



HAL
open science

Dynamique hors équilibre d'un condensat de Bose-Einstein dans un réseau dépendant du temps

Aéla Fortun

► **To cite this version:**

Aéla Fortun. Dynamique hors équilibre d'un condensat de Bose-Einstein dans un réseau dépendant du temps . Physique [physics]. Université Toulouse 3 - Paul Sabatier, 2016. Français. NNT : . tel-01588809

HAL Id: tel-01588809

<https://theses.hal.science/tel-01588809>

Submitted on 17 Sep 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : *l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)*

Présentée et soutenue le *19/07/2016* par :

AÉLA FORTUN

**Dynamique hors équilibre d'un condensat de Bose-Einstein
dans un réseau dépendant du temps**

JURY

DAVID GUÉRY-ODELIN	Professeur d'Université	Directeur de thèse
CAROLINE CHAMPENOIS	Chargée de Recherche	Rapporteuse
FLORIAN SCHRECK	Professor	Rapporteur
FLORENCE PETTINARI	Professeur d'Université	Examineur
J. GONZALO MUGA	Professor	Examineur

École doctorale et spécialité :

SDM : Physique de la matière - CO090

Unité de Recherche :

Laboratoire Collisions Agrégats Réactivité (UMR5589)

Directeur de Thèse :

David Guéry-Odelin

Rapporteurs :

Florian Schreck et Caroline Champenois


Remerciements

Et ben dis donc je pensais pas que c'était aussi difficile d'écrire des remerciements. Donc bon je me lance on verra bien ce que ça donne. Le plus simple à l'air d'être de remonter le temps petit à petit. Sauf qu'en fait, Je ne peux pas vraiment définir des époques différentes car elles sont toutes imbriquées, un peu comme ça¹ :



 Du coup, je vais commencer par le jour de ma soutenance.

Je remercie donc tout d'abords tous les membres de mon jury, Caroline Champenois, Florian Schreck, J. Gonzalo Muga et Florence Pettinari, pour avoir accepté de vous intéresser à mon travail ainsi que pour les questions et remarques que vous avez soulevées durant la soutenance.

 On continue de remonter dans le temps, il est alors temps de penser à tous les gens que j'ai pu côtoyer pendant ces 3 années de thèses.

Ma gratitude va à mon directeur de thèse, David Guéry-Odelin, pour m'avoir accueillie dans ton équipe ; ton enthousiasme pour la physique et les atomes froids

1. À première vue ça ressemble à rien mais en fait ça a du sens !

m'a poussé à m'investir entièrement dans cette thèse et ainsi accomplir un travail dont je suis fière. Je remercie aussi très chaleureusement Juliette Billy. Travailler avec toi a toujours été un grand plaisir. Tu as toujours été de très bon conseils et je te souhaite beaucoup de bonheur !

Ya teeeeeellement de gens formidables que j'ai rencontré au cours de ces 3 ans ! je vais essayer de n'oublier personne. Je pense d'abord aux autres membres de l'équipe atomes froids : Gabriel Hétet, tu m'as appris ce doux mélange entre un travail efficace et complètement à l'arrache ! Gabriel Condon, cette expérience de condensation est notre œuvre d'art à tous les deux ; on a fait une bonne équipe ! Et puis ya aussi François Damon, pauvre François que David oubliait tout le temps de prévenir pour les réunions ! J'ai appris plein de choses avec toi ! ta culture scientifique et ton perfectionisme feront de toi un prof exceptionnel. Petit Éric², je compte sur toi pour mettre de la bonne musique en salle de manip ! Ma Lulu j'ai passé d'excellents moments avec toi, que ce soit au boulot ou en dehors, et tu me manques énormément depuis que tu es à Lyon ! Antonine, je te souhaite de passer de très bon moment en thèse et une très belle carrière !

L'IRSAMC est rempli de gens que je n'oublierai jamais.

Mes co-bureau tout d'abord : Isabelle, tes jolies tenues colorées me mettaient de bonne humeur dès le matin ! Julien, j'espère que tu auras un condensat très bientôt ! je reviendrais sur Toulouse pour fêter ça avec toi quand tu en auras un ! Et enfin Boris, je te remercie pour apporter au labo une touche de sophistication tranquille et sereine.

Et puis tous les autres thésard : Étienne pour ta théâtralité, Lionel pour ton attitude bucolique, Guillaume pour tous tes plans machiavéliques desquels je me suis rendue complice avec grand plaisir (bon courage pour l'agreg !), Medha, Muammar, Claudia, Mina, j'espère te rendre visite au canada et je te souhaite plein de bonheur avec Luke !, Avijit, Charlotte, Annaël grâce à toi je sais comment faire fusionner deux allumettes ensemble et ça ... ça vaut de l'or ! Simon, tu étais le doyen des thésard quand je suis arrivée et tu m'as appris les astuces pour survivre dans le monde étrange de la recherche, je te remercie pour ça et pour tout le reste (:-) , et bien sur tous les autres que j'oublie mais qui ne comptent pas moins !

Mais heureusement la thèse ne se résume pas au labo ! je remercie aussi Camille (#kiss flex love!!!!), Flo(rian) et tes gaffes d'anthologie, Flo(rence), j'espère apprendre à mieux te connaître, Vivi, ta façon de rendre toutes les histoires épiques est absolument génialissime, Aymeric, grâce à toi j'ai découvert l'univers des jeux de rôle et je te remercie pour les débats toujours ardues avec toi ! Je remercie aussi Bernard, c'est grâce à ta gentillesse que le Dub est si agréable !

Arf j'oublie sûrement des gens, si c'est le cas, vous êtes autorisés à m'envoyer un message d'insulte !

2. Oui je sais tu n'aimes pas que je t'appelle comme ça mais ce te va bien !



Vient ensuite les années collège/lycée/prépa/ENS. Là aussi j'ai beaucoup de gens à remercier.

Un grand grand merci à mes copines Marine (je t'adooore!), Marion (calin télétubbisien!), Caroline (t'es bien parti pour devenir une jeune entrepreneuse américaine), Manon (copine fonctionnaire!) et Thibaut (sans le L de Loser héhé, et oui ... toi aussi tu es ma copine!)

Je remercie tous les gens qui ont participé à faire de moi qui je suis : Eline, Thomas, Juliane, Morgane, Mélanie, Pauline, Alizée, Raphaël1, Raphaël2 (je vous laisse deviner qui est qui), Sylvain, Giovanni, Juliette, Katherine, Laurie, Géraldine, Thomas indochine, Samuel etc... (car oui, encore une fois j'oublie surement des gens). Je remercie aussi tous mes professeurs. À vous tous vous m'avez donné la possibilité d'en arriver là. Je remercie tout particulièrement Mme Hallé pour avoir cru en moi.



Last but not least! Je remercie ma famille, la meilleur du monde! Papa, Maman, je vous aime de tout mon cœur! Denis et Morane, tous les 3 on fait parti d'un tout inséparable! Pour revenir à la physique quantique (déformation professionnelle), on est intriqué et quelque soit l'état de l'un, l'état des deux autres est en harmonie avec le premier! gros bisous à vous deux!

Ces quelques mots de remerciements sont bien maigres comparé à ce que j'aimerais exprimer. En résumé, je remercie l'humanité toute entière! (bah ouais, faut voir grand dans la vie!)

Table des matières

Introduction générale	1
I Production de condensats de Bose-Einstein	11
Introduction	13
I.1 Piège magnéto-optique 3D	15
I.2 Système d'imagerie	21
I.3 Vers la condensation de Bose-Einstein	23
I.4 Piège magnétique	29
I.5 Condensation de Bose-Einstein dans un piège hybride	33
Conclusion	38
II Mise en place d'un réseau optique	41
Introduction	43
II.1 Particule dans un potentiel périodique	46
II.2 Réalisation expérimentale d'un réseau optique	54
Conclusion	60
III Étude de trois méthodes de calibration d'un réseau optique	61
Introduction	63
III.1 Calibration par diffraction Kapitza-Dirac	64
III.2 Calibration par interférence entre paquets d'ondes cohérents	72
III.3 Micro-oscillations d'une chaîne de condensats	78
Conclusion	94
IV Mesure du temps de traversée tunnel	97
Introduction	99
IV.1 Le temps de traversée tunnel : une question ouverte	101
IV.2 Observation expérimentale du temps de traversée tunnel	107
IV.3 Interféromètre de Mach-Zehnder micrométrique	115
IV.4 Microscope par rotation dans l'espace des phases	116
Conclusion	118
V Dynamique dans un réseau renormalisé	121
Introduction	123
V.1 Modulation haute fréquence : renormalisation de la profondeur	125
V.2 Modulation basse fréquence : renormalisation du taux tunnel	129

V.3 Conclusion	135
Conclusion générale	137
A Préparation des faisceaux résonants	141
B Programmes de traitement de données	145
B.1 Programme 1 : mise en forme des données	146
B.2 Programme 2 et 3 : traitement de l'expérience de diffraction . . .	150
B.3 Programme 4 : Traitement de l'expérience d'oscillation	155
Bibliographie	159

Introduction générale

‘When the first announcement of BEC came out, it hit the newspapers, everywhere on the front page news, it was tremendous excitement. I think the reason of course was that the name Einstein was involved, if it has been called as it really is, the observation of a quantum degenerate Bose gas, it might not have been in the front page ...’

Dan Kleppner, Table ronde ICAP 2012

Il est vrai que le nom d’Albert Einstein est un ambassadeur efficace pour de nombreuses causes scientifiques, y compris pour le condensat de Bose-Einstein et donc le domaine des atomes froids. Étant donné l’envergure que ce domaine a pris ces vingt dernières années et les avancées fondamentales qu’il a permis sur de nombreux sujets, nous pouvons aujourd’hui dire que l’enthousiasme suscité par la première observation d’un condensat de Bose-Einstein dans un gaz dilué en 1995 [1, 2] était tout à fait justifié. Pour nous en convaincre, resituons dans son contexte l’apparition du domaine des atomes ultra-froids et détaillons quelques uns des faits majeurs qui ont marqué l’histoire de ce jeune domaine de la physique.

Nous pourrions bien sûr remonter jusqu’aux premières heures de la physique et commencer avec la philosophie atomistique que Leucippe et Démocrite défendaient déjà il y a vingt-cinq siècles [3]. Mais ce serait aller trop loin en arrière. Je choisis de commencer bien plus tard avec l’apparition du concept d’onde de matière introduit par Louis de Broglie en 1923 [4]. Dans son traité, Louis de Broglie étend le concept d’onde, introduit par Christian Huyghens pour la lumière en 1690 [5], à des particules massives. Ainsi, à chaque particule de masse m et de vitesse v , est associée une longueur d’onde de de Broglie λ_{dB} définie par :

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{mv},$$

avec h la constante de Planck.

Après que Louis de Broglie a introduit ce concept, le caractère ondulatoire de la matière a rapidement été démontré expérimentalement : tout d’abord par Clinton Davisson et Lester Germer ainsi que George Thomson en 1927 par la diffraction d’électrons par des cristaux [6, 7], puis par Otto Stern en 1930 pour

l'hélium [8] ou encore par Enrico Fermi pour les neutrons en 1947 [9].

La rapidité à laquelle ces expériences ont été réalisées ne signifie pas qu'elles sont simples. En effet, pour révéler la nature ondulatoire d'un ensemble de particules massives, il faut le faire interagir avec un dispositif dont la longueur caractéristique est du même ordre de grandeur que la longueur d'onde de de Broglie de ces particules. Pour un gaz de particules non interagissantes entre elles, la longueur d'onde de de Broglie thermique s'exprime en fonction de la température T du gaz :

$$\lambda_T = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$$

avec k_B la constante de Boltzmann.

À température ambiante, cette longueur d'onde est de l'ordre de l'angström, d'où l'utilisation de réseaux cristallins par C. Davisson et L. Germer pour observer la diffraction d'un faisceau d'électrons [6].

Refroidir les atomes permet a priori d'exalter la nature ondulatoire de la matière, et amener ce comportement à une échelle macroscopique, ou du moins mésoscopique. Dans leur article en 1991 [10], O. Carnal et J. Mlynek décrivent la réalisation de l'expérience des fentes de Young avec des atomes d'hélium. Ils suggèrent dans leur conclusion que le rapport signal à bruit d'une telle expérience serait grandement augmenté par le refroidissement transverse et longitudinal du jet d'hélium. En effet, la longueur d'onde de de Broglie serait augmentée ce qui permettrait une observation bien plus aisée de la figure d'interférence issue d'une telle expérience. À cette époque, de grands progrès en terme de refroidissement et de piégeage d'atomes ont déjà été faits. En effet, les techniques de refroidissement laser et de piégeage dans un piège magnéto-optique, que nous discuterons dans le corps de ce manuscrit de thèse, avaient déjà été développées [11, 12]. Le prix Nobel de physique attribué en 1997 à S. Chu, C. Cohen-Tannoudji et W. Phillips atteste de la naissance d'un nouveau domaine de la physique : les atomes froids.

L'utilisation des atomes froids comme sonde pour étudier une grande variété de phénomènes physiques s'est révélée très féconde. Ainsi, l'interférométrie atomique utilisant des atomes froids s'est développée [13–15]. Encore aujourd'hui, le piège magnéto-optique reste un moyen couramment utilisé pour créer la source d'atomes froids qui alimente les interféromètres atomiques [16].

Après l'utilisation de la nature ondulatoire d'un atome, il est rapidement apparu qu'un grand nombre d'atomes partageant le même état quantique (c'est-à-dire un condensat de Bose-Einstein) constituait un outil de choix pour l'interférométrie atomique et la simulation quantique. Cet état de la matière a été prédit par Albert Einstein en 1925 [17], comme généralisation à un gaz d'atomes parfaits des travaux de Satyendra Nath Bose à propos des photons [18]. Il a été identifié pour la première fois avec de l'hélium liquide, dans un contexte très éloigné du calcul d'A. Einstein du fait des fortes interactions entre atomes [19, 20]. La fraction d'atomes condensés dans ce système est faible (de l'ordre de 10%). C'est donc vers les systèmes dilués que s'est dirigée la communauté scientifique. L'équipe de D. Kleppner et T. Graytak et celle de I. Silvera et J. Walraven ont

alors cherché à obtenir un condensat de Bose-Einstein d'atomes d'hydrogène. À cause de la faible longueur de diffusion de l'hydrogène et de processus de recombinaison à trois corps, ils ont été devancés par les équipes qui avaient choisi de se tourner vers les atomes alcalins. La première observation d'un condensat de Bose-Einstein dans un gaz dilué a alors été obtenue en 1995 par E. Cornell, C. Wieman et W. Ketterle pour le rubidium et le sodium [1,2]. Cet accomplissement a été récompensé par le prix Nobel de physique en 2001. C'est également en 1995 que l'équipe de R. Hulet a atteint le régime de dégénérescence quantique pour l'atome de lithium [21]. Seulement trois ans plus tard, l'équipe de D. Kleppner et T. Greytak a aussi atteint le régime de dégénérescence quantique avec un gaz d'hydrogène en dépit des problèmes mentionnés ci-dessus [22].

Grâce à ces accomplissements, le domaine des atomes ultra froids a commencé à prendre un essor remarquable et les vingt dernières années ont été ponctuées de grandes avancées techniques et expérimentales. Citons pour exemple l'interférométrie atomique permettant la mesure précise de grandeurs physiques comme l'accélération de pesanteur terrestre [23, 24], ou encore permettant de tester des principes fondamentaux comme le principe d'équivalence [25]. L'information quantique est aussi un domaine pour lequel le condensat de Bose-Einstein apporte des pistes de réflexion [26, 27].

Nous pouvons enfin citer la simulation quantique dont le principe est d'utiliser les atomes froids pour simuler d'autres systèmes tels que ceux de la matière condensée. Par exemple, l'utilisation de réseaux optiques a permis de simuler la transition entre un état superfluide et un isolant de Mott. Cette transition a été observée pour la première fois en 2002 par l'équipe de I. Bloch [28]. Les techniques d'imagerie par fluorescence ont permis d'observer cette même transition *in-situ* avec une résolution allant jusqu'à l'atome unique [29, 30]. L'utilisation d'un potentiel désordonné a permis de mettre en évidence le phénomène de localisation d'Anderson avec des atomes froids, d'abord à une dimension en 2008 [31, 32], puis à trois dimensions en 2011 [33]. Le caractère superfluide du condensat de Bose-Einstein a été mis en évidence grâce à l'étude des vortex qui peuvent se former lorsqu'un le condensat est soumis à une rotation [34–36]. Il est possible de simuler un champ magnétique artificiel afin d'étudier des phénomènes de type effet de Hall quantique avec des atomes neutres [37, 38]. Les bosons ne sont pas les seules particules susceptibles d'atteindre le régime de dégénérescence quantique. En effet, à très basse température, les fermions peuvent former un condensat de molécules bosoniques dans le cas d'interactions répulsives, ou un état superfluide BCS de paires de Cooper dans le cas d'interactions attractives [39, 40]. Par ailleurs, et pour revenir au cas d'un gaz de bosons, l'étude de systèmes chaotiques a mené à l'observation d'effet tunnel dynamique [41, 42] et à l'introduction de la notion de l'effet tunnel assisté par le chaos [43].

C'est ce dernier sujet d'étude qui marque le point de départ de ma thèse. En effet, l'équipe Atomes Froids du Laboratoire Collisions Agrégats Réactivité au sein de laquelle j'ai effectué ces trois ans de thèse est en étroite collaboration avec Bertrand Georgeot et Gabriel Lemarié de l'équipe Cohérence Quantique du La-

boratoire de Physique Théorique. Le chaos quantique et la dynamique chaotique sont des axes de recherche de cette équipe [44–47]. Nos deux équipes ont comme projet l'étude de systèmes mixtes (voir ci-dessous) afin de mettre en évidence le transport quantique dans ces systèmes et notamment la présence d'effet tunnel assisté par le chaos. De plus, lors de mon arrivée en thèse, le dispositif expérimental alors en place ne permettait plus d'atteindre la condensation de Bose-Einstein et de fortes fluctuations du nombre d'atomes rendaient difficile toute optimisation. Nous avons donc décidé de construire une nouvelle expérience, en profitant des nouveaux développements technologiques de ces dernières années. L'objectif de mon travail a été de développer le dispositif expérimental et les outils permettant *in fine* d'étudier l'effet tunnel assisté par le chaos. Pour comprendre les choix expérimentaux qui ont été faits, intéressons nous donc à l'expérience qui constitue l'objectif de notre équipe ainsi que le fil directeur de ces trois années de travail : l'expérience du *double puits dynamique* [47].

L'expérience du double puits dynamique

Espace des phases d'un système mixte

L'espace des phases permet la représentation graphique des trajectoires classiques associées au système considéré. Nous nous intéressons dans cette expérience à un système qui présente un espace des phases mixtes. L'espace des phases présente alors des zones intégrables, pour lesquelles les trajectoires sont confinées à des surfaces de dimensions plus faibles que la dimension de l'espace des phases, ainsi que des zones chaotiques (ou *mer chaotique*) pour lesquelles les trajectoires classiques présentent une dynamique chaotique. Un exemple typique de ce système est représenté figure 1.

Il correspond à l'espace des phases que nous considérerons pour l'expérience du double puits dynamique. Nous expliciterons par la suite à quel système physique il correspond. Dans ce cas, l'espace des phases est de dimension deux, c'est-à-dire que le mouvement de la particule considérée se fait sur une seule dimension x . Un système à une dimension, indépendant du temps ne peut pas présenter de comportement chaotique. En revanche, nous considérons ici un système à une dimension dépendant du temps. Dans ce cas, un comportement chaotique peut émerger. Les zones intégrables sont alors des lignes représentant la trajectoire de la particule tandis que la mer chaotique se présente sous la forme d'une surface. Nous voyons notamment apparaître quatre îlots de stabilité,

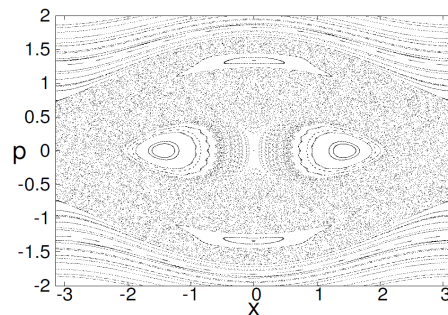


FIGURE 1 – *Espace des phases stroboscopique pour $(\epsilon, \gamma) = (0.29, 0.29)$ (voir l'équation (4)). Les zones intégrables sont caractérisées par des lignes tandis que les zones chaotiques sont représentées par des surfaces. Figure tirée de [47].*

ici en ($p = 0, x = \pm 1.2$) et ($p \simeq \pm 1, x = 0$). Au sein de ces îlots de stabilité, les trajectoires sont fermées, ce qui est analogue au cas du pendule classique [48]. La mer chaotique, elle, présente un caractère ergodique.

Hamiltonien d'intérêt

Afin d'obtenir un espace des phases mixte, nous considérons le cas du pendule modulé. Nous réalisons cela en considérant un atome de masse m placé dans un potentiel périodique dont la profondeur est modulée périodiquement dans le temps à la pulsation ω . Le potentiel périodique est réalisé par l'interférence de deux faisceaux lasers contrapropageants selon l'axe \mathcal{X} . En modulant l'intensité des lasers, nous pouvons moduler la profondeur V_0 du potentiel ainsi créé. Chaque puits du réseau sera alors associé à un espace des phases similaire à celui représenté figure 1. Le hamiltonien représentant le système s'écrit :

$$H(\mathcal{X}, \mathcal{P}, \mathcal{T}) = \frac{\mathcal{P}^2}{2m} - \frac{V_0}{2} (1 + \epsilon \cos(\omega\mathcal{T})) \cos\left(\frac{2\pi\mathcal{X}}{d}\right), \quad (1)$$

où d est le pas du réseau considéré et ϵ l'amplitude de modulation.

Nous introduisons les variables adimensionnées suivantes :

$$x = \frac{2\pi\mathcal{X}}{d}, \quad p = \frac{2\pi\mathcal{P}}{m\omega d} \quad \text{et} \quad t = \omega\mathcal{T}, \quad (2)$$

ainsi que le paramètre adimensionné :

$$\gamma = \left(\frac{E_L}{\hbar\omega}\right)^2 \frac{V_0}{E_L}, \quad \text{avec} \quad E_L = \frac{\hbar^2}{2md^2}. \quad (3)$$

Dans ce cas, le hamiltonien adimensionné s'écrit :

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2} - \gamma(1 + \epsilon \cos(t)) \cos(x). \quad (4)$$

La dynamique associée à cet hamiltonien est gouvernée par les paramètres ϵ et γ qui peuvent être modifiés via la profondeur du réseau et l'amplitude de la modulation. L'espace des phases représenté figure 1 est obtenu pour $(\epsilon, \gamma) = (0.29, 0.29)$. Il s'agit d'un espace des phases stroboscopique c'est-à-dire que la position x et l'impulsion p de la particule sont représentées pour chaque temps t multiple de la période du hamiltonien, c'est-à-dire pour chaque valeur de t entière.

À l'aide des variables adimensionnées x et p , nous pouvons également définir une constante de Planck effective \hbar_{eff} de la façon suivante :

$$\hbar_{\text{eff}} = -i[x, p] = \frac{2E_L}{\hbar\omega}. \quad (5)$$

En faisant varier \hbar_{eff} via la fréquence de modulation, nous pouvons passer continuellement d'un régime classique à un régime quantique.

Nous souhaitons étudier le transport classique et quantique entre les deux îlots de stabilité d'impulsion nulle en $p = 0, x = \pm 1.2$.

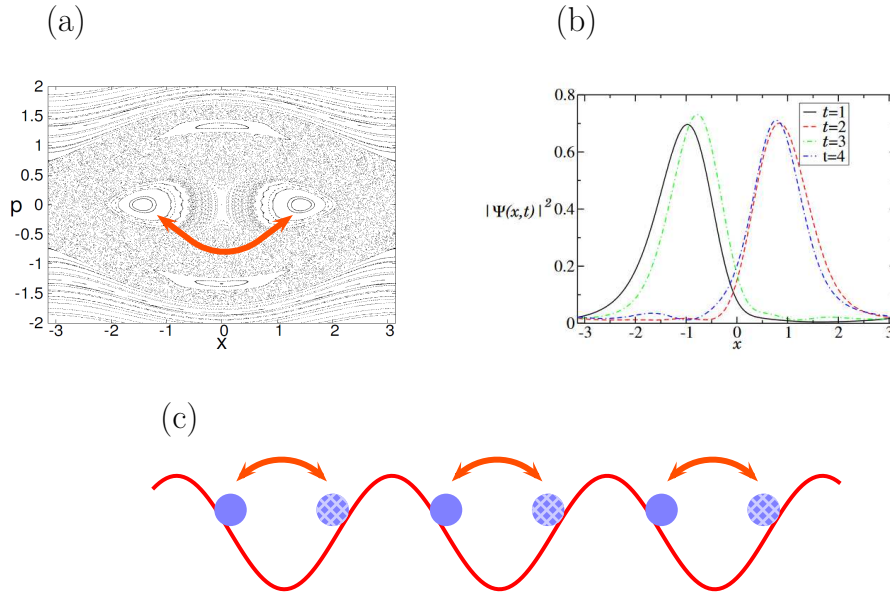


FIGURE 2 – *Transport classique dans le système du double puits. (a) : espace des phases mixte considéré. (b) : densité d'un paquet d'onde initialement localisé sur l'îlot de droite pour les instants $t = 1, 2, 3, 4$. Figure tirée de [47] (c) Représentation schématique de l'oscillation classique dans le réseau.*

Transport classique

Pour le choix de paramètres de la figure 1, moduler la profondeur du réseau rend la position au fond des puits instable. Les deux positions correspondants aux îlots de stabilité, sur les bords des puits, sont stabilisées dynamiquement.

D'après [47], classiquement, un atome initialement localisé sur l'îlot de stabilité de droite, à $x(t = 0) = 1.2$ (voir figure 2.(a)), sera localisé sur l'îlot symétrique après une période de modulation, c'est-à-dire au temps $t = 1$. Après une deuxième période de modulation, au temps $t = 2$, l'atome sera de retour sur l'îlot de droite. Il y a donc un transport classique entre les deux îlots de stabilité, de sorte que l'atome sera localisé sur l'îlot de gauche à chaque multiple impair de la période de modulation et sur l'îlot de droite à chaque multiple pair. C'est ce qu'on voit sur la figure 2.(b). Ainsi, si nous observons la position de l'atome à chaque temps t pair, l'atome doit classiquement se trouver sur l'îlot de droite.

Transport quantique : effet tunnel assisté par le chaos

En mécanique quantique, il est possible de passer d'un îlot à l'autre par effet tunnel et donc de lever la contrainte de trouver l'atome sur l'îlot de droite pour chaque temps t pair. La présence de la mer chaotique rend le phénomène d'effet tunnel plus subtil que le cas d'école d'oscillation entre deux puits symétriques. C'est ce qui est appelé *l'effet tunnel assisté par le chaos* [49]. La signature de l'effet tunnel assisté par le chaos est la forte variation du taux tunnel entre deux îlots de stabilité avec les paramètres du système [50]. La différence d'énergie

δ entre les états symétriques et antisymétriques, définissant l'effet tunnel dans ce système, varie fortement avec les paramètres caractéristiques de l'expérience. Cela entraîne une variation non monotone du taux tunnel de plusieurs ordres de grandeur, contrairement au cas d'école qui correspond à une variation monotone exponentielle du taux tunnel avec les paramètres du système. C'est ce qui est représenté sur la figure 3.

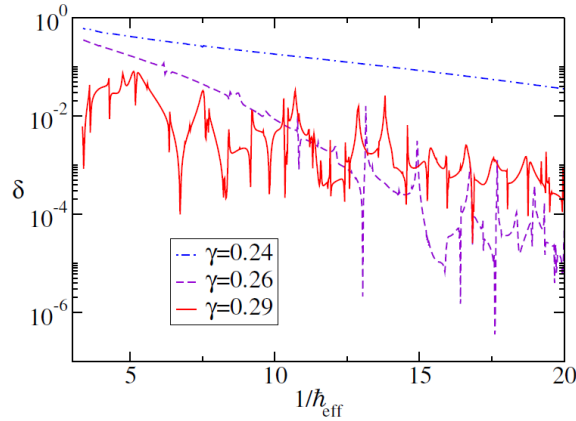


FIGURE 3 – Variation de la différence d'énergie δ en fonction de l'inverse de la constante de Planck effective \hbar_{eff} pour $\epsilon = 0.29$ et différentes valeurs de γ . Pour $\gamma = 0.29$ (voir figure 1), la signature de l'effet tunnel assisté par le chaos est clairement visible.

L'effet tunnel assisté par le chaos a été observé expérimentalement à l'aide de cavités micro-ondes [51–53]. Dans le domaine des atomes froids, plusieurs propositions de protocoles expérimentaux ont été faites [47, 50, 54, 55]. Deux expériences phares sur ce sujet [42, 56] ont permis de mettre en évidence un effet de la présence de chaos mais la signature claire de l'effet tunnel assisté par le chaos, c'est-à-dire la variation par plusieurs ordres de grandeurs du taux tunnel, n'a pas encore été observée avec des atomes froids. Dans ces deux expériences, contrairement à ce que nous présentons dans cette introduction, D. Steck *et al* et W. K. Hensinger *et al* considèrent le transport entre les deux îlots centrés sur les impulsions $p \simeq \pm 1$ (voir figure 1). La dispersion en impulsion du condensat est alors un paramètre extrêmement critique et limitant dans leurs expériences et il est expérimentalement difficile de donner une impulsion non nulle au condensat tout en gardant une dispersion en impulsion faible. Ce point est moins critique pour le cas du double puits dynamique que nous envisageons. De plus, les faisceaux laser utilisés étaient proche de résonance et la gravité n'était pas compensée ce qui limitait le temps d'interaction entre les atomes et le potentiel périodique modulé. Ces deux points limitent le temps d'interaction accessible entre le réseau modulé en amplitude et le condensat de Bose-Einstein. Nous devons prendre ces limitations en compte pour pouvoir aller plus loin dans l'observation de l'effet tunnel assisté par le chaos.

Dans le cadre du double puits dynamique que nous présentons ici, l'observation de la variation du taux tunnel peut se faire de la manière suivante : initialement ($t = 0$), nous plaçons un paquet d'ondes sur l'îlot de stabilité de droite (voir

figure 2). Nous observons ensuite la position du paquet d’ondes à chaque temps t pair. Comme nous l’avons vu, classiquement, nous devrions toujours voir le paquet d’ondes sur l’îlot de droite. Par contre, du fait de l’oscillation quantique par effet tunnel entre les deux puits, la probabilité de trouver le paquet d’ondes sur l’îlot de droite oscillera également. En mesurant cette période d’oscillation due à l’effet tunnel assisté par le chaos entre les deux îlots, nous pouvons déduire la différence d’énergie δ , et donc le taux tunnel. Les simulations numériques réalisées par l’équipe théorique du LPT, présentées dans [47], montrent que les paramètres $(\epsilon, \gamma) = (0.29, 0.29)$, qui définissent l’espace des phases représentés sur la figure 1, permettent de mettre en évidence cette variation de plusieurs ordres de grandeur du taux tunnel.

Cahier des charges

Pour pouvoir réaliser l’expérience du double puits dynamique que nous venons de décrire, certaines conditions sur les performances de l’expérience d’atomes froids doivent être respectées.

- Tout d’abord nous devons être capable de mettre en place un potentiel périodique, avec la possibilité de moduler sa profondeur V_0 , et dont les caractéristiques sont en accord avec les simulations réalisées dans [47], i.e. $\gamma \in [0, 1.1]$, $\epsilon \in [0, 1]$ et $\hbar_{\text{eff}} \in [0.1, 0.3]$. Cela correspond à une fréquence de modulation de quelques dizaines de kHz et une profondeur de réseau comprise entre $10E_L$ et $50E_L$.
- Afin de maximiser le temps d’interaction entre le condensat et le potentiel optique modulé en amplitude, nous devons utiliser des faisceaux lasers dont la longueur d’onde est suffisamment éloignée de résonance. De plus, nos expériences seront réalisées au sein d’un guide optique unidimensionnel qui nous permet de nous affranchir de la gravité.
- La préparation de l’état initial est importante. En effet, si le paquet d’ondes considéré a une dispersion en impulsion trop importante, des effets de moyennage peuvent nous empêcher d’observer les variations importantes du taux tunnel. Pour cela, le condensat de Bose-Einstein est donc un candidat idéal. En effet sa dispersion en impulsion est faible et peut être encore réduite par des techniques de manipulation dans l’espace des phases comme le delta-kick cooling [57, 58].
- De même, l’extension spatiale du paquet d’ondes doit être suffisamment faible pour que les deux îlots de stabilité soient bien distincts.
- Enfin, l’observation du transport classique et quantique dans le cadre du double puits dynamique que nous avons présenté présuppose que nous sommes capables, expérimentalement, de distinguer spatialement deux paquets d’ondes localisés sur chacun des îlots de stabilité. Cela n’est pas trivial. En effet, la distance entre deux îlots de stabilité est inférieure à la longueur d’onde du laser que nous utilisons pour imager les atomes. Une observation *in-situ* n’est donc pas appropriée. Nous avons mis au point un système de *microscope par rotation dans l’espace des phases* [47] qui permet de transférer l’information relative à l’espace des positions dans

l'espace des impulsions. Nous pouvons alors accéder aux informations pertinentes grâce à la technique du temps de vol. Cette méthode sur laquelle nous reviendrons dans le corps du manuscrit nous permettra d'obtenir la résolution nécessaire à cette observation. L'élément essentiel de ce dispositif est la possibilité de contrôler la phase $\Delta\theta$ du potentiel périodique.

Nous nous efforcerons, dans ce manuscrit, de montrer que ce cahier des charges a été respecté. L'expérience du double puits dynamique n'a pas été réalisée durant ma thèse. Nous avons choisi de nous concentrer sur des résultats expérimentaux intéressants qui ont émergé dans la phase de mise au point des outils que nous avons présentés plus haut. Nous aborderons trois thématiques : une nouvelle méthode de calibration de la profondeur d'un réseau optique, la notion et la mesure d'un temps de traversée tunnel et la dynamique d'un condensat de Bose-Einstein dans un réseau modulé en phase.

Plan de la thèse

- Dans le premier chapitre, nous présenterons le nouveau dispositif expérimental de production de condensats de Bose-Einstein. La méthode choisie repose sur un piège hybride qui combine un piège magnétique et un piège optique. Nous détaillerons les techniques de piégeage et de refroidissement mises en œuvre pour atteindre le régime de dégénérescence quantique pour l'isotope 87 de l'atome de rubidium.
- Dans le deuxième chapitre, nous verrons quelques aspects théoriques du comportement d'un condensat de Bose-Einstein dans un réseau. Nous verrons également les détails du réseau optique mis en place sur notre expérience ainsi que l'adéquation de ce réseau avec le cahier des charges imposé par l'expérience du double puits dynamique.
- Dans le troisième chapitre, nous présenterons trois méthodes de calibration de la profondeur du réseau optique. Les deux premières méthodes que nous présenterons sont des méthodes déjà existantes et qui sont largement utilisées dans les expériences d'atomes froids mettant en jeu un réseau optique. La troisième est une nouvelle méthode de calibration d'un potentiel périodique que nous avons développée. Cette méthode repose sur l'étude de la micro-oscillation d'une chaîne de condensats dans le réseau optique suite au décalage spatial de ce dernier. Ce décalage est réalisé grâce au contrôle de la phase relative $\Delta\theta$ entre les deux faisceaux laser qui créent le potentiel périodique. Nous comparerons également cette nouvelle méthode et les méthodes de calibration déjà existantes.
- Le quatrième chapitre sera consacré à la mesure du temps de traversée tunnel à travers les barrières de potentiel du réseau optique. Nous commencerons par rendre compte du contexte scientifique entourant la question ouverte du temps nécessaire pour qu'une particule traverse une barrière de potentiel. Nous montrerons ensuite comment l'étude de la micro-oscillation d'un condensat de Bose-Einstein dans un réseau optique permet une me-

sure directe du temps de traversée de la barrière de potentiel qui sépare deux puits adjacents. Nous développerons ensuite les effets du déphasage $\Delta\theta$ sur ce temps de traversée ainsi que les limites de notre méthode de mesure. La présence d'effet tunnel aux points de rebroussement de la micro-oscillation dans le réseau nous permet également de réaliser expérimentalement une chaîne d'interféromètres de Mach-Zehnder couplés. Enfin, l'effet tunnel durant la micro-oscillation de la chaîne de condensats nous donne également l'occasion de tester le *microscope par rotation dans l'espace des phases* qui est un ingrédient essentiel pour la réalisation de l'expérience de double puits dynamique. Nous démontrerons alors que cette méthode est efficace, validant ainsi le dernier point du cahier des charges que nous avons présenté plus haut.

- Enfin, le dernier chapitre sera consacré à l'étude de la dynamique d'un condensat de Bose-Einstein dans un réseau modulé en phase. Nous verrons dans un premier temps que si la fréquence de modulation de la phase est suffisamment grande, nous pouvons décrire le système en terme de potentiel moyenné dans le temps. Cela donne lieu à une renormalisation de la profondeur du potentiel. Nous étudierons ensuite le régime de faible fréquence de modulation. Dans ce cas, une instabilité dynamique entraîne la formation d'un nouvel état d'équilibre, le *staggered state*, dont nous souhaitons étudier la dynamique de formation. Nous présenterons dans ce chapitre les résultats préliminaires de cette étude qui est en cours actuellement sur notre dispositif.

CHAPITRE I

Production de condensats de Bose-Einstein dans un piège hybride

Sommaire

Introduction	13
I.1 Piège magnéto-optique 3D	15
I.1.a Principe du piège magnéto-optique	15
Mélasse optique	15
Confinement magnétique	16
Le repompage	16
I.1.b Réalisation expérimentale du PMO 3D	19
Préparation des lasers résonants	19
Configuration géométrique du PMO 3D	19
Phase sombre	19
Mélasse à désaccord dynamique	20
Phase de dépompage	20
I.2 Système d'imagerie	21
I.2.a Imagerie par absorption	21
I.2.b Mise en place expérimentale	22
I.3 Vers la condensation de Bose-Einstein	23
I.3.a Considérations théoriques sur la condensation de Bose-Einstein	24
Fonction de partition	24
Signature de la condensation de Bose-Einstein	25
Cas du piège harmonique isotrope	25
I.3.b Refroidissement par évaporation	27
I.4 Piège magnétique	29

I.4.a	Chargement du piège magnétique	31
I.4.b	Compression adiabatique	31
I.4.c	Évaporation dans le piège quadrupolaire	31
I.4.d	Pertes Majorana	33
I.5	Condensation de Bose-Einstein dans un piège hybride	33
I.5.a	Interaction dipolaire	33
	Taux de chauffage	34
I.5.b	Réalisation expérimentale d'un piège dipolaire croisé .	34
I.5.c	Évaporation dans le piège hybride	37
	Transfert dans le piège hybride	37
	Évaporation forcée	37
	Conclusion	38

Introduction

L'équipe Atomes Froids du laboratoire CAR existe depuis décembre 2007. Le dispositif expérimental de condensation tout optique, initialement développé à Paris [59] et déménagé à Toulouse en 2009 [60], a permis à l'équipe de développer un nouvel axe de recherche centré sur l'utilisation de réseaux optiques [61–63]. Néanmoins, en 2013, ce dispositif ne permettait plus d'atteindre la condensation du fait du vieillissement des lasers de puissance et d'une détérioration de la qualité du vide. La dernière décennie ayant, de plus, été riche en développement technologique, l'équipe a décidé de changer le dispositif et la méthode de condensation. Les deux premières années de ma thèse ont donc majoritairement consisté en la construction de ce nouveau dispositif expérimental qui nous a permis d'atteindre la condensation de Bose-Einstein en mai 2015.

Je présente dans ce chapitre l'ensemble du dispositif ainsi que les méthodes de piégeage et de refroidissement nous permettant de produire un condensat de Bose-Einstein. Gabriel Condon, en fin de première année de thèse au moment du début de la reconstruction de l'expérience, a décrit le dispositif de façon détaillée dans sa thèse [58]. Nous ferons plusieurs fois référence à ce manuscrit tout au long de ce chapitre.

Vue générale du dispositif

Détaillons d'ores et déjà le squelette du système : la chambre à vide. Celle-ci est représentée figure I.1.

La source d'atomes froids est constituée d'un four à atomes de rubidium 87, chauffé à environ 100° , et d'un piège magnéto-optique bidimensionnel (PMO 2D) construit par le SYRTE. Au sein du MOT 2D, la pression est maintenue aux alentours de 10^{-8} mbar par une pompe ionique (*PI0* sur la figure I.1). Nous ne détaillons pas ici le fonctionnement du PMO 2D¹. Notons simplement que le flux d'atomes en sortie est de l'ordre de 10^{10} atomes/s, ce qui est conforme aux performances annoncées par le SYRTE. Deux croix (C_1 et C_2), connectées entre elles via deux tubes de pression différentielle, relient le PMO 2D à la cellule en verre dans laquelle une partie des atomes provenant de la source sera refroidie jusqu'à condensation et où toutes les expériences seront menées. La cellule en verre est maintenue sous ultra vide² ($P < 10^{-10}$ mbar) par deux pompes ionique-getter *PI1* et *PI2*³.

La cellule en verre, fabriquée par Hellma, fait 10 cm de long et 3 cm de coté extérieur. L'épaisseur du verre est de 5 mm. Afin de pouvoir utiliser des lasers de différentes longueurs d'onde (typiquement 780 nm et 1064 nm comme nous le verrons par la suite), le verre n'a pas subi de traitement anti-reflet. Il faut donc garder à l'esprit que chaque interface entrainera environ 4% de perte de puissance.

1. Pour plus de détails, voir [58].

2. La pression au sein de la cellule en verre est inférieure à la limite de mesure des pompes ioniques. Le temps de vie des atomes dans le piège magnétique quadrupolaire est de plusieurs minutes ce qui nous indique un vide de très bonne qualité.

3. NEX Torr 200 5 (200L/s) et NEX Torr 100 5 (100L/s).

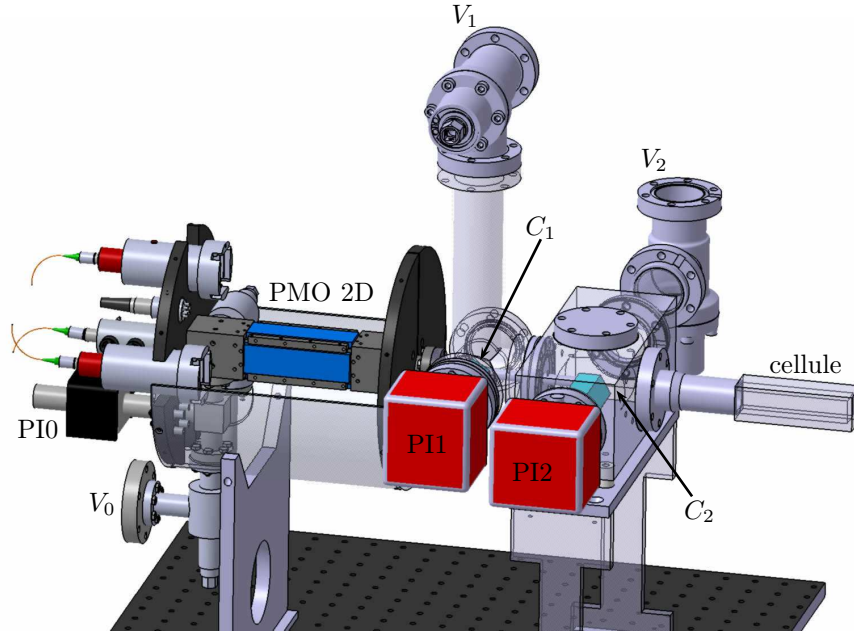


FIGURE I.1 – Vue générale de la chambre à vide. La source d'atomes froids (PMO 2D) est connectée à la cellule en verre via les croix C_1 et C_2 . Trois pompes ioniques (PI0, PI1, PI2), chacune séparée par un étage de vide différentiel, assurent la qualité du vide. Les différentes vannes (V_0 , V_1 , V_2), utilisées lors de la mise sous vide, sont maintenant inutilisées.

La chambre à vide ayant été brièvement présentée, détaillons les différentes étapes de refroidissement que nous allons aborder dans la suite de ce chapitre :

- le flux d'atomes en sortie du PMO 2D nous permet de charger un piège magnéto-optique 3D (PMO 3D) dans la cellule en verre contenant 2.5×10^9 atomes. Ces atomes sont alors refroidis plus avant par une mélasse à désaccord dynamique puis dépompés dans l'état hyperfin $F = 1$.
- Ils sont ensuite transférés dans un piège magnétique quadrupolaire dans lequel nous procédons à une première étape de refroidissement par évaporation micro-onde.
- Enfin, les atomes sont transférés dans un piège hybride (constitué d'un piège magnétique compensant la gravité et d'un piège dipolaire croisé). La seconde étape de refroidissement par évaporation est alors mise en œuvre et conduit à l'obtention d'un condensat de Bose-Einstein.

Nous consacrerons également une section à la présentation du système d'imagerie par absorption.

I.1 Piège magnéto-optique 3D

Le piège magnéto-optique est un outil incontournable du domaine des atomes froids qui a été proposé par J. Dalibard au milieu des années 1980. Le but de cet outil est double : refroidir et piéger spatialement les atomes. Pour cela, J. Dalibard a proposé d'utiliser les techniques de refroidissement laser en créant une mélasse optique et d'exploiter l'effet Zeeman pour rendre la force ressentie par les atomes dépendante de la position, ce qui rend possible le piégeage. La première réalisation expérimentale d'un PMO a été faite en 1987 par E. L. Raad, S. Chu et D. Pritchard pour des atomes de sodium [12]. Depuis, de nombreux autres éléments ont été piégés et ralentis de cette manière comme par exemple le rubidium, le césium, le calcium, l'ytterbium ainsi que, plus récemment, certaines molécules diatomiques tel que le strontium monofluoride [64].

I.1.a Principe du piège magnéto-optique

L'atome qui nous intéresse ici est l'isotope 87 du rubidium : ^{87}Rb . Le principe du PMO 3D qui le piège est le suivant :

Mélasse optique

Le refroidissement laser est assuré par la force de pression de radiation exercée par des faisceaux laser dit *refroidisseurs*, de pulsation ω_L , désaccordés de δ_L vers le rouge par rapport à la transition $F = 2 \rightarrow F' = 3$ de la ligne D_2 du rubidium (voir figure I.4).

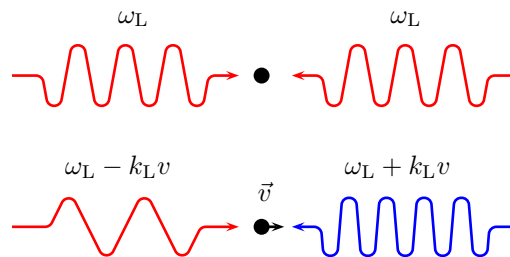


FIGURE I.2 – *Principe de la mélasse optique. Les atomes se déplaçant avec une vitesse \vec{v} absorbent préférentiellement les photons contrapropageants du fait de l'effet Doppler. La combinaison de deux faisceaux contrapropageants entraîne le ralentissement des atomes quelle que soit leur direction de propagation. Figure tirée de [58]*

Commençons par un raisonnement à une dimension : considérons un tel faisceau laser, de vecteur d'onde k_L . Du fait de l'effet Doppler, les atomes se déplaçant avec une vitesse v dans le sens opposé au vecteur d'onde k_L du faisceau laser voient une fréquence augmentée de $\delta_L^{\text{Doppler}} = k_L v$. Le faisceau laser étant désaccordé vers le rouge, ces atomes voient alors une fréquence plus proche de résonance. Au contraire, les atomes se déplaçant dans le même sens que le vecteur d'onde voient, eux, une fréquence diminuée de la même quantité $\delta_L^{\text{Doppler}}$.

Les atomes absorberont donc préférentiellement un photon qui, par conservation de l'impulsion, s'oppose à leur mouvement. Après absorption⁴, les atomes se désexcitent par émission d'un photon. Cette émission spontanée se fait de façon équiprobable dans les deux directions opposées. Son effet sur la vitesse des atomes est donc en moyenne nul. Au cours des cycles d'absorption/émission spontanée de photons, l'effet prédominant de la pression de radiation sera alors de ralentir les atomes contrapropageants au laser. Ajoutons à cela un deuxième faisceau contrapropageant au premier et le tour est joué! Nous obtenons une mélasse optique qui a pour effet de piéger les atomes dans l'espace des impulsions. C'est ce qui est schématisé figure I.2. Ce raisonnement est généralisable à trois dimensions en considérant 3 paires de faisceaux contrapropageants, une dans chaque direction de l'espace.

Confinement magnétique

Néanmoins, cette concentration autour de la vitesse nulle est indépendante de la position des atomes. Afin de réellement les piéger au centre de la cellule en verre, nous avons besoin d'un degré de liberté supplémentaire et d'un point de l'espace. Le degré de liberté supplémentaire est la polarisation des faisceaux laser. Pour sélectionner un point de l'espace, nous ajoutons un confinement magnétique. Cela est réalisé en ajoutant une paire de bobines en configuration anti-Helmholtz. Cela lève la dégénérescence des sous-niveaux Zeeman et définit un point de l'espace pour lequel le champ magnétique est nul (voir figure I.3). Le désaccord δ'_L perçu par un atome se trouvant à la position x , avec une vitesse v , est désormais :

$$\delta'_L = \delta_L \pm \left(k_L v + \frac{g_e \mu_B b'}{\hbar} x \right), \quad (\text{I.1})$$

avec g_e le facteur de Landé de l'état excité, $\mu_B = 9.27 \times 10^{-24} \text{ J.T}^{-1}$ le magnéton de Bohr et b' le gradient de champ magnétique.

En utilisant un laser polarisé circulaire gauche se propageant vers les $x > 0$ et un laser polarisé circulaire droit se propageant vers les $x < 0$, on obtient un déséquilibre des forces de pression de radiation qui tend à ramener les atomes au centre du piège. La résultante des forces s'exprime alors comme la somme d'une force de freinage et d'une force de rappel vers le centre :

$$F = -\alpha v - \kappa x, \quad (\text{I.2})$$

avec $\alpha = \hbar k_L^2 \frac{-\Omega^2 \delta_L \Gamma}{(\Gamma^2/4 + \Omega^2/2 + \delta_L)^2}$ et $\kappa = \frac{\hbar k_L}{g_e \mu_B b'} \alpha$.

k_L , comme nous l'avons dit plus tôt, est le vecteur d'onde du faisceau laser. Ω est la pulsation de Rabi et Γ est la largeur naturelle de l'état excité.

Le repompage

Le principe du piège magnéto-optique présenté plus haut suppose que tous les atomes sont dans l'état hyperfin $5^2S_{1/2}$, $F = 2$. Mais le faisceau laser peut

4. La durée de vie de l'état excité $F' = 3$ est $\Gamma^{-1} = 27 \text{ ns}$.

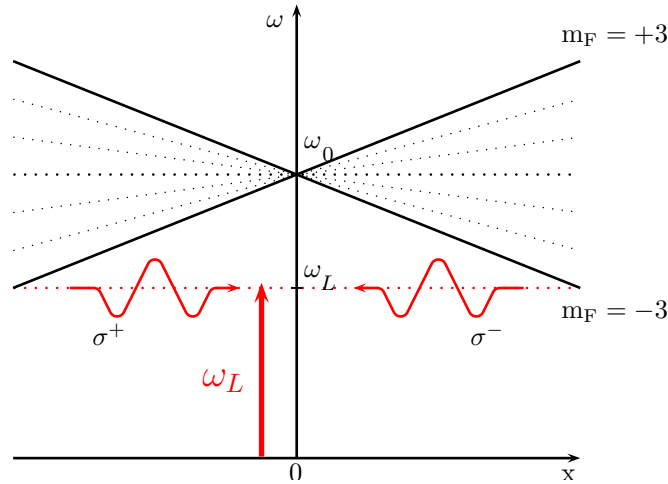


FIGURE I.3 – *Principe du piège magnéto-optique (1D). La force de pression de radiation est dépendante de la position du fait de la levée de dégénérescence des sous-niveaux Zeeman par la présence d'un gradient de champ magnétique b' . La résultante des forces de pression de radiation créées par les deux faisceaux laser contrapropageants est une force de rappel vers le point de champ magnétique nul au centre de la cellule en verre.*

également provoquer la transition $F = 2 \rightarrow F' = 2$ (voir figure I.4). L'atome peut alors se désexciter dans l'état $F = 1$, auquel cas le faisceau refroidisseur ne peut plus jouer son rôle. Afin de savoir à quel point ce phénomène peut être gênant pour la réalisation du PMO 3D, intéressons nous à quelques ordres de grandeurs : supposons que le désaccord du faisceau refroidisseur par rapport à la transition $F = 2 \rightarrow F' = 3$ est : $\delta_{2 \rightarrow 3} = 3\Gamma$. Dans ce cas, compte tenu de la différence d'énergie entre les états $F' = 3$ et $F' = 2$, le désaccord de ce même laser avec la transition $F = 2 \rightarrow F' = 2$ est : $\delta_{2 \rightarrow 2} = 40\Gamma$. La probabilité de transition est proportionnelle à $1/\delta^2$. Comme $(3/40)^2 \simeq 1/200$, il y aura 1 chance sur 200 de réaliser la transition $F = 2 \rightarrow F' = 2$. Considérons alors que la probabilité pour l'atome de se désexciter dans l'état $F = 1$ est de 1 sur 2, il y a donc 1 chance sur 400 que l'atome se retrouve dans l'état $F = 1$. La durée typique d'un cycle d'absorption/émission spontanée est $\Gamma^{-1} = 27$ ns. Le chargement du piège magnéto optique, lui, dure typiquement quelques secondes. Le nombre de cycle d'absorption/émission est donc bien supérieur à 400 ce qui montre que cette possibilité pour les atomes de se retrouver dans l'état $F = 1$ est un réel problème pour le bon fonctionnement du PMO 3D. Afin d'éviter ce phénomène, nous ajoutons donc un second faisceau, dit *repompeur*, résonant avec la transition $F = 1 \rightarrow F' = 2$. Les éventuels atomes présents dans l'état $F = 1$ sont excités par le faisceau repompeur et ont alors 1 chance sur 2 de se désexciter dans l'état $F = 2$.

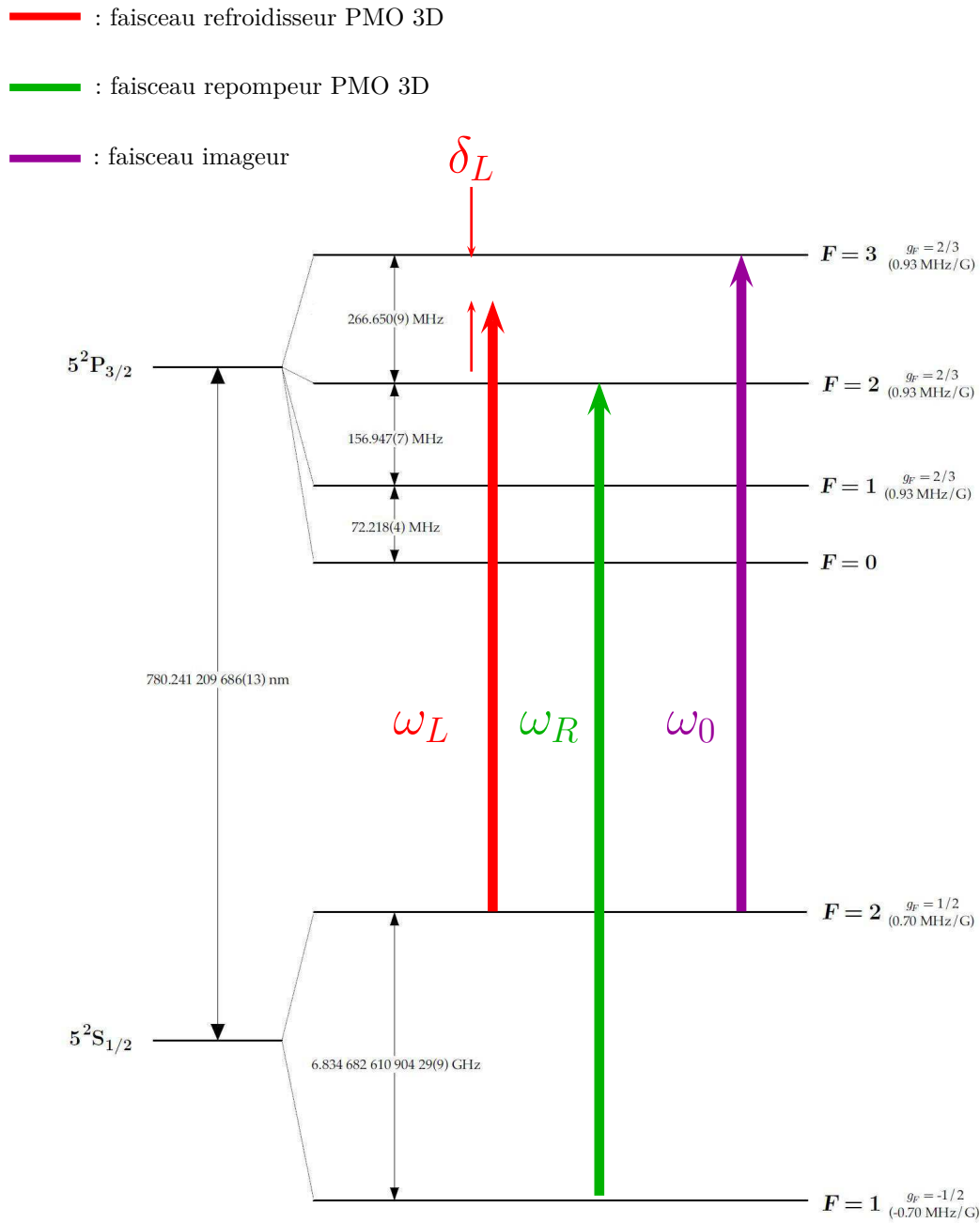


FIGURE I.4 – Raie D_2 du ^{87}Rb et fréquences des laser utilisés pour réaliser le PMO 3D [65]. ω_0 est la pulsation de résonance de la transition $F = 2 \rightarrow F' = 3$. La pulsation du faisceau refroidisseur est ω_L , avec $\omega_L + \delta_L = \omega_0$. ω_R est la pulsation du faisceau repompeur, résonant avec la transition $F = 1 \rightarrow F' = 2$. Le faisceau imageur est résonant avec la transition $F = 2 \rightarrow F' = 3$.

I.1.b Réalisation expérimentale du PMO 3D

Dans cette section, nous présentons la réalisation expérimentale du piège magnéto-optique présenté dans la section précédente. Nous détaillons également la séquence de chargement du piège qui est suivi d'une phase sombre qui nous permet d'augmenter la densité du PMO [66]. Nous procédons ensuite à une mélasse à désaccord dynamique [67] et à une étape de dépompage en vue du chargement dans le piège magnétique. Nous produisons ainsi un nuage de 2.5×10^9 atomes dans l'état $F = 1$ à une température de $50 \mu\text{K}$.

Préparation des lasers résonants

Les faisceaux laser refroidisseur et repompeur sont préparés séparément à partir de deux diodes laser : Une diode sur réseau DL Pro Toptica pour le laser refroidisseur et une diode libre artisanale pour le laser repompeur. Une description détaillée de la préparation des faisceaux est donnée dans [58]. Nous ne présentons ici que les grandes lignes du dispositif et les schémas des tables optiques sont donnés dans l'annexe A.

La fréquence du laser refroidisseur est stabilisée par un asservissement par modulation de phase à 5 MHz [68] sur la transition hyperfine $F = 2 \rightarrow F' = 2$. Sa fréquence est ensuite ajustée à l'aide de modulateurs acousto-optique La fréquence du laser repompeur est elle asservie par modulation de courant sur la transition $F = 1 \rightarrow F' = 2$.

Configuration géométrique du PMO 3D

La configuration géométrique du piège magnéto-optique que nous avons mis en place est représentée figure I.5. Comme nous l'avons vu, le PMO 3D requiert 3 paires de faisceaux refroidisseur contrapropageants. Afin de conserver libre l'axe vertical z pour de futures expériences, nous avons opté pour une géométrie non orthogonale : 2 des 3 paires de faisceaux sont inclinées de 30° par rapport à l'axe z . La dernière paire de faisceaux est horizontale. Les faisceaux ont tous un diamètre de deux centimètres, de sorte à utiliser l'ensemble de la cellule en verre, et une intensité $I_0 \sim 4I_{\text{sat}} \sim 10 \text{ mW/cm}^2$. Le faisceau repompeur, lui, est superposé avec les faisceaux refroidisseurs horizontaux. Les puissances des faisceaux refroidisseur et repompeur sont asservies afin de minimiser les fluctuations du nombre d'atomes dans le PMO 3D.

À cette étape, nous obtenons 2.5×10^9 atomes à $120 \mu\text{K}$ en 8 secondes de chargement.

Phase sombre

L'étape de phase sombre, démontrée par W. Ketterle [66] a pour but d'augmenter la densité d'atomes dans le PMO en réduisant sa taille. En effet, les cycles d'absorption/émission se traduisent, au sein du PMO 3D, par une force d'interaction effective répulsive, limitant la densité atomique atteignable. Après le chargement du piège magnéto-optique, les atomes sont suffisamment ralentis pour

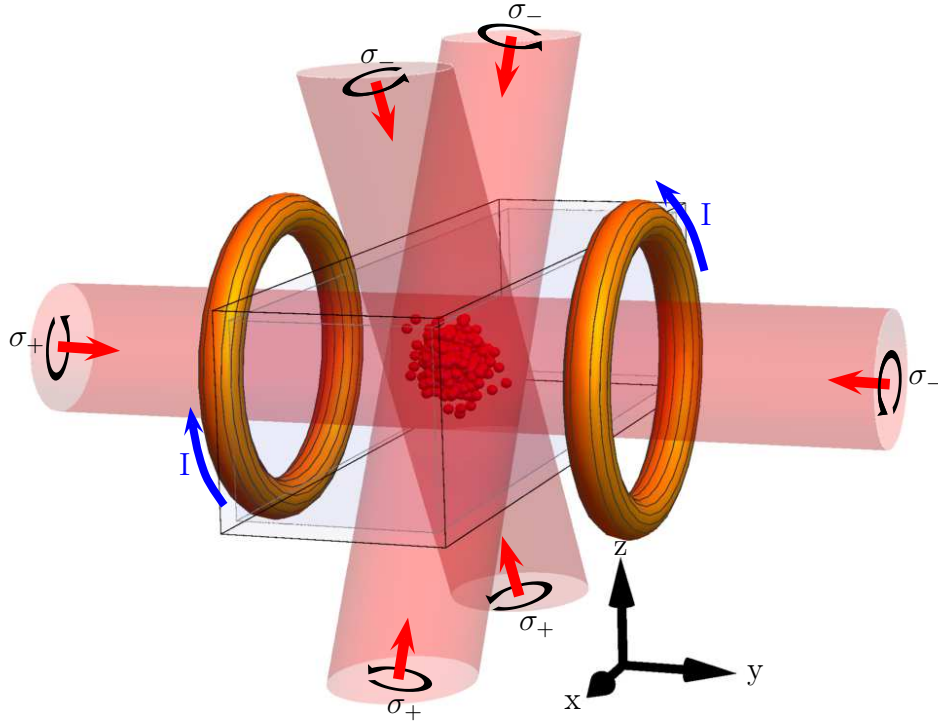


FIGURE I.5 – Configuration géométrique du PMO 3D. Le gradient de champ magnétique est produit par une paire de bobines de 15 tours et de rayon moyen 2 cm, placées au plus proche de la cellule en $y_{\pm} = \pm 2.5$ cm. Une des 3 paires de faisceaux est horizontale et les 2 autres sont inclinées de 30° par rapport à la verticale

que la force nécessaire à leur piégeage soit faible. Nous pouvons donc diminuer la puissance du repompeur d'un facteur 1000 pendant 50 ms afin de concentrer les atomes au centre du piège.

Mélasse à désaccord dynamique

Le principe du PMO présenté plus haut contient une limite intrinsèque de température due à l'émission spontanée. Cette température limite est appelée *température Doppler* : $T_{\text{Doppler}} \propto \frac{I}{|\delta_L|}$, avec I l'intensité des faisceaux refroidisseurs. Afin de diminuer cette température limite, nous augmentons linéairement le désaccord de -3Γ jusque -7.5Γ en 15 ms, tout en diminuant l'intensité des faisceaux refroidisseurs d'un facteur 10. Au terme de cette étape, nous obtenons 2.5×10^9 atomes à $50 \mu\text{K}$.

Phase de dépompage

Comme nous l'avons vu dans l'introduction de ce chapitre, nous souhaitons transférer les atomes dans un piège magnétique après chargement du PMO 3D. Pour cela, nous devons préparer les atomes dans un certain sous-état magnétique. Les états piégeants pour le rubidium sont $(F = 1, m_F = -1)$ et $(F = 2, m_F = +1, m_F = +2)$. Nous avons choisi l'état hyperfin $F = 1$. Nous procédons donc à

une phase de dépompage dans laquelle nous coupons complètement le faisceau repompeur pendant 5 ms. Les atomes s'accablent alors dans l'état hyperfin $F = 1$ grâce aux faisceaux refroidisseurs.

L'ensemble de la séquence de chargement du PMO 3D est résumé figure I.6.

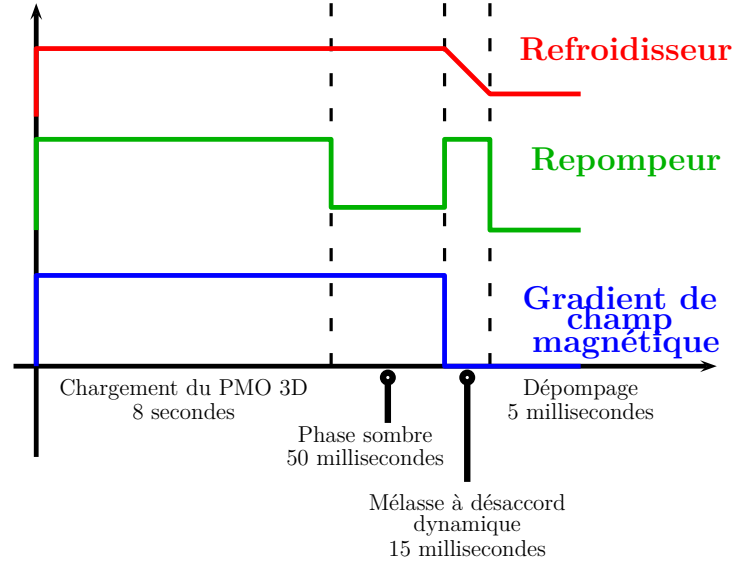


FIGURE I.6 – Séquence de chargement du PMO 3D : Représentation de l'intensité des faisceaux repompeurs et refroidisseurs ainsi que du gradient de champ magnétique en fonction du temps. Nous procédons à 8 secondes de chargement à partir du flux provenant de la source d'atomes froids. Une étape de phase sombre vient ensuite augmenter la densité atomique au sein du PMO 3D. La température des atomes est ensuite diminuée à l'aide d'une phase de mélasse à désaccord dynamique. Enfin, le chargement du piège magnétique est préparé par l'étape de dépompage dans l'état hyperfin $F = 1$.

I.2 Système d'imagerie

I.2.a Imagerie par absorption

Il est toujours difficile de trouver une place à la description du système d'imagerie. Celui-ci est pourtant crucial à toute optimisation du dispositif et, bien sur, à toute interprétation des expériences physique auxquelles il est destiné. Nous utilisons pour ce faire un système d'imagerie par absorption : nous éclairons les atomes avec un laser résonant avec la transition $F = 2 \rightarrow F' = 3$ pendant 80 μs en présence du faisceau repompeur. Nous imageons ainsi l'ombre du nuage d'atomes sur une caméra CCD⁵, ce qui nous donne accès à la densité intégrée selon l'axe du faisceau imageur. Si nous notons z cette direction, nous obtenons l'expression de la densité colonne n_c :

5. Basler A100f Series de 1392×1040 pixels carrés de côté 6.45 μm .

$$n_c(x, y) = \int n(x, y, z) dz. \quad (\text{I.3})$$

Si l'intensité du faisceau imageur est faible devant l'intensité de saturation de la transition (et c'est le régime dans lequel nous nous plaçons), c'est la loi de Beer-Lambert qui s'applique pour déterminer l'intensité I_{out} après traversée du nuage d'atomes en fonction de l'intensité incidente I_{in} .

$$I_{\text{out}} = I_{\text{in}}(x, y)e^{-\sigma_0 n_c(x, y)}, \quad (\text{I.4})$$

avec σ_0 la section efficace d'absorption. Nous définissons alors la *densité optique* (OD pour Optical Density) par :

$$\text{OD}(x, y) = \ln \left(\frac{I_{\text{in}}(x, y)}{I_{\text{out}}(x, y)} \right). \quad (\text{I.5})$$

Pour être dans le régime de faible saturation, nous nous assurons d'avoir une densité optique de l'ordre de 2 ou 3 au maximum. Une description détaillée de ce régime, ainsi que du régime de forte saturation peut être trouvée dans [69]. Afin d'avoir accès à la répartition d'intensité avant et après absorption, en tenant compte d'un éventuel bruit de fond, nous prenons trois images successives, à 127 ms d'intervalle⁶ : l'intensité en présence du nuage d'atomes I_{at} , l'intensité sans les atomes mais en présence des faisceaux imageur et repompeurs I_{noat} et enfin l'intensité en l'absence de faisceau I_{bkg} .

Nous obtenons alors la densité colonne :

$$n_c(x, y) = \frac{1}{\sigma_0} \ln \left(\frac{I_{\text{noat}}(x, y) - I_{\text{bkg}}(x, y)}{I_{\text{at}}(x, y) - I_{\text{bkg}}(x, y)} \right). \quad (\text{I.6})$$

À partir de la densité colonne, nous procédons à un ajustement $2D$ gaussien, de type Thomas-Fermi, ou encore bi-modal, qui nous permet de déduire le nombre d'atomes ainsi que la taille du nuage. Si le temps de vol est suffisamment grand pour pouvoir négliger la taille initiale, la mesure de la taille du nuage d'atomes après temps de vol nous donne directement accès à la température :

$$T = \frac{m\Delta x\Delta y}{k_B t_{\text{TOF}}^2}. \quad (\text{I.7})$$

I.2.b Mise en place expérimentale

Nous avons mis en place deux systèmes d'imagerie par absorption afin de pouvoir imager d'une part le PMO 3D dont la taille typique est de quelques millimètres et d'autre part le condensat dont la taille typique est de quelques centaines de micromètres. Afin d'avoir, *in fine* des images de qualité équivalente, nous avons donc fixé un facteur 10 entre le grandissement du système d'imagerie du PMO 3D et le système d'imagerie du condensat de Bose-Einstein (CBE).

Les dispositifs optiques permettant de mettre en place ces deux systèmes d'imagerie sont représentés figure I.7.

6. 127 ms correspond au taux de répétition de la caméra CCD.

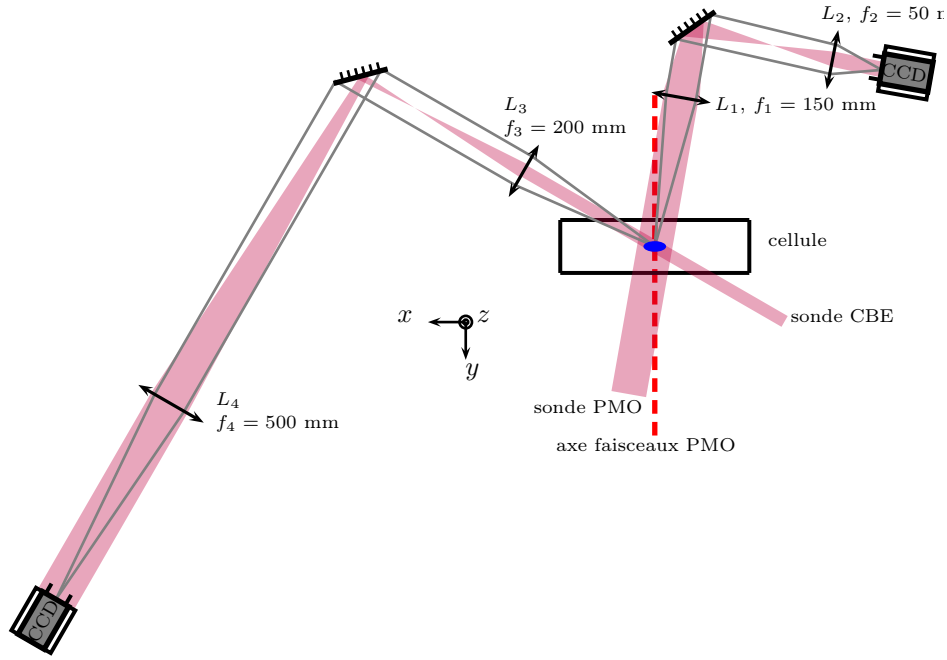


FIGURE I.7 – Schéma des deux systèmes d'imagerie de grandissement respectif $G_{PMO} = 0.23$ et $G_{CBE} = 2.5$. Le faisceau imageur PMO mesure 25 mm de diamètre et arrive sur la cellule avec un angle de 5° tandis que le faisceau imageur CBE mesure 3 mm de diamètre et arrive sur la cellule avec un angle de 60° , le plus orthogonalement possible à l'axe dans lequel nous prévoyons de faire les expériences que nous présenterons dans les chapitres suivants.

L'imagerie PMO se fait quasiment dans l'axe des faisceaux refroidisseurs horizontaux (le faisceau imageur fait un angle de 5° avec cet axe). Un système de deux lentilles L_1 et L_2 nous permet de faire l'image du PMO sur la caméra CCD avec un grandissement⁷ $G_{PMO} = 0.23$.

L'imagerie CBE, quant à elle, est réalisée de telle sorte que le grandissement est $G_{CBE} = 2.5$, avec un angle de 60° par rapport à l'axe des faisceaux refroidisseurs horizontaux. Nous obtenons avec ce système d'imagerie une résolution spatiale de $8 \mu\text{m}$.

Grâce à ces systèmes d'imagerie, nous pouvons optimiser chaque étape de la création d'un condensat de Bose-Einstein. C'est ce que nous allons décrire dans les sections suivantes.

I.3 Vers la condensation de Bose-Einstein

Nous avons donc à présent un piège magnéto-optique contenant 2.5×10^9 atomes à $50 \mu\text{K}$. Nous souhaitons obtenir un condensat de Bose-Einstein, i.e. un système quantique macroscopique qui apparaît lorsque la longueur d'onde de de Broglie λ_{DB} devient comparable à la distance interatomique $d \sim n^{1/3}$, où n est

7. Le grandissement est calibré grâce à la chute libre du nuage d'atomes. Nous déduisons la taille réelle d'un pixel de l'accélération de la gravité $g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$.

ici la densité spatiale du nuage d'atomes.

Cette condition n'est pas remplie dans le piège magnéto-optique pour des raisons intrinsèques (typiquement $n\lambda_{DB}^3 \sim 10^{-7}$). Nous devons donc changer de méthode de piégeage et de refroidissement pour pouvoir aller plus loin. Avant de préciser le dispositif expérimental retenu à cette fin, nous rappelons ici quelques éléments théoriques de la transition de Bose-Einstein dans un piège harmonique. Nous présentons ensuite brièvement le principe du refroidissement par évaporation qui est aujourd'hui la seule technique permettant d'atteindre le régime de dégénérescence quantique et qui consiste en l'augmentation, au prix d'une perte d'atomes et grâce aux collisions élastiques au sein du nuage, de la densité dans l'espace des phases $\varphi = n\lambda_{DB}^3$.

I.3.a Considérations théoriques sur la condensation de Bose-Einstein

Considérons un gaz parfait de N bosons indiscernables de masse m , à la température T , dans un piège harmonique 3D, isotrope et de pulsation ω . Nous souhaitons mettre en évidence l'existence d'une signature de la condensation de Bose-Einstein en dessous d'une température critique T_C . L'ensemble statistique approprié est l'ensemble micro-canonique. Néanmoins, à la limite thermodynamique, les ensembles de description statistique sont équivalents [70] et nous pouvons donc choisir l'ensemble grand-canonique pour lequel le système est en contact avec un réservoir d'énergie et de particules. Cet ensemble nous permet de traiter simplement l'indiscernabilité et d'alléger les calculs.

Fonction de partition

Cette description impose deux contraintes $\langle \hat{N} \rangle = N$ et $\langle \hat{H} \rangle = E$. Le hamiltonien \hat{H} décrivant le système peut s'écrire, du fait de l'absence d'interaction, $\hat{H} = \hat{h}_1 + \hat{h}_2 + \dots + \hat{h}_N$, où \hat{h}_i est le hamiltonien à un corps. Le formalisme des multiplicateurs de Lagrange permet alors d'exprimer la fonction de partition grand canonique :

$$\Xi = \text{Tr} \left[e^{-\beta \hat{H} - \alpha \hat{N}} \right], \quad (\text{I.8})$$

où α et β sont les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes sur $\langle \hat{N} \rangle$ et $\langle \hat{H} \rangle$. β est relié à la température T par $\beta = (k_B T)^{-1}$ et α est relié au potentiel chimique μ par $\alpha = -\beta\mu$. Nous introduisons également la fugacité $z = e^{\beta\mu}$.

L'hypothèse du gaz parfait nous permet alors de factoriser la fonction de partition sur la base $\{|\lambda\rangle\}$ des vecteurs propres du hamiltonien à un corps \hat{h} . Chacun de ces vecteurs propres est associé à une énergie propre ϵ_λ et nous définissons N_λ , le nombre d'atomes occupant l'état $|\lambda\rangle$. La fonction de partition peut alors s'écrire sous la forme :

$$\Xi = \prod_{\lambda} \zeta_{\lambda} \quad \text{avec} \quad \zeta_{\lambda} = \sum_{N_{\lambda}} e^{-\beta N_{\lambda}(\epsilon_{\lambda} - \mu)}. \quad (\text{I.9})$$

Dans le cas des bosons, le calcul de (I.9) se ramène à une suite géométrique :

$$\zeta_\lambda = \frac{1}{1 - ze^{-\beta\epsilon_\lambda}}. \quad (\text{I.10})$$

Signature de la condensation de Bose-Einstein

Nous pouvons déduire le nombre moyen d'atomes à partir de la fonction de partition et nous obtenons :

$$N = \sum_\lambda N_\lambda \quad \text{avec} \quad N_\lambda = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_\lambda - \mu)} - 1}. \quad (\text{I.11})$$

La première chose à remarquer est que l'équation (I.11) redonne bien la distribution classique de Maxwell-Boltzmann à haute température : $N_\lambda \simeq e^{-\beta(\epsilon_\lambda - \mu)}$. La seconde concerne le potentiel chimique μ . En effet, afin que le nombre d'atomes dans l'état quantique individuel $|\lambda\rangle$ soit positif, le potentiel chimique doit appartenir à l'intervalle $[-\infty, \epsilon_0]$, où ϵ_0 est l'énergie associée au niveau fondamental de \hat{h} . Si $T \rightarrow 0$, alors $\forall \lambda \neq 0, N_\lambda \rightarrow 0$. D'autre part, si $\mu \rightarrow \epsilon_0$, le nombre d'atomes dans l'état fondamental du système diverge : $N_0 \rightarrow \infty$. Dans ce cas, à trois dimensions, même lorsque $k_B T \gg \Delta\epsilon$, avec $\Delta\epsilon$ la différence entre deux états, il est possible d'avoir un nombre macroscopique d'atomes dans l'état fondamental $|0\rangle$. Il s'agit ici de la signature de la condensation de Bose-Einstein.

Afin de traiter cela de façon plus quantitative, considérons le nombre d'atomes N' dans les niveaux excités de \hat{h} :

$$N = N_0 + N' \quad \text{avec} \quad N' = \sum_{\lambda \neq 0} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_\lambda - \mu)} - 1}. \quad (\text{I.12})$$

L'équation (I.12) montre que le nombre d'atomes dans les états excités est borné supérieurement par le *nombre de saturation* $N'_{\max}(T)$, défini comme suit :

$$N' < N'_{\max}(T) = \sum_{\lambda \neq 0} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_\lambda - \epsilon_0)} - 1}. \quad (\text{I.13})$$

L'existence de cette borne supérieure signifie qu'à température T fixée, si nous plaçons dans le piège un nombre de particules N supérieur à N'_{\max} , alors au moins $N - N'_{\max}$ atomes peupleront le niveau fondamental. C'est le phénomène de *saturation des niveaux excités*. L'accumulation macroscopique d'atomes dans l'état fondamental correspond alors à la condensation de Bose-Einstein.

Cas du piège harmonique isotrope

Considérons à présent le cas particulier d'un piège harmonique isotrope de fréquence ω . Dans ce cas, les niveaux d'énergie de \hat{h} sont caractérisés par les trois nombres quantiques (n_x, n_y, n_z) , ou plus simplement par le nombre quantique $n = n_x + n_y + n_z$ du fait des symétries du piège.

L'énergie associée à l'état propre $|\lambda\rangle$ s'écrit alors

$$\epsilon_{n_\lambda} = \hbar\omega \left(n_\lambda + \frac{3}{2} \right), \quad (\text{I.14})$$

avec en particulier : $\epsilon_0 = \frac{3}{2}\hbar\omega$.

Chacun de ces niveaux d'énergie a une dégénérescence g_n donnée par :

$$g_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \quad (\text{I.15})$$

Le nombre de saturation peut alors s'écrire :

$$N'_{\max} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{e^{n\hbar\omega/k_B T} - 1}. \quad (\text{I.16})$$

Dans la limite semi-classique, $k_B T \gg \hbar\omega$, dans laquelle nous nous plaçons, cette somme discrète peut être remplacée par une intégrale et nous obtenons le résultat suivant :

$$N'_{\max}(T) \simeq 1.202 \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^3. \quad (\text{I.17})$$

Une température critique T_C émerge alors et est définie comme la température pour laquelle $N = N'_{\max}$. Nous pouvons également estimer la fraction condensée en fonction de la température [71] :

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_C} \right)^3 \quad \text{avec} \quad T_C = 0.94 \frac{\hbar\omega}{k_B} N^{1/3}. \quad (\text{I.18})$$

Notons que nous obtenons ici une température critique finie lors du passage à la limite semi-classique. Ceci est le cas à trois dimensions mais un calcul similaire à une ou deux dimensions mène à une température critique nulle [70]. Donnons quelques ordres de grandeurs : au seuil de condensation, nous avons typiquement 10^5 atomes et les fréquences de piégeage sont de l'ordre de 100 Hz. Dans ce cas, la température critique que l'on souhaite atteindre est de l'ordre de 200 nK. Notons également que $\hbar\omega/k_B \sim 5$ nK ; l'hypothèse semi-classique est donc vérifiée.

Nous connaissons à présent l'objectif à atteindre en terme de température ; il nous reste donc à envisager les différentes options expérimentales qui s'offrent à nous pour remplir ce cahier des charges. Comme nous l'avons vu, le piège magnéto-optique comporte des limitations intrinsèques dues aux cycles d'absorption/émission spontanée. Ces cycles limitent la température ainsi que la densité spatiale accessible et ne permettent pas d'atteindre la condensation malgré les techniques de refroidissement sub-recoil qui ont été développées [58]. Nous devons donc envisager une autre méthode de refroidissement : le refroidissement par évaporation.

I.3.b Refroidissement par évaporation

La méthode de refroidissement par évaporation a été proposée en 1986 par H. Hess [72]. C'est cette méthode qui a permis l'observation des premiers condensats de Bose-Einstein et elle reste, à ce jour, une étape nécessaire dans tout dispositif de condensation.

Le principe de cette technique est qualitativement simple et est résumé sur la figure I.8.

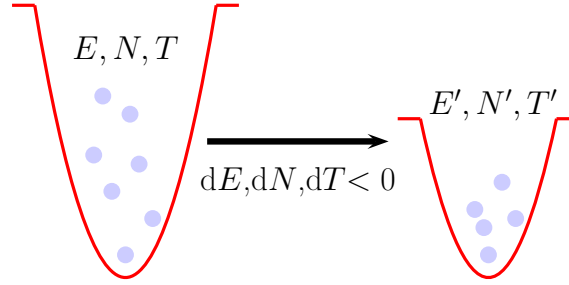


FIGURE I.8 – *Principe qualitatif du refroidissement par évaporation.* Le point de départ est un gaz de N particules piégées, à l'équilibre, d'énergie E et de température T . Lors de la diminution de la profondeur du piège, les particules les plus énergétiques peuvent s'échapper du piège et la thermalisation par collisions élastiques des particules restantes conduit à un nouvel état d'équilibre à N' particules, d'énergie E' et de température T' , plus faibles.

Une approche plus quantitative peut être développée grâce à un modèle très simple en lois d'échelle [73]. Les quantités dont nous avons besoin pour décrire le système sont les suivantes :

- E l'énergie totale.
- N le nombre de particules.
- n la densité spatiale du nuage.
- T la température d'équilibre du système.
- φ la densité dans l'espace des phases.
- γ le taux de collisions élastiques.

Les atomes sont piégés à l'aide d'un potentiel de la forme $U(r) = Cr^{3/\delta}$, infiniment profond, où C est une constante et δ détermine la forme du piège. $\delta = 3$ correspond à un piège linéaire (piège magnétique quadrupolaire) tandis que $\delta = 3/2$ correspond à un piège harmonique (piège dipolaire optique⁸).

Afin d'atteindre la condensation de Bose-Einstein, nous voulons effectuer le chemin suivant :

$$\varphi \sim 10^{-9} \xrightarrow{\text{refroidissement laser}} \varphi \sim 10^{-7} \xrightarrow{\text{refroidissement évaporatif}} \varphi \sim 1$$

La première partie de ce chemin est effectuée par le refroidissement laser décrit dans la première section de ce chapitre. Le refroidissement par évaporation aura

8. En réalité, pour un piège optique, il faut prendre en compte la modification de la pulsation de piégeage au cours de la diminution de la profondeur du potentiel. Un modèle adapté à ce phénomène est détaillé dans [73]. Nous prendrons ce fait en considération dans la comparaison des performances du refroidissement par évaporation dans un piège magnétique ou optique.

donc pour but d'augmenter la densité dans l'espace des phases de typiquement 7 ordres de grandeur. Nous considérons dans ce modèle que la distribution classique de Maxwell-Boltzmann reste vraie. Elle ne sera en pratique mise en défaut qu'aux tous derniers moments de l'évaporation. Dans ce cas, nous pouvons écrire l'énergie totale :

$$E = \frac{3}{2}Nk_B T + \delta Nk_B T, \quad (\text{I.19})$$

où le premier terme rend compte de l'énergie cinétique et le second de l'énergie potentiel des particules. Nous pouvons alors exprimer la dépendance de la densité dans l'espace des phases φ et du taux de collision γ avec le nombre de particule et la température :

$$\begin{aligned} \varphi &= n\lambda_{DB}^3 \propto \frac{N}{T^{\delta+3/2}} \\ \gamma &= n\sigma\bar{v} \propto \frac{N}{T^{\delta-1/2}}, \end{aligned} \quad (\text{I.20})$$

avec σ la section efficace de collision et $\bar{v} \propto T^{1/2}$ la vitesse moyenne des particules.

Considérons à présent que pendant un petit intervalle de temps t , le potentiel piégeant a une profondeur U finie. La profondeur est ensuite augmentée à nouveau pour permettre la thermalisation du système. Les différentes quantités caractérisant l'état d'équilibre s'en trouvent modifiées :

$$\begin{aligned} N' &= N + dN \\ T' &= T + dT \\ E' &= E + dE ; \quad dE = \left(\frac{3}{2} + \delta\right) Nk_B dT + \left(\frac{3}{2} + \delta\right) dNk_B T. \end{aligned} \quad (\text{I.21})$$

La diminution du nombre de particules dN correspond alors simplement à la perte des atomes ayant une énergie supérieure à la profondeur U du potentiel, ce qui entraîne une diminution de l'énergie moyenne du système :

$$\begin{aligned} dE &= dN (U + \kappa k_B T) \\ &= dN (\eta + \kappa) k_B T \quad \text{avec} \quad \eta = \frac{U}{k_B T}. \end{aligned} \quad (\text{I.22})$$

L'équation (I.22) rend compte de la diminution d'énergie due à la perte de particule d'énergie légèrement supérieure à U (supérieure de l'ordre de $k_B T$ comme en rend compte le facteur numérique κ qui est typiquement compris entre 0 et 1). Cette équation est justifiée par le fait que l'on choisit le paramètre de troncature η de sorte que les atomes d'énergie supérieure soient suffisamment peu nombreux pour ne pas contribuer significativement à cette diminution d'énergie. Nous pouvons alors déduire la variation de température en fonction de la diminution du nombre de particules ainsi que la variation de densité dans l'espace des phases :

$$\begin{aligned} \frac{dT}{T} &= \frac{\eta + \kappa - \delta - 3/2}{\delta + 3/2} \frac{dN}{N}, \\ \frac{d\varphi}{\varphi} &= (1 - \eta - \kappa + \delta + 3/2) \frac{dN}{N}. \end{aligned} \quad (\text{I.23})$$

Ces deux équations nous permettent de discuter des performances du refroidissement par évaporation. Tout d'abord, nous avons souligné que cela doit être une méthode de *refroidissement* ; la variation dT de température doit donc être négative. Cela implique une condition sur le paramètre de troncature : $\eta > \delta - \kappa + 3/2$. Nous voulons également augmenter la densité dans l'espace des phases afin de nous rapprocher de la condensation de Bose-Einstein. Cela implique une condition plus contraignante sur le paramètre de troncature $\eta > \delta - \kappa + 5/2$. Afin de discuter de cette contrainte, nous prendrons par la suite $\kappa = 1$. Pour un piège linéaire, cette condition se traduit par $\eta > 4.5$, une contrainte plus importante que pour un piège harmonique qui nécessite uniquement $\eta > 3$.

Ce modèle de comporte pas de considérations cinétiques. Une autre discussion importante concerne la valeur et l'évolution du taux de collision γ . En effet, c'est le taux de collision qui détermine la durée de l'évaporation car chaque étape comme celle décrite par ce modèle simple nécessite d'atteindre le nouvel état d'équilibre du système et doit donc durer quelques γ^{-1} . Le taux de collision étant en général plus élevé dans un piège optique que dans un piège magnétique, l'évaporation optique sera plus rapide que l'évaporation magnétique. Ce résultat est à nuancer en ajoutant le fait que, lors d'une évaporation dans un piège magnétique, la forme du potentiel ne change pas. Si nous contraignons un peu plus le paramètre de troncature ($\eta > 6$), nous pouvons même atteindre le régime d'emballement correspondant à une augmentation du taux de collision au cours de l'évaporation. Celle-ci est donc de plus en plus rapide. En revanche, dans un piège optique, la diminution de la profondeur du potentiel entraîne une décompression du piège et donc un effondrement du taux de collision en fin d'évaporation. De ce fait, il n'est en général pas possible d'atteindre le régime d'emballement dans un piège optique.

En conclusion, les deux types de pièges que nous envisageons semblent adaptés à la méthode de refroidissement par évaporation. Il faut néanmoins garder à l'esprit qu'une attention particulière doit être accordée à la valeur initiale du taux de collision dans le cas d'un potentiel optique afin que la décompression du piège n'empêche pas d'atteindre la condensation de Bose-Einstein. Dans les deux sections suivantes, nous présentons la réalisation expérimentale du piège magnétique et du piège hybride constitué d'un piège magnétique et d'un piège dipolaire croisé. Nous présenterons également les résultats du refroidissement par évaporation effectué dans chacun d'eux.

I.4 Piège magnétique

Après chargement du piège magnéto-optique 3D, nous transférons les atomes dans un piège magnétique quadrupolaire créé par deux jeux de trois bobines constituées d'un tube de cuivre refroidi à l'eau et placées symétriquement au dessus et en dessous de la cellule en verre, tel que représenté sur la figure I.9. Nous avons choisi d'utiliser 6 bobines séparées afin de diminuer le temps de réponse du système lors du transfert des atomes dans le piège magnétique. De plus, le diamètre interne de ces bobines est adapté pour pouvoir laisser passer les faisceaux

refroidisseurs du PMO 3D, ce qui est rendu possible grâce à la séparation en 3 bobines séparées.

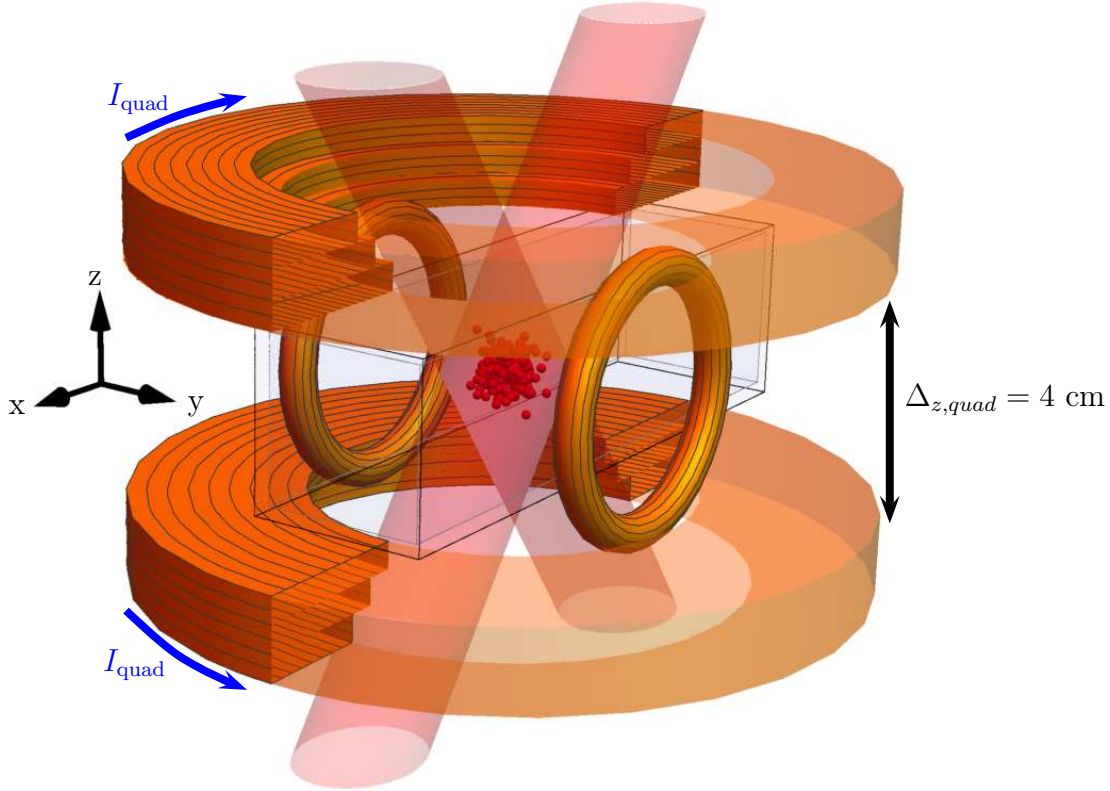


FIGURE I.9 – Configuration des bobines du piège quadrupolaire. Les deux jeux de trois bobines sont placés symétriquement par rapport à la cellule en verre et leur diamètre est adapté afin de laisser passer les faisceaux refroidisseurs du PMO 3D.

Les bobines de cuivre sont en configuration anti-Helmholtz, le champ magnétique créé au voisinage du zéro de champ magnétique est alors de la forme :

$$\vec{B}(x, y, z) \simeq b' \begin{pmatrix} x/2 \\ y/2 \\ z \end{pmatrix}, \quad (\text{I.24})$$

avec b' le gradient de champ magnétique. Le gradient maximal accessible sur notre dispositif est $b'_{\text{max}} = 300 \text{ G/cm}$ pour un courant de 160 A. Les atomes de rubidium présentent l'avantage de posséder, dans leur état fondamental, des sous-niveaux de moment magnétique non nul. Ils peuvent alors interagir avec le champ magnétique. Des atomes polarisés dans l'état F, m_F voient le potentiel suivant :

$$V(r) = \mu |\vec{B}| = \mu b' \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{4} + z^2}, \quad (\text{I.25})$$

avec $\mu = m_F g_F \mu_B$ le moment magnétique d'un atome dans le sous-niveau Zeeman F, m_F . g_F est le facteur de Landé et μ_B le magnéton de Bohr.

I.4.a Chargement du piège magnétique

Nous voulons piéger les atomes de rubidium au voisinage du minimum de champ magnétique (pour $r = 0$). Le moment magnétique du sous-niveau Zeeman considéré doit donc être positif. Rappelons qu'à la fin de la séquence de chargement du PMO 3D, une étape de dépompage transfère tous les atomes dans le niveau hyperfin $F = 1$. Parmi les sous-niveaux Zeeman accessibles, seul $m_F = -1$ permet d'avoir un moment magnétique positif. Seuls les atomes se trouvant dans ce sous-niveau, soit environ un tiers des atomes, seront donc piégés. Pour effectuer le transfert, nous alimentons les deux bobines les plus proches de la cellule avec un courant de 60 A, produisant ainsi un gradient de champ magnétique de 62 G/cm, i.e. deux fois plus grand que le gradient de champ nécessaire pour compenser la gravité. Simultanément, l'ensemble des lasers résonants est coupé afin d'éviter tout changement d'état. L'avantage d'utiliser un piège magnétique quadrupolaire dès la fin du chargement du PMO 3D est le grand volume de capture de ce type de potentiel. Ainsi, nous obtenons 10^9 atomes piégés magnétiquement à la température de 130 μK . Notons que pour limiter le chauffage des atomes lors du transfert, il faut adapter la position du zéro de champ magnétique à la position du PMO 3D. Cela est rendu possible grâce à l'ajout d'une bobine supplémentaire dans l'axe x de la cellule.

I.4.b Compression adiabatique

Comme nous l'avons vu précédemment, le taux de collision est un élément essentiel de la méthode de refroidissement par évaporation. Afin de l'augmenter, nous procédons donc à une compression adiabatique [58]. Nous passons alors d'un gradient de champ magnétique de 62 G/cm à un gradient de 250 G/cm en augmentant adiabatiquement le courant dans les quatre bobines de cuivre restantes en 100 ms (nous avons vérifié expérimentalement qu'un gradient de champ magnétique plus élevé s'avère inutile). La température augmente jusqu'à $T_{\text{comp}} = 350 \mu\text{K}$, à densité dans l'espace des phases constante. Suite à cette compression, le taux de collision est multiplié par 6.4.

I.4.c Évaporation dans le piège quadrupolaire

Après compression, nous avons typiquement 10^9 atomes à 350 μK dans l'état $F = 1, m_F = -1$. Les conditions sont alors réunies pour commencer le refroidissement par évaporation. Comme nous l'avons vu dans la sous-section I.3.b, nous devons pour cela diminuer progressivement la profondeur du piège quadrupolaire. Pour ce faire, nous utilisons une transition micro-onde entre deux états hyperfins de l'atome de rubidium : $F = 1, m_F = -1 \rightarrow F = 2, m_F = -1$. Ce dernier est un état anti-piégeant. Le principe de l'évaporation micro-onde est résumé sur la figure I.10. Du fait de la présence d'un champ magnétique dépendant de la position, la fréquence de résonance de la transition hyperfine ν_{res} est également dépendante de la position :

$$h\nu_{\text{res}}(r) = h\nu_0 - \mu_B b' r, \quad (\text{I.26})$$

avec r la distance par rapport au centre du piège et $\nu_0 = 6.8347$ GHz la fréquence de la transition en champ nul. Nous définissons ainsi le rayon d'évaporation comme la distance au centre $R_{\text{évap}}$ pour laquelle la micro-onde de fréquence ν est résonante avec la transition hyperfine $(F = 1, m_F = -1) \rightarrow (F = 2, m_F = -1)$.

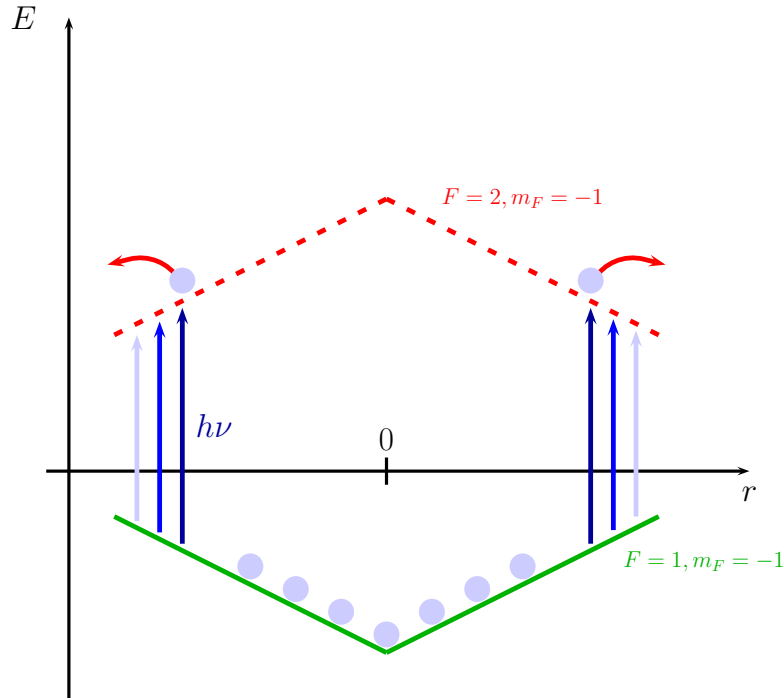


FIGURE I.10 – Principe de l'évaporation micro-onde dans le piège quadrupolaire. Une radiation micro-onde permet d'induire une transition entre les niveaux hyperfins $(F = 1, m_F = -1)$ et $(F = 2, m_F = -1)$. L'état $(F = 2, m_F = -1)$ étant anti-confinant, les atomes résonants avec la micro-onde sont éjectés du piège. Du fait de la dépendance des niveaux d'énergie avec la position, nous affectons des atomes de moins en moins énergétiques en augmentant progressivement la fréquence de la radiation micro-onde.

En augmentant progressivement la fréquence micro-onde, nous diminuons le rayon d'évaporation. Ajoutons à cela que les atomes périphériques sont les plus énergétiques. Au cours de l'évaporation, nous retirons donc les atomes de plus haute énergie tandis que les atomes restants, grâce aux collisions, atteignent un nouvel état d'équilibre à une température plus basse.

La chaîne de production des micro-ondes est décrite dans [58]. Nous choisissons la fréquence micro-onde initiale de sorte à ce que le paramètre de troncature soit suffisamment grand ($\eta = 7.5$) : $\nu_i = 6.65$ GHz. Nous augmentons alors la fréquence jusque $\nu_f = 6.82$ GHz en 15 secondes. Au terme de ce refroidissement par évaporation forcée, nous obtenons 8×10^7 atomes à $30 \mu\text{K}$.

I.4.d Pertes Majorana

Lorsque nous arrivons à ce point de l'évaporation micro-onde, le phénomène de chauffage par retournement de spin [74], ou pertes Majorana, devient trop important pour poursuivre. En effet, lorsqu'un atome se déplace au voisinage du zéro de champ magnétique, la rotation de la direction du champ magnétique est trop rapide pour qu'il puisse la suivre adiabatiquement. Le spin de l'atome peut alors se retrouver dans le sens opposé au champ magnétique et il ressent dans ce cas une force qui l'éjecte du piège quadrupolaire. Ce phénomène est amplifié à basse température car la taille du nuage diminue au cours de l'évaporation et les atomes passent donc un temps plus long aux alentours du zéro de champ magnétique, augmentant ainsi la probabilité de retournement de spin.

De ce fait, nous devons changer de stratégie pour la fin du refroidissement par évaporation. Plusieurs techniques sont possibles, nous avons opté pour le piège hybride [75] constitué d'un piège magnétique et d'un piège dipolaire. Le piège dipolaire est situé, comme nous le verrons dans la section suivante, légèrement sous le zéro de champ magnétique, créant un nouveau minimum de potentiel qui correspond à un champ magnétique non nul, limitant ainsi les pertes Majorana.

I.5 Condensation de Bose-Einstein dans un piège hybride

Les premiers condensats de Bose-Einstein, obtenus en 1995 [1, 2] ont été réalisés dans des pièges purement magnétiques. Depuis, des pièges purement optiques ont été réalisés et ont également permis d'atteindre la condensation de Bose-Einstein [76]. Ces deux types de potentiel ont chacun leurs avantages et leurs inconvénients, il était donc naturel de proposer des méthodes permettant d'allier les deux. C'est ce qui a été fait ces dernières années et qui a permis l'émergence de pièges hybrides [75, 77, 78]. Cette méthode de piégeage consiste à compenser la gravité à l'aide d'un piège magnétique et d'ajouter un piège dipolaire optique afin de piéger les atomes. La fin du refroidissement par évaporation se fait donc en diminuant la profondeur du piège dipolaire. Dans ce chapitre nous présenterons le principe d'un piège dipolaire optique et sa réalisation expérimentale. Nous verrons également les caractéristiques du piège hybride ainsi réalisé et le déroulement de l'évaporation à laquelle nous procédons jusqu'à l'obtention d'un condensat de Bose-Einstein quasi pur de 2×10^5 atomes.

I.5.a Interaction dipolaire

Nous avons vu en début de chapitre comment un atome interagit avec un faisceau laser dont la longueur d'onde est proche d'une résonance atomique (I.1). Les cycles d'absorption/émission spontanée nous permettent alors de refroidir les atomes. En revanche, lorsque la longueur d'onde λ du laser est loin de résonance, la force prédominante ressentie par les atomes est très différente. Il s'agit de la *force dipolaire*. Elle est due à l'interaction entre le champ électrique \vec{E} et le dipôle électrique induit dans l'atome par ce même champ. La force ainsi créée

est conservative et se nomme *l'effet Stark dynamique* [79]. Un calcul quantitatif du potentiel ainsi créé est fait dans [69] par la méthode de l'atome habillé. Dans le cas du ^{87}Rb , pour un faisceau laser d'intensité I , de pulsation ω_L et polarisé linéairement, ce potentiel s'écrit :

$$U_{\text{dip}} = \chi I \quad \text{avec} \quad (I.27)$$

$$\chi = \frac{\Gamma \lambda^3}{16\pi^2 c} \left[\left(\frac{1}{\Delta_1} + \frac{1}{\Delta_1 + 2\omega_L} \right) + 2 \left(\frac{1}{\Delta_2} + \frac{1}{\Delta_2 + 2\omega_L} \right) \right].$$

$\Delta_i = \omega_L - \omega_{D_i}$ est le désaccord avec les raies D_1 et D_2 du ^{87}Rb , Γ^{-1} est la durée de vie de l'état excité $5^2P_{3/2}$ de la raie D_2 et λ la longueur d'onde correspondant à cette transition. Dans le cas d'un faisceau laser avec $\lambda_L = 1064$ nm, le facteur de proportionnalité entre le potentiel dipolaire et l'intensité du faisceau est $\chi = -2.10 \times 10^{-36}$ J/(W/m²).

Le potentiel dipolaire devient intéressant pour piéger les atomes lorsque l'intensité I varie spatialement. Le potentiel engendré dépend alors de la position et nous parlons dans ce cas de piège dipolaire. Dans le cas d'un faisceau gaussien se propageant selon l'axe y , le profil d'intensité est de la forme :

$$I(r) = \frac{2P}{\pi w^2(y)} \exp\left(-\frac{2(x^2 + z^2)}{w^2(y)}\right), \quad (I.28)$$

où P est la puissance du faisceau laser et où

$$w(y) = w_0 \sqrt{1 + \frac{y^2}{z_R^2}}. \quad (I.29)$$

w_0 est le waist du faisceau et $z_R = \pi w_0^2 / \lambda_L$ la longueur de Rayleigh. Les atomes seront donc piégés dans la zone d'intensité maximale, c'est-à-dire au centre du faisceau dans les directions x et z et au niveau du waist pour la direction y .

Taux de chauffage

La force dipolaire que nous venons de décrire est la force prédominante lorsque l'atome interagit avec un faisceau laser hors résonance. Cette force tire son origine des cycles d'absorption/émission induite. Néanmoins, la force de pression de radiation (cycles d'absorption/émission spontanée) n'est pas nulle et peut, sur des temps longs, induire du chauffage. Dans notre cas, le taux de chauffage s'exprime [58] :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{T}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = 42 \text{ s}. \quad (I.30)$$

Sur des durées de l'ordre de quelques secondes, cet échauffement peut être négligé.

I.5.b Réalisation expérimentale d'un piège dipolaire croisé

Le piège dipolaire de notre dispositif expérimental est assuré par un laser fibré, monomode spatialement et de largeur spectrale ~ 100 kHz. La puissance

maximale en sortie est de 5 W et la longueur d'onde est de $\lambda_L = 1064 \text{ nm}$ ⁹. Nous avons opté pour une configuration croisée¹⁰ afin d'augmenter le confinement dans la direction longitudinale y et donc augmenter la pulsation moyenne du piège harmonique, qui entre en considération dans la définition de la température critique de condensation T_C (I.18).

La configuration du piège hybride est représenté figure I.11.

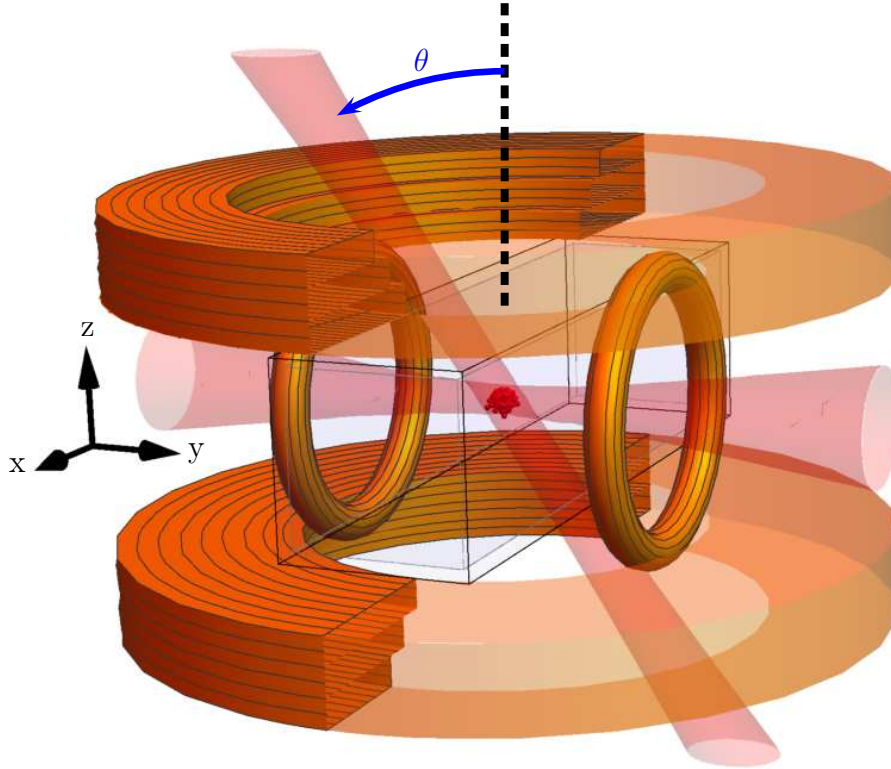


FIGURE I.11 – Configuration du piège hybride. Les deux bobines les plus proches de la cellule en verre produisent un champ magnétique légèrement inférieur à la compensation de la gravité. Le piège dipolaire croisé est constitué d'un faisceau horizontal qui est recyclé en sortie pour créer un faisceau avec un angle θ de 30° par rapport à la verticale.

Les deux bobines les plus proches de la cellule en verre permettent de créer un gradient de champ magnétique qui compense presque la gravité. Ce champ magnétique ne doit pas exactement compenser la gravité pour permettre aux atomes de se localiser au niveau du piège dipolaire comme nous le verrons dans la partie qui détaille le protocole de chargement du piège hybride. Le piège dipolaire croisé est créé à partir d'un seul faisceau. Celui-ci passe une première fois dans la chambre d'expérience avec un waist $w_h = 65 \mu\text{m}$, décalé d'environ un waist en dessous du zéro de champ magnétique pour limiter les pertes Majorana. La

9. Azur Light System IR-1064-5P.

10. Nous avons en premier lieu utilisé un piège hybride avec un seul faisceau dipolaire horizontal, comme ce qui est réalisé dans l'article [75] mais le refroidissement par évaporation dans ce piège n'était pas efficace.

puissance maximale utilisable au niveau des atomes est $P_h = 3.3$ W. De plus, ce faisceau horizontal est légèrement incliné ($\sim 1^\circ$) par rapport à l'axe de la cellule en verre pour éviter que les réflexions du faisceau laser à l'intérieur de la cellule interfèrent, créant ainsi un potentiel périodique supplémentaire gênant pour les expériences que nous envisageons. En sortie de la cellule, nous récupérons le faisceau afin de le faire passer une seconde fois au niveau des atomes. Le faisceau vertical ainsi créé fait un angle de 30° par rapport à la verticale et son waist est $w_v = 45 \mu\text{m}$. La puissance maximale utilisable est $P_v = 2.2$ W. Pour les deux faisceaux, les waists choisis sont tels que la longueur de Rayleigh nous permet de considérer que l'intensité laser le long des axes des faisceaux est constante à l'échelle de la taille du nuage d'atomes ($z_{Rh} = 1.25$ cm et $z_{Rv} = 0.6$ cm). La puissance totale du faisceau est asservie afin de contrôler finement la profondeur du potentiel au cours de l'évaporation. Le montage optique réalisé pour mettre en forme les faisceaux dipolaires est représenté sur la figure I.12

Le potentiel hybride s'écrit alors :

$$U_{\text{hyb}}(r) = \mu b'_g \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{4}} + z^2 + U_{\text{dip}}(r) + mgz, \quad (\text{I.31})$$

avec $b'_g \simeq 27.5$ G/cm, le gradient de champ magnétique qui compense presque la gravité.

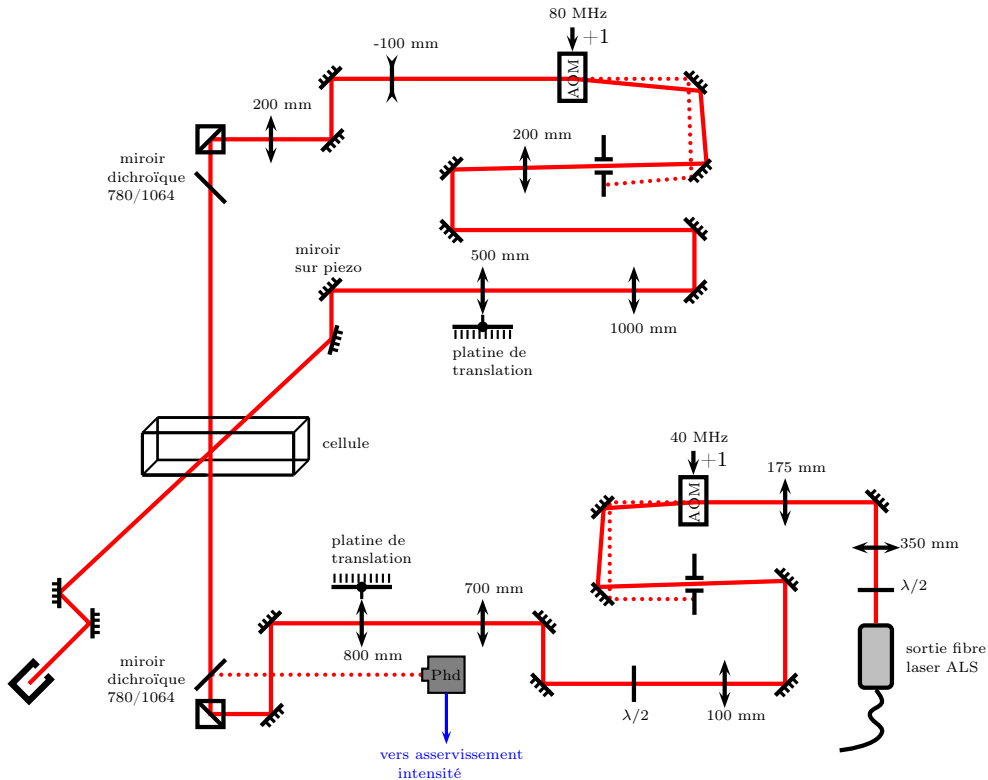


FIGURE I.12 – Montage optique des faisceaux dipolaires. Le faisceau horizontal (respectivement vertical) est focalisé à l'aide d'une lentille de focale 800 mm (respectivement 500 mm). Dans les deux cas, la position du waist du faisceau est ajustée grâce à une platine de translation.

I.5.c Évaporation dans le piège hybride

Rappelons qu'après l'évaporation micro-onde dans le piège magnétique, nous avons 8×10^7 atomes à $30 \mu\text{K}$ et le gradient de champ magnétique est de 250 G/cm . Nous devons donc à présent transférer les atomes dans le piège hybride puis procéder au refroidissement par évaporation afin d'atteindre la condensation de Bose-Einstein. Le protocole que nous utilisons est représenté figure I.13. Nous allons par la suite détailler chacune des étapes.

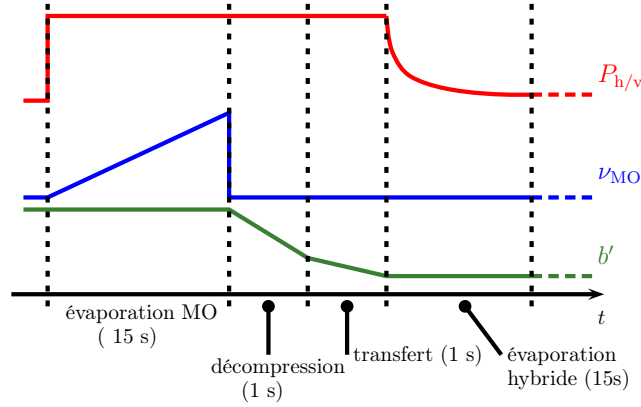


FIGURE I.13 – Séquence de production d'un condensat de Bose-Einstein. $P_{h,v}$ est la puissance dans les faisceaux dipolaires, ν_{MO} la fréquence du rayonnement micro-onde et b' le gradient de champ magnétique

Transfert dans le piège hybride

Le transfert dans le piège hybride se fait en deux étapes. Nous procédons d'abord à une décompression adiabatique du piège en abaissant linéairement le gradient de champ magnétique jusqu'à $b'_{\text{décomp}} = 60 \text{ G/cm}$ en une seconde. Cette étape permet de refroidir le nuage d'atomes, adaptant ainsi leur température à la profondeur du piège hybride ($U_{\text{hyb}}/k_B \simeq 50 \mu\text{K}$ au moment du chargement¹¹). Nous effectuons ensuite une seconde décompression qui amène le gradient de champ magnétique légèrement sous le gradient nécessaire à la compensation de la gravité ($\mu b'_g \simeq 0.9 \times mg$). Durant cette décompression, les atomes se localisent dans le piège dipolaire croisé. Nous capturons 20% des atomes et nous avons après ces deux décompressions, environ 1.5×10^7 atomes à $T = 12 \mu\text{K}$ dans le piège hybride.

Évaporation forcée

Le refroidissement par évaporation dans le piège dipolaire se fait en abaissant progressivement la puissance des faisceaux laser en 15 secondes (voir figure I.13). La profondeur du potentiel hybride est alors diminuée de $U_{\text{hyb},i}/k_B \simeq 50 \mu\text{K}$ à $U_{\text{hyb},f}/k_B \simeq 1 \mu\text{K}$. Au cours de l'évaporation, nous passons sous la température

11. Les calculs de profondeur du piège hybride et des fréquences propres associées sont donnés dans [58].

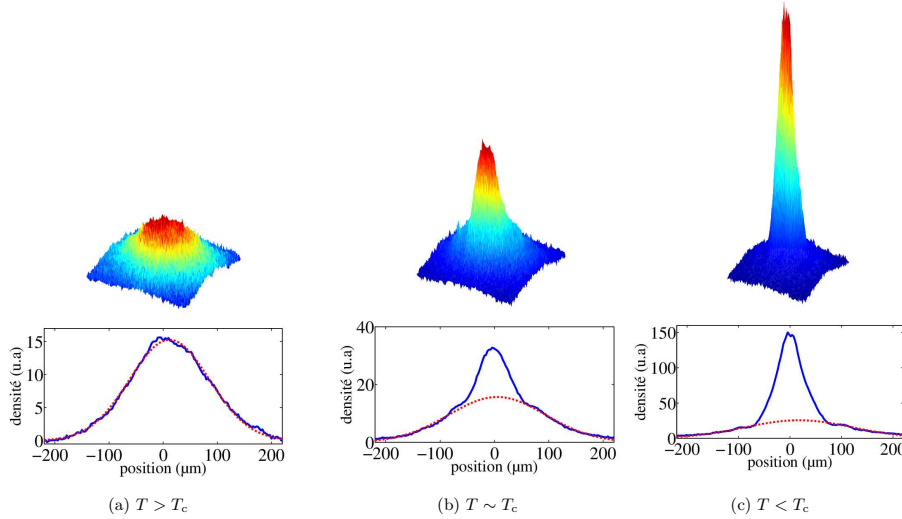


FIGURE I.14 – *En haut* : densité atomique du nuage après 25 ms de temps de vol à différentes étapes de l'évaporation. *En bas* : profil de densité intégré suivant l'axe z . La ligne pointillée rouge correspond à un ajustement gaussien de la partie thermique.

critique que nous estimons, d'après nos observations, à 200 nK (la température critique est évaluée par l'apparition d'un profil de densité bi-modal typique de la condensation représenté figure I.14). Nous produisons ainsi un condensat de Bose-Einstein quasi pur de 2×10^5 atomes.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit le dispositif expérimental que nous avons mis en place au cours des deux premières années de ma thèse. Ce dispositif nous permet de produire de façon répétable un condensat de Bose-Einstein quasi pur avec $2 - 2.5 \times 10^5$ atomes. Nous utilisons pour cela un PMO 3D chargé à partir d'un PMO 2D construit par le SYRTE. Les atomes sont ensuite transférés dans un piège magnétique et refroidis par évaporation micro-onde jusqu'au point où les pertes Majorana deviennent trop importantes. Nous transférons alors le nuage dans un piège hybride et continuons l'évaporation jusqu'à l'obtention du condensat. La séquence totale dure environ 40 secondes ce qui est relativement long, mais le système est robuste et répétable, ce qui nous permettra tout de même de réaliser des expériences avec une bonne statistique.

Le condensat de Bose-Einstein est un objet intéressant en soit mais c'est également un outil puissant pour l'étude de différents phénomènes physiques. Comme nous l'avons vu dans l'introduction générale, notre but est d'étudier le transport classique et quantique dans un réseau modulé en amplitude ainsi que l'impact de la présence du chaos à la limite classique sur le transport quantique. Du fait de sa très faible dispersion de vitesse, le condensat est un élément essentiel de ce projet et le dispositif que nous avons réalisé répond tout à fait au cahier des charges que nous nous étions fixé. Il nous faut à présent mettre en place et

décrire le second élément crucial à la réalisation de l'expérience du double puits dynamique : le potentiel périodique. C'est ce que nous verrons dans le chapitre suivant.

CHAPITRE II

Mise en place d'un réseau optique

Sommaire

Introduction	43
II.1 Particule dans un potentiel périodique	46
II.1.a Structure de bande	46
Théorème de Bloch	46
Cas du potentiel nul	48
Cas des réseaux de faible profondeur	49
II.1.b Notion de masse effective	50
II.1.c Description par les fonctions de Wannier	52
La base des fonctions de Wannier	52
Régime des liaisons fortes	53
II.2 Réalisation expérimentale d'un réseau optique	54
II.2.a Création du potentiel périodique	55
II.2.b Dispositif expérimental	55
Vue d'ensemble du dispositif	57
Contrôle de la puissance	57
Contrôle de la phase relative $\Delta\theta$	59
Conclusion	60

Introduction

Comme nous l'avons vu dans l'introduction de cette thèse, le système auquel nous nous intéressons est le double puits dynamique. Le hamiltonien adimensionnalisé que nous considérons est :

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2} - \gamma(1 + \epsilon \cos(t)) \cos(x). \quad (\text{II.1})$$

Expérimentalement, nous souhaitons réaliser ce hamiltonien en plaçant un condensat de Bose-Einstein dans un potentiel périodique de profondeur V_0 créé par l'interférence entre deux faisceaux laser dont la puissance est modulée à la fréquence ω avec une amplitude de modulation ϵ . Le paramètre γ est défini dans l'introduction générale de ce manuscrit (voir l'équation (3) de l'introduction générale).

Ce système est très riche du fait de la possibilité de modéliser l'espace des phases en contrôlant la mer chaotique ainsi que la position et la taille des îlots de stabilité via les paramètres γ et ϵ . À ce stade, nous devons préciser les contraintes expérimentales auxquelles nous devons répondre.

L'espace des phases représenté figure II.1 est tracé pour un couple de valeur $(\epsilon, \gamma) = (0.29, 0.29)$. Le paramètre ϵ fixe directement l'amplitude de modulation. En revanche, γ est proportionnel à V_0/ω^2 , avec V_0 la profondeur du potentiel périodique et ω la fréquence de modulation. ϵ, V_0 et ω sont les trois paramètres que nous contrôlons expérimentalement. Cela nous laisse a priori une liberté sur le choix de V_0 et ω car seul le rapport V_0/ω^2 est fixé. En réalité, il faut ajouter à cela une contrainte supplémentaire : pour pouvoir réellement peupler un îlot de stabilité, l'extension spatiale du paquet d'onde dans le potentiel périodique doit être inférieure à la taille dudit îlot. Nous verrons dans ce chapitre que cela impose une condition supplémentaire sur la profondeur V_0 du réseau.

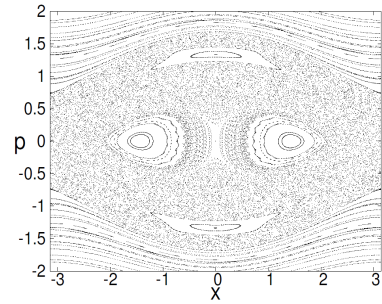


FIGURE II.1 – *Espace des phases pour $(\gamma, \epsilon) = (0.29, 0.29)$. Figure tirée de [47].*

Le deuxième ingrédient clé réside dans notre capacité à implémenter un protocole d'imagerie qui nous permette de résoudre un paquet d'ondes localisé sur l'un ou l'autre des îlots. Comme nous le verrons, le potentiel périodique que nous avons mis en place a un pas $d = 532$ nm. Cela signifie que le système d'imagerie doit avoir une résolution de quelques centaines de nanomètres ! Rappelons que l'imagerie standard de notre expérience a une résolution de $8\mu\text{m}$ (voir le chapitre I.2.b). Ces dernières années, de grandes performances, concernant l'imagerie haute résolution ont été atteintes dans le domaine des atomes froids, permettant notamment l'observation *in situ* de la densité d'un nuage d'atomes avec une résolution allant de quelques μm à quelques centaines de nm [80–83], et même de résoudre l'atome unique [30, 84–86]. Ces performances sont atteintes grâce à l'alliance de dispositifs optiques de grande ouverture numérique et d'algorithmes de déconvo-

lution. Dans notre cas, la géométrie du dispositif expérimental nous empêche a priori d'atteindre de telles performances du fait de l'impossibilité d'approcher un objectif de microscope suffisamment près du centre de la chambre d'expérience. Nous avons donc imaginé un protocole alternatif qui repose sur le travail théorique de notre équipe sur les manipulations dans l'espace des phases [57] ainsi que sur les caractéristiques spécifiques du problème du double puits dynamique : un *microscope par rotation dans l'espace des phases*.

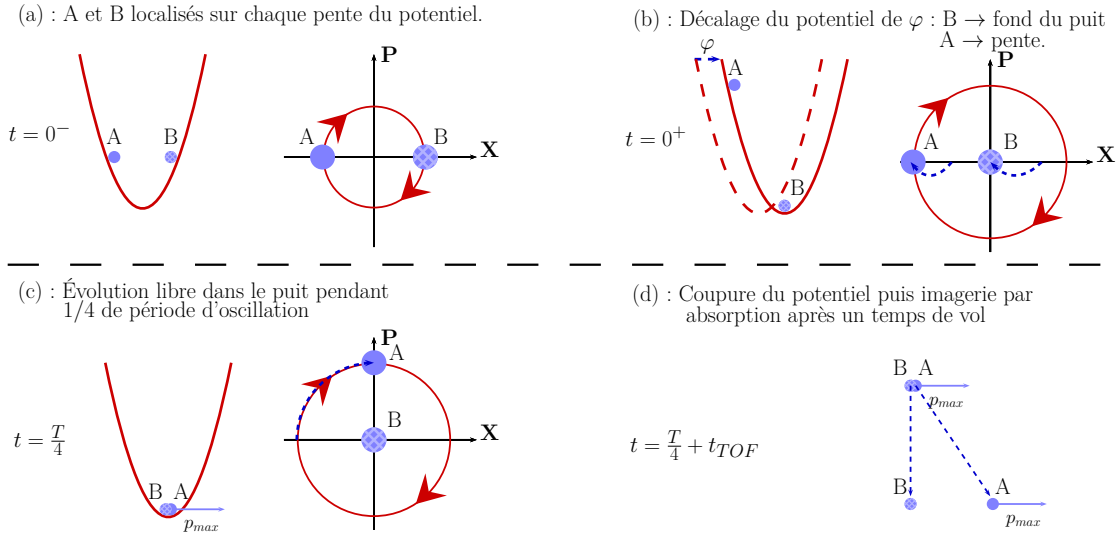


FIGURE II.2 – Représentation schématique des étapes du protocole de microscopie par rotation dans l'espace des phases. Nous représentons ici l'évolution des paquets d'ondes A et B dans un potentiel harmonique ainsi que l'espace des phases correspondant à chaque étape : (a) : A et B sont localisés sur chaque pente du potentiel harmonique, à vitesse nulle. Le cercle rouge dans l'espace des phases schématise la trajectoire iso-énergétique attendue dans cette situation (b) : Déplacement du potentiel harmonique de φ : B se retrouve au fond du puits harmonique, à vitesse nulle. A , quant à lui, reste sur la pente. (c) : A et B évoluent dans ce potentiel pendant $1/4$ de la période associée au piège harmonique. A se retrouve au fond du puits avec une vitesse maximale tandis que B reste au fond du puits à vitesse nulle. (d) : Coupure du confinement harmonique et chute libre de A et B (temps de vol). A ayant une vitesse non nulle, les deux paquets se séparent durant leur chute.

Le principe de ce protocole est schématisé figure II.2 : considérons pour le moment un simple puits harmonique et deux paquets d'ondes A et B localisés respectivement sur les pentes gauche et droite du potentiel, à vitesse nulle (figure II.2.a). Nous déplaçons alors brusquement le potentiel harmonique d'une quantité φ de sorte à ce que le paquet d'ondes B se retrouve au fond du puits à vitesse nulle. Le paquet d'ondes A , lui, se retrouve à une énergie potentielle plus importante mais toujours à vitesse nulle si le décalage est opéré plus rapidement que le temps caractéristique d'oscillation dans le potentiel harmonique (figure II.2.b). Nous laissons ensuite A et B évoluer librement dans le potentiel décalé : B reste immobile tandis que A oscille (figure II.2.c). Après un temps d'évolution $t = T/4$,

les deux paquets d'ondes sont superposés au fond du puits mais ont des vitesses différentes : B a toujours une vitesse nulle et A a converti toute son énergie potentielle en énergie cinétique, acquérant ainsi sa vitesse maximale. L'espace des phases à cette étape correspond alors à l'espace des phases initial ayant subi une rotation de $\pi/2$ et une translation de φ . Nous avons donc transposé le problème de l'espace réel vers l'espace des impulsions, qui lui est accessible via une imagerie après temps de vol. La dernière étape de ce protocole consiste donc à couper le confinement et à imager les atomes par absorption après un temps de vol suffisant pour séparer les paquets d'ondes A et B (voir figure II.2.d).

Des simulations numériques, réalisées par G. Lemarié [47], ont montré que ce protocole était efficace pour distinguer des nuages atomiques piégés sur les deux îlots de stabilité présents dans l'expérience du double puits dynamique. En faisant varier l'angle de déphasage φ , nous obtenons la distribution en impulsion pour l'un ou l'autre des paquets d'ondes. Cette distribution en impulsion est très proche de leur distribution en position initiale, ce qui en fait un protocole efficace pour étudier les deux îlots de stabilité séparés de quelques centaines de nanomètres. C'est de plus un protocole simple à implémenter qui requiert uniquement de pouvoir décaler brusquement le réseau et une bonne connaissance de la période d'oscillation T .

Nous présenterons dans ce chapitre quelques points théoriques sur la description d'une particule dans un potentiel périodique. Nous présenterons ensuite le dispositif expérimental mis en place pour créer le réseau avec tous les degrés de liberté nécessaires.

II.1 Particule quantique dans un potentiel périodique : quelques rappels théoriques

Dans cette section, nous nous intéressons à la description théorique d'une particule quantique dans un potentiel périodique [87–91]. Nous verrons notamment comment le théorème de Bloch nous permet de calculer les niveaux d'énergies accessibles et nous détaillerons deux bases de fonctions utiles pour décrire un paquet d'ondes évoluant dans ce réseau : la base d'ondes de Bloch construite une superposition d'ondes planes et la base des fonctions de Wannier qui permet une description plus intuitive en terme de fonctions localisées dans chaque puits du réseau.

II.1.a Structure de bande

Considérons un potentiel périodique à une dimension $V(x)$ de la forme

$$V(x) = -V_0 \cos^2\left(\frac{\pi x}{d}\right), \quad (\text{II.2})$$

avec V_0 sa profondeur et d sa période spatiale, tel que représenté sur la figure II.3. Nous pouvons alors introduire une vitesse $v_L = \hbar/md$ et une énergie $E_L = mv_L^2/2 = \hbar^2 k_L^2/2m$ caractéristiques du réseau¹. La profondeur du potentiel sera par la suite exprimée en unité de E_L : $s = V_0/E_L$.

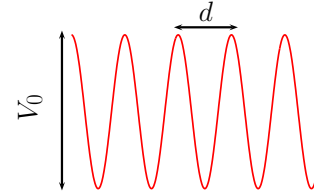


FIGURE II.3 – Potentiel périodique de profondeur V_0 et de période d .

Théorème de Bloch

La description d'une particule quantique au sein d'un tel potentiel passe par la résolution de l'équation de Schrödinger à une dimension :

$$H\psi = \left(\frac{p^2}{2m} - V_0 \cos^2\left(\frac{\pi x}{d}\right) \right) \psi = E\psi. \quad (\text{II.3})$$

Félix Bloch a proposé en 1928 [92], pour ce type de problème, une méthode de résolution basée sur l'exploitation de la propriété de périodicité du potentiel $V(x)$. Cette symétrie discrète impose aux fonctions propres du hamiltonien H de s'écrire sous la forme d'une *onde de Bloch* :

$$\psi_{n,k}(x) = e^{ikx} u_{n,k}(x), \quad \text{avec} \quad u_{n,k}(x+d) = u_{n,k}(x). \quad (\text{II.4})$$

La constante k introduite est homogène à un vecteur d'onde et la fonction $u_{n,k}$

1. Il est important de préciser que l'énergie caractéristique du réseau est parfois définie par $E_R = \hbar^2 k_R^2/2m$, avec $k_R = \pi/d$. On a alors $E_L = 4E_R$, E_R correspondant à l'énergie de recul transférée à un atome lors de l'absorption d'un photon de vecteur d'onde k_R .

rend compte de la symétrie imposée par le potentiel. Notons que si nous développons la fonction $u_{n,k}(x)$ en série de Fourier, et que nous introduisons ce développement dans (II.4), nous avons :

$$\psi_{n,k}(x) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} v_{k,\ell} e^{i(k+\ell k_L)x}. \quad (\text{II.5})$$

La relation (II.5) montre qu'une onde de Bloch est un peigne d'ondes planes de moments $p_\ell = k + \ell k_L$, avec ℓ un entier. Cette relation met également en lumière l'invariance des ondes de Bloch par la translation $k \rightarrow k + k_L$; nous pouvons donc nous limiter à un intervalle de largeur $k_L = 2\pi/d$, correspondant à la largeur du réseau réciproque. Par convention, l'intervalle choisi est la première zone de Brillouin : $k \in [-k_L/2, k_L/2]$

En injectant (II.4) dans l'équation de Schrödinger (II.3), nous obtenons une équation portant uniquement sur la partie périodique $u_{n,k}(x)$:

$$H_k u_{n,k}(x) = E_n(k) u_{n,k}(x), \quad \text{où} \quad H_k = \frac{(p + \hbar k)^2}{2m} - V_0 \cos^2\left(\frac{\pi x}{d}\right). \quad (\text{II.6})$$

Du fait de sa périodicité, nous pouvons également décomposer en série de Fourier le potentiel $V(x)$. Dans le cas d'un potentiel sinusoïdal, cette décomposition est très simple et s'exprime :

$$V(x) = -\frac{V_0}{2} - V_0 \frac{e^{ik_L x} + e^{-ik_L x}}{4}. \quad (\text{II.7})$$

Le premier terme $V_0/2$ entraîne uniquement un décalage global des énergies que nous intégrerons directement dans notre définition de l'énergie par la suite. En remplaçant $\psi_{n,k}(x)$ et $V(x)$ par leur expression dans l'espace réciproque, nous nous ramenons à un système d'équations dites *équations centrales* portant sur les coefficients de Fourier $v_{k,\ell}$ associés à la partie périodique $u_{n,k}$ de la fonction d'onde :

$$\left(\frac{k}{k_R} + \ell\right)^2 v_{k,\ell} - \frac{V_0}{4E_L} (v_{k,\ell-1} + v_{k,\ell+1}) = \frac{E_n(k)}{E_L} v_{k,\ell}. \quad (\text{II.8})$$

Ce système d'équations peut se résoudre sous forme matricielle pour un couple $(k/k_L, V_0/E_L)$ donné. Les solutions obtenues sont rangées par énergies croissantes à l'aide de l'indice entier n . Nous obtenons alors les bandes d'énergie autorisées $E_n(k)$ qui sont représentées figure II.4 pour une profondeur de réseau $V_0 = 2E_L$.

Dans le cadre de l'étude du double puits dynamique et de l'effet tunnel assisté par le chaos, nous avons besoin d'aller vers des profondeurs de réseau relativement importantes (typiquement $V_0 \sim 10E_L$). Nous verrons dans la section II.1.c le formalisme et les approximations appropriées dans ce régime. Néanmoins, il est instructif de se pencher sur le cas des réseaux de faible profondeur car l'approche perturbative de ce système permet une description intuitive des deux premières bandes d'énergie permises.

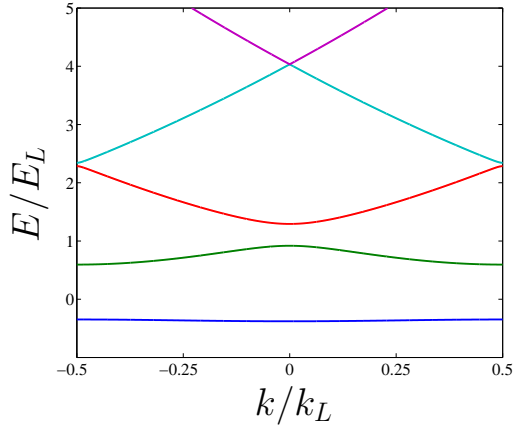


FIGURE II.4 – Structure de bande dans la 1^{ère} zone de Brillouin pour $V_0 = 2E_L$. Les énergies $E_n(k)$ déterminent les bandes d'énergie autorisées et les énergies interdites que l'on appelle les gaps.

Cas du potentiel nul

Dans le cas du potentiel nul, les solutions de l'équation de Schrödinger sont les ondes planes. Nous pouvons écrire une onde plane de vecteur d'onde q sous forme d'une onde de Bloch en considérant l'entier ℓ_0 le plus proche de q/k_L , ce qui donne $q = \ell_0 k_L + k$, avec k dans la première zone de Brillouin. Tous les coefficients de Fourier $v_{k,\ell}$ sont alors nuls excepté celui pour lequel $\ell = \ell_0$:

$$\psi_{n,k}(x) = e^{i(k+\ell_0 k_L)x}. \quad (\text{II.9})$$

L'énergie associée à cette onde plane est :

$$E(q) = \frac{\hbar^2 q^2}{2m}. \quad (\text{II.10})$$

En repliant le spectre d'énergie dans la première zone de Brillouin afin de faire le parallèle avec la description que nous avons donnée plus tôt, nous obtenons un diagramme de bande sans gap représenté sur la figure II.5.

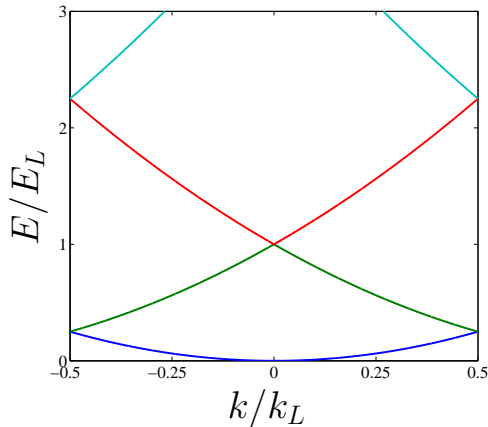


FIGURE II.5 – Représentation en structure de bande dans la 1^{ère} zone de Brillouin de l'énergie d'une onde plane en espace libre $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$.

Cas des réseaux de faible profondeur

Revenons maintenant à un potentiel non nul, de profondeur faible, telle que $V_0 \leq E_L/4$. Nous pouvons adopter une approche perturbative :

$$H = H_0 + H_{pert} \quad \text{avec} \quad H_{pert} = -\frac{V_0}{4} (e^{ik_L x} + e^{-ik_L x}). \quad (\text{II.11})$$

Les états propres de H_0 correspondent aux ondes planes décrites plus haut (II.9). Nous voyons alors que l'effet du réseau est de coupler l'onde plane de moment q à celles de moment $q \pm k_L$.

De la même façon que précédemment, une équation centrale est associée à chacun de ces coefficients et nous avons donc un système de trois équations couplées :

$$\left(\frac{k}{k_L}\right)^2 v_{k,0} - \frac{s}{4} (v_{k,-1} + v_{k,+1}) = \frac{E_n(k)}{E_L} v_{k,0} \quad (\text{II.12a})$$

$$\left(\frac{k}{k_L} + 1\right)^2 v_{k,+1} - \frac{s}{4} (v_{k,0} + v_{k,+2}) = \frac{E_n(k)}{E_L} v_{k,+1} \quad (\text{II.12b})$$

$$\left(\frac{k}{k_L} - 1\right)^2 v_{k,-1} - \frac{s}{4} (v_{k,-2} + v_{k,0}) = \frac{E_n(k)}{E_L} v_{k,-1}. \quad (\text{II.12c})$$

Comme nous l'avons vu un peu plus tôt, nous nous plaçons dans la limite $V_0 \rightarrow 0$ et nous cherchons à priori les solutions telles que $v_{k,\ell \neq 0} \rightarrow 0$, car les solutions du hamiltonien non perturbé sont supposées peu modifiées par la présence du réseau. Dans ce cas, nous pouvons exprimer les coefficients $v_{k,\pm 1}$ des équations (II.12b) et (II.12c) à l'ordre 1 en V_0 en négligeant les termes en $v_{k,\pm 2}$. Nous remplaçons également, dans l'expression des $v_{k,\pm 1}$, l'énergie $E_n(k)$ par l'énergie associée à l'onde plane initiale non perturbée. En faisant ces approximations et en remplaçant $v_{k,\pm 1}$ par leur expression en fonction de $v_{k,0}$ dans (II.12a), nous déduisons le décalage en énergie dû à la présence du réseau dans la théorie des perturbations :

$$\frac{E_n(k)}{E_L} = \left(\frac{k}{k_L}\right)^2 - \frac{s^2}{16} \sum_{\epsilon=\{-1,+1\}} \frac{1}{\left(\frac{k}{k_L} + \epsilon\right)^2 - \left(\frac{k}{k_L}\right)^2}. \quad (\text{II.13})$$

L'expression (II.13) montre directement que l'hypothèse $v_{k,\ell \neq 0} \xrightarrow{V_0 \rightarrow 0} 0$ n'est plus valable dans le cas où l'énergie associée à l'onde plane de vecteur d'onde $k \pm k_L$ est de l'ordre de l'énergie associée à l'onde plane de vecteur d'onde k . Cela ne se produit que lorsque $k \sim \pm k_L/2$, c'est-à-dire lorsque k se trouve sur les bords de la première zone de Brillouin.

Considérons le cas $k = k_L/2$; il faut alors isoler le terme $v_{k,\ell=1}$. En faisant le même

type de développement que précédemment, nous obtenons une autre expression pour le décalage en énergie :

$$\frac{E_{n,k}}{E_L} v_{k,0} = \left(\frac{k}{k_L} \right)^2 v_{k,0} - \frac{s}{4} v_{k,-1} \quad \text{avec} \quad k = \frac{k_L}{2}. \quad (\text{II.14})$$

En diagonalisant le hamiltonien dans la base des deux états $(v_{k,0}, v_{k,-1})$, nous obtenons l'expression des énergies au bord de la première zone de Brillouin pour les deux premières bandes d'énergie :

$$E_0(k_L/2) = \frac{E_L}{4} - \frac{V_0}{4} \quad (\text{II.15a})$$

$$E_1(k_L/2) = \frac{E_L}{4} + \frac{V_0}{4}. \quad (\text{II.15b})$$

Un raisonnement identique en considérant $k = -k_L/2$ et en isolant le terme $v_{k,+1}$ conduit au même résultat.

Nous voyons ainsi que l'effet du potentiel périodique est d'ouvrir une bande interdite de largeur $V_0/2$.

II.1.b Notion de masse effective

Nous avons décrit les niveaux d'énergie accessibles dans le potentiel périodique, c'est-à-dire que nous avons maintenant accès à la relation de dispersion $E(k)$. Cette relation de dispersion va nous permettre, dans cette section, de définir deux quantités importantes : la vitesse de groupe et la masse effective. Une description détaillée de ces deux quantités est donnée dans [91]. Considérons un paquet d'onde se propageant dans le réseau et ayant une distribution en moment $f(k)$, centrée autour de k_0 et étroite devant la largeur k_L de la première zone de Brillouin. La fonction d'onde initiale sera alors en première approximation $\psi_{n,k}(x, t = 0) \sim f(k)u_{n,k_0}(x)e^{ik_0x}$. La fonction d'onde à un instant t est ensuite déterminée à l'aide de l'opérateur d'évolution :

$$\psi(x, t) = \int f(k)u_{n,k_0}(x)e^{ik_0x}e^{-iE(k)t/\hbar}dk. \quad (\text{II.16})$$

Dans ce cas, nous pouvons faire une extension de Taylor à l'ordre 2 pour l'énergie :

$$E(k) = E(k_0) + (k - k_0)\hbar v_g(k_0) + \frac{(k - k_0)^2}{2} \frac{\hbar^2}{m_{eff}(k_0)}, \quad (\text{II.17})$$

où nous avons introduit deux grandeurs importantes :

$$\text{la vitesse de groupe :} \quad v_g(k_0) = \left. \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial k} \right|_{k_0}, \quad (\text{II.18a})$$

$$\text{et la masse effective :} \quad m_{eff}(k_0) = \hbar^2 \left(\left. \frac{\partial^2 E}{\partial k^2} \right|_{k_0} \right)^{-1}. \quad (\text{II.18b})$$

En remplaçant la relation de dispersion par son développement (II.17) dans l'opérateur d'évolution, ces deux grandeurs prennent tout leur sens. En effet, la vitesse de groupe $v_g(k_0)$ peut bel et bien être interprétée comme la vitesse de propagation du centre de masse de l'onde de Bloch. Elle est également directement proportionnelle à la pente du diagramme de bande $E_n(k)$. La masse effective m_{eff} , elle, traduit une phase quadratique. Elle est donc liée à l'étalement du paquet d'onde au cours de sa propagation, de la même façon qu'un paquet d'onde s'étale dans l'espace libre sous l'effet de la relation de dispersion $E(k) = \hbar^2 k^2 / 2m$. Cette analogie est d'autant plus adaptée dans les cas où $k_0 = 0$ et $k_0 = k_L/2$ car la vitesse de groupe s'annule en ces points (voir figure II.4). L'énergie associée au paquet d'onde se résume alors à $E(k) = \text{cste} + \hbar^2 k^2 / 2m_{eff}$; le paquet d'ondes s'étale donc sous l'effet d'une relation de dispersion identique à (II.10) mais modifiée par la masse effective².

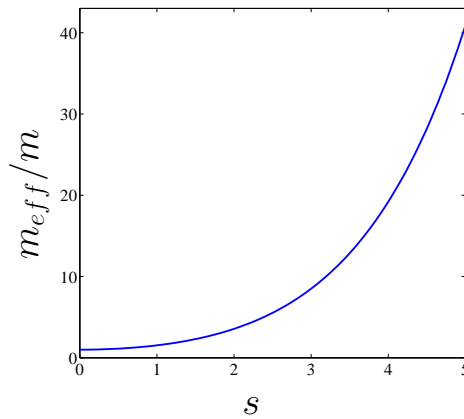


FIGURE II.6 – Évolution du rapport m_{eff}/m en fonction de la profondeur normalisée s du réseau. Ici, la masse effective est calculée pour $k_0 = 0$ sans tenir compte des interactions ni d'un éventuel potentiel externe.

Ce n'est néanmoins pas le seul effet de la renormalisation de la masse. En effet, S. Burger *et al.* ont étudié dans [94] l'effet de la présence d'un potentiel périodique sur le mouvement oscillatoire d'un condensat de Bose-Einstein dans un potentiel harmonique externe de fréquence ω_{ext} . Leur expérience consiste à déplacer macroscopiquement le minimum du potentiel harmonique. Le déplacement peut aller jusqu'à $300\mu\text{m}$, c'est à dire 6 fois la taille initiale du condensat de Bose-Einstein. Dans le régime étudié, le pas du réseau est très inférieur à la longueur harmonique du potentiel externe, leur permettant ainsi d'étudier la réponse macroscopique du système en remplaçant le formalisme discret que nous avons utilisé jusqu'à présent par un formalisme continu. Ils ont notamment obtenu le résultat intéressant que la fréquence d'oscillation dans ce piège est renormalisée par la présence du réseau. En appliquant un modèle hydrodynamique à ce système, M. Kramer *et al.* ont montré que le paramètre de renormalisation est directement relié à la masse effective [95] : $\omega_{ext} \rightarrow \sqrt{\frac{m}{m_{eff}}}\omega_{ext}$. La figure II.6, qui représente le rapport m_{eff}/m

2. Pour une profondeur donnée, la masse effective peut prendre des valeurs positives, négatives ou nulle, c'est à dire que l'étalement du paquet peut être normal, anormal ou encore solitonique [93].

en fonction de s , montre que l'influence du réseau sera d'autant plus importante que sa profondeur est grande ; le mouvement macroscopique du paquet d'onde est donc d'autant plus entravé par la présence du réseau que celui-ci est profond.

La masse effective est donc une grandeur cruciale dans l'étude du mouvement d'un paquet d'onde au sein d'un potentiel périodique.

II.1.c Description par les fonctions de Wannier

La base des fonctions de Wannier

Comme nous l'avons vu précédemment, à mesure que la profondeur du réseau augmente, le mouvement d'un paquet d'ondes est de plus en plus perturbé par le confinement créé par le potentiel périodique. Si le réseau est suffisamment profond, nous pouvons considérer que le paquet d'ondes initial est séparé en plusieurs paquets d'ondes localisés à chaque minimum du potentiel que l'on appellera *sites* du réseau par la suite. Nous pouvons alors adopter une approche plus intuitive en utilisant la base des *fonctions de Wannier* [96]. Pour la $n^{\text{ème}}$ bande d'énergie, la fonction de Wannier $w_{n,m}(x)$ décrit un paquet d'ondes localisé dans le $m^{\text{ème}}$ site du réseau et s'exprime comme une superposition d'ondes de Bloch :

$$w_{n,m}(x) = \sqrt{\frac{d}{2\pi}} \int e^{-imd} \psi_{n,k}(x) dk. \quad (\text{II.19})$$

L'expression (II.19) entraîne directement

$$w_{n,m}(x) = w_{n,0}(x - md). \quad (\text{II.20})$$

Toutes les fonctions de Wannier se déduisent donc par une translation de la fonction de Wannier localisée sur le site $m = 0$. Par la suite, nous utiliserons cette propriété et, afin d'éviter des notations trop lourdes, nous noterons $w_{n,0}(x) = w_n(x)$.

Ici encore, c'est la description de la fonction d'onde dans l'espace de Fourier qui donne l'interprétation la plus intuitive des fonctions de Wannier. En effet, si nous exprimons l'onde de Bloch $\psi_{n,k}(x)$ en fonction de la transformée de Fourier $\tilde{w}_n(k)$ de la fonction de Wannier $w_n(x)$, nous obtenons l'expression :

$$\psi_{n,k}(x) = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{w}_n(k + mk_L) e^{i(k + mk_L)x}. \quad (\text{II.21})$$

Nous retrouvons ici que l'onde de Bloch est une superposition d'ondes planes de vecteur d'onde $k + mk_L$. Le poids de chacune de ces composantes est donné par la transformée de Fourier de la fonction de Wannier correspondante.

Utilisons à présent cette nouvelle base de fonctions pour exprimer le hamiltonien \hat{H} . Pour cela, définissons $\hat{b}_{n,m}$ et $\hat{b}_{n,m}^\dagger$, respectivement les opérateurs de destruction et de création d'une particule dans la fonction de Wannier $w_{n,m}$. Le hamiltonien s'écrit alors :

$$\hat{H} = \sum_n \sum_{m,m'} J_n(m-m') \hat{b}_{n,m}^\dagger \hat{b}_{n,m'}, \quad (\text{II.22})$$

avec

$$J_n(m) = \int w_n(x-md) \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \right) w_n(x) dx. \quad (\text{II.23})$$

Ce hamiltonien décrit donc le saut d'une particule, depuis le site m jusqu'au site m' avec une amplitude de probabilité $J_n(m-m')$.

Régime des liaisons fortes

Considérons à présent un réseau très profond ($V_0 \gg E_L$), encore appelé régime des liaisons fortes. À ces profondeurs, les fonctions de Wanniers deviennent de plus en plus localisées sur chaque site. Le terme de couplage $J_n(m-m')$ s'annule donc de plus en plus rapidement avec la distance ($m-m'$) entre les deux sites considérés. Dans la limite des liaisons fortes, on pourra considérer uniquement le terme de saut entre deux sites voisins $J_n(1)$ que nous noterons J_n par la suite.

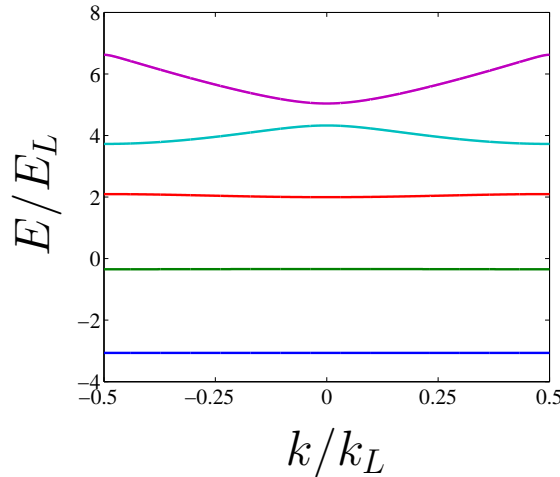


FIGURE II.7 – Structure de bande dans la 1^{ère} zone de Brillouin pour $s = 9$.

De plus, comme le montre la figure II.7, les bandes d'énergie permises deviennent de plus en plus étroites, rappelant les niveaux d'énergie discrets d'un puits harmonique si nous nous plaçons dans l'approximation $E \ll V_0$. Nous tendons donc vers une description atomistique très intuitive d'un réseau de puits harmoniques couplés deux à deux par effet tunnel. Le potentiel périodique au voisinage du minimum de chaque puits peut être approximé par le développement limité de $V(x)$:

$$V(x) \sim -V_0 + \frac{V_0 \pi^2}{d^2} x^2. \quad (\text{II.24})$$

Nous en déduisons donc la pulsation harmonique ω_{harm} de chaque puits :

$$\omega_{\text{harm}} = \sqrt{\frac{2\pi^2 V_0}{md^2}}. \quad (\text{II.25})$$

Dans ce régime, nous approximations également la fonction de Wannier localisée dans le puits à une fonction gaussienne [88]. L'extension de la fonction d'onde, dans l'état fondamental, sera alors de l'ordre de la longueur harmonique $a_0 = \sqrt{\hbar/m\omega_{\text{harm}}}$.

Cette description intuitive est appropriée si le réseau est suffisamment profond pour que le régime des liaisons fortes soit pertinent mais que le couplage tunnel J_0 ne soit pas encore totalement éteint. En effet, si nous chargeons un condensat de Bose-Einstein dans le réseau et que le couplage tunnel est suffisamment important, la cohérence entre les paquets d'ondes sera maintenue. Si J_0 devient trop faible, il faut prendre en compte la différence de potentiel chimique des condensats piégés dans chacun des puits pour décrire séparément leur évolution. Nous supposons dans la suite que nous ne sommes pas dans ce cas de figure et que chaque puits est équivalent.

La forme de la bande fondamentale $E(k)$ dans l'espace des quasi-impulsions k peut alors être directement reliée au taux tunnel J_0 par la relation :

$$E(k) = -2J_0 \cos(kd). \quad (\text{II.26})$$

Revenons à présent au problème du double puits dynamique. Rappelons que nous cherchons à peupler l'un des îlots de stabilité afin d'étudier le transport entre ces deux îlots. Pour cela, l'extension spatiale de la fonction d'onde que nous considérons doit être bien inférieure au pas du réseau. Cela correspond bien au régime des liaisons fortes décrit dans cette section. En effet, le rapport a_0/d s'exprime de la façon suivante :

$$\frac{a_0}{d} = \frac{1}{\sqrt{2\pi^2}} s^{-1/4}. \quad (\text{II.27})$$

Il faut donc augmenter la profondeur du réseau afin de diminuer la taille de la fonction d'onde. Pour avoir $a_0/d < 0.13$, il faut $s > 10$. Ceci constitue donc une contrainte importante sur la profondeur du potentiel que nous devons être capable de réaliser. Connaissant le paramètre γ , cela fixe également un ordre de grandeur de la fréquence de modulation d'amplitude du potentiel périodique : $\omega_m \sim 2\pi \times 50\text{kHz}$.

Nous avons à présent tous les ingrédients théoriques nécessaires pour concevoir et réaliser expérimentalement le potentiel périodique adapté à l'expérience du double puits dynamique.

II.2 Réalisation expérimentale d'un réseau optique

L'utilisation d'un réseau optique pour créer un potentiel périodique est largement répandue dans le domaine des atomes froids. Nous verrons dans cette section comment l'interaction dipolaire et l'interférence entre deux faisceaux de même longueur d'onde λ nous permettent de créer un potentiel périodique et

comment celui-ci est réalisé expérimentalement. Nous détaillerons notamment comment nous contrôlons les degrés de liberté nécessaires à la réalisation de l'expérience du double puits dynamique.

II.2.a Création du potentiel périodique

Notre réseau optique résulte de l'interférence de deux faisceaux lasers contra-propageants de même longueur d'onde $\lambda = 1064\text{nm}$ et de même puissance P_0 . L'intensité lumineuse au niveau des atomes s'écrit :

$$I(x) = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \Delta\theta \right), \quad (\text{II.28})$$

où $I_0 = 2P_0/\pi w_0^2$, avec P_0 la puissance et w_0 le waist des deux faisceaux contra-propageants. Dans notre cas, $w_0 = 150\mu\text{m}$; $\Delta\theta$ est ici la phase relative entre les deux ondes planes qui interfèrent.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre I, le couplage dipolaire entre l'intensité lumineuse et le dipôle atomique nous permet de définir un coefficient de proportionnalité χ entre l'intensité et le potentiel vu par les atomes (équation (I.27)). Le potentiel ainsi créé s'écrit :

$$V(x) = -V_0 \cos^2 \left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \Delta\theta \right), \quad \text{avec} \quad V_0 = -4\chi I_0. \quad (\text{II.29})$$

La période spatiale du réseau est alors $d = \lambda/2$ et sa profondeur est directement contrôlable via l'intensité des faisceaux laser. Le contrôle de $\Delta\theta$ nous permet de plus de déplacer spatialement le réseau.

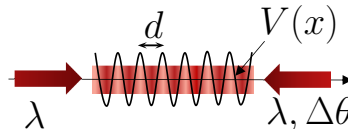


FIGURE II.8 – *Potentiel périodique créé par l'interférence entre deux faisceaux contra-propageants de longueur d'onde λ .*

Le potentiel $V(x)$ décrit par l'équation (II.29) correspond à un réseau optique infini. Néanmoins, expérimentalement, l'extension longitudinale du réseau est limitée par la divergence gaussienne des faisceaux. On pourra typiquement considérer que le réseau est uniforme à l'échelle de la longueur de Rayleigh $z_R = \pi w_0^2/\lambda \sim 6\text{ cm}$ pour notre expérience. La taille de notre condensat étant typiquement de $20\mu\text{m}$, notre réseau peut être considéré comme infini.

Dans la suite de cette section, nous décrivons le dispositif expérimental mis en place pour réaliser notre réseau optique.

II.2.b Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est représenté Figure II.9. Nous présentons d'abord une vue d'ensemble du montage optique réalisé, puis nous nous intéressons au contrôle électronique de la puissance I_0 et de la phase relative $\Delta\theta$.

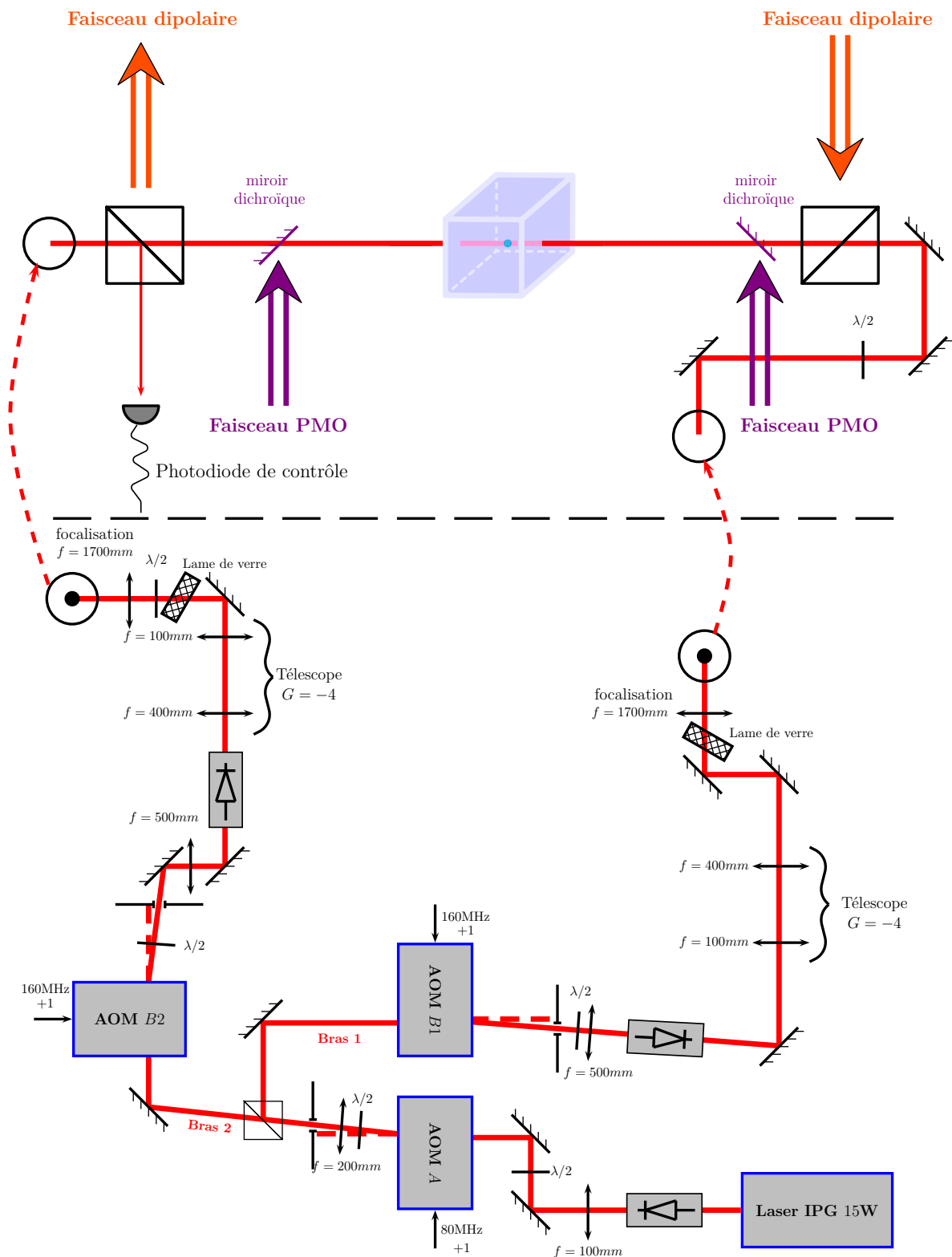


FIGURE II.9 – Montage optique réalisé pour créer le réseau optique. En bas : la création et la mise en forme des faisceaux. En haut : l'acheminement des deux faisceaux contrapropageants jusqu'au centre de la cellule en verre où est produit le condensat de Bose-Einstein.

Vue d'ensemble du dispositif

Le laser utilisé provient de la société *IPG Photonics*³. C'est un laser fibré, de puissance maximum 15W, polarisé linéairement et de largeur spectrale $\sim 100\text{kHz}$. Afin de prévenir d'éventuels dégâts provoqués par une réflexion, la sortie de fibre du laser est directement suivie d'un isolateur de Faraday.

Le faisceau passe ensuite à travers un modulateur acousto-optique (AOM *A*⁴) nous permettant un contrôle de sa puissance, avant d'être séparé en deux bras par un cube polariseur. La lame demi-onde avant le cube est réglée de manière à avoir la même puissance dans chaque bras au niveau de leur entrée dans la cellule en verre. Nous verrons dans le paragraphe suivant comment le contrôle de l'AOM *A* nous permet à la fois de choisir la profondeur du réseau et de moduler cette profondeur dans l'optique de l'expérience du double puits dynamique.

Chacun des bras du réseau passe ensuite au travers d'un autre modulateur acousto-optique (AOM *B1* et *B2*⁵) ce qui nous permet un contrôle de la phase relative entre les deux faisceaux.

Enfin, les bras 1 et 2 sont mis en forme à l'aide d'un télescope de grandissement $G = -4$ et focalisés au centre de la cellule avec un waist $w_0 = 150\mu\text{m}$. Leur polarisation est ajustée par un cube polariseur juste avant la cellule en verre afin qu'ils puissent interférer et ainsi créer le potentiel périodique.

L'alignement du réseau est crucial afin de bien contrôler la profondeur du potentiel périodique. Il faut que les deux faisceaux contrapropageants soient superposés et que leurs positions coïncident avec la position du condensat de Bose-Einstein. Pour augmenter notre précision lors du réglage, nous avons donc installé une lame de verre épaisse sur chacun des bras. Ces lames de verre sont montées sur une monture de miroir ; en changeant l'inclinaison de celle-ci, nous déplaçons la position du faisceau laser avec une précision de $40\mu\text{m}/\text{tour de vis}$. Une description détaillée du gain en précision grâce à cette méthode est donnée dans la thèse de C. M. Fabre [60].

À l'aide de ce dispositif, nous créons un réseau dont la profondeur peut aller jusqu'à $s = 56$. Nous verrons dans le prochain chapitre différentes méthodes de calibration de cette profondeur dont une nouvelle méthode développée dans notre équipe.

Contrôle de la puissance

La puissance globale du faisceau laser est contrôlée par l'AOM *A*. Le dispositif électronique qui génère le signal radio-fréquence alimentant le cristal de silice est représenté figure II.10. Un signal radio fréquence à 80MHz est produit par un oscillateur contrôlé en tension⁶. L'amplitude de ce signal est ensuite contrôlée analogiquement par le programme LabView de l'expérience via un atténuateur⁷.

3. *YLR-15-1064-LP-SF*.

4. *MQ80-A0.3-L1064Z20-WLg* de AA Optoelectronics.

5. *M200-A0.5-L1064-2001/320507* de AA Optoelectronics.

6. Mini circuit POS3.

7. Mini circuit PAS1.

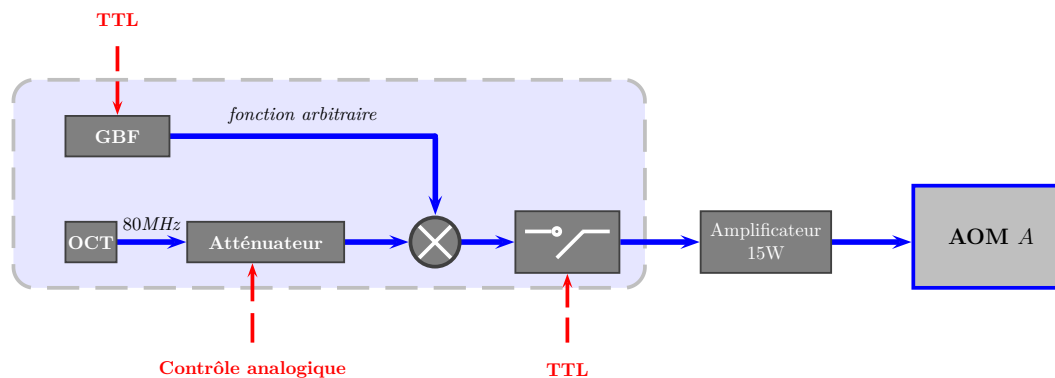


FIGURE II.10 – Dispositif de contrôle électronique de l'AOM A. L'Oscillateur Contrôlé en Tension (OCT) génère un signal à 80 MHz qui est ensuite multiplié par un signal modulant généré par un Générateur de Basse Fréquence (GBF).

La réponse de l'atténuateur est trop lente pour pouvoir moduler l'amplitude du signal radio-fréquence et/ou pour générer un pulse d'une durée inférieure à quelques centaines de microsecondes ; l'onde radio-fréquence est donc multipliée au signal délivré par un générateur basse fréquence qui nous servira à moduler ou à pulser le signal électronique, et donc le réseau optique. En revanche, c'est le contrôle analogique de l'atténuateur qui nous permet d'augmenter adiabatement la profondeur du réseau. Un interrupteur⁸ est présent afin de pouvoir rapidement couper le signal radio fréquence qui alimente l'AOM A. Enfin, le signal radiofréquence est amplifié avant d'être acheminé jusque l'AOM.

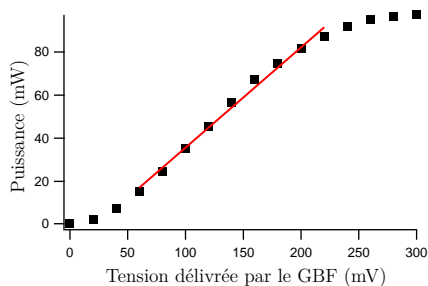


FIGURE II.11 – Puissance laser dans l'ordre de diffraction +1 en fonction de la tension en sortie du GBF. La modulation de la profondeur du réseau devra se faire dans la plage linéaire de cette réponse, soit [80 mV, 220 mV].

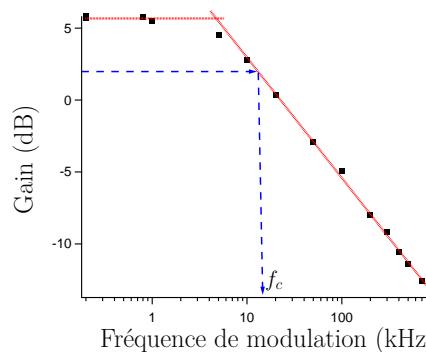


FIGURE II.12 – Diagramme de Bode : réponse fréquentielle de l'AOM A. La fréquence de coupure $f_c = 16$ kHz est déterminée à -3 dB.

Sur la figure II.11, nous voyons que la réponse optique de l'AOM A en fonction

8. Mini circuit ZSDR – 230+.

de la tension continue délivrée par le GBF est non linéaire. Pour que la modulation de l'amplitude du signal radio-fréquence soit propre, nous devons donc nous limiter à la plage [80 mV, 220 mV] dans laquelle la réponse de l'AOM est linéaire. Par la suite, nous choisissons une valeur centrale $V_{GBF} = 160$ mV. La réponse fréquentielle de l'AOM A est également importante. Nous voyons sur la figure II.12 que l'AOM agit comme un filtre passe bas avec une fréquence de coupure de 16 kHz. Or, pour l'expérience du double puits dynamique, les fréquences de modulation dont nous avons besoin afin de façonner l'espace des phases sont assez importantes (de l'ordre 50 kHz). Il faudra donc adapter l'amplitude du signal modulant pour compenser l'atténuation due à l'AOM A.

Contrôle de la phase relative $\Delta\theta$

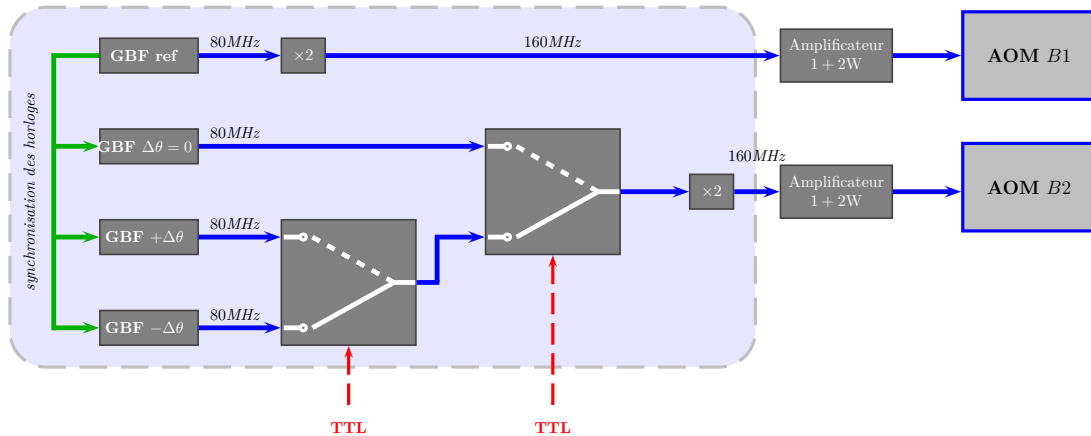


FIGURE II.13 – Dispositif de contrôle électronique des AOMs B1 et B2. Les signaux radio-fréquences sont générés par des GBFs suivis d'un doubleur de fréquence. L'AOM B1 est choisi comme référence. Les GBFs alimentant l'AOM B2 sont donc synchronisés sur l'horloge de l'AOM B1. Nous disposons pour l'AOM B2 de 3 GBFs, chacun réglé sur la phase relative $\Delta\theta$ désirée. Grâce à deux interrupteurs contrôlés par le programme LabView de l'expérience, nous choisissons quel signal est envoyé à l'AOM. Enfin, chacun des signaux radio fréquence est amplifié par un amplificateur 1W et un amplificateur 2W.

Un des éléments clés dans l'expérience du double puits dynamique est d'avoir la possibilité de distinguer deux paquets d'ondes localisés sur les bords de chaque puits du potentiel périodique. Pour cela, le protocole de rotation dans l'espace des phases que nous proposons requiert une bonne maîtrise de la phase relative entre les deux bras du réseau. Nous ajoutons donc un AOM sur chacun des bras 1 et 2 (AOM B1 et AOM B2). Le dispositif électronique de contrôle de ces deux AOMs est représenté figure II.13⁹. Ce dispositif nous permet de déplacer le réseau de quelques centaines de nanomètres en quelques nanosecondes. Cette échelle de temps étant bien plus rapide que toutes les autres durées caractéristiques du système, nous pouvons considérer le déplacement comme instantané. Nous

9. Doubleur de fréquence : FD2+. Interrupteurs : ZSDR – 230+.

estimons que nous avons une précision de $\pm 4^\circ$ sur la différence de phase que nous fixons. Nous verrons dans le chapitre suivant comment cette dernière est évaluée.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné tous les ingrédients théoriques nécessaires à l'étude de la dynamique d'un condensat de Bose-Einstein dans un potentiel périodique. Nous avons vu que la masse effective et le taux tunnel entre deux puits adjacents sont des éléments cruciaux que nous avons vu émerger naturellement dans deux régimes très différents : le régime de faible profondeur et le régime de liaison forte. Bien que nous travaillions avec des profondeurs importantes pour lesquelles la description adaptée est le régime de liaison forte, il sera intéressant de garder ces deux grandeurs à l'esprit pour l'interprétation des expériences que nous présenterons dans les chapitres suivants.

Nous avons également présenté le dispositif expérimental créant le réseau optique et les outils de contrôle mis en place. Nous avons veillé à ce que les paramètres requis par l'expérience du double puits dynamique soient accessibles et bien maîtrisés. Il reste néanmoins une incertitude sur la profondeur du potentiel effectivement vue par les atomes. Connaissant la puissance laser présente dans chaque bras du réseau, nous pouvons calculer la profondeur attendue mais la profondeur effective dépendra des ajustements expérimentaux tels que l'alignement, la perte de puissance lors de la traversée de la cellule en verre ou encore la différence de waist entre les deux faisceaux. Afin de lever cette incertitude, nous nous sommes intéressés à différentes méthodes de calibration *in-situ* de la profondeur. Nous verrons dans le chapitre suivant une nouvelle méthode de calibration que nous avons pu mettre en œuvre grâce au contrôle du déphasage $\Delta\theta$ entre chaque bras du réseau et nous la comparerons avec deux autres méthodes.

CHAPITRE III

Étude de trois méthodes de calibration d'un réseau optique

Sommaire

Introduction	63
III.1 Calibration par diffraction Kapitza-Dirac	64
III.1.a Diffraction Raman-Nath	64
Développement théorique	64
Résultats expérimentaux	65
Validité de l'approximation de Raman-Nath	66
III.1.b Au-delà de l'approximation Raman-Nath	68
III.1.c Calibration de la profondeur du réseau	71
III.2 Calibration par interférence entre paquets d'ondes cohérents	72
III.2.a Expansion d'un condensat depuis le réseau	72
III.2.b Résultats expérimentaux	75
Résultats	76
Discussion	77
III.3 Micro-oscillations d'une chaîne de condensats	78
III.3.a Principe de la calibration par oscillation de la chaîne de condensats	78
Interférence entre paquets d'ondes en mouvement	78
Étude de l'amplitude de l'oscillation	83
Étude de la période d'oscillation	85
III.3.b Simulation numérique	87
Principe du programme de résolution	88
Résultats des simulations numériques	90
III.3.c Calibration	93
Conclusion	94

Introduction

Dans ce chapitre, nous discutons et comparons trois méthodes de calibration de la profondeur d'un réseau optique. Nous faisons le choix de nous intéresser à la calibration car la connaissance précise de la profondeur V_0 est essentielle dans l'ensemble des expériences de simulation quantique que nous planifions de faire. Dans notre cas, nous voulons modéliser l'espace des phases du système mixte du double puits dynamique; cela passe par le choix du paramètre $\gamma \propto V_0$. Nous souhaitons de plus mettre en œuvre le microscope par rotation dans l'espace des phases. Celui-ci requiert une bonne connaissance de la période d'oscillation d'un paquet d'atomes au sein de chaque puits du potentiel périodique, ce qui nécessite également une bonne connaissance de V_0 .

La première méthode que nous présentons dans la première section de ce chapitre est la méthode de diffraction de Kapitza-Dirac d'un condensat sur le potentiel périodique [97]. Cette technique est très largement utilisée dans le domaine des atomes froids et a déjà prouvé son efficacité. Nous décrirons le principe de la méthode ainsi que son utilisation dans l'approximation de Raman-Nath, qui correspond à la limite des temps d'interaction courts, et dans le cas plus général des temps longs où l'énergie cinétique des atomes doit être prise en compte.

Dans la seconde section, nous décrivons une méthode, basée sur l'interférence d'une chaîne de condensats pendant le temps de vol qui précède l'imagerie par absorption. Elle consiste, comme nous le verrons, à exploiter l'évolution du nombre d'atomes dans les ordres d'interférence ± 1 en fonction de la profondeur du réseau optique. L'approximation de chaque puits du réseau par un potentiel harmonique permet d'aboutir à une expression analytique pour la profondeur normalisée s du réseau. Il est possible de corriger cette expression dans le cas d'un réseau trop peu profond pour lesquels l'approximation gaussienne n'est plus valable, grâce à un traitement numérique de la fonction d'onde décrivant un paquet d'atomes localisé à un minimum du potentiel périodique; traitement qui permet *in fine* d'aboutir à une expression analytique corrigée pour exprimer la profondeur en fonction du nombre d'atomes dans les ordres d'interférence ± 1 [98, 99].

Enfin, nous verrons une nouvelle méthode de calibration, développée par notre équipe, qui repose sur l'étude du micro-mouvement des condensats au sein de chaque puits du réseau optique [100]. L'étude du micro-mouvement émerge naturellement lors de la mise en œuvre du microscope par rotation dans l'espace des phases mais est, au final, beaucoup plus riche que ce qu'un raisonnement naïf peut laisser croire. Nous verrons notamment que la période de la micro-oscillation de la chaîne de condensats nous permet, via une comparaison entre expérience et simulation, de remonter à la profondeur du réseau. De plus, cette calibration est robuste vis-à-vis de l'amplitude des oscillations, des interactions ou encore de la présence d'un potentiel extérieur qui s'ajoute au potentiel périodique.

III.1 Calibration par diffraction Kapitza-Dirac

En 1933, Piotr Kapitza et Paul Dirac ont prédit la diffraction d'un faisceau d'électrons par une onde lumineuse stationnaire [101]. Il faudra attendre 69 ans pour que cet effet soit observé pour les électrons [102], mais la physique atomique et la physique des atomes ultra-froids s'en sont, elles, emparées bien plus tôt. En effet, P. L. Gould *et al.* ont montré dès 1983 la diffraction d'un faisceau d'atomes de sodium [103, 104]. Par la suite, les avancées expérimentales sur la condensation de Bose-Einstein ont permis d'étudier plus avant ce phénomène [97] qui est aujourd'hui très largement utilisé, notamment pour calibrer *in situ* la profondeur du réseau optique.

La méthode de calibration par diffraction consiste à appliquer le réseau sur le condensat pendant une durée τ et à observer l'impact de l'interaction entre le réseau et le condensat de Bose-Einstein sur la distribution en impulsion de ce dernier, grâce à une imagerie par temps de vol. En effet, par analogie avec l'optique, une onde de matière cohérente comme le condensat de Bose-Einstein subit, lors de son interaction avec un réseau de pas d , un phénomène de diffraction. Toujours par analogie avec l'optique, nous nous attendons donc à voir des pics de diffraction équidistants dans l'espace des impulsions, séparés de $h/d = \hbar k_L$. Pendant un temps de vol t_{TOF} , ces différents ordres de diffractions vont se séparer, révélant la figure de diffraction.

Dans cette partie, nous donnons quelques éléments théoriques de description de la diffraction d'un condensat de Bose-Einstein par un réseau optique en distinguant deux régimes : le régime de Raman-Nath correspondant aux temps d'interaction courts et le régime correspondant au temps d'interaction longs. Nous présentons également nos résultats expérimentaux.

III.1.a Diffraction Raman-Nath

Nous nous plaçons donc pour commencer dans le régime des temps d'interaction courts.

Développement théorique

Considérons un condensat de Bose-Einstein, décrit par sa fonction d'onde $\psi(x, t = 0)$. Afin de connaître l'évolution de la fonction d'onde après l'interaction avec le réseau pendant une durée τ , nous devons résoudre l'équation de Schrödinger dépendante du temps :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} - V(x, t) \psi(x, t), \quad (\text{III.1})$$

avec $V(x, t) = V(x) = V_0 \cos^2(\pi x/d)$ pendant toute la durée τ du pulse et $V(x, t) = 0$ sinon. L'approximation de Raman-Nath, dont nous discuterons la validité plus loin, consiste à négliger le terme d'énergie cinétique dans l'équation (III.1). Grâce à cette approximation, l'opérateur d'évolution s'intègre aisément

sur la durée du pulse. L'interaction avec le potentiel périodique s'exprime alors comme une phase spatialement périodique. La fonction d'onde après le pulse s'écrit :

$$\psi(x, \tau) = e^{-iV(x)\tau/\hbar}\psi(x, 0). \quad (\text{III.2})$$

L'opérateur d'évolution peut être développé sur les fonctions de Bessel. La fonction d'onde après interaction avec le réseau s'écrit alors de la façon suivante :

$$\psi(x, \tau) = e^{-iV_0/2\hbar} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-i)^n \mathcal{J}_n \left(\frac{V_0\tau}{2\hbar} \right) e^{ink_L x} \psi(x, 0). \quad (\text{III.3})$$

L'expression (III.3) montre que l'interaction avec le réseau projette effectivement la fonction d'onde sur une grille de pas $\hbar k_L$ dans l'espace des impulsions. Chaque ordre de diffraction est repéré par l'indice n . Le point intéressant ici est que la population dans l'ordre n est proportionnelle à $|J_n(V_0\tau/2\hbar)|^2$ et dépend donc uniquement du produit $V_0\tau$. En analysant la population dans chaque ordre de diffraction en fonction du temps d'interaction τ , nous pourrions déduire la profondeur V_0 et ainsi calibrer la profondeur du potentiel.

Pour réaliser cette analyse, nous faisons une imagerie après temps de vol. Chaque composante de la fonction d'onde ayant une impulsion moyenne $\hbar k_n = n\hbar k_L$, elles se séparent durant le temps de vol d'une quantité égale à

$$\Delta x = \frac{\hbar k_L}{m} t_{TOF}. \quad (\text{III.4})$$

En choisissant le temps de vol adéquat, les différentes composantes sont bien séparées¹ et nous pouvons analyser l'évolution temporelle du nombre d'atomes dans chacun des ordres de diffraction.

Résultats expérimentaux

Le protocole de l'expérience de diffraction que nous avons réalisé est schématisé figure III.1

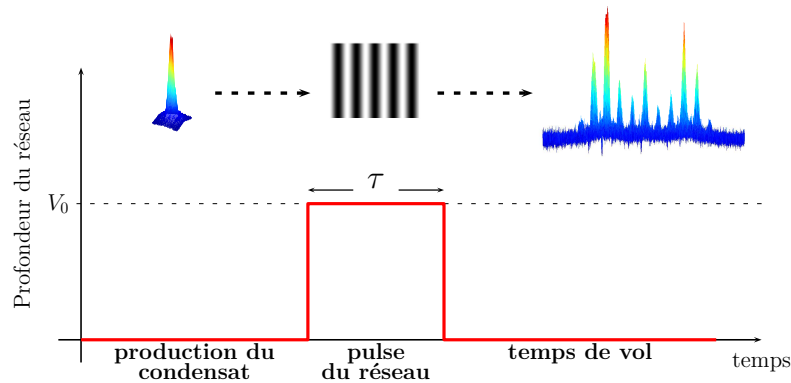


FIGURE III.1 – *Protocole expérimental de l'expérience de diffraction.*

Nous produisons un condensat quasi-pur dans le piège hybride puis nous appliquons le réseau sur le condensat pendant un temps τ (typiquement quelques

1. Nous utilisons typiquement un temps de vol de 25 ms ce qui entraîne $\Delta x \sim 200 \mu\text{m}$

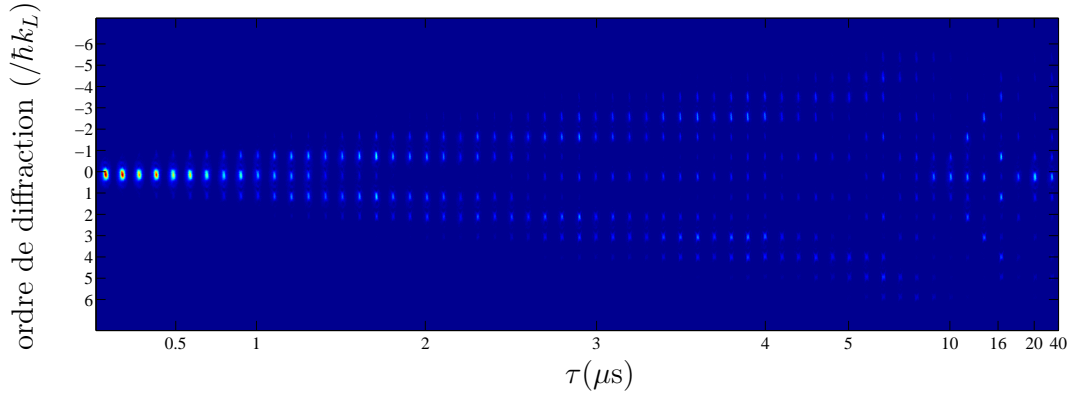


FIGURE III.2 – Profil de diffraction en fonction de la durée du pulse τ pour une puissance par faisceau de 2 W.

microsecondes). Le condensat entre ensuite en chute libre pendant un temps t_{TOF} , révélant dans l'espace des x sa distribution en impulsion. Nous faisons ensuite une image par absorption de la figure de diffraction.

La figure III.2 montre un exemple de profil de diffraction en fonction de la durée du pulse τ pour une puissance dans chaque bras du réseau de 2 W.

Le régime de Raman-Nath correspond aux temps d'interaction courts. Pour déterminer la profondeur de notre potentiel périodique, nous nous limitons donc à des temps d'interaction de quelques μs (ici $\tau \leq 5 \mu s$; dans la sous-section suivante, nous discutons précisément du critère de validité de cette approximation). Pour chaque profil de diffraction n , les données expérimentales sont ajustées par le carré de la fonction de Bessel correspondante². Nous obtenons alors les résultats présentés figure III.3. Nous obtenons ici une profondeur normalisée³ $s = 46.5 \pm 2.5$.

Validité de l'approximation de Raman-Nath

L'approximation Raman-Nath consiste à négliger le terme d'énergie cinétique du hamiltonien; elle est donc valable si le temps d'interaction τ est faible devant la période d'oscillation du réseau. En effet, si $\tau \ll T_{harm}$, nous pouvons considérer que le condensat est immobile durant toute la durée de son interaction avec le réseau. Comme nous l'avons vu dans le chapitre II.1.c, la pulsation harmonique de chaque puits s'exprime :

$$\omega_{harm} = \frac{2\pi}{T_{harm}} = \sqrt{\frac{2\pi^2 V_0}{md^2}} = \frac{E_L}{\hbar} \sqrt{s}. \quad (\text{III.5})$$

Dans le cas d'un réseau de profondeur $s = 46.5$, ce critère impose $\tau \ll 18 \mu s$. Lorsque la durée de l'interaction avec le réseau se rapproche de cette limite, la population dans les différents ordres de diffraction diffère notablement de l'évolution prédite par l'approximation de Raman-Nath (voir figure III.4).

2. Nous traitons nos données sous MATLAB, le protocole de traitement est donné dans l'annexe B.

3. Rappelons que $s = V_0/E_L$.

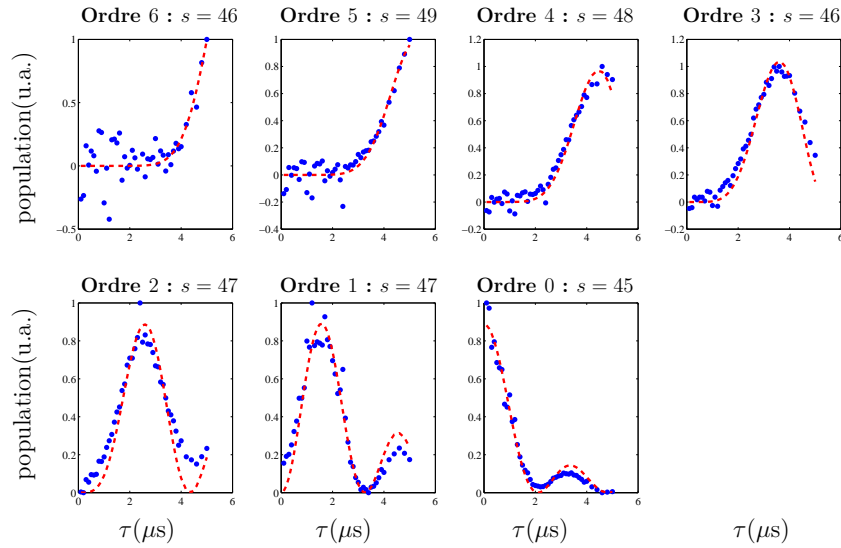


FIGURE III.3 – Évolution de la population dans l'ordre 0 et dans les 6 premiers ordres de diffraction. Les points bleus correspondent aux données expérimentales et les courbes pointillées rouges sont les fonctions de Bessel correspondantes (approximation de Raman-Nath).

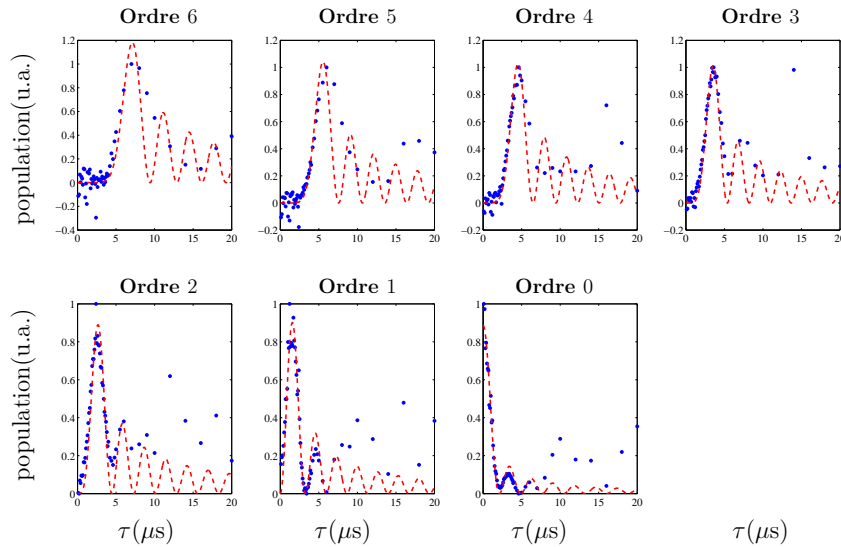
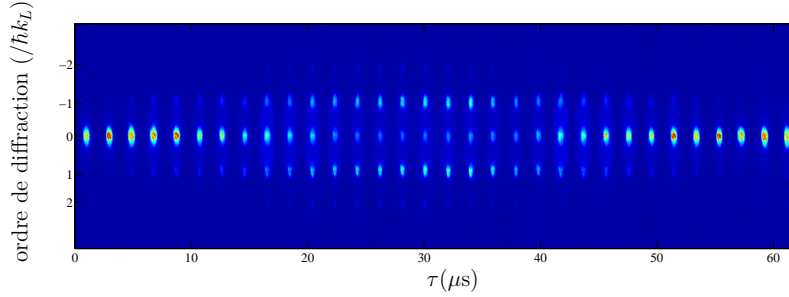


FIGURE III.4 – Évolution de la population dans l'ordre 0 et dans les 6 ordres de diffraction sur des temps longs. Les points bleus correspondent aux données expérimentales et les courbes pointillées rouges sont les fonctions de Bessel correspondantes (approximation de Raman-Nath).

Ce critère est d'autant plus contraignant que la profondeur du réseau est faible. Nous voyons sur la figure III.5 le profil de diffraction obtenu pour un réseau de profondeur $s = 2.8$. Sur ce profil nous voyons notamment, après un pulse de $60 \mu\text{s}$, l'annulation de tous les ordres de diffraction excepté l'ordre 0 (*revival*). Ce revival n'est clairement pas prédit par l'approximation de Raman-Nath (voir figure III.6) et montre la nécessité de faire un développement plus poussé pour cette gamme de profondeurs. C'est ce que nous décrivons dans la section suivante.

FIGURE III.5 – Profil de diffraction pour un réseau de profondeur $\sim 3E_L$.

III.1.b Au-delà de l'approximation Raman-Nath

Les résultats précédents montrent que l'approximation Raman-Nath ne permet pas une calibration précise de la profondeur du potentiel périodique lorsque celle-ci est faible. Pour ces profondeurs, la dynamique d'évolution des populations de chaque ordre de diffraction est trop lente pour pouvoir se restreindre à $\tau \ll T_{\text{harm}}$, nous devons donc prendre en compte l'énergie cinétique dans le hamiltonien. M. Horne *et al.* ont montré dans [105] que ce problème peut être traité dans le formalisme de Mathieu [106]. Nous présentons ici les étapes clés du développement théorique qui permet d'exprimer la population dans chaque ordre de diffraction grâce aux fonctions de Mathieu.

Revenons à l'équation de Schrödinger dépendante du temps en présence du potentiel périodique correspondant à notre expérience de diffraction :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} - V_0 \cos^2\left(\frac{\pi x}{d}\right) \psi(x, t). \quad (\text{III.6})$$

Nous cherchons une solution de la forme :

$$\psi(x, t) = \Phi(x) e^{-iEt/\hbar}. \quad (\text{III.7})$$

En injectant (III.7) dans (III.6) et en faisant le changement de variable $\tilde{x} = \pi x/d$, l'équation peut se mettre sous la forme d'une *équation de Mathieu* :

$$\frac{d^2 \Phi}{d\tilde{x}^2} + [a + 2q \cos(2\tilde{x})] \Phi = 0, \quad (\text{III.8})$$

où $a = 4E/E_L + 2s$ et $q = s$.

Émile Mathieu a introduit cette équation et en a proposé une méthode de résolution en 1868, dans le cadre de son étude des modes de vibration de membranes elliptiques [107]. Aujourd'hui, elle est utilisée dans de nombreux domaines de la physique du fait de sa forme très générale. Les solutions de cette équation sont les *fonctions de Mathieu* $M(a, q, \tilde{x})$.

Utilisons à présent la symétrie du potentiel afin d'ajouter quelques contraintes sur ces fonctions de Mathieu. Tout d'abord, le théorème de Floquet stipule que les solutions d'une équation du type (III.8) peuvent toujours s'écrire sous la forme :

$$M(a, q, \tilde{x}) = e^{ir\tilde{x}} f(a, q, \tilde{x}), \quad (\text{III.9})$$

où r est appelé *exposant caractéristique* et où la fonction $f(a, q, \tilde{x})$ exhibe la même périodicité que le réseau. Le théorème de Bloch impose de plus que l'exposant caractéristique r soit un entier. Pour un couple de valeurs (q, r) donné, il n'existe qu'une valeur de a qui permette de résoudre l'équation (III.8). Cette valeur est notée a_r et appelée *valeur caractéristique*. Il est également établi [106] que les fonctions de Mathieu associées à un exposant caractéristique pair sont paires et celles associées à un exposant caractéristique impair sont impaires.

Nous allumons le réseau optique au temps $t = 0$. Cet allumage étant rapide, nous pouvons considérer $\psi(\tilde{x}, 0^-) = \psi(\tilde{x}, 0^+)$. Le condensat s'étend sur plusieurs sites du réseau (typiquement $\sim 20 - 30$ sites) ; nous pouvons donc supposer que la fonction d'onde initiale est constante et nous choisissons la normalisation [108] :

$$\Phi(\tilde{x}, 0^+) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \quad (\text{III.10})$$

Afin de décrire son évolution, nous projetons la fonction d'onde initiale sur la base des fonctions de Mathieu :

$$\begin{aligned} \Phi(\tilde{x}) &= \sum_{r=0}^{\infty} |M(a_r, q, \tilde{x})\rangle \langle M(a_r, q, \tilde{x}) | \Phi(\tilde{x})\rangle \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} c_r |M(a_r, q, \tilde{x})\rangle, \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

avec

$$c_r = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} M(a_r, q, \tilde{x}) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} d\tilde{x}. \quad (\text{III.12})$$

L'expression (III.12) ajoute une nouvelle contrainte sur les fonctions de Mathieu que nous devons considérer. Rappelons en effet que si l'exposant caractéristique r est impair, les fonctions de Mathieu associées sont symétriques par rapport à l'origine. Le coefficient de projection c_r sera alors nul suite à l'intégration de la fonction qui lui est associée. Introduisons donc le nombre j défini par $r = 2j$ de sorte à ne considérer que les exposants critiques pairs. La fonction d'onde à $t = 0^+$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \Phi(\tilde{x}) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} c_{2j} M(a_{2j}, q, \tilde{x}), \\ \text{avec } c_{2j} &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\pi} M(a_{2j}, q, \tilde{x}) d\tilde{x}. \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

Durant l'interaction du condensat avec le réseau, chaque composante j va évoluer sous l'action de l'opérateur d'évolution correspondant à l'énergie $E = E_L(a_{2j}/4 - q/2)$. La fonction d'onde à $t = \tau$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \psi(\tilde{x}, \tau) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} c_{2j} M(a_{2j}, q, \tilde{x}) e^{-i(\frac{a_{2j}}{4} - \frac{q}{2}) \frac{E_L \tau}{\hbar}} \\ &= e^{-iq \frac{E_L \tau}{2\hbar}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} c_{2j} M(a_{2j}, q, \tilde{x}) e^{-ia_{2j} \frac{E_L \tau}{4\hbar}}. \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

Nous pouvons finalement obtenir la population dans l'ordre de diffraction n en prenant le module au carré de la transformée de Fourier de $\psi(\tilde{x}, \tau)$:

$$P_n(q, \tau) = \left| \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \psi(\tilde{x}, \tau) e^{-2in\tilde{x}} d\tilde{x} \right|^2. \quad (\text{III.15})$$

Nous devons à présent ajouter quelques ingrédients numériques afin d'évaluer correctement le nombre d'atomes dans chaque ordre de diffraction :

- N.W. McLachlan a décrit en détail dans [106] les techniques de calcul de la valeur caractéristique a_{2j} et des fonctions de Mathieu $M(a_{2j}, q, \tilde{x})$. Ces méthodes de calcul sont maintenant disponibles sur le logiciel de calcul Mathematica.
- Nous devons également tronquer la somme $\sum_{j=0}^{\infty}$. Pour cela, S. Müller a montré dans [108] qu'un critère suffisant est $j_{max} = n_{max} + 1$, où n_{max} est le nombre d'ordre de diffraction visible sur la figure de diffraction.

Nous avons écrit un programme Mathematica nous permettant d'évaluer l'évolution du nombre d'atomes dans chaque ordre de diffraction. Pour déterminer la profondeur du potentiel périodique, nous calculons ensuite la déviation standard entre nos données expérimentales et chacune des courbes calculées par Mathematica. La profondeur pour laquelle la déviation standard est minimale est celle que nous retenons pour la calibration ⁴.

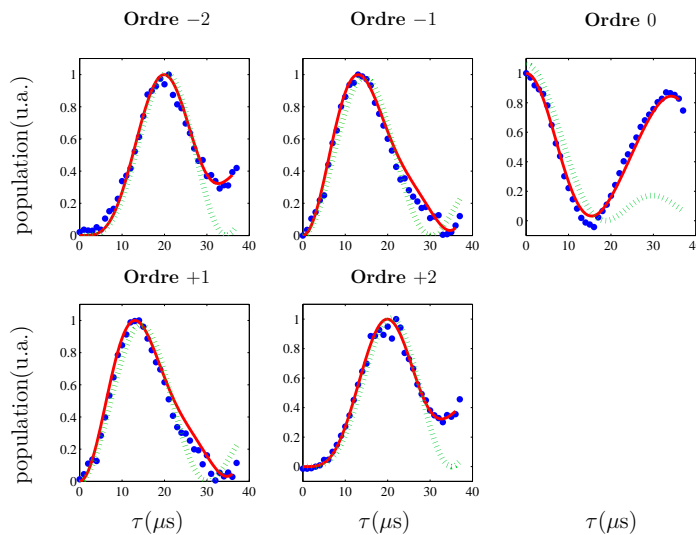


FIGURE III.6 – Population dans les ordres de diffraction pour une puissance dans chaque bras du réseau de 203 mW. Les points bleus correspondent aux données expérimentales. La ligne pleine rouge correspond à la fonction P_n optimale calculée à partir des fonctions de Mathieu. La ligne pointillée verte correspond à l'ajustement dans le cadre de l'approximation Raman-Nath. La profondeur calculée est $s = 6.1 \pm 0.1$.

4. Le protocole de traitement est donné dans l'annexe B.

Un résultat typique est donné figure III.6. Cette figure montre que les données calculées à partir des fonctions de Mathieu sont en bien meilleur accord avec les données expérimentales que celles obtenues dans le cadre de l'approximation de Raman-Nath, ce qui valide le développement fait plus haut.

III.1.c Calibration de la profondeur du réseau

En appliquant le protocole expliqué figure III.1 pour différentes profondeurs et en traitant les données ainsi obtenues dans l'approximation de Raman-Nath et par les fonctions de Mathieu, nous obtenons la courbe de calibration présentée figure III.7 qui représente la profondeur normalisée s obtenue en fonction de la puissance dans chacun des bras du réseau. Ces résultats nous donnent l'expression de la profondeur du réseau en fonction de la puissance : $s = 0.03P[\text{mW}]$. Afin de juger de la qualité de cette calibration, nous comparons ces résultats avec la profondeur s_{calc} obtenue par le calcul à partir de la puissance dans chacun des bras du réseau (en violet sur la figure III.7). Nous avons une erreur relative de 16% entre ces deux valeurs ce qui est tout à fait convenable et qui valide donc l'alignement des bras du réseau optique.

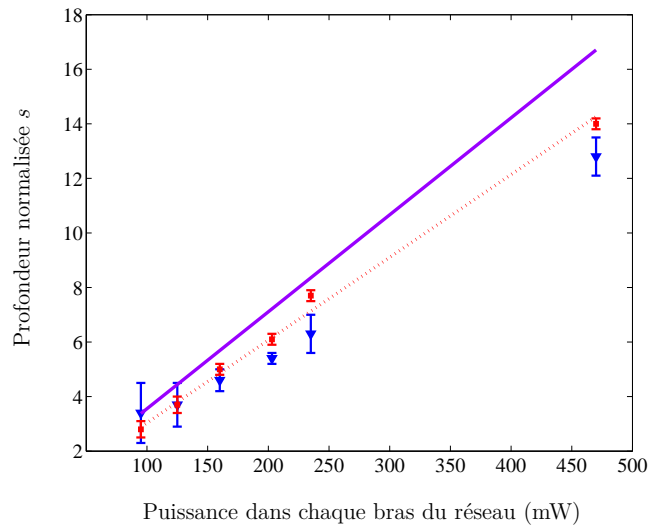


FIGURE III.7 – Résultats du traitement des expériences de diffraction dans l'approximation de Raman-Nath (▼) et par les fonctions de Mathieu (■) en fonction de la puissance dans chaque bras du réseau à l'entrée de la cellule en verre. La courbe en pointillé rouge correspond à un ajustement linéaire des résultats obtenus dans le cadre du traitement par les fonctions de Mathieu. La ligne pleine violette correspond à la profondeur s_{calc} , calculée à partir de la puissance dans chaque bras du réseau, en prenant en compte les pertes dues à la cellule en verre (8%).

La méthode de calibration par diffraction d'un condensat de Bose-Einstein sur le réseau optique semble donc précise une fois que nous avons pris en compte l'énergie cinétique des atomes durant leur interaction avec le réseau. Néanmoins, l'inconvénient conceptuel de cette méthode est que la calibration ne se fait pas

dans les mêmes conditions que les expériences que nous envisageons plus tard, notamment l'expérience du double puits dynamique. En effet, dans cette expérience, nous voulons que les atomes se répartissent majoritairement dans la bande fondamentale du réseau ; il faut donc pour cela charger adiabatiquement le condensat de Bose-Einstein en augmentant progressivement (typiquement en quelques dizaines de ms) la profondeur du réseau. Cela ne correspond pas du tout à l'expérience de diffraction qui nécessite que le réseau optique soit appliqué brutalement, pendant quelques dizaines de μs , sur les atomes.

III.2 Calibration par interférence entre paquets d'ondes cohérents

Afin de nous rapprocher des conditions de l'expérience du double puits dynamique, nous étudions dans cette section une autre méthode de calibration qui repose sur la figure d'interférence qui apparaît lors de l'expansion du condensat de Bose-Einstein depuis le réseau. Nous commençons donc, dans cette section, par étudier le comportement après temps de vol d'un condensat dans un réseau optique. Le protocole expérimental permettant cette étude est schématisé figure III.8. Nous présentons ensuite les résultats obtenus sur notre dispositif.

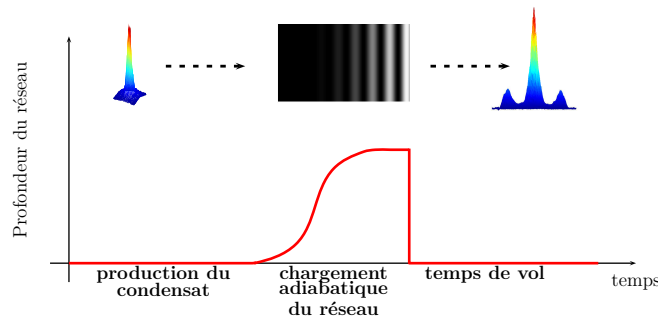


FIGURE III.8 – *Protocole expérimental réalisé pour étudier la structure du condensat de Bose-Einstein en présence du réseau dans l'espace des impulsions (i.e. après temps de vol).*

III.2.a Expansion d'un condensat depuis le réseau

Nous avons vu dans le chapitre II que, dans un potentiel périodique relativement profond tels que ceux que nous considérons, la fonction d'onde décrivant le condensat se localise à chaque minimum du potentiel. La description la plus intuitive dans ce cas est la description par les fonctions de Wannier (cf. équation II.19). Cette description permet en effet de décrire le système comme une chaîne de condensats de Bose-Einstein. Si N_s puits⁵ sont peuplés de façon égale,

5. En pratique, $N_s \sim 30$.

la fonction d'onde peut alors s'écrire :

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{d}{2\pi}} \sum_{m=1}^{N_s} w(x - md). \quad (\text{III.16})$$

L'expression (III.16) suppose néanmoins une parfaite cohérence entre chacun des puits. Considérons donc une expression plus générale qui s'inspire de (III.16) :

$$\psi(x) = \sum_{m=1}^{N_s} f_0(x - md)e^{i\varphi_m}, \quad (\text{III.17})$$

où φ_m est un facteur de phase qui permet, dans notre cas, de tenir compte de l'éventuelle différence de potentiel chimique dans chaque puits et donc de décrire séparément leur évolution. $f_0(x)$ est ici le profil de densité *in situ* d'un condensat localisé à un minimum du potentiel périodique.

L'analyse de la fonction d'onde par temps de vol nous donne accès à sa transformée de Fourier ou, plus exactement, à son module au carré :

$$\begin{aligned} |\tilde{\psi}(p)|^2 &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \psi(x)e^{-ipx} dx \right|^2 \\ &= |\tilde{f}_0(p)|^2 \left| \sum_{m=1}^{N_s} e^{i\varphi_m} e^{-ipmd/\hbar} \right|^2, \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

où $\tilde{f}_0(p)$ est la transformée de Fourier de la fonction $f_0(x)$. Le second terme, lui, est périodique, de période $\hbar k_L$, et rend donc compte de la structure du réseau.

Nous devons résoudre la question de la phase φ_m pour pouvoir aller plus loin dans notre raisonnement. Intéressons nous tout d'abord au cas le plus simple pour lequel la phase φ_m est constante sur l'ensemble des sites peuplés. Cette situation est valable dans le cas où le taux tunnel J (voir II.23) est suffisamment grand pour que le profil de densité $f_0(x)$ et celui de son voisin $f_0(x - d)$ présentent un recouvrement non négligeable. Cela fixe alors la phase $\varphi_m = \varphi_0$. Il est difficile de définir une transition nette entre le régime dans lequel J est "*suffisamment grand*" ou non. Nous pouvons néanmoins comparer la durée typique d'une séquence expérimentale et le temps caractéristique \hbar/J lié au taux tunnel. Expérimentalement, nous procédons au chargement adiabatique du réseau en $\tau_{adiab} \sim 10 - 30$ ms. Ceci est donc à comparer avec $\hbar/J \sim 50$ ms pour $s = 3$ et $\hbar/J \sim 7$ s pour $s = 10$. Nous nous plaçons donc, dans ce manuscrit de thèse, à cheval entre les deux régimes : le taux tunnel entre deux puits est clairement négligeable pour les réseaux profonds, tels que ceux que nous utiliserons pour l'expérience du double puits dynamique⁶, mais il est du même ordre de grandeur que la durée de l'expérience dans le cas des faibles profondeur que nous considérons ici dans l'optique d'étudier les différentes méthodes de calibration.

6. Cette affirmation n'est valable que dans le cas où le taux tunnel J n'est pas affecté par le caractère chaotique du système étudié dans l'expérience du double puits dynamique. Cela sera une question intéressante à étudier le cas échéant.

Nous considèrerons néanmoins que la phase reste homogène sur la durée des expériences que nous présentons dans ce manuscrit $\varphi_m = \varphi_0$.

Si la phase $\varphi_m = \varphi_0$ est constante, nous obtenons

$$|\tilde{\psi}(p)|^2 = |\tilde{f}_0(p)|^2 \frac{\sin^2\left(\frac{N_s p d}{2\hbar}\right)}{\sin^2\left(\frac{p d}{2\hbar}\right)}. \quad (\text{III.19})$$

L'expression (III.19) nous apprend que, dans le cas d'une chaîne de condensats avec une phase homogène, la distribution en impulsion de la fonction d'onde totale est constituée de pics également espacés de $h/d = \hbar k_L$. Ce résultat est très similaire à celui que nous avons observé pour la diffraction du condensat sur le réseau. De la même façon que précédemment, une analyse par temps de vol nous donne accès à l'espace des impulsions car chaque composante de vitesse moyenne $v_n = n\hbar k_L/m$, sera centrée, au bout d'un temps de vol t_{TOF} , sur la position⁷ : $x_n = v_n t_{TOF}$.

La figure III.9 montre un exemple typique de profil d'interférence après un temps de vol $t_{TOF} = 25$ ms. Trois ordres d'interférence apparaissent clairement et deux ordres supplémentaires émergent légèrement du bruit de fond. La position des pics est déterminée par le pas du réseau et la population dans chaque ordre est, elle, imposée par la valeur de la fonction $\tilde{f}_0(p)$ pour l'impulsion considérée.

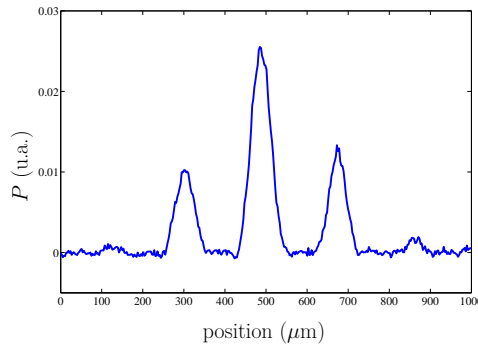


FIGURE III.9 – Profil de densité typique après expansion d'une chaîne de condensats après un temps de vol $t_{TOF} = 25$ ms.

Nous souhaitons à présent savoir s'il est possible d'utiliser quantitativement un profil de diffraction de ce type afin de remonter à la profondeur du potentiel périodique. Pour cela, nous devons traiter quantitativement le profil *in situ* de chaque condensat $f_0(x)$ et sa transformée de Fourier $\tilde{f}_0(p)$. Comme nous l'avons déjà vu, si le réseau est suffisamment profond, les fonctions de Wannier localisées dans chaque puits du potentiel périodique peuvent être approximées par des gaussiennes. Nous retrouvons alors le cas d'école d'un réseau de puits harmoniques de pulsation $\omega_{\text{harm}} = (2\pi^2 V_0/m d^2)^{1/2}$. La transformée de Fourier d'une gaussienne étant une gaussienne, la fonction $\tilde{f}(p)$ peut alors être exprimée :

$$\tilde{f}_0(p) \propto e^{-p^2 a_0^2 / 2\hbar^2}, \quad (\text{III.20})$$

avec
$$a_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_{\text{harm}}}}.$$

7. Typiquement, nous avons $t_{TOF} = 25$ ms ce qui entraîne $x_1 \sim 200 \mu\text{m}$.

Nous pouvons exprimer la population dans l'ordre d'interférence n comme étant le module au carré de l'expression (III.20). Afin d'éviter tout facteur numérique supplémentaire, nous normalisons chaque population dans l'ordre n par la population dans l'ordre central et obtenons les populations normalisées⁸ P_n . Connaissant l'expression de la pulsation propre de l'oscillateur harmonique en fonction de la profondeur du potentiel périodique, nous obtenons une expression simple pour la population dans l'ordre n :

$$\begin{aligned} P_n &= e^{-(2\pi na_0/d)^2} \\ &= e^{-2n^2/s^{1/2}}. \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

En inversant cette relation, nous trouvons l'expression de la profondeur du potentiel périodique en fonction de la population normalisée dans l'ordre n :

$$s_{\text{gauss}} = \left(\frac{2n^2}{\ln(P_n)} \right)^2. \quad (\text{III.22})$$

L'expression (III.22) peut donc a priori être utilisée pour calibrer la profondeur du potentiel. Rappelons que trois hypothèses doivent être vérifiées afin que cette expression soit pertinente :

- Le réseau doit être suffisamment profond pour que l'approximation des fonctions de Wannier par des gaussiennes soit appropriée.
- La phase de la chaîne de condensats doit être homogène.
- Le chargement du réseau doit être parfaitement adiabatique.

En ce qui concerne la première hypothèse, P. Pedri *et al.* ont montré dans [99] qu'il est possible de traiter numériquement ce problème dans le régime des réseaux peu profonds, pour lesquels l'approximation gaussienne est trop peu précise. Une nouvelle expression analytique peut alors être obtenue [98] :

$$s_{\text{corr}} = \left(\frac{2n^2}{\ln(P_n)} \right)^2 P_n^{1/4}. \quad (\text{III.23})$$

Les deux autres hypothèses seront discutées dans le dernier paragraphe de cette section. Nous y verrons la comparaison entre cette théorie et nos résultats expérimentaux.

III.2.b Résultats expérimentaux

Dans cette section nous présentons les résultats expérimentaux obtenus en appliquant le protocole schématisé figure III.8. Le point de départ de l'expérience est, à nouveau, la production d'un condensat constitué de $\sim 2.5 \times 10^5$ atomes. Ce condensat est alors chargé adiabatiquement dans le réseau de sorte à peupler majoritairement la bande fondamentale du réseau⁹. Le réseau est alors maintenu pendant quelques ms avant que tout confinement soit coupé ; le condensat entre ensuite en chute libre pendant 25 ms et nous en prenons une image par absorption.

8. Attention, suite à cette renormalisation, nous avons $\sum_n P_n \neq 1$. En particulier, $P_0 = 1$.

9. Pour charger adiabatiquement le condensat dans le réseau, nous augmentons la puissance dans chacun des bras du réseau selon la formule $P(t) = P_{\text{max}}((k+1)(t/\tau)^k - k(t/\tau)^{k+1})$, avec $k = 11$ et $\tau = 10$ à 30 ms

Résultats

Les profils de densité ainsi obtenus sont représentés figure III.10.

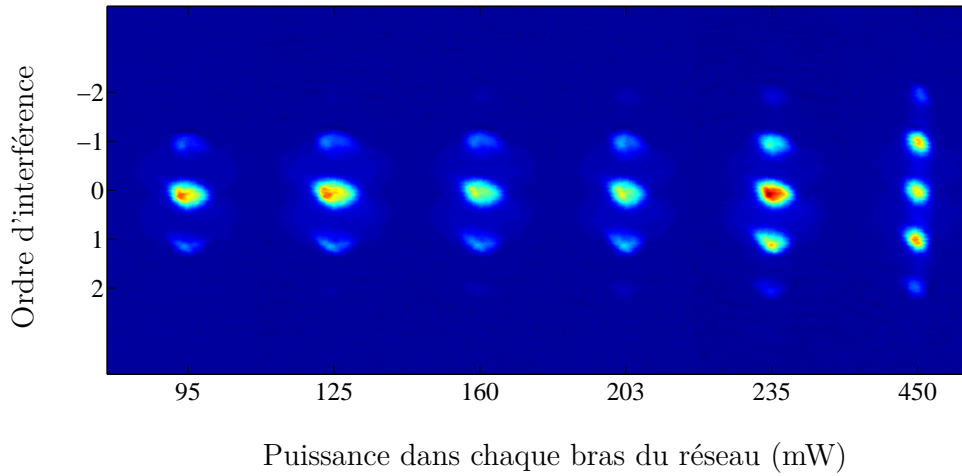


FIGURE III.10 – *Profils d'interférence après 25 ms de temps de vol en fonction de la puissance dans chaque bras du réseau.*

Rappelons que l'imagerie par temps de vol nous donne accès à la distribution en impulsion initiale du condensat ; ainsi, l'ordre d'interférence +1 correspond aux atomes ayant initialement une impulsion $\hbar k_L$. Nous voyons sur cette figure que, conformément à ce qui est prédit par l'expression (III.21), plus la puissance augmente, plus la profondeur s du réseau augmente et donc plus la population dans les ordres d'interférence élevés augmente également.

Afin d'appliquer les modèles définis dans la section précédente (III.2), nous ajustons chacun des ordres d'interférence par une gaussienne et mesurons ainsi les quantités P_n ¹⁰. À partir des populations dans chacun des ordres, nous pouvons alors déduire la profondeur du potentiel. Ces résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous. Les résultats de la calibration par diffraction Kapitza-Dirac s_{KD} y sont aussi consignés afin de pouvoir comparer les deux méthodes :

Puissance (mW)	s_{corr}	s_{gauss}^{ordre1}	s_{gauss}^{ordre2}	s_{KD}
95	1.21 ± 0.5	1.76 ± 0.6	–	2.8 ± 0.3
125	1.73 ± 0.6	2.40 ± 0.7	–	3.7 ± 0.3
160	3.71 ± 0.4	4.67 ± 0.3	6.17 ± 1	5 ± 0.2
203	5.71 ± 0.5	6.91 ± 0.6	7.89 ± 1	6.1 ± 0.2
235	8.24 ± 0.7	9.68 ± 0.8	11.08 ± 1	7.7 ± 0.2
450	251 ± 93	244 ± 91	35 ± 3.4	14 ± 0.2

10. Du fait du nombre d'ordre d'interférence et donc du grand nombre de paramètres d'ajustement, nous avons décidé de traiter ces données à l'aide du logiciel *WaveMetrics Igor Pro*.

Discussion

Les résultats obtenus par cette méthode diffèrent notablement des résultats obtenus par diffraction Kapitza-Dirac. Ceci doit a priori être expliqué par le non respect d'une des hypothèses précisées dans le paragraphe précédent. L'hypothèse d'une phase inhomogène aléatoire, due au faible taux tunnel J est un candidat a priori intéressant pour expliquer ces divergences. Néanmoins, comme il a été montré dans [109], l'interférence d'une chaîne de condensats incohérents entraîne, certes, une répartition différente des atomes dans les ordres d'interférence, mais surtout un déplacement aléatoire de la figure d'interférence (dû à l'ajout d'une phase aléatoire sur chacun des sites du réseau) qui mène, après moyennage, à un profil d'interférence plat. Nous n'observons pas ce genre de phénomène sur notre dispositif ce qui montre que le taux tunnel est encore suffisant pour homogénéiser la phase sur les durées typiques de nos expériences.

La dernière hypothèse en cause est donc celle du chargement adiabatique. Cette constatation nous a conduite à découvrir l'existence d'un bruit électrique sur (tous) nos appareils branchés sur le secteur. Ce bruit comporte plusieurs composantes de fréquences allant de 60 à 90 kHz, ce qui est typique de l'ordre de grandeur des fréquences de piégeage dans chaque puits du réseau et peut donc entraîner des excitations paramétriques lors du chargement si la profondeur du réseau est grande. De même, un maintien long des atomes dans le réseau peut entraîner du chauffage. Notre équipe est actuellement en train de régler ce problème ce qui devrait permettre à l'avenir de s'affranchir de ce chauffage qui nous empêche actuellement d'utiliser la méthode d'interférence pour calibrer la profondeur de notre réseau.

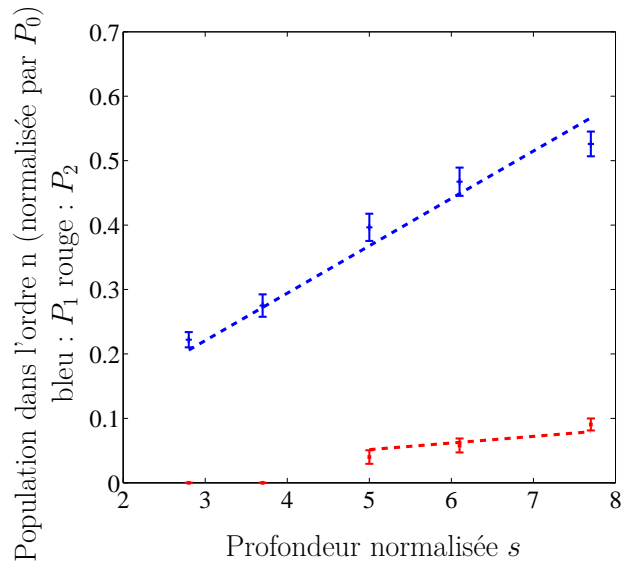


FIGURE III.11 – *Pseudo-calibration.* À chaque valeur de profondeur normalisée s , déterminée par diffraction Kapitza-Dirac, nous associons une population P_n dans l'ordre d'interférence 1 (+) et 2 (■). La ligne pointillée bleue (respectivement rouge) correspond à l'ajustement des données pour l'ordre d'interférence 1 (respectivement 2). L'ajustement obtenu est $P_1 = 0.074s$ (respectivement $P_2 = 0.010s$).

Néanmoins, les figures d'interférence sont stables et répétables. De plus, à faible profondeur, nous avons vérifié que le chargement est bien adiabatique et que ce bruit ne pose pas de problème pour des maintiens dans le réseau de quelques millisecondes. Nous pouvons donc associer à chaque puissance dans les bras du réseau une valeur de population P_n dans chacun des ordres d'interférence et une profondeur s déterminée, elle, par la diffraction Kapitza-Dirac (voir figure III.11). Cette pseudo-calibration sera utile dans le dernier chapitre de ce manuscrit V.

III.3 Micro-oscillations d'une chaîne de condensats : application à la calibration

Comme nous l'avons vu dans le chapitre II, nous avons porté une attention toute particulière à garder les degrés de liberté nécessaires à l'application du microscope par rotation dans l'espace des phases. Cela requiert notamment la possibilité de décaler spatialement le réseau optique de quelques centaines de nanomètres afin d'entraîner l'oscillation microscopique de chaque condensat initialement localisé à un minimum du potentiel périodique. Ce décalage est réalisé en introduisant un déphasage θ_0 sur l'un des bras du réseau optique. Le potentiel alors créé est :

$$V(x) = V_0 \cos^2 \left(\frac{\pi x}{d} + \theta_0 \right). \quad (\text{III.24})$$

Un déphasage de 90° correspond donc à un décalage d'une demi-période.

Ce degré de liberté ouvre de fait la perspective d'une nouvelle méthode de calibration dont nous présentons dans cette partie le principe initial ainsi que les résultats (parfois surprenants) que nous avons obtenus.

III.3.a Principe de la calibration par oscillation de la chaîne de condensats

Nous présentons dans cette sous-section l'idée à la base de notre calibration par la micro-oscillation de la chaîne de condensats au sein du potentiel périodique.

Le principe est en réalité très simple et est représenté figure III.12 : nous chargeons adiabatiquement un condensat dans le réseau optique. Après ce chargement, nous décalons brusquement le réseau puis nous le maintenons en place pendant un temps t_{maintien} afin d'observer la dynamique de micro-oscillation engendrée par la nouvelle condition initiale.

Interférence entre paquets d'ondes en mouvement

Considérons, pour commencer, une particule dans un potentiel harmonique de pulsation ω_{harm} , $V_{\text{harm}}(x) = \frac{1}{2}m\omega_{\text{harm}}^2 x^2$. Si les conditions initiales sont $x(t=0) = x_0$ et $v(t=0) = 0$, alors la particule oscille dans le potentiel harmonique avec une pulsation ω_{harm} et une amplitude de mouvement x_0 . La vitesse maximale

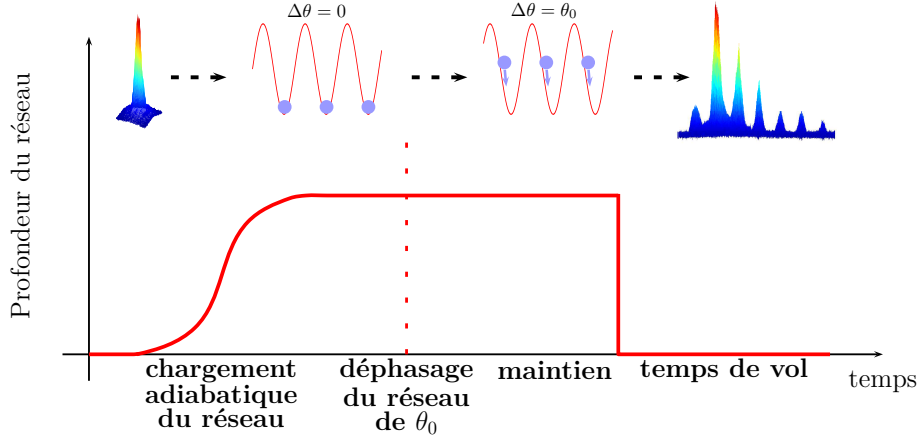


FIGURE III.12 – *Protocole expérimental réalisé pour étudier les micro-oscillations d'une chaîne de condensats.*

acquise par la particule lorsqu'elle est localisée au fond du puits harmonique en $x = 0$ est alors $v_{max} = x_0 \omega_{\text{harm}}$. Posons ici quelques ordres de grandeurs propres au dispositif expérimental que nous considérons. Le pas du réseau optique est $d = 532$ nm, l'amplitude du mouvement sera donc typiquement $x_0 \sim 100$ nm. La fréquence de piégeage au sein de chaque puits est elle de l'ordre de $\omega_{\text{harm}} = 2\pi \times 8$ kHz. Cela nous donne une vitesse maximale de l'ordre de $v_{max} \sim 5$ mm.s⁻¹.

Passons à présent au cas d'un réseau de puits harmoniques. Dans chacun de ces puits, nous considérons un condensat avec $\bar{x}(t = 0) = x_0$ (suite au décalage du réseau) et $\bar{v}(t = 0) = 0$. Dans ce modèle simple, de la même façon que précédemment, chaque particule oscille dans son puits.

Nous procédons ensuite à une imagerie par temps de vol. Lors de leur expansion, les paquets d'ondes interfèrent entre eux et cela donne lieu à une figure d'interférence, comme nous l'avons vu dans la section précédente. La différence, ici, est que les condensats ne sont initialement pas au repos. Ajoutons également l'hypothèse d'une parfaite cohérence entre chacun des condensats. Nous avons alors vu précédemment que la densité atomique après temps de vol s'écrit :

$$|\tilde{\psi}(p)|^2 = |\tilde{f}(p)|^2 \frac{\sin^2\left(\frac{N_s p d}{2\hbar}\right)}{\sin^2\left(\frac{p d}{2\hbar}\right)}, \quad (\text{III.25})$$

où $\tilde{f}(p)$ est la transformée de Fourier de la distribution atomique *in situ* dans chaque puits du réseau.

Durant leur oscillation, le centre de masse de chaque condensat oscille. Nous introduisons donc le paramètre de loi d'échelle η , qui correspondent au mouvement du centre de masse en fonction du temps. Nous pouvons alors écrire la fonction d'onde de chaque condensat sous la forme :

$$\begin{aligned}
& f(x, t) = \sqrt{n(x, t)} e^{iS(x, t)}, \\
\text{avec} \quad & n(x, t) = n_0(x - \eta), \\
& S(x, t) = \frac{m}{\hbar} (\dot{\eta}(x - \eta)), \\
\text{et} \quad & \ddot{\eta} + \omega^2 \eta = 0.
\end{aligned} \tag{III.26}$$

En prenant la transformée de Fourier de cette fonction, nous obtenons l'expression de densité atomique dans l'espace des impulsions :

$$\left| \tilde{\psi}(p) \right|^2 = \left| \tilde{f}_0(p - m\dot{\eta}) \right|^2 \frac{\sin^2\left(\frac{N_s p d}{2\hbar}\right)}{\sin^2\left(\frac{p d}{2\hbar}\right)} \quad \text{avec} \quad \tilde{f}_0(p) = \frac{a_0}{\pi^{1/4} \hbar} e^{-p^2 a_0^2 / 2\hbar^2}. \tag{III.27}$$

La densité atomique après temps de vol est donc, comme précédemment, constituée de pics également espacés de $\hbar k_L$, convolués avec une gaussienne dont le centre oscille de la même façon que chacun des condensats localisés à chaque minimum du potentiel périodique. Nous avons ainsi une empreinte de la micro-oscillation des condensats. En effet, bien que l'amplitude réelle des oscillations soit très faible, l'analyse par temps de vol nous permet de distinguer les atomes ayant une vitesse nulle de ceux ayant une vitesse maximale v_{max} ; nous pouvons ainsi observer la dynamique des condensats.

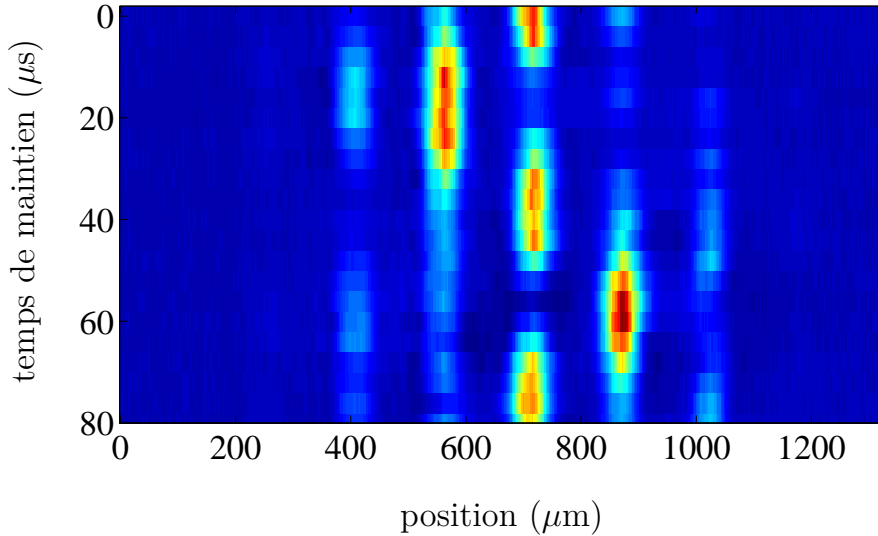


FIGURE III.13 – Densité atomique après temps de vol en fonction de la position et du temps de maintien du réseau après un décalage $\theta_0 = 45^\circ$. Chaque ligne correspond à un temps de maintien différent et est moyennée sur deux images.

Nous pouvons voir sur la figure III.13 un résultat typique d'oscillation d'une chaîne de condensats. Ces données représentent la densité atomique décrite par l'expression (III.27) en fonction du temps de maintien du condensat dans le potentiel périodique après avoir introduit un déphasage de 45° sur l'un de bras du réseau. Chaque ligne correspond à un temps de maintien différent dans le réseau

décalé¹¹. Le réseau optique utilisé est obtenu par l'interférence de deux faisceaux de puissance 160 mW, ce qui, d'après les calibrations réalisées précédemment, correspond à une profondeur $s = 5$, et donc à une pulsation harmonique au fond des puits $\omega_{\text{harm}} = 2\pi \times 18$ kHz. Nous allons maintenant analyser cette image afin de savoir si une étude quantitative de l'oscillation nous permet de remonter à la profondeur du réseau.

Rappelons que l'image que nous observons figure III.13 est représentative de l'espace des impulsions. La figure III.14 explicite la correspondance entre la densité atomique après temps de vol et l'oscillation *in situ* des condensats dans chaque puits de potentiel. Lorsque la figure d'interférence est centrée sur l'ordre 0, les condensats se trouvent sur les pentes des puits à vitesse nulle, et lorsque la figure d'interférence est décalée, les condensats se trouvent dans le fond des puits, à vitesse maximale.

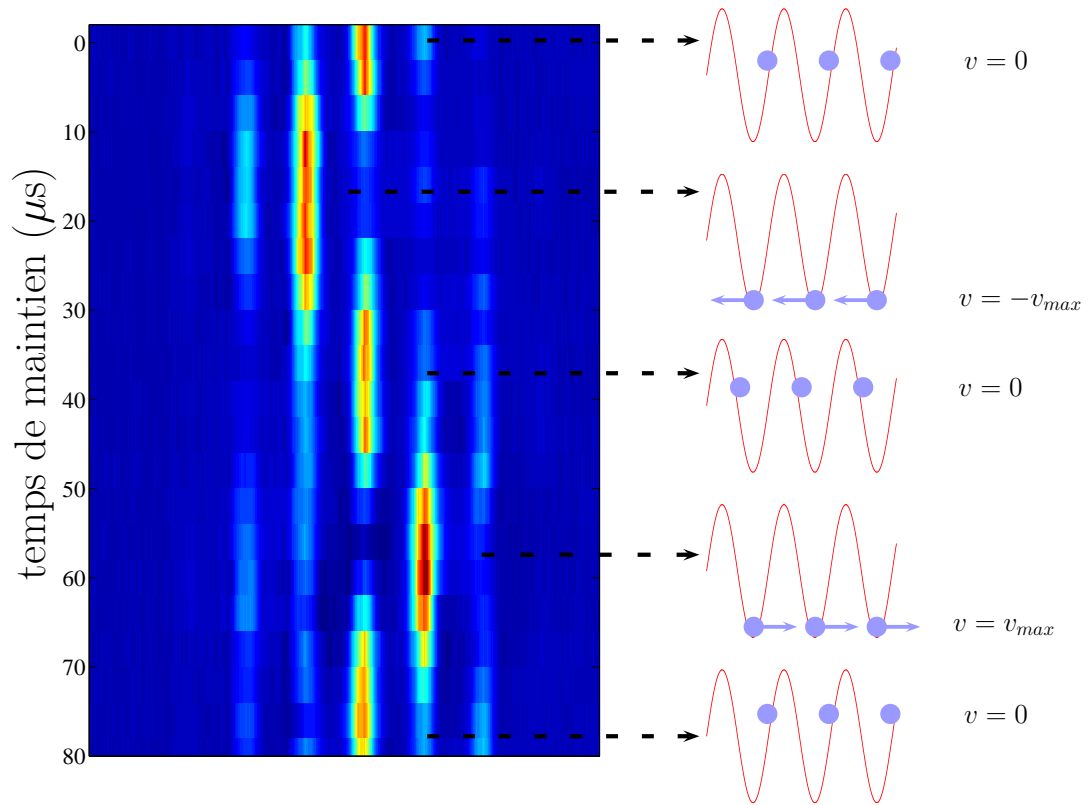


FIGURE III.14 – Correspondance entre l'image par absorption obtenue après temps de vol et l'oscillation *in situ* de la chaîne de condensat.

Nous avons estimé la fiabilité du déphasage initial en reproduisant la même expérience que précédemment, en maintenant les atomes dans le réseau décalé pendant un temps $t_{\text{maintien}} = T_{\text{oscil}}/4$, de sorte à transférer aux atomes la vitesse maximale v_{max} , pour différents déphasages initiaux variant de 0 à 180°. Les ré-

11. Comme nous ne nous intéressons qu'à la distribution de vitesse dans l'axe du réseau, chaque image a été intégrée selon la verticale, donnant un profil de densité dans l'axe du réseau.

sultats de cette expérience sont représentés sur les figures III.15 et III.16.

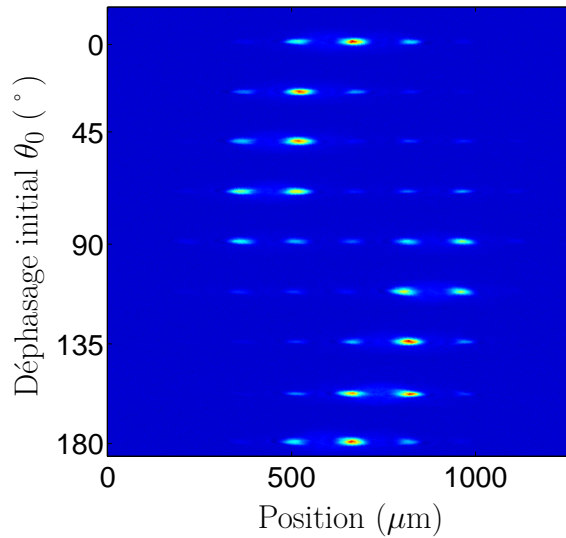


FIGURE III.15 – Densité atomique après un maintien de $t_{\text{maintien}} = T_{\text{oscil}}/4$ en fonction de la position et du déphasage initial θ_0 . Un déphasage de 90° correspond à un décalage initial d'une demi-période du réseau.

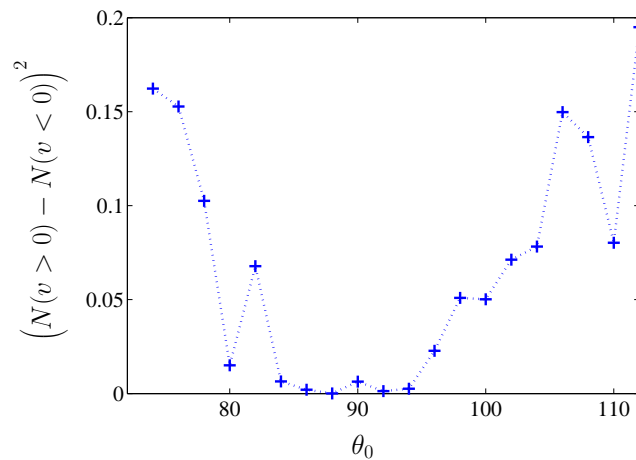


FIGURE III.16 – Détermination de la précision du décalage initial du réseau : comparaison, après un quart de période d'oscillation, du nombre d'atomes ayant une vitesse positive avec le nombre d'atomes ayant une vitesse négative en fonction de θ_0 .

Sur la première figure, nous voyons que, comme attendu, la figure d'interférence devient symétrique aux alentours de $\theta_0 = 90^\circ$. En effet, dans ce cas, nous déplaçons le réseau d'une demi-période, de sorte que les atomes se retrouvent non plus aux minima du potentiel périodique mais aux maxima. Chacun des condensats se sépare alors en deux parties qui oscillent dans deux puits voisins avec une vitesse à tout moment opposée. Pour évaluer la précision de notre déphasage, nous comparons sur la figure III.16 le nombre d'atomes ayant une vitesse positive

après $t_{\text{maintien}} = T_{\text{oscil}}/4$ au nombre d'atomes ayant une vitesse négative. Autour de $\theta_0 \sim 90^\circ$, ces deux quantités sont bel et bien égales et nous pouvons estimer la précision sur le déphasage initial à $\pm 4^\circ$.

Étude de l'amplitude de l'oscillation

Concentrons nous tout d'abord sur l'amplitude de l'oscillation que nous observons. Lorsque nous décalons le réseau optique, les atomes se retrouvent sur le bord des puits harmoniques à vitesse nulle (voir figure III.14). Par simple conservation d'énergie nous obtenons alors la vitesse maximale acquise par les atomes après $1/4$ de période d'oscillation qui s'exprime de la façon suivante :

$$v_{\text{max}} = \sin(\theta_0) \sqrt{\frac{2E_L}{m}} s. \quad (\text{III.28})$$

L'expression (III.28) établit une relation entre v_{max} et s ce qui nous permet a priori de calibrer le réseau. L'avantage conceptuel de cette méthode est qu'elle ne repose sur aucun modèle : le principe de conservation de l'énergie et la connaissance de la forme du réseau optique suffisent.

Afin d'extraire cette information, nous procédons à un ajustement des données en considérant que chaque ordre d'interférence est assimilable à une gaussienne d'amplitude fixée à 1 et que l'enveloppe, qui décrit l'oscillation, est assimilable à une ou deux gaussiennes (plus de détails sur le traitement sont donnés dans l'annexe B).

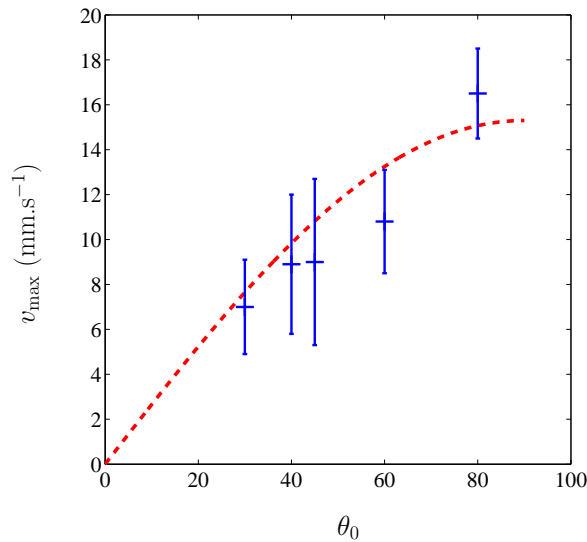


FIGURE III.17 – Évolution de la vitesse maximale transférée aux atomes en fonction de l'angle de déphasage initial. La ligne rouge pointillée correspond à l'expression (III.28) (la profondeur s a été déterminée via la méthode de diffraction Kapitza-Dirac). Les points en bleu correspondent aux mesures expérimentales.

Afin vérifier la validité de l'expression (III.28), nous mesurons l'évolution de la vitesse v_{max} en fonction du déphasage initial θ_0 . Ces mesures sont représentées

figure III.17. La puissance laser dans chacun des bras créant le réseau optique est $P = 125$ mW, ce qui correspond, d'après la calibration par diffraction Kapitza-Dirac, à un réseau optique de profondeur $s = 3.7$.

Les mesures réalisées reflètent correctement l'évolution attendue. Les barres d'erreur importantes proviennent de deux contributions : d'une part de l'incertitude sur l'angle θ_0 et d'autre part de la difficulté de l'ajustement réalisé : chaque ordre d'interférence est ajusté par une gaussienne. Chaque gaussienne a la même amplitude et la même largeur. Chaque centre de gaussienne est également une variable. Nous ajoutons à cela une ou deux gaussiennes pour ajuster l'enveloppe avec l'amplitude, le centre et la largeur variable. Nous avons donc au final entre 7 et 14 variables d'ajustement, toutes inter-dépendantes, ce qui fragilise considérablement la qualité de l'ajustement.

Utilisons à présent l'expression (III.28) afin de calibrer la profondeur du potentiel périodique. Nous fixons le déphasage initial à $\theta_0 = 45^\circ$ et déduisons la profondeur s de la mesure de v_{\max} pour différentes puissance laser dans les bras créant le réseau optique. Les résultats sont représentés figure III.18. Sur cette même figure avons représenté les résultats obtenus à partir de la méthode de diffraction que nous avons présenté précédemment (III.1) Ces deux méthodes sont en très bon accord. L'ajustement linéaire obtenu à partir de la méthode présentée ici donne exactement le même résultat $s = 0.03P[\text{mW}]$. Les barres d'erreur sont néanmoins beaucoup plus importantes du fait de la difficulté des ajustements de la densité atomique de chaque image.

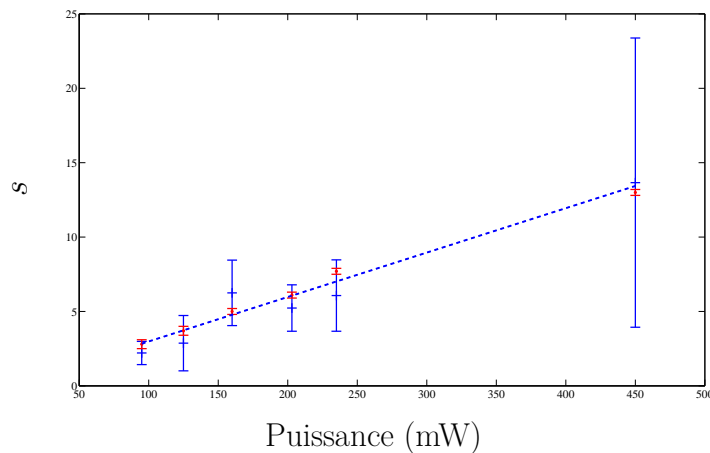


FIGURE III.18 – Les croix bleues correspondent à la profondeur normalisée s déduite de la mesure de v_{\max} . La ligne bleue correspond à l'ajustement linéaire de ces données. Les points rouges correspondent aux résultats obtenus par la méthode de diffraction Kapitza-Dirac.

Nous voyons sur ces données que l'étude du micro-mouvement des atomes au sein de chaque puits du réseau a le potentiel d'être une méthode de calibration efficace mais est entachée par la dépendance de la grandeur mesurée (ici v_{\max}) avec l'angle θ_0 du déphasage initial ainsi que la nécessité de procéder à un ajustement difficile qui requiert un grand nombre de variables d'ajustements. Dans la suite de cette section, nous nous intéressons à un autre angle d'attaque pour utiliser

la micro-oscillation comme calibration de la profondeur du réseau : la période d'oscillation.

Étude de la période d'oscillation

Revenons à la correspondance entre l'oscillation dans l'espace des impulsions et l'oscillation dans l'espace réel (figure III.14). Nous voyons tout d'abord que, si les condensats oscillent avec une période T_{oscil} , la densité dans l'ordre d'interférence central évolue de façon périodique, avec $T_{\text{central}} = T_{\text{oscil}}/2$. L'analyse de l'évolution temporelle de l'ordre d'interférence central nous permet donc d'avoir directement accès à la période d'oscillation des condensats. Nous obtenons, dans le cas particulier représenté figure III.13, $T_{\text{oscil}} = 76.6 \mu\text{s} \pm 1.6 \mu\text{s}$. Nous pouvons commencer par développer un raisonnement naïf en considérant que les condensats sont indépendants les uns des autres et oscillent dans le potentiel non harmonique :

$$V(x) = -sE_L \cos^2\left(\frac{\pi x}{d}\right). \quad (\text{III.29})$$

La conservation d'énergie nous permet alors de déduire la période d'oscillation en fonction de la profondeur normalisée s :

$$T_{\text{théo}}(s) = \frac{T_{\text{harm}}(1)}{\sqrt{s}} f(\theta_0), \quad (\text{III.30})$$

où $T_{\text{harm}}(1) = 123, 285 \mu\text{s}$ est la période d'oscillation pour un potentiel de profondeur $s = 1$ en ayant négligé toute influence des non harmonicités. $f(\theta_0)$ contient justement l'effet des non harmonicités du potentiel sur la période d'oscillation et dépend évidemment du déphasage initial θ_0 que nous avons imprimé au réseau. Cette fonction a pour expression :

$$f(\theta_0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \theta_0}}. \quad (\text{III.31})$$

L'expression (III.30) nous permet a priori de calibrer la profondeur du potentiel périodique par la simple mesure de l'évolution du nombre d'atome dans l'ordre d'interférence 0.

Pour $\theta_0 = 45^\circ$, $f(\theta_0) = 1.178$. Connaissant de plus la profondeur donnée par la calibration par diffraction pour le cas représenté figure III.13, nous pouvons en déduire que la période d'oscillation attendue est $T_{\text{théo}}(s = 5) = 64.9 \mu\text{s}$. Ce résultat est significativement différent de la période d'oscillation mesurée expérimentalement qui est, rappelons le, $T_{\text{oscil}} = 76.6 \mu\text{s} \pm 1.6 \mu\text{s}$.

Comme nous l'avons vu, nous avons une incertitude sur θ_0 de $\pm 4^\circ$. Néanmoins, cela ne justifie pas la différence entre la période d'oscillation mesurée et celle obtenue par le raisonnement classique naïf d'oscillation d'une particule dans un potentiel anharmonique. Nous devons donc réfléchir à un modèle plus poussé pour expliquer ces micro-oscillations ! Pour cela, étudions plus avant la dépendance expérimentale de la période avec le déphasage θ_0 . Cette dépendance est représentée figure III.19 où nous comparons la période d'oscillation mesurée expérimentalement à la période d'oscillation calculée à partir de (III.30).

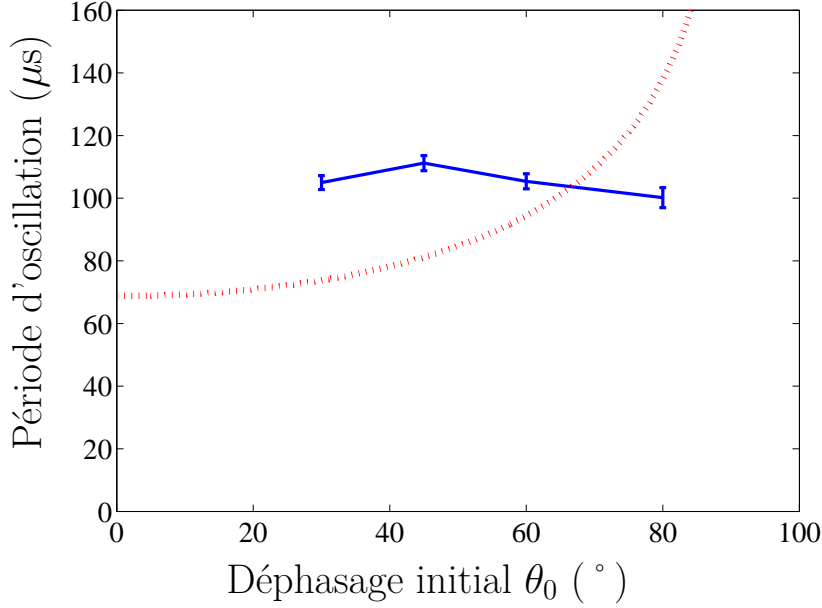


FIGURE III.19 – Période d'oscillation des condensats dans un réseau optique de profondeur $s = 3.21 \pm 0.12$ en fonction du déphasage initial. En bleu : période mesurée expérimentalement. En rouge : période classique attendue.

Cette figure nous montre non seulement que, à faible déphasage, l'oscillation observée expérimentalement ne correspond pas à l'oscillation classique harmonique attendue mais aussi que les non linéarités du potentiel n'ont aucun effet sur la période d'oscillation. Celle-ci est en effet constante aux barres d'erreur près.

Ce résultat contre-intuitif tend à prouver que la micro-oscillation de la chaîne de condensats est un phénomène gouverné par le comportement ondulatoire et collectif de la chaîne de condensats. Le potentiel périodique renormalise la période d'oscillation, agissant, en regard de la période harmonique du fond de chaque puits de potentiel, comme un frein au mouvement de la chaîne de condensats.

Ce phénomène est très similaire aux résultats obtenus par S. Burger *et al.* [94] que nous avons présenté dans le chapitre précédent (voir II.1.b et figure III.20). L'expérience menée dans ce groupe est relativement différente de celle que nous présentons ici car le déplacement initial pour leur expérience est de l'ordre de la taille du condensat (soit $\sim 10 \mu\text{m}$) tandis que nous considérons ici un déplacement initial de l'ordre du pas du réseau ($\sim 100 \text{ nm}$, soit $\sim 1/10^{\text{ème}}$ de la taille du condensat). Ils ont montré que l'oscillation macroscopique ainsi provoquée se fait à la fréquence de piégeage du potentiel harmonique extérieur à ceci près que la masse des atomes est renormalisée par la présence du potentiel périodique qui agit, là aussi, comme un frein au mouvement du condensat. Dans l'expérience présentée par S. Burger *et al.*, la fréquence d'oscillation s'exprime alors comme :

$$\sqrt{\frac{m}{m_{\text{eff}}}} f_{\text{ext}}.$$

Dans notre cas, le condensat est piégé dans un guide de pulsation longitudinale $\omega_{\text{ext}} = 2\pi \times 25 \text{ Hz}$. Pour un réseau optique de profondeur $s = 5$, cela entraînerait alors une oscillation de période 313 ms, ce qui est 3 ordres de grandeur plus grand que la période que nous mesurons expérimentalement ! Là encore, cette théorie

ne permet pas d'expliquer nos observations expérimentales.

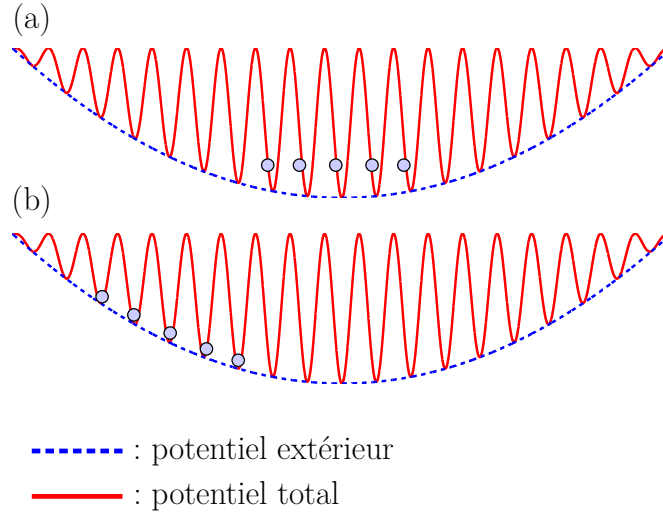


FIGURE III.20 – Différence entre la condition initiale de (a) notre expérience d'étude de la micro-oscillation et de (b) l'expérience de S. Burger et al.

Dans l'optique de mieux comprendre ce phénomène qui est au cœur du microscope par rotation dans l'espace des phases qui doit nous permettre, à terme, d'analyser le transport classique et quantique dans un système mixte grâce à l'expérience du double puits dynamique, nous nous sommes tournés vers la simulation numérique.

III.3.b Simulation numérique

Pour simuler numériquement l'expérience de micro-oscillation, nous devons résoudre l'équation de Gross-Pitaevskii [70,110]. Elle a été développée, par Eugene Gross et Lev Pitaevskii, indépendamment l'un de l'autre, en 1961 et prend la forme suivante :

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V + gN|\psi|^2 \right) \psi, \quad (\text{III.32})$$

où, dans notre cas, $V(x, y, z) = -sE_L \cos^2(\pi x/d) + V_{\text{ext}}(x, y, z)$, avec $V_{\text{ext}}(x, y, z)$ le potentiel extérieur créé par le piège hybride que l'on considèrera harmonique, de pulsation ω_{ext} dans la direction longitudinale du réseau, et où g est la constante de couplage rendant compte des collisions à deux corps à basse énergie. g s'exprime en fonction de la longueur a de diffusion en onde-s :

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}. \quad (\text{III.33})$$

L'équation (III.32) rend donc compte de la dynamique d'un condensat de Bose-Einstein en présence d'interaction. Nous avons procédé à la résolution de cette équation en utilisant la *toolbox* Matlab développée et distribuée gratuitement par R. Duboscq et X. Antoine : GPELab [111,112]. La résolution passe par les étapes suivantes :

Principe du programme de résolution

L'équation (III.32) est tout d'abord adimensionnée de la manière suivante :

$$\text{Nous définissons} \quad \omega_m = \frac{16\hbar}{md^2} \quad \text{et} \quad a_m = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_m}}. \quad (\text{III.34})$$

Ce qui donne l'adimensionnement :

$$\begin{aligned} x &= a_m \tilde{x}, \\ t &= \frac{\tilde{t}}{\omega_m}, \\ \psi &= \frac{\tilde{\psi}}{a_m^{3/2}}. \end{aligned} \quad (\text{III.35})$$

L'équation (III.32) devient alors :

$$i \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{t}} = \left(\frac{-\tilde{\Delta} + (\omega_{\text{ext}}/\omega_m)^2}{2} - \gamma \cos^2 \left(\frac{\pi \tilde{x}}{4} \right) + \beta_3 |\tilde{\psi}|^2 \right) \tilde{\psi}, \quad (\text{III.36})$$

avec $\gamma = V_0/\hbar\omega_m = \pi^2 s/8$ et $\beta_3 = 4\pi aN/a_m$. Comme nous nous intéressons à la physique 1D de notre système (dans la direction x du réseau), nous souhaitons décomposer la fonction d'onde ψ pour isoler la composante longitudinale des composantes transverses [113]. Étant donné que nous utilisons des réseaux relativement profonds, nous pouvons faire l'approximation que chacun des paquets d'atomes composant la chaîne de condensats sont indépendants les uns des autres et que la fonction d'onde ψ^j décrivant le condensat localisé dans le $j^{\text{ème}}$ puits du réseau peut se décomposer sous la forme :

$$\psi^j(\vec{r}) = \psi_{\perp}^j(r_{\perp}) \varphi_x^j(x, t). \quad (\text{III.37})$$

Par la suite, nous ne notons plus l'indice j pour alléger les notations. Dans chaque puits du réseau, la fonction d'onde est alors décrite par l'action classique pour un gaz de bosons :

$$S = - \int \left(\frac{i\hbar}{2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) + \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi|^2 + \frac{\beta_3}{2} |\psi|^4 + V |\psi|^2 \right) d\vec{r} dt. \quad (\text{III.38})$$

En utilisant (III.37) pour ψ , nous pouvons réécrire l'équation (III.38) et minimiser l'action par rapport à φ_x^* . En faisant de plus l'hypothèse que le potentiel dans le $j^{\text{ème}}$ puits, $V(\vec{r})$, est séparable, nous obtenons, après adimensionalisation, l'équation suivante :

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \tilde{\varphi}_x}{\partial \tilde{t}} &= \left(-\frac{1}{2} \tilde{\Delta}_x + \beta_1 |\tilde{\varphi}_x|^2 + \tilde{V}_x + \alpha \right) \tilde{\varphi}_x, \\ \text{avec} \quad \alpha &= \int \left[-\frac{1}{2} (\tilde{\Delta}_{\perp} \tilde{\psi}_{\perp}) \tilde{\psi}_{\perp}^* + \tilde{V}_{\perp} |\tilde{\psi}_{\perp}|^2 \right] d\vec{r}_{\perp}, \\ \text{et} \quad \beta_1 &= \beta_3 \int |\tilde{\psi}_{\perp}|^4 d\vec{r}_{\perp}. \end{aligned} \quad (\text{III.39})$$

Ajoutons à présent l'hypothèse que le profil de densité transverse est de type Thomas-Fermi :

$$|\tilde{\psi}_\perp|^2 = \frac{2a_m^2}{\pi R^2} \left(1 - \tilde{r}_\perp^2 \frac{a_m^2}{R^2} \right), \quad (\text{III.40})$$

où R est la rayon de Thomas-Fermi 2D. Nous en déduisons alors l'expression pour la constante d'interaction à une dimension β_1 :

$$\beta_1 = \frac{4}{3} \frac{ad}{R^2} N_j, \quad (\text{III.41})$$

avec N^j le nombre d'atomes dans le $j^{\text{ème}}$ puits du réseau. Pour notre dispositif, nous avons typiquement $0.1 < \beta_1 < 1$.

À partir de l'équation (III.39), le programme Matlab GPELab utilise un algorithme de *Split Step Fourier* pour déterminer la dynamique du système.

Un second élément clé de la résolution numérique du problème est la définition de l'état initial $\varphi_x(t = 0)$, avant l'introduction d'un déphasage sur le réseau. Pour cela, nous cherchons à connaître l'état fondamental du système considéré en présence d'interaction ce qui est a priori non trivial. Cet état est obtenu par la méthode de propagation en temps imaginaire : une astuce mathématique qui consiste à faire le changement de variable $t = i\tau/\hbar$. L'équation (III.39) devient alors de la forme :

$$-\frac{\partial \tilde{\varphi}_x}{\partial \tau} = \hat{H} \tilde{\varphi}_x, \quad (\text{III.42})$$

avec \hat{H} le hamiltonien du système, et les solutions s'écrivent de la façon suivante :

$$\tilde{\varphi}_x(\tau) = e^{-\tau \hat{H}} \tilde{\varphi}_x(0). \quad (\text{III.43})$$

Nous reconnaissons ici l'opérateur densité (non normalisé) qui décrit l'état d'équilibre statistique dans l'ensemble canonique à la température $1/k_B\tau$. La propagation en temps imaginaire est donc analogue à une propagation en température : au temps imaginaire $\tau = 0$ (et donc à une température élevée), nous devons choisir un état initial qui ne soit pas orthogonal aux états propres de \hat{H} (typiquement, une superposition des états propres du système sans interaction est un bon point de départ). Au fur et à mesure que τ augmente (et donc que la température diminue), le système converge vers l'état d'énergie minimum. Nous pouvons montrer cela en considérant chacun des états propres Ψ_n de \hat{H} , qui est associé à une énergie propre E_n . Le système évoluera en temps imaginaire (i.e. en température) selon :

$$\tilde{\varphi}_x(\tau) = \sum_n C_n e^{-E_n \tau} \Psi_n, \quad (\text{III.44})$$

où C_n est le recouvrement entre l'état initial et l'état propre Ψ_n . Isolons alors l'état fondamental Ψ_0 , d'énergie propre E_0 (qui est donc celui que l'on recherche) du reste :

$$\tilde{\varphi}_x(\tau) = e^{-E_0 \tau} \left(C_0 \Psi_0 + \sum_{n \neq 0} C_n e^{-(E_n - E_0) \tau} \Psi_n \right). \quad (\text{III.45})$$

L'équation (III.45) montre que la contribution de tous les vecteurs propres $\Psi_{n \neq 0}$ s'annule pour $\tau \rightarrow \infty$ (i.e. $T \rightarrow 0$). La résolution en temps imaginaire de l'équation (III.42) permet donc bien de converger vers l'état fondamental du système avec interaction et ainsi de définir l'état initial $\tilde{\varphi}_x(t=0)$.

Nous avons alors tout le nécessaire pour simuler numériquement nos expériences.

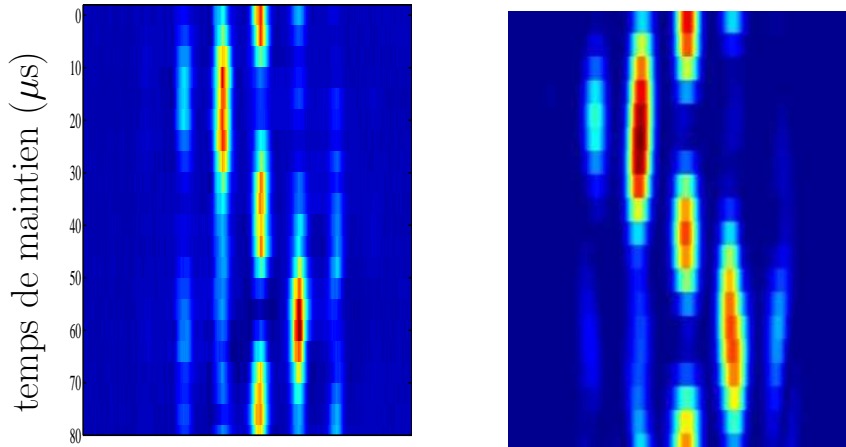


FIGURE III.21 – *Densité atomique après temps de vol en fonction de la position et du temps de maintien dans le réseau après un décalage $\theta_0 = 45^\circ$. À gauche : résultats expérimentaux. À droite : résultats des simulations numériques.*

Résultats des simulations numériques

En nous basant sur la calibration réalisée par diffraction Kapitza-Dirac, nous avons reproduit l'expérience représentée figure III.13. Le résultat, ainsi que la comparaison avec nos données expérimentales, sont représentés figure III.21. Nous voyons sur cette figure la très bonne adéquation entre l'expérience et la simulation. Ces simulations nous permettent tout d'abord d'étudier le quasi-isochronisme des oscillations observé expérimentalement (i.e. le fait que la période d'oscillation ne dépende pas du déphasage initial, voir figure III.19). Nous étudions donc la période d'oscillation de la chaîne de condensats, pour deux angles de déphasage initial ($\theta_0 = 20^\circ$ et $\theta_0 = 70^\circ$) en fonction du nombre de puits de potentiel peuplés. Les résultats de cette étude sont présentés figure III.22. Nous voyons sur cette figure que le quasi-isochronisme de l'oscillation se met en place dès que le potentiel contient 2 puits. Lorsque l'on considère le réseau entier, les oscillations sont bien synchronisées sur environ 5 périodes mais nous remarquons tout de même que l'isochronisme n'est pas parfait et que les trajectoires se déphasent au bout d'un certain temps. Nous sommes donc dans une configuration où nous pouvons utiliser le quasi-isochronisme sur des temps d'oscillation courts, de quelques périodes. De plus, les données figure III.22 sont réalisées avec une enveloppe carrée ; le phénomène de quasi-isochronisme ne dépend donc pas de la forme exacte du potentiel périodique.

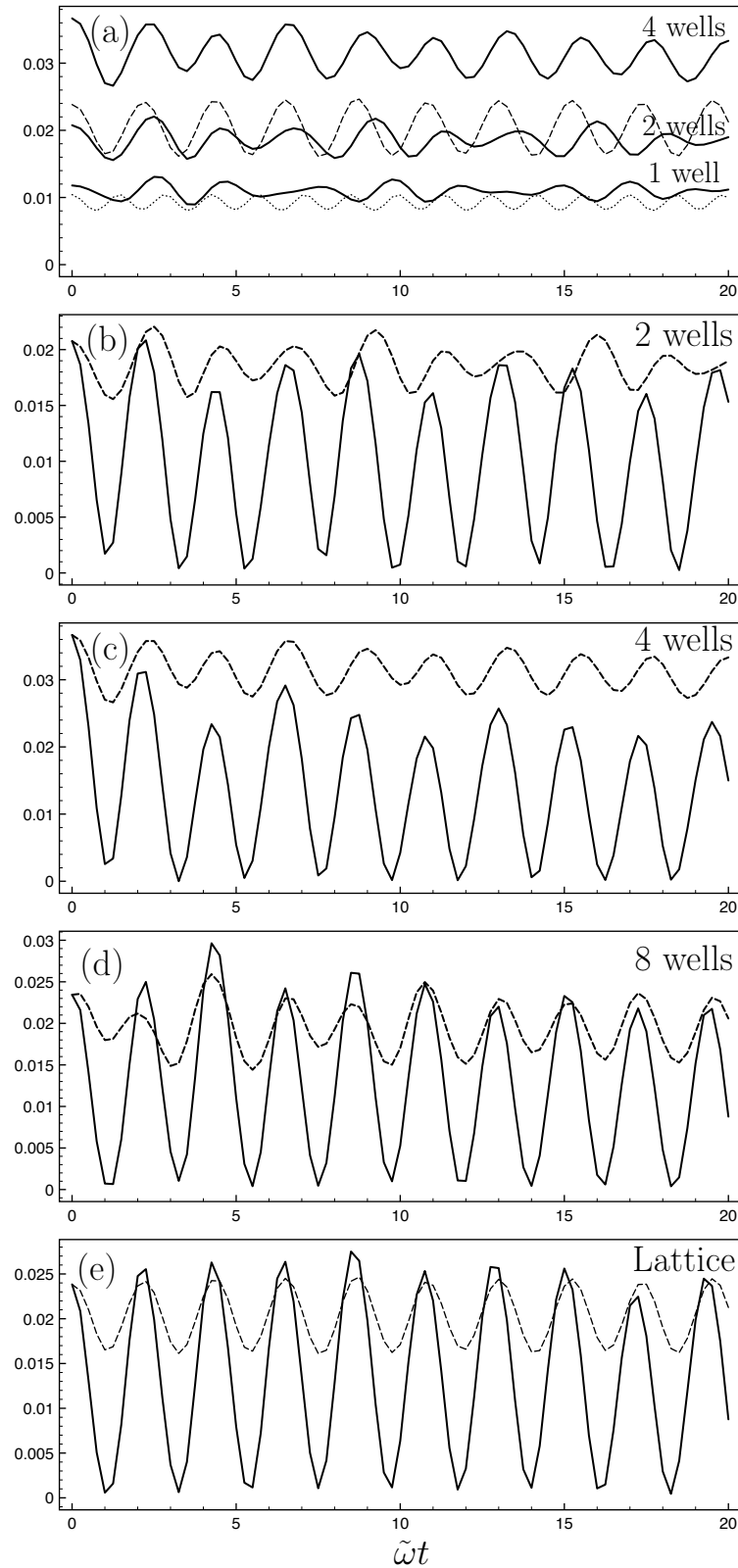


FIGURE III.22 – Étude numérique de la quasi-synchronisation. La densité atomique sur la ligne centrale $p = 0$ est représentée en fonction du temps renormalisé pour différentes conditions. (a) : déphasage initial $\theta = 20^\circ$ pour 1, 2 et 4 puits (lignes pleines), pour le réseau (tiret) et pour le puits harmonique associé au fond des puits du réseau (ligne pointillée). (b), (c), (d) et (e) : Comparaison de la densité atomique sur la ligne centrale ($p=0$) pour $\theta_0 = 20^\circ$ (tirets) et $\theta_0 = 70^\circ$ (ligne pleine) pour 2, 4, 8 puits et pour le réseau [100].

Nous avons alors procédé à une étude numérique systématique de la période d'oscillation en fonction de la profondeur pour différentes conditions d'interactions au sein du condensat et différents potentiels de confinement extérieur. L'ensemble de ces résultats est représenté sur la figure III.23.a. Cette courbe montre une propriété remarquable de la micro-oscillation : dans la gamme de profondeur à laquelle nous nous intéressons (typiquement $2 < s < 10$), la période d'oscillation est quasi indépendante des interactions et du confinement extérieur. Cela en fait un phénomène robuste qui ne dépend que de la profondeur et qui sera donc un bon outil de calibration.

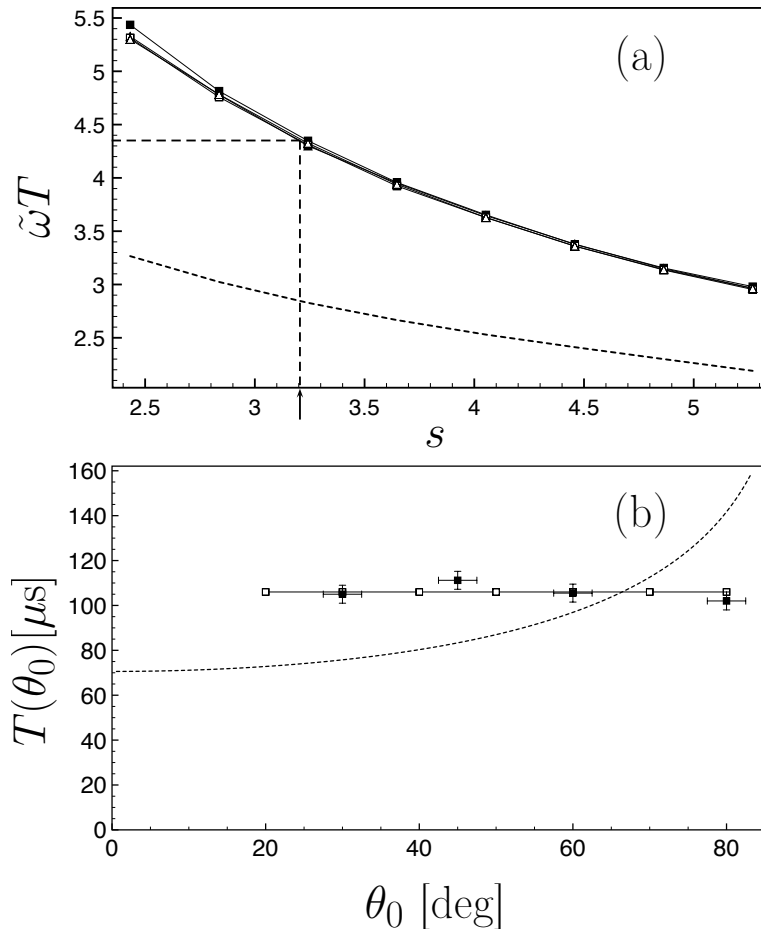


FIGURE III.23 – (a) : Simulations : période d'oscillation normalisée en fonction de la profondeur normalisée du réseau pour différentes valeurs de confinement externe et d'interaction : $\tilde{\omega}_{ext} = 1/50$ (triangles), $\tilde{\omega}_{ext} = 1/262$ (carrés), $\beta_1 = 0.1$ (symboles vides), $\beta_1 = 1$ (symboles pleins). Les tirets et la flèche illustrent le principe de calibration : à partir d'une valeur expérimentale de période d'oscillation, la courbe numérique nous permet d'extraire une profondeur associée. La courbe pointillée correspond à la prédiction classique. (b) : Période d'oscillation en fonction du déphasage initial θ_0 pour un réseau de profondeur normalisée $s = 3.21E_L$: points expérimentaux (carrés pleins), simulation numérique (carrés vides), prédiction classique (ligne pointillée) [100].

III.3.c Calibration

Le protocole de calibration est le suivant : Les simulations numériques nous ont permis de définir une correspondance entre la profondeur du potentiel définie dans le programme de résolution de l'équation de Gross-Pitaevskii et la période d'oscillation mesurée numériquement. Une courbe de calibration a ainsi été obtenue. Cet ajustement, en excellent accord avec les données numériques nous fournit la relation suivante entre la période d'oscillation T et la profondeur normalisée s du réseau :

$$\omega_m T(s) = (a + bs + cs^2)e^{ds}, \quad (\text{III.46})$$

avec $\omega_m = 16\hbar/(md^2) = 24.3 \mu\text{s}$, $a = 11.975$, $b = -1.54017$, $c = 0.2583$ et $d = -0.2502$.

Nous mesurons expérimentalement une période d'oscillation puis nous identifions numériquement quelle profondeur de réseau nous permet de reproduire cette même période à l'aide de la relation (III.46). Afin de valider cette méthode, nous comparons les résultats obtenus numériquement aux résultats donnés par la diffraction Kapitza-Dirac. À chaque mesure de la période d'oscillation nous associons donc une expérience de diffraction Kapitza-Dirac qui nous donne une valeur pour la profondeur normalisée s .

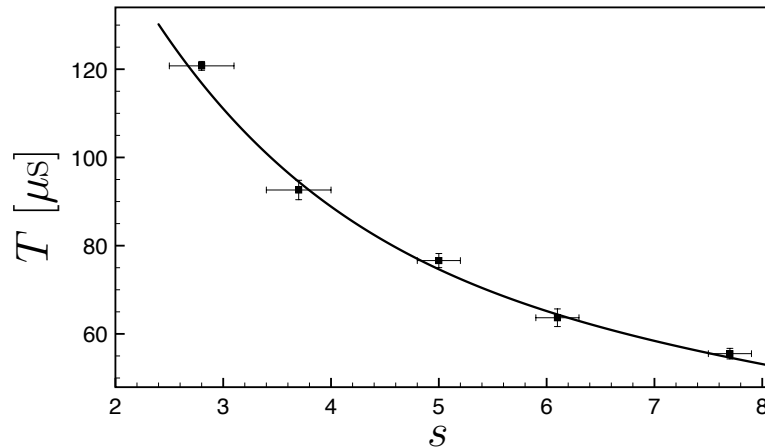


FIGURE III.24 – *Comparaison entre la méthode de calibration par diffraction Kapitza-Dirac et celle par étude de la micro-oscillation de la chaîne de condensats. Les carrés pleins correspondent aux données expérimentales : à chaque période d'oscillation mesurée nous avons associé une profondeur normalisée s obtenue par diffraction Kapitza-Dirac. La courbe en trait plein correspond à un ajustement des résultats numériques. Le bon accord entre les deux types de données valide notre méthode de calibration.*

La figure III.24 représente la période d'oscillation T en fonction de la profondeur s . Nous y voyons, en carré noir, les résultats expérimentaux (c'est-à-dire chaque couple $(T_{\text{oscil}}, s_{\text{KD}})$ obtenus en faisant, pour chaque puissance dans les bras du réseau, deux expériences : une expérience d'oscillation de la chaîne de condensats et une expérience de diffraction). Les résultats des simulations numériques

correspondent à la courbe en trait plein. Cette figure montre un très bon accord entre la méthode de calibration par diffraction et la méthode de calibration de la profondeur à partir de la période d'oscillation que nous proposons.

Nous pouvons à présent calibrer la profondeur de notre réseau à partir de l'oscillation de la chaîne de condensats. Cette méthode de calibration présente plusieurs avantages. Tout d'abord, elle est robuste vis-à-vis des interactions et du potentiel de confinement extérieur. Deuxièmement, l'expérience du double puits dynamique que nous projetons de réaliser nécessite que nous fassions osciller la chaîne de condensats ; nous aurons donc une expérience auto-calibrée, qui ne nécessite pas de faire une seconde prise de donnée pour déterminer la profondeur exacte du potentiel.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté trois méthodes de calibration de la profondeur normalisée s du potentiel périodique. La première méthode consiste en la diffraction du condensat de Bose-Einstein par le réseau optique. Nous avons vu que cette méthode donne des résultats très satisfaisants à partir du moment où l'on prend en compte l'énergie cinétique des atomes durant le temps d'interaction avec le potentiel. Néanmoins, nous souhaitons avoir une méthode de calibration qui se fasse dans les conditions des expériences, c'est à dire après chargement adiabatique du condensat dans le réseau. Pour cela, nous avons détaillé le principe d'une calibration qui repose sur l'étude de la figure d'interférence obtenue après temps de vol. Cette étude est particulièrement sensible au bruit résiduel et nous a permis de mettre en évidence un problème technique de chauffage sur notre dispositif. Ce problème est en cours de résolution mais rend pour le moment impossible l'exploitation quantitative du nombre absolu d'atomes dans les différents ordres d'interférence. Cependant, nous pouvons étudier une variation temporelle du nombre d'atomes sur des temps courts. Nous avons également proposé une nouvelle méthode de calibration basée sur l'étude de la micro-oscillation d'une chaîne de condensats. L'étude de l'amplitude des oscillations, bien que cohérente avec le modèle classique de l'oscillation d'une particule dans un potentiel non harmonique, n'est pas suffisamment précise du fait de sa dépendance envers le déphasage initial θ_0 . L'étude de la période d'oscillation a , elle, conduit à des résultats montrant que l'oscillation est gouvernée par le comportement ondulatoire du condensat de Bose-Einstein. Nous avons procédé à des simulations numériques afin de pouvoir associer à chaque profondeur s une période d'oscillation T , ce qui nous permet de calibrer précisément la profondeur du réseau optique. Cette méthode de calibration est en très bon accord avec la méthode de diffraction Kapitza-Dirac et a l'avantage d'être robuste aux interactions, au confinement extérieur et au déphasage initial et de se faire exactement dans les conditions des expériences que nous projetons.

La période d'oscillation n'est pas le seul élément qui vient confirmer que l'oscillation d'une chaîne de condensats est un phénomène ondulatoire et ne peut pas être prédit par des raisonnements classiques. En effet, ces expériences ont égale-

ment fait apparaître que l'oscillation est ponctuée d'effet tunnel qui se produit aux points de rebroussement de l'oscillation. Nous présentons dans le prochain chapitre l'étude de la dynamique de cet effet tunnel.

CHAPITRE IV

Mesure du temps de traversée tunnel

Sommaire

Introduction	99
IV.1 Le temps de traversée tunnel : une question ouverte	101
IV.1.a Théorie semi-classique	102
IV.1.b Le temps de Wigner	102
IV.1.c Le temps de Larmor	104
IV.1.d Quelques expériences de mesure de temps tunnel . . .	104
Domaine de l'optique : expérience de A. M. Steinberg <i>et al</i>	105
Domaine de la matière condensée : expérience de P. Guéret <i>et al</i>	105
Domaine de la physique attoseconde : expérience de A. S. Landsman <i>et al</i>	106
IV.1.e Condensat de Bose-Einstein dans un réseau	106
IV.2 Observation expérimentale du temps de traversée tunnel	107
IV.2.a Mise en évidence de la présence d'effet tunnel	107
IV.2.b Description de l'expérience en terme de bandes de Bloch	108
IV.2.c Dépendance du temps de traversée tunnel avec l'angle de déphasage initial	110
IV.2.d Comparaison avec la prédiction semi-classique	111
IV.2.e Limites de cette méthode de mesure	112
IV.3 Interféromètre de Mach-Zehnder micrométrique . . .	115
IV.4 Microscope par rotation dans l'espace des phases . .	116
Conclusion	118

Introduction

Le temps est, en mécanique quantique, une question épineuse qui a été soulevée dès les balbutiements de ce domaine et dans de nombreux cas tels que les sauts quantiques, l'effet Zénon quantique, le temps d'arrivée etc. [114]. Parmi les nombreux phénomènes qui soulèvent la question de la définition du temps en mécanique quantique, le temps nécessaire à une particule pour traverser une barrière de potentiel compte parmi les plus prolifiques en terme de nombre d'articles et de théories différentes. Cela reste à l'heure actuelle une question ouverte à laquelle de plus en plus de mesures expérimentales viennent apporter des éléments de réflexion.

De façon assez surprenante, nous avons eu à nous poser cette question au cours de l'expérience d'oscillation d'une chaîne de condensats que nous avons présentée dans le chapitre précédent. Nous avons vu que le comportement des atomes durant leur oscillation est très éloigné de la prédiction classique, notamment en ce qui concerne la période d'oscillation. De la même façon que nous ne nous attendions pas à observer ce comportement, nous ne nous attendions pas à observer ce qui fait aujourd'hui l'objet de ce chapitre. Je propose donc d'introduire le phénomène que nous avons observé en présentant les résultats bruts de l'expérience en question sur la figure IV.1.

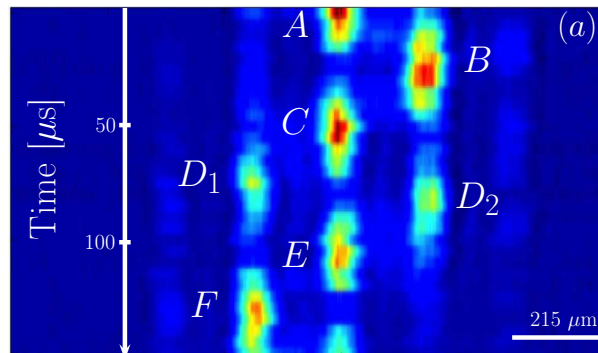


FIGURE IV.1 – Densité atomique en fonction de la position et du temps de maintien dans un réseau décalé de 45° et de profondeur normalisée $s = 3.21$. Chaque ligne correspond à un temps de maintien différent, et deux lignes successives correspondent à un intervalle de temps de $5 \mu\text{s}$. Chaque ligne est moyennée sur deux images.

Le protocole utilisé pour produire ces résultats est exactement le même que celui que nous avons présenté au chapitre précédent III.3 mais nous y voyons apparaître un nouvel élément. Comme nous le verrons pas la suite, les paquets d'atomes D_1 et D_2 correspondent respectivement à une partie du paquet d'atomes initial qui continue son oscillation normalement, et une autre partie qui, au point de rebroussement C , a traversé la barrière de potentiel qui le séparait du puits adjacent par effet tunnel. Nous voyons également sur cette image que les deux paquets D_1 et D_2 sont nettement décalés temporellement, ce que nous attribuons à un *temps de traversée tunnel* supplémentaire pour le paquet D_2 . Dans le chapitre précédent, j'ai pris soin, par souci de lisibilité, d'utiliser des images ne faisant pas

figurer ce phénomène qui, pourtant, était déjà présent, mais se produisait plus tard dans l'oscillation.

Dans ce chapitre, nous présentons brièvement la question du temps de traversée tunnel ainsi que quelques éléments des théories et expériences qui s'attaquent à ce problème. Nous présentons ensuite nos résultats expérimentaux et numériques de mesure du temps de traversée tunnel. Nous verrons également que la succession de deux lames séparatrice C et E mène à une interférence constructive en E , créant ainsi un interféromètre de Mach-Zehnder micrométrique. Enfin, l'effet tunnel qui se produit au point C nous donne une excellente opportunité de tester le protocole de microscope par rotation dans l'espace des phases. Nous présentons donc les résultats de ce test dans la dernière partie de ce chapitre.

IV.1 Le temps de traversée tunnel : une question ouverte

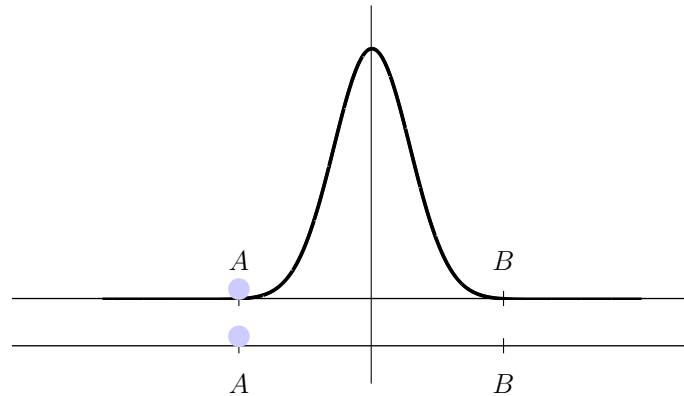


FIGURE IV.2 – Deux particules partent du point A et arrivent au point B . L'une se déplace dans l'espace libre et l'autre au travers d'une barrière de potentiel.

La question que nous nous posons est la suivante : deux particules partent d'un même point A et atteignent un point B , distants d'une longueur d . La première parcourt ce chemin dans l'espace libre et la seconde doit traverser une barrière de potentiel (voir figure IV.2).

Ce problème a été soulevé pour la première fois par MacColl en 1932 [115] qui a fait remarquer que l'effet tunnel à travers une barrière ne doit pas juste être caractérisé par le taux de transmission mais aussi par le temps passé à l'intérieur de la barrière tunnel. Depuis, de nombreux physiciens ont développé des théories afin de prédire le temps tunnel. Dans le cas de l'optique, ces développements ont mené à l'introduction de vitesses tantôt supérieures tantôt inférieures à la vitesse de la lumière. Il est donc apparu que l'expérience était nécessaire pour trancher cette question. Mais ces expériences ont elles aussi mené à des résultats extrêmement divers. Aujourd'hui, le consensus est donc qu'il n'existe pas une unique définition contenant l'ensemble de la question du temps de traversée tunnel. Chaque dispositif expérimental, chaque méthode de mesure, correspond à un modèle bien précis. Cette diversité vient du fait que le temps n'est en général pas associé à une unique observable en mécanique quantique [114, 116]. Dans cette section, nous ne prétendons pas donner une liste exhaustive des points de vue sur ce problème. Néanmoins, afin de dépeindre l'état actuel des réflexions dans la communauté scientifique, nous présenterons trois des principaux modèles différents [114, 116] :

- Le temps semi-classique.
- Le temps de Wigner.
- Le temps de Larmor.

Nous verrons également quelques unes des expériences, dans différents domaines de la physique, qui mènent à la mesure d'un temps de traversée tunnel.

IV.1.a Théorie semi-classique

Considérons la particule traversant la barrière de potentiel. Le temps de traversée semi-classique est donné par [117, 118] :

$$\tau_t = \int_A^B \sqrt{\frac{m}{2(V(x) - E)}} dx, \quad (\text{IV.1})$$

avec $V(x)$ la barrière de potentiel et E l'énergie de la particule avec $V(x) > E$.

Afin de pouvoir mesurer ce temps semi-classique, M. Büttiker et R. Landauer [118] proposent d'utiliser la particule elle-même comme horloge en considérant une barrière dépendante du temps de la forme :

$$V(x, t) = V_0(x) + V_1(x) \cos(\omega t), \quad (\text{IV.2})$$

avec V_1 une faible perturbation sinusoïdale de la barrière statique $V_0(x)$, et ω la pulsation de modulation.

Ce système présente deux régimes :

- Si la période de modulation est grande devant le temps de traversée tunnel, la particule ressentira durant sa traversée un potentiel indépendant du temps et la probabilité de transmission suivra donc la modulation de hauteur de barrière.
- En revanche, si la période de modulation est faible devant le temps de traversée tunnel, la particule verra une barrière effective moyennée, de hauteur V_0 . La probabilité de transmission ne suivra donc plus la modulation de hauteur de la barrière.

La transition entre ces deux régimes se fera lorsque $\omega\tau_t \simeq 1$, ce qui entraîne l'expression semi classique (IV.1) pour le temps de traversée tunnel.

Le protocole proposé pour mesurer le temps tunnel est le suivant :

Une particule d'énergie E se trouvant à l'intérieur de la barrière modulée peut, du fait de la modulation à la pulsation ω , absorber ou émettre un quantum d'énergie $\hbar\omega$. La modulation crée donc dans le spectre d'énergie de la particule des bandes latérales d'énergie : $E \pm \hbar\omega$. Or la traversée de la barrière sera plus facile pour une particule d'énergie $E + \hbar\omega$ que pour une particule d'énergie $E - \hbar\omega$. Plus le temps passé à l'intérieur de la barrière est grand, plus la probabilité d'absorption ou d'émission du quantum $\hbar\omega$ est importante. La mesure des taux de transmission T_+ et T_- correspondant à ces deux énergies permet alors de remonter au temps de traversée tunnel.

IV.1.b Le temps de Wigner

Eugène Wigner a formulé et résolu le problème de la diffusion d'un paquet d'ondes sur une barrière de potentiel à 3 dimensions en 1955 [119]. Dans son modèle, E. Wigner modélise un paquet d'ondes par la superposition de deux ondes sphériques monochromatiques. Nous présentons ici un modèle similaire à 1 dimension tiré de [117]. Nous considérons ici deux ondes planes d'énergie $\hbar\omega$ et $\hbar(\omega + \Delta\omega)$. Leurs vecteurs d'onde sont respectivement k et $k + \Delta k$. Δk et

$\Delta\omega$ sont considérés infiniment petits. La fonction d'onde incidente sur la barrière s'écrit alors :

$$\psi_{\text{inc}} = e^{-i(kx - \omega t)} + e^{-i((k + \Delta k)x - (\omega + \Delta\omega)t)} \quad (\text{IV.3})$$

E. Wigner utilise le centre du paquet d'ondes comme critère pour déterminer l'instant auquel le paquet d'ondes entre ou sort de la barrière de potentiel. Ce centre est le point auquel les deux ondes planes sont en phase.

Pour l'onde incidente, cela se traduit par :

$$\Delta kx - \Delta\omega t = 0. \quad (\text{IV.4})$$

Cette condition reflète bien le fait que la particule incidente se déplace à la vitesse de groupe $v = d\omega/dk = \Delta\omega/\Delta k$.

Les deux ondes vont respectivement accumuler une phase correspondant à leur énergie lors de la traversée de la barrière de potentiel : $\eta(\omega) = \eta$ et $\eta(\omega + \Delta\omega)$. $\Delta\omega$ étant petit, nous pouvons développer au premier ordre la seconde phase accumulée :

$$\eta(\omega + \Delta\omega) = \eta + \frac{d\eta}{d\omega} \Delta\omega. \quad (\text{IV.5})$$

L'onde transmise par la barrière de potentiel s'écrit alors :

$$\psi_{\text{out}} = e^{-i(kx - \omega t + \eta)} + e^{-i((k + \Delta k)x - (\omega + \Delta\omega)t + (\eta + \frac{d\eta}{d\omega} \Delta\omega))}. \quad (\text{IV.6})$$

Le centre de ce paquet d'ondes est donc déterminé par :

$$\Delta kx - \Delta\omega t + \frac{d\eta}{d\omega} \Delta\omega = 0. \quad (\text{IV.7})$$

Si nous revenons au cas d'une particule parcourant le chemin de A à B dans l'espace libre ou en présence d'une barrière de potentiel, nous avons alors directement accès à la différence de durée du parcours, appelé temps de Wigner :

$$\Delta t = \frac{d\eta}{d\omega} = \hbar \frac{d\eta}{dE}. \quad (\text{IV.8})$$

Thomas Hartman a repris en main ce sujet en 1962 [120]. Il l'a appliqué au cas de l'optique et a montré que, dans le cas d'une barrière opaque, le temps de Wigner devient indépendant de la largeur de la barrière ce qui conduit à définir, dans le cas de l'optique, une vitesse de groupe pour un photon supérieure à celle de la lumière. Il s'agit de *l'effet Hartman*.

Cet effet est particulièrement perturbant car il semble en contradiction avec la relativité qui stipule qu'aucune particule ne peut se propager plus vite que la vitesse de la lumière. J.C. Garrison *et al* montrent dans [121] qu'une vitesse de groupe supérieure à la vitesse de la lumière n'est pas en contradiction avec la relativité. En effet, lors de l'interaction entre la barrière de potentiel et le paquet d'ondes, ce dernier est déformé. La vitesse de groupe n'est alors plus la vitesse la plus adaptée pour décrire le système. Une vitesse plus adaptée est la *vitesse de front* introduite par Arnold Sommerfeld [122]. La vitesse de front correspond à la

vitesse du point qui délimite la zone dans laquelle le signal s'annule de celle où le signal est non nul. Cette vitesse de front est, elle, toujours bornée supérieurement par la vitesse de la lumière. Néanmoins, elle n'est pas appropriée à une mesure expérimentale. En effet, au sens strict, elle ne peut pas être mesurée par un détecteur ayant un seuil de détection fini. Expérimentalement, il est donc logique de choisir la vitesse de groupe comme observable, même si celle-ci autorise des vitesses supérieures à la vitesse de la lumière.

IV.1.c Le temps de Larmor

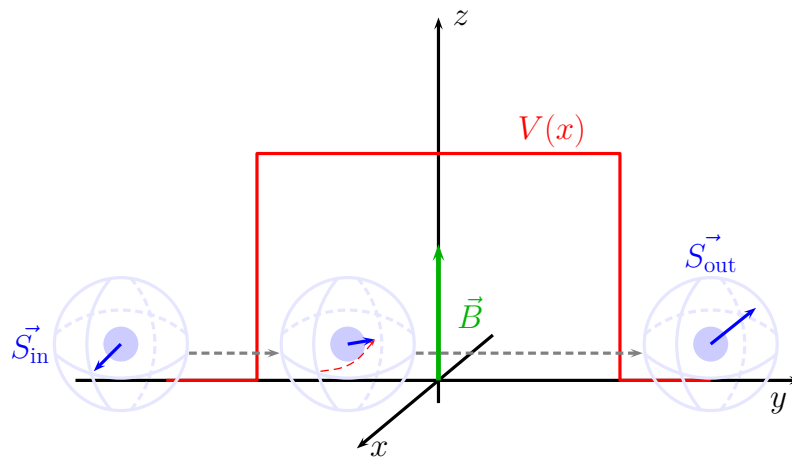


FIGURE IV.3 – Schématisation de la définition du temps de Larmor. Le spin \vec{S} de la particule subit une rotation lors de son passage dans la barrière du fait de l'existence d'un champ magnétique \vec{B} .

La troisième définition du temps de traversée tunnel que nous présentons dans cette section est le temps de Larmor [116]. De la même façon que le temps de M. Büttiker et R. Landauer, elle repose sur l'utilisation d'une horloge.

Supposons que la particule que l'on considère a un moment de spin non nul et qu'elle interagit avec un champ magnétique faible selon l'axe z , uniquement lorsqu'elle se trouve à l'intérieur de la barrière de potentiel (voir figure IV.3).

Considérons que le spin est initialement suivant la direction x , orthogonal au champ magnétique \vec{B} et à la direction de propagation y . Lorsque la particule est à l'intérieur de la barrière de potentiel, son spin acquiert des composantes non nulles selon les directions y et z . Le mesure de l'angle de rotation du spin permet de remonter au temps de traversée tunnel.

IV.1.d Quelques expériences de mesure de temps tunnel

Le temps de traversée tunnel (quelque soit sa définition) a été mesuré dans différents domaines de la physique : l'optique, la physique attoseconde et la physique de la matière condensée. Nous détaillons ici trois expériences correspondant chacune à l'un de ces domaines.

Domaine de l'optique : expérience de A. M. Steinberg *et al*

Dans leur article *Measurement of the Single-Photon Tunneling Time* [123], A. M. Steinberg *et al* rendent compte de la mesure du temps de traversée tunnel d'un photon au travers d'un miroir diélectrique. Le matériau utilisé possède un gap qui s'étend de 600 nm à 800 nm, ce qui rend le photon un objet idéal pour sonder la barrière de potentiel qui résulte de ce gap. La barrière qu'ils considèrent est d'épaisseur $1.1 \mu\text{m}$; le temps de parcours dans le vide pour la lumière est alors de 3.6 fs. C'est également l'ordre de grandeur du temps de traversée tunnel attendu pour leur expérience en présence de la barrière. De fait, ils ont besoin d'une très grande résolution temporelle, ce qu'ils atteignent en utilisant une interférence à deux photons. Pour cela, ils disposent d'une source de photons jumeaux. Chacun des photons emprunte un chemin différent sur l'un desquels la barrière tunnel est ajoutée. Ils sont ensuite recombinaés sur une lame séparatrice placée juste avant un détecteur de coïncidence. Du fait de leur nature bosonique, lorsque les deux paquets d'ondes se recouvrent temporellement, la probabilité de coïncidence de détection sur les deux voies de sorties de la lame séparatrice chute du fait d'une interférence destructive. Cela leur permet de mesurer des retards temporels avec une incertitude de 0.2 fs. Le résultat obtenu est le suivant : $\Delta t = -1.47 \pm 0.2$ fs où Δt est la différence entre le temps de parcours au travers de la barrière tunnel et le temps de parcours dans le vide. Le fait que ce retard soit négatif indique une vitesse de groupe supérieure à celle de la lumière dans le vide c (la vitesse de groupe du photon à l'intérieur de la barrière de potentiel est $1.7c \pm 0.2c$). Dans le cadre de cette expérience, les trois définitions du temps de traversée tunnel présentées ci-dessus mènent à une vitesse supérieure à celle de la lumière. Néanmoins, le temps semi-classique de M. Büttiker et R. Landauer n'est pas en accord quantitatif avec leur résultat. L'expérience réalisée ne permettait en revanche pas de distinguer clairement le temps de Wigner et le temps de Larmor qui restent donc deux définitions plausibles pour expliquer leurs résultats.

Domaine de la matière condensée : expérience de P. Guéret *et al*

Nous passons maintenant au domaine de la matière condensée et la particule que nous allons considérer est un électron. Dans l'article *Effect of a Transverse Magnetic Field on the Tunnel Current through Thick and Low Semiconductor Barriers* de P. Guéret *et al* [124], les auteurs considèrent deux hétérostructures générant donc deux barrières de potentiel différentes de largeur respective $l = 430 \text{ \AA}$ et $l = 250 \text{ \AA}$. La variable mesurée dans cet article est le courant tunnel I (l'effet tunnel étant dans leur cas le mécanisme prédominant de conduction). L'ordre de grandeur du temps de traversée τ_t attendu est inférieur à la pico-seconde ce qui rend la mesure difficile. Néanmoins, l'électron étant une particule dotée d'un spin, l'application d'un champ magnétique à l'intérieur de la barrière de potentiel a une influence sur sa traversée. Les auteurs montrent notamment que la dépendance du courant tunnel I avec le champ magnétique B peut être expliqués par une largeur de barrière effective l' proportionnelle au produit $(B\tau_t)^2$. Connaissant le champ magnétique ressenti par les électrons, les auteurs en déduisent un temps de traversée tunnel $\tau_t \sim 0.1\text{ps}$ qu'ils associent à la définition semi-classique de M.

Büttiker et R. Landauer.

Domaine de la physique attoseconde : expérience de A. S. Landsman *et al*

La dernière expérience que nous abordons est plus récente, elle relève du domaine de la physique attoseconde et est présentée dans l'article *Ultrafast resolution of tunneling delay time* de A. S. Landsman *et al.* [125]. Les auteurs étudient expérimentalement l'ionisation tunnel d'un atome d'hélium interagissant avec un pulse laser femto-seconde intense. La grandeur mesurée ici est la direction d'émission de l'électron par effet tunnel. Il faut donc rendre l'angle définissant cette direction dépendant de l'instant d'émission pour déterminer un temps de traversée tunnel. Cela est réalisé en utilisant un faisceau laser de polarisation elliptique pour générer le pulse. Après la traversée de la barrière de potentiel, l'électron est accéléré par le champ électrique créé par le laser dans une direction dépendant de la direction du champ électrique à l'instant d'émission. Cette technique est connue sous le nom de *Attosecond Angular Streaking* (AAS) [126], ou stries angulaires attosecondes en français. En mesurant l'angle correspondant à la direction d'émission la plus probable, et en lui retranchant l'angle correspondant au AAS ainsi qu'une correction prenant en compte le potentiel de Coulomb créant la barrière, les auteurs en déduisent la contribution du temps passé à l'intérieur de la barrière de potentiel et donc le temps de traversée tunnel qui est typiquement de l'ordre de 100 as. Afin de comparer leurs résultats avec les théories existantes, A. S. Landsman *et al* ont étudié la dépendance de ce temps de traversée tunnel avec l'intensité maximale du pulse laser. En effet, plus l'intensité maximale est grande, plus la barrière de potentiel est fine, ce qui influence le temps de traversée tunnel. Parmi les trois théories que nous avons présentées plus haut, seul le temps de Larmor est en accord avec leurs résultats.

IV.1.e Condensat de Bose-Einstein dans un réseau

La question du temps de traversée tunnel est donc une question ouverte et actuelle. Comme nous l'avons vu, plusieurs domaines de la physique sont concernés. Dans tous les cas que nous avons présentés, la mesure de ce temps est un challenge expérimental du fait des ordres de grandeurs à considérer, ce qui empêche le plus souvent une mesure directe. Revenons au sujet central de ce manuscrit de thèse. Le comportement d'un condensat de Bose-Einstein dans un réseau optique est fortement influencé par l'effet tunnel. Nous avons notamment vu que le taux tunnel J est directement lié à la profondeur du réseau. J gouverne également l'expansion de la fonction d'onde du condensat au sein du réseau [91]. Beaucoup d'études ont été réalisées sur cette question comme par exemple la possibilité de renormaliser J en modulant le réseau de façon appropriée [127–129] (ce que nous aborderons dans le dernier chapitre de ce manuscrit), ou encore l'étude de la physique à N -corps, qui fait intervenir le taux tunnel J et les interactions entre atomes [28, 130, 131]. Néanmoins, la question même du temps tunnel a souvent été éludée. Nous présentons dans la section suivante l'expérience que nous avons

réalisée sur le sujet et dans laquelle nous réalisons une mesure directe du temps de traversée tunnel.

IV.2 Observation expérimentale du temps de traversée tunnel

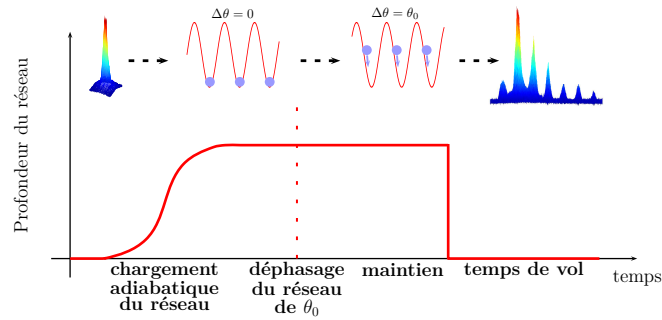


FIGURE IV.4 – *Protocole expérimental réalisé pour étudier les micro-oscillations d'une chaîne de condensats.*

Reprenons l'expérience d'oscillation d'une chaîne de condensats dans un réseau optique. Le protocole est exactement le même que celui que nous avons présenté dans le chapitre III. Il est rappelé sur la figure IV.4.

IV.2.a Mise en évidence de la présence d'effet tunnel

Nous choisissons de travailler avec un réseau optique de profondeur $s = 3.21$ et un déphasage initial $\theta_0 = 45^\circ$. Comme dans le chapitre précédent, les atomes oscillent dans le potentiel périodique. Lorsque l'on supprime tout confinement, les condensats interfèrent et révèlent après temps de vol leur distribution en impulsion au sein du réseau optique. L'évolution de la figure d'interférence en fonction du temps de maintien dans le réseau décalé est représentée figure IV.5.

Nous reconnaissons sur ces données l'oscillation dans l'espace des impulsions de la chaîne de condensats. Suivons pas à pas cette oscillation. À l'instant $t = 0$, les atomes se trouvent sur le bord de chaque puits, à vitesse nulle (point A sur la figure IV.5). Après environ $25 \mu\text{s}$ d'évolution dans le réseau, les atomes ont atteint le minimum de chaque puits, acquérant ainsi leur vitesse maximum (point B sur la figure IV.5). Ils continuent ensuite à osciller jusqu'au point de rebroussement en C . Un quart de période plus tard, nous observons deux pics (D_1 et D_2) et non un seul, révélant dans l'espace des impulsions la séparation du paquet d'ondes qui a eu lieu en C : une partie du paquet d'ondes (D_1) a continué son oscillation tandis qu'une autre partie (D_2) est passée dans le puits adjacent par effet tunnel et a donc une vitesse contraire à la première partie D_1 . Au point de rebroussement suivant (en E), la barrière tunnel agit encore une fois comme une lame séparatrice. Du fait d'une interférence constructive, un seul paquet d'ondes en ressort, avec une vitesse opposée à celle qui correspondrait au mouvement d'oscillation 'normal'. Nous nous intéresserons plus en détails à ce phénomène dans la prochaine section

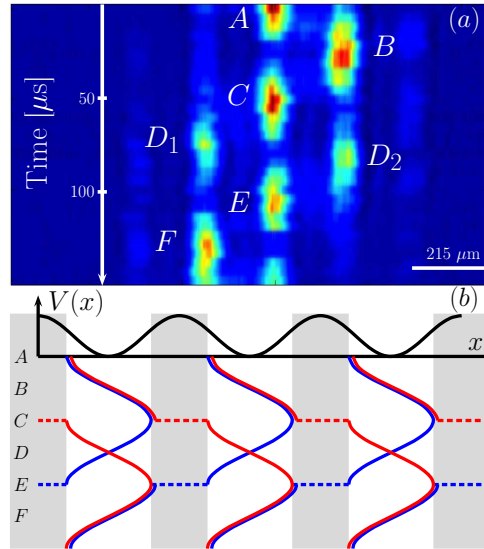


FIGURE IV.5 – (a) : Densité atomique en fonction de la position et du temps de maintien dans un réseau décalé de 45° et de profondeur normalisée $s = 3.21$. Chaque ligne correspond à un temps de maintien et deux lignes successives correspondent à un intervalle de $5 \mu\text{s}$. (b) : Schéma du mouvement du centre de masse des paquets d’ondes dans chaque puits du réseau. Les lignes pointillées représentent la séparation d’un paquet d’ondes en deux parties : l’une qui passe dans le puits voisin par effet tunnel et l’autre qui continue son oscillation dans le puits initial.

de ce chapitre. D’autre part, nous constatons que les deux paquets D_1 et D_2 ne coïncident pas dans le temps, ce qui révèle que le fait de traverser la barrière tunnel a ‘pris du temps’ au paquet d’ondes D_2 qui est donc en retard par rapport au paquet D_1 . Rappelons que le pas temporel entre chaque ligne est de $5 \mu\text{s}$. Le temps de traversée tunnel est donc ici de l’ordre de la micro-seconde. Cela nous permet de faire une mesure directe du temps de traversée tunnel.

IV.2.b Description de l’expérience en terme de bandes de Bloch

Afin d’être bien certain que le phénomène que nous observons est un effet tunnel, nous devons nous assurer que, lors du décalage du réseau optique, les atomes restent majoritairement dans les états liés du réseau que nous considérons et que les états non liés ne contribuent pas significativement à la dynamique du système. Le diagramme de bande correspondant au réseau de profondeur $s = 3.21$ que nous considérons est représenté figure IV.6. Nous y voyons qu’il existe deux états liés (le bas de la troisième bande d’énergie est légèrement négatif également). Comme nous l’avons vu, nous préparons l’état initial du système en faisant un brusque déplacement du réseau d’une quantité $\Delta\theta(0^+) = \theta_0$. Il est instructif de déterminer quelles sont les populations $\pi_n(\theta_0)$ de l’état initial projeté sur les états de Bloch $|n, q = 0\rangle$ pour différents déphasages initiaux θ_0 . Ces populations sont données sur les histogrammes de la figure IV.7.

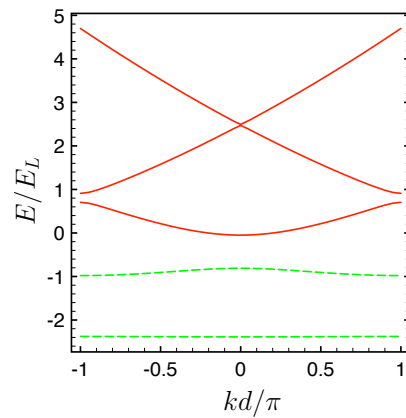


FIGURE IV.6 – Diagramme de bande pour un potentiel périodique de profondeur normalisée $s = 3.21$. Les lignes pointillées vertes correspondent aux 2 états liés existants et les lignes rouges correspondent aux états non liés.

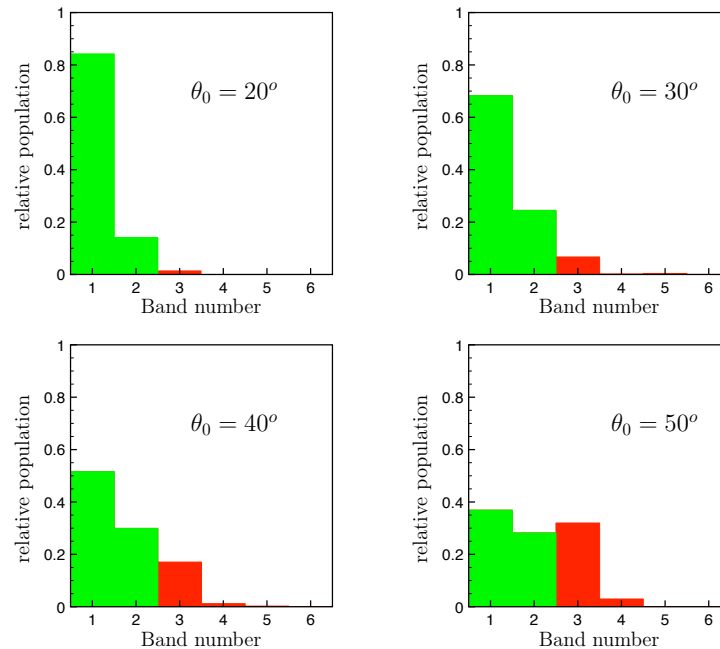


FIGURE IV.7 – Probabilité pour l'état initial de se trouver dans l'état de Bloch $|n, q = 0\rangle$ pour les 6 premières bandes $n = 1, \dots, 6$, pour différents angles de déphasage initial.

Pour les deux déphasages initiaux les plus faibles, $\theta_0 = 20^\circ$ et $\theta_0 = 30^\circ$, les populations dans les états liés sont respectivement 98.3% et 93%. La dynamique est donc complètement dominée par les deux états liés du système. Lorsque l'angle de déphasage initial augmente, la contribution des états non liés augmente. Elle atteint 35% pour $\theta_0 = 50^\circ$. Ce résultat nous permet d'affirmer que le phénomène que nous observons est bien un effet tunnel qui, pour les angles faibles, n'est que faiblement perturbé par les états du continuum.

IV.2.c Dépendance du temps de traversée tunnel avec l'angle de déphasage initial

Forts de cette confirmation, nous étudions à présent le temps de traversée tunnel en fonction de l'angle de déphasage initial. Cette étude est rendue pertinente par le quasi-isochronisme de l'oscillation au sein du réseau optique que nous avons démontré au chapitre précédent (voir III.3). En effet, la période d'oscillation ne dépend pas de l'angle de déphasage initial, ce qui nous permet de comparer les mesures du temps de traversée tunnel à différents angles de déphasage initiaux.

Les temps de traversée tunnel représentés sur la figure IV.8 ont été extraits en procédant à un ajustement gaussien de chacun des paquets d'ondes D_1 et D_2 (voir l'encadré de la figure IV.8.c); le décalage temporel entre les centres des deux gaussiennes correspond au temps de traversée tunnel. En cela, notre mesure s'apparente au temps de Wigner.

Le paquet D_1 , qui n'a pas traversé la barrière tunnel, nous sert de référence. Afin de bien résoudre le décalage temporel entre les deux paquets d'atomes, nous avons acquis une série de données, centrées sur les paquets C , D_1 et D_2 , avec cette fois un intervalle de $1 \mu\text{s}$ entre deux images successives. Nous avons également produit ce même jeu de données par simulations numériques afin de les comparer à nos résultats. Pour les simulations, nous avons calibré la profondeur du potentiel à l'aide de la méthode de calibration par oscillation d'une chaîne de condensats que nous avons présentée dans le chapitre précédent (voir III.3). L'incertitude présente lors de cette calibration entraîne de fait une barre d'erreur sur les résultats des simulations numériques. Une fois cette calibration réalisée, les simulations ne présentent aucune variable d'ajustement. Les résultats de cette étude sont représentés figure IV.8 et sont en très bon accord avec nos données expérimentales.

Nous observons que, lorsque l'angle de déphasage initial augmente, le temps de traversée tunnel diminue. C'est ce à quoi nous pouvons nous attendre intuitivement dans une approche semi-classique du problème car la largeur, ainsi que la hauteur, de la barrière de potentiel, diminuent lorsque θ_0 augmente (voir figure IV.8.b). Nous avons cherché à mesurer un temps de traversée pour la gamme $\theta_0 \in [20^\circ, 80^\circ]$. Néanmoins, pour $\theta_0 \geq 60^\circ$, il n'était pas possible d'extraire une mesure précise du fait du recouvrement entre les paquets B et D_2 . De plus, la contribution des états non liés pour ces déphasages devient importante. Les simulations numériques sont en très bon accord avec les résultats expérimentaux et montrent également que le temps de traversée tunnel est indépendant des interactions.

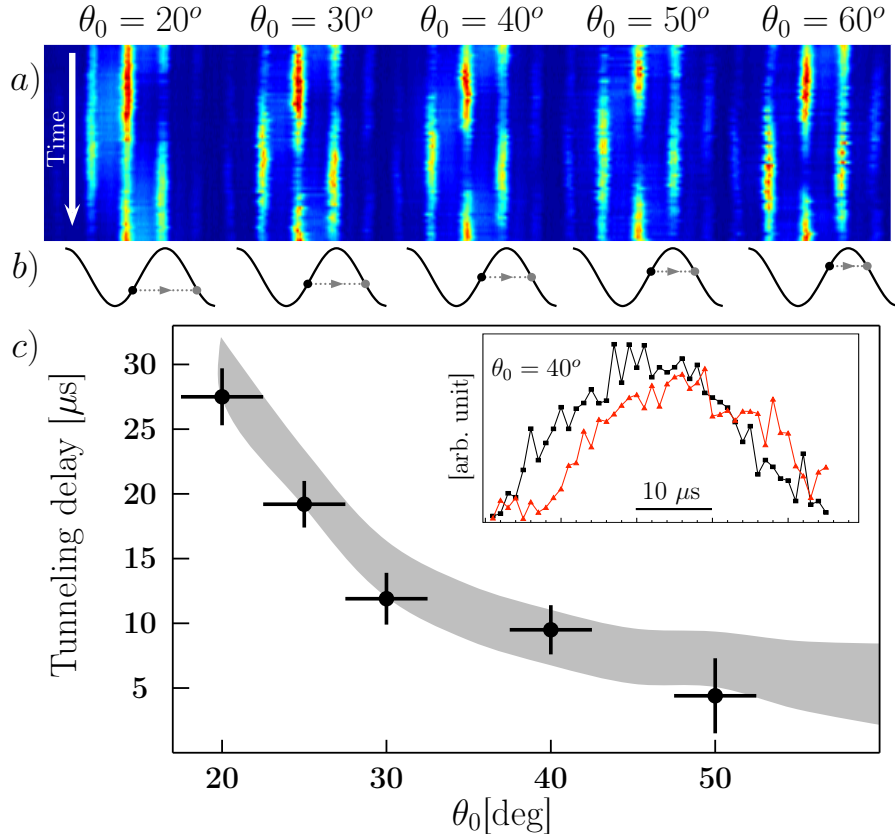


FIGURE IV.8 – (a) : images expérimentales : zoom sur les points C , D_1 et D_2 pour différents déphasages initiaux θ_0 . (b) : représentation schématique de l'effet tunnel qui a lieu au point C montrant l'évolution de la largeur de la barrière de potentiel au premier point de rebroussement C . (c) : évolution du temps de traversée tunnel en fonction du déphasage initial θ_0 obtenu à partir des données expérimentales (points noirs) et à partir des résultats des simulations numériques sans paramètre ajustable mais incluant les barres d'erreur issues de la méthode de calibration (zone grise). L'encadré montre le profil de densité du paquet d'onde réfléchi par la barrière de potentiel (D_1) et de celui transmis (D_2) pour $\theta_0 = 40^\circ$ [100].

IV.2.d Comparaison avec la prédiction semi-classique

Comparons quantitativement nos résultats expérimentaux avec le temps semi-classique τ_t que nous avons introduit dans la section précédente. Dans notre cas, ce temps s'exprime de la façon suivante :

$$\tau_t = \int_a^b \sqrt{\frac{m}{2(V(x) - E)}} dE. \quad (\text{IV.9})$$

Nous prenons en compte les conditions aux limites pour l'intégration $V(a) = V(b) = E$ et la forme de la barrière de potentiel ce qui donne :

$$\tau_t(\theta_0) = T_c(0) \frac{1}{2\pi} \int_{-u_a}^{u_a} \frac{du}{\sqrt{\cos^2 u - a}}, \quad (\text{IV.10})$$

avec $T_c(0) = (2md^2/h)s^{1/2} = 69 \mu\text{s}$ la période d'oscillation classique harmonique et $u_a = \cos^{-1}\left(\sqrt{1 - \cos^2(\theta_0)}\right)$.

Nous résumons la comparaisons entre cette prédiction semi-classique et nos résultats expérimentaux dans le tableau ci-dessous.

$\theta_0[\text{deg}]$	20	30	40	50	60	70	80
$\tau_t(\theta_0)[\mu\text{s}]$	54	47	42	39	37	35.6	34.7
$\tau_{\text{exp}}(\theta_0)[\mu\text{s}]$	27.5 ± 2.2	11.9 ± 2	9.5 ± 1.6	4.4 ± 2.4	—	—	—

Nous observons que la théorie semi-classique n'est pas en accord avec nos données expérimentales et numériques. Pour $\theta_0 = 20^\circ$, le temps de traversée tunnel prédit est deux fois plus grand que celui que nous mesurons. De plus, nous obtenons expérimentalement une décroissance du temps de traversée beaucoup plus rapide que ce qui ressort de la théorie semi-classique. Cette différence entre nos résultats expérimentaux et la prédiction semi-classique peut s'expliquer : d'une part, nous avons vu au chapitre III.3 que la période d'oscillation expérimentalement observée est très différente de la période semi-classique attendue. Ici encore, nous retrouvons le fait que le réseau entraîne un comportement ondulatoire qui n'est pas retranscrit par la théorie semi-classique. De plus, au fur et à mesure que nous augmentons l'angle de déphasage initial θ , la contribution des états non liés augmente. Il faut donc prendre en compte ces états non liés pour pouvoir décrire quantitativement l'évolution du temps de traversée tunnel.

Il serait intéressant de comparer nos résultats aux autres théories comme celle du temps de Wigner et du temps de Larmor. Malheureusement, ce travail n'a pas pu être fait dans le cadre de cette thèse. Les résultats que nous présentons ici appellent donc à un travail théorique plus poussé.

IV.2.e Limites de cette méthode de mesure

Nous avons choisi de nous placer à la profondeur $s = 3.21$ pour étudier le temps de traversée tunnel. Ce choix n'est pas anodin car il nous permet d'être dans les conditions idéales pour cette mesure. En effet, la barrière de potentiel se comporte quasi idéalement comme une lame séparatrice 50-50 (les paquets D_1 et D_2 sont très proches en terme de nombre d'atomes), cela nous permet d'utiliser le paquet D_1 comme référence claire pour mesurer le décalage entre la partie réfléchi par la barrière de potentiel et la partie transmise. De plus, sur l'ensemble des déphasages initiaux étudiés, la contribution des états non-liés est relativement faible ce qui nous autorise à interpréter l'effet tunnel de façon simple. Enfin, la séparation du paquet d'ondes initial en deux parties se produit dès le premier point de rebroussement ; nous sommes donc proches du cas d'école consistant à considérer une onde incidente sur une barrière de potentiel.

Ces différentes conditions ne sont pas remplies pour toutes les profondeurs ni pour tous les déphasages initiaux. Concernant la question du déphasage ini-

tial, nous avons vu à l'aide de la théorie de Bloch, que la contribution des états non-liés atteint 35% pour un déphasage de 50° , la limite de validité de notre interprétation 'simple' du passage de la barrière de potentiel par effet tunnel est donc relativement claire : la contribution des états non liés doit rester minoritaire. Concernant la profondeur du potentiel périodique, il est nécessaire d'étudier plus avant la question. Nous avons pour cela étudié la micro-oscillation de la chaîne de condensats pour différentes profondeurs et pour un déphasage initial $\theta_0 = 30^\circ$. Les résultats de cette étude sont résumés figure IV.9.

Nous avons également indiqué sur cette figure les seuils de profondeur s_n en dessous desquels la structure de bande présente n états entièrement liés : $s_1 = 0.89$, $s_2 = 3.04$, $s_3 = 6.43$, $s_4 = 11.05$.

Deux expériences ((a) et (b)) ont été réalisées pour la région $s < s_2$. Dans ce cas, un seul état lié est présent, la contribution des états non liés est donc importante et il est difficile d'identifier clairement la part due à l'effet tunnel et celle due à la contribution des états non liés. Cet effet est visible sur la figure IV.9.(b) ($s = 2.4$) : les états non liés engendrent l'existence d'un paquet d'ondes avec une vitesse vers la droite avant même le premier point de rebroussement.

La région $s_1 < s < s_2$ est illustrée par trois expériences : celle présentée plus haut ($s = 3.21$, figure IV.5) et deux expériences supplémentaires à $s = 4.16$ (c) et $s = 4.6$ (d). Nous voyons sur ces données supplémentaires que lorsque la profondeur augmente, les paquets d'ondes transmis et réfléchis par la barrière de potentiel sont très déformés. Ce problème, que nous avons soulevé dans la première section de ce chapitre, impose un traitement théorique plus poussé de la forme du paquet d'atomes après le point de rebroussement pour définir clairement le temps de traversée mesuré. Nous voyons également pour $s = 4.6$ (d) que le passage de la barrière tunnel s'opère au deuxième point de rebroussement et non au premier comme pour les données à $s = 3.21$. La donnée supplémentaire (e) $s = 15$ confirme que le moment auquel le paquets d'atomes est séparé en deux parties dépend de la profondeur du réseau. Sur ces données nous voyons que le passage de la barrière se fait au quatrième point de rebroussement. De ce fait, la dynamique d'oscillation de la chaîne de condensats dans le réseau influence le phénomène d'effet tunnel et il faut, là encore, un traitement théorique plus poussé pour traiter la question qui nous intéresse, à savoir extraire un temps de traversée tunnel.

Le choix que nous avons fait de nous placer à $s = 3.21$ correspond à la situation la plus claire pour laquelle l'effet tunnel est aisément observé et se produit au premier point de rebroussement.

La dynamique de micro-oscillation est donc complexe ; elle fait apparaître des situations et comportements riches qui requièrent un traitement spécifique à ce cas précis pour être modélisé. Nous nous sommes intéressé dans cette section aux points D_1 et D_2 de la figure IV.5 et en avons extrait une mesure directe du temps de traversée tunnel. Dans la section suivante, nous nous intéresserons à la suite de l'oscillation de cette même figure.

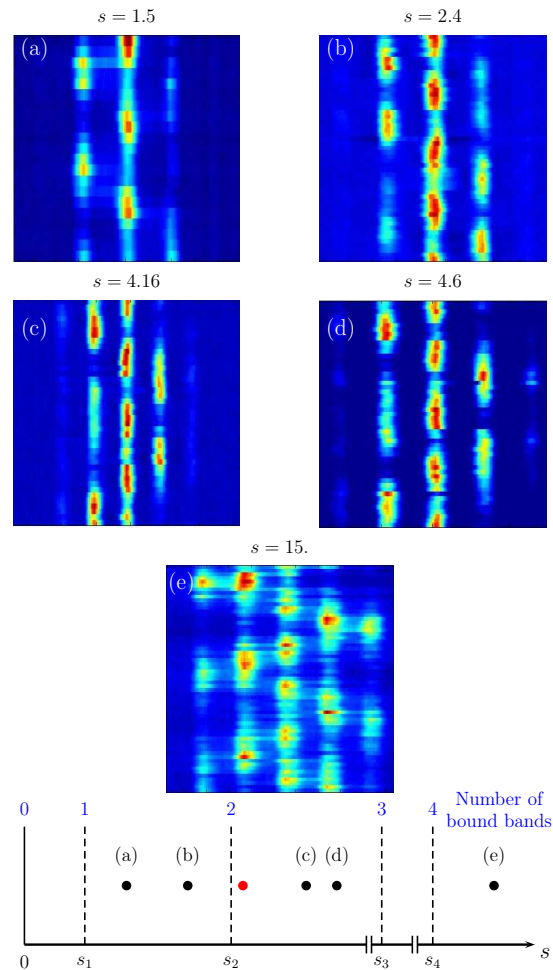


FIGURE IV.9 – Dépendance de la micro-oscillation d'une chaîne de condensats avec la profondeur du potentiel périodique. En haut : données expérimentales pour différentes profondeurs normalisées : (a) : $s = 1.5$, (b) : $s = 2.4$, (c) : $s = 4.16$, (d) : $s = 4.6$, (e) : $s = 15$. En bas : les lignes pointillées correspondent au nombre d'états liés. Les points (a), (b), (c), (d) et (e) y sont représentés. Le point rouge correspond aux données présentées figure IV.8 et utilisées pour étudier le temps de traversée tunnel visible sur la figure IV.5.

IV.3 Interféromètre de Mach-Zehnder micrométrique

Dans cette section, nous nous intéressons à la dernière partie de l'oscillation représentée figure IV.5. Nous remarquons en effet deux choses : d'une part, après le second point de rebroussement E , il n'y a plus deux oscillations distinctes (celle du paquet d'atomes D_1 et celle de D_2) mais une seule. D'autre part, le paquet d'onde F a une vitesse opposée à celle de B , c'est-à-dire à celle attendue par l'oscillation classique d'un paquet d'atomes dans un des puits du réseau. Ce comportement contre-intuitif provient en fait d'un résultat très connu d'interférence dans un interféromètre de Mach-Zehnder (IMZ) avec deux chemins symétriques et une lame séparatrice 50-50. Dans ce cas, la voie de sortie est la voie opposée à la voie d'entrée (voir figure IV.10).

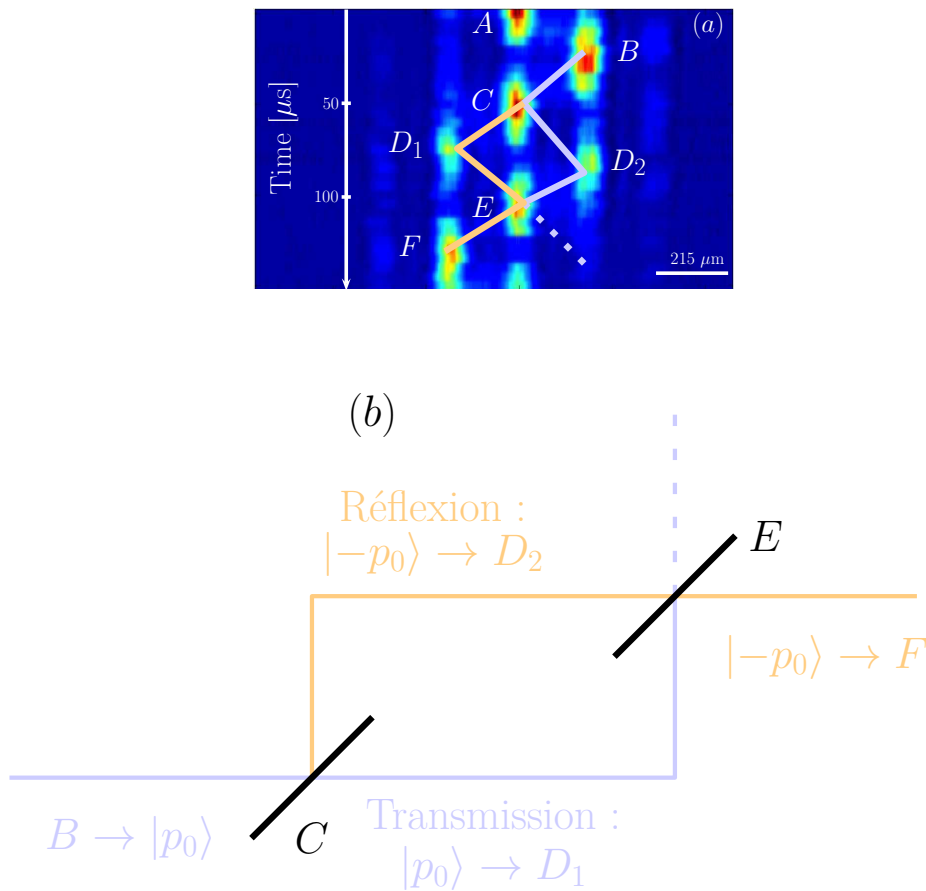


FIGURE IV.10 – Schéma de l'interféromètre de Mach-Zehnder réalisé. Chaque point de rebroussement agit comme une lame séparatrice. L'état $|p_0\rangle$ (respectivement $|-p_0\rangle$) est défini comme l'état de vitesse positive (respectivement négative)

Pour illustrer cet effet, définissons l'état $|p_0\rangle$ correspondant au point B : les atomes ont une vitesse positive (vers la droite sur la figure IV.10). La barrière de potentiel en C agit comme une lame séparatrice : les atomes transmis conservent une vitesse positive en atteignent donc le point D_2 dans l'état $|p_0\rangle$ tandis que

les atomes réfléchis voient leur vitesse changer de signe et atteignent donc D_1 avec une vitesse opposée $|-p_0\rangle$. Nous pouvons alors en déduire l'état au point $D = D_1 + D_2$:

$$|D\rangle = \cos \varphi |p_0\rangle + i \sin \varphi |-p_0\rangle, \quad (\text{IV.11})$$

où $\varphi = \pi/4$ dans le cas où le coefficient de transmission de la lame séparatrice est exactement 50%.

Le point de rebroussement suivant (E) agit lui aussi comme une lame séparatrice sur laquelle les deux paquets se recombinent. Le résultat de cette recombinaison s'écrit en F de la façon suivante :

$$\begin{aligned} |F\rangle &= \cos \varphi \left(\cos \varphi |p_0\rangle + i \sin \varphi |-p_0\rangle \right) + i \sin \varphi \left(\cos \varphi |-p_0\rangle + i \sin \varphi |p_0\rangle \right) \\ &= \cos(2\varphi) |p_0\rangle + i \sin(2\varphi) |-p_0\rangle. \end{aligned} \quad (\text{IV.12})$$

Nous retrouvons bien dans l'équation (IV.12) que dans le cas d'une lame 50-50 ($\varphi = \pi/4$), l'état d'impulsion en F est $i|-p_0\rangle$, exactement opposé à celui de B .

Dans notre configuration expérimentale, nous avons en réalité une chaîne d'interféromètres de Mach-Zehnder croisés travaillant de concert. En effet, le paquet d'ondes transmis par la lame séparatrice d'un puits de potentiel en C interfère, en E , avec le paquet d'onde réfléchi, en C , dans le puits adjacent. L'interférence constructive qui apparaît sur la figure IV.5 résulte donc de la conservation de la cohérence du condensat de Bose-Einstein à l'échelle d'une période de micro-oscillation. Nous avons vérifié numériquement que cet effet d'interférence ne dépend pas des interactions. Néanmoins, il est sensible à la profondeur du potentiel qui affecte le ratio entre la partie transmise et la partie réfléchie, modifiant ainsi φ . Dans le cas présenté figure IV.5, nous mesurons en F : $\Pi_{-p}/(\Pi_{-p} + \Pi_{+p}) = 91\%$, ce qui correspond à $\varphi \simeq \pi/5$. Les lames séparatrices C et E sont donc proches de lames 50-50.

IV.4 Microscope par rotation dans l'espace des phases

Nous avons présenté dans le chapitre II un protocole de microscope par rotation dans l'espace des phases, nécessaire pour résoudre les deux îlots de stabilité de l'expérience du double puits dynamique. Ce protocole est rappelé figure IV.11.

Lorsque les atomes traversent la barrière de potentiel en C (voir figure IV.5), nous sommes exactement dans la même situation que pour le double puits dynamique : deux paquets d'ondes sont localisés sur chacune des pentes du puits. Après temps de vol, ils sont confondus car tous deux ont une vitesse nulle. Nous avons donc ici l'occasion de tester le protocole de rotation dans l'espace des phases avant même de commencer l'expérience du double puits dynamique ! Le principe est le suivant :

- Le condensat est chargé adiabatiquement dans le réseau de profondeur normalisée $s = 3.21$.

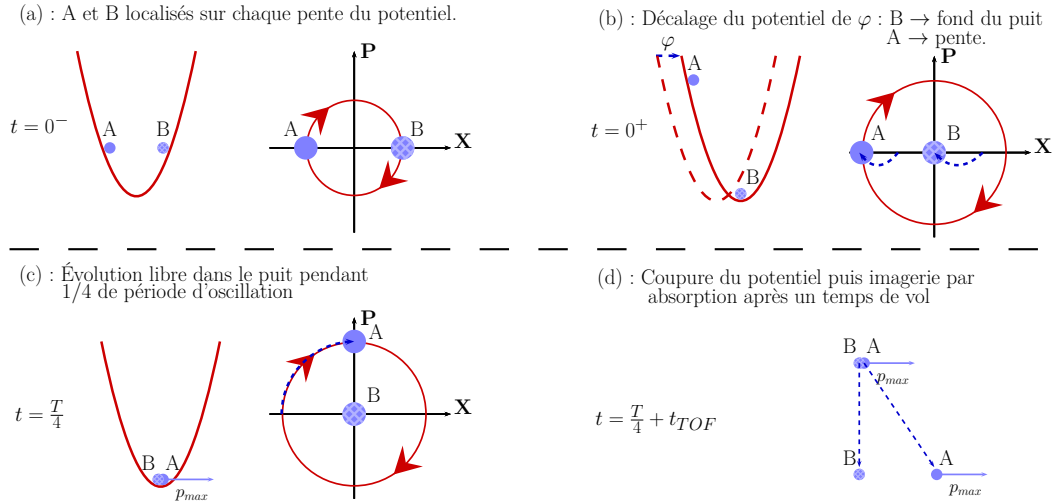


FIGURE IV.11 – *Protocole de microscope par rotation dans l'espace des phases permettant de séparer deux paquets d'ondes distants de quelques centaines de nanomètre après temps de vol : en déphasant de façon appropriée le réseau, l'un des paquets d'onde acquiert une vitesse maximal tandis que l'autre garde une vitesse nulle.*

- La phase relative est modifiée quasi-instantanément pour déplacer le réseau : $\theta_0 = 0^\circ \rightarrow \theta_0 = 60^\circ$. La chaîne de condensats débute alors son oscillation.
- Après une demi période (soit $50 \mu\text{s}$, au point C), la phase est modifiée une seconde fois afin de ramener au fond du puits soit le paquet d'onde qui n'a pas traversé la barrière ($D_1 : \theta_0 = 60^\circ \rightarrow \theta_0 = 120^\circ$), soit le paquet d'onde qui a traversé la barrière par effet tunnel ($D_2 : \theta_0 = 60^\circ \rightarrow \theta_0 = 0^\circ$).
- Le réseau est ensuite maintenu. Le paquet d'onde qui a été placé au fond du puits lors du second décalage n'oscille plus tandis que l'autre paquet continue son oscillation.

Le principe et les résultats de cette expérience sont résumés sur la figure IV.12. Cette figure comporte trois parties que nous allons décrypter ci-après.

- **Rappel du cas sans second décalage** : Figure IV.12.a

Une représentation schématique de la position des deux paquets D_1 et D_2 lorsqu'ils sont en C est représenté figure *i* : le paquet d'atomes, après $1/2$ période d'oscillation (donc en C) se sépare en deux parties D_1 et D_2 . Ils sont donc tous les deux sur le coté de puits de potentiel mais dans des puits adjacents. Si nous ne faisons pas de deuxième décalage (décalage maintenu à $\theta_0 = 60^\circ$ pendant le maintien dans le réseau (*iii*)), les deux paquets D_1 et D_2 oscillent et ont donc des vitesses opposées après $1/4$ de période supplémentaire (à environ $75 \mu\text{s}$ de maintien sur la figure (*ii*)).

- **Sélection du paquet D_2** : Figure IV.12.b

En C, nous ramenons la phase relative à $\theta_0 = 0^\circ$ (*iii*). De ce fait, comme représenté sur le schéma (*i*), le paquet D_2 se retrouve au fond du puits à vitesse nulle. Il est alors au repos et restera au fond du puits à vitesse nulle pendant le reste du maintien. Cela est directement visible sur les données (*ii*) car l'ordre 0

d'interférence correspondant à la vitesse nulle n'est jamais entièrement dépeuplé dans la suite de l'oscillation. Le paquet D_1 , lui, se retrouve dans le même puits que D_2 , mais sur la pente. Il continue donc à osciller, dans le sens inverse par rapport à la figure (a).

— **Sélection du paquet D_1** : Figure IV.12.c

De la même façon, nous sélectionnons cette fois le paquet D_1 en passant la phase relative à $\theta_0 = 120^\circ$ au moment où les atomes sont en C (iii). Dans ce cas-là, c'est le paquet D_1 qui se retrouve au fond du puits de potentiel à vitesse nulle (voir le schéma (i)). Comme précédemment, le paquet non sélectionné D_2 se retrouve dans le même puits, sur la pente, et continue donc d'osciller. Nous voyons sur les données (ii) que là encore le paquet d'atomes D_2 oscille dans la direction opposée au cas (a.ii) car il a changé de puits de potentiel lors du second décalage.

Ces résultats montrent que le protocole de microscope dans l'espace des phases fonctionne bien et que ce sera donc un outil très intéressant pour la réalisation du double puits dynamique. Cela confirme également (si un doute subsistait) que l'effet tunnel a bien lieu au point de rebroussement C .

Conclusion

La micro-oscillation d'une chaîne de condensats dans un réseau optique nous a apporté beaucoup de bonnes surprises grâce à l'émergence de phénomènes complexes et intéressants.

La possibilité pour les paquets d'ondes de traverser la barrière de potentiel par effet tunnel aux points de rebroussement, conjugué au quasi-isochronisme de l'oscillation, nous a permis de réaliser une mesure directe du temps de traversée tunnel. Cette expérience s'inscrit dans le cadre de la question ouverte et très active du temps en mécanique quantique. Nos résultats permettent l'étude de la question du temps de traversée tunnel dans une gamme de paramètres qui n'avait jusqu'alors pas été explorée de façon expérimentale.

Nous avons observé une interférence constructive lors de la recombinaison des deux paquets d'ondes au second point de rebroussement. L'oscillation de la chaîne de condensats crée ainsi une chaîne d'interféromètres de Mach-Zehnder micrométriques couplés. Un tel dispositif peut notamment être utile pour la mesure de forces locales de courte portée à la proximité d'une surface [132–134].

Enfin, ce phénomène d'effet tunnel au point de rebroussement nous a permis de tester le protocole de microscope par rotation dans l'espace des phases qui doit nous permettre d'analyser le transport classique et quantique en présence de chaos. Ce test est concluant et valide le protocole proposé par notre équipe et celle de Bertrand Georgeot [47] ainsi que notre capacité à le réaliser expérimentalement.

Le degré de liberté que nous avons exploité pour faire émerger ces phénomènes est la phase relative $\Delta\theta$ entre les deux faisceaux laser créant le réseau optique. Nous avons étudié l'effet d'un changement quasi-instantané et ponctuel de cette phase sur le comportement de la chaîne de condensats. Dans le dernier chapitre

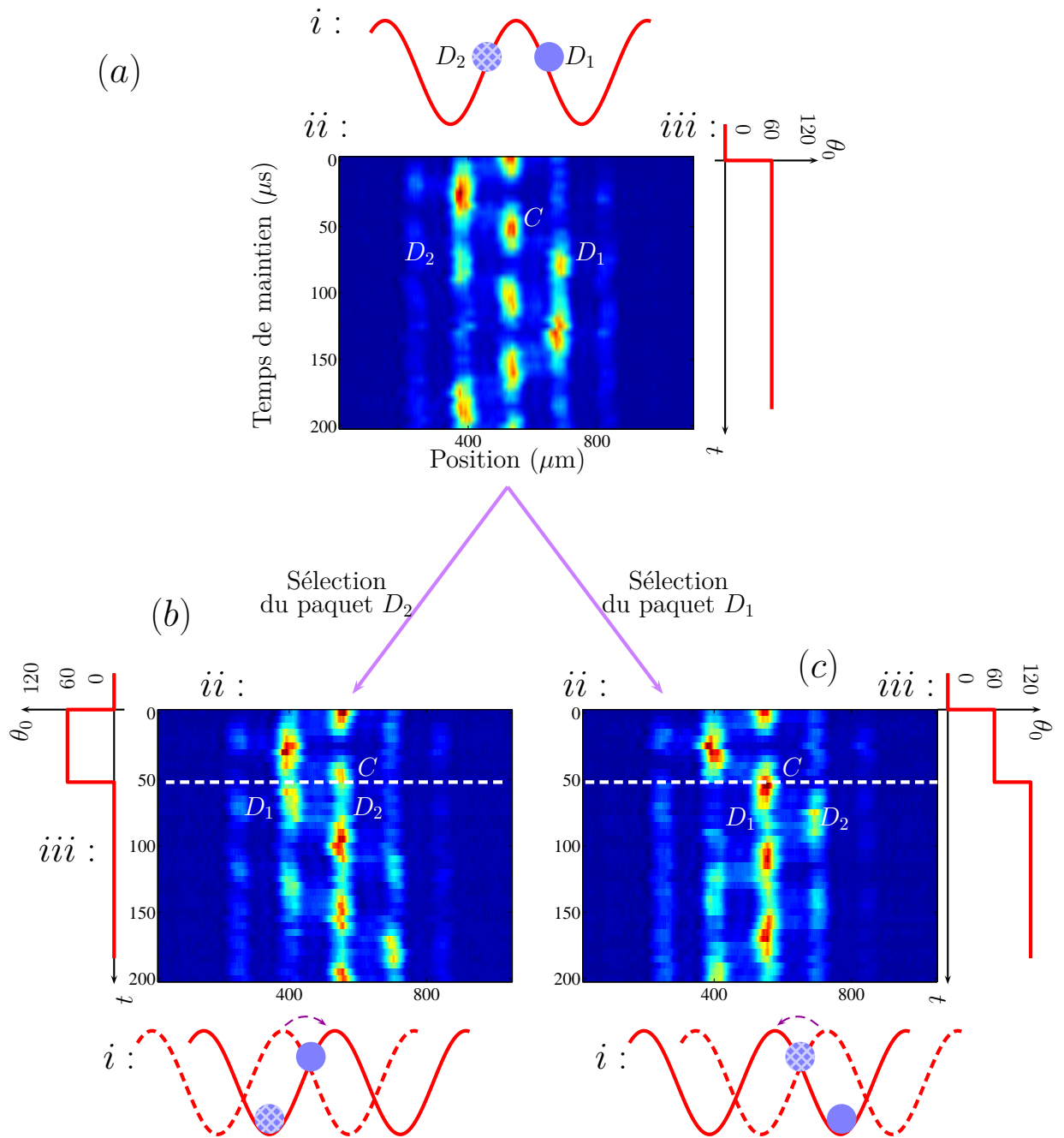


FIGURE IV.12 – Réalisation du microscope par rotation dans l'espace des phases pour un réseau de profondeur normalisée $s = 3.21$. À $t = 0$, le réseau est déphasé de $\theta_0 = 60^\circ$. Après $1/2$ période d'oscillation ($50 \mu s$ de maintien), la phase relative entre les deux faisceaux laser est (a) inchangée, (b) remise à 0 et (c) passée à $\theta_0 = 120^\circ$. Dans chacun des cas nous présentons : *i* : représentation schématique de la position des deux paquets D_1 et D_2 lorsqu'ils sont au point C (à vitesse nulle, juste après effet tunnel). *ii* : données expérimentales. *iii* : évolution de la phase relative θ_0 au cours du maintien.

de ce manuscrit, nous continuons d'exploiter ce degré de liberté en considérant cette fois une variation continue de $\Delta\theta$.

CHAPITRE V

Dynamique dans un réseau renormalisé : résultats préliminaires

Sommaire

Introduction	123
V.1 Modulation haute fréquence : renormalisation de la profondeur	125
V.1.a Description en terme de potentiel moyen	125
V.1.b Résultats expérimentaux	126
V.2 Modulation basse fréquence : renormalisation du taux tunnel	129
V.2.a Formation des staggered states	131
V.2.b Retour à l'équilibre dans le réseau non modulé	133
V.3 Conclusion	135

Introduction

Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, lorsque l'on étudie le comportement d'un condensat de Bose-Einstein dans un réseau optique, la profondeur s du potentiel périodique est un paramètre crucial qui fixe notamment le taux tunnel entre deux puits adjacents, J . Nous avons à notre disposition un degré de liberté facilement modulable : la phase relative $\Delta\theta$ entre les deux faisceaux laser qui interfèrent et créent le potentiel périodique. Nous présentons dans ce chapitre des résultats préliminaires sur l'étude du comportement d'un condensat de Bose-Einstein dans un réseau modulé en phase.

Dans l'expérience de micro-oscillations d'un condensat dans un réseau décalé soudainement, nous avons à faire à un oscillateur libre. Nous l'avons vu, la dynamique de cette micro-oscillation est très riche et subtile et nous a permis une mesure directe du temps de traversée tunnel. À présent, nous allons nous intéresser au cas de l'oscillateur forcé.

Pour cela, nous modulons sinusoidalement la phase relative entre les deux bras du réseau : $\Delta\theta = \theta_0 \sin(\omega_m t)$. Le potentiel ainsi créé est le suivant :

$$V(x, t) = -sE_L \cos^2 \left(\frac{\pi x}{d} + \theta_0 \sin(\omega_m t) \right). \quad (\text{V.1})$$

Comme précédemment, l'amplitude de modulation $\theta_0 = 90^\circ$ correspond à un déplacement maximal du réseau d'une demi-période spatiale.

Par analogie avec un oscillateur forcé, il est naturel de penser que la réponse du condensat à cette excitation sinusoidale dépend de la fréquence de modulation ω_m . De même, nous nous attendons à voir une résonance lorsque le quantum d'énergie $\hbar\omega_m$ devient proche de la différence d'énergie $\hbar\omega_r$ entre les deux premières bandes d'énergie $n = 0$ et $n = 1$ de la structure de bande du réseau. Dans ce cas, l'énergie apportée par la modulation devient résonante avec cette transition et nous nous attendons à ce qu'elle entraîne un chauffage non négligeable du condensat. Dans ce chapitre nous allons étudier deux régimes différents : $\omega_m \gg \omega_r$ et $\omega_m < \omega_r$. Nous étudierons ces deux régimes à l'aide de protocoles légèrement différents et qui sont représentés sur la figure V.1.

La première section sera dédiée à l'étude du régime de haute fréquence $\omega_m \gg \omega_r$. Comme nous le verrons, les atomes voient dans ce cas un potentiel périodique moyenné dans le temps dont la profondeur s est renormalisée par la modulation de phase. La pseudo-calibration que nous avons définie à l'aide de la méthode d'interférence entre paquets d'ondes cohérents, dans le chapitre III.2, nous permettra d'explicitier quantitativement cette renormalisation.

La seconde section sera, elle, dédiée au régime de fréquence faible $\omega_m < \omega_r$. Ce régime est connu et il a été montré théoriquement que c'est cette fois le taux tunnel J qui est renormalisé par la modulation de phase [135–138]. Cela a plus récemment été observé expérimentalement dans les groupes de S. Chu [139], d'E. Arimondo [127, 140, 141] ou encore de K. Sengstock [142]. Ce phénomène a également été étudié avec un système de double puits vibrants [143]. La possibilité de pouvoir renormaliser le taux tunnel provoque un certain enthousiasme au sein de la communauté des atomes froids ainsi que dans celle de la matière condensée.

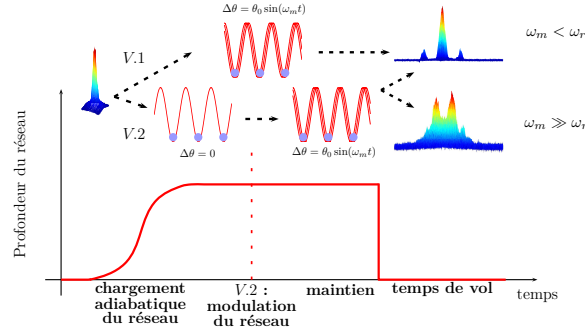


FIGURE V.1 – Protocoles mis en œuvre dans les sections V.1 et V.2 de ce chapitre. Dans la section V.1, concernant le régime de haute fréquence de modulation, le condensat est directement chargé dans le réseau modulé. Dans la section V.2, le condensat est chargé dans un réseau fixe et la modulation de phase ne commence qu’après.

En effet, pour une assemblée de bosons dans un potentiel périodique, le modèle de Bose-Hubbard [144] fait apparaître le paramètre U/J , où U est l’énergie d’interaction au sein d’un site du réseau et J le terme de saut entre chaque site, c’est-à-dire le taux tunnel. Pour une valeur critique de ce paramètre U/J , le système subit une transition de phase quantique depuis un état superfluide vers un isolant de Mott. Cette transition a été étudiée de façon théorique dans les années 1980 pour des bosons dans un réseau cristallin [145] et observée expérimentalement avec des atomes froids dans un réseau optique en 2002 [28]. La modulation de phase basse fréquence permet de simuler des régimes impossibles à atteindre avec un réseau statique comme par exemple un taux tunnel nul ou négatif. C’est ce dernier cas qui nous intéressera dans ce chapitre. Il a été montré que lorsque le taux tunnel J est négatif, un nouvel état d’équilibre émerge et reflète le fait que la structure de bande du potentiel périodique est modifiée de façon dramatique. Cet état, appelé *staggered state* [140] (en français, état en quinconce), correspond dans l’espace réel à une alternance du signe de la phase d’un puits de potentiel à l’autre. Il peut se former grâce à une instabilité dynamique. Nous montrerons que notre dispositif est approprié pour étudier ce système et notamment la dynamique de formation des *staggered states*. Nous verrons aussi que nous pouvons étudier le retour à l’équilibre du système après arrêt de la modulation de phase. À notre connaissance, il n’y a pas, à ce jour, d’étude expérimentale publiée de ces dynamiques. Les résultats que nous présenterons dans cette section sont une première étude de la formation de ces états et de leur durée de vie une fois la modulation arrêtée.

V.1 Modulation haute fréquence : renormalisation de la profondeur

Plaçons nous dans le régime de modulation haute fréquence. Le potentiel créé est :

$$V(x, t) = -sE_L \cos^2 \left(\frac{\pi x}{d} + \theta_0 \sin(\omega_m t) \right). \quad (\text{V.2})$$

Nous faisons varier sinusoïdalement la phase relative $\Delta\theta$ à la fréquence ω_m . Comme nous l'avons vu dans l'introduction de ce chapitre, dans ce cas la fréquence de modulation doit être grande devant les fréquences typiques du réseau. Nous travaillons dans cette section avec un réseau de profondeur normalisée $s = 5$. Dans ce cas, la distance entre les deux premières bandes d'énergie $n = 0$ et $n = 1$, exprimée en kHz est comprise entre $\omega_{r\min} = 2\pi \times 10$ kHz et $\omega_{r\max} = 2\pi \times 17$ kHz, où $\omega_{r\min}$ est calculée en considérant le bord de la première zone de Brillouin et $\omega_{r\max}$ est calculée en considérant le centre de la zone. De plus, la pulsation harmonique associée au fond de chaque puits de potentiel est $\omega_0 = 2\pi \times 13$ kHz. Afin de nous placer clairement dans le régime de haute fréquence de modulation, nous choisissons donc $\omega_m = 2\pi \times 500$ kHz¹. Cela nous permet de décrire le potentiel ressenti par les atomes en terme de potentiel moyenné dans le temps. Les potentiels moyennés sont très utilisés dans la physique de contrôle du mouvement atomique car ils permettent de créer de nombreuses formes de pièges à l'aide de potentiels optiques [146] ou magnétiques [147, 148]. Ils sont également utilisés pour le piégeage d'ions, nous parlons alors de pièges de Paul [149].

V.1.a Description en terme de potentiel moyen

Dans le cas d'une modulation rapide, le potentiel effectivement ressenti par les atomes est un potentiel moyen. Nous calculons donc $\langle V(x, t) \rangle$, le potentiel périodique moyenné sur une période de modulation :

$$\langle V(x, t) \rangle = \frac{1}{T_m} \int_0^{T_m} -sE_L \cos^2 \left(\frac{\pi x}{d} + \theta_0 \sin(\omega_m t) \right) dt, \quad (\text{V.3})$$

avec $T_m = 2\pi/\omega_m$. En développant l'expression (V.3) à l'aide des relations trigonométriques et en faisant le changement de variable $\tau = \omega_m t$, cette intégration mène à :

$$\langle V(x, t) \rangle = -sE_L \left(1 + \cos(k_L x) \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(2\theta_0 \sin(\tau)) d\tau \right), \quad (\text{V.4})$$

avec $k_L = 2\pi/d$. Nous reconnaissons ici la définition de la fonction de Bessel d'ordre 0 : $\mathcal{J}_0(u)$.

1. Les modulateurs acousto-optiques que nous utilisons ont une bande passante de 50 MHz, cela nous permet de moduler la phase du réseau à la pulsation $\omega_m = 2\pi \times 500$ kHz sans problème d'atténuation ou de distorsion dus à la réponse du modulateur acousto-optique

$$\mathcal{J}_0(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(u \sin(\tau)) d\tau. \quad (\text{V.5})$$

L'expression du potentiel moyen ressenti par les atomes est donc :

$$\langle V(x, t) \rangle = -sE_L (1 + \mathcal{J}_0(2\theta_0) \cos(k_L x)). \quad (\text{V.6})$$

Nous voyons que l'effet de la modulation de phase est de renormaliser la profondeur du potentiel périodique. Cette renormalisation dépend de l'amplitude de modulation et se présente sous la forme d'une fonction de Bessel. Deux points sont intéressants pour la discussion qui va suivre :

- La fonction de Bessel $\mathcal{J}_0(2\theta_0)$ s'annule pour plusieurs valeurs : $2\theta_0 = 2.40$, $2\theta_0 = 5.52$ etc. La modulation de phase nous permet donc a priori de supprimer totalement l'influence du réseau optique.
- Le deuxième point intéressant est que la fonction de Bessel $\mathcal{J}_0(2\theta_0)$ peut prendre des valeurs négatives pour lesquelles nous obtenons donc une profondeur effective s_{eff} négative ce qui implique que les minima initiaux du potentiel deviennent des maxima.

V.1.b Résultats expérimentaux

Nous souhaitons observer expérimentalement la renormalisation de la profondeur du potentiel périodique par modulation de phase. Le protocole expérimental que nous utilisons est représenté figure V.2.

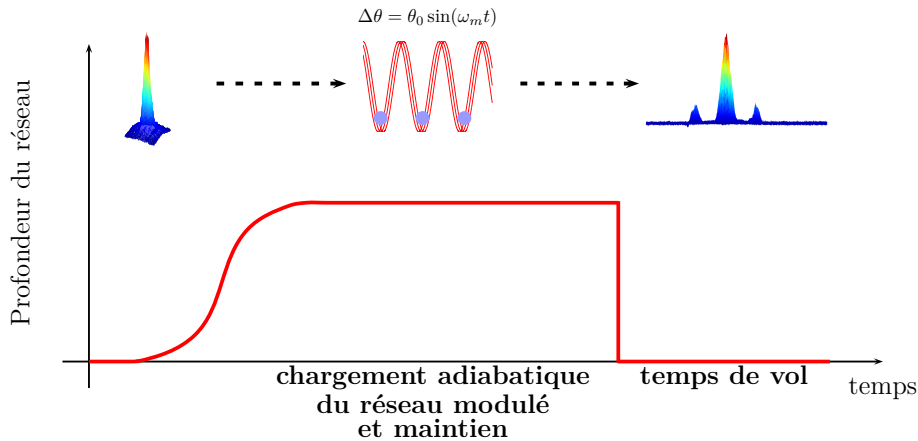


FIGURE V.2 – Protocole expérimental utilisé pour étudier l'effet d'une modulation de phase haute fréquence. Le condensat de Bose-Einstein est chargé adiabatiquement dans le réseau modulé à la fréquence ω_m avec une amplitude θ_0 .

Après avoir produit un condensat de Bose-Einstein, nous chargeons ce dernier dans un réseau de profondeur $s = 5$, dont la phase est modulée à $\omega_m = 2\pi \times 500$ kHz, avec une amplitude θ_0 fixe. Après le chargement et le maintien dans le réseau, nous coupons tout confinement et observons la figure d'interférence créée par l'expansion de la chaîne de condensats. Nous répétons cette opération pour

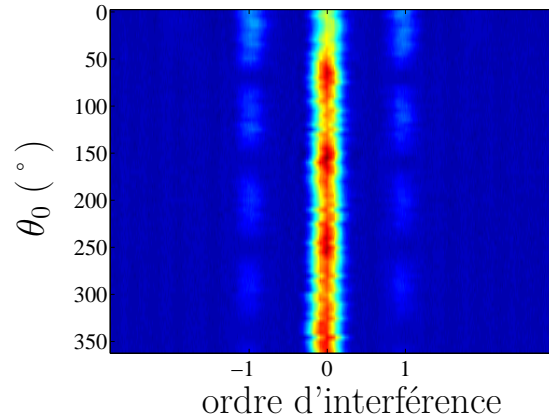


FIGURE V.3 – Profil d'interférence obtenu en fonction de l'amplitude de modulation θ_0 . Chaque ligne correspond à la densité spatiale intégrée selon l'axe vertical pour une valeur d'amplitude de modulation θ_0 donnée.

différentes amplitudes de modulation θ_0 . Les résultats de cette expérience sont représentés figure V.3.

Cette expérience est très similaire dans son principe de détection à l'expérience, présentée dans le chapitre III.2, d'interférence entre paquets d'ondes cohérents. Nous avons montré dans ce chapitre que nous pouvons effectuer une pseudo-calibration de la profondeur en fonction de la population dans les ordres d'interférence ± 1 , renormalisée à la population dans l'ordre 0 : P_1 . Nous avons obtenu $P_1 = 0.074 s_{\text{eff}}$, avec s_{eff} la profondeur renormalisée du réseau. Cette pseudo calibration nous permet ici de traduire l'évolution de la population dans les ordres ± 1 en une variation de profondeur effective s_{eff} ressentie par les atomes du fait de la modulation de phase. C'est ce qui est représenté figure V.4.

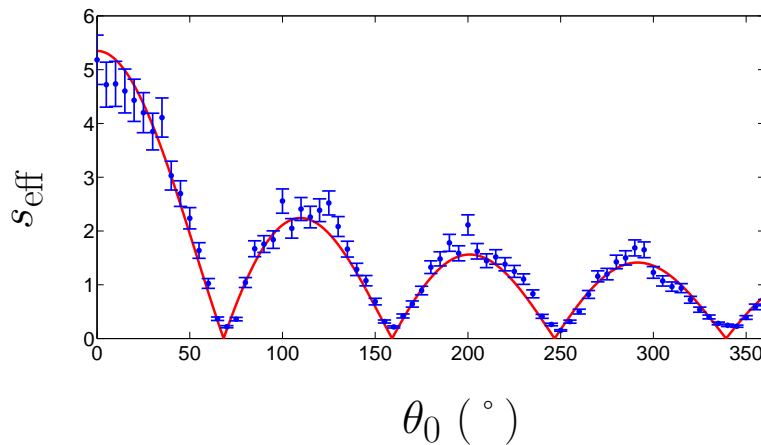


FIGURE V.4 – Évolution de la profondeur effective en fonction de l'amplitude de modulation de phase θ_0 . La profondeur effective du réseau est déduite de la population dans l'ordre d'interférence P_1 grâce à la pseudo calibration $P_1 = 0.074 s_{\text{eff}}$ obtenue dans le chapitre III. Points expérimentaux (\bullet). La courbe rouge correspond à l'ajustement des points expérimentaux par la fonction de Bessel $A_m \times |\mathcal{J}_0(2\theta_0)|$, avec A_m le seul paramètre d'ajustement.

Sur la figure V.4, la profondeur effective s_{eff} est ajustée par la fonction $A_m \times |\mathcal{J}_0(2\theta_0)|$. En effet, comme nous procédons au chargement adiabatique du réseau déjà modulé, nous n'avons pas accès ici au signe de la fonction de Bessel. L'ajustement est en très bon accord avec les données expérimentales avec pour seule variable d'ajustement A_m .

Pour valider la description théorique en terme de potentiel moyenné dans le temps, nous devons donc encore démontrer la signature du changement de signe de la fonction de Bessel. Pour cela, nous appliquons le protocole suivant :

- Le condensat de Bose-Einstein est chargé adiabatiquement dans un réseau de profondeur $s = 5$, modulé avec une amplitude $\theta_0 = 55^\circ$. La profondeur effective ressentie par les atomes est alors $s_{\text{eff}} = 1.6$ (voir figure V.5).
- Après le chargement adiabatique, nous modifions subitement l'amplitude de modulation $\theta_0 = 55^\circ \rightarrow \theta_0 = 85^\circ$ (voir figure V.5). Pour cette amplitude de modulation, la profondeur effectivement ressentie par les atomes est la même en valeur absolue mais est négative selon le modèle théorique de potentiel moyenné dans le temps. Les atomes ne se retrouvent alors plus aux minima du potentiel périodique mais aux maxima.
- Nous observons ensuite le comportement du condensat dans ce nouveau potentiel périodique.

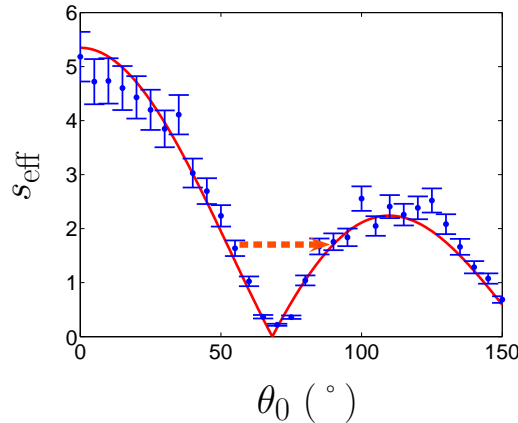


FIGURE V.5 – Protocole de mise en évidence du signe de la profondeur effective s_{eff} en fonction de l'amplitude de modulation θ_0 . La flèche orange représente le changement d'amplitude de modulation mis en œuvre pour déterminer le signe de la profondeur effective.

Ce protocole est résumé sur la figure V.5. La flèche orange correspond au changement d'amplitude de modulation que l'on effectue après le chargement adiabatique. Les figures V.6.a et V.6.b permettent de comparer l'évolution de la figure d'interférence en fonction du temps de maintien dans le cas où nous ne faisons pas ce changement d'amplitude de modulation (a) et dans le cas où nous le faisons (b). Dans le premier cas, le chargement étant adiabatique, les atomes sont à l'équilibre, piégés aux minima du potentiel périodique (figure V.6.a). Par contre, lorsque nous inversons le signe de la profondeur effective (figure V.6.b), nous voyons apparaître la signature dans l'espace des impulsions d'une oscillation

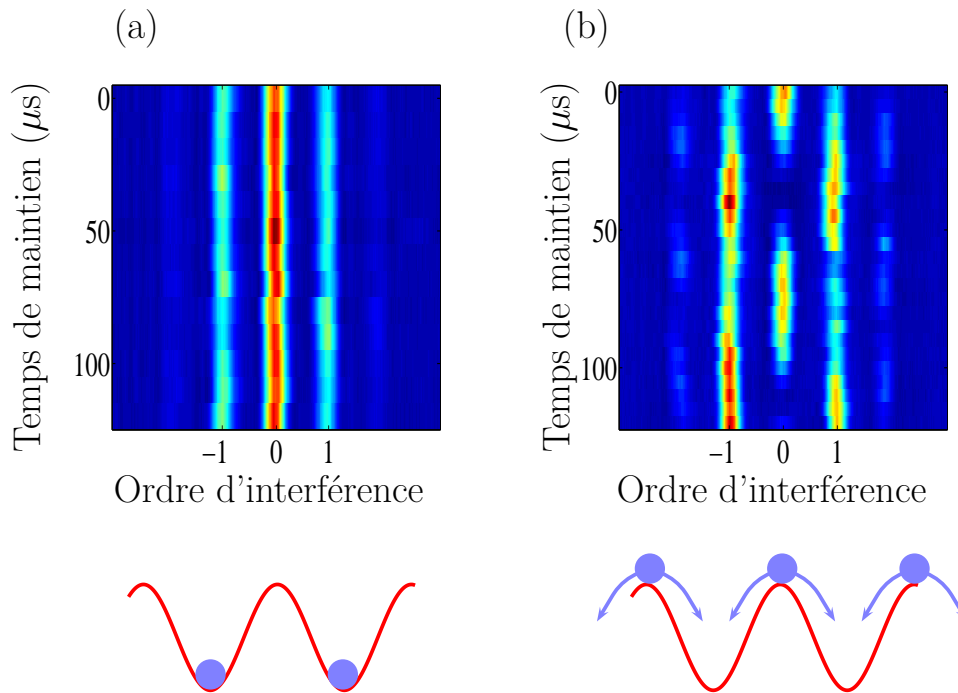


FIGURE V.6 – (a) : figures d'interférence obtenues après chargement et maintien dans le réseau modulé avec une amplitude $\theta_0 = 55^\circ$. (b) : figures d'interférence obtenues suite au chargement dans le réseau modulé avec une amplitude $\theta_0 = 55^\circ$ puis à la modification soudaine $\theta_0 = 55^\circ \rightarrow \theta_0 = 85^\circ$. Le temps de maintien $t = 0$ correspond à l'instant où l'amplitude de modulation est modifiée.

quasi-symétrique de la chaîne de condensats. En effet, nous mettons le système hors équilibre de telle sorte que les atomes se retrouvent aux maxima du potentiel périodique et la chaîne de condensats commence alors à osciller. Nous avons ainsi mis en évidence le signe de la profondeur effective ressentie par les atomes lors de la modulation de phase rapide du potentiel périodique.

L'ensemble de nos observations expérimentales est donc en accord avec le fait que, à haute fréquence de modulation de phase, la profondeur du potentiel moyen ressenti par les atomes est $s_{\text{eff}} = s\mathcal{J}_0(2\theta_0)$.

V.2 Modulation basse fréquence : renormalisation du taux tunnel

Étudions à présent la réponse du condensat de Bose-Einstein à une modulation de phase du réseau à basse fréquence. Rappelons que la forme du potentiel que nous créons est la suivante :

$$V(x, t) = -sE_L \cos^2 \left(\frac{\pi x}{d} + \theta_0 \sin(\omega_m t) \right). \quad (\text{V.7})$$

Lorsque $\omega_m < (\omega_r, \omega_0)$, La réponse du système est très différente du cas présenté dans la section précédente. En effet, cette fois c'est le taux tunnel J qui est

renormalisé [141] :

$$J_{\text{eff}} = J \times \mathcal{J}_0(K_0), \quad (\text{V.8})$$

avec J le taux tunnel en l'absence de modulation de phase, $\mathcal{J}_0(x)$ la fonction de Bessel d'ordre 0 et $K_0 = \theta_0 \hbar \omega_m / E_L$ (où K_0 a été ici adaptée à nos notations par rapport à [141]). Cette relation a été démontrée expérimentalement par la mesure de la vitesse d'étalement de la fonction d'onde du condensat dans le réseau modulé [140]. La fonction de Bessel $\mathcal{J}_0(K_0)$ est négative pour $2.4 < K_0 < 5.2$. Dans cet intervalle, le taux tunnel effectif J_{eff} est lui aussi négatif. Cette situation n'est pas accessible via un potentiel statique et entraîne une modification drastique de la structure de bande associée au potentiel périodique. En effet, la relation de dispersion de la bande d'énergie fondamentale est liée au taux tunnel J_{eff} par (voir chapitre II) :

$$E_0(k) = -2J_{\text{eff}} \cos(kd). \quad (\text{V.9})$$

Un taux tunnel négatif entraîne donc l'inversion de la courbure de la bande fondamentale dans la première zone de Brillouin tel que représenté qualitativement sur la figure V.7.a. Dans l'espace réel, cela se traduit par l'impression d'une phase alternée d'un puits de potentiel à l'autre (d'où le nom de staggered state, état en quinconce). Cette inversion de courbure a une influence sur la figure d'interférence issue de l'expansion de la chaîne de condensats depuis le réseau.

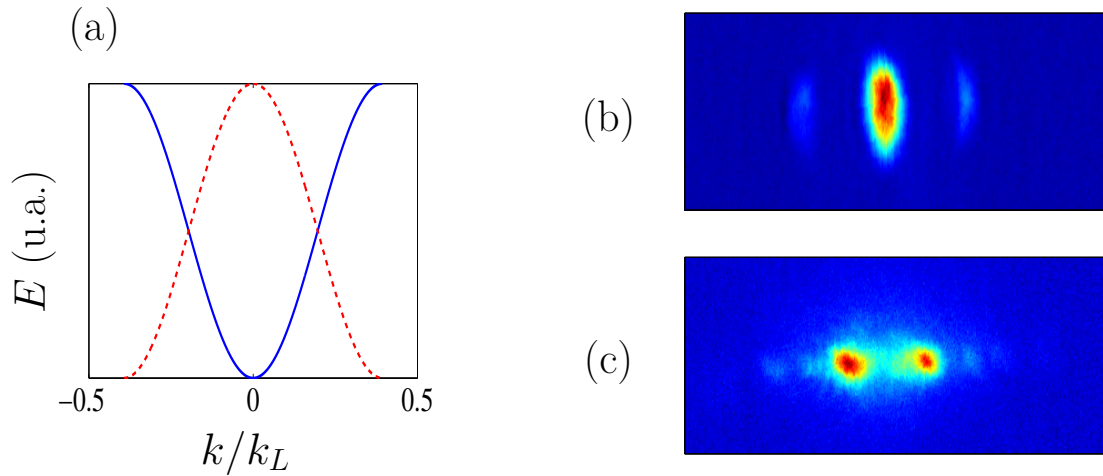


FIGURE V.7 – (a) : Schéma qualitatif de l'influence d'un taux tunnel négatif sur la forme de la bande fondamentale $E_0(k)$. En bleu, la forme de la bande fondamentale pour un taux tunnel positif. En rouge pointillé, la forme de la bande fondamentale associée à un taux tunnel négatif. (b) : Figure d'interférence obtenue après 1 ms de modulation de phase avec $K_0 = 3.27$. (c) : Figure d'interférence obtenue après 6 ms de modulation de phase avec $K_0 = 3.27$.

Les deux figures V.7.b et V.7.c correspondent à la figure d'interférence obtenue après expansion de la chaîne de condensats depuis le réseau modulé en phase avec une pulsation $\omega_m = 2\pi \times 1.5$ kHz et une amplitude $\theta_0 = 160^\circ$. Cela correspond à $K_0 = 3.27$. La différence entre ces deux images est qu'elles correspondent respectivement à un maintien de la modulation de 1 ms (b) et 6 ms (c). Dans les

deux cas, la fonction de Bessel qui entraîne la renormalisation du taux tunnel est négative, ce qui correspond donc à un taux tunnel effectif J_{eff} lui aussi négatif.

La figure d'interférence V.7.b est centrée sur le pseudo moment $k = 0$, correspondant au minimum de la bande d'énergie associée à un taux tunnel positif, *bien que le taux tunnel effectif soit négatif* du fait de la modulation de phase.

En revanche, après 6 ms de modulation, la figure d'interférence est modifiée. Nous voyons sur la figure V.7.c que deux pics de densité apparaissent à $k = \pm 1/2$. C'est l'image d'un staggered state dans l'espace des impulsions. En effet, les pseudo-moments $k = \pm 1/2$ correspondent aux minima de la bande d'énergie associée à un taux tunnel négatif (voir figure V.7.a).

Cela montre que la formation du nouvel état d'équilibre (le staggered state) n'est pas instantané. Cela nous a conduit à nous intéresser à la dynamique de formation de cet état.

Les staggered states ont été observés et étudiés expérimentalement pour la première fois par l'équipe de S. Chu [139] en 2005. L'équipe de E. Arimondo [127] s'est également intéressé à ces états et a notamment pu démontrer en 2009 la réalisation d'une transition superfluide/isolant de Mott induite par la modulation de phase. Enfin, plus récemment, l'équipe de K. Sengstock [142] a procédé à une étude systématique des processus d'absorption de photons multiple entraînant une excitation inter-bande dans ce système. Ces études ont permis une bonne compréhension des staggered states. Néanmoins, la dynamique de formation de ces états n'a, à notre connaissance, pas été étudiée. C'est donc dans cette optique que nous avons entrepris ce travail.

Nous présentons donc dans cette section les résultats préliminaires que nous avons obtenus. Nous verrons dans un premier temps que nous avons accès à la dynamique de formation des staggered states. Nous montrerons ensuite que la dynamique de retour à l'équilibre depuis un staggered state vers un état 'normal' dans un réseau non modulé est différente de la dynamique de mise en place du staggered state.

V.2.a Formation des staggered states

Afin d'étudier la formation des staggered states, nous appliquons le protocole représenté figure V.8.

Le condensat est chargé adiabatiquement dans un réseau statique de profondeur normalisée $s = 1.6$. Après le chargement adiabatique, nous allumons la modulation de phase brusquement (nous avons vérifié expérimentalement que le fait d'augmenter progressivement la modulation de phase ne changeait rien). Comme nous souhaitons observer l'apparition des staggered states, nous choisissons les paramètres de modulation de sorte à simuler un taux tunnel négatif. Nous avons pour cela : $\omega_m = 1.5$ kHz et $\theta_0 = 160^\circ$, ce qui entraîne $K_0 = 3.27$. Nous sommes bien dans la zone où la fonction de Bessel qui renormalise le taux tunnel est négative. Nous maintenons ensuite la modulation de phase pendant un temps variable et observons l'évolution de la figure d'interférence après temps de vol.

Les résultats sont présentés figure V.9. Sur cette figure, nous voyons à gauche l'évolution du profil d'interférence en fonction du temps de maintien de la mo-

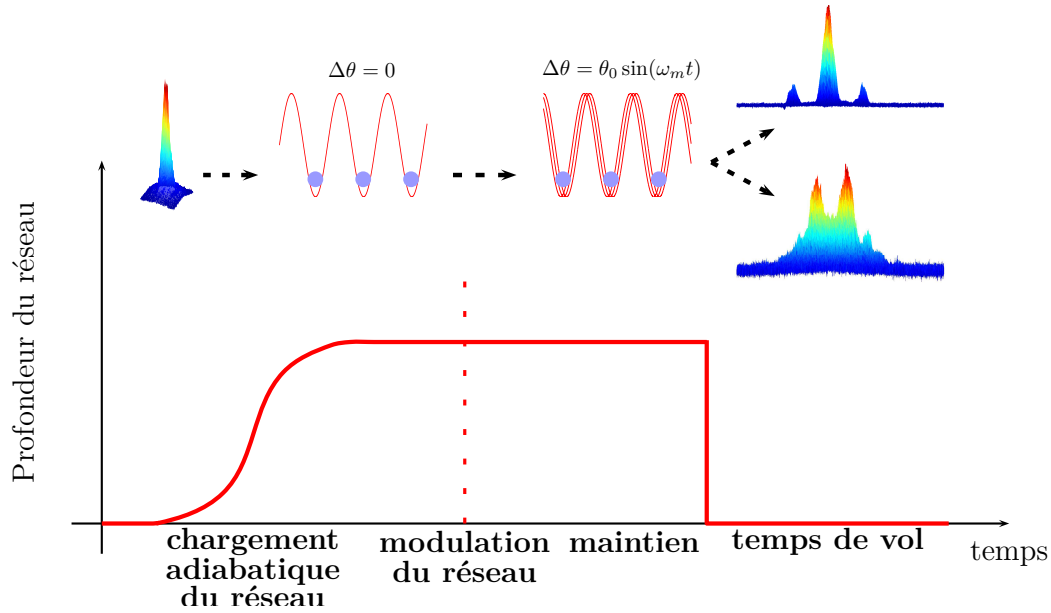


FIGURE V.8 – Protocole d'étude de la formation des staggered states. Un condensat de Bose-Einstein est chargé adiabatiquement dans un réseau optique non modulé de profondeur $s = 1.6$. La modulation de phase est allumée soudainement avec $\omega_m = 1.5$ kHz et $\theta_0 = 160^\circ$ (ce qui donne $K_0 = 3.27$).

dulation de phase et à droite l'évolution de la quantité R que nous avons défini comme étant le rapport entre la population dans les ordres $\pm 1/2$ (correspondants au staggered state) et la population dans l'ordre zéro. Cette quantité reflète donc la formation du staggered state. Plusieurs points sont à discuter :

- La première constatation que nous pouvons faire est que la figure d'interférence reflète l'oscillation de la chaîne de condensats, comme ce que nous avons observé dans le chapitre III. Cette oscillation se fait à la pulsation de modulation $\omega_m = 1.5$ kHz. Il s'agit bien là d'un comportement analogue à celui d'un oscillateur forcé.
- Nous voyons également que, pour un temps de maintien inférieur à 2 ms, la figure d'interférence est similaire à celle que nous obtiendrions avec un taux tunnel positif (bien que le taux tunnel effectif soit négatif). Pour un temps de maintien compris entre 2 ms et 2.5 ms, la figure d'interférence se brouille et nous ne voyons plus qu'un nuage étendu qui oscille, toujours à la fréquence de modulation. Le staggered state apparaît petit à petit et semble stable à partir de 6.5 ms (la quantité R continue pourtant d'osciller ; ceci est un artefact dû à la définition de R et de l'oscillation forcée de la chaîne de condensats. Une analyse plus poussée de ces données permettra de décrire plus finement cette dynamique de formation). Dans le même temps, l'ordre d'interférence 0 diminue progressivement jusqu'à s'annuler lorsque le staggered state est établi.

Nous observons donc sur ces données que l'état centré sur l'impulsion nulle devient instable dans le cas où le taux tunnel J_{eff} est négatif. Tandis que le staggered state, une fois établi, est stable. La transition entre ces deux états est accessible expérimentalement avec notre dispositif.

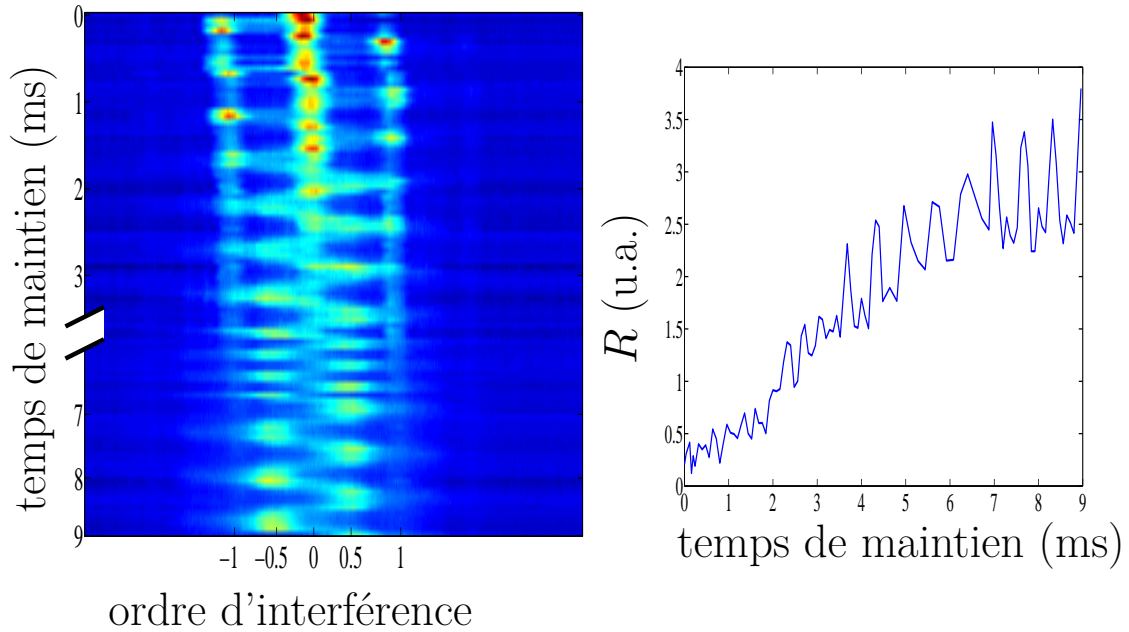


FIGURE V.9 – *Dynamique de formation des staggered states.* À gauche, l'évolution de la figure d'interférence en fonction du temps de maintien dans le réseau modulé en phase. À droite, R est le rapport entre la population dans les ordres d'interférence $\pm 1/2$ et la population dans l'ordre zéro.

Pour mieux comprendre cette formation et pour anticiper les données expérimentales pertinentes à produire, nous souhaitons mieux comprendre le processus de transition entre ces deux états. Cela n'est pas accessible par la résolution de l'équation de Gross Pitaevski que nous utilisons pour nos simulations numériques (voir chapitre III.3) car il est nécessaire d'inclure dans la théorie un terme de dissipation d'énergie. En effet, nous observons sur la figure V.9 que le fond thermique est de plus en plus important après quelques millisecondes de modulation de phase mais semble aussi se stabiliser une fois le staggered state établi. Cela semble donc un élément concomitant à la transition entre les deux états que nous considérons. Ce processus d'établissement d'un nouvel état d'équilibre via une instabilité dynamique est similaire à la formation de vortex au sein d'un condensat de Bose-Einstein en rotation [150]. Nous avons entamé l'étude du chauffage induit par la modulation de phase. Cette étude est actuellement en cours sur notre dispositif expérimental.

V.2.b Retour à l'équilibre dans le réseau non modulé

Comparons à présent la formation du staggered state dont nous avons parlé dans la section précédente au retour à l'équilibre depuis ce même staggered state une fois la modulation de phase coupée. C'est ce que nous réalisons à l'aide du protocole expérimental représenté figure V.10. Comme précédemment, le condensat est chargé adiabatiquement dans un réseau non modulé de profondeur $s = 1.6$. La modulation de phase est ensuite allumée soudainement avec $\omega_m = 2\pi \times 1.5$ kHz et $\theta_0 = 160^\circ$. Après 8 ms de modulation, une fois le staggered state établi,

la modulation de phase est coupée. Le condensat est ensuite maintenu dans le réseau non modulé pendant une durée variable avant de procéder à un temps de vol. Nous observons alors l'évolution de la figure d'interférence en fonction du temps de maintien dans le réseau non modulé.

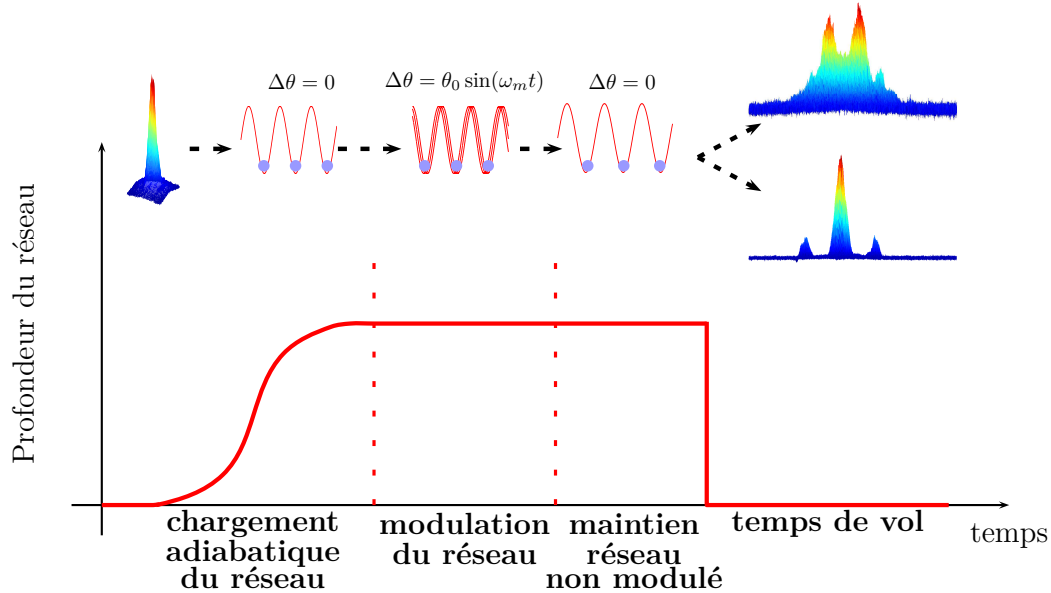


FIGURE V.10 – *Protocole d'étude retour à l'équilibre depuis un staggered state dans un réseau non modulé.*

Le résultat de l'application de ce protocole est représenté figure V.11. Rappelons que l'état de départ (temps de maintien nul), est un staggered state. La modulation de phase est coupée au moment où les paquets d'atomes constituant la chaîne de condensats sont au fond des puits de potentiel, à vitesse maximale. La figure d'interférence présente un seul pic de densité centré sur l'ordre d'interférence $-1/2$. Nous observons également une oscillation beaucoup plus rapide que sur la figure V.9. En effet, le système n'étant plus forcé par la modulation de phase, la période d'oscillation (de l'ordre de $100 \mu s$) est uniquement dictée par le réseau statique. Enfin, pour ces paramètres nous observons un temps caractéristique de retour à l'état d'équilibre associé à un taux tunnel positif de l'ordre de $700 \mu s$. C'est beaucoup plus rapide que la durée de formation du staggered state. Là encore, une étude plus poussée est nécessaire pour interpréter ces résultats.

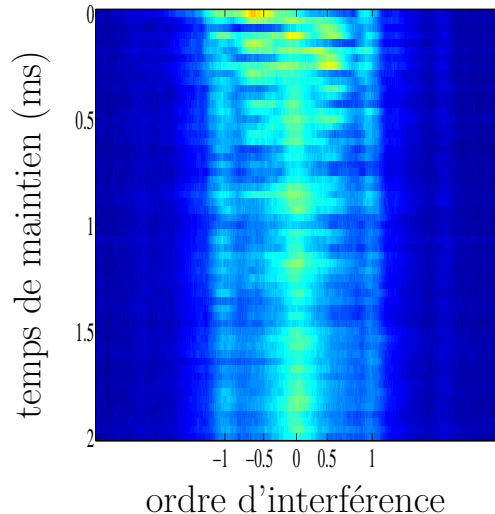


FIGURE V.11 – Résultats expérimentaux concernant le retour à l'équilibre du condensat de Bose-Einstein depuis le staggered state décrit précédemment après arrêt de la modulation de phase. La figure d'interférence est représentée en fonction du temps de maintien dans le réseau non modulé.

V.3 Conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre que la phase relative $\Delta\theta$ entre les deux faisceaux laser qui créent le potentiel périodique est un outil flexible. Nous avons utilisé cet outil pour étudier le comportement d'un condensat de Bose-Einstein dans un réseau dont la phase est modulée sinusoïdalement. Nous avons notamment montré que cette réponse dépend fortement de la valeur de la fréquence de modulation.

À haute fréquence, la profondeur du réseau est renormalisée par un effet de moyennage temporel. Il est même possible de supprimer totalement l'influence du réseau. Le condensat ressent alors un potentiel plat. Nous pouvons, avec cet outil qu'est la phase relative, aller plus loin dans l'étude de ce régime et considérer par exemple une modulation en dent de scie. Dans ce cas, le potentiel moyen ressenti par les atomes devrait, là aussi, être un potentiel périodique de profondeur renormalisée, mais dont la phase est également modifiée, ce qui entraîne un déplacement spatial des puits du réseau.

La modulation à basse fréquence est étudiée par plusieurs équipes et suscite un enthousiasme certain du fait de la possibilité de simuler une transition superfluide/isolant de Mott et d'atteindre des situations inédites pour lesquelles le taux tunnel est nul ou même négatif. Nous avons montré que l'établissement du nouvel état stable d'un réseau ayant un taux tunnel négatif entre deux puits adjacents présente une dynamique intéressante et non triviale du fait de la nécessité de prendre en compte le chauffage induit par la modulation de phase. L'étude de cette dynamique est accessible grâce à notre dispositif. Une collaboration est en cours avec Peter Schlagheck de l'Université de Liège. Nous observons sur la figure V.12 les premières données numériques issues de cette collaboration.

Cette figure représente la densité en impulsion du condensat avant le début

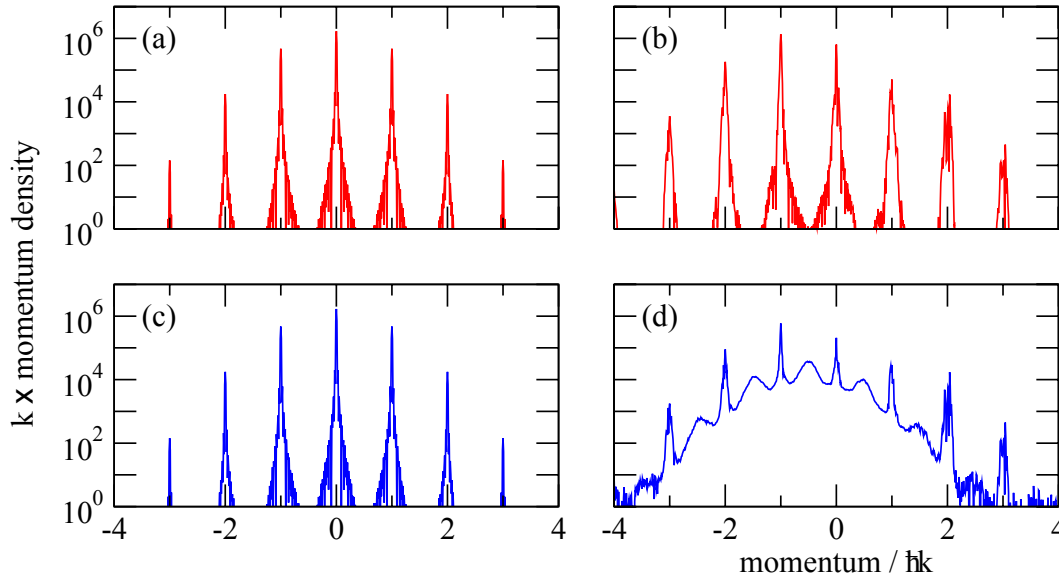


FIGURE V.12 – Premiers résultats numériques issus de notre collaboration avec Peter Schlagheck de l’Université de Liège. Les figures représentent la densité en impulsion dans quatre conditions différentes : (a) avant le début de la modulation de phase, par résolution de l’équation de Gross-Pitaevskii. (b) après 10 périodes de modulation, par résolution de Gross-Pitaevskii. (c) : avant le début de la modulation de phase, par la méthode de Wigner tronqué. (d) après 10 périodes de modulation, par la méthode de Wigner tronqué.

de la modulation (figures V.12.a et V.12.c) et après 10 périodes de modulation de phase du réseau (figures V.12.b et V.12.d). Les paramètres utilisés sont similaires à ceux que nous utilisons dans nos expériences. Les courbes en rouge (figures V.12.a et V.12.b) sont obtenues grâce à la résolution de l’équation de Gross-Pitaevskii, qui ne rend pas compte de la présence de chauffage. La densité en impulsion est alors inchangée au cours de la modulation et nous ne voyons pas apparaître les staggered states. Les courbes en bleu (figures V.12.c et V.12.d) sont calculées à partir de la méthode de Wigner tronqué [151, 152] qui consiste à résoudre l’équation de Gross-Pitaevskii en ajoutant un terme aléatoire à l’état initial, rendant compte d’un bruit initial. De façon analogue à la méthode de Monte-Carlo, il faut bien choisir la distribution de probabilité pour ce bruit initial aléatoire et reproduire la simulation un nombre suffisant de fois (les courbes bleu sont obtenues avec 1000 réalisations). Nous voyons sur ces courbes qu’après 10 périodes de modulation, des pics émergent au centre des pics initiaux, ce qui est analogue à un staggered state pour lequel des pics de densité sont visibles aux ordres d’interférence $\pm 1/2$. Nous voyons également que ces pics sont élargis ce qui traduit l’existence de chauffage. Ces données sont très prometteuses et notre collaboration avec Peter Schlagheck nous permettra notamment de définir les paramètres que nous devons explorer expérimentalement et numériquement.

Évidemment, la transition entre les deux régimes de fréquence de modulation doit être également approfondie. Il s’agit là aussi d’une affaire à suivre ...

Conclusion générale

‘Grâce à une lumière bien choisie, on place une assemblée d’atomes dans un état peu conventionnel et éloigné de notre intuition habituelle, tout en continuant à l’observer à l’œil nu et la manipuler à volonté. C’est une des rares situations où on a un accès direct, visuel, aux lois fondamentales de la Nature dictées par la mécanique quantique.’

Jean Dalibard, Normal Sup’Info, mai 2009

Ce manuscrit présente le travail réalisé pendant les trois années de thèse que j’ai effectué au sein de l’équipe Atomes Froids du LCAR. Le fil directeur qui a guidé les choix expérimentaux que nous avons pris est l’étude du transport classique et quantique dans un réseau optique modulé en amplitude : le double puits dynamique. Les paramètres du potentiel dépendant du temps considéré permettent de façonner l’espace des phases, et notamment de se placer dans un espace des phases mixte pour lequel des îlots de stabilité sont séparés par une mer chaotique à la limite semi-classique.

Nous avons commencé par présenter le dispositif expérimental produisant des condensats de Bose-Einstein de rubidium 87 dans un piège hybride. Ce dispositif a été entièrement construit durant les deux premières années de ma thèse. Nous avons notamment détaillé le piège magnéto-optique 3D qui nous permet de charger un piège magnétique dans lequel nous procédons à une étape de refroidissement par évaporation micro-onde. Les atomes sont ensuite transférés dans un piège hybride constitué d’un gradient de champ magnétique compensant presque la gravité et d’un piège dipolaire croisé. Nous poursuivons le refroidissement par évaporation dans ce piège et obtenons *in fine* des condensats de Bose-Einstein quasi purs contenant typiquement 2×10^5 atomes.

Nous avons ensuite expliqué la mise en place d’un réseau optique sur le dispositif expérimental et avons donné quelques éléments théoriques permettant d’étudier le comportement d’un condensat de Bose-Einstein piégé dans un du potentiel périodique. Nous avons porté une attention toute particulière à ce que tous les outils expérimentaux nécessaires à la réalisation de l’expérience du double puits dynamique soient opérationnels. Nous avons notamment montré que le réseau optique que nous avons mis en place peut être contrôlé dynamiquement via la puissance et la phase relative des deux faisceaux laser qui interfèrent pour créer

le potentiel périodique.

La suite de mon travail s'est essentiellement concentrée sur l'exploitation de la phase relative $\Delta\theta$. Celle-ci nous permet d'étudier la micro-oscillation d'une chaîne de condensats de Bose-Einstein suite à un déplacement soudain du réseau. Cette micro-oscillation s'est avérée beaucoup plus riche que ce que la description semi-classique d'une chaîne d'oscillateurs non harmoniques laissait présager. L'étude de la période de la micro-oscillation nous a permis de proposer une nouvelle méthode de calibration de la profondeur du réseau optique. Cette méthode de calibration est robuste aux interactions, à un éventuel potentiel extérieur et à la forme exacte du potentiel et est en très bon accord avec la méthode de diffraction de Kapitza-Dirac qui est usuellement utilisée dans le domaine des atomes froids.

Le micro-mouvement des atomes nous a permis de montrer qu'au point de rebroussement de leur oscillation, les atomes peuvent traverser la barrière de potentiel qui les sépare du puits adjacent par effet tunnel. L'observation de la dynamique d'oscillation après temps de vol nous a permis de faire une mesure directe du temps de traversée tunnel [100]. Nous avons également montré que les points de rebroussement agissent comme des lames séparatrices. La succession de deux lames séparatrices crée une chaîne d'interféromètres de Mach-Zehnder micro-métriques couplés. La présence d'effet tunnel durant la micro-oscillation nous a également permis de valider le protocole de microscope par rotation dans l'espace des phases. Ce protocole nous permettra d'analyser le mouvement des atomes lors de l'expérience du double puits dynamique. En effet, cette nouvelle méthode nous permettra d'avoir accès à la distribution en position *in situ* à une échelle de l'ordre de la centaine de nanomètres.

Enfin, nous nous sommes intéressés à la dynamique d'un condensat de Bose-Einstein dans un réseau modulé en phase. Le régime de modulation haute fréquence nous a permis de montrer que la profondeur du réseau est renormalisée par la modulation de phase. Le régime basse fréquence met en jeu une instabilité dynamique dont émerge un nouvel état d'équilibre : le staggered state. Cet état correspond à la présence d'une phase alternée d'un puits de potentiel à l'autre. Nous avons démontré que notre dispositif rend possible l'étude de la dynamique de formation de cet état ainsi que l'étude de retour à l'équilibre dans un réseau non modulé.

Actuellement, l'étude de la dynamique de formation des staggered states est au cœur du travail de notre équipe. La collaboration avec Peter Schlagheck de l'Université de Liège nous a permis de mieux cerner les données expérimentales qui seront pertinentes pour cette étude qui s'avère riche et intéressante.

Le cahier des charges que nous nous sommes fixé au début de cette thèse a été respecté. Nous contrôlons complètement la phase relative entre les deux faisceaux laser créant le potentiel périodique. La modulation d'amplitude est le prochain point que notre équipe perfectionnera. Il s'agit d'un outils qui a déjà été utilisé dans notre équipe, avant ma thèse [62, 153]. Il faudra donc adapter l'expertise que notre équipe a acquis sur ce sujet au cahier des charges de l'expérience du double puits dynamique. Le travail théorique qui a été réalisé sur la manipulation dans l'espace des phases d'un nuage en interaction [57] sera également un atout

important pour l'étude de l'effet tunnel assisté par le chaos. Le développement de tous ces outils, en vue de la réalisation de l'expérience du double puits dynamique, sera poursuivi dans la thèse d'Éric Michon.

ANNEXE A

Préparation des faisceaux résonants

Dans cette annexe nous présentons les montages optiques mis en place pour préparer les faisceaux utilisés pour le PMO 2D, le PMO 3D et l'imagerie. Une description détaillée de ces montages est donnée dans [58]

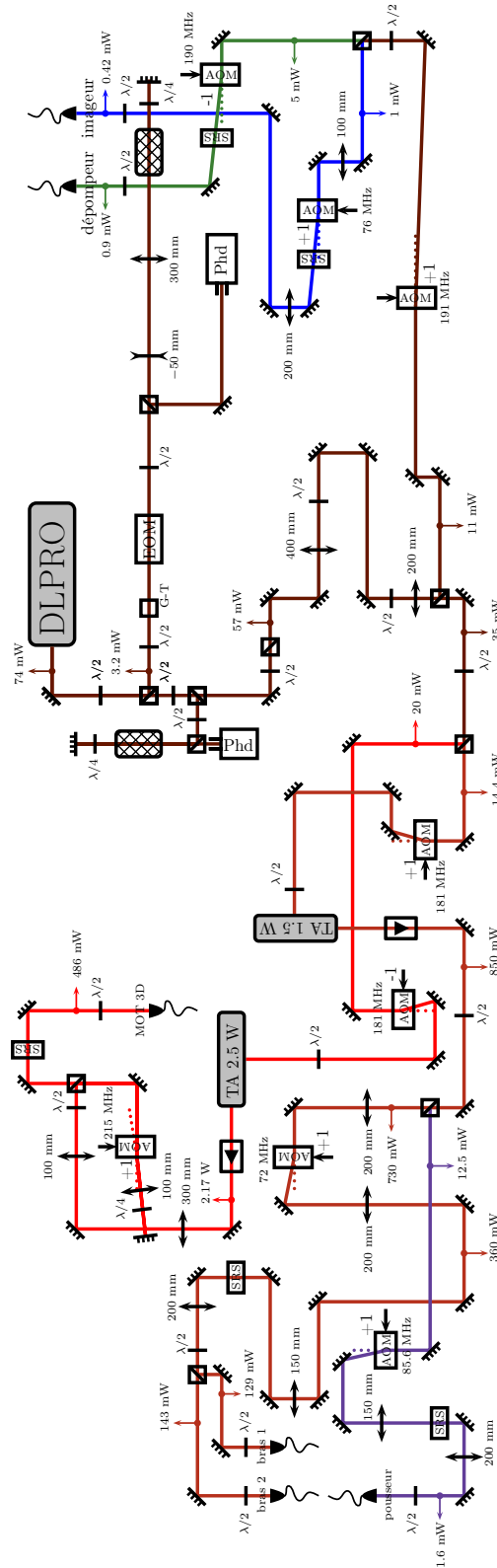


FIGURE A.1 – *Table optique de la diode Toptica asservie sur la transition $F = 2 \rightarrow F' = 2$. Les différentes couleurs représentent l'utilisation de chaque branche dérivée du faisceau principal (marron) : refroidisseur du PMO 3D (rouge), refroidisseur du PMO 2D (marron clair), pousseur (violet), imageur (bleu) et dépompeur (vert). Actuellement, le dépompeur n'est plus utilisé.*

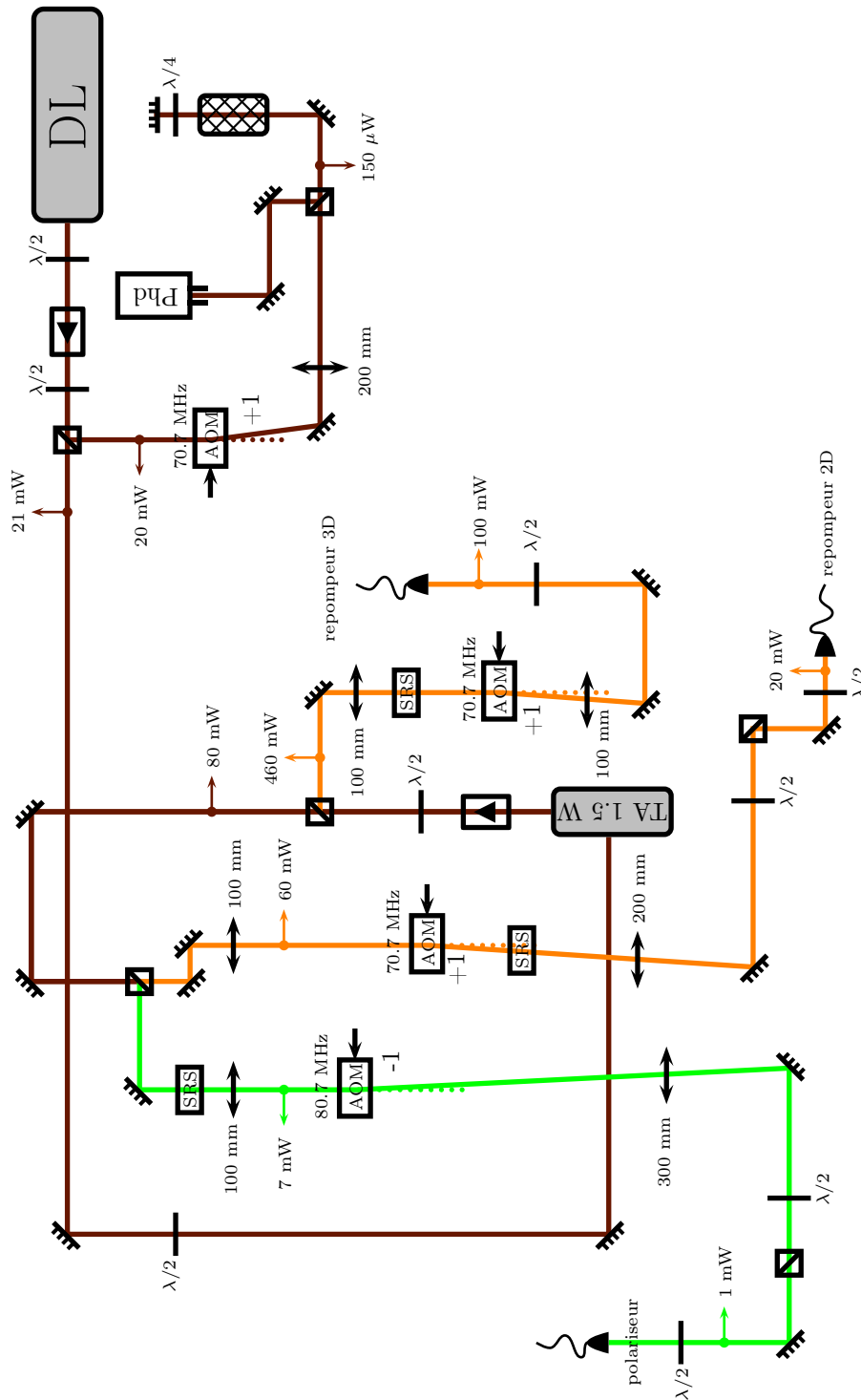


FIGURE A.2 – Table optique de la diode artisanale asservie à -70.7 MHz de la transition $F = 1 \rightarrow F' = 2$. Les différentes couleurs représentent l'utilisation de chaque branches dérivées du faisceau principal (marron) : repompeur PMO 3D et 2D (orange) et polariseur (vert). Le polariseur n'est actuellement plus utilisé.

ANNEXE B

Programmes de traitement de données

Je détaille ici le principe de des programmes de traitement de donnée. Les logiciels que nous utilisons sont *MATLAB R2009a* et *Wolfram Mathematica 9*. Je ne donne ici que le principe de fonctionnement sous la forme de pseudo code, mais les programmes complets sont disponibles à l'adresse :

<http://www.quantumengineering-tlse.org>.

J'utilise un code couleur pour que la lecture soit plus simple :

- En **vert** : des commentaires permettant d'apporter certains détails.
- En **bleu** : le nom des fonctions utilisées.
- En **rouge** : les variables d'itération dans les boucles **for**
- Les mots en *italique* sont les variables utilisées dans le programme.

Dans les différents programmes présentés, certaines zones sont délimités par **_ PAUSE _** et **_ REPRISE _**. Cela indique que le programme s'arrête dans l'attente d'une action de l'utilisateur.

B.1 Programme 1 : mise en forme des données et traitement du fond thermique

Le premier programme présenté ici nous permet de mettre en forme les données brutes de l'expérience. Pour cela, nous créons un *film* de l'expérience en créant une image globale contenant chacune des images prises les unes après les autres. Nous étudions majoritairement la physique 1D dans nos expériences, nous avons donc décidé d'intégrer chacune des images selon la direction verticale pour ne garder que la dynamique selon l'axe du réseau optique. Nous obtenons alors l'évolution de la distribution en impulsion au cours de l'expérience, que ce soit en fonction de la durée du pulse du réseau (expérience de diffraction III.1), d'un temps de maintien dans le réseau (expérience d'interférence entre paquets d'ondes cohérents III.2) ou de l'angle de déphasage initial du réseau (étude de l'oscillation de paquets d'atomes en fonction du déphasage III.3). Ce programme est donc commun à toutes expériences et reste très général. Le traitement spécifique à chaque problème physique étudié est ensuite détaillé dans les autres programmes de traitement.

Programme 1 MATLAB. Mise en formes des données et traitement du fond thermique

```
%%                               Définition des paramètres                               %%
```

```
% Définition des paramètres propres à l'expérience traitée :
```

```
imDir : chemin d'accès aux images d'absorption
```

```
imNom : nom des images
```

```
Ntemps : nombre de temps total à traiter
```

```
Dtemps : pas de temps
```

```
% RQ : ce ne sont pas forcément des temps, il peut s'agir de n'importe quel paramètre incrémenté à chaque nouvelle image
```

```
→ Tgrid : vecteur allant de 0 à  $t_{max}$  par pas de Dtemps
```

```
% RQ : si le pas de temps n'est pas constant, il faut créer la base temporelle Tgrid à la main
```

```
Nmoy : nombre d'images par temps
```

```
% Nous faisons une image moyenne sur Nmoy images
```

```
Angle : Angle de rotation de chaque image
```

```
%%                               Création du cadre                               %%
```

```
Appel de la fonction Calc\_OD pour la Ncadre-ème image choisie par l'utilisateur
```

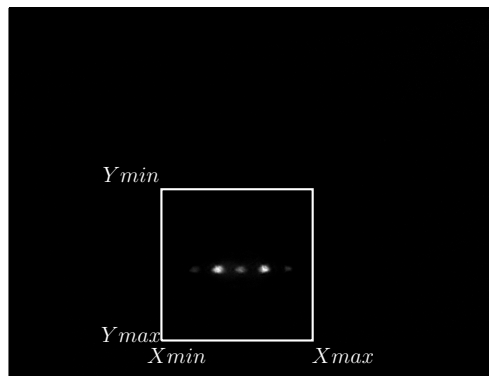
```
% La fonction Calc_OD calcule la densité optique tel qu'expliqué dans la section I.2
```

```
Rotation de l'image de Angle (imrotate)
```

```
Affichage de l'image (image)
```

```
__ PAUSE __
```

```
Définition à la main du cadre de l'image approprié (sur la console MATLAB)
```



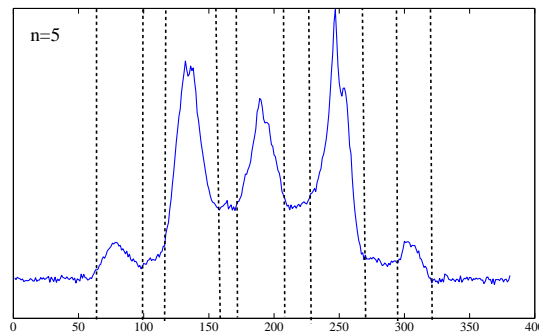
```
__ REPRISE __
```

Intégration verticale de la N_{cadre} -ème image
Affichage de l'image

_ PAUSE _

Définition à la main du $Cadre$ autour de chaque paquet d'atomes (sur la console MATLAB)

$\%Cadre$ servira par exemple à exclure le condensat de l'image pour déterminer le fond thermique



_ REPRISE _

$\%\%$ Boucle sur le temps $\%\%$

```

for  $j$  allant de 0 à  $t_{max}$  do
  for  $i$  allant de 1 à  $N_{moy}$  do
    Appel de l'image  $i$  du temps  $j$  via la fonction Calc_OD → variable
    OptDens
    if  $i=0$  then
      Création de l'image :  $E0 = OptDens$ 
    else
      Moyennage :  $E0 = E0 + OptDens$ 
    end if
  end for
  Rotation de l'image moyenne de Angle (imrotate)
  Recadrage
  Concaténation verticale de l'image moyenne  $j$  avec les images précédentes
  (vertcat) → globalplot

```

$\%\%$ 1D : Intégration $\%\%$

```

Intégration verticale de l'image moyenne  $j$  (sum) et normalisation à 1
% Cette étape ramène l'image à un vecteur et nous permet d'étudier la
physique 1D du problème
Concaténation verticale de l'image intégrée  $j$  avec les images précédentes
(vertcat) → globalplotinteg

```

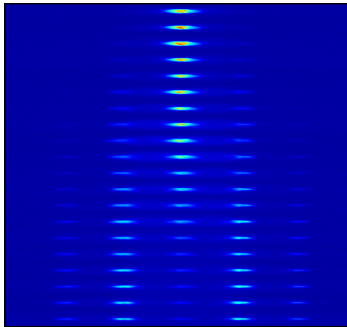
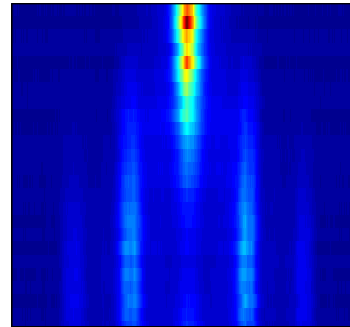
$\%\%$ 2D : Redimensionnement $\%\%$

```

Redimensionnement de l'image moyennée  $j$  en un vecteur selon la méthode
expliquée dans [154] pour être éventuellement traité plus tard par PCA
end for

```

Résultats

Exemple de résultat : *globalplot*Exemple de résultat : *globalplotinteg*

```
%%                               Détermination du fond thermique                               %%
```

```
for j allant de 0 à  $t_{max}$  do
```

```
    Détermination du nombre de pics (findpeaks) pour la ligne j du film intégré globalplotinteg
```

```
    L'initialisation de la largeur de la gaussienne pour l'ajustement du fond thermique est déterminée à partir du nombre de pics
```

```
    if j = 0 then
```

```
        Détermination de l'amplitude du pic central pour initialiser l'amplitude typique du fond thermique
```

```
        % On initialise l'amplitude du fond thermique avec l'amplitude du pic central divisé par 10. On ne le fait que pour la première image car, au cours des expériences, le pic central peut s'annuler
```

```
    end if
```

```
    Détermination du centre de la gaussienne par la position du pic central
```

```
    Définition des données correspondant au fond thermique en retirant tous les points compris dans Cadre
```

```
    Définition des paramètres d'ajustement (fittype)
```

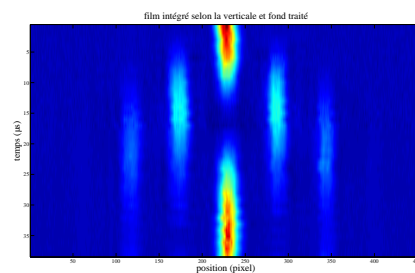
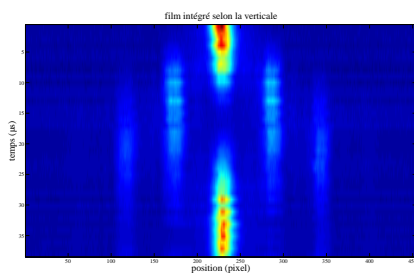
```
    Ajustement du fond thermique par une gaussienne (fit)
```

```
    % L'algorithme d'ajustement utilisé est l'algorithme Levenberg-Marquardt
```

```
    Création des données nettoyées  $\rightarrow DataClean(i) = globalplotinteg(i) - Fond$ 
```

```
end for
```

Affichage et sauvegarde des données



B.2 Programme 2 et 3 : traitement de l'expérience de diffraction

B.2.i Programme 2 : diffraction dans le régime de Raman-Nath

Ce programme est conçu pour traiter les données obtenues dans le cadre de l'expérience de diffraction d'un condensat de Bose-Einstein sur un réseau optique dans l'approximation Raman-Nath. Le protocole mis en place pour réaliser cette expérience est présenté dans la section III.1.a. Dans cette approximation, la population dans l'ordre de diffraction n est donnée par l'expression :

$$P_n(t_{pulse}) \propto \left| \mathcal{J}_{|n|}(V_0 t_{pulse}/2\hbar) \right|^2, \quad (\text{B.1})$$

où $\mathcal{J}_n(x)$ est la fonction de Bessel d'ordre n , V_0 la profondeur du potentiel périodique et t_{pulse} le temps d'interaction entre le condensat et le réseau.

Le programme de traitement réalisé permet d'obtenir en sortie les profondeurs calculées à partir de chacun des ordres de diffraction et d'avoir ainsi la profondeur moyenne obtenue ainsi que l'incertitude sur cette profondeur. Nous utilisons pour cela les données déterminées dans le **programme 1** : *Cadre* et *Dataclean*.

Programme 2 MATLAB. Traitement de l'expérience de diffraction dans l'approximation Raman-Nath

```
%%                               Définition des paramètres                               %%
```

Dataclean : données intégrées selon l'axe vertical et dont le fond thermique a été retiré à l'aide du **programme 1**

Cadre et *n* : Cadrage de chaque ordre de diffraction défini dans le **programme 1** et nombre total d'ordres de diffraction

nmax = $(n - 1)/2$: numéro de l'ordre de diffraction maximal visible

% Si $n = 5$, les ordres de diffraction visibles sont les ordres $-2, -1, 0, 1$ et 2 .
On a donc $nmax = 2$

estimU0 : estimation de la profondeur du potentiel périodique pour l'initialisation des fits

for *m* allant de 1 à *n* **do**

integordrenorm : matrice dont la colonne *m* représente l'évolution de la population dans l'ordre *m*. Ce vecteur est renormalisé de sorte que sa valeur maximale soit égale à 1

end for

```
%%                               Traitement des données                               %%
```

for *m* allant de 0 à $n - 1$ **do**

ordre = $m - nmax$: numéro de l'ordre de diffraction considéré

fit de l'ordre de diffraction correspondant par la fonction de Bessel adaptée :

$A\mathcal{J}_{|ordre|}^2(Bx)$

% L'algorithme utilisé pour l'ajustement est l'algorithme Levenberg-Marquardt. Nous avons deux paramètres d'ajustement, *A* et *B*. Le fond est fixé à 0 car il a été traité dans le **programme 1**

Chaque paramètre de l'ajustement ainsi que les intervalles de confiance associés sont enregistrés dans la variable *paramfit*

La profondeur obtenue grâce à l'ordre de diffraction *m* est enregistrée dans la variable *U0*

end for

Affichage des données expérimentales et des ajustements obtenus ainsi que des profondeurs déduites et sauvegarde des données

B.2.ii Programme 3 : Diffraction Kapitza-Dirac

La théorie développée dans la section III.1.b permet de traiter les mêmes données que précédemment sans l'approximation Raman-Nath. Pour cela nous avons 2 étapes :

- **Étape 1** : calcul de l'évolution théorique de la population dans chaque ordre de diffraction pour différentes profondeurs

$$P_n(q, t_{pulse}) = \left| \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \psi(\tilde{x}, t_{pulse}) e^{-2ni\tilde{x}} d\tilde{x} \right|^2,$$

$$\text{avec } \psi(\tilde{x}, t_{pulse}) = e^{-iq \frac{E_L t_{pulse}}{2\hbar}} \sum_{j=0}^{j_{max}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} c_{2j} M(a_{2j}, q, \tilde{x}) e^{-ia_{2j} \frac{E_L t_{pulse}}{4\hbar}},$$
(B.2)

où $M(a, q, x)$ sont les fonctions de Mathieu et q est la profondeur renormalisée du réseau. Un programme Mathematica effectue ce calcul. Ce programme très simple n'est pas automatisé et chaque changement de profondeur et/ou d'ordre de diffraction nécessite de rentrer à la main les nouveaux paramètres. Les données que j'ai produites durant ma thèse (au format .txt) sont les suivantes :

- $q \in [0, 7]$ par pas de 0.2 : $n \in [0, 2]$ et $t \in [0, 70\mu s]$ par pas de $5\mu s$
- $q \in [7, 9]$ par pas de 0.2 : $n \in [0, 3]$ et $t \in [0, 70\mu s]$ par pas de $5\mu s$
- $q \in [9, 15]$ par pas de 0.2 : $n \in [0, 4]$ et $t \in [0, 20\mu s]$ par pas de $1\mu s$

Je ne détaille pas le fonctionnement de ce programme. Notons simplement que les fonctions Mathematica utilisées sont : [MathieuCharacteristicA\[j, q\]](#) pour évaluer le paramètre a_{2j} associé à l'indice j et à la profondeur q et [MathieuC\[a_{2j}, q, x\]](#) pour évaluer la valeur de la fonction de Mathieu symétrique correspondante.

- **Étape 2** : détermination de la profondeur la plus en accord avec nos données expérimentales et donc de la profondeur V_0 associée. Cela est réalisé par le **programme 3** (Matlab). Il utilise notamment les valeurs expérimentales des populations dans chaque ordre de diffraction *integordrenorm* calculées dans le **programme 2**.

Programme 3 MATLAB. Détermination de la profondeur du réseau par diffraction kapitza-dirac

```
%%                               Définition des paramètres                               %%
```

integordrenorm : matrice regroupant l'évolution temporelle de chaque ordre de diffraction déterminée par le **programme 2** (données expérimentales)

% La structure de la matrice *integordrenorm* est la suivante :

ordre	$-n_{max}$...	0	...	$+n_{max}$
$t_{pulse} = 0$	$P_{-n_{max}}(0)$...	$P_0(0)$...	$P_{n_{max}}(0)$
$t_{pulse} = D_{temps}$	$P_{-n_{max}}(D_{temps})$...	$P_0(D_{temps})$...	$P_{n_{max}}(D_{temps})$
.
.
$t_{pulse} = t_{max}$	$P_{-n_{max}}(t_{max})$...	$P_0(t_{max})$...	$P_{n_{max}}(t_{max})$

n et N_{temps} : nombre d'ordres de diffraction total et nombre de temps de maintien déduits de la taille de la matrice *integordrenorm*

$n_{max} = (n - 1)/2$: numéro de l'ordre de diffraction maximal visible

s_{min} et s_{max} : borne de l'intervalle de profondeur que l'on souhaite explorer

N_{sm} : nombre de valeur de s entière différentes

Nsm ne prend pas en compte le pas de 0.2, ce ne sont que les valeurs entières

KapDir : chemin d'accès aux données calculées par le programme Mathematica

```
%% Chargement des données calculées par le programme Mathematica %%
```

```
for j allant de 0 à nmax do
```

```
  for i allant de 1 à Nsm do
```

```
    for l allant de 1 à 6 do
```

```
      il y a 6 valeurs de profondeur par valeur de i : i.0, i.2, i.4, i.5, i.6 et i.8
```

```
      Chargement des données calculées par le programme Mathematica correspondant à la profondeur i.l et à l'ordre de diffraction j (importdata)
```

```
      → création de la matrice datakap
```

```
      Renormalisation de ces données de telle sorte que la valeur maximale soit égale à 1
```

```
      % Comme pour les données integordrenorm
```

```
    end for
```

```
  end for
```

```
end for
```

Sélection des données calculées avec le programme Mathématique et correspondant à un point expérimental → création de *datakapres*

% On sélectionne pour cela uniquement les temps t_{pulse} effectivement utilisés dans l'expérience. La structure de cette matrice est la suivante :

ordre	0	+ n_{max}
profondeur	s_{min}	...	s_{max}	...	s_{min} ... s_{max}
$t_{pulse} = 0$	$P_0^{s_{min}}(0)$...	$P_0^{s_{max}}(0)$...	$P_{n_{max}}^{s_{min}}(0)$... $P_{n_{max}}^{s_{max}}(0)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$t_{pulse} = t_{max}$	$P_0^{s_{min}}(t_{max})$...	$P_0^{s_{max}}(t_{max})$...	$P_{n_{max}}^{s_{min}}(t_{max})$... $P_{n_{max}}^{s_{max}}(t_{max})$

%% Calcul du résidu %%

Pour chaque ordre de diffraction, chaque temps, et chaque profondeur, on calcule le résidu des populations $r = (P^{exp} - P^{théo})^2$
 Pour chaque ordre de diffraction et chaque profondeur, on en déduit le *Mean Squared Error* ou $MSE = \sum_t r$

%% Comparaison des résidus %%

Pour chaque ordre de diffraction, on identifie quelle profondeur donne le MSE minimal ([min](#))

La moyenne des profondeurs obtenues sur l'ensemble des ordres de diffraction est sélectionnée comme la profondeur optimale et la dispersion de résultats fixe l'incertitude sur cette profondeur optimale ([mean](#) et [var](#)).

B.3 Programme 4 : Traitement de l'expérience d'oscillation

Ce programme permet d'extraire l'amplitude d'oscillation x_{max} dans le cadre de l'expérience d'oscillation présentée dans la section III.3. Il permet aussi d'en déduire la vitesse maximale acquise par les atomes au cours de leur mouvement et la profondeur du réseau dans lequel ils oscillent (pour un déphasage initial de 45°). Pour cela, Le **programme 4** réutilise les résultats du **programme 1** suivants : '*imNom_DataIntegClean.txt*', '*imNom_X.txt*', '*imNom_T.txt*'.

Le programme se charge alors d'ajuster chaque image de l'expérience. Les ordres d'interférences sont approximés par des gaussiennes et l'enveloppe est elle-même approximée par 1 ou 2 gaussiennes. En effet, si nous n'utilisons qu'une seule gaussienne, cela ne nous permet pas de traiter les cas où il y a séparation des paquets d'atomes en deux par effet tunnel. De plus, il reste toujours quelques atomes dans les classes de vitesses opposées à celles qui décrivent simplement l'oscillation, ce qui conduit systématiquement à sous-estimer l'amplitude de l'oscillation si nous nous restreignons à 1 gaussienne.

Il faut donc distinguer deux types d'images :

- Les images pour lesquelles les atomes ont une vitesse moyenne nulle. La distribution en vitesses est alors centrée sur l'ordre d'interférence 0 et il ne faut utiliser qu'une seule gaussienne.
- Les images pour lesquelles les atomes ont une vitesse non nulle (qu'il y ait eu séparation par effet tunnel ou non) pour lesquelles nous utilisons 2 gaussiennes : une pour les vitesses négatives et une pour les vitesses positives.

Afin d'avoir un critère simple et efficace pour distinguer les deux cas, nous calculons en amont le barycentre de la distribution de vitesses négatives et le barycentre de la distribution de vitesses positives. Lorsque l'image est centrée, ces deux barycentres sont proches. Tandis que dans le second cas, la différence des deux barycentres est plus grande. La quantité que nous avons retenue est la suivante :

$$varbar = \left(\frac{2(Bar_g - Bar_d)}{Bar_g + Bar_d} \right)^2, \quad (B.3)$$

où g et d désignent respectivement la gauche et la droite de l'image. Ce critère simple permet de trouver une valeur pertinente pour le critère de basculement entre la description à 1 gaussienne et celle à 2 gaussiennes. Le seuil de basculement est choisi manuellement, de façon interactive avec le programme et est guidé par la courbe représentant $varbar$.

Il faut néanmoins noter que cela reste un ajustement avec une dizaine de variables, sur des images parfois relativement bruitées. Il est donc nécessaire d'ajouter un critère de validation. Au final, nous ne retenons que les points pour lesquels l'ajustement a convergé avec un coefficient de détermination R^2 supérieur à 0.9 (R^2 est déterminé lors de l'ajustement par MATLAB).

Programme 4 MATLAB. Traitement de l'expérience d'oscillation d'une chaîne de condensats. Détermination de l'amplitude d'oscillation

%% Définition des paramètres %%

ImNom : nom des images avant le '..._0000i_Back/NoAt/With', où '.' est le temps de maintien des atomes dans le réseau décalé

Le programme charge alors les données, calculées par le **programme 1**, *DataClean*, *Xgrid* et *Tgrid* qui sont respectivement le film de l'expérience intégré verticalement et dont le fond thermique a été retiré, la base spatiale horizontale et la base temporelle. calculés par le **programme 1**

PixelSize : taille réelle d'un pixel

%% Définition du cadre %%

Affichage du film intégré de l'image

_ PAUSE _

Définition à la main de la limite gauche de l'image G , du centre de l'ordre d'interférence 0 M et de la limite droite D (sur la console MATLAB)

% Il faut choisir G et D de façon à ne pas sur-évaluer l'importance du fond. Il faut donc rester proche des ordres d'interférence non nuls

_ REPRISE _

%% Détermination du critère de basculement entre 1 et 2 gaussiennes %%

for i allant de 1 à N_{temps} **do**

$Barg(i)$: barycentre coté gauche de l'image

$Bard(i)$: barycentre coté droit de l'image

$bartot(i)$: barycentre total

$$varbar(i) = \left(\frac{2(Barg(i) - Bard(i))}{Barg(i) + Bard(i)} \right)^2$$

% $varbar$ est ce qui va nous servir de critère de basculement. Si $varbar$ est faible, l'image est centrée sur l'ordre 0 \rightarrow une seule gaussienne sera nécessaire.

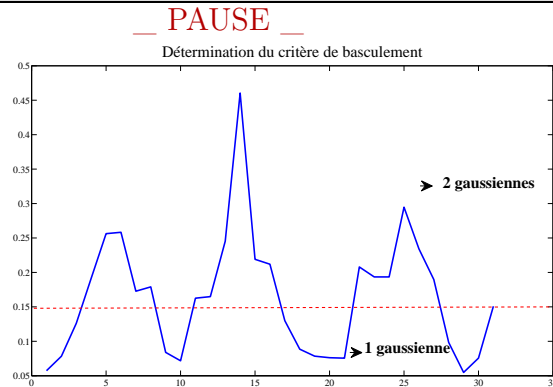
Si $varbar$ est grand, les atomes n'ont pas une vitesse nulle \rightarrow il faudra 2 gaussiennes pour bien rendre compte de la dynamique

end for

Affichage de $varbar$ en fonction du temps

Choix à la main du critère de basculement $Bascul$ (sur la console MATLAB)

% La courbe affichée doit présenter la même périodicité que l'oscillation. Il faut choisir une valeur intermédiaire, comme représenté dans l'exemple ci-dessous



_ REPRISE _

%% Traitement des données %%

for i allant de 1 à N_{temps} **do**

Détermination du nombre d'ordre d'interférence n à ajuster et de leur position (`findpeaks`)

if $varbar(i) > Bascul$ **then**

%% Il faut 2 gaussiennes %%

Construction de la fonction qui servira à ajuster l'image i :

$$\left(A_g e^{-(p-B_g)^2/C_g} + A_d e^{-(p-B_d)^2/C_d} \right) \times \left(e^{-(p-B_1)^2/D} + \dots + e^{-(p-B_n)^2/D} \right)$$

Initialisation des variables d'ajustement

% Les amplitudes sont initialisées empiriquement à 0.01, les centres B_1, \dots, B_n sont initialisés avec les positions des ordres déterminées précédemment. Le centre B_g (resp. B_d) est initialisé avec le barycentre de gauche (resp. de droite). Les largeurs des gaussiennes sont initialisées de façon empirique

Ajustement des données (`fit`)

if l'ajustement a convergé et $R^2 > 0.9$ **then**

Enregistrement des résultats de l'ajustement

else

Le point n'est pas pris en compte

end if

else

%% Il faut 1 gaussienne %%

Construction de la fonction qui servira à ajuster l'image i :

$$A e^{-(p-B)^2/C} \times \left(e^{-(p-B_1)^2/D} + \dots + e^{-(p-B_n)^2/D} \right)$$

Initialisation des variables d'ajustement

Ajustement des données (`fit`)

if l'ajustement a convergé et $R^2 > 0.9$ **then**

Enregistrement des résultats de l'ajustement

else

Le point n'est pas pris en compte

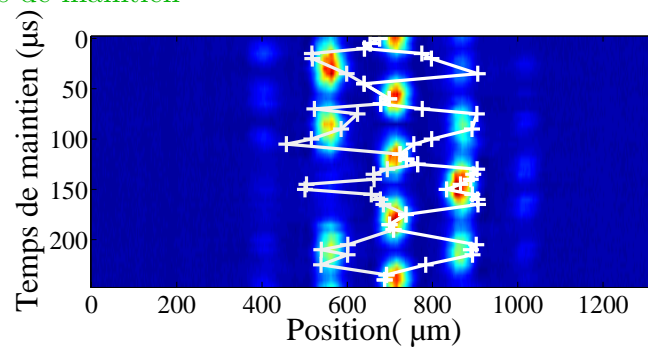
end if

end if

end for

Affichage des résultats des ajustements

% Affichage, sur l'image initiale, du centre des gaussiennes de l'enveloppe en fonction du temps de maintien



%% Ajustement de l'oscillation %%

Ajustement par une sinusoïde (*fit*) des trois variables suivantes :

posd : centre de la gaussienne d'enveloppe de droite

posg : centre de la gaussienne d'enveloppe de gauche

posmax : centre de la gaussienne associée à l'amplitude la plus grande

% Il faut initialiser chacun des ajustements de façon appropriée. Suivant les données, il faudra choisir l'ajustement le plus pertinent (cela dépend de la profondeur, d'une éventuelle séparation des paquets d'atomes en deux par effet tunnel etc ...)

Affichage des résultats et calcul de *vmax*, et *s* déterminés par les ajustements ainsi que les barres d'erreurs associées

Bibliographie

- [1] M. ANDERSON, J. ENSHER, M. MATTHEWS, C. WIEMAN, ET E. CORNELL, “Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor”, *Science* **269**, 198 (1995).
- [2] K. DAVIS, M. MEWES, M. ANDREWS, N. VAN DRUTEN, D. DURFEE, D. KURN, ET W. KETTERLE, “Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms”, *Phys. Rev. Lett* **75**, 3969 (1995).
- [3] J. PERRIN, *Les Atomes* (Champs Flammarion, 1991).
- [4] L. DE BROGLIE, “Recherches sur la théorie des quanta”, (1924).
- [5] C. HUYGHENS, “Traité de la lumière”, (1690).
- [6] C. DAVISSON ET L. H. GERMER, “Diffraction of Electrons by a Crystal of Nickel”, *Phys. Rev.* **30**, 705 (1927).
- [7] G. P. THOMSON, “Experiments on the diffraction of cathode rays”, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A* **117**, 778 (1928).
- [8] O. STERN, “Beugung von molekularstrahlen”, *Zeitschrift für Physik* **61**, (1930).
- [9] E. FERMI ET L. MARSHALL, “Interference Phenomena of Slow Neutrons”, *Phys. Rev.* **71**, 666 (1947).
- [10] O. CARNAL ET J. MLYNEK, “Young’s double-slit experiment with atoms : A simple atom interferometer”, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2689 (1991).
- [11] S. CHU, L. HOLLBERG, J. E. BJORKHOLM, A. CABLE, ET A. ASHKIN, “Three-dimensional viscous confinement and cooling of atoms by resonance radiation pressure”, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 48 (1985).
- [12] E. L. RAAB, M. PRENTISS, A. CABLE, S. CHU, ET D. E. PRITCHARD, “Trapping of neutral sodium atoms with radiation pressure”, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2631 (1987).
- [13] C. MONROE, H. ROBINSON, ET C. WIEMAN, “Observation of the cesium clock transition using laser-cooled atoms in a vapor cell”, *Opt. Lett.* **16**, 50 (1991).
- [14] M. KASEVICH ET S. CHU, “Atomic interferometry using stimulated Raman transitions”, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 181 (1991).
- [15] M. J. SNADDEN, J. M. MCGUIRK, P. BOUYER, K. G. HARITOS, ET M. A. KASEVICH, “Measurement of the Earth’s Gravity Gradient with an

- Atom Interferometer-Based Gravity Gradiometer”, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 971 (1998).
- [16] C. FREIER, M. HAUTH, V. SCHKOLNIK, B. LEYKAUF, M. SCHILLING, H. WZIONTEK, H. SCHERNECK, J. MÜLLER, ET A. PETERS, “Mobile quantum gravity sensor with unpercedented stability”, *arXiv :1512.05660 and Proceedings for the 8th Symposium on Frequency Standers and Metrology* (2015).
- [17] A. EINSTEIN, “Quantentheorie des einatomigen odealen gases”, *Sitzungsberichte der Preubischen Akademie des Wissenschaften* (1925).
- [18] S. BOSE, “Planck’s law and light quantum hypothesis”, *Zeitschrift fü Physik* **26**, 178 (1926).
- [19] F. LONDON, “On the Bose-Einstein Condensation”, *Phys. Rev.* **54**, 947 (1938).
- [20] O. PENROSE ET L. ONSAGER, “Bose-Einstein Condensation and Liquid Helium”, *Phys. Rev.* **104**, 576 (1956).
- [21] C. C. BRADLEY, C. A. SACKETT, J. J. TOLLETT, ET R. G. HULET, “Evidence of Bose-Einstein Condensation in an Atomic Gas with Attractive Interactions”, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1687 (1995).
- [22] D. G. FRIED, T. C. KILLIAN, L. WILLMANN, D. LANDHUIS, S. C. MOSS, D. KLEPPNER, ET T. J. GREYTAK, “Bose-Einstein Condensation of Atomic Hydrogen”, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3811 (1998).
- [23] T. BARTER, *Measuring Gravity with Bose-Einstein Condensate*, Thèse de Doctorat, Australien National University, 2010.
- [24] M. GUSTAVSSON, E. HALLER, M. J. MARK, J. G. DANZL, G. ROJAS-KOPEINIG, ET H.-C. NÄGERL, “Control of Interaction-Induced Dephasing of Bloch Oscillations”, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 080404 (2008).
- [25] T. VAN ZOEST *et al.*, “Bose-Einstein Condensation in Microgravity”, *Science* **328**, 1540 (2010).
- [26] A. SORENSEN, L. M. DUAN, J. I. CIRAC, ET P. ZOLLER, “Many-particle entanglement with Bose-Einstein condensates”, *Nature* **409**, 63 (2001).
- [27] O. MANDEL, M. GREINER, A. WIDERA, T. ROM, T. W. HÄNSCH, ET I. BLOCH, “Controlled collisions for multi-particle entanglement of optically trapped atoms”, *Nature* **425**, 937 (2003).
- [28] M. GREINER, O. MANDEL, T. ESSLINGER, T. W. HÄNSCH, ET I. BLOCH, “Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms”, *Nature* **415**, 39 (2002).
- [29] W. S. BAKR, A. PENG, M. E. TAI, R. MA, J. SOMON, J. I. GILLEN, S. FÖLLING, L. POLLET, ET M. GREINER, “Probing the Superfluid-to-Mott Insulator Transition at the Single-Atom Level”, *Science* **329**, 547 (2010).
- [30] J. F. SHERSON, C. WEITENBERG, M. ENDRES, M. CHENEAU, I. BLOCH, ET S. KUHR, “Single-atom-resolved fluorescence imaging of an atomic Mott insulator”, *Nature* **467**, 68 (2010).

- [31] J. BILLY, V. JOSSE, Z. ZUO, A. BERNARD, B. HAMBRECHT, P. LUGAN, D. CLÉMENT, L. SANCHEZ-PALENCIA, P. BOUYER, ET A. ASPECT, “Direct observation of Anderson localization of matter waves in a controlled disorder”, *Nature* **453**, 891 (2008).
- [32] G. ROATI, C. D’ERRICO, L. FALLANI, M. FATTORI, C. FORT, M. ZACCANTI, G. MODUGNO, M. MODUGNO, ET M. INGUSCIO, “Anderson localization of a non-interacting Bose-Einstein condensate”, *Nature* **453**, 895 (2008).
- [33] S. KONDOV, W. R. MCGEHEE, J. J. ZIRBEL, ET B. DEMARCO, “Three-Dimensional Anderson Localization of Ultracold Matter”, *Science* **334**, 66 (2011).
- [34] O. M. MARAGÒ, S. A. HOPKINS, J. ARLT, E. HODBY, G. HECHENBLAIKNER, ET C. J. FOOT, “Observation of the Scissors Mode and Evidence for Superfluidity of a Trapped Bose-Einstein Condensed Gas”, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2056 (2000).
- [35] K. W. MADISON, F. CHEVY, W. WOHLLEBEN, ET J. DALIBARD, “Vortex Formation in a Stirred Bose-Einstein Condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 806 (2000).
- [36] J. ABO-SHAER, C. RAMAN, J. M. VOGELS, ET W. KETTERLE, “Observation of Vortex Lattices in Bose-Einstein Condensates”, *Science* **292**, 476 (2001).
- [37] E. J. MUELLER, “Artificial electromagnetism for neutral atoms : Escher staircase and Laughlin liquids”, *Phys. Rev. A* **70**, 041603 (2004).
- [38] A. S. SØRENSEN, E. DEMLER, ET M. D. LUKIN, “Fractional Quantum Hall States of Atoms in Optical Lattices”, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 086803 (2005).
- [39] M. W. ZWIERLEIN, A. SCHIROTZEK, C. H. SCHUNCK, ET W. KETTERLE, “Fermionic Superfluidity with Imbalanced Spin Populations”, *Science* **311**, 492 (2006).
- [40] N. NAVON, S. NASCIMBÈNE, F. CHEVY, ET C. SALOMON, “The Equation of State of a Low-Temperature Fermi Gas with Tunable Interactions”, *Science* **328**, 729 (2010).
- [41] M. J. DAVIS ET E. HELLER, “Quantum dynamical tunneling in bound states”, *J. Chem. Phys.* **75**, 246 (1981).
- [42] W. K. HENSINGER *et al.*, “Dynamical tunnelling of ultracold atoms”, *Nature* **412**, 52 (2001).
- [43] W. A. LIN ET L. E. BALLENTINE, “Quantum tunneling and chaos in a driven anharmonic oscillator”, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 2927 (1990).
- [44] B. GEORGEOT ET D. L. SHEPELYANSKY, “Quantum chaos border for quantum computing”, *Phys. Rev. E* **62**, 3504 (2000).
- [45] J. MARTIN, B. GEORGEOT, ET D. L. SHEPELYANSKY, “Chaotic dynamics of a Bose-Einstein condensate coupled to a qubit”, *Phys. Rev. E* **79**, 066205 (2009).

- [46] R. DUBERTRAND, I. GARCÍA-MATA, B. GEORGEOT, O. GIRAUD, G. LEMARIÉ, ET J. MARTIN, “Two Scenarios for Quantum Multifractality Breakdown”, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 234101 (2014).
- [47] R. DUBERTRAND, J. BILLY, D. GUÉRY-ODELIN, B. GEORGEOT, ET G. LEMARIÉ, “Routes towards the experimental observation of the large fluctuations due to chaos assisted tunneling effects with cold atoms”, *ArXiv :1605.00931* (2016).
- [48] D. A. STECK, *Quantum Chaos, Transport and Decoherence in Atom Optics*, Thèse de Doctorat, University of Texas, 2001.
- [49] S. TOMSOVIC ET D. ULLMO, “Chaos-assisted tunneling”, *Phys. Rev. E* **50**, 145 (1994).
- [50] A. MOUCHET ET D. DELANDE, “Signatures of chaotic tunneling”, *Phys. Rev. E* **67**, 046216 (2003).
- [51] C. DEMBOWSKI, H.-D. GRÄF, A. HEINE, R. HOFFERBERT, H. REHFELD, ET A. RICHTER, “First Experimental Evidence for Chaos-Assisted Tunneling in a Microwave Annular Billiard”, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 867 (2000).
- [52] A. BÄCKER, R. KETZMERICK, S. LÖCK, M. ROBNIK, G. VIDMAR, R. HÖHMANN, U. KUHL, ET H.-J. STÖCKMANN, “Dynamical Tunneling in Mushroom Billiards”, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 174103 (2008).
- [53] R. HOFFERBERT, H. ALT, C. DEMBOWSKI, H.-D. GRÄF, H. L. HARNNEY, A. HEINE, H. REHFELD, ET A. RICHTER, “Experimental investigations of chaos-assisted tunneling in a microwave annular billiard”, *Phys. Rev. E* **71**, 046201 (2005).
- [54] A. MOUCHET, C. MINIATURA, R. KAISER, B. GRÉMAUD, ET D. DELANDE, “Chaos-assisted tunneling with cold atoms”, *Phys. Rev. E* **64**, 016221 (2001).
- [55] M. LENZ, S. WÜSTER, C. J. VALE, N. R. HECKENBERG, H. RUBINSZTEIN-DUNLOP, C. A. HOLMES, G. J. MILBURN, ET M. J. DAVIS, “Dynamical tunneling with ultracold atoms in magnetic microtraps”, *Phys. Rev. A* **88**, 013635 (2013).
- [56] D. STECK, W. H. OSKAY, ET M. G. RAIZEN, “Observation of Chaos-Assisted Tunneling Between Islands of Stability”, *Science* **293**, 274 (2001).
- [57] G. CONDON, A. FORTUN, J. BILLY, ET D. GUÉRY-ODELIN, “Phase-space manipulations of many-body wave functions”, *Phys. Rev. A* **90**, 063616 (2014).
- [58] G. CONDON, *Bose-Einstein condensation : from finite size periodic potentials to phase space manipulations*, Thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier, 2015.
- [59] A. COUVERT, *Production et étude de lasers à atomes guidés, et de leur interaction avec des défauts contrôlés*, Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, 2009.

- [60] C. FABRE, *Miroirs de Bragg pour ondes de matière et apport de la supersymétrie aux potentiels exponentiels*, Thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier-Toulouse III, 2012.
- [61] C. M. FABRE, P. CHEINEY, G. L. GATTOBIGIO, F. VERMERSCH, S. FAURE, R. MATHEVET, T. LAHAYE, ET D. GUÉRY-ODELIN, “Realization of a Distributed Bragg Reflector for Propagating Guided Matter Waves”, *Phys. Rev. Lett.* **107**, (2011).
- [62] P. CHEINEY, C. FABRE, F. VERMERSCH, G. GATTOBIGIO, R. MATHEVET, T. LAHAYE, ET D. GUÉRY-ODELIN, “Matter-wave scattering on an amplitude-modulated optical lattice”, *Phys. Rev. A* **87**, (2013).
- [63] P. CHEINEY, F. DAMON, G. CONDON, B. GEORGEOT, ET D. GUÉRY-ODELIN, “Realization of tunnel barriers for matter waves using spatial gaps”, *EPL* **103**, 50006 (2013).
- [64] J. F. BARRY, D. J. MCCARRON, E. B. NORRGARD, M. H. STEINECKER, ET D. DEMILLE, “Magneto-optical trapping of a diatomic molecule”, *Nature* **512**, 286 (2014).
- [65] D. A. STECK, *Rubidium 87 D line data* (Oregon Center for Optics and Department of Physics, University of Oregon, 2001).
- [66] W. KETTERLE, K. B. DAVIS, M. A. JOFFE, A. MARTIN, ET D. E. PRITCHARD, “High densities of cold atoms in a dark spontaneous-force optical trap”, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2253 (1993).
- [67] J. DALIBARD ET C. COHEN-TANNOUDJI, “Laser cooling below the Doppler limit by polarization gradients : simple theoretical models”, *J. Opt. Soc. Am. B* **6**, 2023 (1989).
- [68] G. C. BJORKLUND, “Frequency-modulation spectroscopy : a new method for measuring weak absorptions and dispersions”, *Optics Letters* **5**, 15 (1980).
- [69] G. REINAUDI, *Manipulation et refroidissement par évaporation forcé d’ensembles atomiques ultra-froids pour la production d’un jet intense dans le régime de dégénérescence quantique : vers l’obtention d’un laser à atomes continu*, Thèse de Doctorat, École Normale Supérieure, 2008.
- [70] C. COHEN-TANNOUDJI ET D. GUÉRY-ODELIN, *Advances in Atomic Physics* (World Scientific, 2011).
- [71] S. GIORGINI, L. P. PITAEVSKII, ET S. STRINGARI, “Condensate fraction and critical temperature of a trapped interacting Bose gas”, *Phys. Rev. A* **54**, R4633 (1996).
- [72] H. F. HESS, “Evaporative cooling of magnetically trapped and compressed spin-polarized hydrogen”, *Phys. Rev. B* **34**, 3476 (1986).
- [73] J.-F. CLÉMENT, *Réalisation d’un condensat de Bose-Einstein dans un piège dipolaire optique à 1565 nm*, Thèse de Doctorat, Université Paris Sud-Paris XI, 2008.
- [74] W. PETRICH, M. H. ANDERSON, J. R. ENSHER, ET E. A. CORNELL, “Stable, tightly confining magnetic trap for evaporative cooling of neutral atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 3352 (1995).

- [75] Y.-J. LIN, A. R. PERRY, R. L. COMPTON, I. B. SPIELMAN, ET J. V. PORTO, “Rapid production of R87b Bose-Einstein condensates in a combined magnetic and optical potential”, *Phys. Rev. A* **79**, 063631 (2009).
- [76] M. D. BARRETT, J. A. SAUER, ET M. S. CHAPMAN, “All-Optical Formation of an Atomic Bose-Einstein Condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 010404 (2001).
- [77] R. DUBESSY, K. MERLOTI, L. LONGCHAMBON, P.-E. POTTIE, T. LIENARD, A. PERRIN, V. LORENT, ET H. PERRIN, “Rubidium-87 Bose-Einstein condensate in an optically plugged quadrupole trap”, *Phys. Rev. A* **85**, 013643 (2012).
- [78] R. DESBUQUOIS, *Thermal and superfluid properties of the two-dimensional Bose gas*, Thèse de Doctorat, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2013.
- [79] R. GRIMM, M. WEIDEMULLER, ET Y. OVCHINNIKOV, “Optical Dipole Traps for Neutral Atoms”, *Adv. In At., Mol., and Opt. Phys.* **42**, 95 (2000).
- [80] N. GEMELKE, X. ZHANG, C.-L. HUNG, ET C. CHIN, “In situ observation of incompressible Mott-insulating domains in ultracold atomic gases”, *Nature* **460**, 995 (2009).
- [81] A. ITAH, H. VEKSLER, O. LAHAV, A. BLUMKIN, C. MORENO, C. GORDON, ET J. STEINHAEUER, “Direct Observation of a Sub-Poissonian Number Distribution of Atoms in an Optical Lattice”, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 113001 (2010).
- [82] B. ZIMMERMANN, T. MÜLLER, J. MEINEKE, T. ESSLINGER, ET H. MORITZ, “High-resolution imaging of ultracold fermions in microscopically tailored optical potentials”, *New Journal of Physics* **13**, 043007 (2011).
- [83] M. KARSKI, L. FÖRSTER, J. M. CHOI, W. ALT, A. WIDERA, ET D. MESCHÉDE, “Nearest-Neighbor Detection of Atoms in a 1D Optical Lattice by Fluorescence Imaging”, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 053001 (2009).
- [84] W. S. BAKR, J. I. GILLEN, A. PENG, S. FÖLLING, ET M. GREINER, “A quantum gas microscope for detecting single atoms in a Hubbard-regime optical lattice”, *Nature* **462**, 74 (2009).
- [85] T. GERICKE, P. WÜRTZ, D. REITZ, T. LANGEN, ET H. OTT, “High-resolution scanning electron microscopy of an ultracold quantum gas”, *Nature Physics* **4**, 949 (2008).
- [86] K. D. NELSON, X. LI, ET D. S. WEISS, “Imaging single atoms in a three dimensional array”, *Nature Physics* **3**, 556 (2007).
- [87] J. DALIBARD, *Réseaux optiques : les principes de base* (Cours du Collège de France, 2012-2013).
- [88] J. DALIBARD, *Réseaux optiques dans le régime des liaisons fortes* (Cours du Collège de France, 2012-2013).
- [89] F. DAMON, *Probing complex structures with matter waves*, Thèse de Doctorat, Université Paul Sabatier, 2015.

- [90] N. W. ASHCROFT ET N. D. MERMIN, *Solid state Physics* (Holt, Rinehart and Winston, 1976).
- [91] O. MORSCH ET M. OBERTHALER, “Dynamics of Bose-Einstein condensates in optical lattices”, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 179 (2006).
- [92] F. BLOCH, “Über die quantenmechanik der elektronen in kristallgittern”, *Zeitschrift für physik* **52**, 555 (1929).
- [93] M. J. STEEL ET W. ZHANG, “Bloch function description of a Bose-Einstein condensate in a finite optical lattice”, *arXiv preprint cond-mat/9810284* (1998).
- [94] S. BURGER, F. S. CATALIOTTI, C. FORT, F. MINARDI, M. INGUSCIO, M. L. CHIOFALO, ET M. P. TOSI, “Superfluid and Dissipative Dynamics of a Bose-Einstein Condensate in a Periodic Optical Potential”, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 4447 (2001).
- [95] M. KRÄMER, L. PITAEVSKII, ET S. STRINGARI, “Macroscopic Dynamics of a Trapped Bose-Einstein Condensate in the Presence of 1D and 2D Optical Lattices”, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 180404 (2002).
- [96] G. H. WANNIER, “The structure of electronic excitation levels in insulating crystals”, *Phys. Rev.* **52**, 191 (1937).
- [97] Y. B. OVCHINNIKOV, J. H. MÜLLER, M. R. DOERY, E. J. D. VRENDENBREGT, K. HELMERSON, S. L. ROLSTON, ET W. D. PHILLIPS, “Diffraction of a released Bose-Einstein condensate by a pulsed standing light wave”, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 284 (1999).
- [98] M. CRISTIANI, O. MORSCH, J. H. MÜLLER, D. CIAMPINI, ET E. ARIMONDO, “Experimental properties of Bose-Einstein condensates in one-dimensional optical lattices : Bloch oscillations, Landau-Zener tunneling, and mean-field effects”, *Phys. Rev. A* **65**, 063612 (2002).
- [99] P. PEDRI, L. PITAEVSKII, S. STRINGARI, C. FORT, S. BURGER, F. S. CATALIOTTI, P. MADDALONI, F. MINARDI, ET M. INGUSCIO, “Expansion of a Coherent Array of Bose-Einstein Condensates”, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 220401 (2001).
- [100] A. FORTUN, C. CABRERA-GUTIÉRREZ, G. CONDON, E. MICHON, J. BILLY, ET D. GUÉRY-ODELIN, “Direct Tunneling Delay Time Measurement in an Optical Lattice”, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 010401 (2016).
- [101] P. L. KAPITZA ET P. A. M. DIRAC, “The reflection of electrons from standing light waves”, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **29**, 297 (1933).
- [102] D. L. FREIMUND ET H. BATELAAN, “Bragg Scattering of Free Electrons Using the Kapitza-Dirac Effect”, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 283602 (2002).
- [103] P. E. MOSKOWITZ, P. L. GOULD, S. R. ATLAS, ET D. E. PRITCHARD, “Diffraction of an Atomic Beam by Standing-Wave Radiation”, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 370 (1983).
- [104] P. L. GOULD, G. A. RUFF, ET D. E. PRITCHARD, “Diffraction of atoms by light : The near-resonant Kapitza-Dirac effect”, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 827 (1986).

- [105] M. HORNE, I. JEX, ET A. ZEILINGER, “Schrödinger wave functions in strong periodic potentials with applications to atom optics”, *Phys. Rev. A* **59**, 2190 (1999).
- [106] N. W. McLACHLAN, *Theory and Application of Mathieu Functions* (Dover, New York, 1964).
- [107] E. MATHIEU, “Mémoire sur le mouvement vibratoire d’une membrane de forme elliptique”, *J. Math. Pures Appl.* **137** (1868).
- [108] S. MÜLLER, *Stability and Collapse Dynamics of Dipolar Bose-Einstein Condensates in One-Dimensional Optical Lattices*, Thèse de Doctorat, Universität Stuttgart, 2012.
- [109] Z. HADZIBABIC, S. STOCK, B. BATTELIER, V. BRETIN, ET J. DALIBARD, “Interference of an Array of Independent Bose-Einstein Condensates”, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 180403 (2004).
- [110] F. DALFOVO, S. GIORGINI, L. P. PITAEVSKII, ET S. STRINGARI, “Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases”, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999).
- [111] X. ANTOINE ET R. DUBOSCQ, “GPELab, a Matlab toolbox to solve Gross-Pitaevskii equations I : Computation of stationary solutions”, *Computer Physics Communications* **185**, 2969 (2014).
- [112] X. ANTOINE ET R. DUBOSCQ, “GPELab, a Matlab toolbox to solve Gross-Pitaevskii equations II : Dynamics and stochastic simulations”, *Computer Physics Communications* **193**, 95 (2015).
- [113] A. D. JACKSON, G. M. KAVOULAKIS, ET C. J. PETHICK, “Solitary waves in clouds of Bose-Einstein condensed atoms”, *Phys. Rev. A* **58**, 2417 (1998).
- [114] *Time in quantum mechanics*, ÉDITÉ PAR J. G. MUGA, R. S. MAYATO, ET I. EGUSQUIZA (Springer, Berlin, 2002).
- [115] L. A. MACCOLL, “Note on the transmission and reflection of wave packets by potential barriers”, *Phys. Rev.* **40**, 621 (1932).
- [116] R. LANDAUER ET T. MARTIN, “Barrier interaction time in tunneling”, *Rev. Mod. Phys.* **66**, 217 (1994).
- [117] M. RAZAVY, *Quantum Theory of Tunneling* (World Scientific, 2003).
- [118] M. BÜTTIKER ET R. LANDAUER, “Traversal time for tunneling”, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1739 (1982).
- [119] E. P. WIGNER, “Lower Limit for the Energy Derivative of the Scattering Phase Shift”, *Phys. Rev.* **98**, 145 (1955).
- [120] T. E. HARTMAN, “Tunneling of a Wave Packet”, *J. Appl. Phys.* **33**, 3427 (1962).
- [121] J. C. GARRISON, M. W. MITCHELL, R. Y. CHIAO, ET E. L. BOLDA, “Superluminal signals : causal loop paradoxes revisited”, *Phys. Lett. A* **245**, 19 (1998).
- [122] L. BRILLOUIN, *Wave propagation and group velocity* (Academic Press, New York, 1960).

- [123] A. M. STEINBERG, P. G. KWIAT, ET R. Y. CHIAO, “Measurement of the single-photon tunneling time”, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 708 (1993).
- [124] P. GUERET, A. BARATOFF, ET E. MARCLAY, “Effect of a transverse magnetic field on the tunnel current through thick and low semiconductor barriers”, *EPL* **3**, 367 (1987).
- [125] A. S. LANDSMAN, M. WEGER, J. MAURER, R. BOGE, A. LUDWIG, S. HEUSER, C. CIRELLE, L. GALLMANN, ET U. KELLER, “Ultrafast resolution of tunneling delay time”, *Optica* **1**, 343 (2014).
- [126] P. R. ECKLE, *Attosecond Angular Streaking*, Thèse de Doctorat, ETH Zurich, 2008.
- [127] H. LIGNIER, C. SIAS, D. CIAMPINI, Y. SINGH, A. ZENESINI, O. MORSCH, ET E. ARIMONDO, “Dynamical Control of Matter-Wave Tunneling in Periodic Potentials”, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 220403 (2007).
- [128] J. STRUCK, C. ÖLSCHLÄGER, M. WEINBERG, P. HAUKE, J. SIMONET, A. ECKARDT, M. LEWENSTEIN, K. SENGSTOCK, ET P. WINDPASSINGER, “Tunable Gauge Potential for Neutral and Spinless Particles in Driven Optical Lattices”, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 225304 (2012).
- [129] N. GOLDMAN ET J. DALIBARD, “Periodically Driven Quantum Systems : Effective Hamiltonians and Engineered Gauge Fields”, *Phys. Rev. X* **4**, 031027 (2014).
- [130] I. BLOCH, J. DALIBARD, ET W. ZWERGER, “Many-body physics with ultracold gases”, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 885 (2008).
- [131] F. MEINERT, M. J. MARK, E. KIRILOV, K. LAUBER, P. WEINMANN, M. GROBNER, A. J. DALEY, ET H.-C. NAGERL, “Observation of many-body dynamics in long-range tunneling after a quantum quench”, *Science* **344**, 1259 (2014).
- [132] I. CARUSOTTO, L. PITAEVSKII, S. STRINGARI, G. MODUGNO, ET M. INGUSCIO, “Sensitive Measurement of Forces at the Micron Scale Using Bloch Oscillations of Ultracold Atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 093202 (2005).
- [133] G. FERRARI, N. POLI, F. SORRENTINO, ET G. M. TINO, “Long-Lived Bloch Oscillations with Bosonic Sr Atoms and Application to Gravity Measurement at the Micrometer Scale”, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 060402 (2006).
- [134] A. DEREVIANKO, B. OBRESHKOV, ET V. A. DZUBA, “Mapping Out Atom-Wall Interaction with Atomic Clocks”, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 133201 (2009).
- [135] D. H. DUNLAP ET V. M. KENKRE, “Dynamic localization of a charged particle moving under the influence of an electric field”, *Phys. Rev. B* **34**, 3625 (1986).
- [136] M. HOLTHAUS, “Collapse of minibands in far-infrared irradiated superlattices”, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 351 (1992).
- [137] A. ECKARDT, C. WEISS, ET M. HOLTHAUS, “Superfluid-Insulator Transition in a Periodically Driven Optical Lattice”, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 260404 (2005).

- [138] C. E. CREFFIELD ET T. S. MONTEIRO, “Tuning the Mott Transition in a Bose-Einstein Condensate by Multiple Photon Absorption”, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 210403 (2006).
- [139] N. GEMELKE, E. SARAJLIC, Y. BIDEL, S. HONG, ET S. CHU, “Parametric Amplification of Matter Waves in Periodically Translated Optical Lattices”, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 170404 (2005).
- [140] O. MORSCH, D. CIAMPINI, ET E. ARIMONDO, “Controlling Atomic Matter Waves by Shaking”, *Europhysics News* **41**, (2010).
- [141] A. ZENESINI, H. LIGNIER, D. CIAMPINI, O. MORSCH, ET E. ARIMONDO, “Coherent Control of Dressed Matter Waves”, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 100403 (2009).
- [142] M. WEINBERG, C. ÖLSCHLÄGER, C. STRÄTER, S. PRELLE, A. ECKARDT, K. SENGSTOCK, ET J. SIMONET, “Multiphoton interband excitations of quantum gases in driven optical lattices”, *Phys. Rev. A* **92**, 043621 (2015).
- [143] E. KIERIG, U. SCHNORRBERGER, A. SCHIETINGER, J. TOMKOVIC, ET M. K. OBERTHALER, “Single-Particle Tunneling in Strongly Driven Double-Well Potentials”, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 190405 (2008).
- [144] D. JAKSCH, C. BRUDER, J. I. CIRAC, C. W. GARDINER, ET P. ZOLLER, “Cold Bosonic Atoms in Optical Lattices”, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3108 (1998).
- [145] M. P. A. FISHER, P. B. WEICHMAN, G. GRINSTEIN, ET D. S. FISHER, “Boson localization and the superfluid-insulator transition”, *Phys. Rev. B* **40**, 546 (1989).
- [146] K. HENDERSON, C. RYU, C. MACCORMICK, ET M. G. BOSHIER, “Experimental demonstration of painting arbitrary and dynamic potentials for Bose-Einstein condensate”, *New Journal of Physics* **11**, 043030 (2009).
- [147] M. GILDEMEISTER, *Trapping ultracold atoms on time-averaged adiabatic potentials*, Thèse de Doctorat, University of Oxford, 2010.
- [148] I. LESANOVSKY ET W. VON KLITZING, “Time-Averaged Adiabatic Potentials : Versatile Matter-Wave Guides and Atom Traps”, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 083001 (2007).
- [149] W. PAUL, “Electromagnetic traps for charged and neutral particles”, *Rev. Mod. Phys.* **62**, 531 (1990).
- [150] F. CHEVY, K. W. MADISON, V. BRETIN, ET J. DALIBARD, “Formation of quantized vortices in a gaseous Bose-Einstein condensate”, *arXiv :cond-mat/0104218 and proceedings of Trapped Particles and Fundamental Physics Workshop (les Houches 2001)* 109 (2002).
- [151] M. J. STEEL, M. K. OLSEN, L. I. PLIMAK, P. D. DRUMMOND, S. M. TAN, M. J. COLLETT, D. F. WALLS, ET R. GRAHAM, “Dynamical quantum noise in trapped Bose-Einstein condensates”, *Phys. Rev. A* **58**, 4824 (1998).
- [152] D. J., T. ENGL, J. D. URBINA, ET P. SCHLAGHECK, “Describing many-body bosonic waveguide scattering with the truncated Wigner method”, *Ann. Phys. (Berlin)* **527**, 629 (2015).

-
- [153] F. DAMON, G. CONDON, P. CHEINEY, A. FORTUN, B. GEORGEOT, J. BILLY, ET D. GUÉRY-ODELIN, “Band-gap structures for matter waves”, *Phys. Rev. A* **92**, 033614 (2015).
- [154] R. DUBESSY, C. DE ROSSI, T. BADR, L. LONGCHAMBON, ET H. PER-RIN, “Imaging the collective excitations of an ultracold gas using statistical correlations”, *New Journal of Physics* **16**, 122001 (2014).