



**HAL**  
open science

# Flots géodésiques et théorie des modèles des corps différentiels

Rémi Jaoui

► **To cite this version:**

Rémi Jaoui. Flots géodésiques et théorie des modèles des corps différentiels. Logique [math.LO]. Université Paris-Saclay, 2017. Français. NNT : 2017SACLS147 . tel-01587777

**HAL Id: tel-01587777**

**<https://theses.hal.science/tel-01587777>**

Submitted on 14 Sep 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE DE DOCTORAT

de

L'UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

École doctorale de mathématiques Hadamard (EDMH, ED 574)

*Établissement d'inscription* : Université Paris-Sud

*Laboratoire d'accueil* : Laboratoire de mathématiques d'Orsay, UMR 8628 CNRS

*Spécialité de doctorat* : Mathématiques fondamentales

Rémi JAOUI

## Flots géodésiques et théorie des modèles des corps différentiels

*Date de soutenance* : 30 Juin 2017

*Après avis des rapporteurs* : EHUD HRUSHOVSKI (University of Oxford)  
DAVID MARKER (University of Illinois)

*Jury de soutenance* : ZOE CHATZIDAKIS (Ecole Normale Supérieure) Présidente du jury  
JEAN-BENOÎT BOST (Université Paris-Sud) Directeur de thèse  
ELISABETH BOUSCAREN (Université Paris-Sud) Examineur  
CHARLOTTE HARDOUIN (Université de Toulouse) Examineur  
MARTIN HILS (University of Münster) Codirecteur de thèse  
FRÉDÉRIC PAULIN (Université Paris-Sud) Invité  
MARTIN ZIEGLER (University of Freiburg) Examineur



## Résumé

### FLOTS GÉODÉSQUES ET THÉORIE DES MODÈLES DES CORPS DIFFÉRENTIELS

Le travail qui suit, constitué de trois chapitres, a pour objet les interactions entre deux approches d'étude des équations différentielles : la théorie des modèles des corps différentiellement clos d'une part et l'étude dynamique des équations différentielles réelles d'autre part.

Dans le premier chapitre, on présente un formalisme d'algèbre différentielle, en termes de  $D$ -schémas *à la Buium* au dessus du corps des nombres réels (muni de la dérivation triviale), qui permet de rendre compte de ces deux approches d'étude en même temps. Le résultat principal est un critère d'orthogonalité aux constantes pour le type générique d'une  $D$ -variétés réelle absolument irréductible, basé sur la dynamique topologique de son flot réel analytique associé.

Le deuxième chapitre est consacré aux équations différentielles algébriques décrivant le flot géodésique de variétés algébriques réelles munies de 2-formes symétriques non-dégénérées. À l'aide du critère précédent, on démontre un théorème d'orthogonalité aux constantes "en courbure strictement négative", s'appuyant sur les résultats d'Anosov et de ses successeurs concernant la dynamique topologique — la propriété de mélange topologique faible — du flot géodésique d'une variété riemannienne compacte à courbure strictement négative.

En dimension 2, on conjecture en fait une description plus précise — son type générique est minimal de prégéométrie triviale — de la structure associée aux équations différentielles géodésiques unitaires. On présente, dans le troisième chapitre, des motivations et des résultats partiels concernant cette conjecture.

**Mots-clés :** Théorie des modèles, systèmes dynamiques, algèbre différentielle, trichotomie de Zilber, corps différentiellement clos, orthogonalité aux constantes, dynamique hyperbolique, propriété du mélange faible, mécanique classique, flots géodésiques.

---

## Abstract

### GEODESIC FLOWS AND MODEL THEORY OF DIFFERENTIAL FIELDS

The following work, which contains three chapters, is dedicated to studying the interactions between two different approaches regarding differential equations: the model-theory of differentially closed fields on the one side and the dynamical analysis of real differential equations, on the other side.

In the first chapter, we present a formalism from differential algebra, in terms of  $D$ -varieties *à la Buium* over the field of real numbers (endowed with the trivial derivation), that allows one to realise both approaches at the same time. The main result is a criterion of orthogonality to the constants, based on the topological dynamic of its associated real analytic flow.

The second chapter is dedicated to the algebraic differential equations describing the (unitary) geodesic flow of a real algebraic variety endowed with an algebraic, non-degenerated symmetric 2-form. Using the previous criterion, we prove a theorem of orthogonality to the constants "in negative curvature", that relies on the results of Anosov and of his followers, regarding the topological dynamic — the weakly mixing topological property — for the geodesic flow of a compact Riemannian manifold with negative curvature.

In dimension 2, we conjecture a more precise description — its generic type is minimal and has a trivial pregeometry — for the structure associated to the unitary geodesic equation. In the third chapter, we present some motivations and partial results on this conjecture.

**Keywords :** Model theory, dynamical systems, differential algebra, Zilber's trichotomy, differentially closed fields, orthogonality to the constants, hyperbolic dynamics, the weakly mixing property, Classical mechanics, geodesic flows.

## Remerciements

Mes premiers remerciements vont bien naturellement à mes deux directeurs de thèse, Jean-Benoît Bost et Martin Hils. La richesse de leurs idées et leur très grande gentillesse ont rendu ces années aussi agréables qu' enrichissantes. Il est bien évident que cette thèse leur doit beaucoup ; il l'est tout autant que je continuerai à bénéficier de leurs enseignements, qui dépassent largement le cadre de ce texte, de longues années encore. Merci pour votre disponibilité, vos relectures attentives et toutes vos idées !

Je remercie également Ehud Hrushovski et David Marker pour avoir accepté de rapporter cette thèse et pour le soin avec lequel il l'ont fait. Leurs commentaires et leurs remarques me sont déjà très utiles. C'est avec tout autant de plaisir que je remercie Elisabeth Bouscaren, Zoé Chatzidakis, Charlotte Hardouin et Martin Ziegler de leur présence dans le jury ainsi que Frédéric Paulin d'avoir accepté de participer à la soutenance.

Plus généralement, je voudrais remercier tous les membres du département de mathématiques de l'Université d'Orsay, avec qui j'ai pu discuter lors de ma thèse. J'ai passé trois très belles années à travailler dans cette université. Merci particulièrement à François Charles, Laurent Clozel, Olivier Fouquet et Laurent Niedermann avec qui j'ai pris beaucoup de plaisir à enseigner.

Je remercie également tous les membres de l'équipe de logique de l'Université Paris VII. Tout au long de mon doctorat, j'ai beaucoup apprécié les séminaires de l'équipe de logique. J'y ai découvert plein de belles mathématiques et toujours dans la bonne humeur. Merci aussi aux doctorants du bâtiment Sophie Germain pour leur accueil.

Merci enfin à l'équipe de logique de l'Université de Münster. Que cela soit pour rendre visite à Martin, cette année, ou lors de mon séjour d'un mois en Avril 2016, j'ai toujours été très bien accueilli à Münster. Je garde beaucoup de bons souvenirs de mes séjours en Allemagne.

Merci aussi à tous mes amis, qui rendent ma vie si agréable. Merci à Julie, Léa, Nilda, Marion et Thomas qui m'ont accompagné depuis le lycée. Merci à Cyrus, Damien, Nil, Rafaël, Thibaut et William pour tous les bons moments et les vives discussions que nous avons partagés. Merci à Raphaël et Antoine pour tout ce qui nous unit depuis notre voyage en Amérique du Sud. Last but not least, merci aussi à Gabrielle.

Pour conclure, merci à ma famille. A mon grand-père, avec qui je faisais, petit, des mathématiques à la plage. A ma grand-mère, qui est toujours si positive pour moi. Merci à mes parents et à ma petite soeur.



# Table des matières

Remerciements	iii
Introduction	3
Chapitre 1. Un critère dynamique d'orthogonalité aux constantes	11
1. Théorie des modèles des corps différentiels	14
1.1. Rang de Lascar et géométrie des types minimaux	15
1.2. Orthogonalité dans une théorie $\omega$ -stable	17
1.3. Corps différentiellement clos	22
2. $D$ -variétés et ensembles définissables associés	25
2.1. $D$ -schémas	25
2.2. Ensemble définissable associé à une $D$ -variété	28
2.3. Un premier critère d'orthogonalité aux constantes	31
3. Un critère d'orthogonalité aux constantes pour les $D$ -variétés réelles	33
3.1. Des $D$ -variétés réelles aux flots réels	33
3.2. Flots topologiquement transitifs et topologiquement mélangeants	37
3.3. Le critère d'orthogonalité aux constantes	40
Chapter 2. Geodesic flows of pseudo-Riemannian algebraic varieties	45
1. Hamiltonian dynamics and pseudo-Riemannian varieties	48
1.1. Hamiltonian formalism	49
1.2. Pseudo-Riemannian varieties	50
1.3. Classical mechanics	51
2. Approximating compact Riemannian manifolds by pseudo-Riemannian varieties	53
2.1. Real algebraic sets and analytification	53
2.2. First approximation	55
2.3. Approximation by algebraic embeddings in $\mathbb{R}^n$	56
3. Anosov flows and their dynamics	58
3.1. Anosov Flows	58
3.2. Dynamical properties of Anosov flows	59
3.3. Anosov alternative and mixing properties	60
4. Proof of the Main Theorem	61
4.1. Constructing pseudo-Riemannian varieties over $\mathbb{R}$ with negative curvature	61
4.2. The main theorem	62
Chapter 3. Towards Minimality and Triviality for Geodesic Flows	65
1. Minimality and strong minimality in terms of $D$ -varieties	66
1.1. Structure associated to a $D$ -variety	66

1.2. Minimality and base change .....	67
1.3. Some consequences of Shelah's reflection principle .....	68
2. Orthogonality to locally modular types .....	72
2.1. One-basedness .....	73
2.2. Structural results for types of finite Lascar rank .....	74
2.3. Consequences for orthogonality to locally modular minimal types .....	75
3. Non-trivial locally modular types in $\mathbf{DCF}_0$ and universal vector extensions .....	76
3.1. Hrushovski-Sokolovic's classification of non-trivial locally modular types .....	76
3.2. Consequences for $D$ -varieties defined over constant differential fields .....	78
4. Semi-minimality .....	79
4.1. Definition and properties .....	80
4.2. An example of non-semi minimality .....	81
5. Indirect strategy for minimality and triviality in order 3 .....	83
5.1. Concerning dynamical criteria for minimality .....	83
5.2. Real meromorphic factors of a real analytic flow .....	85
5.3. An indirect strategy for minimality .....	85
A. Semi-Abelian Varieties and their universal vector extensions .....	86
A.1. Preliminaries on semi-Abelian varieties .....	86
A.2. Analytic description of the $D$ -group structure on $\mathbb{E}(A)$ .....	88
Bibliographie .....	91

# Introduction

Durant les trente dernières années, les applications des résultats de la théorie des modèles pure à des situations géométriques concrètes issues de mathématiques classiques — l’algèbre différentielle, les corps valués, la dynamique algébrique — se sont multipliées. Parmi ces résultats, l’un des plus célèbres est sûrement le théorème d’algébrisation démontré par Hrushovski et Zilber dans [HZ96], pour les ensembles fortement minimaux non localement modulaires dans les contextes géométriques noethériens appelés *géométries de Zariski*.

Indépendamment, les travaux de Ritt et Kolchin sur l’algèbre différentielle ont permis de construire une structure de géométrie de Zariski sur *l’ensemble des solutions d’une équation différentielle algébrique* dans un corps différentiel “universel” appelé *corps différentiellement clos*. L’étude de cette géométrie “exotique”, à l’aide du théorème d’algébricité de [HZ96], a conduit Hrushovski à une preuve du Théorème de Mordell-Lang sur les corps de fonctions de caractéristique 0 dans [Hru96].

L’objectif de cette thèse est de décrire la géométrie de l’ensemble des solutions de certaines équations différentielles algébriques — notamment *les équations géodésiques d’une variété riemannienne* — issues de la mécanique classique.

Nos résultats s’appuient sur les travaux de Poincaré [Poi57], Anosov [Ano69] et leurs successeurs décrivant la dynamique des solutions de ces équations différentielles. Le recours à leurs résultats nous amène à étudier pour une variété algébrique réelle  $X$  muni d’un champ de vecteurs  $v$ , la relation entre *les propriétés dynamiques des courbes intégrales* du champ de vecteurs  $v_{\mathbb{R}}$  sur la variété analytique  $X(\mathbb{R})^{an}$  et *les propriétés de dégénérescence de la structure modèle-théorique* de son ensemble de solutions, qui traduisent précisément la forte *indépendance algébrique de leur solutions analytiques*.

## Théorie des modèles géométrique

1. Depuis les travaux de Morley sur les théories  $\aleph_1$ -catégoriques, le programme de classification de Shelah [She90] a mis en évidence une hiérarchie parmi les théories du premier ordre, basée sur leur nombre de modèles (à isomorphisme près) de cardinal donné. Suivant ce principe, la théorie des corps algébriquement clos (de caractéristique fixée) et celle des espaces vectoriels (sur un corps fixé) sont parmi les théories les plus modérées — elles admettent un unique modèle en tout cardinal non dénombrable — tandis que l’arithmétique est considérée au sommet de cette hiérarchie.

Face à un problème mathématique particulier, l’attitude du théoricien des modèles consiste à spécifier un langage (généralement du premier ordre) dans lequel s’exprime ce problème, puis à étudier les structures dans ce langage, qui sont à la fois aussi modérées que possible dans la hiérarchie de Shelah et suffisamment riches pour rendre compte du problème étudié.

Concernant les équations différentielles algébriques, un choix naturel est le langage  $\mathcal{L}_{\delta} = \{0, 1, +, -, *, \delta\}$  composé du langage des anneaux, auquel on adjoint un symbole  $\delta$  pour désigner une dérivation. Les formules positives de ce langage correspondent alors aux systèmes (finis) d’équations différentielles algébriques. On prend alors en compte les règles usuelles du calcul différentiel en caractéristique 0 en privilégiant, parmi les  $\mathcal{L}_{\delta}$ -structures, les *corps différentiels*  $(K, \delta)$  (de caractéristique 0), c’est-à-dire les corps  $K$  muni d’un opérateur additif  $\delta$  vérifiant la règle de Leibniz.

Les modèles existentiellement clos de la théorie des corps différentiels sont appelés *les corps différentiellement clos*. Ils sont définis par une propriété d’existence pour les solutions de systèmes d’équations différentielles algébriques, analogue à celle satisfaite par les corps algébriquement clos,



relativement aux systèmes d'équations polynomiales. On obtient ainsi une théorie complète, appelée théorie des corps différentiellement clos et notée  $\mathbf{DCF}_0$ , qui fournit un cadre adapté à l'étude d'équations différentielles algébriques, à l'aide de méthodes de théorie des modèles. Une propriété essentielle de la théorie  $\mathbf{DCF}_0$  est une propriété de modération appelée  $\omega$ -stabilité, qui est une version forte de la condition de stabilité, occupant une place prépondérante dans le programme de classification de Shelah.

2. La condition d' $\omega$ -stabilité pour une théorie  $T$  impose des restrictions structurelles très fortes sur ses sous-ensembles définissables. L'objet de la *théorie géométrique de la stabilité* est de présenter, sous ces restrictions, des méthodes générales de description de ces derniers. Dans les deux prochains paragraphes, nous esquissons quelques idées motrices de son développement.

En premier lieu, il existe une notion de dimension ordinaire appelée *rang de Morley* sur les ensembles définissables de la théorie  $T$ . Il est caractérisé par la propriété qu'un ensemble définissable est de rang strictement supérieur à un ordinal  $\alpha$  si, après extension des paramètres, on peut le découper en une infinité disjointe de sous-ensembles définissables de rang supérieur à  $\alpha$ . Associée à cette dimension, on dispose également d'une notion de multiplicité entière appelée *degré de Morley*.

Le rang et le degré de Morley définissent ainsi une stratification des ensembles définissables ; ceux qui sont indécomposables, c'est-à-dire, de rang de Morley égal à 1 et de multiplicité 1 sont dits *fortement minimaux*. On peut alors analyser les ensembles définissables de rang fini en termes d'ensembles fortement minimaux (ou plus généralement en termes de types minimaux).

Pour cela, il est d'usage de travailler avec *des types complets* dans la théorie  $T$  – qui sont les ultrafiltres sur l'algèbre booléenne des ensembles définissables – plutôt qu'avec les ensembles définissables eux-mêmes. Intuitivement, les types représentent les ensembles définissables à un ensemble définissable négligeable (en un sens à préciser) près.

Pour deux types  $p, q$  d'une même théorie  $\omega$ -stable de rang fini, on a deux cas extrêmes pour les relations entre ces derniers, appelés respectivement la (presque)-internalité d'un type dans un autre et l'orthogonalité entre deux types stationnaires. Plus précisément, le type  $p$  est interne à  $q$  si, après extension des paramètres, on peut reconstruire le type  $p$  à l'aide de réalisations de  $q$ . À l'inverse, les types  $p$  et  $q$  sont *orthogonaux*, lorsqu'ils sont sans relation dans la théorie  $T$  et le demeurent après toute extension des paramètres, ou autrement dit après tout changement de base.

Pour analyser un type  $p$  de rang fini, on commence par déterminer un type minimal  $q$ , qui n'est pas orthogonal à  $p$  (c'est-à-dire qui interagit avec le type  $p$ ). Il existe alors un plus gros facteur  $p_0$  de  $p$ , qui est interne au type minimal  $q$  (c'est-à-dire complètement contrôlé par le type minimal  $q$ ). En réitérant ce procédé au type de “la fibre du facteur  $p_0$ ”, on obtient ainsi une suite de types  $p_0, \dots, p_n$ , où chacun est contrôlé par un unique type minimal modulo non-orthogonalité.

3. Pour décrire les ensembles définissables d'une théorie  $\omega$ -stable  $T$ , il convient donc d'abord de s'intéresser aux ensembles fortement minimaux (et plus généralement aux types minimaux) de  $T$ . De plus, les théories fortement minimales sont essentiellement les théories les plus modérées dans la hiérarchie de Shelah.

L'étude de ces ensembles fortement minimaux a conduit Zilber à isoler certaines propriétés de la notion de dimension qui leur est naturellement associée et à les classifier selon ces dernières. De façon informelle, la notion de dimension se comporte ou bien comme la cardinalité dans un ensemble infini sans structure, ou bien comme la dimension linéaire dans un espace vectoriel, ou bien comme le degré de transcendance dans un corps algébriquement clos. On dit alors respectivement que le type minimal est *trivial*, *localement modulaire (non trivial)* ou *non localement modulaire*.

Une motivation pour ces définitions est de distinguer différentes formes de *dégénérescence* pour les ensembles fortement minimaux. Par exemple, pour un ensemble fortement minimal trivial, il n'existe aucun groupe infini définissable, tandis que pour un ensemble fortement minimal localement modulaire non trivial, il existe au moins un groupe infini définissable, mais ce groupe est nécessairement une extension finie d'un groupe abélien définissable. Le principe de trichotomie de Zilber consiste à affirmer que la structure associée à un ensemble fortement minimal non-localement modulaire est nécessairement “riche”, c'est-à-dire qu'elle interprète un corps infini (et

donc en particulier, tous les groupes algébriques sur ce corps). Si ce principe a été réfuté par Hrushovski dans [Hru93], il reste valable dans de nombreux contextes  $\omega$ -stables, comme les géométries de Zariski [HZ96] et en particulier les corps différentiellement clos.

### Equations différentielles algébriques

Historiquement, le premier objectif de la théorie des équations différentielles est d'étudier les fonctions d'une variable réelle ou complexe qui sont solutions d'une équation différentielle  $(E)$ . Dans cette perspective, un résultat fondamental est le théorème de Cauchy-Lipchitz qui formule une condition nécessaire sur l'équation  $(E)$  pour assurer l'existence et l'unicité de telles solutions, une fois fixé un jeu de conditions initiales.

4. Dans cette thèse, nous considérerons *des systèmes d'équations différentielles algébriques* à coefficients dans un corps différentiel  $(K, \delta)$ , c'est-à-dire, des systèmes donnés par des combinaisons algébriques, à coefficients dans  $K$ , des indéterminées et de leurs dérivées. Suivant l'usage en géométrie algébrique, il est utile de considérer aussi des versions "non affines" de systèmes d'équations différentielles, qui soient indépendantes du choix d'un système de coordonnées et "vivent" sur des variétés algébriques générales.

Une catégorie adéquate, introduite par Buium dans [Bui93], est celle des  $D$ -schémas. Un  $D$ -schéma  $(X, \delta_X)$  est un schéma  $X$  muni d'une dérivation  $\delta_X$  sur son faisceau structurel. Tout corps différentiel  $(K, \delta)$  est alors représenté par un  $D$ -schéma de schéma sous-jacent  $\text{Spec } K$  et les systèmes d'équations différentielles algébriques à coefficients dans  $(K, \delta)$  s'identifient à certains  $D$ -schémas affines (en général, pas de type fini) au dessus de  $(K, \delta)$ .

Lorsque l'on travaille au dessus d'un corps différentiel constant  $(K, 0)$  (c'est-à-dire lorsque la dérivation  $\delta$  est triviale), la dérivation  $\delta_X$  s'identifie à un champ de vecteurs sur le schéma  $X$  et on retrouve la présentation classique d'une équation différentielle en termes *de variétés et de champ de vecteurs*. Dans ce contexte, on dispose, de plus, de foncteurs de changement de base associés à des extensions différentielles  $(K, 0) \subset (L, \delta_L)$  arbitraires et en particulier à des extensions différentiellement closes.

Pour tout système d'équations différentielles algébriques à  $n$  indéterminées (qui, rappelons-le, correspondent à des formules du langage  $\mathcal{L}_\delta$  avec  $n$  variables libres), l'ensemble de ses solutions dans un corps différentiellement clos  $(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})$  est un sous-ensemble définissable de  $\mathcal{U}^n$ . Plus généralement, si  $(X, \delta_X)$  est un  $D$ -schéma au dessus de  $(K, \delta)$ , l'ensemble  $(X, \delta_X)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})}$  de *ses points différentiels* dans un corps différentiellement clos  $(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})$  s'identifie à *un ensemble définissable* de  $(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})$  qui est de rang fini dès que  $X$  est un schéma de type fini.

Il sera souvent préférable de travailler, plutôt qu'avec l'ensemble définissable lui-même, avec un type qui lui est associé. Pour cela, on considère le comportement "générique" défini par la topologie de Kolchin (qui est noethérienne) sur cet ensemble définissable. Lorsque  $(X, \delta_X)$  est un  $D$ -schéma intègre de type fini, son *type générique* sera noté  $p_{(X, \delta_X)}$ . C'est un type de la théorie  $\mathbf{DCF}_0$ , à paramètres dans  $K$ , dont les réalisations dans un corps différentiel sont les réalisations du point générique de  $(X, \delta_X)$  (et donc les solutions générales de l'équation différentielle au sens classique).

5. La théorie  $\mathbf{DCF}_0$  et les ensembles définissables de ses modèles ont été très largement étudiés par les théoriciens des modèles. Outre les résultats globaux d'élimination des quantificateurs et des imaginaires, dus respectivement à Blum [Blu77] et Poizat [Poi83], le résultat structurel décisif concernant  $\mathbf{DCF}_0$  est la classification complète des types minimaux non-localement modulaires et localement modulaires non triviaux, donnée par les travaux de Hrushovski et Sokolovic (voir [HS96]).

**Théorème** (Théorème de Trichotomie Fort pour  $\mathbf{DCF}_0$ ). *Pour la théorie  $\mathbf{DCF}_0$ , on a la description suivante des classes d'équivalence de non-orthogonalité pour les types minimaux :*

- (i) *Il existe une unique classe d'équivalence non-localement modulaire, représentée par le type générique du corps des constantes.*
- (ii) *Les classes de non-orthogonalité, localement modulaires non-triviales sont en correspondance biunivoque avec les variétés abéliennes simples définies sur  $\mathcal{U}$ , qui ne descendent pas aux constantes, modulo isogénie.*

(iii) *Il existe une infinité non dénombrable (en fait, un ensemble non borné) de classes de non-orthogonalité triviales.*

Le procédé d'étude développé dans cette thèse consiste, à partir d'une équation différentielle algébrique irréductible (sous la forme d'un  $D$ -schéma  $(X, \delta_X)$  par exemple), d'utiliser les méthodes de la théorie géométrique de la stabilité dans  $\mathbf{DCF}_0$  pour analyser son type générique  $p_{(X, \delta_X)}$  à l'aide des types minimaux décrits par le Théorème de Trichotomie Fort.

6. Décrivons maintenant quelques exemples d'équations différentielles pour lesquelles cette description est connue.

D'abord, considérons le cas d'une *équation différentielle linéaire*  $(L)$ . Dans ce cas, le type générique de  $(L)$  est interne au type générique des constantes, qui est l'unique type non-localement modulaire. En particulier, la structure associée à une équation linéaire est toujours riche puisqu'elle interprète le corps algébriquement clos des constantes. Signalons de plus que, sous les hypothèses adéquates, Poizat a montré qu'on pouvait retrouver le groupe de Galois de cette équation différentielle à partir du groupe de liaison (voir la partie 2.5 dans [Poi01]) témoignant de l'internalité.

Au contraire, Hrushovski et Itai ont étudié, dans [HI03], le cas des  *$D$ -courbes sur un corps différentiel constant*, c'est-à-dire, des  $D$ -schémas irréductibles de dimension 1 au dessus d'un corps différentiel constant. Pour toute courbe projective  $C$  de genre  $g \geq 2$ , ils construisent une famille de champ de vecteurs rationnels, dont le comportement générique (pour la famille) est de type (iii), c'est-à-dire, minimal et trivial.

Pour les  $D$ -schémas de dimension supérieure, il existe peu d'exemples dont on sait décrire le comportement modèle-théorique. Dans le cas des *équations de Painlevé*, les travaux de Nagloo et Pillay dans [NP14] établissent pour des paramètres génériques, que l'équation différentielle définit un ensemble fortement minimal trivial. Plus récemment, Freitag et Scanlon montrent dans [FS14] que l'ensemble défini par *l'équation différentielle minimale d'ordre 3 vérifiée par la fonction  $j$*  est aussi fortement minimal et trivial. Dans ces deux cas, les démonstrations s'appuient sur des propriétés spécifiques des solutions des équations différentielles considérées, établies respectivement par Umemura et Watanabe [UW97] ainsi que Nishioka [Nis89].

Le peu d'exemples d'équations différentielles algébriques dont on a montré que le type générique est minimal et trivial tient sans doute au fait que — contrairement à ce que peut laisser entendre la terminologie — ces équations différentielles algébriques sont les plus complexes en ce qui concerne leur "intégrabilité algébrique". Ce caractère paradoxal de la terminologie est analogue à celui de la terminologie de *groupe simple*, désignant précisément un groupe qui ne peut se décrire en termes de groupes plus simples en un sens naïf. De même, la résolution d'équations différentielles algébriques dont *le type générique est minimal et trivial, ne peut être réduite à la résolution d'une suite d'équations différentielles linéaires et d'équations différentielles "plus simples"*, c'est-à-dire, supportées par des  $D$ -schémas de dimension strictement inférieure (voir Appendice A dans [NP11]).

### Mécanique classique et Flots géodésiques

La mécanique classique est l'une des premières motivations de la théorie des équations différentielles. Parmi les développements mathématiques issues de la mécanique classique, l'étude d'exemples spécifiques tels que le *problème d'attraction gravitationnelle entre 3 corps* (et ses généralisations) ou le *flot géodésique* d'une variété riemannienne, est restée, jusqu'à aujourd'hui, au cœur du développement de la théorie des systèmes dynamiques.

7. Dans cette thèse, nous considérerons des équations différentielles modélisant des *systèmes autonomes conservatifs* de la mécanique classique, décrits de la façon suivante : si  $(M, g)$  est une variété riemannienne analytique et  $V$  une fonction analytique sur  $M$  représentant l'énergie potentielle, ce sont les équations hamiltoniennes associées au Hamiltonien

$$H(x, p) = \frac{1}{2}g_x(p, p) + V(x).$$

Lorsque le potentiel  $V$  est nul, on obtient les équations géodésiques de la variété riemannienne  $(M, g)$ , tandis que le problème à trois corps est décrit par le potentiel newtonien d'attraction entre ces trois corps sur un ouvert  $M$  de  $(\mathbb{R}^3)^3$  muni de la métrique euclidienne standard.

Si la variété  $M$ , la métrique  $g$  et le potentiel  $V$  sont des données algébriques, l'équation différentielle hamiltonienne associée est une équation différentielle algébrique décrite par une  $D$ -variété  $(T_{M/\mathbb{R}}, v_H)$  supportée par l'espace tangent de  $M$ . En considérant un système complet d'intégrales premières rationnelles indépendantes  $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{R}(M)$ , une première réduction consiste à se restreindre aux fibres du morphisme de  $D$ -variétés :

$$F = (f_1, \dots, f_r) : (T_{M/\mathbb{R}}, v_H) \dashrightarrow (\mathbb{A}^r, 0).$$

De façon informelle, nos résultats concernant les ensembles définissables associées à ces fibres peuvent être résumés par le principe suivant :

**Principe.** *Soit  $(X, \delta_X)$  une  $D$ -variété réelle absolument irréductible. Sous des hypothèses convenables, une dynamique réelle "suffisamment chaotique" induit une dégénérescence de la structure modèle-théorique associée.*

On peut distinguer deux formes pour la dégénérescence du type générique  $p_{(X, \delta_X)}$  d'une  $D$ -variété irréductible  $(X, \delta_X)$  réelle attendue en présence de dynamique chaotique :

- *Dégénérescence du rang* : Le rang de Morley de  $p_{(X, \delta_X)}$  est strictement inférieur à la dimension<sup>1</sup>  $\dim(X)$  prédite par la géométrie.
- *Dégénérescence des prégéométries* : Le type  $p_{(X, \delta_X)}$  est contrôlée par des prégéométries triviales, i.e., les types minimaux apparaissant dans l'analyse de  $p_{(X, \delta_X)}$  sont triviaux.

Comme mentionné plus haut, elles traduisent des propriétés fortes d'indépendance algébrique. Une dégénérescence du rang pour le type générique d'une  $D$ -variété irréductible  $(X, \delta_X)$  complexe correspond à l'absence de certaines sous-variétés fermées invariantes dans les puissances  $(X, \delta_X)^n$  de la  $D$ -variété  $(X, \delta_X)$ . Par exemple, la structure associée à une  $D$ -variété est fortement minimale si et seulement si la dimension de toute sous-variété fermée invariante d'une puissance  $(X, \delta_X)^n$  est un multiple de la dimension de  $X$  (voir Théorème 1.3.3 du Chapitre 3).

Sous cette hypothèse de minimalité, la dégénérescence des prégéométries s'interprète comme la condition d'indépendance algébrique sur ses solutions suivante : si  $\gamma_1, \dots, \gamma_n : D \rightarrow X(\mathbb{C})$  sont des courbes intégrales analytiques complexes du champ de vecteurs  $v$ , définies sur un disque  $D$  du plan complexe alors les conditions suivantes sont équivalentes

- (i) Pour tous  $i, j \leq n$  distincts, l'image de la courbe analytique  $(\gamma_i, \gamma_j) : D \rightarrow X(\mathbb{C})^2$  est Zariski-dense dans  $X^2$ .
- (ii) L'image de la courbe  $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) : D \rightarrow X(\mathbb{C})^n$  est Zariski-dense dans  $X^n$ .

8. En conséquence, notre attention s'est portée vers les systèmes hamiltoniens *non-intégrables* et la dynamique des régions responsables de ce caractère. Pour tester nos méthodes, les flots géodésiques sur les variétés riemanniennes, notamment sur les surfaces riemanniennes, constituent un prototype idéal, comme l'avait déjà remarqué Poincaré dans [Poi05] :

j'ai étudié les particularités des solutions du problème à trois corps et en particulier, des solutions périodiques et asymptotiques. Il suffit de se reporter à ce que j'ai écrit pour comprendre l'extrême complexité de ce problème ; à coté de la difficulté principale, de celle qui tient au fond même des choses, il y a une foule de difficultés secondaires, qui viennent compliquer encore la tâche du chercheur. Il y aurait donc intérêt à étudier d'abord un problème où l'on rencontrerait cette difficulté principale, mais où l'on serait affranchi de toutes les difficultés secondaires. Ce problème est tout trouvé, c'est celui des lignes géodésiques sur une surface.

Dans des situations géométriques très simples, comme le tore plat  $\mathbb{T}$  ou la sphère  $\mathbb{S}^2$  plongée dans  $\mathbb{R}^3$  (et plus généralement toute surface de révolution dans  $\mathbb{R}^3$ ), la dynamique réelle de l'équation géodésique (unitaire) est particulièrement simple. Au contraire, pour une variété riemannienne  $(M, g)$  compacte dont la courbure est strictement négative, la dynamique est complètement chaotique (voir [OW73]). Le principe énoncé plus haut conduit donc à penser que les avatars algébriques des flots géodésiques sur de telles variétés riemanniennes donnent lieu à des types

1. Suivant l'usage en algèbre différentielle, on appellera *ordre* du type  $p_{(X, \delta_X)}$ , la dimension  $\dim(X)$  du  $D$ -schéma sous-jacent.

génériques fortement minimaux et triviaux. Plus précisément, il paraît raisonnable de formuler la conjecture suivante :

**Conjecture.** *Soit  $V \subset \mathbb{R}^n$  un sous-ensemble algébrique compact, connexe et non vide. Supposons que la restriction de la métrique euclidienne à  $V$  soit à courbure strictement négative.*

*Le type générique de l'équation différentielle géodésique (unitaire) de la sous-variété riemannienne  $V$  est fortement minimal et trivial.*

Les résultats établis dans cette thèse montrent que le type générique de ces équations différentielles algébriques est orthogonal aux constantes. En outre, lorsque  $V$  est de dimension 2, nous montrons que la validité de cette conjecture découlerait de l'absence de "facteurs de petite dimension" pour le flot géodésique (unitaire) analytique associé — que l'on peut espérer établir à partir des propriétés dynamiques classiques de ces flots.

9. La conjecture ci-dessus traite de certaines sous-variétés riemanniennes de  $\mathbb{R}^n$  données par des équations algébriques, variétés dont il faut assurer l'existence au préalable. A de nombreuses reprises dans cette thèse, nous aurons besoin de résultats d'existence similaires concernant des *variétés algébriques pseudo-riemanniennes au dessus d'un corps  $k$  de caractéristique 0*, c'est-à-dire, des variétés algébriques lisses  $X$  au dessus de  $k$ , munies d'une 2-forme symétrique (algébrique) non-dégénérée.

Nous obtenons ces énoncés d'existence grâce à des résultats d'approximations, permettant de réaliser toute variété riemannienne compacte lisse, après petite perturbation de la métrique, comme l'analytification d'une variété pseudo-riemannienne algébrique lisse au dessus de  $\mathbb{R}$  :

**Théorème I** (Chapitre 2, Théorème 2.2.7). *Soit  $(M, g_M)$  une variété riemannienne lisse compacte et connexe. Pour tout voisinage  $\mathcal{U} \subset C^\infty(S^2T^*M)$  de  $g_M$  pour la  $C^\infty$ -topologie, il existe une variété pseudo-riemannienne algébrique lisse  $(X, g)$  au dessus de  $\mathbb{R}$  et un difféomorphisme  $\phi : M \rightarrow X(\mathbb{R})^{an}$  tel que  $\phi^*g_{\mathbb{R}}^{an} \in \mathcal{U}$ .*

En utilisant une variante d'une construction de Nash, qui joue un rôle central dans ses preuves d'existence de plongements isométriques dans [Nas56] et [Nas54], nous obtenons aussi un résultat d'approximation plus précis (voir l'introduction du Chapitre 2) permettant d'assurer l'existence de nombreux sous-ensembles algébriques compacts  $V \subset \mathbb{R}^n$  pour lesquels la restriction de la métrique euclidienne soit à courbure strictement négative.

### Résultats sur l'orthogonalité aux constantes

L'*orthogonalité aux constantes* pour (le type générique d') un système irréductible d'équations différentielles algébriques est la première condition de dégénérescence pour la structure modèle-théorique associée.

10. Avant de formuler un critère dynamique d'orthogonalité aux constantes, commençons par rappeler quelques résultats classiques sur la dynamique réelle des systèmes hamiltoniens et de leurs solutions. Parmi les systèmes hamiltoniens, on trouve ceux qui sont complètement (algébriquement) intégrables, c'est-à-dire qui possèdent un système complet d'intégrales premières rationnelles en involution. C'est le cas, par exemple, des équations géodésiques de la sphère  $\mathbb{S}^2$  plongée dans  $\mathbb{R}^3$ . Dans ce cas, la dynamique réelle est particulièrement simple car les orbites sont astreintes à se dessiner sur des tores invariants. Pour de petites perturbations d'un système hamiltonien complètement intégrable, le théorème KAM (voir par exemple [Bos86]) montre que cette image dynamique est préservée pour le système perturbé *en dehors des résonances*. Néanmoins, en 1899 (donc bien avant le théorème KAM), Poincaré [Poi57] avait déjà remarqué que pour certaines perturbations, la dynamique réelle *au voisinage des résonances* était de nature contraire – ergodique – et que ce caractère ergodique était la source de résultats de non-intégrabilité analytique pour le système considéré (voir aussi [MR99] pour une présentation moderne de ces résultats et les relations avec la théorie de Galois de l'équation différentielle linéarisée au voisinage des orbites périodiques).

Le critère d'orthogonalité aux constantes que nous démontrons est une variante des arguments de non-intégrabilité *à la Poincaré*, reposant sur la complexité de la dynamique réelle des équations considérées.

**Théorème II** (Chapitre 1, Théorème 3.3.8). *Soient  $X$  une variété absolument irréductible sur  $\mathbb{R}$  et  $v$  un champ de vecteurs rationnel sur  $X$ . On note  $(M, \phi)$  le flot régulier réel de  $(X, v_X)$ . Supposons qu'il existe une partie compacte  $K$  de  $M$ , Zariski-dense dans  $X$  et invariante par le flot  $\phi$ .*

*Si  $(K, (\phi_t|_K)_{t \in \mathbb{R}})$  est faiblement topologiquement mélangeant alors le type générique de  $(X, v)$  est orthogonal aux constantes.*

Par définition,  $M = X(\mathbb{R}) \setminus (\text{Sing}(X) \cup \text{Sing}(v))$  est la variété analytique réelle obtenue en retirant à  $X(\mathbb{R})$  les singularités de  $X$  ainsi que les points où le champ de vecteurs rationnel  $v$  n'est pas défini. Le champ de vecteurs  $v$  induit alors un champ de vecteurs analytique sur  $M$  et  $(M, \phi)$  est le flot réel analytique de ce champ de vecteurs analytique. La restriction de ce flot à toute partie compacte invariante  $K$  de  $M$  est alors un flot complet. Ce flot est dit *faiblement topologiquement mélangeant* si tous ses produits sont topologiquement transitifs (voir le Chapitre 1 pour des formulations équivalentes de cette condition).

On remarquera que nous nous sommes affranchis de l'hypothèse hamiltonienne et que le théorème II traite plus généralement d'équations différentielles algébriques dont la dynamique réelle est suffisamment sauvage (faiblement mélangeante) sur des régions compactes invariantes Zariski-dense.

11. Lorsque nous appliquerons le théorème II aux flots géodésiques, nous serons dans une situation où  $K = M = X(\mathbb{R})$ . Nous espérons que sa formulation plus générale permettra de l'appliquer à de petites perturbations de systèmes hamiltoniens algébriquement complètement intégrables, comme le problème à trois corps. Pour cela, il suffirait de mettre en évidence une dynamique topologique faiblement mélangeante dans les régions étudiées par Poincaré, au voisinage des résonances — il s'agit là d'un raffinement très vraisemblable de résultats classiques de Poincaré.

A l'inverse, les flots géodésiques en courbure strictement négative sont certes hamiltoniens mais ne sont pas obtenus par perturbation d'un système complètement intégrable. Les travaux d'Anosov [Ano69] sur les flots géodésiques en courbure négative et de ses successeurs ([Cou04], [Dal99]) montrent en fait que sa dynamique est (au contraire des systèmes complètement intégrables) topologiquement mélangeante sur *l'ensemble tout entier de ses points réels*.

En associant les résultats d'Anosov et de ses successeurs sur la dynamique topologique des flots géodésiques en courbure strictement négative et le Théorème II, nous obtenons le résultat suivant :

**Théorème III** (Chapitre 2, Théorème 4.2.1). *Soit  $(X, g)$  une variété pseudo-riemannienne algébrique, absolument irréductible, sur le corps  $\mathbb{R}$ , dont les points réels sont Zariski-dense, et telle que  $(X(\mathbb{R}), g_{\mathbb{R}})^{an}$  est une variété riemannienne analytique compacte.*

*Si la courbure (sectionnelle) de cette variété riemannienne analytique est strictement négative, alors toute fibre non-nulle du morphisme de  $D$ -variétés*

$$H_g : (T_{X/k}, X_g) \longrightarrow (\mathbb{A}^1, 0)$$

*est une  $D$ -variété absolument irréductible dont le type générique est orthogonal aux constantes.*

Le Théorème I assure l'existence, en toute dimension  $n \geq 2$ , de familles de variétés pseudo-riemanniennes algébriques réelles, vérifiant les hypothèses du Théorème III. Nous avons ainsi construit pour tout entier naturel  $n \geq 2$ , des familles de types, à paramètres dans  $\mathbb{R}$ , d'ordre  $2n - 1$  et orthogonaux aux constantes.

### Résultats supplémentaires de dégénérescence

Pour étudier des propriétés de dégénérescence plus précises concernant les équations géodésiques en courbure strictement négative, on est amené à considérer d'abord le cas des variétés pseudo-riemanniennes algébriques réelles de dimension 2. Un problème préliminaire est alors de décrire la zoologie des types de la théorie  $\mathbf{DCF}_0$ , d'ordre 3, défini sur un corps différentiel constant et orthogonaux aux constantes.

12. D'abord, la description des types localement modulaires non triviaux donnée par le Théorème de Trichotomie Fort de Hrushovski-Sokolovic permet de renforcer formellement le résultat

d'orthogonalité aux constantes obtenu dans les théorèmes II et III, en un résultat de dégénérescence supplémentaire.

En effet, en utilisant la description explicite des types localement modulaires non triviaux dans le Théorème de Trichotomie Fort, on peut montrer qu'ils sont orthogonaux à tout type défini sur un corps différentiel constant. Par symétrie, on obtient qu'un type défini sur un corps différentiel constant et orthogonal aux constantes admet toujours un facteur avec une prégéométrie triviale.

On peut donc renforcer la conclusion du théorème II, en affirmant que le type générique de  $(X, v)$  admet en fait *un facteur de dimension  $> 0$  dont la prégéométrie sous-jacente est triviale*. C'est en particulier le cas pour les équations géodésiques considérées dans le théorème III.

13. Pour un type  $p$  d'ordre 3 défini sur un corps différentiel constant et orthogonal aux constantes, on n'a aucune information sur son rang de Morley. Les exemples de Freitag-Scanlon décrivent un tel type  $p$  de rang de Morley 1, tandis qu'il suffit de faire le produit libre de 3 types d'ordre 1 construits par Hrushovski-Itai, pour obtenir un exemple de rang de Morley 3. Il est aussi possible de construire un exemple de rang de Morley 2, en utilisant l'équation logarithmique étudiée par Marker dans [MMP06].

Une question plus subtile est de savoir si on obtient nécessairement une dégénérescence des prégéométries associées à *tous* les types minimaux intervenant dans l'analyse de  $p$ . De nouveau, il est possible d'apporter une réponse négative en construisant — à partir d'un type trivial  $p$  à paramètres dans  $\mathbb{C}$  d'ordre 1 et d'une courbe elliptique dont le  $j$ -invariant est une réalisation de  $p$  — un type, d'ordre 3, défini sur un corps différentiel constant, orthogonal aux constantes, pour lequel apparaît une prégéométrie localement modulaire non-triviale.

Nous construisons aussi, à partir de variétés semi-abéliennes dont la partie abélienne ne descend pas aux constantes, un type  $p$  d'ordre 3 *orthogonal aux constantes mais qui n'est pas mono-basé*. En particulier, il apparaît une prégéométrie non-localement modulaire (c'est-à-dire le corps des constantes) dans l'analyse de  $p$ . Néanmoins, cet exemple n'est pas défini sur un corps différentiel constant.

14. Sous l'hypothèse supplémentaire de *semi-minimalité*, la situation est au contraire bien plus contrainte. En utilisant le yoga de l'analyse des types par des types localement modulaires et des arguments propres au cas des corps différentiels, nous montrons que seules deux situations peuvent se produire pour les types d'ordre 3 à paramètres dans un corps différentiel constant :

**Théorème IV** (Chapitre 3, Théorème 4.1.6). *Soit  $(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})$  un corps différentiellement clos,  $C_0$  un sous-corps du corps des constantes de  $(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})$  et  $p \in S(C_0)$  un type d'ordre 3 qui est semi-minimal et orthogonal aux constantes.*

*Un des deux cas suivants est réalisé :*

(i) *Le type  $p$  est minimal et trivial.*

(ii) *Il existe un type trivial  $q \in S(C_0)$  d'ordre 1 tel que  $q^{(3)}$  et  $p$  sont interalgébriques au dessus de  $C_0$ .*

Le Théorème IV donne une image très précise du comportement modèle-théorique d'un type d'ordre 3, semi-minimal et orthogonal aux constantes. Dans les deux situations décrites par le théorème IV, on obtient un calcul explicite du rang du type et une description de la nature de toutes prégéométries minimales qui le contrôlent. Dans le premier cas, on a une dégénérescence du rang et des prégéométries, tandis que dans le second, on a seulement une dégénérescence pour les prégéométries.

Pour cette raison, nos derniers travaux se sont concentrés sur la construction d'un *critère de semi-minimalité* pour (le type générique) des  $D$ -variétés absolument irréductibles  $(X, \delta_X)$  réelles, basé sur l'étude du flot analytique réel associé  $(M, \Phi)$ . La recherche d'un tel résultat, suffisamment "souple" pour être applicable dans des cas concrets comme les flots géodésiques, est un des objectifs de nos recherches actuelles. Des résultats partiels sont présentés à la fin du Chapitre 3.

## Un critère dynamique d'orthogonalité aux constantes

RÉSUMÉ : On présente un critère d'orthogonalité aux constantes pour les  $D$ -variétés réelles absolument irréductibles  $(X, v)$  s'appuyant sur la dynamique du flot réel associé  $(M, \phi)$ . Plus précisément, on montre que s'il existe des parties compactes  $K$  de  $M$ , Zariski-dense dans  $X$  telle que la restriction du flot à  $K$  est topologiquement faiblement mélangeante, alors le type générique de  $(X, v)$  est orthogonal aux constantes.

Ce critère sera appliqué dans la deuxième partie à l'étude modèle-théorique du flot géodésique sur les variétés algébriques réelles munies d'une métrique riemannienne algébrique à courbure strictement négative.

### Contents

---

<b>1. Théorie des modèles des corps différentiels</b>	<b>14</b>
1.1. Rang de Lascar et géométrie des types minimaux	15
1.1.1. Le rang de Lascar	15
1.1.2. Types minimaux et pré-géométrie	16
1.1.3. Modularité et trivialité	17
1.2. Orthogonalité dans une théorie $\omega$ -stable	17
1.2.1. Orthogonalité et principe de reflexivité de Shelah	18
1.2.2. Types stationnaires de rang de Lascar fini et orthogonalité	18
1.2.3. Un contre-exemple	20
1.3. Corps différentiellement clos	22
1.3.1. Définition	22
1.3.2. Elimination des quantificateurs et des imaginaires	23
1.3.3. Propriété de la base canonique et dichotomie	24
<b>2. <math>D</math>-variétés et ensembles définissables associés</b>	<b>25</b>
2.1. $D$ -schémas	25
2.1.1. Catégorie des $D$ -schémas	25
2.1.2. Sous-schémas invariants	27
2.2. Ensemble définissable associé à une $D$ -variété	28
2.2.1. Interprétation d'une $D$ -variété dans $\mathbf{DCF}_0$	28
2.2.2. Type générique d'une $D$ -variété irréductible	30
2.3. Un premier critère d'orthogonalité aux constantes	31
<b>3. Un critère d'orthogonalité aux constantes pour les <math>D</math>-variétés réelles</b>	<b>33</b>
3.1. Des $D$ -variétés réelles aux flots réels	33
3.1.1. Flot réel d'une $D$ -variété réelle	33
3.1.2. Flot complexe d'une $D$ -variété complexe	35
3.1.3. Compatibilité des différentes notions d'invariances	36
3.2. Flots topologiquement transitifs et topologiquement mélangeants	37
3.2.1. Flot topologiquement transitif	38
3.2.2. Flots faiblement topologiquement mélangeants	39
3.3. Le critère d'orthogonalité aux constantes	40
3.3.1. Intégrale première rationnelle	40
3.3.2. Énoncé et démonstration du critère 3.3.8	42

---



Dans son article [Poi95], Poizat décrit les corps différentiellement clos comme "les compagnons de route de la théorie des modèles". Une première raison pour cela est qu'ils présentent d'une part un caractère modéré (leur théorie est  $\omega$ -stable) et d'autre part une structure suffisamment riche pour exhiber de multiples pathologies possibles dans ce contexte. Par exemple, il a fallu attendre les résultats de Shelah sur les modèles premiers dans une théorie  $\omega$ -stable [She72] pour démontrer l'existence, pour tout corps différentiel, d'une clôture différentielle ; le cadre différentiel n'offrant aucune simplification par rapport au cas général. A ce sujet, Shelah [She73] et Rosenlicht [Ros74] ont démontré indépendamment que cette clôture différentielle n'est pas toujours minimale, c'est-à-dire qu'elle peut contenir des sous-extensions différentielles strictes, elles-mêmes différentiellement closes.

Tout en s'appuyant sur l'étude des théories  $\omega$ -stables et de la théorie géométrique de la stabilité, l'étude des corps différentiellement clos s'est progressivement enrichie en se nourrissant des développements de l'algèbre (commutative) différentielle et de ses avatars géométriques. Un exemple impressionnant d'une telle interaction est la preuve de Hrushovski [Hru96] de la conjecture de Mordell-Lang pour les corps de fonctions de caractéristique 0, s'appuyant sur le yoga des théories stables et sur les résultats de Buium [Bui93] concernant l'algèbre différentielle des variétés abéliennes. Parallèlement, Pillay [Pil98] a proposé une reformulation, puis une généralisation, de la théorie de Galois différentielle *à la Kolchin* dans le cadre modèle-théorique des groupes de liaison.

Plus récemment, les applications de la théorie des modèles des corps différentiellement clos se sont orientées vers l'étude d'équations différentielles algébriques "concrètes" afin d'obtenir des résultats d'indépendance algébrique sur leurs solutions et leurs dérivées. Les travaux de Nagloo et Pillay [NP14] sur les équations de Painlevé, ainsi que ceux de Freitag et Scanlon [FS14] sur l'équation minimale d'ordre 3 satisfaite par la fonction  $j$  sont deux illustrations de cette tendance.

Cet article constitué de deux parties a pour objet l'étude modèle-théorique d'équations différentielles algébriques issues de la mécanique classique.

Le statut de compagnon de route accordé par Poizat aux corps différentiellement clos doit être entendu dans un sens très large, ne se limitant pas à l'étude de la clôture différentielle : les résultats de Hrushovski, Pillay, Nagloo, Freitag et Scanlon, évoqués dans les paragraphes précédents, s'appuient tous sur des idées motrices du développement de la théorie géométrique de la stabilité, que nous rappelons brièvement.

Tout d'abord, on sait depuis Shelah (voire Baldwin et Lachlan [BL71]) que de nombreuses propriétés d'une théorie de rang fini sont reflétées par les objets minimaux vivant au sein de cette théorie (les ensembles fortement minimaux et les types minimaux). L'étude de ces types minimaux a conduit Zilber à isoler certaines propriétés de la notion de dimension qui leur est naturellement associée et à les classifier selon ces dernières. De façon informelle, la notion de dimension se comporte ou bien comme la cardinalité dans un ensemble infini sans structure, ou bien comme la dimension linéaire dans un espace vectoriel, ou bien comme le degré de transcendance dans un corps algébriquement clos. On dit alors respectivement que le type minimal est trivial, localement modulaire (non trivial) ou non localement modulaire. La perspective apportée par cette trichotomie est caractéristique de l'approche modèle-théorique des théories stables [HZ96] et en particulier des corps différentiellement clos.

Une autre idée centrale de la théorie des modèles est l'étude des relations entre deux ensembles définissables (ou deux types) d'une même théorie stable  $T$  ; les cas extrêmes étant respectivement la (presque)-internalité d'un type dans un autre et l'orthogonalité entre deux types stationnaires. Intuitivement, deux types stationnaires sont orthogonaux, lorsqu'ils sont sans relation dans la théorie  $T$  et le demeurent après toute extension des paramètres, ou autrement dit après tout changement de base.

L'un des résultats les plus significatifs, notamment pour les applications, de la théorie des modèles des corps différentiellement clos est la description par Hrushovski et Sokolovic dans [HS96] des types non localement modulaires dans un corps différentiellement clos  $(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})$  comme l'ensemble des types minimaux non-orthogonaux au type générique du corps des constantes  $\mathcal{C} = \{x \in \mathcal{U} \mid \delta_{\mathcal{U}}(x) = 0\}$ . Ce résultat décrit ainsi le corps des constantes d'un corps différentiellement clos comme l'unique ensemble fortement minimal non localement modulaire, modulo non-orthogonalité.

Dans cet article, on s'intéresse aux interactions entre cette approche modèle-théorique des équations différentielles algébriques et des méthodes classiques d'étude des équations différentielles

ordinaires. Nos résultats s'appliquent notamment au flot géodésique associé à certaines variétés algébriques réelles, munies d'une structure riemannienne algébrique. Dans le cas d'une sous-variété  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  munie de la métrique riemannienne induite par la métrique euclidienne usuelle sur  $\mathbb{R}^n$ , ils prennent la forme suivante :

**Théorème A.** *Soit  $V$  un sous-ensemble algébrique réel de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$  compact, connexe et lisse.*

*Le système  $(S)$  d'équations différentielles décrivant le mouvement d'un point matériel dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ , d'énergie fixée, astreint à se déplacer sans frottement le long de la sous-variété  $V$  est un système irréductible d'équations différentielles algébriques.*

*Si la restriction à  $V$  de la métrique euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$  est à courbure sectionnelle strictement négative, alors le type générique du système  $(S)$  est orthogonal aux constantes.*

Ce théorème peut être entendu comme une version modèle-théorique des résultats classiques de "non-intégrabilité" pour les équations géodésiques unitaires en courbure strictement négative [Ano69]. Il est vraisemblable qu'une forme plus forte de cet énoncé est en fait valable et que le type générique (des équations différentielles algébriques) du flot géodésique d'une variété riemannienne algébrique réelle compacte à courbure sectionnelle strictement négative est un type minimal. Malheureusement, ce résultat semble hors d'atteinte par les méthodes développées dans ce texte.

Dans [NP14], Nagloo et Pillay établissent que l'ensemble définissable associé aux équations de Painlevé (à paramètres génériques) est un ensemble fortement minimal trivial. De même, Freitag et Scanlon montrent dans [FS14] que l'ensemble défini par l'équation différentielle minimale d'ordre 3 vérifiée par la fonction  $j$  est fortement minimal et trivial. Dans ces deux cas, leurs démonstrations s'appuient sur des propriétés spécifiques des solutions des équations différentielles considérées, établies respectivement par Umemura et Watanabe [UW97] ainsi que Nishioka [Nis89], qui n'admettent pas d'analogue pour les équations différentielles de la mécanique classique. Il nous a donc fallu développer un critère d'orthogonalité aux constantes qui soit applicable aux équations géodésiques d'une sous-variété algébrique de  $\mathbb{R}^n$ .

Comme toutes les équations différentielles (algébriques) issues de la mécanique classique, ces équations géodésiques sont définies sur le corps  $\mathbb{R}$  (muni de la dérivation triviale) et possèdent une structure hamiltonienne. Une première conséquence de cette structure hamiltonienne est l'existence d'une intégrale première rationnelle donnée par la conservation de l'énergie, qui permet de "témoigner" (de façon élémentaire) de la non-orthogonalité aux constantes. Lorsque nous étudierons ces systèmes hamiltoniens, nous nous restreindrons donc à travailler sur les lignes de niveaux de cette intégrale première, c'est-à-dire à énergie fixée (comme dans le Théorème A).

Pour les équations hamiltoniennes, on a une compréhension très précise de la dynamique réelle de leurs solutions que l'on décrit maintenant. Parmi les systèmes hamiltoniens, on trouve ceux qui sont complètement (algébriquement) intégrables, c'est-à-dire qui possèdent un système complet d'intégrales premières rationnelles en involution. C'est le cas, par exemple, des équations géodésiques de la sphère  $\mathbb{S}^2$  plongée dans  $\mathbb{R}^3$  (et plus généralement, de toute surface algébrique de révolution). Dans ce cas, la dynamique réelle est particulièrement simple car les orbites sont astreintes à se déplacer sur des tores invariants. Pour de petites perturbations d'un système hamiltonien complètement intégrable, le théorème KAM (voir [Bos86]) montre que cette image dynamique est préservée pour le système perturbé *en dehors des résonances*. Néanmoins, en 1899 donc bien avant le théorème KAM, Poincaré [Poi57] avait déjà remarqué que pour certaines perturbations, la dynamique réelle *au voisinage des résonances* était de nature contraire – ergodique – et que ce caractère ergodique était la source de résultats de non-intégrabilité analytique pour le système considéré (voir aussi [MR99] pour une présentation moderne de ces résultats).

Le critère d'orthogonalité aux constantes sur lequel s'appuie notre démonstration du Théorème A est une variante modèle-théorique des arguments de non-intégrabilité à la Poincaré, reposant sur la complexité de la dynamique topologique réelle des équations différentielles considérées.

**Théorème B.** *Soient  $X$  une variété absolument irréductible sur  $\mathbb{R}$  et  $v$  un champ de vecteurs rationnel sur  $X$ . On note  $(M, \phi)$  le flot régulier réel de  $(X, v_X)$ . Supposons qu'il existe une partie compacte  $K$  de  $M$ , Zariski-dense dans  $X$  et invariante par le flot  $\phi$ .*

*Si  $(K, (\phi_t|_K)_{t \in \mathbb{R}})$  est faiblement topologiquement mélangeant alors le type générique de  $(X, v)$  est orthogonal aux constantes.*

Par définition,  $M = X(\mathbb{R}) \setminus (\text{Sing}(X) \cup \text{Sing}(v))$  est la variété analytique réelle obtenue en retirant à  $X(\mathbb{R})$  les singularités de  $X$  ainsi que les points où le champ de vecteurs rationnel  $v$  n'est pas défini. Le champ de vecteurs  $v$  induit alors un champ de vecteurs analytique sur  $M$  et  $(M, \phi)$  est le flot réel analytique de ce champ de vecteurs analytique. La restriction de ce flot à toute partie compacte invariante  $K$  de  $M$  est alors un flot complet. Ce flot est dit faiblement topologiquement mélangeant si tous ses produits sont topologiquement transitifs (voir la partie 3.2 pour des formulations équivalentes de cette condition).

On remarquera que nous nous sommes affranchis de l'hypothèse hamiltonienne et que le Théorème B traite plus généralement d'équations différentielles algébriques dont la dynamique réelle est suffisamment sauvage (faiblement mélangeante) sur des régions compactes invariantes Zariski-dense.

Le cas des équations géodésiques en courbure strictement négative est certes hamiltonien mais n'est pas obtenu par perturbation d'un système complètement intégrable. Aussi, le théorème KAM ne donne aucune information sur sa dynamique. Les travaux d'Anosov [Ano69] sur les flots géodésiques en courbure négative et de ses successeurs ([Cou04], [Dal99]) montrent en fait que sa dynamique est (au contraire des systèmes complètement intégrables) topologiquement mélangeante sur l'ensemble tout entier de ses points réels. En particulier, le Théorème A est une conséquence immédiate du Théorème B et de l'étude de la dynamique des flots géodésiques en courbure strictement négative.

Cet article et le suivant sont organisés de la manière suivante. Le premier article est consacré à la démonstration du Théorème B. Pour que ce texte soit accessible aussi bien aux théoriciens des modèles qu'aux spécialistes de la dynamique des équations différentielles, nous avons essayé de donner une présentation autonome des résultats que nous utilisons. La première partie est consacrée à une exposition des résultats classiques de théorie des modèles autour de l'orthogonalité aux constantes. La troisième partie se concentrera sur l'aspect dynamique de l'étude des équations différentielles et la preuve du Théorème B, tandis que la deuxième partie est consacrée au formalisme des  $D$ -variétés et à la démonstration d'un critère d'orthogonalité aux constantes dans ce formalisme : ce dernier jouera un rôle "d'intermédiaire" entre les approches modèle théoriques et dynamiques des équations différentielles qui font l'objet des première et troisième partie.

Dans le second article, nous démontrons le Théorème A. Dans une première partie, nous étudierons les variétés algébriques réelles munies d'une structure riemannienne algébrique. Nous montrerons en particulier que sur une variété lisse compacte, l'ensemble des métriques algébriques est dense dans l'espace des métriques muni de la topologie de la convergence uniforme pour les métriques et toutes leurs dérivées. Nous construirons ainsi une large classe d'exemples de variétés riemanniennes réelles algébriques à courbure strictement négative. Une seconde partie sera consacrée à la preuve du Théorème A et de ses généralisations. Pour cela, nous nous appuierons sur le Théorème B et sur les propriétés dynamiques des flots géodésiques en courbure strictement négative.

Les résultats de cet article constituent une partie de ma thèse de doctorat, réalisée sous la direction de Jean-Benoît Bost (Orsay) et de Martin Hils (Paris VII – Münster). Outre mes directeurs de thèse, je tiens à remercier Elisabeth Bouscaren et Zoe Chatzidakis pour leurs précieuses remarques sur le contenu présenté dans ce texte, lors des exposés que j'ai donnés à Paris VII et à Orsay.

## 1. Théorie des modèles des corps différentiels

Nous présentons les principaux outils de théorie de la stabilité qui concernent l'étude des types de rang fini dans une théorie stable. Le principal exemple qui nous intéresse est celui des équations différentielles ordinaires dans un corps différentiellement clos. Aussi, le contexte choisi est celui des théories  $\omega$ -stables.

Dans la première section, nous rappelons la définition du rang de Lascar et sa relation avec le rang de Morley, avant de présenter la trichotomie pour les types minimaux. Dans la deuxième section, nous nous concentrons sur la notion d'orthogonalité entre types stationnaires. Nous montrons comment elle permet de construire un dévissage des types de rang fini en types minimaux. Enfin, dans la troisième section, nous exposons les résultats spécifiques aux corps différentiellement clos.

Le lecteur théoricien des modèles pourra se contenter de commencer directement par la deuxième partie de ce texte. Pour le lecteur plus novice avec la théorie des modèles, nous supposons néanmoins une familiarité avec les résultats élémentaires de théories des modèles (formules, types, élimination des quantificateurs, élimination des imaginaires) et de théorie de la stabilité (rang et degré de Morley, déviation et indépendance, types définissables, base canonique d'un type). La lecture des chapitres 1-3 et 5-8 de [TZ12] est suffisante à la compréhension de cette partie.

**1.1. Rang de Lascar et géométrie des types minimaux.** On fixe  $\mathcal{L}$  un langage et  $T$  une  $\mathcal{L}$ -théorie complète et  $\omega$ -stable qui élimine les imaginaires.

1.1.1. *Le rang de Lascar.*

**Définition 1.1.1.** Soit  $(\mathcal{P}, <)$  un ensemble partiellement ordonné (par un ordre strict). On définit inductivement sur les ordinaux, le rang de fondation RF de l'ordre partiel  $(\mathcal{P}, <)$  :

- $\text{RF}(p) \geq 0$  pour tout  $p \in \mathcal{P}$ .
- $\text{RF}(p) \geq \beta + 1$  s'il existe  $q \in \mathcal{P}$  tel que  $q < p$  et  $\text{RF}(q) \geq \beta$ .
- Si  $\alpha$  est un ordinal limite alors  $\text{RF}(p) \geq \alpha$  si  $\text{RF}(p) \geq \beta$  pour tout  $\beta < \alpha$ .

On dit que  $p \in \mathcal{P}$  est *<-rangé* s'il existe un ordinal  $\alpha_0$  avec  $\text{RF}(p) \not\geq \alpha_0$ . On appelle alors *rang de fondation de p*, l'ordinal

$$\text{RF}(p) = \max\{\alpha \leq \alpha_0 \mid \text{RF}(p) \geq \alpha\}.$$

**Notation 1.1.2.** On fixe  $\kappa$  un cardinal infini. Soit  $\mathfrak{M} \models T$  un modèle de  $T$ . On dit qu'un ensemble de paramètres  $A \subset \mathfrak{M} \models T$  est *petit* si  $|A| < \kappa$ .

Pour les besoins de ce texte, on peut se restreindre au cas où  $\kappa = \aleph_0$  est le cardinal dénombrable. Dans ce cas, les ensembles de paramètres petits sont simplement les ensembles finis.

**Construction 1.1.3.** Soit  $\mathfrak{M}$  un modèle  $\kappa$ -saturé de  $T$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit  $\mathcal{P}_n$  comme l'ensemble des couples  $(A, p)$  où  $A \subset M$  est un ensemble de paramètres petit et  $p \in S_n(A)$  est un type à paramètres dans  $A$ .

On définit un ordre partiel sur  $\mathcal{P}_n$  en posant :

$$(B, q) < (A, p) \text{ si et seulement si } A \subset B \text{ et } q \text{ est une extension déviante de } p.$$

Le rang de fondation associé à cet ordre partiel est appelé *rang de Lascar* et noté  $\text{RU}(p)$  pour  $p \in S_n(A)$ . Si  $A \subset M$  est un ensemble de paramètres petit et  $a \in M^n$ , on note  $\text{RU}(a/A) = \text{RU}(\text{tp}(a/A))$ .

**Remarque 1.1.4.** Comme la théorie  $T$  est  $\omega$ -stable, si  $A \subset M$  est un ensemble de paramètres petit alors on peut associer à tout type partiel  $\pi(x)$  au dessus de  $A$ , un ordinal noté  $\text{RM}(\pi(x))$  et appelé rang de Morley de  $\pi(x)$  [TZ12, Chapitre 5].

**Proposition 1.1.5.** *Le rang de Lascar RU ne dépend pas du modèle  $\kappa$ -saturé choisi. De plus, il vérifie les propriétés suivantes :*

- (i) *Pour tout ensemble  $A$  de paramètres et tout type  $p \in S_n(A)$ ,  $\text{RU}(p) \leq \text{RM}(p)$ . En particulier, tout type est rangé pour le rang de Lascar dans une théorie  $\omega$ -stable.*
- (ii) *Si  $a, b \in M^n$  et  $A \subset M$  est un ensemble de paramètres tels que  $\text{RU}(a, b/A) < \omega$  alors*

$$\text{RU}(a, b/A) = \text{RU}(a/A) + \text{RU}(b/A, a).$$

Par construction, le rang de Lascar RU est le plus petit rang qui témoigne de la déviation. Comme le rang de Morley témoigne de la déviation dans une théorie  $\omega$ -stable, la propriété (i) suit. La propriété (ii) est conséquence de [TZ12, Exercice 8.6.5] pour les ordinaux finis.

**Exemple 1.1.6.** Dans la théorie des corps algébriquement clos (et plus généralement dans toute théorie fortement minimale), le rang de Morley et le rang de Lascar coïncident [Pil96, Chapitre 1, Lemme 5.12].

**Remarque 1.1.7.** En général, le rang de Lascar et le rang de Morley peuvent différer dans une théorie  $\omega$ -stable. Dans l'article [HS99], Hrushovski et Scanlon montrent que ces deux rangs peuvent être différents pour la théorie  $\text{DCF}_0$  des corps différentiellement clos.

Pour illustrer la remarque précédente, on donne un exemple immédiat d'une théorie  $\omega$ -stable et d'un type pour lequel le rang de Morley et le rang de Lascar diffèrent.

**Exemple 1.1.8.** Soient  $\mathcal{L}_\omega = \{D_i | i \in \omega\}$  composé de relations unaires  $D_i$  et  $T_\omega$  la théorie dans le langage  $\mathcal{L}_\omega$  axiomatisée par : Les  $(D_i)_{i \in \mathbb{N}}$  sont des ensembles infinis disjoints.

**Assertion.** *La théorie  $T_\omega$  élimine les quantificateurs dans le langage  $\mathcal{L}_\omega$ .*

L'assertion précédente se vérifie de façon immédiate à l'aide de la méthode du va-et-vient.

Soient  $\mathfrak{M}$  un modèle de  $T_\omega$  et  $A \subset M$  un ensemble de paramètres. Par élimination des quantificateurs, on obtient la description suivante de  $S_1(A)$  :

- (i) Les types réalisés dans  $A$ .
- (ii) Un unique type  $p_\omega | A \in S_1(\emptyset)$  non réalisé dans  $A$  et vérifiant  $x \notin D_i$  pour tout  $i \in \omega$ .
- (iii) Pour tout  $i \in \omega$ , l'unique type générique  $p_i | A \in S_1(A)$  de l'ensemble fortement minimal  $D_i$ .

En particulier, si  $A$  est dénombrable alors  $S_1(A)$  aussi. La théorie  $T_\omega$  est donc une théorie  $\omega$ -stable.

**Assertion.** *Notons  $p_\omega = p_\omega | \emptyset \in S_1(\emptyset)$ . Le type  $p_\omega$  vérifie  $\text{RU}(p_\omega) = 1$  et  $\text{RM}(p_\omega) = 2$ .*

En effet, les seules extensions de  $p_\omega$  à un ensemble  $A \subset M$  de paramètres sont les types réalisés dans  $A$  et  $p_\omega | A$ . On en déduit que  $p_\omega$  est un type stationnaire et  $\text{RU}(p_\omega) = 1$ .

Montrons que  $\text{RM}(p_\omega) = 2$ . Soit  $\phi(x) \in p(x)$  une formule. Par compacité, il existe  $N \in \omega$  tel que pour tout  $n \geq N$

$$T_\omega \models x \in D_n \implies \phi(x)$$

On en déduit que  $\phi(x)$  est impliquée par une infinité de formules fortement minimales disjointes et donc que  $\text{RM}(\phi(x)) \geq 2$ . Par continuité du rang de Morley, on en déduit que  $\text{RM}(p_\omega) \geq 2$ .

Réciproquement, pour tout ensemble de paramètres  $A \subset M$ , tous les types  $S_1(A)$  différents de  $p_\omega | A$  sont de rang de Morley  $\leq 1$ . On en déduit que  $\text{RM}(p_\omega) \leq 2$ .

### 1.1.2. Types minimaux et prégéométrie.

**Notation 1.1.9.** Soient  $\mathfrak{M} \models T$  un modèle  $\kappa$ -saturé de  $T$  et  $A \subset M$  un ensemble de paramètres petit. On rappelle qu'un type  $p \in S(A)$  est dit *stationnaire* s'il admet une unique extension non déviante à toute extension de paramètres  $A \subset B$ . Pour toute extension  $A \subset B$  de paramètres, on note  $p|B \in S(B)$  l'unique extension non déviante de  $p$  à  $B$ .

**Définition 1.1.10.** Soient  $\mathfrak{M}$  un modèle de  $T$ ,  $A \subset M$  un ensemble de paramètres et  $p \in S_n(A)$  un type stationnaire. On dit que  $p$  est *minimal* si  $\text{RU}(p) = 1$ .

Un type stationnaire  $p \in S_n(A)$  est donc minimal si et seulement s'il est non algébrique et toutes ses extensions déviantes sont algébriques.

**Construction 1.1.11.** Soit  $\mathfrak{M}$  un modèle  $\kappa$ -saturé de  $T$ ,  $A \subset M$  un ensemble de paramètres petit et  $q \in S_n(A)$  un type stationnaire minimal.

Considérons  $Q = q(M)$  l'ensemble des réalisations de  $q$  dans le modèle  $\mathfrak{M}$  de  $T$  et l'opérateur de clôture  $\text{cl} : \mathcal{P}(Q) \rightarrow \mathcal{P}(Q)$  défini pour tout  $B \subset Q$  par :

$$\text{cl}(B) = \text{acl}(B \cup A) \cap Q.$$

**Lemme 1.1.12.** *L'opérateur  $\text{cl} : \mathcal{P}(Q) \rightarrow \mathcal{P}(Q)$  vérifie les propriétés suivantes :*

- (i) Pour tout  $B \subset Q$ ,  $B \subset \text{cl}(B)$  et  $\text{cl}(\text{cl}(B)) = \text{cl}(B)$ .
- (ii) L'opérateur  $\text{cl}$  est monotone i.e  $\text{cl}(B) \subset \text{cl}(B')$  dès que  $B \subset B' \subset Q$ .
- (iii) Pour tout  $B \subset Q$  et tout  $b \in Q$  tels que  $b \in \text{cl}(B)$ , il existe  $B_0 \subset B$  fini tel que  $b \in \text{cl}(B_0)$ .
- (iv) Pour tout  $B \subset Q$  et tous  $a, b \in Q$ , on a

$$a \in \text{cl}(B \cup b) \setminus \text{cl}(B) \iff b \in \text{cl}(B \cup a) \setminus \text{cl}(B).$$

Les propriétés (i) à (iii) sont immédiates. La propriété (iv) est appelée *propriété de l'échange* est quant à elle spécifique aux types minimaux. C'est une simple conséquence de la propriété (ii) de la proposition 1.1.5 : pour tous  $a, b \notin \text{cl}(B)$ , on a :

$$a \in \text{cl}(B \cup b) \iff \text{RU}(a/B, b) = 0 \iff \text{RU}(a, b/B) = 1 \iff \text{RU}(b/B, a) = 0 \iff b \in \text{cl}(B \cup a).$$

où la deuxième et la troisième équivalences utilisent l'additivité du rang de Lascar.

**Définition 1.1.13.** Un couple  $(S, \text{cl})$  où  $S$  est un ensemble et  $\text{cl} : \mathcal{P}(S) \rightarrow \mathcal{P}(S)$  est un opérateur de clôture vérifiant les propriétés du lemme 1.1.12 est appelée une *prégéométrie combinatoire*.

Si  $(S, \text{cl})$  est une pré-géométrie combinatoire et  $C \subset S$  est un sous-ensemble, l'opérateur de clôture défini pour  $A \subset S$  par

$$\text{cl}_C(A) = \text{cl}(C \cup A)$$

définit une nouvelle pré géométrie combinatoire  $(S, cl_C)$  appelée *pré géométrie combinatoire localisée en  $C$* .

**Définition 1.1.14.** Soient  $(S, cl)$  une pré géométrie combinatoire et  $A \subset S$ . On appelle *dimension de  $A$*  et on note  $\dim(A)$ , le cardinal d'une  $cl$ -base de  $cl(A)$ , i.e le cardinal d'une famille  $A_0 \subset A$  qui est génératrice<sup>1</sup> et libre<sup>2</sup>

1.1.3. *Modularité et trivialité.*

**Définition 1.1.15.** Soit  $\mathfrak{M}$  un modèle  $\kappa$ -saturé de  $T$ ,  $A \subset M$  un ensemble de paramètres petit et  $q \in S_n(A)$  un type stationnaire minimal. On note  $(Q, cl)$  la pré géométrie associée par la construction 1.1.11. On dit que :

(i) Le type  $q$  est *modulaire* si la pré géométrie  $(Q, cl)$  est modulaire i.e. pour tout  $B, C \subset Q$ ,

$$\dim(B) + \dim(C) = \dim(B \cup C) + \dim(cl(B) \cap cl(C)).$$

(ii) Le type  $q$  est *localement modulaire* s'il existe un ensemble de paramètres petit  $C \subset Q$  tel que la pré géométrie localisée  $(Q, cl_C)$  soit modulaire.

(iii) Le type  $q \in S_n(A)$  est *trivial* si la pré géométrie associée est dégénérée, i.e si pour tout sous-ensemble  $B \subset Q$ , on a

$$cl(B) = \bigcup_{b \in B} cl(b).$$

On dit que  $q$  est *non localement modulaire* si  $q$  n'est pas localement modulaire.

**Exemple 1.1.16.** Soit  $k$  un corps et  $(E, V)$  un espace affine infini sur  $k$  où  $V$  désigne la partie linéaire de  $E$ . L'opérateur de clôture  $cl$  qui à un sous-ensemble  $B \subset E$ , associe le plus petit sous-espace affine de  $E$  contenant  $B$  définit une pré géométrie  $(E, cl)$ . On vérifie facilement que cette pré géométrie est localement modulaire mais non-modulaire. [Pil96, Chapitre 2, Exemple 1.7]

La propriété de modularité locale est donc en général plus faible que la propriété de modularité.

**Théorème 1.1.17** (Zilber, Hrushovski). *Soit  $\mathfrak{M}$  un modèle  $\kappa$ -saturé de  $T$ ,  $A \subset M$  un ensemble de paramètres et  $D$  un ensemble  $A$ -définissable fortement minimal dont le type générique  $q_D \in S(A)$  est localement modulaire.*

(i) *La structure induite par  $\mathfrak{M}$  sur  $D$  n'interprète aucun corps infini.*

(ii) *Le type  $q_D \in S_n(A)$  est trivial si et seulement si la structure induite par  $\mathfrak{M}$  sur  $D$  n'interprète aucun groupe infini.*

La propriété (i) est conséquence du fait que tout corps interprétable dans une théorie  $\omega$ -stable est algébriquement clos [Poi01, Théorème 3.1] et qu'un ensemble fortement minimal interprétant un corps algébriquement clos est non localement modulaire [Pil96, Chapitre 2, Proposition 2.6]. La propriété (ii) est donnée par [Pil96, Chapitre 5, Théorème 1.1].

**Remarque 1.1.18.** Le théorème 1.1.17 est valide dans le cadre plus général des types minimaux (voir [Pil96]). Sa formulation est néanmoins légèrement plus complexe car la notion de structure induite sur l'ensemble des réalisations d'un type est plus subtile que celle de structure induite sur un ensemble définissable.

**Remarque 1.1.19.** La conjecture de trichotomie consiste à affirmer que la propriété (i) est équivalente à la propriété "être localement modulaire". Elle a été réfutée par Hrushovski dans [Hru93] en exhibant un ensemble fortement minimal non localement modulaire qui n'interprète aucun groupe infini.

Néanmoins, cette conjecture reste valable dans de nombreux contextes parmi lesquels on trouve les géométries de Zariski [HZ96] et en particulier les corps différentiellement clos [HS96].

**1.2. Orthogonalité dans une théorie  $\omega$ -stable.** On adopte les mêmes notations que dans la partie précédente. On fixe  $\mathcal{L}$  un langage,  $T$  une  $\mathcal{L}$ -théorie complète et  $\omega$ -stable qui élimine les imaginaires et  $\kappa$  un cardinal infini.

1. c'est-à-dire  $cl(A_0) = cl(A)$ .

2. c'est-à-dire  $\forall a_0 \in A_0, a_0 \notin cl(A_0 \setminus \{a_0\})$ .

1.2.1. *Orthogonalité et principe de reflexivité de Shelah.*

**Notation 1.2.1.** Soient  $\mathfrak{M} \models T$ ,  $a, b$  des uplets de  $M$  et  $A \subset M$  un ensemble de paramètres petit, on notera  $a \perp_A b$  pour désigner que  $a$  et  $b$  sont indépendants au dessus de  $A$ , c'est-à-dire que  $\text{tp}(a/A, b)$  est une extension non-déviante de  $\text{tp}(a/A)$ .

Cette relation vérifie les propriétés usuelles d'une relation d'indépendance [TZ12, Théorème 8.5.5]. En particulier, elle est symétrique, i.e.  $a \perp_A b$  si et seulement si  $b \perp_A a$ .

**Définition 1.2.2.** Soient  $\mathfrak{M}$  un modèle  $\kappa$ -saturé de  $T$ ,  $A \subset M$  un ensemble de paramètres petit et  $p, q \in S(A)$  deux types sur  $A$ . On dit que  $p$  et  $q$  sont *faiblement orthogonaux* et on note  $p \perp^a q$  si pour toutes réalisations  $a, b \in M$  de  $p$  et  $q$  respectivement, on a  $a \perp_A b$ .

Par symétrie de la relation d'indépendance dans une théorie  $\omega$ -stable, la notion d'orthogonalité faible est une relation symétrique.

**Définition 1.2.3.** Soient  $\mathfrak{M}$  un modèle  $\kappa$ -saturé de  $T$ ,  $A, B \subset M$  des ensembles de paramètres petits,  $p \in S(A)$  et  $q \in S(B)$  deux types stationnaires. On dit que  $p$  et  $q$  sont *orthogonaux* et on note  $p \perp q$  si pour tout ensemble de paramètres  $C \supset A \cup B$ , les extensions non-déviantes respectives  $p|C$  et  $q|C$  de  $p$  et  $q$  à  $C$  sont faiblement orthogonales.

**Notation 1.2.4.** Soient  $p, q \in S(A)$  deux types stationnaires. On appelle *produit tensoriel de  $p$  et  $q$* , le type complet à paramètres dans  $A$

$$p \otimes q = \text{tp}(a, b/A)$$

où  $a \models p$  réalise  $p$  et  $b \models q|A$ ,  $a$  réalise l'unique extension non déviante de  $q$  à  $A$ ,  $a$ . De même, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $p^{\otimes n} = p \otimes \cdots \otimes p$  le produit tensoriel de  $p$  avec lui même  $n$  fois.

Nous utiliserons la conséquence suivante du principe de reflexivité de Shelah pour la notion d'orthogonalité.

**Proposition 1.2.5** ([Pil96, Chapitre 1, Lemme 4.3.1]). *Soient  $\mathfrak{M}$  un modèle de  $T$ ,  $A \subset M$  un ensemble de paramètres et  $p, q \in S(A)$  deux types stationnaires. On a équivalence entre :*

- (i) *Les types  $p$  et  $q$  sont orthogonaux.*
- (ii) *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $m \in \mathbb{N}$ , les types  $p^{\otimes n}$  et  $q^{\otimes m}$  sont faiblement orthogonaux.*

1.2.2. *Types stationnaires de rang de Lascar fini et orthogonalité.* Pour les types minimaux, la relation de non-orthogonalité définit une partition en classes d'équivalence. De plus, cette partition est compatible avec les notions de types localement modulaires et de types triviaux introduites dans la définition 1.1.15

**Proposition 1.2.6** ([Pil96, Chapitre 2, Remarque 2.10]). *Soit  $\mathfrak{M}$  un modèle  $\kappa$ -saturé de  $T$ . La relation "être non-orthogonal" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des types stationnaires minimaux à paramètres dans  $M$ . De plus, si  $p$  est un type minimal stationnaire localement modulaire (resp. trivial) alors tout type dans sa classe d'équivalence a la même propriété.*

Si  $p \in S(A)$  est un type minimal, on note  $[p]$  sa classe d'équivalence pour la relation de non-orthogonalité.

La relation de non-orthogonalité cesse d'être une relation d'équivalence lorsqu'on ne se restreint plus au types minimaux dès que la théorie  $T$  possède deux types minimaux orthogonaux. Néanmoins, elle permet de définir un dévissage des types  $p$  de rang de Lascar fini en types minimaux.

**Lemme 1.2.7** ([Pil96, Chapitre 2, Lemme 2.5.1]). *Soient  $\mathfrak{M}$  un modèle  $\kappa$ -saturé de  $T$ ,  $A \subset M$  un ensemble de paramètres petit et  $p \in S_n(A)$  un type de rang RU fini. Il existe une extension  $A \subset B$  de paramètres et un type stationnaire minimal  $q \in S(B)$  non-orthogonal à  $p$ .*

**Proposition 1.2.8.** *Soient  $\mathfrak{M}$  un modèle de  $T$ ,  $A \subset M$  un ensemble de paramètres et  $p \in S_n(A)$  un type stationnaire de rang RU fini égal à  $r \in \mathbb{N}$ . Il existe une suite d'extensions de paramètres  $A \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_r$ , une suite d'extension  $p \subset p_1 \subset p_2 \subset \cdots \subset p_r$  où  $p_i \in S(A_i)$  est un type stationnaire et des types minimaux stationnaires  $q_i \in S(A_i)$  vérifiant*

- (i) *Pour tout  $i \leq r$ , le rang de Lascar RU( $p_i$ ) de  $p_i$  est  $r + 1 - i$ . En particulier, le type  $p_1$  est une extension non déviante de  $p$  et  $p_r$  est un type minimal.*

(ii) Pour  $i = r$ , on a  $p_r = q_r$  et pour tout  $1 \leq i < r$ , il existe des réalisations  $a_i \models p_i$  et  $b_i \models q_i$  telles que  $b_i \in \text{acl}(A_i, a_i)$  et  $p_{i+1}$  est une extension stationnaire non déviante à  $A_{i+1}$  de  $\text{tp}(a_i/A_i, b_i)$ .

DÉMONSTRATION. On raisonne par récurrence sur le rang de Lascar  $r = \text{RU}(p) \in \mathbb{N}$  de  $p$ .

Pour  $r = 1$ , il suffit de poser  $A_1 = A$  et  $p_1 = q_1 = p$ .

Supposons le résultat montré pour les types de rang de Lascar  $r \in \mathbb{N}$ . Considérons  $p \in S(A)$  un type stationnaire de rang de Lascar  $r + 1$ .

D'après le lemme 1.2.7, il existe un ensemble  $B \subset M$  de paramètres et  $q \in S(B)$  un type stationnaire minimal non orthogonal à  $p$ . Considérons  $C \supset A \cup B$  un ensemble de paramètres et des réalisations  $a \models p|_C$  et  $b \models q|_C$  vérifiant  $a \not\perp_C b$ .

Le type  $\text{tp}(b/C)$  étant minimal, on en déduit que  $b \in \text{acl}(C, a)$ . On pose alors  $A_1 = C$ ,  $q_1 = q|_C$ ,  $p_1 = p|_C$ . Par additivité du rang de Lascar (Proposition 1.1.5), le type  $p = \text{tp}(a/b, C)$  est de rang de Lascar  $r \in \mathbb{N}$ . On applique alors l'hypothèse de récurrence à une extension stationnaire de  $p = \text{tp}(a/b, C)$ .  $\square$

**Remarque 1.2.9.** Les données  $\mathcal{A} = ((A_i)_{i \leq r}, (p_i)_{i \leq r}, (q_i)_{i \leq r})$  où  $A \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_r$  est une extension de paramètres, et de types stationnaires  $p_i, q_i \in S(A_i)$  dont l'existence est assurée par la proposition 1.2.8 est appelée *une analyse du type  $p \in S(A)$  par les types minimaux  $q_1, \dots, q_r$* .

On note alors  $[p]_{\mathcal{A}} = \{[q_1], \dots, [q_r]\}$  l'ensemble des classes de non-orthogonalité des types minimaux intervenant dans l'analyse de  $p$ .

**Proposition 1.2.10.** Soient  $\mathfrak{M}$  un modèle de  $T$ ,  $A \subset M$  un ensemble de paramètres et  $p \in S_n(A)$  un type stationnaire de rang RU fini égal à  $r \in \mathbb{N}$ . Si  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}'$  sont deux analyses de  $p$  alors  $[p]_{\mathcal{A}} = [p]_{\mathcal{A}'}$ .

Plus précisément, pour toute analyse  $\mathcal{A}$  de  $p$ , on a

$$[p]_{\mathcal{A}} = \{[q] \mid q \text{ est un type minimal non orthogonal à une extension de } p\}.$$

Si  $p \in S(A)$  est un type de rang de Lascar fini, on notera  $[p] = [p]_{\mathcal{A}}$  pour toute analyse  $\mathcal{A}$  de  $p$  dont l'existence est assurée par la proposition 1.2.8 et qui est bien défini d'après la proposition 1.2.10.

DÉMONSTRATION. La deuxième partie de la proposition implique la première. La condition (ii) de la proposition 1.2.8 montre que :

$$[p]_{\mathcal{A}} \subset \{[q] \mid q \text{ est un type minimal non orthogonal à une extension de } p\}.$$

Il suffit donc de montrer l'inclusion réciproque : Considérons  $\mathcal{A}$  une analyse de  $p$  et un type  $q \in S(B)$  minimal orthogonal à  $[p]_{\mathcal{A}}$  (i.e. orthogonal à tous les éléments de  $[p]_{\mathcal{A}}$ ). Soit  $A \subset C$  une extension de paramètres et  $\hat{p} \in S(C)$  une extension de  $p$ . Montrons que  $q$  est orthogonal à  $\hat{p}$ .

D'après [Pil96, Chapitre 8, Lemme 1.2(i)], il existe une analyse  $\hat{\mathcal{A}}$  de  $\hat{p}$  avec

$$[\hat{p}]_{\hat{\mathcal{A}}} \subset [p]_{\mathcal{A}}.$$

Par hypothèse, le type  $q$  est orthogonal à tous les éléments de  $[\hat{p}]_{\hat{\mathcal{A}}}$  et donc d'après [Pil96, Chapitre 8, Lemme 1.2(iv)], le type  $q$  est orthogonal à tous les types analysables dans  $[\hat{p}]_{\hat{\mathcal{A}}}$  et en particulier à  $\hat{p}$ .  $\square$

**Exemple 1.2.11.** Soient  $\mathfrak{M}$  un modèle de  $T$ ,  $A \subset M$  un ensemble de paramètres et  $p_1, \dots, p_n \in S(A)$  des types minimaux stationnaires. On vérifie facilement que

$$[p_1 \otimes \dots \otimes p_n] = \{[p_1], \dots, [p_n]\}.$$

En particulier, on a le renforcement suivant de la proposition 1.2.10 pour le type  $p = p_1 \otimes \dots \otimes p_n$  :

$$[p]_{\mathcal{A}} = \{[q] \mid q \text{ est un type minimal non orthogonal à } p\}.$$



1.2.3. *Un contre-exemple.* On montre que la proposition 1.2.10 est optimale en construisant un exemple de type  $p \in S(A)$  où

$$\{[q] \mid q \text{ est un type minimal non orthogonal à } p\} \subsetneq [p].$$

**Exemple 1.2.12.** Soit  $k$  un corps infini. Considérons le langage  $\mathcal{L}_k = \{0, +, -, \lambda \in k\}$  des  $k$ -espaces vectoriels qui est l'enrichissement du langage des groupes par des symboles de fonctions unaires pour chaque élément du corps  $k$ , désignant la multiplication scalaire.

La théorie  $T_k$  des espaces vectoriels non triviaux sur le corps  $k$  est une théorie complète du premier ordre dans le langage  $\mathcal{L}_k$  qui élimine les quantificateurs dans ce langage [TZ12, Théorème 3.3.3]. Une analyse directe des formules sans quantificateurs dans le langage  $\mathcal{L}_k$  montre que la théorie  $T_k$  est fortement minimale. De plus, si  $V$  est un modèle de  $T_k$  et si  $A \subset V$  est un sous-ensemble de paramètres alors  $\text{acl}(A) = \text{dcl}(A) = \text{Vect}(A)$ .

En particulier, la dimension de la prégéométrie combinatoire associée par la construction 1.1.11 coïncide avec la dimension linéaire. On en déduit que  $T_k$  est une théorie fortement minimale modulaire.

**Construction 1.2.13.** On note  $\mathcal{L}_k^2 = \mathcal{L}_k \cup \{W\}$  l'enrichissement du langage  $\mathcal{L}_k$  par un prédicat unaire  $W$  et  $T_k^2$  la théorie des paires d'espaces vectoriels dans langage  $\mathcal{L}_k^2$  i.e. la théorie dont les modèles sont les couples  $(V, W) \models T_k^2$  tels que

$$W \subsetneq V \text{ et } W \models T_k \text{ et } V \models T_k.$$

**Proposition 1.2.14.** *La théorie  $T_k^2$  est une théorie complète qui élimine les quantificateurs dans le langage  $\mathcal{L}_k^2$ .*

La proposition se démontre facilement à l'aide de la méthode du va-et-vient. Cependant, ce n'est pas une conséquence formelle du fait que la théorie  $T_k$  admette l'élimination des quantificateurs dans le langage  $\mathcal{L}_k$ . Par exemple, la théorie des paires de corps algébriquement clos n'élimine pas les quantificateurs dans le langage des paires d'anneaux.

**DÉMONSTRATION.** Les modèles de  $T_k^2$  admettent  $(0, 0)$  comme sous-structure commune. La complétude de la théorie  $T_k^2$  est donc conséquence de l'élimination des quantificateurs. Remarquons que si  $\mathfrak{M} = (V, W)$  et  $\mathfrak{M}' = (V', W')$  sont deux modèles de  $T_k^2$ , les  $\mathcal{L}_k^2$ -morphisms partiels

$$f : A \subset \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}'$$

sont les applications  $f : A \longrightarrow V'$  qui se prolongent en applications  $k$ -linéaires

$$\bar{f} : \text{Vect}(A) \longrightarrow V' \text{ telle que } \bar{f}(\text{Vect}(A) \cap W) = \bar{f}(\text{Vect}(A)) \cap W'.$$

On note  $\kappa = |k|$ . Considérons  $\mathfrak{M} = (V, W) \models T_k$  un modèle de cardinal  $\kappa$  de  $T_k^2$  et  $\mathfrak{M}' = (V', W') \models T_k^2$  un modèle  $\kappa^+$ -saturé. D'après la méthode du va-et-vient, il suffit de vérifier que tout  $\mathcal{L}_k^2$ -morphisme partiel  $f : A \subset \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}'$  s'étend en un  $\mathcal{L}_k^2$ -plongement de  $\mathfrak{M}$  dans  $\mathfrak{M}'$ .

Soit  $f : A \subset \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}'$  un  $\mathcal{L}_k^2$ -morphisme partiel. D'après la remarque précédente,  $f$  se prolonge uniquement en un  $\mathcal{L}_k^2$ -morphisme partiel  $f : \text{Vect}(A) \subset (V, W) \longrightarrow (V', W')$ . Considérons  $x \in V \setminus \text{Vect}(A)$ . On veut étendre le morphisme partiel  $f$  à  $x$ . On a deux cas :

1<sup>er</sup> cas : Supposons que  $x \notin \text{Vect}(A) + W$ .

Par saturation de  $\mathfrak{M}'$ , il existe  $x' \notin \text{Vect}(f(A)) + W'$ . Comme  $x \in V \setminus \text{Vect}(A)$ , l'application linéaire  $f$  se prolonge en une unique application linéaire  $\bar{f} : \text{Vect}(A) \oplus k.x \longrightarrow V'$  telle que  $f(x) = x'$ . Par construction, on a :

$$\bar{f}([\text{Vect}(A) \oplus k.x] \cap W) = f(\text{Vect}(A) \cap W) = f(\text{Vect}(A)) \cap W' = [\bar{f}(\text{Vect}(A)) \oplus k.x'] \cap W'$$

2<sup>e</sup> cas : Supposons que  $x \in \text{Vect}(A) + W$ .

Considérons  $a \in \text{Vect}(A)$  tel que  $y = x - a \in W$ . Par saturation de  $\mathfrak{M}'$ , on peut choisir  $y' \in W' \setminus \text{Vect}(A)$ . Comme  $y \in V \setminus \text{Vect}(A)$ , l'application linéaire  $f$  se prolonge en une unique application linéaire  $\bar{f} : \text{Vect}(A) \oplus k.y \longrightarrow V'$  telle que  $f(y) = y'$ . Par construction, on a :

$$\bar{f}([\text{Vect}(A) \oplus k.y] \cap W) = f(\text{Vect}(A) \cap W) \oplus k.y' = f(\text{Vect}(A)) \cap W' \oplus ky'.$$

Ceci achève la preuve de l'élimination des quantificateurs pour la théorie  $T_k^2$ .  $\square$

Considérons de plus la suite exacte de  $k$ -espaces vectoriels :

$$0 \longrightarrow W \longrightarrow V \xrightarrow{\pi} V/W \longrightarrow 0.$$

L'ensemble  $V/W$  s'identifie alors à un ensemble définissable de la théorie  $(T_k^2)^{eq}$  obtenue en adjoignant à  $T_k^2$  ses sortes imaginaires [TZ12, Partie 8.4].

**Corollaire 1.2.15.** *Soit  $\mathfrak{M} = (V, W)$  un modèle de  $T_k^2$ . On a la description suivantes des formules à paramètres dans  $V$  :*

- (i) *Pour tout  $A \subset V$ , on a  $\text{acl}(A) = \text{dcl}(A) = \text{Vect}(A)$ .*
- (ii) *La structure induite par  $\mathfrak{M}$  sur  $W$  est celle d'un pur  $k$ -espace vectoriel, en particulier fortement minimale.*
- (iii) *La structure induite par  $\mathfrak{M}^{eq}$  sur  $V/W$  est celle d'un pur  $k$ -espace vectoriel, en particulier fortement minimale.*
- (iv) *Les sous-ensembles  $A$ -définissable de  $V$  sont les combinaisons booléennes de translatés de  $W$  par un élément de  $\text{Vect}(A)$  et des points de  $\text{Vect}(A)$ .*

DÉMONSTRATION. Les formules sans quantificateurs en une variable et à paramètres dans  $A$  dans le langage  $\mathcal{L}_k^2$  sont les disjonctions finies de formules de la forme :

$$x \in W + a, x = b, \bigwedge_{i=1}^n x \notin (W + a_i) \text{ et } \bigwedge_{i=1}^n x \neq b_i$$

où  $a, b, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \text{Vect}(A)$ . D'après la proposition 1.2.14, toute formule de  $\mathcal{L}_k^2$  est équivalente modulo  $T_k^2$  à une disjonction finie des formules précédentes.

On en déduit les propriétés (ii), (iii) et (iv). Pour (i), il suffit de remarquer que parmi les formules précédentes,  $x = b$  est la seule formule algébrisante.  $\square$

**Remarque 1.2.16.** La condition (iv) montre que  $V$  est de rang de Morley 2 et de degré de Morley 1 et possède donc un unique type (stationnaire) de rang de Morley 2 noté  $p_V \in S_1(\emptyset)$ .

La condition (iv) montre aussi que les types (fortement) minimaux  $p_W$  et  $p_{V/W}$  génériques de  $W$  et  $V/W$  respectivement sont orthogonaux. Remarquons de plus que ces deux types sont modulaires.

**Lemme 1.2.17.** *Dans la théorie  $(T_k^2)^{eq}$ , les types  $p_W \in S_1(\emptyset)$  et  $p_V \in S_1(\emptyset)$  sont orthogonaux.*

DÉMONSTRATION. Soit  $V \models T_k^2$ . Par élimination des quantificateurs dans  $T_k^2$ , on peut décrire les extensions non déviantes de  $p_V$  et  $p_W$  à tout ensemble de paramètres  $A \subset V$  de la façon suivante :

—  $p_V|A$  est l'unique 1-type  $q \in S_1(A)$  vérifiant

$$q(x) \vdash \pi(x) \notin \text{Vect}(\pi(A)).$$

—  $p_W|A$  est l'unique 1-type  $q \in S_1(A)$  vérifiant

$$q(x) \vdash x \in W \wedge x \notin \text{Vect}(A).$$

On raisonne désormais par l'absurde en supposant que  $p_V$  et  $p_W$  sont non orthogonaux. D'après la description précédente de la clôture algébrique, il existe un ensemble  $A$  de paramètres et des réalisations  $a, b$  de  $p_V|A$  et  $p_W|A$  respectivement tels que  $b \in \text{Vect}(A, a)$ .

De plus, par définition  $b \notin \text{Vect}(A)$ . L'opérateur  $\text{Vect}$  vérifiant la propriété de l'échange, on en déduit que

$$a \in \text{Vect}(A, b).$$

On a alors  $\pi(a) \in \text{Vect}(\pi(A), \pi(b)) = \text{Vect}(\pi(A))$ , ce qui contredit la description précédente du type  $p_V|A$ .  $\square$

**Lemme 1.2.18.** *Dans la théorie  $(T_k^2)^{eq}$ , on a  $[p_V] = \{[p_W], [p_{V/W}]\}$ .*

DÉMONSTRATION. Soit  $b \models p_V$  une réalisation de  $p_V$ . On construit une analyse  $\mathcal{A}$  du type  $p_V$ . Remarquons d'abord que  $\pi$  est  $\emptyset$ -définissable et que  $\pi(b) \models p_{V/W}$ .

On pose donc  $A_1 = \emptyset$ ,  $p_1 = p_V$  et  $q_1 = p_{V/W}$ , puis  $A_2 = \pi(b)$  et  $q_2 = p_2 = \text{tp}(b/\pi(b))$ . Comme les fibres de  $\pi$  sont des espaces homogènes sous l'action de  $W$ , le type  $p_2$  est un type fortement minimal. On en déduit que :

$$[p] = [p]_{\mathcal{A}} = \{[p_{V/W}], [q_2]\}$$

Montrons que  $q_2$  est non orthogonal à  $p_W$ . Considérons  $b'$  réalisant  $q_2 = \text{tp}(b/\pi(b))$  et vérifiant  $b' \perp_{\pi(b)} b$ . Par construction, on a  $\pi(b) = \pi(b')$  et donc  $b-b' \in W$ . Comme de plus  $b-b' \notin \text{dcl}(A_2, b)$ , on en déduit que  $b-b'$  réalise le type générique de  $W$  au dessus de  $A_2, b$ .

La relation  $b-b' \in \text{dcl}(A_2, b, b')$  témoigne alors de la non-orthogonalité entre  $q_2$  et  $p_W$ .  $\square$

### 1.3. Corps différentiellement clos.

1.3.1. *Définition.* On rappelle qu'un corps différentiel (de caractéristique 0) est un couple  $(K, \delta)$  où  $K$  est un corps de caractéristique 0 et  $\delta : K \rightarrow K$  une dérivation. Dans tout le texte, on travaillera dans des corps de caractéristique 0, on parlera donc de corps différentiel pour désigner un corps différentiel de caractéristique 0.

Du point de vue syntaxique, un corps différentiel est une  $\mathcal{L}_\delta$ -structure où  $\mathcal{L}_\delta = \{0, 1, +, \cdot, -, \delta\}$  est appelé *langage des corps différentiels* vérifiant les axiomes des corps différentiels (qui sont du premier ordre dans le langage  $\mathcal{L}_\delta$ ).

**Remarque 1.3.1.** Pour le langage  $\mathcal{L}_\delta$  des corps différentiels, les formules sans quantificateurs à paramètres dans un corps différentiel  $(K, \delta)$  sont les combinaisons booléennes d'équations différentielles algébriques, c'est-à-dire d'équations différentielles de la forme :

$$(E) : P(x_1, \dots, x_r, \delta(x_1), \dots, \delta^k(x_1), \dots, \delta^k(x_r)) = 0$$

où  $P \in K[X_1^{(0)}, \dots, X_r^{(0)}, \dots, X_1^{(k)}, \dots, X_r^{(k)}]$  est un polynôme.

Parmi les modèles de la théorie des corps différentiels, certains possèdent une importance particulière, ce sont les modèles existentiellement clos.

**Définition 1.3.2.** Soient  $T$  une théorie dans un langage  $\mathcal{L}$  et  $\mathfrak{M}$  un modèle de  $T$ . On dit  $\mathfrak{M}$  est un *modèle existentiellement clos* de  $T$  si pour toute extension de modèles  $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}'$  de  $T$ , toute formule sans quantificateurs  $\phi(\bar{x}, \bar{y})$  et tout  $\bar{b} \in M^n$ , on a :

$$\mathfrak{M}' \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x}, \bar{b}) \iff \mathfrak{M} \models \exists \bar{x} \phi(\bar{x}, \bar{b}).$$

**Définition 1.3.3.** On appelle *corps différentiellement clos*, tout modèle existentiellement clos de la théorie des corps différentiels.

**Lemme 1.3.4.** *Tout corps différentiel est contenu dans un corps différentiellement clos. En particulier, il existe des corps différentiellement clos.*

La limite inductive d'une chaîne de corps différentiels

$$(K_1, \delta_1) \subset (K_2, \delta_2) \subset \dots \subset (K_n, \delta_n) \subset \dots$$

est un corps différentiel. Le lemme précédent est alors conséquence des techniques de construction standards de théorie des modèles [TZ12, Lemme 3.2.10].

**Lemme 1.3.5** ([MMP06, Partie 2, lemme 1.5 et corollaire 1.7]). *Soient  $(K, \delta)$  un corps différentiel,  $P \in K[X_1^{(0)}, \dots, X_1^{(n)}] \setminus K[X_1^{(0)}, \dots, X_1^{(n-1)}]$  un polynôme et  $Q \in K[X_1^{(0)}, \dots, X_1^{(n-1)}]$  un polynôme non nul. Le système d'équations différentielles algébriques*

$$P(y, \delta(y), \dots, \delta^n(y)) = 0 \wedge Q(y, \delta(y), \dots, \delta^{n-1}(y)) \neq 0 \quad (1)$$

*admet des solutions dans une extension différentielle de  $(K, \delta)$ .*

**Théorème 1.3.6** (Blum). *La classe des corps différentiellement clos est axiomatisable dans le langage  $\mathcal{L}_\delta$  des corps différentiels par une théorie du premier ordre. Une axiomatisation de cette théorie est donnée par :*

**DCF<sub>0</sub><sup>I</sup>**  $(K, \delta)$  est un corps différentiel (de caractéristique 0).

**DCF<sub>0</sub><sup>II</sup>** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , et tous polynômes  $P \in K[X_1^{(0)}, \dots, X_1^{(n)}] \setminus K[X_1^{(0)}, \dots, X_1^{(n-1)}]$  et  $Q \in K[X_1^{(0)}, \dots, X_1^{(n-1)}]$  non nul, il existe  $y \in K$  tel que

$$P(y, \delta(y), \dots, \delta^n(y)) = 0 \wedge Q(y, \delta(y), \dots, \delta^{n-1}(y)) \neq 0.$$

La théorie axiomatisée par les axiomes précédents est notée **DCF<sub>0</sub>** et appelée *théorie des corps différentiellement clos*.

Le lemme 1.3.5 montre que les corps différentiellement clos sont modèles de la théorie **DCF<sub>0</sub>**. Le théorème est alors conséquence de [MMP06, Partie 2, Corollaire 2.5].

1.3.2. *Elimination des quantificateurs et des imaginaires.*

**Théorème 1.3.7** ([MMP06, Partie 2, Théorème 2.4 et Théorème 3.7]). *La théorie des corps différentiellement clos  $\mathbf{DCF}_0$  est complète et élimine les quantificateurs et les imaginaires dans le langage  $\mathcal{L}_\delta$  des corps différentiels.*

On présente maintenant les conséquences du théorème précédent.

**Définition 1.3.8.** Soit  $(K, \delta)$  un corps différentiel. On appelle *corps des constantes de  $(K, \delta)$* , le sous-corps de  $K$  défini par

$$K^\delta = \{x \in K \mid \delta(x) = 0\}.$$

**Corollaire 1.3.9** ([MMP06, Partie 2, Lemme 5.10]). *Soit  $(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})$  un corps différentiellement clos. Le corps des constantes  $\mathcal{C}$  de  $(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})$  est un corps algébriquement clos et la structure induite par  $\mathcal{U}$  sur le sous-corps définissable  $\mathcal{C}$  est celle d'un pur corps algébriquement clos<sup>3</sup>.*

En particulier, si  $(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})$  est un corps différentiellement clos alors le corps des constantes  $\mathcal{C} \subset \mathcal{U}$  est un sous-ensemble définissable fortement minimal.

**Définition 1.3.10.** Soient  $(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})$  un corps différentiellement clos et  $p \in S(A)$  un type à paramètres dans un sous-ensemble  $A \subset \mathcal{U}$ . On dit que le type  $p$  est *orthogonal aux constantes* si  $p$  est orthogonal au type générique de l'ensemble fortement minimal  $\mathcal{C} \subset \mathcal{U}$ .

**Notation 1.3.11.** Si  $(K, \delta) \subset (L, \delta_L)$  est une extension de corps différentiels et  $A \subset L$  un sous-ensemble, on note  $K\langle A \rangle$  le sous-corps différentiel de  $(L, \delta_L)$  engendré par  $A$  et  $K$ .

**Corollaire 1.3.12** ([MMP06, Partie 2, Lemme 5.1]). *Soient  $(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})$  un corps différentiellement clos et  $A \subset \mathcal{U}$  un ensemble de paramètres. On a la description suivante de la clôture définissable et de la clôture algébrique de  $A$  :*

$$\text{dcl}(A) = \mathbb{Q}\langle A \rangle \text{ et } \text{acl}(A) = \mathbb{Q}\langle A \rangle^{\text{alg}}.$$

**Définition 1.3.13.** Soient  $(K, \delta) \subset (L, \delta_L)$  est une extension de corps différentiels et  $a \in L^n$ . On appelle *ordre de  $a$  sur  $K$*  et on note  $\text{ord}(a/K)$ , l'entier défini par

$$\text{ord}(a) = \text{tr}(K\langle a \rangle/K) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

où pour toute extension de corps  $K \subset K'$ ,  $\text{tr}(K'/K)$  désigne le degré de transcendance de l'extension.

**Corollaire 1.3.14** ([MMP06, Partie 2, Lemmes 5.7 et 5.8]). *Soient  $(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})$  un corps différentiellement clos,  $(K, \delta) \subset (\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})$  un sous-corps différentiel et  $a \in \mathcal{U}^n$ . Alors*

$$\text{RM}(a/K) \leq \text{ord}(a/K).$$

*De plus, l'ordre contrôle la déviation lorsqu'il est fini : si  $(K, \delta) \subset (L, \delta_L)$  est une extension de corps différentiels et  $a \in \mathcal{U}^n$  tel que  $\text{ord}(a/K) < \infty$ , alors  $a \perp_K L$  si et seulement si  $\text{ord}(a/K) = \text{ord}(a/L)$ .*

**Notation 1.3.15.** Soit  $(K, \delta)$  un corps différentiel. On note  $K\{X_1, \dots, X_n\}$  la  $(K, \delta)$ -algèbre différentielle libre engendrée par les indéterminées  $X_1, \dots, X_n$ .

**Corollaire 1.3.16** (Description des types). *Soient  $(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})$  un corps différentiellement clos et  $(K, \delta) \subset (\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})$  un sous-corps différentiel. L'application définie par*

$$I : \begin{cases} S_n(K) \longrightarrow & \text{Spec}_\delta(K\{X_1, \dots, X_n\}) \\ p \mapsto & \{P \in K\{X_1, \dots, X_n\} \mid "P(x) = 0" \in p\} \end{cases}$$

*est une bijection, où  $\text{Spec}_\delta(K\{X_1, \dots, X_n\})$  est l'ensemble des idéaux premiers différentiels de la  $(K, \delta)$ -algèbre  $K\{X_1, \dots, X_n\}$ .*

L'anneau  $K\{X_1, \dots, X_n\}$  n'est jamais noethérien si  $n \geq 1$ . Néanmoins, il admet un caractère noethérien lorsque l'on se restreint aux idéaux radicaux différentiels.

3. Autrement dit, pour tout sous-ensemble de paramètres petit  $B \subset \mathcal{U}$ , les sous-ensembles  $B$ -définissables de  $\mathcal{C}$  sont les sous-ensembles  $\text{dcl}(B) \cap \mathcal{C}$ -définissables de  $\mathcal{C}$  dans le langage des anneaux.

**Théorème 1.3.17** ([MMP06, Partie 2, Théorème 1.16]). *Soient  $(K, \delta)$  un corps différentiel de caractéristique 0 et  $n \in \mathbb{N}$ . Alors toute suite croissante d'idéaux différentiels radicaux de  $K\{X_1, \dots, X_n\}$  est stationnaire.*

*En particulier, tout idéal différentiel radical  $K\{X_1, \dots, X_n\}$  est engendré en tant qu'idéal différentiel radical par un nombre fini d'éléments de  $K\{X_1, \dots, X_n\}$ .*

Ce théorème est appelé le théorème de Ritt-Raudenbush. On a la conséquence immédiate suivante.

**Corollaire 1.3.18.** *La théorie  $\mathbf{DCF}_0$  est  $\omega$ -stable.*

DÉMONSTRATION. D'après le théorème de Ritt-Raudenbush, on peut choisir pour tout idéal premier différentiel  $I \subset K\{X_1, \dots, X_n\}$ , un système générateur  $S(I)$  de l'idéal  $I$  en tant qu'idéal différentiel radical. La description précédente de l'ensemble  $S_n(A)$  des types à paramètres dans  $A$  montre que l'application

$$\begin{cases} S_n(A) & \longrightarrow & \mathbb{Q}\langle A \rangle\{X_1, \dots, X_n\}^{(\mathbb{N})} \\ p & \longmapsto & S(I(p)) \end{cases}$$

est une injection. On en déduit que  $S_n(A)$  est dénombrable dès que  $A$  est dénombrable et donc que la théorie  $\mathbf{DCF}_0$  est  $\omega$ -stable.  $\square$

**Remarque 1.3.19.** Pour vérifier qu'une théorie est  $\omega$ -stable, il suffit de contrôler le cardinal de l'ensemble  $S_1(A)$  des types à paramètres dans  $A$  à une indéterminée [TZ12, Lemme 5.2.2]. Dans l'argument précédent, on peut donc utiliser seulement la version faible du théorème de Ritt suivante :

Toute suite croissante d'idéaux différentiels radicaux de la  $(K, \delta)$ -algèbre différentielle  $K\{X\}$  est stationnaire.

1.3.3. *Propriété de la base canonique et dichotomie.* Les corps différentiellement clos étant  $\omega$ -stables, les définitions et les résultats des sections précédentes se spécialisent au cas des corps différentiellement clos. Une des propriétés remarquables des corps différentiellement clos qui n'est pas conséquence de la stabilité est la propriété de la base canonique.

On commence par rappeler la définition de base canonique pour un type dans une théorie  $\omega$ -stable.

**Définition 1.3.20.** Soit  $T$  une théorie  $\omega$ -stable,  $\mathfrak{M}$  un modèle  $\kappa$ -saturé de  $T$  et  $p \in S(A)$  un type stationnaire sur un ensemble petit de paramètres  $A$ . On dit qu'un uplet  $\bar{c} \in M^n$  est une *base canonique* de  $p$  si pour tout  $\sigma \in \text{Aut}(\mathfrak{M})$ ,  $\sigma(\bar{c}) = \bar{c}$  si et seulement si  $\sigma(p) = p$ .

Par définition, deux bases canoniques  $\bar{c} \in M^n$  et  $\bar{c}' \in M^n$  pour le même type stationnaire  $p \in S(A)$  sont interdéfinissables (i.e.  $\text{dcl}(\bar{c}) = \text{dcl}(\bar{c}')$ ). Dans une théorie  $\omega$ -stable qui élimine les imaginaires, tout type stationnaire admet une base canonique [TZ12, Théorème 8.4.3].

On notera  $\text{Cb}(p) \in M^n$  la base canonique du type stationnaire  $p \in S(A)$  qui est bien définie modulo interdéfinissabilité d'après ce qui précède.

**Proposition 1.3.21** ([TZ12, Lemme 8.5.8]). *Soit  $T$  une théorie  $\omega$ -stable,  $\mathfrak{M}$  un modèle de  $T$  et  $p \in S(A)$  un type stationnaire. Alors :*

- (i) *Pour tout  $B \subset A$ , le type  $p$  est une extension non-déviante de sa restriction à  $B$  si et seulement si  $\text{Cb}(p) \in \text{acl}(B)$ .*
- (ii) *Pour tout  $B \subset A$ , le type  $p$  est une extension non-déviante de sa restriction à  $B$  et sa restriction à  $B$  est un type stationnaire si et seulement si  $\text{Cb}(p) \in \text{dcl}(B)$ .*

**Définition 1.3.22.** Soit  $T$  une théorie  $\omega$ -stable,  $\mathfrak{M}$  un modèle  $\kappa$ -saturé et  $p, q \in S(A)$  des types. On dit que  $p$  est *interne* à  $q$  si pour toute réalisation  $a$  de  $p$ , il existe des réalisations  $b_1, \dots, b_n$  de  $q$  et une extension de paramètres  $A \subset B$  vérifiant  $a \perp_A B$  telles que :

$$a \in \text{dcl}(B, b_1, \dots, b_n).$$

**Théorème 1.3.23** ([PZ03]). *Soit  $(K, \delta)$  un corps différentiel et  $p \in S(K)$  un type stationnaire d'ordre fini. Considérons  $c = \text{Cb}(p)$  la base canonique du type  $p$  et  $a$  une réalisation de  $p$  dans une extension différentielle de  $(K, \delta)$ . Le type  $\text{tp}(c/K\langle a \rangle)$  est interne au type générique des constantes.*

Ce théorème implique que la conjecture de trichotomie est valable pour les corps différentiellement clos sous la forme suivante.

**Corollaire 1.3.24** ([HS96],[PZ03, Corollaire 3.10]). *Soient  $(K, \delta)$  un corps différentiel et  $p \in S(K)$  un type minimal. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Le type  $p$  est orthogonal aux constantes.*
- (ii) *Le type  $p$  est localement modulaire*

**Remarque 1.3.25.** En particulier, la conjecture de trichotomie expliquée dans la remarque 1.1.19 est valable dans les corps différentiellement clos sous la forme forte suivante :

Tout ensemble fortement minimal non localement modulaire interprète un corps infini. Ce corps est toujours définissablement isomorphe au pur corps algébriquement clos des constantes et l'interprétation est définissable à l'intérieur de tout corps différentiellement clos.

## 2. $D$ -variétés et ensembles définissables associés

Dans cette partie, nous étudions les interactions entre les ensembles définissables dans un corps différentiellement clos et la notion de  $D$ -variété, introduite par A. Buium dans [Bui93]. L'utilisation des  $D$ -variétés pour l'étude des corps différentiellement clos est fréquente en théorie des modèles ([HI03], [PZ03]). La relation entre la catégorie des  $D$ -schémas et les ensembles définissables (et les types) dans un corps différentiellement clos est analogue à la relation entre les schémas et les ensembles définissables dans un corps algébriquement clos.

Dans la première section, nous rappelons la définition et les propriétés structurelles des  $D$ -schémas ainsi que de la notion associée de sous-schéma invariant. Dans la deuxième section, nous nous concentrons sur la relation entre  $D$ -variété et ensemble définissable dans la théorie  $\mathbf{DCF}_0$ . Enfin, dans la dernière section, nous prouvons, à l'aide du principe de réflexivité de Shelah dans une théorie stable, un premier critère d'orthogonalité aux constantes (Théorème 2.3.4) qui sera développé et enrichi pour les  $D$ -variétés définie sur le corps des nombres réels dans la troisième partie de ce texte.

### 2.1. $D$ -schémas.

#### 2.1.1. Catégorie des $D$ -schémas.

**Définition 2.1.1.** On appelle  $D$ -schéma tout couple  $(X, \delta_X)$  où  $X$  est un schéma et  $\delta_X : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$  est une dérivation sur le faisceau structural  $\mathcal{O}_X$  de  $X$ , c'est-à-dire un morphisme de faisceaux en groupes abéliens satisfaisant à la règle de Leibniz :

$$\delta_X(s.t) = \delta_X(s).t + s.\delta_X(t) \text{ pour tout ouvert } U \subset X \text{ et tous } s, t \in \mathcal{O}_X(U).$$

Si  $(X, \delta_X)$  et  $(Y, \delta_Y)$  sont deux  $D$ -schémas, on appelle *morphisme de  $D$ -schémas* de  $(X, \delta_X)$  vers  $(Y, \delta_Y)$ , tout morphisme de schémas  $f = (|f|, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X & \xrightarrow{\delta_X} & \mathcal{O}_X \\ f^\# \uparrow & & \uparrow f^\# \\ f^{-1}\mathcal{O}_Y & \xrightarrow{f^{-1}\delta_Y} & f^{-1}\mathcal{O}_Y \end{array} \quad (2)$$

On a ainsi défini une catégorie appelée *catégorie des  $D$ -schémas* et notée  $\mathbf{D-Sch}$ .

**Exemple 2.1.2.** Soit  $(A, \delta_A)$  un anneau (commutatif) différentiel. La dérivation  $\delta_A$  se prolonge uniquement aux localisations de  $A$  et induit une dérivation sur le faisceau structural  $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}$ . On obtient ainsi un  $D$ -schéma noté  $(\text{Spec}(A), \delta_A)$ .

**Remarque 2.1.3.** Plus généralement, on peut définir la catégorie  $\mathbf{C}$  des  $D$ -espaces localement annelés dont :

- les objets sont les espaces localement annelés  $(X, \mathcal{O}_X)$  muni d'une dérivation  $\delta_X : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X$  du faisceau structural  $\mathcal{O}_X$ .
- les flèches sont les morphismes d'espaces localement annelés faisant commuter le diagramme (2).

La catégorie des  $D$ -schémas s'identifie alors à la sous-catégorie pleine de la catégorie  $\mathbf{C}$  dont les objets sont les  $D$ -espaces localement annelés  $(X, \mathcal{O}_X, \delta_X)$  localement représentable sous la forme  $(\text{Spec}(A), \delta_A)$  où  $(A, \delta)$  est un anneau différentiel.

La catégorie  $\mathbf{D-Sch}$  admet un foncteur d'oubli naturel vers la catégorie des schémas obtenu en oubliant la dérivation sur le faisceau structural  $F_{oub} : \mathbf{D-Sch} \longrightarrow \mathbf{Sch}$ .

**Notation 2.1.4.** Pour toute propriété  $(P)$  des schémas (resp. des morphismes de schémas), nous dirons qu'un  $D$ -schéma (resp. un morphisme de  $D$ -schémas) possède la propriété  $(P)$  si le schéma sous-jacent (resp. le morphisme de schémas sous-jacent) possède la propriété  $(P)$ .

Par exemple, on dira qu'un  $D$ -schéma  $(X, \delta_X)$  est de type fini (resp. séparé, réduit, irréductible) si le schéma sous-jacent  $X$  a la même propriété.

**Proposition 2.1.5.** *La catégorie  $\mathbf{D-Sch}$  admet des produits fibrés et un élément terminal. De plus, la formation des produits fibrés commute au foncteur d'oubli vers la catégorie des schémas.*

DÉMONSTRATION. En effet, si  $(C, \delta_C)$  est un anneau différentiel et  $(A, \delta_A)$  et  $(B, \delta_B)$  sont deux  $(C, \delta_C)$ -algèbres différentielles, on définit la  $(C, \delta)$ -algèbre différentielle

$$(A, \delta_A) \otimes_{(C, \delta_C)} (B, \delta_B) = (A \otimes_C B, \delta_A \otimes_C \text{Id}_B + \text{Id}_A \otimes_C \delta_B).$$

On vérifie alors qu'on a ainsi défini le produit de  $(\text{Spec}(A), \delta_A)$  avec  $(\text{Spec}(B), \delta_B)$  au dessus de  $(\text{Spec}(C), \delta_C)$ . Pour les  $D$ -schémas généraux, on procède par recollement à partir d'un recouvrement affine. Cette construction montre que la formation des produits commute au foncteur d'oubli vers la catégorie des schémas.  $\square$

**Remarque 2.1.6.** Soit  $(K, \delta)$  un corps différentiel. Le couple  $(\text{Spec}(K), \delta)$  est un  $D$ -schéma. On note  $\mathbf{D-Sch}/(K, \delta)$ , la catégorie des objets au dessus de  $(\text{Spec}(K), \delta)$ .

La catégorie  $\mathbf{D-Sch}/(K, \delta)$  admet un élément terminal ainsi que des produits fibrés d'après la proposition 2.1.5. Cette proposition montre aussi que, si  $(K, \delta) \subset (L, \delta_L)$  est une extension de corps différentiels alors, on a un foncteur de changement de base noté

$$- \times_{(K, \delta)} (L, \delta_L) : \begin{cases} \mathbf{D-Sch}/(K, \delta) & \longrightarrow \mathbf{D-Sch}/(L, \delta_L) \\ (X, \delta_X) & \longmapsto (X, \delta_X)_{(L, \delta_L)} \end{cases}.$$

Si  $(X, \delta_X)$  est un  $D$ -schéma alors tout ouvert  $U \subset X$  est naturellement muni d'une structure de  $D$ -schéma notée  $(U, \delta_U)$  qui fait de l'immersion ouverte un morphisme de  $D$ -schémas.

**Lemme 2.1.7.** *Soient  $(X, \delta_X)$  et  $(Y, \delta_Y)$  deux  $D$ -schémas,  $f : X \longrightarrow Y$  un morphisme de schémas et  $U \subset X$  un ouvert schématiquement dense. Si  $f|_U : (U, \delta_U) \longrightarrow (Y, \delta_Y)$  est un morphisme de  $D$ -schémas alors  $f : (X, \delta_X) \longrightarrow (Y, \delta_Y)$  est un morphisme de  $D$ -schémas.*

La réciproque du lemme 2.1.7 est bien-sûr toujours vérifiée même lorsqu'on ne suppose plus que  $U \subset X$  est schématiquement dense

DÉMONSTRATION. On veut montrer que le diagramme (2) est commutatif. Comme l'inclusion  $i : (U, \delta_U) \longrightarrow (X, \delta_X)$  est un morphisme de  $D$ -schémas, et par adjonction entre les foncteurs  $i^{-1}$  et  $i_*$ , on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} i_* \mathcal{O}_U & \xrightarrow{i_* \delta_U} & i_* \mathcal{O}_U \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{O}_X & \xrightarrow{\delta_X} & \mathcal{O}_X \end{array} \quad (3)$$

De plus, puisque  $U \subset X$  est schématiquement dense, les deux flèches verticales sont injectives. Ainsi, pour vérifier la commutativité du diagramme (2), il suffit de vérifier que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
i_*\mathcal{O}_U & \xrightarrow{i_*\delta_U} & i_*\mathcal{O}_U \\
\uparrow & & \uparrow \\
f^{-1}\mathcal{O}_Y & \xrightarrow{f^{-1}\delta_Y} & f^{-1}\mathcal{O}_Y
\end{array}$$

La commutativité du dernier diagramme est conséquence du fait que  $f|_U : (U, \delta_U) \rightarrow (Y, \delta_Y)$  est un morphisme de  $D$ -schémas et de l'adjonction entre les foncteurs  $i^{-1}$  et  $i_*$ .  $\square$

**Définition 2.1.8.** Soient  $(X, \delta_X)$  et  $(Y, \delta_Y)$  deux  $D$ -schémas intègres et  $f : X \dashrightarrow Y$  un morphisme rationnel. On dit que  $f : (X, \delta_X) \dashrightarrow (Y, \delta_Y)$  est un *morphisme rationnel de  $D$ -schémas* si sa restriction à un ouvert non vide de  $X$  est un morphisme de  $D$ -schémas.

D'après le lemme 2.1.7, si  $f : (X, \delta_X) \dashrightarrow (Y, \delta_Y)$  est un morphisme rationnel de  $D$ -schémas alors  $f$  définit un morphisme de  $D$ -schémas sur son ouvert de définition.

2.1.2. *Sous-schémas invariants.*

**Définition 2.1.9.** Soit  $(X, \delta_X)$  un  $D$ -schéma. On dit qu'un sous-schéma fermé  $Y \subset X$  est un *sous-schéma fermé invariant* de  $(X, \delta_X)$ , si le faisceau d'idéaux  $\mathcal{I}_Y \subset \mathcal{O}_X$  définissant  $Y$  est stable par la dérivation  $\delta_X$ , c'est-à-dire si pour tout ouvert  $U \subset X$ ,

$$\mathcal{I}_Y(U) \subset (\mathcal{O}_X(U), \delta_X) \text{ est un idéal différentiel.}$$

**Remarque 2.1.10.** Soit  $(X, \delta_X)$  un  $D$ -schéma et  $i : Y \rightarrow X$  un sous-schéma fermé invariant. La dérivation  $\delta_X$  passe au quotient en une dérivation  $\delta_Y : \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_Y$  sur le faisceau structural de  $Y$  qui fait de  $(Y, \delta_Y)$  un  $D$ -schéma tel que l'immersion fermée  $i : (Y, \delta_Y) \rightarrow (X, \delta_X)$  est un morphisme de  $D$ -schémas.

Réciproquement, toute immersion fermée  $i : (Y, \delta_Y) \rightarrow (X, \delta_X)$  de  $D$ -schémas définit un sous-schéma fermé invariant de  $(X, \delta_X)$ .

**Lemme 2.1.11.** Soient  $f : (X, \delta_X) \rightarrow (S, \delta_S)$  un morphisme de  $D$ -schémas et  $(T, \delta_T) \rightarrow (S, \delta_S)$  un changement de base.

Si  $Y \subset X$  un sous-schéma fermé invariant de  $(X, \delta_X)$  alors  $Y \times_S T$  est un sous-schéma fermé invariant de  $(X, \delta_X) \times_{(S, \delta_S)} (T, \delta_T)$ .

DÉMONSTRATION. L'immersion fermée  $i : (Y, \delta_Y) \rightarrow (X, \delta_X)$  induit après changement de base, un morphisme de  $D$ -schémas :

$$i_B : (Y, \delta_Y) \times_{(S, \delta_S)} (T, \delta_T) \rightarrow (X, \delta_X) \times_{(S, \delta_S)} (T, \delta_T)$$

La notion d'immersion fermée étant invariante par changement de base, on conclut à l'aide de la remarque 2.1.10.  $\square$

En particulier, si  $(X, \delta_X)$  est un  $D$ -schéma,  $U \subset X$  un ouvert et  $Y \subset X$  un sous-schéma fermé invariant alors  $Y \cap U$  est un sous-schéma fermé invariant de  $(U, \delta_U)$ . Réciproquement, on a le résultat suivant.

**Lemme 2.1.12.** Soient  $(X, \delta_X)$  un  $D$ -schéma et  $Y \subset X$  un sous-schéma fermé. Considérons  $U \subset X$  un ouvert tel que  $Y \cap U$  est schématiquement dense dans  $U$ .

Si  $Y \cap U$  est un sous-schéma fermé invariant de  $(U, \delta_U)$  alors  $Y$  est un sous-schéma fermé invariant de  $(X, \delta_X)$ .

DÉMONSTRATION. On note  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ , le faisceau d'idéaux définissant  $Y$ . L'immersion ouverte  $U \subset X$  induit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{O}_X/\mathcal{I} & \xrightarrow{j} & i_*(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})|_U \\
\uparrow \pi & & \uparrow \pi_U \\
\mathcal{O}_X & \longrightarrow & i_*\mathcal{O}_X|_U
\end{array}$$

où la première flèche horizontale  $j$  est injective car  $Y \cap U$  est schématiquement dense dans  $U$ .



Montrons que le faisceau d'idéaux  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$  est stable par la dérivation  $\delta_X$ .

Soit  $V \subset X$  un ouvert et  $f \in I(V)$ . On a alors  $\pi_U(\delta_X(f)|_U) = \pi_U[\delta_U(f|_U)] = 0$  car  $Y \cap U$  est un sous-schéma fermé invariant de  $U$ . On en déduit que  $(j \circ \pi)(\delta_X(f)) = 0$  donc que  $\pi(\delta_X(f)) = 0$  car  $j$  est injective, c'est-à-dire  $\delta_X(f) \in I(V)$ .  $\square$

**Proposition 2.1.13.** *Soit  $(X, \delta_X)$  un  $D$ -schéma noethérien au dessus de  $(\mathbb{Q}, 0)$  et  $Y \subset X$  un sous-schéma fermé invariant. Alors :*

- (i) *Le sous-schéma fermé invariant réduit  $Y_{red} \subset Y \subset (X, \delta_X)$  est un sous-schéma fermé invariant.*
- (ii) *Les composantes irréductibles  $Y_1, \dots, Y_n \subset (X, \delta_X)$  de  $Y_{red}$  sont des sous-schémas fermés invariants.*

DÉMONSTRATION. Si  $(A, \delta)$  est un anneau différentiel de caractéristique 0 alors le radical de tout idéal différentiel est un idéal différentiel [MMP06, Chapitre 2, Lemme 1.15]. On en déduit que la propriété (i) est vérifiée.

Pour (ii), considérons  $Y_i$  une composante irréductible de  $Y_{red}$ . Considérons un ouvert  $U \subset X$  tel que

$$Y_{red} \cap U = Y_i \cap U \neq \emptyset$$

(Il suffit de considérer l'ouvert  $U = X \setminus \bigcup_{j \neq i} Y_j$ ).

Le schéma  $Y_i \cap U = Y_{red} \cap U$  est un sous-schéma fermé invariant de  $(U, \delta_U)$ . Comme de plus  $Y_i \cap U \subset Y_i$  est schématiquement dense dans  $Y_i$  (car  $Y_i$  est irréductible et  $U \cap Y_i$  est non vide), le sous-schéma fermé  $Y_i \subset (X, \delta_X)$  est invariant d'après le lemme 2.1.12.  $\square$

**2.2. Ensemble définissable associé à une  $D$ -variété.** On fixe  $(\mathcal{U}, \delta_U)$  un modèle saturé de la théorie des corps différentiellement clos. Tous les corps différentiels considérés seront des sous-corps différentiels de  $(\mathcal{U}, \delta_U)$ .

**Notation 2.2.1.** Soit  $(K, \delta)$  un corps différentiel. On appelle  *$D$ -variété au dessus de  $(K, \delta)$* , tout  $D$ -schéma au dessus de  $(K, \delta)$  séparé, de type fini et réduit.

En particulier, les  $D$ -variétés au dessus de  $(K, \delta)$  ne sont pas supposées irréductibles et on parlera de  $D$ -variétés irréductibles (resp. absolument irréductibles) au dessus de  $(K, \delta)$  pour désigner les  $D$ -variétés au dessus de  $(K, \delta)$  dont le  $K$ -schéma sous-jacent est irréductible (resp. absolument irréductible).

**Remarque 2.2.2.** La notion de  $D$ -variété est préservée par changement de base par un corps différentiel puisque les corps différentiels sont de caractéristique 0, c'est-à-dire si  $(K, \delta) \subset (L, \delta_L)$  est une extension de corps différentiels et  $(X, \delta_X)$  est une  $D$ -variété au dessus de  $(K, \delta)$ , alors  $(X, \delta_X)_{(L, \delta_L)}$  est une  $D$ -variété au dessus de  $(L, \delta_L)$ .

2.2.1. *Interprétation d'une  $D$ -variété dans  $\mathbf{DCF}_0$ .* Soit  $(K, \delta)$  un corps différentiel.

**Notation 2.2.3.** Soient  $(K, \delta) \subset (L, \delta_L)$  une extension de corps différentiels et  $(X, \delta_X)$  un  $D$ -schéma au dessus de  $(K, \delta)$ . On appelle *ensemble des  $(L, \delta_L)$ -points différentiels de  $(X, \delta_X)$* , l'ensemble

$$(X, \delta_X)^{(L, \delta_L)} = \text{Hom}_{D\text{-Sch}/(K, \delta)}[(\text{Spec} L, \delta_L); (X, \delta_X)].$$

On montre dans la suite de cette partie que l'ensemble  $(X, \delta_X)^{(U, \delta_U)}$  peut être muni d'une structure d'ensemble définissable dans  $\mathbf{DCF}_0$ .

**Exemple 2.2.4.** Soit  $(S)$  un système d'équations différentielles algébriques à paramètres dans  $(K, \delta)$ , c'est-à-dire un système d'équations différentielles algébriques de la forme :

$$(S) : \begin{cases} P_1(x_1, \dots, x_r, \delta(x_1), \dots, \delta^k(x_1), \dots, \delta^k(x_r)) = 0 \\ \vdots \\ P_r(x_1, \dots, x_r, \delta(x_1), \dots, \delta^k(x_1), \dots, \delta^k(x_r)) = 0 \end{cases}$$

où les  $P_i \in K[X_1^{(0)}, \dots, X_r^{(0)}, \dots, X_1^{(k)}, \dots, X_r^{(k)}]$  sont des polynômes.

Le foncteur  $\mathcal{S}$  "solutions de  $(S)$ " de la catégorie des  $(K, \delta)$ -algèbres différentielles vers la catégorie des ensembles est représentable par un  $D$ -schéma affine  $(X, \delta_X)$  au dessus de  $(K, \delta)$ .

En effet, considérons  $K\{X_1, \dots, X_r\}$  la  $(K, \delta)$ -algèbre différentielle libre engendrée par les indéterminées  $X_1, \dots, X_r$ . Pour tout  $i \leq r$ , on a

$$P_i(X_1, \dots, X_r, \delta(X_1), \dots, \delta^k(X_1), \dots, \delta^k(X_r)) \in K\{X_1, \dots, X_r\}.$$

Notons  $I \subset K\{X_1, \dots, X_r\}$  l'idéal différentiel engendré par ces éléments. Le foncteur  $\mathcal{S}$  est alors représentable par le  $D$ -schéma affine associé à la  $(K, \delta)$ -algèbre différentielle  $K\{X_1, \dots, X_n\}/I$ . En général, ce  $D$ -schéma n'est ni réduit ni de type fini.

**Remarque 2.2.5.** On en déduit que si  $(X, \delta_X)$  représente le foncteur solutions d'un système d'équations différentielles algébriques ( $S$ ) à paramètres dans  $(K, \delta)$  alors  $(X, \delta_X)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})} = \mathcal{S}(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})$  s'identifie à un ensemble  $K$ -définissable de  $(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})$ .

**Construction 2.2.6.** Soit  $(X, \delta_X)$  une  $D$ -variété au dessus de  $(K, \delta)$ . Considérons  $\mathcal{V} = (V_i, f_i)_{i=1, \dots, n}$  où  $(V_i)$  est un recouvrement ouvert affine de  $X$  et où les  $f_i : V_i \rightarrow \mathbb{A}^n$  sont des immersions fermées.

On peut construire une formule  $\phi_{\mathcal{V}}(x)$  sans quantificateurs à paramètres dans  $K$  telle que pour toute extension de corps différentiels  $(K, \delta) \subset (L, \delta_L)$ , on a l'identification suivante :

$$(X, \delta_X)^{(L, \delta_L)} = \phi_{\mathcal{V}}(L, \delta_L).$$

DÉMONSTRATION. Pour toute extension de corps différentiels  $(K, \delta) \subset (L, \delta_L)$ , puisque  $(V_i)_{i=1}^n$  est un recouvrement ouvert de  $X$ , on a une application surjective :

$$\pi : \bigsqcup_{i=1}^n (V_i, \delta_{V_i})^{(L, \delta_L)} \longrightarrow (X, \delta_X)^{(L, \delta_L)}.$$

qui identifie  $(X, \delta_X)^{(L, \delta_L)}$  au quotient de  $\bigsqcup_{i=1}^n (V_i, \delta_{V_i})^{(L, \delta_L)}$  par une relation d'équivalence  $E$ .

Pour tout  $i \leq n$ , les immersions fermées  $f_i : V_i \rightarrow \mathbb{A}^n$  permettent d'identifier  $(V_i, \delta_i)^{(L, \delta_L)}$  à l'ensemble des solutions d'un système d'équations différentielles algébriques ( $S_i$ ) à  $n$  indéterminées et donc à un ensemble  $K$ -définissable sans quantificateurs dans  $(L, \delta_L)$ .

On en déduit que  $\bigsqcup_{i=1}^n (V_i, \delta_{V_i})^{(L, \delta_L)}$  s'identifie à un ensemble  $K$ -définissable de  $(L, \delta_L)$  sans quantificateurs.

**Assertion.** La relation d'équivalence  $E$  est  $K$ -définissable sans quantificateurs dans le langage des anneaux.

En effet, sa définition est donnée par les fonctions de transitions du recouvrement ouvert  $(U_i)_{i \leq n}$  et donc définissable sans quantificateurs dans le langage des anneaux (et donc dans le langage des anneaux différentiels).

Par élimination des imaginaires dans la théorie des corps algébriquement clos, il existe une formule sans quantificateurs  $\phi_{\mathcal{V}}(\bar{x})$  telle que pour toute extension de corps différentiels  $(K, \delta) \subset (L, \delta_L)$  :

$$(X, \delta_X)^{(L, \delta_L)} = \bigsqcup_{i=1}^n (V_i, \delta_{V_i})^{(L, \delta_L)} / E = \phi_{\mathcal{V}}(L, \delta_L).$$

□

Le lemme suivant montre que la structure définissable induite ne dépend pas du recouvrement ouvert choisi.

**Lemme 2.2.7.** Soit  $\mathcal{E}$  l'ensemble des données  $\mathcal{V} = (V_i, f_i)_{i=1, \dots, n}$  où  $(V_i)$  est un recouvrement ouvert affine de  $V$  et où les  $f_i : V_i \rightarrow \mathbb{A}^n$  sont des immersions fermées.

Si  $\mathcal{V}, \mathcal{V}' \in \mathcal{E}$  alors pour toute extension de corps différentiels  $(K, \delta) \subset (L, \delta_L)$ , les ensembles  $\phi_{\mathcal{V}}(L, \delta_L)$  et  $\phi_{\mathcal{V}'}(L, \delta_L)$  sont en bijection définissable sans quantificateurs à paramètres dans  $(K, \delta)$ .

DÉMONSTRATION. Deux recouvrement ouverts admettent toujours un raffinement commun. On peut donc supposer que  $\mathcal{V}'$  est un recouvrement plus fin que  $\mathcal{V}$ . Il suffit alors de vérifier que si  $X$  est un  $D$ -schéma affine et  $(V_i)_{i \leq n}$  un recouvrement affine de  $X$  alors l'application

$$\pi : \bigsqcup_{i=1}^n (V_i, \delta_{V_i})^{(L, \delta_L)} \longrightarrow (X, \delta_X)^{(L, \delta_L)}$$

est  $K$ -définissable sans quantificateurs, ce qui est immédiat. □

Suivant l'usage en théorie des modèles, si  $(K, \delta) \subset (\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})$  est une extension différentiellement close, on identifie  $(X, \delta_X)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})}$  à un ensemble  $K$ -définissable dans  $(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})$  sans préciser le recouvrement affine choisi. On a la description intrinsèque suivante de la structure induite par  $(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})$  sur  $(X, \delta_X)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})}$ .

**Corollaire 2.2.8.** *Soient  $(K, \delta)$  un corps différentiel et  $(X, \delta_X)$  une  $D$ -variété au-dessus de  $(K, \delta)$ . Les sous-ensembles  $K$ -définissables de  $(X, \delta_X)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})}$  sont les combinaisons booléennes d'ensembles de la forme  $(Y, \delta_Y)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})}$  où  $Y \subset (X, \delta_X)$  est une sous-variété invariante.*

**DÉMONSTRATION.** Supposons que le  $D$ -schéma  $(X, \delta_X)$  est affine et considérons une immersion fermée  $X \subset \mathbb{A}^n$ . D'après le théorème 1.3.7, les sous-ensembles  $K$ -définissables de  $\mathcal{U}^n$  sont les combinaisons booléennes de sous-ensembles de la forme :

$$V(I) = \{x \in \mathcal{U}^n \mid f(x) = 0, \forall f \in I\} \subset \mathcal{U}^n.$$

où  $I \subset K\{X_1, \dots, X_n\}$  est un idéal différentiel de la  $(K, \delta)$ -algèbre libre d'indéterminées  $X_1, \dots, X_n$ . On en déduit que les sous-ensembles définissables de  $(X, \delta_X)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})}$  sont les combinaisons booléennes des ensembles  $V(I)$  où  $I \subset K\{X_1, \dots, X_n\}$  est un idéal différentiel contenant l'idéal  $I_X$  définissant  $X$ . Ces derniers sont en correspondance avec les sous-schémas fermés invariants de  $(X, \delta_X)$ . La proposition 2.1.13 permet alors de conclure.

On en déduit le cas général à l'aide du lemme 2.1.12 et de la construction précédente.  $\square$

**Notation 2.2.9.** Soient  $(X, \delta_X)$  une  $D$ -variété au dessus d'un corps différentiel  $(K, \delta)$  et  $\Sigma = (X, \delta_X)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})}$ . On note  $S_{\Sigma}(K)$  l'ensemble des types vivants sur  $\Sigma$  (c'est-à-dire vérifiant  $p_{\Sigma}(x) \models x \in \Sigma$ ) à paramètres dans  $K$ .

**Corollaire 2.2.10.** *Soient  $(K, \delta)$  un corps différentiel et  $(X, \delta_X)$  une  $D$ -variété au dessus de  $(K, \delta)$ . On pose  $\Sigma = (X, \delta_X)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})}$ . Pour toute sous-variété fermée invariante  $Y \subset (X, \delta_X)$ , il existe un unique type complet  $p_{(Y, \delta_Y)}(x)$  vivant sur  $\Sigma$  vérifiant :*

$$p_{(Y, \delta_Y)}(x) \models \begin{cases} x \in (Y, \delta_Y)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})} \\ x \notin (Y', \delta_{Y'}^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})}) \text{ pour } Y' \not\subseteq Y \text{ une sous-variété invariante stricte} \end{cases}$$

De plus, en notant  $\text{Inv}_{\delta}(X, \delta_X)$  l'ensemble des sous-variétés fermées irréductibles et invariantes de  $(X, \delta_X)$ , l'application  $\text{Inv}_{\delta}(X, \delta_X) \rightarrow S_{\Sigma}(K)$  ainsi définie est une bijection.

Le cas affine est donné par le corollaire 1.3.16 et le cas général s'en déduit aisément à l'aide du lemme 2.1.12.

**2.2.2. Type générique d'une  $D$ -variété irréductible.** Soit  $(X, \delta_X)$  une  $D$ -variété irréductible au dessus de  $(K, \delta)$ . Le corollaire précédent montre qu'il existe un type  $p \in S(K)$  à paramètres dans  $K$  et vivant sur  $(X, \delta_X)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})}$  dont les réalisations coïncident avec les réalisations du point générique (au sens de la géométrie algébrique) de  $(X, \delta_X)$ .

**Définition 2.2.11.** Soient  $(K, \delta)$  un corps différentiel et  $(X, \delta_X)$  une  $D$ -variété irréductible au dessus de  $(K, \delta)$ . On appelle *type générique de  $(X, \delta_X)$* , le type  $p_{(X, \delta_X)} \in S(K)$  correspondant à la variété  $X$  elle-même dans le corollaire 2.2.10.

**Lemme 2.2.12.** *Soient  $(K, \delta)$  un corps différentiel et  $(X, \delta_X)$  une  $D$ -variété irréductible au dessus de  $(K, \delta)$ . Posons  $\Sigma = (X, \delta_X)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})}$ .*

(i) *Le type  $p_{(X, \delta_X)}$  est l'unique type d'ordre maximal vivant sur  $\Sigma$ . De plus, il vérifie*

$$\text{ord}(p_{(X, \delta_X)}) = \dim(X).$$

(ii) *Le type  $p_{(X, \delta_X)}$  est stationnaire si et seulement si la  $D$ -variété  $(X, \delta_X)$  est absolument irréductible. Dans ce cas, son unique extension non-déviant à une extension  $(K, \delta) \subset (L, \delta_L)$  est le type générique de  $(X, \delta_X)_{(L, \delta_L)}$ .*

**DÉMONSTRATION.** Soit  $a \models p_{(X, \delta_X)}$  une réalisation du type  $p_{(X, \delta_X)}$ . Par définition du type  $p_{(X, \delta_X)}$ , ses réalisations sont les réalisations du point générique de  $(X, \delta_X)$  et donc le sous-corps différentiel  $K\langle a \rangle$  engendré par  $a$  dans  $(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})$  est isomorphe au corps différentiel  $(K(X), \delta_X)$ . On en déduit que :

$$\text{ord}(p) = \text{tr}(K\langle a \rangle/K) = \text{tr}(K(X)/K) = \dim(X).$$

La propriété (i) est donc vérifiée. Montrons la propriété (ii). Soit  $(K, \delta) \subset (L, \delta_L)$  une extension de corps différentiels.

Le corollaire 2.2.10 montre que les extensions de  $p_{(X, \delta_X)}$  à  $(L, \delta_L)$  correspondent aux sous-variétés irréductibles invariantes de  $(X, \delta_X)_{(L, \delta_L)}$  dont la projection vers  $X$  est dominante.

D'après le corollaire 1.3.14 et la propriété (i) au-dessus, les extensions non déviantes de  $p_{(X, \delta_X)}$  à  $(L, \delta_L)$  correspondent aux sous-variétés irréductibles invariantes de  $(X, \delta_X)_{(L, \delta_L)}$  de dimension  $\dim(X)$  et dont la projection vers  $X$  est dominante.

On en déduit que les extension non-déviantes de  $p_{(X, \delta_X)}$  à  $(L, \delta_L)$  correspondent aux composantes irréductibles de  $(X, \delta_X)_{(L, \delta_L)}$ .  $\square$

**Remarque 2.2.13.** La propriété (i) du lemme précédent montre qu'il est facile de calculer l'ordre du type générique  $p_{(X, \delta_X)}$  si l'on connaît la  $D$ -variété  $(X, \delta_X)$ . En particulier l'ordre de  $p_{(X, \delta_X)}$  ne dépend que de la variété  $X$  et non de la structure de  $D$ -variété sur  $X$  considérée.

Cependant, on ne sait en général pas déterminer  $\text{RM}(p_{(X, \delta_X)})$  et  $\text{RU}(p_{(X, \delta_X)})$ . De plus, ces deux quantités dépendent de la structure de  $D$ -variété sur  $X$ .

**Lemme 2.2.14.** Soient  $(K, \delta)$  un corps différentiel,  $(X, \delta_X)$  et  $(Y, \delta_Y)$  des  $D$ -variétés irréductibles au dessus de  $(K, \delta)$ . Considérons  $a \models p_{(X, \delta_X)}$ ,  $b \models p_{(Y, \delta_Y)}$  des réalisations des types génériques de  $(X, \delta_X)$  et  $(Y, \delta_Y)$  respectivement. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $b \in \text{dcl}(K, a)$
- (ii) Il existe un morphisme rationnel de  $D$ -variétés

$$\phi : (X, \delta_X) \dashrightarrow (Y, \delta_Y) \text{ tel que } \phi^{\mathcal{U}}(a) = b.$$

où  $\phi^{\mathcal{U}}$  désigne le morphisme induit par  $\phi$  après passage au points différentiels dans  $(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})$ .

DÉMONSTRATION. (ii)  $\implies$  (i) est immédiat puisque l'application  $\phi^{\mathcal{U}}$  est  $K$ -définissable et  $\phi^{\mathcal{U}}(a) = b$ . Montrons que (i)  $\implies$  (ii). Comme  $b \in \text{dcl}(K, a)$ , on en déduit que :

$$K\langle b \rangle = \text{dcl}(K, b) \subset K\langle a \rangle = \text{dcl}(K, a) \subset (\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}}).$$

Les isomorphismes de corps différentiels au dessus de  $(K, \delta)$ ,  $(K(X), \delta_X) \simeq K\langle a \rangle$  et  $(K(Y), \delta_Y) \simeq K\langle b \rangle$  définissent alors une injection de corps différentiels  $i : (K(Y), \delta_Y) \longrightarrow (K(X), \delta_X)$  et donc un morphisme rationnel de  $D$ -variétés  $\phi : (X, \delta_X) \dashrightarrow (Y, \delta_Y)$  tel que  $\phi^{\mathcal{U}}(a) = b$ .  $\square$

**2.3. Un premier critère d'orthogonalité aux constantes.** On donne une caractérisation des  $D$ -variétés absolument irréductibles dont le type générique est orthogonal aux constantes.

**Définition 2.3.1.** Soient  $(K, \delta)$  un corps différentiel et  $(X, \delta_X)$  une  $D$ -variété irréductible sur  $(K, \delta)$ . On appelle *intégrale première rationnelle* de  $(X, \delta_X)$ , toute fonction rationnelle  $f \in K(X)$  telle que  $\delta_X(f) = 0$ .

**Remarque 2.3.2.** Soient  $(K, \delta)$  un corps différentiel et  $(X, \delta_X)$  une  $D$ -variété irréductible sur  $(K, \delta)$ . L'ensemble des intégrales premières rationnelles de  $X$  s'identifie au corps des constantes du corps différentiel  $(K(X), \delta_X)$ .

Nous dirons que  $(X, \delta_X)$  est *sans intégrale première non constante* si  $K(X)^\delta = K^\delta$ .

**Lemme 2.3.3.** Soient  $(K, \delta)$  un corps différentiel et  $(X, \delta_X)$  une  $D$ -variété irréductible au-dessus de  $(K, \delta)$ . On a équivalence entre :

- (i) La  $D$ -variété irréductible  $(X, \delta_X)$  est sans intégrale première rationnelle.
- (ii) Pour toute variété  $Y$  de dimension  $> 0$  au dessus du corps des constantes  $k = K^\delta$  de  $(K, \delta)$ , il n'existe pas de morphisme rationnel dominant de  $D$ -schémas au dessus de  $(K, \delta)$

$$f : (X, \delta_X) \dashrightarrow (Y, 0) \times_{(k, 0)} (K, \delta).$$

DÉMONSTRATION. On raisonne par contraposition. Soit  $f \in (K(X), \delta_X)$  une intégrale première rationnelle non constante. La fonction  $f$  détermine un morphisme rationnel dominant de  $D$ -schémas au dessus de  $(K, \delta)$

$$f : (X, \delta_X) \longrightarrow (\mathbb{A}^1, 0) \times_{(k, 0)} (K, \delta)$$

On en déduit que (ii)  $\implies$  (i).

Réciproquement, supposons qu'il existe un morphisme  $(X, \delta_X) \dashrightarrow (Y, 0) \times_{(k,0)} (K, \delta)$  rationnel dominant. Considérons  $f \in k(Y)$  une fonction rationnelle non constante. Le morphisme rationnel dominant obtenu par composition

$$(X, \delta_X) \dashrightarrow (Y, 0) \times_{(k,0)} (K, \delta) \dashrightarrow (\mathbb{A}^1, 0) \times_{(k,0)} (K, \delta)$$

est un morphisme de  $D$ -schémas. On en déduit qu'il correspond à une intégrale première rationnelle non constante de  $(X, \delta_X)$ .  $\square$

**Théorème 2.3.4.** *Soient  $(K, \delta)$  un corps différentiel et  $(X, \delta_X)$  une  $D$ -variété absolument irréductible au dessus de  $(K, \delta)$ . On a équivalence entre :*

- (i) *Le type générique de  $(X, \delta_X)$  est orthogonal aux constantes.*
- (ii) *Pour toute extension de corps différentiels  $(K, \delta) \subset (L, \delta_L)$ , le changement de base  $(X, \delta_X)_{(L, \delta_L)}$  est sans intégrale rationnelle non constante.*
- (iii) *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la  $D$ -variété produit  $(X, \delta_X)^n$  est sans intégrale première rationnelle non constante.*

DÉMONSTRATION. (i)  $\implies$  (ii) : Supposons qu'il existe une extension de corps différentiels  $(K, \delta) \subset (L, \delta_L)$  telle que le changement de base  $(X, \delta_X)_{(L, \delta_L)}$  admette une intégrale première non constante  $f \in (K(X), \delta_X)$ . On obtient un morphisme rationnel dominant de  $D$ -schémas au dessus de  $(L, \delta_L)$  :

$$f : (X, \delta_X)_{(L, \delta_L)} \dashrightarrow (\mathbb{A}^1, 0) \times_{(L^\delta, 0)} (L, \delta_L)$$

Les types génériques de  $(X, \delta_X)_{(L, \delta_L)}$  et de  $(\mathbb{A}^1, 0) \times_{(L^\delta, 0)} (L, \delta)$  ne sont pas faiblement orthogonaux d'après le lemme 2.2.14.

De plus, d'après la propriété (ii) du lemme 2.2.12, le type générique de  $(X, \delta_X)_{(L, \delta_L)}$  est l'unique extension non-déviante à  $L$  du type générique de  $(X, \delta_X)$  et le type générique de  $(\mathbb{A}^1, 0) \times_{(L^\delta, 0)} (L, \delta)$  est l'unique extension non déviante à  $L$  du type générique des constantes. On en déduit que  $p_{(X, \delta_X)}$  est non-orthogonal au type générique des constantes.

(ii)  $\implies$  (iii) Considérons  $f$  une intégrale première rationnelle de  $(X, \delta_X)^n$  avec  $n \geq 1$  minimal :

$$f : (X, \delta_X)^n \dashrightarrow (\mathbb{A}^1, 0) \times_{(k,0)} (K, \delta)$$

On note  $(L, \delta_L)$  le corps des fractions de la  $D$ -variété irréductible  $(X, \delta_X)^{n-1}$ . Par minimalité de  $n \in \mathbb{N}$ , la  $D$ -variété  $(X, \delta_X)^{n-1}$  n'admet pas d'intégrales premières rationnelles non constantes et donc  $L^{\delta_L} = k$ . Par changement de base,  $f$  induit une intégrale première

$$\tilde{f} : (X, \delta_X)_{(L, \delta_L)} \dashrightarrow (\mathbb{A}^1, 0) \times_{(k,0)} (L, \delta_L)$$

qui est non constante car  $f \notin k$  et  $L^{\delta_L} = k$ .

(iii)  $\implies$  (i) : On note  $q$  le type générique des constantes.

**Lemme 2.3.5.** *Soit  $(K, \delta)$  un corps différentiel et  $p \in S(K)$  un type non-orthogonal aux constantes. Il existe un entier  $n \in \mathbb{N}$ , une réalisation  $a$  de  $p^{\otimes n}$  et une réalisation  $b$  de  $q|_K$  telle que  $b \in \text{dcl}(a, K)$ .*

DÉMONSTRATION. D'après le lemme 1.2.5, il existe des entiers  $n, m \in \mathbb{N}$  tels que les types  $p^{\otimes m}$  et  $q^{\otimes n}$  ne sont pas faiblement orthogonaux. Considérons des réalisations  $a \models p^{\otimes m}$  et  $b \models q^{\otimes n}$  telles que  $a \not\perp_K b$ . Il existe donc une formule  $\phi(x, y)$  à paramètres dans  $K$  telle que

$$b \in \phi(\mathcal{U}, a) \subset \mathcal{C}^n \text{ et } \text{RM}(\phi(\mathcal{U}, a)) < n.$$

Le sous-ensemble  $\phi(\mathcal{U}, a) \subset \mathcal{C}^n$  est un sous-ensemble définissable à paramètres dans  $(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})$ . D'après le corollaire 1.3.9, le corps des constantes est un pur corps algébriquement clos stablement plongé (et donc en particulier élimine les imaginaires dans le langage des anneaux). Il existe donc un paramètre canonique  $c \in \mathcal{C}^l$  pour la formule  $\phi(\mathcal{U}, a)$ , c'est-à-dire que pour tout automorphisme de corps  $\sigma \in \text{Aut}(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})$ , on a

$$\sigma(c) = c \text{ si et seulement si } \sigma(\phi(\mathcal{U}, a)) = \phi(\mathcal{U}, a).$$

En particulier, on a  $c \in \text{dcl}(K, a)$ . Montrons que  $\text{RU}(c/K) > 0$ . En effet, le rang de Lascar et le rang de Morley coïncident dans un corps algébriquement clos (exemple 1.1.6). On a alors :

$$n = \text{RU}(b/K) > \text{RM}(\phi(x, a)) \geq \text{RM}(b/K, c) = \text{RU}(b/K, c).$$

On en déduit que  $c \not\perp_K b$  et donc que le rang de Lascar de  $c$  sur  $K$  est  $\geq 1$ . Il suffit alors de remplacer  $c$  par une coordonnée non algébrique de  $c$ .  $\square$

Supposons que  $p = p_{(X, \delta_X)}$  est non-orthogonal aux constantes. D'après le lemme précédent, il existe un entier  $n \in \mathbb{N}$ , une réalisation  $a$  de  $p^{\otimes n}$  et une réalisation  $b$  de  $q|_K$  telle que  $b \in \text{dcl}(a, K)$ .

Comme  $p^{\otimes n}$  est le type générique de  $(X, \delta_X)^n$ , il suffit d'appliquer le lemme 2.2.14 pour obtenir une intégrale première non constante de  $(X, \delta_X)^n$ , ce qui montre par contraposition que (iii)  $\implies$  (i).  $\square$

**Remarque 2.3.6.** Modulo la proposition 2.2.14, l'équivalence entre (i) et (iii) se réduit à l'énoncé suivant (valable dans toute théorie stable) : Soient  $T$  une théorie stable éliminant les imaginaires et  $\mathfrak{M}$  un modèle de  $T$   $\kappa$ -saturé.

Considérons  $A$  un ensemble de paramètres petit,  $D$  un ensemble fortement minimal  $A$ -définissable éliminant les imaginaires et  $p \in S(A)$  un type stationnaire. Alors le type  $p$  est non-orthogonal au type générique de  $D$  si et seulement s'il existe  $\bar{a} \in M^n$  réalisant  $p^{(n)}$  tel que  $\text{dcl}(K) \cap D \subsetneq \text{dcl}(K\bar{a}) \cap D$ .

### 3. Un critère d'orthogonalité aux constantes pour les $D$ -variétés réelles

On s'intéresse désormais aux  $D$ -variétés  $(X, v_X)$  définies sur le corps  $\mathbb{R}$  des nombres réels muni de la dérivation triviale. On dispose d'un foncteur d'analytification réel vers la catégorie des espaces analytiques réels munis de champs de vecteurs. Sous des hypothèses de lissité, on peut alors, par les théorèmes classiques d'existence et d'unicité des solutions d'équations différentielles analytiques, intégrer ce champ de vecteur et obtenir un flot réel analytique. Lorsque ce flot est complet (ce qui est automatique sous des hypothèses de compacité), il définit une action continue du groupe additif  $(\mathbb{R}, +)$  sur l'espace topologique métrisable  $X(\mathbb{R})^{an}$ .

Le critère d'orthogonalité aux constantes que nous présentons (Théorème 3.3.8) consiste en une obstruction topologique à la présence d'intégrale première rationnelle pour ce flot complet et tous ses produits. L'argument essentiel est donné par une notion élémentaire de la théorie des systèmes dynamiques topologiques : les flots faiblement topologiquement mélangeants.

Dans la première section, on étudie le foncteur d'analytification réel (ainsi que son analogue complexe) et son effet sur les sous-variétés fermées invariantes. Dans la deuxième section, on donne une présentation auto-contenue des résultats de dynamique topologique que nous utiliserons, en particulier la notion de flot faiblement topologiquement mélangeant. Enfin, la troisième section est une preuve du critère d'orthogonalité aux constantes annoncé.

**3.1. Des  $D$ -variétés réelles aux flots réels.** On présente les foncteurs d'analytification réel (resp. complexe) pour les  $D$ -variétés réelles (resp. complexe). Sous des hypothèses de lissité, on construit alors le flot réel associé (resp. le flot complexe associé). On supposera que le lecteur est familier avec les résultats élémentaires de la théorie des équations différentielles (voir [Arn06] pour le cas réel et la partie 1 du chapitre 1 de [IY08] pour le cas complexe).

*Contrairement au cas algébrique, on suivra la terminologie analytique usuelle c'est-à-dire que les variétés analytiques seront toujours supposées lisses et on parlera d'espaces analytiques (réels ou complexes) lorsque l'on travaillera sans hypothèse de lissité.*

3.1.1. *Flot réel d'une  $D$ -variété réelle.* On présente d'abord le foncteur d'analytification pour les  $D$ -variétés réelles.

**Définition 3.1.1.** On appellera  *$D$ -espace analytique réel*, tout couple  $(M, v_M)$  où  $M$  est un espace analytique réel et  $v_M$  un champ de vecteurs analytique sur  $M$ . Si l'espace analytique réel sous-jacent  $M$  est lisse, on dit que  $(M, v_M)$  est une  *$D$ -variété analytique réelle*.

Si  $(M, v_M)$  et  $(N, v_N)$  sont deux espaces analytiques réels, on définit les morphismes de  $(M, v_M)$  vers  $(N, v_N)$  comme les applications analytiques  $f : M \rightarrow N$  vérifiant  $df(v_M) = f^*v_N$ .

**Construction 3.1.2.** Soit  $(X, v_X)$  une  $D$ -variété au dessus de  $(\mathbb{R}, 0)$ . On munit l'ensemble des points réels  $M = X(\mathbb{R})$  de sa structure analytique  $(M, \mathcal{O}_M)$ , i.e. de la topologie métrisable d'espace analytique et du faisceau des fonctions analytiques  $\mathcal{O}_M$ .

**Remarque 3.1.3.** L'espace analytique réel  $(M, \mathcal{O}_M)$  est lisse si et seulement si  $X(\mathbb{R})$  est contenu dans l'ouvert  $X_{reg}$  des points régulier de  $X$ .

Le champ de vecteurs  $v_X$  induit alors un champ de vecteurs analytique sur  $M$  noté  $v_M$ . On a ainsi construit un  $D$ -espace analytique réel  $(M, v_M)$ .

La correspondance  $(X, v_X) \mapsto (M, v_M)$  détermine un foncteur appelé *foncteur d'analytification réel* de la catégorie des  $D$ -variétés au dessus de  $(\mathbb{R}, 0)$  vers la catégorie des  $D$ -espaces analytiques réels.

**Construction 3.1.4.** Soit  $(M, v_M)$  une  $D$ -variété réelle analytique. Le théorème d'existence et d'unicité de solutions pour les équations différentielles analytiques (voir [Arn06, §35]) assure l'existence pour tout  $x \in M$ , d'un unique ouvert connexe  $U_x \subset \mathbb{R}$  maximal et d'une application analytique  $\phi_x : U_x \rightarrow M$  telle que

$$\begin{cases} \phi_x(0) = x \\ \forall t \in U_x, \frac{d}{dt}\phi_x(t) = v_M(\phi_x(t)). \end{cases}$$

De plus, l'ensemble  $U = \bigsqcup_{x \in M} U_x \subset \mathbb{R} \times M$  est un voisinage connexe de  $\{0\} \times M$  et la collection des  $(\phi_x)_{x \in M}$  définit une application analytique  $\phi : U \rightarrow M$  vérifiant :

$$\begin{cases} \forall x \in M, \phi(0, x) = x \\ \forall t \in U_x, \frac{d}{dt}\phi(t, x) = v_M(\phi(t, x)). \end{cases}$$

**Définition 3.1.5.** Soit  $(M, v_M)$  une  $D$ -variété analytique réelle. On appelle *flot réel (maximal) de  $(M, v_M)$* , le couple  $(U, \phi)$  maximal associé par la construction 3.1.4.

On dira de plus que le flot  $(U, \phi)$  est *complet* si  $U = \mathbb{R} \times M$ .

**Lemme 3.1.6** ([Arn06, §35]). Soit  $(M, v_M)$  une  $D$ -variété analytique réelle compacte. Le flot réel de  $(M, v_M)$  est complet.

**Remarque 3.1.7.** Soit  $(M, v_M)$  une  $D$ -variété analytique réelle et  $(U, \phi)$  le flot réel associé. On appelle *courbe intégrale ou orbite au point  $x \in X$* , le sous-ensemble

$$\mathcal{O}_x = \{\phi(t, x) \mid (t, x) \in U\}.$$

On observera que la partition de  $M$  selon les courbes intégrales du champ de vecteurs  $v_M$  définit un feuilletage analytique en courbes sur  $M$  dont les singularités sont les zéros du champ de vecteur  $v_M$ .

**Définition 3.1.8.** Soit  $(M, v_M)$  une  $D$ -variété analytique réelle et  $A \subset M$  un sous-ensemble. On note  $(U, \phi)$  le flot associé à  $(M, v_M)$ . On dit que  $A \subset M$  est  *$\phi$ -invariant* si

$$\phi((\mathbb{R} \times A) \cap U) \subset A.$$

Autrement dit, le sous-ensemble  $A \subset M$  est invariant si et seulement si pour tout  $a \in A$  et tout  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $(t, a) \in U$ , on a  $\phi(t, a) \in A$ .

On montre maintenant que la propriété d'invariance est de nature locale.

**Notation 3.1.9.** Soient  $M$  une variété analytique réelle et  $a \in M$ . On note  $(M, a)$  le germe de l'espace analytique  $M$  en  $a$ . Si  $A \subset M$  est un sous-ensemble de  $M$ , on note  $[A]_a$  le germe de  $A$  en  $a$ , c'est-à-dire la classe d'équivalence de  $A$  modulo la relation d'équivalence définie par :

$$A \sim_a B \text{ si et seulement si il existe un voisinage } V \subset M \text{ de } a \text{ tel que } A \cap V = B \cap V.$$

La relation d'inclusion entre les sous-ensembles de  $M$  induit une relation d'inclusion sur les germes donnée pour  $A, B \subset M$  par :

$$[A]_a \subset [B]_a \text{ si et seulement si il existe un voisinage } V \text{ de } a \text{ dans } M \text{ tels que } A \cap V \subset B.$$

**Lemme 3.1.10.** Soient  $(M, v_M)$  une  $D$ -variété analytique réelle et  $A \subset M$  un sous-ensemble fermé. On note  $(U, \phi)$  le flot réel associé. On a équivalence entre :

- (i) Le sous-ensemble  $A \subset M$  est  $\phi$ -invariant.
- (ii) Pour tout  $a \in A$ , le germe du flot  $\phi$  en  $(0, a)$  noté  $\phi_a : (\mathbb{R} \times M, (0, a)) \rightarrow (M, a)$  vérifie

$$\phi_a([\mathbb{R} \times A]_{(0, a)}) \subset [A]_a.$$

**DÉMONSTRATION.** L'implication (i)  $\implies$  (ii) est tautologique. Montrons que (ii)  $\implies$  (i). Considérons  $a \in A$  et notons  $U_a = \{t \in \mathbb{R} \mid (t, a) \in U\}$  qui est un ouvert connexe de  $\mathbb{R}$ .

L'ensemble  $G = \{t \in U_a \mid \phi(t, a) \in A\} \subset U_a$  est fermé non vide car  $A \subset M$  est un sous-ensemble fermé. Pour tout  $t \in G$ , la propriété (ii) appliquée en  $a' = \phi_t(a)$  montre que  $G$  est un voisinage de  $t$ . On en déduit que  $G$  est ouvert.

Par connexité de  $U_a$ , on en déduit que  $G = U_a$  et donc que  $A$  est  $\phi$ -invariant.  $\square$

**Définition 3.1.11.** Soient  $X$  une variété algébrique sur  $(\mathbb{R}, 0)$  et  $v_X$  un champ de vecteurs rationnel sur  $X$ . On appelle *flot réel régulier* de  $(X, v_X)$ , le flot réel associé à l'analytifié de la  $D$ -variété lisse  $(U, v|_U)$  où  $U = X \setminus (\text{Sing}(X) \cup \text{Sing}(v_X))$ <sup>4</sup>.

**Remarque 3.1.12.** Soit  $(X, v_X)$  une  $D$ -variété réelle. La connaissance du flot réel régulier de  $(X, v_X)$  n'est pas suffisante pour étudier les sous-variétés invariantes de  $(X, v_X)$  et de ses produits : Les sous-variétés invariantes  $W \subset (X, v_X)$  sans points réels n'auront aucune trace dans  $X(\mathbb{R})$ . Il suffit par exemple que  $X(\mathbb{R}) = \emptyset$  et on ne peut rien dire du tout.

3.1.2. *Flot complexe d'une  $D$ -variété complexe.* En travaillant avec un flot complexe, plutôt qu'avec le flot réel, on résout complètement la difficulté précédente. Néanmoins, contrairement au cas réel, le flot complexe n'admet pas d'ouvert maximal de définition et il faut travailler localement avec des germes de flots.

**Définition 3.1.13.** On appelle  *$D$ -espace analytique complexe*, tout couple  $(M, v_M)$  où  $M$  est un espace analytique complexe et  $v_M$  un champ de vecteurs analytique sur  $M$ .

**Construction 3.1.14.** Soit  $(X, v_X)$  une  $D$ -variété au dessus de  $(\mathbb{C}, 0)$ .

On munit l'ensemble  $M = X(\mathbb{C})$  de sa structure analytique complexe. Le champ de vecteurs  $v_X$  induit un champ de vecteurs analytique  $v_M$  sur  $M$ . On obtient ainsi un  $D$ -espace analytique complexe  $(M, v_M)$ .

Comme dans le cas réel, la construction précédente détermine un foncteur de la catégorie des  $D$ -variétés au dessus de  $(\mathbb{C}, 0)$  vers la catégorie des  $D$ -espaces analytiques complexes appelé *foncteur d'analytification complexe*. Contrairement au cas réel, ce foncteur est fidèle et réalise donc la catégorie des  $D$ -variétés au dessus de  $(\mathbb{C}, 0)$  comme une sous-catégorie de la catégorie des  $D$ -espaces analytiques complexes.

**Définition 3.1.15.** Soit  $(M, v_M)$  un  $D$ -espace analytique complexe. Le champ de vecteurs  $v_M$  induit une dérivation  $\delta_M : \mathcal{O}_M \rightarrow \mathcal{O}_M$  sur le faisceau  $\mathcal{O}_M$  des fonctions analytiques sur  $M$ . Un sous-espace analytique fermé  $Z \subset (M, v_M)$  est appelée  *$\delta_M$ -invariant* si le faisceau d'idéaux  $I_Z \subset \mathcal{O}_M$  définissant  $Z$  est stable par la dérivation  $\delta_M$ .

**Remarque 3.1.16.** Dans le cas où le  $D$ -espace analytique complexe  $(M, v_M)$  est l'analytifié d'une  $D$ -variété au dessus de  $(\mathbb{C}, 0)$  et où la sous-variété analytique  $Z \subset (M, v_M)$  est l'analytifié d'une sous-variété algébrique, les deux notions d'invariance (analytique et algébrique) coïncident.

**Construction 3.1.17.** Soit  $(M, v_M)$  une  $D$ -variété analytique complexe. Le théorème d'existence et d'unicité locale de solutions pour les équations différentielles analytiques complexes [IY08, Théorème 1.1] assure que pour tout point  $y \in M$ , il existe un voisinage connexe  $U_y \subset \mathbb{C} \times M$  de  $(0, y)$  et d'une application analytique  $\phi : U_y \rightarrow M$  tels que

$$\begin{cases} \forall (0, x) \in U_y, \phi(0, x) = x \\ \forall (t, x) \in U_y, \frac{d}{dt}\phi(t, x) = v_M(\phi(t, x)). \end{cases}$$

De plus, le germe de  $(U_y, \phi)$  en  $(y, 0)$  est unique.

**Définition 3.1.18.** Soient  $(M, v_M)$  une  $D$ -variété analytique complexe et  $y \in M$ . On appelle *germe de flot* de  $v_M$  en  $y \in M$ , le germe  $\phi_y : (\mathbb{C} \times M, (y, 0)) \rightarrow (M, y)$  associé par la construction 3.1.17.

**Définition 3.1.19.** Soient  $(M, v_M)$  une  $D$ -variété analytique complexe et  $A \subset M$  un sous-ensemble. On dit que  $A \subset M$  est  *$\phi$ -invariant* si pour tout  $a \in A$ , le germe du flot  $\phi$  en  $(0, a)$  noté  $\phi_a : (\mathbb{C} \times M, (0, a)) \rightarrow (M, a)$  vérifie

$$\phi_a([\mathbb{C} \times A]_{(0,a)}) \subset [A]_a.$$

4. Ici,  $\text{Sing}(v_X)$  désigne le complémentaire du plus grand ouvert de définition de  $v_X$ .



**Proposition 3.1.20.** *Soient  $(M, v_M)$  une  $D$ -variété analytique complexe et  $Z \subset M$  un sous-espace analytique complexe. On a équivalence entre :*

- (i) *La sous-variété analytique  $Z \subset (M, v_M)$  est un sous-espace analytique  $\delta_M$ -invariant.*
- (ii) *Le sous-ensemble  $Z \subset M$  est  $\phi$ -invariant.*

Soit  $a \in Z$ . On note  $\mathcal{O}_{M,a}$  l'anneau local des germes de fonctions analytiques sur  $M$  en  $a$ . Le champ de vecteurs  $v_M$  munit l'anneau  $\mathcal{O}_{M,a}$  d'une dérivation notée  $\delta_a : \mathcal{O}_{M,a} \rightarrow \mathcal{O}_{M,a}$ . En notant  $\mathcal{O}_{M,a}\{t\}$  l'anneau local des germes de fonctions analytiques sur  $\mathbb{C} \times M$  en  $(0, a)$ , le germe du flot  $\phi$  en  $a$  induit un morphisme d'anneaux :

$$\phi_a^\# : \begin{cases} \mathcal{O}_{M,a} \longrightarrow \mathcal{O}_{M,a}\{t\} \\ f \mapsto f \circ \phi_a \end{cases}$$

Nous noterons encore  $\delta_a : \mathcal{O}_{M,a}\{t\} \rightarrow \mathcal{O}_{M,a}\{t\}$  la dérivation déduite de  $\delta_a$  définie par :

$$\delta_a \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n \cdot t^n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_a(f_n) \cdot t^n.$$

Remarquons que le morphisme d'anneaux  $\cdot|_{t=0} : \mathcal{O}_{M,a}\{t\} \rightarrow \mathcal{O}_{M,a}$  est alors un morphisme d'anneaux différentiels.

**Lemme 3.1.21.** *Avec les notations précédentes, on a pour tout  $f \in \mathcal{O}_{M,a}$ ,*

$$\begin{cases} \phi_a^\#(f)|_{t=0} = f \\ \frac{d}{dt} \phi_a^\#(f) = \delta_a(\phi_a^\#(f)) \end{cases} \quad (*)$$

où  $\frac{d}{dt}$  désigne la dérivation usuelle sur  $\mathcal{O}_{M,a}\{t\}$ . De plus, on a :

$$\phi_a^\#(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta_a^n(f)}{n!} t^n. \quad (**)$$

Les identités (\*) découlent aussitôt de la définition du flot  $\phi$  (Construction 3.1.17). La formule (\*\*) est une conséquence immédiate de (\*). Des formules du type (\*\*) apparaissent déjà chez Cauchy.

**PREUVE DE LA PROPOSITION 3.1.20.** Montrons que (ii)  $\implies$  (i). Il suffit de montrer que pour tout  $a \in Z$ , le faisceau d'idéaux  $I_{Z,a} \subset \mathcal{O}_{M,a}$  est stable par la dérivation  $\delta_a$ .

Fixons  $a \in Z$ . Par définition, on a  $\phi_a([\mathbb{C} \times Z]_{(0,a)}) \subset [Z]_a$ . On en déduit que pour tout  $f \in I_{Z,a}$ , on a :

$$\phi_a^\#(f) \in I_{\mathbb{C} \times Z, (0,a)} = I_{Z,a} \cdot \mathcal{O}_{M,a}\{t\}$$

Le lemme 3.1.21 permet de conclure que  $\delta_a(f) = \frac{d}{dt} \phi_a^\#(f)|_{t=0} \in I_{Z,a}$ , ce qui montre que  $Z \subset (M, v_M)$  est bien une sous-variété analytique invariante.

Réciproquement, supposons que  $Z \subset (M, v_M)$  est une sous-variété invariante. Fixons  $a \in Z$ . On a donc pour tout  $f \in I_{Z,a} \subset \mathcal{O}_{M,a}$  et tout entier  $n \geq 1$ ,  $\frac{1}{n!} \delta_a^n(f) \in I_{Z,a}$ . Le lemme 3.1.21 permet d'affirmer que

$$f \in I_{Z,a} \implies \phi_a^\#(f) \in I_{Z,a} \cdot \mathcal{O}_{M,a}\{t\} = I_{\mathbb{C} \times Z, (0,a)}.$$

On en déduit que  $\phi_a([\mathbb{C} \times Z]_{(0,a)}) \subset [Z]_a$ , ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

### 3.1.3. Compatibilité des différentes notions d'invariances.

**Proposition 3.1.22.** *Soient  $(X, v_X)$  une  $D$ -variété lisse au dessus de  $(\mathbb{R}, 0)$  et  $Z \subset X$  une sous-variété fermée invariante (définie sur  $\mathbb{R}$ ). On note  $(M, \phi)$  le flot réel de  $(X, v_X)$ . L'ensemble  $Z(\mathbb{R}) \subset M$  est un fermé  $\phi$ -invariant.*

Autrement dit, si  $Z \subset X$  est une sous-variété fermée invariante alors pour tout  $x \in Z(\mathbb{R})$ , l'orbite  $\mathcal{O}_x$  de  $x$  est contenue dans  $Z$ .

**DÉMONSTRATION.** Soit  $Z \subset X$  une sous-variété fermée invariante. D'après la remarque 3.1.16, la sous-variété fermée analytique  $Z(\mathbb{C})^{an} \subset M_{\mathbb{C}} = X(\mathbb{C})^{an}$  est  $\delta_{M_{\mathbb{C}}}$ -invariante. D'après la proposition 3.1.20, on en déduit que, en notant  $\phi_a$  le germe du flot complexe en  $a \in M_{\mathbb{C}}$ , on a :

$$\phi_a([\mathbb{C} \times Z(\mathbb{C})]_{(0,a)}) \subset [Z(\mathbb{C})]_a$$

Si  $a \in M \subset M_{\mathbb{C}}$ , le germe du flot réel en  $a$  est la restriction du germe du flot complexe aux nombres réels et vérifie :

$$\phi_a([\mathbb{R} \times M]_{(0,a)}) \subset [M]_a.$$

En prenant les intersections, on obtient que pour tout  $a \in X(\mathbb{R})$  :

$$\phi_a([\mathbb{R} \times Z(\mathbb{R})]_{(0,a)}) \subset [Z(\mathbb{R})]_a.$$

Le lemme 3.1.10 permet de conclure que  $Z(\mathbb{R})$  est  $\phi$ -invariant.  $\square$

Voici une réciproque partielle au résultat précédent. Elle ne sera pas utilisée dans la preuve du critère d'orthogonalité aux constantes.

**Proposition 3.1.23.** *Soit  $(X, v_X)$  une  $D$ -variété lisse au-dessus de  $(\mathbb{R}, 0)$ . On note  $(M, \phi)$  le flot réel de  $(X, v_X)$ . Si  $A \subset X(\mathbb{R})$  est un sous-ensemble  $\phi$ -invariant alors la clôture de Zariski  $\bar{A}$  de  $A$  est une sous-variété fermée invariante de  $(X, v_X)$ .*

DÉMONSTRATION. Remarquons d'abord que d'après le lemme 2.1.12, on peut supposer que  $X$  est affine. On note  $Z = \bar{A}$  la clôture de Zariski de  $A$  dans  $X$ .

Il suffit de vérifier que l'idéal  $I \subset \mathcal{O}_M(M)$  des fonctions analytiques qui s'annulent sur  $A$  est stable par la dérivation  $\delta_v : \mathcal{O}_M \rightarrow \mathcal{O}_M$  induite par le champ de vecteurs  $v_M$  sur  $M$ . En effet, en utilisant l'inclusion  $\mathbb{R}[X] \subset \mathcal{O}_M(M)$ , l'idéal  $I_Z \subset \mathbb{R}[X]$  définissant  $Z$  est donné par

$$I_Z = I \cap \mathbb{R}[X] \subset \mathcal{O}_M(M).$$

Ces deux sous-ensembles sont stables par la dérivation  $\delta_v$ , et donc  $Z$  est une sous-variété invariante de  $(X, v_X)$ .

Montrons donc que le faisceau d'idéaux  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_M$  des fonctions analytiques s'annulant sur  $A$  est invariant par la dérivation  $\delta_v$ .

Soient  $f \in \mathcal{I}$  et  $x \in M$ . En notant  $\phi_x : (\mathbb{R} \times M, (0, x)) \rightarrow (M, x)$  le germe du flot  $\phi$  en  $x$ , le germe de  $\delta_v(f)$  en  $x$  est donné par :

$$\delta_v(f)_x = \frac{d}{dt}[f \circ \phi_x]_{t=0}.$$

Comme  $A$  est un sous-ensemble  $\phi$ -invariant, on a  $f \circ \phi_x([\mathbb{R} \times A]_{(0,x)}) = 0$  et donc

$$\delta_v(f)_x([A]_x) = \frac{d}{dt}[f \circ \phi_x]_{t=0}([A]_x) = 0.$$

On en déduit que le germe  $\delta_v(f)_x$  de  $\delta_v(f)$  en  $x$  appartient à  $\mathcal{I}_x$  pour tout  $x \in M$  et donc que  $\delta_v(f) \in \mathcal{I}$ .  $\square$

**Corollaire 3.1.24.** *Soit  $(X, v_X)$  une  $D$ -variété au dessus de  $(\mathbb{R}, 0)$ . La clôture de Zariski de  $X(\mathbb{R})$  dans  $X$  est une sous-variété fermée invariante.*

Il suffit d'appliquer successivement les deux proposition 3.1.22 et 3.1.23. Cet énoncé a la forme d'un énoncé d'algèbre différentielle mais il est propre à l'extension de corps  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ . Il n'est pas difficile de construire des exemples de  $D$ -variétés  $(X, v_X)$  définie sur le corps  $\mathbb{Q}$  des nombres rationnels telles que la clôture de Zariski de  $X(\mathbb{Q})$  ne soit pas invariante.

Par exemple, si  $C$  est une courbe affine sur le corps  $\mathbb{Q}$  admettant un nombre fini de points rationnels et si  $v_C$  est un champ de vecteurs régulier sur  $C$  qui ne s'annule pas en tous les points de  $C(\mathbb{Q})$  alors la sous-variété fermée  $\overline{C(\mathbb{Q})} = C(\mathbb{Q}) \subset (C, v_C)$  n'est pas invariante.

**3.2. Flots topologiquement transitifs et topologiquement mélangeants.** Dans cette partie, on se restreint à l'étude de flots réels complets  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$ . De plus, au lieu de considérer des flots analytiques réels, on considère plus généralement des flots continus sur un espace métrisable, ce qui est le cadre naturel pour les résultats de cette partie.

Un flot réel continu s'identifie alors à une action du groupe additif  $(\mathbb{R}, +)$  des nombres réels sur un espace métrisable  $M$  et donc à un système dynamique pour le groupe additif des nombres réels.

On renvoie aux trois premières sections du chapitre 1 de [Gla03] pour des résultats et notions analogues dans le cadre plus général des systèmes dynamiques sur un groupe topologique localement compact et de cardinal  $\leq 2^{\aleph_0}$ . Dans les prochains paragraphes, on donne une présentation autonome des résultats qui nous seront utiles dans la suite.

3.2.1. *Flot topologiquement transitif.* On fixe  $M$  un espace topologique métrisable.

**Définition 3.2.1.** Soit  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  un flot continu complet. On dit que  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  est un *flot topologiquement transitif* si pour tout couple d'ouverts non vides  $U, V \subset M$ , il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $\phi_t(U) \cap V \neq \emptyset$ .

**Notation 3.2.2.** Soit  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  un flot continu complet. Pour tout couple d'ouverts non vides  $U, V \subset X$ , on note

$$N(U, V) = \{t \in \mathbb{R} \mid \phi_t(U) \cap V \neq \emptyset\} \subset \mathbb{R}$$

Un flot complet  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  est topologiquement transitif si et seulement si pour tout couple d'ouverts non vides  $U, V \subset M$ , le sous-ensemble  $N(U, V) \subset \mathbb{R}$  est non vide.

**Remarque 3.2.3.** Pour tout couple d'ouverts non vides  $U, V \subset \mathbb{R}$ , le sous-ensemble  $N(U, V) \subset \mathbb{R}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$ . On en déduit que  $N(U, V)$  s'écrit comme une union (au plus) dénombrable et éventuellement vide d'intervalles ouverts disjoints de  $\mathbb{R}$ .

De plus, remarquons que  $N(U, V) = -N(V, U) \subset \mathbb{R}$ .

**Exemple 3.2.4.** Si  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  est le flot continu complet sur le disque unité  $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  induit par le champ de vecteurs unitaire sur  $\mathbb{S}^1$  alors pour tout couple d'intervalles ouverts non vides  $U, V \subset \mathbb{S}^1$ , il existe  $a < b \in \mathbb{R}$  tels que

$$N(U, V) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ]a + 2.\pi k\mathbb{Z}; b + 2.\pi k\mathbb{Z}[.$$

Si  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  est le flot continu complet sur la droite réelle induit par le champ de vecteurs constant  $\frac{d}{dt}$  alors pour tout couple d'intervalles ouverts bornés non vides  $U, V \subset \mathbb{R}$ , il existe  $a < b \in \mathbb{R}$  tels que

$$N(U, V) = ]a, b[.$$

En particulier, les deux flots précédents sont topologiquement transitifs.

Avec des hypothèses topologiques raisonnables, on a la caractérisation suivante des flots continus topologiquement transitifs.

**Proposition 3.2.5.** Soit  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  un flot complet continu. Supposons que  $M$  soit localement compact et séparable. Les propriétés suivantes sont alors équivalentes :

- (i) Le flot  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  est topologiquement transitif.
- (ii) Il existe une orbite dense dans  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$ .

DÉMONSTRATION. (ii)  $\Rightarrow$  (i) Soient  $U, V \subset M$  un couple d'ouverts non vide de  $M$ . Considérons  $x \in M$  dont l'orbite est dense dans  $M$ .

Comme l'orbite de  $x$  est dense dans  $M$ , il existe un réel  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $\phi_t(x) \in U$  et un entier  $s \in \mathbb{R}$  tel que  $\phi_s(x) \in V$ . On en déduit que

$$\phi_{-s}(V) \cap \phi_{-t}(U) \neq \emptyset \text{ et donc } \phi_{s-t}(U) \cap V \neq \emptyset.$$

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Considérons une base dénombrable d'ouverts  $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de l'espace métrique séparable  $M$ . Remarquons qu'un sous-ensemble de  $M$  est dense si et seulement s'il rencontre tous les  $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ .

On construit par récurrence sur  $k \in \mathbb{N}^*$  une suite de compacts d'intérieur non vide

$$V_k \subset V_{k-1} \subset \cdots \subset V_1$$

tels que l'orbite de tout point de  $V_i$  rencontre les ouverts  $U_1, \dots, U_i$ .

— Pour  $n = 1$ , comme  $M$  est localement compact, il existe un compact  $V_1 \subset U_1$  d'intérieur non vide.

— Supposons  $V_k \subset V_{k-1} \subset \cdots \subset V_1$  construits. Par hypothèse,  $\overset{\circ}{V}_k$  est un ouvert non vide.

Comme le flot est topologiquement transitif, il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $\overset{\circ}{V}_k \cap \phi_t(U_{k+1}) \neq \emptyset$ .

L'ensemble  $\overset{\circ}{V}_k \cap \phi_t(U_{k+1})$  est un ouvert non vide de  $M$  et par construction, l'orbite de chacun de ses points rencontre  $U_1, \dots, U_{k+1}$ . Comme  $M$  est localement compact, il suffit

de choisir un compact  $V_{k+1}$  d'intérieur non vide tel que  $V_{k+1} \subset \overset{\circ}{V}_k \cap \phi_t(U_{k+1})$ .

Une intersection de compacts non vides emboîtés étant toujours non vide, considérons  $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} V_k$ . Par construction, l'orbite de  $x$  rencontre tous les  $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et est donc dense dans  $M$ .  $\square$

**Corollaire 3.2.6.** *Soit  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  un flot complet continu. Supposons que  $M$  soit localement compact et séparable. Si le flot  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  est topologiquement transitif alors toute intégrale première continue est constante.*

En effet, si  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  est une intégrale première continue alors elle est constante sur chacune des orbites et donc en particulier sur l'une des orbites denses de  $M$  qui existe d'après la proposition précédente.

**Exemple 3.2.7.** Considérons le tore  $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$  et le flot  $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$  défini sur  $\mathbb{T}^n$  par le système d'équations différentielles linéaires

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = \omega_1 \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dt} = \omega_n \end{cases}$$

où  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{T}^n$ . Le flot complet  $(\mathbb{T}^n, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  défini par le système d'équations différentielles précédent est appelé *le flot constant sur le tore  $\mathbb{T}^n$  de fréquences  $\omega_1, \dots, \omega_n$* .

Le flot  $(\mathbb{T}^n, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  est topologiquement transitif si et seulement si les fréquences  $\omega_1, \dots, \omega_n$  sont  $\mathbb{Z}$ -indépendantes [KH95, Proposition 1.5.1].

**Remarque 3.2.8.** Un produit de deux flots complets topologiquement transitifs n'est pas toujours topologiquement transitif :

Considérons les flots constants sur  $\mathbb{T}^n$  de fréquences respectives  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  et  $(\tau_1, \dots, \tau_n)$ . Le flot produit est le flot constant sur  $\mathbb{T}^{2n}$  de fréquences  $(\omega_1, \dots, \omega_n, \tau_1, \dots, \tau_n)$ . D'après l'exemple 3.2.7, le flot produit est topologiquement transitif si et seulement si  $(\omega_1, \dots, \omega_n, \tau_1, \dots, \tau_n)$  sont  $\mathbb{Z}$ -linéairement indépendants. En particulier le produit d'un flot constant sur le tore avec lui-même n'est jamais topologiquement transitif.

3.2.2. *Flots faiblement topologiquement mélangeants.* La condition "être topologiquement transitif" n'est donc pas stable par produit. On s'intéresse donc désormais à la classe des flots complets continus  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le flot produit  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})^n$  est topologiquement transitif.

**Proposition 3.2.9.** *Soit  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  un flot continu. Les propriétés suivantes sont équivalentes*

- (i) *Le flot  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}) \times (M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  est topologiquement transitif.*
- (ii) *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le flot  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}) \times \dots \times (M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  est topologiquement transitif.*
- (iii) *La famille des  $N(U, V)$  où  $U$  et  $V$  parcourent l'ensemble des ouverts non vides de  $M$  est une famille filtrante de  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ .*

Rappelons que si  $E$  est un ensemble, une partie filtrante de  $\mathcal{P}(E)$  est une partie  $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$  vérifiant : pour tout  $A, B \in \mathcal{F}$  il existe  $C \in \mathcal{F}$  tel que  $C \subset A \cap B$ .

DÉMONSTRATION. (ii)  $\Rightarrow$  (i) est immédiat. Montrons que (iii)  $\Rightarrow$  (ii). Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour vérifier que  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})^n$  est topologiquement transitif, il suffit de vérifier que  $N(U, V) \neq \emptyset$  pour  $U$  et  $V$  parcourant une base d'ouverts de  $M^n$ .

Les ouverts de la forme  $U_1 \times \dots \times U_n$ , où  $U_1, \dots, U_n \subset M$  sont des ouverts de  $M$ , engendrent la topologie produit sur  $M^n$ . On en déduit que  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})^n$  est topologiquement transitif si et seulement si

$$N(U_1 \times \dots \times U_n) \cap N(V_1 \times \dots \times V_n) = N(U_1, V_1) \cap \dots \cap N(U_n, V_n) \neq \emptyset$$

lorsque  $U_1, \dots, U_n, V_1, \dots, V_n$  parcourent les ouverts non vides de  $M$ .

Soient  $U_1, \dots, U_n, V_1, \dots, V_n$  des ouverts non vides de  $M$ . D'après la propriété (iii), il existe des ouverts non vides  $A, B \subset M$  tels que  $N(A, B) \subset N(U_{n-1}, V_{n-1}) \cap N(U_n, V_n)$ . On en déduit que :

$$N(U_1, V_1) \cap \dots \cap N(U_{n-2}, V_{n-2}) \cap N(A, B) \subset N(U_1 \times \dots \times U_n) \cap N(V_1 \times \dots \times V_n).$$

Par induction, il existe des ouverts non vides  $\tilde{A}, \tilde{B} \subset M$  tels que :

$$N(\tilde{A}, \tilde{B}) \subset N(U_1 \times \dots \times U_n) \cap N(V_1 \times \dots \times V_n).$$

En particulier, on obtient que  $N(U_1 \times \dots \times U_n) \cap N(V_1 \times \dots \times V_n) \neq \emptyset$  car  $N(\tilde{A}, \tilde{B}) \neq \emptyset$ .

Montrons que (i)  $\Rightarrow$  (iii). Soient  $U_1, V_1, U_2, V_2$  des ouverts non vides de  $M$ . Le système dynamique  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}) \times (M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  étant topologiquement transitif, on a

$$N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2) \neq \emptyset.$$

En particulier,  $N(U_1, V_1)$  est toujours non vide.

De plus, considérons  $t \in N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2)$  et posons  $A = \phi_t(U_1) \cap U_2$  et  $B = \phi_t(V_1) \cap V_2$ . Par hypothèse sur  $t$ ,  $A$  et  $B$  sont des ouverts non vides de  $M$  et on vérifie facilement que

$$N(A, B) \subset N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2). \quad \square$$

**Définition 3.2.10.** Soit  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  un flot complet continu. On dit que  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  est *un flot faiblement topologiquement mélangeant* si l'une des trois conditions équivalentes de la proposition 3.2.9 est vérifiée.

**Exemple 3.2.11.** Le calcul direct des  $N(U, V)$  pour les exemples 3.2.4 montrent que ces deux flots ne sont pas faiblement topologiquement mélangeants.

De même, la remarque 3.2.8 montre que les flots constants sur le tore (exemple 3.2.7) ne sont pas faiblement topologiquement mélangeants non plus.

L'exemple fondamental de flot faiblement topologiquement mélangeant est le flot géodésique unitaire sur une variété réelle compacte munie d'une métrique à courbure strictement négative (voir [Ano69], [Cou04], [Dal99]). Cet exemple sera le point de départ des applications pour le critère d'orthogonalité aux constantes présenté dans ce texte et sera discuté dans une suite de cet article.

**Définition 3.2.12.** Soit  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  un flot complet continu. On dit que  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  est *un flot topologiquement mélangeant* si pour tout couple d'ouverts non vides  $U, V \subset M$ , il existe  $T \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $t \geq T$ ,  $\phi_t(U) \cap V \neq \emptyset$ .

Comme la terminologie l'indique, un flot topologiquement mélangeant est faiblement topologiquement mélangeant. En effet, si  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  est topologiquement mélangeant alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tous ouverts non vides  $U_1, \dots, U_n \subset M$  et  $V_1, \dots, V_n \subset M$ , il existe un réel  $T > 0$  tel que

$$N(U_1 \times \dots \times U_n, V_1 \times \dots \times V_n) = N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2) \cap \dots \cap N(U_n, V_n) \supset [T; \infty[$$

En particulier, cet ensemble est non vide et donc  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})^n$  est topologiquement transitif pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Corollaire 3.2.13.** Soit  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  un flot complet faiblement topologiquement mélangeant. Supposons que l'espace topologique  $M$  soit séparable et localement compact.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le flot produit  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}) \times \dots \times (M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  n'admet pas d'intégrales premières continues non constantes.

C'est une conséquence directe de la proposition 3.2.9 et de la proposition 3.2.6.

**3.3. Le critère d'orthogonalité aux constantes.** Dans cette section, on établit le critère annoncé d'orthogonalité aux constantes pour les  $D$ -variétés réelles.

Le point de départ est le premier critère d'orthogonalité aux constantes (Théorème 2.3.4). On étudie alors les conséquences de l'existence d'une intégrale première rationnelle non constante sur la structure des orbites du flot réel associé. La difficulté principale est de contrôler les orbites qui rencontrent le lieu d'indétermination de cette intégrale première rationnelle. Pour cela, nous montrons que ce lieu d'indétermination est une sous-variété fermée invariante, résultat pour lequel nous n'avons pas trouvé de référence.

La technologie des flots faiblement mélangeants, exposée dans la partie précédente, permet alors de contrôler en même temps le flot réel associé et tous ses produits et ainsi d'obtenir le critère voulu.

**3.3.1. Intégrale première rationnelle.** On étudie plus généralement les conséquences de l'existence d'une intégrale première rationnelle pour les  $D$ -variétés définies sur des corps de constantes. On fixe  $k$  un corps de caractéristique 0.

**Notation 3.3.1.** Soient  $X$  une variété algébrique irréductible sur le corps  $k$  et  $f \in k(X)$  une fonction rationnelle. Alors  $f$  définit un morphisme rationnel de variétés  $f : X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$  qui admet un plus grand ouvert de définition  $U \subset X$ .

Le graphe  $G_f \subset U \times \mathbb{P}^1$  de  $f$  s'identifie à une sous-variété fermée irréductible de  $U \times \mathbb{P}^1$ . Sa clôture de Zariski dans  $X \times \mathbb{P}^1$  sera notée  $\overline{G_f}$ .

**Lemme 3.3.2.** *Soient  $(X, v_X)$  une  $D$ -variété irréductible au dessus de  $(k, 0)$  et  $f \in k(X)$  une fonction rationnelle. On a équivalence entre :*

- (i) *La fonction rationnelle  $f$  est une intégrale première rationnelle de  $(X, v_X)$ .*
- (ii) *La sous-variété fermée  $\overline{G_f} \subset (X, v_X) \times (\mathbb{P}^1, 0)$  est une sous-variété fermée invariante.*

DÉMONSTRATION. Considérons  $U \subset X$  un ouvert affine tel que  $f|_U : U \rightarrow \mathbb{A}^1$  est une fonction régulière. D'après les lemmes 2.1.12 et 2.1.7, il suffit de vérifier l'équivalence pour  $f|_U$ . On peut donc supposer que  $U = X$ , c'est à dire que  $X$  est affine et que  $f \in k[X]$ .

Le graphe  $G_f \subset X \times \mathbb{A}^1$  de  $f$  est alors l'hypersurface de  $X \times \mathbb{A}^1$  d'équation  $Y - f = 0$ .

On en déduit que  $G_f$  est une sous-variété invariante de  $(X, v_X) \times (\mathbb{A}^1, 0)$  si et seulement si il existe  $h(Y) \in k[X][Y]$  tel que

$$\delta_X(f) = h(Y)(Y - f) \in k[X][Y].$$

En comparant les degrés en  $Y$ , on voit que nécessairement  $h(X, Y) = 0$  et donc que la seconde condition est équivalente à  $\delta_X(f) = 0$ , autrement dit que  $f$  est une intégrale première rationnelle de  $(X, v_X)$ .  $\square$

**Définition 3.3.3.** Soient  $X$  une variété algébrique irréductible et  $f \in k(X)$  une fonction rationnelle. On appelle *lieu d'indétermination de  $f$*  et on note  $\text{Ind}(f)$ , le complémentaire du plus grand ouvert de définition de  $f : X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ . Le lieu d'indétermination de  $f$  est donc une sous-variété fermée de  $X$ .

**Remarque 3.3.4.** Soient  $X$  une variété algébrique irréductible et lisse et  $f : X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$  une fonction rationnelle sur  $X$ . En notant  $\pi_f : \overline{G_f} \rightarrow X$  la restriction de la première projection à  $\overline{G_f}$ , d'après le Main Theorem de Zariski [Mum95, Théorème 3.20], on a la description suivante de  $\text{Ind}(f)$  :

$$\text{Ind}(f) = \{x \in X \mid \pi_f^{-1}(x) \text{ admet une composante irréductible de dimension } > 0\}$$

Comme  $\overline{G_f} \subset X \times \mathbb{P}^1$ , la condition précédente se réécrit :

$$\text{Ind}(f) = \{x \in X \mid \{x\} \times \mathbb{P}^1 \subset \overline{G_f}\}.$$

**Lemme 3.3.5.** *Soient  $(X, v_X)$  une  $D$ -variété irréductible et lisse au-dessus de  $(k, 0)$  et  $f \in k(X)$  une intégrale première rationnelle. Le lieu d'indétermination de  $f$ ,  $\text{Ind}(f) \subset (X, v_X)$  est une sous-variété fermée invariante.*

DÉMONSTRATION. On note  $Z = \text{Ind}(f) \subset X$  le lieu d'indétermination de  $f$  qui est donc une sous-variété fermée de  $X$ . On commence par décrire le faisceau d'idéaux associé à  $Z$  avant de vérifier qu'il est invariant.

Considérons  $U \subset X$  un ouvert affine. La sous-variété fermée irréductible  $G_U := \overline{G_f} \cap (U \times \mathbb{A}^1) \subset U \times \mathbb{A}^1$  est une hypersurface. Comme  $U \times \mathbb{A}^1$  est lisse, il existe  $F \in k[U][T]$  tel que  $G_U \subset U \times \mathbb{A}^1$  est l'hypersurface d'équation  $F(X, T) = 0$ . Fixons  $t_0 \in k$ . D'après la remarque 3.3.4, on a alors

$$Z = \{x \in X \mid F(x, \cdot) = 0\} = \{x \in X \mid \forall n \in \mathbb{N}, \frac{\partial}{\partial t^n} F(x, t_0) = 0\}.$$

On en déduit que  $I_Z(U) \subset \mathcal{O}_X(U)$  est l'idéal engendré par  $\frac{\partial}{\partial t^n} F(X, t_0)$  où  $n$  parcourt  $\mathbb{N}$ .

D'après le lemme 3.3.2, la sous-variété fermée  $G_U \subset (U, v_X) \times (\mathbb{A}^1, 0)$  est une sous-variété invariante, donc il existe  $h(X, Y) \in k[U][T]$  tel que

$$\delta_{X \times \mathbb{A}^1}(F(X, T)) = h(X, T)F(X, T).$$

Les dérivations  $\delta_{X \times \mathbb{A}^1}$  et  $\frac{\partial}{\partial t}$  commutent (car  $\delta_{X \times \mathbb{A}^1}(T) = 0$ ) et donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$[\delta_{X \times \mathbb{A}^1} \frac{\partial}{\partial t^n} F](X, t_0) = [\frac{\partial}{\partial t^n} \delta_{X \times \mathbb{A}^1}(F)](X, t_0) = [\frac{\partial}{\partial t^n} (h.F)](X, t_0)$$

Comme  $I_Z(U)$  est l'idéal engendré par  $\frac{\partial}{\partial t^n} F(X, t_0)$  où  $n$  parcourt  $\mathbb{N}$ , la règle de Leibniz pour les dérivations supérieures d'un produit permet alors de conclure que  $I_Z(U) \subset \mathcal{O}_X(U)$  est un idéal invariant et donc que  $\text{Ind}(f)$  est une sous-variété fermée invariante.  $\square$

**Proposition 3.3.6.** *Soit  $(X, v_X)$  une  $D$ -variété irréductible et lisse au dessus de  $(k, 0)$  admettant une intégrale première rationnelle non constante. En notant  $\text{Inv}$  l'ensemble des sous-variétés fermées invariantes strictes de  $(X, v_X)$ , on a :*

$$X(k) = \bigcup_{Z \in \text{Inv}} Z(k).$$

DÉMONSTRATION. Considérons  $f : X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$  une intégrale première rationnelle non constante et notons  $U$  son plus grand ouvert de définition.

Considérons  $x \in X(k)$ . On a deux cas :

- Si  $x \in U(k)$  alors en notant  $a = f(x)$ ,  $f^{-1}(a)$  est une sous-variété fermée invariante de  $(U, v_X)$  contenant  $x$  et de codimension 1. Sa clôture de Zariski dans  $X$  est une sous-variété fermée invariante (d'après le lemme 2.1.12) et stricte de  $(X, v_X)$ .
- Si  $x \notin U(k)$  alors  $x \in \text{Ind}(f)$  qui est une sous-variété fermée invariante stricte d'après le lemme 3.3.5.  $\square$

3.3.2. *Énoncé et démonstration du critère 3.3.8.*

**Lemme 3.3.7.** *Soient  $(M, v_M)$  une  $D$ -variété analytique réelle et  $K \subset M$  un compact  $\phi$ -invariant. On note  $(U, \phi)$  le flot réel associé. La restriction du flot  $\phi$  au sous-ensemble  $K$  est un flot complet.*

DÉMONSTRATION. Pour tout  $x \in M$ , notons  $U_x = ]t^-(x); t^+(x)[$  où  $t^-(x) < 0 < t^+(x)$ , le plus grand ouvert de définition de la courbe intégrale  $\phi_x$  de  $v_M$  en  $x \in M$  vérifiant  $\phi_x(0) = x$ .

Les fonctions  $t^+ : M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty; \infty\}$  et  $t^- : M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty; \infty\}$  sont des fonctions continues. Comme  $K$  est compact, le réel  $\epsilon = \inf_{x \in K} t^+(x)$  est strictement positif.

On raisonne par l'absurde en considérant  $x_0 \in K$  tel que, par exemple,  $t_0 = t^+(x) < \infty$ . Posons  $x_1 = \phi_{t_0 - \frac{\epsilon}{2}}(x) \in K$  car  $K$  est  $\phi$ -invariant.

La courbe définie par :

$$\overline{\phi_x} : \begin{cases} ]t^-(x); t^+(x) + \frac{\epsilon}{2}[ \rightarrow M \\ t \mapsto \begin{cases} \phi_{x_0}(t) & \text{si } t \leq t_0 \\ \phi_{x_1}(t - t_0 - \frac{\epsilon}{2}) & \text{si } t \geq t_0 - \frac{\epsilon}{2} \end{cases} \end{cases}$$

est bien définie par la propriété de semi-groupe du flot associé au champ de vecteurs  $v_M$ . On vérifie aisément que  $\overline{\phi_x}$  est une courbe intégrale de  $v_M$  vérifiant  $\overline{\phi_x}(0) = x$ , ce qui contredit la maximalité de  $U_x$ .

De même, on obtient que  $t^-(x) = -\infty$  pour tout  $x \in K$  et donc que la restriction du flot  $\phi$  au compact  $K$  est complet.  $\square$

**Théorème 3.3.8.** *Soient  $X$  une variété absolument irréductible sur  $\mathbb{R}$  et  $v$  un champ de vecteurs rationnel sur  $X$ . On note  $(M, \phi)$  le flot régulier réel de  $(X, v_X)$ . Supposons qu'il existe un compact  $K \subset M$  Zariski-dense dans  $X$  et invariant par le flot  $\phi$ . La restriction du flot  $\phi$  à  $K$  est alors un flot métrisable complet.*

*Si  $(K, (\phi_t|_K)_{t \in \mathbb{R}})$  est faiblement topologiquement mélangeant alors le type générique de  $(X, v)$  est orthogonal aux constantes.*

DÉMONSTRATION. La conclusion reste inchangée lorsque l'on remplace  $X$  par  $U = X \setminus (\text{Sing}(X) \cup \text{Sing}(v))$ . On peut donc supposer que  $(X, v)$  est une  $D$ -variété absolument irréductible et lisse au dessus de  $(\mathbb{R}, 0)$ .

**Lemme 3.3.9.** *Soit  $(X, v)$  une  $D$ -variété irréductible lisse au dessus de  $(\mathbb{R}, 0)$ . Si le flot réel associé  $(M, \phi)$  admet une orbite Zariski-dense dans  $X$  alors  $(X, v)$  est sans intégrale première rationnelle non constante.*

DÉMONSTRATION. Considérons  $x \in M = X(\mathbb{R})$  dont l'orbite est Zariski-dense dans  $X$  et  $Z \subset X$  une sous-variété fermée invariante contenant  $x$ . D'après la proposition 3.1.22, l'orbite  $\mathcal{O}_x$  de  $x \in M$  est contenue dans  $Z(\mathbb{R})$  et comme cette orbite est Zariski-dense dans  $X$ , on en déduit

que  $Z = X$ . On en déduit que  $x \notin \bigcup_{Z \in \text{Inv}} Z(\mathbb{R})$ . La proposition 3.3.6 permet de conclure que  $(X, v)$  est sans intégrale première rationnelle.  $\square$

La fin de la démonstration est alors formelle : Puisque  $(K, (\phi_t|_K)_{t \in \mathbb{R}})$  est faiblement topologiquement mélangeant, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le flot  $(K, (\phi_t|_K)_{t \in \mathbb{R}})^n$  est topologiquement transitif et admet donc une orbite  $\mathcal{O}_n \subset K^n$  dense pour la topologie analytique (Proposition 3.2.5).

De plus,  $K \subset X$  est Zariski-dense et donc  $K^n \subset X^n$  aussi pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . La topologie analytique étant plus fine que la topologie de Zariski, on en déduit que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(X, v)^n$  admet  $\mathcal{O}_n$  pour orbite Zariski-dense.

D'après le lemme précédent, la  $D$ -variété  $(X, v)^n$  est sans intégrale première rationnelle non constante pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Son type générique est donc orthogonal aux constantes d'après le théorème 2.3.4.  $\square$





## Geodesic flows of pseudo-Riemannian algebraic varieties

ABSTRACT: We define the notion of a smooth pseudo-Riemannian algebraic variety  $(X, g)$  over a field  $k$  of characteristic 0, which is an algebraic analogue of the notion of Riemannian manifold and we study, from a model-theoretic perspective, the algebraic differential equation describing the geodesics on  $(X, g)$ .

When  $k$  is the field of real numbers, we prove that if the real points of  $X$  are Zariski-dense in  $X$  and if the real analytification of  $(X, g)$  is a compact Riemannian manifold with negative curvature, then the algebraic differential equation describing the geodesics on  $(X, g)$  is absolutely irreducible and its generic type is orthogonal to the constants.

### Contents

---

<b>1. Hamiltonian dynamics and pseudo-Riemannian varieties</b>	<b>48</b>
1.1. Hamiltonian formalism	49
1.2. Pseudo-Riemannian varieties	50
1.3. Classical mechanics	51
<b>2. Approximating compact Riemannian manifolds by pseudo-Riemannian varieties</b>	<b>53</b>
2.1. Real algebraic sets and analytification	53
2.2. First approximation	55
2.3. Approximation by algebraic embeddings in $\mathbb{R}^n$	56
<b>3. Anosov flows and their dynamics</b>	<b>58</b>
3.1. Anosov Flows	58
3.2. Dynamical properties of Anosov flows	59
3.3. Anosov alternative and mixing properties	60
<b>4. Proof of the Main Theorem</b>	<b>61</b>
4.1. Constructing pseudo-Riemannian varieties over $\mathbb{R}$ with negative curvature	61
4.2. The main theorem	62

---

1. This article is the second one in a series of two articles devoted to the construction of large families of algebraic ordinary differential equations whose generic types, in the theory of differentially closed fields, are orthogonal to the constants.

In the first chapter, we have translated this model-theoretic property of an algebraic differential equation into a property of the associated  $D$ -variety  $(X, v)$ . Here  $X$  denotes a (smooth) algebraic variety over the base field  $k$  and  $v$  a regular vector field on  $X$ , that defines the algebraic differential equation under study, and the orthogonality to the constants becomes “the  $D$ -variety  $(X, v)^n$  admits *no non-constant rational integral for any natural number  $n$* ”. Then, when the base field is a subfield of the field  $\mathbb{R}$  of real numbers, we have proved that  $(X, v)$  satisfies this property as soon as the flow of the dynamical system  $(X(\mathbb{R}), v_{\mathbb{R}})$  defined by the real points of  $(X, v)$  is “*sufficiently topologically mixing*”.

In this second Chapter, we provide an algebraic framework, complementary to the model-theoretic developments of the first Chapter, to study geodesic flows of Riemannian manifolds from the perspective of differential algebra and model theory.

In order to associate a definable set in a differentially closed field to a differential equation, we need to express it as *a formula* in the language  $\mathcal{L}_{\delta} = \{0, 1, +, -, \times, \delta\}$  of differential rings. Consequently, an important limitation for us is to work with *polynomial differential equations*, whereas the setting for classical Riemannian geometry is the category of smooth manifolds (and therefore a broader class of differential equations). Accordingly, we develop a formalism of Riemannian geometry in the framework of smooth algebraic varieties over a field of characteristic 0.

Once this has been settled, we have a large class – the geodesic flows of various real algebraic smooth pseudo-Riemannian varieties – of algebraic differential equations at hand, that we can start to investigate from a model-theoretic perspective. Using the results of the first part of this work, we address the problem of *orthogonality to the constants* for their generic types, under suitable irreducibility assumptions.

2. Originally, the *geodesics of a Riemannian manifold  $(M, g)$*  were defined as the smooth curves drawn on  $M$ , with constant velocity and minimal length among the curves with the same end points. For a smooth submanifold  $M$  of the Euclidean space  $\mathbb{R}^n$  (endowed with the restriction  $g$  of the Euclidean metric), the geodesics of  $(M, g)$  all share the property that *their acceleration is normal to the submanifold  $M$* .

In modern terminology, the term of geodesic is understood in a broader meaning, referring to the curves lying on  $M$  satisfying the latter property and therefore, to the solutions of a second-order differential equation on  $M$ . Alternatively, one may define the geodesics on a submanifold  $M$  of the Euclidean space  $\mathbb{R}^n$ , in physical terms, as the trajectories of a particle, constrained to move without friction on the submanifold  $M$ .

There are two classical ways of writing this differential equation intrinsically, in terms of the Riemannian manifold  $(M, g)$ . On the one hand, one can use the *Levi-Civita connection* on the manifold  $M$  to describe the geodesics as the curves whose covariant acceleration vanishes. It follows from this formulation that the geodesics (lifted canonically to  $TM$ ) define a foliation of  $TM$  by curves.

On the other hand, using the basic principles of *Hamiltonian Mechanics*, one can describe directly the vector field  $v$  on  $TM$  whose integral curves are the lifted geodesics. For instance, the vector field  $v$  is the Hamiltonian vector field associated with the free Hamiltonian  $H_g(x, v) = \frac{1}{2}g_x(v, v)$  (with respect to the symplectic structure on  $TM$  induced by the canonical symplectic structure on  $T^*M$  via the isomorphism  $TM \simeq T^*M$  defined by  $g$ ). The flow on  $TM$  of this vector field is called *the geodesic flow of the Riemannian manifold  $(M, g)$* .

*The integrability properties* of the differential equation describing the geodesics of a Riemannian manifold  $(M, g)$  and the related problem of describing the *dynamic of the geodesic flow* have been a main focus for many great mathematicians. Notably, Jacobi explored some highly non-trivial cases of complete integrability for these systems while Hadamard [Had98], following ideas of Poincaré, was the first one to understand that *negative curvature* was the source of non-integrability results for these differential equations. Later, the results of Hadamard were generalised to arbitrary compact Riemannian manifolds with negative curvature by Anosov [Ano69] and his followers (see for example [Pan91]).

It is natural to expect that, when dealing with algebraic differential equations, the aforementioned results should have important consequences for the model-theoretic behaviour of *the definable set* (in a differentially closed field) *associated to the geodesic differential equation*.

3. Fix  $k$  a field of characteristic 0. There is a natural analogue – the notion of *smooth pseudo-Riemannian algebraic variety over  $k$*  – for the notion of Riemannian manifold, namely a smooth algebraic variety  $X$  over  $k$  endowed with a non-degenerate algebraic symmetric 2-form  $g$ .

Many of the basic constructions in Riemannian geometry can still be carried out in this context. For instance, we can define the Levi-Civita connection on the sheaf  $\Theta_{X/k}$  of vector fields on  $X$  and various avatars of the curvature. Moreover, we associate to any smooth pseudo-Riemannian variety over  $k$ , a  $D$ -variety  $(T_{X/k}, v)$  over the differential field  $(k, 0)$  called *the geodesic  $D$ -variety of  $(X, g)$* .

When  $k$  is the field of real numbers, one may consider the real analytification functor which associates to a smooth algebraic pseudo-Riemannian variety  $(X, g)$  over  $\mathbb{R}$ , a (real analytic) pseudo-Riemannian manifold  $(X(\mathbb{R}), g_{\mathbb{R}})^{an}$ . In the second section, we check that our formal definitions and constructions are compatible with the classical ones for the pseudo-Riemannian manifold  $(X(\mathbb{R}), g_{\mathbb{R}})^{an}$  through real analytification.

In order to gather diverse examples of geodesic  $D$ -varieties, we need some tools to construct interesting algebraic pseudo-Riemannian varieties. Working over the field of real numbers, these tools will be approximation theorems asserting that any compact Riemannian manifold may be realised, after a small perturbation of the metric, as the analytification of some algebraic pseudo-Riemannian variety over  $\mathbb{R}$ :

**Theorem A.** *Let  $(M, g_M)$  be a smooth, connected and compact Riemannian manifold. For every neighbourhood  $\mathcal{U} \subset C^\infty(S^2T^*M)$  of  $g_M$  for the  $C^\infty$ -topology, there exist a smooth pseudo-Riemannian variety  $(X, g)$  over  $\mathbb{R}$  and a diffeomorphism  $\phi : M \rightarrow X(\mathbb{R})^{an}$  such that  $\phi^*g_{\mathbb{R}}^{an} \in \mathcal{U}$ .*

A consequence of Theorem A is the following existence principle: for any *property  $(P)$*  of a compact Riemannian manifold *preserved by small perturbations*, there exists a *smooth pseudo-Riemannian variety over  $\mathbb{R}$*  whose analytification *satisfies the property  $(P)$* . In particular, Theorem A provides many examples of smooth pseudo-Riemannian varieties  $(X, g)$  over  $\mathbb{R}$  whose analytification is a compact Riemannian manifold with negative curvature.

We also prove an “embedded version” of Theorem A, that ensures the existence of many compact and non-singular real algebraic subsets  $M$  of the Euclidean space  $\mathbb{R}^n$  such that the restriction to  $M$  of the Euclidean metric has negative curvature:

**Theorem A’.** *Let  $(M, g)$  be a smooth, connected and compact Riemannian manifold. For every neighbourhood  $\mathcal{U} \subset C^\infty(S^2T^*M)$  of  $g_M$  for the  $C^\infty$ -topology, there exist  $m \in \mathbb{N}$  and a  $C^\infty$ -embedding  $i : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  such that:*

- (i) *The image of  $M$  is a non-singular algebraic subset  $X(\mathbb{R})$  of  $\mathbb{R}^m$ , defined by some smooth, locally closed subvariety  $X$  of  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^m$ .*
- (ii) *Let  $g_0$  be the usual Euclidean metric on  $\mathbb{R}^m$ . The pullback  $i^*g_0$  of the Riemannian metric  $g_0$  is in  $\mathcal{U}$ .*

The proofs of Theorem A and of Theorem A’ are both based on Tognoli’s Theorem, which asserts the existence of algebraic embeddings for smooth compact manifolds. Taking this theorem for granted, Theorem A is a direct application of the Stone-Weierstrass Theorem, while the proof of Theorem A’ is slightly more involved. The key point behind its proof is a clever construction of Nash, known as *Nash twist*, that plays a central role in his existence proofs for isometric embeddings of differentiable Riemannian manifolds (see [Nas54] and [Nas56]; see also [Gro86] for a modern presentation).

4. Let  $(X, g)$  be an absolutely irreducible pseudo-Riemannian variety over  $k$  and  $(T_{X/k}, v)$  the associated geodesic  $D$ -variety. The Hamiltonian  $H_g$  defining  $v$  is a *rational integral* of the vector field  $v$  and defines a morphism of  $D$ -varieties over  $(k, 0)$ :

$$H_g : (T_{X/k}, v) \rightarrow (\mathbb{A}^1, 0)$$

In particular, no matter which pseudo-Riemannian variety we started from, the generic type of the geodesic  $D$ -variety is never orthogonal to the constants. Consequently, the interesting property is the *orthogonality to the constants for* (the generic type of) *the fibres of  $H_g$* . A consequence of the homogeneity properties of  $H_g$  is that this property does not depend on the non zero fibre chosen.

In the case of the sphere  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  endowed with the restriction of the Euclidean metric (seen as a pseudo-Riemannian variety over  $\mathbb{R}$ ), the geodesic  $D$ -variety admits a complete system of rational integrals and all the fibres of  $H_g$  are non-orthogonal to the constants. However, when  $k$  is a subfield of  $\mathbb{R}$  and when  $(X(\mathbb{R}), g_{\mathbb{R}})^{an}$  is a compact Riemannian manifold *with negative curvature*, we prove that the opposite situation arises. Indeed, we prove:

**Theorem B.** *Let  $(X, g)$  be an absolutely irreducible smooth pseudo-Riemannian variety over  $\mathbb{R}$ , with Zariski-dense real points, and such that  $(X(\mathbb{R}), g_{\mathbb{R}})^{an}$  is a non empty, compact Riemannian manifold.*

*If the sectional curvature of this Riemannian manifold is negative, then every non zero fibre of the morphism of  $D$ -varieties*

$$H_g : (T_{X/k}, X_g) \longrightarrow (\mathbb{A}^1, 0)$$

*is an absolutely irreducible  $D$ -variety with generic type orthogonal to the constants.*

First note that Theorem B implies its “embedded version” which was stated as Theorem A in the introduction of the first Chapter (Corollary 4.2.5 in this Chapter).

Theorem B is proved by a combination of the dynamical criterion of orthogonality to the constants proved in the first Chapter and of the results of Anosov and his followers on the topological dynamics of the unitary geodesic flow.

In conclusion, let us indicate that we expect a stronger form of Theorem B to hold. Namely, under the assumption of Theorem B, *the generic types of the fibres of  $H_g$  should be minimal and trivial types*, at least when  $\dim(X) = 2$ .

5. This article is organized as follows. In the first section, we define the notion of a smooth pseudo-Riemannian variety over a field  $k$  of characteristic 0. We also give analogues in this setting of some basic formal objects of Riemannian geometry. In particular, we associate to any such pseudo-Riemannian variety, a  $D$ -variety over  $(k, 0)$  called the geodesic  $D$ -variety.

In the second section, we study some properties of the analytification functor. We show that the notions of the first section and the classical notions of Riemannian geometry are related through analytification. We also give proofs for Theorem A and Theorem A’.

In the third section, we give a self-contained exposition of the mixing properties of the geodesic flow of a Riemannian compact manifold with negative curvature, involved in the proof of Theorem B. There is nothing really original in this section and its main result is well-known by experts of hyperbolic dynamics. However, we need some specific form of these mixing properties, namely for the topological dynamics of the geodesic flow of a compact Riemannian manifold with negative (but variable) curvature, for which we could not find an explicit statement in the literature, and we explain how to derive it from available references.

In the last section, we first deal with the problem of absolute irreducibility for the fibres of the Hamiltonian integral of the geodesic  $D$ -variety. Then, we gather the previous constructions and results to complete the proofs of Theorem B and its corollaries.

6. The results of this article constitute a part of my PhD. thesis, supervised by Jean-Benoît Bost (Orsay) and by Martin Hils (Paris VII–Münster) and they are based on their many interesting ideas and suggestions. I would also like to thank Frederic Paulin for discussing with me the dynamical properties of geodesic flows, described in the third part of this article.

## 1. Hamiltonian dynamics and pseudo-Riemannian varieties

We fix  $k$  a field of characteristic 0. By a variety over  $k$ , we mean a reduced and separated scheme of finite type over  $k$ .

If  $X$  is a variety over  $k$ , the tangent bundle (resp. cotangent bundle) of  $X$  is denoted  $T_{X/k}$  (resp.  $T_{X/k}^*$ ). The coherent sheaf  $\Theta_{X/k}$  (resp.  $\Omega_{X/k}^1$ ) of vector fields on  $X$  (resp. of 1-forms on  $X$ ) is the sheaf of sections of  $T_{X/k}$  (resp.  $T_{X/k}^*$ ).

If  $X$  is a smooth variety over  $k$ , then  $\Theta_{X/k}$  and  $\Omega_{X/k}^1$  are locally free sheaves and the pairing

$$\Theta_{X/k} \times \Omega_{X/k}^1 \longrightarrow \mathcal{O}_X \quad (4)$$

gives rise to isomorphisms  $\Theta_{X/k} \simeq (\Omega_{X/k}^1)^\vee$  and  $\Omega_{X/k}^1 \simeq \Theta_{X/k}^\vee$ .

### 1.1. Hamiltonian formalism.

**Definition 1.1.1.** A *smooth symplectic variety over  $k$*  is a pair  $(X, \omega)$  where  $X$  is a smooth variety over  $k$  and  $\omega \in H^0(X, \Lambda^2 \Omega_{X/k}^1)$  is a closed non-degenerate alternating 2-form on  $X$ .

**Construction 1.1.2.** Let  $(X, \omega)$  be a smooth symplectic variety over  $k$ . The 2-form  $\omega$  induces a morphism of coherent sheaves over  $X$ :

$$\Phi : \Theta_{X/k} \longrightarrow \Omega_{X/k}^1$$

such that, for any local section  $v$  of  $\Theta_{X/k}$ ,  $\Phi(v) = \omega(v, \cdot)$ .

Because the 2-form  $\omega$  is non-degenerate, this morphism is an isomorphism. In particular, we get an isomorphism of  $k$ -vector spaces

$$\Phi : H^0(X, \Theta_{X/k}) \xrightarrow{\sim} H^0(X, \Omega_{X/k}^1). \quad (5)$$

**Definition 1.1.3.** Let  $(X, \omega)$  be a smooth symplectic variety over  $k$  and  $H \in H^0(X, \mathcal{O}_{X/k})$  a function on  $X$ . The *Hamiltonian vector field*  $X_H \in H^0(X, \Theta_{X/k})$  associated to  $H$  is the vector field corresponding to the global 1-form  $dH \in H^0(X, \Omega_{X/k}^1)$  in the isomorphism (5).

**Lemma 1.1.4.** Let  $(X, \omega)$  be a smooth symplectic variety and  $H \in H^0(X, \mathcal{O}_{X/k})$  a function on  $X$ . The function  $H$  is an integral of the vector field  $X_H$ .

By definition, we have  $X_H(H) = dH(X_H) = \omega(X_H, X_H) = 0$  because  $\omega$  is alternating.

**Example 1.1.5.** Let  $X$  be a smooth variety over  $k$ . There exists a canonical symplectic structure on the cotangent bundle  $T_{X/k}^*$  of  $X$ , that we describe below.

Let  $Y = T_{X/k}^*$  and  $\pi : Y \longrightarrow X$  the canonical projection. First note that, as  $X$  is a smooth variety over  $k$ , the variety  $Y$  is also smooth over  $k$ .

Moreover, the pairing (4) induces a morphism of coherent sheaves over  $X$ :

$$\tilde{\theta} : \Theta_{X/k} \longrightarrow \pi_* \mathcal{O}_Y \simeq \text{Sym}((\Omega_{X/k}^1)^\vee)$$

Using the adjunction between the functors  $\pi_*$  and  $\pi^*$  and composing with the differential  $d\pi : \Theta_{Y/k} \longrightarrow \pi^* \Theta_{X/k}$  of  $\pi$ , we get a morphism of coherent sheaves over  $Y$ :

$$\theta = \tilde{\theta} \circ d\pi : \Theta_{Y/k} \longrightarrow \mathcal{O}_Y$$

Then,  $\theta \in H^0(Y, \Theta_{Y/k}^\vee) \simeq H^0(Y, \Omega_{Y/k}^1)$  may be identified with a 1-form on  $Y$  called *the canonical 1-form of  $T_{X/k}^*$* .

**Remark 1.1.6.** Let  $f : X \longrightarrow X'$  be an étale morphism of smooth varieties over  $k$ . The morphism  $g = T^*f : T_{X/k}^* \longrightarrow T_{X'/k}^*$  is also étale. Let  $\theta_X$  and  $\theta_{X'}$  be the canonical 1-forms of  $T_{X/k}^*$  and  $T_{X'/k}^*$ . By using the construction above, it is easy to check that  $g^* \theta_{X'} = \theta_X$ .

Using this remark, we can give the following description of the canonical 1-form. Let  $X$  be a smooth variety over  $k$ . As  $X$  is smooth, there exist étale charts for  $X$ , namely a covering of  $X$  by open subspaces  $U \subset X$  and étale morphisms

$$f = (x_1, \dots, x_n) : U \longrightarrow \mathbb{A}^n.$$

Let  $\pi : T_{X/k}^* \longrightarrow X$  be the projection. As  $f$  is an étale morphism, it defines a trivialisation of the cotangent bundle of  $X$ :

$$\pi^{-1}(U) \simeq U \times \mathbb{A}^n$$

whose coordinate functions are denoted  $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{O}_X(U)$ .

Using remark 1.1.6 and the direct computation for the canonical 1-form in  $\mathbb{A}^n$  [AG01, Chapter 2], the canonical 1-form on  $X$  is given by:

$$\theta = \sum_{i=1}^n p_i \cdot dx_i. \quad (6)$$

**Lemma 1.1.7.** *Let  $X$  be a smooth variety over  $k$  and  $Y = T_{X/k}^*$ . The exterior derivative  $\omega = d\theta \in H^0(Y, \Lambda^2 \Omega_{Y/k}^1)$  of the canonical 1-form  $\theta$  is a symplectic form.*

PROOF. By definition,  $\omega$  is a closed alternating 2-form. We only need to check that it is non-degenerate. For that purpose, it is sufficient to work locally on  $X$ . With the identity (6), we can write  $\theta = \sum_{i=1}^n p_i \cdot dx_i$  in étale coordinates, on a covering of  $X$ . Then, the 2-form  $\omega$  is given by:

$$\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dx_i$$

and therefore non-degenerate. □

## 1.2. Pseudo-Riemannian varieties.

**Definition 1.2.1.** A *smooth pseudo-Riemannian variety over  $k$*  is a pair  $(X, g)$  where  $X$  is a smooth variety over  $k$  and  $g \in H^0(X, S^2 \Omega_{X/k}^1)$  is a non-degenerate symmetric form on  $X$ .

**Remark 1.2.2.** Let  $(X, g)$  be a smooth pseudo-Riemannian variety over  $k$ . Similarly to the symplectic case, the non-degenerate symmetric form  $g$  on  $X$  defines an isomorphism of locally free sheaves over  $X$ :

$$\Psi : \Theta_{X/k} \longrightarrow \Omega_{X/k}^1$$

such that for any local section  $v$  of  $\Theta_{X/k}$ ,  $\Psi(v) = g(v, \cdot)$ . Therefore, we get an isomorphism of vector bundles over  $X$ :

$$T_{X/k} \simeq T_{X/k}^*.$$

The canonical symplectic structure on  $T_{X/k}^*$  defined by example 1.1.5 pulls backs via this isomorphism into a symplectic structure on  $T_{X/k}$ . If  $(X, g)$  is a smooth pseudo-Riemannian variety over  $k$ , the smooth variety  $T_{X/k}$  will always be endowed with this symplectic structure.

**Definition 1.2.3.** Let  $X$  be a variety over some field  $k$  and  $\mathcal{F}$  a coherent sheaf on  $X$ . A *connection  $\nabla$  on the coherent sheaf  $\mathcal{F}$*  is a morphism of sheaves of abelian groups  $\nabla : \mathcal{F} \otimes \Theta_{X/k} \longrightarrow \mathcal{F}$ , satisfying the Leibniz rule for any local sections  $v, \sigma$  and  $f$  of  $\Theta_{X/k}$ ,  $\mathcal{F}$  and  $\mathcal{O}_X$  respectively :

$$\nabla_v(f \cdot \sigma) = f \cdot \nabla_v(\sigma) + \nabla_v(f) \cdot \sigma$$

where  $\nabla_v(f)$  denotes the derivative of  $f$  for the derivation induced by  $v$ .

**Proposition 1.2.4.** *Let  $(X, g)$  be a smooth pseudo-Riemannian variety over  $k$ . There exists a unique connection  $\nabla$  on the locally free sheaf  $\Theta_{X/k}$  of vector fields on  $X$  such that:*

- (i) *The connection  $\nabla$  has zero torsion, i.e., for every vector fields  $v, w \in \Theta_X(U)$  on an open set  $U \subset X$ , we have:*

$$\nabla_v w - \nabla_w v = [v, w].$$

- (ii) *The metric  $g$  is parallel for the connection  $\nabla$ , i.e., for every vector fields  $v, w, x \in \Theta_X(U)$  on an open set  $U \subset X$ , we have:*

$$\nabla_x(g(v, w)) = g(\nabla_x v, w) + g(v, \nabla_x w).$$

The connection  $\nabla$  on the tangent bundle of  $X$  is called the *Levi-Civita connection of the pseudo-Riemannian variety  $X$* .

PROOF. The usual formulas proving the existence and the uniqueness of the Levi-Civita connection in Riemannian geometry (see for instance [Lee97, Theorem 5.4] or [Mil63, Part II]) still make sense in this context as we are in characteristic  $\neq 2$ . □

**Definition 1.2.5.** Let  $(X, g)$  be a pseudo-Riemannian variety. *The curvature tensor  $R$  of the pseudo-Riemannian variety  $(X, g)$  is the curvature of the associated Levi-Civita connection.*

In particular, by definition, the curvature tensor  $R \in H^0(X, \text{End}(\Theta_{X/k}) \otimes \Lambda^2 \Omega_{X/k}^1)$  is an alternating 2-form with values in the locally free sheaf  $\text{End}(\Theta_{X/k})$ .

**Notation 1.2.6.** Let  $(X, g)$  be a smooth pseudo-Riemannian variety over  $k$ . We denote by  $\mathcal{G}_2(X)$  the *Grassmannian of 2-planes in  $T_{X/k}$* . As  $X$  is a smooth variety over  $k$ , the variety  $\mathcal{G}_2(X)$  is also smooth over  $k$ . We shall denote by  $\mathcal{G}_2^g(X)$  the open subscheme of  $\mathcal{G}_2(X)$  whose geometric points parametrize the non-isotropic 2-planes (i.e., planes where the restriction of the 2-form  $g$  is non-degenerate) of  $X$ .

**Construction 1.2.7.** Let  $(X, g)$  be a smooth pseudo-Riemannian variety over  $k$ . Consider the closed subvariety  $Z \subset T_{X/k} \times_X T_{X/k}$  of pairs of orthogonal vectors in  $T_{X/k}$  defined by the equation  $g(v, w) = 0$  and the open subscheme  $Z_0 = (U \times U) \cap Z$  of  $Z$  where  $U \subset T_{X/k}$  is the open subscheme defined by the inequation  $g(v, v) \neq 0$ .

Over any geometric point  $x$  in  $X$ , if  $(v, w) \in Z_{0,x}$ , then  $\text{Vect}(v, w)$  is a non-isotropic 2-plane and every isotropic 2-plane of  $T_{X/k,x}$  admits a basis in  $Z_{0,x}$ . Consequently, we have a surjective morphism of varieties over  $k$ :

$$\pi : Z_0 \longrightarrow \mathcal{G}_2^g(X).$$

Note that the curvature tensor defines a morphism  $R : T_{X/k} \times_X T_{X/k} \times_X T_{X/k} \longrightarrow T_{X/k}$  of algebraic varieties over  $k$ , and that the formula

$$K^g(v, w) = \frac{g(R(v, w, v), w)}{g(v, v).g(w, w)} \quad (7)$$

defines a regular function  $K^g$  in  $H^0(Z_0, \mathcal{O}_{Z_0})$ . The following lemma, together with the smoothness of  $\mathcal{G}_2^g(X)$  and the existence of sections of  $\pi$  (locally in the Zariski topology) shows that this function descends to a function on  $\mathcal{G}_2^g(X)$ .

**Lemma 1.2.8.** *Let  $(X, g)$  be a pseudo-Riemannian algebraic variety over  $k$ . Consider  $\bar{k}$  an algebraic closure of  $k$ ,  $x \in X(\bar{k})$  and  $P \subset T_x X(\bar{k})$  a non-isotropic 2-plane. Consider  $(v, w)$  an orthonormal basis of  $P$  and set*

$$K^g(P) = \frac{g(R(v, w, v), w)}{g(v, v).g(w, w)} \in \bar{k}.$$

*The quantity  $K^g(P)$  does not depend on the choice of an orthonormal basis  $(v, w)$  of  $P$ .*

The lemma is a simple consequence of the invariance properties of the curvature tensor  $R \in H^0(X, \text{End}(\Theta_{X/k}) \otimes \Lambda^2 \Omega_{X/k}^1)$  (see [Lee97, Proposition 7.4] for instance or [Mil63, Part II]).

**Definition 1.2.9.** Let  $(X, g)$  be a pseudo-Riemannian variety. We call *sectional curvature* of  $X$ , the function  $K^g \in H^0(\mathcal{G}_2^g(X), \mathcal{O}_{\mathcal{G}_2^g(X)})$  defined by the formula (7) and Lemma 1.2.8.

### 1.3. Classical mechanics.

**Construction 1.3.1.** Let  $(X, g)$  be a smooth pseudo-Riemannian variety over  $k$ . Consider the function  $H_g \in H^0(X, T_{X/k})$  associated to  $g$  defined by

$$H_g(x, p) = \frac{1}{2} g_x(p, p).$$

By using the symplectic structure on  $T_{X/k}$  given by Remark 1.2.2, we denote by  $X_g$ , the Hamiltonian vector field associated to  $H_g$ .

**Definition 1.3.2.** Let  $(X, g)$  be a smooth pseudo-Riemannian variety over  $k$ . We call *geodesic  $D$ -variety associated to  $(X, g)$* , the  $D$ -variety  $(T_{X/k}, X_g)$  over the differential field  $(k, 0)$ .

By Lemma 1.1.4, the function  $H_g$  is an integral of the  $D$ -variety  $(T_{X/k}, X_g)$ . In other words, we have a morphism of  $D$ -varieties over  $(k, 0)$ :

$$H_g : (T_{X/k}) \longrightarrow (\mathbb{A}^1, 0). \quad (8)$$

Note that the only singular value of  $H_g$  is 0. Consequently, for any  $t \in k \setminus \{0\}$ , the fibre of  $H_g$  over  $t$  is a smooth variety over  $k$ . Moreover, the fibres of  $H_g$  are invariant subvarieties of  $(T_{X/k}, X_g)$  because  $H_g$  is a rational integral. This means that the vector field  $X_g$  restricts to a vector field on any smooth fibre of  $H_g$ , which will still be denoted  $X_g$ .



**Lemma 1.3.3.** *Let  $(X, g)$  be a smooth pseudo-Riemannian variety over  $k$  and  $a, b$  two elements of  $k \setminus \{0\}$ . We have an isomorphism of  $D$ -varieties over  $(k, 0)$ :*

$$(H_g^{-1}(a.b^2), \frac{1}{b}X_g) \simeq (H_g^{-1}(a), X_g).$$

PROOF. This is a consequence of the homogeneity properties of the Hamiltonian  $H_g$ . Consider the morphism  $\psi_b : T_{X/k} \rightarrow T_{X/k}$  defined by  $(x, y) \mapsto (x, b.y)$ . As  $b \neq 0$ , the morphism  $\psi_b$  is an automorphism of  $T_{X/k}$ .

First note that, by homogeneity,  $H_g \circ \psi_b = b^2.H_g$ . Therefore,  $\psi_b$  restricts to an isomorphism between the subvarieties  $H_g^{-1}(a)$  and  $H_g^{-1}(a.b^2)$ .

It remains to compute the vector field  $Y = \psi_b^*X_g$ . Let  $\omega$  be the symplectic form on  $T_{X/k}$ . We have  $\phi_b^*\omega = b.\omega$ . The vector field  $Y$  is the Hamiltonian vector field associated to the Hamiltonian  $H_g \circ \psi_b$  relatively to the symplectic form  $\phi_b^*\omega$ . This means that

$$b.\omega(-, Y) = b^2.dH = b^2.\omega(-, X_g).$$

We get that  $Y = b.X_g$ , which gives the isomorphism of  $D$ -varieties.  $\square$

**Remark 1.3.4.** Note that in particular, after base-changing to the algebraic closure  $\bar{k}$  of  $k$ , all fibres (as varieties over  $\bar{k}$ ) of  $H_g$  become isomorphic.

However, there may exist non-isomorphic fibres over  $k$ . For example, consider the geodesic  $D$ -variety of the sphere  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  (endowed with the Euclidean metric). In that case, the fibres over negative values and the fibres over positive values are non-isomorphic over  $\mathbb{R}$  but become isomorphic after base-changing to  $\mathbb{C}$ .

**Definition 1.3.5.** Let  $(X, g)$  be a smooth pseudo-Riemannian variety over  $k$ . We call *unitary geodesic  $D$ -variety associated to  $(X, g)$* , the fibre (as a  $D$ -variety) over  $\frac{1}{2} \in \mathbb{A}^1(k)$  of the morphism (8) of  $D$ -varieties over  $(k, 0)$ .

The underlying variety of the unitary geodesic  $D$ -variety is *the sphere bundle*  $SX \subset T_{X/k}$  of  $(X, g)$  defined as

$$SX = \{(x, v) \in T_{X/k} \mid g_x(v, v) = 1\}.$$

**Proposition 1.3.6.** *Let  $(X, g)$  be a smooth pseudo-Riemannian variety over  $k$ . Suppose that the unitary geodesic  $D$ -variety is absolutely irreducible and that its generic type is orthogonal to the constants.*

*Then, for any  $c \in \bar{k} \setminus \{0\}$ , the fibre of  $H_g$  over  $c$  (as a  $D$ -variety) is absolutely irreducible and its generic type is orthogonal to the constants.*

PROOF. We can suppose that  $k = \bar{k}$  as everything is invariant under base-change. Fix  $c \in \bar{k} \setminus \{0\}$  and consider  $b$  a square root of  $2.c$ . By Lemma 1.3.3, we get an isomorphism of  $D$ -varieties over  $k$

$$(H_g^{-1}(c), \frac{1}{b}X_g) \simeq (H_g^{-1}(\frac{1}{2}), X_g).$$

By hypothesis, the latter  $D$ -variety is irreducible and its generic type is orthogonal to the constants. Therefore, the  $D$ -variety  $(H_g^{-1}(c), \frac{1}{b}X_g)$  is also irreducible and its generic type is orthogonal to the constants.

Note that for all  $n \in \mathbb{N}$ , the rational first integrals of  $(H_g^{-1}(c), \frac{1}{b}X_g)^n$  and  $(H_g^{-1}(c), X_g)^n$  are the same. Using Theorem 2.3.4 in the first Chapter, we conclude that the generic type of  $(H_g^{-1}(c), X_g)$  (which is the fibre of  $H_g$  over  $c$ ) is orthogonal to the constants.  $\square$

**Remark 1.3.7.** In classical mechanics, the Hamiltonian  $H_g(x, p) = \frac{1}{2}g_x(p, p)$  can be interpreted as the kinetic energy of a particle of mass  $m = 1$  moving on the pseudo-Riemannian manifold  $(X, g)$ . Therefore, the geodesic  $D$ -variety describes the movement of a free particle moving on the pseudo-Riemannian manifold  $(X, g)$ .

More generally, the preceding ideas are also relevant to the case of a particle subject to a potential  $V \in H^0(X, \mathcal{O}_X)$ .

**Definition 1.3.8.** Let  $(X, g)$  be a smooth pseudo-Riemannian variety over  $k$  and  $V \in H^0(X, \mathcal{O}_X)$  a function on  $X$ . The  $D$ -variety  $(T_{X/k}, X_{V,g})$  of the pseudo-Riemannian variety  $(X, g)$  with potential  $V$  is the  $D$ -variety over  $(k, 0)$  defined by the Hamiltonian  $H_{g,V} \in H^0(X, T_{X/k})$ :

$$H_{g,V}(x, p) = \frac{1}{2}g_x(p, p) + V(x).$$

**Example 1.3.9** ( $n$ -body problem). Set  $M = \mathbb{R}^3$  and consider the Riemannian manifold  $(M^n \setminus \Delta, g_0)$  where  $\Delta$  is the union of the diagonals and  $g_0$  is the restriction of the Euclidean metric to  $M^n \setminus \Delta$ .

Recall that, in classical mechanics, the  $n$ -body problem is the Hamiltonian system for the Riemannian manifold  $(M^n \setminus \Delta, g_0)$  associated to the potential

$$V(q_1, \dots, q_n) = - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathcal{G} \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|}.$$

where  $\mathcal{G}$  is the gravitational constant and the  $m_i$  are the masses of the bodies (see [Che15]). Notice that the potential  $V$  is an analytic (non polynomial) function on  $M^n \setminus \Delta$ .

**Construction 1.3.10.** Consider the subset of  $(M^n \setminus \Delta) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}$  defined by

$$\tilde{M} := \{((q_i)_{1 \leq i \leq n}, (z_{k,l})_{1 \leq k < l \leq n}) \in (M^n \setminus \Delta) \times \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}} \mid z_{k,l}^2 = \|q_i - q_j\|^2\}.$$

It is easy to see that the projection on  $(M^n \setminus \Delta)$  identifies it with an étale covering of  $(M^n \setminus \Delta)$  of degree  $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ . Moreover, note that the function

$$\| - \|^2 : \begin{cases} M^2 \setminus \Delta \longrightarrow \mathbb{R} \\ (q_1, q_2) \mapsto \|q_1 - q_2\|^2 = (q_1^1 - q_2^1)^2 + (q_1^2 - q_2^2)^2 + (q_1^3 - q_2^3)^2 \end{cases}$$

is polynomial. Therefore, there exists a closed subvariety  $\tilde{X}$  of  $((\mathbb{A}^3)^n \setminus \Delta) \times \mathbb{A}^{\frac{n(n-1)}{2}}$  such that  $\tilde{X}(\mathbb{R}) = \tilde{M}$ .

**Definition 1.3.11.** We call *algebraic  $n$ -body problem*, the  $D$ -variety of the pseudo-Riemannian variety  $(\tilde{X}, \tilde{g}_0)$  associated with the potential

$$V = - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathcal{G} \frac{m_i m_j}{z_{i,j}}$$

where  $\tilde{g}_0$  is the pull-back to  $\tilde{X}$  of the metric  $g_0$  on  $\mathbb{A}^n \setminus \Delta$ .

## 2. Approximating compact Riemannian manifolds by pseudo-Riemannian varieties

In this section, we prove the approximation results, Theorem A and A', stated in the introduction. We start by recalling the notions from real algebraic geometry needed for the proof of Theorem A and A', before analysing the properties of the real analytification functor. The definition and results that we use are based on the chapters 12 and 14 in [BCR87].

Note that in this section, there are three different categories of geometric objects (namely algebraic varieties, real-analytic varieties and smooth manifolds) and that this requires some care with the terminology. In particular, the adjective smooth will be used for objects (functions, morphisms and manifolds) from classical real differential geometry.

### 2.1. Real algebraic sets and analytification.

**Definition 2.1.1.** Let  $X$  be an algebraic variety over  $\mathbb{R}$ . The *real algebraic set associated to  $X$*  is the locally ringed space  $(M = X(\mathbb{R}), \mathcal{R}_M)$  where

- $X(\mathbb{R})$  is the set of real points of  $X$  endowed with the Zariski topology;
- the sheaf of rings  $\mathcal{R}_M$  is the sheaf associated with the presheaf  $\mathcal{O}_{X,\mathbb{R}}$  induced by  $\mathcal{O}_X$  on  $X(\mathbb{R})$  and called the *sheaf of regular functions*.

Let  $(X, \mathcal{O}_X)$  be an irreducible variety over  $\mathbb{R}$  and  $(M, \mathcal{R}_M)$  be the associated real algebraic set. By construction, we have a morphism of  $\mathbb{R}$ -algebras:

$$\mathcal{O}_X(X) \longrightarrow \mathcal{R}_M(M)$$

which is injective if  $X(\mathbb{R})$  is Zariski-dense in  $X$ . *The ring of polynomial functions on  $M$*  is the image of this morphism.

**Remark 2.1.2.** It is possible to describe the ring  $\mathcal{R}_M(M)$  of regular functions on  $M$  as the subring of  $\mathbb{R}(X)$  of rational functions everywhere defined on  $X(\mathbb{R})$ . In particular as soon as  $\dim(X) \geq 1$ , the  $\mathbb{R}$ -algebra  $\mathcal{R}_M(M)$  is not of finite type.

In the sequel, we will be mainly interested in polynomial functions (and more generally polynomial sections of coherent sheaves) on  $M$  although one has to introduce  $\mathcal{R}_M$  in order to have a sheaf. Note that if  $X \subset \mathbb{A}^n$  is an affine closed subvariety, then the polynomial functions on  $M$  are simply the restrictions to  $M$  of the polynomial functions on  $\mathbb{R}^n$ .

**Definition 2.1.3.** Let  $X$  be a variety over  $\mathbb{R}$  and  $x \in M = X(\mathbb{R})$ . We say that *the real algebraic set associated to  $X$  is non-singular at  $x \in X$*  if  $\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{R}_{M,x}$  is a regular local ring.

The real algebraic set associated to  $X$  is said to be *non-singular* if it is non singular at any of its points, or equivalently if  $X(\mathbb{R})$  is contained in the open set  $X_{reg}$  of regular points of  $X$ .

**Remark 2.1.4.** There exists a *real analytification functor* from the category of algebraic varieties over  $\mathbb{R}$  to the category of real analytic spaces. If  $X$  is a variety over  $\mathbb{R}$  and  $M = X(\mathbb{R})$  is non-singular then  $M^{an}$  is an analytic (so in particular smooth) manifold such that:

- The topological space  $M^{an}$  is the set  $X(\mathbb{R})$  endowed with the Euclidean topology.
- Every regular function on  $M$  is smooth on  $M^{an}$ .

**Definition 2.1.5.** Let  $X$  be an algebraic variety over  $\mathbb{R}$ . Suppose that the associated real algebraic set  $M = X(\mathbb{R})$  is non-singular. For any coherent sheaf  $\mathcal{F}$  on  $X$ , the *analytification of  $\mathcal{F}$*  denoted  $\mathcal{F}^{an}$  is the  $\mathcal{C}^\infty(M^{an})$ -module defined by: for any  $x \in M$ ,

$$\mathcal{F}_x^{an} = \mathcal{F}_{x,\mathbb{R}} \otimes_{\mathcal{R}_{M,x}} \mathcal{C}^\infty(M^{an})_x.$$

In particular, if  $\mathcal{F}$  is a coherent sheaf, then we have a morphism of  $\mathbb{R}$ -vector spaces

$$-\frac{an}{\mathbb{R}} : H^0(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^0(M, \mathcal{F}_{\mathbb{R}}) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M^{an}, \mathcal{F}^{an})$$

which is injective if  $X(\mathbb{R})$  is Zariski-dense in  $X$ .

**Remark 2.1.6.** If  $\mathcal{F}$  is a locally free sheaf on  $X$  then  $\mathcal{F}^{an}$  is also a locally free sheaf on  $M = X(\mathbb{R})^{an}$ . Moreover, if  $\mathcal{F}$  is the sheaf of tensors of type  $(n, m)$ , then so is  $\mathcal{F}^{an}$ .

Recall that a *pseudo-Riemannian (analytic) manifold  $(M, g)$*  is an analytic manifold  $M$  endowed with a non-degenerate symmetric 2-form  $g$ . The pseudo-Riemannian manifold  $(M, g)$  is called a *Riemannian manifold* if the 2-form  $g$  is positive definite or, in other words, if it has signature  $(n, 0)$ .

**Definition 2.1.7.** Let  $(X, g)$  be a smooth pseudo-Riemannian variety over  $\mathbb{R}$ . The *analytification of  $(X, g)$*  is the pseudo-Riemannian (analytic) manifold  $(X(\mathbb{R})^{an}, g_{\mathbb{R}}^{an})$ . It is denoted  $(X(\mathbb{R}), g_{\mathbb{R}})^{an}$ .

The following two lemmas relate the notions of the first section of this article on pseudo-Riemannian varieties with the classical ones on their analytification.

**Lemma 2.1.8.** *Let  $(X, g)$  be a smooth pseudo-Riemannian variety over  $\mathbb{R}$ . Denote by  $K^g$  the sectional curvature of  $(X, g)$ .*

*The sectional curvature (in the sense of differential geometry) of the pseudo-Riemannian manifold  $(X(\mathbb{R}), g_{\mathbb{R}})^{an}$  is the analytification  $(K_g)_{\mathbb{R}}^{an} : \mathcal{G}_2^g(X(\mathbb{R})^{an}) \longrightarrow \mathbb{R}$  of  $K_g$ .*

PROOF. By uniqueness of the Levi-Civita connection in Riemannian geometry, the Levi-Civita of  $(X(\mathbb{R}), g_{\mathbb{R}})^{an}$  is  $\nabla_{\mathbb{R}}^{an}$  where  $\nabla$  is the Levi-Civita connection of the smooth pseudo-Riemannian variety  $(X, g)$ . Therefore, if  $R$  denotes the curvature tensor of  $\nabla$ , the curvature tensor of  $\nabla_{\mathbb{R}}^{an}$  is  $R_{\mathbb{R}}^{an}$ . Then, the sectional curvature is computed from  $R$  (Lemma 1.2.8) with the same formula as in Riemannian geometry.  $\square$

**Lemma 2.1.9.** *Let  $(X, g)$  be a smooth pseudo-Riemannian manifold over  $\mathbb{R}$ . The real flow of the unitary  $D$ -variety (resp. the reduced geodesic  $D$ -variety) associated to  $(X, g)$  is the geodesic flow (resp. unitary geodesic flow) of the Riemannian manifold  $(X(\mathbb{R}), g_{\mathbb{R}})^{an}$ .*

PROOF. Set  $M = X(\mathbb{R})^{an}$ . It is easy to see that  $T_M^* = T_{X/\mathbb{R}}^*(\mathbb{R})^{an}$  and that the canonical symplectic structure on  $T_M^*$  is given by the closed non-degenerate 2-form  $\omega_{\mathbb{R}}^{an}$  where  $\omega$  is the symplectic form  $T_{X/\mathbb{R}}^*$  given by example 1.1.5.

Moreover, the isomorphism  $T_{X/\mathbb{R}} \simeq T_{X/\mathbb{R}}^*$  of varieties over  $k$  given by  $g$  induces the isomorphism  $TM \simeq T^*M$  defined by  $g_{\mathbb{R}}^{an}$ . Consequently, if  $H$  is a Hamiltonian on  $T_{X/\mathbb{R}}$ , the Hamiltonian vector field on  $TM$  associated to  $H_{\mathbb{R}}^{an}$  is  $(X_H)_{\mathbb{R}}^{an}$ .

By definition, the geodesic flow is the Hamiltonian flow on  $TM$  associated with the Hamiltonian  $H_{g_{\mathbb{R}}^{an}}(x, p) = g_x^{an}(p, p)$ . As  $H_{g_{\mathbb{R}}^{an}} = H_g^{an}$ , the lemma follows from the previous compatibilities.  $\square$

**2.2. First approximation.** We prove that every compact Riemannian manifold can be approximated by a smooth pseudo-Riemannian manifold over  $\mathbb{R}$ .

**Notation 2.2.1.** Let  $M$  be a smooth and compact manifold of dimension  $n \in \mathbb{N}$ . Recall that the ring  $\mathcal{C}^\infty(M)$  of smooth functions on  $M$  has a natural topology of a Fréchet space, called the  $\mathcal{C}^\infty$ -topology defined by the family of seminorms

$$\|f\|_{N,U} = \sup_{x \in U} \{\partial^\alpha f(x) \mid |\alpha| \leq N\}.$$

where  $U \subset_i M$  is a chart of the manifold  $M$ .

More generally, if  $E \rightarrow M$  is a vector bundle of rank  $r$ , the vector space  $\mathcal{C}^\infty(E)$  of smooth sections of  $E$  also carries the natural topology of a Fréchet space called the  $\mathcal{C}^\infty$ -topology defined as follows.

Consider any trivialising covering  $(U_i)_{i=1}^n$  of  $M$ . This covering defines an inclusion

$$\mathcal{C}^\infty(E) \rightarrow \prod_{i=1}^n [\mathcal{C}^\infty(U_i)]^r.$$

The smooth topology on  $\mathcal{C}^\infty(E)$  is the topology induced by the product topology on  $\prod_{i=1}^n [\mathcal{C}^\infty(U_i)]^r$ . It does not depend on the choice of the trivialising covering.

**Theorem 2.2.2** (Stone-Weierstrass Theorem – [BCR87, Théorème 8.8.5]). *Let  $M \subset \mathbb{R}^n$  be a smooth and compact submanifold. The restrictions to  $M$  of polynomial functions on  $\mathbb{R}^n$  are dense in  $\mathcal{C}^\infty(M)$  endowed with the  $\mathcal{C}^\infty$ -topology.*

**Corollary 2.2.3.** *Let  $X$  be an affine variety over  $\mathbb{R}$  and  $\mathcal{F}$  a locally free sheaf on  $X$ . Suppose that the real algebraic set  $M = X(\mathbb{R})$  associated to  $X$  is non-singular and compact. The morphism of  $\mathbb{R}$ -vector spaces:*

$$-\mathbb{R}^{an} : H^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M^{an}, \mathcal{F}^{an})$$

*has a dense image for the  $\mathcal{C}^\infty$ -topology.*

PROOF. We fix a closed embedding  $X \subset_i \mathbb{A}^n$ . The analytic morphism  $i_{\mathbb{R}}^{an}$  realises  $M^{an}$  as a compact smooth submanifold of the Euclidean space  $\mathbb{R}^n$ . Therefore, Theorem 2.2.2 above shows that the corollary is true when  $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$  and therefore when  $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X^n$  is a trivial bundle.

Let  $\mathcal{F}$  be a locally free sheaf on  $X$ . As  $X$  is an affine variety, the coherent sheaf  $\mathcal{F}$  is generated by its global sections. Therefore, there exists a surjective morphism:

$$\phi : \mathcal{O}_X^n \rightarrow \mathcal{F}.$$

The morphism  $\phi_{\mathbb{R}}^{an} : \mathcal{O}_M^n \rightarrow \mathcal{F}^{an}$  of analytic sheaves is also surjective. Consequently, to approximate a smooth section  $\sigma$  of  $\mathcal{F}^{an}$ , it is sufficient to lift it up into a section  $\tau$  of  $\mathcal{O}_M^n$  and then to approximate  $\tau$ .  $\square$

**Theorem 2.2.4** (Tognoli’s Theorem – [BCR87, Théorème 14.1.10]). *Let  $M$  be a smooth, connected and compact manifold. There exists an affine variety  $X$  over  $\mathbb{R}$  such that  $X(\mathbb{R})$  is non-singular and the smooth manifold  $X(\mathbb{R})^{an}$  is isomorphic to  $M$ .*

**Remark 2.2.5.** A weak version of Tognoli’s Theorem was already established by Nash. It states that any connected and compact manifold is a connected component of an algebraic subset of  $\mathbb{R}^n$  for some  $n \in \mathbb{N}$ .

In fact, the proof of Nash’s result is quite elementary. Fix a smooth embedding  $i : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  and consider a tubular neighbourhood  $T$  of  $M$  in  $\mathbb{R}^n$ . By construction, there exist smooth functions  $f_1, \dots, f_r$  on  $T$  such that

$$M = \{x \in T \mid f_i(x) = 0, \forall i \leq r\}.$$

By the Thom Transversality Lemma (see [BCR87, Section 14]), for any sufficiently small perturbations  $(g_i)_{1 \leq i \leq n}$  of the  $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$  on  $\bar{T}$ , the resulting smooth manifold  $\tilde{M} = \{x \in T \mid g_i(x) = 0, \forall i \leq n\}$  will be diffeomorphic to  $M$  and still satisfy  $\tilde{M} \cap \partial\bar{T} = \emptyset$ .

By Theorem 2.2.2, we can choose the  $(g_i)_{i \leq n}$  to be the restrictions to  $\bar{T}$  of polynomials  $(P_i)_{i \leq n}$ . As  $\tilde{M} \cap \partial\bar{T} = \emptyset$ , we can conclude that  $\tilde{M} = \bar{T} \cap Z(P_1, \dots, P_n)$  is both closed and open in  $Z(P_1, \dots, P_n)$  and is therefore a connected component.

Consequently, the hard part in Tognoli's Theorem is to get rid of the other connected components.

**Notation 2.2.6.** If  $M$  is a smooth manifold then  $\mathcal{C}^\infty(S^2T^*M)$  denotes the vector space of global 2-forms on  $M$  which are the sections of the vector bundle  $S^2(T^*M)$ . The Riemannian metrics on  $M$  form an open subset of  $\mathcal{C}^\infty(S^2T^*M)$ .

**Theorem 2.2.7.** *Let  $(M, g_M)$  be a smooth, connected and compact Riemannian manifold. For every neighbourhood  $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}^\infty(S^2T^*M)$  of  $g_M$  for the  $\mathcal{C}^\infty$ -topology, there exist a smooth pseudo-Riemannian variety  $(X, g)$  over  $\mathbb{R}$  and a diffeomorphism  $\phi : M \rightarrow X(\mathbb{R})^{an}$  such that  $\phi^*g_{\mathbb{R}}^{an} \in \mathcal{U}$ .*

PROOF. Let  $(M, g_M)$  be a smooth, connected and compact Riemannian manifold. By Theorem 2.2.4, there exists an affine variety  $X$  over  $\mathbb{R}$  such that the real algebraic set  $X(\mathbb{R})$  is non-singular and  $M$  and  $X(\mathbb{R})^{an}$  are diffeomorphic.

Fix a neighbourhood  $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}^\infty(S^2M)$  of  $g_M$ . Up to refining  $\mathcal{U}$ , we can suppose that any  $g \in \mathcal{U}$  is non-degenerate. By corollary 2.2.3 applied to the affine variety  $X$ , there exists a section  $g \in \mathbb{H}^0(X, S^2(T_{X/\mathbb{R}}))$  such that  $\phi^*g_{\mathbb{R}}^{an} \in \mathcal{U}$ .

Let  $V \subset X$  be the biggest open set such that:

- All points of  $V$  are regular points.
- The symmetric 2-form  $g$  is non degenerate.

By construction,  $(V, g|_V)$  is a smooth pseudo-Riemannian variety over  $\mathbb{R}$ . Moreover, as  $X(\mathbb{R})$  is non-singular and  $g_{\mathbb{R}}^{an}$  (and therefore  $g$ ) is non-degenerate on it, we have  $X(\mathbb{R}) = V(\mathbb{R})$ . Consequently,  $(V, g|_V)$  and  $\phi : M \rightarrow V(\mathbb{R}) = X(\mathbb{R})$  satisfy the conclusion of the theorem.  $\square$

### 2.3. Approximation by algebraic embeddings in $\mathbb{R}^n$ .

**Theorem 2.3.1.** *Let  $(M, g)$  be a smooth, connected and compact Riemannian manifold. For every neighbourhood  $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}^\infty(S^2T^*M)$  of  $g_M$  for the  $\mathcal{C}^\infty$ -topology, there exist  $m \in \mathbb{N}$  and a  $\mathcal{C}^\infty$ -embedding  $i : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  such that :*

- (i) *The image of  $M$  is a non-singular algebraic subset  $X(\mathbb{R})$  of  $\mathbb{R}^m$ , defined by some smooth, locally closed subvariety  $X$  of  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^m$ .*
- (ii) *Let  $g_0$  be the usual Euclidean metric on  $\mathbb{R}^m$ . The pullback  $i^*g_0$  of the Riemannian metric  $g_0$  is in  $\mathcal{U}$ .*

The proof is based on a clever elementary lemma that goes back to Nash in [Nas54] and [Nas56] (see also [Gro86, Section 3.1] for a modern presentation).

**Lemma 2.3.2** (Nash Twist). *Let  $M$  be a compact manifold and  $f, \phi : M \rightarrow \mathbb{R}$  be smooth functions. Fix  $\epsilon > 0$ , then there exist smooth functions  $h : M \rightarrow \mathbb{R}$  and  $k : M \rightarrow \mathbb{R}$  such that:*

$$\phi^2(df)^2 = (dh)^2 + (dk)^2 - \epsilon^2(d\phi)^2.$$

PROOF. Consider the function  $f_0$  from  $M$  to the circle  $\mathbb{S}_\epsilon^1 \subset \mathbb{R}^2$  of radius  $\epsilon$  defined by:

$$f_0(p) = (h_0(p), k_0(p)) = (\epsilon \cdot \cos(\epsilon^{-1}f(p)), \epsilon \cdot \sin(\epsilon^{-1}f(p))).$$

Note that  $f_0$  as been chosen such that the pull-back of the Euclidean metric on  $\mathbb{R}^2$  by  $f_0$  is  $(df)^2$ .

Set  $f_1 = \phi \cdot f_0$  and  $g_1$  the pullback by  $f_1$  of the Euclidean metric on  $\mathbb{R}^2$ . Using the Leibniz rule, we can compute:

$$g_1 = \phi^2 \cdot (df)^2 + \epsilon^2 \cdot (d\phi)^2.$$

Consequently, if  $h$  and  $k$  are the coordinate functions of  $f_1$ , we have  $(dk)^2 + (dh)^2 = \phi^2 \cdot (df)^2 + \epsilon^2 \cdot (d\phi)^2$ .  $\square$

**Proposition 2.3.3.** *Let  $X$  be an affine variety over  $\mathbb{R}$  such that  $X(\mathbb{R}) = M \subset \mathbb{R}^N$  is a compact and non-singular algebraic subset. Consider smooth functions  $\phi, f : X(\mathbb{R})^{an} \rightarrow \mathbb{R}$  on  $X(\mathbb{R})^{an}$ .*

For any neighbourhood  $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}^\infty(S^2T^*M)$  of 0, there exist  $h, k \in \mathbb{R}[X]$  such that:

$$\phi^2 df^2 - (dh^2 + dk^2) \in \mathcal{U}.$$

PROOF. Let  $X$  be an affine variety over  $\mathbb{R}$  such that  $X(\mathbb{R}) = M \subset \mathbb{R}^N$  is a compact and non-singular algebraic subset.

Consider smooth functions  $\phi, f$  on  $X(\mathbb{R})^{an}$  and fix  $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}^\infty(S^2T^*M)$  a neighbourhood of  $\phi^2(df)^2$ . Let  $\epsilon > 0$  be such that  $-\epsilon^2(d\phi)^2 \in \mathcal{U}$  and let  $h$  and  $k$  be the smooth functions on  $M$  given by Lemma 2.3.2 such that:

$$\phi^2 df = (dh)^2 + (dk)^2 - \epsilon^2(d\phi)^2. \quad (9)$$

By Theorem 2.2.2, there exist sequences of polynomial functions  $h_n \in \mathbb{R}[X]$  and  $k_n \in \mathbb{R}[X]$  converging to  $h \in \mathcal{C}^\infty(M)$  and  $k \in \mathcal{C}^\infty(M)$  respectively for the  $\mathcal{C}^\infty$ -topology.

Using the equation (9), we have:

$$\phi^2 .df - [(dh_n)^2 + (dk_n)^2] = [(dh)^2 - (dh_n)^2] + [(dk)^2 - (dk_n)^2] - \epsilon^2(d\phi)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\epsilon^2(d\phi)^2$$

As  $-\epsilon^2(d\phi)^2 \in \mathcal{U}$  and  $\mathcal{U}$  is open, we conclude that for  $N$  large enough we have:

$$\phi^2 .df - [(dh_N)^2 + (dk_N)^2] \in \mathcal{U}. \quad \square$$

PROOF OF THEOREM 2.3.1. Let  $(M, g)$  be a smooth, connected and compact Riemannian manifold of dimension  $n \in \mathbb{N}$ . We start by a couple of reductions.

By Theorem 2.2.4, there exists an affine variety  $X$  over  $\mathbb{R}$  such that  $X(\mathbb{R})$  is non-singular and  $X(\mathbb{R})^{an} \simeq M$ . Consequently, we can suppose that  $M = X(\mathbb{R})^{an} \subset \mathbb{R}^N$  is the analytification of an algebraic subset of  $\mathbb{R}^N$ .

Let  $g_0$  be the restriction of the Euclidean metric of  $\mathbb{R}^N$  to the submanifold  $M$ . Then  $g - g_0$  is a symmetric 2-form which might not be positive definite. But, as  $X(\mathbb{R})$  is compact, by replacing  $X$  by its image by a homothety (which is an algebraic automorphism), we can suppose that  $\|g_0\|_\infty$  is sufficiently small for  $g - g_0$  to be a positive definite 2-form on  $M$ . Consequently, there exist smooth functions  $(\phi_i)_{i \leq L}$  and  $(\psi_i)_{i \leq L}$  on  $M$  such that:

$$g - g_0 = \sum_{i=1}^L \phi_i^2 .(d\psi_i)^2$$

(see for instance [Gro86, pp. 222] for the existence of such a decomposition). Fix a neighbourhood  $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}^\infty(S^2T^*M)$  of  $g$  and consider for each  $i \leq L$ , a neighbourhood  $\mathcal{U}_i \subset \mathcal{C}^\infty(S^2T^*M)$  of 0 such that

$$[\mathcal{U}_1 + \phi_1^2(d\psi_1)^2] + \dots + [\mathcal{U}_L + \phi_L^2(d\psi_L)^2] \subset \mathcal{U} + g_0. \quad (10)$$

By Proposition 2.3.3, for all  $i \leq L$ , there exists a morphism  $\rho_i = (h_i, k_i) : X \rightarrow \mathbb{A}^2$  satisfying

$$\phi_i^2(d\psi_i)^2 - (dh_i^2 + dk_i^2) \in \mathcal{U}_i \quad (11)$$

Now, consider the morphism  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_L) : X \rightarrow (\mathbb{A}^2)^L$  and  $Y = \text{graph}(\rho) \subset \mathbb{A}^N \times (\mathbb{A}^2)^L$ . First note that the morphism  $\chi : X \rightarrow Y$  defined by  $x \mapsto (x, \rho(x))$  is an isomorphism of varieties over  $\mathbb{R}$ . Therefore, the metric  $(\chi_{\mathbb{R}}^{an})^*g_1$  is given as the restriction of the Euclidean metric to an algebraic embedding of  $M$ .

Moreover, by construction, the restriction  $g_1$  of the Euclidean metric to  $Y$  is given by:

$$(\chi_{\mathbb{R}}^{an})^*g_1 = g_0 + \sum_{i=1}^L (dh_i^2 + dk_i^2).$$

By using the decomposition (10) and the property (11), we get that  $(\chi_{\mathbb{R}}^{an})^*g_1 - g \in \mathcal{U}$ .  $\square$

### 3. Anosov flows and their dynamics

In this section, we give a self-contained exposition of the mixing properties of the geodesic flow of a compact Riemannian manifold with negative curvature, involved in the proof of Theorem B.

First, we recall how to translate the hypothesis on the curvature of the Riemannian manifold into a global hyperbolic structure for the geodesic flow – *the structure of an Anosov flow* – discovered by D. Anosov in [Ano69].

Then, we gather the consequences of the existence of this hyperbolic structure on the topological dynamics of the geodesic flow. Those results will allow us to deduce some mixing properties for the geodesic flow from statements concerning the length of the periodic orbits and the density of recurrent points of the flow (see for instance, [Cou04]).

It is then easy to deduce the mixing properties of the geodesic flow for compact Riemannian manifold with negative curvature, in the specific form needed for the proof of Theorem B, from the work of F. Dal'bo in [Dal99].

#### 3.1. Anosov Flows.

**Definition 3.1.1.** Let  $(M, g)$  be a Riemannian manifold of dimension  $\geq 3$  and  $v$  a  $C^\infty$ -vector field on  $M$  with a complete flow  $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ . The flow  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  is called *an Anosov flow* if the vector field  $v$  does not vanish and there exists a splitting of the tangent bundle  $TM$  into continuous sub-bundles

$$TM = E^s \oplus \mathbb{R}.v \oplus E^u \quad (12)$$

satisfying:

- (i) The sub-bundles  $E^s$  and  $E^u$  are non-trivial bundles which are  $(d\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ -invariant.
- (ii) There exist  $C, C' > 0$  and  $0 < \lambda < 1$  such that for all  $u \in E^s$ ,

$$\|d\phi_t(u)\| \leq C.\lambda^t \|u\| \text{ and } \|d\phi_{-t}(u)\| \geq C'.\lambda^{-t} \|u\| \text{ for all } t > 0.$$

- (ii) There exist  $C, C' > 0$  and  $0 < \lambda < 1$  such that for all  $w \in E^u$ ,

$$\|d\phi_t(w)\| \geq C.\lambda^{-t} \|w\| \text{ and } \|d\phi_{-t}(w)\| \leq C'.\lambda^t \|w\| \text{ for all } t > 0.$$

where the norm on the tangent bundle  $TM$  is given by the Riemannian metric on  $M$ .

Let  $M$  be a compact manifold. If  $g_1$  and  $g_2$  are two Riemannian metrics on  $M$ , then the associated norms  $\|\cdot\|_1$  and  $\|\cdot\|_2$  are equivalent, in the sense that there exist  $A, B > 0$  such that

$$A.\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq B.\|\cdot\|_1$$

In particular, if  $v$  is a vector field on a compact manifold  $M$ , then the property of being Anosov does not depend on the choice of the Riemannian metric on  $M$ . Accordingly, we will speak about Anosov flow on a compact manifold  $M$  without a specific choice of Riemannian metric on  $M$ .

**Remark 3.1.2.** Let  $M$  be a Riemannian manifold and  $v$  a vector field on  $M$  with a complete flow  $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ . For every  $x \in M$ , one can always define the two vector subspaces of  $T_x M$  by:

$$E_x^s = \{v \in T_x M \mid \|d\phi_t(v)\| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0\} \text{ and } E_x^u = \{v \in T_x M \mid \|d\phi_t(v)\| \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0\}.$$

The vector subspaces  $E_x^s$  and  $E_x^u$  of  $T_x M$  are respectively called the *(strongly) stable* and the *(strongly) unstable distributions* at  $x \in M$  of the flow  $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ .

Note that, for a general vector field  $v$ , the collection  $(E_x^s)_{x \in M}$  does not behave continuously, when  $x$  varies in  $M$ . However, when the flow of  $v$  is an Anosov flow, it is easy to check that the stable and unstable distributions at  $x \in M$  coincide with the continuous subbundles defining the splitting (12) in the definition of an Anosov flow. Consequently, when the flow of  $v$  is an Anosov flow, the collection  $(E_x^s)_{x \in M}$  (and similarly for the unstable distribution) defines a continuous vector subbundle of  $TM$ .

Moreover, a consequence of the previous analysis is that the splitting (12) is unique, if it exists. We can therefore rephrase the definition of an Anosov flow in the following terms. The complete flow  $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$  associated to a vector field  $v$  is an Anosov flow if:

- The stable and unstable distributions are both (non-trivial) continuous vector bundles and define a splitting  $TM = E^s \oplus \mathbb{R}.v \oplus E^u$  of the tangent bundle of  $M$ .

— We have exponential bounds for the rate of convergence and divergence in the stable and unstable distributions  $E^s$  and  $E^u$ .

Regarding the unitary geodesic flow on a compact Riemannian manifold with negative curvature, we have the following theorem.

**Theorem 3.1.3** ([Ebe73a]). *Let  $(M, g)$  be a compact Riemannian manifold with negative curvature. The unitary geodesic flow  $(SM, (g_t)_{t \in \mathbb{R}})$  on the sphere bundle of  $M$  is an Anosov flow.*

**3.2. Dynamical properties of Anosov flows.** We are now interested in the *topological dynamics* of an Anosov flow. The natural setting for this section is therefore the one of (complete) *metric flows*, i.e., of metric spaces  $(M, d)$  endowed with a complete flow  $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ .

**Definition 3.2.1.** Let  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  be a metric flow and  $p \in M$ . The (*strongly*) *stable set* at  $p$ , denoted by  $W^s(p)$ , and the (*strongly*) *unstable set* at  $p$ , denoted by  $W^u(p)$ , are the subsets of  $M$  defined by:

$$\begin{aligned} W^s(p) &= \{q \in M \mid d(\phi_t(p), \phi_t(q)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0\} \\ W^u(p) &= \{q \in M \mid d(\phi_{-t}(p), \phi_{-t}(q)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0\}. \end{aligned}$$

**Definition 3.2.2.** Let  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  be a metric flow and  $p \in M$ . For any  $\epsilon > 0$ , we call *strongly stable set at  $p$  of size  $\epsilon$*  and *strongly unstable set at  $p$  of size  $\epsilon$* , the sets defined by:

$$\begin{aligned} W_\epsilon^s(p) &= \{q \in W^s(p) \mid d(\phi_t(p), \phi_t(q)) \leq \epsilon \text{ for all } t \geq 0\} \\ W_\epsilon^u(p) &= \{q \in W^u(p) \mid d(\phi_{-t}(p), \phi_{-t}(q)) \leq \epsilon \text{ for all } t \geq 0\}. \end{aligned}$$

Let  $(M, g)$  be a Riemannian manifold and  $v$  a  $\mathcal{C}^\infty$ -vector field on  $M$  with a complete flow  $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ . When  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  is an Anosov flow then, for every  $\epsilon > 0$ , the germ at  $p$  of the strongly stable set at  $p$  of size  $\epsilon$  is the germ at  $p$  of the strongly stable set. Namely we have:

**Lemma 3.2.3** ([Has02, Section 2.2.i]). *Let  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  be an Anosov flow as above. For every  $\epsilon > 0$ , there exists  $\delta > 0$  such that for every point  $p \in M$ ,*

$$W^s(p) \cap B(p, \delta) = W_\epsilon^s(p) \cap B(p, \delta).$$

**Theorem 3.2.4** (Hadamard-Perron Theorem – [Has02, Section 2.2.i]). *Let  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  be an Anosov flow as above. The stable and unstable distributions  $E^s$  and  $E^u$  are integrable by foliations with  $\mathcal{C}^1$  leaves. Moreover, for all  $p \in M$ , the leaf at  $p \in M$  of the associated foliation to  $E^s \subset TM$  (resp. to  $E^u \subset TM$ ) is  $W^s(p)$  (resp.  $W^u(p)$ ).*

**Definition 3.2.5.** Let  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  be a metric flow. We say that the flow  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  admits a *local product structure* if for all  $p \in M$ , there exists a neighbourhood  $V \subset M$  of  $p$  which satisfies:

For every  $\epsilon > 0$ , there is a positive constant  $\delta > 0$  such that for all  $x, y \in V$  satisfying  $d(x, y) \leq \delta$ , there exists  $t \in \mathbb{R}$  with  $|t| \leq \epsilon$  such that

$$W_\epsilon^u(\phi_t(x)) \cap W_\epsilon^s(y) \neq \emptyset.$$

**Proposition 3.2.6** ([Ano69]). *Let  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  be an Anosov flow as above. Then  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  admits a local product structure.*

**Definition 3.2.7.** Let  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  be a metric flow. We say that the flow  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  satisfies the *Anosov closing lemma* if for all  $p \in M$ , there exists a neighbourhood  $V \subset M$  of  $p$  which satisfies:

For all  $\epsilon > 0$ , there exist positive constants  $\delta > 0$  and  $L > 0$  such that for all  $x \in V$  and  $t > L$  with  $d(x, \phi_t(x)) \leq \delta$  and  $\phi_t(x) \in V$ , there exist  $l > 0$  and  $x_0 \in V$  satisfying:

- (i)  $|l - t| \leq \epsilon$  and  $\phi_l(x_0) = x_0$ ;
- (ii) For all  $s \leq \min(t, l)$ ,  $d(\phi_s(x_0), \phi_s(x)) \leq \epsilon$ .

**Proposition 3.2.8** ([Ano69]). *Let  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  be an Anosov flow as above. Then  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  satisfies the Anosov closing lemma.*



### 3.3. Anosov alternative and mixing properties.

**Definition 3.3.1.** Let  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  be a metric flow. The *length spectrum of the periodic orbits* is the subset  $\Lambda \subset \mathbb{R}$  given by the lengths of the periodic orbits of  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$ :

$$\Lambda := \{t \in \mathbb{R}_+^* \mid \exists a \in M, \phi_t(a) = a\}.$$

We say that the length spectrum  $\Lambda \subset \mathbb{R}$  of  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  is *arithmetic* if there exists  $a \in \mathbb{R}$  such that  $\Lambda \subset a\mathbb{Z}$ .

**Theorem 3.3.2** ([Cou04, Theorems 3,4 and 6]). *Let  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  be a connected and compact metric flow. Suppose that  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  admits a dense set of recurrent points<sup>1</sup>, admits a local product structure and satisfies the Anosov closing lemma. The following are equivalent:*

- (i) *The flow  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  is weakly topologically mixing.*
- (ii) *The flow  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  is topologically mixing.*
- (iii) *The length spectrum of the periodic orbits is not arithmetic.*

**Remark 3.3.3.** Theorem 3.3.2 can be seen as a topological counterpart for the Anosov alternative which states that:

- The (topological) mixing and (topological) weakly mixing properties are equivalent for Anosov flows.
- Any topologically transitive Anosov flow is either mixing or the suspension of a diffeomorphism. In the latter case, the length spectrum of the periodic orbits is arithmetic.

**Remark 3.3.4.** Theorem 3.3.2 provides an efficient tool to prove that an Anosov flow  $(M, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  is topologically weakly mixing, a key assumption of Theorem B of the first Chapter. Indeed it shows that, to establish this property, we may proceed as follows:

- First, prove that the recurrent points are dense in  $M$ . Notice that this property only depends on the partition of  $M$  into orbits of  $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ . In other words, this property only depends on the foliation by curves defined by the vector field.
- Then, prove that the length spectrum of the periodic orbits is not arithmetic. In contrast with the preceding case, this is not a property of the partition of  $M$  into orbits of  $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$  but also depends on the temporal parametrization of the orbits.

**Theorem 3.3.5.** *Let  $(M, g)$  be a compact Riemannian manifold with negative curvature. The geodesic flow  $(SM, (g_t)_{t \in \mathbb{R}})$  on the sphere bundle of  $M$  is topologically mixing.*

PROOF. By Theorem 3.1.3, the unitary geodesic flow  $(SM, (g_t)_{t \in \mathbb{R}})$  on the sphere bundle of  $M$  is an Anosov flow. The strategy of remark 3.3.4, reduces the previous theorem to the two following statements:

**Theorem 3.3.6.** *Let  $(M, g)$  be a compact Riemannian manifold with negative curvature. The recurrent points of the unitary geodesic flow  $(SM, (g_t)_{t \in \mathbb{R}})$  on the sphere bundle of  $M$  are dense.*

Indeed, since the manifold is compact, the unit tangent bundle admits a finite invariant measure deduced from the Liouville measure, vanishing on no open set. The Poincaré recurrence theorem implies that the recurrent points are dense.

**Theorem 3.3.7** ([Dal99, Section II]). *Let  $(M, g)$  be a compact Riemannian manifold with negative curvature. The length spectrum of the periodic orbits of the unitary geodesic flow is not arithmetic.*

Indeed, since the manifold is compact, the limit set of the fundamental group of  $M$  is the whole sphere at infinity. The case 2) in the « Résultats connus », on p. 205 of [Dal99] implies that the length spectrum of the periodic orbits is not arithmetic.  $\square$

**Remark 3.3.8.** The first published mention of the topological mixing property for geodesic flows on compact Riemannian manifolds of negative (but variable) curvature is [Ebe73b]. However, the Russian school — namely Anosov and Margulis — was certainly aware of such results at about the same time, if not earlier.

In the case of a compact Riemannian manifold with constant negative curvature, shorter proofs of Theorem 3.3.5 can be given by means of representation theory (see for instance [Gla03, Chapter 4, Section 6]). However, in this article, we need to control the topological dynamics of the geodesic

<sup>1</sup>. Recall that a point  $p \in M$  is said to be recurrent (for the flow  $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ ), if for every neighbourhood  $U$  of  $p$  in  $M$  and every  $L > 0$ , there exists  $t \geq L$  such that  $\phi_t(p) \in U$ .

flows attached to algebraic metrics, constructed by some approximation procedure (cf. Section 2) and we cannot assume that they have constant negative curvature.

#### 4. Proof of the Main Theorem

##### 4.1. Constructing pseudo-Riemannian varieties over $\mathbb{R}$ with negative curvature.

We show the existence of a large supply of smooth pseudo-Riemannian algebraic varieties over  $\mathbb{R}$  to which our main theorem (Theorem B), concerning the orthogonality to the constants of the geodesic flow, will apply. This is actually an easy illustration of the constructions in the second section of this article and of the following two elementary lemmas.

**Lemma 4.1.1.** *Let  $X$  be a quasi-affine variety over  $\mathbb{R}$  and let  $M \subset X(\mathbb{R})^{an}$  be a connected non-empty  $\mathbb{R}$ -analytic submanifold. Then the Zariski-closure  $\overline{M}$  of  $M$  in  $X$  is an irreducible variety over  $\mathbb{R}$ .*

PROOF. First, we may suppose that  $X$  is affine by working in the Zariski-closure of  $X$  relatively to an embedding  $i : X \rightarrow \mathbb{A}^n$ . Therefore, we can suppose that the Zariski-closure of  $M \subset X(\mathbb{R})^{an}$  is the Zariski closure of  $M \subset \mathbb{R}^n$ .

Let  $M \subset \mathbb{R}^{an}$  be a connected non-empty analytic submanifold and set  $Z = \overline{M}$ . The ideal  $I_Z$  of  $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$  associated to  $Z$  is the kernel of the morphism of rings given by restriction to  $M$ :

$$\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] \longrightarrow \mathcal{O}^{an}(M)$$

where  $\mathcal{O}^{an}(M)$  is the ring of analytic functions on  $M$ . As  $M$  is a connected analytic manifold, this ring is an integral domain and its kernel  $I_Z$  is prime. We conclude that  $Z$  is irreducible.  $\square$

We will need to work with absolutely irreducible varieties. For that matter, we will use the following lemma.

**Lemma 4.1.2.** *Let  $k$  be a field and  $X$  be an irreducible variety over  $k$ . Suppose that  $X(k)$  is Zariski-dense in  $X$ . Then  $X$  is an absolutely irreducible variety over  $k$ .*

This is well-known. For the sake of completeness, we include a proof.

PROOF. It suffices to prove the lemma for an affine irreducible variety  $X$  over  $k$  with  $X(k)$  Zariski-dense in  $X$ .

Recall that  $X$  is absolutely irreducible if and only if the field extension  $k \subset k(X)$  is regular. As  $X(k)$  is Zariski-dense in  $X$ , there exists an elementary extension  $k \preceq k^*$  and  $\bar{c} \in k^n$  realising the generic type of  $X$  over  $k$ . Every elementary extension of fields is regular and a subextension of a regular extension is also regular. We conclude that  $k \subset k^*$  is a regular extension and therefore  $k \subset k(\bar{c})$  is also regular.

As  $\bar{c}$  realises the generic type of  $X$ , the extensions  $k \subset k(\bar{c})$  and  $k \subset k(X)$  are isomorphic. In particular, the latter is regular.  $\square$

**Theorem 4.1.3.** *Let  $M$  be a compact  $\mathcal{C}^\infty$ -manifold which admits a Riemannian metric with negative curvature. There exists an absolutely irreducible smooth pseudo-Riemannian variety  $(X, g)$  over  $\mathbb{R}$  such that:*

- (i) *The real algebraic set  $X(\mathbb{R})$  is non-singular and Zariski-dense in  $X$ . Moreover, the smooth manifolds  $X(\mathbb{R})^{an}$  and  $M$  are diffeomorphic.*
- (ii) *The pseudo-Riemannian manifold  $(X(\mathbb{R}), g_{\mathbb{R}})^{an}$  is a Riemannian manifold with negative curvature.*

PROOF. Let  $M$  be a compact manifold. The function  $g \mapsto \sup_{P \in \mathcal{G}_2(M)} K(P)$  which associates to a Riemannian metric  $g$ , the maximum of the sectional curvature is continuous for the  $\mathcal{C}^2$ -topology on  $\mathcal{C}^\infty(M, S^2TM)$ . As  $M$  admits a Riemannian metric with negative curvature, by applying theorem 2.2.7, there exists a smooth pseudo-Riemannian variety  $(X, g)$  over  $\mathbb{R}$  such that:

- (a) The real algebraic set  $X(\mathbb{R})$  is non-singular and the smooth manifolds  $X(\mathbb{R})^{an}$  and  $M$  are diffeomorphic.
- (b) The pseudo-Riemannian manifold  $(X(\mathbb{R}), g_{\mathbb{R}})^{an}$  is a Riemannian manifold with negative curvature.

Let  $Y = \overline{X(\mathbb{R})} \subset X$  be the Zariski-closure of the real points of  $X$  and  $\tilde{Y} = Y_{reg}$  the regular points of  $Y$ . As the real algebraic set  $X(\mathbb{R})$  is non-singular, we have  $\tilde{Y}(\mathbb{R}) = X(\mathbb{R})$  and it is easy to check that  $(\tilde{Y}, g_{|\tilde{Y}})$  satisfies the same properties (a) and (b).

Moreover, by definition  $\tilde{Y}(\mathbb{R})$  is Zariski-dense in  $Y$  and it only remains to check that  $Y$  is an absolutely irreducible variety over  $\mathbb{R}$ . This is given by lemma 4.1.1 together with lemma 4.1.2.  $\square$

**Theorem 4.1.4.** *Let  $M$  be a compact  $C^\infty$ -manifold which admits a Riemannian metric with negative curvature. There exists an absolutely irreducible smooth and quasi-affine variety  $X \subset \mathbb{A}^n$  over  $\mathbb{R}$  such that:*

- (i) *The real algebraic set  $X(\mathbb{R})$  is non-singular and  $X(\mathbb{R})^{an}$  is diffeomorphic to  $M$ .*
- (ii) *The pseudo-Riemannian manifold  $(X(\mathbb{R}), g_{\mathbb{R}})^{an}$  is a Riemannian manifold with negative curvature, where  $g$  is the restriction of the Euclidean metric on  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^n$  to  $X$ .*

The same proof as the proof of Theorem 4.1.3 goes through here after applying Theorem 2.3.1 instead of Theorem 2.2.7.

## 4.2. The main theorem.

**Theorem 4.2.1.** *Let  $(X, g)$  be an absolutely irreducible smooth pseudo-Riemannian variety over  $\mathbb{R}$ , with Zariski-dense real points, such that  $(X(\mathbb{R}), g_{\mathbb{R}})^{an}$  is a compact Riemannian manifold.*

*Then the unitary geodesic  $D$ -variety associated to  $(X, g)$  is absolutely irreducible and, if the sectional curvature of  $(X(\mathbb{R}), g_{\mathbb{R}})^{an}$  is negative, its generic type is orthogonal to the constants.*

PROOF. Let  $(X, g)$  be an absolutely irreducible pseudo-Riemannian variety over  $\mathbb{R}$  with  $X(\mathbb{R})$  non-singular, Zariski-dense in  $X$  and suppose that  $(X(\mathbb{R}), g_{\mathbb{R}})^{an}$  is a compact and connected Riemannian manifold with negative curvature.

We denote by  $(SX, v)$  the associated unitary geodesic  $D$ -variety and we check that it satisfies the hypothesis of Theorem B of the first Chapter.

— It is easy to see that  $SX(\mathbb{R})$  is Zariski-dense in  $SX$ .

Indeed, recall that  $Y(\mathbb{R})$  is Zariski dense in  $Y$  iff  $\dim(Y(\mathbb{R})) = \dim(Y)$  where the first dimension is the semi-algebraic dimension. But we can compute the semi-algebraic dimension of  $SX(\mathbb{R})$  as:

$$\dim(SX(\mathbb{R})) = 2 \cdot \dim(X(\mathbb{R})) - 1 = 2 \cdot \dim(X) - 1 = \dim(SX),$$

because  $X(\mathbb{R})$  is Zariski-dense in  $X$ .

— Moreover, as  $SX(\mathbb{R})$  is connected and Zariski-dense in  $SX$ , by applying lemmas 4.1.1 and 4.1.2, we get that  $SX$  is an absolutely irreducible variety over  $\mathbb{R}$ .

— We now show that the real flow of the unitary geodesic  $D$ -variety  $(SX, v)$  is weakly mixing. From Lemma 2.1.9, we know that this flow is the unitary geodesic flow of the compact Riemannian manifold  $(X(\mathbb{R}), g_{\mathbb{R}})^{an}$ . By hypothesis, its sectional curvature is negative. Consequently, using Theorem 3.3.5, we conclude that the unitary geodesic flow is mixing and therefore weakly mixing.

By applying Theorem B of the first Chapter to the compact set  $SX(\mathbb{R})$ , we get that the generic type of the absolutely irreducible  $D$ -variety  $(SX, v)$  is orthogonal to the constants.  $\square$

**Remark 4.2.2.** In the proof of Theorem 4.2.1, we have applied Theorem B of the first Chapter to all real points of  $X$ , whereas it suffices to know the dynamics on a compact Zariski-dense subset  $K \subset X(\mathbb{R})$  to conclude that the generic type is orthogonal to the constants.

In particular, we can get a stronger form of the theorem above by only requiring that a connected and compact component  $C \subset X(\mathbb{R})$  is non-singular and that the pseudo-Riemannian manifold  $(C, g_C^{an})$  is a Riemannian manifold with compact curvature.

With this stronger version at hand, one can bypass the use of the Tognoli's Theorem (Theorem 2.2.4) in the existence statements 4.1.3 and 4.1.4 and replace it by its weaker version (see Remark 2.2.5).

**Corollary 4.2.3.** *Let  $(X, g)$  be an absolutely irreducible smooth pseudo-Riemannian variety over  $\mathbb{R}$ , with Zariski-dense real points, such that  $(X(\mathbb{R}), g_{\mathbb{R}})^{an}$  is a compact Riemannian manifold.*

If the sectional curvature of this Riemannian manifold is negative, then every non zero fibre of the morphism of  $D$ -varieties

$$H_g : (T_{X/k}, X_g) \longrightarrow (\mathbb{A}^1, 0)$$

is an absolutely irreducible  $D$ -variety with generic type orthogonal to the constants.

It suffices to apply Theorem 4.2.1 and then Proposition 1.3.6. Note that by Theorem 4.1.3, there exist many examples of such pseudo-Riemannian varieties.

**Remark 4.2.4.** Let  $(X, g)$  be an absolutely irreducible smooth pseudo-Riemannian variety over  $\mathbb{R}$ , with Zariski-dense real points, such that  $(X(\mathbb{R}), g_{\mathbb{R}})^{an}$  is a compact and connected Riemannian manifold. The morphism of  $D$ -varieties

$$H_g : (T_{X/k}, X_g) \longrightarrow (\mathbb{A}^1, 0)$$

has three kinds of non-zero fibres:

- The fibres over positive real numbers which are real  $D$ -varieties with Zariski-dense real points.
- The fibres over negative real numbers which are real  $D$ -varieties without any real points.
- The fibres over complex non real numbers which are complex  $D$ -varieties.

In particular, thanks to Proposition 1.3.6, we can obtain orthogonality results for some real  $D$ -varieties without real points and even for some complex (non real)  $D$ -varieties.

**Corollary 4.2.5.** Let  $M \subset \mathbb{R}^n$  be a non-empty compact connected and non-singular algebraic subset of the Euclidean space  $\mathbb{R}^n$ .

The system  $(S)$  of differential equations describing the motion of a particle in the Euclidean space  $\mathbb{R}^n$  with non-zero fixed energy, constrained to move without friction along the submanifold  $M$  is an absolutely irreducible system of algebraic differential equations.

If the restriction of the Euclidean metric to  $M$  has negative curvature, then the generic type of the system  $(S)$  is orthogonal to the constants.

PROOF. Set  $M = X(\mathbb{R})$  with  $X$  a quasi-affine variety over  $\mathbb{R}$ . We can suppose (after restricting to an open subset of  $X$ ) that  $X$  is non singular and that the restriction to  $X$  of the standard Euclidean metric  $g$  on  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^n$  is non-degenerate.

The system  $(S)$  with fixed energy  $E_0 \in \mathbb{C}$  is the system of differential equations given as the fibre (as a  $D$ -variety) over  $E_0$  of the morphism of  $D$ -varieties

$$H_g : (T_{X/k}, X_g) \longrightarrow (\mathbb{A}^1, 0).$$

It suffices to apply Theorem 4.2.1 to  $(X, g)$  and then Proposition 1.3.6 to conclude that any non-zero fibre is absolutely irreducible and that its generic type is orthogonal to the constants.  $\square$



## Towards Minimality and Triviality for Geodesic Flows

ABSTRACT: In this chapter, firstly we present translations in terms of  $D$ -varieties and dynamical properties of other basic model-theoretic properties of generic types of algebraic differential equations such as strong minimality and triviality — in the spirit of the ones obtained in Chapter 1 for the property of orthogonality to the constants. In particular, we rely on the classification results of Hrushovski-Sokolovic to provide a description of non-trivial locally modular types.

Then we apply these results to investigate further the model-theoretic properties of the geodesic  $D$ -variety associated to an algebraic pseudo-Riemannian variety of dimension 2.

For that matter, we analyse the model-theoretic behaviour of a type of order 3, orthogonal to the constants, in the theory  $\mathbf{DCF}_0$ . We explain that, under an additional semi-minimality assumption, such a type is either minimal and trivial or almost internal to a trivial type of order 1. Without this additional assumption, we construct a type of order 3, orthogonal to the constants and not one-based.

These results strongly support the expectation that the generic type of the geodesic  $D$ -variety associated to an algebraic pseudo-Riemannian variety of dimension 2 over  $\mathbb{R}$ , whose real points define a compact surface with negative curvature, is strongly minimal and trivial.

### Contents

---

<b>1. Minimality and strong minimality in terms of <math>D</math>-varieties</b>	<b>66</b>
1.1. Structure associated to a $D$ -variety	66
1.2. Minimality and base change	67
1.2.1. Strong-minimality of the theory $T_{(X,v)/(\mathcal{K},\delta)}$	67
1.2.2. Minimality for the generic type $p_{(X,v)}$	67
1.3. Some consequences of Shelah's reflection principle	68
1.3.1. The case of strong minimality	69
1.3.2. Indiscernible sequences	70
1.3.3. Application to minimality	71
<b>2. Orthogonality to locally modular types</b>	<b>72</b>
2.1. One-basedness	73
2.2. Structural results for types of finite Lascar rank	74
2.3. Consequences for orthogonality to locally modular minimal types	75
<b>3. Non-trivial locally modular types in <math>\mathbf{DCF}_0</math> and universal vector extensions</b>	<b>76</b>
3.1. Hrushovski-Sokolovic's classification of non-trivial locally modular types	76
3.2. Consequences for $D$ -varieties defined over constant differential fields	78
<b>4. Semi-minimality</b>	<b>79</b>
4.1. Definition and properties	80
4.2. An example of non-semi minimality	81
<b>5. Indirect strategy for minimality and triviality in order 3</b>	<b>83</b>
5.1. Concerning dynamical criteria for minimality	83
5.2. Real meromorphic factors of a real analytic flow	85
5.3. An indirect strategy for minimality	85
<b>A. Semi-Abelian Varieties and their universal vector extensions</b>	<b>86</b>
A.1. Preliminaries on semi-Abelian varieties	86
A.2. Analytic description of the $D$ -group structure on $\mathbb{E}(A)$	88

---

### 1. Minimality and strong minimality in terms of $D$ -varieties

In this section, we shall use classical model theoretic results concerning stable theories, for which we refer the reader to [Mar02, Chapter 8] and [TZ12, Chapter 8].

For this section, we fix  $\kappa$  an infinite cardinal and  $(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})$  a differentially closed field  $\kappa$ -saturated. Let  $(K, \delta)$  be a small differential subfield of  $(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})$  and  $(X, v)$  be a  $D$ -variety over  $(K, \delta)$ .

**1.1. Structure associated to a  $D$ -variety.** Recall that we associated to the  $D$ -variety  $(X, v)$ , a language  $\mathcal{L}_{(X,v)/(K,\delta)}$  and a complete theory  $T_{(X,v)/(K,\delta)}$  in this language (see Section 2.2 of Chapter 1). More precisely,

- The language  $\mathcal{L}_{(X,v)/(K,\delta)}$  is the relational language with a predicate for any invariant closed sub-variety  $Y \subset (X, v)^n$  for some natural number  $n \in \mathbb{N}$ .
- The theory  $T_{(X,v)/(K,\delta)}$  is the theory of the structure  $(X, v)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})}$  given by the differential points of  $(X, v)$  in any differentially closed extension  $(K, \delta) \subset (\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})$  (where, moreover, the interpretation of  $\mathcal{L}_{(X,v)/(K,\delta)}$  is tautological).

We showed that this theory is interpretable in the theory  $\mathbf{DCF}_0$  of differentially closed fields and, more precisely, that  $(X, v)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})}$  may be identified with a  $K$ -definable set in the theory  $\mathbf{DCF}_0$  (with its full structure) in  $\mathbf{DCF}_0$ , once an affine covering and affine closed immersions have been chosen (see Lemma 2.2.7 of Chapter 1).

**Corollary 1.1.1.** *Let  $(X, v)$  be a  $D$ -variety of dimension  $> 0$ . The theory  $T_{(X,v)/(K,\delta)}$  is a complete theory of finite Morley rank (and in particular  $\omega$ -stable) which eliminates quantifiers in the language  $\mathcal{L}_{(X,v)/(K,\delta)}$ .*

**PROOF.** Indeed, once an affine covering and affine immersions have been chosen, the structure  $(X, v)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})}$  identifies with a definable set over  $K$  with its full substructure over  $K$ . The latter is of finite Morley rank and eliminates quantifiers.  $\square$

Moreover, when the  $D$ -variety  $(X, v)$  is irreducible, there is a distinguished type in  $T_{(X,v)/(K,\delta)}$ , denoted  $p_{(X,v)} \in S_1(\emptyset)$ , called *the generic type of  $(X, v)$* . It is characterised by the property that its realisations are the realisations of the generic point of  $(X, v)$  (in the sense of algebraic geometry). Once an interpretation of  $(X, v)$  has been chosen, the generic type  $p_{(X,v)}$  of  $(X, v)$  identifies with a type of the theory  $\mathbf{DCF}_0$  over the parameter set  $K$  (see Definition 2.2.11 of Chapter 1).

Clearly, if  $U$  is a non-empty open subset of  $X$ , the generic type of  $(U, v_U)$  may be identified with the generic type of  $(X, v)$ . Moreover, if  $(X, v)$  is absolutely irreducible, the generic type of  $(X, v)$  is stationary.

In Section 2 of Chapter 1, we proved that the property of being orthogonal to the constants for the generic type of  $(X, v)$  could be formulated purely in terms of  $D$ -varieties. More precisely we proved the following:

**Theorem 1.1.2** (Chapter 1, Theorem 2.3.4). *Let  $(X, v)$  be an absolutely irreducible  $D$ -variety over a differential field  $(K, \delta)$ . The following are equivalent:*

- (i) *The stationary type  $p_{(X,v)}$  is orthogonal to the constants.*
- (ii) *For any differential fields extension  $(K, \delta) \subset (L, \delta_L)$ , the  $D$ -variety  $(X, v) \times_{(K,\delta)} (L, \delta_L)$  does not admit any non-trivial rational first integral.*
- (iii) *For any natural number  $n \in \mathbb{N}$ , the  $D$ -variety  $(X, v)^n$  does not admit any non-trivial rational first integral.*  $\square$

The purpose of this section is to give an analogous treatment, in terms of  $D$ -varieties, of the following model-theoretic properties:

- (1) The theory  $T_{(X,v)/(K,\delta)}$  is strongly minimal.
- (2) The type  $p_{(X,v)}$  is a minimal type.

Note that if the theory  $T_{(X,v)/(K,\delta)}$  is strongly minimal, then the unique non algebraic type  $q \in S_1(\emptyset)$ , which is the generic type  $p_{(X,v)}$  of  $(X, v)$ , is minimal. So, the first condition is stronger than the second one.

**Lemma 1.1.3.** *Let  $(K, \delta)$  be a differential field and  $(X, v)$  an absolutely irreducible  $D$ -variety over  $(K, \delta)$ .*

- (i) *If  $\dim(X) = 1$ , then the theory  $T_{(X,v)/(K,\delta)}$  is strongly minimal.*

(ii) If  $\dim(X) > 1$  and if the generic type  $p_{(X,v)}$  of  $(X, v)$  is minimal then the type  $p_{(X,v)}$  is orthogonal to the constants.

PROOF. Indeed, the first property is a consequence of the following inequality for any irreducible  $D$ -variety  $(Y, v_Y)$  over  $(K, \delta)$ :

$$\text{RM}((Y, v_Y)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})}) \leq \dim(Y).$$

For (ii), it is sufficient to notice that two minimal types, which are non-orthogonal, have the same order.  $\square$

**1.2. Minimality and base change.** In this section, we relate the properties of strong minimality for the theory  $T_{(X,v)/(K,\delta)}$  and minimality for the generic type  $p_{(X,v)}$  of an absolutely irreducible  $D$ -variety  $(X, v)$  over  $(K, \delta)$  to the absence of certain invariant closed sub-varieties in the  $D$ -variety  $(X, v)$  and its base-changes.

1.2.1. *Strong-minimality of the theory  $T_{(X,v)/(K,\delta)}$ .*

**Remark 1.2.1.** Let  $(X, v)$  be a  $D$ -variety over a differential field  $(K, \delta)$ . We have, *a priori*, three distinct notions of finiteness for the  $D$ -variety  $(X, v)$ :

- The scheme  $X$  is 0-dimensional, i.e.,  $\dim(X) = 0$ .
- The set  $(X, v)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})}$  is finite for any differentially closed extension  $(K, \delta) \subset (\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})$ .
- The set  $X(\overline{K})$  is finite for any algebraically closed extension  $K \subset \overline{K}$ .

It directly follows the model-completeness of  $\mathbf{ACF}_0$  and  $\mathbf{DCF}_0$  that those three notions are equivalent and we will simply say that  $(X, v)$  is *finite* to express that one of the preceding equivalent statements is fulfilled.

**Proposition 1.2.2.** *Let  $(X, v)$  be an absolutely irreducible  $D$ -variety of dimension  $> 0$  over a differential field  $(K, \delta)$ . The following statements are equivalent:*

- (i) *The theory  $T_{(X,v)/(K,\delta)}$  is strongly minimal.*
- (ii) *For any differential field extension  $(K, \delta) \subset (L, \delta_L)$ , any proper closed invariant sub-variety  $Y \subset (X, v) \times_{(K,\delta)} (L, \delta_L)$  is finite.*

PROOF. Both conditions are invariant by a differential field extension. We can therefore suppose that  $(K, \delta) = (\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})$  is an  $\omega$ -stable model of  $\mathbf{DCF}_0$ . Under that hypothesis, (ii) is equivalent to

(ii)' Any invariant proper sub-variety  $Y \subset (X, v)$  is finite.

Suppose that (ii)' is satisfied. By Corollary 1.1.1, every definable set (with parameters in  $\mathcal{U}$ ) in  $(X, v)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})}$  is a boolean combination of sets of the form  $(Y, v_Y)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})}$  where  $(Y, v_Y) \subset (X, v)$  is a closed invariant sub-variety.

By hypothesis, every set of this form is either  $(X, v)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})}$  or finite. Therefore, any boolean combination is finite or cofinite and the theory  $T_{(X,v)/(K,\delta)}$  is strongly minimal.

Conversely, suppose that the theory  $T_{(X,v)/(K,\delta)}$  is strongly minimal and consider  $(Y, v_Y)$  a proper closed invariant sub-variety of  $(X, v)$ . If we set  $V$  for the open set complementary to  $Y$  in  $X$ , we have a decomposition :

$$(X, v)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})} = (Y, v_Y)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})} \sqcup (V, v_V)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})}.$$

Consequently, one of these two sets must be finite. But  $\dim(V) = \dim(X \setminus Y) = \dim(X) > 0$  and the latter set is therefore infinite. We conclude that  $(Y, v_Y)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})}$  is finite.  $\square$

1.2.2. *Minimality for the generic type  $p_{(X,v)}$ .*

**Definition 1.2.3.** Let  $(K, \delta)$  be a differential field and  $(X, v)$  an irreducible  $D$ -variety over  $(K, \delta)$ . We call *rational factor* of  $(X, v)$ , any rational and dominant morphism of  $D$ -varieties over  $(K, \delta)$

$$\phi : (X, v) \dashrightarrow (W, w).$$

We will say that that  $\phi$  is a *non-trivial rational factor* if neither  $W$  nor the generic fibre of  $\phi$  are finite.

**Proposition 1.2.4.** *Let  $(K, \delta)$  be a differential field, and let  $(X, v)$  be an absolutely irreducible  $D$ -variety over  $(K, \delta)$  of dimension  $> 0$ . The following statements are equivalent:*

- (i) *The generic type  $p_{(X,v)}$  of  $(X, v)$  is minimal.*



- (ii) For any differential field extension  $(K, \delta) \subset (L, \delta_L)$ , any proper closed invariant subvariety  $Y \subset (X, v) \times_{(K, \delta)} (L, \delta_L)$  which projects generically on  $X$  is finite.
- (iii) For any differential field extension  $(K, \delta) \subset (L, \delta_L)$ , the  $D$ -variety  $(X, v) \times_{(K, \delta)} (L, \delta_L)$  has no non-trivial rational factors.

PROOF. Recall that for any extension of the parameters  $(K, \delta) \subset (L, \delta_L)$ , the extension  $q$  of  $p_{(X, v)} \in S(K)$  to  $(L, \delta_L)$  are in 1-1 correspondence with the closed invariant and irreducible sub-varieties  $(Y, v_Y) \subset (X, v) \times_{(K, \delta)} (L, \delta_L)$ , which project generically on  $X$ .

(i)  $\iff$  (ii): The type  $p_{(X, v)}$  is minimal if and only if every forking extension of  $p$  to any extension of the parameter  $K \subset L$  is algebraic if and only if for any differential field extension  $(K, \delta) \subset (L, \delta_L)$ , the irreducible sub-varieties  $(Y, v_Y) \subset (X, v) \times_{(K, \delta)} (L, \delta_L)$  which project generically on  $X$ , are either equal to  $(X, v) \times_{(K, \delta)} (L, \delta_L)$  or finite.

(ii)  $\implies$  (iii): Up to replacing  $(K, \delta)$  by a differential field extension, we may assume that  $\phi : (X, v) \dashrightarrow (W, w)$  is a rational factor over  $(K, \delta)$ . We want to prove that it is trivial.

We can now replace  $X$  (without changing its generic type) by a non-empty open set where  $\phi$  is everywhere defined. Therefore, we can suppose that  $\phi : (X, v) \rightarrow (W, w)$  is a morphism of  $D$ -varieties over  $(K, \delta)$

Hence, the closed sub-variety  $X \times_W X \subset (X \times X, v \times v)$  is an invariant sub-variety of dimension  $2\dim(X) - \dim(W)$ , which projects generically on both factors. Hence, its generic fibre (relatively to the second factor) is a closed sub-variety of  $(X, v) \times_{(K, \delta)} (K(X), \delta_v)$ , which projects generically on  $X$  and which is of dimension  $\dim(X) - \dim(W)$ .

We conclude that either  $\dim(W) = \dim(X)$ , or  $\dim(W) = 0$ , i.e. that  $\phi$  is a trivial rational factor.

(iii)  $\implies$  (i) : We suppose that  $p_{(X, v)}$  is not minimal and we construct a non trivial rational factor after base-change.

As the type  $p_{(X, v)}$  is not algebraic and of finite rank, there exists a minimal type  $q$  over an extension  $(K, \delta) \subset (L, \delta_L)$  of the parameters such that  $p_{(X, v)}$  and  $q$  are non-orthogonal.

There exist realisations  $a$  of  $p_{(X, v)}|L$  and  $b$  of  $q$  such that  $a \not\perp_L b$ . Consequently, we have  $b \in \text{acl}(a, L)$  (by minimality of  $b$ ) but  $a \notin \text{acl}(b, L)$  (by non-minimality of  $p_{(X, v)}$ ).

Consider  $e$  a code for the set of conjugates of  $b$  over  $\text{acl}(a, L)$ . By construction, we have  $e \in \text{dcl}(a, L)$ .

Moreover, it is straightforward that  $e$  and  $b$  are inter-algebraic over  $L$  and in particular we have :

- (a)  $\tilde{q} = \text{tp}(e/L)$  is non-algebraic.
- (b)  $a \notin \text{acl}(L, e)$ .

Consider now a  $D$ -variety  $(W, w)$  over  $(L, \delta_L)$  such that  $p_{(W, w)} = \tilde{q}$ . As  $e \in \text{dcl}(a, L)$ , there exists a dominant rational map

$$\phi : (X, v) \dashrightarrow (W, w)$$

But by (a),  $W$  is not finite and by (b) the fibre of  $\phi$  over  $e$  (which is the generic fibre of  $\phi$ ) is also infinite. Consequently,  $\phi$  is a non-trivial rational factor.  $\square$

**Remark 1.2.5.** With Propositions 1.2.2 and 1.2.4, as well as the corresponding statement for orthogonality to the constants (Property (ii) of Theorem 1.1.2), it is easy to recover in the formalism of  $D$ -varieties (without considering the associated definable set) that as soon as  $\dim(X) > 2$ , the following implication holds:

$$T_{(X, v)/(K, \delta)} \text{ is strongly minimal} \implies p_{(X, v)} \text{ is minimal} \implies p_{(X, v)} \text{ is orthogonal to the constants.}$$

**1.3. Some consequences of Shelah's reflection principle.** In this subsection, we now present more "user friendly" criteria — in the spirit of the property (iii) in Theorem 1.1.2— concerning the powers of the  $D$ -variety  $(X, v)$ . Those criteria avoid introducing differential fields extensions of the base field  $(K, \delta)$ .

Our main tool is Shelah's reflection principle in a stable theory that shows that it suffices to consider differential field extensions  $(K, \delta) \subset (L, \delta_L)$  coming from types living on  $(X, v)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})}$  and its powers.

1.3.1. *The case of strong minimality.*

**Proposition 1.3.1** ([TZ12, Corollary 8.3.3], Shelah's reflection principle for definable sets). *Fix  $T$  a complete stable theory and  $\mathcal{U}$  a model of  $T$ . Let  $X$  be an  $A$ -definable set in  $\mathcal{U}$  and  $Y \subset X^n$  a  $B$ -definable subset for  $A \subset B$  a small extension of the parameters.*

*There exists  $x_1, \dots, x_m \in X$  such that the subset  $Y \subset X^n$  is  $A \cup \{x_1, \dots, x_m\}$ -definable.  $\square$*

**Notation 1.3.2.** Let  $X$  a variety over a field  $K$  and  $\pi : X^n \rightarrow X^{n-1}$  be the projection on the first  $(n-1)$  coordinates. If  $\eta \in X^{n-1}$ , we write

$$X_\eta = X^n \times_{X^{n-1}} \eta \simeq X \times_{\text{Spec } k} \eta$$

for the fibre of  $X^n$  over  $\eta$ .

**Theorem 1.3.3.** *Let  $(K, \delta)$  be a differential field and  $(X, v)$  be an absolutely irreducible  $D$ -variety over  $(K, \delta)$ . The following statements are equivalent :*

- (i) *The theory  $T_{(X,v)/(K,\delta)}$  is strongly minimal.*
- (ii) *For any closed irreducible and invariant sub-variety  $Z \subset (X, v)^n$ , the generic fibre of the restriction of the projection  $\pi$  on the first  $(n-1)$  coordinates to  $Z$ :*

$$\pi|_Z : Z \rightarrow \overline{\pi(Z)} \subset (X, v)^{n-1}$$

*is either finite or equal to  $X_\eta$  where  $\eta$  is the generic point of  $\overline{\pi(Z)}$ .*

- (iii) *For any natural number  $n \in \mathbb{N}$  and any closed irreducible and invariant sub-variety  $Z \subset (X, v)^n$ , we have:*

$$\dim(X) \mid \dim(Z).$$

PROOF. First note that (ii)  $\iff$  (iii). Indeed, suppose that (ii) is satisfied. It is easy to show by induction on  $n \in \mathbb{N}$  that any closed irreducible and invariant sub-variety  $Z \subset (X, v)^n$  has dimension divisible by  $\dim(X)$ ; indeed:

- For  $n = 1$ , it suffices to apply (ii) to the case  $n = 1$  to get that any closed invariant sub-variety of  $(X, v)$  is either  $X$  or a point and therefore its dimension is divisible by  $\dim(X)$
- Let  $n$  be a natural number and suppose that the result is known for closed invariant sub-varieties of  $(X, v)^n$ .

Consider  $Z \subset (X, v)^{n+1}$  a closed irreducible and invariant sub-variety and  $\pi$  the projection on the first  $n$  coordinates. Then,  $\overline{\pi(Z)}$  is an invariant closed irreducible sub-variety of  $(X, v)^n$ . By the induction hypothesis, its dimension is divisible by  $\dim(X)$ . Moreover as the generic fibre is either finite or equal to  $X_\eta$  (where  $\eta$  is the generic point of  $\overline{\pi(Z)}$ ), we have either  $\dim(Z) = \dim(\overline{\pi(Z)})$ , or  $\dim(Z) = \dim(\overline{\pi(Z)}) + \dim(X)$ .

In both cases, we get that  $\dim(Z)$  is divisible by  $\dim(X)$ .

Now suppose that (iii) is satisfied and consider  $Z \subset (X, v)^n$  a closed irreducible and invariant sub-variety and  $\pi$  the projection onto the first  $n-1$  coordinates.

If we set  $\eta$  for the generic point of  $\overline{\pi(Z)}$ , we have

$$\dim(Z_\eta) = \dim(Z) - \dim(\overline{\pi(Z)}).$$

Therefore,  $\dim(Z_\eta)$  is a natural number divisible by  $\dim(X)$  and less or equal to  $\dim(X)$ . We have two cases :

- (a) If  $\dim(Z_\eta) = 0$ , then  $Z_\eta$  is finite.
- (b) If  $\dim(Z_\eta) = \dim(X)$ , then  $Z_\eta = X_\eta$  by irreducibility of  $X_\eta$ .
- (i)  $\implies$  (ii): Let  $Z \subset (X, v)^n$  be a closed irreducible and invariant sub-variety and denote by  $\pi$  the projection onto the first  $n-1$  coordinate and  $\eta$  the generic point of  $\overline{\pi(Z)}$ .

The generic fibre  $Z_\eta \subset (X, v)_\eta$  is an invariant sub-variety. By strong minimality of  $(X, v)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})} = (X, v)_\eta^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})}$ , we have that  $(Z_\eta, v_Z)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})}$  is either finite or cofinite. In the same way as in the proof of Proposition 1.2.2, it is easy to show that if it is cofinite, then  $Z_\eta = X_\eta$ .

(ii)  $\implies$  (i): By Proposition 1.2.2, it suffices to prove that for any differential field extension  $(K, \delta) \subset (L, \delta_L)$ , any proper closed invariant sub-variety  $Y \subset (X, v) \times_{(K, \delta)} (L, \delta_L)$  is finite.

Using Proposition 1.3.1, it is sufficient to deal with differential field extensions of the form  $(K, \delta) \subset (K(x_1, \dots, x_n), \delta_{\mathcal{U}})$  where  $x_1, \dots, x_n \in (X, v)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})}$ .

Consider  $x_1, \dots, x_n \in (X, v)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})}$ . Then  $x = (x_1, \dots, x_n)$  realises over  $K$ , the generic type of some invariant closed and irreducible sub-variety  $W$  of  $(X, v)^n$ .

Moreover, there exists a closed sub-variety  $\mathcal{Y} \subset (W \times X, v_W \times v_X)$  whose fibre over  $x$  is  $Y$ . As, by hypothesis, the generic fibre of  $\mathcal{Y}$  is invariant, the closed sub-variety  $\mathcal{Y} \subset (W \times X, v_W \times v_X)$  is also invariant by 2.1.12 of the first Chapter. Consequently, by (ii), the generic fibre of  $\pi : \mathcal{Y} \rightarrow W$  is finite (because  $Y = \mathcal{Y}_\eta$  is a proper sub-variety of  $X_\eta$ ).  $\square$

### 1.3.2. Indiscernible sequences.

**Definition 1.3.4.** Let  $(I, <)$  be an infinite totally ordered set and  $(\bar{a}_i, i \in I)$  a sequence of elements of  $\mathcal{U}^n$  for some positive natural number  $n$ . We say that  $(\bar{a}_i, i \in I)$  is an  $A$ -indiscernible sequence, where  $A \subset \mathcal{U}$  is a small parameter set if for all  $k \in \mathbb{N}$  and all finite ordered sequences  $i_1 < \dots < i_k$  and  $j_1 < \dots < j_k$  in  $I$ , we have:

$$\text{tp}(\bar{a}_{i_1}, \dots, \bar{a}_{i_k}/A) = \text{tp}(\bar{a}_{j_1}, \dots, \bar{a}_{j_k}/A).$$

If  $(\bar{a}_i, i \in I)$  is an  $A$ -indiscernible sequence, we call *the Ehrenfeucht-Mostowski type (or EM-type) over  $A$  of the sequence  $(\bar{a}_i, i \in I)$* , the sequence of types  $p_* = (p_k)_{k \geq 1}$  defined by:

$$p_k = \text{tp}(\bar{a}_{i_1}, \dots, \bar{a}_{i_k}/A) \in S(A) \text{ where } i_1 < \dots < i_k.$$

**Remark 1.3.5.** In a stable theory  $T$ , every  $A$ -indiscernible sequence  $(a_i)_{i \in I}$  is in fact an  $A$ -indiscernible set, i.e., for all  $k \in \mathbb{N}$  and all finite sequences  $i_1, \dots, i_k$  and  $j_1, \dots, j_k$  of distinct indices in  $I$ , we have

$$\text{tp}(\bar{a}_{i_1}, \dots, \bar{a}_{i_k}/A) = \text{tp}(\bar{a}_{j_1}, \dots, \bar{a}_{j_k}/A).$$

**Examples 1.3.6.** Let  $p \in S(A)$  be a type and  $(\bar{a}_i, i \in I)$  an  $A$ -indiscernible sequence of EM-type  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$  over  $A$ . We say that  $(\bar{a}_i, i \in I)$  is an  $A$ -indiscernible sequence in  $p$  if  $p_1 = p$ .

- (1) Suppose that  $p \in S(A)$  is a stationary type, then any Morley sequence of  $p$  is an  $A$ -indiscernible sequence in  $p$ . Its EM-type is  $(p^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ .
- (2) Let  $\bar{a}$  be a realisation of  $p$ . Then the constant sequence equal to  $\bar{a}$  is an  $A$ -indiscernible sequence in  $p$ . An  $A$ -indiscernible sequence of that form will be called a *constant indiscernible sequences*. Clearly, for a given  $p$ , all constant indiscernible sequences realise the same EM-type.

**Theorem 1.3.7** ([TZ12, Proposition 9.1.2], Shelah's reflection principle for types). *Fix  $T$  a stable theory and  $\mathcal{U}$  a model of  $T$ . Let  $A \subset \mathcal{U}$  be a parameter set and  $p \in S(A)$  a stationary type. If  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  a Morley sequence in  $p$ , then*

$$\text{Cb}(p) \subset \text{dcl}(a_1, a_2, \dots, a_k, \dots).$$

$\square$

**Remark 1.3.8.** In an  $\omega$ -stable theory, the canonical base of a stationary type is finitely generated. Consequently, if  $p$  is a stationary type and  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  is a Morley sequence in  $p$ , then there exists  $N \in \mathbb{N}$  such that  $\text{Cb}(p) \subset \text{dcl}(a_1, \dots, a_N)$ .

**Corollary 1.3.9.** *Let  $p \in S(A)$  be a stationary non-algebraic type. The following statements are equivalent :*

- (i) *The type  $p$  is minimal.*
- (ii) *Any  $A$ -indiscernible sequence in  $p$  is either a Morley sequence in  $p$  or a constant indiscernible sequence.*
- (iii) *For every  $A$ -indiscernible sequence  $(a_i, i \in \mathbb{N})$  in  $p$  and every positive integer  $N$ , we have:*

$$\text{either } a_N \in \text{acl}(A, a_1, \dots, a_{N-1}) \text{ or } a_N \underset{A}{\downarrow} a_1, \dots, a_{N-1}.$$

- (iii)' *For every positive integer  $N$  and every realization  $(a_1, \dots, a_{N-1})$  of  $p^{(N-1)}$ , the following alternative holds for any realisation  $a$  of  $p$ :*

$$\text{either } a \in \text{acl}(A, a_1, \dots, a_{N-1}) \text{ or } a \underset{A}{\downarrow} a_1, \dots, a_{N-1}.$$

PROOF. The implications  $(i) \implies (iii)$  and  $(i) \implies (iii)'$  are obvious.

$(iii) \implies (ii)$  Consider  $(a_i)_{i \in I}$  an  $A$ -indiscernible sequence in  $p$  which is not constant. By denoting  $p_*$  its EM-type, we have that  $x = y \notin p_2$ . Now, if  $(a_i)_{i \in I}$  is not a Morley sequence in  $p$ , there exists  $N \in \mathbb{N}$  such that  $a_N \not\downarrow_A a_1, \dots, a_{N-1}$ . By  $(iii)$ , we conclude that  $a_N \in \text{acl}(A, a_1, \dots, a_{N-1})$ .

By  $A$ -indiscernability, we have for all  $M \geq N$  that  $a_M$  realises the same type as  $a_N$  over  $A, a_1, \dots, a_{N-1}$ . As they are all distinct, this contradicts the algebraicity of  $a_N$ .

$(iii)' \implies (iii)$  Consider  $(a_i)_{i \in I}$  an  $A$ -indiscernible sequence in  $p$ . If  $(a_i)_{i \in I}$  is a Morley sequence in  $p$ , there is nothing to do. Otherwise, there exists a smallest  $N \in \mathbb{N}$  such that  $a_N \not\downarrow_A a_1, \dots, a_{N-1}$ .

Then, by construction,  $(a_1, \dots, a_{N-1})$  realises  $p^{(N-1)}$  and  $a_N \not\downarrow_A a_1, \dots, a_{N-1}$ . Consequently, by  $(iii)'$ , we have  $a_N \in \text{acl}(A, a_1, \dots, a_{N-1})$ .

It remains to show that  $(ii) \implies (i)$ . By contradiction, suppose that  $p$  is not a minimal type and set  $q \in S(B)$  for a stationary non-algebraic forking extension of  $p$ . Consider a Morley sequence  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  of  $q$  over  $B$ . By Example 1.3.6,  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  is a  $B$ -indiscernible sequence and therefore an  $A$ -indiscernible sequence, too.

As  $q$  is not an algebraic type, this sequence is not constant and by (ii),  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  is a Morley sequence in  $p$ . We now aim for a contradiction: As  $q$  is a forking extension of  $p$ , there exists  $c \in \text{Cb}(p) \setminus \text{acl}(A)$ . By Theorem 1.3.7, there exists a natural number  $N \in \mathbb{N}$  such that

$$c \in \text{dcl}(a_1, \dots, a_N).$$

By  $B$ -indiscernibility of the sequence  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , we deduce that  $c \in \text{dcl}(a_{N+1}, \dots, a_{2N})$ . Consequently,

$$c \in [\text{dcl}(a_1, \dots, a_N) \cap \text{dcl}(a_{N+1}, \dots, a_{2N})] \setminus \text{acl}(A) \neq \emptyset.$$

This implies that  $a_1, \dots, a_N \not\downarrow_A a_{N+1}, \dots, a_{2N}$ , and therefore that  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  is not a Morley sequence over  $A$ , which is a contradiction.  $\square$

**Example 1.3.10.** The property (iii) was used by Freitag and Scanlon in [FS14] to prove that the generic type  $p \in S(\mathbb{Q})$  of the differential equation  $(E)$  of order 3 satisfied by the  $j$  function is minimal.

Indeed, consider an  $\mathbb{Q}$ -indiscernible sequence  $(a_i, i \in \mathbb{N})$  in  $p$  and a natural number  $N \in \mathbb{N}$ . One needs to show that

$$\text{either } a_N \in \text{acl}(a_1, \dots, a_{N-1}) \text{ or } a_N \downarrow_{\mathbb{Q}} a_1, \dots, a_{N-1}.$$

By Seidenberg's Theorem ([Sei58]), there exist a connected open subset  $U \subset \mathbb{C}$  and holomorphic functions  $f_1, \dots, f_n$  on  $U$  such that in  $\mathbf{DCF}_0$

$$\text{tp}(f_1, \dots, f_n/\mathbb{Q}) = \text{tp}(a_1, \dots, a_N/\mathbb{Q}).$$

Using some specific results of Nishioka on the analytic solutions of  $(E)$ , they show moreover that for all  $i \leq n$ , there exists  $g_i \in \text{Gl}_2(\mathbb{C})$  such that

$$f_i(z) = j(g_i.z), \forall z \in U$$

Once this has been established, a consequence of the Ax-Lindemann-Weierstrass Theorem is that there are two cases :

- If  $g_N$  lies in a different  $\text{Gl}_2(\mathbb{Q})$ -coset than  $g_1, \dots, g_{N-1}$ , then  $f_N \downarrow_{\mathbb{Q}} f_1, \dots, f_{N-1}$ .
- Otherwise, there exists  $i \leq N - 1$ , such that  $g_N$  and  $g_i$  lie in the same  $\text{Gl}_2(\mathbb{Q})$ -coset and  $f_N \in \text{acl}(f_i)$ .

Note that the previous argument shows directly that the type  $p$  is minimal and trivial. In the third section, we explain how it follows from Hrushovski and Sokolovic's results in [HS96] that any minimal type of order  $> 1$  defined over a constant differential field is always trivial.

### 1.3.3. Application to minimality.

**Definition 1.3.11.** Let  $(K, \delta)$  be a differential field and  $(X, v)$  an irreducible  $D$ -variety over  $(K, \delta)$ . We call *indiscernible sequence of  $D$ -varieties over  $(K, \delta)$  in  $(X, v)$* , any sequence  $(Z_n \subset (X, v)^n)_{n \in \mathbb{N}}$  of closed irreducible and invariant sub-varieties satisfying :

- The sub-variety  $Z_1$  is equal to  $X$ .

— For every  $n \in \mathbb{N}$  and every  $i_1, \dots, i_k \leq n$  distinct, we have

$$\overline{\pi_{i_1, \dots, i_k}(Z_n)} = Z_{n-k},$$

where  $\pi_{i_1, \dots, i_k}$  is the projection where the coordinates  $i_1, \dots, i_k$  have been omitted.

**Theorem 1.3.12.** *Let  $(K, \delta)$  be a differential field and  $(X, v)$  be an absolutely irreducible  $D$ -variety. The following statements are equivalent:*

- (i) *The stationary type  $p_{(X, v)}$  is minimal.*
- (ii) *There exist exactly two indiscernible sequences of  $D$ -varieties in  $(X, v)$ ; namely, the sequence defined by  $Z_n = (X, v)^n$  for all  $n \in \mathbb{N}$  and the sequence defined by  $Z_n = \Delta_n X$  the image of the diagonal embedding  $\Delta_n : (X, v) \rightarrow (X, v)^n$  for all  $n \in \mathbb{N}$ .*
- (iii) *For any  $N \in \mathbb{N}$  and any proper closed, irreducible and invariant sub-variety  $Z \subset (X, v) \times (X, v)^N$ , projecting generically on  $X$  and  $X^N$  respectively, one has:*

$$\dim(X) \mid \dim(Z).$$

PROOF. The equivalence between (i) and (ii) is a direct consequence of Corollary 1.3.9.

(i)  $\implies$  (iii) : Denote by  $\eta$  the generic point of  $(X, v)^N$ . The generic fibre  $Z_\eta$  is a closed invariant subvariety of  $(X, v)_\eta$ , which projects generically on  $X$  and therefore its generic type is an extension of  $p_{(X, v)}$ .

As  $p_{(X, v)}$  is a minimal type, we have two cases : either the generic type of  $Z_\eta$  is finite or it is the non-forking extension of  $p_{(X, v)}$  and  $Z_\eta = X_\eta$ . In both cases we have that

$$\dim(X) \mid \dim(Z_\eta) = \dim(Z) - \dim(\overline{\pi(Z)}) = \dim(Z) - N\dim(X).$$

We conclude that  $\dim(X) \mid \dim(Z)$ .

(iii)  $\implies$  (i) : We need to show that  $p_{(X, v)}$  satisfies the condition (iii)' in Corollary 1.3.9.

Consider  $a_1, \dots, a_{N-1}$  realising  $p_{(X, v)}^{(N-1)}$  and  $a_N$  realising  $p_{(X, v)}$  such that

$$a_N \not\downarrow_A a_1, \dots, a_{N-1}.$$

We want to show that  $a_N \in \text{acl}(A, a_1, \dots, a_{N-1})$ .

There exists a closed irreducible invariant sub-variety  $Z \subset (X, v)^N$  such that

— If  $\eta$  denotes the generic point of  $(X, v)^{N-1}$  then  $Z_\eta$  is a proper invariant closed sub-variety of  $(X, v)_\eta$ .

—  $(a_1, \dots, a_N)$  realises the generic type of  $Z$  over  $K$ .

As  $Z$  projects generically on  $(X, v)$  and  $(X, v)^{N-1}$ , by (iii), we conclude that  $\dim(Z)$  is divisible by  $\dim(X)$  and therefore that the same holds for  $\dim(Z_\eta)$ .

But  $Z_\eta$  is a closed and proper invariant sub-variety of  $X_\eta$  and thus has dimension 0. We conclude that  $Z_\eta^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})}$  is finite, i.e. that  $a_N \in \text{acl}(A, a_1, \dots, a_{N-1})$ .  $\square$

## 2. Orthogonality to locally modular types

In this section, we gather some model-theoretic tools and results, concerning the analysis of types of finite Lascar rank by locally modular minimal types in a stable theory.

We start by recalling the notion of one-basedness, which is a global counterpart for the notion of modularity. We then describe how to carry out the first step of the analysis of a type of finite rank by minimal types. Combining these ideas, we shall establish in Subsection 2.3, two results of descent of the parameters for locally modular minimal types.

Those results are variations of classical results in geometric stability, for which the reader may refer to [Pil96, Chapter 2 and 8]. We state them in a specific form, which will be needed in Sections 3 and 4 of this text, to derive a precise description of the analysis of types of finite rank over constant differential fields in the theory  $\mathbf{DCF}_0$ .

**Convention.** *In this and in later sections, we will always work in the following model-theoretic context: We fix  $T$  a complete and stable theory which eliminates imaginaries,  $\kappa$  an infinite cardinal and  $\mathcal{U}$  a  $\kappa$ -strongly homogeneous and  $\kappa$ -saturated model of the theory  $T$ . By a small set of parameters, we mean a subset  $A \subset \mathcal{U}$  of cardinal less than  $\kappa$ .*

### 2.1. One-basedness.

**Notation 2.1.1.** Let  $A \subset \mathcal{U}$  be a small parameter set. If  $D$  is an  $\infty$ -definable set over  $A$ , we set

$$D^{eq} = \text{dcl}(D) \cap \mathcal{U}.$$

Note that if  $D$  is a definable set over  $A$ , then  $D^{eq}$  is an expansion of the structure  $D_A$  induced by  $\mathcal{U}$  on  $D$  by imaginary sorts.

For any small extension  $A \subset B$  of the parameters, we write  $S_D^{eq}(B)$  for the set of types (for the theory  $T$ ) living on  $D^{eq}$ , i.e. the set of types  $p \in S(B)$  satisfying  $p(x) \models x \in \text{dcl}(D)$ .

**Definition 2.1.2.** Let  $A$  be a small parameter set and  $D$  be an  $\infty$ -definable set over  $A$ . We say that  $D$  is *one-based* if for every small extension  $A \subset B$  of the parameters, any type  $p \in S_D^{eq}(B)$  and any realisation  $a$  of  $p$ , we have

$$\text{Cb}(p) \in \text{acl}(A, a) \cap D^{eq}.$$

Recall that if  $A \subset B \subset \mathcal{U}$ , then  $A$  is called *relatively algebraically closed in  $B$*  if  $\text{acl}(A) \cap B = A$ .

**Lemma 2.1.3** ([Pil96, Chapter 4, Remark 1.8]). *Let  $A$  be a small parameter set and  $D$  be an  $\infty$ -definable set over  $A$ . The  $\infty$ -definable set  $D$  is one-based if and only if for small subsets  $X, Y \subset D^{eq}$ , containing  $A$  and relatively algebraically closed in  $D^{eq}$ , we have*

$$X \downarrow_{X \cap Y} Y. \quad (13)$$

**Remark 2.1.4.** The notion of one-basedness is invariant by automorphisms and by extension and by restriction of the parameters. Indeed, the first part is an obvious consequence of both formulations of one-basedness (Definition 2.1.2 and Lemma 2.1.3). For the second part, we refer to [Pil96, Chapter 4, Remark 1.8].

**Example 2.1.5.** Let  $D$  be a minimal  $\infty$ -definable set over some small set of parameters  $A$ . By definition, the minimal set  $D$  is modular if and only if the identity (13) is valid when  $X, Y \subset D$  are algebraically closed in  $D$ . Hence, if  $D$  is modular then  $D$  is one-based.

As one-basedness is invariant by restriction of the parameters, we deduce that if  $D$  is locally modular, then  $D$  is one-based.

Conversely, one can check directly that any one-based minimal set  $D$  does not admit any 2-dimensional family of plane curves and is therefore locally modular (see for instance [Pil96, Chapter 2, Proposition 5.8]). Consequently, a minimal  $\infty$ -definable set is one-based if and only if it is locally modular.

In the next proposition, we gather the properties of one-basedness for types over small parameter sets.

**Proposition 2.1.6** ([Cha12, Fact 1.3]). *Let  $p \in S(A)$  be a type over a small set of parameters. The notion of one-basedness satisfies the following properties :*

- (i) *Let  $A \subset B$  be a small extension of the parameters and let  $q$  be a non-forking extension of  $p$ . Then the type  $p$  is one-based if and only if the type  $q$  is one-based.*
- (ii) *Let  $q \in S(A)$  be a type interalgebraic with  $p$  over  $A$ . Then the type  $p$  is one-based if and only if the type  $q$  is one-based.*
- (iii) *A type  $p \in S(A)$  over any set of parameters  $A \subset \mathcal{U}$  which is analysable by one-based types (in particular, by locally modular minimal types) is one-based.  $\square$*

**Remark 2.1.7.** In particular, if  $p \in S(A)$  is a one-based type, then  $p$  is orthogonal to every non-locally modular minimal type in the stable theory  $T$ .

Indeed, if  $p$  is non-orthogonal to a minimal type  $q$ , then there exists an extension of the parameters and a type  $\tilde{p} \in S_D^{eq}(B)$  such that  $q$  and  $\tilde{p}$  are interalgebraic. As  $\tilde{p}$  is one-based, the same holds for  $q$  and, therefore,  $q$  is locally modular by Example 2.1.5.

Conversely, let  $p$  be a type of finite Lascar rank. The assumption that  $p$  is orthogonal to every non-locally modular minimal type *does not* imply that  $p$  is one-based. This is of course well-known and we give a counter example, definable in the theory  $\text{DCF}_0$ , in the fourth section of this text.

However, by (iii) of Proposition 2.1.6, the type  $p$  (of finite Lascar rank) is one-based if and only if  $p$  is *hereditarily orthogonal* to every non-locally modular type, i.e., if  $p$  and its (forking) extension are orthogonal to every non-locally modular type.

## 2.2. Structural results for types of finite Lascar rank.

**Proposition 2.2.1.** *The following properties hold:*

- (1) *Let  $T$  be a superstable theory. Every subset of an acl-finitely generated set is also acl-finitely generated.*
- (2) *Let  $T$  be an  $\omega$ -stable theory. Every subset of dcl-finitely generated set is also dcl-finitely generated.*

PROOF. (1) Suppose that  $T$  is superstable. We have to show that there are no infinite increasing chains

$$\text{acl}(b_1) \subsetneq \text{acl}(b_2) \subsetneq \dots \text{acl}(b_k) \subsetneq \dots \subset \text{acl}(a).$$

For that matter, it suffices to show that if  $\text{acl}(b_1) \subsetneq \text{acl}(b_2) \subset \text{acl}(a)$ , then  $\text{RU}(a/b_1) > \text{RU}(a/b_2)$ .

Suppose that  $\text{RU}(a/b_1) = \text{RU}(a/b_2)$ . Then,  $a \perp_{b_1} b_2$ . Consequently, as  $b_2 \in \text{acl}(a)$ , we have  $b_2 \in \text{acl}(b_1)$  and therefore  $\text{acl}(b_1) = \text{acl}(b_2)$ .

(2) Suppose that  $T$  is  $\omega$ -stable. By the same argument, it is enough to show that if  $\text{dcl}(b_1) \subsetneq \text{dcl}(b_2) \subset \text{dcl}(a)$ , then

$$(\text{MR}(a/b_1), \text{MD}(a/b_1)) >_{lex} (\text{MR}(a/b_2), \text{MD}(a/b_2)).$$

Suppose that  $(\text{MR}(a/b_1), \text{MD}(a/b_1)) = (\text{MR}(a/b_2), \text{MD}(a/b_2))$ . As  $\text{MR}(a/b_1) = \text{MR}(a/b_2)$ , we have  $a \perp_{b_1} b_2$  and therefore  $b_2 \in \text{acl}(b_1)$ .

Consider now  $\mathfrak{p} \in S(\mathcal{U})$  a global non-forking extension of  $\text{tp}(a/b_2)$  to  $\mathcal{U}$  (which is also a global non-forking extension of  $\text{tp}(a/b_1)$ ). Then, for  $i = 1, 2$ , the Morley degree of  $\text{tp}(a/b_i)$  is

$$d_i := |\text{Aut}(\mathcal{U}/b_i) \cdot \mathfrak{p}| \in \mathbb{N}.$$

As  $\text{MD}(a/b_1) = \text{MD}(a/b_2)$ , we deduce that  $\text{Aut}(\mathcal{U}/b_1) \cdot \mathfrak{p} = \text{Aut}(\mathcal{U}/b_2) \cdot \mathfrak{p}$ .

Let  $\sigma$  be an automorphism of  $\mathcal{U}$  fixing  $b_1$ . There exists an automorphism  $\tau$  fixing  $b_2$  such that  $\sigma \cdot \mathfrak{p} = \tau \cdot \mathfrak{p}$

As  $b_2 \in \text{dcl}(a)$ , there exists a  $\emptyset$ -definable function  $f$  such that “ $f(x) = b_2$ ”  $\in \mathfrak{p}$ . Therefore “ $f(x) = \sigma(b_2)$ ”  $\in \sigma \cdot \mathfrak{p}$  and “ $f(x) = \tau(b_2)$ ”  $\in \tau \cdot \mathfrak{p}$ .

These two types are equal and therefore,  $\sigma(b_2) = \tau(b_2) = b_2$ . We conclude that any automorphism of  $\mathcal{U}$  fixing  $b_1$  fixes  $b_2$  and that  $b_2 \in \text{dcl}(b_1)$ .  $\square$

**Construction 2.2.2.** We start from the following situation : Let  $A \subset B$  be an extension of parameters,  $p$  be a complete stationary type over  $A$ , of finite Lascar rank, and  $q$  be a minimal type over  $B$  such that  $p$  and  $q$  are non-orthogonal.

We define:

$$Q = \{g \cdot q \mid g \in \text{Aut}(\mathcal{U}/A)\}.$$

By definition,  $Q$  is a set of minimal types, which is  $A$ -invariant.

Fix a realisation  $a$  of  $p$  and consider the set

$$\text{Int}(a/A) = \{b \in \text{dcl}(a, A) \mid \text{tp}(b/A) \text{ is internal to } Q\}.$$

**Corollary 2.2.3.** *With the notation above, we have:*

- (1) *If the theory  $T$  is superstable, then there exists a finite tuple  $a_q \in \text{Int}(a/A)$  such that*

$$\text{Int}(a/A) \subset \text{acl}(A, a_q).$$

- (2) *If the theory  $T$  is  $\omega$ -stable, then there exists a finite tuple  $a_q \in \text{Int}(a/A)$  such that*

$$\text{Int}(a/A) = \text{dcl}(A, a_q).$$

PROOF. Note that  $\text{dcl}(\text{Int}(a/A), A) = \text{Int}(a/A)$ . This is then a straightforward consequence of Proposition 2.2.1.  $\square$

**Proposition 2.2.4** ([Pil96, Chapter 7, Lemma 4.5], Decomposition Lemma). *Let  $A \subset B$  be an extension of parameters,  $p$  be a stationary type over  $A$  and  $q$  be a minimal type over  $B$ .*

*Consider a realisation  $a$  of  $p$  and set  $Q$  for the set of conjugates of  $q$  by automorphisms of  $\mathcal{U}$  fixing  $A$ . For any extension  $A \subset C$  of the parameters we have:*

$$a \downarrow_A C \implies a \downarrow_{\text{Int}(a/A)} C, Q.$$

□

**Corollary 2.2.5.** *Let  $A \subset B$  be an extension of parameters,  $p$  be a stationary type over  $A$  and  $q$  be a stationary type over  $B$ .*

*Suppose that  $p$  and  $q$  are non-orthogonal and consider a realisation  $a$  of  $p$ . Then, there exists  $b \in \text{dcl}(a, A) \setminus \text{acl}(A)$  such that  $\text{tp}(b/A)$  is internal to  $q$ .*

PROOF. It suffices to prove that  $\text{Int}(a/A) \setminus \text{acl}(A) \neq \emptyset$ . By contradiction, suppose that  $\text{Int}(a/A) \subset \text{acl}(A)$ .

As  $p$  and  $q$  are non-orthogonal, there exists an extension of the parameters  $B \subset C$ , independent from  $a$  over  $A$  and a realisation  $b$  of  $q|C$  with  $a \not\downarrow_C b$ .

Now Proposition 2.2.4 implies that  $a \downarrow_{\text{Int}(a/A)} C, b$ . From the inclusions  $A \subset \text{Int}(a/A) \subset \text{acl}(A)$ , we deduce that  $a \downarrow_A C, b$  and therefore that  $a \downarrow_C b$ , which contradicts the choice of  $b$ . □

**Corollary 2.2.6.** *Let  $A \subset B$  be an extension of parameters,  $p$  be a stationary type over  $A$  and  $q$  be a stationary type over  $B$ . Consider a realisation  $a$  of  $p$  and set  $Q$  for the set of conjugates of  $q$  by automorphisms of  $\mathcal{U}$  fixing  $A$ .*

*Suppose that  $p$  is almost internal to  $Q$ . Then there exists  $b \in \text{dcl}(a, A)$ , interalgebraic with  $a$  over  $A$ , such that  $\text{tp}(b/A)$  is internal to  $q$ .*

PROOF. As  $p$  is almost internal to  $q$ , there exist an extension  $B \subset C$  of the parameters, with  $C$  independent of  $a$  over  $A$  and realisations  $b_1, \dots, b_n$  of  $Q$  such that :

$$a \in \text{acl}(C, b_1, \dots, b_n)$$

By the Decomposition Lemma, we have

$$a \downarrow_{\text{Int}(a/A)} C, b_1, \dots, b_n.$$

From the two preceding statements, we deduce that  $a \in \text{acl}(A, \text{Int}(a/A))$ . We conclude that there exists a finite tuple  $a_q \in \text{Int}(a/A)$  such that  $a \in \text{acl}(A, a_q)$ . □

**2.3. Consequences for orthogonality to locally modular minimal types.** From now on, we restrict to the case where the minimal type  $q$  is locally modular and we show that it is possible to “descend the parameters” witnessing non-orthogonality.

**Corollary 2.3.1.** *Let  $A \subset B$  be an extension of parameters,  $p$  be a stationary type over  $A$  of finite Lascar rank, and  $q$  be a locally modular minimal type over  $B$ .*

*If  $p$  is non-orthogonal to  $q$ , then there exists a type  $\tilde{q}$  over  $A$ , such that:*

- *The type  $\tilde{q}$  is a minimal type non-orthogonal to  $q$ .*
- *The types  $p$  and  $\tilde{q}$  are not weakly orthogonal.*

PROOF. Let  $p$  be a stationary type of finite rank, which is non-orthogonal to the locally modular minimal type  $q$  over  $B$ . Consider a realisation  $a$  of  $p$ . By Proposition 2.2.5, there exists  $a_q \in \text{dcl}(a, A)$  with  $\text{RU}(a_q/A) \geq 1$  such that  $\text{tp}(a_q/A)$  is internal to  $Q$ .

Set  $\tilde{p} = \text{tp}(a_q/A)$ . It suffices to construct a minimal type  $\tilde{q}$  over  $A$ , non-orthogonal to  $q$  and not weakly orthogonal to  $\tilde{p}$ . We can therefore suppose that  $a = a_q$ , i.e., that  $p$  is internal to  $q$ .

If  $\text{RU}(a/A) = 1$ , then it suffices to set  $\tilde{q} = p = \text{tp}(a/A)$ , which is minimal and non-orthogonal to  $q$ . Suppose now that  $\text{RU}(a/A) > 1$ . There exists a tuple  $e \in \mathcal{U}$  such that

- $\text{RU}(a/Ae) = \text{RU}(a/A) - 1$ ,
- $e$  is interalgebraic with the canonical basis for the stationary type  $\text{tp}(a/Ae)$ .



As  $p$  is internal to a locally modular minimal type, the type  $p$  is a one-based (Proposition 2.1.6 (iii)). Consequently, we deduce that :

$$e \in \text{acl}(A, a).$$

A simple rank computation shows that  $\text{RU}(e/A) = 1$  and therefore that the type of  $e$  over  $A$  is indeed minimal. As  $p$  is internal to  $q$ , any type non-orthogonal to  $p$  is also non-orthogonal to  $q$ . Moreover, by construction, the type  $\text{tp}(e/A)$  is not weakly orthogonal to  $p$ , and therefore non-orthogonal to  $q$ .  $\square$

For trivial minimal types, we have the following strengthening of Corollary 2.3.1.

**Proposition 2.3.2.** *Let  $A \subset B$  be an extension of parameters,  $p$  be a stationary type over  $A$  and  $q$  be a trivial minimal type over  $B$ .*

*If  $p$  is almost-internal to a set  $Q$  of  $A$ -conjugates of  $q$ , then there exists a type  $\tilde{q}$  over  $A$  such that:*

- *The type  $\tilde{q}$  is a minimal and non-orthogonal to  $q$ .*
- *There exist realisations  $b_1, \dots, b_n$  of  $\tilde{q}$  and a realisation  $a$  of  $p$  with  $a \in \text{acl}(A, b_1, \dots, b_n)$ .*

PROOF. By Corollary 2.3.1, there exists a minimal type  $\tilde{q}$  over  $A$  non-orthogonal to  $q$ . Therefore,  $p$  is almost internal to  $\tilde{q}$ . By Corollary 2.2.6, we can suppose, up to replacing  $p$  by an interalgebraic type<sup>1</sup> over  $A$  and  $q$  by  $\tilde{q}$ , that  $p$  is internal to  $q$  and that  $q$  is a minimal type over  $A$ .

Set  $\mathcal{P} \subset \mathcal{U}^m$  for the set of realisations of  $p$ ,  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{U}^n$  for the set of realisations of  $q$  and  $\text{Aut}_A(\mathcal{P}/\mathcal{Q})$  for the image of  $\text{Aut}(\mathcal{U}/A \cup \mathcal{Q})$  in the group of permutations of  $\mathcal{P}$ .

We can now rephrase our statement in terms of finiteness of the group  $\text{Aut}_A(\mathcal{P}/\mathcal{Q})$  : There exist realisations  $b_1, \dots, b_n$  of  $q$  and a realisation  $a$  of  $p$  with  $a \in \text{acl}(A, b_1, \dots, b_n)$  if and only if the group  $\text{Aut}_A(\mathcal{P}/\mathcal{Q})$  is finite.

By [Hru90, Theorem 3], there exists a definable group  $G$  in  $Q^{eq}$  such that  $G(\mathcal{U})$  is isomorphic to  $\text{Aut}_A(\mathcal{P}/\mathcal{Q})$ . Since  $q$  is a trivial minimal type, there is no infinite definable group in  $Q^{eq}$ . We conclude that  $\text{Aut}_A(\mathcal{P}/\mathcal{Q})$  is finite.  $\square$

### 3. Non-trivial locally modular types in $\text{DCF}_0$ and universal vector extensions

In this section, we specialize our context to the case of the theory  $\text{DCF}_0$ . For this theory, Hrushovski and Sokolovic gave in [HS96] a complete description of the non-orthogonality classes of minimal non-trivial, locally modular types, that we present in the first subsection. Their results rely on structural ideas from geometric stability theory and on the existence of a  $D$ -group structure on the universal vector extension of an Abelian variety (see [Bui93]), that we summarized in Appendix A.

This description has important consequences for the model-theoretic behaviour of differentially closed fields. For example, it implies that the theory  $\text{DCF}_0$  has the ENI-DOP property and therefore  $2^{\aleph_0}$  non-isomorphic countable models (see [HS96, Example 2.10] and [MMP06, Corollary 2.6 of Part 3]). In the second subsection, we explain the consequences of the description of Hrushovski-Sokolovic on the analysis of types of finite rank defined over constant differential fields.

#### 3.1. Hrushovski-Sokolovic's classification of non-trivial locally modular types.

**Notation 3.1.1.** Let  $(K, \delta)$  a differential field of characteristic 0. Recall that the category  $\mathbf{D-Var}/(K, \delta)$  of  $D$ -varieties over  $(K, \delta)$  admits finite products. The group objects in this category are called  $D$ -groups and the category of  $D$ -groups is denoted  $\mathbf{D-Grp}/(K, \delta)$  (see [Bui93] and [BP10] for classical results on  $D$ -groups).

If  $(G, \delta_G)$  is a  $D$ -group, a  $D$ -subgroup  $H$  of  $G$  is a closed algebraic subgroup of  $G$  which, as a closed sub-variety, is invariant.

1. Two types  $p, q \in S(A)$  are said *interalgebraic* if there exist realisations  $a$  and  $b$  of  $p$  and  $q$  respectively, interalgebraic over  $A$ .

**Lemma 3.1.2.** *Let  $(G, \delta_G)$  be a  $D$ -group over some differential field  $(K, \delta)$  and  $H$  be a normal  $D$ -subgroup of  $G$ . There exists a unique  $D$ -group structure on  $G/H$  over  $(K, \delta)$ , denoted  $(G/H, \delta_{G/H})$ , such that the morphism*

$$\pi : (G, \delta_G) \longrightarrow (G/H, \delta_{G/H})$$

*is a morphism of  $D$ -groups.*

The  $D$ -group  $(G/H, \delta_{G/H})$  is called the *quotient* of  $(G, \delta_G)$  by the  $D$ -subgroup  $H$ .

PROOF. Let  $(K, \delta)$  be a differential field. Recall from [Bui93] that for any algebraic group  $G$  over  $(K, \delta)$ , one may associate, in a functorial way, an algebraic group  $T_D G$  over  $K$  such that the set of  $D$ -group structures on  $G$  is in 1-1 correspondence with the set  $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}/K}(G, T_D G)$  of morphisms of algebraic groups over  $K$ .

Let  $\pi : G \rightarrow G/H$  be the canonical projection. It induces a morphism  $T_D \pi : T_D G \rightarrow T_D(G/H)$  of algebraic groups over  $K$ .

If  $\delta_G : G \rightarrow T_D G$  defines the  $D$ -group structure on  $G$ , we get by composing with  $T_D \pi$ , a morphism  $\sigma : G \rightarrow T_D(G/H)$  of algebraic groups over  $K$ . As  $H$  is invariant, the kernel of  $\sigma$  contains  $H$  and we get a morphism:

$$\bar{\sigma} : G/H \longrightarrow T_D(G/H)$$

which defines the  $D$ -group structure on  $G/H$ .  $\square$

From now on, we use the basic facts and the notation concerning universal vector extensions of semi-abelian varieties recalled in Appendix A.1.

**Proposition 3.1.3** ([BP10, Lemma 3.4]). *Let  $(K, \delta)$  be a differential field and  $B$  a semi-Abelian variety over  $K$ . There exists a unique  $D$ -group structure on the universal vector extension  $\mathbb{E}(B)$  of  $B$ , denoted  $(\mathbb{E}(B), \delta_B)$ .*

Note that the existence is a direct consequence of the universal property satisfied by  $\mathbb{E}(B)$ . Indeed,  $T_D \mathbb{E}(B)$  is an extension of  $\mathbb{E}(B)$  (and therefore of  $B$ ) by a vector group. By the universal property of  $\mathbb{E}(B)$ , we get a morphism  $\mathbb{E}(B) \rightarrow T_D \mathbb{E}(B)$  of algebraic groups over  $K$ , i.e., a  $D$ -group structure on  $\mathbb{E}(B)$ . The uniqueness statement follows from the properties of Proposition A.1.4.

**Definition 3.1.4.** Let  $B$  be a semi-Abelian variety over  $k$ . Denote by  $(\mathbb{E}(B), \delta_B)$  the  $D$ -group structure on the universal vector extension of  $B$  and by  $U_B$  be the maximal vector subgroup of  $W_B$  invariant by the derivation  $\delta_B$ . The  $D$ -group quotient

$$(\bar{B}, \delta_{\bar{B}}) := (\mathbb{E}(B), \delta_B) / U_B$$

is called the  *$D$ -group associated to  $B$* .

**Remark 3.1.5.** Let  $A$  be an Abelian variety over  $K$ . We always have  $U_A \subset W_A$ , so  $\dim(\bar{A}) \geq \dim(A)$ . Moreover, the case of equality holds if and only if there exists a  $D$ -group structure on  $A$ , that is, if and only if  $A_{\bar{K}}$  descends to the constants ([Bui93]).

In particular, when  $E$  is an elliptic curve, which does not descend to the constants, then  $(\bar{E}, \delta_{\bar{E}}) = (\mathbb{E}(E), \delta_E)$ .

**Theorem 3.1.6** ([HS96, Theorem 2.12]). *Let  $(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})$  be a differentially closed field. For any simple Abelian variety  $A$  over  $\mathcal{U}$  that does not descend to the constants, the connected definable group*

$$\Sigma(A) = (\bar{A}, \delta_{\bar{A}})^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})}$$

*is minimal, non-trivial and modular.*

Moreover, there is a 1-1 correspondence between the set of non-trivial locally modular types, up to non-orthogonality, and the set of simple Abelian varieties over  $\mathcal{U}$ , that do not descend to the constants, up to isogeny. This correspondence is given by the map which sends  $A$  to the generic type of  $\Sigma(A)$ .  $\square$

Theorem 3.1.6 is a deep result in the model-theory of differentially closed fields. It gives a complete description of the non-orthogonality classes of non-trivial, locally modular minimal types in a differentially closed field.

With the proof of the Trichotomy conjecture in the theory  $\mathbf{DCF}_0$ , its proof and its corollaries are the main subject of [HS96]. Note that there are at least three steps in the proof this theorem :

- (1) First, prove that if  $A$  is a simple Abelian variety, which does not descend to the constants then  $\Sigma(A)$  is minimal, non-trivial and modular.

Note that  $\Sigma(A)$ , as an infinite group, is always non trivial. Moreover, as the Abelian variety  $A$  is simple, the only proper algebraic subgroups of  $A$  are finite groups. Consequently, strong-minimality for  $\Sigma(A)$  follows from one-basedness (see [HP87]).

Using the Trichotomy Theorem in  $\mathbf{DCF}_0$ , this first step reduces to proving that, if there exists a minimal type  $p$  living on  $\Sigma(A)^{eq}$  non-orthogonal to the constants, then  $A$  descends to the constants. This statement is strongly linked with Hrushovski's proof of the Mordell-Lang conjecture for function fields of characteristic 0 (see [Hru96]).

- (2) Once this has been established, one needs to show that any non-orthogonality class of non-trivial, locally modular minimal types contains the generic type of  $\Sigma(A)$  for some simple Abelian variety  $A$ , which does not descend to the constants.

A key structural result for that purpose is the Group Configuration Theorem, which shows that any such class contains a minimal locally modular (commutative) group (see, for instance, [Pil96, Chapter 5 Theorem 1.1].) A careful analysis of locally modular minimal groups definable in a differentially closed field shows that this group can be taken in fact of the form  $\Sigma(A)$  for some simple Abelian variety  $A$  (which necessarily does not descend to the constants).

- (3) To conclude the proof, one has to show that if  $A$  and  $A'$  are simple Abelian varieties that do not descend to the constants and if  $\Sigma(A)$  and  $\Sigma(A')$  are non-orthogonal, then the Abelian varieties  $A$  and  $A'$  are isogeneous. The last statement can be proven by standard differential algebraic arguments (see [HS96] for more details).

### 3.2. Consequences for $D$ -varieties defined over constant differential fields.

**Theorem 3.2.1** ([HS96, Proposition 2.8]). *Fix  $(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})$  be a differentially closed field. Let  $p \in S(C_0)$  a stationary type over a small subfield  $C_0$  of the field  $\mathcal{C}$  of constants of  $\mathcal{U}$  and  $q$  a non-trivial, locally modular, minimal type. Then  $p$  and  $q$  are orthogonal.*

**Remark 3.2.2.** It is sufficient to prove Theorem 3.2.1 for types  $p$  of finite Morley rank.

Indeed, suppose that there exists a stationary type  $p \in S(C_0)$  (not necessarily of finite rank) non-orthogonal to  $q$ . By the Decomposition Lemma (Proposition 2.2.4), there exists a non-algebraic type  $\tilde{p} \in S(C_0)$  which is internal to  $q$ . Therefore, the type  $\tilde{p}$  is non-orthogonal to  $q$  and of finite Morley rank.

An interesting consequence of Theorem 3.2.1 is the following corollary, which applies, in particular, to the geodesic flows on pseudo-Riemannian varieties over  $\mathbb{R}$  studied in the second Chapter.

**Corollary 3.2.3.** *Let  $k$  be a field of characteristic 0 and  $(X, v)$  be an absolutely irreducible  $D$ -variety over  $(k, 0)$  of positive dimension.*

*If the generic type  $p$  of the  $D$ -variety  $(X, v)$  is orthogonal to the constants, then there exists a trivial minimal type  $q \in S(k)$ , with parameters in  $k$ , not weakly-orthogonal to  $p$ .*

**PROOF.** The type  $p$  is a non-algebraic type and therefore there exists an extensions of the parameter  $(k, 0) \subset (L, \delta_L)$  and a minimal type  $q \in S(L)$ , non-orthogonal to  $p$ .

By hypothesis and Theorem 3.2.1, the type  $p$  is orthogonal to every non-trivial minimal type. It follows that the type  $q$  is trivial. By Proposition 2.3.1, we can now replace  $q$  by a trivial minimal type  $\tilde{q} \in S(k)$ , which is not weakly orthogonal to  $p$ .  $\square$

We now outline the proof of Theorem 3.2.1. The proof is based on the classification theorem for non-trivial locally modular types (Theorem 3.1.6). With this at hand, it is easy to reduce it to a statement on the algebraic geometry of Abelian varieties. We start with some terminology.

**Definition 3.2.4.** Let  $T$  be a stable theory and  $A_0 = \text{acl}(A_0)$  be a small algebraically closed parameter set. A stationary type  $p \in S(A)$  over any small extension  $A_0 \subset A$  of the parameters is said to be *orthogonal to the parameter set  $A_0$*  if for every type  $q \in S(A_0)$ , the types  $p$  and  $q$  are orthogonal.

**Remark 3.2.5.** Theorem 3.2.1 can now be rephrased in the following terms : Let  $(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})$  be a differentially closed field. Consider  $q$  a non-trivial, locally modular, minimal type and  $C_0$  an

algebraically closed subfield of the field  $\mathcal{C}$  of constants of  $(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})$ . Then  $q$  is orthogonal to the parameter set  $C_0$ .

**Lemma 3.2.6.** *Let  $T$  be a stable theory as above,  $A_0 \subset \mathcal{U}$  be a small parameter set and  $q \in S(A)$  a locally modular minimal type. Suppose there exists an automorphism  $\sigma \in \text{Aut}(\mathcal{U}/A_0)$  such that*

$$\sigma.q \perp q$$

*Then,  $q$  is orthogonal to the parameter set  $A_0$ .*

PROOF. Indeed, as  $q$  is locally modular, Lemma 2.3.1 implies that  $q$  is orthogonal to the parameter set  $A_0$  if and only if  $q$  is orthogonal to every minimal type in  $S(A_0)$ .

Suppose that there exists a minimal type  $p_0 \in S(A_0)$  non-orthogonal to  $q$  and consider  $\sigma \in \text{Aut}(\mathcal{U}/A)$  any automorphism of  $\mathcal{U}$  fixing  $A$ .

By invariance of orthogonality under automorphisms, the types  $\sigma.q$  and  $p_0 = \sigma.p_0$  are also non-orthogonal. By transitivity of this relation on minimal types, we deduce that  $\sigma.q$  and  $q$  are also non-orthogonal. This proves the lemma.  $\square$

**Remark 3.2.7.** In fact, Lemma 3.2.6 still holds for non-locally modular minimal types. Indeed, a minimal type is orthogonal to the parameter set  $A_0$  if and only if it is orthogonal to every semi-minimal type over  $A_0$  (see Section 4). One then uses the transitivity of the non-orthogonality relation for semi-minimal types, instead of minimal ones in the proof of Lemma 3.2.6.

**Proposition 3.2.8** ([HS96, Fact 2.9]). *Let  $K$  be an algebraically closed field of characteristic 0 and  $A_1$  (resp.  $A_2$ ) an Abelian variety over some algebraically closed subfield  $K_1 \subset K$  (resp.  $K_2 \subset K$ ).*

*Suppose that  $A_1 \times_{K_1} K$  and  $A_2 \times_{K_2} K$  are isogeneous Abelian varieties over  $K$ . Then there exists an Abelian variety  $A_0$  over  $K_0 = K_1 \cap K_2$  such that  $A_0 \times_{K_0} K$  is isogeneous to both  $A_1 \times_{K_1} K$  and  $A_2 \times_{K_2} K$ .  $\square$*

PROOF OF PROPOSITION 3.2.7  $\implies$  THEOREM 3.2.1 : Fix  $(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})$  a  $\kappa$ -saturated and  $\kappa$ -homogeneous model for the theory  $\mathbf{DCF}_0$  and  $C_0 \subset \mathcal{C}$  a small algebraically closed subfield of the field of constants of  $\mathcal{U}$ .

Let  $q$  be a locally modular type defined over a small algebraically closed differential field  $(K_1, \delta_1)$  containing  $C_0$ . Up to replacing  $q$  by a minimal type in the same non-orthogonality class, we can suppose, by Theorem 3.1.6, that there exists a simple Abelian variety  $A_1$  over  $K_1$ , that does not descend to the constants, such that  $q$  is the generic type of

$$\Sigma(A_1) = (\overline{A_1}, \delta_{\overline{A_1}})^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})}.$$

To prove that  $q$  is orthogonal to  $C_0$ , by Lemma 3.2.6, it suffices to construct an automorphism  $\sigma \in \text{Aut}(\mathcal{U}/C_0)$  such that  $\sigma.q$  and  $q$  are orthogonal.

Now, consider an independent copy of  $(K_1, \delta_1)$  over  $C_0$ , i.e., a differential subfield  $(K_2, \delta_2)$  of  $(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})$  such that:

- (a)  $(K_1, \delta_1) \simeq_{C_0} (K_2, \delta_2)$
- (b)  $(K_1, \delta_1) \downarrow_{C_0} (K_2, \delta_2)$

From (b), we get that  $K_1 \cap K_2 = C_0$  and from (a) and the homogeneity properties for  $\mathcal{U}$ , that there exists an automorphism  $\sigma \in \text{Aut}(\mathcal{U}/C_0)$  with  $\sigma(K_1) = K_2$ .

**Claim.** *With the notation above, the types  $q \in S(K_1)$  and  $\sigma.q \in S(K_2)$  are orthogonal.*

By contradiction, suppose that  $q$  and  $\sigma.q$  are non-orthogonal. Note that  $\sigma.q$  is the generic type of  $\Sigma(A_2) = (\overline{A_2}, \delta_{\overline{A_2}})^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})}$  where  $A_2$  is the Abelian variety  $\sigma.A_1$  defined over  $K_2$ . Therefore, the generic types of  $\Sigma(A_2)$  and of  $\Sigma(A_1)$  are non-orthogonal.

By Theorem 3.1.6, we deduce that the Abelian varieties  $A_1 \times_{K_1} \mathcal{U}$  and  $A_2 \times_{K_2} \mathcal{U}$  are isogeneous. Consequently, using Proposition 3.2.7, there exists an Abelian variety  $A_0$  over  $K_1 \cap K_2 = C_0$  such that  $A_0 \times_{C_0} K$  is isogeneous to  $A_1 \times_{K_1} K$ . We conclude that the Abelian variety  $A_1$  descends to the constants, which contradicts the hypothesis.  $\square$

#### 4. Semi-minimality

In the two first Chapters, we were mainly interested in the property of orthogonality to the constants for the generic type of a  $D$ -variety. In particular, we constructed families of types  $p \in S(\mathbb{R})$  of order 3, orthogonal to the constants.

In this section, we look for a more precise description of the possible model-theoretic behaviour of such types  $p$ . Using Hrushovski and Sokolovic's classification of non-trivial locally modular type, we prove in the first subsection that, under an additional assumption of semi-minimality, only two kinds of behaviour occur: *either  $p$  is minimal and trivial, or there exists a trivial type  $q \in S(\mathbb{R})$  of order 1 such that  $p$  is interalgebraic with  $q^{(3)}$* . In particular, the type  $p$  is always one-based.

In the second subsection, we prove that more complicated situations may occur if one drops the semi-minimality assumption. For that matter, we construct a type of order 3, orthogonal to the constants, which is not one-based.

For this section, the standard reference is again [Pil96]. The results of this section have been much inspired by the article [MP14] of Moosa-Pillay.

**4.1. Definition and properties.** We fix  $T$  a complete and stable theory which eliminates imaginaries,  $\kappa$  an infinite cardinal and  $\mathcal{U}$  a  $\kappa$ -strongly homogeneous and  $\kappa$ -saturated model of the theory  $T$ .

**Definition 4.1.1.** Let  $p \in S(A)$  be a stationary type and let  $r \in S(B)$  be a minimal type over some extension of the parameters. We say that  $p$  is  *$r$ -semi-minimal* if it is almost internal to the set of types

$$\mathcal{R} = \{g.r \mid g \in \text{Aut}(\mathcal{U}/A)\}$$

of conjugates of  $r$  by automorphisms fixing  $A$ .

We say that the type  $p$  is *semi-minimal* if there exists a minimal type  $r \in S(B)$  over some extension of the parameters such that  $p$  is  $r$ -semi-minimal.

**Lemma 4.1.2.** *Let  $p \in S(A)$  be a stationary type and  $r \in S(B)$  a minimal type. Suppose that  $p$  is semi-minimal and that the types  $p$  and  $r$  are non-orthogonal. Then,  $p$  is  $r$ -semi-minimal.*

PROOF. Indeed, since  $p$  is semi-minimal, there exists a minimal type  $r' \in S(B')$  such that  $p$  is almost internal to  $\mathcal{R}' = \{g.r' \mid g \in \text{Aut}(\mathcal{U}/A)\}$ .

As  $r$  and  $p$  are non-orthogonal, the type  $r$  is non-orthogonal to some conjugate of  $r'$  by an automorphism fixing  $A$ . Consequently, for any conjugate of  $r'$  by an automorphism fixing  $A$ , there exists a conjugate of  $r$  by an automorphism fixing  $A$ , non-orthogonal to it.

It directly follows that  $p$  is almost internal to  $\mathcal{R} = \{g.r \mid g \in \text{Aut}(\mathcal{U}/A)\}$ .  $\square$

**Example 4.1.3.** Let  $p \in S(A)$  be a stationary type. Suppose that  $p$  is  $r$ -semi-minimal for some locally modular minimal type  $r \in S(B)$ . Note that, by Proposition 2.1.6,  $p$  is one-based.

By Lemma 2.3.1, there exists a minimal type  $r' \in S(A)$ , which is non-orthogonal to  $r$ . Consequently,  $p$  is  $r'$ -semi minimal by Lemma 4.1.2. Therefore, the type  $p$  is almost internal to the locally modular minimal type  $r'$ .

**Remark 4.1.4.** Recall that, in the theory  $\text{DCF}_0$ , there exists a unique non-locally modular type modulo non-orthogonality and that it is represented by a type based on  $\emptyset$ , namely the generic type of the constant field. With the previous analysis of locally modular minimal types, this implies that in the theory  $\text{DCF}_0$ , if  $p \in S(A)$  is a semi-minimal type, then  $p$  is almost internal to a minimal type  $r \in S(A)$ .

**Lemma 4.1.5.** *Let  $p \in S(A)$  be a stationary type and let  $r \in S(A)$  be a minimal type over some extension of the parameters. Suppose that  $r$  is trivial.*

*Then, the type  $p \in S(A)$  is  $r$ -semi-minimal if and only if there exists  $n \in \mathbb{N}$  such that  $p$  is interalgebraic over  $A$  with the type  $r^{(n)}$ .*

PROOF. This is a reformulation of Proposition 2.3.2.  $\square$

**Theorem 4.1.6.** *Let  $(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})$  be a differentially closed field,  $C_0$  be a subfield of the field  $\mathcal{C}$  of constants of  $(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})$  and  $p \in S(C_0)$  be a type of order 3 which is semi-minimal and orthogonal to the constants.*

*One of the two following cases holds:*

- (i) The type  $p$  is minimal and trivial.
- (ii) There exists a trivial type  $q \in S(A)$  of order 1 such that  $q^{(3)}$  and  $p$  are interalgebraic over  $C_0$ .

PROOF. Let  $p \in S(C_0)$  be a type of order 3 which is semi-minimal and orthogonal to the constants.

First, as  $p$  is non-algebraic, there exists a minimal type  $r \in S(B)$  over some extension of the parameters, which is non-orthogonal to  $p$ .

As  $p$  is orthogonal to the constants, the type  $r$  shares the same property and therefore is locally modular (using the Trichotomy Theorem in  $\mathbf{DCF}_0$ ). By Theorem 3.2.1 (using the classification of non-trivial locally modular types),  $p$ , and therefore  $r$ , is also orthogonal to any non-trivial locally modular type. Consequently, the type  $r$  is minimal and trivial.

By Example 4.1.3, there exists a trivial minimal type  $q \in S(C_0)$  such that  $p$  is  $q$ -semi-minimal. Using Lemma 4.1.5, we conclude that there exists  $n \in \mathbb{N}$  such that the types  $p$  and  $q^{(n)}$  are interalgebraic over  $C_0$ .

By comparing the orders of those two types, we get the diophantine equation

$$3 = \text{ord}(p) = n \cdot \text{ord}(q).$$

We therefore have two cases :

- (i) If  $\text{ord}(q) = 3$ , then  $n = 1$ . The types  $p$  and  $q$  are interalgebraic over  $C_0$ . Therefore,  $p$  is a minimal trivial type, because  $q$  is one.
- (ii) If  $\text{ord}(q) = 1$ , then  $n = 3$ . The types  $p$  and  $q^{(3)}$  are interalgebraic over  $C_0$ . □

**Remark 4.1.7.** Without the semi-minimality assumption, it is easy to construct a type  $p$  of order 3, defined over a constant differential field and such that non-trivial locally modular minimal types do appear in the analysis of  $p$ .

Indeed, consider a trivial minimal type  $p$  of order 1 defined over the field  $\mathbb{C}$  (whose existence is ensured by [HI03]) and a realisation  $a$  of  $p$ . Consider now the elliptic curve  $E$  of  $j$ -invariant  $a$  and set  $b$  for a realisation of the generic type of  $E$  over  $\mathbb{C}(a)$ .

By construction, the type  $q = \text{tp}(a, b/\mathbb{C})$  is a type of order 3, defined over a constant differential field, orthogonal to the constants and the generic type of  $E$  (which is a minimal non trivial locally modular type as  $E$  does not descend to the constants) do appear in its analysis.

We end this section with a criterion for the semi-minimality of the generic type of a  $D$ -variety, that seems suitable to a dynamical analysis. This criterion is a direct translation, in terms of  $D$ -varieties, of the notion of *type without non-trivial fibration* in [MP14].

**Proposition 4.1.8.** *Let  $(V, v)$  be an absolutely irreducible  $D$ -variety over a differential field  $(K, \delta)$ .*

*Suppose that for any  $D$ -variety  $(W, w)$  over  $(K, \delta)$  of positive dimension, every dominant morphism of  $D$ -varieties*

$$\phi : (V, v) \dashrightarrow (W, w)$$

*has a finite generic fibre. Then the generic type of  $(V, v)$  is semi-minimal.*

PROOF. Let  $p \in S(K)$  be the generic type of  $V$  and let  $a$  be a realisation of  $p$ . If  $p$  is an algebraic type, there is nothing to do. Otherwise, the type  $p$  is non-orthogonal to a minimal type  $q \in S(B)$  over some extension of the parameters. By Proposition 2.2.5, there exists  $a_q \in \text{dcl}(a, K)$  such that  $\text{tp}(a_q/K)$  is non-algebraic and internal to the set  $Q$  of conjugates of  $q$  by an automorphism of  $\mathcal{U}$  fixing  $K$ .

Consider a  $D$ -variety  $(W, w)$  over  $(K, \delta)$  such that  $\text{tp}(a_q/K)$  is the generic type of  $(W, w)$ . As  $a_q \in \text{dcl}(a, K)$ , we get a rational and dominant morphism of  $D$ -varieties

$$\phi : (V, v) \dashrightarrow (W, w).$$

By hypothesis, the generic fibre of  $\phi$  is finite and therefore  $a \in \text{acl}(a_q, K)$ . This implies that  $p = \text{tp}(a/K)$  is almost internal to  $Q$  and that  $p$  is  $q$ -semi-minimal. □

**4.2. An example of non-semi minimality.** Under an assumption of orthogonality to the constants and semi-minimality, Theorem 4.1.6 gives a very precise description of the model-theoretic behaviour of a type of order 3. We now show that, without the semi-minimality hypothesis, the situation is more complicated. Indeed, we construct a type of order 3, orthogonal to the constants which is not even one-based.

**Definition 4.2.1.** Let  $(G, \delta_G)$  be a  $D$ -group over  $(K, \delta)$ . We say that  $(G, \delta_G)$  is *isoconstant* if there exists a differential fields extension  $(K, \delta) \subset (L, \delta_L)$  and an algebraic group  $H$  over the field of constants  $C_L$  of  $(L, \delta_L)$  such that

$$(G, \delta_G) \times_{(K, \delta)} (L, \delta_L) \simeq (H, 0) \times_{(C_L, 0)} (L, \delta_L).$$

**Lemma 4.2.2.** *Let  $(G, \delta_G)$  be a  $D$ -group over a differential field  $(K, \delta)$ . The following are equivalent:*

- (i) *The generic type of  $(G, \delta_G)$  is internal to the constants.*
- (ii) *The  $D$ -group  $(G, \delta_G)$  is isoconstant.*

PROOF. It is clear that (ii)  $\implies$  (i). Conversely, suppose that the generic type of  $(G, \delta_G)$  is internal to the constants.

There exist a group  $H_0$  definable in the pure algebraically closed fields  $\mathcal{C}$  of constants of  $(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})$  and a definable isomorphism (with parameters in  $\mathcal{U}$ ):

$$\phi : (G, \delta_G)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})} \xrightarrow{\sim} H_0.$$

As  $\mathcal{C}$  is a pure algebraically closed field, there exists an algebraic group  $H$  over  $\mathcal{C}$  such that

$$H_0 = H(\mathcal{C}) = [(H, 0) \times_{(\mathcal{C}, 0)} (\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})]^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})}.$$

Consequently, there exists a birational isomorphism of  $D$ -groups

$$\bar{\phi} : (G, v_G) \times_{(K, \delta)} (\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}}) \dashrightarrow (H, 0) \times_{(\mathcal{C}, 0)} (\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})$$

which induces  $\phi$  at the level of generic points. By Weil's Group Chunk Theorem,  $\bar{\phi}$  naturally extends to an isomorphism of algebraic groups over  $K$ . As it is compatible generically with the  $D$ -structures, it is in fact an isomorphism of  $D$ -groups over  $(K, \delta)$ .  $\square$

**Proposition 4.2.3.** *Let  $(G, \delta_G)$  be a connected  $D$ -group over  $(K, \delta)$ . The following are equivalent:*

- (i) *The generic type of  $(G, \delta_G)$  is non-orthogonal to the constants.*
- (ii) *There exists a normal  $D$ -subgroup  $N \triangleleft G$  such that the  $D$ -group  $(G/N, \delta_{G/N})$  is isoconstant, with positive dimension.*

PROOF. It is clear that (ii)  $\implies$  (i). Conversely suppose that the generic type of  $(G, \delta_G)$  is non-orthogonal to the constants. By [Hru90, Prop 5.5(a)], there exists a definable normal subgroup  $N_0 \triangleleft G_0 = (G, \delta_G)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})}$  such that the quotient  $G_0/N_0$  is an infinite definable group internal to the constants.

There exists a normal  $D$ -subgroup  $N$  of  $G$  such that  $N_0 = (N, \delta_N)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})}$ . Consequently, as  $(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})$  is differentially closed, we have :

$$(G/N, \delta_{G/N})^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})} = (G, \delta_G)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})} / (N, \delta_N)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})} = G_0/N_0.$$

In particular,  $(G/N, \delta_{G/N})$  has positive dimension and its generic type is internal to the constants. By Lemma 4.2.2, the  $D$ -group  $(G/N, \delta_{G/N})$  is isoconstant.  $\square$

**Theorem 4.2.4.** *Let  $(K, \delta)$  be a differential field with  $K$  algebraically closed,  $E$  a elliptic curve over  $K$  and  $B$  a semi-Abelian variety over  $K$  defined as an extension*

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_m \longrightarrow B \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

*Suppose that the elliptic curve  $E$  does not descend to the constants and that  $B$  is not isogeneous to a the product  $\mathbb{G}_m \times E$ .*

*Then, the generic type of  $(\bar{B}, \delta_{\bar{B}})$  is a type of order 3, which is orthogonal to the constants but not one-based.*

Here,  $(\bar{B}, \delta_{\bar{B}})$  is the  $D$ -group associated to the semi-Abelian variety  $B$  (Definition 3.1.4).

PROOF. 1. We first show that the generic type  $p$  of  $(\overline{B}, \delta_{\overline{B}})$  is not one-based.

First note that as  $E$  is an elliptic curve that does not descend to the constants, we have that  $\overline{B}$  and  $\overline{E}$  are respectively the universal vector extensions of  $B$  and  $E$  and that we have an exact sequence of commutative algebraic groups over  $K$ :

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{E}(B) \longrightarrow \mathbb{E}(E) \longrightarrow 0.$$

We now strengthen this exact sequence into an exact sequence of commutative  $D$ -groups. Recall that  $\mathbb{E}(E)$  and  $\mathbb{E}(A)$  are almost semi-Abelian groups in the sense of [BP10] (Proposition A.1.4). By [BP10, Corollary 3.6], the morphism  $(\mathbb{E}(B), \delta_B) \longrightarrow (\mathbb{E}(E), \delta_E)$  is in fact a morphism of commutative  $D$ -groups.

Its kernel  $\mathbb{G}_m$  is therefore a  $D$ -subgroup of  $(\mathbb{E}(B), \delta_B)$ . As  $\mathbb{G}_m$  is also almost semi-Abelian, there exists at most one  $D$ -group structure on  $\mathbb{G}_m$ . Considering that  $\mathbb{G}_m$  descends to the constants, there exists a unique  $D$ -group structure on  $\mathbb{G}_m$ , which is the isoconstant one.

We get the following exact sequence of commutative algebraic  $D$ -groups over  $(K, \delta)$ :

$$0 \longrightarrow (\mathbb{G}_m, 0) \times_{(C,0)} (K, \delta) \longrightarrow (\mathbb{E}(B), \delta_B) \longrightarrow (\mathbb{E}(E), \delta_E) \longrightarrow 0.$$

From this exact sequence, we conclude that  $(\mathbb{E}(B), \delta_B)^{(u, \delta u)}$  is not one-based. Indeed, if it were, then any definable subgroup would also be one-based. But the subgroup defined by

$$\mathcal{C}^* = [(\mathbb{G}_m, 0) \times_{(C,0)} (K, \delta)]^{(u, \delta u)}$$

is non-orthogonal to the constants, and therefore not one-based.

2. It remains to show that the type  $p$  is orthogonal to the constants. Since this property is invariant by extension of the parameters, we can always replace  $(K, \delta)$  by a differential field extension  $(K, \delta) \subset (L, \delta_L)$ . In particular, we can suppose that the field  $C_K$  of constants of  $K$  is algebraically closed.

Suppose not. By the criterion of orthogonality to the constants for  $D$ -groups (Proposition 4.2.3), there exists a  $D$ -subgroup  $N \subset \mathbb{E}(B)$  such that  $\mathbb{E}(B)/N$  is isoconstant of positive dimension.

After base-changing by a differential field extension  $(K, \delta) \subset (L, \delta_L)$ , we can therefore suppose that there exists an algebraic group  $G$  over the field of constants  $C_K$  of  $K$  of positive dimension and a surjective morphism of algebraic groups over  $K$  (forgetting the  $D$ -structures) :

$$\pi : \mathbb{E}(B) \longrightarrow G \times_{C_K} K$$

Note that  $G$  is a commutative group because  $\mathbb{E}(B)$  is so. Moreover, we may suppose that  $G$  is simple. As  $C_K$  is algebraically closed, there are only three kind of simple commutative groups:

- The group  $G$  is the additive group  $\mathbb{G}_a$ . This contradicts that  $\mathbb{E}(B)$  is an almost semi-Abelian group (Proposition A.1.4).
- The group  $G$  is an Abelian variety  $A$ . The morphism  $\pi$  then factors through the Abelian part  $E$  of  $B$  and we get a surjective morphism  $\tilde{\pi} : E \longrightarrow A \times_{C_K} K$ . This contradicts the assumption that  $E$  does not descend to the constants.
- The group  $G$  is the multiplicative group  $\mathbb{G}_m$ . There is no morphism from a vector group to  $\mathbb{G}_m$  and the morphism  $\pi$  factors through a morphism  $\tilde{\pi} : B \longrightarrow \mathbb{G}_m$ . The morphism  $\tilde{\pi}$  yields an isogeny between  $B$  and  $A \times_{C_K} K$ , which contradicts the assumption.

In the three cases, we were led to a contradiction. This concludes the proof that the type  $p$  is orthogonal to the constants.  $\square$

## 5. Indirect strategy for minimality and triviality in order 3

**5.1. Concerning dynamical criteria for minimality.** Recall how was obtained the dynamical criterion for orthogonality to the constants in the first Chapter:

- (a) First, we started from a translation of the condition of orthogonality to the constants for an absolutely irreducible  $D$ -variety  $(X, v)$ , in terms of absence of non-trivial rational first integrals for all powers  $(X, v)^n$ . This interpretation was valid over any differential field.
- (b) Then, working over the field of real numbers, we replaced the  $D$ -variety  $(X, v)$  by the associated real analytic flow  $(X(\mathbb{R})^{an}, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$ .

Under the assumption that  $X(\mathbb{R})$  is compact, non-singular and Zariski-dense in  $X$ , we analyzed the consequences of the existence of a rational first integral for a power  $(X, v)^n$  of  $(X, v)$  for the dynamics of the real flow  $(X(\mathbb{R})^{an}, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$ .



From this analysis, we concluded, under the aforementioned assumptions, that if the real analytic flow  $(X(\mathbb{R})^{an}, (\phi_t)_{t \in \mathbb{R}})$  is topologically weakly mixing then the generic type of  $(X, v)$  is orthogonal to the constants.

In the first section of this chapter, we translated the properties of strong minimality of the theory  $T_{(X,v)/(K,\delta)}$  and of minimality of the generic type  $p_{(X,v)}$  in terms of the absence of some invariant sub-varieties in  $(X, v)$  and all its powers (Theorem 1.3.3 and Theorem 1.3.12).

We start with an ad-hoc definition in the setting of real analytic flows. Note that, by Cauchy-Lipschitz Theorem, a real analytic flow can be described in two different ways:

- as a real analytic manifold  $M$  endowed with an analytic vector field  $v$ , i.e. as a real analytic  $D$ -variety.
- as a real analytic manifold  $M$  endowed with a pseudo-group of transformations, i.e., as a real analytic map  $\phi : U \subset M \times \mathbb{R} \rightarrow M$  defined on a connected neighborhood  $U$  of the diagonal and satisfying the group identity:

$$\phi(\phi(x, t), s) = \phi(x, t + s)$$

for all  $x \in M$  and  $s, t \in \mathbb{R}$  such that these quantities are defined.

The compatibility between the notions of invariance in both settings has been studied in Subsection 3.1.3 in Chapter 1.

**Definition 5.1.1.** Let  $(M, \phi)$  be a real analytic flow. We will say that  $(M, \phi)$  is *n-pseudo minimal* if every proper invariant real analytic subspace  $Z \subset (M, \phi)^n$  has dimension divisible by  $\dim(M)$ .

**Lemma 5.1.2.** Let  $(X, v)$  be an absolutely irreducible  $D$ -variety over  $(\mathbb{R}, 0)$  and denote by  $(M, \phi)$  the associated analytic real flow. Suppose that every invariant closed sub-variety  $Z \subset (X, v)^n$  has Zariski-dense real points.

If  $(M, \phi)$  is *n-pseudo minimal* for all  $n \in \mathbb{N}$ , then  $(X, v)$  is strongly minimal.

PROOF. Let  $Z \subset (X, v)^n$  be a closed invariant sub-variety. By Proposition 3.1.22 of the first Chapter, the real analytic sub-variety  $Z(\mathbb{R})^{an} \subset (M, \phi)^n$  is invariant. Therefore, we have that  $\dim(Z(\mathbb{R})^{an})$  is divisible by  $\dim(M)$ .

Moreover, by hypothesis,  $Z(\mathbb{R})$  is Zariski-dense in  $Z$  and  $M$  is Zariski-dense in  $X$ . We deduce that  $\dim(Z) = \dim(Z(\mathbb{R})^{an})$  is divisible by  $\dim(X) = \dim(M)$ . By Theorem 1.3.3, we conclude that  $(X, v)$  is strongly minimal.  $\square$

**Remark 5.1.3.** Observe that the proof of Lemma 5.1.2 crucially uses the assumption that every invariant closed sub-variety  $Z \subset (X, v)^n$  has Zariski-dense real points.

Indeed, there is *a priori* no reason to exclude closed invariant sub-varieties  $Z \subset (X, v)^n$  such that:

$$\dim(\overline{Z(\mathbb{R})}) \text{ is divisible by } \dim(X) \text{ whereas } \dim(Z) \text{ is not.}$$

This makes Lemma 5.1.2 difficult to use to establish the strong minimality of  $(X, v)$ . Our main observation is to notice that this difficulty does not occur if one considers *rational factors* instead of *closed invariant sub-varieties*.

**Proposition 5.1.4.** Let  $(X, v)$  be an absolutely irreducible  $D$ -variety over  $(\mathbb{R}, 0)$  and denote by  $(M, \phi)$  the associated real analytic flow. Suppose that  $X(\mathbb{R})$  is Zariski-dense in  $X$ .

If  $(M, \phi)$  is 2-pseudo minimal, then  $(X, v)$  has no non-trivial rational factors. In particular, the generic type of  $(X, v)$  is semi-minimal.

PROOF. We use Proposition 4.1.8 to prove the semi-minimality of  $p_{(X,v)}$ . Consider a rational morphism of  $D$ -varieties  $\phi : (X, v) \dashrightarrow (W, w)$  with  $\dim(W) > 0$ . We want to prove that  $\phi$  has a finite generic fibre.

Set  $U \subset X$  the largest open set where  $\phi$  is defined and set  $X \times_W X$  for the Zariski-closure of  $U \times_W U$  in  $X \times X$ .

Note that as  $\phi$  is a morphism of  $D$ -varieties, the closed sub-variety  $U \times_W U \subset (U, v) \times (U, v)$  is invariant. Consequently, by Lemma 2.1.12 of the first Chapter, the closed sub-variety  $X \times_W X$  is invariant in  $(X, v) \times (X, v)$ .

By Proposition 3.1.22 of the first Chapter, we conclude that

$$X(\mathbb{R})^{an} \times_{W(\mathbb{R})^{an}} X(\mathbb{R})^{an} = (X \times_W X)(\mathbb{R})^{an}$$

is a closed invariant analytic subspace of  $(M, \phi)^2$ . Let us compute its dimension. We have:

$$\dim(X(\mathbb{R})^{an} \times_{W(\mathbb{R})^{an}} X(\mathbb{R})^{an}) = 2 \cdot \dim(X(\mathbb{R})^{an}) - \dim(W(\mathbb{R})^{an}) = 2 \cdot \dim(X) - \dim(W).$$

where the first equality is given by computing the analytic dimensions and the second one is a consequence of the Zariski-density of  $X(\mathbb{R})$  in  $X$  and  $W(\mathbb{R})$  in  $W$ .

By hypothesis, this quantity must be divisible by  $\dim(M) = \dim(X)$ . We conclude that  $\dim(W) = \dim(X)$  and that the generic fibre of  $\phi$  is finite.  $\square$

**5.2. Real meromorphic factors of a real analytic flow.** If  $M$  is a real analytic space, we call *an analytic open subset*  $V$  of  $M$ , any open subset of  $M$  of the form  $V = M \setminus Z$  where  $Z \subset M$  is a closed analytic subspace.

**Definition 5.2.1.** Let  $(M, \phi)$  be a real analytic flow and  $V \subset M$  an analytic open subset of  $M$ . The real analytic flow  $\phi : U \subset M \times \mathbb{R} \rightarrow M$  restricts to an analytic flow  $\phi|_V : U \cap \phi^{-1}(V) \rightarrow V$  on  $V$ . The real analytic flow  $(V, \phi|_V)$  is called *the restriction of  $(M, \phi)$  to  $V$* .

**Remark 5.2.2.** If  $\phi$  is the flow of an analytic vector field  $v$  on  $M$ , then  $\phi|_V$  is the flow of the analytic vector field  $v|_V$ .

**Definition 5.2.3.** Let  $(M, \phi)$  be a real analytic flow. We call a *real analytic meromorphic factor* of  $(M, \phi)$  an equivariant surjective map onto a real analytic flow  $(W, \psi)$

$$\rho : (V, \phi|_V) \rightarrow (W, \psi).$$

defined on a non-empty analytic open subset  $V \subset M$  and such that there exists an analytic subspace  $Z \subset M \times W$  satisfying  $\text{Gr}(\rho) = (V \times W) \cap Z$ .

We say that  $(M, \phi)$  *has no non-trivial real meromorphic factors* if every real meromorphic factor of  $(M, \phi)$  of positive dimension, has dimension  $\dim(M)$ .

**Proposition 5.2.4.** *Let  $(X, v)$  be an absolutely irreducible  $D$ -variety over  $(\mathbb{R}, 0)$  and denote by  $(M, \phi)$  the associated real analytic flow. Suppose that  $X(\mathbb{R})$  is Zariski-dense in  $X$ .*

*If  $(M, \phi)$  has no non-trivial real meromorphic factors then  $(X, v)$  has no non-trivial rational factors and its generic type  $p_{(X, v)}$  is semi-minimal.*

PROOF. Let  $f : (X, v) \dashrightarrow (W, w)$  be a rational factor with  $\dim(W) > 0$ .

There exist non-empty Zariski open subsets  $U \subset X$  and  $V \subset W$  such that:  $f|_U : (U, v|_U) \rightarrow (V, w|_V)$  is everywhere-defined and surjective.

We denote by  $\phi_v$  and  $\phi_w$  the real analytic flows associated to  $v|_U$  and  $w|_V$  respectively. After real analytification, we get an equivariant surjective analytic map

$$f_{\mathbb{R}}^{an} : (U(\mathbb{R})^{an}, \phi_v) \rightarrow (V(\mathbb{R})^{an}, \phi_w).$$

As  $(M, \phi)$  has no non trivial meromorphic factors, we conclude that  $\dim(V(\mathbb{R})^{an}) = \dim(M)$ . But  $X(\mathbb{R})$  is Zariski-dense in  $X$  and consequently,  $V(\mathbb{R})$  is also Zariski-dense in  $V$ .

We deduce that:

$$\dim(W) = \dim(V) = \dim(V(\mathbb{R})^{an}) = \dim(X).$$

The generic fibre of  $\phi$  is therefore finite. This yields semi-minimality by Proposition 4.1.8.  $\square$

**Conjecture.** *Let  $(M, g)$  be a compact, connected, real analytic Riemannian manifold of dimension 2. If the sectional curvature of  $(M, g)$  is negative then the unitary geodesic flow  $(SM, (g_t)_{t \in \mathbb{R}})$  has no non trivial meromorphic factors.*

**5.3. An indirect strategy for minimality.** To conclude this chapter, we summarize the consequences of Conjecture 5.2 on the model-theoretic behaviour of the geodesic  $D$ -varieties constructed in the second Chapter.

Let  $(X, g)$  be an absolutely irreducible smooth pseudo Riemannian variety over a field  $k$  of characteristic 0. Recall that we associated to  $(X, g)$  an Hamiltonian  $H_g$  on  $T_{X/k}$  defined in coordinates by

$$H_g(x, p) = \frac{1}{2}g_x(p, p).$$

Using the canonical symplectic structure on  $T_{X/k}^*$  and the isomorphism induced by  $g$  between  $T_{X/k}$  and  $T_{X/k}^*$ , we associated a Hamiltonian vector field  $v$  on  $T_{X/k}$  such that

$$H_g : (T_{X/k}, v) \longrightarrow (\mathbb{A}^1, 0)$$

is a morphism of  $D$ -varieties over  $(k, 0)$ . The fibre over  $\frac{1}{2}$  of  $H_g$  is called the *unitary geodesic  $D$ -variety* of  $(X, g)$  and denoted  $(S_{X/k}, v)$ .

**Theorem 5.3.1.** *Let  $(X, g)$  be an absolutely irreducible smooth pseudo-Riemannian variety over  $\mathbb{R}$  of dimension 2, with Zariski-dense real points, such that  $(X(\mathbb{R}), g_{\mathbb{R}})^{an}$  is a Riemannian manifold. Then, the unitary geodesic  $D$ -variety  $(S_{X/\mathbb{R}}, v)$  associated to  $(X, g)$  is absolutely irreducible.*

*Moreover, if the sectional curvature of the Riemannian manifold  $(X(\mathbb{R}), g_{\mathbb{R}})^{an}$  is negative and Conjecture 5.2 holds for it, then one of the following cases holds:*

- (a) *The generic type of  $(S_{X/\mathbb{R}}, v)$  is minimal and trivial*
- (b) *There exists a trivial type  $q \in S(\mathbb{R})$  of order 1 such that  $q^{(3)}$  is interalgebraic with the generic type of  $(S_{X/\mathbb{R}}, v)$ .*

PROOF. By Theorem 4.2.1 in the second Chapter, the unitary geodesic  $D$ -variety  $(S_{X/\mathbb{R}}, v)$  associated to  $(X, g)$  is absolutely irreducible and its generic type  $p$  is orthogonal to the constants.

Moreover, we supposed that Conjecture 5.2 is true. Therefore, by Proposition 5.2.4, the type  $p$  is semi-minimal. By Theorem 4.1.6, we conclude that:

- (a) Either the type  $p$  is minimal and trivial.
- (b) Or there exists a trivial type  $q \in S(\mathbb{R})$  of order 1 such that  $q^{(3)}$  is interalgebraic with  $p$ . □

**Remark 5.3.2.** Note that Theorem 4.1.6 and therefore Theorem 5.3.1 also rely on the Trichotomy Theorem and the classification of non-trivial locally modular types in the theory  $\mathbf{DCF}_0$ .

If case (a) holds then Theorem 5.3.1 imposes strong restrictions on the closed invariant subvarieties in all powers  $(S_{X/\mathbb{R}}, v)$  as discussed in the general introduction.

If case (b) holds then there exist an algebraic curve  $C$  over  $\mathbb{R}$ , a vector field  $v$  on  $C$  and a generically finite correspondence between  $(C, v_C)^3$  and  $(S_{X/\mathbb{R}}, v_X)$ . It seems reasonable to expect that such a correspondence cannot exist at least for sufficiently generic pseudo-Riemannian variety  $(X, g)$ .

## A. Semi-Abelian Varieties and their universal vector extensions

**A.1. Preliminaries on semi-Abelian varieties.** Fix  $k$  a field of characteristic 0 and  $\bar{k}$  an algebraic closure of  $k$ . We begin with a few remarks on the category of (commutative) algebraic groups over  $k$ .

First, note that we can build quotients by normal algebraic subgroups in the category of algebraic groups over  $k$ .

**Theorem A.1.1** ([Ros56]). *Let  $G$  be an algebraic group over  $k$  and  $H \triangleleft G$  be a closed normal algebraic subgroup over  $k$ .*

*There exist an algebraic group over  $k$ , denoted  $G/H$ , and a morphism  $\pi : G \longrightarrow G/H$ , which is universal among the morphisms of algebraic groups  $\pi : G \longrightarrow G'$  with kernel  $H$ . Moreover,  $G/H$  is characterised by the property that  $\pi$  is a surjective group morphism with kernel  $H$ .*

From now on, we restrict ourselves to the category of commutative algebraic groups over  $k$ . The functor from this category to the category of commutative groups defined by

$$G \mapsto G(\bar{k})$$

identifies the category of commutative algebraic groups to a subcategory of the category of commutative groups. The latter category is an Abelian category with sufficiently many injective objects

and therefore, if  $A$  and  $B$  are two algebraic groups over  $k$ , one can define  $\text{Ext}^1(A, B)$  as the first derived functor (in the category of commutative groups) of

$$B \mapsto \text{Hom}(A, B).$$

In particular,  $(A, B) \mapsto \text{Ext}^1(A, B)$  is a bifunctor (contravariant in  $A$  and covariant in  $B$ ) from the category of commutative algebraic groups to the category of commutative groups.

Similarly to the case of finite commutative groups, there is an alternative description of the set  $\text{Ext}^1(A, B)$  as the isomorphism classes of (commutative) extensions of  $A$  by the group  $B$ , i.e., of isomorphism classes of short exact sequences of commutative algebraic groups over  $k$ :

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow G \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$

One can check directly that this defines a bifunctor from the category of commutative algebraic groups over  $k$  to the category of sets and retrieve the group structure from it (see, for instance, [Ser75, Chapter VII]).

Recall that a *semi-Abelian variety*  $B$  over  $k$  is an extension of an Abelian variety  $A$  by an algebraic torus  $T = \mathbb{G}_m^n$ , i.e., a short exact sequence of commutative algebraic groups over  $k$ :

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_m^n \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$

The Abelian variety  $A$  is called the *Abelian part of the semi-Abelian variety*  $B$ . It is uniquely determined by  $B$ , as the morphism  $\pi : B \longrightarrow A$  is universal among the morphisms of algebraic groups over  $k$  from the semi-Abelian variety  $B$  to an Abelian variety.

**Theorem A.1.2** ([Ser75, Chapter VII, Theorem 8]). *Let  $B$  be a semi-Abelian variety over  $k$ . The functor from the category of finite dimensional  $k$ -vector spaces to the category of commutative groups defined by :*

$$V \mapsto \text{Ext}^1(B, V)$$

*is representable. In other words, there exists a  $k$ -vector space of finite dimension  $W_B$  and  $\mathbb{E}(B) \in \text{Ext}^1(B, W_B)$  such that for any  $k$ -vector space  $V$  and any extension  $\bar{B} \in \text{Ext}^1(B, V)$ , there exists a unique morphism of  $k$ -vector spaces  $W_B \longrightarrow V$  such that  $\bar{B} = f_* \mathbb{E}(B)$ .*

The commutative algebraic group  $\mathbb{E}(B)$  is called the *universal vector extension of the semi-Abelian variety*  $B$ .

**Remark A.1.3.** Let  $B$  a semi-Abelian variety over  $k$ . Denote by  $A$  its Abelian part and by  $g$  the dimension of  $A$ . It is possible to give a more precise description of the universal vector extension of  $B$ :

- The universal vector extension  $\mathbb{E}(B)$  of  $B$  is the extension of  $B$  by  $W_A$  defined by  $\mathbb{E}(A) \times_A B$ .
- In fact,  $W_A$  may be identified with the dual of  $H^1(A, \mathcal{O}_A)$ . In particular, if  $A$  has dimension  $g$ , then  $\mathbb{E}(A)$  is of dimension  $2g$ .

The semi-Abelian varieties and their universal vector extensions can be characterised externally in the category of commutative algebraic groups, thanks to the following proposition.

**Proposition A.1.4** ([BP10, Lemma 3.1]). *Let  $G$  be a commutative algebraic group over  $k$ . The following are equivalent:*

- (i) *There is no non-constant morphism from  $G$  to the additive group  $\mathbb{G}_a$ .*
- (ii) *The torsion points of  $G$  are Zariski-dense in  $G$ .*
- (iii) *There exists a semi-Abelian variety  $B$  over  $k$  such that the group  $G$  is a quotient of the universal vector extension  $\mathbb{E}(B)$  of  $B$ .*

**Definition A.1.5.** A commutative algebraic group  $G$  satisfying the equivalent statements of Proposition A.1.4 is called *almost semi-Abelian*.

**Remark A.1.6.** Let  $C$  be a smooth projective curve over  $k$  of genus  $g$ . Recall that the connected Picard variety  $\text{Pic}_0(C)$  of  $C$  is the Abelian variety (of dimension  $g$ ) classifying line bundles of degree 0 on  $C$ .

Consider the functor from the category of schemes of finite type over  $k$  to the category of sets defined by

$$S \mapsto \{(\mathcal{L}, \nabla) \text{ where } \mathcal{L} \text{ is a line bundle of degree 0 on } C \times S \text{ and } \nabla \text{ is a connection on } \mathcal{L}\}$$

This functor is representable by a finite type scheme denoted  $\text{Pic}^\sharp(C)$  (see, for instance, Section 2.3.3 in [Bos13]). The tensor product on line bundles with connections induces a commutative group structure on  $\text{Pic}^\sharp(C)$ .

Note that, by construction,  $\text{Pic}^\sharp(C)$  fits into an exact sequence of commutative algebraic groups :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \Omega^1(C) \longrightarrow \text{Pic}^\sharp(C) \longrightarrow \text{Pic}_0(C) \longrightarrow 0 \\ (\mathcal{L}, \nabla) \longrightarrow \mathcal{L} \\ \omega \longrightarrow (\mathcal{O}_X, d + \omega) \end{aligned}$$

which identifies  $\text{Pic}^\sharp(C)$  with the universal vector extension  $\mathbb{E}(\text{Pic}_0(C))$  (see, for instance, [Bos13, Section 2.3.4]).

**A.2. Analytic description of the  $D$ -group structure on  $\mathbb{E}(A)$ .** In this section, we work over the field  $\mathbb{C}$  of complex numbers. Consider  $\mathcal{C} \rightarrow S$  a smooth and projective family of algebraic curves over a smooth and irreducible quasi-projective base  $S$ .

One can consider the relative connected Picard scheme  $\mathcal{A} = \text{Pic}_0(C/S)$  of  $\mathcal{C}$  over  $S$ , which is an Abelian scheme over  $S$ . The family of universal vector extensions  $\mathbb{E}(\mathcal{A}_s)$ , where  $s$  varies in  $S(\mathbb{C})$ , varies algebraically with  $s$  and defines a scheme :

$$\pi : \mathbb{E}(\mathcal{A}) \rightarrow S.$$

Fix  $v_S$  a non-zero vector field on  $S$  and denote by  $\eta$  the generic point of  $S$  and by  $\delta_S$  the derivation induced by  $v_S$  on the fraction field of  $S$ .

The aim of this section is to give an explicit construction of the  $D$ -group structure on the generic fibre  $\mathbb{E}(A) = \mathbb{E}(\mathcal{A}_\eta) = \mathbb{E}(\mathcal{A})_\eta$  over the differential field  $(K(S), \delta_S)$ .

Note that for that purpose, it is enough to work locally on  $S$  and therefore there is no harm in supposing that the morphism  $\pi$  admits a section.

**Definition A.2.1.** Let  $X$  be a smooth algebraic variety over a field  $k$ . A *smooth foliation*  $F \subset T_{X/k}$  of rank  $r$  is an integrable sub-vector bundle of  $T_{X/k}$  of rank  $r$ .

If  $\pi : X \rightarrow Y$  is a smooth morphism, we will say that  $\pi$  and  $F$  are *transverse* if

$$\text{Ker}(d\pi) \oplus F = T_{X/k}.$$

**Lemma A.2.2.** Let  $\pi : X \rightarrow S$  a smooth surjective morphism of smooth algebraic varieties over  $k$  and  $F \subset T_{X/k}$  a smooth foliation (necessarily of rank  $\dim(S)$ ) transverse to  $\pi$ . Then for any vector field  $v_S$  on  $S$ , there is a unique vector field  $v_X$  on  $X$  tangent to  $F$  such that

$$\pi : (X, v_X) \rightarrow (S, v_S)$$

is a morphism of  $D$ -varieties.

**PROOF.** Indeed, by definition,  $\pi$  and  $F$  are transverse. Therefore, the restriction of  $d\pi$  realises an isomorphism of vector bundles over  $X$ :

$$d\pi|_F : F \xrightarrow{\sim} \pi^*T_{S/k}.$$

This means that any vector field  $v_S$  on  $S$  lifts into a unique vector field  $v_X$  on  $X$ , tangent to  $F$ .  $\square$

Lemma A.2.2 reduces the construction of a  $D$ -structure on  $\mathbb{E}(A)$  to the construction of a smooth foliation  $F \subset T_{\mathbb{E}(\mathcal{A})/\mathbb{C}}$ , of rank  $\dim(S)$  and transverse to  $\pi$ . In the end of this section, we give an analytic description of this foliation.

**Pointwise Analytification.** Let  $s$  be a point in  $S^{an}$ . Denote by  $C_s$  the fibre of  $\mathcal{C}$  over  $s$  and  $C_s^{an}$  its analytification. By Remark A.1.6,  $\mathbb{E}(\mathcal{A})_s$  classifies the line bundles on  $C_s$  of degree 0 endowed with a connection.

Using the GAGA Theorem for the smooth projective curve  $C_s$  over  $\mathbb{C}$ , the analytification  $\mathbb{E}(\mathcal{A})_s^{an}$  classifies the analytic line bundles over  $C_s^{an}$  of degree 0, endowed with an analytic connection.

Moreover, in this analytic setting, there is a natural correspondence between the analytic line bundles endowed with a connection on  $C_s^{an}$  and their monodromies given as the representations of the fundamental group  $\pi(C_s^{an}, p_0)$  of  $C_s^{an}$  in a vector space of dimension 1.

Let  $g$  be the genus of  $C_s$ . The later functor is representable by the analytic group:

$$\mathrm{Hom}(\pi(C_s^{an}, p_0); \mathbb{G}_m) = \mathrm{Hom}(H^1(C_s^{an}, \mathbb{Z}); \mathbb{G}_m) \simeq \mathbb{G}_m^{2g}.$$

The previous construction therefore proves the following lemma:

**Lemma A.2.3.** *Let  $s \in S^{an}$ . The monodromy correspondence which associates to a degree 0 analytic line bundle on  $C_s$  endowed with a connection, its analytic monodromy, defines an isomorphism of analytic groups:*

$$\mathbb{E}(\mathcal{A}_s)^{an} \simeq \mathbb{G}_m^{2g}.$$

**Local Analytification.** Consider now  $U \subset S^{an}$  a simply connected open subset.

Fix a point  $s_0 \in S^{an}$ . For any point  $s$  in  $U$ , we can choose a path  $\gamma$  from  $s_0$  to  $s$  in  $S$ , which defines a isomorphism of groups :

$$\pi^1(C_{s_0}^{an}, p_0) \simeq \pi^1(C_s^{an}, p).$$

We therefore get an isomorphism

$$\phi_s : \mathrm{Hom}(\pi^1(C_{s_0}^{an}, p_0); \mathbb{G}_m) \simeq \mathrm{Hom}(\pi(C_s^{an}, o); \mathbb{G}_m).$$

Moreover, this isomorphism only depends on the point  $s$  itself as  $U$  is simply connected. Using the monodromy isomorphism given by Lemma A.2.3, which depends analytically on  $s \in S^{an}$ , we get an analytic trivialisation of  $\mathbb{E}(\mathcal{A})_U$

$$\phi : \mathrm{Hom}(\pi^1(C_{s_0}^{an}, p_0); \mathbb{G}_m) \times U \simeq \mathbb{E}(\mathcal{A})_U.$$

**Proposition A.2.4** ([Bos13, Section 6.3]). *With the notations above, the family of vector spaces  $T\phi(TU) \subset \mathbb{E}(\mathcal{A})_U$  for all simply connected  $U \subset S^{an}$  defines a smooth analytic foliation  $\mathcal{F}$  on  $\mathbb{E}(\mathcal{A})$  transverse to  $\pi$ .*

*Moreover, this foliation defines the unique D-group scheme structure on  $\mathbb{E}(\mathcal{A})$ .*



## Bibliographie

- [AG01] V. I. Arnol'd and A. B. Givental'. Symplectic geometry. In *Dynamical systems, IV*, volume 4 of *Encyclopaedia Math. Sci.*, pages 1–138. Springer, Berlin, 2001.
- [Ano69] D. V. Anosov. *Geodesic flows on closed Riemann manifolds with negative curvature*. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, No. 90 (1967). Translated from the Russian by S. Feder. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1969.
- [Arn06] Vladimir I. Arnol'd. *Ordinary differential equations*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2006. Translated from the Russian by Roger Cooke, Second printing of the 1992 edition.
- [BCR87] J. Bochnak, M. Coste, and M.-F. Roy. *Géométrie algébrique réelle*, volume 12 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [BL71] J. T. Baldwin and A. H. Lachlan. On strongly minimal sets. *J. Symbolic Logic*, 36(1) :79–96, 1971.
- [Blu77] Lenore Blum. Differentially closed fields : a model-theoretic tour. pages 37–61, 1977.
- [Bos86] Jean-Benoît Bost. Tores invariants des systèmes dynamiques hamiltoniens (d'après Kolmogorov, Arnol'd, Moser, Rüssmann, Zehnder, Herman, Pöschel, ...). *Astérisque*, (133-134) :113–157, 1986. Seminar Bourbaki, Vol. 1984/85.
- [Bos13] Jean-Benoît Bost. Algebraization, transcendence, and  $D$ -group schemes. *Notre Dame J. Form. Log.*, 54(3-4) :377–434, 2013.
- [BP10] Daniel Bertrand and Anand Pillay. A Lindemann-Weierstrass theorem for semi-abelian varieties over function fields. *J. Amer. Math. Soc.*, 23(2) :491–533, 2010.
- [Bui93] Alexandru Buium. Geometry of differential polynomial functions. I. Algebraic groups. *Amer. J. Math.*, 115(6) :1385–1444, 1993.
- [Cha12] Zoé Chatzidakis. A note on canonical bases and one-based types in supersimple theories. *Confluentes Math.*, 4(3) :34, 2012.
- [Che15] Alain Chenciner. Poincaré and the three-body problem. In *Henri Poincaré, 1912–2012*, volume 67 of *Prog. Math. Phys.*, pages 51–149. Birkhäuser/Springer, Basel, 2015.
- [Cou04] Yves Coudene. Topological dynamics and local product structure. *J. London Math. Soc. (2)*, 69(2) :441–456, 2004.
- [Dal99] Françoise Dal'bo. Remarques sur le spectre des longueurs d'une surface et comptages. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)*, 30(2) :199–221, 1999.
- [Ebe73a] Patrick Eberlein. When is a geodesic flow of Anosov type ? I,II. *J. Differential Geometry*, 8 :437–463 ; *ibid.* 8 (1973), 565–577, 1973.
- [Ebe73b] Patrick Eberlein. Geodesic flows on negatively curved manifolds. II. *Transactions of the American Mathematical Society*, 178 :57–82, 1973.
- [FS14] James Freitag and Thomas Scanlon. Strong minimality of the  $j$ -function. *arXiv : 1402.4588*, 2014.
- [Gla03] Eli Glasner. *Ergodic theory via joinings*, volume 101 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [Gro86] Mikhael Gromov. *Partial differential relations*, volume 9 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3)*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [Had98] Jacques Hadamard. Les surfaces à courbures opposés et leurs lignes géodésiques. *J. Math. Pures Appl.*, (4) :27–74, 1898.
- [Has02] Boris Hasselblatt. Hyperbolic dynamical systems. In *Handbook of dynamical systems, Vol. 1A*, pages 239–319. North-Holland, Amsterdam, 2002.
- [HI03] E. Hrushovski and M. Itai. On model complete differential fields. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 355(11) :4267–4296, 2003.



- [HP87] U. Hrushovski and A. Pillay. Weakly normal groups. In *Logic colloquium '85 (Orsay, 1985)*, volume 122 of *Stud. Logic Found. Math.*, pages 233–244. North-Holland, Amsterdam, 1987.
- [Hru90] Ehud Hrushovski. Unidimensional theories are superstable. *Ann. Pure Appl. Logic*, 50(2) :117–138, 1990.
- [Hru93] Ehud Hrushovski. A new strongly minimal set. *Ann. Pure Appl. Logic*, 62(2) :147–166, 1993. Stability in model theory, III (Trento, 1991).
- [Hru96] Ehud Hrushovski. The Mordell-Lang conjecture for function fields. *J. Amer. Math. Soc.*, 9(3) :667–690, 1996.
- [HS96] Ehud Hrushovski and Zeljko Sokolovic. Minimal subsets of differentially closed fields. *Preprint*, 1996.
- [HS99] Ehud Hrushovski and Thomas Scanlon. Lascar and Morley ranks differ in differentially closed fields. *J. Symbolic Logic*, 64(3) :1280–1284, 1999.
- [HZ96] Ehud Hrushovski and Boris Zilber. Zariski geometries. *J. Amer. Math. Soc.*, 9(1) :1–56, 1996.
- [IY08] Yulij Ilyashenko and Sergei Yakovenko. *Lectures on analytic differential equations*, volume 86 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.
- [KH95] Anatole Katok and Boris Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, volume 54 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza.
- [Lee97] John M. Lee. *Riemannian manifolds*, volume 176 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997. An introduction to curvature.
- [Mar02] David Marker. *Model theory*, volume 217 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2002,. An introduction.
- [Mil63] J. Milnor. *Morse theory*. Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. Annals of Mathematics Studies, No. 51. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963.
- [MMP06] David Marker, Margit Messmer, and Anand Pillay. *Model theory of fields*, volume 5 of *Lecture Notes in Logic*. Association for Symbolic Logic, La Jolla, CA ; A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, second edition, 2006.
- [MP14] Rahim Moosa and Anand Pillay. Some model theory of fibrations and algebraic reductions. *Selecta Math. (N.S.)*, 20(4) :1067–1082, 2014.
- [MR99] Juan J. Morales Ruiz. *Differential Galois theory and non-integrability of Hamiltonian systems*, volume 179 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1999.
- [Mum95] David Mumford. *Algebraic geometry. I*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Complex projective varieties, Reprint of the 1976 edition.
- [Nas54] John Nash.  $C^1$  isometric imbeddings. *Ann. of Math. (2)*, 60 :383–396, 1954.
- [Nas56] John Nash. The imbedding problem for Riemannian manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 63 :20–63, 1956.
- [Nis89] Keiji Nishioka. A conjecture of Mähler on automorphic functions. *Archiv der Mathematik*, 53(1) :46–51, 1989.
- [NP11] Ronnie Nagloo and Anand Pillay. On algebraic relations between solutions of a generic Painlevé equation. *arXiv :1112.2916*, 2011.
- [NP14] Joel Nagloo and Anand Pillay. On the algebraic independence of generic Painlevé transcendents. *Compos. Math.*, 150(4) :668–678, 2014.
- [OW73] Donald S. Ornstein and Benjamin Weiss. Geodesic flows are Bernoullian. *Israel J. Math.*, 14 :184–198, 1973.
- [Pan91] Pierre Pansu. Le flot géodésique des variétés riemanniennes à courbure négative. *Astérisque*, (201-203) :Exp. No. 738, 269–298 (1992), 1991. Séminaire Bourbaki, Vol. 1990/91.
- [Pil96] Anand Pillay. *Geometric stability theory*, volume 32 of *Oxford Logic Guides*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1996. Oxford Science Publications.
- [Pil98] Anand Pillay. Differential Galois theory. I. *Illinois J. Math.*, 42(4) :678–699, 1998.
- [Poi05] Henri Poincaré. Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 6(3) :237–274, 1905.

- [Poi57] Henri Poincaré. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Tome I. Solutions périodiques. Non-existence des intégrales uniformes. Solutions asymptotiques.* Dover Publications, Inc., New York, N.Y., 1957.
- [Poi83] Bruno Poizat. Une théorie de Galois imaginaire. *J. Symbolic Logic*, 48(4) :1151–1170 (1984), 1983.
- [Poi95] Bruno Poizat. Les corps différentiellement clos, compagnons de route de la théorie des modèles. *Math. Japon.*, 42(3) :575–585, 1995.
- [Poi01] Bruno Poizat. *Stable groups*, volume 87 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. Translated from the 1987 French original by Moses Gabriel Klein.
- [PZ03] Anand Pillay and Martin Ziegler. Jet spaces of varieties over differential and difference fields. *Selecta Math. (N.S.)*, 9(4) :579–599, 2003.
- [Ros56] Maxwell Rosenlicht. Some basic theorems on algebraic groups. *Amer. J. Math.*, 78 :401–443, 1956.
- [Ros74] Maxwell Rosenlicht. The nonminimality of the differential closure. *Pacific J. Math.*, 52 :529–537, 1974.
- [Sei58] A. Seidenberg. Abstract differential algebra and the analytic case. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 9 :159–164, 1958.
- [Ser75] Jean-Pierre Serre. *Groupes algébriques et corps de classes.* Hermann, Paris, 1975. Deuxième édition, Publication de l’Institut de Mathématique de l’Université de Nançago, No. VII, Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1264.
- [She72] Saharon Shelah. Uniqueness and characterization of prime models over sets for totally transcendental first-order theories. *Journ. Symb. Logic*, 37 :107–113, 1972.
- [She73] Saharon Shelah. Differentially closed fields. *Israel Journ. Math.*, 16 :314–328, 1973.
- [She90] Saharon Shelah. *Classification theory and the number of nonisomorphic models*, volume 92 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, second edition, 1990.
- [TZ12] Katrin Tent and Martin Ziegler. *A course in model theory*, volume 40 of *Lecture Notes in Logic*. Association for Symbolic Logic, La Jolla, CA ; Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
- [UW97] Hiroshi Umemura and Humihiko Watanabe. Solutions of the second and fourth Painlevé equations. I. *Nagoya Math. J.*, 148 :151–198, 1997.