

Thèse de doctorat

Spécialité : Mécanique

École doctorale : Sciences, ingénierie et environnement

Soutenue le 30 janvier 2017 par

Karim HOUANO

**Contact unilatéral de surfaces
périodiquement rugueuses :
modélisation et simulation**

Jury de thèse

Lalaonirina RAKOTOMANANA, Président, Professeur à l'Université de Rennes 1
Salah RAMTANI, Examineur, Professeur à l'Université Paris 13
Géry DE SAXCE, Rapporteur, Professeur à l'Université de Lille
Thomas MICHELITSCH, Rapporteur, Directeur de recherche à l'Université Paris 6
Qi-Chang HE, Directeur de thèse, Professeur à l'Université Paris-Est Marne-la-Vallée
Honoré YIN, Co-directeur de thèse, Directeur de recherche à l'ENPC

octobre 2013 - octobre 2016
Laboratoire Modélisation et Simulation Multi Echelle
Laboratoire Navier
Université Paris-Est

Table des matières

Remerciements	9
Résumé	10
Abstract	11
Nomenclature	12
Introduction	15
1 Contact unilatéral de surfaces élastiques et périodiquement rugueuses	18
1.1 Élasticité linéaire	18
1.2 La solution de Boussinesq et Cerruti	20
1.3 Contact entre deux surfaces élastiques	21
1.3.1 Conditions de Signorini	21
1.3.2 Théorie de Hertz	22
1.3.3 Lois de contact analytiques pour une aspérité rigide	23
1.4 Surfaces élastiques rugueuses	24
1.4.1 Théorie de Greenwood-Williamson	24
1.4.2 Contact entre deux surfaces sinusoidales	26
1.5 Méthode numérique d'inversion matricielle	29
1.6 Élaboration de l'approche en pression périodique pour deux surfaces rugueuses périodiques en contact unilatéral	32
1.7 Approche en pression périodique	32
1.8 Approche numérique pour le contact entre deux surfaces élastiques périodiques	33
1.9 Validation numérique pour des surfaces sinusoidales	34
1.9.1 Rugosité sinusoidale unidimensionnelle	34
1.9.2 Rugosité sinusoidale bidimensionnelle	36
1.10 Application à différentes surfaces périodiques	38
2 Contact unilatéral de surfaces thermoélastiques et périodiquement rugueuses	49
2.1 Thermoélasticité linéaire	49
2.2 Contact entre deux surfaces thermoélastiques	50

2.3	Solutions analytiques pour le contact thermoélastique	52
2.3.1	Indentation d'une surface thermoélastique lisse par une sphère rigide uniformément maintenue à température constante	52
2.3.2	Distribution de température entre deux surfaces sinusoïdales unidi- mensionnelles en contact unilatéral	52
2.4	Approche numérique pour le calcul du flux de chaleur, de la distribution de pression et de la surface de contact	54
2.5	Distributions de pression et flux de chaleur pour le contact entre deux surfaces thermoélastiques périodiques	55
2.6	Méthode d'inversion matricielle adaptée aux surfaces thermoélastiques et périodiquement rugueuses	56
2.7	Évaluation numérique de la distribution de température, du flux de chaleur et de la surface de contact	57
2.7.1	Application numérique au contact thermoélastique Hertzien	57
2.7.2	Calcul de la température et du flux de chaleur et mesure de la surface de contact entre deux surfaces périodiquement rugueuses	59
3	Contact unilatéral de surfaces viscoélastiques et périodiquement rugueuses	70
3.1	Viscoélasticité linéaire	70
3.1.1	Généralités	70
3.1.2	Modèles rhéologiques	71
3.1.3	Fonction de fluage et de relaxation 1D	72
3.1.4	Matériaux viscoélastiques non-vieillissants	74
3.1.5	Fonction de fluage et de relaxation 3D	75
3.1.6	Principe de correspondance	75
3.2	Contact entre deux surfaces viscoélastiques	76
3.3	Solution analytique pour le contact viscoélastique de Hertz sans glissement .	78
3.4	Discrétisation des équations gouvernant le contact entre deux surfaces viscoélastiques	79
3.4.1	Formulation quasi-élastique	79
3.4.2	Discrétisation	80
3.5	Contact entre deux milieux viscoélastiques de surfaces géométriquement périodiques	82
3.5.1	Formulation continue	82
3.5.2	Approche numérique	83
3.6	Validation et exemples numériques	83
3.6.1	Contact sans glissement	84
3.6.2	Contact avec glissement	87
	Conclusions	94
	Publications et Communications	96
	Annexes	96

A	Intégration de la fonction de Green	97
B	Intégration de la fonction de couplage thermoélastique	98

Table des figures

1	Contact entre deux surfaces à différentes échelles.	15
1.1	Un milieu élastique Ω générique.	19
1.2	La surface S du demi-espace élastique et la partie S_c sur laquelle est distribuée la pression p dans le cas du problème de Boussinesq.	20
1.3	Contact entre un corps rigide et un demi-espace déformable.	21
1.4	Pression de contact $p(x, y)$ en fonction de la distance $d(x, y)$ en un point quelconque de coordonnées (x, y)	22
1.5	Contact entre deux sphères élastiques.	23
1.6	Modèles d'aspérités de géométries simples admettant des solutions analytiques.	23
1.7	Le contact entre deux surfaces rugueuses déformables peut se réduire à celui entre une surface rugueuse rigide et une surface plane déformable.	25
1.8	Contact entre une surface rigide sinusoïdale unidimensionnelle et la surface lisse d'un demi-espace élastique.	27
1.9	Amplitude $h(x, y)$ pour différentes géométries d'aspérités en configurations orthotrope et hexagonale.	28
1.10	Discrétisation de la surface de contact nominale S_n	30
1.11	Algorithme du processus itératif pour déterminer la surface de contact réelle et la distribution de pression avec la méthode d'inversion matricielle.	31
1.12	La période de référence d'un demi-espace déformable en contact avec une surface rigide et périodiquement rugueuse.	32
1.13	Distributions de pression de contact sur la surface du demi-espace élastique pour une surface rigide sinusoïdale unidimensionnelle avec $N_p = 3$ et $N_p = 11$ périodes.	34
1.14	La surface de contact relative $ S_c^0 / S^0 $ en fonction de la pression moyenne normalisée \bar{p}/p^*	35
1.15	Convergence de l'approche en pression périodique pour une périodicité sinusoïdale unidimensionnelle.	36
1.16	Distributions de pression pour $y = l/2$ dans le cas d'une surface sinusoïdale avec $N_p = 3 \times 3 = 9$ et $N_p = 11 \times 11 = 121$	37
1.17	Mesure de la surface de contact relative $ S_c^0 / S^0 $ en fonction de la pression normalisée \bar{p}/p^*	37

1.18	Distributions de pression surfaciques pour une surface rigide sinusoidale avec $N_p = 21 \times 21 = 441$ aspérités pour différentes valeurs de la pénétration δ : 0.1777 mm (A), 0.5923 mm (B), 1.0291 mm (C), 2.5542 mm (D), 4.0719 mm (E), 5.6193 mm (F).	38
1.19	Convergence de l'approche en pression périodique pour une rugosité sinusoidale bidimensionnelle.	39
1.20	Distributions de pression pour la pénétration $\delta = 1$ mm imposée calculées pour les surfaces périodiques unidimensionnelles.	40
1.21	Mesures de la surface de contact relative $ S_c^0 / S^0 $ en fonction de la pression normalisée \bar{p}/p^* déterminées pour les surfaces périodiques unidimensionnelles.	40
1.22	Distributions de pression pour la pénétration $\delta = 2.5$ mm imposée dans le cas d'une surface rigide contenant des aspérités paraboloidales (A), coniques (B) et pyramidales (C).	41
1.23	Distributions de pression pour la pénétration $\delta = 0.4$ mm imposée et $y = 0$ mm calculées dans le cas des surfaces périodiques bidimensionnelles.	41
1.24	Mesures de la surface de contact relative $ S_c^0 / S^0 $ en fonction de la pression normalisée \bar{p}/p^* obtenues pour les surfaces périodiques bidimensionnelles.	42
1.25	Configurations de la périodicité : (a) carrée ; (b) hexagonale.	42
1.26	Distributions de pression surfaciques pour des périodicités en configuration carrée (figures de gauche) ou hexagonale (figures de droite), dans les cas d'aspérités sinusoidales (a,b), paraboloidales (c,d), coniques (e,f) et pyramidales (g,h).	45
1.27	Mesure de la surface de contact relative en fonction de la pression normalisée pour des périodicités en configuration carrée (carrés bleu) ou hexagonale (cercles rouge).	46
1.28	Trois configurations périodiques : niveau d'interaction élevé (a), intermédiaire (b) et faible (c) entre les aspérités.	46
1.29	Distributions de pression pour les niveaux d'interaction élevé (a), intermédiaire (b) et faible (c) dans le cas d'aspérités paraboloidales.	47
1.30	Distributions de pression pour les niveaux d'interaction élevé (a), intermédiaire (b) et faible (c) dans le cas d'aspérités coniques.	47
1.31	Distributions de pression pour les niveaux d'interaction élevé (a), intermédiaire (b) et faible (c) dans le cas d'aspérités pyramidales.	47
1.32	Mesure de la surface de contact relative en fonction de la pression normalisée pour des niveaux d'interaction élevé (cercles bleu), intermédiaire (carrés rouge) et faible (losanges violets).	48
2.1	L'indentation de la surface lisse d'un demi-espace thermoélastique par un solide rigide uniformément maintenu à la température θ^0	51
2.2	Distribution de pression de contact à la surface d'un demi-espace thermoélastique en contact avec une sphère rigide.	53
2.3	Flux de chaleur à la surface d'un demi-espace thermoélastique en contact avec une sphère rigide.	53

2.4	Répartition de la température surfacique à la surface d'un demi-espace thermoélastique en contact avec une surface rigide sinusoïdale unidimensionnelle.	54
2.5	Distribution de pression et flux de chaleur calculés en $y = l/2$ avec la température $\theta^0 = 200$ °C uniformément répartie dans la sphère rigide.	58
2.6	Répartitions de la température surfacique calculées en $y = l/2$ pour différentes valeurs de θ^0 dans le cas de l'indentation par une sphère rigide.	59
2.7	Différences entre les solutions numériques et analytiques en pression et flux de chaleur en fonction du nombre d'éléments dans le maillage dans le cas d'une aspérité sphérique.	60
2.8	Distributions de pression obtenues pour différentes valeurs de θ^0 dans le cas d'une aspérité sphérique.	61
2.9	Flux de chaleur obtenus pour différentes valeurs de θ^0 dans le cas d'une aspérité sphérique.	61
2.10	Températures et flux de chaleur calculés avec $T^0 = 300$ °C pour des surfaces périodiques unidimensionnelles.	63
2.11	Convergence de l'approche en pression de contact et flux de chaleur périodiques pour une périodicité sinusoïdale unidimensionnelle.	64
2.12	Mesure de la surface de contact en fonction de la température θ^0 pour des surfaces périodiques unidimensionnelles.	65
2.13	Distributions de pression calculées pour différentes valeurs de θ^0 dans le cas de surfaces sinusoïdales unidimensionnelles.	66
2.14	Répartitions de la température calculées pour différentes valeurs de θ^0 dans le cas d'aspérités sinusoïdales.	67
2.15	Répartitions de la température calculées pour $\theta^0 = 150$ °C dans les cas d'aspérités paraboloidales (A), coniques (B) et pyramidales (C).	67
2.16	Flux de chaleur calculés pour différentes valeurs de θ^0 dans le cas d'aspérités sinusoïdales.	68
2.17	Flux de chaleur calculés pour $\theta^0 = 150$ °C dans les cas d'aspérités paraboloidales (A), coniques (B) et pyramidales (C).	68
3.1	Essai de traction sur une barre : évolution temporelle de la déformation ε	71
3.2	Exemples de modèles rhéologiques : (1) modèle de Kelvin-Voigt : solide viscoélastique, (2) modèle de Maxwell : liquide viscoélastique, (3) modèle de solide élastoplastique, (4) modèle de Bingham : solide viscoplastique, (5) un modèle du type Maxwell généralisé.	72
3.3	Essai de fluage et réponse en déformation au cours du temps.	73
3.4	Essai de relaxation et réponse en contrainte au cours du temps.	73
3.5	Surfaces de contact nominale et réelle à tout instant τ et à l'instant actuelle t dans le cas du contact avec glissement entre une surface rigide et la surface lisse d'un demi-espace viscoélastique.	77
3.6	Évolution du rayon de contact dans le cas du contact viscoélastique Hertzien.	79
3.7	Évolution du rayon de contact et du déplacement du corps rigide calculé au cours du temps dans le cas d'une aspérité sphérique.	85

3.8	Évolution de la force de contact et distribution de pression pour $y = 0.05$ mm à l'instant $t = 0.005$ s calculées dans le cas du contact entre une sphère rigide et un demi-espace viscoélastique.	86
3.9	Évolution de la force de contact et distribution de pression à différents instants calculées dans le cas du contact entre une surface rigide sinusoïdale unidimensionnelle et un demi-espace viscoélastique.	88
3.10	Évolution de la force de contact et distribution de pression à différents instants pour $y = 0$ mm calculées dans le cas du contact entre une surface rigide sinusoïdale unidimensionnelle et un demi-espace viscoélastique.	89
3.11	Dimensions de la surface de contact en fonction du nombre de Deborah dans le cas du glissement d'un cylindre rigide.	90
3.12	Configuration déformée de la cellule périodique de référence S^0 dans le cas du glissement d'une surface rigide sinusoïdale unidimensionnelle sur la surface d'un demi-espace viscoélastique.	91
3.13	Évolution du moment mécanique au cours du temps calculée dans les cas du contact avec glissement entre une surface rigide sinusoïdale et un demi-espace viscoélastique.	91
3.14	Mesure de la surface de contact relative au cours du temps dans le cas du glissement d'une surface rigide comportant $N_p = 51 \times 51 = 2601$ aspérités sinusoïdales, paraboloidales, coniques ou pyramidales sur un demi-espace viscoélastique.	92
3.15	Distributions de pression de contact initiale et finale dans le cas du contact avec glissement entre une surface rigide comportant $N_p = 51 \times 51 = 2601$ aspérités sinusoïdales et un demi-espace viscoélastique.	92
3.16	Distributions de pression de contact initiale et finale dans le cas du contact avec glissement entre une surface rigide comportant $N_p = 51 \times 51 = 2601$ aspérités paraboloidales et un demi-espace viscoélastique.	93
3.17	Distributions de pression de contact initiale et finale dans le cas du contact avec glissement entre une surface rigide comportant $N_p = 51 \times 51 = 2601$ aspérités coniques et un demi-espace viscoélastique.	93
3.18	Distributions de pression de contact initiale et finale dans le cas du contact avec glissement entre une surface rigide comportant $N_p = 51 \times 51 = 2601$ aspérités pyramidales et un demi-espace viscoélastique.	93

Remerciements

Je tiens tout d'abord à adresser mes plus sincères remerciements à mes directeurs de thèse, Qi-Chang He et Hai-Ping Yin pour leur encadrement de qualité, leurs conseils et leur soutien. Leur présence m'a été d'une grande aide et m'a permis de réaliser mon travail de thèse dans de très bonnes conditions.

Je remercie également le Labex MMCD de m'avoir fourni les moyens nécessaires pour le bon déroulement de cette thèse, notamment d'avoir pris en charge ma participation à des conférences internationales où j'ai pu assister à d'intéressantes interventions, rencontrer et discuter avec d'autres chercheurs.

J'aimerais enfin remercier les membres des laboratoires MSME et NAVIER pour leur chaleureux accueil qui a grandement facilité mon intégration au cours de ces trois années.

Résumé

Le contact unilatéral entre deux surfaces est un phénomène omniprésent en physique, en mécanique et en génie civil. Une surface nominale lisse à l'échelle macroscopique est en réalité rugueuse à l'échelle microscopique. La présence de rugosités modifie considérablement la distribution des contraintes et le champ des déformations au voisinage des surfaces en contact. La prise en compte de rugosités surfaciques à l'échelle microscopique constitue souvent une clé pour appréhender et modéliser un grand nombre de phénomènes d'interface/surface observés à l'échelle macroscopique, tels que le frottement, l'adhésion, l'usure et la conductivité thermique ou électrique. Ce travail de thèse porte sur le contact unilatéral de deux demi-espaces dont les surfaces sont périodiquement rugueuses. Dans la première partie du travail où les deux demi-espaces sont constitués de deux matériaux linéairement élastiques, une approche numérique simple et efficace est proposée et élaborée en se basant sur la méthode des éléments de frontière et la méthode d'inversion matricielle et en exploitant la périodicité du problème en question. Cette approche numérique est d'abord comparée avec et validée par des résultats analytiques et ensuite appliquée à plusieurs cas d'intérêt pratique. Dans les deuxième et troisième parties du travail, l'approche numérique proposée dans le cas élastique est étendue aux cas où les demi-espaces sont formés de matériaux d'abord linéairement thermoélastiques et ensuite linéairement viscoélastiques. Des résultats analytiques existants dans ces deux cas sont utilisés comme benchmarks pour tester la précision et l'efficacité des approches résultantes. Des exemples numériques sont donnés pour mettre en évidence des phénomènes physiques.

Abstract

Unilateral contact between two surfaces is a phenomenon often present in physics, mechanics and civil engineering. A nominally smooth surface on a macroscopic scale is actually rough on the microscopic scale. The presence of surficial roughness considerably modifies the stress distribution and the strain field in the vicinity of the surfaces in contact. Consideration of surficial roughness at the microscopic scale is often a key to understanding and modeling a large number of macroscopic interface/surface phenomena such as friction, adhesion, wear and thermal or electrical conduction. This work focuses on the unilateral contact of two half-spaces whose surfaces are periodically rough. In the first part of the work where the two half-spaces consist of two linearly elastic materials, a simple and efficient numerical approach is proposed and elaborated on the basis of the boundary element method and the matrix inversion method and by exploiting the periodicity of the problem in question. This numerical approach is first compared with and validated by available analytical results and then applied to several cases of practical interest. In the second and third parts of the work, the numerical approach proposed in the elastic case is extended to cases where the half-spaces are formed of materials that are first linearly thermoelastic and then linearly viscoelastic. Some existing analytical results in these two cases are used as benchmarks to test the accuracy and efficiency of the resulting approaches. Numerical examples are given to bring out some physical phenomena.

Nomenclature

Paramètres élastiques

\mathbb{A} : tenseur de rigidité élastique
 \mathbb{S} : tenseur de souplesse élastique
 E : module de Young
 ν : coefficient de Poisson
 K : module de compressibilité
 μ : module de cisaillement

Paramètres thermoélastiques

Ψ : tenseur de conductivité thermique
 κ : conductivité thermique
 α : coefficient de dilatation thermique
 D : distortivité

Paramètres viscoélastiques

τ_c : temps caractéristique

Autres notations

Ω : milieu déformable
 $\boldsymbol{\sigma}$: tenseur des contraintes de Cauchy
 $\boldsymbol{\varepsilon}$: tenseur des déformations
 \boldsymbol{u} : vecteur des déplacements
 $u_{i,j}$: dérivée de u dans la direction i par rapport à la direction j
 \boldsymbol{X} : tenseur du deuxième ordre
 S : surface d'un demi-espace
 S_c : surface de contact réelle
 S_n : surface de contact nominale

$u(x, y)$: déplacement vertical du point de coordonnées (x, y)
 $p(x, y)$: pression au point de coordonnées (x, y)
 $T(x, y; \xi, \eta)$: fonction de Green
 F : force de contact
 δ : déplacement de corps rigide
 $h(x, y)$: hauteur au point de coordonnées (x, y)
 $d(x, y)$: distance vertical au point de coordonnées (x, y)
 R : rayon de courbure
 a : rayon de contact
 γ : demi-angle au sommet d'un cône
 β : exposant dans la loi de contact de Hertz
 c_g : facteur dans la loi de contact de Hertz
 r : position radiale
 \bar{p} : pression moyenne
 $|S_c|$: mesure de la surface de contact
 Δ : paramètre de hauteur
 λ : longueur d'onde
 p^* : pression moyenne nécessaire pour que le contact soit complet
 b : demi-longueur de séparation
 N_e : nombre d'éléments de discrétisation
 l_i : longueur d'un élément dans la direction i
 $m(x, y; \xi, \eta)$: fonction d'influence de Love
 p_j : pression de contact au centre de l'élément j
 u_i : déplacement vertical du centre de l'élément i
 M_{ij} : coefficient d'influence relatif à l'interaction entre les éléments i et j
 S^0 : cellule surfacique de référence
 S_c^k : surface de contact réelle dans la cellule surfacique k
 N_p : nombre de périodes géométriques
 A_{ij} : composante de la matrice d'influence résultante
 $\theta(x, y, z)$: température au point de coordonnées (x, y, z)
 \mathbf{q} : vecteur des flux de chaleur
 Ψ : tenseur de conductivité thermique
 ∇ : opérateur gradient
 \mathbf{I} : tenseur identité
 θ^0 : température uniforme dans le milieu rigide
 θ^∞ : température uniforme dans le demi-espace avant contact
 $q(x, y)$: flux de chaleur au point (x, y)
 $C(x, y; \xi, \eta)$: fonction de couplage thermoélastique
 q^∞ : flux de chaleur lointain
 $c(x, y; \xi, \eta)$: fonction de couplage thermoélastique intégrée
 q_j : flux de chaleur au centre de l'élément j
 θ_i : température au centre de l'élément i

B_{ij} : coefficient de couplage thermoélastique relatif à l'interaction entre les éléments i et j
 L_{ij} : composante de la matrice de couplage thermoélastique résultante
 t : instant actuel
 t_0 : instant initial
 $\varphi(t, \tau)$: fonction de fluage
 $\psi(t, \tau)$: fonction de relaxation
 \mathbb{R} : ensemble des réels
 $\mathcal{L}(f)$: transformée de Laplace de la fonction $f(t)$
 $\tilde{f}(s)$: transformée de Laplace-Carson de la fonction $f(t)$
 $V_i(s)$: vitesse de glissement dans la direction i
 M_i : moment mécanique dans la direction i
 $K(t)$: module de compressibilité viscoélastique
 $\mu(t)$: module de cisaillement viscoélastique
 Δt : incrément temporel
 l_t : nombre d'instantes dans la discrétisation temporelle
 n_b : nombre de branches de Maxwell dans le modèle rhéologique de Maxwell généralisé

Introduction

Le contact entre deux surfaces, un phénomène très souvent rencontré tant à l'échelle macroscopique qu'à l'échelle microscopique, est encore source de nombreuses difficultés rencontrées en physique et en mécanique (singularités, non-linéarités, etc). Dans le cas simple du contact entre deux barres, deux étapes sont à distinguer :

- dans un premier temps, la distance entre les deux barres diminue, aucun effort n'est nécessaire ;
- dans un second temps, dès que la distance est nulle, une force se développe dans la surface de contact.

La force de contact étant nulle si la distance ne l'est pas, et étant non nulle si la distance l'est, il s'agit d'une des non-linéarités les plus difficiles à traiter en mécanique. De plus, la rugosité est un aspect qui peut se manifester à différentes échelles comme l'illustre la Figure 1. En effet, une surface nominale lisse à l'échelle macroscopique est en réalité rugueuse à l'échelle microscopique. Les premiers travaux sur la mécanique du contact sont réalisés

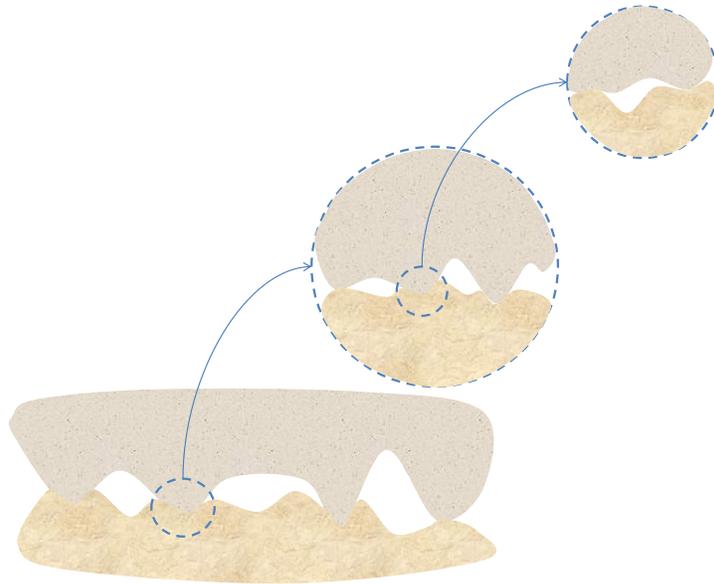


FIGURE 1 – Contact entre deux surfaces à différentes échelles.

par Hertz [29, 30], à la fin du 19^{ème} siècle. Hertz a étudié le problème de contact entre

deux sphères. Jusqu'à la deuxième moitié du 20^{ème} siècle, des recherches ont porté sur le contact entre deux solides élastiques. C'est dans ce contexte qu'ont été établies différentes approches pour résoudre ce problème, telles que la méthode d'inversion matricielle présentée dans le livre de Johnson [38], l'approche variationnelle présentée par Kalker [41, 42], ou encore l'approche en variables complexes présentée par Galin [22]. Pour compléter la théorie de Hertz, Sneddon a analytiquement étudié les distributions de pressions dans le cas d'une seule aspérité sphérique, cylindrique ou conique [60]. C'est à partir du milieu du 20^{ème} siècle que des chercheurs ont proposé des méthodes pour analyser le contact entre deux surfaces viscoélastiques. Tout d'abord Lee et Radok ont établi un principe de correspondance pour étendre la solution de Boussinesq et Cerruti au cas d'un demi-espace viscoélastique [45]. Des solutions analytiques ont ainsi été déduites pour une aspérité sphérique, cylindrique ou conique. Toutefois cette correspondance ne reste valable que si la surface de contact augmente au cours du temps. En effet, durant la phase d'augmentation de la surface de contact, la solution de Hertz reste valable. Si la surface de contact décroît, l'approche proposée par Ting [61] doit être utilisée pour déterminer la relation entre la surface de contact et l'interpénétration, ainsi que la distribution de pression en phase de déchargement. Ting montre qu'une réinitialisation de la pression de contact s'effectue lorsque la surface de contact diminue, et qu'il est inutile d'intégrer temporellement toute l'histoire de la pression. Ces dernières années, des membres du laboratoire Modélisation et Simulation Multi-Échelle ont réalisé des travaux sur :

- le contact conforme avec frottement pour les assemblages de verre ;
- le frottement entre l'aluminium et le verre ;
- la prise en compte de l'adhésion dans les problèmes de contact ;
- le contact unilatéral entre deux surfaces rugueuses et élastiques.

Des membres du laboratoire Navier ont élaboré une méthode de calcul de la pression de contact pour des surfaces rugueuses en employant l'approche multi-aspérité, notamment pour l'étude du contact entre un pneumatique et une chaussée [2, 3, 11, 12, 13, 14, 15, 18, 19, 20, 43, 44, 67, 68].

Le travail de thèse porte sur le contact entre deux surfaces viscoélastiques, infinies et périodiquement rugueuses. Les enjeux de ce travail de thèse sont :

- le développement d'une approche micromécanique pour la modélisation du contact unilatéral entre deux surfaces périodiquement rugueuses ;
- la construction d'une méthode numérique de calcul de la distribution de pression et du déplacement ;
- la mise en application de la méthode numérique.

L'objectif de cette thèse est d'établir une approche simple et efficace pour étudier le contact entre deux surfaces de géométries périodiques. Les travaux sont réalisés sous l'hypothèse des petites déformations et le contact est supposé se produire sans frottement. D'un point de vue numérique, la méthode des éléments de frontière est adoptée. En effet cette méthode est efficace pour résoudre les problèmes de contact car seule la surface potentiellement en contact doit être discrétisée. Ce mémoire de thèse débutera par un premier chapitre dédié à

l'étude du contact entre deux surfaces élastiques et périodiquement rugueuses. L'approche en pression périodique sera présentée et la formulation établie sera discrétisée pour ensuite être appliquée à des exemples numériques. L'intérêt principal de cette approche est que seule une cellule surfacique périodique doit être maillée, ce qui diminue fortement le nombre d'éléments pour lesquels la pression doit être déterminée, le nombre de périodes géométriques étant simplement un paramètre. Des simulations numériques ont été effectuées dans le cas du contact entre deux surfaces sinusoïdales unidimensionnelles ou bidimensionnelles. La validation numérique de l'approche en pression périodique est effectuée en comparant les distributions de pression calculées à leurs solutions analytiques correspondantes. La convergence est obtenue en termes de nombre d'éléments dans le maillage et en termes de nombres de périodes géométriques prises en compte dans les calculs. D'autres géométries périodiques sont ensuite considérées, les distributions de pression et les surfaces de contact obtenues sont comparées les unes aux autres. L'objet du second chapitre sera l'étude du contact entre deux surfaces thermoélastiques de géométries périodiques. Un échange de chaleur entre les deux milieux en contact sera considéré. La chaleur ne pouvant circuler qu'à travers la surface de contact, l'espacement entre les deux surfaces en dehors de la zone de contact agit comme un isolant. Les déplacements thermiques issus de l'échange de chaleur entre les deux milieux en contact seront pris en compte dans la formulation du problème. La validation numérique sera réalisée dans le cas du contact de Hertz et dans le cas du contact entre deux surfaces thermoélastiques unidimensionnelles. L'approche numérique sera ensuite appliquée à différentes géométries unidimensionnelles et bidimensionnelles. Le troisième et dernier chapitre sera consacré à l'extension de l'approche en pression périodique au contact avec glissement entre deux surfaces viscoélastiques périodiquement rugueuses. L'approche présentée dans ce chapitre sera formulée de sorte à ce que l'intégration géométrique soit effectuée seulement sur la surface de contact nominale actuelle. Les résultats numériques obtenus pour le contact de Hertz et le contact entre deux surfaces périodiques unidimensionnelles et bidimensionnelles seront présentés avant de clore ce mémoire par une conclusion.

Chapitre 1

Contact unilatéral de surfaces élastiques et périodiquement rugueuses

L'objectif de ce chapitre sera de développer une approche numérique pour étudier efficacement le contact entre deux solides élastiques dont les surfaces potentiellement en contact ont une géométrie périodique.

Dans un premier temps la solution fondamentale de Boussinesq et Cerruti, les théories simplifiées de Hertz et de Greenwood-Williamson, et les conditions de contact unilatéral entre deux surfaces élastiques seront rappelées. Une approche en pression de contact périodique élaborée sera ensuite développée avant d'être testée dans des exemples numériques de contact entre surfaces sinusoïdales. D'autres formes d'aspérités seront ensuite traitées pour résoudre divers exemples de problèmes de contact entre surfaces périodiques.

1.1 Élasticité linéaire

Soit Ω un milieu élastique, linéaire et homogène, défini dans un espace régi par un système de coordonnées cartésien (O, x, y, z) dont O est l'origine et (x, y, z) sont les coordonnées de chaque point respectivement dans les directions x , y et z , qui forment un trièdre direct. Le milieu Ω est supposé ne subir que des petites déformations. Le contour de Ω est noté Σ , Γ^N représente la partie de Σ sur laquelle sont imposées les forces et Γ^D représente la partie de Σ sur laquelle sont imposées les déplacements (Figure 1.1). Le problème aux limites est gouverné par l'équation d'équilibre suivante

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad \forall (x, y, z) \in \Omega, \quad (1.1)$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes de Cauchy. Le tenseur des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ est définie comme étant la partie symétrique des dérivées spatiales du déplacement \mathbf{u} :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (1.2)$$

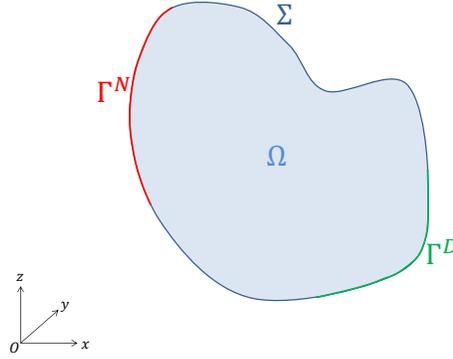


FIGURE 1.1 – Un milieu élastique Ω générique.

où $u_{i,j}$ est la dérivée du déplacement dans la direction i par rapport à la direction j . La loi de comportement du milieu Ω est donné par les relations entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{A} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \forall (x, y, z) \in \Omega, \quad (1.3)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbb{S} : \boldsymbol{\sigma} \quad \forall (x, y, z) \in \Omega, \quad (1.4)$$

où \mathbb{A} est le tenseur de rigidité élastique et \mathbb{S} est le tenseur de souplesse élastique. Ces deux tenseurs sont de quatrième ordre et possèdent les symétries majeures et mineures :

$$A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{ijlk} = A_{klij}, \quad (1.5)$$

$$S_{ijkl} = S_{jikl} = S_{ijlk} = S_{klij}, \quad (1.6)$$

et est défini positif pour tout tenseur réel symétrique \mathbf{X} de deuxième ordre :

$$\mathbf{X} : \mathbb{A} : \mathbf{X} \geq c \mathbf{X} : \mathbf{X}, \quad (1.7)$$

$$\mathbf{X} : \mathbb{S} : \mathbf{X} \geq s \mathbf{X} : \mathbf{X}, \quad (1.8)$$

avec c et s ($c \neq s$) deux constantes réelles. Dans le cas où le milieu Ω est isotrope, les composantes du tenseur \mathbb{A} dépendent de deux paramètres élastiques. Dans ce qui suit, le milieu élastique en question sera caractérisé par son module de Young E et son coefficient de Poisson ν . Il est aussi possible de relier ses modules de compressibilité K et de cisaillement μ à ses E et ν :

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}, \quad (1.9)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (1.10)$$

1.2 La solution de Boussinesq et Cerruti

Les travaux réalisés durant cette thèse portent sur le contact entre deux demi-espaces déformables de surfaces rugueuses. Sous l'hypothèse des petites déformations, ce problème peut se réduire au contact entre un demi-espace déformable avec des propriétés appropriées dont la surface est lisse et un demi-espace rigide avec une surface de géométrie appropriée [38]. Dans le cas d'un demi-espace déformable élastique de module de Young E et de coefficient de Poisson ν , la distribution de pression et la surface de contact peuvent être déterminées en résolvant le problème de Boussinesq. La surface S du demi-espace est soumise à une distribution de pression dans la direction z concentrée sur une portion finie de S notée S_c . La surface S_n représente un aperçu à l'échelle macroscopique de la surface S_c (Figure 1.2). Ainsi, le déplacement vertical $u(x, y)$ du point de coordonnées $(x, y) \in S$ dans la direction z

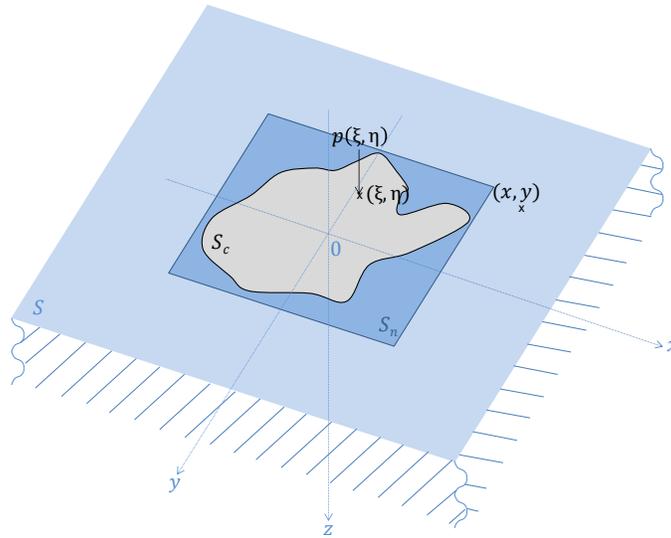


FIGURE 1.2 – La surface S du demi-espace élastique et la partie S_c sur laquelle est distribuée la pression p dans le cas du problème de Boussinesq.

est donné par [7, 10]

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi E^*} \int_{S_c} T(x, y; \xi, \eta) p(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (1.11)$$

où $p(\xi, \eta)$ est la pression au point (ξ, η) , et $T(x, y; \xi, \eta)$ est la fonction de Green définie par

$$T(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}}, \quad (1.12)$$

relatif à l'interaction entre les points (x, y) et (ξ, η) . De manière générale, la fonction de Green est la solution d'une équation aux dérivées partielles linéaire pouvant être transformée en une équation intégrale. Il s'agit d'une fonction de transfert qui permet d'exprimer une différence de potentiels en intégrant un flux. Physiquement, la fonction $T(x, y; \xi, \eta)$ représente

le déplacement du point de coordonnées (x, y) de la surface S induit par une force unitaire appliquée au point de coordonnées (ξ, η) de S_c . Soit F la force concentrée sur S_c , alors l'équilibre des forces doit être vérifié :

$$F = \int_{S_c} p(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (1.13)$$

Dans ce qui suit, S_c correspondra à la surface de contact réelle et S_n correspondra à la surface de contact nominale. De plus, dans la surface de contact réelle S_c , le déplacement $u(x, y)$ défini comme étant la différence entre le déplacement de corps rigide δ de la surface rigide et sa hauteur $z = h(x, y)$:

$$u(x, y) = \delta - h(x, y), \quad \forall (x, y) \in S_c. \quad (1.14)$$

1.3 Contact entre deux surfaces élastiques

1.3.1 Conditions de Signorini

De manière général, le contact entre deux solides doit vérifier les conditions de contact de Signorini. Soit $d(x, y)$ la distance vertical entre le point de coordonnées (x, y) de la surface élastique S et la surface du milieu rigide (Figure 1.3). Dans la surface de contact, la distance

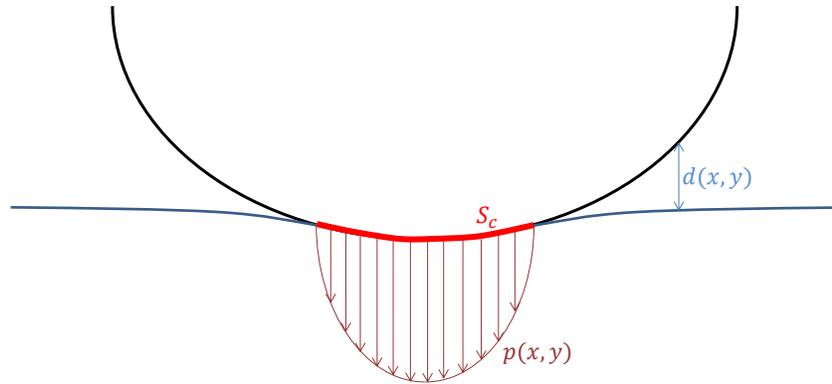


FIGURE 1.3 – Contact entre un corps rigide et un demi-espace déformable.

entre les surfaces des deux milieux est nulle et une pression de contact s'établit :

$$p(x, y) > 0, \quad d(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in S_c. \quad (1.15)$$

En dehors de la surface de contact S_c , la distance entre les deux surfaces est non nulle et les surfaces sont libres de contraintes :

$$p(x, y) = 0, \quad d(x, y) > 0, \quad \forall (x, y) \notin S_c. \quad (1.16)$$

Ainsi, la Figure 1.4 représente l'évolution de la pression de contact $p(x, y)$ en fonction de la distance $d(x, y)$ en un point donné de coordonnées (x, y) . Il est important d'observer la singularité sur ce graphe, ceci constitue une des non-linéarités les plus fortes à traiter en sciences physique. Enfin, la condition de complémentarité est vérifiée en tout point de la

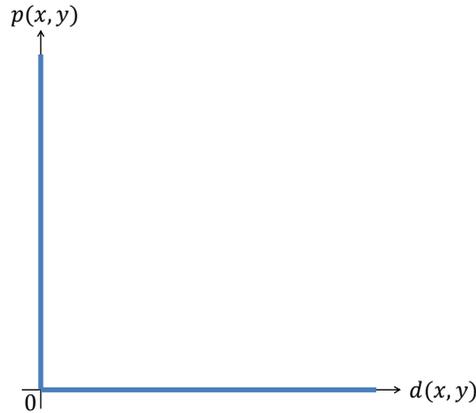


FIGURE 1.4 – Pression de contact $p(x, y)$ en fonction de la distance $d(x, y)$ en un point quelconque de coordonnées (x, y) .

surface élastique S

$$p(x, y)d(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in S. \quad (1.17)$$

La principale difficulté pour traiter ce genre de problème est qu'il soit gouverné par des inégalités.

1.3.2 Théorie de Hertz

Les premières recherches sur le contact ont été poursuivies par Hertz en 1882 portant sur le contact entre deux sphères élastiques notées Ω_1 et Ω_2 et de rayons R_1 et R_2 (Figure 1.5). Les solides élastiques sont supposés linéaires, homogènes et isotropes. Le module de Young et le coefficient de Poisson du milieu i sont respectivement notés E_i et ν_i ($i = 1, 2$). Les déformations sont considérées petites et le contact se produit sans frottement. Soit R le rayon de courbure équivalent défini par

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (1.18)$$

et E^* le module de Young équivalent vérifiant

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}. \quad (1.19)$$

La théorie de Hertz donne les résultats suivants [29, 30]

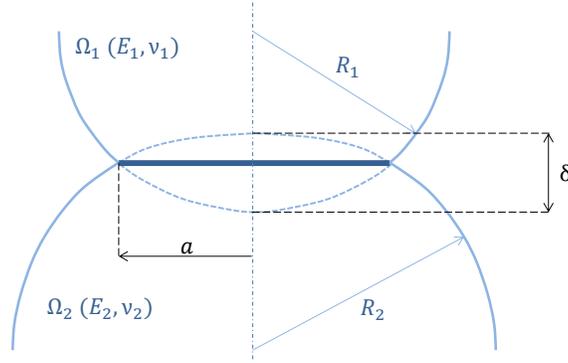


FIGURE 1.5 – Contact entre deux sphères élastiques.

- la surface de contact est circulaire, de rayon noté a ,
- l’interpénétration axiale δ est donnée par

$$\delta = \frac{a^2}{R}, \quad (1.20)$$

- bien que les matériaux élastiques soient supposés linéaires, la relation entre la force de contact F et l’interpénétration δ est non-linéaire :

$$F = \frac{4}{3} E^* \sqrt{R} \delta^{3/2}. \quad (1.21)$$

1.3.3 Lois de contact analytiques pour une aspérité rigide

Des solutions analytiques au problème de Boussinesq sont données pour une seule aspérité rigide de géométrie axisymétrique. Dans le cas d’une aspérité sphérique de rayon de courbure

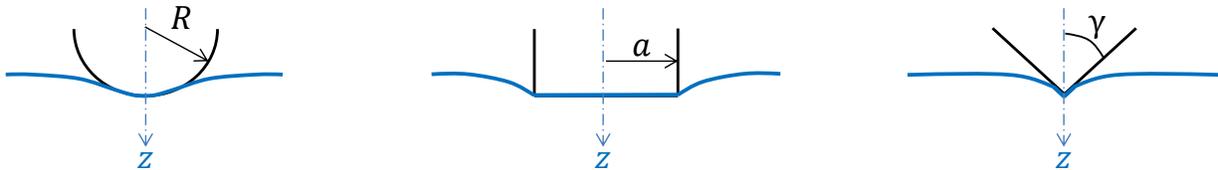


FIGURE 1.6 – Modèles d’aspérités de géométries simples admettant des solutions analytiques.

R , ces solutions sont données par la théorie de Hertz. Dans le cas d’une aspérité cylindrique de rayon a , ou conique de demi-angle au sommet γ , les solutions sont proposées par Love en s’appuyant sur le problème de Boussinesq.

À l’échelle macroscopique, la loi de contact peut être décrit par

$$F = c_g \delta^\beta, \quad (1.22)$$

où δ est le déplacement de corps rigide imposé dans la direction z à l'aspérité, et c_g et β sont des constantes réelles dépendant de la géométrie de l'aspérité :

$$\text{sphère} : \quad c_g = \frac{4}{3} E^* \sqrt{R}, \quad \beta = \frac{3}{2}, \quad (1.23)$$

$$\text{cylindre} : \quad c_g = 2E^* a, \quad \beta = 1, \quad (1.24)$$

$$\text{cône} : \quad c_g = \frac{2}{\pi} E^* \tan(\gamma), \quad \beta = 2. \quad (1.25)$$

Dans le cas d'un cylindre, le contact est dit conforme car initialement la surface de contact est de dimensions comparables au cylindre et elle reste inchangée au cours du procédé. Mais dans les cas sphérique et conique, le rayon de contact a augmente avec le chargement :

$$\text{sphère} : \quad a = \left(\frac{3FR}{4E^*} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (1.26)$$

$$\text{cône} : \quad a = \left(\frac{2F \tan(\gamma)}{\pi E^*} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.27)$$

À l'échelle microscopique, la distribution de pression est axisymétrique, le paramètre spatial $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ est alors introduit. D'après les conditions de Signorini, la pression est nulle en dehors de la surface de contact : $p(r) = 0 \forall r > a$. Dans la zone de contact, la distribution de pression pour les trois modèles d'aspérités étudiés précédemment s'exprime comme suit [60]

$$\text{Sphère} : p(r) = \frac{3\bar{p}}{2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall r \leq a, \quad (1.28)$$

$$\text{cylindre} : p(r) = \frac{\bar{p}}{2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad \forall r \leq a, \quad (1.29)$$

$$\text{cône} : p(r) = \bar{p} \left(\frac{a}{r} \right) \quad \forall r \leq a, \quad (1.30)$$

où $\bar{p} = \frac{F}{\pi a^2}$ est la pression de contact nominale, ou moyenne, à l'échelle macroscopique.

1.4 Surfaces élastiques rugueuses

1.4.1 Théorie de Greenwood-Williamson

Soient deux corps élastiques Ω_1 et Ω_2 caractérisés respectivement par leurs modules de Young E_1 et E_2 , et leurs coefficients de Poisson ν_1 et ν_2 , et dont les surfaces sont respectivement décrites par les fonctions $h_1(\mathbf{x})$ et $h_2(\mathbf{x})$ dans la direction z . Dans le cas où les

deux solides subissent des petites déformations, le problème de contact peut être réduit, sans aucune approximation, au problème équivalent du contact entre un solide rigide de surface décrite par la hauteur $h(\mathbf{x}) = h_1(\mathbf{x}) + h_2(\mathbf{x})$, et un solide élastique de module de Young normalisé E^* vérifiant l'équation (1.19). Dans la théorie de Greenwood-Williamson,

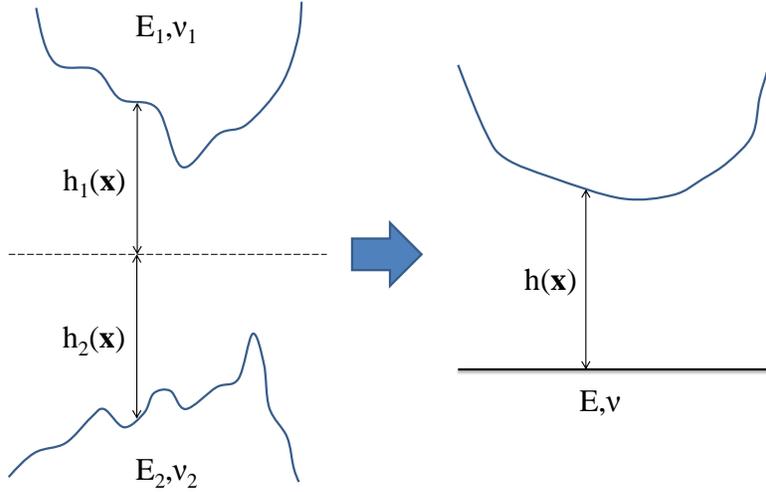


FIGURE 1.7 – Le contact entre deux surfaces rugueuses déformables peut se réduire à celui entre une surface rugueuse rigide et une surface plane déformable.

la rugosité d'une surface est supposée constituée d'aspérités de même rayon de courbure et de hauteur différente, dont la répartition suit une loi Gaussienne. Aussi, les déformations d'une aspérité sont supposées indépendantes de ses voisins. Soit une surface rugueuse dont les aspérités sont supposées sphériques, de rayon R , et dont la hauteur h du sommet suit une loi de distribution Gaussienne [52] :

$$P_h = \frac{1}{\sqrt{2\pi}h^*} \exp\left(-\frac{h^2}{2h^{*2}}\right), \quad (1.31)$$

où h^* est l'écart-type de la fluctuation de la hauteur des aspérités. Soit d la distance séparant les surfaces et n^0 le nombre d'aspérités par unité de surface, le nombre d'aspérités en contact par unité de surface n_c^0 s'écrit

$$n_c^0 = |S_n| n^0 \int_d^\infty P_h dh, \quad (1.32)$$

où $|S_n|$ est la mesure de la surface de contact nominale. Si la hauteur d'une aspérité numérotée i dépasse la distance d , alors cette aspérité pénètre la surface du demi-espace de $\delta = h - d$ et sa surface de contact mesure

$$|S_c^i| = \pi a_i^2 = \pi R \delta_i, \quad (1.33)$$

avec une force de contact ayant pour valeur

$$F_i = \frac{4E\sqrt{R}}{3(1-\nu^2)}\delta_i^{3/2}. \quad (1.34)$$

La surface de contact totale réelle est donnée par

$$|S_c| = \pi|S_n|n^0R \int_d^\infty (h-d)P_h dh. \quad (1.35)$$

À l'échelle nominale, la pression de contact moyenne $\bar{p} = \frac{F}{|S_c|}$ est donnée par

$$\bar{p} = \frac{4E\sqrt{R}}{3(1-\nu^2)}n^0 \int_d^\infty (h-d)^{3/2}P_h dh. \quad (1.36)$$

1.4.2 Contact entre deux surfaces sinusoïdales

Dans cette section, les principaux résultats du contact entre deux surfaces sinusoïdales sont rappelés et serviront de référence par la suite. Dans le contexte du problème de Bousinesq précédemment décrit, une surface rigide sinusoïdale entre en contact avec la surface lisse d'un demi-espace élastique.

Surfaces sinusoïdales unidimensionnelles

Dans un premier temps, la surface rigide est décrite par un profil sinusoïdale unidimensionnelle dans la direction x , d'amplitude 2Δ et de longueur d'onde λ . La Figure 1.8 illustre le problème de contact en question. Avant que le contact ne se produise, la distance normale entre les deux surfaces peut être exprimé par la fonction

$$h(x) = \Delta \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \right). \quad (1.37)$$

Le déplacement vertical, donné par l'équation (1.14), s'écrit comme suit

$$u(x) = \delta - h(x), \quad (1.38)$$

Soit \bar{p} la pression de contact moyenne et $p^* = \frac{\pi E \Delta}{(1-\nu^2)\lambda}$ la pression moyenne nécessaire pour que le contact soit complet. Si \bar{p} est suffisamment grande pour que le contact soit complet entre les deux surfaces, alors la distribution de pression peut se mettre sous la forme

$$p(x) = \bar{p} + p^* \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right). \quad (1.39)$$

Si la surface de contact est discontinue ($\bar{p} \leq p^*$), la rugosité étant unidimensionnelle, les surfaces de contact seront des bandes parallèles de longueur $2a$ et les surfaces de séparation

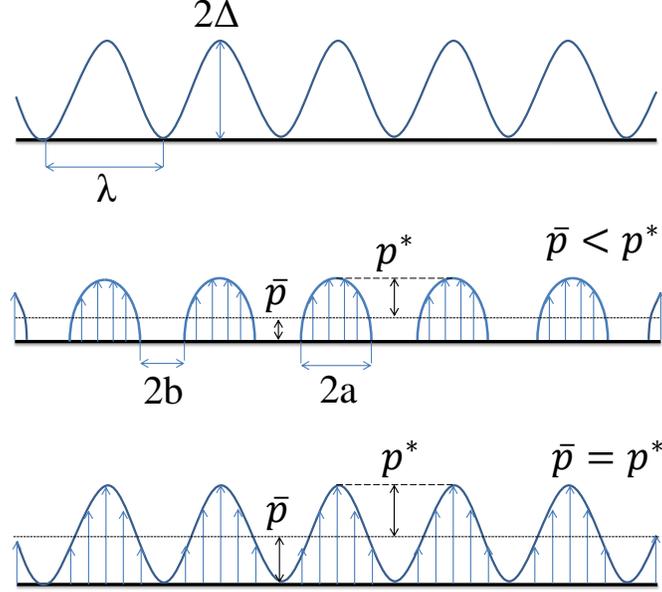


FIGURE 1.8 – Contact entre une surface rigide sinusoïdale unidimensionnelle et la surface lisse d’un demi-espace élastique.

des bandes parallèles de longueur $2b$ suivant x . Westergaard a démontré qu’une répartition de pression de la forme [63, 38, 40]

$$p(x) = \frac{2\bar{p} \cos(\frac{\pi x}{\lambda})}{\sin^2(\frac{\pi a}{\lambda})} \left(\sin^2(\frac{\pi a}{\lambda}) - \sin^2(\frac{\pi x}{\lambda}) \right)^{1/2}, \quad \forall |x| \leq a, \quad (1.40)$$

est la solution du problème en question. De plus, la pression moyenne peut s’écrire

$$\bar{p} = p^* \sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\right). \quad (1.41)$$

L’équation (1.41) peut être inversée pour exprimer la mesure de la surface de contact relative :

$$\frac{2a}{\lambda} = \frac{2}{\pi} \sin^{-1} \left(\frac{\bar{p}}{p^*} \right)^{1/2} \quad (1.42)$$

Dans le cas d’un faible chargement ($\bar{p} \ll p^*$), pour des surfaces de contact suffisamment petites et éloignées, les phénomènes d’interactions entre les aspérités sont quasiment inexistantes. La théorie de Hertz est donc applicable pour décrire chaque aspérité. Soit $F = \lambda \bar{p}$ la force de contact et $R = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 \Delta}$ le rayon de courbure du sommet de chaque aspérité. La théorie de Hertz conduit à [38]

$$\frac{2a}{\lambda} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\bar{p}}{p^*} \right)^{1/2}. \quad (1.43)$$

À l'inverse, si le contact est presque complet, les zones de séparations sont petites et éloignées. Chacune d'elles se comporte ainsi comme une fissure de longueur $2b$ dans un milieu infini. La théorie de la fissuration permet alors de caractériser leur comportement

$$\frac{2b}{\lambda} = \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{\bar{p}}{p^*}\right)^{1/2}. \quad (1.44)$$

Les équations (1.43) et (1.44) représentent les comportements asymptotiques de la surface de contact pour de très faibles chargement et un contact presque complet.

Surfaces sinusoïdales bidimensionnelles

À présent, la surface rigide possède un profil sinusoïdal bidimensionnel. Avant contact, la distance normale entre les deux surfaces s'écrit

$$h(x, y) = \Delta_x + \Delta_y - \Delta_x \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda_x}\right) - \Delta_y \cos\left(\frac{2\pi y}{\lambda_y}\right), \quad (1.45)$$

où Δ_x et Δ_y sont des grandeurs caractéristiques de l'amplitude de la surface rigide respectivement suivant les directions x et y , de même λ_x et λ_y sont les longueurs d'onde de la surface rigide respectivement suivant x et y . La Figure 1.9 donne l'expression de la hauteur des aspérités de géométrie paraboloidale, conique et pyramidale disposées en configurations orthotrope ou hexagonale. Dans le cas d'une rugosité orthotrope, $\Delta_x = \Delta_y = \Delta$ et $\lambda_x = \lambda_y = \lambda$.

$h(x, y)$ Géométrie	Configuration carrée	Configuration hexagonale
Paraboloidale	$\frac{8\Delta}{\lambda^2}(x^2 + y^2)$	$2\Delta \left[\left(\frac{x}{\lambda_x}\right)^2 + \left(\frac{3y}{\lambda_y}\right)^2 \right]$
Conique	$\frac{4\sqrt{2}\Delta}{\lambda} \sqrt{x^2 + y^2}$	$\frac{4\Delta}{\sqrt{\lambda_x^2 + \frac{\lambda_y^2}{9}}} \sqrt{x^2 + y^2}$
Pyramidale	$ x \geq y $ $\frac{8\Delta}{\lambda} x $	$\frac{ x }{\sqrt{3}} < y < \left(\frac{\lambda_x}{2} + \frac{\lambda_y}{6}\right) - \frac{ x }{\sqrt{3}}$ $\frac{4\Delta}{\frac{\lambda_x}{2} + \frac{\lambda_y}{6}} \left(\frac{ x }{\sqrt{3}} + y\right)$
		$-\frac{ x }{\sqrt{3}} < y < \frac{ x }{\sqrt{3}}$ $\frac{8\Delta}{\sqrt{3} \left(\frac{\lambda_x}{2} + \frac{\lambda_y}{6}\right)} x $
	$ x \leq y $ $\frac{8\Delta}{\lambda} y $	$\frac{ x }{\sqrt{3}} - \left(\frac{\lambda_x}{2} + \frac{\lambda_y}{6}\right) < y < -\frac{ x }{\sqrt{3}}$ $\frac{4\Delta}{\frac{\lambda_x}{2} + \frac{\lambda_y}{6}} \left(\frac{ x }{\sqrt{3}} - y\right)$

FIGURE 1.9 – Amplitude $h(x, y)$ pour différentes géométries d'aspérités en configurations orthotrope et hexagonale.

La distance entre les deux surfaces avant contact s'écrit alors plus simplement

$$h(x, y) = \Delta \left(2 - \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) - \cos\left(\frac{2\pi y}{\lambda}\right) \right). \quad (1.46)$$

La littérature actuelle ne permet pas de traiter le problème de contact en question. Ainsi, la distribution de pression peut être exactement donnée dans le cas où la surface de contact est continue :

$$p(x, y) = \bar{p} + p_x^* \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda_x}\right) + p_y^* \cos\left(\frac{2\pi y}{\lambda_y}\right), \quad (1.47)$$

avec $p_x^* = \frac{\pi E \Delta_x}{(1-\nu^2)\lambda_x}$ et $p_y^* = \frac{\pi E \Delta_y}{(1-\nu^2)\lambda_y}$. Tant que la condition $\bar{p} < p_x^* + p_y^*$ est vérifiée, alors le contact n'est pas complet entre les deux surfaces. Si la rugosité est isotrope, alors la répartition de pression se réduit à

$$p(x, y) = \bar{p} + \frac{1}{2} p^* \left(\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) + \cos\left(\frac{2\pi y}{\lambda}\right) \right). \quad (1.48)$$

Il est possible aussi de faire apparaître les comportements asymptotiques de la surface de contact. La théorie de Hertz est valable pour une très faible pression moyenne. L'expression du rayon de contact a est ainsi donnée par [38]

$$\frac{\pi a^2}{\lambda^2} = \pi \left(\frac{3 \bar{p}}{8\pi p^*} \right)^{2/3}. \quad (1.49)$$

De même, la théorie de la fissuration est applicable si le contact est presque complet. Les zones de séparation sont petites et circulaires, de rayon b . Le comportement de chacune d'elles peut être décrit par la théorie de la fissure :

$$\frac{\pi b^2}{\lambda^2} = \frac{3}{2\pi} \left(1 - \frac{\bar{p}}{p^*} \right). \quad (1.50)$$

1.5 Méthode numérique d'inversion matricielle

Lorsque les deux surfaces en contact ont une géométrie complexe ou possède plusieurs aspérités, l'approche numérique est la plus largement employée pour résoudre l'équation de Boussinesq (1.11). La méthode d'inversion matricielle, décrite dans l'ouvrage de Johnson [38] et basée sur les éléments de frontière, est une méthode efficace pour résoudre divers problèmes de contact entre deux solides car seule la surface potentiellement en contact doit être discrétisée.

La surface de contact nominale S_n est discrétisée en N_e éléments rectangulaires de dimensions $l_x \times l_y$ respectivement dans les directions x et y (Figure 1.10). En utilisant le principe de superposition et de linéarité de l'intégration, l'intégrale de l'équation (1.11) peut être formulée en la somme de l'intégration sur chaque élément :

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi E^*} \sum_{j=1}^{N_e} \int_{S_j} T(x, y; \xi', \eta') p(\xi', \eta') d\xi' d\eta', \quad (1.51)$$

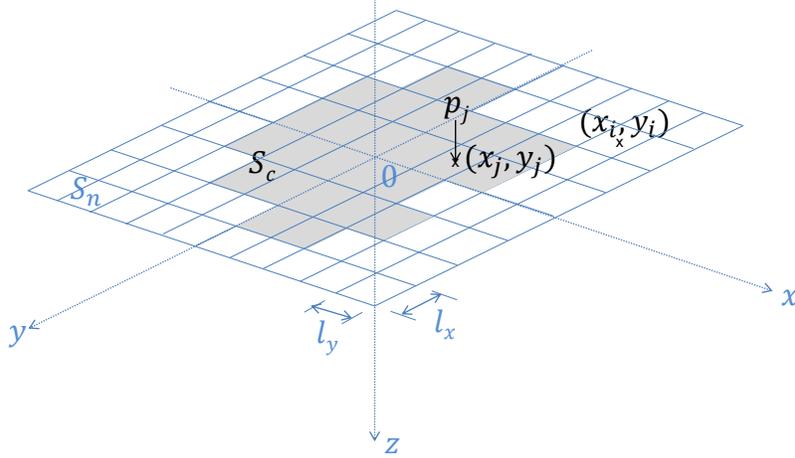


FIGURE 1.10 – Discrétisation de la surface de contact nominale S_n .

où S_j est la surface du $j^{\text{ème}}$ élément. En supposant que la pression de contact soit uniforme dans chaque élément, soit p_j la pression de contact dans le $j^{\text{ème}}$ élément. L'équation (1.51) s'écrit ainsi

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi E^*} \left[\sum_{j=1}^{N_e} \int_{S_j} T(x, y; \xi', \eta') d\xi' d\eta' \right] p_j. \quad (1.52)$$

L'intégration dans l'équation (1.52) présente une singularité lorsque les points de coordonnées (x, y) et (ξ', η') coïncident car d'après l'équation (1.12) la distance entre ces deux points est nulle. Le calcul numérique de l'intégration est donc délicat. Une solution analytique, fournie par Love pour l'intégrale de l'équation (1.52), permet de calculer précisément l'intégrale en question. L'insertion de cette solution, notée $m(x, y; \xi', \eta')$, dans l'équation (1.52) conduit à

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi E^*} \sum_{j=1}^{N_e} m(x, y; x_j, y_j) p_j, \quad (1.53)$$

où (x_j, y_j) sont les coordonnées du centre du $j^{\text{ème}}$ élément. L'expression de la fonction $m(x, y; \xi', \eta')$ est présentée en Annexe A. Enfin, en notant u_i le déplacement vertical du centre du $i^{\text{ème}}$ élément et $M_{ij} = m(x_i, y_i; x_j, y_j)$ la composante de la matrice d'influence, l'équation de Boussinesq discrétisée est obtenue sous la forme matricielle suivante [12, 14, 20]

$$u_i = \frac{1}{\pi E^*} \sum_{j=1}^{N_e} M_{ij} p_j. \quad (1.54)$$

À noter que M_{ij} représente, physiquement parlant, le déplacement vertical du centre du $i^{\text{ème}}$ élément induit par une pression unitaire appliquée sur la surface du $j^{\text{ème}}$ élément. Pour finir la discrétisation de l'équilibre des forces s'écrit

$$F = \sum_{j=1}^{N_e} p_j l_x l_y. \quad (1.55)$$

Afin de déterminer l'ensemble des éléments du maillage constituant la surface de contact réelle S_c , la méthode d'inversion matricielle est construite sur un processus itératif consistant dans un premier temps à initialiser une surestimation de la surface de contact réelle, le plus sûr étant de choisir l'ensemble des éléments du maillage. Ensuite, dans chaque itération, les pressions de contact élémentaires sont déterminées en résolvant le système matricielle (1.54), et les éléments pour lesquelles la pression déterminée est négative sont éliminés de la surface de contact réelle car le contact est compressif d'après la condition de Signorini (1.15). La taille de la surface de contact réelle se réduit d'itération en itération jusqu'à ce que les pressions déterminées soient strictement positives dans la surface de contact réelle. Le problème sera ainsi résolu, et la distribution de pression ainsi que la surface de contact réelle seront déterminées. L'algorithme du processus itératif pour déterminer la surface de contact réelle est illustré par la Figure 1.11. Le principale inconvénient de la méthode d'inversion

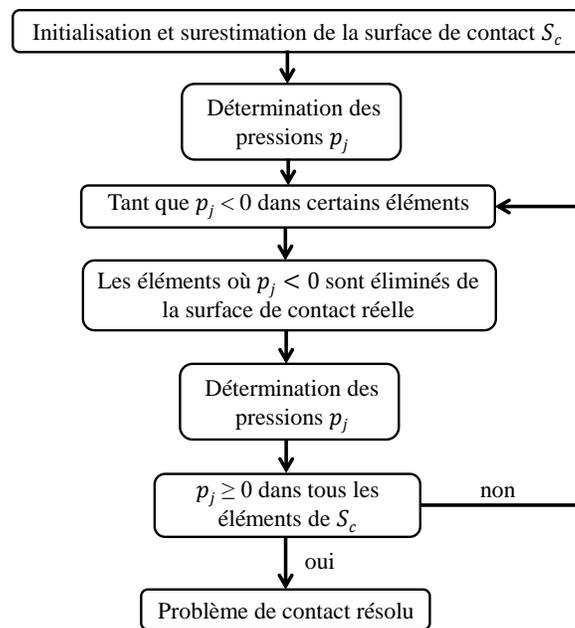


FIGURE 1.11 – Algorithme du processus itératif pour déterminer la surface de contact réelle et la distribution de pression avec la méthode d'inversion matricielle.

matricielle est son coût en temps de calcul qui peut devenir très important en étudiant des surfaces rugueuses comportant un très grand nombre d'aspérités, ce qui implique une discrétisation très fine. Dans les cas où la surface rigide est périodiquement rugueuse, la pression de contact et la surface de contact sont aussi périodiques. La suite du chapitre présentera une approche qui exploite cette périodicité afin de réduire le nombre d'inconnues à calculer.

1.6 Élaboration de l'approche en pression périodique pour deux surfaces rugueuses périodiques en contact unilatéral

Lorsque le contact se produit entre la surface lisse d'un demi-espace déformable et une surface rigide périodique de longueurs d'onde λ_x et λ_y respectivement dans les directions x et y , les surfaces de contact, le déplacement et la distribution de pression sont périodiques. Il est alors possible de résoudre le problème en étudiant une cellule surfacique périodique considérée comme cellule de référence du demi-espace déformable définie par

$$S^0 = \left\{ (x, y) \in S \mid -\frac{\lambda_x}{2} \leq x \leq \frac{\lambda_x}{2}, \quad -\frac{\lambda_y}{2} \leq y \leq \frac{\lambda_y}{2} \right\}. \quad (1.56)$$

Pour des raisons de simplicité, le centre de la cellule surfacique périodique de référence S^0 est choisi comme étant l'origine du système de coordonnées (Figure 1.12).

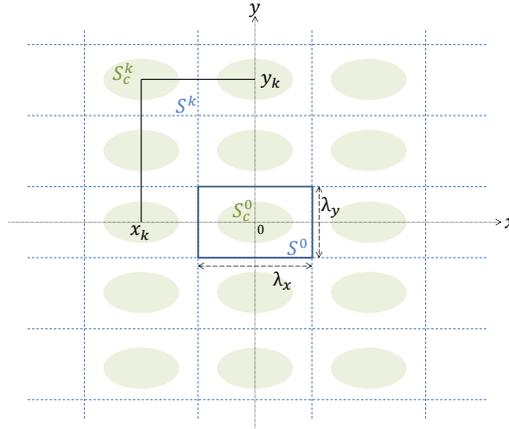


FIGURE 1.12 – La période de référence d'un demi-espace déformable en contact avec une surface rigide et périodiquement rugueuse.

1.7 Approche en pression périodique

En appliquant simplement le principe de superposition à la solution de Boussinesq et Cerruti (1.11), le champ de déplacement peut s'écrire

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi E^*} \sum_{k=1}^{N_p} \int_{S_c^k} T(x, y; \xi, \eta) p(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (1.57)$$

où S_c^k est la $k^{\text{ème}}$ cellule surfacique périodique et N_p est le nombre de cellules surfaciques périodiques considéré. L'équation (1.57) peut être reformulée comme suit

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi E^*} \sum_{k=1}^{N_p} \int_{S_c^0} T(x, y; \xi' + x_k, \eta' + y_k) p(\xi' + x_k, \eta' + y_k) d\xi' d\eta' \quad (1.58)$$

où l'intégration géométrique n'implique que S_c^0 . Dans l'équation (1.58), (x_k, y_k) correspondent aux coordonnées du centre de la $k^{\text{ème}}$ cellule surfacique périodique. La condition de périodicité en pression implique que $p(\xi' + x_k, \eta' + y_k) = p(\xi', \eta')$ pour tout point $(\xi', \eta') \in S_c^0$, ainsi l'équation (1.58) est finalement formulée

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi E^*} \int_{S_c^0} \left[\sum_{k=1}^{N_p} T(x, y; \xi' + x_k, \eta' + y_k) \right] p(\xi', \eta') d\xi' d\eta'. \quad (1.59)$$

Théoriquement parlant, N_p doit être infini pour correspondre exactement à la situation étudiée. Cependant, il sera démontré, d'un point de vue numérique, que le choix d'un nombre fini mais suffisamment élevé de périodes sera suffisant pour déterminer la distribution de pression et la surface de contact avec une précision satisfaisante.

1.8 Approche numérique pour le contact entre deux surfaces élastiques périodiques

Afin de déterminer numériquement la distribution de pression de contact et la surface de contact entre deux surfaces élastiques périodiques, la méthode d'inversion matricielle peut être facilement reformulée et adaptée au problème de contact en question pour que seule la cellule surfacique périodique de référence S^0 soit discrétisée. La cellule surfacique S^0 est maillée avec N_e éléments rectangulaire de longueurs λ_x suivant l'axe x et λ_y suivant l'axe y . En supposant que la pression soit uniforme est notée p_j dans le $j^{\text{ème}}$ élément, l'équation (1.59) s'écrit ainsi

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi E^*} \sum_{j=1}^{N_e} \left[\sum_{k=1}^{N_p} m(x, y; x_j + x_k, y_j + y_k) \right] p_j, \quad (1.60)$$

où l'expression de la fonction $m(x, y; \xi, \eta)$ est rappelée en Annexe A. Enfin, en notant u_i le déplacement verticale du centre du $i^{\text{ème}}$ élément et $A_{ij} = \sum_{k=1}^{N_p} m(x_i, y_i; x_j + x_k, y_j + y_k)$ la composante de la matrice d'influence résultante, le système matriciel suivant est obtenu :

$$u_i = \frac{1}{\pi E^*} \sum_{j=1}^{N_e} A_{ij} p_j. \quad (1.61)$$

La surface de contact réelle S_c est numériquement déterminée via le même processus itératif décrit pour la méthode d'inversion matricielle et illustrée par la Figure 1.11.

1.9 Validation numérique pour des surfaces sinusoïdales

L'objectif de cette section est d'évaluer l'efficacité de l'approche en pression périodique développée précédemment. Le contact entre une surface rigide sinusoïdale, unidimensionnelle dans un premier temps, puis bidimensionnelle, et la surface lisse d'un demi-espace fera l'objet de l'étude numérique dans cette partie. Les résultats numériques seront comparés aux solutions analytiques précédemment rappelées et la convergence sera étudiée en termes de discrétisation et de périodicité pour valider la précision de la méthode numérique présentée. Dans l'ensemble des résultats présentés dans la suite de ce chapitre, le demi-espace élastique est caractérisée par son module de Young équivalent $E^* = 230.77$.

1.9.1 Rugosité sinusoïdale unidimensionnelle

Le contact entre une surface rigide de profil sinusoïdale unidimensionnelle dans la direction x et la surface lisse d'un demi-espace élastique est le sujet de l'étude numérique. La surface sinusoïdale a pour hauteur, dans la direction z , $2\Delta = 0.2$ mm et pour longueur d'onde, dans la direction x , $\lambda = 10/N_p$ mm. Le problème est invariant dans la direction y . La cellule surfacique périodique de référence S^0 est discrétisée par $N_e = 101$ éléments rectangulaires de longueurs $l_x = \lambda/101$ dans la direction x et $l_y = 10$ mm dans la direction y . La Figure 1.13 représente les distributions de pressions résultantes calculées en imposant le déplacement de corps rigide $\delta = 0.8$ mm pour $N_p = 3$ et $N_p = 11$ périodes. En parallèle, les distributions de pression sont aussi calculées directement sans prendre en compte la périodicité du problème en résolvant simultanément l'équation (1.54) et en discrétisant toutes les cellules surfaciques périodiques. Dans ce cas, seul le déplacement est périodique. Évidemment,

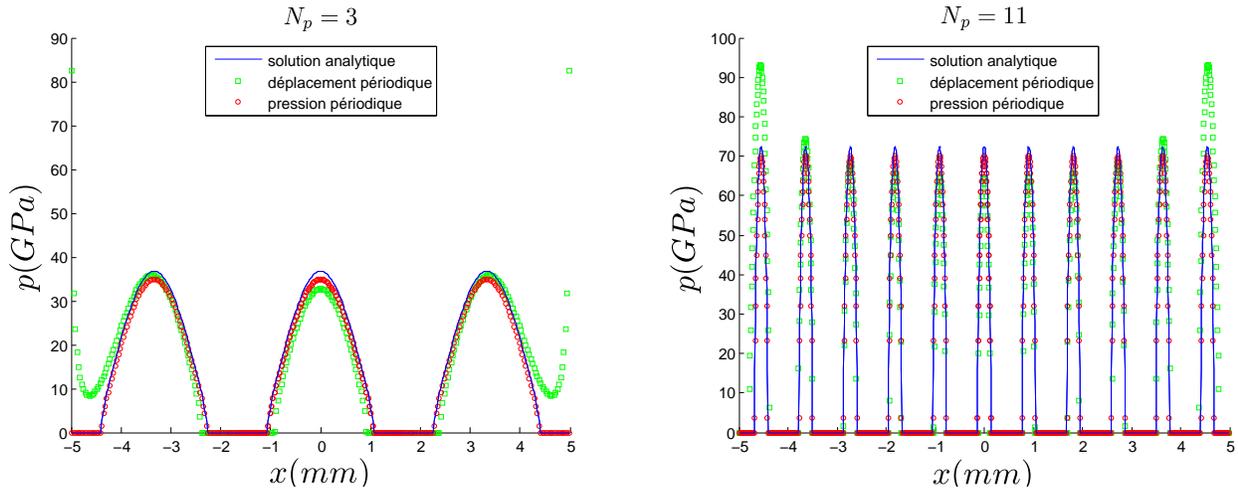


FIGURE 1.13 – Distributions de pression de contact sur la surface du demi-espace élastique pour une surface rigide sinusoïdale unidimensionnelle avec $N_p = 3$ et $N_p = 11$ périodes.

comme le montre la Figure 1.13, le nombre $N_p = 3$ est trop faible pour approcher une surface

infinie, une différence entre les distributions de pression numérique et analytique est observable, tandis que pour $N_p = 11$ périodes, les résultats numérique et analytique sont plus proches. Il est aussi à remarquer, que ce soit pour $N_p = 3$ ou $N_p = 11$, que la distribution de pression obtenue par le calcul direct en déplacement périodique n'est pas périodique et est très différente de la solution analytique de Westergaard, ce qui montre que, classiquement, la méthode d'inversion matricielle n'est pas adaptée pour traiter des problèmes de contact périodiques. La Figure 1.14 montre l'évolution de la taille de la surface de contact relative $|S_c^0|/|S^0|$ en fonction de la pression moyenne normalisée \bar{p}/p^* . On remarque une fois de plus que les résultats numériques sont très proches des solutions analytiques. On observe aussi que pour une pression moyenne très faible les surfaces de contact sont de très petite taille et éloignées les unes des autres et leurs interactions sont donc négligeables, chacune d'elle peut être considérée comme une bande seule dont le comportement peut être décrit par la théorie de Hertz, mais si la pression moyenne est suffisamment élevée pour que le contact soit presque complet, les zones de séparations sont petites et distantes les unes des autres, elles se comportent donc comme des fissures seules dans un milieu élastique infini. La convergence numérique de l'approche en pression périodique est étudiée en termes de

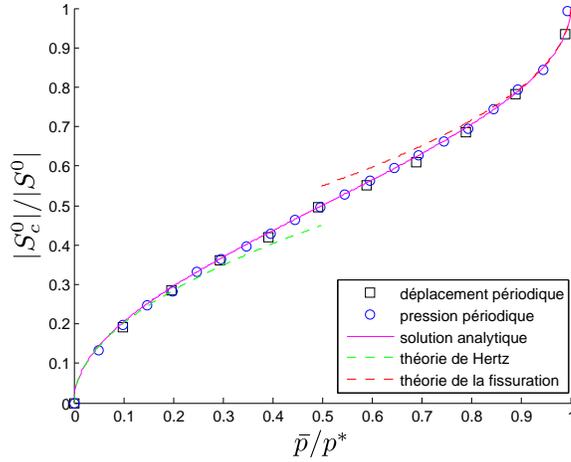


FIGURE 1.14 – La surface de contact relative $|S_c^0|/|S^0|$ en fonction de la pression moyenne normalisée \bar{p}/p^* .

nombre de périodes et nombre d'éléments dans le maillage en comparant la distribution de pression résultante à la solution analytique de Westergaard. La différence relative entre les distributions de pression numérique et analytique est définie par

$$\varepsilon = 100 \frac{\sum_{i=1}^{N_e} |p_i - p_i^W|}{\sum_{i=1}^{N_e} p_i^W}, \quad (1.62)$$

où p_i^W est la pression analytique de Westergaard dans le $i^{\text{ème}}$ élément. Sur la Figure 1.15, ε est tracé en fonction du nombre de périodes N_p et du nombre d'éléments dans le maillage

N_e . On observe que la différence relative ε décroît rapidement sous la barre des 1%, ce qui témoigne d'une précision satisfaisante.

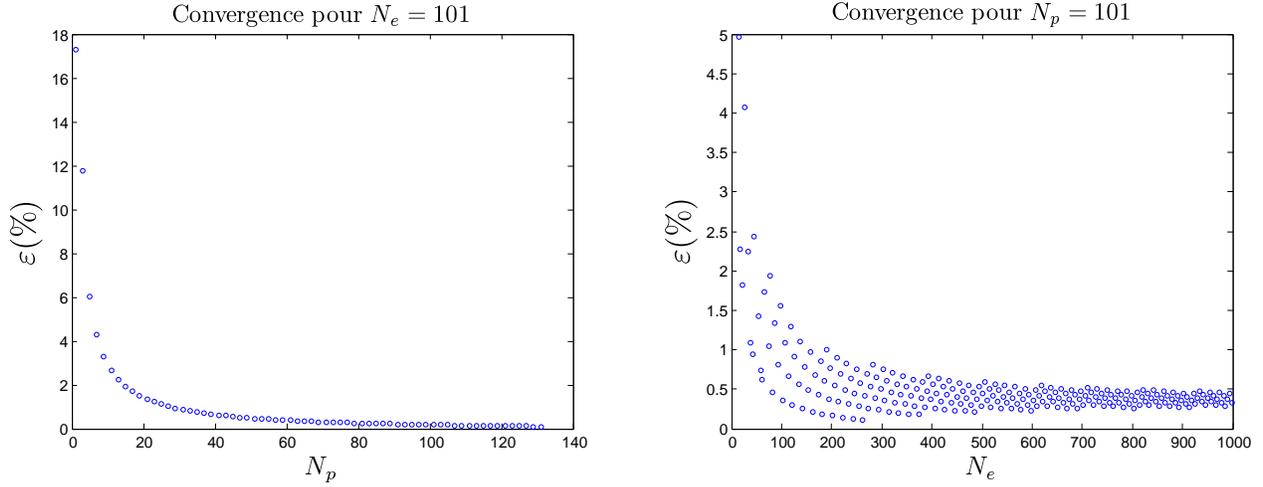


FIGURE 1.15 – Convergence de l’approche en pression périodique pour une périodicité sinusoidale unidimensionnelle.

1.9.2 Rugosité sinusoidale bidimensionnelle

À présent la surface du même demi-espace élastique est soumise au contact avec une surface rigide de profil sinusoidale et orthotrope dans les directions x et y . La surface sinusoidale est d’amplitude $4\Delta = 0.2$ mm et de longueur d’onde, dans les direction x et y , $\lambda = 10/\sqrt{N_p}$ mm. La cellule surfacique périodique de référence S^0 est discrétisée par $N_e = 20 \times 20 = 400$ éléments carrés de côté $l = 10/21$ mm. La Figure 1.16 représente les distributions de pressions résultantes obtenues pour $N_p = 3 \times 3 = 9$ et $N_p = 11 \times 11 = 121$ périodes, et en imposant le déplacement $\delta = 3.5$ mm suffisamment élevé pour que le contact soit complet. Tout comme dans le cas d’une périodicité unidimensionnelle, le choix d’un nombre de périodes trop faible conduit à des résultats très imprécis, et notamment à des effets de bord très apparents. Mais si N_p est suffisamment élevé, les résultats numériques sont très proches de la solution analytique. L’évolution de la mesure de la surface de contact relative $|S_c^0|/|S^0|$ est affichée en fonction de la pression moyenne normalisée sur la Figure 1.17. Les mêmes comportements asymptotiques observés dans le cas d’une périodicité unidimensionnelle sont présents. Dans les travaux de Yastrebov, l’évolution de la surface de contact a été très finement étudiée. Cette étude a mis en évidence une complexité dans l’évolution de la surface de contact. En ayant recours à une discrétisation plus fine et un nombre de périodes très élevé pour garantir une grande précision sur les calculs, l’approche en pression périodique permet d’observer cette même complexité (Figure 1.17). Les distributions de pression surfaciques calculées pour six différentes valeurs croissantes du déplacement δ imposées sont présentées sur la Figure 1.18, la même évolution est présentée dans la monographie de Johnson [38].

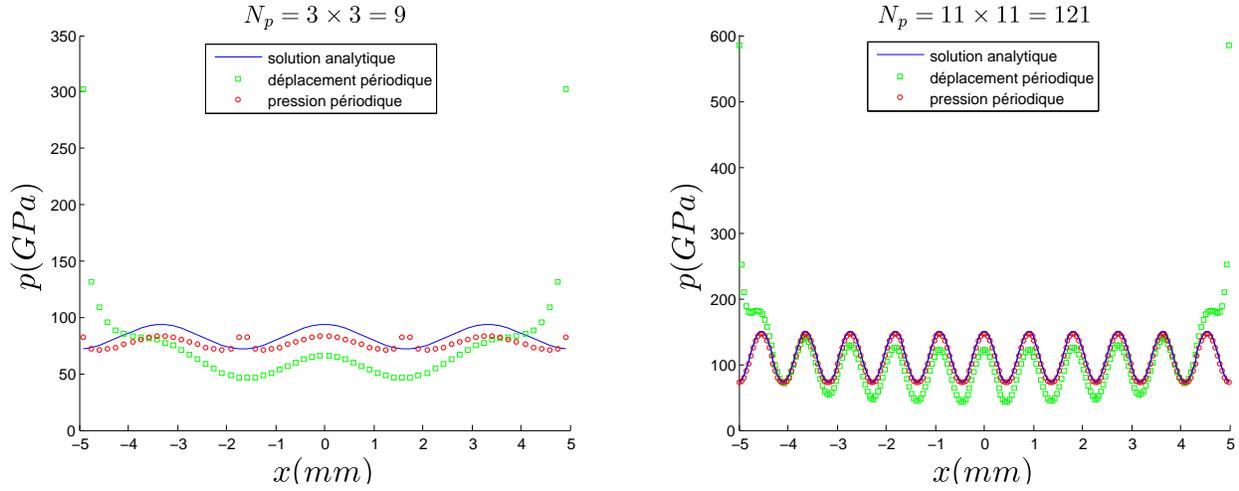


FIGURE 1.16 – Distributions de pression pour $y = l/2$ dans le cas d'une surface sinusoïdale avec $N_p = 3 \times 3 = 9$ et $N_p = 11 \times 11 = 121$.

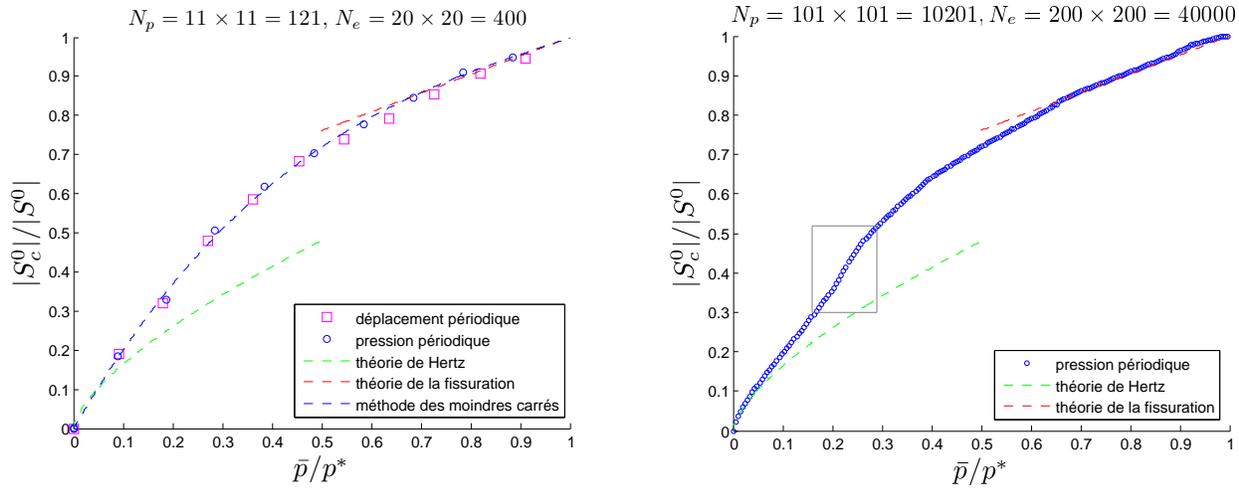


FIGURE 1.17 – Mesure de la surface de contact relative $|S_c^0|/|S^0|$ en fonction de la pression normalisée \bar{p}/p^* .

Il est aussi important d'observer, tout comme dans le cas d'une surface sinusoïdale unidimensionnelle, que si la pression moyenne est très faible les surfaces de contact sont petites, circulaires et éloignées les unes des autres, elles peuvent donc être étudiées avec la théorie de Hertz pour une aspérité rigide sphérique. Puis, à mesure que le chargement augmente, les surfaces de contact augmentent et les interactions entre elles apparaissent, notamment lorsque les surfaces de contact ne sont plus circulaires. Ensuite, dès que le contact est presque complet, les zones de séparations sont circulaires et petites, leur comportement s'apparent

à celui d'une fissure. La convergence de l'approche en pression périodique dans le cas d'une

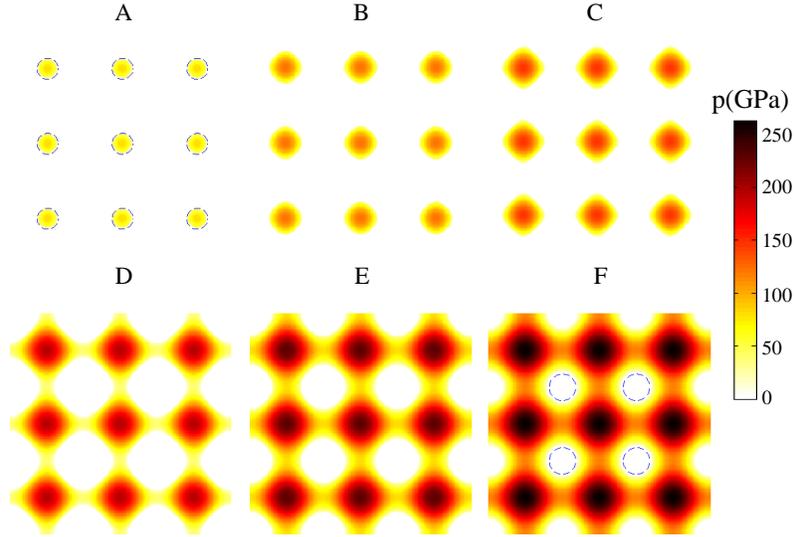


FIGURE 1.18 – Distributions de pression surfaciques pour une surface rigide sinusoïdale avec $N_p = 21 \times 21 = 441$ aspérités pour différentes valeurs de la pénétration δ : 0.1777 mm (A), 0.5923 mm (B), 1.0291 mm (C), 2.5542 mm (D), 4.0719 mm (E), 5.6193 mm (F).

périodicité bidimensionnelle est analysée en définissant la différence relative :

$$\varepsilon = 100 \frac{\sum_{i=1}^{N_e} |p_i - p_i^C|}{\sum_{i=1}^{N_e} p_i^C}, \quad (1.63)$$

où p_i^C est la pression analytique dans le $i^{\text{ème}}$ élément donnée dans le cas d'une surface de contact continue. La Figure 1.19 représente la convergence de la différence ε en fonction du nombre de périodes N_p et du nombre d'éléments N_e . Il est observé que cette différence diminue rapidement sous 0.2% ce qui démontre une très bonne précision. En conclusion, l'approche en pression périodique a été testée pour des surfaces sinusoïdales et les distributions de pression et les surfaces de contact numériques ont été comparées à des solutions analytiques, numériques et expérimentales présentées dans la littérature. Les résultats sont très satisfaisants puisque dans tous les cas étudiés les solutions présentées dans la littérature ont été retrouvées et la différence relative entre les résultats numériques et analytiques converge sous 1%. L'approche en pression périodique est ainsi validée pour les surfaces élastiques périodiques.

1.10 Application à différentes surfaces périodiques

L'approche en pression périodique ayant été précédemment testée et validée dans le cas des surfaces sinusoïdales, différentes géométries périodiques seront traitées incluant des

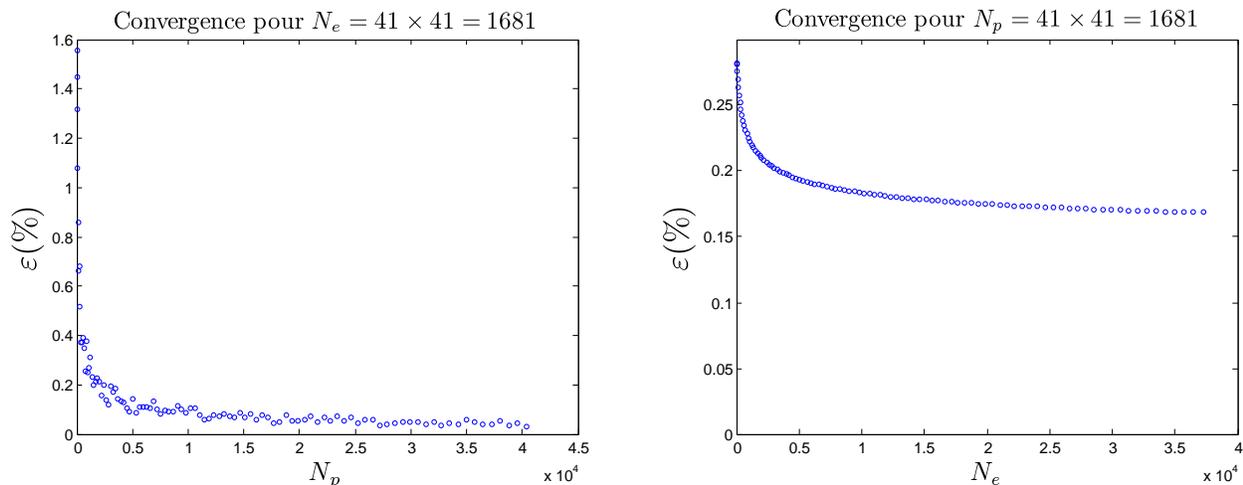


FIGURE 1.19 – Convergence de l’approche en pression périodique pour une rugosité sinusoïdale bidimensionnelle.

aspérités paraboloidales, coniques et pyramidales.

Surfaces périodiques unidimensionnelles

La surface rigide, décrite par un profil périodique unidimensionnel dans la direction x , possède $N_p = 51$ périodes de hauteur $2\Delta = 0.02$ mm et de longueur d’onde $\lambda = 10/51$ mm dans la direction x . La cellule surfacique périodique de référence est discrétisée par $N_e = 151$ éléments rectangulaires de longueurs $l_x = \lambda/151$ suivant x et $l_y = 10$ mm suivant y . Trois simulations numériques sont effectuées au cours desquelles la surface rigide périodique comporte des aspérités, sinusoïdales, paraboloidales et coniques. Les Figures 1.20 et 1.21 représentent respectivement les distributions de pression résultants déterminées avec $\delta = 1$ mm et l’évolution de la zone de contact pour les trois géométries considérées. Il est remarquable que les résultats soient significativement différents selon la géométrie de la surface rigide, bien que sa hauteur et son nombre de périodes soient les mêmes. Ceci montre que la géométrie des surfaces a une influence importante sur la distribution de pression et sur la surface de contact. De plus, la distribution de pression pour la géométrie conique présente une singularité pour $x = 0$ mm. Théoriquement, la pression devrait être infinie en ce point, ce qui engendre une certaine erreur de calcul pour ce genre de géométrie.

Surfaces périodiques bidimensionnelles

La surface rigide est à présent décrite par un profil périodique dans les directions x et y , et comporte pour chaque simulation $N_p = 51 \times 51 = 2601$ aspérités sinusoïdales, paraboloidales, coniques ou pyramidales de hauteur $4\Delta = 0.024$ mm. La cellule surfacique périodique de référence, de côté $\lambda = 10/51$ mm, est discrétisée par $N_e = 71 \times 71 = 5041$

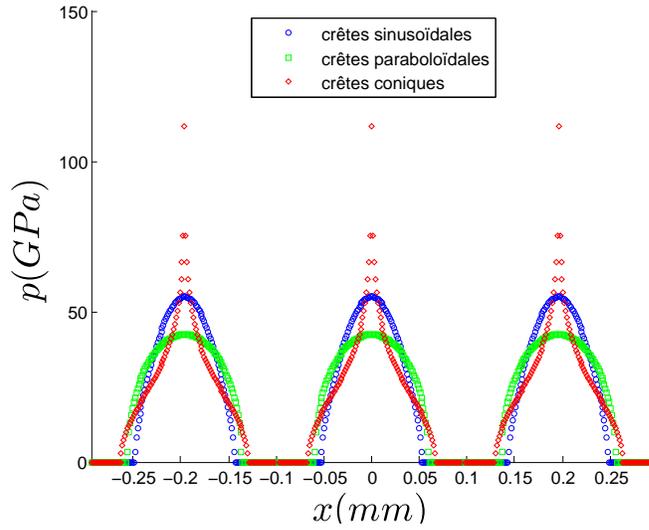


FIGURE 1.20 – Distributions de pression pour la pénétration $\delta = 1$ mm imposée calculées pour les surfaces périodiques unidimensionnelles.

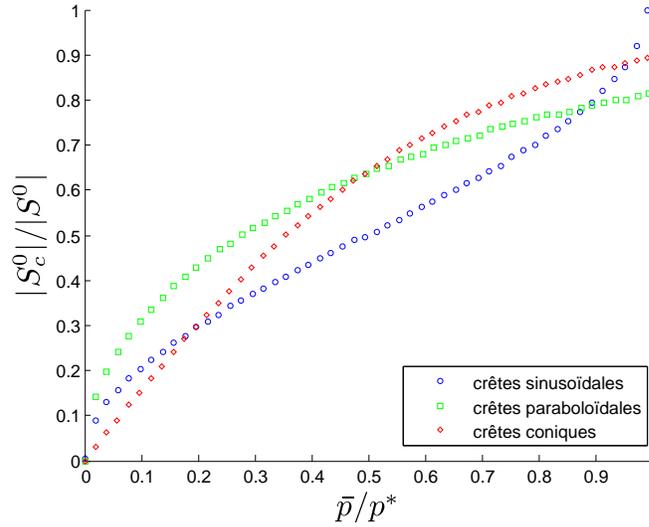


FIGURE 1.21 – Mesures de la surface de contact relative $|S_c^0|/|S^0|$ en fonction de la pression normalisée \bar{p}/p^* déterminées pour les surfaces périodiques unidimensionnelles.

éléments carrés de côté $l = \lambda/71$. Les distributions de pression surfaciques pour les aspérités paraboloidales, coniques et pyramidales, obtenues en imposant le déplacement de corps rigide $\delta = 2.5$ mm, sont présentées sur la Figure 1.22. Une fois encore, les résultats montrent que la

géométrie influence clairement la distribution de pression et la surface de contact. Aussi, la singularité due aux géométries coniques et pyramidales est nettement marquée, notamment pour les pyramides. Les Figures 1.23 et 1.24 représentent respectivement les distributions de

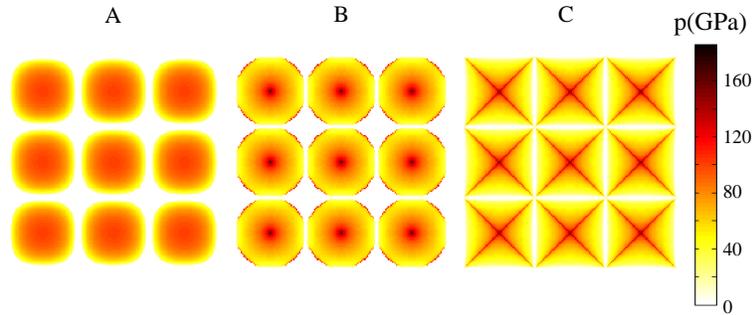


FIGURE 1.22 – Distributions de pression pour la pénétration $\delta = 2.5$ mm imposée dans le cas d’une surface rigide contenant des aspérités paraboloidales (A), coniques (B) et pyramidales (C).

pression pour $y = 0$ mm obtenues en imposant le déplacement de corps rigide $\delta = 0.4$ mm et l’évolution de la surface de contact relative. Il est encore à remarquer l’influence nette de la géométrie sur la pression et la surface de contact. L’objectif des travaux suivants

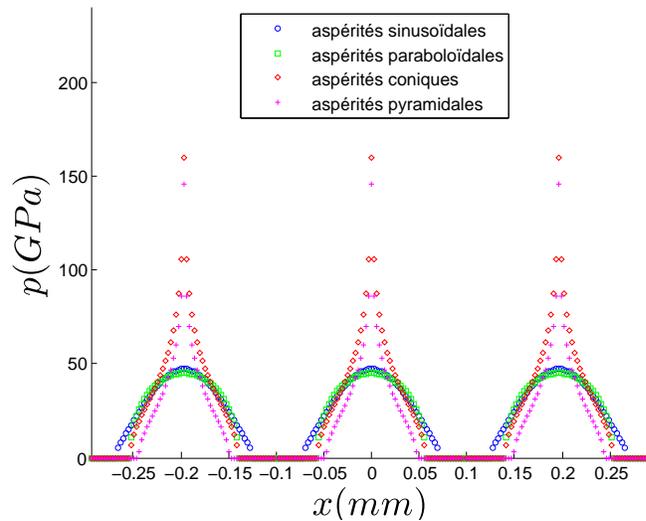


FIGURE 1.23 – Distributions de pression pour la pénétration $\delta = 0.4$ mm imposée et $y = 0$ mm calculées dans le cas des surfaces périodiques bidimensionnelles.

sera d’analyser numériquement le contact entre une surface élastique et une surface rigide

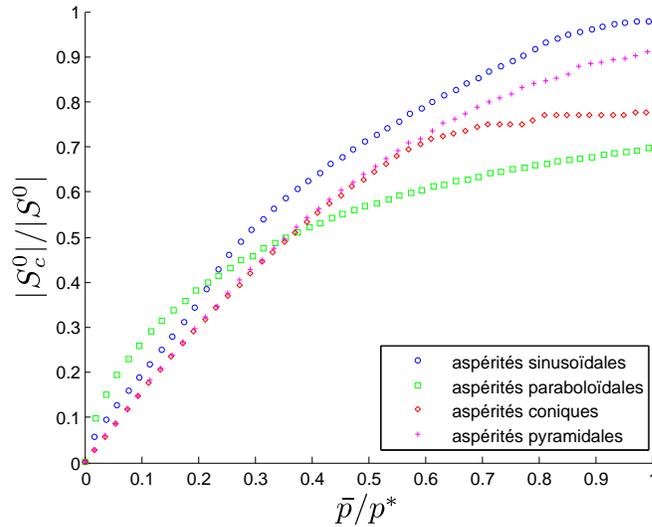


FIGURE 1.24 – Mesures de la surface de contact relative $|S_c^0|/|S^0|$ en fonction de la pression normalisée \bar{p}/p^* obtenues pour les surfaces périodiques bidimensionnelles.

périodiquement rugueuse dont la périodicité sera décrite par différentes configurations. Jusqu'à présent, la périodicité était considérée orthotrope (Figure 1.12).

Dans ce qui suit, on étudiera l'influence de la position des aspérités sur la distribution de pression de contact ainsi que sur l'aire de contact. Dans un premier temps, les configurations carrée et hexagonale de la périodicité seront comparées. À noter que dans le cas de la configuration hexagonale, la cellule surfacique périodique de référence choisie est un rectangle (Figure 1.25). La surface rigide périodique comporte $N_p = 1001 \times 1001 = 1002001$

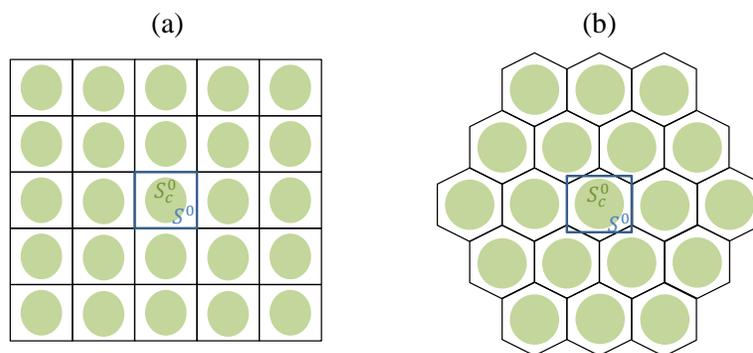


FIGURE 1.25 – Configurations de la périodicité : (a) carrée ; (b) hexagonale.

aspérités en configuration carrée et $N_p = 1003987$ aspérités en configuration hexagonale de géométrie sinusoïdale, paraboloidale, conique et pyramidale de hauteur $4\Delta = 0.021$ mm. Dans le cas où la périodicité est hexagonale, la cellule surfacique périodique de référence, de dimensions $\lambda_x = 0.2/\sqrt{3}$ mm suivant x et $\lambda_y = 0.1$ mm suivant y , est discrétisée par $N_e = 150 \times 150 = 22500$ éléments rectangulaires de côtés $l_x = \lambda_x/150$ et $l_y = \lambda_y/150$. Puis dans le cas où la périodicité est carrée, la cellule périodique, de côté $\lambda = 0.1$ mm, est discrétisée par le même nombre d'éléments carrés. Les distributions de pression résultantes pour toutes les géométries et configurations étudiées sont affichées sur la Figure 1.26, obtenues en imposant la pénétration $\delta = 300$ mm. Il est à observer que ces résultats mettent en évidence que la position des périodes a une influence sur la distribution de pression et aussi sur la surface de contact. La Figure 1.27, représentant l'évolution de la surface de contact relative, montre aussi que la position des aspérités suivant x et y est un facteur pouvant influencer les résultats. Il est intéressant de remarquer qu'une complexité est aussi présente dans l'évolution de l'aire de contact pour des aspérités sinusoïdales en configuration hexagonale. Cette complexité est plus apparente que dans le cas des aspérités sinusoïdales positionnées en configuration carrée, alors que pour les autres géométries étudiées aucune complexité n'est repérable bien que l'aire de contact évolue de manière assez proche.

Dans ce qui suit, chaque période de la surface rigide périodique comportera plusieurs aspérités paraboloidales, coniques ou pyramidales. Trois nouvelles configurations seront alors étudiées (Figure 1.28) où la distance entre les aspérités sera différente d'une configuration à l'autre. Chaque configuration correspondra à un niveau d'interaction élevé, intermédiaire, ou bas entre les aspérités : plus les aspérités sont rapprochées, plus leurs interactions seront fortes. Il est aussi assuré que le nombre d'aspérités par unité de surface est le même pour les trois configurations. Lors des simulations numériques, la surface rigide périodique possède $N_p = 501 \times 501 = 251001$ périodes dans les cas des configurations où l'interaction est forte ou intermédiaire, et $N_p = 250 \times 250 = 62500$ périodes dans le cas de la configuration où l'interaction est faible entre les aspérités. Dans tous les cas, la hauteur de la surface rigide périodique est fixée à $4\Delta = 0.008$ mm. La cellule S^0 , carrée de côté $\lambda = 0.196$ mm pour les interactions forte et intermédiaire et $\lambda = 0.4$ mm pour l'interaction faible, est discrétisée de sorte à ce que chaque petite case dans la Figure 1.28, correspondant à une aspérité, soit maillée avec $150 \times 150 = 22500$ éléments carrés. Les distributions de pression ainsi calculées avec la pénétration $\delta = 10.5$ mm sont représentées sur les Figures 1.29 à 1.31. Ces résultats montrent que la distance entre les aspérités est un facteur supplémentaire qui influence la pression de contact. Il est aussi remarquable que plus les aspérités sont proches, plus la distribution de pression tend à être repoussée. En effet dans le cas où l'interaction est forte, les distributions de pression sont repoussées sur quatre aspérités regroupées. Pour l'interaction intermédiaire, la pression est repoussée sur deux aspérités côte à côte. Enfin si l'interaction est faible, les distributions de pression ne semblent pas excentrées. La mesure de la surface de contact relative est tracée sur la Figure 1.32 en fonction de la pression de contact. Lorsque la pression est faible, les surfaces de contact sont petites et distantes. Elles évoluent donc indépendamment les unes des autres, ce qui explique que la taille de la surface de contact soit très proche pour les différents niveaux d'interaction si les valeurs de la pression sont

petites. Ensuite, lorsque les surfaces de contact grandissent suffisamment, l'interaction entre les aspérités se manifeste jusqu'à ce que le contact soit complet. L'ensemble des résultats obtenus montre que si la surface de contact est relativement petite, les interactions entre les aspérités sont nettement négligeables. Mais si la surface de contact est de taille suffisamment grande, les interactions entre les aspérités sont fortes et influencent les solutions du problème. Ceci implique que l'influence de la position des aspérités est un facteur non négligeable qui doit être prise en compte.

Dans ce chapitre, les formulations continue puis discrète du contact élastique périodique ont été présentées. Des tests numériques ont été effectués pour des surfaces sinusoïdales et les résultats calculés ont été comparés aux solutions analytiques existantes et disponibles, ce qui a permis de valider la méthode numérique présentée. D'autres applications numériques ont montré que la géométrie des surfaces périodiques, la position des périodes et la distance entre les aspérités influencent la distribution de pression et la surface de contact.

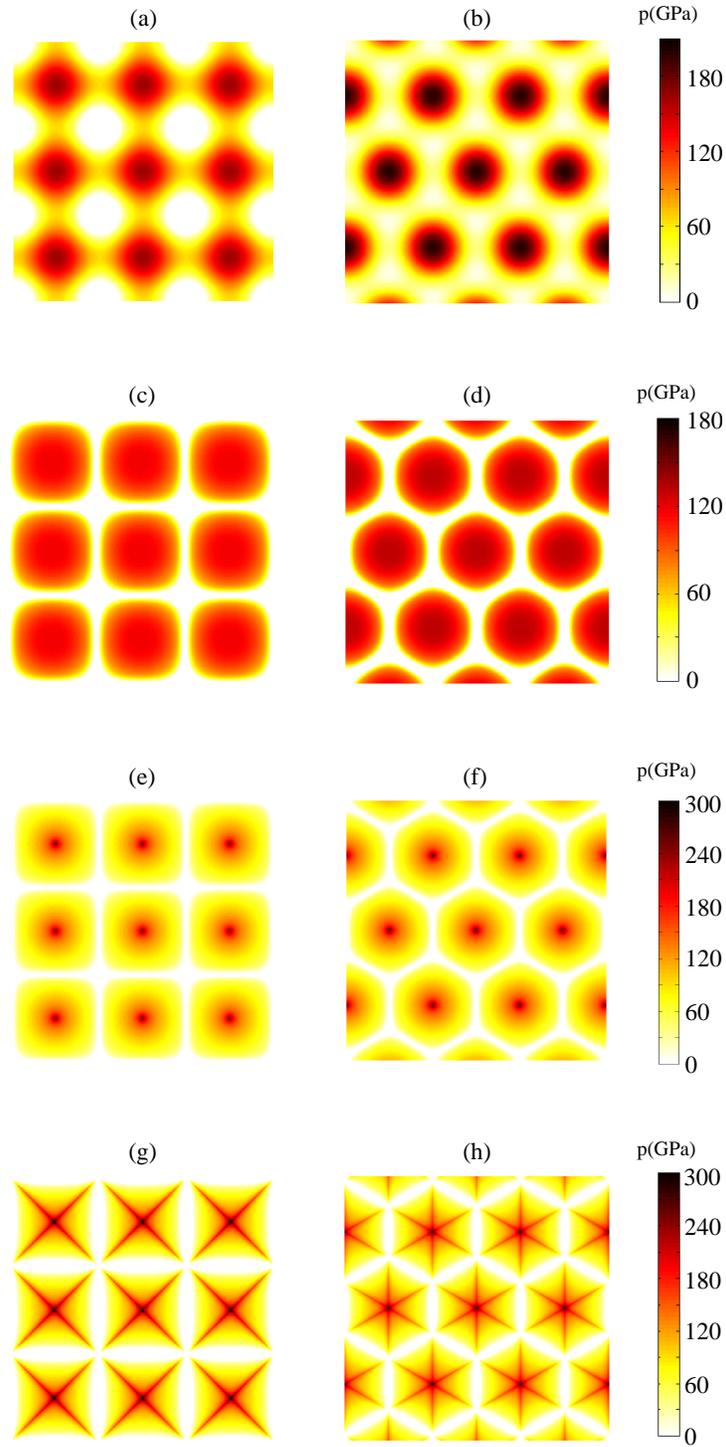


FIGURE 1.26 – Distributions de pression surfaciques pour des périodicités en configuration carrée (figures de gauche) ou hexagonale (figures de droite), dans les cas d’aspérités sinusoidales (a,b), paraboloidales (c,d), coniques (e,f) et pyramidales (g,h).

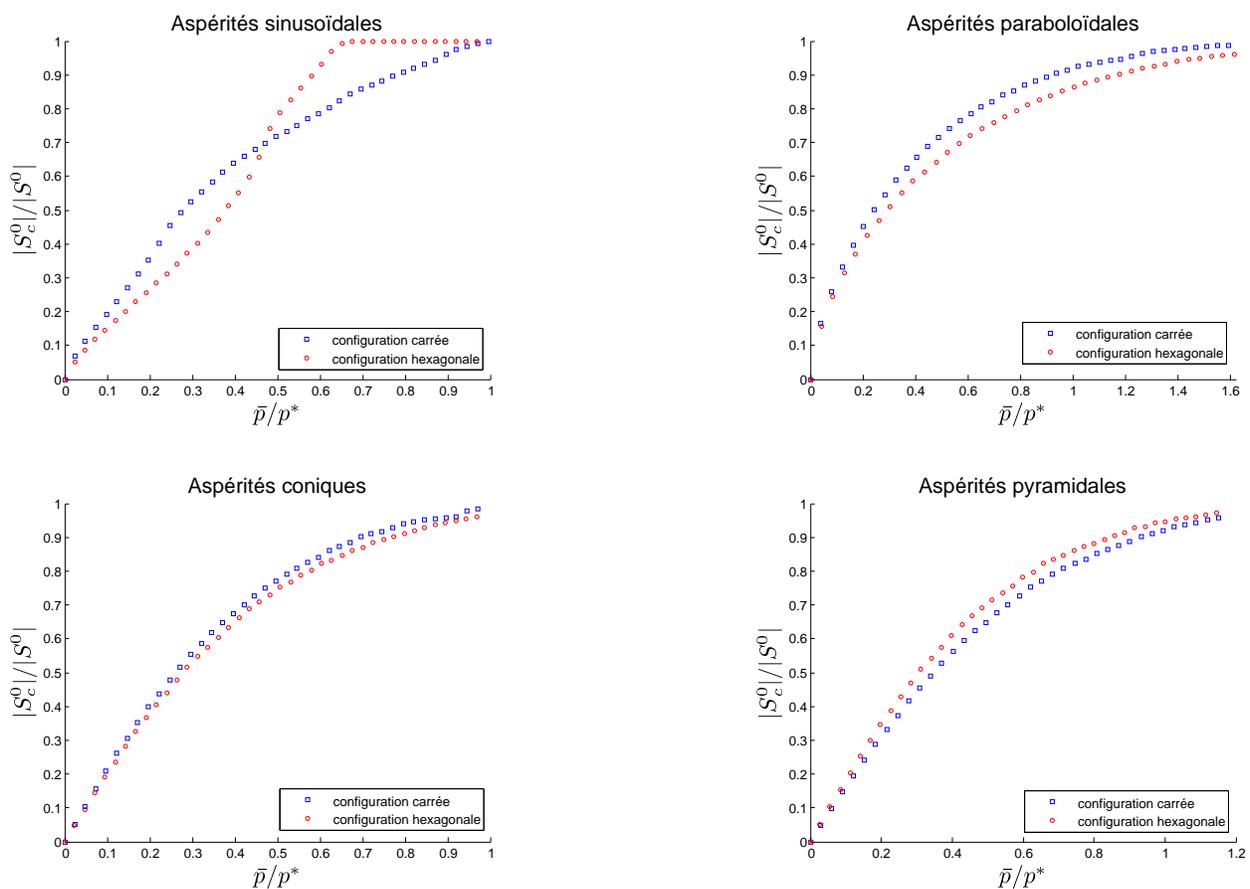


FIGURE 1.27 – Mesure de la surface de contact relative en fonction de la pression normalisée pour des périodicités en configuration carrée (carrés bleu) ou hexagonale (cercles rouge).

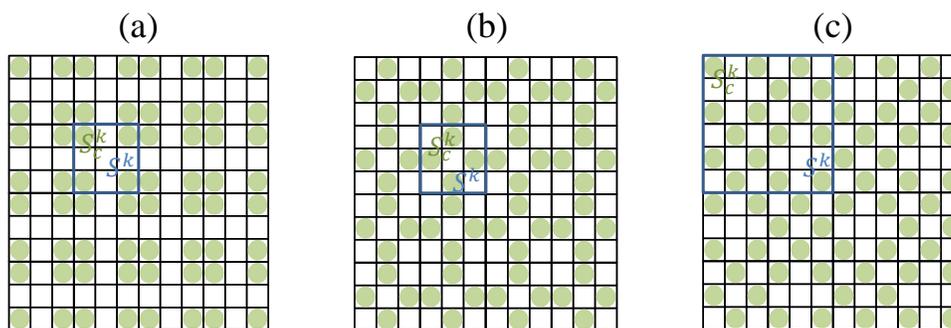


FIGURE 1.28 – Trois configurations périodiques : niveau d'interaction élevé (a), intermédiaire (b) et faible (c) entre les aspérités.

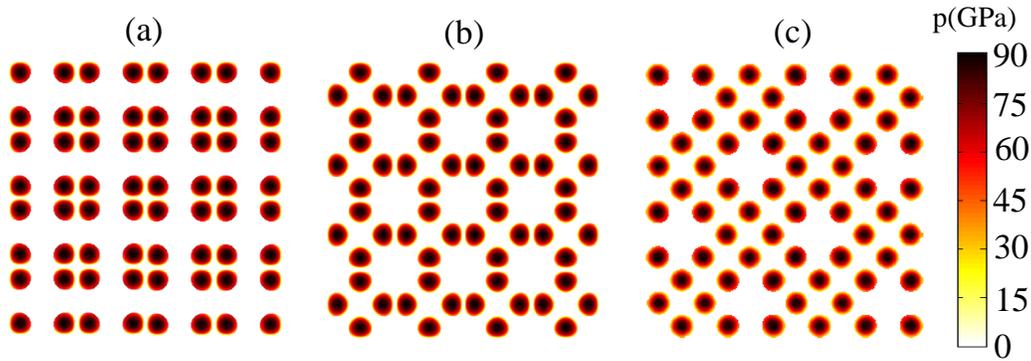


FIGURE 1.29 – Distributions de pression pour les niveaux d'interaction élevé (a), intermédiaire (b) et faible (c) dans le cas d'aspérités paraboloidales.

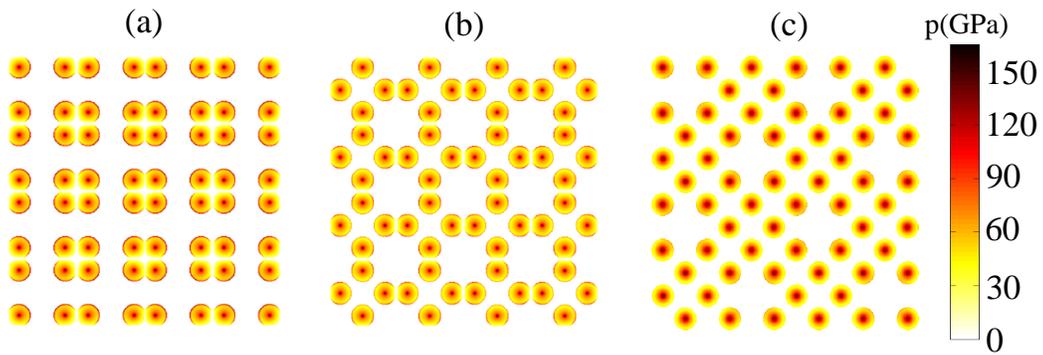


FIGURE 1.30 – Distributions de pression pour les niveaux d'interaction élevé (a), intermédiaire (b) et faible (c) dans le cas d'aspérités coniques.

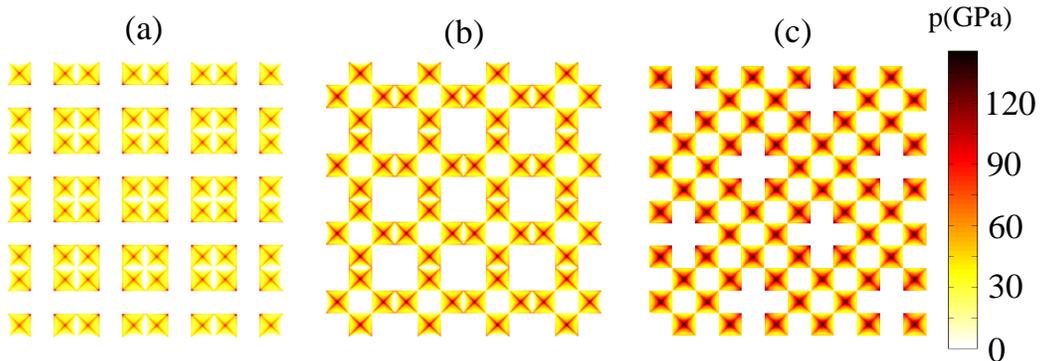


FIGURE 1.31 – Distributions de pression pour les niveaux d'interaction élevé (a), intermédiaire (b) et faible (c) dans le cas d'aspérités pyramidales.

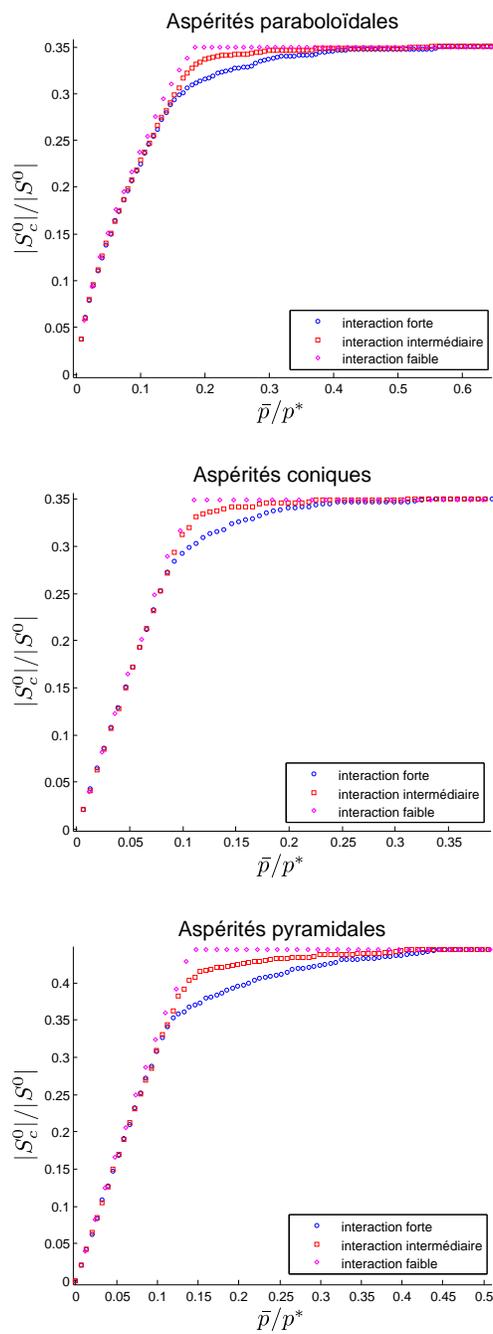


FIGURE 1.32 – Mesure de la surface de contact relative en fonction de la pression normalisée pour des niveaux d’interaction élevé (cercles bleu), intermédiaire (carrés rouge) et faible (losanges violets).

Chapitre 2

Contact unilatéral de surfaces thermoélastiques et périodiquement rugueuses

Dans le cas où deux solides en contact sont à des températures différentes, un échange thermique s'installe entre les deux milieux et engendre l'évolution de déformations induits par le flux de chaleur. Dans ce chapitre, les déplacements thermiques seront pris en compte dans la formulation continue du contact entre une surface mécaniquement et thermiquement rigide et la surface lisse d'un demi-espace thermoélastique. Les solutions analytiques disponibles dans le cas du contact thermoélastique de Hertz et des surfaces sinusoïdales unidimensionnelles seront rappelées avant de présenter le modèle pour le calcul numérique du flux de chaleur et de la pression de contact. L'approche en pression et flux de chaleur sera ensuite développée, la formulation établie sera discrétisée et la validation numérique sera effectuée en comparant les résultats numériques aux solutions analytiques. Les distributions de température et les flux de chaleur surfaciques calculés numériquement pour différentes géométries périodiques seront présentés à la fin du chapitre.

2.1 Thermoélasticité linéaire

Soit un milieu thermoélastique Ω . En chaque point $(x, y, z) \in \Omega$, la température est notée $\theta(x, y, z)$. Si la température $\theta(x, y, z)$ n'est pas uniforme, alors un flux de chaleur circule dans le milieu Ω et est défini par

$$\mathbf{q} = -\Psi \cdot \nabla \theta \quad \forall (x, y, z) \in \Omega, \quad (2.1)$$

où \mathbf{q} est le vecteur des flux de chaleur dans les directions x , y et z , Ψ est le tenseur de conductivité thermique de deuxième ordre et ∇ est l'opérateur gradient. Dans la suite des travaux présentés, le milieu Ω est supposé isotrope. Son comportement thermique ne dépend donc que d'un seul paramètre. Dans ce cas l'équation (2.2) s'écrit tout simplement

$$\mathbf{q} = -\kappa \cdot \nabla \theta \quad \forall (x, y, z) \in \Omega, \quad (2.2)$$

où κ est la conductivité thermique du milieu Ω . La variation de la température dans Ω va induire le développement de déformations thermiques qui vont se superposer aux déformations élastiques :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^\theta, \quad (2.3)$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}$ est le tenseur des déformations totales, $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ est le tenseur des déformations élastiques donné par l'équation (1.4) et $\boldsymbol{\varepsilon}^\theta$ est le tenseur des déformations thermiques. Soit $\Delta\theta$ une variation de température dans le milieu Ω . Si le matériau thermoélastique est isotrope, le tenseur des déformations thermiques s'exprime comme suit

$$\boldsymbol{\varepsilon}^\theta = \alpha\Delta\theta\mathbf{I}, \quad (2.4)$$

où α est le coefficient de dilatation thermique et \mathbf{I} est le tenseur identité de deuxième ordre. Ainsi le tenseur des déformations dans le cas où le milieu Ω est isotrope est donné par

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I} + \alpha\Delta\theta\mathbf{I}, \quad (2.5)$$

où E est le module de Young du milieu thermoélastique et ν le coefficient de Poisson. Un milieu thermoélastique est caractérisé par cinq coefficients : le module de Young, le coefficient de Poisson, la conductivité thermique, le coefficient de dilatation thermique et la chaleur spécifique. En outre, on peut introduire la distortivité définie par :

$$D = \frac{\alpha(1+\nu)}{\kappa}. \quad (2.6)$$

Dans la suite des travaux sur le contact thermoélastique, la distortivité D permettra de calculer les déplacements thermiques.

2.2 Contact entre deux surfaces thermoélastiques

À l'instar du contact entre deux surfaces élastiques, le problème de contact entre les surfaces de deux milieux thermoélastiques Ω_1 et Ω_2 subissant des petites déformations peut se résoudre à celui du contact entre une surface mécaniquement et thermiquement rigide et la surface lisse d'un demi-espace thermoélastique.

Soit une surface rigide de géométrie quelconque, maintenue à la température constante θ^0 , entrant en contact avec la surface lisse S d'un demi-espace thermoélastique. Le demi-espace thermoélastique est supposé linéaire, homogène et isotrope, il est ainsi caractérisé par son module de Young équivalent E^* et sa conductivité thermique κ . La distortivité thermique est notée $D = D_2 - D_1$, où D_1 et D_2 correspondent respectivement aux distortivités des milieux Ω_1 et Ω_2 . Avant contact, le demi-espace thermoélastique est maintenu à la température uniforme θ^∞ (Figure 2.1). L'étude est toujours poursuivie sous l'hypothèse des petites déformations et de l'absence de frottement. L'échange de chaleur entre les deux milieux n'est permis qu'à travers la surface de contact. L'espace entre les deux surfaces, en dehors de la surface de contact, agit comme un isolant et les phénomènes de dispersion de

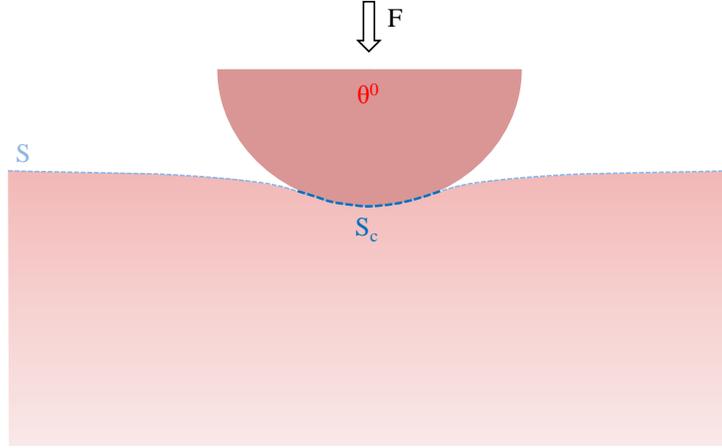


FIGURE 2.1 – L’indentation de la surface lisse d’un demi-espace thermoélastique par un solide rigide uniformément maintenu à la température θ^0 .

chaleur sont négligés. La surface lisse S subit ainsi des déplacements dus au flux de chaleur qui se superposent aux déplacement élastiques donnés par l’équation de Boussinesq (1.11). Le déplacement en tout point de S s’écrit [4, 37]

$$u(x, y) = \int_{S_c} \left[\frac{1}{\pi E^*} T(x, y; \xi, \eta) p(\xi, \eta) + \frac{D}{2\pi} C(x, y; \xi, \eta) q(\xi, \eta) \right] d\xi d\eta, \quad (2.7)$$

où $q(\xi, \eta)$ est le flux de chaleur au point de coordonnée (ξ, η) et $C(x, y; \xi, \eta)$ est la fonction de couplage thermoélastique définie par

$$C(x, y; \xi, \eta) = \ln(\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}). \quad (2.8)$$

Dans le cas isotherme, i.e. $\theta^0 = \theta^\infty$, les milieux thermoélastique et rigide sont à la même température, il n’y a alors aucun flux de chaleur et le second terme dans l’équation (2.7) est ainsi nul. Le déplacement dans le cas isotherme est donc donné par la solution de Boussinesq et Cerruti.

La distribution de température surfacique $\theta(x, y)$ est donnée par [4, 37]

$$\theta(x, y) = \frac{1}{2\pi\kappa} \int_{S_c} T(x, y; \xi, \eta) q(\xi, \eta) d\xi d\eta + \theta^\infty. \quad (2.9)$$

La surface de contact reste définie par les conditions de Signorini (1.15), (1.16) et (1.17). Il est aussi à préciser qu’en tout point de la surface de contact S_c , la température est celle du milieu rigide et la chaleur traverse S_c :

$$q(x, y) > 0, \quad \theta(x, y) = \theta^0, \quad \forall (x, y) \in S_c. \quad (2.10)$$

En dehors de la surface de contact, l’espace entre les deux surfaces de contact isole la chaleur produite par le corps rigide :

$$q(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \notin S_c. \quad (2.11)$$

2.3 Solutions analytiques pour le contact thermoélastique

Des solutions analytiques au problème de contact thermoélastique existent dans quelques situations simples. En l'occurrence, dans les cas d'un indenteur rigide sphérique et d'un indenteur sinusoïdale unidimensionnel seront rappelées dans cette sous-section, ces solutions seront rappelées dans cette sous-section serviront de référence afin de valider l'approche numérique construite dans une prochaine section.

2.3.1 Indentation d'une surface thermoélastique lisse par une sphère rigide uniformément maintenue à température constante

Soit un demi-espace thermoélastique initialement maintenue uniformément à la température θ^∞ dont la surface lisse est soumise à l'indentation par une sphère rigide de rayon R maintenue uniformément à la température θ^0 . La distribution de pression est alors axisymétrique et dépend donc de la position radiale $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ [37, 5]

$$p(r) = \frac{2E^*\sqrt{a^2 - r^2}}{\pi R} + \frac{D\kappa E^*(\theta^0 - \theta^\infty)}{4} \left\{ 1 - \frac{8}{\pi^2} \chi \left(\frac{a - \sqrt{a^2 - r^2}}{a + \sqrt{a^2 - r^2}} \right) \right\}, \quad (2.12)$$

où a est le rayon de contact et la fonction $\chi(x)$ est définie par :

$$\chi(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \ln \left(\frac{1+y}{1-y} \right) \frac{dy}{y} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)^2}. \quad (2.13)$$

Le flux de chaleur est aussi axisymétrique et donné par [5]

$$q(r) = \frac{2\kappa(\theta^0 - \theta^\infty)}{\pi\sqrt{a^2 - r^2}}. \quad (2.14)$$

En posant $a_H = \sqrt[3]{\frac{3FR}{4E^*}}$ le rayon de contact en condition isotherme donné par la théorie de Hertz , le rayon de contact a doit vérifier l'équation suivante :

$$a^3 + \frac{3DR(\theta^0 - \theta^\infty)}{2\pi} a^2 = a_H^3. \quad (2.15)$$

Les Figures 2.2 et 2.3 représentent respectivement l'allure de la pression de contact et du flux de chaleur à la surface du demi-espace.

2.3.2 Distribution de température entre deux surfaces sinusoïdales unidimensionnelles en contact unilatéral

À présent, la surface du demi-espace thermoélastique est compressée par une surface rigide de profil sinusoïdale unidimensionnel de longueur d'onde λ dans la direction x , ainsi le problème est invariant dans la direction y . En tout point de la surface de contact S_c ,

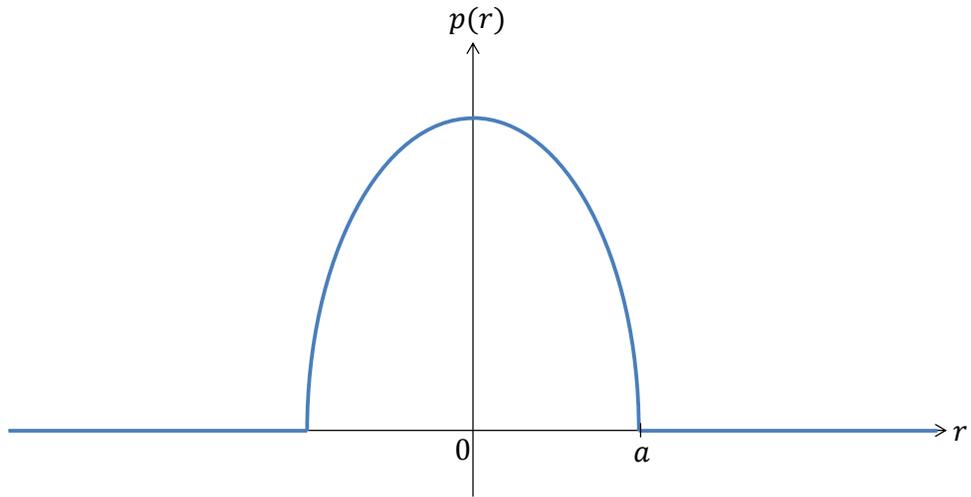


FIGURE 2.2 – Distribution de pression de contact à la surface d'un demi-espace thermoélastique en contact avec une sphère rigide.

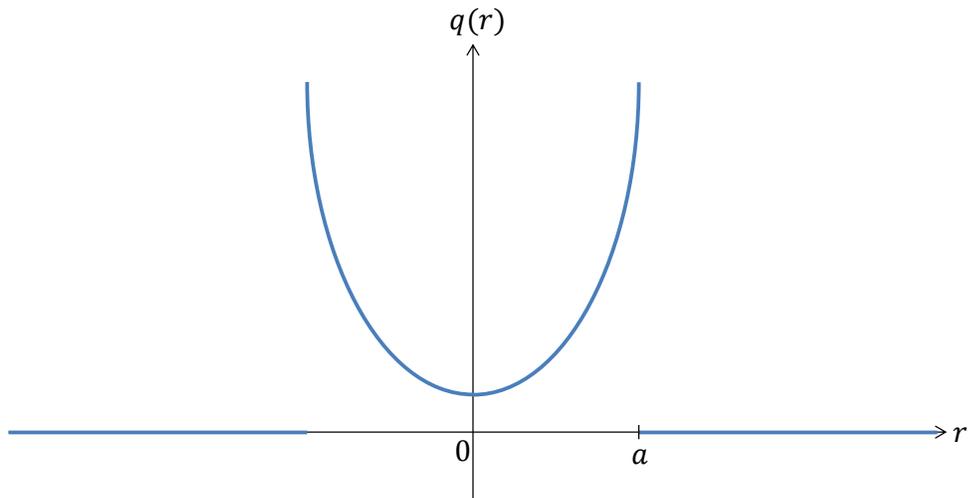


FIGURE 2.3 – Flux de chaleur à la surface d'un demi-espace thermoélastique en contact avec une sphère rigide.

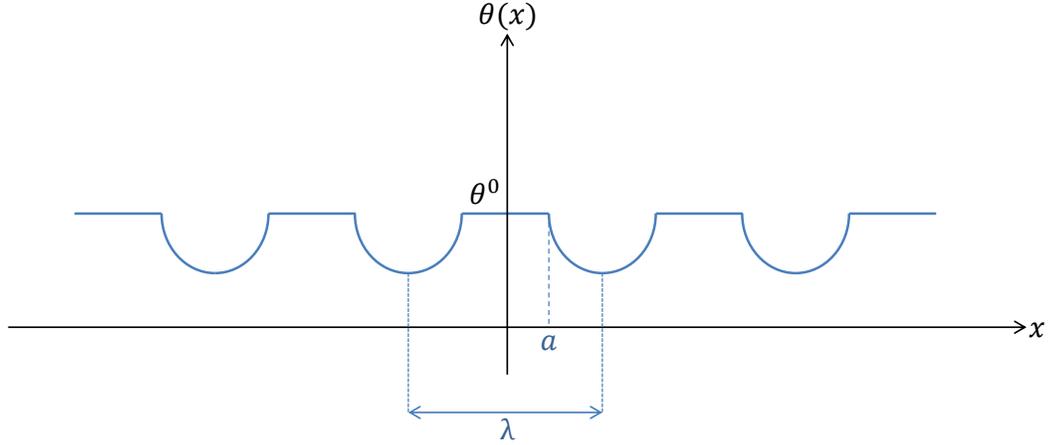


FIGURE 2.4 – Répartition de la température surfacique à la surface d’un demi-espace thermoélastique en contact avec une surface rigide sinusoïdale unidimensionnelle.

la température est donnée par la condition (2.10). En dehors de la surface de contact, la température est donnée par [21]

$$\theta(x) = \theta^0 - \frac{\lambda q^\infty}{\pi \kappa} H(x - a) \ln \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{a}{2}} + \sqrt{\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{a}{2}} \right)^2 - 1} \right), \quad (2.16)$$

avec l’expression du flux lointain q^∞ donnée par :

$$q^\infty = \frac{\pi^2 \kappa a}{4 \lambda D}. \quad (2.17)$$

La Figure 2.4 représente l’allure de la température à la surface du demi-espace thermoélastique. Bien évidemment, la température est constante et prend la valeur de θ^0 dans la surface de contact. Puis diminue en s’éloignant de la zone de contact.

2.4 Approche numérique pour le calcul du flux de chaleur, de la distribution de pression et de la surface de contact

La méthode d’inversion matricielle peut être adaptée pour traiter numériquement l’indentation de la surface lisse d’un demi-espace thermoélastique. La discrétisation de la surface de contact nominale en N_e éléments rectangulaires reste la même décrite dans le chapitre 1. L’intégration sur la surface de contact nominale S_n reste donc effectuée en additionnant l’intégration sur la surface S_j de chaque élément. En considérant la pression de contact et le

flux de chaleur constants dans chaque élément du maillage, les expressions du déplacement vertical et de la température sont

$$u(x, y) = \sum_{j=1}^{N_e} \int_{S_j} \left[\frac{1}{\pi E^*} T(x, y; \xi, \eta) p_j + \frac{D}{2\pi} C(x, y; \xi, \eta) q_j \right] d\xi d\eta, \quad (2.18)$$

$$\theta(x, y) = \frac{1}{2\pi\kappa} \int_{S_j} T(x, y; \xi, \eta) q_j d\xi d\eta + \theta^\infty, \quad (2.19)$$

où q_j est le flux de chaleur dans l'élément j . Le calcul de l'intégration de la fonction $T(x, y; \xi, \eta)$ reste la même que décrite dans le cas élastique. De la même manière, l'intégration de la fonction de couplage $C(x, y; \xi, \eta)$ est donnée par une solution analytique telle que

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi E^*} m(x, y; x_j, y_j) p_j + \frac{D}{2\pi} c(x, y; x_j, y_j) q_j, \quad (2.20)$$

$$\theta(x, y) = \frac{1}{2\pi\kappa} m(x, y; x_j, y_j) q_j + \theta^\infty, \quad (2.21)$$

où (x_j, y_j) sont les coordonnées du centre de l'élément j et l'expression de la fonction $c(x, y; \xi, \eta)$ est donnée en Annexe B. En exprimant enfin le déplacement et la température au centre de chaque élément et en posant $B_{ij} = c(x_i, y_i; x_j, y_j)$ le coefficient de couplage thermoélastique, les équations (2.7) et (2.9) sont finalement discrétisées comme suit

$$u_i = \frac{1}{\pi E^*} M_{ij} p_j + \frac{D}{2\pi} B_{ij} q_j, \quad (2.22)$$

$$\theta_i = \frac{1}{2\pi\kappa} M_{ij} q_j + \theta^\infty. \quad (2.23)$$

La surface de contact étant toujours gouvernée par les condition de Signorini (1.15) et (1.16), le processus itératif pour déterminer les éléments en contact reste le même que décrit dans le chapitre 1. À noter que l'équation (2.23) doit être d'abord résolue pour déterminer le flux de chaleur avant de calculer la distribution de pression via l'équation (2.22).

2.5 Distributions de pression et flux de chaleur pour le contact entre deux surfaces thermoélastiques périodiques

Lorsque la surface du corps rigide présente un profil géométrique périodique, en plus de la distribution de pression, le flux de chaleur est aussi périodique. La périodicité du problème peut être à nouveau exploitée pour développer une approche en pression et flux de chaleur périodiques. De cette manière, seule la cellule surfacique périodique de référence doit être prise en compte pour exprimer le déplacement vertical et la température. En divisant

la surface du demi-espace thermoélastique en N_p cellules périodiques, les expressions du déplacement vertical (2.7) et de la température (2.9) sont reformulées :

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{N_p} \left\{ \int_{S_c^k} \left[\frac{1}{\pi E^*} T(x, y; \xi, \eta) p(\xi, \eta) + \frac{D}{2\pi} C(x, y; \xi, \eta) q(\xi, \eta) \right] d\xi d\eta \right\}, \quad (2.24)$$

$$\theta(x, y) = \sum_{k=1}^{N_p} \left\{ \frac{1}{2\pi\kappa} \int_{S_c^k} T(x, y; \xi, \eta) q(\xi, \eta) d\xi d\eta \right\} + \theta^\infty. \quad (2.25)$$

Si la distribution de pression et le flux de chaleur sont périodiques, alors ils peuvent être déterminés sur la base d'une cellule périodique. Ainsi les expressions (2.24) du déplacement et (2.25) de la température peuvent être reformulées par l'intégration spatiale sur la cellule périodique de référence S^0 :

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{N_p} \left\{ \int_{S_c^0} \left[\frac{1}{\pi E^*} T(x, y; \xi' + x_k, \eta' + y_k) p(\xi', \eta') + \frac{D}{2\pi} C(x, y; \xi' + x_k, \eta' + y_k) q(\xi', \eta') \right] d\xi' d\eta' \right\}, \quad (2.26)$$

$$\theta(x, y) = \sum_{k=1}^{N_p} \left\{ \frac{1}{2\pi\kappa} \int_{S_c^0} T(x, y; \xi' + x_k, \eta' + y_k) q(\xi', \eta') d\xi' d\eta' \right\} + \theta^\infty. \quad (2.27)$$

2.6 Méthode d'inversion matricielle adaptée aux surfaces thermoélastiques et périodiquement rugueuses

Les solutions analytiques aux équations (2.7) et (2.9) dans les cas de surfaces périodiquement rugueuses étant peu nombreuses, l'approche numérique reste la solution la plus appropriée pour analyser efficacement le contact entre deux surfaces thermoélastique périodiques. Dans le premier chapitre, la méthode d'inversion matricielle a été adaptée pour étudier le problème de Boussinesq et Cerruti dans les cas de surfaces élastiques périodiques. Il s'est avéré que l'approche en pression périodique établie conduit à des solutions numériques très précises. De plus, les calculs effectués directement sans prendre en compte la périodicité ont conduit à des résultats très éloignés de la théorie. D'où la nécessité d'adapter la méthode d'inversion matricielle aux surfaces thermoélastiques périodiquement rugueuses. Nous supposons donc que le flux de chaleur est périodique comme la pression de contact sur un nombre de périodes N_p suffisamment large pour que le milieu infini soit bien représenté. Ceci permet de ramener la résolution sur une seule cellule.

La cellule périodique de référence est discrétisée par N_e éléments rectangulaires. En posant p_j et q_j respectivement la pression et le flux de chaleur uniformes dans le $j^{\text{ème}}$ élément, les équations (2.26) et (2.27) s'écrivent

$$u(x, y) = \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{k=1}^{N_p} \left[\frac{1}{\pi E^*} m(x, y; x_j + x_k, y_j + y_k) p_j + \frac{D}{2\pi} c(x, y; x_j + x_k, y_j + y_k) q_j \right], \quad (2.28)$$

$$\theta(x, y) = \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{k=1}^{N_p} \frac{1}{2\pi\kappa} m(x, y; x_j + x_k, y_j + y_k) q_j + \theta^\infty. \quad (2.29)$$

Enfin, en posant $L_{ij} = \sum_{k=1}^{N_p} c(x, y; x_j + x_k, y_j + y_k)$, les équations (2.26) et (2.27) sont discrétisées comme suit :

$$u_i = \sum_{j=1}^{N_e} \left[\frac{1}{\pi E^*} A_{ij} p_j + \frac{D}{2\pi} L_{ij} q_j \right], \quad (2.30)$$

$$\theta_i = \sum_{j=1}^{N_e} \frac{1}{2\pi\kappa} A_{ij} q_j + \theta^\infty. \quad (2.31)$$

Le même processus itératif précédemment décrit est à employer pour déterminer les éléments constituant la surface de contact réelle.

2.7 Évaluation numérique de la distribution de température, du flux de chaleur et de la surface de contact

Des exemples numériques sont traités dans la suite de ce chapitre. Le demi-espace est caractérisé son module de Young équivalent $E^* = 230.77$ GPa, sa conductivité thermique $\kappa = 200$ W.m⁻¹.K⁻¹ et sa distorsivité thermique $D = 0.325$ mm.W⁻¹. Avant contact, le demi-espace thermoélastique est maintenu à la température uniforme $\theta^\infty = 0$ °C.

2.7.1 Application numérique au contact thermoélastique Hertzien

Dans un premier temps, l'approche numérique présentée est testée dans le cadre de l'indentation de la surface d'un demi-espace thermoélastique par une sphère rigide de rayon $R = 5$ mm, ainsi $N_p = 1$. La surface de contact nominale est discrétisée par $N_e = 100 \times 100 = 10000$ éléments carrés de côté $l = 2R/100$. La force de contact $F = 8$ MN est imposée dans la direction z . La Figure 2.5 représente la distribution de pression et le flux de chaleur obtenus en imposant différentes températures dans la sphère rigide. La Figure 2.6 représente les distributions de température surfaciques obtenues pour différentes valeurs de la température θ^0 choisies. Cette figure montre évidemment que la température diminue en s'éloignant de la zone de contact. Il est remarquable que les résultats numériques soient proches des solutions analytiques. De plus, le flux de chaleur tend vers l'infini au bord de la surface de contact car la chaleur ne peut être transmise qu'à travers la surface de contact puis se propage dans un milieu infini.

La convergence est étudiée en comparant les pressions de contact et les flux de chaleur calculés à leurs solutions analytiques pour différentes finesse de maillage. Les différences entre les solutions analytiques et numériques sont définies par

$$\varepsilon^p = \frac{\sum_{i=1}^{N_e} |p_i - p_i^{Hertz}|^2}{\sum_{i=1}^{N_e} |p_i^{Hertz}|^2} \quad \varepsilon^q = \frac{\sum_{i=1}^{N_e} |q_i - q_i^{Hertz}|^2}{\sum_{i=1}^{N_e} |q_i^{Hertz}|^2}, \quad (2.32)$$

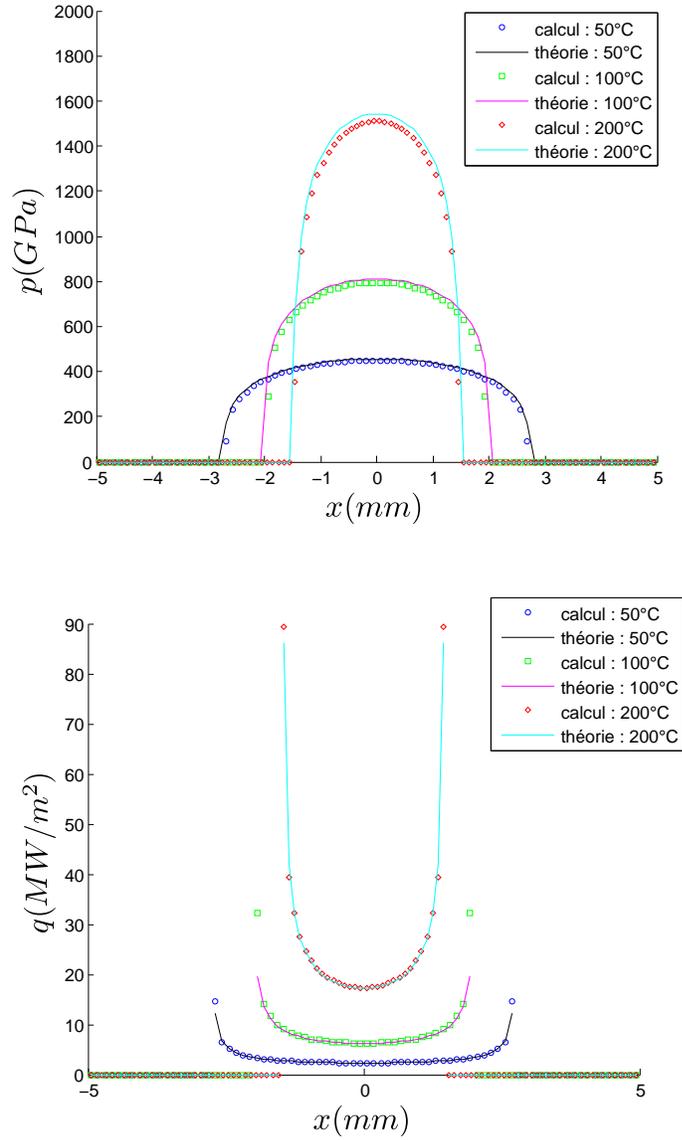


FIGURE 2.5 – Distribution de pression et flux de chaleur calculés en $y = l/2$ avec la température $\theta^0 = 200$ °C uniformément répartie dans la sphère rigide.

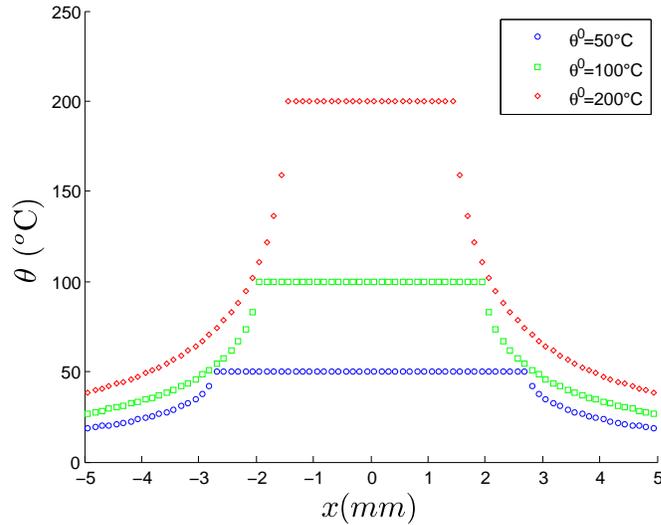


FIGURE 2.6 – Répartitions de la température surfacique calculées en $y = l/2$ pour différentes valeurs de θ^0 dans le cas de l’indentation par une sphère rigide.

où ε^p est la différence entre les pressions calculées et analytiques, ε^q est la différence entre les flux de chaleur calculés et analytiques, et p_i^{Hertz} et q_i^{Hertz} sont respectivement la pression et le flux de chaleur donnés par la théorie de Hertz dans l’élément i . La Figure 2.7 représente les différences ε^p et ε^q en fonction du nombre d’éléments de le maillage. Les différences diminuent sous 1%, ce qui permet de valider l’approche numérique dans le cas d’une aspérité.

Pour compléter les résultats présentés, les Figures 2.8 et 2.9 représentent les distributions de pression et les flux de chaleur calculés en imposant différentes valeurs de θ^∞ . Il est très intéressant de remarquer que la surface de contact diminue si la température de la surface de contact augmente. Ceci montre que la distribution de pression, le flux de chaleur et la surface de contact dépendent de la température imposée dans le milieu rigide.

2.7.2 Calcul de la température et du flux de chaleur et mesure de la surface de contact entre deux surfaces périodiquement rugueuses

Surfaces périodiques unidimensionnelles

La surface thermoélastique est à présent soumise à l’indentation par une surface rigide constituée de $N_p = 51$ crêtes de profil périodique et de longueur d’onde λ dans la direction x , le problème est invariant suivant y . Les crêtes de hauteur $\lambda/8$ sont considérées de géométrie sinusoidale, paraboloidale ou conique. La cellule périodique de référence, de longueur $\lambda = 10/51$ mm suivant x et de longueur 10 mm suivant y , est discrétisée par $N_e = 100$ éléments

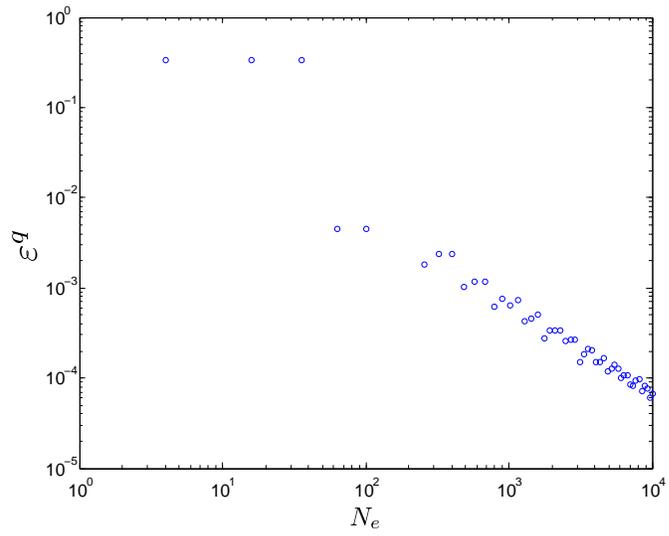
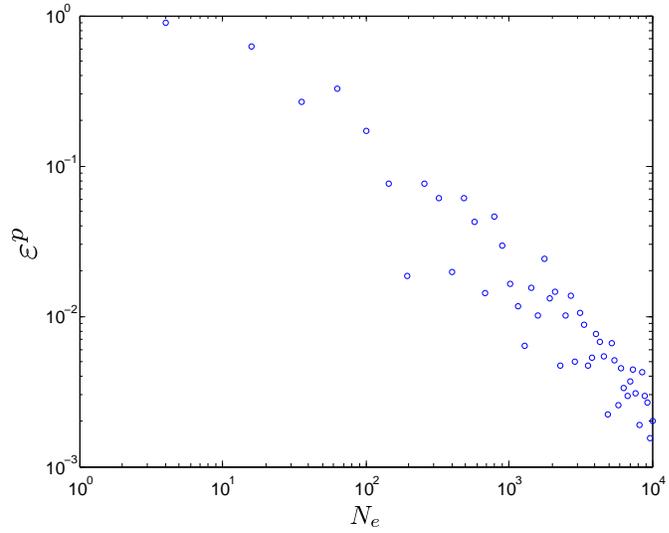


FIGURE 2.7 – Différences entre les solutions numériques et analytiques en pression et flux de chaleur en fonction du nombre d'éléments dans le maillage dans le cas d'une aspérité sphérique.

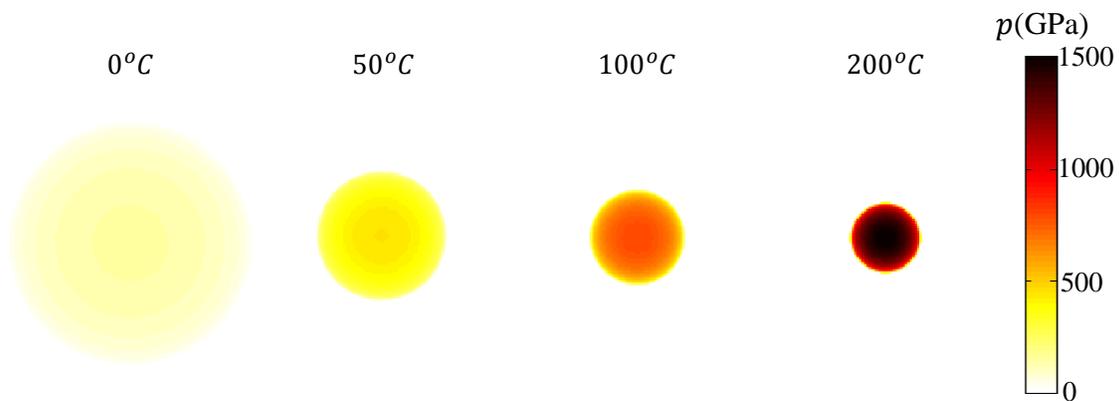


FIGURE 2.8 – Distributions de pression obtenues pour différentes valeurs de θ^0 dans le cas d'une aspérité sphérique.

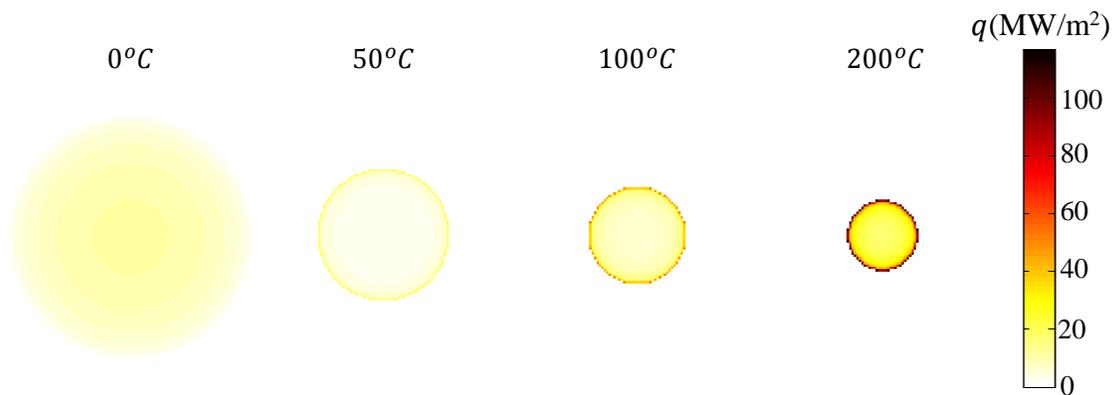


FIGURE 2.9 – Flux de chaleur obtenus pour différentes valeurs de θ^0 dans le cas d'une aspérité sphérique.

rectangulaires de longueur $0.1/51$ mm suivant x et de longueur 10 mm suivant y . La surface rigide pénètre la surface thermoélastique avec la force $F = 9$ MN imposée. La Figure 2.10 représente les températures et flux de chaleur calculées en maintenant initialement le milieu rigide à $\theta^0 = 300$ °C. Il est à noter que la température calculée dans le cas des crêtes sinusoidales est très proche la solution analytique correspondante. Il est aussi intéressant de voir que les solutions numériques obtenues, en termes de température ou flux de chaleur, diffèrent selon la géométrie de la surface rigide. En effet, la température et le flux de chaleur sont influencés par le déplacement imposé. Toutefois cette influence est indirecte car la température et le flux de chaleur dépendent en premier lieu de la surface de contact, qui elle a son tour dépend de la géométrie, comme il a été montré dans le cas élastique traité dans le premier chapitre. La convergence numérique est étudiée en comparant les répartitions de la température surfacique calculées et analytiques. La différence relative entre les températures évaluée numériquement et donnée analytiquement est définie par :

$$\varepsilon^\theta = 100 \frac{\sum_{i=1}^{N_e} |\theta_i - \theta_i^A|}{\sum_{i=1}^{N_e} \theta_i^A}, \quad (2.33)$$

où θ_i^A est la température analytique dans l'élément i . La différence ε^θ est tracée sur la Figure 2.11 en fonction du nombre d'éléments dans le maillage et du nombre de cellules périodiques pris en compte dans les calculs. Il apparaît que la différence décroît rapidement sous 0.03%, ce qui est très satisfaisant et constitue une validation de l'approche en pression de contact et flux périodique dans le cas d'une périodicité unidimensionnelle.

L'évolution de la mesure de la surface de contact en fonction de la température θ^0 imposée est tracée sur la Figure 2.12. Des calculs directs ont été effectués dans le cas de surfaces périodiques finies sans prendre en compte la périodicité, toutes les cellules périodiques ont ainsi été discrétisées. Il est ainsi observée que dans le cas des surfaces périodiques infinies, en employant l'approche en pression et flux périodiques, on observe sans surprise que la taille de la surface de contact diminue dans chaque période en augmentant la température θ^0 . Mais si les surfaces sont de dimensions finies, la surface de contact se réduit à l'échelle globale. Afin de mieux comprendre comment évolue la surface de contact en augmentant la température θ^0 , d'autres calculs ont été effectués en considérant $N_p = 11$ périodes pour des raisons de simplicité dans l'observation des résultats. La Figure 2.13 représente les distributions de pression résultantes en imposant la force de contact $F = 42$ MN. Il est bien plus apparent que dans le cas des surfaces périodiques infinies, la surface de contact se réduit dans chaque cellule périodique si θ^0 augmente, alors que dans le cas des surfaces périodiques finies, la surface de contact se réduit à l'échelle de toute la surface thermoélastique.

Surfaces périodiques bidimensionnelles

Enfin, l'indentation par une surface rigide de profile périodique et de longueur d'onde λ dans les directions x et y est traitée numériquement. La surface rigide possède $N_p = 51 \times 51 = 2601$ aspérités sinusoidales, paraboloidales, coniques et pyramidales de hauteurs $\lambda/8$. La cellule périodique de référence, carrée de côté $\lambda = 10/51$ mm, est discrétisée par

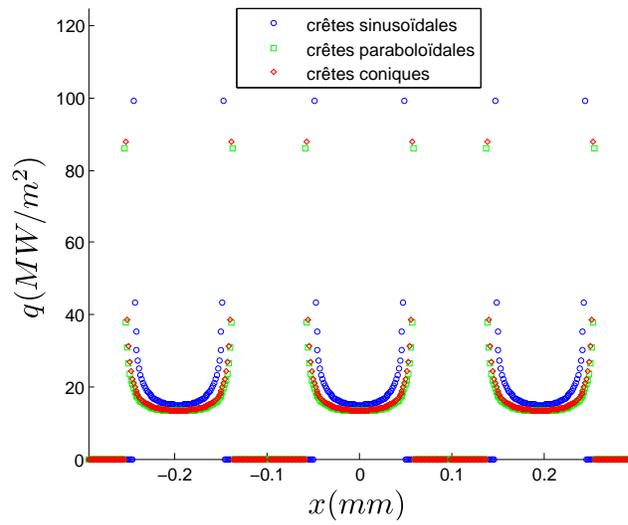
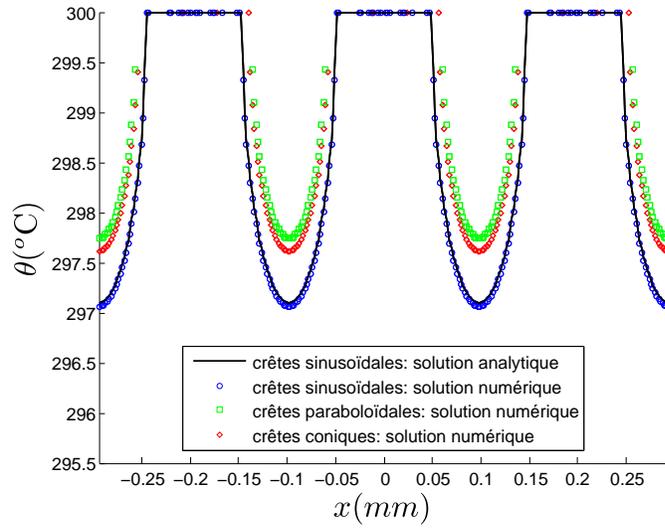


FIGURE 2.10 – Températures et flux de chaleur calculés avec $T^0 = 300\text{ }^{\circ}\text{C}$ pour des surfaces périodiques unidimensionnelles.

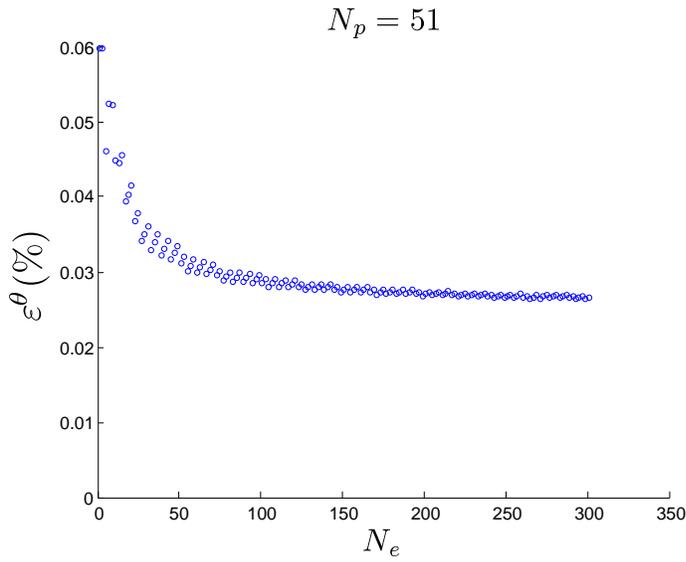
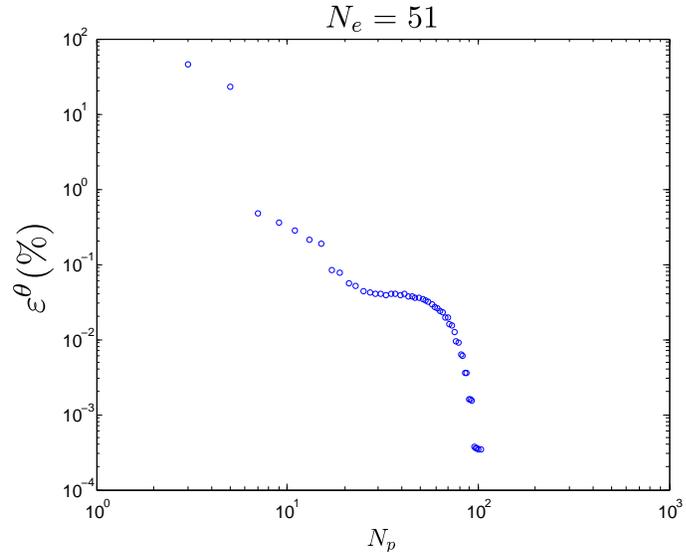


FIGURE 2.11 – Convergence de l’approche en pression de contact et flux de chaleur périodiques pour une périodicité sinusoidale unidimensionnelle.

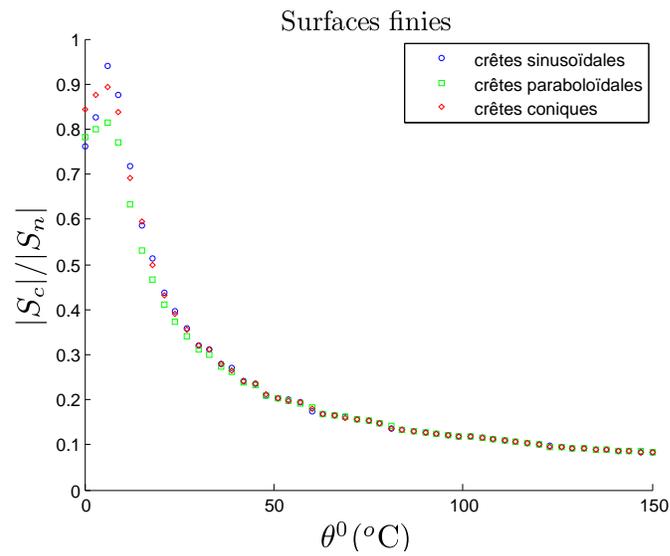
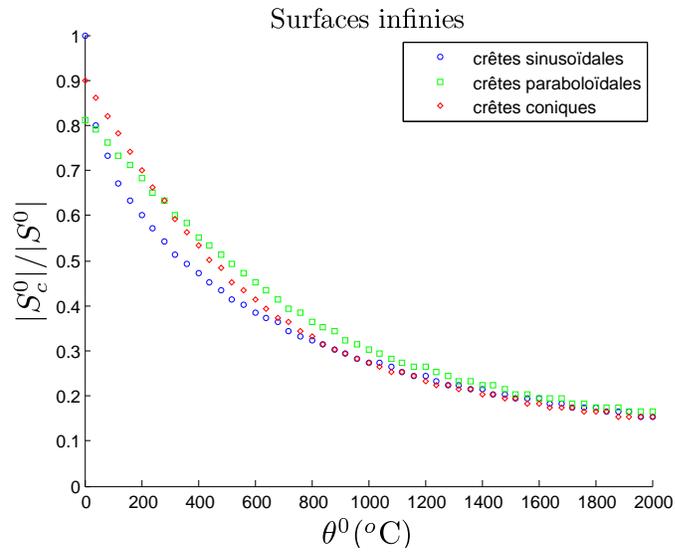


FIGURE 2.12 – Mesure de la surface de contact en fonction de la température θ^0 pour des surfaces périodiques unidimensionnelles.

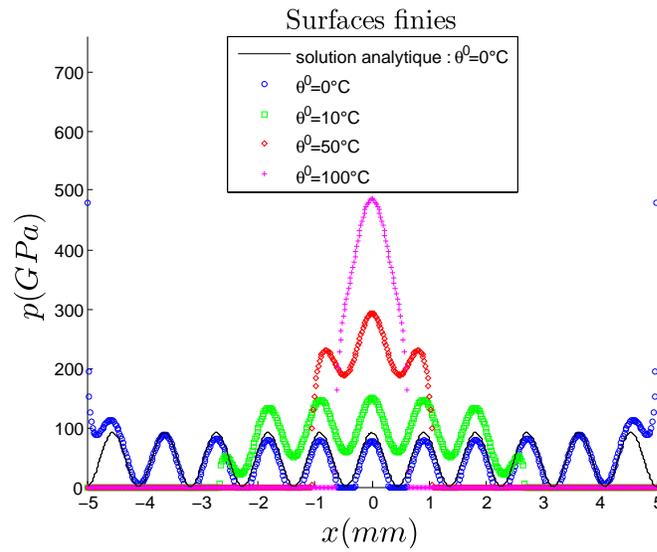
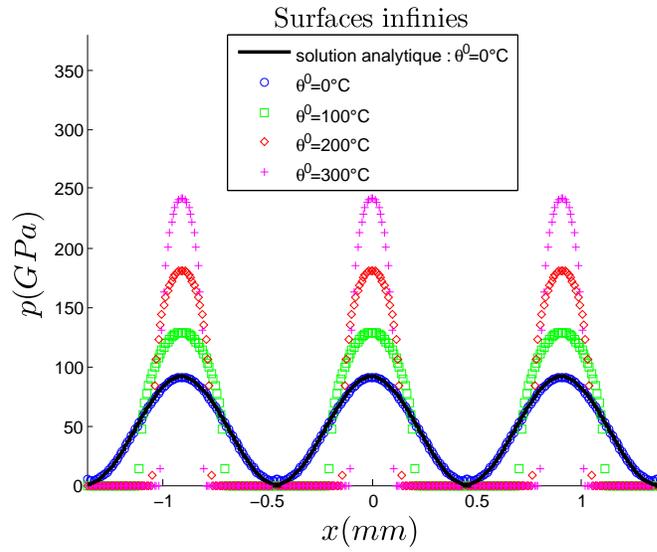


FIGURE 2.13 – Distributions de pression calculées pour différentes valeurs de θ^0 dans le cas de surfaces sinusoïdales unidimensionnelles.

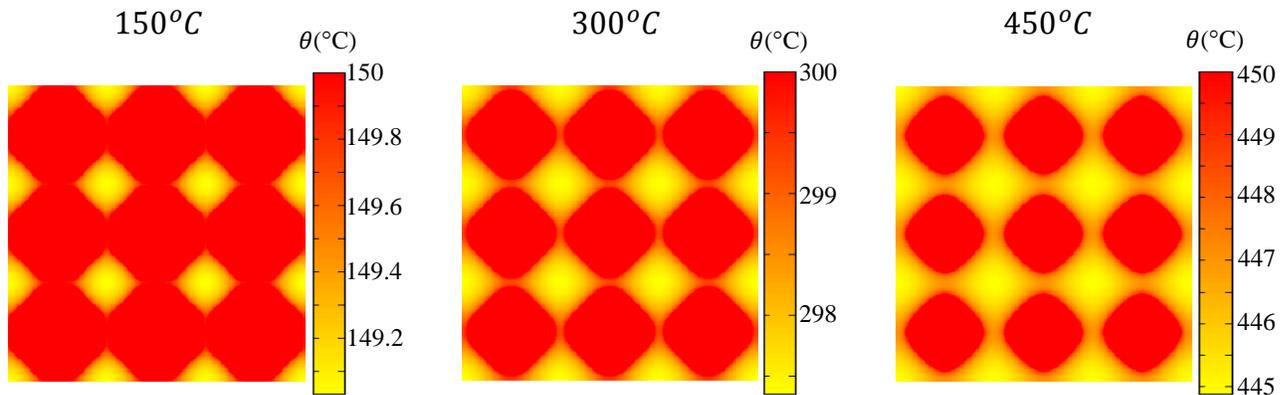


FIGURE 2.14 – Répartitions de la température calculées pour différentes valeurs de θ^0 dans le cas d’aspérités sinusoïdales.

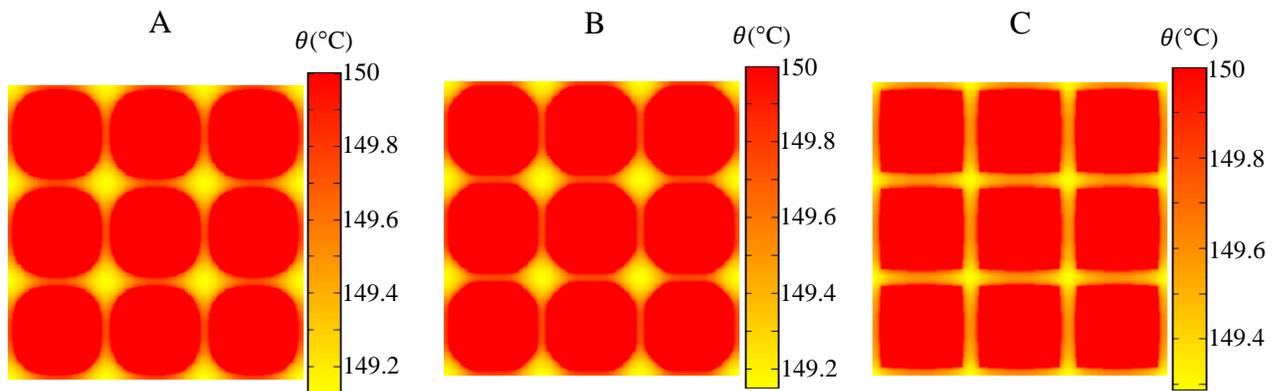


FIGURE 2.15 – Répartitions de la température calculées pour $\theta^0 = 150$ °C dans les cas d’aspérités paraboloidales (A), coniques (B) et pyramidales (C).

$N_e = 100 \times 100 = 10000$ éléments carrés de côté $0.1/51$ mm. La force de contact est fixée à $F = 1.7$ kN. Les répartitions de température calculées dans le cas d’une surface rigide sinusoïdale pour différentes valeurs de θ^0 sont affichées sur la Figure 2.14. Il est à observer comme précédemment que la surface de contact diminue en taille si θ^0 augmente. Les distributions de température obtenues pour des aspérités paraboloidales, coniques et pyramidales en imposant $\theta^0 = 150$ °C sont montrées sur la Figure 2.15. On remarque que la forme de la surface de contact diffère selon la géométrie des aspérités rigides. Ces remarques peuvent aussi être faites en observant les flux de chaleur calculés pour une surface rigide sinusoïdale en imposant différentes valeurs de θ^0 (Figure 2.16) et les flux de chaleur résultant d’un calcul avec $\theta^0 = 150$ °C dans les cas d’aspérités paraboloidales, coniques et pyramidales (Figure 2.17).

Dans ce chapitre, les déplacements thermiques induits par un échange de chaleur entre le milieu rigide et le demi-espace thermoélastique ont été intégrés dans la formulation du problème

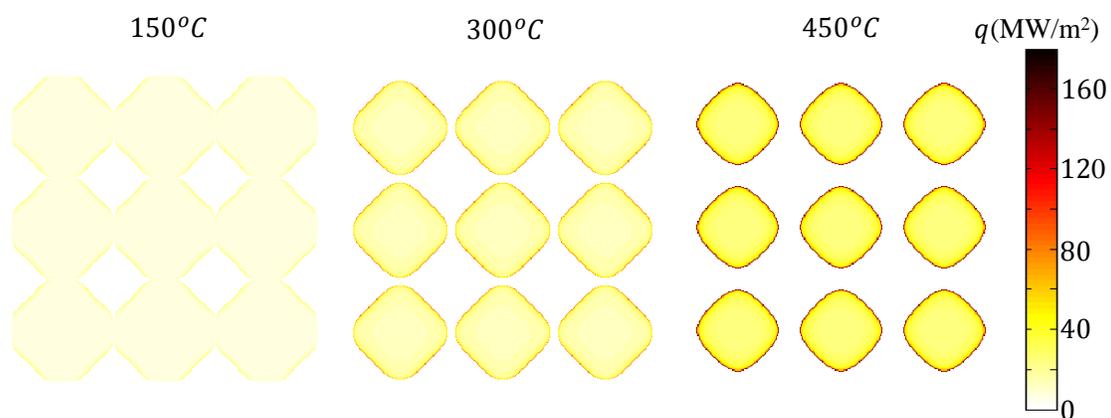


FIGURE 2.16 – Flux de chaleur calculés pour différentes valeurs de θ^0 dans le cas d'aspérités sinusoidales.

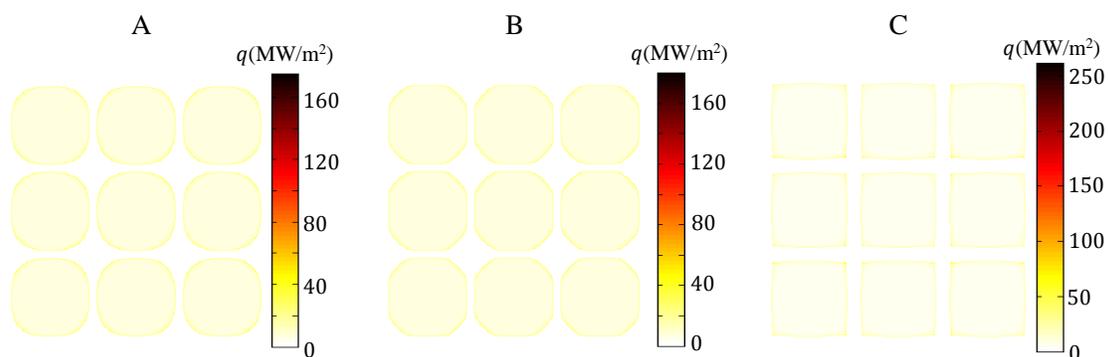


FIGURE 2.17 – Flux de chaleur calculés pour $\theta^0 = 150$ °C dans les cas d'aspérités paraboloidales (A), coniques (B) et pyramidales (C).

de contact correspondant. Les concepts basiques ont été ainsi rappelés, des solutions analytiques ont été citées pour servir de référence pour les résultats d'exemples numérique. Le modèle numérique établi a tout d'abord été appliqué au cas de l'indentation d'une surface thermoélastique par une sphère rigide. Il a été observé que les distributions de pression et flux de chaleur résultants sont très proches de leurs solutions analytiques. De plus, la convergence numérique a été analysée et la différence entre les résultats numériques et analytiques descend sous le seuil des 1%, ce qui a permis de valider le modèle numérique dans le cas d'une aspérité. L'approche en pression et flux périodiques a enfin été appliquée des surfaces périodiquement rugueuses comportant des aspérités sinusoidales, paraboloidales, coniques et pyramidales. Il a dans un premier temps été vu que la répartition de la température calculée dans le cas des surfaces sinusoidales unidimensionnelles correspond à sa solution analytique. De plus il a été montré que la géométrie et la température de la surface rigide ont une influence sur la pression, le flux de chaleur et la surface de contact.

Chapitre 3

Contact unilatéral de surfaces viscoélastiques et périodiquement rugueuses

Ce dernier chapitre aura pour objectif d'étendre l'approche développée dans le chapitre 1 au contact avec glissement et sans frottement entre deux surfaces viscoélastiques dont les géométries sont périodiques. Tout d'abord, l'équation de Boussinesq et Cerruti sera étendue au cas d'un demi-espace viscoélastique dont une partie finie de sa surface lisse est soumise à une répartition de pression; la solution analytique complète du problème de contact viscoélastique Hertzien sera rappelée; la formulation de la méthode d'inversion matricielle adaptée au contact viscoélastique avec glissement sera développée. Ensuite, la formulation continue et la formulation discrète seront adaptées au contact entre deux surfaces viscoélastiques géométriquement périodiques. Enfin, des exemples numériques seront traités d'abord dans le cas du contact sans glissement et ensuite dans le cas du contact avec glissement.

3.1 Viscoélasticité linéaire

3.1.1 Généralités

La viscoélasticité correspond au comportement d'un matériau dont les contraintes et les déformations évoluent au cours du temps, car le matériau a une "mémoire" : à un instant $t > t_0$ où t_0 est l'instant initial, toutes les contraintes $\sigma(\tau)$ avec $t_0 \leq \tau < t$ ont une influence sur la déformation à l'instant actuel t . L'élasticité d'un matériau est un phénomène non dissipatif, alors que sa viscosité dissipe l'énergie. Une majorité de matériaux, notamment les polymères, ont un comportement viscoélastique. Soit l'exemple simple d'un essai de traction sur une barre, si un chargement et un déchargement sont effectués en imposant une contrainte σ , quatre types de déformations résultantes sont à distinguer. Durant la phase de chargement, on observe généralement

- une déformation instantanée, produite par la réaction élastique du matériau ;
- une déformation retardée, qui augmente avec le temps.

Lors de la décharge, on constate généralement

- un retour élastique instantané ;
- un retour retardé, dite recouvrance.

La recouvrance peut être partielle, c'est-à-dire qu'il existe une déformation résiduelle à la fin du procédé, c'est le cas pour les matériaux viscoélastoplastiques. Dans le cas des matériaux viscoélastoplastiques, si une déformation permanente reste à la fin du déchargement, la recouvrance est alors dite partielle (Figure 3.1).

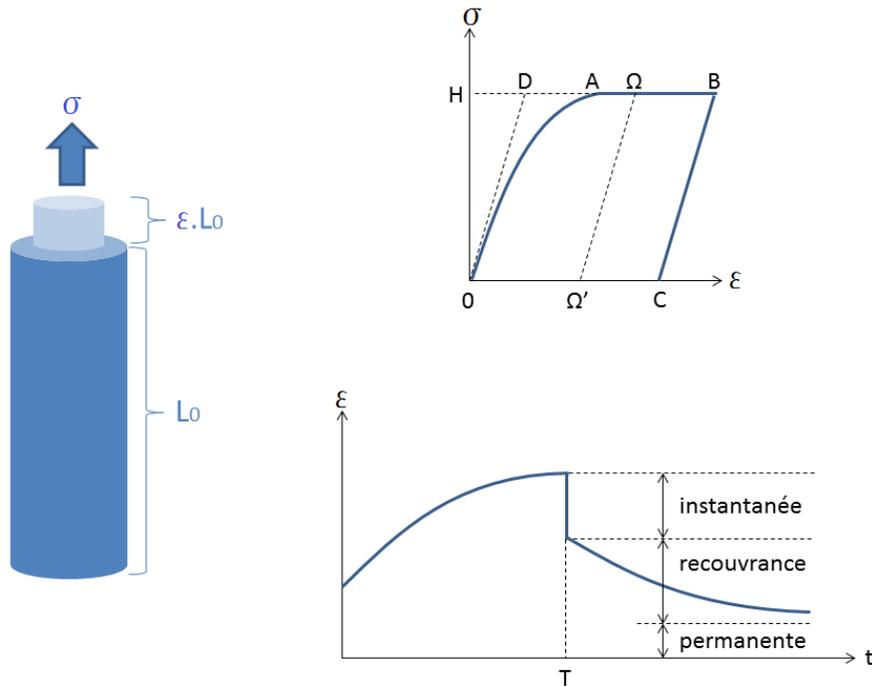


FIGURE 3.1 – Essai de traction sur une barre : évolution temporelle de la déformation ε .

3.1.2 Modèles rhéologiques

Les schémas rhéologiques permettent de modéliser les comportements viscoélastoplastiques de certains matériaux. Les éléments constituant ces schémas sont des ressorts correspondant au comportement élastique (module de Young E), des amortisseurs pour tenir compte de la viscosité (temps caractéristique τ_c), et des patins pour représenter la plasticité (seuil de plasticité σ_p). La Figure 3.2 présente quelques exemples simples de modèles rhéologiques [62, 49].

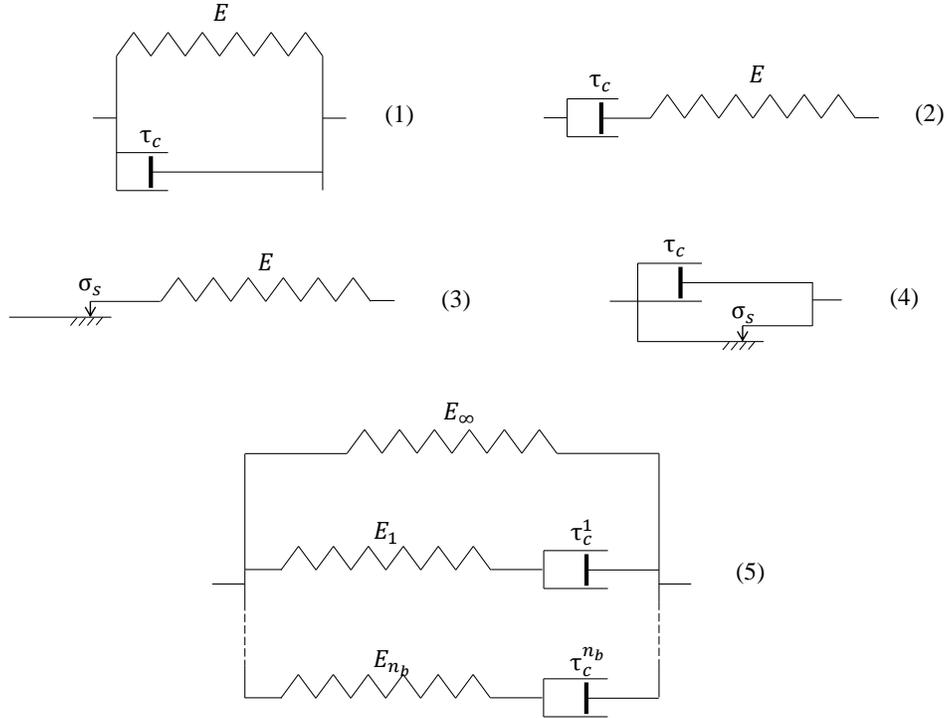


FIGURE 3.2 – Exemples de modèles rhéologiques : (1) modèle de Kelvin-Voigt : solide viscoélastique, (2) modèle de Maxwell : liquide viscoélastique, (3) modèle de solide élastoplastique, (4) modèle de Bingham : solide viscoplastique, (5) un modèle du type Maxwell généralisé.

3.1.3 Fonction de fluage et de relaxation 1D

Dans le cas d'un essai de traction sur une barre viscoélastique où la contrainte σ_0 est imposée comme étant nulle avant l'instant initial t_0 et constante à tout instant $t > t_0$, une déformation instantanée ε_0 est produite, puis la déformation $\varepsilon(t)$ augmente au cours du temps : D'après le principe de superposition de Boltzmann applicable dans le cas de la viscoélasticité linéaire, la déformation actuelle est induite par l'accumulation des déformations à chaque instant τ entre l'instant initial et l'instant actuelle, en plus de la déformation instantanée produite par σ_0 . Il existe alors une fonction croissante $\varphi(t, \tau)$ appelée fonction de fluage telle que

$$\varepsilon(t) = \int_{t_0}^t \varphi(t, \tau) d\sigma(\tau) + \varphi(t, 0)\sigma_0. \quad (3.1)$$

Une simple intégration par partie conduit à l'expression suivante de la déformation :

$$\varepsilon(t) = \varphi(t, t)\sigma(t) - \int_{t_0}^t \frac{d\varphi(t, \tau)}{d\tau} \sigma(\tau) d\tau. \quad (3.2)$$

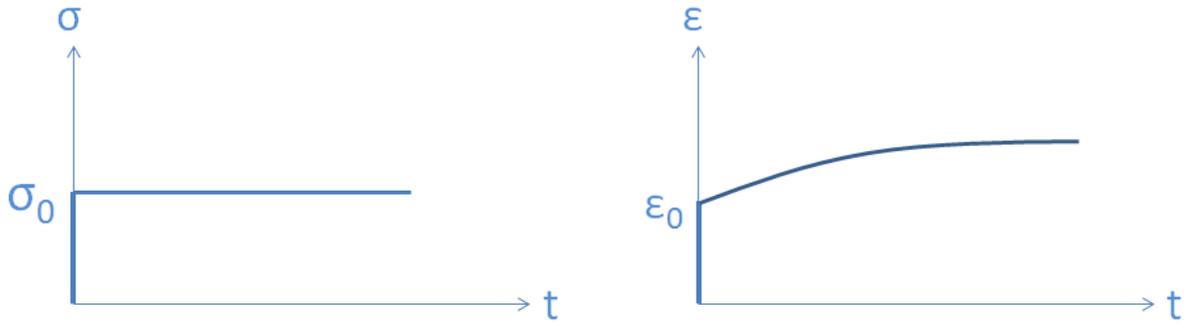


FIGURE 3.3 – Essai de fluage et réponse en déformation au cours du temps.

De manière duale, si un essai de traction est effectué en imposant une déformation nulle avant l'instant initial t_0 et fixée ε_0 à tout instant $t > t_0$, une contrainte σ_0 est instantanément observée avant une décroissance de la contrainte $\sigma(t)$ au cours du temps. Le principe de

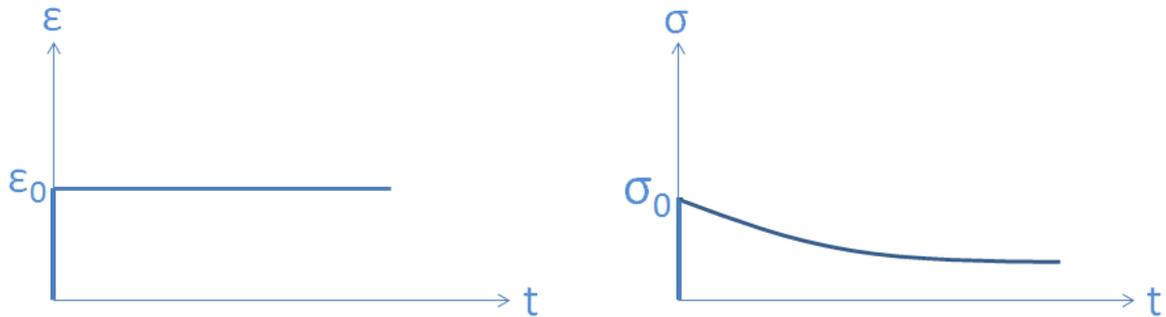


FIGURE 3.4 – Essai de relaxation et réponse en contrainte au cours du temps.

superposition de Boltzmann implique aussi que la contrainte actuelle résulte de l'accumulation des contraintes à chaque instant τ entre l'instant initial et l'instant actuelle, en plus de la contrainte instantanée produite par ε_0 . Il existe alors une fonction décroissante $\psi(t, \tau)$ appelée fonction de relaxation telle que

$$\sigma(t) = \int_{t_0}^t \psi(t, \tau) d\varepsilon(\tau) + \psi(t, 0)\varepsilon_0. \quad (3.3)$$

L'expression suivante de la contrainte est obtenue par une intégration par partie :

$$\sigma(t) = \psi(t, t)\varepsilon(t) - \int_{t_0}^t \frac{d\psi(t, \tau)}{d\tau} \varepsilon(\tau) d\tau. \quad (3.4)$$

3.1.4 Matériaux viscoélastiques non-vieillissants

Si les propriétés viscoélastiques d'un matériau n'évoluent pas avec le temps, alors quel que soit t_0 les courbes dans les Figures 3.3 et 3.4 conservent la même allure. Ainsi, ces courbes effectuent une simple translation horizontale par rapport à l'instant initial. Mathématiquement, on a

$$\varphi(t, \tau) = \varphi(t - \tau), \quad (3.5)$$

$$\frac{d\varphi(t, \tau)}{d\tau} = -\varphi'(t - \tau), \quad (3.6)$$

où $\varphi'(t - \tau)$ est la dérivée de $\varphi(t - \tau)$ par rapport à son argument. Concernant la fonction de relaxation on a

$$\psi(t, \tau) = \psi(t - \tau), \quad (3.7)$$

$$\frac{d\psi(t, \tau)}{d\tau} = -\psi'(t - \tau), \quad (3.8)$$

où $\psi'(t - \tau)$ est la dérivée de $\psi(t - \tau)$ par rapport à son argument. Les équations (3.2) et (3.4) s'écrivent ainsi respectivement

$$\varepsilon(t) = \varphi(0)\sigma(t) + \int_{t_0}^t \varphi'(t - \tau)\sigma(\tau)d\tau, \quad (3.9)$$

$$\sigma(t) = \psi(0)\varepsilon(t) + \int_{t_0}^t \psi'(t - \tau)\varepsilon(\tau)d\tau, \quad (3.10)$$

ce qui peut aussi se réduire à

$$\varepsilon(t) = \int_{t_0^-}^t \varphi'(t - \tau)\sigma(\tau)d\tau, \quad (3.11)$$

$$\sigma(t) = \int_{t_0^-}^t \psi'(t - \tau)\varepsilon(\tau)d\tau. \quad (3.12)$$

La propriété de commutativité du produit de convolution permet d'intervertir la dérivation temporelle dans les équations (3.11) et (3.12) comme suit :

$$\varepsilon(t) = \int_{t_0^-}^t \varphi(t - \tau)\sigma'(\tau)d\tau, \quad (3.13)$$

$$\sigma(t) = \int_{t_0^-}^t \psi(t - \tau)\varepsilon'(\tau)d\tau. \quad (3.14)$$

3.1.5 Fonction de fluage et de relaxation 3D

Les équations (3.13) et (3.14) peuvent être étendues au cas 3D isotrope en introduisant les modules viscoélastiques φ_K et φ_μ résultant d'un essai de fluage, ainsi que les modules viscoélastiques ψ_K et ψ_μ obtenus par un essai de relaxation. Les relations entre le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et le tenseur des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ dans le cas tridimensionnel sont données par :

$$tr(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) = \int_{t_0}^t \varphi_K(t - \tau) tr(\boldsymbol{\sigma}'(\tau)) d\tau, \quad (3.15)$$

$$\mathbf{dev}(\boldsymbol{\varepsilon}(t)) = \int_{t_0}^t \varphi_\mu(t - \tau) \mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma}'(\tau)) d\tau, \quad (3.16)$$

$$tr(\boldsymbol{\sigma}(t)) = \int_{t_0}^t \psi_K(t - \tau) tr(\boldsymbol{\varepsilon}'(\tau)) d\tau, \quad (3.17)$$

$$\mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma}(t)) = \int_{t_0}^t \psi_\mu(t - \tau) \mathbf{dev}(\boldsymbol{\varepsilon}'(\tau)) d\tau, \quad (3.18)$$

où, pour tout tenseur \mathbf{X} , $tr(\mathbf{X})$ représente sa trace et $\mathbf{dev}(\mathbf{X})$ représente sa partie déviatorique.

3.1.6 Principe de correspondance

Le principe de correspondance a une importance majeure en viscoélasticité linéaire puisqu'il permet de transformer la loi de comportement viscoélastique en une loi pseudo-élastique dans le domaine de Laplace-Carson.

Soit une fonction $f(t)$, continue par morceaux sur un intervalle $[t_1, t_2] \in \mathbb{R}$. La transformée de Laplace de $f(t)$, notée $\mathcal{L}(f)$, est

$$\mathcal{L}(f) = \int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-st} dt, \quad (3.19)$$

où s est un complexe. La transformée de Laplace possède diverses propriétés intéressantes, dont la dérivation : si la fonction $f(t)$ est dérivable et a la dérivée $f'(t)$, alors la transformée de Laplace de $f'(t)$ est simplement $s\mathcal{L}(f)$. Un autre aspect intéressant de la transformée de Laplace est le théorème de convolution : soit une fonction $g(t)$, continue par morceaux sur un intervalle $[t_1, t_2] \in \mathbb{R}$, admettant une transformée de Laplace $\mathcal{L}(g)$. Alors d'après le théorème de convolution le produit de convolution de $f(t)$ par $g(t)$ correspond à un simple produit dans le domaine de Laplace

$$\mathcal{L}(f(t) * g(t)) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g). \quad (3.20)$$

On peut à présent introduire la transformée de Laplace-Carson de $f(t)$, notée $\tilde{f}(s)$, est définie par

$$\tilde{f}(s) = s\mathcal{L}(f). \quad (3.21)$$

En appliquant les équations (3.20) et (3.21) aux relations (3.13) et (3.14), on obtient

$$\tilde{\varepsilon}(s) = \tilde{\varphi}(s)\tilde{\sigma}(s), \quad (3.22)$$

$$\tilde{\sigma}(s) = \tilde{\psi}(s)\tilde{\varepsilon}(s), \quad (3.23)$$

des relations qui ont une forme homogène à la loi de Hooke, avec

$$\tilde{\varphi}(s)\tilde{\psi}(s) = 1, \quad (3.24)$$

$\tilde{\psi}(s)$ s'apparentant au module élastique et $\tilde{\varphi}(s)$ au module de souplesse. Les relations (3.22) et (3.23) sont des lois dites pseudo-élastiques, on parle alors de principe de correspondance, car les lois de comportement viscoélastique dans le domaine temporelle correspondent à des lois de comportement élastique dans le domaine de Laplace-Carson. Ces résultats sont très importants pour la résolution de problèmes viscoélastiques linéaires qui peuvent être réduits ainsi à des problèmes d'élasticité.

3.2 Contact entre deux surfaces viscoélastiques

À l'instar de ce qui a été présenté dans les chapitres 1 et 2, sous l'hypothèse des petites déformations, le problème de contact unilatéral entre deux demi-espaces viscoélastiques peut se réduire à celui entre une demi-espace rigide et un demi-espace viscoélastique. Le principe de correspondance de Lee et Radok permet d'étendre la solution de Boussinesq et Cerruti au cas d'un demi-espace viscoélastique dont la surface lisse est soumise à une répartition de pression. Cette solution, souvent employée, a été établie sous l'hypothèse que le coefficient de Poisson soit constant au cours du temps. Cette hypothèse peut être trop contraignante dans beaucoup de situations d'intérêt pratique. Ainsi, afin de s'assurer que tous les modules dépendent du temps, le module de Young et le coefficient de Poisson sont remplacés par les module de compressibilité et de cisaillement dans la solution de Boussinesq et Cerruti (1.11), en utilisant les équations (1.9) et (1.10), ce qui conduit à

$$u(x, y) = \left(\frac{1}{4\pi\mu} + \frac{3}{4\pi(3K + \mu)} \right) \int_{S_c} T(x, y; \xi, \eta) p(x, y) d\xi d\eta. \quad (3.25)$$

Pour appliquer le principe de correspondance de Lee et Radok à l'équation (3.25), il suffit de faire de la pression $p(x, y)$ et des modules de compressibilité K et de cisaillement μ des fonctions du temps, d'intégrer temporellement l'ensemble du second membre et de dériver par rapport à la variable d'intégration temporelle l'ensemble de l'intégration spatiale sur S_c . En posant

$$J(t) = \frac{1}{4\pi\mu(t)} + \frac{3}{4\pi(3K(t) + \mu(t))}, \quad (3.26)$$

le principe de correspondance permet d'exprimer la déplacement vertical $u(x, y; t)$ de la surface lisse S d'un demi-espace viscoélastique à l'instant t comme suit

$$u(x, y; t) = \int_{t_0}^t J(t - \tau) \frac{d}{d\tau} \left[\int_{S_c^t} T(x, y; \xi, \eta) p(x, y; \tau) d\xi d\eta \right] d\tau, \quad (3.27)$$

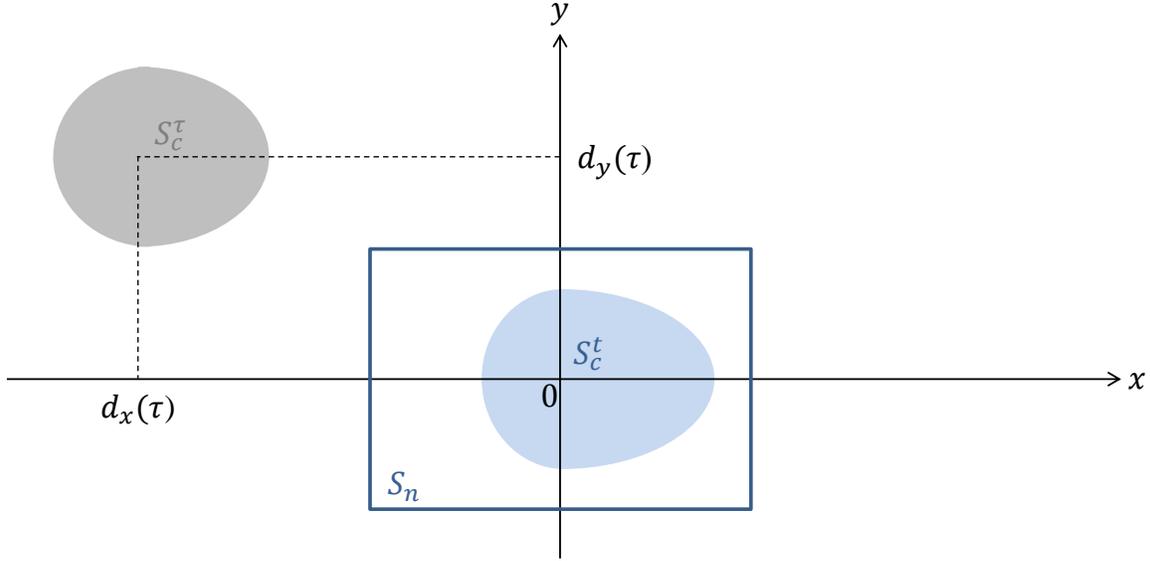


FIGURE 3.5 – Surfaces de contact nominale et réelle à tout instant τ et à l’instant actuelle t dans le cas du contact avec glissement entre une surface rigide et la surface lisse d’un demi-espace viscoélastique.

où $p(x, y; \tau)$ est la pression appliquée suivant la direction z au point (x, y) à l’instant τ et S_c^t la surface de contact réelle à l’instant t . La surface de contact à l’instant actuel t doit être compatible avec les conditions de Signorini rappelés dans le chapitre 1.

La discrétisation de l’équation (3.27) et la prise en compte des conditions de Signorini permettent de calculer la distribution de pression à tout instant. Toutefois, dans le cas d’une surface rigide glissant sur la surface d’un demi-espace viscoélastique, un nombre très important d’éléments sont nécessaires pour la maillage de toute la partie de la surface S subissant le contact avec glissement car la surface de contact S_c peut se déplacer au cours du temps. Il est donc plus intéressant d’établir l’intégration spatiale de l’équation (3.27) sur la base de la surface de contact nominale à l’instant actuelle t . Ainsi, dans ce qui suit, l’origine de système de coordonnées utilisé sera choisie de façon à ce qu’elle coïncide avec le centre de la surface de contact nominale actuelle; de ce fait la surface de contact nominale actuelle S_n ne se déplace donc pas au cours du temps dans le système de coordonnées. La Figure 3.5 illustre le suivi de la surface de contact nominale. La reformulation de l’équation (3.27) sur la base de la surface S_n conduit à l’expression suivante du déplacement vertical :

$$u(x, y; t) = \int_{t_0}^t J(t - \tau) \frac{d}{d\tau} \left[\int_{S_n} T(x - d_x(\tau), y - d_y(\tau); \xi, \eta) p(x, y; \tau) d\xi d\eta \right] d\tau, \quad (3.28)$$

où $d_x(\tau)$ et $d_y(\tau)$ sont les distances parcourues par le centre de la surface de contact nominale entre les instants τ et t respectivement dans les directions x et y :

$$d_x(\tau) = \int_{\tau}^t V_x(s) ds, \quad d_y(\tau) = \int_{\tau}^t V_y(s) ds, \quad (3.29)$$

avec $V_x(s)$ et $V_y(s)$ les vitesses de glissement respectivement suivant x et y . Dans le cas d'un glissement, la répartition de pression est excentrée, ce qui est dû à l'évolution des moments mécaniques dans les directions x et y . Ces moments sont définis à chaque instant t par :

$$M_x(t) = \int_{S_n} yp(\xi, \eta; t)d\eta, \quad M_y(t) = - \int_{S_n} xp(\xi, \eta; t)d\eta. \quad (3.30)$$

3.3 Solution analytique pour le contact viscoélastique de Hertz sans glissement

Une solution analytique est disponible pour le problème basique du contact de Hertz entre une sphère rigide est un demi-espace viscoélastique. Le contact est supposé se produire sans frottement. Le principe de correspondance de Lee et Radok permet d'étendre la solution analytique élastique correspondante au contact viscoélastique. Ainsi, la distribution de pression à tout instant t est définie par :

$$p(r; t) = \frac{2}{\pi(1-\nu)R} \int_{t_0}^t \psi(t-\tau) \frac{d\sqrt{a^2(\tau)-r^2}}{d\tau} d\tau, \quad (3.31)$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $a(\tau)$ est le rayon de contact au cours du temps relié au déplacement de corps rigide par l'équation (1.20) à chaque instant :

$$\delta(t) = \frac{a^2(t)}{R}. \quad (3.32)$$

Toutefois, cette solution n'est valable seulement si le chargement imposé est croissant. La solution fournie par Ting [61, 17] permet d'exprimer la distribution de pression en phase de déchargement en définissant l'instant t_m auquel le rayon de contact est maximum et l'instant $t_1(\tau)$ durant le chargement ($t_1(\tau) < t_m$) vérifiant

$$a(t_1(\tau)) = a(\tau) \quad \forall \tau > t_m. \quad (3.33)$$

La Figure 3.6 illustre la définition de $t_1(\tau)$. La théorie de Ting est basée sur le fait que, en phase de déchargement, la distribution de pression à l'instant t ne dépend pas de toute son histoire jusqu'à t , mais seulement jusqu'à $t_1(t)$:

$$p(r; t) = \frac{2}{\pi(1-\nu)R} \int_{t_0}^{t_1(t)} \psi(t-\tau) \frac{d\sqrt{a^2(\tau)-r^2}}{d\tau} d\tau. \quad (3.34)$$

Cependant le rayon de contact et le déplacement de corps rigide ne sont pas liés par l'équation de Hertz mais par :

$$R\delta(t) = a^2(t) - \int_{s=t_m}^t \phi(t-s) \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \int_{t_1(s)}^s \psi(s-\tau) \frac{\partial a^2(\tau)}{\partial \tau} d\tau \right\} ds. \quad (3.35)$$

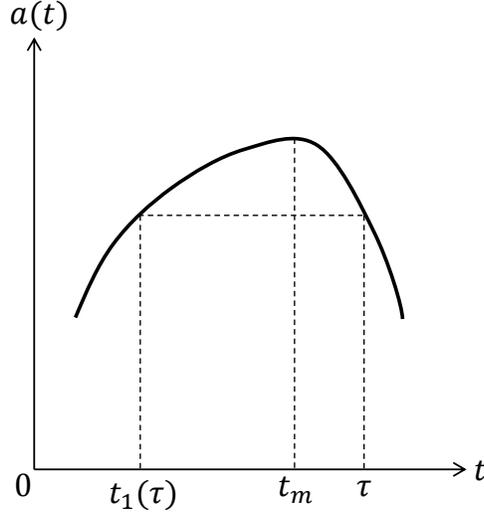


FIGURE 3.6 – Évolution du rayon de contact dans le cas du contact viscoélastique Hertzien.

Récemment, Greenwood [26] a simplifiée l'équation (3.35) comme suit :

$$R\delta(t) = a^2(t_1(t)) + \int_{\tau=t_1(t)}^{t_m} \frac{\partial a^2(\tau)}{\partial \tau} \Phi(t - \tau, t_1(\tau) - \tau) d\tau, \quad (3.36)$$

avec la fonction $\Phi(t, \tau)$ définie par

$$\Phi(t, \tau) = 1 - \phi(0)\psi(t) + \int_{s=\tau}^t \psi(s) \frac{\partial \phi(t-s)}{\partial s} ds. \quad (3.37)$$

3.4 Discrétisation des équations gouvernant le contact entre deux surfaces viscoélastiques

3.4.1 Formulation quasi-élastique

Supposant que l'histoire des contraintes et celle des déformations sont connues avant l'instant t , il est alors possible de définir un intervalle de temps Δt tel que, par linéarité de l'intégration, l'équation (3.28) puisse être réécrite

$$u(x, y; t) = \int_{t_0}^{t-\Delta t} J(t-\tau) \frac{d}{d\tau} \left[\int_{S_n} T(x - d_x(\tau), y - d_y(\tau); \xi, \eta) p(x, y; \tau) d\xi d\eta \right] d\tau + \int_{t-\Delta t}^t J(t-\tau) \frac{d}{d\tau} \left[\int_{S_n} T(x - d_x(\tau), y - d_y(\tau); \xi, \eta) p(x, y; \tau) d\xi d\eta \right] d\tau. \quad (3.38)$$

Si Δt est suffisamment petit, alors $J(t-\tau) \approx J(0)$ pour $t - \Delta t < \tau < t$. Par conséquent, la seconde intégrale temporelle dans le second membre de l'équation (3.38) peut se réduire

à une simple différence entre les instants t et $t - \Delta t$:

$$\begin{aligned}
u(x, y; t) = & \int_{t_0}^{t-\Delta t} J(t-\tau) \frac{d}{d\tau} \left[\int_{S_n} T(x-d_x(\tau), y-d_y(\tau); \xi, \eta) p(x, y; \tau) d\xi d\eta \right] d\tau \\
& + J(0) \int_{S_n} T(x-d_x(t), y-d_y(t); \xi, \eta) p(x, y; t) d\xi d\eta \\
& - J(0) \int_{S_n} T(x-d_x(t-\Delta t), y-d_y(t-\Delta t); \xi, \eta) p(x, y; t-\Delta t) d\xi d\eta.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

La solution du problème étant connue à tout instant jusqu'à $t - \Delta t$, le déplacement $v(x, y; t)$, correspondant aux première et troisième intégrales dans le second membre de l'équation (3.39) dû à l'histoire de la pression $p(x, y; \tau)$ avec $t_0 \leq \tau \leq t - \Delta t$ est défini comme suit

$$\begin{aligned}
w(x, y; t) = & \int_{t_0}^{t-\Delta t} J(t-\tau) \frac{d}{d\tau} \left[\int_{S_n} T(x-d_x(\tau), y-d_y(\tau); \xi, \eta) p(x, y; \tau) d\xi d\eta \right] d\tau \\
& - J(0) \int_{S_n} T(x-d_x(t-\Delta t), y-d_y(t-\Delta t); \xi, \eta) p(x, y; t-\Delta t) d\xi d\eta.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Ainsi, on a

$$u(x, y; t) - w(x, y; t) = J(0) \int_{S_n} T(x-d_x(t), y-d_y(t); \xi, \eta) p(x, y; t) d\xi d\eta, \tag{3.41}$$

où le second membre correspond au déplacement normal dû à la pression actuelle $p(x', y'; t)$. L'équation (3.41) est écrite à l'instant t , ce qui correspond ainsi à un problème quasi-élastique à résoudre à l'instant t .

3.4.2 Discrétisation

Dans ce qui suit, Δt correspond à un incrément temporel numérique, l'intégration temporelle de l'équation (3.40) peut être décomposée en la somme de l_t intégrales entre les instants t_{l-1} et t_l , espacés de la durée Δt . Ainsi par superposition l'équation (3.40) est temporellement discrétisée comme suit

$$\begin{aligned}
w(x, y; t) = & \sum_{l=1}^{l_t} \int_{t_{l-1}}^{t_l} J(t-\tau) \frac{d}{d\tau} \left[\int_{S_n} T(x-d_x(\tau), y-d_y(\tau); \xi, \eta) p(x, y; \tau) d\xi d\eta \right] d\tau \\
& - J(0) \int_{S_n} T(x-d_x(t-\Delta t), y-d_y(t-\Delta t); \xi, \eta) p(x, y; t-\Delta t) d\xi d\eta.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Chaque intégrale temporelle peut être approximée par la méthode des trapèzes, pour une fonction $f(t)$ intégrable sur un intervalle $[t_{l-1}, t_l]$

$$\int_{t_{l-1}}^{t_l} f(t) dt = \frac{t_l - t_{l-1}}{2} (f(t_l) + f(t_{l-1})). \tag{3.43}$$

De plus, si Δ_t est suffisamment petit, la dérivation temporelle sur l'intervalle $[t_{l-1}, t_l]$ peut être calculée avec le taux d'accroissement :

$$\frac{df(\tau)}{d\tau} = \frac{f(t_l) - f(t_{l-1})}{\Delta t}. \quad (3.44)$$

Ainsi, appliquer les équations (3.43) et (3.44) à l'équation (3.42) revient à écrire

$$\begin{aligned} w(x, y; t) = & \sum_{l=1}^{l_t} \frac{1}{2} \left\{ J(t - t_l) \left[\int_{S_n} T(x - d_x(t_l), y - d_y(t_l); \xi, \eta) p(x, y; t_l) d\xi d\eta \right. \right. \\ & \left. \left. - \int_{S_n} T(x - d_x(t_{l-1}), y - d_y(t_{l-1}); \xi, \eta) p(x, y; t_{l-1}) d\xi d\eta \right] \right. \\ & + J(t - t_{l-1}) \left[\int_{S_n} T(x - d_x(t_{l-1}), y - d_y(t_{l-1}); \xi, \eta) p(x, y; t_{l-1}) d\xi d\eta \right. \\ & \left. \left. - \int_{S_n} T(x - d_x(t_{l-2}), y - d_y(t_{l-2}); \xi, \eta) p(x, y; t_{l-2}) d\xi d\eta \right] \right\} \\ & - J(0) \int_{S_n} T(x - d_x(t - \Delta t), y - d_y(t - \Delta t); \xi, \eta) p(x, y; t - \Delta t) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (3.45)$$

À présent, la surface du demi-espace viscoélastique est discrétisée par N_e éléments rectangulaires (Figure 1.10). Soit i et j les indices désignant deux éléments du maillage de la surface du demi-espace viscoélastique. Le déplacement suivant la direction z du centre de l'élément i induit par l'histoire de la pression à l'instant t est noté $w_i^{l_t}$, et $u_i^{l_t}$ le déplacement suivant la même direction du centre de l'élément i issu de la distribution de pression au même instant, $p_j^{l_t}$ est la pression actuelle supposée uniforme dans l'élément i , et $M_{ij}^{l_t} = m(x_i - d_x^{l_t}, y_i - d_y^{l_t}; x_i, y_i)$ est le coefficient d'influence relatif à l'interaction entre les éléments i et j à l'instant t . Les distances parcourues d_x^l et d_y^l à l'instant t_l sont issues de la discrétisation de l'équation (3.29) :

$$d_x^l = \sum_{s=l}^{l_t} V_x(s) \Delta_t, \quad d_y^l = \sum_{s=l}^{l_t} V_y(s) \Delta_t. \quad (3.46)$$

Les équations (3.41) et (3.45) sont discrétisées comme suit

$$u_i^{l_t} - w_i^{l_t} = J(0) \sum_{j=1}^{N_e} M_{ij}^{l_t} p_j^{l_t}, \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} w_i^{l_t} = & \sum_{l=1}^{l_t} \frac{1}{2} \left\{ J(t - t_l) \sum_{j=1}^{N_e} (M_{ij}^l p_j^l - M_{ij}^{l-1} p_j^{l-1}) \right. \\ & \left. + J(t - t_{l-1}) \sum_{j=1}^{N_e} (M_{ij}^{l-1} p_j^{l-1} - M_{ij}^{l-2} p_j^{l-2}) \right\} - J(0) \sum_{j=1}^{N_e} M_{ij}^{l_t-1} p_j^{l_t-1}, \end{aligned} \quad (3.48)$$

où p_j^l et M_{ij}^l sont respectivement la pression et le coefficient d'influence à l'instant t_l . À tout instant t_l , les moments mécaniques produits par le glissement peuvent être calculés en discrétisant l'équation (3.30) :

$$M_x^l = \sum_{i=1}^{N_e} y_i p_i^l l_x l_y, \quad M_y^l = - \sum_{i=1}^{N_e} x_i p_i^l l_x l_y. \quad (3.49)$$

Pour déterminer les éléments en contact à l'instant t , le processus itératif présenté dans le chapitre 1 est à utiliser en résolvant successivement l'équation (3.47).

3.5 Contact entre deux milieux viscoélastiques de surfaces géométriquement périodiques

3.5.1 Formulation continue

Dans les équations (3.28), (3.40) et (3.41), on remarque que l'intégration spatiale à tout instant ressemble à l'intégration dans l'équation de Boussinesq (1.11). Donc l'extension de l'approche en pression de contact périodique, développée dans le chapitre 1, au contact entre deux surfaces viscoélastiques et géométriquement périodiques est simple. La surface lisse du demi-espace viscoélastique est divisée en N_p cellules surfaciques périodiques, comme l'illustre la Figure 1.12. À l'instar de la formulation présentée dans le chapitre 1, la condition de périodicité sur la pression de contact est prise en compte en réécrivant l'intégration spatiale de l'équation (3.28) sur la base de la cellule périodique de référence S^0 . L'origine du système de coordonnées est choisie de telle sorte qu'elle corresponde au centre de la cellule périodique de référence S^0 à l'instant actuel t . Ainsi, dans le cas des surfaces viscoélastiques périodiques, l'équation (3.28) s'écrit :

$$u(x, y; t) = \int_{t_0}^t J(t-\tau) \frac{d}{d\tau} \left[\int_{S^0} \left(\sum_{k=1}^{N_p} T(x - d_x(\tau), y - d_y(\tau); \xi' + x_k, \eta' + y_k) \right) p(x, y; \tau) d\xi d\eta \right] d\tau. \quad (3.50)$$

Tout comme pour l'équation (3.28), l'équation (3.50) peut être réécrite avec une formulation quasi-élastique. Ainsi, les équations du problème de contact entre deux surfaces viscoélastique sont reformulées dans le cas des surfaces viscoélastiques périodiques comme suit :

$$u(x, y; t) - w(x, y; t) = J(0) \int_{S^0} \left(\sum_{k=1}^{N_p} T(x - d_x(t), y - d_y(t); \xi' + x_k, \eta' + y_k) \right) p(x, y; t) d\xi d\eta, \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned}
w(x, y; t) = & \int_{t_0}^{t-\Delta t} J(t-\tau) \frac{d}{d\tau} \left[\int_{S^0} \left(\sum_{k=1}^{N_p} T(x-d_x(\tau), y-d_y(\tau); \xi^l + x_k, \eta^l + y_k) \right) p(x, y; \tau) d\xi d\eta \right] d\tau \\
& - J(0) \int_{S^0} \left(\sum_{k=1}^{N_p} T(x-d_x(t-\Delta t), y-d_y(t-\Delta t); \xi^l + x_k, \eta^l + y_k) \right) p(x, y; t-\Delta t) d\xi d\eta.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

3.5.2 Approche numérique

La méthode d'inversion matricielle, précédemment adaptée au contact entre surfaces élastiques périodiques et au contact entre surfaces thermoélastiques périodiques, est à présent utilisée pour étudier numériquement le contact entre deux surfaces viscoélastiques périodiquement rugueuses. Pour ce faire, les équations (3.52) et (3.51) sont discrétisées. L'intégration temporelle est discrétisée en la somme d'intégrations entre les instants t_{l-1} et t_l , l'intégration sur cette durée étant calculée par la méthode des trapèzes. Le maillage de la cellule surfacique de référence S^0 est constitué de N_e éléments rectangulaires, dans lesquels la pression de contact y est supposée uniforme. Les équations (3.52) et (3.51) sont ainsi discrétisées :

$$u_i^{l_t} - w_i^{l_t} = J(0) \sum_{j=1}^{N_e} A_{ij}^{l_t} p_j^{l_t}, \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned}
w_i^{l_t} = & \sum_{l=1}^{l_t} \frac{1}{2} \left\{ J(t-t_l) \sum_{j=1}^{N_e} (A_{ij}^l p_j^l - A_{ij}^{l-1} p_j^{l-1}) \right. \\
& \left. + J(t-t_{l-1}) \sum_{j=1}^{N_e} (A_{ij}^{l-1} p_j^{l-1} - A_{ij}^{l-2} p_j^{l-2}) \right\} - J(0) \sum_{j=1}^{N_e} A_{ij}^{l_t-1} p_j^{l_t-1},
\end{aligned} \tag{3.54}$$

où A_{ij}^l est le coefficient d'influence résultant à l'instant t_l donné dans le chapitre 1. Pour déterminer les éléments appartenant à la surface de contact réelle actuelle à l'instant t , le processus itératif présenté dans le chapitre 1 et illustré par la Figure 1.11 reste le même à mettre en oeuvre.

3.6 Validation et exemples numériques

Dans un premier temps, l'approche numérique développée dans ce chapitre pour résoudre le problème de contact sans glissement entre deux surfaces viscoélastiques sera appliquée au contact de Hertz et aux surfaces sinusoidales. Les résultats seront comparés aux solutions analytiques et numériques existantes afin de valider la méthode d'inversion matricielle adaptée aux problèmes de contact en question. Dans un deuxième temps, le cas du glissement d'un cylindre rigide et celui d'une surface rigide périodique sur une surface viscoélastique seront traités et les résultats seront comparés aux solutions numériques et expérimentales présentées dans la littérature.

Pour toutes les simulations numériques effectuées, le comportement du demi-espace viscoélastique sera décrit par le modèle rhéologique de Maxwell généralisé, les fonctions $K(t)$ et $\mu(t)$ étant données par :

$$K(t) = 3K_\infty + \sum_{b=1}^{n_b} 3K_b \exp(-t/\tau_b^K), \quad (3.55)$$

$$\mu(t) = 2\mu_\infty + \sum_{b=1}^{n_b} 2\mu_b \exp(-t/\tau_b^\mu), \quad (3.56)$$

avec $n_b = 5$, $K_\infty = K_b = 175$ GPa, $\mu_\infty = \mu_b = 80.77$ GPa et $\tau_b^K = \tau_b^\mu = 0.001$ s. Le contact débute à l'instant initial $t_0 = 0$ s et se termine à l'instant final $t_f = 0.01$ s. La durée entre t_0 et t_f est discrétisée par $l_t = 101$.

3.6.1 Contact sans glissement

Application numérique au contact viscoélastique Hertzien

La surface lisse d'un demi-espace viscoélastique est entrée en contact avec une sphère rigide de rayon $R = 5$ mm. La surface de contact nominale, carrée dont les côtés mesurent 10 mm, est maillée avec $N_e = 100 \times 100 = 10000$ éléments carrés de côté mesurant $2R/100 = 0.1$ mm. Le contact est supposé se produire sans frottement avec $V_x = V_y = 0$ m.s⁻¹. Afin de valider l'approche numérique dans le cas du contact de Hertz, un chargement et un déchargement sont appliqués au cours du temps. Le rayon de contact est choisi comme étant défini à chaque instant par $a(t) = 0.3 \sin(\frac{\pi t}{0.01})$ mm. Le déplacement du corps rigide $\delta(t)$ imposé pour la détermination de la répartition de pression est calculé avec l'équation (3.33) lors du chargement jusqu'à l'instant $t_m = 0.005$ s, puis avec l'équation (3.36) lors du déchargement. La Figure 3.7 représente l'évolution du rayon de contact et du déplacement du corps rigide selon la théorie de Hertz et celle de Ting simplifiée par Greenwood [61, 26]. Il est remarquable que le rayon de contact et le déplacement du corps rigide n'aient pas la même évolution temporelle. De plus, on observe que le déplacement du corps rigide n'est pas nul à la fin de la simulation, ce qui résulte de la relaxation. La force de contact au cours du temps et la distribution de pression obtenues sont tracées sur la Figure 3.8. On observe que les résultats numériques sont en bon accord avec les solutions analytiques données par le principe de correspondance de Ting [61, 26].

Application numérique aux surfaces sinusoïdales

Un exemple d'application numérique est maintenant donné dans les cas de surfaces sinusoïdales. Les résultats numériques sont comparés à la solution analytique de Westergaard et aux solutions numériques obtenues par l'approche en pression périodique dans le cas du contact élastique. La surface d'un demi-espace viscoélastique subit l'indentation lors d'une première simulation numérique par une surface rigide sinusoïdale unidimensionnelle suivant x comportant $N_p = 51$ crêtes, puis lors d'une deuxième simulation numérique par une surface rigide sinusoïdale bidimensionnelle comportant $N_p = 51 \times 51 = 2601$ aspérités. Dans les deux

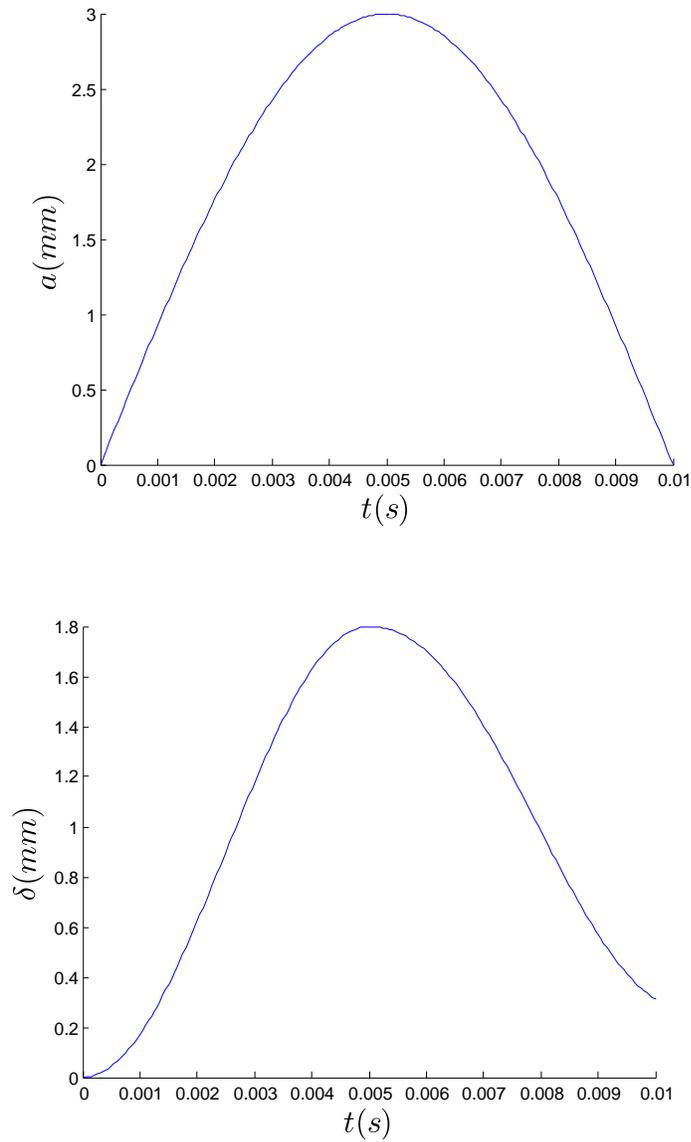


FIGURE 3.7 – Évolution du rayon de contact et du déplacement du corps rigide calculé au cours du temps dans le cas d'une aspérité sphérique.

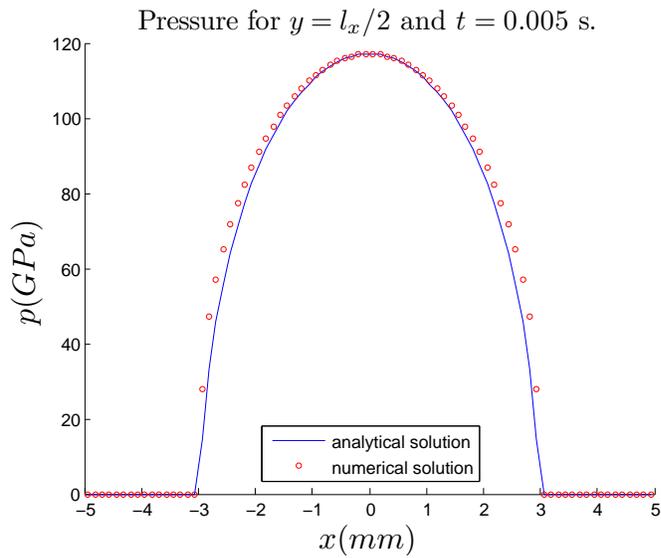
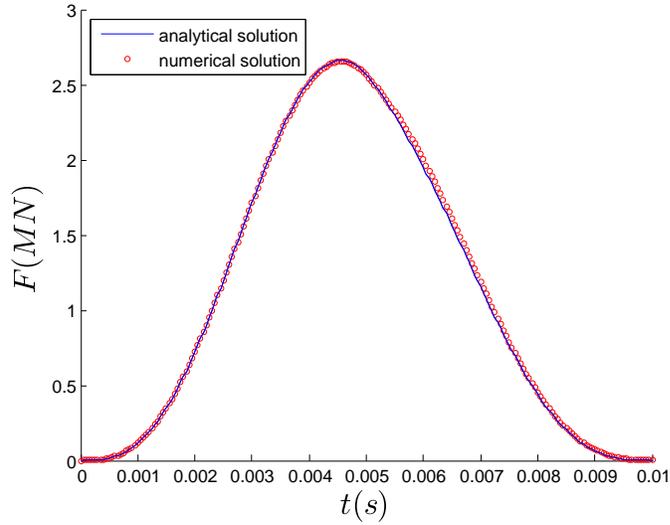


FIGURE 3.8 – Évolution de la force de contact et distribution de pression pour $y = 0.05$ mm à l’instant $t = 0.005$ s calculées dans le cas du contact entre une sphère rigide et un demi-espace viscoélastique.

cas les surfaces sinusoïdales sont de hauteur 0.196 mm. Dans le cas d'une surface sinusoïdale unidimensionnelle, la cellule périodique de référence S^0 , rectangle de dimensions $\lambda = 10/101$ mm suivant x et 10 mm suivant y , est discrétisée par $N_e = 101$ éléments rectangulaires de dimensions $\lambda/101$ suivant la direction x et 10 mm suivant la direction y . Le déplacement du corps rigide $\delta = 8$ mm est imposé lors de la simulation. Dans le cas d'une surface sinusoïdale bidimensionnelle, le maillage de la cellule périodique de référence est constitué de $N_e = 101 \times 101$ éléments carrés de dimensions $\lambda/101$ suivant les directions x et y ; la pénétration $\delta = 1$ mm est choisie pour l'indentation. Les Figures 3.9 et 3.10 représentent l'évolution de la force de contact au cours du temps et la distribution de pression résultantes à différents instants. Les résultats sont comparés aux solutions analytiques élastiques de Westergaard [63, 38] et aux solutions numériques obtenues par l'approche en pression périodique [31]. Il est observé que les résultats viscoélastiques tendent vers les résultats obtenus dans le cas de l'indentation d'un demi-espace élastique caractérisé par les modules K_∞ et μ_∞ .

3.6.2 Contact avec glissement

Roulement d'un cylindre rigide sur un demi-espace viscoélastique

La formulation discrète du contact avec glissement entre un solide rigide et un demi-espace viscoélastique développée dans ce chapitre est appliquée pour résoudre le problème de roulement sans frottement d'un cylindre rigide sur la surface lisse d'un demi-espace viscoélastique. Le cylindre rigide, de rayon $R = 5$ mm, roule sur la surface viscoélastique à une vitesse V imposée seulement dans la direction x , donc $V_y = 0$ m.s⁻¹. Le déplacement de corps rigide est constant au cours du temps et vaut $\delta = 0.03$ mm. La surface de contact nominale est un carré de côté 10 mm et est maillée avec $N_e = 100$ éléments rectangulaire de dimensions 0.1×10 mm² respectivement suivant x et y . La Figure 3.11 représente l'évolution des dimensions de la surface de contact réelle en fonction du nombre de Deborah définit par :

$$\xi_0 = \frac{V\tau_c}{a_0}, \quad (3.57)$$

avec a_0 le rayon de contact en condition statique. La même évolution est présenté dans le livre de Johnson [38]. La différence mesurée entre la courbe calculée et la courbe présentée dans l'ouvrage de Johnson n'excède pas 2%.

Glissement sans frottement d'une surface rigide périodique sur une surface viscoélastique lisse

Enfin, l'approche élaborée pour le contact viscoélastique est maintenant utilisée pour la résolution numérique du glissement sans frottement d'une surface rigide de géométrie périodique sur une surface viscoélastique. La surface rigide est tout d'abord considérée comme étant de géométrie sinusoïdale unidimensionnelle dans la direction x , comportant $N_p = 51$ crêtes d'amplitude 0.196 mm et glisse suivant la direction x . La cellule périodique S^0 , rectangle de dimensions $\lambda \times 10$ mm avec $\lambda = 10/101$ mm, est discrétisée par $N_e = 100$

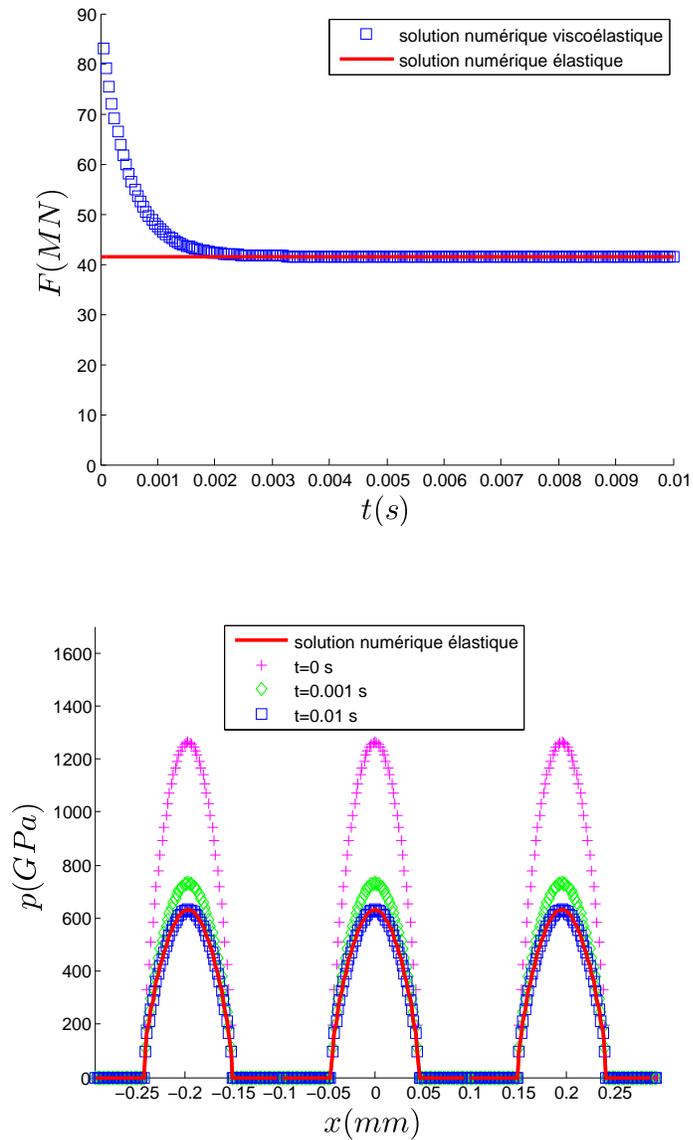


FIGURE 3.9 – Évolution de la force de contact et distribution de pression à différents instants calculées dans le cas du contact entre une surface rigide sinusoïdale unidimensionnelle et un demi-espace viscoélastique.

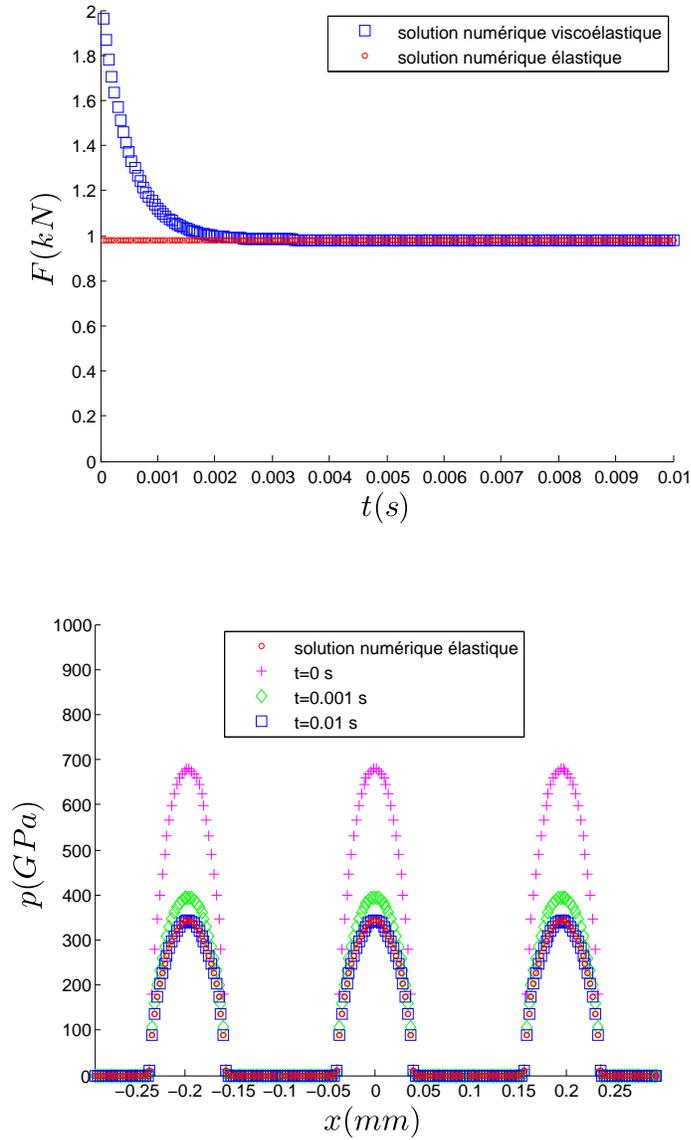


FIGURE 3.10 – Évolution de la force de contact et distribution de pression à différents instants pour $y = 0$ mm calculées dans le cas du contact entre une surface rigide sinusoïdale unidimensionnelle et un demi-espace viscoélastique.

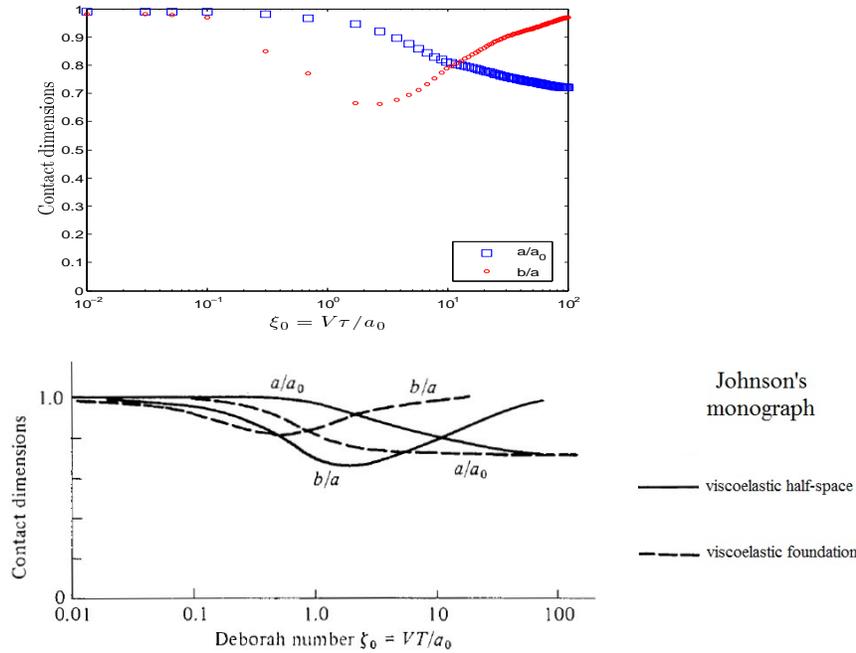


FIGURE 3.11 – Dimensions de la surface de contact en fonction du nombre de Deborah dans le cas du glissement d'un cylindre rigide.

éléments rectangulaires de dimensions $\lambda/100$ suivant x et 10 mm suivant y . La Figure 3.12 représente la déformée de la cellule périodique de référence. La déformée est très proche de ce qui est présenté dans les travaux de Menga et al [50]. Pour finir, la surface rigide glissant sur la surface viscoélastique est de rugosité périodique bidimensionnelle comportant $N_p = 51 \times 51 = 2601$ aspérités sinusoidales, paraboloidales, coniques ou pyramidales, de même hauteur valant 0.196 mm. La cellule S^0 est un carré de côté $\lambda = 10/101$ et maillée par $N_e = 100 \times 100$ éléments carrés dont les côtés mesurent $\lambda/100$. La Figure 3.13 représente l'évolution du moment mécanique, dans le cas des aspérités sinusoidales, normalisée par sa valeur minimale au cours du temps afin de mieux comparer les résultats. Les résultats sont comparés à ceux obtenus dans les cas d'une aspérité, soit $N_p = 1$. Il est intéressant de remarquer que dans le cas d'une seule aspérité rigide, le moment mécanique se stabilise bien plus lentement que dans le cas d'une surface comportant plusieurs aspérités. L'évolution de la taille de la surface de contact relative au cours du temps pour les différentes géométries étudiées est tracée sur la Figure 3.14. Il apparaît que la surface de contact diminue au cours du temps mais de façon différente selon la géométrie de la surface rigide. Cette diminution de la surface de contact peut être observée sur les Figures 3.15 à 3.18 où sont affichées les distributions de pression de contact aux instants $t = 0$ s et $t = 0.01$ s. À l'instant initial, les distributions de pression ont une forme proche de ce qui a été présenté pour les surfaces élastiques dans le chapitre 1. À l'instant final, la surface de contact s'est visiblement réduite.

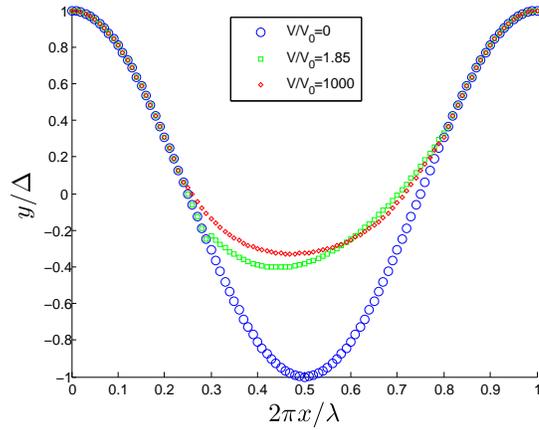


FIGURE 3.12 – Configuration déformée de la cellule périodique de référence S^0 dans le cas du glissement d’une surface rigide sinusoidale unidimensionnelle sur la surface d’un demi-espace viscoélastique.

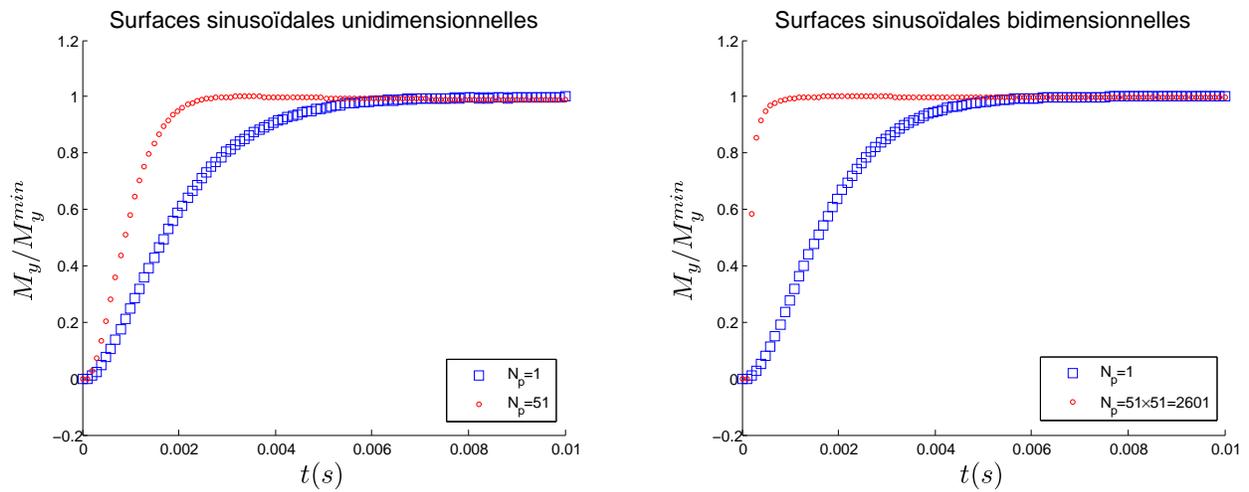


FIGURE 3.13 – Évolution du moment mécanique au cours du temps calculée dans les cas du contact avec glissement entre une surface rigide sinusoidale et un demi-espace viscoélastique.

Aussi, dans le cas des surfaces sinusoidales et paraboloidales, la pression maximum s’est diminuée et n’est plus atteinte au centre de la cellule périodique, ce qui n’est pas le cas des aspérités pointues (coniques et pyramidales).

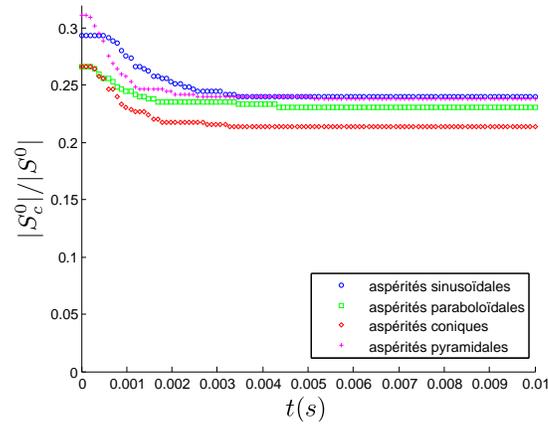


FIGURE 3.14 – Mesure de la surface de contact relative au cours du temps dans le cas du glissement d’une surface rigide comportant $N_p = 51 \times 51 = 2601$ aspérités sinusoidales, paraboloidales, coniques ou pyramidales sur un demi-espace viscoélastique.

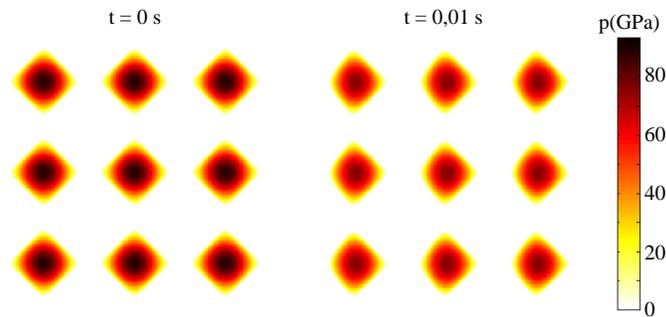


FIGURE 3.15 – Distributions de pression de contact initiale et finale dans le cas du contact avec glissement entre une surface rigide comportant $N_p = 51 \times 51 = 2601$ aspérités sinusoidales et un demi-espace viscoélastique.

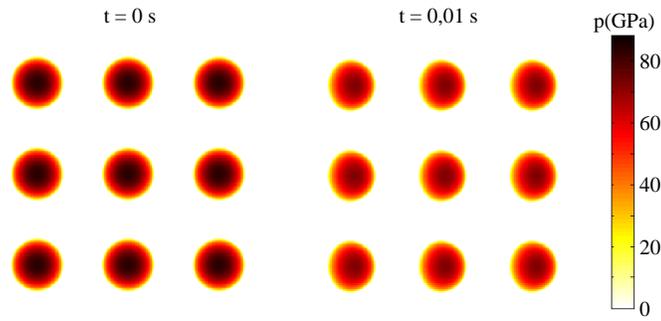


FIGURE 3.16 – Distributions de pression de contact initiale et finale dans le cas du contact avec glissement entre une surface rigide comportant $N_p = 51 \times 51 = 2601$ aspérités paraboloidales et un demi-espace viscoélastique.

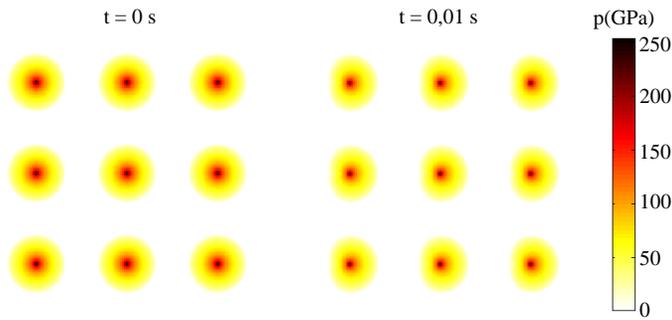


FIGURE 3.17 – Distributions de pression de contact initiale et finale dans le cas du contact avec glissement entre une surface rigide comportant $N_p = 51 \times 51 = 2601$ aspérités coniques et un demi-espace viscoélastique.

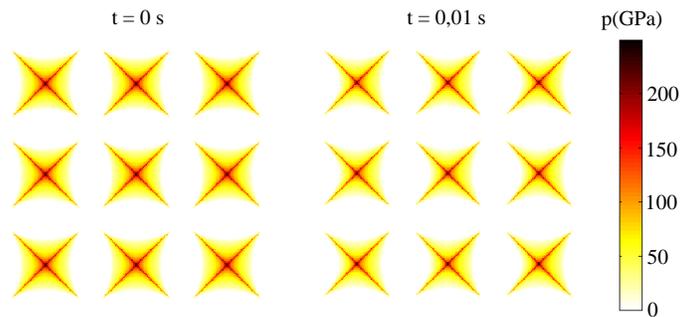


FIGURE 3.18 – Distributions de pression de contact initiale et finale dans le cas du contact avec glissement entre une surface rigide comportant $N_p = 51 \times 51 = 2601$ aspérités pyramidales et un demi-espace viscoélastique.

Conclusion

Le travail de thèse a pour objectif d'élaborer une approche adaptée au contact sans frottement entre deux milieux infinis dont les surfaces sont de géométries périodiques. Les milieux sont supposés ne subir que de petites déformations. L'approche présentée s'appuie sur la solution de Boussinesq et Cerruti, le principe de correspondance de Lee et Radok, et la méthode des éléments de frontière.

La périodicité de la pression de contact est prise en compte dans la formulation du problème en additionnant l'influence des différentes périodes dans une seule cellule surfacique périodique de référence. Ainsi seule une période nécessite d'être discrétisée, ce qui permet d'effectuer des simulations numériques plus rapides tout en conservant une bonne précision.

Dans un premier temps, l'approche en pression périodique est appliquée au contact entre deux surfaces élastiques périodiquement rugueuses. La solution de Boussinesq et Cerruti est adaptée aux surfaces infinies et géométriquement périodiques. La discrétisation est développée en tenant compte d'un nombre fini mais suffisamment élevé de périodes. Des résultats numériques sont présentés dans le cas du contact entre deux surfaces sinusoïdales unidimensionnelles ou bidimensionnelles. Les distributions de pression calculées sont très proches de leurs solutions analytiques. De plus, une étude de convergence a montré que la différence entre les solutions numériques et analytiques descendait nettement sous 1%, que ce soit en terme de discrétisation ou en terme de périodicité, ce qui est très satisfaisant et permet de valider le modèle numérique. Des aspérités de géométries paraboloidales, coniques ou pyramidales sont ensuite étudiées. Les résultats ont mis en évidence que la géométrie des aspérités a une influence non négligeable sur la distribution de pression et sur la surface de contact. Différentes configurations périodiques sont aussi testées. Il a été montré que la position des aspérités influence aussi les résultats de manière significative.

Le travail suivant a consisté en la prise en compte des déformations induites par une circulation de la chaleur entre les deux milieux en contact. La formulation de ce problème de contact dans le cas des surfaces thermoélastiques périodiques a donc été établie avant d'être discrétisée. Des simulations numériques sont ensuite effectuées pour valider l'approche numérique en l'appliquant au contact de Hertz et au contact entre deux surfaces sinusoïdales unidimensionnelles. Les résultats montrent encore l'efficacité de l'approche établie puisque la différence entre les pressions de contact ou les flux de chaleur calculés et leurs solutions analytiques est très faible. D'autres simulations numériques ont montré que la température peut aussi impacter le flux de chaleur, la pression et la surface de contact. Il a aussi été montré que l'évolution de la surface de contact en fonction de la température est différente

si les surfaces en contact sont finies ou infinies.

Enfin, la dernière étape de ce travail de thèse a étendu l'approche en pression périodique au contact avec glissement entre deux surfaces viscoélastiques périodiquement rugueuses. La formulation est établie de sorte à ce qu'à chaque instant, l'intégration spatiale soit effectuée sur la surface de contact nominale actuelle, ce qui permet de ne pas avoir à la faire sur l'ensemble de la trajectoire parcourue par le glissement. La formulation discrétisée est ensuite appliquée pour résoudre le problème du contact de Hertz. Dans le cas où la surface de contact augmente au cours du temps, les distributions de pression et forces de contact calculées sont proches de la solution de Hertz. Dans le cas où la surface de contact diminue au cours du temps, les résultats numériques sont proches des solutions analytiques de Ting. Des surfaces périodiques sont ensuite étudiées, les résultats obtenus ont permis de conclure que plus les aspérités sont pointues, moins l'excentricité de la surface de contact produit par le glissement est importante.

L'approche en pression périodique est donc rapide et efficace pour étudier le contact entre deux surfaces périodiques et infinies. Cette approche peut être intéressante à employer pour étudier le contact entre deux surfaces très rugueuses dont les aspérités sont très nombreuses, de hauteur et de dimensions assez proches. Ainsi, le problème de contact pourrait être résolu en choisissant un échantillon des deux surfaces et en appliquant l'approche en pression périodique.

Ce travail de thèse présente plusieurs perspectives : l'approche en pression périodique étant validée numériquement, des problèmes de contact d'intérêt plus pratique peuvent être maintenant traités, à savoir entre deux surfaces périodiques dont les aspérités ont une géométrie complexe ; des phénomènes comme le frottement, l'adhésion ou la fissuration peuvent être pris en compte pour observer leurs effets sur la pression de contact et sur la surface de contact ; l'approche en pression périodique peut être employée pour déterminer les caractéristiques effectives de surfaces rugueuses à l'échelle microscopique mais lisses à l'échelle macroscopique, afin d'établir des relations entre la force de contact, le déplacement de corps rigide, et la mesure de la surface de contact ; les applications pour la construction durable sont aussi intéressantes, notamment pour étudier l'ouverture et la fermeture des lèvres d'une fissure ; la simulation de procédés électrochimiques permettrait d'analyser comment les réactions chimiques peuvent modifier la composition des surfaces en contact ; l'approche en pression périodique peut aussi être appliquée aux surfaces multi-couches.

Publications et Communications

Articles publiés dans des revues internationales avec comité de lecture

Houanoh K., Yin H.P., He Q.-C. (2016). *A simple numerical approach for solving the frictionless contact problem of elastic wavy surfaces*. Meccanica, 51, 463-473.

Houanoh K., Yin H.P., Cesbron J., He Q.-C. (2016). *Influence of the in-plan distribution of asperities on the normal contact of periodically rough surfaces*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Journal of Mechanical Engineering Science, 230, 1382-1391.

Communications dans des conférences internationales

Houanoh K., Yin H.P., He Q.C. (October 1-3, 2014). *Numerical analysis of the contact between frictionless elastic wavy surfaces by using boundary element method*. 24th International Workshop on Computational Micromechanics of Materials, Madrid, Spain.

Houanoh K., Yin H.P., He Q.C. (March 30 - April 2, 2015). *Numerical study of the frictionless contact problem between thermoelastic wavy surfaces*. EUROMECH Colloquium 575, Contact Mechanics and Coupled Problems in Surface Phenomena, Lucca, Italia.

Houanoh K., Yin H.P., He Q.C. (May 11 - 13, 2016). *Contact of viscoelastic bodies with periodically wavy surfaces*. 8th Contact Mechanics International Symposium, Warsaw, Poland.

Annexe A

Intégration de la fonction de Green

L'intégration de la fonction de Green sur une surface rectangulaire S_j de dimensions $l_x \times l_y$ respectivement dans les directions x et y est définie par

$$m(x, y; \xi, \eta) = \int_{S_j} \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} d\xi d\eta. \quad (\text{A.1})$$

La solution de Love pour la fonction $m(x, y; \xi, \eta)$ s'écrit comme suit [38]

$$\begin{aligned} m(x, y; \xi, \eta) = & f_1(x - \xi, y - \eta, l_x, l_y) + f_1(x - \xi, y - \eta, -l_x, -l_y) \\ & + f_1(y - \eta, x - \xi, l_y, l_x) + f_1(y - \eta, x - \xi, -l_y, -l_x), \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

avec

$$f_1(x, y, l_x, l_y) = (x + l_x/2) \ln \left[\frac{(y + l_y/2) + \sqrt{(y + l_y/2)^2 + (x + l_x/2)^2}}{(y - l_y/2) + \sqrt{(y - l_y/2)^2 + (x + l_x/2)^2}} \right]. \quad (\text{A.3})$$

Annexe B

Intégration de la fonction de couplage thermoélastique

L'intégration de la fonction de couplage thermoélastique sur une surface rectangulaire S_j de dimensions $l_x \times l_y$ respectivement dans les directions x et y est définie par la fonction

$$\begin{aligned} c(x, y; \xi, \eta) = & f_2(x - \xi, y - \eta) + f_2(\xi - x, y - \eta) \\ & + f_2(x - \xi, \eta - y) + f_2(\xi - x, \eta - y) \\ & + f_3(x - \xi, y - \eta, l_x, l_y) + f_3(y - \eta, x - \xi, l_y, l_x) \\ & + f_3(\xi - x, y - \eta, l_x, l_y) + f_3(\eta - y, x - \xi, l_y, l_x), \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

avec

$$\begin{aligned} f_2(x, y) = & (x + l_x/2)(y + l_y/2) \ln [(x + l_x/2)^2 + (y + l_y/2)^2], \\ f_3(x, y, l_x, l_y) = & (x + l_x/2)^2 \left[\arctan \left(\frac{y + l_y/2}{x + l_x/2} \right) + \arctan \left(\frac{-y + l_y/2}{x + l_x/2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Bibliographie

- [1] Akarapu S., Sharp T., Robbins M.O. (2011). *Stiffness of contacts between rough surfaces*. Physical Review Letters, 106, 204301.
- [2] Anfosso-Lédée F., Do M.-T. (2002). *Geometric Descriptors of Road Surface Texture in Relation to Tire-Road Noise*. Transportation Research Record : Journal of the Transportation Research Board, 1806(1), 160-167.
- [3] Anfosso-Lédée F., Pichaud Y. (2007). *Temperature effect on tyre-road noise*. Applied Acoustics. Applied Acoustics, 68(1), 1-16.
- [4] Barber J.R. (1971). *The solution of heated punch problems by point source methods*. International Journal of Engineering Science, 9, 1165-1170.
- [5] Barber J.R. (1973). *Indentation of the semi-infinite elastic solids by a hot sphere*. International Journal of Mechanical Sciences, 15, 813-819.
- [6] Barber J.R. (1978). *Contact problems involving a cooled punch*. Journal of Elasticity, 8, 409-423.
- [7] Boussinesq J. (1885). *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*. Gauthier-Villars, Paris.
- [8] Bush A.W., Gibson R.D., Thomas T.R. (1975). *The elastic contact of a rough surface*. Wear, 35, 87-111.
- [9] Carbone G., Putignano C. (2013). *A novel methodology to predict sliding and rolling friction of viscoelastic materials : Theory and experiments*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 61, 1822-1834.
- [10] Cerruti V. (1882). *Ricerche intorno all'equilibrio dei elastici isotropi*. vol. 13, Accademia dei Lincei, Roma.
- [11] Cesbron J. (2007). *Influence de la texture de chaussée sur le bruit de contact pneumatique/chaussée*. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes.
- [12] Cesbron J., Anfosso-Lédée F., Yin H.P., Duhamel D., Le Houédec D. (2008). *Influence of road texture on tyre/road contact in static conditions*. Road Materials and Pavement Design, 9, 689-710.
- [13] Cesbron J., Anfosso-Lédée F., Duhamel D., Yin H.P., Le Houédec D. (2009). *Experimental study of tyre/road contact forces in rolling conditions for noise prediction*. Journal of Sound and Vibration, 320(1-2), 125-144.

- [14] Cesbron J., Yin H.P., Anfosso-Lédée F., Duhamel D., Le Houédec D., Feng Z.-Q. (2009). *Numerical and experimental study of multi-contact on an elastic half-space*. International Journal of Mechanical Sciences, 51, 33-40.
- [15] Cesbron J., Yin H.P. (2010). *Contact analysis of road aggregate with friction using a direct numerical method*. Wear, 268, 686-692.
- [16] Chevalier L. (1997). *Mécanique des systèmes et des milieux déformables*. Ellipses, Paris.
- [17] Christensen R.M. (1982). *Theory of viscoelasticity*. Academic Press, New York.
- [18] Dubois G., Cesbron J., Yin H.P., Anfosso-Lédée F. (2011). *Macro-scale approach for rough frictionless multi-indentation on a viscoelastic half-space*. Wear, 272(1), 69-78.
- [19] Dubois G. (2012). *Modèle de contact dynamique pneumatique/chaussée par approche multi-aspérités : application au bruit de roulement*. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes.
- [20] Dubois G., Cesbron J., Yin H.P., Anfosso-Lédée F. (2012). *Numerical evaluation of tyre/road contact pressures using a multi-asperity approach*. International Journal of Mechanical Sciences, 54, 84-94.
- [21] Dundurs J., Panek C. (1976). *Heat conduction between bodies with wavy surfaces*. Int. J. Heat Mass Transfer, 19, 731-736.
- [22] Galin L.A., Gladwell G.M.L. (2008). *Contact Problems : the legacy of L.A. Galin*. Dordrecht, Netherlands. Springer.
- [23] Giannakopoulos A.E. (2006). *Elastic and viscoelastic indentation of flat surfaces by pyramid indentors*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 54(7), 1305-1332.
- [24] Greenwood J.A., Williamson J.B.P. (1966). *Contact of nominally flat surfaces*. Proceedings of the Royal Society, A295, 300-319.
- [25] Greenwood J.A. (2006). *A simplified elliptic model of rough surface contact*. Wear, 261, 191-200.
- [26] Greenwood J.A. (2010). *Contact between an axisymmetric indenter and a viscoelastic half-space*. International Journal of Mechanical Sciences, 52, 829-835.
- [27] Greenwood J.A. (2015). *On the almost-complete contact of elastic rough surfaces : The removal of tensile patches*. International Journal of Solids and Structures, 56-57, 258-264.
- [28] He Q.-C., Telega J., Curnier A. (1996). *Unilateral contact of two solids subject to large deformations : formulation and existence results*. Proceedings of the Royal Society, A452, 2691-2717.
- [29] Hertz H. (1882). *Über die Berührung fester elastischer Körper*. Journal Fur Die Reine und Angewandte Mathematik, 92, 156-171.
- [30] Hertz H. (1882). *Über die Berührung fester elastischer Körper and über die Harte*. Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleisses, Leipzig.
- [31] Houanoh K., Yin H.P., He Q.-C. (2016). *A simple numerical approach for solving the frictionless contact problem of elastic wavy surfaces*. Meccanica, 51, 463-473.

- [32] Houanoh K., Yin H.P., Cesbron J., He Q.-C. (2016). *Influence of the in-plan distribution of asperities on the normal contact of periodically rough surfaces*. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Journal of Mechanical Engineering Science, 230, 1382-1391.
- [33] Houanoh K., Yin H.P., He Q.C. (October 1-3, 2014). *Numerical analysis of the contact between frictionless elastic wavy surfaces by using boundary element method*. 24th International Workshop on Computational Micromechanics of Materials, Madrid, Spain.
- [34] Houanoh K., Yin H.P., He Q.C. (March 30 - April 2, 2015). *Numerical study of the frictionless contact problem between thermoelastic wavy surfaces*. EUROMECH Colloquium 575, Contact Mechanics and Coupled Problems in Surface Phenomena, Lucca, Italia.
- [35] Houanoh K., Yin H.P., He Q.C. (May 11 - 13, 2016). *Contact of viscoelastic bodies with periodically wavy surfaces*. 8th Contact Mechanics International Symposium, Warsaw, Poland.
- [36] Hyun S., Robbins M.O. (2007). *Elastic contact between rough surfaces : effect of roughness at large and small wavelengths*. Tribology International, 40, 1413-1422.
- [37] Jang Y.H., Cho H., Barber J.R. (2009). *The thermoelastic Hertzian contact problem*. International Journal of Solids and Structures, 46, 4073-4078.
- [38] Johnson K.L. (1985). *Contact Mechanics*. Cambridge University Press.
- [39] Johnson K.L., Greenwood J.A., Higginson J. (1985). *The contact of elastic regular wavy surfaces*. International Journal of Mechanical Sciences, 27(6), 383-396.
- [40] Johnson K.L. (1995). *The adhesion of two elastic bodies with slightly wavy surfaces*. International Journal of Solids and Structures, 32, 423-430.
- [41] Kalker J.J., Van Randen Y. (1972). *A Minimum Principle for Frictionless Elastic Contact with Application to Non-Hertzian Half-Space Contact Problems*. Journal of Engineering Mathematics, 6(2), 193-205.
- [42] Kalker J.J. (1977). *Variational Principles of Contact Elastostatics*. J. Inst. Maths Applies, 20, 199-219.
- [43] Kozhevnikov I.F., Cesbron J., Duhamel D., Yin H.P., Anfosso-Lédée F. (2008). *A new algorithm for computing the indentation of a rigid body of arbitrary shape on a viscoelastic half-space*. International Journal of Mechanical Sciences, 50, 1194-1202.
- [44] Kozhevnikov I.F., Duhamel D., Yin H.P., Feng Z.-Q. (2010). *A new algorithm for solving the multi-indentation problem of rigid bodies of arbitrary shapes on a viscoelastic half-space*. International Journal of Mechanical Sciences, 52, 399-409.
- [45] Lee E.H., Radok J.R.M. (1960). *The contact problem for viscoelastic bodies*. Journal of Applied Mechanics - Transactions of the ASME, 27, 438-444.
- [46] Liu S., Wang Q., Liu G. (2000). *A versatile method of discrete convolution and FFT (DC-FFT) for contact analyses*. Wear, 243, 101-111.

- [47] Love A.E.H. (1929). *Stress produced in a semi-infinite solid by pressure on part of the boundary*. Philosophical Transactions of the Royal Society, A228, 37-43.
- [48] Love A.E.H. (1939). *Boussinesq's problem for a rigid cone*. The Quarterly Journal of Mathematics, 10(1), 161-175.
- [49] Mandel J. (1966). *Cours de mécanique des milieux continus*. Gauthier-Villars, Paris.
- [50] Menga N., Putignano C., Carbone G., Demelio G.P. (2014). *The sliding contact of a rigid wavy surface with a viscoelastic half-space*. Proceedings of the Royal Society A, 470, 2014092.
- [51] Pei L., Hyun S., Molinari J.F., Robbins M.O. (2005). *Finite element modeling of elastoplastic contact between rough surfaces*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 53, 2385-2409.
- [52] Persson B.N.J. (2006). *Contact mechanics for randomly rough surfaces*. Surface Science Reports, 61, 201-227.
- [53] Polonsky I.A., Keer L.M. (1999). *A numerical method for solving rough contact problems based on the multi-level multi-summation and conjugate gradient techniques*. Wear, 231, 206-219.
- [54] Radok J.R.M. (1957). *Visco-elastic stress analysis*. Q. App. Math., 15, 198.
- [55] Salençon J. (1983). *Viscoélasticité*. Presses de l'école nationale des ponts et chaussées.
- [56] Salençon J. (2009). *Viscoélasticité pour le calcul des structures*. Éditions École Polytechnique.
- [57] Sameur A. (2004). *Modèle de contact pneumatique/chaussée pour la prévision du bruit de roulement*. Thèse de doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées.
- [58] Sidoroff F. (1980). *Mécanique des milieux continus*. École d'ingénieur. École Centrale de Lyon.
- [59] Signorini A. (1933). *Sopra alcune questioni di elastostatica*. Atti della Societa Italiana per il Progresso delle Scienze, 27, 69.
- [60] Sneddon I.N. (1965). *The relation between load and penetration in the axisymmetric Boussinesq problem for a punch of arbitrary profile*. International Journal of Engineering Science, 3, 47-57.
- [61] Ting T.C.T (1966). *The contact stresses between a rigid indenter and a viscoelastic half-space*. Journal of Applied Mechanics - Transactions of the ASME, 35, 845-854.
- [62] Tran A.B., Yvonnet J., He Q.-C., Toulemonde C., Sanahuja J. (2011). *A simple computational homogenization method for structures made of linear heterogeneous viscoelastic materials*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 200, 2956-2970.
- [63] Westergaard H.M. (1939). *Bearing pressures and cracks*. ASME Journal of Applied Mechanics, 6, 49-53.
- [64] Wriggers P. (2002). *Computational contact mechanics*. Wiley, Hoboken.
- [65] Xu Y., Rostami A., R.L. Jackson (2015). *Elastic contact between a geometrically anisotropic bisinusoidal surface and a rigid base*. Journal of Tribology, 137, 021402-021402-8.

- [66] Yastrebov V.A., Anciaux G., Molinari J.-F. (2014). *The Contact of Elastic Regular Wavy Surfaces Revisited*. Tribology Letters, 56, 171-183.
- [67] Yin H.P., Cesbron J., Bui Q.H. (2015). *A new formulation for solving 3-D time dependent rolling contact problems of a rigid body on a viscoelastic half-space*. Mechanics Research Communications, 64, 8-14.
- [68] Yin H.P., Houanoh K., Cesbron J., He Q.C. (March 30 - April 2, 2015). *Numerical simulations of the frictionless contact between the rough surfaces of two elastic or viscoelastic bodies*. EUROMECH Colloquium 575, Contact Mechanics and Coupled Problems in Surface Phenomena, Lucca, Italia.