



**HAL**  
open science

# Modèle condensé de plasticité pour la fissuration et influence de la contrainte T

François Brugier

► **To cite this version:**

François Brugier. Modèle condensé de plasticité pour la fissuration et influence de la contrainte T. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Université Paris Saclay (COMUE), 2017. Français. NNT : 2017SACLN028 . tel-01587740

**HAL Id: tel-01587740**

**<https://theses.hal.science/tel-01587740>**

Submitted on 14 Sep 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NNT : 2017SACLN028

THÈSE DE DOCTORAT  
DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY  
PRÉPARÉE À L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE  
PARIS-SACLAY

Ecole doctorale n°579

Sciences mécaniques et énergétiques, matériaux et géosciences

Spécialité de doctorat : Mécanique des matériaux

par

**M. FRANÇOIS BRUGIER**

Modèle condensé de plasticité pour la fissuration  
et influence de la contrainte T

Thèse présentée et soutenue à Cachan, le 4 juillet 2017.

Composition du Jury :

M.	HABIBOU MAITOURNAM	Professeur des universités IMSIA - ENSTA ParisTech	(Président du jury)
Mme	CHRISTINE SARRAZIN-BAUDOUX	Directrice de recherche CNRS Institut P' - ENSMA	(Rapporteuse)
M.	JULIEN RÉTHORÉ	Directeur de recherche CNRS GeM - École Centrale de Nantes	(Rapporteur)
Mr	DAVID NOWELL	Professeur des universités University of Oxford	(Examineur)
Mme	SYLVIE POMMIER	Professeure des universités LMT - ENS Paris-Saclay	(Directrice de thèse)
M.	YOANN GUILHEM	Maître de conférences LMT - ENS Paris-Saclay	(Co-encadrant)
M.	DIDIER SORIA	Ingénieur de recherche Safran Aircraft Engines	(Co-encadrant)





Cette thèse est le fruit d'un (trop ?) long travail que je n'aurais jamais pu réaliser entièrement seul. C'est pourquoi les remerciements s'imposent.

En premier lieu, je remercie évidemment Sylvie Pommier qui m'a permis de réaliser cette thèse et avec qui il est toujours passionnant de discuter de mécanique ou autre. Elle s'est rendue aussi disponible qu'elle le pouvait malgré ses nombreuses responsabilités. Je remercie aussi Yoann Guilhem qui a fait un énorme travail de relecture de mon manuscrit et m'a encadré sur la fin de ma thèse, ce qui m'a permis de l'amener à son terme. Je remercie également Didier Soria qui m'a permis de faire cette thèse avec Safran Aircraft Engines.

Je souhaite remercier Christine Sarrazin-Baudoux et Julien Réthoré pour avoir accepté la lourde tâche de rapporteur, ainsi que Habibou Maitournam d'avoir accepté d'être président de mon jury et David Nowell d'avoir accepté de venir d'Oxford et fait l'effort de suivre la soutenance en français.

Je tiens également à remercier Xavier et Boubou qui m'ont aidé pour réaliser mes nombreux essais et Frisou pour les discussions au bar.

Je remercie aussi Guillaume, Charlotte, Sylvain, Adrien pour (rayer la ou les mention(s) inutile(s)) :

- le soutien moral ;
- les coups de main avec Linux, L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X ou python ;
- les pauses vidéos débiles du midi ;
- les discussions de la pause café ;
- ma présoutenance ;
- et avoir supporté mes râleries.

Je remercie bien évidemment ma famille : mes parents qui m'ont soutenu dans mes études pendant toutes ces années et sans qui je n'y serais jamais arrivé. De même pour mes sœurs qui m'ont aussi soutenu en me harcelant pour mes devoirs ou en m'accompagnant à Paris pour mes oraux de prépa (et pour visiter Paris aussi). Et enfin, je remercie Alex, qui m'a permis de tenir jusqu'au bout et qui illumine mes journées.



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>i</b>
<b>Table des figures</b>	<b>vii</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xiii</b>
<b>Nomenclature</b>	<b>xvi</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Étude bibliographique</b>	<b>3</b>
1 Mécanique linéaire élastique de la rupture (MLER) . . . . .	5
1.1 Historique . . . . .	5
1.2 Hypothèses géométriques et cinématiques de la mécanique de la rupture . . . . .	7
1.3 Développement asymptotique des solutions de Westergaard . . . . .	8
1.4 Limites de validité de la MLER . . . . .	10
1.4.1 Limite de validité des champs asymptotiques . . . . .	10
1.4.2 Autre limite : les fissures courtes . . . . .	11
2 Propagation de fissures par fatigue . . . . .	12
2.1 Mécanismes de propagation . . . . .	12
2.1.1 Régime du seuil . . . . .	12
2.1.2 Régime de Paris . . . . .	13
2.1.3 Régime de rupture instable . . . . .	15
2.2 Propagation sous un chargement à amplitude constante : loi de Paris . . . . .	15
2.3 Propagation sous un chargement à amplitude variable . . . . .	16
2.3.1 Effet d'une surcharge unitaire . . . . .	16
2.3.2 Effet d'un bloc de surcharges . . . . .	19
3 Contraintes T . . . . .	21
3.1 Champs asymptotiques et contrainte T . . . . .	22
3.2 Contraintes T pour un chargement triaxial . . . . .	23
3.3 Effets de la contrainte T . . . . .	24
3.3.1 Influence de la contrainte T sur la zone plastique . . . . .	24
3.3.2 Influence de la contrainte T sur la vitesse de propagation . . . . .	26

	3.3.3	Influence de la contrainte T sur le trajet de fissuration . . . . .	27
	3.4	Contraintes T et fissures courtes . . . . .	27
4		Fissures courtes . . . . .	28
	4.1	Qu'est-ce qu'une fissure courte? . . . . .	28
	4.1.1	Fissure microstructuralement courte . . . . .	28
	4.1.2	Fissure mécaniquement courte . . . . .	31
	4.2	Effets sur le seuil de non propagation . . . . .	33
	4.3	Effets sur la vitesse de propagation . . . . .	35
5		Matériau de l'étude : Inconel 718 DA . . . . .	36
	5.1	Composition et microstructure de l'Inconel 718 DA . . . . .	36
	5.2	Élaboration de l'alliage 718 . . . . .	38
	5.2.1	Fusion par induction sous vide (VIM) . . . . .	39
	5.2.2	Refusion sous laitier (ESR) . . . . .	39
	5.2.3	Refusion à l'arc sous vide (VAR) . . . . .	39
6		Conclusion . . . . .	39
<b>2</b>		<b>Modèle condensé de plasticité</b>	<b>41</b>
1		Introduction . . . . .	43
2		Principe de fonctionnement du modèle . . . . .	43
	2.1	Principe d'implémentation du modèle . . . . .	43
	2.2	Fonctionnement global du modèle . . . . .	44
3		Loi de fissuration . . . . .	44
4		Modélisation du champ de vitesses en condition d'élastoplasticité en pointe de fissure . . . . .	45
	4.1	Principe . . . . .	46
	4.2	Proper Orthogonal Decomposition . . . . .	47
	4.3	Hypothèses . . . . .	48
	4.4	Utilisation de la POD pour décomposer le champ de vitesses en pointe de fissure . . . . .	51
	4.4.1	Méthode d'obtention de la distribution spatiale du champ élastique . . . . .	52
	4.4.2	Méthode d'obtention de la distribution spatiale du champ plastique . . . . .	52
	4.4.3	Calcul de l'émoussement plastique . . . . .	56
5		Comportement en pointe de fissure . . . . .	58
	5.1	Évolution des variables internes en fonction de $a$ . . . . .	59
	5.1.1	Évolution de $K_m(a)$ . . . . .	59
	5.1.2	Évolution de $K_{xm}(a)$ . . . . .	60
	5.1.3	Évolution de $K_c(a)$ . . . . .	61
	5.1.4	Évolution de $K_{xc}(a)$ . . . . .	62
	5.2	Évolution des variables internes en fonction de $\rho$ . . . . .	62
	5.2.1	Évolutions de $K_c(\rho)$ . . . . .	62
	5.2.2	Évolutions de $K_{xc}(\rho)$ . . . . .	62

	5.2.3	Évolutions de $K_m(\rho)$ et $K_{xm}(\rho)$ . . . . .	63
	5.3	Bilan des équations régissant le comportement en pointe de fissure . . . . .	64
6		Implémentation du modèle condensé de plasticité . . . . .	66
7		Conclusion . . . . .	69
<b>3</b>		<b>Identification des paramètres du modèle condensé de plasticité</b>	<b>71</b>
1		Introduction . . . . .	73
2		Essai de comportement cyclique . . . . .	74
	2.1	Méthodologie . . . . .	74
	2.1.1	Éprouvette . . . . .	74
	2.1.2	Montage . . . . .	74
	2.1.3	Prise de mesure . . . . .	74
	2.1.4	Chargement appliqué . . . . .	74
	2.2	Résultats . . . . .	74
	2.3	Identification de la loi de comportement cyclique . . . . .	75
	2.4	Validation de la loi par simulation numérique . . . . .	77
3		Identification du seuil de non propagation de l'INCO 718 DA . . . . .	78
	3.1	Principe de fonctionnement . . . . .	78
	3.2	Dimensionnement géométrique de l'éprouvette percée . . . . .	79
	3.2.1	Conditions aux limites . . . . .	80
	3.2.2	Impact des différents paramètres géométriques de l'éprouvette . . . . .	81
	3.2.3	Éprouvette finale . . . . .	81
	3.3	Dimensionnement au flambage de l'éprouvette percée . . . . .	85
	3.3.1	Conditions aux limites . . . . .	85
	3.3.2	Résultats . . . . .	85
	3.4	Détermination expérimentale du seuil de non propagation . . . . .	87
	3.4.1	Montage . . . . .	87
	3.4.2	Prise de mesure . . . . .	87
	3.4.3	Calibration du suiveur de fissure . . . . .	87
	3.4.4	Chargement appliqué . . . . .	89
	3.4.5	Marquage . . . . .	90
	3.4.6	Remarque sur l'obtention du seuil de non-propagation . . . . .	90
	3.4.7	Résultats . . . . .	90
	3.4.8	Observation de la surface de rupture . . . . .	90
4		Méthode d'identification des paramètres du modèle . . . . .	92
	4.1	Calcul de la taille maximale de la zone plastique d'Irwin . . . . .	94
	4.2	Détermination de la plage de chargement d'application de la POD . . . . .	95
	4.3	Obtention des champs de référence . . . . .	95
	4.4	Évolution de $K_m(a)$ : identification de $p_a$ . . . . .	95
	4.5	Évolution de $K_m(\rho)$ : identification de $\gamma$ . . . . .	96
	4.6	Évolution de $K_{xm}(\rho)$ : identification de $a_{xm}$ . . . . .	97
	4.7	Évolution de $K_{xm}(a)$ : identification de $k_a$ et $k_b$ . . . . .	99

	4.7.1	Obtention des courbes $K_{xm}(a)$ . . . . .	99
	4.7.2	Analyse de sensibilité paramétrique . . . . .	101
	4.8	Évolution de $K_{xc}(\rho)$ : identification de $a_c$ . . . . .	103
5		Conclusion . . . . .	107
<b>4</b>		<b>Influence de la contrainte T sur la vitesse de propagation</b>	<b>109</b>
1		Introduction . . . . .	111
2		Modélisation des effets de fissures courtes sous chargement à amplitude constante . . . . .	111
	2.1	Critère de non-propagation [de Moura Pinho <i>et al.</i> , 2012] . . . . .	111
	2.2	Loi de Paris modifiée avec effet de seuil pour fissures longues . . . . .	114
	2.3	Loi de Paris modifiée avec effet de seuil pour fissures courtes . . . . .	115
	2.3.1	Détermination du paramètre $T_y$ et de $\delta$ . . . . .	115
	2.3.2	Courbe de propagation d'une fissure courte semi-circulaire . . . . .	116
3		Préparation d'essais sur microfissure . . . . .	118
	3.1	Simulation de l'éprouvette SENT . . . . .	118
	3.1.1	Conditions aux limites . . . . .	119
	3.1.2	Résultats . . . . .	119
	3.2	Polissage . . . . .	120
	3.2.1	Description du montage . . . . .	121
	3.3	Application . . . . .	122
4		Essais biaxiaux sur fissure longue à contrainte T non nulle . . . . .	125
	4.1	Dimensionnement de l'éprouvette cruciforme . . . . .	125
	4.1.1	Détermination des chargements à appliquer . . . . .	125
	4.1.2	Simulation de l'éprouvette cruciforme . . . . .	126
	4.1.3	Dimensionnement au flambage de l'éprouvette cruciforme . . . . .	130
	4.2	Essais biaxiaux à contrainte T non nulle . . . . .	133
	4.2.1	Montage . . . . .	133
	4.2.2	Prise de mesure . . . . .	133
	4.2.3	Calibration du suiveur . . . . .	133
	4.2.4	Chargement appliqué . . . . .	135
	4.2.5	Résultats . . . . .	138
	4.3	Essai transitoire . . . . .	140
	4.3.1	Chargement appliqué . . . . .	141
	4.3.2	Résultats . . . . .	142
5		Modélisation de l'effet de la contrainte T sur la vitesse de propagation d'une fissure . . . . .	147
	5.1	Prise en compte de l'effet sur la taille de zone plastique . . . . .	147
	5.2	Prise en compte de l'effet sur le seuil de plasticité . . . . .	149
6		Conclusion . . . . .	152

<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>153</b>
<b>A Implémentation du modèle de plasticité condensé</b>	<b>155</b>
1 Introduction . . . . .	157
2 Notations . . . . .	157
3 Algorigrammes . . . . .	157
4 Initialisation . . . . .	160
5 Découpe du chargement . . . . .	160
6 Calcul des seuils . . . . .	160
6.1 Seuil de contact $K_{sc}$ . . . . .	160
6.2 Seuil d'élasticité $K_{se}$ . . . . .	161
6.3 Seuil de plasticité monotone $K_{scm}$ . . . . .	161
7 Domaines de chargement . . . . .	161
7.1 Contact . . . . .	161
7.2 Elasticité . . . . .	162
7.3 Plasticité cyclique . . . . .	162
7.3.1 Calcul de $\delta\rho = \rho_2 - \rho_1$ . . . . .	162
7.3.2 Calcul de $\delta a = a_2 - a_1$ . . . . .	162
7.3.3 Calcul de $\delta K_{Im}^a$ . . . . .	162
7.3.4 Calcul de $\delta K_{Ixm}^a$ . . . . .	163
7.4 Plasticité monotone . . . . .	163
7.4.1 Calcul de $\delta\rho = \rho_2 - \rho_1$ . . . . .	163
7.4.2 Calcul de $\delta a = a_2 - a_1$ . . . . .	163
7.4.3 Calcul de $\delta K_{Im}^p$ . . . . .	164
7.4.4 Calcul de $\delta K_{Ixm}^p$ . . . . .	164
7.4.5 Calcul de $\delta K_{Im}^a$ . . . . .	164
7.4.6 Calcul de $\delta K_{Ixm}^a$ . . . . .	165
8 Mise à jour des variables . . . . .	165
8.1 Mise à jour de $\rho$ . . . . .	165
8.2 Mise à jour de $a$ . . . . .	165
8.3 Mise à jour de $K_{Im}$ et $K_{Ixm}$ . . . . .	165
8.4 Mise à jour de $K_{Ixc}$ en phase d'ouverture ou de fermeture . . . . .	165
8.4.1 Phase d'ouverture . . . . .	166
8.4.2 Phase de fermeture . . . . .	166
9 Test de rupture . . . . .	166
<b>B Plans des éprouvettes utilisées</b>	<b>167</b>
1 Eprouvette percée . . . . .	168
2 Eprouvette SENT . . . . .	169
3 Eprouvette cruciforme . . . . .	170
4 Eprouvette de comportement cyclique . . . . .	171
5 Plan de prélèvement des éprouvettes dans le disque de turbine . . . . .	172



<b>C Dessins de définition du montage de polissage</b>	<b>173</b>
<b>Références</b>	<b>179</b>

# Table des figures

1	Écorché du moteur d'avion civil CFM 56 . . . . .	1
1.1	Liberty Ship fissuré . . . . .	6
1.2	De Havilland Comet . . . . .	6
1.3	Autres accidents survenus par rupture en fatigue . . . . .	7
1.4	Modélisation de la fissure . . . . .	8
1.5	Modes élémentaires de sollicitation d'une fissure tridimensionnelle . . . . .	8
1.6	Fissure de Griffith soumise à un chargement de traction équibiaxiale . . . . .	9
1.7	Échelles caractéristiques du problème . . . . .	10
1.8	Erreur du développement asymptotique en fonction du rapport $\frac{r}{a}$ . . . . .	11
1.9	Diagramme montrant l'effet de la longueur de fissure sur la limite de fatigue [Kitagawa et Takahashi, 1976] . . . . .	12
1.10	Schéma d'une courbe de propagation dans un diagramme de Paris . . . . .	13
1.11	Mécanisme de formation des stries de fatigue selon Neumann [Neumann, 1969] . . . . .	13
1.12	Surfaces de rupture par fatigue pour un chargement faible dans de l'INCO718 DA . . . . .	14
1.13	Schématisation de la propagation de fissure par plasticité . . . . .	14
1.14	Surfaces de rupture par fatigue pour un chargement plus élevé dans de l'INCO718 DA . . . . .	15
1.15	Différentes réponses à une surcharge unitaire [Bathias et Baïlon, 1997] . . . . .	17
1.16	Effet de la plasticité créée par la surcharge sur la vitesse de propagation [Bathias et Baïlon, 1997] . . . . .	17
1.17	Photographie en lumière rasante de la propagation d'une fissure avant et après une surcharge [Robin, 1988] . . . . .	18
1.18	Évolution du retard en fonction de la fréquence d'apparition des surcharges [Yildirim et Vardar, 1990] . . . . .	19
1.19	Schéma de principe de l'effet des surcharges sur la propagation en fonction de leur fréquence . . . . .	19
1.20	Évolution du niveau d'ouverture et de la longueur de la fissure pendant un chargement par blocs [Bathias et Baïlon, 1997] . . . . .	20
1.21	Chargement des essais réalisés pour l'étude de l'influence du nombre de surcharges dans un bloc sur la vitesse de propagation . . . . .	20

1.22	Courbes de propagation pour différents nombres de surcharges dans un bloc répété de 100 cycles [Hamam, 2006] . . . . .	21
1.23	Chargement des essais réalisés pour l'étude de la distribution des surcharges dans un bloc sur la vitesse de propagation . . . . .	21
1.24	Courbes de propagation pour différentes distributions de surcharges dans un bloc répété de 10000 cycles [Hamam, 2006] . . . . .	22
1.25	Fissure soumise à un chargement de traction biaxiale quelconque . . . . .	23
1.26	Définition des contraintes $T$ et $T_Z$ . . . . .	24
1.27	Influence de la contrainte T sur la zone plastique [Lee <i>et al.</i> , 2005] . . . . .	24
1.28	Champ de la contrainte équivalente de von Mises en déformations planes autour de la pointe de la fissure montrant l'évolution de la zone plastique en fonction de la contrainte T [Pommier, 2016] . . . . .	25
1.29	Évolution de $\frac{r_y(T \neq 0)}{r_y(T = 0)}$ en fonction de $\frac{T}{\sigma_y}$ pour $S_{yy}$ et $a$ données . . . . .	26
1.30	Influence de la contrainte T sur le trajet de fissuration [Lee <i>et al.</i> , 2005] . . . . .	27
1.31	Propagation des fissures courtes par fatigue [Suresh et Ritchie, 1984] . . . . .	29
1.32	Propagation d'une fissure microstructuralement courte . . . . .	30
1.33	Problème de Griffith dans le plan $(x, y)$ . . . . .	31
1.34	Évolution de la fluctuation sur $K_I$ rapportée à sa valeur moyenne en fonction de la taille de fissure pour un chargement calculé sur une microstructure modélisée par éléments finis [Thieulot-Laure, 2008] . . . . .	31
1.35	Seuil de non-propagation d'une fissure de longueur $a$ , en fonction de $a$ pour différents alliages dont les limites d'élasticité varient entre 30 et 770 MPa [Tanaka <i>et al.</i> , 1981] . . . . .	32
1.36	Effets de fissure courte sur les courbes de propagation [Santus et Taylor, 2009] . . . . .	33
1.37	Diagramme montrant l'effet de la longueur de fissure sur la limite de fatigue [Kitagawa et Takahashi, 1976] . . . . .	34
1.38	Évolution de la limite de fatigue et de $\Delta K_{th}$ en fonction de la taille du défaut initial [Endo et McEvily, 2007] . . . . .	34
1.39	Évolutions de la limite de fatigue pour un même matériau et pour différents chargements (équibiaxial, flexion rotative, torsion) [McEvily et Endo, 2006] . . . . .	35
1.40	Courbe présentant la différence entre la MLER standard et l'utilisation de la contrainte T [de Moura Pinho <i>et al.</i> , 2012] . . . . .	36
1.41	Mailles cristallographiques de la matrice et des deux phases ordonnées de l'Inconel 718 conduisant au durcissement de l'alliage [Alexandre, 2004] . . . . .	37
1.42	Micrographie de l'Inconel étudié avec, en blanc, les précipités de phase $\delta$ durcissante - taille de grains de 5 $\mu\text{m}$ en moyenne - taille des précipités environ 2 $\mu\text{m}$ . . . . .	38
1.43	Schémas de principe des différentes méthodes d'élaboration utilisées pour la fabrication de l'Inconel [Alexandre, 2004] . . . . .	38

2.1	Schéma de principe de l'implémentation du modèle dans un code de calcul	44
2.2	Fonctionnement global du modèle . . . . .	45
2.3	Indépendance cinématique de l'élasticité et de la plasticité . . . . .	49
2.4	Autosimilarité de la géométrie en pointe de fissure . . . . .	50
2.5	Cinq chargements cycliques en mode mixte I + II simulés par éléments finis. Les isovalues de la déformation plastique cumulée sont tracées en échelle logarithmique pendant le premier cycle aux points A, B, C, D du trajet de chargement, et à la fin du cinquième cycle (en D) [Pommier, 2015]	50
2.6	Schéma du modèle utilisé pour les simulations . . . . .	51
2.7	Méthode d'obtention du champ de déplacement plastique $dU_p$ à partir du champ élastoplastique . . . . .	53
2.8	Méthode d'obtention de la distribution spatiale du champ plastique $\phi_p$ . . . . .	54
2.9	Évolution des dépendances radiale et angulaire du champ élastique autour de la pointe de la fissure . . . . .	55
2.10	Évolution des dépendances radiale et angulaire du champ plastique autour de la pointe de la fissure . . . . .	56
2.11	Champs de déplacement provenant d'un essai et d'une simulation . . . . .	57
2.12	Évolutions de $K$ en fonction de $\rho$ tracées à partir de mesures de champs (CIN) ou d'une simulation (matériaux différents) . . . . .	57
2.13	Schéma d'un chargement quelconque dans les diagrammes $K(t)$ et $K(\rho)$ . . . . .	58
2.14	Définition des domaines d'élasticité cyclique et monotone dans le diagramme $K(\rho)$ . . . . .	59
2.15	Déplacement de la zone monotone lors de l'avancée de la fissure . . . . .	61
2.16	Évolution de $K_{xm}$ en fonction de l'avancée de fissure $a$ . . . . .	61
2.17	Découpe d'un chargement $K(t)$ quelconque en différentes charges et décharges . . . . .	66
2.18	Schématization des différents domaines de chargement . . . . .	67
2.19	Algorithme simplifié représentant le fonctionnement du modèle condensé de plasticité . . . . .	68
3.1	Chargement appliqué lors de l'essai cyclique . . . . .	75
3.2	Courbe effort-déformation d'une série de cycles à 1,2 % de déformation . . . . .	75
3.3	Courbe contrainte-déformation d'une série de cycles à 1,2 % de déformation . . . . .	76
3.4	Courbe contrainte $(\sigma - R_0)$ -déformation plastique d'une série de cycles à 1,2 % de déformation . . . . .	76
3.5	Courbe Contrainte $(\sigma - R_0)$ -Déformation plastique : comparaison simulation et essai . . . . .	77
3.6	Éprouvette percée utilisée pour déterminer le seuil de non propagation du matériau . . . . .	78
3.7	Schéma montrant le principe de fissuration de l'éprouvette percée . . . . .	79
3.8	Conditions aux limites de la simulation 3D sur l'éprouvette percée . . . . .	81
3.9	Influence de la hauteur de l'ellipse sur l'évolution de $K$ , $a_0 = 3$ mm . . . . .	82
3.10	Influence de la largeur de l'ellipse sur l'évolution de $K$ , $a_0 = 3$ mm . . . . .	82

3.11	Influence de la position de l'ellipse sur l'évolution de $K$ , $a_0 = 3$ mm . . .	83
3.12	Influence de la longueur des talons sur l'évolution de $K$ , $a_0 = 3$ mm . . .	83
3.13	Géométrie finale de l'éprouvette, $a_0 = 3$ mm . . . . .	84
3.14	Évolution de $K$ et de la contrainte $T$ rapportés à la contrainte appliquée $\sigma_0$	84
3.15	Conditions aux limites de la simulation de flambage sur l'éprouvette percée	85
3.16	Déformée et champ de déplacement dans l'éprouvette percée . . . . .	86
3.17	Schéma du montage de l'essai de préfissuration . . . . .	87
3.18	Interpolation de la courbe de calibration à partir des marquages avec $a_0 =$ 3 mm . . . . .	88
3.19	Courbe de calibration pour l'éprouvette percée . . . . .	89
3.20	Chargement appliqué lors de l'essai de préfissuration . . . . .	89
3.21	Courbe de propagation ( $R = 0,1$ ) dans l'INCO 718 DA . . . . .	91
3.22	Faciès de rupture de l'éprouvette . . . . .	91
3.23	Faciès de rupture de l'éprouvette - Marquages . . . . .	91
3.24	Faciès de rupture de l'éprouvette - Front de fissure . . . . .	92
3.25	Modèle utilisé pour l'identification des paramètres . . . . .	93
3.26	Évolution de $g(\theta)$ . . . . .	95
3.27	Évolution de la dépendance radiale du champ plastique $f_p(r)$ . . . . .	96
3.28	Évolution d'une charge cyclique et interpolation . . . . .	97
3.29	Évolution de l'erreur lors d'une décharge-compression . . . . .	98
3.30	Évolution de $K_{xm}$ en fonction de $\rho$ . . . . .	98
3.31	Évolution de $S_{yy}$ en fonction de $a$ pour différentes valeurs de $K_{max}$ atteintes	99
3.32	Évolution de $S_{yy}$ en fonction de $a$ adimensionnées pour différentes valeurs de $K_{max}$ atteintes . . . . .	100
3.33	Schéma de l'avancée de la fissure dans le champ de contraintes résiduelles	100
3.34	Évolution de $K_{xm}$ en fonction de $a$ pour différentes valeurs de $K_{max}$ atteintes	101
3.35	Évolutions adimensionnées de $K_{xm}$ en fonction de $a$ pour différentes va- leurs de $K_{max}$ atteintes . . . . .	101
3.36	Évolution de $K_{xm}$ en fonction de $a$ pour différentes valeurs de $K_m$ . . . . .	102
3.37	Évolution de $K_{xm}$ en fonction de $a$ pour différentes valeurs de $K_m$ , les autres coefficients étant gardés constants . . . . .	102
3.38	Évolution de $K_{xm}$ en fonction de $a$ pour différentes valeurs de $K_m$ , les autres coefficients étant gardés constants . . . . .	103
3.39	Évolution de $K_{xm}$ en fonction de $a$ pour différentes valeurs de $k_a$ , les autres coefficients étant gardés constants . . . . .	103
3.40	Évolution de $K_{xm}$ en fonction de $a$ pour différentes valeurs de $k_b$ , les autres coefficients étant gardés constants . . . . .	104
3.41	Évolution de $K_{xm}$ en fonction de $a$ pour différentes valeurs de $p_a$ , les autres coefficients étant gardés constants . . . . .	104
3.42	Évolution cyclique de $K$ en fonction de $\sqrt{\rho}$ . . . . .	105
3.43	Interpolations de l'évolution de $K = f(\rho)$ en imposant $K_c = \frac{\Delta K_{th}}{2}$ ou en le laissant libre . . . . .	106

4.1	Domaine de non propagation tracé dans le plan $K - T$ . . . . .	113
4.2	Évolution de $\frac{da}{dN}$ en fonction de $f_{max}$ . . . . .	115
4.3	Courbe de propagation avec prise en compte du seuil comparée à la loi de Paris du matériau . . . . .	115
4.4	Courbe de propagation avec prise en compte du seuil comparée à la loi de Paris du matériau . . . . .	116
4.5	Évolution du seuil de non-propagation en fonction de la taille de la fissure	117
4.6	Évolutions de $\frac{da}{dN}$ en fonction de $\Delta K$ pour des fissures semi-circulaires de longueurs initiales différentes . . . . .	118
4.7	Évolutions de $\frac{da}{dN}$ en fonction de $\Delta K$ pour une fissure semi-circulaire de longueur initiale $a_0 = 2 \text{ mm}$ . . . . .	118
4.8	Conditions aux limites de la simulation 3D sur l'éprouvette SENT . . . . .	119
4.9	Évolution de $K_I$ et de la contrainte $T$ avec $a_0 = 50 \mu\text{m}$ . . . . .	120
4.10	Montage de polissage . . . . .	121
4.11	Montage de polissage . . . . .	122
4.12	Vue en coupe du montage . . . . .	123
4.13	Détail de la tige maintenant l'éprouvette durant le polissage . . . . .	124
4.14	Conditions aux limites de la simulation 3D sur l'éprouvette cruciforme . . . . .	127
4.15	Évolutions de $\frac{\partial K_I}{\partial \sigma_x}$ , $\frac{\partial K_I}{\partial \sigma_y}$ , $\frac{\partial T}{\partial \sigma_x}$ et $\frac{\partial T}{\partial \sigma_y}$ en fonction de la longueur de fissure avec $a_0 = 10 \text{ mm}$ . . . . .	128
4.16	Évolution des contraintes à appliquer sur l'éprouvette cruciforme avec $a_0 = 10 \text{ mm}$ . . . . .	128
4.17	Conditions aux limites de la simulation de flambage sur l'éprouvette cruciforme . . . . .	131
4.18	Champ de déplacement (en mm) projeté sur la déformée de l'éprouvette cruciforme . . . . .	132
4.19	Montage des essais biaxiaux . . . . .	133
4.20	Interpolation de la courbe de calibration à partir des mesures par corrélation d'images numériques avec $a_0 = 10 \text{ mm}$ . . . . .	134
4.21	Résultat de corrélation d'images numériques permettant de mesurer la longueur de fissure . . . . .	134
4.22	Chargement appliqué lors de l'essai biaxial . . . . .	135
4.23	Différents chargements appliqués lors des essais biaxiaux . . . . .	136
4.24	Évolutions du facteur d'intensité des contraintes $K_I$ dans les éprouvettes cruciformes pour les différents chargements obtenues par simulation avec $a_0 = 10 \text{ mm}$ . . . . .	137
4.25	Évolutions de la contrainte $T$ dans les éprouvettes cruciformes pour les différents chargements obtenues par simulation avec $a_0 = 10 \text{ mm}$ . . . . .	137
4.26	Évolutions de la longueur de fissure totale $2a$ en fonction du nombre de cycles $N$ pour différentes valeurs de contrainte $T$ . . . . .	138
4.27	Interpolations des évolutions de la longueur de fissure totale $2a$ en fonction du nombre de cycles $N$ pour différentes valeurs de contrainte $T$ . . . . .	139

4.28	Courbes de propagation filtrées pour différentes valeurs de contrainte $T$ . . . . .	139
4.29	Schéma de principe montrant l'évolution du centre du domaine d'élasticité dans le plan $K - T$ lors d'un changement de chargement . . . . .	140
4.30	Chargement appliqué lors de l'essai transitoire . . . . .	141
4.31	Évolution du rapport entre la tension mesurée par le suiveur de fissure et la tension initiale $\frac{U}{U_0}$ en fonction du nombre de cycles $N$ . . . . .	142
4.32	Effet transitoire sur l'évolution de la longueur de la fissure en fonction du nombre de cycles . . . . .	143
4.33	Schéma explicatif des paramètres de l'interpolation de la courbe $a(N)$ en régime transitoire . . . . .	144
4.34	Interpolation de l'effet transitoire sur la courbe $a(N)$ . . . . .	145
4.35	Évolution de la vitesse de propagation $\frac{da}{dN}$ en fonction du nombre de cycles $N$ (cf. équation (4.20)) . . . . .	145
4.36	Évolution de la vitesse de propagation $\frac{da}{dN}$ en fonction de la longueur de la fissure $a$ . . . . .	146
4.37	Évolution du rapport $\frac{r_y(T \approx -200)}{r_y(T=0)}$ en fonction de la longueur de fissure . . . . .	148
4.38	Comparaison du modèle prenant en compte la variation de taille de la zone plastique avec le résultat d'essai pour $T \approx -200$ MPa . . . . .	148
4.39	Définition de $T_x$ dans le plan $K - T$ . . . . .	149
4.40	Comparaison des deux modèles prenant en compte la variation de taille de la zone plastique avec le résultat d'essai pour $T \approx -200$ MPa . . . . .	150
4.41	Comparaison des deux modèles prenant en compte la variation de taille de la zone plastique avec le résultat d'essai pour $T \approx -200$ MPa . . . . .	151
A.1	Algorigramme principal . . . . .	158
A.2	Algorigrammes en phase d'ouverture et en phase de fermeture . . . . .	159
A.3	Schématisation des différents domaines de chargement . . . . .	161

# Liste des tableaux

1.1	Composition de l'Inconel 718 PQ (Premium Quality) utilisé pour la fabrication des disques de turbine SNECMA [Alexandre, 2004] . . . . .	37
3.1	Paramètres matériaux issus d'essais . . . . .	73
3.2	Paramètres matériaux à identifier par simulation . . . . .	73
3.3	Paramètres matériaux issus d'essais nécessaires aux simulations . . . . .	73
3.4	Propriétés de l'INCO 718 DA utilisées pour les simulations [Newman et Piascik, 2003] . . . . .	80
3.5	Valeurs de $K$ et $T$ pour une contrainte appliquée de 50 MPa . . . . .	84
3.6	Valeurs de la contrainte critique de flambage pour chaque mode de flambage	86
4.1	Coefficients de l'équation (4.7) calculés pour $\nu = 0,29$ . . . . .	113
4.2	Valeurs de $K_I$ et $T$ pour une contrainte appliquée de 298 MPa . . . . .	120
4.3	Valeurs de $\frac{\partial K_I}{\partial \sigma_x}$ , $\frac{\partial K_I}{\partial \sigma_y}$ , $\frac{\partial T}{\partial \sigma_x}$ et $\frac{\partial T}{\partial \sigma_y}$ en fonction de la longueur de fissure . . . . .	129
4.4	Valeurs des contraintes à appliquer sur l'éprouvette cruciforme . . . . .	129
4.5	Valeurs de la contrainte critique de flambage pour chaque mode de flambage	132





# Nomenclature

## Notations

$\alpha$	Coefficient de proportionnalité entre le CTOD et $\frac{da}{dN}$	sans unité
$\Delta K$	Amplitude du facteur d'intensité des contraintes	MPa $\sqrt{m}$
$\Delta K_{th}$	Seuil de non propagation de la fissure	MPa $\sqrt{m}$
$\frac{da}{dN}$	Vitesse de propagation d'une fissure en fatigue	m/cycle
$\nu$	Coefficient de poisson	sans unité
$\sigma_y$	Limite d'élasticité	MPa
$\sigma_{eq}$	Contrainte équivalente de von Mises	MPa
$\sigma_{res}$	Contraintes résiduelles provenant de la plasticité en pointe de fissure	MPa $\sqrt{m}$
$\theta$	Angle autour de la pointe de la fissure	rad ou °
$a$	Aire fissurée par unité de longueur de front	m
$K$	Facteur d'intensité des contraintes	MPa $\sqrt{m}$
$N$	Nombre de cycles de chargement	sans unité
$r$	Rayon autour de la pointe de la fissure	m
$r_p$	Longueur de la zone plastique d'Irwin	m
$r_y$	Demi-longueur de la zone plastique d'Irwin	m
$S_{ii}$	Contrainte à l'infini appliquée suivant l'axe $i$	MPa
$T$	Contrainte T suivant la direction de propagation de la fissure	MPa
$T_Z$	Contrainte T parallèle au front de fissure	MPa

## Acronymes

CCT	Center Cracked Tension
CT	Compact Tension
CTOD	Crack Tip Opening Displacement

MLER Mécanique Linéaire Élastique de la Rupture

SENT Single Edge Notched Tension

### Variables du modèle condensé

$\rho$	Emoussement de la pointe de la fissure ( $\sim$ CTOD)	m
$\tilde{K}$	Facteur d'intensité du champ élastique en pointe de fissure	MPa $\sqrt{m}$
$\phi_e$	Distribution spatiale du champ élastique	$\sqrt{m}$ .MPa $^{-1}$
$\phi_p$	Distribution spatiale du champ plastique	sans unité
$\underline{g}_i(\theta)$	Dépendance angulaire du champ $i$	
$\underline{f}_i(r)$	Dépendance radiale du champ $i$	
$K_c$	Demi-taille du domaine d'élasticité cyclique	MPa $\sqrt{m}$
$K_m$	Demi-taille du domaine d'élasticité monotone	MPa $\sqrt{m}$
$K_{xc}$	Centre du domaine d'élasticité cyclique	MPa $\sqrt{m}$
$K_{xm}$	Centre du domaine d'élasticité monotone	MPa $\sqrt{m}$

### Paramètres du modèle condensé

$\gamma$	Paramètre caractérisant l'évolution de $K(\rho)$ en monotone	m $^{-1}$
$a_c$	Paramètre régissant l'évolution de $K(\rho)$ en cyclique	MPa
$a_{xm}$	Paramètre caractérisant l'évolution de $K_{xm}(\rho)$	MPa.m $^{-1}$
$k_a$	Paramètre gérant la décroissance de $K_{xm}(a)$	sans unité
$k_b$	Paramètre gérant l'augmentation de $K_{xm}(a)$	sans unité
$p_a$	Paramètre de décroissance du champ de déplacement plastique	m $^{-1}$

# Introduction

Cette thèse a été préparée en partenariat entre le LMT (ENS Paris-Saclay, CNRS, Université Paris-Saclay) et le groupe Safran. Safran Aircraft Engines (anciennement Snecma) est une entreprise française spécialisée dans le développement de moteurs aéronautiques et spatiaux. Dans le but de dimensionner au mieux ces moteurs, l'étude de leur durée de vie est primordiale. Cette étude passe notamment par la prévision de la propagation de fissures issues de défauts en surface (rayure, choc, ...). De plus, les cycles de fonctionnement d'un moteur sont très complexes et fortement variables, aussi bien d'un point de vue mécanique que thermique. Les méthodes classiques, comme la loi de Paris par exemple, ne s'appliquent donc pas directement dans ces cas. Il est alors essentiel de pouvoir prédire la durée de vie au mieux dans le cas de chargements variables. C'est pourquoi Snecma étudie, depuis plusieurs années, la propagation des fissures sous chargement variable [Ruiz-Sabariego, 2008]. Cependant, il a été démontré que la vitesse de propagation des fissures courtes (inférieures au millimètre) est plus grande que celle des fissures longues. Il est donc important, pour des raisons de sécurité, de pouvoir prédire également la vitesse de propagation de ces fissures pour ne pas sous-évaluer la durée de vie des composants du moteur. Ici, nous nous intéresserons à la propagation de fissures courtes dans un disque de turbine du moteur CFM 56 en superalliage à base de nickel, l'Inconel 718 DA.

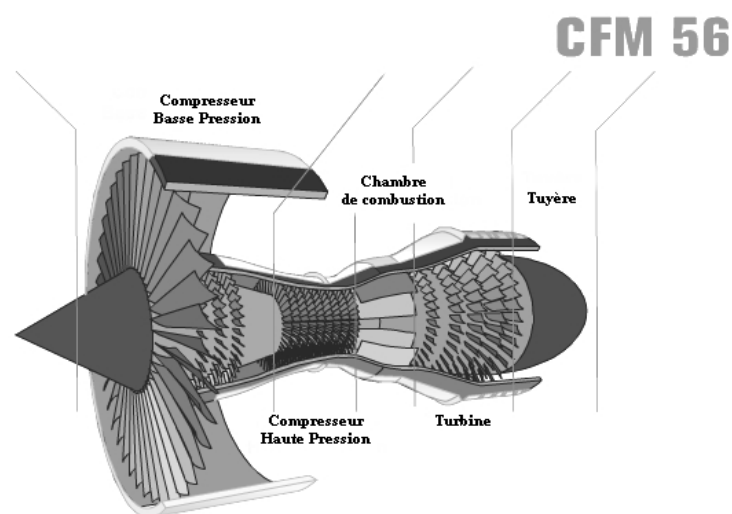


FIGURE 1 – Écorché du moteur d'avion civil CFM 56

Les disques de turbines sont soumis à des températures de l'ordre de 450 à 650 °C pour le moteur CFM 56. À ces températures, l'endommagement par fatigue est prépondérant et constitue un des points critiques du dimensionnement des pièces. Dans le cas d'une aube de turbine, lorsqu'il y a rupture, l'aube sera contenue par les carters moteur. Cependant, il n'en est pas de même pour celle d'un disque. Aucune rupture de disque ne doit se produire en service (cf. figure 1.3a). Cette condition fait des disques de turbine l'une des pièces les plus critiques à dimensionner. Il est alors important de déterminer au mieux la durée de vie de ces pièces. Dans cette optique, la présente étude traite de la propagation sous chargement variable de fissures courtes et longues.

En effet, le moteur est soumis à un chargement de fatigue mécanique et thermique fortement variable tout au long d'un vol. Il est donc important de prendre en compte cette variabilité du chargement lors du dimensionnement des différents organes le composant. Différentes méthodes existent déjà avec leurs avantages et leurs inconvénients afin de modéliser et simuler le comportement d'une fissure amorcée à partir d'un défaut. Dans cette étude, le modèle qui a été développé s'appuie sur le modèle condensé de plasticité qui permet de prendre en compte chaque variation du chargement sans perte d'informations liée à une reconstruction ou à un comptage de cycles, ceci afin de décrire au mieux les effets d'histoire du chargement.

De plus, pour une fissure amorcée à partir d'un défaut en surface, une grande partie de la durée de vie se passe alors que la fissure est courte. Il a été montré que le comportement de ce type de fissures est différent de celui des fissures longues. Une fissure courte se propage généralement plus vite qu'une fissure longue et son seuil de non propagation est différent voire inexistant. Il est alors essentiel de représenter au mieux ce comportement pour prédire correctement la durée de vie d'un composant. En outre, lorsque la longueur d'une fissure est faible, un autre facteur entre en jeu : la contrainte  $T$ . Cette contrainte représentant le chargement dans le plan de propagation de la fissure ne dépend pas de la longueur de la fissure contrairement au facteur d'intensité des contraintes. Son influence devient prépondérante dans le cas d'une microfissure. Il est donc nécessaire d'étudier l'impact de la contrainte  $T$  sur une fissure courte ou longue pour pouvoir modéliser avec justesse le comportement des fissures courtes.

Le premier chapitre de ce manuscrit présente un état de l'art ainsi que les concepts nécessaires à la compréhension des travaux développés. Le second chapitre présente le modèle condensé de plasticité originalement développé par [Pommier et Risbet, 2005] ainsi que ses évolutions récentes et son utilisation dans un code de calcul. Le troisième chapitre détaille les différentes méthodes expérimentales et numériques permettant d'identifier les divers paramètres nécessaires au fonctionnement de ce modèle. Le quatrième et dernier chapitre présente l'investigation menée expérimentalement sur la contrainte  $T$  et les fissures courtes ainsi que quelques pistes de modélisation des phénomènes observés. Enfin, les plans des différentes éprouvettes utilisées ainsi que l'implémentation du modèle dans le code de calcul de Safran Aircraft Engines sont présentés dans les annexes.

# Chapitre 1

## Étude bibliographique

*Ce chapitre est consacré à la mise en place du contexte scientifique de cette étude.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Mécanique linéaire élastique de la rupture (MLER)</b> . . . . .	<b>5</b>
1.1	Historique . . . . .	5
1.2	Hypothèses géométriques et cinématiques de la mécanique de la rupture . . . . .	7
1.3	Développement asymptotique des solutions de Westergaard . . . . .	8
1.4	Limites de validité de la MLER . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Propagation de fissures par fatigue</b> . . . . .	<b>12</b>
2.1	Mécanismes de propagation . . . . .	12
2.2	Propagation sous un chargement à amplitude constante : loi de Paris . . . . .	15
2.3	Propagation sous un chargement à amplitude variable . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Contraintes T</b> . . . . .	<b>21</b>
3.1	Champs asymptotiques et contrainte T . . . . .	22
3.2	Contraintes T pour un chargement triaxial . . . . .	23
3.3	Effets de la contrainte T . . . . .	24
3.4	Contraintes T et fissures courtes . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Fissures courtes</b> . . . . .	<b>28</b>
4.1	Qu'est-ce qu'une fissure courte ? . . . . .	28

4.2	Effets sur le seuil de non propagation . . . . .	33
4.3	Effets sur la vitesse de propagation . . . . .	35
<b>5</b>	<b>Matériau de l'étude : Inconel 718 DA . . . . .</b>	<b>36</b>
5.1	Composition et microstructure de l'Inconel 718 DA . . . . .	36
5.2	Élaboration de l'alliage 718 . . . . .	38
<b>6</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>39</b>

---

# 1 Mécanique linéaire élastique de la rupture (MLER)

## 1.1 Historique

La mécanique linéaire élastique de la rupture (MLER) a vraiment commencé à se développer à partir de la seconde guerre mondiale. C'est durant l'été 1941 que les américains débutent la préparation du débarquement. Pour ce faire, ils produisirent 2751 navires le plus rapidement possible, les "Liberty Ships". Ces navires de 440 pieds de long (environ 135 m) et pouvant supporter 10000 tonnes étaient réalisés en des temps records, 42 jours en moyenne. Le record est détenu par le SS Robert Peary qui a été construit en 4 jours et demi. Cette rapidité de fabrication provient du fait que les assemblages étaient réalisés par soudage et non par des boulons ou des rivets. Cependant, cette mise en œuvre, bien que rapide induit divers problèmes :

- le soudage induit des contraintes internes ;
- la rapidité désirée pour la fabrication peut induire plus de défauts initiaux à cause d'un soudage bâclé ;
- le soudage modifie les propriétés dans la zone affectée thermiquement, notamment la résistance à la fissuration ;
- si une fissure s'amorce, elle peut se propager à travers tout le navire puisque la matière est continue au niveau des soudures.

C'est pourquoi 30 % de la flotte a coulé à cause de ruptures brutales de la coque (cf. Fig. 1.1). L'analyse des défaillances de ces navires a été conduite par Constance Tipper [Zappas, 2015a]. Ces ruptures ont ensuite amorcé un véritable développement de la mécanique de la rupture et la prise en compte des défauts initiaux. Ces études ont été menées par George Rankin Irwin alors à la tête du projet sur la rupture fragile au *United States Naval Research Laboratory* en 1946. Il s'appuya sur les travaux de Griffith [Griffith, 1921] et Westergaard [Westergaard, 1939] et est à l'origine du concept de ténacité.

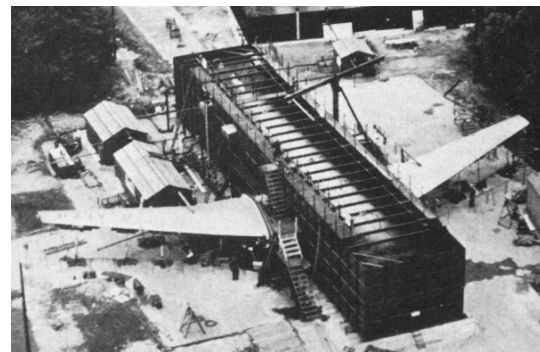
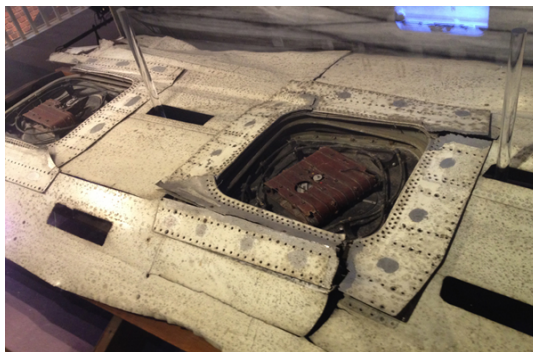
Dans les années 50, une nouvelle série d'accidents a lieu, alertant cette fois sur la méconnaissance de la fissuration sous-critique, c'est-à-dire la fissuration sous un chargement inférieur à la ténacité du matériau. Le premier avion de ligne à réaction, le *De Havilland Comet*, mis en service le 2 mai 1952 connaît des incidents en plein vol après plusieurs mois de fonctionnement sans problème. Il s'en suit une série d'accidents en plein vol causant plusieurs morts. Il s'avéra que ces défaillances étaient dues à la forme des hublots qui étaient carrés. Ceci, entraînant une concentration de contrainte dans les coins du hublot, permit à des fissures de se propager par fatigue à partir de ces zones fissurant totalement le fuselage de l'avion (cf. figure 1.2a). Pour déterminer les circonstances des accidents, des essais ont été réalisés au sol pour représenter la pression atmosphérique sur le fuselage du *Comet* à l'aide d'une mise sous pression hydraulique. Cet essai à taille réelle est une des premières démonstrations de la propagation des fissures sous-critiques (cf. figure 1.2b).

La prise en compte de défauts existants et de leur propagation lors du dimensionnement de structures a connu d'autres évolutions suite à l'accident survenu le 28 avril 1988 sur un Boeing 737 de la compagnie *Aloha Airlines*. Une partie du fuselage de l'avion s'est





**FIGURE 1.1** – Liberty Ship fissuré



(a) Hublots carrés du *Comet* d'où les fissures se sont amorcées (b) Essai de mise sous pression hydraulique réalisé sur le fuselage

**FIGURE 1.2** – De Havilland Comet

arraché en plein vol car l'impact de la corrosion sur la fissuration n'avait pas été pris en compte lors du dimensionnement (cf. figure 1.3a).

Le 3 juin 1998, à Eschede en Allemagne, un train ICE 1 déraille et se disloque sur une pile de pont suite à la rupture en fatigue d'une des roues (cf. Fig. 1.3b). Ceci était dû à un changement de conception en ajoutant un bandage autour de la roue pour diminuer le bruit. En effet, ce bandage empêchait d'accéder à la roue pour un contrôle non destructif

et permis l'amorçage d'une fissure sur une interface interne.



(a) Accident sur le Boeing 737 de la compagnie Aloha Airlines (1988)

(b) Accident sur le train à grande vitesse allemand (1998)

**FIGURE 1.3** – Autres accidents survenus par rupture en fatigue

## 1.2 Hypothèses géométriques et cinématiques de la mécanique de la rupture

Dans le cadre de la mécanique de la rupture, la fissure est supposée être localement plane, à front droit, avec une extrémité parfaitement aigüe. La fissure présente alors un plan de symétrie local (cf. figure 1.4). Dans ce cas, le mouvement peut être décomposé vis-à-vis de ce plan de symétrie en 3 composantes cinématiques élémentaires correspondant aux 3 modes de rupture (cf. figure 1.5).

- Le mode I dit « d'ouverture » : correspond à la partie symétrique du champ de vitesse par rapport au plan de la fissure.
- Le mode II dit « de cisaillement » : correspond à la partie antisymétrique du champ de vitesse par rapport au plan de la fissure.
- Le mode III dit « de déchirure » : à la partie anti-plane du champ de vitesse par rapport au plan et au front de la fissure.

**Dans la suite de cette thèse, nous ne nous intéresserons qu'au mode I.**

La géométrie de la fissure est localement autosimilaire dans un référentiel attaché au front de la fissure, c'est-à-dire qu'elle reste invariante par changement d'échelle au voisinage du front de la fissure. En coordonnées cylindriques, cette hypothèse permet d'exprimer la solution locale sous la forme d'un produit d'une distribution spatiale dépendant de  $\theta$  et d'un facteur multiplicatif d'échelle, dépendant de  $r$ , et/ou d'intensité, dépendant du temps.

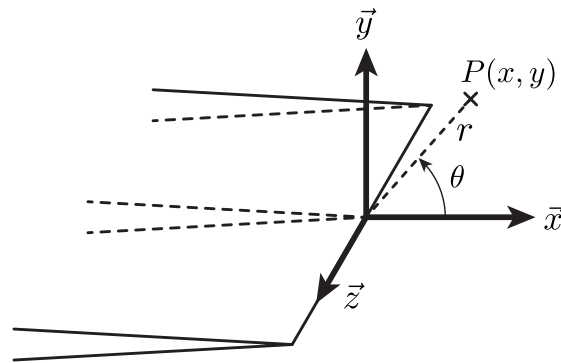


FIGURE 1.4 – Modélisation de la fissure

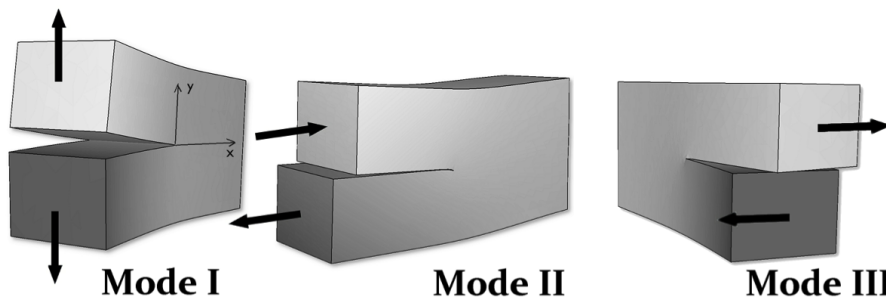


FIGURE 1.5 – Modes élémentaires de sollicitation d'une fissure tridimensionnelle

### 1.3 Développement asymptotique des solutions de Westergaard

En 1939, Westergaard a formulé la solution exacte pour un milieu élastique linéaire avec une fissure traversante à front droit [Westergaard, 1939].

Un développement asymptotique de cette solution a ensuite été réalisé par Irwin [Irwin, 1957]. Dans le cas d'un milieu élastique linéaire infini en déformations planes soumis à une contrainte de traction équibiaxiale  $S$  et traversé par une fissure à front droit, il n'y a alors que du mode I. Dans ce cas, le développement asymptotique est de la forme suivante :

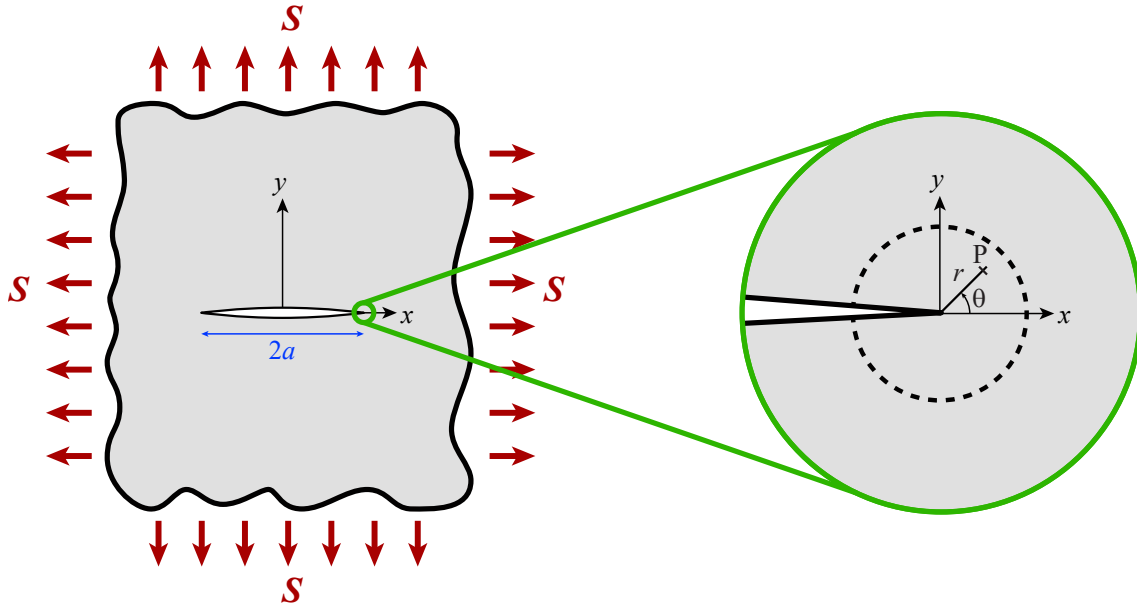


FIGURE 1.6 – Fissure de Griffith soumise à un chargement de traction équi-biaxiale

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx}(r, \theta) &= \frac{S\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\
 \sigma_{yy}(r, \theta) &= \frac{S\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\
 \sigma_{xy}(r, \theta) &= \frac{S\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\
 \sigma_{zz}(r, \theta) &= \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \\
 \sigma_{xz}(r, \theta) &= \sigma_{yz}(r, \theta) = 0
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

avec :

- $a$ , l'aire fissurée par unité de longueur de front (en m) ;
- $r$ , la distance à la pointe de la fissure (en m) ;
- $\theta$ , l'angle autour de la pointe de la fissure (en rad).

Ce développement a la particularité de pouvoir être exprimé comme le produit d'un même facteur d'intensité pour tous les termes et d'une distribution spatiale dépendant de  $r$  et  $\theta$ . On observe alors que la forme de la distribution spatiale des composantes des tenseurs des contraintes et déformations est indépendante de la longueur de la fissure ou du niveau du chargement appliqué. Ceci découle directement de l'hypothèse d'autosimilarité de la géométrie de la fissure.

En élasticité linéaire, il n'y a donc qu'un seul degré de liberté en mode I. Ce degré de liberté est noté  $K_I$  et est appelé facteur d'intensité des contraintes. Il est défini par  $K_I = S\sqrt{\pi a}$ .

Ce développement est souvent utilisé pour représenter simplement le champ de contraintes en pointe de fissure. Cependant, il fonctionne bien pour une fissure longue qui n'est pas soumise à des chargements biaxiaux trop différents l'un de l'autre. Si la fissure étudiée est courte par exemple, d'autres termes doivent absolument être pris en compte. Ceci sera développé dans la section 3 page 21.

## 1.4 Limites de validité de la MLER

La mécanique linéaire élastique de la rupture classique a été développée en émettant certaines hypothèses. Il existe donc certaines limites au-delà desquelles la MLER n'est plus valide.

### 1.4.1 Limite de validité des champs asymptotiques

Les champs asymptotiques ne sont pas valides dans tout le milieu. Ils le sont dans une couronne autour de la pointe de la fissure délimitée par la taille de la zone plastique, d'une part et par la taille de la zone dite de K-dominance, d'autre part.

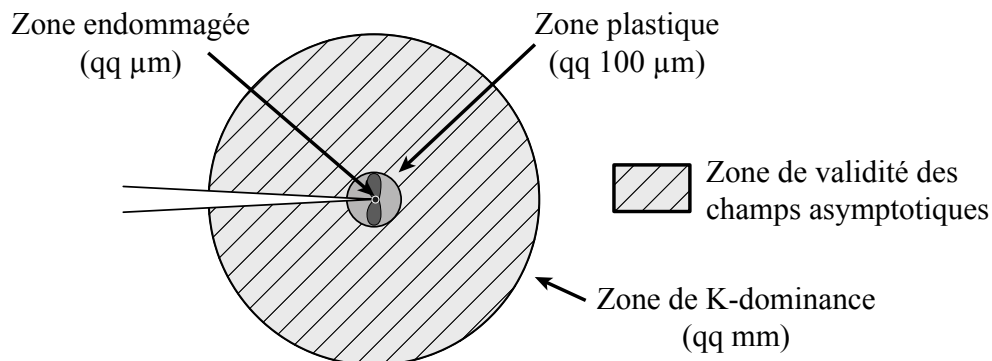


FIGURE 1.7 – Échelles caractéristiques du problème

Dans la zone plastique, le comportement n'étant plus élastique linéaire, la définition des champs n'est plus valide. Dans le plan de la fissure ( $\theta = 0$ ), la solution asymptotique s'écrit comme suit :

$$\sigma_{yy}^{asymptotique} = \frac{S_{yy}\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \quad (1.2)$$

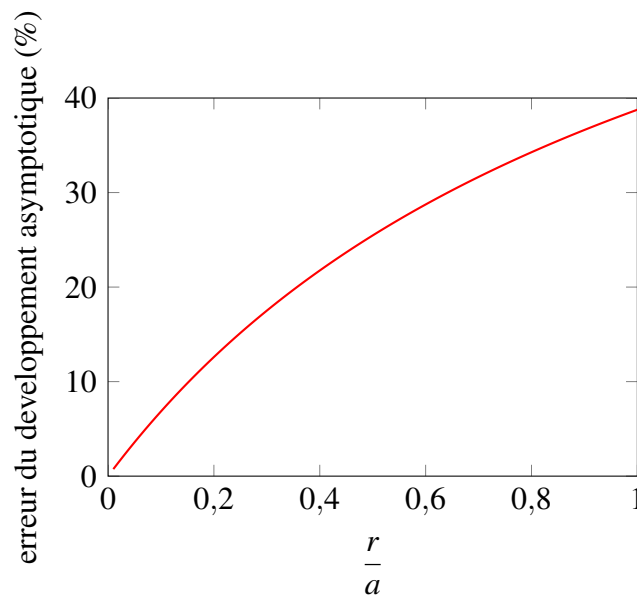
La solution exacte, quant à elle, s'écrit :

$$\sigma_{yy}^{exacte} = \frac{S_{yy}(a+r)}{\sqrt{r(2a+r)}} \quad (1.3)$$

Il est alors possible d'exprimer l'erreur de la solution asymptotique du développement de la manière suivante :

$$err = \frac{\sigma_{yy}^{exacte} - \sigma_{yy}^{asymptotique}}{\sigma_{yy}^{exacte}} \quad (1.4)$$

Cette erreur dépend du rapport  $\frac{r}{a}$ . Son évolution en pourcentage est tracée en figure 1.8.



**FIGURE 1.8** – Erreur du développement asymptotique en fonction du rapport  $\frac{r}{a}$

Classiquement, on prend une zone de validité dont le rayon mesure 10 % de la longueur de la fissure. On voit sur la figure 1.8 que, dans ce cas, l'erreur due au développement asymptotique est de l'ordre de 7 %.

### 1.4.2 Autre limite : les fissures courtes

Il a été montré expérimentalement par Kitagawa et Takahashi [Kitagawa et Takahashi, 1976] que lorsque la dimension d'une fissure devient très faible, la limite de fatigue ne suit pas la MLER classique. En effet, lorsque la taille d'un défaut ou d'une fissure tend vers 0, la limite de fatigue tend vers une valeur constante qui est la limite de fatigue du matériau vierge (cf. figure 1.9). Si on prend en compte le développement de Westergaard défini précédemment, la limite de fatigue tend vers l'infini lorsque la taille du défaut tend vers 0. Cet effet peut-être reproduit en prenant en compte la contrainte T (cf. section 3 page 21).

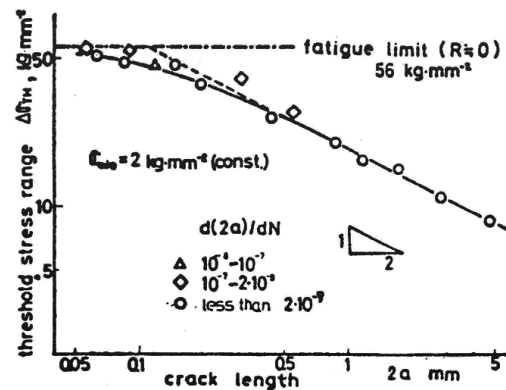


FIGURE 1.9 – Diagramme montrant l'effet de la longueur de fissure sur la limite de fatigue [Kitagawa et Takahashi, 1976]

## 2 Propagation de fissures par fatigue

L'objectif de cette thèse étant d'étudier d'éventuelles fissures apparaissant dans des pièces tournantes, elles se propageront par fatigue. Ce paragraphe décrit le comportement en propagation par fatigue d'une fissure.

### 2.1 Mécanismes de propagation

La figure 1.10 représente une courbe de Paris. Dans celle-ci, trois régimes de propagation peuvent être différenciés.

#### 2.1.1 Régime du seuil

Le régime du seuil, est un régime dans lequel le chargement  $\Delta K$  est proche du seuil de non propagation  $\Delta K_{th}$ , c'est-à-dire l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes pour laquelle la vitesse de fissuration mesurée est inférieure à  $10^{-8}$  mm/cycle [ASTM E-647, 1993]. Dans ce régime de propagation, la fissure propage alors suivant des plans de glissement cristallins du matériau. En général, lors de la charge la fissure va s'ouvrir en suivant d'abord un plan de glissement avant de continuer sa propagation selon un deuxième plan comme schématisé en figure 1.11. On obtient ainsi des surfaces de rupture très géométriques avec beaucoup de facettes (cf. figure 1.12).

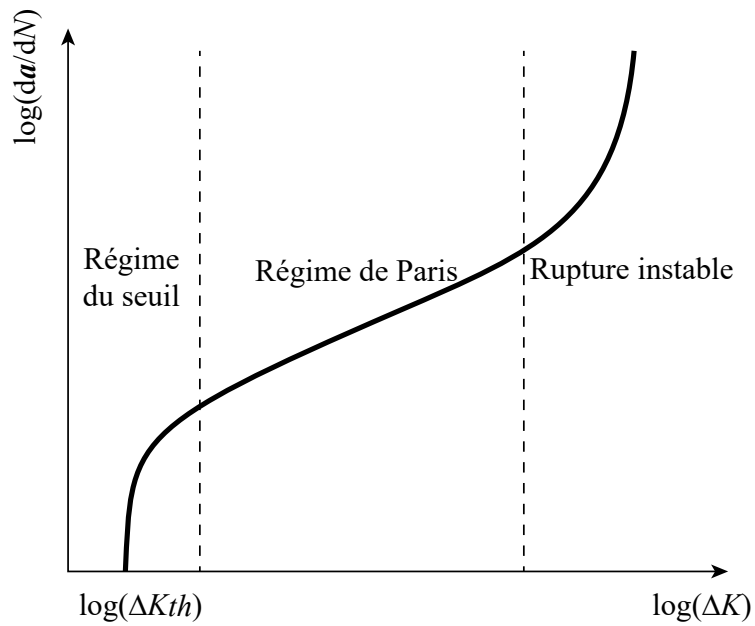


FIGURE 1.10 – Schéma d’une courbe de propagation dans un diagramme de Paris

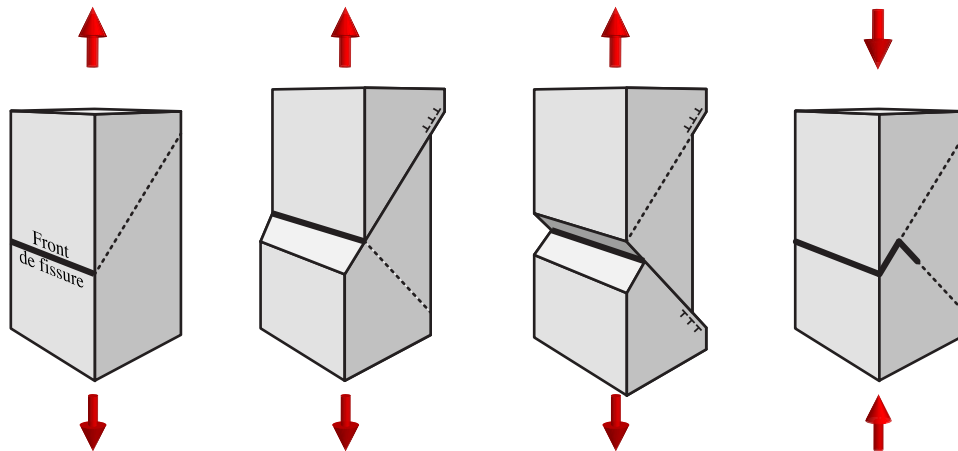
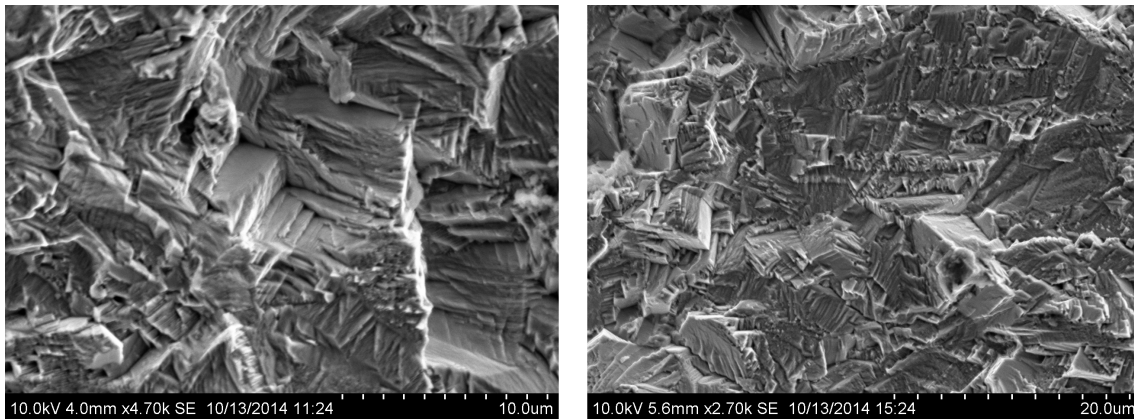


FIGURE 1.11 – Mécanisme de formation des stries de fatigue selon Neumann [Neumann, 1969]

### 2.1.2 Régime de Paris

Dans le deuxième régime de propagation, dit régime de Paris, la fissure se propage en laissant des stries sur la surface de rupture (cf. figure 1.14). Ces stries sont formées par la création de surface libre par plasticité en pointe de fissure [Laird, 1967, Pelloux, 1969]. Lors d’un cycle de chargement, la fissure s’ouvre d’abord de façon élastique. Alors que le chargement augmente, la pointe de fissure plastifie en s’émoussant et en créant une surface libre en laissant, après décharge, des contraintes résiduelles de compression. Lorsque la

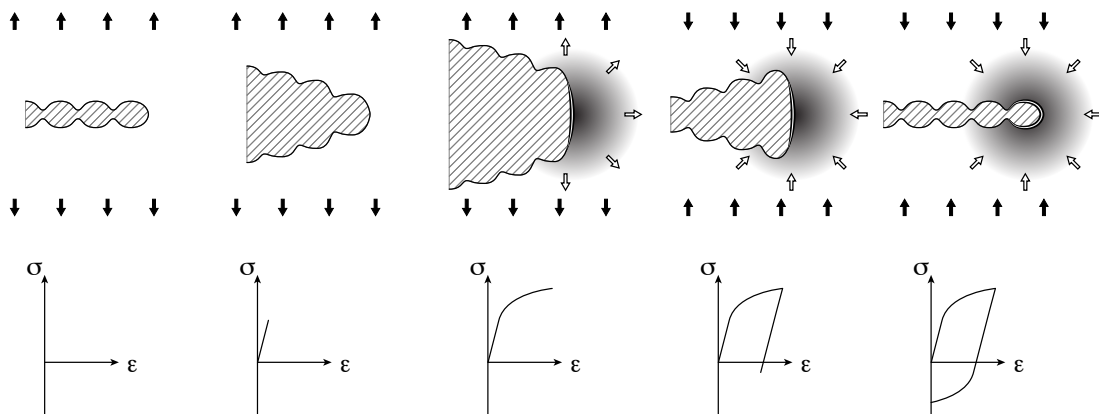




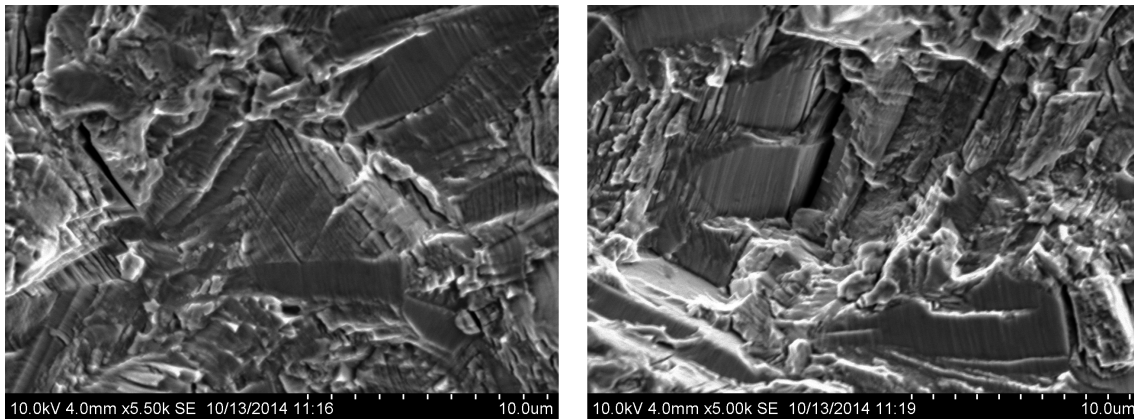
**FIGURE 1.12** – Surfaces de rupture par fatigue pour un chargement faible dans de l'INCO718 DA

fissure est déchargée, ces contraintes referment la surface libre sur elle-même créant ainsi une avancée de la fissure directement proportionnelle à l'émoussement créé par plasticité (cf. figure 1.13).

Il est possible de modéliser simplement la propagation de la fissure dans ce régime à l'aide de la loi de Paris lorsque le chargement est d'amplitude constante (cf. section 2.2 page 15).



**FIGURE 1.13** – Schématisation de la propagation de fissure par plasticité



**FIGURE 1.14** – Surfaces de rupture par fatigue pour un chargement plus élevé dans de l'INCO718 DA

Ce mécanisme a été modélisé par Pelloux et Laird [Laird, 1967, Pelloux, 1969] de la manière suivante :

$$\frac{da}{dN} = \alpha \frac{\Delta CTOD}{dN} \quad (1.5)$$

avec :

- $a$ , l'aire fissurée par unité de longueur de front (en m) ;
- $N$ , le nombre de cycles ;
- $\alpha$ , le coefficient de proportionnalité entre le CTOD et l'avancée de la fissure ;
- CTOD (Crack Tip Opening Displacement), l'ouverture en pointe de fissure (en m).

### 2.1.3 Régime de rupture instable

Le troisième régime de propagation est un régime de rupture instable qui apparaît lorsque le chargement se rapproche de la ténacité du matériau  $K_{IC}$ . La vitesse de propagation de la fissure augmente rapidement causant la rupture totale du composant. Ce régime représente une part très faible de la durée de vie de la structure et, par conséquent, ne sera pas pris en compte dans la modélisation.

## 2.2 Propagation sous un chargement à amplitude constante : loi de Paris

Lorsque qu'une fissure se propage sous un chargement de fatigue à amplitude constante ( $F_{max} - F_{min} = cst$ ), on observe une partie rectiligne dans la courbe  $\log(\frac{da}{dN}) = f(\log(\Delta K))$ . Ce comportement a été modélisé par une relation proposée par Paris et Erdogan [Paris et Erdogan, 1963] appelée loi de Paris ou loi de Paris-Erdogan. Dans ce régime dit « de Paris », la vitesse de propagation  $\frac{da}{dN}$  peut-être exprimée comme une fonction puissance du chargement  $\Delta K$ .

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K^m \quad (1.6)$$

avec :

- $a$ , l'aire fissurée par unité de longueur de front (en m) ;
- $N$ , le nombre de cycles ;
- $C$ , le coefficient de proportionnalité entre le chargement et l'avancée de la fissure ;
- $\Delta K$ , l'amplitude du chargement (en  $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ ) ;
- $m$ , l'exposant de la fonction puissance.

Cette modélisation est très employée mais n'est utilisable que lorsque l'amplitude du chargement est constante. Or, sur un système réel, les amplitudes de chargement sont généralement variables. Dans ce cas, la vitesse de propagation de la fissure n'est plus prévisible aussi simplement.

## 2.3 Propagation sous un chargement à amplitude variable

Lorsqu'une fissure est soumise à un chargement à amplitude constante, l'incrément d'avancée de fissure à chaque cycle dépend directement de la longueur de la fissure et du chargement appliqué à l'instant  $t$ . Mais lorsque la fissure subit un chargement de fatigue à amplitude variable, l'incrément de propagation dépend également de l'histoire du chargement (surcharges, sous-charges, ...). Ces variations de chargement peuvent des effets plus ou moins importants sur la vitesse de propagation de la fissure.

### 2.3.1 Effet d'une surcharge unitaire

Lorsqu'une fissure subit une surcharge, il en résulte, contrairement à ce que l'on peut imaginer, un ralentissement de sa propagation. On dit alors que la fissure subit un retard. Cet effet dépend de l'amplitude de la surcharge, du matériau, de la longueur de la fissure, de la température, etc.

Il existe différents cas de retard (cf. figure 1.15). Si la surcharge est de faible amplitude, il n'y aura aucun retard visible (a). Si la surcharge a une amplitude plus importante, le retard peut-être immédiat (b), différé (c) ou perdu (d). Pour la plupart des matériaux, il est observé un retard différé. Cet effet est détaillé en figure 1.16. Lorsque que la surcharge apparaît, une zone plastique plus importante est créée devant la pointe de la fissure et sa vitesse de propagation augmente. Puis, au fur et à mesure que la fissure traverse cette zone plastique, la vitesse diminue jusqu'à devenir plus faible que celle de départ, produisant le phénomène de retard. Ensuite, une fois que la pointe de la fissure sort de cette zone plastique, la vitesse augmente de nouveau jusqu'à rejoindre sa vitesse de départ.

La figure 1.17 montre une photographie en lumière rasante de la surface d'une éprouvette fissurée. Ceci permet de mettre en évidence les zones plastifiées autour de la fissure. On observe très nettement la zone plastique créée lors de la surcharge ainsi que son effet sur le sillage plastique de la fissure la traversant. On peut observer que ce sillage est beaucoup plus faible après la surcharge ce qui entraîne une diminution de la vitesse de

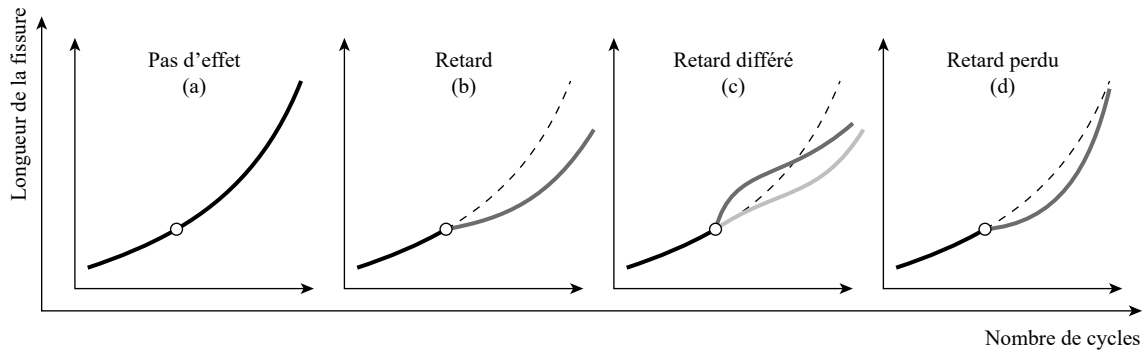


FIGURE 1.15 – Différentes réponses à une surcharge unitaire [Bathias et Bâillon, 1997]

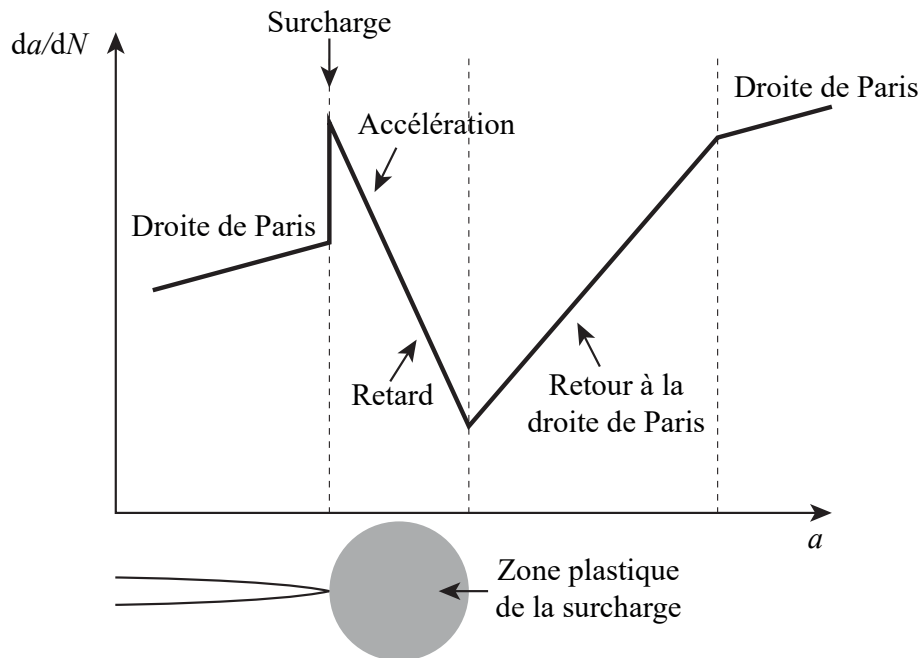
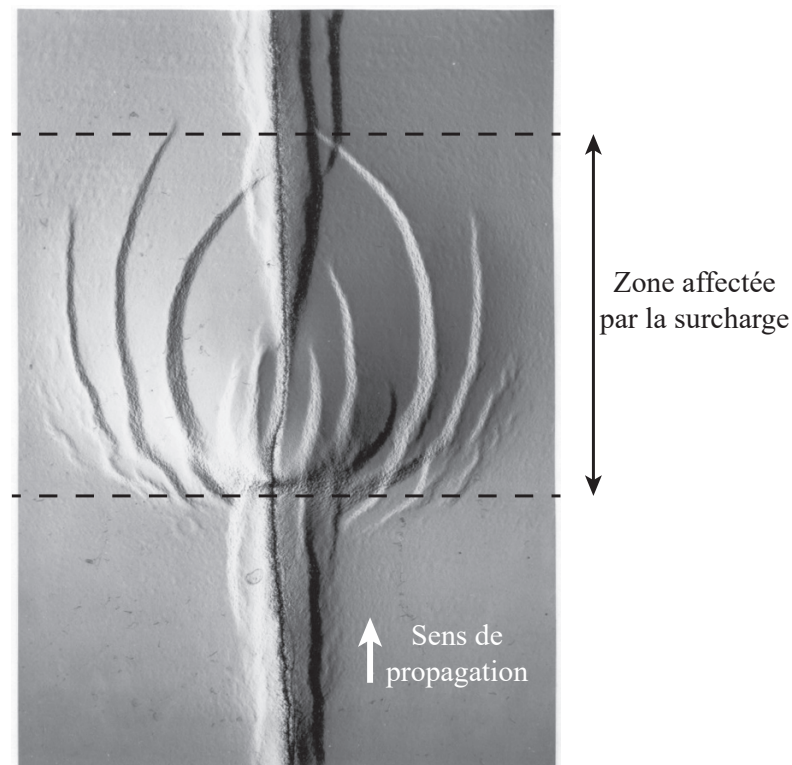


FIGURE 1.16 – Effet de la plasticité créée par la surcharge sur la vitesse de propagation [Bathias et Bâillon, 1997]

propagation (car la plasticité en pointe de fissure est plus faible). Puis le sillage plastique reprend progressivement sa dimension précédant l'apparition de la surcharge.

Lors de l'apparition de plusieurs surcharges, il existe une interaction entre celles-ci. L'effet de retard dépend alors de la fréquence à laquelle ces surcharges apparaissent. Yildirim et Vardar ont réalisé des essais de fatigue sur des éprouvettes CT et CCT en aluminium 7075-T6 [Yildirim et Vardar, 1990]. Ils ont appliqué des chargements d'amplitude constante avec des surcharges réparties régulièrement à différentes fréquences et ont relevé le nombre de cycles nécessaires pour que la fissure parcourt une distance donnée dans deux cas : après une surcharge ( $N$ ) et sans surcharge ( $N_{CA}$ ). Ils ont reporté en figure 1.18 le rapport  $\frac{N}{N_{CA}}$  en fonction de OCR (Occurrence Ratio) qui représente la fréquence d'appa-



**FIGURE 1.17** – Photographie en lumière rasante de la propagation d’une fissure avant et après une surcharge [Robin, 1988]

rition des surcharges définie par le nombre de cycles à amplitude constante entre chaque surcharge. On peut observer qu’il existe une fréquence qui maximise le retard de la propagation. Ici, cette fréquence est d’une surcharge tous les 500 cycles.

On observe sur la figure 1.16 que la fissure est en premier lieu accélérée avant d’être ralentie. Dans ce cas, l’effet de retard global va dépendre fortement de la fréquence d’apparition des surcharges. Si les surcharges sont suffisamment éloignées les unes des autres dans le temps, il y aura effectivement un retard de la propagation. Par contre, si les surcharges sont suffisamment rapprochées, elles peuvent créer une accélération de la fissure et non un retard (cf. figure 1.19). Par conséquent, des surcharges n’ont pas toujours un effet retard sur la propagation d’une fissure en fatigue. Ceci a été mis en lumière par [Fleck, 1985] qui a réalisé des essais de fatigue avec surcharges périodiques. Il a montré que lorsque les surcharges apparaissaient tous les 3 cycles ou moins il y avait alors une accélération qui pouvait atteindre 20 % de la vitesse de propagation à amplitude constante. Cette accélération est plus ou moins marquée suivant le matériau testé. Il a également montré que ce comportement ne pouvait être prédit par la méthode du cumul de dommage de Miner et ne peut être expliqué par les effets de fermeture de fissure.

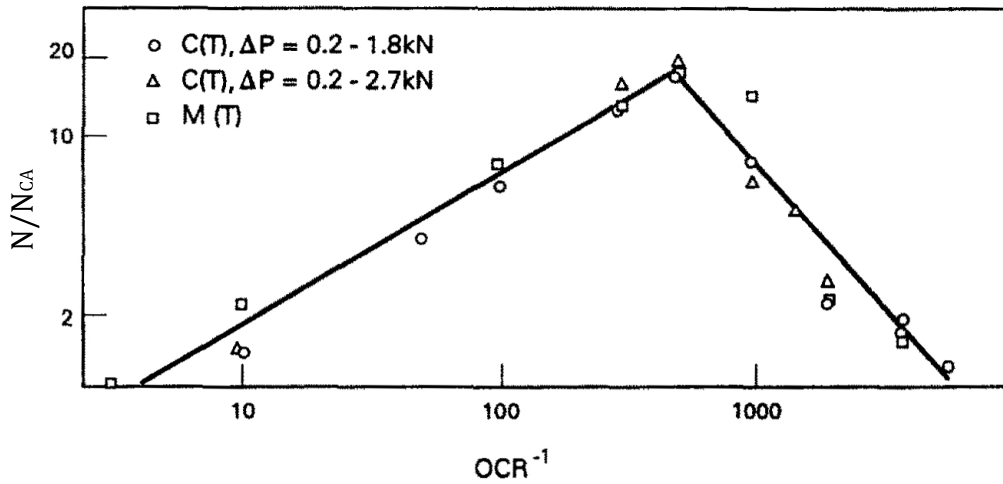


FIGURE 1.18 – Évolution du retard en fonction de la fréquence d’apparition des surcharges [Yildirim et Vardar, 1990]

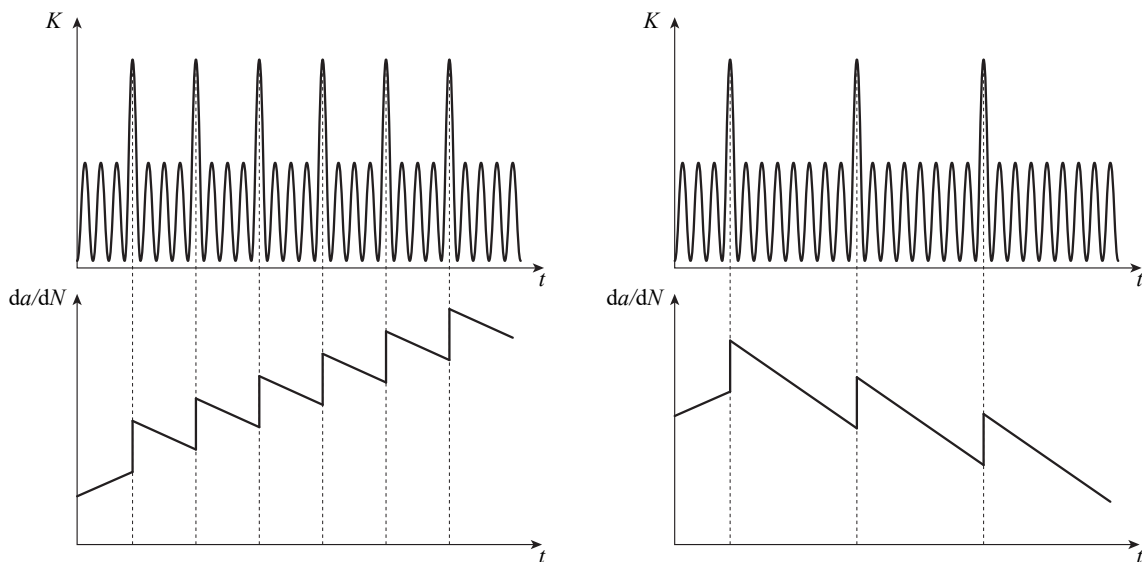


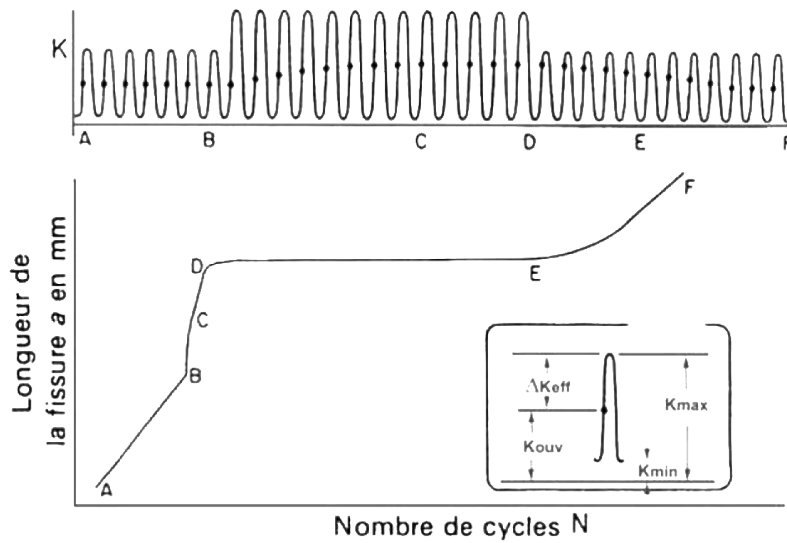
FIGURE 1.19 – Schéma de principe de l’effet des surcharges sur la propagation en fonction de leur fréquence

### 2.3.2 Effet d’un bloc de surcharges

L’effet d’un bloc de surcharges est similaire à celui d’une surcharge unitaire. Les mêmes phénomènes d’accélération et de retard sont observés. Cependant, ces effets sont plus marqués (cf. figure 1.20).

Pour des blocs complexes ou des chargements aléatoire, il devient très difficile de prévoir les phénomènes observés du fait des interactions entre les cycles.

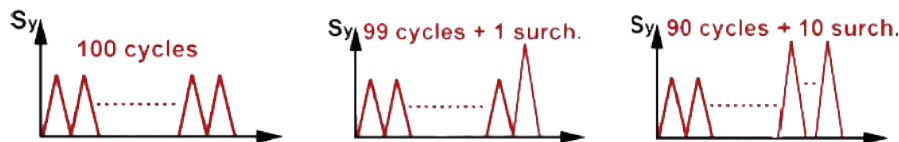
L’impact de divers blocs de surcharges a été étudié par [Hamam *et al.*, 2007]. Dans



**FIGURE 1.20** – Évolution du niveau d’ouverture et de la longueur de la fissure pendant un chargement par blocs [Bathias et Bâillon, 1997]

cette étude, des chargements de fatigue constitués de blocs répétés de 100 cycles contenant différents nombres de surcharges ont été expérimentés (cf. figure 1.21) :

- chargement sans surcharge ;
- chargement constitué de 99 cycles puis d’une surcharge ;
- chargement constitué de 90 cycles puis de 10 surcharges.



**FIGURE 1.21** – Chargement des essais réalisés pour l’étude de l’influence du nombre de surcharges dans un bloc sur la vitesse de propagation

On peut observer (cf. figure 1.22) que lorsque le nombre de surcharges est faible (99 cycles + 1 surcharge) l’effet de ralentissement est beaucoup plus marqué que pour un nombre plus important de surcharges. Pour un chargement de contenant que des surcharges, la courbe est identique à celle de Paris.

D’autres essais ont été réalisés en gardant le même rapport 1 % de surcharge mais pour des blocs constitués de différents nombres de cycles. L’étude a été menée sur avec des séquences de 10000 cycles. Les chargements qui ont été appliqués sont les suivants (cf. figure 1.23) :

- 1 bloc de 9900 cycles suivis de 100 surcharges ;
- 10 blocs de 990 cycles suivis de 10 surcharges ;
- 100 blocs de 99 cycles suivis de 1 surcharge.

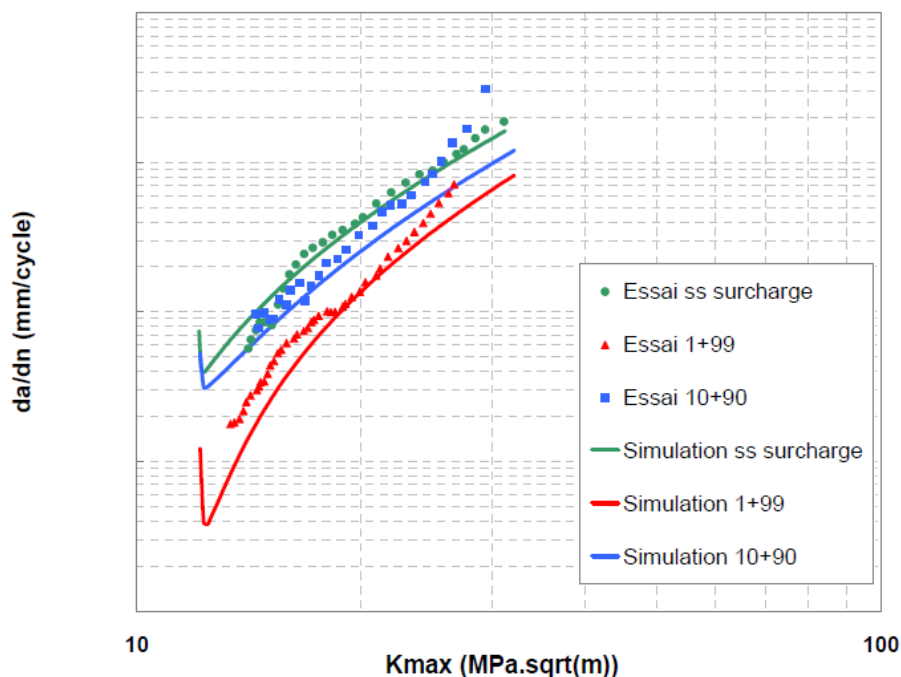


FIGURE 1.22 – Courbes de propagation pour différents nombres de surcharges dans un bloc répété de 100 cycles [Hamam, 2006]

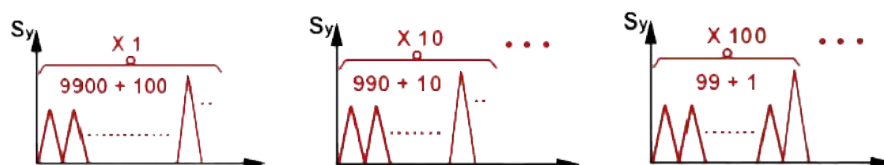


FIGURE 1.23 – Chargement des essais réalisés pour l'étude de la distribution des surcharges dans un bloc sur la vitesse de propagation

Dans ce cas, on observe un ralentissement de la fissure par rapport à un chargement sans surcharge mais aucune différence notable sur la vitesse de propagation entre les trois essais (cf. figure 1.24). Ceci peut être expliqué par un seuil d'ouverture de la fissure similaire dans les trois cas étudiés.

### 3 Contraintes T

Ce paragraphe introduit le concept de contrainte T qui sera utilisé par la suite.



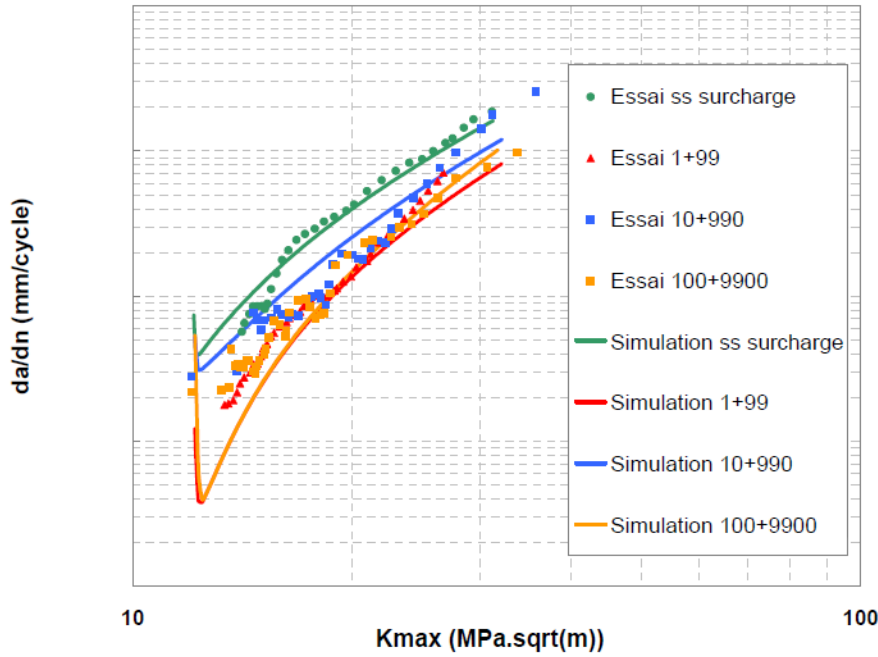


FIGURE 1.24 – Courbes de propagation pour différentes distributions de surcharges dans un bloc répété de 10000 cycles [Hamam, 2006]

### 3.1 Champs asymptotiques et contrainte T

Si on reprend le développement asymptotique de Westergaard mais dans le cas d'un milieu soumis à un chargement de traction biaxiale quelconque (cf. figure 1.25), il est alors possible de décomposer ce problème par superposition en posant  $S_{xx} = S_{yy} + S_{xx} - S_{yy}$  [Irwin, 1958]. On se retrouve alors avec un milieu soumis à une traction équibiaxiale  $S_{yy}$  auquel on ajoute un chargement de traction suivant l'axe  $x$  égal à  $S_{xx} - S_{yy}$ .

Dans ce cas, on obtient alors le développement suivant :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(r,\theta) &= \frac{S_{yy}\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + S_{xx} - S_{yy} \\ \sigma_{yy}(r,\theta) &= \frac{S_{yy}\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{xy}(r,\theta) &= \frac{S_{yy}\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\end{aligned}\tag{1.7}$$

Ce terme  $S_{xx} - S_{yy}$  est appelé contrainte T.

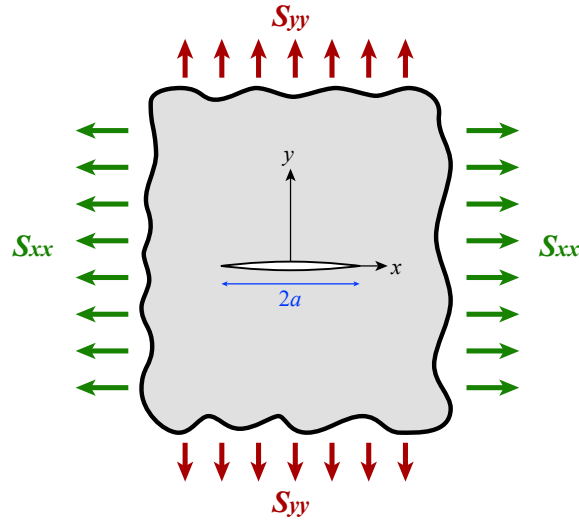


FIGURE 1.25 – Fissure soumise à un chargement de traction biaxiale quelconque

### 3.2 Contraintes T pour un chargement triaxial

Prenons un milieu infini soumis à un tenseur des contraintes diagonal  $\underline{\underline{S}}$ .

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} S_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & S_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & S_{zz} \end{bmatrix}_{(x,y,z)} \quad (1.8)$$

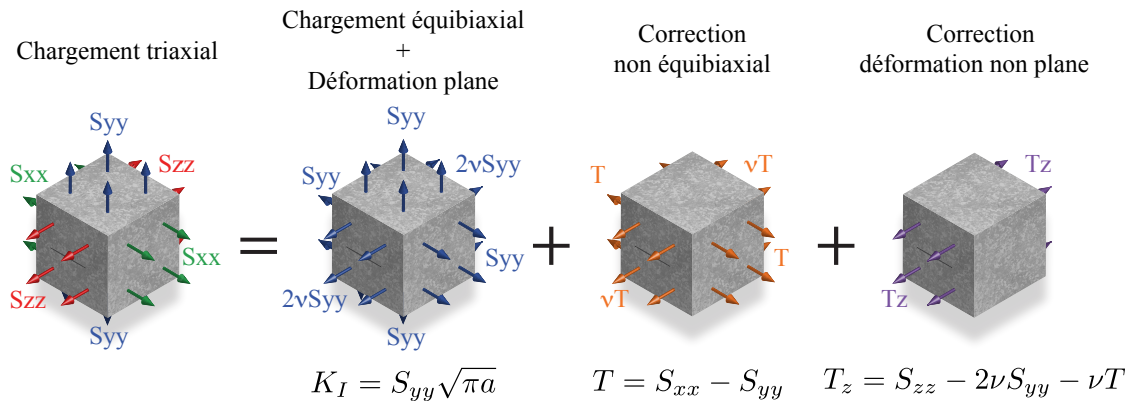
Insérons maintenant dans ce milieu une fissure traversante à front droit de longueur  $2a$  dans le plan de normale  $y$  dont le front est porté par  $z$ . Si on considère des conditions élastiques linéaires, la solution du problème peut être obtenue par superposition (cf. figure 1.26).

Tout d’abord, le problème peut-être résolu analytiquement pour un chargement équi-biaxial en déformations planes ( $S_{xx} = S_{yy}$  et  $S_{zz} = 2\nu S_{yy}$ ). Dans ce cas, on peut exprimer le facteur d’intensité des contraintes en mode I par  $K_I = S_{yy}\sqrt{\pi a}$ .

Ensuite, la contrainte  $T$  ( $T = S_{xx} - S_{yy}$ ) peut être ajoutée à la première solution pour prendre en compte un chargement biaxial en déformations planes.

Enfin, la contrainte  $T_Z$  ( $T_Z = S_{zz} - 2\nu S_{yy} - \nu T$ ) est ajoutée pour corriger le fait que le milieu n’est pas nécessairement chargé en déformations planes.

Si le tenseur des contraintes n’était pas diagonal, un facteur d’intensité de mode II proviendrait de  $S_{xy}$ , un facteur d’intensité de mode III proviendrait de  $S_{zy}$  et  $\Gamma$  la troisième contrainte T provient de  $S_{xz}$ . Le nombre de paramètres de la mécanique de la rupture nécessaire est égal au nombre de degrés de liberté indépendants du tenseur des contraintes du milieu non fissuré. Lorsqu’une fissure 3D est considérée, les contraintes T peuvent être déterminées par des simulations par éléments finis suivies de post-traitements dédiés ou trouvées dans la littérature pour des géométries de fissures et d’éprouvettes simples.

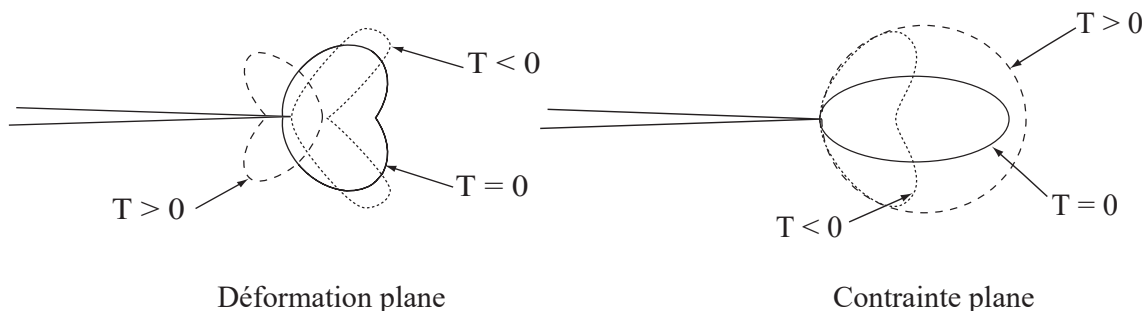
FIGURE 1.26 – Définition des contraintes  $T$  et  $T_z$ 

### 3.3 Effets de la contrainte $T$

La contrainte  $T$  modifie de différentes manières la propagation d'une fissure. De nombreuses études ont été réalisées pour déterminer ces effets qui peuvent porter aussi bien sur la taille de la zone plastique en pointe de fissure que sur son sillage plastique, la vitesse de propagation ou le trajet de chargement de la fissure.

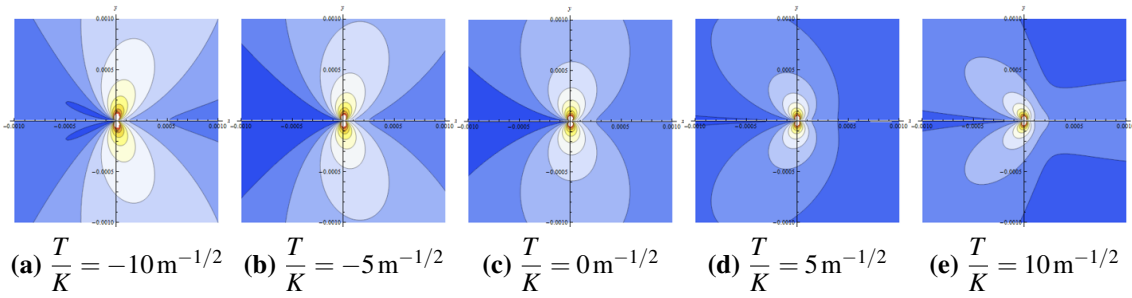
#### 3.3.1 Influence de la contrainte $T$ sur la zone plastique

Par exemple, il a été montré que la contrainte  $T$  a un effet sur la taille et la forme de la zone plastique en pointe de fissure [Larsson et Carlsson, 1973, Sugimura *et al.*, 1995, Jayadevan *et al.*, 2002]. On peut voir de façon schématisée sur la figure 1.27 que la contrainte  $T$  modifie la forme et la taille de la zone plastique. Dans le cas de déformations planes, une contrainte  $T$  négative donnera une forme d'ailes de papillon plus marquée alors qu'une contrainte  $T$  positive renversera ces ailes vers l'arrière de la fissure.

FIGURE 1.27 – Influence de la contrainte  $T$  sur la zone plastique [Lee *et al.*, 2005]

Il est possible d'étudier analytiquement l'impact de la contrainte  $T$  sur la zone plastique à partir de l'expression du champ de contraintes en pointe de fissure. On peut, par exemple, tracer le champ de la contrainte équivalente de von Mises (cf. figure 1.28). On

observe alors la forme de la zone plastique en ailes de papillon. Lorsque la contrainte T est positive, on observe une diminution de sa taille et un basculement des ailes vers l'arrière de la fissure. Dans le cas où la contrainte T est négative, on a alors une augmentation de la taille de la zone plastique et les ailes de papillon basculent vers l'avant.



**FIGURE 1.28** – Champ de la contrainte équivalente de von Mises en déformations planes autour de la pointe de la fissure montrant l'évolution de la zone plastique en fonction de la contrainte T [Pommier, 2016]

Observons maintenant l'évolution de la taille de la zone plastique d'Irwin devant la pointe de la fissure ( $\theta = 0$ ) en fonction de la contrainte T.

Pour  $\theta = 0$  et  $T = 0$ , le champ de contrainte de Westergaard en pointe de fissure est donné par :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(r, \theta = 0, T = 0) &= \frac{S_{yy}\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \\ \sigma_{yy}(r, \theta = 0, T = 0) &= \frac{S_{yy}\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \\ \sigma_{xy}(r, \theta = 0, T = 0) &= 0 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Lorsque T n'est pas nulle, on a alors :

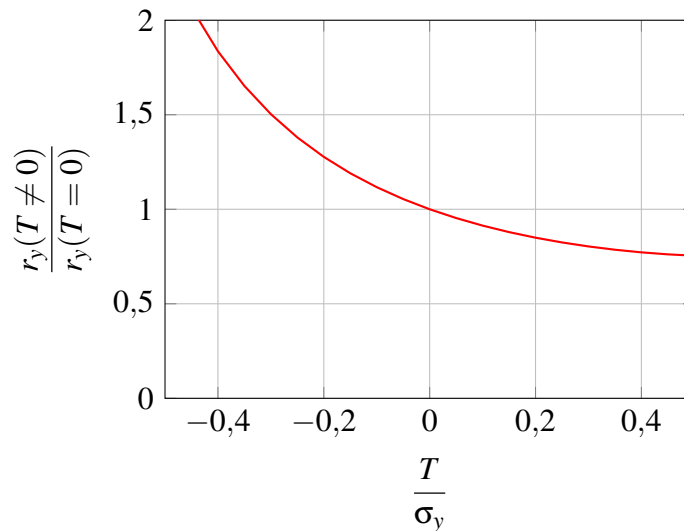
$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(r, \theta = 0, T \neq 0) &= \frac{S_{yy}\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} + T \\ \sigma_{yy}(r, \theta = 0, T \neq 0) &= \frac{S_{yy}\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \\ \sigma_{xy}(r, \theta = 0, T \neq 0) &= 0 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Il est alors possible de déterminer, dans ces deux cas, le rayon  $r_y$  ( $r_p = 2r_y$ ) pour lequel la contrainte équivalente de von Mises  $\sigma_{eq}$  est égale à la limite d'élasticité du matériau  $\sigma_y$ .

Pour une contrainte  $S_{yy}$  et une longueur de fissure  $a$  données, on obtient le rapport  $\frac{r_y(T \neq 0)}{r_y(T=0)}$  suivant :

$$\frac{r_y(T \neq 0)}{r_y(T=0)} = \frac{2}{2 - \left(\frac{T}{\sigma_y}\right)^2 + \frac{T}{\sigma_y} \sqrt{4 - 3\left(\frac{T}{\sigma_y}\right)^2}} \quad (1.11)$$

La figure 1.29 montre l'évolution de ce rapport en fonction du rapport  $\frac{T}{\sigma_y}$ .



**FIGURE 1.29** – Évolution de  $\frac{r_y(T \neq 0)}{r_y(T=0)}$  en fonction de  $\frac{T}{\sigma_y}$  pour  $S_{yy}$  et  $a$  données

Comme on peut le voir sur cette figure, une contrainte  $T$  augmente la taille de la zone plastique quand elle est négative et la diminue lorsqu'elle est positive. Cependant, l'effet d'une contrainte  $T$  négative est bien plus important que celui d'une contrainte  $T$  positive. Par conséquent, si la fissure avance par plasticité, alors une contrainte  $T$  négative devrait accélérer sa propagation et une contrainte  $T$  positive devrait la ralentir.

### 3.3.2 Influence de la contrainte $T$ sur la vitesse de propagation

Il existe de nombreuses études sur l'influence de la contrainte  $T$  sur la vitesse de propagation des fissures. Cependant, les résultats sont contradictoires. Par exemple, certains auteurs ont trouvé qu'une contrainte  $T$  positive tendait à accélérer la fissure [Tanaka *et al.*, 1979, Kitagawa *et al.*, 1985, Tong, 2002], alors que d'autres ont trouvé l'effet inverse [Kitagawa *et al.*, 1979, Hoshida *et al.*, 1981, Brown et Miller, 1985, Vecchio *et al.*, 1987, Pei *et al.*, 1989, Kitaoka et Mikuriya, 1996, Hutař *et al.*, 2004, Kane, 2005]. Ceci laisserait penser que la contrainte  $T$  seule ne permet pas d'expliquer ce comportement et serait en compétition avec d'autres phénomènes : plasticité, comportement du matériau, rugosité, épaisseur de l'éprouvette, etc. Néanmoins, la plupart des articles tendent à montrer

qu'une contrainte T positive ralentit la propagation d'une fissure alors qu'une contrainte T négative l'accélère.

### 3.3.3 Influence de la contrainte T sur le trajet de fissuration

Il a été démontré dans plusieurs études que la contrainte T influe sur le trajet de fissuration par fatigue (cf. figure 1.30). Dans le cas particulier d'une fissure de Griffith, si T est positive alors  $S_{xx} > S_{yy}$ . Ceci devrait entraîner une bifurcation de la fissure permettant au plan de propagation de venir se placer perpendiculairement à l'axe des contraintes principales maximales. Plusieurs auteurs ont mis en évidence expérimentalement cet effet de bifurcation pour une contrainte T positive. Par exemple, [Leevers et Radon, 1982] ont trouvé que, lorsque la contrainte T est négative, le trajet de fissuration est davantage plan que lorsque T est nulle. De même, le chemin suivi par la fissure est plus sinueux lorsque le chargement est équi-biaxial ( $T = 0$ ). Ce phénomène a été observé par [Truchon *et al.*, 1982] dans une éprouvette cruciforme fissurée. Ils ont remarqué que, pour une contrainte T positive, le plan de fissuration évolue de façon à ce que la fissure soit localement en mode I.

En général, une contrainte T négative tend à stabiliser le trajet de fissuration alors qu'une contrainte T positive accentue les bifurcations dues aux obstacles microstructuraux [Cotterell et Rice, 1980, Pook, 1994, Chen et Dillard, 2001, Becker Jr *et al.*, 2001].

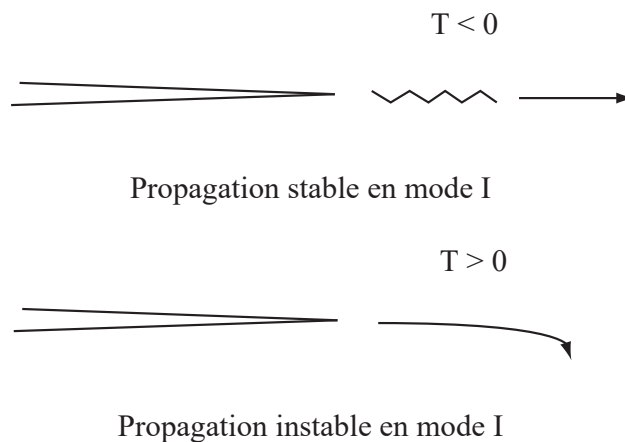


FIGURE 1.30 – Influence de la contrainte T sur le trajet de fissuration [Lee *et al.*, 2005]

### 3.4 Contraintes T et fissures courtes

Prendre en compte les contraintes T en plus des facteurs d'intensité des contraintes permet d'introduire naturellement un effet de fissure courte. En effet, les contraintes T sont fonction du champ de contrainte du milieu non fissuré (cf. Fig.1.26) alors que les facteurs d'intensité des contraintes sont aussi fonction de la longueur de fissure. Dans la solution de Westergaard, les termes associés aux contraintes T sont constants tandis que

ceux associés aux facteurs d'intensité des contraintes varient en  $\sqrt{a/r}$ . En effet, si on pose qu'il y a propagation lorsque  $\sigma_{xx}(r,\theta)$  est égal à un sigma critique ( $\sigma_{xx}(r,\theta) = \sigma_{crit}$ ), on a alors :

$$\sigma_{xx}(r,\theta) = \sigma_{crit} = \underbrace{\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{xx}(\theta)}_{\propto a \text{ car } K_I = S_{yy} \sqrt{\pi a}} + \underbrace{T}_{cst} \quad (1.12)$$

D'après l'équation (1.12), on voit que si la fissure devient courte, c'est-à-dire si  $a$  devient faible en se plaçant à une même distance de la pointe de la fissure, le terme de gauche devient négligeable face à  $T$ . Dans ce cas, la contrainte  $T$  prend beaucoup plus d'importance et ne peut être négligée. Par conséquent, considérer les contraintes  $T$  dans un critère de mécanique de la rupture va naturellement induire des effets liés à la taille de la fissure. Pour les fissures longues, l'effet des contraintes  $T$  est en général négligé. Cependant, si des fissures courtes ou des fissures longues sous un chargement multiaxial sont considérées, l'effet des contraintes  $T$  ne peut plus être négligé.

## 4 Fissures courtes

De nombreuses études ont montré que, lors des premiers stades de propagation, les fissures dites courtes ont une propagation qui diffère de celle des fissures longues. Les principales différences étant une vitesse de propagation plus élevée pour un même chargement en terme de  $\Delta K$  et un seuil de non propagation plus faible voire inexistant.

### 4.1 Qu'est-ce qu'une fissure courte ?

Une fissure courte est une fissure dont les faibles dimensions lui donnent un comportement qui ne respecte pas le cadre classique de la mécanique de la rupture. Par exemple, une fissure courte ne respecte généralement pas la loi de Paris (cf. figure 1.31). Il est observé que la loi de fissuration déterminée pour une fissure longue ne correspond pas au comportement en fissuration d'une fissure courte dans le même matériau. Celle-ci se propagera pour des valeurs de facteurs d'intensité des contraintes inférieures au seuil de non propagation,  $\Delta K_{Ih}$ , déterminé pour une fissure longue.

Ce comportement de fissure courte apparaît dans différents cas et il existe donc différents types de fissures courtes. Nous détaillerons ici les fissures dites « microstructuralement courtes » et « mécaniquement courtes ». Les fissures chimiquement courtes, c'est-à-dire avec un environnement chimique différent des fissures longues, ne seront pas traitées.

#### 4.1.1 Fissure microstructuralement courte

Lorsque qu'une fissure se propage, sa vitesse est différente dans chaque grain qu'elle traverse car l'orientation cristalline peut soit favoriser la propagation soit l'entraver. Ainsi,

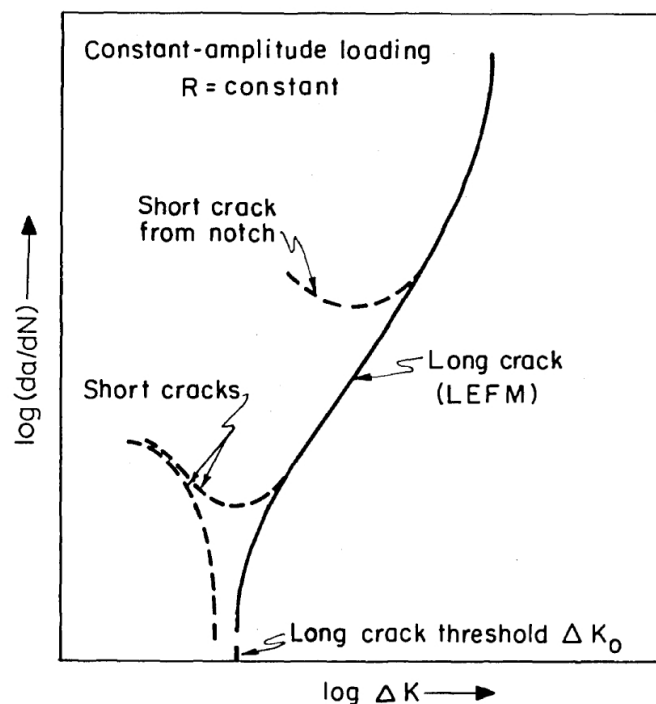


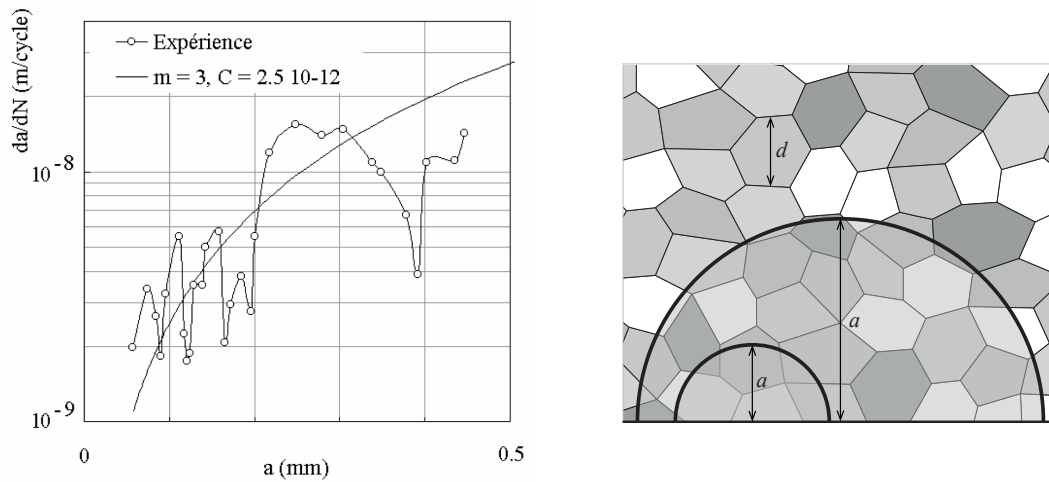
FIGURE 1.31 – Propagation des fissures courtes par fatigue [Suresh et Ritchie, 1984]

la vitesse de propagation d'une fissure est-elle une vitesse moyenne. Cette dernière porte sur toute la longueur du front et plusieurs centaines ou milliers de cycles. Dans le cas d'une fissure courte, le front de la fissure traverse peu de grains. Ceci ne permet pas de définir une vitesse moyenne représentative car elle peut fluctuer énormément d'un grain à l'autre. Par conséquent, proche du seuil de non propagation, les vitesses mesurées d'une microfissure peuvent être supérieures ou bien inférieures à la vitesse moyenne.

Dans ce cas, on observe que l'origine du comportement de fissure courte provient plus de la microstructure du matériau que des dimensions intrinsèques de la fissure. Ce comportement a été mis en évidence par de nombreux auteurs [Miller, 1997]. Par exemple, il a été montré par Ravichandran, Larsen et Xu Dong Li [Ravichandran *et al.*, 1999] que dans un alliage de titane Ti8-Al que la vitesse de fissuration peut varier d'un facteur supérieur à 100 d'un grain à l'autre. Tokaji a également trouvé une variation d'un facteur 20 dans du titane pur [Tokaji *et al.*, 1994]. On peut observer des résultats similaires pour un alliage à base de nickel N18 à température ambiante [Pommier, 1992], les variations étant ici de l'ordre de 5 (cf. figure 1.32).

On observe donc une fluctuation de la vitesse de propagation autour de la moyenne qui va diminuer au fur et à mesure que le nombre de grains interceptés augmente. Ceci a été démontré par les expériences de Goto [Goto, 1994] avec une variabilité de la vitesse de propagation qui peut être modélisée par une fonction décroissante de la longueur relative de la fissure  $\frac{a}{d}$  où  $d$  est la taille de grain du matériau. La variabilité ne dépend pas de la longueur de la fissure mais du rapport  $\frac{a}{d}$  pour une contrainte donnée.





(a) Comparaison de la vitesse de fissuration mesurée et moyenne pour une fissure courte dans l'alliage à base de nickel N18 [Pommier, 1992]      (b) Nombre de grains interceptés par un front de fissure semi-circulaire selon sa longueur

**FIGURE 1.32** – Propagation d'une fissure microstructuralement courte

D'autre part, dans sa thèse, Emmanuelle Thieulot-Laure [Thieulot-Laure, 2008] a étudié la variabilité du facteur d'intensité des contraintes en pointe de fissure en fonction de la longueur de celle-ci. Pour cela, elle a pris un problème de Griffith (cf. figure 1.33) et a déterminé le facteur d'intensité des contraintes de deux manières pour calculer sa fluctuation :

- calcul de  $K_I$  par superposition de fonctions de poids ce qui permet d'intégrer la fluctuation du champ de contraintes lors du calcul du facteur d'intensité des contraintes ;
- calcul de  $K_I$  en utilisant la contrainte moyenne sur la longueur de la fissure pour calculer le facteur d'intensité des contraintes avec une solution « standard » sous une contrainte uniforme.

La première solution est la plus proche de la réalité mais la deuxième est plus simple.

Les valeurs de contraintes utilisées ont été extraites d'un calcul par éléments finis sur un cas test bidimensionnel contenant 4578 grains soumis à une sollicitation de traction. De nombreux tirages aléatoires des orientations cristallines des grains ont été réalisés et le champ de contraintes a été déterminé pour chaque tirage. Les résultats sont présentés en figure 1.34 où le rapport entre l'écart type sur l'ensemble des tirages et la valeur moyenne de  $K_I$  est tracé en fonction de la longueur de la fissure exprimée en nombre de grains. On observe que la fluctuation est différente selon qu'elle est déterminée par la méthode de superposition ou de la valeur moyenne de la contrainte. Par la méthode de la superposition, la fluctuation décroît en  $\frac{1}{\sqrt{a}}$  alors que le calcul issu de la contrainte moyenne décroît en  $a^{-0,8}$ . Il y a un donc un rapport environ égal à  $a^{0,3}$  entre les deux méthodes. Dans tous les

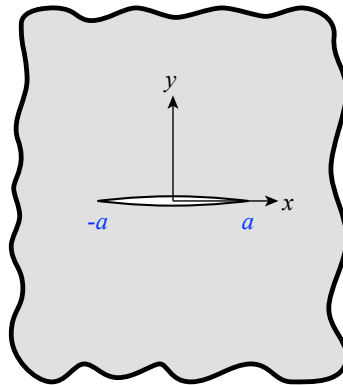


FIGURE 1.33 – Problème de Griffith dans le plan  $(x,y)$

cas, on voit nettement que, pour une fissure microstructurellement courte (d'une longueur inférieure à 5 grains), il est impératif de prendre en compte les effets de la microstructure pour prédire sa vitesse de propagation.

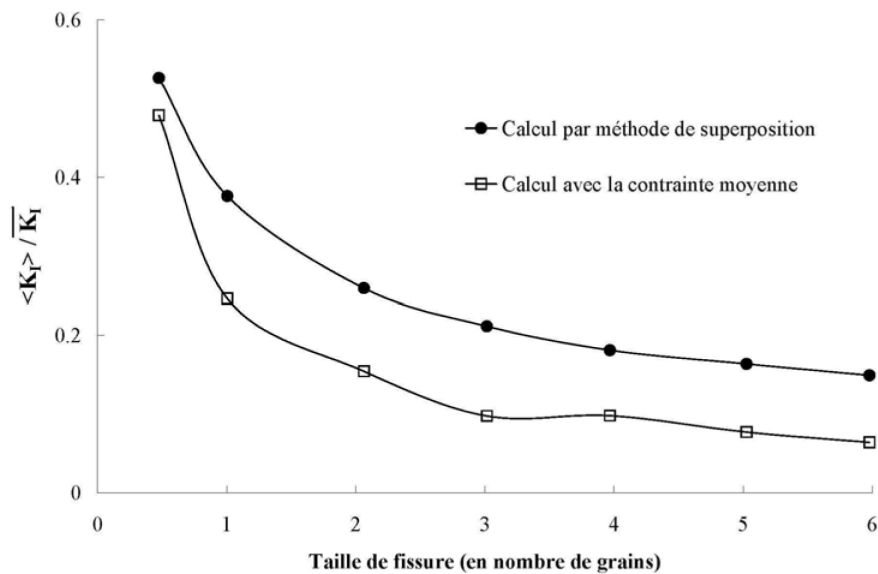
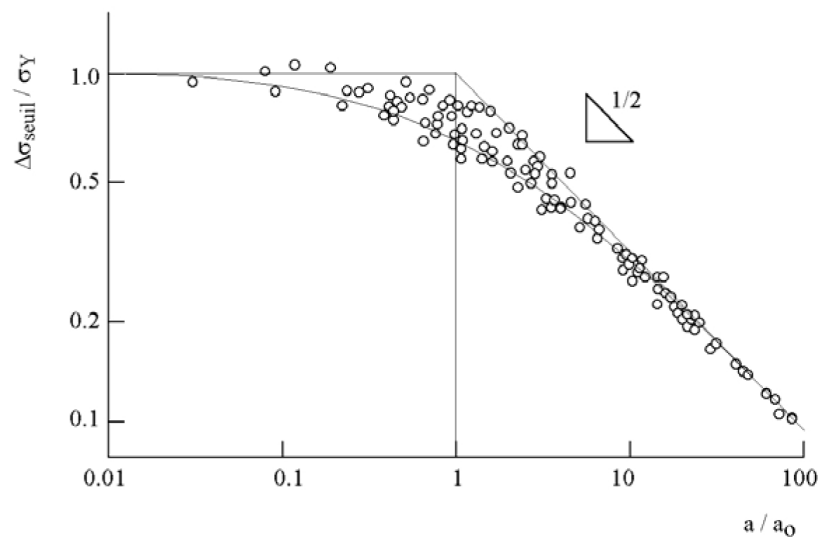


FIGURE 1.34 – Évolution de la fluctuation sur  $K_I$  rapportée à sa valeur moyenne en fonction de la taille de fissure pour un chargement calculé sur une microstructure modélisée par éléments finis [Thieulot-Laure, 2008]

#### 4.1.2 Fissure mécaniquement courte

Outre les variations dues à la microstructure du matériau, il a également été observé une différence de comportement pour des fissures de faibles dimensions [Kitagawa et Takahashi, 1976]. Il a été montré que le seuil pour lequel une fissure de dimension  $a$  ne se propage pas présente une longueur de transition, notée  $a_0$ . Si  $a < a_0$  alors le seuil de non

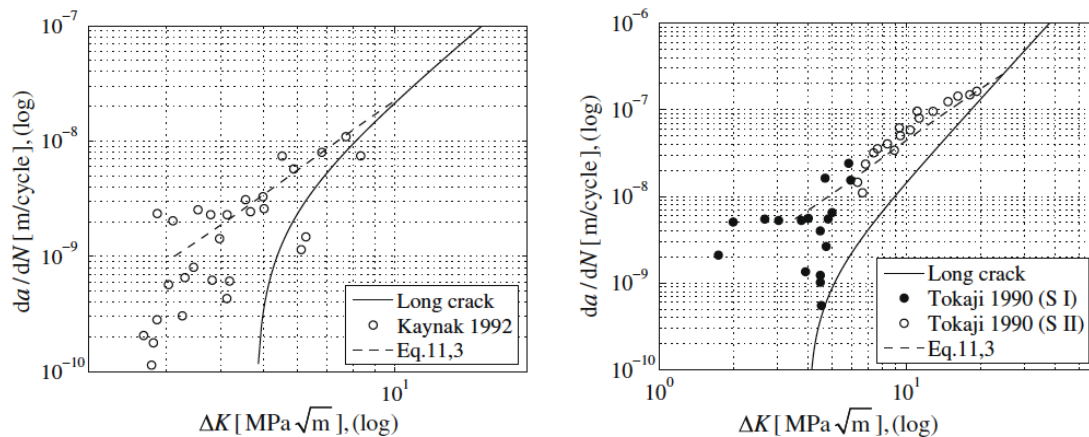
propagation dépend de la contrainte dans le milieu non fissuré. Si  $a > a_0$  alors le seuil de non propagation est égal à  $\Delta K_{th}$  pour une fissure longue. Cette valeur de transition  $a_0$  n'est pas reliée à une échelle microstructurale du matériau comme la taille de grain par exemple. Cette valeur est très largement supérieure à la taille des grains. Cependant, la transition semble se trouver à l'intersection entre le seuil de non propagation et la limite de fatigue du matériau. Elle ne dépend donc que de données mécaniques d'où le nom de fissure mécaniquement courte. De plus, Tanaka a montré (cf. figure 1.35) qu'il était possible d'employer une seule courbe maîtresse pour décrire cette transition [Tanaka *et al.*, 1981]. Il a également été observé que pour des fissures mécaniquement courtes, le seuil de non propagation est plus faible que pour une fissure longue et pour un même chargement proche du seuil, la vitesse de propagation est plus élevée [Besson *et al.*, 2001]. Ces effets sont détaillés dans les deux paragraphes suivants.



**FIGURE 1.35** – Seuil de non-propagation d'une fissure de longueur  $a$ , en fonction de  $a$  pour différents alliages dont les limites d'élasticité varient entre 30 et 770 MPa [Tanaka *et al.*, 1981]

## 4.2 Effets sur le seuil de non propagation

Lorsqu'on étudie la propagation d'une fissure ayant une longueur initiale très faible, on peut observer une vitesse de propagation plus grande que pour une fissure dite longue sous le même chargement en terme de  $\Delta K$  (cf. figure 1.36).



**FIGURE 1.36** – Effets de fissure courte sur les courbes de propagation [Santus et Taylor, 2009]

De plus, en 1976, Kitagawa et Takahashi [Kitagawa et Takahashi, 1976] ont développé une méthode expérimentale afin d'observer le comportement (initiation et propagation) de fissures de faibles dimensions. Pour ce faire, ils ont réalisé des trous de 50  $\mu\text{m}$  de diamètre et de profondeur dans des éprouvettes plates d'une épaisseur de 9 mm, en acier HT-80.

Dans ce cas, ils ont pu observer qu'à partir d'une longueur de fissure de 170  $\mu\text{m}$ , le front de fissure prenait une forme semi-circulaire et ce jusqu'à ce que le rapport  $\frac{b}{t}$  atteigne une valeur comprise entre 0,4 et 0,5, avec  $b$  la profondeur de la fissure et  $t$  l'épaisseur de l'éprouvette. Au-delà, le front de fissure devient progressivement semi-elliptique.

Ils ont ensuite observé que pour une longueur de fissure supérieure à 0,5 mm (pour ce matériau) la propagation se faisait à  $\Delta K_{th}$  constant et qu'il était donc possible d'appliquer la mécanique de la rupture linéaire. Tandis que pour une fissure de longueur inférieure à 0,5 mm,  $\Delta K_{th}$  n'est plus constant. Ils en ont donc conclu que, dans le cas de ce matériau, pour une fissure de longueur inférieure à 0,5 mm, il n'était pas possible d'appliquer la mécanique linéaire de la rupture. Cependant, on peut voir sur la figure 1.37 que pour une fissure de très faible longueur, on tend vers une limite de fatigue constante.

Trente ans plus tard, Endo et McEvily [Endo et McEvily, 2007] ont montré la même dépendance de la limite de fatigue à la taille de la fissure qui tend à être constante pour des fissures de faibles dimensions. Pour cela, ils ont mené une campagne d'essais en réalisant des trous initiaux de 40  $\mu\text{m}$  de diamètre et de profondeur dans des éprouvettes circulaires. Ces dernières ont ensuite été pré-fissurées à différentes longueurs pour obtenir des défauts initiaux de tailles différentes. À partir de cela, ils ont réalisé des essais de traction cyclique afin de tracer les courbes observées en figure 1.38.

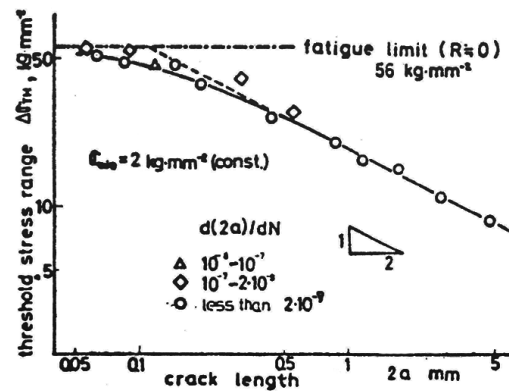


FIGURE 1.37 – Diagramme montrant l'effet de la longueur de fissure sur la limite de fatigue [Kitagawa et Takahashi, 1976]

On retrouve sur ces courbes ce que Kitagawa et Takahashi ont mis au jour. À savoir un  $\Delta K_{th}$  constant pour des fissures longues et une limite de fatigue qui tend à être constante lorsque la taille des fissures diminue. Il existe donc une longueur de transition entre le régime des fissures courtes et celui des fissures longues. On s'attendrait à ce que cette transition dépende uniquement de la taille de grains et donc du matériau. Cependant, des essais réalisés sur un même matériau mais avec différents chargements ont montré que cette transition dépend également du type de chargement appliqué et n'est donc pas une caractéristique microstructurale [McEvily et Endo, 2006]. On peut observer sur la figure 1.39 que la longueur de transition pour un chargement équibiaxial est presque 10 fois plus petite que pour un essai de torsion. Il est donc nécessaire de trouver un paramètre décrivant cette transition mais qui ne dépend pas uniquement du matériau.

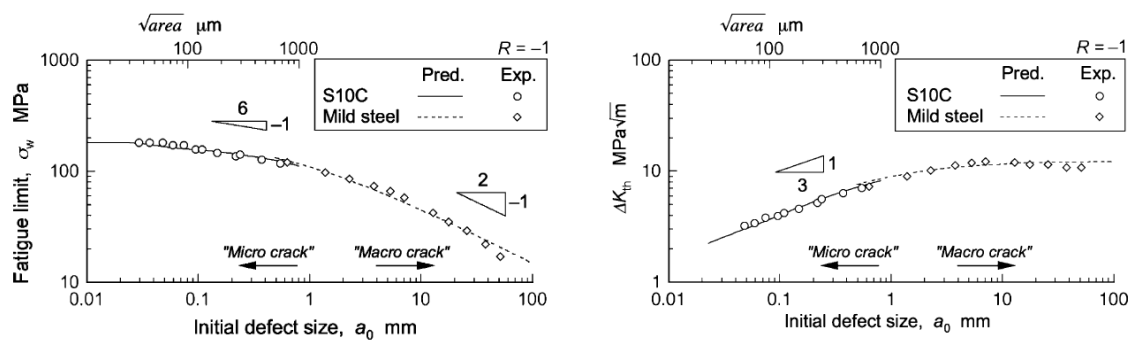
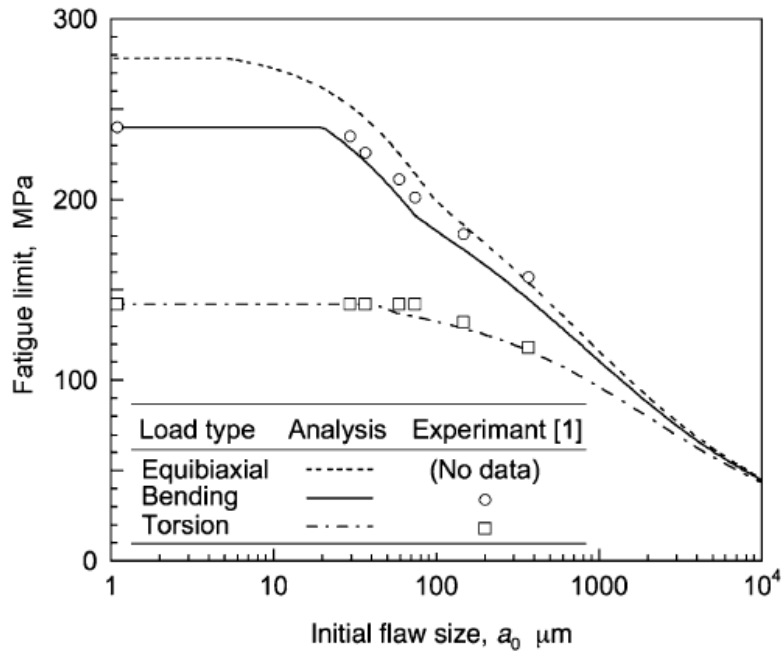


FIGURE 1.38 – Évolution de la limite de fatigue et de  $\Delta K_{th}$  en fonction de la taille du défaut initial [Endo et McEvily, 2007]



**FIGURE 1.39** – Évolutions de la limite de fatigue pour un même matériau et pour différents chargements (équibiaxial, flexion rotative, torsion) [McEvily et Endo, 2006]

Prenons le développement asymptotique de Westergaard de la contrainte  $\sigma_{xx}$ , on a , pour une fissure longue :

$$\sigma_{xx}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{xx}(\theta) \quad (1.13)$$

Dans ce cas, pour un  $r$  donné et une contrainte critique donnée  $\sigma_{xxcrit}$ , lorsque la longueur de fissure  $a$  diminue, le facteur d'intensité des contraintes  $K_I = S\sqrt{\pi a}$  restant constant, la contrainte appliquée  $S$  tend vers l'infini.

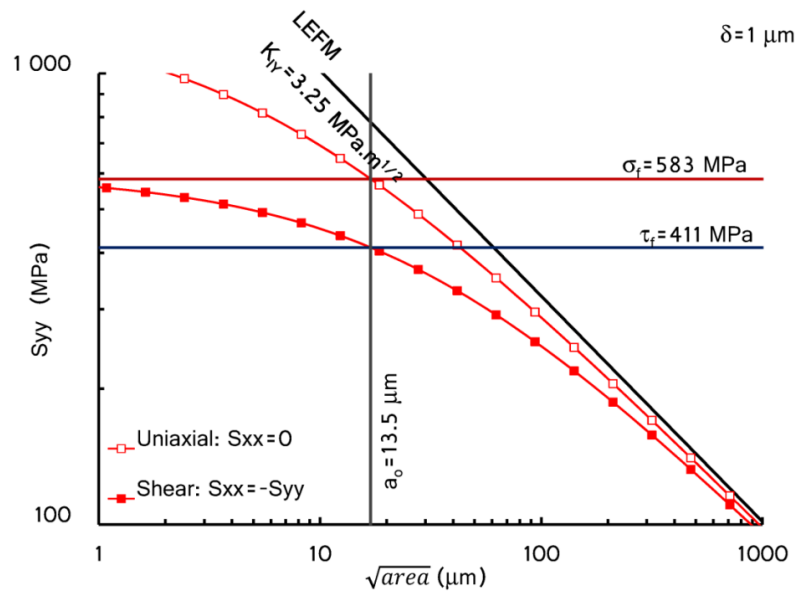
Maintenant, ajoutons un terme constant dépendant uniquement de la contrainte appliquée,  $T$ , dans le développement asymptotique :

$$\sigma_{xx}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{xx}(\theta) + T \quad (1.14)$$

Dans ce cas, lorsque  $a$  tend vers 0,  $S$  tend cette fois vers une valeur constante. Il devient donc possible en ajoutant simplement ce terme appelé **contrainte T** de représenter l'effet montré par Kitagawa et Takahashi (cf. figure 1.40).

### 4.3 Effets sur la vitesse de propagation

Comme on peut l'observer sur la figure 1.36, pour un chargement  $\Delta K$  proche du seuil de non propagation, une fissure courte se propage plus vite qu'une fissure longue. Ce-



**FIGURE 1.40** – Courbe présentant la différence entre la MLER standard et l'utilisation de la contrainte T [de Moura Pinho *et al.*, 2012]

pendant, il est également possible d'avoir des effets d'arrêt de fissure qui dépendent des gradients de déformation en surface [Frost et Dugdale, 1957].

## 5 Matériau de l'étude : Inconel 718 DA

L'Inconel 718 est l'alliage à base nickel le plus utilisé pour la fabrication de disques de turbines en aéronautiques. Cet alliage a été développé en 1959 par Herb Eiselstein pour la société Huntington Alloy Products Division.

Le Waspalloy était le superalliage à base nickel le plus utilisé jusque dans les années 1980. Mais la crise du cobalt de 1978, élément présent en quantité non négligeable dans cet alliage a conduit à l'industrialisation de l'Inconel 718. Depuis, il est devenu le superalliage le plus utilisé. Étant produit en grande quantité, son coût est de l'ordre de 15 € par kilogramme.

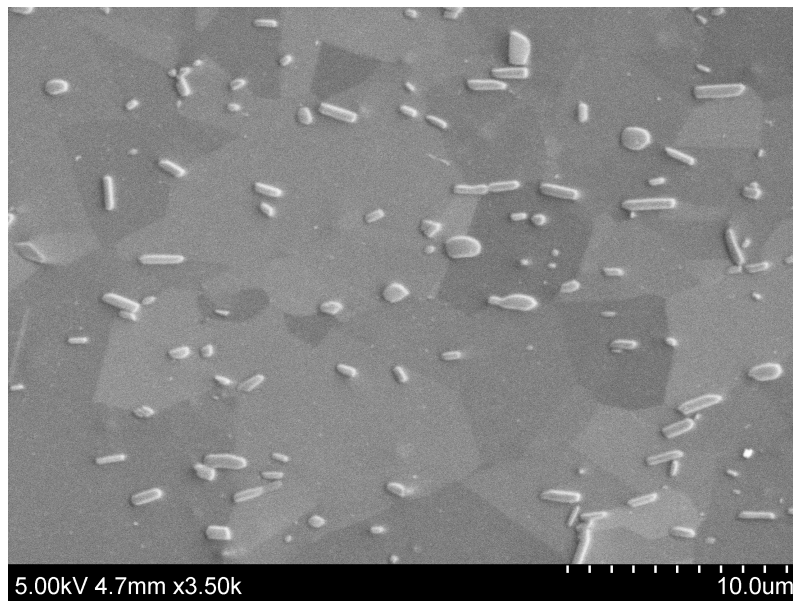
### 5.1 Composition et microstructure de l'Inconel 718 DA

La composition de l'Inconel 718 est donnée dans le tableau 1.1.

Une des particularités de cet alliage est sa forte teneur en fer. La présence de fer conduit, en plus de la diminution du prix de l'alliage, à un effet sur la précipitation des phases durcissantes. La faible mobilité du fer dans la matrice produit un ralentissement de la cinétique de durcissement. Cet effet sur la cinétique permet d'améliorer sa soudabilité. On note aussi dans le tableau 1.1 la forte teneur en niobium, principal élément durcissant de l'alliage. Ce durcissement est produit principalement par la précipitation de





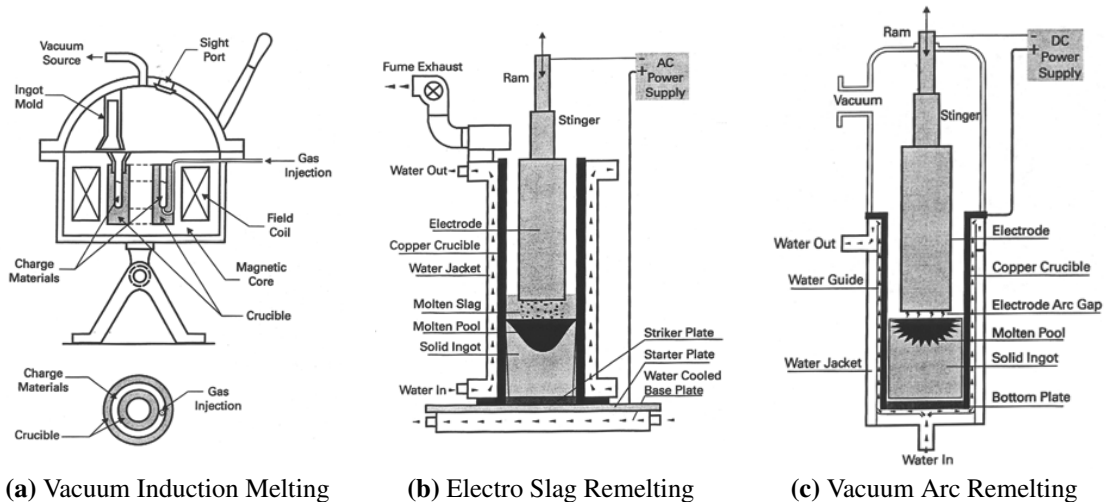


**FIGURE 1.42** – Micrographie de l’Inconel étudié avec, en blanc, les précipités de phase  $\delta$  durcissante - taille de grains de 5  $\mu\text{m}$  en moyenne - taille des précipités environ 2  $\mu\text{m}$

## 5.2 Élaboration de l’alliage 718

L’élaboration de l’Inconel 718 dans le cas d’une application aéronautique se réalise en deux ou trois étapes de fusion (cf. figure 1.43) :

- fusion par induction sous vide (VIM : Vacuum Induction Melting) ;
- refusion sous laitier (ESR : Electro Slag Remelting) ;
- refusion à l’arc sous vide (VAR : Vacuum Arc Remelting).



**FIGURE 1.43** – Schémas de principe des différentes méthodes d’élaboration utilisées pour la fabrication de l’Inconel [Alexandre, 2004]

### 5.2.1 Fusion par induction sous vide (VIM)

L'Inconel est fondu sous vide afin d'éviter la présence dans l'alliage d'inclusions de type oxyde. Le VIM (cf. figure 1.43a) est une méthode de fusion en creuset visant à élaborer le matériau sous forme d'électrode avec des contrôles de composition du bain de fusion qui permettent d'ajuster la composition de l'alliage. Celui-ci est maintenu à l'état liquide pour éliminer progressivement les composés volatiles indésirables comme le plomb et le magnésium.

### 5.2.2 Refusion sous laitier (ESR)

L'électrode formée par VIM est ensuite refondue sous laitier électroconducteur (cf. figure 1.43b). Cette refusion permet de :

- réduire les ségrégations ;
- enlever le maximum d'inclusions par réaction chimique avec le laitier ;
- réduire la teneur en éléments nocifs ;
- affiner la composition de l'alliage en filtrant les agglomérats d'oxydes.

### 5.2.3 Refusion à l'arc sous vide (VAR)

Ensuite, l'alliage subit une refusion à l'arc sous vide (cf. figure 1.43c) qui est une technique permettant de réduire les ségrégations en pilotant l'avancée du front de solidification du matériau. Cette fusion permet de diminuer encore la teneur en inclusions, de réduire la teneur en hydrogène et de limiter la formation de retassures.

## 6 Conclusion

Nous avons vu que la propagation des fissures en fatigue se produit par plasticité cyclique. Lorsque le chargement est à amplitude constante, il est aisé de prédire la vitesse de propagation en utilisant une loi de Paris. Dans ce cas, il est alors inutile de prendre en compte la plasticité en pointe de fissure pour modéliser la propagation. Cependant, si le chargement est variable, il devient bien plus difficile de déterminer la vitesse de propagation par simulation à cause des variations de vitesse provenant de surcharges ou de sous-charges. Le modèle condensé de plasticité présenté dans le chapitre 2 permet, dans le cas d'un chargement variable, de donner une prédiction de la vitesse en prenant en compte la plasticité en pointe de fissure.

De plus, d'autres phénomènes altèrent la propagation d'une fissure comme la longueur de celle-ci lorsqu'elle est de faible dimension ou encore l'influence de la contrainte  $T$ . En général, il a été montré qu'une contrainte  $T$  négative tend à accélérer la fissure. Il en est de même lorsque la longueur de celle-ci est inférieure à une certaine limite dépendant du matériau mais également du type de chargement appliqué. Cette influence similaire semble cohérente puisque l'influence de la contrainte  $T$  devient prépondérante lorsque la longueur de la fissure devient faible.

Les objectifs principaux de ces travaux sont, d'une part, d'étudier expérimentalement l'influence de la contrainte  $T$  sur la propagation des fissures longues pour la comparer à celle des fissures courtes et, d'autre part, de modéliser la propagation des fissures courtes en prenant en compte la contrainte  $T$ . La finalité étant d'intégrer l'influence de la contrainte  $T$  dans le modèle condensé de plasticité afin de prédire la vitesse de propagation des fissures courtes, il a été nécessaire de redéfinir les équations de ce modèle ainsi que l'identification de ses différents paramètres.

# Chapitre 2

## Modèle condensé de plasticité

*Ce chapitre présente le principe, les hypothèses et les évolutions récentes du modèle condensé de plasticité [Pommier et Risbet, 2005]. Ce modèle permet de décrire de façon incrémentale la vitesse de propagation d'une fissure soumise à un chargement de fatigue. Toute la non-linéarité provenant du comportement élastoplastique du matériau est contenue dans des lois de comportement obtenues à partir des degrés de libertés essentiels obtenus par une analyse en composantes principales (POD pour Proper Orthogonal decomposition) appliquée sur le champ de vitesses en pointe de fissure.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>43</b>
<b>2</b>	<b>Principe de fonctionnement du modèle</b> . . . . .	<b>43</b>
	2.1 Principe d'implémentation du modèle . . . . .	43
	2.2 Fonctionnement global du modèle . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Loi de fissuration</b> . . . . .	<b>44</b>
<b>4</b>	<b>Modélisation du champ de vitesses en condition d'élastoplasticité en pointe de fissure</b> . . . . .	<b>45</b>
	4.1 Principe . . . . .	46
	4.2 Proper Orthogonal Decomposition . . . . .	47

4.3	Hypothèses . . . . .	48
4.4	Utilisation de la POD pour décomposer le champ de vitesses en pointe de fissure . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Comportement en pointe de fissure . . . . .</b>	<b>58</b>
5.1	Évolution des variables internes en fonction de $a$ . . . . .	59
5.2	Évolution des variables internes en fonction de $\rho$ . . . . .	62
5.3	Bilan des équations régissant le comportement en pointe de fissure .	64
<b>6</b>	<b>Implémentation du modèle condensé de plasticité . . . . .</b>	<b>66</b>
<b>7</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>69</b>

---

# 1 Introduction

Dans des domaines de haute sécurité comme l'aéronautique, le transport ferroviaire, maritime ou l'industrie nucléaire, il est nécessaire de connaître au mieux la durée de vie des composants critiques. Ceci peut-être fait en modélisant la vitesse de propagation d'une fissure pré-existante. La plupart des modèles de propagation existants expriment la vitesse de propagation **par cycle**. Cependant, les chargements réels étant souvent très variables, il est nécessaire d'utiliser une méthode de comptage de cycle (par exemple, rainflow) pour appliquer ces modèles à des cas réels. Lorsque la séquence de chargement reconstruite par comptage est très différente de la séquence originale, il se pose la question de la pertinence de cette méthode et de la durée de vie prédite. Le modèle condensé de plasticité [Pommier et Risbet, 2005] présenté ici est exprimé de façon incrémentale. C'est-à-dire que la vitesse de propagation est exprimée **par seconde**. Ceci évite l'utilisation d'une méthode comptage tout en permettant de prendre en compte des effets dépendant du temps et non du nombre de cycles comme un chargement thermique ou l'oxydation du matériau.

Ce modèle simplifié qui a été développé au LMT depuis 2003 permet de condenser tous les effets du comportement non linéaire du matériau en pointe de fissure dans un ensemble de lois de comportement exprimées à partir du minimum de variables nécessaires pour représenter raisonnablement la plasticité en pointe de fissure.

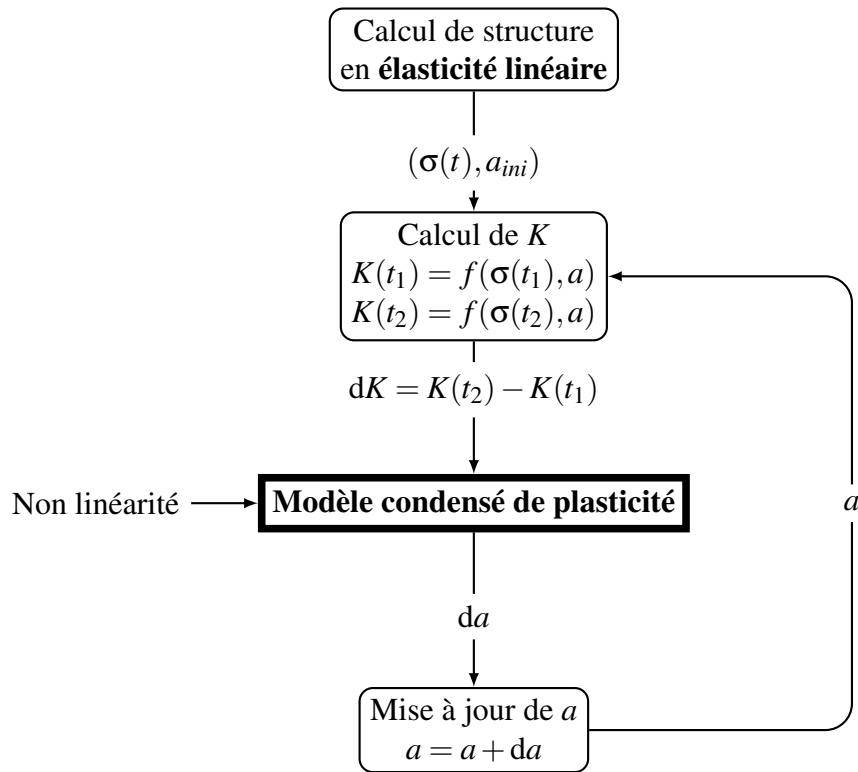
Le modèle condensé part du postulat que la fissure se propage grâce à la création par plasticité de nouvelles surfaces libres en pointe de fissure [Laird, 1967, Pelloux, 1969]. Par une méthode de réduction de modèle, le champ de vitesses en pointe de fissure est décomposé à la manière d'un développement asymptotique de Westergaard [Irwin, 1957] mais étendu à un comportement élastoplastique. Il est alors possible de relier l'évolution de la plasticité en pointe de fissure, et donc la vitesse de propagation, au chargement appliqué comme on le ferait pour une loi d'érouissage de type  $\sigma = f(\varepsilon_p)$  mais avec des quantités non-locales adaptées à la mécanique de la rupture.

**Dans cette étude, nous ne prendrons en compte que des chargements de mode I. Par conséquent, tous les facteurs d'intensité correspondront à un chargement de mode I.**

## 2 Principe de fonctionnement du modèle

### 2.1 Principe d'implémentation du modèle

Le modèle condensé de plasticité permet de prévoir la vitesse d'avancée d'une fissure à partir du chargement qui lui est appliqué. Pour ce faire, un calcul par éléments finis est réalisé sur une structure de comportement élastique linéaire afin d'obtenir le chargement nominal qui s'applique sur la fissure. Le modèle est ensuite utilisé pour obtenir l'avancée de cette fissure, notée  $da$ . Tout l'aspect non linéaire du problème est contenu dans ce



**FIGURE 2.1** – Schéma de principe de l'implémentation du modèle dans un code de calcul

modèle. Lorsque celle-ci est suffisamment importante, la longueur de la fissure est mise à jour, puis on réitère le calcul de structure en élasticité linéaire. Ce schéma se répète jusqu'à ce que la fissure traverse la structure ou que le  $K_{IC}$  du matériau soit atteint et mette ainsi fin à la durée de vie de la structure (cf. figure 2.1).

## 2.2 Fonctionnement global du modèle

Le modèle condensé de plasticité calcule un émoussissement plastique en pointe de fissure à partir de  $dK$  puis l'avancée de fissure correspondante  $da$  est déterminée en fonction de  $dp$ . Ils sont ensuite utilisés pour mettre à jour les variables prenant en compte les effets d'histoire du chargement à l'aide d'équations pré-intégrées (cf. figure 2.2).

## 3 Loi de fissuration

Comme vu dans le chapitre 1 en section 2.1.2 page 13, la vitesse de propagation de la fissure peut être modélisée à l'aide du modèle de Pelloux et Laird [Laird, 1967, Pelloux, 1969] de la manière suivante :

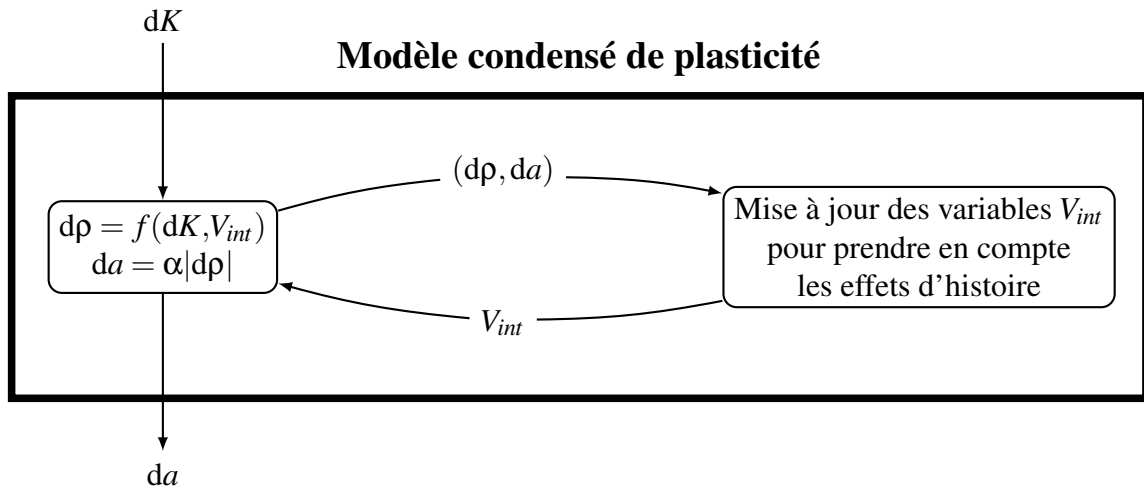


FIGURE 2.2 – Fonctionnement global du modèle

$$\frac{da}{dN} = \alpha \frac{\Delta\text{CTOD}}{dN} \quad (2.1)$$

avec :

- $a$ , l'aire fissurée par unité de longueur de front ;
- $N$ , le nombre de cycles ;
- $\alpha$ , le coefficient de proportionnalité entre le CTOD et l'avancée de la fissure ;
- CTOD (Crack Tip Opening Displacement), l'ouverture plastique en pointe de fissure.

Que ce soit dans le régime proche du seuil de propagation ou dans le régime de Paris, la fissure se propage par plasticité. Nous supposons donc par la suite que c'est la plasticité en pointe de fissure qui crée une avancée de fissure. Cette plasticité sera mesurée par l'éroussement en pointe de fissure noté  $\rho$ . Cet éroussement est égal au CTOD. En se basant sur les travaux de Pelloux et Laird, et en dérivant de leur approche une équation utilisable dans un modèle incrémental, on obtient alors une loi de fissuration qui est la première loi du modèle condensé de plasticité [Pommier et Risbet, 2005] :

$$\frac{da}{dt} = \alpha \left| \frac{\Delta\text{CTOD}}{dt} \right| = \alpha \left| \frac{d\rho}{dt} \right| \quad (2.2)$$

## 4 Modélisation du champ de vitesses en condition d'élastoplasticité en pointe de fissure

Nous avons vu précédemment qu'une fissure se propage grâce à la plasticité créée en pointe de fissure. Par conséquent, nous avons besoin de la quantifier pour en déduire sa vitesse de propagation, or la mécanique de la rupture classique n'est applicable qu'à des



matériaux élastiques linéaires. Il est donc nécessaire de l'étendre à l'étude d'un matériau élastoplastique.

Une approche a été faite par Hutchinson [Hutchinson, 1968], Rice et Rosengren [Rice et Rosengren, 1968] afin d'obtenir les champs de contraintes et de déformations en pointe de fissure pour un matériau élastique non-linéaire. Ces champs sont appelés champs HRR. L'élasticité non-linéaire permet de reproduire un comportement élastique monotone. Cependant, les champs HRR ne sont pas applicables en fatigue car le comportement lors d'une décharge ne pourra pas être représenté correctement. De plus, l'élasticité non-linéaire ne permet pas de reproduire la condition de volume constant qui est associée à la plasticité. Or cette condition de volume constant introduit des contraintes résiduelles multiaxiales et des composantes de contraintes parallèles au plan de la fissure qui peuvent interférer avec les contraintes T. Il est donc nécessaire d'étendre la mécanique de la rupture à un comportement réellement élastoplastique.

La méthode qui a été retenue ici s'inspire du développement asymptotique de la solution de Westergaard qui a été réalisé par Irwin [Irwin, 1957]. Elle se fonde sur les mêmes hypothèses et décompose ainsi le champ de vitesses en pointe de fissure de la même manière que le champ de déplacement de la solution asymptotique.

## 4.1 Principe

Le développement asymptotique du champ de déplacement en pointe de fissure en mode I en déformations planes s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} u_x(r, \theta, t) = \frac{K(t)}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) (3 - 4\nu - \cos\theta) \\ u_y(r, \theta, t) = \frac{K(t)}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) (3 - 4\nu - \cos\theta) \\ u_z(r, \theta, t) = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Ce développement est un produit d'un facteur d'intensité qui dépend du temps, d'une fonction qui ne dépend que de  $r$  et d'une fonction qui ne dépend que de  $\theta$ .

Afin de prendre en compte le comportement élastoplastique en pointe de fissure, la décomposition du champ de vitesses choisie est la suivante :

$$\begin{array}{c} \underline{v}(r, \theta, t) = \dot{K}(t) \underline{\phi}_e(r, \theta) + \dot{\rho}(t) \underline{\phi}_p(r, \theta) \\ \text{ou} \\ \underline{v}(r, \theta, t) = \dot{K}(t) f_e(r) \underline{g}_e(\theta) + \dot{\rho}(t) f_p(r) \underline{g}_p(\theta) \end{array} \quad (2.4)$$

avec

—  $\dot{K}(t)$ , le facteur d'intensité du champ de vitesses élastique ( $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}\cdot\text{s}^{-1}$ );

- $\dot{\rho}(t)$ , le facteur d'intensité du champ de vitesses plastique ( $\text{m.s}^{-1}$ );
- $\underline{\phi}_e(r, \theta) = \begin{pmatrix} \phi_e^x(r, \theta) \\ \phi_e^y(r, \theta) \end{pmatrix}$ , la distribution spatiale du champ élastique ( $\sqrt{m}.\text{MPa}^{-1}$ );
- $\underline{\phi}_p(r, \theta) = \begin{pmatrix} \phi_p^x(r, \theta) \\ \phi_p^y(r, \theta) \end{pmatrix}$ , la distribution spatiale du champ plastique (sans unité);
- $f_i(r)$ , la dépendance radiale du champ  $i$ ;
- $\underline{g}_i(\theta) = \begin{pmatrix} g_i^x(\theta) \\ g_i^y(\theta) \end{pmatrix}$ , la dépendance angulaire du champ  $i$ .

Le champ de vitesses est décomposé en utilisant une technique de réduction de modèle, la Proper Orthogonal Decomposition (POD). Cette méthode permet d'extraire les principaux modes ou degrés de libertés cinématiquement indépendants du mouvement (l'élasticité et la plasticité dans notre cas). Elle permet également de faire une séparation de variables comme celle présente dans le développement de Westergaard. Grâce aux propriétés de la POD, il est facile d'obtenir l'évolution de  $\rho$ , l'émoussement plastique en pointe de fissure, en fonction de  $K$ . Il est ensuite possible de modéliser cette évolution à la manière d'une courbe  $\sigma = f(\varepsilon_p)$ .

## 4.2 Proper Orthogonal Decomposition

La décomposition de Karhunen-Loève ou Proper Orthogonal Decomposition (POD) est une méthode de décomposition modale qui permet de séparer une fonction dépendant de deux variables, par exemple le temps et l'espace, en une somme de produits d'une fonction du temps et une de l'espace (cf. équation (2.5)). Chaque produit correspond à un mode propre et les deux fonctions sont décorrélées. C'est-à-dire qu'elles sont indépendantes l'une de l'autre. Le nombre de produits est fini. Il correspond au nombre de modes propres, noté  $m$ , de la fonction. Les premiers modes ayant plus de poids que les derniers, il est alors possible d'obtenir une approximation de la fonction de départ en ne prenant que les  $p$  premiers modes propres avec  $p < m$ .

$$U(\underline{X}, t) = \sum_{i=1}^m g_i(t) f_i(\underline{X}) \quad (2.5)$$

La méthode appliquée pour décomposer une fonction  $U(\underline{X}, t)$  est la suivante :

On construit la matrice  $\underline{\underline{V}}$  de dimension  $N$  en espace et  $k$  en temps qui représente le champ  $U$  (cf. équation (2.6)).

$$\underline{\underline{V}} = \begin{bmatrix} U(x=1, t=1) & \cdots & U(x=1, t=k) \\ \vdots & & \vdots \\ U(x=N, t=1) & \cdots & U(x=N, t=k) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

L'autocorrélation permet de déterminer les fréquences fondamentales d'un signal. Elle est utilisée ici pour déterminer les modes propres de  $U$ . Pour ce faire, on calcule la matrice d'autocorrélation spatiale, notée  $\underline{\underline{C}}$ , définie en équation (2.7).

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{V}} \underline{\underline{V}}^T \quad (2.7)$$

En diagonalisant cette matrice, on peut en tirer les valeurs propres  $\lambda_i$  et les vecteurs propres  $\underline{F}_i$ . Ces vecteurs propres sont les fonctions dépendant de l'espace de notre POD. Comme  $\underline{C}$  est la matrice d'autocorrélation spatiale, les vecteurs propres sont non corrélés (leur orthogonalité correspond à un produit de corrélation nul). D'un point de vue cinématique, deux mouvements non-corrélés sont deux mouvements cinématiquement indépendants. Pour obtenir les fonctions dépendant du temps ou coefficients temporels  $\underline{A}_i$ , on multiplie les vecteurs propres par la matrice  $\underline{V}^T$  (cf. équation (2.8)).

$$\underline{A}_i = \underline{V}^T \underline{F}_i \quad (2.8)$$

En sommant les produits  $\underline{A}_i \underline{F}_i$  pour tous les modes propres, on obtient la décomposition exacte de  $\underline{V}$  (cf. équation (2.9)).

$$\underline{V} = \sum_{i=1}^m \underline{F}_i \underline{A}_i^T \quad (2.9)$$

Il est possible de « compresser » le champ  $U$  en ne prenant que les  $p$  premiers modes propres. On obtient ainsi la matrice  $\underline{\tilde{V}}$  qui est une approximation de la matrice  $\underline{V}$ .

$$\underline{\tilde{V}} = \sum_{i=1}^p \underline{F}_i \underline{A}_i^T \quad (2.10)$$

Il est également possible de définir une erreur de cette approximation comme suit :

$$\text{erreur}(p) = \sqrt{\frac{\sum_{i,j} (V_{ij} - \tilde{V}_{ij})^2}{\sum_{i,j} (V_{ij})^2}} \quad (2.11)$$

### 4.3 Hypothèses

Pour réaliser la décomposition précédente, les hypothèses suivantes ont été faites et sont détaillées ci-après :

- la géométrie de la fissure et les champs autour de la pointe sont autosimilaires ;
- les transformations sont supposées infinitésimales ;
- les champs élastiques et plastiques en pointe de fissure sont cinématiquement indépendants.

Tout d'abord, on considère que les déformations sont infinitésimales. Ceci permet de décomposer le champ de vitesses en une somme d'un champ élastique et d'un champ plastique parce que la déformation plastique de la structure est suffisamment petite pour ne pas modifier significativement sa géométrie et donc la réponse élastique de celle-ci, les deux effets sont donc superposables. De plus, la mécanique linéaire élastique de la rupture restera toujours applicable dans le cas de l'élasticité. Ceci est très important dans notre cas car, en fatigue, le domaine élastique est traversé deux fois à chaque cycle.

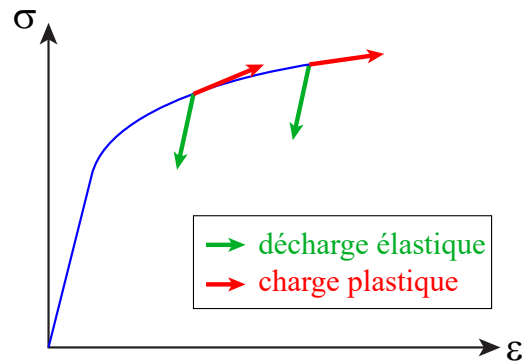


FIGURE 2.3 – Indépendance cinématique de l'élasticité et de la plasticité

Ensuite, élasticité et plasticité sont supposées cinématiquement indépendantes ou décorrélées (cf. figure 2.3). C'est-à-dire qu'il est toujours possible de choisir d'effectuer un incrément de chargement élastique (il suffit d'inverser le sens du chargement et de faire une décharge d'amplitude infinitésimale) ou de chargement plastique de façon totalement indépendante l'un de l'autre. On peut donc les considérer comme des degrés de libertés cinématiquement indépendants. Par conséquent, les champs de vitesses provenant de l'élasticité sont décorrélés de ceux provenant de la plasticité. Une autre façon de voir cela est de partir des définitions de l'élasticité et de la plasticité. L'élasticité correspond à un écartement des atomes entre eux, il y a donc une augmentation du volume. La plasticité, quant à elle, correspond à un glissement des atomes les uns par rapport aux autres, il n'y a donc aucune variation de volume. Ces deux mécanismes différents entraînent donc des champs cinématiques différents et indépendants. Par conséquent, les champs élastique et plastique sont décorrélés ce qui permet d'utiliser la POD pour pouvoir les obtenir (cf. section 4.2 page 47).

Enfin, la géométrie de la fissure et, par conséquent, les champs en pointe de fissure sont supposés être autosimilaires vis à vis d'un repère attaché au front de fissure. C'est-à-dire que si le chargement augmente, leur forme reste la même (cf. figure 2.4) et se retrouve simplement dilatée. Cette hypothèse a également été faite par Irwin pour réaliser le développement asymptotique des solutions de Westergaard et est à la base du principe de similitude. Elle a été montrée par [Pommier, 2015] comme le montre la figure 2.5. On observe que les isovaleurs de la déformation plastique cumulée ont la même forme quel que soit le chargement biaxial (mode I et II) appliqué. Ceci nous permet donc, à la manière d'Irwin, de décomposer les champs en pointe de fissure comme le produit d'une dépendance radiale, que l'on peut apparenter à une fonction d'échelle, notée  $f(r)$ , et par une dépendance angulaire reliée à la forme du champ, notée  $g(\theta)$ . Cette décomposition est également réalisée par POD.

De plus, le chargement étant en fatigue, le matériau en pointe de fissure passe la majeure partie de son temps à travailler en élasticité. Par conséquent, on peut supposer que le premier mode du champ de vitesses sera issu de l'élasticité du matériau. Le deuxième

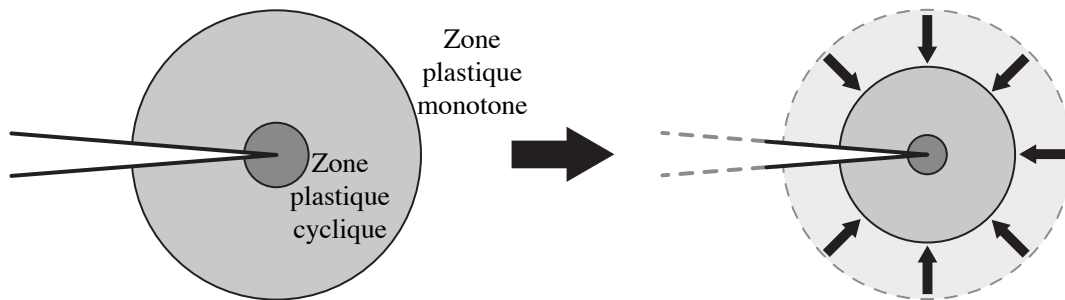


FIGURE 2.4 – Autosimilarité de la géométrie en pointe de fissure

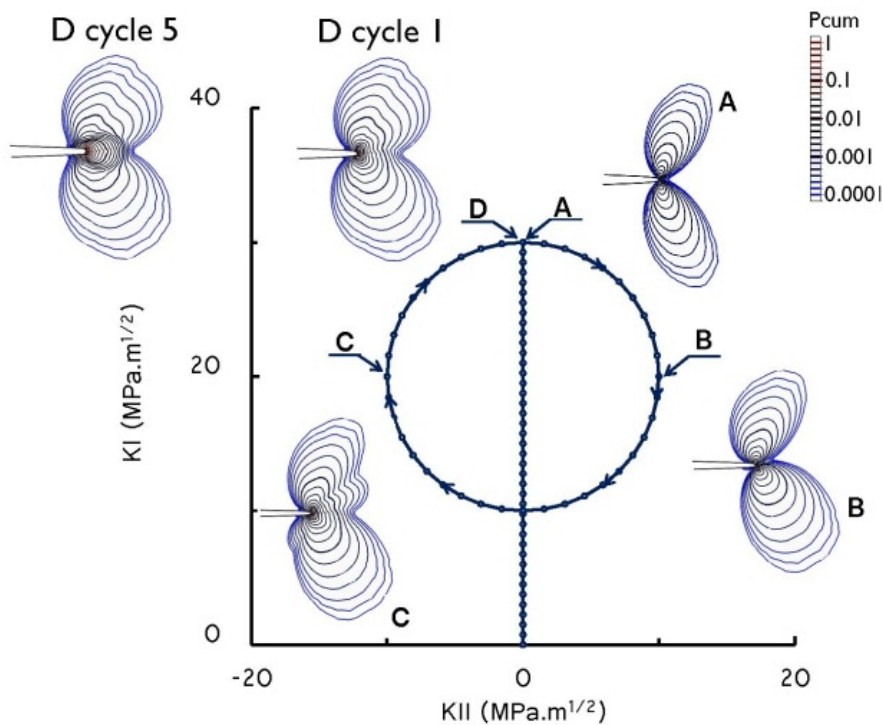


FIGURE 2.5 – Cinq chargements cycliques en mode mixte I + II simulés par éléments finis. Les isovaleurs de la déformation plastique cumulée sont tracées en échelle logarithmique pendant le premier cycle aux points A, B, C, D du trajet de chargement, et à la fin du cinquième cycle (en D) [Pommier, 2015]

mode correspondra quant à lui au champ de vitesses complémentaire représentant ici à la plasticité confinée en pointe de fissure. Pour cette étude, nous nous limiterons à ces deux modes. Il est cependant possible de prendre en compte des modes supplémentaires pour modéliser d'autres phénomènes comme par exemple la plasticité généralisée [Zhang, 2016].

#### 4.4 Utilisation de la POD pour décomposer le champ de vitesses en pointe de fissure

Dans ce qui suit, à la place de vitesses, nous travaillerons sur des variations de champs déplacements  $\underline{dU}$  pour plus de cohérence avec ce qui est réalisé par calculs par éléments finis. Le modèle utilisé ici est un carré traversé en son centre par une fissure de faible longueur. Des déplacements équilibriaux sont appliqués sur le carré créant ainsi un chargement de mode I (cf. figure 2.6).

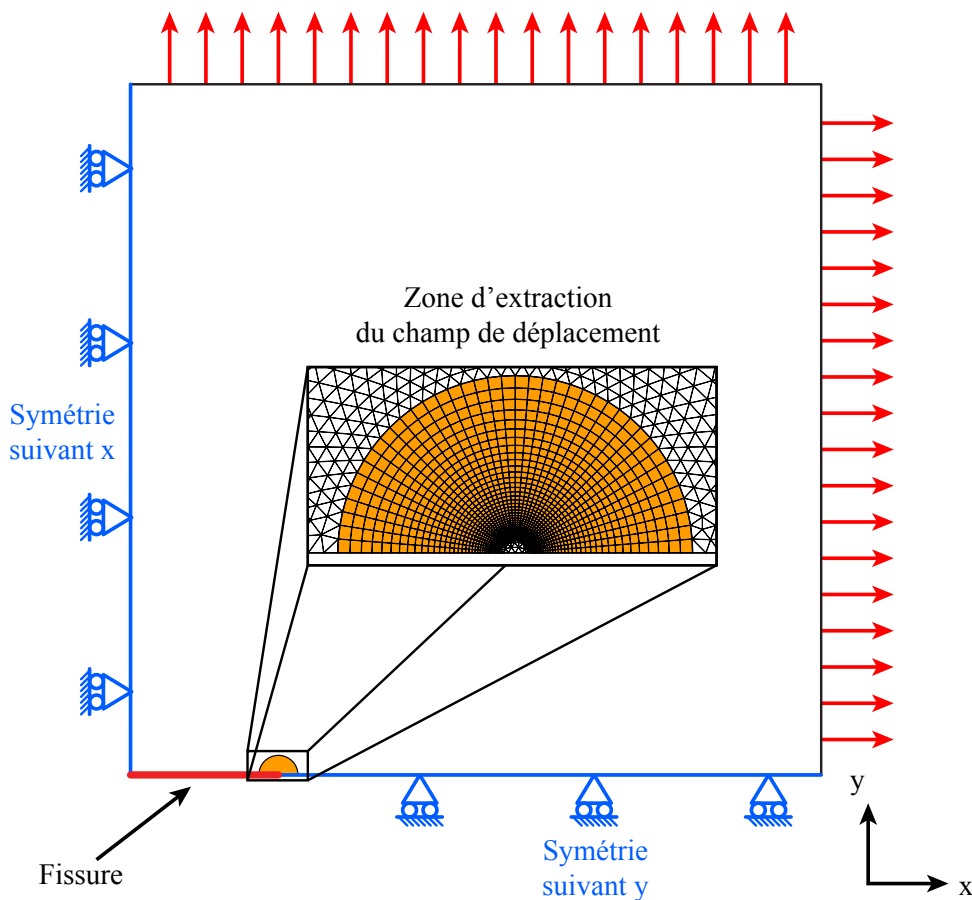


FIGURE 2.6 – Schéma du modèle utilisé pour les simulations

Le champ de déplacement en pointe de fissure calculé par éléments finis  $\underline{dU}_{ep}$  peut-être décomposé comme suit :

$$\underline{dU}_{ep}(x,t) = d\tilde{K}(t) \underline{\phi}_e(x) + d\rho(t) \underline{\phi}_p(x) \quad (2.12)$$

Les distributions spatiales  $\underline{\phi}_e$  et  $\underline{\phi}_p$  restent inchangées si la géométrie et le maillage du modèle utilisé pour les calculs ne changent pas. Il est donc possible de les déterminer pour ensuite obtenir  $d\tilde{K}$  et  $d\rho$  pour un chargement quelconque. Chacun de ces champs

est déterminé par une méthode différente. En effet, le champ élastique est obtenu directement par un calcul élastique (cf. section 4.4.1 page 52) alors que le champ plastique est déterminé en utilisant la POD (cf. section 4.4.2 page 52).

Cette décomposition est une décomposition approchée. Il est possible de déterminer l'erreur relative faite en n'utilisant que le champ élastique pour représenter le champ complet. Celle-ci est notée  $C_{1R}$  et son expression est la suivante :

$$C_{1R}(t) = \sqrt{\frac{\sum_i [dU_{ep}(x_i, t) - d\tilde{K}(t) \phi_e(x_i)]^2}{\sum_i [dU_{ep}(x_i, t)]^2}} \quad (2.13)$$

De la même manière, il est possible de calculer l'erreur relative obtenue en décomposant le champ par un champ élastique et un champ plastique. Cette erreur, notée  $C_{2R}$ , est la suivante :

$$C_{2R}(t) = \sqrt{\frac{\sum_i [dU_{ep}(x_i, t) - d\tilde{K}(t) \phi_e(x_i) - d\rho(t) \phi_p(x_i)]^2}{\sum_i [dU_{ep}(x_i, t)]^2}} \quad (2.14)$$

#### 4.4.1 Méthode d'obtention de la distribution spatiale du champ élastique

Pour déterminer la distribution spatiale du champ élastique  $\underline{\phi}_e$ , un calcul par éléments finis est réalisé en ne prenant en compte qu'un comportement élastique pour le matériau. Dans ce cas, le champ de déplacement peut-être décomposé de la manière suivante :

$$\underline{U}_{ep}(x, t) = K(t) \underline{\phi}_e(x) \quad (2.15)$$

Dans ce cas, le facteur d'intensité du champ élastique est bien le facteur d'intensité des contraintes  $K$  et non  $\tilde{K}$  puisqu'il n'y a pas de contraintes internes induites par plasticité. Pour obtenir la distribution spatiale du champ élastique, il suffit donc de faire un calcul par éléments finis pour un  $K$  de  $1 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ . Dans ce cas,  $\underline{\phi}_e = \underline{U}_{ep}$ . De plus,  $\underline{\phi}_e$  peut être décomposé à la manière du développement asymptotique de Westergaard en un produit d'une dépendance radiale  $f_e(r)$  et d'une dépendance angulaire  $g_e(\theta)$  (cf. figure 2.9). Comme le montre cette figure, ces deux dépendances correspondent bien à celles du développement de Westergaard.

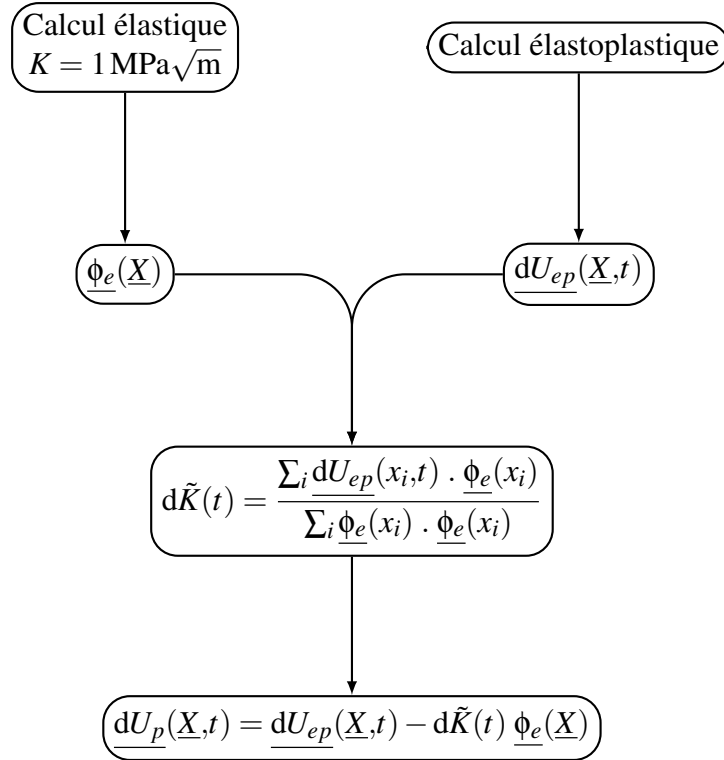
#### 4.4.2 Méthode d'obtention de la distribution spatiale du champ plastique

Le champ de référence plastique est obtenu par extraction du champ de déplacement d'un calcul avec un comportement élastoplastique dont on retire la partie élastique en calculant (par projection sur la base  $\underline{\phi}_e$ ) le  $d\tilde{K}$  auquel on multiplie la distribution spatiale du champ élastique pour obtenir le vrai champ plastique  $dU_p$  (cf. figure 2.7).

On cherche ensuite à adimensionner ce champ  $dU_p$  pour obtenir  $\underline{\phi}_p$  de façon à avoir :

$$\phi_p^y(r \rightarrow 0, \theta = \pi) - \phi_p^y(r \rightarrow 0, \theta = -\pi) = 1 \quad (2.16)$$

Ainsi, le facteur d'intensité du champ plastique  $\rho$  est égal au CTOD. Ceci permet de donner un sens physique à ce facteur et est cohérent avec le fait que la création de surface libre est obtenue par la plasticité en pointe de fissure.



**FIGURE 2.7** – Méthode d'obtention du champ de déplacement plastique  $\underline{dU}_p$  à partir du champ élastoplastique

La méthode d'obtention de la distribution spatiale  $\underline{\phi}_p$  utilisée est schématisée en figure 2.8.

1. Une première POD en temps et en espace est réalisée sur le champ plastique  $\underline{dU}_p$  pour obtenir une fonction de l'espace  $\underline{m}(\underline{X})$  à partir de laquelle la distribution spatiale du champ plastique sera déterminée et une autre du temps  $n(t)$ .
2. Une deuxième POD en  $r$  et  $\theta$  est effectuée sur la fonction de l'espace  $\underline{m}(\underline{X})$ .
3. On note que la fonction  $\underline{q}$  présente une discontinuité de valeur un au passage de la fissure (entre  $\theta = \pi$  et  $\theta = -\pi$ ). On l'adimensionne donc pour avoir :

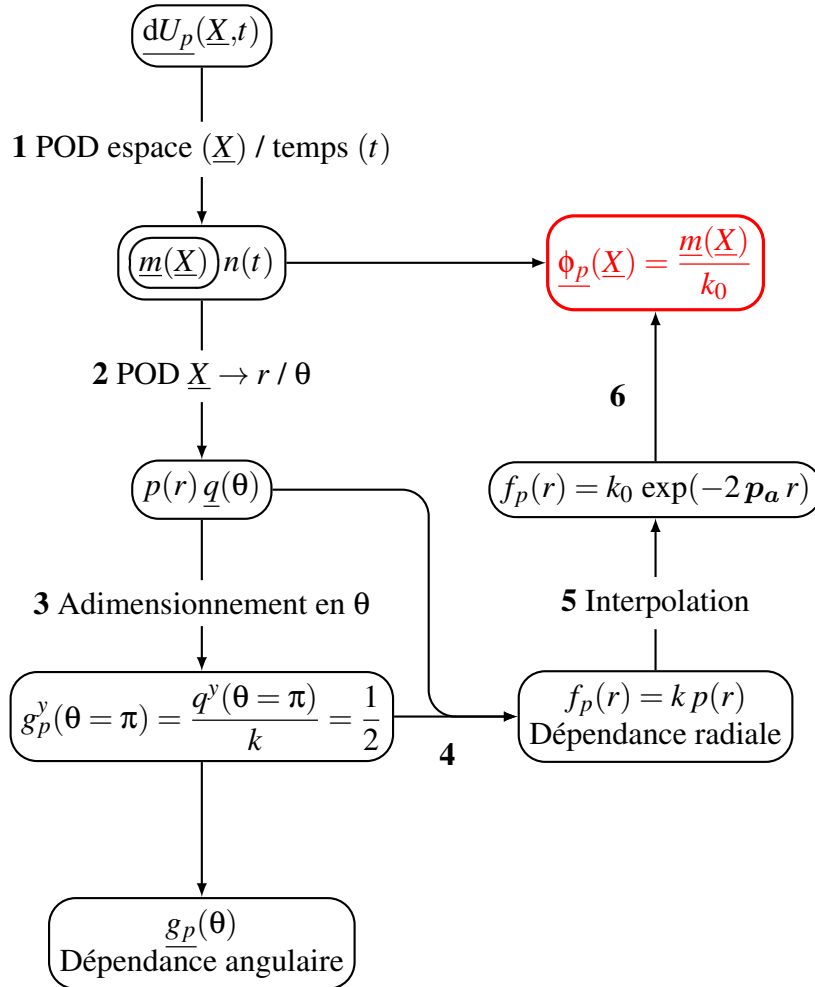
$$\frac{q^y(\theta = \pi)}{k} - \frac{q^y(\theta = -\pi)}{k} = 1 \quad (2.17)$$

Le coefficient adimensionnant  $q(\theta)$  est noté  $k$ . On obtient ainsi la dépendance angulaire du champ plastique  $\underline{g}_p(\theta)$  :



$$\underline{g}_p(\theta) = \begin{pmatrix} g_p^x(\theta) = \frac{q^x(\theta)}{k} \\ g_p^y(\theta) = \frac{q^y(\theta)}{k} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

4. La dépendance radiale du champ plastique  $f_p(r)$  est définie par  $f_p(r) = k p(r)$ .



**FIGURE 2.8** – Méthode d'obtention de la distribution spatiale du champ plastique  $\phi_p$

5. Le problème étant supposé autosimilaire, on interpole  $f_p(r)$  par une fonction qui est elle aussi autosimilaire. Cette fonction devant être autosimilaire, finie en 0 et tendant vers 0 quand  $r$  tend vers l'infini car la plasticité est confinée, il a été choisi d'interpoler  $f_p(r)$  par une exponentielle décroissante de type :

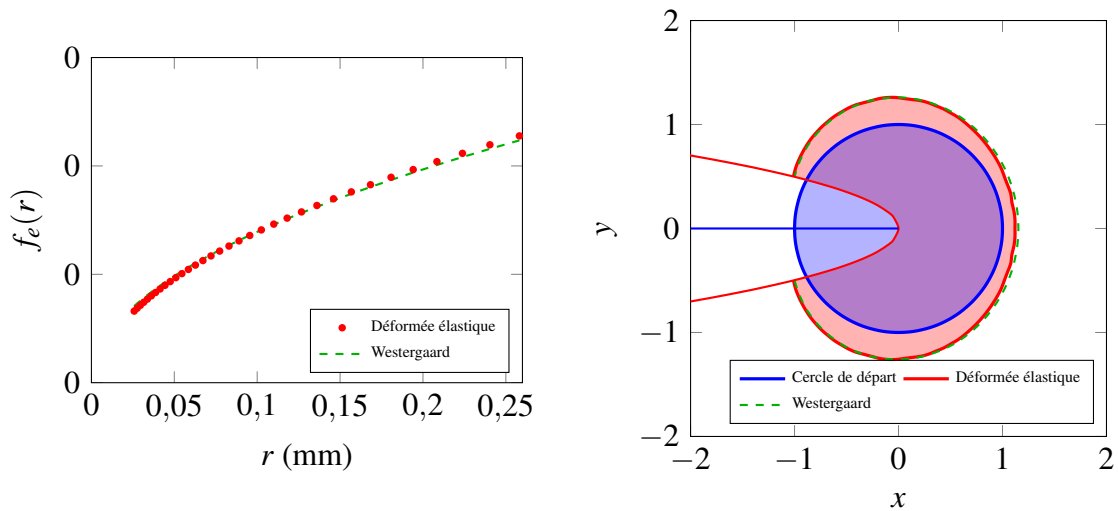
$$y = k_0 \exp(-2 p_a r) \quad (2.19)$$

De plus, d'après la figure 2.5, on voit que la décroissance du champ est exponentielle puisque les isovaleurs tracées en échelle log sont espacées régulièrement.

6. On utilise ensuite le coefficient  $k_0$  de l'interpolation exponentielle pour adimensionner le champ plastique  $\underline{m}(\underline{X})$  et obtenir ainsi la distribution spatiale du champ plastique  $\underline{\phi}_p$  :

$$\underline{\phi}_p = \frac{\underline{m}(\underline{X})}{k_0} \tag{2.20}$$

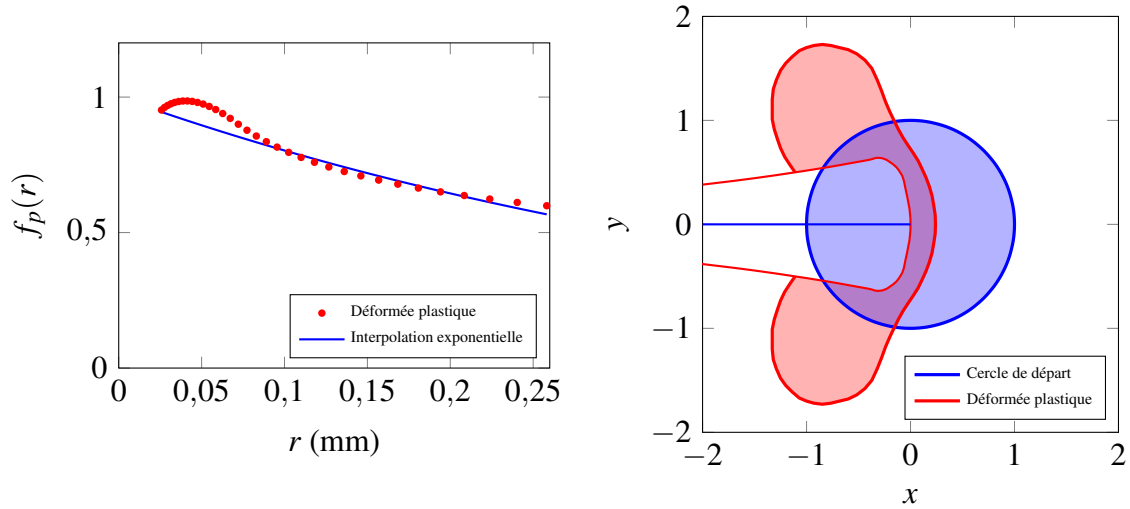
Il est également possible de tracer les formes des dépendances radiales et angulaires des champs élastique (cf. figure 2.9) et plastique (cf. figure 2.10). On peut observer sur la figure 2.9a la dépendance radiale du champ de déplacement élastique. Cette dépendance est la même que celle du développement asymptotique de Westergaard. Il en est de même pour la dépendance angulaire (cf. figure 2.9b). Cette dépendance représente la déformation qu'aurait un cercle de rayon 1 autour de la pointe de la fissure. Pour une meilleure compréhension, la fissure a été ajoutée sur la courbe. On voit qu'il y a une augmentation du volume entre la surface bleue et la surface rouge. Ceci correspond bien à l'augmentation de volume inhérente à l'élasticité.



(a) Évolution de la dépendance radiale du champ élastique  $f_e(r)$       (b) Évolution de la dépendance angulaire du champ élastique  $g_e(\theta)$  appliquée à un cercle de rayon 1 autour de la pointe de la fissure

**FIGURE 2.9** – Évolution des dépendances radiale et angulaire du champ élastique autour de la pointe de la fissure

La figure 2.10a présente la dépendance radiale du champ de déplacement plastique. Celle-ci décroît de façon exponentielle depuis la pointe de la fissure. La dépendance angulaire (cf. figure 2.10b), quant à elle, est plus déformée qu'en élasticité. Étant en plasticité, on observe une conservation du volume lors de la déformation.



(a) Évolution de la dépendance radiale du champ plastique  $f_p(r)$

(b) Évolution de la dépendance angulaire du champ plastique  $g_p(\theta)$  appliquée à un cercle de rayon 1 autour de la pointe de la fissure

**FIGURE 2.10** – Évolution des dépendances radiale et angulaire du champ plastique autour de la pointe de la fissure

#### 4.4.3 Calcul de l'émoussement plastique

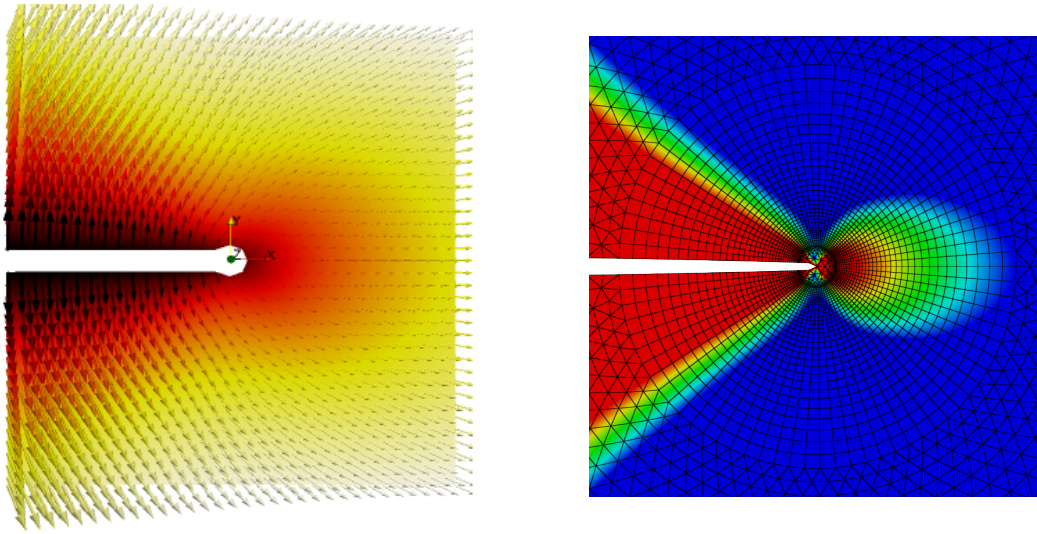
L'émoussement plastique en pointe de fissure  $\rho$  représente la surface libre créée lorsque la pointe de fissure plastifie. Il est égal à l'ouverture en pointe de fissure (CTOD). Il est facile d'obtenir sa valeur à partir de la décomposition du champ de déplacement (cf. équation (2.12)). Les distributions spatiales  $\underline{\phi}_e$  et  $\underline{\phi}_p$  étant orthogonales par définition, il est alors possible d'obtenir  $d\rho$  avec l'équation (2.21) qui permet de projeter le champ  $dU_{ep}$  sur le champ plastique  $\underline{\phi}_p$ .

$$d\rho(t) = \frac{\sum_i dU_{ep}(x_i, t) \cdot \underline{\phi}_p(x_i)}{\sum_i \underline{\phi}_p(x_i) \cdot \underline{\phi}_p(x_i)} \quad (2.21)$$

Il est possible de déterminer l'évolution de  $\rho$  à partir du champ de déplacement extrait d'un calcul par éléments finis, mais il est également possible de le faire à partir de champs de corrélation d'images numériques comme l'a démontré Pierre-Yves Decreuse dans sa thèse [Decreuse, 2010] (cf. figure 2.11).

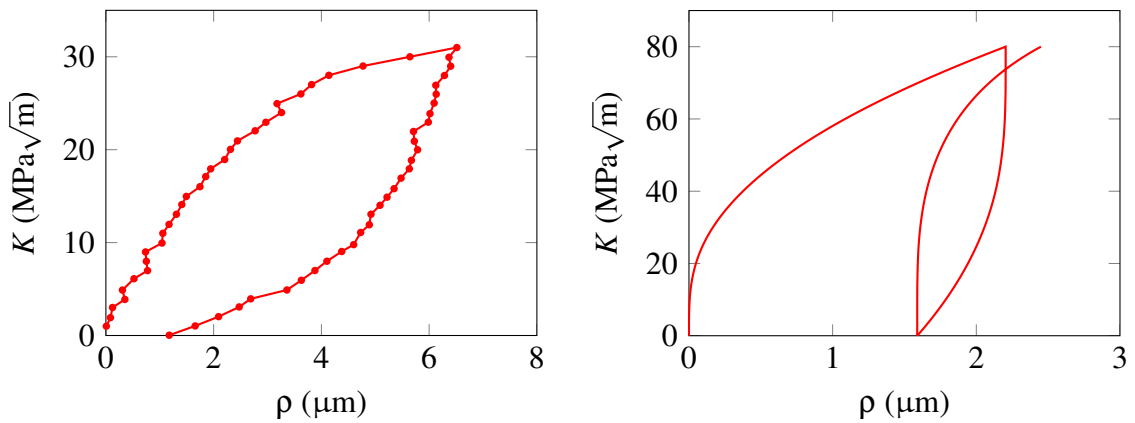
À partir de ces champs, on peut extraire l'évolution de  $\rho$  et ainsi tracer une courbe représentant l'évolution de  $K$  par rapport à  $\rho$  comme le montre la figure 2.12.

On peut observer que les courbes  $K(\rho)$  (cf. figure 2.12) ressemblent sensiblement à des courbes  $\sigma(\varepsilon_p)$ , sauf que les facteurs d'intensité  $K$  et  $\rho$  représentent l'évolution des champs et sont donc des variables non-locales.



(a) Champ de déplacement issu d'un essai [Decreuse, 2010]      (b) Champ de déplacement issu d'une simulation

**FIGURE 2.11** – Champs de déplacement provenant d'un essai et d'une simulation



(a) Évolution de  $K(\rho)$  provenant d'un essai avec suivi du champ de déplacement par corrélation d'images numériques [Decreuse, 2010]      (b) Évolution de  $K(\rho)$  provenant d'une simulation numérique par éléments finis

**FIGURE 2.12** – Évolutions de  $K$  en fonction de  $\rho$  tracées à partir de mesures de champs (CIN) ou d'une simulation (matériaux différents)

Par conséquent, il a été choisi de développer un modèle de comportement inspiré des modèles d'écrouissage en donnant les évolutions de la taille d'un domaine d'élasticité (écrouissage isotrope) ainsi que de son centre (écrouissage cinématique). À la différence qu'ici les évolutions seront exprimées en facteur d'intensité des contraintes  $K$  et non en contrainte  $\sigma$ . Par ailleurs, les dimensions des zones plastiques monotones et cycliques étant différentes (d'un facteur 4 selon la taille de zone plastique d'Irwin), le comportement cyclique est donc différent du comportement monotone en pointe de fissure. Il est alors nécessaire de modéliser les évolutions de deux domaines d'élasticité, l'un monotone, l'autre cyclique.

## 5 Comportement en pointe de fissure

On définit d'abord un ensemble d'équation déterminant le comportement de la région en pointe de fissure, c'est-à-dire l'évolution de l'érouissage plastique, noté  $\rho$ , en fonction du chargement appliqué. Il est équivalent à une loi d'écoulement ou de normalité classique mais avec des variables non locales. En effet, comme vu précédemment, il est possible de tracer l'évolution du facteur d'intensité des contraintes  $K$  en fonction de l'érouissage plastique  $\rho$ . On obtient ainsi des courbes similaires à des courbes  $\sigma - \varepsilon_p$  à l'exception que  $K$  et  $\rho$  sont des facteurs d'intensité portant sur un champ et sont donc des grandeurs non locales. Il est ainsi possible de modéliser le comportement de la région localisée à l'extrémité de la fissure à l'instar d'une loi de comportement  $\sigma = f(\varepsilon_p)$  par un domaine élastique ainsi que l'évolution du centre de ce domaine (cf. figure 2.13).

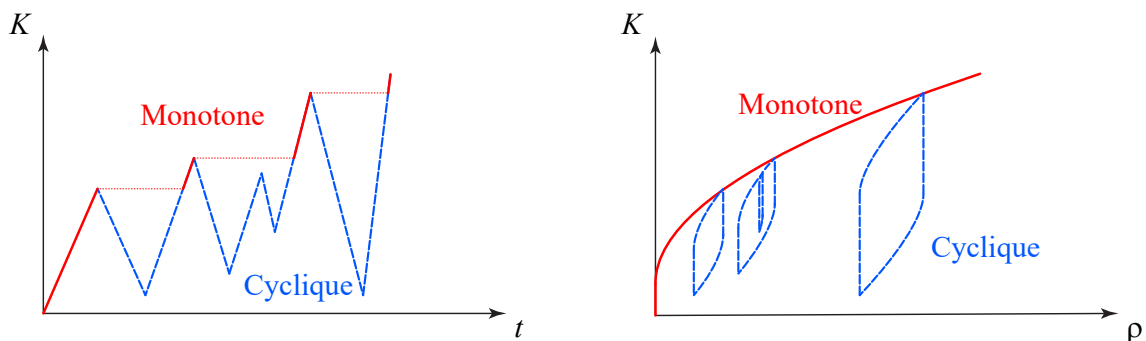
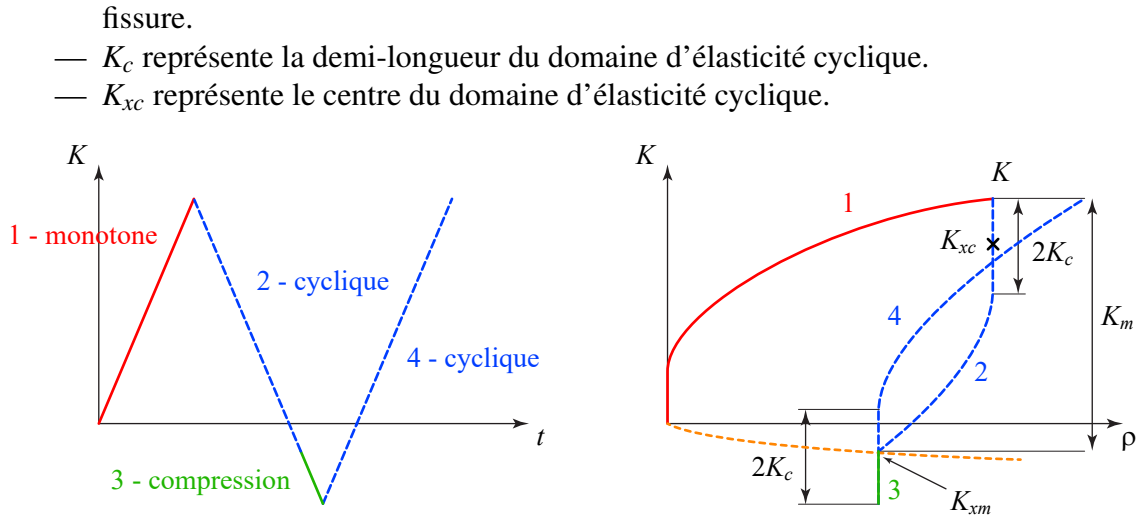


FIGURE 2.13 – Schéma d'un chargement quelconque dans les diagrammes  $K(t)$  et  $K(\rho)$

Comme représenté sur la figure 2.13, le comportement monotone est différent du cyclique. lorsqu'on quitte le domaine cyclique pour entrer dans le monotone, les pentes des deux courbes sont différentes au même point. Par conséquent, il est nécessaire de séparer ces deux comportements et d'avoir des variables internes différentes pour chacun. Ces variables sont les suivantes (cf. figure 2.14) :

- $K_m$  représente la demi-longueur du domaine d'élasticité monotone.
- $K_{xm}$  représente le centre du domaine d'élasticité monotone. Il représente aussi le facteur d'intensité des contraintes pour lequel il y a contact entre les lèvres de la



**FIGURE 2.14** – Définition des domaines d'élasticité cyclique et monotone dans le diagramme  $K(\rho)$

Ces variables internes dépendent de la plasticité  $\rho$  mais également de l'avancée de la fissure  $a$  car le facteur d'intensité des contraintes  $K$  dépend de la longueur de la fissure. Dans le modèle, les évolutions des variables internes en fonction de  $\rho$  et  $a$  seront donc découplées. Elles seront exprimées incrémentalement à partir des dérivées partielles par rapport à  $\rho$  et  $a$ . Les évolutions à déterminer sont donc les suivantes :

$$\left( \begin{array}{cc} \frac{\partial K_m}{\partial \rho} & \frac{\partial K_m}{\partial a} \\ \frac{\partial K_{xm}}{\partial \rho} & \frac{\partial K_{xm}}{\partial a} \end{array} \right) \text{ en monotone et } \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial K_c}{\partial \rho} & \frac{\partial K_c}{\partial a} \\ \frac{\partial K_{xc}}{\partial \rho} & \frac{\partial K_{xc}}{\partial a} \end{array} \right) \text{ en cyclique.} \quad (2.22)$$

Tout d'abord, les évolutions des variables monotones et cyclique en fonction de l'avancée de la fissure  $a$  seront présentées (cf. section 5.1 page 59), puis celles en fonction de  $\rho$  (cf. section 5.2 page 62).

## 5.1 Évolution des variables internes en fonction de $a$

### 5.1.1 Évolution de $K_m(a)$

$K_m$  représente la taille du domaine d'élasticité monotone. En d'autres termes, il indique l'amplitude du chargement de mode I qui doit être appliqué pour étendre la zone plastique monotone située devant l'extrémité de la fissure au-delà de sa taille courante. On peut supposer que l'évolution de  $\rho$  est proportionnelle au carré de  $K$  (cf. section 5.2.3 page 63). On pose donc, en première approximation, en négligeant  $K_{xm}$  devant  $K_m$  :

$$\rho \propto K_m^2 \quad (2.23)$$

Comme on a choisi de représenter de manière simplifiée le champ plastique de la manière suivante (écrit ici pour un chargement monotone), on a :

$$U_p(r, \theta, t) = \rho(t) e^{-2p_a r} g_p(\theta) \quad (2.24)$$

Cette équation découle directement de l'équation (2.19) page 54.

On en déduit que la déformation plastique équivalente décroît exponentiellement avec la distance à la pointe de la fissure et est une fonction linéaire de  $\rho$  :

$$\epsilon_p^{eq}(r) \propto \rho e^{(-2p_a r)} \quad (2.25)$$

Si on définit la taille de la zone plastique comme étant la distance  $r_p$  pour laquelle la déformation plastique équivalente atteint une valeur critère  $\epsilon_p^{crit}$  alors, on aura :

$$\epsilon_p^{crit} \propto \rho e^{(-2p_a r_p)} \Rightarrow \rho \propto \epsilon_p^{crit} e^{(2p_a r_p)} \Rightarrow K_m^2 \propto \epsilon_p^{crit} e^{(2p_a r_p)} \quad (2.26)$$

Soit :

$$K_m \propto \sqrt{\epsilon_p^{crit}} e^{(p_a r_p)} \quad (2.27)$$

Par conséquent :

$$\frac{\partial K_m}{\partial a} = \frac{\partial K_m}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial a} = -\frac{\partial K_m}{\partial r} \propto -p_a \sqrt{\epsilon_p^{crit}} e^{(p_a r_p)} \quad (2.28)$$

Dont on déduit la première équation du modèle :

$$\boxed{\frac{\partial K_m}{\partial a} = -p_a K_m} \quad (2.29)$$

### 5.1.2 Évolution de $K_{xm}(a)$

$K_{xm}$  représente la position du domaine d'élasticité monotone. En d'autres termes, il indique le niveau de chargement extérieur qu'il faut ajouter au chargement induit par les contraintes résiduelles afin que le chargement vu par la fissure soit nul. Ce niveau de contrainte correspond au seuil d'ouverture des fissures induit par plasticité.

Imaginons que le champ de contraintes résiduelles puisse être figé (le matériau ne subit plus de plasticité), et que la fissure se propage dans ce champ de contraintes résiduelles. Les solutions fournies dans les formulaires de mécanique de la rupture pour le facteur d'intensité des contraintes d'une charge ponctuelle en fonction de la distance à la pointe de la fissure montrent que celui-ci diminue lorsque la distance augmente et tend progressivement vers zéro, ce qu'on traduira simplement par :

$$\frac{\partial K_{xm}}{\partial a} = -k_a K_{xm} \quad (2.30)$$

Par ailleurs, lorsqu'une zone plastique (représentée par  $K_m$  et contenant des contraintes résiduelles) passe de devant la pointe de la fissure vers l'arrière de celle-ci (cf. figure 2.15),

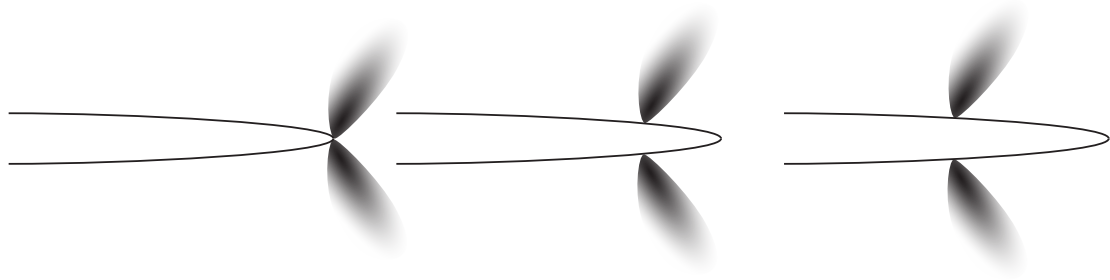


FIGURE 2.15 – Déplacement de la zone monotone lors de l'avancée de la fissure

les contraintes résiduelles pouvant alors maintenir les faces fermées, on observera l'effet inverse :

$$\frac{\partial K_{xm}}{\partial a} = k_b K_m \quad (2.31)$$

Au final, on choisit de représenter l'évolution du seuil d'ouverture par la combinaison de deux contributions décrites en équations (2.30) et (2.31) (cf. figure 2.16) :

$$\frac{\partial K_{xm}}{\partial a} = k_b K_m - k_a K_{xm} \quad (2.32)$$

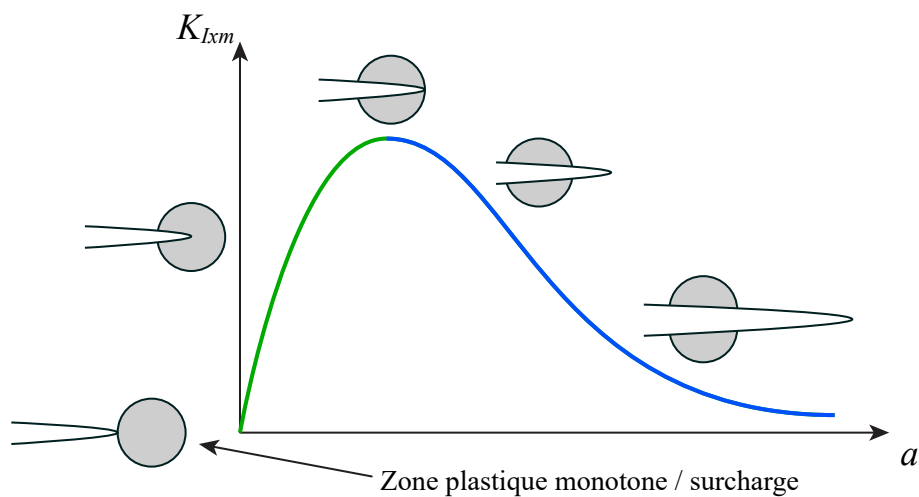


FIGURE 2.16 – Évolution de  $K_{xm}$  en fonction de l'avancée de fissure  $a$

### 5.1.3 Évolution de $K_c(a)$

La taille du domaine d'élasticité cyclique est représentée par  $2K_c$ . On observe que si le matériau ne présente pas d'écrouissage isotrope, cette dimension reste constante. Comme



la fissure est supposée se propager par plasticité, la taille totale du domaine d'élasticité doit être égale au seuil de non-propagation des fissures longues en l'absence de fermeture, soit :

$$2K_c = \Delta K_{th} \quad (2.33)$$

Par conséquent, on a :

$$\boxed{\frac{\partial K_c}{\partial a} = 0} \quad (2.34)$$

#### 5.1.4 Évolution de $K_{xc}(a)$

$K_{xc}$  représente le centre du domaine d'élasticité cyclique. Lors de la propagation de la fissure, si on se trouve sur la frontière des deux domaines d'élasticité (monotone et cyclique), on a :

$$K = K_{xc} + K_c = K_{xm} + K_m \quad (2.35)$$

Par souci de cohérence, on impose alors :

$$\boxed{\frac{\partial K_{xc}}{\partial a} = \frac{\partial K_{xm}}{\partial a} + \frac{\partial K_m}{\partial a}} \quad (2.36)$$

## 5.2 Évolution des variables internes en fonction de $\rho$

### 5.2.1 Évolutions de $K_c(\rho)$

D'après le raisonnement amenant à l'équation (2.33), on sait que  $K_c$  reste constant. Par conséquent,

$$\boxed{\frac{\partial K_c}{\partial \rho} = 0} \quad (2.37)$$

### 5.2.2 Évolutions de $K_{xc}(\rho)$

$K_{xc}$  représentant la position du centre du domaine d'élasticité, le comportement restera élastique ( $d\rho = 0$ ) si pendant le pas de temps  $dK$ , on vérifie toujours :

$$|K - K_{xc}| < K_c \quad (2.38)$$

Sinon, on aura :

$$|K - K_{xc}| = K_c \quad (2.39)$$

Par ailleurs, lorsque de la plasticité se produit, elle conduit à étendre la dimension de la zone plastique. De ce fait, en s'appuyant sur l'analyse d'Irwin [Irwin, 1960] on s'attend à trouver :

$$\rho \propto K^2 \quad (2.40)$$

Il est donc possible d'identifier l'évolution de  $K$  telle que :

$$\boxed{|K(t) - K(t_0)| = 2K_c + a_c \sqrt{|\rho(t) - \rho(t_0)|}} \quad \text{avec } |K - K_{xc}| = K_c \quad (2.41)$$

### 5.2.3 Évolutions de $K_m(\rho)$ et $K_{xm}(\rho)$

En premier lieu, les calculs par éléments finis montrent que l'évolution de la plasticité obéit quasi-idéalement à :

$$K = K_m + K_{xm} = b_m + a_m \sqrt{\rho} \quad (2.42)$$

Néanmoins, il est très difficile de trouver une loi qui soit compatible avec le théorème de Schwarz et qui permette également de respecter l'équation ci-dessus, on utilisera donc plutôt une forme présentant une saturation pour  $K = K_{IC}$  (ténacité du matériau en mode I), et dont la vitesse de saturation sera déterminée afin de coïncider au mieux avec les résultats des simulations numériques, soit :

$$\frac{\partial K_I}{\partial \rho} = \frac{\partial K_m}{\partial \rho} + \frac{\partial K_{xm}}{\partial \rho} = \gamma K_{IC} - \gamma K_m - \gamma K_{xm} \quad (2.43)$$

On peut alors écrire un système de deux équations à deux inconnues, les fonctions  $\frac{\partial K_{xm}}{\partial \rho}$  et  $\frac{\partial K_m}{\partial \rho}$ . En effet, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_m}{\partial \rho} + \frac{\partial K_{xm}}{\partial \rho} &= \gamma K_{IC} - \gamma K_m - \gamma K_{xm} \\ \frac{\partial K_m}{\partial a} &= -p_a K_m \\ \frac{\partial K_{xm}}{\partial a} &= k_b K_m - k_a K_{xm} \end{aligned} \quad (2.44)$$

En dérivant par rapport à  $a$  la première équation, on obtient :

$$\frac{\partial^2 K_m}{\partial \rho \partial a} + \frac{\partial^2 K_{xm}}{\partial \rho \partial a} = \gamma k_a K_{xm} - \gamma(k_b - p_a) K_m \quad (2.45)$$

Par ailleurs, si on dérive l'équation (2.29) par rapport à  $\rho$ , on a :

$$\frac{\partial^2 K_m}{\partial a \partial \rho} = -p_a \frac{\partial K_m}{\partial \rho} \quad (2.46)$$

Et si on fait de même avec l'équation (2.32) :

$$\frac{\partial^2 K_{xm}}{\partial a \partial \rho} = k_b \frac{\partial K_m}{\partial \rho} - k_a \frac{\partial K_{xm}}{\partial \rho} \quad (2.47)$$

En additionnant ces deux équations, on obtient :

$$\frac{\partial^2 K_m}{\partial a \partial \rho} + \frac{\partial^2 K_{xm}}{\partial a \partial \rho} = (k_b - p_a) \frac{\partial K_m}{\partial \rho} - k_a \frac{\partial K_{xm}}{\partial \rho} \quad (2.48)$$

D'après le théorème de Schwarz, on sait que :

$$\frac{\partial^2 K_m}{\partial a \partial \rho} + \frac{\partial^2 K_{xm}}{\partial a \partial \rho} = \frac{\partial^2 K_m}{\partial \rho \partial a} + \frac{\partial^2 K_{xm}}{\partial \rho \partial a} \quad (2.49)$$

D'après les équations (2.45), (2.48) et (2.49), on détermine la deuxième équation du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (k_b - p_a) \frac{\partial K_m}{\partial \rho} - k_a \frac{\partial K_{xm}}{\partial \rho} = \gamma k_a K_{xm} - \gamma (k_b - p_a) K_m \\ \frac{\partial K_m}{\partial \rho} + \frac{\partial K_{xm}}{\partial \rho} = \gamma K_{IC} - \gamma K_m - \gamma K_{xm} \end{array} \right. \quad (2.50)$$

Il suffit ensuite de le résoudre pour obtenir l'expression de chaque dérivée partielle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{\frac{\partial K_m}{\partial \rho} = \frac{k_a}{(k_a + k_b - p_a)} \gamma K_{IC} - \gamma K_m} \\ \boxed{\frac{\partial K_{xm}}{\partial \rho} = \frac{(k_b - p_a)}{(k_a + k_b - p_a)} \gamma K_{IC} - \gamma K_{xm} = a_{xm} - \gamma K_{xm}} \end{array} \right. \quad (2.51)$$

### 5.3 Bilan des équations régissant le comportement en pointe de fissure

Au final, les équations donnant l'évolution des dérivées des paramètres sont :

En monotone :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial K_m}{\partial \rho} = \frac{k_a}{(k_a + k_b - p_a)} \gamma K_{IC} - \gamma K_m \\ \frac{\partial K_{xm}}{\partial \rho} = \frac{(k_b - p_a)}{(k_a + k_b - p_a)} \gamma K_{IC} - \gamma K_{xm} = a_{xm} - \gamma K_{xm} \\ \frac{\partial K_m}{\partial a} = -p_a K_m \\ \frac{\partial K_{xm}}{\partial a} = k_b K_m - k_a K_{xm} \end{array} \right. \quad (2.52)$$

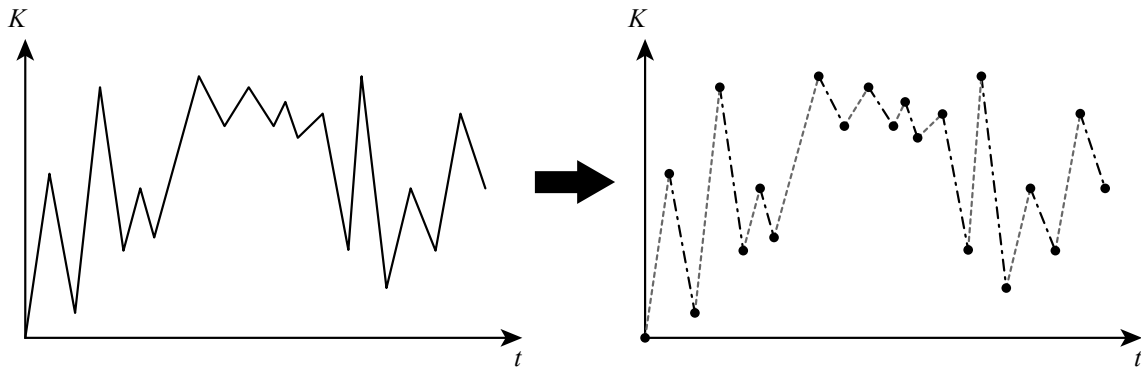
Et en cyclique :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2K_c = \Delta K_{th} \\ |K(t) - K(t_0)| = 2K_c + a_c \sqrt{|\rho(t) - \rho(t_0)|} \text{ avec } |K - K_{xc}| = K_c \\ \frac{\partial K_c}{\partial a} = \frac{\partial K_c}{\partial \rho} = 0 \\ \frac{\partial K_{xc}}{\partial a} = \frac{\partial K_{xm}}{\partial a} + \frac{\partial K_m}{\partial a} \end{array} \right. \quad (2.53)$$

## 6 Implémentation du modèle condensé de plasticité

Cette section présente brièvement la méthode d'implémentation du modèle dans un code de calcul. Les notations utilisées ici sont différentes de celles implémentées dans PROPAG pour Safran Aircraft Engines afin d'alléger les explications de cette section. Le détail complet avec la notation utilisée lors de l'implémentation est présenté dans l'annexe A.

Prenons un chargement quelconque  $K(t)$  issu, par exemple, d'une simulation par éléments finis. Ce chargement est découpé en différents segments ( $\Delta K = K_j - K_i$ ) correspondant au chargement entre deux valeurs extrêmes. Autrement dit, un segment de chargement correspond soit à une charge, soit à une décharge (cf. figure 2.17).



**FIGURE 2.17** – Découpe d'un chargement  $K(t)$  quelconque en différentes charges et décharges

Soit un pas de chargement quelconque  $\Delta K = K_j - K_i$  (cf. figure 2.18).

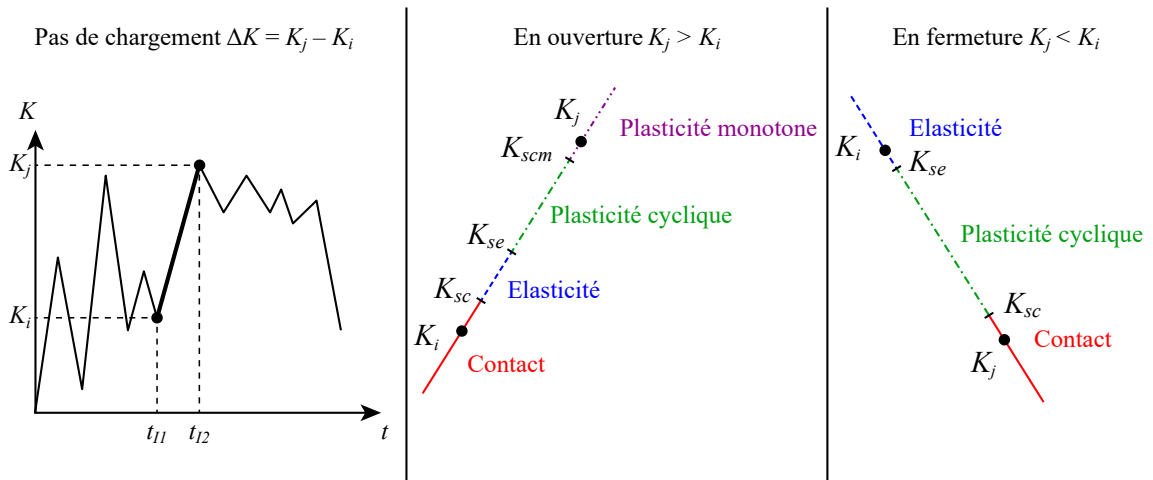
Il est d'abord nécessaire de déterminer si ce pas de chargement correspond à une charge/ouverture ( $K_j > K_i$ ) ou à une décharge/fermeture ( $K_j < K_i$ ). Il faut ensuite déterminer quels domaines de comportement sont parcourus :

- le domaine où les deux faces de la fissure sont en contact ;
- le domaine d'élasticité ;
- le domaine de plasticité cyclique ;
- le domaine de plasticité monotone.

Pour ce faire, les seuils entre les différents domaines sont déterminés à partir des variables du modèle :

- le seuil entre le contact et l'élasticité, noté  $K_{sc}$  ;
- le seuil entre l'élasticité et la plasticité cyclique, noté  $K_{se}$  ;
- le seuil entre la plasticité cyclique et la plasticité monotone, noté  $K_{scm}$ .

Il faut ensuite appliquer les équations d'évolution des domaines parcourus sur les portions de chargement correspondantes. Puis, les différentes variables sont mises à jour et si la rupture n'a pas eu lieu, le programme applique la même méthode au pas de chargement suivant. L'algorithme simplifié est présenté figure 2.19.



**FIGURE 2.18** – Schématisation des différents domaines de chargement

Ces équations d'évolution ainsi que leurs interactions, notamment l'impact du comportement monotone sur le cyclique et inversement, sont présentées en détail dans l'annexe A.

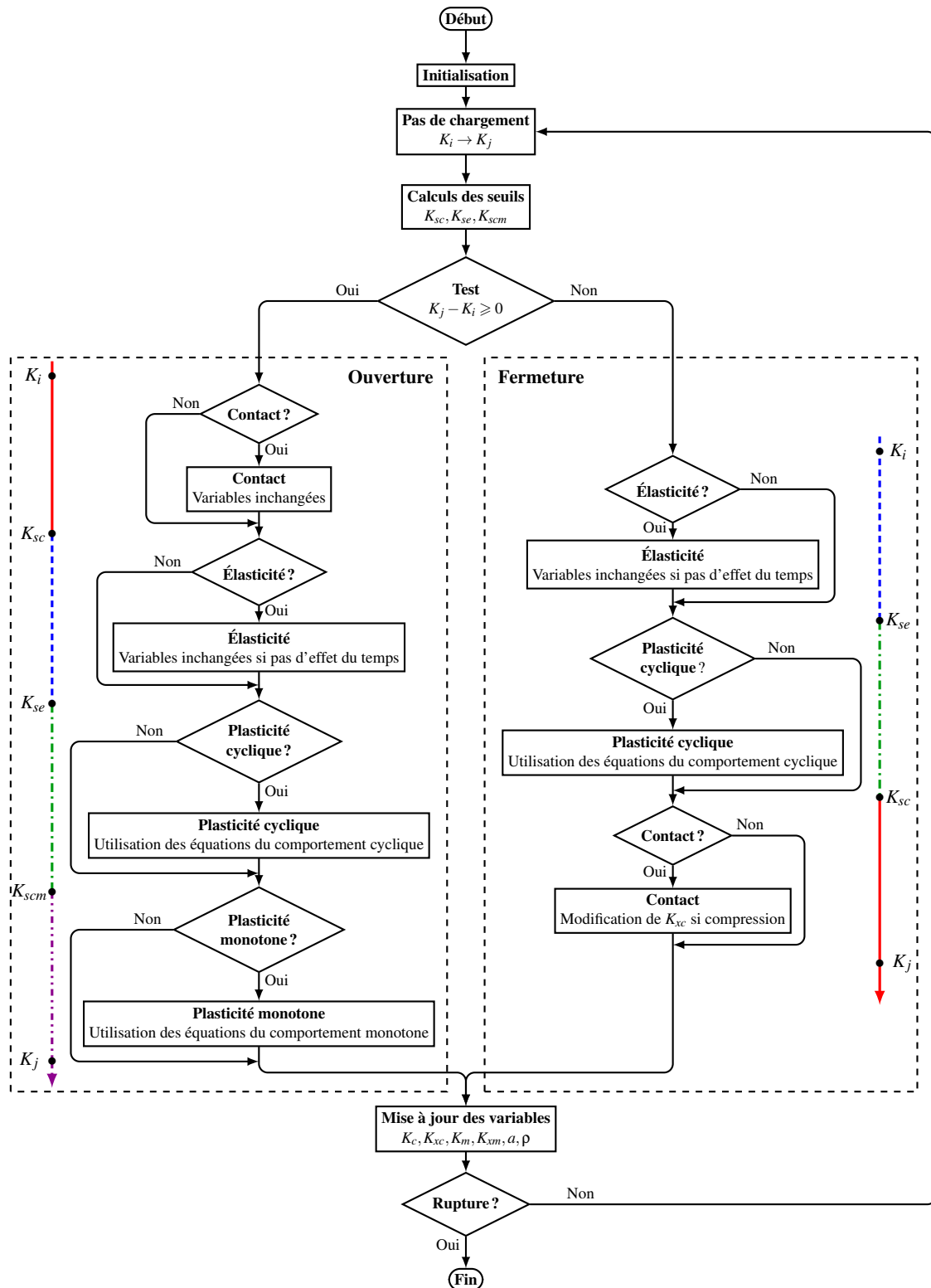


FIGURE 2.19 – Algorithme simplifié représentant le fonctionnement du modèle condensé de plasticité

## 7 Conclusion

Lorsque le chargement s'appliquant sur une fissure est variable, on peut prendre en compte la plasticité en pointe de fissure pour prédire la propagation de celle-ci. Dans le modèle condensé de plasticité, ce comportement plastique est pris en compte par l'utilisation d'une évolution du développement asymptotique de Westergaard étendu à l'élasto-plasticité. Ceci a été réalisé à l'aide de la décomposition de Karhunen-Loève qui permet d'extraire les degrés de liberté essentiels du champ de vitesses en pointe de fissure. Ces degrés de libertés représentent ici de l'élasticité et de la plasticité.

A partir de ce développement asymptotique étendu, il est alors possible d'obtenir le facteur d'intensité du champ élastique  $\tilde{K}$ , homogène à un facteur d'intensité des contraintes, et le facteur d'intensité du champ plastique  $\rho$ , homogène à l'éroussement en pointe de fissure (CTOD). Il est alors possible de décrire l'évolution de  $\tilde{K}$  en fonction de  $\rho$  à la manière d'un modèle d'éroussement plastique.

Différentes variables permettent de représenter ce comportement :

- $K_c$  et  $K_{xc}$  représentent la taille et le centre du domaine d'élasticité du comportement cyclique ;
- $K_m$  et  $K_{xm}$  représentent la taille et le centre du domaine d'élasticité du comportement monotone.

Les variables cycliques  $K_c$  et  $K_{xc}$  représentent les effets « courte distance », c'est-à-dire à l'échelle de la zone plastique cyclique (effets dynamiques). Les variables monotones  $K_m$  et  $K_{xm}$  représentent les effets « longue distance », c'est-à-dire les effets des contraintes résiduelles laissées par la déformation plastique (effets quasi-statiques). Ceux-ci permettent, par exemple, de représenter l'impact d'une surcharge sur la propagation qui peut s'étendre bien plus loin que la taille de la zone plastique produite lors de cette surcharge. Les variables monotones permettent donc de prendre en compte les effets d'histoire du chargement.

Ces quatre variables évoluent en fonction de la longueur de la fissure  $a$  et de la plasticité en pointe de fissure modélisée par l'éroussement  $\rho$ .

Le modèle condensé de plasticité permet donc de décrire les évolutions de  $K_c$ ,  $K_{xc}$ ,  $K_m$  et  $K_{xm}$  en fonction de  $a$  et de  $\rho$  afin de prendre en compte les effets d'histoire lors de la propagation d'une fissure. Ces évolutions sont décrites à l'aide de différents paramètres qu'il est nécessaire d'identifier à l'aide d'une méthode détaillée dans le chapitre suivant. L'évolution de l'avancée de la fissure est, quant à elle, décrite en fonction de celle de l'éroussement plastique par l'intermédiaire de l'équation (2.1).





# Chapitre 3

## Identification des paramètres du modèle condensé de plasticité

*Ce chapitre présente la méthode d'identification des paramètres du modèle condensé de plasticité. Tout d'abord les essais mécaniques nécessaires à la modélisation du comportement du matériau et à la détermination du seuil de non propagation puis la méthode numérique utilisant des calculs par éléments finis et la POD.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>73</b>
<b>2</b>	<b>Essai de comportement cyclique</b>	<b>74</b>
2.1	Méthodologie	74
2.2	Résultats	74
2.3	Identification de la loi de comportement cyclique	75
2.4	Validation de la loi par simulation numérique	77
<b>3</b>	<b>Identification du seuil de non propagation de l'INCO 718 DA</b>	<b>78</b>
3.1	Principe de fonctionnement	78
3.2	Dimensionnement géométrique de l'éprouvette percée	79
3.3	Dimensionnement au flambage de l'éprouvette percée	85
3.4	Détermination expérimentale du seuil de non propagation	87

<b>4</b>	<b>Méthode d'identification des paramètres du modèle</b>	<b>92</b>
4.1	Calcul de la taille maximale de la zone plastique d'Irwin	94
4.2	Détermination de la plage de chargement d'application de la POD	95
4.3	Obtention des champs de référence	95
4.4	Évolution de $K_m(a)$ : identification de $p_a$	95
4.5	Évolution de $K_m(\rho)$ : identification de $\gamma$	96
4.6	Évolution de $K_{xm}(\rho)$ : identification de $a_{xm}$	97
4.7	Évolution de $K_{xm}(a)$ : identification de $k_a$ et $k_b$	99
4.8	Évolution de $K_{xc}(\rho)$ : identification de $a_c$	103
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>107</b>

---

# 1 Introduction

Ce chapitre traite de l'identification des paramètres du modèle condensé de plasticité. Ce dernier est présenté dans le chapitre 2.

Les différents paramètres nécessaires sont donnés dans les trois tableaux suivants :

- le tableau 3.1 présente les paramètres matériau utiles au modèle ;
- le tableau 3.2 présente les paramètres qui doivent être identifiés avec la méthode suivante ;
- le tableau 3.3 présente les paramètres matériau nécessaires aux simulations de la méthode.

<b>Paramètres matériaux issus d'essais</b>	
$\Delta K_{Ih}$	Seuil de non propagation du matériau
$K_{IC}$	Ténacité du matériau

**TABLEAU 3.1** – Paramètres matériaux issus d'essais

<b>Paramètres matériaux à identifier par simulation</b>	
$p_a$	Paramètre donnant la décroissance du champ de déplacement plastique en point de fissure
$k_a$ et $k_b$	Paramètres donnant l'évolution du point de contact de la fissure en fonction de son avancée
$\gamma$	Paramètre d'évolution du facteur d'intensité en fonction de l'émoussement en chargement monotone
$a_c$	Paramètre d'évolution du facteur d'intensité en fonction de l'émoussement en chargement cyclique

**TABLEAU 3.2** – Paramètres matériaux à identifier par simulation

<b>Paramètres matériaux issus d'essais nécessaires aux simulations</b>	
$\nu$	Coefficient de Poisson
$E$	Module d'Young
Autres paramètres de la loi de comportement élastoplastique	

**TABLEAU 3.3** – Paramètres matériaux issus d'essais nécessaires aux simulations

Pour identifier ces paramètres, il est nécessaire de faire quelques essais. Ici, nous présenterons un essai de comportement cyclique (cf. section 2 page 74) qui permet d'obtenir la loi de comportement du matériau utilisable dans les simulations. Ensuite, le dimensionnement et l'utilisation d'une éprouvette permettant d'obtenir très simplement le seuil de non propagation du matériau seront présentés (cf. section 3 page 78). Enfin, la méthode d'identification par simulation sera détaillée (cf. section 4 page 92).

## 2 Essai de comportement cyclique

Le modèle condensé de plasticité sera appliqué sur de l'INCO 718 DA. Afin de pouvoir simuler correctement son comportement, il est nécessaire d'obtenir une loi de comportement cyclique. En effet, le modèle étant censé traiter le cas de la fatigue, c'est le comportement cyclique et non monotone qui nous intéresse. À cette fin, des essais cycliques ont été réalisés sur des éprouvettes de fatigue en INCO 718 DA dont le plan est donné en annexe B. Elles ont été sollicitées en traction-compression cyclique pour différents niveaux de chargement.

### 2.1 Méthodologie

#### 2.1.1 Éprouvette

L'éprouvette qui a été utilisée est une éprouvette de fatigue cylindrique standard dont le dessin de définition est donné en annexe B.

#### 2.1.2 Montage

La machine utilisée est une machine de traction-torsion-compression hydraulique d'une capacité maximale de 10 t. L'éprouvette est maintenue dans un montage permettant de transmettre les efforts en traction et en compression en appuyant sur celle-ci (et non par pincement dans des mors).

#### 2.1.3 Prise de mesure

L'effort est mesuré par la cellule d'effort de la machine et la déformation est mesurée par une jauge de déformation collée au milieu de l'éprouvette.

#### 2.1.4 Chargement appliqué

L'éprouvette est sollicitée en déformation imposée (mesurée par la jauge). Le chargement est constitué de cycles en sinus de traction-compression à  $R = -1$  pour demi-amplitude de 0,1 % à 1,7 % à une fréquence de 0,5 Hz entrecoupés de paliers de 30 s pour observer une éventuelle relaxation (cf. figure 3.1).

## 2.2 Résultats

La figure 3.2 montre l'évolution de l'effort en fonction de la déformation pour des cycles à déformation imposée de  $\pm 1,2\%$ .

Afin d'identifier une loi, cette courbe est transformée en courbe contrainte-déformation (cf. figure 3.3) en divisant l'effort par la section initiale de l'éprouvette.

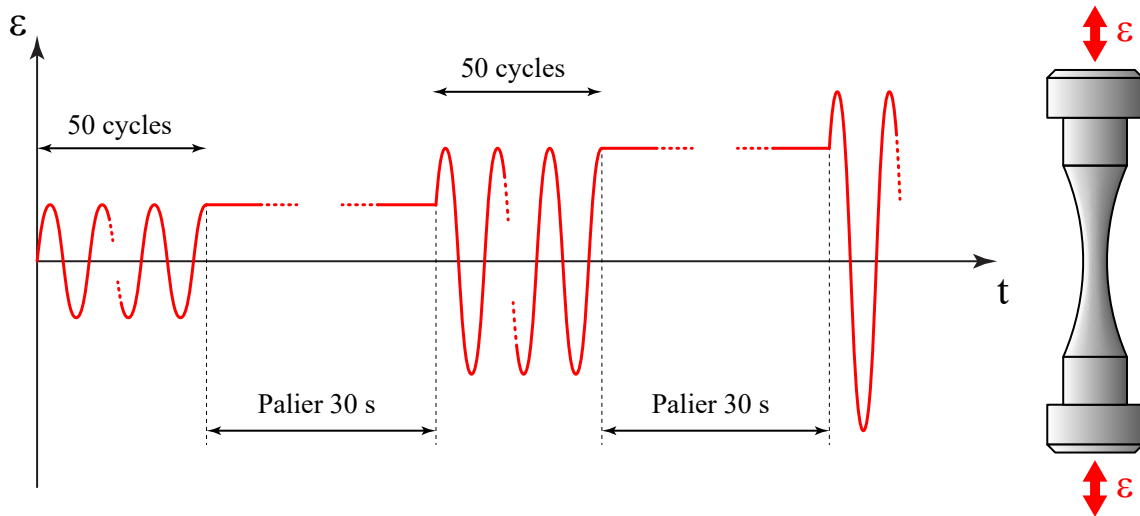


FIGURE 3.1 – Chargement appliqué lors de l'essai cyclique

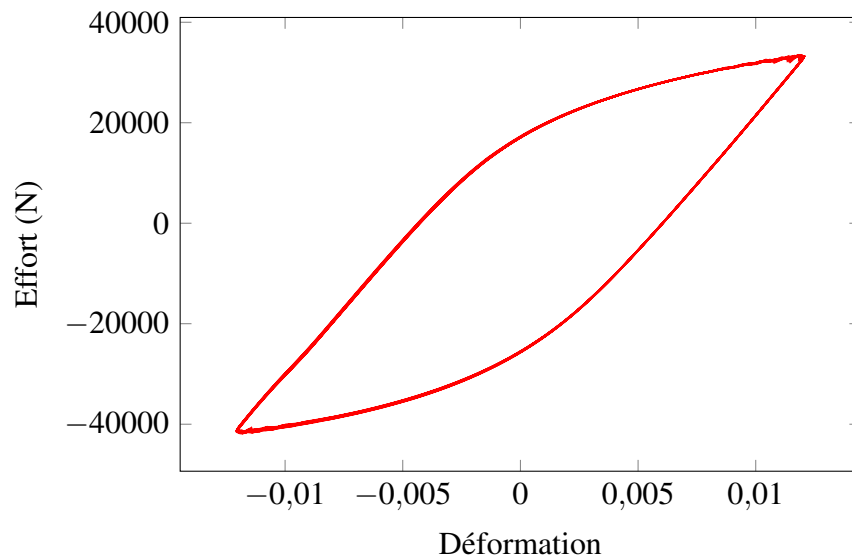
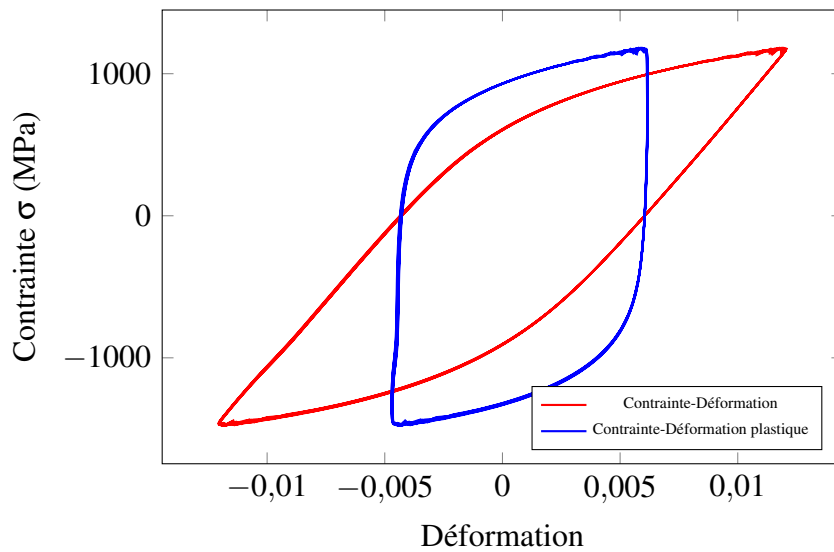


FIGURE 3.2 – Courbe effort-déformation d'une série de cycles à 1,2 % de déformation

### 2.3 Identification de la loi de comportement cyclique

Le module d'Young est égal à la pente de la partie élastique de la courbe. Ici,  $E = 197 \text{ GPa}$ . On peut ensuite déterminer  $R_0 = 647 \text{ MPa}$  ( $R_{p0,2\%} = 1061 \text{ MPa}$ ).

Ensuite, pour déterminer un écrouissage cinématique, on retire la partie élastique de la courbe pour ne garder que l'écrouissage et on trace  $\sigma - R_0$  en fonction de la déformation plastique cumulée  $p$  (cf. figure 3.4). On commence par interpoler le début de la courbe avec un écrouissage de type cinématique. Si un seul écrouissage n'est pas suffisant, on recommence en interpolant l'écart entre la courbe et le premier écrouissage avec un second écrouissage cinématique et ainsi de suite jusqu'à avoir une interpolation correcte.

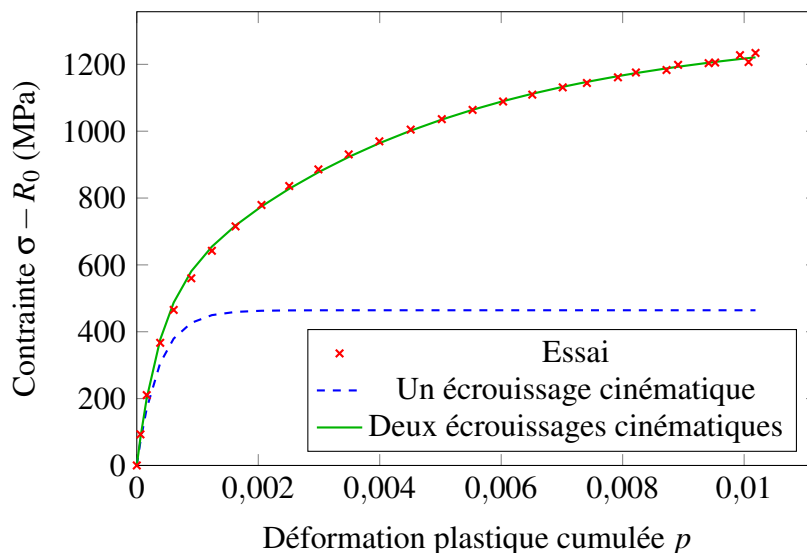


**FIGURE 3.3** – Courbe contrainte-déformation d’une série de cycles à 1,2 % de déformation

Dans notre cas, deux écrouissages cinématiques sont suffisants (cf. figure 3.4). On obtient donc comme loi d’écrouissage :

$$\sigma = R_0 + \frac{C_1}{\gamma_1} (1 - e^{-\gamma_1 p}) + \frac{C_2}{\gamma_2} (1 - e^{-\gamma_2 p}) \quad (3.1)$$

avec  $C_1 = 1\,300\,000$  MPa,  $\gamma_1 = 2800$ ,  $C_2 = 190\,000$  MPa et  $\gamma_2 = 226$ .



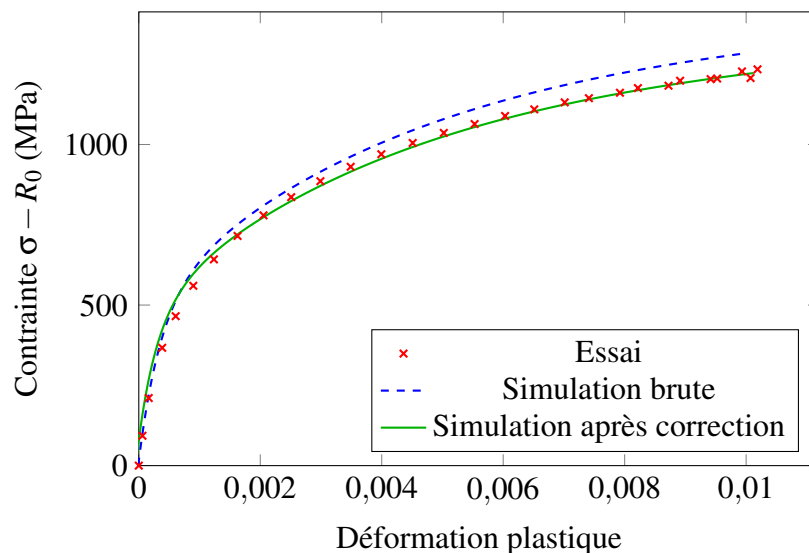
**FIGURE 3.4** – Courbe contrainte  $(\sigma - R_0)$ -déformation plastique d’une série de cycles à 1,2 % de déformation

Afin de la valider, cette loi est utilisée dans une simulation numérique puis le résultat est comparé à l'essai. Ensuite, la loi est éventuellement ajustée pour améliorer l'interpolation du résultat expérimental.

## 2.4 Validation de la loi par simulation numérique

La simulation a été réalisée sur ABAQUS. L'éprouvette de l'essai a été modélisée avec des conditions d'axisymétrie. Une condition de symétrie a été imposée en bas de l'éprouvette pour fixer son déplacement et une condition de déplacement de l'autre côté.

On extrait ensuite la contrainte et la déformation suivant l'axe de l'éprouvette au centre de l'éprouvette et on trace l'une en fonction de l'autre. Il est ainsi possible de comparer cet écrouissage avec celui de l'essai après avoir retiré la partie élastique. On obtient ainsi la courbe tracée en figure 3.5.



**FIGURE 3.5** – Courbe Contrainte ( $\sigma - R_0$ )-Déformation plastique : comparaison simulation et essai

Ensuite, les coefficients sont ajustés pour que la courbe tirée de la simulation interpole mieux celle de l'essai. On obtient ainsi la loi de comportement du matériau suivante :

$$\sigma = R_0 + \frac{C_1}{\gamma_1} (1 - e^{-\gamma_1 p}) + \frac{C_2}{\gamma_2} (1 - e^{-\gamma_2 p}) \quad (3.2)$$

avec  $C_1 = 1\,300\,000$  MPa,  $\gamma_1 = 3000$ ,  $C_2 = 180\,000$  MPa et  $\gamma_2 = 226$ .



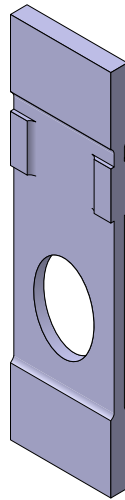
### 3 Identification du seuil de non propagation de l'INCO 718 DA

Ce paragraphe présente une méthode expérimentale d'identification du seuil de non propagation d'un matériau à l'aide d'une nouvelle éprouvette permettant de réaliser un essai de fissuration stable avec un facteur d'intensité des contraintes qui décroît naturellement jusqu'au seuil de non propagation. Ceci permet trois choses :

- déterminer le seuil de non propagation du matériau très simplement,
- obtenir une courbe de propagation simplement,
- obtenir une fissure avec une zone plastique la plus petite possible.

#### 3.1 Principe de fonctionnement

L'éprouvette utilisée (cf. figure 3.6) est une éprouvette soumise à un chargement de fatigue en compression et qui possède un trou elliptique. Elle s'inspire de celle développée par [de Moura Pinho, 2011]. Le plan de l'éprouvette est donné en annexe B.



**FIGURE 3.6** – Éprouvette percée utilisée pour déterminer le seuil de non propagation du matériau

Celui-ci permet, lorsque l'éprouvette subit un chargement en compression d'amplitude constante, de créer un gradient de contrainte de traction décroissant au bord du trou (cf. figure 3.7) provenant de l'effet Poisson. En ajoutant une entaille au bord du trou, une fissure va alors se propager dans ce champ de contrainte. Puisqu'il est décroissant, la fissuration est stable et la fissure va se propager avec un facteur d'intensité des contraintes décroissant jusqu'à s'arrêter une fois le seuil de non propagation atteint. Cet essai a de nombreux avantages :

- Il permet de se passer d'instrumenter l'essai avec un suivi de fissure. Il suffit de mesurer la longueur finale une fois celle-ci arrêtée.
- Il permet également une détermination du seuil plus sûre et beaucoup plus simple qu'avec une éprouvette CT puisque le chargement est à amplitude constante et la fissure s'arrête naturellement grâce au gradient de contrainte.
- De plus, il est possible de tracer des courbes de propagation en utilisant un suiveur de fissure par potentiel électrique ou de la corrélation d'images pour mesurer la longueur de la fissure.
- Enfin, la fissure s'arrêtant au seuil, la zone plastique est la plus petite possible. Il est donc possible d'extraire une éprouvette préfissurée avec une fissure courte avec peu de plasticité à sa pointe. Ceci sera utilisé pour réaliser des éprouvettes contenant une microfissure (cf. chapitre 4 section 3 page 118).

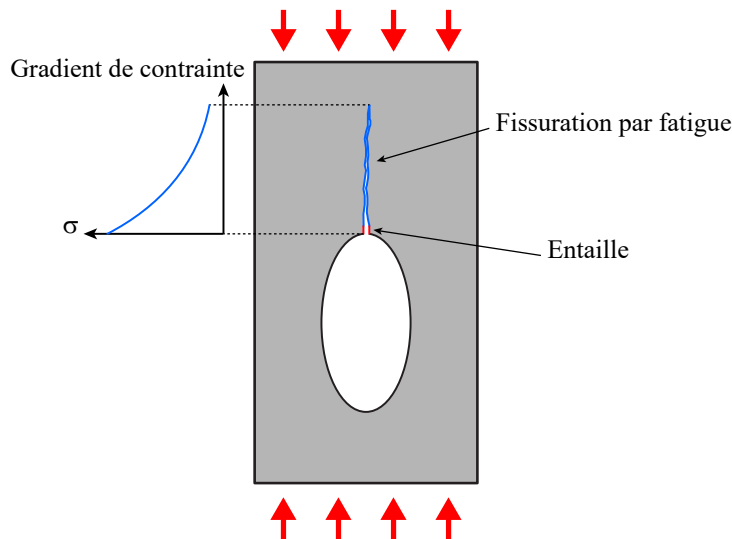


FIGURE 3.7 – Schéma montrant le principe de fissuration de l'éprouvette percée

### 3.2 Dimensionnement géométrique de l'éprouvette percée

Cette éprouvette sera également utilisée pour obtenir une éprouvette SENT contenant une microfissure (cf. chapitre 4 section 3 page 118). C'est pourquoi des petits talons supplémentaires ont été ajoutés sur les côtés de l'éprouvette. Il faut alors tenir compte de leur effet sur l'évolution du facteur d'intensité des contraintes dans l'éprouvette percée. Ceux-ci vont en effet rigidifier l'éprouvette de base, limitant l'effet Poisson et, par la même, la décroissance de  $K$  (cf. section 3.2.2 page 81).

Afin de diminuer cet effet, il a été choisi de laisser un espacement entre les futurs talons de la SENT et ceux de l'éprouvette percée comme on peut le voir sur la figure 3.8.

Le logiciel ABAQUS a été utilisé pour dimensionner cette éprouvette. Des calculs 3D ont été menés pour observer l'impact de divers paramètres géométriques comme les

dimensions de l'ellipse ou celles des talons. Les dimensions de l'éprouvette de départ sont les mêmes que pour celle développée par Raül de Moura Pinho [de Moura Pinho, 2011]. Les simulations ont été réalisées en statique, en supposant le matériau élastique linéaire isotrope.

Les propriétés matériau utilisées sont définies dans le tableau 3.4. Elles ont été obtenues dans la littérature car les essais de comportement n'avaient pas encore été faits.

INCO 718 DA	
Module d'Young	208 GPa
Limite d'élasticité	1172 MPa
Coefficient de Poisson	0,28
$\Delta K_{th}$	$\simeq 2,5 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$

**TABLEAU 3.4** – Propriétés de l'INCO 718 DA utilisées pour les simulations [Newman et Piascik, 2003]

### 3.2.1 Conditions aux limites

La moitié de l'éprouvette a été modélisée afin de limiter les temps de calcul. Les conditions aux limites appliquées sont schématisées en figure 3.8. Des conditions de symétrie ont été appliquées sur la face coupée de l'éprouvette ainsi que sur la face inférieure. Les déplacements d'un des points de la face inférieure ont été bloqués. Une pression est appliquée sur la face supérieure. La valeur de cette pression a été déterminée afin d'avoir un  $K$  initial de l'ordre de  $10 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$  soit 4 fois le seuil de non propagation trouvé dans la littérature [Newman et Piascik, 2003] afin d'être certain que la fissure s'amorce.

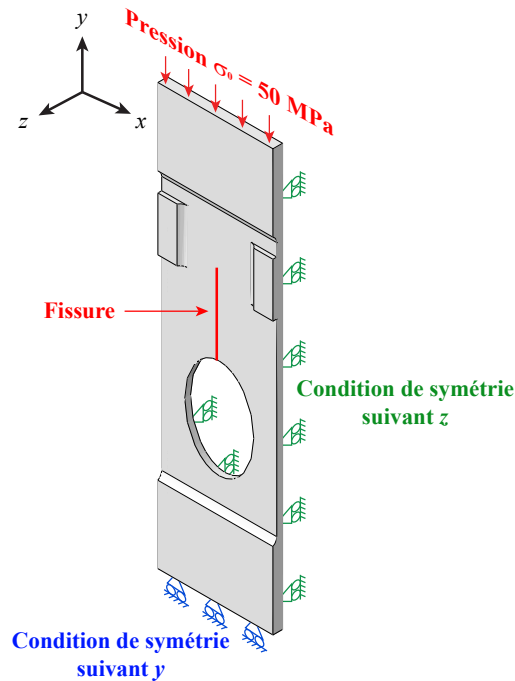


FIGURE 3.8 – Conditions aux limites de la simulation 3D sur l'éprouvette percée

### 3.2.2 Impact des différents paramètres géométriques de l'éprouvette

Les figures 3.9 à 3.12 montrent l'impact de différents paramètres géométriques de l'éprouvette comme la hauteur, la largeur et la position de l'ellipse ou encore la longueur des talons. L'entaille de départ,  $a_0$ , mesure 3 mm.

Il est important que la décroissance du facteur d'intensité des contraintes  $K$  soit suffisamment lente. Celle-ci doit être de la forme [ASTM E-647, 2003] :

$$K = K_0 e^{-0,08(a-a_0)} \quad (3.3)$$

avec  $K$ , le facteur d'intensité des contraintes *courant*,  $K_0$ , le facteur d'intensité des contraintes *initial*,  $a$ , la longueur totale de la fissure et  $a_0$ , la longueur de l'entaille.

La courbe de décroissance de  $K$  doit être au-dessus de celle définie par l'équation (3.3) de façon à ne pas être trop importante. Elle ne doit pas non plus être trop au-dessus car la fissure risquerait d'être trop longue une fois le seuil de non propagation atteint et il serait difficile de prélever une SENT par la suite.

On peut observer sur la figure 3.12 que les talons ralentissent la décroissance de  $K$ , ce qui tend à rallonger la fissure finale. De plus, il semble que plus l'ellipse est large, plus la courbe se rapproche de la courbe limite (cf. figure 3.10).

### 3.2.3 Éprouvette finale

En jouant sur les différents paramètres évoqués précédemment, une géométrie d'éprouvette permettant d'obtenir une décroissance convenable de  $K$  a été trouvée. L'évo-

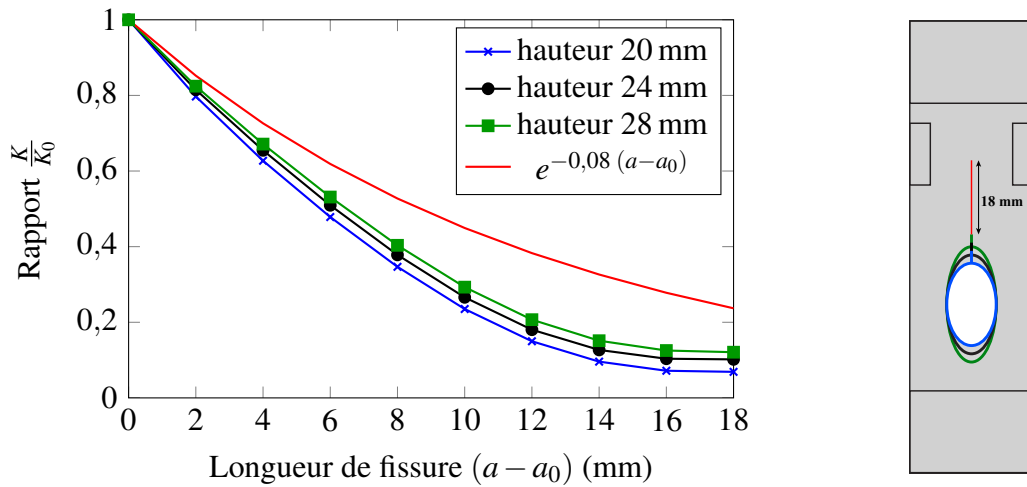


FIGURE 3.9 – Influence de la hauteur de l'ellipse sur l'évolution de  $K$ ,  $a_0 = 3$  mm

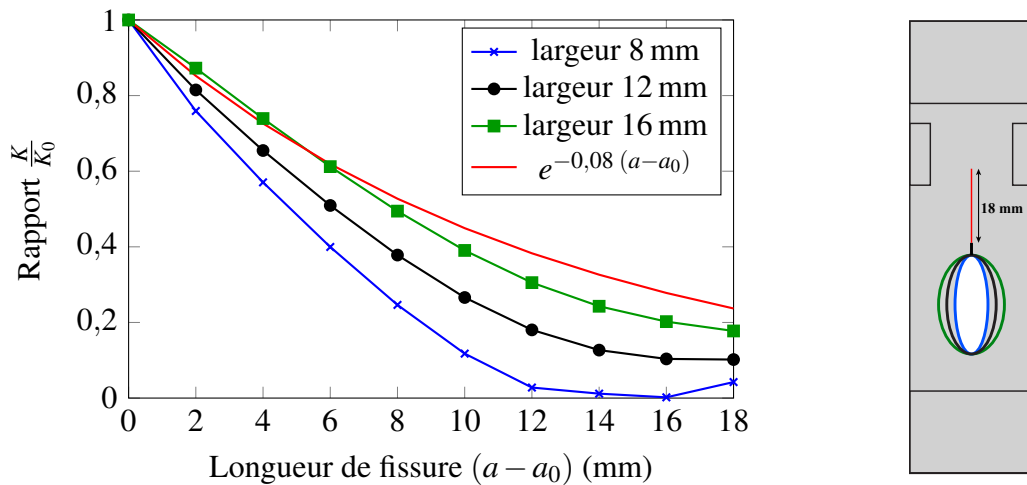


FIGURE 3.10 – Influence de la largeur de l'ellipse sur l'évolution de  $K$ ,  $a_0 = 3$  mm

lution du rapport  $\frac{K}{K_0}$  correspondante est donnée en figure 3.13.

Les évolutions du facteur d'intensité des contraintes  $K$  et de la contrainte  $T$  dans l'éprouvette finale sont données en figure 3.14. Le tableau 3.5 donne les valeurs de  $K$  et  $T$  en fonction de la longueur de fissure.

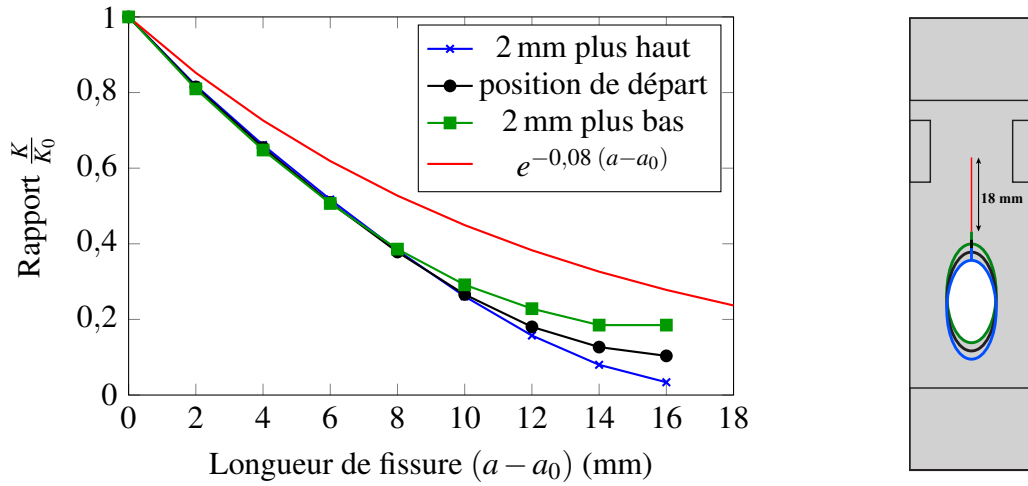


FIGURE 3.11 – Influence de la position de l'ellipse sur l'évolution de  $K$ ,  $a_0 = 3$  mm

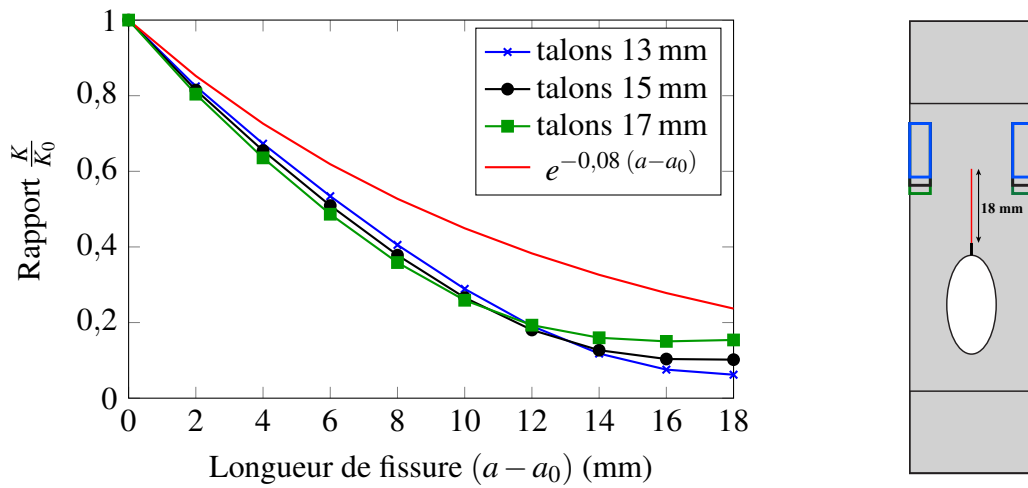
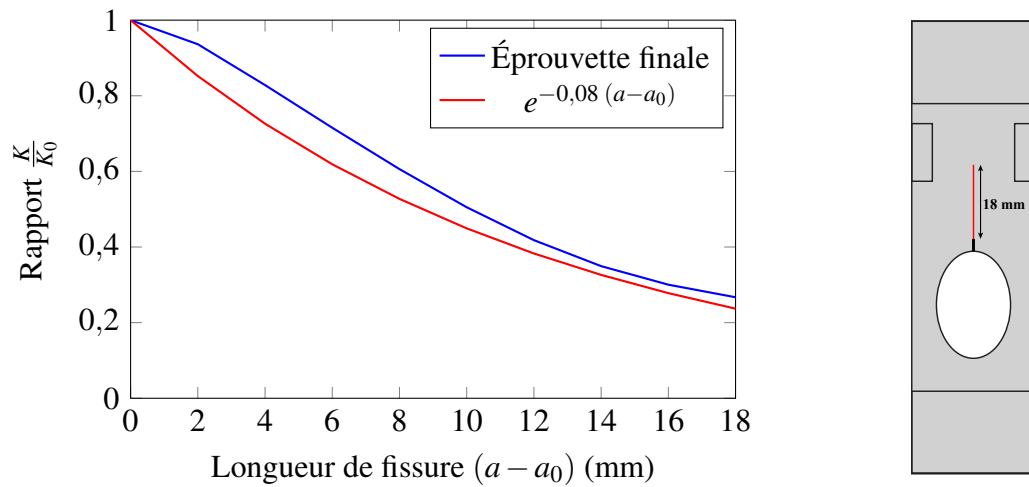
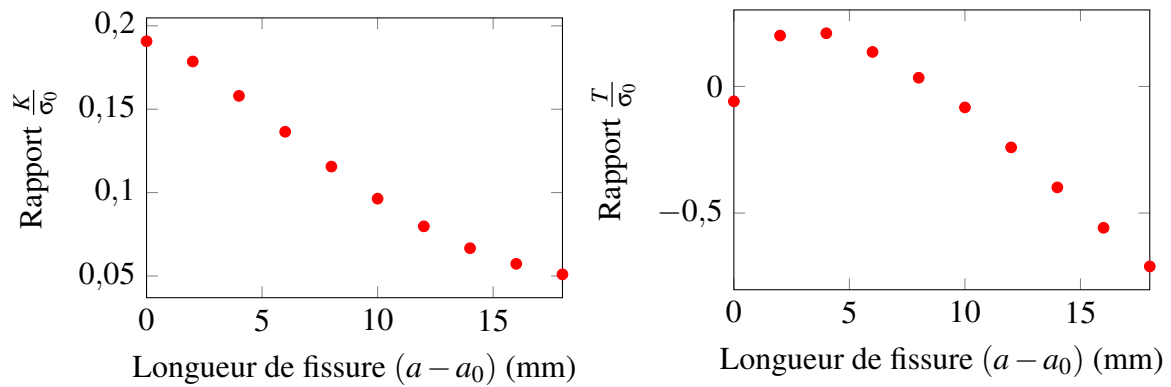


FIGURE 3.12 – Influence de la longueur des talons sur l'évolution de  $K$ ,  $a_0 = 3$  mm

FIGURE 3.13 – Géométrie finale de l'éprouvette,  $a_0 = 3$  mmFIGURE 3.14 – Évolution de  $K$  et de la contrainte  $T$  rapportés à la contrainte appliquée  $\sigma_0$ 

Longueur de fissure ( $a - a_0$ ) (mm)	$K$ (MPa $\sqrt{m}$ )	$T$ (MPa)
0	9,5	-2,9
2	8,9	10,0
4	7,9	10,5
6	6,8	6,8
8	5,8	1,7
10	4,8	-4,1
12	4,0	-12,0
14	3,3	-19,9
16	2,9	-27,9
18	2,5	-35,5

TABLEAU 3.5 – Valeurs de  $K$  et  $T$  pour une contrainte appliquée de 50 MPa

### 3.3 Dimensionnement au flambage de l'éprouvette percée

L'éprouvette étant élancée et sollicitée en compression, il est impératif de la dimensionner en s'assurant qu'elle ne flambe pas lorsque qu'on la charge. Pour ce faire, une simulation a été réalisée avec le logiciel ABAQUS pour déterminer la contrainte critique pour laquelle l'éprouvette passe en mode de flambage.

Les propriétés matériau utilisées sont définies dans le tableau 3.4.

#### 3.3.1 Conditions aux limites

Les conditions aux limites appliquées sont schématisées en figure 3.15. Des conditions de symétrie ont été appliquées sur les talons de l'éprouvette pour simuler les mors. La face inférieure est fixée en appliquant une condition de symétrie et en bloquant les déplacements d'un de ses points. Une pression est appliquée sur la face supérieure.

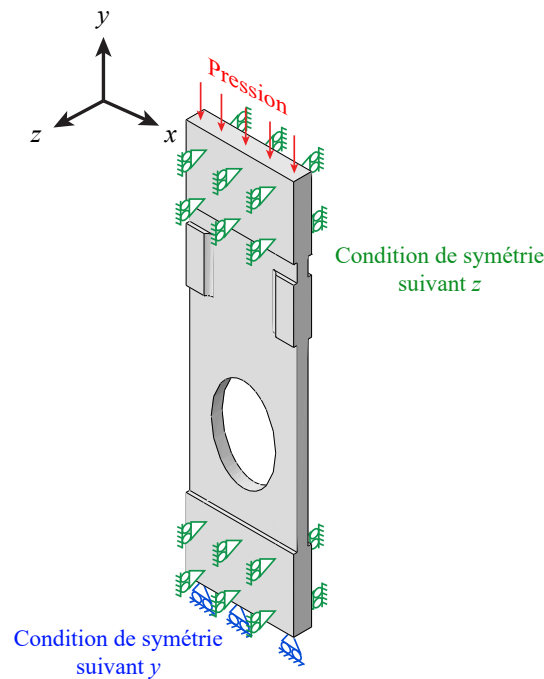


FIGURE 3.15 – Conditions aux limites de la simulation de flambage sur l'éprouvette percée

#### 3.3.2 Résultats

Le tableau 3.6 référence les valeurs des différentes contraintes critiques pour chaque mode de flambage. Le mode le plus incapacitant est le premier mode (cf. figure 3.16) car il a lieu à la contrainte la plus basse. Dans notre cas, la contrainte correspondante est de 646 MPa. La contrainte à appliquer pour obtenir l'évolution de  $K$  souhaitée étant de 298 MPa (cf. section 3.2.1 page 80), celle-ci est bien inférieure à la contrainte critique de



flambage. Cette géométrie d'éprouvette est donc valide pour notre utilisation. Le plan de l'éprouvette finale est en annexe B.

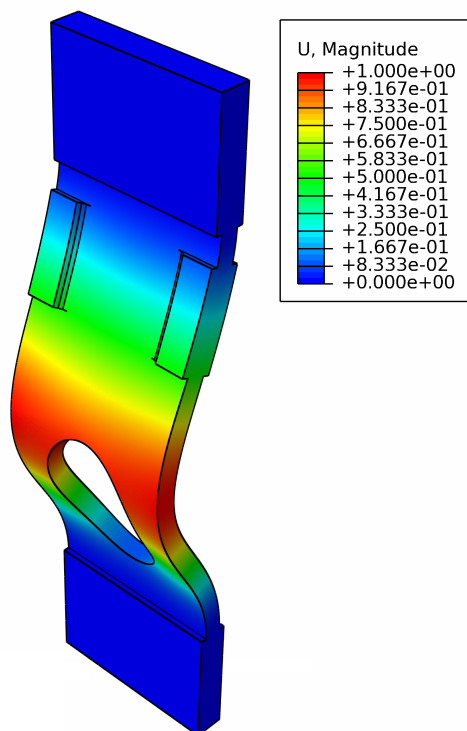


FIGURE 3.16 – Déformée et champ de déplacement dans l'éprouvette percée

Mode	Contrainte (MPa)
1	646
2	1218
3	1309
4	1760
5	2342
6	3068
7	3194
8	3477
9	3987
10	5009

TABLEAU 3.6 – Valeurs de la contrainte critique de flambage pour chaque mode de flambage

### 3.4 Détermination expérimentale du seuil de non propagation

#### 3.4.1 Montage

La machine utilisée est une machine MTS de traction-compression hydraulique d'une capacité maximale de 10 t. L'éprouvette est pincée dans les mors de la machine.

#### 3.4.2 Prise de mesure

L'effort est mesuré par la cellule d'effort de la machine et la longueur de la fissure est mesurée par un suiveur de fissure électrique. De plus, une caméra EOS Pixelfly montée sur un objectif télécentrique de grossissement 0,125 permet de suivre la fissure par voie optique ou par corrélation d'images (cf. figure 3.17).

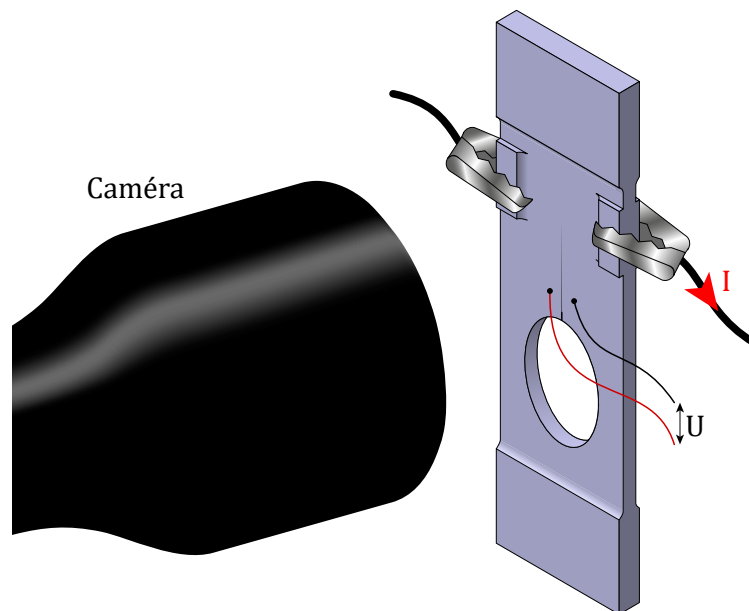


FIGURE 3.17 – Schéma du montage de l'essai de préfissuration

#### 3.4.3 Calibration du suiveur de fissure

Le suiveur de fissure permet de suivre l'évolution de la longueur d'une fissure dans un métal. Pour cela, un courant est envoyé dans l'éprouvette et une mesure de tension est effectuée de chaque côté de la fissure. Lorsque celle-ci se propage, les lignes de courant doivent parcourir une distance plus importante pour la contourner. Ceci a pour effet d'augmenter la résistance et donc la tension mesurée par le suiveur. Il est ainsi possible de relier la longueur de la fissure (obtenue à l'aide de marquages par exemple) à la tension mesurée en traçant une courbe de calibration  $\frac{a}{a_0} = \frac{U}{U_0}$  avec :

—  $U$ , la tension mesurée ;

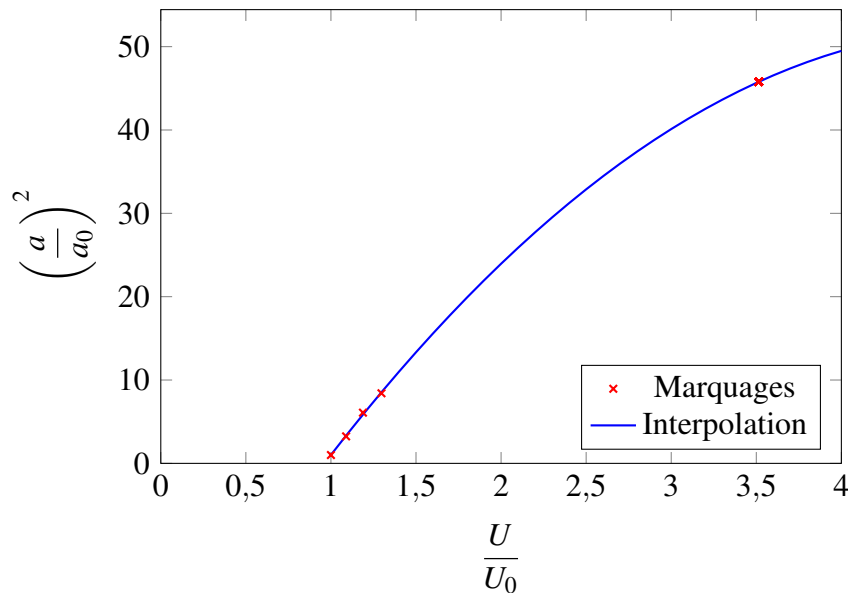
- $U_0$ , la tension mesurée initiale (lorsque  $a = a_0$ );
- $a$ , la longueur mesurée de la fissure;
- $a_0$ , la longueur initiale de la fissure (longueur de l'entaille).

Il suffit ensuite d'interpoler cette courbe par une fonction polynomiale et d'utiliser l'équation obtenue pour tracer l'évolution de la longueur de la fissure en fonction du nombre de cycles.

Ici, il a été choisi de tracer  $\left(\frac{a}{a_0}\right)^2 = \frac{U}{U_0}$  puis la courbe a été interpolée par la fonction suivante (cf. figure 3.18) :

$$\left(\frac{a}{a_0}\right)^2 = -3,39 \left(\frac{U}{U_0}\right)^2 + 33,10 \frac{U}{U_0} + 28,69 \quad (3.4)$$

Les longueurs de fissure lors des marquages ont été mesurées sur l'éprouvette *post mortem* à l'aide d'un microscope numérique confocal VHX-900F de la marque Keyence.



**FIGURE 3.18** – Interpolation de la courbe de calibration à partir des marquages avec  $a_0 = 3 \text{ mm}$

Il est alors possible de tracer la courbe de calibration qui donne l'évolution de  $a$  en fonction du rapport  $\frac{U}{U_0}$  pour tous les essais sur ce type d'éprouvette (cf. équation (3.5)). En effet, lors d'un nouvel essai, les points de mesure du suiveur ne vont pas être exactement au même endroit, la valeur de  $U_0$  sera donc modifiée. Cependant, le rapport  $\frac{U}{U_0}$  restera inchangé. C'est pourquoi cette courbe de calibration ne dépend que de l'éprouvette et peut être utilisée pour tous les essais.

$$a = a_0 \sqrt{-3,39 \left(\frac{U}{U_0}\right)^2 + 33,10 \frac{U}{U_0} + 28,69} \quad (3.5)$$

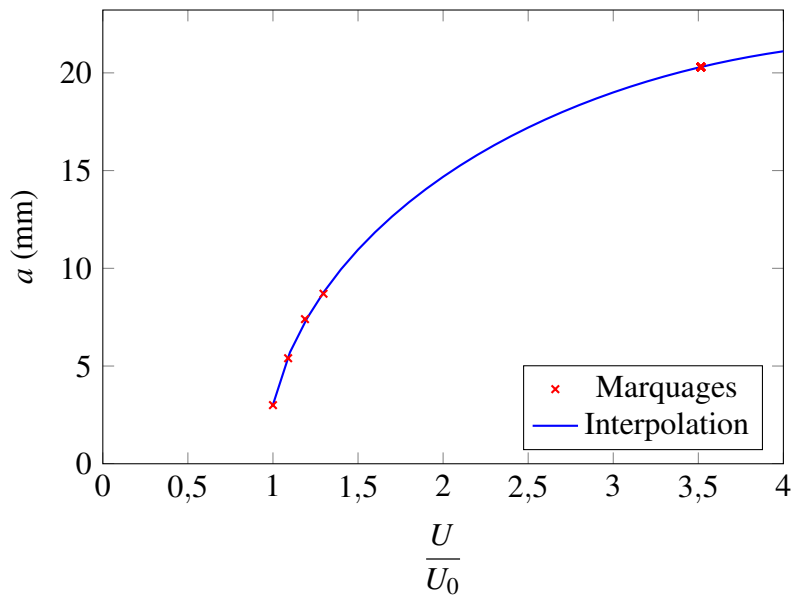


FIGURE 3.19 – Courbe de calibration pour l'éprouvette percée

### 3.4.4 Chargement appliqué

L'éprouvette est sollicitée par un chargement de fatigue à effort imposé (mesuré par la cellule). Le chargement est constitué de cycles à un rapport de charge  $R = 0,1$  et  $|F|_{max} = 20\text{kN}$ , puis de paliers aux efforts minimum et maximum pour prendre des photos et enfin des cycles à un rapport de charge différent ( $R = 0,55$ ) afin de marquer la surface de rupture pour calibrer le suiveur (cf. figure 3.20).

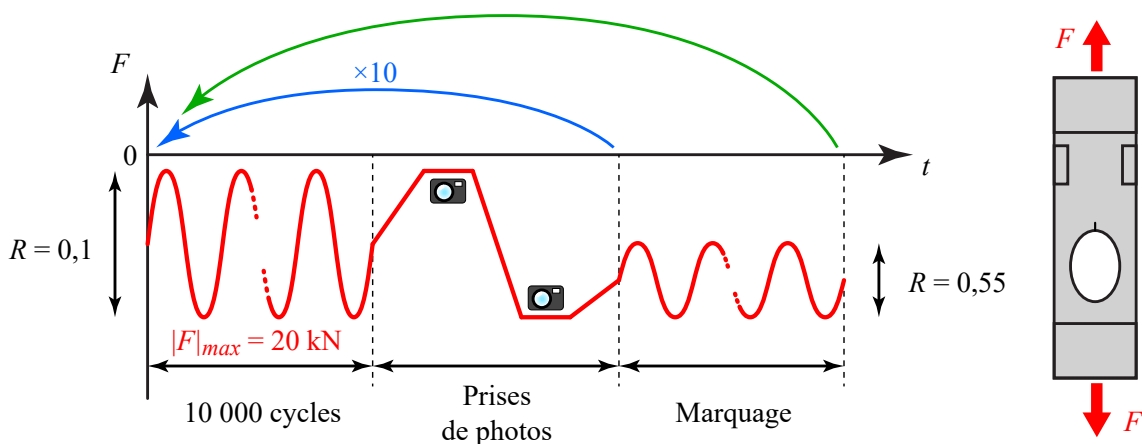


FIGURE 3.20 – Chargement appliqué lors de l'essai de préfiabilité

### 3.4.5 Marquage

Le marquage a pour but de laisser une marque sur la surface de rupture. Pour cela, il suffit de modifier la vitesse de propagation de la fissure. Celle-ci en se propageant moins vite augmente l'oxydation de la surface de rupture laissant une marque plus sombre. Cependant, afin d'éviter un effet de surcharge, il est important de conserver le même effort maximal en valeur absolue ( $|F|_{max}$ ) et de modifier la valeur de l'effort minimal en valeur absolue ( $|F|_{min}$ ) pour modifier le rapport de charge et par conséquent, la vitesse de propagation de la fissure.

### 3.4.6 Remarque sur l'obtention du seuil de non-propagation

Avec ce type d'essai, il est aisé d'obtenir le seuil de non propagation du matériau. Il suffit d'appliquer un chargement constant et laisser se propager la fissure jusqu'à ce qu'elle s'arrête. Ensuite, en augmentant légèrement le chargement, la fissure va se propager de nouveau créant ainsi un marquage sur la surface de rupture de l'éprouvette (cf. figure 3.24). Ceci permet de mesurer très précisément la longueur de la fissure au seuil de non-propagation. On peut ainsi obtenir la valeur du seuil de non-propagation en modélisant cette éprouvette dans un logiciel de calcul par éléments finis et déterminer le facteur d'intensité des contraintes qui correspond à cette longueur de fissure pour le chargement appliqué lors de l'essai. Une méthode encore plus rapide serait de démonter l'éprouvette après l'arrêt de la fissure et de la remonter perpendiculairement et tirer pour la casser complètement. On aurait également un marquage entre la surface de fissuration par fatigue et la fissuration en chargement monotone.

### 3.4.7 Résultats

Une courbe de propagation dans l'INCO 718 DA avec un rapport de charge  $R = 0,1$  est montrée en figure 3.21.

Le seuil de non propagation obtenu lors de cet essai est égal à  $4,9 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ . Ceci est en accord avec les données utilisées par Snecma puisqu'ils considèrent un seuil de  $5 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ .

### 3.4.8 Observation de la surface de rupture

L'éprouvette a été découpée après l'essai pour observer la surface de rupture. On peut voir en figure 3.22 l'entaille de l'éprouvette à droite, quelques marquages à sa gauche et un tout à gauche très net qui montre la forme du front de fissure à la fin de l'essai. Celui-ci a été obtenu par augmentation du chargement suite à l'arrêt de la fissure. On peut observer qu'il est particulièrement bombé alors qu'en étant proche du seuil, il aurait dû être plus droit qu'au début de l'essai. Ceci est probablement dû aux contraintes résiduelles produites par le fraisage dans cette partie de l'éprouvette.

Le front de fissure est bombé sur près de  $600 \mu\text{m}$  (cf. figures 3.23 et 3.24). Afin d'avoir une microfissure d'une profondeur de l'ordre de  $100 \mu\text{m}$  par polissage, il sera donc néces-

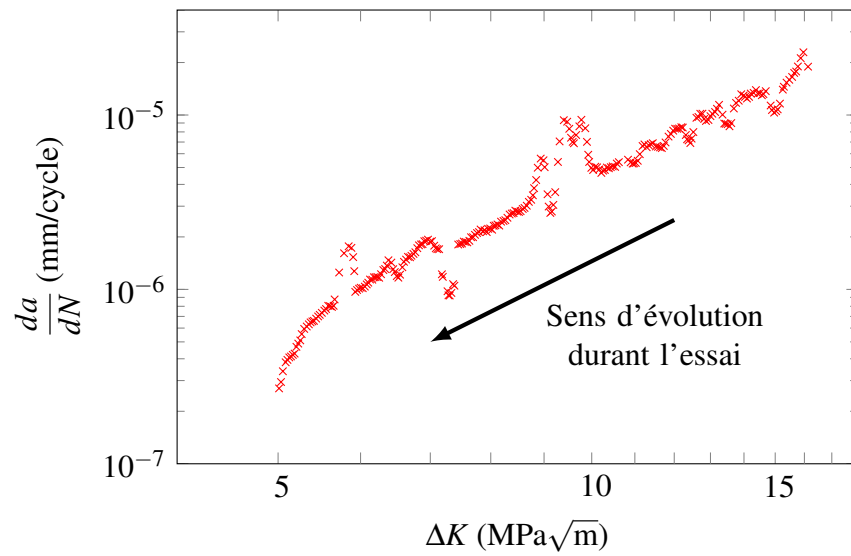


FIGURE 3.21 – Courbe de propagation (R = 0,1) dans l'INCO 718 DA

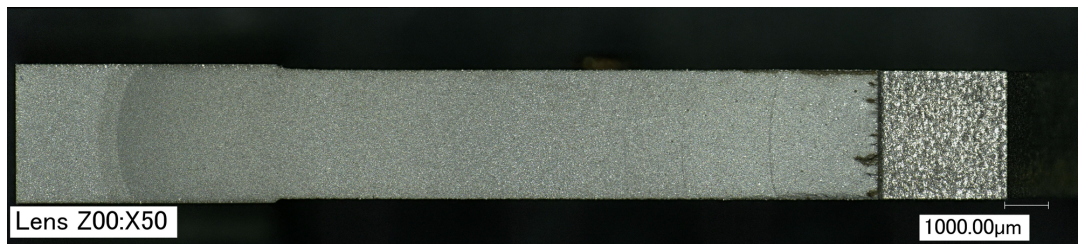


FIGURE 3.22 – Faciès de rupture de l'éprouvette

saire de mesurer la largeur de la fissure à l'arrière en tenant compte du rayon de courbure du front pour déterminer sa profondeur.

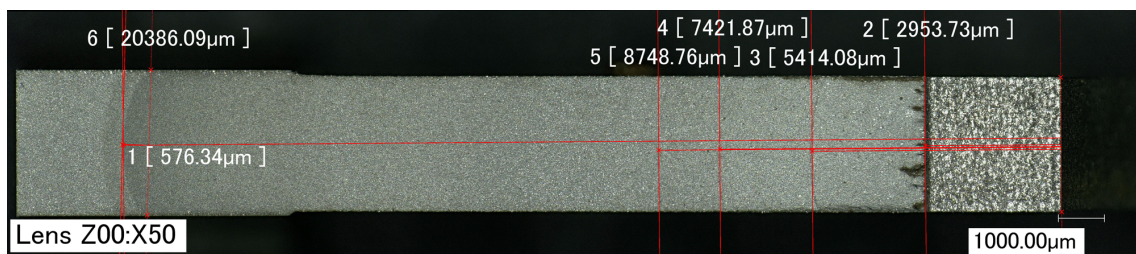


FIGURE 3.23 – Faciès de rupture de l'éprouvette - Marquages

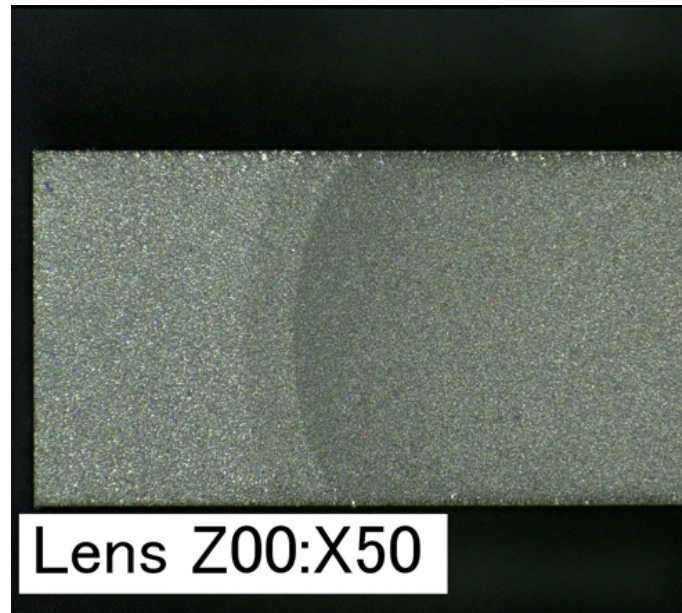


FIGURE 3.24 – Faciès de rupture de l'éprouvette - Front de fissure

## 4 Méthode d'identification des paramètres du modèle

Les différents paramètres du modèle condensé de plasticité sont obtenus par extraction d'informations (champs de déplacement, champs de contrainte) en pointe de fissure. Ces champs sont extraits à partir de calculs par éléments finis utilisant une loi de comportement élasto-plastique standard obtenue lors d'essais cycliques.

Le champ de déplacement est décomposé en utilisant une décomposition de Karhunen-Loève (cf. chapitre 2 section 4.2 page 47) séparant ainsi élasticité et plasticité mais également les dépendances radiales et angulaires du champ. Il devient ensuite possible par simple projection du champ élastoplastique sur des champs de référence d'obtenir l'évolution de l'érousement plastique  $\rho$  et ainsi tracer des courbes  $K(\rho)$ . C'est à partir de ces courbes que la plupart des paramètres est identifiée. La contrainte devant la pointe de fissure est également extraite afin d'identifier l'évolution des variables (notamment  $K_{xm}$ ) en fonction de l'avancée de fissure.

Les calculs ont été réalisées avec ABAQUS et post-traités avec des scripts Python. Le modèle 2D utilisé est donné en figure 3.25. Les différentes variables sont détaillées dans le chapitre 2.

La méthode d'identification est la suivante :

- une simulation élastique permet de déterminer le champ élastique  $\underline{\phi}_e$  ;
- une simulation élastoplastique permet de déterminer le champ de déplacement élastoplastique  $\underline{U}_{ep}$  ;
- le champ de déplacement plastique  $\underline{U}_p$  est obtenu en retirant la partie élastique du champ ;
- le champ est adimensionné pour obtenir  $\underline{\phi}_p$  tel que  $\rho$  soit égal au CTOD. Par la

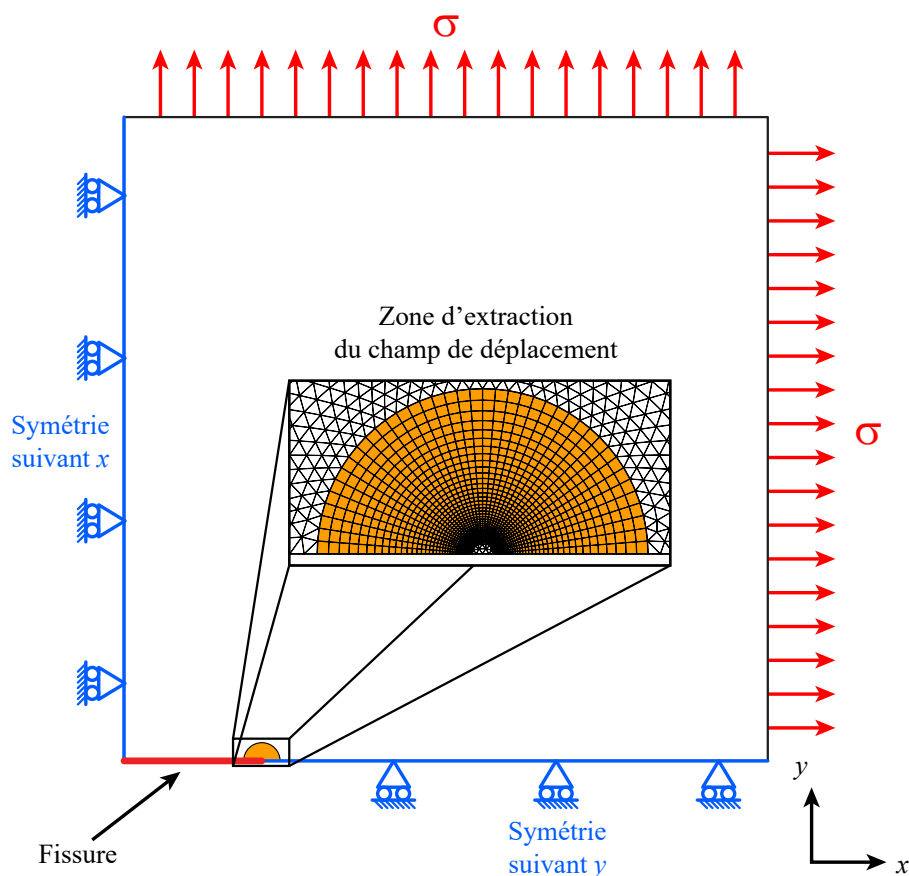


FIGURE 3.25 – Modèle utilisé pour l'identification des paramètres

- même occasion, le paramètre  $p_a$  est obtenu ;
- des courbes  $K(\rho)$  sont tracées pour déterminer les évolutions de  $K_m(\rho)$ ,  $K_{xm}(\rho)$ ,  $K_{xc}(\rho)$  ;
  - enfin, des simulations avec extraction de la contrainte devant la pointe de la fissure sont réalisées pour déterminer les courbes de  $K_{xm}(a)$ .

Les équations du modèle sont alors intégrées pour pouvoir réaliser les identifications des paramètres sur les courbes obtenues par simulation.

Le champ de déplacement est extrait sur un maillage structuré autour de la pointe de la fissure (cf. figure 3.25). Les dimensions de cette zone dépendent du matériau car il faut qu'elle englobe toute la zone plastique au chargement maximum pour pouvoir déterminer proprement le champ plastique du modèle. En effet, celui-ci dépend de la zone sur laquelle est extrait le déplacement. C'est pourquoi les deux paragraphes suivants détaillent la méthode pour adapter la taille de cette zone ainsi que le chargement maximal à atteindre pour pouvoir déterminer au mieux le champ plastique par POD.



#### 4.1 Calcul de la taille maximale de la zone plastique d'Irwin

Afin de déterminer la taille de la zone d'extraction des champs de déplacement, nous allons calculer la taille maximale de la zone plastique d'Irwin du matériau. Pour ce faire, on calcule la contrainte équivalente de von Mises à partir du champ de contraintes de la mécanique de la rupture en mode I en **déformations planes** (cf. équation (3.6)).

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx}(r,\theta) &= \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\
 \sigma_{yy}(r,\theta) &= \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\
 \sigma_{xy}(r,\theta) &= \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\
 \sigma_{zz}(r,\theta) &= \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \\
 \sigma_{xz}(r,\theta) &= \sigma_{yz}(r,\theta) = 0
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

La contrainte équivalente de von Mises est définie par :

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2)} \tag{3.7}$$

Après calcul, on obtient :

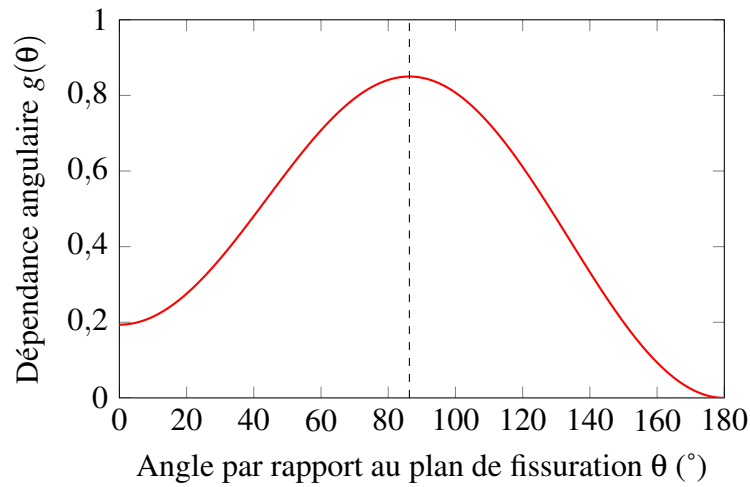
$$\sigma_{eq} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| \sqrt{\frac{-3 \cos \theta + 5 - 8\nu + 8\nu^2}{2}} \quad \text{en déformations planes} \tag{3.8}$$

Supposons que le matériau plastifie pour  $\sigma_{eq} = \sigma_y$ . Il est alors possible de définir le rayon de la zone plastique à partir de l'équation (3.7) :

$$r_p = \frac{K^2}{2\pi\sigma_y^2} \underbrace{\left( \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 \frac{-3 \cos \theta + 5 - 8\nu + 8\nu^2}{2}}_{g(\theta)} \tag{3.9}$$

D'après l'évolution de  $g(\theta)$  présentée en figure 3.26, la taille de la zone plastique est maximale pour un angle de  $86,3^\circ$  par rapport au plan de fissuration. Son rayon dépend de la limite d'élasticité du matériau,  $\sigma_y$  et du chargement appliqué,  $K$ .

$$r_p = 0.13527 \frac{K^2}{\sigma_y^2} \tag{3.10}$$

FIGURE 3.26 – Évolution de  $g(\theta)$ 

## 4.2 Détermination de la plage de chargement d'application de la POD

Il a été choisi de définir une plage de chargement allant de 0 jusqu'au chargement  $K_{max}$  pour lequel la taille maximale de la zone plastique égale la taille de la zone d'intérêt (1 mm dans le cas du maillage actuel).

On peut ainsi définir la valeur de  $K_{max}$  d'après l'équation (3.10) comme suit :

$$K_{max} = 2,7 \sigma_y \sqrt{r_p} \quad (3.11)$$

Cette formule a le grand avantage d'être utilisable quel que soit le matériau utilisé puisqu'elle ne dépend que de la limite d'élasticité.

## 4.3 Obtention des champs de référence

L'obtention des champs élastique et plastique de référence, notés respectivement  $\underline{\phi}_e$  et  $\underline{\phi}_p$ , est réalisée de la même manière que dans le chapitre 2 en section 4.4 page 51.

## 4.4 Évolution de $K_m(a)$ : identification de $p_a$

Le coefficient  $p_a$  de l'équation (3.12) est obtenu par une interpolation de la dépendance radiale du champ de déplacement plastique. Les dépendances radiale et angulaire du champ plastique sont données en figure 3.27.

$$\frac{\partial K_m}{\partial a} = -p_a K_m \quad (3.12)$$

Pour obtenir le coefficient  $p_a$ , la dépendance radiale  $f_p(r)$  est interpolée par la fonction exponentielle suivante :

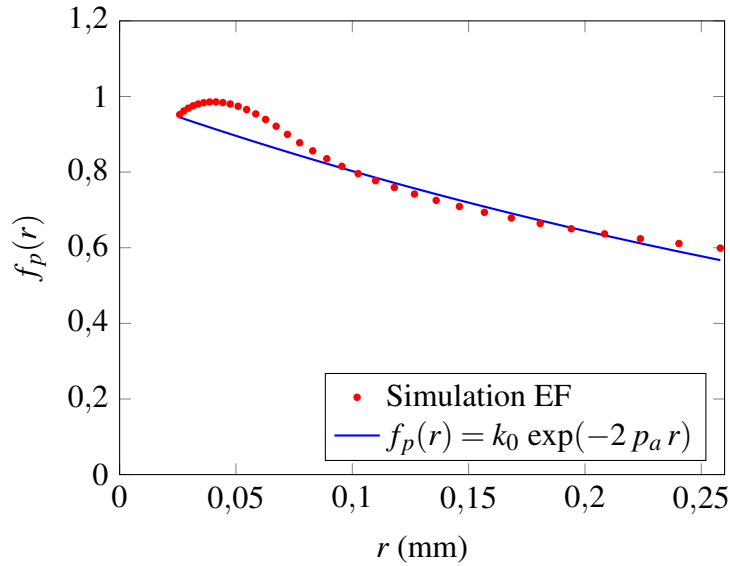


FIGURE 3.27 – Évolution de la dépendance radiale du champ plastique  $f_p(r)$

$$y = \exp(-2p_a r) \quad (3.13)$$

Le coefficient  $p_a$  régissant l'évolution de  $K_m$  est identique à celui régissant l'évolution du déplacement plastique en pointe de fissure. Par conséquent, l'interpolation de  $f_p(r)$  nous donne directement  $p_a$ .

#### 4.5 Évolution de $K_m(\rho)$ : identification de $\gamma$

Le paramètre  $\gamma$  définissant l'évolution du comportement cyclique est identifié à partir d'une charge ou décharge cyclique sur la courbe  $K(\rho)$ . Pour cela, l'équation (2.43) page 63 est intégrée ce qui donne :

$$K(\rho) = K_{IC} \left[ \left( \frac{K_{th}}{K_{IC}} - 1 \right) e^{-\gamma \rho} + 1 \right] \quad (3.14)$$

La ténacité  $K_{IC}$  et le seuil de fissuration  $K_{th}$  étant des paramètres matériaux connus (identifiés expérimentalement). On obtient ainsi le paramètre  $\gamma$ .

De plus, on sait que :

$$K = K_m + K_{xm} \quad (3.15)$$

Connaissant l'évolution de  $K_{xm}$  (cf. section 4.6 page 97), on en déduit celle de  $K_m$  à partir de l'équation (3.14).

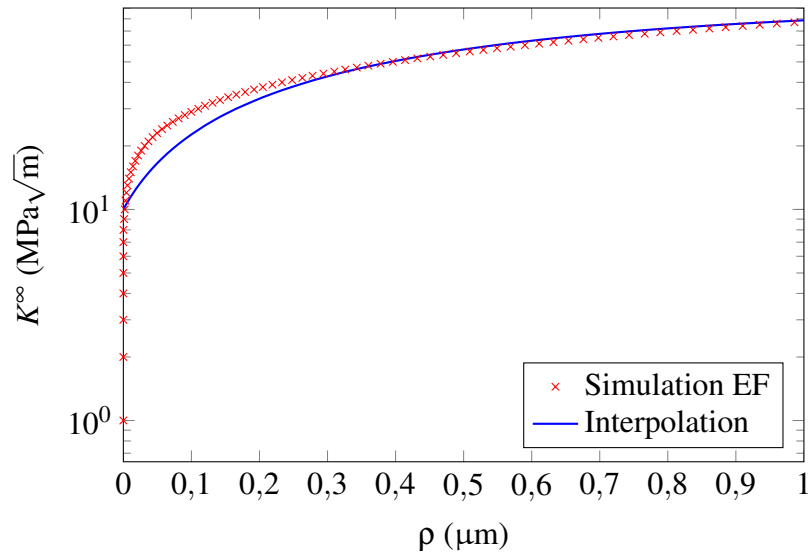


FIGURE 3.28 – Évolution d'une charge cyclique et interpolation

#### 4.6 Évolution de $K_{xm}(\rho)$ : identification de $a_{xm}$

Le paramètre  $a_{xm}$  définit l'évolution du seuil d'ouverture de la fissure  $K_{xm}$  en fonction de  $\rho$ . Pour pouvoir l'identifier, il faut donc tracer l'évolution de  $K_{xm}$  en fonction de  $\rho$ . Pour ce faire, des calculs par éléments finis sont réalisés en faisant un chargement de type charge-décharge-compression pour différents  $K_{max}$ . On relève la valeur de  $\rho$  après la décharge pour  $K = 0$  puis on comprime jusqu'à atteindre la fermeture de la fissure et on relève le  $K$  correspondant.

La fermeture de la fissure est détectée en observant l'évolution de l'erreur  $C_{2R}$  (cf. figure 3.29). Cette erreur est déterminée par l'équation (2.14). En effet, lorsque la fissure est fermée, le chargement vu est une simple compression. Par conséquent, le champ de déplacement n'est plus le même que celui à la pointe d'une fissure ouverte. Il est donc normal que l'approximation du champ de déplacement utilisée soit fautive.

Sur la figure 3.29, on peut observer que, pour un comportement élastique, l'erreur augmente soudainement jusqu'à une valeur de 80 % puis reste constante lorsque les lèvres de la fissure entrent en contact. Pour un comportement plastique, les lèvres de la fissure étant déformées par plasticité, elles commencent par se refermer loin de la pointe puis le contact progresse vers la pointe au fur et à mesure que l'on comprime. Par conséquent, l'évolution de l'erreur est bien moins brutale qu'en élasticité.

Pour définir le moment où la fissure est dite fermée, on décide arbitrairement que celui-ci survient lorsqu'il y a une augmentation de l'erreur de 5 % par rapport à la valeur atteinte pour  $K = 0$ . On relève ainsi la valeur du  $K$  correspondant et on le trace en fonction de  $\rho$  (cf. figure 3.30).

On obtient ainsi une valeur de  $a_{xm}$  par interpolation sur la courbe  $K_{xm} = f(\rho)$  en intégrant l'équation (2.51) :

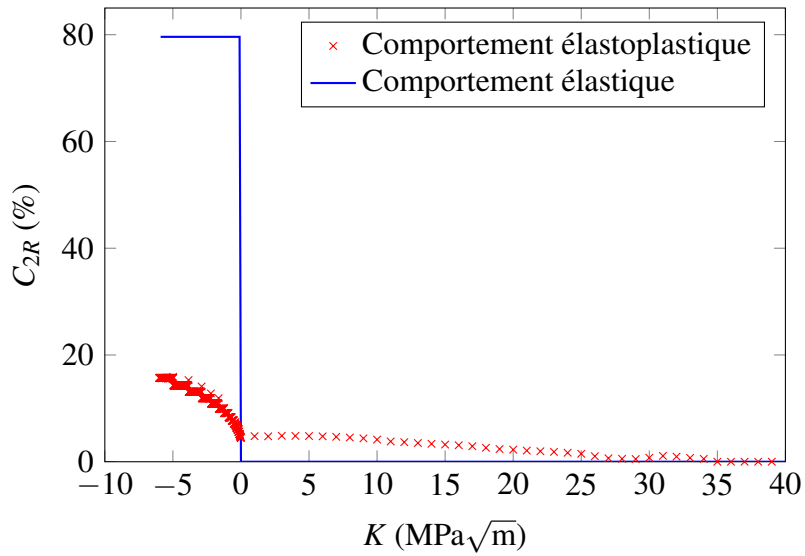


FIGURE 3.29 – Évolution de l'erreur lors d'une décharge-compression

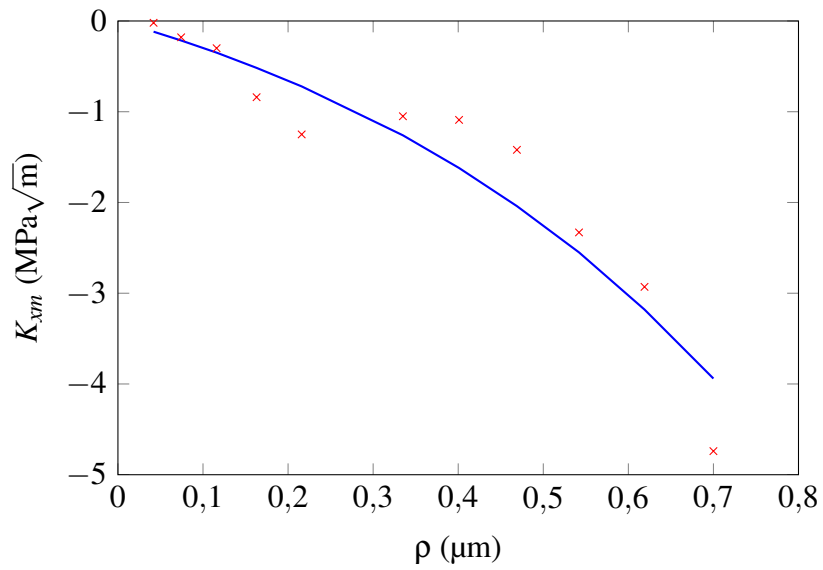


FIGURE 3.30 – Évolution de  $K_{xm}$  en fonction de  $\rho$

$$K_{xm}(\rho) = \frac{a_{xm}}{\gamma} (1 - e^{-\gamma\rho}) \quad (3.16)$$

## 4.7 Évolution de $K_{xm}(a)$ : identification de $k_a$ et $k_b$

### 4.7.1 Obtention des courbes $K_{xm}(a)$

Les paramètres  $k_a$  et  $k_b$  régissent l'évolution du seuil d'ouverture  $K_{xm}$  en fonction de l'avancée de fissure  $a$ . Pour pouvoir les identifier, la courbe  $K_{xm} = f(a)$  est obtenue par extraction de la contrainte  $S_{yy}$  devant la pointe de la fissure après la décharge pour  $K = 0$  (cf. figure 3.31). Le profil de contrainte est différent suivant la valeur du  $K_{max}$  atteint lors de la charge. Cependant, si on divise  $a$  par le  $K_{max}^2$  atteint, on obtient le graphe montré en figure 3.32. On peut observer que toutes les courbes se superposent dans ce cas.

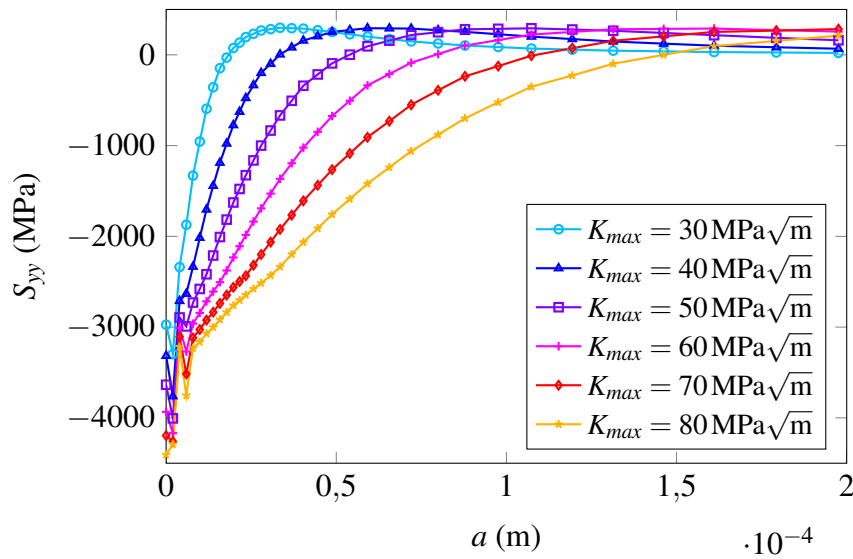


FIGURE 3.31 – Évolution de  $S_{yy}$  en fonction de  $a$  pour différentes valeurs de  $K_{max}$  atteintes

Ensuite, pour obtenir l'évolution de  $K_{xm} = f(a)$ , on utilise les fonctions de poids pour déterminer  $K_{\sigma_{res}}$ , le facteur d'intensité des contraintes issue des contraintes résiduelles produites par plasticité (cf. figure 3.33). On a :

$$K_{\sigma_{res}}(a) = \int_{y=0}^{y=a} \frac{\sigma_{res}(a-y)}{\sqrt{2\pi y}} dy \quad (3.17)$$

Or, on sait que  $K_{xm} = -K_{\sigma_{res}}$ . On a donc :

$$K_{xm}(a) = - \int_{y=0}^{y=a} \frac{\sigma_{res}(a-y)}{\sqrt{2\pi y}} dy \quad (3.18)$$

Il est donc possible de tracer l'évolution de  $K_{xm} = f(a)$  (cf. figure 3.34).

Comme précédemment, on peut également adimensionner les courbes en traçant  $K_{xm}/K_{max}$  par rapport à  $a/K_{max}^2$ . On obtient alors la figure 3.35 dans laquelle toutes les courbes sont superposées.

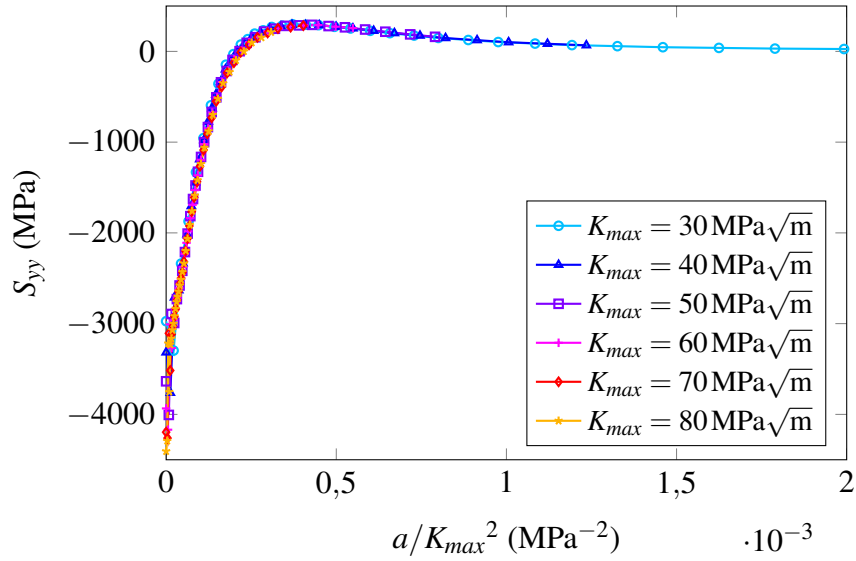


FIGURE 3.32 – Évolution de  $S_{yy}$  en fonction de  $a$  adimensionnées pour différentes valeurs de  $K_{max}$  atteintes

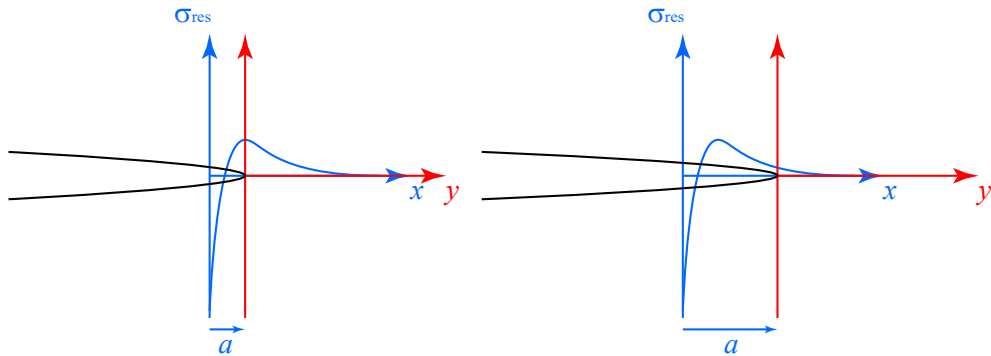


FIGURE 3.33 – Schéma de l'avancée de la fissure dans le champ de contraintes résiduelles

Il est possible d'interpoler ces courbes, en intégrant, l'équation (2.32). On obtient alors l'évolution de  $K_{xm}(a)$  :

$$K_{xm} = \frac{K_m k_b}{k_a - p_a} \left( e^{-p_a a} - e^{-k_a a} \right) \quad (3.19)$$

On peut alors interpoler la courbe de  $K_{xm}$  comme le montre la figure 3.36 pour un chargement maximal  $K_{max} = 40 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ . Ceci fonctionne assez bien. Cependant, si on essaie d'utiliser ce jeu de paramètres pour des courbes à différents  $K_{max}$ , on observe que cette équation ne colle plus. Afin de comprendre pourquoi, une étude de sensibilité paramétrique est présentée dans le paragraphe qui suit.

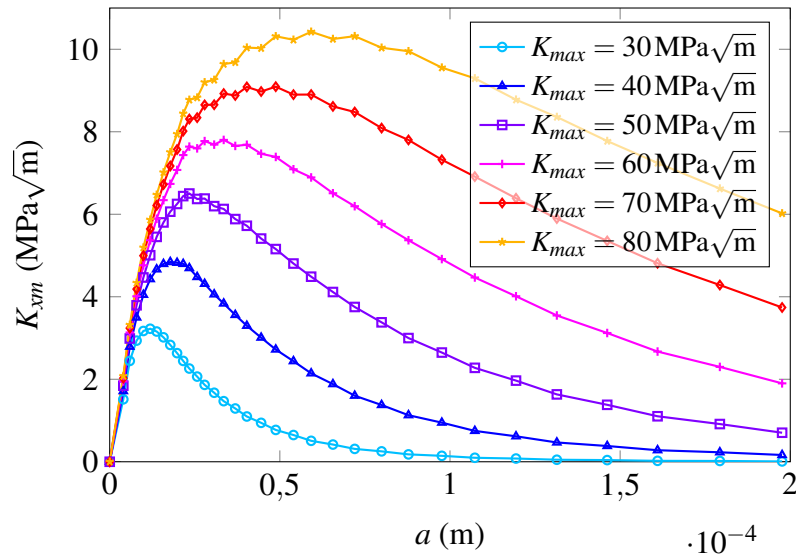


FIGURE 3.34 – Évolution de  $K_{xm}$  en fonction de  $a$  pour différentes valeurs de  $K_{max}$  atteintes

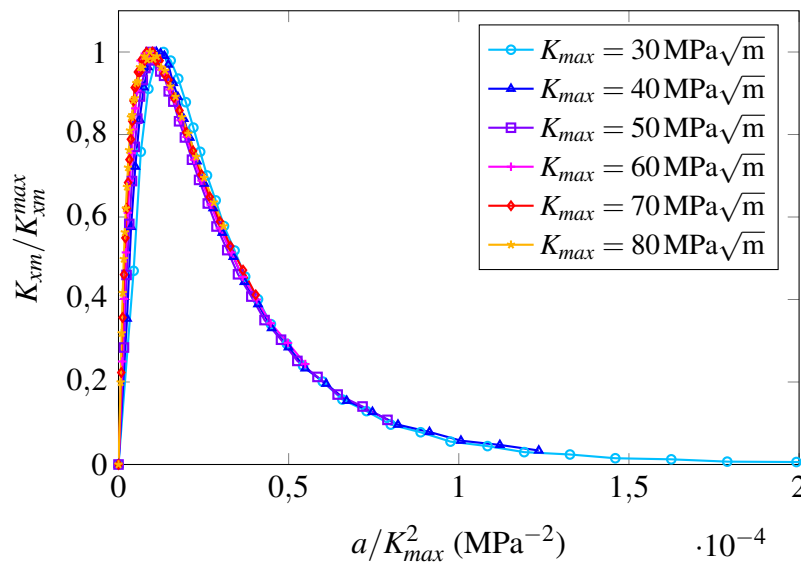


FIGURE 3.35 – Évolutions adimensionnées de  $K_{xm}$  en fonction de  $a$  pour différentes valeurs de  $K_{max}$  atteintes

#### 4.7.2 Analyse de sensibilité paramétrique

L'évolution de la forme de la courbe  $K_{xm}(a)$  en fonction  $K_m$  et des différents paramètres  $k_a$ ,  $k_b$  et  $p_a$  (cf. figures 3.38 à 3.41) est présentée ici. On peut observer que  $K_m$  et  $k_b$  ont une influence identique en faisant varier uniquement la hauteur du pic de la courbe. Le paramètre  $k_a$  quant à lui permet de modifier la position et la hauteur du pic. Le paramètre  $p_a$  modifie la décroissance de la valeur de  $K_{xm}$  quand la fissure s'éloigne



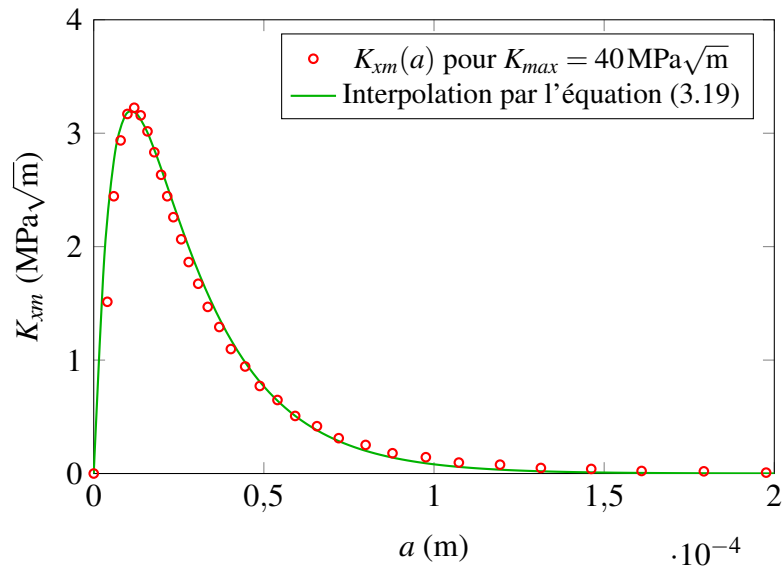


FIGURE 3.36 – Évolution de  $K_{xm}$  en fonction de  $a$  pour différentes valeurs de  $K_m$

de la zone plastique. Le seul paramètre qui change entre deux chargements est a priori  $K_m$ , les autres paramètres dépendant uniquement du matériau. Or, on peut observer sur la figure 3.38 qu'augmenter  $K_m$  ne modifie que la hauteur du pic alors que, sur les courbes issues de la simulation (cf. figure 3.34), on observe également un décalage du pic sur la droite. Par conséquent, la forme actuelle de l'équation n'est pas pertinente avec ce qui est observé par simulation. Il serait donc nécessaire de modifier cette équation afin que le pic soit correctement modifié lorsque  $K_m$  varie.

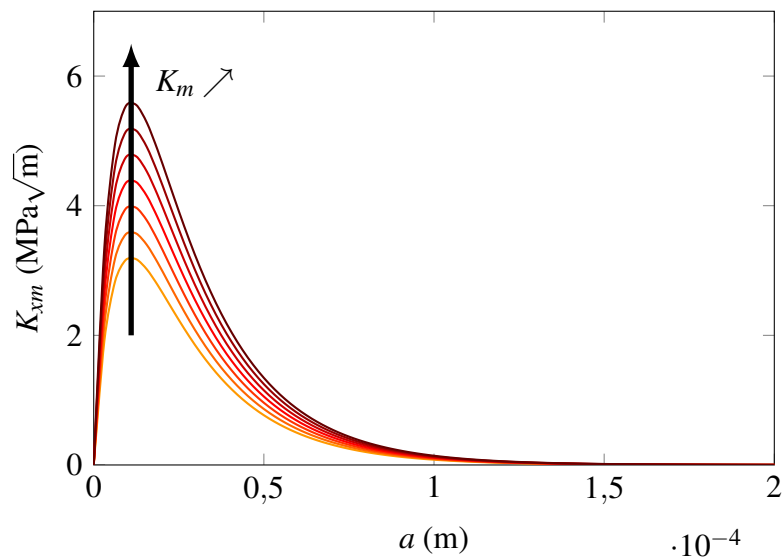


FIGURE 3.37 – Évolution de  $K_{xm}$  en fonction de  $a$  pour différentes valeurs de  $K_m$ , les autres coefficients étant gardés constants

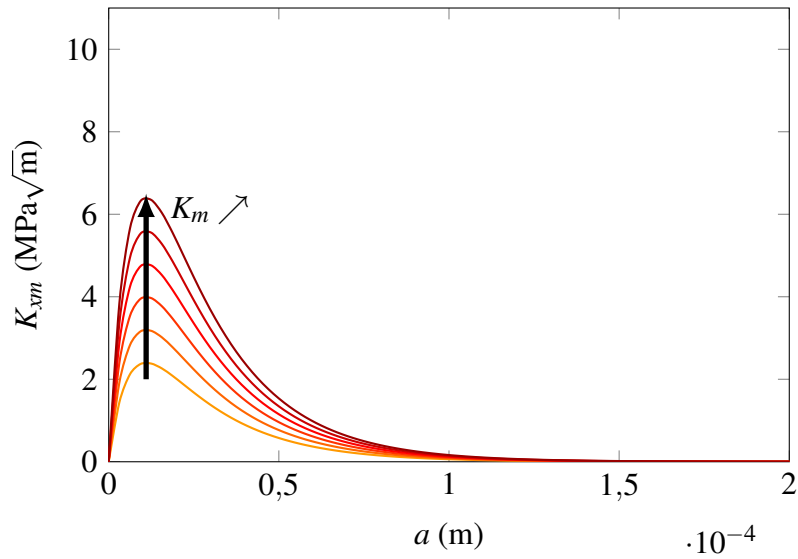


FIGURE 3.38 – Évolution de  $K_{xm}$  en fonction de  $a$  pour différentes valeurs de  $K_m$ , les autres coefficients étant gardés constants

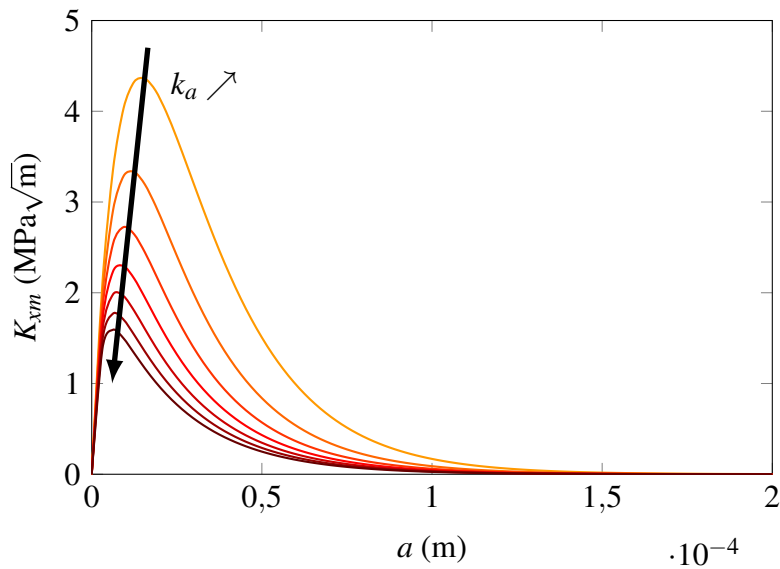


FIGURE 3.39 – Évolution de  $K_{xm}$  en fonction de  $a$  pour différentes valeurs de  $k_a$ , les autres coefficients étant gardés constants

#### 4.8 Évolution de $K_{xc}(\rho)$ : identification de $a_c$

En plasticité cyclique, l'évolution de  $K$  est décrite par :

$$|K(t) - K(t_0)| = 2K_c + a_c \sqrt{|\rho(t) - \rho(t_0)|} \text{ avec } |K - K_{xc}| = K_c \quad (3.20)$$

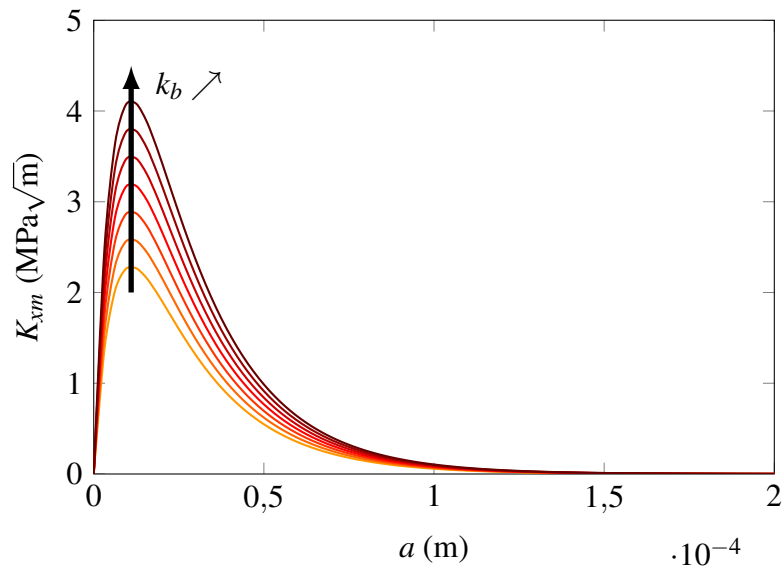


FIGURE 3.40 – Évolution de  $K_{xm}$  en fonction de  $a$  pour différentes valeurs de  $k_b$ , les autres coefficients étant gardés constants

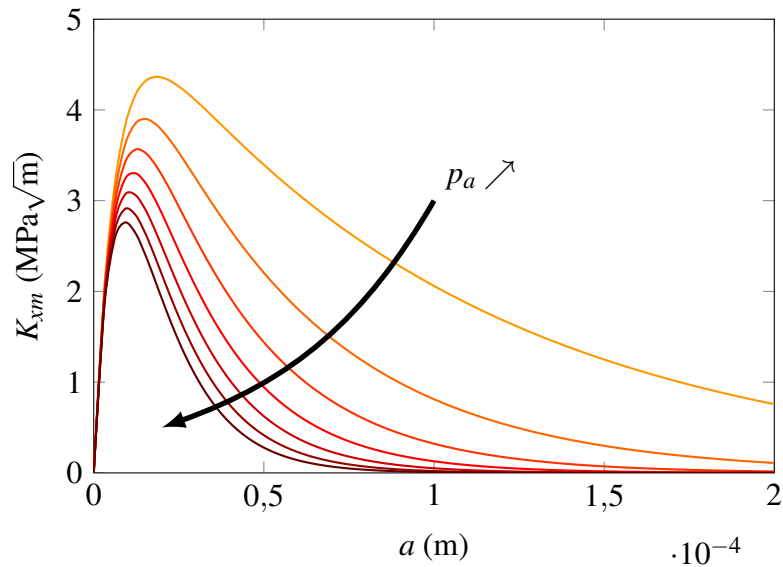


FIGURE 3.41 – Évolution de  $K_{xm}$  en fonction de  $a$  pour différentes valeurs de  $p_a$ , les autres coefficients étant gardés constants

En traçant l'évolution de  $K$  en fonction de  $\sqrt{\rho}$ , on observe que la courbe est linéaire (cf. figure 3.42). Ceci permet donc de valider la pertinence d'une loi en racine pour cette évolution.

Il est possible d'identifier les paramètres de cette courbe de deux manières :

— soit en fixant  $2K_c = \Delta K_{th}$  ;

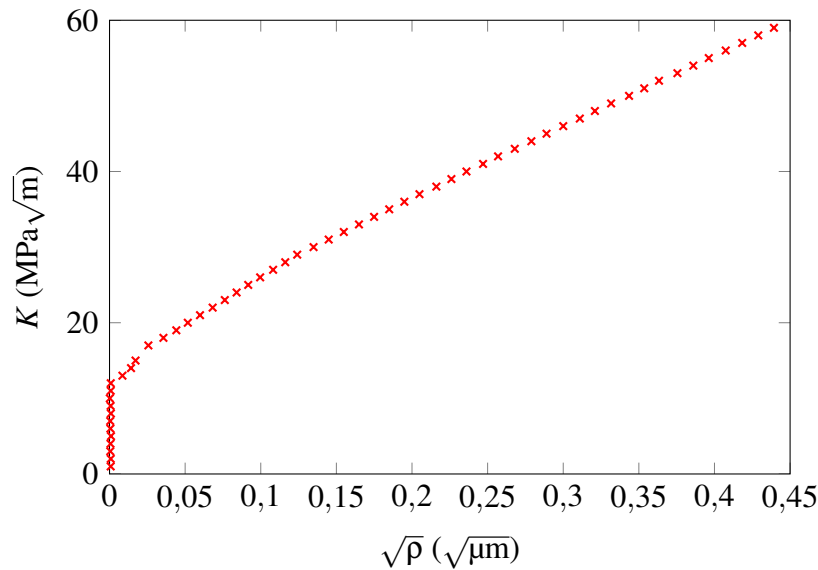


FIGURE 3.42 – Évolution cyclique de  $K$  en fonction de  $\sqrt{\rho}$

— soit en laissant la valeur de  $K_c$  libre.

La première permet de garder une cohérence avec les essais expérimentaux sous chargement à amplitude constante. Cependant, le modèle est utile pour des chargements à amplitude variable. Garder une cohérence avec des essais à amplitude constante n'est pas forcément nécessaire. De plus, dans ce cas, la courbe identifiée colle très mal sur les résultats simulés.

La deuxième méthode permet par contre de garder une cohérence avec le reste de l'identification qui a été réalisée uniquement sur des résultats simulés. En outre, la courbe identifiée est très proche de celle simulée. C'est donc cette méthode qui a été choisie ici. On obtient ainsi les valeurs de  $a_c$  et de  $K_c$ . Les résultats d'identification en utilisant les deux méthodes sont montrés sur la figure 3.43.

Il est également possible de réaliser un compromis entre les deux identifications en fixant des bornes pour identifier  $K_c$  à partir de la valeur du  $\Delta K_{th}$  expérimental. Par exemple, pour garantir d'obtenir une approche conservative, on peut imposer que  $\frac{2K_c}{\Delta K_{th}} \in [0,5; 1]$ .

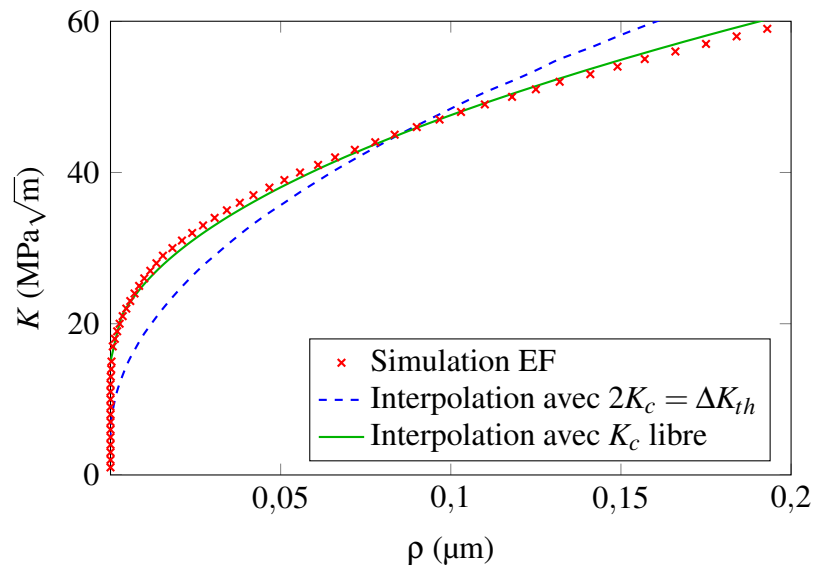


FIGURE 3.43 – Interpolations de l'évolution de  $K = f(\rho)$  en imposant  $K_c = \frac{\Delta K_{th}}{2}$  ou en le laissant libre

## 5 Conclusion

Le modèle condensé de plasticité nécessite différents paramètres pour représenter le comportement élastoplastique du matériau en pointe de fissure ainsi que son comportement en fissuration. Deux types de paramètres sont différenciés :

- des paramètres matériaux identifiés par simulation par la méthode éléments finis ;
- des paramètres matériaux issus d'essais dont certains ne sont utiles que pour les simulations précédentes.

Dans le but d'identifier ces différents paramètres, des méthodes aussi bien expérimentales que numériques ont été développées.

Expérimentalement, un essai de fissuration stable permet de déterminer précisément le seuil de non propagation du matériau, et ce sans l'usage d'un moyen de suivi de fissure durant l'essai. En effet, le gradient de contrainte obtenu dans l'éprouvette utilisée permet à la fissure de s'arrêter d'elle-même une fois le seuil atteint. Il suffit ensuite de mesurer la longueur de la fissure en *post-mortem*. De plus, ces essais permettent de prélever des éprouvettes possédant une fissure courte avec une zone plastique la plus petite possible (cf. section 3 page 118).

Numériquement, une méthode permettant d'identifier automatiquement les paramètres nécessaires à l'utilisation du modèle condensé de plasticité a été développée. Celle-ci s'est fondée sur les travaux antérieurs réalisés au LMT [Hamam, 2006, Ruiz-Sabariego, 2008, Frémy, 2012]. Cependant, un problème persistait, à savoir l'incohérence entre différentes équations qui engendrait le non respect du théorème de Schwarz. Afin de mieux lier les équations entre elles, certaines ont été modifiées et leur identification a été remise à jour. Cependant, certains défauts persistent, notamment, en ce qui concerne l'évolution de  $K_{xm}(a)$  lors de l'avancée de la fissure après une surcharge. En effet, la forme actuelle de l'équation ne peut pas représenter correctement une évolution du chargement appliqué. Il sera donc nécessaire dans de futurs travaux de modifier la forme de cette équation pour représenter au mieux cette évolution qui permet de représenter l'impact du chargement variable et plus particulièrement des surcharges et sous-charges sur la propagation.



# Chapitre 4

## Influence de la contrainte T sur la vitesse de propagation

*Ce chapitre présente les effets de la contrainte T sur la vitesse de propagation d'une fissure aussi bien expérimentalement que par modélisation.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>111</b>
<b>2</b>	<b>Modélisation des effets de fissures courtes sous chargement à amplitude constante</b> . . . . .	<b>111</b>
2.1	Critère de non-propagation [de Moura Pinho <i>et al.</i> , 2012] . . . . .	111
2.2	Loi de Paris modifiée avec effet de seuil pour fissures longues . . . . .	114
2.3	Loi de Paris modifiée avec effet de seuil pour fissures courtes . . . . .	115
<b>3</b>	<b>Préparation d'essais sur microfissure</b> . . . . .	<b>118</b>
3.1	Simulation de l'éprouvette SENT . . . . .	118
3.2	Polissage . . . . .	120
3.3	Application . . . . .	122
<b>4</b>	<b>Essais biaxiaux sur fissure longue à contrainte T non nulle</b> . . . . .	<b>125</b>
4.1	Dimensionnement de l'éprouvette cruciforme . . . . .	125
4.2	Essais biaxiaux à contrainte T non nulle . . . . .	133
4.3	Essai transitoire . . . . .	140



<b>5</b>	<b>Modélisation de l'effet de la contrainte T sur la vitesse de propagation d'une fissure</b>	<b>147</b>
5.1	Prise en compte de l'effet sur la taille de zone plastique	147
5.2	Prise en compte de l'effet sur le seuil de plasticité	149
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>152</b>

---

## 1 Introduction

Ce chapitre traite de l'influence de la contrainte  $T$  ainsi que des effets de microfissures. On a vu précédemment que la contrainte  $T$  modifie a priori la vitesse de propagation d'une fissure et que l'effet de fissure courte peut être en partie expliqué par la contrainte  $T$ . Le but de ce chapitre est d'étudier l'effet de la contrainte  $T$  sur une fissure longue en vue de le comparer à celui d'une fissure courte. Ceci afin de pouvoir modéliser l'effet de fissure courte en prenant en compte la contrainte  $T$  dans un modèle de propagation comme le modèle condensé de plasticité.

Pour ce faire, ce chapitre présente des essais et différents modèles autour de la contrainte  $T$ .

Tout d'abord, la première section présente un modèle reproduisant l'effet de fissure courte en modifiant la loi de Paris par prise en compte de la contrainte  $T$  dans la définition du seuil de non propagation.

Ensuite, la préparation d'essais sur microfissure est présentée en section 2. Ces essais n'ayant pu être réalisés pour l'instant.

Puis, la troisième section présente des essais biaxiaux sur fissure longue pour différentes valeurs de contrainte  $T$  ainsi que l'effet transitoire d'une variation de celle-ci.

Enfin, des pistes de modélisation des effets observés expérimentalement sont proposées dans la quatrième section de ce chapitre.

## 2 Modélisation des effets de fissures courtes sous chargement à amplitude constante

On se propose de modéliser la vitesse de propagation des fissures courtes sous chargement à amplitude constante en utilisant la loi de Paris couplée à un indice de plasticité provenant d'un critère de non-propagation pour fissures courtes [de Moura Pinho *et al.*, 2012]. Ceci a pour effet d'introduire un effet de seuil dans les courbes  $da/dN - \Delta K$  ainsi que la diminution voire disparition du seuil de non-propagation pour des fissures courtes.

### 2.1 Critère de non-propagation [de Moura Pinho *et al.*, 2012]

L'approche utilisée pour obtenir le critère de non-propagation est identique à celle utilisée pour exprimer le critère de von Mises pour un volume de matière uniformément chargé.

Premièrement, l'énergie de déformation élastique est exprimée en fonction des quantités utilisées pour représenter le chargement. Ensuite, une valeur critique de cette énergie est déterminée en fonction de données expérimentales. Et enfin, le critère est obtenu en supposant que la condition de non-propagation est obtenue en chargement multiaxial pour la même valeur critique de l'énergie de déformation élastique. Pour ce faire, l'énergie de déformation élastique dans la région autour de la pointe de fissure [Thieulot-Laure *et al.*,

2007, Decreuse, 2010, Pommier *et al.*, 2009b] est calculée en utilisant les champs de contrainte, déformation et déplacement en pointe de fissure issus de la mécanique de la rupture. De plus, on suppose que pour utiliser ce critère pour des fissures courtes, les termes non singuliers (les contraintes T) sont également considérés. Par exemple, un problème 2D en déformations planes généralisées en mode I, le développement asymptotique de Westergaard du champ de déplacement  $u$  incluant les contraintes T est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) + \frac{T}{8\mu} (\kappa + 1) r \cos \theta \\ u_y = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) - \frac{T}{8\mu} (3 - \kappa) r \sin \theta \\ u_z = \frac{T_Z}{E} z \end{array} \right. \quad \text{avec } 2\mu = \frac{E}{1+\nu} \text{ et } \kappa = 3 - 4\nu. \quad (4.1)$$

Le tenseur de déformation  $\varepsilon$  est ensuite dérivé du champ de déplacement  $u$  et le champ de contrainte  $\sigma$  est obtenu par la loi de Hooke. La densité d'énergie de déformation élastique  $w(r,\theta)$  en chaque point  $(r,\theta)$  peut être exprimée comme suit :

$$w(r,\theta) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma^D \cdot \varepsilon^D) \quad (4.2)$$

où  $\sigma^D$  et  $\varepsilon^D$  sont les parties déviatoriques des tenseurs de contrainte et de déformation. La densité d'énergie de déformation élastique est ensuite intégrée sur un domaine de dimension  $\delta$  autour de la pointe de la fissure pour obtenir l'énergie de déformation élastique par unité de longueur du front de fissure  $U(K_I, T, T_Z)$  :

$$U(K_I, T, T_Z) = \int_{r=0}^{r=\delta} \int_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} w(r,\theta) \cdot r \cdot d\theta \cdot dr \quad (4.3)$$

Le critère de non-propagation est obtenu en supposant que la condition de non-propagation est obtenue dans n'importe quelle condition de chargement multiaxial  $(K_I, T, T_Z)$  pour la même valeur critique de l'énergie de déformation élastique  $U_C$ .

$$U(K_I, T, T_Z) = U_C \quad (4.4)$$

La valeur de  $U_C$  peut être déterminée à partir du seuil de non-propagation des fissures longues (i.e.  $T$  et  $T_Z$  sont négligées). On a donc :

$$U_C = U(K_I = K_{IY}, T = 0, T_Z = 0) \quad \text{avec } K_{IY} = \frac{\Delta K_{Ih(R=-1)}}{2} \quad (4.5)$$

Après calcul et simplification, l'équation (4.5) devient :

$$\left( \frac{K_I}{K_{IY}} \right)^2 + \left( \frac{T}{T_Y} \right)^2 + \left( \frac{T_Z}{T_{ZY}} \right)^2 + f_1 \frac{K_I T}{K_{IY} T_Y} + f_2 \frac{K_I T_Z}{K_{IY} T_{ZY}} + f_3 \frac{T T_Z}{T_Y T_{ZY}} = 1 \quad (4.6)$$

Les paramètres matériaux sont le seuil de non-propagation  $\Delta K_{th}$ , la distance  $\delta$  et le coefficient de Poisson  $\nu$ . Le paramètre de distance  $\delta$  permet d’ajuster la transition entre fissure courte et longue. Les autres coefficients sont reportés dans le tableau 4.1 page 113.

On peut alors déduire de l’équation (4.6) une fonction d’écoulement plastique, notée  $f$ , définie comme suit :

$$f = \left(\frac{K_I}{K_{IY}}\right)^2 + \left(\frac{T}{T_Y}\right)^2 + \left(\frac{T_Z}{T_{ZY}}\right)^2 + f_1 \frac{K_I T}{K_{IY} T_Y} + f_2 \frac{K_I T_Z}{K_{IY} T_{ZY}} + f_3 \frac{T T_Z}{T_Y T_{ZY}} - 1 = 0 \quad (4.7)$$

$T_Y$	$T_{ZY}$	$f_1$	$f_2$	$f_3$
$T_Y = \frac{0,430 K_{IY}}{\sqrt{\delta}}$	$T_{ZY} = \frac{0,318 K_{IY}}{\sqrt{\delta}}$	-0,419	-0,614	-0,390

TABLEAU 4.1 – Coefficients de l’équation (4.7) calculés pour  $\nu = 0,29$

La même approche peut être utilisée pour obtenir l’expression de  $f$  quand on considère toutes les quantités de la MLER, c’est-à-dire les trois facteurs d’intensité des contraintes et les trois contraintes T. Aucun paramètre matériau supplémentaire n’est nécessaire.

L’équation (4.7) est l’équation d’un ellipsoïde dans l’espace  $(K, T, T_Z)$ . La figure 4.1 représente le domaine de non propagation à  $T_Z = 0$  dans le plan  $K - T$ .

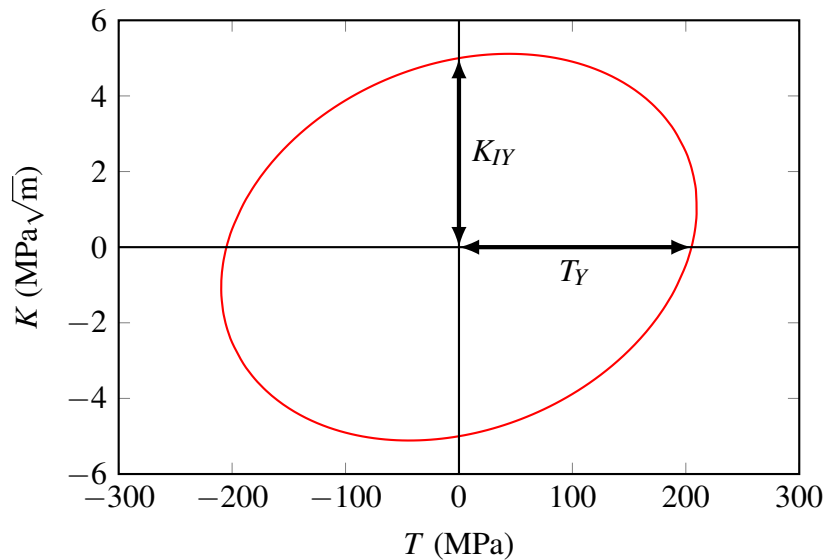


FIGURE 4.1 – Domaine de non propagation tracé dans le plan  $K - T$

## 2.2 Loi de Paris modifiée avec effet de seuil pour fissures longues

Le critère de non-propagation précédent est maintenant utilisé pour modéliser la propagation de fissures longues. La méthodologie est illustrée sur de l'INCO 718 DA en mode I sous un chargement de fatigue à amplitude constante. Durant chaque cycle de fatigue, différentes phases peuvent apparaître. Pendant une charge,  $f$  est d'abord négatif (élasticité) et ensuite devient positif au-dessus du seuil de non-propagation (plasticité). Ensuite, pendant la décharge,  $f$  est positif mais  $df$  est négatif.

Durant un cyclage en amplitude constante à  $R \leq 0$ , la partie effective du cycle de chargement est ainsi définie par  $f_{max}$ , qui correspond à l'intégration de  $df$  sur le cycle de fatigue, considérant seulement la partie où il y a plasticité, c'est-à-dire le moment où  $f$  et  $df$  sont tous les deux positifs.

La loi de Paris de l'INCO 718 DA pour des fissures longues est ensuite utilisée pour déterminer une relation entre  $f_{max}$  et la vitesse de propagation par cycle  $\frac{da}{dN}$ . Cette relation est ensuite utilisée pour prédire la vitesse de propagation pour des fissures courtes. L'effet de fermeture et d'autres effets d'histoire ne sont pas considérés ici. Pour les prendre en compte, un état de contrainte interne (analogue à un écrouissage cinématique) et sa loi d'évolution devrait être introduite pour chaque quantité de la MLER [Hamam *et al.*, 2007].

La loi de Paris-Erdogan pour l'INCO 718 DA et le seuil ont été extraits de [Newman et Piascik, 2003], où  $\frac{da}{dN}$  est exprimé en m/cycle et  $\Delta K$  en  $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ ,

$$\frac{da}{dN} = 1,64 \times 10^{11} \Delta K^{2,91} \quad (4.8)$$

Par la suite,  $f$  est calculé en supposant que les résultats expérimentaux ont été obtenus pour une fissure longue ( $T = T_Z = 0$ ) et que  $K_{IY} = 2 \text{MPa}\sqrt{\text{m}}$  d'après [Newman et Piascik, 2003] :

$$f_{max} = \left( \frac{\Delta K}{K_{IY}} \right)^2 - 1 \quad (4.9)$$

et la vitesse de propagation expérimentale par cycle  $\frac{da}{dN}$  a été tracée en fonction de  $f_{max}$  (cf. figure 4.2).

Cette courbe peut être interpolée par une loi puissance pour obtenir l'équation (4.10) :

$$\frac{da}{dN} = \alpha \left[ \left( \frac{\Delta K}{K_{IY}} \right)^2 - 1 \right]^\gamma \quad (4.10)$$

avec  $\alpha = 1,27 \times 10^{-10}$  m/cycle et  $\gamma = 1,45$ .

Il est ensuite possible de tracer l'évolution de la vitesse de propagation en fonction du chargement avec prise en compte du seuil de non-propagation (cf. figure 4.4).

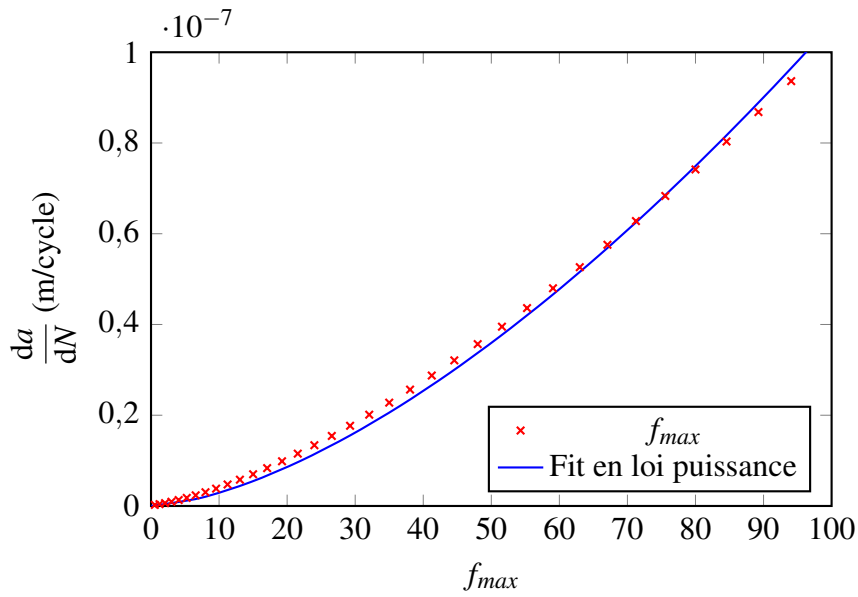


FIGURE 4.2 – Évolution de  $\frac{da}{dN}$  en fonction de  $f_{max}$

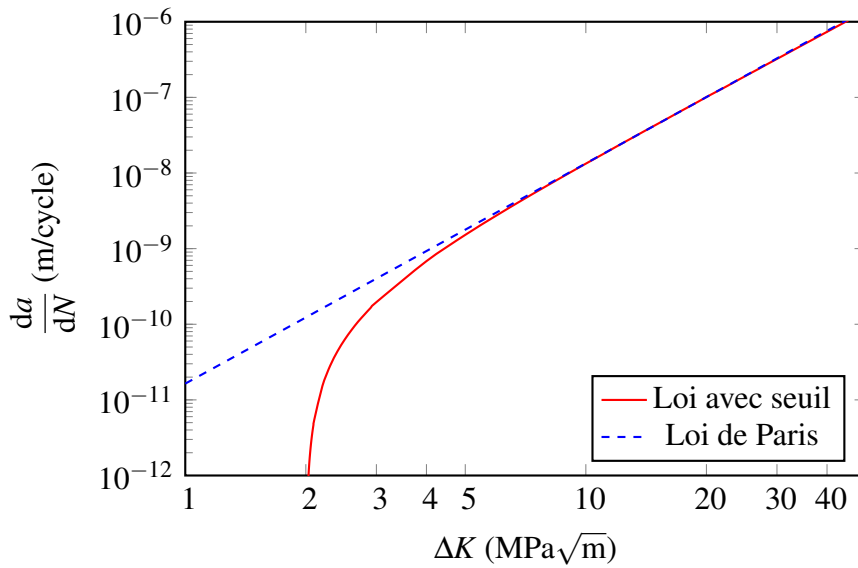
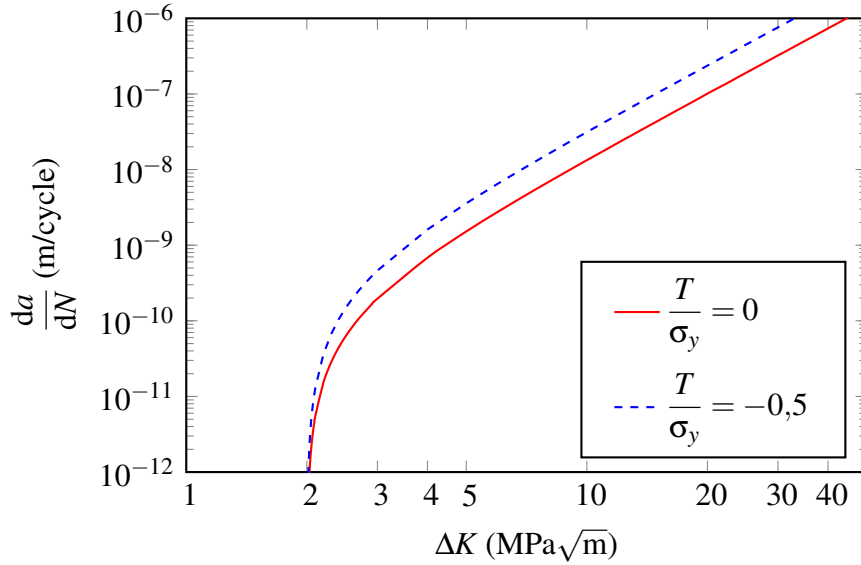


FIGURE 4.3 – Courbe de propagation avec prise en compte du seuil comparée à la loi de Paris du matériau

## 2.3 Loi de Paris modifiée avec effet de seuil pour fissures courtes

### 2.3.1 Détermination du paramètre $T_y$ et de $\delta$

Dans ce qui suit, la transition entre fissure courte et longue est supposée apparaître pour une longueur de fissure de 300  $\mu\text{m}$  en chargement uniaxial. Cette hypothèse est utili-



**FIGURE 4.4** – Courbe de propagation avec prise en compte du seuil comparée à la loi de Paris du matériau

sée pour déterminer le paramètre  $T_Y$  du seuil de non-propagation  $f = 0$  (cf. équation (4.7)). En effet,  $T_Y$  est ajusté afin d'obtenir, pour une longueur de fissure  $a = 300\mu\text{m}$ , un seuil de non-propagation  $\Delta K_{th}$  de 90 % du seuil d'une fissure longue. Pour ce faire, on considère une fissure traversante de longueur  $2a$  en déformation plane :

$$\begin{cases} K_I = S_{yy}\sqrt{\pi a} \\ T = S_{xx} - S_{yy} = -\beta S_{yy} \\ T_Z = 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

où le taux de biaxialité  $\beta = \frac{S_{yy} - S_{xx}}{S_{yy}}$ .

Le seuil peut être obtenu à partir de l'équation (4.7). On a alors :

$$f = \left(\frac{\Delta K_{th}}{K_{IY}}\right)^2 + \left(\frac{\beta \Delta K_{th}}{T_Y \sqrt{\pi a}}\right)^2 - f_1 \beta \frac{\Delta K_{th}^2}{K_{IY} T_Y \sqrt{\pi a}} - 1 = 0 \quad (4.12)$$

Finalement,  $T_Y$  est identifié pour  $\beta = 1$  à  $T_Y = 204,7\text{MPa}$  et  $\delta = 17,6\mu\text{m}$ , obtenu à partir des expressions du tableau 4.1 page 113. L'évolution de  $\Delta K_{th}$  par rapport à la longueur de fissure est tracée pour différents taux de biaxialité (cf. figure 4.5).

### 2.3.2 Courbe de propagation d'une fissure courte semi-circulaire

Soit une fissure courte semi-circulaire de rayon  $(a_0 + a)$ , initiée (avec un rayon  $a_0$ ) à la surface d'un composant soumis à une contrainte uniaxial  $S_{yy}$ . Les expressions de  $K_I$ ,  $T$

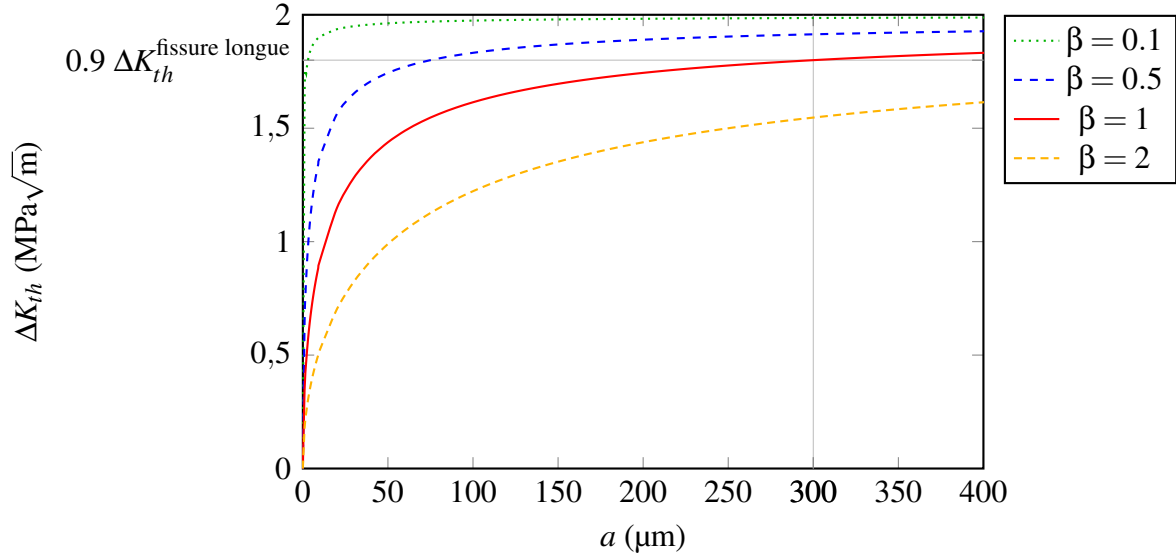


FIGURE 4.5 – Évolution du seuil de non-propagation en fonction de la taille de la fissure

et  $T_Z$  déterminées par un calcul par éléments finis [de Moura Pinho *et al.*, 2012] sont les suivantes :

$$\begin{cases} K_I = 0,6375 S_{yy} \sqrt{\pi(a_0 + a)} \\ T = [(1 - \beta) - 0,5564] S_{yy} \\ T_Z = -[0,6882 + \nu(1 - \beta)] S_{yy} \end{cases} \quad (4.13)$$

Dans ce cas, l'équation (4.10) devient :

$$\frac{da}{dN} = \alpha \left[ \left( \frac{K_I}{K_{IY}} \right)^2 + \left( \frac{T}{T_Y} \right)^2 + \left( \frac{T_Z}{T_{ZY}} \right)^2 + f_1 \frac{K_I T}{K_{IY} T_Y} + f_2 \frac{K_I T_Z}{K_{IY} T_{ZY}} + f_3 \frac{T T_Z}{T_Y T_{ZY}} - 1 \right]^\gamma \quad (4.14)$$

Cette équation peut être utilisée pour tracer diverses courbes  $\frac{da}{dN} - \Delta K$  pour différentes longueurs initiales de fissures en utilisant les équations (4.13) et (4.14). Les courbes tracées en figure 4.6 montrent clairement que le modèle est capable de reproduire l'effet de fissure courte [Suresh et Ritchie, 1984].

De plus, on peut observer figure 4.7 que pour une même longueur de fissure initiale et en faisant varier uniquement le taux de biaxialité  $\beta$ , on obtient des évolutions similaires à celles de fissures courtes de longueurs initiales différentes. Il semble donc pertinent d'intégrer la contrainte  $T$  dans un modèle de propagation dans le but de représenter un effet de fissure courte. Les essais qui suivent ont pour objectif d'étudier l'influence de la contrainte  $T$  sur une fissure longue afin de voir si elle est bien similaire à un effet de fissure courte.



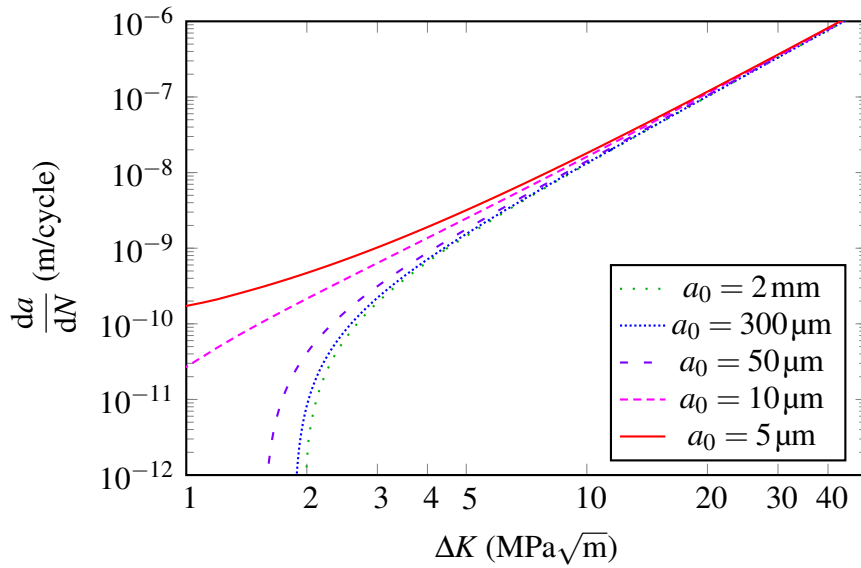


FIGURE 4.6 – Évolutions de  $\frac{da}{dN}$  en fonction de  $\Delta K$  pour des fissures semi-circulaires de longueurs initiales différentes

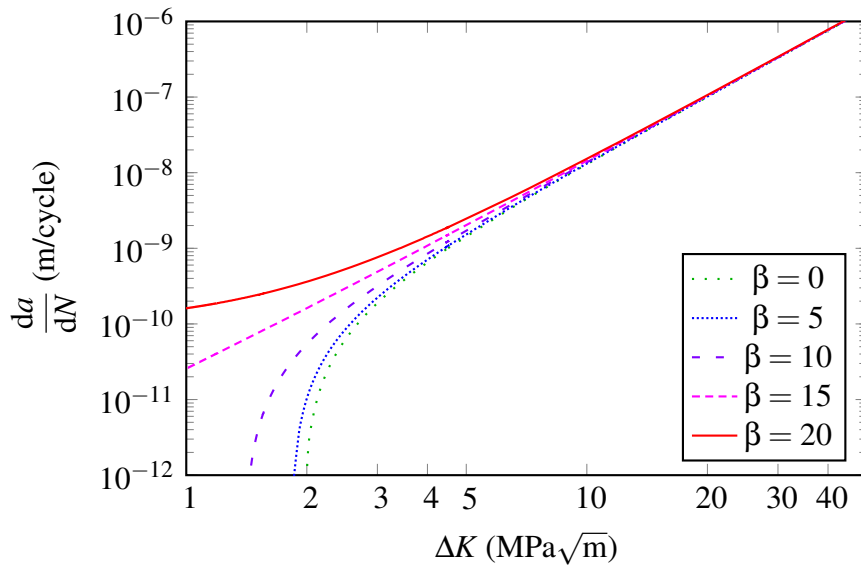


FIGURE 4.7 – Évolutions de  $\frac{da}{dN}$  en fonction de  $\Delta K$  pour une fissure semi-circulaire de longueur initiale  $a_0 = 2$  mm

### 3 Préparation d'essais sur microfissure

#### 3.1 Simulation de l'éprouvette SENT

L'objectif des essais étant d'obtenir des données sur les fissures courtes par l'intermédiaire d'essais sur des fissures longues, il faut d'abord connaître l'évolution de  $K_I$  et de  $T$

durant la propagation d'une fissure courte. Il va donc être nécessaire de réaliser des essais sur des microfissures pour en extraire les valeurs de  $K_I$  et de  $T$  (ou du moins les plages de valeurs) que devront respecter les fissures longues dans les éprouvettes cruciformes (cf. section 4 page 125). La simulation qui suit a pour but la détermination des valeurs de  $K_I$  et  $T$  durant la propagation d'une fissure courte pour pouvoir dimensionner l'éprouvette cruciforme.

Les calculs ont été réalisés à l'aide du logiciel ABAQUS et les propriétés matériau utilisées sont définies dans le tableau 3.4 page 80.

### 3.1.1 Conditions aux limites

Pour la simulation, les talons de l'éprouvette ont été retirés et seulement la moitié de l'éprouvette a été utilisée afin de diminuer les temps de calcul. Les conditions aux limites appliquées sont schématisées en figure 4.8. Des conditions de symétrie ont été appliquées sur la face coupée de l'éprouvette ainsi que sur la face inférieure. Les déplacements d'un des points de la face inférieure ont été bloqués. Une pression est appliquée sur la face supérieure. La valeur de cette pression est calculée de façon à obtenir un facteur d'intensité des contraintes supérieur à  $K_{Ith}$  afin que la fissure se propage, ici  $5 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ .

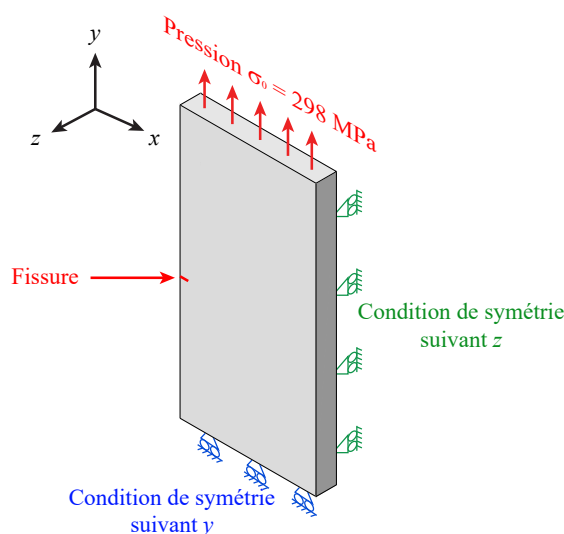


FIGURE 4.8 – Conditions aux limites de la simulation 3D sur l'éprouvette SENT

### 3.1.2 Résultats

Les évolutions de  $K_I$  et  $T$  sont données en figure 4.9 et leurs valeurs sont référencées dans le tableau 4.2 page 120. Celles-ci seront par la suite utilisées pour déterminer les chargements à appliquer sur l'éprouvette cruciforme pour obtenir les mêmes  $K_I$  et  $T$  sur fissure longue que dans le cas d'une fissure courte.

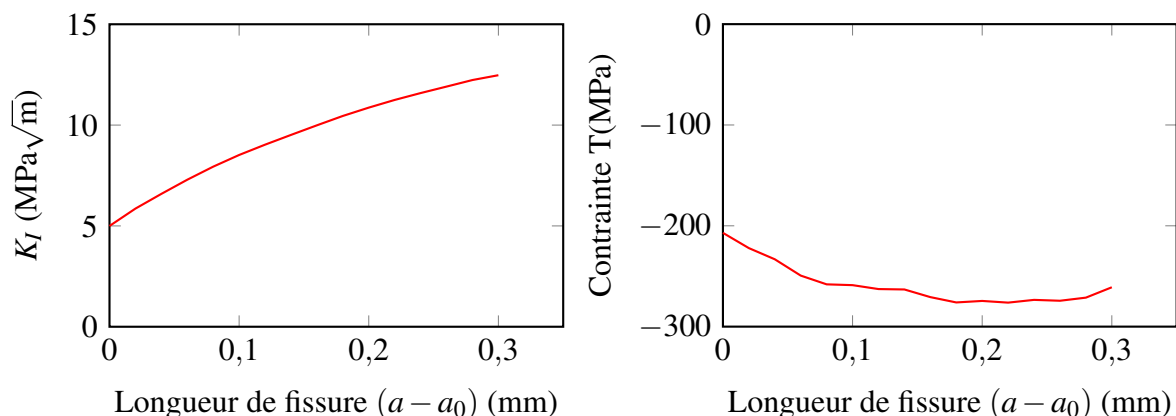


FIGURE 4.9 – Évolution de  $K_I$  et de la contrainte  $T$  avec  $a_0 = 50\mu\text{m}$

Longueur de fissure ( $a - a_0$ ) (mm)	$K_I$ ( $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ )	$T$ (MPa)
0	5,0	-207
0,02	5,9	-222
0,04	6,6	-233
0,06	7,3	-249
0,08	8,0	-258
0,1	8,5	-259
0,12	9,0	-263
0,14	9,5	-263
0,16	10,0	-271
0,18	10,5	-276
0,2	10,9	-275
0,22	11,2	-276
0,24	11,6	-273
0,26	11,9	-274
0,28	12,2	-271
0,3	12,5	-261

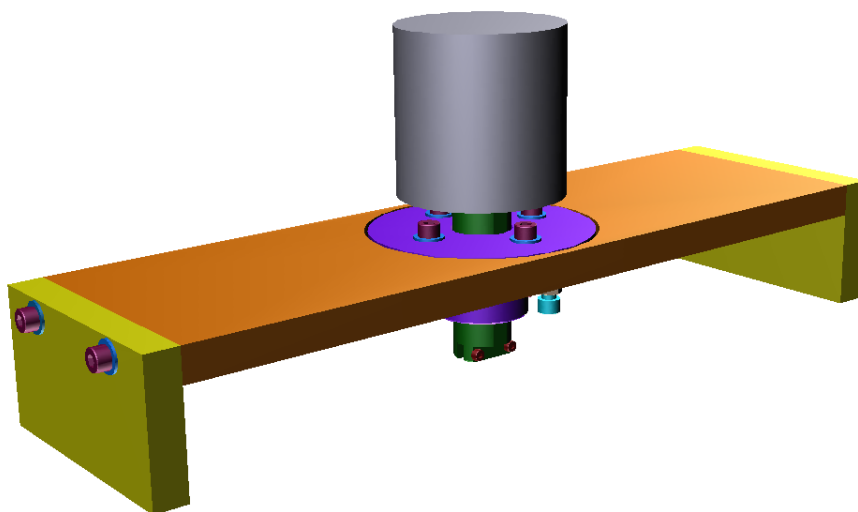
TABLEAU 4.2 – Valeurs de  $K_I$  et  $T$  pour une contrainte appliquée de 298 MPa

### 3.2 Polissage

Afin d'obtenir une éprouvette SENT avec une microfissure de la longueur désirée, il est nécessaire de polir la surface depuis laquelle elle se propage. Le laboratoire possède une polisseuse classique (avec disque rotatif) et d'une polisseuse automatique. L'utilisation de la polisseuse automatique est difficile pour plusieurs raisons. La première est le besoin de couler l'éprouvette dans de la résine pour pouvoir la monter dans la polisseuse. Il faudrait ensuite retirer la résine de l'éprouvette, ce qui peut-être assez difficile. De plus,

comme vu précédemment (cf. section 3.4.8 page 90), le front de fissure est bombé. Par conséquent, à la fin du polissage, il faut pouvoir observer la largeur de la fissure derrière celle-ci. Or, le polissage automatique crée des rayures dans toutes les directions sur la surface. Ces rayures empêchent alors de discerner la fissure. Il faudrait donc polir jusqu'à retirer toutes les rayures pour pouvoir observer de nouveau cette fissure au risque de trop polir et obtenir une fissure trop courte voire inexistante. En outre, le polissage « à la main » est à proscrire si l'on souhaite obtenir une fissure de l'ordre d'une centaine de microns. C'est pourquoi, il a été décidé de concevoir un montage qui vient se fixer sur la polisseuse pour maintenir l'éprouvette mais sans la faire tourner pour ne pas masquer la fissure avec des rayures. En effet, en réalisant des rayures perpendiculaires, la fissure se voit toujours, même à l'œil nu.

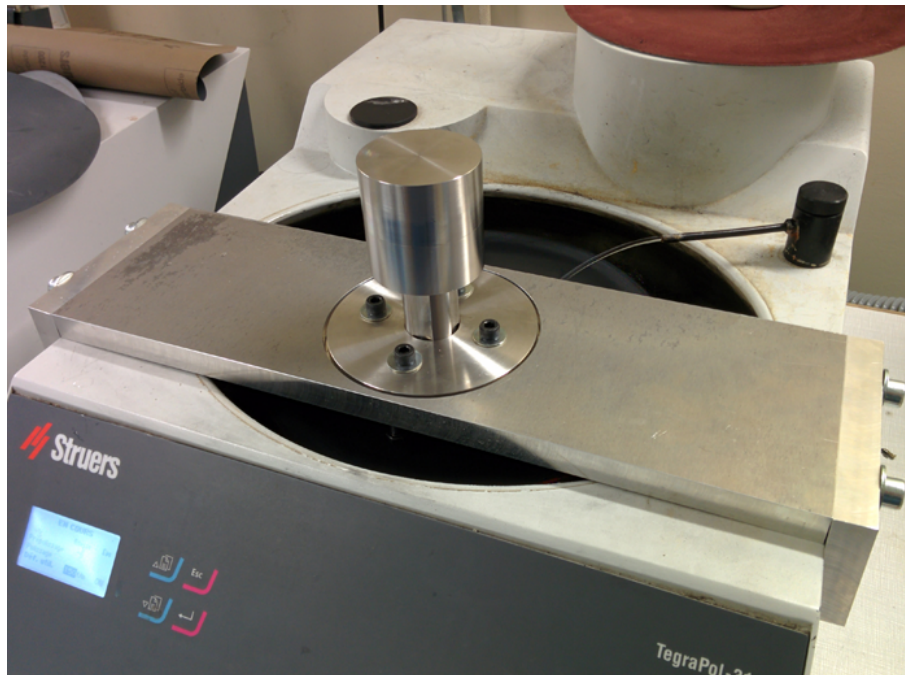
### 3.2.1 Description du montage



**FIGURE 4.10** – Montage de polissage

Ce dispositif vient se fixer directement sur le bâti de la polisseuse en se serrant de chaque côté par des vis (cf. figure 4.11).

Une masse permet d'assurer un effort constant d'environ 40 N pour un polissage uniforme. La pièce (la tige) qui maintient l'éprouvette est maintenue dans le bâti grâce à un composant intermédiaire (la rotule) dont l'inclinaison peut-être réglée par quatre vis (cf. figure 4.12). L'éprouvette est mise en place dans la rainure en bas de la tige et serrée par deux vis (cf. figure 4.13). Un couple rainure + goupille permet de bloquer la rotation de l'éprouvette durant le polissage. Les deux pièces cylindriques sont ajustées afin de garantir le minimum de jeux lors du polissage. Enfin, deux méplats permettent de placer la tige dans un microscope afin d'observer l'éprouvette sans la démonter pour mesurer la longueur de la fissure et vérifier que l'inclinaison de l'éprouvette est correcte



**FIGURE 4.11** – Montage de polissage

lors du polissage. En évitant le démontage de l'éprouvette, la mise en position lors d'une reprise du polissage sera bien meilleure.

Les dessins de définition des différents composants du montage sont donnés en Annexe C.

### 3.3 Application

Le montage permet bien de polir dans une seule direction l'éprouvette. La fissure reste donc visible pendant le polissage. Cependant, l'Inconel 718 étant très dur, les disques en silice sont complètement usés en seulement quelques minutes de polissage et deviennent inopérants. Ceci vient du fait que l'éprouvette ne bouge pas durant le polissage et use le disque toujours au même endroit. Il serait possible de déplacer le montage mais on perd alors le positionnement de l'éprouvette par rapport au disque de polissage. Du fait de cette dureté, le polissage au diamant a également été testé. Cependant, le résultat reste le même. Les disques s'usent beaucoup trop rapidement. De plus, l'enlèvement de matière est très faible dans ce cas et le polissage prendrait un temps prohibitif. La polisseuse automatique a également été utilisée mais pour les raisons détaillées précédemment, cette solution a été abandonnée.

Actuellement, aucune éprouvette SENT n'a pu être obtenue. Cependant, il est envisagé d'utiliser les moyens à disposition de l'institut P' qui est bien mieux outillé pour polir les éprouvettes. Ce travail sera réalisé par Besnik SADRIJI qui a pris la suite de cette thèse.

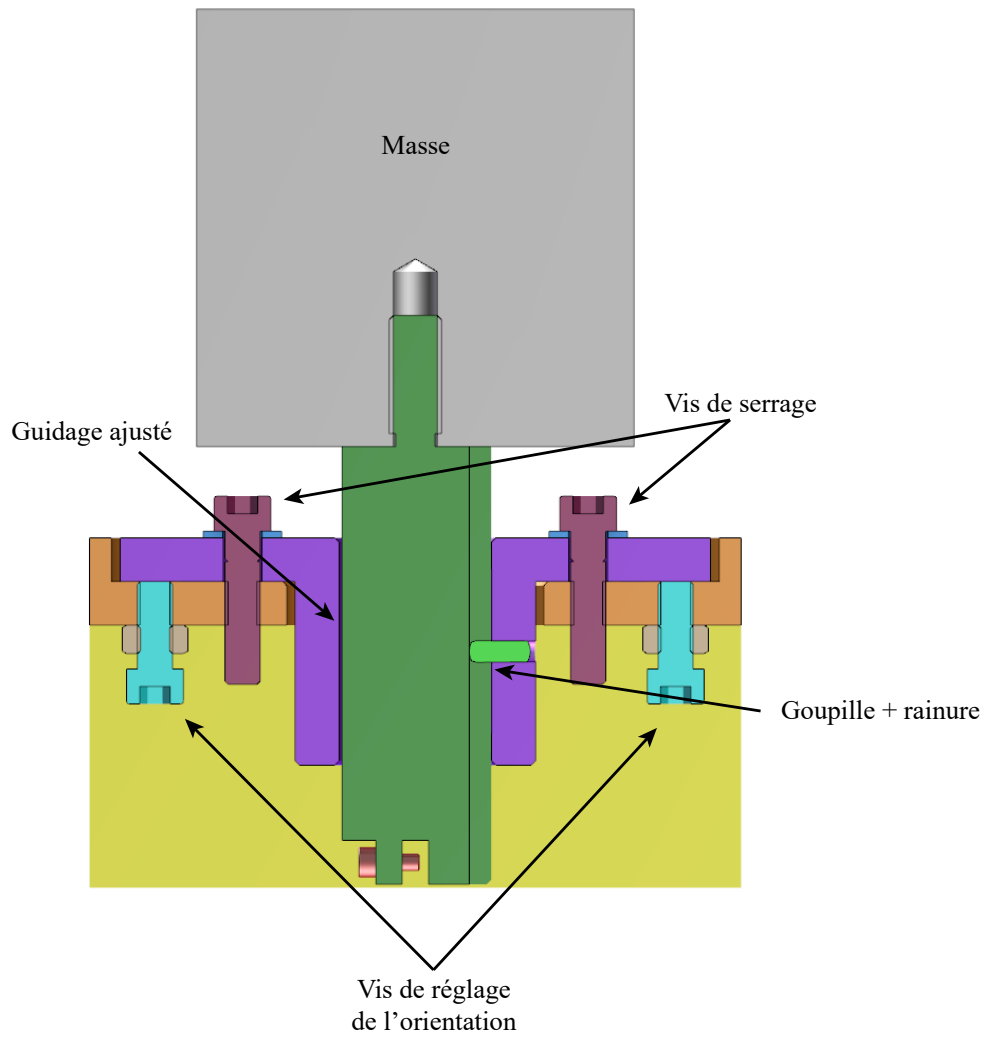
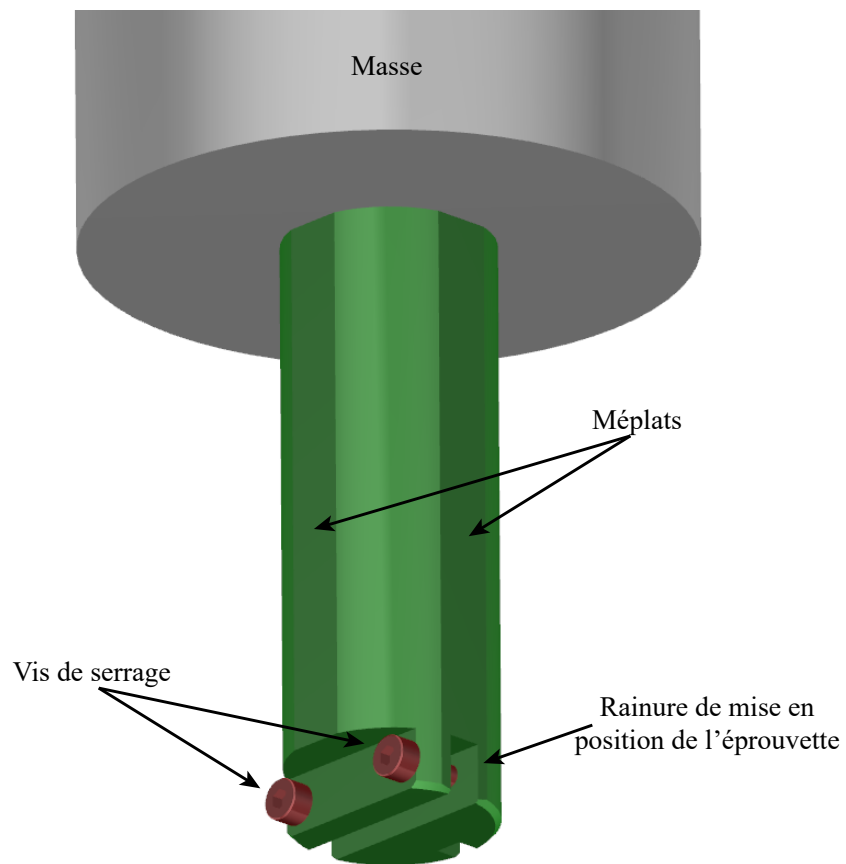


FIGURE 4.12 – Vue en coupe du montage



**FIGURE 4.13** – Détail de la tige maintenant l'éprouvette durant le polissage

## 4 Essais biaxiaux sur fissure longue à contrainte T non nulle

Supposons que deux fissures, courtes ou longues, chargées de la même manière se propagent aussi de la même manière, mais que le chargement d'une fissure ne peut être représenté par le seul facteur d'intensité des contraintes. Pour comparer fissure courte et fissure longue, il faut donc qu'elles soient soumises au même couple  $(K, T)$ .

L'objectif de ces essais est de faire propager une fissure longue dans les mêmes conditions qu'une fissure courte. Ceci est réalisé en intervenant sur la multiaxialité du chargement afin que la pointe de fissure voit le même chargement qu'une pointe de microfissure. Pour cela, il faut reproduire un chargement  $(K_I$  et  $T)$  équivalent à celui d'une microfissure. Il est donc nécessaire de réaliser des essais biaxiaux sur fissure longue pour obtenir, a priori, les mêmes effets que ceux observés sur la propagation des fissures courtes. Ces essais ont été réalisés sur la machine ASTREE du LMT-Cachan en utilisant des éprouvettes cruciformes possédant une entaille centrale alignée avec un des axes de sollicitation. Ceci permet d'appliquer aisément une contrainte T positive comme négative sur l'éprouvette, en tirant ou en comprimant sur l'axe de la fissure. Le dimensionnement est présenté dans la section 4.1 page 125 et les essais ainsi que leurs résultats dans la section 4 page 125.

### 4.1 Dimensionnement de l'éprouvette cruciforme

On souhaite réaliser des essais sur fissures longues dans les mêmes conditions qu'une fissure courte. C'est-à-dire qu'elle soit soumise au même chargement  $(K_I, T)$  qu'une fissure courte. Il faut donc déterminer le chargement à appliquer à l'éprouvette cruciforme pour pouvoir obtenir le même couple  $(K_I, T)$  que la fissure courte dans l'éprouvette de type SENT. La géométrie de départ de l'éprouvette est la même que celle développée par Pierre-Yves Decreuse dans sa thèse [Decreuse, 2010].

#### 4.1.1 Détermination des chargements à appliquer

Les valeurs de  $K_I$  et  $T$  que l'on souhaite obtenir sur la fissure longue sont connues (cf. section 3.1.2 page 119). On souhaite déterminer les contraintes  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$  à appliquer sur l'éprouvette pour reproduire ce chargement (cf. figure 4.14). Pour ce faire, on peut exprimer  $K_I$  et  $T$  comme suit :

$$\begin{cases} K_I^{SENT} = \frac{\partial K_I^{cruci}}{\partial \sigma_x} \sigma_x^{cruci} + \frac{\partial K_I^{cruci}}{\partial \sigma_y} \sigma_y^{cruci} \\ T^{SENT} = \frac{\partial T^{cruci}}{\partial \sigma_x} \sigma_x^{cruci} + \frac{\partial T^{cruci}}{\partial \sigma_y} \sigma_y^{cruci} \end{cases} \quad (4.15)$$

$K_I^{SENT}$  et  $T^{SENT}$  faisant référence au facteur d'intensité des contraintes  $K_I$  et à la contrainte  $T$  provenant du calcul sur l'éprouvette SENT. On peut donc résoudre ce système et exprimer les contraintes à appliquer sur l'éprouvette cruciforme  $\sigma_x^{cruci}$  et  $\sigma_y^{cruci}$  en fonction des autres paramètres. On a :



$$\begin{cases} \sigma_x^{cruci} = \frac{K_I^{SENT} - \frac{\partial K_I^{cruci}}{\partial \sigma_y} \frac{\partial \sigma_y^{cruci}}{\partial T} T^{SENT}}{\frac{\partial K_I^{cruci}}{\partial \sigma_x} - \frac{\partial T^{cruci}}{\partial \sigma_x} \frac{\partial \sigma_y^{cruci}}{\partial T} \frac{\partial K_I^{cruci}}{\partial \sigma_y}} \\ \sigma_y^{cruci} = \frac{\partial \sigma_y^{cruci}}{\partial T} \left( T^{SENT} - \frac{\partial T^{cruci}}{\partial \sigma_x} \sigma_x^{cruci} \right) \end{cases} \quad (4.16)$$

Les paramètres  $\frac{\partial K_I^{cruci}}{\partial \sigma_x}$ ,  $\frac{\partial K_I^{cruci}}{\partial \sigma_y}$ ,  $\frac{\partial T^{cruci}}{\partial \sigma_x}$  et  $\frac{\partial T^{cruci}}{\partial \sigma_y}$  peuvent être déterminés par simulations numériques sur l'éprouvette cruciforme.

#### 4.1.2 Simulation de l'éprouvette cruciforme

Afin de déterminer les 4 dérivées partielles de  $K_I$  et  $T$  en fonction de  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$ , on peut appliquer sur l'éprouvette cruciforme un chargement de traction, par exemple, et faire varier ce chargement dans une seule direction à chaque fois. Il est ensuite aisé de déterminer les variations de  $K_I$  et de  $T$  correspondantes et, par conséquent, les dérivées partielles qui en découlent.

Les calculs ont été réalisés à l'aide du logiciel ABAQUS. Les propriétés matériau utilisées sont définies dans le tableau 3.4 page 80.

##### 4.1.2.1 Conditions aux limites

Les têtes de l'éprouvette prises dans les mors ont été retirées et seulement un quart de l'éprouvette a été modélisé afin de diminuer les temps de calcul. Les conditions aux limites appliquées sont schématisées en figure 4.14. Des conditions de symétrie ont été appliquées sur les faces coupées de l'éprouvette. Une pression est appliquée sur les faces liées aux mors de la machine. Enfin, le déplacement d'un point situé sur le plan de la fissure a été bloqué. Enfin, la longueur initiale de la fissure, notée  $a_0$ , est de 10 mm.

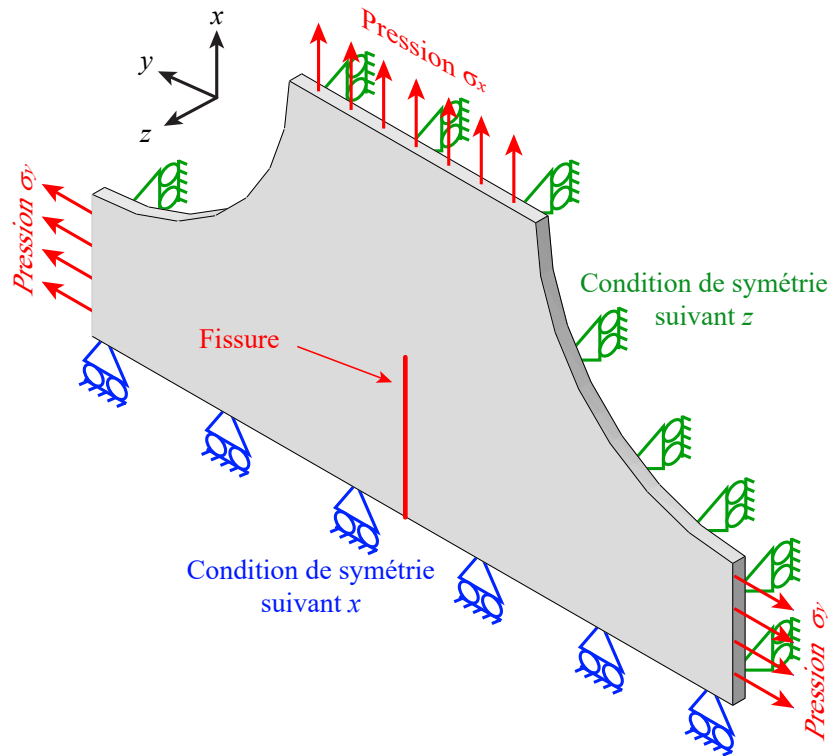


FIGURE 4.14 – Conditions aux limites de la simulation 3D sur l'éprouvette cruciforme

#### 4.1.2.2 Résultats

Les évolutions de  $\frac{\partial K_I}{\partial \sigma_x}$ ,  $\frac{\partial K_I}{\partial \sigma_y}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial \sigma_x}$  et  $\frac{\partial T}{\partial \sigma_y}$  sont représentées en figure 4.15. Leurs valeurs pour différentes longueurs de fissures sont répertoriées dans le tableau 4.3 page 129.

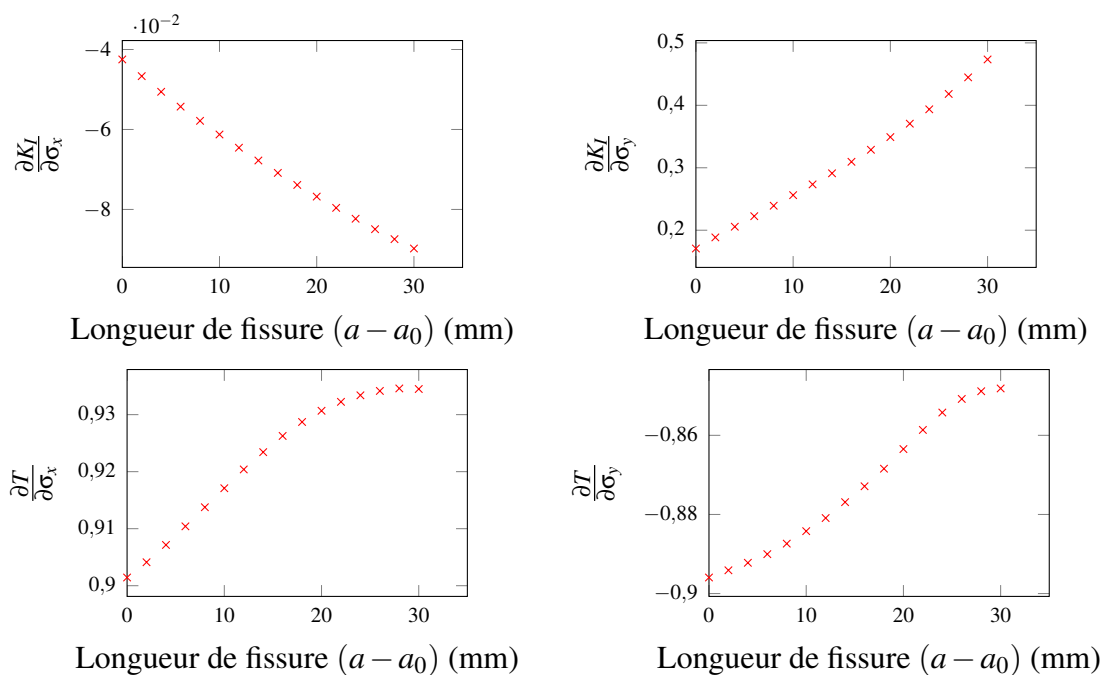


FIGURE 4.15 – Évolutions de  $\frac{\partial K_I}{\partial \sigma_x}$ ,  $\frac{\partial K_I}{\partial \sigma_y}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial \sigma_x}$  et  $\frac{\partial T}{\partial \sigma_y}$  en fonction de la longueur de fissure avec  $a_0 = 10$  mm

En utilisant les valeurs précédentes de  $\frac{\partial K_I}{\partial \sigma_x}$ ,  $\frac{\partial K_I}{\partial \sigma_y}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial \sigma_x}$  et  $\frac{\partial T}{\partial \sigma_y}$ , ainsi que l'équation (4.16), on peut déterminer l'évolution des contraintes à appliquer à l'éprouvette pour obtenir le même chargement  $(K_I, T)$  que celui de la SENT.

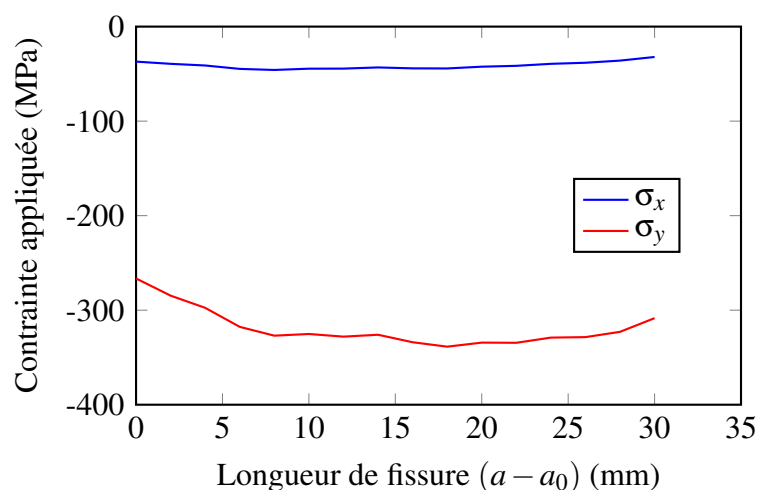


FIGURE 4.16 – Évolution des contraintes à appliquer sur l'éprouvette cruciforme avec  $a_0 = 10$  mm

Longueur de fissure ( $a - a_0$ )	$\frac{\partial K_I}{\partial \sigma_x}$	$\frac{\partial K_I}{\partial \sigma_y}$	$\frac{\partial T}{\partial \sigma_x}$	$\frac{\partial T}{\partial \sigma_y}$
0	-0,042	0,171	0,901	-0,896
2	-0,047	0,188	0,904	-0,894
4	-0,051	0,206	0,907	-0,892
6	-0,054	0,222	0,910	-0,890
8	-0,058	0,239	0,914	-0,887
10	-0,061	0,256	0,917	-0,884
12	-0,065	0,273	0,920	-0,881
14	-0,068	0,291	0,923	-0,877
16	-0,071	0,310	0,926	-0,873
18	-0,074	0,329	0,929	-0,868
20	-0,077	0,349	0,931	-0,863
22	-0,080	0,371	0,932	-0,859
24	-0,082	0,394	0,933	-0,854
26	-0,085	0,418	0,934	-0,851
28	-0,087	0,445	0,935	-0,849
30	-0,090	0,473	0,934	-0,848

TABLEAU 4.3 – Valeurs de  $\frac{\partial K_I}{\partial \sigma_x}$ ,  $\frac{\partial K_I}{\partial \sigma_y}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial \sigma_x}$  et  $\frac{\partial T}{\partial \sigma_y}$  en fonction de la longueur de fissure

Longueur de fissure ( $a - a_0$ ) (mm)	Contrainte $\sigma_x$ (MPa)	Contrainte $\sigma_y$ (MPa)
0	-37,0	-266,4
2	-39,4	-284,6
4	-41,1	-297,5
6	-44,7	-317,6
8	-45,9	-327,0
10	-44,5	-325,2
12	-44,4	-328,0
14	-43,2	-326,0
16	-44,2	-333,9
18	-44,3	-338,6
20	-42,4	-334,3
22	-41,5	-334,5
24	-39,4	-329,0
26	-38,2	-328,5
28	-36,0	-322,9
30	-32,1	-308,4

TABLEAU 4.4 – Valeurs des contraintes à appliquer sur l'éprouvette cruciforme

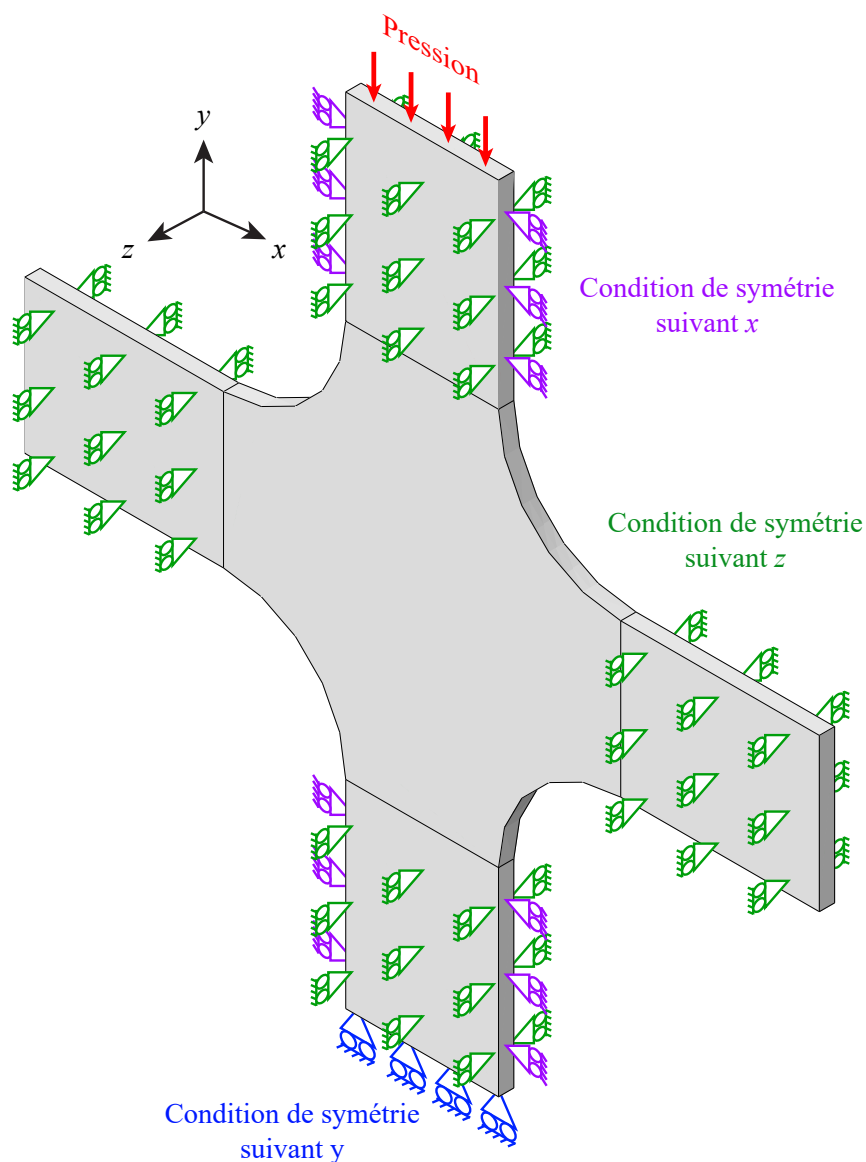
Il est donc possible d'obtenir le même chargement ( $K_I, T$ ) qu'une fissure courte sur une fissure longue en utilisant cette forme d'éprouvette et en comprimant dans les deux directions. En prenant une éprouvette d'une épaisseur de 5 mm, les efforts maximaux seraient de l'ordre de 85 kN. L'effort maximal que les pistons d'ASTREE peuvent développer étant de 10 t, il sera donc possible de réaliser ces essais avec une éprouvette possédant cette géométrie. À noter qu'en fonction du niveau de contrainte T souhaité, les valeurs minimales et maximales des efforts sur les différents axes de chargement doivent être en phase ou hors phase.

### 4.1.3 Dimensionnement au flambage de l'éprouvette cruciforme

L'éprouvette cruciforme devant être sollicitée en compression dans les deux directions, il faut s'assurer qu'elle ne risque pas de flamber sous le chargement appliqué. Pour cela, une simulation numérique a été réalisée avec le logiciel ABAQUS afin de déterminer la contrainte critique de flambage de l'éprouvette pour la géométrie utilisée dans la simulation précédente.

#### 4.1.3.1 Conditions aux limites

Les conditions aux limites appliquées sont schématisées en figure 4.17. L'impact des mors sur les têtes de l'éprouvette a été modélisé par des conditions de symétrie suivant  $z$  sur les faces de chaque tête. Une condition de symétrie supplémentaire suivant  $x$  a été ajoutée sur les tranches des têtes supérieure et inférieure. Une condition de symétrie supplémentaire suivant  $y$  a été ajoutée sur la face inférieure pour bloquer le mouvement de corps rigide. Une pression est appliquée sur la face supérieure. Appliquer une pression supplémentaire sur les côtés (comme dans l'essai qui sera réalisé ultérieurement) augmenterait la valeur de la contrainte critique de flambage car cela limiterait le flambage dans l'autre direction. C'est pourquoi, si la contrainte critique en appliquant une pression dans une seule direction est suffisamment élevée, elle le sera en bicompression.



**FIGURE 4.17** – Conditions aux limites de la simulation de flambage sur l'éprouvette cruciforme

#### 4.1.3.2 Résultats

Le tableau 4.5 page 132 référence les valeurs des différentes contraintes critiques pour chaque mode de flambage. Le mode le plus incapacitant est le premier mode (cf. figure 4.18) car il a lieu à la contrainte la plus basse. Dans notre cas, la contrainte correspondante est de 4221 MPa. La contrainte à appliquer étant inférieure à 350 MPa (cf. tableau 4.4 page 129), celle-ci est bien inférieure à la contrainte critique de flambage. Cette géométrie d'éprouvette est donc valide pour notre utilisation. Le plan de l'éprouvette finale se trouve en Annexe B.

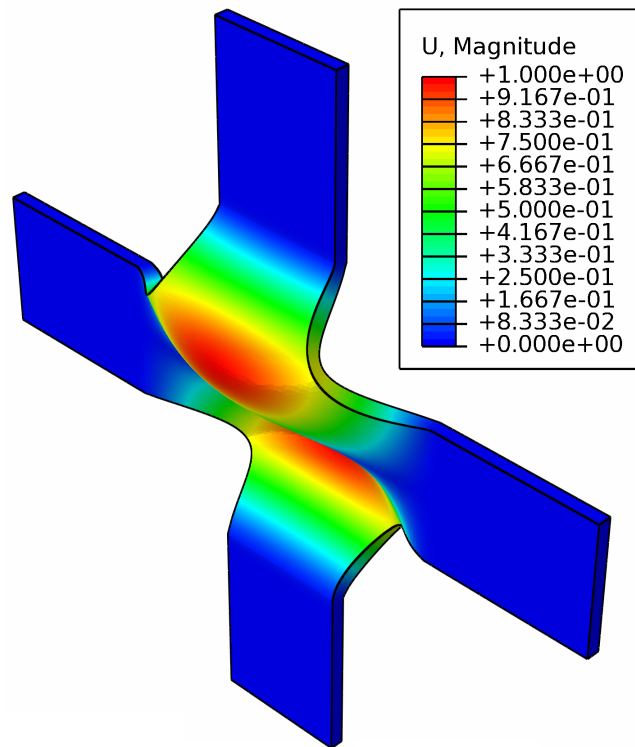


FIGURE 4.18 – Champ de déplacement (en mm) projeté sur la déformée de l'éprouvette cruciforme

Mode	Contrainte (MPa)
1	4221
2	4336
3	6432
4	9404
5	9664
6	10219
7	13416
8	14087
9	16389
10	17185

TABLEAU 4.5 – Valeurs de la contrainte critique de flambage pour chaque mode de flambage

## 4.2 Essais biaxiaux à contrainte T non nulle

### 4.2.1 Montage

Les essais ont été réalisés sur ASTREE, machine hydraulique de traction-compression triaxiale. L'éprouvette cruciforme (cf. Annexe B) a été montée dans les mors des 4 vérins horizontaux d'une capacité maximale de 10 tonne chacun.

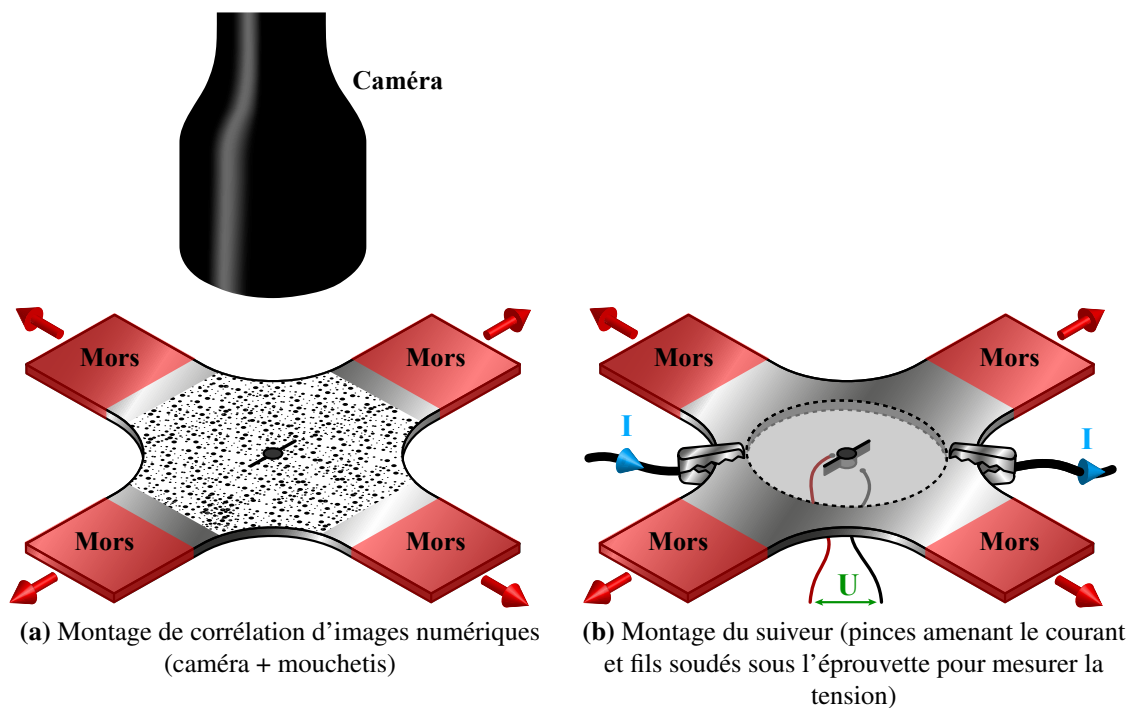


FIGURE 4.19 – Montage des essais biaxiaux

### 4.2.2 Prise de mesure

Les efforts sont mesurés par les cellules d'effort des vérins et la longueur de la fissure est mesurée par un suiveur de fissure électrique (cf. figure 4.19b). De plus, une caméra EOS Pixelfly montée sur un objectif télécentrique avec un grossissement de 0,125 permet de suivre la fissure de façon optique ou par corrélation d'images à l'aide d'un mouchetis (cf. figure 4.19a).

### 4.2.3 Calibration du suiveur

Pour pouvoir mesurer la longueur de la fissure durant l'essai, il a été nécessaire d'effectuer une courbe de calibration pour lier la longueur de la fissure  $a$  à la différence de potentiel  $U$  entre les deux points de mesure (cf. figure 4.19b). Pour ce faire, la longueur



totale de la fissure notée  $2a$  a été mesurée par corrélation d'images numériques (cf. figure 4.21). Cette courbe de calibration a été obtenue sur le même type d'éprouvette à partir de 3 essais pour différents chargements :  $T = 0$  MPa,  $T = -180$  MPa et  $T = -280$  MPa (cf. figure 4.20). L'équation obtenue est la suivante :

$$\frac{2a}{2a_0} = -0,09 \left( \frac{U}{U_0} \right)^2 + 1,24 \frac{U}{U_0} - 0,15 \quad (4.17)$$

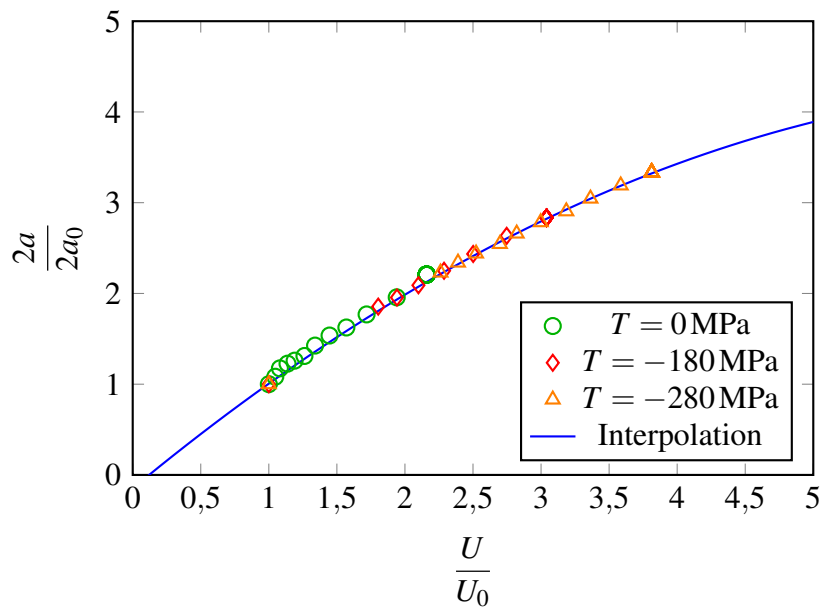


FIGURE 4.20 – Interpolation de la courbe de calibration à partir des mesures par corrélation d'images numériques avec  $a_0 = 10$  mm

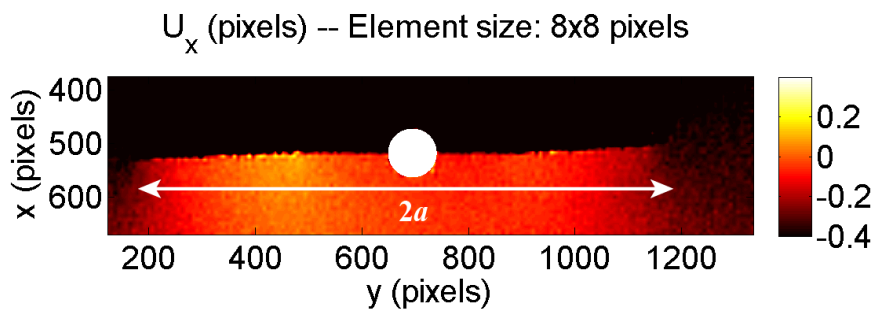


FIGURE 4.21 – Résultat de corrélation d'images numériques permettant de mesurer la longueur de fissure

Il est alors possible d'obtenir la courbe de calibration pour l'éprouvette cruciforme.

#### 4.2.4 Chargement appliqué

L'éprouvette est sollicitée par un chargement de fatigue à efforts imposés. Le chargement est constitué de cycles sinusoïdaux d'une fréquence allant de 20 à 30 Hz (dépendant du chargement appliqué) à un rapport de charge  $R = 0,1$ , puis de paliers aux efforts minimum et maximum pour prendre des photos et enfin des cycles à un rapport de charge différent ( $R = 0,55$ ) afin de marquer la surface de rupture pour calibrer le suiveur (cf. figure 4.22).

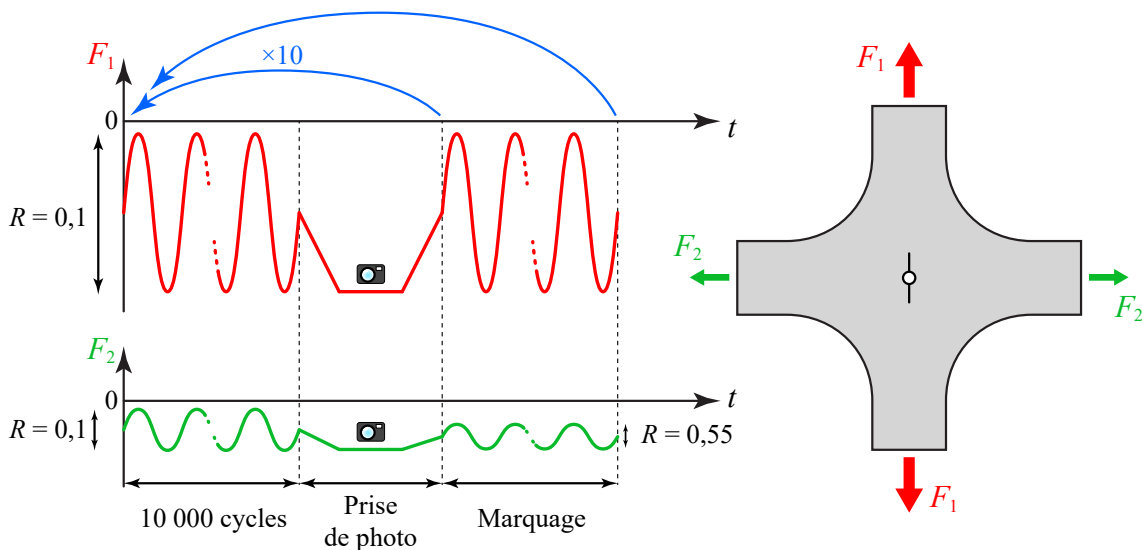


FIGURE 4.22 – Chargement appliqué lors de l'essai biaxial

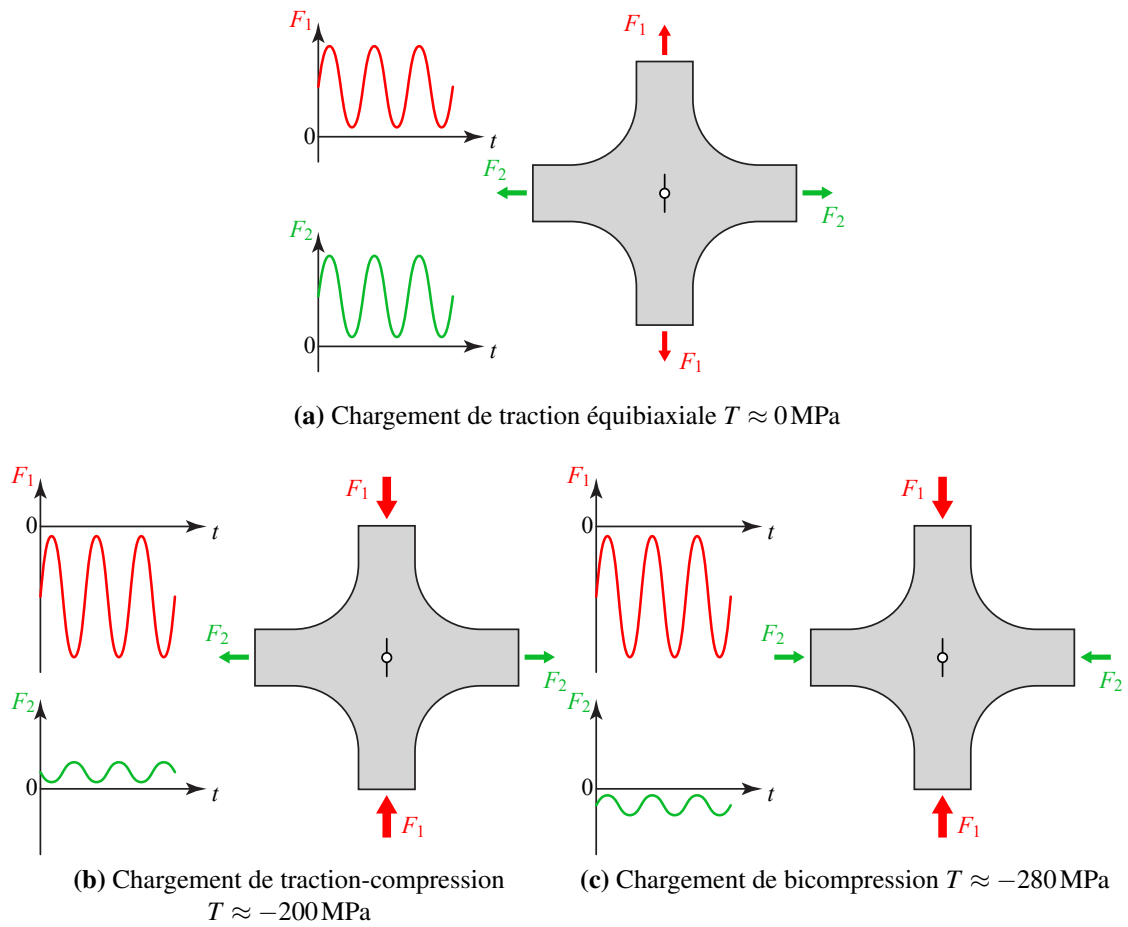
Pour obtenir une contrainte T négative dans l'éprouvette, il est nécessaire de comprimer dans l'axe de la fissure. Suivant le niveau de contrainte T désiré, il peut également être nécessaire de comprimer transversalement afin de compenser l'effet Poisson et diminuer la valeur de K. Pour obtenir un effet proche d'une microfissure, il est nécessaire de faire la bicompression (cf. figure 4.9).

Différents chargements ont été explorés :

- traction équibiaxiale (cf. figure 4.23a) avec une contrainte T évoluant de 0 à 25 MPa ;
- traction-compression (cf. figure 4.23b) avec une contrainte T évoluant de  $-180$  à  $-220$  MPa, ce qui correspond à un chargement subi par une fissure courte de  $150\ \mu\text{m}$  ;
- bicompression (cf. figure 4.23c) avec une contrainte T évoluant de  $-240$  à  $-300$  MPa, ce qui correspond à un chargement subi par une fissure courte de  $100\ \mu\text{m}$ .

Les évolutions de la contrainte T en fonction de la longueur de la fissure pour les différents chargements sont données en figure 4.25 et celles de  $K_I$  en figure 4.24.

Les chargements étant cycliques, il est important de les synchroniser pour avoir les pics d'effort sur les deux axes au même moment. Il faut également être très vigilant sur le



**FIGURE 4.23** – Différents chargements appliqués lors des essais biaxiaux

déphasage des signaux. En effet, lorsque le chargement est de la bitraction ou bicompression, les efforts maximaux  $F_{max}$  doivent apparaître au même moment. Par contre, lors d'un chargement traction-compression, il faut que les maximums de la valeur absolue  $|F|_{max}$  surviennent au même moment. Il est donc nécessaire d'avoir un déphasage de  $\pi$  entre les deux signaux dans ce cas là.

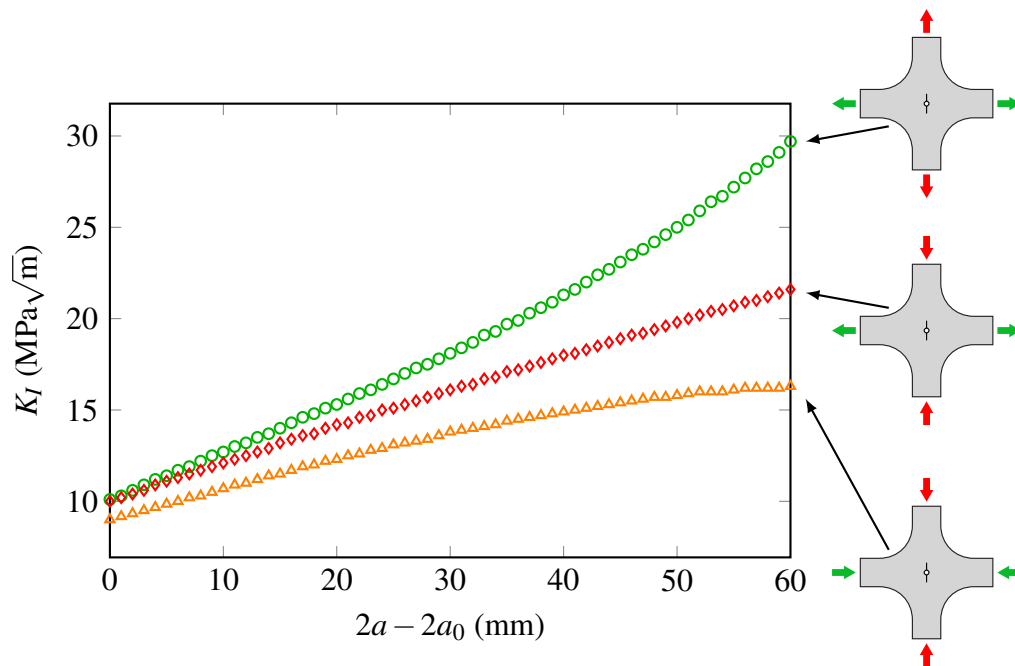


FIGURE 4.24 – Évolutions du facteur d'intensité des contraintes  $K_I$  dans les éprouvettes cruciformes pour les différents chargements obtenus par simulation avec  $a_0 = 10\text{ mm}$

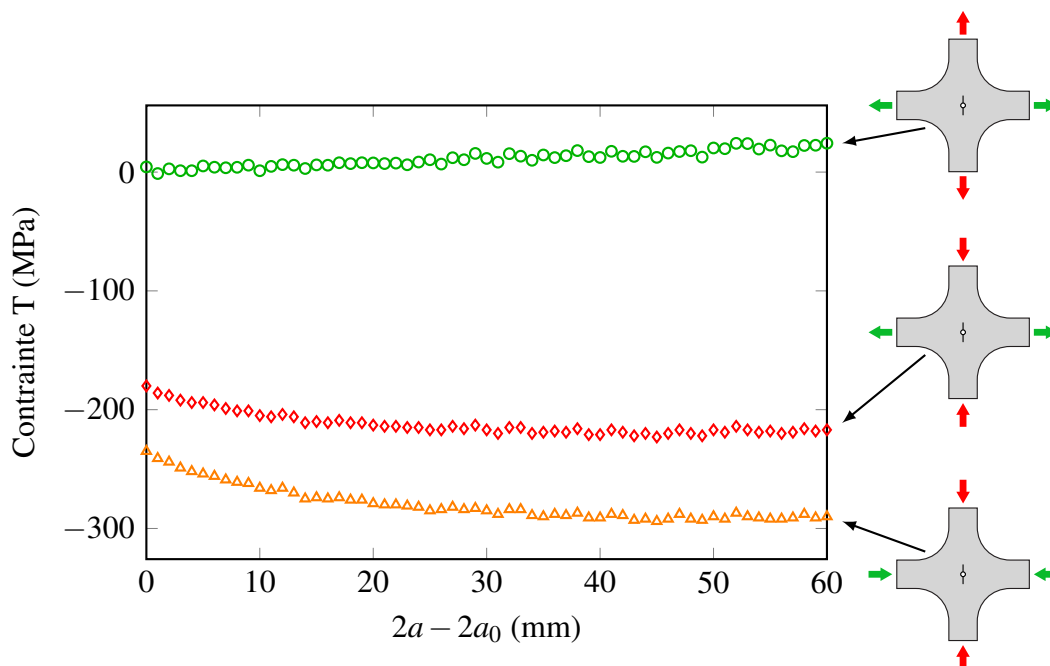
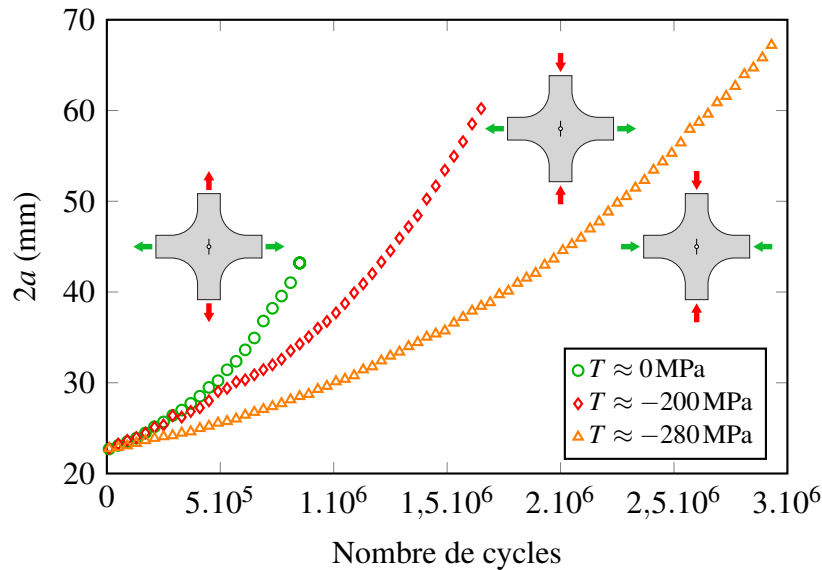


FIGURE 4.25 – Évolutions de la contrainte  $T$  dans les éprouvettes cruciformes pour les différents chargements obtenus par simulation avec  $a_0 = 10\text{ mm}$

#### 4.2.5 Résultats

On observe sur les courbes de longueur de fissure en fonction du nombre de cycles (cf. figure 4.26) que la contrainte T a un effet très marqué sur la propagation. Cependant, l'effet global semble être opposé à ce que l'on attendait. En effet, plus la contrainte T est négative plus la fissure semble ralentir.



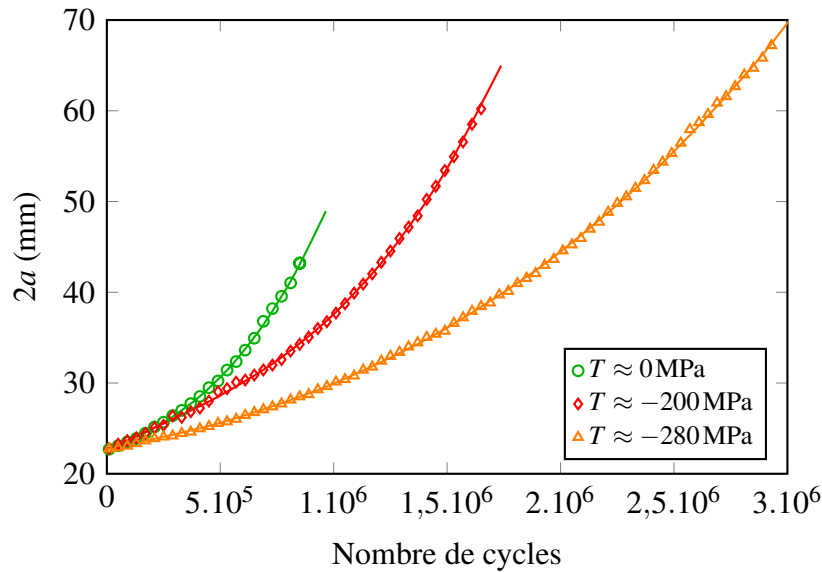
**FIGURE 4.26** – Évolutions de la longueur de fissure totale  $2a$  en fonction du nombre de cycles  $N$  pour différentes valeurs de contrainte  $T$

Pour mieux comprendre cet effet, il est possible de tracer les courbes de propagation  $da/dN = f(\Delta K)$ . Pour filtrer ces courbes, il a été décidé d'interpoler les courbes  $2a = f(N)$  par des polynômes du 3<sup>ème</sup> degré (cf. figure 4.27). Les valeurs de  $\Delta K$  et  $da/dN$  ont été calculées à partir de ces expressions. Les courbes de propagation ainsi obtenues sont tracées en figure 4.28.

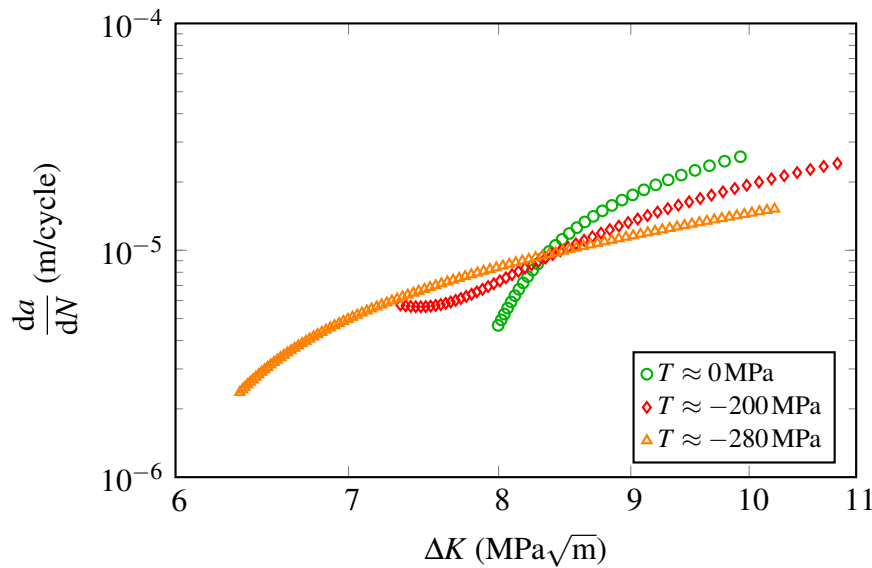
Au début de l'essai, lorsque le chargement est faible, plus la contrainte  $T$  est négative plus la vitesse de propagation augmente (cf. figure 4.28). Ceci est en accord avec ce que l'on peut trouver en général dans la littérature. Cependant, lorsque le chargement devient plus important, les courbes se croisent et l'effet observé s'inverse. La vitesse de propagation diminue au lieu d'augmenter. Ceci pourrait être expliqué par le fait que la contrainte  $T$  a une influence sur la vitesse de propagation différente en transitoire et en régime établi.

Le schéma de principe en figure 4.29 explique l'augmentation de la vitesse de propagation en transitoire à partir de l'évolution du domaine d'élasticité (cf. équation (4.7)) :

- Pour un chargement à  $T = 0$  (cf. figure 4.29a), le domaine d'élasticité va se déplacer en suivant le chargement (on suppose un écrouissage uniquement cinématique). Il va donc se déplacer par plasticité, jusqu'à intercepter la plus grande partie du chargement (cf. figure 4.29b) et atteindre un régime stabilisé. Pour mieux com-



**FIGURE 4.27** – Interpolations des évolutions de la longueur de fissure totale  $2a$  en fonction du nombre de cycles  $N$  pour différentes valeurs de contrainte  $T$



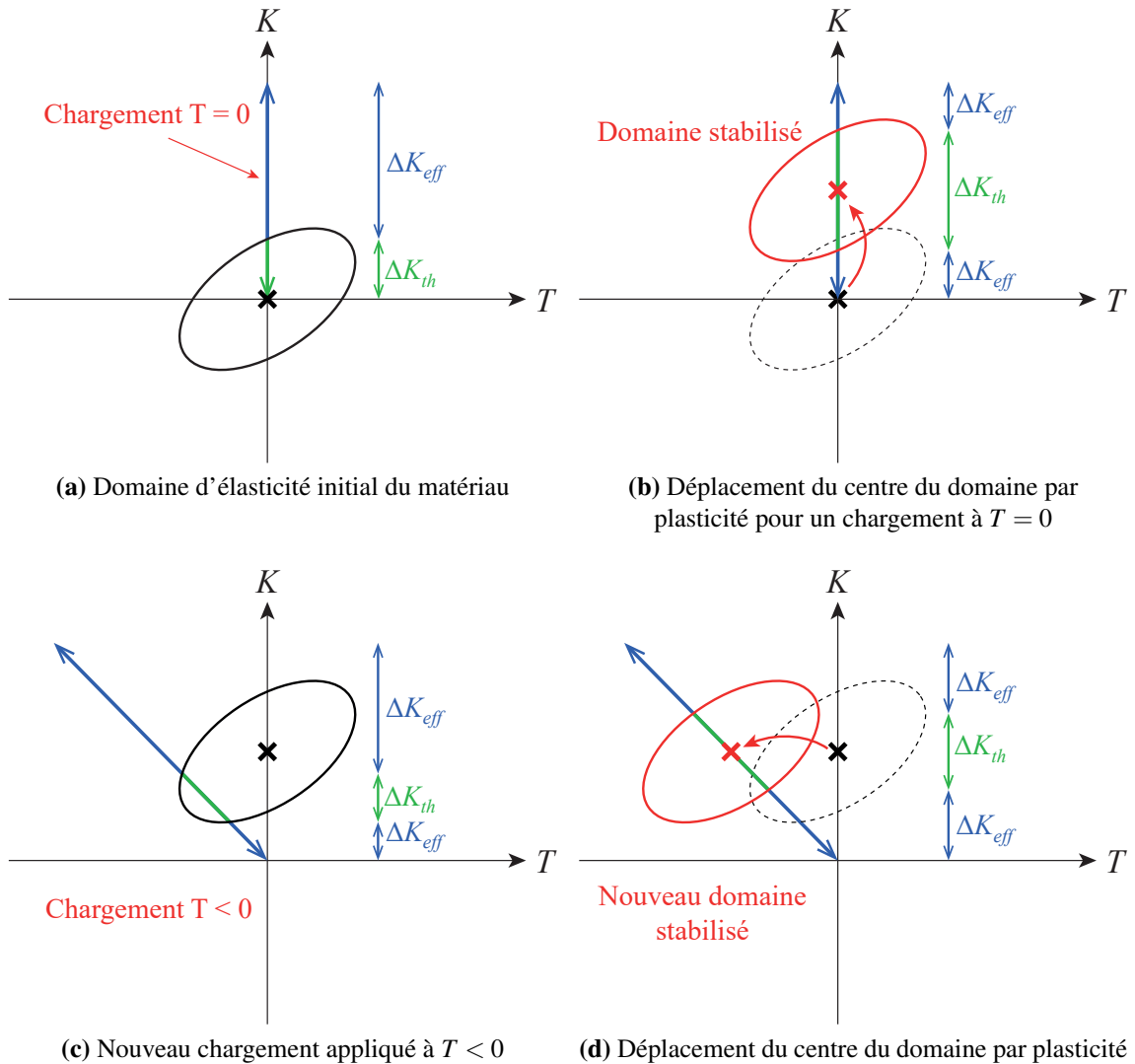
**FIGURE 4.28** – Courbes de propagation filtrées pour différentes valeurs de contrainte  $T$

prendre, le centre du domaine a été placé au centre du chargement sur les schémas. Les figures 4.29a et 4.29b montrent que  $\Delta K_{eff}$  diminue alors que le chargement  $\Delta K$  reste le même.

- Si on applique maintenant un chargement à  $T < 0$  (cf. figure 4.29c),  $\Delta K_{eff}$  augmente soudainement. Le chargement vu par la fissure et sa vitesse de propagation seront alors bien plus importants. Après déplacement du domaine, en régime per-

manent,  $\Delta K_{eff}$  redevient plus faible.

Ce phénomène pourrait expliquer une différence de comportement entre les essais précédents et la propagation d'une microfissure.



**FIGURE 4.29** – Schéma de principe montrant l'évolution du centre du domaine d'élasticité dans le plan  $K - T$  lors d'un changement de chargement

Il a donc été décidé de tester expérimentalement l'effet transitoire lors d'un changement de valeur de contrainte T.

### 4.3 Essai transitoire

Un essai a été réalisé afin d'étudier le comportement en propagation d'une fissure lors d'un changement brusque de contrainte T. En effet, une fissure courte subit une contrainte

T dont l'effet ne peut être négligé. Cependant, la distance de propagation pour laquelle il y a des effets de fissure courte étant très faible (de l'ordre de quelques centaines de microns), il est très probable que cette fissure subisse des effets transitoires durant sa propagation. Afin d'étudier cette influence transitoire de la contrainte T, un essai a été réalisé durant lequel la contrainte T a été soudainement modifiée en passant d'une valeur nulle à une valeur fortement négative, équivalente à celle que subirait une fissure courte de l'ordre de  $100\ \mu\text{m}$ . L'éprouvette, le montage et les moyens de mesure étaient identiques à ceux des précédents essais sur éprouvette cruciforme. Le chargement appliqué est décrit dans le paragraphe qui suit.

### 4.3.1 Chargement appliqué

L'éprouvette est sollicitée par un chargement de fatigue à efforts imposés. Le chargement est constitué de cycles sinusoidaux d'une fréquence de 30 Hz à un rapport de charge  $R = 0,1$ . Il est défini comme suit (cf. figure 4.30) :

- L'éprouvette est d'abord préfissurée avec un chargement quasi équibiaxial afin d'obtenir une contrainte T nulle et un facteur d'intensité des contraintes  $K_I$  égal à  $9\ \text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ .
- Ensuite, le chargement est modifié de façon à garder le même facteur d'intensité  $K_I$  (correspondant à la longueur de fissure courante) mais en ayant une contrainte T négative égale à  $-294\ \text{MPa}$ .

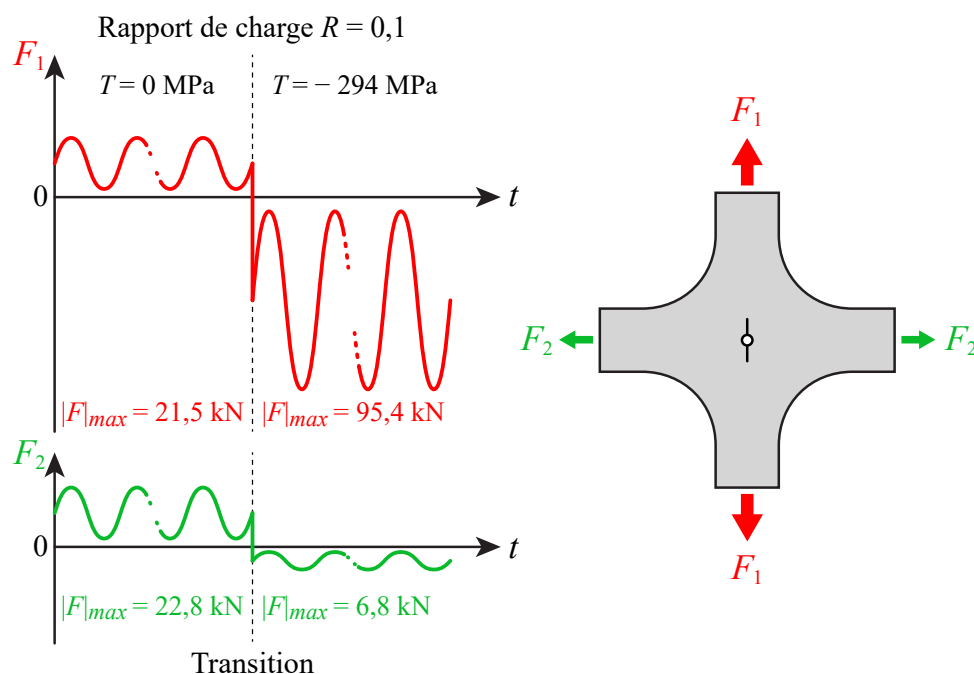
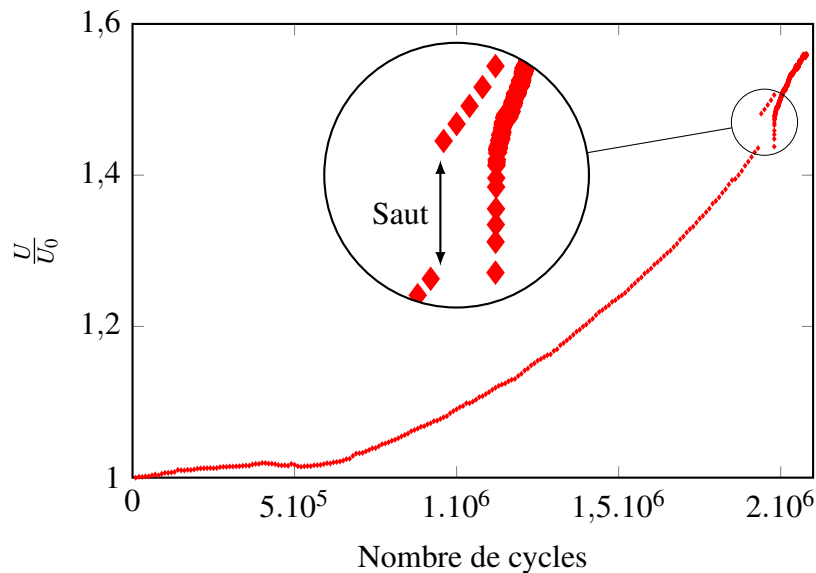


FIGURE 4.30 – Chargement appliqué lors de l'essai transitoire



### 4.3.2 Résultats

La courbe en figure 4.31 présente l'évolution du rapport entre la tension mesurée par le suiveur de fissure et la tension initiale  $\left(\frac{U}{U_0}\right)$  en fonction du nombre de cycles de chargement ( $N$ ).



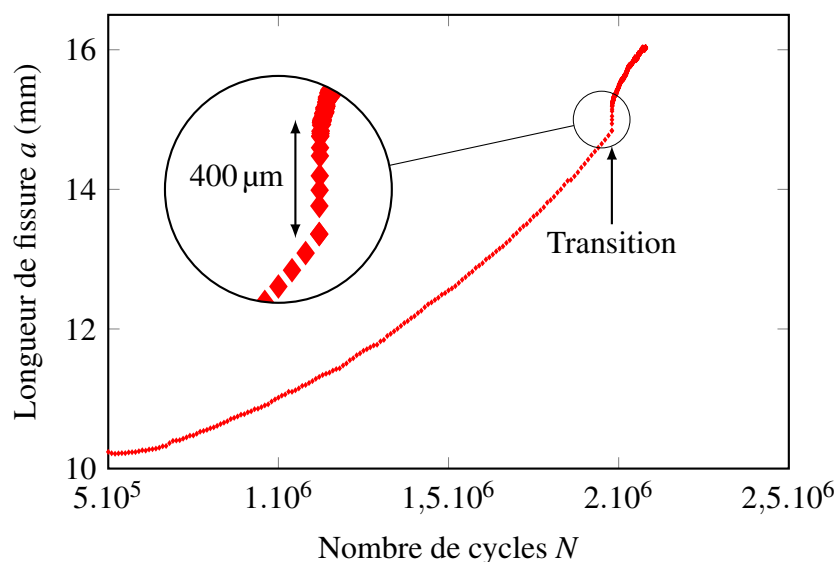
**FIGURE 4.31** – Évolution du rapport entre la tension mesurée par le suiveur de fissure et la tension initiale  $\frac{U}{U_0}$  en fonction du nombre de cycles  $N$

On observe deux sauts dans cette courbe. Le premier est probablement dû à un défaut du suiveur de potentiel car la vitesse de propagation reste globalement la même avant et après ce saut. Ceci est peut-être dû à un glissement des pinces permettant d'alimenter en courant l'éprouvette entraînant une évolution de la tension initiale  $U_0$ . Il a donc été choisi de recoller cette partie de la courbe avec la précédente en supposant une évolution linéaire entre les deux points de chaque côté du saut. Le deuxième saut correspond au changement de chargement. Afin de limiter au maximum des effets parasites, il a été décidé de réaliser un changement de chargement le plus rapide possible. En effet, la tension mesurée par le suiveur peut dépendre de la température de l'éprouvette. Cette variation de tension due à une évolution de la température a été limitée en arrêtant la machine uniquement le temps de changer le programme de chargement. On observe néanmoins un saut marqué dans la mesure de la tension (*i.e.* la longueur de la fissure) lors de ce changement. Ceci est peut-être un artefact comme le précédent saut ou il peut-être dû à un changement de l'état de contrainte général de l'éprouvette. En effet, le chargement de préfissuration est une bitraction alors que lors de l'effet transitoire, le chargement est une bicompression. Cependant, avoir un recul de la fissure n'ayant aucun sens physique, il a été choisi de recoller la courbe sans prendre en compte ce saut. Ce choix est discutable. Il serait nécessaire de réaliser d'autres essais pour observer plus en détail cette variation. Ces essais

supplémentaires n'ont pu être réalisés par manque de temps et seront étudiés par Besnik Sadriji lors de sa thèse avec des variations positives et négatives de la contrainte T.

Néanmoins, la question principale est de regarder l'évolution de la vitesse de propagation une fois que ce changement de mode de chargement a été effectué.

La courbe en figure 4.32 présente l'évolution de la demi-longueur de la fissure, notée  $a$ , en fonction du nombre de cycles de chargement après post-traitement. On observe qu'après la transition entre les deux chargements, la vitesse de propagation de la fissure augmente considérablement sur une distance d'environ  $400\ \mu\text{m}$  au total. Il est évident que la contrainte T a un fort impact sur la vitesse de propagation. En effet, la vitesse de propagation passe de  $7 \cdot 10^{-6}$  mm/cycle avant la transition à  $1 \cdot 10^{-3}$  mm/cycle juste après. Ceci représente une vitesse presque 150 fois plus importante que sans contrainte T. Cependant, cet effet s'estompe très rapidement après un millier de cycles et  $400\ \mu\text{m}$  de propagation. Il est également nécessaire de mettre ce premier résultat en regard des conditions d'essais et des artefacts non maîtrisés.



**FIGURE 4.32** – Effet transitoire sur l'évolution de la longueur de la fissure en fonction du nombre de cycles

Ce résultat rejoint la théorie présentée en figure 4.29. Lors du passage d'un chargement  $T = 0$  à un nouveau chargement  $T < 0$ , on observe une augmentation de la vitesse de propagation de la fissure qui pourrait être expliquée par le fait que le trajet de chargement (dans le diagramme  $K - T$ ) intercepte une partie plus petite du domaine d'élasticité. Ceci ayant pour effet d'augmenter la valeur de  $\Delta K_{eff}$ . Puis, lorsque le domaine de plasticité se déplace pour venir intercepter la plus grande partie du chargement,  $\Delta K_{eff}$  diminue de nouveau. On observe donc une forte accélération de la fissure suivie d'une diminution de cette accélération jusqu'à une nouvelle vitesse de propagation en régime permanent.

Par conséquent, lors d'un essai transitoire, une fissure longue qui passe soudainement d'un chargement à  $T = 0$  à  $T < 0$  accélère puis ralentit jusqu'à atteindre une nouvelle

vitesse en régime permanent.

Afin de tracer l'évolution de la vitesse de propagation, il est nécessaire d'interpoler la courbe de la figure 4.32. Pour ce faire, on ne s'intéresse qu'au saut et à la vitesse de propagation avant et après ce dernier. Dans ce cas, le facteur d'intensité des contraintes  $K$  varie peu. On considérera donc que la vitesse de propagation  $\frac{da}{dN}$  est constante avant et après le saut.

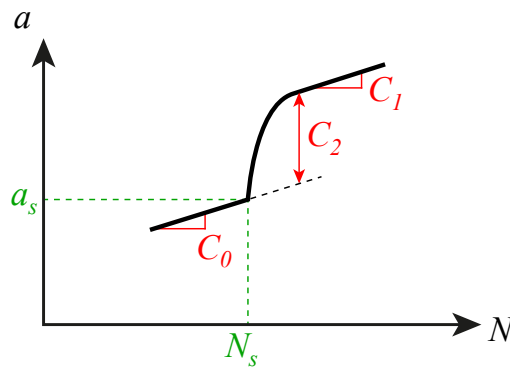
Avant le saut,  $a(N)$  sera interpolée par :

$$a(N) = a_s + C_0(N - N_s) \quad \text{pour } N < N_s \quad (4.18)$$

Avec  $N_s$ , le cycle durant lequel la transition de chargement a lieu.

La transition sera quant à elle interpolée par l'équation suivante (cf. figure 4.33) :

$$a(N) = a_1 + C_1(N - N_s) + C_2 \left( 1 - e^{-k(N - N_s)} \right) \quad \text{pour } N > N_s \quad (4.19)$$



**FIGURE 4.33** – Schéma explicatif des paramètres de l'interpolation de la courbe  $a(N)$  en régime transitoire

On obtient ainsi l'interpolation présentée en figure 4.34.

Il est possible de dériver par rapport à  $N$  les équations (4.18) et (4.19) pour obtenir l'évolution de la vitesse de propagation en fonction du nombre de cycles. On obtient ainsi l'équation suivante dont la représentation graphique est donnée en figure 4.35 :

$$\frac{da}{dN}(N) = \begin{cases} C_0 & \text{si } N < N_s \\ C_1 + k C_2 e^{-k(N - N_s)} & \text{si } N > N_s \end{cases} \quad (4.20)$$

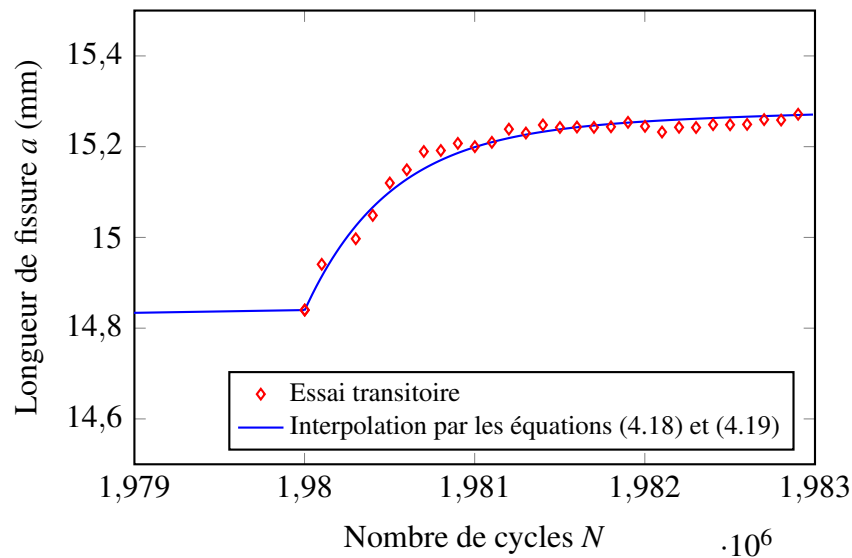


FIGURE 4.34 – Interpolation de l'effet transitoire sur la courbe  $a(N)$

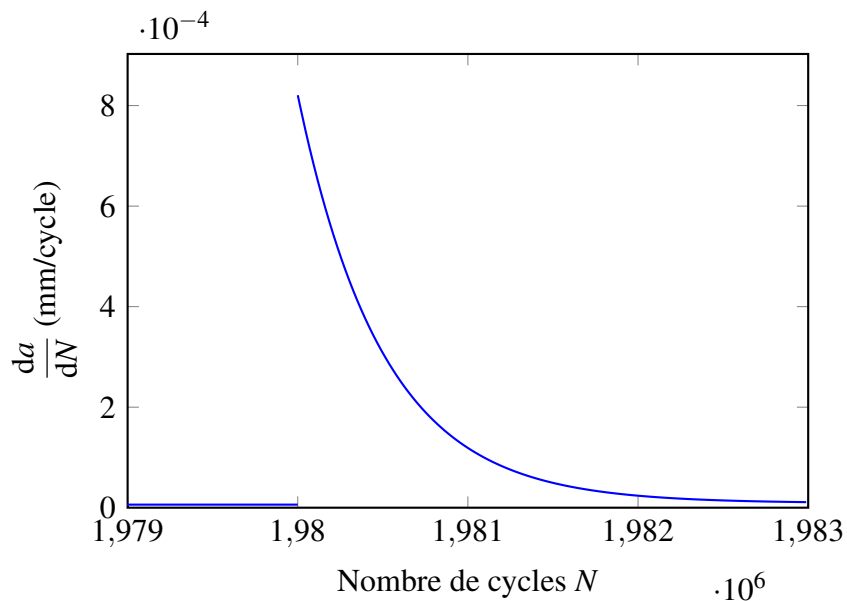
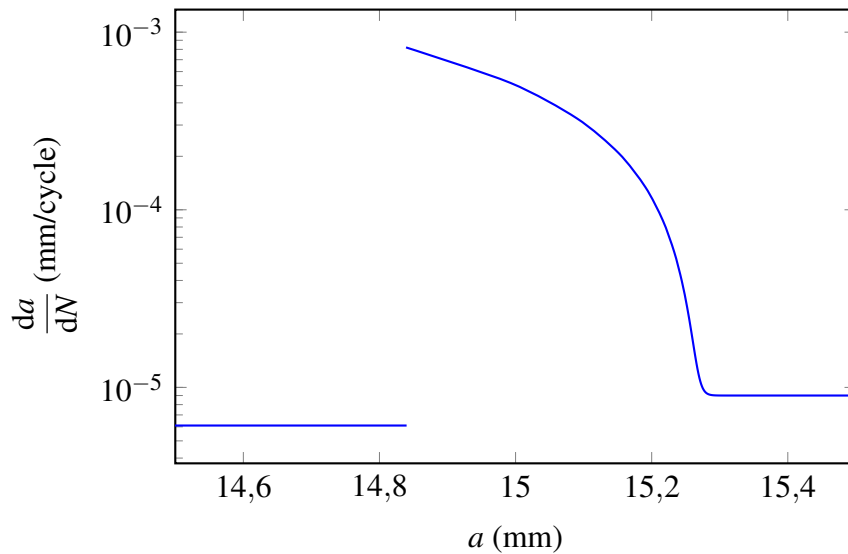


FIGURE 4.35 – Évolution de la vitesse de propagation  $\frac{da}{dN}$  en fonction du nombre de cycles  $N$  (cf. équation (4.20))

Afin d'étudier quelle est la portée de l'effet transitoire ainsi que son importance, l'évolution de la vitesse de propagation est tracée en fonction de la longueur de la fissure en échelle semi-logarithmique en figure 4.36.

On peut observer que, lors du saut, la vitesse de propagation est augmentée d'un facteur 130 environ. Cet effet s'étend sur une propagation de fissure d'environ 400  $\mu\text{m}$  avant de reprendre une vitesse qui tend à se stabiliser pour une valeur supérieure de 50 % à celle



**FIGURE 4.36** – Évolution de la vitesse de propagation  $\frac{da}{dN}$  en fonction de la longueur de la fissure  $a$

précédant la transition de chargement.

Cette augmentation de vitesse semble très importante. Cependant, ce saut dépend directement de la pente à l'origine de l'interpolation du transitoire. Cette pente peut avoir de grandes variations dues au bruit de mesure du suiveur.

**Il est néanmoins incontestable que passer soudainement d'une contrainte T nulle à une contrainte T négative accélère la fissure transitoirement comme le ferait un effet de fissure courte.**

On observe aussi qu'il reste une accélération résiduelle d'un facteur 1,5 une fois cet effet transitoire passé.

Ces résultats sont cohérents avec le fait qu'une fissure courte subirait à la fois un effet de contrainte T mais également que cet effet serait transitoire.

## 5 Modélisation de l'effet de la contrainte T sur la vitesse de propagation d'une fissure

Cette section présente quelques modèles simples ayant pour but d'appréhender les phénomènes provoquant des variations de vitesse de propagation lorsque la contrainte T varie.

### 5.1 Prise en compte de l'effet sur la taille de zone plastique

Dans cette partie, on se propose de prendre en compte l'effet de la contrainte T sur la taille de la zone plastique en pointe de fissure. Il a été vu précédemment que la contrainte T influe sur la forme et la taille de la zone plastique (cf. chapitre 1 section 3.3.1 page 24). De plus, la vitesse de propagation de la fissure est régie par la plasticité en pointe de fissure (cf. chapitre 1 section 2.1.2 page 13). Il en découle donc que la contrainte T influe sur la vitesse de propagation en modifiant la zone plastique.

En utilisant le rapport des tailles des zones plastiques avec et sans contrainte T, noté  $\frac{r_y(T \neq 0)}{r_y(T=0)}$ , il devrait donc être possible d'adapter la vitesse d'une fissure se propageant à contrainte T nulle pour lui permettre de représenter celle d'une autre fissure se propageant à contrainte T non nulle. La démarche est la suivante. Supposons que les vitesses de propagation de deux fissures l'une à  $T = 0$  et l'autre à  $T \neq 0$  adimensionnées par leurs tailles de zones plastiques respectives soient égales. On obtient alors l'équation suivante :

$$\frac{da}{dN}(T = 0) \cdot \frac{1}{r_y(T = 0)} = \frac{da}{dN}(T \neq 0) \cdot \frac{1}{r_y(T \neq 0)} \quad (4.21)$$

On peut donc en déduire l'évolution de la vitesse de propagation d'une fissure pour  $T \neq 0$  :

$$\frac{da}{dN}(T \neq 0) = \frac{da}{dN}(T = 0) \cdot \frac{r_y(T \neq 0)}{r_y(T = 0)} \quad (4.22)$$

$$\text{avec } \frac{r_y(T \neq 0)}{r_y(T = 0)} = \frac{2}{2 - \left(\frac{\Delta T}{\sigma_y}\right)^2 + \frac{\Delta T}{\sigma_y} \sqrt{4 - 3 \left(\frac{\Delta T}{\sigma_y}\right)^2}}$$

Connaissant l'évolution de la contrainte T dans l'éprouvette cruciforme (cf. figure 4.25), il devient possible de tracer l'évolution du rapport en fonction de la longueur de la fissure et multiplier la vitesse de propagation par ce rapport.

Ici, cette méthode a été utilisée sur le résultat de l'essai en traction équi-biaxiale. L'évolution du rapport  $\frac{r_y(T \approx -200)}{r_y(T=0)}$  est tracé en figure 4.37.

À partir de l'évolution de la vitesse de propagation, du facteur d'intensité des contraintes et du précédent rapport, exprimés en fonction de  $2a$ , on trace la courbe de propagation modifiée. Cette courbe est comparée au résultat de l'essai pour  $T \approx -200$  MPa en figure 4.38.

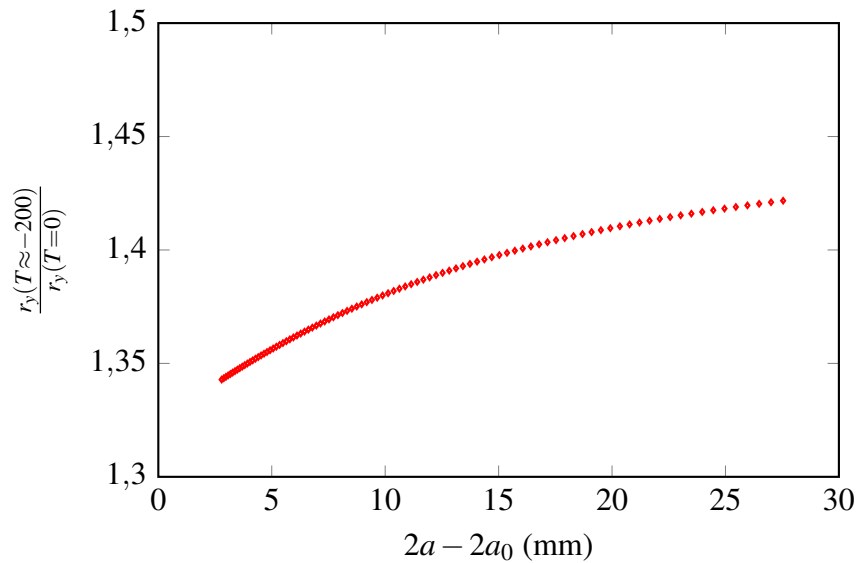


FIGURE 4.37 – Évolution du rapport  $\frac{r_y(T \approx -200)}{r_y(T=0)}$  en fonction de la longueur de fissure

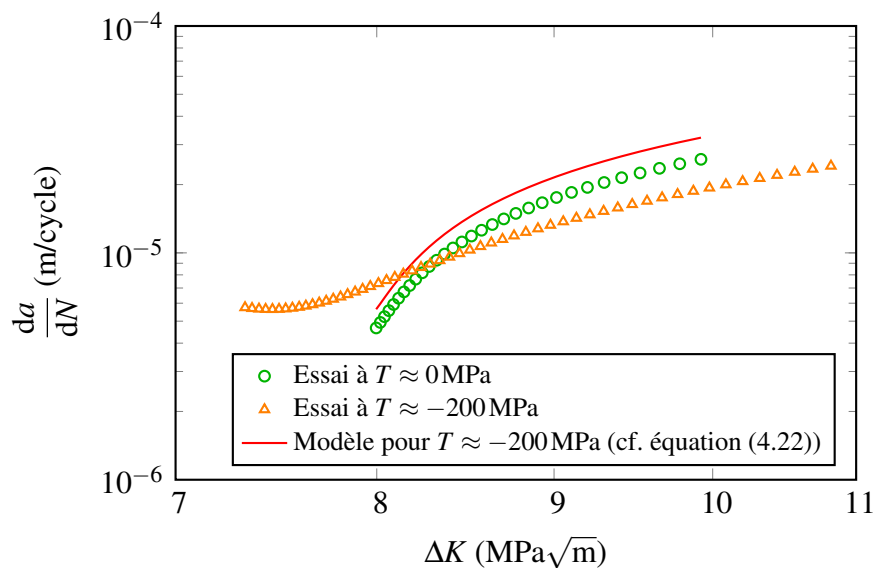


FIGURE 4.38 – Comparaison du modèle prenant en compte la variation de taille de la zone plastique avec le résultat d'essai pour  $T \approx -200$  MPa

Cela montre que la prise en compte de la variation de taille de la zone plastique ne suffit pas à représenter l'effet observé expérimentalement. On obtient une augmentation de la vitesse sur toute la propagation de la fissure. Or, lorsque la contrainte T est négative, la vitesse de propagation est plus importante qu'avec une contrainte T nulle uniquement au début de la propagation puis devient plus faible. Cependant, d'après la courbe présentée en figure 1.29 page 26, on observe qu'une contrainte T négative produit forcément

une augmentation de la taille de zone plastique et par conséquent, une accélération de la fissure. Il est donc impossible de représenter une diminution de la vitesse de propagation en ne prenant en compte que l'évolution de la taille de la zone plastique. On se propose de prendre maintenant en compte le déplacement du seuil de plasticité (ou domaine d'élasticité) sous l'effet de la contrainte T.

### 5.2 Prise en compte de l'effet sur le seuil de plasticité

L'identification des paramètres du modèle a été réalisée de la même manière que dans la section 2 page 111 à partir de la courbe expérimentale obtenue en chargement équi-biaxial ( $T \approx 0$ ).

Le modèle obtenu est le suivant :

$$\frac{da}{dN} = \alpha \left[ \left( \frac{K_{max} - K_x}{K_{IY}} \right)^2 + \left( \frac{T_{max} - T_x}{T_Y} \right)^2 + f_1 \frac{(K_{max} - K_x)(T_{max} - T_x)}{K_{IY} T_Y} - 1 \right]^\gamma \quad (4.23)$$

Ce modèle est exprimé à partir des différences entre les valeurs maximales ( $K_{max}, T_{max}$ ) et la valeur moyenne du chargement qui correspondent ici au centre du domaine d'élasticité ( $K_x, T_x$ ). Ceci permet de prendre en compte l'évolution du centre du domaine d'élasticité au cours de l'avancée de la fissure (cf. figure 4.39).

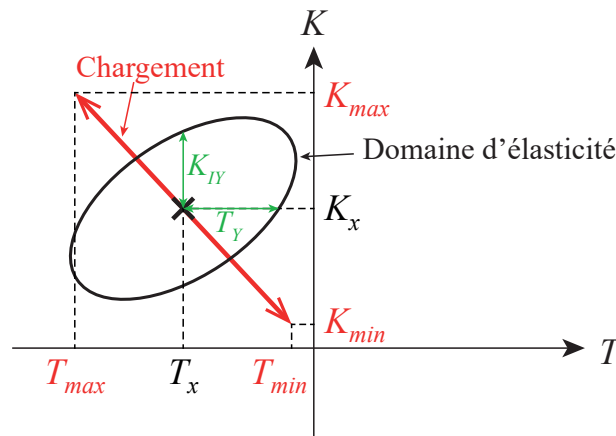


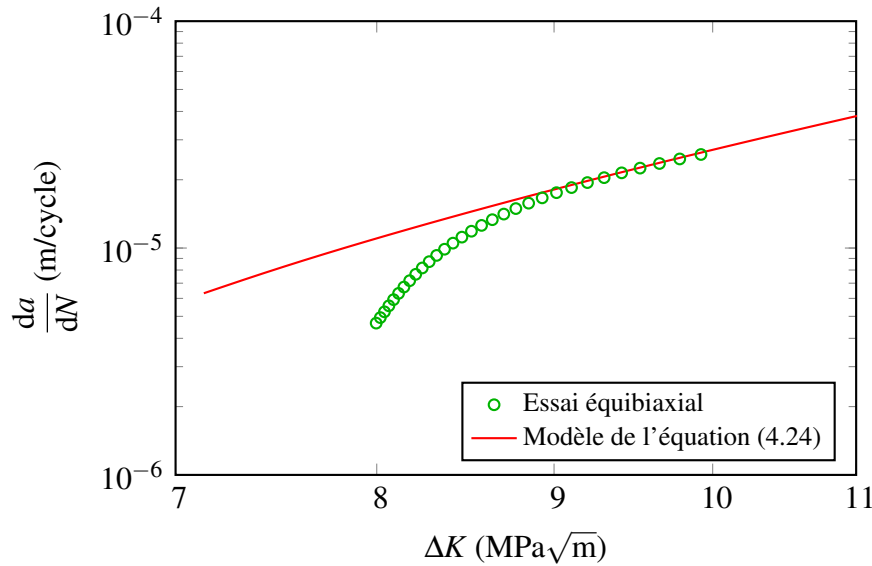
FIGURE 4.39 – Définition de  $T_x$  dans le plan  $K - T$

Les paramètres  $\alpha$  et  $\gamma$  sont obtenus à partir de la courbe à  $T = 0$  en prenant le modèle suivant pour l'évolution de la vitesse de propagation :

$$\frac{da}{dN} = \alpha \left[ \left( \frac{K_{max} - K_x}{K_{IY}} \right)^2 - 1 \right]^\gamma \quad (4.24)$$

On trouve ainsi les valeurs de  $\alpha$  et  $\gamma$  à intégrer dans le modèle complet :  $\alpha = 5,4 \times 10^{-6}$  m/cycle et  $\gamma = 1,4$ . Le modèle de l'équation (4.24) ainsi que l'essai à  $T = 0$  sont présentés en figure 4.40.





**FIGURE 4.40** – Comparaison des deux modèles prenant en compte la variation de taille de la zone plastique avec le résultat d’essai pour  $T \approx -200$  MPa

On détermine ensuite  $T_Y$  en prenant une longueur de transition entre les fissures courtes et les fissures longues égale à  $300 \mu\text{m}$ . On obtient alors le modèle suivant :

$$\frac{da}{dN} = \alpha \left[ \left( \frac{K_{max} - K_x}{K_{IY}} \right)^2 + \left( \frac{T_{max} - T_x}{T_Y} \right)^2 + f_1 \frac{(K_{max} - K_x)(T_{max} - T_x)}{K_{IY} T_Y} - 1 \right]^\gamma \quad (4.25)$$

avec :

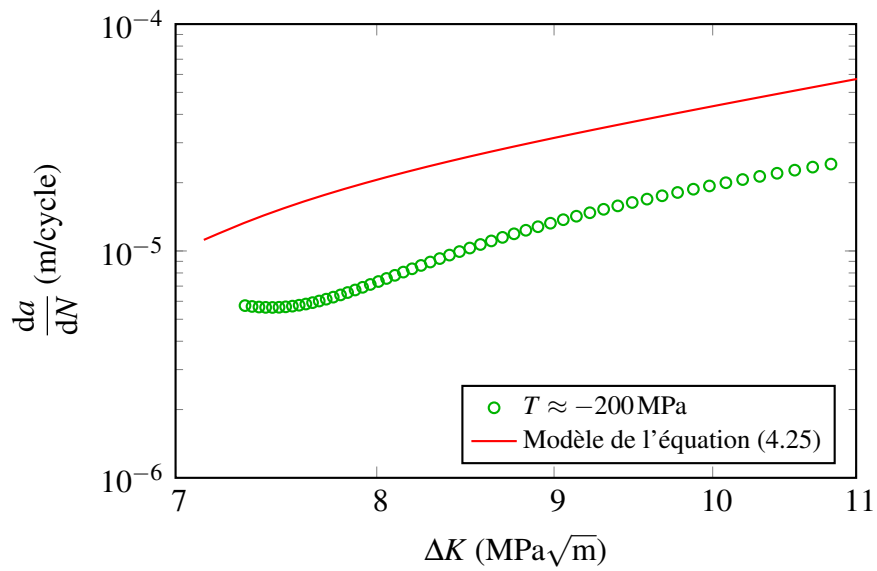
$$\begin{aligned} \alpha &= 5,4 \times 10^{-6} \text{ m/cycle} \\ \gamma &= 1,4 \\ K_{IY} &= 2,45 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}} \\ T_Y &= 125 \text{ MPa} \\ f_1 &= -0,419 \end{aligned}$$

Le résultat de ce modèle est tracé et comparé à l’essai à  $T = -200$  MPa en figure 4.41.

Le modèle ne représente pas correctement ce qui a été observé expérimentalement. En effet, la vitesse de propagation est plus élevée que celle de l’essai d’un facteur 2.

Avec ce modèle il est impossible de représenter une diminution de la vitesse de propagation lorsque la contrainte T devient négative. En effet, l’équation (4.25) ne permet pas d’avoir une décroissance de  $\frac{da}{dN}$  quand  $T < 0$ .

Visiblement, la contrainte T seule ne permet pas de reproduire l’effet observé expérimentalement. Il est donc probable que ce ralentissement provient d’un phénomène différent de la contrainte T. Cependant, l’effet observé est bien moins important qu’en transitoire. Pour  $\Delta K = 10 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ , la vitesse de propagation de la fissure sous  $T = -280$  MPa vaut 55 % de la vitesse à  $T = 0$ .



**FIGURE 4.41** – Comparaison des deux modèles prenant en compte la variation de taille de la zone plastique avec le résultat d'essai pour  $T \approx -200$  MPa

## 6 Conclusion

Des essais multiaxiaux sur fissure longue ont été réalisés afin d'étudier l'influence de la contrainte T sur une fissure longue, en régime permanent et transitoire. Il a été observé que la contrainte T a un effet sur la vitesse de propagation d'une fissure.

En régime permanent, l'effet globalement observé est un ralentissement de la fissure quand la contrainte T devient négative. Plus celle-ci est négative, plus le ralentissement est important (cf. figure 4.26). Cet effet va à l'encontre de ce que l'on trouve classiquement dans la littérature et reste pour le moment inexpliqué. Aucun de nos modèles développés ne permet de prédire un ralentissement de la vitesse de propagation de la fissure en régime permanent lorsque la contrainte T est négative. Néanmoins, on observe une légère accélération lorsque la contrainte T devient négative pour de faibles valeurs de  $\Delta K$  ( $\Delta K < 8 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ ).

En régime transitoire, lorsque la contrainte T devient brusquement négative, on observe une forte augmentation de la vitesse de propagation de la fissure. Cette augmentation décroît sur une distance de propagation équivalente aux dimensions d'une fissure mécaniquement courte (quelques centaines de microns). Ce phénomène pourrait expliquer le fait qu'une fissure mécaniquement courte se comporte comme une fissure longue subissant une forte contrainte T. En effet, les faibles dimensions d'une fissure courte l'oblige à se propager dans un régime transitoire avant de rejoindre la vitesse de propagation d'une fissure longue. Si tel est le cas, il serait alors possible de prendre en compte les effets de fissure mécaniquement courte à partir d'un modèle de propagation d'une fissure longue en y incluant les effets de la contrainte T.

Avec cet objectif, un modèle simple a été élaboré à partir de la loi de Paris en développant un  $\Delta K_{eff}$  prenant en compte un seuil de non propagation dépendant de K et de la contrainte T (cf. équation (4.14)). Ce modèle représente qualitativement l'effet de fissure courte mais n'a pu être confronté à des essais sur microfissure, ces derniers n'ayant pu être réalisés.

Pour tenter de représenter l'impact de la contrainte T en régime permanent, deux modèles simples ont été proposés. L'un prend en compte simplement la variation de la taille de zone plastique d'Irwin en pointe de fissure due à la contrainte T (cf. équation (4.22)). Et l'autre reprend les travaux de Raül de Moura Pinho en prenant en compte un domaine de non propagation dépendant de K et T ainsi que l'évolution de son centre (cf. équation (4.25)). Malheureusement, aucun de ces modèles ne permet de représenter le ralentissement observé expérimentalement. La fissure accélère systématiquement lorsque la contrainte T est négative, contrairement à ce qui est observé expérimentalement.

Il serait donc nécessaire de modéliser l'effet transitoire de la contrainte T observé expérimentalement, à savoir, une forte augmentation de la vitesse de propagation qui diminue rapidement pour atteindre une nouvelle vitesse stabilisée. Cependant, il faudrait réaliser davantage d'essais pour des variations de contrainte T différentes afin de disposer d'une base suffisante pour développer un modèle cohérent.

## Conclusions et perspectives

Cette étude avait pour objectif de modéliser l'effet de fissure courte dans le modèle condensé de plasticité en fissuration en prenant en compte l'influence de la contrainte  $T$  sur la vitesse de propagation. Il était donc nécessaire de remettre à plat le modèle condensé de plasticité, d'étudier expérimentalement l'influence de la contrainte  $T$  sur des fissures longues et de la comparer à celle d'une fissure courte dans le but de trouver comment inclure l'effet de fissure courte dans le modèle de fissuration.

Le modèle condensé de plasticité a été modifié pour être exprimé en facteur d'intensité des contraintes et non en potentiel thermodynamique dans un but de simplification. De plus, une équation a été modifiée pour le rendre plus cohérent (respect du théorème de Schwarz). Il a donc fallu revoir toute l'identification de ses paramètres. Celle-ci a été développée à partir de scripts générant des simulations sous Abaqus dans le but d'extraire les degrés de liberté essentiels à la représentation de la plasticité en pointe de fissure. Ceci a pu être obtenu par l'utilisation de la décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD). Celle-ci a permis d'étendre le développement asymptotique de Westergaard à l'élastoplasticité. Le terme de ce développement représentant la plasticité en pointe de fissure est quantifié par un facteur d'intensité, noté  $\rho$ , qui est adimensionné pour correspondre au CTOD en pointe de fissure. Ceci permet de relier directement plasticité et propagation de fissure à partir des travaux de Laird et Pelloux. L'évolution du facteur d'intensité des contraintes  $K$  en fonction de  $\rho$  permet de représenter le comportement plastique en pointe de fissure de façon non-locale. Cette évolution est alors modélisée à la manière d'un écrouissage cinématique, les variables d'écrouissage dépendant à la fois de  $a$  et de  $\rho$ . Ce modèle permet ainsi de prendre en compte les effets d'histoire (chargement variable) sur la plasticité en pointe de fissure par l'intermédiaire des contraintes résiduelles induites par plasticité, et donc, sur la vitesse de propagation de la fissure.

Actuellement, il persiste un problème de modélisation des contraintes résiduelles lors de la fermeture de la fissure. En effet, l'équation actuelle ne permet pas de représenter correctement l'évolution du point de contact des lèvres de la fissure au fur et à mesure de l'avancée de la fissure. Il faudrait modifier cette équation afin de reproduire à la fois l'augmentation du pic et sa position avec l'augmentation du chargement (cf. figure 3.34).

Divers essais ont également été développés. Des essais en compression sur une éprouvette possédant un trou elliptique permettent de propager une fissure de façon stable jusqu'à atteindre le seuil de non propagation. Ceci permet à la fois d'obtenir de façon simple et précise la valeur du seuil de non propagation, et également de réaliser une éprouvette

pré-fissurée avec une fissure possédant une zone plastique la plus petite possible. Cette méthode a été utilisée pour fabriquer des éprouvettes contenant une microfissure. Cependant, n'ayant pu polir ces éprouvettes afin d'atteindre la longueur de fissure désirée, les essais sur microfissure n'ont pu être réalisés. Ces polissages devraient être faits à l'institut P' qui est mieux équipé pour cela.

Des essais biaxiaux sur fissures longues ont été menés afin d'étudier l'influence de la contrainte  $T$ .

Les essais en régime permanent nous montrent qu'une contrainte  $T$  négative semble ralentir la propagation contrairement à ce que l'on trouve principalement dans la littérature. Nous n'avons pas trouvé d'explication à ce phénomène pour l'instant.

Un autre essai a été réalisé dans le but d'observer l'influence de la contrainte  $T$  en régime transitoire. L'effet obtenu est une forte augmentation de la vitesse de propagation. Ceci nous conforte dans l'idée qu'une fissure courte subit bien un effet de contrainte  $T$  mais que celui-ci est transitoire. En effet, une telle fissure se propage sur une distance équivalente à l'effet transitoire observé.

Divers modèles ont été développés pour essayer d'expliquer ces phénomènes :

- un premier modèle prenant en compte la contrainte  $T$  par l'intermédiaire d'une variation de taille de zone plastique. Ce modèle produit une accélération de la propagation quand la contrainte  $T$  est négative et ne permet donc pas d'expliquer le ralentissement observé en régime permanent.
- un second modèle prédisant la vitesse de propagation en prenant en compte un seuil de non propagation dépendant à la fois de  $K$  et de  $T$  ainsi que le déplacement de ce seuil par accommodation. Ceci ne permet pas non plus d'obtenir ce qui a été vu en régime permanent. Cependant, il permet de reproduire qualitativement (en l'absence de résultats d'essais pour le valider) l'effet de fissure mécaniquement courte grâce à l'utilisation de la contrainte  $T$ . À savoir une diminution du seuil de non propagation et une augmentation de la vitesse de propagation pour de faibles valeurs de  $K$ .

L'effet observé lors d'un changement transitoire de contrainte  $T$  n'a pas pu être modélisé pour le moment. D'autres essais à différentes valeurs de contrainte  $T$  seront nécessaires pour modéliser de façon cohérente cet effet afin de l'intégrer dans le modèle condensé de plasticité. Ceci pourra permettre de prédire la propagation des fissures mécaniquement courtes et longues sous chargement variable.

# Annexe A

## Implémentation du modèle de plasticité condensé

*Cette annexe présente le schéma d'implémentation du modèle de plasticité condensé dans un code de calcul.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>157</b>
<b>2</b>	<b>Notations</b> . . . . .	<b>157</b>
<b>3</b>	<b>Algorigrammes</b> . . . . .	<b>157</b>
<b>4</b>	<b>Initialisation</b> . . . . .	<b>160</b>
<b>5</b>	<b>Découpe du chargement</b> . . . . .	<b>160</b>
<b>6</b>	<b>Calcul des seuils</b> . . . . .	<b>160</b>
6.1	Seuil de contact $K_{sc}$ . . . . .	160
6.2	Seuil d'élasticité $K_{se}$ . . . . .	161
6.3	Seuil de plasticité monotone $K_{scm}$ . . . . .	161
<b>7</b>	<b>Domaines de chargement</b> . . . . .	<b>161</b>
7.1	Contact . . . . .	161
7.2	Elasticité . . . . .	162
7.3	Plasticité cyclique . . . . .	162
7.4	Plasticité monotone . . . . .	163
<b>8</b>	<b>Mise à jour des variables</b> . . . . .	<b>165</b>

8.1	Mise à jour de $\rho$ . . . . .	165
8.2	Mise à jour de $a$ . . . . .	165
8.3	Mise à jour de $K_{Im}$ et $K_{Ixm}$ . . . . .	165
8.4	Mise à jour de $K_{Ixc}$ en phase d'ouverture ou de fermeture . . . . .	165
<b>9</b>	<b>Test de rupture . . . . .</b>	<b>166</b>

---

## 1 Introduction

Cette annexe, assez technique, présente l'implémentation du modèle de plasticité condensé dans le code de calcul PROPAG de Safran Aircraft Engines. L'implémentation du modèle présenté ci-après a été codée en FORTRAN par la société ASTEK. L'algorithme simplifié 2.19 page 68 présente le principe de cette implémentation.

Dans cette implémentation, les effets du temps (fluage, corrosion, etc.) ne sont pas pris en compte.

## 2 Notations

Dans cette annexe, les notations utilisées sont celles de l'implémentation dans PROPAG. Les variables portant l'indice 1 correspondent aux variables au début du pas de temps et celles portant l'indice 2 sont les variables calculées à la fin du pas de temps. Ces indices correspondent aux indices  $i$  et  $j$  de l'explication de l'implémentation du chapitre 2. Les variations dites « *mono* » proviennent de la plasticité monotone et « *cycl* » de la plasticité cyclique. L'exposant  $a$  représente les variations venant de l'évolution de la longueur de fissure et  $\rho$  représente celles venant de l'émoussement plastique.

## 3 Algorithmes

Les trois algorithmes suivants présentent le fonctionnement du programme. L'algorithme en figure A.1 présente le fonctionnement général du programme. Les algorithmes en figure A.2 présentent l'utilisation des différentes équations dans le cas d'une charge (ouverture de fissure) ou d'une décharge (fermeture de fissure).



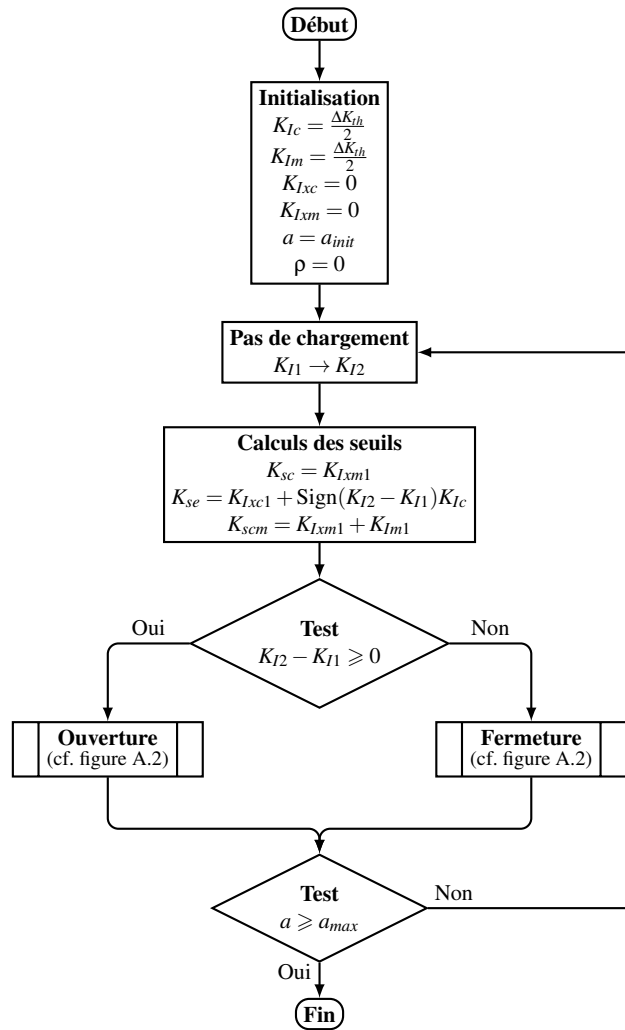


FIGURE A.1 – Algorithme principal

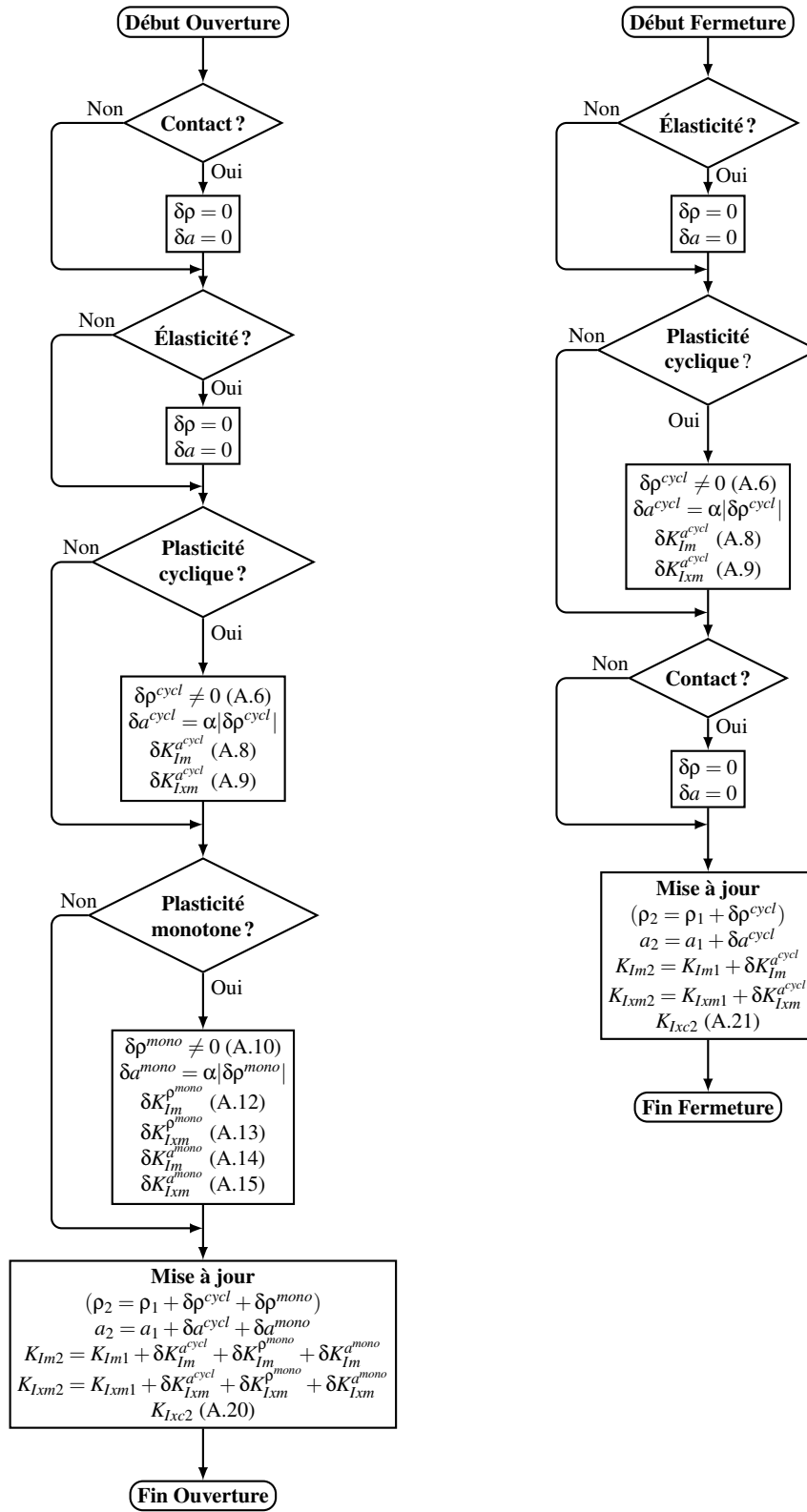


FIGURE A.2 – Algorithmes en phase d’ouverture et en phase de fermeture

## 4 Initialisation

Les variables sont initialisées au début du programme comme suit :

$$\begin{array}{l}
 K_{Ic} = \frac{\Delta K_{th}}{2} \\
 K_{Im} = \frac{\Delta K_{th}}{2} \\
 K_{Ixc} = 0 \\
 K_{Ixm} = 0 \\
 a = a_{init} \\
 \rho = 0
 \end{array}
 \tag{A.1}$$

## 5 Découpe du chargement

Soit un pas de chargement  $\Delta K = K_{I2} - K_{I1}$ . On doit d'abord déterminer si ce pas de chargement correspond à une charge/ouverture ( $K_{I2} > K_{I1}$ ) ou bien une décharge/fermeture ( $K_{I2} < K_{I1}$ ). Il est ensuite nécessaire de déterminer quels domaines de chargement sont parcourus (cf. figure A.3) :

- le domaine où les deux lèvres de la fissure sont en contact ;
- le domaine d'élasticité cyclique ;
- le domaine de plasticité cyclique ;
- le domaine de plasticité monotone.

Pour ce faire, les seuils entre les différents domaines sont déterminés à partir des variables du modèle :

- le seuil entre le contact et l'élasticité cyclique, noté  $K_{sc}$  ;
- le seuil entre l'élasticité cyclique et la plasticité cyclique, noté  $K_{se}$  ;
- le seuil entre la plasticité cyclique et la plasticité monotone, noté  $K_{scm}$ .

Il faut ensuite appliquer les équations d'évolution des domaines parcourus sur les portions de chargement correspondantes.

## 6 Calcul des seuils

### 6.1 Seuil de contact $K_{sc}$

Le seuil de contact est défini par  $K_{Ixm}$  à l'aide de l'équation suivante :

$$\boxed{K_{sc} = K_{Ixm1}}
 \tag{A.2}$$

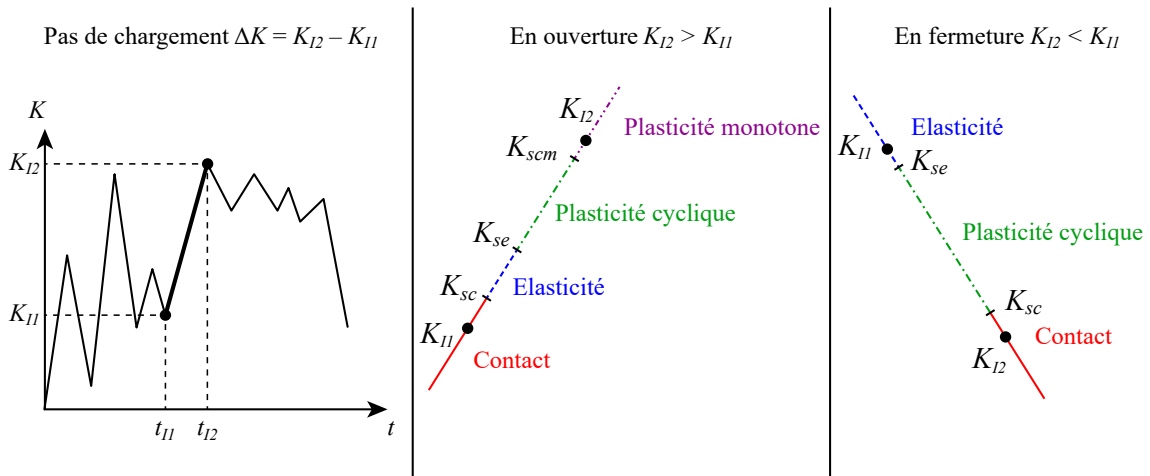


FIGURE A.3 – Schématisation des différents domaines de chargement

## 6.2 Seuil d'élasticité $K_{se}$

Le seuil d'élasticité est défini différemment selon que l'on est en ouverture ou en fermeture. Ceci peut-être pris en compte grâce au signe de  $K_{I2} - K_{I1}$ . On obtient dans ce cas :

$$K_{se} = K_{Ixc1} + \text{Sign}(K_{I2} - K_{I1})K_{Ic} \quad (\text{A.3})$$

## 6.3 Seuil de plasticité monotone $K_{scm}$

Le seuil de plasticité monotone  $K_{scm}$ , marque le passage de la plasticité cyclique à la plasticité monotone. Il correspond au moment où le seuil d'élasticité monotone est dépassé et peut être traduit par :

$$K_{scm} = K_{Ixm1} + K_{Im1} \quad (\text{A.4})$$

# 7 Domaines de chargement

## 7.1 Contact

Lorsque les lèvres de la fissure sont en contact, il n'y a aucune propagation de fissure et par conséquent aucune évolution des variables du modèle. Cependant, pour représenter les effets de rapport de charge négatif,  $K_{Ixc}$  peut évoluer lors de la fermeture (cf. section 8.4.2).

## 7.2 Elasticité

En élasticité,  $\rho$  reste constant. Par conséquent, il n'y a aucune évolution des variables du modèle en l'absence d'une loi d'évolution temporelle (corrosion, fluage, etc.).

## 7.3 Plasticité cyclique

On suppose que la taille du domaine d'élasticité cyclique  $K_{Ic}$  reste constante en  $a$  et en  $\rho$ . On a donc :

$$\boxed{K_{Ic} = \text{cte} = \frac{\Delta K_{th}}{2}} \quad (\text{A.5})$$

### 7.3.1 Calcul de $\delta\rho = \rho_2 - \rho_1$

En plasticité cyclique :

$$|K_I(\rho_1) - K_I(\rho_0)| = a_c \sqrt{|\rho_1 - \rho_0|} \text{ et } |K_I(\rho_2) - K_I(\rho_0)| = a_c \sqrt{|\rho_2 - \rho_0|}$$

En combinant les deux équations, on obtient la valeur de  $\delta\rho = \rho_2 - \rho_1$

$$\boxed{\delta\rho^{cycl} = \text{Sign}(K_{I2} - K_{I1}) \left[ \left( \frac{K_{I2} - K_{se}}{a_c} \right)^2 - \left( \frac{K_{I1} - K_{se}}{a_c} \right)^2 \right]} \quad (\text{A.6})$$

### 7.3.2 Calcul de $\delta a = a_2 - a_1$

$$\boxed{\delta a^{cycl} = \alpha |\delta\rho^{cycl}|} \quad (\text{A.7})$$

### 7.3.3 Calcul de $\delta K_{Im}^a$

Équation reliant  $K_{Im}$  et  $a$  en monotone :

$$\frac{\partial K_{Im}}{\partial a} = -p_a K_{Im}$$

On intègre l'équation entre  $a_1$  et  $a_2$ . On obtient :

$$K_{Im}(a_2) = K_{Im}(a_1) e^{-p_a(a_2 - a_1)}$$

D'où :

$$\delta K_{Im}^{a^{cycl}} = K_{Im1} e^{-p_a \delta a^{cycl}} - K_{Im1}$$

$$\boxed{\delta K_{Im}^{a^{cycl}} = K_{Im1} \left( e^{-p_a \delta a^{cycl}} - 1 \right)} \quad (\text{A.8})$$

### 7.3.4 Calcul de $\delta K_{Ixm}^a$

Équation reliant  $K_{Ixm}$  et  $a$  en monotone :

$$\frac{\partial K_{Ixm}}{\partial a} = k_b K_{Im} - k_a K_{Ixm}$$

On intègre l'équation entre  $a_1$  et  $a_2$ . On obtient :

$$K_{Ixm}(a_2) = \frac{k_b}{k_a - p_a} K_{Im}(a_1) e^{-p_a(a_2 - a_1)} + \left( K_{Ixm}(a_1) - \frac{k_b}{k_a - p_a} K_{Im}(a_1) \right) e^{-k_a(a_2 - a_1)}$$

$$\delta K_{Ixm}^{a^{cycl}} = \frac{k_b}{k_a - p_a} K_{Im1} e^{-p_a \delta a^{cycl}} + \left( K_{Ixm1} - \frac{k_b}{k_a - p_a} K_{Im1} \right) e^{-k_a \delta a^{cycl}} - K_{Ixm1}$$

$$\boxed{\delta K_{Ixm}^{a^{cycl}} = \frac{k_b}{k_a - p_a} K_{Im1} \left( e^{-p_a \delta a^{cycl}} - e^{-k_a \delta a^{cycl}} \right) + K_{Ixm1} \left( e^{-k_a \delta a^{cycl}} - 1 \right)} \quad (\text{A.9})$$

## 7.4 Plasticité monotone

### 7.4.1 Calcul de $\delta \rho = \rho_2 - \rho_1$

Équation reliant  $\delta K_I$  et  $\delta \rho$  en monotone :

$$\frac{\partial K_I}{\partial \rho} = \gamma K_{IC} - \gamma K_I$$

On intègre l'équation entre  $\rho_1$  et  $\rho_2$ . On obtient :

$$K_I(\rho_2) = K_{IC} + (K_I(\rho_1) - K_{IC}) e^{-\gamma(\rho_2 - \rho_1)}$$

$$K_{I2} = K_{IC} + (K_{I1} - K_{IC}) e^{-\gamma \delta \rho^{mono}}$$

On en déduit  $\delta \rho$  :

$$\boxed{\delta \rho^{mono} = \frac{1}{\gamma} \ln \left( \frac{K_{IC} - K_{I1}}{K_{IC} - K_{I2}} \right)} \quad (\text{A.10})$$

### 7.4.2 Calcul de $\delta a = a_2 - a_1$

$$\boxed{\delta a^{mono} = \alpha |\delta \rho^{mono}|} \quad (\text{A.11})$$

### 7.4.3 Calcul de $\delta K_{Im}^\rho$

Équation reliant  $K_{Im}$  et  $\rho$  en monotone :

$$\frac{\partial K_{Im}}{\partial \rho} = \frac{k_a}{k_a + k_b - p_a} \gamma K_{IC} - \gamma K_{Im}$$

On intègre l'équation entre  $\rho_1$  et  $\rho_2$ . On obtient :

$$K_{Im}(\rho_2) = \frac{k_a K_{IC}}{k_a + k_b - p_a} + \left( K_{Im}(\rho_1) - \frac{k_a K_{IC}}{k_a + k_b - p_a} \right) e^{-\gamma(\rho_2 - \rho_1)}$$

D'où :

$$\delta K_{Im}^{\rho^{mono}} = \frac{k_a K_{IC}}{k_a + k_b - p_a} + \left( K_{Im1} - \frac{k_a K_{IC}}{k_a + k_b - p_a} \right) e^{-\gamma \delta \rho^{mono}} - K_{Im1}$$

$$\boxed{\delta K_{Im}^{\rho^{mono}} = \left( \frac{k_a K_{IC}}{k_a + k_b - p_a} - K_{Im1} \right) \left( 1 - e^{-\gamma \delta \rho^{mono}} \right)} \quad (\text{A.12})$$

### 7.4.4 Calcul de $\delta K_{Ixm}^\rho$

Équation reliant  $K_{Ixm}$  et  $\rho$  en monotone :

$$\frac{\partial K_{Ixm}}{\partial \rho} = \frac{k_b - p_a}{k_a + k_b - p_a} \gamma K_{IC} - \gamma K_{Ixm}$$

On intègre l'équation entre  $\rho_1$  et  $\rho_2$ . On obtient :

$$K_{Ixm}(\rho_2) = \frac{k_b - p_a}{k_a + k_b - p_a} K_{IC} + \left( K_{Ixm}(\rho_1) - \frac{k_b - p_a}{k_a + k_b - p_a} K_{IC} \right) e^{-\gamma(\rho_2 - \rho_1)}$$

$$\delta K_{Ixm}^{\rho^{mono}} = \frac{k_b - p_a}{k_a + k_b - p_a} K_{IC} + \left( K_{Ixm1} - \frac{k_b - p_a}{k_a + k_b - p_a} K_{IC} \right) e^{-\gamma \delta \rho^{mono}} - K_{Ixm1}$$

$$\boxed{\delta K_{Ixm}^{\rho^{mono}} = \left( \frac{k_b - p_a}{k_a + k_b - p_a} K_{IC} - K_{Ixm1} \right) \left( 1 - e^{-\gamma \delta \rho^{mono}} \right)} \quad (\text{A.13})$$

### 7.4.5 Calcul de $\delta K_{Im}^a$

Équation reliant  $K_{Im}$  et  $a$  en monotone :

$$\frac{\partial K_{Im}}{\partial a} = -p_a K_{Im}$$

Après intégration, on obtient :

$$\boxed{\delta K_{Im}^{a^{mono}} = K_{Im1} \left( e^{-p_a \delta a^{mono}} - 1 \right)} \quad (\text{A.14})$$

### 7.4.6 Calcul de $\delta K_{Ixm}^a$

Équation reliant  $K_{Ixm}$  et  $a$  en monotone :

$$\frac{\partial K_{Ixm}}{\partial a} = k_b K_{Im} - k_a K_{Ixm}$$

Après intégration, on obtient :

$$\delta K_{Ixm}^{a^{mono}} = \frac{k_b}{k_a - p_a} K_{Im1} \left( e^{-p_a \delta a^{mono}} - e^{-k_a \delta a^{mono}} \right) + K_{Ixm1} \left( e^{-k_a \delta a^{mono}} - 1 \right) \quad (A.15)$$

## 8 Mise à jour des variables

### 8.1 Mise à jour de $\rho$

La mise à jour de  $\rho$  n'est pas nécessaire mais permet de tracer des courbes  $K(\rho)$  pour vérifier le bon fonctionnement du modèle. Cette variable est mise à jour en utilisant l'équation suivante :

$$\rho_2 = \rho_1 + \delta \rho^{cycl} + \delta \rho^{mono} \quad (A.16)$$

### 8.2 Mise à jour de $a$

La longueur de la fissure  $a$  est mise à jour avec l'équation suivante :

$$a_2 = a_1 + \delta a^{cycl} + \delta a^{mono} \quad (A.17)$$

### 8.3 Mise à jour de $K_{Im}$ et $K_{Ixm}$

$$K_{Im2} = K_{Im1} + \delta K_{Im}^{cycl} + \delta K_{Im}^{\rho^{mono}} + \delta K_{Im}^{a^{mono}} \quad (A.18)$$

$$K_{Ixm2} = K_{Ixm1} + \delta K_{Ixm}^{cycl} + \delta K_{Ixm}^{\rho^{mono}} + \delta K_{Ixm}^{a^{mono}} \quad (A.19)$$

Ces équations étant linéaires, une dépendance à la discrétisation du chargement apparaît. Une étude de la convergence de la durée de vie est nécessaire pour déterminer la discrétisation à utiliser.

### 8.4 Mise à jour de $K_{Ixc}$ en phase d'ouverture ou de fermeture

Le centre du domaine d'élasticité cyclique  $K_{Ixc}$  est mis à jour à la fin du pas de temps à partir de la valeur de  $K_{I2}$ .



### 8.4.1 Phase d'ouverture

En ouverture, le centre du domaine d'élasticité cyclique suit l'évolution du chargement. On obtient alors :

$$K_{Ixc2} = \begin{cases} K_{Ixc1} & \text{si } K_{I2} < K_{se} \\ K_{I2} - K_{Ic} & \text{si } K_{se} \leq K_{I2} \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

S'il n'y a eu aucune plasticité,  $K_{Ixc}$  n'évolue pas. Par conséquent, si le chargement reste en phase de contact ou d'élasticité,  $K_{Ixc}$  reste constant.

### 8.4.2 Phase de fermeture

Lors du contact,  $\rho$  reste constant. Il n'y a donc aucune évolution des variables du modèle à l'exception du centre du domaine d'élasticité cyclique  $K_{Ixc}$ . En l'absence d'observation pour le moment, son évolution sera ajustée par un coefficient  $\xi$  et le seuil d'arrêt de son évolution sera ajusté avec le coefficient  $\beta$ . De plus, si le chargement reste en phase d'élasticité,  $K_{Ixc}$  reste constant. On obtient alors les relations suivantes :

$$K_{Ixc2} = \begin{cases} K_{Ixc1} & \text{si } K_{se} < K_{I2} \\ K_{I2} + K_{Ic} & \text{si } K_{Ixm2} < K_{I2} \leq K_{se} \\ (1 - \xi)K_{Ixm2} + \xi K_{I2} + K_{Ic} & \text{si } \xi K_{Ixm2} - \frac{1 + \beta}{\xi} K_{Ic} < K_{I2} \leq K_{Ixm2} \\ K_{Ixm2} - \beta K_{Ic} & \text{si } K_{I2} \leq \xi K_{Ixm2} - \frac{1 + \beta}{\xi} K_{Ic} \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

Par défaut, on prendra  $\xi = 1$  et  $\beta = 0$ .

## 9 Test de rupture

À la fin de la mise à jour des variables, on vérifie si la fissure a traversé toute la pièce ( $a \geq a_{max}$ ). Il est également possible de vérifier si  $K \geq K_{IC}$ . Dans ce cas, cela signifie que la rupture a eu lieu. Le programme s'arrête et renvoie la durée de vie simulée. Si la rupture n'a pas eu lieu ( $a < a_{max}$  et  $K < K_{IC}$ ), alors le programme poursuit son calcul avec le pas de temps suivant.

# Annexe B

## Plans des éprouvettes utilisées

*Cette annexe présente les schémas de définition des différentes éprouvettes utilisées durant cette étude ainsi que le plan de prélèvement de celles-ci.*

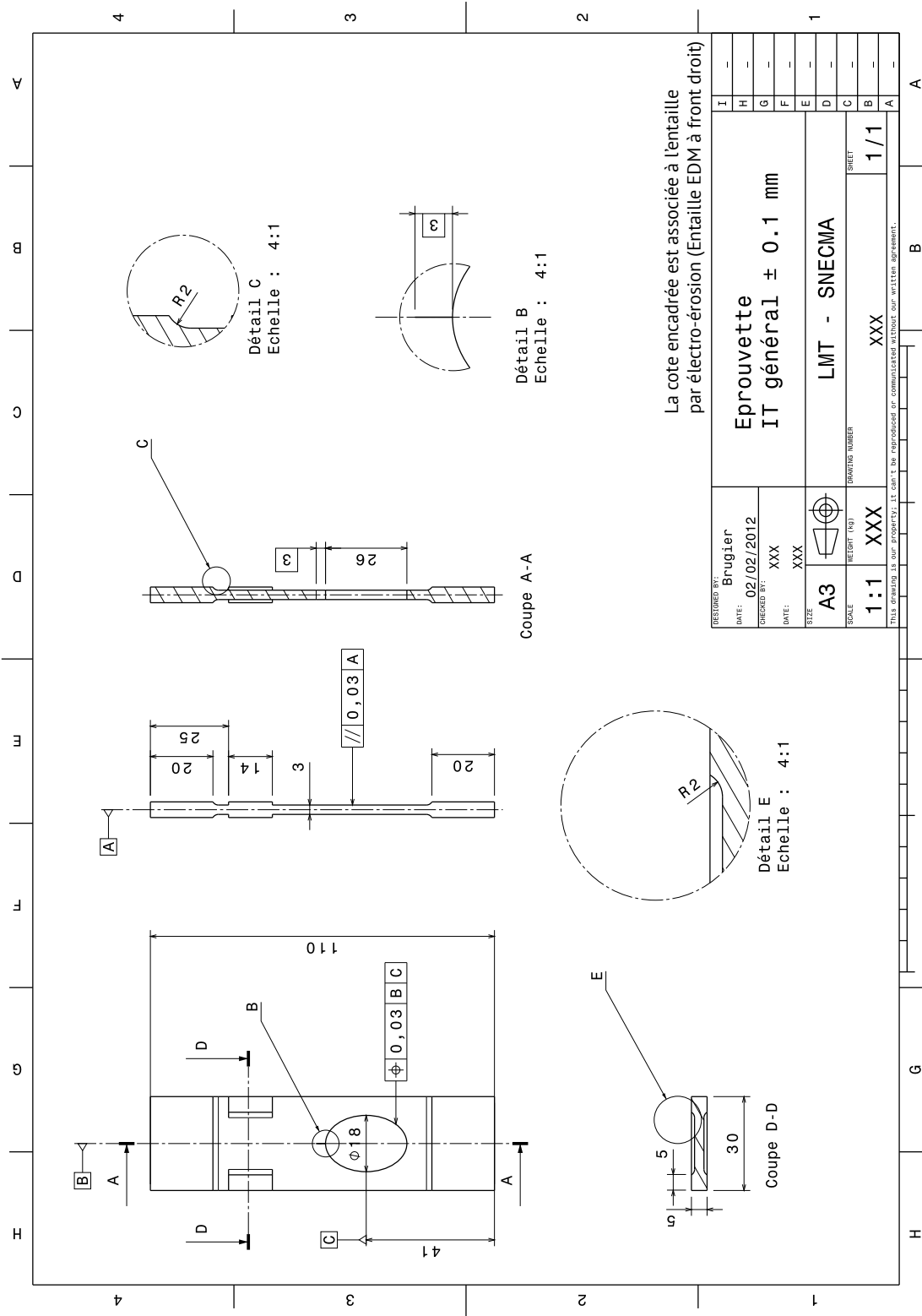
### Sommaire

---

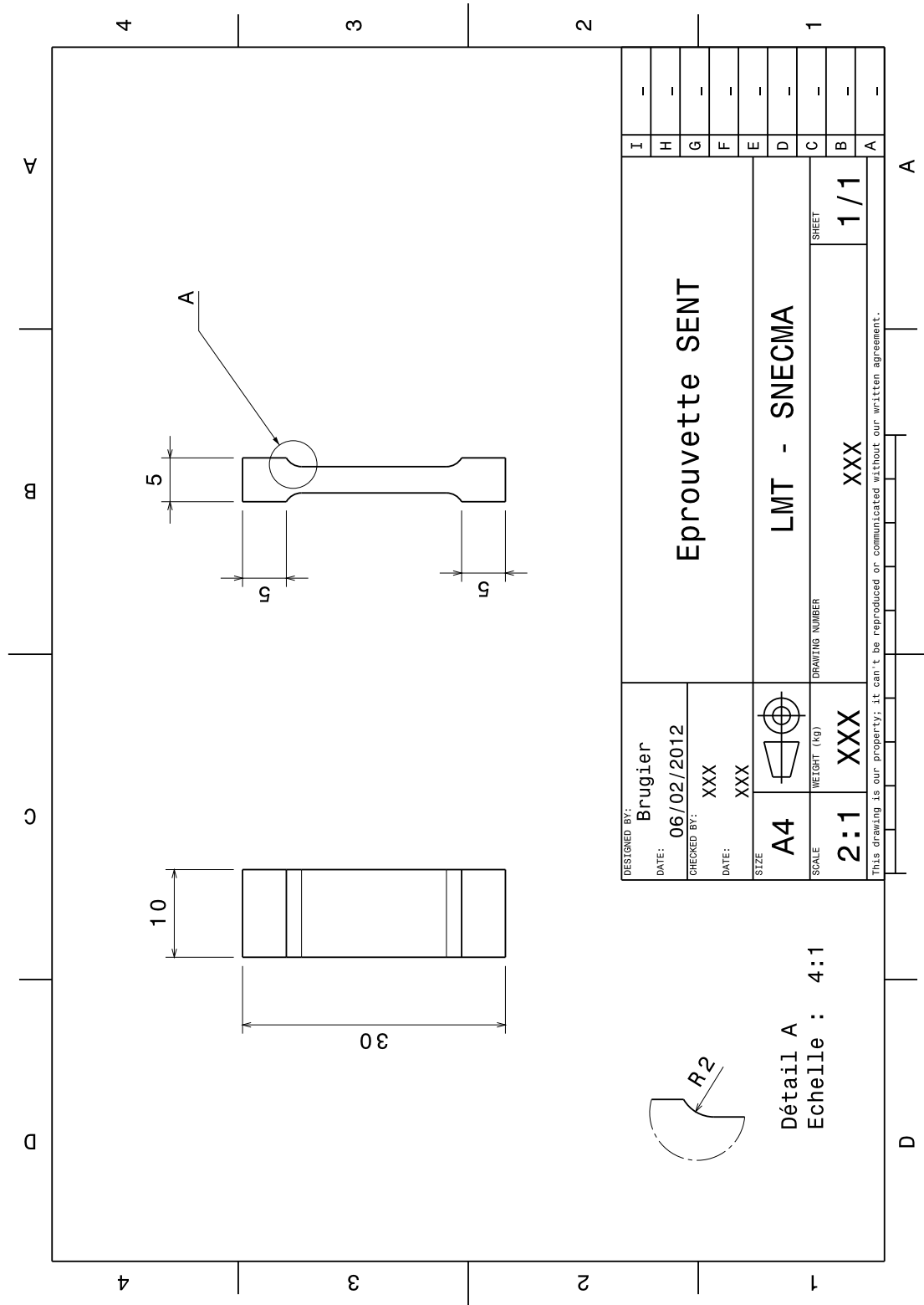
<b>1</b>	<b>Eprouvette percée . . . . .</b>	<b>168</b>
<b>2</b>	<b>Eprouvette SENT . . . . .</b>	<b>169</b>
<b>3</b>	<b>Eprouvette cruciforme . . . . .</b>	<b>170</b>
<b>4</b>	<b>Eprouvette de comportement cyclique . . . . .</b>	<b>171</b>
<b>5</b>	<b>Plan de prélèvement des éprouvettes dans le disque de turbine . . . . .</b>	<b>172</b>

---

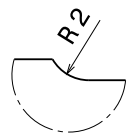
# 1 Epreuve percée



## 2 Eprouvette SENT

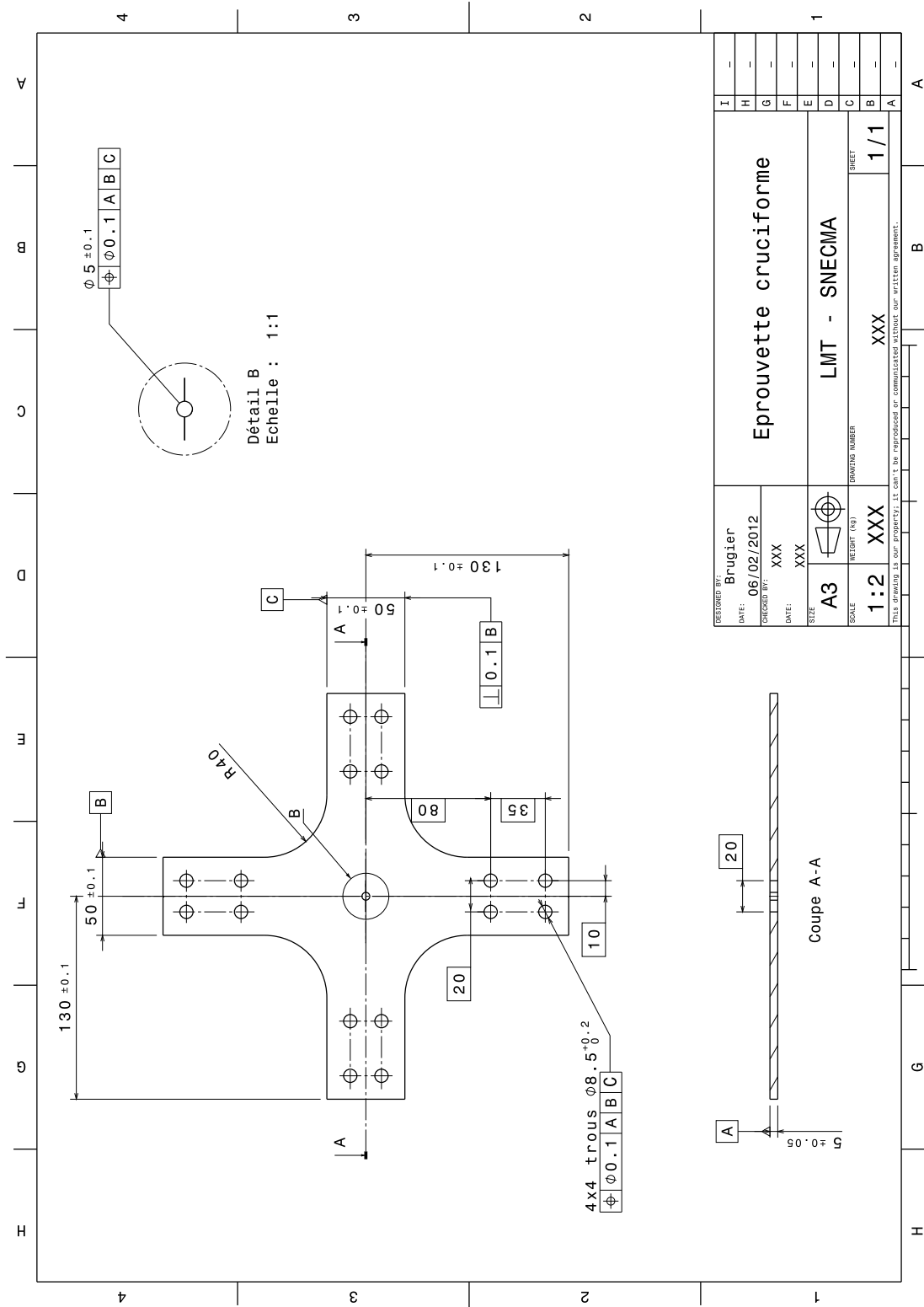


DESIGNED BY: <b>Brugier</b>	<b>Eprouvette SENT</b>	I	-
DATE: <b>06/02/2012</b>		H	-
CHECKED BY: <b>XXX</b>		G	-
DATE: <b>XXX</b>	F	-	
SIZE: <b>A4</b>	<b>LMT - SNECMA</b>	E	-
SCALE: <b>2:1</b>		D	-
WEIGHT (kg): <b>XXX</b>	<b>XXX</b>	C	-
DRAWING NUMBER: <b>XXX</b>		B	-
SHEET: <b>1/1</b>		A	-



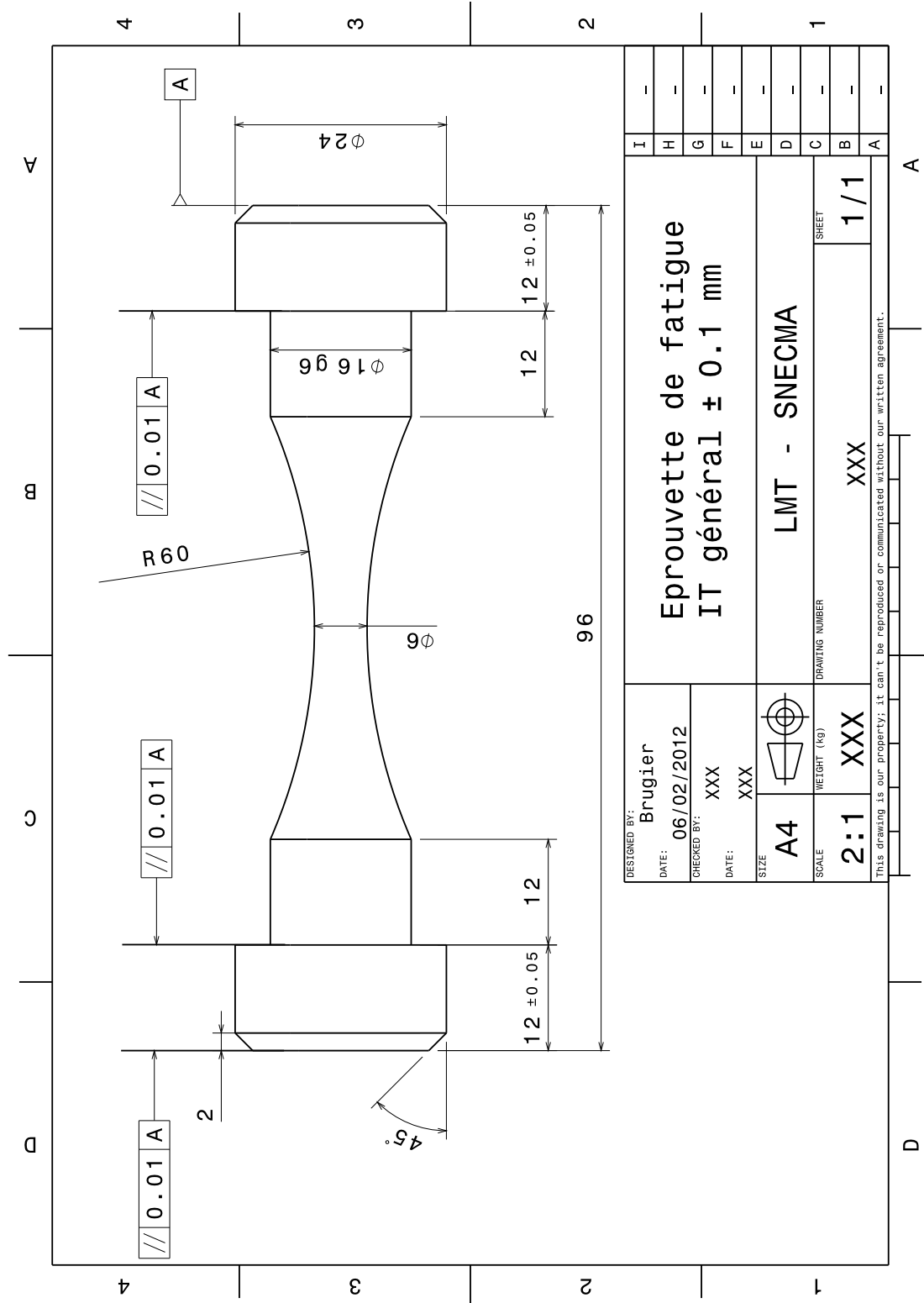
This drawing is our property; it can't be reproduced or communicated without our written agreement.

### 3 Epreuve criciforme

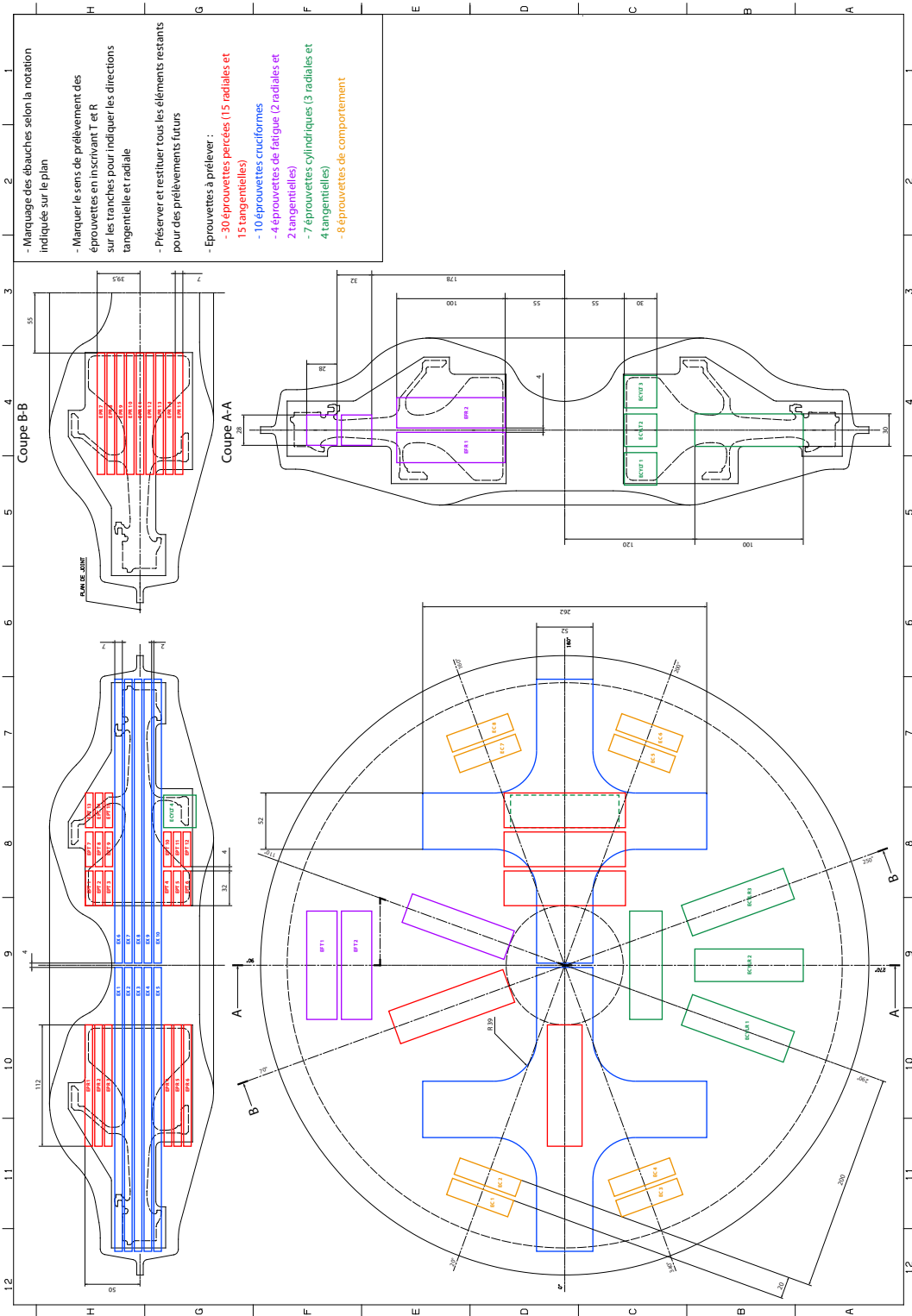


RESTORER BY: Brugier	DATE: 06/02/2012	SIZE: A3	SCALE: 1:2	WEIGHT (KG): XXX	SHEET: 1/1
CHECKED BY: XXX	DATE: XXX	RESTORING NUMBER: LMT - SNECMA	Epreuve criciforme		
THIS DRAWING IS OUR PROPERTY. IT CAN'T BE REPRODUCED OR COMMUNICATED WITHOUT OUR WRITTEN AGREEMENT.					

# 4 Eprouvette de comportement cyclique



# 5 Plan de prélèvement des éprouvettes dans le disque de turbine

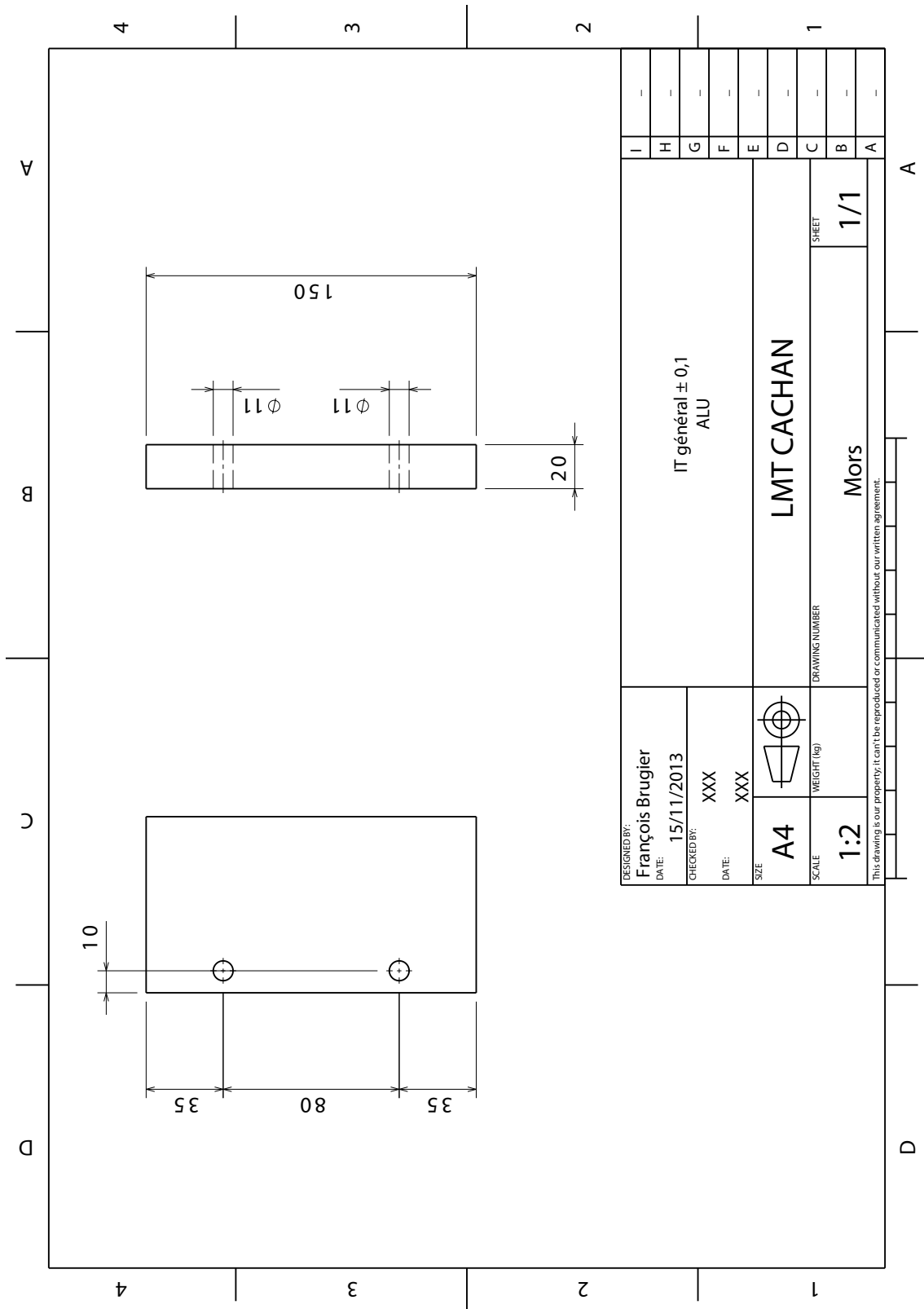


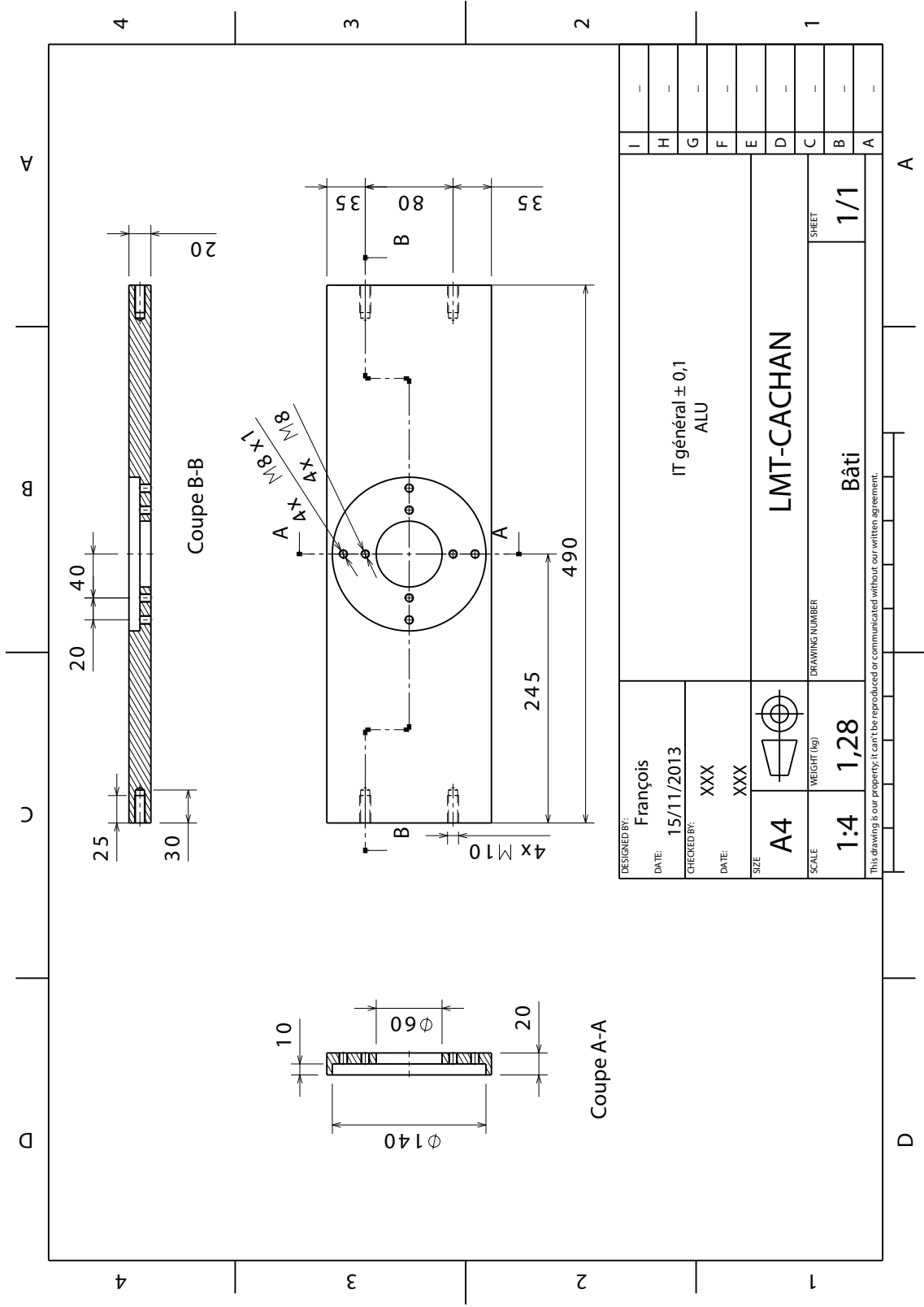
## **Annexe C**

# **Dessins de définition du montage de polissage**

*Cette annexe présente les plans des composants du montage de polissage qui a été développé afin de permettre de polir les éprouvettes SENT jusqu'à obtenir la longueur de fissure désirée.*







A

D

A

D

4

4

3

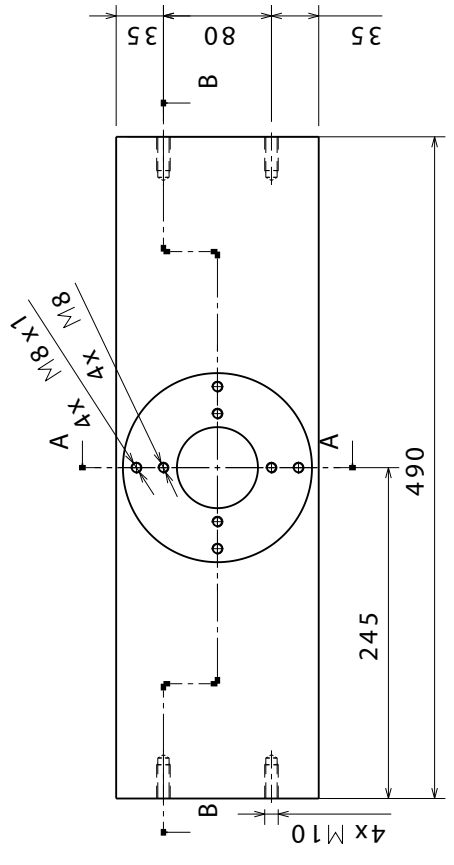
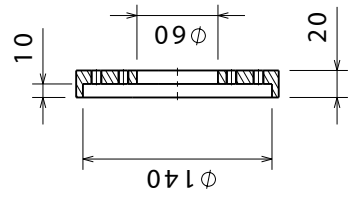
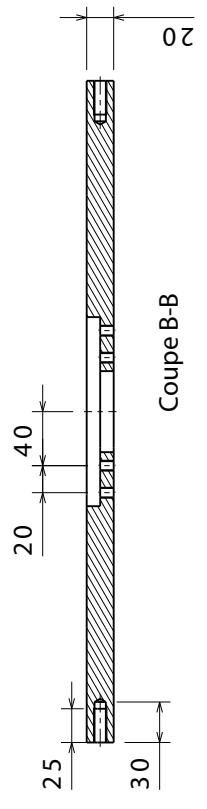
3

2

2

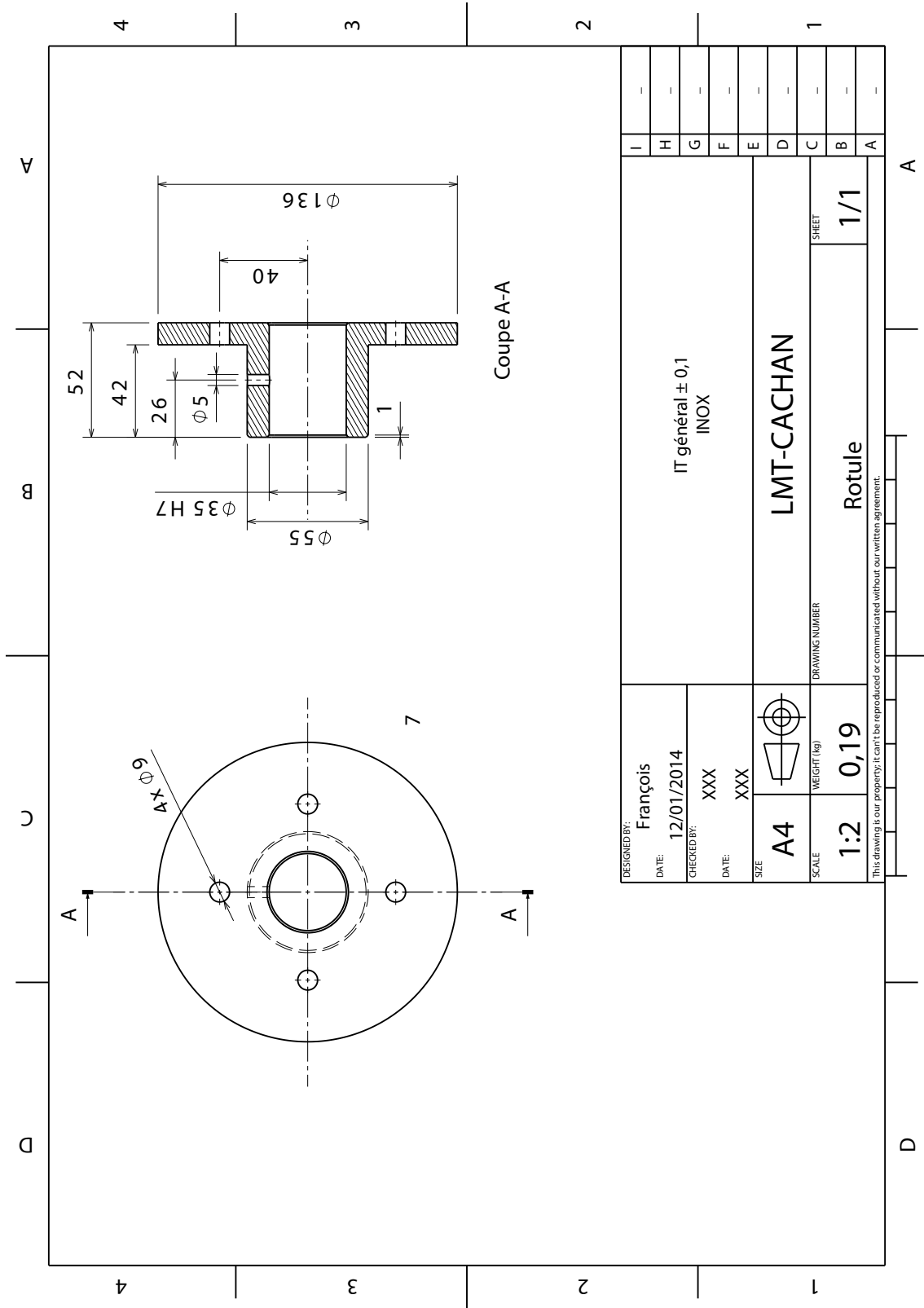
1

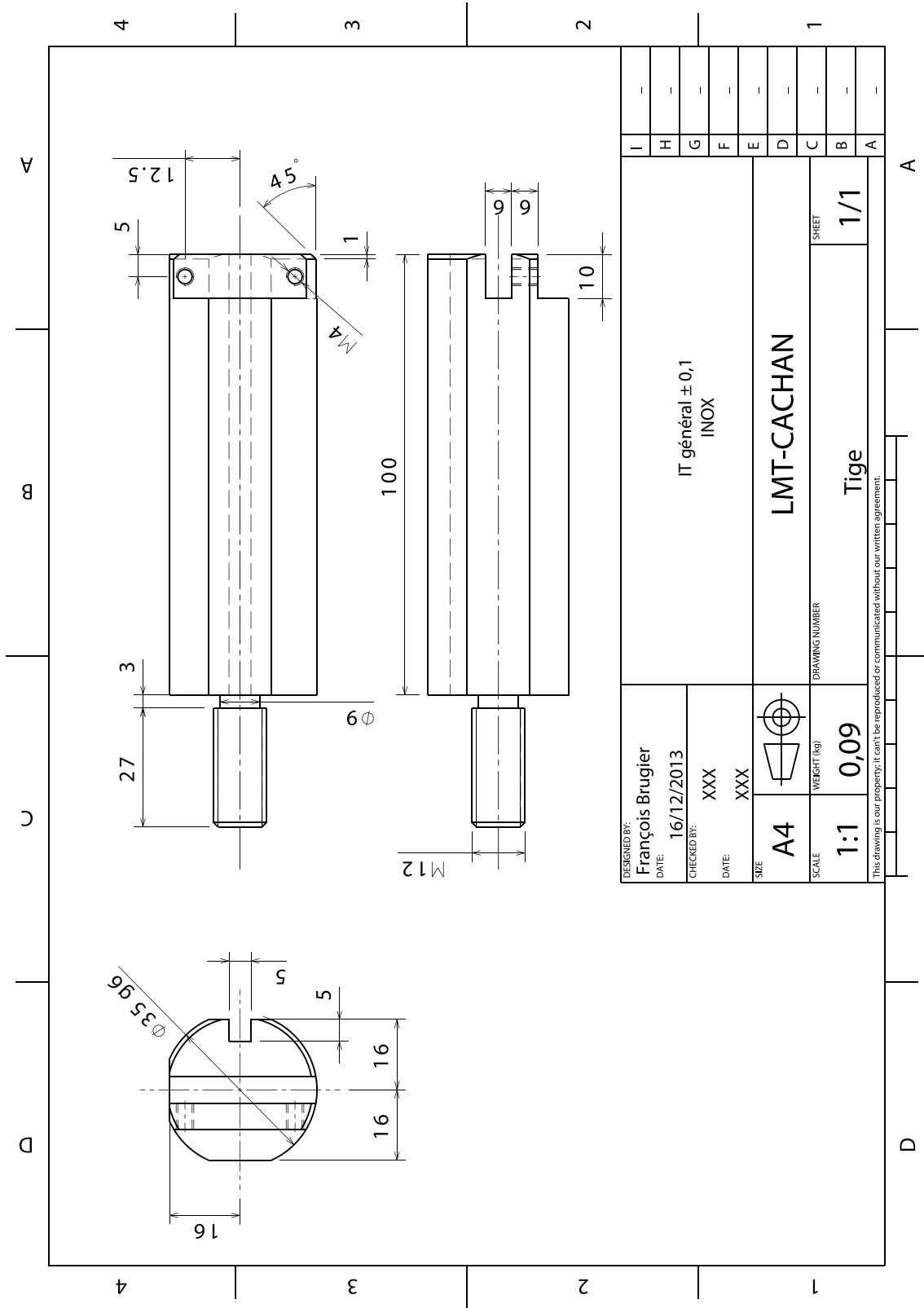
1



DESIGNED BY:	François	IT général $\pm 0,1$ ALU
DATE:	15/11/2013	
CHECKED BY:	XXX	
DATE:	XXX	
SIZE:	A4	LMT-CACHAN
SCALE:	1:4	Bâti
WEIGHT (kg):	1,28	
DRAWING NUMBER:		
SHEET:	1/1	

This drawing is our property; it can't be reproduced or communicated without our written agreement.





A

D

A

D

B

C

4

3

2

1

4

3

2

1



# Références

- [Alexandre, 2004] ALEXANDRE, F. (2004). *Aspects probabilistes et microstructuraux de l'amorçage des fissures de fatigue dans l'alliage Inco 718*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- [ASTM E-647, 1993] ASTM E-647 (1993). Standard test Method for Measurement of Fatigue Crack Growth Rates. *American Society for Testing and Materials*, pages 569–596.
- [ASTM E-647, 2003] ASTM E-647 (2003). Standard test Method for Measurement of Fatigue Crack Growth Rates. *American Society for Testing and Materials*, pages 615–657.
- [Barenblatt, 1962] BARENBLATT, G. I. (1962). The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Advances in Applied Mechanics*, VII:55–129.
- [Bathias et Baïlon, 1997] BATHIAS, C. et BAÏLON, J.-P. (1997). *La fatigue des matériaux et des structures*. Hermes.
- [Becker Jr et al., 2001] BECKER JR, T., CANNON, R. et RITCHIE, R. (2001). Finite crack kinking and T-stresses in functionally graded materials. *International Journal of Solids and Structures*, 38(32-33):5545–5563.
- [Bellecave, 2015] BELLECAVE, J. (2015). *Stress Gradients In Fretting Fatigue*. Thèse de doctorat, Ecole normale supérieure de Cachan.
- [Besson et al., 2001] BESSON, J., CAILLETAUD, G., CHABOCHE, J.-L. et FOREST, S. (2001). *Mécanique non linéaire des matériaux*. Hermes Science Publications.
- [Brown et Miller, 1985] BROWN, M. W. et MILLER, K. J. (1985). Mode I Fatigue Crack Growth Under Biaxial Stress at Room and Elevated Temperature. *In Multiaxial Fatigue*, pages 135–135–18. ASTM International, 100 Barr Harbor Drive, PO Box C700, West Conshohocken, PA 19428-2959.
- [Chen et Dillard, 2001] CHEN, B. et DILLARD, D. A. (2001). The effect of the T-stress on crack path selection in adhesively bonded joints. *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 21(5):357–368.
- [Cotterell et Rice, 1980] COTTERELL, B. et RICE, J. R. (1980). Slightly curved or kinked cracks. *International Journal of Fracture*, 16(2):155–169.
- [de Moura Pinho, 2011] DE MOURA PINHO, R. (2011). Modélisation de l'endurance en fatigue sous chargement complexe, statique et vibratoire. Rapport de fin de deuxième année de thèse.

- [de Moura Pinho *et al.*, 2012] DE MOURA PINHO, R., POMMIER, S., MARY, C., LONGUET, A. et VOGEL, F. (2012). A novel methodology to predict the endurance domain for a material and its evolution using a generalized fracture mechanics framework. *International Journal of Fatigue*, 42:183–193.
- [Decreuse, 2010] DECREUSE, P.-Y. (2010). *Fissuration En Mode Mixte I+II Non Proportionnel : Approche Expérimentale et Modélisation de La Plasticité*. Thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan.
- [Dugdale, 1960] DUGDALE, D. (1960). Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 8(2):100–104.
- [Eftis, 1987] EFTIS, J. (1987). Load biaxiality and fracture : A two-sided history of complementing errors. *Engineering Fracture Mechanics*, 26(4):567–592.
- [El Haddad *et al.*, 1979] EL HADDAD, M. H., SMITH, K. N. et TOPPER, T. H. (1979). Fatigue Crack Propagation of Short Cracks. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 101(1):42–46.
- [Endo et McEvily, 2007] ENDO, M. et MCEVILY, A. (2007). Prediction of the behavior of small fatigue cracks. *Materials Science and Engineering : A*, 468–470:51–58.
- [Fleck, 1985] FLECK, N. A. (1985). Fatigue crack growth due to periodic underloads and overloads. *Acta Metallurgica*, 33(7):1339–1354.
- [Forsyth, 1961] FORSYTH, P. J. E. (1961). A Two Stage Process of Fatigue Crack Growth. pages 76–94, Cranfield.
- [Frémy, 2012] FRÉMY, F. (2012). *Fissuration par fatigue en mode mixte I+II+III non proportionnel dans l'acier 316L : approche expérimentale et modélisation des effets de la plasticité*. Thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan.
- [Frost et Dugdale, 1957] FROST, N. E. et DUGDALE, D. S. (1957). Fatigue tests on notched mild steel plates with measurements of fatigue cracks. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 5(3):182–192.
- [Géradin et Rixen, 1997] GÉRADIN, M. et RIXEN, D. (1997). *Mechanical Vibrations : Theory and Application to Structural Dynamics*. John Wiley.
- [Goto, 1994] GOTO, M. (1994). Statistical investigation of the behaviour of small cracks and fatigue life in carbon steels with different ferrite grain sizes. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 17(6):635–649.
- [Griffith, 1921] GRIFFITH, A. A. (1921). The Phenomena of Rupture and Flow in Solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 221(582-593):163–198.
- [Gupta *et al.*, 2015] GUPTA, M., ALDERLIESTEN, R. C. et BENEDICTUS, R. (2015). A review of T-stress and its effects in fracture mechanics. *Engineering Fracture Mechanics*, 134:218–241.
- [Haefele et Lee, 1995] HAEFELE, P. M. et LEE, J. D. (1995). The constant stress term. *Engineering Fracture Mechanics*, 50(5):869–882.

- [Hamam, 2006] HAMAM, R. (2006). *Simulation de la propagation des fissures par fatigue dans les toiles des roues de train sous chargement à amplitude variable*. Thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan.
- [Hamam *et al.*, 2007] HAMAM, R., POMMIER, S. et BUMBIELER, F. (2007). Variable amplitude fatigue crack growth, experimental results and modeling. *International Journal of Fatigue*, 29(9-11):1634–1646.
- [Hoshide *et al.*, 1981] HOSHIDE, T., TANAKA, K. et YAMADA, A. (1981). Stress-Ratio Effect of Fatigue Crack Propagation in a Biaxial Stress Field. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 4(4):355–366.
- [Hutař *et al.*, 2004] HUTAŘ, P., SEITL, S. et KNĚSL, Z. (2004). Quantification of the effect of specimen geometry on the fatigue crack growth response by two-parameter fracture mechanics. *Materials Science and Engineering : A*, 387–389:491–494.
- [Hutchinson, 1968] HUTCHINSON, J. W. (1968). Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 16(1):13–31.
- [Irwin, 1926] IRWIN, G. R. (1926). Relation of stresses near a crack to the crack extension force. page 245, Bruxelles.
- [Irwin, 1957] IRWIN, G. R. (1957). Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*, 79:361–364.
- [Irwin, 1958] IRWIN, G. R. (1958). Fracture. In FLÜGGE, S., éditeur : *Elasticity and Plasticity / Elastizität Und Plastizität*, numéro 3 / 6 de Handbuch der Physik / Encyclopedia of Physics, pages 551–590. Springer Berlin Heidelberg.
- [Irwin, 1960] IRWIN, G. R. (1960). Plastic zone near a crack and fracture toughness. volume IV, pages 63–78, Syracuse University.
- [Jayadevan *et al.*, 2002] JAYADEVAN, K. R., NARASIMHAN, R., RAMAMURTHY, T. S. et DATTA GURU, B. (2002). Effect of T-stress and loading rate on crack initiation in rate sensitive plastic materials. *International Journal of Solids and Structures*, 39(7):1757–1775.
- [Kane, 2005] KANE, A. (2005). *Propagation de Fissures Superficielles et de Réseau de Fissures En Fatigue Isotherme Biaxiale et Fatigue Thermique Dans L'acier Inoxydable 304L*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique.
- [Kennedy et Cao, 2007] KENNEDY, R. et CAO, W. (2007). Nickel alloy and method of direct aging heat treatment.
- [Kitagawa et Takahashi, 1976] KITAGAWA, H. et TAKAHASHI, S. (1976). Applicability of fracture mechanics to very small cracks or cracks at early stage. pages 627–631, Boston.
- [Kitagawa *et al.*, 1979] KITAGAWA, H., YUUKI, R. et TOHGO, K. (1979). A Fracture Mechanics Approach to High-Cycle Fatigue Crack Growth Under in-Plane Biaxial Loads. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 2(2):195–206.



- [Kitagawa *et al.*, 1985] KITAGAWA, H., YUUKI, R., TOHGO, K. et TANABE, M. (1985).  $\Delta K$ -dependency of fatigue growth of single and mixed mode cracks under biaxial stress. *Multiaxial fatigue, ASTM STP 853*, pages 164–183.
- [Kitaoka et Mikuriya, 1996] KITAOKA, S. et MIKURIYA, T. (1996). The effect of biaxial stress ratio on the propagation behaviour of mode I surface cracks by the combination of plane bending and cyclic torsion. *International Journal of Fatigue*, 18(3):205–211.
- [Laird, 1967] LAIRD, C. (1967). The influence of metallurgical structure on the mechanisms of fatigue crack propagation. *ASTM STP(415)*:131–168.
- [Larsson et Carlsson, 1973] LARSSON, S. G. et CARLSSON, A. J. (1973). Influence of non-singular stress terms and specimen geometry on small-scale yielding at crack tips in elastic-plastic materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 21(4):263–277.
- [Lee *et al.*, 2005] LEE, Y.-L., PAN, J., HATHAWAY, R. et BARKEY, M. (2005). *Fatigue Testing and Analysis : Theory and Practice*. Butterworth-Heinemann.
- [Leevers et Radon, 1982] LEEVERS, P. S. et RADON, J. C. (1982). Inherent stress biaxiality in various fracture specimen geometries. *International Journal of Fracture*, 19(4):311–325.
- [McEvily et Yang, 1992] MCEVILY, A. et YANG, Z. (1992). An Analysis of the Rate of Growth of Short Fatigue Cracks. In *Short Fatigue Cracks*, ESIS 13 (K. J. Miller and E. R. de los Rios), pages 439–448. London, mechanical engineering publications édition.
- [McEvily et Endo, 2006] MCEVILY, A. J. et ENDO, M. (2006). Prediction of the influence of flaws on the fatigue strength under biaxial loading. *International Journal of Fatigue*, 28(5–6):504–507.
- [Miller, 1982] MILLER, K. J. (1982). The Short Crack Problem. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 5(3):223–232.
- [Miller, 1997] MILLER, K. J. (1997). The Three Thresholds for Fatigue Crack Propagation. In *Fatigue and Fracture Mechanics*, volume 27. ASTM International, 100 Barr Harbor Drive, PO Box C700, West Conshohocken, PA 19428-2959.
- [Neumann, 1969] NEUMANN, P. (1969). Coarse slip model of fatigue. *Acta Metallurgica*, 17(9):1219–1225.
- [Newman *et al.*, 2000] NEWMAN, WU, SWAIN, ZHAO, PHILLIPS et DING (2000). Small-crack growth and fatigue life predictions for high-strength aluminium alloys. Part II : Crack closure and fatigue analyses. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 23(1):59–72.
- [Newman et Piascik, 2003] NEWMAN, J. A. et PIASCIK, R. S. (2003). Near-Threshold Fatigue Crack Growth Behavior of Fine-Grain Nickel-Based Alloys. Rapport technique.
- [Nisitani et Goto, 1986] NISITANI, H. et GOTO, M. (1986). A small-crack growth law and its application to the evaluation of fatigue life. *Mechanical Engineering Publications, The Behaviour of Short Fatigue Cracks*, pages 461–478.

- [Paris et Erdogan, 1963] PARIS, P. et ERDOGAN, F. (1963). A Critical Analysis of Crack Propagation Laws. *Journal of Basic Engineering*, 85(4):528–533.
- [Pei *et al.*, 1989] PEI, H. X., BROWN, M. W. et MILLER, K. J. (1989). Fatigue crack propagation under complex biaxial stress cycling. *Mechanical Engineering Publications*, pages 587–603.
- [Pelloux, 1969] PELLOUX, R. M. N. (1969). Mechanisms of formation of ductile fatigue striation. *ASM*, 62:281–285.
- [Pommier, 1992] POMMIER, S. (1992). *Tenue À La Fatigue Du N18 À Température Ambiante*. Dea de génie des matériaux, IRC Birmingham.
- [Pommier, 2002] POMMIER, S. (2002). *Contribution À L'étude de La Fatigue Des Matériaux Métalliques*. Mémoire d'habilitation, Université Paris 6.
- [Pommier, 2015] POMMIER, S. (2015). Development of an Incremental Model for Fatigue Crack Growth Predictions. *AerospaceLab*, (9):p. 1–12.
- [Pommier, 2016] POMMIER, S. (2016). Basics elements on linear elastic fracture mechanics and crack growth modeling.
- [Pommier *et al.*, 2009a] POMMIER, S., GRAVOUIL, A., MOËS, N. et COMBESURE, A. (2009a). *La Simulation Numérique de La Propagation Des Fissures*. Procédés et systèmes mécaniques. Hermes sciences - Lavoisier.
- [Pommier *et al.*, 2009b] POMMIER, S., LOPEZ-CRESPO, P. et DECREUSE, P. Y. (2009b). A multi-scale approach to condense the cyclic elastic-plastic behaviour of the crack tip region into an extended constitutive model. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 32(11):899–915.
- [Pommier et Risbet, 2005] POMMIER, S. et RISBET, M. (2005). Time derivative equations for mode I fatigue crack growth in metals. *International Journal of Fatigue*, 27(10-12):1297–1306.
- [Pook, 1994] POOK, L. P. (1994). Some implications of corner point singularities. *Engineering Fracture Mechanics*, 48(3):367–378.
- [Pugno *et al.*, 2006] PUGNO, N., CIAVARELLA, M., CORNETTI, P. et CARPINTERI, A. (2006). A generalized Paris' law for fatigue crack growth. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 54(7):1333–1349.
- [Ravichandran *et al.*, 1999] RAVICHANDRAN, K. S., LARSEN, J. M. et LI, X. D. (1999). Significance of crack shape or aspect ratio to the behaviour of small fatigue cracks in titanium alloys. Elsevier.
- [Rice et Rosengren, 1968] RICE, J. et ROSENGREN, G. F. (1968). Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 16(1):1–12.
- [Rice, 1966] RICE, J. R. (1966). The mechanics of crack tip deformation and extension by fatigue. *fatigue crack propagation, ASTM, ASTM STP*, (415):247–311.
- [Robin, 1988] ROBIN, C. (1988). *Comportement D'une Fissure de Fatigue Sous L'action D'un Chargement À Amplitude Non Constante*. Mémoire d'habilitation.

- [Ruiz-Sabariego, 2008] RUIZ-SABARIEGO, J.-A. (2008). *Modèle Incrémental de Prédiction de La Durée de Vie En Fissuration Par Fatigue : Traitement Des Cycles Complexes Anisothermes En Fatigue-Oxydation*. Thèse de doctorat, Paris 6.
- [Santus et Taylor, 2009] SANTUS, C. et TAYLOR, D. (2009). Physically short crack propagation in metals during high cycle fatigue. *International Journal of Fatigue*, 31(8–9):1356–1365.
- [Sobotka et Dodds, 2011] SOBOTKA, J. et DODDS, R. (2011). T-stress effects on steady crack growth in a thin, ductile plate under small-scale yielding conditions : Three-dimensional modeling. *Engineering Fracture Mechanics*, 78(6):1182–1200.
- [Sugimura *et al.*, 1995] SUGIMURA, Y., LIM, P. G., SHIH, C. F. et SURESH, S. (1995). Fracture normal to a bimaterial interface : Effects of plasticity on crack-tip shielding and amplification. *Acta Metallurgica et Materialia*, 43(3):1157–1169.
- [Suresh et Ritchie, 1984] SURESH, S. et RITCHIE, R. O. (1984). Propagation of short fatigue cracks. *International Materials Reviews*, 29(1):445–475.
- [Tanaka, 1987] TANAKA, K. (1987). Mechanisms and Mechanics of Short Fatigue Crack Propagation. *JSME international journal : bulletin of the JSME*, 30(259):1–13.
- [Tanaka *et al.*, 1979] TANAKA, K., HOSHIDE, T., YAMADA, A. et TAIRA, S. (1979). Fatigue Crack Propagation in Biaxial Stress Fields. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 2(2):181–194.
- [Tanaka *et al.*, 1981] TANAKA, K., NAKAI, Y. et YAMASHITA, M. (1981). Fatigue growth threshold of small cracks. *International Journal of Fracture*, 17(5):519–533.
- [Thieulot-Laure, 2008] THIEULOT-LAURE, E. (2008). *Méthode probabiliste unifiée pour la prédiction du risque de rupture en fatigue*. Thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan.
- [Thieulot-Laure *et al.*, 2007] THIEULOT-LAURE, E., POMMIER, S. et FRÉCHINET, S. (2007). A multiaxial fatigue failure criterion considering the effects of the defects. *International Journal of Fatigue*, 29(9-11):1996–2004.
- [Tokaji *et al.*, 1994] TOKAJI, K., OGAWA, T. et OHYA, K. (1994). The effect of grain size on small fatigue crack growth in pure titanium. *International Journal of Fatigue*, 16(8):571–578.
- [Tong, 2002] TONG, J. (2002). T-stress and its implications for crack growth. *Engineering Fracture Mechanics*, 69(12):1325–1337.
- [Truchon *et al.*, 1982] TRUCHON, M., AMESTOY, M. et DANG VAN, K. (1982). Experimental study of fatigue crack growth under biaxial loading. Cannes.
- [Tvergaard et Hutchinson, 1994] TVERGAARD, V. et HUTCHINSON, J. W. (1994). Effet of T-stress on mode I crack growth resistance in a ductile solid. *Int. J. Solids Structures*, 31(6):823–833.
- [Vecchio *et al.*, 1987] VECCHIO, R. S., CROMPTON, J. S. et HERTZBERG, R. W. (1987). The Influence of Specimen Geometry on Near Threshold Fatigue Crack Growth. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 10(4):333–342.

- [Wang *et al.*, 2014] WANG, K., WANG, F., CUI, W., HAYAT, T. et AHMAD, B. (2014). Prediction of short fatigue crack growth of Ti-6Al-4V. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 37(10):1075–1086.
- [Westergaard, 1939] WESTERGAARD, H. M. (1939). Bearing pressures and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, pages 49–53.
- [Williams, 1959] WILLIAMS, M. L. (1959). The stresses around a fault or crack in dissimilar media. *Bulletin of the seismological society of America*, 49(2):199–204.
- [Yildirim et Vardar, 1990] YILDIRIM, N. et VARDAR, Ö. (1990). Study of periodic overloads at a fixed overload-ratio. *Engineering Fracture Mechanics*, 36(1):71–76.
- [Zappas, 2015a] ZAPPAS, K. (2015a). Constance Tipper Cracks the Case of the Liberty Ships. *JOM*, 67(12):2774–2776.
- [Zappas, 2015b] ZAPPAS, K. (2015b). Constance Tipper Cracks the Case of the Liberty Ships. *JOM*, 67(12):2774–2776.
- [Zhang, 2016] ZHANG, W. (2016). *Propagation de Fissure En Plasticité Généralisée Sous Chargement Cyclique Thermomécanique*. Thèse de doctorat, Paris Saclay, ENS Cachan, Cachan.

## **Titre :** Modèle condensé de plasticité pour la fissuration et influence de la contrainte T

**Mots clés :** Fissure courte, Rupture, Fatigue, Contrainte T

**Résumé :** Les divers composants d'un réacteur d'avion sont soumis à des chargements de fatigue mécaniques et thermiques fortement variables. Afin de prédire au mieux leurs durées de vie, il est alors nécessaire de prendre en compte l'ensemble de ces variations. Pour ce faire, un modèle représentant de façon incrémentale l'évolution de la plasticité en pointe de fissure a été développé. Celui-ci permet de prédire la vitesse de propagation d'une fissure tout en prenant en compte les effets d'histoire provenant de la plasticité produite lors de surcharges ou de sous-charges. Dans cette étude, ce modèle condensé de plasticité a été exprimé plus simplement à partir du facteur d'intensité des contraintes et l'identification automatisée de ses divers paramètres a été redéveloppée. Dans ce but, un essai de fissuration stable a été conçu pour déterminer simplement le seuil de non-propagation du matériau. Par ailleurs, les éventuelles fissures se propageant dans un composant sont en général amorcées en surface à partir de chocs

ou de rayures. Ces fissures passent la majeure partie de leur vie dans un régime de propagation de fissure courte, différant de celui d'une fissure longue. En effet, à facteur d'intensité des contraintes équivalent, une fissure courte se propagera plus rapidement qu'une fissure longue. La prise en compte de ce comportement dans la prédiction de durée de vie est donc primordiale. En outre, il a été observé qu'une fissure longue subissant une contrainte T négative se propage de façon analogue à une fissure courte. Il a donc été choisi de développer un nouveau modèle adapté aux fissures courtes en prenant en compte l'influence de la contrainte T sur la vitesse de propagation. Enfin, à partir des essais de fissuration stable, un protocole a été développé pour réaliser des éprouvettes comportant une fissure courte. Une campagne d'essais multiaxiaux pour différentes valeurs de contrainte T a été menée en régime permanent et transitoire afin d'étudier les similitudes entre effet de fissure courte et influence de la contrainte T.

## **Title :** Crack growth plasticity condensed model and T-stress influence

**Keywords :** Short crack, Fracture, Fatigue, T-stress

**Abstract :** The various components of an aircraft engine undergo strong changes in mechanical and thermal fatigue loadings. All these variations must be taken into account in order to anticipate the components' total fatigue life to the best. An incremental model showing the changes in plasticity at the crack tip has therefore been developed. It allows us to foresee the crack growth rate with history effects by modelling the plastic behaviour produced when overloads or underloads occur. In this study, the plasticity condensed model has been represented in an easier way, using the stress intensity factor and the automated identification of its parameters has been redeveloped. A stable crack growth test has been designed to determine easily the fatigue crack growth threshold of the material. Cracks usually grow from scratches or impacts on the surface of the component. These cracks spend much of their fatigue life

growing with a short crack behaviour, differing from the long crack one. As a matter of fact, a short crack grows faster than a long crack for a same stress intensity factor. This behaviour must therefore be taken into account while modelling the crack growth to accurately predict the total fatigue life of the component. It appeared furthermore that a long crack undergoing a negative T-stress grows the same way as a short crack. It has consequently been chosen to develop a short crack growth model using the influence of T-stress on the crack growth rate. Finally, using the stable crack growth specimens, an experimental protocol has been designed to produce new specimens containing a short crack. A multiaxial tests campaign was carried out for various values of T-stress in permanent and transitional regimes in order to compare short crack and T-stress effects.