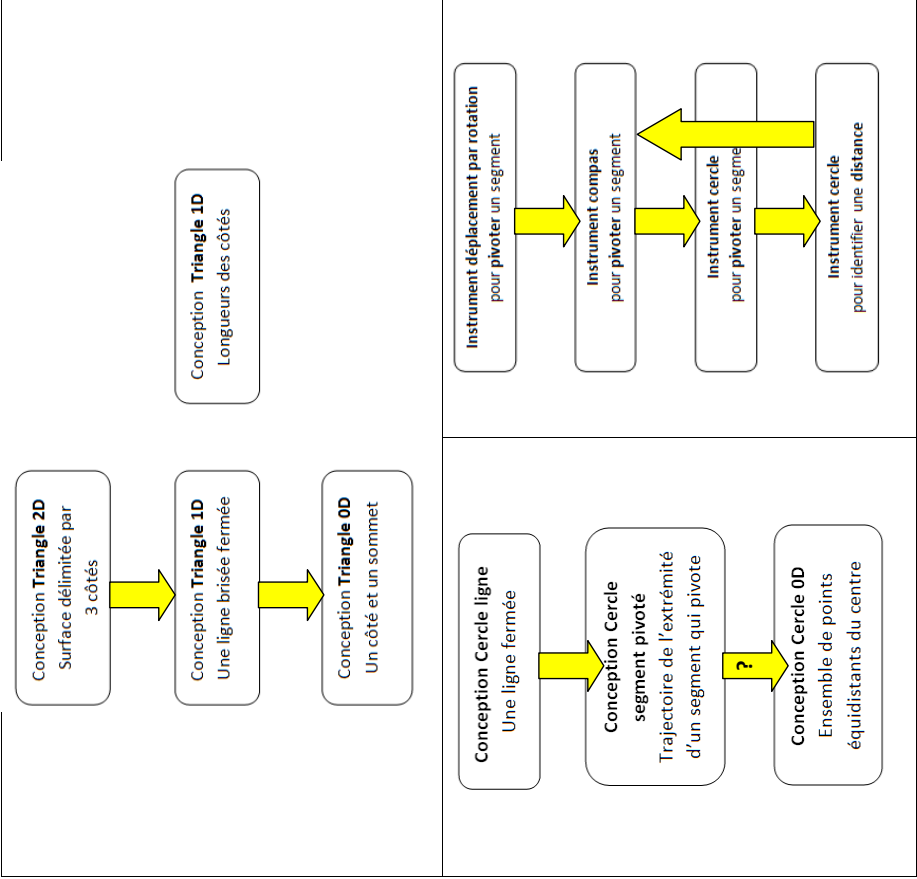
Cahier informatisé « A la découverte des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rTran ou rTrans rRot rPiv rSu	ΣTran ΣExt et ΣRot ΣSu	Ajustement	ITrans IPiv	CT2D
Page 2	Idem	Idem	Idem	Idem	CT2D
Page 3	Idem	Idem	Idem		CT2D
Page 4	Aucun déplacement Aucun outil	« on ne peux plus les tourner mais je pense que sa pourrais »			
Page 5	rTran ou rTrans rRot rPiv rSu	ΣTran ΣExt et ΣRot ΣSu	Ajustement	ITrans IPiv	CT2D

Première activité papier-crayon					
d et e					
R	Instrument	R	Σ	Stratégie	Conception
rS2+rS2E +rS2E rPi1 + rPi2	Compas pour pivoter	rLB rPi1 + rPi2	ΣT3 + ΣT4	Ligne brisée	CT1D-LB

Cahier informatisé « Construire des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rPiv	ΣExt + ΣRot	Pivoter-rotation	IPiv	CT1D-LB
Page 2	rRot rPi1-gdCe rPiv	ΣCen+ΣRay ΣExt + ΣRot	Pivoter-cercle	Cercle pour pivoter	CT1D-LB CC-SP
Page 3	rPi1-gdCe rPiv	ΣCen+ΣRay ΣExt + ΣRot	Pivoter-cercle	Cercle pour pivoter	CT1D-LB CC-SP
Page 4	Idem	Idem	Idem	Idem	Idem
Page 5	rS-gdS				
Page 6	rC3-gdCe	ΣCenC+ΣRayC	Cercle	Cercle pour distance	CT0D CC0D
Aide outil cercle : oui cercle de rayon donné					

Deuxième activité papier-crayon				
R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
rLB rPi1 + rPi2	ΣT3 ou ΣT4	Ligne brisée	Compas pour pivoter	CT1D-LB CC-SP

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle  
Pour tracer des cercles. Pour déterminer le troisième sommet.



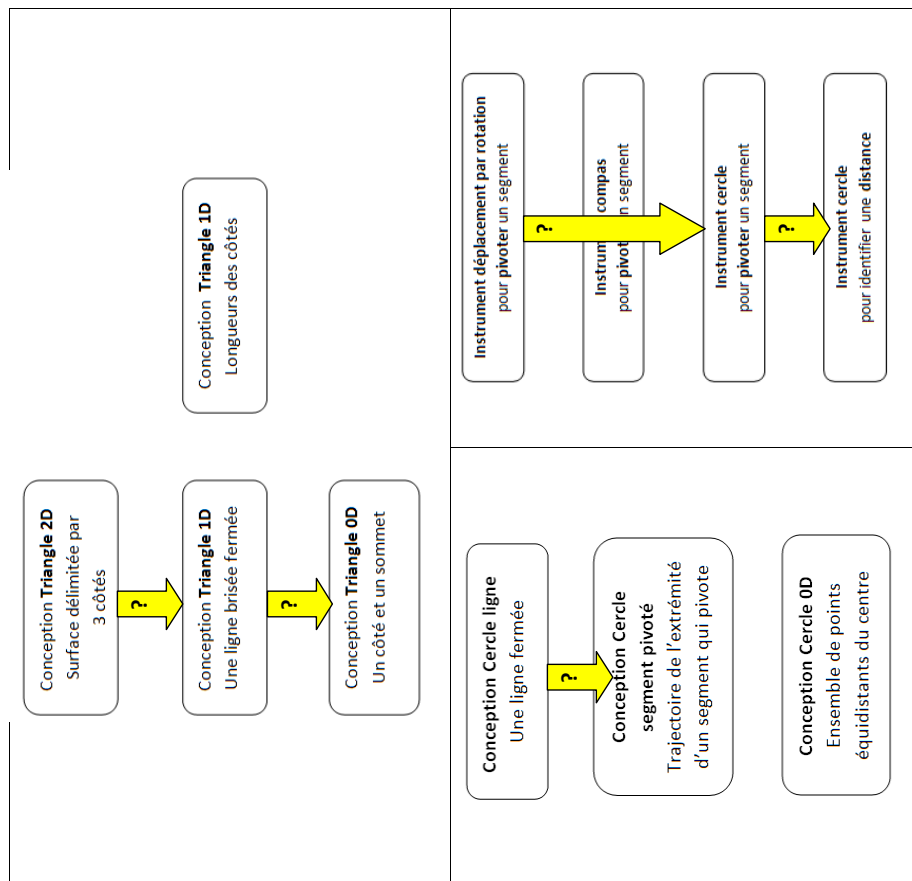
## 16. Karim

Cahier informatisé « A la découverte des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
<b>Page 1</b>	rTran ou rTrans rRot rPiv rSu	ΣTran ΣExt et ΣRot ΣSu	Ajustement	ITrans IPiv	CT2D
<b>Page 2</b>	Idem	Idem	Idem	Idem	CT2D
<b>Page 3</b>	Idem	Idem	Idem	Idem	CT2D
<b>Page 4</b>	rTran ou rTrans	« non quart il peut pas tourné les segments »			
<b>Page 5</b>	rLib	ΣTran		ITrans	

Première activité papier-crayon						
a,b,c		d et e				
R	Instrument	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
rP1	Compas pour pivoter	rS2+rS2E+S2E	ΣT1	A la règle graduée	Règle graduée	CT2D

Cahier informatisé « Construire des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rPiv	ΣExt + ΣRot	Pivoter-rotation	Ipiv	CT1D-LB
Page 2	rRot				
Page 3	rT-gdT				
Page 4	rP1-gdCe	ΣCen+ΣRay	Pivoter-cercle	Cercle pour pivoter	CT1D-LB CC-SP
Page 5	rC2-gdCe				
Page 6	rC3-gdCe	ΣCenC+ΣRayC	Cercle	Cercle pour distance	CT0D CC0D
Aide outil cercle : oui cercle de rayon donné					

Deuxième activité papier-crayon				
R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
rS2+rS2E+rS2E	ΣT1	Règle graduée		CT2D





17. Loris

Cahier informatisé « A la découverte des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rTran ou rTrans rRot rSu	ΣTran	Ajustement	ITrans	CT2D
Page 2	rTran ou rTrans rRot rPiv rSu	ΣTran ΣExt et ΣRot ΣSu	Ajustement	ITrans IRot	CT2D
Page 3	rLib			ITrans	
Page 4	rTran ou rTrans	« C'est impossible car il faut tourné les ségement »			
Page 5					

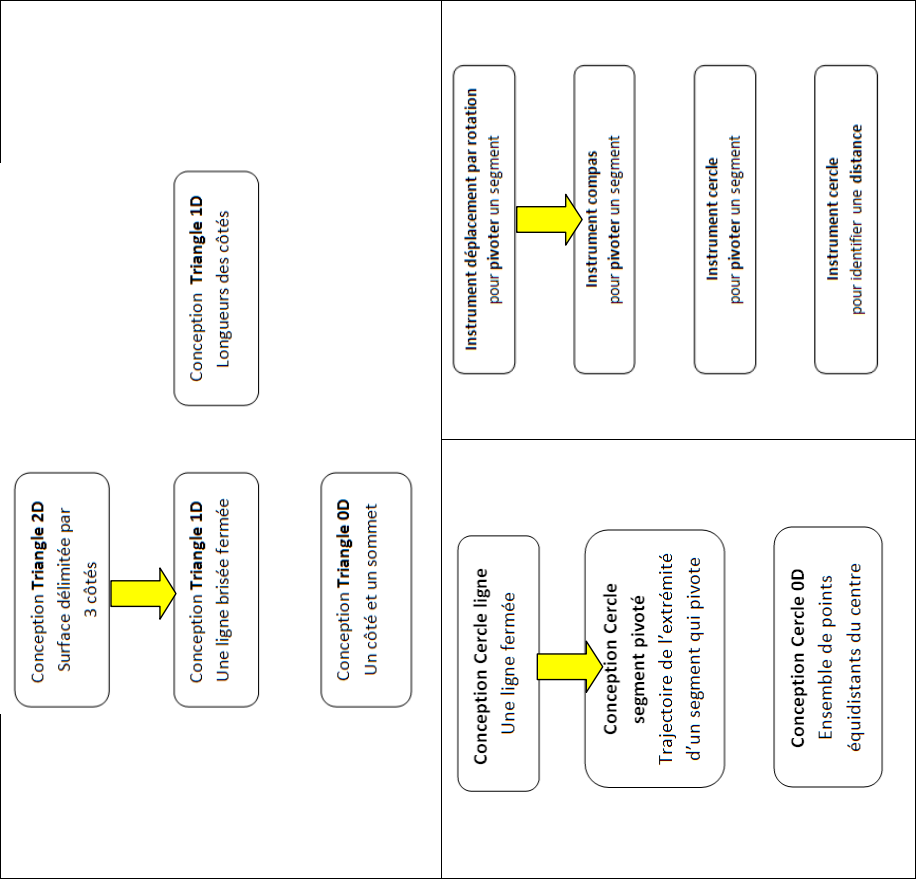
Première activité papier-crayon						
a,b,c		d et e				
R	Instrument	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
rS2+rS2E +rS2E	Règle graduée	rS2+rS2E+rS2E	ΣT1	A la règle graduée	Règle graduée	CT2D

Cahier informatisé « Construire des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rPiv	ΣExt + ΣRot	Pivoter-rotation	Ipiv	CT1D-LB
Page 2	rRot rPiv	ΣExt + ΣRot			CT1D-LB
Page 3	rRot rPiv	ΣExt + ΣRot			CT1D-LB
Page 4	rRot rPiv	ΣExt + ΣRot			CT1D-LB
Page 5	rS-gdS				
Page 6	rC1-gdCe				
Aide outil cercle :					

Deuxième activité papier-crayon				
R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
rS2+rS2E+rS2E rLB + rPi1 + rPi2	ΣT1 ΣT3 ou ΣT4	Règle graduée Ligne brisée	Compas pour pivoter	CT1D-LB CC-SP

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle

Pour pivoter les segments. Pour tracer des cercles.



18. Luna

Cahier informatisé « A la découverte des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rT-gdT rTran ou rTrans rRot rSu	ΣTran ΣSu	Ajustement	ITrans	CT2D
Page 2	rTran ou rTrans rPiv rSu	ΣTran ΣExtr et ΣRot ΣSu	Ajustement	ITrans IPiv	CT2D
Page 3	rTran ou rTrans rPiv rSu rS-gds	ΣTran ΣExtr et ΣRot ΣSu	Abandon	ITrans IPiv	CT2D
Page 4	rTran ou rTrans	« non on n'eu peux pas faire de triangle avec ces trois segment car ils sont droit et que vous avier dit que l'on peus pas »			
Page 5	rTran ou rTrans rPiv rSu	ΣTran ΣExtr et ΣRot ΣSu	Ajustement	ITrans IPiv	CT2D

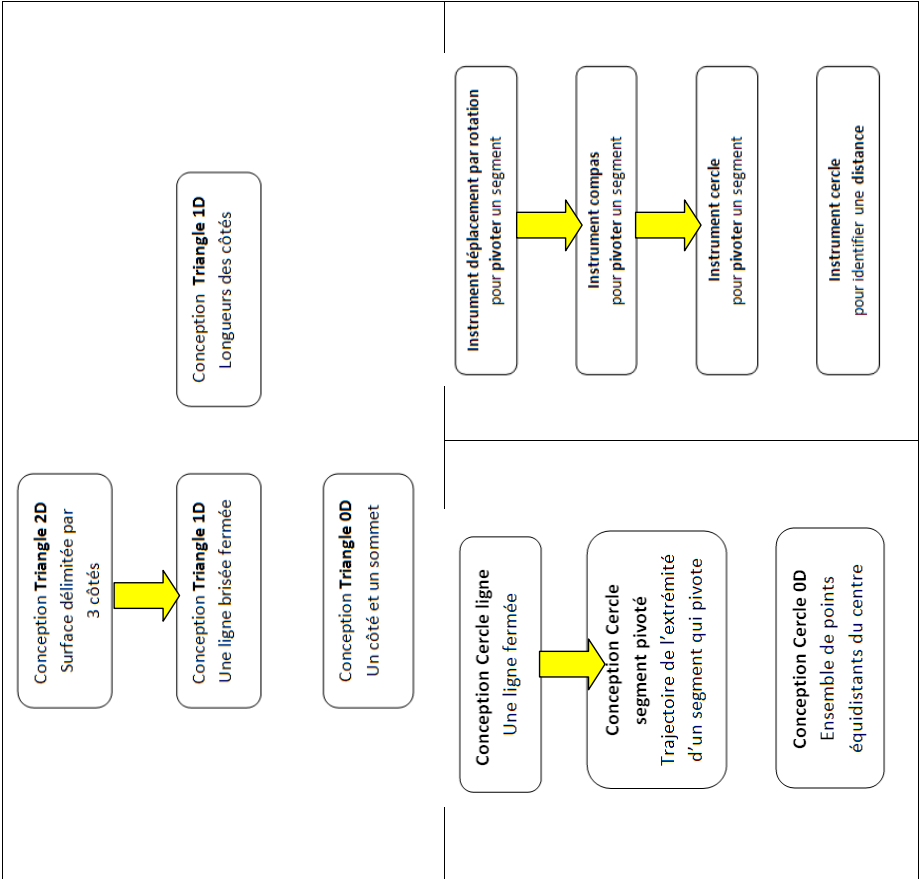
Première activité papier-crayon						
a,b,c		d et e				
R	Instrument	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
rAC2 ou rC2	Compas					

Cahier informatisé « Construire des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rPiv	ΣExt + ΣRot	Pivoter-rotation	Ipiv	CT1D-LB
Page 2	rP1-gdCo rPiv	ΣPointe+ΣMine ΣExt + ΣRot	Pivoter-compas	Compas pour pivoter	CT1D-LB CC-SP
Page 3	rP1-gdCe rPiv	ΣCen+ΣRay ΣExt + ΣRot		Cercle pour pivoter	CT1D-LB CC-SP
Page 4	Idem	Idem	Idem	Idem	Idem
Page 5	rS-gds				
Page 6	rS-gds				
Aide outil cercle : oui cercle					

Deuxième activité papier-crayon				
R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
rLB	ΣT3 ou ΣT4	Ligne brisée	Compas pour pivoter	CT1D-LB
rP11 + rP12				CC-SP

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle

Pour pivoter les segments.



19. Marie

Cahier informatisé « A la découverte des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rTran ou rTrans rRot rPiv rSu	ΣTran  ΣExt et ΣRot ΣSu	Ajustement	ITrans IPiv	CT2D
Page 2	Idem	Idem	Idem	Idem	CT2D
Page 3	rTran ou rTrans rPiv	ΣTran ΣExt et ΣRot	Ajustement	ITrans IPiv	CT2D
Page 4	rTran ou rTrans rAC2-gdCo	« on ne peut plus les tourner mais je pense que sa pourrais marchais si on pouvait les tourner »			
Page 5	rTran ou rTrans rPiv	ΣTran ΣExt et ΣRot	Ajustement	ITrans IPiv	CT2D

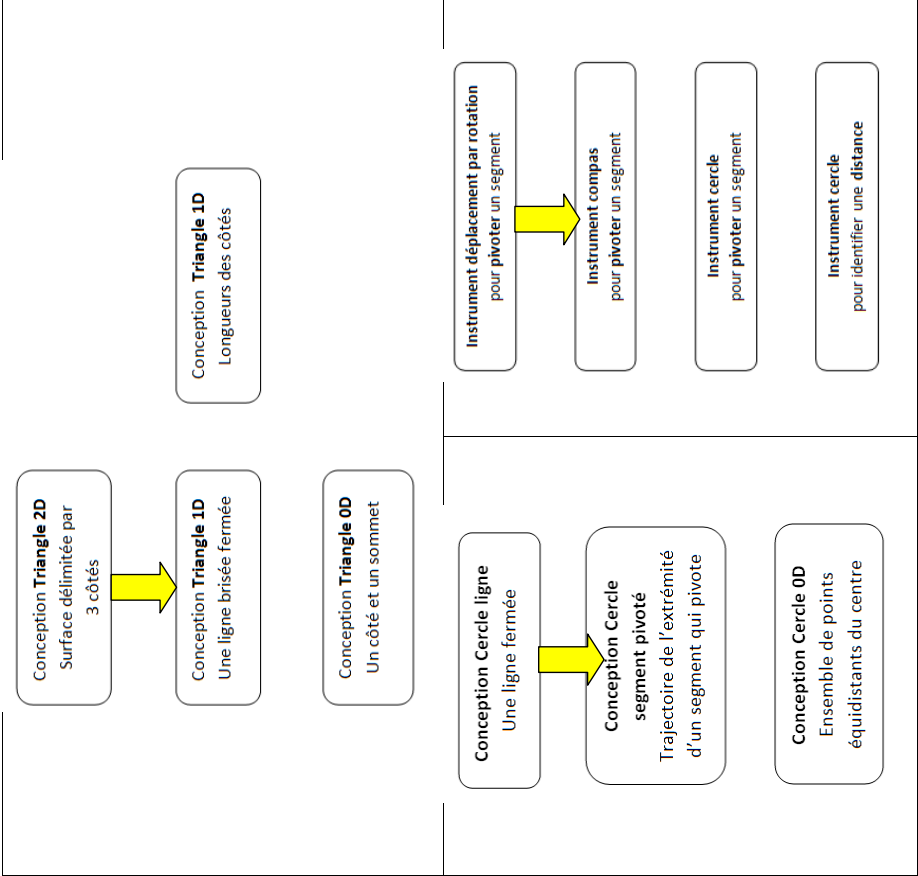
Première activité papier-crayon						
a,b,c		d et e				
R	Instrument	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
rPi1 + rPi2	Compas pour pivoter	rS2+rS2E+rS2E	ΣT1	A la règle graduée	Règle graduée	CT2D

Cahier informatisé « Construire des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rPiv	ΣExt + ΣRot	Pivoter-rotation	Ipiv	CT1D-LB
Page 2	rRot rPiv	ΣExt + ΣRot			CT1D-LB
Page 3	rRot rPiv	ΣExt + ΣRot			CT1D-LB
Page 4	rRot rC2-gdCe rPiv	ΣExt + ΣRot			CT1D-LB
Page 5	rS-gdS				
Page 6	rT-gdT				
Aide outil cercle :					

Deuxième activité papier-crayon				
R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
rLB	ΣT3 ou ΣT4	Ligne brisée	Compas pour pivoter	CT1D-LB
rPi1 + rPi2				CC-SP

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle

Pour faire une rotation des segments.



Cahier informatisé « A la découverte des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rTran ou rTrans rRot rPiv rSu	ΣTran ΣExtr et ΣRot ΣSu	Ajustement	ITrans IPiv	CT2D
Page 2	rLib rPiv	ΣExtr et ΣRot	Ligne brisée	ITrans IPiv	CT1D-LB
Page 3	rLib rPiv	ΣExtr et ΣRot	Ligne brisée	ITrans IPiv	CT1D-LB
Page 4	rTran ou rTrans rT-gdT rAC2-gdCo	« je pense qu'ont ne peut pas faire de triangle car les segments ne tourne pas et quand les segments ne tourne pas c'est pratiquement impossible si les segments tourne c'est possible et on ne peut pas toujours obtenir un triangle »			
Page 5	rLib rPiv	ΣExtr et ΣRot	Ligne brisée	ITrans IPiv	CT1D-LB

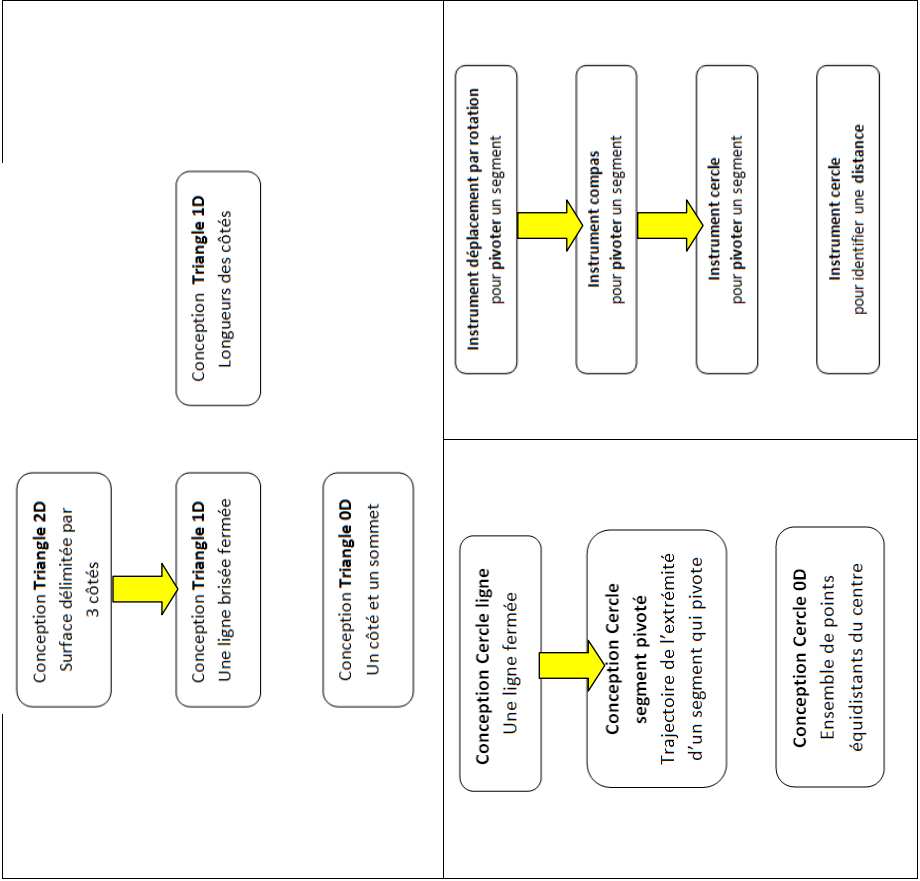
Première activité papier-crayon					
d et e					
R	Instrument	R	Σ	Stratégie	Conception
rPi1 + rPi2	Compas pour pivoter	rLB	ΣT3 + ΣT4 rPi1 + rPi2	Ligne brisée	CT1D-LB

Cahier informatisé « Construire des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rPiv	ΣExt + ΣRot	Pivoter-rotation	IPiv	CT1D-LB
Page 2	rRot rPi1-gdCo rPiv	ΣPointe+ΣMine ΣExt + ΣRot	Pivoter-compas	Compas pour pivoter	CT1D-LB CC-SP
Page 3	rS2-gdR rPiv	ΣExt + ΣRot			CT1D-LB
Page 4	rPi1-gdCe rPiv	ΣCen+ΣRay ΣExt + ΣRot	Pivoter-cercle	Cercle pour pivoter	CT1D-LB CC-SP
Page 5	rS-gdS				
Page 6					
Aide outil cercle :					

Deuxième activité papier-crayon				
R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
rLB rPi1 + rPi2	ΣT3 ou ΣT4	Ligne brisée	Compas pour pivoter	CT1D-LB CC-SP

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle

Pour imaginer la rotation. Pour déterminer l'existence ou non du triangle.



21. Mérine

Cahier informatisé « A la découverte des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rTran ou rTrans	ΣTran	Ajustement puis Ligne brisée	ITrans	CT1D-LB
	rRot			IPiv	
	rPiv	ΣExtr et ΣRot			
	rSu	ΣSu			
Page 2	rLib				CT1D-LB
	rPiv	ΣExtr et ΣRot	Ligne brisée	ITrans	
Page 3	rLib				CT1D-LB
	rPiv	ΣExtr et ΣRot	Ligne brisée	ITrans	
Page 4	rTran ou rTrans		Abandon		
Page 5	Aucun déplacement Aucun outil				

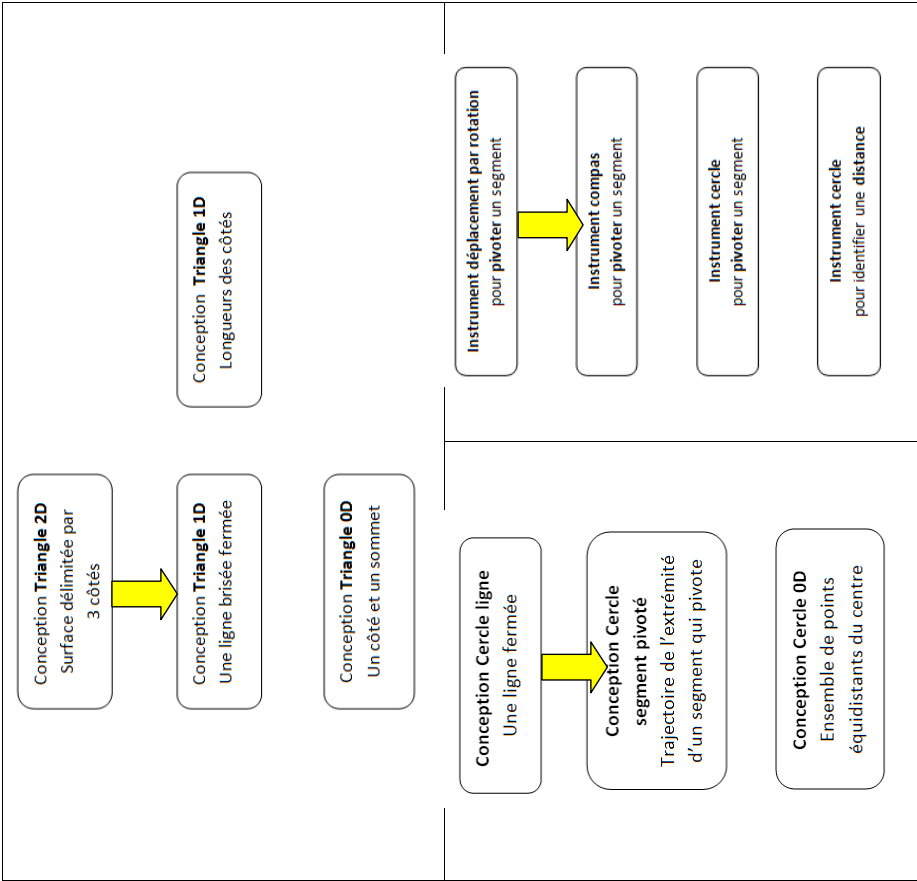
Première activité papier-crayon					
d et e					
R	Instrument	R	Σ	Stratégie	Conception
rS2+rS2E +rS2E rPi1 + rPi2	Compas pour pivoter	rLB rPi1 + rPi2	ΣT3 + ΣT4	Ligne brisée	CT1D-LB

Cahier informatisé « Construire des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rPiv	ΣExt + ΣRot	Pivoter-rotation	Ipiv	CT1D-LB
Page 2	rRot				CT1D-LB
Page 3	rPiv	ΣExt + ΣRot			
Page 4	Idem	Idem			CT1D-LB
Page 5	Idem	Idem			CT1D-LB
Page 6	rT-gdT				
Page 6	rS-gdS				
Aide outil cercle :					

Deuxième activité papier-crayon				
R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
rLB	ΣT3 ou ΣT4	Ligne brisée	Compas pour pivoter	CT1D-LB
rPi1 + rPi2				CC-SP

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle

Pour faire des cercles.



Cahier informatisé « A la découverte des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rTran ou rTrans rRot rPiv rSu	ΣTran ΣExtr et ΣRot ΣSu	Ajustement	ITrans IPiv	CT2D
Page 2	Idem	Idem	Idem	Idem	CT2D
Page 3	rLib rPiv	ΣExtr et ΣRot	Ligne brisée	ITrans IPiv	CT1D-LB
Page 4	Aucun déplacement Aucun outil				
Page 5	rLib rPiv	ΣExtr et ΣRot	Ligne brisée	ITrans IPiv	CT1D-LB

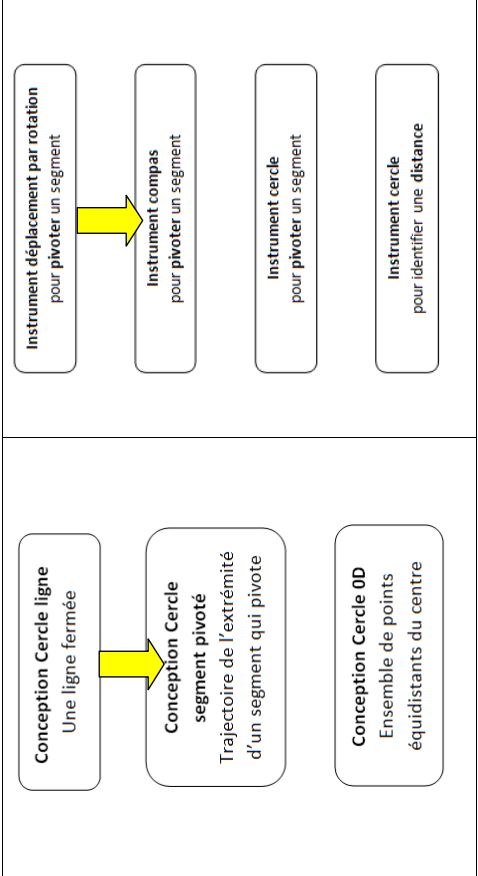
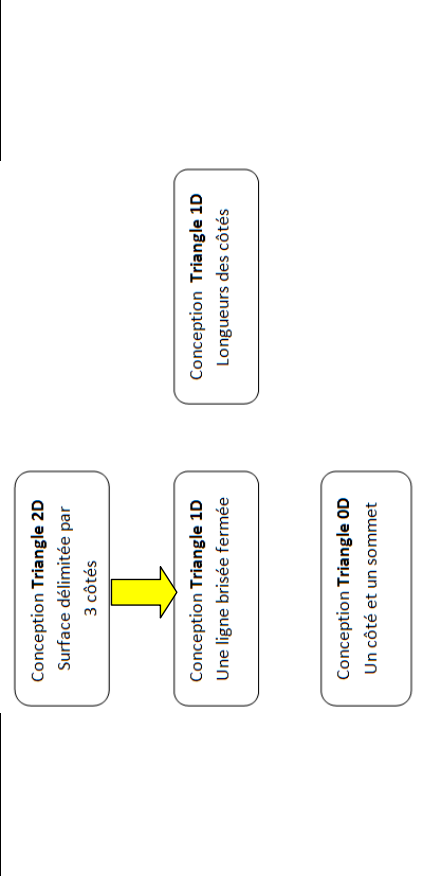
Première activité papier-crayon						
a,b,c		d et e				
R	Instrument	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
rP11 + rP12	Compas pour pivoter	rLB rP11 + rP12	ΣT3 + ΣT4	Ligne brisée	Compas pour pivoter	CT1D-LB

Cahier informatisé « Construire des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rPiv	ΣExt + ΣRot	Pivoter-rotation	IPiv	CT1D-LB
Page 2	rRot rPi1-gdCo	ΣPointe+ΣMine	Pivoter-compas	Compas pour pivoter	CT1D-LB CC-SP
Page 3	rM-gdR rS2-gdR	ΣCen+ΣRay			CT1D-LB
Page 4	rC1-gdCe				
Page 5	rS-gdS rC1-gdCe				
Page 6	rC1-gdCe				
Aide outil cercle : oui cercle de rayon donné					

Deuxième activité papier-crayon				
R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
rLB	ΣT3 ou ΣT4	Ligne brisée	Compas pour pivoter	CT1D-LB
rPi1 + rPi2				CC-SP

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle

Pour pivoter. Pour faire des cercles. Pour déterminer l'existence ou non du triangle.



23. Mohan

Cahier informatisé « A la découverte des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rTran ou rTrans rRot rSu	ΣTran ΣSu	Ajustement	ITrans	CT2D
Page 2	rTran ou rTrans rPiv rSu	ΣExtr et ΣRot	Ajustement	ITrans IPiv	CT2D
Page 3	rTran ou rTrans rPiv rSu	ΣExtr et ΣRot	Ajustement	ITrans IPiv	CT2D
Page 4	rTran ou rTrans	« les point ne peuve pas tourne »			
Page 5	rTran ou rTrans rPiv rSu	ΣExtr et ΣRot	Ajustement	ITrans IPiv	CT2D

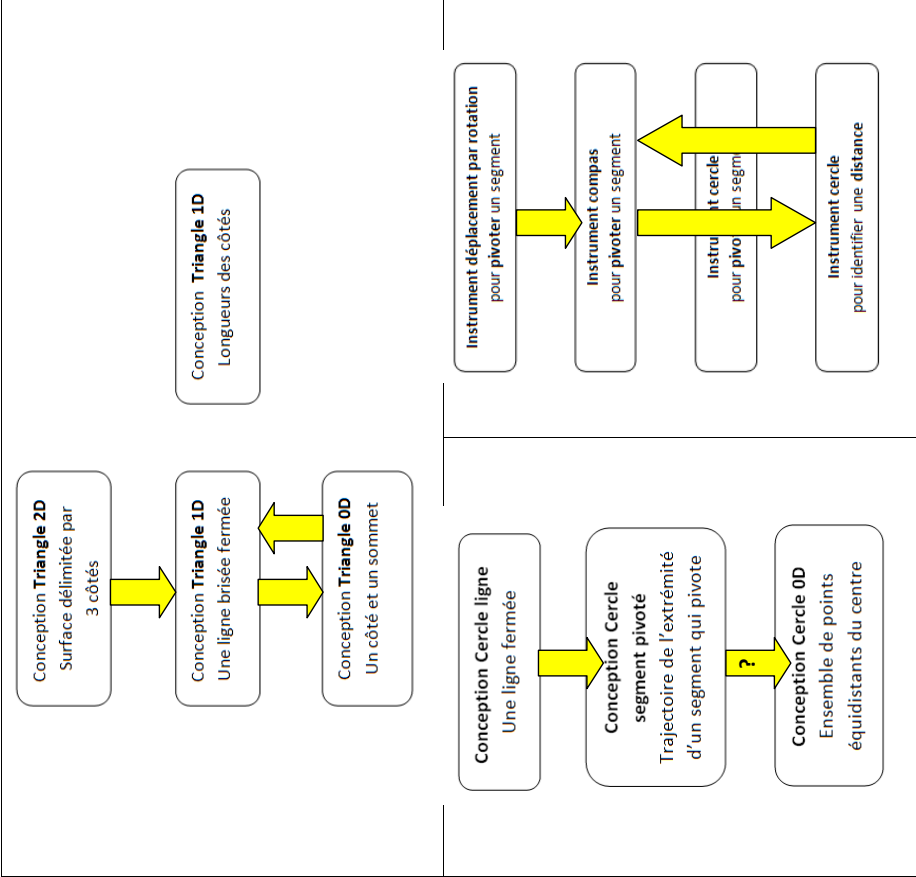
Première activité papier-crayon						
a,b,c		d et e				
R	Instrument	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
rS2+rS2E +rS2E	Compas mobilisé	rS2+rS2E+rS2E	ΣT1	A la règle graduée	Règle graduée	CT2D

Cahier informatisé « Construire des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rPiv	ΣExt + ΣRot	Pivoter- rotation	Ipiv	CT1D-LB
Page 2	rP11-gdCe rPiv	ΣPointe+ΣMline ΣExt + ΣRot	Pivoter- compas	Compas pour pivoter	CT1D-LB CC-SP
Page 3	rC1-gdCe rPiv	ΣExt + ΣRot			CT1D-LB
Page 4	rT-gdT rPiv	ΣExt + ΣRot			CT1D-LB
Page 5	rS-gdS				
Page 6	rC3-gdCe	ΣCenC+ΣRayC	Cercle	Cercle pour distance	CT0D CC0D
Aide outil cercle : oui cercle de rayon donné					
Deuxième activité papier-crayon					

R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
rLB	ΣT3 ou ΣT4	Ligne brisée	Compas pivoter	CT1D-LB
rP11 + rP12				CC-SP

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle

Pour déterminer le troisième sommet.



24. Nawel

Cahier informatisé « A la découverte des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rTran ou rTrans	ΣTran	Ajustement	ITrans IPiv	CT2D
	rRot	ΣExtr et ΣRot ΣSu			
	rPiv				
	rSu				
Page 2	rLib	ΣExtr et ΣRot	Ligne brisée	ITrans IPiv	CT1D-LB
Page 3	rPiv	ΣExtr et ΣRot	Ligne brisée	ITrans IPiv	CT1D-LB
	rLib				
Page 4	rTran ou rTrans	« non il peuvent pas parce que je les ai mis l'un sur l'autre »			CT1D-LC
Page 5	rLib	ΣExtr et ΣRot	Ligne brisée	ITrans IPiv	CT1D-LB

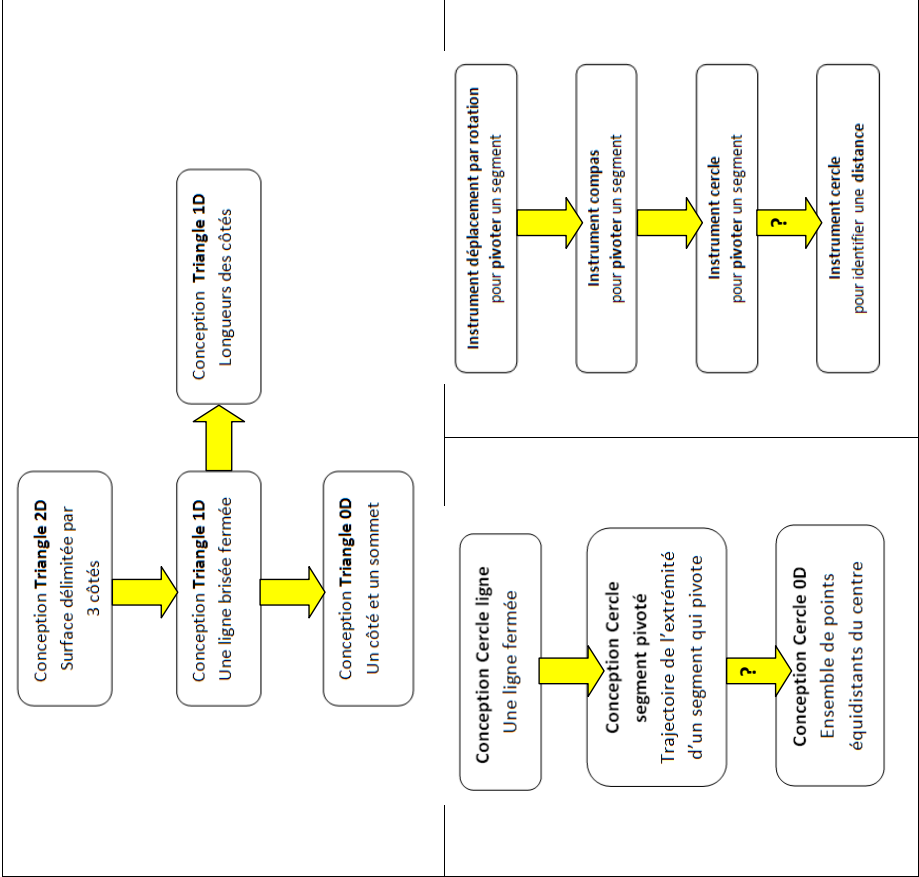
Première activité papier-crayon						
a,b,c		d et e				
R	Instrument	R	$\Sigma$	Stratégie	Instrument	Conception
rP11 + rP12	Compas pour pivoter	rM	$\Sigma T8 + \Sigma T9$	Inégalité triangulaire	Règle graduée	CT1D-LC

Cahier informatisé « Construire des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rPiv	ΣExt + ΣRot	Pivoter-rotation	Ipiv	CT1D-LB
Page 2	rRot rPI1-gdCo	ΣPointe+ΣMine	Pivoter-compas	Compas pour pivoter	CT1D-LB CC-SP
Page 3	rPI1-gdCe	ΣCen+ΣRay	Pivoter-cercle	Cercle pour pivoter	CT1D-LB CC-SP
Page 4	Idem	Idem	Idem	Idem	Idem
Page 5	rC1-gdCe				
Page 6					
Aide outil cercle :					

Deuxième activité papier-crayon				
R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
rC3 + rS3	ΣT5 + ΣT7 ou ΣT4	A la règle et au compas	Compas pour tracer des cercles ou pour pivoter	CT0D CC-SP ou CC0D

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle

Tracer la pointe du triangle.





25. Roseline

Cahier informatisé « A la découverte des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rTran ou rTrans rRot rPiv rSu	ΣTran ΣExtr et ΣRot ΣSu	Ajustement	ITrans IPiv	CT2D
Page 2	Idem	Idem	Idem	Idem	CT2D
Page 3	rLib sS-gdS	ΣExtr et ΣRot	Complète le triangle à la règle		CT2D
Page 4	rTran ou rTrans				
Page 5	rLib rS-gdR	ΣExtr et ΣRot	Complète le triangle à la règle		CT2D

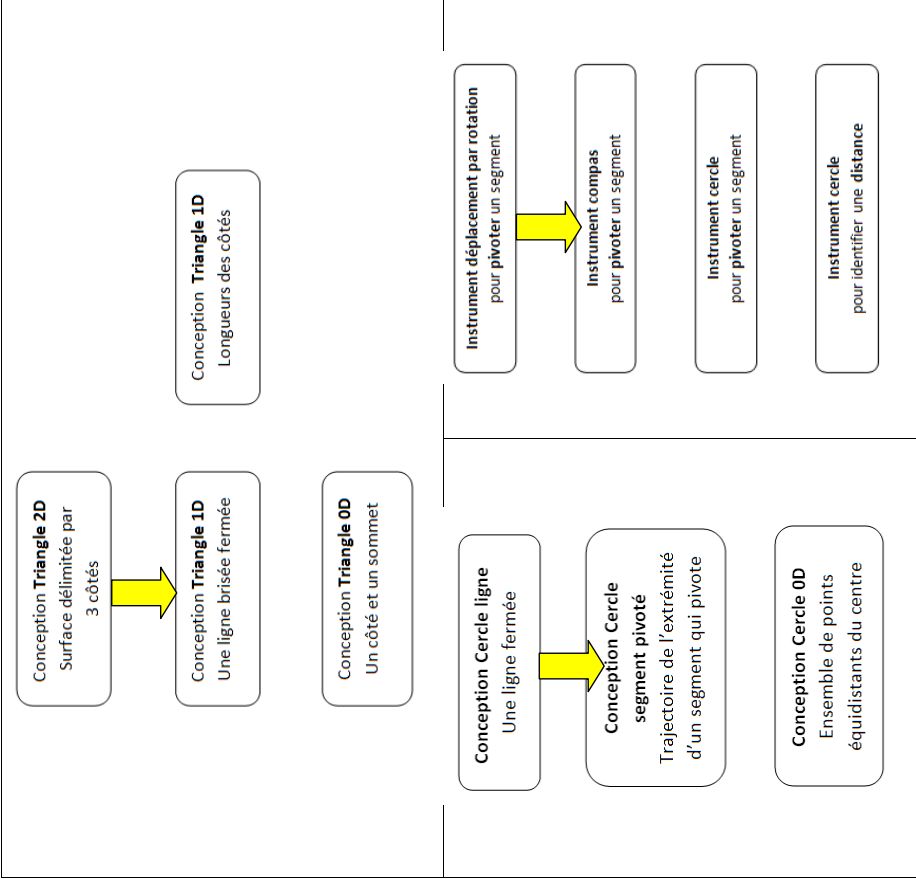
Première activité papier-crayon					
d et e					
R	Instrument	R	Σ	Stratégie	Conception
rPi1	Compas pour pivoter	rLB rPi1	ΣT3 + ΣT4	Ligne brisée	CT1D-LB

Cahier informatisé « Construire des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rPiv	ΣExt + ΣRot	Pivoter-rotation	Ipiv	CT1D-LB
Page 2	rRot rPi1-gdCo	ΣPointe+ΣMine	Pivoter-compas	Compas pour pivoter	CT1D-LB CC-SP
Page 3	rRot rS-gdS				
Page 4	rRot rC1-gdCe				
Page 5	rT-gdT				
Page 6	rS-gdS				
Aide outil cercle :					

Deuxième activité papier-crayon				
R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
rLB rPi1 + rPi2	ΣT3 ou ΣT4	Ligne brisée	Compas pour pivoter	CT1D-LB CC-SP

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle

Déterminer l'existence ou non du triangle.



26. Séraphin

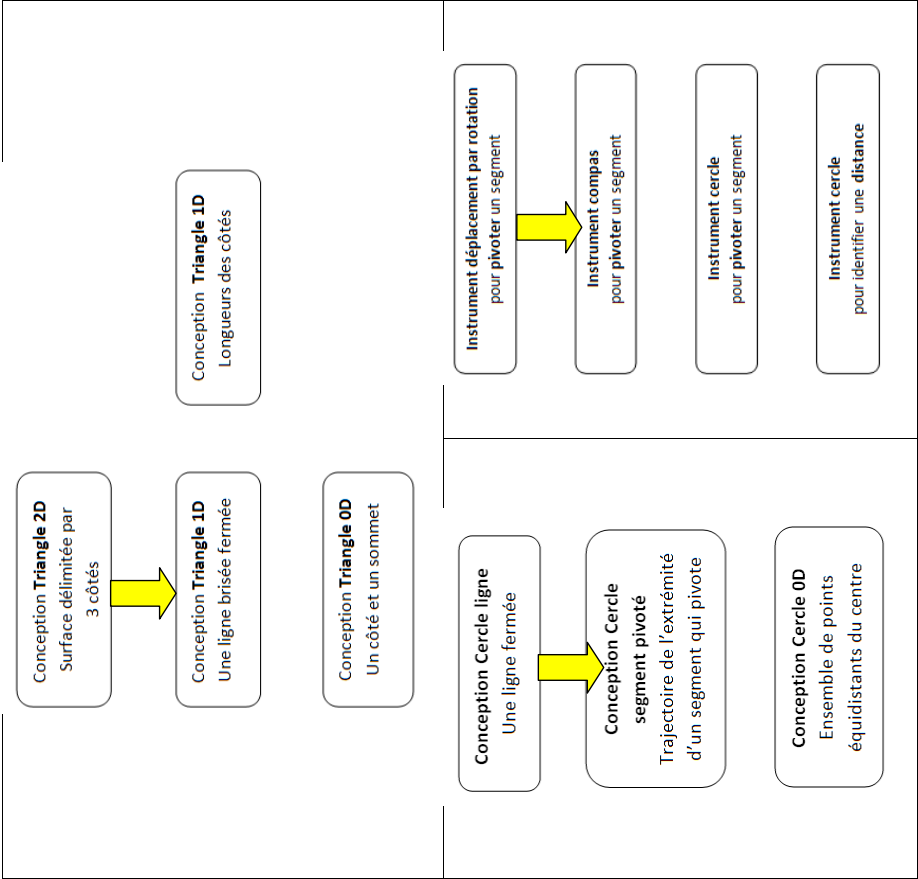
Cahier informatisé « A la découverte des triangles »						
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception	
Page 1	rTran ou rTrans rRot rSu rM-gdM	ΣTran  ΣSu	Ajustement	ITrans	CT2D	
Page 2	rTran ou rTrans rPiv rSu	ΣTran ΣExtr et ΣRot ΣSu	Ajustement	ITrans IPiv	CT2D	
Page 3	Idem	Idem	Idem	Idem	CT2D	
Page 4	rTran ou rTrans	« on peut pas car il a un segment trop petit »				
Page 5	rTran ou rTrans rPiv rSu	ΣTran ΣExtr et ΣRot ΣSu	Ajustement	ITrans IPiv	CT2D	

Première activité papier-crayon						
a,b,c	d et e					
R	Instrument	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
rPi1 + rPi2	Compas pour pivoter	rC3				

Cahier informatisé « Construire des triangles »						
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception	
Page 1	rPiv	ΣExt + ΣRot	Pivoter-rotation	Ipiv	CT1D-LB	
Page 2	rRot rC1-gdCe rPiv				CT1D-LB	
Page 3	rPiv	ΣExt + ΣRot			CT1D-LB	
Page 4	Idem	Idem	Idem	Idem	Idem	
Page 5	rS-gdS					
Page 6						
Aide outil cercle :						

Deuxième activité papier-crayon					
R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception	
rLB rPi1 + rPi2	ΣT3 ou ΣT4	Ligne brisée	Compas pour pivoter	CT1D-LB CC-SP	

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle  
Pour pivoter les segments.



27. Sidonie

Cahier informatisé « A la découverte des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rTran ou rTrans rRot rT-gdT rSu	ΣTran	Ajustement	ITrans	CT2D
Page 2	rM-gdM rTran ou rTrans rPiv rSu	ΣSu ΣTran ΣExt et ΣRot	Ajustement	ITrans IPiv	CT2D
Page 3	Idem	Idem	Idem	Idem	CT2D
Page 4	rTran ou rTrans	« non on ne peut pas faire un triangle avec ses trois segment on obligé de les bouger si non ses impossible »			
Page 5	rLib rPiv	ΣExt et ΣRot	Ligne brisée	ITrans IPiv	CT1D-LB

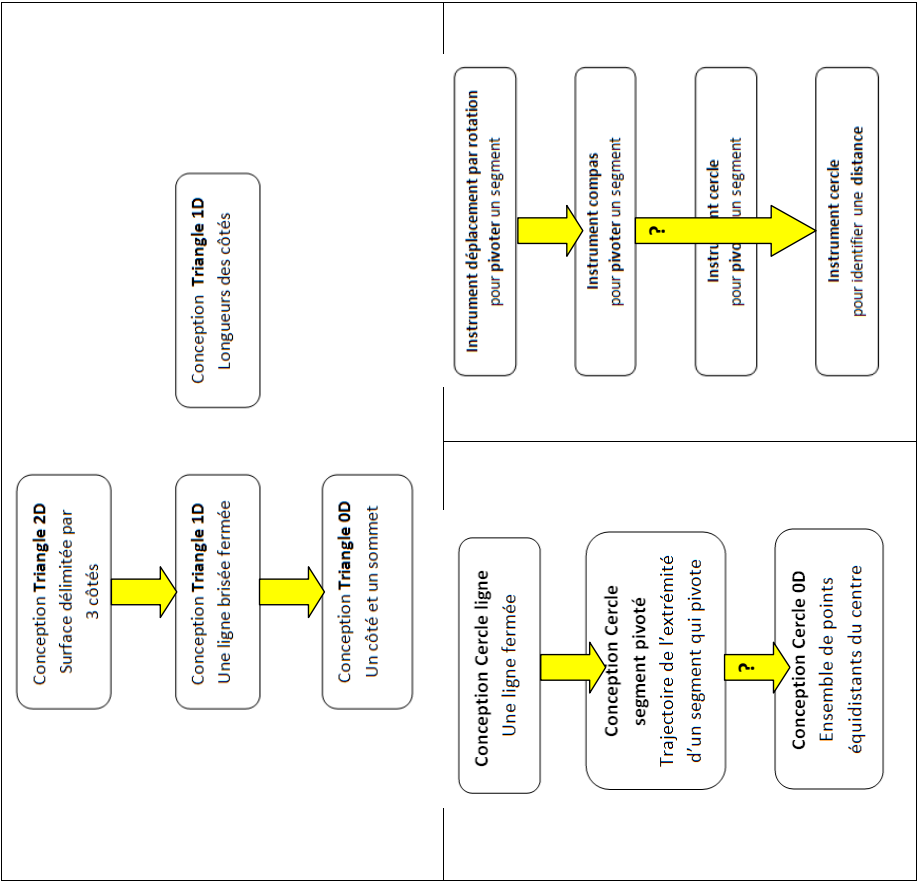
Première activité papier-crayon						
a,b,c		d et e				
R	Instrument	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
rPi1 + rPi2	Compas pour pivoter					

Cahier informatisé « Construire des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rPiv	ΣExt + ΣRot	Pivoter-rotation	IPiv	CT1D-LB
Page 2	rP1L-gdCo rT-gdT rPiv	ΣCen+ΣRay ΣExt + ΣRot	Pivoter-compas	Compas pour pivoter	CT1D-LB CC-SP
Page 3	rRot rPiv	ΣExt + ΣRot			CT1D-LB
Page 4	rT-gdT rPiv	ΣExt + ΣRot			CT1D-LB
Page 5	rS-gdS				
Page 6	rT-gdT				
Aide outil cercle :					

Deuxième activité papier-crayon				
R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
rC3 + rS3	ΣT5 + ΣT7 ou ΣT6	A la règle et au compas	Compas pour tracer des cercles ou pour pivoter	CT0D CC-SP ou CC0D

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle

Pour pivoter les segments. Pour déterminer l'existence ou non du triangle.

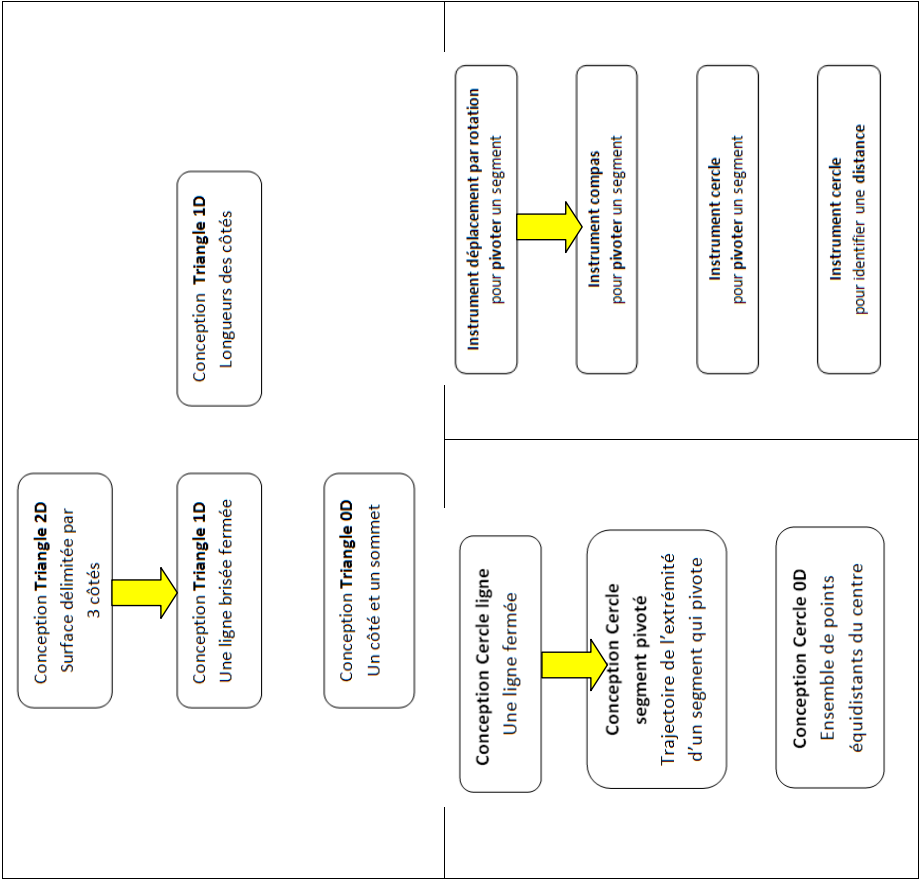


28. Solal

Deuxième activité papier-crayon				
R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
rLB	ΣT3 ou ΣT4	Ligne brisée	Compas pour pivoter	CT1D-LB
rPI1 + rPI2				CC-SP

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle

Pour pivoter les segments.



Cahier informatisé « A la découverte des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rTran ou rTrans rRot rSu	ΣTran ΣSu	Ajustement	ITrans	CT2D
Page 2	rLib rPiv	ΣExt et ΣRot	Ligne brisée	ITrans IPiv	CT1D-LB
Page 3	Idem	Idem	Idem	Idem	CT1D-LB
Page 4	rTran ou rTrans	« non : parce que ci les segments sont tous horizontale et que l'on peut pas les pivoter on peut pas faire un triangle »			
Page 5	rLib rPiv	ΣExt et ΣRot	Ligne brisée	ITrans IPiv	CT1D-LB

Première activité papier-crayon					
a,b,c	d et e				
R	Instrument	R	Σ	Stratégie	Conception
rPI1 + rPI2	Compas pour pivoter	rLB rPI1 + rPI2	ΣT3 + ΣT4	Ligne brisée	CT1D-LB

Cahier informatisé « Construire des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rPiv	ΣExt + ΣRot	Pivoter-rotation	IPiv	CT1D-LB
Page 2	rM-gdM rPiv	ΣExt + ΣRot			CT1D-LB
Page 3	rPiv	ΣExt + ΣRot			CT1D-LB
Page 4	rRot rS1-gdS				
Page 5	rS-gdS				
Page 6	rT-gdT				
Aide outil cercle :					

29. Toni

Cahier informatisé « A la découverte des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rTran ou rTrans rRot rSu	ΣTran	Ajustement	ITrans	CT2D
Page 2	rTran ou rTrans rPiv rSu	ΣTran ΣExt + ΣRot ΣSu	Ajustement	ITrans IPiv	CT2D
Page 3	Idem	Idem	Idem	Idem	CT2D
Page 4	rTran ou rTrans	« on ne peut pas »			
Page 5	rTran ou rTrans rPiv rSu	ΣTran ΣExt + ΣRot ΣSu	Ajustement	ITrans IPiv	CT2D

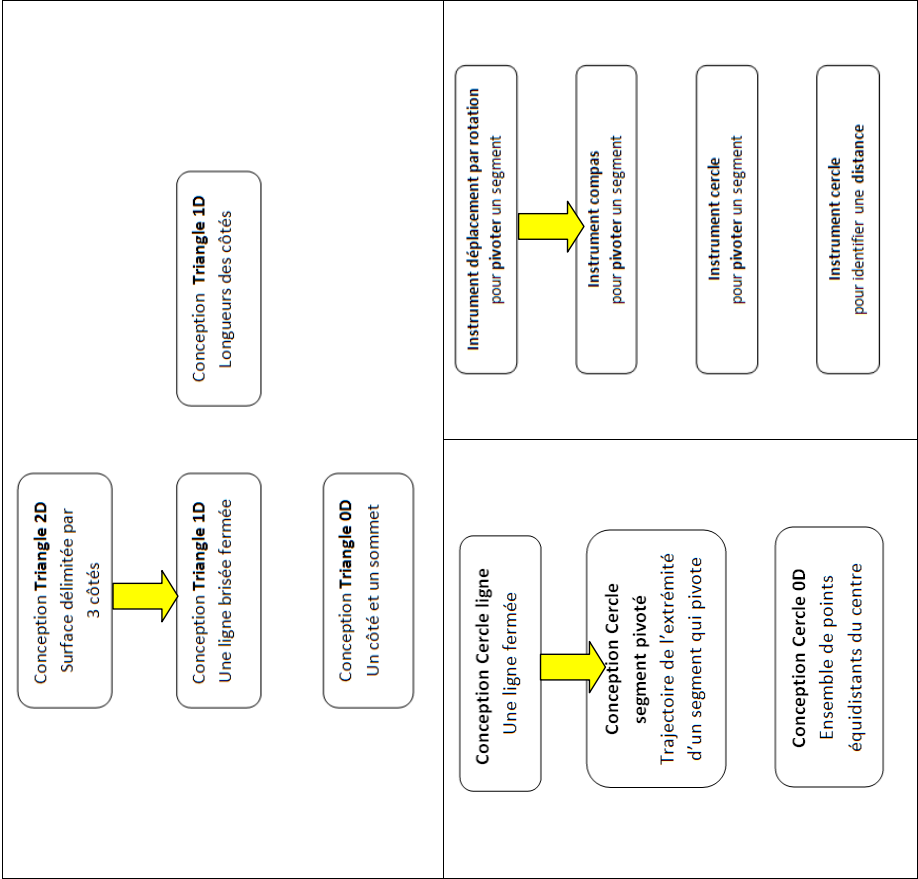
Première activité papier-crayon						
a,b,c		d et e				
R	Instrument	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
rS2+rS2E +rS2E	Règle graduée					CT2D

Cahier informatisé « Construire des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rPiv	ΣExt + ΣRot	Pivoter-rotation	Ipiv	CT1D-LB
Page 2	rAC2-gdCo				
Page 3	rS1-gdS				
Page 4	rT-gdT				
Page 5	rT-gdT				
Page 6	rT-gdT				
Aide outil cercle :					

Deuxième activité papier-crayon				
R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
rLB	ΣT3 ou ΣT4	Ligne brisée	Compas pivoter	CT1D-LB
rP11 + rP12				CC-SP

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle

Pour tracer des arcs de cercle et savoir où les segments se touchent.



30. Ursule

Cahier informatisé « A la découverte des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rTran ou rTrans rRot rSu	ΣTran ΣSu	Ajustement	ITrans	CT2D
Page 2	Idem	Idem	Idem	Idem	CT2D
Page 3	rTran ou rTrans rPiv rSu	ΣTran ΣExt + ΣRot ΣSu	Ajustement	ITrans IPiv	CT2D
Page 4	rTran ou rTrans				
Page 5	rLib rPiv	ΣExt + ΣRot	Ligne brisée	ITrans IPiv	CT1D-LB

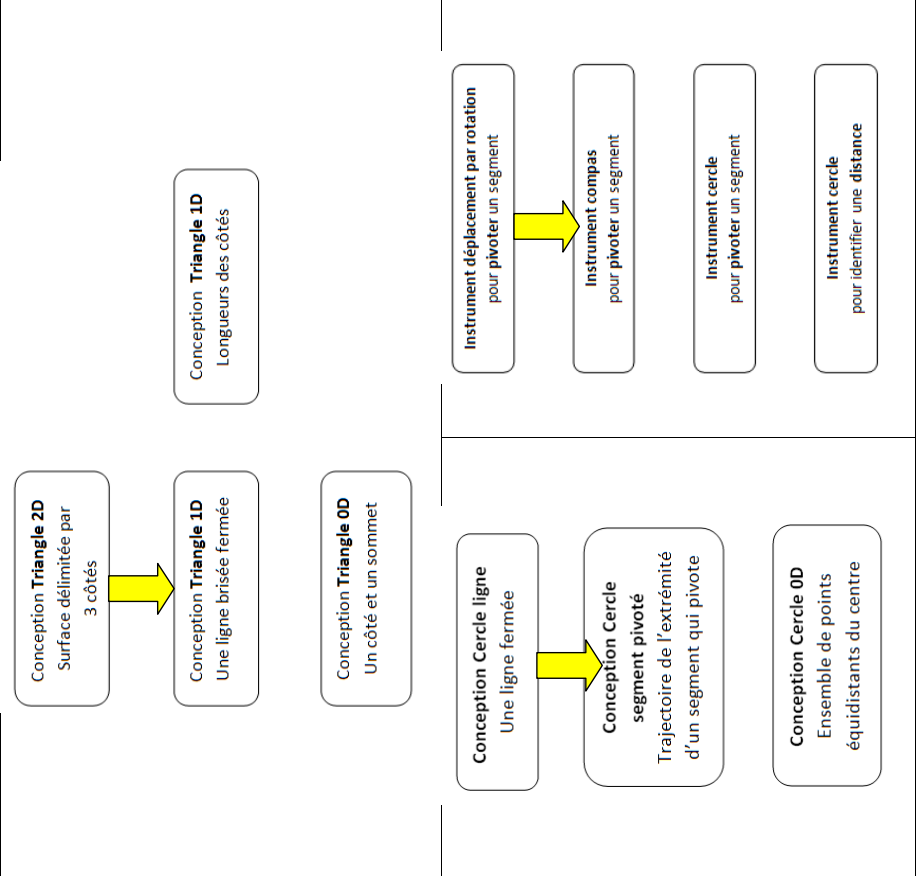
Première activité papier-crayon					
a,b,c	d et e				
R	Instrument	R	Σ	Stratégie	Conception
rPi1 + rPi2	Compas pour pivoter	rLB rPi1 + rPi2	ΣT3 + ΣT4	Ligne brisée	CT1D-LB

Cahier informatisé « Construire des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rPiv	ΣExt + ΣRot	Pivoter-rotation	IPiv	CT1D-LB
Page 2	rRot rPi1-gdCo	ΣPointe+ΣMline	Pivoter-compas	Compas pour pivoter	CT1D-LB CC-SP
Page 3	rT-gdT				
Page 4	rS1-gdS rPiv	ΣExt + ΣRot			CT1D-LB
Page 5	rS-gdS				
Page 6	rT-gdT				
Aide outil cercle :					

Deuxième activité papier-crayon				
R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
rLB	ΣT3 ou ΣT4	Ligne brisée	Compas pour pivoter	CT1D-LB
rPi1 + rPi2				CC-SP

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle

Pour tracer des cercles. Pour déterminer l'existence ou non du triangle.



31. Yacinthe

Cahier informatisé « A la découverte des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rTran ou rTrans	ΣTran	Ajustement + Ligne brisée	ITrans	CT1D-LB
	rRot	ΣExt + ΣRot			
	rPiv	ΣSu			
	rSu				
	rLiB				
Page 2	rLiB	ΣExt + ΣRot	Ligne brisée	ITrans IPiv	CT1D-LB
Page 3	rPiv				
	Idem	Idem	Idem	Idem	CT1D-LB
Page 4	rTran ou rTrans				
	rT-gdT rS-gdS				
Page 5	rLiB	ΣExt + ΣRot	Ligne brisée	ITrans	CT1D-LB
	rPiv			IPiv	

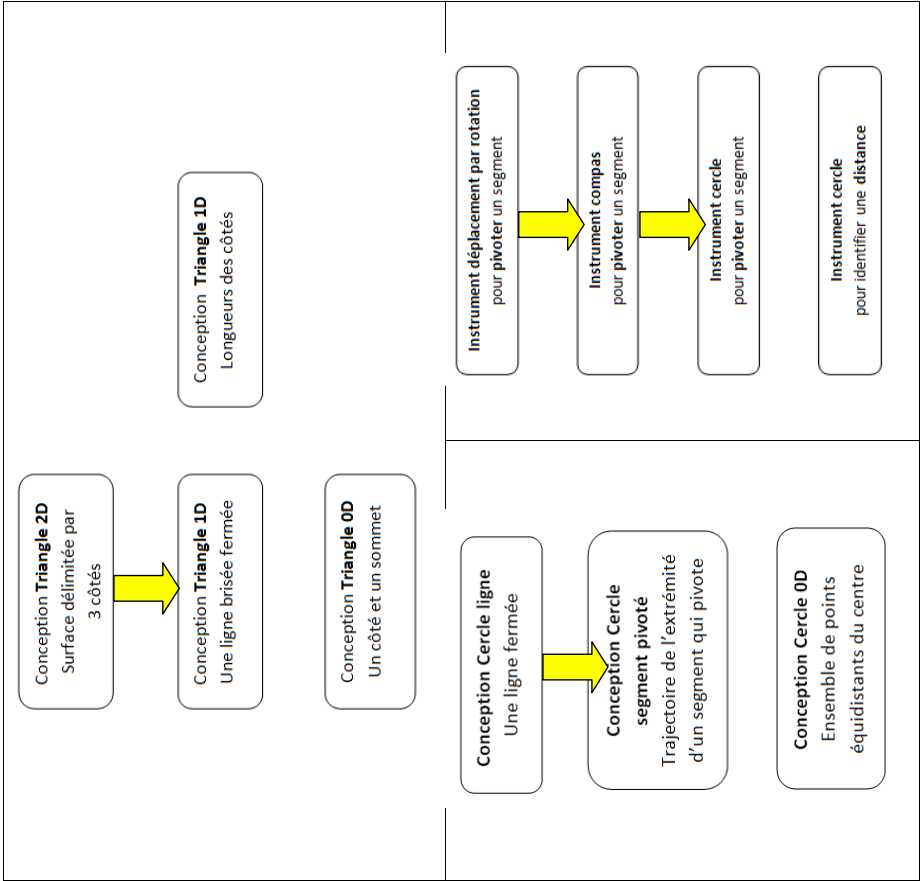
Première activité papier-crayon						
a,b,c		d et e				
R	Instrument	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
rS2+rS2E +rS2E  rPi1 + rPi2	Compas pour pivoter	rS2+rS2E+rS2E	ΣT1	A la règle graduée	Règle graduée	CT2D

Cahier informatisé « Construire des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rPiv	ΣExt + ΣRot	Pivoter- rotation	Ipiv	CT1D-LB
Page 2	rRot	ΣPointe+ΣMine ΣExt + ΣRot	Pivoter- compas	Compas pour pivoter	CT1D-LB
	rPi1-gdCo rPiv				CC-SP
Page 3	rT-gdT rPiv	ΣExt + ΣRot			CT1D-LB
Page 4	rPi1-gdCe rPiv	ΣCen+ΣRay ΣExt + ΣRot	Pivoter-cercle	Cercle pour pivoter	CT1D-LB
	rS-gdS				CC-SP
Page 5	rS-gdS				
Page 6	rS-gdS				
Aide outil cercle :					

Deuxième activité papier-crayon				
R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
rLB rPi1 + rPi2	ΣT3 ou ΣT4	Ligne brisée	Compas pour pivoter	CT1D-LB
				CC-SP

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle

Pour tourner les segments. Pour tracer un arc de cercle.



32. Yann

Cahier informatisé « A la découverte des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rTran ou rTrans rRot rSu	ΣTran  ΣSu	Ajustement	ITrans	CT2D
Page 2	rTran ou rTrans rPiv rSu	ΣTran ΣExt + ΣRot ΣSu	Ajustement	ITrans IPiv	CT2D
Page 3					
Page 4	rTran ou rTrans				
Page 5					

Première activité papier-crayon						
d et e						
R	Instrument	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
rS2+rS2E +rS2E	Règle graduée	rS2+rS2E+rS2E	ΣT1	A la règle graduée	Règle graduée	CT2D

Cahier informatisé « Construire des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1					
Page 2	rRot rPiv	$\Sigma Ext + \Sigma Rot$			CT1D-LB
Page 3	rRot rPiv	$\Sigma Ext + \Sigma Rot$			CT1D-LB
Page 4	rPiv	$\Sigma Ext + \Sigma Rot$			CT1D-LB
Page 5	rC1-gdCe				
Page 6					
Aide outil cercle :					

Deuxième activité papier-crayon				
R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
rS2+rS2E+rS2E	ΣT1	Règle graduée		CT2D

<div>Conception <b>Triangle 2D</b> Surface délimitée par 3 côtés</div>	<div>Conception <b>Triangle 1D</b> Une ligne brisée fermée</div>	<div>Conception <b>Triangle 1D</b> Longueurs des côtés</div>
<div>Conception <b>Cercle ligne</b> Une ligne fermée</div>	<div>Conception <b>Cercle segment pivoté</b> Trajectoire de l'extrémité d'un segment qui pivote</div>	<div>Conception <b>Cercle 0D</b> Ensemble de points équidistants du centre</div>
<div>Instrument déplacement par rotation pour pivoter un segment</div>	<div>Instrument compas pour pivoter un segment</div>	<div>Instrument cercle pour pivoter un segment</div>
		<div>Instrument cercle pour identifier une distance</div>



33. Yasmina

Cahier informatisé « A la découverte des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rTran ou rTrans rAC-gdCo rS-gdR	ΣTran			
Page 2	rM-gdM rTran ou rTrans rRot	ΣTran			
Page 3	Idem	Idem			
Page 4	rTran ou rTrans rS-gdS				
Page 5	rTran ou rTrans rPiv rSu	ΣExt + ΣRot ΣSu	Ajustement	ITrans IPiv	CT2D

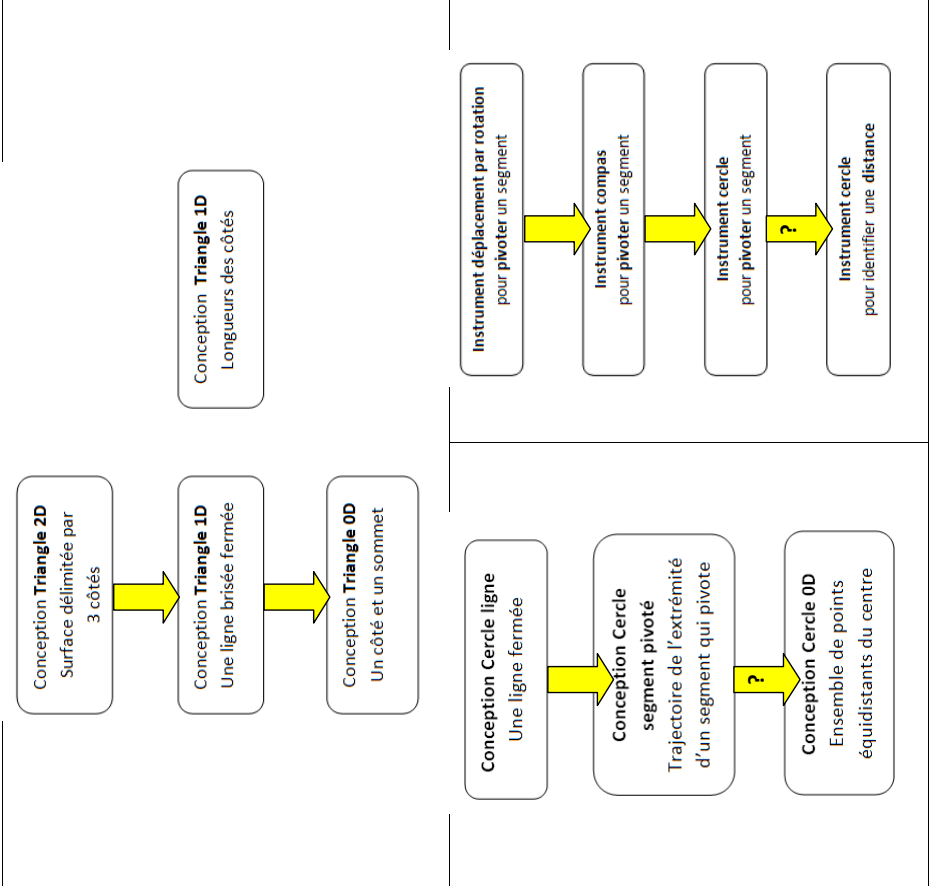
Première activité papier-crayon					
d et e					
R	Instrument	R	Σ	Stratégie	Conception
rPi1 + rPi2	Compas pour pivoter	rLB rPi1 + rPi2	ΣT3 + ΣT4	Ligne brisée	CT1D-LB

Cahier informatisé « Construire des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rPiv	ΣExt + ΣRot	Pivoter-rotation	IPiv	CT1D-LB
Page 2	rRot rPi1-gdCo rPiv	ΣPointe+ΣMine ΣExt + ΣRot	Pivoter-compas	Compas pour pivoter	CT1D-LB CC-SP
Page 3	rPi1-gdCe rPiv	ΣCen+ΣRay ΣExt + ΣRot	Pivoter-cercle	Cercle pour pivoter	CT1D-LB CC-SP
Page 4	Idem	Idem	Idem	Idem	Idem
Page 5	rS-gdS rC1-gdCe				
Page 6	rT-gdT				
Aide outil cercle :					

Deuxième activité papier-crayon				
R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
rC3 + rS3	ΣT5 + ΣT7 ou ΣT6	A la règle et au compas	Compas pour tracer des cercles ou pour pivoter	CT0D CC-SP ou CC0D

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle

Pour déterminer l'existence ou non du triangle.



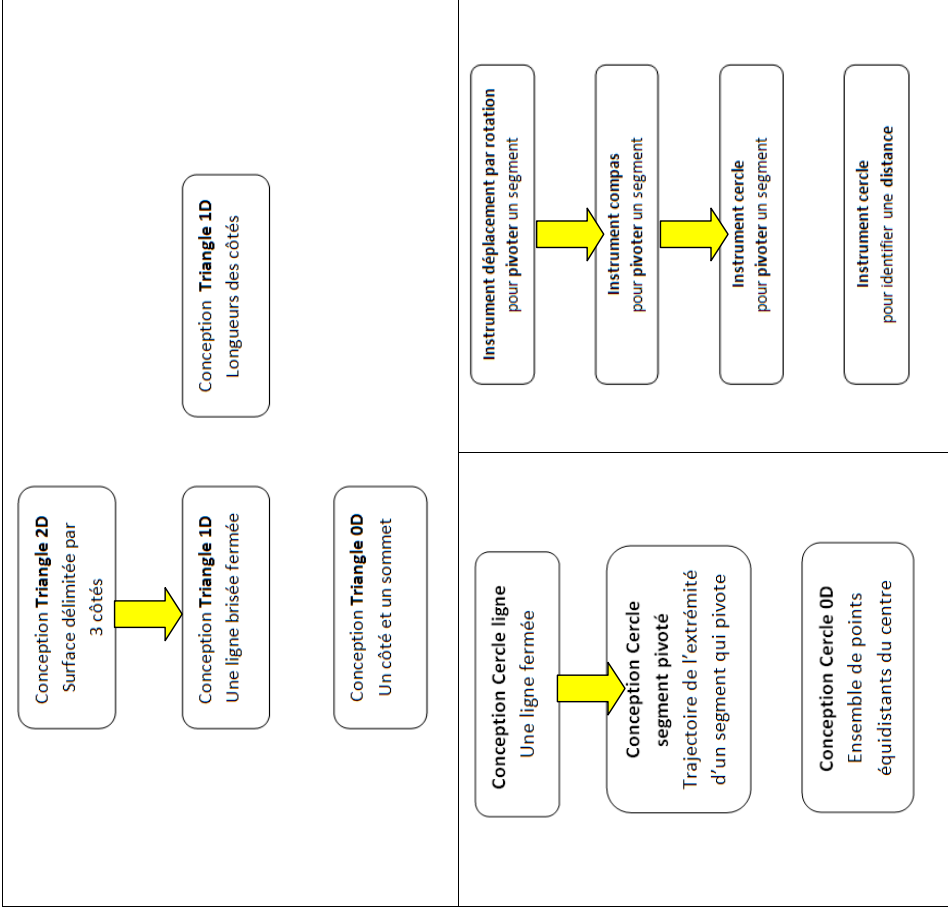
34. Zéphir

Cahier informatisé « A la découverte des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rTran ou rTrans	ΣTran	Ajustement	ITrans	CT1D-LB
	rRot	ΣExt + ΣRot ΣSu	Ligne brisée		
	rPiv				
	rSu				
	rLib				
Page 2	rLib	ΣExt + ΣRot	Ligne brisée	ITrans	CT1D-LB
Page 3	rPiv			IPiv	
	Idem	Idem	Idem	Idem	CT1D-LB
Page 4	rTran ou rTrans	« si on arriverai pas à prévoir un triangle les deux petit segment seraient plus petit que le plus grand lorsqu'on les attache »			CT1D-LB
Page 5	rLib	ΣExt + ΣRot	Ligne brisée	ITrans	CT1D-LB
	rPiv			IPiv	

Première activité papier-crayon					
a,b,c					
d et e					
R	Instrument	R	Σ	Stratégie	Conception
rP11 + rP12	Compas	rLB	ΣT3 + ΣT4	Ligne brisée	CT1D-LB
	pour pivoter	rP11 + rP12		Compas pour pivoter	

Cahier informatisé « Construire des triangles »					
	R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
Page 1	rPiv	ΣExt + ΣRot	Pivoter-rotation	IPiv	CT1D-LB
Page 2	rRot	ΣPointe+ΣMine	Pivoter-compas	Compas pour pivoter	CT1D-LB
Page 3	rP11-gdCo				CC-SP
	rM-gdM ou R	ΣExt + ΣRot			CT1D-LB
	rPiv				
Page 4	rP11-gdCe	ΣCen+ΣRay	Pivoter-cercle	Cercle pour pivoter	CT1D-LB
	rPiv	ΣExt + ΣRot			CC-SP
Page 5	rS-gdS				
Page 6	rC1-gdCe				
Aide outil cercle : oui cercle de rayon donné					

Deuxième activité papier-crayon				
R	Σ	Stratégie	Instrument	Conception
rLB	ΣT3 ou ΣT4	Ligne brisée	Compas pour pivoter	CT1D-LB
rP11 + rP12				CC-SP





## **Annexe 6. Questionnaire donné aux élèves à la fin de la situation**

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle ?

Aline

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle ?

on utilise un compas pour construire un  
triangle parce que si on utilise pas de compas  
on peut pas faire un triangle  
je trace un arc avec le compas  
pour trouver le triangle.

Alycia

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle ?

pour bien rejoindre les lignes  
au bon endroit  
et

pour bien savoir où  
est le sommet d'un  
Triangle.

Argène

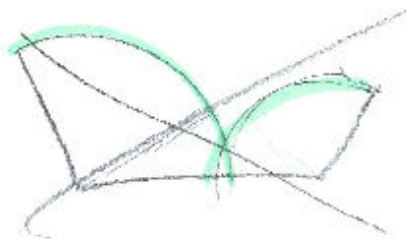
Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle ?

On utilise un compas pour tracer les segments et savoir si on peut tracer un triangle...

Camille

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle ?

On n'utilise le compas parce que ça nous aide à voir si on peut faire un triangle.



LB

Carole

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle ?

Pour savoir si on peut  
tracer un triangle avec  
des segments et pour les faire  
pivoter.

Uba

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle ?

Nous utilisons un compas pour faire  
pivoter les segments et pour voir les  
croisements et construire un triangle.

Djennil

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle ?

On utilise un compas pour vérifier si on peut faire un triangle.  
Et après on applique les bords avec un angle donné et après on  
regarde si dans les deux côtés s'ils se touchent et on peut  
faire un triangle si les deux se touchent.

Gonzague

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle ?

Parce que quand les demi-cercles se rejoignent ça  
sert à nous expliquer où on doit faire le  
triangle.



Hadeline

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle ?

Le compas nous aide à voir si les deux  
cercle se touche et si il se touche on peut  
faire un triangle mais si il se touche pas  
on peut pas faire de triangle

Hawaïs

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle ?

On utilise un compas pour construire un  
triangle pour rassembler les extrémité

Imène

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle ?

Pour mesurer le poim et les trois segments  
se rejoignent pour faire un triangle ou  
plusieurs.

Isidore

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle ?

Pour voir quand il se croise.

Ivanoe

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle ?

on utilise un compas pour être  
plus précis et le compas sert à  
nous indiquer l'angle.

Kalinka

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle ?

On utilise le compas pour tracer des cercles, pour voir  
le point où se coupe les deux cercles.

le point où se coupe les deux cercles  
c'est le troisième sommet du triangle.

Karim

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle ?

pour faire une rotation et un arc de cercle pour tracer  
le troisième

Loris

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle ?

pour faire deux arcs aux début des segments, on voit où ils se croise  
et après on trace le même segment au croisement et on a  
un triangle.

Luna

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle ?

On utilise un compas pour voir si les arcs  
se rejoignent et les segments bougent

Marie

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle ?

on fait une notation pour les  
deux segments qui se croisent  
et après on trace jusqu'à la  
notation

**Marilène**

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle ?

On utilise un compas pour imaginer la  
notation des segments et pour voir si c'est  
possible avant de tracer le triangle.

**Méline**

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle ?

On prend un compas pour mettre  
l'aiguille sur une des segments et  
faire un cerce pour obtenir un  
triangle.

**Mylène**

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle ?

On utilise un compas pour voir  
si les segments se touchent mes pour  
car il faut des cerce.

**Moham**

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle ?

le compas sert à savoir on situe le troisième  
point.

Nawel

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle ?

Parce que on a besoin pour  
faire un triangle. Il faut tracer  
la pointe du triangle.

Roseline

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle ?

Un compas ça sert à voir si on peut faire  
un triangle avec les trois segments



Séraphin

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle ?

les pour faire un segment

Sidonie

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle ?

On utilise un compas pour voir si les deux segments se rejoignent. Et si il se rejoignent on peut tracer notre triangle.

**Salah**

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle ?

On utilise le compas pour savoir où les côtés  
se croisent pour former le triangle.

**Tom**

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle ?

car avec la ligne brisée en traçant un demi-cercle  
on peut voir si il se touche.

LG

Ursule

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle ?

parce que on sent à faire un cercle et après on voit si se croise  
on peut dire que c'est un triangle si on si il se croise pas ce n'est  
pas un triangle


Yannick

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle ?

parce que on n'arrivera pas à en faire. Le  
compas sert à tourner mes segments. Avec le  
compas, je trace un arc de cercle pour  
arriver à faire un triangle.

Yasmina

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle ?

 On utilise le compas car il nous aide à avoir soi les trois segments pour faire un triangle. Et après je ~~com~~ regarde si sa se touche et si sa se touche pas sa ne peut pas faire un triangle.

Zephia

Pourquoi utilise-t-on un compas pour construire un triangle ?

pour savoir si les deux segments se croisent



## Annexe 7. Bilan des deux activités papier-crayon sur trois années consécutives

	2014 : 38 élèves		2015 : 50 élèves		2016 : 44 élèves	
<b>PC1 a et b (et c en 2016)</b>	Nombre d'élèves		Nombre d'élèves		Nombre d'élèves	
Compas pour pivoter	35		45		34	
3 <sup>ème</sup> sommet marqué	1		15		10	
Triangle tracé	28		36		23	
	<b>PC1 d et e</b>	<b>PC2</b>	<b>PC1 d et e</b>	<b>PC2</b>	<b>PC1 d et e</b>	<b>PC2</b>
<b>Stratégie Ligne brisée</b>	10	<b>19</b>	11	<b>18</b>	19	<b>31</b>
3 <sup>ème</sup> sommet marqué	1		4	1	4	5
Triangle tracé	9	18	8	18	15	29
<b>Stratégie règle et compas</b>	5	<b>7</b>	10	<b>25</b>	4	<b>7</b>
3 <sup>ème</sup> sommet marqué			1	6	3	1
Triangle tracé	5	7	10	25	3	6
<b>Stratégie règle graduée</b>	20	12	22	6	16	7
<b>Stratégie inégalité triangulaire</b>	4		1		3	
<b>Inexploitables</b>	2	2	6	1	5	
<b>Construction du triangle avec ou sans ligne brisée</b>		<b>26/38 = 68%</b>		<b>43/50 = 86%</b>		<b>38/44 = 86%</b>