HAL
open science

Quelques problèmes d'algorithmique et combinatoires en théorie des grapphes

Sylvain Legay

To cite this version:

Sylvain Legay. Quelques problèmes d'algorithmique et combinatoires en théorie des grapphes. Mathématique discrète [cs.DM]. Université Paris Saclay (COmUE), 2017. Français. NNT : 2017SACLS030 . tel-01587794

HAL Id: tel-01587794

https://theses.hal.science/tel-01587794v1

Submitted on 14 Sep 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NNT : 2017SACLS030

THÈSE DE DOCTORAT
DE
L'UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY
PRÉPARÉE À
L'UNIVERSITÉ PARIS SUD

ECOLE DOCTORALE N° 580
Sciences et technologies de l'information et de la communication

Spécialité : Mathématiques et Informatique

Par

Mr Sylvain Legay

Quelques problèmes algorithmiques et combinatoires en théorie des graphes

Thèse présentée et soutenue à Gif-sur-Yvette, le 1er Mars 2017 :

Composition du Jury :

Mme Véronique Benzaken	Professeur à l'Université Paris Sud	Présidente
Mr Bruno Escoffier	Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie	Rapporteur
Mr Milis Ioannis	Professeur à l'Athens University of Economics and Business	Rapporteur
Mr Eric Angel	Professeur à l'Université d'Evry Val d'Essonne	Examinateur
Mme Cristina Bazgan	Professeur à l'Université Paris Dauphine	Examinatrice
Mr Nicolas Nisse	Chargé de recherche INRIA à l'Université Côte d'Azur	Examinateur
Mr Yannis Manoussakis	Professeur à l'Université Paris Sud	Directeur de thèse

Table des matières

1 Remerciements **5**

2 Introduction **6**
2.1 Notions utiles et notations 9

I Sous-graphe connexe tropical **14**

3 Complexité **14**

4 Conditions suffisantes **22**

II Homomorphisme tropical **29**

5 Généralités sur les homomorphismes **29**

6 Définitions des homomorphismes tropicaux **30**

7 Relation avec les Problèmes de Satisfaction de Contraintes **31**

8 Relation avec l'homomorphisme listé **36**

9 Relation avec l'homomorphisme de graphe orienté **41**

10 Une approche directe pour la NP-complétude avec quelques graphes cibles **46**

11 Résultat de polynomialité **63**
11.1 Techniques 63
11.2 Application 69

12 Comment réduire le nombre de couleurs ? **82**

13 Récapitulatif **86**

III Quelques sortes de domination **88**

14 Alliances Globales Pondérées **88**
14.1 Alliance offensive globale pondérée dans un arbre 89
14.2 Alliance puissante globale pondérée dans un arbre 91
14.3 Conclusion 100

15 Ensembles Sûrs **100**
15.1 Définitions 100
15.2 Trouver un ensemble sûr dans un arbre 101

IV Décomposition arborescente étoilée **107**

16 Introduction **107**

17 Définitions et résultats préliminaires **109**

18 Résultats de NP-complétude **111**

19 Quelques propriétés des graphes d'étendue arborescente 1. **113**
19.1 Existence d'un ordre d'élimination dominant 114
19.2 Quelques propriétés utiles sur les séparateurs 115
19.3 Les graphes bipartis 116

20 Un algorithme polynomial pour les graphes planaires **117**
20.1 L'algorithme `Feuille-DeBasEnHaut` 118
20.2 Propriétés des graphes planaires premiers d'étendue arborescente 1121
20.2.1 Quelques lemmes sur les graphes planaires premiers . . . 121
20.2.2 Contraindre la décomposition étoilée 125
20.3 L'algorithme `Feuille-DeBasEnHaut` est correct 126
20.3.1 Existence d'un P_3 séparateur 126
20.3.2 Le cas d'un sommet-feuille de Type 1 131
20.3.3 Preuve de l'Étape 3.1 (a) 133
20.3.4 Preuve de l'Étape 3.1 (b) i 133
20.3.5 Preuve de l'Étape 3.1 (b) ii 135
20.3.6 Le cas d'un sommet-feuille de Type 3 avec $G-v$ non-premier137
20.3.7 Preuve de l'Étape 3.2 (a) 138
20.3.8 Preuve de l'Étape 3.2 (b) i et de l'Étape 3.2 (b) ii 139
20.3.9 Preuve de l'Étape 3.2 (b) iii 142
20.4 Complexité de l'Algorithme `Feuille-DeBasEnHaut` 146
20.4.1 Trouver un sommet-feuille 147
20.4.2 Existence d'une décomposition étoilée à deux sacs 148
20.4.3 Borne supérieure sur le nombre d'étapes de l'algorithme . 149

21 Conclusion et questions ouvertes **150**

V Un début sur le comportement asymptotique de l'itéré du graphe des bicliques **151**

22 Convergence et divergence **151**

23 Un lien avec l'itéré du graphe adjoint **154**

24 Connexité du graphe des bicliques **155**

25 Conclusion et Perspectives **156**

1 Remerciements

Dans un premier temps, je tiens à remercier ma famille pour son soutien sans faille sans lequel je n'aurais jamais réussi la poursuite de mes études. Dans le cadre plus restreint de ma thèse, je tiens à remercier particulièrement ma mère, Nathalie Chaumeron, grâce à qui ce manuscrit ne contient presque plus de fautes d'orthographes, ainsi que mes grands-parents, Nicole et François Legay, qui m'ont hébergé les premiers et derniers mois de ma thèse.

Je remercie, ensuite, tous mes collaborateurs, à commencer par Yannis Manoussakis, pour avoir accepter d'être mon directeur de thèse, pour ses conseils avisés et pour la liberté qu'il m'a accordé durant ma thèse. Je remercie Leandro Montero, Jean-Alexandre Angles d'Auriac, Petru Valicov et Florent Foucaud pour leur camaraderie et leur bonne humeur au travail. Je remercie Ararat Harutyunyan pour avoir toujours essayé de m'apprendre de nouvelles choses mathématiques et me proposer des problèmes intéressants. Je remercie Reza Naserasr et Pavol Hell pour m'avoir permis de participer au monde merveilleux des homomorphismes de graphes. Je remercie Nathann Cohen pour avoir partagé avec moi son point de vue unique sur le monde de la recherche, une conversation à la fois, et pour m'avoir donné l'opportunité de visiter l'équipe COATI. Je remercie toute l'équipe COATI pour l'accueil chaleureux qu'ils m'ont fait en février et mars 2015. Je remercie Nicolas Nisse et Guillaume Ducoffe pour notre collaboration autour du problème de décomposition arborescente.

Je remercie Eric Angel, Cristina Bazgan, Véronique Benzaken et Nicolas Nisse pour avoir accepter de participer à mon jury de thèse. Je remercie également Ioannis Milis et Bruno Escoffier pour avoir accepté d'être rapporteur de mon manuscrit.

Je remercie toute l'équipe administrative du LRI et de l'école doctorale. Je remercie particulièrement Nicole Bidoit pour sa patience avec moi durant les six derniers mois de ma thèse, et Stéphanie Druetta, qui m'a sauvé de plus d'une embûche administrative.

Enfin, je tiens à remercier l'Association des Passionnées d'Oeuvres Interactives et Ludiques, ainsi que toutes les personnes qui l'ont fréquenté, d'avoir rythmé mes soirées et de m'avoir accompagné dans toutes mes entreprises de ces huit dernières années. Vous m'avez appris tout ce que je sais sur l'administratif universitaire, la vie en communauté et moi-même. Je remercie particulièrement Nicolas Ninin pour m'avoir souvent guidé dans mes études en mathématiques, en allant jusqu'à m'indiquer mon futur directeur de thèse. Je remercie aussi Juline Lacroix pour son soutien émotionnel durant la rédaction de ce manuscrit.

2 Introduction

Le sujet central et constant de cette thèse est l'objet mathématique connu sous le nom de graphe. Formellement, un graphe est un ensemble de sommets et un ensemble d'arêtes, c'est à dire de paires de sommets, qui relient les sommets. Cet objet très simple peut servir à modéliser toutes situations où des objets sont liés par une relation binaire. J'ai été attiré par l'étude de la théorie des graphes du fait que c'est une notion simple, qui pourtant mène à une grande variété de problèmes.

J'ai commencé ma thèse avec deux problèmes, tout deux concernant les graphes sommet-coloriés. Un graphe sommet-colorié (G, c) est un graphe G muni d'un coloriage des sommets c, c'est à dire une fonction qui associe une couleur à chaque sommet. Un graphe sommet-colorié permet de modéliser beaucoup de situations réelles, où un ensemble d'objets de natures différentes sont en relation. Par exemple, le graphe du Web peut être considéré comme un graphe sommet-colorié dans lequel la couleur d'un sommet représente le type de contenu de la page associée. De même, un réseau social (virtuel ou réel) peut être modélisé par un graphe sommet-colorié, la couleur d'un sommet représentant une qualité de la personne associée, par exemple sa profession. On trouve aussi des exemples de phénomènes réels modélisés par un graphe sommet-colorié en biologie [28].

Un sous-ensemble S des sommets du graphe sommet-colorié (G, c) est dit tropical si $c(S) = c(V(G))$. Autrement dit, toutes les couleurs du graphe sommet-colorié (G, c) sont utilisées pour colorier le sous-ensemble S. Cette notion a été introduite dans [32] et s'apparente à la notion d'ensemble colorful [4], qui contient toutes les couleurs de (G, c) une fois et une seule, et à la notion d'ensemble arc-en-ciel, qui contient toutes les couleurs de (G, c) au plus une fois. Différentes notions d'invariants de graphes, comme la domination ou la couverture par les sommets, peuvent être étudiées dans une version où l'ensemble recherché doit également être tropical.

Dans le Chapitre I, on s'intéressera à la recherche du plus petit sous-graphe connexe dont l'ensemble de sommets est tropical. Cette notion est liée, quoique différente, au concept de motif de couleur utilisé en bio-informatique [43, 74]. On trouvera dans le Chapitre I de nombreux résultats de NP-complétude, quelques résultats algorithmiques, et quelques résultats structurels autour de cette question.

Le Chapitre II est lié aux homomorphismes de graphe, une généralisation de la coloration propre. Si (G, c) est un graphe sommet-colorié, on dit que c est une coloration propre de G quand il n'existe pas deux sommets adjacents de G coloriés de la même couleur. Le problème, très classique, généralement associé à la notion de coloration propre, c'est de trouver le coloriage propre utilisant le moins de couleurs. Cela donne lieu à énormément de travaux et de résultats, y compris le fameux théorème des quatre couleurs. Un homomorphisme du graphe G vers le graphe H est une fonction des sommets de G vers les sommets de H qui préserve l'adjacence. On peut alors reformuler le problème de trouver un coloriage propre de G utilisant n couleurs en terme d'homomorphisme, ce qui

donne le problème de trouver un homomorphisme de G vers le graphe complet K_n. On peut généraliser ce problème d'homomorphisme à n'importe quel graphe cible H, pas nécessairement complet. On appelle ce problème de décision binaire H-Coloration. Un théorème classique [53] établi une dichotomie dans cette classe de problème : Si H est biparti, alors H-Coloration se résout en temps polynomial, sinon H-Coloration est NP-complet.

Plusieurs variantes au problème d'homomorphisme ainsi défini ont été étudiées. Ces variantes incluent une version orientée [9, 10, 11, 12, 38], où les graphes sont orientés et l'homomorphisme doit préserver l'orientation des arêtes, une version arête-coloriée [5, 17, 18, 19], où les arêtes sont coloriées et l'homomorphisme doit préserver la couleur des arêtes, et une version listée [39, 40, 41], où une liste de sommets du graphe cible est fournie pour chaque sommet du graphe source et l'homomorphisme doit envoyer chaque sommet du graphe source sur un sommet contenu dans la liste qui lui est associée. Dans le Chapitre II se trouvent des travaux sur une nouvelle variante, où les graphes sources et cibles sont sommet-colorié, et l'homomorphisme recherché doit préservé la couleur des sommets. On appellera alors l'homomorphisme en question un homomorphisme tropical. Il est notable que les problèmes classiques d'homomorphismes, ainsi que toutes les variantes sus-nommées, peuvent être transformés en temps polynomial en un problème d'homomorphisme tropical équivalent.

Les problèmes de satisfaction de contraintes (CSP) sont une grande classe de problèmes de décision binaire, contenu dans la classe NP, conjecturé par Feder et Vardi [42] comme étant tous NP-complet ou dans la classe P. Autrement dit, aucun problème dans la classe CSP ne serait NP-intermédiaire [61]. On remarque que les problèmes classiques d'homomorphismes et toutes les variantes sont dans la classe des CSP. Un résultat majeur dans le Chapitre II est qu'une dichotomie des problèmes d'homomorphisme tropical, c'est à dire le fait que tous les problèmes d'homomorphisme tropical sont NP-complet ou dans la classe P, serait équivalent à la Conjecture de Dichotomie de Feder et Vardi. Le reste du Chapitre II consiste en une collection de résultats, qui fournissent une dichotomie partielle du problème où la coloration du graphe cible fait partie des entrées du problème, proche des problèmes d'homomorphisme tropical. La recherche d'une telle dichotomie est motivée par le fait que cette variante est une restriction des problèmes d'homomorphisme listé, pour lesquelles la dichotomie est connue [40]. Il y est aussi exhibé le lien entre l'homomorphisme tropical et les autres variantes d'homomorphismes sus-mentionnés.

Le Chapitre III concerne deux problèmes ressemblant à des problèmes de domination. Classiquement, un ensemble de sommets est dit dominant le graphe quand tout sommet du graphe est dans cet ensemble ou dans son voisinage. On cherche généralement à minimiser la taille d'un ensemble dominant. Une idée intuitive d'application serait de voir le graphe comme un territoire que l'on cherche à garder. L'ensemble dominant représente les positions où placer chaque garde de manière à pouvoir intervenir rapidement sur tout le territoire. La notion d'alliance globale, introduite pour la première fois par Hedetniemi, Hedetniemi et Kristiansen [52], est une variante de ce principe. Un ensemble

de sommets A est dit être une alliance défensive quand chaque sommet de cet ensemble voit son voisinage fermé contenir plus de sommets dans A que de sommets extérieurs à A. Un ensemble A est dit être une alliance offensive quand chaque sommet dans le voisinage de A voit son voisinage fermé contenir plus de sommets dans A que de sommets extérieurs à A. Un ensemble qui est à la fois une alliance offensive et défensive est appelé une alliance puissante. Si, de plus, une alliance est un ensemble dominant, on dira que c'est une alliance globale. La notion d'alliance a plusieurs applications. En défense militaire, dans un réseau, une alliance peut être utilisée pour défendre des nœuds importants. Une alliance peut aussi modéliser un réseau de distributeurs et de clients, où les distributeurs doivent avoir suffisamment de stock pour satisfaire la demande des clients. Dans le Chapitre III, on s'intéresse aux variantes de l'alliance globale dans un graphe pondéré, où la somme des poids des sommets est considéré, à la place du nombre de sommets. En particulier, on peut y trouver un algorithme linéaire pour calculer une alliance offensive globale minimum et une alliance puissante globale minimum dans un arbre.

Toujours dans le Chapitre III, on s'intéresse aussi à la notion d'ensemble sûr. Un ensemble de sommets S dans un graphe G est dit sûr quand toute composante de $G - S$ est entouré uniquement par des composantes de $G[S]$ plus grandes. Cette notion a été introduite dans [45]. Calculer un ensemble sûr minimum est NP-complet en général. On peut trouver dans le Chapitre III un algorithme pour calculer un ensemble sûr minimum en temps polynomial dans un arbre.

Le Chapitre IV est consacré à l'étude d'un paramètre apparenté à la largeur arborescente. Un problème fondamental de la théorie métrique des graphes [8] consiste à plonger un graphe dans un espace métrique plus simple. En particulier, le plongement d'un graphe dans un arbre ou un chemin a des applications pratiques en vision des ordinateurs [70], en bio-informatique [57] ainsi qu'en informatique distribuée [55]. Les problèmes de plonger un graphe dans un arbre ou un chemin avec une distorsion minimum sont tout deux NP-difficile [2, 21, 63], cependant, on arrive à approximer ces deux problèmes. Plus précisément, des paramètres de graphe ont été introduits pour mesurer combien la distribution des distances d'un graphe est proche d'une métrique d'arbre ou d'une métrique de chemin [35, 36, 37].

Une décomposition arborescente est une division d'un graphe G en sac, qui sont des sous-graphes non-disjoints qui peuvent être assemblés à la manière d'un arbre. La longueur arborescente (tree-length) [35] et l'étendue arborescente (tree-breadth) [36] de G sont respectivement les meilleures bornes supérieures possible du diamètre et du rayon des sacs d'une décomposition arborescente de G. La longueur de chemin (path-length) [72] et l'étendue de chemin (path-breadth) [37] sont définies d'une manière similaire à la longueur arborescente et l'étendue arborescente pour les décompositions en chemin. Dans le Chapitre IV, on s'intéressera au calcul de ces quatre paramètres. Des études récentes suggèrent que certaines classes de réseau réel ont une longueur arborescente et une étendue arborescente bornée [1]. On peut exploiter cette propriété dans un algo-

rithme. Par exemple, les graphes à longueur arborescente bornée admettent un schéma d'étiquetage compact des distances [34], ainsi qu'un schéma d'approximation en temps polynomial pour le fameux problème du voyageur de commerce [60]. De plus, le diamètre et le rayon d'un graphe de longueur arborescente bornée peuvent être approximés à une constante additive près, en temps linéaire [26].

La complexité du calcul de la longueur arborescente, l'étendue arborescente, la longueur de chemin et l'étendue de chemin est resté un problème ouvert de plusieurs travaux [35, 36, 37]. Jusqu'à maintenant, la question a seulement été résolue pour la longueur arborescente, qui est NP-difficile à calculer [62]. Dans le Chapitre IV, on verra qu'il est NP-difficile de calculer l'étendue arborescente, la longueur de chemin et l'étendue de chemin. On s'intéressera ensuite spécifiquement à l'étendue arborescente. On verra un certain nombre de propriétés liés à l'étendue arborescente, et on présentera un algorithme polynomial pour reconnaître les graphes planaire ou biparti d'étendue arborescente 1.

Enfin, le Chapitre V contient mes travaux sur la suite des itérés du graphe de bicliques. Une biclique du graphe G est un sous-graphe biparti complet induit de G. Une biclique maximale est une biclique qui n'est pas strictement contenue dans une autre biclique. Le graphe des bicliques de G étudié dans le Chapitre V est défini comme le graphe dont les sommets sont les bicliques maximales de G, deux bicliques étant adjacentes si elles partagent une arête (cela diffère de la définition usuelle du graphe des bicliques, où deux bicliques sont adjacentes si elles partagent un sommet). Le i-éme itéré du graphe des bicliques est obtenu en appliquant i fois la transformation qui à un graphe associe son graphe des bicliques. Dans le Chapitre V, on s'intéresse au comportement asymptotique de la suite des itérés du graphe des bicliques. C'est un système dynamique discret qui présente des similarités avec un système chaotique. Des systèmes dynamiques similaires sont très étudiés, comme l'itéré du graphe des cliques [44, 66], l'itéré du graphe des bicliques usuelles [47, 48] et l'itéré du graphe adjoint [73]. On peut voir dans le Chapitre V un lien entre l'itéré du graphe des bicliques et l'itéré du graphe adjoint. On voit aussi un certain nombre de conditions suffisantes sur un graphe pour décider du comportement asymptotique de la suite des itérés du graphe des bicliques associés, qui rapproche d'une preuve de la décidabilité du problème de trouver ce comportement asymptotique.

2.1 Notions utiles et notations

Dans cette section sont rappelés quelques notions de théorie des graphes et d'informatique utiles, ainsi que quelques notations que j'utiliserai librement, et souvent, dans les chapitres suivantes.

Un graphe $G = (V, E)$ (ou juste G) est constitué d'un ensemble V, dont les éléments sont appelés des sommets, et d'un ensemble E de paires non-ordonnées de sommets, appelées des arêtes. Pour un graphe G quelconque, $V(G)$ désigne l'ensemble des sommets de G et $E(G)$ désigne l'ensemble des arêtes de G. L'ordre de G est le cardinal de l'ensemble $V(G)$. Une arête e dans $E(G)$ peut s'écrire uv,

ou plus rarement (u, v) ou $\{u, v\}$, où $u, v \in V(G)$. On dit alors que u et v sont adjacents, ou que u est adjacent à v, et que u et v sont chacun une extrémité de l'arête e. Un graphe est dit simple s'il ne contient pas de boucle, c'est à dire d'arête ayant ses deux extrémités égales, ou d'arête double, c'est à dire deux arêtes distinctes ayant les mêmes extrémités. On supposera toujours dans la suite que les graphes considérés sont simples, sauf si le contraire est précisé.

On appelle voisinage du sommet v, et on note $N(v)$, l'ensemble des sommets du graphe adjacents à v. On appelle voisinage fermé de v, et on note $N[v]$, l'union de $N(v)$ et de $\{v\}$. Si S est un ensemble de sommets, on appelle voisinage de S, et on note $N(S)$, l'ensemble des sommets qui ne sont pas dans S, mais qui sont adjacents à un sommet dans S. Si v est un sommet, on appelle degré de v, et on note $d(v)$ ou $deg(v)$, le cardinal de l'ensemble $N(v)$. Le degré minimum du graphe G est la valeur minimum du degré parmi tous les sommets de G, et on le note $\delta(v)$.

Un sommet de degrés 0 est appelé un sommet isolé. Un sommet de degrés 1 est appelé une feuille. Et une arête ayant exactement une feuille parmi ses deux extrémités est appelés arête pendantes. Une arête ayant deux feuilles comme extrémités est appelé une arête isolé.

Si S est un ensemble de sommets, on dit que S est un ensemble dominant si $S \cup N(S)$ contient tout les sommets du graphe. Si, de plus, S contient un seul sommet v, on dit que v est un sommet universel. On dit que le sommet u domine le sommet v si $N(v) \subset N(u)$. Un ensemble de sommets S est dit indépendant ou stable quand il n'existe pas d'arête entre n'importe quel deux sommets de S.

G' est un sous-graphe de G quand $V(G') \subset V(G)$ et $E(G') \subset E(G)$. G' est un super-graphe de G quand G est un sous-graphe de G'. G' est un sous-graphe induit de G quand $V(G') \subset V(G)$ et $E(G') = E(G) \setminus \{uv \in E(G) | u \notin V(G')\}$. On dit alors que G' est induit par l'ensemble $S = V(G')$. On note $G(S)$ le sous-graphe de G induit par S.

On note $G - u$ le sous-graphe de G induit par $V(G) \setminus \{u\}$, $G - S$ le sous-graphe de G induit par $V(G) \setminus S$. On note $G - e$ le sous-graphe de G d'ensemble de sommets $V(G)$ et d'ensemble d'arête $E(G) \setminus \{e\}$.

Pour $k \geq 2$, le chemin P_k est défini comme étant le graphe à k sommets v_1, $\cdots$, v_k tel que v_1 est une feuille adjacente à v_2, v_k est une feuille adjacente à v_{k-1}, et pour $i \in \{2, \cdots, k-1\}$, le sommet v_i a degrés 2 et est adjacent à v_{i-1} et v_{i+1}. v_1 et v_k sont appelés les extrémités du chemin. P_k est de longueur $k-1$ par définition.

Un graphe G est dit connexe si pour toute paire de sommet u et v de G, G contient une copie induite d'un chemin ayant u et v comme extrémités. La distance entre u et v est alors la longueur du plus petit tel chemin. Une composante connexe de G est un sous-graphe induit de G connexe, maximal pour cette propriété. Un ensemble S de sommets de G est dit séparateur si il existe deux composantes connexes de $G - S$ distinctes qui sont contenues dans la même composante connexe de G. Un sommet est appelé un point d'articulation si le singleton qui le contient est un ensemble séparateur. Un graphe est dit k-connexe si il contient au moins $k + 1$ sommets, qu'il est connexe, et qu'il n'existe pas d'ensemble séparateur contenant moins de k sommets.

Un arbre est un graphe connexe T tel que $|V(T)| - 1 = |E(T)|$. Une étoile est un arbre ayant un sommet universel. Une forêt est un graphe dont chaque composante connexe est un arbre. Un cycle est un graphe connexe où tous les sommets sont de degrés 2. Le cycle d'ordre k est noté C_k. On remarque qu'une définition équivalente d'un arbre est un graphe connexe sans cycle induit ou encore un graphe G sans cycle induit tel que $|V(T)| - 1 = |E(T)|$. Un graphe complet est un graphe où toutes paires de sommets sont adjacentes. On note K_k le graphe complet d'ordre k. Un graphe biparti G est un graphe tel que l'ensemble des sommets peut être partitionné en deux parties A et B, telles que toutes les arêtes ont une extrémité dans A et une extrémité dans B. On appelle alors cette partition une bipartition de G. Un graphe biparti complet est un graphe biparti, de bipartition (A, B) tel que toutes paires de sommet dans $A \times B$ sont adjacentes. Le graphe biparti complet ayant respectivement i et j sommets dans chaque partie de sa bipartition est noté $K_{i,j}$.

On appelle la maille d'un graphe l'ordre du plus petit cycle induit du graphe. Si le graphe n'admet pas de cycle induit, on dit que sa maille est infinie. Une clique est un sous-graphe induit qui est aussi un graphe complet. Une biclique est un sous-graphe induit qui est aussi un graphe biparti complet. Un graphe cordal est un graphe dont tout les cycles induit sont d'ordre 3.

Un sous-graphe de G est dit couvrant si son ensemble de sommets est $V(G)$. Cette notion est utilisée principalement pour parler d'arbres couvrants.

Contracter l'arête uv consiste à enlever les sommets u et v et les remplacer par un nouveau sommet de voisinage $N(u) \cup N(v) \setminus \{u, v\}$. Si S est un ensemble de sommets tel que $G(S)$ est connexe, contracter S consiste à enlever tous les sommets de S et les remplacer par un nouveau sommet de voisinage $N(S)$. G' est un mineur de G si G' peut être obtenu par contraction d'arête dans un sous-graphe de G.

Le graphe adjoint ou line graph $L(G)$ de G est le graphe dont l'ensemble des sommets est l'ensemble des arêtes $E(G)$ de G et deux arêtes de G sont adjacentes dans $L(G)$ si et seulement si elles ont une extrémité en commun.

Un couplage est un graphe constitué exclusivement d'arêtes isolés. Un couplage d'un graphe G est un sous-graphe de G qui est aussi un couplage. Un couplage parfait ou complet de G est un couplage couvrant de G. Quand on ajoute un couplage entre deux copies d'un graphe, on ajoute en fait une arête entre chaque copie du même sommet.

Un graphe est dit planaire si il n'admet pas $K_{3,3}$ ou K_5 comme mineur. Un plongement d'un graphe G dans le plan est une fonction injective p qui associe un point du plan à chaque sommet de G et un chemin du plan entre $p(u)$ et $p(v)$ à chaque arête uv tel que les images de deux arêtes distinctes ne s'intersectent pas. Un plongement de G dans le plan est aussi appelé un plongement planaire de G. Une définition équivalente d'un graphe planaire est un graphe qui admet un plongement dans le plan.

Soit un arbre T et r un sommet de T. Enraciner T en r donne une direction à chaque arête de T : l'extrémité la plus proche de r est appelée parent de l'autre extrémité. Chaque sommet v admet alors un unique parent que l'on nomme $p(v)$, sauf r. Si u est le parent de v, alors v est l'enfant de u. Dans ce contexte, r

est appelé la racine de l'arbre. La profondeur d'un sommet d'un arbre enraciné est la distance entre le sommet et la racine. Le sous-arbre enraciné en v, noté $T(v)$ est la composante connexe de $T - p(v)$ contenant v. $T(v)$ est un arbre, automatiquement enraciné en v.

Il existe quelques variantes de la notion de graphe.

Un graphe orienté $D = (V, A)$ (ou juste D) est constitué d'un ensemble V de sommets, et d'un ensemble E de couples de sommets, appelés des arcs. Intuitivement et dans les représentations visuelles, les arcs sont des flèches. Tout graphe orienté admet un graphe non-orienté sous-jacent, obtenu en oubliant la direction des arcs. Toutes les notions de théorie des graphes présentées ci-dessus peuvent donc être utilisées directement pour parler de graphe orienté. Un arc $e \in A$ est noté uv ou parfois (u, v) avec u et v des sommets dans V. uv est représenté par une flèche allant de u vers v. Un puits est un sommet de D qui est la deuxième composante de toute arête dont il est l'extrémité. Une source est un sommet de D qui est la première composante de toute arête dont il est l'extrémité.

Un hypergraphe $G = (V, E)$ est constitué d'un ensemble V de sommets, et d'un ensemble E de parties de V, appelés des arêtes. C'est une généralisation de la notion de graphe où les arêtes ne sont plus nécessairement des ensembles à deux éléments.

Un graphe sommet-colorié est une paire (G, c), où G est un graphe et c est une fonction de $V(G)$ dans un ensemble de couleur. $c(v)$ est donc la couleur du sommet v, et $c(S)$ l'ensemble des couleurs coloriant au moins un sommet de S. Un graphe sommet colorié est dit proprement colorié si deux sommets adjacent ne sont pas colorié de la même couleur.

Un graphe pondéré est une paire (G, w), où G est un graphe, est w est une fonction de poids de $V(G)$ dans $\mathbb{R}$ (généralement dans $\mathbb{R}^+$). $w(v)$ est le poids du sommet v et $w(S)$ et la somme des poids des sommets dans l'ensemble S.

On note $P(S)$ l'ensemble des sous-ensemble de l'ensemble S.

On utilisera les notions algorithmiques de complexité en temps, exprimé à l'aide des notations $o()$, $O()$ et $\Theta()$, d'algorithme glouton et de programmation dynamique telles qu'elles sont définies dans [29]. On utilisera également la notion d'algorithme FPT. Un algorithme est FPT en temps pour le paramètre k si son temps d'exécution est $O(f(k) \times n^i)$ où f est une fonction à valeur réelle positive et i est un entier.

Un problème de décision binaire est constitué d'un certain nombre de variables d'entrée, et d'une propriété qui peut être vraie ou fausse en fonction des valeurs assignées aux variables d'entrée, généralement formulé comme une question. Une instance d'un problème de décision binaire est une assignation de valeur aux variables d'entrée. Une instance est dite positive si la propriété est vraie pour cette instance, et négative sinon.

Un problème de minimisation est constitué d'un certain nombre de variables d'entrée, et d'une sous-structure de ces variables d'entrée que l'on cherche à minimiser. On peut penser par exemple à un graphe comme variable d'entrée, dans lequel on chercherait la plus petite composante connexe. Un problème de minimisation n'est pas un problème de décision binaire, mais peut facilement

être reformulé comme un problème de décision binaire. Dans notre exemple, on peut chercher si il existe une composante connexe d'ordre plus petit que k fixé. Il peut arriver de faire le raccourci entre un problème de minimisation et sa reformulation en terme de problème de décision binaire pour ce qui est de l'appartenance à certaine classes.

On utilisera les définitions de décidabilité, des classes P et NP, de réduction et de NP-complet et NP-difficile données dans [29]. On utilisera aussi la notion de NP-intermédiaire, pour décrire un problème qui est dans la classe NP, qui n'est pas dans la classe P et qui, pourtant, n'est pas NP-complet.

Chapitre I

Sous-graphe connexe tropical

Dans un graphe sommet-colorié, un sous-ensemble de sommets est dit tropical si il contient au moins une fois chaque couleur. On utilisera aussi la notion de sous-ensemble arc-en-ciel, qui contient au plus une fois chaque couleur, et de sous-ensemble colorful, qui est à la fois tropical et arc-en-ciel. Un sous-graphe tropical de G est un sous-graphe de G dont les sommets forment un sous-ensemble tropical de G. En considérant les couleurs comme des informations sémantiques sur le contenu ou la nature des nœuds, rechercher un sous-graphe tropical ayant certaine propriété permet de réduire un graphe compliqué à un sous-problème plus simple qui contient toujours une bonne représentation sémantique du graphe. Dans le cadre de ma thèse, je me suis intéressé à la recherche de sous-graphes connexes tropicaux.

Définition 1. *Un sous-graphe connexe tropical du graphe sommet-colorié (G, c) est un ensemble de sommets V' tel que $V' \subset V(G)$, le sous-graphe induit par V' est connexe, et $c(V') = c(V(G))$, c'est à dire que V' est coloré par toutes les couleurs présentes dans G.*

On peut remarquer aisément que si G est connexe, il admet toujours un sous-graphe connexe tropical. En effet, $V(G)$ induit un sous graphe connexe, G, qui est évidement tropical. De même, si G n'est pas connexe, il admet un sous-graphe connexe tropical si et seulement si une de ces composantes est tropicale. Une question plus intéressante est de rechercher le plus petit sous-graphe connexe tropical de G. On définit ainsi $\mathfrak{tc}(G)$ comme le nombre de sommet du plus petit sous-graphe connexe tropical de G, associé au problème de décision suivant :

Problème du Sous-graphe connexe tropical minimum (SCTM)

Donnée : Un graphe sommet-colorié (G, c)
Question : Déterminer la valeur $\mathfrak{tc}$.

Dans un premier temps, on verra la complexité théorique de SCTM, puis on verra plusieurs conditions suffisantes, permettant de borner la valeur de $\mathfrak{tc}(G)$.

3 Complexité

Théorème 1. *SCTM est NP-complet en restrictions aux arbres.*

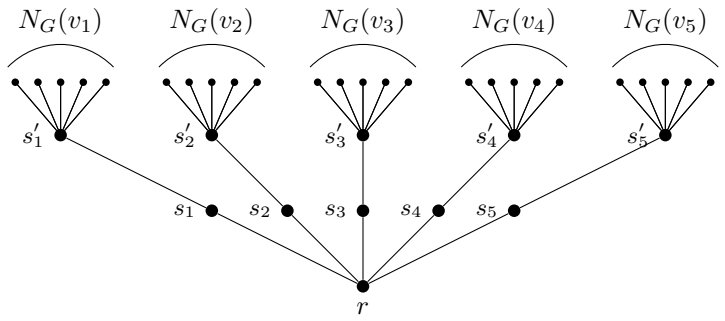
La preuve est obtenue par une réduction depuis le problème d'ensemble dominant minimum.

Problème d'ensemble dominant minimum (EDM)

Donnée : Un graphe $G = (V, E)$.
Question : Trouver le cardinal du plus petit sous-ensemble $V' \subset V$ tel que pour tout $u \in V$, $N[u] \cap V' \neq \emptyset$

Démonstration. Considérons une instance $G = (V, E)$ de EDM où $V = \{v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n\}$. On définit un arbre sommet-coloré (T, c), tel que $c(V(T)) = \{0, 1, \cdots, n+1\}$ de la manière suivante. Soit r un sommet de couleur 0, et, pour chaque $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$:

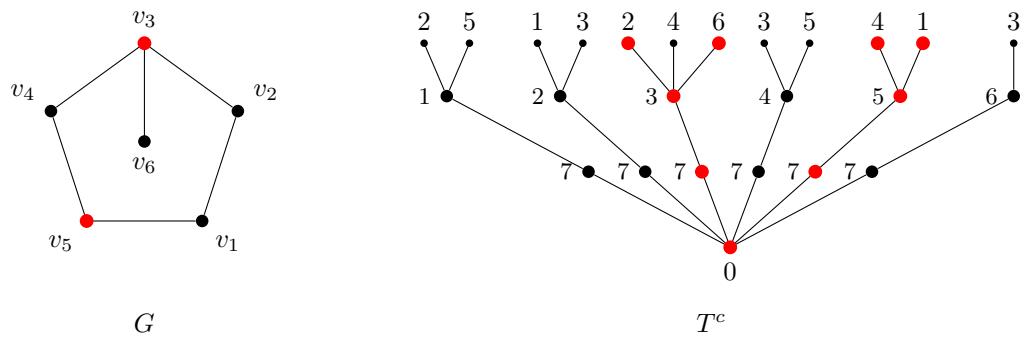
1. Soit s_i un sommet de couleur $n+1$ adjacent à r.
2. Soit s'_i un sommet de couleur i adjacent à s_i.
3. Pour chaque $v_j \in N(v_i)$, soit $t_{i,j}$ un sommet de couleur j adjacent à s'_i.



On peut associer un ensemble dominant de G à un sous-graphe connexe tropical de (T, c) de la manière suivante. Étant donné un ensemble dominant S de G, et une fonction f qui associe à chaque sommet de $V \setminus S$ un sommet qui le domine dans S, on définie un sous-graphe connexe tropical de (T, c), contenant les sommets suivants :

1. Le sommet r.
2. Les sommets s_i et s'_i pour chaque v_i dans S.
3. Les sommets $t_{i,j}$ pour chaque $v_j \in V \setminus S$, où i est tel que $f(v_j) = v_i$.

On remarque que le sous-graphe connexe tropical T' ainsi défini est minimal. En effet, chaque couleur est présente exactement une fois, à part peut être $n+1$ qui est présente dans chaque s_i. De plus, si s_i est dans T', alors s'_i l'est aussi, donc $T' \setminus s_i$ déconnecte s'_i et r.
Étant donné un sous-graphe connexe tropical minimal T' de (T, c), on définie l'ensemble $S = \{v_i | s'_i \in T'\}$ de G. Comme T' est tropical, pour tout $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, il existe un sommet de couleur i dans T'. De plus, comme tout les sommets de couleur i dans T, sauf un, sont des feuilles et que T' est minimal, il existe un unique sommet de couleur i dans T'. Si ce sommet est s'_i, alors $v_i \in S$. Sinon, c'est le sommet $t_{j,i}$ pour un certain j où s_j est dans T' et donc v_j est dans S. Cela nous permet de définir une fonction f de $V \setminus S$ dans S, qui à v_i associe v_j tel que $t_{j,i}$ est dans T'.



G T^c

On remarque que ces deux opérations sont réciproques l'une de l'autre, ce qui prouve que les sous-graphes connexes tropicaux minimaux T' de (T, c) sont en bijection avec les couples (S, f) d'ensembles dominants et fonctions de domination de G. De plus, cette bijection satisfait que $|T'| = 1 + |S| + n$, car toutes les couleurs sont présentes exactement une fois dans T' sauf $n+1$ qui est présente autant de fois qu'il y a de sommets dans S. On en conclut, en passant au minimum, que :

$$\mathfrak{tc}(T, c) = 1 + \gamma + n$$

La réduction depuis le problème d'ensemble dominant minimum se fait en temps polynomial, ce qui prouve le théorème. □

On peut remarquer que si on restreint les données de SCTM aux chemins sommet-colorié, alors le problème est polynomial. En effet, un chemin à n sommets admet $\frac{n(n+1)}{2}$ sous-graphes connexes, énumérables en temps polynomial. SCTM est NP-complet en restriction aux arbres, mais pas en restriction aux chemins, ce qui pose la question de sa complexité en restriction aux graphes parfaits. Dans les deux prochains théorèmes, nous allons montrer la NP-complétude de SCTM en restriction au graphes d'intervalles, puis aux graphes splits, qui sont deux familles de graphes parfaits.
Un graphe d'intervalle est un graphe (V, E) tel qu'on peut assigner à chaque $v \in V$ un intervalle $I_v \subset \mathbb{R}$ vérifiant que $I_u \cap I_v$ est non-vide si et seulement si $uv \in E$.

Théorème 2. *SCTM est NP-difficile en restriction aux graphes d'intervalles.*

La preuve est obtenue par une réduction depuis le problème de couverture par sommets minimum. Problème de couverture par sommets minimum (CSM)

Donnée : Un graphe $G = (V, E)$.
Question : Trouver le cardinal du plus petit sous-ensemble $V' \subset V$ tel que pour tout $uv \in E$, $u \in V'$ ou $v \in V'$

Démonstration. Considérons une instance $G = (V, E)$ de CSM. Soient n le cardinal de V et m le cardinal de E. On construit un graphe d'intervalle sommet-colorié $(G' = (V', E'), c)$ à partir de G de la manière qui suit. Nous utiliserons la

représentation en intervalle pour définir G'. c utilise un ensemble C de $2m+n+2$ couleurs définit par :

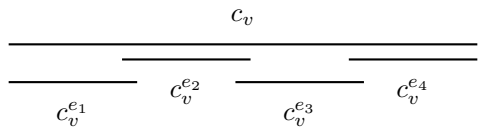
— $2m$ couleurs c_v^e, où $e \in E$ et $v \in V$ est une extrémité de e.

— n couleurs c_v, où $v \in V$.

— 2 couleurs c_{gauche} et c_{droite}.

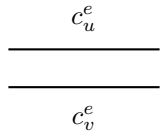
A partir de G, on construit trois type de gadgets, présentés ci-dessous, qui, mis ensemble, définissent le graphe d'intervalle sommet-colorié (G', c), qui est notre instance de SCTM. Les couleurs c_{gauche} et c_{droite} ne sont présentes qu'une fois dans (G', c). c_{gauche} colorie un intervalle placé tout à gauche et c_{droite} un intervalle tout à droite. Cela assure qu'une solution de SCTM est obligé de couvrir toute la longueur de la représentation en intervalle. Tous les gadgets sont placés les uns à la suite des autres entre ces deux intervalles de telle manière que seuls les intervalles les plus à droite d'un gadget intersectent uniquement les intervalles les plus à gauche du suivant. L'ordre des gadgets n'a aucune importance dans la preuve.

Type 1 : Pour chaque sommet $v \in V$ de degré au moins un, extrémité des arêtes e_1, e_2, ... $e_{d(v)}$, le gadget w_v est défini comme suit. Il y a $d(v)$ intervalles de couleurs $c_v^{e_1}$, $c_v^{e_1}$, ... $c_v^{e_{d(v)}}$, et un intervalle de couleur c_v. L'intervalle de couleur $c_v^{e_i}$ intersecte seulement les intervalles de couleurs $c_v^{e_{i-1}}$, $c_v^{e_{i+1}}$ et c_v. Les intervalles de couleurs c_v et $c_v^{e_1}$ sont placés le plus à gauche, et intersectent le gadget précédent, et les intervalles de couleurs c_v et $c_v^{e_{d(v)}}$ sont placés le plus à droite, et intersectent le gadget suivant. Par exemple, si v est un sommet de degrés quatre, w_v est définis comme suit :



Une solution de SCTM est obligée de contenir soit l'intervalle de couleur c_v, soit les $d(v)$ intervalles de couleurs $c_v^{e_1}$, $c_v^{e_1}$, ... $c_v^{e_{d(v)}}$.

Type 2 : Pour chaque arête $uv = e \in E$, le gadget w'_e est constitué de deux intervalles de couleur respectivement c_u^e et c_v^e qui ont même borne.



Une solution de SCTM est obligée de contenir un de ces deux intervalles.

Type 3 : Pour chaque sommet $v \in V$, le gadget w''_v est simplement constitué d'un intervalle de couleur c_v. Une solution de SCTM est obligé de contenir

cet intervalle.

Dans un premier temps, on construit un sous-graphe connexe tropical de (G', c) d'ordre $2m + n + k + 2$ à partir d'une couverture par sommets de G d'ordre k. Soit H une couverture par sommets de G d'ordre k. On définit H' comme le plus petit ensemble des sommets de V' vérifiant les propriétés suivantes :

1. Les deux sommets de couleurs c_{gauche} et c_{droite} appartiennent à H'.
2. Les n sommets appartenant à un gadget de Type 3 appartiennent à H'.
3. Pour chaque sommet $v \in H$, le sommet de couleur c_v dans le gadget w_v appartient à H'.
4. Pour chaque arête $e = uv \in E$. On peut supposer sans perte de généralité que $u \in H$, car H est une couverture par les sommets. Le sommet de couleur c_u^e dans le gadget w'_e appartient à H'. Le sommet de couleur c_v^e dans le gadget w_v appartient à H.

Montrons que H' est un sous-graphe connexe tropical de (G', c) d'ordre $2m + n + k + 2$.
H' est connexe car toute la longueur de l'intervalle de représentation est couverte par H'. En effet, les gadgets de Type 3 sont couverts d'après la Propriété 2. Les gadgets de Type 2 sont couverts d'après la Propriété 4. Les gadgets de Type 1 w_v, où v appartient à H, sont couverts d'après la Propriété 3. Les gadgets de Type 1 w_v, où v n'appartient pas à H, sont couverts d'après la Propriété 4. Enfin, les intervalles le plus à gauche et le plus à droite sont couverts d'après la Propriété 1. Tout l'intervalle de représentation est couvert par H' qui est donc connexe.
H' est tropical. H' contient des sommets de couleurs c_{gauche} et c_{droite} d'après la Propriété 1. H' contient des sommets de couleurs c_v pour tout $v \in V$ d'après la Propriété 2. H' contient des sommets de couleurs c_v^e pour tout $e \in E$ et tout v extrémité de e, d'après la Propriété 4.
Enfin H' est bien d'ordre $2m + n + k + 2$. La Propriété 1 apporte deux sommets. La Propriété 2 apporte n sommets. La Propriété 3 apporte k sommets. La Propriété 4 apporte $2m$ sommets. On remarque également qu'il n'y a pas d'intersection entre les sommets apportés par différentes propriétés.
A partir d'une couverture par sommet de G d'ordre k, nous avons construit un sous-graphe connexe tropical de (G', c) d'ordre $2m+n+k+2$. Soit, maintenant, un sous-graphe connexe tropical H' de (G', c) d'ordre $2m+n+k+2$ avec $k \geq 0$. Montrons qu'on peut construire une couverture par sommet de G d'ordre au plus k. Cela suffira à prouver que trouver une solution à l'instance G de CSM est équivalent à trouver une solution à l'instance (G', c) de SCTM.
Soit H' un sous-graphe connexe tropical de (G', c) d'ordre $2m + n + k + 2$. H' contient l'unique sommet de couleur c_{gauche} et l'unique sommet de couleur c_{droite}, de plus il est connexe, donc il couvre tout l'intervalle de représentation. En particulier, il contient tout les sommets d'un gadget de Type 3. Soit H l'ensemble des sommets $v \in V$ tel qu'il existe un $e \in E$ vérifiant que le sommet colorié c_v^e dans le gadget w'_e appartient à H'. Chaque gadget de Type 2 doit être couvert, ce qui implique que chaque arête a une extrémité dans H, et donc H

est une couverture par sommet. De plus, H est de cardinal au plus k. En effet, si le sommet colorié c_v^e dans le gadget w'_e appartient à H', soit le sommet colorié c_v^e dans le gadget w_v appartient aussi à H', ou bien le sommet de couleur c_v dans le gadget w_v appartient à H'. Dans les deux cas, il y a deux sommets de la même couleur, c_v^e ou c_v, dans H'. H' est tropical, donc contient $2m+n+2$ couleurs, et contient $2m+n+k+2$ sommets, donc il ne peut y avoir au plus que k couleurs présentes plusieurs fois. Ainsi H est d'ordre au plus k.

Cela suffit à prouver qu'un sous-graphe connexe tropical minimum de (G', c) permet de trouver en temps polynomial une couverture par les sommets minimum de G et que si l'ordre de la couverture par les sommets est k, l'ordre du sous-graphe connexe tropical sera $2m+n+k+2$. Ainsi SCTM est NP-difficile en restriction aux graphes d'intervalles. □

On peut remarquer que cette preuve utilise des intervalles de différentes tailles dans le gadget de Type 1. La complexité de SCTM en restriction au graphes d'intervalles unitaires, où les intervalles doivent tous être de même taille, est une question ouverte.

Un graphe $G = (V, E)$ est appelé un graphe split si V peut être partitionné en deux ensemble V_0 et V_1 tels que les sous-graphes induits par V_0 et V_1 soient respectivement une clique et un ensemble indépendant. On montre, maintenant, par une autre réduction depuis CSM que SCTM est NP-difficile en restriction aux graphes splits.

Théorème 3. *SCTM est NP-difficile en restriction aux graphes splits.*

Démonstration. Soit $G = (V, E)$ une instance de CSM. Soit $n = |V|$ et $m = |E|$. On construit le graphe split sommet colorié (G', c) comme suit. G' admet $n+m$ sommets, colorié avec $m+1$ couleurs.

— Pour chaque sommet $v \in V$ il y a un sommet $u_v \in V(G')$ colorié avec la couleur 0. Pour tout $v, v' \in V$, u_v et $u_{v'}$ sont adjacents. Ces sommets forment donc une clique d'ordre n.

— Pour chaque arête $e = vv' \in E$ il y a un sommet u'_e de degrés deux, adjacent à u_v et $u_{v'}$, colorié par une couleur unique.

G' est clairement un graphe split, qu'on peut partitionner en une clique de n sommets de couleur 0, noté V_0 et un ensemble indépendant de m sommets de m couleurs distinctes différentes de 0, noté V_1. Montrons qu'il existe une bijection entre les sous-graphes connexes tropicaux de (G', c) et les couvertures par sommets de G.
Soit H une couverture par les sommets de G, l'ensemble $H' \subset V(G')$ constitué de l'union de V_1 et de l'ensemble des u_v tel que $v \in H$ est un sous-graphe connexe tropical. En effet, H' contient V_1 et au moins un sommet de V_0, donc est tropical. De plus chaque arête de G a au moins une extrémité dans H, donc chaque sommet de V_1 a au moins un voisin dans H', donc H' est connexe. H' est un sous-graphe connexe tropical de (G', c) de cardinal $m + |H|$.

Réciproquement, soit H' un sous-graphe connexe tropical de (G', c). H' contient V_1 car il est tropical. Par connexité, H' contient au moins un sommet dans le voisinage de chaque sommet de V_1. Cela implique que l'ensemble H définit comme l'ensemble des sommets $v \in V$ tel que $u_v \in H'$, contient une extrémité de chaque arête de G. En d'autres mots, H est une couverture par sommets.
On a construit une bijection entre les sous-graphes connexe tropicaux de (G', c) et les couverture par sommets de G qui préserve la cardinalité, avec un décalage de m. On conclut en passant au minimum. □

Enfin, nous allons voir un algorithme FPT pour résoudre SCTM en temps $O(n^2 \times m \times 8^c)$. En particulier, cet algorithme est polynomial si le nombre de couleur est fixé, ou croît en logarithmique de la taille du graphe.

Théorème 4. *SCTM peut être résolu en $O(n^2 \times m \times 8^c)$, où n est le nombre de sommets, m le nombre d'arêtes et c le nombre de couleurs de l'instance.*

Démonstration. Soit (G, c) une instance de SCTM à n sommets, m arêtes et colorié avec l'ensemble de couleurs C. L'idée de l'algorithme est de calculer pour chaque sommet v la fonction $C_v : P(C) \to \{1, ..., n\}$ qui associe à un ensemble de couleur $S \subset C$ l'ordre du plus petit sous-graphe connexe contenant v et colorié exactement avec les couleurs de S. L'ordre du plus petit sous-graphe connexe tropical $\mathfrak{tc}(G)$ est donc la plus petite valeur atteinte par $C_v(C)$, en faisant varier v. L'algorithme est le suivant :

— Pour tout $u \in V$ et tout $S \subset P(C)$, on initialise $C_u(S)$ à 1 si $S = \{c(u)\}$ et à ∞ sinon.

— Tant qu'il existe une arête $e = uv \in E$ et deux ensembles de couleurs $S_u, S_v \subset P(C)$ tels que $C_u(S_u) + C_v(S_v) < C_u(S_u \cup S_v)$, on modifie C_u en mettant $C_u(S_u \cup S_v) = C_u(S_u) + C_v(S_v)$.

Prouvons maintenant que cet algorithme est correct.
Prouvons d'abord par récurrence la propriété P qu'à chaque étape de l'algorithme, si $C_u(S) = k \neq \infty$, alors il existe un sous-graphe connexe de (G, c) d'ordre au plus k qui contient au moins une fois chaque couleur dans S et contenant u. Après l'initialisation $C_u(S) \neq \infty$ seulement pour $S = \{c(u)\}$, auquel cas $C_u(S) = 1$. Le singleton $\{u\}$ induit un sous-graphe d'ordre 1, colorié exactement par S contenant u. La propriété P est vérifié à l'initialisation. Supposons maintenant que la propriété P est vraie avant une itération de la boucle "tant que" agissant sur l'arête $e = uv$ et les ensembles de couleurs S_u et S_v. Par hypothèse de récurrence, il existe un sous-graphe connexe H_u d'ordre au plus $C_u(S_u)$ contenant u et contenant au moins une fois chaque couleur de S_u. De même, il existe un sous-graphe connexe H_v d'ordre au plus $C_v(S_v)$ contenant v et contenant au moins une fois chaque couleur de S_v. Comme u est adjacent à v, $H_u \cup H_v$ est connexe, d'ordre au plus $C_u(S_u) + C_v(S_v)$, contient u et contient au moins une fois chaque couleur de $S_u \cup S_v$. Ainsi, la modification de C_u proposée dans l'algorithme préserve la propriété P. Il en découle que pour tout $u \in V$, $\mathfrak{tc}(G, c) \leq C_u(C)$.
Supposons maintenant, par contradiction, qu'à la fin de l'algorithme, il y a

un sommet u et un sous-graphe connexe H contenant u d'ordre k tel que $k < C_u(c(H))$. Considérons T un arbre couvrant de H enraciné en u. Pour tout sommet $v \in T$ on dénote par $T(v)$ le sous-arbre de T enraciné en v. Prouvons par récurrence pour chaque sommet $v \in T$ la propriété P' qui dit que, $C_v(c(T(v))) \leq |T(v)|$.

C'est vrai si v est une feuille, puisque dans ce cas $C_v(c(T(v))) = C_v(\{c(v)\}) = 1 = |T(v)|$.

Supposons maintenant que P' est vérifié pour tous les enfants $v_1, v_2, ...v_r$ d'un sommet $v \in T$. Prouvons par récurrence pour j de 0 à r la propriété P'' qui dit que, $C_v(c(\{v\} \cup T(v_1) \cup T(v_2) \cup ...T(v_j))) \leq 1 + |T(v_1)| + |T(v_2)| + ...|T(v_j)|$.
La propriété P'' est vraie pour $j = 0$, puisque $C_v(\{c(v)\}) = 1$.
Supposons P'' est vraie pour tout $j = i < r$, montrons qu'elle est également vraie pour $j = i + 1$. Étant donné que l'algorithme est terminé, cela veut dire qu'on ne peut pas modifier C_v en regardant l'arête vv_{i+1} et les ensembles de couleurs $c(\{v\} \cup T(v_1) \cup T(v_2) \cup ...T(v_i))$ et $c(T(v_{i+1}))$, donc $C_v(c(\{v\} \cup T(v_1) \cup T(v_2) \cup ...T(v_i)) \cup c(T(v_{i+1}))) \leq C_v(c(\{v\} \cup T(v_1) \cup T(v_2) \cup ...T(v_i))) + C_{v_{i+1}}(c(T(v_{i+1})))$.
On remarque que $c(\{v\} \cup T(v_1) \cup T(v_2) \cup ...T(v_i)) \cup c(T(v_{i+1})) = c(\{v\} \cup T(v_1) \cup T(v_2) \cup ...T(v_{i+1}))$, que, par hypothèse de récurrence sur j, $C_v(c(\{v\} \cup T(v_1) \cup T(v_2) \cup ...T(v_i))) \leq 1 + |T(v_1)| + |T(v_2)| + ...|T(v_i)|$ et que, par hypothèse de récurrence sur T, $C_{v_{i+1}}(c(T(v_{i+1}))) \leq |T(v_{i+1})|$. On obtient donc $C_v(c(\{v\} \cup T(v_1) \cup T(v_2) \cup ...T(v_{i+1}))) \leq 1 + |T(v_1)| + |T(v_2)| + ...|T(v_{i+1})|$.
C'est la propriété P'' pour $j = i + 1$.

On a montré par récurrence que la propriété P'' est vraie pour j entre 0 et r. En particulier, P'' est vraie pour $j = r$, c'est à dire $C_v(c(T(v))) \leq |T(v)|$. C'est exactement la propriété P' pour le sommet v. Cela termine la récurrence qui prouve que pour tout sommet $v \in T$, $C_v(c(T(v))) \leq |T(v)|$. En particulier, pour la racine, $C_u(c(H)) \leq |H| = k$. Cela contredit notre hypothèse de départ. Il n'existe pas, à la fin de l'algorithme, de sommet u et de sous-graphe connexe H contenant u tel que $|H| < C_u(c(H))$. Cela prouve qu'à la fin de l'algorithme, pour tout $v \in V$ et pour tout $S \in P(C)$, $C_v(S)$ est exactement la taille du plus petit sous-graphe connexe contenant v et au moins un sommet de chaque couleur dans S. En particulier le minimum de $C_v(C)$ pour $v \in V$ est $\mathfrak{tc}(G, c)$.

Calculons la complexité de l'algorithme. Identifier une arête uv et deux ensembles S_u et S_v permettant d'appliquer l'étape à l'intérieur de la boucle prend au plus $m \times 2^{|C|} \times 2^{|C|}$ opérations, en testant la condition pour chaque arête et chaque sous-ensemble de C. On remarque ensuite qu'appliquer l'étape à l'intérieur de la boucle décroit strictement la valeur de $C_u(S_u \cup S_v)$, en prenant une valeur en 1 et n. Chaque sommet correspond à une fonction sur un ensemble de définition de $2^{|C|}$ valeurs. Chaque fonction peut décroître au plus n fois sur chaque valeur. Il en découle que la boucle est exécutée au plus $n \times 2^{|C|} \times n$ fois. La complexité de l'algorithme est $O(n^2 \times m \times 8^{|C|})$. $\square$

On peut trouver un algorithme exact pour calculer un plus petit sous-graphe connexe tropical en temps $O(1.5359^n)$ et en temps $O(1.2721^n)$ dans [23].

4 Conditions suffisantes

Maintenant que le problème semble suffisamment difficile à résoudre algorithmiquement, il devient naturel de rechercher des conditions suffisantes qui assurent l'existence d'un sous-graphe connexe tropical suffisamment petit. C'est ce à quoi nous nous intéressons dans cette partie.

Proposition 1. *Si (G, c) est un graphe proprement colorié avec $\chi(G)$ couleurs, alors il contient un sous-graphe connexe colorful d'ordre $\chi(G)$.*

Démonstration. Soit $V_1 \subset V(G)$, l'ensemble des sommets de couleur 0 dans G. Il existe un sommet $v \in V_1$ tel que le voisinage de v contient toutes les autres couleurs. En effet, dans le cas contraire, chaque sommet de V_1 peut être recoloré par une couleur qui n'est pas présente dans son voisinage, constituant ainsi un coloriage propre avec $\chi(G) - 1$ couleurs. Ainsi, le voisinage fermé de v contient toutes les couleurs de $c(G)$ et donc un sous-graphe connexe colorful. □

On remarque qu'un graphe complet contient toujours un sous-graphe connexe colorful et que retirer un petit nombre d'arête ne change pas ce fait. Il y a donc une borne inférieure sur le nombre d'arêtes qui assure l'existence d'un sous-graphe connexe colorful. Le prochain théorème explicite cette borne, et la généralise. Pour prouver ce théorème, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 1. *Soit G un graphe connexe à n sommets et m arêtes. Si G contient au moins i points d'articulations, alors*

$$m \leq \binom{n-i}{2} + i$$

Démonstration. Un bloc est un sous-graphe 2-connexe maximal de G. Un bloc feuille de G est un bloc qui contient exactement un point d'articulation de G.

On prouve ce résultat par récurrence. Il y a $\binom{n}{2}$ paires de sommets, donc $\binom{n}{2}$ arêtes possible dans un graphe simple, ce qui prouve le résultat pour $i = 0$. Si $i > 0$, G admet au moins deux blocs feuilles. Soit v un sommet d'un bloc feuille qui n'est pas un point d'articulation. Si v a degrés 1, alors $G - v$ a au moins $i - 1$ points d'articulations, et par hypothèse de récurrence

$$m \leq |E(G-v)| + 1 \leq \binom{(n-1)-(i-1)}{2} + (i-1) + 1 = \binom{n-i}{2} + i$$

Sinon, $G - v$ admet un ensemble C d'au moins i points d'articulation et v est adjacent à au plus un d'entre eux. On remarque, cependant, que v ne peut pas être adjacent à tous les sommets de $V(G) \setminus C$, car chaque point d'articulation

sépare $V(G) \setminus C$ en au moins deux composantes connexes non-vides. Ainsi v a degrés au plus $(n-1)-(i-1)-1 = n-i-1$. Par hypothèse de récurrence

$$m \leq |E(G-v)| + n - i - 1 \leq \binom{n-i-1}{2} + i + (n-i-1) = \binom{n-i}{2} + i$$

□

Théorème 5. *Soit (G, C) un graphe connexe sommet-colorié à n sommets, m arêtes et c couleurs. Pour tout entier $k \geq 0$, si $m \geq \binom{n-k-2}{2} + n - c + 2$, alors $\mathfrak{tc}(G, C) \leq c + k$.*

Démonstration. On prouve ce résultat par récurrence sur n. Si $n \leq c+k$, alors G lui-même est un sous-graphe connexe tropical d'ordre au plus $c+k$. On suppose donc que $n \geq c+k+1$. Soit $F \subseteq V$ l'ensemble des sommets dont la couleur apparaît plus d'une fois dans (G, C). On remarque que $|F| \geq n-c+1$.
Soit $i := n-c+1$. Nous avons supposé que $n \geq c+k+1$, c'est à dire $k \leq n-c-1$, ce qui implique que

$$m \geq \binom{n-k-2}{2} + n - c + 2 \geq \binom{n-(n-c+1)}{2} + n - c + 1 + 1 = \binom{n-i}{2} + i + 1$$

En utilisant le Lemme 1, on sait que G contient moins de i points d'articulation, et donc que F contient un sommet v qui n'est pas un point d'articulation.

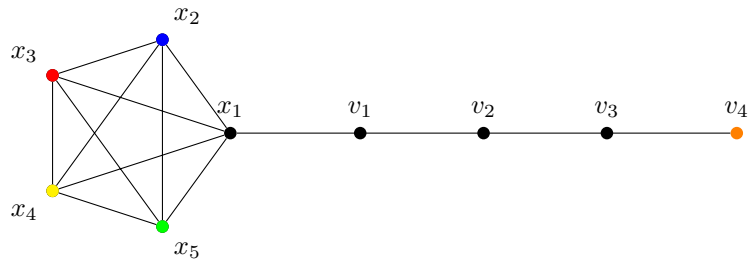
Supposons, dans un premier temps, que $d(v) \geq n-k-1$. $G - N[v]$ est d'ordre au plus k. Soit p le nombre de couleurs dans $N[v]$. Construisons un sous-graphe connexe tropical d'ordre au plus $k+c$. D'abord, prenons v et $p-1$ de ses voisins de manière à avoir un sommet de chacune des p couleurs présentes dans $N[v]$. Pour chaque couleur manquante z, on ajoute une composante connexe H de $G - N[v]$ qui contient z. On ajoute aussi éventuellement un sommet de $N(v)$ pour maintenir la connexité. Dans le pire des cas, on ajoute ainsi tous les sommets de $G - N[v]$ et $c-p$ sommets du voisinage de v, ce qui fait un sous-graphe connexe tropical d'ordre au plus $p + k + (c-p) = c + k$.

Supposons, maintenant, que $d(v) \leq n-k-2$. Soit $G' = G - v$, un graphe à $n' = n-1$ sommets et m' arêtes. On a alors

$$\begin{aligned}
m' &\geq m - (n-k-2) \\
&\geq \binom{n-k-2}{2} + n - c + 2 - (n-k-2) \\
&= \binom{n-k-2}{2} + n - c + 1 - (n-k-3) \\
&= \binom{n-k-3}{2} + n - c + 1 \\
&= \binom{n'-k-2}{2} + n' - c + 2.
\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, il y a un sous-graphe connexe tropical d'ordre $c+k$ dans G'. C'est aussi un sous-graphe connexe tropical d'ordre $c+k$ dans G. Cela complète l'argument et la preuve. $\square$

On remarque que la preuve peut facilement être transformée en un algorithme polynomial qui trouve un sous-graphe connexe tropical d'ordre $c+k$ sous les hypothèses du théorème. De plus, la borne donnée par le théorème est optimale, comme le montre le graphe extrémal décrit ci-dessous. Soit n et k deux entiers positifs fixés, avec $k < n$. On considère le graphe complet $K_n - k - 2$ à $n-k-2$ sommets que l'on colorie avec les $n-k-2$ couleurs de l'ensemble $\{1, 2, ...n-k-2\}$. Chaque couleur colorie un unique sommet du graphe. Soit x_1 le sommet de couleur 1. On ajoute un chemin $x_1 v_1 v_2 ... v_{k+2}$ et on colorie tout les v_i avec la couleur 1, sauf v_{k+2} que l'on colorie 0. Le graphe G ainsi obtenu a $(n-k-2)+(k+2) = n$ sommets. Il est colorié avec $c = n-k-1$ couleurs. Il a exactement $\binom{n-k-2}{2} + k + 2 = \binom{n-k-2}{2} + n - c + 1$ arêtes. Pourtant, le seul sous-graphe connexe tropical de G est G lui même. Il n'a donc pas de sous-graphe connexe tropical d'ordre plus petit que $c+k$. Un exemple de cette construction, pour $n = 9$ et $k = 2$, est montré ci-dessous.



G

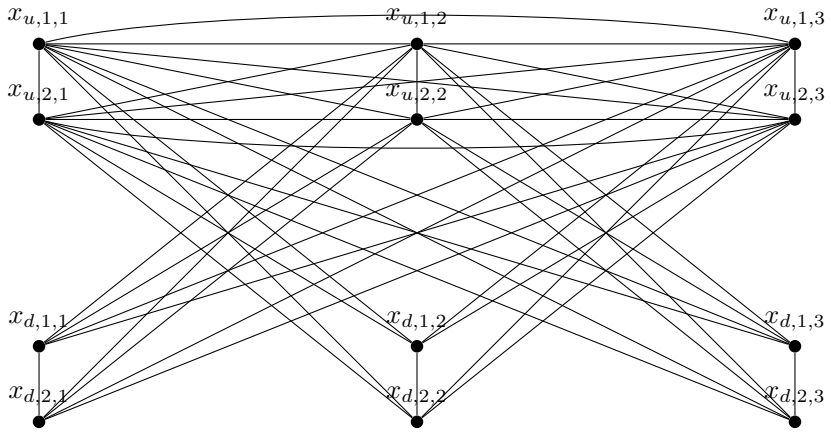
On remarque que le graphe extrémal ci-dessus a une répartition de ses arêtes très inégale. Une partie des sommets forment une clique tandis que les autres sont de degrés 1 ou 2. Il est donc naturel de s'interroger sur l'existence d'une condition sur le degré minimum qui entraînerait l'existence d'un petit sous-graphe connexe tropicale. Dans un premier temps, nous avons cherché une condition sur le degré minimum, ou le degré arc-en-ciel minimum qui entraîne l'existence d'un sous-graphe connexe colorful. La construction suivante s'est avéré un contre-exemple récurent.

Soit $i, j, k \in \mathbb{N}$. On définit $G(i, j, k)$ comme le graphe à $(i+j)k$ sommets tel

que

$$
\begin{aligned}
V(G(i,j,k)) = \quad & \{x_{a,b,c} \mid && a \in \{u,d\} \ \wedge \\
& && (a=u) \Rightarrow b \in \{1,2,...,i\} \ \wedge \\
& && (a=d) \Rightarrow b \in \{1,2,...,j\} \ \wedge \\
& && c \in \{1,2,...,k\}\} \\
E(G(i,j,k)) = \quad & \{x_{u,b,c}x_{u,b',c'} \mid && b,b' \in \{1,2,...,i\} \ \wedge \\
& && c,c' \in \{1,2,...,k\} \ \wedge \\
& && (b,c) \neq (b',c')\} \\
& \cup && \\
& \{x_{d,b,c}x_{d,b',c} \mid && b,b' \in \{1,2,...,j\} \ \wedge \\
& && c \in \{1,2,...,k\} \ \wedge \\
& && b \neq b'\} \\
& \cup && \\
& \{x_{u,b,c}x_{d,b',c'} \mid && b \in \{1,2,...,i\} \ \wedge \\
& && b' \in \{1,2,...,j\} \ \wedge \\
& && c,c' \in \{1,2,...,k\} \ \wedge \\
& && c \neq c'\}
\end{aligned}
$$

$G(2,2,3)$ est dessiné ci-dessous en exemple.



$G(2,2,3)$

Pour une raison évidente, je ne dessinerai pas d'autres exemples issus de cette classe de graphe. On remarque que $G(i,j,k)$ a $(i+j)k$ sommets, $k\binom{i}{2} + k\binom{j}{2} + i(i+2j)\binom{k}{2}$ arêtes, a degrés minimum $(k-1)i + (j-1)$ et est $(k-1)i$-connexe.

Pour tout $c \in \{1, ...k\}$, on appellera H_c le sous-graphe de $G(i, j, k)$ engendré par les j sommets de la forme $x_{d,b,c}$.
Il n'est pas évident à priori si il est plus facile de trouver un sous-graphe connexe tropical de petite taille lorsque le graphe a beaucoup ou peu de couleurs. En effet, si le graphe a beaucoup de couleurs, un sous-graphe connexe doit contenir plus de couleurs pour être tropical, mais il peut aussi plus facilement choisir des sommets de couleur "rare" pour assurer la connexité. Nous avons ainsi deux variantes de colorations de $G(i, j, k)$, en fonction de si on préfère un graphe avec beaucoup de couleurs ou non.

Variante beaucoup de couleurs :
On colorie $G(i, j, k)$ avec les $jk + 1$ couleurs de l'ensemble $\{0, ..., jk\}$. Les sommets $x_{u,b,c}$ avec $b \in \{1, ...i\}$ et $c \in \{1, ...k\}$ sont tous coloriés avec la couleur 0. Il reste jk couleurs pour colorier les jk sommets restants, qui prennent donc tous une couleur unique. Dans cette variante, le graphe est colorié avec $jk + 1$ couleurs, et a un degré arc-en-ciel de j.

Variante peu de couleurs :
On colorie $G(i, j, k)$ avec les $k + j$ couleurs de l'ensemble $\{0, ..., k + j - 1\}$. Les sommets $x_{u,b,c}$ avec $b \in \{1, ...i\}$ et $c \in \{1, ...k\}$ sont tous coloriés avec la couleur 0. Les sommets $x_{d,b,c}$ avec $b \in \{1, ...j - 1\}$ et $c \in \{1, ...k\}$ sont tous coloriés avec la couleur b. Il reste à colorier les k sommets $x_{d,j,c}$, avec $c \in \{1, ...k\}$ et les k couleurs de l'ensemble $\{j, ..., k + j - 1\}$ n'ont pas été utilisées, les sommets restant prennent donc tous une couleur unique. Dans cette variante, le graphe est colorié avec $j + k$ couleurs, et a un degré arc-en-ciel de j.

Dans les deux variantes de coloration, et pour chaque $c \in \{1, ...k\}$, il existe au moins une couleur présente uniquement dans H_c. Cependant, pour tout $c, c' \in \{1, ...k\}$, il n'y a pas d'arête entre H_c et $H_{c'}$. Tous les sommets qui n'appartiennent à aucun H_c sont de couleur 0, et il n'existe aucun sommet qui permet, à lui seul, de relier tout les H_c. Ainsi, avec les deux variantes de coloration, il n'existe pas de sous-graphe connexe colorful. Il existe, en revanche un sous-graphe connexe tropical avec seulement un doublon de couleur, car on trouve facilement deux sommets de couleur 0 qui dominent le graphe.
Avec un bon choix des paramètres i, j et k, on peut donc prouver les résultats suivants.

Proposition 2. *Soit $\epsilon, \epsilon' \in [0; 1[$. Il existe un graphe à n sommets, sommet-colorié avec c couleurs, n'admettant aucun sous-graphe colorful, tel que son degré minimum $\delta \geq \epsilon n$ et son degré arc-en-ciel minimum $\delta^r \geq \epsilon' c$.*

Démonstration. Pour commencer, on choisit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k > \frac{1}{1-\epsilon}$. Puis, on choisit $j \in \mathbb{N}$ tel que $j > \frac{\epsilon' k}{1-\epsilon'}$. On regarde les graphes $G(i, j, k)$ pour $i \in \mathbb{N}$ colorié avec la variante à peu de couleurs. Ils sont coloriés avec $j + k$ couleurs, donc $\epsilon' c = \epsilon'(j + k)$. Or, $j > \frac{\epsilon' k}{1-\epsilon'}$, donc $j - \epsilon' j > \epsilon' k$, donc $j > \epsilon'(j + k)$. La condition sur le degré arc-en-ciel minimum est vérifié. De plus, $\frac{\delta}{n} = \frac{(k-1)i+(j-1)}{(i+j)k}$

converge vers $\frac{k-1}{k}$ quand i tend vers l'infini. Or, $k > \frac{1}{1-\epsilon}$, donc $k - k\epsilon > 1$, donc $k - 1 > k\epsilon$, donc $\frac{k-1}{k} > \epsilon$. Pour i suffisamment grand, le degré minimum de $G(i,j,k)$ est plus grand que ϵn, ce qui prouve la proposition. □

Proposition 3. *Soit $K \in \mathbb{N}$. Il existe un graphe à n sommets, sommet-colorié avec c couleurs, n'admettant aucun sous-graphe colorful, tel que son degré minimum $\delta \geq n - c + K$.*

Démonstration. Soit $i, j, k \in \mathbb{N}$ tel que $j > i + K$ (pas de condition sur k). On regarde le graphe $G(i,j,k)$ colorié avec la variante à beaucoup de couleurs. $n - c + K = (i+j)k - (jk+1) + K = ik + K - 1$ et le degré minimum $\delta = (k-1)i + (j-1) > (k-1)i + i + K - 1 = ik + K - 1 = n - c + K$, ce qui prouve la proposition. □

Proposition 4. *Soit $K \in \mathbb{N}$ et $\epsilon \in [0,1[$. Il existe un graphe à n sommets, sommet-colorié avec c couleurs, n'admettant aucun sous-graphe colorful et K-connexe, tel que son degré minimum $\delta \geq \epsilon n$.*

Démonstration. Soit $j, k \in \mathbb{N}$ tel que $k > \frac{1}{1-\epsilon}$. On regarde les graphes $G(i,j,k)$ pour $i \in \mathbb{N}$. Si $i \geq \frac{K}{k-1}$, le graphe est K-connexe. De plus, le degré minimum δ satisfait que $\frac{\delta}{n}$ converge vers $\frac{k-1}{k} > \epsilon$ quand i tend vers l'infini. En conséquence, pour i suffisamment grand, $G(i,j,k)$ est K-connexe, de degré minimum $\delta > \epsilon n$, ce qui prouve la proposition. □

Finalement, nous avons quand même réussi à obtenir un critère sur le degré minimum.

Théorème 6. *Soit (G, C) un graphe à n sommets, sommet-colorié avec c couleurs. Si le degrés minimum de G, $\delta \geq \frac{n}{2}$ et si $c \geq \frac{n}{2}$, alors le graphe G admet un sous-graphe connexe colorful.*

Démonstration. Soit S un sous-graphe connexe arc-en-ciel maximum de G. On veut prouver que $|S| = c$. Supposons, par contradiction, que $|S| < c$. Autrement dit, il y a au moins un sommet v dont la couleur n'est pas présente dans S. v ne peut pas être adjacent à un sommet de S, car sinon $S \cup v$ serait un sous-graphe connexe arc-en-ciel de cardinalité plus grande que S.
Supposons dans un premier temps que S est 2-connexe. Pour tout sommet $u \in S$, $|N(u) \cup N(v)| \geq 2$, car $d(u) \geq \frac{n}{2}$, $d(v) \geq \frac{n}{2}$ et u n'est pas adjacent à v. Si un sommet $w \in N(u) \cup N(v)$ a une couleur différente de u, on peut construire un sous-graphe connexe arc-en-ciel S' en enlevant au plus un sommet à S, de même couleur que w, et en ajoutant w et v. S' est connexe car S est 2-connexe, et le seul sommet qui a été enlevé n'est pas u. S' est arc-en-ciel, car la couleur de v n'est pas présente dans $S \cup N(S)$, S est arc-en-ciel, et on a fait attention d'enlever le sommet de S de même couleur que w. Pourtant $|S'| > |S|$ ce qui engendre une contradiction.
Supposons maintenant que S n'est pas 2-connexe. On choisit U un sous-ensemble de S qui contient exactement un sommet de chaque bloc feuille du sous-graphe S, et aucun point d'articulation du sous-graphe S. Ainsi, si il existe un sommet

w dans G qui domine U, alors le sous-graphe engendré par $S \cup \{w\}$ est 2-connexe. Notre but est de montrer qu'il existe un sommet w dans G qui domine $U \cup \{v\}$. Soit $T = N(S)$. On remarque que toute couleur apparaissant dans T apparaît aussi dans S, donc $|V - T| \geq c \geq \frac{n}{2}$, donc $|T| \leq \frac{n}{2}$.
On s'intéresse maintenant au nombre $e(U \cup \{v\}, T)$, c'est à dire le nombre d'arêtes entre l'ensemble T et l'ensemble $U \cup \{v\}$. On remarque qu'un sommet de U appartenant au bloc feuille B de S a au plus $|B| - 1$ voisin dans S, et donc $e(U, T) \geq |U|\frac{n}{2} - |S| - 1$. Il en découle le calcul suivant.

$$\begin{aligned}
e(U \cup \{v\}, T) \geq & \overbrace{\left(|U|\frac{n}{2} - |S| + 1\right)}^{e(U,T)\geq} + \overbrace{\left(\frac{n}{2} - \Big(n - |S| - |T|\Big) + 1\right)}^{e(v,T)\geq} \\
=& (|U| + 1)\frac{n}{2} - n + |T| + 2 \\
=& (|U| - 1)\frac{n}{2} + |T| + 2 \\
\geq& (|U| - 1)|T| + |T| + 2 \\
=& |U||T| + 2 \\
>& |U||T|.
\end{aligned}$$

Cela montre qu'il n'est pas possible que chaque sommet de T ne soit adjacent qu'à au plus $|U|$ sommets de $U \cup \{v\}$. En conséquence, il existe au moins un sommet $w \in T$ tel que w domine $U \cup \{v\}$. $S \cup \{w\}$ est 2-connexe. Soit w' le sommet de S de même couleur que w. $S \cup \{w, v\} \setminus \{w'\}$ engendre un sous-graphe connexe arc-en-ciel de cardinal plus grand que S, c'est une contradiction. $\square$

On remarque que la preuve donne un algorithme polynomial pour trouver un sous-graphe connexe colorful quand les hypothèses s'appliquent. Il suffit de prendre un sous-graphe connexe arc-en-ciel maximal, et d'appliquer les étapes de la preuve pour obtenir un autre sous-graphe connexe arc-en-ciel de cardinal plus grand, jusqu'à obtenir un sous-graphe connexe colorful.
Pour tout $i \geq 2$, le graphe $G(i, i-1, 2)$ colorié avec la variante à beaucoup de couleurs est un exemple de graphe à n sommets, sommet-colorié avec c couleurs, tel que $c = \frac{n}{2}$ et $\delta = \frac{n}{2} - 1$, qui n'admet pas de sous-graphe connexe colorful. En effet, dans ce cas, $n = 4i - 2$, $c = 2i - 1$ et $\delta = 2i - 2$.
De même pour tout $i \geq 2$, le graphe $G(i, i-1, 4)$ colorié avec la variante à beaucoup de couleurs est un exemple de graphe à n sommets, sommet-colorié avec c couleurs, tel que $c = \frac{n}{2} - 1$ et $\delta = \frac{n}{2}$, qui n'admet pas de sous-graphe connexe colorful. En effet, dans ce cas, $n = 8i - 4$, $c = 4i - 3$ et $\delta = 4i - 2$.
Ces deux graphes extrémaux montrent bien que ce résultat ne peut pas être amélioré.

Chapitre II

Homomorphisme tropical

5 Généralités sur les homomorphismes

Un problème bien connu de la théorie des graphes consiste à trouver une coloration propre d'un graphe, c'est à dire assigner une couleur à chaque sommet de telle manière que deux sommets adjacents n'ait pas la même couleur. Il est toujours possible de le faire en assignant à chaque sommet une couleur unique. La question classique consiste donc plutôt à savoir combien de couleurs sont nécessaire au minimum. On appelle ce nombre le nombre chromatique du graphe, et on le note $\chi(G)$. Un résultat classique est que tout graphe planaire peut être colorié avec quatre couleurs. Cette question peut être reformuler en un problème de décision binaire de la forme "'Peut-on colorier le graphe G avec k couleurs ?"' où k est fixé. Par exemple, un résultat classique est que le problème de décider si un graphe planaire peut être colorié avec trois couleurs est NP-complet.
Une généralisation naturelle de ce problème consiste à dire que, peut-être, certaines paires de couleurs ne peuvent pas se toucher non plus. La formalisation de cette idée nous amènent à la notion d'homomorphisme de graphe. Un homomorphisme du graphe G vers le graphe H est une fonction des sommets de G vers les sommets de H tel que deux sommets adjacents dans G ont une image adjacente dans H. Si H est le graphe complet à k sommets, alors un homomorphisme de G vers H est exactement une coloration propre de G avec k couleurs. C'est pourquoi un homomorphisme de G vers H est aussi appelé une H-coloration de G (que H soit complet ou non). Le nombre chromatique $\chi(G)$ peut être interprété comme l'entier minimum tel que G admette un homomorphisme vers un graphe simple à $\chi(G)$ sommets.
On remarque que la relation G admet un homomorphisme vers H est transitive, c'est à dire que si G admet un homomorphisme vers H et H admet un homomorphisme vers I, alors G admet un homomorphisme vers I, la composé de l'homomorphisme de G vers H et de celui de H vers I. La notion de core de graphe est essentiel lorsque l'on travaille sur les homomorphismes de graphe. Un graphe est dit core si il n'admet pas d'homomorphisme vers un de ses sous-graphes induit strict. Tout graphe G admet un unique sous-graphe induit H tel que H est un core et G admet un homomorphisme vers H. On appelle alors H le core de G. La notion de core est importante, car pour tous graphes G et H, G admet un homomorphisme vers H si et seulement si le core de G admet un homomorphisme vers H si et seulement si G admet un homomorphisme vers le core de H. On remarque que le core de tout graphe biparti non réduit à un sommet est une simple arête.
Le problème de décision binaire associé aux homomorphismes est le suivant :

H-Coloration **Donnés:** Un graphe G. **Question:** Existe-t-il un homomorphisme de G dans H ?

La remarque précédente nous donne tout de suite que si H est biparti, H-Coloration est simplement le problème de savoir si G admet un homomorphisme vers une arête, autrement dit, si G est biparti. Cela prouve en particulier que H-Coloration est polynomial quand H est biparti. Le théorème suivant raconte l'autre moitié de l'histoire.

Théorème 7 (de Dichotomie [53])**.** *Si H est biparti, alors H-Coloration est polynomial, sinon H-Coloration est NP-complet.*

6 Définitions des homomorphismes tropicaux

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux homomorphismes tropicaux. Soit (G, C) et (H, D) deux graphes sommets-coloriés (pas nécessairement proprement). Un homomorphisme tropical de (G, C) vers (H, D) est un homomorphisme de G vers H qui préserve la coloration, c'est à dire que l'image dans H d'un sommet u de G est colorié dans (H, D) par la même couleur que u dans (G, C).
Il ne peut y avoir un homomorphisme tropical de (G, C) vers (H, D) que si toutes les couleurs présentes dans (G, C) sont aussi présentes dans (H, D). De plus, tout sommet de H colorié par D avec une couleur qui n'est pas présente dans (G, C) n'interviendra pas dans l'homomorphisme. Ainsi, on peut supposer sans perte de généralité que l'ensemble des couleurs de (G, C) est le même que l'ensemble des couleurs de (H, D). C'est ce qu'on fera dans le reste du chapitre. On peut remarquer que si C et D colorient tous les sommets de la même couleur, un homomorphisme tropical de (G, C) vers (H, D) est simplement un homomorphisme de G vers H.
On retrouve la notion de core de graphe. On dit qu'un graphe sommet-colorié est un core si il n'admet pas d'homomorphisme tropical vers un de ses sous-graphes induit strict. Tout graphe sommet-colorié (G, C) admet un unique sous-graphe induit H tel que $(H, C_{|_H})$ est un core et (G, C) admet un homomorphisme tropical vers $(H, C_{|_H})$. On appelle alors H le core de (G, C). (G, C) admet un homomorphisme tropical vers (H, D) si et seulement si le core de (G, C) admet un homomorphisme tropical vers (H, D) si et seulement si (G, C) admet un homomorphisme tropical vers le core de (H, D).
Le problème de décision binaire associé aux homomorphismes tropicaux est le suivant.

(H, D)-Tropical-Coloration **Donnés:** Un graphe sommet-colorié (G, C). **Question:** Existe-t-il un homomorphisme tropical de (G, C) vers (H, D) ?

Ces problèmes sont tous dans NP car il est facile de vérifier qu'une fonction des sommets de G dans les sommets de H est bien un homomorphisme tropical. On a naturellement envie d'avoir un théorème de dichotomie des homomorphismes

tropicaux, analogue au Théorème 7. On va voir dans la section suivante, que ce n'est pas si simple.

7 Relation avec les Problèmes de Satisfaction de Contraintes

Les problèmes de satisfaction de contraintes (CSP) sont définis formellement par un triplet $\langle X, D, C\rangle$, où X est un ensemble de n variables, D est un ensemble de n domaines de valeurs, chaque domaine étant associé à une variable, et où C est un ensemble de contraintes. Chaque contrainte est une paire $\langle t, R\rangle$, où t est un N-uplet de variables de X et R est un ensemble de N-uplet de valeurs des domaines de valeurs correspondantes aux variables. R est donc plus simplement une relation. Une évaluation des variables est une fonction f qui a chaque variable de X associe une valeur de son domaine associé. On dit qu'un évaluation f satisfait une contrainte $\langle (x_1, x_2, ..., x_n), R\rangle$ si $(f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)) \in R$. Une solution d'un problème de satisfaction de contrainte est une évaluation qui satisfait toutes les contraintes.
En termes de théorie des graphes, un problème de satisfaction de contraintes est un hyper-graphe source G et un hyper-graphe cible H. Une solution est alors un homomorphisme d'hypergraphe de G vers H, c'est à dire une fonction des sommets de G dans les sommets de H tel que les arêtes sont préservées. En effet, les variables sont alors les sommets de G, les contraintes sont constituées d'une arête de G et d'un ensemble d'arêtes de H de même arité. Les domaines peuvent également être représentés par des arêtes supplémentaires dans G et H.
Le problème de décision binaire associé aux problèmes de satisfaction de contraintes fixe les relations que l'on peut utiliser dans une contrainte et demande pour un problème donné si il existe une solution. Le problème de décision binaire ainsi défini est appelé T-CSP, où T est l'ensemble des relations autorisées. En terme de théorie des graphes, cela revient à fixer l'hypergraphe cible, et à demander pour un hypergraphe source donné, si il existe un homomorphisme. Ainsi, il est évident que le problème (H, D)-Tropical-Coloration est un T-CSP.
La conjecture la plus importante dans le domaine des CSP est la suivante.

Conjecture 1 (T. Feder et M. Vardi [42])**.** *Pour tout ensemble de relation T, T-CSP est polynomial ou NP-complet.*

Le résultat central concernant les homomorphismes tropical est le suivant.

Théorème 8. (H, D)-Tropical-Coloration *est polynomial ou NP-complet pour tout graphe sommet-colorié (H, D) si et seulement si la Conjecture 1 est vraie.*

Comme le problème (H, D)-Tropical-Coloration est un T-CSP, il est immédiat que la Conjecture 1 implique que (H, D)-Tropical-Coloration est polynomial ou NP-complet. Pour prouver le Théorème 8, il suffit donc de prouver l'autre implication. En fait, on va même prouver quelque chose de plus

fort, puisqu'on va se limiter à des graphes sommet-colorié à deux couleurs. On suit la construction de Feder et Vardi (Théorème 10 de [42]) pour prouver un résultat similaire pour les homomorphismes de graphes orientés, en se basant sur la présentation qui en est faite dans le livre de Hell et Nešetřil [54].

Deux problèmes de décisions binaires sont polynomialement équivalents si ils sont mutuellement réductibles l'un sur l'autre en temps polynomial.

Définition 2 (chemin forçant 2-colorié)**.** *Un chemin forçant 2-colorié est un chemin colorié avec deux couleurs de telle manière que chaque sommet a au plus un voisin de chaque couleur.*

En d'autres termes, un chemin forçant 2-colorié est un chemin de sommets noirs et blancs tel que chaque sommet interne a exactement un voisin blanc et un voisin noir. Par exemple, $NBBNNBBNNBBN$ est un chemin forçant 2-colorié.

On va considérer le problème H-Rétraction, défini pour un graphe H. Étant donné un graphe G qui contient H comme sous-graphe induit, H-Rétraction consiste à décider si G admet un homomorphisme vers H tel que sa restriction au sous-graphe H de G est l'identité. Le problème (H, D)-Rétraction est défini de la même façon pour les homomorphismes tropicaux.

On remarque que si H (respectivement (H, D)) est un core, alors H-Rétraction (respectivement (H, D)-Rétraction) est polynomialement équivalent à H-Coloration (respectivement (H, D)-Tropical-Coloration). En effet, soit G un graphe contenant H comme sous-graphe induit, si H est un core, un homomorphisme de G vers H est obligé d'envoyer le sous-graphe H sur lui-même. Réciproquement, ajouter une copie de H a un graphe ne change pas si il peut être envoyé par un homomorphisme vers H.

Théorème 9. *Pour tout ensemble de relations fixé T, il existe un graphe 2-colorié (H, D) tel que (H, D)-Tropical-Coloration et T-CSP sont polynomialement équivalents. De plus, (H, D) peut être choisi biparti et de telle manière à admettre un homomorphisme vers un chemin forçant 2-colorié.*

Démonstration. On suit la preuve du Théorème 5.14 du livre [54] qui prouve un résultat similaire pour les homomorphismes de graphe orienté. Dans un premier temps, on prouve que pour tout ensemble relationnel fixé T il existe un graphe biparti H tel que le problème T-CSP et le problème H-Rétraction sont polynomialement équivalents (on reprend directement cette première étape pour notre preuve). Ensuite, on montre que pour tout graphe biparti H, il existe un graphe orienté H' tel que H-Rétraction et H'-Rétraction sont polynomialement équivalents. Enfin, on montre que H' est un core et que, donc, H'-Rétraction et H'-Coloration-Orienté sont polynomialement équivalents. On adapte ici cette preuve au cas du problème d'homomorphisme de graphe 2-colorié.

La construction de H' à partir de H dans [54] utilise les chemins "zig-zag". Pour nous, on remplace les chemins zig-zag par des chemins 2-colorié bien choisis, qui joueront le même rôle. Ainsi, on pourra construire un graphe 2-colorié

H' à partir d'un graphe biparti H tel que H-Rétraction et H'-Rétraction sont polynomialement équivalents. Nos chemins vont avoir des sommets noirs dénotés par N et des sommets blancs dénotés par B. Ainsi, le chemin BN^4B^4N consiste d'un sommet blanc, quatre sommets noirs, quatre sommets blancs et un sommet noir. Les sous-chemins monochromatiques maximums sont appelés des séries. Ainsi, le chemin ci-dessus est constitué de la concaténation de quatre séries : la première et dernière de longueur 1 et les deux du milieu de longueur 4.

Étant donné un entier impair ℓ, on construit un chemin P consistant de ℓ séries. La première et dernière série consistent toutes les deux en un seul sommet blanc. Les séries intérieures sont de longueur quatre. On appelle 0 le dernier sommet de P (le plus à droite). A partir de P, on construit $\ell - 2$ paths $P_1, \ldots, P_{\ell-2}$. Le chemin P_i ($i \in \{1, 2, \ldots, \ell - 2\}$) est obtenu en remplaçant la i-ème série de longueur quatre de P par une série de longueur deux. On appelle i le dernier sommet de P_i.

De même, étant donné un entier pair k, on contruit une deuxième famille de chemins Q et Q_j ($j \in \{1, 2, \ldots, k - 2)$. Le premier sommet de Q est appelé 1 et le premier sommet de Q_j est appelé j. Les chemins sont décrits ci-dessous :

$$\begin{aligned}
P &:= B\underbrace{N^4B^4\cdots W^4N^4}_{\ell-2}W \\
P_i &:= B\underbrace{N^4\cdots B^4}_{i-1}N^2\underbrace{B^4\cdots N^4}_{\ell-i-2}B \quad (i \text{ impair}) \\
P_i &:= B\underbrace{N^4\cdots N^4}_{i-1}B^2\underbrace{N^4\cdots N^4}_{\ell-i-2}B \quad (i \text{ pair}) \\
Q &:= B\underbrace{N^4B^4\cdots N^4W^4}_{k-2}N \\
Q_j &:= B\underbrace{N^4\cdots B^4}_{j-1}N^2\underbrace{B^4\cdots B^4}_{k-j-2}N \quad (j \text{ impair}) \\
Q_j &:= B\underbrace{N^4\cdots N^4}_{j-1}B^2\underbrace{N^4\cdots B^4}_{k-j-2}N \quad (j \text{ pair})
\end{aligned}$$

On remarque les propriétés suivantes (voir page 156 de [54]) :

1. Les chemins P et P_i ($i \in \{1, 2, \ldots \ell-2)$ admettent tous un homomorphisme tropical vers un chemin forçant 2-colorié de longueur $2\ell - 1$, (c'est à dire un chemin consistant d'une série de longueur 1, $\ell - 2$ séries de longueur 2 et une série finale de longueur 1 : $BNNBBN \cdots BNNB$).
2. Les chemins Q et Q_j ($j \in \{1, 2, \ldots k - 2)$ admettent tous un homomorphisme tropical vers un chemin forçant 2-colorié de longueur $2k - 1$.
3. Si il existe un homomorphisme tropical de P_i vers $P_{i'}$ envoyant le sommet i sur le sommet i', alors $i = i'$.
4. Si il existe un homomorphisme tropical de Q_j vers $Q_{j'}$, alors $j = j'$.
5. Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots \ell - 2\}$, il existe un homomorphisme tropical de P vers P_i envoyant le sommet 0 sur le sommet i.

6. Pour tout $j \in \{1, 2, \dots k-2\}$, il existe un homomorphisme tropical de Q vers Q_j envoyant le sommet 1 sur le sommet j.
7. Si X est un graphe sommet-colorié avec deux couleurs, x est un sommet de X et $i \neq i'$ tel qu'il existe un homomorphisme de X vers P_i envoyant le sommet x sur le sommet i et un homomorphisme de X vers $P_{i'}$ envoyant le sommet x sur le sommet i', alors il existe un homomorphisme de X vers P envoyant le sommet x sur le sommet 0.
8. Si Y est un graphe sommet-colorié avec deux couleurs, y est un sommet de Y et $j \neq j'$ tel qu'il existe un homomorphisme de Y vers Q_j envoyant le sommet y sur le sommet j et un homomorphisme de Y vers $Q_{j'}$ envoyant le sommet y sur le sommet j', alors il existe un homomorphisme de Y vers Q envoyant le sommet y sur le sommet 1.

On remarque que les chemins forçant 2-colorié peuvent être utilisés pour définir la hauteur dans les graphes sommet-coloriés avec deux couleurs d'une manière similaire à la hauteur dans les graphes orientés acycliques. Plus précisément, en supposant que G est un graphe connexe sommet-colorié avec deux couleurs qui admet un homomorphisme tropical g vers un chemin forçant 2-colorié, disons C. Les sommets de C sont appelés $h_0, h_1, \dots, h_t$. On remarque que chaque sommet de C a au plus un voisin noir et au plus un voisin blanc, donc une fois qu'un sommet de G a été envoyé sur C par g, l'image par g de tous ses voisins est déterminé et, comme G est connexe, l'image par g de tous les sommets de G est déterminé. En particulier si g est surjectif, il y a exactement un homomorphisme tropical de G vers C. (Plus précisément, si la longueur de C est paire, il peut y avoir un automorphisme de C qui renverse le chemin. Dans ce cas, il y a deux homomorphismes de G vers C, qui sont équivalents à renversement près.) On observe ensuite que si il y a un homomorphisme tropical surjectif g de G vers C, un homomorphisme tropical f de G vers H et un homomorphisme tropical h de H vers C, alors pour tout sommet $u \in V(G)$, $g(u) = h(f(u))$. Cela nous permet de définir la hauteur de $u \in V(G)$ comme h_i, où $g(u) = h_i$. Plus exactement, les sommets à hauteur h_i dans G ne peuvent être envoyés par f que sur des sommets à hauteur h_i dans H.

Pour chaque ensemble relationnel T, il y a un graphe biparti H tel que T-CSP et H-Rétraction sont polynomialement équivalents [42, 54]. Considérons que H est biparti avec partie A et B, avec $A = \{a_1, \dots, a_{|A|}\}$ et $B = \{b_1, \dots, b_{|B|}\}$. Soit ℓ (respectivement k) le plus petit entier impair (respectivement pair) plus grand ou égal à $|A| + 2$ (respectivement $|B| + 2$). On obtient (H', D) de la manière suivante. On colorie tous les sommets de H en blanc. Puis, à chaque sommet $a_i \in A$ on attache une copie de P_i en identifiant le sommet i de P_i au sommet a_i de A. De même, à chaque sommet $b_j \in B$ on attache une copie de Q_j en identifiant le sommet j de Q_j au sommet b_j de B. Le résultat de cette construction est le graphe sommet-colorié (H', D) illustré sur la Figure 1.

On affirme que H-Rétraction est polynomialement équivalent à (H', D)-Rétraction (et donc à (H', D)-Tropical-Coloration, car (H', D) est un core). Soit G un graphe biparti contenant H comme sous-graphe induit avec partie A' et B' contenant respectivement A et B. On construit le graphe biparti

sommet-colorié avec deux couleurs (G', C) contenant (H', D) de la manière suivante. On colorie tous les sommets de G en blanc. Puis, à chaque sommet $a_i \in A$ on attache une copie de P_i en identifiant le sommet i de P_i au sommet a_i de A. De même, à chaque sommet $b_j \in B$ on attache une copie de Q_j en identifiant le sommet j de Q_j au sommet b_j de B. Enfin, à chaque sommet $a \in A' \setminus A$ on attache une copie de P en identifiant le sommet 0 de P au sommet a et à chaque sommet $b \in B' \setminus B$ on attache une copie de Q en identifiant le sommet 1 de Q au sommet b. Étant donné les Propriétés 5 et 6 et la notion de hauteur précédemment définie, G' se rétracte sur H' si et seulement si G se rétracte sur H. Réciproquement, soit (G', C) un graphe biparti sommet-colorié avec deux couleurs contenant (H', D) comme sous-graphe induit. (H', D) admet un unique homomorphisme tropical vers un chemin forçant 2-colorié de longueur $2(\ell + k) - 1$, appelé CF. On peut supposer que (G', C) admet un homomorphisme tropical g vers CF, sans quoi aucune rétraction de (G', C) sur (H', D) n'est possible. Les sommets de G' correspondant au sommet de H sont tous coloriés en blanc. La composante blanche maximale contenant les sommets correspondant à H forment un graphe biparti appelé G. g envoie G sur deux sommets blancs de CF qui séparent CF en deux chemins forçant de longueurs respectives $\ell - 1$ et $k - 1$ appelés respectivement CF_P et CF_Q. Les composantes de $G' - G$ peuvent être séparés en deux types, ceux qui sont envoyés par g sur CF_P et ceux qui sont envoyés par g sur CF_Q. Soit $C_1, C_2, \ldots, C_l$ les composantes du premier type. Si une composante C_j contient deux sommets de G distincts, alors on peut les identifier, car C_j doit être envoyé sur un P_a qui ne contient qu'un sommet de G. On peut donc supposer sans perte de généralité que chaque C_j contient un unique sommet de G. Par le même argument, on peut supposer que C_j admet un homomorphisme vers au moins un P_a, avec $a \in A$. Si ce a est unique, on peut rétracter C_j sur P_a et modifier G', sans changer l'existence d'une rétraction. Donc, on peut supposer que C_j admet un homomorphisme vers deux chemins distincts P_{a_1} et P_{a_2}, et donc, d'après les Propriétés 5 et 7, C_j admet un homomorphisme vers tous les P_a. Par le même raisonnement, on obtient que les autres composantes de $G' - G$ admettent un homomorphisme vers tous les Q_b. Cela implique que G' se rétracte sur H' si et seulement si G se rétracte sur H, ce qui complète la preuve. □

On a prouvé qu'une dichotomie des problèmes (H, D)-Tropical-Coloration serait équivalente à une dichotomie des problèmes T-CSP. Dans un premier temps, il a semblé plus raisonnable de travailler sur une question peut être plus facile, motivée par les problèmes d'homomorphisme listé présenté dans la section suivante. La question est la suivante : Peut-on trouver une dichotomie entre les graphes H dont toutes les colorations D vérifient que (H, D)-Tropical-Coloration est polynomial, et les graphes H dont il existe au moins une coloration D tel que (H, D)-Tropical-Coloration est NP-complet ? On peut tout de suite répondre que si H-Coloration est NP-complet, alors il existe une coloration D tel que (H, D)-Tropical-Coloration est NP-complet, la coloration monochrome. Il en résulte que cette question n'a d'intérêt que pour les graphes bipartis, pour lesquels H-Coloration est polynomial. Un sous-

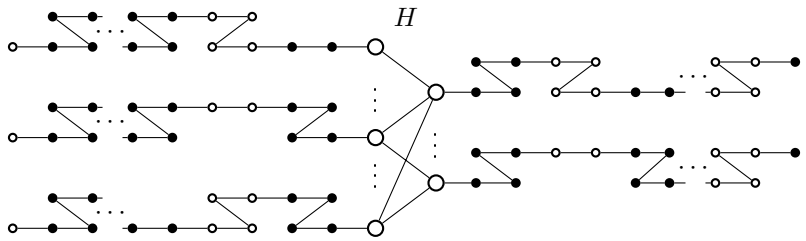


FIGURE 1 – Construction du graphe cible sommet-colorié avec deux couleurs (H', D) à partir d'un problème de H-RÉTRACTION.

problème pertinent serait de trouver une telle dichotomie pour les cycles et les arbres.

8 Relation avec l'homomorphisme listé

Soit un graphe H. Le problème d'homomorphisme listé H-LISTE-COLORATION est le suivant.

H-LISTE-COLORATION **Donnés:** Un graphe G. Pour chaque sommet v de G, un ensemble $l(v) \subset V(H)$. **Question:** Existe-t-il un homomorphisme h de G vers H tel que pour tout $v \in V(G)$, $h(v) \in l(v)$?

Ce problème est intéressant pour l'étude des homomorphismes tropicaux pour deux raisons. Le problème d'homomorphisme listé est lié au problème d'homomorphisme tropical de plusieurs manières que nous allons détailler dans cette partie. De plus, le problème d'homomorphisme listé satisfait un théorème de dichotomie de Feder, Hell et Huang présenté ci-dessous.

Théorème 10 (Feder, Hell et Huang [41])**.** *Le problème d'homomorphisme listé* H-LISTE-COLORATION *est polynomial si H est un graphe bi-arc, et NP-complet sinon.*

Alternativement, ces graphes sont caractérisés par Trotter et Moore [71] par sept familles de sous-graphes induit interdit (voir leur description dans la Table 1, reproduite depuis [41]). Pour décrire ces sept familles de manière concise, ils emploient la notation suivante : Soit $F = \{S_i : 1 \leq i \leq k\}$ une famille de sous-ensemble de $\{1, 2, \cdots, \ell\}$. On définie H_F comme le graphe biparti (X, Y) avec $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_\ell\}$ et $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ tel que $x_i y_j$ est une arête si et seulement si $i \in S_j$. Les familles C, T, W, D, M, N et G de la Table 1 sont définis de cette manière. Ces familles sont représentées dans la Figure 2. On remarque que la famille C est simplement la famille des cycles pairs d'ordre au moins six, et que G_1 est le seul arbre de la table. Étant donné cette caractérisation, on peut reformuler le Théorème 10 comme suit.

Théorème 11 (Reformulation du Théorème 10, Feder, Hell et Huang [41]). *Si H contient un des graphes définis dans la Table 1 comme sous-graphe induit ou si H n'est pas biparti, alors H-*Liste-Coloration *est NP-complet. Sinon, H-*Liste-Coloration *est polynomial.*

$C_6 = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,1\}\}$
$C_8 = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,1\}\}$
$C_{10} = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{5,1\}\}$
...
$T_1 = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{2,3,5\},\{5\}\}$
$T_2 = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{2,3,4,6\}\{6\}\}$
$T_3 = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{5,6\},\{2,3,4,5,7\},\{7\}\}$
...
$W_1 = \{\{1,2\},\{2,3\},\{1,2,4\},\{2,3,4\},\{4\}\}$
$W_2 = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{1,2,3,5\},\{2,3,4,5\},\{5\}\}$
$W_3 = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{1,2,3,4,6\},\{2,3,4,5,6\},\{6\}\}$
...
$D_1 = \{\{1,2,5\},\{2,3,5\},\{3\},\{4,5\},\{2,3,4,5\}\}$
$D_2 = \{\{1,2,6\},\{2,3,6\},\{3,4,6\},\{4\},\{5,6\},\{2,3,4,5,6\}\}$
$D_3 = \{\{1,2,7\},\{2,3,7\},\{3,4,7\},\{4,5,7\},\{5\},\{6,7\},\{2,3,4,5,6,7\}\}$
...
$M_1 = \{\{1,2,3,4,5\},\{1,2,3\},\{1\},\{1,2,4,6\},\{2,4\},\{2,5\}\}$
$M_2 = \{\{1,2,3,4,5,6,7\},\{1,2,3,4,5\},\{1,2,3\},\{1\},\{1,2,3,4,6,8\},\{1,2,4,6\},$
$\{2,4\},\{2,7\}\}$
$M_3 = \{\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\},\{1,2,3,4,5,6,7\},\{1,2,3,4,5\},\{1,2,3\},\{1\},$
$\{1,2,3,4,5,6,8,10\},\{1,2,3,4,6,8\},\{1,2,4,6\},\{2,4\},\{2,9\}\}$
...
$N_1 = \{\{1,2,3\},\{1\},\{1,2,4,6\},\{2,4\},\{2,5\},\{6\}\}$
$N_2 = \{\{1,2,3,4,5\},\{1,2,3\},\{1\},\{1,2,3,4,6,8\},\{1,2,4,6\},\{2,4\},\{2,7\},\{8\}\}$
$N_3 = \{\{1,2,3,4,5,6,7\},\{1,2,3,4,5\},\{1,2,3\},\{1\},\{1,2,3,4,5,6,8,10\},$
$\{1,2,3,4,6,8\},\{1,2,4,6\},\{2,4\},\{2,9\},\{10\}\}$
...
$G_1 = \{\{1,3,5\},\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\}$
$G_2 = \{\{1\},\{1,2,3,4\},\{2,4,5\},\{2,3,6\}\}$
$G_3 = \{\{1,2\},\{3,4\},\{5\},\{1,2,3\},\{1,3,5\}\}$

Table 1 – Les six familles infinies C, T, W, D, M, N et la famille G de taille 3 des sous-graphes induits interdits pour la polynomialité de H-Liste-Coloration

Ainsi la dichotomie des problèmes d'homomorphismes listés est bien connue. Mais il existe une réduction très simple de (H,D)-Tropical-Coloration vers H-Liste-Coloration. En effet, soit (G,C) une instance de (H,D)-Tropical-Coloration, c'est à dire un graphe sommet-colorié. On obtient une instance de H-Liste-Coloration en prenant le graphe G et pour chacun de ses sommets v, $l(v)$ est l'ensemble des sommets de H de même couleur que v. Il est évident

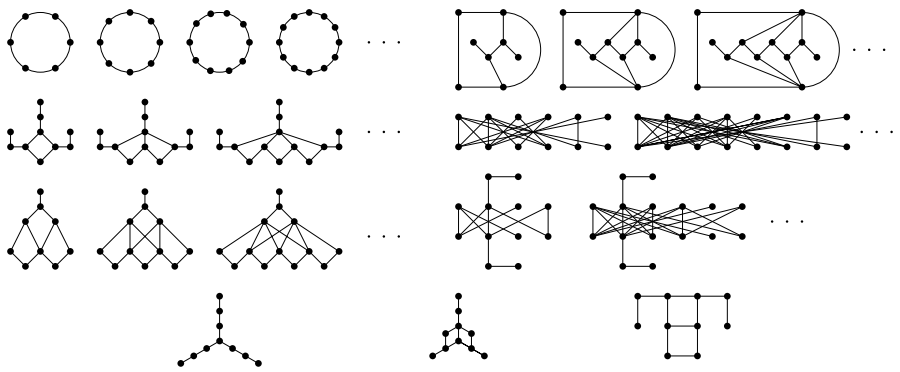


FIGURE 2 – Les six familles infinies C, T, W, D, M, N et la famille G de taille 3 des sous-graphes induits interdits pour la polynomialité de H-LISTE-COLORATION

que c'est une réduction polynomiale de (H, D)-TROPICAL-COLORATION vers H-LISTE-COLORATION. De plus, cette réduction existe quelle que soit la coloration D. Ainsi le Théorème 11 nous donne immédiatement le théorème suivant.

Théorème 12. *Si H est biparti et n'admet pas un des graphes de la Table 1 comme sous-graphe induit, alors (H, D)-TROPICAL-COLORATION est polynomial quel que soit la coloration D de H.*

En revanche si H-LISTE-COLORATION est NP-complet, alors la réduction ne nous dit rien sur la complexité de (H, D)-TROPICAL-COLORATION.

Un autre lien intéressant entre les homomorphismes listé et les homomorphismes tropicaux est le suivant.

Théorème 13. *Soit H un graphe à n sommets. Il existe un graphe sommet-colorié (H', D) d'ordre n^2 à $n+1$ couleurs, tel que H-LISTE-COLORATION est polynomialement équivalent à (H', D)-TROPICAL-COLORATION.*

Démonstration. La construction est la suivante. H est un graphe à n sommets v_1, v_2, ..., v_n. On va construire un graphe sommet-colorié (H', D) à n^2 sommets coloriés avec les couleurs 0, 1, 2, ..., n. Dans un premier temps, on copie H et on colorie tous ses sommets avec la couleur 0. Puis pour chaque sommet v_i de H, on ajoute $n-1$ sommets de degrés 1 adjacent à v_i coloriés avec les $n-1$ couleurs de l'ensemble $\{1, 2, \cdots, n\} \setminus \{i\}$. On appelle le résultat obtenu (H', D). On remarque que les seuls sommets de (H', D) de degrés plus grand que 1 sont exactement les sommets coloriés avec la couleur 0 et qu'ils forment une copie de H. Pour prouver que H-LISTE-COLORATION est polynomialement équivalent à (H', D)-TROPICAL-COLORATION, il suffit de faire une réduction de H-LISTE-COLORATION vers (H', D)-TROPICAL-COLORATION, puis une réduction de (H', D)-TROPICAL-COLORATION vers H-LISTE-COLORATION.
Soit le graphe G et $l : V(G) \to P(V(H))$ une instance de H-LISTE-COLORATION.

On construit le graphe sommet colorié (G', C) de la manière suivante. Dans un premier temps, on copie G et on colorie tout ses sommets avec la couleur 0. Puis, pour chaque sommet v de G, on ajoute $n - |l(v)|$ sommets de degrés 1 adjacent à v coloriés avec les $n - |l(v)|$ couleurs de l'ensemble $\{1, 2, \cdots, n\} \setminus \{i | v_i \in l(v)\}$. On appelle le résultat obtenu (G', C). Si le sommet $v \in (G', C)$ est de couleur 0 et admet un voisin de couleur i, il ne peut être envoyé que sur un sommet de (H', D) de couleur 0 admettant un voisin de couleur i, c'est à dire n'importe quel sommet de couleur 0 dans (H', D) sauf v_i. La liste des couleurs dans le voisinage de v correspond donc exactement à la liste des sommets vers lequel il ne peut pas être envoyé dans (H', D). Il est ensuite facile de vérifier qu'un homomorphisme tropical de (G', C) vers (H', D) correspond à un homomorphisme de G vers H satisfaisant les listes l, et réciproquement.
Soit (G', C) un graphe sommet-colorié, instance de (H', D). Si deux sommets de couleurs différentes de 0 sont adjacents dans (G', C), il n'y a pas d'homomorphisme tropical de (G', C) dans (H', D). On peut donc supposer que tout les voisins d'un sommet de couleur différente de 0 est toujours colorié par la couleur 0. De plus, comme tous les sommets de couleur différente de 0 ont degré 1 dans (H', D), on peut supposer sans perte de généralité que c'est aussi le cas dans (G', C). Soit G le sous-graphe de G' induit par les sommets de (G', C) de couleur 0. Pour tout $v \in G$, on définit $l(v)$ comme l'ensemble des sommets $v_i \in V(H)$ tel que la couleur i n'apparaît pas dans le voisinage de v dans (G', C). Comme précédemment, on remarque qu'un homomorphisme tropical de (G', C) vers (H', D) correspond à un homomorphisme de G vers H satisfaisant les listes l, et réciproquement. □

On a ainsi prouvé que tout problème d'homomorphisme listé peut en fait s'écrire comme un problème d'homomorphisme tropical, ce qui nous donne directement un certain nombre de graphes sommet-colorié (H, D) pour lesquelles (H, D)-Tropical-Coloration est NP-complet. Appliquer ce théorème à l'arbre de la Figure 2 nous donne ainsi un arbre d'ordre 81. On verra dans la section 10 qu'on peut obtenir un arbre plus petit (d'ordre 23) en s'inspirant de cette idée. En appliquant ce théorème au plus petit graphe de la Figure 2, qui est en fait le cycle C_6, on obtient un graphe sommet-colorié d'ordre 36 à 36 arêtes et 7 couleurs. Nous allons voir maintenant qu'en raffinant un peu la technique, on peut obtenir un résultat beaucoup plus fort.
On appelle H_9 le graphe obtenu de C_6 en ajoutant un sommet pendant de degrés 1 à trois sommets indépendants. Soit D la coloration de H_9 qui colorie le cycle avec la couleur 0 et les trois sommets pendants avec trois couleurs distincts 1, 2 et 3 (voir Figure 3).

Théorème 14. (H_9, D)-Tropical-Coloration *est NP-complet.*

Démonstration. Nous allons décrire la réduction depuis C_6-Liste-Coloration. Pour commencer, on nomme les sommets de C_6 de 1 à 6 séquentiellement. On fait de même sur le C_6 qui est inclus dans H_9. On peut supposer, sans perte de généralité, que le sommet adjacent au sommet Rouge est nommé 1, et que

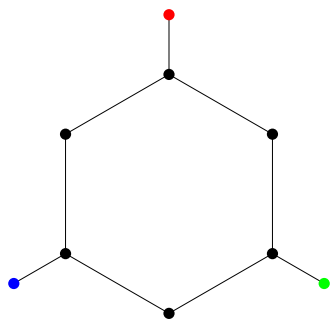


FIGURE 3 – Le graphe sommet-colorié à quatre couleurs (H_9, D).

celui adjacent au sommet Vert est nommé 3. Il en découle que celui adjacent au sommet Bleu est nommé 5.

Soit un graphe G et $l : V(G) \to P(V(H))$, une instance de C_6-LISTE-COLORATION. Si G n'est pas biparti, alors G n'admet pas d'homomorphisme vers C_6, donc on peut supposer que G est biparti. Comme G et C_6 sont biparti, on peut supposer que pour tout sommet $u \in V(G)$, $l(u) \in \{1, 3, 5\}$ ou $l(u) \in \{2, 4, 6\}$.

On construit (G', C) un graphe sommet-colorié, instance de (H_9, D)-TROPICAL-COLORATION comme suit. Dans un premier temps, on copie G et on colorie tout ses sommets avec la couleur Noire. Puis pour chaque sommet u de G, on ajoute un gadget H_u attaché à la copie de u. Le graphe sommet colorié ainsi obtenu est appelé (G', C). Le gadget H_u dépend de $l(u)$ et est décrit ci-dessous.

— Si $l(u) = \{1\}$ (respectivement, $\{3\}$ ou $\{5\}$), alors H_u est un simple sommet pendant Rouge (respectivement, Vert ou Bleu).

— Si $l(u) = \{2\}$ (respectivement, $\{4\}$ ou $\{6\}$), alors H_u est constitué de deux chemin d'ordre 2 : un chemin Rouge et Noir et un chemin Vert et Noir (respectivement Vert et Noir et Bleu et Noir, ou Bleu et Noir et Rouge et Noir). Le sommet Noir de chaque chemin est adjacent à la copie de u.

— Si $l(u) = \{2, 4\}$ (respectivement, $\{4, 6\}$ ou $\{2, 6\}$), alors H_u est un chemin d'ordre 2 Vert et Noir (respectivement Bleu et Noir, ou Rouge et Noir). Le sommet noir est adjacent à la copie de u.

— Si $l(u) = \{1, 3\}$ (respectivement, $\{3, 5\}$ ou $\{1, 5\}$), alors H_u est un chemin d'ordre 5 Rouge Noir Noir Noir Vert (respectivement Vert Noir Noir Noir Bleu ou Bleu Noir Noir Noir Rouge) dont le sommet Noir central est adjacent à la copie de u.

— Si $l(u) = \{1, 3, 5\}$, alors H_u est un chemin d'ordre 3 Noir Noir Rouge dont le premier sommet Noir est adjacent à la copie de u.

— Si $l(u) = \{2, 4, 6\}$, alors H_u est un chemin d'ordre 4 Noir Noir Noir Rouge dont le premier sommet Noir est adjacent à la copie de u.

Prouvons que G admet un homomorphisme vers C_6 satisfaisant les contraintes engendrées par l si et seulement si (G', C) admettent un homomorphisme tro-

pical vers (H_9, D).
Dans un premier temps, considérons un homomorphisme h de G vers C_6 satisfaisant les contraintes engendrées par l. On peut construire un homomorphisme tropical h' de (G', C) vers (H_9, D) comme suit. Pour chaque sommet v tel que $h(v) = i \in C_6$, on envoie la copie de v sur i dans H_9. Il est clair que cela définit un homomorphisme du sous-graphe G de G' vers le cycle Noir de (H_9, D). On peut facilement compléter h' en un homomorphisme tropical de (G', C) vers (H_9, D) en considérant chaque gadget H_u indépendamment.
Soit h un homomorphisme tropical de (G', C) vers (H_9, D). On affirme que la restriction de h aux sommets de la copie de G dans G' est un homomorphisme de G vers C_6 satisfaisant aux contraintes engendrées par l. En effet, soit u un sommet de cette copie. H_u impose le respect de cette contrainte dans chacun des cas. □

On a prouvé que (H_9, D)-Tropical-Coloration est NP-complet. On verra dans la section 11 que c'est, en fait, le plus petit graphe engendrant un problème NP-complet. On verra aussi une preuve alternative du Théorème 14 dans la section 10.

9 Relation avec l'homomorphisme de graphe orienté

Soit G et H deux graphes orientés. Un homomorphisme de G vers H est une fonction h des sommets de G vers les sommets de H tel que si il y a un arc de u vers v dans G, alors il y a aussi un arc de $h(u)$ vers $h(v)$ dans H. Le problème d'homomorphisme de graphe orienté H-Coloration-Orienté est le suivant.

H-Coloration-Orienté **Donnés:** Un graphe orienté G. **Question:** Existe-t-il un homomorphisme de G vers H ?

La classe de problème H-Coloration-Orienté n'admet pas de dichotomie connue. En fait, comme pour (H, D)-Tropical-Coloration, l'existence d'une dichotomie des problèmes d'homomorphismes de graphe orienté serait équivalent à l'existence d'une dichotomie des problèmes de satisfaction de contraintes.

Théorème 15. *H-Coloration-Orienté est polynomial ou NP-complet pour tout graphe sommet-colorié (H, D) si et seulement si la Conjecture 1 est vrai.*

Ce théorème est le Théorème 5.14 du livre [54], dans lequel on peut trouver une preuve similaire à la preuve du Théorème 9.

Comme pour le problème d'homomorphisme listé, les problèmes d'homomorphismes de graphe orienté peuvent être encodés en un problème d'homomorphisme tropical. Soit H un graphe orienté à n sommets et m arcs. On construit le graphe sommet-colorié $T(H) = (H', D)$ à $n + 2m$ sommets, $3m$ arêtes et 3 couleurs comme suit :

— Pour chaque sommet $v \in H$, il y a un sommet Vert $T(v) \in T(H)$.

— Pour chaque arc $uv \in H$, il y a un chemin Vert Bleu Rouge Vert reliant $T(u)$ à $T(v)$ dans $T(H)$.

Théorème 16. *H-Coloration-Orienté est polynomialement équivalent à $T(H)$-Tropical-Coloration.*

Démonstration. Soit G un graphe orienté, instance de H-Coloration-Orienté. On affirme qu'il y a un homomorphisme de G vers H si et seulement si il y a un homomorphisme tropical de $T(G)$ vers $T(H)$. Soit h un homomorphisme tropical de $T(G)$ vers $T(H)$. Dans un premier temps, on remarque que les sommets Vert de $T(G)$ (respectivement $T(H)$) sont exactement les sommets de la forme $T(v)$ avec $v \in V(G)$ (respectivement $v \in V(H)$). Comme un sommet Vert de $T(G)$ peut seulement être envoyé par h sur un sommet Vert de $T(H)$, h correspond de manière naturelle à une fonction f des sommets de G vers les sommets de H. Comme de plus un chemin Vert Bleu Rouge Vert ne peut être envoyé par h que sur un chemin Vert Bleu Rouge Vert (en respectant l'ordre), on a que f doit être un homomorphisme. Réciproquement, si on a un homomorphisme f de G vers H, on peut facilement construire un homomorphisme tropical de $T(G)$ vers $T(H)$ en envoyant, pour tout $v \in G$, $T(v) \in T(G)$ sur $T(f(v)) \in T(H)$.
Soit maintenant (G, C) un graphe sommet-colorié, instance de $T(H)$-Tropical-Coloration. Il n'existe pas nécessairement de graphe G' tel que $(G, C) = T(G')$. Cependant, on remarque que tout sommet Bleu dans $T(H)$ a exactement un voisin Rouge et un voisin Vert, et que tout sommet Rouge dans $T(H)$ a exactement un voisin Bleu et un voisin Vert. Ainsi, si un sommet Bleu de (G, C) a plusieurs voisins Rouges (resp. Verts), on sait qu'un homomorphisme tropical de (G, C) vers $T(H)$ les enverra tous sur le même sommet. On peut donc fusionner tous les voisins Rouges d'un même sommet Bleu, tous les voisins Bleu d'un même sommet Rouge et tous les sommets Verts d'un même sommet Bleu ou Rouge. On sait aussi que si un sommet Bleu (resp. Rouge) a un voisin Bleu (resp. Rouge), il ne peut pas y avoir d'homomorphisme de (G, C) vers $T(H)$. Enfin, si un sommet Bleu (resp. Rouge) de (G, C) n'a pas de voisin Rouge (resp. Bleu) ou Vert, on peut en ajouter un sans changer l'existence d'un homomorphisme de (G, C) vers $T(H)$. Après toute ces opérations, on obtient un graphe sommet-colorié (G', C') qui vérifie que chaque sommet Bleu a exactement deux voisins, un Rouge et un Vert, et chaque sommet Rouge a exactement deux voisins, un Bleu et un Vert. Cela suffit pour qu'il existe un graphe orienté G'' tel que $(G', C') = T(G'')$. En effet G'' est simplement le graphe orienté dont l'ensemble des sommets est l'ensemble des sommets Vert de (G', C'), et l'ensemble des arcs correspond aux chemins Vert Bleu Rouge Vert entre ces sommets. Pour la même raison que précédemment, il y a un homomorphisme tropical de (G', C') vers $T(H)$ si et seulement si il y a un homomorphisme de G'' vers H. □

Les deux derniers théorèmes impliquent le Théorème 8. Il existe plusieurs variantes de cette construction, pour lesquelles la preuve est essentiellement la même. Soit H un graphe orienté à n sommets et m arcs.

— Variante méta-sommet :

— Pour chaque sommet $v \in H$, il y a un chemin Rouge Vert Bleu $T(v) \in T(H)$.

— Pour chaque arc $uv \in H$, il y a une arête entre le sommet Bleu de $T(u)$ et le sommet Rouge de $T(v)$.

Avec cette variante, $T(H)$ a $3n$ sommets et $2n + m$ arêtes.

— Variante Biparti : On ajoute un sommet dans certain gadget pour rendre le graphe $T(H)$ biparti.

— Variante Petit Puits (resp. Source) : On remplace les sommets puits (resp. Source) de H par un seul sommet, et l'arc d'un sommet de H vers un puits (resp. source) de H par une seule arête. Si on utilise la variante méta-sommet, on peut appliquer à la fois la variante Petit Puits et Petite Source, sinon on ne peut pas, car les puits adjacents aux sources posent problème.

— Variante Bicolore : En se plaçant dans la variante Biparti, on remarque qu'il n'y a que deux couleurs par partie, on peut donc essayer de faire une variante bicolore en préservant les différences de couleurs au sein de chaque partie. Un problème se pose : l'homomorphisme risque de mélanger les parties. La solution est de rajouter un sommet qui domine les sommets Vert d'une partie dans la transformation T. La preuve change un peu pour répondre au problème : dans la réduction de H-Coloration-Orienté dans $T(H)$-Tropical-Coloration, on se rend compte que si l'homomorphisme tropical de $T(G)$ vers $T(H)$ a mélangé les parties, en fait, G admet un homomorphisme vers un arc. Dans la réduction de $T(H)$-Tropical-Coloration dans H-Coloration-Orienté, on ne peut pas savoir à priori quel partie s'envoie sur laquelle, donc on crée en fait deux instances de H-Coloration-Orienté. En conséquence, cette réduction n'est pas une réduction au sens de Karp, et il est possible que $T(H)$-Tropical-Coloration soit NP-complet, mais que H-Coloration-Orienté ne soit en fait que NP-intermédiaire.

Un exemple de ces différentes variantes est donné sur la Figure 4. Le graphe orienté représenté est D_4, le plus petit graphe orienté vérifiant que D_4-Coloration-Orienté soit NP-complet. En conséquence si (H, D) est un graphe sommet-colorié représenté sur la Figure 4, (H, D)-Tropical-Coloration est NP-complet.

Comme on s'intéresse aussi encore au problème dans le cas spécifique des cycles, on peut se demander si il est possible de faire une réduction de D_4-Coloration-Orienté dans (H, D)-Tropical-Coloration, avec H un cycle sommet-colorié. Après tout D_4 n'est rien d'autre qu'un cycle dirigé auquel on a accroché un puits en deux points, donc il y a peut être espoir de faire quelque chose. En particulier, on garde en tête l'idée de traiter les puits différemment des autres sommets.

Soit D un graphe orienté. On définit le graphe sommet-colorié $F(D)$ avec quatre couleurs comme suit.

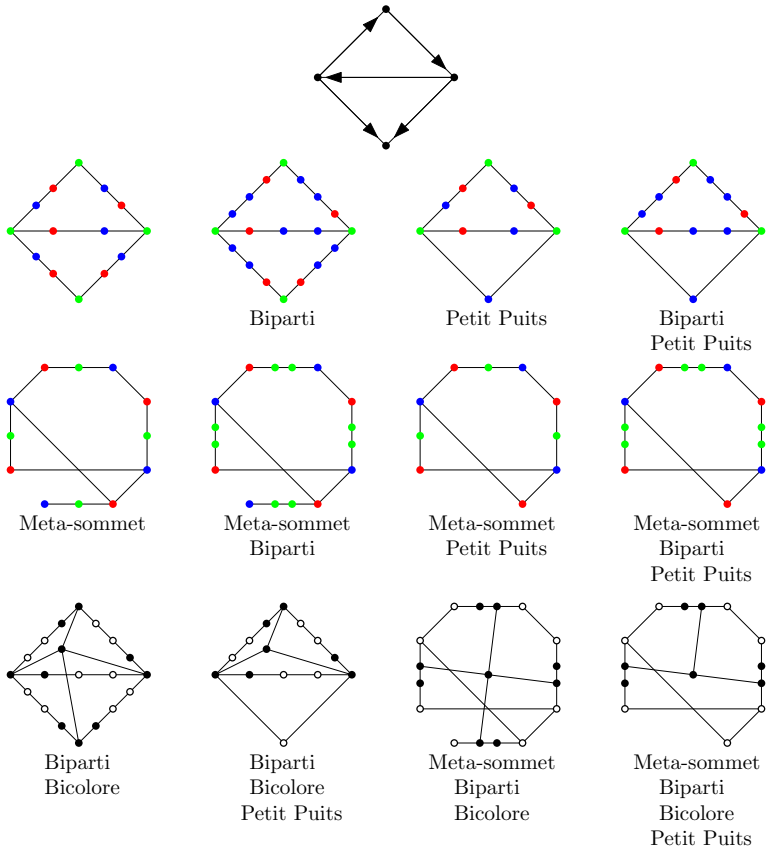


FIGURE 4 – D_4 et ses représentations sous-forme de graphe sommet-colorié suivant différentes variantes de la transformation T.

— Pour chaque sommet $v \in D$ dont le degrés sortant est au moins 1, il y a le sommet u_v dans $F(D)$, colorié avec la couleur Vert.

— Pour chaque sommet $v \in D$ dont le degrés sortant exactement 0 (v est un puits), il y a le sommet u_v dans $F(D)$, colorié avec la couleur Rouge.

— Pour chaque arc $uv \in D$ tel que v n'est pas un puits, il y a un chemin d'ordre dix-neuf reliant u_u à u_v dans $F(D)$, colorié dans l'ordre par les couleurs Vert Noir Noir Noir Noir Noir Noir Bleu Noir Noir Rouge Noir Noir Noir Noir Bleu Noir Noir Vert (ou Vert Noir^6 Bleu Noir^2 Rouge Noir^4 Bleu Noir^2 Vert)

— Pour chaque arc $uv \in D$ tel que v est un puits, il y a un chemin d'ordre onze reliant u_u à u_v dans $F(D)$, colorié dans l'ordre par les couleurs Vert Noir Noir Noir Noir Bleu Noir Noir Noir Noir Rouge (ou Vert Noir^4 Bleu Noir^4 Rouge)

On peut voir un exemple de construction sur la Figure 5.

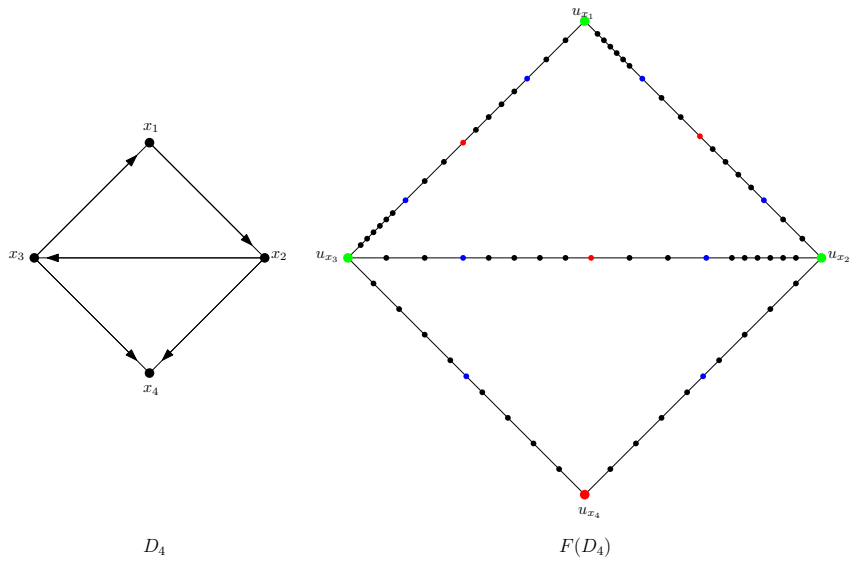


FIGURE 5 – Construction de $F(D_4)$

Théorème 17. *Soit C_{52} le cycle à cinquante-deux sommets. Soit D, la coloration de C_{52} avec les couleurs $VN^6BN^2RN^4BN^2VN^6BN^2RN^4BN^2VN^4BN^2RN^4BN^2$ (voir Figure 6). Soit enfin G un graphe orienté. G admet un homomorphisme vers D_4 si et seulement si $F(G)$ admet un homomorphisme tropical vers (C_{52}, D).*

Démonstration. Pour commencer, on remarque que pour $\{c_1, c_2\} = \{V, R\}$, un chemin colorié $c_1\mathrm{N}^6\mathrm{BN}^2c_2$ ne peut être envoyé dans (C_{52}, D) que sur un chemin colorié $c_1\mathrm{N}^6\mathrm{BN}^2c_2$ ou $c_1\mathrm{N}^4\mathrm{BN}^2c_2$. En particulier, si l'image d'une extrémité est fixée, alors l'image de tous les sommets du chemin le sont aussi. Le chemin $c_1\mathrm{N}^6\mathrm{BN}^2c_2$ force son extrémité colorié c_1 à se trouver à un sixième de tour de son extrémité colorié c_2 dans la Figure 6. En conséquence, le chemin $\mathrm{VN}^6\mathrm{BN}^2\mathrm{RN}^4\mathrm{BN}^2\mathrm{V}$ ne peut être envoyé sur (C_{52}, D) que de trois manières différentes, qui correspondent à un tiers de tour dans le sens des aiguilles d'une montre dans la Figure 6.
De même, un chemin colorié $c_1\mathrm{N}^4\mathrm{BN}^4c_2$ ne peut être envoyé dans (C_{52}, D) que sur un chemin colorié $c_1\mathrm{N}^4\mathrm{BN}^2c_2$ ou $c_1\mathrm{N}^2\mathrm{BN}^4c_2$. Il n'y a que quatre tels chemins dans (C_{52}, D).
Soit h un homomorphisme de G vers D_4. Construisons un homomorphisme tropical h' de $F(G)$ vers (C_{52}, D). Pour tout $v \in G$ dont le degré sortant est au moins 1, $h(v) \in \{x_1, x_2, x_3\}$. Si $h(v) = x_i$, alors $h'(u_v) = G_i$. Les sommets Vert de $F(G)$ sont séparés par des chemins coloriés $\mathrm{VN}^6\mathrm{BN}^2\mathrm{RN}^4\mathrm{BN}^2\mathrm{V}$, qui comme on l'a vu au début de la preuve ne peuvent s'envoyer que sur trois chemins de $(C_{52}, D$, qui correspondent à un tiers de tour dans le sens des aiguilles d'une montre. Ainsi si l'extrémité gauche du chemin est envoyée sur G_1 (respectivement G_2, G_3), alors l'extrémité droite doit être envoyée sur G_2 (respectivement

G_3, G_1). Cela correspond bien a l'effet d'un arc dans G.
Regardons maintenant un puits $v \in G$. u_v est un sommet Rouge de $F(G)$. Si v est envoyé sur x_1 (respectivement x_2 ou x_3) par h, alors tous ses voisins u sont envoyés sur x_3 (respectivement x_1 ou x_2). En conséquence, u_v peut être envoyé sur $R_{1,3,4}$ (respectivement R_2 ou R_3), ce qui permettra aux chemins entre u_u et u_v de s'envoyer correctement sur (C_{52}, D). Si v est envoyé sur x_4, alors ses voisins sont tous envoyés sur x_2 ou x_3. $h'(u_v)$ doit donc être choisi de manière à pouvoir être atteint depuis G_2 ou G_3 par un chemin $\mathrm{VN^4BN^4R}$. $h'(u_v) = R_{1,3,4}$ fonctionne. Cela suffit à vérifier qu'il y a un homomorphisme tropical h' de $F(G)$ vers (C_{52}, D).

Réciproquement, supposons qu'il y a un homomorphisme tropical h' de $F(G)$ vers (C_{52}, D). Construisons un homomorphisme h de G vers D_4. Soit v un sommet de G. Si $h'(u_v) = G_i$, alors u_v est Vert et donc v a un degré sortant d'au moins 1. On décide alors que $h(v) = x_i$. On fait de même pour tous les sommets de G ayant un degré sortant d'au moins 1. Soit u et v deux sommets de G ayant un degré sortant d'au moins 1, tel que uv est un arc de G. Il y a un chemin $\mathrm{VN^6BN^2RN^4BN^2V}$ entre u_u et u_v dans $F(G)$. Comme h' existe, on sait que u_v et u_u sont envoyés respectivement vers G_1 et G_2, ou G_2 et G_3, ou G_3 et G_1. Ainsi, on a décidé d'envoyer u et v respectivement vers x_1 et x_2, ou x_2 et x_3, ou x_3 et x_1. Ainsi, notre homomorphisme partiel h satisfait la règle de respect de l'adjacence.
Si maintenant $h'(u_v) = R_i$, alors v est un puits. De plus, si $h'(u_v) = R_2$ (respectivement R_3), alors un chemin $\mathrm{VN^4BN^4R}$ ayant u_v comme extrémité ne peut envoyer l'autre extrémité que sur G_1 (respectivement G_2) par h'. En conséquence, tous les voisins de v sont envoyés sur x_1 (respectivement x_2) par h. On décide alors que $h(v) = x_2$ (respectivement x_3). Enfin, si $h'(u_v) = R_{1,3,4}$, un chemin $\mathrm{VN^4BN^4R}$ ayant u_v comme extrémité ne peut envoyer l'autre extrémité que sur G_2 ou $G3$. En conséquence, tous les voisins de v sont envoyés sur x_2 ou x_3. On décide alors d'envoyer v sur x_4. Cela suffit à vérifier qu'il existe un homomorphisme de G vers D_4. □

10 Une approche directe pour la NP-complétude avec quelques graphes cibles

On a vu dans la section précédente un cycle sommet-colorié à 52 sommets (C_{52}, D) tel que (C_{52}, D)-Tropical-Coloration soit NP-complet. La preuve utilise une réduction à partir d'un problème d'homomorphisme de graphe orienté. En parallèle de ce travail, la recherche du plus petit cycle sommet-colorié (C_k, D) tel que (C_k, D)-Tropical-Coloration soit NP-complet a aussi suivie une autre approche : essayer de réduire directement un problème SAT classique dans un problème d'homomorphisme tropical vers un cycle. Le problème choisi est NAE3-SAT, pour son absence de négation, et pour sa symétrie dans le traitement de Vrai et Faux.

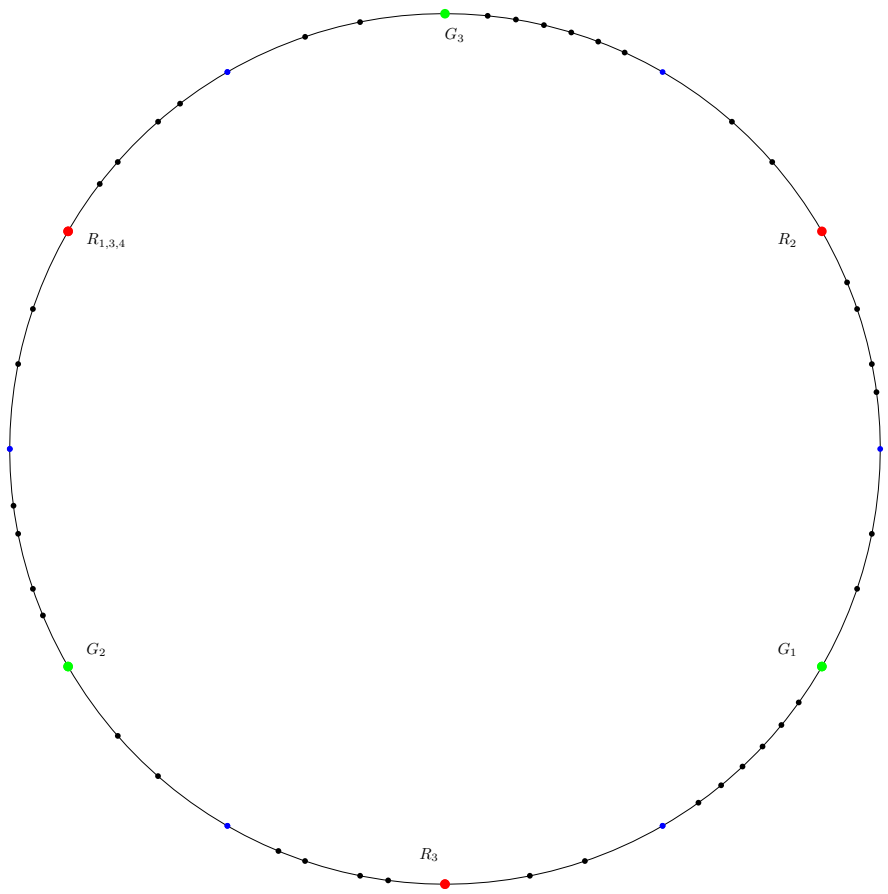


FIGURE 6 – Le cycle (C_{52}, D)

NAE3-SAT
Donnés: Un ensemble de variable V. Un ensemble de triplet de variable $S \subset V \times V \times V$
Question: Existe-t-il une fonction e de V dans $\{Vrai, Faux\}$ tel que pour tout $(v_1, v_2, v_3) \in S$, $e(\{v_1, v_2, v_3\}) = \{Vrai, Faux\}$?

Une idée naturelle pour faire cela est d'avoir dans le graphe cible un sommet pour Vrai et un sommet pour Faux, et de construire le graphe source avec un sommet pour chaque variable qui ne peut être envoyé que sur le sommet Vrai ou Faux et quelques gadgets pour représenter toutes les conditions supplémentaires. Telle quelle, cette idée ne suffit pas à créer un cycle sommet-colorié (C_k, D) tel que (C_k, D)-TROPICAL-COLORATION soit NP-complet. En effet, un gadget qui interdirait la configuration Vrai Vrai Vrai, mais autoriserait les configurations

Vrai Vrai Faux, Vrai Faux Vrai et Faux Vrai Vrai doit être conçu de telle manière que le chemin entre le premier et le second sommet-variable du gadget puisse distinguer entre la configuration Vrai Vrai et les configurations Vrai Faux et Faux Vrai. Dans un cycle, il n'y a que deux chemins séparant le sommet Vrai du sommet Faux, ce qui ne laisse que deux distinctions possible. De plus, si le gadget peut s'envoyer sur la configuration Vrai Faux, ou Faux Vrai sur un de ces deux chemins et que le chemin est de longueur paire, alors il peut aussi s'envoyer sur la configuration Vrai Vrai ou Faux Faux, ce qui empêche toute distinction. Enfin si le chemin n'est pas de longueur paire les sommets Vrai et Faux n'appartiennent pas à la même partie de la bipartition, et donc on ne peut pas avoir de sommets dans le graphe source qui peuvent s'envoyer sur les deux.

Cependant, une solution existe. On peut créer des méta-sommets A et B tel qu'un méta-sommet A ne peut s'envoyer que sur un méta-sommet A, mais un méta-sommet B peut s'envoyer soit sur un méta-sommet A, soit sur un méta-sommet B. Ainsi, le graphe cible peut contenir seulement deux méta-sommet A, Vrai et Faux, et autant de méta-sommets B que nécessaire, et le graphe source peut être composé d'un méta-sommet A pour chaque variable de NAE3-SAT et de gadgets utilisant des méta-sommets B. De cette manière, les méta-sommets variables sont toujours obligés de s'envoyer sur Vrai ou Faux, mais les gadgets ne sont pas obligés de s'envoyer uniquement sur le chemin entre les deux méta-sommet A Vrai et Faux : ils peuvent utiliser tout le cycle en utilisant les méta-sommet B internes au gadget pour traverser les méta-sommet A Vrai et Faux. Nous décrivons ci-dessous une telle construction.

Un méta-sommet A de degrés k est une étoile à $k+1$ sommets, composé de k sommets Rouge indépendants et adjacents à un sommet Vert central. Un méta-sommet B de degrés k est un arbre à $3k+1$ sommets, composé de k chemin Rouge Noir Rouge dont une extrémité est adjacente à un sommet Vert central. Ces méta-sommets s'intègrent au reste du graphe en étant reliés par leur sommets extérieurs à des méta-chemins décrits plus bas. Les sommets extérieurs d'un méta-sommet A sont ces sommets Rouge. Les sommets extérieurs d'un méta-sommet B sont ces sommets Rouge non adjacent à un sommet Vert. Comme les méta-chemins commencent tous par deux sommets noirs à leurs extrémités, on remarque qu'un méta-sommet A peut s'envoyer sur un méta-sommet A, mais pas un méta-sommet B, et qu'un méta-sommet B peut s'envoyer aussi bien sur un méta-sommet A qu'un méta-sommet B. De plus, dans chacun des cas, l'unique sommet Vert central doit s'envoyer sur le sommet Vert central, mais chaque sommet extérieur du méta-sommet source peut s'envoyer sur n'importe quel sommet extérieur du méta-sommet cible, ce qui fait que les méta-sommets se comportent bien comme des sommets pour ce qui est de l'homomorphisme.
Pour la description de la réduction, nous allons aussi décrire des méta-arêtes. Une méta-arête Courte est un chemin de longueur sept colorié NNRNRNN. Une méta-arête Flèche est un chemin de longueur sept colorié NNNNRNN. Une méta-arête Longue est un chemin de longueur onze colorié NNNNRNRNNNN. Dans notre construction, chaque méta-arête aura une extrémité reliée à un méta-

sommet A ou B et l'autre extrémité adjacente à un sommet Vert. Ainsi, les méta-arêtes ne peuvent pas envoyer leurs deux extrémités sur le même sommet. Cela implique qu'une méta-arête Courte peut seulement s'envoyer sur une méta-arête Courte, une méta-arête Flèche peut seulement s'envoyer sur une méta-arête Flèche dans la même direction, et une méta-arête longue peut aussi bien s'envoyer sur une méta-arête Courte ou Flèche.
Le graphe cible que nous considérons est le cycle à 80 sommet C_{80} colorié de manière à être constitué dans l'ordre sur le cycle d'un méta-sommet A de degrés 2, une méta-arête Courte, un sommet Vert, une méta-arête Flèche, un méta-sommet B de degrés 2, une méta-arête Courte, un sommet Vert, une méta-arête Flèche, un méta-sommet A de degrés 2, une méta-arête Courte, un sommet Vert, une méta-arête Flèche, un méta-sommet B de degrés 2, une méta-arête Courte, un sommet Vert, une méta-arête Flèche. Le cycle et les constructeurs sont représentés sur la Figure 7.
Pour effectuer la réduction de NAE3-SAT vers (C_{80}, D)-Tropical-Coloration, il nous faut considérer une instance de NAE3-SAT (V, S) et construire une instance de (C_{80}, D)-Tropical-Coloration, c'est à dire un graphe sommet colorié (G, C), tel qu'il existe un homomorphisme tropical de (G, C) vers (C_{80}, D) si et seulement si il existe une affectation des variables de V à Vrai ou Faux satisfaisant les contraintes de S. Sans perte de généralité, on peut supposer que toutes les variables de V appartiennent à au moins une contrainte dans S. Pour chaque variable x dans V il y a un méta-sommet A de degrés $2k$, où k est le nombre de contraintes dans S dans laquelle apparaît x, dans (G, C) que l'on appelle U_x. Pour chaque contrainte $(x_1, x_2, x_3) \subset S$, on relie les méta-sommets U_{x_1}, U_{x_2} et U_{x_3} à l'aide du gadget décrit ci-dessous :

— Un chemin composé, dans l'ordre, d'une méta-arête Longue, d'un sommet Vert, d'une méta-arête Longue, d'un méta-sommet B, d'une méta-arête Longue, d'un sommet Vert et d'une méta-arête Courte, relie U_{x_1} à U_{x_2} (respectivement U_{x_2} à U_{x_3} et U_{x_3} à U_{x_1}). Ce chemin est appelé $P_{1,2}$ (respectivement $P_{2,3}$ et $P_{3,1}$).

— Un chemin composé, dans l'ordre, d'une méta-arête Courte, d'un méta-sommet B, d'une méta-arête Flèche, d'un sommet Vert, d'une méta-arête Courte, d'un méta-sommet B et d'une méta-arête Longue, relie le premier sommet Vert de $P_{1,2}$ (respectivement $P_{2,3}$ et $P_{3,1}$) au premier sommet Vert de $P_{2,3}$ (respectivement $P_{3,1}$ et $P_{1,2}$).

Cette construction est représentée dans la Figure 8.
Montrons maintenant que ce gadget correspond bien à la contrainte de NAE3-SAT, c'est à dire qu'il empêche les méta-sommets U_{x_1}, U_{x_2} et U_{x_3} de s'envoyer tous sur le même méta-sommet, sans poser plus de contrainte.
Par symétrie entre Vrai et Faux, on peut supposer que U_{x_1} s'envoie sur le méta-sommet représentant Vrai. Ainsi, le chemin $P_{1,2}$ n'a que quatre manières de s'envoyer sur C_{80}. U_{x_2} peut être envoyé sur Vrai aussi, auquel cas $P_{1,2}$ peut se replier de trois manières différentes, envoyant son premier sommet Vert sur n'importe lequel des deux sommets Vert les plus proches du méta-sommet Vrai, à gauche sur la Figure 7. U_{x_2} peut aussi être envoyé sur Faux, auquel cas $P_{1,2}$

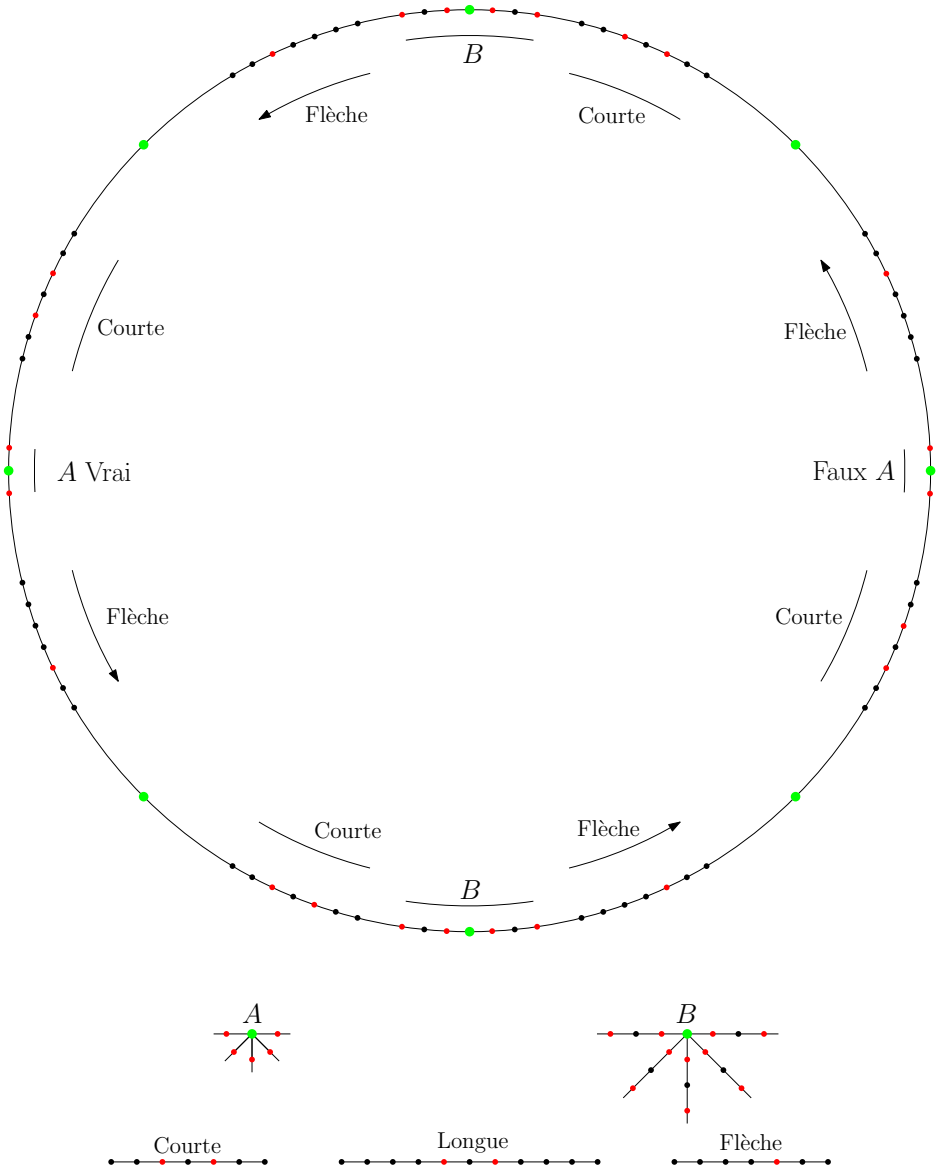


FIGURE 7 – Le cycle (C_{80}, D) et ses constructeurs

s'envoie sur le demi-cycle Flèche, sommet Vert, Court, méta-sommet B, Flèche, sommet Vert, Court et son premier sommet Vert ne peut être envoyé qu'à un seul endroit, en bas à gauche sur la Figure 7.
Le chemin reliant les sommets Vert imposent que le sommet Vert du chemin $P_{2,3}$ se trouve une ou deux méta-arête plus loin que le sommet Vert de $P_{1,2}$ dans le

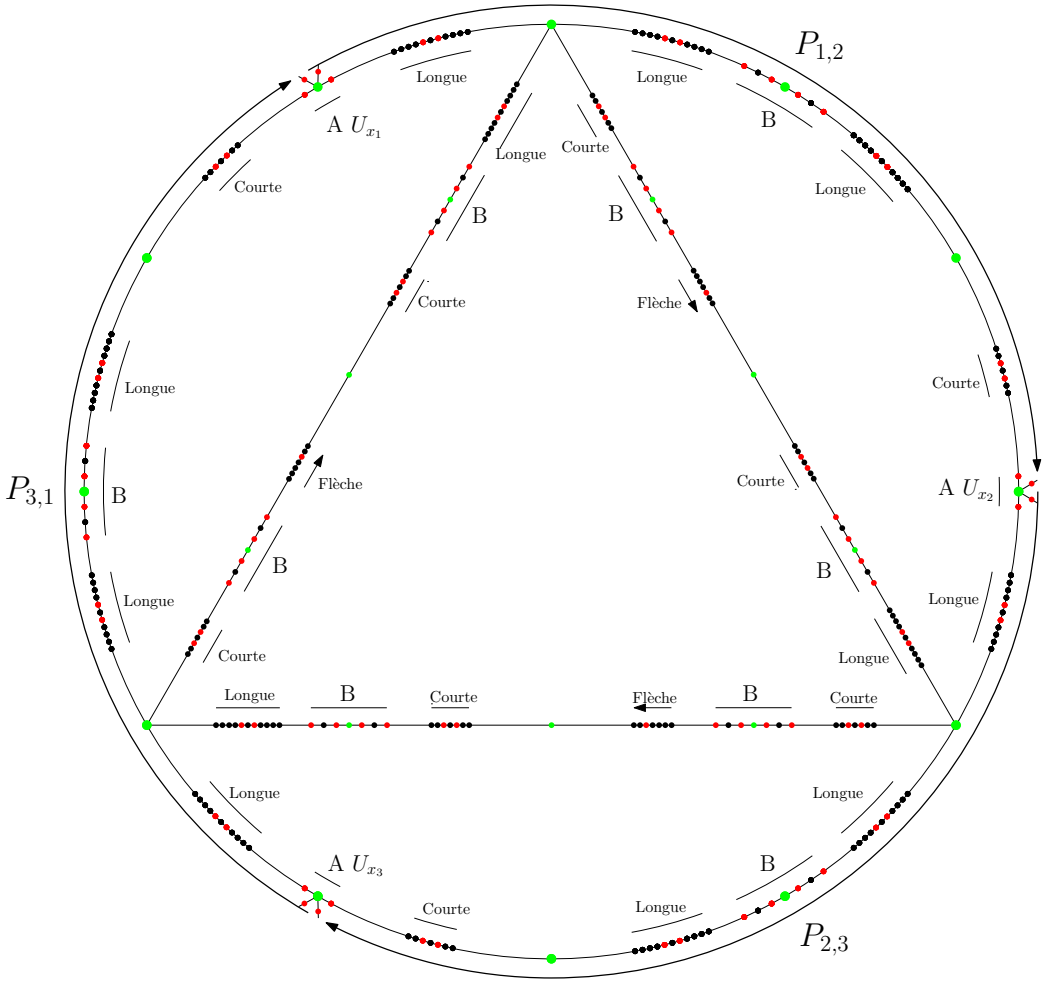


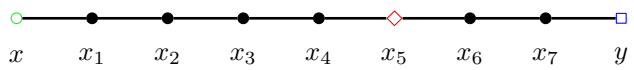
FIGURE 8 – Construction du gadget pour la réduction de NAE3-SAT dans (C_80, D)-TROPICAL-COLORATION

sens des flèches. Autrement dit, si le sommet Vert du chemin $P_{1,2}$ est envoyé en bas à gauche du cycle sur la Figure 7, alors le sommet Vert du chemin $P_{2,3}$ doit être envoyé à droite du cycle sur la Figure 7, et donc U_{x_2} doit être envoyé sur le méta-sommet Faux. En revanche, si le sommet Vert du chemin $P_{1,2}$ est envoyé en haut à gauche du cycle sur la Figure 7, alors le sommet Vert du chemin $P_{2,3}$ doit être envoyé en bas du cycle sur la Figure 7, et comme U_{x_2} est alors envoyé sur le méta-sommet Vrai, le sommet Vert du chemin $P_{2,3}$ doit en fait être envoyé en bas à gauche du cycle sur la Figure 7.
Par symétrie entre x_1, x_2 et x_3, on en conclut que U_{x_1}, U_{x_2} et U_{x_3} ne peuvent pas tous s'envoyer sur le même méta-sommet. Vérifions que le gadget ne pose

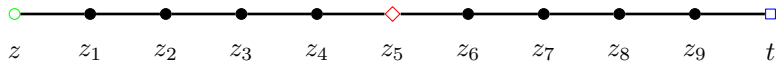
pas plus de contrainte. Par symétrie, il suffit de vérifier qu'on peut envoyer U_{x_1} et U_{x_2} sur le méta-sommet Vrai et U_{x_3} sur le méta-sommet Faux. On peut le faire en repliant $P_{1,2}$ sur le cycle de telle manière à ce que son premier sommet Vert s'envoie sur le sommet en haut à gauche du cycle sur la Figure 7, $P_{2,3}$ de manière à ce que son premier sommet Vert s'envoie sur le sommet en bas à gauche du cycle sur la Figure 7 et $P_{3,1}$ de manière à ce que son premier sommet Vert s'envoie sur le sommet en haut à droite du cycle sur la Figure 7.
Cela conclut la réduction et donc la preuve.

On peut remarquer que le cycle (C_{80}, D) est symétrique. En particulier, il traduit bien la symétrie Vrai-Faux de NAE3-SAT. En un sens, la moitié du cycle est redondant. Cette idée nous pousse a essayer de construire une réduction vers un problème dont le graphe cible serait un cycle plus petit, en abandonnant l'idée d'avoir un sommet "'Vrai"' et un sommet "'Faux"'.

Dans ce qui suit, nous utiliserons les notations suivantes. $P_{x,y}$ est un chemin sommet-colorié de longueur huit, de sommets $x = x_0, x_1, \ldots, x_7, x_8 = y$ où x et y sont de couleurs différentes dans l'ensemble $\{Vert, Bleu\}$, x_5 est colorié en $Rouge$ et tous les autres sommets sont coloriés en $Noir$.



$Q_{z,t}$ est un chemin sommet-colorié de longueur dix, de sommets $z = z_0, z_1, \ldots, z_9, z_{10} = t$ où z et t sont de couleurs différentes dans l'ensemble $\{Vert, Bleu\}$, z_5 est colorié en $Rouge$ et tous les autres sommets sont coloriés en $Noir$.



Lemme 2.

1. *$P_{x,y}$ admet un homomorphisme tropical vers $P_{u,v}$ si et seulement si x et u sont de même couleurs et y et v sont de même couleurs.*
2. *$Q_{z,t}$ admet un homomorphisme tropical vers $P_{u,v}$ à la fois dans le cas où z et u ont la même couleur et t et v ont la même couleur, mais aussi dans le cas où z et v ont la même couleur et t et u ont la même couleur.*

D'après ce lemme, on peut adopter la représentation suivante dans la suite. Un arc $\vec{xy}$ représente un chemin $P_{x,y}$ qui connecte x à y. Une arête en pointillé zt représente un chemin $Q_{z,t}$ qui connecte z et t. Dans les deux cas, les extrémités doivent être Vert ou Bleu et de couleurs différentes. Ainsi, d'après le Lemme 2, une arête en pointillé peut être envoyé par un homomorphisme tropical sur une arête en pointillé, ou sur n'importe quel arc, tant que les couleurs des extrémités sont préservés. En revanche, pour qu'un arc soit envoyé par un homomorphisme tropical sur un autre arc, non seulement les couleurs des extrémités doivent être

préservées, mais aussi la direction de l'arc.

Avec cette notation, le cycle orienté de longueur six de la Figure 9 correspond à un cycle à quarante-huit sommets colorié avec quatre couleurs, (C_{48}, D). Dans

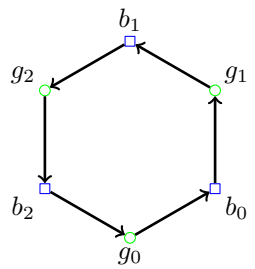


FIGURE 9 – Le cycle sommet-colorié (C_{48}, D)

la suite, nous allons montrer que NAE3-SAT admet une réduction en temps polynomial vers (C_{48}, D)-TROPICAL-COLORATION.

Théorème 18. (C_{48}, D)-TROPICAL-COLORATION *est NP-complet.*

Démonstration. Étant donné un graphe sommet-colorié (G, C) et une fonction h associant à chaque sommet de G un sommet de C_48, il est facile de vérifier que h est un homomorphisme tropical vers (C_{48}, D). Ainsi (C_{48}, D)-TROPICAL-COLORATION appartient à NP. Pour montrer la NP-complétude, on montre que chaque instance de NAE3-SAT permet de construire en temps polynomial une instance de (C_{48}, D)-TROPICAL-COLORATION équivalente.

Soit (X, S) une instance de NAE3-SAT. Pour partitionner X en deux parties, il suffit de décider pour chaque paire de variables si elles sont dans la même partie ou non. Ainsi, on s'attend à définir une relation binaire entre les variables satisfaisant les conditions suivantes :

1. $X_p \sim X_q \wedge X_q \sim X_r \Rightarrow X_q \sim X_r$ (Partition)
2. $X_p \nsim X_q \wedge X_q \nsim X_r \Rightarrow X_p \sim X_r$ (Partition en deux partie)

Pour construire notre gadget, on commence avec un gadget partiel associé à chaque pair de variable dans X. A chaque pair $x_i, x_j \in X$, on associe le cycle sommet-colorié $(C_{x_i x_j}, C)$ représenté sur la Figure 10, où U_G est un sommet commun à tout les cycles ainsi construits, et tous les autres sommets sont distincts.

Par symétrie de (C_{48}, D), on peut supposer sans perte de généralité que U_G est toujours envoyé sur g_0 par un homomorphisme tropical.

Remarque 1. *Il y a exactement deux homomorphismes tropicaux possibles envoyant $(C_{x_i x_j}, C)$ sur (C_{48}, D), σ et ρ, défini ainsi :*

— $\sigma(U_G) = g_0$, $\sigma(b^0_{x_i x_j}) = b_0$, $\sigma(g^1_{x_i x_j}) = g_1$, $\sigma(b^1_{x_i x_j}) = b_1$, $\sigma(g^2_{x_i x_j}) = g_2$ *et* $\sigma(b^2_{x_i x_j}) = b_2$

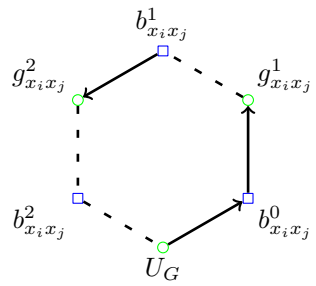


FIGURE 10 – $(C_{x_ix_j}, C)$

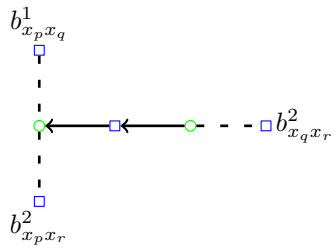


FIGURE 11 – Arbre connectant $b^1_{x_px_q}$, $b^2_{x_px_r}$ et $b^2_{x_qx_r}$

— $\rho(U_G) = g_0$, $\rho(b^0_{x_ix_j}) = b_0$, $\rho(g^1_{x_ix_j}) = g_1$, $\rho(b^1_{x_ix_j}) = b_0$, $\rho(g^2_{x_ix_j}) = g_1$ *et* $\rho(b^2_{x_ix_j}) = b_0$

Dans la suite, un homomorphisme tropical qui envoie $(C_{x_ix_j}, C)$ sur (C_{48}, D) par σ correspond à assigner x_i et x_j à deux parties différentes de la partition, tandis qu'un homomorphisme tropical qui envoie $(C_{x_ix_j}, C)$ sur (C_{48}, D) par ρ correspond à les assigner à la même partie.

Remarque 2. *Il n'existe pas d'homomorphisme tropical de* $(C_{x_ix_j}, C)$ *sur* (C_{48}, D) *qui envoie* $b^2_{x_ix_j}$ *sur* b_1 *ou* $b^1_{x_ix_j}$ *sur* b_2.

Il nous faut ajouter plus de structure pour assurer les conditions 1 et 2 de la relation binaire. Pour ce faire, on considère les trois gadgets partiels $(C_{x_px_q}, C)$, $(C_{x_qx_r}, C)$ et $(C_{x_px_r}, C)$. Prenons les sommets $b^1_{x_px_q}$ de $(C_{x_px_q}, C)$, $b^2_{x_px_r}$ de $(C_{x_qx_r}, C)$ et $b^2_{x_qx_r}$ de $(C_{x_px_r}, D)$ et attachons les ensembles à l'aide de l'arbre représenté dans la Figure 11.

On construit une structure similaire sur $(b^1_{x_px_r}, b^2_{x_qx_r}, b^2_{x_px_q})$ et sur $(b^1_{x_qx_r}, b^2_{x_px_q}, b^2_{x_px_r})$, avec respect pour l'ordre. Soit $(C_{x_px_qx_r}, C)$ le gadget partiel résultant, représenté sur la Figure 12.

Remarque 3. *Dans tout homomorphisme tropical de* $(C_{x_px_qx_r}, C)$ *vers* (C_{48}, D), *le nombre de* (C_{x_i,x_j}, C) *envoyé sur* (C_{48}, D) *par* ρ *est impair. De plus, pour tout choix d'un nombre impair de* (C_{x_i,x_j}, C) *(c'est à dire l'un des trois, ou les trois),*

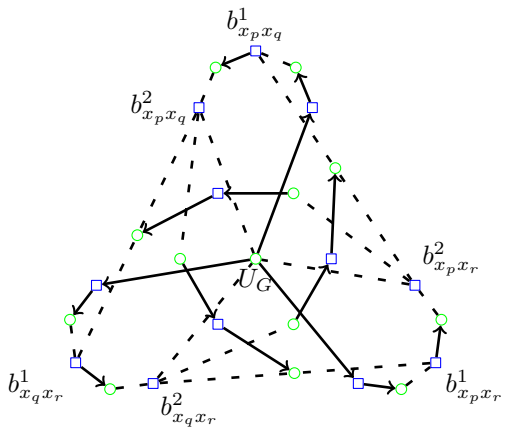


FIGURE 12 – $C_{x_px_qx_r}$

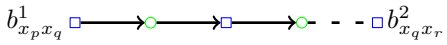


FIGURE 13 – Gadget partiel pour les clauses de NAE3-SAT

il existe un homomorphisme tropical de $(C_{x_px_qx_r}, C)$ *vers* (C_{48}, D) *qui envoie les* (C_{x_i,x_j}, C) *choisis et uniquement eux sur* (C_{48}, D) *par* ρ.

En effet, chaque (C_{x_i,x_j}, C) admet exactement deux homomorphismes tropicaux vers (C_{48}, D), σ et ρ, ce qui implique huit homomorphismes tropicaux de l'union de $(C_{x_px_q}, C)$, $(C_{x_px_r}, C)$ et $(C_{x_qx_r}, C)$ vers (C_{48}, D). De ces huit homomorphismes, quatre envoie un nombre impair de (C_{x_i,x_j}, C) sur (C_{48}, D) par ρ. Les quatre homomorphismes restant consistent soit à envoyer tous les (C_{x_i,x_j}, C) sur (C_{48}, D) par σ, ou d'en choisir un à envoyer par σ et les deux autres par ρ. On vérifie facilement que l'union de $(C_{x_px_q}, C)$, $(C_{x_px_r}, C)$, $(C_{x_qx_r}, C)$ et de l'arbre de la Figure 11 admet six homomorphismes tropicaux vers (C_{48}, D) : Il n'est plus possible d'envoyer tous les (C_{x_i,x_j}, C) sur (C_{48}, D) par σ, ni d'envoyer $(C_{x_px_r}, C)$ sur (C_{48}, D) par σ et les deux autres par ρ. Étant donné la symétrie de x_p, x_q et x_r dans $(C_{x_px_qx_r}, C)$, cela suffit à prouver la Remarque 3.

Enfin, pour compléter le gadget, il reste à interdire aux trois (C_{x_i,x_j}, C) de s'envoyer sur (C_{48}, D) par ρ dans le cas où $(x_px_qx_r) \in S$. Pour ce faire, il suffit d'ajouter le chemin reliant $b^1_{x_px_q}$ à $b^2_{x_qx_r}$ représenté sur la Figure 13. Soit $f(X, S)$ le graphe sommet-colorié ainsi construit. Si X contient v variables et S contient s clauses, le graphe sommet-colorié $f(X, S)$ a $1 + 53 \times v^2 + 132 \times v^3 + 33 \times s$ sommets. Il découle aisément de la construction que (X, S) est une instance positive de NAE3-SAT si et seulement si le graphe sommet-colorié $f(X, S)$ admet un homomorphisme tropical vers (C_{48}, D). □

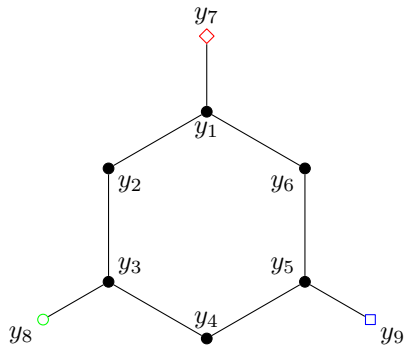
Remarque 4. *1. Dans cette construction, les sommets Rouge ne se trouve*

jamais dans la même partie de la bipartition que les sommets Vert et Bleu. On peut donc colorier tous les sommets Rouge en Bleu, sans changer la validité du théorème 18 ou de la preuve.

2. *Cette preuve peut facilement être adaptée pour étendre le résultat à n'importe quel C_{2k} avec $k \geq 24$. En effet, on peut modifier $P_{x,y}$ et $Q_{z,t}$ sans changer la validité du Lemme 2 de manière à agrandir le cycle.*
3. *Cette preuve peut également être adaptée pour un cycle à cinquante-quatre sommets coloriés avec deux couleurs. En effet, en séparant les sommets Rouge en deux, le Lemme 2 est toujours valide, on peut alors colorié tout les sommets Rouge, Vert et Bleu en Blanc, et utilisé la bipartition pour les distinguer. La preuve n'a pas a être changer.*

Le Théorème 14 dit que le problème d'homomorphisme tropical vers le graphe sommet-colorié (H_9, D), représenté sur la Figure 3, est NP-complet. La preuve est une réduction depuis un problème d'homomorphisme listé. Voici une réduction plus directe depuis NAE3-SAT.

Le graphe sommet-colorié (H_9, D) est constitué d'un cycle à six sommets et de trois sommets pendants. Appelons les sommets du cycles $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$, coloriés en Noir. Le sommet pendant y_7 est Rouge et adjacent à y_1. Le sommet pendant y_8 est Vert et adjacent à y_3. Le sommet pendant y_9 est Bleu et adjacent à y_5.



Dans cette section, nous appellerons *toile* à k niveaux le graphe sommet-colorié suivant. La toile est composé de k niveaux. Le premier niveau est une copie de (H_9, D). Tout les autres niveaux sont constitué d'un cycle à six sommets Noir. Pour tout i entre 0 et $k-1$, le cycle de niveau i est couplé au cycle de niveau $i+1$. Les sommets Noirs du niveau i sont appelés $z_{1,i}, z_{2,i}, z_{3,i}, z_{4,i}, z_{5,i}, z_{6,i}$, tel que $z_{j,1} = y_j$ et $z_{j,i+1}$ est adjacent à $z_{j,i}$.Un exemple de toile à 3 niveaux est dessiné dans la Figure 14.

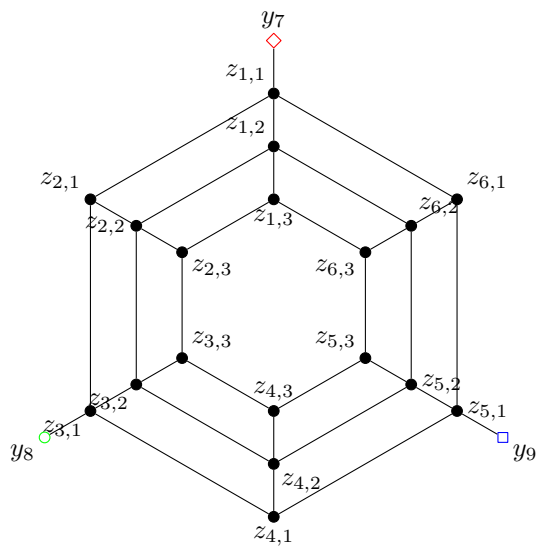


FIGURE 14 – Toile à 3 niveaux

Lemme 3. *Une toile à k niveaux admet un homomorphisme tropical vers (H_9, D). De plus, pour tout homomorphisme tropical h d'une toile vers (H_9, D) et pour tout i entre 1 et k, h restreint au $i$ème niveau de la toile est injectif et atteint tous les sommets Noir de (H_9, D).*

Démonstration. Le premier niveau de la toile, étant une copie de (H_9, D), n'admet qu'un homomorphisme tropical vers (H_9, D), qui est une bijection. On construit l'homomorphisme par récurrence. Si le $i$ème niveau de la toile est injectif et atteint tous les sommets Noir de (H_9, D), cela veut dire que le cycle du $i$ème niveau de la toile s'envoie sur le cycle complet de (H_9, D). A cause du couplage, le $i+1$-ème niveau s'envoie aussi sur le cycle complet de (H_9, D). □

Soit (X, S) une instance de NAE3-SAT. On construit le graphe sommet-colorié $f(X, S)$ de la manière suivante :

1. On place le chemin sommet-colorié $x_7x_1x_2x_3x_8$. x_7 est Rouge. x_1, x_2 et x_3 sont Noirs. x_8 est Vert.
2. On place aussi les deux sommets adjacents x_9 et x_5. x_9 est Bleu et x_5 est Noir.
3. Pour chaque variable $v \in X$, on ajoute un sommet Noir x_v, adjacent à x_2.
4. Pour chaque clause $c = \{v_p, v_q, v_r\} \in S$, on ajoute les sommets Noirs x_{c,v_p}, x_{c,v_q} et x_{c,v_r}, adjacents à x_5. x_{c,v_i} est aussi adjacent à x_{v_i}.
5. Enfin, pour chaque clause $c = \{v_p, v_q, v_r\} \in S$, on ajoute une toile à 3 niveaux tel que $z_{1,3}$ est adjacent à x_{c,v_p}, $z_{3,3}$ est adjacent à x_{c,v_q} et $z_{5,3}$ est adjacent à x_{c,v_r}. $z_{1,3}$ est alors appelé z_{c,v_p}. $z_{3,3}$ est alors appelé z_{c,v_q}. $z_{5,3}$ est alors appelé z_{c,v_r}.

Remarque 5. *Si il existe un homomorphisme tropical h de $f(X,S)$ vers (H_9,D), alors :*

1. *$h(x_7) = y_7$, $h(x_1) = y_1$, $h(x_8) = y_8$ et $h(x_3) = y_3$. En conséquence $h(x_2) = y_2$, et pour toute variable $v \in X$, $h(x_v) \in \{y_1, y_3\}$.*
2. *$h(x_9) = y_9$ et $h(x_5) = y_5$. En conséquence, pour toute clause $c = \{v_p, v_q, v_r\} \in S$, $x_{c,v_p} \in \{y_4, y_6\}$.*
3. *Le Lemme 3 et la bipartition indiquent que pour toute clause $c = \{v_p, v_q, v_r\} \in S$, l'ensemble $\{z_{c,v_p}, z_{c,v_q}, z_{c,v_r}\}$ a pour image l'ensemble $\{y_1, y_3, y_5\}$.*

Théorème 19. *$f(X,S)$ admet un homomorphisme tropical vers (H_9,D) si et seulement si il existe une bipartition de X, telle qu'au moins un élément de chaque partie soit dans chaque clause dans S.*

Démonstration. Supposons que $f(X,S)$ admet un homomorphisme tropical vers (H_9,D). La remarque 1 nous donne une bipartition de X en regardant les antécédents de y_1 et de y_3. De plus, d'après la remarque 3, pour chaque clause $c = \{v_p, v_q, v_r\} \in S$, l'ensemble $\{z_{c,v_p}, z_{c,v_q}, z_{c,v_r}\}$ contient un sommet s'envoyant sur y_1 et un sommet s'envoyant sur y_3. La remarque 2 implique alors que l'ensemble $\{x_{c,v_p}, x_{c,v_q}, x_{c,v_r}\}$ contient au moins un sommet s'envoyant sur y_4 et au moins un sommet s'envoyant sur y_6. Il en découle que l'ensemble $\{x_{v_p}, x_{v_q}, x_{v_r}\}$ contient au moins un sommet s'envoyant sur y_1 et au moins un sommet s'envoyant sur y_3. La bipartition de X suggérée par la remarque 1 satisfait bien aux conditions imposées par les clauses de S.

Supposons maintenant qu'il existe une bipartition de X, telle qu'au moins un élément de chaque partie soit dans chaque clause dans S. On peut construire un homomorphisme tropical de $f(X,S)$ vers (H_9,D) en associant y_1 à une partie et y_3 à l'autre. Ainsi, pour tout v dans X, x_v est envoyé sur y_1 ou y_3 en fonction de la partie dans laquelle se trouve v. Pour toute clause $c = \{v_p, v_q, v_r\} \in S$, il y a au moins un sommet de $\{x_{v_p}, x_{v_q}, x_{v_r}\}$ qui s'envoie sur y_1 et au moins un sommet qui s'envoie sur y_3. Il est possible d'envoyer la toile associée à la clause c sur (H_9,D) de telle manière que les trois sommets z_{c,v_p}, z_{c,v_q} et z_{c,v_r} soient envoyés sur y_1, y_3 et y_5 et que quand z_{c,v_i} est envoyé sur y_1 (respectivement y_3) alors x_{v_i} est aussi envoyé sur y_1 (respectivement y_3). Il est alors facile de trouver l'image de x_{c,v_p}, x_{c,v_q} et x_{c,v_r}, ce qui finit la construction d'un homomorphisme tropical de $f(X,S)$ vers (H_9,D). □

On a vu dans la section 8 qu'il existait un arbre sommet-colorié d'ordre 81 tel que le problème d'homomorphisme tropical associé est NP-complet. En utilisant une réduction plus direct, depuis le problème 3-SAT, on obtient un meilleur résultat, sur un arbre plus petit.

3-SAT
Donnés: Un ensemble de variables V. Un ensemble de littéraux $L = \{l | \exists v \in V, l = v \vee l = \neg v\}$.Un ensemble de triplets de littéraux $S \subset L \times L \times L$
Question: Existe-t-il une fonction e de L dans $\{Vrai, Faux\}$ telle que pour tout $(l_1, l_2, l_3) \in S$, $Vrai \in e(\{l_1, l_2, l_3\})$ et pour tout $v \in V$, $e(v) \neq e(\neg v)$?

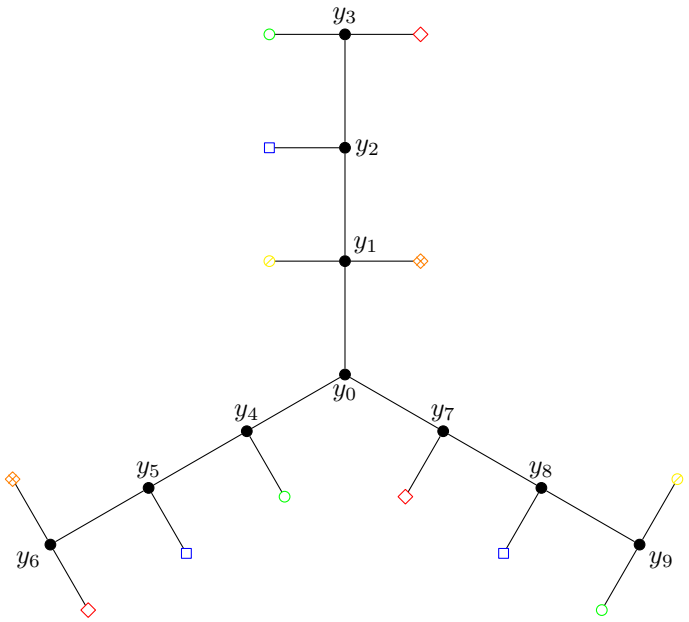


FIGURE 15 – L'arbre (T_{23}, D)

Le graphe cible est l'arbre sommet-colorié à 6 couleurs (T_{23}, D) représenté en Figure 15. Il contient les couleurs Noir, Rouge, Bleu, Vert, Jaune et Orange. Comme tous les sommets non-Noir sont de degré 1 et adjacent à un sommet Noir, il suffit de spécifier la cible des sommets Noirs pour définir un homomorphisme. Ainsi, les sommets Noir sont notés $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9$.

Soit (V, L, S) une instance de 3-SAT. Pour construire la réduction, nous allons associer à chaque littéral l dans L un sommet Noir x_l adjacent à un sommet Bleu dans une instance de (-TROPICAL-COLORATION(T_{23}, D)). Ainsi, ce sommet peut être envoyé par un homomorphisme tropical sur les sommets y_2, y_5 et y_8. Un envoi sur y_2 correspond à donner la valeur $Vrai$ au littéral, tandis qu'un envoi sur y_5 ou y_8 correspond à la valeur $Faux$. Pour construire le reste de l'instance, nous allons avoir besoin de quelques structures.

La structure $S_{2,5}$ est constituée d'un chemin de sept sommets Noir de l'ensemble $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ où une feuille Bleu est attachée aux sommets x_1 et x_7, une feuille Verte est attachée aux sommets x_2 et x_6 et une feuille Jaune est attachée au sommet x_4.
La structure $S_{2,8}$ est constituée d'un chemin de sept sommets Noir de l'ensemble $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ où une feuille Bleu est attachée aux sommets x_1 et x_7, une feuille Rouge est attachée aux sommets x_2 et x_6 et une feuille Orange est attachée au sommet x_4.
La structure $S_{5,8}$ est constituée d'un chemin de sept sommets Noir de l'ensemble

$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ où une feuille Bleu est attachée aux sommets x_1 et x_7, une feuille Verte est attachée aux sommets x_2 et x_6 et une feuille Rouge est attachée au sommet x_4.
Les structures $S_{i,j}$ sont représentées sur la Figure 16.

Remarque 6. *Pour tout* $(i, j) \in \{(2, 5), (2, 8), (5, 8)\}$ *:*

1. *$S_{i,j}$ admet un homomorphisme tropical vers (T_{23}, D).*
2. *Pour tout homomorphisme tropical de $S_{i,j}$ vers (T_{23}, D), les sommets x_1 et x_7 sont envoyés dans l'ensemble $\{y_2, y_5, y_8\}$.*
3. *Pour tout homomorphisme tropical h de $S_{i,j}$ vers (T_{23}, D), soit $h(x_1) = h(x_7)$, ou bien $\{h(x_1), h(x_7)\} = \{y_i, y_j\}$. Cela laisse possible 5 valeurs de $(h(x_1), h(x_7))$. De plus, il existe un homomorphisme tropical de $S_{i,j}$ vers (T_{23}, D) pour chacune de ces 5 valeurs de $(h(x_1), h(x_7))$.*

La troisième remarque revient à dire que $S_{i,j}$ ne permet que de se déplacer de y_i à y_j, dans un sens ou dans l'autre, ou de rester sur place. Pour le vérifier, il peut être utile d'observer d'abord que pour tout (i, j), un des voisins de y_0 est infranchissable par $S_{i,j}$.

Pour que la réduction fonctionne, il faut aussi que l'on puisse s'assurer que x_v et $x_{\neg v}$ ne seront pas envoyés sur des sommets traduisant la même valeur. Pour cela, nous avons besoin d'une structure appelé S_{NON}. S_{NON} est constituée d'une copie de $S_{5,8}$, d'une copie de (T_{23}, D) et d'un chemin de douze sommets Noir, $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}, t_{11}, t_{12}$. t_12 est attaché à x_1. t_7 est attaché à y_4. Une feuille Bleu est attachée à t_1, t_5 et t_9. Une feuille Rouge est attachée à t_2 et t_8. Une feuille Verte est attachée à t_4 et t_10. Une feuille Orange est attachée à t_6. Une feuille Jaune est attachée à t_12. Cette construction est représentée sur la Figure 16.

Lemme 4. 1. *Il existe un homomorphisme tropical de S_{NON} vers (T_{23}, D).*

2. *Si h est un homomorphisme tropical de S_{NON} vers (T_{23}, D) tel que $h(t_1) = y_2$, alors $h(x_7) \in \{y_5, y_8\}$.*
3. *Si h est un homomorphisme tropical de S_{NON} vers (T_{23}, D) tel que $h(t_1) \in \{y_5, y_8\}$, alors $h(x_7) = y_2$.*

Démonstration. Essayons de construire un homomorphisme tropical de S_{NON} vers (T_{23}, D). Tous les sommets Noirs adjacent à un sommet Bleu doivent être envoyés vers y_2, y_5 ou y_8. C'est le cas, en particulier, de t_1, t_5, t_9, x_1 et x_7. De plus, (T_{23}, D) est un core, donc la copie de (T_{23}, D) doit s'envoyer sur elle-même par un isomorphisme. En particulier, y_4 doit s'envoyer sur y_4. Il en découle que t_7 doit être envoyé sur y_0 ou y_5, et en allant plus loin, que t_5 doit s'envoyer sur y_2 ou y_5.
Supposons qu'on envoie t_1 sur y_2. On peut facilement construire l'homomorphisme du chemin de t_1 à t_5, à condition d'envoyer t_5 sur y_2. On peut alors étendre l'homomorphisme sur t_6 et t_7, ce qui oblige t_7 à s'envoyer sur y_0. Pour étendre l'homomorphisme, on est obligé d'envoyer t_9 sur y_8, et x_1 sur y_8. Il est

alors facile d'étendre le reste de la construction, à condition d'envoyer x_7 sur y_5 ou y_8.
Supposons maintenant qu'on envoie t_1 sur y_8 ou y_5. Il est alors impossible d'étendre l'homomorphisme pour envoyer t_5 sur y_2. Par contre, on peut étendre l'homomorphisme sur le chemin de t_1 à t_5, en envoyant t_5 sur y_5. On peut alors étendre l'homomorphisme jusqu'à t_7 qui doit s'envoyer sur y_5. Pour étendre l'homomorphisme, on est obligé d'envoyer t_9 sur y_5, et x_1 sur y_2. Il est alors facile d'étendre le reste de la construction, à condition d'envoyer x_7 sur y_2. □

Enfin, nous avons aussi besoin d'une dernière structure. La structure $A_{u_iu_j}$ relie les deux sommets Noirs u_i et u_j, par deux chemins de longueur 16 de sommets Noirs, éventuellement adjacents à des feuilles pendantes, P et Q. P est le chemin $u_iz_1z_2z_3z_4z_5z_6z_7z_8z_9z_{10}z_{11}z_{12}z_{13}z_{14}z_{15}u_j$. $u_iz_1z_2z_3z_4z_5z_6$ admet les feuilles pendantes nécessaire pour former une copie de $S_{2,5}$. z_7 est adjacent à une feuille Rouge. z_9 est adjacent à une feuille Orange. $z_8z_9z_{10}z_{11}z_{12}z_{13}z_{14}z_{15}u_j$ admet les feuilles pendantes nécessaire pour former une copie de $S_{5,8}$. De même, Q est le chemin $u_it_1t_2t_3t_4t_5t_6t_7t_8t_9t_{10}t_{11}t_{12}t_{13}t_{14}t_{15}u_j$. $u_it_1t_2t_3t_4t_5t_6$ admet les feuilles pendantes nécessaire pour former une copie de $S_{5,8}$. t_7 est adjacent à une feuille Jaune. t_9 est adjacent à une feuille Verte. $t_8t_9t_{10}t_{11}t_{12}t_{13}t_{14}t_{15}u_j$ admet les feuilles pendantes nécessaire pour former une copie de $S_{5,8}$. La structure $A_{u_iu_j}$ est représentée sur la Figure 16.

Remarque 7. *1. Il existe un homomorphisme tropical de P vers (T_{23}, D). Un tel homomorphisme peut envoyer le couple de sommet (u_i, u_j) sur n'importe quel couple dans l'ensemble $\{(y_2, y_2), (y_2, y_5), (y_2, y_8), (y_5, y_2), (y_5, y_5), (y_5, y_8), (y_8, y_2)\}$, et seulement ces couples. En particulier, (u_i, u_j) ne peut pas s'envoyer sur (y_8, y_5) ou sur (y_8, y_8).*

2. Il existe un homomorphisme tropical de Q vers (T_{23}, D). Un tel homomorphisme peut envoyer le couple de sommet (u_i, u_j) uniquement sur n'importe quel couple dans l'ensemble $\{(y_2, y_2), (y_2, y_5), (y_2, y_8), (y_5, y_2), (y_5, y_8), (y_8, y_2), (y_8, y_8)\}$, et seulement ces couples. En particulier, (u_i, u_j) ne peut pas s'envoyer sur (y_5, y_5) ou sur (y_8, y_5).

3. Il existe un homomorphisme tropical de $A_{u_iu_j}$ vers (T_{23}, D). Un tel homomorphisme h peut envoyer le couple de sommet (u_i, u_j) sur n'importe quel couple dans l'ensemble $\{(y_2, y_2), (y_2, y_5), (y_2, y_8), (y_5, y_2), (y_5, y_8), (y_8, y_2)\}$, et seulement ces couples. Autrement dit, soit $(h(u_i), h(u_j)) = (y_5, y_8)$, soit $y_2 \in \{(h(u_i), h(u_j)\}$.

Lemme 5. *Soit u_p, u_q et u_r trois sommets Noir. La structure composée de $A_{u_pu_q}$, $A_{u_qu_r}$ et $A_{u_ru_p}$ admet un homomorphisme tropical vers (T_{23}, D). Un tel homomorphisme tropical h peut envoyer le triplet de sommet (u_p, u_q, u_r) sur $\{y_2, y_5, y_8\}$ de toutes les manières qu'au moins deux sommets parmi u_p,u_q et u_r soit envoyé sur y_2, ou bien sur un des 3 triplets suivants : (y_5, y_8, y_2), (y_2, y_5, y_8) ou (y_8, y_2, y_5). En particulier, $\{h(u_p), h(u_q), h(u_r)\}$ contient y_2.*

Démonstration. La preuve est une simple application de la remarque précédente. □

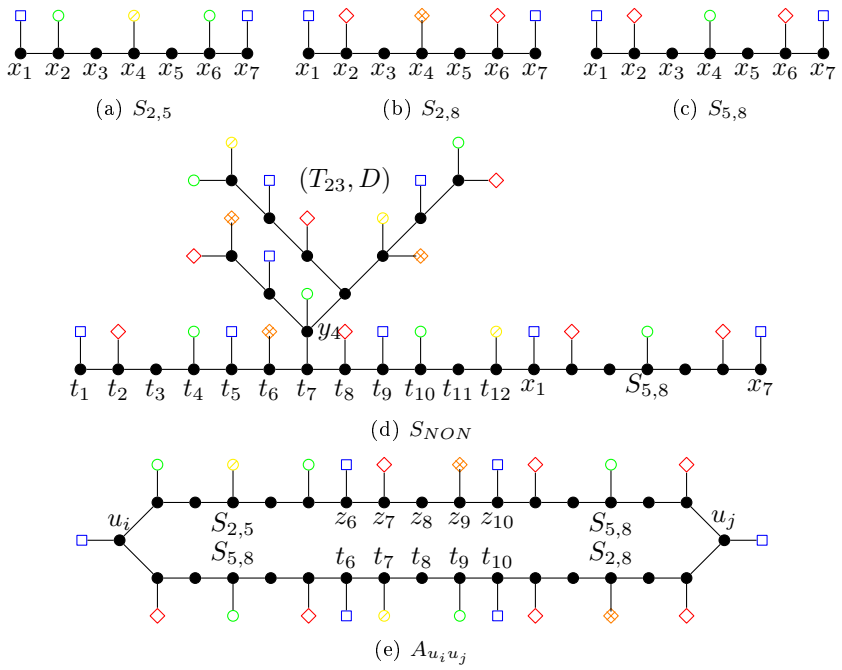


FIGURE 16 – Les structures de la construction de $f(V, L, S)$

Nous avons maintenant tous les outils pour construire la réduction de 3-SAT vers (T_{23}, D). Soit (V, L, S) une instance de 3-SAT. On construit le graphe sommet-colorié $f(V, L, S)$. de la façon suivante :

— Pour chaque littéral $l \in L$, $f(V, L, S)$ contient le sommet Noir v_l adjacent à une feuille Bleue.

— Pour chaque variable $x \in V$. Les sommets v_x et $v_{\neg x}$ sont reliés par une structure S_{NON}.

— Pour chaque clause $c = \{l_p, l_q, l_r\} \in S$, $f(V, L, S)$ contient les trois sommets Noirs v_{c,l_p}, v_{c,l_q} et v_{c,l_r}, adjacents à une feuille Bleue. De plus v_{l_p} (respectivement v_{l_q} et v_{l_r}) sont reliés à v_{c,l_p} par une structure $S_{5,8}$ (respectivement v_{c,l_q} et v_{c,l_r}). Enfin les sommets v_{c,l_p}, v_{c,l_q} et v_{c,l_r} sont reliés par les structures $A_{v_{c,l_p} v_{c,l_q}}$, $A_{v_{c,l_q} v_{c,l_r}}$ et $A_{v_{c,l_r} v_{c,l_p}}$.

Le graphe sommet-colorié ainsi obtenu est $f(V, L, S)$.

Théorème 20. *$f(V, L, S)$ admet un homomorphisme tropical vers (T_{23}, D) si et seulement si il existe une évaluation $e : L \to \{Vrai, Faux\}$, tel que pour tout $x \in V$, $e(v) \neq e(\neg v)$ et pour tout $\{l_p, l_q, l_r\} \in S$, $Vrai \in e(\{l_p, l_q, l_r\})$.*

Démonstration. Supposons que $f(V, L, S)$ admet un homomorphisme tropical h vers (T_{23}, D). Pour tout $l \in L$ on définit $e(l)$ comme étant $Vrai$ si $h(v_l) = y_2$ et $Faux$ si $h(v_l) \in \{y_5, y_8\}$. Pour tout $x \in V$, v_x et $v_{\neg x}$ sont reliés par une structure

S_{NON}, donc d'après le Lemme 4, on a bien $e(v) \neq e(\neg v)$. De plus, pour tout clause $c = \{l_p, l_q, l_r\} \in S$, on a au moins un sommet parmi v_{c,l_p}, v_{c,l_q} et v_{c,l_r} qui est envoyé par h sur y_2 d'après le Lemme 5. Comme v_{c,l_p} (respectivement v_{c,l_q} et v_{c,l_r}) est relié à v_{l_p} (respectivement v_{l_q} et v_{l_r}) par une copie de $S_{5,8}$, au moins un sommet parmi v_{l_p}, v_{l_q} et v_{l_r} est envoyé par h sur y_2. Cela implique que $Vrai \in e(\{l_p, l_q, l_r\})$. e satisfait les conditions de 3-SAT.
Supposons maintenant qu'il existe une évaluation $e : L \to \{Vrai, Faux\}$, tel que pour tout $x \in V$, $e(v) \neq e(\neg v)$ et pour tout $\{l_p, l_q, l_r\} \in S$, $Vrai \in e(\{l_p, l_q, l_r\})$. On veut construire un homomorphisme de $f(V, L, S)$ vers (T_{23}, D). On commence par envoyer chaque v_l (où $l \in L$) sur y_2 si $e(l) = Vrai$ et sur y_5 sinon. Les Lemmes 4 et 5 suffisent à montrer que l'on peut étendre l'homomorphisme à tout $f(V, L, S)$. □

11 Résultat de polynomialité

11.1 Techniques

Nous allons maintenant présenter des techniques qui permettent de prouver que (H, D)-Tropical-Coloration est polynomial pour un certain (H, D).

Définition 3 (Sommet Forçant)**.** *Soit (H, D) un graphe sommet-colorié. Un sommet de (H, D) est un sommet forçant si tout ses voisins ont une couleur distincte.*

C'est un concept utile car dans tout homomorphisme tropical de (G, C) vers (H, D) contenant un sommet forçant x, si un sommet de G est envoyé sur x, alors l'image de tout ses voisins est forcé. Nous avons immédiatement l'application suivante :

Lemme 6. *Soit (H, D) un graphe sommet-colorié. Si tous les sommets de (H, D) sont forçant, alors (H, D)-Tropical-Coloration se résout en temps polynomial.*

Démonstration. On choisit n'importe quel sommet x de l'instance (G, C), et on l'envoie sur n'importe quel sommet de (H, D) de même couleur. Une fois ce choix fait, l'homomorphisme tropical, s'il existe, est entièrement déterminé pour toute la composante connexe de x. De plus, la vérification se fait en temps linéaire. Il suffit donc d'essayer toute les $O(|V(H)|)$ possibilités pour l'image de x, puis de recommencer pour chaque composante connexe de G. (G, C) admet un homomorphisme tropical vers (H, D) si et seulement si chacune de ses composantes connexes admet un homomorphisme tropical vers (H, D). □

Le lemme suivant utilise une réduction vers 2-SAT, un problème qui se résout en temps polynomial.

2-SAT
Donnés: Un ensemble de variable V. Un ensemble de littéraux $L = \{l | \exists v \in V, l = v \vee l = \neg v\}$.Un ensemble de pair de littéraux $S \subset L \times L$
Question: Existe-t-il une fonction e de L dans $\{Vrai, Faux\}$ telle que pour tout $(l_1, l_2) \in S$, $Vrai \in e(\{l_1, l_2\})$ et pour tout $v \in V$, $e(v) \neq e(\neg v)$?

Lemme 7 (2-SAT)**.** *Soient (H, D) un graphe sommet-colorié et $\{S_1, \ldots, S_k\}$ une collection d'ensembles de sommets de H, tous de taille au plus 2. Supposons que pour chaque graphe sommet-colorié admettant un homomorphisme tropical vers (H, D), il existe une partition $\mathcal{P} = P_1, \ldots, P_\ell$ des sommets de G en $\ell \leq k$ ensembles et un homomorphisme $h : (G, C) \to (H, D)$ tel que pour tout $i \in \{1, \ldots, \ell\}$, il existe un $f(i) = j \in \{1, \ldots, k\}$ tel que tous les sommets de P_i s'envoient sur des sommets de S_j. Supposons, de plus, qu'on sait calculer la partition $\mathcal{P}$ et la fonction f en temps polynomial, quitte à donner un résultat absurde quand (G, C) n'admet pas d'homomorphisme vers (H, D). Alors (H, D)-*Tropical-Coloration *se résout en temps polynomial.*

Démonstration. On réduit (H, D)-Tropical-Coloration vers 2-SAT. Pour chaque ensemble S_i, si S_i contient un seul vertex s, alors s représente la valeur $Vrai$, et si S_i contient deux sommets s et s', l'un deux représente la valeur $Vrai$ et l'autre la valeur $Faux$. On remarque que si un sommet appartient à deux ensembles S_i et S_j distincts, il est autorisé à représenter des valeurs différentes dans chacun de ces deux ensembles (par exemple la valeur $Faux$ dans l'ensemble S_i et la valeur $Vrai$ dans l'ensemble S_j).
Étant donné une instance (G, C) de (H, D)-Tropical-Coloration, on construit comme suit une formule de 2-SAT, sur l'ensemble de variables $V(G)$ qui est satisfiable si et seulement si (G, C) admet un homomorphisme tropical vers (H, D).
On commence par calculer la fonction f. On sait alors, pour chaque $x \in V(G)$, dans quel S_i se trouve $h(x)$ si (G, C) admet un homomorphisme tropical vers (H, D).
Soit xy une arête de G. Supposons que x est envoyé par h dans S_i et y est envoyé par h dans S_j. Comme x et y sont adjacents dans G, on ne peut les envoyer que sur deux sommets adjacents de S_i et S_j. Ainsi le couple (x, y) admet jusqu'à quatre destinations possible dans H. Chacune de ces destinations correspond par la relation détaillée plus haut à un couple dans l'ensemble $\{Vrai, Faux\}^2$.
Il existe une formule logique sur les variables x et y satisfaite exactement par les couples de l'ensemble $\{Vrai, Faux\}^2$ correspondants au destinations possible de (x, y). Cette formule peut être mise sous forme normale conjonctive, et on l'appellera F_{xy} dans la suite. On remarque que chaque clause de F_{xy} contient au plus deux littéraux, car F_{xy} n'utilise que les variables x et y. Soit F la formule obtenue en prenant le conjonction des F_{xy} pour toute arête xy de G.
Par construction, si la formule F est satisfiable par l'évaluation e, alors on peut construire un homomorphisme tropical de (G, C) vers (H, D) en envoyant chaque sommet x au sommet du S_i associé correspondant à la valeur de vérité de la variable x dans l'évaluation e. Il est clair, par construction, que c'est un homomorphisme valide. Si, en revanche, la formule n'est pas satisfiable, il n'y a

pas d'homomorphisme tropical h de (G, C) vers (H, D) satisfaisant la condition du lemme, et donc, il n'y a pas du tout d'homomorphisme tropical de (G, C) vers (H, D). $\square$

En corollaire du Lemme 7, on obtient le lemme suivant.

Lemme 8. *Si (H, D) est un graphe biparti sommet-colorié, où chaque couleur est utilisée au plus deux fois, alors (H, D)-*Tropical-Coloration *se résout en temps polynomial.*

Nous verrons d'autres exemples d'applications du Lemme 7 dans la section 11.2.

Lemme 9. *Soit (H, D) un graphe sommet-colorié contenant un ensemble S de sommets forçant tel que pour toute composante connexe X de $H - S$:*
(a) aucune couleur du voisinage de X, $N(X)$ n'est présente dans X, et
(b) chaque sommet de $N(X)$ est colorié avec une couleur distincte.
*Si $(H - S)$-*Liste-Coloration *se résout en temps polynomial, alors (H, D)-*Tropical-Coloration *se résout en temps polynomial.*

Démonstration. Soit $\overline{S} = V(G) \backslash S$. Soit (G, C) une instance de (H, D)-Tropical-Coloration. On suppose que (G, C) est connexe. Si ce n'est pas le cas, on applique ce qui suit à chacune de ces composantes connexes. On considère un sommet v de G avec $C(v) = i$. Alors un homomorphisme tropical de (G, C) vers (H, D) doit envoyer v sur un sommet de couleur i. Pour chaque choix possible d'image pour v, c'est à dire chaque sommet de couleur i, nous allons construire une instance de $(H - S)$-Liste-Coloration. Pour construire cette instance, nous allons, dans un premier temps, partitionner $V(G)$ en deux ensembles : l'ensemble V_S qui contient les sommets qui doivent être envoyés dans S, dont on détermine l'image par la même occasion, et l'ensemble $V_{\overline{S}}$ qui contient les sommets qui doivent être envoyés dans $\overline{S}$. En même temps, on déterminera pour chaque sommet de $V_{\overline{S}}$ dans quelle composante connexe de $\overline{S}$ il doit être envoyé. Ce partitionnement est effectué en appliquant une des deux procédures ci-dessous à chaque sommet dont on connaît l'appartenance à V_S ou $V_{\overline{S}}$, en commençant par v.
Cas 1 : Le sommet u est envoyé sur un sommet de S. On connaît son image x dans S. x est un sommet forçant, donc on connaît l'image des voisins de u. Si cela entre en conflit avec une information précédemment connue sur l'image d'un voisin de u, l'instance de $(H - S)$-Liste-Coloration répond simplement NON. Si il n'y a pas de conflit, comme on connaît l'image des voisins de u, on peut les classer dans V_S ou dans $V_{\overline{S}}$. On sait dans quelle composante connexe de $\overline{S}$ doivent être envoyés les sommets ainsi classés dans $V_{\overline{S}}$.
Cas 2 : Le sommet u est envoyé sur un sommet de $\overline{S}$. On connaît la composante connexe X de $\overline{S}$ dans laquelle se trouve l'image de u. Les voisins de u ne peuvent s'envoyer que sur des sommets du voisinage fermé de X, $N[X]$. Si un voisin w de u est colorié d'une couleur présente dans $N(X)$, on connaît l'image de w, qui se trouve dans S. En effet, cette couleur n'est présente qu'une seule fois dans $N[X]$ d'après les hypothèses du théorème. w

est alors classé dans V_S. Si, en revanche, w est colorié d'une couleur qui n'est pas présente dans $N(X)$, mais seulement dans X, alors on sait que l'image de w doit être dans X. w est alors classé dans $V_{\overline{S}}$. Si cela entre en conflit avec une information précédemment connue sur l'image de w, l'instance de $(H-S)$-Liste-Coloration répond simplement NON.

Fin du partitionnement. Une fois que le Cas 1 ou le Cas 2 a été appliqué à chaque sommet une fois, on peut réduire l'instance à une instance de $(H-S)$-Liste-Coloration.

On a construit autant d'instance de $(H-S)$-Liste-Coloration qu'il y a de sommets de couleur i dans (H, D), c'est à dire un $O(|V(G)|)$. (G, C) répond OUI si et seulement si au moins une de ces instances de $(H-S)$-Liste-Coloration répond OUI. □

Le lemme suivant est très similaire au Lemme 9. La différence est qu'au lieu d'identifier la frontière des composantes X à l'aide d'un sommet de couleur non-présente dans X, on l'identifie à l'aide d'un arête dont les couleurs des extrémités ne sont pas adjacentes dans X.

Lemme 10. *Soit (H, D) un graphe sommet-colorié contenant un ensemble de sommets forçant S. Soit $B = \{(x, y) \in S \times N(S) | xy \in E(H)\}$ l'ensemble des arêtes formant la frontière de S. Supposons que pour toute composante connexe X de $H - S$, les deux propriétés suivantes sont vérifiées :*
(a) pour tout $(x, y) \in B$ tels que $y \in X$, il n'y a pas d'arête dans $X \times X$ dont les extrémités sont coloriées $D(x)$ et $D(y)$, et
(b) pour tout $(x, y), (x', y') \in B$ distincts tels que $y, y' \in X$, on a $(D(x), D(y)) \neq (D(x'), D(y'))$.
Si $(H-S)$-Liste-Coloration se résout en temps polynomial, alors (H, D)-Tropical-Coloration se résout en temps polynomial.

Démonstration. La preuve est la même que pour le Lemme 9, sauf que la distinction entre V_S et $V_{\overline{S}}$ est déterminé en regardant la coloration des extrémités d'arêtes et non plus des sommets individuels. □

Les Lemmes 9 et 10 peuvent se généraliser à n'importe quelle situation où le graphe cible (H, D) contient un ensemble de sommets forçant S et que pour chaque composante connexe X de $H - S$, il y a un moyen de détecter :
(a) quand un sommet u adjacent à un sommet qui s'envoie dans X ne s'envoie pas dans X, et dans cette situation
(b) sur quel sommet de S s'envoie u.
En particulier, il est possible de trouver un ensemble de sommets forçant S tel que la condition du Lemme 9 s'applique à certaines composantes X, tandis que la condition du Lemme 10 s'applique aux autres, auquel cas la technique est applicable.

Le lemme suivant identifie certaines caractéristiques locales uniques dans un graphe sommet-colorié de manière à transformer le problème en un problème d'homomorphisme listé plus simple.

Définition 4 (Caractéristique Tropicale Unique)**.** *Une caractéristique tropicale unique d'un graphe (H, D) est d'un des types suivants :*

Type 1. Un sommet u de H tel que u est le seul sommet de (H, D) de couleur $D(u)$.

Type 2. Une arête uv de H telle que uv est la seule arête dont les extrémités sont coloriées $D(u)$ et $D(v)$, respectivement.

Type 3. Un sommet u de H tel que $N(u)$ est monochromatique dans (H, D) de couleur s, et que tout sommet colorié s dans (H, D) appartient à $N(u)$ ou n'a pas de voisin colorié $D(u)$.

Type 4. Un sommet forçant u de (H, D) tel que pour chaque paire v, w de sommets distincts dans $N(u)$, il n'existe pas de chemin $v'u'w'$ dans $H - u$ avec $D(v) = D(v')$, $D(u) = D(u')$ et $D(w) = D(w')$.

Définition 5. *Soit (H, D) un graphe sommet-colorié et S un ensemble de caractéristiques tropicales uniques de (H, D). S se partitionne en quatre ensembles $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$, où S_i est l'ensemble des caractéristiques tropicales uniques de type i dans S. On définit alors $H(S)$ comme suit : $V(H(S)) = (V(H) \cup \{u_v | u \in S_4, v \in N(u)\}) \setminus (S_1 \cup S_3 \cup S_4)$ et $E(H(S)) = (E(H[V(H(S))]) \setminus S_2) \cup \{u_v v | u \in S_4, v \in N(u)\}$.*

En d'autres termes, $H(S)$ est le graphe obtenu de H en enlevant les caractéristiques tropicales uniques de type 1, 2, et 3, et en remplaçant le voisinage fermé de chaque caractéristique tropicale unique de type 4 par des arêtes pendantes.

Lemme 11. *Soit (H, D) un graphe sommet-colorié et S un ensemble de caractéristiques tropicales uniques de (H, D). Si $(H(S))$-*Liste-Coloration *se résout en temps polynomial, alors (H, D)-*Tropical-Coloration *se résout en temps polynomial.*

Démonstration. Soit (G, C) une instance de (H, D)-Tropical-Coloration. Nous allons construire un graphe G' et associer à chacun de ses sommets une liste de sommets de $H(S)$ de telle manière qu'il existe un homomorphisme de G' vers $H(S)$ envoyant chaque sommet vers un sommet de sa liste si et seulement si il existe un homomorphisme tropical de (G, C) vers (H, D). On procède en modifiant G par étapes, en considérant les caractéristiques tropicales uniques dans S une par une.

Dans un premier temps, on peut voir l'instance (G, C) de (H, D)-Tropical-Coloration comme une instance de H-Liste-Coloration en associant à chaque sommet u de G la liste $L(u)$ des sommets de (H, D) colorié $C(u)$. Si dans la suite, on modifie la liste associé à un sommet en la liste vide, on pourra conclure qu'il n'y a pas d'homomorphisme tropical de (G, C) vers (H, D).

Pour chaque caractéristique tropicale unique u de type 1 dans S, il y a une couleur c tel que u est le seul sommet colorié par c dans (H, D). Chaque sommet de (G, C) colorié par c doit être envoyé sur u et est associé à une liste de taille au plus un. Pour chaque sommet de (G, C) colorié par c, on modifie la liste associée à chacun de ses voisins w. $L(w)$ devient $L(w) \cap N(u)$. Une fois cette modification

faite, on peut supprimer v de G, et oublier $L(v)$ sans affecter l'existence d'un homomorphisme listé de G vers H. En effet, si un homomorphisme existe, il doit envoyer chaque voisin de v sur un voisin de u. Ensuite, il n'y a plus aucun sommet de G qui peut s'envoyer sur u.

Pour chaque caractéristique tropicale unique uv de type 2 dans S, il n'existe pas d'autre arête dans (H, D) telle que la couleur de ses extrémités est $D(u)$ et $D(v)$. En conséquence, toute arête de (G, C) dont les extrémités sont coloriées $D(u)$ et $D(v)$ ne peut être envoyée que sur uv. Pour chaque arête xy de (G, C) tel que $C(x) = D(u)$ et $C(y) = D(v)$, on modifie les listes associées à x et y. $L(x)$ devient $L(x) \cap \{u\}$ et $L(y)$ devient $L(y) \cap \{v\}$. Une fois cette modification faite, on peut supprimer l'arête uv de G sans changer l'existence d'un homomorphisme listé de G vers H. En effet, si un homomorphisme listé existe, il doit envoyer x sur u et y sur v. Ensuite, il n'y a plus aucune arête de G qui peut être envoyée sur uv.

Pour chaque caractéristique tropicale unique u de type 3 dans S, $N(u)$ est monochromatique dans (H, D) de couleur c et tout sommet de couleur c ayant un voisin de couleur $D(u)$ appartient à $N(u)$. Soit v un sommet de (G, C) tel que $C(v) = D(u)$ et $N(v)$ est monochromatique de couleur c. On peut alors supposer qu'un homomorphisme listé de G dans H envoie v sur u. En effet dans tout homomorphisme listé de G dans H, si v n'est pas envoyé sur u, il est envoyé sur un sommet à distance 2 de u, et on obtient un autre homomorphisme valide en changeant seulement l'image de v en u. Pour chacun de ces sommets v, on modifie la liste de ses voisins w. $L(w)$ devient $L(w) \cap N(u)$. On peut alors supprimer v de G sans affecter l'existence d'un homomorphisme listé. En effet, si un homomorphisme listé existe, il envoie chaque voisin de v sur un voisin de u. Ensuite, il n'y a plus aucun sommet de G qui peut être envoyé sur u, puisque tous les sommets de couleur $D(u)$ ont au moins un voisin d'une autre couleur que c.

Enfin, pour chaque caractéristique tropicale unique u de type 4 dans S, pour chaque $v, w \in N(u)$, il n'y a pas d'autre chemin $v'u'w'$ dans H tel que $C(v) = D(v')$, $C(u) = D(u')$ et $C(w) = D(w')$. Chaque sommet x de (G, C) tel que $C(x) = D(u)$ et qui contient les couleurs $D(v)$ et $D(w)$ dans son voisinage ne peut être envoyé que sur u par un homomorphisme listé. Pour chacun de ces sommets x, on modifie la liste de chacun de ses voisins y. $L(y)$ devient $L(y) \cap N(u)$. Comme u est un sommet forçant, $L(y)$ est maintenant de taille au plus un. On peut maintenant supprimer x de G sans affecter l'existence d'un homomorphisme listé. En, effet, si un homomorphisme listé existe il doit envoyer chaque voisin de x sur un voisin de u. Ensuite, chaque sommet x de G qui peut être envoyé sur u n'admet qu'une seule couleur dans son voisinage, ce qui implique que si x est envoyé sur u, alors tout son voisinage est envoyé sur un seul sommet.

En conclusion, on a construit une instance de H-Liste-Coloration qui s'envoie sur H si et seulement si il existe un homomorphisme tropical de (G, C) vers (H, D). De plus, cette instance satisfait qu'aucun sommet ne peut s'envoyer sur une caractéristique tropicale unique de type 1 ou 3 dans S, aucune arête ne peut s'envoyer sur une caractéristique tropicale unique de type 2 dans S, et

tous les sommets pouvant s'envoyer sur une caractéristique tropicale unique de type 4 dans S ont un voisinage monochromatique. Il en découle facilement que cette instance s'envoie sur H si et seulement si elle s'envoie sur $H(S)$. $\square$

11.2 Application

Nous allons maintenant utilisé les lemmes de la section précédente pour démontrer que (H, D)-Tropical-Coloration est polynomial pour un certain nombre de "petits" graphes, indépendamment du coloriage D. Si le graphe H n'est pas biparti, alors il existe un coloriage D tel que (H, D)-Tropical-Coloration est NP-complet. En effet, en coloriant tous les sommets de la même couleur, (H, D)-Tropical-Coloration est simplement le problème d'homomorphisme classique H-Coloration, qui est NP-complet si H n'est pas biparti. On ne va donc s'intéresser dans cette section qu'aux graphes bipartis. De plus, dans le cas d'un graphe biparti, on a le lemme suivant.

Lemme 12. *Soit (H, D) un graphe sommet colorié avec l'ensemble de couleur S, biparti, qui est un core pour l'homomorphisme tropical. Soit $\{X, Y\}$ la bipartition de H. Soit D' le coloriage des sommets de H avec l'ensemble de couleurs $S \times \{X, Y\}$, tel que chaque sommet x dans X est colorié $(D(x), X)$ et chaque sommet y dans Y est colorié $(D(y), Y)$. Alors, (H, D)-Tropical-Coloration se résout en temps polynomial si et seulement si (H, D')-Tropical-Coloration se résout en temps polynomial.*

Démonstration. Supposons dans un premier temps que (H, D')-Tropical-Coloration se résout en temps polynomial. Soit (G, C) une instance de (H, D)-Tropical-Coloration. Si (G, C) n'est pas biparti, il n'admet pas d'homomorphisme vers (H, D), on peut donc supposer que (G, C) est biparti, avec la bipartition $\{A, B\}$. Dans tout homomorphisme de (G, C) vers (H, D), A est envoyé sur X et B sur Y, ou A est envoyé sur Y et B sur X. En supposant que A est envoyé sur X et B sur Y, on peut facilement transformer (G, C) en une instance de (H, D')-Tropical-Coloration, de même pour l'autre cas. (G, C) admet un homomorphisme tropical vers (H, D) si et seulement si une des deux instances ainsi construites admet un homomorphisme tropical vers (H, D'). Ainsi (H, D)-Tropical-Coloration se résout en temps polynomial.
Supposons maintenant que (H, D)-Tropical-Coloration se résout en temps polynomial. Soit (G, C') une instance de (H, D')-Tropical-Coloration. Encore une fois, on peut supposer que (G, C') est biparti, avec la bipartition $\{A, B\}$, que tous les sommets coloriés par une couleur de la partie X sont dans la partie A et que tous les sommets coloriés par une couleur de la partie Y sont dans la partie B, sans quoi il n'y a pas d'homomorphisme tropical de (G, C') vers (H, D'). Soit x un sommet dans la partie A, colorié (c, X). Il existe un $O(|H|)$ sommets coloriés (c, X) dans (H, D'), cibles potentielles de x. Pour chacune de ces cibles potentielles, on construit une instance de (H, D)-Tropical-Coloration, en enlevant la deuxième composante de la couleur des sommets de (G, C'), et en attachant une copie de (H, D) sur le sommet x, le sommet x

prenant la position de la cible en question dans la copie. (G, C') admet un homomorphisme tropical vers (H, D') si et seulement si au moins une des $O(|H|)$ instances ainsi construites admet un homomorphisme tropical vers (H, D). Ainsi (H, D')-Tropical-Coloration se résout en temps polynomial. □

On remarque que la construction effectuée dans cette preuve n'est pas une réduction au sens habituel. En particulier, si un des problèmes, (H, D)-Tropical-Coloration ou (H, D')-Tropical-Coloration, est NP-complet, on ne peut pas tirer de conclusion sur la NP-complétude de l'autre problème. Ceci dit lorsqu'on cherche à prouver qu'un problème d'homomorphisme tropical est polynomial, ce lemme nous indique que l'on peut supposer sans perte de généralité que les couleurs de chaque partie de la bipartition sont distinctes.

Théorème 21. *Pour tout entier k tel que $2 \leq k \leq 6$, (C_{2k}, D)-Tropical-Coloration se résout en temps polynomial, indépendamment du coloriage D.*

Démonstration. Puisque C_4-Liste-Coloration se résout en temps polynomial, (C_4, D)-Tropical-Coloration se résout en temps polynomial, indépendamment du coloriage D.

Supposons maintenant par contradiction que pour un certain $k \in \{3, 4, 5, 6\}$, il existe un coloriage D de C_{2k} tel que (C_{2k}, D)-Tropical-Coloration ne se résout pas en temps polynomial. Soit (X, Y) la bipartition de C_{2k}. On peut supposer sans perte de généralité que les ensembles de couleurs présents dans X et dans Y sont disjoints par le Lemme 12.

Supposons, dans un premier temps, que $k = 3$. Il y a trois sommets dans chaque partie de la bipartition de C_6. Si un sommet est colorié par une couleur absente du reste du graphe, le Lemme 11 implique que (C_6, D)-Tropical-Coloration se résout en temps polynomial. On peut donc supposer que chaque partie est monochromatique, mais, alors, (C_6, D) n'est pas un core, ce qui entraîne une contradiction.

Supposons que $k = 4$. Il y a quatre sommets dans chaque partie de la bipartition de C_8. Si un sommet est colorié par une couleur absente du reste du graphe, le Lemme 11 implique que (C_8, D)-Tropical-Coloration se résout en temps polynomial. On suppose donc que chaque couleur apparaît au moins deux fois. En particulier, chaque partie est coloriée avec une ou deux couleurs. Si une partie est coloriée avec seulement une couleur (disons le Bleu), alors (C_8, D) n'est pas un core car il contient comme sous-graphe induit un chemin de trois sommets dont le sommet central est Bleu et dans lequel toutes les couleurs sont présentes. Ainsi, chaque partie est coloriée à l'aide d'exactement deux couleurs, coloriant chacune exactement deux sommets. On peut alors utiliser le Lemme 8, ce qui prouve que (C_8, D)-Tropical-Coloration se résout en temps polynomial.

Supposons que $k = 5$. Par un argument similaire à celui du cas précédent, le Lemme 11, et le fait que (C_{10}, D) ne doit pas admettre d'homomorphisme tropical sur un P_3 induit, impliquent que chaque partie de la bipartition $\{X, Y\}$

est coloriée à l'aide d'exactement deux couleurs, une coloriant exactement deux sommets et l'autre exactement trois. Disons que X contient trois sommets coloriés 1 et deux sommets coloriés 2, et Y contient trois sommets coloriés a et deux sommets coloriés b.

L'ordre cyclique des couleurs de X est $1-1-1-2-2$ ou $1-1-2-1-2$ (à permutation et autres symétries près). Si cet ordre est $1-1-1-2-2$, alors le sommet de Y adjacent aux deux sommets coloriés 2 est une caractéristique tropicale unique de type 3 et le Lemme 11 implique que (C_{10}, D)-Tropical-Coloration se résout en temps polynomial. On peut donc supposer que l'ordre cyclique des couleurs de X est $1-1-2-1-2$. Par le même argument, l'ordre cyclique des couleurs de Y est $a-a-b-a-b$.

Il y a donc un unique sommet y dans Y dont les deux voisins sont coloriés 1. Si $D(y) = b$, alors le second sommet de Y colorié b est au milieu d'un chemin à trois sommets colorié $1-b-2$, une caractéristique tropicale unique de type 4, et le Lemme 11 implique que (C_{10}, D)-Tropical-Coloration se résout en temps polynomial. On suppose donc que $D(y) = a$. Par le même argument, l'unique sommet de X adjacent à deux sommets coloriés a doit être colorié 1. Ainsi, à permutation près, l'ordre cyclique des couleurs de (C_{10}, D) est $1-a-1-a-2-b-1-a-2-b$, $1-a-1-b-2-a-1-a-2-b$ ou $1-a-1-b-2-a-1-b-2-a$. Le premier et dernier cas sont les mêmes à symétrie près et le deuxième cas n'est pas un core car il admet un homomorphisme tropical sur le chemin à six sommets coloriés $a-1-b-2-a-1$, donc, l'ordre cyclique des couleurs de (C_{10}, D) est $1-a-1-a-2-b-1-a-2-b$.

Nous allons utiliser le Lemme 7 pour conclure ce cas. Dans un homomorphisme tropical vers (C_{10}, D), un sommet colorié 2 ou b ne peut être envoyé que vers deux sommets cible, de la même couleur. De même, un sommet colorié 1 adjacent à au moins un sommet colorié b, ou un sommet colorié a adjacent à au moins un sommet colorié 2, ne peut être envoyé que vers deux sommets cible partageant cette caractéristique. En revanche, un sommet colorié 1 dont tous les voisins sont coloriés a peut à priori être envoyé vers trois différents sommets de (C_{10}, D), car les trois sommets coloriés 1 dans (C_{10}, D) ont au moins un voisin colorié a. Cependant, le premier sommet x_1 dans l'ordre $1-a-1-a-2-b-1-a-2-b$ voit tous ses voisins coloriés a (il n'en a qu'un seul) être également voisin d'un autre sommet colorié 1, x_2. Si il existe un homomorphisme tropical h de (G, C) vers (C_{10}, D) envoyant un sommet $v \in G$, dont tous les voisins sont coloriés a, sur x_1, l'homomorphisme h' qui envoie v sur x_2 et tous les autres sommets u de G sur $h(u)$ est aussi un homomorphisme tropical valide de (G, C) vers (C_{10}, D). Ainsi, si il existe un homomorphisme tropical de (G, C) vers (C_{10}, D), alors il existe un homomorphisme tropical n'envoyant aucun sommet colorié 1 dont tous les voisins sont coloriés a sur x_1, et cet homomorphisme ne diffère du premier que sur ces sommets là. Le même raisonnement s'applique pour les sommets coloriés a dont tous les voisins sont coloriés 1. Nous satisfaisons donc exactement les conditions du Lemme 7 et (C_{10}, D)-Tropical-Coloration se résout en temps polynomial.

Enfin, supposons que $k = 6$. En utilisant le Lemme 11, on peut supposer

que chaque partie de la bipartition est coloriée par au plus trois couleurs qui apparaissent chacune au moins deux fois. De plus, si il y a exactement trois couleurs dans chaque partie, chaque couleur apparaît exactement deux fois et donc (C_{12}, D)-Tropical-Coloration se résout en temps polynomial d'après le Lemme 8. Si une partie est monochromatique et l'autre est coloriée par au plus deux couleurs, alors (C_{12}, D) admet un homomorphisme vers un chemin d'ordre trois induit et n'est pas un core. En conclusion, le nombre de couleurs des parties de la bipartition sont un et trois, deux et trois, ou deux et deux.

Supposons qu'une partie, X, est monochromatique, de couleur 1, et l'autre partie, Y, est colorié par trois couleurs, a, b et c, chaque couleur coloriant deux sommets. Pour que le graphe ne contienne pas de caractéristique tropicale unique de type 3, chaque sommet de couleur 1 doit voir deux couleurs distinctes dans son voisinage. Si on rajoute la condition que (C_{12}, D) doit être un core, on peut supposer sans perte de généralité que l'ordre cyclique des couleurs de (C_{12}, D) est $a - 1 - b - 1 - c - 1 - a - 1 - b - 1 - c - 1$. Dans la construction d'un homomorphisme tropical, on remarque qu'une fois que l'image d'un sommet u de couleur a, b ou c est fixée, les images des sommets à distance 2 de u sont fixées également, en effet tout sommet colorié a, b ou c dans (C_{12}, D) admet exactement un sommet colorié a, un sommet colorié b et un sommet colorié c à distance 2 ou 0. Il en découle qu'après avoir fait un choix pour un sommet colorié a, b ou c, l'éventuel homomorphisme tropical est déterminé pour toute sa composante connexe. Il n'y a que deux choix par sommet ainsi colorié, qui, de plus, sont symétriques, donc (C_{12}, D)-Tropical-Coloration se résout en temps polynomial dans le cas où une partie est monochromatique, et l'autre partie est coloriée par trois couleurs.

Supposons maintenant qu'une partie, X, est coloriée par deux couleurs, 1 et 2, et que l'autre partie, Y, est coloriée par trois couleurs, a, b et c. Il y a exactement deux sommets de chaque couleur dans Y. Si deux sommets de même couleur dans Y sont à distance 2, leur voisin commun est une caractéristique tropicale unique de type 3, on peut donc supposer que ce n'est pas le cas. Si (C_{12}, D) contient un chemin colorié $a - 1 - b - 1 - a - 1 - b$, à permutation près des couleurs, alors il contient une caractéristique tropicale unique de type 4. En effet, un sommet colorié 2 est adjacent au premier ou au dernier sommet du chemin (ou les deux), faisant apparaître le chemin $2 - a - 1$ ou $1 - b - 2$, qui est alors unique. Pour éviter les caractéristiques tropicales uniques, les voisins de chaque sommet de X sont de couleurs distinctes et pour chaque combinaison d'une couleur i de X et de deux couleurs j et k de Y, il y a exactement zéro ou deux sommets de X de couleurs i ayant pour voisins des sommets coloriés j et k.

Nous allons conclure le cas où une partie est coloriée par deux couleurs et l'autre par trois couleurs en utilisant le Lemme 7. Soit un sommet v d'un graphe sommet-colorié (G, C). Si v est colorié a, b ou c, alors tout homomorphisme tropical de (G, C) vers (C_{12}, D) ne peut envoyer v que vers deux sommets, ceux qui sont de couleur $C(v)$. Si v est colorié 1 ou 2 et est adjacent à au moins un sommet de chaque couleur a, b et c, alors il n'y a pas d'homomorphisme tropical de (G, C) vers (C_{12}, D), car il n'y a pas de sommet de degré 3 dans (C_{12}, D).

Si v est colorié 1 ou 2 et son voisinage contient exactement deux couleurs, qui se trouvent parmi a, b et c, alors tout homomorphisme tropical de (G, C) vers (C_{12}, D) ne peut envoyer v que vers un sommet de même couleur, ayant les même couleurs dans son voisinage. On a vu précédemment qu'il existe au plus deux sommets de (C_{12}, D) satisfaisant ces propriétés. Enfin, si v est colorié 1 ou 2 et son voisinage est monochrome, colorié a, b ou c, alors tout le voisinage de v sera envoyé sur un seul sommet, car il n'y a pas deux sommets à distance 2 de même couleur a, b ou c dans (C_{12}, D). En conséquence, pour chaque combinaison d'une couleur i de X et d'une couleur j de Y, il est possible de choisir au plus deux sommets de (C_{12}, D) de couleur i ayant au moins un voisin de couleur j comme représentant, de telle manière que si un homomorphisme tropical h existe de (G, C) vers (C_{12}, D), alors il existe un homomorphisme tropical qui envoie les sommets de couleur i dont le voisinage monochrome est de couleur j sur un représentant et tous les autres sommets v sur $h(v)$. On trouve ainsi les conditions d'applications du Lemme 7.

Donc, il doit y avoir exactement deux couleurs dans chaque partie. Supposons dans un premier temps qu'il y a deux sommets coloriés 1 et quatre sommets coloriés 2 dans une partie X. La partie Y est coloriée par a et b. Si les voisins des sommets coloriés 1 sont tous de la même couleur, par exemple a, alors (C_{12}, D) n'est pas un core car il admet un homomorphisme vers un chemin induit colorié $1 - a - 2 - b$. On suppose donc que (C_{12}, D) contient le chemin $a - 1 - b$. Pour éviter les caractéristiques tropicales uniques de type 3, les sommets coloriés 1 doivent être à distance au moins 4 l'un de l'autre. (C_{12}, D) contient donc le chemin $2 - a - 1 - b - 2$. Pour éviter que $a - 1 - b$ forme une caractéristique tropicale unique de type 4, (C_{12}, D) doit contenir deux versions du chemin $2 - a - 1 - b - 2$. A symétrie près, il reste deux cas pour la position des sommets coloriés 1 : $2 - a - 1 - b - 2 - . - 2 - . - 1 - . - 2 - .$ ou $2 - a - 1 - b - 2 - . - 1 - . - 2 - . - 2 - .$ (où les points peuvent être de couleur a ou b). Le premier cas doit être $2 - a - 1 - b - 2 - . - 2 - a - 1 - b - 2 - .$, sans quoi (C_{12}, D) n'est pas un core. Peut importe le coloriage des deux sommets restants, on peut appliqué le Lemme 9 en utilisant l'union des voisinages fermés des sommets coloriés 1 comme ensemble S de sommets forçant. De même, le second cas doit être $2 - a - 1 - b - 2 - a - 1 - b - 2 - . - 2 - .$, sans quoi (C_{12}, D) n'est pas un core. On peut alors appliqué le Lemme 10 en utilisant le chemin $1 - b - 2 - a - 1$ comme ensemble S de sommets forçant. Dans les deux cas (C_{12}, D)-Tropical-Coloration se résout en temps polynomial.

Pour finir, on suppose qu'il y a exactement trois sommets de chaque couleur dans chaque partie. Il y a trois configurations possibles dans chaque partie, à symétries et permutations des couleurs près : $1-1-1-2-2-2$, $1-1-2-2-1-2$ ou $1 - 2 - 1 - 2 - 1 - 2$. Si une partie, X, est dans la première configuration les deux sommets de Y dont le voisinage n'est pas monochrome doivent être de la même couleur a, sans quoi on a deux caractéristiques tropicales uniques de type 4. Mais alors, les trois sommets de Y de couleur b ont leur voisinage monochrome. Un de ces sommets est une caractéristique tropical unique de type 3. On suppose maintenant qu'aucune des deux parties n'est dans la première configuration. Supposons qu'une partie, X, est dans la deuxième configuration.

Si les deux sommets de l'autre partie, Y, ayant un voisinage monochrome sont coloriés de la même couleur a, alors (C_{12}, D) contient un unique chemin $1 - x - 2$ qui forme une caractéristique tropicale unique de type 4. Sinon, Y est nécessairement dans la deuxième configuration et l'ordre cyclique des couleurs est $1 - a - 1 - a - 2 - b - 2 - . - 1 - . - 2 - b$, à symétrie et permutation des couleurs près. On peut alors appliquer le Lemme 7 d'une manière similaire à la preuve pour C_{10}. Enfin, si on suppose que les deux parties sont dans la troisième configuration, tous les sommets sont forçant, et on peut appliquer le Lemme 6. Cela conclut la preuve. □

Théorème 22. *Pour tout entier k tel que $k \leq 11$, pour tout arbre H d'ordre k, (H, D)-*Tropical-Coloration *se résout en temps polynomial, indépendamment du coloriage D.*

Démonstration. Soit (H, D) un arbre sommet-colorié. Supposons (H, D)-Tropical-Coloration est NP-complet. Le Théorème 12 implique que H contient un graphe de la Table 2 comme sous-graphe induit. Or la Table 2 ne contient qu'un arbre, d'ordre 10, G_1. Ainsi, H contient G_1 comme sous-graphe induit. H est d'ordre au moins 10.
Les sommets de G_1 sont nommés suivant la convention utilisée dans la Table 2. Ainsi le sommet de degré 3 est y_1, et il en sort trois branches, dont les sommets sont appelés, dans l'ordre, y_1, x_1, y_2 et x_2 pour la première branche, y_1, x_3, y_3 et x_4 pour la deuxième branche et y_1, x_5, y_4 et x_6 pour la dernière branche. Cette notation est représentée ci dessous :

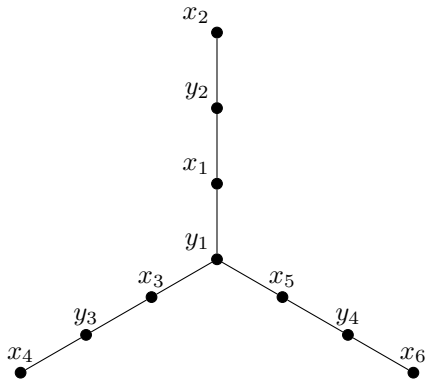


Figure 17 – Arbre G_1

Soit (X, Y) la bipartition de H. On peut supposer sans perte de généralité que les ensembles de couleurs présents dans X et dans Y sont disjoints par le Lemme 12. On suppose de plus que X est la partie contenant x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 et x_6 et que Y est la partie contenant y_1, y_2, y_3 et y_4.
Supposons que H est d'ordre 10 et donc que $H = G_1$ et que D colorie y_1 de la couleur a. Pour éviter les caractéristiques tropicales uniques de type 1, D colorie un autre sommet de la couleur a. Par symétrie, on peut supposer que

y_2 est colorié a. Les deux voisins de y_2, x_1 et x_2, ne peuvent pas être coloriés de la même couleur, sans quoi (H, D) n'est pas un core. Sans perte de généralité, x_1 et x_2 sont coloriés par les couleurs 1 et 2 respectivement. Pour éviter les caractéristiques tropicales uniques de type 2, il doit exister une autre arête que y_2x_2 dont les extrémités sont coloriées a et 2. Cependant, si un voisin de y_1 est colorié par la couleur 2, (H, D) n'est pas un core. En conséquence, y_3x_4 ou y_4x_6 voit ses extrémités coloriées par les couleurs a et 2. Par symétrie, on peut supposer que x_4 est colorié par la couleur 2 et y_3 est colorié par la couleur a. x_3 ne peut pas être colorié 1 ou 2, car (H, D) ne serait alors pas un core. En conséquence, x_3 est colorié par une troisième couleur, 3. Pour le moment, la branche $y_1x_1y_2x_2$ est coloriée $a1a2$ et la branche $y_1x_3y_3x_4$ est coloriée $a3a2$. Pour éviter les caractéristiques tropicales uniques de type 1, y_4 doit être colorié a. Il reste x_5 et x_6 dont le coloriage n'est pas déterminé, mais ils doivent être coloriés 1 et 3 pour éviter les caractéristiques tropicales uniques de type 1. Dans les deux cas, le graphe (H, D) n'est pas un core. C'est une contradiction, H est d'ordre au moins 11.

Supposons que H est d'ordre 11. Il y a quatre arbres non-isomorphiques d'ordre 11 contenant G_1, en fonction de l'endroit où on attache le sommet supplémentaire v. Par symétrie, v peut être adjacent à y_1, x_1, y_2 ou x_2. Si on suppose que v est adjacent à y_1, alors on peut appliquer la preuve du cas où H est d'ordre 10 pour trouver une contradiction.

Supposons que v est adjacent à x_1 et que D colorie y_1 de la couleur a. x_1 et x_2 doivent être coloriés par des couleurs distinctes, sans quoi (H, D) n'est pas un core. Sans perte de généralité, on suppose que x_1 est colorié par 1 et x_2 est colorié par 2. Le sommet v doit être d'une couleur différente de y_1 et de y_2, sans quoi (H, D) n'est pas un core. v est colorié par b. De plus, y_2 n'est pas colorié par b.

Supposons dans un premier temps que y_2 est colorié par la couleur c. Alors, par symétrie, y_3 est colorié par a et y_4 est colorié par c, sans quoi il y a une caractéristique tropicale unique dont l'ablation laisserait un graphe ne contenant pas G_1 comme sous-graphe induit. Pour éviter les caractéristiques tropicales uniques de type 2, il doit y avoir au moins deux arêtes dont les extrémités sont coloriées 1 et c et deux arêtes dont les extrémités sont coloriées 2 et c. En conséquence, x_5 et x_6 doivent être coloriés 1 et 2. Si x_5 est colorié 1 et x_6 est colorié 2, alors (H, D) n'est pas un core, donc x_5 est colorié 2 et x_6 est colorié 1. Encore une fois, il doit y avoir au moins deux arêtes dont les extrémités sont coloriées 1 et a et deux arêtes dont les extrémitées sont coloriés 2 et a. En conséquence, x_3 et x_4 doivent être coloriés 1 et 2. Dans les deux cas (H, D) n'est pas un core.

On sait maintenant que y_2 est colorié par la couleur a. Pour que (H, D) soit un core, y_1 ne peut pas avoir de voisin colorié 2. Pourtant, pour éviter les caractéristiques tropicales uniques de type 2, (H, D) doit contenir au moins deux arêtes dont les extrémités sont coloriées a et 2. On peut donc supposer sans perte de généralité que y_3 est colorié a et x_4 est colorié 2. Si x_3 est colorié par 1 ou 2, alors (H, D) n'est pas un core. On suppose donc que x_3 est colorié par 3. Pour éviter les caractéristiques tropicales uniques de type 1, x_5 et x_6 sont coloriés 1 et 3. Si y_4 est colorié par a, alors (H, D) n'est pas un core, donc y_4 est colorié

par b. Mais alors, il y a une unique arête dont les extrémités sont coloriées par b et 3 dans le graphe, et on peut appliquer le Lemme 11, ce qui entraine une contradiction.
Supposons maintenant que v est adjacent à y_2 et que D colorie y_1 de la couleur a. v, x_1 et x_2 doivent être coloriés de trois couleurs distinctes, sans quoi (H, D) n'est pas un core. x_1 est colorié par 1, x_2 est colorié par 2 et v est colorié par 3.
Supposons dans un premier temps que y_2 est colorié par a. Pour éviter les caractéristiques tropicales uniques de type 3, avec le chemin colorié $a - 1 - a$, il faut au moins un autre sommet colorié par a, y_3 ou y_4. Pour éviter les caractéristiques tropicales uniques de type 1, à la fois y_3 et y_4 sont coloriés par a. Y est entièrement colorié par a. Si X est colorié par les trois couleurs 1, 2 et 3, alors (H, D) n'est pas un core, puisqu'il s'envoie sur l'étoile à trois branches centrée sur y_2. Il doit donc y avoir une quatrième couleur, 4, dans X. Pour éviter les caractéristiques tropicales uniques de type 1, $\{x_3, x_4, x_5, x_6\}$ doit contenir au moins deux sommets coloriés par 4 et un sommet colorié par 1. A symétrie près, les seuls coloriages possibles tel que (H, D) est un core voient x_3 colorié par 1, et x_4 et x_6 colorié par 4. Si x_5 est colorié par 1 ou 4, alors (H, D) n'est pas un core. Si x_5 est colorié 2 ou 3, alors $x_3y_3x_4$, colorié $1 - a - 4$ forme une caractéristique tropicale unique de type 4.
On sait maintenant que y_2 n'est pas colorié par a. y_2 est colorié par b. Pour éviter les caractéristiques tropicales uniques de type 1 et par symétrie, y_3 est colorié par a et y_4 est colorié par b. Pour éviter que $y_1x_1y_2$, colorié $a - 1 - b$ forme une caractéristique tropicale unique de type 4, x_5 doit être colorié par 1. Pour éviter que le voisinage de y_2 forme une caractéristique tropicale unique de type 4, x_6 doit être colorié par 2 ou 3. Dans ce cas, (H, D) n'est pas un core.
Pour finir, supposons que v est adjacent à x_2 et que D colorie y_3 par a. x_3 et x_4 doivent être coloriés de différentes couleurs, sans quoi (H, D) n'est pas un core. x_3 est colorié par 1 et x_4 est colorié par 2. Pour éviter que y_3 soit une caractéristique tropicale unique de type 4, il faut un autre sommet colorié a adjacent à des sommets coloriés 1 et 2. De plus, si y_1 est colorié par a et x_1 ou x_5 sont coloriés par 2, alors (H, D) n'est pas un core. Cela nous laisse donc deux cas : Soit y_2 est colorié par a adjacent à des sommets coloriés par 1 et 2, ou ce n'est pas le cas et y_4 est colorié par a adjacent à des sommets coloriés par 1 et 2.
Dans le premier cas, y_2 est colorié par a. Si x_1 est colorié par 1 et x_2 par 2, alors (H, D) n'est pas un core, donc x_1 est colorié par 2 et x_2 par 1. y_1 est alors colorié b, sans quoi (H, D) n'est pas un core. x_5 et x_6 ne peuvent pas être coloriés par la même couleur, sans quoi (H, D) n'est pas un core. En conséquence, X ne peut contenir que deux couleurs. En effet, une troisième couleur ne colorierait qu'un sommet parmi x_5 et x_6 qui formerait alors une caractéristique tropicale unique de type 1. x_5 et x_6 sont donc de couleur 1 et 2. y_4 est de couleur a ou b, sans quoi y_1 ou y_4 formerait une caractéristique tropicale unique de type 1. Dans toutes les colorations encore possibles de x_5, y_4 et x_6, (H, D) n'est pas un core.
Dans le second cas, y_4 est colorié par a. Si x_5 est colorié par 1 et x_6 par 2, alors (H, D) n'est pas un core, donc x_5 est colorié par 2 et x_6 par 1. y_1 est alors

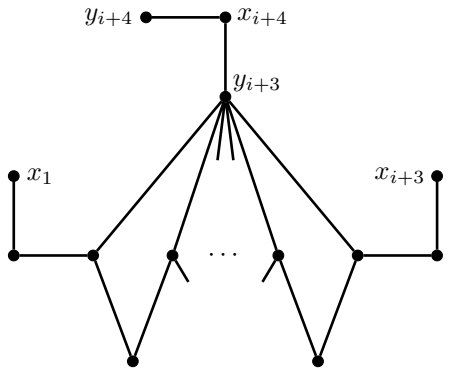
colorié b, sans quoi (H, D) n'est pas un core. y_2 est de couleur a ou b, sans quoi y_1 ou y_2 formerait une caractéristique tropicale unique de type 1. De plus, si y_2 est colorié par a, alors v est colorié par b, et x_1 et x_2 doivent être de couleur différente, sans quoi (H, D) n'est pas un core. Pour éviter les caractéristiques tropicales uniques de type 1, x_1 et x_2 doivent être coloriés par 1 et 2, ce qui nous ramène au premier cas. Si, en revanche, y_2 est colorié par b, alors v ne peut pas être colorié par b, sans quoi (H, D) n'est pas un core, et donc le sommet x_1 est une caractéristique tropicale unique de type 3. C'est une contradiction, H est d'ordre au moins 12.

□

Théorème 23. *Pour chaque graphe H appartenant à une des six familles $\mathcal{T}$, $\mathcal{W}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ et $\mathcal{G}$ décrite dans la Table 1, (H, D)-*Tropical-Coloration *se résout en temps polynomial, indépendamment du coloriage D.*

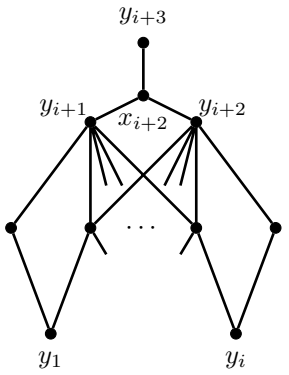
Démonstration. On suppose par contradiction que pour un certain entier i et une famille $\mathcal{F}$ parmi $\mathcal{T}$, $\mathcal{W}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ et $\mathcal{G}$, il existe un problème (F_i, D)-Tropical-Coloration qui ne se résout pas en temps polynomial.

Famille $\mathcal{T}$. On suppose que x_{i+4} est colorié par 1 et que y_{i+3} est colorié par a. Alors, y_{i+4} ne peut pas être colorié par a, sans quoi (H, D) n'est pas un core, donc il est colorié par b. Pour éviter une caractéristique unique tropicale de type 3 colorié $a - 1 - b$, il doit y avoir un autre chemin P_3 colorié $a - 1 - b$ dans le graphe. Mais pour que le graphe soit un core, le sommet central, colorié 1, de ce chemin ne peut pas être adjacent à y_{i+3}. Cependant, tous les sommets de X sont adjacent à y_{i+3}, à part x_1 et x_{i+3}, qui sont tout les deux de degrès 1, et ne peuvent donc pas être sommet central d'un P_3 colorié $a - 1 - b$.

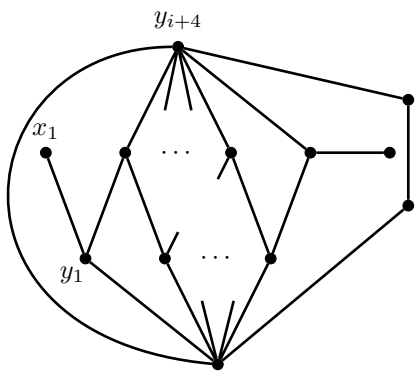


Famille $\mathcal{W}$. Supposons que y_{i+1} est colorié par a et que x_{i+2} est colorié par 1. y_{i+3} ne peut pas être colorié a, sans quoi (H, D) n'est pas un core, on peut donc supposer que y_{i+3} est colorié par b. y_{i+2} ne peut pas être colorié b, sans quoi (H, D) n'est pas un core, donc y_{i+2} est colorié par a ou c.
Supposons dans un premier temps que y_{i+2} est colorié par c. Pour éviter les

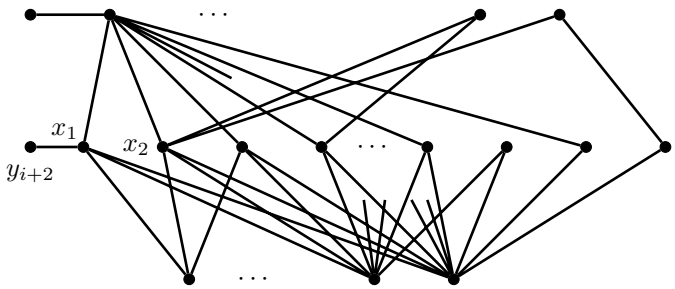
caractéristiques tropicales uniques de type 1, il doit y avoir un autre sommet colorié par a. Parmi tous les sommets de Y dont la couleur n'est pas encore déterminée, le seul qui peut être colorié par a est y_i. En effet, si un autre sommet de Y est colorié par a, (H, D) n'est pas un core. De même, y_1 doit être colorié par c. Pour éviter les caractéristiques tropicales uniques de type 2, le graphe doit contenir au moins deux arêtes dont les extrémités sont coloriées 1 et b, l'arête $x_{i+2}y_{i+3}$ et une autre arête e. On vérifie facilement que quelle que soit cette arête e, (H, D) n'est pas un core.
On sait maintenant que y_{i+2} doit être colorié par a. Aucun autre sommet de Y n'est colorié par a, sans quoi (H, D) n'est pas un core. Soit un graphe source sommet-colorié (G, C). Soit A l'ensemble des sommets de (G, C) colorié par a. Si il existe un homomorphisme tropical de (G, C) vers (H, D), alors il existe un homomorphisme tropical de (G, C) vers (H, D) qui envoie toute les composantes connexes de $(G - A, C)$ colorié uniquement par 1 et b vers les sommets x_{i+2} et $yi + 3$. Sachant cela, on peut contracter chacune de ces composantes connexes en un seul sommet d'une nouvelle couleur ω, et d'une manière similaire, contracter x_{i+2} et $yi + 3$ en un seul sommet de couleur ω. Cette transformation ne changera pas l'existence ou la non-existence d'un homomorphisme tropical. En revanche, le graphe cible obtenu après la transformation ne contient plus aucun des graphes de la table 2. C'est une contradiction.



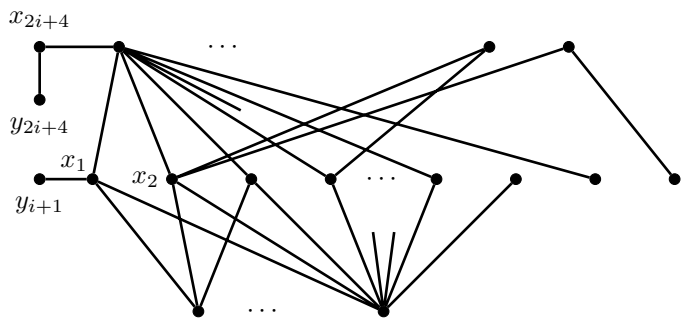
Famille$\mathcal{D}$. Supposons y_{i+4} est colorié par a. Pour éviter les caractéristiques tropicales uniques de type 1, il y a un autre sommet colorié par a. Parmi tous les sommets de Y dont la couleur n'est pas encore déterminée, le seul qui peut être colorié par a est y_1. En effet, si un autre sommet de Y est colorié par a, (H, D) n'est pas un core. x_1 est colorié par 1. Pour éviter les caractéristiques tropicales uniques de type 1, il y a un autre sommet colorié par 1. Quel que soit ce sommet, (H, D) n'est pas un core.



Famille $\mathcal{M}$. Supposons x_2 est colorié par la couleur 1 et y_{i+2} est colorié par la couleur a. Pour éviter les caractéristiques tropicales uniques de type 1, il y a un autre sommet de X colorié par 1. Mais x_2 est adjacent à tous les sommets de Y sauf y_{i+2} qui n'est adjacent qu'à x_1. Ainsi, parmi tous les sommets de X dont la couleur n'est pas encore déterminée, le seul qui peut être colorié par 1 est x_1. En effet, si un autre sommet de X est colorié par A, (H, D) n'est pas un core. x_1 est colorié par 1. Pour éviter les caractéristiques tropicales uniques de type 1, il y a un autre sommet de Y colorié par a. Quelque soit ce sommet, (H, D) n'est pas un core.

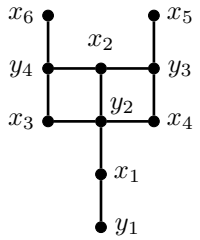


Famille $\mathcal{N}$. Supposons x_2 est colorié par la couleur 1. Pour éviter les caractéristiques tropicales uniques de type 1, il y a un autre sommet de X colorié par 1. Mais x_2 est adjacent à tous les sommets de Y sauf y_{i+1} et y_{2i+4} qui ne sont adjacents qu'à x_1 et x_{2i+4} respectivement. Ainsi, parmi tous les sommets de X dont la couleur n'est pas encore déterminée, les seuls qui peuvent être coloriés par 1 sont x_1 et x_{2i+4}. Que x_1 ou x_{2i+4} ou les deux, soient coloriés par 1, les arêtes x_1y_{i+1} et $x_{2i+4}y_{2i+4}$ ne doivent pas être des caractéristiques tropicales uniques de type 2. Au moins une de ces deux arêtes a ses extrémités coloriées par 1 et a. Si les deux arêtes ont leurs extrémités coloriées par 1 et a, alors (H, D) n'est pas un core. Sinon, un sommet de Y adjacent à x_2 est colorié par a, et le graphe (H, D) n'est pas un core.

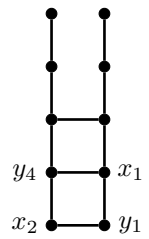


$\mathcal{G}_1$. Le cas du graphe G_1 a déjà été étudié dans la preuve du Théorème 22.

$\mathcal{G}_2$. Supposons que y_2 est colorié par la couleur a. y_1 ne peut pas être colorié par a, ou bien (H, D) ne serait pas un core. y_1 est colorié par la couleur b. Pour éviter les caractéristiques tropicales uniques de type 1, y_3 et y_4 doivent être coloriés par a et b. Par symétrie, on peut supposer que y_3 est colorié par a et y_4 est colorié par b. x_5 est colorié par la couleur 1. Alors x_1, x_2, x_3 et x_4 ne peuvent pas être coloriés par 1, ou bien (H, D) ne serait pas un core. L'arête x_5y_3 a ses extrémités coloriées a et 1. C'est une caractéristique tropicale unique de type 2. Le Lemme 11 produit une contradiction.



$\mathcal{G}_3$. Pour éviter les caractéristiques tropicales uniques de type 1, il y a au plus deux couleurs dans chaque partie de la bipartition. Si x_1 et x_2 sont de la même couleur, alors (H, D) n'est pas un core. De même, si y_1 et y_4 sont de la même couleur, alors (H, D) n'est pas un core. Mais si x_1 et x_2 sont de deux couleurs différentes, et y_1 et y_4 sont de deux couleurs différentes, alors x_1, y_1, x_2 et y_4 induisent un sous-graphe biparti complet contenant toutes les couleurs, ce qui implique que (H, D) n'est pas un core.



□

Théorème 24. *Pour tout graphe biparti H d'ordre au plus 8, (H, D)-*Tropical-Coloration *se résout en temps polynomial, indépendamment du coloriage D.*

Démonstration. Les seuls graphes d'ordre au plus 8 de la Table 1 sont les cycles C_6 et C_8. D'après le Théorème 11, si H est d'ordre au plus 8 et ne contient pas de C_6 ou C_8 induit, alors (H, D)-Tropical-Coloration se résout en temps polynomial, indépendamment du coloriage D. De plus, si H est d'ordre au plus 8 et contient un C_8 induit, alors $H = C_8$, et on a vu dans le Théorème 21 que (H, D)-Tropical-Coloration se résout alors en temps polynomial, indépendamment du coloriage D (de même si $H = C_6$). Il ne nous reste donc pour prouver le théorème qu'a vérifier que (H, D)-Tropical-Coloration se résout en temps polynomial, indépendamment du coloriage D, quand H est biparti d'ordre 7 ou 8 et contient un C_6 induit.
Soit (H, D) un graphe biparti sommet-colorié d'ordre 7 ou 8 contenant un C_6 induit. Supposons dans un premier temps que la partie X de la bipartition est d'ordre 3. Ainsi chaque sommet $x \in X$ appartient à chacun des C_6 induit de H et les sommets de X ne peuvent pas être des caractéristiques tropicales uniques, sans quoi (H, D) n'est pas un core. En particulier, X est monochromatique, colorié par a. Si Y contient au plus deux couleurs, alors (H, D) n'est pas un core, car il contient un sommet colorié a dont le voisinage contient toutes les couleurs de Y. Si Y est d'ordre 4 et contient au moins 3 couleurs, il existe au plus deux sommets qui ne sont pas des caractéristiques tropicales uniques et le Lemme 11 conclut. De même si Y est d'ordre 5 et contient au moins 4 couleurs. Il reste le cas où Y est d'ordre 5 et contient 3 couleurs. Si il existe un sommet colorié a dont le voisinage contient les trois couleurs de Y, alors (H, D) n'est pas un core. On suppose donc que le voisinage de chaque sommet de X contient au plus deux couleurs. Soit y_1, y_2 et y_3 trois sommets de Y appartenant à un C_6 induit de H. Si y_1, y_2 et y_3 sont de trois couleurs distinctes, chaque sommet de X est adjacent à exactement deux couleurs, et (H, D) n'est pas un core puisqu'il admet un homomorphisme tropical vers le C_6 induit contenant y_1, y_2 et y_3. Si y_1, y_2 et y_3 sont coloriés par la couleur 1, alors (H, D) n'est pas un core puisqu'il admet un homomorphisme tropical vers un chemin colorié $2 - a - 1 - a - 3$. Enfin, si y_1 est colorié pas 1, et y_2 et y_3 sont colorié par 2, alors les sommets coloriés par 3 ne peuvent avoir comme seul voisin le voisin commun de y_2 et y_3 et (H, D) n'est pas un core puisqu'il admet un homomorphisme tropical vers un chemin colorié $1 - a - 2 - a - 3$. Dans tout les cas où X est d'ordre 3, (H, D)-

Tropical-Coloration se résout en temps polynomial, indépendamment du coloriage D.
Il reste le cas où H est biparti d'ordre 8 de bipartition (X, Y) où $|X| = |Y| = 4$. Si il y a au moins trois couleurs dans une partie, alors il y a au plus deux sommets de cette partie qui ne sont pas une caractéristique tropicale de type 1, ce qui n'est pas suffisant pour former un C_6 et le Lemme 11 conclut. Chaque partie de la bipartition contient au plus deux couleurs. Si une partie contient exactement une couleur, alors il existe un chemin de longueur 3 contenant toute les couleurs, et (H, D) n'est pas un core. Chaque partie de la bipartition contient exactement deux couleurs. Si chaque partie contient exactement deux sommets de chaque couleur, alors on peut appliquer le Lemme 8. On peut donc supposer que la partie X contient trois sommets de couleurs a, x_1, x_2 et x_3 et un sommet de couleur b, x_4. Comme x_4 est une caractéristique tropicale unique de type 1 le Lemme 11 conclut si $H - x_4$ n'admet pas de C_6 induit. On peut donc supposer qu'il existe un C_6 induit contenant x_1, x_2 et x_3. Soit y_1, y_2 et y_3 des sommets de Y tel que $x_1y_1x_2y_2x_3y_3$ soit un C_6. Soit y_4 le sommet restant de Y. Si y_1, y_2 et y_3 ont la même couleur, alors (H, D) n'est pas un core. On peut donc supposer que y_1 et y_2 sont coloriés par la couleur 1 et y_3 est colorié par la couleur 2. Si y_4 est colorié par 1, alors y_3 et x_4 sont des caractéristiques tropicales uniques de type 1, et le Lemme 11 conclut, à moins que $x_1y_1x_2y_2x_3y_4$ est un cycle, auquel cas (H, D) n'est pas un core. On peut donc supposer que y_4 est colorié par 2. Si x_4 est adjacent à y_3 et à au moins un des deux sommets y_1 et y_2, alors le graphe contient un graphe biparti complet contenant toutes les couleurs et (H, D) n'est pas un core. Si x_4 n'est pas adjacent à y_1 ou à y_2, alors (H, D) n'est pas un core. Si x_4 est adjacent à y_1 et à y_2, alors (H, D) n'est pas un core. On peut donc supposer sans perte de généralité que x_4 est adjacent à y_1, mais pas à y_2 ou y_3. Si y_4 n'est pas adjacent à x_3, alors (H, D) n'est pas un core. De même, si y_4 est adjacent à x_1, alors (H, D) n'est pas un core. Si y_4 est adjacent à x_2, alors (H, D) admet un homomorphisme tropical vers les quatre sommets x_4, y_1, x_2 et y_4, et n'est donc pas un core. On peut donc supposer sans perte de généralité que y_4 est adjacent à x_3, mais pas à x_1 ou x_2. Si x_4 et y_4 ne sont pas adjacent, alors (H, D) n'est pas un core. Il ne reste qu'un graphe sommet-colorié possible (H, D) à vérifier. On remarque que y_3 est une caractéristique tropicale unique de type 3 et y_4 est une caractéristique tropicale unique de type 4. Le Lemme 11 permet donc de conclure ce dernier cas, et donc la preuve. □

12 Comment réduire le nombre de couleurs ?

On a vue dans la Section 7 que tous les problèmes de satisfaction de contraintes sont polynomialement équivalents à un problème d'homomorphisme tropical vers un graphe biparti et dichromatique. Pourtant, au vue des résultats précédents, on connaît peu de "petits" graphes bipartis dichromatiques (H, D) tels que (H, D)-Tropical-Coloration soit NP-complet.
Une variante de la preuve du Théorème 18, expliqué dans la Remarque 3, donne un coloriage D de C_{54} tel que (C_{54}, D)-Tropical-Coloration est NP-

complet.
Une autre manière de trouver un graphe cible biparti dichromatique (H, D) tel que (H, D)-Tropical-Coloration soit NP-complet est d'utiliser directement la preuve du Théorème 9, qui transforme n'importe quel problème de satisfaction de contrainte en un problème d'homomorphisme tropical polynomialement équivalent. En revanche, cette méthode donne des graphes cibles qu'il est difficile de qualifier de "petit". Par exemple, le graphe biparti dichromatique associé à 3-SAT contient 1640 sommets.
Enfin la variante Biparti Bicolore de la transformation utilisée dans la preuve du Théorème 16 permet de transformer n'importe quel problème d'homomorphisme de graphe orienté en un problème d'homomorphisme tropical vers un graphe biparti dichromatique. Cette méthode donne, au mieux, des graphes biparti dichromatique (H, D) d'ordre 14 tel que (H, D)-Tropical-Coloration soit NP-complet, présent sur la Figure 4. Cependant, cette méthode ne préserve pas bien la topologie du graphe, puisqu'elle ajoute un sommet de gros degrés au graphe, à distance au plus 3 de tout autre sommet.
Dans cette section, nous allons présenté une technique qui donne de relativement petits graphes bipartis dichromatiques (H, D) tels que (H, D)-Tropical-Coloration soit NP-complet. Plus précisément, pour tout graphe biparti (H, D) tel que (H, D)-Tropical-Coloration soit NP-complet, on va construire un graphe biparti dichromatique (H', D') relativement petit, tel qu'il existe une réduction de (H, D)-Tropical-Coloration vers (H', D')-Tropical-Coloration. De plus cette méthode préserve assez bien la topologie du graphe original. On l'utilisera ensuite pour trouver un arbre dichromatique (H, D) tel que (H, D)-Tropical-Coloration soit NP-complet.

Définition 6 (Suite de Fibonacci)**.** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Fib(n)$ est défini comme suit :*

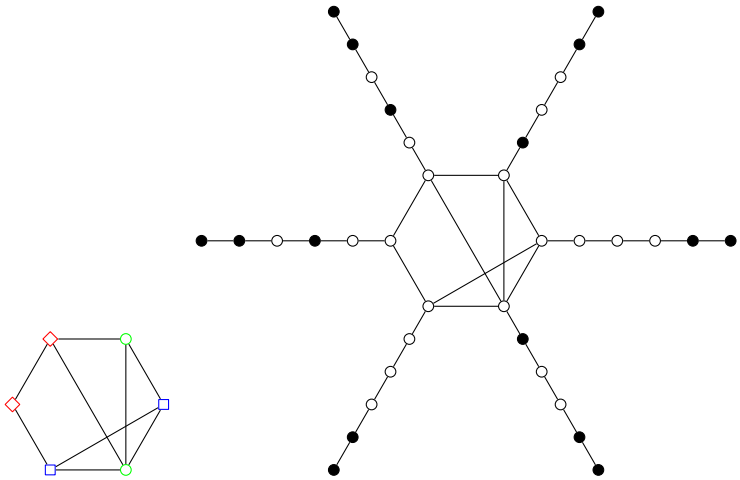
- $Fib(0) = Fib(1) = 1$
- *Pour $i \geq 2$, $Fib(i) = Fib(i-1) + Fib(i-2)$*

Théorème 25. *Soit un graphe sommet-colorié (H, D) à n sommets, m arêtes et c couleurs. Soit k un entier naturel tel que $Fib(k) \geq c$. Il existe un graphe sommet-colorié dichromatique (H', D') à $n \times (3+k)$ sommets et $m + n \times (2+k)$ arêtes, tel qu'il existe une réduction de (H, D)-Tropical-Coloration vers (H', D')-Tropical-Coloration. De plus, si H est biparti, alors H' est biparti.*

Démonstration. Avant de prouver ce théorème, on va définir la construction de (H', D'). Soit k fixé. On définit les $Fib(k)$ chemins $P_k(i)$ de longueur $k+2$, avec $0 \leq i < Fib(k)$ comme suit. Les sommets de $P_k(i)$ sont x_0, x_1, ... x_{k+2} dans l'ordre du chemin. x_0 et x_k sont coloriés par le couleur B. x_{k+1} et x_{k+2} sont coloriés par la couleur N. Les $k-1$ sommets x_1, ... x_{k-1} sont les sommets codants. Il existe $Fib(k)$ coloriages des $k-1$ sommets codants avec les couleurs B et N tel que deux sommets adjacents ne sont jamais coloriés N tout les deux. Ainsi pour chaque i, les sommets codants de $P_k(i)$ sont coloriés sans que deux sommets adjacents ne soient coloriés N, de telle manière que pour $i \neq j$, $P_k(i)$

est colorié différemment de $P_k(j)$.
Soit (G, C) un graphe sommet-colorié à n sommets, m arêtes et c couleurs. Soit k un entier naturel tel que $Fib(k) \geq c$. Le graphe $D_k(G, C)$ est construit de la manière suivante. Dans un premier temps, on associe un i entre 0 et $Fib(k) - 1$ distinct à chacune des c couleurs. Le graphe $D_k(G, C)$ contient une copie de G coloriée par la couleur B et pour chaque sommet v de G de couleur i dans (G, C), on ajoute une copie de $P_k(i)$ à $D_k(G, C)$ en identifiant x_0 à v. On appelle cette copie $P(v)$, et on appelle ses sommets $v = x_0(v)$, $x_1(v)$, $x_2(v)$ ... $x_{k+2}(v)$. $D_k(G, C)$ ainsi construit est dichromatique, et a $n \times (3 + k)$ sommets et $m + n \times (2 + k)$ arêtes. De plus, si G est biparti, $D_k(G, C)$ est aussi biparti. Un exemple de cette construction est illustré dans la Figure 12.
On peut maintenant prouver que pour tout (G, C) et (H, D) ayant le même ensemble de c couleurs, et pour tout k tel que $Fib(k) \geq c$, $D_k(G, C)$ admet un homomorphisme tropical vers $D_k(H, D)$ si et seulement si (G, C) admet un homomorphisme tropical vers (H, D), ce qui conclura la preuve. Supposons dans un premier temps qu'il existe un homomorphisme tropical h de (G, C) dans (H, D). On peut construire un homomorphisme tropical de $D_k(G, C)$ vers $D_k(H, D)$ en commençant par envoyer la copie de G de $D_k(G, C)$ vers la copie de H dans $D_k(H, D)$ à l'aide de h. Pour tout sommet $v \in G$, h envoie v sur un sommet de même couleur que v dans H. En conséquence, on peut envoyer $P(v)$ sur $P(h(v))$, puisqu'ils sont coloriés de la même manière. Cela suffit à étendre h à tout $D_k(G, C)$.
Supposons maintenant que il existe un homomorphisme tropical h' de $D_k(G, C)$ vers $D_k(H, D)$. Pour tout v, les sommets $x_{k+1}(v)$ et $x_{k+2}(v)$ sont adjacents et coloriés par N. De plus, ce sont les seules paires de sommets adjacents coloriés par N dans $D_k(G, C)$ et $D_k(H, D)$. On sait donc que pour tout $v \in G$, $x_{k+1}(v)$ dans $D_k(G, C)$ est envoyé par h' sur le sommet $x_{k+1}(v')$ dans $D_k(H, D)$ pour un certain $v' \in H$. Soit v et v' deux sommets adjacents dans G ou H, la distance entre $x_{k+1}(v)$ et $x_{k+1}(v')$ est exactement $2k+1$. On remarque que $2k+1$ est impair, et donc $x_{k+1}(v)$ et $x_{k+1}(v')$ sont dans des parties différentes de la bipartition. De plus, pour tout v, v' distinct non-adjacent dans G ou dans H, la distance entre $x_{k+1}(v)$ et $x_{k+1}(v')$ est au moins $2k+2$. Il en résulte que si v et v' sont adjacents dans G, et que $h'(x_{k+1}(v)) = x_{k+1}(u)$ et $h'(x_{k+1}(v')) = x_{k+1}(u')$ pour $u, u' \in H$, alors u et u' sont adjacents dans H, le chemin complet $P(v)$ s'envoie sur $P(u)$ et le chemin complet $P(v')$ s'envoie sur $P(u')$. En particulier, les sommets codants de $P(v)$ s'envoient sur les sommets codants de $P(u)$ et les sommets codants de $P(v')$ s'envoient sur les sommets codants de $P(u')$. Autrement dit, v et u ont la même couleur dans (G, C) et (H, D). Cela suffit à montrer que h' restreint à G est un homomorphisme tropical de (G, C) vers (H, D). □

Remarque 8. *1. Cette technique ajoute des branches pendantes aux sommets du graphe initial. Une variante consiste à diviser chaque arête du graphe initial en chemins de longueur $2k + 4$, et de colorier le graphe de manière à ce que pour tout sommet v de couleur i dans le graphe initial, v se trouve, dans le graphe transformé, au centre d'un arbre de rayon $k + 2$*



(a) (G, C) (b) $D_3(G, C)$

composé de $d(v)$ copies du chemins $P_k(i)$ identifiant x_{k+2} avec v. Cette variante forme des graphes avec plus de sommets, mais autant d'arêtes, et préserve plus la topologie du graphe initial. La preuve de la réduction est essentiellement la même.

2. *En appliquant directement cette technique à l'arbre sommet-colorié (T_{23}, D) du Théorème 20, on obtient un arbre dichromatique (T_{184}, D') à 184 sommets, tel que (T_184, D')-*Tropical-Coloration *est NP-complet.*
3. *En remarquant que l'arbre sommet-colorié (T_{23}, D) du Théorème 20 a tous ses sommets internes de couleur Noir, on peut adapté cette technique pour prouver que l'arbre (T_{88}, D') représenté sur la Figure 18 est tel que (T_{88}, D')-*Tropical-Coloration *est NP-complet. La preuve est essentiellement la même que pour le Théorème 25.*

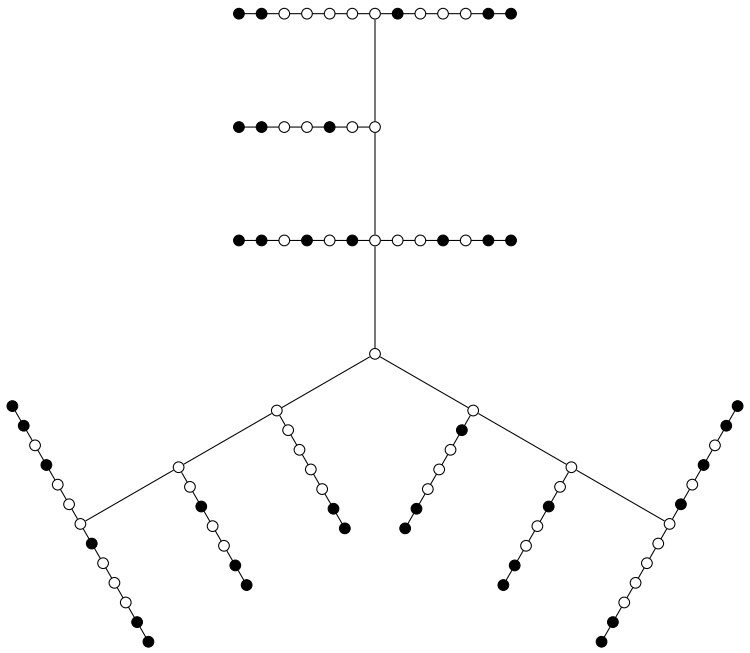


FIGURE 18 – L'arbre (T_{88}, D')

13 Récapitulatif

Nous avons discuté dans ce chapitre de l'importance des problèmes d'homomorphisme tropical. Les problèmes d'homomorphisme tropical contiennent des problèmes polynomialement équivalents à chaque problème de satisfaction de contrainte. Ainsi une dichotomie des problèmes d'homomorphisme tropical est équivalente à une dichotomie des problèmes de satisfaction de contrainte. Plutôt que de chercher une telle dichotomie, nous avons chercher à discriminer les graphes H tels que tout coloriage D de H satisfait que (H, D)-TROPICAL-COLORATION est polynomial, des graphes admettant un coloriage D qui satisfait (H, D)-TROPICAL-COLORATION est NP-complet. Ci-dessous se trouve un récapitulatif des réponses partielles à cette question données dans ce chapitre.

H non-biparti	Le coloriage monochrome D satisfait (H, D)-Tropical-Coloration est NP-complet.
H biparti d'ordre < 9	Pour tout coloriage D, (H, D)-Tropical-Coloration se résout en temps polynomial.
H biparti d'ordre ≥ 9	Il existe un graphe biparti sommet-colorié d'ordre 9, (H_9, D), tel que (H_9, D)-Tropical-Coloration est NP-complet.
H biparti d'ordre ≥ 14	Il existe un graphe biparti sommet-colorié dichromatique d'ordre 14, (H_{14}, D), tel que (H_{14}, D)-Tropical-Coloration est NP-complet.
C_{2k}, $k \leq 6$	Pour tout coloriage D, (C_{2k}, D)-Tropical-Coloration se résout en temps polynomial.
C_{2k}, $k \geq 24$	Il existe un coloriage D tel que (C_{2k}, D)-Tropical-Coloration est NP-complet.
C_{2k}, $k \geq 27$	Il existe un coloriage D dichromatique tel que (C_{2k}, D)-Tropical-Coloration est NP-complet.
T arbre d'ordre < 11	Pour tout coloriage D, (T, D)-Tropical-Coloration se résout en temps polynomial.
T arbre d'ordre ≥ 23	Il existe un arbre sommet-colorié d'ordre 23, (T_{23}, D), tel que (T_{23}, D)-Tropical-Coloration est NP-complet.
T arbre d'ordre ≥ 88	Il existe un arbre sommet-colorié dichromatique d'ordre 88, (T_{88}, D), tel que (T_{23}, D)-Tropical-Coloration est NP-complet.

On remarque qu'on ne sait rien sur les cycles pairs d'ordre 14 à 46, les arbres d'ordre 12 à 22, les graphes bipartis dichromatiques d'ordre 9 à 13, les cycles pairs dichromatiques d'ordre 48 à 52 et les arbres dichromatiques d'ordre 24 à 86. On remarque aussi que l'existence d'un arbre à 23 sommets T_{23} admettant un coloriage D tel que (T_{23}, D)-Tropical-Coloration est NP-complet n'implique pas que tous les arbres ayant au moins 23 sommets admettent un tel coloriage. La même remarque peut être faite pour H_9 et les graphes biparti d'ordre au moins 9. En revanche, tout graphe H contenant T_{23} ou H_9 comme sous-graphe induit admet un coloriage D tel que (H, D)-Tropical-Coloration soit NP-complet.

Chapitre III
Quelques sortes de domination

14 Alliances Globales Pondérées

L'étude des alliances d'un graphe débute par Hedetniemi, Hedetniemi et Kristiansen [52], qui ont introduit les concepts d'alliances offensives et défensives, globales ou non, et étudié les nombres d'alliance des graphes cycliques, des roues, des grilles et des graphes complets. Haynes [50] a étudié le nombre d'alliance global défensive de différente classe de graphes, donnant une borne inférieure pour un graphe quelconque, les graphes bipartis et les arbres et une borne supérieure pour un graphe quelconque et les arbres. Rodriguez-Velazquez et Sigarreta [69] ont étudié le nombre d'alliance défensive et le nombre d'alliance défensive globale des graphes adjoints (line graphs). Une caractérisation des arbres de même nombre de domination et d'alliance défensive globale forte a été donné par Haynes, Hedetniemi et Hening [51]. Quelques bornes pour le nombre d'alliance dans les arbres sont données dans [49]. Rodriguez-Velazquez et Sigarreta donnent des bornes pour le nombre d'alliance dans [68]. Le concept d'alliance puissante est introduite dans [20].

Définition 7. *Un ensemble $S \subset V$ est une alliance défensive si pour tout sommet $v \in S$, $|N[v] \cap S| \geq |N[v] \cap (V - S)|$. Pour un graphe pondéré où chaque sommet v a un poids positif $w(v)$, un ensemble $S \subset V$ est appelé une alliance défensive pondérée si pour tout sommet $v \in S$, $\sum_{u \in N[v] \cap S} w(u) \geq \sum_{u \in N[v] \cap (V-S)} w(u)$. Une alliance défensive (pondérée) S est appelée alliance défensive globale (pondérée) si S est aussi un ensemble dominant.*

Définition 8. *Un ensemble $S \subset V$ est une alliance offensive si pour tout sommet $v \in \delta(S)$, $|N[v] \cap S| \geq |N[v] \cap (V - S)|$. Pour un graphe pondéré où chaque sommet v a un poids positif $w(v)$, un ensemble $S \subset V$ est appelé une alliance offensive pondérée si pour tout sommet $v \in \delta(S)$, $\sum_{u \in N[v] \cap S} w(u) \geq \sum_{u \in N[v] \cap (V-S)} w(u)$. Une alliance offensive (pondérée) S est appelée alliance offensive globale (pondérée) si S est aussi un ensemble dominant.*

Définition 9. *Une alliance puissante (globale) (pondérée) est un ensemble $S \in V$ tel que S est à la fois une alliance offensive (globale) (pondérée) et une alliance défensive (globale) (pondérée).*

Définition 10. *Le nombre d'alliance puissante globale de G est le cardinal d'une plus petite alliance puissante globale (pondérée) de G. On le note $\gamma_p(G)$.*

Définition 11. *Le nombre d'alliance offensive globale de G est le cardinal d'une plus petite alliance offensive globale (pondérée) de G. On le note $\gamma_o(G)$.*

Balakrishnan [22] ont étudié la complexité des alliances globales. Ils ont montré que les problème de décision pour les alliances défensives globales et

offensives globales sont tous les deux NP-complet. Il est clair que c'est aussi le cas des variantes pondérées. Le problème consistant à trouvé une alliance défensive globale minimum, une alliance offensive globale minimum ou une alliance puissante globale minimum n'a été résolu que pour les arbres. Dans [33], on trouve des algorithmes de programmation dynamique qui trouvent une alliance défensive globale, offensive globale et puissante globale de taille minimum dans n'importe quel arbre pondéré en temps $O(|V|^3)$. Dans cette section, je présente des algorithmes linéaires qui trouve une alliance offensive globale et une alliance puissante globale de taille minimum dans n'importe quel arbre pondéré.

14.1 Alliance offensive globale pondérée dans un arbre

Soit $G = (V, E)$ un graphe et $w : V \to R^+$ une fonction de poids. Le nombre d'alliance offensive globale pondérée est le cardinal du plus petit ensemble S vérifiant la propriété que pour tout $v \notin S$,

$$\sum_{u \in N[v]-S} w(u) \leq \sum_{u \in N[v] \bigcap S} w(u). \tag{1}$$

Cette condition est appelée la condition d'alliance de v. On remarque que n'importe quel ensemble vérifiant cette propriété est aussi un ensemble dominant. Dans cette section, je présente un algorithme linéaire glouton qui trouve une alliance offensive globale pondérée de taille minimum d'un arbre.

On supposera que l'arbre T est enraciné, et on notera sa racine $r(T)$. On notera le $p(v)$ le parent du sommet v. Même si $r(T)$, n'a techniquement pas de parent, on considérera dans l'algorithme que $w(p(r(T))) = 0$ pour simplifier la présentation. Durant l'algorithme, on mettra l'étiquette " $+$ " aux sommets qui feront partie de l'alliance offensive globale pondérée de taille minimum finale et " $-$ " à ceux qui n'en feront pas partie et dont la condition d'alliance est déjà vérifiée. On appellera L_+ l'ensemble des sommets portant l'étiquette " $+$ " à tout moment de l'algorithme.

Algorithme 1 Algorithme pour trouver une alliance offensive globale pondérée de taille minimum dans l'arbre enraciné T de profondeur d

1: **pour** i de d à 0 **faire**
2: **pour tout** sommet v à profondeur i **faire**
3: **si** v est étiqueté "$+$" **alors**
4: ne rien faire
5: **sinon**
6: **si** $\sum_{u \in N(v) \cap L_+} w(u) \geq \sum_{z \in N[v] - L_+} w(z)$ **alors**
7: étiqueter v "$-$"
8: **sinon**
9: **si** $\sum_{u \in N(v) \cap L_+ \cup \{p(v)\}} w(u) \geq \sum_{z \in N[v] - L_+ - \{p(v)\}} w(z)$ **alors**
10: étiqueter $p(v)$ "$+$" et v "$-$"
11: **sinon**
12: étiqueter v "$+$"
13: **fin si**
14: **fin si**
15: **fin si**
16: **fin pour**
17: **fin pour**

A la fin de l'algorithme, tous les sommets ont été étiquetés. En conséquence, le théorème suivant prouve que l'algorithme est correct.

Théorème 26. *Après chaque tour de la boucle de la ligne* 2 *de l'algorithme, il existe une alliance offensive globale pondérée de taille minimum contenant tous les sommets étiquetés "$+$" et aucun des sommets étiquetés "$-$".*

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur le nombre de tours de la boucle. Au début de l'algorithme, aucun sommet n'est étiqueté, donc il existe une alliance offensive globale pondérée de taille minimum contenant tous les sommets étiquetés "$+$" et aucun des sommets étiquetés "$-$". Supposons maintenant qu'après le $i$ème tour de la boucle, cette propriété P est encore vérifié, et montrons que c'est toujours le cas après le $i+1$ème tour. Le $i+1$ème tour de boucle considère un certain sommet v. On remarque que tous les sommets descendants de v dans l'arbre sont étiquetés. En particulier, les enfants de v sont tous étiquetés. Il y a quatre possibilités.

Si v est déjà étiqueté "$+$" avant le $i+1$ème tour de boucle, alors le $i+1$ème tour de boucle ne change pas l'étiquetage, et la propriété P est toujours vérifiée.

Sinon, si les enfants de v étiquetés "$+$" suffisent à satisfaire la condition d'alliance de v, alors une alliance offensive globale pondérée contenant tous les sommets étiquetés "$+$" et aucun des sommets étiquetés "$-$" et contenant à la fois v et $p(v)$ ne serait pas de taille minimum puisqu'on pourrait en enlever v. De plus, si il existe une alliance offensive globale pondérée de taille minimum S contenant v et contenant tous les sommets étiquetés "$+$" et aucun des sommets étiquetés "$-$", alors $S \setminus \{v\} \cup \{p(v)\}$ est aussi une alliance offensive globale pondérée de taille minimum contenant tous les sommets étiquetés "$+$" et aucun des sommets étiquetés "$-$". On peut donc étiqueter v "$-$" et préserver la propriété P.

Sinon, si ajouter $p(v)$ aux enfants de v étiquetés " $+$ " suffit à satisfaire la condition d'alliance de v, alors une alliance offensive globale pondérée contenant tous les sommets étiquetés " $+$ " et aucun des sommets étiquetés " $-$ " de taille minimum contient v ou $p(v)$. Comme dans le paragraphe précédent, il est strictement préférable de choisir $p(v)$ plutôt que v pour satisfaire les conditions d'alliance des autres sommets du graphe, on peut étiqueter $p(v)$ "$+$" et v "$-$" et préserver la propriété P.

Enfin, si v ne satisfait aucune des conditions précédentes, toute alliance offensive globale pondérée contenant tous les sommets étiquetés " $+$ " et aucun des sommets étiquetés "$-$" doit aussi contenir v. On peut donc étiqueter v "$+$" et préserver la propriété P.

Dans chaque cas la propriété P est préservée par le contenu de la boucle. Comme P est vrai au début de l'algorithme, où aucun sommet n'est étiqueté, elle est vraie à tout moment de l'algorithme, et en particulier à la fin, quand tous les sommets sont étiquetés. □

On remarque que pour traiter le cas du sommet v, il est seulement nécessaire que tous ses enfants soient étiquetés. Il est donc possible de parcourir l'arbre en post-fixe plutôt que de trier les sommets par profondeur.

Considérons maintenant le temps d'exécution de l'algorithme. Il y a exactement une exécution du bloc d'instructions des lignes 3 à 12 de l'algorithme par sommet dans l'arbre. Ce bloc d'instructions s'exécute en temps constant, donc l'algorithme s'exécute en temps $O(n)$.

14.2 Alliance puissante globale pondérée dans un arbre

Dans cette section, nous allons voir un algorithme linéaire qui trouve le cardinal minimum d'une alliance puissante globale pondérée de n'importe quel arbre. On suppose que les poids de l'arbre sont positifs.

Pour tout ensemble $S \subset V$, on définie $w(S) := \Sigma_{u \in S} w(u)$.

Il est clair que quand les poids sont positifs, le problème d'alliance puissante globale peut être formulé comme suit : Soit $G = (V, E)$ un graphe et $w : V \to \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ une fonction de poids. Une alliance puissante globale de G est un ensemble $S \subset V$ tel que pour tout $v \in V$, $w(N[v] \cap S) \geq \frac{w(N[v])}{2}$. Remarquez que la condition que S est un ensemble dominant est automatique, car tous les poids sont strictement positifs. Dans la suite on appellera condition d'alliance de $v \in V$ la propriété que $w(N[v] \cap S) \geq \frac{w(N[v])}{2}$.

Vue d'ensemble de l'algorithme

On suppose que l'arbre est enraciné. Les sommets à profondeur k sont ordonnés de gauche à droite. On appelle $C(v)$ l'ensemble des enfants de v et $p(v)$ le parent de v.

L'algorithme est essentiellement un algorithme glouton. On explore le voisinage de chaque sommet en commençant par les sommets à profondeur maximum. On étiquette "$+$" les sommets choisis pour faire partie de l'alliance. Pour chaque sommet v, on trouve le plus petit nombre de sommets de $N[v]$ qu'il faut

ajouter pour satisfaire la condition d'alliance de v, à l'aide de l'algorithme Trouver_Plus_Petit_Sous_Ensemble. Dans certains cas, il y a plus d'une solution optimale et la solution choisie a de l'importance. Par exemple, une solution optimale contenant v et $p(v)$ sera toujours préférable à une solution optimale ne les contenant pas, car v et $p(v)$ pourront servir à satisfaire la condition d'alliance de $p(v)$ et de ses voisins. Les choses sont plus compliquées quand il y a une solution optimale contenant v mais pas $p(v)$ et une autre contenant $p(v)$ mais pas v. En effet, si $w(v) > w(p(v))$, la solution préférable n'est pas évidente. v est préférable à $p(v)$ pour satisfaire la condition d'alliance de $p(v)$, mais $p(v)$ peut aussi servir à satisfaire la condition d'alliance de ses voisins. Dans une telle situation, on utilisera des étiquettes qui indiqueront l'appartenance de chaque sommet à l'alliance en fonction de l'appartenance de $p(v)$. Une autre situation délicate est celle où toute solution optimale ne contient ni v ni $p(v)$, et il existe une solution contenant juste un sommet de plus contenant à la fois v et $p(v)$. Dans ce cas, prendre v et $p(v)$ coûte, à priori, de mettre un sommet de trop dans l'alliance. Cependant si v et $p(v)$ sont ajoutés à l'alliance dans la suite de l'algorithme, pour satisfaire la condition d'alliance de $p(v)$ par exemple, il aurait été préférable de prendre la solution sous-optimale les contenant déjà. Encore une fois, ce cas est traité à l'aide d'étiquettes.

Étiquettes

L'algorithme utilise cinq étiquettes différentes : “ $+$ ”, “ $=$ ”, “ $\neq$ ”, “ $==$ ” et “ $\neq\neq$ ”. A chaque étape de l'algorithme, les sommets étiquetés “ $+$ ” forment un sous-ensemble d'une alliance puissante globale pondérée de cardinal minimum. A la fin de l'algorithme, ils formeront une alliance puissante globale pondérée de cardinal minimum.

On assigne l'étiquette “ $\neq$ ” à un sommet v lorsqu'on a le choix entre prendre v ou $p(v)$ dans l'alliance pour satisfaire la condition d'alliance de v et que $w(v) > w(p(v))$. Dans cette situation, on étiquette aussi certains enfants de v “ $=$ ” et “ $\neq$ ” en fonction de leur appartenance aux solutions à la condition d'alliance de v. Si v est étiqueté “ $\neq$ ” et si $p(v)$ n'est jamais étiqueté “ $+$ ” dans la suite de l'algorithme, alors v sera étiqueté “ $+$ ” à la fin. En revanche si v est étiqueté “ $=$ ”, on l'étiquettera “ $+$ ” seulement si $p(v)$ est aussi étiqueté “ $+$ ” dans la suite de l'algorithme.

Dans le cas où aucune solution optimale de la condition d'alliance de v ne contient v ou $p(v)$, mais qu'il existe une solution contenant juste un sommet de plus contenant v et $p(v)$, on étiquetterait v “ $=$ ” et certains enfants de v “ $==$ ” ou “ $\neq\neq$ ” en fonction de leur appartenance au deux solutions. Ainsi si $p(v)$ est étiqueté “ $+$ ” dans la suite de l'algorithme, la solution contenant v et $p(v)$ deviendrait optimale, et on pourrait étiqueter v “ $+$ ”. Les enfants de v étiquetés “ $==$ ” serait étiquetés “ $+$ ” à la fin de l'algorithme si et seulement si v et $p(v)$ le sont aussi, et les enfants de v étiquetés “ $\neq\neq$ ” serait étiquetés “ $+$ ” à la fin de l'algorithme si v ou $p(v)$ ne l'est pas.

Satisfaire la condition d'alliance

Durant l'algorithme, nous allons avoir besoin, pour chaque sommet v, de trouver le plus petit nombre de sommet de $N[v]$ nécessaire pour satisfaire la condition d'alliance de v. Pour ce faire, nous allons utiliser l'algorithme Trouver_Plus_Petit_Sous_Ensemble.
Étant donné un tableau A de n entiers positifs, Trouver_Plus_Petit_Sous_Ensemble trouve le plus petit entier k tel que la somme des k plus grands éléments de A soit plus grande qu'une valeur cible T, en temps linéaire.

Algorithme 2 Trouver_Plus_Petit_Sous_Ensemble[A, n, T ; k].

Entrées : Un tableau A de taille n contenant des entiers positifs ; une valeur cible T.
Sortie : Le plus petit entier k tel que la somme des k plus grands éléments de A est plus grand ou égal à T.

1: **si** $n = 1$ **alors**
2: Renvoyer 1.
3: **fin si**
4: Soit $i = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.
5: Soit A' un tableau de taille i contenant les i plus grands éléments de A.
6: Soit A'' un tableau de taille $n - i$ contenant les $n - i$ plus petits éléments de A.
7: Soit M la somme des éléments de A'.
8: **si** $M > T$ **alors**
9: Renvoyer Trouver_Plus_Petit_Sous_Ensemble[A', i, T].
10: **sinon**
11: **si** $M < T$ **alors**
12: Renvoyer i+ Trouver_Plus_Petit_Sous_Ensemble[A'', $n - i$, $T - M$].
13: **sinon**
14: Renvoyer i.
15: **fin si**
16: **fin si**

Lemme 13. *Trouver_Plus_Petit_Sous_Ensemble s'exécute en temps linéaire en n.*

Démonstration. On remarque que trouver le médian d'un tableau d'entier se fait en temps linéaire [29]. Une fois que le médian de A a été trouvé, les lignes 4, 5 et 6 de l'algorithme se font en temps linéaire en n, disons Cn, en un seul parcours de A. Comme les appels récursifs à Trouver_Plus_Petit_Sous_Ensemble se font sur un tableau de taille au plus $\lceil n/2 \rceil$, le temps d'exécution de l'algorithme $T(n)$ satisfait $T(n) \leq T(\lceil n/2 \rceil) + Cn$. Par récurrence, il est facile de vérifier que $T(n) = O(n)$. □

Comme mentionné précédemment, il est intéressant de trouver le plus petit nombre de sommets de $N[v]$ nécessaire pour satisfaire la condition d'alliance de v sous les conditions que v ou $p(v)$ doivent faire partie de ses sommets. On utilisera donc l'algorithme Trouver_Plus_Petit.

Algorithme 3 Trouver_Plus_Petit[u, $prendre_u$, $prendre_p(u)$, T ; $resultat$, $liste_enfants$].

Entrées : Un sommet u de l'arbre T ; deux booléens $prendre_u$ et $prendre_p(u)$ indiquant si l'on veut que u et $p(u)$ fassent partie de l'alliance

Sorties : Le plus petit entier $resultat$ tel qu'il existe un ensemble d'enfants de u, $liste_enfants$, qui, si on les étiquette " + ", ajoute $resultat$ sommets dans l'alliance partiel de T, en prenant en compte les étiquettes des sommets du sous-arbre enraciné en u.

1: $w_total \leftarrow \sum_{v \in N[u]} w(v)$
2: $resultat \leftarrow 0$
3: $w_alliance \leftarrow 0$
4: $liste_enfants \leftarrow \emptyset$
5: **si** $prendre_u$ **alors**
6: $\quad resultat \leftarrow resultat + 1$
7: $\quad w_alliance \leftarrow w_alliance + w(u)$
8: **fin si**
9: **si** $prendre_p(u)$ **alors**
10: $\quad resultat \leftarrow resultat + 1$
11: $\quad w_alliance \leftarrow w_alliance + w(p(u))$
12: **fin si**
13: $ensemble_enfants \leftarrow$ l'ensemble des enfants de u
14: **pour tout** v dans $ensemble_enfants$ étiqueté " + " **faire**
15: $\quad w_alliance \leftarrow w_alliance + w(v)$ // Il n'est pas nécessaire de changer $resultat$ car v
16: $\quad$ enlever v de $ensemble_enfants$ // fait déjà partis de l'alliance. Son poids aide à
17: **fin pour** // satisfaire la condition d'alliance de u gratuitement
18: **si** $prendre_u$ **alors**
19: $\quad$ **pour tout** v dans $ensemble_enfants$ étiqueté " = " **faire**
20: $\quad\quad w_alliance \leftarrow w_alliance + w(v)$ // v était étiqueté " = ". Ainsi, pour satisfaire
21: $\quad\quad$ enlever v de $ensemble_enfants$ // la condition d'alliance de v, il n'existe pas de
22: $\quad\quad$ ajouter v à $liste_enfants$ // solution optimale contenant à la fois v et u, mais
23: $\quad$ **fin pour** // il existe une solution contenant v et u, contenant
24: // seulement 1 sommet de plus que l'optimale. Comme on a ici choisit de prendre u, on a
25: déjà payé ce coût de 1 sommet, et la solution contenant v et u devient optimale. On peut
26: donc considéré que v fait partie de l'alliance et son poids aide à satisfaire la condition
27: d'alliance de u gratuitement.
28: **sinon**
29: $\quad$ **pour tout** v dans $ensemble_enfants$ étiqueté " $\neq$" **faire**
30: $\quad\quad w_alliance \leftarrow w_alliance + w(v)$ // v était étiqueté " $\neq$ ". Ainsi, pour satisfaire
31: $\quad\quad resultat \leftarrow resultat + 1$ // la condition d'alliance de v en utilisant le
32: $\quad\quad$ enlever v de $ensemble_enfants$ // moins de sommets possibles, on a le choix
33: $\quad\quad$ ajouter v à $liste_enfants$ // entre prendre v ou u dans l'alliance. Comme on a ici
34: $\quad$ **fin pour** // choisi de ne pas prendre u, on est obligé de prendre v.
35: **fin si**
36: Trouver_Plus_Petit_Sous_Ensemble($ensemble_enfants$, $taille_de(ensemble_enfants)$, $w_total - w_alliance$;k)
37: $resultat \leftarrow resultat + k$
38: ajouter les k plus grand éléments de $ensemble_enfants$ à $liste_enfants$

L'algorithme

L'algorithme entier parcours l'arbre à deux reprises. Dans un premier temps, il appelle l'algorithme *Etiquette* ci-dessous qui parcourt l'arbre de bas en haut en étiquetant les sommets. Puis il parcourt l'arbre de haut en bas pour construire l'alliance de manière gloutonne à l'aide de l'étiquetage.

Algorithme 4 Etiquette[T].

Entrée/Sortie : Étiquette prend en entrée un arbre T non-étiqueté et étiquette ses sommets.

```
pour i = 0 à d faire
    pour tout sommet u à profondeur d − i faire
        Trouver_Plus_Petit(u, Vrai, Vrai ; min11, liste_11)
        Trouver_Plus_Petit(u, Vrai, Faux ; min10, liste_10)
        Trouver_Plus_Petit(u, Faux, Vrai ; min01, liste_01)
        Trouver_Plus_Petit(u, Faux, Faux ; min00, liste_00)
        si u est étiqueté " + " alors                    // Si u (respectivement p(u))
            min01 ← ∞                                    // est déjà étiqueté " + ", on
            min00 ← ∞                                    //     sait qu'il fera partie de
        fin si                                           // l'alliance puissante optimale
        si p(u) est étiqueté " + " alors                 //     construite, on peut donc
            min10 ← ∞                                    // ignorer les valeurs de min0X
            min00 ← ∞                                    //     (respectivement minX0).
        fin si
        min ← le minimum de {min11, min10, min01, min00}
        si min11 = min alors
            étiqueter " + " les sommets u et p(u) et chaque sommet dans liste_11
        sinon
            si min10 = min ou min01 = min alors
                si  w(u) > w(p(u)) et min10 = min01 alors

                    // Premier cas délicat : pour satisfaire la condition d'alliance de u de manière optimale, il y a deux solutions, qui contiennent soit u soit p(u), mais pas les deux et w(u) > w(p(u)).

                        étiqueter " + " chaque sommet dans liste_10 ∩ liste_01
                        étiqueter " ≠ " le sommet u et chaque sommet dans liste_01\liste_10
                        étiqueter " = " chaque sommet dans liste_10\liste_01
                sinon
                    si min = min01 alors
                        étiqueter "+" le sommet p(u) et chaque sommet dans liste_01
                    sinon
                        étiqueter "+" le sommet u et chaque sommet dans liste_10
                    fin si
                fin si
            sinon
                si min00 + 1 = min11 alors

                    // Deuxième cas délicat : Pour résoudre la condition d'alliance de u, il n'existe qu'une solution optimale, qui ne contient ni u, ni p(u). En revanche, il existe une solution sous-optimale (qui ne contient qu'un seul sommet de plus) contenant à la fois u et p(u).

                        étiqueter " + " chaque sommet dans liste_11 ∩ liste_00
                        étiqueter " = " le sommet u
                        étiqueter " ≠≠ " chaque sommet dans liste_00\liste_11 qui ne sont pas déjà étiqueté " ≠ "
                        étiqueter " == " chaque sommet dans liste_11\liste_00

                sinon
                    étiqueter " + " chaque sommet dans liste_00
                fin si
            fin si
        fin si
    fin pour
fin pour
```

Algorithme 5 Trouve_Alliance_Puissante_Pondéré_Min[T ; *resultat*].

Entrée/Sortie : Trouve_Alliance_Puissante_Pondéré_Min prend en entrée un arbre T non-étiqueté et étiquette “ $+$ ” les sommets d'une alliance puissante minimum.
Sortie : *resultat* retourne le nombre de sommet minimum d'une alliance puissante pondérée de T.

```
Etiquette(T)
pour i = 0 à d faire
    pour tout sommet v à profondeur i faire
        si v est étiqueté “ = ” alors
            si p(v) est étiqueté “ + ” alors
                étiqueter “ + ” le sommet v.
            sinon
                enlever l'étiquette de v.
            fin si
        fin si
        si v est étiqueté “ ≠ ” alors
            si p(v) est étiqueté “ + ” alors
                enlever l'étiquette de v.
            sinon
                étiqueter “ + ” le sommet v.
            fin si
        fin si
        si v est étiqueté “ == ” alors
            si p(v) et p(p(v)) sont tous les deux étiquetés “ + ” alors
                étiqueter “ + ” le sommet v.
            sinon
                enlever l'étiquette de v.
            fin si
        fin si
        si v est étiqueté “ ≠≠ ” alors
            si p(v) et p(p(v)) sont tous les deux étiquetés “ + ” alors
                enlever l'étiquette de v.
            sinon
                étiqueter “ + ” le sommet v.
            fin si
        fin si
    fin pour
fin pour
resultat ← le nombre de sommets étiquetés “ + ” dans T.
```

L'algorithme est correct.

Soit T un arbre pondéré, enraciné au sommet r, et un étiquetage partiel (H, e) des sommets de T, avec $H \subset V$ et $e : H \to \{“+”, “=”, “\neq”, “==”, “\neq\neq”\}$. Un ensemble E de T sera dit cohérent avec l'étiquetage partiel (H, e) de T si :

1. Pour tout $v \in V$ tel que v est étiqueté “ $+$ ”, $v \in E$.
2. Pour tout $v \in V$ tel que v est étiqueté “ $=$ ”, si $p(v) \in E$, alors $v \in E$.
3. Pour tout $v \in V$ tel que v est étiqueté “ $\neq$ ”, si $p(v) \notin E$, alors $v \in E$.
4. Pour tout $v \in V$ tel que v est étiqueté “ $==$ ”, si $p(v) \in E$ et $p(p(v)) \in E$, alors $v \in E$.
5. Pour tout $v \in V$ tel que v est étiqueté “ $\neq\neq$ ”, si $p(v) \notin E$ et $p(p(v)) \notin E$, alors $v \in E$.

Pour tout sommet v, on dit que l'étiquetage satisfait la condition d'alliance de v si pour tout ensemble S cohérent avec (H, e), l'ensemble S satisfait la condition d'alliance de v. On remarque que si un étiquetage (H, e) satisfait la condition d'alliance de v, alors l'étiquetage (H, e'), copie de (H, e) mis à part pour un sommet $u \in H$ étiqueté " $+$ ", satisfait aussi la condition d'alliance de v. De même, l'étiquetage $(H \cup \{u\}, e')$, où e' est une extension de e à $H \cup \{u\}$, satisfait aussi la condition d'alliance de v.

Pour montrer que l'algorithme est correct, nous allons utiliser l'invariant de boucle I suivant :

1. L'ensemble des alliances puissantes minimum cohérentes avec l'étiquetage partiel actuel E_A est non vide.
2. Pour tout sommet u déjà considéré par la ligne 2 de l'algorithme *Etiquette*, l'étiquetage partiel actuel satisfait la condition d'alliance de u.

Il est évident que si l'invariant I est vérifié à la fin de l'algorithme, alors celui ci est correct. En effet, à la fin de l'algorithme, tous les sommets ont été considérés par la ligne 2 de l'algorithme *Etiquette*, l'étiquetage partiel satisfait donc la condition d'alliance de tous les sommets. Mais à la fin de l'algorithme la seule étiquette restante est " $+$ ". Cela revient à dire que les sommets étiquetés " $+$ " forment une alliance puissante. Si E_A est non vide, cette alliance est nécessairement minimum.

Pour prouver que l'algorithme est correct, il nous suffit de prouver que I est bien un invariant durant tout l'algorithme. Il est évident que I est vérifié au début de l'algorithme. En effet, le premier point revient alors à dire qu'il existe une alliance puissante minimum, et le deuxième point est automatiquement vérifié puisqu'aucun sommet n'a encore été considéré. Il est également facile de voir que si l'algorithme *Etiquette* préserve I, alors l'algorithme tout entier préserve I. En effet, le reste de l'algorithme consiste simplement à construire le plus petit ensemble cohérent avec l'étiquetage des sommets. Il nous reste à prouver que *Etiquette* préserve la propriété I.

Lemme 14. *L'algorithme Etiquette préserve la propriété I.*

Démonstration. L'algorithme *Etiquette* parcourt tous les sommets de l'arbre, en commençant par ceux qui sont le plus profonds et exécute ainsi pour chaque sommet u les lignes 3 à 36. Au début d'*Etiquette*, l'arbre T est non-étiqueté, donc la propriété I est vérifié. Supposons que c'est au tour d'un sommet $u \in V$ d'être considéré par l'algorithme, et que la propriété I est vérifiée. Étant donné le sens de parcours de l'algorithme, on sait que tous les sommets de profondeur plus grande que u ont déjà été considérés, et, par hypothèse l'étiquetage partiel satisfait leur condition d'alliance. On appellera (H_0, e_0) l'étiquetage à ce niveau de l'algorithme. On appellera E_0 l'ensemble des alliances puissantes minimum cohérentes avec (H_0, e_0). Les lignes 3 à 13 calculent le plus petit nombre de sommets *min* qu'il est nécessaire d'étiqueter " $+$ " dans le voisinage fermé de u

pour que l'étiquetage satisfasse la condition d'alliance de u. Comme les lignes 3 à 13 ne modifient pas directement l'étiquetage, on sait que la propriété I est encore vérifiée après les avoir exécutées. L'algorithme se sépare ensuite en six cas.

Premier cas (ligne 15) : Il existe un ensemble $R \subset N[u]$ de cardinal min tel que u et $p(u)$ appartiennent à R et étiqueter "$+$" les sommets de R suffit à satisfaire la condition d'alliance de u. Dans ce cas, l'algorithme étiquette "$+$" les sommets de R. L'étiquetage satisfait toujours la condition d'alliance des enfants de u. L'étiquetage satisfait aussi la condition d'alliance de u. Par minimalité de R, et comme tous les sommets du sous-arbre enraciné en u voient déjà leur condition d'alliance satisfaite, E_A n'est pas vide.

Deuxième cas (ligne 20 à 22) : Les conditions du cas précédent ne sont pas satisfaites. De plus, il existe deux ensembles $R, S \subset N[u]$ de cardinal min tel que $u \in R$, $p(u) \notin R$, $u \notin S$, $p(u) \in S$, et $w(u) > w(p(u))$. Par minimalité, et comme tous les sommets du sous-arbre enraciné en u voient déjà leur condition d'alliance satisfaite, E_0 contient au moins un ensemble F contenant R ou S. Dans ce cas, l'algorithme étiquette "$+$" les sommets de $R \cap S$, "$\neq$" le sommet u et ses enfants dans $S \setminus R$ et "$=$" les enfants de u dans $R \setminus S$. Si F contient R, F est alors cohérent avec ce nouvel étiquetage. De même, si F contient S mais pas u. Enfin si F contient S et u, on peut obtenir une autre alliance puissante minimum F' en enlevant de F tout les sommets du sous-arbre enraciné en u et en ajoutant le plus petit ensemble cohérent avec l'étiquetage restreint au sous-arbre enraciné en u contenant u. F' est alors cohérente avec l'étiquetage. Ainsi, dans tous les cas E_A n'est pas vide. De plus, la condition d'alliance de u est maintenant satisfaite.

Troisième cas (ligne 25) : Les conditions des cas précédents ne sont pas satisfaites. De plus, il existe un ensemble $R \subset N[u]$ de cardinal min tel que $u \notin R$, $p(u) \in R$. Par minimalité, et comme tous les sommets du sous-arbre enraciné en u voient déjà leur condition d'alliance satisfaite, E_0 contient au moins un ensemble F contenant R. Dans ce cas, l'algorithme étiquette "$+$" les sommets de R. F est toujours une alliance puissante minimum cohérente avec l'étiquetage. De plus, la condition d'alliance de u est maintenant satisfaite.

Quatrième cas (ligne 27) : Les conditions des cas précédents ne sont pas satisfaites. De plus, il existe un ensemble $R \subset N[u]$ de cardinal min tel que $u \in R$, $p(u) \notin R$. Par minimalité, et comme tous les sommets du sous-arbre enraciné en u voient déjà leur condition d'alliance satisfaite, E_0 contient au moins un ensemble F contenant R. Dans ce cas, l'algorithme étiquette "$+$" les sommets de R. F est toujours une alliance puissante minimum cohérente avec l'étiquetage. De plus, la condition d'alliance de u est maintenant satisfaite.

Cinquième cas (ligne 30 à 34) : Les conditions des cas précédents ne sont pas satisfaites. Il existe un ensemble $R \subset N[u]$ de cardinal min tel que $u \notin R$, $p(u) \notin R$. De plus, il existe un ensemble S de cardinalité $min+1$ tel que $u \in R$,

$p(u) \in R$. Par minimalité, et comme tous les sommets du sous-arbre enraciné en u voient déjà leur condition d'alliance satisfaite, E_0 contient au moins un ensemble F contenant R ou S. On remarque que F ne peut pas contenir à la fois R, u et $p(u)$, car ce ne serait alors pas une alliance puissante minimum. Dans ce cas, l'algorithme étiquette "$+$" les sommets de $R \cap S$, "$=$" le sommet u, "$\neq\neq$" les enfants de u dans $R \setminus S$ et "$==$" les enfants de u dans $S \setminus R$. Si F contient S, il est cohérent avec le nouvel étiquetage. De même, si F contient R et ne contient pas $p(u)$, il est cohérent avec le nouvel étiquetage. Si F contient R et $p(u)$, il n'est pas cohérent avec le nouvel étiquetage, mais on peut construire une autre alliance puissante minimum F' en enlevant de F tout les sommets du sous-arbre enraciné en u et en ajoutant le plus petit ensemble cohérent avec l'étiquetage restreint au sous-arbre enraciné en u contenant u et $p(u)$. F' est alors cohérente avec l'étiquetage. Ainsi, dans tout les cas E_A n'est pas vide. De plus, la condition d'alliance de u est maintenant satisfaite.

Sixième cas (ligne 36) : Les conditions des cas précédents ne sont pas satisfaites. Il existe un ensemble $R \subset N[u]$ de cardinal min tel que $u \notin R$, $p(u) \notin R$. Par minimalité, et comme tous les sommets du sous-arbre enraciné en u voient déjà leur condition d'alliance satisfaite, E_0 contient au moins un ensemble F contenant R. Dans ce cas, l'algorithme étiquette "$+$" les sommets de R. F est toujours une alliance puissante minimum cohérente avec l'étiquetage. De plus, la condition d'alliance de u est maintenant satisfaite.

Dans tous les cas, la propriété I est toujours satisfaite après l'exécution des lignes 3 à 36. Ainsi, I est bien un invariant de boucle, ce qui conclut la preuve. □

Complexité

Lemme 15. *$Trouver_Plus_Petit$ s'exécute en temps $O(\deg(u))$.*

Démonstration. Il est facile de voir que l'algorithme $Trouver_Plus_Petit$ jusqu'à la ligne 26 s'exécute en $O(\deg(u))$. $Trouver_Plus_Petit_Sous_Ensemble$ est ensuite appelé avec une entrée de taille $O(\deg(u))$, et s'exécute donc en temps $O(\deg(u))$. Le temps total est donc $O(\deg(u))$. □

Théorème 27. *Le temps d'exécution de $Trouve_Alliance_Puissante_Pondere_Min$ est linéaire.*

Démonstration. A chaque étape de *Etiquette*, on calcule $Trouver_Plus_Petit(u)$ quatre fois, puis on étiquette les voisins de u. $Trouver_Plus_Petit(u)$ a un temps d'exécution en $O(\deg(u))$, donc chaque tour de boucle a un temps d'exécution en $O(\deg(u))$. La boucle visite chaque sommet une fois dont la complexité de *Etiquette* est $\sum_{v \in V} O(deg(v)) = O(n)$. $Trouve_Alliance_Pondere_Min$ visite ensuite chaque sommet à nouveau et change éventuellement son étiquette. L'algorithme a donc un temps d'exécution total en $O(n)$. □

14.3 Conclusion

En combinant ce résultat avec la borne inférieur évidente, on peut en fait conclure que le problème consistant à trouver une alliance puissante ou offensive pondérée minimum dans un arbre pondéré est $\Theta(|V|)$.
Le problème consistant à trouver une alliance défensive pondérée minimum dans un arbre pondéré semble être plus difficile. La difficulté vient du fait qu'ajouter un sommet à une alliance défensive globale ne préserve pas forcément l'alliance défensive. Les techniques gloutonnes ou quasi-gloutonnes utilisées ici semblent donc peu efficaces.

15 Ensembles Sûrs

Dans un graphe $G = (V, E)$, un ensemble non-vide de sommets $S \subset V$ est un ensemble sûr si, pour chaque composante A de $G[S]$ et chaque composante B de $G[V \setminus S]$ adjacente à A, $|A| \geq |B|$. Un ensemble sûr connexe est un ensemble sûr S tel que $G[S]$ est connexe. Le nombre sûr $s(G)$ d'un graphe G est la taille d'un plus petit ensemble sûr de G, et le nombre sûr connexe $cs(G)$ est la taille d'un plus petit ensemble sûr connexe de G.

Ces notions ont été introduite par Fujita, MacGillivray et Sakuma [45]. Leur motivation vient d'une variante de problème de lieu d'usine, dans laquelle le but est de trouver un ensemble sûr de sommets dans un réseau pour placer des usines. Ils ont remarqué que, dans un graphe connexe, $s(G) \leq cs(G) < 2 \times s(G)$. Ils ont également montré que le problème de trouver le nombre sûr et le nombre sûr connexe d'un graphe est NP-difficile en général. En revanche, ils ont conçu un algorithme linéaire qui permet de trouver un ensemble sûr connexe dans un arbre.

Dans cette section, nous étudierons le problème consistant à trouver un ensemble sûr dans un arbre ou dans un graphe à largeur arborescente borné, ainsi que les variantes de ces problèmes pour les ensembles sûrs connexes, les ensembles faiblement sûrs et les ensembles sûrs détendues, définis ci-dessous.

15.1 Définitions

Définition 12 (Ensemble Sûr)**.** *Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. Un ensemble non-vide $S \subset V$ est appelé un ensemble sûr quand, pour chaque composante A de $G[S]$ et chaque composante B de $G[V \setminus S]$ adjacente à A, $|A| \geq |B|$. Le nombre sûr $s(G)$ du graphe G est alors le cardinal d'un plus petit ensemble sûr de G.*

Définition 13 (Ensemble Sûr Connexe)**.** *Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. Un ensemble non-vide $S \subset V$ est appelé un ensemble sûr connexe quand c'est un ensemble sûr et $G[S]$ est connexe. Le nombre sûr connexe $cs(G)$ du graphe G est alors le cardinal d'un plus petit ensemble sûr connexe de G.*

Définition 14 (Ensemble Faiblement Sûr)**.** *Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. Un ensemble $S \subset V$ est appelé un ensemble faiblement sûr quand, pour chaque*

composante B de $G[V \setminus S]$, il existe une composante A de $G[S]$ adjacente à B telle que $|A| \geq |B|$. Le nombre faiblement sûr $ws(G)$ du graphe G est alors le cardinal d'un plus petit ensemble faiblement sûr de G.

Définition 15 (Ensemble Sûr Détendu)**.** *Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. Un ensemble $S \subset V$ est appelé un ensemble sûr détendue quand, pour chaque composante B de $G[V \setminus S]$, $\sum_{A \in \Psi} |A| \geq |B|$, où Ψ est l'ensemble des composantes de $G[S]$ adjacentes à B. Le nombre sûr détendue $rs(G)$ du graphe G est alors le cardinal d'un plus petit ensemble sûr détendue de G.*

On remarque facilement que $rs(G) \leq ws(G) \leq s(G) \leq cs(G) < 2 \times s(G)$. En effet, un ensemble faiblement sûr est un ensemble sûr détendue, un ensemble sûr est un ensemble faiblement sûr, un ensemble sûr connexe est un ensemble sûr. De plus, on peut toujours étendre un ensemble sûr S en un ensemble sûr connexe en ajoutant au plus $|S| - 1$ sommets.

15.2 Trouver un ensemble sûr dans un arbre

Théorème 28. *Pour un arbre à n sommets, on peut calculer un ensemble sûr minimum en temps $O(n^5)$.*

En fait, nous allons seulement voir que $s(G)$ peut être calculé en temps $O(n^5)$, mais nous allons utiliser un algorithme de programmation dynamique qui peut facilement être adapté pour construire un ensemble sûr de cardinal $s(G)$.

Définitions et notations utiles

Dans la suite, on considérera l'arbre $T = (V, E)$ enraciné en r, et on supposera que les enfants de chaque sommet sont numérotés. Pour chaque sommet u, on appellera l'ensemble de ses enfants C_u et l'ensemble constitué de u et de ses descendants V_u. On appellera $T(u)$ le sous-arbre enraciné en u, $T[V_u]$. Enfin, si $C_u = \{w_1, w_2, \cdots, w_d\}$, on appellera $T(u, i)$ le sous-arbre $T[\{u\} \cup \bigcup_{1 \leq j \leq i} V_{w_j}]$. Ainsi, $T(u, 0)$ est le sous-arbre ayant u comme unique sommet, tandis que $T(u, |C_u|) = T(u)$.

Définition 16 (Fragment)**.** *Soit un sous-arbre $T' \subset T$ et un ensemble $S \subset V(T')$. Un fragment de T' par rapport à S est l'ensemble de sommets d'une composante connexe de $T'[S]$ ou de $T'[V(T') \setminus S]$. $F(T', S)$ est l'ensemble des fragments de T' par rapport à S.*

Deux fragments d'un sous-arbre T' sont dit adjacent si il existe une arête entre les deux. Un fragment de $T(u, i)$ est dit actif si il contient u et inactif sinon. Un fragment $F \in F(T(u, i), S)$ est mauvais quand il est inactif, que $F \subset S$ et qu'il existe un fragment $F' \in F(T(u, i), S)$ adjacent à F tel que $|F| < |F'|$.

Définition 17 (Ensemble $(T(u,i),b,s,a)$-faisable)**.** *Pour $u \in V$, $0 \leq i \leq |C_u|$, $b \in \{v,f\}$, $s \in \{0,\cdots,|V(T(u,i))|\}$ et $a \in \{1,\cdots,|V(T(u,i))|\}$, un ensemble $S \subset V(T(u,i))$ est dit $(T(u,i),b,s,a)$-faisable si $|S| = s$, la taille du fragment actif dans $F(T(u,i),S)$ est a, il n'y a pas de mauvais fragment dans $F(T(u,i),S)$ et b est v si et seulement $u \in S$.*

Intuitivement, un ensemble $(T(u,i),b,s,a)$-faisable S est "'presque sûr"'. En effet, si A est le fragment actif dans $F(T(u,i),S)$, soit $S = A$, ou bien $S \setminus A$ est un ensemble sûr de $T(u,i) - A$.

Pour $S \subset V(T(u,i))$, on définit $\delta^{max}_{T(u,i)}$ et $\delta^{min}_{T(u,i)}$ comme étant les cardinaux maximum et minimum des fragments adjacents au fragment actif. Si $S = V(T(u,i))$ et qu'il n'y a donc pas de fragment adjacent au fragment actif, on définit $\delta^{max}_{T(u,i)} := -\infty$ et $\delta^{min}_{T(u,i)} := +\infty$.

Pour calculer $s(T)$, on va construire une table, qu'on va appeler la table *ProgDyn*. $ProgDyn(T(u,i),b,s,a) \in \{0,\cdots,n\} \cup \{+\infty,-\infty\}$, avec $u \in V$, $0 \leq i \leq |C_u|$, $b \in v,f$, $s \in \{0,\cdots,|V(T(u,i))|\}$ et $a \in \{1,\cdots,|V(T(u,i))|\}$. La table aura les valeurs suivantes :

$$ProgDyn(T(u,i),v,s,a) = \begin{cases} +\infty & \text{s'il n'y a pas d'ensemble } (T(u,i),v,s,a)\text{-faisable,} \\ \min\limits_{(T(u,i),v,s,a)\text{-faisable } S} \delta^{max}_{T(u,i)} & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$ProgDyn(T(u,i),f,s,a) = \begin{cases} -\infty & \text{s'il n'y a pas d'ensemble } (T(u,i),f,s,a)\text{-faisable,} \\ \max\limits_{(T(u,i),f,s,a)\text{-faisable } S} \delta^{min}_{T(u,i)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

De cette définition de la table ProgDyn découle le lemme suivant.

Lemme 16. *$s(T)$ est le plus petit $s > 0$ tel qu'il existe un $a \in \{1,\cdots,n\}$ avec $ProgDyn(T,v,s,a) \leq a$ ou $ProgDyn(T,f,s,a) \geq a$.*

Démonstration. Supposons que S est un ensemble sûr de T tel que $|S| = s$ et que la racine de T est contenue dans S. Soit A le fragment actif de $F(T,S)$, alors S est $(T,v,s,|A|)$-faisable. A ne peut pas être plus petit qu'un fragment qui lui est adjacent, donc $\delta^{max}_T \leq |A|$. On en conclut que $ProgDyn(T,v,s,|A|) \leq |A|$. Un argument similaire permet de dire que si la racine de T n'est pas contenu dans S, alors $ProgDyn(T,f,s,|A|) \geq |A|$.
A l'inverse, si on suppose que $ProgDyn(T,v,s,a) \leq a$ pour un certain a. Soit S un ensemble (T,v,s,a)-faisable tel que $\delta^{max}_T = ProgDyn(T,v,s,a)$. Le fragment actif est plus grand que les fragments adjacents et il n'y a pas de mauvais fragments. On peut en conclure que S est un ensemble sûr. Un argument similaire permet de dire que si $ProgDyn(T,f,s,a) \geq a$ pour un certain a, alors S est un ensemble sûr. □

D'après le Lemme 16, après avoir calculé toutes les cases de la table $ProgDyn$, on peut calculer $s(T)$ en temps $O(n^2)$. Il y a $O(n^3)$ valeurs possibles pour $(T(u,i), b, s, a)$. En effet, pour chaque sommet u fixé, il y a $d(u)$ valeurs possibles pour $T(u,i)$. En considérant toutes les valeurs possibles de u, on compte un total de $2n$ valeurs possibles pour $T(u,i)$. b a 2 valeurs possibles. Enfin, s et a ont chacun $O(n)$ valeurs possibles. Il y a donc $O(n^3)$ cases dans la table $ProgDyn$. Pour prouver le Théorème 28, il nous suffit donc de montrer qu'on peut calculer $ProgDyn(T(u,i), b, s, a)$ en temps $O(n^2)$, en supposant que $ProgDyn(T(u,i-1), b', s', a')$ et $ProgDyn(T(w_i), b', s', a')$ ont déjà été calculées pour tout b', s', a', et pour w_i le $i$ème enfant de u.
On calcule donc les valeurs de chaque case de la table $ProgDyn(T(u,i), b, s, a)$, en commençant par les sommets u les plus profonds, puis par les entiers i les plus petits, de manière à être sûr que $ProgDyn(T(u,i-1), b', s', a')$ et $ProgDyn(T(w_i), b', s', a')$ ont été calculés avant $ProgDyn(T(u,i), b, s, a)$.

Lemme 17. *La valeur de la case $ProgDyn(T(u,0), b, s, a)$ peut être calculée en temps constant.*

Démonstration. $T(u,0)$ est constitué d'un seul sommet. L'ensemble $\{u\}$ est donc le seul ensemble $(T(u,0), v, 1, 1)$-faisable. Comme $F(T(u,0), \{u\})$ ne contient pas de fragment inactifs, $ProgDyn(T(u,0), v, 1, 1) = -\infty$. De même, l'ensemble vide est le seul ensemble $(T(u,0), f, 0, 1)$-faisable et $ProgDyn(T(u,0), v, 1, 1) = +\infty$. Pour toutes autres valeurs de (b, s, a), il n'y a pas d'ensemble $(T(u,0), b, s, a)$-faisable. Il est évident que la valeur de $ProgDyn(T(u,0), b, s, a)$ peut être calculer en temps constant. □

Lemme 18. *Soit u un sommet interne de T et $1 \leq i \leq |C_u|$. Soit $b \in \{v, f\}$, $s \in \{0, \cdots, |V(T(u,i))|\}$ et $a \in \{1, \cdots, |V(T(u,i))|\}$. Étant donné les valeurs de $ProgDyn(T(u,i-1), b, s', a')$ et $ProgDyn(T(w_i), b', s', a')$ pour tout b', s', a' et pour w_i le $i$ème enfant de u, on peut calculer $ProgDyn(T(u,i), b, s, a)$ en temps $O(n^2)$.*

Démonstration. Supposons dans un premier temps que $b = v$. Considérons un ensemble S qui est $(T(u,i), v, s, a)$-faisable. Par définition, $u \in S$. Soit $S_1 := S \cap V(T(u,i-1))$ et $S_2 := S \cap V(T(w_i))$. Il y a deux cas possibles : soit $w_i \in S$, ou bien $w_i \notin S$. Si $w_i \in S$, alors il existe un $s' \in \{0, \cdots, s-1\}$ et un $a' \in \{1, \cdots, a-1\}$ tel que S_1 est $(T(u,i-1), v, s', a')$-faisable et S_2 est $(T(w_i), v, s-s', a-a')$-faisable. Si, par contre, $w_i \notin S$, alors il existe un $s' \in \{a, \cdots, s\}$ et un $a' \in \{1, \cdots, |T(w_i)|\}$ tel que S_1 est $(T(u,i-1), v, s', a)$-faisable et S_2 est $(T(w_i), f, s-s', a')$-faisable.
Réciproquement, soit deux ensembles $S_1 \subset V(T(u,i-1))$ et $S_2 \subset V(T(w_i))$. Si il existe $s' \in \{0, \cdots, s-1\}$ et $a' \in \{1, \cdots, a-1\}$ tel que S_1 est $(T(u,i-1), v, s', a')$-faisable et S_2 est $(T(w_i), v, s-s', a-a')$-faisable, alors $S_1 \cup S_2$ est $(T(u,i), v, s, a)$-faisable. De même, si il existe $s' \in \{a, \cdots, s\}$ et $a' \in \{1, \cdots, |T(w_i)|\}$ tel que S_1 est $(T(u,i-1), v, s', a)$-faisable et S_2 est $(T(w_i), f, s-s', a')$-faisable, alors $S_1 \cup S_2$ est $(T(u,i), v, s, a)$-faisable également.

La case $ProgDyn(T(u,i),v,s,a)$ doit contenir le minimum parmi tous les ensembles $(T(u,i),v,s,a)$-faisable, de la taille maximum d'un fragment adjacent au fragment actif. On obtient ce minimum en restriction aux ensembles $(T(u,i),v,s,a)$-faisable contenant w_i, en minimisant le maximum entre $ProgDyn(T(u,i-1),v,s',a')$ et $ProgDyn(T(w_i),v,s-s',a-a')$, en faisant varier s' dans $\{0,\cdots,s-1\}$ et a' dans $\{1,\cdots,a-1\}$, ce qui se fait en temps $O(n^2)$. De même, on obtient ce même minimum en restriction aux ensembles $(T(u,i),v,s,a)$-faisable ne contenant pas w_i, cette fois, en minimisant le maximum entre $ProgDyn(T(u,i-1),v,s',a)$ et a', en faisant varier s' dans $\{a,\cdots,s\}$ et a' dans $\{1,\cdots,|T(w_i)|\}$, en s'assurant de ne considérer que les couples (s',a') tel que $ProgDyn(T(w_i),f,s-s',a') \geq a'$, sans quoi on considérera des ensembles contenant de mauvais fragments. Ce calcul se fait aussi en temps $O(n^2)$. En conclusion, le calcul total se fait en temps $O(n^2)$.
Supposons maintenant que $b=f$. Considérons un ensemble S qui est $(T(u,i),f,s,a)$-faisable. Par définition, $u \notin S$. Comme précédemment S se décompose en $S_1 \subset V(T(u,i-1))$ et $S_2 \subset V(T(w_i))$ et il faut considérer le cas où $w_i \in S$ et celui où $w_i \notin S$. Si $w_i \in S$, alors il existe un $s' \in \{0,\cdots,s-1\}$ et un $a' \in \{a,\cdots,|T(w_i)|\}$ avec a' plus grand que tous les fragments adjacents au fragment actif dans $F(T(w_i),S_2)$ et tel que S_1 est $(T(u,i-1),f,s',a)$-faisable et S_2 est $(T(w_i),v,s-s',a')$-faisable. Si $w_i \notin S$, alors il existe un $s' \in \{0,\cdots,s\}$ et un $a' \in \{1,\cdots,a-1\}$ tel que S_1 est $(T(u,i-1),f,s',a')$-faisable et S_2 est $(T(w_i),f,s-s',a-a')$-faisable.
Comme précédemment la réciproque est vrai : si deux ensembles $S_1 \subset V(T(u,i-1))$ et $S_2 \subset V(T(w_i))$ ont ces propriétés de faisabilité, alors $S_1 \cup S_2$ est $(T(u,i),f,s,a)$-faisable.
La case $ProgDyn(T(u,i),f,s,a)$ doit contenir le maximum parmi tous les ensembles $(T(u,i),f,s,a)$-faisable, de la taille minimum d'un fragment adjacent au fragment actif. Comme précédemment, on obtient d'abord le maximum en restriction aux ensembles contenant w_i, en maximisant le minimum entre $ProgDyn(T(u,i-1),f,s',a)$ et a', en faisant varié s' dans $\{0,\cdots,s-1\}$ et a' dans $\{a,\cdots,|T(w_i)|\}$, en s'assurant de ne considéré que les couples (s',a') où $ProgDyn(T(w_i),v,s-s',a') \leq a'$, sans quoi on considérera des ensembles contenant de mauvais fragments. On obtiendra ensuite le maximum en restriction aux ensemble ne contenant pas w_i, en maximisant le minimum entre $ProgDyn(T(u,i-1),f,s',a')$ et $ProgDyn(T(w_i),f,s-s',a-a')$, en faisant varier s' dans $\{0,\cdots,s\}$ et a' dans $\{1,\cdots,a-1\}$. Comme précédemment, les deux calculs se font en temps $O(n^2)$. □

Cela conclut la preuve du Théorème 28.

Variante pour les Ensembles Sûr Connexe

Il est facile de modifier l'algorithme du Théorème 28 pour trouver un ensemble sûr connexe minimum. Pour se faire, on va calculer la table $ProgDyn(T(u,i),b,s)$. On définit $\delta^{max}_{T(u,i)}$ comme le cardinal maximal d'un fragment adjacent au fragment actif et $\delta^{act}_{T(u,i)}$ comme le cardinal du fragment actif. On dit qu'un ensemble est $(T(u,i),b,s)$-faisable, si il est connexe et qu'il existe un a tel qu'il est

$(T(u,i),b,s,a)$-faisable. $ProgDyn(T(u,i),b,s)$ est définit comme suit.

$$ProgDyn(T(u,i),v,s) = \begin{cases} +\infty & \text{s'il n'y a pas d'ensemble connexe } (T(u,i),v,s)\text{-faisable,} \\ \min\limits_{(T(u,i),v,s)\text{-faisable } S} \delta^{max}_{T(u,i)} & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$ProgDyn(T(u,i),f,s) = \begin{cases} -\infty & \text{s'il n'y a pas d'ensemble connexe } (T(u,i),f,s)\text{-faisable,} \\ \min\limits_{(T(u,i),f,s)\text{-faisable } S} \delta^{act}_{T(u,i)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est toujours facile de calculer les valeurs de $ProgDyn(T(u,0),b,s)$ en temps constant, ainsi que de calculer $ProgDyn(T(u,i),b,s)$ en temps $O(n)$ en connaissant, pour tout b', s', les valeurs de $ProgDyn(T(u,i-1),b,s')$ et $ProgDyn(T(w_i),b',s')$. On peut donc calculer la table $ProgDyn$ toute entière en temps $O(n^3)$. $cs(T)$ est alors le plus petit s tel que $ProgDyn(T,v,s) \leq s$ ou $ProgDyn(T,f,s) \leq s$.

Variante pour les Ensembles Faiblement Sûr

Il est facile de modifier l'algorithme du Théorème 28 pour trouver un ensemble faiblement sûr minimum. Pour se faire, on change la définition d'un mauvais fragment et des valeurs de la case $ProgDyn(T(u,i),b,s,a)$.
Un fragment $F \in F(T(u,i),S)$ est presque-mauvais quand il est inactif, que F n'est pas dans S et que pour tout $F' \in F(T(u,i),S)$ adjacent à F, $|F| \geq |F'|$.
Un fragment $F \in F(T(u,i),S)$ est mauvais quand il est presque-mauvais et n'est pas adjacent au fragment actif.
On définit $\delta^{max}_{T(u,i)}$ comme le cardinal maximal d'un fragment adjacent au fragment actif et $\delta^{mal}_{T(u,i)}$ comme le cardinal maximal d'un fragment presque mauvais.
$ProgDyn(T(u,i),b,s,a)$ est définit comme suit.

$$ProgDyn(T(u,i),v,s,a) = \begin{cases} +\infty & \text{s'il n'y a pas d'ensemble } (T(u,i),v,s,a)\text{-faisable,} \\ \min\limits_{(T(u,i),v,s,a)\text{-faisable } S} \delta^{mal}_{T(u,i)} & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$ProgDyn(T(u,i),f,s,a) = \begin{cases} -\infty & \text{s'il n'y a pas d'ensemble } (T(u,i),f,s,a)\text{-faisable,} \\ \max\limits_{(T(u,i),f,s,a)\text{-faisable } S} \delta^{max}_{T(u,i)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Avec ces quelques changements de définitions, il est toujours facile de calculer les valeurs de $ProgDyn(T(u,0),b,s,a)$ en temps constant, ainsi que de calculer

$ProgDyn(T(u,i),b,s,a)$ en temps $O(n^2)$ en connaissant, pour tout b', s', a', les valeurs de $ProgDyn(T(u,i-1),b,s',a')$ et $ProgDyn(T(w_i),b',s',a')$. On peut donc calculer la table $ProgDyn$ toute entière. $ws(T)$ est alors le plus petit s tel qu'il existe un a tel que $ProgDyn(T,v,s,a) = -\infty$ ou $ProgDyn(T,f,s,a) \geq a$.

Variante pour les Ensembles Sûrs Détendus

Il est facile de modifier l'algorithme du Théorème 28 pour trouver un ensemble sûr détendue minimum. Pour se faire, on change la définition d'un mauvais fragment et des valeurs de la case $ProgDyn(T(u,i),b,s,a)$.
Pour tout $F \in F(T(u,i),S)$, on définit $N(F)$ comme étant l'ensemble des fragments adjacents à F et $\sigma(F) := |F| - \sum_{F' \in N(F)} |F'|$ Un fragment $F \in F(T(u,i),S)$ est presque-mauvais quand il est inactif, que F n'est pas dans S et que $\sigma(F) > 0$. Un fragment $F \in F(T(u,i),S)$ est mauvais quand il est presque-mauvais et n'est pas adjacent au fragment actif.
On définit $\sigma_{T(u,i)}$ comme étant $\sigma(A)$ où A est le fragment actif et $\delta_{T(u,i)}$ comme le $\sigma(F)$ maximum, pour F adjacent au fragment actif. $ProgDyn(T(u,i),b,s,a)$ est définit comme suit.

$$ProgDyn(T(u,i),v,s,a) = \begin{cases} +\infty & \text{s'il n'y a pas d'ensemble } (T(u,i),v,s,a)\text{-faisable,} \\ \min\limits_{(T(u,i),v,s,a)\text{-faisable } S} \delta_{T(u,i)} & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$ProgDyn(T(u,i),f,s,a) = \begin{cases} +\infty & \text{s'il n'y a pas d'ensemble } (T(u,i),f,s,a)\text{-faisable,} \\ \min\limits_{(T(u,i),f,s,a)\text{-faisable } S} \sigma_{T(u,i)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Avec ces quelques changements de définitions, il est toujours facile de calculer les valeurs de $ProgDyn(T(u,0),b,s,a)$ en temps constant, ainsi que de calculer $ProgDyn(T(u,i),b,s,a)$ en temps $O(n^2)$ en connaissant, pour tout b', s', a', les valeurs de $ProgDyn(T(u,i-1),b,s',a')$ et $ProgDyn(T(w_i),b',s',a')$. On peut donc calculer la table $ProgDyn$ toute entière. $rs(T)$ est alors le plus petit s tel qu'il existe un a tel que $ProgDyn(T,v,s,a) \leq 0$ ou $ProgDyn(T,f,s,a) \leq 0$.

Variante pour les graphes de largeur arborescente bornée

Il est possible de modifier cet algorithme pour trouver un ensemble sûr minimum d'un graphe de largeur arborescente au plus k en temps $O(n^{5k+8})$ [3]. Cette algorithme peut à son tour être adapté pour le calcul d'un ensemble sûr connexe minimum, d'un ensemble faiblement sûr minimum et d'un ensemble sûr détendue minimum.

Chapitre IV
Décomposition arborescente étoilée

16 Introduction

Un problème fondamental de la théorie métrique des graphes [8] consiste à plonger un graphe dans un espace métrique plus simple en minimisant la distorsion des distances du graphe. En particulier, le plongement d'un graphe dans un arbre ou un chemin a des applications pratiques en vision des ordinateur [70], en bio-informatique [57] ainsi qu'en informatique distribuée [55]. Les problèmes de plonger un graphe dans un arbre ou un chemin avec une distorsion minimum sont tout deux NP-difficile [2, 21, 63], cependant, on arrive à approximer ces deux problèmes. Plus précisément, des paramètres de graphe ont été introduis pour mesurer combien la distribution des distances d'un graphe est proche d'une métrique d'arbre ou d'une métrique de chemin [35, 36, 37]. Dans cette partie, on va étudier la complexité du calcul de ces paramètres.

Les paramètres considérés ici sont définis à l'aide de la terminologie de décomposition arborescente introduite par Robertson et Seymour [67]. De manière informelle, une décomposition arborescente est une division d'un graphe G en sac, qui sont des sous-graphes non-disjoint qui peuvent être assemblés à la manière d'un arbre. La longueur arborescente (tree-length) [35] et l'étendue arborescente (tree-breadth) [36] de G sont respectivement les meilleures bornes supérieures possible du diamètre et du rayon des sacs d'une décomposition arborescente de G. La longueur de chemin (path-length) [72] et l'étendue de chemin (path-breadth) [37] sont définies d'une manière similaire à la longueur arborescente et l'étendue arborescente pour les décompositions en chemin. Dans ce chapitre, on s'intéressera au calcul de ces quatre paramètres. Des études récentes suggèrent que certaines classes de réseau réel ont une longueur arborescente et une étendue arborescente bornée [1]. On peut exploiter cette propriété dans un algorithme. Par exemple, les graphes à longueur arborescente bornée admettent un schéma d'étiquetage compact des distances [34], ainsi qu'un schéma d'approximation en temps polynomial pour le fameux problème du voyageur de commerce [60]. De plus, le diamètre et le rayon d'un graphe de longueur arborescente bornée peut être approximé à une constante additive près, en temps linéaire [26]. Ce résultat est à mettre en perspective avec le fait que le diamètre d'un graphe quelconque ne peut pas être approximé à une constante additive près, en temps plus petit que quadratique [24].

On remarquera que la plupart de la littérature sur les décompositions arborescentes cherche à minimiser la taille des sacs plutôt que leur diamètre. La largeur arborescente (tree-width) [67] d'un graphe G est la meilleure borne supérieure possible pour la taille des sacs d'une décomposition arborescente de G. La longueur arborescente et les autres paramètres considérés dans ce chapitre peuvent différer arbitrairement de la largeur arborescente, comme on peut le voir dans [30]. On rappelle que calculer la largeur arborescente ou la largeur de

chemin est NP-difficile [6, 58], mais que pour tout k fixé, il y a un algorithme linéaire qui décide si un graphe a largeur arborescente au plus k (ou largeur de chemin) [14, 15].

Travaux apparentés

La complexité du calcul de la longueur arborescente, l'étendue arborescente, la longueur de chemin et l'étendue de chemin est restée un problème ouvert de plusieurs travaux [35, 36, 37]. Jusqu'à maintenant, la question a seulement été résolue pour la longueur arborescente, qui est NP-difficile à calculer.

Il est NP-complet de décider si un graphe a une longueur arborescente plus petite que k pour toute constante $k \geq 2$ [62]. Cependant, la réduction utilisée passe par les graphes pondérés, puis revient aux graphes non-pondérés en utilisant d'élégants gadgets. Il ne semble pas que ces gadgets se généralisent facilement pour s'appliquer aux autres paramètres considérés ici. Il existe, en revanche, un algorithme qui trouve une 3-approximation de la longueur arborescente [35]. Il semble naturel de chercher la complexité du calcul de l'étendue arborescente, puisqu'un algorithme polynomial impliquerait un algorithme qui trouve une 2-approximation de la longueur arborescente. Il existe des algorithmes qui donnent une approximation à facteur constant de la longueur arborescente et de l'étendue arborescente [37]

Nos contributions Dans un premier temps, on prouve que l'étendue arborescente, la longueur de chemin et l'étendue de chemin sont NP-difficile à calculer. Plus précisément :

— reconnaître les graphes d'étendue arborescente 1 est NP-complet.

— reconnaître les graphes de longueur de chemin 2 est NP-complet.

— reconnaître les graphes d'étendue de chemin 1 est NP-complet.

On remarque que les deux derniers résultats sont obtenus avec la même réduction. Nos réductions présentent des similarités avec celle utilisée pour la longueur arborescente, mais ne font pas détour par les graphes pondérés.

On s'intéresse ensuite à l'étendue arborescente (bien que certains résultats peuvent peut être s'étendre aux autres paramètres considérés). On montrera qu'il est aussi difficile de calculer l'étendue arborescente que de reconnaître les graphes d'étendue arborescente 1. On prouvera aussi quelques propriétés des graphes d'étendue arborescente 1. En particulier, les graphes d'étendue arborescente 1 sont exactement ceux qui admettent une 1-bonne décomposition arborescente, c'est à dire une décomposition arborescente où chaque sac admet une étoile couvrante. La notion plus général de k-bonne décomposition arborescente a été introduite dans [59] pour obtenir de nouveaux schémas de routage compacts. On remarque qu'en conséquence de la relation entre 1-bonne décomposition arborescente et graphe d'étendue arborescente 1, on obtient que décider de l'existence d'une k-bonne décomposition arborescente est NP-complet, même pour $k = 1$.

Enfin, on décrit un algorithme polynomial pour reconnaître les graphes d'étendue arborescente 1, dans les cas planaire et biparti. Notre algorithme de reconnaissance des graphes d'étendue arborescente 1 s'appuie sur des propriétés structurelles profondes de ces graphes.

17 Définitions et résultats préliminaires

Décomposition arborescente et décomposition en chemin d'un graphe

Une décomposition arborescente $(T, \mathcal{X})$ de $G = (V, E)$ est une paire consistant d'un arbre T et d'une famille $\mathcal{X} = (X_t)_{t \in V(T)}$ de sous-ensembles de V indexé par les nœuds de T satisfaisant :

— $\bigcup_{t \in V(T)} X_t = V$.

— pour toute arête $e = \{u, v\} \in E$, il existe $t \in V(T)$ tel que $u, v \in X_t$.

— pour tout $v \in V$, l'ensemble des nœuds $t \in V(T)$ tel que $v \in X_t$ induit un sous-arbre de T, qu'on note T_v.

Les ensembles X_T sont appelés sacs de la décomposition. Si aucun sac n'est contenu dans un autre sac, alors la décomposition arborescente est dite réduite. En partant d'une décomposition arborescente, on obtient une décomposition arborescente réduite, en temps polynomial, en contractant n'importe quels deux sacs adjacents tels que l'un est contenu dans l'autre, jusqu'à ce que ce ne soit plus possible.

Dans la suite, on utilisera la propriété de Helly :

Lemme 19 (Helly property [7]). *Soient T un arbre et $T_1, T_2, \ldots, T_k$ une famille finie de sous-arbres de T s'intersectant deux à deux. Alors, $\bigcap_{i=1}^{k} T_i \neq \emptyset$. Autrement dit, il y a un nœud de T contenu dans chacun des sous-arbres.*

Finalement, la décomposition arborescente $(T, \mathcal{X})$ est dite une décomposition en chemin si T induit un chemin.

Ressemblance métrique à un arbre ou à un chemin Tout les invariants de graphe considérés dans ce chapitre peuvent être définis en terme de décomposition arborescente ou de décomposition en chemin. Soit $(T, \mathcal{X})$ une décomposition arborescente de G. Pour tout $t \in V(T)$,

— le diamètre du sac X_t est $\max_{v,w \in X_t} dist_G(v, w)$;

— le rayon du sac X_t est $\min_{v \in V} \max_{w \in X_t} dist_G(v, w)$.

La longueur de $(T, \mathcal{X})$ est le diamètre maximum de ses sacs, tandis que l'étendue de $(T, \mathcal{X})$ est le rayon maximum de ses sacs. La longueur arborescente et l'étendue arborescente de G, notées respectivement $tl(G)$ et $tb(G)$, sont les longueurs et étendues minimum de ses décompositions arborescentes.

Soit k un entier positif, la décomposition arborescente $(T, \mathcal{X})$ est dite k-bonne quand chaque sac contient un chemin induit dominant de longueur au plus $k - 1$. Chaque graphe G admet une k-bonne décomposition arborescente

pour $k = ch(G)-1$, où $ch(G)$ est la taille du plus long cycle induit de G [59]. Enfin, la longueur de chemin, l'étendue de chemin et les k-bonnes décompositions en chemins sont définies et étudiées similairement pour les décompositions en chemin. La longueur de chemin et l'étendue de chemin de G sont notées respectivement $pl(G)$ et $pb(G)$. On peut observer que les quatre paramètres longueur arborescente, étendue arborescente, longueur de chemin et étendue de chemin, ne peuvent pas être augmentés par contraction d'arête.

Lemme 20 ([36, 37])**.** *Soit $G = (V, E)$. Pour toute arête $e \in E$,*

$$tl(G/e) \leq tl(G),\ tb(G/e) \leq tb(G),\ pl(G/e) \leq pl(G),\ pb(G/e) \leq pb(G).$$

De plus, on peut observer que pour tout graphe G, $tb(G) \leq tl(G) \leq 2 \cdot tb(G)$ et $pb(G) \leq pl(G) \leq 2 \cdot pb(G)$. Si un graphe G admet une k-bonne décomposition arborescente, alors $tb(G) \leq \lfloor k/2 \rfloor + 1$ et $tl(G) \leq k + 1$. Pour conclure cette section, on prouve une équivalence plus forte, $tb(G) = 1$ si et seulement si G admet une 1-bonne décomposition arborescente. Comme une décomposition arborescente est 1-bonne si et seulement si chaque sac contient une étoile couvrante, on appellera décomposition étoilée une telle décomposition.

Définition 18. *Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. Une décomposition étoilée est une décomposition arborescente $(T, \mathcal{X})$ de G dont chaque sac induit un sous-graphe dominé par un sommet.*

Il est clair qu'un graphe admettant une décomposition étoilée a une étendue arborescente d'au plus 1. Il nous reste à prouver la réciproque.

Lemme 21. *Soit G un graphe avec $tb(G) \leq 1$. Chaque décomposition arborescente réduite de G d'étendue 1 est une décomposition étoilée. En particulier :*

- *Toute décomposition arborescente de G d'étendue 1 peut être transformé en décomposition étoilée, en temps polynomial.*
- *Toute décomposition en chemin de G d'étendue 1 peut être transformé en 1-bonne décomposition en chemin, en temps polynomial.*

Démonstration. Soit $(T, \mathcal{X})$ une décomposition arborescente réduite d'étendue 1 de G. Prouvons que c'est une décomposition étoilée. Soient $X_t \in \mathcal{X}$ quelconque et $v \in V$ tel que $\max_{w \in X_t} dist_G(v, w) = 1$. Un tel v existe car X_t est de rayon 1. v est alors dans X_t. En effet, le sous-arbre T_v et les sous-arbres $T_w, w \in X_t$ s'intersectent deux à deux. La propriété de Helly (Lemma 19) implique qu'il existe un sac contenant $\{v\} \cup X_t$. Mais $(T, \mathcal{X})$ est réduite, donc ce sac ne peut être que X_t lui même. X_t est dominé par $v \in X_t$. En appliquant ce raisonnement à tous les sacs de $\mathcal{X}$, on obtient que $(T, \mathcal{X})$ est une décomposition étoilée.

De n'importe quelle décomposition arborescente $(T, \mathcal{X})$ d'étendue 1 de G, on peut obtenir en temps polynomial une décomposition arborescente réduite $(T', \mathcal{X}')$ telle que $\mathcal{X}' \subseteq \mathcal{X}$. $(T', \mathcal{X}')$ est d'étendue 1 car c'est le cas de $(T, \mathcal{X})$. On en conclut que $(T', \mathcal{X}')$ est une décomposition étoilée. Dans le cas particulier où $(T, \mathcal{X})$ est une décomposition en chemin, c'est également le cas de $(T', \mathcal{X}')$. $\square$

Corollaire 1. *Soit G un graphe. $tb(G) \leq 1$ si et seulement si G admet une décomposition étoilée.*

18 Résultats de NP-complétude

Théorème 29. *Décider si un graphe a une longueur de chemin au plus k est NP-complet, pour $k \geq 2$.*

Les graphes de longueur de chemin 1 sont les graphes d'intervalle [37]. On peut les reconnaître en temps linéaire.

Théorème 30. *Décider si un graphe a une étendue de chemin au plus k est NP-complet, pour $k \geq 1$.*

Le Lemme 21 donne alors immédiatement le résultat suivant.

Théorème 31. *Décider si un graphe admet une 1-bonne décomposition en chemin est NP-complet.*

Les preuves des Théorèmes 29 et 30 reposent sur la même réduction depuis le problème d'Ordre Total défini ci-dessous. Le problème d'Ordre Total est NP-complet [64]

Ordre Total **Donnés:** Un ensemble $\mathcal{S}$ de n éléments et un ensemble $\mathcal{T} \subset \mathcal{S} \times \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ de m triplets d'éléments dans $\mathcal{S}$. **Question:** Existe-t-il un ordre total de $\mathcal{S}$ tel que, pour chaque triplet $t = (s_i, s_j, s_k) \in \mathcal{T}$, $s_i < s_j < s_k$ ou $s_k < s_j < s_i$?

Étant donné une instance $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ du problème d'Ordre Total, on construit un graphe $G_{\mathcal{S},\mathcal{T}}$, tel que défini ci-dessous. On prouve ensuite que $pl(G_{\mathcal{S},\mathcal{T}}) \leq 2$ si et seulement si $pb(G_{\mathcal{S},\mathcal{T}}) \leq 1$ si et seulement si $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ est une instance positive du problème d'Ordre Total.

Définition 19. *Soit $\mathcal{S}$ un ensemble de n éléments. Soit $\mathcal{T} \subset \mathcal{S} \times \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ un ensemble de m triplets d'éléments dans $\mathcal{S}$. Le graphe $G_{\mathcal{S},\mathcal{T}}$ est construit comme suit :*

- *Pour chaque élément $s_i \in \mathcal{S}$, $1 \leq i \leq n$, il y a deux sommets adjacents u_i, v_i dans $G_{\mathcal{S},\mathcal{T}}$. De plus, les sommets u_i sont adjacents deux à deux. Autrement dit $U = \{u_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ est une clique.*
- *Pour chaque triplet $t = (s_i, s_j, s_k) \in \mathcal{T}$, on ajoute à $G_{\mathcal{S},\mathcal{T}}$ le v_iv_j-chemin (v_i, a_t, b_t, v_j) de longueur 3, et le v_jv_k-chemin (v_j, c_t, d_t, v_k) de longueur 3. De plus, a_t et b_t sont adjacents à u_l pour tout $l \in \{1, \cdots, n\} \setminus \{k\}$ et c_t et b_t sont adjacents à u_l pour tout $l \in \{1, \cdots, n\} \setminus \{i\}$.*

On peut remarquer que pour tout $1 \leq i \leq n$, le sommet u_i est adjacent à tous les sommets sauf les v_j tels que $j \neq i$, les a_t et b_t tels que s_i est le dernier élément du triplet t et les c_t et b_t tels que s_i est le premier élément du triplet t. La construction du graphe $G_{\mathcal{S},\mathcal{T}}$ est illustré en Figure 19 et 20. On remarque que $G_{\mathcal{S},\mathcal{T}}$ a un diamètre de 3 car la clique U domine $G_{\mathcal{S},\mathcal{T}}$, donc $pl(G_{\mathcal{S},\mathcal{T}}) \leq 3$ et $pb(G_{\mathcal{S},\mathcal{T}}) \leq 2$. On va voir qu'il est difficile de distinguer les graphes de longueur de chemin 2 de ceux de longueur de chemin 3. De même, il

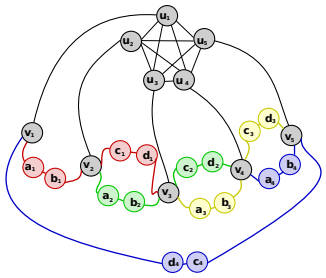


FIGURE 19 – Le graphe $G_{\mathcal{S},\mathcal{T}}$ pour $\mathcal{S} = [|1,5|]$ et $\mathcal{T} = \{(i, i+1, i+2) \mid 1 \leq i \leq 4\}$. Les relations d'adjacence entre les sommets u_i et les sommets a_t,b_t,c_t et d_t ne sont pas dessinées.

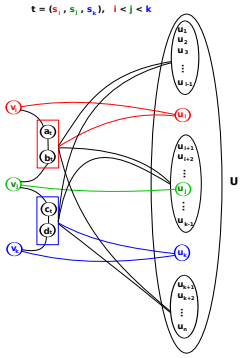


FIGURE 20 – Relations d'adjacence dans $G_{\mathcal{S},\mathcal{T}}$ correspondant à un triplet $t = (s_i, s_j, s_k)$.

est difficile de distinguer les graphes d'étendue de chemin 1 de ceux d'étendue de chemin 2.

Lemme 22. *Soient $\mathcal{S}$ un ensemble de n éléments et $\mathcal{T} \subset \mathcal{S} \times \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ un ensemble de m triplets de $\mathcal{S}$. Si $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ est une instance positive du problème d'Ordre Total, alors $pb(G_{\mathcal{S},\mathcal{T}}) \leq 1$ et $pl(G_{\mathcal{S},\mathcal{T}}) \leq 2$.*

Démonstration. Comme $pl(G_{\mathcal{S},\mathcal{T}}) \leq 2 \cdot pb(G_{\mathcal{S},\mathcal{T}})$, il suffit de prouver que $pb(G_{\mathcal{S},\mathcal{T}}) \leq 1$. Puisque $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ est une instance positive du problème d'Ordre Total, on peut ordonner les éléments de $\mathcal{S}$ pour que pour chaque triplet $(s_i, s_j, s_k) \in \mathcal{T}$, $s_i < s_j < s_k$ ou $s_k < s_j < s_i$. On ordonne donc les éléments de $\mathcal{S}$ ainsi. Si $s_k < s_j < s_i$, on remplace aussi le triplet (s_i, s_j, s_k) par le triplet (s_k, s_j, s_i). On obtient donc un ordre total de $\mathcal{S}$ tel que $s_i < s_j < s_k$ pour tout triplet $(s_i, s_j, s_k) \in \mathcal{T}$.

On construit une décomposition en chemin $(P, \mathcal{X})$ de $G_{\mathcal{S},\mathcal{T}}$ avec n sacs, notés $X_1, X_2, \ldots, X_n$, comme suit. Pour chaque $1 \leq i \leq n$, $U \subseteq X_i$ et $v_i \in X_i$. De plus, pour chaque $t = (s_i, s_j, s_k) \in \mathcal{T}$, $a_t, b_t \in X_l$ pour tout $i \leq l \leq j$, et $c_t, d_t \in X_l$ pour tout $j \leq l \leq k$.

Pour chaque sac X_i il est facile de vérifier que u_i domine X_i, et donc que X_i a rayon 1. Il suffit pour finir la preuve du lemme de prouver que $(P, \mathcal{X})$ est bien une décomposition en chemin. Il est facile de vérifier que chaque sommet de $G_{\mathcal{S},\mathcal{T}}$ apparaît dans au moins un sac de $(P, \mathcal{X})$. Soit e une arête de $G_{\mathcal{S},\mathcal{T}}$. Si $e = u_i u_j$ pour certains i et j, alors $e \in X_k$ pour tout k. Pour $t = (s_i, s_j, s_k) \in \mathcal{T}$, si $e = a_t u_l$ ou $e = b_t u_l$, pour $l \neq k$, ou $e = a_t b_t$, alors $e \in X_m$ pour tout $i \leq m \leq j$. De même, si $e = c_t u_l$ ou $d_t u_l$, pour $l \neq i$, ou $e = c_t d_t$, alors $e \in X_m$ pour tout $j \leq m \leq k$. Enfin pour tout i, $N(v_i) \in X_i$, donc si $e = uv_i$, pour $u \in N(v_i)$ alors $e \in X_i$. Il reste à vérifier que pour tout sommet $u \in v(G_{\mathcal{S},\mathcal{T}})$, T_u est un sous-chemin de P. Pour tout i, $T_{u_i} = P$, $T_{v_i} = T[\{X_i\}]$, qui sont bien des sous-chemins de P. Pour tout $t = (s_i, s_j, s_k) \in \mathcal{T}$, $T_{a_t} = T_{b_t} = T[\{X_i, X_{i+1} \cdots, X_j\}]$ et $T_{c_t} = T_{d_t} = T[\{X_j, X_{j+1} \cdots, X_k\}]$, qui sont bien des sous-chemins de P. $\square$

Lemme 23. *Soient $\mathcal{S}$ un ensemble de n éléments et $\mathcal{T} \subset \mathcal{S} \times \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ un ensemble de m triplets de $\mathcal{S}$. Si $pb(G_{\mathcal{S},\mathcal{T}}) \leq 1$ ou $pl(G_{\mathcal{S},\mathcal{T}}) \leq 2$, alors $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ est une instance positive du problème d'Ordre Total.*

Démonstration. Comme $pl(G_{\mathcal{S},\mathcal{T}}) \leq 2 \cdot pb(G_{\mathcal{S},\mathcal{T}})$ il suffit de considérer le cas où $pl(G_{\mathcal{S},\mathcal{T}}) \leq 2$. Soit $(P, \mathcal{X})$ décomposition en chemin de longueur 2. Comme les sommets v_i sont deux à deux à distance 3, aucun sac ne contient deux v_i distincts. Il en découle que les sous-chemins T_{v_i} sont deux à deux disjoints. Construisons un ordre total de $\mathcal{S}$ en suivant l'ordre d'apparition des sommets v_i le long de P, en partant d'une extrémité quelconque de P. On va montrer que pour chaque triplet $t = (s_i, s_j, s_k) \in \mathcal{T}$, $s_i < s_j < s_k$ ou $s_k < s_j < s_i$, ce qui prouve le lemme.

Supposons par contradiction que pour $t = (s_i, s_j, s_k) \in \mathcal{T}$, $s_j < \min\{s_i, s_k\}$ ou $s_j > \max\{s_i, s_k\}$. Par symétrie, on peut supposer que $s_j < s_i < s_k$. Le chemin entre T_{v_j} et T_{v_k} contiens T_{v_i}. Soit $B \in P_{v_i}$. D'après les propriétés d'une décomposition arborescente, B est un $v_j v_k$-séparateur, et doit donc contenir c_t ou d_t. Mais c_t et d_t sont tous deux à distance 3 de v_i, ce qui contredit le fait que $(P, \mathcal{X})$ a longueur 2. □

Les Théorèmes 29 et 30 sont une conséquence directe des Lemmes 22 et 23.

19 Quelques propriétés des graphes d'étendue arborescente 1.

Décomposition étoilée **Donnés:** Un graphe connexe $G = (V, E)$. **Question:** $tb(G) \leq 1$?

Dans le Lemme 24, on montre que le problème de reconnaître les graphes ayant une étendue arborescente de 1 est équivalent au problème de calculer l'étendue arborescente. On montre ensuite quelques conditions nécessaires pour que le graphe ait une étendue arborescente de 1.

— Tous les graphes admettant une décomposition étoilée ont un ordre d'élimination dominant (voir Section 19.1).

— On verra ensuite le Lemme 26 qui dit que si un graphe G admet une décomposition étoilée, c'est aussi le cas de tous ses blocs.

Enfin, on décrira un algorithme polynomial pour décider si un graphe biparti admet une décomposition étoilée.

Définition 20. *Soit G un graphe à n sommets, notés $v_1, v_2, \cdots, v_n$, et soit r un entier positif. Le graphe G'_r est obtenu à partir de G en ajoutant une clique à n sommets, noté $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, de telle manière que, pour tout $1 \leq i \leq n$, le sommet u_i est adjacent à $B_G(v_i, r) := \{x \in V(G) \mid dist_G(v_i, x) \leq r\}$.*

Lemme 24. *Soient un graphe G et un entier positif r. Soit G'_r définis comme ci-dessus. $tb(G) \leq r$ si et seulement si $tb(G'_r) \leq 1$.*

Démonstration. Si $tb(G) \leq r$, alors on peut construire une décomposition étoilée de G'_r, à partir de n'importe quelle décomposition arborescente $(T, \mathcal{X})$ d'étendue r de G, en ajoutant la clique U dans chaque sac. En effet, par hypothèse, dans chaque sac $X_t,\ t \in V(T)$ il y a un sommet $v_i \in V(G)$ tel que $\max_{x \in X_t} dist_G(v_i, x) \leq r$. Il en découle que $X_t \cup U \subseteq N_{G'_r}[u_i]$.

Réciproquement si $tb(G'_r) \leq 1$, alors on peut construire une décomposition arborescente d'étendue r de G, à partir de n'importe quelle décomposition étoilée $(T', \mathcal{X}')$ de G, en enlevant la clique U de chaque sac. En effet, par hypothèse, dans chaque sac $X'_t,\ t \in V(T')$, il y a un sommet $y \in V(G'_r)$ tel que $X'_t \subseteq N_{G'_r}[y]$. $y \in \{u_i, v_i\}$ pour un certain i, et donc $X'_t \subset N_{G'_r}[y] \subset N_{G'_r}[u_i]$. Par construction, $X'_t \setminus U \subseteq N_{G'_r}(u_i) \setminus U = \{x \in V(G) \mid dist_G(v_i, x) \leq r\}$. □

19.1 Existence d'un ordre d'élimination dominant

Un ordre d'élimination dominant [31] d'un graphe G est un ordre total de son ensemble de sommets, noté $v_1, v_2, \ldots, v_n$, tel que pour tout $1 \leq i < n$, il existe un $j > i$ satisfaisant que $N_G(v_i) \cap \{v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_n\} \subseteq N_G[v_j]$. L'existence d'un ordre d'élimination dominant dans certaines classes de graphes, et les applications algorithmiques qui peuvent en être faites, ont été étudiées dans [25]. Prouvons que tout graphe admettant une décomposition étoilée admet un ordre d'élimination dominant.

Lemme 25. *Soit G un graphe tel que $tb(G) \leq 1$, G admet un ordre d'élimination dominant.*

Démonstration. Supposons que G a au moins deux sommets. Pour prouver le lemme, il suffit de prouver l'existence de $u, v \in V(G)$ distinct tel que $N(v) \subseteq N[u]$ et $tb(G - v) \leq 1$. On peut ensuite conclure par récurrence sur l'ordre du graphe.

Si G admet un sommet universel u, alors on peut choisir un sommet $v \in V(G) \setminus u$ arbitrairement, et $N(v) \subseteq N[u]$. De plus, $tb(G - v) \leq 1$ car $G - v$ admet un sommet universel u.

Supposons, maintenant, que G n'admet pas de sommet universel. Soit $(T, \mathcal{X})$ une décomposition étoilée réduite de G.

Soit $X_t,\ t \in V(T)$ une feuille de T. Comme la décomposition est réduite, il existe $v \in X_t$ tel que $T_v = \{X_t\}$. Deux cas sont possibles.

— Si il existe $u \in X_t \setminus v$ tel que $X_t \subseteq N[u]$, alors $N(v) \subseteq X_t \subseteq N[u]$, et $tb(G - v) \leq 1$ d'après le Lemme 20, car $G - v$ peut être obtenu en contractant l'arête $\{u, v\}$ de G.

— Sinon, $X_t \subseteq N[v]$, et pour tout $x \in X_t \setminus v,\ X_t \not\subseteq N[x]$. Soit t' le nœud adjacent à t dans T. On remarque que t' existe car G n'admet pas de sommet universel, donc T a au moins deux sommets. Si il existe $u \in X_t \setminus X_{t'} \cup \{v\}$, alors $N[u] \subset N[v]$ et $G - u$ admet une décomposition étoilée, obtenue à partir de $(T, \mathcal{X})$ en enlevant u de X_t. Sinon, $X_t \setminus \{v\} \subset X_{t'}$. Il existe un sommet u tel que $X_{t'} \subset N[u]$. On a donc $N(v) \subset X_T \setminus \{v\} \subset X_{t'} \subset N[u]$ et $G - u$ admet une décomposition étoilée, obtenue à partir de $(T, \mathcal{X})$ en enlevant le nœud t et le sac X_t. □

On remarque qu'un graphe ayant une décomposition étoilée doit admettre un ordre d'élimination dominant, ce qui peut être testé en temps polynomial. Cependant, l'existence d'un ordre d'élimination dominant ne garantit pas que le graphe admet une décomposition étoilée. Par exemple, une grille a un ordre d'élimination dominant, mais la longueur arborescente d'une grille à $n \times m$ sommets est au moins $\min\{n, m\} - 1$ [35] (et $tl(G) \leq 2tb(G)$).

19.2 Quelques propriétés utiles sur les séparateurs

Remémorons-nous la terminologie des séparateurs de graphe.

Définition 21. *Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. Un séparateur de G est un sous-ensemble $S \subseteq V$ tel que $G - S$ a au moins deux composantes. Une composante pleine pour S est alors une composante connexe C de $G - S$ satisfaisant $N(C) = S$. Un bloc est un sous-graphe de G induit par l'ensemble $S \cup C$, où S est un séparateur, et C une composante pleine pour S. Enfin un séparateur minimal est un séparateur avec au moins deux composantes pleines.*

Si un graphe G a 1 pour étendue arborescente, alors c'est aussi le cas de tout ses blocs. En fait, on va même montrer un résultat légèrement plus général.

Lemme 26. *Soient un graphe $G = (V, E)$, $S \subseteq V$ un séparateur, et $W \subseteq V \setminus S$ l'union de certaines composantes connexe de $G - S$. Si $tb(G) = 1$ et W contient une composante pleine pour S, alors $tb(G[W \cup S]) = 1$. Plus précisément, si $(T, \mathcal{X})$ est une décomposition étoilée de G, alors $(T, \{X_t \cap (W \cup S) \mid X_t \in \mathcal{X}\})$ est une décomposition étoilée de $G[W \cup S]$.*

Démonstration. Soit $(T, \mathcal{X})$ une décomposition étoilée de G. En enlevant les sommets de $V \setminus (W \cup S)$ de tout les sacs de $(T, \mathcal{X})$, il reste une décomposition arborescente $(T', \mathcal{X}')$ du sous-graphe induit $G[W \cup S]$. Pour prouver le lemme, il faut montrer que cette décomposition est étoilé. Soit X_t un sac de $(T', \mathcal{X}')$. Par construction, X_t a rayon 1 dans G. Soit $v \in V$ tel que $X_t \subseteq N_G[v]$. Si $v \in W \cup S$, X_t admet une étoile couvrante dans $G[W \cup S]$ et il n'y a rien à faire. Supposons $v \notin W \cup S$, X_t. S est un séparateur, donc pour tout $x \notin S \cup W, N(x) \cap (S \cup W) \subseteq S$, donc $X_t \subseteq S$. Soient $A \subseteq W$ une composante pleine pour S, et T'_A le sous-arbre de T' induit par les sacs intersectant la composante A. Pour tout $x \in X_t \subset S$, x a un voisin dans A. Il en découle que, pour tout $x \in X_t$, T'_x intersecte T'_A. Comme de plus les sous-arbres T'_x, pour $x \in X_t$ s'intersectent deux à deux, en X_t par exemple, on peut appliquer la propriété de Helly (Lemma 19) pour dire qu'il existe un sac dans $(T', \mathcal{X}')$ contenant X_t et un sommet de A. Par construction, ce sac contient un sommet $u \in A \cup S$ qui le domine, ainsi que X_t. Quitte a rendre $(T', \mathcal{X}')$ réduite, tous les sacs sont dominés par un sommet de $(W \cup S)$. □

Le Lemme 26 implique qu'un graphe d'étendue arborescente 1 peut être déconnecté en utilisant n'importe quel séparateur minimal, et que les composantes doivent toujours induire un sous-graphe d'étendue arborescente 1. La réciproque ne tient pas en général, sauf dans certains cas intéressant.

Lemme 27. *Soient un graphe $G = (V, E)$, une clique séparatrice minimal $S \subseteq V$ et A une composante pleine de S. Alors, $tb(G) = 1$ si et seulement si à la fois $tb(G[A \cup S]) = 1$ et $tb(G[V \setminus A]) = 1$.*

Démonstration. S est un séparateur minimal donc $V \setminus (A \cup S)$ contient une composante pleine. D'après le Lemme 26, si $tb(G) = 1$, alors $tb(G[A \cup S]) = 1$ et $tb(G[V \setminus A]) = 1$.

Réciproquement, supposons que $tb(G[A \cup S]) = 1$ et $tb(G[V \setminus A]) = 1$. Soit $(T^1, \mathcal{X}^1)$ une décomposition étoilée de $G[A \cup S]$ et $(T^2, \mathcal{X}^2)$ une décomposition étoilée de $G[V \setminus A]$. Comme S est une clique, S est entièrement contenu dans un sac de $(T^1, \mathcal{X}^1)$ et un sac de $(T^1, \mathcal{X}^1)$. Cela découle de la propriété de Helly (Lemme 19) appliqué aux sous-arbres $T_s,\ s \in S$. On obtient une décomposition étoilée de G en prenant une copie de $(T^1, \mathcal{X}^1)$ et de $(T^2, \mathcal{X}^2)$ et en ajoutant une arête entre un sac de $(T^1, \mathcal{X}^1)$ contenant S et un sac de $(T^2, \mathcal{X}^2)$ contenant S. □

Calculer la décomposition par clique séparatrice minimal d'un graphe G se fait en temps $O(nm)$, où m est le nombre d'arêtes de G [13]. Ce fait, combiné au Lemme 27, nous permet de supposer dans la suite que les graphes que nous étudions n'ont pas de clique séparateur. On dira qu'un tel graphe est premier.

19.3 Les graphes bipartis

Si G est un graphe biparti premier, une décomposition étoilée de G a une forme très particulière.

Lemme 28. *Soit un graphe biparti premier $G = (V_0 \cup V_1, E)$ d'étendue arborescente 1. Il existe une décomposition étoilée $(T, \mathcal{X})$ de G tel que $\mathcal{X} = \{N[v_0] \mid v_0 \in V_0\}$, ou $\mathcal{X} = \{N[v_1] \mid v_1 \in V_1\}$.*

Démonstration. Soit $(T, \mathcal{X})$ une décomposition étoilée de G, qui minimise le nombre de sacs $|\mathcal{X}|$. Supposons qu'il existe $v_0 \in V_0$, $v_1 \in V_1$ et $\{t, t'\} \in E(T)$ tel que $X_t \subseteq N_G[v_0]$, $X_{t'} \subseteq N_G[v_1]$. Comme v_1 et v_0 sont dans deux parties différentes de la bipartition de G, $N_G[v_0] \cap N_G[v_1] \subset \{v_0, v_1\}$ si v_0 et v_1 sont adjacents, et $N_G[v_0] \cap N_G[v_1] = \emptyset$ sinon. Mais $X_t \cap X_{t'}$ est un séparateur de G, et $X_t \cap X_{t'} \subset N_G[v_0] \cap N_G[v_1]$. Clairement G n'est pas premier, ce qui entraîne une contradiction. Il n'est donc pas possible de choisir deux sacs adjacent X_t et $X_{t'}$ tels que l'un est dominé par un sommet de V_0 et l'autre par un sommet de V_1. Comme T est connexe et que tous les sacs sont dominés par un sommet de $V_0 \cup V_1$, en fait, tous les sacs sont dominés par un sommet de V_0 ou tous les sacs sont dominés par un sommet de V_1.

Supposons, par symétrie, que tous les sacs sont dominés par un sommet de V_0. Soit v_0 un sommet de V_0. $T_{v_0} \neq \emptyset$. On peut remarquer que tous les sacs de T_{v_0} sont dominés par v_0. On peut donc contracter T_{v_0} en un seul sac sans changer la propriété que $(T, \mathcal{X})$ est une décomposition étoilée de G. Par minimalité de $|\mathcal{X}|$, T_{v_0} est en fait réduit à un seul sac $N[v_0]$. Cet argument s'applique à tous les sommets de V_0, ce qui conclut la preuve du lemme. □

On utilise cette propriété pour décrire un algorithme en temps $O(nm)$ qui décide si un graphe biparti a une étendue arborescente de 1. En effet, si G est un graphe biparti premier, alors il n'y a que deux ensembles de sacs possible pour une décomposition étoilée de G. De plus, si $\mathcal{X}$ est un ensemble fixé de sacs potentiels, satisfaisant que chaque sac est dominé par un de ses sommets, il est facile de tester si G admet une décomposition étoilée utilisant les sacs de l'ensemble $\mathcal{X}$: il suffit d'ajouter les arêtes nécessaires pour que chaque sac de $\mathcal{X}$ soit une clique, puis de vérifier que le graphe ainsi obtenu est cordal avec pour cliques maximal les sacs de $\mathcal{X}$. Comme il est possible de reconnaître un graphe cordal et d'énumérer ses cliques maximals en temps linéaire [46], on a ainsi un algorithme pour reconnaître les graphes bipartis premiers d'étendue arborescente 1. Si on ajoute le Lemme 27, on obtient qu'il existe un algorithme polynomial pour reconnaître les graphes bipartis d'étendue arborescente 1.

20 Un algorithme polynomial pour les graphes planaires

Dans cette section, on décrit un algorithme quadratique qui décide si un graphe planaire premier a une étendue arborescente de 1. On en déduit que cela donne un algorithme quadratique qui décide si un graphe planaire quelconque a une étendue arborescente de 1. En effet, la décomposition en clique d'un graphe planaire se calcule en temps quadratiques et donne $O(n+m)$ morceau [13], c'est à dire $0(n)$ dans le cas planaire.

Grossièrement, l'idée est de construire une décomposition étoilée morceau par morceau. Le principe central de l'algorithme récursif est de trouver un sommet particulier, appelé sommet-feuille, puis de reconnaître un sac de la décomposition étoilée dans le voisinage du sommet-feuille. On pourra ensuite, en fonction du cas, enlever le sommet-feuille, ajouter une arête, ou contracter une arête, en conservant la propriété que le graphe est planaire premier et a étendue arborescente 1 si et seulement si c'était le cas du graphe original.

On prouve aussi que chaque étape prend un temps linéaire et qu'il y a au plus un nombre linéaire d'étapes récursives (Lemme 43).

Il y a trois types de sommet-feuille (voir Figure 21).

Définition 22. *Soit un graphe $G = (V, E)$. Un sommet v est un sommet-feuille si une des conditions suivantes est vrai.*

Type 1. *$N(v)$ induit un chemin, noté Π_v de longueur 3 entre les sommets a_v et b_v de $V \setminus \{v\}$. De plus, il existe un sommet $d_v \in V \setminus \{v\}$ tel que $N(v) \subseteq N(d_v)$. Autrement dit, d_v domine Π_v.*

Type 2. *$N(v)$ induit un chemin, noté $\Pi_v = (a_v, b_v, c_v)$, de longueur 2.*

Type 3. *$N(v)$ consiste en deux sommets non-adjacents a_v et c_v, et il existe un sommet $b_v \in (N(a_v) \cap N(c_v)) \setminus \{v\}$.*

On peut maintenant décrire l'algorithme.

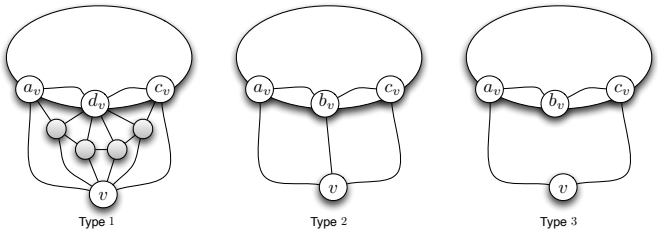


FIGURE 21 – Les trois types de sommet-feuille.

20.1 L'algorithme `Feuille-DeBasEnHaut`

Soit un graphe planaire premier $G = (V, E)$. On suppose que G a au moins sept sommets, sans quoi il est facile de conclure.

Étape 1 La première étape consiste à trouver un sommet-feuille de G. On discute dans la Section 20.4.1 de comment décider en temps linéaire si G admet un sommet-feuille, et de le trouver le cas échéant.

— Si G n'admet pas de sommet-feuille, alors d'après le Théorème 33, il n'existe pas de séparateur minimal de G induisant un chemin de longueur 2. Il en découle, d'après le Lemme 36, que $tb(G) = 1$ seulement si G a une décomposition étoilée composé d'au plus deux sacs. Dans ce cas, l'algorithme vérifie s'il existe une décomposition étoilée avec au plus 2 sacs, ce qui est possible en temps quadratique (voir le Lemme 42). Si une telle décomposition existe, alors $tb(G) = 1$, sinon $tb(G) > 1$.

— Si G admet au moins un sommet-feuille, on appelle v un sommet-feuille de G, puis on continue l'algorithme par l'Étape 2, si v est de type 1, ou l'Étape 3 si v est de Type 2 ou 3.

Étape 2 **Cas v est de Type 1.** Soit Π_v et d_v comme dans la Définition 22 des sommet-feuilles. Si $V = N[v] \cup \{d_v\}$ alors, trivialement $tb(G) = 1$. Sinon, soit G' le graphe obtenu depuis $G - v$ en contractant Π_v en une seule arête entre a_v et b_v. D'après le Théorème 34, G' est planaire premier et $tb(G) = 1$ si et seulement si $tb(G') = 1$. On applique l'algorithme `Feuille-DeBasEnHaut` récursivement sur G'.

Étape 3 **Cas v est de Type 2 ou 3.** Soit a_v, b_v, c_v comme dans la Définition 22 des sommet-feuilles. Dans ce cas, l'algorithme regarde si $G - v$ est premier. Le Théorème 32 dit que si une clique séparatrice minimal S de $G - v$ existe, alors il existe un sommet $u_v \in N(b_v) \setminus \{a_v, c_v, v\}$ tel que $S = \{b_v, u_v\}$. Il est donc facile de vérifier en temps linéaire si $G - v$ est premier. Si $G - v$ est premier, on continue l'algorithme par l'Étape 3.1. Si $G - v$ n'est pas

premier, on continue l'algorithme par l'Étape 3.2.

Étape 3.1 **Cas v est de Type 2 ou 3 et $G-v$ est premier.** Il y a 3 sous-cas. On peut déterminer quel sous-cas appliquer en temps linéaire.

(a) **Cas $|N(a_v) \cap N(c_v)| \geq 3$ dans $G-v$, ou bien il existe un séparateur minimal $S \subseteq (N(a_v) \cap N(c_v)) \cup \{a_v, c_v\}$ de $G-v$ contenant $\{a_v, c_v\}$.**

D'après le Théorème 35, $tb(G) = 1$ si et seulement si $tb(G-v) = 1$. Comme $G-v$ est planaire premier, on applique l'algorithme `Feuille-DeBasEnHaut` récursivement sur $G-v$.

(b) **Cas $|N(a_v) \cap N(c_v)| < 3$ dans $G-v$ et il n'existe pas de séparateur minimal $S \subseteq (N(a_v) \cap N(c_v)) \cup \{a_v, c_v\}$ de $G-v$ contenant $\{a_v, c_v\}$.**

i **Sous-cas $|N(a_v) \cap N(c_v)| = 1$ dans $G-v$.** Dans ce sous-cas, $N(a_v) \cap N(c_v) = \{v, b_v\}$. D'après le Théorème 36, $tb(G) = 1$ si et seulement si $G = C_4$. Comme G a au moins sept sommets, $tb(G) > 1$.

ii **Sous-cas $|N(a_v) \cap N(c_v)| = 2$ dans $G-v$.** Dans ce sous-cas, il y a un unique sommet u_v dans $N(a_v) \cap N(c_v) \setminus \{v, b_v\}$. Soit G' le graphe obtenu en ajoutant les arêtes $\{v, u_v\}$ et $\{b_v, v\}$. D'après le Théorème 37, le graphe G' est planaire premier, et $tb(G) = 1$ si et seulement si $tb(G') = 1$. On applique l'algorithme `Feuille-DeBasEnHaut` récursivement sur G'.

Étape 3.2 **Cas v est de Type 2 ou 3 et $G-v$ a une clique séparateur.** Il existe un sommet $u_v \in V \setminus \{a_v, b_v, c_v, v\}$ tel que $S = \{b_v, u_v\}$ est une clique séparatrice minimale de $G-v$. D'après le Théorème 32, $G - \{a_v, b_v, c_v, v\}$ est connexe.

Si v est de Type 3, on appelle G' le graphe obtenu de G en ajoutant l'arête $\{v, b_v\}$. G' est planaire premier. Le Théorème 38 dit que $tb(G) = 1$ si et seulement si $tb(G') = 1$. L'algorithme ajoute l'arête $\{v, b_v\}$, et on peut considérer dans la suite que v est de Type 2.

D'après le Théorème 32, $u_v \notin N(a_v) \cap N(c_v)$. On peut supposer sans perte de généralité que $u_v \notin N(a_v)$, c'est à dire que $u_v \notin N(a_v) \cup N(c_v)$ ou $u_v \in N(c_v) \setminus N(a_v)$.

(a) **Cas $u_v \notin N(c_v)$, ou $(N(u_v) \cap N(a_v)) \cup \{v, c_v\}$ ne sépare pas u_v et a_v dans G.**

D'après le Théorème 39, G/va_v est planaire premier, et $tb(G) = 1$ si et seulement si $tb(G/va_v) = 1$. On applique l'algorithme `Feuille-DeBasEnHaut` récursivement sur G/va_v, le graphe obtenu en contractant l'arête $\{v, a_v\}$ dans G.

(b) **Cas $u_v \in N(c_v) \setminus N(a_v)$, et $(N(u_v) \cap N(a_v)) \cup \{v, c_v\}$ sépare u_v et a_v dans G.**

On va utiliser, pour la résolution de ce cas, le fait que G a au moins sept sommets.

i **Sous-cas $N(b_v) = \{v, a_v, c_v, u_v\}$.** D'après le Théorème 40, il existe un sommet $x \in (N(a_v) \cap N(u_v)) \setminus \{b_v\}$, tel qu'on peut ajouter l'arête $\{b_v, x\}$ en conservant la planarité de G. On appelle $G' := G + b_v x$. D'après le Théorème 41, $G'/b_v x$ est planaire premier et $tb(G) = 1$ si et seulement $tb(G'/b_v x) = 1$. On applique l'algorithme `Feuille-DeBasEnHaut` récursivement sur $G'/b_v x$, le graphe obtenu en contractant l'arête $\{b_v, x\}$ dans G'.

ii **Sous-cas $N(b_v) \cap N(a_v) \cap N(u_v) \neq \emptyset$.** D'après le Lemme 39, $|N(b_v) \cap N(a_v) \cap N(u_v)| = 1$. Soit x l'unique voisin commun de b_v, a_v et u_v. D'après le Théorème 41, $G/b_v x$ est planaire premier et $tb(G) = 1$ si et seulement $tb(G/b_v x) = 1$. On applique l'algorithme `Feuille-DeBasEnHaut` récursivement sur $G/b_v x$, le graphe obtenu en contractant l'arête $\{b_v, x\}$ dans G'.

iii **Sous-cas $\{v, a_v, c_v, u_v\} \neq N(b_v)$ et $N(b_v) \cap N(a_v) \cap N(u_v) = \emptyset$.** D'après le Théorème 42, il existe un unique sommet $x \in (N(a_v) \cap N(u_v)) \setminus \{b_v\}$ tel que $N(b_v) \cap N(x)$ sépare b_v et x dans G, et $|N(b_v) \cap N(x)| \geq 3$, sans quoi $tb(G) > 1$ et l'algorithme termine ici.

— **Supposons dans un premier temps qu'il existe un sommet-feuille $\ell \in N(b_v) \cap N(x)$.** D'après le Lemme 40, $G - \ell$ est premier ou ℓ est de Type 1. On applique alors l'algorithme `Feuille-DeBasEnHaut` en prenant ℓ comme sommet-feuille au lieu de v. Puisque $G - \ell$ est premier ou ℓ est de Type 1, l'algorithme va passer par l'Étape 2 ou l'Étape 3.1. En particulier, l'algorithme ne passera pas par l'Étape 3.2 à nouveau, et ne risque donc pas de boucler.

— Enfin, si il n'existe pas de sommet-feuille dans $N(b_v) \cap N(x)$, le Théorème 43 dit qu'il existe deux sommets non-adjacents $y, z \in N(b_v) \cap N(x)$ tel que le graphe $G' := G + xy$ est planaire premier, et $tb(G) = 1$ si et seulement si $tb(G') = 1$. On applique l'algorithme `Feuille-DeBasEnHaut` récursivement sur G'.

20.2 Propriétés des graphes planaires premiers d'étendue arborescente 1

20.2.1 Quelques lemmes sur les graphes planaires premiers

Les propriétés ci-dessous ne dépendent pas de l'existence d'une décomposition étoilée.

Propriété des graphes planaires 2-connexes On utilise la notion de graphe intermédiaire défini ci-dessous.

Définition 23 (Graphe intermédiaire, [16] Definition 6)**.** *Soit un graphe planaire $G = (V, E)$. On choisit un plongement de G dans le plan. Soit F l'ensemble des faces de ce plongement. Le graphe intermédiaire $G_I = (V \cup F, E_I)$ a pour ensemble de sommets $V \cup F$. De plus $E \subseteq E_I$ et il y a une arête dans G_I entre un sommet originel $v \in V$ et un sommet-face $f \in F$ quand les sommets et faces correspondantes de G sont incidentes (voir la Figure 22).*

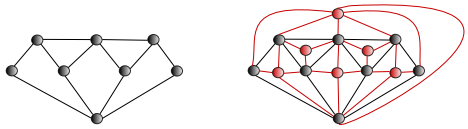


FIGURE 22 – A gauche un plongement dans le plan d'un graphe, et à droite le graphe intermédiaire correspondant.

On remarque qu'un graphe intermédiaire est planaire, et que, comme un plongement dans le plan peut être construit en temps linéaire [56], c'est aussi le cas d'un graphe intermédiaire.

Lemme 29 ([16] Proposition 9)**.** *Soient S un séparateur minimal d'un graphe planaire 2-connexe $G = (V, E)$ et C une composante pleine pour S. On choisit un plongement de G dans le plan. S correspond alors à un cycle séparateur $v_S(C)$ du graphe intermédiaire G_I, de longueur $2|S|$, avec $V \cap v_S(C) = S$. De plus, une composante connexe C_I de $G_I - v_S(C)$ vérifie que $C_I \cap V = C$.*

Dans la suite se trouve deux corollaires du Lemme 29.

Corollaire 2. *Soit S un séparateur minimal d'un graphe planaire 2-connexe $G = (V, E)$. S induit alors un cycle ou une forêt de chemin.*

Démonstration. On choisit un plongement planaire de G, et on construit G_I le graphe intermédiaire correspondant. Soit C_S le plus petit cycle de G_I tel que $V \cap C_S = S$, qui existe d'après le Lemme 29. Pour prouver le corollaire, il suffit de prouver que C_S est un cycle induit de G_I. Supposons, par contradiction, qu'il existe une corde xy à C_S. Les sommets issus de faces sont non-adjacents deux à deux dans G_I, donc $x \in S$ ou $y \in S$. Supposons, sans perte de généralité, que $x \in S$.

Soit C_1 et C_2 les deux cycles tels que $C_1 \cup C_2 = C_S$ et $C_1 \cap C_2 = \{x, y\}$. Par minimalité de C_S, il existe deux sommets $z_1, z_2 \in S$ tels que $z_1 \in C_1 \setminus \{x, y\}$ et $z_2 \in C_2 \setminus \{x, y\}$. Enfin, soit A et B deux composantes pleines pour S. On contracte C_1 et C_2 pour obtenir les deux triangles (z_1, x, y) et (z_2, x, y). G_I admet un $K_{3,3}$-mineur, avec $\{A, B, y\}$ et $\{x, z_1, z_2\}$ les deux parties de la bipartition, ce qui est absurde.

C_S induit un cycle de G_I et donc le sous-graphe induit par S dans G est soit un cycle, soit une forêt de chemins. □

Corollaire 3. *Soit S un séparateur minimal d'un graphe planaire 2-connexe $G = (V, E)$. Il existe un super-graphe planaire G_S de G ayant V pour ensemble de sommets, tel que S induit une arête ou un cycle de G_S. De plus, G_S peut être construit en temps linéaire.*

Démonstration. On choisit un plongement planaire de G, et on construit G_I le graphe intermédiaire correspondant. Pour chaque sommet-face de G_I, on considère $S_f = S \cap N_{G_I}(f)$. Soit A, B deux composantes pleines pour S. Si $|S_f| \geq 3$, alors il y a un $K_{3,3}$-mineur de G_I avec $\{A, B, f\}$ et S_f les deux parties de la bijection, ce qui est absurde. $|S_f| \leq 2$. On construit le graphe G_S en partant de G et en ajoutant une arête entre $x \in S$ et $y \in S$ quand il existe un f tel que $S_f = \{x, y\}$.

On remarque que G_S est un mineur de G_I, donc c'est un graphe planaire. D'après le Lemme 29, il y a un cycle de G_I dont les sommets appartenant à G sont exactement les sommets de S. Il en découle que S induit une arête ou contient un cycle dans G_S. S étant un séparateur minimal de GS, le Corollaire 2 permet de conclure que S induit un cycle de G_S. □

Propriétés des graphes planaires premiers.

Lemme 30. *Soit un graphe premier $G = (V, E)$ sans $K_{3,3}$-mineur. Soient $v \in V$, et $S \subset N_G(v)$ un séparateur minimal de $G - v$. S consiste alors en deux sommets non-adjacents.*

Démonstration. Soit $S \subseteq N_G(v)$ un séparateur minimum de $G - v$. Il existe deux composantes pleines A et B pour S, inclus dans $G - (S \cup \{v\})$. G admet $K_{3,|S|}$ comme mineur, avec $\{A, B, v\}$ et S comme partie de la bipartition. Il en découle que $|S| \leq 2$. Enfin, comme $S \cup \{v\}$ est un séparateur de G qui est premier, S est constitué d'exactement deux sommets non-adjacents. □

Lemme 31. *Soient un graphe planaire premier G, $\Pi = (a, b, c)$ un chemin séparateur de G, et C une composante de $G - \Pi$. Il y a, alors, au plus, un voisin commun à a et b dans C.*

Démonstration. On remarque d'abord que a et c ne sont pas adjacents sinon Π est une clique séparatrice de G. De même, pour toute composante C' de $G - \Pi$, $a, c \in N(C')$, sans quoi ab ou bc est une arête séparatrice de G. En particulier, il est toujours possible de rendre a et c adjacent en contractant une composante arbitraire de $G - \Pi$.

Supposons, par contradiction qu'il existe $u, u' \in N(a) \cap N(b) \cap C$ distinct. G est premier, donc a, b, u' n'est pas un séparateur de u et c. Il existe donc un chemin Q entre u et c inclus dans $C \setminus \{u'\}$. De même, il existe un chemin Q' entre u' et c inclus dans $C \setminus \{u\}$. On distingue deux cas.

— Q et Q' sont des chemins aux sommets internes distincts. En contractant Q et Q' sur u et u', on fait apparaître un K_5-mineur de G sur les sommets a, b, c ,u et u'. Cela contredit le fait que G est planaire.

— Q et Q' s'intersectent. Soit $y \in (Q \cap Q')$ tel que le sous-chemin de Q entre u et y n'intersecte pas Q'. Quitte à faire quelques contractions, on peut faire apparaître un $K_{3,3}$-mineur sur les sommets a,b et y dans une partie et c, u et u' dans l'autre. Cela contredit le fait que G est planaire.

□

Lemme 32. *Soient un graphe planaire premier G admettant le chemin $\Pi = (a, b, c)$ comme séparateur, et C une composante de $G - \Pi$. Supposons qu'il existe un sommet $v \in C$, voisin de a, b, et c. Alors, C est réduit à $\{v\}$ ou (a, v, c) est un chemin séparateur de G. De plus, si (a, v, c) est un chemin séparateur de G, (a, v, c) sépare b de $C \setminus \{v\}$.*

Démonstration. Soient un graphe planaire premier G admettant le chemin $\Pi = (a, b, c)$ comme séparateur, C une composante de $G - \Pi$ et $v \in C$ un voisin de a, b et c. Supposons que $C \setminus \{v\} \neq \emptyset$. Soit D une composante connexe de $G[C \setminus \{v\}]$. On rappelle que C est connexe, donc $v \in N(D)$. Pour prouver le lemme, il suffit de montrer que $b \notin N(D)$.

Supposons, par contradiction, que $b \in N(D)$. v, b et a forment un triangle, de même que v, b et c. Mais G n'admet pas de clique séparateur, donc nécessairement $N(D) = \{a, b, c, v\}$. On contracte D en un sommet x. Soit C' une autre composante de $G - \Pi$. Comme G n'admet toujours pas de clique séparateur, $\{a, c\} \subset N(C') \subset \{a, b, c\}$. En contractant C' sur c, on obtient un K_5 formé par les sommets a, b, c, v et x. Cela contredit que G est planaire. □

Rappelons que l'idée de l'algorithme est d'essayer d'enlever le sommet-feuille v de G, puis d'appliquer récursivement l'algorithme sur $G - v$. L'algorithme dépend du fait que G est premier, il est donc important d'arriver à assurer que $G - v$ est premier avant de faire l'appel récursif. Si on se contentait, dans le cas où $G - v$ n'est pas premier, de le séparer en plusieurs morceaux premiers, alors on risquerait de provoquer une explosion combinatoire sur le nombre de sous-graphes considérés. Dans la suite on caractérise les situations où il peut y avoir une clique séparatrice dans $G - v$, avec v un sommet-feuille.

Lemme 33. *Soit un graphe $G = (V, E)$ admettant le chemin $\Pi = (a, b, c)$ comme séparateur. Soient C une union de composante connexe de $G - \Pi$ et S un séparateur de $G[C \cup \Pi]$. Alors S est un séparateur de G ou S sépare a et c dans $G[C \cup \Pi]$. De plus, si S sépare a et c dans $G[C \cup \Pi]$, alors $G[C \cup \Pi]$ a exactement deux composantes contenant chacune a ou c.*

Démonstration. Soit un graphe $G = (V, E)$ admettant le chemin $\Pi = (a, b, c)$ comme séparateur. Soient C une union de composante connexe de $G - \Pi$ et S un séparateur de $H := G[C \cup \Pi]$.

Supposons dans un premier temps qu'il existe une composante connexe D de $H - S$ tel que $N_G(D) \subseteq V(H)$. Clairement $N_H(D) \subseteq S$. H est un sous-graphe induit de G, et $N_G(D) \subseteq V(H)$, donc, en fait $N_G(D) \subseteq N_H(D) \subseteq S$. S est un séparateur de G.

Supposons, maintenant que toute composante connexe de $H - S$ admet, dans G, un voisin en dehors de H. Clairement, toute composante connexe de $H - S$ contient alors au moins un sommet de Π. $H - S$ admet au moins deux composantes connexes, qui, par définition ne sont pas adjacentes dans G. Or a est adjacent à b et b est adjacent à c. Nécessairement, une composante connexe C_a de $H - S$ contient a, mais pas b, ni c, et une composante connexe C_c de $H - S$ contient c, mais pas b, ni a. Il ne peut pas y avoir plus de composante connexe dans $H - S$, car tous les sommets de Π sont soit dans C_a, soit dans C_c, soit dans leur voisinage. □

Théorème 32. *Soient un graphe planaire premier $G = (V, E)$, un sommet-feuille v de Type 2 ou 3 et $\Pi_v = (a_v, b_v, c_v)$ le chemin séparant v du reste du graphe, tel qu'il est nommé dans la Définition 22 des sommet-feuilles. Supposons qu'il existe une clique séparatrice minimal S de $G - v$. Alors, $S = \{u_v, b_v\}, u_v \notin \Pi_v$ et les propriétés suivantes sont vérifiées :*

- *$V \setminus \{a_v, b_v, c_v, v\}$ est une composante pleine pour Π_v.*
- *Si $u_v \in N(a_v)$ (respectivement $u_v \in N(c_v)$), alors a_v (respectivement c_v) a pour ensemble de voisins $\{u_v, b_v\}$.*
- *$u_v \notin N(a_v) \cap N(c_v)$ sauf si $V = \{a_v, b_v, c_v, u_v, v\}$.*

Démonstration. Soient G, v et $\Pi_v = (a_v, b_v, c_v)$ comme dans les hypothèses, et S une clique séparatrice minimal de $G - v$. On remarque que $G - v$ est planaire. D'après le Corollaire 2, S induit un cycle ou une forêt de chemins. Mais S est une clique, donc S induit un singleton, une arête ou un triangle. S est une clique et G est premier, donc S n'est pas un séparateur de G. Le Lemme 33 implique donc que S sépare a_v de c_v dans $G - v$. Il en découle que $b_v \in S$ et que $S \cup \{v\}$ est un séparateur minimal de G séparant a_v et c_v. S étant un sous-ensemble strict d'un séparateur minimal de G, il ne peut pas induire un cycle d'après le Corollaire 2. S induit un singleton ou une arête. D'après le Lemme 33, on sait aussi qu'il existe exactement deux composantes C_a et C_c de $G - (S \cup \{v\})$, avec $a_v \in C_a$ et $c_v \in C_c$. Si $S = \{b_v\}$, alors $\{a_v, b_v\}$ et $\{b_v, c_v\}$ sont tout les deux des arêtes séparateur de G, ce qui est absurde, donc S induit une arête. Soit $u_v \in N(b_v) \setminus \{a_v, c_v, v\}$ tel que $S = \{u_v, b_v\}$.

b_v est adjacent à a_v et u_v. Si $u_v \in N(a_v)$, alors $\{a_v, b_v, u_v\}$ induit une clique et donc $C_a = \{a_v\}$, sans quoi $\{a_v, b_v, u_v\}$ est une clique séparatrice de G. De même, si $u_v \in N(c_v)$, alors $C_c = \{c_v\}$. En particulier, si $u_v \in N(a_v) \cap N(c_v)$, alors $V = \{a_v, b_v, c_v, u_v, v\}$.

Enfin, comme G n'admet pas de clique séparatrice, il existe un chemin entre a_v et c_v dans toute composante de $G - \Pi_v$. Ce chemin intersecte u_v ou v. Comme

$\{v\}$ est une composante connexe de $G - \Pi_v$, cela implique que $V \setminus \{a_v, b_v, c_v, v\}$ est une composante pleine pour Π_v. $\square$

20.2.2 Contraindre la décomposition étoilée

Lemme 34. *Soient un graphe connexe G d'étendue arborescente 1, et deux sommets distincts non-adjacents $x, y \in V(G)$. Supposons que pour tout ensemble $S \subset V$ qui sépare x et y, tel que S est dominé par $z \in V \setminus \{x, y\}$, on a $z \in N(x) \cap N(y)$. Alors, il existe une décomposition étoilée $(T, \mathcal{X})$ de G telle qu'on a deux sacs $B_x, B_y \in \mathcal{X}$, avec $x \in B_x$ et $y \in B_y$, tel que B_x et B_y sont adjacents dans T ou égaux. De plus, si B_x et B_y sont adjacents, $B_x \subseteq N[x]$ et $B_y \subseteq N[y]$.*

Démonstration. Soient G, x et y comme dans les hypothèses. Soit $(T, \mathcal{X})$ une décomposition étoilée de G. Si x et y sont dans le même sac, la conclusion du lemme est vérifiée. Supposons que $T_x \cap T_y = \emptyset$. Soit B_x et B_y les sacs contenant respectivement x et y étant les plus proches dans T. D'après les propriétés d'une décomposition arborescente, $N(x) \cap N(y)$ est inclut dans B_x, dans B_y et dans tous les sacs sur le chemin entre B_x et B_y dans T.

Supposons, dans un premier temps, que B_x et B_y ne sont pas adjacents dans T. Chacun des sacs B sur le chemin entre B_x et B_y sépare x et y si on le prend comme un ensemble de sommets de G. Il existe donc un sommet $z \in N(x) \cap N(y)$ qui domine B d'après les hypothèses du lemme. Il suffit d'ajouter x et y à tous les sacs sur le chemin entre B_x et B_y pour obtenir une décomposition étoilée où T_x et T_y s'intersectent.

Supposons, maintenant, que B_x et B_y sont adjacents dans T. $B_x \cap B_y$ sépare x et y dans G. Soit $z \in B_x$ qui domine B_x. z domine aussi $B_x \cap B_y$. Si $z \neq x$, alors $z \in N(x) \cap N(y)$, par hypothèses, et donc on obtient une décomposition étoilée où T_x et T_y s'intersectent en ajoutant y à B_x. De même, si le sommet $z' \in B_y$ qui domine B_y est différent de y, on obtient une décomposition étoilée où T_x et T_y s'intersectent en ajoutant x à B_y. Le seul cas restant est celui où $z = x$ et $z' = y$, et la conclusion du lemme est alors vérifié. $\square$

Corollaire 4. *Soient un graphe connexe G d'étendue arborescente 1, et deux sommets distincts non-adjacent $x, y \in V(G)$. Supposons qu'il existe un séparateur minimal S de G tel que $\{x, y\} \subseteq S \subseteq (N(x) \cap N(y)) \cup \{x, y\}$. Alors, il existe une décomposition étoilée $(T, \mathcal{X})$ de G tel qu'on a deux sacs $B_x, B_y \in \mathcal{X}$, avec $x \in B_x$ et $y \in B_y$, tel que B_x et B_y sont adjacents dans T ou égaux. De plus, si B_x et B_y sont adjacents, $B_x \subseteq N[x]$ et $B_y \subseteq N[y]$.*

Démonstration. Soient G, x, y et S comme dans les hypothèses. Soient S' un ensemble qui sépare x et y dans G et $z \notin \{x, y\}$ tels que $S' \subseteq N[z]$. On remarque que pour toute composante C pleine pour S, S' doit contenir au moins un sommet de C. Il y a au moins deux composantes pleines pour S, donc z, qui domine S', appartient à S. Il en découle que $z \in N(x) \cap N(y)$. Ce raisonnement fonctionne indépendamment du choix de S' et z, on peut donc appliquer le Lemme 34, ce qui conclut la preuve. $\square$

Corollaire 5. *Soient un graphe connexe G d'étendue arborescente 1 sans $K_{3,3}$-mineur, et deux sommets distincts non-adjacents $x, y \in V(G)$. Si $|N(x) \cap N(y)| \geq 3$, alors il existe une décomposition étoilée $(T, \mathcal{X})$ de G telle qu'on a deux sacs $B_x, B_y \in \mathcal{X}$, avec $x \in B_x$ et $y \in B_y$, tels que B_x et B_y sont adjacents dans T ou égaux. De plus, si B_x et B_y sont adjacents, $B_x \subseteq N[x]$ et $B_y \subseteq N[y]$.*

Démonstration. Soient G, x et y comme dans les hypothèses. Soient S un ensemble séparant x et y et $z \notin \{x, y\}$ tels que $S \subseteq N[z]$. z domine $N(x) \cap N(y) \subseteq S$. Si $z \notin N(x) \cap N(y)$, alors G admet un $K_{3,3}$ comme mineur avec $\{x, y, z\}$ et $N(x) \cap N(y)$ les parties de la bipartition, ce qui est absurde. $z \in N(x) \cap N(y)$. Ce raisonnement fonctionne indépendamment du choix de S' et z, on peut donc appliquer le Lemme 34, ce qui conclut la preuve. □

Lemme 35. *Soient un graphe connexe G d'étendue arborescente 1, et deux sommets distincts non-adjacents $x, y \in V(G)$ tel que $S = \{x, y\}$ est un séparateur minimal de G. Alors, pour toute composante C pleine pour S, on a que $N(x) \cap N(y) \cap C \neq \emptyset$.*

Démonstration. Soient G, x, y et S comme dans les hypothèses. Soit $(T, \mathcal{X})$ une décomposition étoilée de G minimisant la distance entre les sous-arbres T_x et T_y.

Supposons, dans un premier temps, que $T_x \cap T_y \neq \emptyset$. Pour toute composante C pleine pour S, on appelle T_C le sous-arbre de T induit par les sacs intersectant C. Comme C est une composante pleine pour S, T_x intersecte T_C et T_y intersecte T_C. Par la propriété de Helly, $T_x \cap T_y \cap T_C \neq \emptyset$. Il existe un sac X_t contenant S et intersectant C. Soit $z \in X_t$ dominant X_t. x et y ne sont pas adjacents, donc $z \in N(x) \cap N(y)$. De plus, z est adjacent à un sommet de C, donc z est dans C et la conclusion du lemme est satisfaite.

Supposons, maintenant, que $T_x \cap T_y = \emptyset$. D'après le Corollaire 4, il y a deux sacs B_x et B_y adjacents dans T tel que $x \in B_x$ et x domine B_x, et $y \in B_y$ et y domine B_y. $B_x \cap B_y$ sépare x et y dans G, donc $B_x \cap B_y$ contient un sommet de C. Mais $B_x \cap B_y \subset N(x) \cap N(y)$, donc $N(x) \cap N(y) \cap C \neq \emptyset$. □

20.3 L'algorithme `Feuille-DeBasEnHaut` est correct

20.3.1 Existence d'un P_3 séparateur

Pour prouver que l'algorithme `Feuille-DeBasEnHaut` est correct, commençons par prouver que l'Étape 1 est correct. Autrement dit, on prouve que tout graphe planaire d'étendue arborescente 1 contient un sommet-feuille ou admet une décomposition étoilée avec au plus deux sacs. Dans la suite, $\mathcal{P}_3(G)$ est défini comme l'ensemble des séparateurs de G qui induisent un chemin de longueur 2. On appellera les éléments de $\mathcal{P}_3(G)$ des P_3 séparateurs, puisqu'ils ont trois sommets.

On va traiter séparément le cas où $\mathcal{P}_3(G) = \emptyset$ du cas où $\mathcal{P}_3(G) \neq \emptyset$.

Lemme 36. *Soit un graphe planaire premier G d'étendue arborescente 1. Si $\mathcal{P}_3(G) = \emptyset$, alors G admet une décomposition étoilée avec au plus deux sacs.*

Démonstration. Soit G un graphe planaire premier d'étendue arborescente 1. Supposons qu'il existe $(T, \mathcal{X})$ une décomposition étoilée réduite avec trois sacs. Soient $t \in V(T)$ un nœud interne de T, et $u \in X_t$ tel que $X_t \subseteq N_G[u]$. X_t est un séparateur de G. G est premier, donc 2-connexe. $X_t \backslash u$ est un séparateur de $G - u$. D'après le Lemme 30, il existe deux sommets non-adjacents $x, y \in X_t \setminus u$ tel que $\{x, y\}$ est un séparateur minimal de $G - u$. $(x, u, y) \in \mathcal{P}_3(G)$, donc $\mathcal{P}_3(G) \neq \emptyset$. Autrement dit, si $\mathcal{P}_3(G) = \emptyset$, alors toutes les décompositions étoilées réduites de G ont au plus deux sacs. □

Pour prouver que l'Étape 1 est correcte, il nous reste à prouver le théorème suivant.

Théorème 33. *Soit un graphe planaire premier G d'étendue 1. Si $\mathcal{P}_3(G) \neq \emptyset$, alors G a un sommet-feuille.*

Démonstration. Pour prouver le Théorème 33, considérons un graphe G planaire premier d'étendue 1 tel que $\mathcal{P}_3(G) \neq \emptyset$. On choisit $\Pi = (a, b, c) \in \mathcal{P}_3(G)$ de manière à minimiser la taille de la plus petite composante connexe C de $G - \Pi$. On remarque que a et c ne sont pas adjacents, car G est premier. On cherche à prouver qu'il existe un sommet-feuille $v \in C$ dominant la composante C.

La déclaration suivante découle immédiatement de la minimalité de C.

Déclaration 1. *Il n'existe pas de chemin $\Pi' \in \mathcal{P}_3(G)$ et de composante connexe C' de $G - \Pi'$, tel que $C' \subset C$.*

Soit $(T, \mathcal{X})$ une décomposition étoilée réduite de G minimisant la distance entre T_a et T_c dans T. On distingue dans la suite le cas où $T_a \cap T_c \neq \emptyset$ du cas où $T_a \cap T_c = \emptyset$.

Cas $T_a \cap T_c \neq \emptyset$. Les sous-arbres T_a, T_b et T_c s'intersectent deux à deux. D'après la propriété de Helly (Lemme19), $T_a \cap T_b \cap T_c \neq \emptyset$. Soit $(T, \mathcal{X}^C)$ la décomposition arborescente obtenue en enlevant les sommets de $V \setminus (\Pi \cup C)$ de chaque sac de $(T, \mathcal{X})$.

Dans un premier temps, on va prouver que $(T, \mathcal{X}^C)$ a étendue 1. Si $b \in N(C)$, alors C est une composante pleine pour Π. Dans ce cas, le Lemme 26 implique que $(T, \mathcal{X}^C)$ est une décomposition étoilée. Supposons, donc, que $b \notin N(C)$. Soit D la composante connexe de D dans $G - \{a, c\}$ et H le graphe obtenu à partir de G en contractant D en b. D'après le Lemme 20, $tb(H) = 1$. Soit $(T, \mathcal{X}^H)$ la décomposition étoilée telle que pour chaque $t \in V(T)$, $X_t^H = X_t$ si $X_t \cap D = \emptyset$, et $X_t^H = (X_t \setminus D) \cup \{b\}$ si $X_t \cap D \neq \emptyset$. On remarque que $H[C \cup \Pi] = G[C \cup \Pi]$. Comme b est une composante pleine pour $\{a, c\}$ dans H, le Lemme 26 implique que $(T, \mathcal{X}^C)$ est une décomposition étoilée de $H[C \cup \Pi]$ et donc de $G[C \cup \Pi]$.

Soit $(T', \mathcal{X}')$ une décomposition étoilée réduite obtenu à partir de $(T, \mathcal{X}^C)$. On remarque que $T'_a \cap T'_b \cap T'_c \neq \emptyset$ car $T_a \cap T_b \cap T_c \neq \emptyset$. On remarque que a a au moins un voisin dans C, car G est premier. On va distinguer les trois cas suivant : $N(a) \cap N(b) \cap N(c) \cap C \neq \emptyset$, $N(a) \cap C \subseteq N(b) \cap C \setminus N(c)$ ou $N(a) \setminus N(b) \neq \emptyset$.

— **Cas 1.** Il existe $u \in C$ tel que $u \in N(a) \cap N(b) \cap N(c)$. D'après le Lemme 32, C est réduit à u ou $N(C - u) \subset \{a, u, c\}$. Si $N(C - u) \subset \{a, u, c\}$, on obtient une contradiction de la Déclaration 1, donc C est réduit au sommet u, qui est alors un sommet-feuille de Type 2. On suppose donc à partir de maintenant qu'un tel sommet n'existe pas.

— **Cas 2.** $N(a) \cap C \subseteq N(b) \cap C \setminus N(c)$. D'après le Lemme 31, $|N(a) \cap C| = 1$. Soit u l'unique voisin de a dans C. $u \notin N(c)$. Comme G est premier, $\{a, b\}$ n'est pas séparateur de G, donc C n'est pas réduit à u. Mais alors, (u, b, c) sépare $C \setminus \{u\}$ de a, ce qui contredit la Déclaration 1. Le Cas 2 ne peut pas avoir lieu.

— **Case 3.** Il existe $u \in N(a) \cap C \setminus N(b)$. Il existe un sac $B \in T'_a \cap T'_u$. Soit $v \in B$ qui domine B. $v \neq b$ car $u \notin N(b)$. $v \neq c$ car $a \notin N(c)$. On remarque aussi que v ne peut pas être adjacent à b et c, car $N(a) \cap N(b) \cap N(c) \cap C = \emptyset$. Soit B' le sac adjacent à B sur le chemin entre B et $T'_a \cap T'_b \cap T'_c$ dans T'. $B \cap B'$ est un séparateur de $G[C \cup \Pi]$. $a \in B \cap B'$. Plus généralement, $\Pi \cap B \subseteq B \cap B'$, donc $B \cap B'$ est aussi un séparateur de G, d'après le Lemme 33. Soit $w \in B'$ qui domine B'. On remarque que $w \neq c$, car $a \in B'$.

  On cherche à prouver que $v \neq a$ et que v est un sommet-feuille. Pour ce faire, on commence par prouver que $c \in B \cap B'$.

  Par contradiction, supposons que $c \notin B \cap B'$. On a alors $c \notin B$, car B' est sur le chemin entre B et $T'_a \cap T'_b \cap T'_c$. On remarque que $G - w$ est connexe car G est 2-connexe, et $(B \cap B') \setminus \{w\}$ sépare $B \setminus B'$ de c dans G. Soit $S \subseteq (B \cap B') \setminus w$ un séparateur minimal de $G - w$. D'après le Lemme 30, il existe $x, y \in (B \cap B') \setminus w$ tels que $S = \{x, y\}$. $(x, w, y) \in \mathcal{P}_3(G)$. $c \notin B$, donc $c \notin \{x, y\}$. Comme de plus a et b sont adjacents, contrairement à x et y, on sait que x ou y est dans C. Supposons, sans perte de généralité que x est dans C. On remarque que $G - C \cup \Pi$ est inclus dans une composante connexe de $G - (x, w, y)$, car toutes les composantes connexes de $G - C \cup \Pi$ contiennent un voisin de a et un voisin de c. Cela suffit à contredire la Déclaration 1. $c \in B \cap B'$.

  $c \in B$, mais a et c ne sont pas adjacents, donc $v \neq a$. On rappelle que $v \neq b$ et $v \neq c$, donc $v \in C$. De plus, a et c étant dans B, v n'est pas adjacent à b. En effet, si v était adjacent à b, alors $N(a) \cap N(b) \cap N(c) \cap C \neq \emptyset$, ce qui a déjà été considéré dans le Cas 1. On remarque que, comme b et v sont non-adjacents et $\{b, v\} \in N(a) \cap N(c)$, il n'existe pas de clique séparant a et c dans $G[C \cup \Pi]$. D'après le Lemme 33, il en découle que $G[C \cup \Pi]$ est

premier et donc 2-connexe.

On prouve maintenant que $w = b$.

Par contradiction, supposons que $w \neq b$. Le graphe $G[C \cup \Pi] \setminus w$ est connexe car $G[C \cup \Pi]$ est 2-connexe. De plus, $B \cap B') \setminus w$ sépare b de $B \setminus B'$. Soit $S \subset (B \cap B') \setminus w$ un séparateur minimal de $G[C \cup \Pi] \setminus w$. D'après le Lemme 30, il existe $x, y \in (B \cap B') \setminus w$ non-adjacent tel que $S = \{x, y\}$, et donc, $(x, w, y) \in \mathcal{P}_3(G[C \cup \Pi])$. De plus, $b \notin \{x, y, w\}$, car $b \notin B \subset N(v)$, donc (x, w, y) ne sépare pas a de c dans $G[C \cup \Pi]$. D'après le Lemme 33, $(x, w, y) \in \mathcal{P}_3(G)$. Il existe une composante D de $G[C \cup \Pi] - (x, w, y)$ qui ne contient aucun sommet de Π. D est une composante de $G - (x, w, y)$. Cela contredit la Déclaration 1. $w = b$.

Soit $S = \{v, b\} \cup (B \cap B')$. On peut maintenant prouver que $S = C \cup \Pi$, c'est à dire que $C \cup \Pi$ est entièrement contenu dans les deux sacs B et B'.

Supposons, par contradiction, que $S \neq C \cup \Pi$. Soit D une composante connexe de $G[C \cup \Pi] - S$. On remarque que $D \subset C$ car $\Pi \subset S$. De plus, $B \cap B'$ est un séparateur minimal de v et b dans $G[C \cup \Pi]$. Comme, de plus, $D \cap B' \cap B = \emptyset$, $N(D)$ ne contient pas b ou ne contient pas v. Il existe un $z \in \{v, b\}$ tel que $N(D) \setminus z \subseteq B' \cap B$. Soit $z' \in \{v, b\} \setminus \{z\}$. $G[C \cup \Pi] \setminus z$ est connexe car $G|C \cup \Pi]$ est 2-connexe. $N(D) \setminus z$ est un séparateur minimal de $G[C \cup \Pi] \setminus z$ car il sépare D et z' et car $N(D) \setminus z \subseteq B' \cap B \subseteq N(z')$. D'après le Lemme 30, il existe deux sommets non-adjacents $x, y \in B \cap B'$ tels que $N(D) \setminus z = \{x, y\}$. Autrement dit, $N(D) \subseteq \{x, y, z\}$. $(x, z, y) \in \mathcal{P}_3(G)$, et on arrive à une contradiction de la Déclaration 1.

$S = C \cup \Pi$. Pour conclure que v est un sommet-feuille, on va prouver que $B \cap B' = \{a, c\}$ ou $B \cap B'$ induit un chemin.

On rappelle que $B \cap B'$ est un séparateur de b et v dans $G[C \cup \Pi]$. Comme, de plus, $a, c \in B \cap B'$ et $v \in C$, $B \cap B'$ est aussi un séparateur de b et v dans G. C'est même un séparateur minimal, car $B \cap B' \subset N(v) \cap N(b)$. D'après le Corollaire 2, $B \cap B'$ induit un cycle ou une forêt de chemins.

$B \cap B'$ n'induit pas de cycle, car G contiendrait alors un $K_{3,3}$ induit. En effet, si $B \cap B'$ induit un cycle, alors, en contractant une composante de $G - C \cup \Pi$ pour rendre a et c adjacents, et en contractant les sommets du cycle $B \cap B'$ pour obtenir le quadrangle (a, x, c, y), on obtient un $K_{3,3}$ avec $\{a, b, v\}$ et $\{x, y, c\}$ comme partie de la bipartition.

$B \cap B'$ induit une forêt de chemins. Supposons que cette forêt contient plus d'un chemin et que $B \cap B' \neq \{a, c, \}$. Soit $x \notin \{a, c, \}$ l'extrémité d'un chemin de la forêt induite par $B \cap B'$. Si $N(x) \setminus \{b, v\} = \{y\}$, alors $N(x)$

induit le chemin $\Pi' := (b, x, v)$. Si, en revanche, $N(x) \setminus \{b, v\} = \emptyset$, alors on définit $\Pi' := (b, a, v)$. Dans les deux cas, $\Pi' \in \mathcal{P}_3(G)$ sépare $\{x\} \subset C$ du reste du graphe, ce qui contredit la Déclaration 1. En conséquence, $B \cap B'$ induit un chemin ou $B \cap B' = \{a, c, \}$.

Si $B \cap B' = \{a, c, \}$, alors v est un sommet-feuille de Type 3. Si $B \cap B'$ induit un chemin, alors $|B \cap B'| \geq 4$ pour ne pas contredire la Déclaration 1, et v est un sommet-feuille de Type 1.

Cas $T_a \cap T_c = \emptyset$. Comme Π est un séparateur de G et G est premier, Π ou $\Pi \setminus b$ est un séparateur minimal de G. Comme $(T, \mathcal{X})$ minimise la distance entre T_a et T_c dans T, le Corollaire 4 implique qu'il existe deux sacs B_a et B_c, adjacent dans T, tels que $a \in B_a$ domine B_a et $c \in B_c$ domine B_c. $B_a \cap B_c = N(a) \cap N(c)$, donc $b \in B_a \cap B_c$. En particulier, cela implique que $S = N(a) \cap N(c)$ est un séparateur minimal de G qui sépare a et c.

On cherche à prouver que C est réduit à un sommet-feuille. Pour ce faire, on commence par prouver que $C \subseteq S$.

Supposons, par contradiction que $C \nsubseteq B \cap B'$. Cela veut dire qu'il existe un sommet $y \in C$ séparé de a ou c par S. Supposons, sans perte de généralité, que S sépare y et c. Soit $C' \subset C$ la composante connexe contenant y dans $G - (S \cup \{a\})$. $G - a$ est connexe, car G est 2-connexe. De plus, $N(C') \setminus a \subseteq S \cap (C \cup \Pi) \subseteq N(c) \cap (C \cup \Pi)$, donc, $N(C') \setminus a$ est un séparateur minimal de $G - a$ séparant y et c. D'après le Lemme 30, il existe $x', y' \in S$ tel que $N(C') \setminus a = \{x', y'\}$. $(x', a, y') \in \mathcal{P}_3(G)$ ce qui contredit la Déclaration 1.

$C \subseteq S$. Comme S sépare a et c, et que pour toutes composantes connexes C' de $G - (\Pi \cup C)$, $a, c \in N(C')$, on a que $S \cap C' \neq \emptyset$. En conséquence, on observe la chaîne d'inclusion stricte $C \subset C \cup \{b\} \subset S$. D'après le Corollaire 2, S induit un cycle ou une forêt de chemins. Comme C est un sous-ensemble strict de S, et que C est connexe, C induit nécessairement un chemin. En particulier, $C \cup \{b\}$, étant aussi un sous-ensemble strict de S, induit un chemin ou l'union du chemin induit par C et du sommet isolé b.

On prouve maintenant que $|C| = 1$.

Supposons que $|C| \geq 2$. Soit v une extrémité du chemin induit par C qui n'est pas adjacent à b. $N(v)$ induit un chemin dans $\mathcal{P}_3(G)$, ce qui contredit la Déclaration 1.

C est réduit au sommet v. v est un sommet-feuille de Type 2 si v et b sont adjacents. v est un sommet-feuille de Type 3 si v et b ne sont pas adjacents.

□

On remarquera que dans certains cas, il n'existe des sommet-feuilles que d'un seul type (voir Figure 23, 24 et 25). En conséquence, aucun des trois types de sommet-feuille ne peut être éviter dans l'algorithme.

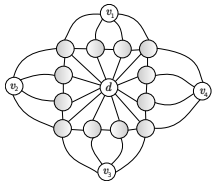


FIGURE 23 – Un graphe planaire G avec $tb(G) = 1$ dont tous les sommet-feuilles v_1, v_2, v_3, v_4 sont de Type 1.

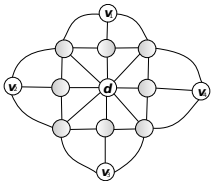


FIGURE 24 – Un graphe planaire G avec $tb(G) = 1$ dont tous les sommet-feuilles v_1, v_2, v_3, v_4 sont de Type 2.

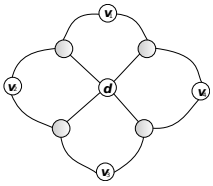


FIGURE 25 – Un graphe planaire G avec $tb(G) = 1$ dont tous les sommet-feuilles v_1, v_2, v_3, v_4 sont de Type 3.

20.3.2 Le cas d'un sommet-feuille de Type 1

Lemme 37. *Soit G un graphe planaire premier et v un sommet-feuille de Type1. Soient Π_v, le chemin induit par $N(v)$, d'extrémité a_v et b_v, et d_v tel que $\Pi_v \subset N(d_v)$, comme dans la Définition 22 de sommet-feuille. Si $V(G) \neq N[v] \cup \{d_v\}$, alors $(a_v, d_v, b_v) \in \mathcal{P}_3(G)$ et $N[v] \setminus \{a_v, c_v\}$ est une composante connexe de $G - \{a_v, d_v, b_v\}$.*

Démonstration. Soient G, v, Π_v, a_v, b_v et d_v comme dans les hypothèses. Supposons $V(G) \neq N[v] \cup \{d_v\}$. Il existe donc une composante connexe C de $G - (N[v] \cup \{d_v\})$. $v \notin N[C]$ donc $N(C) \subseteq N(v) \cup \{d_v\}$ et $N(C)$ sépare v de C. Comme G est premier, il existe deux sommets non-adjacents x et y dans $N(C)$. On remarque que $N(v) \subseteq N(d_v)$, donc x et y sont différents de d_v. $x, y \in N(v)$.

On cherche à prouver que pour n'importe quels deux sommets non-adjacents x et y dans $N(C)$, on a $\{x, y\} = \{a_v, b_v\}$. Supposons, par contradiction que $x \notin \{a_v, b_v\}$. Le chemin Π_v peut alors se décomposer en $\Pi_v = (P, x, Q, y, R)$, avec P et R deux sous-chemins non-vide de Π_v et R un sous-chemin, éventuellement vide, de Π_v. Dans ce cas les sous-ensembles connexes $S_1 := \{v\} \cup P$, $S_2 := \{d_v\}$, $S_3 := \{x\}$, $S_4 := Q$ et $S_5 := \{y\} \cup C$ induisent un K_5-mineur, ce qui contredit que G est planaire. On a donc bien, pour toute composante connexe C de $G - (N[v] \cup \{d_v\})$ et toute paire de sommets non-adjacents x et y de $N(C)$, que $\{x, y\} = \{a_v, b_v\}$. Il en découle que $N(C) \subset \{a_v, b_v, d_v\}$, car tout sommet de $N(v)$ est non-adjacent à a_v ou à b_v. Comme G est premier, $(a_v, d_v, c_v) \in \mathcal{P}_3(G)$ avec $N[v] \setminus \{a_v, c_v\}$ une composante pleine pour (a_v, d_v, c_v). □

Théorème 34. *Soit G un graphe planaire premier et v un sommet-feuille de Type1. Soient Π_v, le chemin induit par $N(v)$, d'extrémité a_v et b_v, et d_v tel que $\Pi_v \subset N(d_v)$, comme dans la Définition 22 de sommet-feuille. Si $V(G) \neq N[v] \cup$*

$\{d_v\}$, *alors le graphe* G' *obtenu de* $G - v$ *en contractant les sommets internes de* Π_v *en une seule arête est planaire premier et* $tb(G) = 1$ *si et seulement si* $tb(G') = 1$.

Démonstration. Soient G, v, Π_v, a_v, b_v et d_v comme dans les hypothèses. Supposons $V(G) \neq N[v] \cup \{d_v\}$. Soit G' comme il est défini dans l'énoncé et $\Pi'_v = (a_v, x, y, b_v)$ le chemin entre a_v et b_v obtenu en contractant les sommets internes de Π_v en une seule arête. D'après le Lemme 37, $(a_v, d_v, b_v) \in \mathcal{P}_3(G)$ et $(N[v] \setminus (a_v, c_v))$ est une composante pleine pour $\{a_v, d_v, b_v\}$. En conséquence, on sait que $N_{G'}(x) = \{a_v, d_v, y\}$ et $N_{G'}(y) = \{b_v, d_v, x\}$. Le graphe G' est un mineur de G. G' est donc planaire.

On cherche à prouver que G' est premier. Supposons par contradiction que S est une clique séparatrice minimale de G'. On considère séparément les cas où $S \cap \{x, y\}$ est non-vide, du cas où il est vide.

— Supposons $x \in S$ ou $y \in S$. Alors, $S \subseteq (a_v, x, d_v)$, ou $S \subseteq (x, d_v, y)$, ou $S \subseteq (y, d_v, b_v)$. En particulier, $a_v \notin S$ ou $b_v \notin S$. Comme $(a_v, d_v, b_v) \in \mathcal{P}_3(G)$ avec $(N[v] \setminus (a_v, b_v))$ une composante pleine pour $\{a_v, d_v, b_v\}$. En particulier, pour chaque composante C de $G' - (\Pi'_v \cup \{d_v\}) = G - (N[v] \cup \{d_v\})$, a_v et c_v appartiennent à $N(C)$. Comme ici $a_v \notin S$ ou $b_v \notin S$, $G' \setminus S$ est connexe, ce qui est absurde.

— Supposons maintenant que $x, y \notin S$. a_v et b_v ne sont pas adjacents, donc $a_v \notin S$ ou $b_v \notin S$. S doit être un séparateur de $G' - \{x, y\}$, car $\{a_v, x, y\}$ et $\{b_v, x, y\}$ sont connexe. Mais $(a_v, d_v, b_v) \in \mathcal{P}_3(G')$ avec $\{x, y\}$ une composante pleine pour $\{a_v, d_v, b_v\}$. D'après le Lemme 33, il y a exactement deux composantes dans $G' - (S \cup \{x, y\})$ contenant chacune a_v ou b_v. Mais Π'_v est un chemin entre a_v et b_v dans $G' - S$ donc S n'est pas un séparateur de G', ce qui est absurde.

En conséquence, G est planaire premier.

Enfin, il nous reste à prouver que $tb(G) = 1$ si et seulement si $tb(G') = 1$.

— Si $tb(G) = 1$ alors $tb(G - v) = 1$ car $N(v) \subseteq N(d_v)$. Il suffit donc de remplacer v par d_v dans tous les sacs contenant v d'une décomposition étoilée de G, pour avoir une décomposition étoilée de $G - v$. $tb(G') = 1$ car G' est obtenu par contraction d'arête depuis $G - v$ (Lemme 20).

— Réciproquement, supposons que $tb(G') = 1$ et montrons que $tb(G) = 1$. Soit $(T', \mathcal{X}')$ une décomposition étoilée réduite de G' minimisant la distance entre les sous-arbre T'_{a_v} et T'_{b_v} dans T'. Dans un premier temps, on prouve que $T'_{a_v} \cap T'_{b_v} \neq \emptyset$. Supposons, par contradiction que $T'_{a_v} \cap T'_{b_v} = \emptyset$. $(a_v, d_v, b_v) \in \mathcal{P}_3(G')$ avec $\{x, y\}$ une composante pleine pour $\{a_v, d_v, c_v\}$. Comme G' est premier, (a_v, b_v) ou (a_v, d_v, b_v) est un séparateur minimal de G'. Le Corollaire 4 implique qu'il existe deux sacs B'_{a_v} et B'_{b_v} adjacents dans T' tel que $a_v \in B'_{a_v}$ domine B'_{a_v} et $b_v \in B'_{b_v}$ domine B'_{b_v}. On a alors $B'_{a_v} \cap B'_{b_v} = N(a_v) \cap N(b_v)$ qui est un séparateur de a_v et b_v dans G', ce qui contredit l'existence du chemin Π'_v. Cela prouve que $T'_{a_v} \cap T'_{b_v} \neq \emptyset$.
T'_{a_v}, T'_{b_v} et T'_{d_v} s'intersectent deux à deux, donc par la propriété de Helly (Lemme 19), $T'_{a_v} \cap T'_{d_v} \cap T'_{b_v} \neq \emptyset$. On remplace x et y par d_v dans tous

les sacs de $\mathcal{X}'$. $(T', \mathcal{X}')$ est toujours une décomposition étoilée, car x et y sont dominés par d_v. On ajoute ensuite les deux sacs $B_1 = N[v]$ et $B_2 = N(v) \cup \{d_v\}$, avec B_2 adjacent à un sac de $T'_{a_v} \cap T'_{d_v} \cap T'_{b_v}$ et B_1 adjacent à B_2. On obtient ainsi une décomposition étoilée de G, ce qui termine la preuve.

□

20.3.3 Preuve de l'Étape 3.1 (a)

Dans les trois sections suivantes, on prouve la correction de l'algorithme dans le cas où v est un sommet-feuille de Type 2 ou 3 et $G - v$ est premier, c'est à dire l'Étape 3.1 de l'algorithme. Dans cette section, on utilise le Lemme 34 pour prouver la correction de l'Étape 3.1 (a).

Théorème 35. *Soient un graphe planaire premier $G = (V, E)$, un sommet-feuille v de G de Type 2 or 3, et le chemin $\Pi_v = (a_v, b_v, c_v)$ comme dans la Définition 22 de sommet-feuille.*

Si $|N(a_v) \cap N(c_v)| \geq 3$ dans $G - v$, ou si il existe un séparateur minimal $S \subseteq (N(a_v) \cap N(c_v)) \cup \{a_v, c_v\}$ dans $G - v$ tel que $\{a_v, c_v\} \subseteq S$. Alors, $tb(G) = 1$ si et seulement si $tb(G - v) = 1$.

Démonstration. Dans un premier temps, on prouve que $tb(G) = 1$ implique que $tb(G - v) = 1$. Soit $(T, \mathcal{X})$ une décomposition étoilée de G et $(T, \mathcal{X}')$ la décomposition arborescente obtenue en enlevant v de chaque sac de $(T, \mathcal{X})$. $(T, \mathcal{X}')$ est une décomposition arborescente d'étendue 1, car pour chaque sac $X_t \subseteq N_G[v]$, on a $X'_t \subseteq N_G[b_v]$. Il résulte que $tb(G - v) = 1$.

Réciproquement, on prouve que $tb(G - v) = 1$ implique que $tb(G) = 1$. Soit $(T', \mathcal{X}')$ une décomposition étoilée de $G - v$ qui minimise la distance entre les sous-arbres T'_{a_v} et T'_{c_v} dans T'.

Si $T'_{a_v} \cap T'_{c_v} \neq \emptyset$, alors les sous-arbres T'_{a_v}, T'_{b_v} et T'_{c_v} s'intersectent deux à deux. Par la propriété de Helly (Lemme 19), il existe alors un sac B contenant a_v, b_v et c_v. Il suffit donc d'ajouter un nouveau sac $N_G[v] \subseteq \{a_v, b_v, c_v, v\}$ adjacent à B pour obtenir une décomposition étoilée de G.

Si, en revanche $T'_{a_v} \cap T'_{c_v} = \emptyset$, alors il existe deux sacs B'_{a_v} et B'_{c_v} tels que $a_v \in B'_{a_v}$ domine B'_{a_v} et $c_v \in B'_{c_v}$ domine B'_{c_v}. En effet, si $|N(a_v) \cap N(c_v)| \geq 3$ dans $G - v$, alors c'est le résultat du Corollaire 5, et si $|N(a_v) \cap N(c_v)| < 2$, alors c'est le résultat du Corollaire 4. On obtient une décomposition étoilée de G en ajoutant v dans les sacs B'_{a_v} et B'_{c_v}. □

20.3.4 Preuve de l'Étape 3.1 (b) i

Lemme 38. *Soient un graphe premier $G = (V, E)$ d'étendue 1, un sommet-feuille v de G de Type 2 or 3, et le chemin $\Pi_v = (a_v, b_v, c_v)$ comme dans la Définition 22 de sommet-feuille.*

Si $N(a_v) \cap N(c_v) = \{v, b_v\}$ et $V \neq \Pi_v \cup \{v\}$. Alors, $N_G[b_v] \setminus \{a_v, c_v, v\}$ sépare a_v et c_v dans $G - v$.

Démonstration. Soit $(T, \mathcal{X})$ une décomposition étoilée de G minimisant la distance entre les sous-arbres T_{a_v} et T_{c_v} dans T. On cherche à prouver, dans un premier temps, que $T_{a_v} \cap T_{c_v} \neq \emptyset$.

Supposons, par contradiction que $T_{a_v} \cap T_{c_v} = \emptyset$. G est premier et Π_v est un séparateur de G, donc Π_v ou $\Pi_v \setminus b_v$ est un séparateur minimal de G. D'après le Corollaire 4, il existe deux sacs adjacents B_{a_v} et B_{c_v} tel que $a_v \in B_{a_v}$ domine B_{a_v} et $c_v \in B_{c_v}$ domine B_{c_v}. Cela implique que $B_{a_v} \cap B_{c_v} = N_G(a_v) \cap N_G(c_v) = \{v, b_v\}$ est un séparateur minimal de G. Cependant, n'importe quelle composante C de $G - (\Pi_v \cup \{v\})$ contient un sommet voisin de a_v et un sommet voisin de c_v, car G est premier. Il en découle la contradiction que $\{v, b_v\}$ n'est pas un séparateur de G. $T_{a_v} \cap T_{c_v} \neq \emptyset$.

On cherche maintenant à prouver que $N_G[b_v] \setminus \{a_v, c_v, v\}$ sépare a_v et c_v dans $G - v$. Supposons, par contradiction, qu'il existe un chemin P entre a_v et c_v dans $G - N_G[b_v] \setminus \{a_v, c_v\}$. Soient x adjacent à a_v dans P et y adjacent à c_v dans P. x et y ne sont pas adjacents à b_v ou à v. En particulier, x et y n'apparaissent pas dans un sac contenant a_v et c_v. Comme T_x et T_{a_v} s'intersectent ainsi que T_{a_v} et T_{c_v}, la propriété de Helly (Lemme 19) indique que T_x et T_{c_v} ne s'intersectent pas. De même T_y et T_{c_v} s'intersectent, mais pas T_y et T_{a_v}. Il en découle que T_x et T_y ne s'intersectent pas et que sur le chemin entre T_x et T_y se trouve un sac B contenant a_v et c_v. B sépare x et y dans G, mais B est dominé par v ou b_v. Il existe donc un chemin interne de P dominé par b_v ou v, ce qui entraîne une contradiction. □

Théorème 36. *Soient un graphe planaire premier $G = (V, E)$ d'étendue 1, un sommet-feuille v de Type 2 ou 3, et $\Pi_v = (a_v, b_v, c_v)$ comme dans la Définition 22 de sommet-feuille. On suppose aussi que $N(a_v) \cap N(c_v) = \{b_v, v\}$ et $G - v$ est premier. Si il n'existe pas de séparateur minimal de $G - v$ contenant $\{a_v, c_v\}$ et inclus dans $(N(a_v) \cap N(c_v)) \cup \{a_v, c_v\}$, alors G est un cycle à quatre sommets.*

Démonstration. Supposons, par contradiction, que $G \neq C_4$. G a au moins cinq sommets. D'après le Lemme 38, $N[b_v] \setminus (a_v, c_v, v)$ sépare a_v et c_v dans $G - v$. Comme $G - v$ est premier, et donc 2-connexe, $G - \{b_v, v\}$ est connexe et $N(b_v) \setminus (a_v, c_v, v)$ sépare a_v et c_v dans $G - \{b_v, v\}$. En particulier $\Pi_v = N(V \setminus (\Pi_v \cup \{v\}))$.

On commence par prouver que $V \setminus (\Pi_v \cup \{v\})$ induit un sous-graphe connexe. Par contradiction, soit C_1 et C_2 deux composantes connexes distinctes de $V \setminus (\Pi_v \cup \{v\})$. G est premier, donc $a_v, c_v \in N_G(C_1) \cap N_G(C_2)$. Comme $N[b_v] \setminus (a_v, c_v, v)$ sépare a_v de c_v dans $G - v$, on sait que $b_v \in N_G(C_1) \cap N_G(C_2)$. Π_v est donc un séparateur minimal de $G - v$, ce qui contredit les hypothèses. $V \setminus (\Pi_v \cup \{v\})$ induit un sous-graphe connexe.

Soit $S' \subseteq N(b_v) \setminus (a_v, c_v, v)$ un séparateur minimal de a_v et c_v dans $G - (b_v, v)$. D'après le Lemme 30, il existe deux sommets, x et y tels que $S' = \{x, y\}$. Enfin, soient $\Pi' = (x, b_v, y)$ et A et C les composantes respectives de a_v et c_v dans $G - (\Pi' \cup \{v\})$. $G - v$ est premier, donc $x, y \in N(A) \cap N(C)$. Soit P un chemin entre x et y dans $G - (\Pi_v \cup \{v\})$, qui est connexe. Soient $A' \subseteq A$ et $C' \subseteq C$ les composantes respectives de a_v et c_v dans $G - (P \cup \Pi' \cup \{v\})$. On remarque que le chemin $P \setminus (x, y)$ est inclus dans une composante connexe de $G - (\Pi' \cup \{v\})$, donc $A' = A$ ou $C' = C$. Par symétrie, on suppose que $C' = C$.

— Supposons dans un premier temps que $A' = A$. On contracte les sommets internes de P pour rendre x et y adjacents. On contracte les composantes A et C sur les sommets a_v et c_v. Enfin, on contracte v sur a_v pour rendre a_v et c_v adjacents. Les sommets a_v, b_v, c_v, x et y induisent maintenant un K_5, ce qui contredit que G est planaire.

— Supposons maintenant que $A' \neq A$, c'est à dire que $P \subseteq A \cup \{x, y\}$. G contient alors $K_{3,3}$ comme mineur, avec la bipartition $\{A', x, y\}$ et $\{P, b_v, \{c_v, v\}\}$. Cela contredit que G est planaire.

Les deux cas contredisent que G est planaire, donc $G = C_4$. □

20.3.5 Preuve de l'Étape 3.1 (b) ii

Théorème 37. *Soient un graphe planaire premier $G = (V, E)$, un sommet-feuille de Type 2 ou 3 v, et le chemin $\Pi_v = (a_v, b_v, c_v)$ comme dans la Définition 22 de sommet-feuille. Supposons que les propriétés suivantes sont vérifiées :*

— *Il existe un sommet $u_v \notin \{v\} \cup \Pi_v$ tel que $N(a_v) \cap N(c_v) = \{v, b_v, u_v\}$.*

— *$V \neq \{a_v, b_v, c_v, u_v, v\}$;*

— *Il n'y a pas de séparateur minimal S de $G - v$ contenant $\{a_v, c_v\}$ et contenu dans $\{a_v, b_v, c_v, u_v\}$.*

Alors, le graphe G' obtenu en ajoutant les arêtes $\{v, u_v\}$ et $\{b_v, v\}$ (si cette arête n'est pas déjà présente) est planaire premier, et $tb(G) = 1$ si et seulement si $tb(G') = 1$.

Démonstration. On prouve dans un premier temps que $G - v$ est premier. Soit S' une clique séparatrice minimal de $G - v$. D'après le Théorème 32, S' est constitué de deux sommets, dont b_v. D'après le Lemme 33, S' sépare a_v et c_v, donc $S' = \{b_v, u_v\}$. D'après le Théorème 32, on a alors $V = \{a_v, b_v, c_v, u_v, v\}$, ce qui contredit les hypothèses. $G - v$ est premier.

On prouve, maintenant que G' est premier. Soit S' une clique séparatrice de G'. Clairement, $S' \setminus \{v\}$ est une clique séparatrice de $G - v$. Or $G - v$ est premier, ce qui entraîne une contradiction. G' est premier.

On prouve maintenant que b_v et u_v ne sont pas adjacents. Supposons, par contradiction que b_v et u_v sont adjacents. Le Lemme 32 nous dit que $(a_v, u_v, b_v) \in \mathcal{P}_3(G - v)$ ou u_v est un sommet isolé de $G - (\Pi_v \cup \{v\})$. Si u_v est isolé dans $G - (\Pi_v \cup \{v\})$ alors $\Pi_v \in \mathcal{P}_3(G - v)$. Mais (a_v, u_v, b_v) et Π_v sont tous deux inclus dans $\{a_v, b_v, c_v, u_v\}$. $G - v$ étant premier, on obtient qu'il existe un séparateur minimal de $G - v$ contenant $\{a_v, c_v\}$ et contenu dans $\{a_v, b_v, c_v, u_v\}$, ce qui contredit les hypothèses. b_v et u_v ne sont pas adjacents.

On cherche à prouver, maintenant, que $tb(G) = 1$ implique que $tb(G') = 1$. Soit $(T, \mathcal{X})$ une décomposition étoilée de G minimisant la distance entre T_{a_v} et T_{c_v} dans T. Comme $N(v)$ est inclus dans $N[b_v]$, on peut enlever v de chaque sac de $(T, \mathcal{X})$ pour obtenir une décomposition arborescente de $G - v$ d'étendue 1. Soit $(T', \mathcal{X}')$ une décomposition étoilée réduite de $G - v$ obtenue en enlevant v de chaque sac de $(T, \mathcal{X})$, puis en réduisant la décomposition arborescente obtenue.

— Cas $T'_{a_v} \cap T'_{c_v} \neq \emptyset$. Par la propriété de Helly (Lemme 19), $T'_{a_v} \cap T'_{b_v} \cap T'_{c_v}$ et $T'_{a_v} \cap T'_{u_v} \cap T'_{c_v}$ sont non-vides. De plus, les sacs de $T'_{a_v} \cap T'_{u_v} \cap T'_{c_v}$ sont dominés par u_v. En fait $T'_{a_v} \cap T'_{u_v} \cap T'_{c_v}$ contient exactement un sac B_{u_v} dominé par u_v. De même, $T'_{a_v} \cap T'_{b_v} \cap T'_{c_v}$ contient exactement un sac B_{b_v}dominé par b_v. Comme u_v et b_v ne sont pas adjacents, B_{u_v} est différent de B_{b_v}. De plus, on sait que les deux sacs B_{u_v} et B_{b_v} sont adjacents dans T', car tout sac B interne à un chemin entre B_{u_v} et B_{b_v} contient a_v ou c_v, donc est dominé par u_v ou b_v. On obtient une décomposition étoilée de G' en ajoutant le sommet v à B_{u_v} et B_{b_v}. $tb(G') = 1$.

— Cas $T'_{a_v} \cap T'_{c_v} = \emptyset$. Cela implique que $T_{a_v} \cap T_{c_v} = \emptyset$. Le Corollaire 5 implique que T_{a_v} et T_{c_v} sont adjacents dans T, et donc T'_{a_v} et T'_{c_v} sont adjacents dans T', et il existe deux sacs adjacents B'_{a_v} et B'_{c_v}, avec $a_v \in B'_{a_v}$ domine B'_{a_v} et $c_v \in B'_{c_v}$ domine B'_{c_v}. On obtient une décomposition étoilée de G' en ajoutant le sommet v à B'_{a_v} et B'_{c_v}. $tb(G') = 1$.

Avant de prouver la réciproque, $tb(G') = 1$ implique $tb(G) = 1$, on prouve que G' est planaire.

On choisit un plongement de G dans le plan. D'après le Théorème de Jordan, le cycle (a_v, b_v, c_v, u_v) sépare le plan en deux régions. Soit G_1 et G_2 les sous-graphes de G induits par les sommets de chaque région. Supposons qu'il existe C_1 et C_2, deux composantes connexes distinctes de $V \setminus \{a_v, b_v, c_v, u_v, v\}$ telles que $C_1 \subset V(G_1)$ et $C_2 \subset V(G_2)$. Si Π_v ou (a_v, u_v, c_v) appartient à $\mathcal{P}_3(G - v)$, alors il existe un séparateur minimal de $G - v$ contenant $\{a_v, c_v\}$ et contenu dans $\{a_v, b_v, c_v, u_v\}$, ce qui contredirait les hypothèses. En conséquence, u_v et b_v appartiennent à $N(C_1) \cap N(C_2)$. On contracte C_1 et C_2 en deux sommets x_1 et x_2. D'après le Théorème de Jordan, le cycle (x_1, b_v, x_2, u_v) sépare le plan en deux régions, et a_v n'est pas dans la même région que c_v. v doit se trouver dans une des deux régions, mais v est adjacent à a_v et à c_v, ce qui contredit que G est planaire. C'est absurde. La seule supposition qu'on ait faite est qu'il existe C_1 et C_2, deux composantes connexes distinctes de $V \setminus \{a_v, b_v, c_v, u_v, v\}$ telles que $C_1 \subset V(G_1)$ et $C_2 \subset V(G_2)$. On en déduit que l'ensemble $V \setminus \{a_v, b_v, c_v, u_v, v\}$ est entièrement inclus dans G_1 ou dans G_2. En plaçant v dans l'autre région du plan, on voit qu'il est possible d'ajouter les arêtes $b_v v$ et $u_v v$ sans perturber le fait G est planaire. Autrement dit, G' est planaire.

Il reste à prouver, enfin, que $tb(G') = 1$ implique $tb(G) = 1$. Soit $(T', \mathcal{X}')$ une décomposition étoilée réduite de G' qui minimise la distance entre T'_{a_v} et T'_{c_v} dans T'. On remarque que $B = \{a_v, b_v, c_v, u_v, v\}$ est le seul ensemble de sommets dominé par v et par aucun autre sommet de G'. B serait donc le seul sac potentiel de $(T', \mathcal{X}')$ duquel on ne peut pas enlever v sans que la décomposition ne soit plus étoilée. En particulier, il y a au plus un tel sac dans $(T', \mathcal{X}')$.

— Cas $T'_{a_v} \cap T'_{c_v} = \emptyset$. En particulier, le sac B n'apparaît pas dans $(T', \mathcal{X}')$. D'après le Corollaire 5, il existe deux sacs adjacents B'_{a_v} et B'_{c_v}, avec $a_v \in B'_{a_v}$ domine B'_{a_v} et $c_v \in B'_{c_v}$ domine B'_{c_v}. On obtient une décomposition étoilée de G en enlevant v de tous les sacs et en l'ajoutant à B'_{a_v} et B'_{c_v}. $tb(G) = 1$

— Cas $T'_{a_v} \cap T'_{c_v} \neq \emptyset$. Les sacs de $T'_{a_v} \cap T'_{c_v}$ sont dominés par u_v, b_v ou v. Si B n'est pas dans $T'_{a_v} \cap T'_{c_v}$, alors on obtient une décomposition étoilée de G en enlevant v de tous les sacs et en ajoutant le sac contenant $N_G[v]$ adjacent à un sommet de $T'_{a_v} \cap T'_{c_v} \cap T'_{b_v}$, qui existe d'après la propriété de Helly (Lemme 19).

Supposons donc que B est dans $T'_{a_v} \cap T'_{c_v}$. B est alors le seul sac de $T'_{a_v} \cap T'_{c_v}$. En fait, tout sac adjacent à B contient b_v et u_v. En effet, si B' est adjacent à B, $B \cap B'$ est un séparateur minimal de G'. En particulier $B \cap B'$ n'est pas réduit à une arête, car G' est premier, et ne contient pas a_v et c_v, car cela contredirait les hypothèses. $B \cap B'$ contient b_v et u_v et est inclus dans $\{b_v, a_v, u_v\}$ ou dans $\{b_v, c_v, u_v\}$. Pour obtenir une décomposition étoilée de G, on enlève v de tous les sacs, on remplace le sac B par les deux sacs adjacents $\{b_v, a_v, u_v, v\}$ et $\{b_v, c_v, u_v, v\}$, et enfin, les voisins B' de B tel que $B \cap B'$ est inclus dans $\{b_v, a_v, u_v\}$ sont rendus adjacents au sac $\{b_v, a_v, u_v, v\}$ tandis que les autres sont rendus adjacents au sac $\{b_v, c_v, u_v, v\}$. $tb(G) = 1$

□

20.3.6 Le cas d'un sommet-feuille de Type 3 avec $G - v$ non-premier

Dans les sections suivantes, on prouve que l'Étape 3.2 est correct. Dans cette section, on s'intéresse à prouver que quand $G - v$ n'est pas premier, il n'est nécessaire de considérer que le cas des sommet-feuilles de Type 2, c'est à dire quand v et b_v sont adjacents, car on peut ajouter cette arête si elle n'est pas présente. On remarque, qu'en général, si v est de Type 3, on ne peut pas toujours ajouter une arête entre v et b_v en conservant G planaire. Le théorème suivant dit que quand on est dans les conditions de l'Étape 3.2, il est toujours possible d'ajouter l'arête vb_v.

Théorème 38. *Soient un graphe planaire premier G, un sommet-feuille v de Type 3 tel que $G-v$ n'est pas premier, et $\Pi_v = (a_v, b_v, c_v)$ comme dans Définition 22 de sommet-feuille. Si G' est le graphe obtenu à partir de G en ajoutant l'arête vb_v, alors G' est planaire premier et $tb(G) = 1$ si et seulement si $tb(G') = 1$.*

Démonstration. Dans un premier temps, on prouve que G' est premier. Par contradiction, soit S une clique séparatrice de G'. S est un séparateur de G, mais pas une clique de G, donc $\{v, b_v\} \subset S$. $S \subseteq \{a_v, b_v, v\}$ ou $S \subseteq \{b_v, c_v, v\}$. D'après le Théorème 32, l'ensemble $V \setminus (\Pi_v \cup \{v\})$ est une composante pleine pour Π_v, ce qui contredit que $G' - S$ n'est pas connexe.

On prouve, maintenant, que G' est planaire. Choisissons un plongement de G dans le plan. Le cycle induit par $\{a_v, b_v, c_v, v\}$ sépare le plan en deux régions, d'après le théorème de Jordan. D'après le Théorème 32, l'ensemble $V \setminus (\Pi_v \cup \{v\})$ est connexe et donc se trouve dans la même région du plan. On peut ajouter une arête entre b_v et v dans l'autre région du plan, sans changer que le graphe est planaire. G' est planaire.

On prouve, maintenant, que $tb(G) = 1$ implique que $tb(G') = 1$. Soit $(T, \mathcal{X})$ une décomposition étoilée de G qui minimise la distance entre les sous-arbres T_{a_v} et T_{c_v} dans T. D'après le Corollaire 4, T_{a_v} et T_{c_v} s'intersectent ou sont adjacents. De plus, si T_{a_v} et T_{c_v} sont adjacents, il existe deux sacs adjacents B_{a_v} et B_{c_v} avec $a_v \in B_{a_v}$ domine B_{a_v} et $c_v \in B_{c_v}$ domine B_{c_v}. Dans ce cas, $B_{a_v} \cap B_{c_v} = N(a_v) \cap N(c_v) \subset \{b_v, v\}$ donc $(T, \mathcal{X})$ est une décomposition étoilée de G'. Il reste le cas où T_{a_v} et T_{c_v} s'intersectent. Par la propriété de Helly (Lemme 19), il existe un sac B contenant a_v, b_v et c_v. En enlevant v de tous les sacs et en l'ajoutant à B, on obtient une décomposition étoilée d'étendue 1. $tb(G') = 1$.

Réciproquement, prouvons que $tb(G') = 1$ implique que $tb(G) = 1$. Soit $(T', \mathcal{X}')$ une décomposition étoilée réduite de G' qui minimise la distance entre les sous-arbres T'_{a_v} et T'_{c_v} dans T'. D'après le Corollaire 4, T'_{a_v} et T'_{c_v} s'intersectent ou sont adjacents. De plus, si T'_{a_v} et T'_{c_v} sont adjacents, il existe deux sacs adjacents B_{a_v} et B_{c_v} avec $a_v \in B_{a_v}$ domine B_{a_v} et $c_v \in B_{c_v}$ domine B_{c_v}. Dans ce cas, $B_{a_v} \cap B_{c_v} = N(a_v) \cap N(c_v) \subset \{b_v, v\}$ et enlevé v de tous les sacs sauf B_{a_v} et B_{c_v} donne une décomposition étoilée de G. Il reste le cas où T'_{a_v} et T'_{c_v} s'intersectent. Par la propriété de Helly (Lemme 19), il existe un sac B contenant a_v, b_v et c_v et v. En enlevant v de tous les sacs, et en ajoutant un sac contenant $\{a_v, v, c_v\}$ adjacent à B, on obtient une décomposition étoilée de G. $tb(G) = 1$. □

20.3.7 Preuve de l'Étape 3.2 (a)

Théorème 39. *Soient un graphe planaire premier G, un sommet-feuille v de Type 2, $\Pi_v = (a_v, b_v, c_v)$ comme dans la Définition 22 de sommet-feuille, et le sommet $u_v \notin \Pi_v \cup \{v\}$ tel que $b_v u_v$ est une arête séparatrice de $G - v$.*

Si a_v, c_v et u_v ne sont pas adjacents deux à deux, ou si a_v et u_v ne sont pas adjacents et l'ensemble $N_G(a_v) \cap N_G(u_v)$ ne sépare pas a_v et u_v dans $G - \{c_v, v\}$, alors G/va_v, obtenu en contractant l'arête $a_v v$, est planaire premier et $tb(G) = 1$ si et seulement si $tb(G/va_v) = 1$.

Démonstration. Le graphe G/va_v est un mineur du graphe G, donc il est planaire. On prouve que G/va_v est premier. Supposons, par contradiction, que S est une clique séparatrice minimal de G/va_v. S est aussi un séparateur de $G - v$. En revanche, S ne sépare pas a_v et c_v, car ils sont adjacents dans G/va_v, donc d'après le Lemme 33, S est un séparateur de G. G est premier, donc S n'induit pas une clique de G. Autrement dit, S contient a_v et c_v. D'après le Lemme 33, $\{u_v, b_v, v\}$ sépare a_v de c_v dans G. $N_G(a_v) \cap N_G(c_v) \subseteq \{v, b_v, u_v\}$. Mais a_v et u_v ne sont pas adjacents. $S \subseteq \Pi_v$. D'après le Théorème 32, $V \setminus (\Pi_v \cup \{v\})$ est une composante pleine pour Π_v. $S \subseteq \Pi_v$ ne peut donc pas être un séparateur de $G - v$, ce qui est absurde. G/va_v est planaire premier.

Si $tb(G) = 1$, alors $tb(G/va_v) = 1$, d'après le Lemme 20. On prouve la réciproque, $tb(G/va_v) = 1$ implique que $tb(G) = 1$.

Soit $(T, \mathcal{X})$ une décomposition étoilée réduite de G/va_v, minimisant le nombre de sacs $|\mathcal{X}|$. En respectant cette propriété, on choisit $(T, \mathcal{X})$ de manière à mi-

nimiser le nombre de sacs qui ne sont pas contenus dans le voisinage fermé d'un sommet de G. On remarque qu'il existe un sac contenant Π_v, car c'est une clique de G/va_v. On peut donc ajouter un sac contenant $N_G[v]$ adjacent à n'importe quel sac de $T_{a_v} \cap T_{b_v} \cap T_{c_v}$ pour obtenir une décomposition arborescente de G. Pour prouver que $tb(G) = 1$, il suffit de prouver que $(T, \mathcal{X})$ est une décomposition étoilée de $G - v$.

Supposons par contradiction, que $(T, \mathcal{X})$ n'est pas une décomposition étoilée de $G-v$. Il existe un sac B de $T_{a_v} \cap T_{c_v}$ qui n'est dominé que par a_v ou c_v. Si B est dominé par a_v et c_v, alors $B \subset N_{G/va_v}[a_v] \cap N_{G/va_v}[c_v] = \{a_v, b_v, c_v\}$, ce qui est impossible car alors il est dominé par b_v. B n'est dominé que par un seul sommet. Si $B \subset N[c_v]$, alors on peut supposer que c_v et u_v ne sont pas adjacents, car sinon, d'après le Théorème 32, $N_{G/va_v}[c_v] = \{a_v, b_v, c_v, u_v\} \subseteq N[b_v]$, et donc b_v domine B. De plus, si c_v et u_v ne sont pas adjacents, a_v et c_v jouent un rôle symétrique. On peut donc supposer, sans perte de généralité que B est uniquement dominé par a_v.

$N_{G/va_v}(a_v) \cap N_{G/va_v}(c_v) = \{b_v\}$ et $N(c_v) \setminus (\Pi_v \cup \{v\}) \neq \emptyset$, donc il existe un sac B' contenant c_v adjacent à B.

$B \cap B'$ est un séparateur de G/va_v. Soit C_a la composante de $G - \{b_v, u_v, v\}$ contenant a. $c_v \notin C_a$. $B \cap B' \subseteq N_{G/va_v}[a_v] \subseteq C_a \cup \Pi_v$. Comme G/va_v est premier, $B \cap B'$ n'est pas une clique de G/va_v et donc $B \cap B' \cap C_a \neq \emptyset$.

a_v ne domine pas B' car $(T, \mathcal{X})$ est réduit. B' est dominé par b_v ou u_v. Si B' est dominé par u_v, alors $B \cap B'$ sépare a_v et u_v, mais $B \cap B' \subseteq N(a_v) \cap N(u_v)$, ce qui contredit les hypothèses. B' est dominé par b_v. Tous les voisins de B contenant c_v sont ainsi dominé par b_v. En conséquence, B' est l'unique sac voisin de B contenant c_v, car on peut fusionner les voisins de c_v dominé par b_v, ce qui réduirait le nombre de sacs si il y en a plusieurs. En enlevant c_v de B et en ajoutant a_v à B', on obtient une décomposition étoilée de G/va_v avec le même nombre de sacs, mais avec un sac de moins qui n'est pas contenu dans le voisinage fermé d'un sommet dans G, ce qui engendre une contradiction avec la manière dont $(T, \mathcal{X})$ a été choisi. La seule supposition qu'on ait faite est que $(T, \mathcal{X})$ n'est pas une décomposition étoilée de $G - v$. En conséquence, $(T, \mathcal{X})$ est une décomposition étoilée de $G - v$. $tb(G) = 1$ □

20.3.8 Preuve de l'Étape 3.2 (b) i et de l'Étape 3.2 (b) ii

Pour traiter les cas restants, il nous faut étudier le voisinage de b_v plus en détail.

Théorème 40. *Soient un graphe planaire premier G, un sommet-feuille v de Type 2, $\Pi_v = (a_v, b_v, c_v)$ comme dans la Définition 22 de sommet-feuille et un sommet $u_v \in N(c_v) \setminus N(a_v)$ tel que $b_v u_v$ est une arête séparateur de $G - v$.*

Si $N(a_v) \cap N(u_v)$ sépare a_v et u_v dans $G - \{c_v, v\}$ et $N(b_v) = \{a_v, c_v, u_v, v\}$, alors il existe un sommet $x \in (N(a_v) \cap N(u_v)) \setminus b_v$ tel que le graphe G', obtenu en ajoutant l'arête xb_v à G est planaire et satisfait que $tb(G) = 1$ implique $tb(G') = 1$.

Démonstration. On prouve, dans un premier temps, l'existence d'un sommet

$x \in (N(a_v) \cap N(u_v)) \setminus b_v$ tel que le graphe G', obtenu en ajoutant l'arête xb_v à G, est planaire. $N(a_v) \cap N(u_v)$ sépare a_v et u_v dans $G - \{c_v, v\}$, donc $S := (N(a_v) \cap N(u_v)) \cup \{v\}$ est un séparateur minimal de a_v et u_v dans G. D'après le Corollaire 3, on peut calculer en temps linéaire un super-graphe planaire G_S de G tel que S induit un cycle dans G_S. On choisit x tel que $N_{G_S}(b_v) \cap S = \{x, v\}$. Par construction, le graphe G', obtenu en ajoutant l'arête xb_v à G, est planaire.

On prouve, maintenant, que $\{a_v, u_v\}$ est un séparateur minimal de G. c_v et u_v sont adjacents, donc d'après le Théorème 32, $N(c_v) = \{b_v, u_v, v\}$. De plus, $N(b_v) = \{a_v, c_v, u_v, v\}$. Comme G est premier $N(a_v) \setminus \{c_v, b_v, v\} \neq \emptyset$. De plus, a_v et u_v ne sont pas adjacent, donc $V(G) \setminus \{a_v, b_v, c_v, u_v, v\} \neq \emptyset$. En conséquence, $\{a_v, u_v\}$ est un 2 séparateur de G admettant $\{b_v, c_v, v\}$ comme composante pleine.

On cherche à prouver que $tb(G) = 1$ implique que $tb(G') = 1$. Soit $(T, \mathcal{X})$ une décomposition étoilée de G minimisant la distance entre les sous-arbre T_{a_v} et T_{u_v} dans T. Supposons que $T_{a_v} \cap T_{u_v} = \emptyset$. Par le Corollaire 4, il existe deux sacs adjacents B_{a_v} et B_{u_v} tel que $a_v \in B_{a_v}$ domine B_{a_v} et $u_v \in B_{u_v}$ domine B_{u_v}. Cela implique que $B_{a_v} \cap B_{u_v} \subseteq N(a_v) \cap N(u_v)$ sépare a_v et u_v dans G. Pourtant, ce n'est clairement pas le cas, car le chemin (a_v, v, c_v, u_v) n'intersecte pas $N(a_v) \cap N(u_v)$. On peut donc affirmer que $T_{a_v} \cap T_{u_v} \neq \emptyset$.

Il existe une composante pleine pour $\{a_v, u_v\}$ dans $G - \{b_v, c_v, v\}$, donc, d'après le Lemme 26, on peut enlever tous les sommets b_v, c_v et v des sacs de $\mathcal{X}$ pour obtenir une décomposition arborescente $(T, \mathcal{X}^-)$ d'étendue 1 du graphe $G - \{b_v, c_v, v\}$. Soit $(T', \mathcal{X}')$ une décomposition étoilée obtenue en réduisant $(T, \mathcal{X}^-)$. Les sous-arbres T'_{a_v}, T'_x et T'_{u_v} s'intersectent deux à deux, donc, d'après la propriété de Helly (Lemme 19), $T'_{a_v} \cap T'_x \cap T'_{u_v} \neq \emptyset$. Pour obtenir une décomposition étoilée de G', il suffit d'ajouter le sac $N_{G'}[b_v] = \{a_v, b_v, c_v, u_v, v, x\}$, adjacent à n'importe quel sac de $T'_{a_v} \cap T'_x \cap T'_{u_v}$. □

Le Théorème 40, montre des conditions telles que b_v peut être rendu adjacent à un autre sommet de $N(a_v) \cap N(u_v)$. Le Lemme 39 nous indique que quand $N_G(a_v) \cap N_G(u_v) \cap N_G(b_v) \neq \emptyset$, alors $|N_G(a_v) \cap N_G(u_v) \cap N_G(b_v)| = 1$ et le sommet b_v a exactement cinq voisins.

Lemme 39. *Soient un graphe planaire premier G, un sommet-feuille v de Type 2, $\Pi_v = (a_v, b_v, c_v)$ comme dans la Définition 22 de sommet-feuille, et le sommet $u_v \in N_G(c_v) \setminus N_G(a_v)$ tel que $\{b_v, u_v\}$ est une arête séparatrice de $G - v$.*

Si il existe $x \in N_G(a_v) \cap N_G(u_v) \cap N_G(b_v)$, alors $N(b_v) = \{a_v, c_v, u_v, v, x\}$.

Démonstration. Supposons, par contradiction, que C est une composante de $G - \{a_v, b_v, c_v, u_v, v, x\}$ telle que $b_v \in N(C)$. D'après le Théorème 32, $N(c_v) = \{b_v, u_v, v\}$, donc $c_v, v \notin N(C)$. $N(C) \subseteq \{a_v, b_v, u_v, x\}$. $a_v, u_v \in N(C)$, sans quoi, $N(C)$ est une clique séparatrice du graphe premier G. G admet $K_{3,3}$ comme mineur, avec $\{a_v, b_v, u_v\}$ et $\{C, x, \{c_v, v\}\}$ les deux parties de la bipartition. Cela contredit le fait que G est planaire. $N(b_v) = \{a_v, c_v, u_v, v, x\}$. □

Théorème 41. *Soient un graphe planaire premier G, un sommet-feuille v de Type 2, $\Pi_v = (a_v, b_v, c_v)$ comme dans la Définition 22 de sommet-feuille, et le sommet $u_v \in N_G(c_v) \setminus N_G(a_v)$ tel que $\{b_v, u_v\}$ est une arête séparateur de $G - v$.*

Si $N(a_v) \cap N(u_v)$ sépare a_v et u_v dans $G - \{c_v, v\}$, et si $N(b_v) = \{a_v, c_v, u_v, v\}$ ou $N(b_v) \cap N(a_v) \cap N(u_v) \neq \emptyset$, alors il existe un sommet $x \in N(a_v) \cap N(u_v)$ tel que une des propriétés suivantes est vérifiée :

- *$V(G) = \{a_v, b_v, c_v, u_v, v, x\}$, et G admet une décomposition étoilée composée des deux sacs $N_G[b_v]$ et $N_G[x]$.*
- *$\Pi' = (a_v, x, u_v) \in \mathcal{P}_3(G)$, et le graphe G', obtenu en contractant les sommets b_v et x, est planaire premier, et vérifie que $tb(G) = 1$ si et seulement si $tb(G') = 1$.*

De plus, le sommet x peut être calculé en temps linéaire.

Démonstration. Si $N(b_v) = \{a_v, c_v, u_v, v\}$, alors on choisit x comme dans l'énoncé du Théorème 40. Sinon, on choisit x comme étant le sommet de $N(b_v) \cap N(a_v) \cap N(u_v)$, qui est unique d'après le Lemme 39. Dans les deux cas, x peut être calculé en temps linéaire. De plus, $N(b_v) \subseteq \{a_v, c_v, u_v, v, x\}$. On suppose que $V(G) \neq \{a_v, b_v, c_v, u_v, v, x\}$, sans quoi le théorème est trivialement vérifié. $\{b_v, c_v, v\}$ est une composante connexe de $G - \Pi'$. En effet, d'après le Théorème 32, $N(c_v) = \{b_v, u_v, v\}$, et $N(b_v) \subseteq \Pi' \cup \{c_v, v\}$. Comme $V(G) \neq \{a_v, b_v, c_v, u_v, v, x\}$, on a bien que $\Pi' \in \mathcal{P}_3(G)$.

Il faut prouver que G' est planaire premier. D'après le Théorème 40, ajouter une arête entre b_v et x si elle n'est pas présente préserve le fait que G est planaire. En conséquence, G' est planaire, car c'est un mineur d'un graphe planaire.

On cherche à prouver que G' est premier. Supposons, par contradiction qu'il existe une clique séparatrice minimale S' de G'. On note x' le sommet obtenu par contraction de b_v et x. On note S l'ensemble tel que $S = S'$ si $x' \notin S'$, et $S = S' \cup \{b_v, x\} \setminus \{x'\}$ si $x' \in S'$. S est un séparateur de G. En particulier S n'est pas une clique, car G est premier, donc $S \neq S'$ et $x, b_v \in S$.

Supposons, dans un premier temps, que $S \setminus b_v$ est un séparateur de G. Alors, $S \setminus b_v$ n'est pas une clique, car G est premier. Mais $S \setminus (b_v, x) = S' \setminus x'$ est une clique, donc il existe un sommet de $S \setminus (b_v, x)$ adjacent à b_v, mais pas à x. En conséquence, v ou c_v appartient à S.

Supposons, maintenant, que $S \setminus b_v$ n'est pas un séparateur de G. S est un séparateur de G, donc il doit y avoir deux voisins de b_v qui sont séparés par S dans G. Comme $N(b_v) \setminus x$ induit le chemin (a_v, v, c_v, u_v), S doit contenir un sommet interne de ce chemin. v ou c_v appartient à S.

Dans les deux cas, v ou c_v appartient à S. Mais alors S' doit être contenu dans un des triangles (a_v, x', v), (v, x', c_v) ou (c_v, x', u_v) car c'est une clique de G'. Un sommet parmi u_v ou a_v n'appartient donc pas à S'. Mais u_v et a_v ont chacun au moins un voisin dans chaque composante connexe de $G' - \{x', a_v, b_v, c_v, u_v, v\}$, donc $G' - S'$ est connexe, ce qui contredit le fait que S' est un séparateur de G'. G' est premier.

Il nous reste à prouver que $tb(G') = 1$ si et seulement si $tb(G) = 1$.

Supposons que $tb(G) = 1$. Si b_v et x ne sont pas adjacents, alors on ajoute l'arête $b_v x$, sans changer l'étendue arborescente, d'après le Théorème 40. On peut donc supposer que b_v et x sont adjacents. $tb(G') = 1$, d'après le Lemme 20, car G' est obtenu par contraction d'une arête dans un graphe d'étendue 1.

Réciproquement, supposons que $tb(G') = 1$. Soit $(T, \mathcal{X})$ une décomposition étoilée de G' minimisant la distance entre les sous-arbre T_{a_v} et T_{u_v} dans T. Supposons que $T_{a_v} \cap T_{u_v} = \emptyset$. On rappelle que $(a_v, x', u_v) \in \mathcal{P}_3(G')$, donc $\{a_v, x', u_v\}$ ou $\{a_v, u_v\}$ est une séparateur minimal de G'. Par le Corollaire 4, il existe deux sacs adjacents B_{a_v} et B_{u_v} tel que $a_v \in B_{a_v}$ domine B_{a_v} et $u_v \in B_{u_v}$ domine B_{u_v}. Cela implique que $B_{a_v} \cap B_{u_v} \subseteq N(a_v) \cap N(u_v)$ sépare a_v et u_v dans G'. Pourtant, ce n'est clairement pas le cas, car le chemin (a_v, v, c_v, u_v) n'intersecte pas $N(a_v) \cap N(u_v)$. On peut donc affirmer que $T_{a_v} \cap T_{u_v} \neq \emptyset$.

Les sous-arbres T_{a_v}, $T_{x'}$ et T_{u_v} s'intersectent deux à deux. D'après la propriété de Helly (Lemme 19), $T_{a_v} \cap T_{x'} \cap T_{u_v} \neq \emptyset$. On remarque que $N_{G'}[c_v] \cup N_{G'}[v] \subseteq N_{G'}[x']$. En particulier, si on enlève c_v et v de tous les sacs, on obtient une décomposition arborescente d'étendue 1 de $G' - \{c_v, v\}$. Si, de plus, on remplace x' par x dans tous les sacs, on obtient une décomposition arborescente d'étendue 1 de $G' - \{b_v, c_v, v\}$. On obtient une décomposition arborescente d'étendue 1 de G en ajoutant, à une telle décomposition, le sac $N_G[b_v]$ adjacent à n'importe quel sac de $T_{a_v} \cap T_x \cap T_{u_v}$. $tb(G) = 1$. □

20.3.9 Preuve de l'Étape 3.2 (b) iii

Théorème 42. *Soient un graphe planaire premier G, un sommet-feuille v de Type 2, $\Pi_v = (a_v, b_v, c_v)$ comme dans la Définition 22 de sommet-feuille, et le sommet $u_v \in N(c_v) \setminus N(a_v)$ tel que $\{b_v, u_v\}$ est une arête séparateur de $G - v$.*

Si $N(a_v) \cap N(u_v)$ sépare a_v et u_v dans $G - (c_v, v)$, $N(b_v) \neq \{a_v, c_v, u_v, v\}$ et $N(a_v) \cap N(b_v) \cap N(u_v) = \emptyset$, alors il existe un unique $x \in N(a_v) \cap N(u_v)$ tel que, si $tb(G) = 1$, alors $N(b_v) \cap N(x)$ sépare b_v de x dans G et $|N(b_v) \cap N(x)| \geq 3$. De plus, x peut être calculé en temps linéaire.

Démonstration. Soient G, v, Π_v, a_v, b_v, c_v et u_v comme dans les hypothèses.

Soit $W = (N(a_v) \cap N(u_v)) \cup \{a_v, c_v, u_v, v\}$. D'après les hypothèses, $N(b_v) \neq \{a_v, c_v, u_v, v\}$ et $N(a_v) \cap N(b_v) \cap N(u_v) = \emptyset$, donc il existe une composante C_0 de $G - W$ telle que $b_v \in N(C_0)$. D'après le Théorème 32, $N(c_v) = \{b_v, u_v, v\}$, donc v et c_v n'appartiennent pas à $N(C_0)$. De plus, un des sommets a_v et u_v n'est pas dans $N(C_0)$, car $N(a_v) \cap N(u_v)$ sépare a_v et u_v dans $G - \{c_v, v\}$. Soit $z \in \{a_v, u_v\}$ tel que $\{a_v, u_v\} \setminus \{z\}$ n'est pas inclus dans $N(C_0)$. $N(C_0) \setminus \{z\}$ est un séparateur minimal de $G - z$. D'après le Lemme 30, il existe deux sommets non-adjacents s et t tel que $N(C_0) = \{s, t\}$. b_v est dans $N(C_0)$ et s et t sont dans $N(a_v) \cap N(u_v)$. En conséquence, il existe un $x \in N(a_v) \cap N(u_v) \cap N(C_0)$ tel que $N(C_0) \subseteq (a_v, b_v, x)$ ou $N(C_0) \subseteq (u_v, b_v, x)$.

On prouve, maintenant, que x ne dépend pas du choix de C_0. Supposons, par contradiction, qu'il existe deux composantes C et C' de $G - W$ telles que $b_v \in N(C) \cap N(C')$ et $x, x' \in N(a_v) \cap N_G(u_v)$ distincts vérifient que $x \in N(C)$ et $x' \in N(C')$. G admet alors $K_{3,3}$ comme mineur, avec la bipartition $\{a_v, b_v, u_v\}$

et $\{\{c_v, v\}, C \cup \{x\}, C' \cup \{x'\}\}$, ce qui contredit que G est planaire. A partir de maintenant, on définit x comme étant l'unique sommet de $N(a_v) \cap N(u_v) \setminus b_v$ tel que pour toute composante C de $G - W$, si $b_v \in N(C)$, alors $x \in N(C)$.

C_0 est une composante fixée de $G - W$ telle que $b_v, x \in N(C_0)$. Si $N(b_v) \cap N(x)$ sépare b_v et x, alors $N(b_v) \cap N(x) \cap C_0 \neq \emptyset$ et comme $\{a_v, u_v\} \subset N(b_v) \cap N(x)\}$, on a donc $|N(b_v) \cap N(x)| \geq 3$. On en conclut qu'il reste seulement à prouver que $N(b_v) \cap N(x)$ sépare b_v et x pour terminer la preuve du théorème.

Supposons maintenant que $tb(G) = 1$. Soit $(T, \mathcal{X})$ une décomposition étoilée de G minimisant la distance entre les sous-arbres T_{b_v} et T_{u_v} dans T.

Supposons que $T_{a_v} \cap T_{u_v} = \emptyset$. Tous les sacs sur le chemin entre T_{a_v} et T_{u_v} dans T, contiennent $N(a_v) \cap N(u_v)$ ainsi que le sommet v ou le sommet c_v. Mais le seul sommet qui domine $N(a_v) \cap N(u_v)$ et v est a_v et le seul sommet qui domine $N(a_v) \cap N(u_v)$ et c_v est u_v, donc il existe deux sacs adjacents B_{a_v} et B_{u_v} tels que $a_v \in B_{a_v}$ domine B_{a_v} et $u_v \in B_{u_v}$ domine B_{u_v}. Mais alors $B_{a_v} \cap B_{u_v} = N(a_v) \cap N(u_v)$ sépare a_v et u_v dans G, ce qui contredit l'existence du chemin (a_v, v, c_v, u_v). $T_{a_v} \cap T_{u_v} \neq \emptyset$.

Supposons $T_{b_v} \cap T_x \neq \emptyset$. Les sous-arbres T_{a_v}, T_{u_v}, T_{b_v} et T_x s'intersectent deux à deux. D'après la propriété de Helly (Lemme 19), $T_{a_v} \cap T_{u_v} \cap T_{b_v} \cap T_x \neq \emptyset$. Mais aucun sommet de G ne domine $\{a_v, b_v, u_v, x\}$, ce qui entraîne une contradiction. $T_{b_v} \cap T_x = \emptyset$

$N(C_0)$ est un séparateur minimal de G contenant b_v et x et contenu dans $(N(b_v) \cap N(x)) \cup \{b_v, x\}$. D'après le Corollaire 4, il existe deux sacs adjacents B_{b_v} et B_x tels que $b_v \in B_{b_v}$ domine B_{b_v} et $x \in B_x$ domine B_x. Il en découle que $B_{b_v} \cap B_x = N(b_v) \cap N(x)$ sépare b_v de x dans G, ce qu'il fallait démontrer. □

Lemme 40. *Soient un graphe planaire premier G, un sommet-feuille v de Type 2, $\Pi_v = (a_v, b_v, c_v)$ comme dans la Définition 22 de sommet-feuille, et le sommet $u_v \in N(c_v) \setminus N(a_v)$ tels que $\{b_v, u_v\}$ est une arête séparateur de $G - v$, $N(a_v) \cap N(u_v)$ sépare a_v et u_v dans $G - \{c_v, v\}$, $N(b_v) \neq \{a_v, c_v, u_v, v\}$ et $N(a_v) \cap N(b_v) \cap N(u_v) = \emptyset$.*

S'il existe un sommet $x \in N(a_v) \cap N(u_v)$ et un sommet-feuille $l \in N(b_v) \cap N(x)$, alors l est un sommet-feuille de Type 1 ou $G - l$ est premier et l est un sommet-feuille de Type 2 ou 3.

Démonstration. Supposons que l n'est pas de Type 1, sans quoi le lemme est vérifié. l est un sommet-feuille de Type 2 ou 3. On remarque que $l \neq a_v$ car $v, b_v, x \in N(a_v)$ n'induisent pas un chemin. De même $l \neq u_v$. D'après les hypothèses, b_v et x ne sont pas adjacents, donc ce sont les extrémités de Π_l.

Par contradiction, supposons qu'il existe une clique séparatrice minimale S de $G - l$. Le Lemme 33 implique que S sépare b_v de x dans $G - l$. Cela implique que a_v et u_v sont dans S, ce qui entraîne une contradiction car S est une clique et a_v et u_v ne sont pas adjacents. $G - l$ est premier. □

Grâce au Lemme 40, on peut maintenant supposer qu'il n'y a pas de sommet-feuille adjacent à b_v et x, car l'algorithme pourrait alors les considérer immédiatement.

Théorème 43. *Soient un graphe planaire premier G, un sommet-feuille v de Type 2, $\Pi_v = (a_v, b_v, c_v)$ comme dans la Définition 22 de sommet-feuille, et le sommet $u_v \in N(c_v) \setminus N(a_v)$ tels que $\{b_v, u_v\}$ est une arête séparatrice de $G - v$, $N(a_v) \cap N(u_v)$ sépare a_v et u_v dans $G - \{c_v, v\}$, $N(b_v) \neq \{a_v, c_v, u_v, v\}$ et $N(a_v) \cap N(b_v) \cap N(u_v) = \emptyset$.*

S'il existe un sommet $x \in N(a_v) \cap N(u_v)$ tel que $|N(b_v) \cap N(x)| \geq 3$, $N(b_v) \cap N(x)$ sépare b_v et x, et il n'y a pas de sommet-feuille dans $N(b_v) \cap N(x)$, alors il existe deux sommets non-adjacents $y, z \in N(b_v) \cap N(x)$ tel que le graphe G', obtenu en ajoutant l'arête yz à G, est planaire premier et vérifie que $tb(G) = 1$ si et seulement si $tb(G') = 1$. De plus, y et z peuvent être calculés en temps linéaire.

Démonstration. Dans un premier temps, on montre comment trouver les deux sommets y et z. Soit $W = \{a_v, c_v, v, u_v\} \cup (N(a_v) \cap N(u_v))$. On choisit une composante C_0 de $G - W$ tel que $b_v, x \in N(C_0)$ et $N(C_0) \subseteq (a_v, b_v, x)$ ou $N(C_0) \subseteq (u_v, b_v, x)$. L'existence d'une telle composante est prouvée dans la démonstration du Théorème 42. Étant donné que $N(b_v) \cap N(x)$ sépare b_v et x, on a $N(b_v) \cap N(x) \cap C_0 \neq \emptyset$. Soit $S := N(b_v) \cap N(x)$. S est un séparateur minimal de G et $|S| \geq 3$, donc d'après le Corollaire 3 il existe un super-graphe planaire de G pour lequel S induit un cycle de G_S. De plus, G_S peut être calculé en temps linéaire. Soit P un chemin entre a_v et u_v du cycle $G_S[S]$ qui intersecte C_0. Comme $a_v \notin N_G(C_0)$ ou $u_v \notin N_G(C_0)$, il existe un sommet $y \in C_0 \cap V(P)$ et un sommet $z \in V(P)$ adjacent à y tel que $z \notin C_0 \cup N_G(C_0)$. y et z ne sont donc pas adjacents dans G. Le graphe G', obtenu en ajoutant l'arête yz à G est planaire, par construction.

On prouve maintenant que G' est premier.

Supposons, par contradiction, que X est une clique séparatrice minimale de G'. Comme G' est un super-graphe de G, X est un séparateur de G. Comme G est premier, X n'est pas une clique de G, donc $y, z \in X$. On remarque que $z \notin C_0 \cup N(C_0)$ donc $N(y) \cap N(z) \subset N(C_0)$. De plus, $b_v, x \in N(y) \cap N(z)$, donc $N(y) \cap N(z)$ est un des trois ensembles suivants $\{b_v, v\}$, $\{b_v, v, a_v\}$ ou $\{b_v, v, u_v\}$. Si $N(y) \cap N(z) \neq \{b_v, v\}$, alors G admet $K_{3,3}$ comme mineur, avec la bipartition $\{y, z, \{c_v, v\}\}$ et $\{b_v, x, s\}$, où $s = a_v$ ou $s = u_v$. Comme G est planaire, par hypothèse, $N(y) \cap N(z) = \{b_v, v\}$.

Il en découle que $X \subseteq \{b_v, y, z\}$ ou $X \subseteq \{x, y, z\}$. En conséquence, $G[W \setminus X]$ est connexe. En effet, v et c_v ne sont pas dans X, et au moins un sommet parmi a_v et u_v n'est pas dans X. Enfin $\{a_v, v, c_v\}$ est connexe et domine W, de même que $\{u_v, v, c_v\}$. Comme $y \in X$ et $N(y) \subseteq W \cup C_0$, il existe une composante connexe A de $G - X$ telle que $A \subset C_0$. Comme $z \notin C_0 \cap N(C_0)$, $N(A) \subseteq X \setminus z$. $X \setminus z$ est donc une clique séparatrice de G, ce qui contredit que G est premier. On peut donc conclure que G' est premier.

Il reste à prouver que $tb(G) = 1$ si et seulement si $tb(G') = 1$.

Supposons que $tb(G) = 1$. Soit $(T, \mathcal{X})$ une décomposition étoilée de G qui minimise la distance entre T_{a_v} et T_{u_v} dans T. On remarque que $(a_v, b_v, u_v) \in \mathcal{P}_3(G)$. Ainsi, $\{a_v, b_v, u_v\}$ ou $\{a_v, u_v\}$ est un séparateur minimal de G. D'après le Corollaire 4, il y a deux sacs B_{a_v} et B_{u_v}, avec $a_v \in B_{a_v}$ et $u_v \in B_{u_v}$ tels que a_v

domine B_{a_v}, u_v domine B_{u_v} et B_{a_v} est adjacent à B_{u_v}, ou bien $B_{u_v} = B_{a_v}$. Le premier cas est impossible, car alors $B_{a_v} \cap B_{u_v} = N(a_v) \cap N(u_v)$ séparerait a_v de u_v dans G, ce qui contredit l'existence du chemin (a_v, v, c_v, u_v). En conséquence, $T_{a_v} \cap T_{u_v} \neq \emptyset$. Il en découle que $T_{b_v} \cap T_x = \emptyset$ car, sinon, la propriété de Helly (Lemme 19) impliquerait que $T_{a_v} \cap T_{b_v} \cap T_x \cap T_{u_v} \neq \emptyset$ alors qu'aucun sommet de G ne domine $\{a_v, b_v, x, u_v\}$. $T_{b_v} \cap T_x = \emptyset$. Cependant G contient le cycle (x, y, b_v, z). Les propriétés d'une décomposition arborescente imposent qu'il existe un sac contenant y et z. Comme la seule différence entre G et G' est l'arête yz, $(T, \mathcal{X})$ est une décomposition étoilée de G'. $tb(G') = 1$

Réciproquement, on suppose que $tb(G') = 1$. Soit $(T', \mathcal{X}')$ une décomposition étoilée de G' qui minimise le nombre de sacs $|\mathcal{X}'|$. De plus, on choisit $(T', \mathcal{X}')$, avec respect pour la minimalité de $|\mathcal{X}'|$, de manière à minimiser le nombre de sacs dans $\mathcal{X}'$ qui ne sont pas contenus dans le voisinage fermé d'un sommet de G, c'est à dire le nombre de sacs contenant y et z et dominés uniquement par y ou z.

On commence par prouver que a_v et u_v ne sont pas dans le voisinage de y.

Supposons, par contradiction, qu'il existe $z' \in \{a_v, u_v\}$ tel que z' et y sont adjacent dans G. En particulier, $z' \neq z$, et $N_G(C_0) = \{b_v, x, z'\}$. Le chemin (b_v, z', x) est un séparateur de G. Comme $y \in N_G(b_v) \cap N_G(z') \cap N_G(x)$, le Lemme 32 implique que $c_0 = \{y\}$ ou $(b_v, y, x) \in \mathcal{P}_3(G)$ sépare z' et $C_0 \setminus y$. Le cas $C_0 = y$ implique que y est un sommet-feuille de Type 2, ce qui contredit les hypothèses. $(b_v, y, x) \in \mathcal{P}_3(G)$ sépare z' et $C_0 \setminus y$ dans G. Soit $C_0' \subseteq C_0 \setminus y$ une composante de $G - (b_v, y, x)$. G est premier, donc $b_v, x \in N(C_0')$. De plus, $y \in N(C_0')$ car C_0 est connexe. Quitte à contracter un chemin de entre z et $\{a_v, u_v\} \setminus \{z'\}$, G' admet $K_{3,3}$ comme mineur, avec la bipartition $\{b_v, x, y\}$ et $\{a_v, C_0', u_v\}$, ce qui contredit le fait que G' est planaire. a_v et u_v ne sont pas dans le voisinage de y.

On prouve maintenant qu'aucun sommet ne domine le cycle (a_v, b_v, u_v, x) dans G'.

$N_G(b_v) \cap N_G(a_v) \cap N_G(u_v) = \emptyset$. Le seul sommet qui pourrait dominer le cycle (a_v, b_v, u_v, x) est y, avec $z \in \{a_v, u_v\}$. Or a_v et u_v ne sont voisins de y dans G, donc au moins un sommet de $\{a_v, u_v\}$ n'est toujours pas voisin de y dans G'. Aucun sommet ne domine (a_v, b_v, u_v, x) dans G'.

On prouve maintenant que $T'_{a_v} \cap T'_{u_v} \neq \emptyset$.

Supposons, par contradiction, que $T'_{a_v} \cap T'_{u_v} = \emptyset$. Tous les sacs B sur le chemin entre T'_{a_v} et T'_{u_v} dans T' doit contenir $N_{G'}(a_v) \cap N_{G'}(u_v)$ et v ou c_v. Si $c_v \in B$, alors B ne peut être dominé que par u_v. Si $v \in B$, alors B ne peut être dominé que par a_v. En conséquence, il existe deux sacs B_{a_v} et B_{u_v} tel que $a_v \in B_{a_v}$ domine B_{a_v} et $u_v \in B_{u_v}$ domine B_{u_v}. Mais alors $B_{a_v} \cap B_{u_v} = N_{G'}(a_v) \cap N_{G'}(u_v)$ sépare a_v et u_v dans G', ce qui contredit l'existence du chemin (a_v, v, c_v, u_v). $T'_{a_v} \cap T'_{u_v} \neq \emptyset$.

On prouve maintenant que $T'_{b_v} \cap T'_x = \emptyset$.

Supposons, par contradiction, que $T'_{b_v} \cap T'_x \neq \emptyset$. Les sous-arbres T'_{a_v}, T'_{b_v}, T'_{u_v} et T'_x s'intersectent deux à deux. D'après la propriété de Helly (Lemme

19), $T'_{a_v} \cap T'_{b_v} \cap T'_{u_v} \cap T'_x \neq \emptyset$. Mais aucun sommet de G' ne domine le cycle (a_v, b_v, u_v, x), ce qui engendre une contradiction. $T'_{b_v} \cap T'_x = \emptyset$.

Pour finir, on suppose, par contradiction, que $(T', \mathcal{X}')$ n'est pas une décomposition étoilée de G. Il existe un sac $B \in T'_y \cap T'_z$ qui est uniquement dominé par y ou z. En fait, B ne peut pas être dominé à la fois par y et par z. En effet, comme $T'_{b_v} \cap T'_x = \emptyset$, un sac dominé par y et z serait inclus dans l'ensemble $\{b_v, x, y, z\}$ mais ne contiendrait pas b_v et x, et serait donc une clique de G', tout en n'étant pas G' tout entier. Cela contredit le fait que G' est premier. Soit $\{s, t\} = \{y, z\}$ de telle manière que B soit uniquement dominé par s. Il existe un sommet r dans $\{b_v, x\}$ qui n'est pas dans B. On définit B' comme le sac adjacent à B sur le chemin entre B et T_r. $y, z \in B'$. En particulier, B' est dominé par un sommet dans $\{b_v, x, y, z\}$.

B' n'est pas dominé par s, car on pourrait alors contracté B et B' ce qui contredirait la minimalité de $|\mathcal{X}'|$. B' n'est pas non plus dominé par t, car $B \cap B'$ serait alors une clique séparatrice de G', qui est premier. B' est dominé par b_v ou x. Soit $r \in \{b_v, x\}$ qui domine B'. On sait aussi que B n'est pas sur le chemin entre T_{b_v} et T_x, car sinon, a_v et u_v devrait faire partie de B, mais $\{a_v, u_v\}$ n'est pas inclus dans $N(y)$ ou dans $N(z)$.

Supposons il existe un sac B'' un sac adjacent à B, distinct de B' contenant t. B'' ne peut pas être dominé par s, car cela contredirait la minimalité de $|\mathcal{X}'|$. B'' ne peut pas être dominé par r, car on pourrait alors contracter B' et B'' et cela contredirait encore la minimalité de $|\mathcal{X}'|$. Enfin, B'' ne peut pas être dominé par t, car alors $B \cap B''$ serait une clique séparatrice de G' qui est premier. B'' est dominé par un sommet de $N(t) \setminus \{x, b_v, y, z\}$. Mais alors, soit $s = y$ et le sommet qui domine B'' n'a aucun voisin dans C_0 et $B \cap B''$ est une clique incluse dans $\{x, z, b_v\}$, soit $s = z$ et le sommet qui domine B'' est dans $C_0 \setminus \{y\}$ et $B \cap B''$ est une clique incluse dans $\{x, y, b_v\}$. Cela contredit que G' est premier. B' est le seul voisin de B contenant t.

En enlevant t de B et en l'ajoutant à B', on obtient une décomposition arborescente qui possède autant de sacs que $(T', \mathcal{X}')$, mais B n'est plus un sac problématique pour une décomposition arborescente de G. Cela contredit le choix de la décomposition $(T', \mathcal{X}')$. On en conclut qu'il n'existe pas de sac uniquement dominé par y ou z. $(T', \mathcal{X}')$ est une décomposition étoilée de G et $tb(G) = 1$. □

20.4 Complexité de l'Algorithme `Feuille-DeBasEnHaut`

Pour finir ce chapitre, il nous reste à prouver que l'Algorithme `Feuille-DeBasEnHaut` s'exécute en temps quadratique. On suppose que le graphe planaire G est encodé à l'aide de liste d'adjacence. On remarque que les listes d'adjacences peuvent être mises à jour en temps linéaire avant chaque appel récursif.

Lemme 41 ([27]). *Il existe une structure de données telle que chaque entrée de la matrice d'adjacence d'un graphe planaire peut être lue en temps constant. La structure de données utilise une mémoire linéaire, et peut être construite en temps linéaire.*

20.4.1 Trouver un sommet-feuille

A chaque appel de l'algorithme, il faut commencer par décider si un sommet-feuille existe. Si c'est le cas, un sommet-feuille doit être calculé. Voici un moyen d'achever ce but en temps linéaire. On commence par calculer le degré des sommets de G, puis on ordonne les sommets du graphe par degrés croissants.

Trouver un sommet-feuille de Type 1. Soit v un sommet de degré 4. Si v est un sommet-feuille, alors, avec Π_v, d_v définis comme dans la Définition 22 de sommet-feuille, d'après le Lemme 37, $V(G) = N[v] \cup \{d_v\}$ ou $(a_v, d_v, c_v) \in \mathcal{P}_3(G)$ et $N[v] \setminus (a_v, c_v)$ est une composante pleine pour $\{a_v, d_v, c_v\}$. Dans les deux cas les sommets de $N(v) \setminus (a_v, c_v)$ ont tous degré 4.

— On compte le nombre de voisins de degré 4 dans $N(v)$, ce qui peut être fait en temps $O(deg(v))$ en parcourant la liste d'adjacence de v.

— Si il y a au plus deux voisins dans $N(v)$ qui n'ont pas degré 4, alors on peut construire le graphe induit $G[N(v)]$ en temps $O(deg(v))$. En effet, pour chaque voisin u de v qui a degré 4, on teste en temps constant pour chacun de ses voisins si ils sont adjacents à v. On ne garde dans la liste d'adjacence de u que les voisins de u qui se trouvent dans $G[N(v)]$. Pour chaque sommet $u \in N(v)$ qui n'ont pas degré 4, on construit la liste d'adjacence de u dans $G[N(v)]$ en cherchant à quels sommets de $N(v) \setminus u$ il est adjacent.

— Il est maintenant facile de tester si $G[N(v)]$ est un chemin en temps $O(|N(v)|)$.

— Enfin, on prend n'importe quel u sommet interne du chemin $N(v)$. On trouve en temps constant l'unique voisin de v qui n'est pas dans $N[v]$. Il suffit de vérifier qu'il est adjacent à tous les sommets de $N(v)$, pour décider si v est un sommet-feuille de Type 1. Cela prend un temps $O(deg(v))$.

Trouver un sommet-feuille de Type 2. Un sommet-feuille de Type 2 est un sommet de degré 3, dont les trois voisins induisent un chemin. Étant donné un sommet de degré 3, cela prend trois tests d'adjacence pour déterminer si ses 3 voisins induisent un chemin. On peut vérifier en temps constant si un sommet est un sommet-feuille de Type 2.

Trouver un sommet-feuille de Type 3. Un sommet-feuille de Type 3 est un sommet de degré 2 dont les deux voisins sont non-adjacents et ont au moins deux voisins communs (v inclus). Étant donné un sommet de degrés 2, on peut tester en temps constant si ses voisins sont non-adjacents. On distingue trois cas.

1. Supposons que le sommet v de degré 2 de voisinage $N(v) = \{x, y\}$ a un voisin de degré 2, x. $N(x) = \{v, z\}$. Pour tester si v est un sommet-feuille de Type 3, il suffit de tester si y et z sont adjacents.

2. Supposons v, v' sont deux sommets de degré 2 qui ont les mêmes deux voisins non-adjacents. v et v' sont alors des sommet-feuilles de Type 3. On peut tester si ce cas arrive en triant les paires $N(v)$ où v a degré 2, en temps linéaire.
3. Enfin, soit V' contenant les sommets de degré 2 dont les voisins sont non-adjacents et de degré au moins 3. Sans perte de généralité, comme aucun sommet n'a été trouvé dans le second cas, tout sommet $v \in V'$ est uniquement déterminé par ses deux voisins. On contracte chaque $v \in V'$ à un de ses voisins. Soit G' le graphe résultant. On liste tous les triangles de G' en temps linéaire [65]. Si on trouve un triangle de G' dont exactement une arête n'est pas présente dans G, on a trouvé un sommet-feuille de Type 3.

Trouver un sommet-feuille dans G prend un temps $O(\sum_{v \in V} deg(v))$ c'est à dire $O(n)$, car G est planaire.

20.4.2 Existence d'une décomposition étoilée à deux sacs

Lemme 42. *Soit un graphe planaire G. On peut décider en temps quadratique si G admet une décomposition étoilée avec un ou deux sacs.*

Démonstration. G admet une décomposition étoilée avec un seul sac si et seulement si il existe un sommet universel dans G, ce qui peut être décidé en temps linéaire. On suppose dans la suite que G n'admet pas de décomposition étoilée avec un seul sac. On considère deux conditions nécessaires pour qu'une paire x, y fixée domine les deux sacs d'une décomposition étoilée de G. Pour chacune des conditions, on va prouver qu'on peut calculer toutes les paires satisfaisant la condition en temps quadratique. On conclura ensuite la preuve en montrant que ces deux conditions sont suffisantes pour assurer l'existence d'une décomposition étoilée de G avec deux sacs.

1. S'il existe une décomposition étoilée de G avec deux sacs, alors chaque sommet de G doit être contenu dans au moins un sac. En particulier, si x et y sont les dominants respectifs des deux sacs dans une décomposition étoilée de G avec deux sacs, alors c'est une paire dominante de G. On peut décider en temps $O(deg(x) + deg(y))$ si une paire fixée x, y est dominante. Cela prend donc un temps $O(n^2)$ de calculer toutes les paires dominantes de G, car le graphe est planaire, et donc creux.
2. De plus, s'il existe une décomposition étoilée de G avec deux sacs, alors chaque arête de G doit être contenue dans au moins un sac. En particulier, s'il existe une décomposition étoilée de G avec deux sacs dominé respectivement par x et y, alors il n'existe pas d'arête uv tel que $u \in N[x] \setminus N[y]$ et $v \in N[y] \setminus N[x]$. Pour décider si cette condition est vérifiée pour une paire x, y fixée, il suffit de tester si chaque sommet de $N[x] \setminus N[y]$ est non-adjacent à chaque sommet de $N[y] \setminus N[x]$. Cela prend un temps $O(deg(x) \times deg(y))$ au total. Calculer toutes les paires x, y satisfaisant la condition nécessite un temps $O(\sum_{x,y} deg(x) \times deg(y)) =$

$O([\sum_x deg(x)][\sum_y deg(y)]) = O(n^2)$ car le graphe G est planaire, et donc creux.

Enfin si x, y satisfait les deux conditions ci-dessus, les deux sacs adjacents $N[x]$ et $N[y]$ forment une décomposition étoilée de G. En effet, chaque sommet est dans un sac, car x, y satisfait la première condition. Chaque arête est dans un sac, cas x, y satisfait la seconde condition. Enfin les sacs contenant un sommet commun engendre un sous-arbre, car il n'y a que deux sacs. C'est donc une décomposition arborescente. Comme de plus chaque sac est dominé par x ou y, c'est une décomposition étoilée. □

On remarque que dans l'exécution de l'Algorithme `Feuille-DeBasEnHaut`, on vérifie au plus une fois si un graphe planaire admet une décomposition étoilée avec un ou deux sacs.

20.4.3 Borne supérieure sur le nombre d'étapes de l'algorithme

Lemme 43. *Soit un graphe planaire premier G avec n sommets et m arêtes. Il y a au plus $5n - m$ appel récursifs à l'Algorithme `Feuille-DeBasEnHaut`, c'est à dire $O(n)$.*

Démonstration. On remarque G est planaire par hypothèse, donc $5n - m \geq 0$ et $5n - m = O(n)$.

Soit G' avec n' sommets et m' arêtes, le graphe tel que l'Algorithme `Feuille-DeBasEnHaut` est appelé récursivement sur G' quand G est en entrée. Il y a au plus un tel graphe G'. G' est planaire premier. Il suffit donc de prouver que $5n' - m' < 5n - m$.

- Si l'appel récursif a lieu à l'Étape 2, alors G' est obtenu en enlevant un sommet-feuille de Type 1, v, et en contractant tous les sommets internes du chemin induit par $N(v)$ en une seule arête. En conséquence, $n' = n - deg(v)+3$, $m' = m-3deg(v)+8$ et donc, $5n'-m' = 5n-m-(2deg(v)-7) < 5n - m$ car $deg(v) \geq 4$.
- Si l'appel récursif a lieu à l'Étape 3.1 (a), alors G' est obtenu en enlevant un sommet-feuille de Type 2 ou 3. En conséquence, $n' = n-1$ et $m' = m-3$ ou $m' = m-2$, donc $m' \geq m-3$ et donc, $5n'-m' \leq 5n-m-2 < 5n-m$.
- Si l'appel récursif a lieu à l'Étape 3.1 (b) ii alors G' est obtenu en ajoutant des arêtes pour rendre un sommet-feuille adjacent à un ou deux sommets supplémentaires. En conséquence, $n' = n$ et $m' = m + 1$ ou $m' = m + 2$, donc $5n' - m' \leq 5n - m - 1 < 5n - m$.
- Sinon, la récursion a lieu à l'Étape 3.2. Dans ce cas, il existe un sommet-feuille v de Type 2, avec les sommets a_v, b_v et c_v comme dans la Définition 22 de sommet-feuille. Il existe aussi un sommet u_v tel que $b_v u_v$ est une arête séparatrice de $G - v$.
  - Si la récursion a lieu à l'Étape 3.2 (a), alors G' est obtenu en contractant l'arête va_v. En conséquence, $n' = n - 1$, $m' = m - 2$, donc $5n' - m' = 5n - m - 3 < 5n - m$.

— Si la récursion a lieu à l'Étape 3.2 (b) i, alors G' est obtenu en ajoutant une arête entre b_v et un sommet $x \in (N(a_v) \cap N(u_v)) \setminus b_v$ puis en contractant cette arête. De plus, $N(b_v) = \{a_v, c_v, u_v, v\}$ et $c_v, v \notin N(x)$. En conséquence, $n' = n - 1$, $m' = m - 2$ et donc, $5n' - m' = 5n - m - 3 < 5n - m$.

— Si la récursion a lieu à l'Étape 3.2 (b) ii, alors G' est obtenu en contractant l'arête $b_v x$, où $x \in N(a_v) \cap N(u_v) \cap N(b_v)$. De plus, $N(b_v) = \{a_v, c_v, u_v, v, x\}$ et $c_v, v \notin N(x)$. En conséquence, $n' = n - 1$, $m' = m - 3$ et donc, $5n' - m' = 5n - m - 2 < 5n - m$.

— Finalement, dans tout les autres cas, l'appel récursif a lieu à l'Étape 3.2 (b) iii, alors G' est obtenu en ajoutant une arête entre deux sommets $y, z \in N(b_v) \cap N(x)$ pour un $x \in (N(a_v) \cap N(u_v)) \setminus b_v$. En conséquence, $n' = n$, $m' = m + 1$ et donc, $5n' - m' = 5n - m - 1 < 5n - m$.

□

21 Conclusion et questions ouvertes

On a prouvé que le calcul de cinq invariants de graphes est NP-difficile, ce qui s'ajoute à la preuve de [62] que le calcul de la longueur arborescente est NP-difficile. On a également prouvé qu'il est possible de décider en temps polynomial si un graphe biparti ou un graphe planaire admet une décomposition étoilée. La question reste ouverte pour d'autres classes de graphe. Étant donné ces deux résultats positifs, on conjecture que le problème est FPT quand il est paramétré par le nombre de cliques du graphe.

Chapitre V

Un début sur le comportement asymptotique de l'itéré du graphe des bicliques

Une biclique d'un graphe G est un sous-graphe biparti complet induit maximal. Le graphe des bicliques $KB(G)$ de G est défini comme le graphe dont les sommets sont les bicliques de G, deux sommets étant adjacents si les bicliques correspondantes admettent un sommet en commun. Ici, on s'intéressera à une variante du graphe des bicliques $KB_e(G)$, dans laquelle deux sommets sont adjacents si les bicliques correspondantes admettent une arête commune.

Le i-ème itéré du graphe des bicliques $KB_e^i(G)$ est alors défini récursivement : $KB_e^0(G) = G$ et $KB_e^{i+1}(G) = KB_e(KB_e^i(G))$. Pour tout graphe G, la suite $KB_e^i(G)$ peut à priori suivre deux comportements asymptotiques distincts : la suite $KB_e^i(G)$ peut être périodique à partir d'un certain rang, ou le nombre de sommet de $KB_e^i(G)$ peut tendre vers l'infini avec i.

Si $KB_e^i(G)$ est périodique à partir d'un certain rang, on distingue le cas où $KB_e^i(G)$ converge vers un graphe précis, point fixe pour l'opération KB_e, du cas où la période est plus grande que 1. En pratique, le cas où la période est plus grande que 1 n'a pas été observé, et on conjecture que ça n'a jamais lieu.

Si le nombre de sommets de $KB_e^i(G)$ diverge, le nombre d'arêtes de $KB_e^i(G)$ peut diverger ou non. En pratique, le cas où le nombre de sommets diverge, mais pas le nombre d'arêtes n'a pas été observé, et on conjecture que ça n'a jamais lieu.

L'étude de la suite des itérés de différents graphes d'intersection, et de son comportement asymptotique, a pris son essor ces dernières années. La question a été étudiée, entre autre, dans le cas des graphes adjoints [73], des graphes de clique [66, 44] et dans le cas des graphes de biclique classique $KB(G)$ [48, 47]. Dans ce chapitre, on s'intéresse donc à la suite des itérés du graphe des bicliques, avec la variante d'intersection par les arêtes.

22 Convergence et divergence

Théorème 44. *Si G est un graphe de maille au moins 5, alors $KB_e^n(G)$ est constant à partir d'un certain rang.*

Démonstration. Si G a une maille d'au moins 5, toutes les bicliques sont des étoiles. Comme, de plus G ne contient aucun triangle, $N(G)$ est stable. Autrement dit, les bicliques maximales de G sont exactement les ensembles $N[v]$, où v a degré au moins 2. De plus, si u est adjacent à v, $N[v]$ et $N[u]$ contiennent tout les deux u et v, donc les cliques correspondantes ont une arête en commun. $KB_e(G)$ contient le graphe induit par les sommets de degrés au moins 2

de G. Les seuls autres sommets de $KB_e(G)$ sont des sommets isolés, provenant d'arêtes isolées de G. En particulier, $KB_e(G)$ est un sous-graphe induit de G. G étant un graphe fini, il existe un entier i tel que $KB_e^i(G) = KB_e^{i+1}(G)$, ce qui prouve le théorème. □

Corollaire 6. *Si G est un graphe de maille au moins 5 et aucun sommet de degré 1, alors $KB_e(G) = G$.*

Corollaire 7. *Pour tout entier positif i, il existe un graphe G tel que $KB_e^n(G)$ est constant à partir du rang i, et varie à tout rang plus petit que i. Par exemple, P_{2i} satisfait cette propriété.*

Lemme 44. *Si G contient un cycle induit $C = x_1, x_2, \cdots, x_n$ de longueur $n \geq 5$, alors $KB_e(G)$ contient un cycle (pas nécessairement induit) $C' = B_1, B_2, \cdots, B_n$ tel que B_i est une biclique de G, contenant x_{i-1}, x_i et x_{i+1}.*

Démonstration. Soient G et C comme dans les hypothèses. x_{i-1}, x_i et x_{i+1} induisent une biclique de G, qui est nécessairement contenue dans une biclique maximale de G, disons B_i. B_i et B_{i+1} ont alors l'arête $x_i x_{i+1}$ en commun. Les bicliques B_1, B_2, $\cdots$, B_n forment un cycle (pas nécessairement induit) de $KB_e(G)$. □

Théorème 45. *Si G contient un cycle induit $C = x_1, x_2, \cdots, x_n$ de longueur $n \geq 5$, tel que pour tout sommet $v \in N(C)$, $\{x_i, x_{i+2}\} \subset S_v := N(v) \cap C$ implique que $x_{i+1} \in S_v$. Alors, $KB_e(G)$ contient un cycle induit $C' = B_1, B_2, \cdots, B_n$ tel que B_i est une biclique de G, contenant x_{i-1}, x_i et x_{i+1} et contenue dans $N[x_i]$. De plus, pour tout sommet $B \in N(C')$, $\{B_i, B_{i+2}\} \subset S_B := N(v) \cap C$ implique que $B_{i+1} \in S_B$.*

Démonstration. D'après le Lemme 44, $KB_e(G)$ contient un cycle $C' = B_1, B_2, \cdots, B_n$ tel que B_i est une biclique de G, contenant x_{i-1}, x_i et x_{i+1}. Soit v un sommet de G dans $B_i \setminus \{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$. B_i est une biclique de G, donc v est adjacent à x_i ou à x_{i-1} et x_{i+1}. Mais si v est adjacent à x_{i-1} et x_{i+1}, alors v est aussi adjacent à x_{i+1}, ce qui contredit que B_i est une clique. Autrement dit B_i est une étoile centrée en x_i. Comme C est un cycle induit de G, il en découle que C' est un cycle induit de $KB_e(G)$.

Soit $B \in N(C')$ tel que $B_i, B_{i+2} \subset S_B$. Comme B_i et B_{i+2} sont respectivement contenu dans $N[x_i]$ et $N[x_{i+2}]$, $x_i, xi+2 \in B$. Comme il n'y a pas d'arête entre x_i et x_{i+2}, il existe un sommet $v_i \in B \cap B_i$ voisin de x_i et de x_{i+2} et un sommet $v_{i+2} \in B \cap B_{i+2}$ voisin de x_i et de x_{i+2} (il est possible que $v_i = v_{i+2}$). Si v_i et v_{i+2} ne sont pas égaux à x_{i+1}, alors ils sont adjacents à x_{i+1}, par hypothèses, ce qui contredit le fait que $v_i \in B_i$ et que $v_{i+2} \in B_{i+2}$. En conséquence, $x_{i+1} \in B$. B contient les arêtes $x_{i-1}x_i$ et $x_i x_{i+1}$, donc B est adjacent à B_{i+1}. □

Théorème 46. *Soit G un graphe contenant un cycle induit $C = x_1, x_2, \cdots, x_n$ de longueur $n \geq 5$, tel que pour tout sommet $v \in N(C)$, $\{x_i, x_{i+2}\} \subset S_v := N(v) \cap C$ implique que $x_{i+1} \in S_v$. S'il existe au moins un sommet $v \in N(C)$ tel que S_v est une arête, alors $KB_e^n(G)$ diverge.*

Démonstration. Soient G et C comme dans l'énoncé du théorème. En utilisant le Théorème 45, par réduction, on sait que chaque itéré du graphe des biclique $KB_e^m(G)$ contient un cycle induit $C_m = B_{1,m}, B_{2,m}, \cdots, B_{n,m}$ de longueur n tel que $B_{i,0} = x_i$, $B_{i,m+1}$ est une biclique de $KB_e^m(G)$ contenant $B_{i-1,m}$, $B_{i,m}$ et $B_{i+1,m}$. De plus, pour tout $B \in KB_e^m(G)$, si $B_{i,m}$ et $B_{i+2,m}$ appartiennent à $S_B = N(B) \cap C^m$, alors $B_{i+1,m}$ appartient aussi à S_B.

Soit $K_{i,m}$ la plus grande clique de $KB_e^m(G)$ dont tous les sommets sont adjacents à $B_{i,m}$ et $B_{i+1,m}$ et non-adjacents à $B_{j,m}$ si $j \notin \{i, i+1\}$. On cherche à prouver dans un premier temps que $\sum_i |K_{i,m}|$ est croissant. Il existe au moins une biclique B_v^+ contenant v, $B_{i+1,m}$ et $B_{i+2,m}$, distincte pour chaque sommet $v \in K_{i,m}$. Cette biclique contient $B_{i+1,m}$ et $B_{i+2,m}$, donc sera adjacente à $B_{i+1,m+1}$ et $B_{i+2,m+1}$ dans $KB_e^{m+1}(G)$. De même, il existe au moins une biclique B_v^- contenant v, $B_{i,m}$ et $B_{i-1,m}$, distincte pour chaque sommet $v \in K_{i,m}$. Cette biclique contient $B_{i,m}$ et $B_{i-1,m}$, donc sera adjacente à $B_{i,m+1}$ et $B_{i-1,m+1}$ dans $KB_e^{m+1}(G)$. Cela semble suggéré que $\sum_i |K_{i,m+1}| \geq 2 \times \sum_i |K_{i,m}|$, mais la biclique B_v^-, pour $v \in K_{i+1,m}$ peut être égale à la biclique B_u^+, pour $u \in K_{i-1,m}$, si u et v sont adjacents. Cependant, on a tout de même que $\sum_i |K_{i,m+1}| \geq \sum_i |K_{i,m}|$. De plus, le seul cas où $\sum_i |K_{i,m+1}| = \sum_i |K_{i,m}|$ est quand pour tout i, les arêtes entre $K_{i,m}$ et $K_{i+1,m}$ forment un couplage.

On veut prouver que $\sum_i |K_{i,m}|$ tend vers l'infini quand m tend vers l'infini, mais on a vu que $\sum_i |K_{i,m+1}|$ peut être égal à $\sum_i |K_{i,m}|$. On prouve maintenant que $\sum_i |K_{i,m+3}| > \sum_i |K_{i,m}|$.

On suppose, par contradiction, que $\sum_i K_{i,m+3} = \sum_i K_{i,m+2} = \sum_i K_{i,m+1} = \sum_i K_{i,m}$. Soit $v^{(2)}$ un sommet de $K_{i,m+2}$. Comme $\sum_i K_{i,m+3} = \sum_i K_{i,m+2}$, $v^{(2)}$ est adjacent dans $KB_e^{m+2}(G)$ à un sommet $u^{(2)} \in K_{i+2,m+2}$. $v^{(2)}$ et $u^{(2)}$ sont des bicliques de $KB_e^{m+1}(G)$ contenant respectivement l'arête $B_{i,m+1}B_{i+1,m+1}$ et l'arête $B_{i+2,m+1}B_{i+3,m+1}$. $v^{(2)}$ et $u^{(2)}$ contiennent aussi une arête commune de $KB_e^{m+1}(G)$.

Comme $\sum_i K_{i,m+2} = \sum_i K_{i,m+1}$, il existe un sommet $v^{(1)}$ de $KB_e^{m+1}(G)$, tel que $v^{(1)}$ appartient à la clique $K_{i+1,m+1}$ à la biclique $v^{(2)}$. Comme $v^{(2)}$ et $u^{(2)}$ contiennent une arête commune de $KB_e^{m+1}(G)$, il existe un sommet $w^{(1)}$ de $KB_e^{m+1}(G)$, dans l'intersection des bicliques $v^{(2)}$ et $u^{(2)}$, tel que $w^{(1)}$ est adjacent à $B_{i,m+1}$. Comme $v^{(1)}$ est adjacent à $B_{i+1,m+1}$, et que $v^{(1)}$ et $w^{(1)}$ sont dans la même biclique $v^{(2)}$, $(v^{(1)}, w^{(1)}, B_{i,m+1}, B_{i+1,m+1})$ est un cycle induit de longueur 4 de $KB_e^{m+1}(G)$. $w^{(1)}$ est donc adjacent à $B_{i,m+1}$, mais pas à $B_{i+1,m+1}$. En conséquence, $w^{(1)}$ n'est pas adjacent à $B_{i+2,m+1}$. En revanche $w^{(1)}$ appartient à la biclique $u^{(2)}$, donc $w^{(1)}$ est adjacent à $B_{i+3,m+1}$. $v^{(1)}$ est une biclique de $KB_e^m(G)$, contenant l'arête $B_{i+1,m}B_{i+2,m}$. $w^{(1)}$ est une biclique de $KB_e^m(G)$, contenant $B_{i,m}$ et $B_{i+3,m}$. De plus, $v^{(1)}$ et $w^{(1)}$ possèdent une arête commune dans $KB_e^m(G)$.

Soit $w^{(0)}$ un sommet de $KB_e^m(G)$ dans $v^{(1)} \cap w^{(1)}$ tel que $w^{(0)}$ est adjacent à $B_{i,m}$. Comme $B_{i,m}$ et $B_{i+3,m}$ ne sont pas adjacents et sont tous les deux présents dans $w^{(1)}$, alors $w^{(0)}$ est adjacent à $B_{i+3,m}$. $w^{(0)}$ est un sommet de la biclique $v^{(1)}$ qui contient l'arête $B_{i+1,m}B_{i+2,m}$, donc $w^{(0)}$ est adjacent à $B_{i+1,m}$ ou à $B_{i+2,m}$, mais pas les deux. Cela entraîne une contradiction, car $w^{(0)}$ est

adjacent à deux sommets de C_m à distance 2 dans C_m, mais pas au sommet de C_m qui se trouve entre les deux.

La seule supposition qu'on ait faite est que $\sum_i K_{i,m+3} = \sum_i K_{i,m+2} = \sum_i K_{i,m+1} = \sum_i K_{i,m}$, donc $\sum_i |K_{i,m+3}| > \sum_i |K_{i,m}|$.

$\sum_i |K_{i,m}|$ est croissante et ne peut pas être constante trois fois de suite, donc $\sum_i |K_{i,m}|$ tend vers l'infini quand m tend vers l'infini. □

Corollaire 8. *Soit G un graphe contenant un cycle induit $C = x_1, x_2, \cdots, x_n$ de longueur $n \geq 5$, tel que pour tout sommet $v \in N(C)$, $\{x_i, x_{i+2}\} \subset S_v := N(v) \cap C$ implique que $x_{i+1} \in S_v$. S'il existe au moins un sommet $v \in N(C)$ tel que S_v contient une arête et ne contient pas tout le cycle C, alors $KB_e^n(G)$ diverge.*

Démonstration. D'après le Théorème 45, $KB_e(G)$ contient un cycle induit $C' = B_1, B_2, \cdots, B_n$ tel que B_i est une biclique de G, contenant x_{i-1}, x_i et x_{i+1} et contenue dans $N[x_i]$. De plus, pour tout sommet $B \in N(C')$, $\{B_i, B_{i+2}\} \subset S_B := N(v) \cap C$ implique que $B_{i+1} \in S_B$.

Soit j tel que $x_j, x_{j+1} \in S_v$ mais $x_{j+2} \notin S_v$. v, x_{j+1} et x_{j+2} forment une biclique de G. Soit B une biclique maximale contenant v, x_{j+1} et x_{j+2}. B ne contient pas x_j, car v, x_j et x_{j+1} forment un triangle. Tout autre sommet de C contenu dans B doit être adjacent à x_j ou x_{j+1}, ce qui ne laisse que x_{j+2}. Si x_{j+2} n'est pas dans B, alors le voisinage de S_B est une arête de C' et le Théorème 46 conclut. Supposons x_{j+2} est dans B. $S_B = \{B_j, B_{j+1}, B_{j+2}\}$. On peut alors appliquer le même raisonnement à C' et B que à C et v, mais avec l'assurance que B n'est pas adjacent à B_{j+4}, ce qui implique que $KB_e^2(G)$ est dans les conditions d'application du Théorème 46. □

23 Un lien avec l'itéré du graphe adjoint

Définition 24. *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Le bourgeonnement de G est le graphe $B(G) = (V', E')$ où $V' = \{v_{e,u} | e = uv \in E(G)\} \cup \{v_u | u \in V(g) \wedge d(u) = 0\}$ et $E' = \{v_{e,u}v_{e',u} | e = uv \in E(G) \wedge e' = uv' \in E(G)\} \cup \{v_{e,u}v_{e,v} | e = uv \in E(G)\}$. Le bourgeonnement de G peut être vu comme la transformation du graphe G où chaque sommet v est remplacé par un méta-sommet, formé d'une clique de $deg(v)$ sommets ayant chacun seulement un sommet extérieur au méta-sommet, tel que la contraction de chaque méta-sommet donne G.*

Théorème 47. *Soit G un graphe simple sans sommet isolé. $KB_e(B(G)) = B(L(G))$ où $L(G)$ est le graphe adjoint de G.*

Démonstration. On peut supposer, sans perte de généralité, que G est connexe. On traite séparément le cas où G est une arête isolée, qui ne contredit pas le théorème. On peut donc supposer que G est connexe et contient au moins trois sommets. On remarque que dans ce cas, $L(G)$ ne contient pas de sommet isolé.

Toutes les bicliques de $B(G)$ sont des chemins de la forme $(v_{e',u}, v_{e,u}, v_{e,v})$, avec e et e' deux arêtes distinctes de G ayant le sommet u comme extrémité, et v l'autre extrémité de e. Soit B et B' deux bicliques de $B(G)$ adjacentes dans $KB_e(B(G))$. Si $B = (v_{e',u}, v_{e,u}, v_{e,v})$, alors B' prend une des trois formes suivantes : $B' = (v_{e,u}, v_{e,v}, v_{e'',v})$ ou $B' = (v_{e'',u}, v_{e,u}, v_{e,v})$ ou $B' = (v_{e,u}, v_{e',u}, v_{e',w})$.

Un sommet de $B(L(G))$ est de la forme $v_{ee',e}$ où $e = uv$ est une arête de G et e' est une arête de G distincte de e admettant u comme extrémité. $v_{ee',e}$ est adjacent aux sommets de la forme $v_{ee'',e}$, où e'' est une arête de G distincte de e et de e' admettant u ou v comme extrémité et au sommet $v_{e'e,e'}$.

On met en bijection le sommet $s = v_{(uv)(uw),uv} \in B(L(G))$, avec la biclique $(v_{(uw),u}, v_{(uv),u}, v_{(uv),v})$. Cette bijection respecte l'adjacence. En effet, le voisin $v_{(uv)(ux),(uv)}$ de s est mis en bijection avec la biclique $(v_{(ux),u}, v_{(uv),u}, v_{(uv),v})$. De même, la biclique $v_{(uv)(vx),(uv)}$ est mise en bijection avec la biclique $(v_{(uv),u}, v_{(uv),v}, v_{(vx),v})$. De même, le voisin $v_{(uw)(uv),(uw)}$ est en bijection avec la biclique $(v_{(uv),u}, v_{(uw),u}, v_{(uw),w})$. Cela conclut la preuve. □

Corollaire 9. *Soit G un graphe simple sans sommet isolé. $KB_e^n(B(G))$ diverge si et seulement si G n'est pas un cycle, un chemin ou une griffe $K_{1,3}$.*

Démonstration. Le Théorème 47 implique que $KB_e^n(B(G)) = B(L^n(G))$. De plus, $L^n(G)$ diverge si et seulement si G n'est pas un cycle, un chemin ou une griffe $K_{1,3}$ (voir [73]). Enfin, $B(G)$ a au moins autant de sommets que G, ce qui conclut la preuve. □

24 Connexité du graphe des bicliques

Dans cette section, on s'intéresse à la question de savoir si $KB_e(G)$ est connexe, et s'il ne l'est pas, quels formes ont ses différentes composantes connexes. On remarque que toutes les bicliques de G contenant une arête uv sont adjacentes deux à deux dans $KB_e(G)$. En particulier, le sous-graphe de $KB_e(G)$ induit par les bicliques contenant uv est connexe. Il y a donc une correspondance entre la partition des bicliques de G en composantes connexes de $KB_e(G)$ et une partition des arêtes de G.

Lemme 45. *Si uv et vw sont deux arêtes de G, alors elles sont présentes dans la même composante connexe de $KB_e(G)$ ou uw est aussi une arête de G.*

Démonstration. Si uw n'est pas une arête de G, alors uvw est une biclique de G contenue dans une biclique maximale de G, donc dans un sommet de $K_{B_e}(G)$. Dans ce cas uv et vw sont présents dans le même sommet de $KB_e(G)$ donc, à fortiori, dans la même composante connexe. □

Théorème 48. *Soient un graphe G à n sommets et m arêtes et une arête uv de G. On peut calculer l'ensemble $R(uv)$ des arêtes qui se trouvent dans la même composante connexe de $K_{B_e}(G)$ que uv, en temps $O(m \times n)$.*

Démonstration. On utilise l'algorithme suivant. Au début de l'algorithme, $R(uv)$ contient l'arête uv et S contient les paires sommet-arête (u, uv) et (v, uv). A chaque étape de l'algorithme, on retire un élément $(w, (wx))$ dans S. Pour tout sommet y dans $N(w) \setminus \{x\}$, si y et x ne sont pas adjacents, alors wy est dans la même composante de $KB_e(G)$ que wx d'après le Lemme 24, donc si wy n'est pas déjà dans $R(uv)$, alors on ajoute wy à $R(uv)$ et (y, wy) à S. L'algorithme s'arrête quand S est vide.

Pour chaque élément dans S, on effectue une opération en temps constant pour chaque sommet dans le voisinage d'un sommet précis. Cela prend au plus un temps $O(n)$. Comme on ajoute au plus m paires dans S, l'algorithme s'exécute en temps $O(m \times n)$ au pire.

Il est clair que les arêtes dans $R(uv)$ se trouvent toutes dans la même composante connexe de $KB_e(G)$ que uv. En effet, une arête wy n'est ajouté à $R(uv)$ que quand une arête wx se trouve déjà dans $R(uv)$ et que wy et wx satisfont les hypothèses du Lemme 24.

Il reste à prouver que les arêtes qui ne sont pas dans $R(uv)$ ne sont pas dans la même composante connexe de $KB_e(G)$ que uv.

Soit wx une arête qui n'est pas dans $R(uv)$ voisine d'une arête dans $R(uv)$ d'extrémité x. Étant donné le fonctionnement de l'algorithme, w est voisin de tous les voisins de x dans $R(uv)$. Par connexité de $R(uv)$, w est, en fait voisin de tout $R(uv)$. En particulier, pour toute arête yz dans $R(uv)$, wyz est un triangle dans G et donc n'appartiennent pas à une biclique commune. Il n'existe donc pas de biclique de G contenant une arête de $R(uv)$ et une arête extérieure à $R(uv)$. $R(uv)$ est bien l'ensemble des arêtes qui sont dans la même composante connexe de $KB_e(G)$ que uv. □

25 Conclusion et Perspectives

On a vu un critère simple de convergence de la suite des itérés du graphe des bicliques. On a aussi vu un critère de divergence basé sur l'existence d'un cycle induit de longueur plus grande que 5 dont aucun sous-chemin de longueur 2 n'appartient à un C_4 induit. On conjecture que pour tout graphe G, si $KB_e^n(G)$ diverge, alors il existe un i fini tel que $KB_e^i(G)$ satisfait les conditions du Corollaire 8. Cela impliquerait que le problème de connaître le comportement asymptotique de $KB_e^n(G)$ est décidable. Si de plus le i tel que $KB_e^i(G)$ satisfait les conditions du Corollaire 8 peut être borné indépendamment de G, le problème pourrait être résolu en temps polynomial. On conjecture également qu'il n'existe pas de graphe G tel que $KB(G) \neq G$ et $KB_e^i(G) = G$ pour un certain $i \geq 2$. Le Théorème 48 peut aider à répondre à ces conjectures.

Une autre piste de travaux futurs est d'appliquer la même variante d'intersection par les arêtes à d'autre graphes d'intersections, en particulier le graphe des cliques, ou des variantes d'intersections plus ésotérique, par exemple l'intersection par la paire de sommets (pas nécessairement adjacents).

Références

[1] M. Abu-Ata and F. Dragan. Metric tree-like structures in real-world networks : an empirical study. *Networks*, 67 :49–68, 2016.

[2] R. Agarwala, V. Bafna, M. Farach, M. Paterson, and M. Thorup. On the approximability of numerical taxonomy (fitting distances by tree metrics). *SIAM Journal on Computing*, 28(3) :1073–1085, 1998.

[3] R. Águeda, N. Cohen, S. Fujita, S. Legay, Y. Manoussakis, Y. Matsui, L. Montero, R. Naserasr, Y. Otachi, T. Sakuma, Z. Tuza, and R. Xu. Safe sets in graphs : Graph classes and structural parameters. In *10th Annual International Conference on Combinatorial Optimization and Applications (COCOA 2016), December 16-18, 2016 in Hong Kong, China*, 2016.

[4] S. Akbari, V. Liaghat, and A. Nikzad. Colorful paths in vertex coloring of graphs. *Electr. J. Comb.*, 2011.

[5] N. Alon and T. H. Marshall. Homomorphisms of edge-colored graphes and coxeter groups. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 8(1) :5–13, 1998.

[6] S. Arnborg, D. Corneil, and A. Proskurowski. Complexity of finding embeddings in a k-tree. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, 8(2) :277–284, 1987.

[7] R. Balakrishnan and K. Ranganathan. *A textbook of graph theory.* Springer Science & Business Media, 2012.

[8] H.-J. Bandelt and V. Chepoi. Metric graph theory and geometry : a survey. *Contemporary Mathematics*, 453 :49–86, 2008.

[9] J. Bang-Jensen and P. Hell. The effect of two cycles on the complexity of colorings by directed graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 26(1) :1–23, 1990.

[10] J. Bang-Jensen, P. Hell, and G. MacGillivray. The complexity of colouring by semicomplete digraphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 1(3) :281–298, 1988.

[11] J. Bang-Jensen, P. Hell, and G. MacGillivray. Hereditarily hard h-colouring problems. *Discrete Mathematics*, 138(1-3) :75–92, 1995.

[12] L. Barto, M. Kozik, and T. Niven. The csp dichotomy holds for digraphs with no sources and no sinks (a positive answer to a conjecture of bang-jensen and hell). *SIAM J. Comput.*, pages 1782–1802, 2009.

[13] A. Berry, R. Pogorelcnik, and G. Simonet. An introduction to clique minimal separator decomposition. *Algorithms*, 3(2) :197–215, 2010.

[14] H. Bodlaender. A linear-time algorithm for finding tree-decompositions of small treewidth. *SIAM J. Comput.*, 25(6) :1305–1317, 1996.

[15] H. Bodlaender and T. Kloks. Efficient and constructive algorithms for the pathwidth and treewidth of graphs. *Journal of Algorithms*, 21(2) :358–402, 1996.

[16] V. Bouchitté, F. Mazoit, and I. Todinca. Chordal embeddings of planar graphs. *Discrete Mathematics*, 273(1) :85–102, 2003.

[17] R. C. Brewster. *Vertex colourings of edge-coloured graphs.* Phd thesis, Simon Fraser University, 1993.

[18] R. C. Brewster. The complexity of colouring symmetric relational systems. *Discrete Applied Mathematics*, pages 95–105, 1994.

[19] R. C. Brewster, F. Foucaud, P. Hell, and R. Naserasr. The complexity of signed graph and 2-edge-coloured graph homomorphisms. *CoRR*, 2015.

[20] R. C. Brigham, R. D. Dutton, T. W. Haynes, and S. T. Hedetniemi. Powerful alliances in graphs. *Discrete Mathematics*, pages 2140–2147, 2009.

[21] M. Bădoiu, K. Dhamdhere, A. Gupta, Y. Rabinovich, H. Räcke, R. Ravi, and A. Sidiropoulos. Approximation algorithms for low-distortion embeddings into low-dimensional spaces. In *Proceedings of the sixteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, pages 119–128. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.

[22] A. Cami, H. Balakrishnan, N. Deo, and R. Dutton. On the complexity of finding optimal global alliances. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 58, 2006.

[23] M. Chapelle, M. Cochefert, D. Kratsch, R. Letourneur, and M. Liedloff. Exact exponential algorithms to find a tropical connected set of minimum size. In *IPEC*, pages 147–158, 2014.

[24] S. Chechik, D. Larkin, L. Roditty, G. Schoenebeck, R. Tarjan, and V. Vassilevska Williams. Better approximation algorithms for the graph diameter. In *ACM SODA'14*, pages 1041–1052. SIAM, 2014.

[25] V. Chepoi. On distance-preserving and domination elimination orderings. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 11(3) :414–436, 1998.

[26] V. Chepoi, F. Dragan, B. Estellon, M. Habib, and Y. Vaxès. Diameters, centers, and approximating trees of δ-hyperbolic geodesic spaces and graphs. In *SCG '08*, pages 59–68, New York, NY, USA, 2008. ACM.

[27] M. Chrobak and D. Eppstein. Planar orientations with low out-degree and compaction of adjacency matrices. *Theor. Comput. Sci.*, 86(2) :243–266, 1991.

[28] E. Corel, F. Pitschi, and B. Morgenstern. A algorithm for the consistency problem in multiple sequence alignment. *Bioinformatics*, pages 1015–1021, 2010.

[29] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, and C. Stein. *Introduction to Algorithms (3. ed.).* MIT Press, 2009.

[30] D. Coudert, G. Ducoffe, and N. Nisse. Diameter of Minimal Separators in Graphs. Research Report RR-8639, Inria Sophia Antipolis ; I3S ; INRIA, Nov. 2014.

[31] E. Dahlhaus, P. Hammer, F. Maffray, and S. Olariu. On domination elimination orderings and domination graphs. In *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science, 20th International Workshop, WG '94, Herrsching, Germany, June 16-18, 1994, Proceedings*, pages 81–92, 1994.

[32] J.-A. A. d'Auriac, C. BujtÃ¡s, H. E. Maftouhi, M. Karpinski, Y. Manoussakis, L. Montero, N. Narayanan, L. Rosaz, J. Thapper, and Z. Tuza. Tropical dominating sets in vertex-coloured graphs. In *WALCOM*, pages 17–27, 2016.

[33] B. Dean and L. Jamieson. Weighted alliances in graphs. *Congressus Numerantium*, 187 :76–82, 2007.

[34] Y. Dourisboure, F. Dragan, C. Gavoille, and Y. Chenyu. Spanners for bounded tree-length graphs. *Theor. Comput. Sci.*, 383(1) :34–44, 2007.

[35] Y. Dourisboure and C. Gavoille. Tree-decompositions with bags of small diameter. *Discrete Mathematics*, 307(16) :2008–2029, 2007.

[36] F. Dragan and E. Köhler. An approximation algorithm for the tree t-spanner problem on unweighted graphs via generalized chordal graphs. *Algorithmica*, 69(4) :884–905, 2014.

[37] F. Dragan, E. Köhler, and A. Leitert. Line-distortion, bandwidth and path-length of a graph. In *Algorithm Theory–SWAT 2014*, pages 158–169. Springer, 2014.

[38] T. Feder. Classification of homomorphisms to oriented cycles and of k-partite satisfiability. *SIAM J. Discrete Math.*, pages 471–480, 2001.

[39] T. Feder and P. Hell. List homomorphisms to reflexive graphs. *J. Comb. Theory, Ser. B*, pages 236–250, 1998.

[40] T. Feder, P. Hell, and J. Huang. List homomorphisms and circular arc graphs. *Combinatorica*, pages 487–505, 1999.

[41] T. Feder, P. Hell, and J. Huang. Bi-arc graphs and the complexity of list homomorphisms. *Journal of Graph Theory*, pages 61–80, 2003.

[42] T. Feder and M. Y. Vardi. The computational structure of monotone monadic snp and constraint satisfaction : A study through datalog and group theory. *SIAM J. Comput.*, pages 57–104, 1998.

[43] M. R. Fellows, G. Fertin, D. Hermelin, and S. Vialette. Upper and lower bounds for finding connected motifs in vertex-colored graphs. *J. Comput. Syst. Sci.*, pages 799–811, 2011.

[44] M. Frias-Armenta, V. Neumann-Lara, and M. Pizaña. Dismantlings and iterated clique graphs. *Discrete Mathematics*, 282(1-3) :263–265, 2004.

[45] S. Fujita, G. MacGillivray, and T. Sakuma. Safe set problem on graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 215 :106–111, 2016.

[46] F. Gavril. Algorithms for minimum coloring, maximum clique, minimum covering by cliques, and maximum independent set of a chordal graph. *SIAM Journal on Computing*, 1(2) :180–187, 1972.

[47] M. Groshaus, A. L. P. Guedes, and L. Montero. Almost every graph is divergent under the biclique operator. *Discrete Applied Mathematics*, pages 130–140, 2016.

[48] M. Groshaus and L. Montero. On the iterated biclique operator. *Journal of Graph Theory*, 73(2) :181–190, 2012.

[49] A. Harutyunyan. Some bounds on global alliances in trees. *Discrete Applied Mathematics*, pages 1739–1746, 2013.

[50] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and M. A. Henning. Global defensive alliances in graphs. *Electr. J. Comb.*, 2003.

[51] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and M. A. Henning. A characterization of trees with equal domination and global strong alliance numbers. *Utilitas Mathematica*, 66, 2004.

[52] S. Hedetniemi, S. Hedetniemi, and P. Kristiansen. Alliances in graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 48, 2004.

[53] P. Hell and J. Nesetril. On the complexity of h-coloring. *J. Comb. Theory, Ser. B*, pages 92–110, 1990.

[54] P. Hell and J. Nesetril. *Graphs and Homomorphisms.* Oxford University Press, 2004.

[55] M. Herlihy, F. Kuhn, S. Tirthapura, and R. Wattenhofer. Dynamic analysis of the arrow distributed protocol. *Theory of Computing Systems*, 39(6) :875–901, 2006.

[56] J. Hopcroft and R. Tarjan. Efficient planarity testing. *Journal of the ACM (JACM)*, 21(4) :549–568, 1974.

[57] P. Indyk. Algorithmic applications of low-distortion geometric embeddings. In *Proceedings of the 42Nd IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, FOCS '01, pages 10–, Washington, DC, USA, 2001. IEEE Computer Society.

[58] T. Kashiwabara and T. Fujisawa. Np-completeness of the problem of finding a minimum-clique-number interval graph containing a given graph as a subgraph. In *Proc. Symposium of Circuits and Systems*, 1979.

[59] A. Kosowski, B. Li, N. Nisse, and K. Suchan. k-Chordal Graphs : from Cops and Robber to Compact Routing via Treewidth. *Algorithmica*, 72(3) :758–777, 2015.

[60] R. Krauthgamer and J. Lee. Algorithms on negatively curved spaces. In *FOCS'06*, pages 119–132. IEEE, 2006.

[61] R. E. Ladner. On the structure of polynomial time reducibility. *J. ACM*, pages 155–171, 1975.

[62] D. Lokshtanov. On the complexity of computing treelength. *Discrete Applied Mathematics*, 158(7) :820–827, 2010.

[63] B. Monien. The bandwidth minimization problem for caterpillars with hair length 3 is np-complete. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, 7(4) :505–512, 1986.

[64] J. Opatrny. Total ordering problem. *SIAM J. Comput.*, 8(1) :111–114, 1979.

[65] C. Papadimitriou and M. Yannakakis. The clique problem for planar graphs. *Inf. Process. Lett.*, 13(4/5) :131–133, 1981.

[66] E. Prisner. Convergence of iterated clique graphs. *Discrete Mathematics*, 103(2) :199–207, 1992.

[67] N. Robertson and P. Seymour. Graph minors. II. algorithmic aspects of tree-width. *Journal of algorithms*, 7(3) :309–322, 1986.

[68] J. A. RodrÃguez-VelÃ¡zquez and J. M. Sigarreta. Spectral study of alliances in graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, pages 143–157, 2007.

[69] J. M. Sigarreta and J. A. RodrÃguez-VelÃ¡zquez. On defensive alliances and line graphs. *Appl. Math. Lett.*, pages 1345–1350, 2006.

[70] J. Tenenbaum, V. De Silva, and J. Langford. A global geometric framework for nonlinear dimensionality reduction. *Science*, 290(5500) :2319–2323, 2000.

[71] W. Trotter and J. Moore. Characterization problems for graphs, partially ordered sets, lattices, and families of sets. *Discrete Mathematics*, 16(4) :361–381, 1976.

[72] K. Umezawa and K. Yamazaki. Tree-length equals branch-length. *Discrete Mathematics*, 309(13) :4656–4660, 2009.

[73] N. van Rooij and Wilf. The interchange of a finite graph. *Acta Mathematica Academiæ Scientiarum Hungaricæ*, 16 :263–269, 1965.

[74] C. Zheng, K. M. Swenson, E. Lyons, and D. Sankoff. Omg! orthologs in multiple genomes - competing graph-theoretical formulations. In *WABI*, pages 364–375, 2011.

ÉCOLE DOCTORALE
Sciences et technologies de l'information et de la communication (STIC)
université PARIS-SACLAY

Titre : Quelques Problèmes d'Algorithmique et de Complexité en Théorie des Graphes

Mots clés : graphe, algorithmique, complexité, coloriage

Résumé : Le sujet de cette thèse est la théorie des graphes. Formellement, un graphe est un ensemble de sommets et un ensemble d'arêtes, c'est à dire de paires de sommets, qui relient les sommets. Cette thèse traite de différents problèmes de décisions binaires ou de minimisations liés à la notion de graphe, et cherche, pour chacun de ces problèmes, à déterminer sa classe de complexité, ou à fournir un algorithme.
Le premier chapitre concerne le problème de trouver le plus petit sous-graphe connexe tropical dans un graphe sommet-colorié, c'est à dire le plus petit sous-graphe connexe contenant toutes les couleurs.
Le deuxième chapitre concerne les problèmes d'homomorphisme tropical, une généralisation des problèmes de coloriage de graphe. On y trouve un lien entre ces problèmes et plusieurs classes de problèmes d'homomorphismes, dont la classe des Problèmes de Satisfaction de Contraintes.
Le troisième chapitre concerne deux variantes lointaines du problème de domination, nommément les problèmes d'alliances globales dans un graphe pondéré et le problème de l'ensemble sûr.
Le quatrième chapitre concerne la recherche d'une décomposition arborescente étoilée, c'est à dire une décomposition arborescente dont le rayon des sacs est 1.
Enfin, le cinquième chapitre concerne une variante du problème de décider du comportement asymptotique de l'itéré du graphe des bicliques.

Title : A few problems of algorithm and complexity in graph theory

Keywords : graph, algorithm, complexity, coloring

Abstract : This thesis is about graph theory. Formally, a graph is a set of vertices and a set of edges, which are pair of vertices, linking vertices. This thesis deals with various decision problem linked to the notion of graph, and, for each of these problem, try to find its complexity class, or to give an algorithm.
The first chapter is about the problem of finding the smallest connected tropical subgraph of a vertex-colored graph, which is the smallest connecter subgraph containing every colors.
The second chapter is about problems of tropical homomorphism, a generalisation of coloring problem. A link between these problems and several other class of homomorphism problems can be found in this chapter, especially with the class of Constraint Satisfaction Problem.
The third chapter is about two variant of the domination problem, namely the global alliance problems in a weighted graph and the safe set problem.
The fourth chapter is about the problem of finding a star tree-decomposition, which is a tree-decomposition where the radius of bags is 1.
Finally, the fifth chapter is about a variant of the problem of deciding the asymptotic behavior of the iterated biclique graph.

Université Paris-Saclay
Espace Technologique / Immeuble Discovery
Route de l'Orme aux Merisiers RD 128 / 91190 Saint-Aubin, France